

**KOMITET METROLOGII I APARATURY NAUKOWEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

PROBLEMY METROLOGII ELEKTRONICZNEJ I FOTONICZNEJ

**Praca zbiorowa
pod redakcją Janusza Mroczyki**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroc³awskiej

PROBLEMY METROLOGII
ELEKTRONICZNEJ I FOTONICZNEJ

PUBLIKACJA WYDANA Z OKAZJI 10. ROCZNICY POWSTANIA
KATEDRY METROLOGII ELEKTRONICZNEJ I FOTONICZNEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

KOMITET METROLOGII I APARATURY NAUKOWEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

PROBLEMY METROLOGII ELEKTRONICZNEJ I FOTONICZNEJ

*Praca zbiorowa
pod redakcją Janusza Mroczyki*



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2008

Opracowanie redakcyjne i korekta

Hanna JUREK

Projekt okładki

Janusz MROCZKA

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część niniejszej książki, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy i właścicieli praw autorskich.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2008

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

<http://www.oficyna.pwr.wroc.pl>

e-mail: oficwyd@pwr.wroc.pl

ISBN 978-83-7493-385-8

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 313/2008.

Katedra Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej powstała w wierze, że czym większy wysiłek skierujemy w poznanie, tym głębsza będzie świadomość naszej podmiotowości.

Katedra to miejsce i wspólnota służąca prawdzie poznawanej i przekazywanej, gdzie spotykają się uczeni i uczniowie, profesorowie i studenci zespoleni dążeniem do nauczania młodych oraz pomnażania dobra kulturowego ludzi.

Wrocław, marzec 1998

prof. Janusz Mrocza

SPIS TREŚCI

Przedmowa	9
Adam G. POLAK, Janusz MROCZKA, Pośrednie pomiary właściwości obiektów złożonych	15
Józef BORKOWSKI, Janusz MROCZKA, Estymacja parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego metodą LIDFT jako rozwinięcie cyfrowego przetwarzania sygnałów w analizie fourierowskiej	79
Ireneusz JABŁOŃSKI, Janusz MROCZKA, Czasowy algorytm pomiaru mechaniki oddychania w warunkach manewru okluzyjnego	133
Dariusz WYSOCZAŃSKI, Janusz MROCZKA, Wykorzystanie charakterystyk polaryzacyjnych światła rozproszonego do badania ośrodków dyspersyjnych – materiałów kompozytowych	213
Grzegorz ŚWIRNIAK, Janusz MROCZKA, Wybrane zagadnienia pomiaru średnicy włókna optycznego w procesie produkcji z wykorzystaniem światła laserowego	255

Nauka pragnie nas zapoznać z rzeczywistością, która nas otacza. Zadaniem nauk nie jest jednak wierne kopiowanie świata w całym jego bogactwie barw, woni, dźwięków, które świat przed naszymi zmysłami roztacza, lecz tworzenie schematu pojęciowego, który by wiernie odtwarzał samą strukturę świata, sam jego szkielet odarty z wszelkich treści zmysłowych.

Nie portret realistyczny świata, lecz raczej przejrzysta mapa świata pozwalająca łatwo wytyczyć drogi naszemu praktycznemu działaniu jest celem, do którego nauka zmierza

Kazimierz Ajdukiewicz, *Język i poznanie*

PRZEDMOWA

Podstawowym wskaźnikiem rozwoju wybranej dziedziny nauki jest ciągła weryfikacja teorii i metod, którymi dana dziedzina się posługuje. Czy jest on w pełni miarodajny i w jakiej mierze przyczynia się on do jej rozwoju decyduje chęć tworzenia jej metodologicznych czynności. Z historycznych uwarunkowań różnych dziedzin nauki widzimy, że taka analiza może stworzyć pełny, precyzyjny schemat, jak należy i jak powinno uprawiać się daną dziedzinę. Przykładem może tu być logika, która dzięki teorii dedukcji osiągnęła ważną, pełną precyzję. Nasuwa się pytanie, czy ten przykład jest w pełni adekwatny do innych dziedzin. Na tak postawione pytanie można dać zarówno twierdzącą, jak i przeczącą odpowiedź. Jedno jest pewne, że o ile proces poznawczy ukształtowany w danej dziedzinie nauki daje wyniki, które mogą potwierdzać rzeczywistość lub pozorną sprzeczność z uznanymi wcześniej prawami, o tyle ich konstruktywna, krytyczna analiza – ze szczególnym uwzględnieniem metod ich uzyskiwania – daje możliwości w formułowaniu jednoznacznych schematów poznawczych danej dziedziny wiedzy. Jak wiemy, metody te mogą mieć charakter dedukcyjny i indukcyjny. W metodach dedukcyjnych, w których środki i metody zaczerpnięte są z logiki, można z większym optymizmem oczekiwać pozytywnych rezultatów. W przypadku metod indukcyjnych prawdopodobieństwo rzetelnej weryfikacji uzależnione jest od rozwoju środków i metod, do których należą przede wszystkim narzędzia instrumentalnego poznania (tj. współczesne systemy pomiarowe, inteligentne czujniki), czyli przedmioty współczesnego miernictwa.

Coraz częściej uświadamiamy sobie, że postawa scjentyistyczno-technicystyczna ukształtowana w naszym życiu codziennym wynika z przeświadczenia, że aktywność poznawcza jest realnym sposobem przebudowy i opanowania środowiska, w którym żyjemy. Człowiek zabiega o wiedzę nawet wtedy, gdy ta nie służy jego potrzebom biologicznym – pisał W. Tatarkiewicz. Z wielkim dostojeństwem odnosimy się do wszystkiego co naukowe. W naszym środowisku określeniem „metrologiczny” posługujemy się z patosem. Codziennność weryfikuje nasze odczucia i stwierdzamy, że czynimy to również z niezrozumieniem, co łatwo wytłumaczyć, parafrazując słowa G.F. Weizsackera, że „...łatwiej uprawiać metrologię, niż ją rozumieć”¹.

Poznanie naukowe odnosi sukcesy teoretyczne i praktyczne wówczas, gdy pojawiają się wątpliwości i pytania o swoją prawdziwość i adekwatność w stosunku nie tylko do badanej przedmiotowej rzeczywistości, ale do nas ludzi oraz naszej działalności. To może być przyczyną konfliktu pokoleń na temat istotnego sensu uprawianej dyscypliny. Gdzie szukać pomocy w rozwiązaniu tych problemów? Jeżeli w naszych dociekaniach wygospodarujemy miejsce na relacje epistemologiczne i metodologiczne, to łatwiej będzie nam rozwikłać wiele tego typu problemów.

Niewątpliwie świadomość metodologiczna jawi się zawsze *ex post*, stąd teza, że dzieląc się doświadczeniami z przeszłości, doskonalimy siebie i innych dla przyszłości, tworząc tym samym z poszanowaniem tradycji specyficzne kontinuum kształtowania nowej rzeczywistości.

Istotne również jest to, że działalność naukowa jest faktem humanistycznym, psychologicznym i socjologicznym wielorako związanym z warunkami społeczno-ekonomicznymi. To one rodzą rodzaj problemów, uwarunkowań i wiele opinii, które nie zawsze służą nauce. Obyśmy nie mieli dylematu, czy nauka żyje dzięki nam? Czy my żyjemy dzięki nauce?

Metrologia w procesie swojego ciągłego rozwoju odkrywa coraz to nowsze zagadnienia poznawcze, ukazując tym samym nowe problemy pomiarowe do rozwiązania. To stymuluje rozwój doskonalszych narzędzi pomiarowych wykorzystujących osiągnięcia współczesnej technologii. Nowe problemy poznawcze i ich realne narzędzia poznania tworzą nowe kierunki metrologii. Oprócz tradycyjnych działów metrologii, takich jak: teoretyczne podstawy metrologii, wzorce, metody pomiarowe, obróbka danych pomiarowych, ocena niepewności pomiaru, technika systemów pomiarowych itp. pojawiają się działy nowe, a wśród nich: metrologia optyczna, metrologia fotoniczna, nanometrologia, metrologia bioniczna itp.

W swoim procesie poznawczym metrologia posługuje się analizą i syntezą w dziedzinie abstrakcji na obszarach rzeczywistości wyrażonych przez modele fizyczne i matematyczne. To właśnie na tych modelach łatwo zauważamy przykłady analogii formalnych między różnymi zagadnieniami od strony zjawiskowej a podobnymi od strony syntezy pojęciowej.

¹ „...łatwiej uprawiać naukę niż ją rozumieć”.

Taki sposób myślenia stał się jedną z przyczyn powołania Katedry Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej w Politechnice Wrocławskiej. Katedry, u której podstaw działalności leżą zagadnienia modelowania fizycznego rzeczywistych zjawisk dających się opisać za pomocą pojęć materii, energii (entropii), czasu i informacji (negenotropii). Głównym celem pracy Katedry jest przekształcanie modeli fizycznych – zbudowanych z pojęć materii, energii, czasu – w modele matematyczne, a następnie w modele metrologiczne, które uzupełnione pojęciami informacji dostarczałyby wiadomości jakościowych i ilościowych. Podstawowy schemat działania Katedry odpowiada schematowi procesu poznawczego, stanowiącego szeregowo połączenie badanego obiektu, będącego celem poznania, z jego modelem fizycznym, modelem matematycznym i metrologicznym, pomiędzy którymi występują sprzężenia zwrotne stanowiące odzwierciedlenie procesów weryfikacyjnych poszczególnych modeli, uwarunkowane zewnętrznymi kryteriami oceny.

Główne zadania Katedry, to:

- kształcenie i rozwijanie zainteresowań metrologicznych wśród studentów i doktorantów przez prowadzenie i kierowanie specjalnością dydaktyczną „Aparatura elektroniczna” na Wydziale Elektroniki Politechniki Wrocławskiej,
- przygotowywanie pomocy dydaktycznych (skrypty, podręczniki, stanowiska laboratoryjne),
- inicjowanie i wykonywanie metrologicznych prac naukowych oraz współpraca z innymi uczelniami technicznymi i jednostkami PAN,
- współpraca z krajową służbą metrologiczną zarówno w zakresie wdrażania własnych osiągnięć naukowych, jak i propagowanie osiągnięć innych ośrodków krajowych i zagranicznych oraz prognozowanie rozwoju metrologii i jej roli w różnych dziedzinach wytwórczości,
- podejmowanie współpracy z ośrodkami zagranicznymi w procesie kształcenia (wspólne doktoraty), prowadzenie wspólnych grantów (wspólne publikacje), inicjowanie wspólnych międzynarodowych konferencji.

Działalność naukowa Katedry obejmuje:

- metodologię obserwacji i eksperymentu,
- algorytmizację problemu odwrotnego,
- modelowanie matematyczne pól fizycznych i ich praktyczna realizacja metodami tomografii optycznej i impedancyjnej,
- analizę spektralną i polaryzacyjną promieniowania rozproszonego w układach dyspersyjnych i ich praktyczne wykorzystanie w ocenie właściwości materiałów kompozytowych,
- metody obrazowania optycznego i przetwarzania danych pomiarowych w trójwymiarowej przestrzeni i ich fuzja na potrzeby bezstratnego kodowania obrazów,
- wieloczułnikowa fuzja danych o różnej przestrzennej rozdzielczości z wykorzystaniem deterministycznych i stochastycznych metod ich przetwarzania na rekonstrukcję o wyższej jakości,

- wykorzystanie reprezentacji czasowo-częstotliwościowej do przetwarzania danych pomiarowych i ich praktyczna realizacja za pomocą procesorów sygnałowych,
- metody identyfikacji parametrycznej statycznych i dynamicznych modeli złożonych obiektów wraz z ich praktycznym zastosowaniem w pomiarach właściwości układu oddechowego i krwionośnego człowieka,
- wykorzystanie metod sztucznej inteligencji do pozyskiwania informacji ilościowych i jakościowych z danych pomiarowych,
- projektowanie, opracowywanie i optymalizacja komputerowych systemów pomiarowych i informacyjnych do badań naukowych oraz procesów technologicznych,
- projektowanie i wykonywanie inteligentnych przyrządów pomiarowych z wykorzystaniem techniki mikroprocesorowej.

Katedra prowadzi współpracę z następującymi ośrodkami zagranicznymi:

- Institut National des Sciences Appliquees, Rouen, CNRS unite 6614 DS10, Francja
- Department of Engineering and Product Design, University of Central Lancashire, Preston, Wielka Brytania,
- Institut Universitaire des Systemes Thermiques Industriels, Marsylia, UMR CNRS 6595, Francja
- Department of Biomedical Engineering, Boston University, Boston, USA,
- Biomedical Physics Laboratory, Universite Libre de Bruxelles, Belgia.

Katedra utrzymuje kontakty naukowe z:

- Centre for Modelling and Information in Medicine, City University, London, Wielka Brytania,
- Dipartimento de Elettronica e Informatica, University of Padova, Padwa, Włochy,
- Royal Brompton National Heart and Lung Hospital, London, Wielka Brytania,
- Physiologie Respiratoire et Sportive, Hopital Charles Nicolle, Rouen, Francja.

Teoretyczno-empiryczne poczynania, które prowadzimy wspólnie w Katedrze, służą nam do budowy przeświadczenia, że drogą kolejnych przybliżeń prawd cząstkowych przybliżamy się do tej nieosiągalnej Prawdy Absolutnej, którą skrywa przed nami Natura. W tym ciągłym dialogu z Naturą trwamy, doskonaląc siebie i swoich podopiecznych (studentów, doktorantów), a tym samym utwierdzamy się w przekonaniu, że droga ta nie doprowadzi nas do naukowego defetyzmu. Trwamy w przeświadczeniu, że zdobywane przez nas stopnie naukowe określają zakres naszej kompetencji w działaniu oraz naszą pozycję w procesie poznania. To one otwierają nam drzwi do społeczności, dla której nauka jest przywilejem i obowiązkiem. To one przypominają nam, że posiadliśmy zdolność postrzegania prawdy jako jednego ze źródeł naszej podmiotowości.

Wzrastająca liczba publikacji, ukazujących ważne aspekty metrologii odniesione do różnych pól zjawisk i obiektów, powoduje, że niełatwo je przestudiować, ani nawet prześledzić aktualności tak, aby mieć ogólny pogląd na stan wiedzy w danej specjalności. Dlatego też pragniemy zaprezentować fragmenty naszych poczynañ, które

encyklopedycznie informowałyby o aktualnych problemach, którymi się zajmujemy. Tak przedstawiony materiał może być wykorzystany do dydaktyki danej specjalności naukowej, a tym samym będzie realizował tezę, w której równie istotne dostarczenie informacji naukowej w danej specjalności jest kształcenie zreflektowanej postawy naukowej. Wspomniane już materiały mają swój początek w pracach doktorskich autorów. Tą drogą pragniemy zaprezentować sposób posługiwania się warsztatem naukowym, wypracowanymi umiejętnościami samokształcenia oraz doskonalenia zdolności do intelektualnego dialogu interdyscyplinarnego, wypracowania jedności poczynań metrologicznych, mimo spontanicznej specjalizacji.

Janusz Mrocza

Adam G. POLAK
Janusz MROCZKA*

POŚREDNIE POMIARY WŁAŚCIWOŚCI OBIEKTÓW ZŁOŻONYCH

Opracowanie prezentuje kompletny łańcuch czynności związanych z wykorzystaniem technik modelowania matematycznego w pośrednich pomiarach właściwości obiektów złożonych. Przedstawione są zagadnienia dotyczące sposobów opracowywania modeli matematycznych obiektów złożonych, ich walidacji, implementacji komputerowych, weryfikacji utworzonych algorytmów, prowadzenia badań symulacyjnych, przekształcania modeli kompleksowych w modele odwrotne, wykorzystania modeli odwrotnych w pomiarach pośrednich, poprawiania uwarunkowania numerycznego algorytmów obliczeniowych i oceny dokładności takich pomiarów.

1. WPROWADZENIE

1.1. BADANIE OBIEKTÓW ZŁOŻONYCH

Otoczające człowieka obiekty często mają bardzo złożoną strukturę i cechują się wielowymiarowymi, nieliniowymi i dynamicznymi oddziaływaniami zachodzącymi między elementami składowymi [89], [83]. Nazywane są one *obiektami złożonymi*. Efektem wspomnianych współoddziaływań są takie reakcje obiektów, których nie da się prosto wywnioskować z właściwości poszczególnych komponentów. Z tego powodu w badaniu obiektów złożonych nie sprawdza się tradycyjne podejście analityczno-redukcyjno-istotne. Postulował je m.in. Kartezjusz, który sądził, że w celach poznawczych wystarczy „każdy problem rozbić na tyle oddzielnych, prostych elementów, na ile to jest tylko możliwe” [14]. Jednak już Arystoteles zauważył, że *całość to więcej niż suma jej części*. Z wymienionych powodów budowa i działanie obiektów złożonych są trudne do analizy, a problemem ciągle stymulującym wiele badań jest określenie powiązania struktury tych obiektów z ich funkcjami.

* Katedra Metrologii Elektrycznej i Fotonicznej, Politechnika Wroclawska.

Systemy o kompleksowym charakterze analizowane są w wielu dziedzinach nauki, takich jak fizyka, biologia, ekologia, psychologia, teoria poznania, ekonomia czy socjologia [89]. Okazuje się jednak, iż pomimo tak dużej różnorodności zainteresowań obiekty złożone, charakterystyczne dla wymienionych obszarów, cechują się wieloma wspólnymi cechami, co zachęca do prób unifikacji metodologii badań. W ten sposób teoria systemów złożonych staje się punktem centralnym wielu ważnych i innowacyjnych badań i zastosowań w różnych dziedzinach. Wyniki tych badań przyczyniają się do modyfikacji koncepcji dotyczących m.in. zjawisk naturalnych, funkcjonowania całych społeczeństw i zachowań pojedynczych obiektów. Pojawiają się nowe techniki oraz sposoby analizy procesów nagłych, niespodziewanych i często nieodwracalnych.

Coraz większe zapotrzebowanie na wiedzę o funkcjonowaniu obiektów złożonych wynika z różnorodnych potrzeb praktycznych. Zrozumienie ich działania wymaga przede wszystkim poznania wewnętrznej struktury, określenia zjawisk zachodzących w poszczególnych częściach i ostatecznie powiązania ze sobą struktury, zjawisk oraz obserwowanych zachowań obiektów.

Podstawowym narzędziem poznania ilościowego są *pomiary*. Na podstawie ich wyników można wnioskować o wszystkich trzech wymienionych czynnikach, jednakże stopień złożoności wielu obiektów naturalnych wymusza stosowanie dodatkowych narzędzi. Przede wszystkim należą do nich modele obiektów i zjawisk, a zwłaszcza najbardziej sformalizowane *modele matematyczne*. Swoją strukturą i wartościami parametrów, a zatem jakościowo i ilościowo, ujmują one rezultaty prac eksperymentalnych, dedukcyjnych i indukcyjnych, wyrażają proponowane koncepcje, formułowane hipotezy i akceptowane teorie. Modele matematyczne są podstawą symulacji komputerowych, które obecnie okazują się nowym i istotnym źródłem wiedzy o obiektach złożonych.

Do podstawowych zadań poznawczych modelowania należy lepsze zrozumienie funkcjonowania obiektów rzeczywistych i zachodzących w nich zjawisk oraz prognozowanie zachowania się modelowanego obiektu [86]. Ostateczna postać konkretnego modelu zależy jednak nie tylko od przedmiotu badań, ale również od celu, w jakim model będzie stosowany. Zastosowanie technik modelowania, dających możliwość testowania hipotez i wyjaśniania zjawisk, ma szczególne znaczenie poznawcze. Dzieje się tak przede wszystkim wtedy, gdy przyczyny obiektywne – jak np. brak odpowiednich metod pomiarowych lub/i złożoność obiektu – uniemożliwiają dalsze jego poznawanie eksperymentalne. Sytuacja taka bardzo często towarzyszy badaniom złożonych obiektów naturalnych. Wtedy, po wcześniejszym wykazaniu teoretycznej i eksperymentalnej adekwatności modelu, dokonuje się symulacji funkcjonowania systemu w interesujących warunkach. Dopóki adekwatność zastosowanego modelu nie zostanie podważona, dopóty informacje uzyskane z symulacji, zgodnie z metodologią nauk empirycznych, traktowane są na równi z wynikami innych eksperymentów i służą do konstruowania odpowiedzi na postawione wcześniej pytania.

Model matematyczny obiektu jest narzędziem stosowanym nie tylko do przewidywania jego zachowania. Sukcesy w jakościowym i ilościowym przewidywaniu zjawisk usprawiedliwiają przekonanie, że między strukturą matematyczną modelu

a strukturą badanego obiektu zachodzi pewnego rodzaju podobieństwo, można zatem strukturę modelu matematycznego odnieść do badanego fragmentu świata [28]. Model matematyczny daje tym samym wgląd w strukturę samego obiektu i zachodzących w nim zjawisk. Ponadto związki danego modelu z innymi strukturami matematycznymi pozwalają umieścić badane zjawisko w szerszym kontekście wyników, czyniąc je bardziej zrozumiałym. Wielu badaczy sądzi, że jest to obecnie jedyny poprawny i skuteczny sposób wyjaśniania w nauce [28], a Immanuel Kant stwierdził: „Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki”.

Nieustannie pojawiają się nowe metody badania obiektów złożonych, a istniejące już podlegają procesom doskonalenia. Obserwowany obecnie postęp w tej dziedzinie związany jest przede wszystkim z rozwojem elektronicznej aparatury pomiarowej, umożliwiającej szczegółowe badania struktury i zjawisk zachodzących w badanych obiektach, doskonaleniem metod analizy nieliniowych modeli matematycznych oraz rozwojem technik obliczeniowych mającym swe odzwierciedlenie zarówno w realizacji sprzętowej (komputery), jak i w algorytmach numerycznych.

1.2. POMIARY POŚREDNIE

Pomiar jest empirycznym procesem poznawczym umożliwiającym obiektywne odwzorowanie właściwości fizycznych badanego obiektu w dziedzinę liczb [11]. Polega na porównaniu wielkości mierzonej ze wzorcem. W *pomiarach bezpośrednich* wielkość porównywana i wzorcowa są tego samego rodzaju, a wynik pomiaru podawany jest w jednostkach wielkości mierzonej [56].

Proces pomiarowy można zapisać za pomocą formalizmu matematycznego następująco:

$$y = f_0(y_0, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \quad (1)$$

gdzie y oznacza wynik pomiaru, f_0 jest prawdziwym przetwarzaniem realizowanym przez przyrząd, y_0 to wartość prawdziwa wielkości mierzonej oddziałującej na wejście miernika, a \mathbf{w} i \mathbf{z} są wektorami wielkości wpływających: kontrolowanych i zakłócających. Ponieważ rzeczywiste odwzorowanie f_0 (tak jak i wartość prawdziwa y_0) nie jest znane, producent przypisuje działaniu przyrządu pewien model matematyczny f_m i zgodnie z nim dokonuje procesu wzorcowania [56]. Najczęściej stosowane jest odwzorowanie tożsamościowe, tj. $f_m(\xi) = \xi$.

Dodatkowe znaczenie modeli matematycznych uwidacznia się podczas *pomiarów pośrednich*. Bezpośrednie pomiary wielu procesów zachodzących wewnątrz złożonych obiektów naturalnych są niemożliwe. Powodem może być brak odpowiednich elementów pomiarowych (zwłaszcza czujników), fizyczna niemożność umieszczenia elementów systemu pomiarowego w odpowiednich miejscach obiektu bądź też uwarunkowania etyczne takich pomiarów. W opisanej sytuacji nieodzowne staje się stosowanie nowoczesnej mikroprocesorowej aparatury elektronicznej, która za pośred-

nictwem wyspecjalizowanych czujników rejestruje dostępne sygnały fizyczne, przetwarza je na postać cyfrową, a następnie, zgodnie z zaimplementowanymi algorytmami numerycznymi, przelicza na wartości poszukiwanych wielkości.

Pomiary pośrednie polegają zatem na wykorzystaniu związku pomiędzy wielkościami niedostępnymi i tymi, które mogą być mierzone bezpośrednio, dokonaniu pomiaru wielkości dostępnych i obliczeniu wartości wielkości analizowanych. Obliczenia wykonywane są zgodnie z modelem matematycznym h_m związku między wielkościami mierzonymi bezpośrednio, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ a wielkością poszukiwaną θ :

$$\theta = h_m(\mathbf{y}). \quad (2)$$

Najczęściej jest to model matematyczny badanego obiektu lub jego części składowej. Szczególnym przypadkiem są takie pomiary, w których wynikiem obliczeń nie jest jedna liczba, lecz więcej wartości. Nazywane są one *pomiarami pośrednimi złożonymi* [11]. W takim przypadku stosowane są odpowiednio opracowane algorytmy numeryczne, omówione w dalszych częściach opracowania.

1.3. ZADANIE WPROST I ZADANIE ODWROTNE W METROLOGII

Istotą interpretacji wyników pomiarów jest założenie związku przyczynowo-skutkowego między stanem badanego obiektu a wskazaniami miernika. Tylko wtedy uzyskiwana w wyniku tego procesu liczba (lub liczby) może być traktowana jako źródło wiarygodnej informacji o obiekcie. Rola zatem nawet najprostszych przyrządów pomiarowych polega na wytworzeniu takiego związku i zapewnieniu jego jednoznaczności.

Zaobserwowany lub wytworzony związek przyczynowo-skutkowy, jak na przykład w przypadku urządzeń pomiarowych, stanowi ważny element wnioskowania w nauce, a tym samym w metrologii. Wnioskowanie ilościowe wymaga zastosowania sformalizowanego opisu tej relacji – stanowią go równania matematyczne. Równania tworzą strukturę modelu matematycznego wyrażającego związek między pobudzeniem (przyczyną) i reakcją (skutkiem). Pobudzenie u traktowane jest jako wejście modelu, a reakcja y_m jako jego wyjście. Wtedy model matematyczny obiektu SISO może być przedstawiony następująco:

$$y_m = f_m(u, \boldsymbol{\theta}) \quad \text{lub} \quad y_m = g_m(u, \boldsymbol{\theta}), \quad (3)$$

gdzie f_m jest modelem toru przetwarzania przyrządu pomiarowego, a g_m to model badanego obiektu.

Modele matematyczne stosowane w procesie poznawczym w metrologii można podzielić na fizykomatematyczne modele przyczynowe i modele odwrotne. Podczas opracowywania modelu przyczynowego (ang. *forward model*) analizuje się strukturę obiektu i identyfikuje zachodzące w nim zjawiska. Pozwala to na zaproponowanie równań ma-

tematycznych ujmujących jakościowo i ilościowo zaobserwowane związki przyczynowo-skutkowe. Kompleksowe modele przyczynowe obiektów złożonych cechują się zazwyczaj dużym poziomem skomplikowania (uwidaczniającym się w dużej liczbie równań i parametrów) i stosowane są przede wszystkim zarówno w celu przewidywania zachowań obiektu w określonych warunkach, jak i w analizie zjawisk zachodzących w nim samym (*badania symulacyjne*). Znajdują też zastosowanie jako narzędzie pomocnicze podczas opracowywania modeli odwrotnych. Model odwrotny (ang. *inverse model*) strukturalnie jest o wiele prostszy i umożliwia ilościowe wyznaczanie przyczyn obserwowanych zjawisk na podstawie zarejestrowanych skutków. Z tego powodu stosowany jest przede wszystkim tak w pośrednich pomiarach właściwości badanych obiektów, jak i w procesie rekonstrukcji sygnałów pomiarowych.

1.3.1. SYMULACJA KOMPUTEROWA JAKO ROZWIĄZANIE ZADANIA WPROST

Zastosowanie równania (3) w celu wyznaczenia zachowania się obiektu (reakcja y) o określonych właściwościach (model o strukturze danej przez f_m lub g_m i wartościach parametrów θ) w wybranych sytuacjach (rodzaj i zmienność sygnału pobudzającego u) nazywa się rozwiązaniem *zadania wprost* (ang. *forward problem*) lub *symulacją komputerową* działania obiektu. W tym podejściu skutek wyznaczany jest na podstawie przyczyny i związku między nimi. Symulację można też określić mianem eksperymentu przeprowadzonego na modelu obiektu [9]. Wynika to z tego, iż podczas symulacji przedmiotem badania jest model matematyczny i przebiega ona w ściśle kontrolowanych warunkach: znane są (z dokładnością, z jaką reprezentowane są liczby w komputerze i na jaką pozwalają procedury numeryczne) sygnały wejściowe, parametry modelu, sygnały wpływające, a nawet, jeżeli symulacje tego wymagają, charakter zakłóceń.

Symulacje komputerowe wymagają stosowania algorytmów numerycznych realizujących obliczenia zgodnie z matematyczną strukturą modelu i uwzględniających wartości wszystkich pozostałych elementów tego procesu. Podczas opracowywania algorytmów symulacyjnych wykorzystuje się zazwyczaj gotowe procedury numeryczne dostarczane przez producentów specjalistycznego oprogramowania w postaci bibliotek. Procedury te można podzielić na dwie grupy: deterministyczne i stochastyczne. Pierwsza z nich obejmuje m.in. algorytmy obliczające wartości podstawowych funkcji ciągłych, wykonujące operacje algebraiczne na skalarach, wektorach i macierzach czy rozwiązujące równania różniczkowe (cząstkowe bądź zwykłe), różnicowe lub algebraiczne. Do drugiej grupy należą przede wszystkim generatory liczb pseudolosowych i losowych, zwracające ciągi liczb charakteryzujących się zadaniem prawdopodobieństwa.

Istnieje wiele powodów, dla których prowadzi się obecnie badania symulacyjne modeli matematycznych, zamiast wykonywać eksperymenty na rzeczywistych obiektach. Najważniejsze z nich to [9]:

- *Rzeczywisty obiekt nie istnieje.* Tego typu praktyka jest powszechna w przypadku systemów inżynierskich. Wiedza o nich jest ugruntowana i szeroko stosowana, a symulacje pomagają na przykład ocenić czy warto budować taki obiekt, czy też optymalizować rozwiązania konstrukcyjne.

- *Obiekt lub narzędzia konieczne do przeprowadzenia eksperymentu są niedostępne.* Zdarza się, że rzeczywisty obiekt jest na przykład w ciągłym użyciu a/lub potrzebne do przeprowadzenia eksperymentu urządzenia są z różnych powodów niedostępne.

- *Koszt eksperymentu jest zbyt wysoki.* Często rodzaj i precyzja informacji o obiekcie, które są potrzebne, nie usprawiedliwia wysokich kosztów rzeczywistego eksperymentu.

- *Eksperyment może być niebezpieczny.* Symulacje przeprowadzane są w celu zbadania czy eksperyment nie grozi uszkodzeniem lub zniszczeniem zamodelowanego obiektu.

- *Stale czasowe eksperymentu są niekompatybilne z czasem eksperymentatora.* Wiele interesujących zjawisk zachodzi zbyt szybko (np. eksplozja) lub zbyt wolno (np. zmiana względnego położenia dwóch galaktyk), aby można było je badać eksperymentalnie w interesującym przedziale czasu.

- *Analiza zasad działania obiektu.* Wyeliminowanie w symulacjach efektów drugiego rzędu (takich, jak np. nieliniowości, mniej istotne zjawiska) może pomóc w zrozumieniu elementarnych podstaw funkcjonowania obiektu.

- *Analiza zjawisk i wielkości niedostępnych dla eksperymentatora.* W czasie symulacji istnieje dostęp do wszystkich wejść i zmiennych (w tym zmiennych stanu) oraz możliwość manipulacji nimi.

- *Analiza właściwości obiektu maskowanych zakłóceniami.* Wyeliminowanie w symulacjach zakłóceń, co nie jest możliwe w rzeczywistości, pozwala wyizolować interesujące zjawiska i może prowadzić do głębszego wglądu w działanie obiektu.

Techniki analityczne, ze względu na brak możliwości uzyskania rozwiązań wielu rodzajów problemów, mają obecnie o wiele mniejszy zasięg zastosowania niż metody numeryczne. Mimo to stosowanie symulacji komputerowych tam, gdzie dokładny wynik można otrzymać technikami analitycznymi, musi być traktowane jako błąd w sztuce.

1.3.2. DWA RODZAJE ZADANIA ODWROTNEGO

W metrologii o wiele większe znaczenie niż rozwiązywanie zadania wprost ma proces odwrotny, czyli wnioskowanie o przyczynach na podstawie skutków. Proces ten zwany *zadaniem odwrotnym* (ang. *inverse problem*) może przyjmować mniej lub bardziej formalną formę. W tym kontekście warto zauważyć, że wszelkie pomiary nieodłącznie związane są z rozwiązywaniem zadania odwrotnego, gdyż odczyt z miernika (powiązany z wartością wejściową funkcją przetwarzania nośnika informacji) jest podstawą wnioskowania o stanie wielkości mierzonej. Zasadniczo jednak

zadanie odwrotne polega na ilościowym wyznaczeniu przyczyn, gdy znane są skutki (y_m) i struktura modelu obiektu (f_m lub g_m). Dlatego ten termin obejmuje w metrologii dwa różne zagadnienia: rekonstrukcję sygnałów i estymację parametrów.

Zadaniem *rekonstrukcji* jest odtworzenie sygnału wejściowego u na podstawie sygnału wyjściowego y_m i pełnego modelu związku przyczynowo-skutkowego (tj. struktury f_m i wartości parametrów θ). Wymaga to formalnego odwrócenia modelu względem pobudzenia:

$$u = f_m^{-1}(y_m, \theta). \quad (4)$$

W technice pomiarowej zadanie to rozwiązywane jest najczęściej w celu rekonstrukcji sygnału pomiarowego podanego na wejście miernika mikroprocesorowego na podstawie odpowiadających mu próbek zgromadzonych w pamięci urządzenia. Wtedy f_m jest modelem matematycznym toru przetwarzania, a zadanie rekonstrukcji przyjmuje charakter dyskretny.

Drugi rodzaj zadania odwrotnego to *estymacja* parametrów modelu (zwana też identyfikacją parametryczną), polegająca na wyznaczaniu ich wartości w sytuacji, gdy znane jest pobudzenie u i odpowiedź y_m oraz struktura matematyczna g_m . Ponownie wymagane jest formalne odwrócenie modelu, tym razem względem θ

$$\theta = g_m^{-1}(u, y_m). \quad (5)$$

W metrologii estymacja parametrów jest równoznaczna z pośrednimi pomiarami złożonymi: g_m jest fizykomatematycznym modelem badanego obiektu, u zarejestrowanym pobudzeniem, a y_m to tzw. „surowe” dane pomiarowe uzyskiwane zazwyczaj w pomiarach bezpośrednich. Wektor parametrów θ reprezentuje mierzone właściwości badanego obiektu.

W obydwóch wymienionych przypadkach struktury f_m^{-1} lub g_m^{-1} należałoby nazywać modelami odwrotnymi. Jednakże nawet w sytuacji wyidealizowanej, gdy wszystkie potrzebne w zadaniu odwrotnym elementy znane są bezbłędnie, jego rozwiązanie może być niemożliwe. Dzieje się tak wtedy, gdy modelu odwrotnego nie da się wyprowadzić analitycznie lub jest on niejednoznaczny. Dodatkowym i niemniej poważnym problemem jest obecność zakłóceń losowych w zarejestrowanych danych. Sprawiają one, że równania opisujące zadania odwrotne, w których zamiast nieznanego y_m trzeba teraz użyć zmierzone y , stają się sprzeczne (zadania stają się źle postawione). Z tych powodów zadania odwrotne rozwiązywane są w urządzeniach mikroprocesorowych numerycznie, gdzie wykorzystywane sygnały reprezentowane są za pomocą wektorów próbek \mathbf{u} i \mathbf{y} . Wtedy, zamiast modeli f_m^{-1} i g_m^{-1} , używane są odpowiednio algorytmy numeryczne $\mathbf{F}^\#$ lub $\mathbf{G}^\#$ realizujące operatory pseudoodwrotne (bazujące jednak na identyfikowalnych modelach przyczynowych, zwanych dalej dla uproszczenia *modelami odwrotnymi*), a uzyskiwane wyniki – estymaty sygnału pobu-

dzającego lub wektora parametrów – są tylko przybliżonym oszacowaniem poszukiwanych wielkości

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{F}^\#(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{u}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{G}^\#(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \approx \boldsymbol{\theta}_0.\end{aligned}\tag{6}$$

2. MODELOWANIE OBIEKTÓW ZŁOŻONYCH

Narzędziem poznania naukowego, elementami pośredniczącymi pomiędzy badaczem a światem zewnętrznym, są modele [50], [57]. Modele te – funkcjonujące na przykład jako *hipotezy*, *prawa natury* czy *paradygmaty* – mogą mieć mniej lub bardziej formalny charakter, lecz wszystkie mają podstawową właściwość: próbują łączyć obserwacje z wytworzonymi wcześniej w umyśle badacza wzorcami [41]. Opracowywanie modeli pewnej części rzeczywistości i badanie ich właściwości jest istotą nauki. John von Neumann ujął to krótko: „Nauka nie próbuje wyjaśniać, prawie nie próbuje interpretować. Nauka stwarza przede wszystkim modele”.

Równania matematyczne stosowane w pomiarach pośrednich, biorąc pod uwagę zakres uwzględnionej w nich wiedzy apriorycznej, można sklasyfikować jako modele typu biała, szara lub czarna skrzynka [73]. Model typu *biała skrzynka* jest całkowicie znany co do struktury i parametrów i jest formalnym przejawem wiedzy sformułowanej jako teoria lub prawo fizyczne, lub definicja matematyczna. W modelu typu *szara skrzynka* zawarty jest pewien wgląd w fizykę obiektu, lecz wiele parametrów musi być wyznaczonych na podstawie obserwacji empirycznych. Wreszcie cechą modelu typu *czarna skrzynka* jest nieuwzględnianie budowy i zjawisk zachodzących w obiekcie, a wybrana struktura matematyczna należy do pewnej kategorii równań mających właściwość dopasowywania się do danych eksperymentalnych i z sukcesem stosowanych w przeszłości.

Modelowanie prowadzi zatem do odwzorowania fragmentu rzeczywistości w strukturę matematyczną, w którym wyróżnić można następujące relacje:

- obiekt fizyczny \rightarrow model matematyczny,
- właściwości fizyczne obiektu \rightarrow parametry modelu (nieznane, o zmiennych wartościach) lub (stałe) współczynniki,
- oddziaływania i zjawiska fizyczne \rightarrow funkcje matematyczne,
- struktura obiektu \rightarrow tożsamość odpowiednich wyjść jednych funkcji matematycznych i argumentów wejściowych innych równań.

2.1. OPRACOWYWANIE MODELI FIZYKOMATEMATYCZNYCH

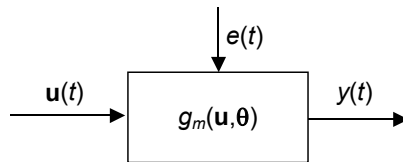
Modelowanie to proces tworzenia modelu. Polega ono na porządkowaniu (lub inaczej mówiąc – nadawaniu struktury) wiedzy o danym obiekcie. Stąd w opracowywa-

niu modeli konieczne są dwa elementy: wiedza o budowie i działaniu obiektu oraz umiejętność uwzględnienia tej wiedzy podczas opracowywania modelu [41].

Modelowanie jest procesem etapowym i iteracyjnym. Na każdym etapie tego procesu następuje świadoma rezygnacja lub wymuszona utrata pewnej części wiedzy. Wynikiem tych działań jest redukcja lub agregacja kolejnych informacji o obiekcie. Pamiętać przy tym należy, że postać modelu zależy od celu, w jakim będzie on stosowany. Stąd w praktyce spotkać można wiele różniących się między sobą modeli tego samego systemu.

Z różnego rodzaju używanych przez człowieka modeli postać najbardziej formalną, a zarazem bardzo efektywną w zastosowaniach, mają modele matematyczne. Zauważył to już Galileusz, który pisał: „Księga natury jest cały czas otwarta przed naszymi oczyma (mówię o Wszechświecie), ale nie zrozumiemy jej, jeśli najpierw nie nauczymy się języka i znaków, jakimi ją napisano. Napisano ją językiem matematyki, a jej litery są figurami geometrycznymi” [25].

Model matematyczny (MISO) da się przedstawić jako odwzorowanie sygnałów wejściowych \mathbf{u} , w obecności zakłóceń losowych e , przy danej wartości wektora parametrów $\boldsymbol{\theta}$, na sygnał wyjściowy y (rys. 1).



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie opisywanego przez model matematyczny związku pobudzenia badanego obiektu \mathbf{u} (przyczyna) z jego reakcją y (skutek), z uwzględnieniem struktury modelu g_m , jego parametrów $\boldsymbol{\theta}$ i zakłóceń losowych e

Fig. 1. Schematic representation of the modelled relationship between the object excitation \mathbf{u} and its reaction y , including the model structure g_m , its parameters $\boldsymbol{\theta}$, and random disturbances e

Formalnie odwzorowanie g_m , będące modelem matematycznym, można powiązać z sygnałami wejściowymi i obserwowanym wyjściem następująco:

$$\begin{aligned} y_m(t) &= g_m(\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta}), \\ y(t) &= y_m(t) + v(t), \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie y_m jest deterministycznym wyjściem, a v to realizacja zakłóceń losowych potraktowanych jako addytywne. W rzeczywistości mogą mieć one charakter szumu kolorowego będącego efektem „filtracji” zakłóceń gaussowskich e , oddziałujących na cały obiekt. W procesie tworzenia opisu matematycznego $g_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ wyodrębnić można dwa zagadnienia o znaczeniu ogólnym:

- *Identyfikacja strukturalna*, czyli dobór odpowiedniego do problemu typu równań matematycznych i powiązań między nimi (może się ona odbywać przez analizę

struktury fizycznej obiektu lub empirycznie z wykorzystaniem metod dedukcyjnych i indukcyjnych [49]).

- *Estymacja parametrów*, polegająca na doborze takich wartości parametrów modelu, aby jak najdokładniej opisywał on zachowanie obiektu (poza przypadkiem stosowania praw lub teorii fizycznych, w których wartości parametrów są określone, ma ona charakter empiryczny).

Wśród modeli matematycznych stosowanych w pomiarach szczególne miejsce zajmują modele fizykomatematyczne. Ich cechą jest uwzględnienie w strukturze modelu fizycznej budowy obiektu i charakteru występujących w nim zjawisk. Opis matematyczny obiektów złożonych przyjmuje formę *modelu kompleksowego*. Model taki powinien uwzględniać, w miarę możliwości, pełną posiadaną wiedzę o budowie systemu i jego działaniu, bez apriorycznej selekcji dostępnych informacji. Często wykorzystuje się metodę modelowania strukturalno-hierarchicznego polegającą na podziale systemu na funkcjonalne elementy składowe (czasami na kilku poziomach hierarchicznych) i matematycznym opisanie każdego z nich [20]. Dzięki temu model taki ujmuje zarówno jakościowo, jak i ilościowo zaobserwowane związki przyczynowo-skutkowe, a jego parametry mają interpretację fizyczną. Powszechnie stosowane są przy tym analogie formalne pomiędzy różnymi typami systemów fizycznych [41]. Otrzymany model matematyczny jest zazwyczaj układem równań (nierówności) algebraicznych, różniczkowych (różnicowych) lub całkowych. Kolejnym krokiem jest jego implementacja numeryczna związana z dyskretyzacją modelu, która jest konieczna podczas opracowywania mikroprocesorowych przyrządów pomiarowych.

O wartości wyjścia $y(t)$ modelu matematycznego, poza jego strukturą, decyduje jeszcze kilka innych czynników. Przede wszystkim należą do nich: wartości sygnałów wejściowych $u(t)$, wartości parametrów modelu θ , a także inne wielkości specyficzne dla danej reprezentacji modelu, jak np. zmienne stanu w modelach dynamicznych. Stąd też można mówić o różnego rodzaju liniowościach bądź nieliniowościach modelu. Model może być zatem liniowy (LI) lub nieliniowy (NLI) pod względem wejść, liniowy (LP) lub nieliniowy (NLP) pod względem parametrów, czy też np. liniowy (LSV) lub nieliniowy (NLSV) pod względem zmiennych stanu. Możliwe są też oczywiście wszystkie kombinacje wymienionych przypadków.

2.2. WALIDACJA MODELI

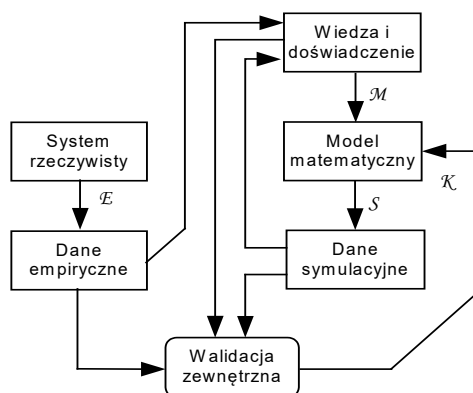
Wszystkie modele cechują się pewnym ograniczonym zakresem ważności, w związku z czym żaden z nich nie może być adekwatny we wszystkich możliwych eksperymentach czy zastosowaniach (z wyjątkiem sytuacji, w której modelem obiektu jest on sam lub wierna jego kopia) [9], [41]. Dlatego też ważna jest całościowa ocena modelu, a zwłaszcza walidacja w zakresie jego zastosowania. Uzyskuje się ją przez porównanie zachowania się modelu z taką liczbą informacji o obiekcie rzeczywistym, jaka w tym celu jest konieczna.

W pierwszej kolejności ocenie podlega matematyczna postać modelu, a pod uwagę brana jest posiadana wiedza, w tym dane eksperymentalne. Ponieważ model odnoszony jest do informacji leżących poza nim samym, ten typ oceny nazywany jest *walidacją zewnętrzną*. W drugiej kolejności przetestować należy program komputerowy pod kątem poprawności i dokładności implementacji równań modelu matematycznego, co określa się mianem *walidacji wewnętrznej* [52]. Obydwa wymienione procesy powinny być nierozłącznymi częściami iteracyjnego procesu opracowywania modelu. Wynika z tego również, że istotną cechą modelu jest możliwość przeprowadzenia na nim odpowiednich testów.

2.2.1. WALIDACJA ZEWNĘTRZNA

W kontekście oceny zewnętrznej można mówić o czterech podstawowych rodzajach adekwatności, którymi mogą charakteryzować się modele [20], [52]:

- *adekwatność teoretyczna* – posiadanie przez model zadowalających podstaw teoretycznych, w tym m.in. zgodność z prawami fizyki i zaakceptowanymi teoriami;
- *adekwatność eksperymentalna* – zgodność zachowania się modelu i rzeczywistego systemu;
- *adekwatność aplikacyjna* – spełnienie stawianych na wstępie wymagań;
- *adekwatność heurystyczna* – możliwość testowania hipotez i wyjaśniania zjawisk przez model.



Rys. 2. Schemat procesu walidacji zewnętrznej:

E – eksperyment, M – modelowanie, S – symulacja, K – korekcja modelu

Fig. 2. The scheme of external model validation:

E – experiment, M – modelling, S – simulation, K – model correction

W walidacji zewnętrznej ważne miejsce zajmuje badanie adekwatności eksperymentalnej modelu (weryfikacji eksperymentalnej nie podlegają jedynie modele lub ich

części składowe otrzymane za pomocą modelowania empirycznego). Ten rodzaj walidacji polega na przeprowadzeniu eksperymentu (lub klasy eksperymentów) na modelowanym obiekcie lub wykorzystaniu danych z doświadczeń wykonanych wcześniej (rys. 2). Podczas oceny modelu szczególną uwagę zwraca się w tym przypadku na właściwości estymatorów otrzymywanych z jego wykorzystaniem oraz na charakter rezyduów uzyskiwanych po dopasowaniu modelu do danych empirycznych. Ocenę warto wykonywać przez testowanie modelu za pomocą danych nieużywanych na żadnym etapie modelowania [52]. W jej zakres wchodzi między innymi:

- porównanie symulacji modelu z wynikiem analogicznego eksperymentu;
- porównanie estymat (jeżeli badany jest model odwrotny) z wynikami precyzyjnych pomiarów lub parametrami modelu kompleksowego;
- analiza rezyduów, w skład której wchodzi [41]:
 - testy statystyczne rozkładu rezyduów (zazwyczaj zakłada się, że mają one rozkład normalny);
 - analiza niezależności rezyduów od wejścia za pomocą analizy korelacji wzajemnej: gdy jej wartość jest odpowiednio duża dla dodatnich przesunięć, to model nie uwzględnia wszystkich efektów dynamicznych systemu, gdy zachodzi korelacja dla przesunięć ujemnych, to istnieje niezamodelowane sprzężenie zwrotne (model nie jest jednak niekompletny);
 - badanie wzajemnej niezależności rezyduów przez obliczenie ich autokorelacji.

2.2.2. WALIDACJA WEWNĘTRZNA

Adekwatność zewnętrzna modelu matematycznego jest warunkiem koniecznym jego użyteczności, ale niewystarczającym. Obecnie podstawowe zastosowania modeli wymagają wykonywania złożonych obliczeń, możliwych tylko dzięki ich implementacji komputerowej. Dlatego też należy dodatkowo zbadać ważność wewnętrzną zaimplementowanego modelu. Na ważność wewnętrzną składają się dwa aspekty [20], [52]:

- wewnętrzna spójność programu symulacyjnego z modelem matematycznym, na którym jest on oparty, polegająca na braku sprzeczności pod względem matematycznym, logicznym czy koncepcyjnym;
- poprawność algorytmiczna programu symulacyjnego, polegająca na odpowiedniości wybranego algorytmu numerycznego i procedur dodatkowych, która przejawia się w znanej dokładności rozwiązań otrzymywanych za ich pomocą.

Poprawność implementacji komputerowej sprawdza się, przeprowadzając testy statyczne w przypadku modeli statycznych oraz testy statyczne i dynamiczne w przypadku modeli dynamicznych [52].

Testy statyczne polegają na porównaniu stanu ustalonego symulowanego przez model (gdy wszystkie pochodne zmiennych stanu w przypadku modeli dynamicznych

są wyzerowane) z rozwiązaniem analitycznym. Innym podejściem umożliwiającym częściową weryfikację spójności programu jest ustawienie w procedurach całkujących odpowiednich warunków początkowych i porównanie uzyskanych w symulacji wartości wszystkich innych zmiennych z rozwiązaniem analitycznym równań różniczkowych. Podejścia te umożliwiają wydobycie problemów trudno zauważalnych w stanach przejściowych. Pamiętać jednak należy, że testy statyczne nie pozwalają na weryfikację algorytmów realizujących modele dynamiczne, a jedynie na sprawdzenie ich wewnętrznej spójności.

Testy dynamiczne polegają na porównaniu wyników dynamicznych symulacji modelu z rozwiązaniem analitycznym dla wybranych przykładów, tj. takich, w których da się znaleźć takie rozwiązanie równań modelowych. W przypadku modeli nieliniowych (gdy brak jest rozwiązania analitycznego) dokonuje się określonej linearyzacji implementacji komputerowej i uzyskiwane rezultaty porównuje z analogicznym rozwiązaniem analitycznym, co umożliwi wykrycie problemów zarówno strukturalnych, jak i numerycznych.

Łatwiej ocenić dokładność algorytmów numerycznych przez wstępną weryfikację procedur realizujących części składowe modelu, a następnie ich włączenie do modelu całościowego. Poszczególne równania (nierówności) zastępowane są odpowiednimi algorytmami numerycznymi, co w przypadku modeli ciągłych może prowadzić do pewnych nieścisłości. Z tego powodu nie tylko poszczególne procedury, ale i cały model numeryczny musi być poddany szczegółowej weryfikacji. Podczas prac nad implementacją zaleca się stosowanie następujących reguł [20], [52]:

- program główny powinien korzystać z podprogramów (procedur) realizujących poszczególne podsystemy (zależności);
- każda z części składowych powinna być weryfikowana osobno, a dopiero potem w całości;
- należy przetestować poprawność obliczeń programu dla znanych sytuacji;
- implementacja powinna być sprawdzona przez inną osobę;
- każda zmiana w implementacji modelu, nawet najmniejsza, musi być robiona ostrożnie, kod programu sprawdzany linia po linii, a jej wpływ na działanie całego programu weryfikowany.

2.2.3. NIEBEZPIECZEŃSTWA POSŁUGIWANIA SIĘ MODELAMI

Ponieważ modele są tylko przybliżonym opisem wycinka rzeczywistości, należy pamiętać o niebezpieczeństwach posługiwania się nimi. Można je ująć w cztery kategorie:

- *Efekt Pigmaliona*¹: opracowany z dużym wysiłkiem model jest tak ceniony przez autora, że nie tylko nie dostrzega on jego ograniczeń, ale swoje dalsze zainteresowa-

¹ Mitologiczny król Cypru, który zakochał się w sporządzonej przez siebie rzeźbie kobiety.

nia ogranicza do niekończących się analiz opracowanego modelu, zamiast skupić się na badaniu świata realnego.

- *Efekt Prokrustesa*²: zaufanie, jakim autor obdarza opracowany przez siebie model jest tak duże, że rozbieżności między wnioskami płynącymi z jego analizy a eksperymentem jest gotów interpretować na niekorzyść danych empirycznych.

- *Efekt Alkioneusa*³: wcześniejsze, pozytywne doświadczenia potwierdzające adekwatność modelu w zakresie jego planowanego zastosowania powodują, że z równą wiarygodnością traktowane są wyniki symulacji dla warunków wykraczających poza obszar adekwatności, co prowadzić może do nieoczekiwanych (a nawet niebezpiecznych) konsekwencji.

- *Efekt Parysa*⁴: ograniczenie się do jednego modelu przy równoczesnej niechęci do stosowania innych opisów o równoważnej adekwatności (np. opracowanych przez innych autorów) prowadzi do znacznego zubożenia warsztatu badawczego.

3. OPRACOWYWANIE I ANALIZA MODELI ODWROTNYCH

Głównym obszarem zastosowania kompleksowych modeli przyczynowych są badania symulacyjne. Ze względu na swą złożoność modele te są zazwyczaj nieidentyfikowalne i z tego powodu nie nadają się do wykorzystania w pomiarach pośrednich. Zadanie matematycznego opisu związku między wielkościami mierzonymi pośrednio i bezpośrednio przejmują wtedy identyfikowalne modele odwrotne, które powinny dodatkowo cechować się wyszczególnieniem wielkości mierzonych bezpośrednio, określeniem warunków ich rejestracji, podaniem sposobu pobudzenia obiektu (elementy te wchodzi w skład techniki planowania eksperymentu [18], [67], [86]), a także wskazaniem wielkości, których wartości mogą być wyznaczane pośrednio (wraz ze sposobem określania niepewności pomiaru). W pomiarach pośrednich złożonych nieodzowna jest również zweryfikowana implementacja komputerowa (lub mikroprocesorowa) algorytmu pomiarowego.

Na model odwrotny spojrzeć można jak na zredukowaną postać modelu kompleksowego. Tak jak w przypadku modelu kompleksowego, jego zadaniem jest opis struktury fizycznej i zjawisk zachodzących w badanym obiekcie, lecz w tym celu model odwrotny wykorzystuje mniejszą liczbę stopni swobody. Ze względu na wymienioną relację, podczas opracowywania modelu odwrotnego ważną i przydatną rolę odegrać może właśnie

² Mitologiczny rzeźmieszek z Eleusis, który dopasowywał podróżnych do długości swojego łoża (rozciągał ich lub obcinał).

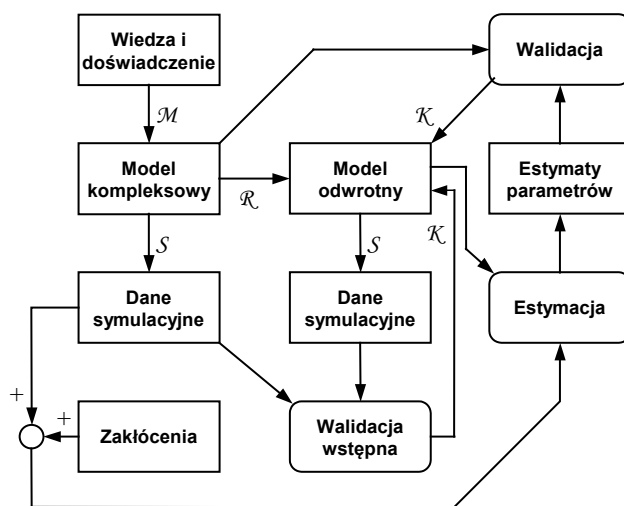
³ Mitologiczny gigant, który był niepokonany na swej własnej ziemi, ale zginął, gdy znalazł się poza jej obszarem.

⁴ Mitologiczny książę Troi, który zamiast wychwalać wdzięki trzech bogiń, pierwszeństwo przyznał tylko jednej, przez co spowodził nieszczęście na sobie i innych.

model kompleksowy, którego podstawowym zadaniem jest zastąpienie obiektu rzeczywistego na kolejnych etapach opracowywania i walidacji modeli odwrotnych. W efekcie zamiast systemu rzeczywistego analizie poddawany zostaje model kompleksowy, a rzeczywiste eksperymenty pomiarowe zastępowane są badaniami symulacyjnymi.

3.1. MODELOWANIE PRZYCZYNOWO-ODWROTNE

Istotą modelowania przyczynowo-odwrotnego (ang. *forward-inverse modelling*) jest wykorzystanie kompleksowych modeli przyczynowych do opracowywania i walidacji modeli odwrotnych [8], [43]. Schemat wykorzystania modelu kompleksowego podczas tworzenia modelu odwrotnego pokazano na rysunku 3. W pierwszej kolejności odpowiednio dobrane metody umożliwiają zaproponowanie nowej, zazwyczaj dużo prostszej struktury modelu, który będzie identyfikowany wraz ze wskazaniem parametrów, które mogą (powinny) być estymowane. Następnie eksperymenty symulacyjne przeprowadzone dla warunków analogicznych do planowanych pomiarów pozwalają zweryfikować adekwatność modelu odwrotnego (względem modelu kompleksowego) i dokonać jego ewentualnej korekcji. Jednocześnie, wprowadzając model zakłóceń, otrzymywane są ciągi syntetycznych danych pomiarowych, które weryfikują działania algorytmów estymacyjnych. Porównanie uzyskiwanych estymatorów ze znanymi wartościami parametrów modelu kompleksowego umożliwi zarówno ostateczną walidację modelu odwrotnego, jak i oszacowanie niepewności pomiarów pośrednich.



Rys. 3. Schemat modelowania przyczynowo-odwrotnego:
M – modelowanie, R – redukcja modelu, S – symulacja, K – korekcja modelu
Fig. 3. The scheme of forward-inverse modelling:
M – modelling, R – model reduction, S – simulation, K – model correction

Do ważnych elementów modelowania przyczynowo-odwrotnego należą techniki redukcji modeli kompleksowych oraz walidacja modelu odwrotnego, wykorzystująca zamiast danych empirycznych syntetyczne dane pomiarowe wygenerowane za pomocą modelu kompleksowego.

Model odwrotny uzyskany przez redukcję kompleksowego modelu przyczynowego musi być poddany weryfikacji pod kątem jego zastosowania, czyli pośredniego pomiaru właściwości obiektu złożonego. W pierwszej kolejności należy zbadać jego identyfikowalność. Ponieważ warunkiem wystarczającym na identyfikowalność lokalną jest różny od zera wyznacznik macierzy odwracanej podczas estymacji parametrów, najprostszym podejściem jest zbadanie tego warunku. Wymaga to obliczenia macierzy wrażliwości (w przypadku modeli nieliniowych można to uczynić w typowych punktach pracy w przestrzeni parametrów). Analiza wrażliwości modelu odwrotnego umożliwia też ocenę liczby uwarunkowania numerycznego odwracanej macierzy, co z kolei stanowi ważne kryterium podczas wyboru metody estymacji. Wynik analizy m.in. może zadecydować o zastosowaniu techniki regularyzacji. Innym efektem wykrycia złego uwarunkowania numerycznego może być korekcja postaci modelu odwrotnego (patrz rys. 3).

Kolejnym ważnym zagadnieniem jest ocena dokładności pomiarów pośrednich, wykorzystujących opracowany model odwrotny. Obrazuje ją schemat modelowania przyczynowo-odwrotnego z rysunku 3. Ocena obejmuje zarówno analizę propagacji błędów pomiarów bezpośrednich, w tym wpływu szumu pomiarowego, jak i oszacowanie błędu systematycznego wnoszonego przez model odwrotny w stosunku do kompleksowego modelu przyczynowego. Model kompleksowy służy w tych badaniach do generacji syntetycznych danych pomiarowych. Warto zauważyć, że wynik zastosowania modelu odwrotnego – estymaty parametrów – mają swoje odpowiedniki w parametrach modelu kompleksowego, zwłaszcza wtedy, gdy struktura modelu kompleksowego i odwrotnego jest taka sama. Porównanie estymat uzyskanych na podstawie danych syntetycznych, nie zawierających szumu, z wartościami parametrów modelu kompleksowego, za pomocą którego wygenerowano te dane, umożliwia oszacowanie błędów systematycznych pomiaru pośredniego wnoszonych przez uproszczony model odwrotny, jeżeli klasa modelu kompleksowego i odwrotnego umożliwiają takie porównanie. Dodatkowo, zastosowanie w badaniach zaszumionych danych syntetycznych pozwala wyznaczyć wariancję estymatorów, która jest miarą błędu losowego pomiaru. Ze względu na skończoną długość danych syntetycznych, będących wtedy konkretną realizacją zmiennej losowej, do symulacyjnego wyznaczenia wariancji wykorzystywana jest metoda Monte Carlo. Badania symulacyjne wykorzystujące model kompleksowy i odwrotny umożliwiają ocenę wpływu na dokładność pomiaru także innych czynników, takich jak właściwości sygnału pobudzającego obiekt rzeczywisty, częstotliwość próbkowania, rozdzielczość stosowanych przetworników A/C, parametry innych bloków elektronicznych wchodzących w skład przyszłego urządzenia pomiarowego, czy też właściwości algorytmów realizujących wybraną metodę pomiarową.

Na zakończenie należy jeszcze raz podkreślić, iż opisana metodologia modelowania przyczynowo-odwrotnego umożliwi ocenę ważnego komponentu niedokładności pomiaru, wynikającego z różnicy między modelem kompleksowym i odwrotnym. Oszacowanie to nie uwzględnia jednak elementu niedokładności, będącego efektem różnicy między modelem kompleksowym a obiektem rzeczywistym. Zakładając, że kompleksowy model fizykomatematyczny został opracowany zgodnie z przedstawionymi wcześniej regułami jest wielce prawdopodobne, iż drugi komponent niedokładności jest pomijalnie mały w porównaniu z pierwszym, a ten może być wyznaczony ilościowo.

3.2. METODY REDUKCJI MODELI KOMPLEKSOWYCH

Podstawowym celem redukcji modelu matematycznego, który ma być wykorzystany w pomiarach pośrednich złożonych, jest zmniejszenie liczby jego stopni swobody, czyli liczby parametrów podlegających estymacji. Zbyt duża liczba stopni swobody jest typowym źródłem złego uwarunkowania numerycznego estymacji. Dzieje się tak, ponieważ uwzględnienie w modelu wielu zależności parametrycznych bardzo często prowadzi do pojawienia się współliniowości wpływów lub/oraz nieistotnych parametrów, czyli takich, których wartość praktycznie nie modyfikuje rejestrowanych danych pomiarowych. Metody redukcji modeli fizykomatematycznych muszą dodatkowo zachowywać ich istotę, jaką jest fizyczna interpretowalność użytych parametrów – wynika z tego wiele ograniczeń.

Istnieją dwa zasadniczo różne podejścia do problemu redukcji modeli kompleksowych. Pierwsza grupa metod prowadzi do modeli o nowej, uproszczonej strukturze, charakteryzujących się jednocześnie mniejszą liczbą stopni swobody. Wielokrotnie zadanie to nie jest samo w sobie łatwe – wymaga ponownego przeprowadzenia całego procesu modelowania obiektu lub jego elementów składowych. Niekoniecznie polepsza ono uwarunkowanie numeryczne estymacji, a pojawiające się w efekcie błędy systematyczne są często trudne do oszacowania. W drugiej grupie metod struktura modelu kompleksowego zostaje zachowana, dzięki specjalnym zabiegom zmniejsza się jednak efektywna liczba stopni swobody. Zaletą tego podejścia jest więc uniknięcie konieczności ponownego modelowania obiektu, a sposób szacowania błędu systematycznego staje się oczywisty (przez porównanie estymat parametrów modelu odwrotnego z wartościami parametrów modelu kompleksowego – rys. 3). Dalej scharakteryzowano podstawowe metody redukcji modeli fizykomatematycznych.

3.2.1. OPRACOWANIE MODELU O UPROSZCZONEJ STRUKTURZE

Jest to pierwsze z nasuwających się i tym samym bardzo popularne podejście. Polega na ponownym przeprowadzeniu procesu modelowania obiektu, tym razem z po-

minięciem mniej istotnych cech i zjawisk. Biorąc pod uwagę planowane zastosowanie, należy jednak wcześniej obiektywnie ocenić, które z wymienionych elementów nie muszą być tym razem uwzględniane. Ważne jednocześnie jest to, aby uproszczony model nie utracił adekwatności fizycznej. Procedura taka prowadzi do jawnej redukcji liczby parametrów.

3.2.2. UPROSZCZENIE ZALEŻNOŚCI ELEMENTARNYCH

Modele fizykomatematyczne rzeczywistych obiektów kompleksowych składają się z wielu zależności opisujących zjawiska elementarne. Równania te są zazwyczaj nieliniowe i mogą przybierać (co wynika z przesłanek fizycznych) skomplikowaną, wieloparametryczną postać. Istnieją dwie proste techniki upraszczania takich zależności elementarnych:

- *Linearyzacja*: Nieliniowość zależności elementarnej f_e , aczkolwiek wynikająca z modelu fizycznego, może być nieistotna w analizowanym obszarze działania systemu. Można zatem z dobrym przybliżeniem zastąpić ją funkcją liniową f_l , korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora względem pobudzenia i uwzględniając dwa jego pierwsze wyrazy. Na punkt rozwinięcia nadaje się na przykład typowy punkt pracy systemu $(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}_0)$ lub w przypadku systemów dynamicznych – punkt stabilny [26]. Dla modeli MISO:

$$f_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0) = f_e(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}_0) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \left[\frac{\partial f_e(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T + O \quad (8)$$

i stąd

$$f_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0) \approx f_l(\mathbf{u}, \mathbf{b}_1, b_2) = \mathbf{u}\mathbf{b}_1 + b_2, \quad (9)$$

gdzie

$$\mathbf{b}_1 = \left[\frac{\partial f_e(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T, \quad b_2 = f_e(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{u}_0 \left[\frac{\partial f_e(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T. \quad (10)$$

- *Aproksymacja*: Ta technika polega na tworzeniu nieskomplikowanego modelu (najczęściej liniowego pod względem parametrów) zjawiska elementarnego bezpośrednio na podstawie danych eksperymentalnych (*modelowanie empiryczne* abstrahuje od opisu fizycznego). Typowe podejście polega na stosowaniu w tym celu szeregów funkcyjnych, np. potęgowego. Problemem jest odpowiedni dobór rzędu modelu, który zapewniałby kompromis między dokładnością opisu danych i niewielką liczbą parametrów.

3.2.3. ROZDZIELENIE STAŁYCH CZASOWYCH

W tym samym systemie mogą zachodzić zjawiska cechujące się stałymi czasowymi o różnych rzędach. Podczas upraszczania za punkt odniesienia bierze się wartość stałych czasowych zjawisk podstawowych ze względu na zastosowanie modelu. Wtedy podsystemy o wyraźnie szybszej dynamice przybliżane są relacjami statycznymi (równaniami algebraicznymi, zamiast różniczkowymi), a zmienne podsystemów o wolniejszej dynamice przybliżane są stałymi [41].

3.2.4. AGREGACJA I UZALEŻNIANIE PARAMETRÓW

W modelach wielu obiektów spotkać można grupy parametrów tego samego rodzaju (tj. mających ten sam wymiar fizyczny), zwłaszcza wtedy, gdy model o parametrach skupionych opisuje właściwości rozłożone przestrzennie. Agregacja polega na zastępowaniu parametrów charakteryzujących wybrany element systemu jednym, przyjmującym najczęściej uśrednioną wartość wynikającą ze struktury modelu, z jednoczesną modyfikacją uwzględniających je równań [61], [62]. Inaczej postępuje się wówczas, gdy znane są nieuwzględnione wcześniej związki przyczynowo-skutkowe pomiędzy różnymi zmiennymi lub parametrami wchodzącymi w skład modelu. Wtedy nie są one od siebie niezależne i redukcja modelu polega na wprowadzeniu dodatkowych zależności opisujących takie związki [41]. W efekcie maleje liczba stopni swobody modelu.

3.2.5. SELEKCJA PARAMETRÓW

Kompleksowe modele fizykomatematyczne zazwyczaj cechują się brakiem identyfikowalności strukturalnej, dlatego naturalnym krokiem jest wykluczenie z estymacji tych parametrów, które wykazują najmniejszy wkład w zachowanie się systemu [16]. W przypadku modeli nieliniowych można to uzyskać, zachowując strukturę modelu kompleksowego, przypisując typowe wartości parametrom nieistotnie wpływającym na wyjście i estymując parametry pozostałe [58].

3.2.6. REGULARYZACJA ESTYMACJI

Regularyzacja polega na nałożeniu ograniczeń na przestrzeń parametrów, na przykład przez dodanie do minimalizowanego kryterium czynnika kary zależnego od wartości parametrów. Parametryzacja modelu kompleksowego pozostaje niezmienną, lecz liczba stopni swobody (efektywna liczba parametrów) zostanie zredukowana. Oznaczając współczynnik regularyzacji jako γ , efektywną liczbę parametrów r można wyrazić następująco [73]:

$$r(p, \gamma) = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i + \gamma)^2}, \quad (11)$$

gdzie p jest liczbą parametrów modelu kompleksowego, a λ_i są wartościami osobliwymi macierzy hessianu (tj. $\partial^2 V_R / \partial \theta^2$) zregularizowanej funkcji kryterialnej V_R . Małe wartości własne odpowiadają parametrom rzekomym (lub ich kombinacji), a współczynnik regularyzacji, który jest małą liczbą, stanowi próg oddzielający je od parametrów istotnych. W efekcie polepsza się uwarunkowanie numeryczne estymacji. Zaletą regularyzacji jest poprawa identyfikowalności modelu bez potrzeby modyfikacji jego struktury, a wadą wzrost złożoności obliczeniowej i pojawienie się obciążenia estymatorów.

3.3. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI

Analiza wrażliwości jest jedną z podstawowych technik badania modeli matematycznych, a jej wynik jest ważnym kryterium w opracowywaniu modelu odwrotnego na podstawie modelu kompleksowego. Zadaniem analizy wrażliwości jest m.in. określenie wpływu wartości parametrów na wyjście modelu, zbadanie powiązania danego parametru z przedziałami danych pomiarowych czy też analiza wpływu jakości danych pomiarowych na estymaty parametrów modelu odwrotnego.

3.3.1. WRAŻLIWOŚĆ WYJŚCIA MODELU NA JEGO PARAMETRY

Podstawowym elementem analizy wrażliwości jest ocena wpływu zmiany wartości parametrów na przebieg sygnału wyjściowego [78]. Macierz wrażliwości \mathbf{X} wyjścia modelu na wartości parametrów θ zdefiniowana jest zatem następująco:

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{y}_m}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{g}_m(\mathbf{u}, \theta)}{\partial \theta}. \quad (12)$$

Z podanego wzoru wynika, że wrażliwość zależna jest nie tylko od matematycznej postaci modelu \mathbf{g}_m , ale też od postaci sygnału pobudzającego \mathbf{u} , co wykorzystuje się w technice planowania eksperymentu.

Wśród modeli obiektów dynamicznych szczególne miejsce zajmuje ich reprezentacja matematyczna w przestrzeni stanów postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{g}_s(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \theta), \\ \mathbf{y}_m &= \mathbf{g}_m(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \theta), \end{aligned} \quad (13)$$

gdy model jest nieliniowy, lub dla modelu liniowego:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\theta)\mathbf{x} + \mathbf{B}(\theta)\mathbf{u}, \\ \mathbf{y}_m &= \mathbf{C}(\theta)\mathbf{x} + \mathbf{D}(\theta)\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie \mathbf{x} jest wektorem zmiennych stanu, g_s równaniem stanu, g_m nosi nazwę równania wyjściowego, \mathbf{A} jest macierzą systemową, \mathbf{B} macierzą wejściową, \mathbf{C} macierzą wyjściową, a macierz \mathbf{D} najczęściej nie występuje ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$). Opierając się na tym zapisie, wprowadzając macierz wrażliwości zmiennych stanu na parametry $\mathbf{X}_{sv} = \partial\mathbf{x}/\partial\boldsymbol{\theta}$ i zauważając, że

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial g_s}{\partial\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial g_s}{\partial\mathbf{x}} \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}\mathbf{X}_{sv}, \quad (15)$$

otrzymuje się równania wrażliwości nieliniowego modelu w przestrzeni stanów:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{sv} &= \mathbf{A}\mathbf{X}_{sv} + \mathbf{A}_s, \\ \mathbf{X} &= \mathbf{C}\mathbf{X}_{sv} + \mathbf{C}_m, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie $\mathbf{C} = \partial g_m / \partial\mathbf{x}$ i $\mathbf{C}_m = \partial g_m / \partial\boldsymbol{\theta}$. Dla modelu liniowego zachodzi dodatkowo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s &= \mathbf{A}_A\mathbf{x} + \mathbf{A}_B\mathbf{u}, \\ \mathbf{C}_m &= \mathbf{C}_C\mathbf{x} + \mathbf{C}_D\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie $\mathbf{A}_A = \partial\mathbf{A}/\partial\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{A}_B = \partial\mathbf{B}/\partial\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{C}_C = \partial\mathbf{C}/\partial\boldsymbol{\theta}$ i $\mathbf{C}_D = \partial\mathbf{D}/\partial\boldsymbol{\theta}$.

Wektory wrażliwości wyjścia na wartości parametrów (tj. kolumny macierzy \mathbf{X}) mogą mieć wartości różniące się o kilka rzędów, co nie pozwala ocenić ich rzeczywistego wpływu na wielkość mierzoną. Niedogodność tę można wyeliminować, wyznaczając względną macierz wrażliwości. Typowe podejście polega na normalizacji wektorów wrażliwości względem wartości parametrów [58], [88]:

$$\mathbf{X}_y = \mathbf{X}\boldsymbol{\Theta}, \quad (18)$$

gdzie $\boldsymbol{\Theta} = \text{diag}(\boldsymbol{\theta})$ (operator *diag* przekształca macierz kwadratową na wektor, którego elementami są elementy diagonalne macierzy, natomiast wektor przekształcany będzie na macierz kwadratową, której elementami diagonalnymi są elementy wektora, a pozostałe są równe zero), pod warunkiem, że parametry modelu nie przyjmują wartości zerowych (w takim przypadku otrzymałoby się zerowy wektor wrażliwości). Z drugiej strony ocena względnej dokładności pomiaru często polega na odniesieniu bezwzględnego błędu pomiaru do zakresu mierzonej wielkości. Alternatywnie można zatem dokonać normalizacji wektorów wrażliwości względem zakresów parametrów $\mathbf{r} = \boldsymbol{\theta}_{\max} - \boldsymbol{\theta}_{\min}$

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{X}\mathbf{R}, \quad (19)$$

gdzie \mathbf{R} jest macierzą diagonalną z zakresami parametrów \mathbf{r} na diagonalnej.

3.3.2. WRAŻLIWOŚĆ UNORMOWANA I ZWIĄZEK PARAMETRÓW Z PRZEDZIAŁAMI DANYCH

W celu zaobserwowania związku parametrów modelu z poszczególnymi frakcjami danych pomiarowych, należy dokonać normalizacji macierzy wrażliwości (stosując macierz normalizującą \mathbf{D}_N), dzięki czemu wektory wrażliwości uzyskają podobny zakres zmienności [78]:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_N &= \mathbf{X}\mathbf{D}_N, \\ \mathbf{D}_N &= \text{diag}(\text{diag}(\mathbf{X}^T\mathbf{X}))^{-1/2}.\end{aligned}\quad (20)$$

Wrażliwość unormowana umożliwia wyszczególnienie tych zakresów danych pomiarowych, które zawierają najwięcej informacji o poszczególnych estymowanych parametrach, co skraca czas obliczeń i może poprawić uwarunkowanie numeryczne identyfikacji [51].

3.3.3. WRAŻLIWOŚĆ ESTYMATORÓW PARAMETRÓW NA DANE POMIAROWE

Podobną do poprzedniej informacji, uwzględniającej dodatkowo korelacje pomiędzy estymatorami, uzyskuje się z macierzy wrażliwości uogólnionej \mathbf{X}_g , opierającej się na wrażliwości estymatorów na prawdziwe wartości parametrów [58], [78]

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} = \mathbf{I}.\quad (21)$$

Elementy diagonalne podanej macierzy budowane są sukcesywnie przez kolejne dane pomiarowe i ostatecznie osiągają wartość 1. Proces ten znajduje bezpośredni wyraz właśnie w macierzy wrażliwości uogólnionej, której elementy opisane są wzorem [78]

$$x_g(k, l) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \hat{\theta}_l}{\partial y(t_i)} \frac{\partial y(t_i)}{\partial \theta_l} \Big|_{\theta=\theta_0}.\quad (22)$$

Fakt, iż wektory wrażliwości mogą być ze sobą skorelowane powoduje, że interesujące jest również zagadnienie odwrotne do analizy wrażliwości wyjścia modelu na parametry, a mianowicie badanie wrażliwości \mathbf{X}_E estymatora wektora parametrów na zmiany danych pomiarowych. W przypadku estymacji metodą ważonych najmniejszych kwadratów macierz \mathbf{X}_E wynosi [58]

$$\mathbf{X}_E = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \mathbf{y}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1},\quad (23)$$

gdzie \mathbf{W} jest macierzą wag. Podaną wrażliwość można też unormować względem zakresów parametrów, otrzymując względną macierz wrażliwości estymatorów na dane pomiarowe \mathbf{X}_e :

$$\mathbf{X}_e = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}_E = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{X}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{W}^{-1}. \quad (24)$$

3.4. BADANIE IDENTYFIKOWALNOŚCI MODELI

Struktura modelu odwrotnego, jego parametryzacja oraz charakter sygnału wejściowego mogą prowadzić do tego, iż macierz informacyjna odwracana podczas estymacji parametrów jest osobliwa lub prawie osobliwa [70]. W drugim przypadku nadal można obliczyć estymaty parametrów, lecz są one silnie skorelowane, a obliczenia źle uwarunkowane numerycznie, co prowadzić może do dodatkowych błędów. Z tego też powodu opracowano wiele metod badania identyfikowalności modeli, zanim zostaną one użyte w pomiarach pośrednich. Podstawowym zadaniem badania identyfikowalności jest określenie, czy dany model pozwala na rozwiązanie problemu odwrotnego, tj. na wiarygodną estymację jego parametrów.

Identyfikowalność strukturalna parametru związana jest z liczbą rozwiązań, jakie względem niego ma zadanie odwrotne. Stąd można mówić o następujących właściwościach każdego z parametrów modelu odwrotnego [85], [86]:

- *parametr jest identyfikowalny globalnie*, jeżeli rozwiązaniem zadania odwrotnego jest tylko jedna jego wartość;
- *parametr jest identyfikowalny lokalnie*, jeżeli rozwiązaniem jest skończony zbiór jego wartości (co jest możliwe tylko w przypadku modeli nieliniowych);
- *parametr jest nieidentyfikowalny*, jeżeli rozwiązaniem jest nieskończony zbiór wartości.

Na podstawie poprzednich określeń można zdefiniować pojęcia związane z identyfikowalnością strukturalną modeli [42], [86]:

- *model jest identyfikowalny globalnie*, jeżeli wszystkie jego parametry są identyfikowalne globalnie;
- *model jest identyfikowalny lokalnie*, jeżeli wszystkie jego parametry są identyfikowalne, w tym przynajmniej jeden lokalnie;
- *model jest nieidentyfikowalny*, jeżeli przynajmniej jeden z jego parametrów jest nieidentyfikowalny.

Badanie identyfikowalności strukturalnej nie jest zadaniem prostym. Pierwsze metody opracowane zostały dla modeli liniowych zarówno pod względem wejść, jak i parametrów. W latach 70. ubiegłego wieku podjęto próby badania identyfikowalności modeli nieliniowych przez odnoszenie ich do odpowiednich systemów zlinearyzowanych. Obecnie w literaturze można znaleźć wiele zaawansowanych matematycznie metod umożliwiających aprioryczną ocenę strukturalnej identyfikowalności modeli matematycznych i ich parametrów (np.: [10], [16], [42], [53], [85], [86]).

Drugim ważnym czynnikiem determinującym identyfikowalność modelu jest punkt pracy obiektu, dla którego zarejestrowano dane pomiarowe służące do estymacji parametrów. Dobrze znany jest problem „długich, płaskich dolin”, mogących się pojawiać na powierzchni funkcji kryterialnej wykorzystywanej podczas identyfikacji [66]. W przypadku modeli liniowych pod względem parametrów efekt jest zazwyczaj jednoznaczny – taka sytuacja („niekończąca się dolina”) prowadzi do ich nieidentyfikowalności. Inaczej wygląda sytuacja z modelami nieliniowymi. W tym przypadku „długa, płaska dolina” funkcji kryterialnej w przestrzeni parametrów może przekształcić się w minimum (lokalne lub globalne), gdy zmieniają się wartości parametrów modelu, tj. zmieni się punkt pracy badanego obiektu.

Poza strukturą matematyczną modelu oraz aktualnym położeniem wektora parametrów w rozpiętej przez nie przestrzeni, na identyfikowalność modelu istotny wpływ ma także charakter pobudzenia. Sygnał pobudzenia (wektor wejściowy w przypadku algorytmów numerycznych stosowanych w urządzeniach mikroprocesorowych) buduje macierz wrażliwości modelu, a tym samym ma bezpośredni wpływ na wyznacznik odwracanej macierzy informacyjnej. Ten sam model może być zatem nieidentyfikowalny przy jednym pobudzeniu (np. model obiektu dynamicznego w stanie ustalonym z niezmiennym wejściem) i identyfikowalny przy innym (np. pobudzenie skokiem jednostkowym obiektu dynamicznego).

W praktyce zazwyczaj nie jest potrzebna tak zaawansowana, aprioryczna analiza identyfikowalności modelu odwrotnego. Wynika to przede wszystkim z istniejącej współcześnie możliwości szybkiej implementacji i testowania algorytmów numerycznych. Stąd analiza identyfikowalności najczęściej sprowadza się do zbadania warunku wystarczającego do identyfikowalności lokalnej modelu, jakim jest niezerowy wyznacznik macierzy informacyjnej, która musi zostać odwrócona w trakcie obliczeń [12], [16], [84].

3.5. OCENA JAKOŚCI MODELU

Estymacja parametrów modelu odwrotnego związana jest z dopasowywaniem go do danych pomiarowych. Obecność błędów systematycznych i losowych w pomiarach bezpośrednich oraz niedokładności modelu odwrotnego przekłada się na jakość dopasowania. Podstawową miarą tej jakości jest błąd średniokwadratowy rezyduów (V_{MSE}), zdefiniowany jako wartość oczekiwana kwadratu normy rezyduów w L^2 . Wartość ta podlega minimalizacji podczas estymacji parametrów modelu. Należy zauważyć, że w każdym konkretnym przypadku kwadrat normy rezyduów zależy od aktualnej realizacji zakłóceń.

Analizę zależności błędu średniokwadratowego V_{MSE} od wspomnianych czynników można przeprowadzić, przyjmując założenie, że dane pomiarowe y są opisane następująco:

$$\mathbf{y} = g_0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0) + \Delta_s \mathbf{y} + \mathbf{e}, \quad (25)$$

gdzie g_0 jest prawdziwym, lecz nieznanym modelem, $\boldsymbol{\theta}_0$ jest analogicznie prawdziwym i nieznanym wektorem parametrów tego modelu, \mathbf{u} oznacza pobudzenie, $\Delta_s \mathbf{y}$ jest błędem systematycznym rejestracji danych wprowadzonym przez aparaturę pomiarową, a \mathbf{e} jest realizacją addytywnego szumu o wariancji σ_e^2 . Wtedy wartość V_{MSE} , będąca miarą dopasowania modelu odwrotnego g_m , o parametrach $\boldsymbol{\theta}$ do danych pochodzących z rzeczywistego systemu (zakładając stacjonarność pobudzenia i niezależność zakłóceń losowych [73]), wynosi

$$\begin{aligned} V_{MSE}(\boldsymbol{\theta}) &= E\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\|^2 = E\|\mathbf{y} - g_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})\|^2 = \\ &= E\|g_0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0) - g_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) + \Delta_s \mathbf{y}\|^2 + \sigma_e^2 \approx \\ &\approx E\|g_0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0) - g_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})\|^2 + E\|\Delta_s \mathbf{y}\|^2 + \sigma_e^2 \approx \\ &\approx E\|g_0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0) - g_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})\|^2 + \frac{1}{N} \|\Delta_s \mathbf{y}\|^2 + \sigma_e^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Czynnik związany z błędem systematycznym rejestracji danych można oszacować na podstawie błędu granicznego obliczonego według zaleceń producenta urządzenia pomiarowego. Wtedy, przyjmując stałą wartość błędu granicznego każdego z pomiarów wchodzących w skład wektora \mathbf{y} , spełniona jest zależność:

$$\frac{1}{N} \|\Delta_s \mathbf{y}\|^2 \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_{gr}^2 y_i = \Delta_{gr}^2 y. \quad (27)$$

Dla danej struktury modelu g_m sparametryzowanej przez $\boldsymbol{\theta}$, można zdefiniować najlepszy model charakteryzujący się wektorem $\boldsymbol{\theta}_*$, spełniającym kryterium:

$$\boldsymbol{\theta}_* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} V_{MSE}(\boldsymbol{\theta}). \quad (28)$$

W rzeczywistości, dopasowując dany model do N -danych empirycznych, uzyskuje się wektor parametrów $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ będący oszacowaniem (estymatą) $\boldsymbol{\theta}_*$. Miarą dopasowania takiego modelu jest [40]:

$$\begin{aligned} V_{MSE}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= E\|g_0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0) - g_m(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})\|^2 + \frac{1}{N} \|\Delta_s \mathbf{y}\|^2 + \sigma_e^2 = \\ &= E\|g_0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0) - g_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_*) + g_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_*) - g_m(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})\|^2 + \frac{1}{N} \|\Delta_s \mathbf{y}\|^2 + \sigma_e^2 \approx \\ &\approx \left(E\|g_0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_0) - g_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_*)\|^2 + \frac{1}{N} \|\Delta_s \mathbf{y}\|^2 \right) + E\|g_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_*) - g_m(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})\|^2 + \sigma_e^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Miara ta wyraża spodziewane dopasowanie modelu g_m do nowego zbioru danych pochodzących z tego samego obiektu rzeczywistego, poddanego pobudzeniu o takich samych właściwościach. Jak widać, może być ona rozłożona na następujące czynniki (wg kolejności we wzorze): 1) obciążenie (błąd systematyczny) wynikające z różnicy między modelem odwrotnym i prawdziwym oraz z błędów systematycznych pomiaru bezpośredniego, 2) wariancję wyjścia modelu wynikającą z losowego charakteru estymatorów $\hat{\theta}$ uzyskiwanych na podstawie danych zawierających różne realizacje zakłóceń oraz 3) wariancję szumu. Wariancja wyjścia modelu (wariancja estymacji) scharakteryzowana jest przez macierz kowariancji S_θ określającą odchylenie $\hat{\theta}$ od θ_* . Ponieważ $\hat{\theta}$ dąży do θ_* przy $N \rightarrow \infty$, więc zwiększanie N pociąga za sobą zanik wariancji estymacji [40]. Przy skończonej liczbie pomiarów N wpływ wariancji szumu na wariancję estymacji można w przybliżeniu określić następująco [73]:

$$E \| g_m(\mathbf{u}, \theta_*) - g_m(\mathbf{u}, \hat{\theta}) \|^2 \approx \sigma_e^2 \frac{p}{N}, \quad (30)$$

gdzie p oznacza liczbę parametrów, co daje oszacowanie:

$$\begin{aligned} V_{MSE}(\hat{\theta}) &\approx E \| g_0(\mathbf{u}, \theta_0) - g_m(\mathbf{u}, \hat{\theta}) \|^2 + \frac{1}{N} \| \Delta_s \mathbf{y} \|^2 + \sigma_e^2 \frac{p}{N} + \sigma_e^2 \\ &= b_m^2 + \frac{1}{N} \| \Delta_s \mathbf{y} \|^2 + \left(1 + \frac{p}{N} \right) \sigma_e^2, \end{aligned} \quad (31)$$

gdzie b_m jest obciążeniem modelu. Występujące we wzorze obciążenie modelu i wariancja zakłóceń przekładają się na obciążenie i wariancję estymatorów, które determinują dokładność pomiarów pośrednich złożonych.

Najczęściej przyjmuje się, że w pomiarach pośrednich złożonych błąd systematyczny, z jakim zostały zarejestrowane dane pomiarowe, jest dużo mniejszy od błędu wynikającego z niedokładności modelu odwrotnego (tj. $\Delta_{gr,y} \ll |b_m|$) i/lub poziomu szumu (tj. $\Delta_{gr,y} \ll \sigma_e$), i pomija się go w analizach.

Na koniec należy jeszcze wspomnieć o ograniczoności wniosków, jakie płyną z uzyskania bardzo dobrego dopasowania modelu do danych pomiarowych (w sensie małej wartości błędu średniokwadratowego i gaussowskiego rozkładu rezyduów) – sytuacja taka nie dowodzi strukturalnej adekwatności zastosowanego modelu w stosunku do struktury fizycznej badanego obiektu. Okazuje się, że związek między błędem średniokwadratowym dopasowania modelu do danych pomiarowych i strukturą modelu nie jest wzajemnie jednoznaczny – dobrze dobrana struktura modelu implikuje małą wartość V_{MSE} , jednakże mały błąd nie dowodzi poprawności struktury w sensie jej adekwatności w stosunku do fizycznej budowy badanego obiektu. Dodatkowo uzyskanie lepszego dopasowania modelu kosztem zwiększenia

liczby jego parametrów nie zawsze jest efektem korzystnym. Można pokazać, że model (najczęściej empiryczny) o coraz większej liczbie parametrów daje coraz mniejszą wartość V_{MSE} , dzięki dopasowaniu się nie tylko do zdeterminowanego wyjścia obiektu, ale również do konkretnej realizacji zakłóceń losowych zawartych w danych pomiarowych. Tak zidentyfikowany model będzie jednak o wiele gorzej dopasowany do kolejnej porcji danych empirycznych zawierających inną realizację zakłóceń. Zjawisko to nazywane jest przeparametryzowaniem lub „przeuczeniem” modelu. Dlatego też opracowano wiele kryteriów pozwalających wybrać model o optymalnej strukturze. Należą do nich przede wszystkim kryteria Akaike’a [1]: informacyjne (AIC) i ostatecznego błędu predykcji (FPE), bayesowskie kryterium informacyjne (BIC) [35], kryterium informacyjne Schwarza [72], kryterium minimalnej długości opisu Rissanena (MDL) [69], czy też kryterium entropii modelu [13]. Ich wspólną cechą jest postać minimalizowanego funkcjonału W_N , prowadząca do kompromisu między dobrym dopasowaniem modelu do użytych podczas identyfikacji danych pomiarowych i złożonością określoną przez liczbę jego parametrów. Funkcjonał ten przyjmuje jedną z dwóch ogólnych postaci:

$$W_N = V_N(\hat{\boldsymbol{\theta}})[1 + \beta(N, p)] \quad \text{lub} \quad W_N = N \ln[V_N(\hat{\boldsymbol{\theta}})] + \gamma(N, p), \quad (32)$$

gdzie β i γ są pewnymi funkcjami liczby pomiarów i parametrów, a V_N jest oszacowaniem błędu średniokwadratowego

$$V_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})\|^2 = \frac{1}{N} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^2. \quad (33)$$

4. ALGORYTMY POMIARÓW POŚREDNICH

4.1. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELI ODWROTNYCH

Właściwości modeli liniowych i nieliniowych pod względem parametrów (LP i NLP) w sposób decydujący determinują dwie różne grupy metod identyfikacji parametrycznej. W przypadku modeli LP opisanych ogólnym wzorem

$$y_m(t) = \mathbf{F}_u(\mathbf{u}(t))\boldsymbol{\theta}, \quad (34)$$

gdzie \mathbf{F}_u jest liniowym lub nieliniowym funkcjonałem przekształcającym wejścia i macierz wrażliwości $\mathbf{X} = \mathbf{F}_u$ nie zależy od wektora parametrów, estymacja jest jednokrokowa. Natomiast stosując model odwrotny NLP opisany ogólnie

$$y_m(t) = f_n(\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta}), \quad (35)$$

gdzie f_n oznacza odwzorowanie nieliniowe i dla którego $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta})$, estymacja realizowana jest jako proces iteracyjny.

4.1.1. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELI LINIOWYCH

Estymacja parametrów modeli liniowych ma rozwiniętą teorię i metody opisane w wielu powszechnie dostępnych pozycjach (np. [7], [19], [40], [66], [68]). W pomiarach pośrednich, gdzie model odwrotny wynika z modelu fizycznego badanego obiektu lub zjawiska, decydującą rolę odgrywają oczywiście te podejścia, w których struktura modelu i zbiór nieznanych parametrów są już ustalone.

Metody liniowe, jako proste obliczeniowo, w przeważającej większości zostały opracowane w okresie, gdy cyfrowa rejestracja i przetwarzanie danych jeszcze nie istniały lub były zbyt kosztowne. Współcześnie, podczas pomiarów właściwości obiektów złożonych, modele liniowe są rzadziej stosowane i z tego powodu poruszona dalej problematyka estymacji ich parametrów zostanie omówiona skrótowo.

Metody wsadowe

Metody wsadowe umożliwiają obliczenie estymatorów parametrów modelu matematycznego na podstawie wcześniej zarejestrowanych danych pomiarowych. W przypadku modeli liniowych realizujące je algorytmy są jednokrokowe i stosunkowo nieskomplikowane. Wadą ich jednak jest to, że estymacja może być przeprowadzona dopiero po zakończeniu eksperymentu, a nie w czasie rzeczywistym.

Często stosowanym, uogólnionym podejściem jest ważona metoda najmniejszych kwadratów (WLS), w której estymatory $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ wyznacza się, minimalizując ważony błąd średniokwadratowy:

$$V_{WLS}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{WLS} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} V_{WLS}(\boldsymbol{\theta}), \quad (36)$$

gdzie \mathbf{W} jest różnie w poszczególnych metodach dobieraną, dodatnio określoną, symetryczną macierzą wag, a $\boldsymbol{\varepsilon}$ to rezydualy, czyli różnice między danymi pomiarowymi y i dopasowywanym do nich modelem g_m :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{y} - g_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}). \quad (37)$$

Wtedy wektor estymatorów i macierz kowariancji dane są wzorami [82]:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{WLS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y}, \quad (38)$$

$$\mathbf{S}_{WLS} = \text{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{WLS}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_e \mathbf{W} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1}, \quad (39)$$

gdzie $\mathbf{S}_e = E(\mathbf{e}\mathbf{e}^T)$ jest dodatnio określoną macierzą kowariancji addytywnych zakłóceń \mathbf{e} o zerowej wartości oczekiwanej.

W metodzie największej wiarygodności (ML) dane eksperymentalne \mathbf{y} traktowane są jako zmienna losowa, a $\boldsymbol{\theta}$ jako nieznan, lecz ustalony wektor parametrów. Esty-

mację można interpretować jako wybór takiego wektora parametrów, dla którego zarejestrowane dane są najbardziej prawdopodobne (wg funkcji wiarygodności p_w):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} p_w(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}). \quad (40)$$

Metodę ML stosuje się wówczas, gdy znany jest rozkład prawdopodobieństwa danych pomiarowych, pozwalający wyznaczyć macierz kowariancji zakłóceń \mathbf{S}_e . Jest ona diagonalna, jeżeli szum jest nieskorelowany. Założenie o addytywności szumu, będącego realizacją zmiennych losowych o rozkładzie normalnym i zerowej wartości oczekiwanej, prowadzi do $\mathbf{W} = \mathbf{S}_e^{-1}$. Wtedy wektor estymatorów i macierz kowariancji sprowadzają się do postaci:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = (\mathbf{X}^T \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{y}, \quad (41)$$

$$\mathbf{S}_{ML} = \text{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{X})^{-1}. \quad (42)$$

Estymacja w sensie najmniejszych kwadratów (LS) związana jest z przyjęciem $\mathbf{W} = \mathbf{I}$. W metodzie tej, wprowadzonej przez Legendre'a i Gaussa, najczęściej zakłada się addytywny charakter szumu będącego realizacją nieskorelowanych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, zerowej wartości oczekiwanej i jednakowej wariancji (co w wielu wypadkach jest uzasadnione dzięki centralnemu twierdzeniu granicznemu). Uzyskiwany estymator i jego macierz kowariancji mają wtedy następujące postaci:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}, \quad (43)$$

$$\mathbf{S}_{LS} = \text{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}) = \sigma_e^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}, \quad (44)$$

gdzie σ_e^2 jest wariancją addytywnego szumu białego. Ponieważ metodę LS stosuje się w sytuacjach, w których nieznane są właściwości statystyczne zakłóceń, nie można więc wyznaczyć odchyłeń standardowych estymatorów bezpośrednio z poprzedniego wzoru (wartość σ_e^2 nie jest znana). Wariancję szumu można jednak oszacować na podstawie rezyduów, zakładając bezbłądność modelu. Wtedy błąd średniokwadratowy V_{MSE}^{LS} dopasowania modelu do danych wynosi [73]:

$$V_{MSE}^{LS}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \approx \sigma_e^2 - \sigma_e^2 \frac{p}{N} = \frac{N-p}{N} \sigma_e^2, \quad (45)$$

gdzie N jest liczbą punktów pomiarowych, a p liczbą estymowanych parametrów. Pamiętając, że jednocześnie

$$V_{MSE}^{LS}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \approx \frac{1}{N} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (46)$$

otrzymuje się znane wyrażenie (prawdziwe przy pomijalnie małym obciążeniu modelu) umożliwiające oszacowanie wariancji szumu na podstawie wyznaczonych rezyduów [29]:

$$\frac{N-p}{N} \sigma_e^2 \approx \frac{1}{N} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \hat{\sigma}_e^2 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{N-p} = \frac{\mathbf{y}[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T] \mathbf{y}}{N-p}. \quad (47)$$

Wyznaczenie macierzy kowariancji prowadzi ostatecznie do poznania odchyłeń standardowych uzyskanych estymatorów, będących pierwiastkami z jej elementów diagonalnych. Ponieważ jednak, poza wyjątkowymi przypadkami modeli sparametryzowanych ortogonalnie, estymatory są skorelowane, lepszy wgląd w niepewność pomiaru pośredniego realizowanego za pomocą estymacji parametrów, w tym w jednoznaczność struktury modelu, daje wyznaczenie obszaru niepewności łącznej estymatorów. Obszar ten w przestrzeni parametrów modeli LP ma kształt hiperelipsoidy rozmieszczonej wokół $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Odpowiednie kontury, odległe od $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ o $\Delta \boldsymbol{\theta}$, dla ustalonego poziomu istotności α , uzyskuje się rozwiązując równanie:

$$\Delta \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}) \Delta \boldsymbol{\theta} = \sigma_e^2 p F_{1-\alpha}(p, N-p), \quad (48)$$

gdzie F jest rozkładem F -Snedecora z p , $N-p$ stopniami swobody [2]. Podane równanie może być zortogonalizowane w celu obliczenia maksymalnych wartości $\Delta \boldsymbol{\theta}$ osiągniętych na krańcach głównych osi hiperelipsoidy [44]. Tak oszacowany obszar ufności, w którym z określonym prawdopodobieństwem (rozkład łączny estymat) można znaleźć jednocześnie wartości prawdziwe wszystkich parametrów, jest większy niż w przypadku parametrów rozpatrywanych niezależnie [66]. Stąd w sytuacji, w której estymaty są wynikiem jednoczesnego pomiaru pośredniego kilku właściwości badanego obiektu, otrzymuje się większe przedziały ufności poszczególnych estymat, niż wynikałoby to z oszacowań opartych na jednowymiarowym rozkładzie t -Studenta i wariancji estymatorów. Granice tych przedziałów można obliczyć, rzutując osie główne hiperelipsoid na osie parametrów. Algorytmem najczęściej stosowanym w celu wyznaczenia osi hiperelipsoid jest rozkład macierzy wrażliwości na wartości osobliwe (SVD). Kolumny jednej z uzyskiwanych wówczas macierzy wynikowych są ortonormalne i wyznaczają kierunki osi głównych hiperelipsoidy, a ich długości dane są przez odwrotności odpowiednich wartości osobliwych [66].

Wadą wymienionych metod, skądinąd bardzo popularnych, jest to, iż zakładają one bezbłędną znajomość zmiennej niezależnej. Warunek ten nie jest zazwyczaj spełniony, gdyż wartości sygnału pobudzającego badany obiekt (wejście modelu) muszą być najczęściej zmierzone eksperymentalnie. W takiej sytuacji poprawę jakości estymacji można uzyskać, stosując bardziej złożone algorytmy uwzględniające obecność błędów w zmiennych niezależnych. Przegląd odpowiednich metod zebrano w [74].

Metody rekurencyjne

Istotą metod rekurencyjnych jest to, iż nowa wartość estymatora uzyskiwana jest przez korekcję wartości poprzedniej dokonywaną na podstawie nowych danych pomiarowych. Najczęściej korekcja ta wykonywana jest po zarejestrowaniu każdej nowej próbki sygnału pomiarowego. Metody rekurencyjne zaimplementowane w urządzeniach mikroprocesorowych pozwalają zatem na bieżący pomiar pośredni w czasie trwania eksperymentu. Uwzględnienie w obliczeniach rekurencyjnych jedynie ostatnio zarejestrowanych danych daje jakościowo nową cechę, a mianowicie możliwość śledzenia zmian estymowanych parametrów w czasie. Wykorzystywane w obliczeniach próbki mogą mieć dodatkowo przypisane wagi określające „pamięć” algorytmu.

