PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 1 (1201) — 2008
Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka

Magdalena Dyda

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

ASYMPTOTYKA PRAWDOPODOBIEŃSTWA RUINY DLA PROCESÓW RYZYKA UWZGLĘDNIAJĄCYCH INWESTYCJE I REASEKURACJĘ

1. Wstęp

Prawdopodobieństwo ruiny jest jedną z najczęściej używanych miar ryzyka ubezpieczeniowego. Jednak wzory analityczne są znane tylko w kilku szczególnych przypadkach. Dlatego w celu oszacowania tego prawdopodobieństwa stosuje się różnego typu symulacje komputerowe, aproksymacje oraz asymptotyki.

Znane jest asymptotyczne zachowanie prawdopodobieństwa ruiny jako funkcji kapitału początkowego w klasycznym modelu Craméra–Lundberga oraz rozszerzenia tych wyników na przypadki uwzględniające stały poziom reasekuracji. Ostatnio pojawiły się artykuły, w których uwzględnia się strategie inwestycyjne i reasekuracyjne optymalne w sensie minimalizacji prawdopodobieństwa ruiny. W niniejszym referacie przedstawione zostaną wyniki zarówno klasyczne, jak i te najnowsze.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

U_t	– kapitał w chwili $t \geq 0$, $U_0 = u$ – kapitał początkowy, $u \geq 0$,
c	– suma składek przypadających na jednostkę czasu, $c > 0$,
$X_1, X_2, \ldots$	– wielkości kolejnych roszczeń, ciąg niezależnych zmiennych losowych o średniej m i jednakowym rozkładzie F takim, że $F(0) = 0$,
N_t	– liczba roszczeń do chwili t, proces Poissona o intensywności λ,
$T_1, T_2, \ldots$	– momenty nadchodzenia kolejnych roszczeń,
$\tau = \inf\{t \geq 0: U_t < 0\}$	– moment ruiny,
$\Psi(u) = \Pr\{\tau < \infty\}$	– prawdopodobieństwo ruiny.

W dalszej części pracy będziemy zajmować się asymptotycznym zachowaniem funkcji Ψ. Wyniki będą w znacznej mierze zależały od typu rozkładu wielkości roszczeń i dopuszczalnych strategii. Najczęściej wyróżnia się dwa typy rozkładów: lekkoogonowe (odpowiadające małym roszczeniom) i ciężkoogonowe (odpowiadające dużym roszczeniom).

- Mówimy, że zmienna losowa X o dystrybuancie F ma rozkład lekkoogonowy, jeśli istnieją takie $a > 0$, $b > 0$, że $1 - F(x) \le ae^{-bx}$, lub równoważnie, jeśli istnieje $r > 0$, dla którego $M_X(r) = \mathrm{E}e^{rX} < \infty$.
- Mówimy, że zmienna losowa X o dystrybuancie F ma rozkład ciężkoogonowy, jeśli dla dowolnych $a > 0$, $b > 0$ $1 - F(x) > ae^{-bx}$, lub równoważnie, jeśli dla każdego $r > 0$ $M_X(r) = \mathrm{E}e^{rX} = \infty$.

Wśród rozkładów ciężkoogonowych wyodrębnia się klasę rozkładów podwykładniczych, to znaczy takich, że $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 - F^{*n}(x)}{1 - F(x)} = n$, $n \in N$, $n \ge 2$. Należą do nich m.in. [1, s. 251]:

– rozkłady o regularnie zmieniających się ogonach, czyli takie, że $1 - F(x) \sim \frac{L(x)}{x^\alpha}$, gdzie $\alpha > 0$, a L jest funkcją wolnozmieniającą się $\left(\forall_{t>0} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1\right)$, np. rozkład Pareta;

– rozkład lognormalny,

– rozkład Weibula z parametrem kształtu $\beta \in (0, 1)$.

2. Klasyczny proces ryzyka

Najbardziej znanym i najprostszym modelem ryzyka ubezpieczeniowego jest model Craméra–Lundberga. Zakłada się w nim, że kapitał w chwili t zależy od kapitału początkowego, sumy składek i sumy roszczeń:

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i. \tag{1}$$

Aby $\Psi(u) < 1$ musimy założyć, że $\mathrm{E}\left[ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i\right] > 0$, czyli $c > \lambda m$. W takim przypadku funkcja prawdopodobieństwa ruiny Ψ spełnia następujące równanie różniczkowe (w [7], s. 162, tw. 5.3.1 dotyczy funkcji $\overline{\Psi}(u) = 1 - \Psi(u)$, podobnie w [14], s. 690, równanie (1)):

$$c\Psi'(u) + \lambda\left(\mathrm{E}\,\Psi(u - X) - \Psi(u)\right) = 0, \tag{2}$$

z warunkiem początkowym $\Psi(0) = \frac{\lambda m}{c}$. Dla $u < 0$ $\Psi(u) = 1$.

