EKONOMETRIA ECONOMETRICS 33 • 2011

ISSN 1507-3866

Wiktor Ejsmont
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

NIERÓWNOMIERNOŚĆ EFEKTYWNOŚCI NAUCZANIA NA PRZYKŁADZIE WROCŁAWSKICH LICEÓW

Streszczenie: W artykule autor próbuje zbadać wpływ nierównomierności efektywności nauczania na kształtowanie się przyrostu wiedzy w danym liceum. W tym celu autor przedstawia dwa modele efektywności nauczania. Pierwszy z nich bazuje na wykorzystaniu modelu zaproponowanego w 1986 r. przez M. Aitkina i N. Longforda, drugi zaś, wprowadzony przez autora artykułu, opiera się na skróconej mierze dobrobytu Sena. Autor porównuje rezultaty otrzymane za pomocą wspomnianych modeli oraz pokazuje, jakie są plusy modelu zaproponowanego przez autora artykułu.

Słowa kluczowe: efektywność nauczania, nauczanie, analiza danych panelowych.

1. Wstęp

Celem artykułu jest zbadanie nierównomierności efektywności nauczania we wrocławskich liceach. Główna część pracy bazuje na zastosowaniu i porównaniu wyników efektywności nauczania dwóch modeli. Pierwszy został opisany przez M. Aitkina i N. Longforda w artykule *Statistical modelling issues in school effectiveness studies*, drugi zaś opiera się na idei wykorzystania nierówności rozkładu wiedzy w pomiarze efektywności nauczania.

Artykuł *Statistical modelling issues in school effectiveness studies* przedstawia kilka modeli służących do badania efektywności kształcenia w amerykańskich szkołach za pomocą różnicy punktów pomiędzy wynikami egzaminów osiąganymi przez uczniów kończących szkołę a ilorazem inteligencji IQ mierzonym przed rozpoczęciem nauki w danej szkole. Praca bazuje na wykorzystaniu modelu z losowymi efektami – rozpatrywanego jako model numer pięć przez M. Aitkina i N. Longforda. Druga część artykułu stanowi zastosowanie nowego modelu, który wykorzystując skróconą funkcję dobrobytu Sena, przyczynia się do efektywności nauczania, opierając się m.in. na nierównomierności rozkładu wiedzy[1].

[1] Dotychczas czynnik ten nie był opisywany w literaturze.

Badania empiryczne oparte są natomiast na wynikach egzaminów gimnazjalnych oraz maturalnych. W pracy przeanalizowano dwa typy danych. Pierwszy typ dotyczy części humanistycznej, tzn. matury podstawowej z języka polskiego (z lat 2007--2010), drugi zaś – części ścisłej, tzn. matury z matematyki na poziomie podstawowym z 2010 r. Przeprowadzono analizy ilustrujące efektywność nauczania z dwóch przedmiotów w różnych latach. Istotną częścią pracy jest również matematyczny opis modelu Aitkina i Longforda oraz pewnej innowacji opierającej się na idei uwzględnienia w pomiarze efektywności nauczania nierównomierności przyrostu wiedzy.

2. Opis danych

Zebrane dane opisują wyniki gimnazjalne oraz wyniki maturalne absolwentów wrocławskich liceów z lat 2007-2010. Dane zostały podzielone na kilka części (ze względu na rocznik oraz przedmiot), które analizowano osobno. Pierwsza część dotyczy wyników z humanistycznego egzaminu gimnazjalnego oraz z matury podstawowej z języka polskiego z lat 2007-2010 r. Druga część to egzamin gimnazjalny z części matematyczno-przyrodniczej oraz wyniki z matury podstawowej z matematyki z 2010 r. [2]

Tabela 1 nie opisuje wszystkich uczniów z lat 2007-2010 zdających maturę, ponieważ dla części uczniów nie istnieje identyfikator, za pomocą którego można złączyć wyniki gimnazjalne i maturalne. Mimo to, dane opisują zdecydowaną większość absolwentów wrocławskich liceów (ok. 90%).

Tabela 1 zawiera skróty nazw szkół w następującej konwencji:

- LO + cyfra rzymska – liceum ogólnokształcące, którego numer jest wyznaczany przez cyfrę rzymską,
- LO SA – Prywatne Salezjańskie Liceum Ogólnokształcące,
- LO SU – Liceum Ogólnokształcące Sióstr Urszulanek.

Zarówno punkty gimnazjalne, jak i maturalne są przeskalowane do poziomu 100 punktów, tzn. wynik danego ucznia (gimnazjalny i maturalny) został podzielony przez maksymalną liczbę punktów możliwych do zdobycia oraz pomnożony przez 100.

Oznaczenia kolumn w tab. 1 są następujące:

- L. U. – liczba uczniów,
- Śr. G. – średni wynik uzyskany na egzaminie gimnazjalnym,
- Śr. M. – średni wynik uzyskany na egzaminie maturalnym.

[2] W dalszej części artykułu odwoływano się do tych danych za pomocą określenia wyników humanistycznych (model humanistyczny) oraz matematycznych (model matematyczny).

Tabela 1. Zestawienie uśrednionych wyników egzaminów gimnazjalnych oraz maturalnych uczniów zdających maturę z języka polskiego (poziom podstawowy) w latach 2007-2010 oraz z matematyki (poziom podstawowy) w 2010 r.