Do najpopularniejszych algorytmów z tej grupy należy rekurencyjna metoda najmniejszych kwadratów (RLS) z wykładniczym zapominaniem, którą stosuje się w badaniach systemów z „wolnymi” zmianami parametrów. Można też stosować wersje z ograniczoną pamięcią lub ze zmienną długością pamięci [17], [20]. Podejście z zapominaniem polega na modyfikacji minimalizowanej funkcji strat do następującej postaci ważonej [75]:

$$V_{RLS}(\boldsymbol{\theta}(t_i)) = \sum_{j=1}^i \lambda^{i-j} [y(t_j) - g_m(\mathbf{u}(t_j), \boldsymbol{\theta}(t_i))]^2, \quad (49)$$

gdzie λ jest współczynnikiem zapominania z przedziału $0 < \lambda \leq 1$. Oznacza to, że wpływ pomiarów wcześniejszych staje się pomijalnie mały wraz ze wzrostem j . Im mniejsza wartość λ , tym szybciej informacja wcześniejsza jest „zapominana”. Proces ten charakteryzuje stała czasowa $\tau_\lambda = -T_s / \ln(\lambda)$ (T_s oznacza okres próbkowania). Algorytm RLS z zapominaniem realizuje obliczenia zgodnie z następującymi równaniami [20], [75]:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_i) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_{i-1}) + \mathbf{k}(t_i)[y(t_i) - \mathbf{x}(t_i)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_{i-1})], \\ \mathbf{k}(t_i) &= \frac{\mathbf{P}(t_{i-1})\mathbf{x}^T(t_i)}{\lambda + \mathbf{x}(t_i)\mathbf{P}(t_{i-1})\mathbf{x}^T(t_i)}, \\ \mathbf{P}(t_i) &= \lambda^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{k}(t_i)\mathbf{x}(t_i)]\mathbf{P}(t_{i-1}), \end{aligned} \quad (50)$$

gdzie \mathbf{k} jest wektorem wzmocnienia, \mathbf{P} jest macierzą informacyjną, a $\mathbf{x}(t_i)$ oznacza wiersz macierzy wrażliwości odpowiadający czasowi t_i . Obliczenia rozpoczynają się od przyjęcia w pierwszym kroku zerowych lub typowych wartości parametrów i wstępnie oszacowanej lub diagonalnej macierzy $\mathbf{P}_0 = \delta \mathbf{I}$, gdzie δ jest odpowiednio „dużą” liczbą. Po zakończeniu każdej z iteracji można oszacować macierz kowariancji estymatorów jako [3]:

$$\mathbf{S}_{RLS}(t_i) = \hat{\sigma}_e^2(t_i) \mathbf{P}(t_i), \quad (51)$$

$$\hat{\sigma}_e^2(t_i) = \lambda \hat{\sigma}_e^2(t_{i-1}) + (1 - \lambda) [1 - \mathbf{x}(t_i) \mathbf{P}(t_i) \mathbf{x}^T(t_i)] [y(t_i) - \mathbf{x}(t_i) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_i)]^2.$$

Inną przydatną metodą rekurencyjną jest filtr Kalmana zastosowany jako estymator parametrów [34]. W metodzie tej przyjmuje się, że zmianę wartości parametrów można opisać równaniem różnicowym [20]:

$$\boldsymbol{\theta}(t_i) = \mathbf{F}(t_i) \boldsymbol{\theta}(t_{i-1}) + \mathbf{v}(t_i), \quad (52)$$

gdzie \mathbf{F} jest macierzą przejścia, a \mathbf{v} jest wektorem wzajemnie nieskorelowanych zakłóceń o charakterze szumu białego, mających zerową wartość średnią, które nie są również skorelowane z parametrami $\boldsymbol{\theta}$ i mają macierz kowariancji \mathbf{S}_v . W szczególnym przypadku, gdy macierz przejścia jest macierzą identity, a identyfikowany system jest liniowy, rekurencyjny algorytm estymowania parametrów przyjmuje postać [20], [75]:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_i) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_{i-1}) + \mathbf{k}(t_i) [y(t_i) - \mathbf{x}(t_i) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_{i-1})],$$

$$\mathbf{k}(t_i) = \frac{\mathbf{P}(t_{i-1}) \mathbf{x}^T(t_i)}{\sigma_e^2 + \mathbf{x}(t_i) \mathbf{P}(t_{i-1}) \mathbf{x}^T(t_i)}, \quad (53)$$

$$\mathbf{P}(t_i) = [\mathbf{I} - \mathbf{k}(t_i) \mathbf{x}^T(t_i)] \mathbf{P}(t_{i-1}) + \mathbf{S}_v.$$

Macierz \mathbf{S}_v w podanym algorytmie ma podobne znaczenie jak współczynnik λ w metodzie z zapominaniem wykładniczym. Jej elementy diagonalne można zinterpretować jako wartości określające szybkość zmian poszczególnych parametrów [75]. Z tego powodu startową macierz \mathbf{S}_v dobiera się zazwyczaj jako diagonalną o różnych wartościach elementów, co pozwala uwzględnić różny charakter zmian poszczególnych parametrów w czasie. Poszukiwany jest też kompromis, by z jednej strony zapewniała ona zdolność metody do śledzenia zmian parametrów („duże” wartości elementów macierzy \mathbf{S}_v), z drugiej zaś szybką zbieżność i małe wariancje estymatorów dla systemów o stałych parametrach („małe” wartości elementów). Znajomość wariancji szumu pomiarowego σ_e^2 nie jest konieczna, gdyż można jej przypisać wartość jednostkową, skalując przy tym odpowiednio macierze \mathbf{P} i \mathbf{S}_v [75]. Startowe wartości wektora parametrów dobiera się analogicznie do RLS. Podobnie wyznacza się macierz kowariancji estymatorów parametrów.

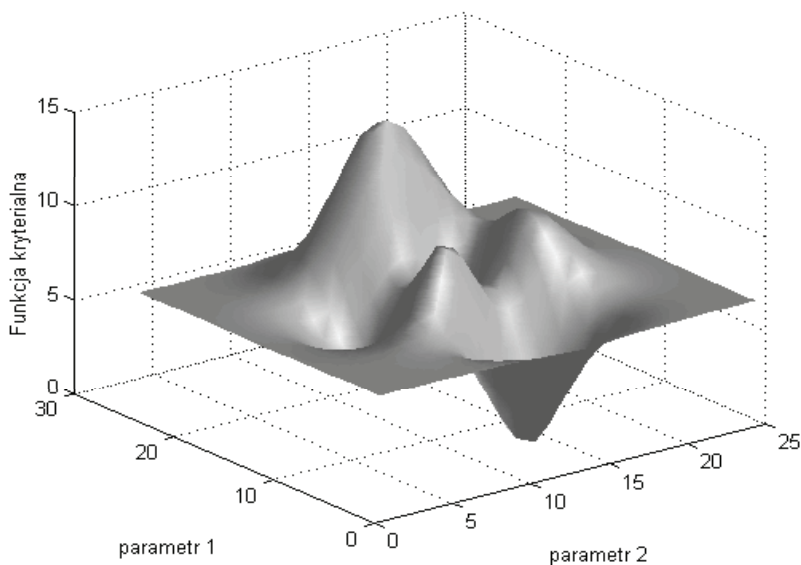
4.1.2. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELI NIELINIOWYCH

Metody globalne

W przypadku modeli nieliniowych pod względem parametrów (NLP) nie da się wyznaczyć estymatora wektora parametrów metodami jednokrokowymi stosowanymi w przypadku identyfikacji modeli liniowych, gdyż wykorzystywana w nich macierz

wrażliwości jest teraz zależna od poszukiwanego wektora $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta})$. Stąd konieczne jest stosowanie innych metod. Ich wspólną cechą jest poszukiwanie minimum pewnej funkcji kryterialnej, której wartość zależy od różnicy między danymi eksperymentalnymi i wyjściem modelu. Tradycyjnie podejście takie nazywane jest zadaniem optymalizacji.

W wielu przypadkach kształt funkcji kryterialnej w przestrzeni parametrów modelu jest złożony (rys. 4) i może cechować się kilkoma minimami lokalnymi (trzy minima widoczne na rysunku), z których jedno jest globalne. Metody poszukiwania ekstremum dzieli się ogólnie na globalne, pozwalające oszacować (zazwyczaj zgrubnie) wartości parametrów w pobliżu minimum globalnego i lokalne, dające zazwyczaj dokładniejsze oszacowanie określających je parametrów. Do grupy *metod globalnych* zalicza się przede wszystkim podejścia wymienione dalej.



Rys. 4. Przykładowy kształt powierzchni funkcji kryterialnej w przestrzeni parametrów modelu
Fig. 4. An exemplary shape of a criterial function in the parameter space

- *Metody enumeracyjne.* Ich istotą jest „umieszczenie” w przestrzeni parametrów równomiernej p -wymiarowej siatki i sprawdzenie wartości funkcji kryterialnej w każdym z jej węzłów. Rozwiązaniem jest wektor parametrów określający węzeł o najmniejszej wartości funkcji kryterialnej. Rozpiętość siatki powiązana jest z zakresem parametrów obejmującym poszukiwane minimum. Metoda ta daje zadowalające wyniki jedynie w przypadku prostych modeli nieliniowych (mała liczba parametrów i krótki czas symulacji modelu umożliwiające zastosowanie odpowiednio „gęstej” siatki), gdyż liczba wywołań funkcji modelowej rośnie wykładniczo z liczbą estymowanych parametrów.

- *Przeszukiwanie losowe*. Podejście to jest stochastycznym odpowiednikiem metody enumeracyjnej i ma podobne ograniczenia. Zamiast w węzłach siatki, tym razem „próbujące” wektory rozmieszczane są w przestrzeni parametrów losowo. Ponowne rozwiązanie polega na wskazaniu tego z nich, który daje najmniejszą wartość funkcji kryterialnej. Procedura może być powtarzana wielokrotnie, co zwiększa szansę na odnalezienie dokładniejszego oszacowania wartości parametrów w minimum globalnym.

- *Algorytmy genetyczne*. Są one „inteligentną” wersją przeszukiwania losowego [23], [27]. Algorytmy te operują na pewnej populacji losowo utworzonych ciągów binarnych (zwanym osobnikami), które wymieniają pomiędzy sobą informację (krzyżują się), tworząc kolejne pokolenia. W „ciele” każdego osobnika zakodowane są argumenty optymalizowanej funkcji kryterialnej, czyli wartości parametrów modelu (określone z rozdzielczością zależną od liczby bitów, na jakich są reprezentowane). Dzięki stosowaniu reguł wyboru zgodnych z przyjętym rozkładem prawdopodobieństwa, najlepiej przystosowane osobniki (tj. wektory parametrów dające najniższe wartości funkcji kryterialnej) mają największe szanse na przekazanie swoich cech następnemu pokoleniu. Dodatkowo stosuje się tzw. operatory genetyczne (np. mutacje), które wprowadzają losowe zmiany w populacji, a przez to zwiększają szansę osiągnięcia minimum globalnego. Zaletą algorytmów genetycznych jest to, że korzystają jedynie z wartości funkcji celu, bez dodatkowych założeń o przestrzeni poszukiwań (takich jak: ciągłość, istnienie pochodnych czy jednomodalność funkcji celu), wadą zaś to, że najczęściej dają rozwiązanie tylko zbliżone do optymalnego.

- *Symulowane wyzarzanie*. Jest to kolejna metoda stochastyczna, zainspirowana tym razem procesami termodynamicznymi towarzyszącymi powolnemu schładzaniu metali czy cieczy po wcześniejszym ich podgrzaniu. Naturalnym efektem jest tworzenie się sieci krystalicznej o minimalnej energii [37], [66]. Estymacja rozpoczyna się od wyznaczenia wartości funkcji kryterialnej dla startowego wektora parametrów. Następnie generowane są duże ilości losowych perturbacji parametrów i obliczane odpowiadające im wartości funkcji kryterialnej. Minimalizowana funkcja V jest analogiem energii w opisującym schładzanie rozkładzie prawdopodobieństwa Boltzmanna. Zgodnie z nim prawdopodobieństwo przejścia do nowego stanu V_2 ze stanu V_1 wynosi $\exp(-(V_2 - V_1)/kT)$, gdzie k jest stałą Boltzmanna, a T aktualną „temperaturą” algorytmu. Uzyskiwane wzrosty i spadki funkcji kryterialnej są dopuszczane zgodnie z tym rozkładem (akceptacja małego wzrostu jest bardziej prawdopodobna niż dużego, a każde zmniejszenie funkcji kryterialnej jest zatwierdzane), dzięki czemu algorytm przeszukujący dużą przestrzeń wokół aktualnego wektora estymat może opuścić minimum lokalne i zdążyć do globalnego. Dodatkowo wraz z postępem obliczeń zmniejszany jest parametr T (następuje „schładzanie algorytmu”), co zmniejsza obszar testowany przez losowe perturbacje w następnych krokach.

- *Losowe restartowanie*. Technika ta polega na nagłej zmianie wartości wektora parametrów (nowe wartości lub/i momenty zmiany dobierane są losowo), stosowanej zwykle wtedy, gdy używany algorytm iteracyjny utracił możliwość powrotu do obsza-

ru w przestrzeni parametrów, w którym zanotowano najlepszy dotychczas wektor parametrów. Stąd losowe restartowanie jest często łączone z innymi metodami.

Metody lokalne

Typowym przykładem *metod lokalnych* są metody gradientowe [40], [66]. Estymacja rozpoczyna się w nich od „zgodnięcia” startowego wektora parametrów (np. dowolny punkt na powierzchni z rysunku 4), a następnie algorytm „schodzi” krokami z wybranego punktu w dół do minimum lokalnego, które (przy szczęśliwie wybranym wektorze startowym) może okazać się ekstremum globalnym. Jak widać, w takiej sytuacji jakość estymacji zależeć będzie od doboru wektora startowego oraz kryterium kończącego iteracyjne poszukiwania minimum funkcji kryterialnej.

W praktyce estymacja parametrów modeli NLP często realizowana jest w dwóch etapach: na początku stosuje się metodę globalną, dającą przybliżone wartości estymatorów w sąsiedztwie minimum globalnego, a następnie używana jest metoda gradientowa umożliwiająca precyzyjne oszacowanie wartości parametrów w minimum globalnym. W metodach gradientowych najczęściej stosowana jest funkcja kryterialna analogiczna do metody ważonych najmniejszych kwadratów (z różnymi postaciami macierzy wag).

W przypadku nieliniowej modyfikacji metody najmniejszych kwadratów najefektywniejsze procedury bazują na iteracyjnym poszukiwaniu minimum lokalnego w kierunku „z górki” względem punktu startowego wybranego w przestrzeni parametrów. Iteracyjny schemat obliczeń ma postać [73]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \mu_i \mathbf{M}_i^{-1} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} V_i, \quad (54)$$

gdzie μ_i jest rozmiarem kroku, $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} V_i = (\partial V / \partial \boldsymbol{\theta})|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_i}$ to gradient funkcji kryterialnej, a \mathbf{M}_i jest macierzą modyfikującą kierunek poszukiwań (zależną od $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$). W przypadku nieliniowej metody ważonych najmniejszych kwadratów

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \hat{V}_i = -\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)^T \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)) = -\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i). \quad (55)$$

Najprostszym kierunkiem poszukiwań minimum funkcji kryterialnej jest zaproponowany już przez Cauchy’ego *kierunek gradientu* (największego nachylenia), co uzyskuje się, przyjmując

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{I}. \quad (56)$$

Wiadomo jednak, że poszukiwanie w kierunku gradientu jest nieefektywne, szczególnie w przypadkach źle uwarunkowanych numerycznie w pobliżu minimum.

Innym podejściem jest zastosowanie poszukiwań w *kierunku Newtona*, przyjmując za macierz \mathbf{M} hessian funkcji kryterialnej V_i charakteryzującej i -ty krok

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{H}_i = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_i}. \quad (57)$$

Rozwiązanie to uzyskuje się, szukając minimum kwadratowego przybliżenia funkcji kryterialnej uzyskanego przez rozwinięcie jej w szereg Taylora w poprzednim punkcie i uwzględnienie trzech pierwszych wyrazów. Kierunek Newtona wymaga (często kłopotliwego) obliczenia macierzy drugich pochodnych. Ponadto z dala od minimum macierz \mathbf{M} nie musi być dodatnio półokreślona, co powoduje, że w praktyce powszechnie stosuje się alternatywne kierunki minimalizacji [73].

Kierunek Gaussa–Newtona otrzymuje się, linearyzując model przez rozwinięcie go w szereg Taylora w punkcie $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ i uwzględniając dwa pierwsze wyrazy szeregu. Wtedy macierz \mathbf{M} przybiera postać przybliżonego hessianu funkcji kryterialnej:

$$\mathbf{M}_i = \tilde{\mathbf{H}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) = \mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) \mathbf{W} \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i). \quad (58)$$

Kierunek Levenberga–Marquardta używany jest w przypadku problemów numerycznych. Jest on kompromisem pomiędzy kierunkami gradientu i Gaussa–Newtona:

$$\mathbf{M}_i = \tilde{\mathbf{H}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) + k\mathbf{I}, \quad (59)$$

gdzie k może pełnić alternatywną rolę w stosunku do rozmiaru kroku μ . Duże k daje krok w kierunku gradientu, a małe daje krok Gaussa–Newtona.

W metodzie stosującej *kierunek gradientu sprzężonego* (quasi-Newtona) wykorzystywany jest nie tylko gradient funkcji kryterialnej w aktualnym oszacowaniu wektora parametrów, lecz również kierunek obrany przez algorytm w poprzednim kroku tak, by konstruowany kierunek poszukiwania minimum był sprzężony względem kierunku poprzedniego. Z tego też powodu wzór na obliczenia iteracyjne ma zmodyfikowaną postać metody gradientu, i tym samym nieco inną niż równanie ogólne (54)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \mu_i \mathbf{g}_i = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \mu_i (\nabla_{\theta} V_i - \lambda_i \mathbf{g}_{i-1}), \quad (60)$$

gdzie \mathbf{g} jest kierunkiem minimalizacji, a wartość skalarną λ oblicza się, wykorzystując poprzednią i aktualną wartość gradientu [66]. Kierunek początkowy \mathbf{g}_0 przyjmowany jest zwykle tak jak w metodzie gradientu – jako $\nabla_{\theta} V(\boldsymbol{\theta}_{\text{start}})$.

Zazwyczaj zaleca się, aby podczas estymacji parametrów modeli NLP stosować algorytm Gaussa–Newtona z tłumieniem lub modyfikację Levenberga–Marquardta w przypadku zadań źle uwarunkowanych numerycznie [15], [73], dobre efekty uzyskuje się również z gradientem sprzężonym.

Wspomniane tłumienie jest techniką polegającą na zmniejszaniu długości kroku. Idealny rozmiar dla minimalizowanego kryterium, które byłoby rzeczywiście kwadratowe, dany jest przez $\mu = 1$. Zwykle jednak poszukuje się kolejno takiego μ (roz-

poczynając od 1 i zmniejszając krok), aż nowe wartości estymat parametrów dadzą mniejszą wartość kryterium [73].

Estymuje się zwykle wszystkie parametry modelu odwrotnego w każdym kroku obliczeń iteracyjnych. Istnieją też metody dwu- i wieloetapowe, w których tylko niektóre parametry estymowane są w danej iteracji.

Ważnym elementem określającym dokładność estymacji parametrów modeli NLP, podobnie jak w przypadku ich liniowej postaci, jest macierz kowariancji estymatorów, \mathbf{S}_{NLP} [4], [33]

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{NLP} &= \mathbf{H}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{H}^{-1}, \\ \mathbf{P} &= E(\nabla_{\theta}V \cdot \nabla_{\theta}^T V).\end{aligned}\quad (61)$$

Ze względu na nieliniowość modelu pod względem parametrów, wartości elementów macierzy hessianu zależą od punktu $\boldsymbol{\theta}^*$ w przestrzeni parametrów, w którym jest ona wyznaczana – $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^*)$. Otrzymując w rezultacie pomiaru pośredniego wartości estymat, dokładność estymacji można oszacować w tym właśnie punkcie. Niestety złożoność modeli nieliniowych powoduje, iż macierzy \mathbf{H} zwykle nie daje się wyliczyć analitycznie. Wybierając jako kryterium ważne najmniejsze kwadraty, można skorzystać z jej liniowego przybliżenia, a macierz wrażliwości wyznaczyć numerycznie. Wtedy

$$\nabla_{\theta}V = -\mathbf{X}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T) \mathbf{W}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_e \mathbf{W}^T \mathbf{X}. \quad (62)$$

Przyjmując oznaczenie $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, liniowe przybliżenie macierzy kowariancji w punkcie zdefiniowanym przez obliczone estymaty można wyrazić następująco:

$$\mathbf{S}_{NLP} \approx (\hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{X}})^{-1} \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_e \mathbf{W}^T \hat{\mathbf{X}} (\hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{X}})^{-1}, \quad (63)$$

co przy nieskorelowanym, stacjonarnym szumie białym ($\mathbf{S}_e = \sigma_e^2 \mathbf{I}$) i symetrycznej macierzy wag upraszcza się do postaci

$$\mathbf{S}_{NLP} \approx \sigma_e^2 \mathbf{W} (\hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{X}})^{-1}. \quad (64)$$

Alternatywą dla przybliżonych metod liniowych jest stosowanie zaawansowanych technik numerycznych pozwalających dokładniej oszacować dokładność estymacji nieliniowej [66], [88]. Do tej grupy należy przede wszystkim metoda Monte Carlo.

Nieliniowe modele odwrotne charakteryzują się dodatkowo bardziej skomplikowanym kształtem konturów niepewności łącznej, niż na przykład w przypadku modeli liniowych. Kontury te, dane równaniem [88]

$$\Delta \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H} \Delta \boldsymbol{\theta} \approx \sigma_e^2 p F_{1-\alpha}(p, N-p), \quad (65)$$

nie są już idealnymi hiperelipsoidami, lecz mogą być silnie zakrzywione w przestrzeni parametrów [70].

Zazwyczaj analityczne wyznaczenie konturów niepewności nie jest możliwe. W takim przypadku stosuje się metody numeryczne. Poszukiwane granice, obejmujące zadaną frakcję potencjalnych wektorów estymat, wyznaczane są przez obliczenie wartości zastosowanego kryterium średniokwadratowego V dla wielkiej liczby perturbacji parametrów wokół $\hat{\theta}$ (zazwyczaj stosuje się równomierną siatkę w przestrzeni parametrów) i rysując punkty spełniające zależność:

$$V(\hat{\theta} + \Delta\theta) - V(\hat{\theta}) < \sigma_e^2 p F_{1-\alpha}(p, N - p) \quad (66)$$

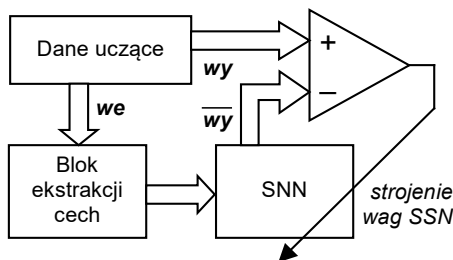
w odpowiednim układzie współrzędnych. Ponieważ pełny rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany jest w p -wymiarowej przestrzeni parametrów, to najczęściej dokonuje się zobrazowania obszaru niepewności łącznej w wybranych podprzestrzeniach 2- lub 3-wymiarowych, używając zaawansowanych procedur interpolacyjnych, jak np. funkcje sklepane [88].

Sztuczne sieci neuronowe

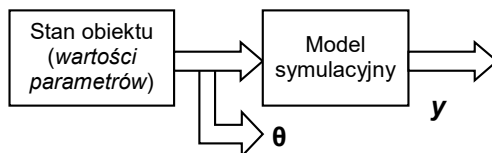
Nowym podejściem do estymacji parametrów modeli NLP jest zastosowanie sztucznych sieci neuronowych (SSN). W swej istocie SSN są realizacją nieliniowych modeli empirycznych, mającą umiejętność iteracyjnego uczenia się (przez korekcję parametrów zwanych wagami) odwzorowania danych wejściowych na dane wyjściowe (rys. 5) [73]. W zależności od postaci nieliniowej funkcji aktywacji charakteryzującej przetwarzanie neuronu, SSN można podzielić na sieci globalne (zastosowanie funkcji sigmoidalnych – głównie w sieciach jednokierunkowych i rekurencyjnych) lub lokalne (użycie funkcji radialnych, mających dla danego neuronu wartości istotnie niezerowe tylko w otoczeniu centralnego punktu w przestrzeni parametrów). Teoretycznie sieć z dwoma nieliniowymi warstwami ukrytymi potrafi nauczyć się dowolnego odwzorowania. W wielu przypadkach okazuje się, że SSN potrafią lepiej i szybciej rozwiązywać postawione problemy (zwłaszcza nieliniowe) niż standardowe algorytmy numeryczne [54]. SSN cechują się również zdolnością generalizacji, tj. udzielania poprawnej odpowiedzi dla danych nieużywanych w procesie uczenia, i wykazują dużą odporność na dane zawierające szумы [54], [77].

Podczas uczenia sieci na jej wejście podawane są wektory próbkowanych sygnałów wejściowych (lub dane uzyskane przez ich przetworzenie w bloku ekstrakcji cech – rys. 5), a odpowiedź SSN porównywana jest z oczekiwanymi rezultatami. Na podstawie różnicy między nimi modyfikowane są wagi SSN. Wynika stąd, że właściwości obiektu muszą być znane na etapie uczenia. Zbiory uczące należy zatem tworzyć, dokonując wielokrotnego pomiaru tych właściwości dla różnych stanów systemu lub generując syntetyczne dane pomiarowe według modelu symulacyjnego (rys. 6) [60]. Drugie z podejść ma wiele zalet – przede wszystkim umożliwia zebranie dowolnej

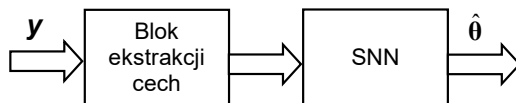
liczby danych powiązanych z różnymi stanami obiektu z jednoczesną bezbłędną znajomością wartości charakteryzujących go parametrów.



Rys. 5. Schemat ilustrujący trenowanie SSN z wykorzystaniem danych uczących składających się z dużej liczby odpowiadających sobie par wektorów wejściowych (w_e) i wyjściowych (w_y)
 Fig. 5. The scheme illustrating the artificial neural network training with the use of training data consisting of a large number of corresponding pairs of input (w_e) and output vectors (w_y)



Rys. 6. Schemat generacji danych syntetycznych (θ – aktualne wartości parametrów modelu, y – wyjście modelu) służących do nauki rozwiązywania zadania odwrotnego przez SSN
 Fig. 6. The scheme for the generation of synthetic data (θ – current values of model parameters, y – model output) used to train an artificial neural network to solve the inverse problem



Rys. 7. Schemat prezentujący nauczoną SSN działającą jako nieliniowy model odwrotny (y – wyniki pomiarów bezpośrednich, $\hat{\theta}$ – oszacowane wartości parametrów modelu)
 Fig. 7. The scheme presenting a trained neural network operating as a nonlinear inverse model (y – results of indirect measurements, $\hat{\theta}$ – estimates of the values of model parameters)

Jakość tak prowadzonych pomiarów niewątpliwie zależy od dokładności modelu symulacyjnego. Zastosowanie modeli kompleksowych do generacji danych uczących wiąże się z długim czasem obliczeń. Również proces trenowania SSN jest bardzo czasochłonny. Jednakże wytrenowana SSN wyznacza (estymuje) parametry obiektu

na podstawie aktualnych wartości pomiarów bezpośrednich bardzo szybko i może być stosowana w czasie rzeczywistym. Tak przygotowana sieć neuronowa jest nieliniowym modelem odwrotnym (rys. 7).

4.2. METODY REGULARYZACJI ESTYMACJI ŹŁE UWARUNKOWANEJ NUMERYCZNIE

Wiele z wymienionych wcześniej metod estymacji wymaga odwrócenia macierzy informacyjnej. Przypadki złego uwarunkowania tego procesu występują w sytuacjach, w których wyznacznik odwracanej macierzy jest bliski zeru, co przekłada się na bardzo dużą wartość liczby uwarunkowania, czyli stosunku jej największej wartości osobliwej do wartości najmniejszej. Obliczane wtedy estymaty są wyjątkowo wrażliwe na zakłócenia zawarte w danych pomiarowych. Aby polepszyć uwarunkowanie numeryczne estymacji, stosuje się metody regularyzacji. Operacja taka polega na zastąpieniu zagadnienia oryginalnego problemem przybliżonym, którego rozwiązanie jest znacząco mniej wrażliwe na błędy.

Zazwyczaj podczas regularyzacji uwzględnia się posiadaną wiedzę aprioryczną o właściwościach poszukiwanych estymat lub stosowane są specyficzne techniki numeryczne. Dobór metody regularyzacji zależy zarówno od ilości posiadanej wiedzy o poszukiwanym rozwiązaniu, jak również od formy tej wiedzy. Podobnie jak w przypadku estymacji, rozróżnić należy także m.in. regularyzację problemów liniowych i nieliniowych. Analogicznie pierwsze rozwiązanie otrzymuje się jednokrotnie, natomiast w drugim przypadku za pomocą algorytmów iteracyjnych. Regularyzacja liniowa jest popularniejsza i lepiej opracowana niż nieliniowa.

Metody regularyzacji wykorzystywane są przede wszystkim w zadaniach odtwarzania sygnałów pomiarowych (głównie wtedy, gdy w torze przetwarzania znajdują się bloki całkujące) i analizie danych wielowymiarowych. Rzadziej stosowane są w rozwiązywaniu drugiego z zadań odwrotnych – tj. w złożonych pomiarach pośrednich.

Sama nazwa operacji nawiązuje do nadania poszukiwanemu rozwiązaniu bardziej „regularnej” formy, w przeciwieństwie do efektu uzyskiwanego bez niej, kiedy jest ono zdominowane przez propagujący i wzmocniony szum pomiarowy. Można wyróżnić kilka podstawowych mechanizmów uwzględnianych w algorytmach numerycznych i dających efekt regularyzacji [48], [73]. W metodach bezpośrednich rolę współczynnika regularyzacji odgrywa krok dyskretyzacji ciągłego modelu matematycznego. Innym sposobem (metody wariacyjne) jest ograniczenie możliwych rozwiązań do sygnałów, które minimalizują lub maksymalizują przyjęte kryterium jakości rekonstrukcji. Ograniczenie ilości rozwiązań uzyskuje się też przez parametryzację odtwarzanego sygnału, a liczba parametrów jest wtedy odpowiednikiem współczynnika regularyzacji. Niektóre rozwiązania można też uczynić bardziej prawdopodobnymi od innych przez uwzględnienie wielkości charakteryzujących poziomy niepewności – pełnią one wtedy rolę współczynnika regularyzacji. Podczas obliczeń iteracyjnych

efekt regularyzacji uzyskiwany jest też przez wcześniejsze zakończenie działania algorytmu (pomocna może być wtedy kontrola dopasowania modelu do danych testujących). Liczba iteracji równoważna jest wtedy współczynnikowi regularyzacji. Jeszcze jednym mechanizmem, możliwym do wykorzystania w metodach uwzględniających transformacje sygnału, jest stosowanie odpowiednich ograniczeń w dziedzinie transformacji – np. w dziedzinie częstotliwości rolę parametru regularyzacji pełnić może częstotliwość graniczna filtra dolnoprzepustowego.

4.2.1. REGULARYZACJA ESTYMACJI I JEJ KONSEKWENCJE

Typowe podejście do regularyzacji estymacji polega na uzupełnieniu minimalizowanej funkcji kryterialnej V o czynnik kary Ω , zależny od wektora parametrów. Daje to następującą postać funkcji kryterialnej:

$$V_R(\boldsymbol{\theta}) = V(\boldsymbol{\theta}) + \alpha\Omega(\boldsymbol{\theta}), \quad (67)$$

gdzie α jest skalarnym współczynnikiem regularyzacji. W różnych metodach stosuje się różne postaci czynnika kary, uwzględniające odstępstwo estymowanego wektora od spodziewanych właściwości parametrów (wartości, gładkość itp.). Najczęściej przyjmuje on ogólną postać:

$$\Omega(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2, \quad (68)$$

gdzie \mathbf{D} jest dyskretną postacią odpowiedniego operatora, zwaną macierzą regularyzującą, a $\boldsymbol{\theta}^*$ jest wybranym, charakterystycznym dla obiektu wektorem (np. typowym punktem pracy). Minimalizując $V_R(\boldsymbol{\theta})$, uzyskuje się obciążony estymator

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_R = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} V_R(\boldsymbol{\theta}) \quad (69)$$

mający wartość oczekiwaną $\boldsymbol{\theta}_* = E\hat{\boldsymbol{\theta}}_R$. Obciążenie \mathbf{b}_R można oszacować linearyzując zregularyzowaną funkcję kryterialną przez jej rozwinięcie w szereg Taylora. Dane jest ono ogólną zależnością [33]:

$$\mathbf{b}_R = \boldsymbol{\theta}_* - \boldsymbol{\theta}_0 = -\alpha[\mathbf{H}_V(\boldsymbol{\theta}_0) + \alpha\mathbf{H}_\Omega(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\Omega(\boldsymbol{\theta}_0), \quad (70)$$

gdzie macierze hessianu \mathbf{H} i gradient ∇ są określone następująco:

$$\mathbf{H}_V = \frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}, \quad \mathbf{H}_\Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\theta}}\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\theta}}. \quad (71)$$

Obciążenie zregularyzowanego estymatora, rosnące wraz z parametrem α , jest ceną za uzyskiwane wtedy zmniejszanie wartości elementów macierzy kowariancji \mathbf{S}_R danej ogólnym wzorem [33]:

$$\mathbf{S}_R = [\mathbf{H}_V(\boldsymbol{\theta}_0) + \alpha \mathbf{H}_\Omega(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1} \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0) [\mathbf{H}_V(\boldsymbol{\theta}_0) + \alpha \mathbf{H}_\Omega(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}. \quad (72)$$

Podczas zregulowanej estymacji (zarówno w przypadku modeli liniowych jak i nieliniowych) zazwyczaj stosowane jest kryterium w postaci metody najmniejszych kwadratów. Wtedy dla addytywnego nieskorelowanego szumu gaussowskiego

$$\nabla_{\theta} V = -\mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{P} = E(\nabla_{\theta} V \cdot \nabla_{\theta}^T V) = \mathbf{X}^T E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T) \mathbf{X} = \sigma_{\varepsilon}^2 \mathbf{X}^T \mathbf{X}. \quad (73)$$

Jednocześnie też, po zakończeniu estymacji, gdy model jest dopasowany do danych empirycznych i rezydua są odpowiednio małe, hessian \mathbf{H}_V przybliżyć można następującą macierzą kwadratową [66]:

$$\mathbf{H}_V \approx \mathbf{X}^T \mathbf{X}. \quad (74)$$

Zwykle metodami apriorycznymi lub *a posteriori* poszukuje się takiej wartości parametru regularyzacji α , która minimalizuje błąd średniokwadratowy estymacji.

4.2.2. METODY REGULARYZACJI LINIOWEJ

Do typowych podejść, uwzględniających aprioryczną wiedzę o poszukiwanym rozwiązaniu, należy wymuszenie „gładkości” estymowanego wektora, tj. minimalizacja różnic między wartościami sąsiadujących parametrów. Przyjmując w równaniu (35) $\boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{0}$, uzyskuje się metodę Tichonowa–Phillipsa [55], [79], [81], zwaną też regularyzacją Phillipsa–Twomeya lub Tichonowa–Millera [50], [66]. Najczęściej macierz \mathbf{D} przyjmuje postać dyskretnego operatora różniczkowania n -tego stopnia, niezależnego od $\boldsymbol{\theta}$, np. dla pierwszej pochodnej

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Minimalizowana jest zatem funkcja kryterialna

$$V_{TP} = \|\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\boldsymbol{\theta})\|^2 + \alpha \|\mathbf{D}\boldsymbol{\theta}\|^2, \quad (76)$$

co daje estymator

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{TP} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (77)$$

W innym popularnym podejściu, zaproponowanym przez Twomeya [81], regularyzacja polega na minimalizacji odległości estymat od wcześniejszego oszacowania $\boldsymbol{\theta}^*$ (przy $\mathbf{D} = \mathbf{I}$), minimalizowany jest zatem funkcjonal

$$V_T = \|\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\boldsymbol{\theta})\|^2 + \alpha \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*\|^2, \quad (78)$$

i w efekcie estymator przyjmuje postać

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_T = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \alpha \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{y} + \alpha \boldsymbol{\theta}^*). \quad (79)$$

Gdy brak jest szczegółowych informacji o poszukiwanym rozwiązaniu, wówczas można zastosować $\boldsymbol{\theta}_* = \mathbf{0}$, przy $\mathbf{D} = \mathbf{I}$. Wtedy minimalizacja funkcjonau o postaci

$$V_{RR} = \|\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\boldsymbol{\theta})\|^2 + \alpha \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta} \quad (80)$$

daje jedną z najpopularniejszych metod – metodę regresji grzbietowej (RR) [30], [31]. W tym przypadku minimalizuje się jedynie „amplitudę” wektora, a parametry słabo zdefiniowane przez dane pomiarowe przyciągane są do $\mathbf{0}$ (tj. do początku układu współrzędnych w przestrzeni parametrów). Efektem regularyzacji jest estymator

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{RR} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (81)$$

W metodzie regresji grzbietowej zaleca się normalizację macierzy wrażliwości \mathbf{X} , co powoduje, że elementy diagonalne odwracanej macierzy są jedynkami i w czasie estymacji każdy z nich zwiększany jest proporcjonalnie o wartość α .

Kolejna metoda regularyzacji polega na estymacji jedynie wybranego podzbioru parametrów modelu odwrotnego, z pominięciem tych, których wpływ na wyniki pomiarów jest znikomy. W przypadku modeli liniowych podejście takie jest dobrze znane i jest równoważne metodom selekcji zmiennych niezależnych w równaniach wielokrotnej regresji [29]. Wynika to stąd, iż każda zmienna budująca model liniowy skalowana jest przez własny parametr. Oznaczając jako $\boldsymbol{\beta}$ wektor parametrów stojących przed zmiennymi pozostawionymi w modelu, a jako $\boldsymbol{\lambda}$ oznaczając pozostałe z nich, tak że $\{\boldsymbol{\theta}\} = \{\boldsymbol{\beta}\} \cup \{\boldsymbol{\lambda}\}$, model wielokrotnej regresji liniowej przedstawić można następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_m &= \mathbf{X}_\beta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_\lambda \boldsymbol{\lambda}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}_m + \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (82)$$

gdzie \mathbf{X}_β i \mathbf{X}_λ są odpowiednio macierzami wrażliwości modelu na parametry estymowane i nieestymowane. Selekcja zmiennych identyfikowanego modelu polega zatem na odrzuceniu zmiennych pozostałych, które jednak potencjalnie wpływają na posiadane dane empiryczne. Jest to równoważne przypisaniu stojącym przy nich parametrom wartości zerowych. Podczas estymacji stosowany jest zatem zredukowany model $\mathbf{y}_m^\beta = \mathbf{X}_\beta \boldsymbol{\beta}$.

Tak przeprowadzona selekcja zmiennych, a tym samym selekcja estymowanych parametrów, ma swoje konsekwencje [29]. Po pierwsze, uzyskiwane estymatory podzbioru parametrów obciążone są obciążeniem \mathbf{b}_{SP} :

$$\mathbf{b}_{SP} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}_0, \quad (83)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X}_\beta^T \mathbf{X}_\beta)^{-1} \mathbf{X}_\beta^T \mathbf{X}_\lambda,$$

gdzie \mathbf{A} jest macierzą aliasingu parametrów, a indeks 0 oznacza prawdziwe wartości parametrów $\boldsymbol{\lambda}$. Macierz kowariancji wyselekcjonowanych parametrów (dla metody najmniejszych kwadratów) wyraża się wzorem:

$$\mathbf{S}_{SP} = \sigma_e^2 (\mathbf{X}_\beta^T \mathbf{X}_\beta)^{-1}. \quad (84)$$

Dodatkowo oszacowana na podstawie rezyduów wariancja szumu jest zazwyczaj przeszacowana, co wynika z jej obciążenia wynoszącego [29]

$$b_\sigma = \boldsymbol{\lambda}_0^T \mathbf{X}_\lambda^T [\mathbf{I} - \mathbf{X}_\beta (\mathbf{X}_\beta^T \mathbf{X}_\beta)^{-1} \mathbf{X}_\beta^T] \mathbf{X}_\lambda \boldsymbol{\lambda}_0 / (N - p). \quad (85)$$

Korzystnym efektem tak przeprowadzonej selekcji jest zmniejszenie wariancji estymowanych parametrów $\boldsymbol{\beta}$ w porównaniu z rozrzutem estymat uzyskiwanych z pełnego modelu. Właściwość ta prowadzi zatem do regularyzacji estymacji i decyduje o stosowaniu omawianej metody.

Innymi sposobami poprawy numerycznego uwarunkowania estymacji liniowej, poza podejściami dotychczas omówionymi, są też regresja składników głównych (PCR) [36], [47], i metoda częściowych najmniejszych kwadratów (PLS) [87].

4.2.3. METODY REGULARYZACJI NIELINIOWEJ

Metody podstawowe

W przypadku problemu nieliniowego, linearyzując funkcję modelową $\mathbf{y}_m(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ przez rozwinięcie jej w szereg Taylora i uwzględnienie dwóch pierwszych wyrazów, dla ogólnej postaci czynnika kary (równ. (68)) otrzymuje się następujące wyrażenie na krok algorytmu rekurencyjnego:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + \mu (\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) + \alpha_i \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} [\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) (\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)) - \alpha_i \mathbf{D}^T \mathbf{D} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}^*)], \quad (86)$$

gdzie α_i powinno maleć w kolejnych iteracjach do zera, co zapewnia zbieżność algorytmu dla danych pozbawionych zakłóceń i jednocześnie niweluje obciążenie estymatorów. Stosując jednak rzeczywiste dane pomiarowe, zawierające zakłócenia losowe, proces iteracyjny należy przerwać po odpowiedniej liczbie kroków, by uniknąć niekontrolowanego wzrostu propagującego błąd danych. Podobnie jak w przypadku regularyzacji liniowej, różne postaci macierzy regularyzacji i wektora $\boldsymbol{\theta}^*$ prowadzą do różnych metod regularyzacji nieliniowej.

Przyjmując $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ i rozwijając funkcję modelową w punkcie $\boldsymbol{\theta}^*$ (tzn. stosując $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}^*$), otrzymuje się algorytm zaproponowany przez Levenberga i Marquardta [39], [45]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + \mu(\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) + \alpha_i\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)(\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)), \quad (87)$$

gdzie dodatkowo parametr μ kontroluje długość kroku. Wartość parametru regularyzacji α_i zmieniana jest w każdej iteracji, w zależności od uzyskanego efektu. Typowo przy zmniejszeniu wartości minimalizowanej funkcji kryterialnej dzieli się go przez 10 i dokonuje aktualizacji wektora estymat, w przeciwnym wypadku α_i mnożone jest przez 10, a estymator nie jest aktualizowany [66].

Stosując $\boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{0}$ i macierz regularyzacji \mathbf{D} w postaci operatora różniczkowania, uzyskuje się nieliniową wersję metody Tichonowa–Phillipsa

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + \mu(\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) + \alpha_i\mathbf{D}^T\mathbf{D})^{-1}[\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)(\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)) - \alpha_i\mathbf{D}^T\mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\theta}}_i]. \quad (88)$$

Osobnym zagadnieniem jest dobór optymalnej wartości współczynnika regularyzacji α . Poszukiwania takiej wartości dobrze jest zacząć od $\alpha_0 = \text{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})/\text{tr}(\mathbf{D}^T\mathbf{D})$ [66], choć jest to wartość zawyżona w kontekście minimalizacji łącznego błędu estymacji parametrów [64].

Przyjmując $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ i przy ustalonym $\boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{0}_0$, uzyskuje się kolejny algorytm realizujący iteracyjnie zregularyzowaną metodę Gaussa–Newtona (metodę Bakuszynskiego) [5]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + \mu(\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) + \alpha_i\mathbf{I})^{-1}[\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)(\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)) - \alpha_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \mathbf{0}_0)]. \quad (89)$$

Łatwą do implementacji jest zawsze dobrze uwarunkowana numerycznie zarówno metoda Newtona–Landwebera [38]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + \mu\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)(\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)), \quad (90)$$

jak i jej modyfikacja zaproponowana przez Scherzera, uwzględniająca czynnik Bakuszynskiego [71]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + \mu\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)(\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)) - \alpha_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \mathbf{0}_0). \quad (91)$$

Również w problemach nieliniowych można zastosować selekcję estymowanych parametrów, przyjmując za kryterium selekcji całkowity błąd średniokwadratowy estymatorów, który osiąga minimum (jako wynik kompromisu między ich obciążeniem i wariancją) dla pewnego optymalnego podzbioru parametrów [58]. Minimalizowana jest wtedy następująca funkcja kryterialna:

$$V_{SP}(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_m(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2. \quad (92)$$

Strukturą zawierającą informacje o wpływie zarówno korelacji na wariancję estymatorów, jak i poszczególnych parametrów modelu na jego wyjście jest macierz względnej wrażliwości estymatorów na dane pomiarowe, \mathbf{X}_e . Obliczając normy poszczególnych wektorów tej wrażliwości,

$$\mathbf{m}_e = [\|\mathbf{x}_{e12}\| \quad \|\mathbf{x}_{e2}\|_2 \quad , \dots , \quad \|\mathbf{x}_{ep}\|_2]^T = [\text{diag}(\mathbf{X}_e \mathbf{X}_e^T)]^{1/2}, \quad (93)$$

uzyskuje się skalary, których wartości są tym większe, im bardziej dany parametr zwiększa wariancję estymatorów i im mniejszy ma wpływ na wyjście modelu. Pozwala to zaproponować algorytm selekcji, w którego kolejnych krokach odrzućane są parametry charakteryzujące się największą wartością normy wektora wrażliwości. Ponieważ macierz wrażliwości każdego nowo wyselekcjonowanego zbioru parametrów jest inna, podaną procedurę obliczania norm i selekcji należy powtórzyć w każdym kroku. Jednocześnie powinny być obliczane całkowite błędy systematyczne i losowe estymacji, aby wyselekcjonowany zbiór parametrów był optymalny [58].

W przypadku modeli nieliniowych, jakimi są modele kompleksowe, wyeliminowanie części parametrów z procesu estymacji nie powoduje ich zniknięcia (przez wyzerowanie) ze struktury modelu, jak występuje to w przypadku liniowych modeli regresji, i należy przypisać im jakieś wartości – mogą to być na przykład wartości typowe λ^* . Powoduje to, że wzór na obciążenie ma następującą zmodyfikowaną postać [58]

$$\mathbf{b}_{SP} \approx [\mathbf{X}_\beta^T(\boldsymbol{\beta}_0, \lambda^*) \mathbf{X}_\beta(\boldsymbol{\beta}_0, \lambda^*)]^{-1} \mathbf{X}_\beta^T(\boldsymbol{\beta}_0, \lambda^*) \mathbf{X}_\lambda(\boldsymbol{\beta}_0, \lambda^*) \Delta \lambda, \quad (94)$$

gdzie $\Delta \lambda$ jest różnicą między rzeczywistymi wartościami nieestymowanych parametrów a przyjętymi w modelu ich wartościami typowymi ($\Delta \lambda = \lambda_0 - \lambda^*$). Przyjmując za λ^* środek zakresu zmienności parametrów (który zazwyczaj da się określić), można oszacować wektor $\Delta \lambda$ dla najgorszego przypadku jako $\Delta \lambda_{\max} = \frac{1}{2}(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$ i używać go podczas selekcji parametrów. Macierz kowariancji dana jest przybliżonym wzorem [58]

$$\mathbf{S}_{SP} \approx \sigma_e^2 [\mathbf{X}_\beta^T(\boldsymbol{\beta}_0, \lambda^*) \mathbf{X}_\beta(\boldsymbol{\beta}_0, \lambda^*)]^{-1}. \quad (95)$$

Metody łączone

Analogiczne efekty poprawiające dokładności estymacji nieliniowej można uzyskać, łącząc opisane wcześniej metody regularyzacji Levenberga–Marquardta i Tichonowa–Phillipsa. Funkcja kryterialna przyjmuje wtedy postać [63]

$$V_{LMTF}(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_m(\boldsymbol{\theta})\|^2 + \gamma \|\mathbf{D}\boldsymbol{\theta}\|^2 + \alpha \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*\|^2, \quad (96)$$

co ostatecznie prowadzi do następującego sposobu modyfikacji wektora parametrów w kolejnych iteracjach

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + \mu (\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) + \gamma_i \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \alpha_i \mathbf{I})^{-1} [\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) (\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)) - \gamma_i \mathbf{D}^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i]. \quad (97)$$

Z właściwości metody LM i klasycznej postaci TP, stosowanej do regularyzacji problemów liniowych, można wnioskować, że zaproponowana procedura iteracyjna cechuje się poprawą uwarunkowania numerycznego odwracanej macierzy, „wygładzaniem” wektora estymat tych parametrów, którym odpowiadają niezerowe elementy macierzy \mathbf{D} (typowym dla TP) oraz niewielką zmianą względem wektora startowego wartości pozostałych, słabo zdefiniowanych parametrów (w sensie wrażliwości wyjścia modelu), co jest cechą metody LM.

Połączenie selekcji parametrów z metodą Levenberga–Marquardta pozwala jednocześnie wyeliminować z estymacji parametry nieznacznie wpływające na rejestrowane dane, poprawić uwarunkowanie numeryczne odwracanej macierzy i modyfikować kierunek poszukiwania minimum funkcji kryterialnej, która przyjmuje postać [58]:

$$V_{SPLM}(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_m(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 + \alpha \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*\|^2. \quad (98)$$

Stosując technikę linearyzacji modelu analogicznie do przypadku oryginalnej metody Levenberga–Marquardta, uzyskuje się wzór na iteracyjną estymację parametrów

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_i + \mu(\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i, \boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i, \boldsymbol{\lambda}^*) + \alpha_i\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i, \boldsymbol{\lambda}^*)(\mathbf{y} - \mathbf{g}_m(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i, \boldsymbol{\lambda}^*)). \quad (99)$$

Uzyskany estymator jest obciążony, co wynika zarówno z przypisania typowych wartości nieestymowanym parametrom $\boldsymbol{\lambda}$, jak i zastosowania czynnika kary za odstępstwo estymat od $\boldsymbol{\beta}^*$.

5. SZACOWANIE DOKŁADNOŚCI POMIARÓW POŚREDNICH

Wszystkie trzy wymienione na wstępie kategorie modeli matematycznych stosowanych w pomiarach pośrednich mają wpływ na ich niedokładność. W przypadku modeli typu biała skrzynka decydują o tym dwa elementy. Pierwszy z nich jest konsekwencją idealizacji rzeczywistości opisywanej za pomocą zastosowanego równania. Użycie w obliczeniach dowolnego prawa fizycznego związane jest z pominięciem wielu innych zjawisk zachodzących jednocześnie w badanym obiekcie i mających swe odzwierciedlenie (choć czasami mało istotne) w wynikach pomiarów bezpośrednich. Podobnie zastosowanie matematycznego równania definicyjnego (np. wzoru na pole powierzchni prostokąta) nie indukuje bezbłędności obliczeń, gdyż abstrakcyjne obiekty matematyczne są tylko bardziej lub mniej dokładną idealizacją właściwości konkretnego obiektu rzeczywistego. Drugim czynnikiem jest obecność stałych fizycznych we wzorach wyrażających wiele praw i teorii fizycznych. Aczkolwiek, zgodnie z podstawowymi koncepcjami praw natury, stałe fizyczne cechują się absolutną niezmienniczością, to ich dokładne wartości nie są znane, lecz wyznaczone eksperymentalnie (wyjątek stanowi tu m.in. prędkość światła w próżni, której wartość zdefiniowano w 1983 r.). Z tego powodu wyniki obliczeń wykorzystujących te wzory nie

mogą być precyzyjniejsze niż dokładność, z jaką znamy wartości występujących w nich stałych fizycznych. Niedokładność modeli typu szara skrzynka bierze się zarówno z przybliżonego opisu fizycznego zjawisk występujących w badanym obiekcie (tym samym pojawiają się problemy omówione powyżej), jak i z tego, że wartości parametrów równań matematycznych wyznaczone są na podstawie danych eksperymentalnych i są od nich zależne. Dokładność tak obliczonych współczynników można oszacować, posługując się metodami statystyki matematycznej. W przypadku modeli typu czarna skrzynka do zagadnień związanych z niedokładnością oszacowania parametrów dochodzi jeszcze problem wyboru samych równań opisujących zachowanie badanego obiektu. Ich postać, warunkująca lepsze lub gorsze dopasowanie się modelu do obserwacji empirycznych, jest kolejnym czynnikiem wpływającym na niedokładność pomiaru pośredniego.

Wiarygodność określenia stanu obiektu w znacznej mierze zależy od dokładności pomiarów. O dokładności pomiarów bezpośrednich decydują metrologiczne właściwości aparatury pomiarowej, zastosowana metoda pomiarowa oraz poziom zakłóceń zewnętrznych. Problematyka dokładności pomiarów pośrednich jest bardziej złożona.

5.1. BŁĄD I NIEPEWNOŚĆ POMIARU

Wynik pomiaru bezpośredniego, zakładając addytywny charakter czynników wpływających, zapisać można następująco:

$$y = f_m(y_0) + \Delta_s(f_m - f_0, \mathbf{w}) + \Delta_r(\mathbf{z}), \quad (100)$$

gdzie Δ_s oznacza błąd systematyczny pomiaru, a Δ_r to błąd przypadkowy. Pierwszy z błędów dotyczy działania przyrządu i wynika z różnicy między założonym i rzeczywistym jego funkcjonowaniem (błąd wzorcowania) oraz z różnicy pomiędzy aktualnymi warunkami pomiaru i warunkami odniesienia (błąd dodatkowy). Jednocześnie zaburzenie pola pomiarowego spowodowane podłączeniem miernika do badanego obiektu, skutkujące zmianą wartości mierzonej wielkości, jest źródłem jeszcze jednej składowej błędu systematycznego – błędu metody [56]. Drugi czynnik powstaje w wyniku oddziaływania na badany obiekt i przyrząd zakłóceń zewnętrznych o charakterze losowym oraz jako efekt wewnętrznych szumów generujących się w aparaturze elektronicznej.

Błędy systematyczne charakteryzują się tą samą wartością, jeżeli kolejne pomiary y_0 wykonywane są w takich samych warunkach, tym samym przyrządem i tą samą metodą i zmieniają się zgodnie z określonym prawem wraz ze zmianą wielkości wpływających \mathbf{w} . Biorąc pod uwagę przyczyny ich powstania, błędy systematyczne podzielić można na błędy metody, wzorcowania i dodatkowe. W niektórych przypadkach można z dużą dokładnością oszacować wartość i znak błędu systematycznego (np. błędu wynikającego z metody pomiaru) lub pewnej jego części. Wyznaczona wtedy teoretycznie lub eksperymentalnie wartość zwana jest poprawką. Dodanie po-

prawki do surowego wyniku pomiaru eliminuje odpowiednią część błędu systematycznego, dając tzw. *skorygowany wynik pomiaru*. Informacje podawane przez producenta umożliwiają obliczenie błędu granicznego Δ_{gr} dla znamionowych warunków pracy przyrządu pomiarowego, a następnie wyznaczenie granic przedziału obejmującego błędy systematyczne, w którym mieści się wartość prawdziwa

$$y_0 \in \langle y - \Delta_{gr}y, y + \Delta_{gr}y \rangle. \quad (101)$$

Inny charakter mają *błędy przypadkowe*, które w kolejnych pomiarach są nieprzewidywalne co do wartości bezwzględnej i znaku, pomimo niezmiennych y_0 i w , zastosowania tego samego przyrządu i metody pomiarowej. W celu oszacowania błędów przypadkowych przeprowadza się serię pomiarów, a następnie stosuje aparat statystyki matematycznej, traktując wyniki jako realizacje zmiennych losowych. Podstawowymi parametrami charakteryzującymi y_0 i błąd przypadkowy są wtedy wartość średnia, odchylenie standardowe oraz odchylenie standardowe wartości średniej. Na podstawie skończonej liczby pomiarów można obliczyć ich estymaty \bar{y} , $\hat{\sigma}_y$ i $\hat{\sigma}_{\bar{y}}$, zgodnie ze wzorami:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad (102)$$

$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}, \quad (103)$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{y}} = \frac{\hat{\sigma}_y}{N} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}, \quad (104)$$

gdzie y_i oznacza i -ty wynik w serii pomiarów, a N jest liczbą pomiarów. Tym razem nie można jednak podać granic przedziału, w którym z pewnością mieści się wartość prawdziwa. Pozostaje określić przedział, w którym y_0 leży z prawdopodobieństwem P

$$P\{\bar{y} - t_{\alpha, N-1} \hat{\sigma}_{\bar{y}} \leq y_0 \leq \bar{y} + t_{\alpha, N-1} \hat{\sigma}_{\bar{y}}\} = 1 - \alpha, \quad (105)$$

gdzie α oznacza arbitralnie wybrany poziom istotności, a $t_{\alpha, N-1}$ jest współczynnikiem rozkładu zmiennej losowej opisującej błędy przypadkowe.

Błędy systematyczne i przypadkowe występują łącznie i nakładają się. Jeżeli wartość jednej ze składowych nie jest pomijalnie mała w porównaniu ze składową drugą, obie muszą być uwzględnione podczas analizy dokładności pomiaru. Ujednolicone podejście do tego problemu zaproponowały międzynarodowe organizacje pomiarowe i normalizacyjne, wydając stosowny dokument [22]. Zgodnie z tymi zaleceniami wraz z wynikiem pomiaru należy podawać związany z nim parametr, zwany *niepewnością*

pomiaru. Niepewność charakteryzuje rozrzut wartości, który można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej. Podzielone zostały one na niepewność typu A i B . Pierwsza z nich, u_A obliczana jest za pomocą statystycznej analizy serii pomiarów, a druga, u_B , innymi metodami [22]. Szczególnie $\sigma_{\bar{x}}$ wyznaczone z serii równoważne jest niepewności standardowej (typ A), a przypisanie rozkładu jednostajnego wartościom w przedziale granicznym umożliwia określenie niepewności pomiaru typu B równej $\Delta_{gr}/\sqrt{3}$ [80]. Niepewność łączna

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (106)$$

pozwała na wyznaczenie niepewności rozszerzonej – wielkości określającej przedział wokół wyniku pomiaru obejmujący dużą część rozkładu wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzonej [22], [80]. Aby obliczyć szerokość tego przedziału, należy u przemnożyć przez pewien współczynnik liczbowy, zwany współczynnikiem rozszerzenia k . Znając konkretne rozkłady prawdopodobieństwa niepewności typu A i B , można powiązać wyznaczony przedział niepewności rozszerzonej z zadaniem poziomem istotności α , takim że

$$P\{y - k_\alpha u \leq y_0 \leq y + k_\alpha u\} = 1 - \alpha. \quad (107)$$

W podanym przypadku współczynnik rozszerzenia powinien przyjmować wartości zmiennej standaryzowanej rozkładu będącego splotem wymienionych rozkładów. Zazwyczaj jego wyznaczenie jest skomplikowane, co powoduje, że często stosuje się w tym celu metody uproszczone [80].

5.2. ŹRÓDŁA BŁĘDÓW POMIARÓW POŚREDNICH

Ponieważ typowym sposobem prowadzenia pośrednich pomiarów złożonych jest estymacja parametrów modelu odwrotnego badanego obiektu lub zjawiska, do oceny dokładności tak realizowanych pomiarów stosuje się metody znane z teorii estymacji. Wcześniej opisano źródła błędów systematycznych i losowych towarzyszących prostym pomiarom pośrednim, tj. błędy pomiarów bezpośrednich i niedokładność modelu, muszą one zatem pojawić się także podczas estymacji parametrów. W tym przypadku wymienione źródła błędów systematycznych wpłyną na obciążenie estymatora, a błędy losowe na jego wariancję (odchylenie standardowe).

Dodatkowo należy zauważyć, że zastosowanie metod estymacji zakładających bezbłędną znajomość wejścia modelu również może zaowocować obciążeniem estymatorów. Dzieje się tak, gdy w obliczeniach wykorzystane są dane pochodzące z pomiaru sygnału pobudzającego badany obiekt. Podobny efekt wniosą metody zakładające addytywność szumu i wyjścia modelu jako jedyne źródło zakłóceń obecnych

w mierzonym sygnale wyjściowym, gdy tymczasem zakłócenia losowe rozprzestrzeniają się w obiekcie nieliniowym w inny sposób.

W pomiarach złożonych dochodzi jeszcze jeden czynnik wpływający na ich dokładność, a mianowicie metoda estymacji realizowana przez algorytm numeryczny. Jako przykład można przytoczyć omówioną regularyzację estymacji, będącą powodem dodatkowego obciążenia estymatora. Ponadto wymienić należy szereg problemów związanych z estymacją parametrów modeli nieliniowych. Po pierwsze, otrzymywany wynik obliczeń iteracyjnych w mniejszym lub większym stopniu zależy od wybranego wektora startowego. Przekonać się o tym można, stosując podczas estymacji różne (losowo wybrane) wektory startowe w stosunku do tego samego zestawu danych pomiarowych. Wtedy za każdym razem otrzyma się inne oszacowanie wektora parametrów oscylujące wokół pewnej wartości średniej i wykazujące charakter losowy. Bardziej złożona jest sytuacja wtedy, gdy w przestrzeni parametrów istnieją minima lokalne funkcji kryterialnej. Okazuje się, że wektory startowe leżące w niektórych obszarach prowadzą do znalezienia parametrów charakteryzujących takie właśnie minimum, a tym samym powstają dodatkowe, znaczne błędy systematyczne. Po drugie, wynik obliczeń iteracyjnych zależy także od przyjętego w algorytmie kryterium ich zakończenia. Typowo estymację kończy się przy nieistotnych zmianach wartości funkcji kryterialnej [66], co świadczy jedynie o lokalnej „płaskości” przeszukiwanej przestrzeni. Gdy jest ona istotnie „płaska”, algorytm może zatrzymać się jednak z dala od rzeczywistego minimum, indukując znaczny błąd estymatora. Zmniejszanie się błędu systematycznego wraz z kolejnymi iteracjami pokazano m.in. w pracy autora [59]. Należy pamiętać też o tym, że zbyt duży krok algorytmu iteracyjnego może prowadzić do „przeskakiwania” kolejnych oszacowań estymatora nad wartością minimalną, wnosząc dodatkowe błędy losowe. Wynika z tego, że zastosowany algorytm numeryczny estymacji parametrów modelu nieliniowego wprowadza zarówno błędy systematyczne, jak i losowe.

Podsumowując, na niepewność pomiarów pośrednich złożonych składają się zarówno czynniki systematyczne, jak i losowe. Do najważniejszych czynników systematycznych należy zaliczyć:

- błędy systematyczne pomiarów bezpośrednich,
- niektóre przypadki propagacji błędów losowych (o charakterze stacjonarnym) pomiarów bezpośrednich,
- niedokładność modelu odwrotnego związaną z jego uproszczoną postacią,
- kształt funkcji kryterialnej w przestrzeni parametrów, zwłaszcza obecność minimów lokalnych i płaszczyzn wokół minimów,
- regularyzację estymacji.

Czynnikami losowymi, mającymi wkład w niepewność złożonego pomiaru pośredniego, są:

- szum pomiarowy (przekładający się na wariancję estymatorów, jak również mogący być źródłem ich obciążenia),

- zakłócenia losowe propagujące w badanym obiekcie,
- parametry algorytmu estymacji (np. dobór wektora startowego, długość kroku obliczeń iteracyjnych).

Z poprzednich rozważań wynika, że ocena dokładności pośrednich pomiarów złożonych musi być wykonywana indywidualnie dla danego zadania pomiarowego. Można w tym celu posłużyć się m.in. metodą wielokrotnych pomiarów lub symulacji numerycznych, uwzględniających łącznie wszystkie czynniki [20].

5.3. ANALIZA DOKŁADNOŚCI POMIARÓW POŚREDNICH

O dokładności pomiarów pośrednich decydują dwa czynniki: dokładność wykonanych pomiarów bezpośrednich i dokładność wykorzystanego równania matematycznego.

Z wcześniej przedstawionych rozważań wynika, że na niedokładność pomiarów pośrednich złożonych składają się zarówno czynniki systematyczne, wyrażone za pomocą obciążenia estymatorów parametrów, jak również czynniki losowe determinujące ich wariancje (a w niektórych sytuacjach także obciążenie). Naturalnym zatem podejściem jest uogólniony sposób wyrażenia niedokładności pomiaru uwzględniający obie składowe. Tradycyjnie rolę taką pełni błąd średniokwadratowy estymacji zdefiniowany jako wartość oczekiwana kwadratu odległości między wektorem estymat parametrów i ich wartościami prawdziwymi w L^2 [20], [31], [46]

$$D_{MSE} = E \|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\|_2^2 = \text{tr} \mathbf{S}_\theta + \mathbf{b}_\theta^T \mathbf{b}_\theta. \quad (108)$$

Alternatywnym podejściem jest obliczenie błędu standardowego estymacji (wartość oczekiwana odległości między $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ i $\boldsymbol{\theta}_0$ w L^2) unormowanego przez liczbę estymowanych parametrów

$$D_{SE} = \sqrt{p^{-1} D_{MSE}} = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (\sigma_\theta^2(i) + b_\theta^2(i))}. \quad (109)$$

W przypadku estymacji pojedynczego parametru tak zdefiniowany błąd standardowy jest równoważny niepewności łącznej.

5.3.1. PROPAGACJA BŁĘDÓW POMIARÓW BEZPOŚREDNICH

Przenoszenie się błędów pomiarów bezpośrednich na wynik pomiarów pośrednich określa się mianem *propagacji błędów*. Prawo propagacji błędów formuluje się w postaci matematycznej zarówno dla błędów systematycznych, jak i przypadkowych. W pierwszym przypadku funkcję h_m (równ. (2)) rozwija się w szereg Taylora i pomija wszystkie wyrazy rzędu większego niż pierwszy, co daje [32]

$$\Delta_s \theta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_m}{\partial y_i} \Delta_s y_i . \quad (110)$$

W przypadku drugim, zakładając niezależność wielkości mierzonych bezpośrednio, wartość błędu przypadkowego pomiaru pośredniego oblicza się zgodnie z prawem Gaussa kwadratowej propagacji błędów [32]

$$\Delta_r \theta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h_m}{\partial y_i} \Delta_r y_i \right)^2} . \quad (111)$$

Analizując w pomiarach pośrednich propagację odchyłeń standardowych, niepewności typu *A* i *B*, niepewności łącznej i niepewności rozszerzonej postępuje się analogicznie do przypadku błędów przypadkowych [22], [23].

5.3.2. MIARA BŁĘDÓW LOSOWYCH

Podstawową miarą błędu losowego pomiaru pośredniego, polegającego na estymacji parametrów modelu odwrotnego, jest odchylenie standardowe estymatorów, równoważne zalecanej przez organizacje międzynarodowe niepewności standardowej typu *A*. W poprzednich podrozdziałach przedstawiono zależności pozwalające obliczyć lub oszacować macierze kowariancji estymatorów dla metod liniowych, nieliniowych i w przypadku estymacji zregulowanej. Tym samym umożliwiają one wyznaczenie odchyłeń standardowych jako pierwiastków z wariancji znajdujących się na diagonalnych tych macierzy.

5.3.3. ANALIZA BŁĘDU NIEDOKŁADNOŚCI MODELU ODWROTNEGO

Typowym sposobem oceny błędu pomiarów pośrednich wnoszonego przez model matematyczny jest uwzględnienie w analizie pomiaru (jeżeli istnieje taka możliwość) modelu dokładniejszego. W prostych przypadkach, gdy równania modelowe są liniowe i nieskomplikowane, można wyprowadzić ogólną formułę uzależniającą wartość błędu modelu od właściwości badanego obiektu i użytej aparatury. Błąd taki ma charakter systematyczny i może być wyeliminowany z wyniku pomiaru pośredniego przez wprowadzenie poprawki.

W przypadku pomiarów pośrednich złożonych, polegających na estymacji parametrów modelu odwrotnego, błąd systematyczny określony jest przez obciążenie estymatorów. Również i w tym przypadku można podjąć się próby jego wyznaczenia. Jest to możliwe, jeżeli obydwa modele są wystarczająco proste, przede wszystkim wtedy, gdy modele odwrotne i dokładny są liniowe.

Zazwyczaj jednak wówczas, gdy oba modele są bardziej złożone i nieliniowe, nie da się wyrazić poprawki zależnością analityczną – można ją jedynie opisać symbo-

licznie. W tym celu założmy, że poza identyfikowalnym modelem odwrotnym g_m dostępny jest także model dokładny g_d o parametrach θ_d , taki że

$$\mathbf{y} = g_0(\mathbf{u}, \theta_0) + \mathbf{e} \approx g_d(\mathbf{u}, \theta_d) + \mathbf{e}. \quad (112)$$

Rolę modelu dokładnego może pełnić symulacyjny model kompleksowy. Wynik pomiaru pośredniego formalnie można zapisać następująco:

$$\hat{\theta} = g_m^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{y}). \quad (113)$$

Charakteryzuje się on zarówno błędem losowym $\Delta_r \hat{\theta}$ (scharakteryzowanym przez macierz kowariancji \mathbf{S}_θ), jak i systematycznym (określonym przez obciążenie estymatora \mathbf{b}_θ).

Wykorzystując wprowadzone oznaczenia, wartość oczekiwaną estymatora da się również przedstawić następująco:

$$\theta_* = E\{g_m^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{y})\} \approx E\{g_m^{-1}(\mathbf{u}, g_d(\mathbf{u}, \theta_d) + \mathbf{e})\}. \quad (114)$$

Istnieje zatem pewne odwzorowanie $f_p : \theta_d \rightarrow \theta_*$

$$\theta_* = f_p(g_m, g_d, \theta_d, \mathbf{u}). \quad (115)$$

W istocie, w przypadku prostych modeli, jest ono wykorzystywane w postaci jawnej w celu wyprowadzenia wzoru na poprawkę. Ogólnie jednak nie jest znana postać analityczna odwzorowania. Może ono być nieliniowe i nie musi być jednoznaczne, tym bardziej wzajemnie jednoznaczne. Najczęściej nie są również znane prawdziwe wartości parametrów modelu dokładnego θ_d , opisującego dany obiekt. Gdyby jednak dało się je znaleźć i spełniony byłby drugi z warunków, to

$$\theta_d = f_p^{-1}(g_m, g_d, \theta_*, \mathbf{u}). \quad (116)$$

Zdefiniujmy teraz obciążenie estymatora $\hat{\theta}$ względem parametrów modelu dokładnego, a ściślej biorąc, względem ich odwzorowania $\tilde{\theta}_d = f_r(\theta_d)$, wynikającego ze zredukowanej postaci modelu odwrotnego względem dokładnego:

$$\mathbf{b}_d = E(\hat{\theta} - \tilde{\theta}_d) = E\hat{\theta} - \tilde{\theta}_d = \theta_* - \tilde{\theta}_d. \quad (117)$$

Korzystając z podanych wzorów, obciążenie estymatora można przedstawić jako następującą ogólną zależność:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_d &= f_b(\theta_*, \tilde{\theta}_d) = f_b(f_r, \theta_*, \theta_d) = \\ &= f_b(g_m, g_d, f_p, f_r, \theta_*, \mathbf{u}) = \\ &= f_b(g_m, g_d, f_p, f_r, \hat{\theta}, \Delta_r \hat{\theta}, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (118)$$

Ostatecznie widoczna jest jego zależność od wyznaczonego wektora estymat, który jest „surowym” wynikiem pomiaru pośredniego. Niestety, założenie o odwracalności odwzorowania f_p zazwyczaj nie jest spełnione. Można jednak szukać pewnego przybliżenia \tilde{f}_b tej zależności, gdyż znane są wszystkie jej argumenty, poza $\Delta_r \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Podejście takie umożliwia oszacowanie obciążenia $\tilde{\mathbf{b}}_d \approx \mathbf{b}_d$ i ostatecznie redukcję błędu systematycznego estymacji przez wprowadzenie poprawki $\mathbf{p}_d = -\tilde{\mathbf{b}}_d$. Korekcja wyniku estymacji daje wtedy:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{p}_d \approx (\boldsymbol{\theta}_* + \Delta_r \hat{\boldsymbol{\theta}}) - (\boldsymbol{\theta}_* - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_d) = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_d + \Delta_r \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (119)$$

Z równania wynika, że wprowadzona poprawka zmniejsza obciążenie estymatora, lecz jego wariancja pozostanie na podobnym poziomie. Przybliżenia odwzorowania $f_b : \hat{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow \mathbf{b}_d$ można poszukiwać złożonymi metodami nieliniowymi. Bardzo dobrze do tego celu nadają się sztuczne sieci neuronowe, które stanowią efektywną realizację nieliniowych modeli typu czarna skrzynka [65].

5.3.4. WYKORZYSTANIE METOD STATYSTYCZNYCH

Metoda walidacji wzajemnej

Metoda walidacji wzajemnej (CSV) umożliwia oszacowanie odchylenia standardowe estymatorów na podstawie jednego zbioru danych empirycznych [21], [76]. Zbiór danych dzielony jest na wiele grup (najczęściej nowa grupa tworzona jest przez wykluczanie kolejnej danej pomiarowej – każda z danych jest wykluczana tylko jeden raz) i w kolejnych krokach model odwrotny jest dopasowywany do tak zredukowanych danych. Za każdym razem obliczane są nowe estymaty parametrów modelu. Ostatecznie na ich podstawie oszacowuje się wartość oczekiwaną (średnią) estymatora oraz jego odchylenie standardowe.

W przypadku zagadnień o dużej liczbie danych i dużej złożoności obliczeniowej CSV jest zbyt czasochłonna. Można wtedy dane podzielić na dwie części, pierwsza służy do estymacji, a druga do testowania jej wyników przez porównanie predykcji modelu z danymi z drugiego zbioru. W ten sposób zbiór testowy nie jest nigdy uwzględniany w estymacji i służy jedynie do określenia optymalnego rzędu modelu.

Metodę walidacji wzajemnej można też stosować np. do oszacowania optymalnej wartości współczynnika regularyzacji, selekcji zmiennych w regresji wielowymiarowej, selekcji współczynnika wygładzania w aproksymacji funkcjami sklejanymi, selekcji optymalnej liczby składników w analizie składników głównych (PCA), czy podczas testowania hipotez w metodzie częściowych najmniejszych kwadratów (PLS) [87]. Metoda uogólnionej walidacji wzajemnej opisana jest szerzej w [24].

Metoda Monte Carlo

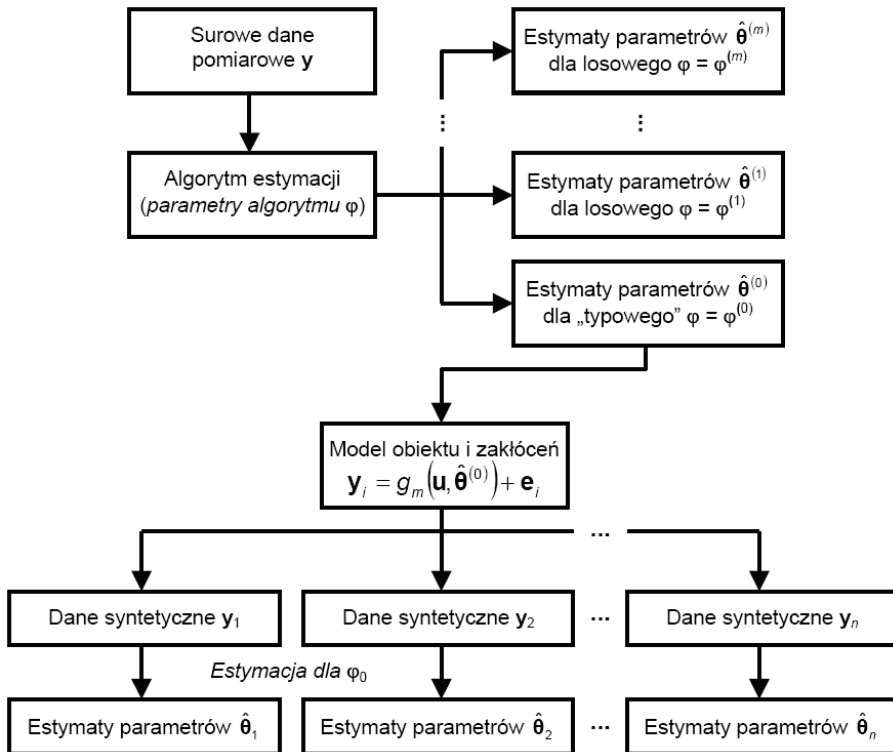
Metoda Monte Carlo zaproponowana przez Stanisława Ulama i rozwinięta później przez von Neumanna bazuje na symulacjach statystycznych, wykorzystujących komputerowe implementacje modeli probabilistycznych (są nimi generatory liczb pseudolosowych i losowych o zadanym rozkładzie). W trakcie symulacji generowana jest pewna realizacja badanej zmiennej losowej w celu oszacowania parametrów jej rozkładu.

Dane empiryczne zarejestrowane w trakcie pomiarów bezpośrednich można potraktować jako wyjście prawdziwego modelu obiektu z prawdziwymi wartościami parametrów θ_0 , podlegającego jednak wraz z przyrządem pomiarowym losowym oddziaływaniom zakłócającym. Eksperymentatorowi nie jest znany ani ten model, ani wartości jego parametrów, ani opis statystyczny zakłóceń. Natomiast efektem zakłóceń jest to, iż dane pomiarowe uzyskiwane w kolejnych, identycznych eksperymentach, nie byłyby takie same. Wyznaczane na ich podstawie estymaty parametrów modelu odwrotnego różniłyby się zatem między sobą. Umożliwiłyby to oszacowanie wyniku pomiaru jako wartości średniej z estymat i analogicznie obliczenie ich odchylenia standardowego. Zazwyczaj jednak jedynymi dostępnymi elementami są dane pomiarowe y uzyskane w pojedynczym eksperymencie, kompleksowy model przyczynowy uwzględniający posiadaną wiedzę o obiekcie oraz model odwrotny wraz z bazującym na nim algorytmem estymacji charakteryzującym się własnymi parametrami φ . Efektem estymacji prowadzonej najczęściej z typowymi wartościami parametrów algorytmu $\varphi = \varphi^{(0)}$ jest jeden wektor estymat parametrów modelu odwrotnego $\hat{\theta}^{(0)}$. Nasuwa się pytanie, jak bardzo $\hat{\theta}^{(0)}$ różni się od prawdziwych wartości parametrów i jaki charakter ma ta różnica. Można na nie odpowiedzieć, unikając obliczeń analitycznych i przybliżeń liniowych, w zamian stosując metodę Monte Carlo.

W omawianym zastosowaniu metoda Monte Carlo umożliwia ocenę niedokładności estymacji wynikającej z zakłóceń losowych obecnych w danych pomiarowych y i właściwości modelu odwrotnego, analizę wpływu parametrów algorytmu φ na wynik estymacji, pozwala także wyznaczyć granice obszaru ufności, wykorzystując jedynie dane pomiarowe pochodzące zarówno z jednego eksperymentu, jak i uzyskany na ich podstawie wektor estymat $\hat{\theta}^{(0)}$.

W szacowaniu dokładności estymacji wynikającej z zakłóceń losowych zakłada się, że kształt rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\hat{\theta} - \hat{\theta}^{(0)}$ jest w przybliżeniu taki sam jak rozkład $\hat{\theta} - \theta_0$ (co oczywiście nie oznacza równości między $\hat{\theta}^{(0)}$ i θ_0) [66]. Rozkład $\hat{\theta} - \hat{\theta}^{(0)}$ można oszacować symulacyjnie (rys. 8.). W tym celu wykorzystuje się model badanego obiektu i założony model zakłóceń (najczęściej jest to addytywny szum biały) w celu generacji n zbiorów danych syntetycznych. Modelem symulacyjnym może być kompleksowy model przyczynowy lub, jeżeli jest to niemożliwe – używany w estymacji model odwrotny. Symulacje prowadzone są dla

ustalonego wektora parametrów $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$, lecz za każdym razem uwzględnia się nową realizację zakłóceń losowych. Uzyskane w ten sposób dane syntetyczne wykorzystywane są następnie do estymacji wektorów $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_n$, używając dokładnie tego samego algorytmu z takimi samymi parametrami $\boldsymbol{\varphi}^{(0)}$ jak przy estymacji $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$. Ostatni etap polega na wyznaczeniu wartości oczekiwanej estymat $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\boldsymbol{\theta}}_i$, ewentualnego ich obciążenia $\hat{\mathbf{b}} = \bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$ oraz odchylenia standardowego [66].



Rys. 8. Schematyczne przedstawienie zastosowania metody Monte Carlo do szacowania dokładności pośredniego pomiaru złożonego

Fig. 8. Schematic presentation of the use of the Monte Carlo method in the assessment of indirect measurement accuracy

Analogicznie postępuje się, badając wpływ parametrów algorytmu estymacji $\boldsymbol{\varphi}$ na jej wynik (rys. 8.). W estymacji nieliniowej do zbioru tych parametrów zaliczyć można m.in. wektor startowy, długość kroku w obliczeniach iteracyjnych, warunek zakończenia obliczeń czy też współczynniki regularyzacji. Podejście to pozwala np. zaobserwować poziom rozrzutu estymat wywołany losowym doбором wektora startowego.

Tym razem nie jest potrzebne stosowanie modelu symulacyjnego, gdyż wielokrotnie powtarzaną procedurą jest estymacja ze zmieniającymi się wartościami jej wybranego parametru (lub parametrów).

5.4. MINIMALIZACJA NIEPEWNOŚCI POMIARU NA ETAPIE PLANOWANIA EKSPERYMENTU

Dokładność pomiarów pośrednich realizowanych jako estymacja parametrów modelu odwrotnego zależy od postaci macierzy wrażliwości, a tym samym od wielu czynników, które ją determinują. Pomiarów bezpośrednich, których wyniki wykorzystywane są podczas estymacji, można zatem tak planować, aby minimalizować błąd pomiaru pośredniego. Pod pojęciem *planu eksperymentu* kryje się zestaw odpowiednio dobranych zmiennych eksperymentu. Należą do nich przede wszystkim:

- liczba i rodzaj wejść (sygnałów pobudzających badany obiekt),
- liczba i rodzaj wyjść (mierzonych sygnałów związanych z reakcją obiektu na pobudzenie),
 - postać sygnałów pobudzających,
 - czas trwania pobudzenia,
 - czas trwania eksperymentu,
 - liczba pomiarów sygnałów wyjściowych w czasie eksperymentu,
 - schemat próbkowania (częstotliwość próbkowania równomiernego lub chwile próbkowania nierównomiernego),
 - dokładność pomiarów związana z dokładnością użytych mierników.

Planowanie eksperymentu można podzielić na dwa zagadnienia: planowanie jakościowe i planowanie ilościowe. *Jakościowe planowanie eksperymentu* polega na takim wyborze wielkości wejściowych i wyjściowych, aby jak największa liczba interesujących parametrów była globalnie identyfikowalna lub przynajmniej identyfikowalna lokalnie [86]. W tym celu, w przypadku modeli LP wystarczająca jest znajomość struktury modelu, natomiast dla modeli NLP konieczna jest także znajomość typowych wartości parametrów. Ponieważ przy braku pobudzeń zewnętrznych obiekty dynamiczne pozostają w stanie ustalonym (stałym lub cyklicznym), na etapie planowania jakościowego należy wyznaczyć warunki, które musi spełniać wejście, aby można było dokonać estymacji parametrów. Jednocześnie zwiększenie liczby pobudzeń polepsza dokładność estymacji (w sensie wariancji) wszystkich parametrów modelu.

Celem *planowania ilościowego* jest takie przeprowadzenie eksperymentu, które zminimalizuje wariancje estymatorów parametrów (lub koszty pomiarów). Procedura postępowania obejmuje następujące punkty:

- sformułowanie wstępnej hipotezy dotyczącej struktury modelu i wartości parametrów,
- znalezienie macierzy kowariancji wektora parametrów S_{θ} ,

- określenie odpowiedniego kryterium Φ w celu minimalizacji wariancji parametrów,

- wybór metody minimalizacji określonego kryterium.

Uzyskane minimum określa warunki konieczne do przeprowadzenia eksperymentu optymalnego [6].

Niepewność estymatorów scharakteryzowana jest przez macierz informacyjną Fishera \mathbf{J}_F :

$$\mathbf{J}_F(\boldsymbol{\theta}) = E \left\{ \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \right\}, \quad (120)$$

gdzie L jest funkcją wiarygodności, tj. prawdopodobieństwem tego, że dane pomiarowe stosowane podczas estymacji pochodzą z obiektu o parametrach $\boldsymbol{\theta}$, dlatego też często wybierane jest kryterium o ogólnej postaci

$$\begin{cases} \Phi_k(\mathbf{J}_F) = [P^{-1} \text{trace}(\mathbf{M}\mathbf{J}_F^{-1}\mathbf{M}^T)]^{1/k}, & \det(\mathbf{J}_F) \neq 0, \\ \Phi_k(\mathbf{J}_F) = \infty, & \det(\mathbf{J}_F) = 0, \end{cases} \quad (121)$$

gdzie \mathbf{M} jest nieosobliwą macierzą dodatnio półokreśloną [86]. W przypadku skorelowanych zakóceń o rozkładzie normalnym (\mathbf{R} – macierz ich korelacji)

$$\mathbf{J}_F(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}), \quad (122)$$

a dla nieskorelowanego szumu białego

$$\mathbf{J}_F(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}). \quad (123)$$

Przedstawiona klasa miar pozwala zdefiniować podstawowe rodzaje optymalności eksperymentu.

Eksperyment D -optymalny uzyskiwany jest dla $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ i $k = 0$, co daje kryterium:

$$\Phi(\mathbf{J}_F) = [\det(\mathbf{J}_F)]^{-1}. \quad (124)$$

Poszukiwanie eksperymentu optymalnego polega w tym przypadku zatem na maksymalizacji wyznacznika macierzy informacyjnej Fishera. Dużą popularność tego podejścia wynika z jego interpretacji geometrycznej: obszar ufności estymatora łącznej wektora estymatorów jest hiperelipsoidą, a eksperyment D -optymalny minimalizuje jej objętość. Dodatkowo jest on niezmienniczy względem dowolnej, niezdegenerowanej transformacji wektora parametrów.

Kolejna grupa to liniowe kryteria L -optymalne (\mathbf{M} – macierz wag, $k = 1$), z wagami określającymi „ważność” poszczególnych parametrów. Szczególnymi przypadkami jest A -optymalność ($\mathbf{M} = \mathbf{I}$), która prowadzi do eksperymentu minimalizującego sumę wariancji estymatora parametrów i popularniejsza od niej C -optymalność

($\mathbf{M} = \text{diag}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$, $k = 1$)), związana ze względną dokładnością estymatorów (niezależna od wyboru skali parametrów).

6. PODSUMOWANIE

Wśród podstawowych aspektów badań obiektów złożonych główną rolę odgrywają pomiary pośrednie. Ich nieodzownym elementem jest zastosowanie modeli matematycznych. Dynamicznie rozwijające się techniki modelowania i algorytmizacji zagadnień matematycznych wnoszą do tych badań nową jakość. Dostarczają one odpowiednich narzędzi do opracowywania, implementacji i walidacji zarówno kompleksowych modeli symulacyjnych obiektów złożonych, jak i prostszych, identyfikowalnych modeli odwrotnych.

Komputerowe implementacje modeli kompleksowych charakteryzują się dużym potencjałem poznawczym. Okazuje się bowiem, iż złożoność wielu obiektów rzeczywistych, przejawiająca się w dużej liczbie elementów składowych, nieliniowościach zachodzących zjawisk i wielościach współoddziaływań, uniemożliwia poznanie i zrozumienie wielu przejawów ich funkcjonowania metodami tradycyjnymi. W tej sytuacji z pomocą przechodzą symulacje komputerowe, które nie tylko pozwalają przewidzieć (obliczyć) zachowanie się całego obiektu w analizowanej sytuacji, ale też „dotrzeć” do interesujących aspektów procesów wewnętrznych i je badać. Podczas symulacji można bowiem wyeliminować efekty drugiego rzędu, pozbyć się zakłóceń oraz wykorzystać dostęp do wszystkich pobudzeń i zmiennych.

Dzięki modelom odwrotnym, na podstawie pomiarów łatwo dostępnych sygnałów związanych z działaniem obiektu, można wnioskować jednocześnie ilościowo o wielu wielkościach bezpośrednio niedostępnych dla przyrządów pomiarowych. Takie podejście ma ogromne znaczenie w wielu dziedzinach działalności człowieka.

Pomiary pośrednie wykorzystujące techniki modelowania osiągnęły swój obecny poziom przede wszystkim dzięki rozwojowi szeroko rozumianej elektroniki, począwszy od opracowania czujników umożliwiających elektroniczną rejestrację wielkości nieelektrycznych, przez złożone układy elektroniczne pobudzające obiekt badany i przetwarzające wstępnie sygnał pomiarowy, aż do zaawansowanych procedur numerycznej analizy danych. Zasadniczą rolę odgrywają tu urządzenia mikroprocesorowe, zdolne do efektywnego wykonywania bardzo skomplikowanych operacji obliczeniowych.

Niniejsze opracowanie prezentuje zagadnienia dotyczące sposobów opracowywania modeli matematycznych obiektów złożonych, ich walidacji, implementacji komputerowych, weryfikacji utworzonych algorytmów, prowadzenia badań symulacyjnych, przekształcania modeli kompleksowych w modele odwrotne, wykorzystania modeli odwrotnych w pomiarach pośrednich, poprawiania uwarunkowania numerycz-

nego algorytmów obliczeniowych i oceny dokładności takich pomiarów. Ujęto w ten sposób kompletny łańcuch czynności związanych z wykorzystaniem technik modelowania matematycznego w pośrednich pomiarach właściwości obiektów złożonych.

LITERATURA

- [1] AKAIKE H., *A new look at the statistical model identification*, IEEE Trans. Automat. Contr., 1974, 19, 716–723.
- [2] AVANZOLINI G., BARBINI P., *Influence of experimental conditions on parameter estimation for breathing mechanics: a sensitivity analysis approach*, Med. Biol. Eng. Comput., 1987, 25, 305–310.
- [3] AVANZOLINI G., BARBINI P., CAPPELLO A., CEVENINI G., *Influence of flow pattern on the parameter estimates of a simple breathing mechanics model*, IEEE Trans. Biomed. Eng., 1995, 42, 394–402.
- [4] BARD Y., *Nonlinear Parameter Estimation*. New York, Academic Press, 1974.
- [5] BAKUSHINSKII A.B., *The problem of the convergence of the iteratively regularized Gauss – Newton method*, Comput. Math. Phys., 1992, 32, 1353–1359.
- [6] BECK J.W., ARNOLD J.K., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, New York, John Wiley, 1977.
- [7] BRANDT S., *Analiza danych*, Warszawa, PWN, 1998.
- [8] CARSON E., COBELLI C., *Modelling Methodology for Physiology and Medicine*, San Diego, Academic Press, 2001.
- [9] CELLIER F.E., *Continuous System Modeling*, New York, Springer–Verlag, 1991.
- [10] CHAPPELL M.J., GODFREY K.R., *Structural identifiability of the parameters of a nonlinear batch reactor model*, Math. Biosci., 1992, 108, 241–251.
- [11] CHWALEBA A., PONIŃSKI M., SIEDLECKI A., *Metrologia elektryczna*, Warszawa, WNT, 2000.
- [12] COBELLI C., DISTEFANO III J.J., *Parameter and structural identifiability concepts and ambiguities: a critical review and analysis*, Am. J. Physiol., 1980, 239, 7–24.
- [13] CRUTCHFIELD J.P., MCNAMARA B.S., *Equations of motion from a data series*, Complex Syst., 1987, 1, 417–452.
- [14] DESCARTES R., *Rozprawa o metodzie właściwego kierowania rozumem i poszukiwania prawdy w naukach*, Kraków, Wydawnictwo Zielona Sowa, 2002.
- [15] DENNIS J., SCHNABEL R., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Englewood Cliffs, Prentice–Hall, 1983.
- [16] DÖTSCH H.G.M., VAN DEN HOF P.M.J., *Test for local structural identifiability of high–order non-linear parametrized state space models*, Automatica, 1996, 32, 875–883.
- [17] DUNCAN D.B., HORN S.D., *Linear dynamic recursive estimation from the viewpoint of regression analysis*, J. Amer. Statist. Assoc., 1972, 67, 815–821.
- [18] EMERY A.F., NENAROKOMOV A.V., *Optimal experiment design*, Meas. Sci. Technol., 1998, 9, 864–876.
- [19] EYKHOFF P., *Identyfikacja w układach dynamicznych*, Warszawa, PWN, 1980.
- [20] GAJDA J., SZYPER M., *Modelowanie i badania symulacyjne systemów pomiarowych*, Kraków, Firma Jartek s.c., 1998.
- [21] GEISSER S., *A predictive approach to the random effect model*, Biometrika, 1974, 61, 101–107.
- [22] GŁÓWNY URZĄD MIAR: *Wyrażanie niepewności pomiaru*, Przewodnik. Warszawa, 1999.
- [23] GOLDBERG D.E., *Algorytmy genetyczne i ich zastosowania*, Warszawa, WNT, 1995.
- [24] GOLUB G.H., HEATH M., WAHBA H., *Generalized cross validation as a method for choosing a good ridge parameter*, Technometrics, 1979, 21, 215–224.

- [25] GOODSTEIN D.L., GOODSTEIN J.R., *Zaginiony wykład Feynmana*, Warszawa, Prószyński i S-ka, 1997.
- [26] GREBLICKI W., *Podstawy automatyki*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2006.
- [27] GUSZKOWSKI T., MROCZKA J., POLAK A.G., *Symulacja rozwiązania problemu odwrotnego w natężonym wydechu za pomocą algorytmu genetycznego*, Materiały VII Sympozjum „Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych”, Krynica, 23–26 września 1997, 29–36.
- [28] HELLER M., *Fizyka ruchu i czasoprzestrzeni*, Warszawa, PWN, 1993.
- [29] HOCKING R.R., *The analysis and selection of variables in linear regression*, Biometrics, 1976, 32, 1–49.
- [30] HOERL A.E., *Application of ridge analysis to regression problems*, Chem. Eng. Progress, 1962, 58, 54–59.
- [31] HOERL A.E., KENNARD R.W., *Ridge regression: biased estimation for non-orthogonal problems*, Technometrics, 1970, 12, 55–62.
- [32] HOFFMANN D., *Błędy pomiaru, prawdopodobieństwo i teoria informacji*. W: Podręcznik metrologii, Tom I: Podstawy teoretyczne, P.H. Sydenham (red.), Warszawa, WKiŁ, 1988.
- [33] JOHANSEN T.A., *On Tikhonov regularization, bias and variance in nonlinear system identification*, Automatica, 1997, 33, 441–446.
- [34] KALMAN R.E., *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Trans. ASME J. Basic Eng., 1960, 82, 35–45.
- [35] KASHYAP R.L., *A Bayesian comparison of different classes of dynamical models using empirical data*, IEEE Trans. Automat. Contr., 1977, 22, 715–727.
- [36] KENDALL M.G., *A Course in Multivariate Analysis*, New York, Hafner Publishing Co., 1957.
- [37] KIRKPATRICK S., GELATT C.D., VECCHI M.P., *Optimization by simulated annealing*, Science, 1983, 22, 671–680.
- [38] LANDWEBER L., *An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind*, Am. J. Math., 1951, 73, 615–624.
- [39] LEVENBERG K., *A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares*, Quart. Appl. Math., 1944, 2, 164–168.
- [40] LJUNG L., *System identification: Theory for the user*, Upper Saddle River, Prentice Hall, 1999.
- [41] LJUNG L., GLAD T., *Modeling of Dynamic Systems*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1994.
- [42] LJUNG L., GLAD T., *On global identifiability for arbitrary model parametrization*, Automatica, 1994, 30, 265–276.
- [43] LUTCHEN K.R., COSTA K.D., *Physiological interpretations based on lumped element models fit to respiratory impedance data: use of forward-inverse modeling*, IEEE Trans. Biomed. Eng., 1990, 37, 1076–1086.
- [44] LUTCHEN K.R., JACKSON A.C., *Statistical measures of parameter estimates from models fit to respiratory impedance data: Emphasis on joint variabilities*, IEEE Trans. Biomed. Eng., 1986, 33, 1000–1010.
- [45] MARQUARDT D.W., *An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters*, J. SIAM, 1963, 11, 431–441.
- [46] MARQUARDT D.W., *Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation and nonlinear estimation*, Technometrics, 1970, 12, 591–612.
- [47] MASSY W.F., *Principal components regression in exploratory statistical research*, J. Amer. Statist. Assoc., 1965, 60, 234–246.
- [48] MORAWSKI R.Z., SZCZECIŃSKI L., BARWICZ A., *Deconvolution algorithms for instrumental applications: a comparative study*, J. Chemometrics, 1995, 9, 3–20.

- [49] MROCZKA J., *Metrologiczne problemy wykorzystania światła rozproszonego do badań rozkładu wielkości cząstek w roztworach dyspersyjnych*, Metrologia i Systemy Pomiarowe. Monografia 4, Warszawa 1990.
- [50] MROCZKA J., *Metrologia w procesie poznania*, W: Współczesna metrologia – zagadnienia wybrane, J. Barzykowski (red.), Warszawa, WNT, 2004.
- [51] MROCZKA J., POLAK A.G., *Reduced model for forced expiration and analysis of its sensitivity*. In: Modelling and Control in Biomedical Systems 2006, D.D Feng, O Dubois., J. Zaytoon, E. Carson (eds), Oxford, Elsevier, 2006, 159–164.
- [52] MURRAY-SMITH D.J., *Continuous System Simulation*, London, Chapman & Hall, 1995.
- [53] NORTON J.P., *Investigation of the sources of nonuniqueness in deterministic identifiability*, Math. Biosci., 1982, 60, 89–108.
- [54] OSOWSKI St., *Sieci neuronowe w ujęciu algorytmicznym*, Warszawa, WNT, 1996.
- [55] PHILLIPS D.L., *A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind*, J. ACM, 1962, 9, 84–97.
- [56] PIOTROWSKI J., *Podstawy metrologii*, Warszawa, PWN, 1977.
- [57] POLAK A.G., *Pomiar parametrów systemów kompleksowych na przykładzie obiektów biologicznych*, Metrologia i Systemy Pomiarowe, 1992, 12, 35–42.
- [58] POLAK A.G., *Indirect measurements: combining parameter selection with ridge regression*, Meas. Sci. Technol., 2001, 12, 278–297.
- [59] POLAK A.G., ADAMUSIAK Ł., MROCZKA J., *Wpływ podatności dróg oddechowych na pomiar właściwości płuc techniką oscylacji wymuszonych*, Materiały VII Sympozjum „Modelowanie i Pomiary w Medycynie”, Krynica, 8–11 maja 2005, 49–54.
- [60] POLAK A.G., GRZEŚKOWIAK B., MROCZKA J., *Pomiar właściwości układu oddechowego podczas sztucznej wentylacji pacjenta z wykorzystaniem sieci neuronowych*, PAK, 2006, 5bis, 23–28.
- [61] POLAK A.G., JABŁOŃSKI I., MROCZKA J., *Redukcja modelu matematycznego układu oddechowego w czasie przerywania przepływu powietrza*, XI Krajowa Konferencja Naukowa „Biocybernetyka i Inżynieria Biomedyczna”, Warszawa, 2–4 grudnia 1999, 65–69.
- [62] POLAK A.G., MROCZKA J., *A metrological model for maximum expiration*, Measurement, 1998, 23, 265–270.
- [63] POLAK A.G., MROCZKA J., *Ocena dokładności zregulowanej identyfikacji modelu płuc w czasie natężonego wydechu*, PAK, 2000, 8, 23–27.
- [64] POLAK A.G., MROCZKA J., *Regularyzacja identyfikacji obiektów złożonych opisanych modelami nieliniowymi*, PAK, 2007, 53, 9bis, 190–193.
- [65] POLAK A.G., MROCZKA J., ZAPAŚNIK P., *Redukcja błędów systematycznych w pomiarach nieinwazyjnych z wykorzystaniem sztucznych sieci neuronowych*. XII Konferencja Naukowa „Biocybernetyka i Inżynieria Biomedyczna”, Warszawa, 28–30 listopada 2001, 789–793.
- [66] PRESS W.H., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., FLANNERY B.P., *Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing*, Cambridge, MA, Cambridge University Press, 1992.
- [67] RAFAJŁOWICZ E., *Algorytmy planowania eksperymentu*, Warszawa, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, 1996.
- [68] RAO C.R., *Modele liniowe statystyki matematycznej*, Warszawa, PWN, 1982.
- [69] RISSANEN J., *Estimation of structure by minimum description length*, Circ. Syst. Signal Process., 1982, 1, 395–406.
- [70] SEBER G.A.F., WILD C.J., *Nonlinear Regression*, New York, Wiley, 1989.
- [71] SCHERZER O., *A modified Landweber iteration for solving parameter estimation problems*, Appl. Math. Opt., 1998, 38, 45–68.
- [72] SCHWARZ G., *Estimating the dimension of a model*, Ann. Stat., 1978, 6, 461–464.

- [73] SJÖBERG J., ZHANG Q., LJUNG L., BENVENISTE A., DELYON B., GLORENNEC P.-Y., HJALMARSSON H., JUDITSKY A., *Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview*, Automatica, 1995, 31, 1691–1724.
- [74] SÖDERSTRÖM T., *Errors-in-variables methods in system identification*, Automatica, 2007, 43, 939–958.
- [75] SÖDERSTRÖM T., STOICA P., *Identyfikacja systemów*, Warszawa, PWN, 1997.
- [76] STONE M., *Cross-validatory choice of and assessment of statistical predictions*, J. Roy. Statist. Soc., 1974, 36, 111–133.
- [77] TADEUSIEWICZ R., *Sieci neuronowe*, Warszawa, Akademicka Oficyna Wydawnicza, 1993.
- [78] THOMASETH K., COBELLI C., *Generalized sensitivity functions in physiological system identification*, Ann. Biomed. Eng., 1999, 27, 607–616.
- [79] TIKHONOV A.N., ARSEININ V.Y., *Solutions of Ill-Posed Problems*, Washington D.C., Winston, 1977.
- [80] TURZENIECKA D., DOMAŃSKA A., *Dokładność oceny niepewności i dokładność systemów pomiarowych*. W: Współczesna metrologia – zagadnienia wybrane, J. Barzykowski (red.), Warszawa, WNT, 2004.
- [81] TWOMEY S., *On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature*, J. ACM, 1963, 10, 97–101.
- [82] VAN DEN BOS A., *Estymacja parametru*, W: Podręcznik metrologii, Tom I: Podstawy teoretyczne, P.H. Sydenham (red.), Warszawa, WKiŁ, 1988.
- [83] VENKATESH S.R., DAHLEH M.A., *On system identification of complex systems from finite data*, IEEE Trans. Automat. Contr., 2001, 46, 235–257.
- [84] WALTER E., *Identifiability of State Space Models*, Berlin, Springer-Verlag, 1982.
- [85] WALTER E., LECOURTIER Y., *Global approaches to identifiability testing for linear and nonlinear state space models*, Math. Comput. Simul., 1982, 24, 472–482.
- [86] WALTER E., PRONZATO L., *Qualitative and qualitative experiment design for phenomenological models – a survey*, Automatica, 1990, 26, 195–213.
- [87] WOLD S., RUHE A., WOLD H., DUNN W.J. III, *The collinearity problem in linear regression. The partial least squares (PLS) approach to generalized inverses*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1984, 5, 735–743.
- [88] YUAN H., SUKI B., LUTCHEN K.R., *Sensitivity analysis for evaluating nonlinear models of lung mechanics*, Ann. Biomed. Eng., 1998, 26, 230–241.
- [89] ZHANG W.-B., *Theory of complex systems and economic dynamics*, Nonlin. Dynam. Psych. Life Scien., 2002, 6, 83–101.

INDIRECT MEASUREMENTS OF COMPLEX OBJECT PROPERTIES

The study presents a complete sequence of activities connected with the use of mathematical modeling techniques in the indirect measurements of complex object properties. Presented issues include: methods for developing the mathematical models of complex objects, validation and computer implementation of the models, verification of numerical algorithms, performing simulation studies, transformation of the complex models into the inverse ones, using the inverse models in indirect measurements, improving the numerical conditioning of the algorithms, and accuracy assessment of such measurements.

Józef BORKOWSKI,
Janusz MROCZKA*

ESTYMACJA PARAMETRÓW SYGNAŁU WIELOCZĘSTOTLIWOŚCIOWEGO METODĄ LIDFT JAKO ROZWINIĘCIE CYFROWEGO PRZETWARZANIA SYGNAŁÓW W ANALIZIE FOURIEROWSKIEJ

Praca przedstawia metodę liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera (LIDFT), która pozwala na precyzyjną estymację amplitud, częstotliwości i faz składowych sinusoidalnych sygnału wieloczęstotliwościowego, tzn. będącego sumą wielu drgań sinusoidalnych. W części wstępnej przedstawiono w skrócie najważniejsze zagadnienia występujące w pomiarze widma sygnału w systemie DSP z wykorzystaniem transformaty Fouriera, okien danych i metod interpolacji uzyskanego widma. Szczegółowo przedstawiono wyprowadzenie metody LIDFT prowadzące do praktycznego algorytmu, analizę metrologiczną metody z wykorzystaniem dedykowanego linearyzującego okna danych i rozwinięcie metody pozwalające na jej stosowanie w połączeniu z klasycznymi oknami danych i techniką uzupełniania zerami, co prowadzi do zwiększenia dokładności estymacji parametrów sygnału.

1. KLASYCZNA ANALIZA FOURIEROWSKA W SYSTEMIE DSP

1.1. WPROWADZENIE

Współczesne aplikacje cyfrowego przetwarzania sygnałów (ang. *DSP – Digital Signal Processing*) bazują niejednokrotnie na coraz to nowszych transformacjach matematycznych. Mimo to zalety transformaty Fouriera są nadal aktualne, pomimo bogatej już jej historii – wspomnijmy może tylko początek wieku XVIII, w którym J. Fourier zaprezentował swoją wersję rozwinięcia funkcji okresowej (bogatszą notę historyczną dotyczącą transformaty Fouriera można znaleźć np. w [15]). Za [15] przytoczmy jeszcze stwierdzenie: „Można by twierdzić, że przekształcenie Fouriera jest najbardziej dominującym

* Katedra Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej, Politechnika Wroclawska.

i rozpowszechnionym mechanizmem matematycznym, dostępnym w celu analizy systemów fizycznych”. Wielu współczesnych fizyków zgodziłoby się zapewne z cytatem z Lorda Kelvina (za [15]), iż „twierdzenie Fouriera jest nie tylko jednym z najpiękniejszych wyników współczesnej analizy, ale można o nim powiedzieć, że dostarcza niezastąpionego instrumentu przy rozważaniu niemal każdego zawilego problemu w fizyce współczesnej”. Wykorzystanie teorii przekształcenia Fouriera w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów (DSP), to już historia II połowy XX wieku, w którym podstawowe znaczenie miało opracowanie algorytmu szybkiego przekształcenia Fouriera (ang. *FFT – Fast Fourier Transform*) i jego opublikowanie w 1965 roku przez Cooleya i Tuckeya.

