

Marian Mokwa

Przekształcenia rzutowe kwadryk skośnych

Wrocław 2010

Marian Mokwa

Przekształcenia rzutowe kwadryk skośnych

Wrocław 2010

Autor

prof. dr hab. inż. Marian Mokwa

Opiniodawca

dr hab. inż. Jarosław Mirski, prof. nadzw.

Redaktor merytoryczny

dr hab. inż. Krzysztof Pulikowski, prof. UP

Opracowanie redakcyjne

mgr Elżbieta Winiarska-Grabosz

Korekta

dr Ewa Jaworska

Łamanie

Alina Gebel

Projekt okładki

Joanna Skrzypiec-Żuchowska

Monografie XCIV

© Copyright by Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, Wrocław 2010

ISBN 978-83-7717-001-4

WYDAWNICTWO UNIWERSYTETU PRZYRODNICZEGO WE WROCŁAWIU

Redaktor Naczelny – prof. dr hab. Andrzej Kotecki

ul. Sopocka 23, 50-344 Wrocław, tel. 71 328-12-77

e-mail: wyd@up.wroc.pl

Nakład 100 + 16 egz. Ark. wyd. 4,2. Ark. druk. 7,0

Druk i oprawa: F.P.H. „ELMA”

Monografię tę poświęcam mojemu nauczycielowi
Profesorowi Jackowi Fulińskiemu, który zafascynował
mnie pięknem geometrii wykreślnej.

Autor

„Surowe piękno geometrii zasadza się na jej prostocie”

(Czech L. 1995)

SPIS TREŚCI

1. WPROWADZENIE	15
2. NIEKTÓRE WŁASNOŚCI KRZYWYCH STOŻKOWYCH	17
3. KOLINEACYJNE PRZEKSZTAŁCENIE SZEŚCIOBOKU PŁASKIEGO W SZEŚCIOBOK PRZESTRZENNY	33
4. PRZEKSZTAŁCENIA RZUTOWE SZEŚCIOBOKU PRZESTRZENNEGO WYZNACZAJĄCEGO KWADRYKĘ SKOŚNĄ	39
5. TWORZENIE KWADRYK SKOŚNYCH WYZNACZONYCH SZEŚCIOBOKIEM PRZESTRZENNYM	41
5.1. Hiperboloida skośna	41
5.2. Hiperboloida obrotowa	44
5.3. Paraboloida hiperboliczna	46
6. PEWNE SZCZEGÓLNE WŁASNOŚCI KWADRYK SKOŚNYCH W ZASTOSOWANIACH	49
7. PIŚMIENNICTWO	53

Wykaz niektórych symboli

A, B, \dots	– punkty
a, b, \dots	– proste
α, β, \dots	– płaszczyzny
$a \parallel b$	– proste równoległe
$m \perp n$	– proste prostopadłe
\overline{AB}	– odcinek o końcach A i B
$s \in \varphi$	– symbol przynależności (s leży na φ)
$l(A, B)$	– prosta l przechodząca przez punkty A i B
$M = a \cap b$	– punkt wspólny prostych a i b (przecięcie)
$\langle ABCD \rangle$	– wielokąt – A, B, \dots punkty, wierzchołki
$\langle abcd \rangle$	– wielobok – a, b, \dots proste, boki
K^2	– kwadryka – niezniekształcona powierzchnia stopnia drugiego
$\{g\}$	– zbiór prostych
$\{P^3\}$	– trójwymiarowa przestrzeń rzutowa
$S[a, b, \dots]$ lub $[S]$	– wiązka prostych o środku S
(12_8)	– konfiguracja

PRZEDMOWA

Inspiracją do podjęcia tematu kwadryk skośnych była fascynacja możliwościami wykorzystania powierzchni prostokreślnych w budownictwie, a głównie w budownictwie wodnym, które jest przedmiotem moich szczególnych zainteresowań.

Znaczna część niekonwencjonalnych obiektów budownictwa ma kształt powierzchni stopnia drugiego (sfera, elipsoida, hiperboloida jedno- i dwupowłokowa, paraboloida i paraboloida hiperboliczna). Znane są na świecie wspaniałe obiekty budownictwa kształtowane z zastosowaniem powierzchni skośnych, które na trwałe weszły do historii architektury. Przykładem tego mogą być projekty architekta i inżyniera Felixa Candeli, takie jak kościół Santa Maria Miraculosa w Meksyku czy restauracja w Xochimilco. Do form opartych na powierzchniach prostokreślnych sięgało wielu wybitnych architektów: La Corbusier, Santiago Calatrava, Pier Luigi Nervi i inni. Nie brakuje także przykładów zastosowań powierzchni prostokreślnych w krajowych konstrukcjach architektonicznych; np. dworzec Warszawa-Ochota projektu A. Romanowicza przykryty paraboloidą hiperboliczną. W Katowicach świetny architekt W. Zalewski z czterech paraboloid hiperbolicznych zbudował kielich a z powstałych kielichów olbrzymią halę lub ostatnio projekt Nowackich zakładający przykrycie amfiteatru w Opolu zadaniem w kształcie paraboloidy hiperbolicznej. Tych kilka przykładów świadczy o tym, że powierzchnie prostokreślne wprowadziły ekspresyjne, jak również funkcjonalne kształty do nowoczesnej architektury. Można śmiało powiedzieć, że formy architektoniczne otrzymane w rezultacie twórczej inspiracji formami geometrycznymi mogły powstać i rozwijać się dzięki postępowi nauki. Geometria rzutowa jest stosunkowo młodą dziedziną geometrii. Jej twórcą jest matematyk francuski Jean Victor Poncelet (1788–1864), który stworzył teorię biegunów i biegunowych oraz zasadę biegunowej dwoistości. Tylko nieco ponad sto lat temu poznano jedną z najwspanialszych kwadryk skośnych – paraboloidę hiperboliczną. Dlatego badania i analizowanie form geometrycznych opartych na powierzchniach prostokreślnych jakimi są kwadrygi skośne, może z jednej strony przyczynić się do lepszego ich poznania, możliwości tworzenia i przekształceń, a z drugiej do rozwiązywania problemów konstrukcyjnych we współczesnej architekturze.

Mam nadzieję, że niniejsza monografia poszerzy zakres rozwiązań teoretycznych odnoszących się do przekształceń rzutowych kwadryk skośnych oraz związków geometrycznych, jakie zachodzą pomiędzy ich elementami.

Składam serdeczne podziękowanie Recenzentowi Profesorowi Jarosławowi Mirskiemu za wnikliwe przeanalizowanie, punkt po punkcie, utworzonych konstrukcji kwadryk skośnych oraz za uwagi merytoryczne, które pozwoliły mi na nadanie ostatecznego kształtu monografii.

Mgr. inż. Piotrowi Kałudze dziękuję za pomoc w opracowaniu rysunków.

1. WPROWADZENIE

Kwadryką lub powierzchnią stopnia drugiego nazywamy zbiór punktów, który każda płaszczyzna przecina w stożkowej (zdegenerowanej lub nie).

Do podstawowych powierzchni stopnia drugiego zaliczamy między innymi:

- powierzchnię stożkową,
- powierzchnię walcową,
- sferę,
- hiperboloidę jednopowłokową obrotową.

Pierwsze dwie, to powierzchnie prostokreślne rozwijalne. Oprócz tych powierzchni drugiego stopnia znane są trzy kwadryki będące rzutowymi obrazami sfery:

- elipsoida,
- paraboloida,
- hiperboloida dwupowłokowa,

oraz dwie kwadryki będące rzutowymi obrazami hiperboloidy jednopowłokowej obrotowej:

- hiperboloida jednopowłokowa,
- paraboloida hiperboliczna.

Te dwie ostatnie nazywamy kwadrykami skośnymi lub wchrowatymi, charakteryzującymi się tym, że przez każdy ich punkt przechodzą dwie tworzące (Bieliński i in. 2002).

Każda dowolna prosta przebija kwadrykę w dwóch punktach. Jeżeli punkty przebicia są różne, to prosta nazywa się sieczną. Jeżeli punkty przebicia są rzeczywiste i pokrywają się, to prosta nazywa się styczną. W szczególnym przypadku, gdy punkty przebicia są urojone sprzężone, to prosta nazywa się zewnętrzną względem kwadryki. Kwadryka ma w każdym punkcie swojej powierzchni płaszczyznę styczną, która przecina tę kwadrykę w dwóch tworzących. Jeżeli tworzące przecinają się w tym punkcie, to nazywamy go punktem hiperbolicznym. W przypadku gdy tworzące pokrywają się, punkt ten nazywamy parabolicznym. W szczególnym przypadku, gdy tworzące są urojone, punkt ten nazywamy eliptycznym. Kwadryki o punktach hiperbolicznych, przez które przechodzi nieskończenie wiele prostych rzeczywistych tworzących tę powierzchnię i będących prostymi skośnymi należącymi do dwóch układów, nazywamy prostoliniowymi skośnymi (kwadrykami skośnymi).

Każda płaszczyzna rzeczywista może być względem kwadryki skośnej płaszczyzną sieczną i taką kwadrykę nazywamy hiperboloidą skośną (hiperboloidą jednopowłokową) lub może być płaszczyzną styczną i w takim przypadku nazywa się paraboloidą skośną (paraboloidą hiperboliczną), (Ślusarczyk 1976).

Kwadrykę skośną wyznaczają trzy dowolne proste skośne t_1 , t_2 , i t_3 należące do jednej rodziny lub tę samą kwadrykę wyznaczają trzy inne proste skośne q_1 , q_2 , i q_3 należące do drugiej rodziny, z których każda prosta przecina trzy proste pierwszej rodziny. Takich sześć prostych, należących na przemian do pierwszej i drugiej rodziny, tworzy zamknięty sześciobok przestrzenny mający tę własność, że każdy jego bok przecina trzy inne, to znaczy, że dwie proste należące do kwadryki skośnej przecinają się tylko wtedy, gdy należą do różnych rodzin.

Zbiór nieskończonej ilości prostych leżących na kwadryce skośnej i należących do obu rodzin (nazywanych tworzącymi) tworzy tę powierzchnię. Rzut tworzących na płaszczyznę określa zarys kwadryki, będący stożkową. Tworzące, które powłóczyły tę stożkową, są do niej styczne; czyli sześciobok przestrzenny stał się w wyniku przekształcenia rzutowego sześciobokiem płaskim, którego boki są styczne do stożkowej.

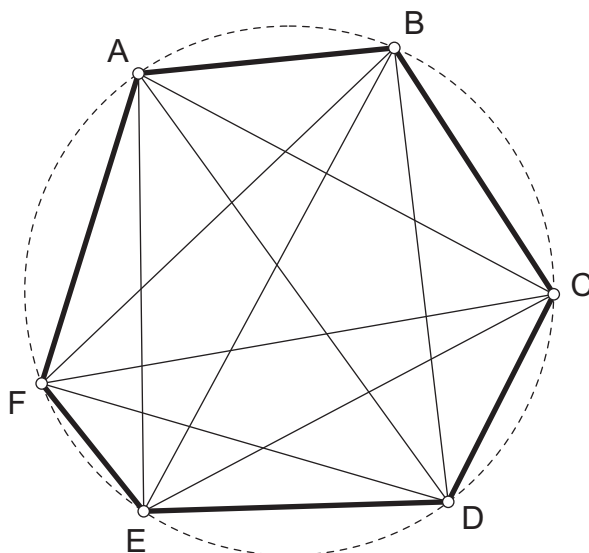
2. NIEKTÓRE WŁASNOŚCI KRZYWYCH STOŻKOWYCH

Krzywymi stożkowymi (lub krzywymi stopnia drugiego) nazywamy zbiór punktów otrzymanych w wyniku przekroju stożka dowolną płaszczyzną. Tak więc, przekrojem każdej powierzchni stożkowej może być każda krzywa stopnia drugiego (okrąg, elipsa, hiperbola, parabola), występująca czasem w postaci zdegenerowanej do dwóch prostych, jednej prostej lub punktu (Otto 1971).

Celem określenia pewnych szczególnych własności krzywych stożkowych, będących elementami kwadryk skośnych, posłużymy się zapisem konfiguracyjnym.

Konfiguracją płaską nazywamy figurę składającą się z nieodzwójnej liczby p – punktów i g – prostych leżących na płaszczyźnie, charakteryzujących się tym, że przez każdy punkt A (p) figury przechodzi ta sama ilość γ prostych ze zbioru $\{g\}$ i że na każdej prostej g danej figury leży jedna i ta sama ilość π punktów. Konfigurację taką oznaczamy liczbą (symbolem) $(p_\gamma g_\pi)$. Te cztery liczby są ze sobą w zależności $p \cdot \gamma = g \cdot \pi$.

Obierzmy sześć dowolnych różnych od siebie punktów stożkowej (okręgu), oznaczając je kolejno literami alfabetu $\langle ABCDEF \rangle$ (rys. 1). Taki układ punktów i prostych tworzy konfigurację.



Rys. 1. Sześciokąt wpisany w stożkową tworzący konfigurację $(6_5 15_2)$
Fig. 1. Hexagon inscribed in a conic, forming a configuration of type $(6_5 15_2)$

Rozważane punkty stożkowej wyznaczają sześciokąt wpisany w tę stożkową. Łącząc każdy wierzchołek sześciokąta z pozostałymi, otrzymamy układ punktów i prostych tworzących konfigurację $(6_5 15_2)$, tzn. że na każdej prostej (boku sześciokąta) leżą dwa punkty i przez każdy punkt (wierzchołek sześciokąta) przechodzi pięć prostych. Dla sześciokąta wpisanego w stożkową możemy ułożyć 60 różnych schematów następstwa wierzchołków (rys. 2).

Będą to wszystkie permutacje bez powtórzenia dla sześciu elementów. Otrzymamy więc $6!/12$ możliwych przypadków.

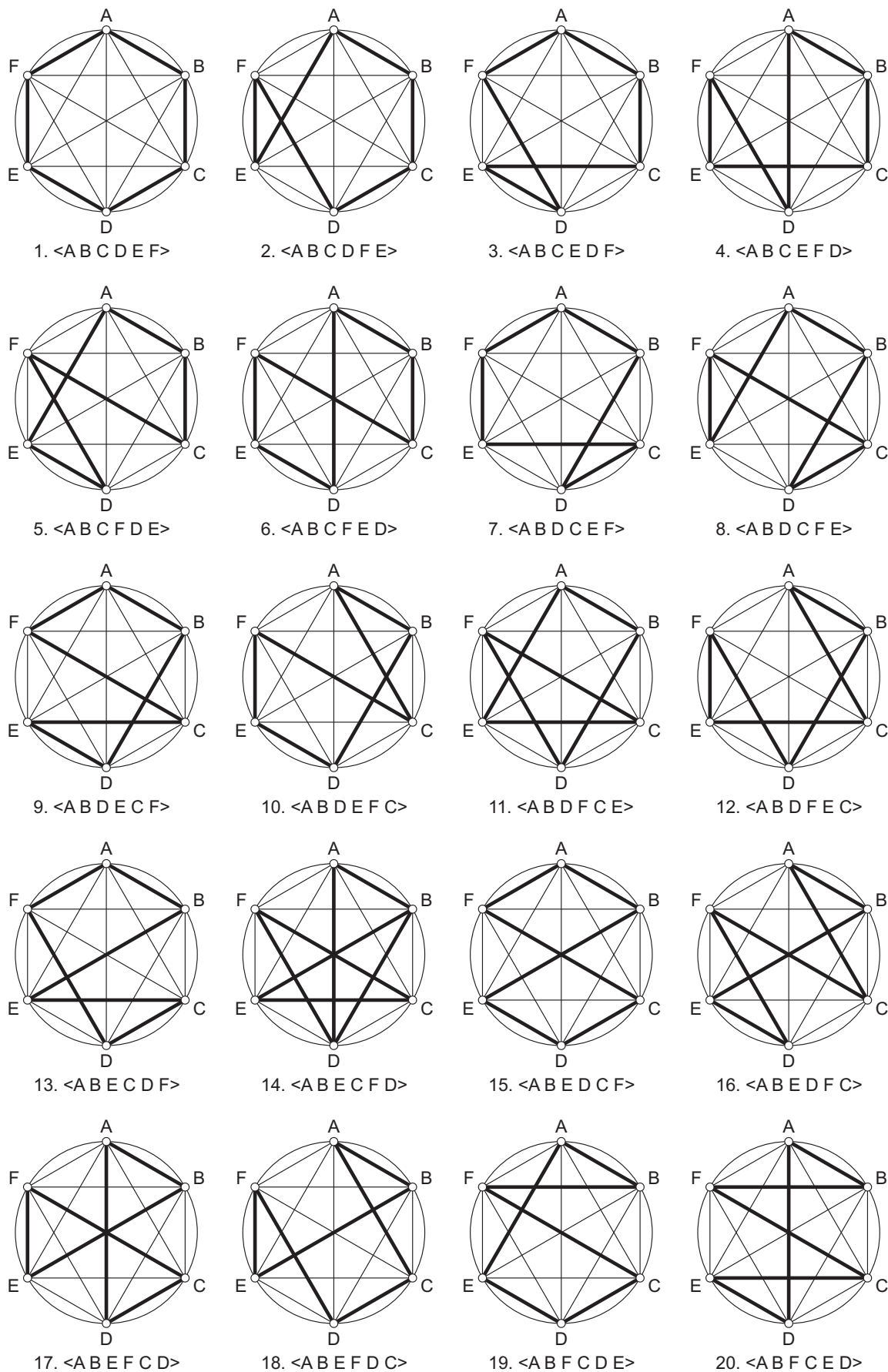
Każdy z rozważanych sześciokątów ma 3 pary boków przeciwległych.

Pary te przecinają się w 3 punktach leżących na jednej prostej. Własność ta znana jest jako twierdzenie Pascala¹:

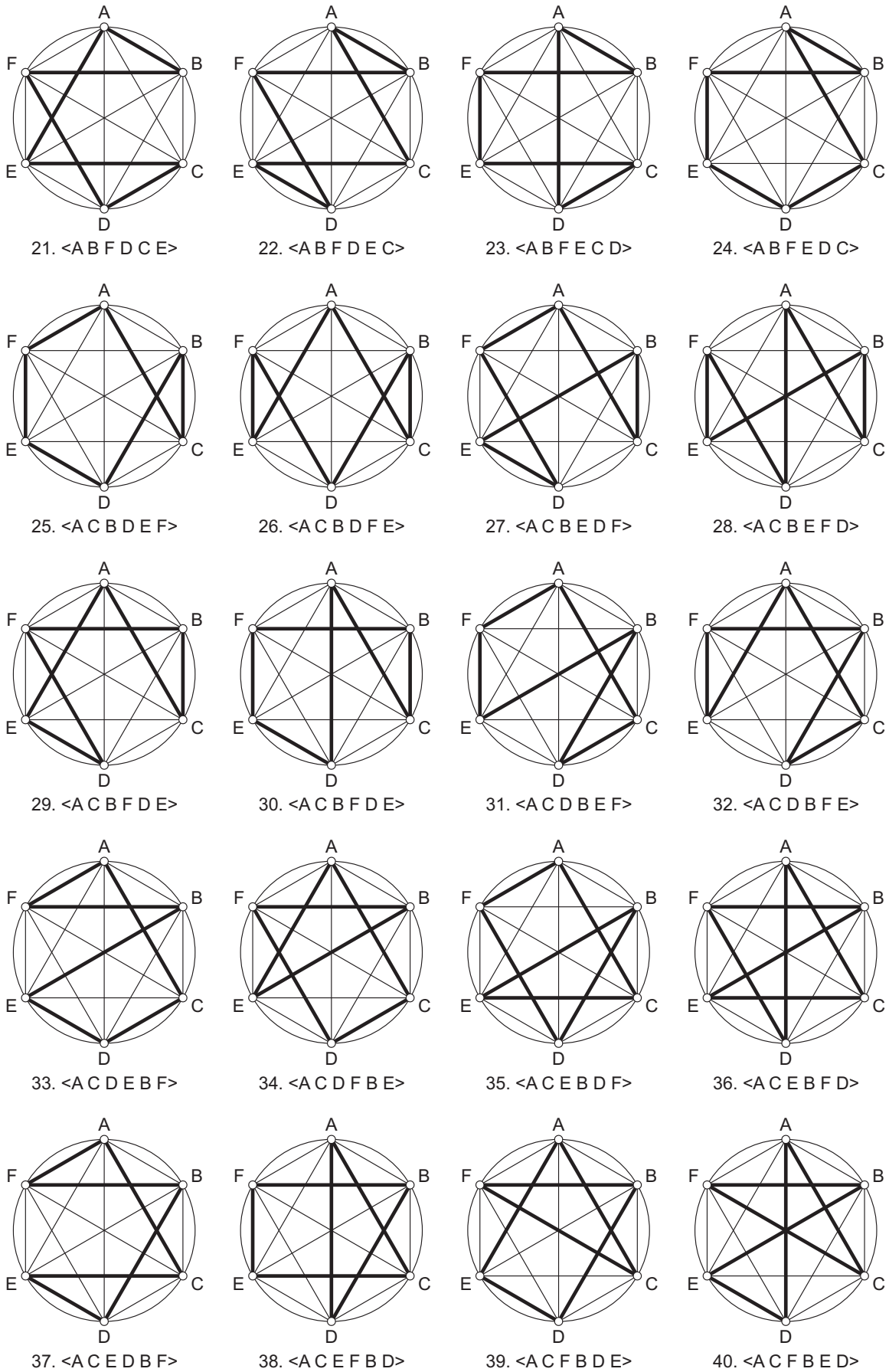
„Sześć punktów stożkowej wyznacza sześciokąt, którego boki przeciwległe przecinają się w 3 punktach leżących na jednej prostej (prostej Pascala)”(Szerszeń 1963).