Szkoła	Język polski												Matematyka 2010	
	2007			2008			2009			2010				
	L. U.	Śr. G.	Śr. M.	L. U.	Śr. G.	Śr. M.	L. U.	Śr. G.	Śr. M.	L. U.	Śr. G.	Śr. M.	Śr. G.	Śr. M.
LOI	111	65,55	57,07	131	78,49	60,02	181	72,99	59,20	175	77,35	60,79	63,55	69,60
LOII	215	71,34	58,21	203	80,98	55,25	253	75,72	64,19	244	79,54	70,88	74,38	74,29
LOIII	63	84,29	71,65	98	88,47	69,06	97	86,72	68,03	129	90,37	80,83	93,98	93,27
LOIV	157	66,18	53,03	177	80,01	61,67	155	76,17	67,45	155	81,33	73,37	71,41	78,23
LOSA	15	70,27	50,07	32	75,31	58,63	23	70,26	50,04	39	71,90	51,54	55,90	62,00
LOSU	36	76,67	64,22	48	79,17	65,21	27	75,63	60,93	39	80,56	57,97	63,08	70,97
LOV	79	81,44	72,65	96	85,73	73,70	89	82,29	63,83	110	87,38	72,15	86,25	83,87
LOVI	119	64,05	57,94	136	78,57	61,88	191	71,78	52,88	185	75,59	58,33	60,96	62,38
LOVII	254	79,15	64,97	267	85,99	66,97	269	83,42	65,33	287	86,61	76,33	87,74	83,61
LOVIII	151	73,97	64,82	184	83,91	57,45	147	79,07	63,29	166	83,23	72,78	75,78	78,00
LOIX	152	73,45	60,53	216	83,45	62,36	203	79,92	67,78	210	84,39	70,83	76,03	81,04
LOX	191	70,24	61,12	182	81,30	60,08	219	75,77	59,85	212	79,63	66,05	70,96	74,17
LOXI	96	65,06	59,54	140	77,10	66,76	105	72,51	58,53	114	75,79	63,54	63,39	68,44
LOXII	166	77,78	62,69	191	87,86	66,61	197	83,95	65,20	208	87,34	77,79	82,30	83,17
LOXIII	149	71,64	58,81	187	82,60	61,56	206	79,44	64,67	222	84,72	76,93	77,19	81,09
LOXIV	100	81,60	71,10	117	88,51	65,67	146	83,63	68,89	143	88,24	78,70	88,29	87,99
LOXV	238	67,71	56,97	262	78,00	57,66	274	74,26	61,48	198	76,32	66,91	65,72	67,15
LOXVI	73	58,82	41,63	58	73,10	54,66	68	64,18	50,28	57	68,18	58,37	55,51	57,23
LOXVII	70	63,83	54,03	107	78,54	52,31	138	73,77	63,97	184	80,52	59,33	70,00	78,68
LOXXI	38	62,74	51,74	21	75,71	68,62	60	67,00	58,93	45	72,76	60,89	61,82	67,38
LOXXIV	60	63,77	51,30	82	77,93	61,38	96	70,38	56,23	71	70,68	58,49	59,32	57,75
LOXXIX	33	59,58	50,18	40	71,70	52,43	45	70,04	43,84	41	68,39	54,90	54,05	59,17
LOXXX	34	56,24	54,62	50	72,36	55,94	41	67,51	45,27	48	68,17	57,96	51,13	50,21
Razem	2600	71,15	59,80	3025	81,59	61,69	3230	76,93	62,09	3282	81,18	69,10	73,57	75,80

Źródło: Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu.

Tabela 1 przedstawia ogólne średnie wyniki gimnazjalne oraz maturalne z części humanistycznej oraz z przedmiotów ścisłych. Zauważmy, że niektóre z badanych liceów cechują się małą liczbą obserwacji. Najmniejsza liczba obserwacji występuje w 2007 r. dla uczniów zdających język polski w LO SA. Może to spowodować błąd w oszacowaniu efektywności nauczania, ale z drugiej strony istnieje możliwość porównania liceów państwowych z prywatnymi.

Oznaczenia:

- x_{ij} – liczba punktów gimnazjalnych uzyskanych przez i-tego ucznia w j-tej szkole,

- y_{ij} – liczba punktów maturalnych uzyskanych przez i-tego ucznia w j-tej szkole,
- n_j – liczba uczniów w szkole j,
- n – liczba wszystkich uczniów, tzn. $n = n_1 + ... + n_k$,
- k – liczba szkół, tzn. $j \in \{1, ..., k\}$,
- $\bar{x}$ – średni wynik gimnazjalny wszystkich uczniów,
- $\bar{y}$ – średni wynik maturalny wszystkich uczniów,
- $\bar{x}_j$, $\bar{y}_j$ – średni wynik odpowiednio gimnazjalny oraz maturalny na poziomie j-tej szkoły.

3. Metodologia badań

3.1. Model Aitkina-Longforda

Pierwszy z omówionych modeli mierzy przyrost (spadek), opierając się przede wszystkim na różnicy pomiędzy wynikiem matury a wynikiem gimnazjum – wzór (7). Powoduje to problem, którego istotę wyjaśniono przez poniższy przykład. Jeżeli uczeń uzyskał na teście gimnazjalnym 30 punktów, a na maturalnym 40 punktów, to jego przyrost wiedzy jest taki sam jak ucznia, który w gimnazjum uzyskał wynik 90, na maturze zaś 100 punktów. Przyrost bezwzględny punktów w obu przypadkach jest równy 10. Nie można jednak mówić o identycznym przyroście wiedzy uczniów, ponieważ dużo trudniej jest zdobyć 100 punktów niż 40. Z tego powodu dane zostały przeskalowane, by uwzględniały początkową wiedzę danego ucznia (gimnazjalną). Przeskalowano tylko wyniki maturalne, pozostawiając bez zmian wyniki gimnazjalne. Przy przekształceniach kierowano się zasadą, iż należy dowartościować tych uczniów, którzy uzyskali lepsze wyniki na maturze, czyli w przedstawionym przykładzie są to uczniowie, którzy zdobyli 100 punktów. To samo rozumowanie dotyczy spadku liczby punktów w stosunku do wyniku gimnazjalnego. Przykładem jest osiągnięcie na maturze wyniku o 10 punktów mniejszego niż na egzaminie gimnazjalnym dwóch różnych uczniów, którzy zdobyli na egzaminie gimnazjalnym odpowiednio 50 i 80 punktów. Ten uczeń, który miał wynik gimnazjalny 80 punktów i potem na maturze 70 punktów, powinien być sklasyfikowany jako lepszy od tego, który uzyskał w gimnazjum 50 punktów.

Zaprezentowane rozumowanie jest powodem przeskalowania danych:

$$y_{ij}^{'} = \begin{cases} x_{ij} + (y_{ij} - x_{ij}) y_{ij} / 100 & \text{o ile} \quad (y_{ij} - x_{ij}) \geq 0 \\ x_{ij} + (y_{ij} - x_{ij})(100 - y_{ij}) / 100 & \text{o ile} \quad (y_{ij} - x_{ij}) < 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Tak zdefiniowane przekształcenie powoduje, iż przyrost wiedzy jest tym bardziej dowartościowany, im lepszy był wynik maturalny. Ten sam tok myślenia sprowadza się do tych uczniów, których wynik maturalny obniżył się w stosunku do gimnazjalnego.

Dalsza część pkt 2.1 opiera się na dopasowaniu modeli do punktów przekształconych, tzn. postaci (x_{ij}, y'_{ij}). Oznaczenia średnich dotyczące y'_{ij} są analogiczne do oznaczeń średnich y_{ij} (na poziomie zarówno całej populacji, jak i szkoły).

Dane, które zaprezentowano w pkt 1, nazywane są niezbilansowanymi danymi panelowymi. Panele niezbilansowane występują, gdy liczba obserwacji dla poszczególnych obiektów (szkół) jest różna, tzn. n_j. W przypadku równej liczby obserwacji mówi się o danych zbilansowanych. Najczęściej w literaturze modele te są stosowane do danych przekrojowo-czasowych, tzn. takich, których dany obiekt jest obserwowany w jakimś określonym czasie.