Oprócz analiz teoretycznych złożonych problemów fizycznych czy elektronicznych (z zakresu teorii obwodów, telekomunikacji, metrologii, itp.) istotne znaczenie ma również problem praktycznego pomiaru widma sygnału wieloczęstotliwościowego (ang. *multifrequency signal*), tj. złożonego z wielu składowych sinusoidalnych. Temu właśnie służyło opracowanie algorytmu FFT, który jest szybką procedurą obliczania dyskretnego przekształcenia Fouriera (ang. *DFT – Discrete Fourier Transform*), jak i wielu dodatkowych procedur, w tym również omawianą w niniejszej pracy metodą liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera (LIDFT) [3–8]. W rozdziale 1 przedstawiono więc najważniejsze zależności i problemy zastosowania przekształcenia Fouriera w algorytmach DSP, które są konieczne do właściwej prezentacji metody LIDFT, będącej głównym tematem kolejnych rozdziałów – rozdział 1 jest jednak ograniczony do niezbędnego minimum, a Czytelników zainteresowanych szerzej tym aspektem autorzy odsyłają do cytowanej literatury [1–2], [9–23].

1.2. SZEREG I TRANSFORMATA FOURIERA

Wykładniczy szereg Fouriera jest definiowany dla sygnałów okresowych $x(t)$ o okresie $T_x = 1/f_x$ następującą zależnością:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_x t}, \quad (1)$$

w których funkcje $g_k(t)$ są tzw. funkcjami bazowymi rozwinięcia w szereg Fouriera – wykorzystując dla $g_k(t)$ wzory Eulera, otrzymamy postać trygonometryczną szeregu Fouriera. Współczynniki c_k to tzw. współczynniki rozwinięcia funkcji $x(t)$ w wykładniczy szereg Fouriera i dane są następującą zależnością:

$$c_k = \frac{1}{T_x} \int_{t_1}^{t_1+T_x} x(t) e^{-j2\pi k f_x t} dt \quad (2)$$

gdzie dobór początku całkowania t_1 w granicy całki jest dowolny (ważny jest fakt, że okres całkowania jest równy okresowi sygnału).

Dla przejrzystości opisu założmy w niniejszej pracy, że sygnał $x(t)$ jest sygnałem napięciowym w woltach (najczęściej spotykana sytuacja w praktyce stosowania przetworników A/C). Współczynniki c_k tworzą widmo sygnału, które najczęściej przedstawia się na dwóch charakterystykach: amplitudowej $|c_k|$ w woltach w funkcji k , oraz fazowej $\arg c_k$ w stopniach lub radianach w funkcji k . Widmo c_k jest widmem dyskretnym, składającym się z prążków wyznaczających amplitudę i fazę kolejnych harmonicznych dla całkowitych wartości k . Zależność (2) otrzymuje się jako rozwiązanie zadania dopasowania metodą najmniejszych kwadratów funkcji $x(t)$ sumą kolejnych funkcji bazowych $g_k(t)$ pomnożonych przez współczynniki c_k . Jeśli suma ta jest nieskończona, jak w równaniu (1), to błąd średniokwadratowy aproksymacji jest równy 0. Jeśli suma jest skończona (jak np. często w praktyce), to średniokwadratowy błąd aproksymacji może być niezerowy, jednak maleje on ze wzrostem liczby uwzględnianych harmonicznych (czyli kolejnych funkcji $g_k(t)$): np. $c_5 g_5(t)$ to 5. harmoniczna o amplitudzie zespolonej c_5 , czyli amplitudzie w woltach równej $|c_5|$ i fazie w radianach równej $\arg c_5$. Warto tu wspomnieć o tzw. efekcie Gibbsa, w którym dla pewnych funkcji, pomimo że ze wzrostem liczby uwzględnianych w szeregu Fouriera liczby harmonicznych maleje błąd średniokwadratowy aproksymacji, to nie maleje błąd maksymalny tej aproksymacji. Na przykład dla sygnału prostokątnego, w punktach nieciągłości sygnału (dla zbocza narastającego i opadającego) pojawia się „przebiegięcie” wynoszące ok. 9% wysokości zbocza. Przy wyprowadzaniu zależności (2) istotne znaczenie ma fakt tzw. ortogonalności funkcji bazowych $g_k(t)$. Dla ścisłości matematycznej podajmy jeszcze tzw. warunki Dirichleta, jakie musi spełniać funkcja $x(t)$, aby istniało jej rozwinięcie w szereg Fouriera:

1°. Funkcja $x(t)$ musi być bezwzględnie całkowalna w okresie $\int_{t_1}^{t_1+T_x} |x(t)| dt < \infty$.

2°. Funkcja $x(t)$ ma skończoną liczbę ekstremów w okresie.

3°. Funkcja $x(t)$ ma skończoną liczbę punktów nieciągłości w okresie.

W sytuacji, gdy $x(t)$ jest sygnałem podlegającym pomiarowi w rzeczywistym systemie pomiarowym, to wymienione warunki Dirichleta są w praktyce zawsze spełnione.

Zanim przejdziemy do zagadnienia praktycznego obliczania widma (2), zdefiniujemy jeszcze przekształcenie Fouriera dla sygnałów nieokresowych, podając parę równań (3–4), analogicznie do równań (1–2) dla szeregu Fouriera:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (3)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (4)$$

Jeśli $x(t)$ jest sygnałem w voltach, to $|X(f)|$ jest wartością wyrażoną w jednostkach $[V \cdot s = V/Hz]$ (mamy tu różnicę w stosunku do równania (2)) i dlatego $X(f)$ jest nazywane gęstością widmową, $|X(f)|$ jest charakterystyką gęstości widmowej amplitudy (w funkcji f), a $\arg X(f)$ jest gęstością widmową fazy – aczkolwiek w praktyce nazwy te skraca się do tych samych, jak dla szeregu Fouriera: widma amplitudowego i fazowego. Widmo $X(f)$ jest widmem ciągłym w przeciwieństwie do widma z równania (2).

Równanie (4) można zresztą uzyskać z równania (2) przez pominięcie w nim dzielenia przez T_x i przyjęcie, że sygnał $x(t)$ jest sygnałem okresowym z okresem $T_x \rightarrow \infty$.

Całka z równania (4) istnieje w sensie Riemanna, jeśli spełnione są warunki Dirichleta, które są podobne (ale nie takie same) do szeregu Fouriera:

1°. Funkcja $x(t)$ musi być bezwzględnie całkowalna dla $t \in \langle -\infty, +\infty \rangle$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

2°. Funkcja $x(t)$ ma skończoną liczbę ekstremów w dowolnym skończonym przedziale czasu.

3°. Funkcja $x(t)$ ma skończoną liczbę punktów nieciągłości w dowolnym skończonym przedziale czasu.

W sytuacji, gdy $x(t)$ jest sygnałem podlegającym pomiarowi w rzeczywistym systemie pomiarowym, to dwa ostatnie warunki Dirichleta są w praktyce zawsze spełnione, a pierwszy niekoniecznie – np. sygnał okresowy nie spełnia tego warunku. Mimo to, nawet wówczas można wyznaczyć widmo $X(f)$, pod warunkiem wykorzystania funkcji impulsowej $\delta(x)$ (tzw. delty Diraca). Można wówczas pokazać, że jeśli $x(t)$ jest funkcją okresową posiadającą rozwinięcie w szereg Fouriera z równania (1), to widmo $X(f)$ jest dane zależnością:

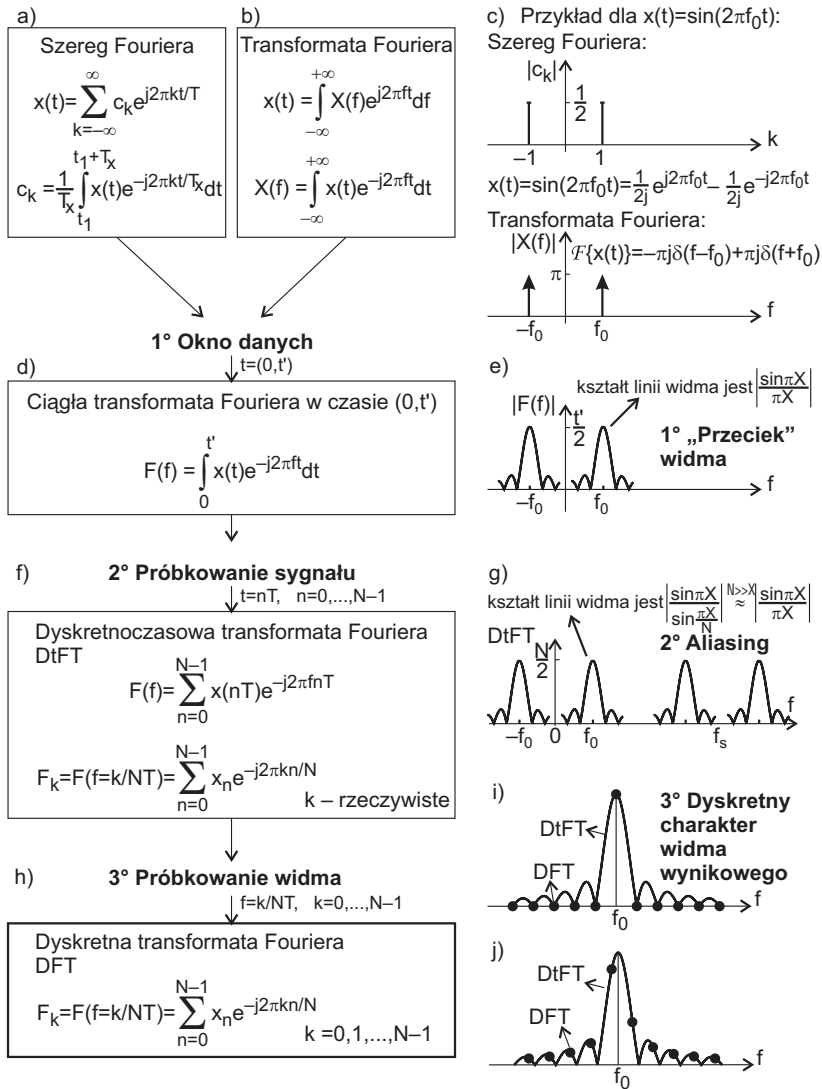
$$X(f) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_x). \quad (5)$$

Równanie (5) oznacza, że dla sygnału okresowego do policzenia widma sygnału można zastosować albo równanie (2), albo równanie (4). W pierwszym przypadku widmo zawiera prążki dla całkowitych wartości k , a w drugim widmo ma jakościowo ten sam charakter – jedynie zamiast prążków mamy delty Diraca, co ma wpływ tylko na formę graficzną przedstawianego widma (widmo jest też pomnożone przez stałą 2π).

1.3. DYSKRETNE PRZEKSZTAŁCENIE FOURIERA – REALIZACJA SZEREGU I TRANSFORMATY FOURIERA W SYSTEMIE DSP

Przeanalizujemy możliwości zastosowania wzorów (2) i (4) do policzenia widma sygnału $x(t)$ w praktycznym systemie DSP, wyposażonym w przetwornik A/C (rys. 1).

Wymienione zależności są punktem wyjścia naszej analizy (rys. 1a, b) wraz z odpowiadającym im graficznym przedstawieniem widma amplitudowego przykładowego sygnału sinusoidalnego o jednostkowej amplitudzie i częstotliwości f_0 (rys. 1c). W praktyce konieczne są trzy modyfikacje tych zależności.



Rys. 1. Transformata Fouriera: a, b – definicje; d, f, h – przekształcenia definicji prowadzące do transformaty DFT; c – widmo sinusoidy; e, g, i, j – widmo sinusoidy po kolejnych przekształceniach
Fig. 1. Fourier transform: a, b – definitions; d, f, h – transformations of definitions result DFT transform; c – spectrum of sinusoid; e, g, i, j – spectrum of sinusoid after successive transformation

1°. Okno danych powodujące przeciek widma

Przyjmijmy, że sygnał $x(t)$ jest mierzony w skończonym czasie $(0, t')$. Przy stosowaniu zależności na szereg Fouriera (rys. 1a) całkowanie w okresie sygnału $(t_1, t_1 + T_x)$ musimy zastąpić całkowaniem w czasie $(0, t')$, gdyż najczęściej okres T_x jest nieznan; z tego samego względu musimy również pominąć dzielenie całki przez wartość T_x . Natomiast stosując zależności na przekształcenie Fouriera (rys. 1b), całkowanie w czasie $(-\infty, +\infty)$ musimy również zastąpić całkowaniem w czasie $(0, t')$. W ten sposób w obu przypadkach (dla szeregu i transformaty Fouriera) otrzymujemy jedną zmodyfikowaną zależność (rys. 1d) na ciągłą transformatę Fouriera w czasie $(0, t')$ – oznaczmy ją przez $F(f)$. Przyjęcie przedziału całkowania $(0, t')$, to nic innego jak zastosowanie prostokątnego okna danych, „wycinającego” („okienkującego”) fragment sygnału o czasie trwania równym czasowi pomiaru sygnału. Powoduje to, że zamiast idealnego widma dla jednej sinusoidy z rysunku 1c w widmie pojawia się przeciek widma o kształcie funkcji $(\sin \pi X) / \pi X$ i amplitudzie pomnożonej przez czas pomiaru t' (rys. 1e).

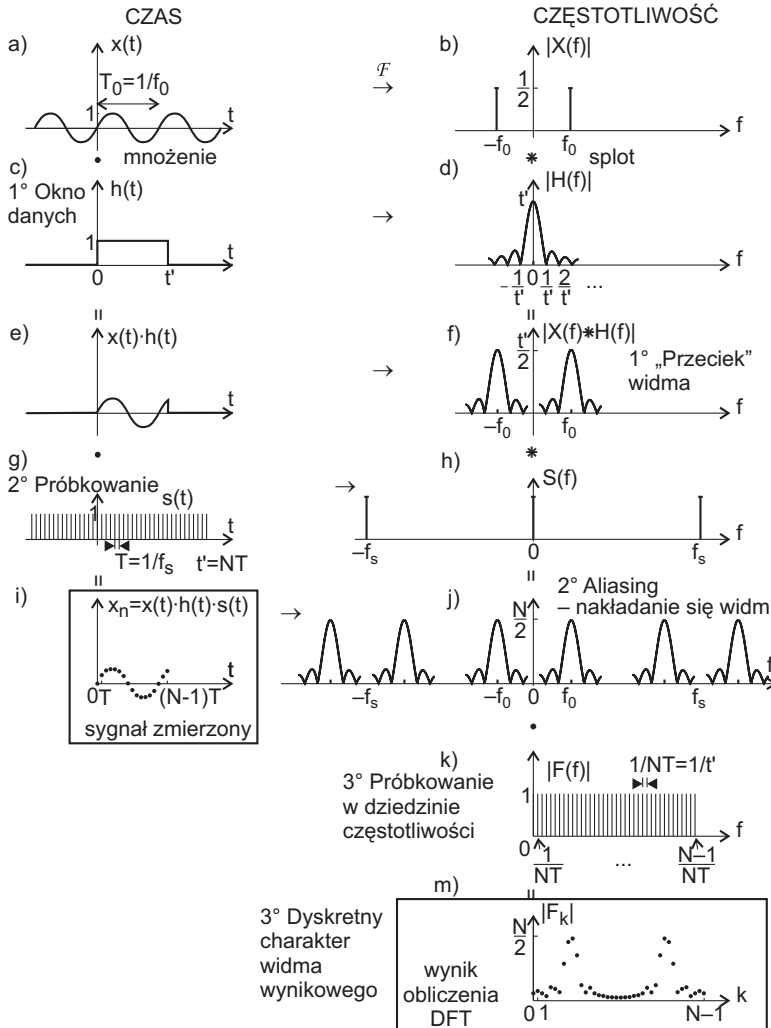
2°. Próbkowanie sygnału powodujące aliasing

W wyniku próbkowania sygnału $x(t)$ z okresem próbkowania $T = 1/f_s$ w czasie $(0, t')$ uzyskujemy N próbek $x_n = x(nT)$ dla $n = 0, \dots, N - 1$. Odpowiada to zastąpieniu całki w zależności z rysunku 1d znakiem sumy i prowadzi do wzoru na dyskretnoczasową transformatę Fouriera (DtFT), w której czas jest dyskretny, ale uzyskane widmo $F(f)$ jest ciągłe (rys. 1f). Wprowadza się tu często częstotliwość unormowaną $k = f \cdot NT$ w jednostkach odpowiadających numerowi harmonicznej (względem odwrotności czasu pomiaru $t' = NT$) – w skrócie w [bins]. Próbkowanie sygnału powoduje, że widmo staje się okresowe (rys. 1g) z okresem równym częstotliwości próbkowania f_s , a rozmyty prążek zmienia nieznacznie w okolicach swojego maksimum kształt z funkcji $(\sin \pi X) / \pi X$ na okresową funkcję $(\sin \pi X) / \sin(\pi X / N)$ nazywaną jądrem Dirichleta. Ponieważ widmo jest okresowe, to dla sygnału sinusoidalnego o częstotliwości f_0 , obok prążka dla tej częstotliwości, występuje również prążek o częstotliwości $(f_s - f_0)$, a więc widmo w zakresie $(0, f_s/2)$ jest symetryczne względem częstotliwości Nyquista $f_s/2$. Aby w widmie w zakresie $(0, f_s/2)$ nie pojawił się prążek o częstotliwości $(f_s - f_0)$, musi być spełniony warunek $f_s - f_0 > f_s/2$, czyli $f_s > 2f_0$, co jest treścią twierdzenia Shanona o próbkowaniu. Niespełnienie tego warunku spowoduje efekt aliasingu, czyli zniekształcenia widma sygnału w zakresie podstawowym widma $(0, f_s/2)$.

3°. Próbkowanie widma powodujące dyskretny charakter widma wynikowego

W praktyce ze względu na ciągłość widma dyskretnoczasowej transformaty Fouriera musimy dokonać próbkowania widma. Jeśli przyjmiemy $k = 0, \dots, N - 1$, to otrzymamy dyskretne przekształcenie Fouriera (DFT), które wylicza widmo dla częstotliwości $f_k = k/NT$ (rys. 1h). Innymi słowy DFT są próbkami DtFT dla $k = 0, \dots, N - 1$. Wyliczone

widmo ma dyskretny charakter, w którym w szczególnym przypadku (gdy czas pomiaru $t' = NT$ będzie całkowitą wielokrotnością okresu każdej składowej sinusoidalnej sygnału $x(t)$) przeciek widma nie ujawni się, a lokalne maksimum widma wyznaczy dokładnie położenie i amplitudę składowej (rys. 1i). Najczęściej jednak (gdy wymieniony warunek nie jest spełniony) przeciek widma jest obecny w DFT, a maksimum lokalne DFT nie wyznacza dokładnie parametrów sygnału (rys. 1j).



Rys. 2. Mnożenie w dziedzinie czasu i równoważny mu splot w dziedzinie częstotliwości przy próbkowaniu sygnału sinusoidalnego i obliczaniu DFT

Fig. 2. Multiplying in the time domain and equivalent to it convolution in frequency domain for sampling of sinusoidal signal and calculating DFT

Podane efekty można również wyjaśnić, korzystając ze znanej właściwości transformaty Fouriera, że mnożeniu w dziedzinie czasu odpowiada splot w dziedzinie częstotliwości. Sygnałowi sinusoidalnemu odpowiada widmo złożone z dwóch prążków (rys. 2a,b). Transformata Fouriera prostokątnego okna danych jest funkcją $(\sin \pi X)/\pi X$ (rys. 2c,d). Zastosowanie okna danych, to mnożenie sygnału $x(t)$ przez funkcję okna $h(t)$ (rys. 2e), co odpowiada w dziedzinie częstotliwości operacji splotu $X(f)*H(f)$ widma sygnału $X(f)$ i widma okna danych $H(f)$ (rys. 2f). Przez proces próbkowania w przetworniku A/C mnożymy jeszcze sygnał $x(t) \cdot h(t)$ przez funkcję próbkującą $s(t)$ (rys. 2g) o widmie $S(f)$ (rys. 2h), w wyniku czego otrzymujemy sygnał spróbkowany $x_n = x(t)h(t)s(t)$ (rys. 2i) o widmie zdefiniowanym dyskretnoczasową transformatą Fouriera (DtFT) (rys. 2j). Widmo to próbujemy podczas obliczania DFT (czyli mnożymy widmo przez funkcję z rys. 2k), otrzymując N jego próbek dla częstotliwości $f_k = k / NT = kf_s / N$ dla $k = 0, \dots, N - 1$ (rys. 2m).

Dyskretne przekształcenie Fouriera zachowuje pełną informację o sygnale, zawartą w próbkach czasowych, a więc istnieje odwrotne przekształcenie Fouriera (IDFT – ang. *Inverse Discrete Fourier Transform*), umożliwiające otrzymanie przebiegu czasowego na podstawie próbek – razem z DFT stanowią parę prostej i odwrotnej DFT:

$$\text{DFT:} \quad F_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (6)$$

$$\text{IDFT:} \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (7)$$

Przekształcenie DFT może być już w pełni realizowane w układzie DSP, jednakże w policzonym w ten sposób widmie występują niekorzystne zjawiska: przeciek widma, aliasing i dyskretny charakter widma wynikowego. Zjawiska te w różnym stopniu utrudniają analizę widma wynikowego, wprowadzając błędy estymacji liczby składowych sinusoidalnych, ich amplitud, częstotliwości i faz. Dlatego w precyzyjnych pomiarach widma sygnału konieczne jest stosowanie dodatkowych metod sprzętowych i obliczeniowych zmniejszających te błędy (rozdz. 1.4).

1.4. PRECYZYJNA ESTYMACJA WIDMA Z WYKORZYSTANIEM DFT W SYSTEMIE DSP

W rozdziale 1.3 pokazaliśmy, że widmo, uzyskane jako wynik obliczenia DFT z próbek sygnału, obciążone jest przeciekiem widma (jako efektem zastosowania prostokątnego okna danych), możliwym aliasingiem (jako efektem próbkowania sygnału) oraz dyskretnym charakterem policzonego widma (jako efektem próbkowania widma DtFT w dziedzinie częstotliwości). Wymieńmy w skrócie najczęściej stosowane metody minimalizacji szkodliwego wpływu tych trzech efektów.

1°. Minimalizacja przecieku widma – nieprostokątne okna danych

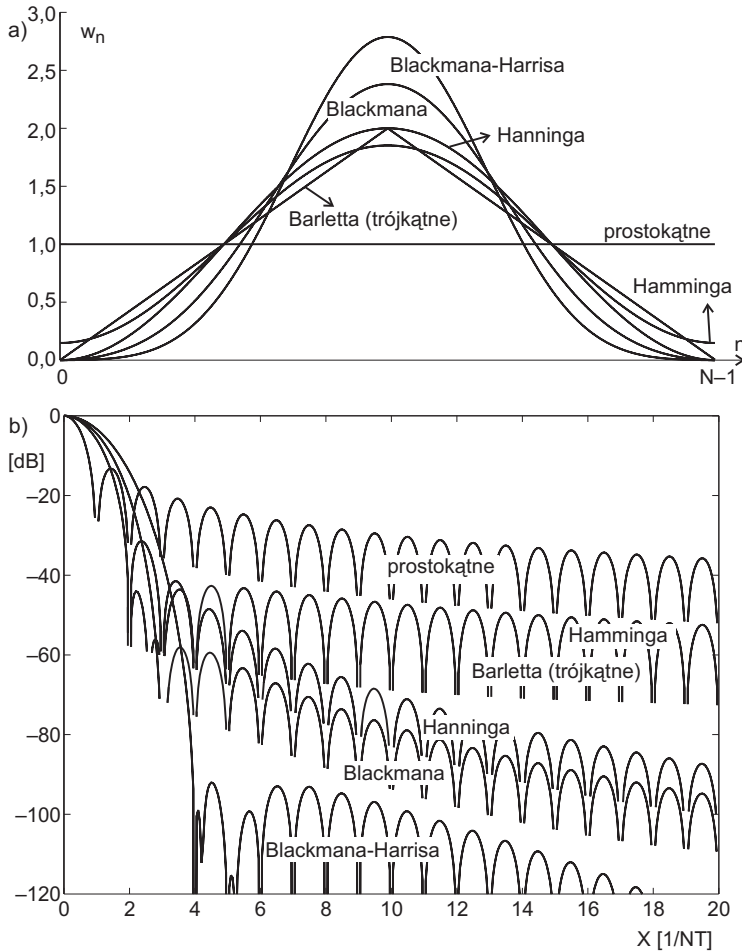
Przeciek widma można zminimalizować przez zastosowanie, innego niż prostokątne okna danych. Jeśli na rysunku 2c kształt okna będzie inny niż prostokątny, to charakterystyka częstotliwościowa okna na rysunku 2d zmieni się, w efekcie czego widmo wynikowe (rys. 2j,m) będzie sumą rozmytych prążków o kształcie zdefiniowanym przez charakterystykę częstotliwościową zastosowanego okna danych. Rysunek 3 przedstawia kilka wybranych charakterystyk okien danych – na uwagę zasługuje fakt, że niewielka zmiana kształtu okna w dziedzinie czasu (rys. 3a) skutkuje w charakterystyce częstotliwościowej znaczącym zwiększeniem tłumienia listków bocznych, kosztem poszerzenia listka głównego (oraz kosztem pogorszenia stosunku sygnał/szum w analizowanym widmie proporcjonalnie do tzw. współczynnika ENBW okna). W ten sposób przez znaczące stłumienie listków bocznych minimalizujemy ich wpływ na listki główne sąsiednich składowych, a więc zmniejszamy znacząco wzajemną interferencję poszczególnych składowych sinusoidalnych w widmie. Jeśli ta interferencja jest pomijalnie mała, to maksima lokalne widma DtFT wyznaczają parametry składowych sinusoidalnych sygnału.

2°. Zabezpieczenie przed aliasingiem – analogowy filtr antyaliasingowy

Zabezpieczeniem przed aliasingiem jest spełnienie warunków twierdzenia Shanona o próbkowaniu, które mówi, że częstotliwość próbkowania musi być co najmniej dwukrotnością częstotliwości granicznej sygnału. W praktyce warunek ten spełnia się, umieszczając na wejściu przetwornika A/C analogowy filtr dolnoprzepustowy (filtr antyaliasingowy), który powinien przenosić sygnał bez zniekształceń w paśmie od zera do połowy częstotliwości próbkowania (tzw. częstotliwości Nyquista) i tłumić sygnał powyżej częstotliwości Nyquista. Aby zmniejszyć wymagania na filtr antyaliasingowy można stosować tzw. nadpróbkowanie (ang. *oversampling*) – tzn. próbować sygnał z częstotliwością próbkowania wielokrotnie większą niż wynika to z twierdzenia o próbkowaniu. Dodatkową zaletą jest wówczas poprawa stosunku sygnał/szum w otrzymanym widmie.

3°. Zmniejszenie błędów spowodowanych dyskretnym charakterem DFT – metody interpolacyjne

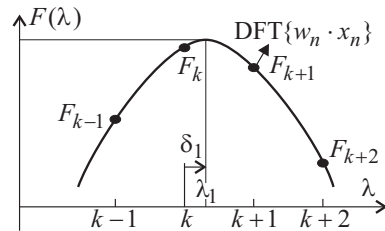
Maksimum lokalne wyliczonego widma DFT najczęściej nie pokrywa się z maksimum lokalnym widma DtFT (rys. 1j, 2m) – jeśli wówczas przyjmujemy maksimum lokalne DFT jako położenie rzeczywistej składowej w widmie, to podczas określania jej amplitudy i częstotliwości popełnimy błędy estymacji spowodowane dyskretnym charakterem widma DFT. Maksymalny błąd wyznaczenia częstotliwości składowej wynosi $\max |\Delta f| = 0,5 \text{ bins} = 1/(2NT)$, a maksymalny błąd wyznaczenia amplitudy zależy od zastosowanego okna danych: dla okna prostokątnego wynosi $\max |\delta A| \approx 3,92\text{dB} \approx 36\%$, a dla typowych okien danych innych niż prostokątne wynosi $\max |\delta A| \approx 0,83, \dots, 2,22\text{dB} \approx 9, \dots, 22\%$. Te błędy spowodowane dyskretnym charakterem widma DFT można zmniejszyć przez:



Rys. 3. Charakterystyki wybranych okien danych w dziedzinie: a) czasu i b) częstotliwości
 Fig. 3. Characteristics of chosen data windows in: a) time and b) frequency domain

a) **zwiększenie czasu pomiaru**, dzięki czemu można zmniejszyć błąd określenia częstotliwości $\max |\Delta f|$, ale błąd określenia amplitudy $\max |\delta A|$ pozostanie bez zmian,

b) **interpolację widma przez uzupełnianie zerami**, tj. liczenie DFT z ciągu próbek uzupełnionych próbkami zerowymi – jeśli np. zamiast DFT z 1024 próbek policzymy DFT z 8192 próbek (z których pierwsze 1024 próbki to próbki sygnału pomnożone przez okno danych, a pozostałe to próbki zerowe), to uzyskamy 8-krotnie więcej próbek widma DtFT w stosunku do obliczeń bez próbek zerowych; w ten sposób zmniejszymy błędy $\max |\Delta f|$ oraz $\max |\delta A|$ kosztem zwiększenia czasu obliczeń i wymagań pamięci systemu DSP (więcej o metodzie uzupełniania zerami zamieszczono w rozdz. 5),



Rys. 4. Interpolacja DFT
Fig. 4. DFT Interpolation

c) **metody interpolacji widma specyficzne dla każdego okna**, w których zależności interpolacyjne opierają się na kilku wartościach lokalnego maksimum widma DFT (rys. 4) – są one różne dla różnych okien danych, gdyż uwzględnia się w nich matematyczną postać ich charakterystyki częstotliwościowej; wyróżnia się tu:

- interpolację wzorami dokładnymi, dla każdego okna innymi (dokładne zależności są znane tylko dla niektórych okien i są często złożone), np. dla okna Hanninga:

$$\lambda_1 = k + \delta_1, \quad \delta_1 = \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1}, \quad \alpha = \frac{|F_{k+1}|}{|F_k|} \quad (8)$$

- interpolację wzorami przybliżonymi (również znanymi tylko dla niektórych okien), będącymi przybliżeniem złożonych zależności dokładnych, np. dla okna prostokątnego:

$$\lambda_1 = k + \delta_1, \quad \delta_1 \approx \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad \alpha = \frac{|F_{k+1}|}{|F_k|} \quad (9)$$

d) **metody interpolacji widma funkcjami uniwersalnymi**, które można stosować dla każdego okna, np. interpolacja krzywą wielomianową 3. stopnia daje maksymalne błędy amplitudy 4,5% (poprawa ok. 3-krotna) i częstotliwości 0,12 bins (poprawa ok. 4-krotna).

Wymienione w punktach b, c, d metody interpolacji widma zakładają brak interferencji sąsiednich składowych w widmie, tj. odpowiednie stłumienie listków bocznych – jak pokażemy w rozdziale 5, to założenie może być przyczyną dodatkowych błędów, szczególnie dla składowych w widmie leżących blisko siebie i znacznie różniących się amplitud. Próbą przezwycięzenia tego problemu jest metoda liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera (LIDFT), omówiona w następnych rozdziałach niniejszej pracy.

2. ZAŁOŻENIA I ALGORYTM METODY LIDFT

Metoda liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera (LIDFT) opiera się na pewnych cechach dwóch grup metod estymacji parametrów sygnału wieloczę-

stotliwościowego: pierwsza z nich, to zastosowanie odpowiedniego okna danych, dyskretnej transformaty Fouriera i interpolacji lokalnych maksimum otrzymanego widma [1–2], [9–10], [12–13], [18], [21], [23] (zob. rozdz. 1). Drugą grupą metod są metody parametryczne, głównie bazujące na metodzie Prony’ego oraz korelacyjne oparte na właściwościach macierzy autokorelacji sygnału ([14], [16–17], [20]).

We wszystkich tych metodach najpoważniejszą trudnością jest nieliniowość zależności, z których wyznacza się częstotliwości składowych oscylacji. W metodach interpolacyjnych wynika to z nieliniowości stosowanych funkcji interpolujących, w metodach parametrycznych zaś z wyznaczania zer wielomianu wysokiego stopnia zmiennej zespolonej lub z wyznaczania maksimum estymatora widma gęstości mocy.

Metoda LIDFT pozwala na wyeliminowanie konieczności rozwiązywania równań nieliniowych, dzięki następującym założeniom, łączącym korzystne właściwości obu grup metod:

1. Stosuje się okno danych według innego kryterium niż w analizach klasycznych. Kryterium tym jest minimalizacja średniokwadratowego błędu aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej okna odpowiednimi funkcjami liniowymi. Źródłem błędów analizy staje się wtedy nie tyle sam przeciek widma, co błąd przybliżenia tego przecieku funkcjami liniowymi.

2. Wprowadzenie linearyzacji okna danych umożliwia zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do aproksymacji widma sygnału złożonego z wielu drgań funkcjami liniowymi i uzyskanie liniowego równania macierzowego, z którego wyznacza się amplitudy, częstotliwości i fazy składowych oscylacji. Dzięki temu:

- wykorzystuje się korzystne właściwości metody najmniejszych kwadratów uśredniania błędów losowych i odpowiednich błędów deterministycznych, nie wprowadzając jednocześnie nieliniowości w zależnościach będących podstawą estymacji parametrów (jak to się dzieje w wielu wersjach dotychczas stosowanych metod estymacji parametrów widma – bazujących zarówno na interpolacji DFT, jak i metod parametrycznych oraz autokorelacyjnych),

- eliminuje się niekorzystny, „lokalny” charakter dotychczas stosowanych metod interpolacji widma, gdyż w metodzie LIDFT wszystkie estymowane parametry są określane przez rozwiązanie jednego macierzowego, liniowego równania interpolacyjnego,

- istnieje możliwość stosowania metody LIDFT do analizy sygnału złożonego z dużej liczby estymowanych składowych bez istotnego zwiększenia złożoności obliczeń – najważniejszą właściwością ograniczającą jest w tym przypadku tylko rozdzielczość częstotliwościowa estymacji,

- nie wprowadza się ścisłej zależności liczby N próbek sygnału od liczby P estymowanych składowych oscylacji, w rodzaju tej, która występuje w podstawowej metodzie Prony’ego.

Otrzymywane metodą LIDFT częstotliwości składowych oscylacji mogą jednakże przyjmować wartości zespolone (jak to jest w metodzie Prony’ego), co odpowiada

modelowi sygnału z amplitudą oscylacji zmienną eksponencjalnie w czasie. Założenie zespolonego charakteru częstotliwości nie prowadzi do zmiany modelu sygnału pod warunkiem, że część urojona tej częstotliwości jest minimalizowana (w najkorzystniejszym przypadku przyjmuje wartość równą zero) przez odpowiedni dobór warunków początkowych metody. Pierwszą zaletą takiego założenia jest uzyskanie możliwości oceny doboru warunków początkowych metody LIDFT dla mierzonego sygnału. Drugą zaletą jest możliwość modelowania sygnału, analogicznie do metody Prony'ego, wielomianem zmiennej zespolonej bez dodatkowych ograniczeń na wartości tej zmiennej, co jest warunkiem otrzymania liniowego równania metody LIDFT.

Przedstawione założenia metody LIDFT i uzyskany algorytm przedstawiamy dalej za pomocą odpowiednich zależności matematycznych – szczegóły wyprowadzenia algorytmu umieszczone są w rozdziale 3. Sygnał mierzony modelowany jest zależnością:

$$y(t) = \sum_{i=1}^M A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \quad (10)$$

Można go więc zapisać w postaci sumy oscylacji zespolonych

$$y(t) = \sum_{i=1}^P B_i z_i^t \quad (11)$$

gdzie: $B_i = A_i e^{j\varphi_i} / 2j$, $z_i = e^{j\omega_i}$, $P = 2M$, $B_{P-i+1} = B_i^*$, $z_{P-i+1} = z_i^*$.

Parametry A_i , f_i (lub $\omega_i = 2\pi f_i$), φ_i wyznacza się z równań $A_i e^{j\varphi_i} / 2j = B_i$ oraz $f_i = \lambda_i / NT = [\gamma_i + (i-1/2)] / NT$ na podstawie wektora

$$\mathbf{B}_{2P \times 1} = [B_i \quad B_i \cdot \gamma_i]^T = [B_{i_1} \quad \dots \quad B_{i_p} \quad B_{i_1} \gamma_{i_1} \quad \dots \quad B_{i_p} \gamma_{i_p}]^T \quad (12)$$

będącego rozwiązaniem liniowego równania macierzowego metody LIDFT:

$$\mathbf{V}_{N \times 2P}^H \cdot \mathbf{V}_{N \times 2P} \cdot \mathbf{B}_{2P \times 1} = \mathbf{V}_{N \times 2P}^H \cdot \mathbf{F}_{N \times 1}, \quad (13)$$

gdzie \mathbf{F} jest DFT próbek sygnału pomnożonych przez wartości linearyzującego okna danych, macierz \mathbf{V} jest wyznaczona przez charakterystykę częstotliwościową okna, a \mathbf{V}^H jest macierzą hermitowską macierzy \mathbf{V} . Zależność (13) zakłada, że sygnał zawiera P oscylacji zespolonych, każda o częstotliwości unormowanej $\lambda_i \in \langle i-1, i \rangle$ i amplitudzie B_i .

Oznaczając $\mathbf{X}_{2P \times 2P} = \mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V}$ oraz $\mathbf{Y}_{2P \times 1} = \mathbf{V}^H \cdot \mathbf{F}$ równanie (13) ma postać $\mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{Y}$:

$$\begin{bmatrix} r_{i-k} & -s_{i-k} \\ s_{i-k} & t_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \cdot \begin{bmatrix} B_k \\ B_k \gamma_k \end{bmatrix}_{2P \times 1} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_{2P \times 1} \quad (14)$$

gdzie

$$r_m = (-1)^m FFT_m \left\{ w_n^2 \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2 \right\} \quad (15)$$

$$s_m = 6j(-1)^m FFT_m \left\{ w_n^2 \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right) \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right) \right\} \quad (16)$$

$$t_m = 36(-1)^m FFT_m \left\{ w_n^2 \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right)^2 \right\} \quad (17)$$

$$u_m = (-1)^m FFT_m \left\{ y_n w_n^2 \frac{\sin x_n}{x_n} e^{jx_n} \right\} \quad (18)$$

$$v_m = 6j(-1)^m FFT_m \left\{ y_n w_n^2 \frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} e^{jx_n} \right\} \quad (19)$$

$$i, k, m \in \langle 0, \dots, N-1 \rangle \quad (20)$$

Równania (14–20) określają algorytm metody LIDFT, którego kolejne etapy są następujące:

1. Próbkujemy sygnał $y(t)$, otrzymując ciąg y_n ($n = 0, \dots, N-1$).
2. Wybieramy w_n (okno danych) i liczymy ciągi r_n, s_n, t_n, u_n, v_n ($n = 0, \dots, N-1$) według wzorów (15–19).
3. Wybieramy zbiór $S = \{i_1, i_2, \dots, i_M\}$ określający to, że sygnał zawiera M składowych sinusoidalnych o częstotliwościach unormowanych $\lambda_{i_n} \in \langle i_n - 1, i_n \rangle$. Biorąc pod uwagę składowe sprzężone, przyjmujemy, że $i, k \in R = \{i_1, \dots, i_P\} = \{i_1, \dots, i_M, N - i_1 + 1, \dots, N - i_M + 1\}$.
4. Na podstawie wartości i, k z punktu 3 obliczamy $B_k, C_k = B_k \gamma_k$ z równania (14). Wartości γ_k obliczamy ze wzoru $\gamma_k = C_k / B_k$, a stąd częstotliwości unormowane składowych sinusoidalnych ze wzoru $\lambda_k = k - \frac{1}{2} + \text{Re} \gamma_k$. Amplitudę A_k i fazę φ_k każdej składowej liczymy z zależności $A_k e^{j\varphi_k} = 2jB_k$.
5. Badamy wartości $\text{Im} \gamma_k$ i ewentualnie powtarzamy punkt 3–5 w celu lepszego doboru zbioru S , uzyskując zmniejszenie wartości $\text{Im} \gamma_k$. W przypadku idealnym $\text{Im} \gamma_k = 0$.

Wstępną lokalizację składowych w widmie (dobór i_1, \dots, i_P) oraz stosowane okno danych (dobór ciągu w_n) nazywamy warunkami początkowymi metody LIDFT.

Do najważniejszych zalet przedstawionego algorytmu LIDFT można zaliczyć następujące właściwości:

- operowanie na macierzach o wymiarach $2P \times 2P$, $2P \times 1$ niezależnych od liczby próbek N sygnału (najczęściej $P \ll N$),
- elementy macierzy \mathbf{X} , \mathbf{Y} mogą być obliczone za pomocą efektywnych algorytmów FFT,
- ciągi r_n , s_n , t_n mogą być policzone przed eksperymentem (dla danego okna danych),
- algorytm wymaga jedynie dwóch zaawansowanych procedur numerycznych: algorytmu FFT i procedury rozwiązywania liniowego równania macierzowego,
- możliwa jest iteracyjna korekta wstępnej lokalizacji składowych w widmie przez badanie wartości $\text{Im}\gamma_k$ (pkt. 5 algorytmu).

Główną wadą algorytmu jest fakt arbitralnego doboru zbioru S , co wymaga informacji *a priori* o sygnale lub użycia dodatkowej metody doboru tego zbioru. Jednakże wstępna lokalizacja składowych w widmie jest również wymagana w innych znanych metodach. Na przykład w metodach nieliniowej interpolacji widma zakłada się prawidłowy dobór punktów widma wykorzystywanych w interpolacji.

Etapem, który wymaga wykonania największej liczby operacji arytmetycznych w algorytmie LIDFT dla przypadku dużych wartości P (liczby estymowanych oscylacji) jest rozwiązanie liniowego równania macierzowego (14), ale warto tu zwrócić uwagę na to, że macierz kwadratowa \mathbf{X} tego równania jest macierzą Toeplitza i można wykorzystać specjalne algorytmy opracowane dla rozwiązywania równania z taką macierzą ([16]).

Rozdział 3 zawiera szczegółową prezentację sposobu aproksymacji widma funkcjami liniowymi oraz przekształcenia symboliczne równań metody prowadzącej do równania (14), dzięki czemu wyeliminowano konieczność operowania na dużych macierzach o wymiarach $N \times 2P$, $N \times 1$. Rozdział 4 zawiera analizę metrologiczną metody w przypadku zastosowania, dedykowanego dla metody, parametrycznego okna danych – pozwala ona na określenie dokładności metody i praktyczny dobór warunków początkowych metody. Kolejne modyfikacje metody LIDFT przedstawione w rozdziale 5 zmierzają do zwiększenia dokładności metody i pozwalają zmniejszyć wymaganą ilość informacji *a priori* o sygnale.

3. LINEARYZACJA WIDMA SYGNAŁU, RÓWNANIA I ALGORYTM LIDFT

3.1. WPROWADZENIE

Załóżmy, że sygnał $y(t)$ można opisać przez zależność (10), (11). Po wykonaniu dyskretyzacji sygnału mierzonego ($t \rightarrow t_n = nT$, $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$), pomnożeniu

próbek sygnału y_n przez wartości okna danych w_n oraz ciągłej transformaty Fouriera otrzymujemy:

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^P B_i \cdot W(\lambda - \lambda_i) \quad (21)$$

gdzie $\lambda_i = f_i \cdot NT$ jest unormowaną częstotliwością (w [bins]), B_i – amplitudą zespoloną i -tej oscylacji zespolonej $B_i e^{j2\pi n \lambda_i / N}$, $\lambda = f \cdot NT$ oraz $W(\lambda)$ jest charakterystyką częstotliwościową okna danych według wzoru:

$$W(\lambda) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n e^{-j2\pi n \lambda / N} \quad (22)$$

spełniającą warunek

$$W(0) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n = N = \text{const.} \quad (23)$$

Przyjęcie zakresu numeracji $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$, zamiast stosowanego zwykle $n = 0, \dots, N - 1$, nie wpływa istotnie na wyniki analizy widmowej, a umożliwia uproszczenie otrzymywanych dalszych zależności.

Wyprowadzając praktyczny algorytm LIDFT, dokonuje się aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej okna danych odpowiednimi funkcjami liniowymi (rozdz. 3.2), a następnie wykorzystuje się tę aproksymację do opisu widma sygnału wieloczęstotliwościowego, uzyskując liniowe równanie macierzowe metody LIDFT (rozdz. 3.3). W celu wyeliminowania operowania na dużych macierzach dokonuje się również przekształceń symbolicznych uzyskanych równań, co prowadzi do algorytmu LIDFT (rozdz. 3.4). W tych przekształceniach wykorzystuje się kilka dodatkowych zależności matematycznych zamieszczonych w rozdziale 3.5.

3.2. LINEARYZACJA CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWEJ OKNA DANYCH

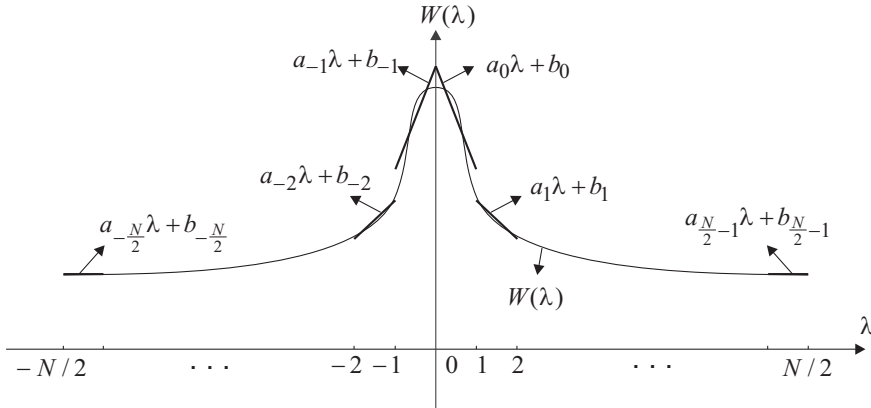
Zależność (21) wskazuje, że otrzymane widmo $F(\lambda)$ jest sumą odpowiedniej liczby funkcji zespolonych o kształcie zdefiniowanym przez wybrane okno, położeniu, fazie i amplitudzie zdefiniowanych przez parametry składowych oscylacji sygnału. Linearyzację funkcji $F(\lambda)$ uzyskuje się w metodzie LIDFT przez linearyzację charakterystyki częstotliwościowej okna $W(\lambda)$, tj. znalezienie takich wartości a_i, b_i dla danego okna czasowego w_n ($n = -N/2, \dots, N/2 - 1$), dla których charakterystyka częstotliwościowa $W(\lambda)$ daje się opisać funkcjami liniowymi $\hat{W}_i(\lambda) = a_i \lambda + b_i$ (rys. 5) z najmniejszym błędem średniokwadratowym:

$$Q = \int_{-N/2}^{N/2} |W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|^2 d\lambda \quad (24)$$

gdzie:

$$\hat{W}(\lambda) = \hat{W}_i(\lambda) = a_i \lambda + b_i \text{ dla } \lambda \in \langle i, i+1 \rangle \text{ oraz } i = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (25)$$

oraz a_i, b_i są liczbami zespolonymi. Wartość Q ma interpretację energii sygnału błędu. Uwzględniając zależności (24) i (25) otrzymujemy:



Rys. 5. Charakterystyka częstotliwościowa okna danych $W(\lambda)$ i jej aproksymacja funkcjami liniowymi
Fig. 5. Frequency characteristic $W(\lambda)$ of the data window and its approximation by linear functions

$$Q = \int_{-N/2}^{N/2} |W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|^2 d\lambda = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} \int_i^{i+1} [W(\lambda) - \hat{W}_i(\lambda)][W^*(\lambda) - \hat{W}_i^*(\lambda)] d\lambda \quad (26)$$

Szukamy teraz $4(N-1)$ liczb rzeczywistych $\text{Re } a_i, \text{Im } a_i, \text{Re } b_i, \text{Im } b_i$ (czyli $2(N-1)$ liczb zespolonych a_i, b_i) minimalizujących wartość Q przez przyrównanie odpowiednich pierwszych pochodnych do zera i sprawdzenie znaku drugich pochodnych. Otrzymane zależności przekształcamy do postaci równań:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \text{Re } a_i} + j \frac{\partial Q}{\partial \text{Im } a_i} \right) = - \int_i^{i+1} \lambda W(\lambda) d\lambda + a_i \int_i^{i+1} \lambda^2 d\lambda + b_i \int_i^{i+1} \lambda d\lambda = 0, \quad (27)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \text{Re } b_i} + j \frac{\partial Q}{\partial \text{Im } b_i} \right) = - \int_i^{i+1} W(\lambda) d\lambda + a_i \int_i^{i+1} \lambda d\lambda + b_i \int_i^{i+1} d\lambda = 0, \quad (28)$$

które po rozwiązaniu ze względu na a_i, b_i prowadzą do zależności

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \int_i^{i+1} \lambda^2 d\lambda & \int_i^{i+1} \lambda d\lambda \\ \int_i^{i+1} \lambda d\lambda & \int_i^{i+1} d\lambda \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \int_i^{i+1} \lambda W(\lambda) d\lambda \\ \int_i^{i+1} W(\lambda) d\lambda \end{bmatrix} \\ &= 12 \begin{bmatrix} 1 & -\left(i + \frac{1}{2}\right) \\ -\left(i + \frac{1}{2}\right) & \left(i + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \int_i^{i+1} \lambda W(\lambda) d\lambda \\ \int_i^{i+1} W(\lambda) d\lambda \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (29)$$

czyli

$$a_i = 12 \int_i^{i+1} \left[\lambda - \left(i + \frac{1}{2}\right) \right] W(\lambda) d\lambda, \quad (30)$$

$$b_i = 12 \int_i^{i+1} \left[\left(i + \frac{1}{2}\right)^2 - \lambda \left(i + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{12} \right] W(\lambda) d\lambda. \quad (31)$$

Uwzględniając zależność (22) w obu podanych wzorach, otrzymujemy

$$a_i = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \alpha_{in}, \quad (32)$$

$$b_i = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \beta_{in}, \quad (33)$$

gdzie:

$$\alpha_{in} = 12 \int_i^{i+1} \left[\lambda - \left(i + \frac{1}{2}\right) \right] e^{-j2\pi n\lambda / N} d\lambda, \quad (34)$$

$$\beta_{in} = 12 \int_i^{i+1} \left[\left(i + \frac{1}{2}\right)^2 - \lambda \left(i + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{12} \right] e^{-j2\pi n\lambda / N} d\lambda. \quad (35)$$

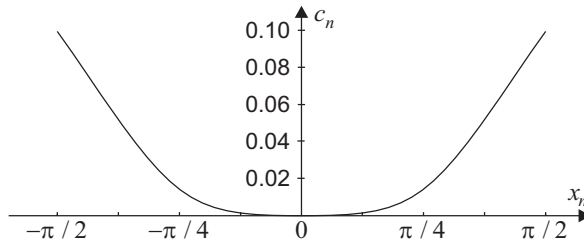
Uwzględniając zależności (25), (32–35) w równaniu (26) i zależność (96) z podrozdziału 3.5, otrzymujemy

$$Q = N \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n w_n^2, \quad (36)$$

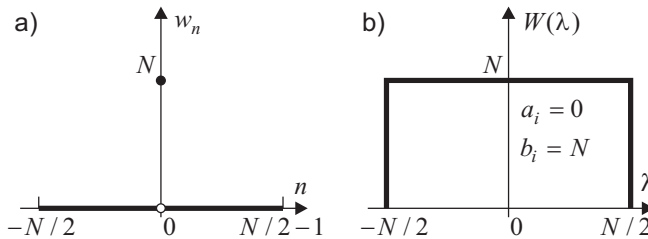
gdzie

$$c_n = 1 - 3 \left(\frac{\sin x_n / x_n - \cos x_n}{x_n} \right)^2 - \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2, \quad x_n = \pi n / N. \quad (37)$$

Z równania (37) i wykresu z rysunku 6 wynika, że $c_0 = 0$, co oznacza, że wartość w_0 nie wpływa na błąd aproksymacji Q . Dlatego przyjęcie warunku $w_n = 0$ dla $n \neq 0$ oraz $w_0 = N$ (spełniając tym samym warunek z równ. (23)) daje okno, którego charakterystyka częstotliwościowa może być aproksymowana funkcjami liniowymi bez błędu (rys. 7).



Rys. 6. Wartości c_n z równ. (37) w funkcji x_n
Fig. 6. Values c_n from (37) as a function of x_n



Rys. 7. Charakterystyka okna linearyzującego bez błędów w dziedzinie: a) czasu, b) częstotliwości
Fig. 7. Characteristic of linearized window without error: a) in time domain, b) in frequency domain

Odpowiada to sytuacji, w której cała energia okna jest skupiona w jednym, środkowym punkcie. Im bardziej będziemy zmniejszać wartość w_0 , przenosząc energię na inne punkty okna, tym większy będzie błąd aproksymacji. Zgodnie z zależnością (36) i wykresem z rysunku 6 największy wpływ na błąd aproksymacji Q mają punkty okna położone najbliżej jego końców ($n = -N/2$ oraz $n = -N/2 - 1$) i dlatego powinny one mieć możliwie małe wartości.

Niestety okno z rysunku 7, choć daje zerowy błąd aproksymacji, nie jest możliwe do wykorzystania, gdyż kształt okna w dziedzinie częstotliwości (rys. 7b) uniemożliwia określenie częstotliwości sygnału mierzonego z powodu braku maksimum. Nieprzydatność takiego okna staje się oczywista, jeśli zauważy się, że okno danych w dziedzinie czasu (rys. 7a) zeruje wszystkie próbki sygnału z wyjątkiem jednej, środkowej, czyniąc prawie cały pomiar nieprzydatny.

W praktycznych zastosowaniach metody LIDFT wystąpi błąd systematyczny spowodowany przez niezerowy błąd aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej okna funkcjami liniowymi. Wartość tego błędu zależy od rodzaju stosowanego okna danych. Analizę tego błędu dla dedykowanego okna danych przedstawiono w rozdziale 4, a dla klasycznych okien danych dla wersji metody LIDFT rozszerzonej o technikę uzupełniania zerami w rozdziale 5.

Przedstawioną tu linearyzację charakterystyki częstotliwościowej okna danych wykorzystano do linearyzacji widma mierzonego sygnału, uzyskując równania metody LIDFT (rozd. 3.3).

3.3. LINEARYZACJA WIDMA SYGNAŁU I RÓWNANIA LIDFT

Przedstawiona w rozdziale 3.2 (oraz na rys. 5) linearyzacja charakterystyki częstotliwościowej okna $W(\lambda)$ przez funkcję $\hat{W}_k(\lambda)$ umożliwi aproksymować (otrzymany w wyniku zastosowania okna danych w_n oraz dyskretnego przekształcenia Fouriera), ciąg F_n , będący wartościami ciągłej funkcji $F(\lambda)$ dla argumentów $\lambda = n$ ($n = -N/2, \dots, N/2 - 1$):

$$F_n = F(\lambda = n) = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} y_i w_i e^{-j2\pi n i / N}, \quad n = -N/2, \dots, N/2 - 1. \quad (38)$$

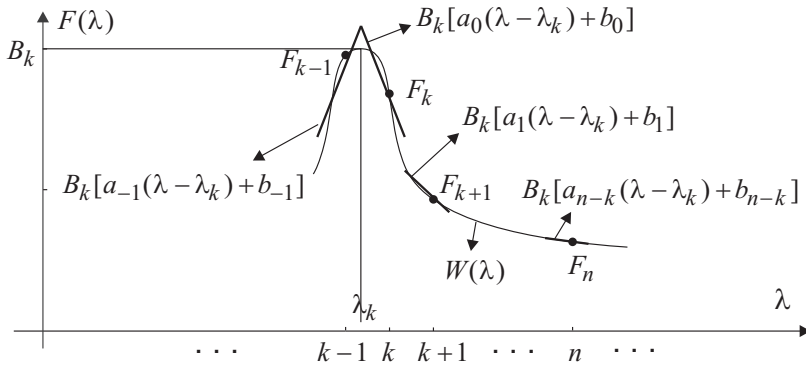
przez ciąg:

$$F_n \cong B_k [a_{n-k}(n - \lambda_k) + b_{n-k}], \quad n = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (39)$$

dla sygnału złożonego z jednej oscylacji zespolonej $B_k e^{j2\pi\lambda_k n / N}$ o amplitudzie B_k i częstotliwości unormowanej $\lambda_k = f_k NT$ spełniającej warunek $\lambda_k \in \langle k-1, k \rangle$ (rys. 8).

Uogólniając tę zależność na przypadek sumy N oscylacji zespolonych o częstotliwościach unormowanych $\lambda_{-N/2}, \dots, \lambda_{N/2-1}$ i amplitudach $B_{-N/2}, \dots, B_{N/2-1}$ otrzymujemy:

$$F_n \cong \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} B_i [a_{n-i}(n - \lambda_i) + b_{n-i}], \quad n = -N/2, \dots, N/2 - 1. \quad (40)$$



Rys. 8. Aproksymacja widma jednej oscylacji o częstotliwości λ_k i amplitudzie B_k
 Fig. 8. The approximation of spectrum for one oscillation with frequency λ_k and amplitude B_k

Wprowadzamy zmienną γ_i zgodnie ze wzorem

$$\gamma_i = \lambda_i - \left(i - \frac{1}{2}\right), \quad (41)$$

czyli

$$\lambda_i = \gamma_i + \left(i - \frac{1}{2}\right), \quad (42)$$

co oznacza, że zamiast wartości częstotliwości unormowanych λ_i wprowadzamy wartość $\gamma_i \in \langle -1/2, 1/2 \rangle$, którą nazwiemy poprawką częstotliwości unormowanej dla i -tej oscylacji (poprawkę w stosunku do częstotliwości równej $(i - 1/2)$). Podstawiając zależność (42) do zależności (40) otrzymujemy:

$$F_n \cong \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} B_i \left[a_{n-i} \left(n - i + \frac{1}{2} \right) + b_{n-i} \right] - \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} B_i \gamma_i a_{n-i}, \quad n = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (43)$$

lub w postaci macierzowej

$$\mathbf{F}_{N \times 1} = \mathbf{V}_{N \times 2N} \cdot \mathbf{B}_{2N \times 1}, \quad (44)$$

gdzie

$$\mathbf{F}_{N \times 1} = [F_n]^T = [F_{-N/2}, \dots, F_{N/2-1}]^T, \quad (45)$$

$$\mathbf{V}_{N \times 2N} = [V'_{ni} \quad V''_{ni}] = \begin{bmatrix} a_{n-i} \left(n-i + \frac{1}{2} \right) + b_{n-i} & -a_{n-i} \\ \frac{1}{2} a_0 + b_0 & \cdots & \frac{1}{2} a_{-(N-1)} + b_{-(N-1)} & -a_0 & \cdots & -a_{-(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} a_{N-1} + b_{N-1} & \cdots & \frac{1}{2} a_0 + b_0 & -a_{N-1} & \cdots & -a_0 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{2N \times 1} &= [B_i \quad B_i \cdot \gamma_i]^T \\ &= [B_{-N/2} \quad \cdots \quad B_{N/2-1} \quad B_{-N/2} \cdot \gamma_{-N/2} \quad \cdots \quad B_{N/2-1} \cdot \gamma_{N/2-1}]^T. \end{aligned} \quad (47)$$

Zależność (44) zakłada, że sygnał zawiera N oscylacji zespolonych, każda o częstotliwości unormowanej $\lambda_i \in \langle i-1, i \rangle$ (czyli o poprawce częstotliwości unormowanej γ_i) i amplitudzie B_i . Równanie (44) nie ma wtedy jednoznacznego rozwiązania ze względu na zmienne B_i i $B_i \gamma_i$, ponieważ nie można wyznaczyć $2N$ zmiennych na podstawie N równań. Zakładając, że w sygnale występuje tylko P oscylacji zespolonych o częstotliwościach $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_P}$, zależność (44) przyjmuje postać

$$\mathbf{F}_{N \times 1} = \mathbf{V}_{N \times 2P} \cdot \mathbf{B}_{2P \times 1}, \quad (48)$$

gdzie macierze \mathbf{F} , \mathbf{V} oraz \mathbf{B} zdefiniowane są jak w zależnościach (45–47), z tą różnicą, że zamiast $i = -N/2, \dots, N/2-1$ jest $i = i_1, \dots, i_P$ (bez zmian pozostaje zakres $n = -N/2, \dots, N/2-1$):

$$\mathbf{F}_{N \times 1} = [F_n]^T, \quad (49)$$

$$\mathbf{V}_{N \times 2P} = [V'_{ni} \quad V''_{ni}] = \begin{bmatrix} a_{n-i} \left(n-i + \frac{1}{2} \right) + b_{n-i} & -a_{n-i} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} a_{N-1} + b_{N-1} & -a_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$\mathbf{B}_{2P \times 1} = [B_i \quad C_i]^T, \quad (51)$$

$$i = i_1, \dots, i_P, \quad (52)$$

$$n = -N/2, \dots, N/2-1. \quad (53)$$

Przeanalizujmy teraz rozwiązanie równania (48). Rozwiązaniem tym w przypadku, gdy $P = N/2$, jest zależność:

$$\mathbf{B}_{N \times 1} = \mathbf{V}_{N \times N}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{N \times 1}. \quad (54)$$

Załóżmy, że $P < N/2$, a sygnał mierzony jest zniekształcony szumem addytywnym. Wówczas w celu rozwiązania równania (48) ze względu na $\mathbf{B}_{2P \times 1}$ można zastosować

metodę najmniejszych kwadratów. Metoda ta, zastosowana do równania (48), daje równanie ([20]):

$$\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{V}^H \cdot \mathbf{F}, \quad (55)$$

gdzie \mathbf{V}^H jest macierzą hermitowską macierzy \mathbf{V} . Jeżeli wyznacznik macierzy $(\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V})$ jest różny od zera, to rozwiązaniem równania (55) jest zależność

$$\mathbf{B} = (\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V})^{-1} \cdot \mathbf{V}^H \cdot \mathbf{F}, \quad (56)$$

Równanie (55) i odpowiadająca mu zależność (56) stanowią podstawowe równania metody liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera. Po wyznaczeniu na ich podstawie wektora $\mathbf{B}_{2P \times 1} = [B_i \ C_i]^T$ wyznacza się poprawki częstotliwości z zależności $\gamma_i = C_i / B_i$, a na podstawie otrzymanych wartości B_i oraz $\lambda_i = \text{Re } \gamma_i + (i - 0,5)$ obliczamy A_i, f_i, φ_i . Wartości $\text{Im } \gamma_i$ wykorzystuje się do oceny wstępnej lokalizacji składowych oscylacji w widmie, wymaganej w metodzie LIDFT.

Podstawową zaletą równania (55) jest to, że jest ono liniowe nie tylko ze względu na B_i , ale i na C_i , co pozwala na bezpośrednie wyznaczenie amplitudy i częstotliwości składowych oscylacji. Wadą natomiast jest operowanie na dużych macierzach $\mathbf{V}_{N \times 2P}$, $\mathbf{F}_{N \times 1}$ w przypadku dużej liczby próbek N . Aby wyeliminować tę wadę przedstawiono w rozdziale 3.4 odpowiednie przekształcenia symboliczne równania (55).

3.4. SYMBOLICZNE PRZEKSZTAŁCENIA RÓWNAŃ LIDFT – ALGORYTM LIDFT

Aby uniknąć operowania na dużych macierzach $\mathbf{V}_{N \times 2P}$, $\mathbf{F}_{N \times 1}$ można odpowiednio przekształcić macierze $\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V}$, $\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{F}$, otrzymując dla nich odpowiednie zależności analityczne.

Wykorzystując zależności (32) i (33) w równaniu (50), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{N \times 2P} &= [V'_{ni} \ V''_{ni}] = \left[a_{n-i} \left(n - i + \frac{1}{2} \right) + b_{n-i} \quad -a_{n-i} \right] \\ &= \left[\sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m \left[\alpha_{(n-i)m} \left(n - i + \frac{1}{2} \right) + \beta_{(n-i)m} \right] \quad - \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m \alpha_{(n-i)m} \right]_{N \times 2P}, \quad (57) \end{aligned}$$

a po uwzględnieniu w tym wzorze zależności (101) i (102) z podrozdziału 3.5 otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{N \times 2P} &= \left[\sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m e^{j2\pi mi/N} \left[\alpha_{nm} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \beta_{nm} \right] - \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m e^{j2\pi mi/N} \alpha_{nm} \right] \\
&= \left[\sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m e^{j2\pi mi/N} \delta_{nm} - \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m e^{j2\pi mi/N} \alpha_{nm} \right]_{N \times 2P}, \quad (58) \\
&\text{gdzie } \delta_{nm} = \alpha_{nm} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \beta_{nm}.
\end{aligned}$$

Macierz kwadratowa $\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V}$, występująca w równaniach (55) i (56), ma wówczas postać:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} X'_{ik} & X''_{ik} \\ X'''_{ik} & X''''_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_{ni} & V''_{ni} \end{bmatrix}^H \cdot \begin{bmatrix} V'_{nk} & V''_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_{in} \\ V''_{in} \end{bmatrix}^* \cdot \begin{bmatrix} V'_{nk} & V''_{nk} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m e^{j2\pi mi/N} \delta_{nm} \\ \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m e^{j2\pi mi/N} (-\alpha_{nm}) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m e^{j2\pi mk/N} \delta_{nm} & \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m e^{j2\pi mk/N} (-\alpha_{nm}) \end{bmatrix} \quad (59) \\
&= \begin{bmatrix} \sum_m \sum_r w_m w_r e^{j2\pi(rk-mi)/N} \sum_n \delta_{nm}^* \delta_{nr} & -\sum_m \sum_r w_m w_r e^{j2\pi(rk-mi)/N} \sum_n \delta_{nm}^* \alpha_{nr} \\ -\sum_m \sum_r w_m w_r e^{j2\pi(rk-mi)/N} \sum_n \alpha_{nm}^* \delta_{nr} & \sum_m \sum_r w_m w_r e^{j2\pi(rk-mi)/N} \sum_n \alpha_{nm}^* \alpha_{nr} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

którą, po uwzględnieniu zależności (89), (95) i (100) z rozdziału 3.5, można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} X'_{ik} & X''_{ik} \\ X'''_{ik} & X''''_{ik} \end{bmatrix} = \\
&= N \begin{bmatrix} \sum_n w_n^2 \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2 e^{j2\pi n(k-i)/N} & -j6 \sum_n w_n^2 \frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \frac{\sin x_n}{x_n} e^{j2\pi n(k-i)/N} \\ j6 \sum_n w_n^2 \frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \frac{\sin x_n}{x_n} e^{j2\pi n(k-i)/N} & 36 \sum_n w_n^2 \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right)^2 e^{j2\pi n(k-i)/N} \end{bmatrix}. \quad (60)
\end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$r_m = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n^2 \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2 e^{-j2\pi nm/N}, \quad (61)$$

$$s_m = 6j \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n^2 \frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \frac{\sin x_n}{x_n} e^{-j2\pi nm/N}, \quad (62)$$

$$t_m = 36 \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n^2 \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right)^2 e^{-j2\pi nm/N}, \quad (63)$$

równanie (60) można zapisać w postaci

$$\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \begin{bmatrix} X'_{ik} & X''_{ik} \\ X'''_{ik} & X''''_{ik} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} r_{i-k} & -s_{i-k} \\ s_{i-k} & t_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P}. \quad (64)$$

Ta zależność określa macierz kwadratową występującą po lewej stronie równania (55). Prawą stronę tego równania można, na podstawie zależności (38) oraz (58), przekształcić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^H \cdot \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} Y'_i \\ Y''_i \end{bmatrix} = [V'_{ni} \quad V''_{ni}]^H \cdot [F_n] = \begin{bmatrix} V'_{in} \\ V''_{in} \end{bmatrix}^* \cdot [F_n] \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m e^{-j2\pi mi/N} \left[\alpha_{nm} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \beta_{nm} \right] \\ - \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_m e^{-j2\pi mi/N} \alpha_{nm}^* \end{bmatrix}_{2P \times N} \begin{bmatrix} \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} y_i w_i e^{-j2\pi ni/N} \end{bmatrix}_{N \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \sum_{r=-N/2}^{N/2-1} w_m w_r y_r e^{-j2\pi mi/N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \left[\alpha_{nm} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \beta_{nm} \right]^* e^{-j2\pi nr/N} \\ - \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \sum_{r=-N/2}^{N/2-1} w_m w_r y_r e^{-j2\pi mi/N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \alpha_{nm}^* e^{-j2\pi nr/N} \end{bmatrix}_{2P \times 1} \end{aligned} \quad (65)$$

a po uwzględnieniu zależności (97) i (100) z rozdziału 3.5 otrzymujemy

$$\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Y'_i \\ Y''_i \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n^2 \frac{\sin x_n}{x_n} e^{jx_n} e^{-j2\pi ni/N} \\ j6 \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n^2 \frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} e^{jx_n} e^{-j2\pi ni/N} \end{bmatrix}_{2P \times 1} \quad (66)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$u_m = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n^2 \frac{\sin x_n}{x_n} e^{jx_n} e^{-j2\pi nm/N}, \quad (67)$$

$$v_m = 6j \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n^2 \frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} e^{ix_n} e^{-j2\pi nm / N}, \quad (68)$$

można równanie (66) zapisać w postaci

$$\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Y_i' \\ Y_i'' \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_{2P \times 1}. \quad (69)$$

Podstawiając zależności (64) i (69) do równania (55) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} r_{i-k} & -s_{i-k} \\ s_{i-k} & t_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \cdot \begin{bmatrix} B_k \\ B_k \gamma_k \end{bmatrix}_{2P \times 1} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_{2P \times 1}. \quad (70)$$

Jego rozwiązaniem, odpowiadającym równaniu (56), jest równanie:

$$\begin{bmatrix} B_k \\ B_k \gamma_k \end{bmatrix}_{2P \times 1} = \begin{bmatrix} r_{i-k} & -s_{i-k} \\ s_{i-k} & t_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_{2P \times 1}. \quad (71)$$

Uwzględniając wzór na algorytm FFT

$$DFT_k \{y_n\} = FFT_k \{y_n\} = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi kn / N} \quad (72)$$

oraz przenumerywanie próbek według wzoru:

$$\begin{aligned} F_k &= F\left(f = \frac{k}{NT}\right) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n y_n e^{-j2\pi nk / N} = \sum_{n=0}^{N-1} w_n y_n e^{-j2\pi \left(n - \frac{N}{2}\right)k / N} \\ &= e^{j\pi k} \sum_{n=0}^{N-1} w_n y_n e^{-j2\pi nk / N} = (-1)^k \sum_{n=0}^{N-1} w_n y_n e^{-j2\pi nk / N} = (-1)^k \cdot FFT_k \{w_n y_n\}, \end{aligned} \quad (73)$$

otrzymujemy na podstawie równań (61–63), (67), (68)

$$r_m = (-1)^m FFT_m \left\{ w_n^2 \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2 \right\}, \quad (74)$$

$$s_m = 6j(-1)^m FFT_m \left\{ w_n^2 \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right) \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right) \right\}, \quad (75)$$

$$t_m = 36(-1)^m FFT_m \left\{ w_n^2 \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right)^2 \right\}, \quad (76)$$

$$u_m = (-1)^m FFT_m \left\{ y_n w_n^2 \frac{\sin x_n}{x_n} e^{jx_n} \right\}, \quad (77)$$

$$v_m = 6j(-1)^m FFT_m \left\{ y_n w_n^2 \frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} e^{jx_n} \right\}. \quad (78)$$

Uwzględniając zależność $e^{-j2\pi(-n)/N} = e^{-j2\pi(N-n)/N}$ możemy przyjąć dla równań (71) i (74–78), zamiast $i, k, m \in \langle -N/2, \dots, N/2-1 \rangle$, warunek

$$i, k, m \in \langle 0, \dots, N-1 \rangle \quad (79)$$

pamiętając, że $\{r_{-N/2}, \dots, r_{-1}, r_0, r_1, \dots, r_{N/2-1}\} = \{r_{N/2}, r_{N/2+1}, \dots, r_{N-1}, r_0, r_1, \dots, r_{N/2-1}\}$ i analogicznie dla $s_n, t_n, u_n, v_n, B_n, \gamma_n$. Zależności (71), (74–79) wyznaczają algorytm LIDFT, którego właściwości zostały szerzej opisane w rozdziale 2.

3.5. DODATEK DLA ROZDZ. 3.4:

WYBRANE ZALEŻNOŚCI MATEMATYCZNE DOTYCZĄCE FUNKCJI $f(\lambda) = e^{\pm j2\pi\lambda/N}$

Niniejszy dodatek zawiera wyprowadzenia niektórych zależności matematycznych wykorzystywanych w rozdziale 3.4, a związanych z właściwościami funkcji $f(\lambda) = e^{\pm j2\pi\lambda/N}$. Podstawowa jej właściwość wynikająca z ortogonalności funkcji trygonometrycznych jest dana wzorem

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm j2\pi nm/N} = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{\pm j2\pi nm/N} = \begin{cases} N, & \text{dla } m = 0 \\ 0, & \text{dla } m = -(N-1), \dots, -1, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (80)$$

Ponadto będziemy korzystać z definicji (34) i (35) wprowadzonych w rozdziale 3.2, tutaj oznaczonych jako (81) i (82)

$$\alpha_{in} = 12 \int_i^{i+1} \left[\lambda - \left(i + \frac{1}{2} \right) \right] e^{-j2\pi n \lambda / N} d\lambda, \quad (81)$$

$$\beta_{in} = 12 \int_i^{i+1} \left[\left(i + \frac{1}{2} \right)^2 - \lambda \left(i + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{12} \right] e^{-j2\pi n \lambda / N} d\lambda, \quad (82)$$

Wprowadźmy, na potrzeby niniejszego dodatku, definicje (83) i (84)

$$u_n = \int_{-1/2}^{1/2} x e^{-j2\pi n x / N} dx, \quad (83)$$

$$v_n = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi nx/N} dx. \quad (84)$$

Na podstawie zależności (80–84) i innych znanych zależności matematycznych uzyskujemy dalsze zależności (85–102).

$$u_n = \frac{j}{2} \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right), \quad x_n = \pi n / N, \quad (85)$$

$$v_n = \frac{\sin x_n}{x_n}, \quad x_n = \pi n / N. \quad (86)$$

Dowód (85) i (86) uzyskujemy przez obliczenie całek równań (83) i (84).

$$\alpha_{in} = 12u_n e^{-j2\pi n(i+1/2)/N}. \quad (87)$$

$$\beta_{in} = \left[v_n - 12 \left(i + \frac{1}{2} \right) u_n \right] e^{-j2\pi n(i+1/2)/N}. \quad (88)$$

Dowód (87) i (88) uzyskujemy przez podstawienie $\lambda = x + (i+1/2)$ w równaniach (81) i (82) i wykorzystanie definicji (83) i (84).

$$\sum_{i=-N/2}^{N/2-1} \alpha_{in} \alpha_{im}^* = \begin{cases} 36N \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right)^2, & \text{dla } m = n. \\ 0, & \text{dla } m \neq n. \end{cases} \quad (89)$$

Dowód:

$$\begin{aligned} \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} \alpha_{in} \alpha_{im}^* & \stackrel{(87)}{=} 144u_n u_m e^{j\pi(m-n)/N} \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} e^{j2\pi i(m-n)/N} \stackrel{(80)}{=} \\ & = \begin{cases} 144Nu_n u_n^* \stackrel{(85)}{=} 36N \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right)^2, & \text{dla } m = n \\ 0 & \text{dla } m \neq n. \end{cases} \\ & \int_i^{i+1} e^{-j2\pi n \lambda / N} d\lambda = v_n e^{-j2\pi n(i+1/2)/N}. \end{aligned} \quad (90)$$

Dowód (90) uzyskujemy przez podstawienie $\lambda = x + (i+1/2)$ i obliczenie całki.

$$\sum_{i=-N/2}^{N/2-1} \int_i^{i+1} e^{\pm j2\pi(m-n)\lambda/N} d\lambda = \begin{cases} N, & \text{dla } m = n \\ 0, & \text{dla } m \neq n. \end{cases} \quad (91)$$

Dowód (91) uzyskujemy przez policzenie całki lewej strony i wykorzystanie właściwości (80).

$$\left(i + \frac{1}{2}\right)\alpha_{in} + \beta_{in} = \int_i^{i+1} e^{-j2\pi n\lambda/N} d\lambda. \quad (92)$$

$$\left(i + \frac{1}{2}\right)^2 \alpha_{in} + \left(i + \frac{1}{2}\right)\beta_{in} + \frac{1}{12}\alpha_{in} = \int_i^{i+1} \lambda e^{-j2\pi n\lambda/N} d\lambda. \quad (93)$$

Dowód równości (92) i (93) przez podstawienie do ich lewej strony (81) i (82).

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} \left(\int_i^{i+1} e^{-j2\pi m\lambda/N} d\lambda \right) \cdot \left(\int_i^{i+1} e^{j2\pi n\lambda/N} d\lambda \right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{dla } m \neq n \\ N \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2, & \text{dla } m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (94)$$

Dowód (94) wykorzystuje zależności (90), (80) i (86).

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} \left[\left(i + \frac{1}{2}\right)\alpha_{in} + \beta_{in} \right] \cdot \left[\left(i + \frac{1}{2}\right)\alpha_{im} + \beta_{im} \right]^* \\ &= \begin{cases} 0, & \text{dla } m \neq n \\ N \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2, & \text{dla } m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (95)$$

Dowód (95) wykorzystuje zależności (92) i (94).

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \int_k^{k+1} (e^{-j2\pi n\lambda/N} - \lambda\alpha_{kn} - \beta_{kn})(e^{j2\pi n\lambda/N} - \lambda\alpha_{km}^* - \beta_{km}^*) d\lambda \\ &= \begin{cases} N \left[1 - 3 \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right)^2 - \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2 \right], & x_n = \pi n / N, \text{ dla } m = n \\ 0, & \text{dla } m \neq n. \end{cases} \end{aligned} \quad (96)$$

Dowód zależności (96):

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \int_k^{k+1} (e^{-j2\pi n\lambda/N} - \lambda\alpha_{kn} - \beta_{kn})(e^{j2\pi m\lambda/N} - \lambda\alpha_{km}^* - \beta_{km}^*) d\lambda \stackrel{W=e^{j2\pi\lambda/N}}{=} \sum_k \int_k^{k+1} (W^{m-n} - \\
& - \beta_{km}^* W^{-n} - \beta_{kn} W^m - \alpha_{km}^* \lambda W^{-n} - \alpha_{kn} \lambda W^m + \alpha_{kn} \alpha_{km}^* \lambda^2 + \lambda(\alpha_{kn} \beta_{km}^* + \alpha_{km}^* \beta_{kn}) + \beta_{kn} \beta_{km}^*) d\lambda = \\
& \stackrel{(92)}{=} \sum_k \left\{ \int_k^{k+1} e^{j2\pi\lambda(m-n)/N} d\lambda - \frac{1}{12} \alpha_{kn} \alpha_{km}^* - \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha_{kn} + \beta_{kn} \right] \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha_{km}^* + \beta_{km}^* \right] \right\} \stackrel{(89)(91)}{(95)} = \\
& = \begin{cases} N \left[1 - 3 \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right)^2 - \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2 \right], & \text{dla } m = n \\ 0 & \text{dla } m \neq n. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \alpha_{kn} e^{j2\pi mk/N} = \begin{cases} j6N e^{-jx_n} \frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n}, & x_n = \pi n / N, \text{ dla } m = n \\ 0, & \text{dla } m \neq n. \end{cases} \quad (97)$$

Dowód (97) uzyskujemy przez wykorzystanie zależności (87), (85) i (80).

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \alpha_{kn} \int_k^{k+1} e^{j2\pi m\lambda/N} d\lambda = \begin{cases} j6N \frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \frac{\sin x_n}{x_n}, & x_n = \pi n / N, \text{ dla } m = n \\ 0, & \text{dla } m \neq n. \end{cases} \quad (98)$$

Dowód (98) uzyskujemy, wykorzystując (90), (87), (80) oraz (85) i (86).

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \alpha_{kn} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha_{km} + \beta_{km} \right]^* = \begin{cases} j6N \frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \frac{\sin x_n}{x_n}, & \text{dla } m = n \\ 0, & \text{dla } m \neq n. \end{cases} \quad (99)$$

Dowód (99) wykorzystuje zależności (92) i (98).

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha_{km} + \beta_{km} \right] e^{j2\pi nk/N} = \begin{cases} N e^{-jx_n} \frac{\sin x_n}{x_n}, & x_n = \pi n / N, \text{ dla } m = n \\ 0, & \text{dla } m \neq n. \end{cases} \quad (100)$$

Dowód (100) uzyskujemy, wykorzystując (90), (92), (80) oraz (86).

$$\alpha_{(i+k)n} = e^{-j2\pi nk/N} \alpha_{in}. \quad (101)$$

Dowód (101) uzyskujemy na podstawie równania (87).

$$\left[\left(i + k \right) + \frac{1}{2} \right] \alpha_{(i+k)n} + \beta_{(i+k)n} = e^{-j2\pi nk/N} \left[\left(i + \frac{1}{2} \right) \alpha_{in} + \beta_{in} \right]. \quad (102)$$

Dowód (102) uzyskujemy na podstawie równania (90) oraz (92).

4. ANALIZA METROLOGICZNA METODY LIDFT Z DEDYKOWANYM OKNEM DANYCH

4.1. DEDYKOWANE DLA METODY LIDFT PARAMETRYCZNE OKNO DANYCH

Przypomnijmy, że metoda LIDFT umożliwia estymację parametrów A_i , f_i ($\omega_i = 2\pi f_i$), φ_i sygnału $y(t)$ modelowanego zależnością (gdzie: $B_i = A_i e^{j\varphi_i} / 2j$, $z_i = e^{j\omega_i}$, $P = 2M$, $B_{P-i+1} = B_i^*$, $z_{P-i+1} = z_i^*$):

$$y(t) = \sum_{i=1}^M A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=1}^P B_i z_i^t. \quad (103)$$

Parametry A_i , f_i (lub $\omega_i = 2\pi f_i$), φ_i są określane z równania $A_i e^{j\varphi_i} / 2j = B_i$ oraz $f_i = \lambda_i / NT = \left[\gamma_i + \left(i - \frac{1}{2} \right) \right] / NT$ na podstawie wektora:

$$\mathbf{B}_{2P \times 1} = [B_i \quad B_i \cdot \gamma_i]^T = [B_{i_1} \quad \dots \quad B_{i_p} \quad B_{i_1} \gamma_{i_1} \quad \dots \quad B_{i_p} \gamma_{i_p}]^T, \quad (104)$$

który jest rozwiązaniem liniowego równania macierzowego metody LIDFT:

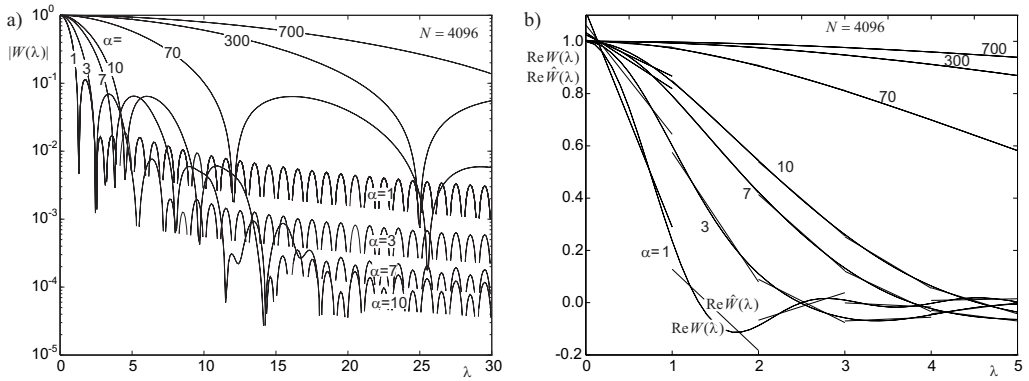
$$\mathbf{V}_{N \times 2P}^H \cdot \mathbf{V}_{N \times 2P} \cdot \mathbf{B}_{2P \times 1} = \mathbf{V}_{N \times 2P}^H \cdot \mathbf{F}_{N \times 1}, \quad (105)$$

gdzie \mathbf{F} jest DFT próbek sygnału pomnożonych przez wartości okna danych w_n , macierz \mathbf{V} jest wyznaczona przez charakterystykę częstotliwościową okna oraz \mathbf{V}^H jest macierzą hermitowską macierzy \mathbf{V} . Równanie (105) zakłada, że sygnał zawiera P oscylacji zespolonych, każda o częstotliwości unormowanej $\lambda_i \in \langle i-1, i \rangle$ i amplitudzie B_i .

Wstępna lokalizacji składowych w widmie (wybór i_1, \dots, i_p) i stosowane okno danych (wybór ciągu w_n) są nazywane warunkami początkowymi metody LIDFT.

Spośród wielu okien możliwych do zastosowania w metodzie LIDFT parametryczne (z parametrem α), linearyzujące okno danych ([4]) o charakterystyce częstotliwościowej przedstawionej na rysunku 9, dane jest wzorem wykorzystującym współczynniki c_n z równania (37):

$$w_n = N \frac{1 - e^{-\alpha^2 x_n^4}}{c_n} \left(\sum_{i=-N/2}^{N/2-1} \frac{1 - e^{-\alpha^2 x_i^4}}{c_i} \right)^{-1} \quad (106)$$



Rys. 9. a) Charakterystyka częstotliwościowa linearyzującego okna danych w metodzie LIDFT, b) funkcja linearyzująca dla pewnych wartości parametru α

Fig. 9. a) Frequency characteristic of linearizing data window in the LIDFT method, b) linearizing function for some values of parameter α

4.2. PRZYPADK JEDNEJ OSCYLACJI ZESPOLONEJ Z SZUMEM

Założmy, że sygnał zawiera, oprócz jednej oscylacji zespolonej o amplitudzie B_k i częstotliwości unormowanej $\lambda_k = f_k \cdot NT$, również szum biały Δy_n o rozkładzie $N(0, \sigma)$:

$$y_n = B_k e^{j2\pi n \lambda_k / N} + \Delta y_n. \quad (107)$$

Liniowość równania (105) umożliwiła wyprowadzenie zależności na wartości oczekiwane $E|\hat{B}_k|$, $E\hat{\lambda}_k$ i wariancje $\sigma_{|\hat{B}_k|}^2 = \text{Var}|\hat{B}_k|$, $\sigma_{\hat{\lambda}_k}^2 = \text{Var}\hat{\lambda}_k$ estymatorów $|\hat{B}_k|$, $\hat{\lambda}_k$ i ich obliczenie dla najmniej korzystnych warunków pomiaru (np. faz). Stąd określono wartości błędów systematycznych $\Delta_s \lambda_k = |E\hat{\lambda}_k - \lambda_k|$, $\delta_s |B_k| = |(E|\hat{B}_k| - |B_k|) / |B_k|$ oraz losowych $\Delta_\sigma \lambda_k = \sigma_{\hat{\lambda}_k}$, $\delta_\sigma |B_k| = \sigma_{|\hat{B}_k|}$:

$$\max \Delta_s \lambda_k \cong \frac{0,0314}{\alpha} + \frac{1,37 \cdot \alpha}{N \cdot \text{SNR}_k}, \quad (108)$$

$$\max \delta_s |B_k| \cong \frac{0,131}{\alpha} + \frac{1,37 \cdot \alpha^{0,5}}{N \cdot \text{SNR}_k}, \quad (109)$$

$$\max \Delta_\sigma \lambda_k \cong \frac{1,06 \cdot \alpha^{0,75}}{\sqrt{N \cdot \text{SNR}_k}}, \quad (110)$$

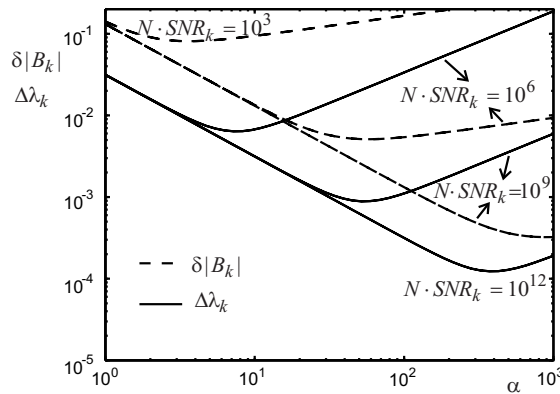
$$\max \delta_{\sigma} |B_k| \cong \frac{1,66 \cdot \alpha^{0,25}}{\sqrt{N \cdot SNR_k}}. \quad (111)$$

Otrzymane błędy uzależnione są od wartości parametru α linearyzującego okna danych (z rys. 9) oraz iloczynu $N \cdot SNR_k$ liczby próbek N i stosunku sygnał/szum

$SNR_k = 2 \frac{|B_k|^2}{\sigma^2}$ (jest to stosunek sygnał/szum oscylacji sinusoidalnej

$A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$ złożonej z dwóch oscylacji zespolonych $B_k z_k^t$ i $B_k^*(z_k^t)^*$).

Dla $N \cdot SNR_k \gg 1$ składniki błędu systematycznego w zależnościach (108) i (109) spowodowane szumem są pomijalne w stosunku do błędów losowych (110), (111).



Rys. 10. Całkowite błędy metody LIDFT określenia λ_k i $|B_k|$ dla przypadku jednej oscylacji zespolonej (zależn. 112, 113)

Fig. 10. Total errors of the LIDFT method of determination of λ_k and $|B_k|$ in the case of single complex oscillation (Eqs. 112, 113)

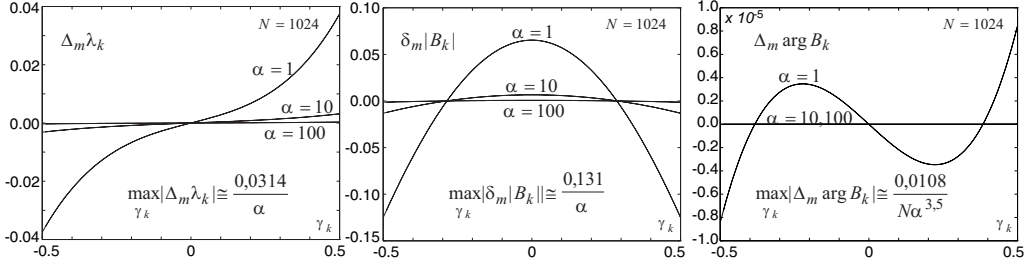
Błąd całkowity jest sumą błędu systematycznego $\Delta_s \lambda_k$ oraz losowego $a_p \cdot \Delta_s \lambda_k$ (analogicznie $\delta_s |B_k|$ oraz $a_p \cdot \delta_s |B_k|$) z odpowiednim poziomem ufności p . Błąd całkowity można też wyrazić przez określenie błędu średniokwadratowego estymacji (jako pierwiastka z sumy kwadratu obciążenia i wariancji estymatora), który – po uwzględnieniu podanych zależności – dla metody LIDFT przyjmuje postać:

$$\Delta \lambda_k \cong \sqrt{\left(\frac{0,0314}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1,06 \cdot \alpha^{0,75}}{\sqrt{N \cdot SNR_k}}\right)^2}, \quad (112)$$

$$\delta |B_k| \cong \sqrt{\left(\frac{0,131}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1,66 \cdot \alpha^{0,25}}{\sqrt{N \cdot SNR_k}}\right)^2}. \quad (113)$$

Błędy te przedstawiono na rysunku 10 w funkcji wartości parametru α dla kilku wartości $N \cdot SNR_k$.

Wartość parametru α optymalna ze względu na dokładność określenia λ_k (oznaczmy ją przez α_λ) i wartość optymalna ze względu na dokładność określenia $|B_k|$ (oznaczmy ją przez $\alpha_{|B|}$) są dane zależnościami:



Rys. 11. Zależność błędów metody LIDFT dla przypadku jednej oscylacji zespolonej od jej lokalizacji na osi częstotliwości (γ_k)

Fig. 11. The LIDFT method errors for the case of one complex oscillation depending on its localiyation in the frequenz axis (γ_k)

$$\alpha_\lambda \cong 0,145 \cdot (N \cdot SNR_k)^{0,286}, \quad (114)$$

$$\alpha_{|B|} \cong 0,228 \cdot (N \cdot SNR_k)^{0,4}. \quad (115)$$

Uzyskiwane minimalne wartości błędów wynoszą wówczas:

$$\Delta \lambda_{k \min} \cong \frac{0,048}{\alpha_\lambda} \cong 0,33 \cdot (N \cdot SNR_k)^{-0,286}, \quad (116)$$

$$\delta |B_k|_{\min} \cong \frac{0,293}{\alpha_{|B|}} \cong 1,28 \cdot (N \cdot SNR_k)^{-0,4}. \quad (117)$$

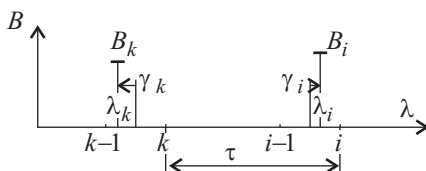
Zależność błędów metody $\Delta_m \lambda_k$, $\delta_m |B_k|$, w funkcji wartości γ_k pokazana jest na rysunku 11. Wartości maksymalne tych błędów metody (dla $\gamma_k = \pm 0,5$) są składowymi błędów systematycznych we wzorach (108), (109) niezależnymi od szumu.

4.3. PRZYPADK SYGNAŁU WIELOCZĘSTOTLIWOŚCIOWEGO

Dokładność estymacji parametrów składowych oscylacji zależy od jakości aproksymacji charakterystyki okna funkcjami liniowymi. Dla wielu składowych oscylacji okazuje się, że zbyt duża wartość α powoduje wzrost błędów estymacji, ponieważ ze wzrostem α następuje znaczne poszerzenie listka głównego (rys. 9, 10) i zwiększa się

wzajemna interferencja sąsiednich składowych oscylacji w widmie. Dla dużych wartości parametru α składnik błędu estymacji, wynikający z obecności sąsiednich składowych, przewyższa składnik błędu występujący dla przypadku jednej oscylacji i w rezultacie następuje wzrost całkowitego błędu metody ze wzrostem wartości α . Te ogólne wnioski uzasadnimy szczegółowo w analizie metrologicznej dla przypadku dwóch oscylacji zespolonych, którą można uogólnić na przypadek wielu oscylacji przez odpowiednie sumowanie błędów pochodzących od każdej składowej do wyznaczenia maksymalnej wartości błędu całkowitego.

Rozważmy przypadek dwóch oscylacji zespolonych $B_k e^{j2\pi n \lambda_k / N}$ i $B_i e^{j2\pi n \lambda_i / N}$ o amplitudach zespolonych B_k, B_i oraz częstotliwościach unormowanych λ_k, λ_i spełniających warunek $n - 1 < \lambda_n < n$ z odległością między składowymi w widmie (z zaokrągleniem do wartości całkowitej) równej τ (rys. 12).



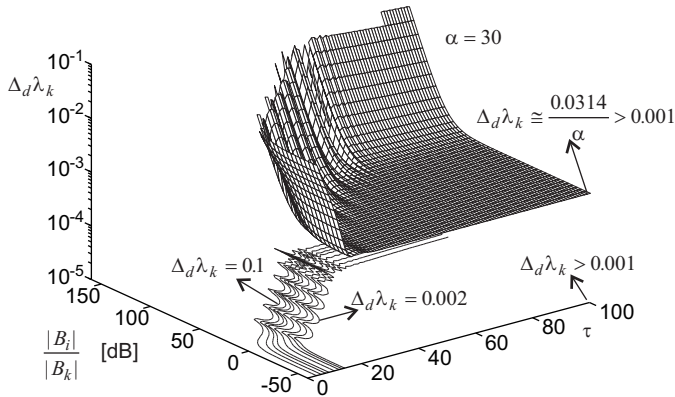
Rys. 12. Definicja parametru τ
Fig. 12. Definition of the parameter τ

Założmy, że celem pomiaru jest wyznaczenie wartości $\lambda_k, |B_k|$. Zastosowanie metody LIDFT pozwala na uzyskanie ich estymatorów $\hat{\lambda}_k, |\hat{B}_k|$ obciążonych błędami metody wynikającymi z przybliżenia rzeczywistej charakterystyki częstotliwościowej okna danych funkcjami liniowymi. Założmy też, że interesuje nas górne oszacowanie błędów deterministycznych, tzn. następujących wartości błędów:

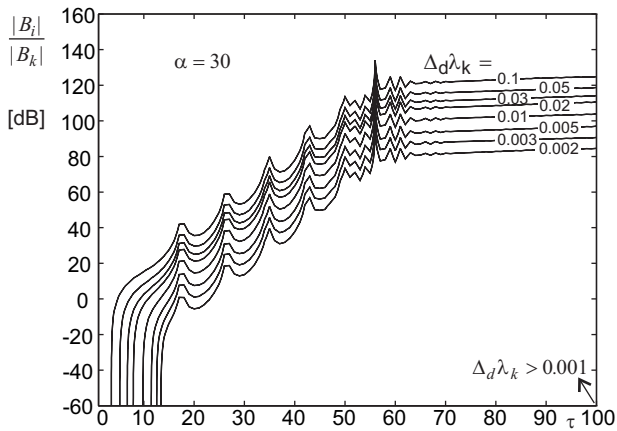
$$\Delta_d \lambda_k \left(\alpha, \tau, \frac{|B_i|}{|B_k|} \right) = \max_{\gamma_k, \gamma_i, \arg B_k, \arg B_i} |\hat{\gamma}_k - \gamma_k|, \quad (118)$$

$$\delta_d |B_k| \left(\alpha, \tau, \frac{|B_i|}{|B_k|} \right) = \max_{\gamma_k, \gamma_i, \arg B_k, \arg B_i} \left| \frac{|\hat{B}_k| - |B_k|}{|B_k|} \right|. \quad (119)$$

Wartości całkowitych błędów deterministycznych $\Delta_d \lambda_k$ i $\delta_d |B_k|$ są więc funkcją trzech parametrów: odległości τ między składowymi na osi częstotliwości (rys. 12), stosunku $|B_i|/|B_k|$ modułów amplitud obu składowych oraz parametru α linearyzującego okna danych. Parametry τ oraz $|B_i|/|B_k|$ są w konkretnym pomiarze zadane przez charakter sygnału, a α jest parametrem linearyzującego okna danych (a więc i pośrednio metody LIDFT), który podlegać powinien optymalizacji.



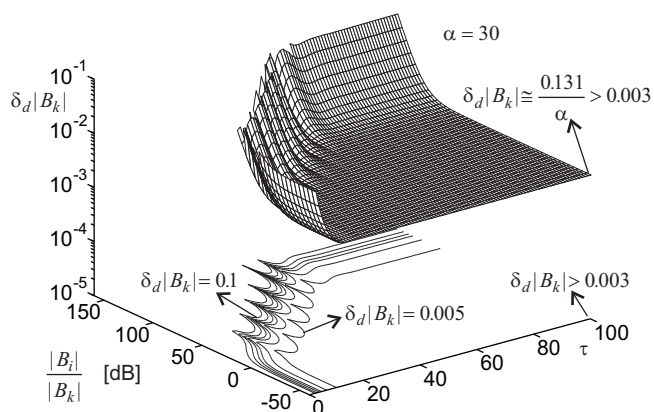
Rys. 13. $\Delta_d\lambda_k$ w funkcji τ oraz $|B_i|/|B_k|$ dla $\alpha = 30$
 Fig. 13. $\Delta_d\lambda_k$ in the function of τ and $|B_i|/|B_k|$ for $\alpha = 30$



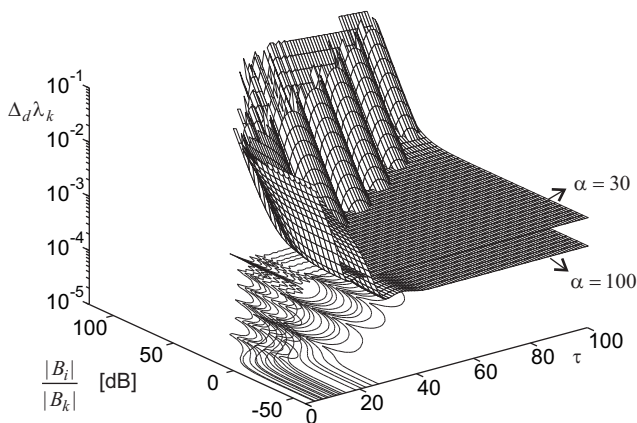
Rys. 14. $\Delta_d\lambda_k$ w funkcji τ oraz $|B_i|/|B_k|$ dla $\alpha = 30$
 Fig. 14. $\Delta_d\lambda_k$ in the function of τ and $|B_i|/|B_k|$ for $\alpha = 30$

Analizę zależności $\delta_d|B_k|$ i $\Delta_d\lambda_k$ od wartości τ , $|B_i|/|B_k|$ oraz α przeprowadzimy na podstawie pseudotrójwymiarowych wykresów zależności $\delta_d|B_k| = \delta_d|B_k|(\tau, |B_i|/|B_k|)$ oraz $\Delta_d\lambda_k = \Delta_d\lambda_k(\tau, |B_i|/|B_k|)$ dla różnych wartości parametru α . Pseudotrójwymiarowe wykresy uzyskano dzięki wykresom powierzchniowym i poziomicowym. Wykresy powierzchniowe są wygodne do przedstawienia zmienności funkcji, a wykresy poziomicowe umożliwiają dokładne określenie, dla jakich wartości argumentów funkcja dwóch zmiennych osiąga wartości narysowanych poziomic.

Przykładowy wykres powierzchniowy jest pokazany na rysunku 13 wraz z narysowanym pod nim, na płaszczyźnie $(\tau, |B_i|/|B_k|)$, wykresem poziomicowym dla warto-

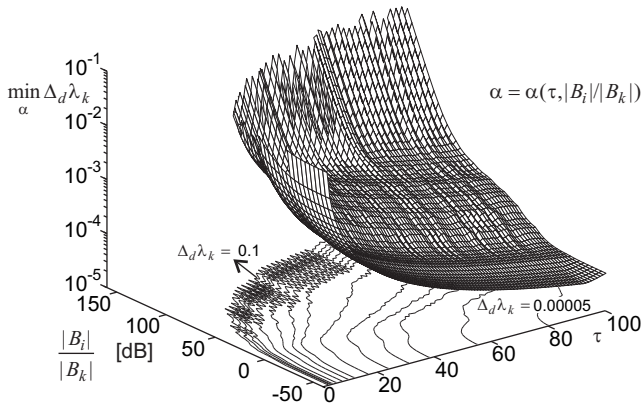


Rys. 15. $\delta_d |B_k|$ w funkcji τ oraz $|B_i|/|B_k|$ dla $\alpha = 30$
 Fig. 15. $\delta_d |B_k|$ in the function of τ and $|B_i|/|B_k|$ for $\alpha = 30$

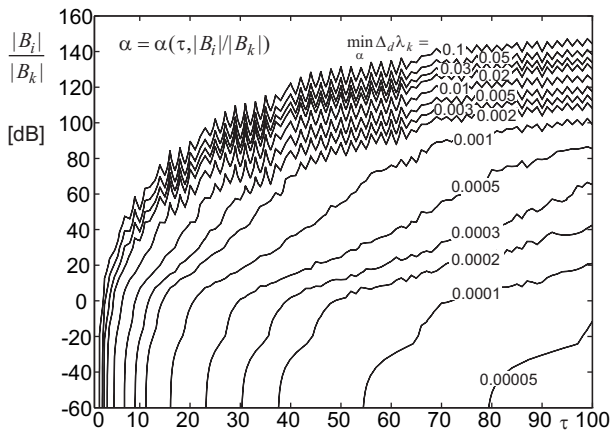


Rys. 16. $\Delta_d \lambda_k$ w funkcji τ oraz $|B_i|/|B_k|$ dla $\alpha = 30, 100$
 Fig. 16. $\Delta_d \lambda_k$ in the function of τ and $|B_i|/|B_k|$ for $\alpha = 30, 100$

ści poziomic z szeregu liczbowego: 0,1, 0,05, 0,03, 0,02, ... Poziomice rysowane pod powierzchnią z rysunku 13 są przedstawione na wykresie poziomocowym na rysunku 14. Zauważmy, że brakuje na rysunku 13, 14 poziomicy o wartości 0,001, ponieważ dla dużych τ i małych $|B_i|/|B_k|$ występuje ustalanie się błędu $\Delta_d \lambda_k$ na poziomie $\Delta_d \lambda_k \cong 0,0314/\alpha > 0,001$. Analogiczny charakter ma wykres błędu $\delta_d |B_k|$ (rys. 15). Zmniejszenie τ i zwiększenie $|B_i|/|B_k|$ powoduje coraz silniejszy wzrost wartości wartości błędu (rys. 13, 15). Zmniejszeniu wartości błędu dla dużych τ i małych $|B_i|/|B_k|$ ze wzrostem wartości α towarzyszy zwiększenie tego błędu dla małych τ i dużych $|B_i|/|B_k|$ (rys. 16). Dla konkretnej wartości τ oraz $|B_i|/|B_k|$ występuje taka optymalna wartość parametru α , dla której całkowity błąd deterministyczny jest minimalny (rys. 17, 18).