Weźmy pod uwagę sześć dowolnych punktów leżących na stożkowej (okręgu) $\langle ABCDEF \rangle$ (rys. 3). Połączmy przeciwległe wierzchołki otrzymanego sześciokąta \overline{AD} \overline{BE} \overline{CF} . Otrzymamy zbiór dziewięciu prostych przechodzących po 3 proste przez każdy punkt. W tak otrzymanej figurze możemy uzyskać 6 kombinacji następstwa wierzchołków sześciokąta:

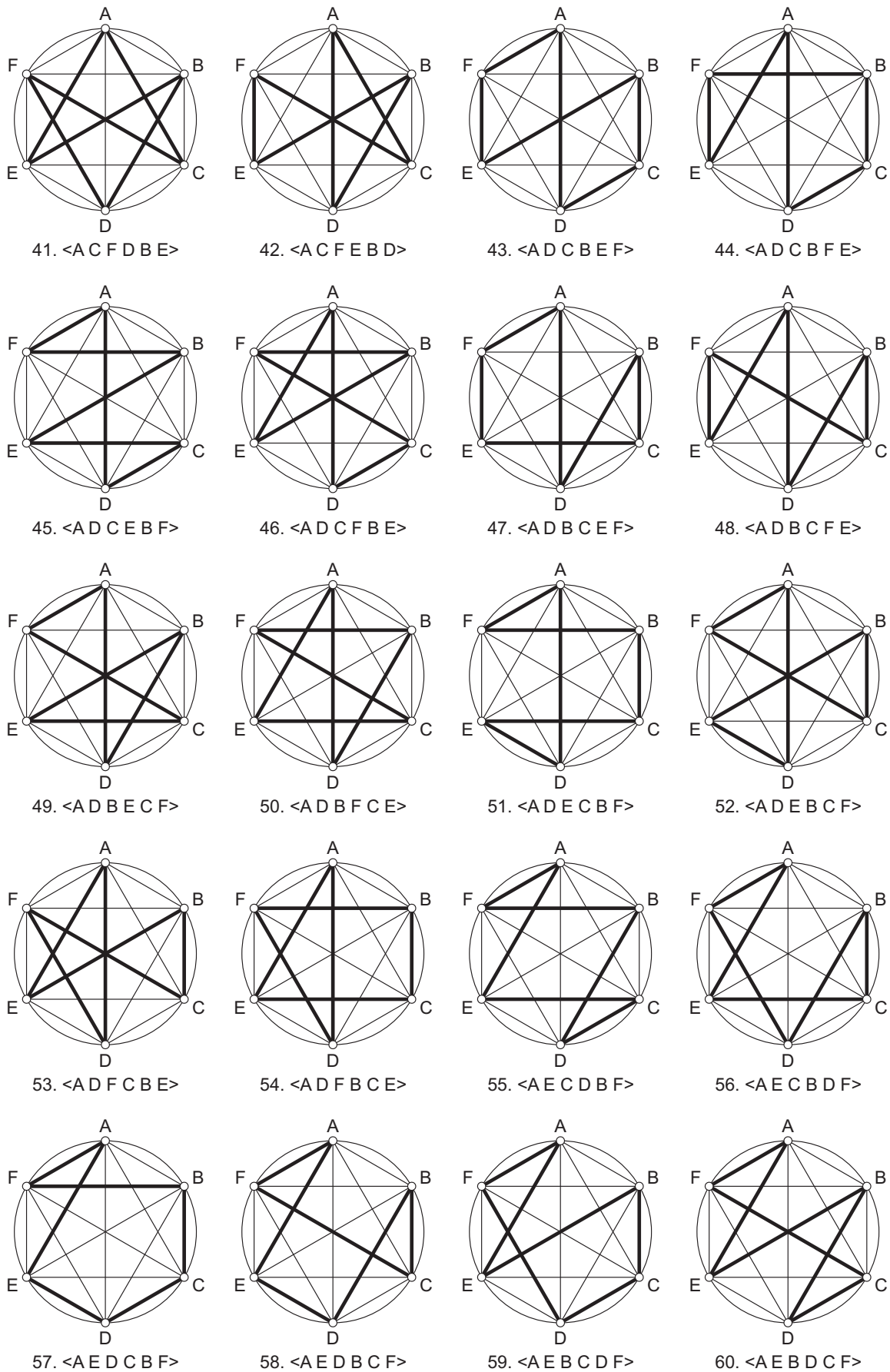
¹ Twierdzenie to zostało udowodnione w 1639 r. przez szesnastoletniego wówczas matematyka francuskiego Blaise Pascala.



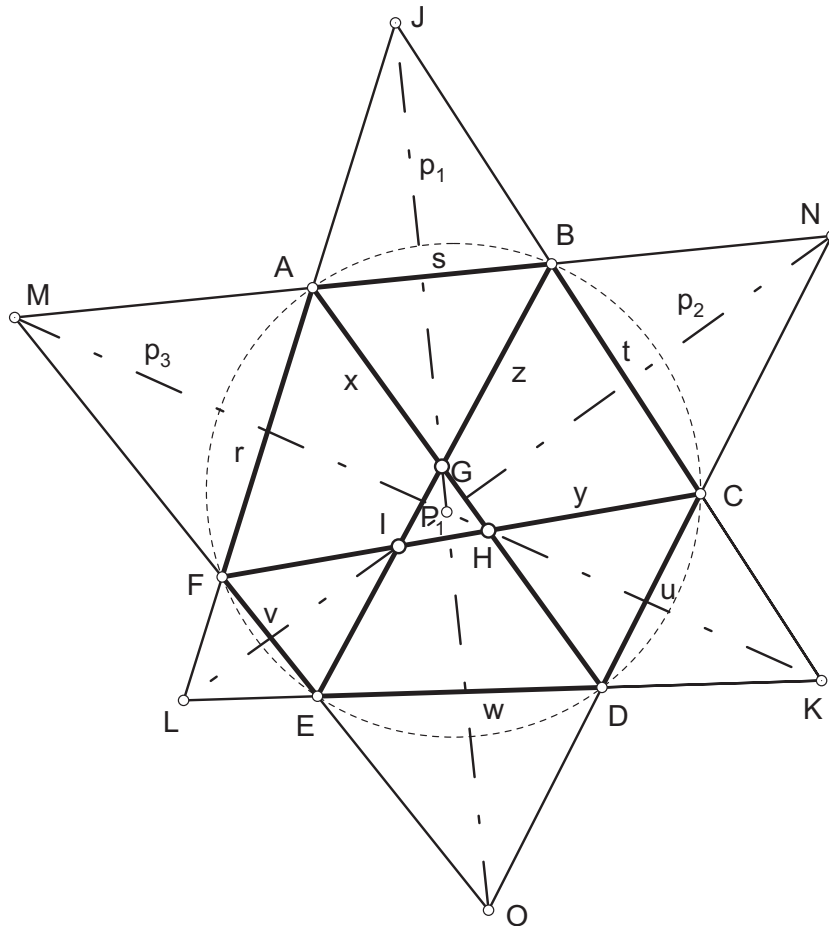
Rys. 2. Schematy następnstwa wierzchołków sześciokątów wpisanych w stożkową
 Fig. 2. Scheme of vertex sequences of a hexahedron inscribed into conic



Rys. 2 c.d. Schematy następstwa wierzchołków sześciokątów wpisanych w stożkową
 Fig. 2. cont. Scheme of vertex sequences of a hexahedron inscribed into conic



Rys. 2 c.d. Schematy następnictwa wierzchołków sześciokątów wpisanych w stożkową
 Fig. 2 cont. Scheme of vertex sequences of a hexahedron inscribed into conic



Rys. 3. Sześciokąty o następnictwie wierzchołków *I, II, III* tworzących konfigurację $(16_3 12_4)$
 Fig. 3. Hexagons with vertex sequences *I, II, III* forming a configuration of type $(16_3 12_4)$

I	II	III																		
$\langle ADCBEF \rangle$	$\langle ABEDCF \rangle$	$\langle ABCFED \rangle$																		
<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">AD</td><td style="padding: 2px;">BE</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">DC</td><td style="padding: 2px;">EF</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">CB</td><td style="padding: 2px;">FA</td></tr> </table>	AD	BE	DC	EF	CB	FA	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">AB</td><td style="padding: 2px;">DC</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">BE</td><td style="padding: 2px;">CF</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">ED</td><td style="padding: 2px;">FA</td></tr> </table>	AB	DC	BE	CF	ED	FA	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">AB</td><td style="padding: 2px;">FE</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">BC</td><td style="padding: 2px;">ED</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">CF</td><td style="padding: 2px;">DA</td></tr> </table>	AB	FE	BC	ED	CF	DA
AD	BE																			
DC	EF																			
CB	FA																			
AB	DC																			
BE	CF																			
ED	FA																			
AB	FE																			
BC	ED																			
CF	DA																			
p_1	p_2	p_3																		
IV	V	VI																		
$\langle ABEFCD \rangle$	$\langle ADEBCF \rangle$	$\langle ABCDEF \rangle$																		
<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">AB</td><td style="padding: 2px;">FC</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">BE</td><td style="padding: 2px;">CD</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">EF</td><td style="padding: 2px;">DA</td></tr> </table>	AB	FC	BE	CD	EF	DA	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">AD</td><td style="padding: 2px;">BC</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">DE</td><td style="padding: 2px;">CF</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">EB</td><td style="padding: 2px;">FA</td></tr> </table>	AD	BC	DE	CF	EB	FA	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">AB</td><td style="padding: 2px;">DE</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">BC</td><td style="padding: 2px;">EF</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black; padding: 2px;">CD</td><td style="padding: 2px;">FA</td></tr> </table>	AB	DE	BC	EF	CD	FA
AB	FC																			
BE	CD																			
EF	DA																			
AD	BC																			
DE	CF																			
EB	FA																			
AB	DE																			
BC	EF																			
CD	FA																			
p_4	p_5	p_6																		

Rozwiązanie na jednym sześciokącie $\langle ABCDEF \rangle$ wszystkich możliwych następnictw wierzchołków I, II, III, IV, V, VI daje 6 prostych Pascala.

Trzy proste p_1, p_2, p_3 przecinają się w punkcie P_I , trzy proste p_4, p_5, p_6 w punkcie P_{II} .

Realizacja 3 sześciokątów (I, II, III lub III, IV, V) wraz z trójką prostych Pascala przechodzących przez wspólny punkt (P_I lub P_{II}) tworzy konfigurację $(16_3 12_4)$.

W uzyskanej z następnictwa wierzchołków I, II, III konfiguracji (rys. 3) proste spełniają następujące role: proste $\langle rstuvw \rangle$ są bokami sześciokąta wpisanego w stożkową, proste xyz są prostymi łączącymi przeciwległe wierzchołki, a proste p_1, p_2, p_3 są prostymi Pascala.

Punkty konfiguracji to sześć wierzchołków sześciokąta $\langle ABCDEF \rangle$, dziewięć punktów przecięcia trzech par przeciwległych boków $GHIJKLMNO$ oraz punkt P_1 przecięcia prostych Pascala. Na konfigurację składa się więc: $p = 16$ punktów $g = 12$ prostych oraz zachodząca między nimi incydencja:

- $\gamma = 3$; proste przechodzące przez każdy punkt,
- $\pi = 4$; punkty leżące na każdej prostej.

Otrzymanych 48 znaków przynależności ($12 \times 4 = 16 \times 3$) przedstawmy w graficznym schemacie ujętym w zestawieniu przynależności.

	r	s	t	u	w	v	x	y	z	p_1	p_2	p_3
A	X	X					X					
B		X	X						X			
C			X	X				X				
D				X	X		X					
E					X	X			X			
F	X					X	X					
G							X		X	X		
H							X	X				X
I								X	X		X	
J	X		X							X		
K			X		X							X
L	X				X						X	
M		X				X						X
N		X		X							X	
O			X		X					X		
P										X	X	X

Rys. 4. Graficzny schemat konfiguracji $(16_3 12_4)$
 Fig. 4. Diagram of a configuration of type $(16_3 12_4)$

Narysujmy schemat (rys. 4) składający się z $g = 12$ kolumn reprezentujących proste i z $p = 16$ wierszy reprezentujących punkty. Następnie w każdym wierszu oznaczmy krzyżykiem przechodzące przez dany punkt proste.

Biorąc jako punkt wyjścia graficzny schemat konfiguracji, możemy przeprowadzić jego geometryczną realizację.

Obierzmy na płaszczyźnie dowolną prostą konfiguracji, np. s i nanieśmy trzy incydentne z nią punkty ABN (rys. 3). Przez każdy punkt przeprowadźmy dalsze dwie proste $r \cap x = A, z \cap t = B, u \cap p_2 = N$. Ustaliliśmy w ten sposób położenie siedmiu prostych i trzech punktów leżących na jednej z nich. Te założenia wystarczą do wyznaczenia brakujących punktów i prostych. W dalszej realizacji wyznaczmy punkty przecięcia prostych $r \cap p_2 = L, x \cap u = D, z \cap p_2 = I, t \cap u = C$. Znajdując punkty przecięcia prostych $y \cap r = F, w \cap z = E$, otrzymamy następną wierzchołki sześciokąta.

Sześciokąt $\langle ABCDEF \rangle$ należy uzupełnić pozostałymi dwoma trójkami punktów MHK leżących na prostej p_3 oraz JGO leżących na prostej p_1 . Dwie spośród trzech prostych p określają położenie brakującego punktu P_1 , przez który zgodnie ze schematem musi przejść trzecia prosta. Incydencja ta jest zawsze spełniona, niezależnie od wyboru prostej i trzech leżących na niej punktów. Przez jeden z trzech przyjętych punktów zawsze przechodzi przynajmniej jedna prosta, która jest prostą Pascala, a to dowodzi, że otrzymany sześciokąt jest wpisany w stożkową (twierdzenie Pascala).

Z powyższej konfiguracji wynika następujące twierdzenie:

„Trzy trójki punktów przecięcia przeciwległych boków sześciokąta wpisanego w stożkową, tworzącego konfigurację $(16_3 12_4)$ leżą na 3 prostych przecinających się w jednym punkcie”.

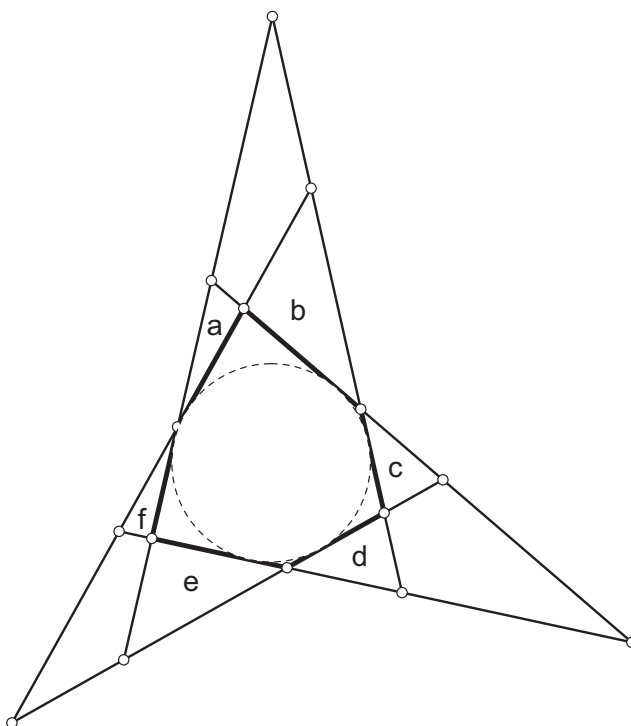
Do tego twierdzenia można napisać twierdzenie odwrotne:

„Sześciokąt płaski, którego żadne trzy wierzchołki nie leżą na jednej prostej i którego boki przeciwległe wyznaczają trzy trójki punktów leżących na trzech prostych przecinających się w jednym punkcie – jest wielokątem wpisanym w stożkową, tworzącym konfigurację $(16_3, 12_4)$ ”.

W zależności od wyboru następstwa wierzchołków trzech sześciokątów I, II, III lub IV, V, VI możemy zrealizować dwie konfiguracje $(16_3, 12_4)$ o różnych schematach. Na rysunku 3 zrealizowano konfigurację opierając się na sześciokątach I, II, III.

Taką samą procedurę, jako zagadnienie dwoiste, można przeprowadzić dla sześcioboku opisanego na stożkowej (okręgu).

Obierzmy sześć dowolnych różnych od siebie prostych stycznych do stożkowej (okręgu), oznaczając je kolejno literami alfabetu $\langle abcdef \rangle$ (rys. 5).



**Rys. 5. Sześciobok opisany na stożkowej tworzący konfigurację $(15_2, 6_3)$
Fig. 5. Hexagon circumscribed around a conic, forming a configuration of type $(15_2, 6_3)$**

Rozważane styczne stożkowej wyznaczają sześciobok opisany na tej stożkowej.

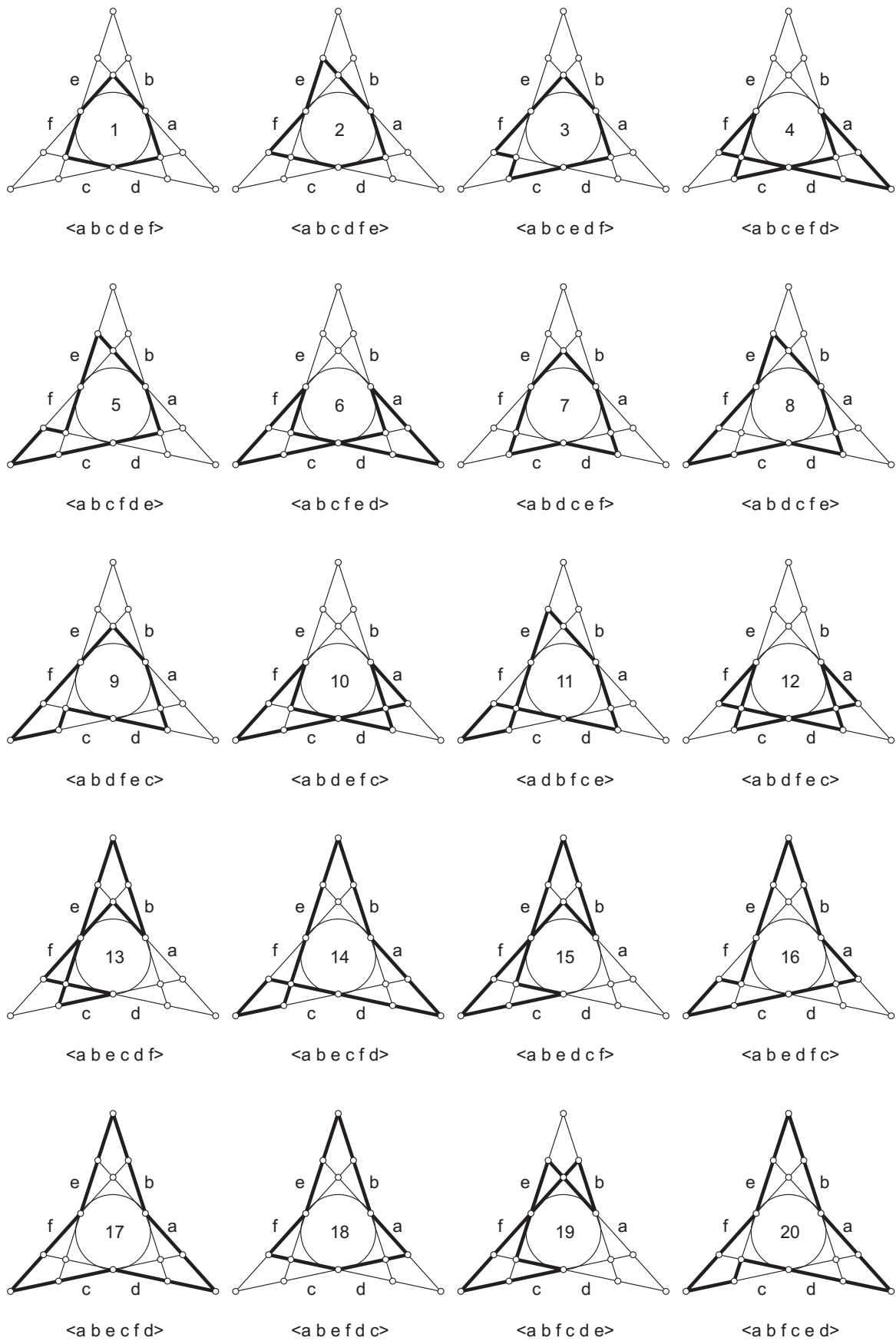
Przedłużając każdy bok sześcioboku do przecięcia z pozostałymi, otrzymamy układ prostych i punktów tworzących konfigurację $(15_2, 6_3)$, tzn. że przez każdy punkt (wierzchołek sześcioboku) przechodzą dwie proste i na każdej prostej (boku sześcioboku) leży pięć punktów. Dla sześcioboku opisanego na stożkowej możemy ułożyć 60 różnych schematów następstwa boków (rys. 6).