Model, który zastosowano, to model z czynnikami losowymi. W ekonometrii model ten zawdzięcza popularność artykułowi Balestry i Nerlove'a [1966] mówiącemu o popycie na gaz ziemny. Gdy populacja, którą chcemy opisać, nie jest jednorodna, należy uwzględnić ową niejednorodność w modelu. Jeśli elementy w próbie pochodzą z dużej populacji, lepiej założyć, że indywidualny efekt jednostkowy jest realizacją pewnej zmiennej losowej. W modelu tym występują dwa składniki losowe. Model z czynnikami losowymi znany jest też pod nazwą modelu komponentów wariancyjnych (*Variance Components Model* – VC lub również *Error Component Model*). Model ten jest postaci:

$$y'_{ij} = \alpha + \beta x_{ij} + \xi_j + e_{ij} . \tag{2}$$

Dla modelu zakłada się, że:

- e_{ij} – zmienna losowa z rozkładu $N(0,\sigma^2)$,
- ξ_j – zmienna losowa z rozkładu $N(0,\sigma_I^2)$; interpretacja tego składnika modelu jest taka, że każdą szkołę możemy traktować jak zmienną losową z wariancją σ_I^2 oraz średnią α,
- zakładamy, że składniki losowe pochodzące z różnych szkół i dla różnych uczniów są nieskorelowane,
- ponadto założono, że indywidualny składnik losowy ξ_j jest nieskorelowany ze składnikiem losowym e_{ij} (tzn. $E(\xi_j, e_{is}) = 0$).

Z powyższych założeń wynika:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(y'_{ij}) &= \operatorname{var}(\xi_j + e_{ij}) = E(\xi_j + e_{ij})^2 - E^2(\xi_j + e_{ij}) = \\ &= E(\xi_j^2 + 2\xi_j e_{ij} + e_{ij}^2) = \sigma_I^2 + \sigma^2 , \end{aligned} \tag{3}$$

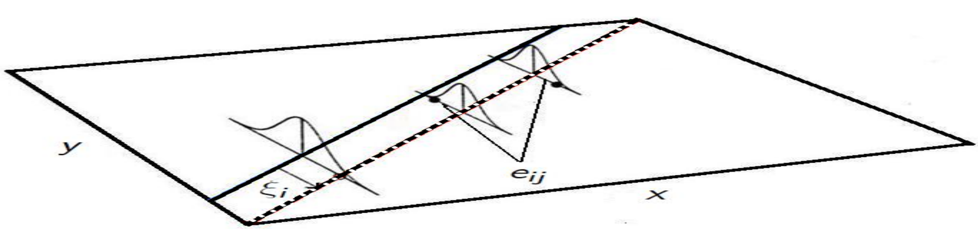
$$\operatorname{cov}(y'_{ij}, y'_{pj}) = \operatorname{cov}((\xi_j + e_{ij}), (\xi_j + e_{pj})) = E(\xi_j^2 + \xi_j e_{ij} + \xi_j e_{pj} + e_{ij} e_{pj}) = \sigma_I^2$$

$$\rho = cor(y'_{ij}, y'_{pj}) = \frac{\sigma_I^2}{\sigma_I^2 + \sigma^2}. \tag{4}$$

Współczynniki tak określonego modelu szacujemy za pomocą największej wiarygodności (np. [Aitkin, Longford 1986]) lub uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów (np. [Baltagi 2005]). Estymator parametrów α oraz β jest postaci:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} w_j & \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{x}_j \\ \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{x}_j & \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{x}_j^2 \end{bmatrix}^{-1} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{y}'_j \\ \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} (y'_{ij} - \bar{y}'_j)(x_{ij} - \bar{x}_j) + \sum_{j=1}^{k} w_j \bar{x}_j \bar{y}'_j \end{bmatrix},$$

gdzie $w_j = n_j \sigma^2 / (\sigma^2 + n_j \sigma_I^2)$. Więcej na temat estymacji można przeczytać w pracy [Ejsmont 2009], gdzie w szczegółach opisany jest cały algorytm estymacji, w tym również komponentów wariancji σ^2 i σ_I^2. Poniżej opisano procedurę leczenia efektywności uczenia (zastosowanych przez Aitkina i Longforda). Zestawienie szkół odbywa się za pomocą porównania wartości oczekiwanej składnika losowego ξ_j (wzór 2). Składnik ten mówi, o ile od uśrednionego wyniku całej populacji odchyla się uśredniony wynik j-tej szkoły. Na rysunku 1 przerywaną linią został oznaczony uśredniony wynik j-tej szkoły, ciągła linia zaś przedstawia uśredniony wynik całej populacji (czynnik e_{ij} odpowiada za odchylenie od uśrednianego wyniku na



Rys. 1. Schemat przedstawiający ideę mierzenia przyrostu wiedzy modelem Aitkina-Longforda

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Skrondal, Rabe-Hesketh 2008, s. 96].

poziomie *j*-tej szkoły). Jeżeli wartość ξ_j jest dodatnia, wówczas możemy powiedzieć, że *j*-ta szkoła poczyniła postęp w stosunku do uśrednionego wyniku całej populacji, jeśli zaś jest ujemny, wówczas szkoła ta uzyskała wynik niższy niż uśredniony wynik badanej populacji.

Aby oszacowywać wartość składnika ξ_j (nie jest ona znana), wykorzystamy poniżej cytowane twierdzenie o błędzie średniokwadratowym (np. [Jakubowski, Sztencel 2004, s. 135]).

Twierdzenie. Załóżmy, że dany jest wektor losowy (*A*, *B*), gdzie zmienna A jest obserwowana, zmiennej B zaś nie możemy obserwować. Jeżeli $E(B^2) < \infty$, wtedy optymalna prognoza (dla B) w sensie błędu średniokwadratowego istnieje i można wziąć $E(B/A)$.

Ponieważ składniki σ^2 oraz σ_I^2 są znane przed oszacowaniem modelu, możemy tę informację wykorzystać jako informację *a priori*. Wyznaczymy rozkład warunkowej zmiennej losowej ξ_j pod warunkiem $\bar{y}'_j$ (podejście Bayesowskie). Ze wzoru (2) średnia na poziomie *j*-tej szkoły wyraża się wzorem:

$$\bar{y}'_j = \alpha + \beta\bar{x}_j + \xi_j + \bar{e}_j\ . \tag{5}$$

Przy poczynionych założeniach $\bar{y}'_j$ ma rozkład normalny $N(\alpha + \beta\bar{x}_j, \sigma_I^2 + \sigma^2 / n_j)$. Ten rozkład przyjęto jako rozkład *a priori*. Ponieważ ξ_j jest zmienną losową z rozkładu $N(0, \sigma_I^2)$, rozkład warunkowy $f(\xi_j / \bar{y}'_j)$ też będzie rozkładem normalnym.