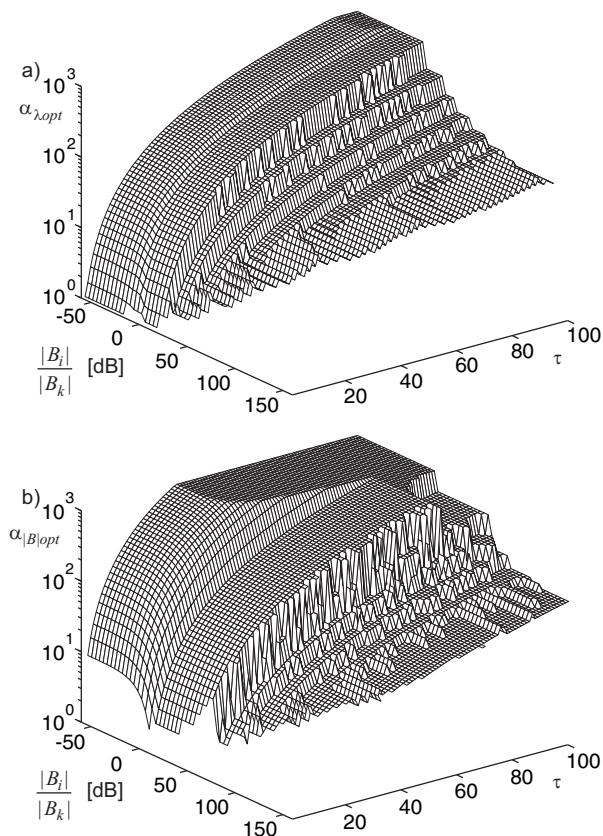


Rys. 17. $\min \alpha \Delta_d \lambda_k$ w funkcji τ oraz $|B_i|/|B_k|$
 Fig. 17. $\min \alpha \Delta_d \lambda_k$ in the function of τ and $|B_i|/|B_k|$



Rys. 18. $\min \alpha \Delta_d \lambda_k$ w funkcji τ oraz $|B_i|/|B_k|$
 Fig. 18. $\min \alpha \Delta_d \lambda_k$ in the function of τ and $|B_i|/|B_k|$

Zależności $\alpha_{\lambda_{opt}} = \alpha_{\lambda_{opt}}(\tau, |B_i|/|B_k|)$ oraz $\alpha_{|B|_{opt}} = \alpha_{|B|_{opt}}(\tau, |B_i|/|B_k|)$, dla których błędy $\Delta_d \lambda_k$ i $\delta_d |B_k|$ przyjmują wartości minimalne, pokazano na rysunku 19 (zakres wartości α ograniczono do przedziału $\alpha \in \langle 1, 1000 \rangle$). Zastosowanie tych zależności w praktyce wymaga znajomości τ oraz $|B_i|/|B_k|$. Wartość τ jest znana, gdyż wynika ze wstępnej lokalizacji składowych w widmie, która jest warunkiem początkowym metody LIDFT. Natomiast wartość $|B_i|/|B_k|$ jest najczęściej znana tylko w przybliżeniu, gdyż estymacja $|B_i|$ oraz $|B_k|$ jest dopiero celem stosowania metody LIDFT. Brak dokładnej wartości $|B_i|/|B_k|$ jako danej początkowej metody LIDFT jest jedną z przesłanek stosowania, zamiast dokładnych zależności z rysunku 19, odpowiednich zależno-



Rys. 19. Optymalna wartość parametru α w funkcji τ oraz $|B_i|/|B_k|$ przy estymacji: a) częstotliwości, b) modułu amplitudy
 Fig. 19. Optimum value of the parameter α in the function of τ and $|B_i|/|B_k|$ for: a) frequency and b) amplitude magnitude estimation.

ści przybliżonych. Analiza zależności z rysunku 19 prowadzi do uproszczonego wzoru na wartość parametru α optymalnej ze względu na błąd $\Delta_d \lambda_k$

$$\alpha = \frac{\tau^2}{K}, \quad K = \begin{cases} 10 & \text{dla } |B_i|/|B_k| < 10 \text{ dB} \\ |B_i|/|B_k| [\text{dB}] & \text{dla } 10 \text{ dB} < |B_i|/|B_k| < 140 \text{ dB} \\ 140 & \text{dla } |B_i|/|B_k| > 140 \text{ dB.} \end{cases} \quad (120)$$

Wartość parametru α , optymalną ze względu na błąd $\delta_d |B_k|$, otrzymujemy przez podwojenie wartości otrzymywanej z zależności (120).

Do pełnej analizy przypadku sygnału wieloczęstotliwościowego pozostaje określenie błędów spowodowanych szumem. Symulacje komputerowe (w których dla danej realizacji szumu zmieniano liczbę estymowanych składowych) pokazały, że błędy

spowodowane szumem nie zależą od liczby oscylacji w sygnale i wyrażają się zależnościami (110) i (111).

Na błąd całkowity składa się błąd deterministyczny (wzory 118, 119 i rys. 13–18) i błąd losowy (wzory 110 i 111).

4.4. PODSUMOWANIE

Gdy w zastosowaniu metody LIDFT mamy do czynienia w praktyce z sygnałem wieloczęstotliwościowym, wówczas należy uwzględnić błąd metody wynikający z wzajemnej interferencji składowych w widmie (wynikającej z „przecieku widma”, a dokładniej z błędu aproksymacji tego przecieku funkcjami liniowymi). Jak pokazuje analiza przeprowadzona w punkcie 4.3 błąd ten w pewnych przypadkach może mieć decydujące znaczenie – zależy to od stosunku amplitud składowych i ich odległości w widmie na osi częstotliwości.

Zastosowanie metody LIDFT wymaga dla danego sygnału określenia warunków początkowych, do których należą: liczba M składowych sinusoidalnych w sygnale mierzonym oraz przedział $\langle i - 1, i \rangle$ dla każdej z częstotliwości λ_i (wymóg wstępnej lokalizacji składowych w widmie sygnału). Na tej podstawie oraz przewidywanego stosunku amplitud estymowanych składowych wyznacza się wartość parametru α linearyzującego okna danych. Można w tym celu wykorzystać przedstawioną w punkcie 4.3 zależność (120) oraz zależności (110) i (111) uwzględniające wpływ szumu. Ze względu na przybliżony charakter zależności (120) oraz brak dokładnej znajomości stosunku amplitud składowych nie uzyskamy najmniejszych możliwych błędów, co oznacza że wartości uzyskiwanych błędów będą większe od wartości wyznaczonych na podstawie wykresów z rysunków 17–18. Z drugiej strony na wykresach tych pokazano wartości błędów zgodnie z definicjami (118) i (119), a więc dla najbardziej niekorzystnych wartości $\gamma_n, \arg B_n$. Oznacza to, że w większości pomiarów błędy analizy mogą być mniejsze.

Przeprowadzona w rozdziale 4 analiza metrologiczna metody LIDFT dotyczy wybranego okna (z rys. 9). Metoda LIDFT może być stosowana również z innymi oknami danych, które mogą okazać się lepsze zarówno pod względem dokładności aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej funkcjami liniowymi, jak również właściwościami szumowymi. W przypadku parametrycznych okien linearyzujących można stosować przedstawioną w niniejszej pracy metodę badania i opisu właściwości metrologicznych metody LIDFT. Poszukiwanie okna danych o korzystniejszych właściwościach niż okno z rysunku 9 jest jedną z możliwości polepszenia właściwości metrologicznych metody LIDFT. To polepszenie jest pożądane w metodzie LIDFT, szczególnie dla sygnału zawierającego składowe leżące blisko siebie w widmie sygnału. Aby wykorzystać bogate możliwości opisanych w literaturze innych okien danych [10], w rozdziale 5 przedstawiono rozwinięcie metody LIDFT umożliwiające stosowanie takich okien w połączeniu z techniką uzupełniania zerami.

5. KLASYCZNE OKNA DANYCH I UZUPEŁNIANIE ZERAMI W METODZIE LIDFT

5.1. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI I METODA UZUPEŁNIANIA ZERAMI

Rozdział 5 przedstawia rozwinięcie metody LIDFT umożliwiające wykorzystanie w niej klasycznych okien danych. Pierwszym etapem tej prezentacji jest wyszczególnienie wyjściowych zależności dotyczących modelu sygnału oraz standardowej i powszechnie znanej metody uzupełniania zerami w wyznaczaniu widma sygnału DFT algorytmem FFT.

Po spróbkowaniu sygnału $y(t)$ ($t \rightarrow t_n = nT$, $n = 0, \dots, N - 1$) zakładamy, że sygnał dyskretny $y_n = y(t = nT)$ ma postać:

$$y_n = y(t = nT) = \sum_{i=1}^P B_i e^{j2\pi f_i nT} = \sum_{i=1}^P B_i e^{j2\pi n \lambda_i / N}, \quad (121)$$

gdzie $\lambda_i = f_i \cdot NT$ jest unormowaną częstotliwością (w [bins]), B_i – amplitudą i -tej oscylacji zespolonej $B_i e^{j2\pi n \lambda_i / N}$ i że celem pomiaru jest wyznaczenie parametrów λ_i i B_i . Dla modelu sygnału:

$$y(t) = \sum_{i=1}^M A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (122)$$

mamy $B_i = A_i e^{j\varphi_i} / 2j$, $z_i = e^{j\omega_i}$, $P = 2M$, $B_{P-i+1} = B_i^*$, $z_{P-i+1} = z_i^*$.

Równanie:

$$F_\lambda = F(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n e^{-j2\pi n \lambda / N} \quad (123)$$

wyznacza dyskretnoczasową transformatę Fouriera (DtFT) dla ciągłej wartości unormowanej częstotliwości $\lambda = f \cdot NT$ (w [bins]) i z zastosowaniem okna danych w_n . Gdy $\lambda = 0, \dots, N - 1$, wówczas równanie (123) wyznacza dyskretną transformatę Fouriera (DFT), która jest spróbkowanym DtFT. DtFT może być wyrażona zależnością:

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^P B_i \cdot W(\lambda - \lambda_i), \quad (124)$$

gdzie $W(\lambda)$ jest DtFT okna danych w_n :

$$W(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{-j2\pi n \lambda / N}. \quad (125)$$

Zwykle do obliczenia DFT stosujemy algorytm FFT:

$$F_n = F(\lambda = n) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i w_i e^{-j2\pi ni/N} = FFT_n \{y_i w_i\}, \quad (126)$$

gdzie: $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Zauważmy, że jeśli mamy próbki sygnału oraz okna danych numerowane w zakresie $i = -N/2, \dots, N/2-1$, zamiast $i = 0, 1, \dots, N-1$ (wzory na okna danych są wówczas często prostsze – [10]), to możemy skorzystać z zależności:

$$F_n = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} y_i w_i e^{-j2\pi ni/N} = (-1)^n FFT_n \{y_i w_i\}. \quad (127)$$

Technika uzupełniania zerami oznacza obliczanie DFT ciągu $N \cdot R$ -elementowego $\{y_0 w_0, \dots, y_{N-1} w_{N-1}, 0, \dots, 0\}$ (oznaczymy w skrócie przez $\{y_i w_i, 0_R\}$), zamiast ciągu $\{y_0 w_0, \dots, y_{N-1} w_{N-1}\} = \{y_i w_i\}$. Dla takiego, R -krotnego uzupełniania zerami zależność (126) przyjmuje postać

$$F_{n/R} = F(\lambda = n/R) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i w_i e^{-j2\pi ni/NR} = FFT_n \{y_i w_i, 0_R\}, \quad (128)$$

gdzie: $n = 0, 1, \dots, NR-1$.

Jeśli, podobnie jak we wzorze (127), zdefiniujemy zakres numeracji próbek oraz okna $i = -N/2, \dots, N/2-1$, to otrzymujemy zależność analogiczną do równania (127):

$$F_{n/R} = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} y_i w_i e^{-j2\pi ni/NR} = e^{j\pi n/R} FFT_n \{y_i w_i, 0_R\}. \quad (129)$$

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że uzupełnianie zerami jest często stosowane wyłącznie w celu umożliwienia zastosowania określonego typu algorytmu FFT, gdy liczba próbek otrzymanych z przetwornika A/C nie spełnia wymagań stosowanej wersji algorytmu FFT (np. dla algorytmu FFT typu radix-2 liczba próbek musi być całkowitą potęgą liczby 2), a efekt interpolacyjny metody nie jest ważny. Ta numeryczna właściwość metody, choć cenna, nie jest tutaj ani istotnym elementem, ani celem analizy.

5.2. KLASYCZNE OKNA DANYCH W METODZIE LIDFT

Rozdział 4 wprowadza parametryczne okno danych – specjalne okno dla metody LIDFT, którego zadaniem jest minimalizacja błędu aproksymacji okna danych funkcjami liniowymi, a nie samego przecieku widma, jak występuje to w klasycznych oknach danych. Stosowanie takiego specjalnego okna stwarza jednak ograniczenia dokładności metody LIDFT (rozd. 4), dlatego w niniejszym rozdziale zmodyfikowa-

no metodę LIDFT, umożliwiając wykorzystanie w niej klasycznych okien danych i uzyskując poprawę dokładności estymacji. Szczegółowe dane ilościowe przedstawiono dla okna trójkątnego zdefiniowanego dla zakresu $n = 0, 1, \dots, N-1$ zależnością

$$w_n = \begin{cases} n/(N/4) & \text{for } n = 0, \dots, N/2 \\ w_{N-n} & \text{for } n = N/2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (130)$$

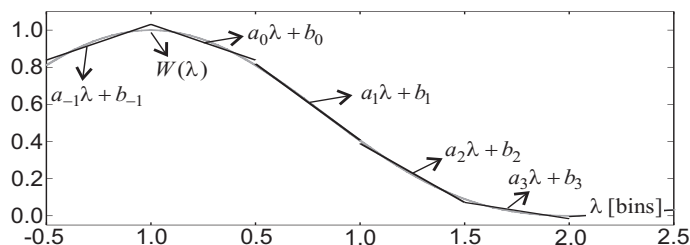
lub dla zakresu $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ zależnością:

$$w_n = 2 - |n|/(N/4) \quad \text{for } n = -N/2, \dots, N/2 - 1. \quad (131)$$

Charakterystykę częstotliwościową okna otrzymujemy z równań (125), (130)

$$W(\lambda) = \frac{4}{N} e^{-j\pi\lambda} \left(\frac{\sin \pi\lambda/2}{\sin \pi\lambda/N} \right)^2. \quad (132)$$

Dla klasycznego okna danych i techniki uzupełniania zerami metoda LIDFT zakłada aproksymację charakterystyki częstotliwościowej $W(\lambda)$ z równania (125) funkcjami liniowymi $\hat{W}(\lambda) = a_n\lambda + b_n$ dla $\lambda \in \langle n/R, (n+1)/R \rangle$ (rys. 20).



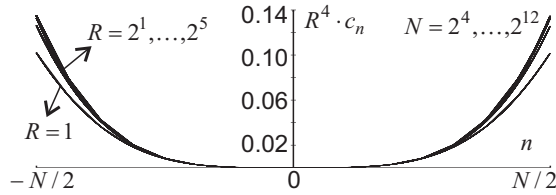
Rys. 20. Linearyzacja widma klasycznego okna danych $W(\lambda)$ w metodzie LIDFT – przykład dla okna trójkątnego i $R = 2$

Fig. 20. Linearization of classic data window spectrum $W(\lambda)$ with LIDFT method – example for triangular window and $R = 2$

Zespolone wartości a_k, b_k otrzymujemy przez minimalizację błędu średniokwadratowego Q , który różni się od zdefiniowanego w równaniu (26) tylko przez uwzględnienie wartości R

$$Q = \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{k/R}^{(k+1)/R} |W(\lambda) - \hat{W}_k(\lambda)|^2 d\lambda, \quad (133)$$

gdzie $\hat{W}_k(\lambda) = a_k\lambda + b_k$ dla $\lambda \in \langle k/R, (k+1)/R \rangle$. Wartość Q jest energią sygnału błędu aproksymacji.



Rys. 21. Wartości $R^4 c_n$ w funkcji n wg wzoru (135)

Fig. 21. Values of $R^4 c_n$ versus n as per Eq. (135)

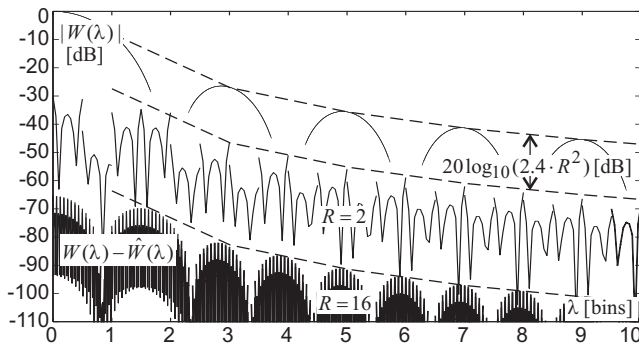
Postępując podobnie jak w rozdziale 3.2, tj. minimalizując wartość Q przez przyrównanie pierwszych pochodnych do zera, znajdujemy zależności na liczby a_k , b_k i otrzymujemy uogólnienie równań (36), (37) dla wartości $R \geq 1$

$$Q = N \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n w_n^2, \quad (134)$$

$$c_n = 1 - 3 \left(\frac{\sin x_n / x_n - \cos x_n}{x_n} \right)^2 - \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2, \quad (135)$$

$$x_n = \pi n / NR, \quad n = -N/2, \dots, N/2 - 1. \quad (136)$$

Zgodnie z zależnościami (135) i rysunkiem 21, zwiększenie R dwukrotnie zmniejsza wartość c_n 16 razy, a tym samym, na podstawie równania (14) zmniejsza 16 razy (o $10 \log_{10} 16 \approx 12$ dB) średniokwadratowy błąd Q aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej okna funkcjami liniowymi.



Rys. 22. Wykres $|W(\lambda)|$ oraz $|W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|$ dla okna trójkątnego

Fig. 22. Graph of $|W(\lambda)|$ and $|W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|$ for triangle window

W klasycznych oknach danych najważniejsza jest jego charakterystyka częstotliwościowa $W(\lambda)$ zdefiniowana równaniem (125). W metodzie LIDFT ta charakterystyka

może być uzupełniona przez wykres charakterystyki częstotliwościowej błędu aproksymacji $|W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|$ (rys. 22). Dla $R \geq 2$ można przyjąć, że obwódnia tego błędu jest około $(2,4 \cdot R^2)$ -krotnie mniejsza niż obwódnia przecieku widma okna trójkątnego (rys. 22). To oznacza, że zwiększenie R dwukrotnie zmniejsza błąd aproksymacji okna funkcjami liniowymi, 4-krotnie na charakterystyce amplitudowej (czyli o 12 dB).

5.3. ALGORYTM LIDFT Z TECHNIKĄ UZUPEŁNIANIA ZERAMI

Algorytm metody LIDFT uwzględniający uzupełnianie zerami uzyskujemy podobnie jak w rozdziałach 3.3–3.4, z tym że aproksymację widma stosujemy dla $N \cdot R$ wartości widma uzyskanych w wyniku obliczenia DFT z N próbek pomnożonych przez okno danych i uzupełnionych $N \cdot (R - 1)$ zerami. Celem estymacji jest określenie parametrów $2M$ składowych sinusoidalnych. Wygodnie jest przyjąć, że $N \cdot R$ jest całkowitą potęgą liczby 2, ponieważ można wówczas stosować popularny algorytm radix-2 FFT. Uwzględniając w przekształceniach zawartych w rozdziałach 3.3–3.4 dodatkowo równania (129), (136) otrzymujemy liniowe równanie macierzowe $\mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{Y}$, zawierające technikę uzupełniania zerami:

$$\begin{bmatrix} r_{i-k} & -s_{i-k} \\ s_{i-k} & t_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \cdot \begin{bmatrix} B_k \\ B_k \gamma_k \end{bmatrix}_{2P \times 1} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_{2P \times 1}, \quad (137)$$

gdzie:

$$r_m = e^{j\pi m / R} FFT_m \left\{ w_n^2 \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2, 0_R \right\}, \quad (138)$$

$$s_m = 6j e^{j\pi m / R} FFT_m \left\{ w_n^2 \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right) \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right), 0_R \right\}, \quad (139)$$

$$t_m = 36e^{j\pi m / R} FFT_m \left\{ w_n^2 \left(\frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} \right)^2, 0_R \right\}, \quad (140)$$

$$u_m = e^{j\pi m / R} FFT_m \left\{ y_n w_n^2 \frac{\sin x_n}{x_n} e^{jx_n}, 0_R \right\}, \quad (141)$$

$$v_m = 6j e^{j\pi m / R} FFT_m \left\{ y_n w_n^2 \frac{\cos x_n - \sin x_n / x_n}{x_n} e^{jx_n}, 0_R \right\}, \quad (142)$$

$$i, k, m \in \langle 0, \dots, NR - 1 \rangle. \quad (143)$$

Równania (136–143) wyznaczają algorytm LIDFT z wykorzystaniem techniki uzupełniania zerami, którego etapy są następujące:

1. Próbkujemy sygnał $y(t)$ i otrzymujemy ciąg y_n (zgodnie z równaniem (136) numerowanych dla $n = -N/2, \dots, N/2-1$).

2. Wybieramy w_n (okno danych), R i obliczamy r_m, s_m, t_m, u_m, v_m ($m = 0, 1, \dots, NR - 1$) według równań (138–143).

3. Wybieramy zbiór $S = \{i_1, i_2, \dots, i_M\}$, co oznacza, że sygnał zawiera M składowych sinusoidalnych o unormowanych częstotliwościach $\lambda_{i_n} \in \langle (i_n - 1)/R, i_n/R \rangle$ w [bins]. Biorąc pod uwagę składowe sprzężone, przyjmujemy $i, k \in S_1 = \{i_1, \dots, i_P\} = \{i_1, \dots, i_M, NR - i_1 + 1, \dots, NR - i_M + 1\}$.

4. Na podstawie wartości i, k określonych w punkcie 3 obliczamy $B_k, C_k = B_k \gamma_k$ z równania (137). Wartości γ_k otrzymujemy z $\gamma_k = C_k/B_k$, a następnie unormowane częstotliwości składowych sinusoidalnych z równania $\lambda_k = \left(k - \frac{1}{2} + \text{Re } \gamma_k \right) / R$. Amplitudę A_k i fazę φ_k każdej składowej oblicza się z równania $A_k e^{j\varphi_k} = 2jB_k$.

5. Badamy wartości $\text{Im } \gamma_k, \text{Re } \gamma_k$ i, jeśli to konieczne, powtarzamy punkty 3–5 dla lepiej dobranego zbioru S , zmniejszając wartości $\text{Im } \gamma_k$ oraz $\text{Re } \gamma_k$. W idealnym przypadku $\text{Im } \gamma_k = 0$ oraz $|\text{Re } \gamma_k| \leq 0,5$.

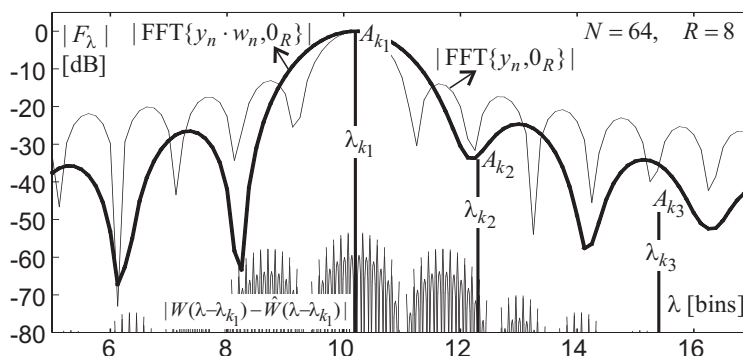
Wstępna lokalizacja składowych w widmie (wybór zbioru S) i zastosowane okno danych (wybór wartości w_n) są nazywane warunkami początkowymi metody LIDFT. Jednakże uwzględniając technikę uzupełniania zerami i klasycznymi oknami danych należy wziąć pod uwagę następujące zmiany w stosunku do metody przedstawionej w rozdziale 3. Po pierwsze wymagana jest R -krotnie dokładniejsza wstępna lokalizacja składowych w widmie ($\lambda_k \in \langle (k-1)/R, k/R \rangle$, zamiast $\lambda_k \in \langle k-1, k \rangle$), co dla dużych wartości R będzie często warunkiem niemożliwym do spełnienia. Jednak w rozdziale 5.4 pokażemy, że nawet dla dużych wartości R możemy poprzestać na dotychczasowym warunku $\lambda_k \in \langle (k-1), k \rangle$, a nawet jeszcze mniej wymagającej lokalizacji składowych w widmie. Po drugie należy odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób wybrać jedno z klasycznych okien danych oraz wartość R , aby uzyskać założoną dokładność estymacji. Wykorzystać tu można charakterystykę błędu aproksymacji okien funkcjami liniowymi, podobnie jak na rysunku 22 dla okna trójkątnego. To zagadnienie przedstawimy na przykładzie w punkcie 5.4.

5.4. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA METODY LIDFT Z OKNEM TRÓJKĄTNYM I TECHNIKĄ UZUPEŁNIANIA ZERAMI

Aby pokazać możliwości zastosowania techniki uzupełniania zerami i klasycznego okna danych w metodzie LIDFT przeanalizujemy sygnał złożony z $M = 3$ składowych sinusoidalnych o parametrach zdefiniowanych w tabeli 1.

Tabela 1. Parametry sygnału analizowanego w rozdziale 5.4
 Table 1. Parameters of the signal analyzed in Section 5.4

i	$\lambda_{k_i} = f_{k_i} \cdot NT$ [bins]	A_{k_i}	φ_{k_i} [rad]
1	10,2	1	0,5
2	12,3	0,02	1,0
3	15,4	0,004	1,5

$$y_n = \sin(2\pi 10,2n / N + 0,5) + 0,02 \sin(2\pi 12,3n / N + 1,0) + 0,004 \sin(2\pi 15,4n / N + 1,5) \quad \text{dla } n = -32, \dots, 31$$


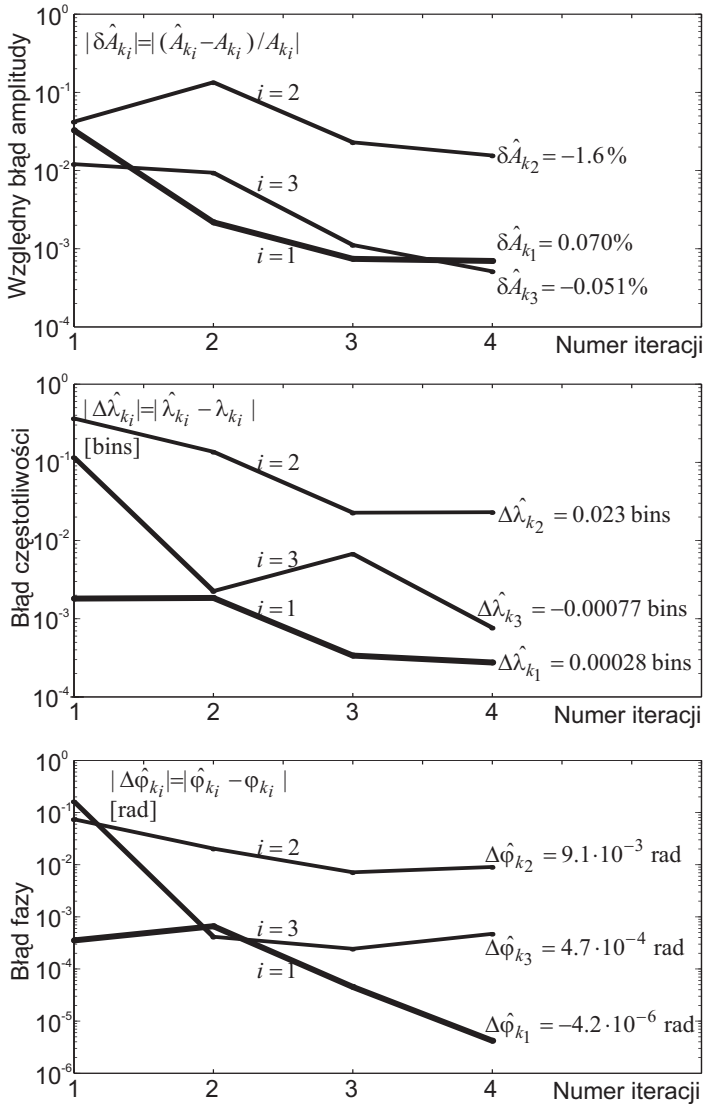
Rys. 23. Sygnał złożony (3 sinusoidy) zdefiniowany w rozdziale 5.4 i widmo uzyskane algorytmem FFT dla 64 próbek sygnału pomnożonych przez okno trójkątne i uzupełnionych zerami do 512 próbek

Fig. 23. Multifrequency signal (3 sinusoids) defined in Section 5.4 and spectrum given by FFT algorithm for 64 signal samples multiplied by triangle window and zero padded to 512 samples

Uzupełnienie zerami 64 próbek tego sygnału do 512 próbek, zastosowanie okna trójkątnego i algorytmu FFT nie daje możliwości poprawnej estymacji składowych sinusoidalnych, szczególnie drugiej i trzeciej (rys. 23).

Stosując dla tego sygnału metodę LIDFT, zakładamy nieznaną dokładną lokalizację składowych, a tylko przyjmujemy na początek stały ich odstęp co 3 [bins] w zakresie od 10 do 16 bins. Wybór tych trzech wartości (10, 13, 16 bins), wybór okna trójkątnego oraz $R = 8$ to określenie warunków początkowych metody LIDFT, zgodnie z punktem 3 algorytmu przedstawionym po równaniu (143). Po kolejnym zastosowaniu algorytmu LIDFT korygujemy lokalizację składowych w widmie o wartości $(\text{round}(\text{Re} \hat{\gamma}_k)) / R$, aż do momentu kiedy $|\text{Re} \hat{\gamma}_k| \leq 0,5$ dla wszystkich składowych. Wyniki czterech kolejnych realizacji algorytmu LIDFT dla wszystkich trzech składowych sinusoid są przedstawione na rysunku 24, wraz z definicjami błędów. Wstępna lokalizacja składowych dla pierwszej iteracji wynosi (w [bins]): $\{80/R,$

104/R, 128/R}, dla drugiej: {82/R, 96/R, 125/R}, dla trzeciej: {82/R, 100/R, 124/R} i dla czwartej: {82/R, 99/R, 124/R}. Analiza wyników z rysunku 24 pokazuje, że zadowalające wyniki można uzyskać, poprzestając np. na dwóch lub trzech iteracjach, jednak pełne możliwości metody LIDFT można uzyskać po wszystkich iteracjach.



Rys. 24. Wyniki czterech iteracji metody LIDFT dla sygnału wieloczęstotliwościowego (3 sinusoidy) zdefiniowanego w rozdziale 5.4

Fig. 24. Results of four iterations of LIDFT method for multifrequency signal (3 sinusoids) defined in Section 5.4

5.5. DEFINICJE BŁĘDÓW METOD INTERPOLACJI

W wyniku analizy funkcji $F(\lambda)$, uzyskanej z równania (123), uzyskujemy nie dokładne wartości B_i , λ_i , lecz ich estymatory \hat{B}_i , $\hat{\lambda}_i$. Błąd estymacji amplitudy $|B_i|$ oraz częstotliwości λ_i zdefiniujemy jako $\delta |B_i| = (|\hat{B}_i| - |B_i|) / |B_i|$ oraz $\Delta \lambda_i = |\hat{\lambda}_i - \lambda_i|$. Jeśli sygnał składa się z dwóch oscylacji o amplitudach zespolonych B_k , B_i , częstotliwościach unormowanych λ_k , λ_i oraz $\lambda = |\lambda_k - \lambda_i|$, to dla znanych metod interpolacji DFT mamy

$$\delta |B_k| = \delta_1 |B_k| + \delta_2 |B_k| = \delta_1 |B_k| + \frac{|B_i|}{|B_k|} f\left(\frac{|W(\lambda)|}{|W(0)|}\right), \quad (144)$$

$$\Delta \lambda_k = \Delta_1 \lambda_k + \Delta_2 \lambda_k = \Delta_1 \lambda_k + \frac{|B_i|}{|B_k|} g\left(\frac{|W(\lambda)|}{|W(0)|}\right), \quad (145)$$

gdzie funkcje g , f (często $f(x) = x$), zależą od zastosowanej metody interpolacji (w tym również okna danych), $\delta_1 |B_k|$, $\Delta_1 \lambda_k$ są błędami stosowanej metody interpolacji widma, a $\delta_2 |B_k|$, $\Delta_2 \lambda_k$ są błędami spowodowanymi interferencją obu składowych (przeciek widma). Dla przypadku sygnału wieloczęstotliwościowego w zależnościach (144), (145) należy uwzględnić dodatkowo fakt, że składowe $\delta_2 |B_k|$, $\Delta_2 \lambda_k$ są sumą błędów pochodzących od pozostałych oscylacji.

We wszystkich metodach interpolacji DFT (z wyjątkiem metody LIDFT) zakłada się, że przez odpowiedni dobór okna danych składowe są dobrze odseparowane od siebie, tzn. $|B_i W(\lambda)| \ll |B_k W(0)|$, a więc $\delta_2 |B_k| \approx 0$ i $\Delta_2 \lambda_k \approx 0$, co w wielu przypadkach może nie być prawdziwe. W rozdziale 5.6 przedstawiamy wartości maksymalne tych błędów dla klasycznej interpolacji DFT metodą uzupełniania zerami, a w rozdziale 5.7 dla metody LIDFT z uzupełnianiem zerami.

5.6. BŁĘDY INTERPOLACJI DFT METODĄ UZUPEŁNIANIA ZERAMI

W przypadku, zdefiniowanego już w rozdziale 5.5, sygnału składającego się z dwóch oscylacji zespolonych (B_k, λ_k) , (B_i, λ_i) , $\lambda_k = |\lambda_k - \lambda_i|$, założmy, że $\lambda_k \in \langle (k-1)/R, k/R \rangle$ (w [bins]), i po obliczeniu $F_{n/R}$ z równania (128) dla $n = 0, \dots, NR - 1$ przyjmujemy, że $|\hat{B}_k| = \max_n |F_{n/R}|$ dla n bliskich k i $\hat{\lambda}_k = n/R$ (przy dobrej separacji składowych $n = k - 1$ lub $n = k$). Wartości $\delta_1 |B_k|$, $\Delta_1 \lambda_k$ (z równ. (144), (145)) osiągają maksimum dla $\lambda_k = (k - 0,5)/R$, a stąd możemy określić maksima błędów zdefiniowanych w równaniach (144) i (145) dla interpolacji uzupełnianiem zerami w klasycznej analizie DFT

$$\max \delta_Z |B_k| \approx \left| \frac{|W(1/2R)|}{|W(0)|} - 1 \right| + \frac{|B_i| |W(\lambda)|}{|B_k| |W(0)|}, \quad (146)$$

$$\max \Delta_Z \lambda_k \approx \frac{1}{2R} \quad \text{dla} \quad |B_i W(\lambda)| \ll |B_k W(0)|, \quad (147)$$

gdzie przyjęcie $f(x) = x$ dla funkcji f z równania (144) wynika z równania $|\hat{B}_k| = \max_n |F_{n/R}|$ i liniowości DFT.

Uwzględniając następujące rozwinięcie w szereg MacLaurina względem λ

$$\frac{4}{N} \left(\frac{\sin \pi \lambda / 2}{\sin \pi \lambda / N} \right)^2 = N + \left(\frac{\pi^2}{3N} - \frac{\pi^2 N}{12} \right) \lambda^2 + \dots \quad (148)$$

oraz warunek $W(0) = N$ uzyskujemy z równań (132), (148):

$$\left| \frac{|W(\lambda)|}{|W(0)|} - 1 \right| \approx \left| \frac{\pi^2}{3N^2} - \frac{\pi^2}{12} \right| \lambda^2 \quad (149)$$

i stąd dla $N \gg 1$

$$\left| \frac{|W(\lambda)|}{|W(0)|} - 1 \right| \approx \frac{\pi^2}{12} \lambda^2 \approx 0,823 \cdot \lambda^2. \quad (150)$$

Dla $\lambda = 1/2R$ w zależności (146) wzory (146) i (147) dla okna trójkątnego przyjmują postać

$$\max \delta_Z |B_k| \approx \delta_{1Z} |B_k| + \delta_{2Z} |B_k|, \quad (151)$$

gdzie

$$\delta_{1Z} |B_k| \approx 0,206 / R^2, \quad (152)$$

$$\delta_{2Z} |B_k| \approx \frac{|B_i|}{|B_k|} \frac{1}{N} |W(\lambda_k - \lambda_i)| \quad (153)$$

oraz

$$\max \Delta_Z \lambda_k = \Delta_{1Z} \lambda_k + \Delta_{2Z} \lambda_k, \quad (154)$$

gdzie

$$\Delta_{1Z} \lambda_k \approx 0,5 / R, \quad (155)$$

$$\Delta_{2Z} \lambda_k \leq \Delta_{1Z} \lambda_k \quad \text{dla} \quad |B_i W(\lambda)| \ll |B_k W(0)|. \quad (156)$$

Możliwe jest dokładniejsze wyznaczenie tych błędów przez symulacje numeryczne, np. określenie funkcji $g(x)$ z równania (145) dla okna trójkątnego, ale zgrubne granice określone przez zależności (152), (153) są wystarczające do ich porównania z wynikami uzyskanymi w metodzie LIDFT, ponieważ dokładniejsza estymacja wartości amplitudy składowej sinusoidalnej skutkuje dokładniejszą estymacją jej częstotliwości.

Jak wspomniano w rozdziale 5.5, błędy $\delta_{1Z} |B_k|$, $\Delta_{1Z} \lambda_k$ są błędami stosowanej tu metody interpolacji widma, tzn. metody uzupełniania zerami, które wynikają z dyskretnego charakteru widma wyznaczanego zależnością (128), co skutkuje niedokładnym wyznaczeniem maksimum listka głównego danej składowej, nawet wówczas, gdyby nie był on zniekształcony przeciekiem widma pochodzącym od innych składowych. Natomiast $\delta_{2Z} |B_k|$, $\Delta_{2Z} \lambda_k$ są błędami spowodowanymi właśnie zniekształceniem listka głównego danej składowej przez przeciek widma pochodzący od innych składowych. Uogólniając te wnioski na inne metody interpolacji, zakładające brak interferencji składowych w widmie (przez zastosowanie okna danych o odpowiednim tłumieniu listków bocznych), możemy znacząco zmniejszyć wartość błędu $\delta_{1Z} |B_k|$ z równania (152), zachowując proporcjonalną zależność błędu $\delta_{2Z} |B_k|$ z równania (153) od wartości $(|B_i|/|B_k|) \cdot |W(\lambda_k - \lambda_i)|/N$. Tym samym zwiększenie liczby dodawanych próbek zerowych (zwiększenie wartości R) umożliwia zmniejszenie tylko składowej błędu $\delta_{1Z} |B_k|$ bez zmniejszenia składowej błędu $\delta_{2Z} |B_k|$, co jest szczególnie istotne, gdy składowa błędu $\delta_{2Z} |B_k|$ jest dominująca w błędzie całkowitym $\delta_Z |B_k|$ z równania (151).

5.7. BŁĘDY METODY LIDFT

Błędy metody LIDFT z uwzględnieniem techniki uzupełniania zerami porównamy z błędami w klasycznej metodzie uzupełniania zerami stosowanej do obliczania DFT (najczęściej algorytmem FFT). Dla metody tej maksymalny błąd estymacji amplitudy składowej oscylacji jest wyrażony zależnościami (151–153).

Sumaryczny błąd wyrażony równaniem (151) jest sumą błędu metody uzupełniania zerami $\delta_{1Z} |B_k|$ spowodowanego niedokładnym wyznaczeniem lokalnego maksimum DFT (co jest powodowane dyskretnym charakterem otrzymanego widma) oraz błędu $\delta_{2Z} |B_k|$ spowodowanego zjawiskiem „przecieku” widma, tj. zniekształceniem tego lokalnego maksimum przez listki boczne pochodzącego od innych składowych. Zwiększenie wartości R , będącego parametrem metody uzupełniania zerami, pozwala na zmniejszenie tylko składowej $\delta_{1Z} |B_k|$. Natomiast składowa $\delta_{2Z} |B_k|$ jest zależna od charakterystyki częstotliwościowej okna danych i stanowi istotne ograniczenie dokładności metody interpolacji DFT techniką uzupełniania zerami. Podobna sytuacja

występuje w innych metodach interpolacji widma, wymagających dobrej separacji składowych w widmie.

Badania symulacyjne, przeprowadzone dla metody LIDFT dla składowych w widmie wystarczająco odległych od siebie (dla których pominąć można dodatkowe efekty wynikające z ograniczenia rozdzielczości częstotliwościowej metody), wykazały, że maksymalny błąd estymacji amplitudy jest również sumą dwóch składowych (analogicznie do klasycznej metody uzupełniania zerami):

$$\max \delta |B_k| \approx \delta_1 |B_k| + \delta_2 |B_k|, \quad (157)$$

gdzie

$$\delta_1 |B_k| \approx 0,0823 / R^2, \quad (158)$$

$$\delta_2 |B_k| \leq 0.4 \frac{|B_i|}{|B_k|} \frac{1}{N} |\Delta \tilde{W}(\lambda_k - \lambda_i)|, \quad (159)$$

a $\Delta \tilde{W}(\lambda)$ jest obwiednią błędu aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej okna funkcjami liniowymi, która jest odwrotnie proporcjonalna do R^2 (rys. 22).

Widać tu istotną różnicę w stosunku do wyników uzyskanych dla klasycznej metody uzupełniania zerami z równań (151–153) polegającą na tym, że nie tylko składowa $\delta_1 |B_k|$ jest odwrotnie proporcjonalna do R^2 , ale również składowa $\delta_2 |B_k|$, a więc i wartość błędu sumarycznego z równania (157) można znacząco zmniejszyć, zwiększając wartość R .

5.8. PODSUMOWANIE

Przedstawione rozwinięcie metody LIDFT, wykorzystujące technikę uzupełniania zerami, i klasyczne okna danych znacząco poszerza możliwości analizy sygnału zawierającego wiele oscylacji składowych. Błędy metody LIDFT można znacząco zmniejszać przez zwiększenie liczby uzupełnianych zer. Zastosowanie klasycznych okien danych umożliwia wykorzystanie ich obszernej teorii uzupełnionej o przedstawione zależności, dotyczące błędu aproksymacji przecieku widma funkcjami liniowymi. To rozwiązanie jest korzystniejsze niż dotychczasowe, wymagające specjalnego okna dla metody LIDFT wprowadzonego w pierwszej wersji metody w rozdziale 4.1. Konieczność znaczącego zwiększenia liczby próbek transformaty Fouriera jest rekompensowana stosowaniem szybkiego algorytmu FFT. Zachowując takie same warunki jak w pierwotnej wersji metody LIDFT, dotyczące wstępnej lokalizacji składowych w widmie, konieczne są obliczenia iteracyjne, jeśli chce się osiągnąć pełną dokładność metody LIDFT. Jednakże przeprowadzone symulacje wskazują na to, że wystarczy wówczas kilka iteracji.

LITERATURA

- [1] AGREZ D., *Weighted multipoint interpolated DFT to improve amplitude estimation of multifrequency signal*, IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. 51, pp. 287–292, Apr. 2002.
- [2] ANDRIA G., SAVINO M., TROTTA A., *Windows and interpolation algorithms to improve electrical measurement accuracy*, IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. 38, pp. 856–863 (1989).
- [3] BORKOWSKI J., *Metoda liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera w analizie sygnału z czujnika pomiarowego*, praca doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1997.
- [4] BORKOWSKI J., *LIDFT – The DFT linear interpolation method*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 49, pp. 741–745, Aug. 2000.
- [5] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Application of the discrete Fourier transform linear interpolation method in the measurement of volume scattering function at small angle*, Opt. Eng., Vol. 39, No. 6, pp. 1576–1586, June 2000.
- [6] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Metrological analysis of the LIDFT method*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 51, pp. 67–71, Feb. 2002.
- [7] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Analiza metrologiczna interpolacji DFT metodą uzupełniania zerami*, Pomiar Automatyka Kontrola, vol. 53, nr 9bis, s. 127–129, 2007.
- [8] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Błędy metody LIDFT dla klasycznych okien danych*, Pomiar Automatyka Kontrola, vol. 53, nr 9bis, s. 108–111, 2007.
- [9] GRANDKE T., *Interpolation algorithms for discrete Fourier transform of weighted signals*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 32, pp. 350–355 (1983).
- [10] HARRIS F.J., *On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform*. Proc. IEEE, vol. 66, pp. 51–83 (1978).
- [11] IZYDORCZYK J., PŁONKA G., TYMA G., *Teoria sygnałów*, Helion, Gliwice 1999.
- [12] JAIN V.H., COLLINS W.L., DAVIS D.C., *High accuracy analog measurement via interpolated FFT*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 28, pp. 113–122 (1979).
- [13] KAMM G.N., *Computer Fourier-transform Techniques for Precise Spectrum Measurement of Oscillatory Data with Application to the de Haas – van Alphen effect*, J. Appl. Phys., vol. 49, (1978).
- [14] KAY S.M., *Modern Spectrum Analysis*, Prentice-Hall, New York, 1987.
- [15] LYONS R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, WKiŁ, Warszawa 1999.
- [16] MARPLE L., *Digital Spectrum Analysis with Applications*. Prentice-Hall, New York, 1987.
- [17] MITRA S.K., KAISER J.F. (ed.), *Handbook for Digital Signal Processing*, Wiley, New York, 1993.
- [18] OFFELLI C., PETRI D., *Interpolation techniques for real-time multifrequency waveform analysis*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 39, pp. 106–111 (1990).
- [19] OPPENHEIM A.L., SCHAFFER R.W., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, WKiŁ, Warszawa 1979.
- [20] SCHARF L.L., *Statistical Signal Processing*, Addison-Wesley, MA, 1991.
- [21] SCHOUKENS J., PINTELON R., HAMME H.V., *The Interpolated Fast Fourier Transform: A Comparative Study*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 41, pp. 226–232, Apr. 1992.
- [22] SZABATIN J., *Podstawy teorii sygnałów*, WKiŁ, Warszawa 1982, 1990, 2000.
- [23] ZHU L., DING H., DING K., *Phase regression approach for estimating the parameters of a noisy multifrequency signal*, IEE Proc.-Vis. Image Signal Process., vol. 151, No. 5, Oct. 2004.

MULTIFREQUENCY SIGNAL PARAMETERS ESTIMATION IN THE LIDFT METHOD
AS A DEVELOPMENT OF DIGITAL SIGNAL PROCESSING IN FOURIER ANALYSIS

The method of linear interpolation of the discrete Fourier transform (LIDFT) to precisely estimate parameters of a multifrequency signal, i.e. consisting of many sinusoidal oscillations, is presented in the paper. In the first part the most important problems for spectrum measurements in DSP systems with the

use of Fourier transform, data windows and methods of interpolation of obtained spectrum are presented. Derivation of LIDFT method results practical algorithm, metrological analysis of the method for using dedicated, linearizing data window and development of the method, which allows for applying with classic data windows and padding zeros technique results increasing accuracy of signal parameters estimation are described.

*mechanika oddychania, technika przerwaniowa,
modelowanie symulacyjno-estymacyjne,
identyfikacja systemów*

Ireneusz JABŁOŃSKI,
Janusz MROCZKA*

CZASOWY ALGORYTM POMIARU MECHANIKI ODDYCHANIA W WARUNKACH MANEWRU OKLUZYJNEGO

Opracowanie dotyczy konstrukcji algorytmu oceny mechaniki oddychania w dziedzinie czasu, opartego na wykorzystaniu informacji o systemie zakodowanych w pookluzyjnych sygnałach ciśnienia P_{ao} i przepływu Q_{ao} przy ustach pacjenta. Pierwsza część raportu stanowi zwięzłe wprowadzenie w ideę pośrednich pomiarów charakterystyk oddechowych, ze szczególnym naciskiem na techniki eksploatujące dane eksperymentalne rejestrowane w warunkach przejściowych, wywołanych krótkotrwałym wymuszeniem pseudoskokowym. Kolejne sekcje odtwarzają doświadczenia symulacyjno-estymacyjne dla wybranych modeli wprost i odwrotnego, testujące różne warianty i cechy procedur identyfikacyjnych. Zaproponowaną strukturę algorytmiczną poddano w ostatniej części weryfikacji eksperymentalnej, kierunkującej przyszłe poczynania w obszar fizykomatematycznego modelowania układu oddechowego w czasie przerywania przepływu powietrza. Skompletowanie wiedzy w określonym obszarze pozwoli w przyszłości zaproponować wiarygodną metodę pomiaru mechaniki płuc, technikę o istotnych walorach użytkowych, predestynujących jej aplikację, m.in. dla trudnych przypadków niemowląt oraz dzieci przedszkolnych i wczesnoszkolnych.

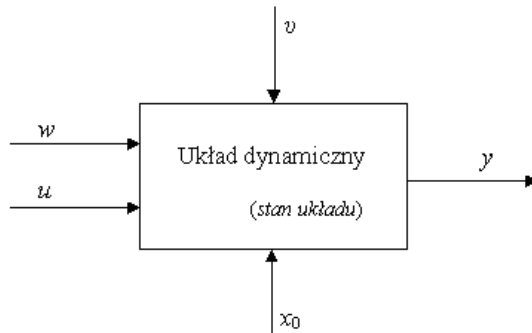
1. UKŁAD ODDECHOWY JAKO SYSTEM DYNAMICZNY

1.1. METROLOGICZNA OCENA SYSTEMU DYNAMICZNEGO

Dedukcja modeli na podstawie obserwacji oraz studiowanie ich właściwości jest jednym z podstawowych zadań nauki. Modele, np. w postaci hipotez, praw natury czy paradygmatów, mogą mieć mniej lub bardziej formalny charakter, jednakże ich wspólną cechą jest próba usystematyzowania dokonanych obserwacji w pewne wzorce, zapisane w języku wykorzystywanym do opisu rzeczywistości.

* Politechnika Wroclawska, Wydział Elektroniki, Katedra Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej, ul. B. Prusa 53/55, 50-317 Wrocław.

Prosta definicja systemu mówi o obiekcie, w którym wzajemne oddziaływanie różnego rodzaju zmiennych powoduje powstanie obserwowalnych sygnałów – wyjścia, będących przedmiotem naszego zainteresowania. Na system wpływają także zewnętrzne pobudzenia – wejścia, o charakterze możliwym do zdeterminowania przez obserwatora. Pozostałe sygnały nazywane są zakłóceniami, przy czym wyróżnia się wśród nich oddziaływania o charakterze mierzalnym oraz niemierzalnym, a rejestrowanym jako wpływ na wyjścia obiektu (rys. 1.1).



Rys. 1.1. Schemat funkcjonowania systemu dynamicznego:

u – wejście, y – wyjście, w – zakłócenia mierzalne, v – zakłócenia niemierzalne, x_0 – stan początkowy

Fig. 1.1. Scheme of working for dynamical system:

u – input, y – output, w – measured noise, v – non-measured noise, x_0 – initial state

Pojęcie systemu dynamicznego wiąże się z tym, iż aktualna wartość y zależy nie tylko od zewnętrznych pobudzeń, ale także od ich wcześniejszych wartości. W przypadku gdy nie rozważa się pobudzenia zewnętrznego wyjścia systemów dynamicznych, nazywa się je szeregami czasowymi.

Nakładanie na otaczającą rzeczywistość obiektów języka wykorzystywanego do jej opisu, np. języka matematyki, ułatwia zrozumienie funkcjonujących w niej współzależności. Spoglądając więc przez takie „okno” porównujemy pewne cechy systemu fizycznego z jego opisem matematycznym; ustalanie jakichś dokładnych współzależności między nimi nie jest przedmiotem niniejszej rozprawy. Kwestia podatności natury na język matematyki ma głębszy sens filozoficzny, natomiast praktyczny wymiar pracy każe narzucić bardziej pragmatyczne spojrzenie na konstruowane modele. Mówienie o „akceptowalności” wybranej struktury należy więc kojarzyć raczej z jej „użytecznością”, a nie „prawdziwością”. Pozostaje to w zgodzie z proponowaną przez Mroczkę [51] koncepcją schematu procesu poznawczego w metrologii, wyrażającą przekonanie o istotnej roli dokładności pomiarów. W takim sensie model „użyteczny” tożsamy jest z cechami modelu metrologicznego [42], co wyzwała konieczność przeprowadzenia analizy dokładności kolejnych odwzorowań (w schemacie Mroczki).

1.2. WARUNKI ANALIZY DYNAMIKI UKŁADU ODDECHOWEGO

Różnorodne propozycje eksperymentu pomiarowego, zapewniającego wiarygodną ocenę właściwości (zachowania) obiektu dynamicznego, jakim jest układ oddechowy, koncentrują się wokół podstawowych etapów protokołu badań pośrednich. Charakter analizy wynika nie tylko z trudnomierzalności odpowiednio zdefiniowanych wielkości, opisujących rozważany system fizjologiczny, lecz także z ogólnych wymogów odnoszących się do bezinwazyjności jego pomiarów. Konkretnie rozwiązania dotyczą zatem doboru optymalnego pobudzenia, modelu układu oraz algorytmów identyfikacji.

Ze względu na poczynione przez autorów założenia na temat utylitarnych uwarunkowań projektowanej procedury pomiarowej, spośród dotychczas stosowanych metod badania układu oddechowego dużą zgodnością z nimi (założeniami) cechują się techniki oparte na wywoływaniu w układzie stanów przejściowych. Istnieje wiele sposobów uzyskiwania stanu przejściowego układu oddechowego, jednakże nie opracowano dotychczas metody ilościowego wnioskowania o jego podstawowych właściwościach na podstawie rejestrowanych sygnałów ciśnienia i przepływu. Poszczególne rozwiązania różnią się sposobem pobudzenia systemu [2, 10, 24, 44, 53, 62, 64, 67, 68, 69, 75], dokładnością (złożonością) modeli opisujących jego strukturę [15, 22, 28, 49, 54, 78], jak również metodami analizy uzyskiwanych danych [18, 43, 47, 48]. Informacja czerpana o układzie oddechowym na podstawie obserwacji dynamiki przejścia systemu pomiędzy jego stanami ustalonymi w dużej mierze zależy od sposobu pobudzenia ośrodka. Ogólnie, podczas badania rozpatrywanego systemu fizjologicznego ma ono charakter skokowy lub impulsowy.

Pierwszą metodą opracowaną w celu realizacji wymienionego zadania była technika przerywanego przepływu powietrza (ang. *interrupter technique* – IT) [1, 2, 3, 41, 49, 53]. Jej główna idea polega na dokonywaniu krótkotrwałych przerw przepływu (czas od kilkunastu do ponad stu ms) przez zamknięcie zaworu przy ustach pacjenta i jednoczesnym pomiarze w ustniku spadającego do zera natężenia przepływu i narastającego ciśnienia. Wprowadzając technikę zakładano, że ciśnienie w jamie ustnej wzrasta wtedy do poziomu pęcherzykowego, jego stosunek zatem do przepływu tuż przed przerwaniem traktowano jako oszacowanie oporu dróg oddechowych. Zainteresowanie wspomnianą metodą wynikało z jej licznych zalet, z których najważniejsze to:

- mała inwazyjność,
- krótki czas pomiaru,
- niewielkie wymagania sprzętowe,
- minimalne wymagania co do współpracy ze strony pacjenta.

Relacjonowane w [1, 2, 16, 41, 45, 49] trudności oszacowania rejestrowanego w takim doświadczeniu parametru – oporu przerwaniowego (R_{mit}) – nie pozwalają konkurować technice przerwaniowej z innymi sposobami pomiaru właściwości układu oddechowego, niosącymi obok większej „skuteczności” diagnostycznej utrudnienia

wyłącznie sprzętowe czy ekonomiczne, ale także związane ze stopniem ingerencji w naturę obserwowanego obiektu. Optymizmem napawają jednakże prace Freya i in. [17, 18], sugerujące możliwość usprawnienia takiego eksperymentu. Obecnie do realizacji pomiaru techniką przerwaniową proponuje się wykorzystywanie zaworów o krótkim czasie zamykania (otwierania) (HIT) [19], co pozwala zwiększyć jej dokładność zarówno podczas analizy w dziedzinie czasu [38], jak i częstotliwości [18, 20].

Kolejną propozycją było dokonywanie częściowej okluzji u wyjścia dróg oddechowych podczas normalnego oddychania. Realizacja odbywała się przez wprowadzenie na krótki okres dodatkowego oporu w postaci płyty perforowanej [64]. W tym przypadku stwierdzono jednak zależność pomiędzy wartością stałego oporu, wprowadzanego przez wspomniany element, a dokładnością uzyskiwanych wyników pomiaru całkowitego oporu układu oddechowego. Opisane prace zaowocowały jednakże opracowaniem nowej techniki, polegającej na włączaniu przy ustach pacjenta zmiennego oporu pneumatycznego [24]. Pomimo eliminacji niedokładności zaproponowanej tutaj metody, dzięki odpowiedniemu przetwarzaniu uzyskiwanych danych, jej kliniczna użyteczność jest ograniczona przyjęciem licznych, nierealizowalnych założeń.

Ponadto obserwuje się prace nad metodami będącymi pochodną pierwotnego sposobu badania układu oddechowego. Przykładem może być urządzenie [44, 67, 68, 69], w którym podstawą diagnozy są sygnały ciśnienia i przepływu pochodzące z układu wytrącanego ze stanu równowagi z użyciem wirującej tarczy z wykonanymi otworami, co zapewnia krótkotrwałe zaburzenie stanu ustalonego systemu.

Innym podejściem jest zastosowanie u wylotu dróg oddechowych ujemnego skoku ciśnienia (NEP) o odpowiedniej wartości [10, 14, 72, 73, 74], bądź też połączenie tej techniki z jednoczesnym przerwaniem przepływu. Mimo iż uzyskiwane wyniki świadczą o słuszności rozważań w przypadku wielu stanów patologicznych obserwowanych w układzie oddechowym, to należy zauważyć, że wymagania konstrukcyjne oraz zwiększona uciążliwość badania (w porównaniu z wcześniej omówionymi metodami) nie odpowiadają poczynionym w rozprawie założeniom konstrukcyjno-użytkowym o prostocie pomiaru, niewielkim stopniu skomplikowania budowy wykorzystywanego do tego celu urządzenia, jak również małej inwazyjności badania.

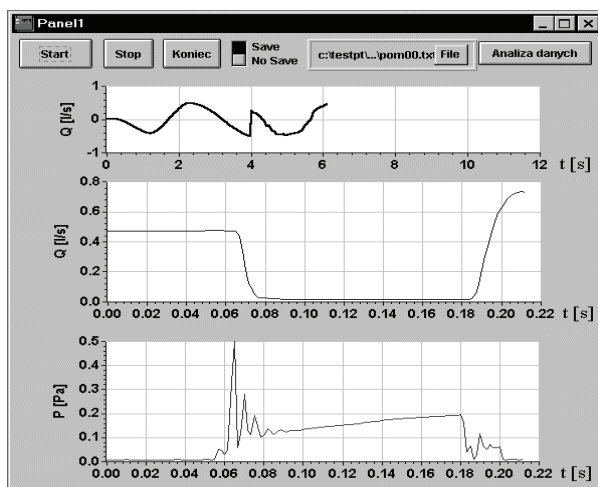
Podobne uwagi dotyczą urządzeń wykorzystujących teorię oscylometrii impulsowej [62, 75], tj. działających według analizy sygnałów pochodzących z układu pobudzanego krótkimi impulsami ciśnienia bądź objętości powietrza.

Argumentacja odwołująca się do zalet techniki przerwaniowej skłoniła autora rozprawy do wskazania jej jako podstawy przyszłych rozważań.

1.3. EWALUACJA ALGORYTMÓW BADAŃ IT

Pomiar mechanicznych właściwości układu oddechowego z wykorzystaniem techniki przerywanego przepływu uległ znacznym modyfikacjom od chwili jej wprowadzenia przez von Neergarda i Wirtza [53]. Jednakże główna idea metody, tj. szybki

i nieinwazyjny pomiar oporu dróg oddechowych, polegający na krótkotrwałym przerwaniu przepływu powietrza przez zamknięcie zaworu przy ustach pacjenta oraz jednoczesny pomiar spadającego do zera natężenia przepływu Q_{ao} i narastającego ciśnienia P_{ao} , nie uległa zmianie (rys. 1.2). W badaniu stosuje się aparaturę rejestrującą o paśmie przepustowości do 200–600 Hz [18, 1, 41, 45] i różnego rodzaju zawory o czasie zamykania rzędu 1–20 ms [20, 49, 45].



Rys. 1.2. Przykładowe przebiegi zmian Q_{ao} i P_{ao} w czasie przerwania przepływu zarejestrowane w Laboratorium Fizycznych Podstaw Pomiaru Katedry Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej

Fig. 1.2. Example plots of Q_{ao} and P_{ao} changes during air-flow interruption acquired in the Laboratory of Fundamental Measurements of the Chair of Electronic and Photonic Metrology of Wrocław University of Technology

Pierwotnie zakładano, że ciśnienie w jamie ustnej po zamknięciu zaworu natychmiastowo wzrasta do poziomu pęcherzykowego (zjawiska związane z oddychaniem są na tyle wolne, iż nie wpływają na mierzony sygnał w tak krótkim czasie). Znając zatem ciśnienie pęcherzykowe P_A i przepływ objętościowy Q tuż przed okluzją z równania (1.1) można wyznaczyć R_{init} , interpretowane jako miara oporu dróg oddechowych

$$R_{init} = \frac{\Delta P_{ao}}{Q}. \quad (1.1)$$

Jednakże w toku dalszych prac okazało się, że rejestrowany sygnał zmian ciśnienia ma bardziej złożony charakter. Początkowo Vuilleumier [77] wykazał istnienie dwóch faz tego przebiegu: pierwszej, charakteryzującej się szybkim skokiem ciśnienia (w czasie rzędu 10 ms), oraz drugiej – z o wiele wolniejszym jego wzrostem (co wiąże się z rozluźnieniem naprężenia w tkankach klatki piersiowej [1], choć może być także spo-

wodowane wyrównywaniem się ciśnień wewnątrz płuc [2]). Stąd zaproponował on przyjęcie punktu przegięcia jako miary ciśnienia pęcherzykowego (co uzasadniano dla przypadku, gdy objętość pęcherzykowa była dużo większa od anatomicznej objętości martwej). Metoda ta została następnie podjęta przez Otisa i Proctora [54]. Późniejsze badania dowiodły, że stosowana technika przeszacowuje P_A , a tym samym R_{init} , o około 20% [49, 41]. Źródłem tych niedokładności jest kilka zjawisk. Po pierwsze, w chwili okluzji P_A wykazuje również skokowy wzrost o wartość wynikającą z istnienia spadku ciśnienia w tkankach klatki piersiowej i płuc tuż przed okluzją [1]. Jednocześnie P_{ao} wyrównuje się z P_A dopiero po pewnym czasie [1], co związane jest zarówno z podatnością pozaklatkowych dróg oddechowych, jak i z tym, iż w rzeczywistym sygnale zmian ciśnienia można zaobserwować na granicy wspomnianych faz tłumione oscylacje [18, 17, 49, 41], wynikające z rezonansowych właściwości dróg oddechowych [41]. Drgania te nie były widoczne we wczesnych badaniach stosujących rejestratory o ograniczonym paśmie częstotliwościowym, wpływając na położenie punktu przegięcia. Z drugiej strony, od momentu przerwania przepływu ciśnienie pęcherzykowe nadal rośnie o wartość wynikającą ze spadku ciśnienia na tkankach płuc i częściowo na tkankach klatki piersiowej oraz na skutek nieprzerwanego działania mięśni oddechowych [49]. Ostatecznie wykazano, że tak wyznaczona wartość zawiera w sobie całkowity opór płucny i część oporu klatki piersiowej [1, 49]. W połączeniu z mniejszą powtarzalnością pomiarów i czułością na zmiany patologiczne, w porównaniu z innymi metodami [16], wpłynęło to na spadek zainteresowania techniką IT na rzecz pletyzmografii całego ciała. Okres ten trwał do około drugiej połowy lat 80. XX w.

Pewnym postępowaniem w dokładniejszym wyznaczeniu R_{init} było wprowadzenie wstecznej ekstrapolacji drugiej części krzywej narostu ciśnienia na region pierwszy [60]. Początkowo ekstrapolacja ta miała charakter subiektywny i za P_A przyjmowano punkt przecięcia poprowadzonej linii z narastającym zboczem pierwszej oscylacji [49], a od momentu wkroczenia techniki komputerowej stosowano ekstrapolację wsteczną, zarówno liniową do punktu przecięcia ze zboczem narastającym [45], jak i krzywoliniową do chwili przerwania przepływu [1, 3]. Celem takiego postępowania była eliminacja wpływu zmian P_A po okluzji. W [1] zaproponowano także ograniczenie zależności mierzonego oporu od natężenia przepływu przez wyznaczenie R_{init} tylko przy $Q < 0,5 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ lub stosowanie regresji tych dwóch wielkości i przyjęcie za R_{init} wartości oporu obliczonego dla $Q = 0$. Co prawda zabiegi te pozwoliły na ograniczenie zmienności pomiarów, lecz otrzymywane wyniki nadal przewyższały (choć w mniejszym stopniu) R_{aw} określane za pomocą pletyzmografii całego ciała. Sugeruje się również usztywnianie policzków i dna jamy ustnej w celu eliminacji wpływu ich podatności na wynik pomiaru [2, 45] oraz stosowanie szybkich zaworów przerywających przepływ powietrza [20, 4].

Na szczególną uwagę zasługuje podejście zaprezentowane w [61] i podjęte w pracach Freya, Kraemera i in. [18, 17], którzy zamiast tradycyjnego niwelowania w dziedzinie czasu zmian ciśnienia zaraz po zamknięciu zaworu przeprowadzili częstotli-

ściową analizę występujących wtedy oscylacji ciśnienia ($f_{osc} \approx 70\text{--}80$ Hz). Wnioskując, iż wynikają one z rezonansu akustycznego dróg oddechowych lub z właściwości układu oddechowego, zachowującego się jak układ RLC , przeprowadzili badania wykazujące związek zarówno częstotliwości tych drgań, jak i współczynnika ich tłumienia z właściwościami fizycznymi drzewa oskrzelowego i chwilową objętością płuc. Ponadto zastosowali technikę przerywania do wyznaczania impedancji oddechowej w szerokim zakresie 32–800 Hz [20].

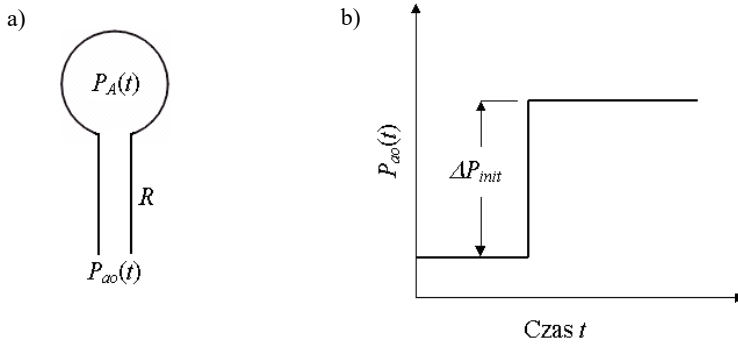
Chęć zmniejszenia obciążenia estymatora R_{aw} oraz ograniczenia jego wariancji motywuje do dalszych modyfikacji pierwotnych założeń IT. Proponuje się, np. dokonywanie wielokrotnego manewru zamknięcia zastawki [23, 67] czy standaryzację warunków badań [13, 9]. Szczegółowe wytyczne odnaleźć można w [21]. Wśród ośrodków podejmujących tematykę oceny mechaniki oddychania techniką przerywanego przepływu powietrza wyraźnie dominują także tendencje do jej aplikacji w stosunku do noworodków i dzieci w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym [50, 12, 27, 66].

1.4. TEORETYCZNE PODSTAWY TECHNIKI PRZERWANIOWEJ

W niniejszym rozdziale celowo zrezygnowano z prezentacji rozumowania Meada i in. [49], którzy wykazali, iż zastosowanie krótkotrwałej okluzji u wyjścia dróg oddechowych w połączeniu z nakreślonym w [49] algorytmem analizy rejestrowanego sygnału wyjściowego prowadzi do pomiaru oporu dróg oddechowych i części oporu klatki piersiowej. Skorzystanie z ogólniejszej koncepcji Batesa i in. [2] jest korzystniejsze ze względu na teorię pośredniej oceny mechaniki oddychania techniką przerywaną.

Przywołując fakty naszkicowane w rozdziale 1.1, wyniki pomiarów metodą IT zawsze interpretuje się w warunkach określonego modelu układu oddechowego, oczekując, że jego elementy spełniają pewną zależność w stosunku do wyróżnionych składników anatomicznych rzeczywistego systemu. Interpretacja taka jest możliwa wówczas, gdy w pełni zrozumiałe jest zachowanie samego analogu podczas proponowanego eksperymentu. Aby ocenić odpowiedź układu w sensie podstawowego parametru diagnostycznego – rezystancji przerywaniowej, warto przeanalizować elementarne relacje, typowe dla układu fizjologicznego w świetle jego różnych, „prawdopodobnych” modeli kompartmentowych. Założenia wstępne w postaci natychmiastowej transmisji ciśnienia oraz nieściśliwości gazu w przestrzeniach powietrznych płuc zmniejszają co prawda dokładność wyników, jednakże ze względu na ogólność rozważań na tym etapie są dopuszczalne.

Pierwszy przypadek dotyczy modelu jednokompartamentowego z rysunku 1.3a, reprezentującego jednolity obszar wymiany gazowej (elastyczność E), zaopatrywanego przez pojedynczy, nierozciągliwy kanał oddechowy (opór R).



Rys. 1.3. a) Liniowy model jednokompartментowy układu oddechowego; b) ogólny charakter czasowych zmian ciśnienia P_{ao} , wynikających z okluzji modelu w chwili t podczas wydechu

Fig. 1.3. a) One-compartment linear model of the respiratory system; b) general character of the time changes of P_{ao} pressure, adequate to the occlusion the model in the t moment during expiration

Niech ciśnienie wewnątrz elastycznego kompartментu w funkcji czasu t wynosi $P_A(t)$ tak, że przepływ $Q(t)$ w modelu

$$Q(t) = [P_{ao}(t) - P_A(t)] / R. \quad (1.2)$$

$P_{ao}(t)$ odpowiada ciśnieniu u wyjścia dróg oddechowych, które może przybierać wartość większą niż $P_A(t)$ (wytwarzając wdech) lub mniejszą od $P_A(t)$ (wytwarzając wydech). Biorąc pod uwagę wstępne ograniczenie o nieściśliwości ośrodka, natychmiastowe i całkowite przerwanie przepływu gazu u wyjścia dróg oddechowych prowadzi do warunku

$$Q(t^+) = 0, \quad (1.3)$$

gdzie t^+ oznacza chwilę czasu po t (tj. natychmiast po przerwaniu). Jednakże równanie (1.2) jest ciągle spełnione, nawet po okluzji, co oznacza, że

$$P_{ao}(t^+) = P_A(t^+). \quad (1.4)$$

Zmiana P_{ao} spowodowana przerwaniem przepływu w chwili t wynosi zatem $P_{ao}(t^-) - P_{ao}(t^+)$, gdzie t^- odpowiada chwili czasu poprzedzającej okluzję. Tę zmianę ciśnienia nazywa się początkową zmianą ciśnienia $\Delta P_{init}(t)$ (rys. 1.3). Dzieląc $\Delta P_{init}(t)$ przez przepływ tuż przed okluzją (1.2) mamy

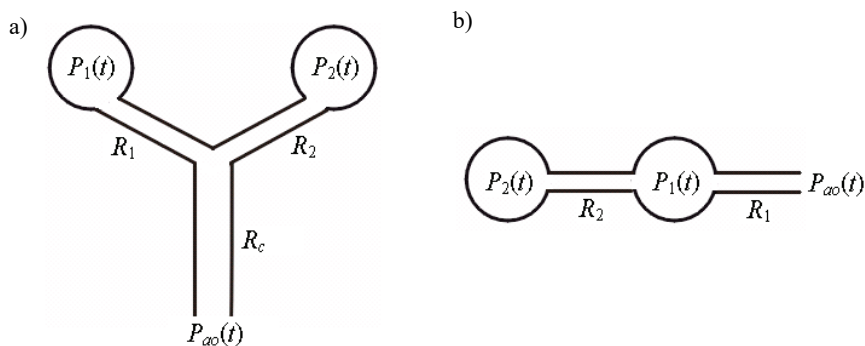
$$\frac{\Delta P_{init}(t)}{Q(t^-)} = \left[\frac{P_{ao}(t^-) - P_A(t^+)}{P_{ao}(t^-) - P_A(t^-)} \right] R. \quad (1.5)$$

$P_A(t)$ wytwarzane jest przez elastyczność systemu oddechowego oraz przez działanie mięśni oddechowych. Żaden ze wskazanych czynników nie jest w stanie zmienić

swojego wpływu w sposób natychmiastowy o skończoną wartość (pierwszy, gdyż przepływ nie może być nieskończony, a drugi z powodu ograniczeń fizjologicznych). $P_A(t^+)$ i $P_A(t^-)$ zatem muszą być równe, zważywszy, że są one znikomo rozdzielone w czasie. Prawa strona równania (1.5) upraszcza się zatem do R .

Przeprowadzona analiza jest racjonalizacją metody przerwaniowej w jej najprostszej postaci: opór dany jest przez zmianę ciśnienia podzielonego przez przepływ. Przykład typowego sygnału P_{ao} , który będzie obserwowany po przerwaniu przepływu podczas wydechu w modelu jednokompartментowym zamieszczono na rysunku 1.3b (znak $\Delta P_{ini}(t)$ będzie przeciwny w czasie wdechu). Należy zauważyć, iż w prezentowanej dyskusji nie dokonano żadnych założeń odnośnie do liniowości R czy E , jak również nie nałożono żadnych specjalnych warunków na $P_A(t)$, $P_{ao}(t)$ i $Q(t)$. Istotnie, mając na uwadze fakt, że pracujemy tylko z pojedynczą elastycznością i pojedynczym oporem, estymacja R (dokładniej R odnoszącego się do przepływu tuż przed przerwaniem) metodą przerwaniową będzie zawsze dokładna [2, 49].

Wiadomo, że mechaniczne właściwości układu oddechowego nie są całkowicie opisane za pomocą modelu o tylko jednym stopniu swobody. Nawet u normalnych zwierząt istnieją znaczne odstępstwa od zachowania struktury jednokompartментowej, co wydaje się być spowodowane przede wszystkim niskoelastycznymi właściwościami płuc i ścian klatki piersiowej [7, 26, 52]. W przypadku choroby lub po zwężeniu oskrzelowym oczywiste jest, że niehomogeniczności oddychania będą czynić ten prosty analog jeszcze mniej odpowiednim. Następnym krokiem w jego skomplikowaniu jest zatem powołanie się na strukturę o dwóch stopniach swobody, cechującą się dwoma liniowymi, wspólnie połączonymi kompartmentami, z których każdy reprezentuje różne mechanicznie obszary układu oddechowego. Na rysunku 1.3 pokazano dwie podstawowe opcje modelu: model równoległy (a) i model szeregowy (b).



Rys. 1.3. a) Dwukompartментowy, równoległy model układu oddechowego;
 b) dwukompartментowy, szeregowy model układu oddechowego
 Fig. 1.3. a) Two-compartmental parallel model of the respiratory system;
 b) two-compartmental serial model of the respiratory system

Model równoległy. Niech $P_1(t^-)$ i $P_2(t^-)$ będą odpowiednio ciśnieniami w kompartmentach 1 i 2 w chwili czasu tuż przed t . Przepływem gazu w ich obrębie zarządzają więc równania:

$$Q_1(t^-) = [P_j(t^-) - P_1(t^-)] / R_1 \quad (1.6)$$

i

$$Q_2(t^-) = [P_j(t^-) - P_2(t^-)] / R_2, \quad (1.7)$$

gdzie $P_j(t^-)$ jest ciśnieniem w węźle łączącym drogi oddechowe. Podobnie całkowity przepływ gazu w systemie wynosi

$$Q(t^-) = Q_1(t^-) + Q_2(t^-) = [P_{ao}(t^-) - P_j(t^-)] / R_c. \quad (1.8)$$

Eliminacja $P_j(t^-)$ w (1.6)–(1.8) daje

$$P_{ao}(t^-) = [R_c + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)] Q(t^-) + [R_2 P_1(t^-) + R_1 P_2(t^-)] / (R_1 + R_2). \quad (1.9)$$

Chwilę po okluzji (czas t^+) ciągle obowiązuje równanie (1.9), ale z definicji $Q(t^+)$ wynosi zero tak, że

$$P_{ao}(t^+) = [R_1 P_2(t^+) + R_2 P_1(t^+)] / (R_1 + R_2). \quad (1.10)$$

ΔP_{init} występujące natychmiast po przerwaniu wynosi zatem

$$\Delta P_{init}(t) = P_{ao}(t^-) - P_{ao}(t^+) = [R_c + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)] Q(t^-). \quad (1.11)$$

Podzielenie $\Delta P_{init}(t)$ przez $Q(t^-)$, obserwowane tuż przed okluzją, daje informację o wielkości nazywanej oporem początkowym lub oporem przerwaniowym ($R_{init}(t)$).

$$R_{init}(t) = R_c + R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = R_{init}. \quad (1.12)$$

Prawa strona równania (1.12) jest dobrze znana z teorii obwodów elektrycznych jako szeregowe zestawienie równoległego połączenia dwóch oporów (R_1 i R_2) z oporem R_c . R_{init} jest zatem stałą równą całkowitemu oporowi dróg oddechowych, jaki będzie wykazywał układ (tj. przy braku dalszych jednostek pęcherzykowych). Znowu jest to całkowicie uogólniony wynik, który nie czyni założeń o warunkach początkowych przepływu, objętości lub ciśnienia w dowolnym punkcie układu. Można także wykazać, że wartość R_{init} jest oporem modelu przy pobudzeniu sinusoidalną falą ciśnienia o nieskończonej częstotliwości ($R(\infty)$) [2].

Po obliczonym $\Delta P_{init}(t)$ nastąpi dalsza zmiana ciśnienia związana z redystrybucją gazu w modelu. Oznaczając jako $\Delta P_{ss}(t)$ zmianę stanu ustalonego ciśnienia od wartości ciśnienia przedprzerwaniowego do końcowego stanu ustalonego tej wielkości po przerwaniu ($P_{ao}^s(t)$)

$$\Delta P_{ss}(t) = P_{ao}(t^-) - P_{ao}^s(t) \quad (1.13)$$

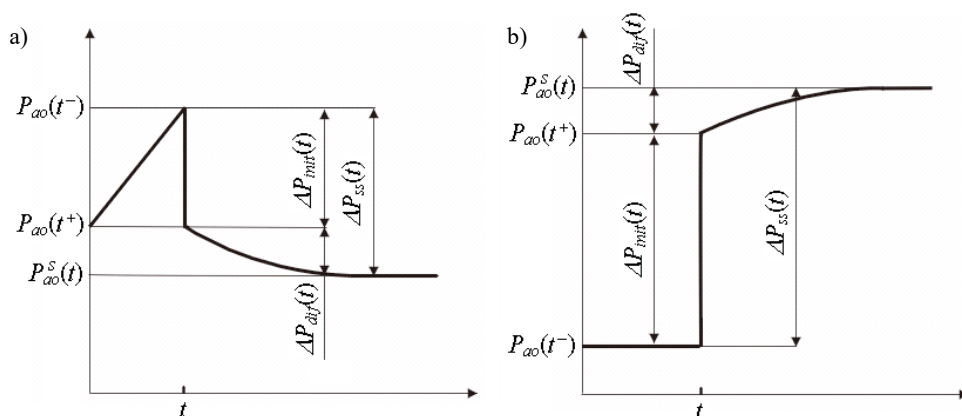
oraz definiując różnicę ciśnienia $\Delta P_{dif}(t)$

$$\Delta P_{dif}(t) = P_{ao}(t^+) - P_{ao}^s(t) = \Delta P_{ss}(t) - \Delta P_{init}(t), \quad (1.14)$$

opór stanu ustalonego $R_{ss}(t)$ wyznaczyć można z zależności:

$$R_{ss}(t) = \Delta P_{ss}(t) / Q(t^-). \quad (1.15)$$

Jednakże w odróżnieniu do R_{init} , $R_{ss}(t)$ zależy od wartości $P_1(t)$ i $P_2(t)$ w czasie okluzji, a zatem musi pozostać funkcją t . Jeżeli na przykład $P_1(t)$ i $P_2(t)$ są równe podczas przerwania, wówczas nie będzie zachodziło zjawisko międzykompartimentowego wyrównywania ciśnień, a stąd drugorzędna zmiana ciśnienia po okluzji – nie istnieje różnica ciśnień pomiędzy dwoma kompartmentami, która mogłaby spowodować wymuszenie przepływu z jednego kompartmentu do drugiego. Odwrotnie, duża różnica pomiędzy $P_1(t)$ i $P_2(t)$ jest źródłem dużej, drugorzędnej zmiany $P_{ao}(t)$. Z drugiej strony, przebieg czasowy wyrównywania ciśnienia pomiędzy dwoma kompartmentami zależy tylko od opisujących je elastyczności i oporu ścieżki oddechowej pomiędzy nimi. W [5] wykazano, że różnica ciśnienia maleje eksponencjalnie ze stałą czasową daną przez $(R_1 + R_2)/(E_1 + E_2)$. Na rysunku 1.4 zaprezentowano wyidealizowane sygnały $P_{ao}(t)$ dla przerwania podczas wdechu i wydechu, wraz ze zdefiniowanymi już zmianami ciśnienia



Rys. 1.4. a) Ogólny charakter zmian sygnału P_{ao} podczas przerwania przepływu w modelu wielokompartimentowym w czasie wdechu ze stałą wartością przepływu [2]; b) sygnał P_{ao} , który byłby obserwowany po dokonaniu przerwania w fazie wydechu (warunki jak w pkt. a) [2]
 Fig. 1.4. a) General character of P_{ao} signal changes in the multicompartmental model during inspiratory air-flow interruption at constant flow [2]; b) P_{ao} signal potentially observed during expiration after air-flow interruption (conditions analogous to a) [2]

Model szeregowy. Modelem szeregowym (rys. 1.3.b) zarządzają następujące równania:

$$P_{ao}(t^-) - P_1(t^-) = R_1[Q_1(t^-) + Q_2(t^-)], \quad (1.16)$$

$$P_1(t^-) - P_2(t^-) = R_2 Q_2(t^-). \quad (1.17)$$

Warunek natychmiastowo zaokludowanego wyjścia dróg oddechowych chwilę po czasie t jest znowu dany równaniem (1.3) oznaczając, że $P_1(t^+)$ i $Pao(t^+)$ są równe ze sobą oraz z $P_1(t^-)$. Zmiana Pao wynosi zatem

$$\Delta P_{init}(t) = P_{ao}(t^-) - P_{ao}(t^+) = R_1 Q(t^-), \quad (1.18)$$

skąd

$$R_{init}(t) = \Delta P_{init}(t) / Q(t^-) = R_1 = R_{init}. \quad (1.19)$$

Innymi słowy, nagle zmiana $Pao(t)$ po okluzji odzwierciedla tylko opór bliższego kompartmentu. Wynika to z tego, że jego elastyczność zachowuje się jak bufor ciśnienia pomiędzy wyjściem dróg oddechowych i kompartmentem dalszym. W rozważanym przypadku znowu można udowodnić, że R_{init} jest stałą równą wartości oporu $R(\infty)$ [16].

Podobnie jak w modelu równoległym, Pao analogu szeregowego wykazuje ogólnie drugą zmianę $\Delta P_{dif}(t)$, wynikającą z redystrybucji gazu między kompartmentami. Wielkość $\Delta P_{dif}(t)$, a stąd $R_{ss}(t)$ znowu zależy od ciśnień w dwóch podsystemach w chwili okluzji. Przebieg czasowy redystrybucji gazu ma charakter eksponencjalny jak w modelu powyżej, ale ze stałą czasową daną przez $R_2/(E_1+E_2)$ [2].

Liniowe modele N-kompartментowe. Podaną analizę można rozszerzyć na przypadek uogólnionego liniowego modelu równoległego i szeregowego. Rozpatrując na przykład N -kompartментowy analog równoległy z rysunku 1.5.a, dla dowolnego N oraz przy stałości wszystkich pojedynczych oporów, otrzymujemy następujące równania opisujące przepływy w każdej gałęzi układu:

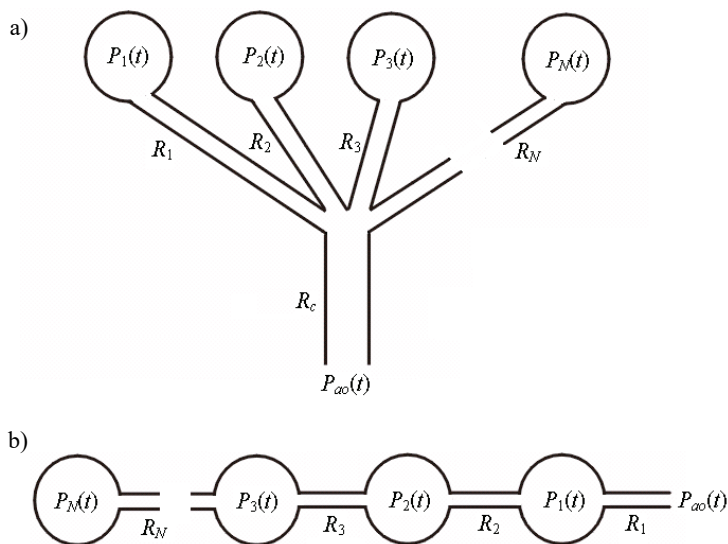
$$Q_i(t) = [P_j(t^-) - P_i(t^-)] / R_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.20)$$

oraz całkowity

$$\sum_{i=1}^N Q_i(t^-) = Q(t^-) = [Pao(t^-) - P_j(t^-)] / R_c. \quad (1.21)$$

Eliminacja $P_j(t^-)$ pomiędzy (1.20) i (1.21) oraz rozwiązanie względem $Pao(t^-)$ prowadzi do

$$Pao(t^-) = \left[Q(t^-) \left(1 + R_c \sum_{i=1}^N 1/R_i \right) + \sum_{i=1}^N P_i(t^-) / R_i \right] / \left[\sum_{i=1}^N (1/R_i) \right]. \quad (1.22)$$



Rys. 1.5. a) N -kompartmentowy model równoległy układu oddechowego;
 b) N -kompartmentowy model szeregowy układu oddechowego
 Fig. 1.5. a) N -compartmental, parallel model of the respiratory system;
 b) N -compartmental, serial model of the respiratory system

Bezpośrednio po okluzji w chwili t nadal obowiązuje równanie (1.22), ale $Q(t^+)$ wynosi zero tak, że

$$P_{ao}(t^+) = \sum_{i=1}^N [P_i(t^+) / R_i] / \left[\sum_{i=1}^N (1 / R_i) \right]. \quad (1.23)$$

Ponownie $P_i(t^+)$ jest równe $P_i(t^-)$ skoro ciśnienia kompartmentowe nie mogą zmienić się o skończoną wartość w niewielkim przedziale czasu. Biorąc zatem zmianę P_{ao} podczas przerwania z (1.23) i (1.22), a następnie dzieląc ją przez $Q(t^-)$ mamy

$$\frac{\Delta P_{init}(t)}{Q(t^-)} = R_c + 1 / \left[\sum_{i=1}^N 1 / R_i \right] = R_{init}. \quad (1.24)$$

Zgodnie z dyskusją nad wcześniejszym, prostszym przypadkiem, (1.24) definiuje całkowity opór drzewa kanałów oddechowych.

Podobnej analizie wymaga szeregowy model N -kompartmentowy z rysunku 1.5.b. Jej wynikiem jest stwierdzenie, iż co do ΔP_{init} układ ten zachowuje się tak, jak omawiana wcześniej dwukompartmentowa struktura szeregową, czyli wielkość ta odzwierciedla tylko bliższy opór [2]. Oczywiście opis zarówno analogów szeregowych, jak i równoległych wymaga dalszych zmian. Przecież ΔP_{dif} następujące po ΔP_{init} , wynika to z redystrybucji gazu pomiędzy różnymi kompartmentami.

Trudno jednoznacznie przesądzić o przydatności któregoś z omówionych modeli do interpretacji wyników badań techniką przerwaniową, zwłaszcza że obwarowano je licznymi założeniami upraszczającymi. Pytanie o użyteczność niewątpliwie związane jest ze stopniem skomplikowania analogu–kandydata, stąd prezentowane wstępnie rozważania teoretyczne na podstawie prostych modeli kompartmentowych wydają się być rozsądne. Każdy bowiem podukład, w zależności od wnikliwości spojrzenia, znajduje swój odpowiednik w systemie fizjologicznym. Ze względu na złożoność zachodzących w nim procesów niewykluczone jest więc, że warto przestudiować na przykład kombinację struktury szeregowej i równoległej.

Dodatkową kwestią jest fakt pomijania w dotychczasowych analizach składowych, związanych z bezwładnością przesuujących się w systemie elementów oraz ściśliwością gazu. Nagle dostarczany, przesuwany się słup powietrza objawia się zamianą energii kinetycznej na potencjalną, tymczasem bezwładność i ściśliwość gazu w drogach oddechowych może być źródłem szybkich oscylacyjnych zmian ciśnienia po przerwaniu [49, 41, 17], szczególnie interesujących ze względu na obszar zainteresowań niniejszego opracowania. Były one także przyczynkiem do dyskusji nad charakterem układu (niedotłumiony lub przetłumiony układ drugiego lub pierwszego rzędu), a także nad słusnością stosowania proponowanych technik estymacji ciśnienia pęcherykowego podczas eksperymentu przerwaniowego [41, 8, 40, 65, 49, 76]. Podobne sugestie (ale nie tylko), powszechnie wykorzystywano w przypadku prac modelowych w innych metodach badania układu oddechowego [75, 25, 11, 63, 47, 71], stosując dobrze znane analogie formalne między rozważanym fizjologicznym systemem akustyczno-mechanicznym, interpretowanym w pojęciu układów masa–sprężyna a elektrycznym obwodem RLC (tab. 1.1, tab. 1.2).

Tabela 1.1. Analogie matematyczne między modelem sprężyna–masa $mx'' + px' + kx = f(t)$, $x(0) = x$, $x'(0) = v_i$ i szeregowym modelem obwodu RLC $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E$, $q(0) = q_i$, $q'(0) = i_i$

Table 1.1. Mathematical analogies between the spring–mass model $mx'' + px' + kx = f(t)$, $x(0) = x$, $x'(0) = v_i$ and the serial RLC circuit $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E$, $q(0) = q_i$, $q'(0) = i_i$

Układ sprężyna–masa	Szeregowy obwód RLC
Masa m	Indukcyjność L
Współczynnik tarcia p	Rezystancja R
Współczynnik sprężystości k	Odwrotność pojemności $1/C$
Siła $f(t)$ przyłożona do sprężyny	Źródło napięcia E
Przesunięcie x masy	Ładunek q na kondensatorze
Prędkość x'	Prąd $q' = i$
Przyspieszenie x''	Szybkość zmiany prądu di/dt
Położenie początkowe x_i masy	Ładunek początkowy q_i na kondensatorze
Prędkość początkowa v_i	Prąd początkowy i_i

W analizie pominięto wpływ nieliniowości na relację model–system rzeczywisty. Aspekty te będą bowiem przedmiotem przyszłych prac po zakończeniu etapu scharakteryzowanego w niniejszym opracowaniu.

Pole badań w zakresie modelowania układu oddechowego w czasie przerywania przepływu powietrza pozostaje szerokie, szczególnie że dotychczas stosowane w pomiarach IT analogi to układy jedno- lub dwuelementowe [53, 23, 55, 2].

Tabela 1.2. Analogie fizyczne między modelem sprężyna–masa $mx'' + px' + kx = f(t)$, $x(0) = x, x'(0) = v_i$ i szeregowym modelem obwodu RLC $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E, q(0) = q_i, q'(0) = i_i$

Table 1.2. Physical analogies between the spring–mass model $mx'' + px' + kx = f(t)$, $x(0) = x, x'(0) = v_i$ and the serial RLC circuit $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E, q(0) = q_i, q'(0) = i_i$

Układ sprężyna–masa	Szeregowy obwód RLC
Bezwładność mx''	Potencjał na indukcyjności $Lq'' = Li'$
Siła tłumienia px'	Spadek napięcia na rezystorze $Rq' = Ri$
Siła przywracająca równowagę układu kx	Potencjał na pojemności q/C

1.5. NAJWAŻNIEJSZE PROBLEMY ZWIĄZANE Z ANALIZĄ DYNAMIKI STANU PRZEJŚCIOWEGO W POMIARZE WŁAŚCIWOŚCI UKŁADU ODDECHOWEGO

Prowadzone od wielu lat prace badawcze, zmierzające do opracowania metody pomiaru właściwości układu oddechowego, z wykorzystaniem techniki przerywanego przepływu napotykać liczne niedogodności. Ich źródeł należy upatrywać przede wszystkim w dokładności odwzorowania rzeczywistego systemu fizjologicznego przez jego analog elektryczny, jak również w trafności doboru narzędzi wykorzystywanych do przetwarzania rejestrowanych sygnałów ciśnienia i przepływu.

Realizacja tematyki odbywać się będzie według idei pośredniego pomiaru właściwości układu dynamicznego przez identyfikację jego modelu. Zadanie to wymaga jednak rozwiązania licznych problemów, z których najważniejsze to:

1. Brak modeli symulacyjnych dla techniki przerywanego przepływu, oddających z dużą dokładnością mechaniczną naturę układu oddechowego i procesy zachodzące podczas pomiaru.

2. Brak modeli matematycznych służących estymacji parametrów układu oddechowego na podstawie sygnałów mierzonych w stanie przejściowym.

3. Skupianie się na pomiarze jedynie oporu dróg oddechowych, co przy złożoności badanego systemu prowadzi do dużych błędów systematycznych.

4. Trudności ze zmiennością podatności pozachawiczych dróg oddechowych, co przy braku uwzględnienia jej w modelu prowadzi do zwiększenia błędów przypadkowych [6, 39].

5. Nieuwzględnianie w pomiarach informacji zawartych w stanie przejściowym obserwowanym po okluzji.

6. Brak analizy wpływu parametrów aparatury pomiarowej (np. rodzaju i szybkości zaworu) na dokładność estymacji parametrów.

2. MODEL UKŁADU ODDECHOWEGO

2.1. MODEL WPROST I MODEL ODWROTNY

System można zdefiniować jako obiekt, którego właściwości podlegają badaniu. Układ oddechowy, którego właściwości mechaniczne są obiektem zainteresowań niniejszego opracowania, jest przykładem systemu biologicznego. Typowe dla ludzkiej ciekawości jest szukanie odpowiedzi na pytania dotyczące cech systemu. Większość odpowiedzi na te pytania może być znaleziona przez przeprowadzanie eksperymentów na systemie. Obserwowane sygnały zwane są wtedy wyjściami. Wpływ na zachowanie systemu mają również zewnętrzne bodźce. Zewnętrzne sygnały, które mogą być sterowane przez obserwatora, nazywane są wejściami. Inne stanowią zakłócenia z podziałem na bezpośrednio mierzalne oraz takie, które można obserwować przez ich wpływ na wyjście. Stosowanie metod eksperymentalnych ma swoje ograniczenia, tzn. niekiedy nie jest możliwe przeprowadzenie stosownych badań, czego przykładem może być bezpośredni, nieinercyjny pomiar ciśnienia pęcherzykowego P_A .

W przypadkach, kiedy nie jest możliwe przeprowadzenie eksperymentu proponuje się wykorzystanie narzędzi modelowania. Słowo „model” z łaciny oznacza wzór, wzorek albo formę. Jednym z typów modeli są modele matematyczne. Modele można klasyfikować na wiele różnych sposobów, formułując rozmaite kryteria podziału reprezentowane m.in. przez modele deterministyczne oraz stochastyczne, statyczne (zmiennne charakteryzujące system niezależne od historii pobudzenia) i dynamiczne (zmiennne zależne od pobudzenia) dla czasu ciągłego i dyskretnego. Pod względem wejść i wyjść modele możemy podzielić na:

- modele z jednym wejściem i jednym wyjściem (ang. *Single Input Single Output*),
- modele z jednym wejściem i wieloma wyjściami (ang. *Single Input Multiple Output*),
- modele z wieloma wejściami, jednym wyjściem (ang. *Multiple Input Single Output*),
- modele z wieloma wejściami, wieloma wyjściami (ang. *Multiple Input Multiple Output*).

Dla modelu matematycznego zachowanie systemu może być wyznaczone analitycznie przez rozwiązanie równań, będących opisem matematycznym relacji między wielkościami obserwowanymi w systemie (odległości, prądy, przepływy itd.). Najczę-

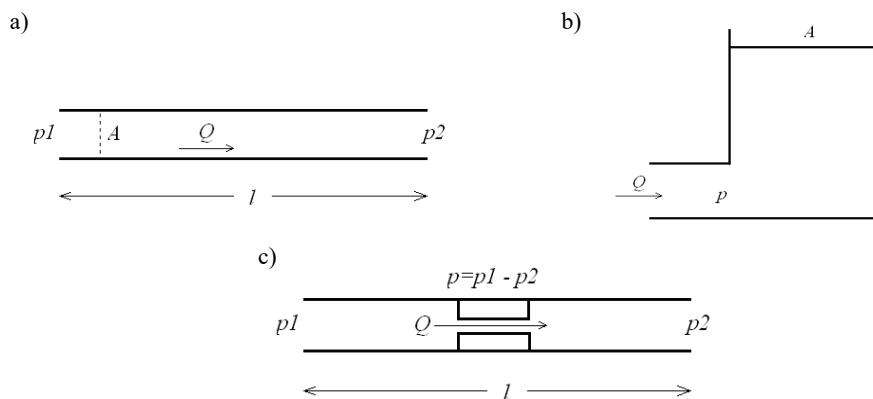
ściej są to równania różniczkowe (dla sygnałów ciągłych) lub różnicowe (dla sygnałów dyskretnych). Rozwiązanie tych równań jest odpowiedzią modelu, mającą w założeniach pokrywać się z odpowiedzią systemu. Obserwacja sygnałów w modelu nazywana jest symulacją systemu (łac. *simulare* – udawać). Symulacja jest więc niedrogim oraz bezpiecznym substytutem eksperymentowania na systemie. Należy mieć jednak na uwadze to, iż wyniki symulacji zależą całkowicie od jakości modelu. Modele oraz ich symulacje nie są w stanie w pełni zastąpić obserwacji eksperymentalnej. Najczęściej model jest pewnym przybliżeniem rzeczywistego obiektu, idealizacją z ograniczającymi założeniami (nieskończona ilość wielkości oddziałujących na zachowanie się obiektu, nieliniowość, trudność ścisłego zdefiniowania wielkości wejściowych i wyjściowych). Stosuje się różne postacie modeli w zależności od jego przeznaczenia i struktury identyfikowanego obiektu.

W procesie tworzenia modelu fizycznego obiektu (model matematyczny systemu dynamicznego [46]), jakim jest układ oddechowy, niezbędna jest znajomość podstawowych zależności fizycznych. Bardzo często w tworzonych modelach definiujących zachowanie obiektu wykorzystuje się analogię istniejącą między zjawiskami mechanicznymi oraz elektrycznymi [46]. Zależności fizyczne zjawisk mechanicznych (dokładniej dotyczące przepływów gazu) i elektrycznych oraz ich analogie zostały przedstawione dalej.

Podstawowe równania służące do opisu obwodów elektrycznych oddają relacje pomiędzy dwoma wielkościami: napięciem u mierzonym w voltach [V] oraz prądem i mierzonym w amperach [A].

System przepływu nieściśliwych gazów opisany jest dwoma podstawowymi wielkościami:

- ciśnieniem p (N/m^2),
- przepływem Q (m^3/s).



Rys. 2.1. a) Przepływ przez rurę o przekroju A ; p_1 i p_2 ciśnienia na końcach rury, b) zamknięty zbiornik, do którego włączane jest powietrze, c) przepływ przez zwężenie w rurze
 Fig. 2.1. Flow through the pipe with a cross sectional area A ; p_1 and p_2 pressures at the pipe's ends, b) Forcing the air into the closed container, c) flow through the narrowing in the pipe

Przepływ powietrza o gęstości ρ przez rurkę o długości l i przekroju A (rys. 2.1.a) dany jest wzorem

$$Q(t) = \frac{1}{L_f} \int_0^t p(s) ds, \quad (2.1)$$

gdzie $L_f = \rho \cdot l/A$ jest inertancją rurki.

Analogicznie prąd przepływający przez cewkę o induktancji L można opisać zależnością

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t i(s) ds. \quad (2.2)$$

Ciśnienie p , występujące na dnie zamkniętego zbiornika o powierzchni przekroju poprzecznego A (rys. 2.1.b), do którego włączane jest powietrze, wynosi:

$$p(t) = \frac{\rho \cdot g}{A} \int_0^t Q(s) ds, \quad (2.3)$$

gdzie g – przyspieszenie ziemskie, współczynnik $C_f = A/\rho g$ [$\text{m}^4 \text{s}^2/\text{kg}$] jest podatnością gazu. Podobnie dla obwodu elektrycznego napięcie na elemencie o pojemności C (farad) wyraża się zależnością:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds. \quad (2.4)$$

W czasie przepływu gazu przez ośrodek (rys. 2.1.c) tracona jest energia wskutek występowania tarcia w ośrodku, przez który gaz się porusza, oraz wzajemnego tarcia pomiędzy cząsteczkami gazu. Prowadzi to do spadku ciśnienia na drodze przepływu. Jednocześnie można stwierdzić, że spadek ciśnienia potrzebny jest do utrzymania przepływu. Spadek ciśnienia zależy więc od przepływu. Zależności między tymi dwoma wielkościami opisuje prawo Arcyasa:

$$p(t) = R_f Q(t), \quad (2.5)$$

gdzie R_f jest oporem przepływu.

Dla obwodów elektrycznych, zgodnie z prawem Ohma, napięcie na elementach rezystywnych wymusza przepływ prądu, ale również przepływ prądu przez te elementy powoduje powstawanie napięcia na nich. Prawo to jest analogiczne do przedstawionego prawa Arcy'asa odnoszącego się do systemu przepływu powietrza.

Podobieństwo między tymi dwoma systemami jest oczywiste. Można zauważyć, że wszystkie równania są zależnościami pomiędzy dwoma zmiennymi reprezentującymi:

- wysiłek – e ,
- przepływ – f .

Zależności te mają następujące charakterystyki:

- akumulacji wysiłku: $f = \alpha^{-1} \int e$,
- akumulacji przepływu: $e = \beta^{-1} \int f$,
- statycznych zależności: $e = h(f)$.