Każdy z rozważanych sześcioboków posiada 3 pary wierzchołków przeciwległych.

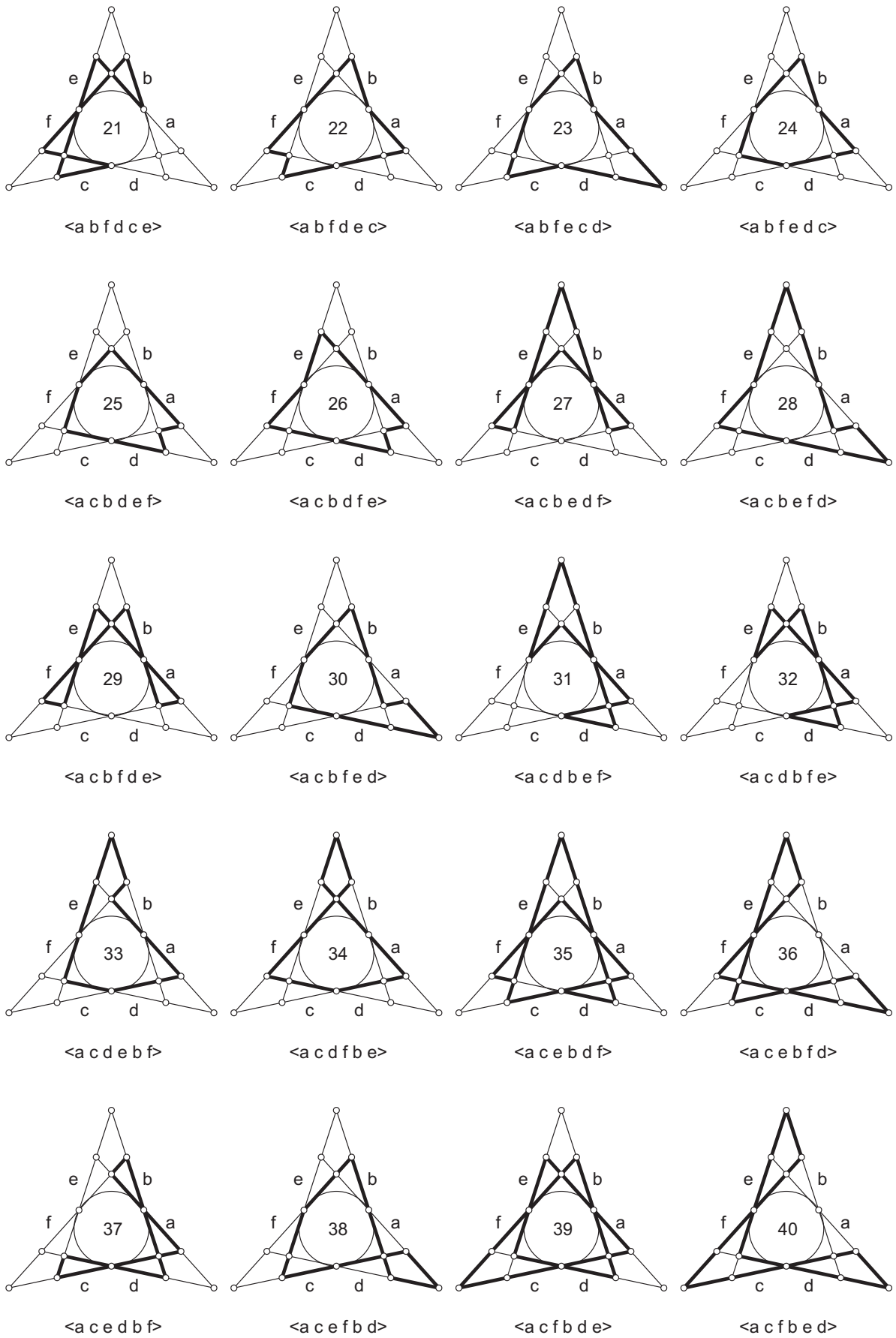
Pary te wyznaczają 3 proste, które przecinają się w jednym punkcie. Własność ta znana jest jako twierdzenie Brianchona²:

„Sześć stycznych stożkowej wyznacza sześciobok, którego wierzchołki przeciwległe wyznaczają 3 proste przechodzące przez jeden punkt (punkt Brianchona)” (Szerszeń 1973).

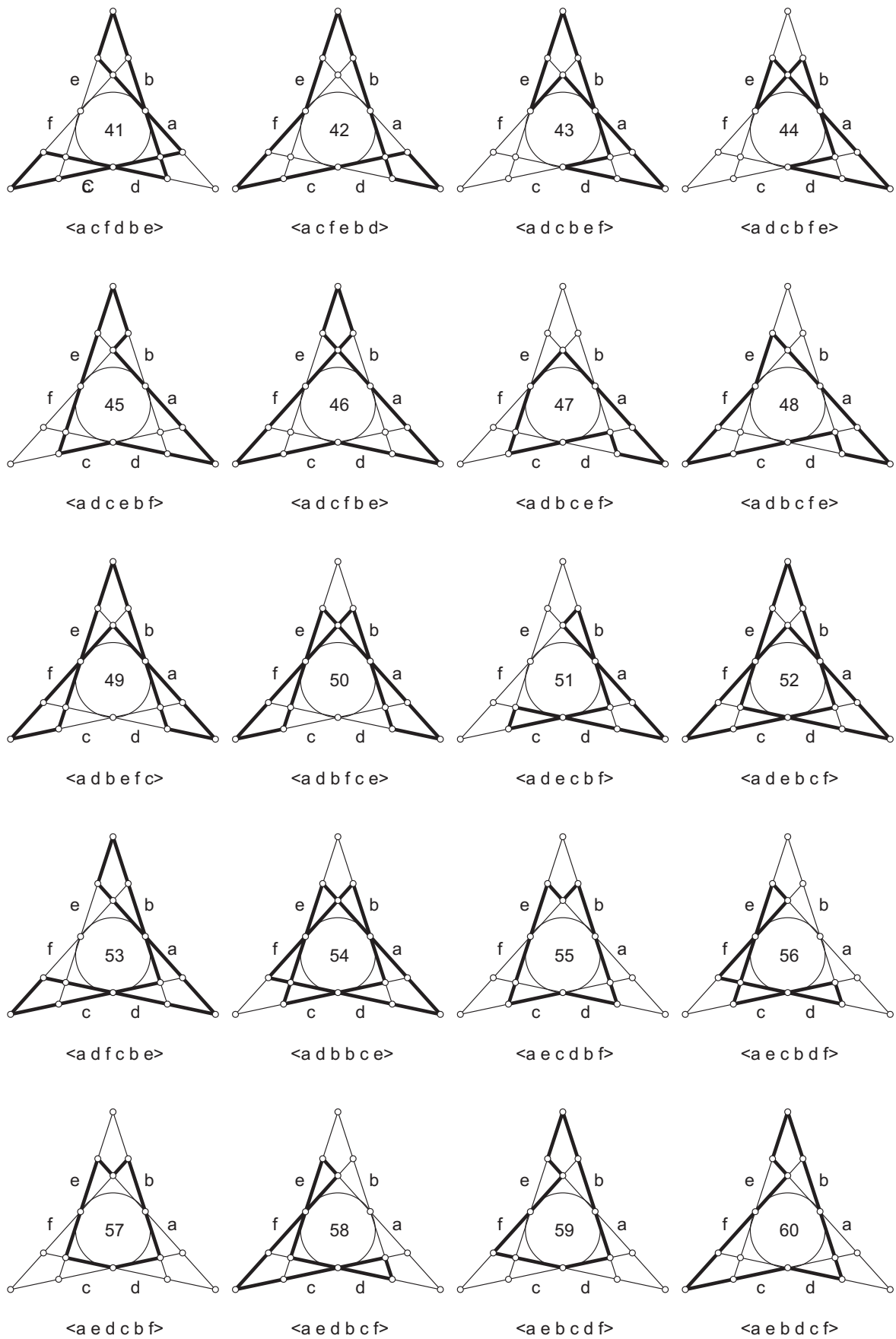
² Brianchon – matematyk francuski ur. 1783 r. Udowodnił ponad sto lat po Pascalu twierdzenie dwoiste do jego twierdzenia.



Rys. 6. Schematy następnictwa boków sześcioboków opisanych na stożkowej
 Fig. 6. Scheme of side sequences of a hexahedron described on conoc

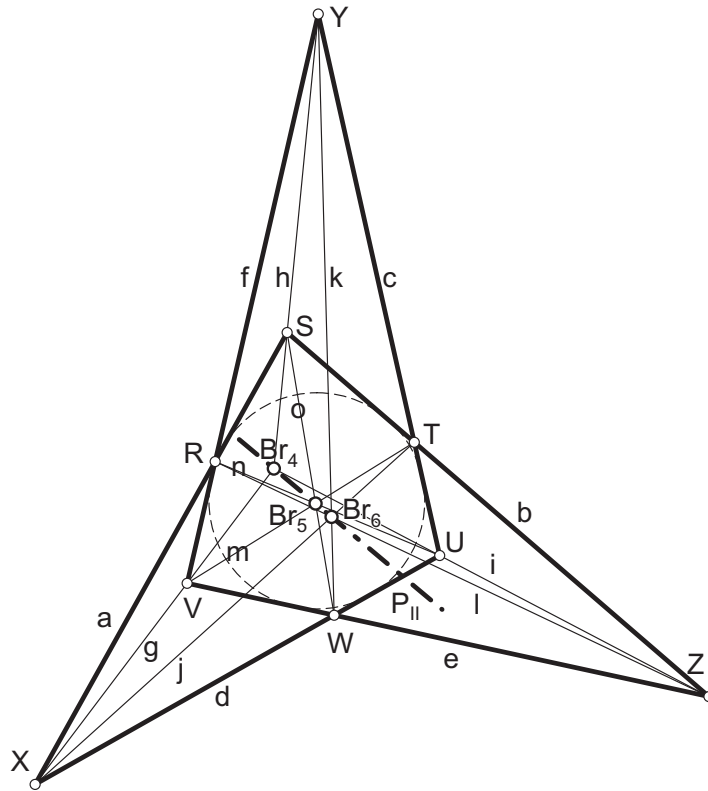


Rys. 6.c.d. Schematy następstwa boków sześcioboków opisanych na stożkowej
 Fig. 6 cont. Scheme of side sequences of a hexahedron described on conoc



Rys. 6.c.d. Schematy następstwa boków sześcioboków opisanych na stożkowej
 Fig. 6 cont. Scheme of side sequences of a hexahedron described on conoc

Weźmy pod uwagę sześć dowolnych prostych stycznych do stożkowej (okręgu) $\langle abcdef \rangle$ (rys. 7).



Rys. 7. Sześcioboki o następnictwie boków IV, V, IV tworzących konfigurację $(12_4 16_3)$
 Fig. 7. Hexagons with side sequences IV, V, VI, forming a configuration of type $(12_4 16_3)$

Przedłużmy przeciwległe boki otrzymanego sześcioboku $ad be cf$. Otrzymamy zbiór 9 punktów leżących po 3 na każdej prostej. W tak powstałej figurze możemy uzyskać 6 kombinacji następnictwa boków sześcioboku:

<p>I</p> <p>$\langle adcbef \rangle$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">ad</td> <td style="padding: 2px;">be</td> <td rowspan="3" style="padding: 0 10px;">Br₁</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">dc</td> <td style="padding: 2px;">ef</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">cb</td> <td style="padding: 2px;">fa</td> </tr> </table>	ad	be	Br ₁	dc	ef	cb	fa	<p>II</p> <p>$\langle abedcf \rangle$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">ab</td> <td style="padding: 2px;">dc</td> <td rowspan="3" style="padding: 0 10px;">Br₂</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">be</td> <td style="padding: 2px;">cf</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">ed</td> <td style="padding: 2px;">fa</td> </tr> </table>	ab	dc	Br ₂	be	cf	ed	fa	<p>III</p> <p>$\langle abcfed \rangle$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">ab</td> <td style="padding: 2px;">fe</td> <td rowspan="3" style="padding: 0 10px;">Br₃</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">bc</td> <td style="padding: 2px;">ed</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">cf</td> <td style="padding: 2px;">da</td> </tr> </table>	ab	fe	Br ₃	bc	ed	cf	da
ad	be	Br ₁																					
dc	ef																						
cb	fa																						
ab	dc	Br ₂																					
be	cf																						
ed	fa																						
ab	fe	Br ₃																					
bc	ed																						
cf	da																						
<p>IV</p> <p>$\langle abefcd \rangle$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">ab</td> <td style="padding: 2px;">fc</td> <td rowspan="3" style="padding: 0 10px;">Br₄</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">be</td> <td style="padding: 2px;">cd</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">ef</td> <td style="padding: 2px;">da</td> </tr> </table>	ab	fc	Br ₄	be	cd	ef	da	<p>V</p> <p>$\langle adebcf \rangle$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">ad</td> <td style="padding: 2px;">bc</td> <td rowspan="3" style="padding: 0 10px;">Br₅</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">de</td> <td style="padding: 2px;">cf</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">eb</td> <td style="padding: 2px;">fa</td> </tr> </table>	ad	bc	Br ₅	de	cf	eb	fa	<p>VI</p> <p>$\langle abcdef \rangle$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">ab</td> <td style="padding: 2px;">de</td> <td rowspan="3" style="padding: 0 10px;">Br₆</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">bc</td> <td style="padding: 2px;">ef</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">cd</td> <td style="padding: 2px;">fa</td> </tr> </table>	ab	de	Br ₆	bc	ef	cd	fa
ab	fc	Br ₄																					
be	cd																						
ef	da																						
ad	bc	Br ₅																					
de	cf																						
eb	fa																						
ab	de	Br ₆																					
bc	ef																						
cd	fa																						

Rozwiązanie na jednym sześcioboku $\langle abcdef \rangle$ wszystkich możliwych następnictw boków I, II, III, IV, V, VI daje 6 punktów Brianchona.

Trzy punkty Br_1, Br_2, Br_3 leżą na jednej prostej p_I , trzy punkty Br_4, Br_5, Br_6 na prostej p_{II} . Realizacja 3 sześcioboków (I, II, III lub IV, V, VI) wraz z trzema punktami Brianchona leżącymi na jednej prostej (p_I lub p_{II}) tworzy konfigurację $(12_4 16_3)$.

W uzyskanej z następnictwa boków III, IV, V konfiguracji (rys. 7) punkty spełniają następujące role: punkty $\langle RSTUWV \rangle$ są punktami styczności sześcioboku opisanego na stożkowej, punkty XYZ są punktami przecięcia przeciwległych boków, a punkty Br_4, Br_5, Br_6 są punktami Brianchona.

Na konfigurację składa się więc: $p = 12$ punktów, $g = 16$ prostych oraz zachodząca między nimi incydencja:

$\gamma = 4$ proste przechodzące przez każdy punkt,

$\pi = 3$ punkty leżące na każdej prostej.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p_{II}
R	X					X						X	X			
S	X	X						X								X
T		X	X							X			X			
U			X	X					X					X		
W				X	X						X				X	
V					X	X	X						X			
X	X			X			X			X						
Y			X			X	X				X					
Z		X			X			X				X				
B_{r4}							X	X	X							X
B_{r5}										X	X	X				X
B_{r6}													X	X	X	X

Rys. 8. Graficzny schemat konfiguracji $(12_4 16_3)$
 Fig. 8. $(12_4 16_3)$ configuration diagram

Narysujmy schemat (rys. 8) składający się z $g = 16$ kolumn reprezentujących proste i z $p = 12$ wierszy reprezentujących punkty. Następnie w każdej kolumnie oznaczmy krzyżykiem odpowiadające danej prostej punkty.

Obierzmy na płaszczyźnie dowolny punkt konfiguracji, np. Y i poprowadźmy trzy incydentne z nim proste fhc (rys.7). Na każdej prostej przyjmijmy dwa dalsze punkty $RV = f$, $SBr_4 = h$, $TU = c$. Ustaliliśmy w ten sposób położenie siedmiu punktów i trzech prostych przecinających się w jednym z nich. Te założenia wystarczą do wyznaczenia brakujących prostych i punktów. W dalszej realizacji połączmy przyjęte punkty \overline{SR} i $\overline{Br_4V}$ otrzymane proste a i g przetną się w punkcie X . Prosta b i proste uzyskane przez połączenie punktów \overline{ST} i $\overline{Br_4U}$ przetną się w punkcie Z . Łącząc punkt Z z V oraz X z U otrzymamy dwa następne boki sześcioboku d, e .

Sześciobok $\langle abcdef \rangle$ należy uzupełnić pozostałymi dwoma trójkami przekątnych jkl przecinających się w punkcie Br_5 oraz mno przecinających się w punkcie Br_6 . Dwa spośród trzech punktów Br określa położenie brakującej prostej p_{II} , która zgodnie ze schematem musi przejść przez trzeci punkt.

Incydencja ta jest zawsze spełniona, niezależnie od wyboru punktu i trzech przechodzących przez niego prostych. Na jednej z trzech przyjętych prostych zawsze znajduje się przynajmniej jeden punkt, który jest punktem Brianchona, a to dowodzi, że otrzymany sześciobok jest opisany na stożkowej (twierdzenie Brianchona).

Wynikają stąd następujące twierdzenia:

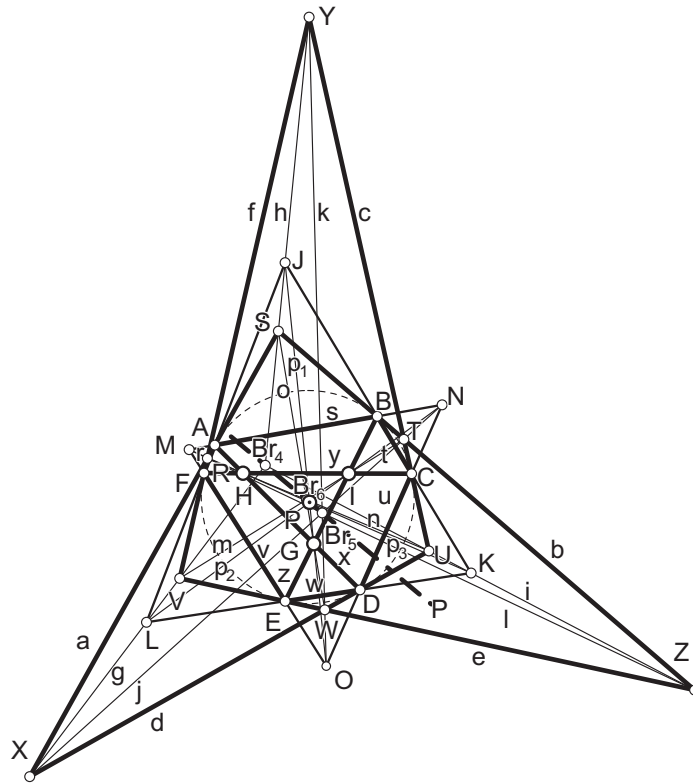
„Trzy trójki przekątnych sześcioboku opisanego na stożkowej, tworzącego konfigurację $(12_4 16_3)$ przecinają się w trzech punktach leżących na jednej prostej”.

– i twierdzenie odwrotne:

„Sześciobok płaski, którego żadne trzy boki nie przecinają się w jednym punkcie i którego wierzchołki przeciwnieległe wyznaczają trzy trójki prostych przecinających się w trzech punktach współliniowych – jest wielobokiem opisanym na stożkowej, tworzącym konfigurację $(12_4 16_3)$ ”.