Dla rozkładu wykładniczego powyższe równanie ma rozwiązanie analityczne. Można je uzyskać, doprowadzając równanie (2) do równania liniowego stopnia drugiego. Tu zostanie przedstawione inne podejście. Załóżmy najpierw, że rozwiązanie jest postaci

$$\Psi(u) = \begin{cases} Ce^{-Ru}, & \text{dla } u \geq 0, \\ 1, & \text{dla } u < 0, \end{cases} \tag{3}$$

gdzie C oraz R są pewnymi stałymi i wyznaczymy te stałe, wstawiając funkcję (3) do równania (2). Następnie można sprawdzić, że rzeczywiście otrzymaliśmy rozwiązanie tego równania. Z warunku początkowego wynika, że $C = \frac{\lambda m}{c} > 0$. Ponieważ $\Psi(\infty) = 0$ i $C > 0$, więc $R > 0$. Wtedy

$$\mathrm{E}\,\Psi(u - X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(u - x)dF(x) = C\int_0^u e^{-R(u-x)}dF(x) + 1 - F(u) =$$

$$= Ce^{-Ru}\int_0^u e^{Rx}dF(x) + 1 - F(u).$$

Wstawmy funkcję opisaną wzorem (3) do równania (2) i podzielmy je stronami przez Ce^{-Ru}, wtedy otrzymujemy

$$-cR + \lambda\left(\int_0^u e^{Rx}dF(x) + C^{-1}e^{Ru}\left(1 - F(u)\right) - 1\right) = 0. \tag{4}$$

Ogon dystrybuanty rozkładu wykładniczego jest postaci $1 - F(u) = e^{-\alpha u}$, gdzie $\alpha > 0$, więc $e^{Ru}\left(1 - F(u)\right) = e^{(R-\alpha)u}$. Dla $u \to +\infty$ oraz $R < \alpha$ $e^{Ru}\left(1 - F(u)\right) \to 0$. Przechodząc do nieskończoności w równaniu (4), otrzymujemy:

$$-cR + \lambda\left(M_X(R) - 1\right) = 0. \tag{5}$$

Dla rozkładu wykładniczego $M_X(R) = \frac{\alpha}{\alpha - R}$ dla $R < \alpha$, więc równanie (5) ma dwa pierwiastki $R = 0$ oraz $R = \frac{\alpha c - \lambda}{c}$, wcześniej jednak założyliśmy, że $R > 0$. Można teraz sprawdzić, że funkcja postaci

$$\Psi(u)=\begin{cases}\frac{\lambda m}{c}\exp\left(-\frac{\alpha c-\lambda}{c}u\right), & \text{dla } u\geq 0,\\ 1, & \text{dla } u<0\end{cases} \tag{6}$$

jest rozwiązaniem równania (2).

2.1. Rozkłady lekkoogonowe

Okazuje się, że dla rozkładów lekkoogonowych prawdopodobieństwo ruiny asymptotycznie jest wykładnicze.

Twierdzenie Craméra–Lundberga
Załóżmy, że istnieje $R>0$ będące rozwiązaniem równania

$$cR-\lambda\left(M_X(R)-1\right)=0. \tag{7}$$

Jeśli $M'_X(R)<\infty$, to

$$\Psi(u)\sim C\exp(-Ru), \tag{8}$$

gdzie $C=\dfrac{c-\lambda m}{\lambda M'_X(R)-c}$.
Dowód np. w [1, s. 71].

Stałą $R>0$ będącą rozwiązaniem równania $cR-\lambda\left(M_X(R)-1\right)=0$ nazywamy współczynnikiem Lundberga lub współczynnikiem dopasowania. Jej wyznaczenie w sposób jawny jest możliwe w niewielu przypadkach, w pozostałych stosuje się metody numeryczne.

2.2. Rozkłady ciężkoogonowe

Dla rozkładów ciężkoogonowych współczynnik Lundberga nie istnieje, więc trzeba zastosować inne podejście do badania asymptotyki funkcji Ψ. Więcej na ten temat można znaleźć np. w [1, s. 251], tu podamy tylko twierdzenie dotyczące interesującego nas wyniku.