Dla układu oddechowego analogie (wraz z opisem) związane z przepływem gazu i zjawiskami mu towarzyszącymi oraz przepływem prądu i spadkiem napięcia zestawiono w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Analogie pomiędzy zjawiskami mechanicznymi i elektrycznymi
Table 2.1. Analogies between mechanical and electrical phenomena

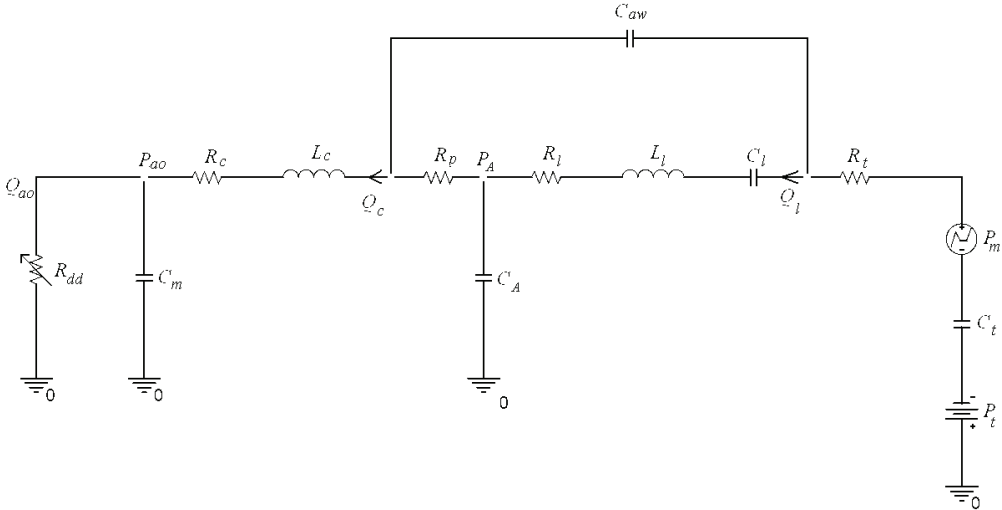
Układ mechaniczny	Układ elektryczny	Opis
Masa	Ładunek elektryczny	Medium
Ciśnienie	Napięcie	Siła działająca na medium (wysiłek)
Przepływ	Prąd	Wielkość określająca zmianę ilości medium w ośrodku w funkcji czasu (przepływ)
Oporność	Rezystancja	Wielkość charakteryzująca reakcję ośrodka na przepływ medium
Podatność	Pojemność	Wielkość określająca zdolność ośrodka do gromadzenia medium
Inertancja	Indukcyjność	Wartość związana z bezwładnością

Opierając się na wiedzy *a priori* dotyczącej zjawisk skojarzonych z oddychaniem oraz wykorzystując wymienione zależności, przedstawiając obiekt za pomocą układu elektrycznego złożonego z elementów dyskretnych R , L , C , można stworzyć model z parametrami reprezentującymi główne właściwości układu i zjawiska zachodzące podczas oddychania. Strukturę elektrycznego modelu zastępczego, uwzględniającą najważniejsze właściwości definiujące status układu oddechowego, przedstawiono na rysunku 2.2.

Poszczególne elementy układu zastępczego (rys. 2.2) reprezentują:

- R_{dd} – opór przetwornika przepływu oraz zaworu okluzyjnego, zmieniający się podczas przerwania – podczas okluzji wzrasta o kilka rzędów. Pomimo zamknięcia zaworu, istnieje jednak minimalny przepływ powietrza, dlatego rezystancja tego elementu nie jest skończona w czasie zamknięcia zaworu,
- C_m – podatność części ustnej,
- R_c oraz L_c – opór i inertancja centralnych dróg oddechowych,
- R_p – opór peryferyjnych dróg oddechowych,
- C_A – podatność gazu zawartego w pęcherzykach płucnych,

- P_A – ciśnienie pęcherzykowe,
 R_l, L_l oraz C_l – rezystancja, inercja oraz podatność tkanek płucnych,
 C_{aw} – podatność dróg oddechowych,
 R_t oraz C_t – rezystancja oraz podatność klatki piersiowej,
 P_t – źródło o stałym ciśnieniu polaryzujące podatność C_t stosownie do występowania sił retrakcji w układzie oddechowym,
 P_m – źródło adekwatne do aktywności mięśni oddechowych.



Rys. 2.2. Schemat zastępczy układu oddechowego
 Fig. 2.2. Electrical replacement model of the respiratory system

Według sugerowanych w [31] wartości parametrów, tj. oporów, podatności i inercji dróg oddechowych i części tkankowej oraz badań symulacyjnych przyjętego modelu, zaproponowano następujące wartości parametrów:

- $R_{dd} = 100$ [Pa·s/dm³] – spokojne oddychanie, $R_{dd} = (100 + 10^6)$ [Pa·s/dm³] – okluzja,
- $C_m = 6 \cdot 10^{-6}$ [dm³/Pa],
- $R_c = 150$ [Pa·s/dm³],
- $L_c = 0,5$ [Pa·s²/dm³],
- $R_p = 15$ [Pa·s/dm³],
- $C_A = 35 \cdot 10^{-6}$ [dm³/Pa],
- $R_l = 21,3$ [Pa·s/dm³],
- $L_l = 0,0415$ [Pa·s²/dm³],
- $C_l = 2,5 \cdot 10^{-3}$ [dm³/Pa],
- $C_{aw} = 2 \cdot 10^{-3}$ [dm³/Pa],
- $R_t = 40$ [Pa·s/dm³],

$$- Ct = 3 \cdot 10^{-3} \text{ [dm}^3\text{/Pa]},$$

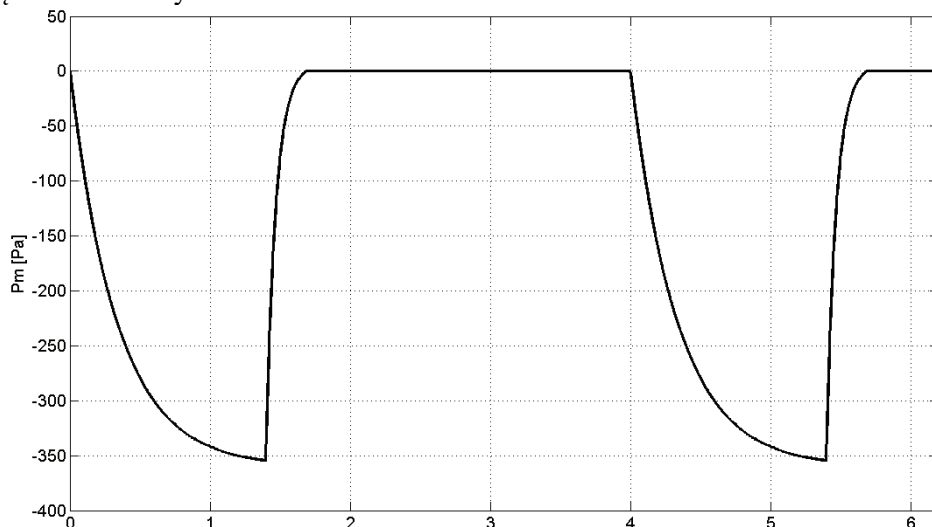
$$- Pt = -550 \text{ [Pa]}.$$

Pracę mięśni reprezentowaną przez źródło P_m , według zależności przedstawionych w [34], opisano równaniem

$$P_m = \begin{cases} -360 \left(1 - e^{\left(\frac{-t}{\frac{1}{3}} \right)} \right) \text{ [Pa]}, & 0[s] \leq t \leq 1,4[s] - \text{wdech,} \\ -354,5 + 360 \left(1 - e^{\left(\frac{-t}{0,07} \right)} \right) \text{ [Pa]}, & 1,4[s] < t < 1,78[s] - \text{pierwsza faza wydechu,} \\ 0 \text{ [Pa]} & \text{dla } 1,78[s] \leq t < 4[s] - \text{druga faza wydechu.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Zależność (2.6) modeluje pierwszy cykl oddechowy, trwający w tym przykładzie 4 sekundy. Powtarzany okresowo przebieg ciśnienia P_m wytwarzanego przez mięśnie oddechowe przedstawia rysunek 2.3. Wyraźnie widoczne są w nim 3 fazy:

- faza wdechu, podczas której mięśnie są najbardziej aktywne,
- pierwsza faza wydechu, w czasie której następuje wygaszanie mięśni,
- druga faza wydechu ($P_m = 0$ [Pa]) z charakterystycznym brakiem aktywności mięśni oddechowych.



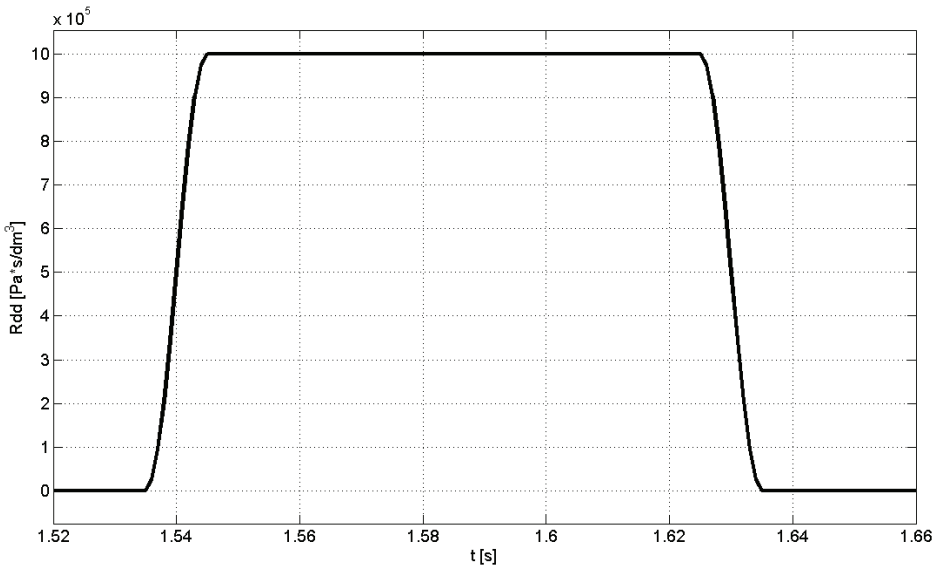
Rys. 2.3. Charakterystyka pracy mięśni oddechowych

Fig. 2.3. Respiratory muscle characteristic

Opór przetwornika przepływu oraz zaworu zamykającego R_{dd} zmienia swoją wartość podczas okluzji w skończenie krótkim czasie, w większości przypadków wynoszącym około 10 ms. Czas okluzji dla tego modelu przyjęto jako równy 100 ms. Zamknięcie oraz otwarcie zaworu symulowano zgodnie z równaniem:

$$R_{dd} = \begin{cases} 100 [\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{dm}^3], & (t_{okluzji} + 100^{-3} [\text{s}]) < t < t_{okluzji} - \text{przed i po okluzji}; \\ 100 + \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi \frac{t - t_{okluzji}}{10^{-2}} \right) \right) \right] \cdot 10^6 [\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{dm}^3], & t_{okluzji} \leq t < (t_{okluzji} + 10^{-3} [\text{s}]) - \text{zamknięcie zaworu}; \\ 100 + \left[1 - \frac{1}{2} \left(-1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi \frac{t - t_{okluzji}}{10^{-2}} \right) \right) \right] \cdot 10^6 [\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{dm}^3], & ((t_{okluzji} + 100^{-3} [\text{s}]) - 10^{-3} [\text{s}]) \leq t < (t_{okluzji} + 100^{-3} [\text{s}]) - \text{otwarcie zaworu}; \\ 100 + 10^6 [\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{dm}^3], & (t_{okluzji} + 10^{-3} [\text{s}]) \leq t < ((t_{okluzji} + 100^{-3} [\text{s}]) - 10^{-3} [\text{s}]) - \text{w czasie okluzji}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Pojedynczy cykl zmiany oporu R_{dd} podczas okluzji przedstawiono na rysunku 2.4.



Rys. 2.4. Charakterystyka zmiany oporu R_{dd} podczas okluzji
Fig. 2.4. Changes of R_{dd} resistance during occlusion

2.2. RÓWNANIA ELEKTRYCZNEGO MODELU ZASTĘPCZEGO

Zaproponowany model (rys. 2.2) można przedstawić w postaci układu równań stanu, reprezentujących zjawiska dynamiczne zachodzące w opisywanym systemie pod wpływem wymuszeń zewnętrznych i nagromadzonej w układzie energii oraz wyrażający przyczynowy charakter zjawisk:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\quad (2.8)$$

gdzie \mathbf{x} – wektor zmiennych stanu, \mathbf{y} – wektor odpowiedzi, \mathbf{u} – wektor wymuszeń, \mathbf{A} – macierz stanu, \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} – macierze skalujące i transformujące.

Wykorzystując I i II prawo Kirchhoffa dla natężeń i napięć w obwodach elektrycznych oraz opierając się na zależnościach dotyczących prądów na elementach indukcyjnych w funkcji czasu, układ równań dla modelu zastępczego z rysunku 2.2 przedstawić można następująco:

$$P_{Rdd} = P_{Cm}, \quad (2.9)$$

$$P_{Cm} + P_{Rc} + L_C \frac{dQ_C}{dt} + P_{Rp} = P_{CA}, \quad (2.10)$$

$$P_{CA} + P_{Rl} + L_l \frac{dQ_l}{dt} + P_{Cl} + P_{Rt} + P_{Ct} = Pm + Pt, \quad (2.11)$$

$$P_{Rp} + P_{Rl} + L_l \frac{dQ_l}{dt} + P_{Cl} = P_{Caw}. \quad (2.12)$$

Wykorzystując następnie zależność dotyczącą napięć na kondensatorach w funkcji czasu, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{dQ_C}{dt} &= \frac{-Q_C(Rc(Rt + Rp) + RtRp) - Q_l Rp((Rt + Rp) - Rp)}{L_c(Rt + Rp)} \\ &+ \frac{-Q_C(Rt + Rp) + P_{CA}Rt - P_{Ct}Rp - P_{Caw}Rp + PmRp + PtRp}{L_c(Rt + Rp)},\end{aligned}\quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}\frac{dQ_l}{dt} &= \frac{-Q_C RtRp - Q_l((Rp + R_l)(Rt + Rp)RpRp) - P_{Cl}(Rt + Rp)}{L_l(Rt + Rp)} + \\ &+ \frac{P_{Caw}Rt - P_{CA}Rp - P_{Ct}Rp + PmRp + PtRp}{L_c(Rt + Rp)},\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$\frac{dP_{Caw}}{dt} = \frac{Q_c Rp - Q_l Rt - P_{C_A} - P_{C_t} - P_{Caw} + Pm + Pt}{Caw(Rt + Rp)}, \quad (2.15)$$

$$\frac{dP_{C_t}}{dt} = \frac{Q_c Rp + Q_l Rp - P_{C_A} - P_{C_t} - P_{Caw} + Pm + Pt}{C_t(Rt + Rp)}, \quad (2.16)$$

$$\frac{dP_{C_m}}{dt} = \frac{Q_c}{C_m} - \frac{P_{C_m}}{C_m Rdd}, \quad (2.17)$$

$$\frac{dP_{C_A}}{dt} = \frac{Q_c Rt + Q_l Rp - P_{C_A} - P_{C_t} - P_{Caw} + Pm + Pt}{C_A(Rt + Rp)}, \quad (2.18)$$

$$\frac{dP_{C_l}}{dt} = \frac{Q_l}{C_l}. \quad (2.19)$$

Przedstawione związki stanowią układ równań różniczkowych pierwszego stopnia. Aby wyznaczyć dla niego warunki początkowe, należy dla ciśnienia wytwarzanego przez mięśnie oddechowe – $Pm = 0$ [Pa] (faza między wdechem i wydechem) wyznaczyć początkowy spadek ciśnień na elementach podatnościowych; układ oddechowy w czasie pomiędzy wdechem a wydechem charakteryzuje się brakiem przepływu, tak więc przyjęte w modelu zastępczym (rys. 2.2) zarówno opory, jak również inertancje nie mają wpływu na rozkład spadków ciśnień.

Schemat zastępczy przyjętego modelu, służący wyznaczeniu warunków początkowych równań różniczkowych, przedstawia rysunek 2.5. Dla równoległego połączenia podatności Caw oraz C_l otrzymano

$$Cx = Caw + C_l. \quad (2.20)$$

Dalej podatność zastępczą szeregowego połączenia Cx oraz C_t wyznaczono jako:

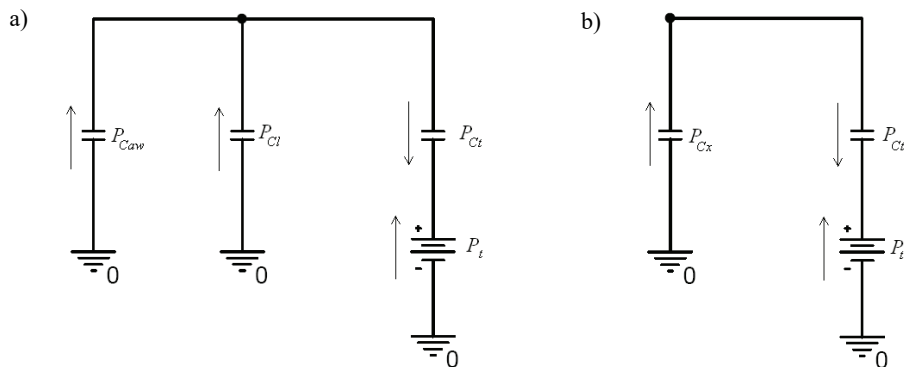
$$Cy = \frac{Cx C_t}{Cx + C_t}, \quad (2.21)$$

skąd objętość:

$$Vz = Cy Pt. \quad (2.22)$$

Ostatecznie warunek początkowy przyjmuje postać

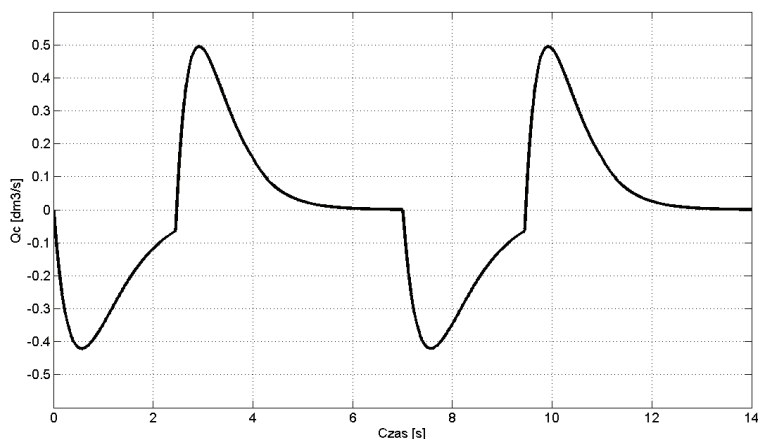
$$\begin{aligned} P_{C_t} &= \frac{Vz}{C_t} \\ P_{C_x} = P_{Caw} &= P_{C_l} = Pt - P_{C_t}. \end{aligned} \quad (2.23)$$



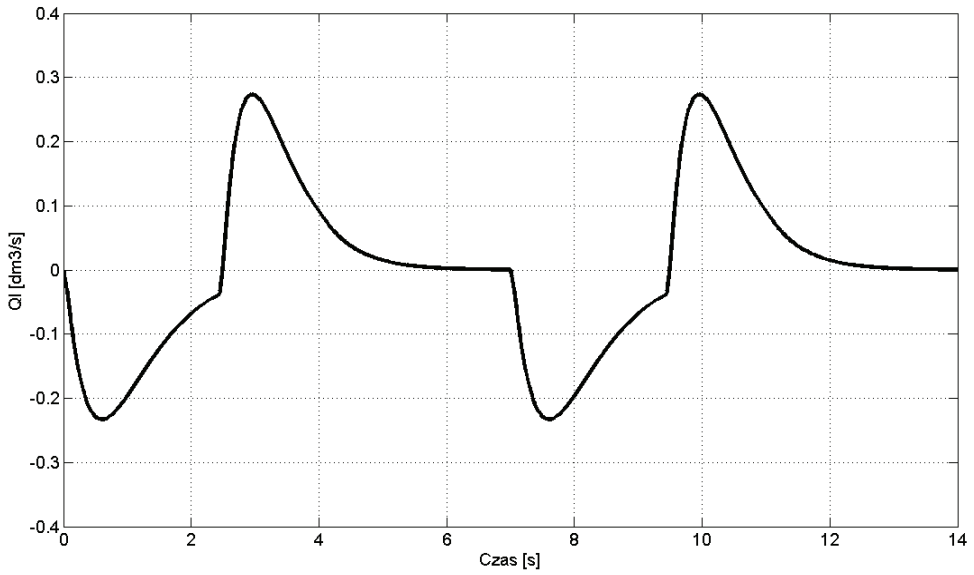
Rys. 2.5. Schemat modelu podczas braku przepływu powietrza: (a), rozkład ciśnień w układzie po równoległym połączeniu podatności dróg oddechowych oraz płuc (b)
 Fig. 2.5. Scheme of the model during lack of air-flow: (a), pressures distribution in the circuit after parallel coupling the airways and lung tissue compliance

2.3. SYMULACJE MODELU W WARUNKACH SPOKOJNEGO ODDYCHANIA

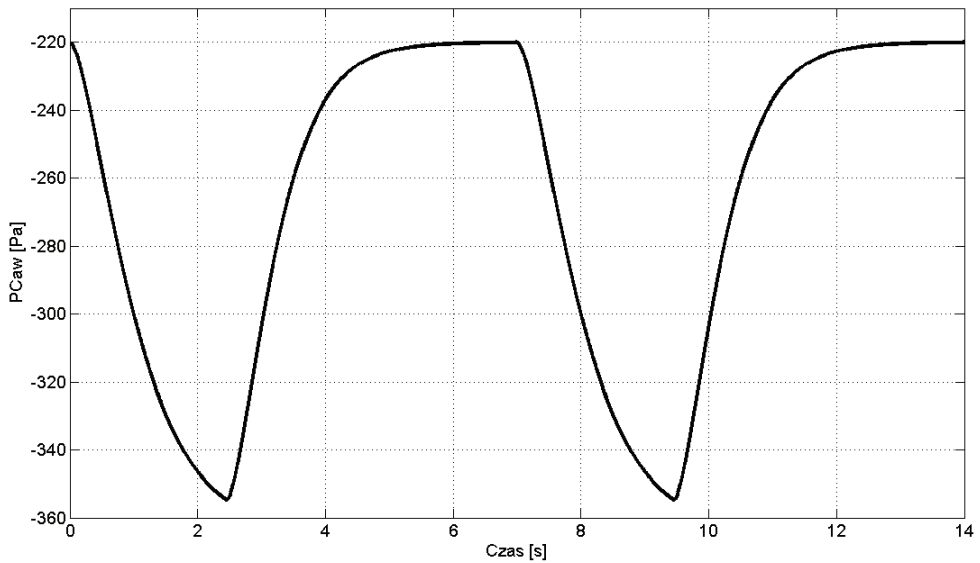
Rozwiązaniem równań (2.13)–(2.19) dla warunków początkowych (2.23) są przebiegi poszczególnych ciśnień oraz przepływów w funkcji czasu. Wykorzystując wbudowaną w środowisko obliczeniowe Matlab funkcję (*ode23t*), pozwalającą rozwiązywać układy równań różniczkowych i zakładając stały krok całkowania, równy 0,01s, wyznaczono charakterystyki zmiany przepływów Q_C , Q_l oraz ciśnień $PCaw$, PCt , PLl , PA podczas spokojnego oddychania. Otrzymane wyniki przedstawiono w formie wykresów na rysunkach 2.6–2.11.



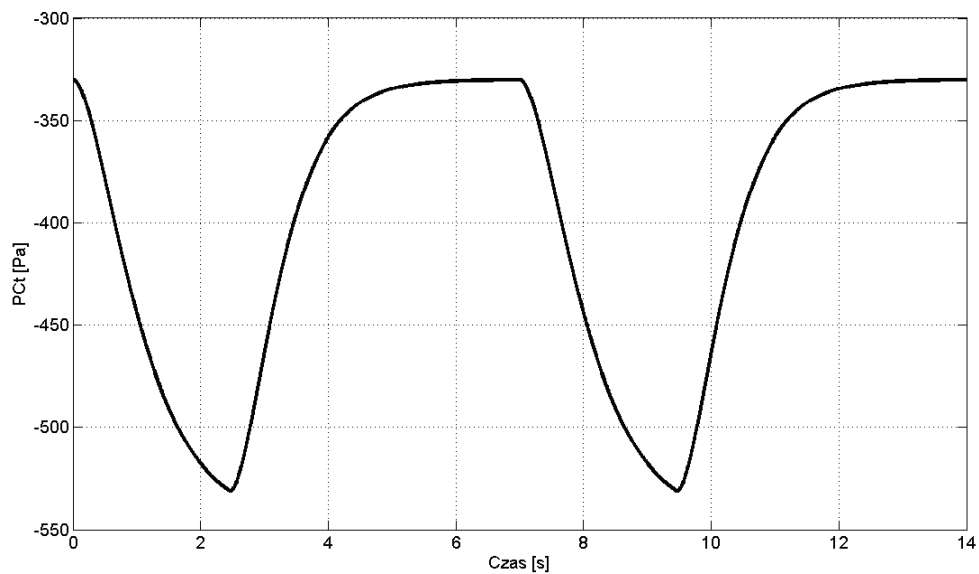
Rys. 2.6. Zmiany przepływu Q_c w funkcji czasu dla modelu zastępczego podczas spokojnego oddychania
 Fig. 2.6. Time courses of flow Q_c in replacement model during quiet breathing



Rys. 2.7. Przepływ Q_I w funkcji czasu w modelu zastępczym
 Fig. 2.7. Flow Q_I in electrical model

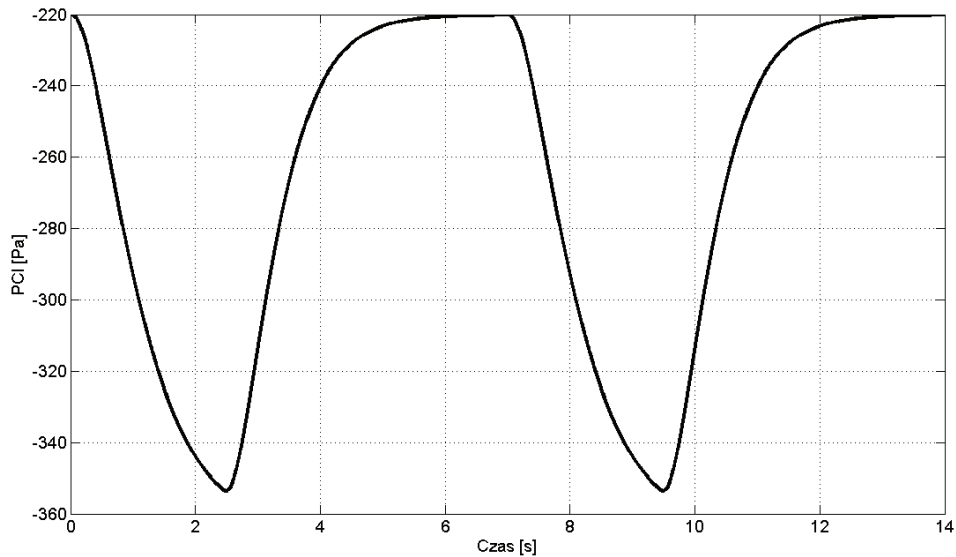


Rys. 2.8. Zmiany ciśnienia $PCaw$ w funkcji czasu dla modelu zastępczego
 podczas spokojnego oddychania
 Fig. 2.8. Pressure $PCaw$ changes in replacement model during quiet breathing



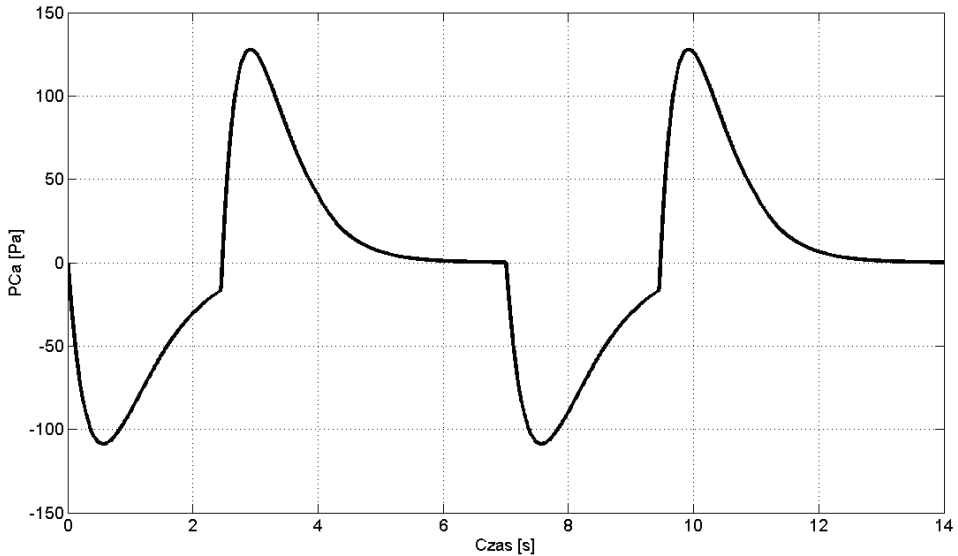
Rys. 2.9. Zmiany ciśnienia PCt w funkcji czasu dla modelu zastępczego podczas spokojnego oddychania

Fig. 2.9. Changes of PCt pressure during quiet breathing



Rys. 2.10. Zmiany ciśnienia PCI w funkcji czasu dla modelu zastępczego podczas spokojnego oddychania

Fig. 2.10. Time changes of PCI pressure in replacement analog during quiet breathing



Rys. 2.11. Zmiany ciśnienia PCa w funkcji czasu dla modelu zastępczego podczas spokojnego oddychania

Fig. 2.11. Time courses of PCa pressure in electrical analog during quiet breathing

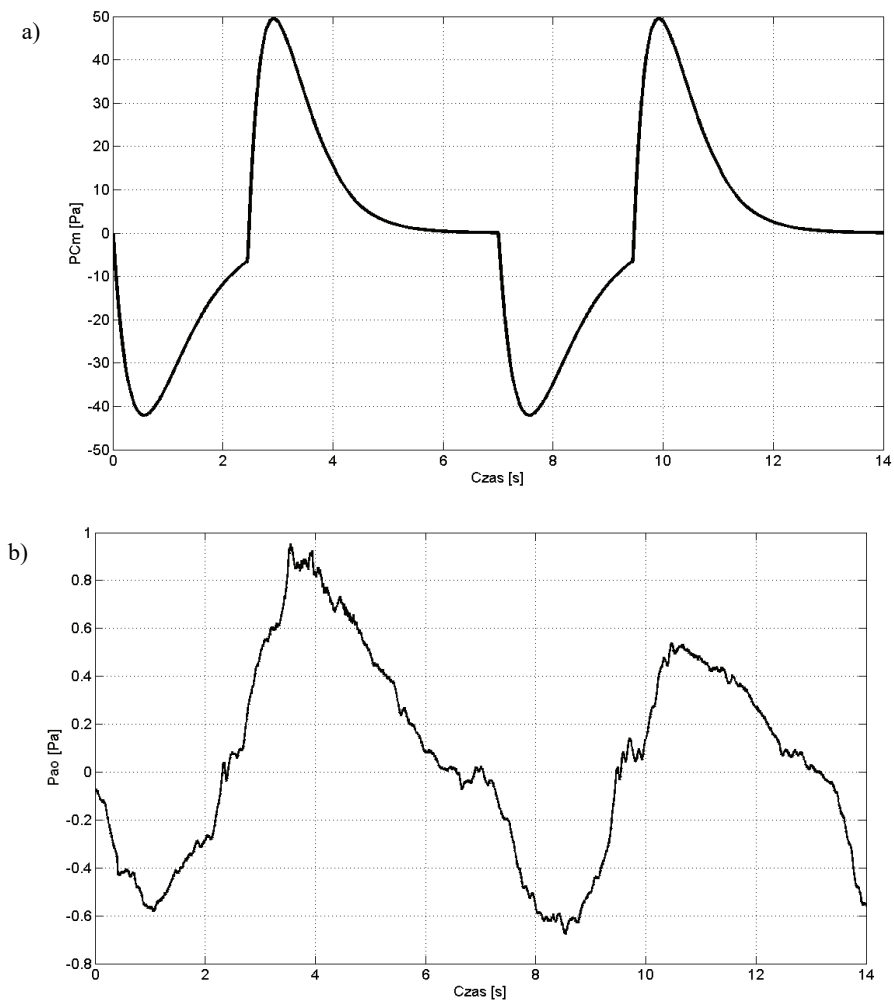
2.4. EKSPERYMENTALNA WERYFIKACJA ADEKWATNOŚCI MODELU

Dla badanego systemu ciśnienie na pojemności C_m z rysunku 2.2, oznaczane przez PC_m , jest wielkością analogiczną do mierzonego ciśnienia P_{ao} przy ustach. Ważnym krokiem jest więc porównanie obu przebiegów zarówno podczas spokojnego oddychania, jak i w trakcie przerwania, w celu wstępnej oceny przydatności modelu. Zmiany ciśnień w czasie spokojnego oddychania przedstawiono na rysunku 2.12, natomiast zmiany dla okluzji pokazano na rysunku 2.13 a, b. Przepływy zarejestrowane dla obu wskazanych warunków przedstawiono na rysunku 2.14 a, b.

Jak łatwo zauważyć sygnał P_{ao} na rysunku 2.12.b badanego obiektu jest zaszumiony w porównaniu do przebiegu PC_m widocznego na rysunku 2.12a, oba sygnały są okresowe i mają zbliżony do siebie kształt, co świadczy o dobrze dobranej strukturze modelu. Pozostające różnice można wytłumaczyć rozbieżnością pomiędzy wartościami parametrów modelu i systemem rzeczywistym.

Na rysunku 2.13 można zaobserwować dynamiczne zachowanie zarówno badanego systemu, jak i przyjętego modelu podczas nagłego przerwania przepływu powietrza. Widoczne jest wyraźne podobieństwo obu przebiegów. W pierwszej fazie zamykania zaworu ($t = 31,246$ s) w obu przypadkach następują tłumione oscylacje, które zmieniają się następnie w powolny narost ciśnienia do momentu zamknięcia zaworu ($t = 31,336$ s), w którym widoczny jest gwałtowny jego spadek. Oscylacje te

dla badanego podmiotu mają wyższą częstotliwość, będąc skutkiem rozbieżności parametrów.



Rys. 2.12. Sygnały wyjściowe podczas spokojnego oddychania:

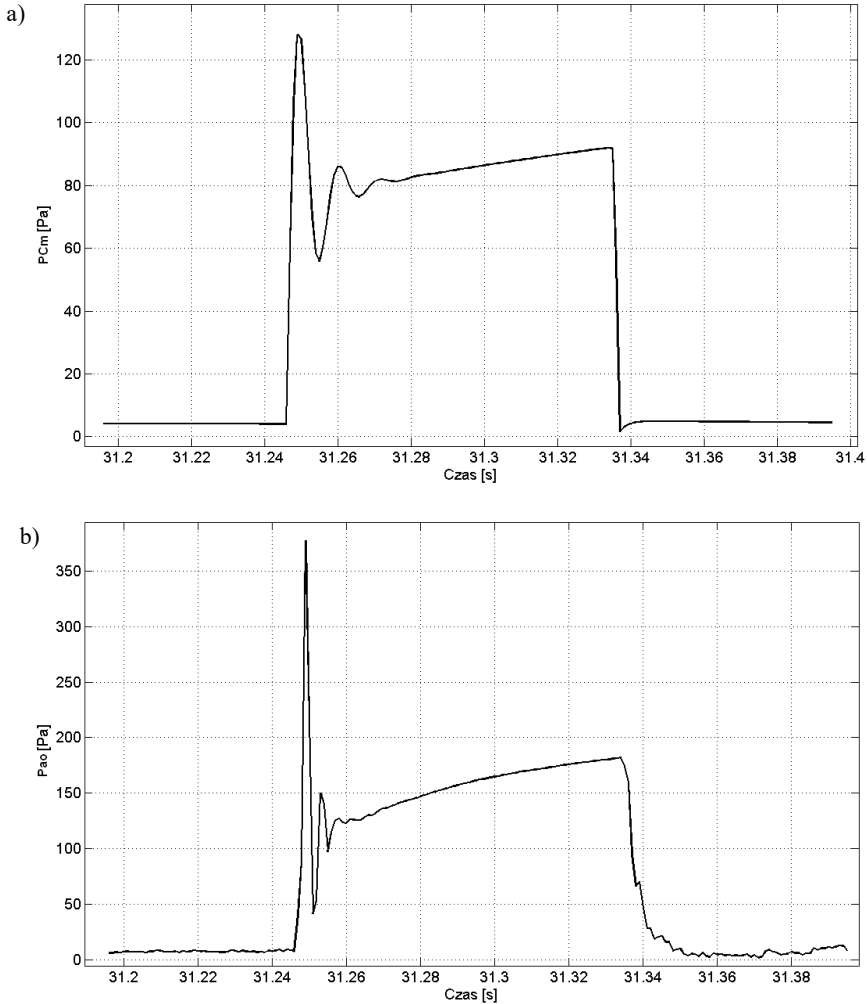
- a) ciśnienie PCm zarejestrowane w modelu zastępczym,
- b) przykładowe ciśnienie Pao u wyjścia dróg oddechowych dla badanego obiektu

Fig. 2.12. Output signals during quiet breathing:

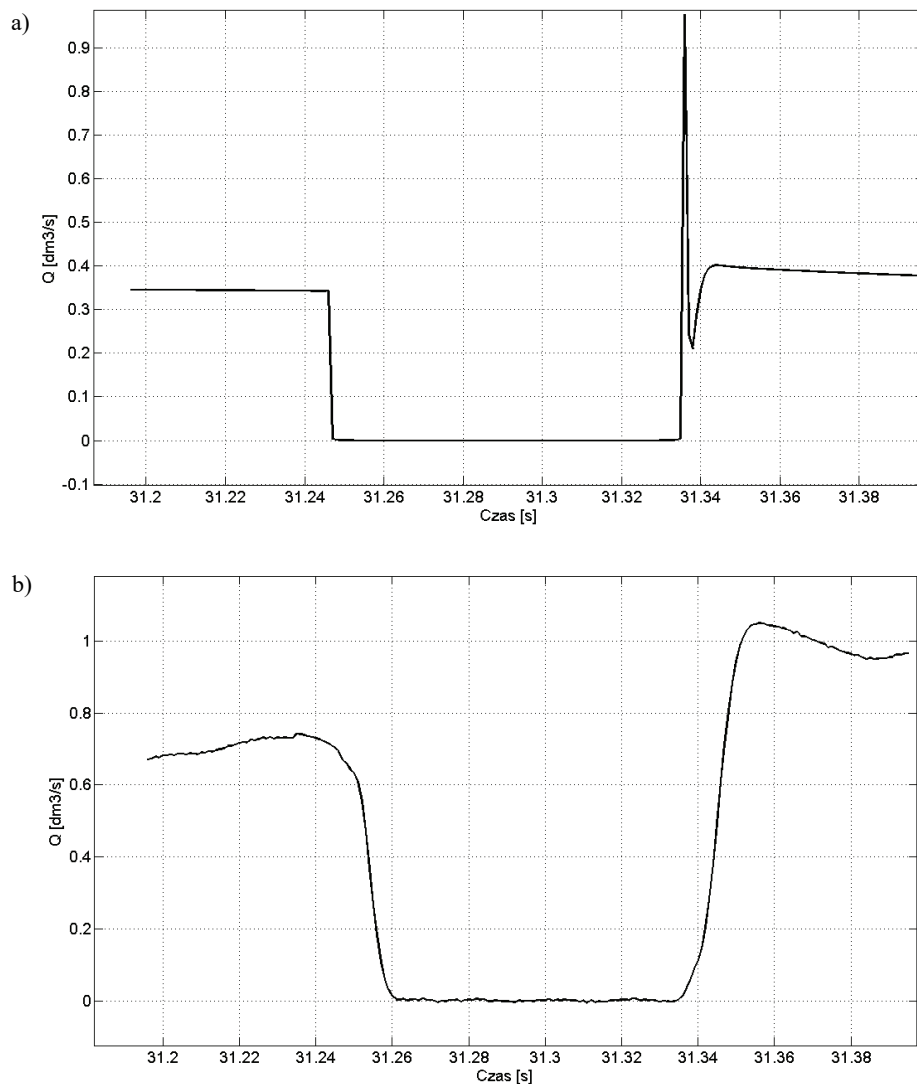
- a) pressure PCm acquired in replacement model,
- b) example plot of Pao pressure at the mouth in a chosen subject

Przepływ Q , jak łatwo zauważyć na rysunku 2.2, można wyznaczyć z prawa Ohma: $Q_{ao} = PCm/R_{dd}$. Na rysunku 2.14 przedstawiono przepływy dla modelu zastępczego

czego oraz badanego obiektu. W obu przypadkach w czasie przerywania przepływu powietrza następuje zauważalny spadek przepływu. Widoczna różnica występuje w momencie otwierania zaworu, dla modelu zastępczego następuje wówczas „pik” przepływu (rys. 2.14 a), natomiast efekt ten jest niewidoczny dla badanego podmiotu. Różnica ta może wynikać z rozbieżności charakterystyk zaworu zamykającego, bądź błędu kwantowania próbek przez aparaturę pomiarową. Poza tym przedziałem oba przebiegi mają zbliżony charakter.



Rys. 2.13. Sygnały wyjściowe podczas okluzji: a) ciśnienie PCm uzyskane w modelu zastępczym, (b) przykładowe ciśnienie Pao u wyjścia dróg oddechowych dla obiektu
 Fig. 2.13. Output signals during occlusion: a) pressure PCm acquired in replacement model, b) example plot of Pao pressure at the mouth in a chosen subject



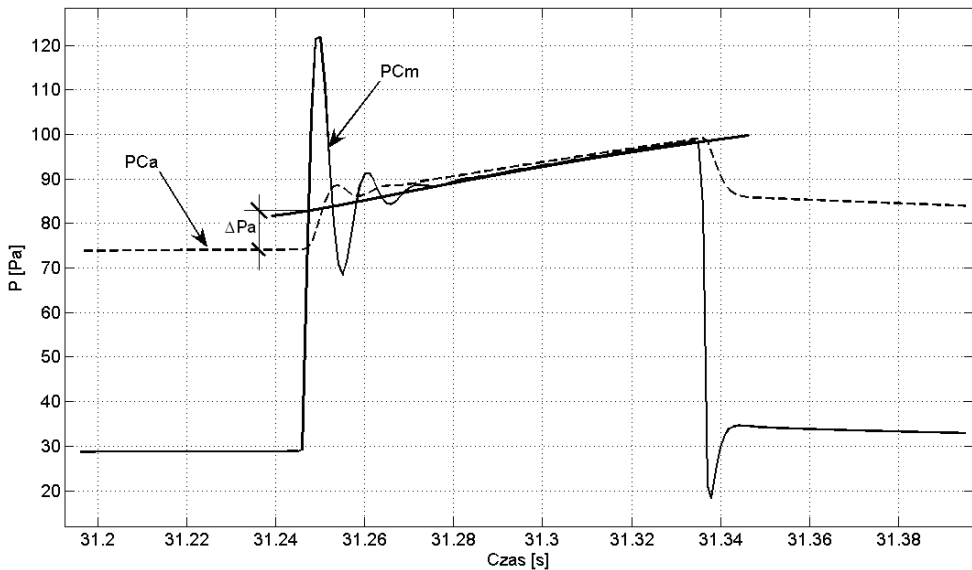
Rys. 2.14. Sygnały wyjściowe podczas okluzji: a) przepływ Q przez rezystancję R_{dd} uzyskany w modelu zastępczym, b) przykładowa zmiana przepływu Q u wyjścia dróg oddechowych dla badanego obiektu

Fig. 2.14. Output signals during occlusion: a) flow Q measured at R_{dd} resistance in replacement model, b) example changes of Q flow at the mouth in a chosen subject

Na rysunku 2.15 pokazano przebieg sygnałów PC_m oraz P_A podczas przerwania przepływu powietrza. Sygnał P_A jest przebiegiem zmian ciśnienia pęcherzykowego w czasie. Jak wcześniej wspomniano, metoda IT opierała się początkowo na założeniu, że ciśnienie P_{ao} (na rys. 2.15 ciśnienie to oznaczane jest jako PC_m) wyrównuje

się natychmiast po okluzji z P_A i na tej podstawie szacowano opór dróg oddechowych, zgodnie z zależnością (1.5). Wyniki otrzymywane dla takiego założenia były rozbieżne z wynikami uzyskiwanymi innymi metodami, m.in. spirometrią. Niestosowność tego założenia w algorytmach wstecznej ekstrapolacji pokazano na rysunku 2.15. Różnica ΔPa wynika z dodatkowego spadku ciśnienia w tkankach płuc oraz klatce piersiowej. Ciśnienie P_{ao} nie wyrównuje się więc z P_A zaraz po okluzji. Skutkiem błędnego założenia powstawały różnice w otrzymywanych wartościach R_{aw} dla różnych technik oceny mechaniki oddychania. Wniosek ten potwierdza jednocześnie poprawny dobór struktury modelu wyjaśniającego niedokładność otrzymywanych wyników.

Reasumując, subiektywna analiza wizualna wskazuje na pożądaną adekwatność modelu do zachowania rzeczywistego modelu.



Rys. 2.15. Przebieg sygnałów PCm oraz P_A podczas okluzji uzyskane w modelu zastępczym układu oddechowego
 Fig. 2.15. Trends of PCm and P_A signals during occlusion in the replacement model of the respiratory system

3. IDENTYFIKACJA MODELU

Identyfikacja systemu polega na określeniu klasy modelu oraz wyznaczeniu liczbowych wartości współczynników opisujących tę strukturę na podstawie pomiarów sygnałów wejściowych i wyjściowych obiektu.

Zależność pomiędzy sygnałami wejściowymi i wyjściowymi systemu przedstawić możemy w postaci funkcji (modelu), która zależy od wartości parametrów. Mówimy wtedy o identyfikacji parametrycznej. Parametry dla modeli matematycznych systemów dynamicznych, zwanych modelami fizycznymi, odpowiadają wtedy fizycznym właściwościom systemu. Znalezienie parametrów systemu na podstawie zebranych danych wymaga rozwiązania problemu odwrotnego. Tego typu podejście często nazywane jest pomiarami nie wprost, tzn. umożliwia scharakteryzowanie właściwości systemu rzeczywistego z pominięciem bezpośrednich ich pomiarów.

W przypadku identyfikacji nieparametrycznej celem identyfikacji jest wyznaczenie charakterystyk w postaci zbioru wartości bez żadnej parametryzacji. W identyfikacji tej stosuje się m.in. transmitancję operatorową, która umożliwia traktowanie obiektu identyfikacji jako „czarnej skrzynki”, o zawartości której nic nie wiadomo. Założenie to znacznie upraszcza proces modelowania, jednak nie uzyskuje się informacji na temat cech systemu. Innymi narzędziami stosowanymi w identyfikacji nieparametrycznej są analizy: widmowa, częstotliwościowa i korelacyjna. Identyfikacja nieparametryczna jest chętnie stosowana tam, gdzie nie jest konieczna znajomość procesów wewnętrznych systemów.

Dysponując klasą modelu, można wyznaczyć liczbowe wartości współczynników opisujących tę klasę w przypadku modelu układu oddechowego parametrów mechanicznych z równań 2.13–2.19. Realizowane jest to przez algorytm identyfikacji. Podstawą takiego działania jest pomiar zmiennych obiektu. Algorytm identyfikacji określa jak powinny być przetwarzane uzyskane wyniki pomiarów, aby otrzymać przybliżone wartości współczynników modelu. Najczęściej zakłada się, że istnieje pewien „prawdziwy model” y_0 , obejmujący swoją strukturą wszystkie procesy deterministyczne i mający wektor θ_0 o wartościach parametrów równych wartościom fizycznych cech systemu rzeczywistego oraz że szum ma charakter gaussowski i dodaje się do sygnału wyjściowego. W takim przypadku posiadane dane mogą być opisane następująco:

$$\mathbf{y} = y_0(\theta_0) + \mathbf{e}, \quad (3.1)$$

gdzie $e(t)$ jest szumem białym, modelowanym jako zmienna losowa o rozkładzie normalnym, wartości oczekiwanej $E(e) = 0$ i wariancji $Var(e) = \sigma_e^2$.

W probabilistycznym przypadku identyfikacji przyjmujemy założenie, że wyniki pomiarów są realizacjami zmiennych losowych, a wyznaczenie liczbowych wartości współczynników modelu matematycznego sprowadza się do oszacowania ich rzeczywistej wartości, czyli estymacji. Termin ten jest zaczerpnięty ze statystyki, dziedziny nauki zajmującej się opisem zjawisk przypadkowych (stochastycznych), a teoria estymatorów leży u podstaw nowoczesnych metod identyfikacji. Celem modelowania jest więc znalezienie pewnego opisu matematycznego y_m :

$$y_m(t, \hat{\theta}) \approx y_0(t, \theta_0) \cap y_m(t, \hat{\theta}) = \arg \min_{\hat{y}_m, \hat{\theta}_0} \|y(t) - \tilde{y}_m(t, \theta_0)\|. \quad (3.2)$$

Różnice pomiędzy odpowiadającymi sobie wynikami eksperymentu i symulacjami modelu zwane są albo resztami, albo rezyduami ε (3.3).

$$\varepsilon(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = y(t) - y_m(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.3)$$

Do weryfikacji wewnętrznej poprawności algorytmu bardzo często używa się dwóch modeli. Jeden z nich, z ustalonymi parametrami, którego sygnały stanowią dane używane do identyfikacji, nazywany jest modelem wprost i przyjmuje się, że jest analogiem mającym wektor $\boldsymbol{\theta}_0$ parametrów, równych wartościom fizycznych cech systemu rzeczywistego. Porównanie wartości parametrów drugiego modelu – które zostały wyznaczone w procesie identyfikacji, zwanego modelem odwrotnym – do wartości parametrów modelu wprost pozwala ocenić dokładność rozwiązań otrzymywanych za jego pomocą oraz zbieżność przyjętego algorytmu.

W przypadku estymacji parametrów rozróżnienie między liniowością i nieliniowością bazuje na zależności między zmiennymi zależnymi i parametrami. System liniowy w sensie parametrów jest wtedy, gdy uogólniony błąd jest liniowy w sensie parametrów. W teorii sterowania natomiast rozróżnienie między liniowością oraz nieliniowością opiera się na klasyfikacji zachowania dynamicznego, tj. relacji między zależną i niezależną zmienną czasową. Oba pojęcia nie mają bezpośredniego związku, co przedstawiono w tabeli 3.1. Pokazano tu rodzaje implikowanych błędów między procesem i wyjściem modelu w zależności od klasyfikacji w sensie parametrów oraz w sensie procesu. Dane zostały przedstawione dla procesu o sygnale wejściowym u i wyjściowym y .

Tabela 3.1. Błędy implikowane przez model w zależności od klasyfikacji procesu i modelu
Table 3.1. Errors implicated in the model, depending on the classification of process and its analog

Proces			Model	
			Liniowy w sensie parametrów	Nieliniowy w sensie parametrów
$\dot{y} + ay = u$	zachowanie dynamiczne	liniowy	$\varepsilon = \dot{y} + ay - u$	$\varepsilon = y - w = y - \frac{u}{D + \alpha}$ $\dot{w} + \alpha w = u$
$\dot{y} + ay^3 = u$		nieliniowy	$\varepsilon = \dot{y} + ay^3 - u$	$\varepsilon = y - w = y - \frac{u}{D + \alpha}$ $\dot{w} + \alpha w = u$

Ogólnie związek wyjścia z wejściem i parametrami (na przykładzie modeli MISO) można przedstawić następująco:

- modele liniowe pod względem wejść i parametrów (LILP)

$$y(t) = \mathbf{u}(t)\boldsymbol{\theta}, \quad (3.4)$$

- modele nieliniowe pod względem wejść i liniowe pod względem parametrów (NLILP)

$$y(t) = f_i(\mathbf{u}, t)\boldsymbol{\theta}, \quad (3.5)$$

• modele liniowe pod względem wejść i nieliniowe pod względem parametrów (LINLP)

$$y(t) = \mathbf{u}^T(t)f_P(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.6)$$

• modele nieliniowe pod względem wejść i parametrów (NLINLP)

$$y(t) = f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, t), \quad (3.7)$$

Ważną wielkością rozpatrywaną podczas estymacji parametrów jest wrażliwość wyjścia na parametry, która wskazuje, jaki wpływ na wyjście modelu mają wartości poszczególnych parametrów. Poszczególne funkcje (wektory) wrażliwości \mathbf{x}_k zdefiniowane są następująco:

$$x_k(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial \theta_k}, \quad \mathbf{x}_k = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \theta_k}, \quad (3.8)$$

a macierz wrażliwości wyjścia na parametry, to

$$\mathbf{X}^{n \times p} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

gdzie n – liczba obserwacji, p – liczba parametrów.

Dla modelu, którego postać uniemożliwia analityczne obliczenie funkcji wrażliwości, wektor wrażliwości wyznacza się numerycznie, korzystając na przykład z zależności (3.10) lub procedur bardziej zaawansowanych [70].

$$x_k = \lim_{\Delta \theta_k \rightarrow 0} \frac{y_m(\theta_k + \Delta \theta_k) - y_m(\theta_k)}{\Delta \theta_k} \approx \frac{y_m(\theta_k + \Delta \theta_k) - y_m(\theta_k - \Delta \theta_k)}{2\Delta \theta_k} \quad (3.10)$$

W modelach liniowych pod względem parametrów (LP) \mathbf{X} nie zależy od wektora $\boldsymbol{\theta}$, lecz w modelach nieliniowych (NLP) macierz wrażliwości jest zależna od poszukiwanego (nieznanego) wektora parametrów: $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta})$. Zapis poszczególnych obserwacji można dla modelu nieliniowego pod względem parametrów przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} y_i &= \theta_1 f_1(u_i) + \theta_2 f_2(u_i) + \dots + \theta_K f_K(u_i) + e_i = \\ &= x_{i1}(\theta_1)\theta_1 + x_{i2}(\theta_2)\theta_2 + \dots + x_{iK}(\theta_K)\theta_K \end{aligned} \quad , \text{ dla } i = 1, \dots, N. \quad (3.11)$$

Zapis macierzowy:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{e}, \quad (3.12)$$

gdzie K – liczba obserwacji, N – liczba parametrów.

3.1. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELU ODWROTNEGO

Podczas estymacji parametrów modelu według danych eksperymentalnych najczęściej zakłada się, że można je traktować jako realizację zmiennej losowej $y(t)$ opisanej funkcją gęstości prawdopodobieństwa $p(y, \boldsymbol{\theta})$, której stochastyczność wypływa z losowości szumu

$$y(t) : E\{y(t)\} = y_0(t, \boldsymbol{\theta}_0) \quad \wedge \quad \text{var}\{y(t)\} = \sigma_v^2(t), \quad (3.13)$$

$$y(t) = y_0(t, \boldsymbol{\theta}_0) + v(t), \quad (3.14)$$

gdzie $y_0(t, \theta_0)$ – prawdziwy model, v – addytywny szum będący realizacją zmiennych losowych o rozkładzie normalnym.

Podstawowe estymatory parametrów

Jedną z często stosowanych metod identyfikacji modeli liniowych pod względem parametrów jest metoda maksymalnego prawdopodobieństwa *a posteriori* (MAP). W metodzie tej maksymalizuje się funkcję gęstości prawdopodobieństwa *a posteriori* parametrów $p(y|\boldsymbol{\theta})$, dane eksperymentalne y traktowane jako znane; $\boldsymbol{\theta}$ natomiast jako wektor losowy

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MAP} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}). \quad (3.15)$$

W celu wyznaczenia funkcji gęstości prawdopodobieństwa *a posteriori* wykorzystuje się wzór Bayesa na prawdopodobieństwo warunkowe:

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \frac{p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})}, \quad (3.16)$$

gdzie $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) \equiv L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ jest funkcją wiarygodności, czyli prawdopodobieństwem tego, że dane y pochodzą z systemu o parametrach $\boldsymbol{\theta}$. Stąd ostatecznie estymator metody maksymalnego prawdopodobieństwa *a posteriori* przyjmuje postać:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MAP} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \frac{p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})p(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.17)$$

W metodzie największej wiarygodności (ML), w przeciwieństwie do wcześniej omówionej, jako zmienną losową przyjmuje się dane eksperymentalne y , a $\boldsymbol{\theta}$ jako nieznan, lecz ustalony wektor parametrów

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}). \quad (3.18)$$

Estymację dla tego przypadku można interpretować jako wybór takiego wektora parametrów, dla którego zarejestrowane dane są najbardziej prawdopodobne (wg miary funkcji wiarygodności).

Najczęściej stosowaną metodą estymacji parametrów identyfikowanego modelu (liniowego pod względem parametrów) jest metoda najmniejszych kwadratów. Algorytm ten, wprowadzony przez Guassa podczas obliczania orbit planet, zakłada addytywny (stacjonarny) szum będący realizacją nieskorelowanych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, zerowej wartości oczekiwanej i jednakowej wariancji (szum biały, szum gaussowski). Estymator w tej metodzie wyznaczany jest za pomocą minimalizacji funkcji strat V_{LS} :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} V_{LS}(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.19)$$

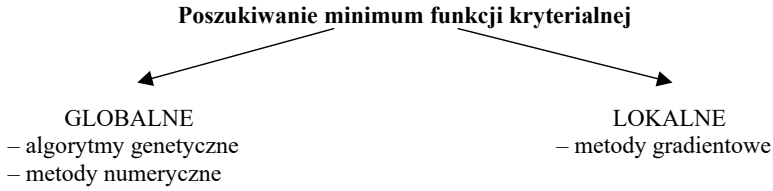
$$V_{LS}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} V_N(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_i - y_{m,i}(\boldsymbol{\theta}))^2.$$

Rozpatrywany model układu oddechowego, którego strukturę przedstawiono na rysunku 2.2, jest modelem nieliniowym pod względem parametrów (NLP). Równania go charakteryzujące (2.13–2.19) są równaniami różniczkowymi, wynikiem czego macierz wrażliwości (3.9) jest zależna od poszukiwanego (nieznanego) wektora parametrów. W tym przypadku estymacja wektora parametrów $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ polega na poszukiwaniu minimum pewnej funkcji kryterialnej $V(\boldsymbol{\theta})$, której wartość zależy od rozbieżności między danymi eksperymentalnymi i wyjściem modelu:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} V(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.20)$$

Zaprezentowane, tradycyjne podejście nazywane jest zadaniem optymalizacji.

W wielu przypadkach kształt funkcji kryterialnej w przestrzeni parametrów cechuje się kilkoma minimami lokalnymi, z których jedno jest globalne. Ogólnie, metody poszukiwania można podzielić na globalne (pozwalające ogólnie oszacować wartość parametrów w pobliżu minimum globalnego) i lokalne (dające zazwyczaj precyzyjniejsze przybliżenie wartości parametrów określających minimum lokalne). Do pierwszych zaliczyć można, na przykład algorytmy genetyczne stosowane w celach optymalizacji lub metody enumeracyjne (sprawdzanie wartości funkcji kryterialnej dla gęstej „siatki” wartości parametrów modelu, rozłożonej w zakresie ich zmienności). Typowym przykładem metod lokalnych są metody gradientowe. Estymacja rozpoczyna się wtedy od „zgadnięcia” startowego wektora parametrów, a następnie algorytm „schodzi” drobnymi krokami z wybranego punktu w dół, w kierunku minimum lokalnego, które może być minimum globalnym. Jakość estymacji zależy zatem od doboru wektora startowego oraz kryterium kończącego iteracyjne poszukiwania minimum funkcji kryterialnej. Często estymacja parametrów modeli NLP realizowana jest w dwóch etapach: na początku stosuje się metodę globalną, dającą przybliżone wartości estymatorów w sąsiedztwie minimum globalnego, a następnie używana jest metoda gradientowa pozwalająca na precyzyjne oszacowanie wartości parametrów w minimum globalnym. Podziały metod poszukiwania zostały poglądowo przedstawione na rysunku 3.1.



Rys. 3.1. Podział metod poszukiwania minimum funkcji kryterialnej
Fig. 3.1. Methods of searching of cost function's minimum

W metodach gradientowych najczęściej stosowana jest funkcja kryterialna V_{NWLS} znana z metod ważonych najmniejszych kwadratów

$$V_{NWLS}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_m(\boldsymbol{\theta}))^T \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_m(\boldsymbol{\theta})), \quad (3.21)$$

gdzie \mathbf{y} to wektor danych eksperymentalnych, \mathbf{y}_m jest wektorem wyjściowym modelu, a macierz wag \mathbf{W} może być, na przykład identycznościowa $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ (nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów – NLS) lub odwróconą macierzą kowariancji zakłóceń $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}$ (nieliniowa metodą największej wiarygodności – NML, gdzie macierz kowariancji jest równa $\text{cov}((\mathbf{y} - \mathbf{y}_m(\boldsymbol{\theta}))) = E\{(\mathbf{y} - \mathbf{y}_m(\boldsymbol{\theta}))(\mathbf{y} - \mathbf{y}_m(\boldsymbol{\theta}))^T\} \equiv \mathbf{R}$).

Jednym ze sposobów wyznaczenia estymatora wektora parametrów jest przybliżenie liniowe funkcji modelowej $y_m(\theta)$ przez rozwinięcie w szereg Taylora w punkcie θ^* . Po uwzględnieniu dwóch pierwszych wyrazów:

$$\mathbf{y}_m(\boldsymbol{\theta}) \approx \bar{\mathbf{y}}_m(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{y}_m(\boldsymbol{\theta}^*) + \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{y}_m(\boldsymbol{\theta}^*)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) = \mathbf{y}_m(\boldsymbol{\theta}^*) + \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}^*)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*). \quad (3.22)$$

W celu ustalenia minimum funkcji kryterialnej, należy wyznaczyć jej gradient (postać jawna V_{NWLS}):

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} V_{NWLS}(\boldsymbol{\theta}) \approx \nabla_{\boldsymbol{\theta}} V_{NWLS}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}^*)^T \mathbf{W}(\mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}^*) + \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}^*)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)) - \mathbf{y}. \quad (3.23)$$

Przyrównując gradient do zera, otrzymuje się:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^* - [\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}^*) \mathbf{W} \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}^*)]^{-1} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} V_{NWLS}(\boldsymbol{\theta}^*) \quad (3.24)$$

co umożliwi w $i+1$ kroku obliczeń iteracyjnych wykorzystanie informacji uzyskanych w kroku i :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)} - \mu_i [\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}) \mathbf{W} \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)})]^{-1} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} V(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}) \quad (3.25)$$

gdzie μ_i jest rozmiarem kroku.

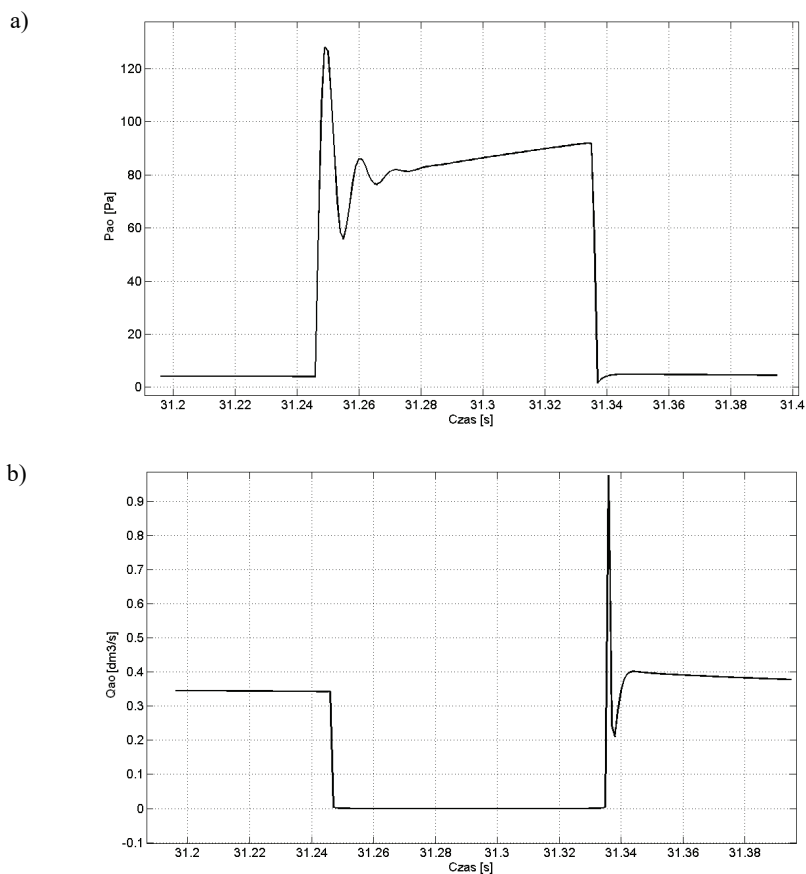
W ten sposób dochodzi się do postaci kierunku Gaussa–Newtona poszukiwania minimum, na którym oparty będzie algorytm estymacyjny parametrów modelu układu oddechowego. Dla przypadku nieliniowej metody najmniejszych kwadratów gradient funkcji kryterialnej $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} V(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)})$ wektora parametrów $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}$ w i -tej iteracji wynosi:

$$\nabla_{\theta} V(\hat{\theta}^{(i)}) = \partial V(\hat{\theta}^{(i)}) / \partial \theta = -\mathbf{X}(\hat{\theta}^{(i)})^T \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_m(\hat{\theta}^{(i)})) = -\mathbf{X}(\hat{\theta}^{(i)})^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\theta}^{(i)}), \quad (3.26)$$

gdzie $\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\theta}^{(i)})$ to rezydua (reszty) dla parametrów wyznaczonych w i -tym kroku.

3.2. BUDOWA ALGORYTMU ESTYMACYJNEGO

W procesie tworzenia algorytmu estymacyjnego jako weryfikacyjne dane eksperymentalne przyjęto sygnały wyjściowe zarejestrowane w modelu wprost przedstawionym na rysunku 2.2. Identyfikację w dziedzinie czasu przeprowadzono przez do-

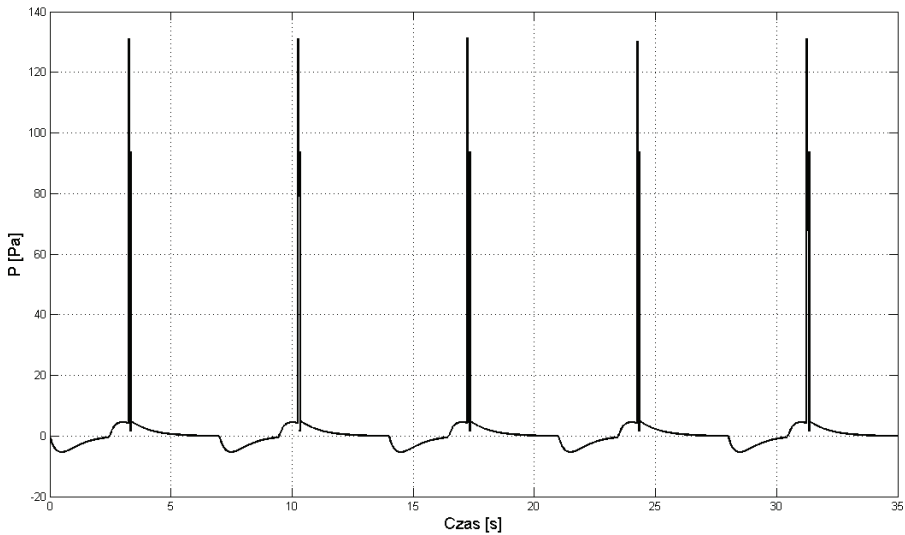


Rys. 3.2. Sygnały wyjściowe wykorzystywane do analizy jakości estymacji parametrów w dziedzinie czasu: a) ciśnienie na podatności C_m (patrz rys. 2.2) analogiczne do P_{ao} , b) przepływ przez oporności R_{dd} (patrz rys. 2. 2) analogiczny do Q_{ao}

Fig. 3.2. Output signals used to test quality of identification in the time domain: a) pressure at compliance C_m (see Fig. 2.2) analogous to P_{ao} , b) flow through R_{dd} (see Fig. 2.2) analogous to Q_{ao}

pasowanie sygnału $\mathbf{y} = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{p}^T, \mathbf{q}_2^T]^T$, pochodzącego z wyjścia modelu odwrotnego do danych eksperymentalnych $\mathbf{z} = [\mathbf{q}_{z1}^T, \mathbf{p}_z^T, \mathbf{q}_{z2}^T]^T$, gdzie: $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ – przepływy u wyjścia dróg oddechowych mierzone w odcinku czasowym rozpoczynającym się 100 ms przed przerwaniem, a kończącym w chwili przerwania, \mathbf{p}, \mathbf{p}_z – ciśnienia u wyjścia dróg oddechowych podczas okluzji, tj. o odcinku czasowym między zamknięciem i otwarciem zaworu, $\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_{z2}$ – przepływy u wyjścia dróg oddechowych zawierające się w czasie między otwarciem zaworu i o 100 ms odcinku następującym po nim (rys. 3.2).

Wykorzystując środowisko MATLAB, obliczano sygnały wyjściowe dla modelu wprost i modelu odwrotnego, wyznaczając przebiegi PCm od początku wdechu, tj. od momentu działania mięśni (rys. 2.3), zakładając, że przebieg mięśni w modelu wprost jest taki sam jak dla modelu odwrotnego. Dane do estymacji zapisywano dla 5. z kolei przerwania (rys.3.3).



Rys. 3.3. Przebieg ciśnienia P na pojemności C_m dla kolejnych pięciu okresów.
Dane z ostatniego manewru użyto do identyfikacji modelu

Fig. 3.3. Trend of pressure P at the C_m compliance for the fives respiratory cycles.
Data appropriate to the last manoeuvre were used to model identification

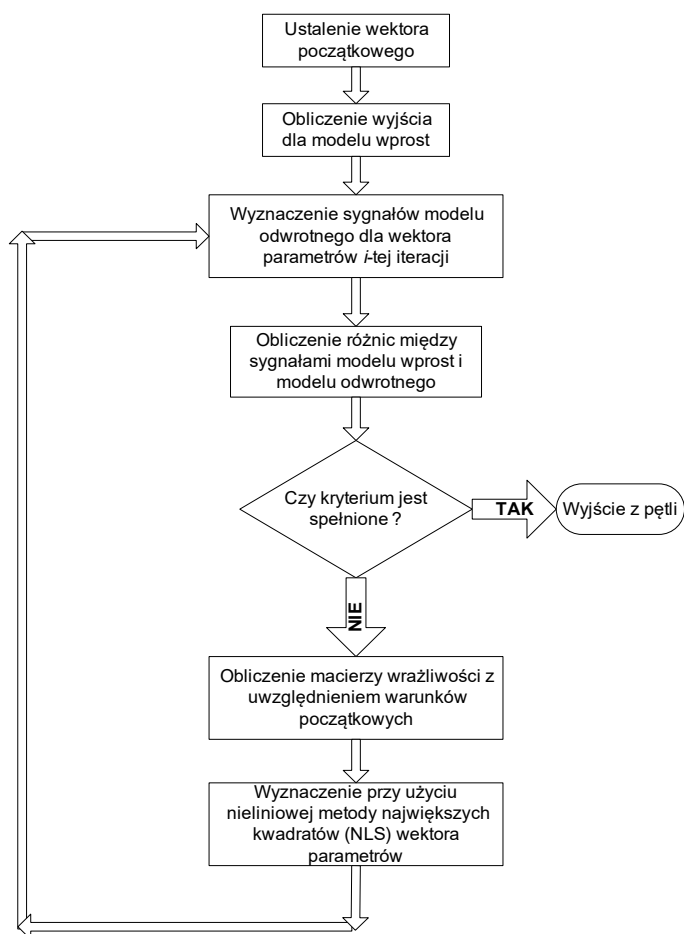
Krok μ dla poszukiwań wektora parametrów według zależności (3.25) przyjęto jako równy 0,1. Wartości parametrów wektora początkowego wynosiły 70% wartości analogicznych wielkości przyjętych w modelu wprost. Macierz wrażliwości \mathbf{X} modelu dla rozważanych parametrów obliczano na podstawie zależności (3.10), modyfikując kolejne elementy o $\pm\Delta\theta_k = 0,1 \cdot \theta_k$. Warto zaznaczyć, iż podczas korzystania z tej metody obliczania macierzy \mathbf{X} , zmiana wartości dla niektórych parametrów o $\Delta\theta_k$ pocią-

ga za sobą zmianę warunków początkowych, stąd podczas wyznaczania $y_m(\theta_k \pm \Delta\theta_k)$, należy uwzględnić tę kwestię.

Wykorzystując środowisko MATLAB i język programowania MATLAB scripts, zaimplementowano algorytm obliczający kolejne wektory parametrów zgodnie z (3.25). Wyznaczanie parametrów odbywało się w pętli typu „while” do momentu spełnienia kryterium kończącego, które w postaci analitycznej można przedstawić zależnością:

$$\xi = \max\left(\left|\frac{\epsilon}{y}\right|\right) \cdot 100\% < 1,5\% , \quad (3.27)$$

gdzie ξ jest błędem dopasowania sygnałów.



Rys. 3.4. Schemat blokowy przebiegu algorytmu estymacji parametrów
Fig. 3.4. Block diagram of algorithm of parameters estimation

Dla kolejnych iteracji, przed obliczeniem wyjścia modelu odwrotnego, uwzględniano zmianę warunków początkowych dla nowego wektora parametrów $\hat{\theta}$ i wyznaczano ich nowe wartości według (3.25). Algorytm estymacji parametrów modelu odwrotnego przedstawiono na rysunku 3.4.

Wartości parametrów wektora modelu dla i -tej iteracji obliczane na podstawie wzoru (3.25) mogą być wartościami ujemnymi bądź dodatnimi, bez względu (fizykalnego) na to czy poprzednia wartość była dodatnia, czy ujemna. Tymczasem parametry fizyczne reprezentujące zjawiska dynamiczne, zachodzące w opisywanym systemie, zawierają się w ograniczonym zakresie wartości. Może więc dochodzić do sytuacji, w której dla i -tego kroku oszacowany parametr, będący z założenia dodatni (np. opór), przyjmie wartość ujemną, nie spełniając tym samym założeń równań stanu systemu.

Aby uwzględnić tę kwestię stworzono dla każdego parametru 2-elementowy wektor przedziału \mathbf{B} , którego pierwszym elementem jest dolna, a drugim górna wartość zakresu kolejnego parametru, wynikająca z przesłanek fizjologicznych. Zaaplikowane wartości graniczne przedziałów dla poszczególnych parametrów pokazano w tabeli 3.2.

Tabela 3.2. Zakresy wartości dla poszczególnych parametrów modelu
Table 3.2. Range of values for the parameters of the model

Lp.	Parametr	Dolna granica zakresu	Górna granica zakresu	Jednostki
1	R_C	40	700	[Pa·s/dm ³]
2	R_t	10	250	[Pa·s/dm ³]
3	R_l	10	60	[Pa·s/dm ³]
4	R_p	1	60	[Pa·s/dm ³]
5	L_C	$5 \cdot 10^{-3}$	3	[Pa·s ² /dm ³]
6	L_l	0,000415	1	[Pa·s ² /dm ³]
7	C_l	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-2}$	[dm ³ /Pa]
8	C_{aw}	$2 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-3}$	[dm ³ /Pa]
9	C_A	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-4}$	[dm ³ /Pa]
10	C_t	$1 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-2}$	[dm ³ /Pa]
11	C_m	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-1}$	[dm ³ /Pa]
12	P_t	-2500	-10	[Pa]

Zgodnie z podaną ideą, wartości parametrów przekraczających zakres wyznaczony przez składowe wektora \mathbf{B} zostają skorygowane przez procedurę algorytmu do pierwotnych wielkości pochodzących z wektora początkowego. Formalny zapis wygląda następująco

$$\bigcap_{\hat{\theta}_k \in \hat{\theta}} \hat{\theta}_k^{(i)} < B_{ki,1} \vee \hat{\theta}_k^{(i)} > B_{k,2} \Rightarrow \hat{\theta}_k^{(i)} = \hat{\theta}_k^{(0)} \quad (3.28)$$

gdzie $\hat{\theta}_k^{(i)}$ jest k -tym elementem wektora parametrów i -tej iteracji algorytmu.

Po uwzględnieniu warunku (3.28) zaimplementowano zmiany w algorytmie i uruchomiono ponownie program dedykowany do szacowania wartości parametrów modelu układu oddechowego w czasie przerwania przepływu powietrza. Dla kolejnych 1000 iteracji program nie był w stanie spełnić kryterium kończącego (3.27). Powodem nieidentyfikowalności modelu była zbyt duża liczba estymowanych parametrów, która w dotychczasowych próbach wynosiła 12. Postanowiono wyrugować wybrane elementy wektora estymowanych parametrów, przypisując im stałe wartości.

Analiza wrażliwości jest jedną z metod służących określeniu wpływu parametrów na proces identyfikacji danego modelu matematycznego i może być użyta do ustalenia, które z wielkości wykazują „potencjał” do ich estymacji. Można jej dokonać wykorzystując do tego celu macierz wrażliwości \mathbf{X} , zawierającą informacje o wpływie kolejnych parametrów na wyjścia modelu dla kolejnych obserwacji. Jednak w modelach fizycznych bezwzględne wartości parametrów mogą różnić się o kilka rzędów, w związku z czym wygodniej jest analizować ich względną wrażliwość na wyjścia \mathbf{S}_y :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_y(i, j) &= \frac{\partial y_i}{\partial \theta_j} \theta_j, \\ \mathbf{S}_y^{n \times p} &= \mathbf{X} \mathit{diag}(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

gdzie operator *diag* przekształca macierz kwadratową na wektor, którego elementami są elementy diagonalne macierzy, natomiast wektor przekształcany jest na macierz kwadratową, której elementami diagonalnymi są elementy wektora, a pozostałe elementy są równe zero.

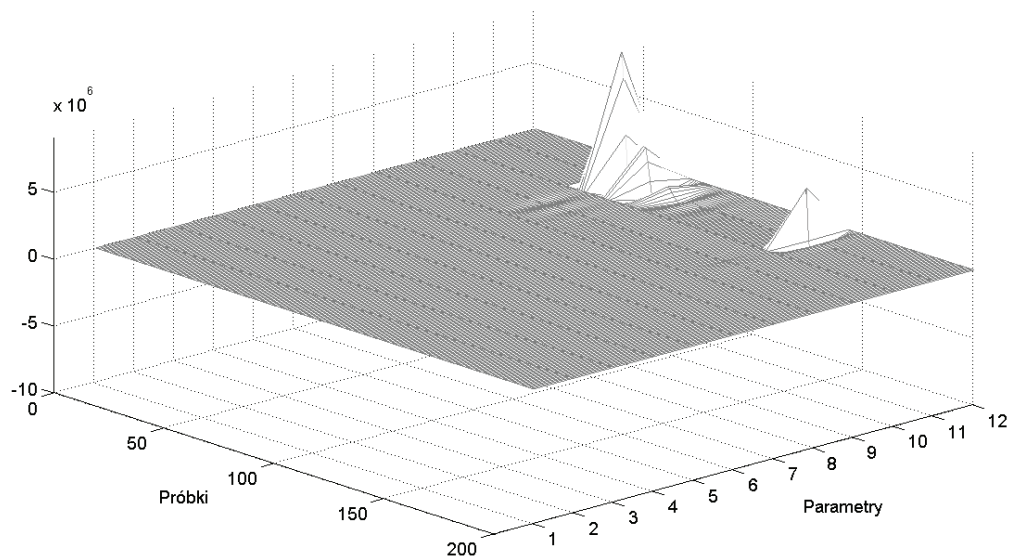
Ponieważ względne wpływy wartości parametrów na wyjście mogą znacznie się różnić, trudno jest w tym przypadku porównywać je graficznie. Rozwiązaniem problemu może być wyznaczenie znormalizowanej macierzy wrażliwości \mathbf{S}_n :

$$\mathbf{S}_n^{n \times p} = \mathbf{X} \mathit{diag}(\mathit{diag}((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1/2})). \quad (3.30)$$

Obserwacja wektorów $\mathbf{S}_y^{n \times p}$ oraz $\mathbf{S}_n^{n \times p}$ umożliwia określenie wpływu kolejnych parametrów na poszczególne przedziały danych. Ze względu na to, że wektor \mathbf{X} zależy od zmiennego wektora parametrów $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, obserwacje przeprowadzono dla kilkadziesiątu iteracji. Na rysunkach 3.5–3.7 przedstawiono kolejno macierze \mathbf{X} , $\mathbf{S}_y^{n \times p}$ oraz $\mathbf{S}_n^{n \times p}$ dla pierwszej iteracji.

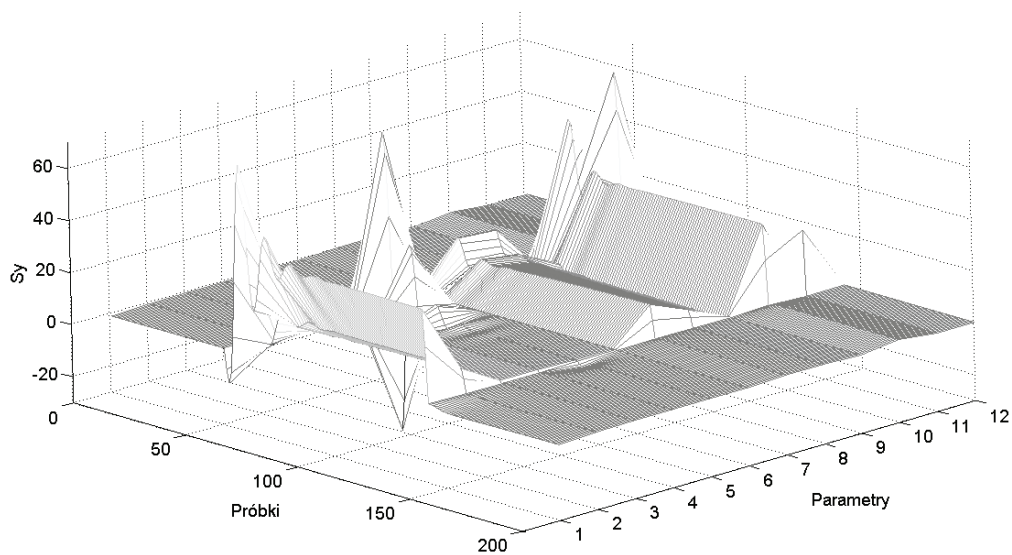
Graficzna prezentacja z rysunków 3.5–3.7 pokazuje mały wpływ na wyjście modelu parametrów numer 3, 6 oraz 9, 12 w wektorze, które zgodnie z tabelą 3.2 odnoszą się do R_l , L_l oraz C_A i Pt . Wielkości te wyrugowano z wektora $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, który przyjmuje teraz postać:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [Rc \ Rt \ Rp \ Lc \ C_l \ Caw \ Ct \ Cm]. \quad (3.31)$$



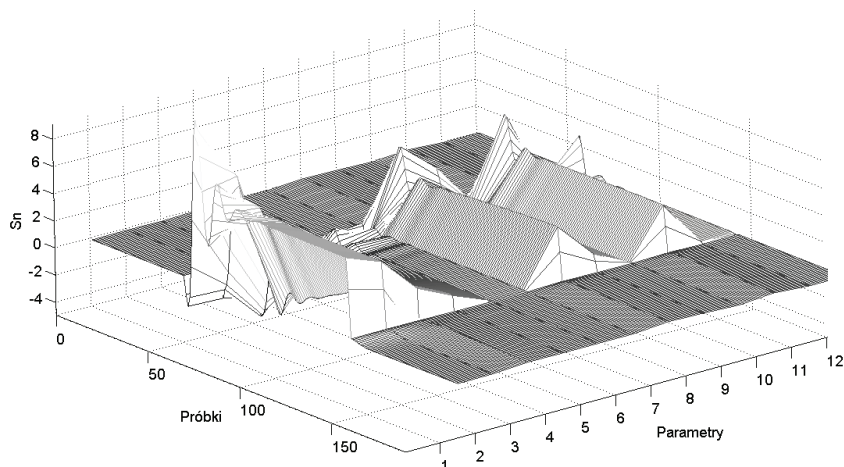
Rys. 3.5. Wrażliwość wyjścia X na parametry dla pierwszej iteracji
(kolejność i wymiar parametrów jak w tabeli 3.2)

Fig. 3.5. Parametric sensitivity of output X in first iteration
(the order and dimension according to the table 3.2)



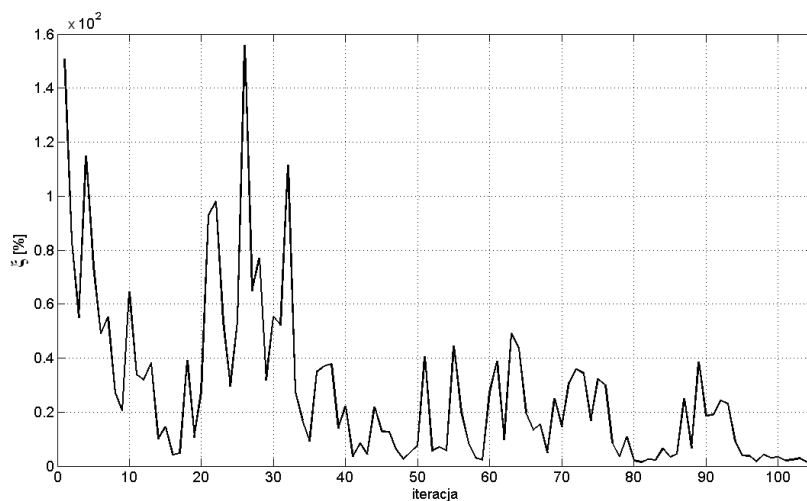
Rys. 3.6. Względna wrażliwość wyjścia S_y na parametry dla pierwszej iteracji

Fig. 3.6. Relative parametric sensitivity of output S_y for the first iteration



Rys. 3.7. Znormalizowana wrażliwość wyjścia S_n na parametry dla pierwszej iteracji
 Fig. 3.7. Normalized parametric sensitivity S_n of output for the first iteration

Po ustaleniu nowego $\hat{\theta}$ uruchomiono ponownie procedurę estymowania parametrów modelu odwrotnego. Dla 104 iteracji kryterium kończące zostało spełnione. Zmianę błędu dopasowania przebiegów wyjściowych dla kolejnych iteracji przedstawiono na rysunku 3.8.



Rys. 3.8. Zmiana błędu dopasowania dla kolejnych iteracji algorytmu
 Fig. 3.8. Changes of fitting error for the following algorithm iteration

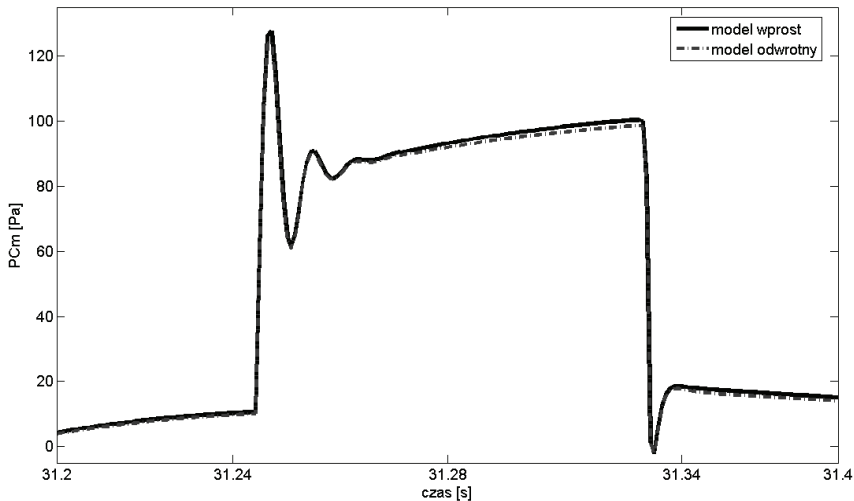
Otrzymane wyniki i błędy ich oszacowania względem wartości modelu wprost przedstawiono w tabeli 3.3.

Tabela 3.3. Parametry modelu wprost oraz modelu odwrotnego. Wyniki oszacowania niepewności estymacji parametrów modelu układu oddechowego w dziedzinie czasu

Table 3.3. Parameters of the forward and inverse model. Uncertainty of parameters estimation of the respiratory system model in the time domain

Parametry	Wartości parametrów dla modelu wprost θ_0	Wartości parametrów dla modelu odwrotnego $\hat{\theta}$	$ \delta\hat{\theta} = \frac{ \theta_0 - \hat{\theta} }{\theta_0} \cdot 100$ [%]
Rc [Pa·s/dm ³]	150,0	149,2	0,60
Rt [Pa·s/dm ³]	40,0	41,4	3,60
Rp [Pa·s/dm ³]	15,0	11,8	21,3
Lc [Pa·s/dm ³]	0,500	0,505	1,00
C_l [dm ³ /Pa]	0,00250	0,00445	78,1
Caw [dm ³ /Pa]	0,00200	0,00249	24,4
Ct [dm ³ /Pa]	0,00300	0,00446	48,6
Cm [dm ³ /Pa]	$6,00 \cdot 10^{-6}$	$6,03 \cdot 10^{-6}$	0,60

Największe rozbieżności wystąpiły dla elementów pojemnościowych C_l , Ct , Caw oraz dla oporu Rp , co może być spowodowane przyjętymi założeniami dotyczącymi kroku poszukiwań oraz kryterium kończącego. Dla pozostałych parametrów obserwowano dużą dokładność identyfikacji modelu w warunkach przyjętych w czasie symulacji; najmniejszym błędem względnym (0,6%) obciążony jest parametr Cm oraz Rc . Warto zwrócić uwagę na to, że odwracanie macierzy $[\mathbf{X}(\hat{\theta}^{(i)})\mathbf{W}\mathbf{X}(\hat{\theta}^{(i)})]^{-1}$ jest źle uwarunkowane numerycznie (stosunek największej wartości osobliwej macierzy do najmniejszej wynosi $7,4 \cdot 10^{19}$), co może być źródłem dodatkowych niedokładności podczas estymacji.



Rys. 3.9. Przebieg ciśnienia PCm dla modelu wprost i modelu odwrotnego
Fig. 3.9. Trend of PCm pressure for the forward and inverse model

Na rysunku 3.9 pokazano przebiegi ciśnienia PCm obu modeli, tj. modelu wprost ze znanymi parametrami oraz modelu odwrotnego z parametrami oszacowanymi. Oba sygnały mają bardzo zbliżone do siebie kształty. Zastosowany algorytm, zgodnie z założeniami, umożliwia takie dostrojenie parametrów, aby sygnał wyjściowy modelu odwrotnego dobrze dopasowywał się do sygnału modelu wprost. Jakość dopasowania zależy głównie od przyjętego kryterium końcowego dla błędu ξ . Im kryterium jest ostrzejsze, tym dopasowanie jest dokładniejsze. Jednak wraz ze zmniejszaniem kryterium błędu ξ wzrasta liczba iteracji potrzebna do oszacowania parametrów. Wzrost ten następuje do momentu, w którym nie jest możliwe osiągnięcie założonego warunku.

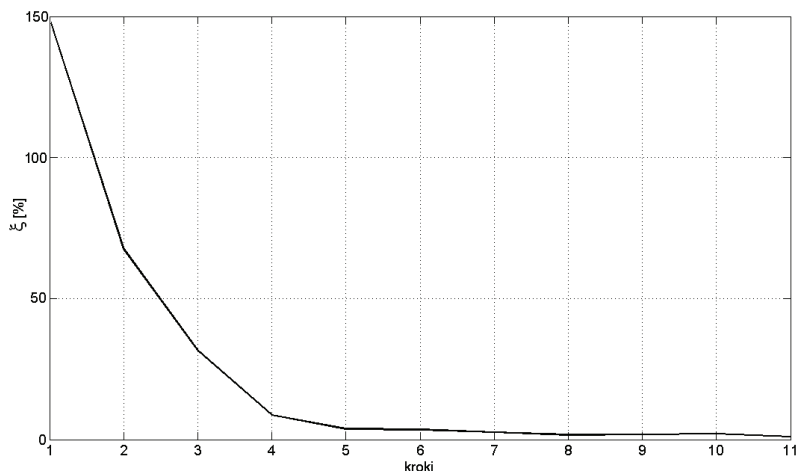
3.3. WPŁYW KOLEJNOŚCI ESTYMOWANYCH PARAMETRÓW NA ZBIEŻNOŚĆ ALGORYTMU

Zmiana kolejności parametrów w wektorze $\hat{\theta}$, jak sugerowano w [59], dla każdego kroku identyfikacji modelu stwarza lepsze warunki dla oszacowania kolejnych wartości, uwzględniając każdorazowo wpływ wyróżnionych elementów modelu na jego wyjście.

Do określenia kolejności parametrów w wektorze użyto wektora l^2 norm wrażliwości względnych:

$$\mathbf{m}_y = [\|x_{y1}\|_2 \|x_{y2}\|_2 \dots \|x_{yP}\|_2]^T = [\text{diag}(\mathbf{X}_y^T \mathbf{X}_y)]^{1/2} \quad (3.32)$$

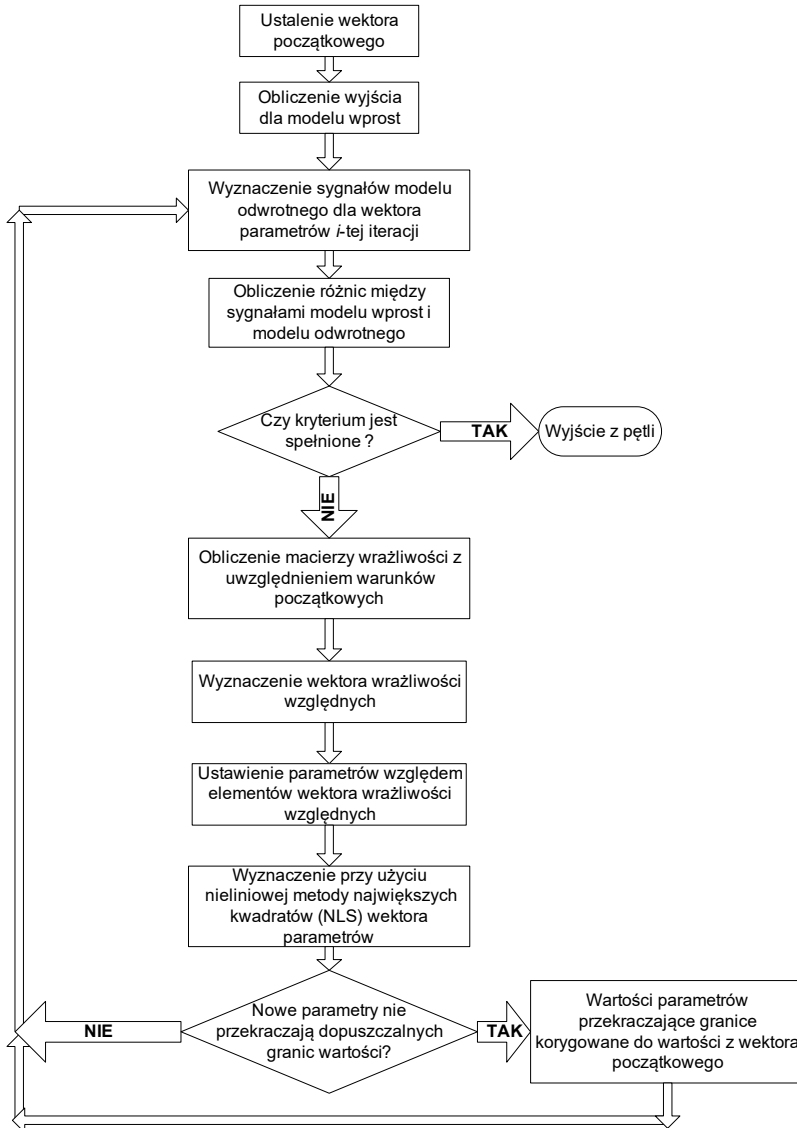
gdzie $\mathbf{X}_y = \mathbf{X}\Theta$ jest macierzą względnych wrażliwości wyjścia na parametry, dla której $\Theta = \text{diag}(\theta)$.



Rys. 3.10. Zmiana błędu dopasowania dla kolejnych iteracji algorytmu przy zmiennej kolejności parametrów

Fig. 3.10. Changes of fitting error for the following iteration of algorithm while the parameters ordering is variable

Obliczany na tej podstawie wektor \mathbf{m}_y służył wyznaczeniu kolejności parametrów dla kolejnej iteracji. Elementy wektora \mathbf{m}_y oraz wektora $\hat{\theta}$ sortowane były równolegle względem pierwszego od największej do najmniejszej wartości.



Rys. 3.11. Schemat blokowy algorytmu estymacji parametrów modelu układu oddechowego uwzględniający kolejność estymowanych parametrów

Fig. 3.11. Block diagram of estimation algorithm of the respiratory system model parameters which take the order of estimated parameters into consideration

Na rysunku 3.11 pokazano schemat blokowy algorytmu uwzględniający analizę wrażliwości wyjść na parametry dla każdego kroku. Po zaimplementowaniu sugerowanych zmian ponownie uruchomiono procedurę estymacyjną w celu zweryfikowania wprowadzonych modyfikacji. Przebieg błędu dopasowania przedstawiono na rysunku 3.10, natomiast uzyskane wyniki umieszczono w tabeli 3.4. Dla tego przypadku sygnały PCm modelu wprost oraz modelu odwrotnego nie różniły się od przedstawionych na rysunku 3.9, tak że zrezygnowano z graficznego ich przedstawienia.

Porównując zmianę błędu dopasowania ξ dla kolejnych iteracji dla wektora o stałej kolejności parametrów (rys. 3.8) oraz dla wektora o zmiennej kolejności parametrów (rys. 3.10) widoczna jest znaczna poprawa szybkości zbieżności algorytmu (10-krotna). W pierwszym przypadku do spełnienia kryterium zbieżności potrzebne były 104 iteracje, w drugim 10. Wynik ten świadczy o tym, że zmiana kolejności parametrów w wektorze $\hat{\theta}$ dla każdej iteracji poprawia ukierunkowanie poszukiwań minimum funkcji kryterialnej, konsekwencją czego jest m.in. łagodniejsza krzywa zmiany błędów w kolejnych iteracjach (rys. 3.10).

Tabela 3.4. Parametry modelu wprost oraz modelu odwrotnego.

Wyniki oszacowania niepewności estymacji parametrów modelu układu oddechowego w dziedzinie czasu przy zmiennej kolejności parametrów

Table 3.4. Parameters of the forward and inverse model. Uncertainty of parameters estimation of the respiratory system model in the time domain while the parameters ordering is variable

Parametry	Wartości parametrów dla modelu wprost θ_0	Wartości parametrów dla modelu odwrotnego $\hat{\theta}$	$ \delta\hat{\theta} $ [%]
Rc [Pa·s/dm ³]	150,0	147,1	1,93
Rt [Pa·s/dm ³]	40,0	44,1	10,3
Rp [Pa·s/dm ³]	15,0	10,0	33,3
Lc [Pa·s/dm ³]	0,500	0,507	1,40
C_i [dm ³ /Pa]	0,00250	0,00228	8,80
Caw [dm ³ /Pa]	0,00200	0,00278	39,0
Ct [dm ³ /Pa]	0,00300	0,00531	77,0
Cm [dm ³ /Pa]	$6,00 \cdot 10^{-6}$	$6,06 \cdot 10^{-6}$	1,00

Większą dokładność estymacji poszczególnych parametrów uzyskano dla wektora o stałej kolejności parametrów (tab. 3.3), z wyjątkiem pojemności tkanek płucnych C_i . Różnice niepewności estymowanych parametrów między dwiema rozpatrywanymi metodami były mniejsze dla elementów obciążonych mniejszym błędem, w obu przypadkach (tab. 3.3 oraz tab. 3.4) były to parametry: Cm , Lc , Rc , Rt . Wraz ze wzrostem błędu względnego dopasowania przebiegów wyjściowych (większymi błędami obciążone były estymaty parametrów Rp , Caw , Ct) różnica ta relatywnie powiększała się, zgodnie ze zmniejszaniem się wpływu parametrów na wyjście modelu.

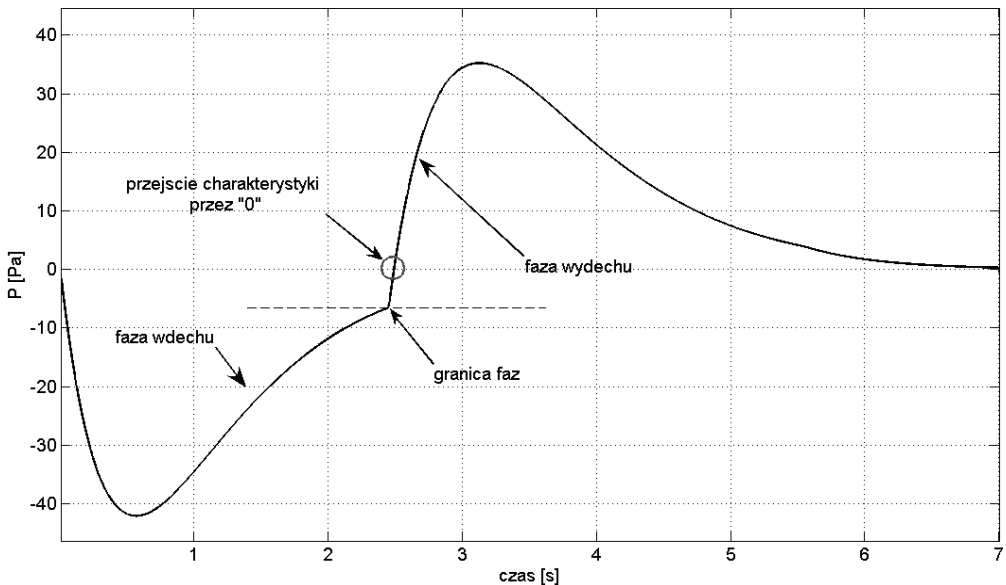
3.4. SYMULACJA WYDECHOWEGO CYKLU ODDECHOWEGO

W punkcie 3.2 oraz 3.3 korzystano z założenia, że przebieg ciśnienia P_m wytwarzany przez mięśnie oddechowe jest taki sam dla modelu odwrotnego jak przebieg dla analogu wprost oraz że źródło P_t polaryzujące podatność C_t , stosownie do występowania sił retrakcji w układzie oddechowym, ma taką samą wartość. Założenia te przyjęto w celu weryfikacji poprawności wewnętrznej tworzonego algorytmu.

Nie ma obecnie metody pozwalającej na precyzyjne wyznaczenie charakterystyki przebiegu ciśnienia P_m , tak więc, chcąc wyznaczyć parametry systemu rzeczywistego, nie można korzystać z założeń przyjętych w sekcji; byłyby one błędne i mogłyby powodować obniżenie wiarygodności procedury identyfikacyjnej.

Ponadto podane warunki umożliwiły wyznaczenie charakterystyki PC_m dla fazy wdechu, co nie byłoby możliwe bez znajomości przebiegu P_m . W kolejnym etapie założono zatem, że sygnał PC_m będzie wyznaczany jedynie dla fazy wydechu, aby zniwelować w ten sposób wpływ mięśni oddechowych. Wymagało to jednak sformułowania odpowiednich warunków początkowych, które w dotychczasowej formie rozważane były dla fazy między wydechem i wdechem (2.23).

Przyglądając się szczegółowo przebiegowi PC_m modelu wprost, zauważyć można, iż w trakcie wydechu charakterystyka ta przechodzi przez „0” (rys. 3.12).

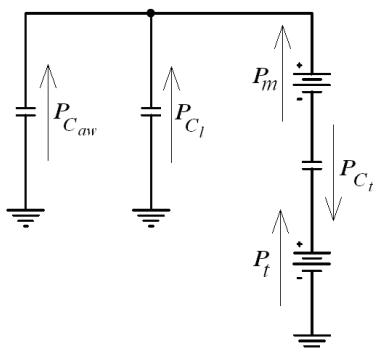


Rys. 3.12. Charakterystyka zmiany PC_m

dla modelu wprost z wyeksponowanymi fazami wdechu i wydechu

Fig. 3.12. Changes of PC_m for the forward model with exhibited phases of inspiration and expiration

Jest to moment, zaraz po przejściu między fazami, w którym ciśnienia są ustabilizowane, a przepływy bliskie zeru. Sytuacja analogiczna jest więc do tej, dla której wyznaczono warunki początkowe w pierwszym etapie pracy (2.23), z tą różnicą, że pojemności C_{aw} , C_t oraz C_l są polaryzowane dodatkowo przez źródło P_m (rys. 3.13), które w tym momencie przyjmuje największą wartość, przechodząc w fazę wydechu.