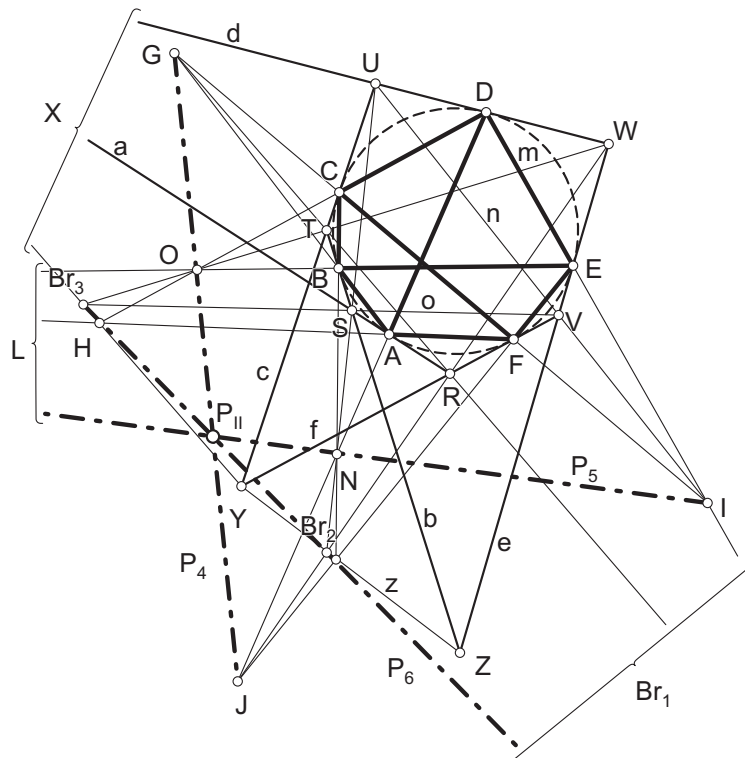
W zależności od wyboru następstwa boków trzech sześcioboków I, II, III lub IV, V, VI możemy zrealizować dwie konfiguracje $(12_4 16_3)$ o różnych schematach. Na rysunku 7 zrealizowano konfigurację z zastosowaniem sześcioboków IV, V, VI.

Narysujmy taki sześciokąt, którego wierzchołki $\langle ABCBEF \rangle$ leżą na stożkowej w punktach styczności sześcioboku $\langle abcdef \rangle$. Niech następstwa wierzchołków sześciokąta I, II, III odpowiadają następstwom boków sześcioboków III, IV, V (rys. 9).



Rys. 9. Sześciokąty I, II, III wpisane w stożkową i sześcioboki IV, V, VI opisane na stożkowej, tworzące konfigurację (28₄)
 Fig. 9. Hexagons I, II, III inscribed in a conic section and IV, V, VI circumscribed around it, forming a configuration of type (28₄)

Następnie narysujmy taki sześciobok, którego boki $\langle abcdef \rangle$ są styczne do stożkowej w wierzchołkach sześciokąta $\langle ABCDEF \rangle$. Niech następstwa boków sześcioboków III, IV, V odpowiadają następstwom wierzchołków sześciokątów I, II, III (rys. 10).



Rys. 10. Sześciokąty IV, V, VI wpisane w stożkową i sześcioboki I, II, III opisane na stożkowej, tworzące konfigurację (28₄)
 Fig. 10. Hexagons IV, V, VI inscribed in a conic section and I, II, III circumscribed about it, forming configuration of type (28₄)

Można udowodnić, że otrzymane konfiguracje $(12_4 16_3)$ i $(16_3 12_4)$ w przypadku gdy wierzchołki sześciokąta wpisanego w stożkową są punktami styczności sześcioboku opisanego na tej stożkowej, mają wspólne znaki przynależności. Punkty GHI sześciokąta leżą na prostych mon sześcioboku, punkty JKL na prostych hig , a punkty MNO na prostych jkl . Incydencję tę możemy udowodnić, opierając się na konfiguracji Maclaurina (Ślusarczyk 1976):

„Czworokąt zupełny wpisany w stożkową i czworobok zupełny o bokach stycznych do stożkowej w punktach, które są wierzchołkami czworokąta mają ten sam trójkąt przekątny”.

Weźmy pod uwagę czworokąt $AFED$ wpisany w stożkową i czworobok $afed$ opisany na stożkowej (rys. 10). Wspólnym bokiem trójkąta przekątnego dla obu figur jest prosta g wyznaczona między innymi przez wierzchołek L trójkąta przekątnego czworokąta $\langle AFED \rangle$.

W podobny sposób można wykazać przynależność pozostałych elementów. Otrzymany układ punktów i prostych tworzy konfigurację (28_4) . 28 punktów i 28 prostych składających się na konfigurację (28_4) z zachowaniem zachodzącej między nimi incydencji ujęto w kwadratową tabelę przynależności (rys. 11) przedstawiającą graficzny schemat tej konfiguracji. Graficzny schemat konfiguracji (28_4) można zapisać w postaci przypominającej macierz kwadratową.

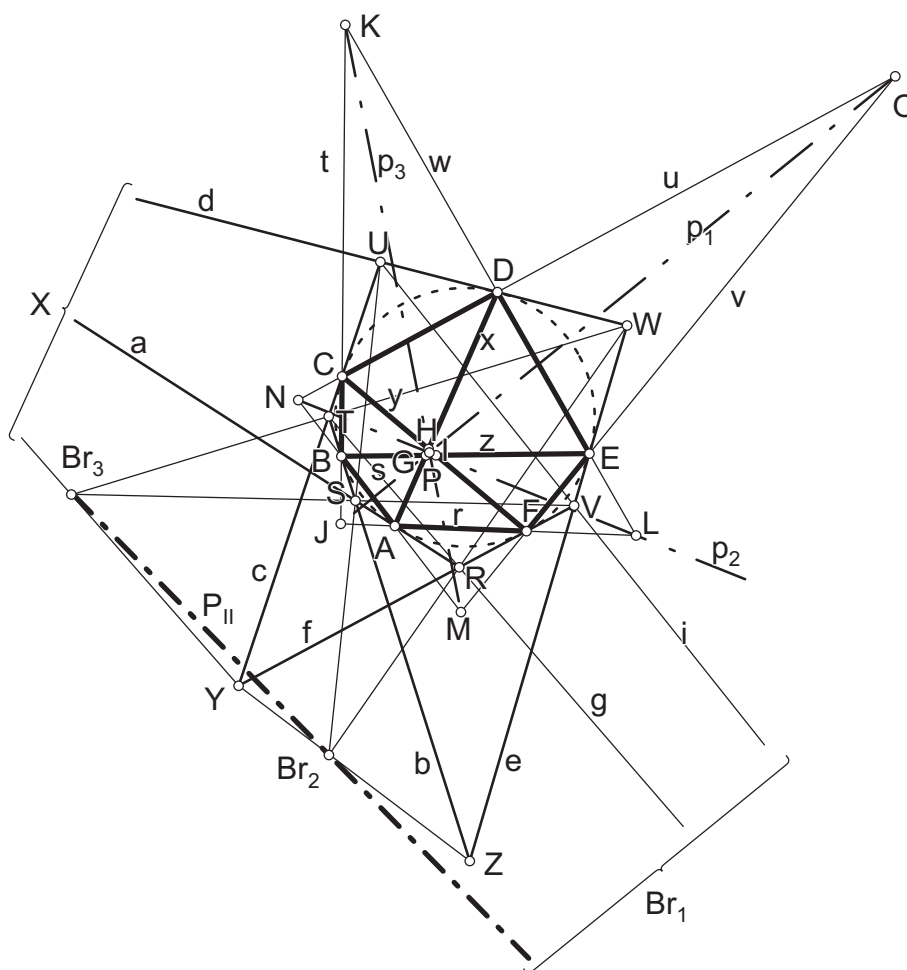
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	r	s	t	u	v	x	y	z	p ₁	p ₂	p ₃
A	X																X	X					X				
B		X																X	X						X		
C			X																X	X				X			
D				X															X	X			X				
E					X													X	X			X		X			
F						X											X			X	X		X	X			
G													X										X	X	X		
H												X											X	X			X
I											X												X	X		X	
J									X								X	X							X		
K										X								X	X			X				X	
L							X										X			X					X		
M											X							X			X		X				X
N											X							X		X					X		
O											X								X	X					X		
P																X									X	X	X
R	X						X				X	X															
S	X	X						X					X														
T		X	X						X			X															
U			X	X					X				X														
W				X	X					X				X													
V					X	X	X					X															
X	X			X				X		X																	
Y		X			X			X		X																	
Z		X			X				X			X															
B _{r4}							X	X	X								X										
B _{r5}									X	X	X						X										
B _{r6}											X	X	X	X													

Rys. 11. Graficzny schemat konfiguracji (28_4)
Fig. 11. Diagram of configuration of type (28_4)

Każda macierz posiada tę własność, że można rzędy i kolumny tak uporządkować, aby znaki incydencyjne ugrupowały się w wymagany sposób. Jeżeli w wyniku uporządkowania rzędów i kolumn elementy macierzy są położone symetrycznie względem głównej przekątnej (tabela przynależności jest sama w sobie symetryczna) – konfigurację nazywamy inwolucyjną. To znaczy, że każda czwórka punktów przynależna do kolumny jest czwórką harmoniczną $XRAS=VFRY...=-1$. Można tego dowieść na rysunku 9, na którym jedne proste są bokami czworokątów wpisanych w stożkową, inne bokami czworoboków opisanych na stożkowej w wierzchołkach czworokątów, a pozostałe bokami ich trójkątów przekątnych, a więc wszystkie wyznaczone czwórki punktów i prostych są czwórkami harmonicznymi.

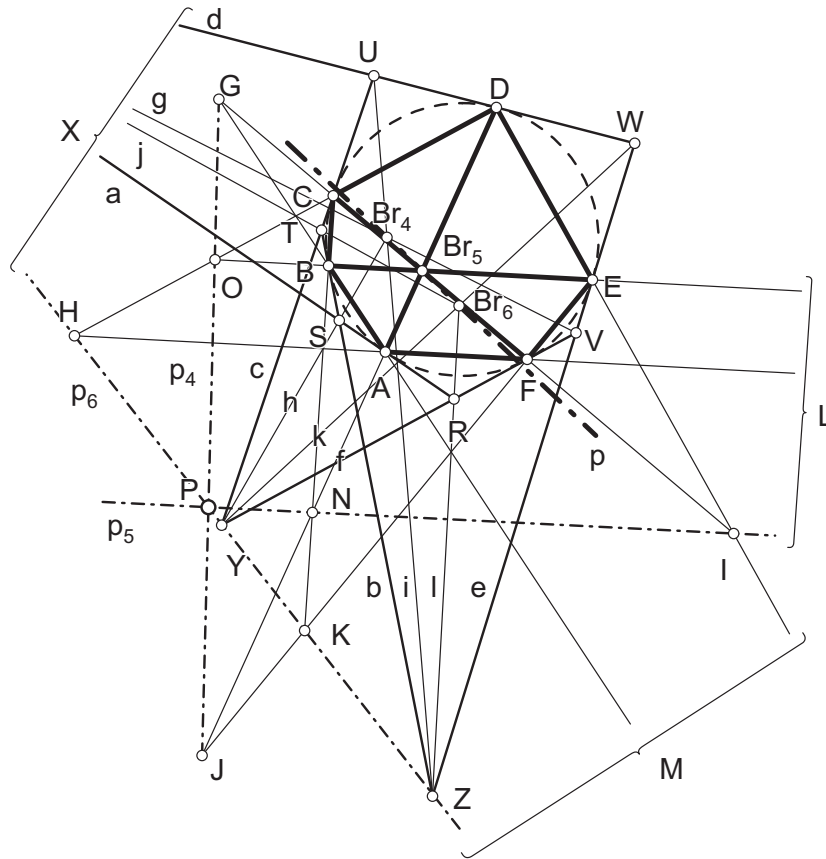
Geometryczną realizację (rys. 9) graficznego schematu konfiguracji (28₄) (rys. 11) przeprowadzimy w następujący sposób: obieramy na płaszczyźnie dowolny punkt, np. Y i prowadzimy 3 incydentne z nim proste, np. fk . Na każdej z prostych obieramy 3 dalsze punkty, np. RFV , Br_5WO , TCU . Ustaliliśmy w ten sposób położenie 10 punktów i 3 prostych przecinających się w jednym z nich. W dalszej realizacji połączmy przyjęte punkty R z U , R z Br_5 itd., tzn. że przez każdy z przyjętych punktów poprowadzimy 3 proste. Przy połączeniu wszystkich punktów wg schematu (rys. 11) otrzymamy konfigurację. Ten sam schemat można zrealizować, obierając na płaszczyźnie dowolną prostą (np. f) i trzy incydentne z nią punkty YRV (rys. 10). Przez każdy punkt prowadzimy 3 dalsze proste, np. hkc , nla , gne W otrzymanej konfiguracji (28₄) punkt P przynależy do prostej p . Wynika stąd następujące twierdzenie:

„Punkt P przecięcia trzech prostych Pascala sześciokąta wpisanego w stożkową tworzącego konfigurację (16₃ 12₄), leży na prostej p wyznaczonej przez trzy punkty Brianchona sześcioboku tworzącego konfigurację (12₄ 16₃) opisanego na stożkowej w wierzchołkach sześciokąta”.



Rys. 12. Sześciokąty I, II, III wpisane w stożkową i sześcioboki I, II, III opisane na stożkowej
Fig. 12. Hexagons I, II, III inscribed in a conic and I, II, III circumscribed around it

Narysujmy taki sześciobok $\langle abcdef \rangle$, którego boki są styczne do stożkowej w wierzchołkach sześciokąta wpisanego $\langle ABCDEF \rangle$ (rys. 12). Niech następstwa boków sześciokątów I, II, III odpowiadają następstwom boków sześcioboków I, II, III (oraz IV, V, VI \rightarrow IV, V, VI). Otrzymany układ punktów i prostych nie tworzy konfiguracji (28₄), a punkt P nie leży na prostej p . Udowodnijmy, że prosta p jest biegunową punktu P ze względu na tę stożkową. Dowód sprowadza się do wykazania, że przynajmniej dwa punkty prostej Pascala są biegunowo sprzężone z odpowiednimi dwoma punktami Brianchona, to punkt przecięcia P tych prostych jest biegunem prostej p wyznaczonej przez punkty Brianchona.

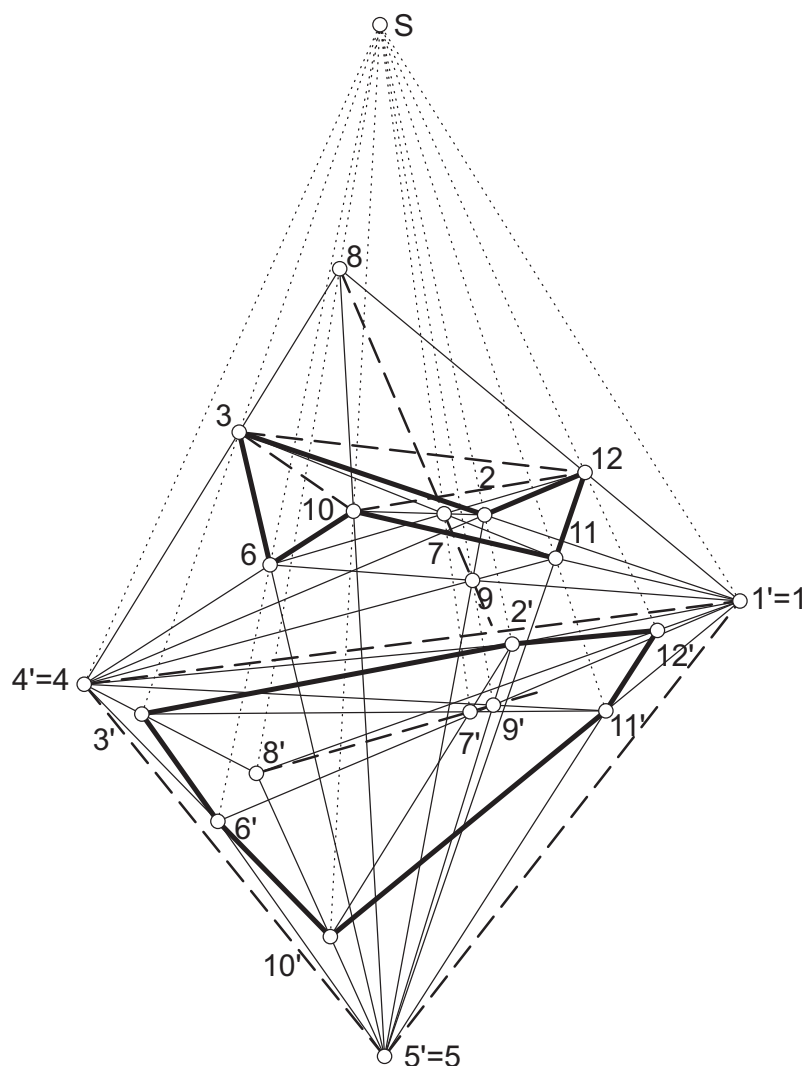


Rys. 13. Sześciokąty IV, V, VI wpisane w stożkową i sześcioboki IV, V, VI opisane na stożkowej
 Fig. 13. Hexagons IV, V, VI inscribed in a conic and IV, V, VI circumscribed around it

Do przeprowadzenia dowodu posłużymy się czworokątem $\langle ABEF \rangle$ (rys. 13). W czworokącie tym prosta g przechodząca przez punkt Br_4 jest bokiem trójkąta przekątnego, a punkt J leżący na prostej Pascala p_4 jest jego wierzchołkiem. Z własności czworokąta zupełnego wynika, że punkt J jest biegunowo sprzężony z prostą g przechodzącą przez punkt Br_4 . Taki sam dowód można przeprowadzić dla pozostałych punktów, wykazując słusność następującego twierdzenia:

„Jeżeli punkty styczności sześcioboku opisanego na stożkowej, tworzącego konfigurację $(12_4 16_3)$, są wierzchołkami sześciokąta wpisanego w stożkową tworzącego konfigurację $(16_3 12_4)$ i istnieje następstwo boków zgodne z następstwem wierzchołków, to prosta na której leżą punkty Brianchona jest biegunowo sprzężona z punktem, przez który przechodzą proste Pascala”.

3. KOLINEACYJNE PRZEKSZTAŁCENIE SZEŚCIOBOKU PŁASKIEGO W SZEŚCIOBOK PRZESTRZENNY



Rys. 14. Kolineacyjne przekształcenie konfiguracji płaskiej $(12_4 16_3)$ w konfigurację przestrzenną (12_6)
Fig. 14. Collineatory transformation of planar configuration of type $(12_4 16_3)$ into the spatial configuration of type (12_6)

Chcąc zrealizować przestrzenną konfigurację odpowiadającą płaskiej, należy wykazać, że każdą płaską figurę można uzyskać jako rzut pewnej przestrzennej figury. Aby to przeprowadzić, połączmy wszystkie punkty i proste, z obranym poza płaszczyznę rysunku punktem $[S]$, który uważać będziemy za środek rzutu (rys. 14). Nadajmy wszystkim punktom płaskiej konfiguracji przedstawionej na rysunku 14 znaki $1', 2', 3' \dots$. Niech punkty $1, 4, 5$ jednoznacznie z $1', 4', 5'$ pozostaną na rzutni. Przez punkty np. 4 i 5 poprowadźmy dowolną płaszczyznę nieprzechodzącą przez $[S]$. Promienie określone punktami $\overline{S, 8}$, $\overline{S, 10}$ i $\overline{S, 3}$ przebijają tę płaszczyznę w odpowiednich punktach $8, 10, 3$. Punkt 6 wyznaczony przez dwie proste przecinające się $\overline{3, 5}$ i $\overline{4, 10}$ leżące na tej płaszczyźnie, przynależy do tej płaszczyzny. Kolejna płaszczyzna wyznaczona punktami $1, 5, 8$ zostaje przebita przez promień $\overline{S, 12}$ w punkcie 12 . Punkt 11 leżący na tej płaszczyźnie otrzymamy jako punkt przecięcia prostych $\overline{1, 10}$ i $\overline{5, 12}$. Na trzeciej płaszczyźnie wyznaczonej punktami $1, 4, 8$ leży punkt 2 wspólny dla prostych $\overline{1, 3}$ i $\overline{4, 12}$. Trzy narysowane w ten sposób płaszczyzny przecinają się we wspólnym punkcie 8

będącym wierzchołkiem ostrosłupa o podstawie $1, 4, 5$. Otrzymany sześciobok przestrzenny $\langle 2, 3, 6, 10, 11, 12 \rangle$, którego boki leżą na ścianach ostrosłupa ściętego, jest przekształceniem rzutowym sześcioboku płaskiego $\langle 2', 3', 6', 10', 11', 12' \rangle$. Trzy punkty $7, 8, 9$ są punktami przecięcia przekątnych sześcioboku i leżą na jednej prostej. Wynika stąd następujące twierdzenie:

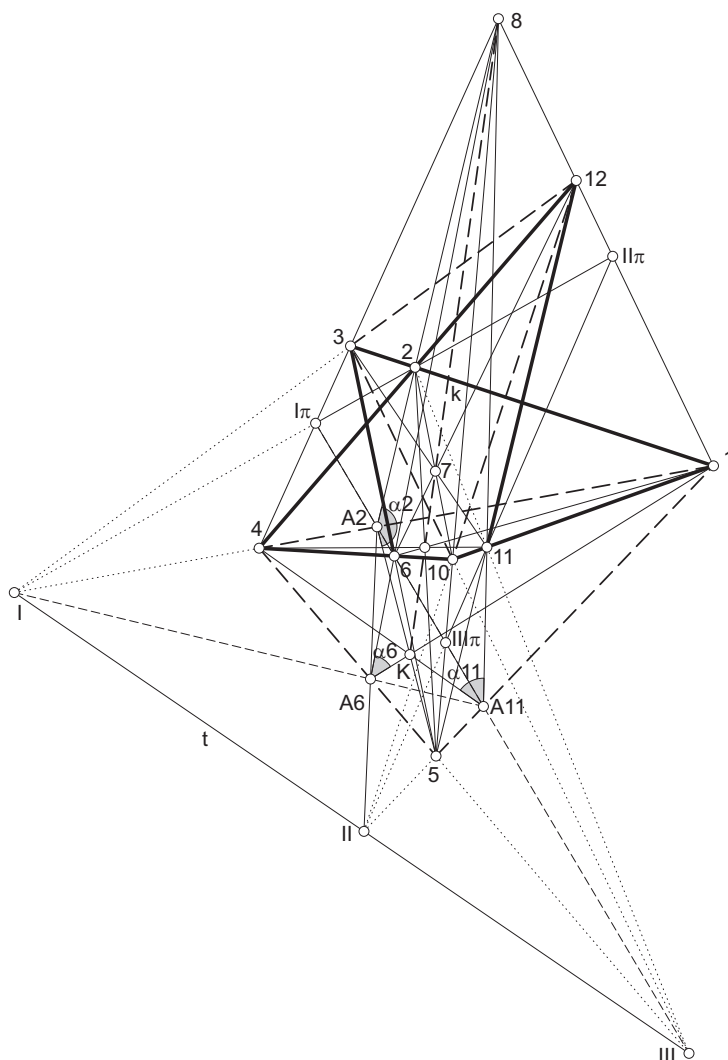
Trzy trójki przekątnych zamkniętego sześcioboku przestrzennego charakteryzującego się tym, że każdy bok przecina trzy inne, przechodzą przez trzy punkty, które są współliniowe.