Uwaga. Znany jest następujący fakt z rachunku prawdopodobieństwa. Jeżeli zmienne losowe $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ oraz $\rho_{1,2} = cor(X_1, X_2)$, to rozkład warunkowy X_1 / X_2 jest postaci

$$N\left(\mu_1 + \rho_{1,2}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(X_2 - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho_{1,2}^2)\right).$$

Stąd uwzględniając fakt $\rho' = cor(\xi_j, \bar{y}_j) = \sigma_I^2 / (\sigma_I\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma^2 / n_j})$, wnioskujemy, że $f(\xi_j / \bar{y}'_j)$ ma rozkład normalny w postaci:

$$N\left(\rho'\frac{\sigma_I}{\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma^2 / n_j}}(\bar{y}'_j - \alpha - \beta\bar{x}_j), \sigma_I^2(1 - \rho'^2)\right) \text{ lub w innym zapisie}$$

$$N\left(\rho n_j^*(\overline{y}'_j-\alpha-\beta\overline{x}_j), n_j^*(1-\rho)\sigma_I^2/n_j\right), \tag{6}$$

gdzie $n_j^* = w_j/(1-\rho)$. Porównanie szkół będzie się opierało na porównaniu wartości średnich z rozkładu warunkowego zadanego wzorem (6). Stąd efektywność nauczania zdefiniowano w postaci:

$$e_j = \hat{\rho}n_j^*(\overline{y}'_j-\hat{\alpha}-\hat{\beta}\overline{x}_j). \tag{7}$$

W celu sprawdzenia, czy uzyskane efekty losowe są istotne, użyto testu Breuscha-Pagana (np. [Baltagi 2005]). Jest to test mnożników Lagrange'a, w którym mamy hipotezy:

$$H_0:\ \sigma_I^2 = 0.$$

Hipoteza alternatywna: $\sigma_I^2 \neq 0$.

Statystyka testowa jest postaci

$$LM = \frac{\left(\sum_{j=1}^{k} n_j\right)^2}{\left(2\sum_{j=1}^{k} n_j(n_j-1)\right)}\left[\frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n_j} e'_{ij}\right)^2}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} e'^2_{ij}}-1\right]^2 \sim\chi^2(1), \tag{8}$$

gdzie e'_{ij} są to reszty otrzymane w wyniku zastosowania metody MNK do wszystkich danych (niezależnie od szkół). Powyższy wzór mówi, że statystyka testowa *LM* ma asymptotyczny rozkład chi-kwadrat (przy założeniu hipotezy zerowej) z jednym stopniem swobody. Hipotezę zerową odrzucamy, jeżeli wartość statystyki *LM* należy do prawostronnego obszaru krytycznego.

Tabela 2. Podstawowe charakterystyki statystyczne modeli

Charakterystyki \ Przedmiot/ rok	Język polski				Matematyka
	2007	2008	2009	2010	2010
Wsp. korelacji (Pearsona)	0,805	0,727	0,782	0,792	0,861
σ^2	44,679	48,137	38,490	39,781	63,427
σ_I^2	3,131	6,221	4,853	4,869	4,687
ρ	0,065	0,114	0,112	0,109	0,069
p-value normalność	>0,01	>0,01	>0,01	>0,01	>0,01
Współczynnik beta	0,729	0,861	0,747	0,781	0,795
Współczynnik alfa	14,103	3,010	12,359	12,543	17,964
LM – *p-value*	<0,01	<0,01	<0,01	<0,01	<0,01

Źródło: obliczenia własne za pomocą programu Excel oraz *R*-project.

Tabela 2 prezentuje główne charakterystyki statystyczne oszacowanych modeli. Otrzymane modele są dopasowane pod względem normalności reszt. Oszacowane wartości testu *LM* wskazują na to, że σ_I^2 jest statystycznie istotny na poziomie istotności 0,01. Zasadne jest więc stosowanie modelu efektów losowych (związanych z σ_I^2). Wyniki gimnazjalne oraz maturalne (wzór (1)) są skorelowane na poziomie przekraczającym 0,7 we wszystkich badanych przypadkach. Otrzymane współczynniki β są na bardzo podobnym poziomie.

3.2. Miernik wykorzystujący współczynnik Giniego (indeks Sena)

W tym punkcie zaprezentowano inny sposób szacowania EWD. Jeżeli $U(x)$ jest użytecznością kształcenia danej szkoły uczniów o wiedzy, zdolności i zachowaniu x, a $f(x)$ jest gęstością tegoż rozkładu w danej populacji uczniów tejże szkoły, to średnią użyteczność kształcenia (*SUK*) dla uczniów tej szkoły można obliczyć ze wzoru:

$$SUK = \int_0^\infty U(x) f(x) dx \tag{9}$$

(który jest analogiem dobrobytu społecznego populacji o rozkładzie dochodów $f(x)$).

Do pomiaru nierównomierności rozkładu stosuje się współczynnik Giniego – G, który można zinterpretować geometrycznie za pomocą krzywej Lorenza (G jest równy podwojonemu polu ograniczonemu przekątną jednostkowego kwadratu i krzywą Lorenza). Współczynnik Giniego jest relatywnym indeksem nierówności mierzącym skalę proporcji wiedzy (dochodów), a nie efektywną miarą nierówności. Krzywa Lorenza nie zmieni się, jeżeli wektor wiedzy (dochodów) pomnożymy przez dowolną dodatnią liczbę rzeczywistą. Zatem możemy powiedzieć, że współczynnik Giniego jest indeksem relatywnej nierównomierności.

Załóżmy, że mamy 2 krzywe Lorenza dla 2 różnych populacji A i B.

Definicja 1. Będziemy mówić, że rozkład populacji A dominuje nad rozkładem populacji B w sensie Lorenza $F_A(x) \geq F_B(x)$ $\Leftrightarrow$ krzywa Lorenza dla populacji A jest nad krzywą Lorenza dla populacji B (jeżeli się przecinają, to są nieporównywalne).

Łatwo zauważyć, że jeżeli rozkład populacji A dominuje nad rozkładem populacji B w sensie Lorenza, to pole koncentracji dla A jest mniejsze niż pole koncentracji dla B i tym samym w A jest mniejsza nierównomierność rozkładu dochodów niż w B. Zatem na zbiorze rozkładów wiedzy porządek dominacji w sensie Lorenza jest w pewien sposób równoważny z porządkiem nierównomierności rozkładu wiedzy.

Twierdzenie Atkinsona (1970). Niech $F(x)$ i $G(x)$ będą dystrybuantami dwóch rozkładów dochodów o takich samych dochodach przeciętnych $\mu_F = \mu_G$. Wtedy dla

$$L_F(p) \geq L_G(p) \Leftrightarrow \int_0^\infty U(x)f(x)dx \geq \int_0^\infty U(x)g(x)dx \tag{10}$$

każdej $U(x)$ takiej, że $U(x)$ rośnie wklęśle ($U'(x) > 0$ i $U''(x) < 0$).