Rys. 3.13. Schemat modelu dla braku przepływu powietrza
Fig. 3.13. Scheme of the model for the lack of the air-flow in the system

W tabeli 3.5 przedstawiono przykładowe wartości przepływów oraz ciśnień dla modelu wprost w punkcie przejścia sygnału PC_m przez „0”, między fazą wdechu i wydechu.

Tabela 3.5. Wartości ciśnień oraz przepływów w momencie przejścia sygnału PC_m przez „0” między fazą wdechu i wydechu

Table 3.5. Pressures and flows values in the system model while the pressure PC_m is equal to „0”, between inspiration and expiration phase

Sygnal	Q_c [dm ³ /s]	Q_l [dm ³ /s]	PC_{aw} [Pa]	PC_t [Pa]	PC_m [Pa]	P_A [Pa]	PC_l [Pa]
Wartość	0,0014767	-0,01608	-354,59	-531,25	0,055526	0,59729	-353,82

Ostatecznie warunek początkowy, według analiz przeprowadzonych w (2.20) oraz (2.21), dla rozpatrywanego modelu przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 Vz &= Cy(P_t + P_m), \\
 P_{Ct} &= \frac{Vz}{Ct}, \\
 P_{Cx} &= P_{Caw} = P_{Cl} = P_t + P_m - P_{Ct}.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Po wyznaczeniu warunków początkowych, w celu weryfikacji zgodnie z (2.6), przyjęto $P_m = P_{m_{\max}} = -354,5$ [Pa] i obliczono ciśnienia PC_{aw} , PC_l , PC_t adekwatnie

do wzoru (3.33), a następnie porównano z wynikami z tabeli 3.5; otrzymane rezultaty zestawiono w tabeli 3.6.

Tabela 3.6. Wartości ciśnień oraz przepływów w momencie przejścia sygnału PCm przez „0” między fazą wdechu i wydechu, wyznaczone numerycznie dla modelu wprost oraz obliczone zgodnie z (3.33)

Table 3.6. Pressures and flows values while the parameter PCm is equal to „0”, between inspiration and expiration phase, computed numerically in the model and accordingly to (3.33)

Sygnal	Q_c [dm ³ /s]	Q_l [dm ³ /s]	$PCaw$ [Pa]	PCt [Pa]	PCm [Pa]	P_A [Pa]	PCl [Pa]
Model wprost	0,00148	-0,01608	-354,6	-531,25	0,05553	0,59729	-353,82
Warunki początkowe	0	0	-361,8	-542,7	0	0	-361,8

Niewielkie rozbieżności między wartościami widoczne w prezentowanych wynikach mogą wynikać z tego, że przejście sygnału przez wartość „0” jest przesunięte względem granicy fazy o pewną niewielką wartość (rys. 3.12) – w układzie rzeczywistym może się to wiązać z jego bezwładnością, wynikającą na przykład ze skończonego czasu dyfuzji ośrodka między różnymi sekcjami strukturalnymi obiektu – układu oddechowego czy mechaniki rozszerzających się i kurczących tkanek.

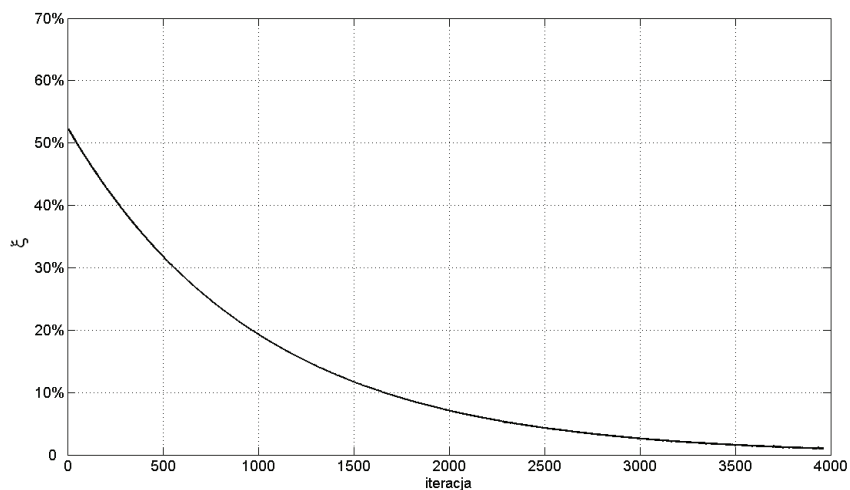
Ponieważ wartość Pm oraz Pt są indywidualnymi, niepowtarzalnymi cechami badanego systemu, obie wielkości wyekstrahowano jako samodzielne zmienne w wektorze estymowanych parametrów, który przedstawić można teraz w postaci:

$$\hat{\theta} = [Rc \ Rt \ Rp \ Lc \ C_l \ Caw \ Ct \ Cm \ Pt \ Pm]. \quad (3.34)$$

Przyjmując dla modelu wprost parametr Pm równy -330 [Pa] obliczono ponownie na podstawie stworzonego algorytmu wartości parametrów modelu odwrotnego. Zaostrożono także kryterium kończące iteracyjne poszukiwania minimum funkcji w stosunku do (3.27), ustalając $\xi = 1\%$, oraz zmniejszono krok poszukiwań do $\mu = 0,01$, co zwiększyło liczbę iteracji wymaganą do znalezienia minimum funkcji kryterialnej (rys. 3.14). Wyniki tej operacji zapisano w tabeli 3.7.

Błędy oszacowania parametrów Rc , Rt , Ct , Rp , Lc , Caw są porównywalne z otrzymanymi uprzednio w punktach 3.3 oraz 3.2. Większa dokładność podczas ostatniej estymacji wynika z zaostżenia kryterium kończącego iteracje ξ , skutkiem czego przebiegi ciśnienia na podatności Cm pokrywały się na tyle dokładnie, że zaniechano umieszczania rysunków porównujących wyjścia modeli w dalszej części opracowania. Zauważono jednocześnie nieznaczne pogorszenie oszacowania parametru oporu peryferyjnych dróg oddechowych Rp , który ze względu na mały wpływ na wyjście modelu, widoczny na rysunku 3.7 oraz rysunku 3.6, jest potencjalnie gorzej estymowalny, w wyniku czego powstała różnica może mieć zintensyfikowaną składową przypadkową. Dla podatności tkanek płucnych C_l widoczne jest znaczne pogorszenie niepewności oszacowania w zestawieniu z wynikami z rozdziału 3.3, z drugiej jednak

strony w porównaniu z wynikami otrzymanymi w punkcie 3.2 obserwowane jest nieznaczne poprawienie dokładności estymacji. Powstałe rozbieżności wynikać mogą z różnic w zastosowanych algorytmach estymacyjnych, dla których macierz wrażliwości na wyjścia \mathbf{X} przyjmuje różną postać dla kolejnych iteracji poszczególnych algorytmów.



Rys. 3.14. Zmiana błędu dopasowania dla kolejnych iteracji algorytmu
Fig. 3.14. Changes of fitting error for the following iterations of algorithm

Tabela 3.7. Parametry modelu wprost oraz modelu odwrotnego.

Wyniki oszacowania niepewności estymacji współczynników modelu układu oddechowego w dziedzinie czasu ze zmienną kolejnością parametrów w poszukiwanym wektorze
Table 3.7. Parameters of the forward and inverse model. Uncertainty of parameters estimation of the respiratory system model in the time domain while the parameters ordering is variable

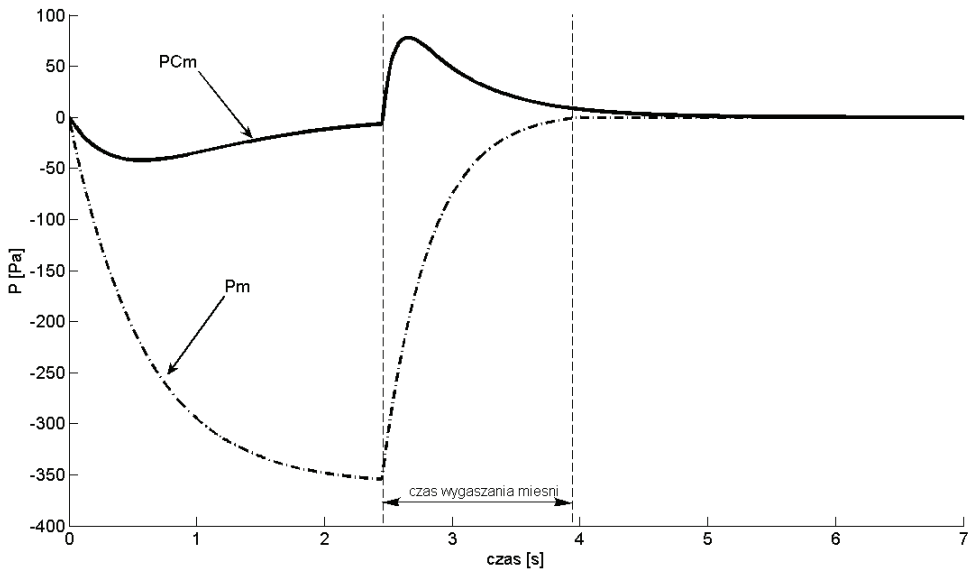
Parametry	Wartości parametrów dla modelu wprost θ_0	Wartości parametrów dla modelu odwrotnego $\hat{\theta}$	$ \delta\hat{\theta} [\%]$
Rc [$\text{Pa}\cdot\text{s}/\text{dm}^3$]	150,0	148,3	1,13
Rt [$\text{Pa}\cdot\text{s}/\text{dm}^3$]	40,0	42,3	5,75
Rp [$\text{Pa}\cdot\text{s}/\text{dm}^3$]	15,0	6,09	59,4
Lc [$\text{Pa}\cdot\text{s}/\text{dm}^3$]	0,500	0,503	0,6
C_i [dm^3/Pa]	0,00250	0,00375	50,0
C_{aw} [dm^3/Pa]	0,00200	0,00229	14,5
C_t [dm^3/Pa]	0,00300	0,00128	57,3
C_m [dm^3/Pa]	$6,000 \cdot 10^{-6}$	$5,996 \cdot 10^{-6}$	0,066
P_t [Pa]	-550	-44,8	91,9
P_m [Pa]	-330	-545	65,2

Oszacowanie parametrów P_m oraz P_t cechuje duży rozrzut, jednak odnoszące się do nich cechy fizyczne badanego podmiotu od strony diagnostycznej są mało istotne.

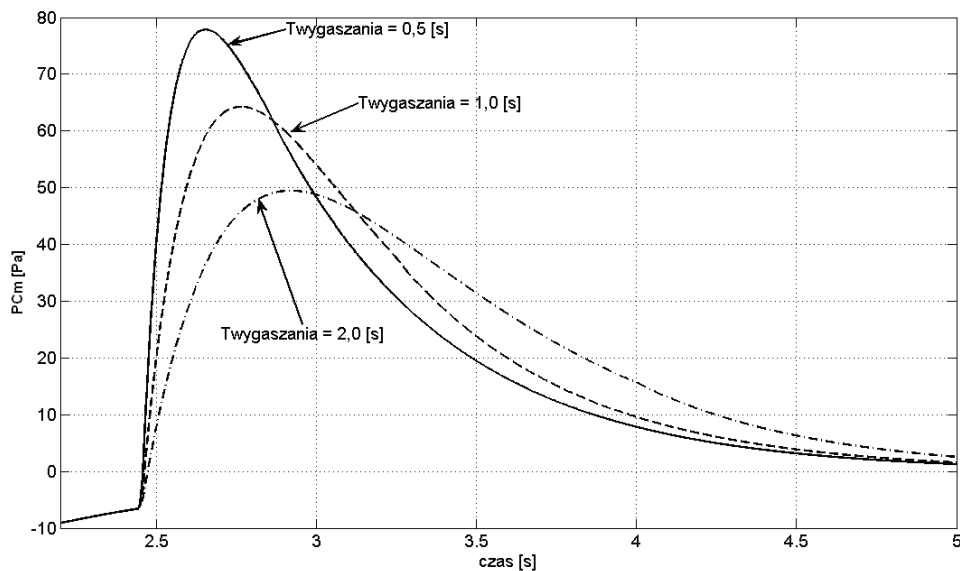
3.5. WPLYW WYGASAJĄCYCH MIĘŚNI WDECHOWYCH NA ESTYMACJĘ PARAMETRÓW

Założenia z punktu 3.4 mówiące, iż wyznaczanie sygnału PC_m jedynie dla fazy wydechu uniezależnia estymację parametrów od charakterystyki pracy mięśni nie są do końca słuszne. Wynika to z tego, że przerwanie dokonywane jest możliwe jak najbliżej ekstremum przebiegu ciśnienia PC_m w fazie wydechu. Najprawdopodobniej jednak w rzeczywistości w tym okresie mięśnie nie są tak intensywnie aktywne jak na przykład w poprzedzającym etapie wdechu. Niemniej wciąż następuje wówczas spadek ciśnienia P_m , spowodowany rozluźnianiem się mięśni oddechowych podczas wydechu. Na rysunku 3.15 przedstawiono na wspólnym wykresie przebieg ciśnienia PC_m oraz charakterystykę mięśni oddechowych.

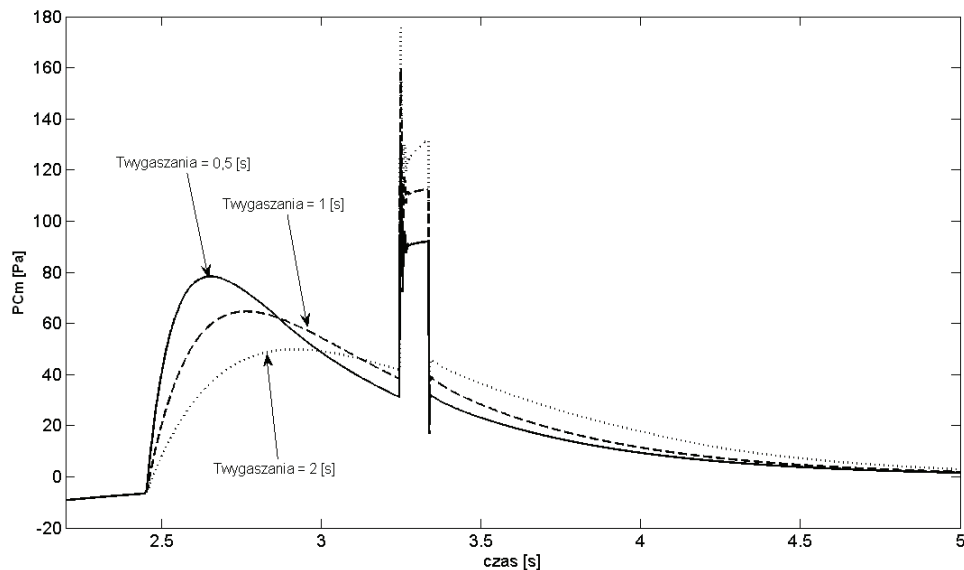
Na zamieszczonej rycinie widoczna jest wyraźna korelacja między charakterystykami wygasających mięśni oraz sygnałem PC_m . Wpływ długości czasu trwania wygaszania mięśni (t_{off}) na charakterystykę PC_m podczas spokojnego oddychania dla trzech wybranych wartości tego parametru pokazano na rysunku 3.16. Zauważyć należy, że wraz ze wzrostem t_{off} następuje zmniejszenie amplitudy oraz czasowe przesunięcie ekstremum sygnału. Związek tego zjawiska z manewrem okluzyjnym dobrze obrazuje rysunek 3.17.



Rys. 3.15. Przebieg ciśnienia PC_m oraz charakterystyka mięśni oddechowych P_m
Fig. 3.15. Mouth pressure (PC_m) trend and the characteristic of the respiratory muscle P_m



Rys. 3.16. Wpływ długości wygaszania mięśni na przebieg PC_m podczas spokojnego oddychania
 Fig. 3.16. The length of muscle activity weakening influence on the time course of PC_m during quiet breathing



Rys. 3.17. Wpływ długości wygaszania mięśni na przebieg PC_m podczas przerwania przepływu
 Fig. 3.17. The length of muscle activity weakening influence on the time course of PC_m during air-flow interruption

Konsekwencją zmiany czasu wygaszania mięśni w czasie okluzji dla przebiegu PCm jest wzrost poziomu skoku ciśnienia w każdej z faz (I – szybkie tłumione oscylacje, II – powolny narost Pcm) wraz ze wzrostem tej wielkości oraz różnica w poziomach przed i po przerwaniu, z których to przedziałów obliczany jest przepływ ($Q_{ao} = PCm/Rdd$) używany wraz z ciśnieniem do estymacji parametrów.

Kwestię tę próbowano rozwiązać, zastępując użytą w estymacji (wzór 3.25) macierz wag \mathbf{W} , będącą dotychczas macierzą jednostkową, inną jej postacią, selekcjonując tym samym ważność wybranych informacji. Ze względu na to, że poziom skoku ciśnienia może być regulowany również przez parametr Pm , nie mający bezpośredniej istotności diagnostycznej przeprowadzanego badania, do rozwiązania pozostaje jedynie kwestia różnic w poziomach przed i po przerwaniu.

Sygnał używany do estymacji można przedstawić w postaci wektora $\mathbf{y} = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{p}^T, \mathbf{q}_2^T]^T$ (patrz pkt. 3.2). Można więc stworzyć analogiczny wektor wag $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T, \mathbf{w}_3^T]^T$, który regulowałby ważność zebranych informacji. W dalszej kolejności przeprowadzono kilka eksperymentów symulacyjnych dla dwóch różnych (rozbieżnych) czasów wygaszania mięśni modelu wprost i odwrotnego. Dla modelu wprost przyjęto czas równy 0,9 s, natomiast dla modelu odwrotnego parametr ten wynosił 0,5 s. Wartości macierzy wag \mathbf{W} były stałe dla całego procesu estymacji. Wyniki badań zestawiono w tabeli 3.8.

Tabela 3.8. Niepewności estymowanych parametrów dla różnych macierzy wagowych
Table 3.8. Uncertainties for the estimated parameters of the model in the cases of various weight matrix

Wagi	$\mathbf{W} = [1 \ 1 \ 1]$	$\mathbf{W} = [0,25 \ 1 \ 1]$	$\mathbf{W} = [0,5 \ 1 \ 1]$	$\mathbf{W} = [0,25 \ 1 \ 0,25]$	$\mathbf{W} = [0,5 \ 1 \ 0,5]$
Parametry	$ \delta\hat{\theta} [\%]$				
Rc [Pa·s/dm ³]	1,14	0,67	0,97	1,45	1,38
Rt [Pa·s/dm ³]	5,68	4,96	5,83	5,81	5,68
Rp [Pa·s/dm ³]	59,4	36,9	56,1	55,2	59,4
Lc [Pa·s/dm ³]	0,70	0,66	0,79	0,46	0,70
C_i [dm ³ /Pa]	50,1	30,9	47,8	47,9	50,1
C_{aw} [dm ³ /Pa]	14,3	13,2	15,1	16,3	14,3
C_t [dm ³ /Pa]	57,3	54,9	56,9	56,9	57,3
C_m [dm ³ /Pa]	0,07	0,36	0,19	0,16	0,07
P_t [Pa]	91,9	87,3	92,4	92,7	92,4
P_m [Pa]	63,2	56,3	61,7	61,8	63,2

Analizując podane zestawienie widać, że wprowadzenie wag poprawia precyzję oszacowania wartości parametrów, zmniejszając ich błędy. Najlepsze rezultaty uzyskano dla $\mathbf{W} = [0,25 \ 1 \ 1]$.

Wykorzystując poprzednie spostrzeżenia, w dalszych krokach przyjęto macierz wag $\mathbf{W} = [0,25 \ 1 \ 1]$. Zbadano następnie algorytm pod względem ewentualnej zbieżno-

ści dla mocniejszego kryterium kończącego iterację. Przyjęto najpierw kryterium $\xi < 0,5\%$. Dla kroku równego $\mu = 0,01$ algorytm nie osiągał założonego progu ξ , dopiero przyjęcie $\mu = 0,001$ spowodowało w 4627. iteracji spełnienie kryterium kończącego estymację. Wyniki dla tak przyjętego warunku zestawiono w tabeli 3.9.

Tabela 3.9. Parametry modelu wprost oraz modelu odwrotnego.

Wyniki oszacowania niepewności estymacji parametrów dla stałej macierzy wag i $\xi < 0,5\%$

Table 3.9. Parameters of the forward and inverse model.

Uncertainties of parameters estimation for the constant weight matrix and $\xi < 0,5\%$

Parametry	Wartości parametrów dla modelu wprost θ_0	Wartości parametrów dla modelu odwrotnego $\hat{\theta}$	$ \delta\hat{\theta} $ [%]
Rc [Pa·s/dm ³]	150,0	149,4	0,40
Rt [Pa·s/dm ³]	40,0	41,9	4,75
Rp [Pa·s/dm ³]	15,0	9,44	37,1
Lc [Pa·s/dm ³]	0,500	0,503	0,60
C_l [dm ³ /Pa]	0,00250	0,00326	30,4
Caw [dm ³ /Pa]	0,00200	0,00226	13,0
Ct [dm ³ /Pa]	0,00300	0,00136	54,7
Cm [dm ³ /Pa]	$6,00 \cdot 10^{-6}$	$5,99 \cdot 10^{-6}$	0,17
Pt [Pa]	-550	-69,9	87,3
Pm [Pa]	-330	-520	57,6

Tabela 3.10. Parametry modelu wprost oraz modelu odwrotnego.

Wyniki oszacowania niepewności estymacji parametrów dla stałej macierzy wag i $\xi < 0,2\%$

Table 3.10. Parameters of the forward and inverse model. Uncertainties of parameters estimation for the constant weight matrix and $\xi < 0,2\%$

Parametry	Wartości parametrów dla modelu wprost θ_0	Wartości parametrów dla modelu odwrotnego $\hat{\theta}$	$ \delta\hat{\theta} $ [%]
Rc [Pa·s/dm ³]	150,0	149,6	0,27
Rt [Pa·s/dm ³]	40,0	41,8	4,50
Rp [Pa·s/dm ³]	15,0	9,55	36,3
Lc [Pa·s/dm ³]	0,500	0,503	0,60
C_l [dm ³ /Pa]	0,00250	0,00321	28,4
Caw [dm ³ /Pa]	0,00200	0,00224	12,0
Ct [dm ³ /Pa]	0,00300	0,00138	54,0
Cm [dm ³ /Pa]	$6,000 \cdot 10^{-6}$	$6,002 \cdot 10^{-6}$	0,03
Pt [Pa]	-550	-70,3	87,2
Pm [Pa]	-330	-517	56,7

Zgodnie z oczekiwaniami, zaostrzenie kryterium poprawiło precyzję otrzymanych wyników. Niemniej jednak parametry C_t , C_l , R_p , P_t , P_m nadal obarczone były dużym błędem.

W kolejnym kroku zaproponowano nową wartość $\zeta < 0,2\%$, w celu zbadania możliwości granicznej dokładności dopasowania sygnału. Obliczenia wykonano dla kroku $\mu = 0,01$. W 5570 iteracji założone kryterium zostało spełnione. Wyniki zamieszczono w tabeli 3.10.

Zaostrzenie warunku ζ poprawiło nieznacznie dokładność uzyskiwanych wyników, jednak wartości otrzymane dla parametrów C_t , C_l , R_p , P_t , P_m nie są satysfakcjonujące, zwłaszcza w kontekście podatności, stanowiących wartościowy składnik procedury diagnostycznej.

W celu poprawienia precyzji oszacowania, postanowiono przyjąć czas wygaszania mięśni jako kolejny parametr podlegający estymacji. Jednocześnie zrezygnowano z używania macierzy wag, przyjmując ponownie jej jednostkową postać. Wyniki przeprowadzonej estymacji dla zwiększonego o dodatkowy element wektora parametrów przedstawiono w tabeli 3.11.

Tabela 3.11. Parametry modelu wprost oraz modelu odwrotnego.

Wyniki oszacowania niepewności estymacji parametrów dla stałej, jednostkowej macierzy wag
Table 3.11. Parameters of the forward and inverse model. Uncertainties of parameters estimation for the constant, identity weight matrix

Parametry	Wartości parametrów dla modelu wprost θ_0	Wartości parametrów dla modelu odwrotnego $\hat{\theta}$	$ \partial\hat{\theta} $ [%]
R_c [Pa·s/dm ³]	150,0	149,3	0,47
R_t [Pa·s/dm ³]	40,0	40,9	2,25
R_p [Pa·s/dm ³]	15,0	9,80	34,7
L_c [Pa·s/dm ³]	0,500	0,502	0,40
C_l [dm ³ /Pa]	0,00250	0,00288	15,2
C_{aw} [dm ³ /Pa]	0,00200	0,00212	6,00
C_t [dm ³ /Pa]	0,00300	0,00277	7,67
C_m [dm ³ /Pa]	$6,000 \cdot 10^{-6}$	$6,001 \cdot 10^{-6}$	0,02
P_t [Pa]	-550	-449	18,4
P_m [Pa]	-334	-336	1,82
Czas wygaszania [s]	0,665	0,670	0,75

Kryterium kończące iterację, przyjęte jako 0,2%, zostało spełnione w 875. kroku. Widoczne jest znaczne poprawienie dokładności wyników dla parametrów C_t , C_l , P_t , P_m w porównaniu z tymi uzyskanymi w poprzednich rozważaniach, zwłaszcza jeśli chodzi o podatność klatki piersiowej C_t . Spośród dotychczasowych prób wyniki otrzymane w ostatnim etapie są najbardziej satysfakcjonujące. Pozwala to przypuszczać, iż stworzony algorytm umożliwi poprawne przeprowadzenie identyfikacji systemu rzeczywistego, jakim jest układ oddechowy.

Na tym etapie zakończono tworzenie oraz weryfikację algorytmu identyfikacji, zakładając, że przygotowana procedura umożliwi wiarygodnie określić właściwości mechaniczne układu oddechowego badanego podmiotu, wykorzystując do tego przewanie przepływu powietrza przy ustach jako pobudzenie układu. Wszelkie przedstawione w tej sekcji rozważania mają czysto symulacyjno-estymacyjny charakter, wskazujący na numeryczne właściwości/możliwości narzędzia przetwarzania sygnałów, konstruowanego z myślą o aplikacji dla rzeczywistych zbiorów próbek zarejestrowanych w układzie oddechowym człowieka.

3.6. ZBIEŻNOŚĆ ALGORYTMU ESTYMACJI

Istnieje co najmniej kilka metod testowania zbieżności algorytmu, zbieżności pojmowanej jako szybkość dążenia do rozwiązania optymalnego czy też precyzja uzyskiwanego oszacowania. Budowane na potrzeby metody pomiarowej numeryczne algorytmy estymacji parametrów modelu odwrotnego okazują się wrażliwe na początkowe wartości sugerowanych wskaźników diagnostycznych – parametry analogu, wrażliwe w sensie dwóch wskazanych uwarunkowań.

Tabela 3.12. Wartości parametrów dla wybranych wektorów startowych
Table 3.12. Values of parameters for the chosen initial vectors

Parametry	Parametry modelu wprost	Wartości parametrów 75%	Wartości parametrów 50%	Wartości parametrów 30%	Wartości parametrów 25%
Rc [Pa·s/dm ³]	150,0	112,5	75,0	45,0	37,5
Rt [Pa·s/dm ³]	40,0	30,0	20,0	12,0	10,0
Rp [Pa·s/dm ³]	15,00	11,25	7,50	4,50	3,75
Lc [Pa·s/dm ³]	0,500	0,375	0,250	0,150	0,125
C_i [dm ³ /Pa]	0,002500	$1,875 \cdot 10^{-3}$	$1,250 \cdot 10^{-3}$	$7,50 \cdot 10^{-4}$	$6,25 \cdot 10^{-4}$
C_{aw} [dm ³ /Pa]	0,0020	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$6,0 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$
C_t [dm ³ /Pa]	0,00300	$2,25 \cdot 10^{-3}$	$1,50 \cdot 10^{-3}$	$9,00 \cdot 10^{-4}$	$7,50 \cdot 10^{-4}$
C_m [dm ³ /Pa]	$6,0 \cdot 10^{-6}$	$4,5 \cdot 10^{-6}$	$3,0 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$
P_t [Pa]	-550,0	-412,5	-275,0	-165,0	-137,5
P_m [Pa]	-330,0	-247,5	-165	-99,0	-82,5
czas wygaszania [s]	0,380	0,285	0,190	0,114	0,095

Wektor startowy, jaki zakłada się na początku procedury estymacji, ma duży wpływ na proces wyznaczenia estymatorów parametrów, które pozwolą spełnić założone kryterium kończące ich szacowanie. Techniki wyboru lub oszacowania wektora startowego stanowią odrębne zagadnienie, nie stanowiące przedmiotu niniejszego opracowania. Przyjęcie wprost różnych wektorów początkowych może posłużyć jako jedna ze „ścieżek” zbadania zbieżności stworzonego algorytmu estymacji. W tym celu

ustalono 4 wektory początkowe θ_{start} dla modelu odwrotnego, których składowe przyjmują wartości będące kolejno 75%, 50%, 30% oraz 25% wielkości odpowiadającym im parametrom modelu wprost. Wektory zestawiono w tabeli 3.12.

Dla przedstawionych początkowych wektorów parametrów modelu odwrotnego uruchomiono procedurę estymacyjną, z założonym krokiem $\mu = 0,001$ dla przypadku 75% wartości parametrów modelu wprost oraz $\mu = 0,01$ dla reszty; $\zeta = 1\%$. Dla trzech pierwszych wektorów startowych założone kryterium $\zeta = 1\%$ zostało spełnione. Dla θ_{start} o składowych stanowiących 25% wartości parametrów modelu wprost złe uwarunkowanie numeryczne spowodowało zakończenie działającego algorytmu. Otrzymana w $i = 567$. iteracji macierz, będąca wynikiem iloczynu dwóch macierzy wrażliwości oraz macierzy wag $\mathbf{X}(\hat{\theta}^{(i)})\mathbf{W}\mathbf{X}(\hat{\theta}^{(i)})$ stała się macierzą osobliwą, w związku z tym estymacja parametrów oparta na zależności (3.25) nie mogła być kontynuowana.

Dla pozostałych trzech wektorów startowych wyniki estymacji parametrów przedstawiono w tabeli 3.13. W tabeli 3.14 zestawiono liczbę iteracji potrzebną do spełnienia kryterium dla założonego błędu ζ .

Tabela 3.13. Parametry modelu wprost oraz modelu odwrotnego.

Wyniki oszacowania niepewności estymacji parametrów dla różnych początkowych wektorów θ_{start}

Table 3.13. Parameters of the forward and inverse model. Uncertainty of parameters estimation for the various initial vectors θ_{start}

Parametry	Wartości parametrów dla modelu wprost θ_0	75 %		50 %		30 %	
		Wartości parametrów dla modelu odwrotnego $\hat{\theta}$	$ \delta\hat{\theta} $ [%]	Wartości parametrów dla modelu odwrotnego $\hat{\theta}$	$ \delta\hat{\theta} $ [%]	Wartości parametrów dla modelu odwrotnego $\hat{\theta}$	$ \delta\hat{\theta} $ [%]
Rc [Pa·s/dm ³]	150,0	153,0	2,00	148,7	0,87	150,5	0,33
Rt [Pa·s/dm ³]	40,0	40,4	1,00	40,9	2,25	41,1	2,75
Rp [Pa·s/dm ³]	15,00	21,8	45,3	9,27	38,2	8,59	42,7
Lc [Pa·s/dm ³]	0,500	0,491	1,80	0,505	1,00	0,503	0,60
C_l [dm ³ /Pa]	0,002500	0,002130	14,8	0,002880	15,2	0,002860	14,4
Caw [dm ³ /Pa]	0,0020	0,0022	10,0	0,0024	20,0	0,0022	10,0
Ct [dm ³ /Pa]	0,00300	0,00240	20,0	0,00338	12,7	0,00314	4,67
Cm [dm ³ /Pa]	$6,00 \cdot 10^{-6}$	$5,93 \cdot 10^{-6}$	1,17	$6,02 \cdot 10^{-6}$	0,33	$6,02 \cdot 10^{-6}$	0,33
Pt [Pa]	-550,0	-428,1	22,2	-473,4	13,9	-449,9	18,2
Pm [Pa]	-330,0	-352,0	6,67	-366,1	10,9	-297,2	9,94
czas wygaszania [s]	0,380	0,646	2,86	0,624	6,17	0,626	5,86

Tabela 3.14. Liczba iteracji potrzebna do spełnienia założonego kryterium ζ
 Table 3.14. Number of iterations needed to fulfill the criterion ζ

θ_{start}	$0,75 \cdot \theta$	$0,50 \cdot \theta$	$0,30 \cdot \theta$
Liczba iteracji	3828	657	520

Różnice w założonych krokach μ (0,001 lub 0,01) wynikały z tego, że dla wektorów o składowych startowych stanowiących 50% oraz 30% wartości parametrów modelu wprost, przyjmując mniejszy krok $\mu = 0,001$ wspomniana wcześniej macierz $\mathbf{X}(\hat{\theta}^{(i)})\mathbf{W}\mathbf{X}(\hat{\theta}^{(i)})$ w trakcie iteracji staje się w pewnym momencie macierzą osobliwą. Przyjęcie dłuższego kroku umożliwia ominięcie tego problemu, jednak stwarza zagrożenie pominięcia minimum funkcji kryterialnej.

Długość kroku skorelowana jest z liczbą iteracji potrzebnych do spełnienia kryterium kończącego. Zgodnie z założeniami, największej liczby iteracji wymagała estymacja przeprowadzona dla wektora początkowego stanowiącego 75% wartości parametrów modelu wprost. Dla dwóch pozostałych przypadków liczba iteracji jest tego samego rzędu, różnice mogą wynikać z różnych „miejsc” startu algorytmu poszukiwania minimum funkcji kryterialnej.

W trzech przypadkach, dla których zostało spełnione kryterium kończące, błędy oszacowania parametrów $|\delta\hat{\theta}|$ nieznacznie tylko różnią się od siebie, zwłaszcza dla wektorów θ_{start} „50%” oraz „30%”, dla których przyjęto tę samą długość kroku.

Podsumowując, zbieżność stworzonego algorytmu estymacji powinna być satysfakcjonująca, gdy idzie o możliwości oszacowania wielkości charakteryzujących cechy systemu rzeczywistego w szerokim zakresie wartości θ_{start} względem wartości nominalnych (rzeczywistych). Przesłanką do tego są przedstawione wyniki badań i rozważania świadczące o tym, że możliwe jest ustalenie wartości wielkości modelu wprost z powtarzalną dokładnością, z założonymi wartościami początkowymi modelu odwrotnego stanowiącymi 30% tych pierwszych. Jedynym ograniczeniem może być skończona dokładność obliczeń zależna od użytego narzędzia, w tym przypadku środowiska MATLAB.

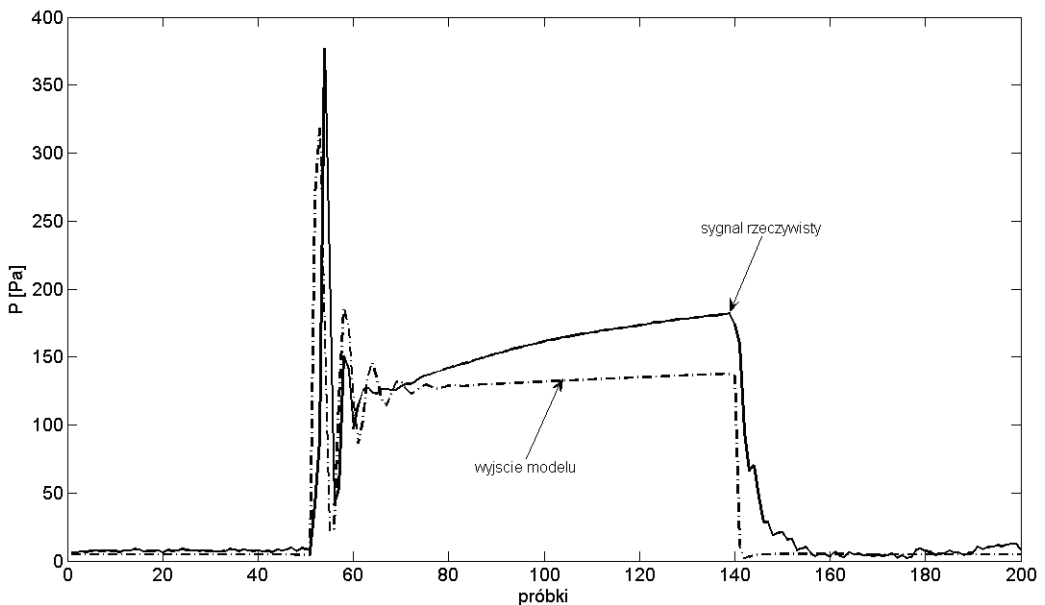
4. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELU NA PODSTAWIE PRÓBEK RZECZYWISTYCH

Na podstawie zebranych danych pokazanych na rysunku 2.13.b, gdzie widoczny jest przebieg ciśnienia Pao podczas okluzji w funkcji czasu, oraz rysunku 2.14.b – przebieg przepływu Qao , zgodnie z uwagami z punktu 3.2, stworzono wektor, do którego próbowano dopasować odpowiadający mu wektor wyjściowy modelu $\mathbf{y} = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{p}^T, \mathbf{q}_2^T]^T$, złożony z przebiegów PCm oraz Qao . Przerwania przepływu powietrza

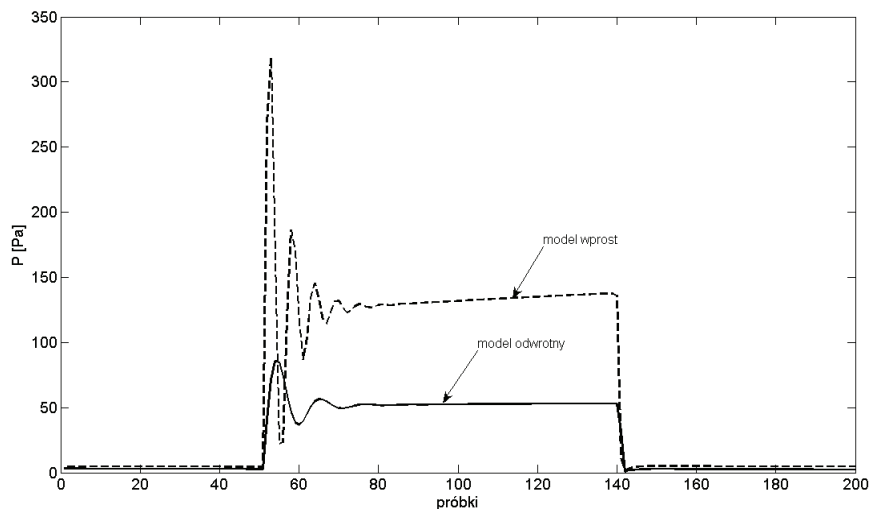
u badanego podmiotu dokonano w 6. cyklu oddechowym, w chwili $t = 31,574$ s na czas 100 ms. Odległość między momentem zamknięcia zaworu a przejściem podczas wydechu ciśnienia przy ustach przez „0” wynosiła 0,774 s, co odwzorowano w stworzonej strukturze modelu i algorytmie identyfikacyjnym dla zachowania tych samych warunków czasowych.

Identyfikacji w dziedzinie czasu dokonywano, wykorzystując przygotowany algorytm estymacji parametrów przyjętego modelu, którego podstawowy schemat przedstawiono na rysunku 2.2.

Pierwsze próby zastosowania procedury nie przyniosły oczekiwanych rezultatów – model „nie mógł dopasować się” do sygnałów pochodzących z rozważanego systemu. Najmniejszy błąd wyniósł około 40%. Podczas obserwacji kolejnych iteracji wykonywanych przez algorytm zaobserwowano, że procedura nie potrafi dostoić parametrów analogu tak, aby sygnały wyjściowe w nim generowane odpowiadały zebranym danym, głównie jeśli chodzi o tłumione oscylacje występujące tuż po okluzji. Zdecydowano się zatem na sprawdzenie zbieżności algorytmu, pod tym względem wykorzystując ponownie model wprost i model odwrotny. W strukturze wprost wygenerowano sygnał z częstotliwością oscylacji (II faza *PCm*) zbliżoną do częstotliwości oscylacji systemu rzeczywistego (rys. 4.1). Początkowe wartości parametrów w modelu odwrotnym przyjęto tak, aby częstotliwość oscylacji była znacznie mniejsza niż dla modelu wprost (rys. 4.2). Założone wartości wielkości dla obu analogów umieszczono w tabeli 4.1.



Rys. 4.1. Sygnały dla systemu rzeczywistego oraz zarejestrowane u wyjścia modelu wprost
 Fig. 4.1. Signals measured at the output of real object and in the forward model



Rys. 4.2. Sygnały dla wyjścia modelu wprost oraz modelu odwrotnego
Fig. 4.2. Signals acquired at the output of forward and inverse model

Tabela 4.1. Wartości przyjętych parametrów dla modelu wprost i modelu odwrotnego
Table 4.1. Parameters applied in the forward and inverse model

	R_c	R_t	R_p	L_c	C_l	C_{aw}	C_t	C_m	P_t	P_m	t_{off}
Model wprost	250	28	10,5	0,65	$1,75 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	-785	-800	5,6
Model odwrotny	150	40	15	0,5	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-6}$	-550	-334	3,5

Po ustaleniu parametrów uruchomiono procedurę estymacyjną. Program nie był jednak w stanie znaleźć minimum funkcji kryterialnej dla tak przyjętych wartości kolejnych wielkości.

4.1. ESTYMACJA DWUKROKOWA

Podczas dalszych obserwacji „zachowania się” algorytmu zauważono, że kolejne kombinacje parametrów modelu otrzymywane w trakcie procedury estymacji nie pozwalają na wygenerowanie przez ten model sygnałów wyjściowych, odpowiadających zebranym danym systemu rzeczywistego w fazie powolnego narostu ciśnienia P_{ao} (III faza), a nie jak wcześniej zakładano w obrębie tłumionych oscylacji.

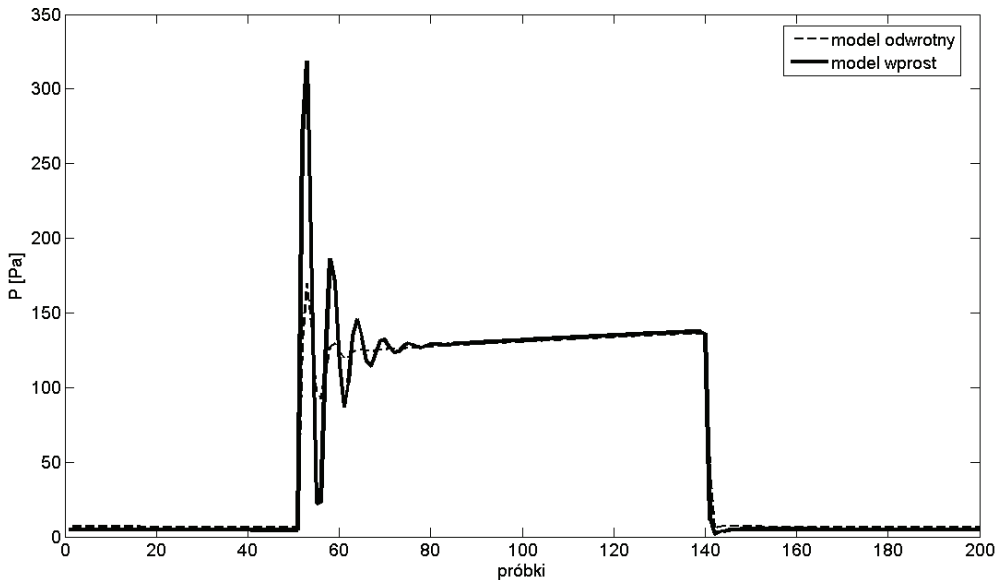
Propozycja metody estymacji dwukrokowej

Zdecydowano o powtórnym wykorzystaniu struktur wprost i odwrotnej na potrzeby eksperymentu symulacyjnego oraz o podzieleniu estymacji na dwa etapy: pierwszy,

skupiający się na dopasowaniu sygnału modelu odwrotnego do sygnału analogu wprost dla fazy powolnego narostu ciśnienia P_{ao} , następującej po fazie tłumionych oscylacji. Wykorzystano do tego macierz wag \mathbf{W} w celu selekcji ważności sygnałów wyjściowych modelu wprost dla procedury estymacyjnej. Dla próbek od 80 do 130 przyjęto wagi równe 1, natomiast dla reszty sygnału przyjęte wagi miały wartość 0,4. Ponadto do wyznaczania kryterium kończącego iterację $\xi = 1\%$ użyto wartości z przedziału od 80 do 130 próbek.

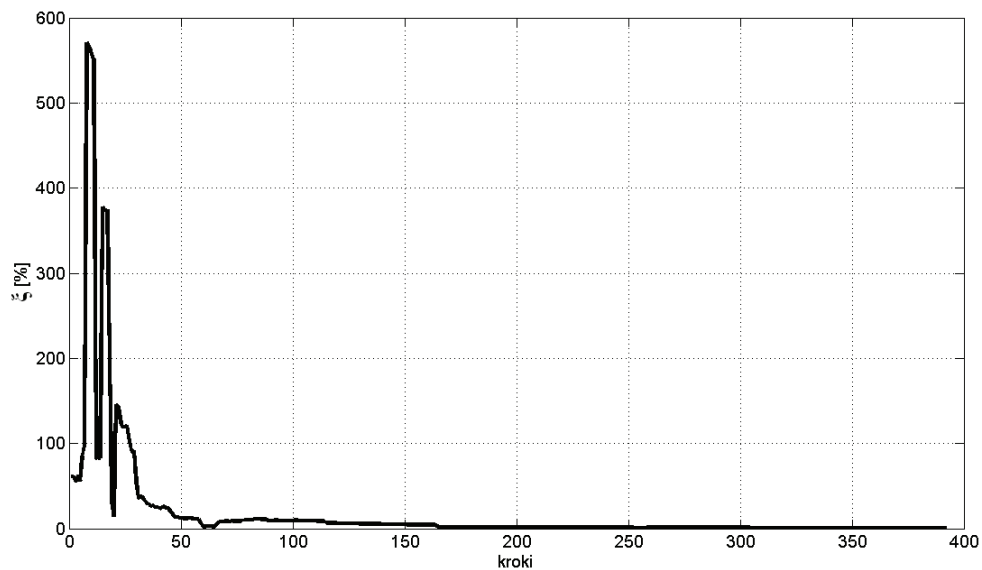
Następnie estymatory parametrów uzyskane w pierwszym kroku traktowano jako składowe wektora startowego dla kroku drugiego. W drugim etapie dostrojenie parametrów miało w założeniu prowadzić do dopasowania sygnałów modelu wprost oraz odwrotnego w fazie tłumionych oscylacji. Macierz wag ponownie przyjęto jako jednostkową w tym zakresie.

Przebieg sygnałów dla modelu wprost i modelu odwrotnego dla pierwszego kroku estymacji przedstawiono na rysunku 4.3.

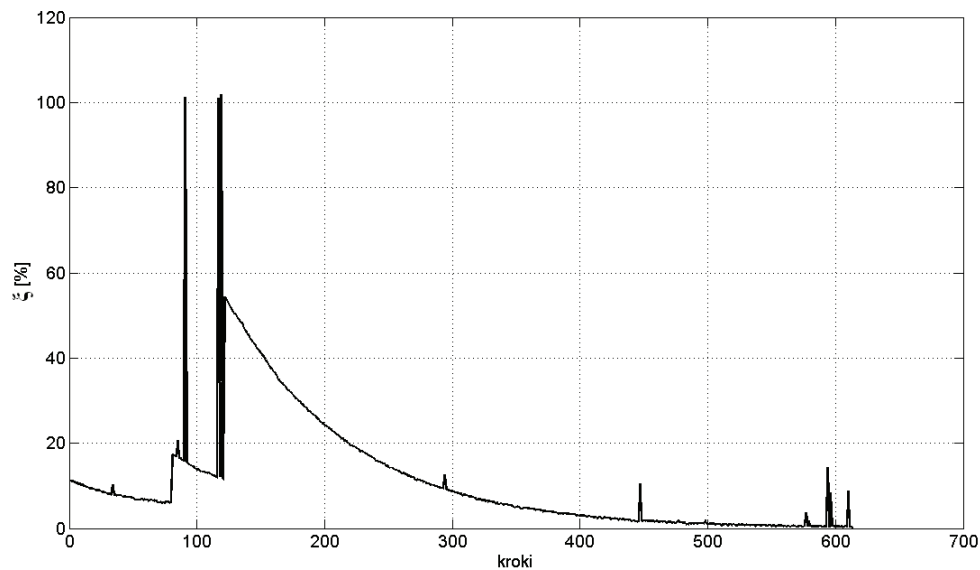


Rys. 4.3. Przebieg sygnałów wyjściowych modelu wprost i modelu odwrotnego dla pierwszego kroku procedury estymacyjnej

Fig. 4.3. Output signals in the forward and inverse model during the first stage of estimation procedure



Rys. 4.4. Zmiana błędu dopasowania dla kolejnych iteracji algorytmu – pierwszy etap estymacji
 Fig. 4.4. Change of fitting error during the consecutive iteration of algorithm
 – the first stage of estimation



Rys. 4.5. Zmiana błędu dopasowania dla kolejnych iteracji algorytmu – drugi etap estymacji
 Fig. 4.5. Change of fitting error during the consecutive iteration of algorithm
 – the second stage of estimation

Dla etapu drugiego ustalone sygnały wyjściowe pokrywają się na tyle dokładnie, na ile zrezygnowano z przedstawienia ich na wyróżnionym wykresie. Na rysunku 4.4 oraz rysunku 4.5 przedstawiono przebiegi błędu dopasowania dla pierwszego oraz drugiego kroku. Otrzymane wyniki końcowe dla takiego eksperymentu, uzyskane po drugim kroku procedury, zamieszczono w tabeli 4.2.

Tabela 4.2. Błędy oszacowania parametrów podczas dwukrokowej procedury estymacji
Table 4.2. Errors of parameter evaluation in the two-stage estimation algorithm

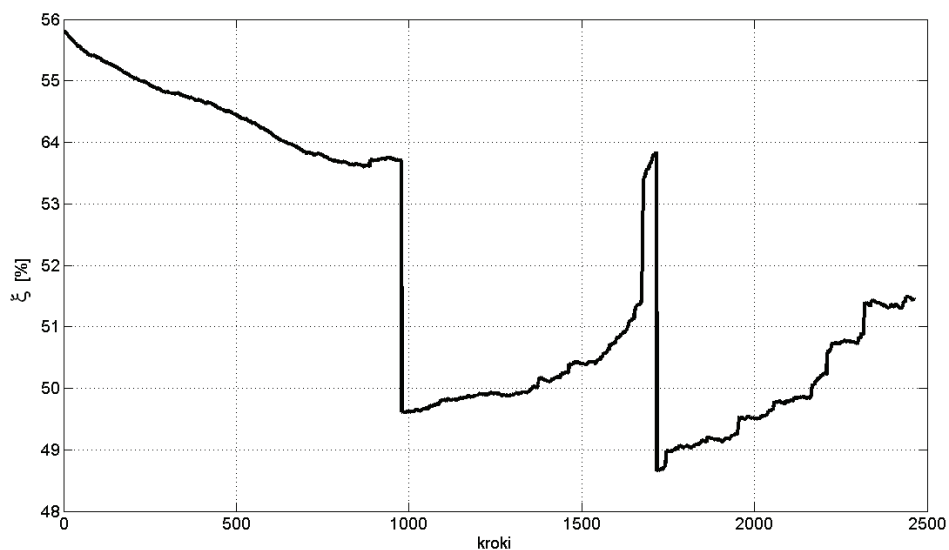
Parametry	Wartości parametrów dla modelu wprost θ_0	Wartości parametrów dla modelu odwrotnego $\hat{\theta}$	$ \partial\hat{\theta} $ [%]
Rc [Pa·s/dm]	250,0	254,2	1,68
Rt [Pa·s/dm ³]	28,0	24,7	11,8
Rp [Pa·s/dm ³]	10,5	2,5	76,2
Lc [Pa·s/dm ³]	0,650	0,651	0,15
C_l [dm ³ /Pa]	0,00175	0,00181	3,43
Caw [dm ³ /Pa]	0,001400	0,001408	0,57
Ct [dm ³ /Pa]	0,00210	0,00203	3,33
Cm [dm ³ /Pa]	$1,20 \cdot 10^{-6}$	$1,19 \cdot 10^{-6}$	0,83
Pt [Pa·s/dm ³]	-785	-787	0,25
Pm [Pa·s/dm ³]	-800	-3002	275
t_{off} [s]	0,56	0,51	8,93

Analizując ostateczne rezultaty badań, zauważono poprawę oszacowania parametrów podatnościowych C_l , Caw , Ct (w stosunku do wcześniejszych rozwiązań algorytmicznych), co może być przesłanką do korzystania z tej metody w przypadku, kiedy z powodów diagnostycznych wymagana jest większa dokładność estymacji tych wskaźników.

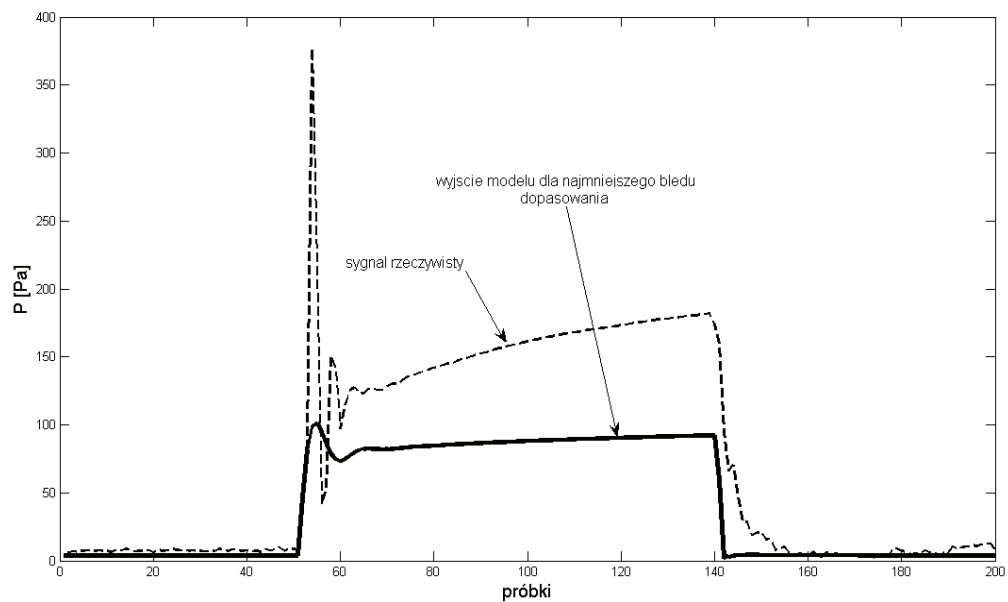
Przeprowadzone doświadczenie rokuje optymistycznie na przypadek oszacowania parametrów badanego systemu rzeczywistego – układu oddechowego.

Zastosowanie metody estymacji dwukrokowej do próbek rzeczywistych

Przeprowadzenie estymacji dwukrokowej dla danych otrzymanych w systemie rzeczywistym nie przyniosło pożądanych efektów. Algorytm nie „zbiegał się” dla pierwszego kroku procedury identyfikacyjnej. Minimalny błąd ξ podczas tej próby wyniósł około 49% i nie spełnił założonego kryterium kończącego. Świadczyć to może o niezdolności modelu do odtworzenia sygnału pochodzącego z systemu rzeczywistego, wynikającej prawdopodobnie z przyjętej dla niego struktury. Przebieg błędu dopasowania dla kolejnych iteracji przedstawiono na rysunku 4.6. Na rysunku 4.7 odtworzono zmiany ciśnienia PCm dla parametrów otrzymanych przy najmniejszym błędzie dopasowania.



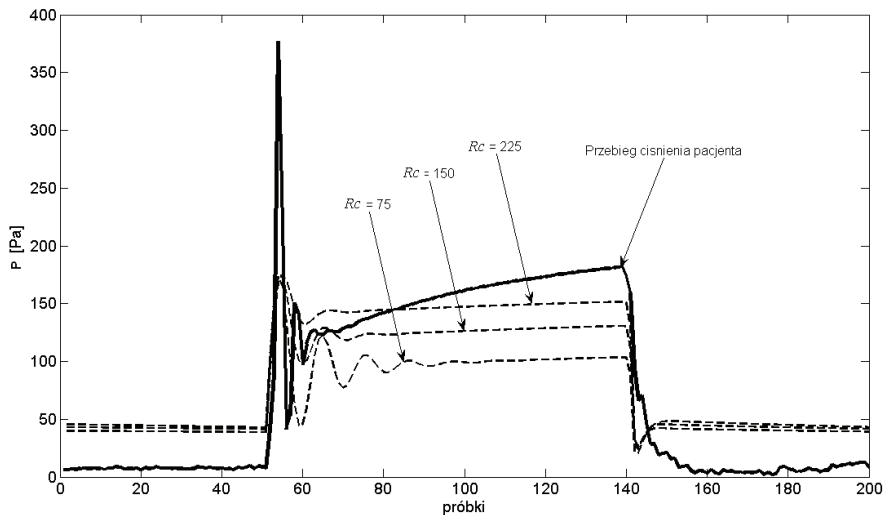
Rys. 4.6. Zmiana wartości błędu dopasowania dla kolejnych iteracji algorytmu identyfikacyjnego
 Fig. 4.6. Fitting error for the consecutive iteration of identification algorithm



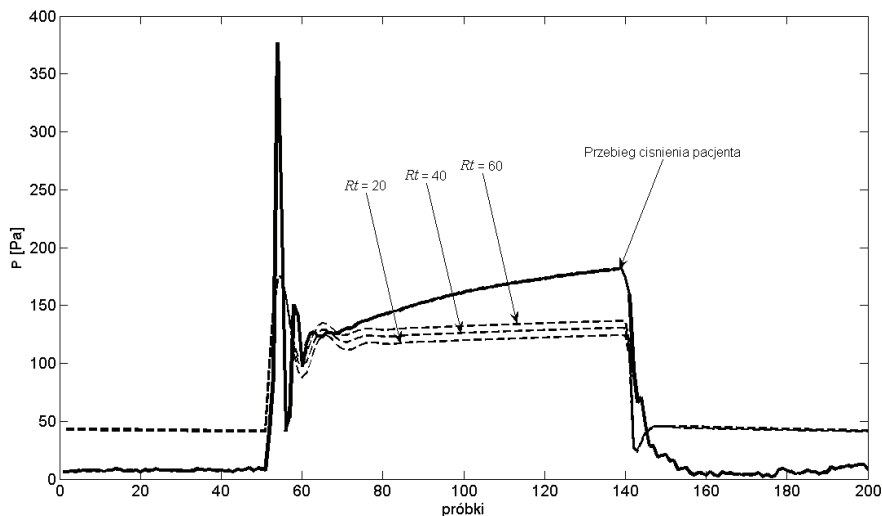
Rys. 4.7. Sygnał rzeczywisty oraz wyjście modelu dla najmniejszego osiągniętego błędu dopasowania ζ
 Fig. 4.7. Measured physiological signal and output of the inverse model for the smallest fitting error ζ , reached in the two-stage estimation procedure

Wpływ parametrów na wyjście PCm modelu

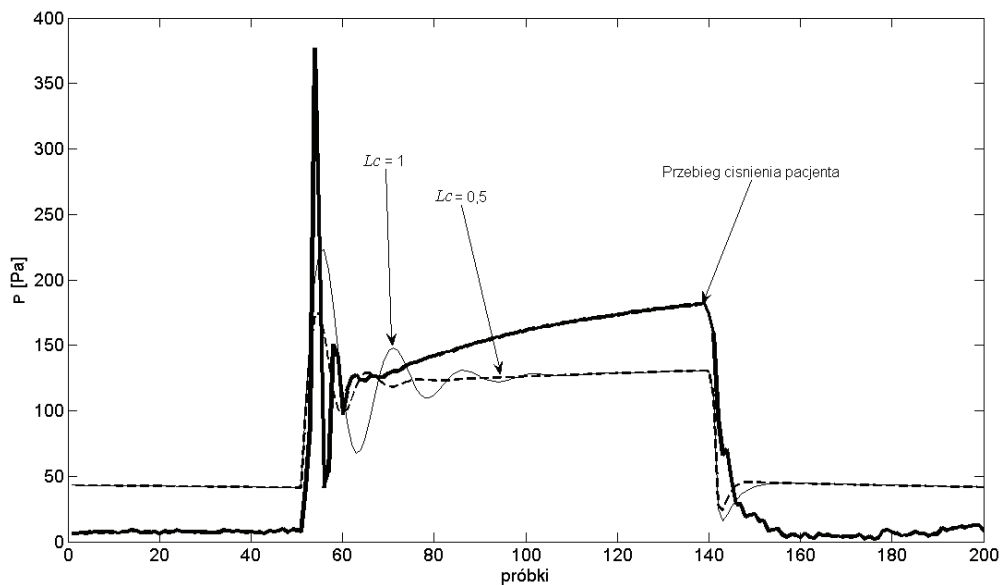
Analiza wpływu parametrów na wyjście PCm modelu, zrelacjonowana w postaci reprezentacji graficznej z rysunków 4.8–4.17, pokazana na tle przebiegu ciśnienia P_{ao} , zarejestrowanego dla pacjenta, potwierdza postawioną wcześniej tezę.



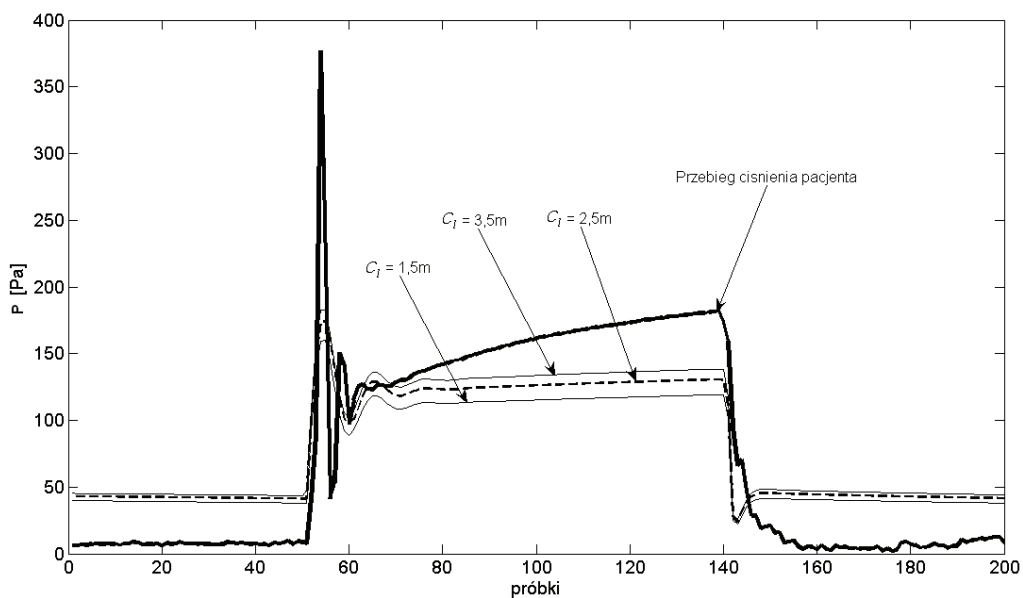
Rys. 4.8. Wpływ parametru R_c na wyjście PCm modelu
 Fig. 4.8. Influence of parameter R_c on the output PCm of the model



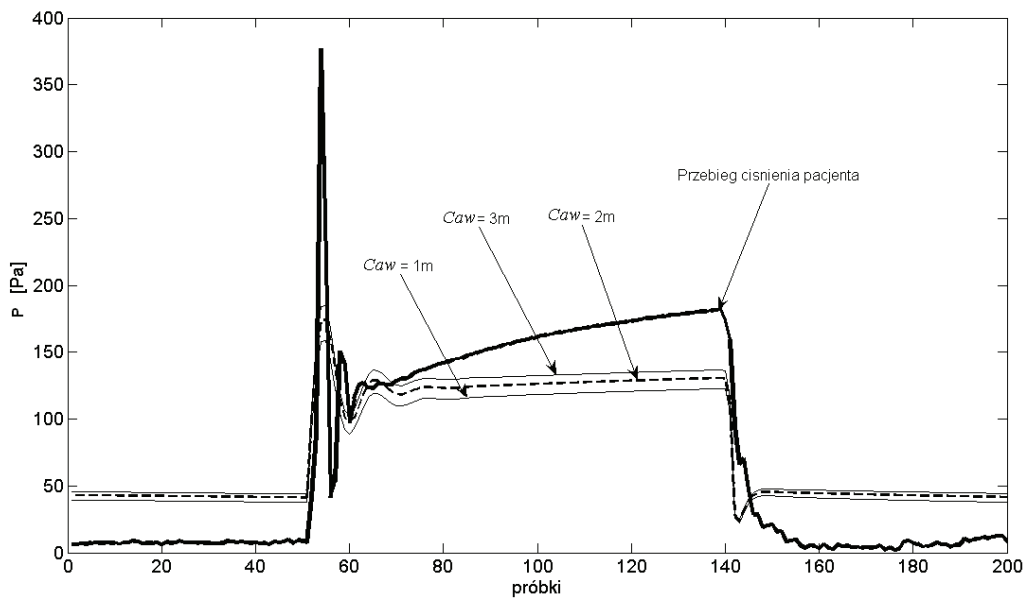
Rys. 4.9. Wpływ parametru R_t na wyjście modelu
 Fig. 4.9. Influence of parameter R_t on the model output



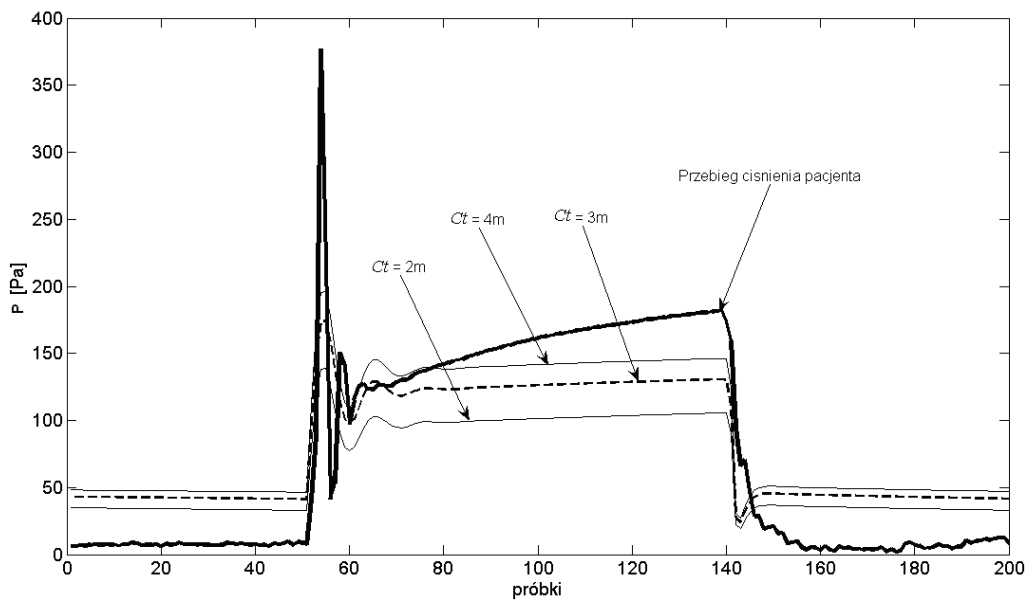
Rys. 4.10. Wpływ parametru L_c na wyjście modelu
 Fig. 4.10. Influence of parameter L_c on the model output



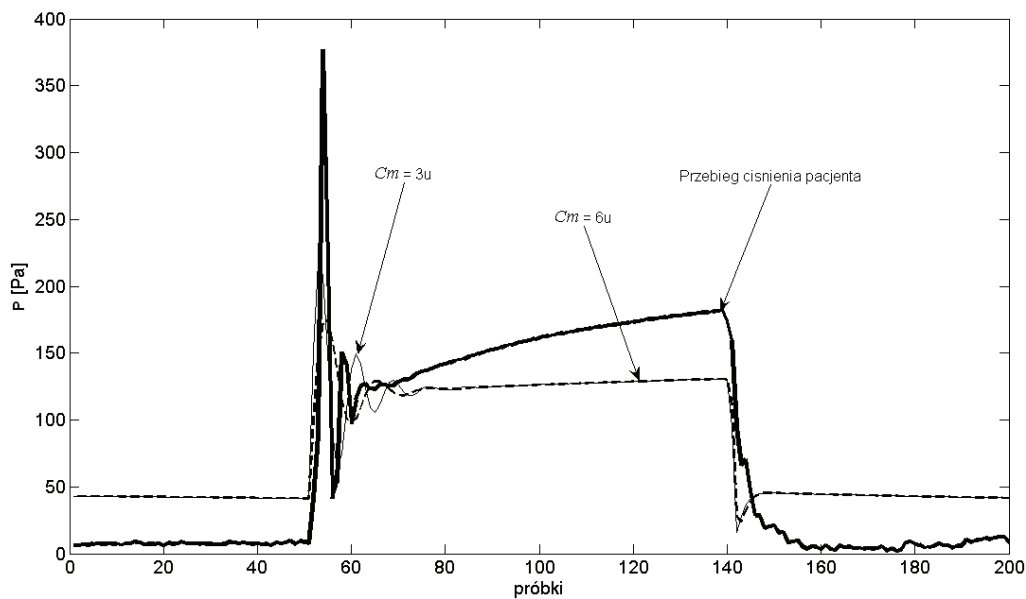
Rys. 4.11. Wpływ parametru C_l na wyjście modelu
 Fig. 4.11. Influence of parameter C_l on the model output



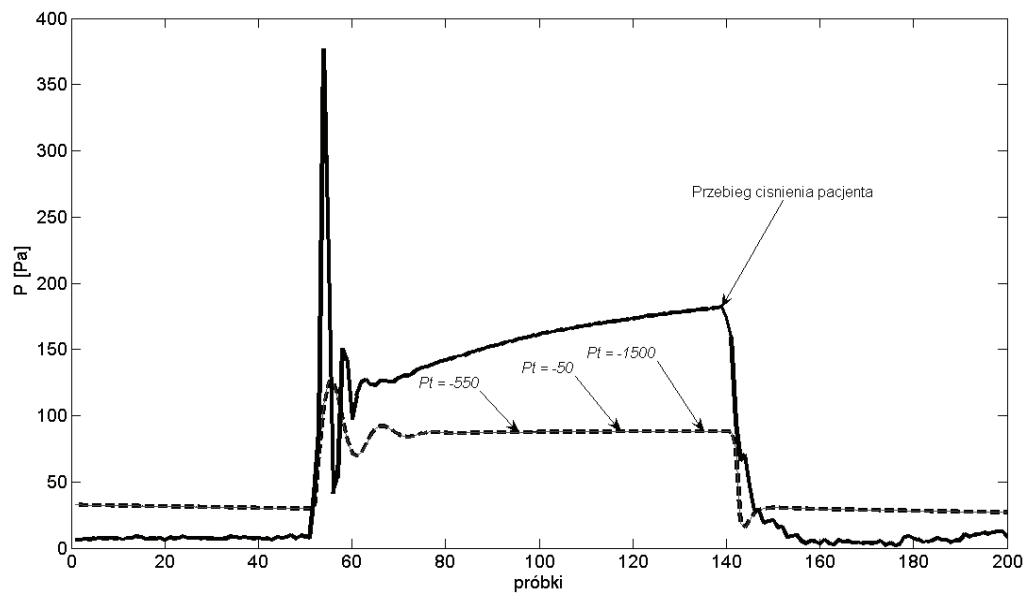
Rys. 4.12. Wpływ parametru C_{aw} na wyjście modelu
 Fig. 4.12. Influence of parameter C_{aw} on the model output



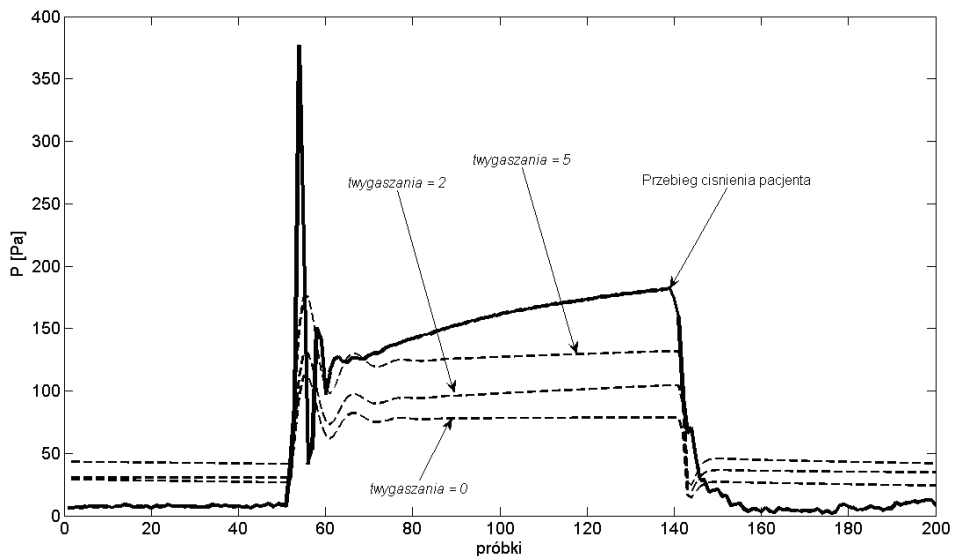
Rys. 4.13. Wpływ parametru C_t na wyjście modelu
 Fig. 4.13. Influence of parameter C_t on the model output



Rys. 4.14. Wpływ parametru C_m na wyjście modelu
 Fig. 4.14. Influence of parameter C_m on the model output

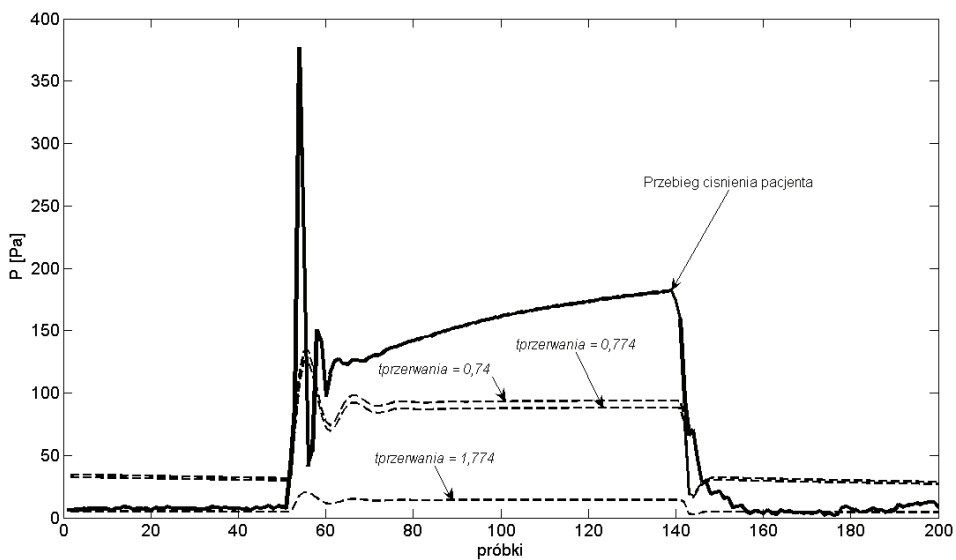


Rys. 4.15. Wpływ parametru P_t na wyjście modelu
 Fig. 4.15. Influence of parameter P_t on the model output



Rys. 4.16. Wpływ czasu wygaszania mięśni na wyjście P_{cm} modelu

Fig. 4.16. Influence of muscle activity deactivation time on the output P_{CM} of the model



Rys. 4.17. Wpływ momentu przerwania na wyjście modelu; $t_{przerwania}$ oznacza w tym przypadku przedział czasowy między przejściem ciśnienia P_{ao} przez „0” podczas wydechu a momentem zamknięcia zaworu

Fig. 4.17. Influence of the moment of interruption initiation on the model output; $t_{przerwania}$ represents the time range between passing P_{ao} pressure through „0” value and start of occlusion manoeuvre

Żaden z estymowanych parametrów nie wpływa na narost P_{ao} tak znacznie, aby sygnał wyjściowy modelu w tej fazie mógł odpowiadać narostowi wielkości określonej w systemie rzeczywistym. Ostatecznie stwierdzić zatem należy, iż struktura modelu odwrotnego, będąca elementem zrelacjonowanych badań, umożliwi wygenerowanie sygnałów o istotnie ograniczonej dynamice. Dane badanego podmiotu znajdują się poza „granice możliwości odtwarzania” przyjętego analogu.

5. PODSUMOWANIE

Pomiary mechaniki oddychania, ze względu na społeczną istotność, stanowią ważną gałąź poszukiwań badawczych, tak w obszarze poznania samego obiektu, jak i metod jego analizy, z uniwersalną transpozycją wniosków na ogólną wiedzę w obszarze systemów złożonych oraz przetwarzania złożonych danych eksperymentalnych. Prowadzone w Katedrze Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej prace we wskazanej tematyce (np. [29–38, 56–60]), koncentrują się na licznych zagadnieniach modelowania i analizy rejestrowanych danych, pozwalających na zaproponowanie środowiskom medycznym autorskich rozwiązań procedur pomiarowo-diagnostycznych o istotnych walorach użytkowych, szczególnie niezbędnych w przypadku pacjentów o minimalnej czy ograniczonej zdolności współpracy (np. niemowlęta, dzieci przedszkolne i wczesnoszkolne). Jako przykład posłużyć może tutaj idea wzbogaconej techniki przerwaniowej (ang. *enhanced interrupter technique* – EIT), której czasowa odmiana jest przedmiotem niniejszego opracowania. Ścisłej, w przedłożonym materiale skupiono się na pośredniej procedurze pomiarowej, zakładającej pomiar cech rzeczywistego systemu – układu oddechowego – przez oszacowanie wskaźników adekwatnego modelu fizykomatematycznego.

Zadanie zrealizowano zgodnie z ustalonymi celami. Wykorzystując działania matematyczne oraz przerwanie przepływu powietrza, jako pobudzenie układu, zaproponowano algorytm oszacowania parametrów modelu układu oddechowego. Aby stworzyć wzorzec obliczeniowy, wyznaczający szacunkowo parametry modelu, opisano najpierw jego strukturę zależnościami wynikającymi z podstawowych praw fizycznych oraz wykorzystano istniejące analogie między systemami mechanicznymi i elektrycznymi. Układ równań różniczkowych, będący opisem matematycznym modelu umożliwił wyznaczenie jego sygnałów wyjściowych, które wykorzystano w dalszych krokach. Z użyciem wbudowanych funkcji środowiska obliczeniowego MATLAB, wyznaczających numerycznie rozwiązania takiego układu, zaimplementowano przygotowaną wcześniej procedurę w celu zautomatyzowania obliczeń dla następnych kroków, w których ustalano kolejne wartości parametrów. W celu zweryfikowania procedury identyfikacyjnej, na bazie standardowych sygnałów wyjściowych, użyto dwóch modeli (ang. *forward – inverse modeling*): modelu wprost oraz modelu odwrotnego. Regulując w kolejnych iteracjach parametry modelu odwrotnego

próbowano dopasować jego wyjście do wyjścia modelu wprost o stałych i znanych współczynnikach.

Początkowo estymacji poddano wszystkie parametry modelu. Takie podejście okazało się błędne, gdyż w tym przypadku model stał się nieidentyfikowalny. Należało więc wyrugować część z nich z procedury estymacyjnej. Do zdeterminowania, które wielkości należy uwzględnić w estymacji, wykorzystano znormalizowaną macierz wrażliwości wyjścia na parametry S_n , która pokazuje wpływ poszczególnych parametrów na sygnały wyjściowe. Dodatkowo – ze względu na to, iż przyjęty układ równań różniczkowych opisuje system fizyczny – należało wprowadzić dopuszczalne granice jego rozwiązań. Wprowadzenie zmiany kolejności elementów wektora parametrów w następujących po sobie oszacowaniach, zdeterminowane według wektora norm wrażliwości względnych m_y przyspieszyło obliczenia oraz zwiększyło ich dokładność. Kolejny etap stanowiło uniezależnienie szacowania parametrów od pracy mięśni oddechowych, ponieważ nie jest znana charakterystyka ich aktywności dla systemu rzeczywistego. Wymagało to wprowadzenia nowych warunków początkowych oraz nowych parametrów podlegających estymacji – ciśnień P_t oraz P_m . W dalszych krokach, po zweryfikowaniu wpływu mięśni na wyjście modelu w czasie wydechu, zdecydowano się na wyekstrahowanie nowego parametru do estymacji – czasu wygaszania mięśni. Modyfikacja ta poprawiła dokładność otrzymanych estymat modelu odwrotnego, oszacowanych na podstawie wzorca obliczeniowego. Ponadto kwestię wpływu wygaszających się mięśni próbowano rozwiązać, wprowadzając do procedury macierz wag, zgodnie ze wzorem (3.25). Otrzymane estymaty obarczone były błędami rzędu od ułameków do kilkudziesięciu procent. W przypadku oporów największą dokładnością oszacowania cechowała się wartość tej wielkości dla centralnych dróg oddechowych, wynosząca 0,44% (tab. 3.11), najmniejszą, ze względu na najmniejszy wpływ na wyjście, wartość oporu peryferyjnych dróg oddechowych – 34,7%. Istotne pod względem diagnostycznym podatności C_t , C_{aw} oraz C_t oszacowano z dokładnością kolejno 15,2%, 6,00% oraz 7,67%. Najmniejszym błędem oszacowania obarczona była pojemność C_m , błąd $|\delta\hat{\theta}| = 0,02\%$. Uzyskane wyniki świadczą o dobrze dobranej strukturze algorytmu, średni błąd oszacowania nie przekracza 8,0%, co implikuje pożądaną wiarygodność wyników.

Weryfikację eksperymentalną modelu dokonano z użyciem sygnałów zarejestrowanych w rzeczywistym systemie fizjologicznym. Podczas przeprowadzania doświadczenia spostrzeżono, że istnieje problem dopasowania sygnałów modelu dla generowanych przez algorytm parametrów oraz systemu rzeczywistego w przedziale wolnego narostu ciśnienia, następującego po tłumionych oscylacjach. Zaproponowano wyróżnienie w procesie estymacji dwóch etapów, skupiając się najpierw na dopasowaniu sygnałów w przedziale powolnego narostu ciśnienia, a następnie dla pozostałej porcji zarejestrowanych danych. Wyniki, po wprowadzeniu tej modyfikacji, wygenerowane według modelu wprost i odwrotnego były obiecujące – patrz tabela 4.2, co stanowiło przesłankę do wykorzystania tej metody dla próbek rzeczywistego systemu.

Niestety uruchomiona procedura nie potrafiła dostroić parametrów modelu, aby osiągnąć założone kryterium. W wyniku dalszych obserwacji spostrzeżono, że przyjęty model nie jest zdolny do kompletnego odtworzenia sygnału z systemu, co wynika prawdopodobnie z jego struktury. Potwierdzeniem tej tezy jest graficzna analiza z rysunków 4.8–4.17, prezentująca sygnały modelu dla różnych wartości parametrów funkcyjnych pokazanych na tle próbek zebranych dla badanego podmiotu.

Kontynuowanie prac w zrelacjonowanym obszarze koncentruje się obecnie na zaproponowaniu takiej struktury modelu, aby możliwe było wygenerowanie sygnału o dynamice zbliżonej do systemu rzeczywistego. Należy mieć jednak na uwadze to, że ze wzrostem strukturalnej i parametrycznej złożoności analogu zwiększa się prawdopodobieństwo jego nieidentyfikowalności (innym kryterium w procedurze modelowania powinna być także przydatność diagnostyczna wyróżnionych współczynników). Niezbędne jest również rozpatrzenie możliwości poprawienia uwarunkowania odwracanej macierzy $\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)})\mathbf{W}\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)})$ i testowania kolejnych, zmodyfikowanych pomiarowych procedur algorytmicznych.

Prócz zaprezentowanej w materiale czasowej metody przerwaniowej, trwają prace zespołu nad opracowaniem jej częstotliwościowej i czasowo-częstotliwościowej odmiany. Jak wskazują doniesienia [19, 20], rozwiązania takie mogą w istotny sposób zrewidować potencjał diagnostyczny klasycznego algorytmu przerwaniowego.

LITERATURA

- [1] BATES J.H.T., ABE T., ROMERO P.V., SATO J., *Measurement of alveolar pressure in closed-chest dogs during flow interruption*, J. Appl. Physiol., 1989, 67, 488–492.
- [2] BATES J.H.T., BACONNIER P., MILIC-EMILI J., *A theoretical analysis of interrupter technique for measuring respiratory mechanics*, J. Appl. Physiol., 1988, 64, 2204–2214.
- [3] BATES J.H.T., DARÓCZY B., HANTOS Z., *A comparison of interrupter and forced oscillation measurements of respiratory resistance in dog*, J. Appl. Physiol., 1992, 72, 46–52.
- [4] BATES J.H.T., HUNTER I.W., SLYP.D. et. al., *The effect of valve closure time on the determination of respiratory resistance by flow interruption*. Med. Biol. Eng. Comput., 1987, 25, 136–140.
- [5] BATES J.H.T., ROSSI A., MILIC-EMILI J., *Analysis of the behavior of the respiratory system with constant inspiratory flow*, J. Appl. Physiol., 1985, 58, 1840–1848.
- [6] BATES J.H.T., SLY P.D., KOCHI T., MARTIN J.G., *The effect of a proximal compliance on interrupter measurements of resistance*, Respir. Physiol., 1987, 70, 301–312.
- [7] BAYLISS L.E., ROBERTSON G.W., *The viscoelastic properties of the lungs*, Q.J. Exp. Physiol., 1939, 29, 27–47.
- [8] BERG J.W. VAN DEN, *An electrical analog of the trachea, lung and tissues*, Acta Physiol. Pharmacol. Neerl., 1960, 9, 361–385.
- [9] BRIDGE P.D., MCKENZIE S.A., *Airway resistance measured by the interrupter technique: expiration or inspiration, mean or median?* Eur. Respir. J., 2001, 17, 495–498.
- [10] BUCHAŁA G., GAJDA J., *Identyfikacja impedancji wejściowej dróg oddechowych metodą czasową – badania symulacyjne*, Materiały I Sympozjum Modelowanie i Pomiary w Medycynie, Krynica Górská, 19–23 kwietnia 1999 r., 36–45.
- [11] CAPPER W.L., GUELKE R.W., BUNN A.E., *The estimation of tube wall compliance using acoustic*

- input impedance*, IEEE Trans. Biomed. Eng., 1991, 18, 544–550.
- [12] CHAVASSE R.J., BASTIAN-LEE Y., SEDDON P., *Comparison of resistance measured by the interrupter technique and by passive mechanics in sedated infants*, Eur. Respir. J., 2001, 18, 330–334.
- [13] CHILD F., CLAYTON S., DAVIES S., FRYER A.A., JONES P.W., LENNEY W., *How should airways resistance be measured in young children: mask or mouthpiece?* Eur. Respir. J., 2001, 17, 1244–1249.
- [14] DIAZ O., VILAFRANCA C., GHEZZO H., BORZONE G., LEIVA A., MILIC-EMILI J., LISBOA C., *Role of inspiratory capacity on exercise tolerance in COPD patients with and without tidal expiratory flow limitation at rest*, Eur. Respir. J., 2000, 16, 269–275.
- [15] DUBOIS A.B., BRODY A.W., LEWIS D.H., BURGESS B.F., JR., *Oscillation mechanics of lungs and chest in man*, J. Appl. Physiol., 1956, 8, 587–594.
- [16] FRANK N.R., MEAD J., WHITTENBERGER J.L., *Comparative sensitivity of four methods for measuring changes in respiratory flow resistance in man*, J. Appl. Physiol., 1971, 31, 934–938.
- [17] FREY U., KRAEMER R., *Oscillatory pressure transients after flow interruption during bronchial challenge test in children*, Eur. Respir. J., 1997, 10, 75–81.
- [18] FREY U., SCHIBLER A., KRAEMER R., *Pressure oscillations after flow interruption in relation to lung mechanics*, Respir. Physiol., 1995, 102, 225–237.
- [19] FREY U., SILVERMAN M., KRAEMER R., JACKSON A.C., *High-frequency respiratory input impedance measurements in infants assessed by the high speed interrupter technique*, Eur. Respir. J., 1998, 10, 148–158.
- [20] FREY U., SUKI B., KRAEMER R., JACKSON A.C., *Human respiratory input impedance between 32 and 800 Hz, measured by interrupter technique and forced oscillations*, J. Appl. Physiol., 1997, 82, 1018–1023.
- [21] GAPPA M., COLIN A.A., GOETZ I., STOCKS J., *Passive respiratory mechanics: the occlusion techniques*, Eur. Respir. J., 2001, 17, 141–148.
- [22] GILLIS H.L., LUTCHEN K.R., *How heterogeneous bronchoconstriction affects ventilation distribution in human lungs: a morphometric model*, Ann. Biomed. Eng., 1999, 27, 14–22.
- [23] GOETZ I., HOO A.F., LOOM S., STOCKS J., *Assessment of passive respiratory mechanics in infants: double versus single occlusion*, Eur. Respir. J., 2001, 17, 449–455.
- [24] GREEN J., CHIANG S.T., YANG Y.C., *Improved computation of respiratory resistance as measured by transiently increased resistance*, Med. Biol. Eng. Comput., 1990, 28, 50–53.
- [25] GUELKE R.W., BUNN E., *Transmission line theory applied to sound wave propagation in tubes with compliant walls*, Acustica, 1981, 48, 101–106.
- [26] GUÉRIN C., COUSSA M.L., EISSA N.T. et al., *Lung and chest wall mechanics in mechanically ventilated COPD patients*, J. Appl. Physiol., 1993, 74, 1570–1580.
- [27] HALL G.L., WILDHABER J.H., CERNELC M., FREY U., *Evaluation of the interrupter technique in healthy, unsedated infants*, Eur. Respir. J., 2001, 18, 982–988.
- [28] HORSFIELD K., DART G., OLSON D.E., CUMMING G., *Models of the human bronchial tree*, J. Appl. Physiol., 1971, 31, 207–217.
- [29] JABŁOŃSKI I., *Analiza metrologiczna techniki przerywanego przepływu w badaniach właściwości układu oddechowego*, Wrocław 2004, praca doktorska.
- [30] JABŁOŃSKI I., MROCZKA J., *A station for the respiratory mechanics measurement by occlusion techniques*, Metrology and Measurement Systems, 2007, 14, 229–240.
- [31] JABŁOŃSKI I., MROCZKA J., *Computer-aided evaluation of a new interrupter algorithm for the respiratory mechanics measurements*, Biocybernetics & Biomed. Eng., 2006, 26, 33–47.
- [32] JABŁOŃSKI I., MROCZKA J., *Interrupter valve kinematics in the issues of parameter estimation of the respiratory system model*, Metrology and Measurement Systems, 2007, 14, 339–350.
- [33] JABŁOŃSKI I., MROCZKA J., *Introduction to respiratory mechanics measurement by enhanced*

- interrupter method*, IMEKO World Congress, 17–22 September 2006, Rio de Janeiro, Brasil.
- [34] JABŁOŃSKI I., MROCZKA J., *Liniowy model układu oddechowego w czasie przerwania przepływu powietrza*, Pomiary Automatyka Kontrola, 2002, 10, 18–22.
- [35] JABŁOŃSKI I., MROCZKA J., *Measurement-modeling, modeling-measurement: a transitive couple of reality and abstraction in equipage of comprehension and prediction for example of breathing control*, IMEKO World Congress, 17–22 September 2006, Rio de Janeiro, Brasil.
- [36] JABŁOŃSKI I., MROCZKA J., *System akwizycji danych przzerwaniowych do oceny mechaniki oddychania. Metrologia – narzędzie poznania i droga rozwoju*, Kongres Metrologii, Kraków 9–13 września 2007, Pomiary Automatyka Kontrola, 2007, 53.
- [37] JABŁOŃSKI I., MROCZKA J., *Wstępne implikacje analizy systemów złożonych dla przypadku układu oddechowego. Metrologia – narzędzie poznania i droga rozwoju*, Kongres Metrologii, Kraków 9–13 września 2007, Pomiary Automatyka Kontrola, 2007, 53 bis.
- [38] JABŁOŃSKI I., POLAK A.G., MROCZKA J., *Metody identyfikacji modelu układu oddechowego w czasie przerwania przepływu powietrza*, Pomiary Automatyka Kontrola, 2000, 8, 18–22.
- [39] JAEGER M.J., *Effect of the cheeks and the compliance of alveolar gas on the measurement of respiratory variables*, Respir. Physiol., 1982, 47, 325–340.
- [40] JACKSON A.C., MILHORN H.T. JR., *Digital computer simulation of respiratory mechanics*, Comput. Biomed. Res., 1973, 6, 27–56.
- [41] JACKSON A.C., MILHORN H.T. JR., NORMAN J.R., *A reevaluation of the interrupter technique for airway resistance measurement*, J. Appl. Physiol., 1974, 36, 264–268.
- [42] JELLONEK A., *Zasady metrologii*, Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1981.
- [43] KORENBAUM V.I., TAGILTSEV A.A., *An acoustic model of noise production in the human bronchial tree under forced expiration*, J. Sound Vibr., 1998, 213, 377–382.
- [44] LAUSTED C.G., JOHNSON A.T., *Respiratory resistance measured by an airflow perturbation device*, Physiol. Meas., 1999, 20, 21–35.
- [45] LIISTRO G., STĂNESCU D., RODENSTEIN D., VERITER C., *Reassessment of the interruption technique for measuring flow resistance in humans*, J. Appl. Physiol., 1989, 67, 933–937.
- [46] LJUNG L., GLAD T., *Modeling of dynamics systems*, Prentice Hall, 1987.
- [47] LUTCHEN K.R., COSTA K.D., *Physiological interpretations based on lumped element models fit to respiratory impedance data: use of forward-inverse modeling*, IEEE Trans. Biomed. Eng., 1990, 37, 1076–1085.
- [48] LUTCHEN K.R., GIURDANELLA C.A., JACKSON A.C., *Inability to separate airway from tissue properties by use of human respiratory input impedance.*, J. Appl. Physiol., 1990, 68, 2403–2412.
- [49] MEAD J., WHITTENBERGER J.L., *Evaluation of airway interruption technique as a method for measuring pulmonary air-flow resistance*, J. Appl. Physiol. 1954, 6, 408–416.
- [50] MERKUS P.J.F.M., ARETS H.G.M., JOOSTEN T., SIERO A., BROUHA M., MIJNSBERGEN J.Y., DE JONGSTE J.C., ENT C.K. VAN DER, *Measurements of interrupter resistance: reference values for children 3–13 years of age*, Eur. Respir. J., 2002, 20, 907–911.
- [51] MROCZKA J., *Metrologiczne problemy wykorzystywania światła rozproszonego do badań rozkładu wielkości cząstek w roztworach dyspersyjnych. Metrologia i systemy pomiarowe*, Monografia 4, Warszawa 1990.
- [52] NAVAJAS D., MIJAILOVICH S., GLASS G.M., STAMENOVIC D., FREDBERG J.J., *Dynamic response of the isolated passive rat diaphragm strip*, J. Appl. Physiol., 1992, 73, 2681–2692.
- [53] NEERGAARD J. VON, WIRZ K., *Die Messung der Strömungswiderstände in den Atemwegen des Menschen, insbesondere bei Astma und Emphysem*, Z. Klin. Med., 1927, 105, 51–82.
- [54] OTIS A. B., PROCTOR D.F., *Measurement of alveolar pressure in human subjects*, Am. J. Physiol., 1948, 152, 106–112.
- [55] PHAGOO S.B., WILSON N.M., SILVERMAN M., *Evaluation of a new interrupter device for*

- measuring bronchial responsiveness and response to bronchodilator in 3 year old children*, Eur. Respir. J., 1996, 9, 1374–1380.
- [56] POLAK A.G., *A forward model for maximum expiration*, Comput. Biol. & Med., 1998, 28, 613–625.
- [57] POLAK A.G., *A unified mathematical model for airflow during maximum expiration*, Mod. Meas. Control., 1997, 56, 55–64.
- [58] POLAK A.G., LUTCHEN K.R., *Computational model for forced expiration from asymmetric normal lungs*, Ann. Biomed. Eng., 2003, 31, 1–17.
- [59] POLAK A., *Indirect measurements: combining parameter selection with ridge regression*, Meas. Sci. Technol., 2001, 12, 278–287.
- [60] POLAK A.G., MROCZKA J., *Nieinwazyjne techniki pomiaru właściwości mechanicznych układu oddechowego*, Metrologia i Systemy Pomiarowe, 1999, 6, 75–95.
- [61] ROMERO P.V., SATO J., SHARDONOFSKY F., BATES J.H.T., *High frequency characteristics of respiratory mechanics determined by flow interruption*, J. Appl. Physiol., 1990, 69, 1682–1688.
- [62] RENOTTE C., REMY M., SAUCEZ PH., *The laryngeal channel as a variable venturi-meter*, Proc. 18th Ann. Int. Conf. of IEEE-EMBS, 1996.
- [63] SHAPIRO A.H., *Steady flow in collapsible tubes*, ASME J. Biomech. Eng., 1977, 99, 126–147.
- [64] SHAW C.F., CHIANG S.T., HSIEH Y.C., MILIC-EMILI J., LENFANT C., *A new method for measurement of respiratory resistance*, J. Appl. Physiol., 1983, 54, 594–597.
- [65] SHEPARD R.J., *Mechanical characteristics of the human airway in relation to use of the interrupter valve*, Clin. Sci., 1963, 25, 263–280.
- [66] SLY P.D., BATES J.H.T., *Computer analysis of physical factors affecting the use of interrupter technique in infants*, Pediatr. Pulmonol., 1988, 4, 219–224.
- [67] SOBOL B.J., *A simple rapid technique for assessing airway resistance during quiet breathing*, Am. Rev. Resp. Dis., 1970, 102, 970–974.
- [68] SOBOL B.J., *A simplified approach to the measurement of total respiratory impedance*, Am. Rev. Resp. Dis., 1970, 102, 280–281.
- [69] SOBOL B.J., *Clinical experience with a new test of pulmonary function*, Chest, 1970, 60, 137–141.
- [70] SÖDERSTROEM T., STOICA P., *Identyfikacja systemów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997.
- [71] SUKI B., YUAN H., ZHANG Q., LUTCHEN K.R., *Partitioning of lung tissue response and inhomogeneous airway constriction at the airway opening*, J. Appl. Physiol., 1987, 82, 1349–1359.
- [72] ŠULC J., VOLTA C.A., PLOYSONGSANG Y., ELTAYARA L., OLIVENSTEIN R., MILIC-EMILI J., *Flow limitation and dyspnoea in healthy supine subjects during methacholine challenge*, Eur. Respir. J., 1999, 14, 295–301.
- [73] TANTUCCI C., DUGUET A., FERRETI A., MEHIRI S., ARNULF I., ZELTER M., SIMIŁOWSKI T., DERENNE J-P., MILIC-EMILI J., *Effect of negative expiratory pressure on respiratory system flow resistance in awake snorers and nonsnorers*, J. Appl. Physiol., 1999, 87, 969–976.
- [74] TANTUCCI C., ELLAFFI M., DUGUET A., ZELTER M., SIMIŁOWSKI T., DERENNE J-P., MILIC-EMILI J., *Dynamic hyperinflation and flow limitation during methacholine-induced bronchoconstriction in asthma*, Eur. Respir. J., 1999, 14, 295–301.
- [75] VOGEL J., SCHMIDT U., *Impulse oscillometry: analysis of lung mechanics in general practice and the clinic, epidemiological and experimental research*, Pmi-Verl.-Gruppe, Frankfurt am Main, 1994.
- [76] VOTCHAL B.E., MAGAZANIK N.A., *Reliability of measuring intraalveolar pressure by the shut-off method*, Meditsinskaya Tekhnika, 1970, 1, 8–11.
- [77] VUILLEUMIER P., *Über eine Methode zur Messung des intraalveolären Drukes und der Strömungswiderstände in den Atemwegen des Menschen*, Z. Klin. Med., 1944, 143, 698.
- [78] WEIBEL E.R., *Morphometry of the human lung*, Academic Press, New York 1963.

TIME-DOMAIN RESPIRATORY MECHANICS MEASUREMENT DURING OCCLUSIONAL MANOEUVRE

The study concerns the construction of the time-domain algorithm of the respiratory mechanics evaluation. The procedure exploits the information on the system coded in post-occlusional pressure (P_{ao}) and flow (Q_{ao}) signals acquired at the mouth. The first part of the report gives concise introduction to the idea of indirect measurements of the respiratory characteristics, with a special emphasis on the techniques which use the experimental data collected in transient conditions, induced by the short-term pseudo-step input function. The next sections reconstruct the forward-inverse experiments for the chosen structures of analogs. The various variants and properties of the identification procedures have been tested. Finally, proposed algorithm applied for the real, physiological data has been verified. In consequence, the reported activity enables the author to direct the future work in the area of occlusional algorithm, in order to propose useful diagnostic tool, possible to applying in a case of infants and early-school children.

Dariusz WYSOCZAŃSKI*
Janusz MROCZKA

WYKORZYSTANIE CHARAKTERYSTYK POLARYZACYJNYCH ŚWIATŁA ROZPROSZONEGO DO BADANIA OŚRODKÓW DISPERSYJNYCH – MATERIAŁÓW KOMPOZYTOWYCH

Przedstawiono nieinwazyjną, optyczną metodę określania położenia i koncentracji włókien w materiałach kompozytowych. Zaprezentowano modele zjawiska rozproszenia światła na nieskończenie długim cylindrze modelującym włókna w przypadku pojedynczego i wielokrotnego rozproszenia światła. Układ eksperymentalny umożliwia rejestrację map światła rozproszonego w materiale kompozytowym, na podstawie których wyznaczane są położenie i koncentracja włókien. Jako źródła światła użyty został laser He-Ne, natomiast składowe polaryzacyjne światła rozproszonego rejestrowane są przez odpowiedni układ optyczny i dwie kamery CCD.

1. WPROWADZENIE

W wielu zastosowaniach przemysłowych i badaniach naukowych nierzadko mamy do czynienia z problemem określania koncentracji i położenia cząstek w pewnym ośrodku [9, 11, 39, 53]. Przykładem mogą być pomiary zarówno zanieczyszczenia powietrza [18, 25, 30] i wody [1, 19, 31, 34, 35, 40, 48], jak również badania wytrzymałości materiałów jako produktu finalnego i podczas procesu produkcyjnego [2].

Coraz większą popularność, dzięki swoim właściwościom (niewielka masa, duża wytrzymałość, łatwość obróbki), osiągają materiały kompozytowe. Konstrukcyjnie stanowią one połączenie co najmniej dwóch różnych materiałów (dwóch faz). Zazwyczaj mamy do czynienia z matrycą polimerową, w której znajdują się tzw. wzmocnienia. Wzmocnienia przyjmują różne kształty (cząstki sferyczne, płytkowe, cylindryczne – włókna) i są wykonane z różnych materiałów (węgiel, szkło, polimery). Właściwo-

* Katedra Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej, Politechnika Wrocławska.

ści materiału kompozytowego zależą oczywiście od użytych materiałów, ale również od zastosowanej metody ich połączenia oraz koncentracji i położenia wzmocnień w matrycy. Właściwości silnie zależą od przebiegu procesu produkcyjnego i mogą być w trakcie tego procesu łatwo modyfikowane. Wzmocnienia są umieszczone w matrycy w procesie mieszania, wtrysku bądź zagniatania.

Techniki badań właściwości materiałów kompozytowych można podzielić na dwie główne grupy. Do pierwszej zaliczyć można metody inwazyjne, takie jak testy wytrzymałościowe, fale termiczne [7] czy badania mikroskopowe. Druga grupa obejmuje metody nieinwazyjne oparte na różnych zjawiskach fizycznych. Można zatem znaleźć metody wykorzystujące ultradźwięki, mikrofałe [2] lub światło [47] do szacowania położenia i koncentracji zastosowanych wzmocnień. Wciąż jednak istnieje konieczność opracowania nowych metod pomiarowych umożliwiających szybkie, nieinwazyjne testowanie materiałów kompozytowych zarówno w fazie końcowej (badania jakości), jak i w trakcie procesu produkcyjnego.