Do tego twierdzenia można napisać twierdzenie odwrotne:

Sześć punktów przecięcia trzech niewspółpłaszczyznowych trójek prostych o współliniowych punktach przecięcia, z których każda prosta przecina trzy inne, wyznacza zamknięty sześciobok przestrzenny leżący na kwadryce.

Udowodnijmy to twierdzenie:

Na otrzymany sześciobok przestrzenny składa się sześć jego wierzchołków oraz trzy punkty przecięcia par przeciwległych boków. Przeciwnie boki tworzą pary odpowiadających sobie prostych w dwóch przestrzeniach kolineacyjnych. Kolineacja środkowa dwu przestrzeni określona jest między innymi przez środek kolineacji oraz trzy pary homologicznych punktów tych przestrzeni, nieleżących na jednej płaszczyźnie.



Rys. 15. Kolineacja środkowo-inwolucyjna sześcioboku przestrzennego
Fig. 15. Central and involutorial collineation of spatial hexagon

W naszym przykładzie (rys. 15) środkiem kolineacji jest wierzchołek 8 ostrosłupa ściętego, a punktami homologicznymi – punkty leżące na krawędziach wychodzących z tego wierzchołka. Punkty 3 i 4 , 10 i 5 , 12 i 1 są wierzchołkami trójkątnych podstaw ostrosłupa ściętego. Proste homologiczne wyznaczone tymi punktami $\overline{3, 5}$

$\overline{4, 10}$ przetną się w punkcie 6, proste $\overline{5, 12}$ i $\overline{10, 1}$ przetną się w punkcie 11, a proste $\overline{1, 3}$ i $\overline{12, 4}$ przetną się w punkcie 2. Te trzy punkty wyznaczają płaszczyznę kolineacyjną. Kolineacja środkowa posiada tę własność, że dwie różne płaszczyzny homologiczne dwóch przestrzeni przecinają się w prostej leżącej na płaszczyźnie kolineacji. Wszystkie elementy homologiczne leżące na dwóch różnych płaszczyznach homologicznych tych przestrzeni tworzą układy płaskie środkowo-kolineacyjne, w których osią kolineacji jest ich krawędź przecięcia, a środkiem – środek kolineacji tych przestrzeni. Dwa homologiczne układy płaskie wyznaczone dwoma podstawami $\langle 3, 10, 12 \rangle$ i $\langle 4, 5, 1 \rangle$ ostrosłupa ściętego przecinają się wzdłuż wspólnej krawędzi t , która jest osią kolineacji płaskiej tych układów i leży na płaszczyźnie π kolineacji przestrzennej, do której te dwa układy należą.

Poprowadźmy przez wszystkie trzy krawędzie ostrosłupa ściętego wychodzące z wierzchołka 8 oraz przez punkty przecięcia 11, 6, 2 przekątnych przeciwległych ścian – płaszczyzny $\alpha_{11}, \alpha_6, \alpha_2$. Wykażemy, że trzy płaszczyzny przetną się wzdłuż wspólnej krawędzi k . W tym celu połączmy punkty 2 i 11 leżące na płaszczyźnie kolineacji. Prosta w ten sposób wyznaczona przejdzie przez punkt III leżący na osi kolineacji dwóch układów płaskich. Prosta $\overline{2, 11}$ jest krawędzią przecięcia dwóch płaszczyzn 1, 3, 10 oraz 12, 4, 5. Płaszczyzny te przechodzą przez proste $\overline{3, 10}$ i $\overline{4, 5}$ mające wspólny punkt III, a więc muszą także przez ten punkt przechodzić.

Prosta $\overline{2, 11}$ jako krawędź przecięcia obydwu płaszczyzn musi przechodzić przez ich wspólny punkt III. Punktowi 2 odpowiada punkt A_2 , a punktowi 11 – A_{11} , przeto prosta łącząca punkty A_2 i A_{11} musi przejść przez punkt III. Podobnie można udowodnić, że prosta $\overline{A_2, A_6}$ przechodzi przez punkt II, a prosta $\overline{A_{11}, A_6}$ przechodzi przez punkt I. Na płaszczyźnie podstawy otrzymaliśmy układ, który tworzy kolineację o środku III i osi I, A_6 . W tym kolineacyjnym układzie punktowi A_{11} odpowiada punkt A_2 , a punktowi 5 odpowiada punkt 4. Te cztery punkty wyznaczają czworobok zupełny, którego przekątne przecinają się w punkcie K leżącym na osi kolineacji. Czyli że wszystkie trzy proste będące krawędzią przecięcia płaszczyzn $\alpha_{11}, \alpha_6, \alpha_2$ z podstawą ostrosłupa przecinają się we wspólnym punkcie K . Drugim wspólnym punktem przecięcia się tych płaszczyzn jest punkt 8, przez który te płaszczyzny prowadziliśmy. Dwa punkty 8 i K wyznaczają prostą będącą krawędzią przecięcia płaszczyzn $\alpha_{11}, \alpha_6, \alpha_2$.

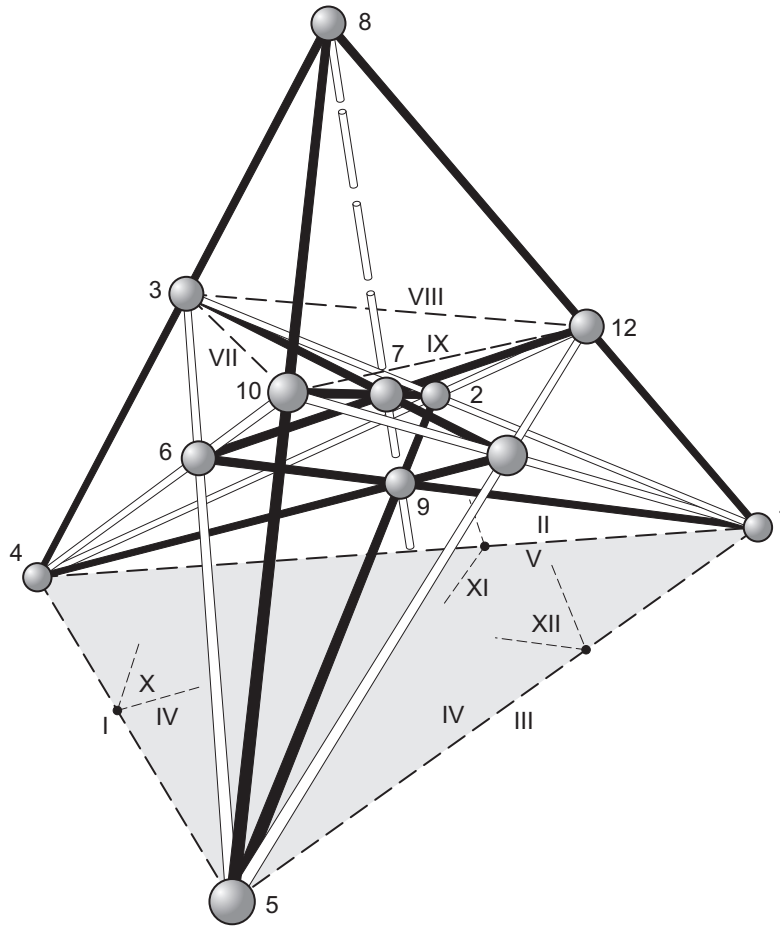
W kolejności musimy dowieść, że punkty 9 i 7 leżą na prostej k . W tym celu zauważmy, że płaszczyzna wyznaczona punktami 4, 10, 1 przetnie płaszczyzny α_{11} i α_6 wzdłuż krawędzi $\overline{6, 1}$ i $\overline{11, 4}$ mających wspólny punkt 9 leżący na krawędzi k przecięcia płaszczyzn α_{11} i α_6 . Podobnie płaszczyzna wyznaczona punktami 3, 12, 5 przetnie płaszczyzny α_{11} i α_6 w krawędziach $\overline{12, 6}$ i $\overline{3, 11}$ mających wspólny punkt 7 leżący na k . Trzy punkty 7, 8, 9 są punktami leżącymi na wspólnej prostej.

Wyznamy cechę określonej powyżej kolineacji środkowej dwu przestrzeni (rys. 15). Cechą kolineacji nazywamy dwustosunek czterech współliniowych punktów np. $(8, I_\pi, 3, 4)$, na które składają się: środek kolineacji 8, dowolny punkt leżący na płaszczyźnie kolineacji I_π oraz para punktów homologicznych 3 i 4 obydwu przestrzeni. Łatwo zauważyć, że cztery odpowiadające sobie punkty 3, 4 i 5, 11 wyznaczają płaski czworobok zupełny. W czworoboku tym zachodzi równość dwustosunków $(3, 4, I_\pi, 8) \overline{\wedge} (4, 3, I_\pi, 8)$. Stąd liczba $(3, 4, I_\pi, 8) = (4, 3, I_\pi, 8) = -1$, czyli że punkty 3 i 4 są harmonicznie sprzężone z I_π i 8. W przestrzeni rzutowej punkty I_π, II_π, III_π są punktami leżącymi na płaszczyźnie kolineacji. Punkty sobie odpowiadające 3, 4 jak i 11, 5 oraz 12, 1 są punktami leżącymi na kwadryce. Wszystkie te punkty wraz z punktem 8 tworzą grupy harmoniczne o cesze -1, a zatem kolineacja środkowa tych przestrzeni jest homologią harmoniczną nazywaną kolineacją środkowo-inwolucyjną. W inwolucji odpowiadające sobie elementy nazywamy biegunowo sprzężonymi. Płaszczyzna kolineacji π jest płaszczyzną biegunową środka 8 względem kwadryki.

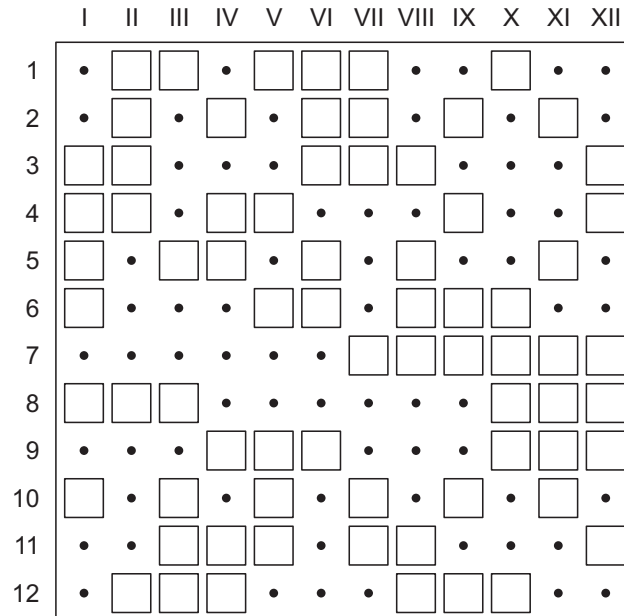
Rysunek 16 przedstawia konfigurację przestrzenną otrzymaną w wyniku rzutowego przekształcenia konfiguracji płaskiej, co uwidoczniono na rysunku 14. Każdą płaską konfigurację możemy przekształcić przy założeniu środka rzutu w dowolną konfigurację przestrzenną równoważną rzutowo.

Konfiguracją przestrzenną nazywamy taki układ p – punktów i f – płaszczyzn, że każdy punkt jest incydenty z tą samą ilością ϵ płaszczyzn, a każda płaszczyzna jest incydentna z tą samą ilością π punktów.

Jako konfigurację przestrzenną możemy też rozważać układ punktów i prostych z zachowaniem incydencji jak w figurze płaskiej. Nasza konfiguracja przestrzenna składa się z dwunastu punktów i dwunastu płaszczyzn. Na punkty konfiguracji składa się: sześć naroży trójkątnego ostrosłupa ściętego, jego wierzchołek, trzy punkty przecięcia przekątnych ścian, które połączone z przeciwległymi narożami utworzą dwie trójki prostych przecinających się w dwóch pozostałych punktach. Jako płaszczyzny konfiguracji wyodrębnimy: trzy ściany ostrosłupa, sześć płaszczyzn przekątnych wyznaczonych przez krawędzie boczne i punkt przecięcia przekątnych ściany przeciwległej. W tak uzyskanym utworze na każdej płaszczyźnie leży sześć punktów i przez każdy punkt przechodzi sześć płaszczyzn. Jest to konfiguracja typu punkt – płaszczyzna i nosi symbol (12_6) . Można też zauważyć, że przez każdą prostą przechodzą trzy płaszczyzny i na każdej płaszczyźnie leżą cztery proste, które tworzą czworobok zupełny.



Rys. 16. Geometryczna realizacja graficznego schematu konfiguracji (12_6)
 Fig. 16. Geometrical realization of configuration diagram of type (12_6)



Rys. 17. Graficzny schemat konfiguracji (12_6)
 Fig. 17. Diagram of configuration of type (12_6)

Dwanaście punktów i dwanaście płaszczyzn składających się na konfigurację (12_6) z zachowaniem zachodzącej między nimi incydencji ujęto w kwadratową tablicę przynależności (rys. 17), przedstawiającą graficzny schemat tej konfiguracji.

Podany zapis graficzny konfiguracji możemy również ująć w prostokątnym schemacie liczbowym. W schemacie tym kolumny reprezentują płaszczyzny oznaczone $I, II, III \dots XII$, a im przynależne punkty oznaczono $1, 2, 3 \dots 12$. Wypełniając schemat, musimy spełnić następujące warunki:

- w jednej kolumnie nie mogą powtarzać się dwie jednakowe liczby, gdyby to nastąpiło na płaszczyźnie, będzie leżało mniej niż sześć punktów;
- w dwóch kolumnach nie może wystąpić więcej niż trzy te same liczby, w przeciwnym wypadku mielibyśmy do czynienia ze zjednoczonymi płaszczyznami;
- każda liczba musi figurować w schemacie sześciokrotnie, ponieważ przez każdy punkt musi przechodzić sześć płaszczyzn.

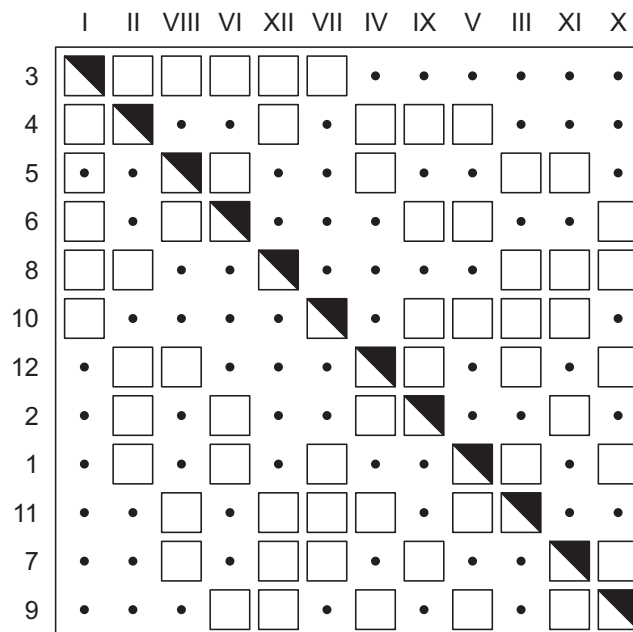
Są to warunki nieodzowne, aczkolwiek niewystarczające. Z istnienia schematu nie wynika, że konfiguracja taka może być zrealizowana. Konfigurację (12_6) można zapisać w następujący sposób:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
3	1	1	2	1	1	1	3	2	1	2	3
4	2	5	4	4	2	2	5	4	6	5	4
5	3	8	5	6	3	3	6	6	7	7	7
6	4	10	9	9	5	7	7	7	8	8	8
8	8	11	11	10	6	10	11	10	9	9	9
10	12	12	12	11	9	11	12	12	12	10	11

W otrzymanym zapisie dokonujemy pewnych zmian, które nie wpływają na konfigurację, a więc możemy:

- w każdej kolumnie zmienić kolejność liczb;
- zmienić kolejność kolumn;
- ponumerować inaczej punkty konfiguracji.

Graficzny schemat konfiguracji (12_6) przedstawiony na rysunku 17 przypomina macierz kwadratową. Każda macierz posiada tę własność, że można rzędy i kolumny tak uporządkować, aby znaki incydencyjne ugrupowały się w wymagany sposób. Rysunek 18 przedstawia tabelę incydencyjną otrzymaną w wyniku uporządkowania rzędów i kolumn w taki sposób, aby elementy macierzy były położone symetrycznie względem głównej przekątnej. Jeżeli tabela przynależności jest sama w sobie symetryczna, konfigurację nazywamy inwolucyjną. Obydwa schematy graficzne (rys. 17 i 18) są schematami ekwiwalentnymi.



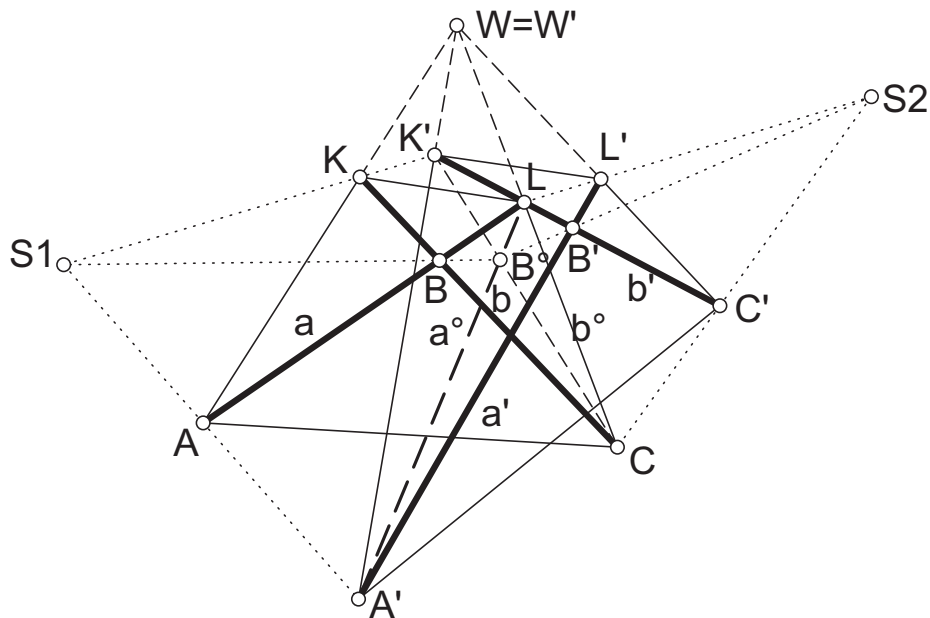
Rys. 18. Graficzny schemat konfiguracji (12_6) w układzie inwolucyjnym
Fig. 18. Diagram of configuration of type (12_6)

4. PRZEKSZTAŁCENIA RZUTOWE SZEŚCIOBOKU PRZESTRZENNEGO WYZNACZAJĄCEGO KWADRYKĘ SKOŚNĄ

Na sześcioboku przestrzennym $\langle ABCDEF \rangle$ charakteryzującym się tym, że każdy jego bok przecina trzy inne rozpięty jest ostrosłup ścięty Δ o podstawach $\langle ACE \rangle$, $\langle KLM \rangle$ i wierzchołku W .