Czyli SUK populacji A (o dystrybuancie wiedzy $F(x)$) jest nie mniejsza niż SUK populacji B (przy takiej samej wiedzy przeciętnej) wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład populacji A dominuje w sensie Lorenza nad rozkładem populacji B, czyli gdy w grupie A jest mniejsza nierówność wiedzy i zachowania niż w grupie B.

Twierdzenie Atkinsona uogólnił A.F. Shorrocks [1983], wprowadzając uogólnioną krzywą Lorenza $GL(x)$:

$$GL(x) = \mu \cdot L(x), \tag{11}$$

gdzie $L(x)$ jest krzywą Lorenza, μ jest dochodem przeciętnym.

Twierdzenie Shorrocksa. Niech $F(x)$ i $G(x)$ będą dystrybuantami 2 rozkładów dochodów ($f(x)$ i $g(x)$ odpowiednio do ich gęstości). Wówczas

$$GL_F(p) \geq GL_G(p) \Leftrightarrow \int_0^\infty U(x)f(x)dx \geq \int_0^\infty U(x)g(x)dx \tag{12}$$

dla wszystkich $U(x)$, takich że $U'(x) > 0$ i $U''(x) < 0$, oraz dla każdego $p \in [0, 1]$.

Czyli SUK populacji A jest nie mniejszy niż SUK populacji B wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład populacji A dominuje w sensie uogólnionych krzywych Lorenza nad rozkładem populacji B. Uogólniona krzywa Lorenza dla populacji o rozkładzie F jest definiowana następująco:

$$GL(F;\ p) = \int_0^p F^{-1}(q)dq \text{ , dla } p \in [0,\ 1] \tag{13}$$

i stowarzyszony z nią częściowy porządek GL jest zdefiniowany następująco:

$$FGLG \Leftrightarrow GL(F;\ p) \geq GL(G;\ p) \text{ , } \forall p \in [0,\ 1]$$

oraz

$$GL(F;\ p) > GL(G;\ p) \text{ dla pewnego } p \in [0,\ 1].$$

A.K. Sen [1973] wprowadził następującą skróconą miarę dobrobytu (indeks Sena), którą wykorzystamy w pomiarze wiedzy danej grupy:

$$IS_F = \mu_F(1 - G_F). \tag{14}$$

Uwaga. Porządek uogólnionych krzywych Lorenza implikuje porządek według skróconej miary (dobrobytu) wiedzy Sena:

$$FGLG \Rightarrow \int_0^1 GL_F(p)dp \geq \int_0^1 GL_G(p)dp \Leftrightarrow \mu_F \int_0^1 L_F(p)dp \geq \mu_G \int_0^1 L_G(p)dp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu_F\left(\frac{1-2S_1}{2}\right) \geq \mu_G\left(\frac{1-2S_2}{2}\right) \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\mu_F(1-G_F) \geq \tfrac{1}{2}\mu_G(1-G_G) \Leftrightarrow IS_F \geq IS_G,$$

gdzie S_1 jest polem pod krzywą Lorenza dla F, a S_2 jest polem pod krzywą Lorenza dla G.

Uwaga. Indeks Sena (IS) w większym stopniu zależy od μ niż od G dla $G \leq 0{,}5$; a dla $G > 0{,}5$ odwrotnie.

Zmierzenie efektywności nauczania (z wykorzystaniem skróconej miary dobrobytu Sena) będzie polegało na obliczeniu efektywności nauczania dla danych, które reprezentują „względny" postęp danego ucznia. Dane takie powinny być wyrażone przez liczby nieujemne[3].

Miernikiem, który wyrazi postęp danego ucznia, może być stosunek punktów uzyskanych przez niego na egzaminie wyjściowym (maturalnym, czyli rzeczywista wiedza danego ucznia) do uśrednionego wyniku wszystkich uczniów, którzy mieli taką samą liczbę punktów gimnazjalnych. Wynik ten będzie reprezentowany przez wielkość

$$p_{ij} = \frac{y_{ij}}{\hat{y}_{ij}}, \tag{15}$$

gdzie $\hat{y}_{ij} = \alpha + \beta x_{ij}$ jest prostą regresji dopasowaną do wszystkich danych niezależnie od szkoły. Powyższy wzór reprezentuje względny postęp ucznia w stosunku do uśrednionego wyniku uczniów, którzy mieli określony wynik na egzaminie maturalnym.

Załóżmy, że dopasowano prostą regresji do danych opisujących zależność pomiędzy wynikami egzaminów gimnazjalnych oraz maturalnych, otrzymując równanie $y = a + bx$, gdzie $a > 0$ oraz $b > 0$. Wówczas jeżeli weźmie się dwóch uczniów z tej populacji o wynikach egzaminów gimnazjalnych oraz maturalnych odpowiednio reprezentowanych przez pary (g_1, m_1) oraz (g_2, m_2), których wyniki spełniają $r = m_1 - g_1 = m_2 - g_2$ oraz $m_1 < m_2$, wówczas

$$\frac{m_1}{ag_1 + b} < \frac{m_2}{ag_2 + b} \text{ o ile } r < b/a. \tag{16}$$

[3] Ponieważ zmienne występujące w funkcji dobrobytu Sena są nieujemne.

Dowód

Równanie (16) jest równoważne $m_1(ag_2 + b) < m_2(ag_1 + b)$ lub w innym zapisie $0 < a(m_2 g_1 - m_1 g_2) + b(m_2 - m_1)$. Z założeń można napisać $g_2 = m_2 - m_1 + g_1$, co po wstawieniu do ostatniego równania daje $0 < a(m_2 g_1 - m_1 m_2 + m_1^2 - m_1 g_1) + +b(m_2 - m_1)$. Po prostych przekształceniach $0 < (m_2 - m_1)(a(g_1 - m_1) + b)$. Z założeń wynika $m_2 - m_1 > 0$, więc aby nierówność (16) była prawdziwa, potrzeba i wystarcza, aby $r = (m_1 - g_1) < b / a$.

Podsumowując, należy stwierdzić, że jeżeli zależność $r < b/a$ jest spełniona, wówczas liczby p_{ij} reprezentują względny przyrost wiedzy, tj. taki, który dowartościowuje uczniów z lepszymi wynikami na egzaminie maturalnym.