Problematyka przedstawiona w niniejszym opracowaniu dotyczy badania właściwości materiałów kompozytowych z wykorzystaniem światła rozproszonego.

Materiał kompozytowy w aspekcie optycznym jest układem dyspersyjnym, w którym ośrodkiem jest matryca, a fazę rozproszoną (centra rozproszeniowe) stanowią użyte wzmocnienia (włókna).

Celem projektu było opracowanie metody pomiaru charakterystyk polaryzacyjnych światła rozproszonego na włóknach materiałów kompozytowych, która umożliwiłaby badanie koncentracji i położenia włókien w kompozycie.

Proponowana w projekcie metoda wykorzystuje światło rozproszone do badania (pośrednio) właściwości materiałów kompozytowych zawierających włókna. Stąd podczas realizacji projektu opracowano modele symulacyjne zjawiska rozproszenia światła w materiale kompozytowym. Przeprowadzono również wiele testów symulacyjnych umożliwiających opracowanie metody określania położenia i koncentracji włókien w materiale kompozytowym. Badania te stanowiły również cenny materiał służący do zaprojektowania laboratoryjnego systemu umożliwiającego praktyczną weryfikację proponowanej metody.

2. MODELE ROZPROSZENIA ŚWIATŁA

Pierwszym etapem prac było utworzenie modelu rozproszenia światła w materiale kompozytowym zawierającym włókna. Opracowano model symulacyjny zjawiska rozproszenia pojedynczego fali płaskiej na pojedynczym, nieskończenie długim cylindrze modelującym włókno w materiale kompozytowym, który stanowił pierwsze przybliżenie. Następnie utworzono model rozproszenia wykorzystujący falę gaussowską, której rozkład natężenia w przekroju poprzecznym wyraża się krzywą Gaussa. Końcowym etapem prac teoretycznych było utworzenie modelu wykorzystującego

statystyczną metodę Monte Carlo uwzględniającego materiał kompozytowy jako całość (duża liczba włókien, zmiany koncentracji i położenia).

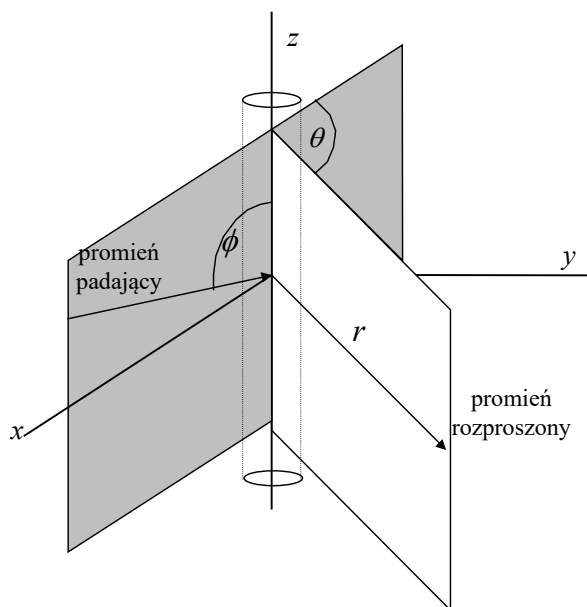
Analiza symulacyjna zjawiska rozproszenia stała się podstawą do opracowania metody pomiaru charakterystyk polaryzacyjnych światła rozproszonego w materiałach kompozytowych, zawierających włókna, oraz założeń konstrukcyjnych stanowiska pomiarowo-badawczego.

2.1 ROZPROSZENIE FALI PŁASKIEJ NA POJEDYNCZYM NIESKOŃCZENIE DŁUGIM CYLINDRZE

Model ten stanowi pierwsze przybliżenie zjawiska rozproszenia światła w materiale kompozytowym. Opisuje rozproszenie na pojedynczym nieskończenie długim nieabsorbującym cylindrze modelującym pojedyncze włókno wzmocnienia w materiale kompozytowym. Model uwzględnia średnicę włókna, materiał, z którego jest wykonane (współczynnik załamania światła dla cylindra) oraz materiał matrycy, w której znajduje się włókno. Możliwa jest również zmiana położenia włókna względem padającej wiązki.

Model matematyczny

Model matematyczny opiera się na pracach dotyczących rozproszenia fali płaskiej na nieskończenie długim, nieabsorbującym cylindrze [3, 8, 10, 20, 26, 28, 33, 51, 54].



Rys. 1. Geometria zjawiska rozproszenia światła na pojedynczym nieskończonym cylindrze
Fig. 1. Geometry of light scattering on single infinite cylinder

Na rysunku 1 przedstawiono geometrię zjawiska. Nieskończony cylinder o średnicy $d = 2a$ i względnym współczynniku załamania $m = (\text{współ. zał. cylindra})/(\text{współ. zał. ośrodka})$ jest oświetlony falą płaską o długości λ . Kąt ϕ między kierunkiem fali padającej i osią cylindra leży w płaszczyźnie padania i nazwany jest kątem padania. Kąt padania może zmieniać się, ze względu na symetrię, od 0 do 90° .

Światło rozproszone wyznaczone jest w kącie rozproszenia θ , który leży w płaszczyźnie rozproszenia i może zmieniać się, uwzględniając symetrię od 0° (kierunek rozproszenia „w przód”) do 180° (kierunek rozproszenia „wstecz”). Fala padająca ma dwie składowe polaryzacyjne: równoległą TM (gdy wektor elektryczny drga równoległe do płaszczyzny padania) oraz prostopadłą TE (gdy wektor elektryczny drga prostopadle do płaszczyzny padania).

Zależność pomiędzy falą padającą (E_{TE}^i , E_{TM}^i) i rozproszoną (E_{TE}^s , E_{TM}^s) można przedstawić w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} E_{TM}^s \\ E_{TE}^s \end{bmatrix} = e^{i3\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \sin \phi}} e^{ik(r \sin \phi - z \cos \phi)} \begin{bmatrix} T_1 & T_4 \\ T_3 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{TM}^i \\ E_{TE}^i \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie

$$k = 2\pi/\lambda \quad (2)$$

jest liczbą falową.

Elementy macierzy amplitudowej są funkcjami współczynników rozproszenia a_{nl} , b_{nl} dla polaryzacji TM oraz a_{nII} , b_{nII} dla polaryzacji TE

$$T_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} b_{nl} e^{-in\theta} = b_{0I} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_{nl} \cos(n\theta), \quad (3)$$

$$T_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{nII} e^{-in\theta} = a_{0II} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{nII} \cos(n\theta), \quad (4)$$

$$T_3 = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{nl} e^{-in\theta} = -2i \sum_{n=1}^{\infty} a_{nl} \sin(n\theta), \quad (5)$$

$$T_4 = \sum_{-\infty}^{\infty} b_{nII} e^{-in\theta} = -2i \sum_{n=1}^{\infty} b_{nII} \sin(n\theta) = -T_3, \quad (6)$$

Współczynniki rozproszenia a_{nl} , b_{nl} , a_{nII} , b_{nII} opisujące właściwości cylindra i ośrodka są zdefiniowane z użyciem funkcji Bessela i Hankela.

$$a_{nl} = \frac{C_n V_n - B_n D_n}{W_n V_n + iD_n^2}, \quad b_{nl} = \frac{W_n B_n + iD_n C_n}{W_n V_n + iD_n^2}, \quad (7)$$

$$a_{nII} = -\frac{A_n V_n - i C_n D_n}{W_n V_n + i D_n^2}, \quad b_{nII} = -i \frac{C_n W_n + A_n D_n}{W_n V_n + i D_n^2}, \quad (8)$$

gdzie

$$a_{-nI} = -a_{nI}, b_{-nI} = b_{nI}, \quad a_{0I} = 0, \quad (9)$$

$$a_{-nII} = a_{nII}, \quad b_{-nII} = -b_{nII}, \quad b_{0II} = 0, \quad (10)$$

gdzie

$$A_n = i \xi [\xi J'_n(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J'_n(\xi)], \quad (11)$$

$$D_n = n \cos \phi \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad (12)$$

$$B_n = \xi [m^2 \xi J'_n(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J'_n(\xi)], \quad (13)$$

$$C_n = n \cos \phi \eta J_n(\eta) J_n(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad (14)$$

$$V_n = \xi [m^2 \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta) H_n^{(1)'}(\xi)], \quad (15)$$

$$W_n = i \xi [\eta J_n(\eta) H_n^{(1)'}(\xi) - \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi)],$$

$$\xi = x \sin \phi, \quad \eta = x \sqrt{m^2 - \cos^2 \phi}, \quad x = ka, \quad \mu = \mu_1. \quad (16)$$

Natężenie światła rozproszonego i (zwane też funkcją fazową p) zdefiniowane jest jako suma składowych polaryzacyjnych i_1 (polaryzacja równoległa, TM) oraz i_2 (polaryzacja prostopadła, TE)

$$p = i = i_1 + i_2 = |T_1 + T_4|^2 + |T_2 + T_3|^2. \quad (17)$$

W celu badania udziału poszczególnych składowych polaryzacyjnych zdefiniowano współczynnik polaryzacji (stosunek polaryzacyjny)

$$P = \frac{i_1 - i_2}{i_1 + i_2}. \quad (18)$$

Przybiera on wartości z zakresu -1 (dominuje składowa prostopadła) do $+1$ (dominuje składowa równoległa).

Ważnymi parametrami wykorzystywanymi w analizie światła rozproszonego są również współczynnik osłabienia i albedo. Współczynnik osłabienia C_{ext} (zwany też przekrojem wygaszania lub osłabienia) można wyznaczyć z pomocą teorii ekstynkcji

(wygaszania) na podstawie amplitudy światła rozproszonego w kierunku $\theta = 0^\circ$. Natężenie fali rozchodzącej się w ośrodku zawierającym cząstki zmienia się zgodnie z zależnością:

$$I = I_0 e^{-NC_{ext}l}, \quad (19)$$

gdzie N określa liczbę cząstek w m^3 , I_0 jest natężeniem początkowym, a l jest długością przebytej przez falę drogi. Współczynnik osłabienia jest powiązany ze współczynnikiem efektywności osłabienia Q_{ext}

$$C_{ext} = Q_{ext}d. \quad (20)$$

Zależności definiujące współczynniki efektywności osłabiania, rozpraszania i absorpcji w przypadku nieskończonego długiego cylindra dla składowych polaryzacyjnych dane są następująco:

$$Q_{sca,I} = \frac{2}{\alpha} \left[|b_{0I}|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (|b_{nI}|^2 + |a_{nI}|^2) \right], \quad (21)$$

$$Q_{ext,I} = \frac{2}{\alpha} \operatorname{Re} \left\{ b_{0I} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_{nI} \right\} = \frac{2}{\alpha} \operatorname{Re} \{ T_1(\theta = 0^\circ) \}, \quad (22)$$

$$Q_{sca,II} = \frac{2}{\alpha} \left[|a_{0II}|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (|a_{nII}|^2 + |b_{nII}|^2) \right], \quad (23)$$

$$Q_{ext,II} = \frac{2}{\alpha} \operatorname{Re} \left\{ a_{0II} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{nII} \right\} = \frac{2}{\alpha} \operatorname{Re} \{ T_2(\theta = 0^\circ) \}, \quad (24)$$

$$Q_{abs} = Q_{ext} - Q_{sca}. \quad (25)$$

Dla światła padającego niespolaryzowanego

$$Q_{sca} = \frac{1}{2} (Q_{sca,I} + Q_{sca,II}), \quad Q_{ext} = \frac{1}{2} (Q_{ext,I} + Q_{ext,II}). \quad (26)$$

Albedo zdefiniowane jest jako

$$A = \frac{Q_{sca}}{Q_{ext}} = \frac{Q_{sca}}{Q_{abs} + Q_{sca}} = \frac{C_{sca}}{C_{ext}} \quad (27)$$

i wyraża zdolność rozpraszania w stosunku do osłabiania. Dla dielektryka idealnie przezroczystego $A = 1$. Albedo określa zatem absorpcję światła przez cząstkę.

Przedstawiony w skrócie model matematyczny posłużył do opracowania modelu symulacyjnego.

Model symulacyjny

Model symulacyjny opracowany został w formie programu dla środowiska MATLAB. Schemat blokowy programu przedstawiono na rysunku 2. Program główny zawarty jest w skrypcie *sfmain.m*. Skrypt *sfdata.m* definiuje parametry symulacji, takie jak:

- długość fali padającej (λ),
- polaryzacja fali padającej,
- kąt padania (ϕ),
- średnica cylindra (d),
- współczynnik załamania cylindra (n_1),
- współczynnik załamania ośrodka (n_2),
- zakres rozpatrywanych kątów rozproszenia (θ).

Skrypt *sfdata.m* wyznacza parametry pomocnicze symulacji. Należą do nich:

- liczba falowa – równanie (2),
- względny współczynnik załamania (n_1 – współczynnik załamania światła dla cylindra, n_2 – współczynnik załamania światła dla matrycy)

$$m = \frac{n_1}{n_2}, \quad (28)$$

- parametr rozmiarowy

$$\alpha = \frac{\pi d n_2}{\lambda}, \quad (29)$$

- liczba niezbędnych iteracji wyznaczona eksperymentalnie [3]

$$n_{\max} = \alpha + 4\sqrt[3]{\alpha} + 2. \quad (30)$$

Skrypt *sfanbn.m* służy do wyznaczenia współczynników rozproszenia a_{nl} , b_{nl} , a_{nII} , b_{nII} . W celu wyznaczenia tych współczynników posłużono się zależnościami (7) (8) oraz

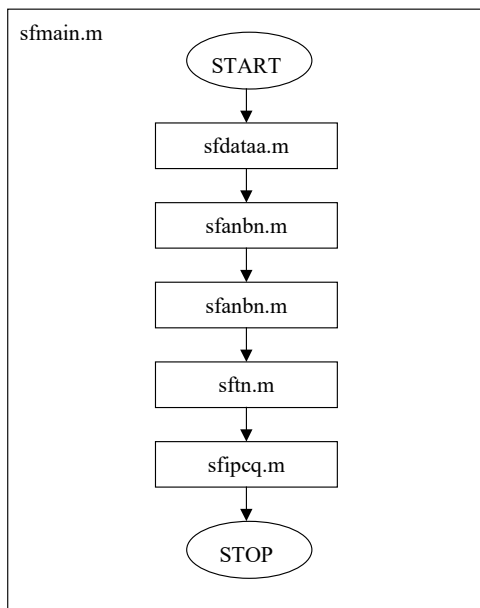
$$J'_n(x) = -\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) \quad (31)$$

$$H'_n(x) = \left[-\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) \right] + i \left[-\frac{n}{x} Y_n(x) + Y_{n-1}(x) \right]. \quad (32)$$

Wynikiem działania skryptu *sfm.m* są wartości elementów macierzy amplitudowej T_i (3), (4), (5), (6). Obliczanie natężeń (i , i_1 , i_2), współczynnika polaryzacji (P) oraz współczynników osłabienia (C_{ext}) i efektywności osłabiania (Q_{ext}) i rozpraszania (Q_{sca}) oraz albedo (A) następuje w skrypcie *sfipqc.m* według zależności (17), (18), (20), (26), (27).

Na rysunkach 3 i 4 przedstawiono przykładowe wyniki symulacji uzyskane za pomocą opisanego programu. W prezentowanym przykładzie przyjęto następujące parametry symulacji:

- długość fali światła padającego $\lambda = 632,8$ nm,
- polaryzacja światła padającego : równoległa,
- kąt padania $\phi_i = 90^\circ$,
- współczynnik załamania ośrodka $n_{\text{refmed}} = 1,65$,
- współczynnik załamania cylindra $n_{\text{ref}} = 1,55$,
- średnica cylindra $d = 14$ μm .



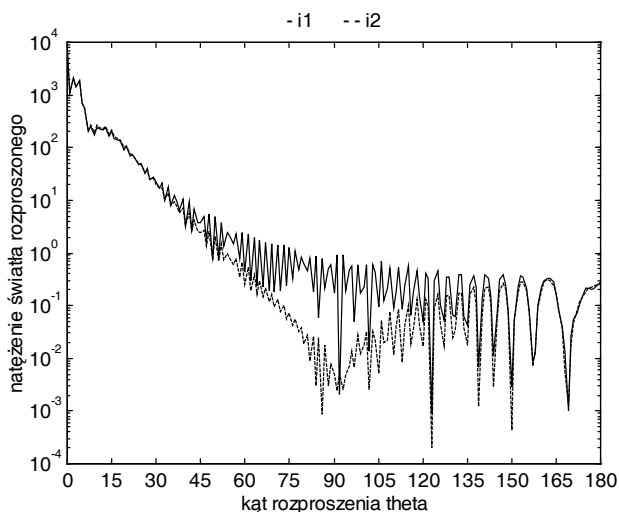
Rys. 2. Schemat blokowy programu sfmain do symulacji rozproszenia fali płaskiej na nieskończenie długim cylindrze

Fig. 2. Block diagram for plane wave light scattering on infinite cylinder simulation (sfmain code)

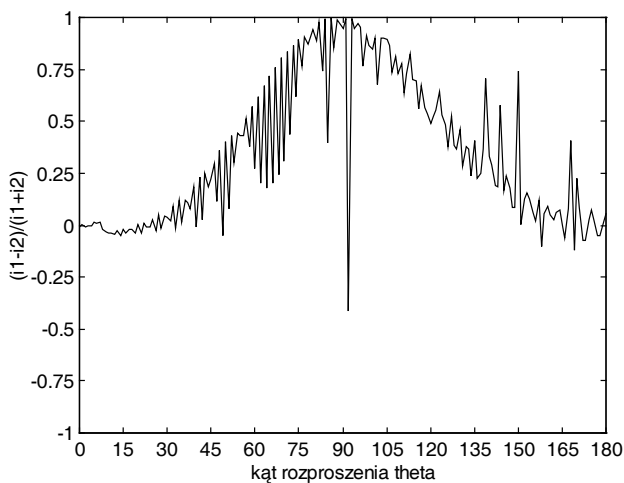
Symulacje dotyczyły wpływu różnych parametrów na natężenie i rozkład światła rozproszonego. Parametrami tymi są:

- długość fali padającej,
- wielkość cylindra (średnica),
- względny współczynnik załamania światła (cylindra względem ośrodka),
- polaryzacja fali padającej,
- położenie cylindra względem fali padającej (kąt padania).

Wyniki badań symulacyjnych oraz omówienie innych aspektów związanych z rozproszeniem światła na cząstkach można znaleźć w [4, 5, 41, 43, 44, 57, 58].



Rys. 3. Składowe polaryzacyjne i_1 i i_2 uzyskane za pomocą programu sfmain
 Fig. 3. Polarization components i_1 and i_2 computed with sfmain code



Rys. 4. Stosunek polaryzacyjny uzyskany za pomocą programu sfmain
 Fig. 4. Polarization ratio computed with sfmain code

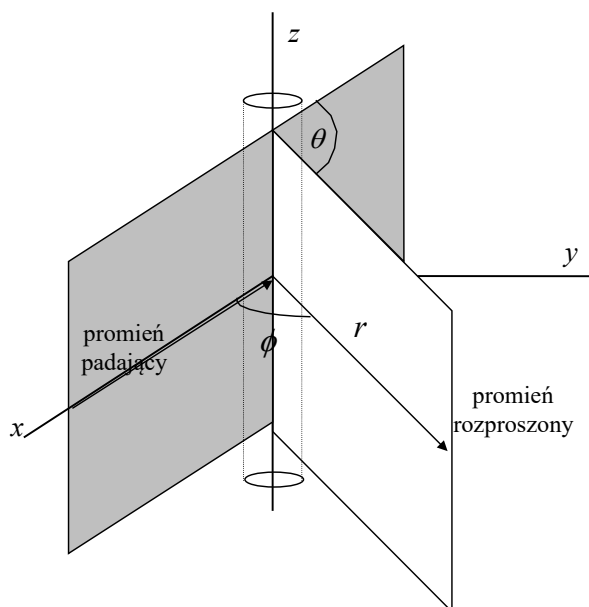
2.2. ROZPROSZENIE FALI GAUSSOWSKIEJ NA POJEDYNCZYM NIESKOŃCZENIE DŁUGIM CYLINDRZE

W rzeczywistych układach pomiarowych, wykorzystujących światło rozproszone, źródłem światła jest najczęściej laser. Ponieważ natężenie światła w przekroju po-

przecznym wiązki laserowej nie jest jednakowe (jak np. w przypadku fali płaskiej), w celu uwzględnienia tego parametru rozpatrzono więc model rozproszenia fali gaussowskiej na nieskończenie długim cylindrze [29].

Model matematyczny

Geometria zjawiska rozproszenia fali gaussowskiej na nieskończenie długim cylindrze przedstawiona jest na rysunku 5.



Rys. 5. Geometria zjawiska rozproszenia fali gaussowskiej na nieskończenie długim cylindrze
Fig. 5. Geometry of Gaussian beam scattering on infinite cylinder

Zakładając, że wiązka gaussowska pada prostopadłe do osi cylindra i jej środek znajduje się w punkcie $(x_0, y_0, 0)$ układu współrzędnych, można przedstawić zależności opisujące składowe pola elektromagnetycznego dla polaryzacji TM. W układzie prostokątnym:

$$\begin{aligned} E_x &= -2s^2 \zeta Q E_z, \\ E_y &= 0, \\ E_z &= E_0 \psi_0 \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} H_x &= 2s^2 (\rho \sin \phi - \eta_0) Q H_y, \\ H_y &= -H_0 \psi_0 \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \\ H_z &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

W układzie cylindrycznym:

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \psi_0 \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \\ E_r &= -2E_0 \psi_0 s^2 \zeta Q \cos \phi \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \\ E_\phi &= 2E_0 \psi_0 s^2 \zeta Q \sin \phi \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} H_z &= 0, \\ H_r &= -H_0 \psi_0 [\sin \phi - 2s^2 Q \cos \phi (\rho \sin \phi - \eta_0)] \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \\ H_\phi &= -H_0 \psi_0 [\cos \phi + 2s^2 Q \sin \phi (\rho \sin \phi - \eta_0)] \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)]. \end{aligned} \quad (36)$$

Dla polaryzacji TE w układzie prostokątnym:

$$\begin{aligned} E_x &= -2s^2 (\rho \sin \phi - \eta_0) Q E_y, \\ E_y &= E_0 \psi_0 \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \\ E_z &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} H_x &= -2s^2 \zeta Q H_z, \\ H_y &= 0 \\ H_z &= H_0 \psi_0 \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)] \end{aligned} \quad (38)$$

i w układzie cylindrycznym:

$$\begin{aligned} E_z &= 0, \\ E_r &= E_0 \psi_0 [\sin \phi - 2s^2 Q \cos \phi (\rho \sin \phi - \eta_0)] \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \\ E_\phi &= E_0 \psi_0 [\cos \phi + 2s^2 Q \sin \phi (\rho \sin \phi - \eta_0)] \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \psi_0 \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \\ H_r &= -2H_0 \psi_0 s^2 \zeta Q \cos \phi \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \\ H_\phi &= 2H_0 \psi_0 s^2 \zeta Q \sin \phi \exp[-i(\rho \cos \phi - \xi_0)], \end{aligned} \quad (40)$$

gdzie:

$$\psi_0 = iQ \exp\{-iQs^2[(\rho \sin \phi - \eta_0)^2 + \zeta^2]\}, \quad (41)$$

$$Q = \frac{1}{i + 2s^2(\rho \cos \phi - \xi_0)}, \quad (42)$$

$$s = \frac{1}{k\omega_0}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (43)$$

$$\rho = kr, \quad \zeta = kz, \quad \xi_0 = kx_0, \quad \eta_0 = ky_0. \quad (44)$$

Zależności przedstawiające rozproszone pole elektromagnetyczne przedstawione są dalej. Dla fali spolaryzowanej równoległej (TM)

$$E_z^s = \frac{2E_0}{\rho^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_0^1 \rho_0^2 S_{m,TM}(\gamma) H_m(\rho_0) C_\gamma d\gamma, \quad (45)$$

$$E_r^s = \frac{2E_0}{\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_0^1 [-i\gamma\rho_0 S_{m,TM}(\gamma) H'_m(\rho_0) + mS_{m,TE}(\gamma) H_m(\rho_0)] S_\gamma d\gamma, \quad (46)$$

$$E_\phi^s = \frac{2E_0}{\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_0^1 [m\gamma S_{m,TM}(\gamma) H_m(\rho_0) + i\rho_0 S_{m,TE}(\gamma) H'_m(\rho_0)] S_\gamma d\gamma, \quad (47)$$

$$H_z^s = \frac{2H_0}{\rho^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_0^1 \rho_0^2 S_{m,TE}(\gamma) H_m(\rho_0) S_\gamma d\gamma, \quad (48)$$

$$H_r^s = \frac{2H_0}{\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_0^1 [-i\gamma\rho_0 S_{m,TE}(\gamma) H'_m(\rho_0) - mS_{m,TM}(\gamma) H_m(\rho_0)] C_\gamma d\gamma, \quad (49)$$

$$H_\phi^s = \frac{2H_0}{\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_0^1 [m\gamma S_{m,TE}(\gamma) H_m(\rho_0) - i\rho_0 S_{m,TM}(\gamma) H'_m(\rho_0)] C_\gamma d\gamma. \quad (50)$$

Dla fali spolaryzowanej prostopadłej (TE)

$$E_z^s = \frac{2E_0}{\rho^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_0^1 \rho_0^2 S_{m,TE}(\gamma) H_m(\rho_0) S_\gamma d\gamma, \quad (51)$$

$$E_r^s = \frac{2E_0}{\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_0^1 [-i\gamma\rho_0 S_{m,TE}(\gamma) H'_m(\rho_0) + mS_{m,TE}(\gamma) H_m(\rho_0)] C_\gamma d\gamma, \quad (52)$$

$$E_\phi^s = \frac{2E_0}{\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_0^1 [m\gamma S_{m,TE}(\gamma) H_m(\rho_0) + i\rho_0 S_{m,TE}(\gamma) H'_m(\rho_0)] C_\gamma d\gamma, \quad (53)$$

$$H_z^s = \frac{2H_0}{\rho^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_0^1 \rho_0^2 S_{m,TE}(\gamma) H_m(\rho_0) C_\gamma d\gamma, \quad (54)$$

$$H_r^s = \frac{2H_0}{\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_0^1 [-i\gamma\rho_0 S_{m,TE}(\gamma) H'_m(\rho_0) - mS_{m,TE}(\gamma) H_m(\rho_0)] S_\gamma d\gamma, \quad (55)$$

$$H_\phi^s = \frac{2H_0}{\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \int_{-1}^1 [m\gamma S_{m,TE}(\gamma)H_m(\rho_0) - i\rho_0 S_{m,TM}(\gamma)H'_m(\rho_0)] S_\gamma d\gamma, \quad (56)$$

gdzie

$$S_\gamma = -i \sin(\gamma\zeta), \quad C_\gamma = \cos(\gamma\zeta), \quad \zeta = kz, \quad \rho = kr, \quad \rho_0 = kr\sqrt{1-\gamma^2}, \quad (57)$$

$$S_{m,TM} = -\frac{L_1 I_{m,TM} + L_2 I_{m,TE}}{D}, \quad S_{m,TE} = -\frac{L_2 I_{m,TM} + L_3 I_{m,TE}}{D}. \quad (58)$$

Współczynniki kształtu promienia $I_{m,TM}$, $I_{m,TE}$ wyznaczone są na podstawie składowych pola padającego za pomocą metody *localized approximation*. Metoda ta, pomimo przybliżonego charakteru, gwarantuje wystarczającą dla analizy dokładność przy znacznym zmniejszeniu czasu obliczeń w stosunku do metody całkowej.

$$I_{m,TM} = \frac{1}{2\pi(1-\gamma^2)E_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^i \left(\phi = \frac{\pi}{2}, \rho = m \right) \exp(i\gamma\zeta) d\zeta \quad (59)$$

$$I_{m,TE} = \frac{1}{2\pi(1-\gamma^2)H_0} \int_{-\infty}^{+\infty} H_z^i \left(\phi = \frac{\pi}{2}, \rho = m \right) \exp(i\gamma\zeta) d\zeta \quad (60)$$

Dla fali padającej spolaryzowanej równoległe (TM)

$$I_{m,TM} = \frac{i\bar{Q}}{2\pi(1-\gamma^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\bar{Q}s^2(m-\eta_0)^2 + i\xi_0] \exp(-s^2 i\bar{Q}\zeta^2) \exp(i\gamma\zeta) d\zeta \quad (61)$$

$$= \frac{1}{2s(1-\gamma^2)} \sqrt{\frac{i\bar{Q}}{\pi}} \exp \left[-i\bar{Q}s^2(m-\eta_0)^2 + i\xi_0 - \frac{\gamma^2}{4i\bar{Q}s^2} \right],$$

$$I_{m,TE} = 0, \quad (62)$$

gdzie

$$\bar{Q} = \frac{1}{i - 2s^2\xi_0}. \quad (63)$$

Dla fali padającej spolaryzowanej prostopadle (TE) $I_{m,TM} = 0$ zaś $I_{m,TE}$ jest takie jak $I_{m,TM}$ dla fali TM. Pozostałe parametry zdefiniowane są następująco:

$$D = (m\gamma\alpha_M A_{jh})^2 - (\alpha_0\alpha_c)^2 [(\alpha_c A_{jH})^2 + (M\alpha_0 A_{jH})^2 - \alpha_0\alpha_c (M^2 + 1) A_{jH} A_{jh}], \quad (64)$$

$$L_1 = (m\gamma\alpha_M)^2 A_{jj} A_{jh} - (\alpha_0\alpha_c)^2 [\alpha_c^2 A_{jj} A_{jH} + (M\alpha_0)^2 A_{jj} A_{jh} - \alpha_0\alpha_c (A_{jj} A_{jh} + M^2 A_{jj} A_{jH})], \quad (65)$$

$$L_2 = im\gamma\alpha_0\alpha_c^2 a_M A_{jc} A_{00}, \quad (66)$$

$$L_3 = -(m\gamma a_M)^2 A_{jj} A_{jh} + (\alpha_0 \alpha_c)^2 [\alpha_c^2 A_{jJ} A_{jH} + (M\alpha_0)^2 A_{jJ} A_{jH} - \alpha_0 \alpha_c (A_{jJ} A_{jH}) + M^2 A_{jJ} A_{jH}], \quad (67)$$

$$L_4 = -\alpha_0^4 \alpha_c A_{00} [\alpha_0 A_{jH} - \alpha_c A_{jH}], \quad (68)$$

$$L_5 = -im\gamma\alpha_0^3 a_M A_{jh} A_{00}, \quad (69)$$

$$L_6 = \alpha_0^4 \alpha_c A_{00} [M^2 \alpha_0 A_{jH} - \alpha_c A_{jH}], \quad (70)$$

$$a_M = (\alpha_c^2 - \alpha_0^2) = \alpha^2 (M^2 - 1),$$

$$\begin{aligned} A_{jj} &= J_m(\alpha_c) J_m(\alpha_0), & A_{jJ} &= J_m(\alpha_c) J'_m(\alpha_0), \\ A_{jJ} &= J'_m(\alpha_c) J_m(\alpha_0), & A_{jc} &= J_m(\alpha_c)^2, \end{aligned} \quad (71)$$

$$A_{jh} = J_m(\alpha_c) H_m(\alpha_0), \quad A_{jH} = J_m(\alpha_c) H'_m(\alpha_0),$$

$$A_{jH} = J'_m(\alpha_c) H_m(\alpha_0), \quad A_{00} = J_m(\alpha_c) H'_m(\alpha_0) - J'_m(\alpha_c) H_m(\alpha_0),$$

$$a = \frac{d}{2}, \quad \alpha = ka, \quad \alpha_0 = ka\sqrt{1-\gamma^2}, \quad \alpha_c = ka\sqrt{M^2-\gamma^2}. \quad (72)$$

Parametr M jest względnym współczynnikiem załamania dla cylindra względem otaczającego go ośrodka, natomiast m jest w tym przypadku indeksem sumowań.

Model symulacyjny

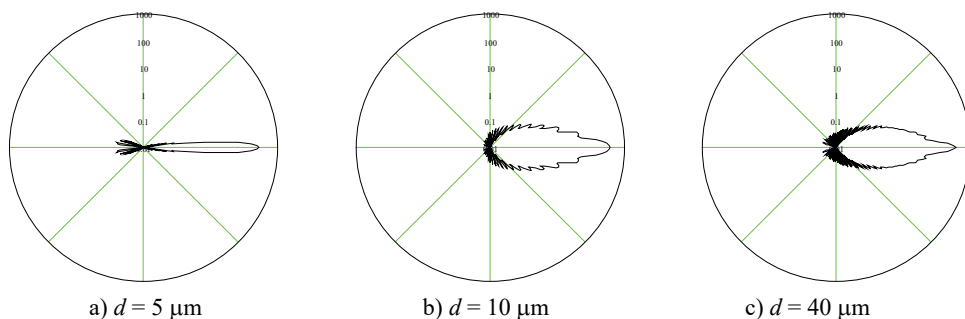
W przypadku rozproszenia fali gaussowskiej na cylindrze oświetlonym prostopadłe przeprowadzono symulacje dotyczące tych samych aspektów, jakie rozpatrywane były dla fali płaskiej. Dodatkowo analizowano stosunek wielkości cylindra do szerokości oświetlającej go wiązki oraz położenie cylindra w wiązce.

Wynikiem symulacji są wartości natężenia składowych polaryzacyjnych w funkcji kąta rozproszenia. Parametry wejściowe programu symulacyjnego są następujące:

- średnica cylindra (d),
- współczynnik załamania cylindra (n_1),
- współczynnik załamania matrycy (n_2),
- średnica przewężenia promienia ($2\omega_0$),
- długość fali padającej (λ),
- polaryzacja (TM lub TE),
- współrzędne promienia (x_0, y_0),
- współrzędna obserwacji (z),
- odległość cylindra od punktu obserwacji (r),
- liczba punktów całkowania dla ϕ ,
- liczba punktów całkowania dla γ ,
- maksymalna liczba sumowań parametru m ,

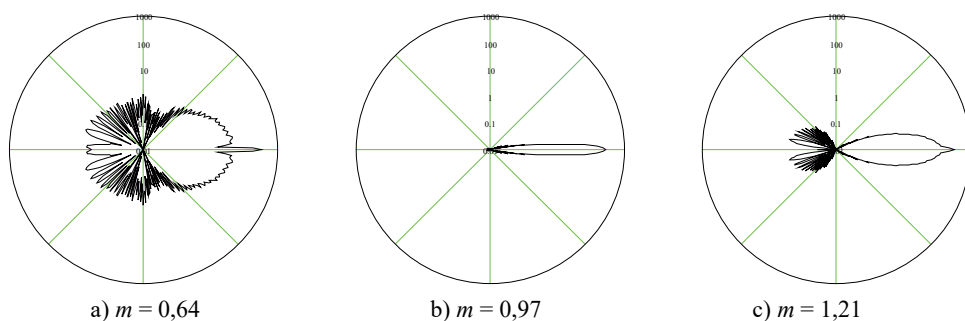
- zakres rozpatrywanych kątów rozproszenia.

Przykładowe wyniki symulacji przedstawiono poniżej. Zastosowano wiązkę gausowską o długości fali $\lambda = 514$ nm (laser Argonowy) spolaryzowaną równolegle (TM). Na rysunku 6 przedstawiono diagramy natężenia wiązki o przewężeniu $\omega_0 = 5$ μm rozproszonej centralnie na nieskończonym cylindrze o różnej średnicy $d = 5$ μm , 10 μm , 40 μm . Względny współczynnik załamania materiału cylindra i ośrodka $m = 0,93$. Skala logarymiczna od 10^{-2} to 10^3 . Na rysunku 7 przedstawiono analizę wpływu wartości względnego współczynnika załamania materiału cylindra i ośrodka na charakterystyki rozproszeniowe. Średnica wiązki wynosi $2\omega_0 = 10$ μm , średnica cylindra $d = 20$ μm . Wpływ położenia wiązki względem cylindra na charakter rozproszenia światła pokazany został na rysunku 8. W tym wypadku średnica wiązki wynosi $2\omega_0 = 10$ μm , średnica cylindra $d = 20$ μm , a względny współczynnik załamania $m = 0,93$.



Rys. 6. Charakterystyki światła rozproszonego fali gausowskiej na nieskończenie długim cylindrze o różnej średnicy

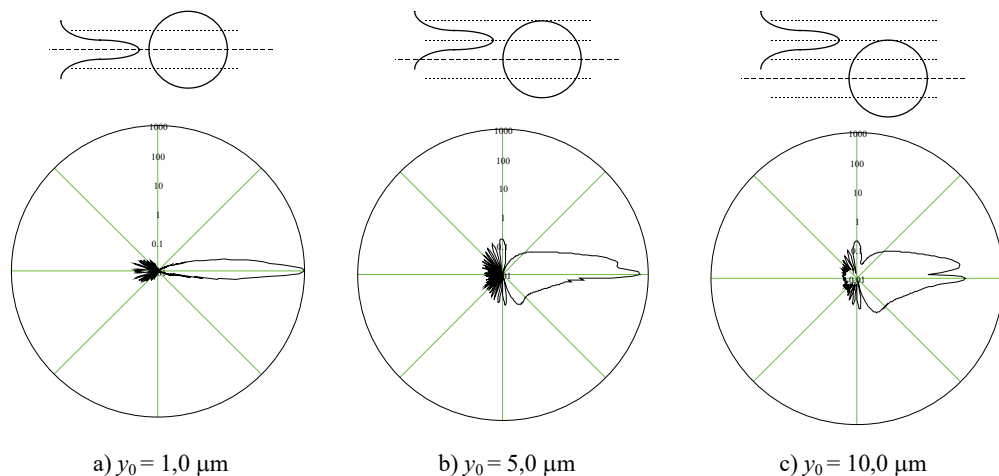
Fig. 6. Scattered light characteristics for gaussian beam on infinite cylinder with different diameters



Rys. 7. Charakterystyki światła rozproszonego fali gausowskiej na nieskończenie długim cylindrze dla różnych wartości względnego współczynnika załamania

Fig. 7. Scattered light characteristics for gaussian beam on infinite cylinder with different relative refractive index

Wyniki analiz oraz inne aspekty dotyczące rozproszenia wiązki gaussowskiej na nieskończenie długim cylindrze zawarte zostały m. in. w pracach [42, 45, 55, 57, 58].



Rys. 8. Charakterystyki światła rozproszonego fali gaussowskiej na nieskończenie długim cylindrze dla różnych pozycji wiązki względem cylindra

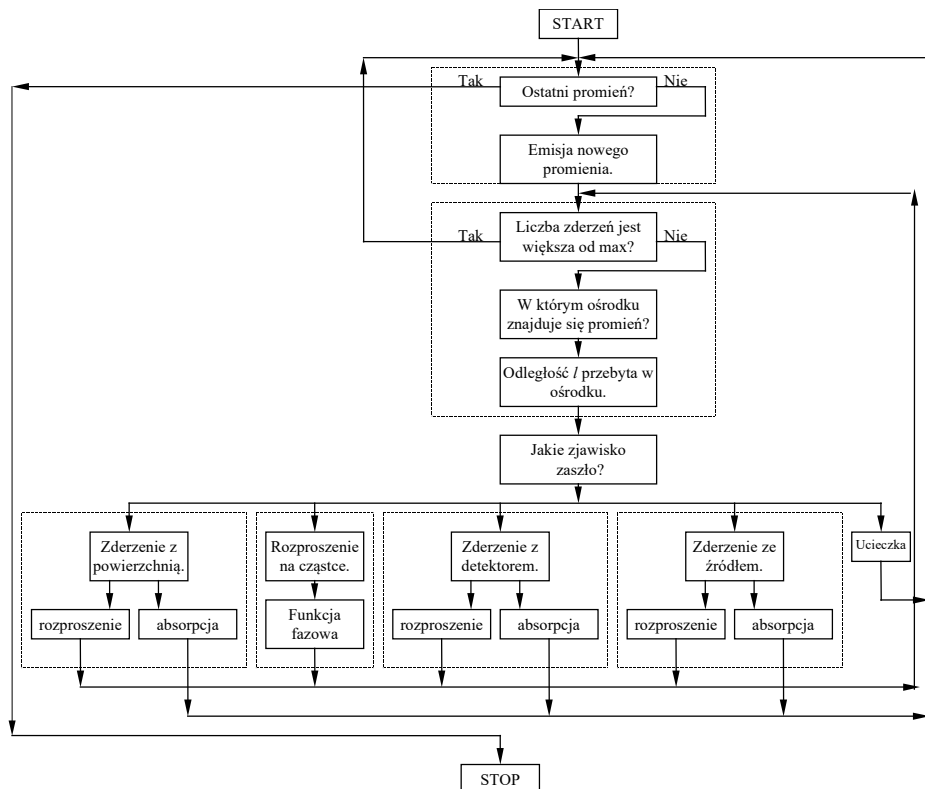
Fig. 8. Scattered light characteristics for gaussian beam on infinite cylinder for different position of beam versus cylinder

2.3. ROZPROSZENIE ŚWIATŁA W MATERIALE KOMPOZYTYWYM – MODEL STATYSTYCZNY

Analiza zjawiska przeprowadzona z użyciem wcześniej opisanych prostych modeli umożliwiła zbudowanie modelu kompleksowego uwzględniającego zarówno parametry fali padającej i pojedynczego włókna, jak również koncentracji i położenia włókien względem oświetlającej materiał kompozytowy wiązki.

Ponieważ podejście analityczne do tego typu problemu, ze względu na jego złożoność, jest nieefektywne z powodu trudności z uwzględnieniem geometrii zjawiska [36–38, 52], zdecydowano się zatem na model statystyczny. Do opisu zjawiska rozproszenia wielokrotnego światła w materiale kompozytowym wykorzystano schemat Metody Monte Carlo [27, 49].

Główną zaletą MMC jest ujęcie statystyczne problemu, co umożliwia rozpatrywanie zjawiska z pominięciem takiego parametru jak czas. W przypadku rozproszenia światła fala padająca (oświetlająca) rozbita została na jednostkowe porcje zwane promieniami. W danej chwili analizowana jest droga jednego promienia, który emitowany jest ze źródła. Liczba emitowanych przez źródło promieni proporcjonalna jest do natężenia fali padającej. Analiza drogi promienia przebiega zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku 9.



Rys. 9. Schemat metody Monte Carlo dla zjawiska rozproszenia wielokrotnego światła w materiale kompozytowym

Fig. 9. Monte Carlo scheme for multiple light scattering in composite material

Promień, opisany przez jednostkowy wektor kierunku (wersor), emitowany jest przez źródło. Liczba emitowanych promieni musi być znaczna, aby zapewnić wystarczającą dokładność analizy. Zwykle waha się pomiędzy 10^4 i 10^6 . Zakres ten wynika z kompromisu między jakością i czasem analizy.

Następnie na podstawie położenia promienia w przestrzeni ustalany jest numer ośrodka, w którym się znajduje. Uwzględniając parametry ośrodka można wyznaczyć hipotetyczną odległość, jaką pokona promień zanim zderzy się z cząstką (włóknem materiału kompozytowego).

Promień może zderzyć się z powierzchnią oddzielającą ośrodki, cząstką (włóknem), detektorem, źródłem – lub opuścić rozpatrywany obszar przestrzeni, nie ulegając żadnemu opisanemu zdarzeniu (ucieczka). Na podstawie hipotetycznych odległości promienia od symulowanych obiektów wyznaczane jest zjawisko, jakiemu uległ promień. Po analizie zjawiska wyznaczana jest nowa trasa promienia lub generowany jest ze źródła nowy promień. Analiza kończy się z chwilą zakończenia analizy drogi

ostatniego promienia wyemitowanego przez źródło. W celu zabezpieczenia programu przed zbyt długim, niekontrolowanym czasem analizy wprowadzono ograniczenie liczby zderzeń analizowanego promienia (n_{max}). W większości prowadzonych symulacji $n_{max} = 1000$ zderzeń.

Model symulacyjny

W celu utworzenia modelu symulacyjnego opracowano program *mf.m*. Program *mf.m* składa się z kilkunastu skryptów i funkcji przeznaczonych do wykonania w środowisku MATLAB. Na rysunku 9 przedstawiono schematycznie (linia cienka) zakres obliczeń obejmowany przez poszczególne funkcje. Dodatkowo opracowano wiele podprocedur pomocniczych (m.in. prezentacja wyników, zamiana układów odniesienia, interfejs użytkownika), których ze względu na przejrzystość rysunku nie ujęto na schemacie. Do modelowania użyto opisanych poniżej obiektów.

Promień – jest to jednostkowa porcja fali charakteryzująca się długością fali, kierunkiem oraz punktem zaczepienia. W programie użyty jest jeden promień, którego droga jest analizowana. Promień generowany jest przez źródło przez podanie jego początkowego kierunku i punktu zaczepienia.

Źródło – jest to prostokątna powierzchnia mająca dwie strony: bierną i aktywną. Jej położenie określone jest przez podanie środka źródła (w globalnym układzie odniesienia), długości (x w lokalnym układzie odniesienia), szerokości (y w lokalnym układzie odniesienia) oraz kątów Eulera określających jego położenie w przestrzeni. Aktywna strona emituje promienie zgodnie z wybranym rozkładem prawdopodobieństwa i innymi parametrami źródła (kierunek). W programie wykorzystano rozkład jednostajny na całej powierzchni źródła; promienie emitowane są prostopadłe do strony aktywnej źródła i ich kierunek w lokalnym układzie odniesienia jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi Oz . Opis źródła obejmuje także określenie ośrodka (przez podanie numeru ośrodka), w jakim znajduje się źródło oraz współczynników odbicia i absorpcji dla aktywnej i biernej strony źródła. Źródło musi w całości znajdować się w jednym ośrodku. Może być ono w pewnym stopniu absorbujące, odbijające i przezroczyste. W programie może występować wiele źródeł (identyfikowanych przez numer), ale w danej chwili emitować promień może tylko jedno z nich (zawsze w programie jest tylko jeden promień). Podczas zderzenia promienia ze źródłem może dojść do absorpcji lub rozproszenia (odbicia bądź przejścia) promienia.

Powierzchnia odgraniczająca ośrodki – podobnie jak źródło, jest to prostokątna powierzchnia posiadająca dwie strony: bierną i aktywną. Ma ona za zadanie oddzielenie różnych ośrodków. Różni się od źródła tym, że nie generuje promieni, a współczynnik odbicia obliczany jest na podstawie współczynników załamania ośrodków po stronie aktywnej i biernej powierzchni. Podczas zderzenia z powierzchnią promień może zostać zaabsorbowany lub rozproszony (odbity bądź załamany). W programie występuje zwykle wiele powierzchni odgraniczających ośrodki. Każda powierzchnia ma unikatowy numer identyfikujący ją jednoznacznie.

Ośrodek – zdefiniowany jest przez takie parametry, jak: albedo (określające absorpcję), bezwzględny współczynnik załamania, koncentrację fazy rozproszonej, współczynnik osłabienia oraz funkcję fazową określającą prawdopodobieństwo rozproszenia promienia w danym kierunku przestrzeni. Funkcja fazowa jest stabilizowana i uzyskuje się ją za pomocą innych programów modelujących (np. rozproszenie pojedyncze na cylindrze dla ośrodków, w których fazę rozproszonej stanowią cząstki cylindryczne). Każdy ośrodek w programie identyfikowany jest przez unikatowy numer.

Prawdopodobieństwo, że promień zderzy się z cząstką na odległości między l i $(l + dl)$ wynosi

$$NC_{ext} \exp(-NC_{ext}l)dl, \quad (73)$$

gdzie N jest koncentracją włókien w materiale, C_{ext} zaś jest przekrojem osłabienia. Niech r jest liczbą losową z przedziału 0 do 1, wtedy odległość, na której promień zderzy się z cząstką, wyniesie:

$$l = -\frac{\log r}{NC_{ext}}, \quad (74)$$

Prawdopodobieństwo, że promień zostanie zaabsorbowany przez cząstkę (czy rozproszony) wyznaczyć można, posługując się parametrem zwanym albedo A (równanie 27). Niech r jest kolejną liczbą losową z przedziału 0 do 1 wtedy, gdy $r > A$ promień zostanie zaabsorbowany przez cząstkę, w przeciwnym wypadku zostanie rozproszony.

W przypadku rozproszenia promienia przez cząstkę nowe parametry promienia (punkt zaczepienia i kierunek) wyznaczone są na podstawie odległości do punktu zderzenia (74) oraz funkcji fazowej wyznaczonej za pomocą skryptu *sffd.m* wykorzystującego skrypt *sfmain.m* (rozproszenie pojedyncze na cylindrze). Funkcja fazowa jest stabilizowana względem kątów padania (0° – 90°) oraz kątów rozproszenia (0° – 180°) co 1° . Przyjęte zakresy kątów wynikają z symetrii funkcji fazowej dla cząstki, jaką jest cylinder. Na podstawie funkcji fazowych dla kolejnych kątów padania wyznaczone są odpowiednie dystrybuanty. Kolejna liczba losowa r z przedziału 0 do 1 umożliwi określenie kierunku rozproszenia, zgodnie z zależnością:

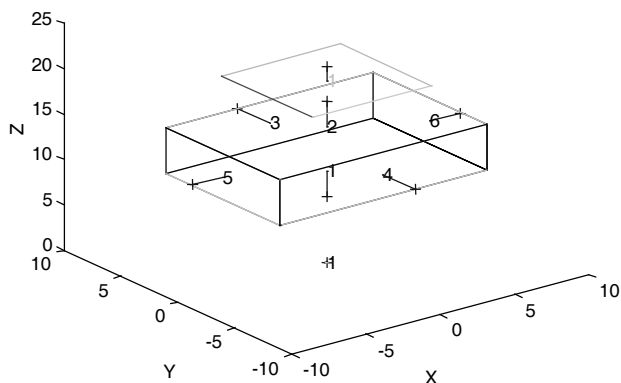
$$r = \frac{\int_0^\theta p(\theta)d\Omega(\theta)}{\int_0^\pi p(\theta)d\Omega(\theta)}, \quad (75)$$

gdzie Ω jest kątem bryłowym. Nowy kierunek określony jest dwoma kątami: kąt rozproszenia θ (równanie 75) oraz kąt rozproszenia ϕ_s zdeteminowany kątem padania ϕ . Na podstawie tych kątów wyznaczone są współrzędne kierunku promienia. Kąty Eule-

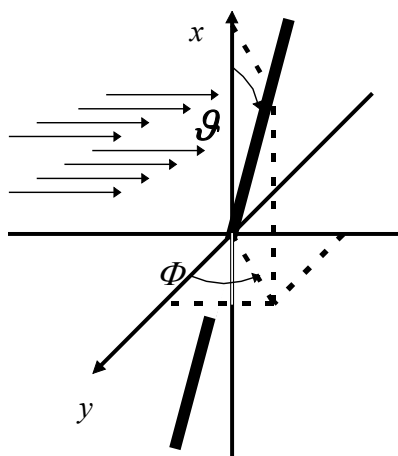
ra (mutacja, precesja, obrót) określają w tym przypadku położenie cylindrów w przestrzeni, a zatem względem padającej wiązki.

Detektor – jest elementem zdefiniowanym podobnie jak źródło. Detektor nie generuje promieni. Strona aktywna podzielona jest siatką, w której oczkach zliczane są padające promienie, w wyniku czego otrzymuje się obraz natężenia padającego na detektor światła.

Przykładową geometrię symulowanego układu przedstawiono na rysunku 10. Układ zawiera jedno źródło (na płaszczyźnie XY), jeden detektor („u góry”) i pojedynczą próbkę materiału kompozytowego zdefiniowaną sześcioma płaszczyznami granicznymi.



Rys. 10. Przykładowa geometria układu w symulacji rozproszenia światła w materiale kompozytowym
Fig. 10. Example of geometry for light scattering simulation in composite material

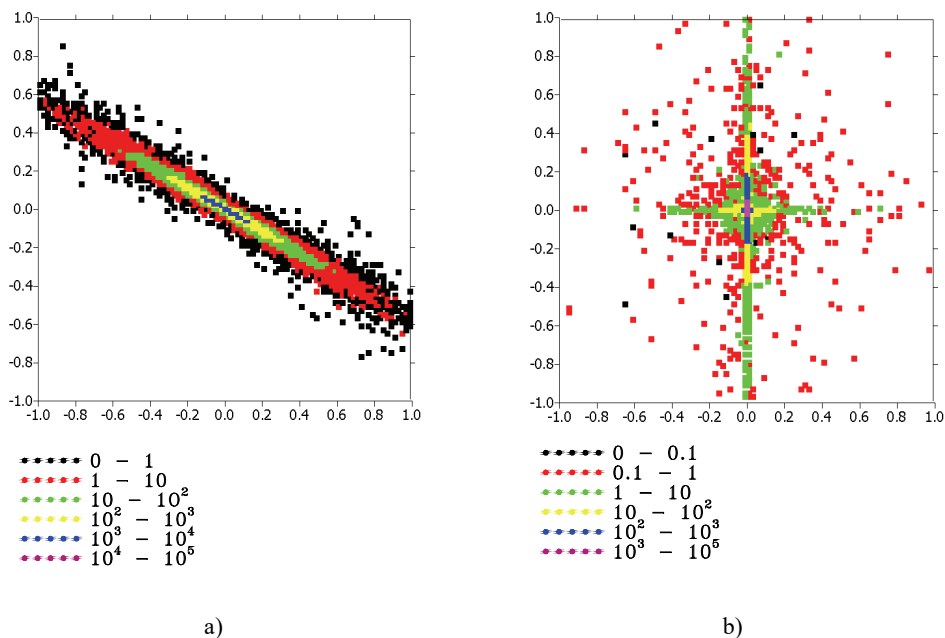


Rys. 11. Definicja kątów określających położenie cylindra względem wiązki oświetlającej
Fig. 11. Definition of cylinder orientation

Należy zauważyć, że w rzeczywistych kompozytach włókna nie są wzajemnie równoległe. Uzmiennienie kątów Eulera, opisujących położenie włókien (parametry ośrodka w modelu), umożliwiło otrzymanie próbki, w której włókna nie są idealnie równoległe, ale kierunek ich ułożenia odchyła się od założonego kierunku zgodnie z przyjętym rozkładem normalnym (parametr σ). Definicja kątów określających położenie cylindra w ośrodku przedstawiona jest na rysunku 11.

Tak opracowany model umożliwia również badanie kompozytów wielowarstwowych przez zadeklarowanie kolejnych warstw jako kolejnych ośrodków z założeniem, że w każdej warstwie kierunek ułożenia włókien jest jednakowy (możliwe są jedynie odchylenia wokół kierunku głównego, zgodnie z rozkładem normalnym) [56].

Przykładowe wyniki badań symulacyjnych zjawiska wielokrotnego rozproszenia światła w materiale kompozytowym przedstawione są na wykresach. Na rysunku 12a przedstawiono rozkład natężenia światła rozproszonego w próbce jednowarstwowej zawierającej cylindry (włókna) oświetlonej prostopadle ($\Phi = 0^\circ$). Cylindry pochylone są względem krawędzi próbki (oś Ox) o kąt $\vartheta = 30^\circ$, a ich koncentracja objętościowa wynosi 40%. Kierunek ułożenia cylindrów w warstwie zmienia się wokół wartości średniej (ϑ) zgodnie z rozkładem normalnym z parametrem $\sigma = 5^\circ$.



Rys. 12. Mapy natężenia światła rozproszonego w materiale kompozytowym:

a) dla próbki jednowarstwowej b) dla próbki dwuwarstwowej

Fig. 12. The intensity maps of light scattered in composite material:

a) for one-layer sample b) for two-layer sample

Rozkład natężenia światła rozproszonego w próbce dwuwarstwowej przedstawiony jest na rysunku 12b. Położenie włókien w warstwie pierwszej określone jest jako $\vartheta = 0^\circ$, $\Phi = 0^\circ$, 5%, $\sigma = 5^\circ$. Warstwa druga zawiera włókna ułożone prostopadłe do włókien w warstwie pierwszej oraz do wiązki padającej, tj. $\vartheta = 90^\circ$, $\Phi = 0^\circ$, 5%, $\sigma = 5^\circ$. Tak jak poprzednio, cylindry w danej warstwie nie są wzajemnie równoległe, lecz ich położenie zmienia się zgodnie z rozkładem normalnym wokół kierunku średniego (ϑ). Stosunek grubości warstwy pierwszej do drugiej wynosi 1:9.

Badania symulacyjne zjawiska rozproszenia światła w materiale kompozytowym dotyczyły:

- położenia włókien względem wiązki padającej,
- koncentracji włókien w materiale,
- wielkości włókien (średnica włókna),
- względnego współczynnika załamania (materiał cylindra i matrycy)
- względnego położenia włókien (włókna wzajemnie nierównoległe),
- próbek dwuwarstwowych.

W pracy [56] przytoczono najważniejsze wyniki badań symulacyjnych, które dały podstawy do opracowania metody określania położenia i koncentracji włókien w materiale kompozytowym. Inne aspekty, dotyczące zjawiska rozproszenia wielokrotnego, poruszone zostały w pracach [6, 12–16, 60].

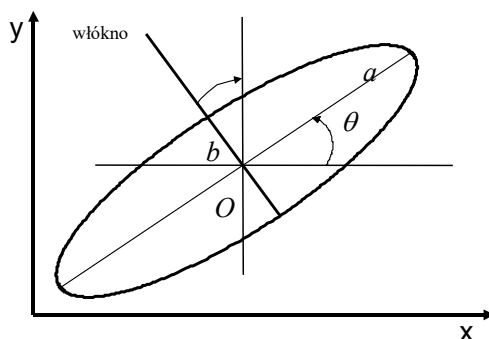
3. METODY ANALIZY

3.1. ZAŁOŻENIA METODY

Opierając się na wynikach badań symulacyjnych oraz obrazów zarejestrowanych przez tor optyczny, opracowano metodę analizy map rozkładów natężenia światła rozproszonego służącą do określania położenia i koncentracji włókien w materiale kompozytowym.

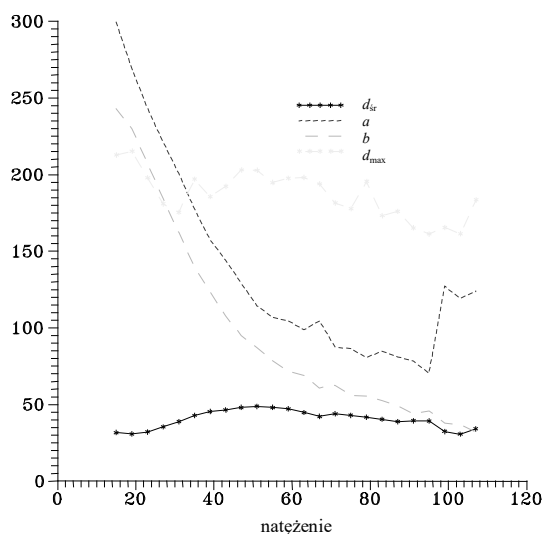
Metoda opiera się na analizie kształtu map rozkładu natężenia światła rozproszonego. Badając zmiany tego rozkładu w funkcji położenia włókien (badania symulacyjne), przyjęto, że rozkład światła rozproszonego, zarejestrowanego przez detektor, można aproksymować elipsą, której parametry są skorelowane z położeniem i koncentracją włókien w materiale kompozytowym. Takie podejście umożliwia zrezygnowanie z pomiarów bezwzględnych (np. natężenia) na rzecz pomiarów względnych (eliptyczność), często łatwiejszych do przeprowadzenia i obciążonych zwykle mniejszym błędem pomiarowym. Parametry poszukiwanej elipsy przedstawione są na rysunku 13. Należą do nich: środek elipsy (O), połowa osi wielkiej (a), połowa osi małej (b), położenie elipsy, czyli kąt θ zawarty między osią odciętych układu współrzędnych i osią wielką elipsy, eliptyczność elipsy, czyli stosunek długości osi wielkiej do małej $e = a/b$, przy czym $e \geq 1$.

Na rysunku 14 przedstawiono zależność długości osi znalezionej elipsy (a i b) oraz jej maksymalnej (d_{\max}) i średniej (d_{sr}) odległości od punktów pomiarowych (kryterium LSM) w funkcji poziomego natężenia tych punktów. Z zależności tej można wyznaczyć wartość natężenia, powyżej którego wyznaczanie elipsy traci sens ($b \rightarrow d_{\text{sr}}$).



Rys. 13. Elipsa aproksymująca rozkład natężenia światła rozproszonego i jej główne parametry

Fig. 13. Ellipse for intensity of light distribution approximation and its main parameters



Rys. 14. Długość osi znalezionej elipsy oraz jej odległości od punktów pomiarowych (kryterium LSM) w funkcji poziomego natężenia tych punktów

Fig. 14. The axes of fitted ellipse and the distances between ellipse and the measurement points versus the intensity of measurement points

3.2. LSM

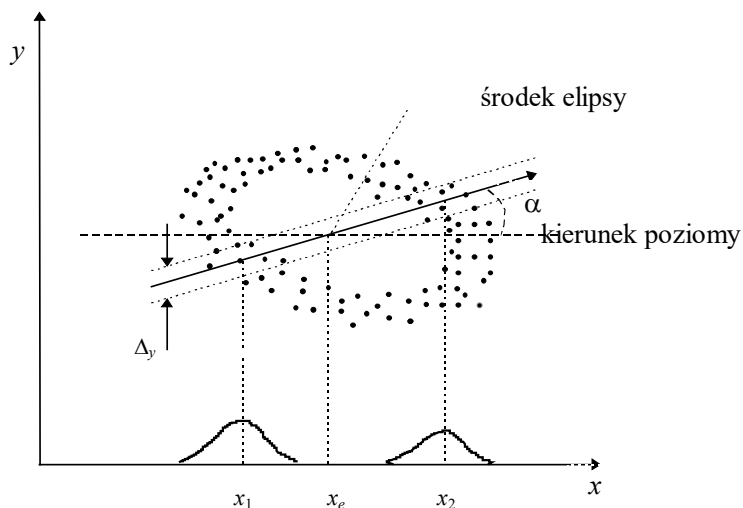
Do poszukiwania elipsy w pierwszym kroku wykorzystano metodę najmniejszych kwadratów (LSM). Poszukiwanie elipsy poprzedzone jest odpowiednim przetwarzaniem obrazu wejściowego. Odrzucane są punkty pomiarowe, których natężenie ma wartość poniżej poziomu szumów i powyżej poziomu nasycenia kamer. Następnie metodą środka ciężkości znajdowany jest środek elipsy. Niestety zastosowanie tej metody bezpośrednio do wszystkich użytecznych punktów obrazu, pomimo dużej szybkości analizy, nie dało zadowalających rezultatów. Znaleziona elipsa, choć spełniała matematyczne kryterium dopasowania, nie oddawała charakteru kształtu przestrzennego rozkładu natężenia światła rozproszonego (rys. 16a).

W celu zwiększenia efektywności dopasowania podzielono punkty pomiarowe na grupy pod względem natężenia. Przykład znalezionej w ten sposób elipsy przedstawiony jest na rysunku 17a. Wprawdzie dopasowanie elipsy jest w tym przypadku nieco lepsze, ale pojawił się problem znacznego zwiększenia czasu obliczeń (wiele przedziałów natężenia, wiele aproksymacji) oraz problem uzyskania jednoznacznego wyniku dopasowania, co wiązało się z uśrednianiem parametrów uzyskanych elips. Ponadto proces dopasowywania stawał się mniej efektywny w centrum rozkładu, gdzie liczba punktów była niewystarczająca. Metodę LSM uzupełniono zatem o specjalną selekcję punktów, tworząc metodę LSMPS.

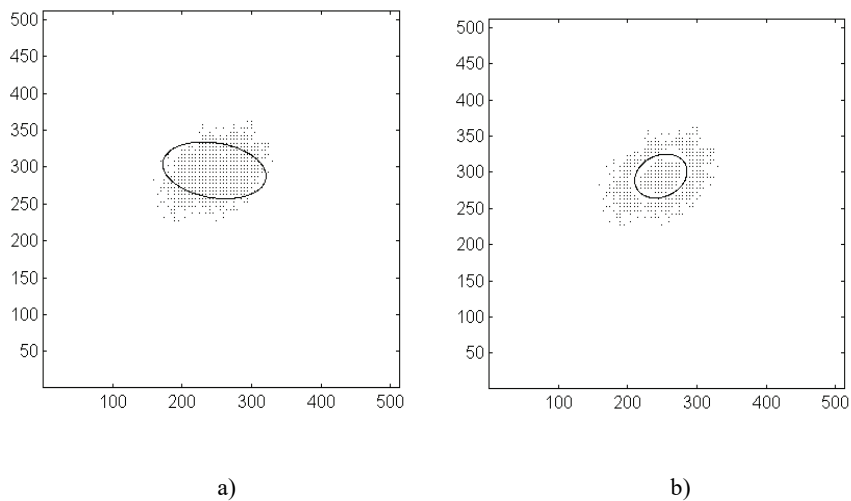
3.3. LSMPS

Metoda ta stanowi rozszerzenie metody LSM o specjalną procedurę selekcji punktów. Idea metody LSMPS opiera się na zastosowaniu w procesie selekcji punktów kryterium rozkładu normalnego (rys. 15). Po wybraniu punktów pomiarowych o odpowiednim natężeniu i znalezieniu środka elipsy określany jest kierunek α i wybrane są punkty leżące na tym kierunku (kryterium Δy). Histogramy wyznaczone dla wybranych w ten sposób punktów umożliwiają wyznaczenie parametrów rozkładu normalnego z wartościami średnimi x_1 i x_2 i odchyleniami standardowymi σ_1 i σ_2 . Spośród znalezionych w ten sposób punktów wybierane są te spełniające warunki $x_1 - \sigma_1 \leq x \leq x_1 + \sigma_1$ oraz $x_2 - \sigma_2 \leq x \leq x_2 + \sigma_2$. Kierunek α zmienia się od 0 do π .

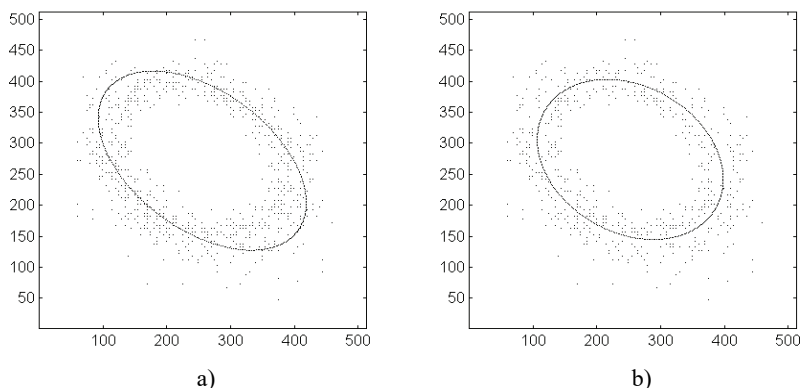
Przykładowa elipsa znalezionej w ten sposób przedstawiona jest na rysunku 17b. Metoda LSMPS okazała się tak efektywna, że można ją było zastosować z powodzeniem jednocześnie do wszystkich punktów rozkładu (rys. 16b).



Rys. 15. Idea selekcji punktów pomiarowych według kryterium rozkładu normalnego
 Fig. 15. Idea of measurement points selections with normal distribution



Rys. 16. Elipsy, reprezentujące kształt rozkładu natężenia światła rozproszonego,
 uzyskane jednocześnie dla wszystkich punktów pomiarowych:
 a) metodą LSM, b) metodą LSMPS
 Fig. 16. The fitted ellipses for all measurement points simultaneously:
 a) for LSM, b) for LSMPS



Rys. 17. Elipsy, reprezentujące kształt rozkładu natężenia światła rozproszonego, uzyskane dla punktów z danego przedziału natężenia: a) metodą LSM, b) metodą LSMPS

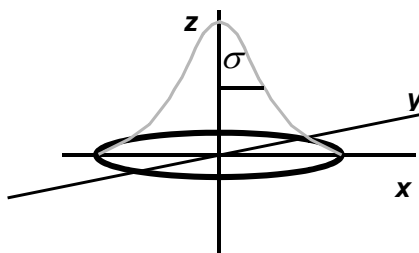
Fig. 17. The fitted ellipses for measurement points from given range of intensity: a) for LSM, b) for LSMPS

3.4. LSMPSG

Zależność eliptyczności w funkcji koncentracji ma niekorzystny charakter wykładniczy (rys. 25a). Uniemożliwia to analizę dla większych wartości koncentracji. Opracowano zatem procedurę opierającą się na analizie wartości względnego natężenia światła rozproszonego.

Procedura wykorzystuje LSMPS, ale poszukuje się w niej najlepiej dopasowanej gaussoidy do natężenia punktów pomiarowych leżących na osi wielkiej znalezionej elipsy. Idea LSMPSG zilustrowana została na rysunku 18.

Dzięki wzbogaceniu metody o procedurę LSMPSG uzyskano korzystniejszą zależność parametru gaussoidy σ od koncentracji włókien w materiale kompozytowym (rys. 26a).



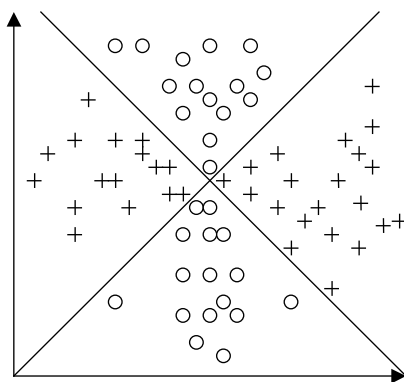
Rys. 18. Metoda LSMPSG.. Poszukuje się najlepiej dopasowanej gaussoidy do natężenia punktów leżących na osi wielkiej znalezionej elipsy

Fig. 18. LSMPSG method. Gaussoid fitting for the intensities of points placed on long axis of fitted ellipse

3.5. PRÓBKIE WIELOWARSTWOWE

Metodę określania położenia i koncentracji włókien w materiale kompozytowym można również zastosować do próbek wielowarstwowych o znanych głównych kierunkach ułożenia włókien w danej warstwie. Stosuje się w takim przypadku wstępną selekcję punktów, wybierając punkty, które tworzą elipsę w danym kierunku.

Dla próbki dwuwarstwowej na przykład – zawierającej włókna ułożone w warstwie pierwszej „pionowo”, a w warstwie drugiej „poziomo” (grubości warstw mogą być różne) – poszukujemy dwóch elips utworzonych przez dwie grupy punktów, dzieląc badaną płaszczyznę na cztery obszary i uwzględniając punkty z przeciwległych obszarów. Analizowanym parametrem jest w tym wypadku stosunek eliptyczności znalezionej elipsy pionowej e_v (rozproszenie od włókien „poziomych”) do eliptyczności znalezionej elipsy poziomej e_h (rozproszenie od włókien „pionowych” (rys. 19)).



Rys. 19. Przykładowy sposób podziału punktów na dwie grupy pochodzące od dwóch warstw włókien

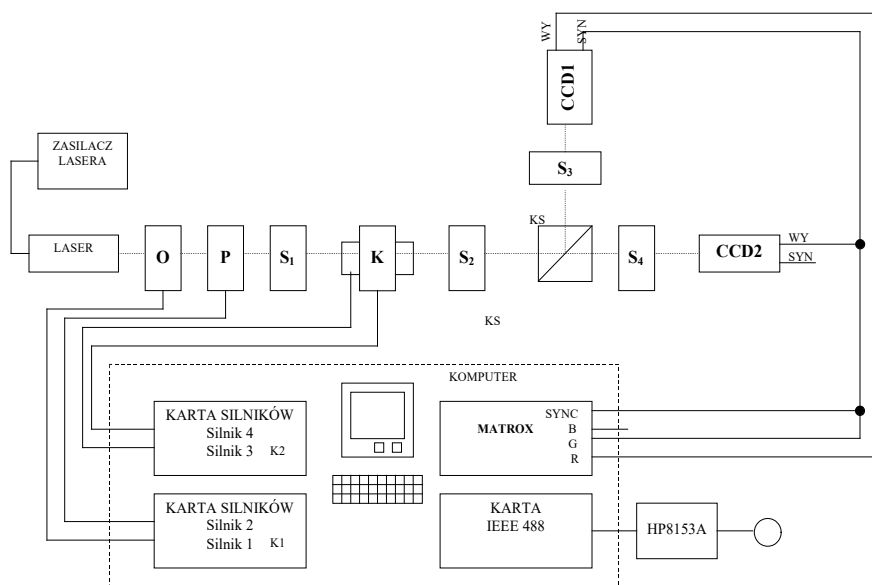
Fig. 19. Example of point selection for different layer of fibres

4. SYSTEM POMIAROWY

4.1. ZAŁOŻENIA KONSTRUKCYJNE

System pomiarowy zapewnia rejestrację dwóch składowych polaryzacyjnych natężenia światła rozproszonego w badanym materiale kompozytowym. Sposób rejestracji umożliwia zarówno cyfrową analizę uzyskanych wyników, jak również ich archiwizację. System gwarantuje także monochromatyczność wiązki oświetlającej (w celu eliminacji dodatkowych zjawisk związanych z dyspersją światła) oraz możliwość zmian położenia kompozytu względem wiązki. Schemat blokowy systemu pomiarowego przedstawiony jest na rysunku 20.

Monochromatyczna wiązka oświetlająca generowana jest przez laser. Natężenie wiązki regulowane jest przez zmianę współczynnika osłabienia filtra osłabiającego (**O**) (sterowanie automatyczne). Następnie wiązka przechodzi przez polaryzator (**P**) sterowany automatycznie, umożliwiający zmianę kąta polaryzacji wiązki. Wiązka jest następnie ogniskowana (soczewka **S₁**) i pada na próbkę materiału kompozytowego umieszczonego w specjalnym uchwycie (**K**), który umożliwia zmianę położenia próbki względem wiązki (sterowanie automatyczne). Światło rozproszone w próbce zbierane jest przez kolimator (**S₂**) i kierowane na kostkę światłodzielącą (**KS**) rozdzielającą dwie składowe polaryzacyjne. Składowe te rejestrowane są w postaci map rozkładu natężenia światła rozproszonego przez dwie monochromatyczne kamery CCD (**CCD1**, **CCD2**) i układów optycznych składających się z soczewek **S₃** i **S₄**.



Rys. 20. Schemat blokowy systemu pomiarowego do rejestracji charakterystyk polaryzacyjnych światła rozproszonego w materiałach kompozytowych

Fig. 20. Block diagram of light scattered in composite materials polarization components registration system

Cały układ umieszczony został na płycie granitowej umieszczonej na stole optycznym o zawieszeniu pneumatycznym. Takie rozwiązanie zapewniło ograniczenie zakłóceń wywoływanych niepożądanymi drganiami podłoża. Całością zarządza odpowiednie oprogramowanie sterujące poszczególnymi elementami toru, umożliwiające również analizę uzyskanych wyników.

Budowa toru pomiarowego obejmuje tor optyczny, układ akwizycji i przetwarzania danych oraz oprogramowanie sterujące.

4.2. TOR OPTYCZNY

Laser

W układzie jako źródło światła zastosowano laser HeNe 117A firmy Spectra-Physics o długości emitowanej fali 632,8 nm, mocy około 1,5 mW i średnicy wiązki 0,5 mm. Laser zasilany jest ze specjalnego zasilacza i może być stabilizowany pod względem częstotliwości lub natężenia. W przeprowadzonych badaniach większe znaczenie miała stabilizacja natężenia. Laser umieszczono na płycie granitowej w specjalnym uchwycie umożliwiającym precyzyjną regulację kierunku emitowanej wiązki.

Filtr osłabiający

Ponieważ zasilacz lasera nie umożliwia regulacji natężenia emitowanej wiązki, zastosowano zestaw płytek osłabiających o różnych współczynnikach osłabienia umieszczonych na stoliku przesuwym sterowanym silnikiem krokowym. Zestaw płytek zapewnił sześciopozomową regulację natężenia wiązki. Regulacja natężenia lasera umożliwiała uniknięcie efektu nasycenia zastosowanych przetworników CCD przy efektywnym wykorzystaniu dynamiki sygnału.

Polaryzator

Zastosowany polaryzator liniowy umieszczony w uchwycie obrotowym sterowanym silnikiem krokowym zmieniał polaryzację wiązki padającej od fali TM (polaryzacja równoległa) do fali TE (polaryzacja prostopadła). Zastosowany silnik krokowy i opracowane oprogramowanie umożliwiały zmianę kąta polaryzacji z krokiem 1° .

Soczewka ogniskująca

Soczewka ogniskująca umieszczona przed próbką ma za zadanie zogniskowanie wiązki w próbce. Taki zabieg zwiększa rejestrowane efekty rozproszeniowe, które można było zaobserwować w obszarze o mniejszej powierzchni. Soczewka ogniskująca umieszczona została na zestawie trzech stolików przesuwnych, umożliwiających jej precyzyjne ustawienie w torze pomiarowym (śruby mikrometryczne). Jako soczewki ogniskujące zastosowano obiektywy mikroskopowe o różnych ogniskowych.

Uchwyt próbki

Badana próbka materiału kompozytowego umieszczana była w specjalnym uchwycie. Konstrukcja uchwytu zapewniała regulację położenia próbki względem padającej wiązki. Możliwe było zatem przesuwanie próbki poziomo w płaszczyźnie prostopadłej do padającej wiązki (silnik krokowy – rozdzielczość 2,5 μm), obrót próbki względem osi optycznej układu pomiarowego (regulacja ręczna – rozdzielczość 1°) oraz pochylanie próbki w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny padania, tj. obrót względem osi prostopadłej do osi optycznej toru pomiarowego (silnik krokowy – rozdzielczość 1°). Ponadto, dzięki zastosowaniu pionowego stolika przesuwnego, możliwe było również przesuwanie próbki w osi pionowej (śruba mikrometryczna rozdzielczość 0,01 mm).

Soczewka zbierająca

Zadaniem soczewki zbierającej (kolimatora) jest rejestrowanie światła rozproszonego z badanego obszaru próbki. Parametry kolimatora, wraz z parametrami soczewek ogniskujących dla kamer CCD, decydują o powiększeniu rejestrowanego obrazu, co wpływa na rozdzielczość analizy materiału. Kolimator umieszczony został na zestawie trzech stolików przesuwanych regulowanych śrubami mikrometrycznymi (rozdzielczość ustawienia 0.01mm) zapewniającym jego precyzyjne ustawienie w trzech płaszczyznach.

Kostka światłodziela

Kostka światłodziela rozdziela składowe polaryzacyjne światła rozproszonego. Kostka została umieszczona w specjalnym uchwycie na pręcie w kolumnie zapewniającym jej precyzyjne ustawienie.

Soczewki ogniskujące dla CCD

Soczewki ogniskujące rzutują rejestrowany przez kolimator obraz światła rozproszonego na przetworniki CCD kamer telewizyjnych. Umieszczone zostały na zestawach trzech stolików przesuwanych, zapewniających ich precyzyjne pozycjonowanie w torze optycznym.

Kamery CCD

Do rejestracji obrazów światła rozproszonego zastosowano dwie monochromatyczne kamery CCD. Kamery te charakteryzują się dobrymi parametrami elektrycznymi (odstęp sygnał/ szum – ponad 56dB) i zapewniają rejestrację obrazu w rozdzielczości 768×576 punktów i 256 poziomami natężenia (8 bitów). Kamery połączone są z kartą przechwytyjącą przez wejście RGB. Kamerę rejestrującą składową polaryzacyjną równoległą (TM) podłączono do wejścia R, natomiast kamerę rejestrującą składową polaryzacyjną prostopadłą (TE) podłączono do wejścia G. Kamery są ponadto zewnętrznie zsynchronizowane ze sobą, co gwarantuje jednoczesną rejestrację obu składowych polaryzacyjnych.

4.3. UKŁAD AKWIZYCJI I PRZETWARZANIA DANYCH

W skład układu akwizycji i przetwarzania danych wchodzi system komputerowy, karta przechwytyjąca obraz z kamer CCD, karty sterowników silników krokowych oraz miernik mocy optycznej.

System komputerowy

System komputerowy stanowi komputer PC Pentium II 300MHz, HDD 4.3GB wraz z odpowiednimi kartami rozszerzeń. Zadaniem systemu jest kontrola procesu pomiarowego oraz analiza i archiwizacja danych pomiarowych.

Karta przechwytyjąca obraz z kamer CCD

Zastosowano kartę firmy MATROX METEOR RGB – karta umożliwia synchroniczną rejestrację obrazu z obu kamer dzięki podłączeniu ich do wejść RGB. W ten sposób możliwy jest zapis wyników z obu kamer do jednego pliku, przy czym skła-

dowa polaryzacyjna równoległa (TM) odpowiada składowej R, natomiast składowa polaryzacyjna prostopadła (TE) odpowiada składowej G. Takie rozwiązanie eliminuje zakłócenia związane z ewentualnym opóźnieniem rejestracji obrazu z poszczególnych kamer oraz ułatwia archiwizację i analizę wyników.

Karta sterująca silnikami krokowymi

Karty pracują jako karty rozszerzeń do komputera. Zastosowano dwie karty tego typu (**K1**, **K2**). Każda z nich umożliwia sterowanie dwoma silnikami krokowymi w trybie pełnokrokowym i półkrokowym. Zapewniło to możliwość sterowania natężeniem wiązki padającej (**O**), zmianę jej polaryzacji (**P**) oraz kontrolę położenia próbki względem wiązki (**K**).

Miernik mocy optycznej

Wykorzystano Lightwave Multimeter 8153A firmy Hewlett-Packard. Dzięki zastosowaniu karty interfejsu IEEE-488.2 (karta HPIB) możliwa stała się kontrola natężenia wiązki padającej w różnych punktach toru pomiarowego.

4.4. OPROGRAMOWANIE STERUJĄCE

W skład oprogramowania toru pomiarowego wchodzi program *System.exe* oraz zestaw skryptów w języku MATLAB.

Program system.exe

Program napisany został w języku C++ dla środowiska Windows 95/98. Jego zadaniem jest zapewnienie sterowania poszczególnymi elementami toru pomiarowego, tj. natężeniem wiązki padającej z lasera, polaryzacją tej wiązki oraz położeniem próbki względem wiązki (przesunięcie i pochylenie). Program ten umożliwia również obsługę akwizycji obrazów rozkładów natężenia światła rozproszonego rejestrowanych przez dwie kamery CCD dla dwóch składowych polaryzacyjnych. Możliwe jest zatem m.in. zapisanie zarejestrowanych obrazów do plików typu *.BMP* w celu późniejszej obróbki.

Zestaw skryptów dla środowiska MATLAB

Zestaw skryptów dla środowiska MATLAB przeznaczony jest do obróbki wyników pomiarów uzyskanych za pomocą programu *System.exe*. Skrypty umożliwiają:

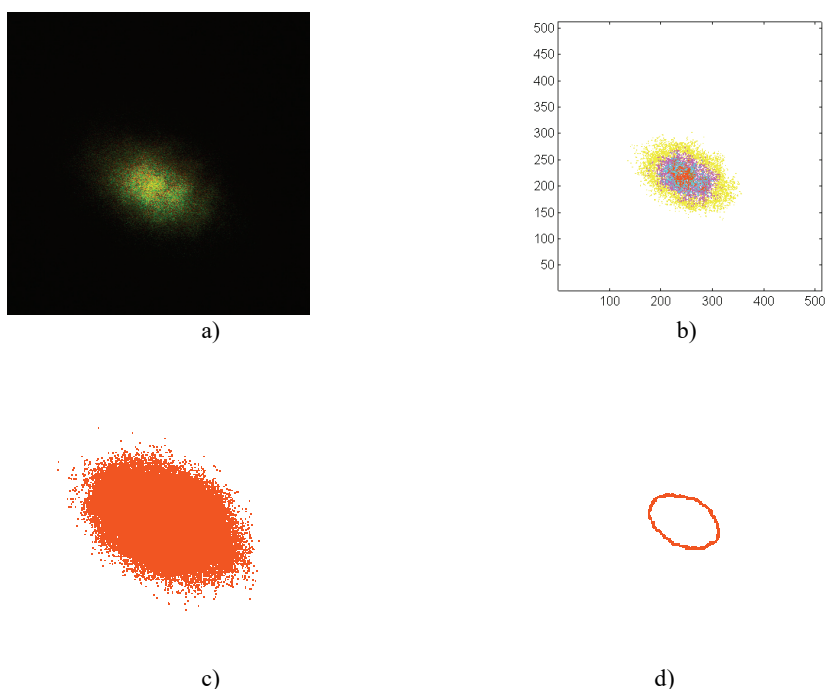
- zamianę pliku typu **.BMP* zawierającego obrazy światła rozproszonego na wartości natężenia składowych polaryzacyjnych, które zapisywane są w formie tabel zawierających współrzędne punktu i jego natężenie,
- eliminację punktów o natężeniu poniżej poziomu szumu oraz powyżej poziomu nasycenia,
- selekcję punktów z zadanych przedziałów natężenia,
- realizację metod analizy położenia i koncentracji włókien w materiale kompozytowym na podstawie zarejestrowanych map rozproszenia opisanych w rozdziale 3,
- wizualizację uzyskanych wyników.

5. WYNIKI POMIARÓW

Poniżej przedstawiono przykładowe obrazy rozkładu natężenia światła rozproszonego zarejestrowane przez przedstawiony system pomiarowy oraz przykłady wizualizacji i analizy wyników pomiaru. Różne aspekty związane z symulacjami, budową systemu pomiarowego oraz wynikami można znaleźć w [21–24, 46, 59, 61].

5.1. PRZYKŁADOWE MAPY ROZPROSZENIA

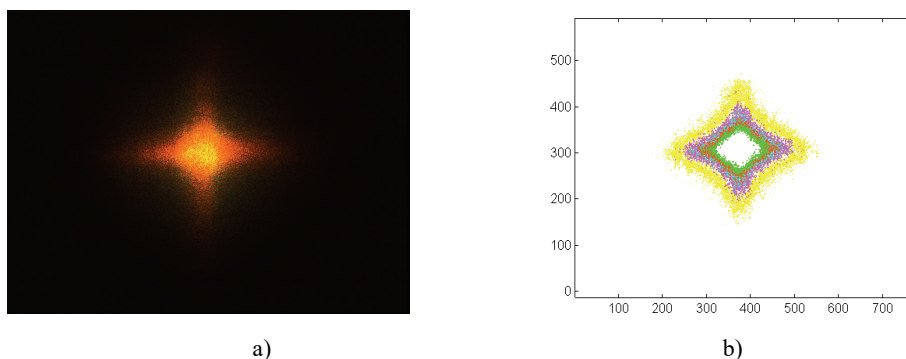
Na rysunku 21a przedstawiono obraz rozkładu natężenia światła rozproszonego zarejestrowanego przez kamery CCD dla obu składowych polaryzacyjnych w przypadku próbki jednowarstwowej (tzn. włókna są w niej ułożone w jednym kierunku – są wzajemnie równoległe). Na rysunku 21b pokazano wizualizację rozkładu natężenia światła dla jednej ze składowych polaryzacyjnych (TM) zapisanej w pliku graficznym.



Rys. 21. Przykłady wizualizacji dla próbki jednowarstwowej: a) obraz z kamer CCD, b) wizualizacja rozkładu natężenia światła rozproszonego – składowa TM, c) użyteczne punkty pomiarowe, d) wybrane punkty pomiarowe LSMPS

Fig. 21. Example of visualization for one-layer sample: a) image from CCD cameras, b) visualization of scattered light intensity distribution for TM polarization component, c) measurement points d) measurement points selected with LSMPS

Położenie wybranych punktów pomiarowych z zakresu użytecznego, tj. powyżej poziomu szumów (natężenie > 25) i poniżej poziomu nasycenia (natężenie < 240) dla tej składowej przedstawione zostało na rysunku 21c. Na rysunku 21d przedstawiono z kolei wyselekcjonowane z użyciem metody LSMPS punkty pomiarowe, na podstawie których wyznacza się najlepiej dopasowaną elipsę.



Rys. 22. Przykład rejestracji dla próbki dwuwarstwowej: a) obraz rozproszenia z kamery CCD, b) wizualizacja rozkładu natężenia światła rozproszonego – składowa TM

Fig. 22. Example of recorded image for two-layer sample: a) image of scattering from CCD, b) visualization of scattered light intensity distribution for TM polarization component

Na rysunku 22 zaprezentowano obraz zarejestrowany przez kamery CCD oraz mapę rozkładu natężenia światła rozproszonego dla próbki dwuwarstwowej, w której w jednej warstwie włókna ułożone są w kierunku $\vartheta = 0^\circ$, $\Phi = 0^\circ$, natomiast w drugiej $\vartheta = 90^\circ$, $\Phi = 0^\circ$. Stosunek grubości warstw wynosi 1.

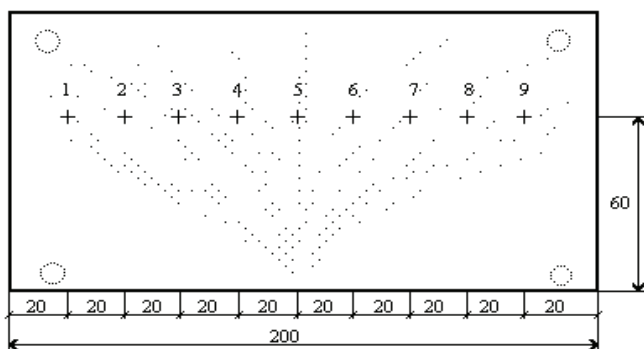
5.2. PRÓBKA JEDNOWARSTWOWA

Przedmiotem badań były próbki jednowarstwowe o różnej koncentracji objętościowej (5–40%) i orientacji włókien. Przykładową próbkę jednowarstwową typu L przedstawiono na rysunku 23. Na rysunku zaznaczono punkty pomiarowe 1, ..., 9 oraz orientacyjny kierunek ułożenia włókien w próbce. Grubość próbki wynosi 5 mm.

Na zamieszczonych wykresach przedstawiono wyniki badań przeprowadzonych z wykorzystaniem opisanej metody określania położenia i koncentracji włókien w materiale kompozytowym.

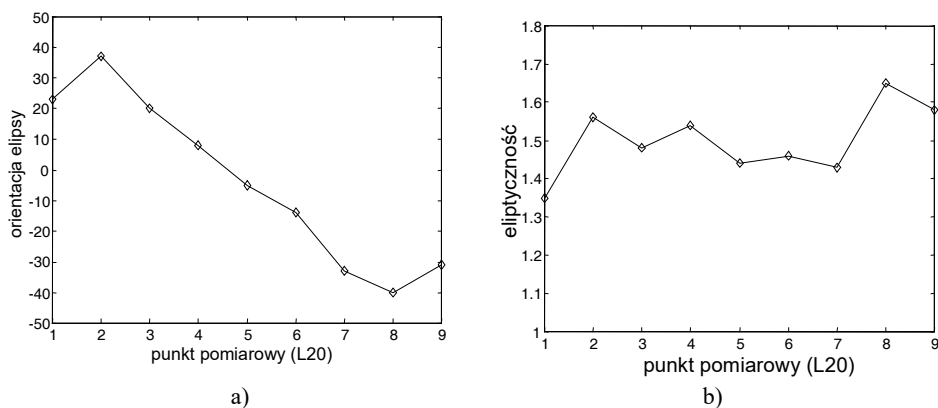
Położenie elipsy jest zależne od położenia włókien w próbce (rys. 24a). Oś wielka elipsy jest prostopadła do osi symetrii włókien. Warto zauważyć, że zmiany położenia włókien (w płaszczyźnie prostopadłej do wiązki oświetlającej) bez zmiany koncentracji nie wpływają na eliptyczność elipsy (rys. 24b). Widoczne odchylenia eliptyczności są wynikiem lokalnych zaburzeń położenia włókien.

Istnieje natomiast silna zależność eliptyczności znalezionej elipsy od koncentracji włókien, która jednak nie może być wykorzystana w przypadku dużych wartości koncentracji, ze względu na jej wykładniczy charakter (rys. 25a). Wykorzystując jednak procedurę LSMPSG, można znaleźć korzystną zależność wyznaczonego parametru σ od koncentracji (rys. 26a), przy czym parametr σ nie zależy od położenia włókien, a jedynie od ich koncentracji (rys. 26b). Można też zauważyć, że eliptyczność znalezionej elipsy nie zależy od położenia włókien (gdy są one wzajemnie równoległe), a widoczne odchylenia wynikają z lokalnych zmian koncentracji włókien (rys. 25b).



Rys. 23. Jednowarstwowa próbka materiału kompozytowego L

Fig. 23. One-layer sample of composite material L



Rys. 24. Analiza LSMPS dla wszystkich punktów pomiarowych:

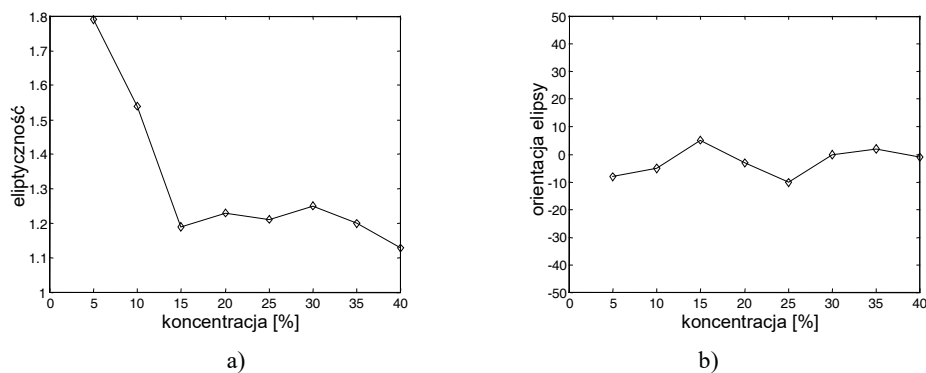
a) kąt położenia znalezionej elipsy w funkcji ułożenia włókien,

b) eliptyczność znalezionej elipsy w funkcji ułożenia włókien

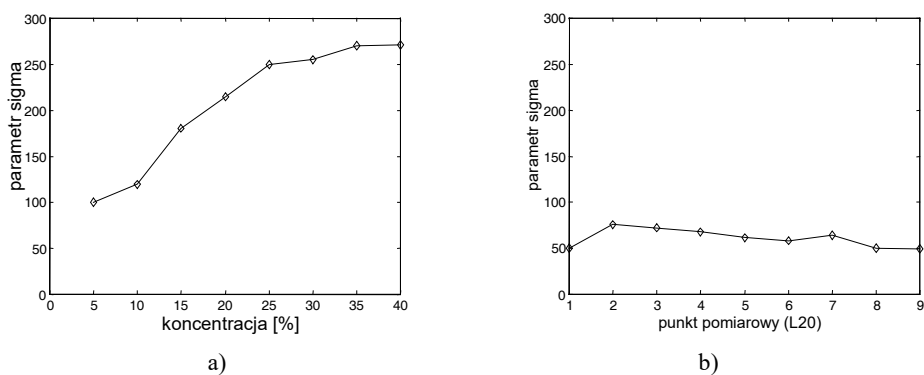
Fig. 24. LSMPS analysis for all measurement points:

a) ellipse orientation versus fibre orientation,

b) ellipticity of fitted ellipse versus fibre orientation



Rys. 25. Analiza LSMPS dla wszystkich punktów pomiarowych: a) eliptyczność znalezionej elipsy w funkcji koncentracji objętościowej włókien, b) położenie znalezionej elipsy w funkcji koncentracji objętościowej włókien
 Fig. 25. LSMPS analysis for all measurement points: a) ellipticity of fitted ellipse versus volume concentration of fibres b) ellipse orientation versus volume concentration of fibres



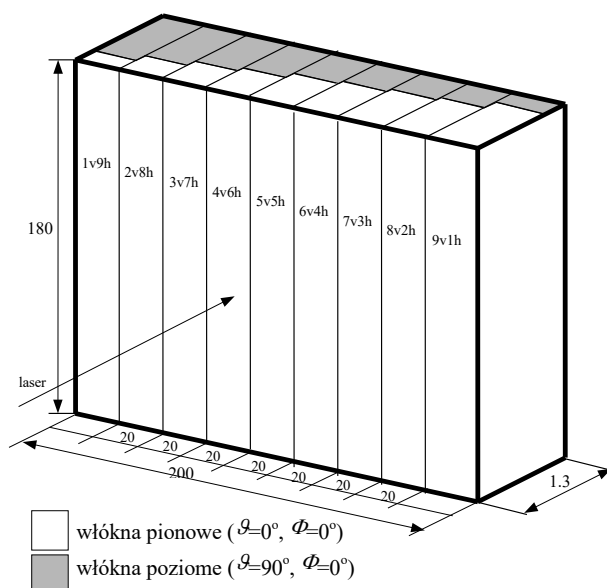
Rys. 26. Analiza LSMPSG dla wszystkich punktów pomiarowych:
 a) parametr σ znalezionej gaussoidy w funkcji koncentracji objętościowej włókien,
 b) parametr σ znalezionej gaussoidy w funkcji ułożenia włókien
 Fig. 26. LSMPSG analysis for all measurement points:
 a) parameter σ of fitted gaussian versus volume concentration of fibres,
 b) parameter σ of fitted gaussian versus fibres arrangement

5.3. PRÓBKA WIELOWARSTWOWA

Badaniom poddano również próbki wielowarstwowe. Możliwa jest również analiza próbek dwuwarstwowych o predefiniowanych kierunkach ułożenia włókien w danej warstwie w celu wyznaczenia stosunku grubości warstw. Analizuje się w tym celu stosunek eliptyczności elips znalezionych na podstawie rozkładu natężenia światła rozproszonego przez poszczególne warstwy (rys. 19).

Na rysunku 27 przedstawiono próbkę dziesięciowarstwową. W próbce tej wyróżnić można obszary o różnym stosunku liczby (grubości) warstw zawierających włókna ułożone w danym kierunku (w płaszczyźnie próbki, tj. prostopadłej do kierunku wiązki padającej). Oznaczona na rysunku strefa 1v9h oznacza jedną warstwę włókien ułożonych „pionowo” ($\vartheta = 0^\circ$, $\Phi = 0^\circ$) i 9 warstw włókien ułożonych „poziomo”, $\vartheta = 90^\circ$, $\Phi = 0^\circ$ (ozn. na rys. 11). Próbkę taką możemy też rozpatrywać jako dwuwarstwową o różnym stosunku grubości warstw. Koncentracja objętościowa włókien w próbce wynosiła 30%.

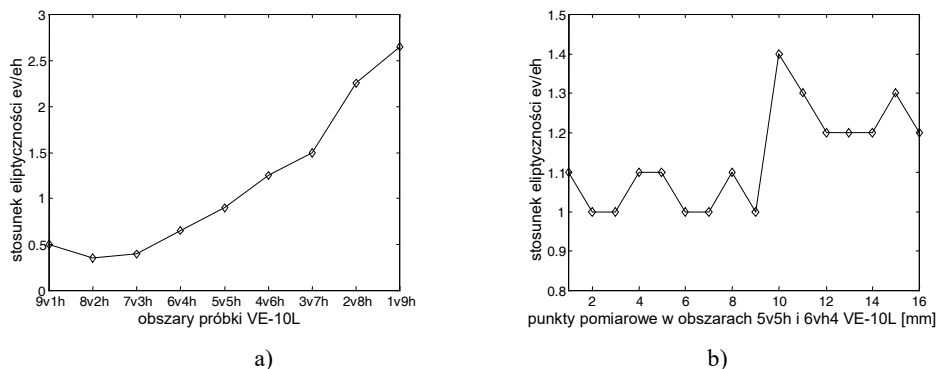
Zależność stosunku eliptyczności znalezionych elips w funkcji stosunku grubości warstwy włókien ($\vartheta = 0^\circ$, $\Phi = 0^\circ$) do warstwy włókien ($\vartheta = 90^\circ$, $\Phi = 0^\circ$) wyznaczona za pomocą metody LSMPS przedstawiona jest na rysunku 28a.



Rys. 27. Wielowarstwowa próbka materiału kompozytowego VE-10L o koncentracji włókien 30% i różnym stosunku liczby warstw zawierających włókna wzajemnie równoległe

Fig. 27. Sample of two-layer composite material VE-10L. Volume fiber concentration 30% with different thickness ratio for layers with the fibers parallel each to other

Z użyciem przedstawionej metody możliwa jest również detekcja granicy obszarów o różnym stosunku grubości warstw włókien. Przykład takiej analizy przedstawiono na rysunku 28b; przedstawiono stosunek eliptyczności znalezionych elips dla punktów pomiarowych rozmieszczonych przy przejściu ze strefy 5v5h do strefy 6v4h próbki VE-10L, czyli przy 10% względnej zmianie grubości warstw. Na uwagę zasługuje możliwość detekcji granicy pomiędzy strefami z rozdzielczością poniżej milimetra.



Rys. 28. Analiza LSMPs dla próbki VE-10L o różnym stosunku grubości warstw:

- a) stosunek eliptyczności znalezionych elips, b) stosunek eliptyczności znalezionych elips dla punktów pomiarowych na granicy obszarów 5v5h i 6v4h

Fig. 28. LSMPs analysis for VE-10L sample for different thickness ratio: a) ellipticity ratio of found ellipses, b) ellipticity ratio of fitted ellipses for measurement points of 5v5h/6v4h zone

6. PODSUMOWANIE

Realizację projektu rozpoczęto od opracowania modelu zjawiska rozproszenia światła w materiale kompozytowym. Pierwszym krokiem było opracowanie modelu rozproszenia fali płaskiej na pojedynczym nieskończenie długim cylindrze, który reprezentował jedno włókno w materiale kompozytowym. Stworzono model, który uwzględnia zarówno charakter fali płaskiej (długość fali, stan polaryzacji), jak również parametry cząstki (cylindra), takie jak wielkość (średnica cylindra), materiał (względny współczynnik załamania cylindra i ośrodka) oraz położenie cząstki względem wiązki oświetlającej. Parametrami wyjściowymi modelu były charakterystyki polaryzacyjne światła rozproszonego (natężenie składowych polaryzacyjnych światła rozproszonego w funkcji kąta rozproszenia).

Pomimo dość dużego uproszczenia zjawiska, model ten dostarczył w trakcie symulacji wiele istotnych informacji na temat charakteru badanego zjawiska, co umożliwiło opracowanie wstępnych założeń dotyczących metody określania położenia włókna względem wiązki padającej.

Kolejnym krokiem było opracowanie modelu uwzględniającego kształt wiązki oświetlającej cylinder. W modelu tym przyjęto, że natężenie w przekroju poprzecznym wiązki oświetlającej ma charakter rozkładu normalnego. Taki zabieg umożliwił zasympulowanie zarówno przypadku opisanego poprzednim modelem (gdy średnica wiązki była znacznie większa od rozpatrywanej cząstki – cylindra), jak i przypadek w którym położenie cylindra w wiązce miało wpływ na rozkłady natężenia światła rozproszonego. Analiza przeprowadzonych badań symulacyjnych potwierdziła potencjalną możliwość

identyfikacji położenia cząstek w wiązce z zachowaniem warunku, w którym badana cząstka jest znacznie większa od oświetlającej ją wiązki. W praktyce jednak nie znalazło to zastosowania w przypadku materiałów kompozytowych, ze względu na znaczne efekty uśredniające związane ze zjawiskiem rozproszenia wielokrotnego.

Ostatnim krokiem w realizacji części teoretycznej projektu było opracowanie kompleksowego modelu rozproszenia światła w materiale kompozytowym. Model ten, obok parametrów określających charakter ośrodka dyspersyjnego i fali padającej (tak jak było to na przykład w poprzednich modelach), uwzględnia również pełną geometrię zjawiska, czyli zarówno wielkości i położenia źródła, próbki materiału i detektora, jak również koncentrację cząstek w materiale, a nawet nierównomierność rozłożenia włókien w kompozycie (odchylenia włókien od pewnego głównego kierunku ich ułożenia w obrębie jednego ośrodka dyspersyjnego). Model ten, oparty na statystycznej metodzie Monte Carlo umożliwił pełniejszy opis zjawiska i dostarczył bardzo wartościowych informacji na temat zjawiska, które wykorzystane zostały do opracowania metody określania położenia i koncentracji włókien w materiałach kompozytowych.

Opracowana metoda oparta jest na analizie kształtu przestrzennego rozkładu natężenia światła rozproszonego rejestrowanego przez detektor umieszczony za próbką.

Badania symulacyjne wykazały, że rozkład światła rozpraszanego przez kompozyt przyjmuje kształt owalny zbliżony do elipsy, której parametry, takie jak położenie i eliptyczność, zależą od położenia i koncentracji włókien. Kierunek wielkiej osi był prostopadły do głównego kierunku ułożenia włókien. Kształt elipsy skorelowany był natomiast z położeniem włókien i ich koncentracją. W przypadku niewielkich koncentracji eliptyczność przyjmowała większe wartości i malała wraz ze wzrostem koncentracji, co wynikało z nasilenia się zjawiska rozproszenia wielokrotnego. Wyniki badań symulacyjnych znalazły potwierdzenie w praktycznych pomiarach.