Jak wiadomo istnieje i jest jednoznacznie określone przekształcenie rzutowe przestrzeni przeprowadzające odpowiednio piętkę płaszczyzn (w której żadne cztery płaszczyzny nie należą do jednej wiązki), w dowolną inną piętkę płaszczyzn (w której również żadne cztery płaszczyzny nie przechodzą przez jeden punkt).

Istnieje więc takie przekształcenie rzutowe przestrzeni przeprowadzające pięć ścian ostrosłupa Δ o wierzchołku W rozpiętego na sześcioboku $\langle ABCDEF \rangle$, w płaszczyznę podporządkowanych im ścian ostrosłupa Δ' o wierzchołku W' rozpiętego na sześcioboku $\langle A'B'C'D'E'F' \rangle$. A zatem sześciobok $\langle ABCDEF \rangle$ wrysowany na ścianach ostrosłupa ściętego Δ można przekształcić w każdy dowolny sześciobok $\langle A'B'C'D'E'F' \rangle$ leżący na ścianach ostrosłupa Δ' .



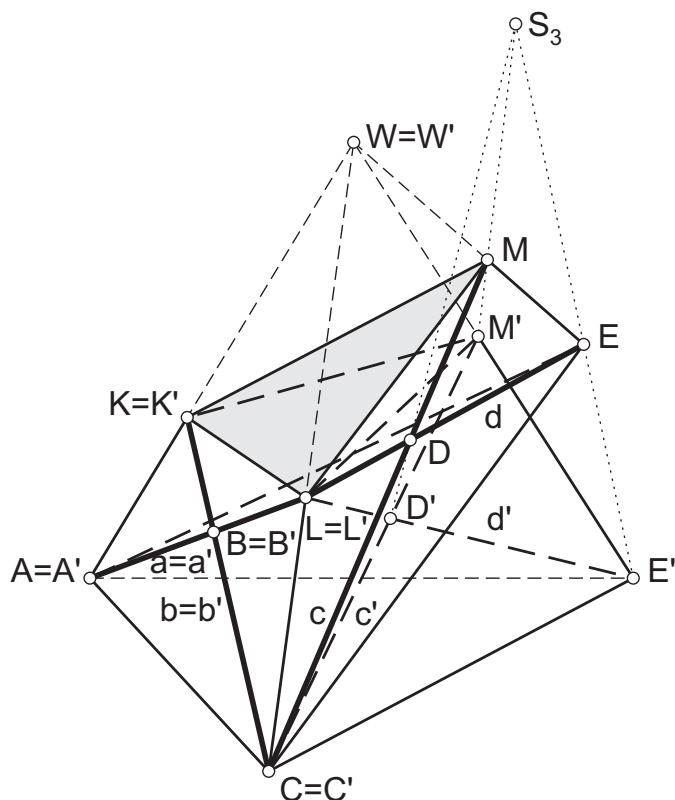
Rys. 19. Kolineacyjne przekształcenie ściany $ACKL$ ostrosłupa ściętego Δ w ścianę $A'C'K'L'$ ostrosłupa Δ'
Fig. 19. Collineatory transformation of $ACKL$ wall of frustum of pyramid Δ into the wall $A'C'K'L'$ of pyramid Δ'

W przestrzeni rzutowej, trójwymiarowej weźmy dwa różne ostrosłupy ścięte Δ i Δ' wraz z wrysowanymi na ich ścianach przekątnymi, które tworzą zamknięty sześciobok przestrzenny $\langle ABCDEF \rangle$ i $\langle A'B'C'D'E'F' \rangle$. Przekształćmy płaszczyznę ścian ostrosłupa Δ wraz z wrysowanymi przekątnymi w płaszczyznę podporządkowanych im ścian przekątnych ostrosłupa Δ' . W tym celu przyjmijmy takie położenie ostrosłupa Δ w stosunku do ostrosłupa Δ' , w którym jedna ze ścian pierwszego i jedna ze ścian drugiego ostrosłupa leży w tej samej płaszczyźnie, jednak tak, aby przekątne ścian nie pokrywały się, a jedynie wierzchołki były wspólne (rys. 19). Przy takim położeniu ścian możemy wyznaczyć dwa związki kolineacyjne φ_1 i φ_2 . Dwie kolineacje przestrzenne φ_1 i φ_2 , które mają elementy pewnej wiązki środkowej $[S]$ oraz elementy pewnego układu płaskiego odpowiednio wspólne, nazywamy przestrzeniami środkowo kolimacyjnymi.

Kolineacja φ_1 określana jest środkiem kolineacji otrzymanym w wyniku połączenia punktów $\overline{K, K'}$ i $\overline{A, A'}$ oraz osią $\overline{C, L}$. W tak otrzymanej kolineacji proste a i b przejdą odpowiednio w proste a_0 i b_0 , a punkty K i A w punkty K' i A' . Otrzymane proste a_0 i b_0 wraz z odpowiadającymi im prostymi a' i b' wyznaczą kolineację φ_2

o środku $[S_2]$ (L, L') i (C, C') oraz osi $K'A'$. W kolineacji tej proste a_0 i b_0 przejdą w proste a' i b' , a punkty L i C w punkty L' i C' . Obie kolineacje φ_1 i φ_2 pozwoliły na przejście prostych a i b w proste a' i b' . W ten sposób obie ściany zjednoczyły się.

Rysunek 20 przedstawia kolejne przekształcenie kolineacyjne φ_3 , prowadzące do końcowego przekształcenia jednego ostrosłupa w drugi. W przekształceniu tym przyjęto takie wzajemne położenie ostrosłupów, w którym na skutek przeprowadzonej kolineacji φ_1 i φ_2 jedna ze ścian ostrosłupa Δ i Δ' pokrywa się. Dwa układy płaskie ścian $\langle WCE \rangle$ i $\langle W'C'E' \rangle$ złączone na płaszczyźnie rysunku wyznaczają kolineację φ_3 o środku $[S_3]$ określonym punktami M, M' i E, E' i osią W, C' . W tak wyznaczonej kolineacji krawędź M, E przechodzi w M', E' , a tym samym ściany $\langle WCE \rangle$ i $\langle WEA \rangle$ w ściany $\langle W'C'E' \rangle$ i $\langle W'E'A' \rangle$. Powyższe przekształcenia prowadzą do przejścia ostrosłupa ściętego Δ w ostrosłup ścięty Δ' , a więc punkt W przechodzi w W' , a proste a, b, c, d, e, f w proste a', b', c', d', e', f' .



Rys. 20. Kolineacyjne przekształcenie ścian $CELM$ i $AEKM$ ostrosłupa Δ w ściany $C'E'L'M'$ i $A'E'K'M'$ ostrosłupa Δ'
Fig. 20. Collineatory transformation of $CELM$ and $AEKM$ walls of pyramid Δ into walls $C'E'L'M'$ and $A'E'K'M'$ of pyramid Δ' .

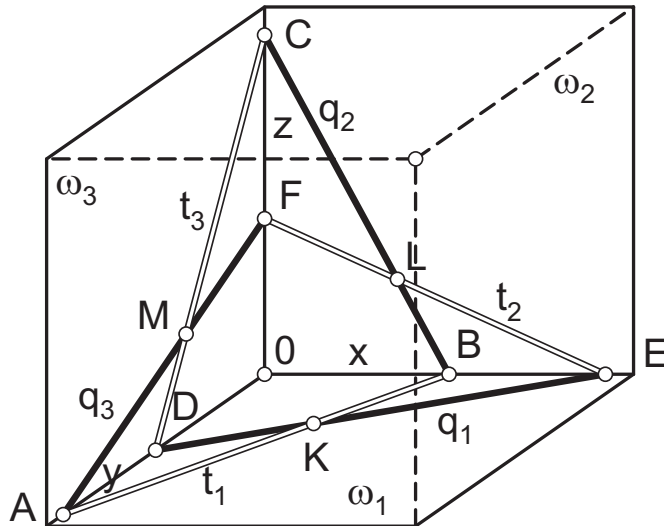
Kwadrang prostokreślną F^2 wyznacza zamknięty sześciobok przestrzenny, którego każdy bok przecina trzy inne. Zatem przy każdym przekształceniu rzutowym przeprowadzającym zadany sześciobok $\langle ABCDEF \rangle$ w dowolny sześciobok $\langle A'B'C'D'E'F' \rangle$ powierzchnia Φ^2 , będąca kwadrangą, przechodzi w inną powierzchnię $\Phi^{2'}$ równoważną rzutowo.

5. TWORZENIE KWADRYK SKOŚNYCH WYZNACZONYCH SZEŚCIOBOKIEM PRZESTRZENNYM

5.1. Hiperboloida skośna

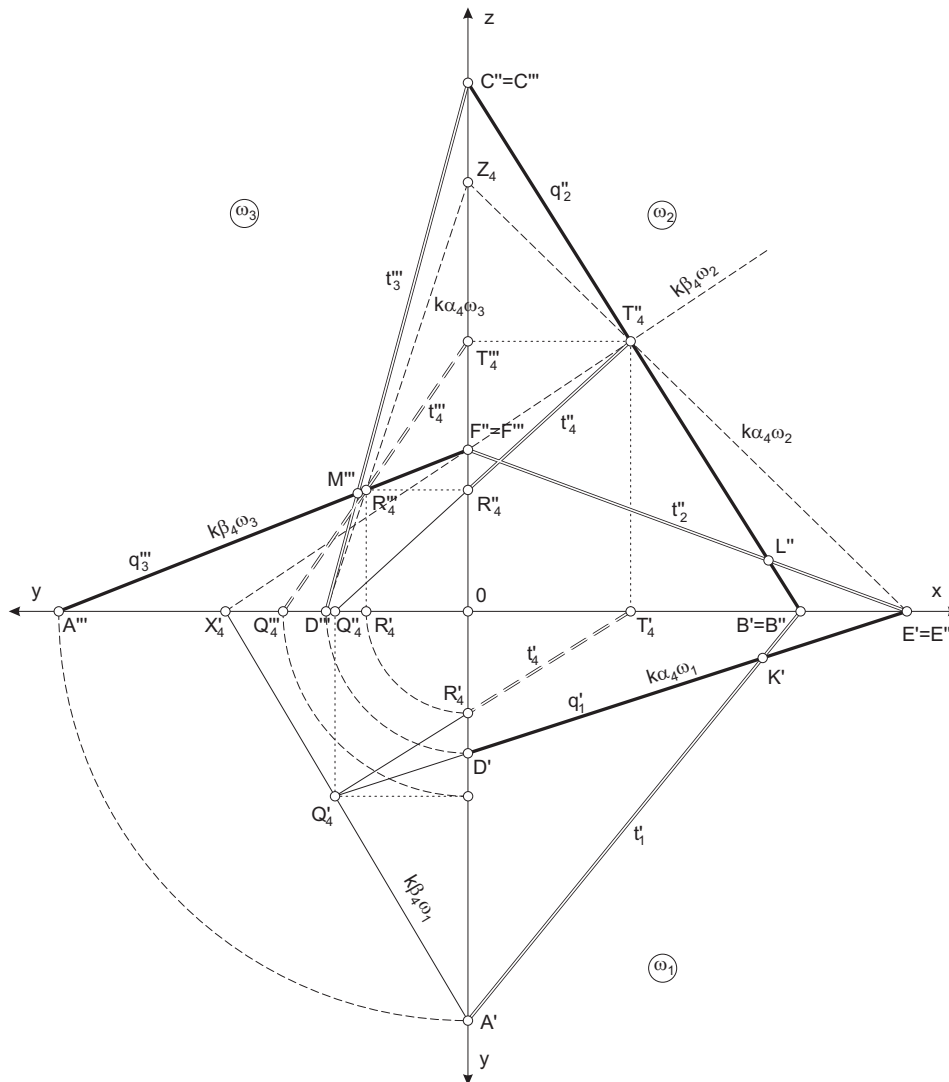
Weźmy trzy dowolne płaszczyzny $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ przecinające się we wspólnym punkcie O i tworzące ze sobą krawędzie $x = \omega_1 \cdot \omega_2, y = \omega_1 \cdot \omega_3, z = \omega_2 \cdot \omega_3$ (rys. 21). Na każdej z tych płaszczyzn przyjmijmy prostą dowolną nieprzecinającą pozostałych dwóch prostych. Otrzymamy trzy proste skośne. Każda prosta przecina krawędzie x, y, z w dwóch punktach, a mianowicie: prosta $t_1 \in \omega_1$ przecina krawędź x w punkcie B , krawędź y w punkcie A , prosta $t_2 \in \omega_2$ przecina krawędź x w punkcie E , krawędź z w punkcie F , prosta $t_3 \in \omega_3$ przecina krawędź z w punkcie C , krawędź y w punkcie D . Połączmy otrzymane punkty $ABCDEF$, tzn. punkt B z C , D z E i F z A , wyznaczmy w ten sposób inne trzy proste skośne q_1, q_2, q_3 , leżące odpowiednio na płaszczyznach $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Skonstruowaliśmy sześciobok przestrzenny o wierzchołkach $\langle ABCDEF \rangle$. **Sześciobok tym się charakteryzuje, że każdy jego bok przecina trzy inne.** Wykażmy słuszność tego twierdzenia. Zgodnie z założeniem prosta $t_1 \in \omega_1$ ma wspólne punkty A i B z prostymi q_3 i q_2 , w których to punktach proste te przebiegają płaszczyznę ω_1 . Proste q_1 i t_1 leżące na płaszczyźnie ω_1 są prostymi przecinającymi się w punkcie K . Pokazaliśmy, że prosta t_1 przecina proste q_1, q_2, q_3 w punktach K, B, A . To samo możemy wykazać dla każdego innego boku.

W otrzymanej konfiguracji przestrzennej każda prosta należąca do zbioru prostych t przecina wszystkie proste należące do zbioru q i odwrotnie, każda prosta należąca do zbioru q przecina wszystkie proste należące do zbioru t , natomiast proste należące do jednego zbioru są względem siebie skośne.



Rys. 21. Sześciobok przestrzenny wyznaczający hiperboloidę skośną
Fig. 21. Spatial hexagon determining the curved hyperboloid

Chcąc wyznaczyć kolejne proste zbioru q czy t , musimy wykonać następujące konstrukcje. Wyznaczając np. prostą t_4 (rys. 22), poprowadźmy przez dowolny punkt T_4 prostą q_2 i przez prostą q_1 płaszczyznę α_4 oraz przez ten sam punkt i prostą q_3 płaszczyznę β_4 . Płaszczyzna α_4 przetnie płaszczyznę ω_3 wzdłuż krawędzi $k \alpha_4 \omega_3$, a leżąca na niej prosta q_3 w punkcie R_4 . Płaszczyzna β_4 ma wspólną krawędź $k \beta_4 \omega_1$ z płaszczyzną ω_1 , która przetnie prostą q_1 w punkcie Q_4 . Punkty T_4, R_4, Q_4 leżą na prostej t_4 , która jest krawędzią przecięcia płaszczyzn α_4 i β_4 .



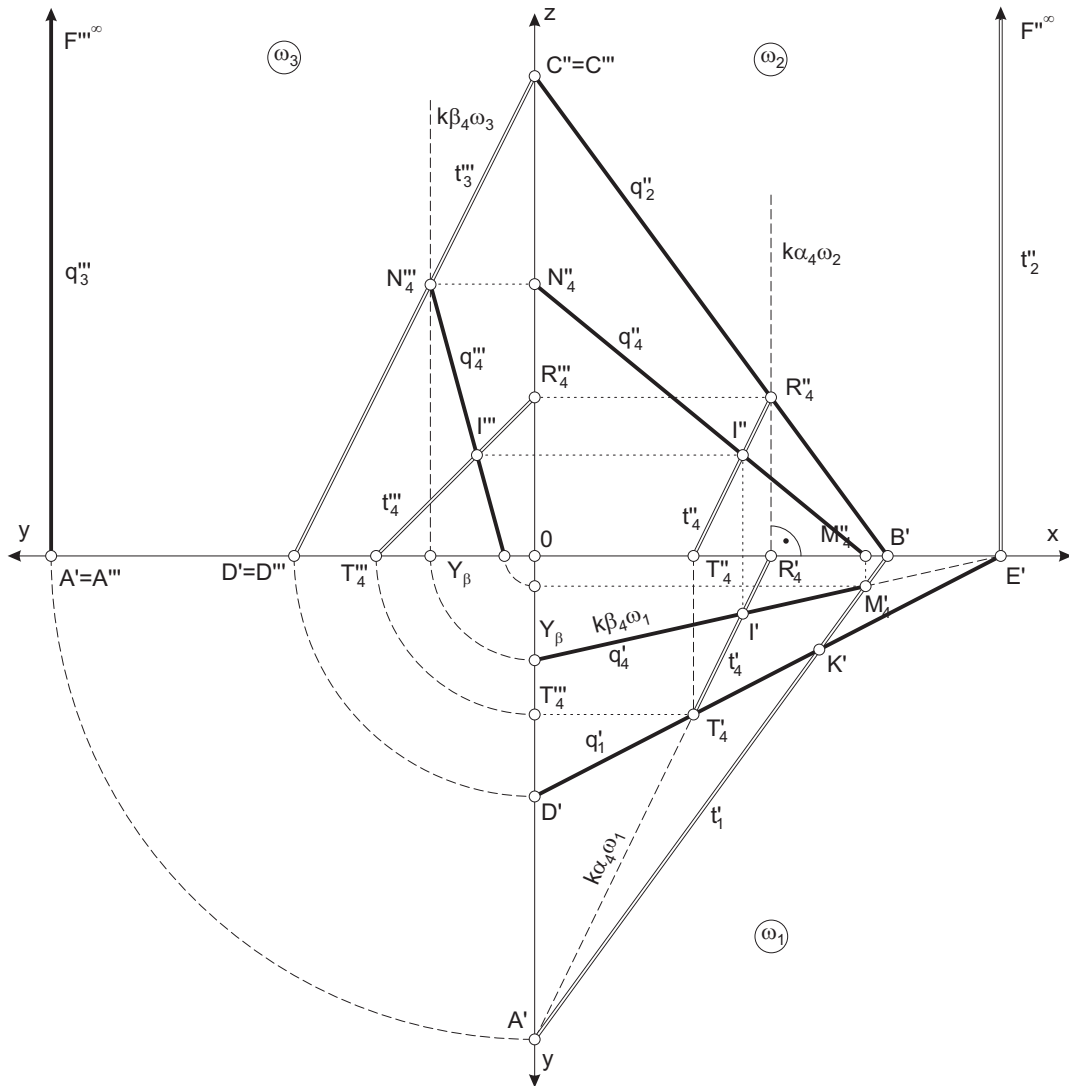
Rys. 22. Sposób znajdowania tworzących hiperboloidy skośnej wyznaczonej sześciobokiem przestrzennym $t_1, t_2, t_3, q_1, q_2, q_3$

Fig. 22. The determining way of generatrices for curved hyperboloid that is determined by spatial hexagon $t_1, t_2, t_3, q_1, q_2, q_3$

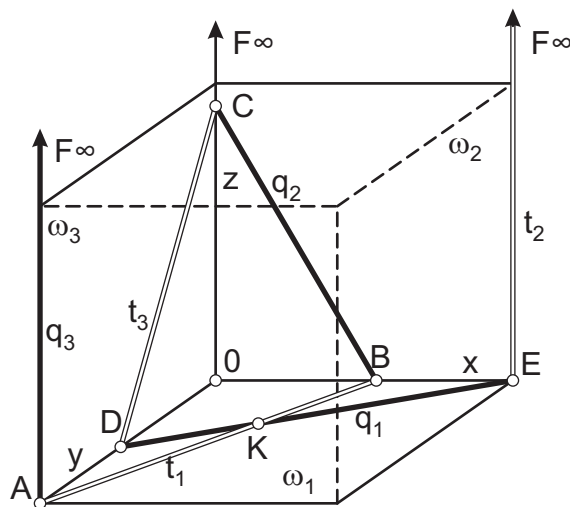
Z powyższego rozważania wynika konstrukcja uproszczona polegająca na znalezieniu tylko punktu R_4 . Poprowadzona płaszczyzna α_4 przez prostą q_1 ma wspólne krawędzie z płaszczyznami ω_2 i ω_3 przechodzące przez punkty D i E . Jeżeli poprowadzimy z punktu E prostą $k \alpha_4 \omega_2$ przechodzącą przez punkt T_4 , to przetnie ona krawędź z w punkcie I_4 . Prosta $k \alpha_4 \omega_3$ przechodząca przez punkty I_4 i D przetnie prostą q_3 w punkcie R_4 . Punkty T_4 i R_4 wyznaczą szukaną prostą t_4 , która ma wspólny punkt Q_4 z prostą q_1 . Jeżeli punkt T przesuwa się po prostej q_2 poprzez położenia $T_4, T_5, T_6 \dots T_n$, wówczas zbiór tak wyznaczonych prostych $t_4, t_5, t_6 \dots t_n$ utworzy powierzchnię prostokreślną stopnia drugiego, którą nazywamy hiperboloidą skośną. Wszystkie proste w ten sposób powstałe są tworzącymi powierzchni.

Do zbioru tworzących hiperboloidy skośnej zaliczamy również te proste, które przecinają dwie, a są równoległe do trzeciej prostej.