Im większy stosunek wyniku rzeczywistego do uśrednionego, tym większy postęp poczynił dany uczeń. Stąd aby zmierzyć skuteczność danej szkoły, wystarczy wziąć miarę wiedzy Sena liczonej dla wyników p_{ij}. Tak wyrażony współczynnik oznaczono przez EWS (edukacyjna wartość dodana opierająca się na idei indeksu Sena):

$$EWS_j(\overline{p}_j) = IS(\overline{p}_j), \tag{17}$$

gdzie $\overline{p}_j = (p_{1j}, ..., p_{n_j j})$. Z trzeciego wniosku Lazeara wynika, że im większa nierówność wiedzy w klasie, tym trudniej zoptymalizować wynik kształcenia. Zatem w pomiarze efektywności kształcenia powinno brać się pod uwagę wielkość nierównomierności (G) rozkładu wiedzy.

Tabela 3 przedstawia współczynniki prostych regresji dopasowanych do wszystkich danych, które reprezentują wyniki egzaminów gimnazjalnych oraz maturalnych dla poszczególnych przedmiotów oraz roczników. Kolumna oznaczona b/a reprezentuje wartość współczynnika r, jakiej nie powinny przekraczać dane, aby nierówność zapisana wzorem (6) była spełniona. Warunek ten nie jest spełniony tylko dla trzech uczniów dla wyników z języka polskiego z 2010 r. Jest to liczba pomijalnie mała.

Tabela 3. Współczynniki prostych regresji dopasowane do danych opisujących wyniki egzaminów humanistycznych oraz ścisłych

Przedmiot	Rocznik	Współczynnik nachylenia – a	Współczynnik przecięcia – b	b/a
Język polski	2007	0,4772	25,8496	54,1712
	2008	0,5364	17,9279	33,4248
	2009	0,4428	28,0311	63,3091
	2010	0,6286	18,0685	28,7463
Matematyka	2010	0,6841	25,4720	37,2326

Źródło: obliczenia własne za pomocą programu Excel.

4. Otrzymane rezultaty oraz wnioski

Tabele 4 i 5 przedstawiają rankingi kształcenia (dla poszczególnych przedmiotów i lat), które otrzymano za pomocą dwóch opisanych powyżej metod. Skróty Śr. oraz Gini z tab. 5 oznaczają odpowiednio średni wynik oraz współczynnik Giniego obliczony dla punktów z wektora $\overline{p}_j = (p_{1j}, ..., p_{n_j j})$ ze wzoru (17) (skrót R zaś oznacza ranking).

Oznaczenia z tab. 6 stanowią wartości współczynników Giniego, EWS oraz EWD w poszczególnych latach, przy czym dla rozróżnienia matematyki została dodana litera M, np. EWS 2010 M oznacza współczynnik EWS liczony dla uczniów zdających matematykę w 2010 r. W poniższym podsumowaniu, używając pojęcia „nierównomierność nauczania”, myślano o nierównomierności efektywności nauczania.

Tabela 4. Edukacyjna wartość dodana oraz odpowiadający jej ranking

Szkoła	Język polski								Matematyka	
	2007		2008		2009		2010		2010	
	EWD	Ranking	EWD	Ranking	EWD	Ranking	EWD	Ranking	EWD	Ranking
LOI	–0,184	13	–0,301	13	–0,192	15	–2,783	18	0,678	12
LOII	–0,606	16	–4,285	22	2,190	6	2,391	8	–0,507	16
LOIII	3,959	3	2,167	5	2,759	4	**4,888**	1	2,819	4
LOIV	–2,618	20	0,239	11	**3,970**	1	3,153	6	2,986	3
LOSA	–2,703	21	–0,445	14	–4,407	21	–6,323	23	–1,752	17
LOSU	1,227	6	2,280	4	0,461	14	–4,633	22	1,243	8
LOV	**4,870**	1	**5,100**	1	1,052	11	1,630	9	0,864	11
LOVI	0,656	9	0,797	8	–3,650	20	–3,857	20	–3,352	20
LOVII	1,680	5	1,678	6	1,687	8	3,695	5	0,338	13
LOVIII	2,469	4	–3,297	21	1,311	10	2,617	7	1,097	9
LOIX	0,281	12	–0,221	12	3,348	3	1,509	10	3,272	2
LOX	1,204	8	–0,990	17	–0,268	17	–0,366	12	0,880	10
LOXI	1,212	7	3,639	3	–0,212	16	–0,758	13	–0,425	15
LOXII	0,645	10	1,014	7	1,607	9	4,258	3	1,655	7
LOXIII	–0,371	14	–0,450	15	1,884	7	4,206	4	2,362	5
LOXIV	4,322	2	0,752	9	3,488	2	4,316	2	2,106	6
LOXV	–0,454	15	–1,341	18	0,996	12	1,030	11	–1,841	18
LOXVI	–7,455	23	–1,728	19	–3,316	19	–1,575	15	–3,707	21
LOXVII	–1,310	17	–5,415	23	2,484	5	–4,236	21	**4,480**	1
LOXXI	–2,122	19	3,846	2	0,972	13	–1,339	14	–0,111	14
LOXXIV	–2,997	22	0,385	10	–1,138	18	–2,191	16	–4,886	22
LOXXIX	–2,121	18	–2,650	20	–8,474	23	–3,255	19	–2,345	19
LOXXX	0,417	11	–0,769	16	–6,554	22	–2,379	17	–5,853	23

Źródło: obliczenia własne za pomocą programu Excel oraz R Project.