Zdefiniujmy tzw. dystrybuantę całkową dla dystrybuanty F:

$$F_s(x)=\frac{1}{m}\int_0^x\left(1-F(y)\right)dy.$$

Twierdzenie
Jeśli F oraz F_s są dystrybuantami rozkładów podwykładniczych, to

$$\Psi(u) \sim \frac{\lambda m}{c - \lambda m}(1 - F_s(u)). \tag{9}$$

W szczególności:

– dla rozkładów o regularnych ogonach $\left(1 - F(x) \sim \frac{L(x)}{x^{\alpha}}\right)$

$$\Psi(u) \sim \frac{\lambda m}{(c - \lambda m)(\alpha - 1)} \cdot \frac{L(u)}{u^{\alpha - 1}},$$

– dla rozkładu lognormalnego $\left(1 - F(x) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)\right.$, Φ – dystrybuanta rozkładu normalnego)

$$\Psi(u) \sim \frac{\lambda \sigma}{(c - \lambda m)\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{u}{(\ln u)^2} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

– dla rozkładu Weibula $\left(1 - F(x) = \exp\left(-x^{\beta}\right), 0 < \beta < 1\right)$

$$\Psi(u) \sim \frac{\lambda}{(c - \lambda m)\beta} x^{1-\beta} \exp\left(-x^{\beta}\right).$$

3. Proces ryzyka uwzględniający reasekurację

Reasekuracja jest stosowana w celu zmniejszenia ryzyka. Trzeba jednak pamiętać o tym, że wraz z ryzykiem reasekuratorowi przekazywana jest część składek. Po zastosowaniu reasekuracji mamy do czynienia z mniejszymi roszczeniami i mniejszymi składkami. Jedno pozytywnie wpływa na minimalizację ryzyka, drugie negatywnie. Znajomość asymptotycznego zachowania prawdopodobieństwa ruiny w pewnych przypadkach pozwala na wyznaczenie poziomu reasekuracji minimalizującego prawdopodobieństwo ruiny.

Niech X oznacza wielkość roszczenia. Wtedy

$X_{ce} = h(X, b)$ – część pokrywana przez ubezpieczyciela (b – parametr),

$X_{re} = X - X_{ce}$ – część pokrywana przez reasekuratora,

$c(b)$ – suma składek przekazywanych reasekuratorowi.

Będziemy rozważać dwa typy reasekuracji:

- reasekurację proporcjonalną $h(X, b) = bx$, $b \in [0, 1]$, ($b = 0$ oznacza reasekurację całej szkody, a $b = 1$ brak reasekuracji), $X_{ce} = bX$, $X_{re} = (1 - b)X$
- reasekurację nadwyżki szkody $h(X, b) = \min\{x, b\}$, $b \in [0, \infty]$ ($b = 0$ oznacza reasekurację całej szkody, a $b = \infty$ brak reasekuracji), $X_{ce} = \min\{X, b\}$, $X_{re} = \max\{X - b, 0\}$.

Załóżmy, że zarówno ubezpieczyciel, jak i reasekurator obliczają składkę z zasady wartości oczekiwanej. Ponadto przyjmiemy, że reasekurator stosuje większy narzut na składkę netto niż ubezpieczyciel. Wtedy $c(0) > c$, czyli przekazując reasekuratorowi całą szkodę, ubezpieczyciel płaci kwotę przewyższającą składkę, którą otrzymał za daną szkodę. W przeciwnym przypadku ubezpieczyciel mógłby przekazywać reasekuratorowi całe ryzyko i odnosić korzyści z różnicy składek, nie ponosząc przy tym żadnego ryzyka.

Proces ryzyka uwzględniający reasekurację spełnia następujące równanie:

$$dU_t^b = (c - c(b))dt - d\left(\sum_{i=1}^{N_t} h(X_i, b)\right), \; U_0^b = u. \tag{10}$$

Oznacza ono, że przyrost kapitału to suma składek pomniejszonych o część należną reasekuratorowi minus suma roszczeń pokrywanych przez ubezpieczyciela.

Przy ustalonym typie reasekuracji i jej poziomie proces opisany równaniem (10) można traktować jak klasyczny proces ryzyka z sumą składek równą $(c - c(b))$ i roszczeniami $h(X, b)$, więc prawdopodobieństwo ruiny $\Psi_b(u) = \Pr\left\{U_t^b(u) < 0,\right.$ dla pewnego $\left. t \geq 0\right\}$ jest rozwiązaniem równania:

$$(c - c(b))\Psi_b'(u) + \lambda\left(\mathrm{E}\,\Psi_b(u - h(X, b)) - \Psi_b(u)\right) = 0, \tag{11}$$

z warunkiem początkowym $\Psi_b(0) = \dfrac{\lambda\,\mathrm{E}\,h(X, b)}{c - c(b)}$.