Weźmy taki sześciobok przestrzenny mający wierzchołki $\langle ABCDEF \rangle$, którego dwa boki q_3 i t_2 są do siebie równoległe i mają z krawędzią wspólny punkt F (rys. 23, rys. 24), pozostałe boki t_1, t_3, q_1, q_2 utworzą czworokąt przestrzenny $\langle DKBC \rangle$, którego rzutem o kierunku z na płaszczyznę ω_1 jest czworokąt płaski $\langle KDOB \rangle$. Zatem pęk płaszczyzn przechodzących przez prostą q_3 pozwoli bez pomocniczych konstrukcji wyznaczyć zbiór prostych t przecinających pozostałe dwa boki ze zbioru q . W tym celu poprowadźmy przez dowolnie obrany punkt T_4 na prostej q_1 i przez prostą q_3 płaszczyznę α_4 . Przetnie ona płaszczyznę ω_1 wzdłuż krawędzi $k \alpha_4 \omega_1$ i płaszczyznę ω_2 wzdłuż krawędzi $k \alpha_4 \omega_2$. Otrzymane krawędzie mają z prostymi q_1 i q_2 wspólne punkty T_4 i R_4 , które wyznaczają tworzącą t_4 . Tworząca t_4 jako leżąca na płaszczyźnie α_4 przecina prostą q_3 , przez którą przeprowadzono tę płaszczyznę. Podobnie postępujemy, wyznaczając tworzące rodziny q .



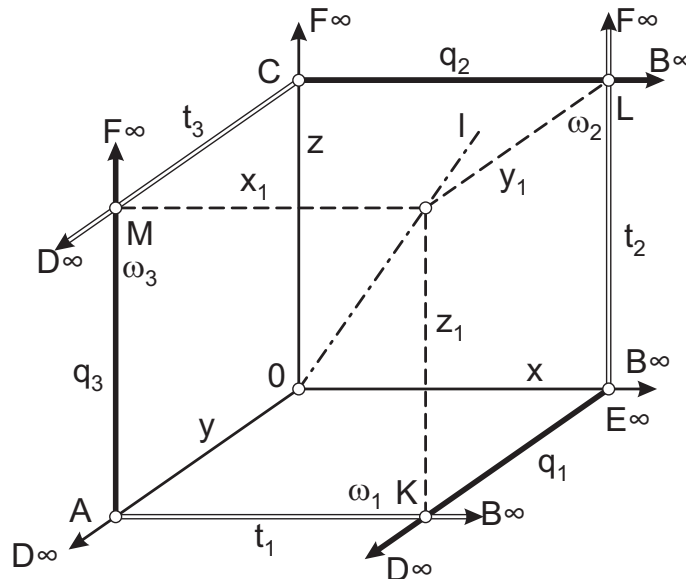
Rys. 23. Wyznaczanie tworzących hiperboloidy skośnej określonej przez sześciobok przestrzenny o dwóch bokach równoległych
 Fig. 23. The determining way of generatrices for curved hyperboloid that is determined by spatial hexagon with two parallel sides



Rys. 24. Sześciobok przestrzenny o dwóch bokach równoległych wyznaczający hiperboloidę skośną
 Fig. 24. Spatial hexagon with two parallel sides determining the curved hyperboloid

5.2. Hiperboloida obrotowa

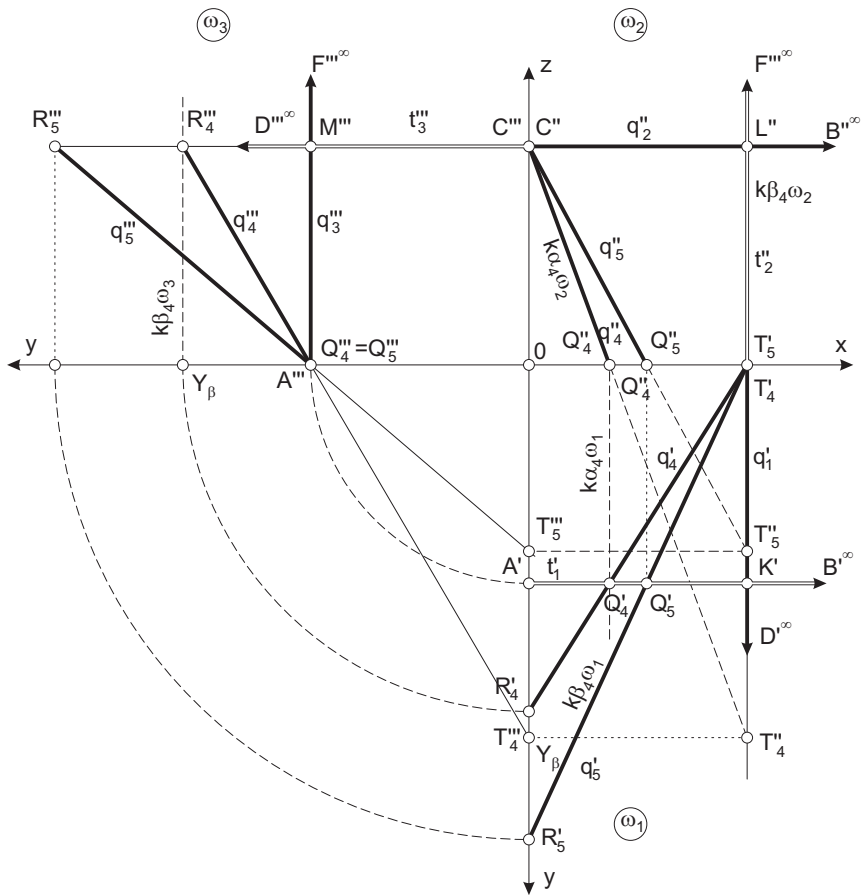
W szczególnym przypadku hiperboloida skośna może być powierzchnią obrotową. Wówczas każda płaszczyzna przechodząca przez oś obrotu l hiperboloidy obrotowej jest płaszczyzną prostokątnej symetrii tej powierzchni i przecina ją w południkach, które są hiperbolami. Każdy przekrój płaszczyzną dowolną jest elipsą, a płaszczyzną prostopadłą do osi l – okręgiem. Prócz tych płaszczyzn istnieje jeszcze jedna płaszczyzna prostokątnej symetrii $\varepsilon \perp l$, przecinająca hiperboloidę w okręgu szyjnym. Hiperboloidę obrotową utworzy taki sześciobok przestrzenny o wierzchołkach $\langle AKELCM \rangle$, którego przeciwległe boki są do siebie równoległe, tzn. $t_1 \parallel q_2$, $t_2 \parallel q_3$, $t_3 \parallel q_1$ i przecinają krawędzie x, y, z płaszczyzn na których leżą, odpowiednio w punktach B^∞, F^∞ i D^∞ (rys. 25). Narysowany w ten sposób sześciobok przestrzenny ma oś l prostokątnej symetrii. Oś l wyznaczona jest przez punkt O przecięcia przekątnych x, y, z sześcioboku oraz przez punkt P przecięcia przekątnych x_1, y_1, z_1 . Narysujmy taki sześciobok przestrzenny o wierzchołkach $\langle AKELCM \rangle$, którego boki są krawędziami romboedru o przekątnej l \overline{OP} prostopadłej do rzutni (rys. 27). Rzutem o kierunku l sześcioboku przestrzennego jest sześciobok płaski foremny $\langle A'K'E'L'C'M' \rangle$. Jeżeli przekroimy sześciobok płaszczyznami prostopadłymi do osi l przechodzącymi przez punkty O i P oraz punkt, który jest połową odcinka \overline{OP} , otrzymamy punkty leżące na trzech współśrodkowych okręgach k_1, k_2, k_3 . Każdy bok sześcioboku przecina okręgi k_1, k_2, k_3 . Zatem każda płaszczyzna prostopadła do osi l przetnie przyjęty sześciobok w punktach, które leżą na okręgach o środku przynależnym do osi l . Stąd wniosek: jeżeli obrócimy sześciobok wokół osi l , to każdy punkt jego boków zakreśli okrąg, leżący w płaszczyźnie prostopadłej do osi l . Okrąg k_3 zakreślony przez punkt, którego odległość od osi l jest najmniejsza, nazywamy okręgiem szyjnym. Wszystkie inne okręgi są równoleżnikami. Hiperboloidę obrotową wyznaczają więc dwie proste skośne, z których jedna jako tworząca obraca się wokół drugiej, która jest osią obrotu.



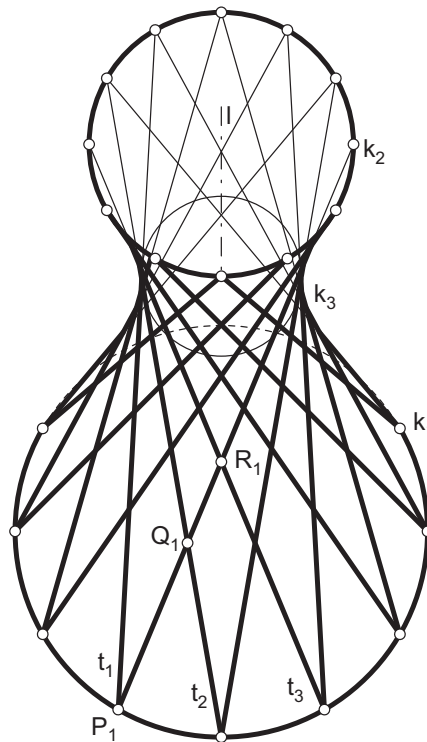
Rys. 25. Sześciobok przestrzenny wyznaczający hiperboloidę obrotową
Fig. 25. Spatial hexagon determining the hyperboloid of revolution

Mając dany sześciobok przestrzenny (rys. 26) i chcąc wyznaczyć dalsze tworzące, postępujemy jak przy hiperboloidzie skośnej. Obieramy na boku t_1 dowolny punkt Q_4 . Przez obrany punkt Q_4 i prostą t_3 prowadzimy płaszczyznę α_4 oraz przez ten sam punkt i prostą t_2 płaszczyznę β_4 . Płaszczyzna α_4 przetnie płaszczyznę ω_2 w krawędzi $k \alpha_4 \omega_2$, a leżącą na niej prostą t_2 w punkcie T_4 .

Natomiast płaszczyzna ω_1 ma z płaszczyzną α_4 krawędź $k \alpha_4 \omega_1$. Obydwie krawędzie mają wspólny punkt Q_4 z osią x . Płaszczyzna β_4 mająca wspólną krawędź $k \beta_4 \omega_1$ z płaszczyzną ω_1 i $k \beta_4 \omega_3$ z płaszczyzną ω_3 przetnie prostą t_3 w punkcie R_4 . Wszystkie trzy punkty Q_4, T_4, R_4 leżą na prostej q_4 , która jest krawędzią przecięcia płaszczyzn α_4 i β_4 . Prosta ta w rzucie pokrywa się z tworzącą t_1 , a ponieważ ma wspólne punkty R_4 i T_4 z tworzącymi t_3 i t_2 , dlatego musi mieć to samo nachylenie i przeciwny zwrot co prosta t_1 . Wynika stąd konstrukcja uproszczona wyznaczania tworzącej, mianowicie, chcąc wykreślić przez punkt Q_5 tworzącą q_5 , rysujemy przez ten punkt prostą $k \alpha_5 \omega_1$ równoległą do y i przecinającą x w punkcie V . Przez otrzymany punkt V z punktu C rysujemy prostą $k \alpha_5 \omega_2$, która przecina bok t_2 w punkcie T_5 . Punkty Q_5 i T_5 wyznaczają tworzącą q_5 przecinającą tworzącą t_3 w punkcie R_5 . Postępując dalej, możemy powiedzieć, że wszystkie proste leżące w płaszczyznach stycznych, prostopadłych do poziomego okręgu szyjnego i mających jednakowe nachylenie, wyznaczają hiperboloidę obrotową.

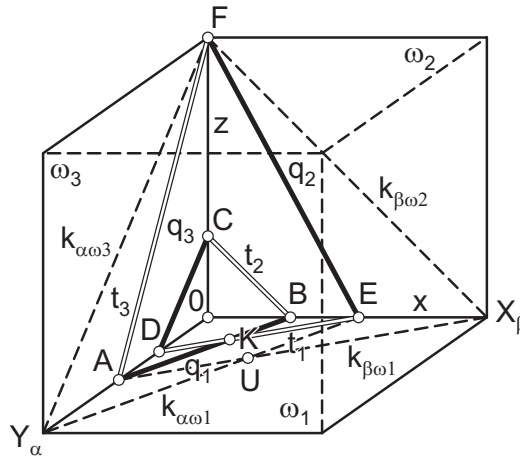


Rys. 26. Sposób znajdowania tworzących hiperboloidy obrotowej wyznaczonej sześciobokiem przestrzennym $\langle t_1, t_2, t_3, q_1, q_2, q_3 \rangle$
 Fig. 26. The determining way of generatrices for hyperboloid of revolution defined by spatial hexagon $\langle t_1, t_2, t_3, q_1, q_2, q_3 \rangle$



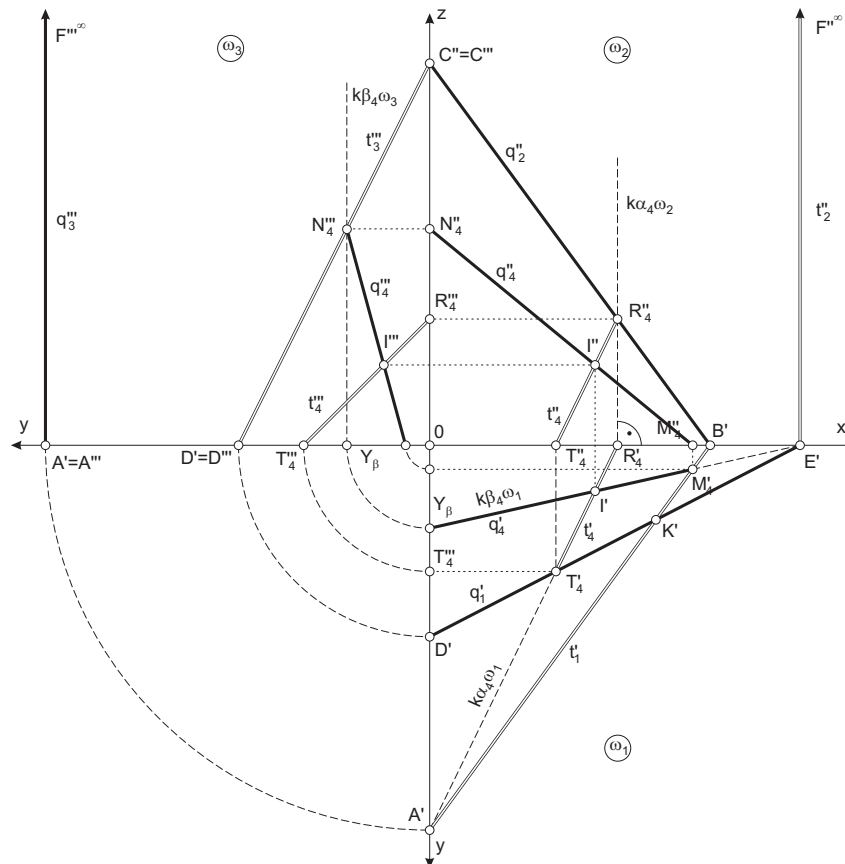
Rys. 27. Hiperboloida obrotowa
 Fig. 27. Hyperboloid of revolution

5.3. Paraboloida hiperboliczna



Rys. 28. Sześciobok przestrzenny wyznaczający paraboloidę hiperboliczną
Fig. 28. Spatial hexagon determining the hyperbolic paraboloid

Z rozważań o hiperboloidzie skośnej wynikało, że wyznaczają ją trzy proste skośne, jeżeli nie są wszystkie trzy równoległe do tej samej płaszczyzny – nie będąc równoległe do siebie. Gdy kierujące są równoległe do jednej płaszczyzny, wówczas wyznaczają powierzchnię prostokreślną stopnia II zwaną paraboloidą hiperboliczną. Chcąc narysować sześciobok przestrzenny (rys. 28), którego trzy boki t_1, t_2, t_3 byłyby równoległe do obranej płaszczyzny α oraz trzy inne boki q_1, q_2, q_3 do płaszczyzny β , należy: przyjąć dowolną płaszczyznę α , która ma krawędzie $k \alpha \omega_1$ z płaszczyzną ω_1 , $k \alpha \omega_3$ z płaszczyzną ω_3 i $k \alpha \omega_2$ z płaszczyzną ω_2 oraz przyjąć płaszczyznę β mającą krawędzie $k \beta \omega_1$ z ω_1 , $k \beta \omega_2$ z ω_2 i $k \beta \omega_3$ z ω_3 . Wykreślmy z punktu A przecięcia krawędzi $k \beta \omega_1$ z krawędzią y , prostą q_1 równoległą do krawędzi $k \alpha \omega_1$, czyli do płaszczyzny α . Prosta q_1 przetnie oś x w punkcie B . Z punktu tego kreślimy prostą t_2 równoległą do krawędzi $k \beta \omega_2$, czyli do płaszczyzny β .



Rys. 29. Wyznaczanie tworzących paraboloidy hiperbolicznej opartej na sześcioboku przestrzennym $\langle t_1, t_2, t_3, q_1, q_2, q_3 \rangle$
Fig. 29. The determining way of generatrices for the hyperbolic paraboloid on the spatial hexagon $t_1, t_2, t_3, q_1, q_2, q_3$

Prosta ta ma wspólny punkt C z krawędzią z . Prowadząc w podobny sposób dalsze proste t_3, t_1, q_2, q_3 jako równoległe lub przynależne na przemian do płaszczyzny α i β , narysujemy zamknięty sześciobok o wierzchołkach $\langle ABCDEF \rangle$. Dowód na to, że sześciobok jest zamknięty, przeprowadzimy w następujący sposób.

Narysujemy płaszczyznę ω_1 daną prostymi x, y , a na niej proste: t_1 równoległą do $k\alpha\omega_1$ i q_1 równoległą do $k\beta\omega_1$ (rys. 30). Jeżeli połączymy odpowiednio punkty $\overline{Y_\beta, X_\alpha}$, $\overline{A, E}$ i $\overline{D, B}$, otrzymamy dwa czworokąty, które mają trzy boki wspólne i przekątne równoległe. Wynika to z twierdzenia Talesa. Układając proporcje:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OX_\alpha}} \quad i \quad \frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OY_\beta}}$$

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OE}}{\overline{OA} \cdot \overline{OE}} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{OX_\alpha}}{\overline{OB} \cdot \overline{OY_\beta}}$$

$$\overline{OD} \cdot \overline{OX_\alpha} = \overline{OB} \cdot \overline{OY_\beta}$$

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OY_\beta}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OX_\alpha}}$$

Potwierdzamy równoległość boków \overline{DB} i $\overline{Y_\beta, X_\alpha}$. Jeżeli przez powyższe dwie proste równoległe \overline{DB} i $\overline{Y_\beta, X_\alpha}$ leżące na ω_1 (rys. 30) poprowadzimy płaszczyzny do siebie równoległe w taki sposób, aby jedna z płaszczyzn przecięła ω_2 i ω_3 w krawędziach $k\beta\omega_2$ i $k\beta\omega_3$, to druga płaszczyzna przetnie ω_2 i ω_3 w krawędziach q_2 i t_3 . Stąd wniosek, że sześciobok o wierzchołkach $\langle ABCDEF \rangle$ jest zamkniętym sześciobokiem.

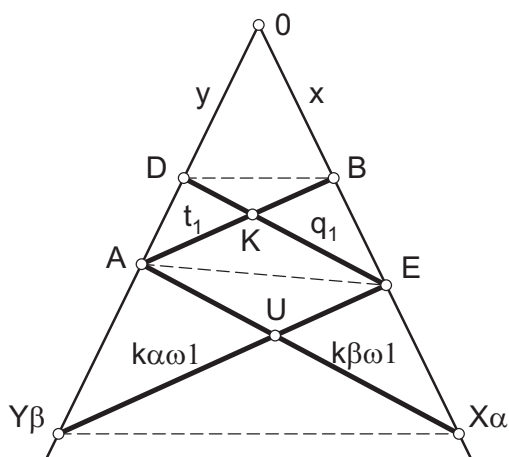


Fig. 30. Rysunek na dowód że sześciobok przestrzenny jest sześciobokiem zamkniętym
Fig. 30. The proof that the spatial hexagon determining the hyperbolic paraboloid is hexagon closed

Dla wyznaczenia dowolnej prostej (tworzącej) leżącej na paraboloidzie hiperbolicznej wybieramy np. na boku q_3 punkt T_4 (rys. 29). Przez ten punkt prowadzimy prostą a leżącą na płaszczyźnie β równoległą do krawędzi $k\alpha\beta$. Prosta ta przebija płaszczyznę ω_1 w punkcie IV leżącym na krawędzi $k\beta\omega_1$. Rysując z punktu IV prostą b równoległą do $k\alpha\omega_1$, otrzymamy punkt Q_4 przecięcia z prostą q_1 . Punkty T_4 i Q_4 wyznaczają krawędź t_4 , która jest równoległa do płaszczyzny α , ponieważ leży na płaszczyźnie $a \times b$ równoległej do α . Możemy udowodnić, że dowolnie obrany punkt T_4 dzieli odcinek \overline{AF} w tej samej proporcji co punkt Q_4 odcinek \overline{EK} . Z twierdzenia Talesa wynika równość proporcji:

$$\frac{\overline{FT_4}}{\overline{UIV}} = \frac{\overline{T_4A}}{\overline{IVA}}$$

Z kolei prosta b równoległa do $k\alpha\omega_1$ i równoległa do t_1 odcina na prostych równoległych $k\beta\omega_1$ i q_1 odcinki przystające. Zatem każdy czworokąt przestrzenny (np. $\langle AKEF \rangle$) wyznacza paraboloidę hiperboliczną (o tworzących \overline{AK} , \overline{EF} i \overline{KE} , \overline{FA}).