Tabela 5. Wartości skróconej miary dobrobytu Sena oraz odpowiadający jej ranking

Szkoła	Język polski																Matematyka			
	2007				2008				2009				2010				2010			
	Gini	Śr.	EWS	R	Gini	Śr.	EWS	R	Gini	Śr.	EWS	R	Gini	Śr.	EWS	R	Gini	Śr.	EWS	R
LOI	0,102	1,00	0,897	13	0,106	1,00	0,894	15	0,105	0,98	0,878	16	0,119	0,92	0,807	19	0,103	1,02	0,911	11
LOII	0,090	0,97	0,886	14	0,122	0,90	0,790	22	0,093	1,04	0,947	7	0,084	1,04	0,957	7	0,099	0,97	0,878	17
LOIII	0,061	1,08	1,018	2	0,094	1,06	0,958	5	0,074	1,02	0,948	5	**0,068**	**1,08**	**1,007**	**1**	**0,043**	**1,04**	**0,995**	**1**
LOIV	0,120	0,93	0,815	20	0,103	1,02	0,911	10	**0,095**	**1,09**	**0,990**	1	0,083	1,06	0,975	5	0,081	1,05	0,968	4
LOSA	0,065	0,84	0,790	21	0,107	1,00	0,894	14	0,135	0,84	0,729	21	0,131	0,81	0,704	23	0,094	0,97	0,883	16
LOSU	0,096	1,03	0,931	7	0,083	1,08	0,988	4	0,083	0,99	0,908	13	0,115	0,84	0,748	22	0,105	1,03	0,926	8
LOV	**0,075**	**1,12**	**1,040**	**1**	0,097	1,15	1,042	2	0,086	0,99	0,905	14	0,083	0,99	0,905	11	0,070	0,99	0,925	10
LOVI	0,111	1,03	0,920	9	0,089	1,03	0,940	7	0,107	0,89	0,790	19	0,117	0,89	0,787	20	0,125	0,93	0,811	20
LOVII	0,090	1,02	0,930	8	0,089	1,05	0,952	6	0,092	1,01	0,915	10	0,081	1,06	0,970	6	0,073	0,98	0,906	13
LOVIII	0,099	1,06	0,958	4	0,098	0,91	0,823	20	0,080	1,00	0,925	9	0,092	1,04	0,940	8	0,085	1,01	0,925	9
LOIX	0,088	1,00	0,908	10	0,097	1,00	0,899	12	0,083	1,07	0,982	2	0,086	1,00	0,913	10	0,082	1,05	0,965	5
LOX	0,096	1,03	0,934	6	0,102	0,98	0,877	16	0,103	0,97	0,872	17	0,100	0,97	0,875	12	0,103	1,01	0,902	14
LOXI	0,108	1,05	0,935	5	0,103	1,13	1,010	3	0,095	0,98	0,884	15	0,103	0,97	0,871	13	0,091	1,00	0,906	12
LOXII	0,099	1,00	0,899	12	0,098	1,03	0,927	8	0,086	1,00	0,915	11	0,075	1,07	0,988	4	0,064	1,02	0,954	7
LOXIII	0,098	0,98	0,884	15	0,098	0,99	0,894	13	0,093	1,03	0,930	8	0,078	1,08	0,997	3	0,065	1,04	0,971	3
LOXIV	0,097	1,10	0,993	3	0,077	1,00	0,926	9	0,077	1,06	0,979	3	0,067	1,07	1,000	2	0,060	1,02	0,962	6
LOXV	0,116	0,98	0,870	16	0,094	0,97	0,874	17	0,099	1,01	0,911	12	0,094	1,02	0,921	9	0,115	0,95	0,842	18
LOXVI	0,129	0,77	0,673	23	0,102	0,96	0,860	19	0,128	0,89	0,774	20	0,112	0,96	0,856	15	0,135	0,91	0,783	21
LOXVII	0,094	0,96	0,869	17	0,129	0,87	0,759	23	0,100	1,06	0,952	4	0,105	0,87	0,775	21	0,097	1,08	0,978	2
LOXXI	0,108	0,93	0,827	19	**0,081**	**1,18**	**1,080**	**1**	0,074	1,02	0,948	6	0,101	0,95	0,859	14	0,109	0,99	0,885	15
LOXXIV	0,146	0,92	0,782	22	0,119	1,03	0,904	11	0,106	0,95	0,850	18	0,099	0,94	0,844	16	0,159	0,86	0,725	22
LOXXIX	0,098	0,93	0,836	18	0,122	0,93	0,819	21	0,112	0,74	0,660	23	0,105	0,91	0,810	18	0,132	0,95	0,821	19
LOXXX	0,120	1,03	0,907	11	0,128	0,99	0,860	18	0,097	0,78	0,707	22	0,137	0,96	0,826	17	0,186	0,83	0,678	23

Źródło: obliczenia własne za pomocą programu Excel oraz R Project.

Tabela 5 wskazuje korelacyjne zależności pomiędzy współczynnikiem Giniego (wyrażającym nierównomierność rozkładu wiedzy), miernikiem wiedzy EWS oraz edukacyjną wartością dodaną dla różnych okresów oraz przedmiotów. W ramkach ponumerowanych cyframi rzymskimi wyodrębniono sześć zależności, które zostaną omówione.

Tabela 6. Korelacyjna macierz zależności (współczynniki Persona)

	Gini 2007	Gini 2008	Gini 2009	Gini 2010	Gini 2010 M	EWD 2007	EWD 2008	EWD 2009	EWD 2010	EWD 2010 M	EWS 2007	EWS 2008	EWS 2009	EWS 2010
Gini 2008	0,194													
Gini 2009	0,225	0,459												
Gini 2010	0,264	0,381	0,632											
Gini 2010 M	0,681	0,512	0,492	0,756										
EWD 2007	**–0,541**	–0,382	–0,682	–0,444	–0,533									
EWD 2008	–0,125	**–0,615**	–0,361	–0,163	–0,257	0,385								
EWD 2009	–0,218	–0,412	**–0,661**	–0,745	–0,727	0,381	0,141							
EWD 2010	–0,178	–0,347	–0,619	**–0,899**	–0,648	0,451	0,153	0,659						
EWD 2010 M	–0,535	–0,299	–0,544	–0,612	**–0,840**	0,407	0,021	0,790	0,462					
EWS 2007	**–0,554**	–0,334	–0,684	–0,418	–0,521	**0,990**	0,355	0,374	0,427	0,433				
EWS 2008	–0,113	**–0,681**	–0,398	–0,146	–0,259	0,327	**0,977**	0,182	0,112	0,055	0,300			
EWS 2009	–0,171	–0,426	**–0,724**	–0,724	–0,678	0,384	0,156	**0,989**	0,631	0,777	0,385	0,215		
EWS 2010	–0,092	–0,308	–0,591	**–0,893**	–0,588	0,384	0,117	0,635	**0,993**	0,411	0,361	0,080	0,612	
EWS 2010 M	–0,625	–0,410	–0,499	–0,632	**–0,930**	0,439	0,120	0,758	0,481	**0,969**	0,454	0,152	0,733	0,425

Źródło: obliczenia własne za pomocą programu Excel.

Obszar I ukazuje zależność pomiędzy współczynnikami nierównomierności nauczania w poszczególnych latach (oraz różnych przedmiotów). Widoczne jest wyraźne skorelowanie współczynnika Giniego wyrażającego nierównomierność nauczania matematyki z 2010 r. ze wszystkimi wartościami współczynników Giniego otrzymanych dla języka polskiego. Największą wartość współczynnika korelacji możemy zauważyć pomiędzy językiem polskim a matematyką w 2010 r. A więc nierównomierność rozkładu wiedzy jest wielkością, która zachowuje „porządek" niezależnie od zdawanego przedmiotu przez tych samych uczniów.

Obszar II przedstawia zależność pomiędzy nierównomiernością kształcenia a edukacyjną wartością dodaną (liczoną całkowicie niezależnie od niej). Wszystkie otrzymane współczynniki korelacji są ujemne. Szczególnie widoczne jest mocne skorelowanie wartości występujących na przekątnej prostokąta II, które świadczy o tym, iż im średnio większa jest nierównomierność nauczania w danym roku, tym średnio mniejsza jest edukacyjna wartość dodana. Obszar IV wskazuje korelacje nierównomierności kształcenia z kształtowaniem się miernika kształcenia otrzymanego na podstawie uproszczonej funkcji dobrobytu Sena. Zauważmy, że obliczone wartości współczynników korelacji są podobne jak te otrzymane w obszarze II. Należy również wziąć pod uwagę to, że wartość nierównomierności występuje bezpośrednio we wzorze (14).