Poszukiwanie elipsy, która najlepiej odwzorowałaby kształt rozkładu prostymi metodami algebraicznymi (metoda najmniejszych kwadratów) nie dało oczekiwanych rezultatów, dlatego opracowano specjalne procedury selekcji punktów pomiarowych z wykorzystaniem rozkładu normalnego. Uzyskano w ten sposób bardziej stabilne wyniki, a tym samym silniejszą korelację z badanymi parametrami. Ponadto opracowano procedury aproksymacji rozkładu natężenia na osi wielkiej znalezionej elipsy rozkładem normalnym (parametr σ), w celu poprawy niekorzystnej, silnie wykładniczej zależności eliptyczności od koncentracji włókien. Opracowana metoda, dzięki stworzonym procedurom podziału punktów pomiarowych, nadaje się również do określania stosunku grubości dwóch warstw kompozytu zawierających włókna ułożone wzajemnie prostopadłe w płaszczyźnie próbki.

W wyniku przeprowadzonych prac konstrukcyjno-eksperymentalnych, na podstawie wyników badań symulacyjnych, zbudowano eksperymentalny system pomiarowy do rejestracji charakterystyk polaryzacyjnych światła rozproszonego w kompozytach. Pomiaru próbek materiałów kompozytowych zawierających włókna wykazały zgodność z wynikami badań symulacyjnych oraz przydatność opracowanej metody.

LITERATURA

- [1] BAUER A. IVANOFF, *Au sujet de la mesure du coefficient de diffusion de la lumiere par les eaux de la mer pour de angles compris entre 14 et 1°30'*, C. R. Acad. Sci. Paris, T. 260 (11 Jan. 1965), Group 10, p. 631–634.
- [2] BEVIS M.J., ALLAN P.S., HOLDEN A., BUSSE G., DIENER L., *Monitoring the multiple live feed moulding process with microwave orientation imaging*, translated from *Kunststoffe German Plastics*, 1992, 82(2), 135–138.
- [3] BOHREN C.F., HUFFMAN D.R., *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, Wiley-Interscience, New York, 1983.
- [4] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Application of the discrete Fourier transform linear interpolation method in the measurement of volume scattering function at small angle*, Optical Engineering, Vol. 39 No. 6, June 2000, 1576–1586, SPIE – The International Society for Optical Engineering.
- [5] BORKOWSKI J., *LIDFT – the DFT linear interpolation method*, IEEE Trans. Instrum. Meas., August 2000, Vol. 49, No. 4, 741–745.
- [6] BRITON J.P., MAHEU B., GREHAN G., GOUSBET G., *Monte Carlo simulation of multiple scattering in arbitrary 3-D geometry*, Part. Part. Syst. Charact., 1992, 9, 52–58.
- [7] BUSSE G., WU D., KARPEN W., *Thermal-wave imaging with phase sensitive modulated thermograph*, J. Appl. Phys., 1992, 71(8), 3962–3965.
- [8] CHANDRASEKHAR S., *Radiative Transfer*, Oxford U. P., London, 1950.
- [9] CILAS – Compagnie Industrielle des Lasers, *HR 850 high resolution sub-micron granulometr*, Route de Nozay 91460, Marcoussie, France.
- [10] COKE D., KERKER M., *Light scattering from long thin glass cylinders at oblique incidence*, J.O.S.A., 1969, 59 (1), 43–48.
- [11] CORNILLAUT J., *Particle size analysis by laser*, W Proc. Inter. Conference on Powder and Bulk Solids Handling and Processing, Philadelphia, May 1979.
- [12] CZERWIŃSKI M., MROCZKA J., *4 flux model in real disperse media examination: the results of computer simulation*, National conference Computer Added Metrology, Zegrze 19-22/05/1997 (in polish).
- [13] CZERWIŃSKI M., MROCZKA J., REN K. F., GIRASOLE T., GREHAN G., GOUSBET G., *Scattered Light Predictions Under Multiple Scattering Conditions with Application to Inversion Scheme*, 7th European Symposium Particle Characterisation, Nürnberg, Germany, 10–12 March 1998, 507–516.
- [14] CZERWIŃSKI M., MROCZKA J., WYSOCZAŃSKI D., *Inverse Problem in Terms of Multiple Light Scattering – Hybrid Method Application*, 10th International Workshop on Multiple Scattering Lidar Experiments MUSCLE 10, Italy, Florence, April 19–22 1999, Proceedings of MUSCLE 10, University of Florence 1999, 257–263.
- [15] CZERWIŃSKI M., MROCZKA J., GIRASOLE T., GOUESBET G., GREHAN G., *Light Transmittance Predictions Under Multiple Light Scattering Conditions. Part 1: Direct Problem – Hybrid Method Approximation*, Applied Optics, 2001, Vol. 40, 9, 1514–1524.
- [16] CZERWIŃSKI M., MROCZKA J., GIRASOLE T., GOUESBET G., GREAHN G., *Light Transmittance Predictions Under Multiple Light Scattering Conditions. Part 2: Inverse Problem – Particle Size Determination*, Applied Optics, 2001, Vol. 40, 9, 1525–1531.
- [17] DEBYE P., *Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigen Material*, Ann. Phys. (Leipzig) 4, 1909, No. 30, 57–136.
- [18] DODGE L., *Change of calibration of diffraction-based particle sizers in dense sprays*, Opt. Eng., 1984, Vol. 23, No. 5, 626–630.
- [19] DUNTLEY S.Q., *Light in the sea*, J. Opt. Soc. Am., 1963, Vol. 53, 214–233.

- [20] GAUCHET N., GIRASOLE T., REN K.F., GREHAN G., G. GOUESBET, *Applications of Generalized Lorenz-Mie Theory for cylinder to cylindrical characteristics by Phase Doppler Anemometers*, Optical Diagnosis in Engineering, 1997, Vol. 2 (1), 1–10.
- [21] GIRASOLE T., GOUESBET G., GREHAN G., LE TOULOUZAN J.N., MROCZKA J., REN K.F., WYSOCZAŃSKI D., *On fiber orientation diagnosis by light scattering: simulations and experimental results.*, PARTEC 95, 4th International Congress Optical Particle Sizing, Nürnberg, Germany, 21–23 March 1995, 429–438.
- [22] GIRASOLE T., LE TOULOUZAN J.N., MROCZKA J., WYSOCZAŃSKI D., *Fiber orientation and concentration analysis by light scattering: Experimental setup and diagnosis*, Rev. Sci. Instrum., July 1997, 68 (7), 2805–2811.
- [23] GIRASOLE T., BULTYNCK, H., GOUESBET, G., GREHAN G., LE MEUR, F., LE TOULOUZAN, J.N., MROCZKA J., REN K.F., ROSE C., WYSOCZAŃSKI D., *Cylindrical Fibre Orientation Analysis by Light Scattering. Part 1: Numerical Aspects*, Part. Part. Syst. Charact. 1997, Vol. 14, 163–174.
- [24] GIRASOLE T., GOUESBET G., GREHAN G., LE TOULOUZAN J.N., MROCZKA J., REN K.F., WYSOCZAŃSKI D., *Cylindrical Fibre Orientation Analysis by Light Scattering. Part 2: Experimental Aspects*, Part. Syst. Charact., 1997, Vol. 14, 211–218.
- [25] GOUESBET G., MAHEU B., GREHAN G., *Single scattering characteristics of volume elements in coal clouds*, Applied Optics, 1983, 22, 13, 2038–2050
- [26] GOUESBET G., GREHAN G., MAHEU B., *Generalized Lorenz-Mie Theory and Applications to Optical Sizing, in Norman Chigier, Combustion Measurements*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, Washington, Philadelphia, London, 1991, Chapter 10, 339–384.
- [27] GOUESBET G., MAHEU B., LE TOULOUZAN J.N., *Simulation of particle multiple scattering and applications to particle diagnostics*, in Heat Transfer in radiating and combusting systems, M.G. Carvalho, F. Lockwood, J. Taine, eds. Springer-Verlag, 1991, 173–185.
- [28] GOUESBET G. *Generalized Lorenz-Mie theory and applications*, Part. Syst. Charact., 1994, 11, 12–34
- [29] GOUESBET G., *Interaction between Gaussian beams and infinite cylinders, by using the theory of distributions*, J. of Optics (Paris), 1995, Vol. 26(5), 225–239.
- [30] HAYASHI S., *A Laser Small-Angle Scattering Instrument for the Determination of Size and Concentration Distributions in Sprays*, Liquid Particle Size Measurement Techniques: 2nd Volume, ASTM STP 1083, E. Dan Hirleman, W.D. Bachalo, and P.G. Felton, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1990, 77–92.
- [31] JERLOV N.G., *Optical measurements in the Eastern North Atlantic*, Medd. Oceanogr. Inst. Göteborg, Ser. B, 1961, 8, 1–39.
- [32] KAY S.M., *Modern Spectrum Analysis*, Prentice-Hall, New York, 1987.
- [33] KERKER M., *The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation*, Academic Press, New York, 1969.
- [34] KULLENBERG G., *Scattering of light by Sargassa sea water*, Deep. Sea Res., 1968, Vol. 15, 423–432.
- [35] LETTIERI T.R., JENKINS W.D., SWYT D.A., *Sizing of individual optically levitated evaporating droplets by measurement of resonances in the polarization ratio*, Appl. Opt., 1981, 20 (16), 2799–2805.
- [36] MAHEU B., GOUESBET G., *Four flux models to solve the scattering transfer equation: special cases*, Applied Optics, 1984, Vol. 25, No. 7.
- [37] MAHEU B., LE TOULOUZAN J.N., GOUESBET G., *Four-flux models to solve the scattering transfer equation in terms of Lorenz-Mie parameters*, Applied Optics, 1984, Vol. 23 (No. 19), 3353–3362. J.N.

- [38] MAHEU B., Briton J.P., GOUESBET G., *Four-flux model and a Monte-Carlo code: comparisons between two simple and complementary tools for multiple scattering calculations*, Appl. Opt., 1989, 28 (1), 22–24.
- [39] MALVERN INSTRUMENTS LTD, *Malvern particle sizer 2600/3600*, Spring Lane, Malvern Worcestershire WR 14 1 AL., United Kingdom.
- [40] MASSOLI P., BERETTA F., D'ALESSIO A., *Single droplet size, velocity, and optical characteristics by the polarization properties of scattered light*, Appl. Opt., 1989, 28 (6), 1200–1205.
- [41] MROCZKA J., *Metrologiczne problemy wykorzystywania światła rozproszonego do badań rozkładu wielkości cząstek w roztworach dyspersyjnych*, Metrologia i Systemy Pomiarowe, Monografia 4, PAN, Warszawa 1990.
- [42] MROCZKA J., REN K.F., GREHAN G., GOUESBET G., *Particle sizing by polarization ratio: On the use of laser sheet*, Proceedings of International Conference Modeling in Measurement Process Szklarska Poręba, Poland, 7–9. June 1993, Wrocław, Poland, 58–65.
- [43] MROCZKA J., *Metrological Problems of Scattered Light Application in Particle Sizing*, Proceedings of the 3rd International Congress on Optical Particle Sizing'93, Yokohama, August 23–26, 1993, Japan.
- [44] MROCZKA J., WYSOCZAŃSKI D., *Polarization characteristics of scattered radiation on fibers.*, invited paper, *Proceedings SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 1996, Vol. 3054, 2–11.
- [45] MROCZKA J., WYSOCZAŃSKI D., *Plane-wave and Gaussian-beam scattering on an infinite cylinder*, Optical Engineering, March 2000, Vol. 39 No. 3, 763–770, SPIE – The International Society for Optical Engineering.
- [46] MROCZKA J., WYSOCZAŃSKI D., *Light scattering maps analysis to determine particles placement and concentration*, Optical Sensing II, Strasbourg, France, 3–6 April, 2006 / B. Culshaw [i in.] (eds) Bellingham, Wash.: SPIE – The International Society for Optical Engineering, cop. 2006, 61891P, 1–8.
- [47] MULY E.C., FROCK H.N., *Industrial particle size measurement using light scattering*, Opt. Eng., 1980, Vol. 19, No. 6, 861–869.
- [48] PLANK W.S., PAK H., ZANEVELD J.R.V., *Light nepheloid layers*, J. Geophys. Res., 1972, Vol. 77, No. 9, 1689–1694.
- [49] SCHARF L.L., *Statistical Signal Processing*, Addison-Wesley, MA, 1991.
- [50] SCHOUKENS J., PINTELON R., HAMME H.V., *The Interpolated Fast Fourier Transform: A Comparative Study*, IEEE Trans. Instrum. Meas., 1992, Vol. 41, 226–232.
- [51] WAIT J.R., *Scattering of a plane wave from a circular dielectric cylinder at oblique incidence*, Canadian Journal of Physics, 1955, Vol. 33, 189–195.
- [52] WANG Y.P., WU Z.S., REN K.F., *Four flux model with adjusted average crossing parameter to solve the scattering transfer equation*, Applied Optics, 1989, Vol. 28, No. 1, 28.
- [53] WANG N., SHEN J., *A Study of the Influence of Misalignment on Measuring Results for Laser Particle Analyzers*, Part. Part. Syst. Charact., 1998, 15, 122–126.
- [54] WISCOMBE W.J., *Improved Mie scattering algorithms*, Appl. Opt., 1980, 19, 1505–1509.
- [55] WYSOCZAŃSKI D., MROCZKA J., *Charakterystyki polaryzacyjne promieniowania laserowego rozproszonego na włóknach.*, COE'96, IV Konferencja naukowa „Czujniki optoelektroniczne i elektroniczne”, 13–16 maja 1996, Szczyrk.
- [56] WYSOCZAŃSKI D., *Diffusion multiple de la lumiere: application a l'orientation de fibres dans des materiaux composites*, Rozprawa doktorska (13.09.1996), Faculte des Sciences de l'Universite de Rouen, Francja, Promotor: prof. dr hab. inż. Janusz Mroczka.
- [57] WYSOCZAŃSKI D., MROCZKA J., GREHAN G., GOUESBET G., *Simple Light Scattering on Infinite Cylinder: Plane wave and Gaussian Beam.*, 7th European Symposium Particle Characterization PARTEC98, 10–12 March 1998, Nurnberg, Germany, Preprints II, 665–674.

- [58] WYSOCZAŃSKI D., MROCZKA J., *Rozproszenie fali płaskiej i wiązki gaussowskiej na pojedynczym, nieskończone długim cylindrze*, V Konferencja Naukowa Czujniki Optoelektroniczne i Elektroniczne COE'98, Jurata, 10–13 maja 1998, Materiały konferencyjne, tom I, 349–352.
- [59] WYSOCZAŃSKI D., MROCZKA J., *Scattered Light Characteristics Analysis In Determination Of Direction And Concentration Of Fibres In Composites.*, 5th International Congress on Optical Particle Sizing 1998 OPS98, USA, Minneapolis, Minnesota, August 10–14 1998, Program & Proceedings, University of Minnesota 1998, 265–268.
- [60] WYSOCZAŃSKI D., MROCZKA J., CZERWIŃSKI M., *Multiple Light Scattering Method in Composite Materials Properties Determination.*, 10th International Workshop on Multiple Scattering Lidar Experiments MUSCLE 10, Italy, Florence, April 19–22 1999, Proceedings of MUSCLE 10, University of Florence 1999, 264–272.
- [61] WYSOCZAŃSKI D., MROCZKA J., *Analiza położenia i koncentracji włókien za pomocą światła rozproszonego*, Pomiar, Automatyka, Kontrola, 2001, z. 12, 9–12.

APPLICATION POLARISATION CHARACTERISTICS OF SCATTERED LIGHT
TO DISPERSE MEDIA STUDY – COMPOSITE MATERIALS

Non-invasive optical method for determination of arrangement and concentration of fibres in composite materials has been presented. The models of single and multiple light scattering on infinite cylinder has been presented. The experimental system enables registration of dispersed light maps which serve for determination of fibre arrangement and concentration. A He-Ne laser has been used as a light source whereas the polarization components of dispersed light are recorded with the use of a suitable optical system and two CCD cameras.

*rozproszenie światła,
włókno optyczne, pomiar średnicy,
niedestrukcyjne metody pomiarowe*

Grzegorz ŚWIRNIAK
Janusz MROCZKA*

WYBRANE ZAGADNIENIA POMIARU ŚREDNICY WŁÓKNA OPTYCZNEGO W PROCESIE PRODUKCJI Z WYKORZYSTANIEM ŚWIATŁA LASEROWEGO

W niniejszej pracy przedstawiono przegląd obecnie stosowanych metod laserowego pomiaru średnicy włókna optycznego w procesie produkcji. We wstępie omówiono podstawowe zagadnienia związane z budową i technologią produkcji włókien optycznych. Szczególną uwagę zwrócono na różnorodność i złożoność światłowodowych struktur optycznych. Przedstawiono również wybrane teorie rozproszenia światła mające zastosowanie w modelowaniu rozproszenia światła na włóknie optycznym.

1. WPROWADZENIE

Termin *włókna optyczne* utożsamiany jest z włóknami światłowodowymi, które w postaci torów światłowodowych wykorzystywane są do przesyłania informacji, której nośnikiem jest fala świetlna. Najbardziej powszechnym obszarem zastosowań światłowodów są systemy telekomunikacyjne. Stały postęp w produkcji niskostratnych, liniowych, izotropowych i skompensowanych dyspersyjnie materiałów optoelektronicznych umożliwia wytwarzanie światłowodów telekomunikacyjnych coraz nowszej generacji. Włókna światłowodowe stosowane są również w obszarach innych niż telekomunikacja. Są to światłowody specjalne, nazywane również kształtowanymi [55, 56], przeznaczone do transmisji sygnałów na nieduże odległości. Niektóre obszary ich zastosowań, to: czujniki światłowodowe wielkości elektrycznych i nieelektrycznych [19], czujniki biomedyczne [42], fotoniczne systemy przetwarzania informacji [54], mikroskopia [37].

* Katedra Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej, Politechnika Wroclawska.

Włókna optyczne są również podstawowym budulcem materiałów kompozytowych. Propozycja nazwania tego typu włókien optycznymi jest uzasadniona, biorąc pod uwagę ich właściwości optyczne – wykazują one przepuszczalność spektralną w paśmie optycznym, a ponadto produkowane są w podobnym procesie technologicznym jak światłowody. W przypadku właściwości optyczne, praktycznie jest więc przyjąć wspólne miano dla światłowodów i włókien kompozytowych oraz podobne metody analizy ich właściwości fizycznych.

Na pewnym etapie produkcji włókna optycznego zachodzi potrzeba pomiaru jego średnicy. Informacja ta daje możliwość wpływania, w pętli sprzężenia zwrotnego, na pewne parametry procesu w taki sposób, aby utrzymać średnicę włókna w wymaganych granicach. Biorąc pod uwagę często złożoną naturę fizykochemiczną włókna i przemysłowe warunki pomiaru, jest to złożone zagadnienie metrologiczne. Dla przykładu, szereg wymagań stawianych metodom pomiaru średnicy światłowodu telekomunikacyjnego, o nominalnej średnicy płaszczka 125 μm , można streścić następująco:

- pomiar musi być przeprowadzony w sposób nieinwazyjny, bez ingerencji mechanicznych elementów aby struktura włókna nie uległa zmianie,
- należy oczekiwać, aby pomiar odbywał się w czasie rzeczywistym, co pozwala na kontrolę średnicy w pętli sprzężenia zwrotnego,
- metoda pomiarowa powinna być niewrażliwa na wibracje włókna,
- pomiar powinien umożliwiać kontrolę średnicy z dokładnością przynajmniej $\pm 1 \mu\text{m}$ [4].

Według wiedzy autorów, nie ma takiego przyrządu pomiarowego, który spełniałby wszystkie sformułowane kryteria. Na przykład stosowana powszechnie w przemyśle telekomunikacyjnym metoda skanowania wiązką laserową spełnia wymagania dotyczące dokładności pomiaru, ale pomiar nie odbywa się w czasie rzeczywistym.

Powstaje naturalne pytanie, czy zachodzi potrzeba rozwijania metod pomiaru i konstruowania nowych przyrządów wobec faktu, według którego obecnie stosowane metody spełniają wymagania przemysłu telekomunikacyjnego. Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, biorąc pod uwagę stały rozwój techniki światłowodowej, stawiającej coraz większe wyzwania. Barton i in. [4] wskazują na dwa kluczowe zagadnienia:

- nierozwiązanym dotychczas problemem jest pomiar średnicy rdzenia światłowodu w procesie produkcji. Zmiany średnicy rdzenia mogą na przykład wpływać na nieliniowe właściwości włókna, co ma istotne znaczenie dla takich zjawisk, jak mieszanie czterofalowe FWM (*Four Wave Mixing*) [22].

- Pomiar powinien umożliwiać kontrolę średnicy z dokładnością znacznie lepszą niż obecny standard $\pm 1 \mu\text{m}$. Precyzyjnie kontrolowana średnica jest istotna, na przykład, ze względu na prawidłowe działanie światłowodowych siatek dyfrakcyjnych Bragga [16]. Niewielka tolerancja średnicy jest także kluczowym parametrem decydującym o jakości sprzężenia włókien światłowodowych w systemach matryc typu V-Groove [32].

Można również wskazać inne kierunki rozwoju technik pomiarowych. Wraz z nastaniem ery światłowodów z kryształów fotonicznych PCF (*Photonic Crystal Fibres*), które mają nierzadko bardzo skomplikowaną strukturę refrakcyjną, powstał problem monitorowania tej struktury i wychwytywania ewentualnych niejednorodności na etapie produkcji. Ponadto Onofri i in. [46] zauważają potrzebę doskonalenia technik pomiaru średnicy włókien stosowanych w materiałach kompozytowych. W tej gałęzi przemysłu wykorzystywane są przeważnie techniki laboratoryjne (*off-line*), a narzędzia pomiaru średnicy w czasie rzeczywistym nie są wystarczająco precyzyjne.

Szczególną rolę wśród technik pomiaru średnicy włókna w procesie produkcyjnym pełnią te, które wykorzystują światło lasera jako narzędzie poznawcze. Zainteresowanie tego typu technikami wynika z następujących faktów [43]:

- laserowe metody optyczne umożliwiają nieinwazyjny pomiar właściwości badanego obiektu,
- są to metody o dużej czułości i selektywności,
- umożliwiają prowadzenie pomiarów *in situ*.

2. KLASYFIKACJA I BUDOWA WŁÓKIEN OPTYCZNYCH

2.1. ŚWIATŁOWODY TRANSMISYJNE

Światłowody stosowane w telekomunikacji optycznej projektowane są pod kątem przenoszenia fali świetlnej na możliwie duże odległości z niewielkim tłumieniem i bardzo małymi zniekształceniami. Struktura światłowodu telekomunikacyjnego ma postać włókna o symetrii osiowej, złożonego z rdzenia, o stałym lub zmiennym współczynniku załamania, oraz płaszczu o mniejszym współczynniku załamania niż rdzeń. Podstawowy surowiec, służący do ich wytwarzania, to krzemionka (SiO_2), która jest odpowiednio domieszkowana w celu podwyższenia współczynnika załamania (Ge, P) lub obniżenia (B, F), tak aby światłowód mógł przewodzić światło [13].

Relatywnie nowym medium transmisyjnym są światłowody POF (*Plastic Optical Fibre*) wykonywane z polimerów. Mają one podobną strukturę jak światłowody telekomunikacyjne, złożoną z rdzenia i płaszczu. Znaczne zainteresowanie światłowodami polimerowymi wynika przede wszystkim z dużej apertury numerycznej i powierzchni czynnej rdzenia, co wpływa na łatwość sprzęgania ze źródłem promieniowania i detektorem, większej wytrzymałości mechanicznej, w porównaniu ze światłowodami krzemionkowymi, oraz niskich kosztów produkcji. Słabą stroną światłowodów polimerowych jest mała odporność termiczna i wciąż znaczne tłumienie, ograniczające nieco ich zastosowania; chociaż należy zaznaczyć, że i na tym polu zanotowano ostatnio wyraźny postęp, otrzymując światłowód wykonany

z amorficznego polimeru CYTOP, wykazujący tłumienie około 16 dB/km przy długości fali 1310 nm [2]. Występują także rozwiązania hybrydowe w postaci światłowodów PCS (*Polymer-Clad Silica*) o krzemionkowym rdzeniu, powleczonym tworzywem sztucznym o niższym od rdzenia współczynniku załamania.

Dla propagacji fali elektromagnetycznej, wyróżniane są dwa rodzaje światłowodów transmisyjnych: jednomodowe i wielomodowe. O liczbie propagowanych modów decydują – średnica światłowodu oraz jego profil refrakcyjny [41].

2.1.1. PROFILE REFRAKCYJNE

Rozkład współczynnika załamania wzdłuż promienia światłowodu może być bądź skokowy bądź gradientowy. Światłowodowy o skokowym profilu refrakcyjnym charakteryzują się stałą wartością współczynnika załamania w całym przekroju rdzenia. Wartość ta maleje skokowo na granicy rdzeń płaszcz. W światłowodach gradientowych radialny profil współczynnika załamania jest w przybliżeniu opisywany według następujących równań [38]:

$$n(r) = n_{r0} \left(1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right)^{1/2}; \quad r \leq a, \quad (1)$$

$$n(r) = n_{r0} (1 - 2\Delta)^{1/2} = n_p; \quad r > a \quad (2)$$

gdzie: n_{r0} – jest współczynnikiem załamania w osi światłowodu ($r = 0$), n_p – współczynnikiem załamania płaszcz, α – współczynnikiem kształtu profilu refrakcyjnego, a – promieniem rdzenia, oraz r – współrzędną radialną. Współczynnik Δ jest względną różnicą współczynników załamania rdzenia i płaszcz:

$$\Delta = \frac{n_{r0}^2 - n_p^2}{2n_{r0}^2}. \quad (3)$$

Współczynnik załamania światłowodów gradientowych jest więc największy w osi rdzenia i maleje w kierunku płaszcz według zależności (1). Radialne kształtowanie współczynnika załamania ma na celu zminimalizowanie dyspersji międzymodowej. Osiąga się to przez zmianę parametru α za pomocą doboru składu domieszek rdzenia światłowodu [13]. Okazuje się, że optymalne warunki propagacji uzyskuje się dla profilu zbliżonego do paraboli ($\alpha \approx 2$), przy czym kształt tej paraboli jest nieco odmienny dla światłowodów krzemionkowych i polimerowych [18]. Założony profil otrzymywany jest na etapie syntezy preformy z krzemionki [13] bądź polimeru [29], z której wyciągane jest w dalszym etapie włókno.

2.1.2. NIEDOSKONAŁOŚCI GEOMETRYCZNE

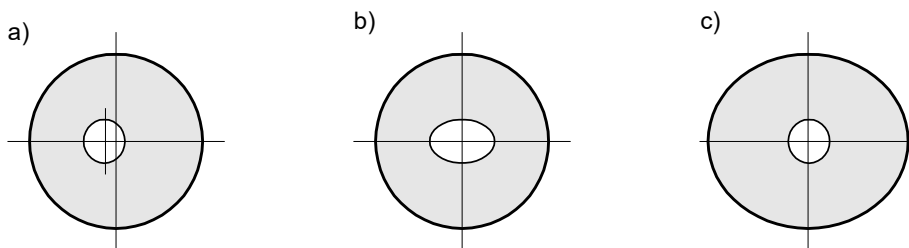
Rzeczywista struktura geometryczna światłowodu różni się od konstrukcji modelowej, osiowo-symetrycznej. Oprócz tolerancji wymiarów rdzenia i płaszczka, producenci światłowodów podają w katalogach trzy parametry wyrażające niedoskonałości geometryczne: współosiowość rdzenia i płaszczka, eliptyczność rdzenia (nie dotyczy światłowodów jednomodowych) oraz eliptyczność płaszczka (rys. 1).

Współosiowość rdzenia i płaszczka d_r definiowana jest jako radialne przesunięcie osi symetrii rdzenia względem osi płaszczka. Wartości typowe są następujące: krzemionkowe światłowody jednomodowe (Corning): $d_r \leq 0,5 \mu\text{m}$, wielomodowe (Corning): $d_r \leq 3 \mu\text{m}$, polimerowe światłowody wielomodowe (Chromis fiberoptics): $d_r \leq 5 \mu\text{m}$.

Eliptyczność rdzenia oraz eliptyczność płaszczka obliczana jest na podstawie wzoru

$$NC = \left(1 - \frac{d_{\min}}{d_{\max}} \right) \cdot 100 \text{ (\%)}, \quad (4)$$

gdzie: d_{\min} i d_{\max} są długościami osi elipsy rdzenia lub płaszczka w przekroju poprzecznym włókna. Eliptyczność rdzenia standardowego, krzemionkowego światłowodu wielomodowego (Corning) jest mniejsza od 6%, natomiast płaszczka – mniejsza od 2%.



Rys. 1. Niedoskonałości geometryczne światłowodów:

a) współosiowość rdzenia i płaszczka, b) eliptyczność rdzenia, c) eliptyczność płaszczka

Fig. 1. Geometrical imperfections of optical fibres:

a) core-clad concentricity, b) core ellipticity, c) cladding non-circularity

2.1.3. STANDARDOWE ŚWIATŁOWODY TRANSMISYJNE

Różnorodność światłowodów używanych w optotelekomunikacji jest duża (tab. 1). Niektóre parametry tych światłowodów, takie jak: wymiary geometryczne, tłumienność, apertura numeryczna, są znormalizowane. Radialny profil współczynnika załamania jest jednak odmienny dla światłowodów produkowanych przez różnych producentów.

Tabela 1. Wybrane parametry standardowych światłowodów telekomunikacyjnych
Table 1. Selected parameters of standard fibers used in telecommunications

Rodzaj włókna	Średnica rdzenia / płaszczka [μm]	Δ [%]	Zastosowania
Jednomodowe SiO ₂	8–10 / 125	0.3–0.7 ⁽¹⁾	długodystansowe sieci szerokopasmowe / CATV
Wielomodowe SiO ₂ , profil gradientowy	50 / 125 62,5 / 125 100 / 140	1–2 ⁽²⁾	– LAN 10GbE, VCSEL – LAN, FDDI – krótkodystansowe sieci LAN
Wielomodowe POF, profil gradientowy	62,5 / 250, 120 / 490 ⁽³⁾ 200 / 490, 500 / 750 ⁽³⁾	0.96 (CYTOP) ⁽⁴⁾ 0.93 (PMMA) ⁽⁵⁾	– krótkodystansowe sieci LAN, połączenia abonenckie (Fiber to the Home, The Last Mile) – połączenia cyfrowe A/V
Wielomodowe POF, profil skokowy	485–965 / 750–1000 ⁽³⁾	4.9 (PMMA) ⁽⁴⁾ 10 (PS) ⁽⁴⁾ 16 (PC) ⁽⁴⁾	Połączenia cyfrowe A/V, czujniki, motoryzacja

Źródła i uwagi:

- (1) – wg [36],
 (2) – dla światłowodów firmy Corning Inc,
 (3) – wg normy IEC 60793-2-40 (2006),
 (4) – wg [71], (5) – wg [18].

Komercyjne światłowody jednomodowe charakteryzują się skokowym profilem refrakcyjnym, jednolitą geometrią i są wytwarzane z krzemionki. Technologia polimerowych światłowodów jednomodowych jest słabo rozwinięta. Tylko nieliczne prace Koike [27, 28] donoszą o wytworzeniu takich włókien.

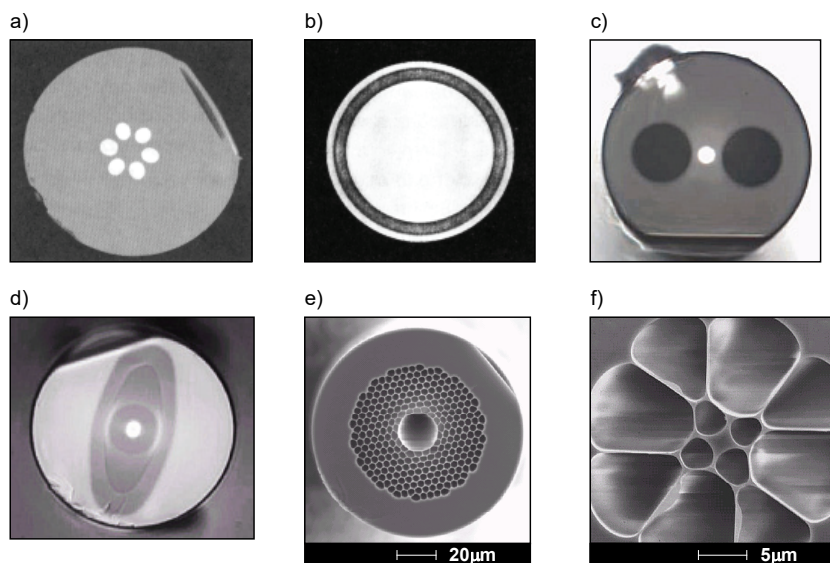
Standardowymi, wielomodowymi włóknami optycznymi stosowanymi w budowie wielomodowych systemów transmisji danych są światłowody krzemionkowe 50/125 i 62,5/125 μm o gradientowym profilu współczynnika załamania. Odpowiedniki polimerowe znajdują zastosowanie w przekazywaniu danych na relatywnie niewielkie odległości.

2.2. ŚWIATŁOWODY SPECJALNE

Światłowody specjalne są nową generacją włókien szklanych lub polimerowych, które służą do przetwarzania transmitowanego sygnału optycznego. Światłowody takie mają zazwyczaj bardziej skomplikowaną strukturę niż światłowody telekomunikacyjne. Romaniuk [55] wymienia ponad dwadzieścia różnych typów światłowodów specjalnych. Niektóre z nich projektowane są pod kątem danego zastosowania. Wśród wielu rozwiązań można wyróżnić następujące typy światłowodów specjalnych:

- Światłowody wielordzeniowe – to włókna z dwoma lub więcej rdzeniami (rys. 2a), które mogą być jednomodowe, wielomodowe lub mieszane, umieszczone we

wspólnym płaszczu równolegle bądź spiralnie wzdłuż osi włókna, wykazują interesującą możliwość przetwarzania sygnałów optycznych. Najważniejsze z nich, to: możliwość wymiany mocy modowej pomiędzy rdzeniami (tunelowanie światła) oraz możliwość interferencji fal rdzeniowych w polu dalekim [13].



Rys. 2. Widok powierzchni czołowych wybranych światłowodów specjalnych: a) światłowod wielordzeniowy [13], b) światłowod pierścieniowy [13], c–d) światłowodowy jednomodowy zachowujący polaryzację z dwójłomnością indukowaną elementami naprężeniowymi, (c) oraz przez eliptyczny kształt płaszczu (d) [36], e–f) światłowodowy z kryształów fotonicznych z rdzeniem powietrznym o średnicy 20,4 μm , (e) [39] oraz z rdzeniem pełnym o średnicy ok. 2 μm [30]

Fig. 2. Microscope images of cross-section of selected special optical fibres:

- a) multicore fibre [13], b) ring-index fibre [13], c–d) single mode, polarisation maintaining fibres with birefringence introduced by stress-induced elements (c) and by making the core elliptical (d) [36], e–f) photonic crystal fibres with 20.4 μm hollow core (e) [39] and 2 μm solid core [30]

- Światłowodowy o złożonym profilu refrakcyjnym – o profilach skokowych i gradientowych (typowe profile światłowodów telekomunikacyjnych), schodkowe monotoniczne i niemonotoniczne (np. klasy W), pierścieniowe, anizotropowe etc. [56]. Kształtowanie profilu refrakcyjnego światłowodowy ma na celu uzyskanie włókna o odpowiednich parametrach sygnałowych, na przykład zarówno o zoptymalizowanej dyspersji czy średnicy pola modowego, jak też modelowanie wrażliwości światłowodowy na wewnętrzne i zewnętrzne oddziaływania fizyczne, takie jak mikro- i makrozgięcia [56].

- Światłowodowy dwójłomny – światłowodowy tego typu projektowane są w taki sposób, aby uzyskać duży stopień dwójłomności w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach w przekroju poprzecznym włókna i zminimalizować tą drogą wpływ przy-

padkowych zaburzeń dwójłomności indukowanych podczas procesu produkcyjnego. Taki zabieg powoduje odsprężenie dwóch ortogonalnych modów podstawowych dzięki nadaniu im różnych prędkości propagacji [45]. Liniowa dwójłomność światłowodu polaryzacyjnego wytwarzana jest w dwojaki sposób: przez zmianę kształtu rdzenia lub płaszczu bądź też wbudowanie w strukturę płaszczu elementów wywołujących asymetrię naprężeń radialnie działających na rdzeń światłowodu (rys. 2c–d).

- Światłowody z kryształów fonicznych PCF (*Photonic Crystal Fibres*) – tworzone są z pojedynczego materiału – krzemionki lub polimeru, a warunki propagacji światła ustalane są przez odpowiednio kształtowaną strukturę refrakcyjną. Ma ona postać uporządkowanych bądź rozłożonych przypadkowo, wypełnionych powietrzem, otworów kapilarnych biegnących wzdłuż osi światłowodu (rys. 2e–f). Propagacja fali świetlnej w takiej strukturze zależy od rozkładu otworów, ich średnicy, wzajemnej odległości, co daje szeroki wachlarz kształtowania właściwości optycznych włókna [57, 26, 66]. Dwa podstawowe rodzaje światłowodów PCF, w których mechanizm propagacji światła jest odmienny, to światłowody PCF z rdzeniem pełnym i rdzeniem powietrznym, który może być wypełniony specyficznym gazem [50] czy ciekłym kryształem [68].

2.3. WŁÓKNA STOSOWANE W MATERIAŁACH KOMPOZYTOWYCH

Włókna stosowane w materiałach kompozytowych mają postać krzemionkowych nitek o średnicy typowo od 3,8 μm do około 25 μm [15]. Ich właściwości fizykochemiczne zależą od przeznaczenia materiału kompozytowego. Komercyjnie dostępne włókna mają standaryzowany skład i właściwości według typoszeregu, oznaczanego dużymi literami. Dla przykładu, litera *E* – oznacza włókno o niedużej przewodności elektrycznej, *S* – o dużej wytrzymałości na rozciąganie, *C* – wysokiej odporności na działanie czynników chemicznych, *M* – dużym module Younga, *T* – dużej rezystancji cieplnej, *A* – z dodatkiem pierwiastków alkalicznych (szkło sodowo-wapniowe), *D* – szkło o niedużej przenikalności elektrycznej, *L* – szkło ołowowe, *Z* – szkło cyrkonowe. Ponad 99% wykorzystywanego surowca to szkło typu *E* [15].

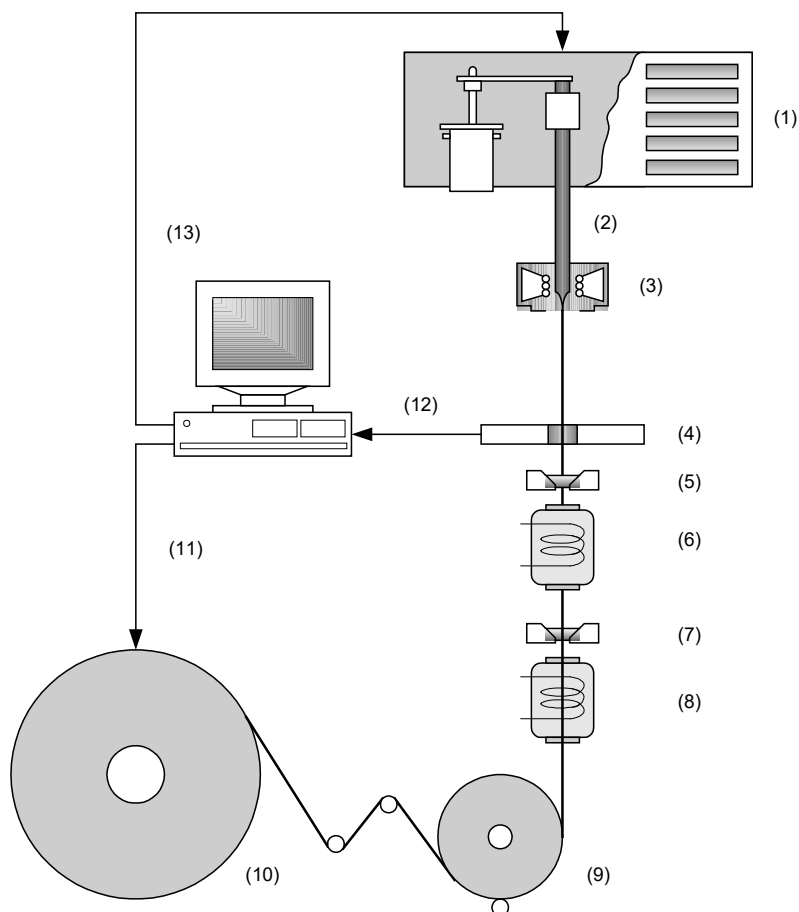
Współczynnik załamania włókien dla materiałów kompozytowych zawiera się w granicach 1,47–1,635 zmierzony dla fali o długości 0,5893 μm , w tym dla szkła typu *E* wynosi 1,547 [15].

3. TECHNOLOGIE FORMOWANIA WŁÓKIEN OPTYCZNYCH

3.1. TECHNOLOGIE WIELOETAPOWE

Wieloetapowe procesy technologiczne dedykowane są światłowodom, które muszą odznaczać się niskim tłumieniem, a także światłowodom, które mają złożoną strukturę fizyczną. Metodą tą produkowane są przede wszystkim światłowody telekomunikacyjne

[13] oraz światłowody z kryształów fotonicznych [57]. Do najczęściej wykorzystywanych technologii wieloetapowych należą: OVD, VAD, MCVD, PCVD i PMCV [13]. Każda z nich składa się z dwóch zasadniczych części: i) wytworzenia preformy, ii) wyciągania włókna wraz z nałożeniem powłok zabezpieczających przed wpływem czynników zewnętrznych. Ten drugi etap jest praktycznie identyczny dla wszystkich metod produkcji.



Rys. 3. Schemat procesu wyciągania światłowodu z preformy (oprac. na podst. [13]):
 (1) – podajnik preformy, (2) – preforma, (3) – piec, (4) – mikrometr, (5, 7) – aplikatory powłok ochronnych, (6, 8) – lampy UV, (9) – bęben odbiorczy, (10) – bęben wyciągowy, (11) – kontrola prędkości wyciągania, (12) – pomiar średnicy, (13) – kontrola prędkości podawania preformy

Fig. 3. Optical fibre pulling process (from [13] with modifications):

- (1) – preform feed, (2) – preform, (3) – furnace, (4) – micrometer, (5, 7) – coating applicators, (6, 8) – UV-lamps, (9) – capstan, (10) – take-up, (11) – draw speed control, (12) – fibre diameter measurement, (13) – preform feed control

Preforma jest odpowiednio spreparowaną szklaną bądź polimerową strukturą, która zawiera wszystkie elementy przyszłego światłowodu. Właściwości optyczne i proporcje wymiarów światłowodu są właściwie ustalane na etapie syntezy preformy. Możliwa jest jednak niewielka korekta podczas wyciągania światłowodu.

W procesie wyciągania preforma montowana jest w podajniku przesuwanym ją stopniowo do pieca (rys. 3). Wartość temperatury procesu wynosi około 2300 °C dla domieszkowanego szkła krzemionkowego [13], natomiast dla polimerów jest dużo niższa i nie przekracza 350 °C [13]. Ze stopionej masy szkła, która w strefie podgrzewania tworzy tzw. szyjkę, wyciągana jest nitka światłowodowa i w dalszej kolejności nawijana na bęben. Wyciągany światłowód pokrywany jest najczęściej światłoutwardzalnymi, polimerowymi powłokami ochronnymi, zabezpieczającymi przed działaniem płynów, gazów i urazami mechanicznymi. Pomiar średnicy światłowodu wykonywany jest przed nałożeniem powłok ochronnych.

Jednorodność średnicy wyciąganego światłowodu zależy od trzech parametrów [13]: temperatury pieca, prędkości podawania preformy V_p i prędkości wyciągania światłowodu V_s .

Jednorodność średnicy światłowodu i stabilność procesu są zachowane wtedy, gdy spełnione jest kryterium [36]:

$$V_p d_p^2 = V_s d_s^2, \quad (5)$$

gdzie: d_p i d_s są średnicami odpowiednio preformy i światłowodu. Temperatura pieca kontrolowana jest z dokładnością ± 1 °C [13]. Prędkość podawania preformy jest zwykle utrzymywana na stałym poziomie, a korekcję średnicy światłowodu wykonuje się przez zmianę prędkości wyciągania [36]. Korekcja odbywa się w pętli sprzężenia zwrotnego na podstawie informacji o średnicy światłowodu zmierzonej przez mikrometr.

Wyciągany światłowód jest chłodzony przez masy otaczającego powietrza na drodze od pieca do aplikatora powłoki ochronnej. W przypadku gdy dystans ten jest niewielki, chłodzenie wspomagane jest na ogół helem, dla zapewnienia właściwych warunków nakładania powłoki ochronnej [36].

3.2. TECHNOLOGIE JEDNOETAPOWE

Idea formowania włókna optycznego z roztopionej masy szkła lub polimeru w jednym etapie technologicznym jest podstawą działania następujących metod: a) metody tyglowej, b) wytlaczania z zamkniętego reaktora, c) wytlaczania w ciągły sposób, d) przędzenia.

W metodzie tyglowej włókno optyczne kształtowane jest bezpośrednio z roztopionych mas szklanych, podgrzewanych w tyglu lub zespole tygli do temperatury około 1200 °C [13]. Struktura przyszłego włókna zależy od konstrukcji zespołu tygli i skła-

du szkieleł. W dnach tygli znajdują się dysze, przez które następuje wypływ strumienia szkła po osiągnięciu określonej lepkości. W dalszej kolejności, wykonywana jest kontrola średnicy powstałej nitki szklanej, nakładane są warstwy ochronne i gotowe włókno nawijane jest na bęben.

Technologia tygłowa daje możliwość kształtowania światłowodów szklanych o niestandardowych właściwościach, m.in. [12]: a) światłowodów o złożonych profilach refrakcyjnych, na przykład eliptycznych czy pierścieniowych, b) światłowodów wielordzeniowych, c) światłowodów ze szkieleł specjalnych, optymalizowanych pod kątem zastosowań w technice pomiarowej i w fonicznych systemach przetwarzania informacji. Jest to metoda otwarta, przez co tłumienie światłowodów wykonywanych tą metodą jest zazwyczaj większe niż tych wyciąganych z preformy [13]. Metoda tygłowa stosowana jest także w produkcji szklanych włókien optycznych używanych w materiałach kompozytowych [15].

Pozostałe wymienione technologie jednoetapowego wytwarzania włókien wykorzystywane są do kształtowania światłowodów polimerowych o skokowym profilu współczynnika załamania [13].

4. OGÓLNA SYSTEMATYKA METOD POMIARU ŚREDNICY WŁÓKNA

Techniki pomiaru średnicy włókna optycznego można podzielić na dwie grupy (tab. 2): a) techniki laboratoryjne (typu *off-line*) oraz b) techniki bezpośrednie (*on-line*).

Tabela 2. Bezpośrednie i laboratoryjne metody pomiaru średnicy włókna optycznego
Table 2. On-line and off-line methods for optical fibre diameter measurement

Laboratoryjne (<i>off-line</i>)	
Mikrometria kontaktowa	[70]
Mikroskopia wideo	[6, 40]
Interferometria światła białego	[70, 3]
Konfokalna laserowa mikroskopia skaningowa	[70]
Aproksymacja profilu współczynnika załamania (TNF, RNF, TI)	[25]
Przepuszczalność strumienia gazu	[58]
Bezpośrednie (<i>on-line</i>)	
Metoda laserowej wiązki skanującej	[9]
Dyfrakcja Fraunhofera	[69, 33]
Interferometria przestrzenna	[59, 67]
Interferometria czasowa	[46, 62, 61]
Interferometria widmowa	[20]

Pierwsza grupa wymienionych technik wymaga wykonania wielu czynności laboratoryjnych, mających na celu przygotowanie próbki do pomiaru. Są to metody, które

działają w oderwaniu od rzeczywistego pola zjawisk występujących podczas procesu wyciągania włókna. Nie jest zatem możliwa kontrola parametrów włókna w czasie rzeczywistym. W omawianej grupie technik można wyróżnić dwa rodzaje metod:

- metody pomiaru średnicy płaszczka (mikrometria kontaktowa, mikroskopia wideo, interferometria światła białego, konfokalna skaningowa mikroskopia skaningowa) i rdzenia (aproxymacja profilu współczynnika załamania) pojedynczego włókna.
- metoda pomiaru rozkładu wielkości włókien w próbce pomiarowej (przepuszczalność strumienia gazu).

Bezpośrednie techniki pomiaru średnicy włókna optycznego umożliwiają pomiar *in situ*. Są to metody optyczne, wykorzystujące światło lasera jako narzędzie badawcze. Do najstarszych technik zalicza się metodę wiązki skanującej oraz metodę badania obrazu pola rozproszonego pod małym kątem (dyfrakcyjną). Metody interferometryczne – czyli interferometria czasowa, przestrzenna i widmowa – dostarczają informacji o badanym włóknie na podstawie analizy interferogramu zmiennej odpowiednio w czasie, przestrzeni lub w dziedzinie częstotliwości. Szczegółowy opis technik bezpośrednich zawiera treść rozdziału 6.

5. TEORIE ROZPROSZENIA ŚWIATŁA MAJĄCE ZASTOSOWANIE W POMIARACH ŚREDNICY WŁÓKNA

5.1. TEORIE ŚCISŁE

Matematyczne modelowanie pola z wykorzystaniem teorii ścisłych daje wierny obraz rzeczywistych procesów zachodzących podczas rozpraszania fali na włóknie optycznym. Są to teorie o dużym stopniu złożoności matematycznej. Fakt ten niesie za sobą dwie istotne, z punktu widzenia modelowania matematycznego w pomiarach, konsekwencje. Po pierwsze, kluczowym zagadnieniem problematyki rekonstrukcji pewnych cech obiektu rozpraszającego światło jest rozwiązanie zagadnienia odwrotnego. Taka rekonstrukcja w literaturze przedmiotu określana jest powszechnie mianem tomografii. Rozwiązanie problemu odwrotnego na gruncie modelu ścisłego jest bardzo trudne, możliwe tylko w specyficznych przypadkach [7]. Jest tak dlatego, ponieważ zagadnienie odwrotne jest najczęściej niejednoznaczne – rozwiązanie musi być wybrane spośród wielu możliwych rozwiązań, a ponadto pole rozproszone jest nieliniowo zależnie od właściwości obiektu rozpraszającego falę [10, 11]. Po drugie, czas analizy numerycznej prowadzonej z zastosowaniem modeli ścisłych jest relatywnie długi [63]. W konsekwencji, rola modeli ścisłych w praktycznych aplikacjach, takich jak pomiar średnicy włókna optycznego w procesie produkcji, polega na wytworzeniu rzeczywistego obrazu pola jako odniesienia dla uproszczonych modeli matematycznych.

5.1.1. TEORIA LORENZA-MIE DLA CYLINDRA I GLMT

Teoria Lorenza–Mie podaje dla cylindra szczegółowy opis zmian fali elektromagnetycznej o płaskim czole, rozpraszanej na homogenicznym, nieskończenie długim włóknie optycznym [5, 65, 24]. Padająca fala płaska rozpatrywana jest jako szereg harmonik cylindrycznych w przestrzeni homogenicznej. Rozwiązaniem są funkcje amplitudowe w postaci nieskończonych sum szeregów opisujących falę cylindryczną rozchodzącą się dookoła włókna.

Uogólnienie teorii Lorenza–Mie dla niehomogenicznego włókna optycznego, składającego się z osiowo-symetrycznych warstw o różnych współczynnikach załamania, zostało opracowane przez Kerker'a i Matijević'a [23] i następnie rozwinięte przez Kaia i Allesio [21], Lenoble [34] i Onofriego [49].

Matematyczny opis rozproszenia fali o niejednorodnym rozkładzie amplitudy podaje uogólniona teoria Lorenza–Mie GLMT (*Generalized Lorenz–Mie Theory*). Ideą GLMT jest przedstawienie fali padającej jako sumy szeregu fal z wykorzystaniem współczynników opisujących parametry wiązki padającej. Rozwiązaniem są funkcje amplitudowe w postaci nieskończonych sum szeregów opisujących falę cylindryczną rozchodzącą się dookoła włókna [14, 35, 53]. W wymienionych, dotychczasowych opracowaniach na temat GLMT rozpatrywany jest problem rozpraszania fali na nieskończenie długim, homogenicznym włóknie optycznym.

5.2. METODY APROKSYMACYJNE

5.2.1. DYFRAKCJA FRAUNHOFERA

Obraz światła rozproszonego przez model nieskończonej cząstki cylindrycznej, reprezentującej włókno optyczne, jest złożony. Pełnego opisu matematycznego pola rozproszonego dostarczają teorie wykorzystujące rozwiązania równań Maxwella dla odpowiednio sformułowanych warunków brzegowych, na przykład teoria Lorenza–Mie. Ograniczając analizę pola rozproszonego do relatywnie niewielkich kątów rozpraszania, można jednak przyjąć, z pewnym uproszczeniem, że światło które ulega dyfrakcji jest separowalne od pozostałych komponentów światła rozproszonego i do analizy obrazu pola dyfrakcyjnego można wykorzystać nieskomplikowane narzędzia analizy matematycznej. Takie postępowanie uzasadnione jest wówczas, gdy średnica cylindra jest dużo większa niż długość fali światła oświetlającego cylinder [65]. Dla włókien o średnicach porównywalnych z długością fali światła, pojawiają się rozbieżności pomiędzy modelem ścisłym a modelem dyfrakcyjnym, ukazujące przybliżony charakter dyfrakcji opartej na zasadzie Huygensa–Fresnela.

Atrakcyjność dyfrakcji Fraunhofera, jako modelu matematycznego w pomiarach średnicy włókna optycznego, wynika nie tylko z jego prostoty (w porównaniu z dokładną teorią dyfrakcji – rozpraszania), lecz również z tego, że obraz dyfrakcyjny jest funk-

cją kształtu i rozmiaru włókna, nie zależy natomiast od jego współczynnika załamania [65, 63]. Skalarna teoria dyfrakcji nie uwzględnia natomiast złożonych procesów rozproszenia światła, które zachodzą wewnątrz słabo absorbujących obiektów, takich jak włókna szklane. Procesy te to wielokrotne odbicia i rozproszenia fal wewnątrz oświetlonego obiektu. Okazuje się, że składowe wielokrotnie rozproszone mogą w pewnych warunkach silnie zakłócać obraz dyfrakcyjny, a efekt ten znany jest jako rezonanse pochodzenia morfologicznego MDR (*Morphological-Dependent Resonances*) [51, 8]. Rezonanse MDR nie są obserwowane m.in. w charakterystykach dyfrakcyjnych obiektów silnie tłumiących światło (fale rozpraszane wewnątrz włókna są tłumione) [48].

Weryfikację modelu matematycznego dyfrakcji Fraunhofera pod kątem pomiarów średnicy włókna optycznego wykonali Lebrun i in. [33]. W odniesieniu do wzorcowego modelu falowego Mie, kolejne minima pola dyfrakcyjnego generowane przez model dyfrakcji Fraunhofera były nieco przesunięte, czego skutkiem była nadestymacja średnicy badanego włókna. Dokładność pomiaru poprawiała się wraz ze zwiększaniem średnicy włókna.

5.2.2. OPTYKA GEOMETRYCZNA: GO, EGO

W ujęciu optyki geometrycznej (GO) fala płaska rozumiana jest jako równoległa wiązka separowalnych ciągów falowych nazywanych tradycyjnie promieniami. Propagacja każdego z promieni spełnia zasadę Fermata. Na granicy dwóch optycznie różnych ośrodków kierunek każdego z promieni wyznaczany jest z wykorzystaniem prawa odbicia i prawa załamania, natomiast amplituda i faza wynika z równań Fresnela. Do uzyskania pełnego obrazu pola rozproszonego, konieczne jest uwzględnienie zjawisk dyfrakcyjnych. W polu bliskim jest to dyfrakcja Fresnela, natomiast w polu dalekim – dyfrakcja Fraunhofera [65]. Wypadkowe zaburzenie falowe w danym punkcie przestrzeni w ujęciu optyki geometrycznej jest superpozycją promieni ulegających dyfrakcji, odbiciu i załamaniu [65].

Prawa optyki geometrycznej opisują z dobrą dokładnością zjawisko rozproszenia fali tylko wówczas, gdy rozmiar cząstki jest dużo większy niż długość rozpraszanej fali. Wyniki prac przeprowadzone przez autorów tej pracy [63] wskazują na relatywnie dobrą zgodność charakterystyk pola rozproszonego (pod względem położenia punktów ekstremalnych, a także trendu zmian amplitudy prążków), obliczonych z wykorzystaniem modelu matematycznego optyki geometrycznej i modelu Mie, dla włókna optycznego o średnicy 5 μm , przy długości fali 0,6328 μm .

Istotnym ograniczeniem optyki geometrycznej jest fakt, że nie opisuje ona prawidłowo natężenia światła w obszarach ogniskowych. Natężenie to de facto dąży do nieskończoności [65].

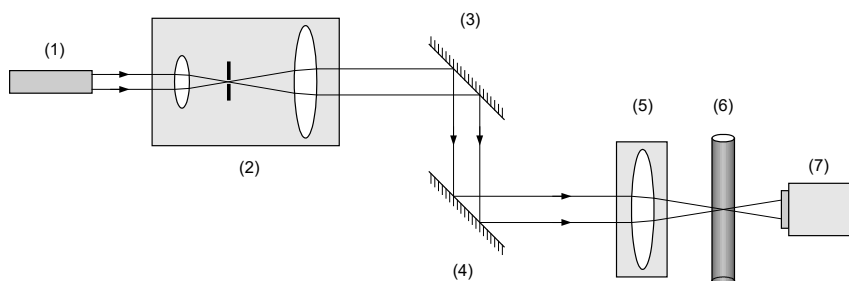
W licznych pracach, w których poruszana jest problematyka rozproszenia światła na cylindrze w ujęciu GO [63, 34, 64, 67], rozpatrywane jest zagadnienie rozpraszania fali o płaskim czole. Wniosek ten jest słuszny tylko wtedy, gdy średnica pola pomiarowego

jest znacznie większa od średnicy badanego włókna. Wymaga on również weryfikacji warunków oświetlenia wiązką o niejednorodnym rozkładzie amplitudy, na przykład wiązką gaussowską. Szczególną techniką analizy rozproszonego pola dla dużych cząstek, uwzględniającą lokalne niejednorodności pola, jest teoria określana mianem EGO (*Extended Geometrical Optics*) – rozszerzonej optyki geometrycznej. Według tej teorii, niejednorodna fala jest lokalnie aproksymowana na niewielkiej powierzchni cząstki jako homogeniczna fala płaska. Dla każdego rozważanego przedziału aproksymacji stosowane są reguły optyki geometrycznej. Pole wynikowe uśredniane jest przez detektor. Szczegółowy opis tej teorii przytacza Albrecht i in. [1].

6. BEZPOŚREDNIE, LASEROWE METODY POMIAROWE

6.1. METODA WIĄZKI SKANUJĄCEJ

Technika laserowej wiązki skanującej, nazywana również techniką noża świetlnego, jest najpowszechniej stosowaną w przemyśle metodą pomiaru średnicy włókna w procesie produkcji. Idea pomiaru polega na wytworzeniu ruchomej, skupionej wiązki światła przemieszczającej się wzdłuż obszaru, w którym umieszczone jest badane włókno. Laserowa wiązka światła formowana jest w układzie kolimacyjnym (2) i kierowana za pomocą zwierciadła stałego (3) na zwierciadło ruchome (4), zapewniające horyzontalne przemieszczanie wiązki (rys. 4).



Rys. 4. Schemat optyczny układu do pomiaru średnicy włókna metodą laserowej wiązki skanującej [9]:
 (1) – laser, (2) – układ kolimacyjny, (3), (4) – zwierciadła odpowiednio stałe i obrotowe,
 (5) – soczewka, (6) – badane włókno, (7) – kamera

Fig. 4. Optical arrangement of laser scanning beam system for measuring optical fibre diameter [9]:
 (1) – laser, (2) – collimator, (3), (4) – scan mirrors, stationary and oscillating respectively,
 (5) – focusing lens, (6) – fibre, (7) – camera

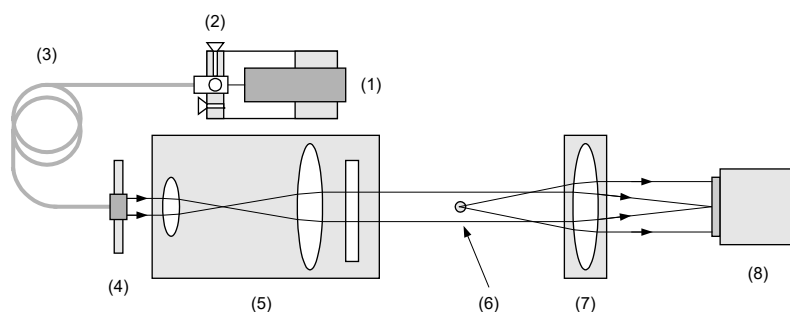
Badane włókno (6) umieszczone jest w płaszczyźnie ogniskowej soczewki (5). Obraz zmian natężenia światła wywołanych ruchem wiązki światła jest rejestrowany przez kamerę (7). Ma on postać impulsu, którego szerokość jest proporcjonalna do średnicy włókna.

Podstawowymi zaletami omawianej metody są: a) stosunkowo duża dokładność pomiaru, b) pomiar w szerokim zakresie mierzonych średnic bez konieczności rekonfiguracji układu pomiarowego, c) nieskomplikowany układ optyczny, d) niewrażliwość na strukturę homogeniczną włókna. Na przykład komercyjny przyrząd AccuScan 3010 umożliwia pomiar średnicy włókna z dokładnością $0,3 \mu\text{m}$ w zakresie $100 \mu\text{m}$ – 10mm [31]. Dolna granica tego zakresu jest ograniczona głównie techniczną możliwością uformowania silnie skupionej wiązki laserowej [9].

Otrzymany wynik pomiaru należy interpretować jako uśrednioną wartość średnicy włókna po pewnej jego długości. Dystans, wzdłuż którego wykonywany jest pomiar zależy od prędkości wyciągania włókna i od szybkości przemiatania wiązką światła. Metoda ta nie pozwala na wykrycie wad optycznych występujących w strukturze włókna, takich jak pęcherze powietrza, inkluzje itp.

6.2. DYFRAKCJA FRAUNHOFERA

Strukturę optyczną przykładowego układu do pomiaru średnicy włókna metodą dyfrakcji Fraunhofera przedstawiono na rysunku 5. Wiązka światła z lasera (1) wprowadzana jest za pomocą obiektywu mikroskopowego (2) do jednomodowego światłowodu utrzymującego stan polaryzacji (3). Wyjście światłowodu sprzężone jest z układem kolimacyjnym (5). Uformowana w układzie kolimacyjnym równoległa wiązka światła oświetla badane włókno (6), które znajduje się w płaszczyźnie ogniskowej przedmiotowej soczewki Fouriera (7). Kamera CCD (8) rejestruje obrazy dyfrakcyjne w polu dalekim, w ograniczonym od kilku do kilkunastu stopni zakresie kątów rozpraszania [48].



Rys. 5. Schemat optyczny układu do pomiaru średnicy włókna metodą dyfrakcji Fraunhofera [48]:
 (1) – laser, (2) – mikroskopowy układ pozycjonujący, (3) – światłowód jednomodowy zachowujący polaryzację, (4) – optyka sprzęgająca, (5) – układ kolimacyjny, (6) – badane włókno,
 (7) – soczewka Fouriera, (8) – kamera CCD

Fig. 5. Optical setup of laser diffractometer for optical fibre diameter measurements [48]:
 (1) – laser, (2) – coupling microscope, (3) – single mode, polarisation maintaining fibre,
 (4) – coupling optics, (5) – collimator, (6) – fibre under measurement,
 (7) – Fourier lens, (8) – CCD camera

Głównymi zaletami metody pomiarowej, której podstawą jest analiza obrazów dyfrakcyjnych są [48]: a) stosunkowo nieskomplikowany układ pomiarowy, b) pomiar wykonywany jest w czasie rzeczywistym, c) zmiany położenia włókna w pewnym obszarze objętości pomiarowej nie mają wpływu na wynik pomiaru.

Skalarna teoria dyfrakcji jest powszechnie wykorzystywanym modelem matematycznym, umożliwiającym wyznaczenie średnicy badanego włókna na podstawie otrzymanego obrazu dyfrakcyjnego. Podstawą analizy jest zwykle położenie pierwszego minimum dyfrakcyjnego, które w przypadku włókna o dużej średnicy występuje pod bardzo małym kątem rozproszenia. Pomiar niewielkich ugięć dyfrakcyjnych napotyka pewne trudności techniczne. Przede wszystkim do uzyskania wysokiej rozdzielczości kątowej pomiaru wymagane jest to, aby wiązka oświetlająca była silnie skolimowana o przekroju poprzecznym znacznie większym od średnicy badanego włókna. Ponadto, znaczna energia pola rozproszonego koncentruje się w obrębie pierwszego maksimum dyfrakcyjnego, dlatego konieczna jest przestrzenna filtracja pola rozproszonego, aby uniknąć nasycenia kamery CCD w obrębie tego maksimum.

Analizę położenia pierwszego minimum dyfrakcyjnego w pomiarach włókien homogenicznych, z zastosowaniem modelu dyfrakcji Fraunhofera, zaproponowali Lebrun i in. [33] oraz Wu [69]. Prace Lebruna i in. koncentrowały się na opracowaniu metody pomiarowej dla włókien o średnicach z zakresu 50–650 μm . Uzyskana dokładność pomiaru wynosiła około 1% na początku tego zakresu i rosła wraz ze zwiększaniem średnicy. Z kolei Wu, w pomiarze włókna homogenicznego o nominalnej średnicy 125 μm , uzyskał dokładność pomiaru 0,4 μm (0.32%).

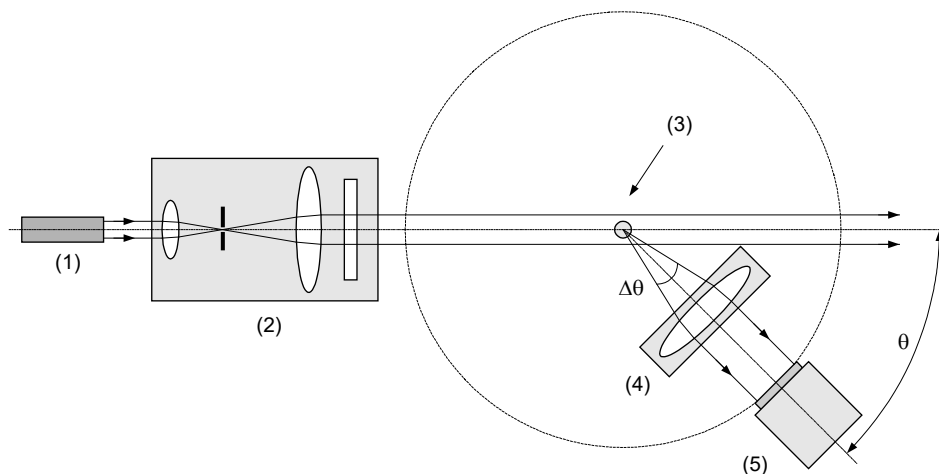
Onofri i in. [48] zwracają uwagę, że obraz dyfrakcyjny włókien wykonanych ze szkła, które charakteryzują się niską wartością współczynnika ekstynkcji, zakłócony jest przez składowe fali wielokrotnie rozproszone we włóknie, dające efekt zaburzeń o charakterze rezonansowym MDR (*Morphological-Dependent Resonances*) [51, 8]. Zaburzenia te nie są uwzględniane przez skalarną teorię dyfrakcji i ograniczają dokładność pomiaru. Onofri i in. pokazują, że dzięki złożonym procedurom estymacji, które wymagają jednak pewnej apriorycznej wiedzy o badanym włóknie, wpływ tych zaburzeń na wynik pomiaru można zminimalizować. Zbudowany przez autorów mikrometr do pomiaru średnicy homogenicznych włókien szklanych w zakresie 7–42 μm , cechuje dokładność pomiaru około 1% w odniesieniu do pomiarów wykonanych skaningowym mikroskopem elektronowym SEM. Można przypuszczać, że zjawisko MDR ogranicza zastosowanie modelu dyfrakcji Fraunhofera w pomiarach średnicy włókien niehomogenicznych, na przykład światłowodów transmisyjnych. W cytowanych pracach Lebruna i in. oraz Wu wpływ zjawiska MDR na obraz dyfrakcyjny nie został wzięty pod uwagę.

6.3. INTERFEROMETRIA PRZESTRZENNA

Kolejną metodą interferometryczną, która wykorzystuje duże koherentne promieniowanie laserowe w pomiarze średnicy włókna jest interferometria przestrzenna.

Oświetlenie włókna – mikroobiektu fazowego wiązką lasera powoduje powstanie pola rozproszonego. Pole to jest wynikiem koherentnej superpozycji fal o różnej naturze, takich jak: fale odbite od powierzchni włókna i fale wielokrotnie rozproszone w jego strukturze, fale załamane przez włókno, fale powierzchniowe, fale ugięte [65]. Udział poszczególnych fal składowych w tworzeniu pola rozproszonego uzależniony jest od właściwości fizycznych oświetlanego włókna, takich jak: geometria, profil współczynnika załamania, tłumienność, a także od natury promieniowania oświetlającego (kształt powierzchni fazowej, rozkład natężenia). Skomplikowana natura pola rozproszonego jest głównym czynnikiem ograniczającym zastosowanie interferometrii przestrzennej w pomiarach średnicy włókien o złożonej budowie.

W typowej konstrukcji interferometru, włókno oświetlane jest prostopadle do osi symetrii silnie skolimowaną wiązką laserową o średnicy przekroju poprzecznego znacznie większej od średnicy badanego włókna (rys. 6). Rozproszenie światła dla takich warunków następuje w płaszczyźnie prostopadłej do osi włókna. Kątowy rozkład natężenia pola rozproszonego ma postać jasnych i ciemnych prążków o zmiennej szerokości i amplitudzie. Obraz prążkowy z przedziału kątów rozproszenia $\Delta\theta$ odwzorowywany jest do płaszczyzny przetwornika CCD, umieszczonego w kącie rozpraszania θ .



Rys. 6. Układ optyczny interferometru do pomiaru średnicy włókna metodą interferometrii przestrzennej:

(1) – laser, (2) – układ kolimacyjny, (3) – badane włókno,

(4) – optyka odwzorowująca, (5) – kamera CCD

Fig. 6. Optical setup of spatial interferometry system for optical fibre diameter measurements.

(1) – laser, (2) – collimator, (3) – fibre under measurement, (4) – imaging lens, (5) – CCD camera

Podstawy analizy interferogramu zmiennego w przestrzeni opracował Watkins [67]. Posługując się prawami optyki geometrycznej dla modelu włókna transmisyjnego

o strukturze rdzeń–płaszcz (średnica rdzenia i płaszcz odpowiednio 19,5/166,5 μm) wykazał on, że liczba prążków w określonym przedziale kątów rozpraszania do przodu, zależy od średnicy włókna. Szacowana dokładność pomiaru średnicy rdzenia wyniosła około 1%, zakładając znajomość współczynników załamania rdzenia i płaszcz. Watkins w swojej pracy nie bada jednak wpływu wielu istotnych składowych pola rozproszonego, na przykład fal wielokrotnie rozproszonych w strukturze włókna czy fal odbitych od granicy rdzeń–płaszcz, na obraz tego pola i słuszność otrzymanych wyników.

Seakang i Chu [59], dla modelu włókna o gradientowym profilu współczynnika załamania, wykazali, że średnica włókna może być zmierzona na podstawie analizy położenia kąowego wybranych prążków interferencyjnych w obrazie pola rozproszonego wstecz. Autorzy wskazują, że pomiar średnicy możliwy jest w niewielkim zakresie jej zmian ze względu na złożony charakter pola. Według autorów, dokładność pomiaru średnicy wynosi około 1% dla włókna o nominalnej średnicy 67,5 μm .

6.4. INTERFEROMETRIA CZASOWA: FAZOWA INTERFEROMETRIA DOPPLEROWSKA (PDI)

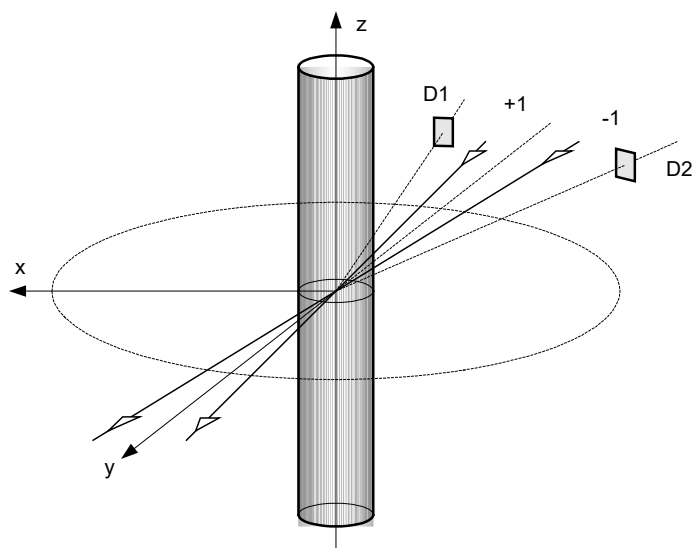
Fazowa interferometria dopplerowska PDI (*Phase Doppler Interferometry*), jako technika pomiaru średnicy włókna optycznego, wykorzystuje dwie przecinające się wiązki spójnego światła laserowego do wytworzenia objętości pomiarowej o niewielkich rozmiarach – rzędu ułamków milimetra (rys. 7). Obszar ten musi być znacznie większy od średnicy badanego włókna. W strefie objętości pomiarowej wiązki te interferują ze sobą, tworząc obraz wzajemnie równoległych prążków (na rys. 7 prążki te są równoległe względem płaszczyzny xz) oddalonych od siebie o odległość będącą funkcją kąta pomiędzy wiązkami oraz długości fal tworzących objętość pomiarową. Dwie koherentne wiązki światła laserowego powinny być wzajemnie przesunięte w częstotliwości o około $\nu_s = 50\text{--}200$ kHz, aby wytworzyć ruchomy obraz interferencyjny [47]. Przesunięcie to realizowane jest przez wstawienie w jedną lub obie gałęzie interferometru obrotowego elementu polaryzacyjnego, obrotowej siatki dyfrakcyjnej, modulatora elektrooptycznego lub akustooptycznego [1]. Włókno umieszczone w tak skonstruowanej objętości pomiarowej rozprasza światło, które mierzone jest przez dwa punktowe detektory D_1 i D_2 , rozmieszczone w płaszczyźnie rozpraszania xy pod określonymi kątami (rys. 7). Natężenie światła mierzone przez detektory ma postać oscylacji, nazywanych sygnałami Dopplera [46]:

$$I_1(t) = P_1(1 + V_1 \cos(2\pi\nu_D t + \phi_1)), \quad (6)$$

$$I_2(t) = P_2(1 + V_2 \cos(2\pi\nu_D t + \phi_2)), \quad (7)$$

gdzie: P , V , ϕ – odpowiednio piedestał (funkcja obwiedni), kontrast oraz faza sygnału Dopplera. Parametry te zależą od właściwości włókna (średnica, współczynnik zała-

mania) oraz geometrii interferometru. Współczynnik v_D jest częstotliwością sygnału Dopplera. Jeśli pozycja włókna nie zmienia się w płaszczyźnie rozproszenia, wówczas $v_D = v_s$. Wzajemne przesunięcie fazowe $\Delta\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2$ pomiędzy sygnałami $I_1(t)$ oraz $I_2(t)$ używane jest w fazowej interferometrii dopplerowskiej do pomiaru średnicy d włókna. Relacja $\Delta\phi_{12} = f(d)$ nazywana jest charakterystyką PDRS (*Phase-Diameter Relationship*).



Rys. 7. Geometria interferometru PDI do pomiarów średnicy włókna optycznego z detektorami umieszczonymi w zakresie kątów rozpraszania wstecz:

D_1, D_2 – detektory, +1 i -1 są indeksami laserowych wiązek oświetlających

Fig. 7. Backward scattering configuration of PDI interferometer for optical fibre diameter measurements:

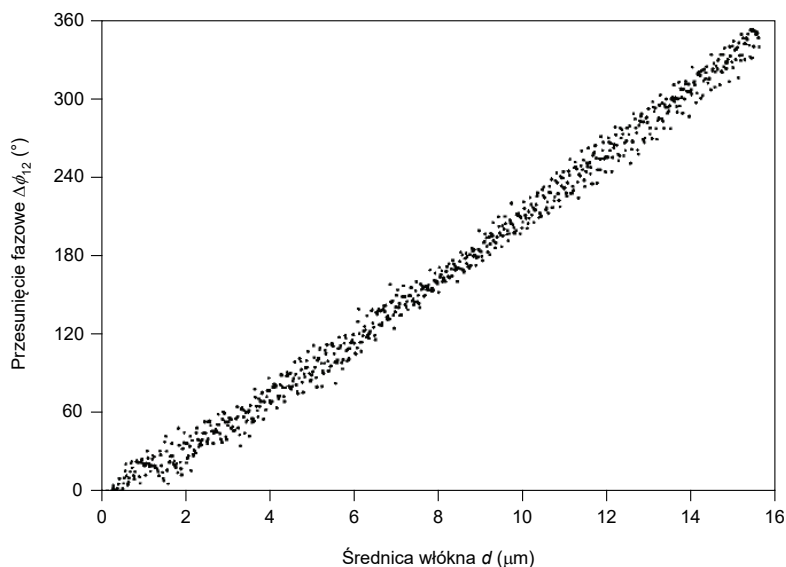
D_1, D_2 – detectors, +1 and -1 are indexes of laser beams

Istnieje wiele czynników, od których zależy wartość przesunięcia fazowego $\Delta\phi_{12}$ oraz jego zmienność podczas pomiaru średnicy włókna w procesie produkcji. Czynniki te wpływają na liniowość charakterystyki PDRS, a w konsekwencji na błąd pomiaru średnicy. Są to przede wszystkim:

- Oscylacje o charakterze wysokoczęstotliwościowym zależności PDRS. Sankar i Bachalo [60], posługując się przybliżeniem optyki geometrycznej, sugerują, że oscylacje mają swoje źródło we wzajemnych interferencjach promieni o różnych rzędach, wielokrotnie załamanych w strukturze włókna. Niepewność pomiaru średnicy włókna, wywołana tymi oscylacjami, zależy od konfiguracji interferometru (położenie detektorów, ich apertura numeryczna, kąt przecięcia wiązek laserowych). Dla zależności PDRS (rys. 8), uzyskanej przez Schaub a i in. [62], błąd pomiaru wynosi około $0,5 \mu\text{m}$. Autorzy

zaznaczają również, że dla innej konfiguracji interferometru, dla której detektory położone są w zakresie kątów rozproszenia do przodu, błąd ten można zredukować do $0,25 \mu\text{m}$. Podobne wyniki uzyskał Onofri [49]. Wykazał on, że dla optymalnie dobranej konfiguracji interferometru wartość błędu pomiaru średnicy w pomiarach homogenicznego włókna krzemionkowego może wynosić około $0,35 \mu\text{m}$ w zakresie średnic $7\text{--}42 \mu\text{m}$.

• Przemieszczanie się włókna w objętości pomiarowej i zmiana jego kąta nachylenia, wywołane wibracjami produkowanego włókna. Ocenę wpływu tych parametrów na zmiany przesunięcia fazowego $\Delta\phi_{12}$ wykonali Schaub i Naquwi [61]. Symulacja numeryczna uwzględniała przemieszczenie włókna o średnicy z zakresu $0,1\text{--}20 \mu\text{m}$ w polu elipsoidy pomiarowej o długości osi $\Delta x = \pm 1100 \mu\text{m}$, $\Delta y = \pm 350 \mu\text{m}$ oraz zmiany kąta nachylenia włókna względem osi z w zakresie $0\text{--}5^\circ$. Wzięto również pod uwagę skończoną wartość apertury detektorów. Dla tych warunków pomiaru, amplituda oscylacji fazy dla włókna o średnicy $15 \mu\text{m}$ wyniosła około 75° , co przekłada się na niepewność pomiaru średnicy wynoszącą około $3 \mu\text{m}$. Zaobserwowano również, że oscylacje fazy zwiększają się wraz ze zwiększaniem średnicy badanych włókien.



Rys. 8. Przykładowy wykres przesunięcia fazowego pomiędzy sygnałami dopplerowskimi w funkcji średnicy, wykonany dla homogenicznego włókna optycznego. Wykres wykonano w układzie detektorów umieszczonych w zakresie kątów rozproszenia wstecz (161° , 192°). Wiązki laserowe o długości fali $0,4579 \mu\text{m}$ pracują w modzie TEM00. Współczynnik konwersji fazy wynosi $19,76^\circ/\mu\text{m}$ [62]

Fig. 8. An example of phase-diameter relationship (PDRS) for homogeneous optical fibre for backscatter configuration. Receiver angles are 161° and 192° , incident beam wavelengths $0.4579 \mu\text{m}$. (TEM00). Phase-conversion factor is about $19.76^\circ/\mu\text{m}$ [62]

Zmiany współczynnika załamania włókna mają niewielki wpływ na położenie poszczególnych ekstremów oscylacyjnych w charakterystyce PDRS. Szacuje się, że dwójłomna zmiana współczynnika załamania włókna o około 0,015 w polu naprężeń indukowanych mechanicznie w procesie wyciągania, powoduje powstanie błędu pomiaru o wartości $\sim 0,04 \mu\text{m}$ [46]. Nieciągłości współczynnika załamania w postaci pęcherzy powietrza, inkluzji itp. wywołują skokową zmianę fazy sygnałów Dopplera [46]. Zaburzenie takie może być interpretowane jako nieciągłość struktury włókna pod warunkiem zastosowania dolnoprzepustowej filtracji sygnału fazowego. Z drugiej strony, filtracja taka zmniejsza czułość metody na szybkozmienne fluktuacje średnicy włókna.

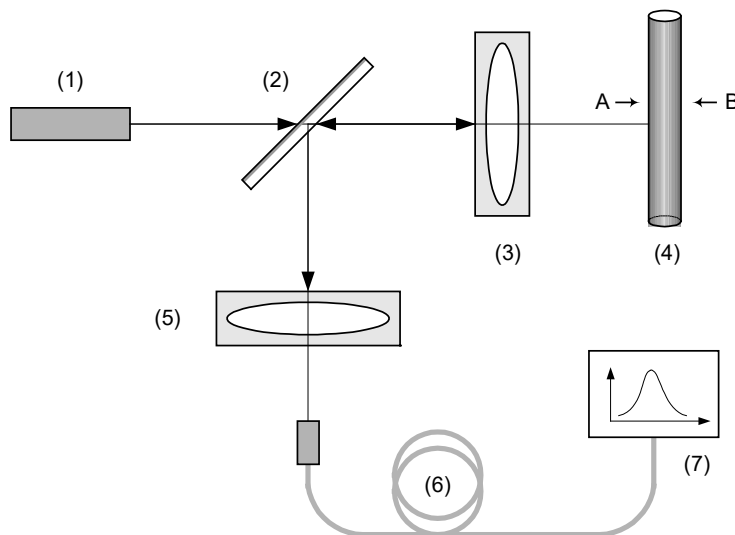
Badania Schauba i in. [62] wykazały, że faza sygnałów dopplerowskich może być znacząco zakłócona w warunkach silnej absorpcji włókna. Empiryczną wartością współczynnika ekstynkcji κ , powyżej której obserwuje się nawet zmiany monotoniczności charakterystyki PDRS jest 0,001.

W fazowej interferometrii dopplerowskiej zakres pomiarowy kształtowany jest przez zmianę kąta nachylenia wykresu PDRS. Uzyskuje się to przez dobór kąta przecięcia wiązek oświetlających, prowadzący do zmiany liczby prążków interferencyjnych w objętości pomiarowej [46]. Rozszerzenie zakresu pomiarowego, o określonej dokładności pomiaru fazy, pogarsza jednak możliwość detekcji niewielkich zmian średnicy. Innymi słowy, aby zachować relatywnie dużą dokładność pomiaru, konieczne jest zawężanie zakresu mierzonych średnic.

Konstrukcje fazowych interferometrów dopplerowskich, opisywane w cytowanej literaturze, optymalizowane są pod kątem pomiaru średnicy włókien homogenicznych stosowanych w materiałach kompozytowych. Brak jest doniesień o próbie aplikacji tej metody do pomiaru włókien o większych średnicach oraz włókien niehomogenicznych.

6.5. INTERFEROMETRIA WIDMOWA

Interferometria widmowa jest relatywnie nową techniką, w której informacje o badanym włóknie optycznym uzyskiwane są na podstawie analizy interferogramu zmiennego w dziedzinie częstotliwości, powstającego w wyniku odbicia impulsu laserowego o poszerzonym spektrum od badanego włókna. Schemat struktury optycznej układu pomiarowego przedstawiono na rysunku 9. Impuls z lasera z synchronizacją modów domieszkowanego Er^+ (1) skupiany jest za pomocą obiektywu (3) na powierzchni badanego włókna (4). Światło odbite od włókna, gromadzone przez obiektyw (3) i odbijane przez płytkę światłodzielącą (2), sprzęgane jest za pośrednictwem obiektywu (5) ze światłowodem (6) i podawane na wejście spektrometru (7).



Rys. 9. Struktura układu do pomiaru średnicy włókna metodą interferometrii widmowej [20]:
 (1) – laser femtosekundowy, (2) – rozdzielacz wiązki, (3, 5) – obiektywy, (4) – badane włókno,
 (6) – światłowód, (7) – spektrometr

Fig. 9. Schematic of spectral interferometer setup for fibre diameter measurement [20]:
 (1) – femtosecond laser, (2) – beam splitter, (3) – focusing and light-collecting lens,
 (4) – fibre under measurement, (5) – focusing lens, (6) – light-collecting fibre, (7) – spectrometer

Składowa światła odbitego od powierzchni A włókna interferuje ze składową odbitą od powierzchni B , propagującą się przez włókno dwukrotnie. Spektralny rozkład natężenia, rejestrowany przez spektrofotometr, opisuje równanie [20]:

$$I(\lambda) = I_A(\lambda) + I_B(\lambda) = 2\sqrt{I_A I_B} \cos(\phi), \quad (8)$$

gdzie: λ – długość fali promieniowania, I_A , I_B – natężenia widmowe składowych odpowiednio A i B , ϕ – oznacza różnicę faz pomiędzy interferującymi składowymi, która zależy od średnicy i współczynnika załamania badanego włókna oraz od długości fali. Przesunięcie fazowe manifestowane jest powstaniem maksimów w interferogramie w miejscach odpowiadającym wielokrotności liczby 2π . Zmiana średnicy włókna powoduje przesunięcie maksimów w widmie [20].

Zdolność opisywanej metody do detekcji niewielkich zmian średnicy zależy od rozdzielczości spektrometru. Autorzy donoszą, że dla pomiarów włókna o nominalnej średnicy $125 \mu\text{m}$ i spektrometru o rozdzielczości $0,05 \text{ nm}$ udało się uzyskać czułość na poziomie $0,01 \mu\text{m}$ [20]. Oprócz wysokiej czułości, zaletą metody interferometrii widmowej jest duża szybkość działania i możliwość detekcji wad optycznych we włóknie. Potencjalnie, metodą tą można obrazować strukturę włókien niehomogenicznych poprzez widmową analizę składowych odbijanych od poszczególnych warstw różni-

cych się wartością współczynnika załamania. Autorzy ograniczają jednak analizę tylko do składowych I_A , I_B , przyjmując, że w zaprojektowanym interferometrze składowe odbite od warstw o niewiele różniących się współczynnikach załamania, mają bardzo małą amplitudę i są przez to trudne w detekcji. Nie jest również dokładnie poznany wpływ przemieszczenia włókna w polu pomiarowym oraz wpływ krzywizny włókna na dokładność wyniku pomiaru.

7. PODSUMOWANIE

Aby sprostać kanonom współczesnej techniki światłowodowej, istnieje potrzeba doskonalenia obecnie wykorzystywanych technik pomiaru oraz poszukiwania nowych rozwiązań, które umożliwią charakterystykę skomplikowanych fizycznie struktur światłowodowych. Główną siłą laserowych metod pomiarowych jest ich potencjalnie duża precyzyjność i szybkość. Rozwój laserowych metod badawczych napotyka jednak wiele trudności ze względu na złożoną naturę pola rozproszonego, zwłaszcza w przypadku rozproszenia na obiektach niehomogenicznych. Dodatkowe utrudnienie wynika z tego, że matematyczne modelowanie pola rozproszonego w ujęciu ścisłym możliwe jest jedynie dla prostych przypadków. Wzrost wymagań co do dokładności i wiarygodności wyniku stwarza również konieczność uwzględnienia wielu parametrów procesu produkcyjnego, takich jak wibracje włókna, zmiany współczynnika załamania w polu naprężeń etc.

LITERATURA

- [1] ALBRECHT H.E., BORYS M., DAMASCHKE N., TROPEA C., *Laser Doppler and Phase Doppler Measurement Techniques*, Berlin, Springer-Verlag (2005).
- [2] ASAHI GLASS T013E, *Lucina 8 Core Cable Technical Bulletin*, Nota aplikacyjna firmy Asahi Glass Ltd. (2004).
- [3] BAINES J.G.N., HALLAM A.G., RAINE K.W., TURNER N.P., *Fibre Diameter Measurements and Their Calibration*, J. Lightwave Technol., 8, 1259, (1990).
- [4] BARTON G.W., LAW S.H., MCNAMARA P., PHAN T.N., *Measurement and Control Challenges for the Specialty Optical Fibre Industry in the 21st Century*, Proc. 5th Asian Control Conference, Melbourne, Australia (2004).
- [5] BOHREN C.F., HUFFMAN D.R., *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, New York, John Wiley & Sons (1983).
- [6] BRILLIANT N.A., ALPERT B.K., YOUNG M., *Video Microscopy Applied to Optical Fiber Geometry Measurements*, NIST Technical Note 1369, U.S. Department of Commerce, Boulder, CO (1994).
- [7] CHEW W.C., *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, New York, IEEE Press (1995).
- [8] CHÝLEK P., KIEHL J.T., KO M.K.W., ASHKIN A., *Surface Waves in Light Scattering by Spherical and Non-Spherical Particles* [w:] Schuerman D.W. (red.) *Light Scattering by Irregularly Shaped Particles*, 153–164, New York, Plenum Press (1980).

- [9] COHEN L.G., GLYNN P., *Dynamic Measurement of Optical Fiber Diameter*, Rev. Sci. Instrum., 44, 1749–1752, (1973).
- [10] DEVANEY A.J., *Nonuniqueness in the Inverse Scattering Problem*, J. Mat. Phys., 19, 1526–1531, (1978).
- [11] DEVANEY A.J., SHERMAN G.C., *Nonuniqueness in Inverse Source and Scattering Problems*, IEEE Trans. Antennas Propag., 8, 1034–1037, (1982).
- [12] DOROSZ J., ROMANIUK R.S., *Multicrucible Technology of Tailored Optical Fibers*, Optica Applicata, XXVIII, 293–322, (1998).
- [13] DOROSZ J., *Technologia Światłowodów Włókniстых* [w:] Pampuch R., Stoch L. (red.), *Ceramika*, 86, (2005).
- [14] GOUESBET G., *Interaction Between an Infinite Cylinder and an Arbitrary-Shaped Beam*, Appl. Opt., 36, 4292–4304, (1997).
- [15] GUPTA P.K., *Glass Fibers for Composite Materials* [w:] Bunsell A.R. (red.), *Fiber Reinforcements for Composite Materials*, 19–71, Holandia, Elsevier (1988).
- [16] IBSEN M., LAMING R.I., *Fibre Non-Uniformity Caused Bragg Grating Imperfections*, Proc. Optical Fibre Communication Conference OFC1999, San Diego, USA, 4, 2–4, (2004).
- [17] IEC 60793-2-40 *Optical Fibres. Part 2-40: Product Specifications – Sectional Specification for Category A4 Multimode Fibres*, Norma IEC (2006).
- [18] ISHIGURE T., NIHEI E., KOIKE Y., *High-Bandwidth. Low-Loss Graded-Index Polymer Optical Fiber for Near Infrared Use*, Proc. ECOC98, Madrid, Spain, 231–232, (1998).
- [19] JACKSON D.A., JONES J.D.C., *Fibre Optic Sensors*, J. Modern Optics., 33, 1469–1503, (1986).
- [20] JASAPARA J., MONBERG E., DIMARCELLO F., NICHOLSON J.W., *Accurate Noncontact Optical Fiber Diameter Measurement with Spectral Interferometry*, Opt. Lett., 28, 601–603, (2003).
- [21] KAI L., ALESSIO M., *Finely Stratified Cylinder Model for Radially Inhomogeneous Cylinders Normally Irradiated by Electromagnetic Plane Waves*, Appl. Opt., 34, 5520–5530, (1995).
- [22] KARLSSON M., *Four-Wave Mixing in Fibers With Randomly Varying Zero-Dispersion Wavelength*, J. Opt. Soc. Am. B, 15, 2269–2275, (1998).
- [23] KERKER M., MATIJEVIĆ E., *Scattering of Electromagnetic Waves from Concentric Infinite Cylinders*, J. Opt. Soc. Am., 51, 506–508, (1961).
- [24] KERKER M., *The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation*, New York, Academic Press (1969).
- [25] KIM E.M., FRANZEN D.L., *Measurement of the Core Diameter of Graded-Index Optical Fibers. An Interlaboratory Comparison*, Appl. Opt., 21, 3443–3450, (1982).
- [26] KNIGHT J.C., *Photonic Crystal Fibres*, Nature, 424, 847–851, (2003).
- [27] KOIKE Y., *High Bandwidth and Low-Loss Polymer Optical Fiber*, Proc. First International Conference on Plastic Optical Fibres and Applications POF'92, Paris, France, 15–19, (1992a).
- [28] KOIKE Y., *Graded-Index and Single-Mode Polymer Optical Fibers*, Proc. Mater. Res. Soc. Symp., 247, 817–828, (1992b).
- [29] KOIKE Y., *High-Bandwidth Graded-Index Polymer Optical Fiber*, J. Lightwave Technol., 13, 1475–1489, (1995).
- [30] KUMAR V.V.R.K., GEORGE A.K., REEVES W.H., KNIGHT J.C., RUSSELL P.S.J., OMENETTO F.G., TAYLOR A.J., *Extruded Soft Glass Photonic Crystal Fiber for Ultrabroad Supercontinuum Generation*, Opt. Express, 10, 1520–1525, (2002).
- [31] LASERMIKE *AccuScan™ 3000 Series*, Nota aplikacyjna firmy LaserMike (2003).
- [32] LAW S.H., PHAN T.N., POLADIAN L., *Fiber Geometry and Pigtailing*, IEEE 51st Electronic Components and Technology Conf., Lake Buena Vista, Florida, 1447–1450, (2001).
- [33] LEBRUN D., BELAID S., ÖZKUL C., REN K.F., GRÉHAN G., *Enhancement of Wire Diameter Measurements: Comparison Between Fraunhofer Diffraction and Lorenz-Mie Theory*, Opt. Eng., 35, 946–950, (1996).

- [34] LENOBLE A., *Caractérisation Optique et Étude de la Stabilité d'un Procédé de Fibrage du Verre*, Praca doktorska, Université de Provence, Marsylia (2004).
- [35] LOCK J.A., *Scattering of a Diagonally Incident Focused Gaussian Beam by an Infinitely Long Homogeneous Circular Cylinder*, J. Opt. Soc. Am. A, 14, 640–652, (1997).
- [36] LYYTIKÄINEN K.J., *Control of Complex Structural Geometry in Optical Fibre Drawing*, Praca doktorska, University of Sydney (2004).
- [37] MAITLAND K.C., SHIN H.J., RA H., LEE D., SOLGAARD O., RICHARDS-KORTUM R., *Single Fiber Confocal Microscope with a Two-Axis Gimbaled MEMS Scanner for Cellular Imaging*, Opt. Express, 14, 8604–8612, (2006).
- [38] MAJEWSKI A., *Teoria i Projektowanie Światłowodów*, Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne (1991).
- [39] MANGAN B.J., FARR L., LANGFORD A., ROBERTS P.J., WILLIAMS D.P., COUNY F., LAWMAN M., MASON M., COUPLAND S., FLEA R., SABERT H., BIRKS T.A., KNIGHT J.C., RUSSELL P.S.T.J., *Low Loss (1.7 dB/km) Hollow Core Photonic Bandgap Fiber*, Proc. Optical Fibre Communication Conference OFC2004, Los Angeles, USA, PDP24 (2004).
- [40] MECHELS S., YOUNG M., *Video Microscope With Submicrometer Resolution*, Appl. Opt., 30, 2202–2211, (1991).
- [41] MIDWINTER J.E., *Światłowody Telekomunikacyjne*, Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne (1983).
- [42] MIGNANI A.G., BALDINI F., *Biomedical Sensors Using Optical Fibres*, Rep. Prog. Phys., 59, 1–28, (1996).
- [43] MROCZKA J., *Metrologiczne Problemy Wykorzystywania Światła Rozproszonego do Badań Rozkładu Wielkości Cząstek w Roztworach Dyspersyjnych*, Metrologia i Systemy Pomiarowe, Monografia 4. Wrocław, Politechnika Wrocławska (1990).
- [44] MURUKESHAN V.M., SUJATHA N., SEAH L. K., ONG L.S., *All Fiber Optic Endoscope Probe Distal End for Disease Diagnosis in Body Cavities* [w:] Nicolau D.V. (red.), *Biomedical Applications of Micro- and Nanoengineering II*, Proc. SPIE, 5651, Bellingham, 321–328, (2005).
- [45] NODA J., OKAMOTO K., SASAKI Y., *Polarization-Maintaining Fibers and Their Applications*, J. Light. Technol., LT-4, 1071–1089, (1986).
- [46] ONOFRI F., LENOBLE A., RADEV S., BULTYNCK H., GUERING P.H., MARSAULT N., *Interferometric Sizing of Singleaxis Birefringent Glass Fibres*, Part. Part. Syst. Charact., 20, 171–182, (2003).
- [47] ONOFRI F., LENOBLE A., RADEV S., GUERING P.H., *Optical Measurement of the Drawing Tension of Small Glass Fibres*, Meas. Sci. Technol., 15, 1279–1284, (2004a).
- [48] ONOFRI F., LENOBLE A., BULTYNCK H., GUERING P.H., *High-Resolution Laser Diffractometry for the On-Line Sizing of Small Transparent Fibres*, Opt. Comm., 234, 183–191, (2004b).
- [49] ONOFRI F., *Diagnosics Optiques des Milieux Multiphasiques*, Praca habilitacyjna, Université de Provence, Marsylia (2005).
- [50] OUZOUNOV D.G., FAISAL R.A., GAETA A.L., MÜLLER D., VENKATARAMAN N., GALLAGHER M.T., KOCH K.W., *Generation of High-Power, Non-Frequency Shifted Solitons in a Gas-Filled Photonic Bandgap Fiber*, Proc. Conference on Lasers and Electro-Optics CLEO2003, Baltimore, USA, QThPDA3 (2003).
- [51] OWEN J.F., BARBER P.W., MESSINGER B.J., CHANG R.K., *Determination of Optical-Fiber Diameter from Resonances in the Elastic Scattering Spectrum*, Opt. Lett., 6, 272–274, (1981).
- [52] PAEK U.C., *High-Speed High-Strength Fiber Drawing*, J. Light. Technol., LT-4, 1048–1060, (1986).
- [53] REN K.F., GRÉHAN G., GOUESBET G., *Scattering of a Gaussian Beam by an Infinite Cylinder in the Framework of Generalized Lorenz-Mie Theory: Formulation and Numerical Results*, J. Opt. Soc. Am. A, 14, 3014–3025, (1997).

- [54] ROMANIUK R.S., *DWDM, Technologia, Pomiar, Eksploatacja, Rozwój*, Warszawa, Komitet Elektroniki i Telekomunikacji, Polska Akademia Nauk, (2001).
- [55] ROMANIUK R.S., *Światłowody Kształtowane*. Cz. 1. Elektronika, nr 3, 3–10, (2002a).
- [56] ROMANIUK R.S., *Światłowody Kształtowane*. Cz. 2. Elektronika, nr 4, 6–13, (2002b).
- [57] RUSSELL P.ST.J., *Photonic-Crystal Fibers*, J. Lightwave Technol., 24, 4729–4749, (2006).
- [58] SANDERS H., VENKATARAMAN C., GUPTA K., *Speedy Analysis of Average Fiber Diameter by a Novel Technique*, Proc. The 14th Annual National Technical Conference of the American Filtration & Separation Society, Tampa, Florida (2001).
- [59] SAEKEANG C., CHU P., *Diameter Determination of Graded-Index Optical Fibers From Backward-Scattered Pattern*, Appl. Opt., 18, 3276–3281, (1979).
- [60] SANKAR S.V., BACHALO W.D., *Response Characteristics of the Phase Doppler Particle Analyzer for Sizing Particles Larger than the Light Wavelength*, Appl. Opt., 30, 1487–1496, (1991).
- [61] SCHAUB S.A., NAQWI A.A., *Light Scattering Based Sensor for On-line Monitoring of Fiber Diameter Distribution During Fiberglass Manufacturing*, SBIR Final Report #DOE/ER/82229–1, U.S. Department of Energy, Washington, D.C. (1997).
- [62] SCHAUB S.A., NAQWI A.A., HARDING F.L., *Design of a Phase/Doppler Light-Scattering System for Measurement of Small-Diameter Glass Fibers During Fiberglass Manufacturing*, Appl. Opt., 37, 573–585, (1998).
- [63] ŚWIRNIAK G., WYSOCZAŃSKI D., MROCZKA J., *Rozproszenie Światła na Włóknie Cylindrycznym w Ujęciu Optyki Geometrycznej*, Pomiary, Automatyka, Kontrola, 53 bis, 305–308, (2007).
- [64] TARIGAN H.J., NEILL P., KENMORE C.K., BORNHOP D.J., *Capillary-Scale Refractive Index Detection by Interferometric Backscatter*, Anal. Chem., 68, 1762–1770, (1996).
- [65] VAN DE HULST H.C., *Light Scattering by Small Particles*, New York, Dover Publications, Inc. (1981).
- [66] VAN EIJKELNBORG M.A., ARGYROS A., BARTON G., BASSETT I.M., FELLEW M., HENRY G., ISSA N.A., LARGE M.C.J., MANOS S., PADDEN W., POLADIAN L., ZAGARI J., *Recent Progress in Microstructured Polymer Optical Fibre Fabrication and Characterisation*, Opt. Fiber Technol., 9, 199–209, (2003).
- [67] WATKINS L.S., *Scattering from Side-illuminated Clad Glass Fibers for Determination of Fiber Parameters*, J. Opt. Soc. Am., 64, 767–772, (1974).
- [68] WOLIŃSKI T.R., ERTMAN S., LESIAK P., DOMAŃSKI A.W., CZAPLA A., DĄBROWSKI R., NOWINOWSKI-KRUSZELNICKI E., WÓJCIK J., *Fibers Using the Method of Forward Near-Axis Far-Field Interference*, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, St. Paul, Minnesota, USA, 1149–1152, (1998).
- [70] YOUNG M., HALE P.D., MECHELS S.E., *Optical Fiber Geometry: Accurate Measurement of Cladding Diameter*, J. Res. Natl. Stand. Technol., 98, 203–216, (1993).
- [71] ZUBIA J., ARRUE J., *Plastic Optical Fibers: An Introduction to Their Technological Processes and Applications*, Opt. Fiber Technol., 7, 101–140 (2001).

LASER-BASED TECHNIQUES FOR OPTICAL FIBRE DIAMETER MEASUREMENT DURING FIBRE DRAWING: A REVIEW OF SELECTED ISSUES

The aim of this paper is to provide a critical review of currently used methods, based on laser illumination, for optical fibre diameter measurement during its production. In the introduction, the classification of optical fibres is presented to show the variety and complexity of their structures. Selected theories used in laser-based particle sizing are also discussed.



Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w księgarni „Tech”
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. 071 320 29 35
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową

ISBN 978-83-7493-385-8