6. PEWNE SZCZEGÓLNE WŁASNOŚCI KWADRYK SKOŚNYCH W ZASTOSOWANIACH

Powierzchnie prostokreślne o podwójnej krzywiznie (nierozwijalne), nazywane także kwadrykami skośnymi lub wichrowatymi, mają duże zastosowanie w praktyce inżynierskiej, szczególnie w konstrukcjach budowlanych jako: sklepienia, pokrycia dachowe dużych obiektów (stadionów, hal) (Bieliński i in.).

Niekwestionowana obecność geometrii w architekturze, budownictwie, drogownictwie, konstrukcjach została już wielokrotnie w literaturze utrwalona i jest tak oczywista, że nieomal... niezauważalna (Czech 2001).

Podstawowym zadaniem każdego konstruktora jest zaprojektowanie konstrukcji o racjonalnych kształtach. Formy powierzchniowe wykorzystywane w budownictwie powinny być dostosowane do wymagań techniki budowlanej, a zatem ich geometria powinna być możliwie prosta, by nie powodować zbyt dużych trudności podczas realizacji przy stosowaniu środków i metod dostępnych na placu budowy. Formy konstrukcji powierzchniowych powinny być dobierane w zależności od:

- funkcji jaką mają spełniać,
- gabarytów obiektu,
- rodzaju materiału budowlanego,
- warunków statycznych,
- względów estetycznych,

Za nadawaniem formom stosowanym w budownictwie kształtów powierzchni prostokreślnych przemawia między innymi fakt, że ich realizacja praktyczna jest ułatwiona, ponieważ większość dotychczasowych stosowanych konstrukcji żelbetowych wykonuje się na rusztowaniach z desek. Prostokreślność konstrukcji ułatwia ułożenie szalowania, w którym kierunki desek pokrywają się z tworzącymi powierzchnię.

Spośród wszystkich powierzchni skośnych szczególną przydatność w budownictwie wykazują konoidy proste krzywych matematycznych (okręgu, elipsy, paraboli, sinusoidy) oraz konoida linii prostej nazywana powszechnie paraboloidą hiperboliczną (Przewłocki 1997). Za ich stosowaniem w budownictwie przemawia fakt, że są to powierzchnie:

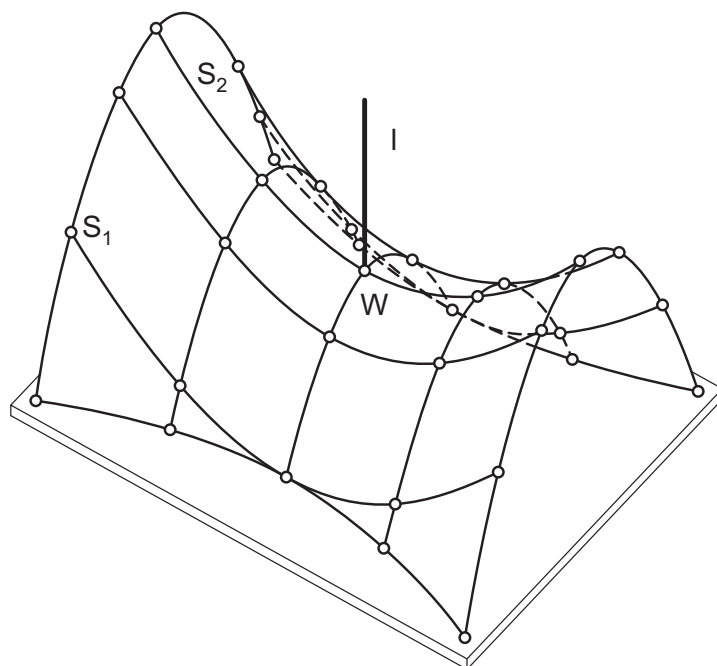
- a) podwójnie zakrzywione,
- b) zdefiniowane matematycznie,
- c) łatwe do zbudowania,
- d) dostatecznie efektywne.

Mimo że są to powierzchnie dwukrzywiznowe, mogą być tworzone z linii prostych, co ma duże znaczenie praktyczne.

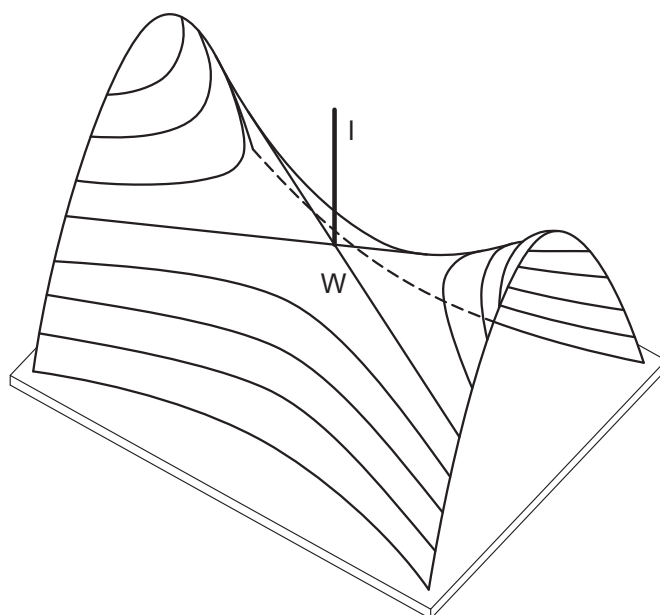
Szczególną uwagę należy poświęcić konoidzie linii prostej, czyli paraboloidzie hiperbolicznej. Interesująca plastycznie forma posiada duże możliwości różnorodnego jej stosowania, a korzystne właściwości statyczne wprowadziły ją na stałe do budownictwa. Swoistą cechą paraboloidy hiperbolicznej jest to, że brzegi tej powierzchni mogą być ograniczone liniami prostymi (rys. 33).

Linia przekroju powierzchni płaszczyzną jest zwykle linią krzywą płaską lub figurą składającą się z kilku krzywych płaskich. W szczególnym przypadku linia przekroju może być linią prostą.

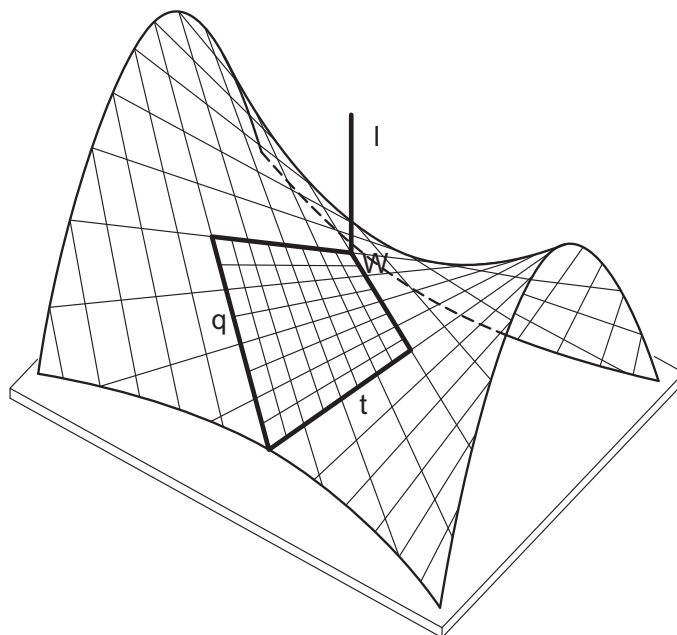
Płaszczyzna niewłaściwa przecina paraboloidę hiperboliczną w parze prostych – jedną z nich jest tworząca t^∞ , a drugą tworząca q^∞ . Proste niewłaściwe t^∞ i q^∞ wyznaczone płaszczyznami kierowniczymi α i β przecinają się w punkcie niewłaściwym R^∞ . Punkt R^∞ przecięcia się obu tworzących t^∞ i q^∞ ma bardzo ważne właściwości (Otto, Otto 1988). Każda płaszczyzna przechodząca przez punkt R^∞ przecina paraboloidę hiperboliczną po paraboli, ponieważ ma z nią jeden punkt niewłaściwy R^∞ (rys. 31). Natomiast płaszczyzna, która nie przechodzi przez R^∞ , przecina rozważaną powierzchnię w hiperboli lub dwóch tworzących, ponieważ ma z tą powierzchnią dwa punkty niewłaściwe wspólne (przecięcia z t^∞ i przecięcia z q^∞) (rys. 32).



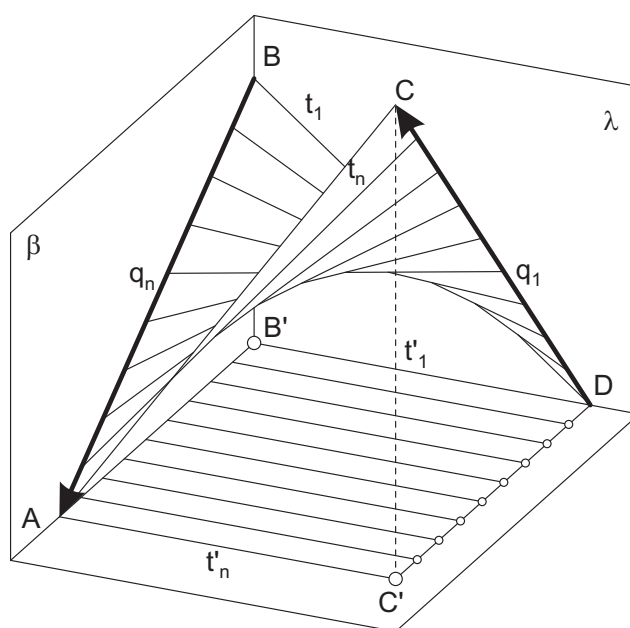
Rys. 31. Przekroje paraboloidy hiperbolicznej w parabolach
 Fig. 31. Cross-sections of hyperbolic paraboloid in parabolas



Rys. 32. Przekroje paraboloidy hiperbolicznej w hiperbolach
 Fig. 32. Cross-sections of hyperbolic paraboloid in hyperbolas



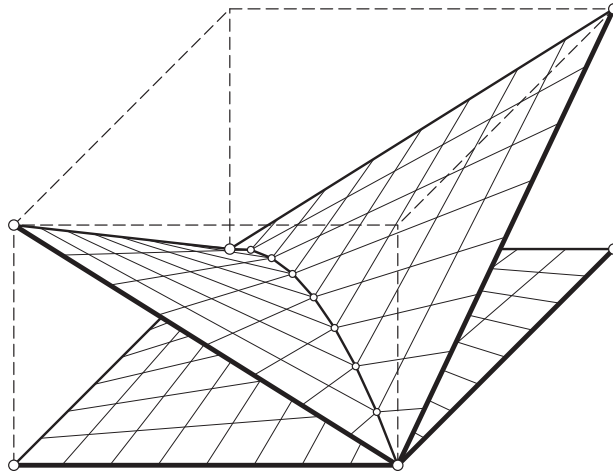
Rys. 33. Wycinek paraboloidy hiperbolicznej ograniczony czworobokiem przestrzennym, którego boki są tworzącymi
 Fig. 33. The part of hyperbolic paraboloid delimited by spatial quadrangle



Rys. 34. Czworobok przestrzenny wyznaczający paraboloidę hiperboliczną
 Fig. 34. Spatial quadrangle determining hyperbolic paraboloid

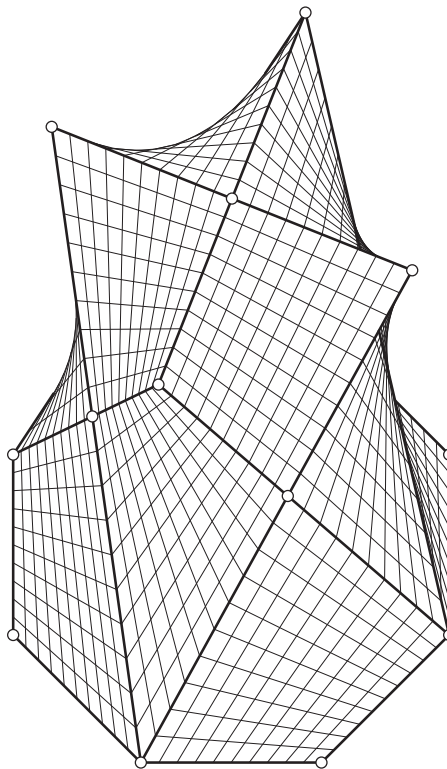
Linia przenikania kwadryk skośnych jest krzywą przestrzenną rzędu czwartego (Otto, Otto 1988). W szczególnym przypadku może występować w postaci zdegenerowanej do krzywej stożkowej lub prostej (rys. 35).

$$K_1^2 \cap K_2^2 = c^4$$



Rys. 35. Linia przenikania dwóch paraboloid hiperbolicznych
Fig. 35. Intersection line for two hyperbolic paraboloids

Zasadą najczęściej stosowaną przez projektanta jest użycie kilku powierzchni skośnych przenikających się w tworzących. Szczególnie nadaje się do tego paraboloida hiperboliczna. Paraboloidę hiperboliczną wyznacza każdy czworobok przestrzenny (rys. 34), zatem wiele czworoboków przestrzennych, których boki parami się jednoczą, wyznaczają zespół tych paraboloid. Boki czworokąta przestrzennego jako tworzące paraboloidy hiperbolicznej są w takim założeniu wspólnymi tworzącymi sąsiednich powierzchni.



Rys. 36. Studium geometryczne utworzone z 12 paraboloid hiperbolicznych
Fig. 36. Geometric form created with 12 hyperbolic paraboloids

Rysunek 36 przedstawia studium powierzchniowe składające się z 12 czworokątów przestrzennych stykających się bokami, wyznaczających 12 paraboloid hiperbolicznych. Przy konstrukcji tego utworu – jako podstawę przyjęto ośmiokąt foremny. Następnie dwie przekątne ośmiokąta przecinające się pod kątem prostym (skracając je) przesunięto do nowego położenia. Końce przesuniętej przekątnej połączone z wierzchołkami ośmiokąta wyznaczającymi drugą przekątną w pierwotnym położeniu. Tych osiem prostych ma cztery punkty przecięcia, które wraz z pozostałymi dwunastoma punktami wyznaczają 12 paraboloid hiperbolicznych.

7. PIŚMIENNICTWO

- Błach A., 2002. Inżynierska geometria wykreślna, podstawy i zastosowania. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- Bieliński A., Brzosko Z., Grochowski B., Milarska-Sztabler., Szczepaniak D.A., 2002. Ćwiczenia z geometrii wykreślnej. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej.
- Czech L., 2001. Uniwersalna konstrukcja stożkowych. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej.
- Fuliński J., Mokwa M., 1970. Zagadnienia powierzchniowe w zaporach. Zesz. Nauk. WSR, Mel. Nr XVI Wrocław.
- Grochowski B., 2002. Elementy geometrii wykreślnej. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Mokwa M., 1974. Tworzenie kwadryk skośnych w oparciu o przekształcenia rzutowe. ZN AR Wrocław. Nr 113.
- Mokwa M., 1973. Tworzenie powierzchni skośnych. Metoda kinematyczna. Zesz. Nauk. AR, Mel. Nr XVIII, Wrocław.
- Mokwa M., 1980. „Teoretyczne rozwiązanie połączenia kanałów z zastosowaniem paraboloidy hiperbolicznej”. Zesz. Nauk. AR, Nr 128, Wrocław.
- Otto F., 1971. Krzywe stożkowe. PZWS, Warszawa.
- Otto F., Otto E., 1988. Podręcznik geometrii wykreślnej. PWN, Warszawa.
- Plamitzer A.: 1959. Geometria wykreślna. PWN, Warszawa.
- Przewłocki S., 1997. Geometria wykreślna w budownictwie. Arkady, Warszawa.
- Ślusarczyk B., 1976. Geometria rzutowa i wykreślna. PWN, Warszawa.
- Szerszeń S., 1963. Nauka o rzutach, PWN, Warszawa.

PRZEKSZTAŁCENIA RZUTOWE KWADRYK SKOŚNYCH

Streszczenie

Przedmiotem rozważań w niniejszej monografii są powierzchnie stopnia drugiego – kwadryki skośne oraz krzywe stopnia drugiego będące przekrojami kwadryk – krzywe stożkowe. Krzywe stożkowe i ich własności rozpatrywane są dzięki zapisowi konfiguracyjnemu, który umożliwia przeprowadzenie dowodów wielu twierdzeń.

Znane są w geometrii rzutowej dwa podstawowe twierdzenia: Pascala i Branchona. Autor wykorzystując konfiguracyjny zapis obu twierdzeń, wykazał związek, jaki między nimi zachodzi.

Spośród 60 możliwych do uzyskania kombinacji sześcioboków opisanych na stożkowej autor wybrał 6 takich kombinacji sześcioboków, które można uzyskać przez przedłużenie boków przeciwległych.

Rozwiązując na jednym rysunku wszystkie możliwe następstwa wierzchołków sześciokątów (boków sześcioboków), autor uzyskał 6 prostych Pascala (6 punktów Brianchona), które trójkami przecinają się w jednym punkcie (trójki punktów leżą na jednej prostej). Układ punktów i prostych tworzy konfigurację $(16_3, 12_4)$ oraz $(12_4, 16_3)$. Przez połączenie obu konfiguracji, tzn. przez narysowanie takiego sześcioboku, którego boki są styczne do stożkowej w wierzchołkach sześciokątów, uzyskał nową konfigurację (28_4) . W zależności od przyjętego następstwa wierzchołków sześciokątów i boków sześcioboków punkt przecięcia trójek prostych Pascala może leżeć na prostej wyznaczonej przez trójkę punktów Brianchona lub może być z nią biegunowo sprzężony.

Każdy sześciobok płaski opisany na stożkowej, tworzący konfigurację, można przekształcić kolineacyjnie w sześciobok przestrzenny równoważny rzutowo tworzący konfigurację (12_6) . Taki sześciobok przestrzenny, którego każdy bok przecina trzy inne, wyznacza kwadrykę skośną K^2 . W zależności od przyjętego położenia boków sześcioboku przestrzennego tworzącego konfigurację (12_6) można utworzyć następujące kwadryki:

- hiperboloidę skośną,
- hiperboloidę obrotową,
- paraboloidę hiperboliczną.

Szczególne własności kwadryk skośnych powodują, że są one wykorzystywane w praktyce inżynierskiej. Mimo że są to powierzchnie dwukrzywiznowe, mogą być tworzone z linii prostych, co ma duże znaczenie praktyczne.

Słowa kluczowe: kwadryki skośne, krzywe stożkowe, konfiguracje

PROJECTIVE TRANSFORMATION OF RULED QUADRICS

S u m m a r y

In this monograph some surfaces of second order, i.e. ruled quadrics and curves of second order (conics) being quadric cross-sections are considered. The conics and their properties are considered on the basis of configurational notation that allows to proving many theorems.

Considering all possible vertex (side) sequences on the same plot, the author obtained 6 Pascal's lines (6 Brianchon's points), so that three lines meet at one point (three points lie on one line i.e. they are collinear). The set of points and lines forms configurations of types $(16_3 12_4)$ and $(12_4 16_3)$. Taking the union of both configurations, i.e. by drawing a hexagon, whose sides are tangent to a conic in the vertices of this hexagon, the author obtained a new configuration of type (28_4) . Depending on the chosen vertex sequences of the hexagons, the point of intersection of the triples of Pascal's lines can lie on the line defined by the triple Brianchon's points, or it can be polar conjugate with respect to this line.

Each planar hexagon circumscribed about the conic, forming the configuration, can be transformed in the collineatory way into the spatial hexagon projectively equivalent forming the configuration of type (12_6) . Such a spatial hexagon, that each it's side has common points with three other sides, determines a ruled quadric K^2 .

Depending on the location of spatial hexagon sides, which forms the configuration of type (12_6) the following quadrics can be generated:

- curved hyperboloid,
- hyperboloid of revolution,
- hyperbolic paraboloid.

Particular properties of ruled quadric cause that they are used in the engineering practice. Although the ruled quadrics are the double-curved surfaces, they can be formed from straight lines. That has a practical importance.

Key words: ruled quadric, conic section, configurations