Obszary III i VI ukazują dynamiczną zmianę wskaźników kształcenia wskaźników EWD oraz EWS dla języka polskiego, a także ich powiązanie z EWD oraz EWS liczoną dla matematyki z 2010 r. Otrzymane wielkości pokazują dla języka polskiego, że wskaźniki EWD oraz EWS zmieniają się mocno w zależności od rocznika. Najmocniejszą korelację możemy zauważyć w latach 2009 i 2010 (dla EWD oraz EWS).

Obszar V przedstawia już tylko zależność pomiędzy dwoma różnymi miernikami efektywności nauczania. Widać wyraźnie „mocną" korelację pomiędzy miernikami liczonymi dla danych z tego samego okresu i dla tych samych przedmiotów. Oczywiście ma to przełożenie na kształtowanie się rankingów z tab. 3 i 4, ponieważ są one bardzo podobne dla tych samych roczników i przedmiotów. Zauważmy również, że efektywność nauczania otrzymana dla matematyki (EWD oraz EWS) jest dodatnio skorelowana z efektywnością nauczania języka polskiego.

Przeprowadzone analizy pokazują, że o efektywności nauczania z danego przedmiotu można mówić tylko w obrębie danego rocznika. Dobrym przykładem są wyniki uczniów LO V zdających język polski, które w latach 2007-2008 zajmowało pierwszą pozycję, w latach zaś 2009-2010 uczniowie ci otrzymali znacznie gorszy wynik (względem EWD oraz EWS). Warte zaznaczenia jest, że pod względem humanistycznym niezależnie od rankingu dobrze wypadły LO III oraz LO XIV.

Pod kątem matematycznym oczywiście nie można powiedzieć, jak zmieniał się dynamicznie indeks nauczania, gdyż posiadano tylko dane z jednego rocznika. Najlepiej względem rankingu EWD wypadło LO XVII, względem zaś miernika EWS najwyższą pozycję otrzymało LO III. Z tabeli 5 wynika, że na poziomie średnich wartości dla matematyki[4] LO VII również wypadło najlepiej. Jednakże miało ono ponaddwukrotnie większą nierównomierność efektywności nauczania niż LO III, co spowodowało, że LO III zyskało kilka pozycji w rankingu. Warto również zwrócić uwagę na to, że LO III cechuje się bardzo małą zmiennością nauczania niezależnie od badanego przedmiotu. LO XXIX i LO XXX otrzymały najgorsze wyniki analizowanych egzaminów oraz – co warte podkreślenia– charakteryzowały się one dużą nierównomiernością nauczania.

W badaniach przeanalizowano części podstawowe egzaminów (egzaminy obligatoryjne), które zdawali wszyscy uczniowie, dlatego też efektywność nauczania jest w tym przypadku zdecydowanie lepiej modelowana niż wzięcie pod uwagę tylko wyników matur rozszerzonych. Maturę rozszerzoną zdają zazwyczaj tylko uczniowie, którzy „lubią dany przedmiot" oraz korzystają z innych form wsparcia, np. korepetycji. Trudno w tym przypadku mówić o efektywności nauczania danej szkoły. Przeprowadzono analizy pokazujące, że efektywność nauczania liczona wskaźnikiem EWD jest ujemnie skorelowana z nierównomiernością efektywności nauczania. Zmniejszenie nierównomierności nauczania spowoduje więc wzrost edukacyjnej wartości dodanej. Jeżeli szkoły będą dążyły do takich wyników uczniów, które odpowiadałyby ich realnym możliwościom, wówczas znacznie poprawi się pozycja szkoły w rankingu. Zdarza się, że nauczyciele w danym liceum nie dążą do podniesienia wiedzy słabszych uczniów, skupiając się na tych, którzy lepiej „przyswajają

---

[4] Śr.=1.08.

wiedzę”. Uwzględnienie miernika EWS pozwala na dowartościowanie tych liceów, które cechują się małą zmiennością efektywności nauczania. Minusem stosowalności opisanego współczynnika EWS jest konieczność spełnienia zależności ze wzoru (16), co nie koniecznie musi być prawdą.

Literatura

Aitkin M., Longford N. (1986), *Statistical modelling issues in school effectiveness studies,* „Journal of the Royal Statistical Society”, vol. 149, no 1.

Aitkin M., Anderson D., Hinde J. (1981), *Statistical modelling of data on teaching styles,* „Statistic Soc Vol.”, no 144.

Balestra P., Nerlove M. (1966), *Pooling cross section and time series data in the estimation of a dynamic model: the demand for natural gas, „*Econometrica”*,* vol. 34, no 3.

Baltagi B. (2005), *Econometric Analysis of Panel Data*, John Wiley & Sons Ltd.

Dempster A., Rubin D., Tsutakawa R. (1981), *Estimation in covariance components models*, „Journal of the American Statistical Association” vol. 76, no 374.

Ejsmont W. (2009), *Efektywność nauczania we wrocławskich liceach*, „Didactics of Mathematics”, no 5-6 (9-10), UE, Wrocław.

Hasio C. (1999), *Analysis of Panel Data*, Cambridge University Press.

Jakubowski J., Sztencel R. (2004), *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa,* SCRIPT.

Laird N. (1982), *Computation of variance components using the em algorithm*, „Journal of Statistical Computation and Simulation”, vol. 14, no 3.

Lindley D., Smith A. (1972), *Bayes estimates for the linear model*, „Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)”, vol. 34, no 1.

Lazear E. (2001), *Educational production,* „Quarterly Journal of Economics”, vol. 116.

Marks D., Fogelman K. and other (general discussion) (1984), *Assessment of examination performance in different types of schools,* „Journal of the Royal Statistical Society”, vol. 147, no 4.

Sen A.K. (1973), *On ignorance and equal distribution, „*American Economic Review”, vol. 63, no 5.

Shorrocks A.F. (1983), *Ranking income distributions,* „Economica”, vol. 50.

Skrondal A., Rabe-Hesketh S. (2008), *Multilevel and Longitudinal Modeling Using Stata.College Station*, Stata Press Publication – StataCorp LP, Texas.

INEQUALITY OF TEACHING EFFECTIVENESS IN SECONDARY SCHOOLS IN WROCŁAW

Summary: The article focuses on measuring the inequality of teaching effectiveness in secondary schools in Wrocław. In the first part of the article the author appropriately converts the data and explains the construction of two models. First of them is based on the model used by Aitkins and Longford and the second is introduced by the author and is based on simplified Sen function. In the second part of the article the author applies those data to the proper models and draws conclusions from the obtained results.

Key words: school effectiveness, teaching, analysis of panel data.