Jeśli założymy, że poziom reasekuracji może zmieniać się w czasie, to prawdopodobieństwo ruiny przy strategii optymalnej (w sensie minimalizacji prawdopodobieństwa ruiny) spełnia równanie Hamiltona–Jacobiego–Bellmana (H–J–B). Dla reasekuracji proporcjonalnej problem jest opisany w pracy [9], a dla reasekuracji nadwyżki szkody w [5]. Okazuje się, że poziom reasekuracji w danej chwili powinien zależeć tylko od kapitału. Na podstawie równania H–J–B poza minimalnym prawdopodobieństwem ruiny (ozn. $\Psi_{**}(u)$) wyznacza się strategię optymalną, czyli funkcję (ozn. $b^{**}(u)$) opisującą zależność poziomu reasekuracji od kapitału, dla której prawdopodobieństwo ruiny jest minimalne.

3.1. Rozkłady lekkoogonowe

Jeśli zmienna losowa X ma rozkład o lekkim ogonie, to $h(X, b)$ także ma rozkład o lekkim ogonie, zarówno dla reasekuracji proporcjonalnej, jak i dla nadwyżki szkody. Dlatego w tym przypadku także prawdziwa jest teza twierdzenia

Craméra–Lundberga. Podobnie jak w przypadku procesu klasycznego współczynnik Lundberga $R(b)$ wyznaczamy z równania

$$-(c-c(b))R+\lambda\left(M_{h(X,b)}(R)-1\right)=0. \tag{12}$$

Wtedy

$$\Psi_b(u)\sim C\exp(-R(b)u). \tag{13}$$

Im większe $R(b)$, tym mniejsze prawdopodobieństwo ruiny, dlatego maksymalizując ten współczynnik, możemy wyznaczyć optymalny stały poziom reasekuracji (opisany przez b^*). Takie podejście pochodzi od Watersa [15]. Wykazał on, że istnieje takie b, że $R(b)$ osiąga maksimum. W praktyce rozwiązanie problemu utrudnia to, że $R(b)$ jest zadane w sposób uwikłany. Można oczywiście dla każdego b wyznaczać numerycznie $R(b)$, a następnie szukać jego maksimum. Jednak jest to bardzo pracochłonne. Hald i Schmidli zaproponowali łatwiejszy sposób wyznaczania b maksymalizującego $R(b)$ w przypadku reasekuracji proporcjonalnej, po szczegóły odsyłamy do pracy [2].

Oznaczmy przez b^* poziom reasekuracji taki, że $R\left(b^*\right)=\max\limits_b R(b)$. Przy dużym kapitale optymalna strategia $b^{**}(u)$ wyznaczana z równania H–J–B jest zbieżna do b^* [12; 13], a prawdopodobieństwo ruiny będące rozwiązaniem równania H–J–B jest asymptotycznie takie samo, jak w przypadku strategii stałej maksymalizującej współczynnik dopasowania.

3.2. Rozkłady ciężkoogonowe

Reasekuracja proporcjonalna

Współczynnik dopasowania nie istnieje. Asymptotyka jest podobna jak w przypadku bez reasekuracji dla roszczeń bX i składek wielkości $c-c(b)$, mianowicie

$$\Psi_b(u)\sim\frac{\lambda mb}{c-c(b)-\lambda mb}\left(1-F_s\left(\frac{u}{b}\right)\right). \tag{14}$$

Optymalną strategię reasekuracyjną można wyznaczyć na podstawie równania H–J–B. Schmidli [14] wykazał, że w przypadku rozkładu roszczeń o regularnych ogonach astymptotyka prawdopodobieństwa ruiny przy optymalnej strategii reasekuracyjnej wygląda następująco:

$$\Psi_{**}(u)\sim\inf_{b\in(0,1]}\frac{\lambda mb}{c-c(b)-\lambda mb}(1-F_s(u)). \tag{15}$$

Reasekuracja nadwyżki szkody

Współczynnik dopasowania $R(b)$ istnieje dla $b < \infty$, ponieważ dzięki reasekuracji „obcięte" zostają grube ogony rozkładu. Wyznaczamy go z równania

$$-(c - c(b))R + \lambda\left(M_{\min\{X,b\}}(R) - 1\right) = 0, \qquad (16)$$

gdzie

$$M_{\min\{X,b\}}(R) = \mathrm{E}e^{R\min\{X,b\}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{Ry} dF_{\min\{X,b\}}(y) = \int_{0}^{b} e^{Ry} dF(y) + (1 - F(b))e^{Rb}. \qquad (17)$$

Wtedy

$$\Psi_b(u) \sim C\exp(-R(b)u). \qquad (18)$$

Problem ten jest opisany w pracach [12; 15]. Optymalny (w sensie minimalizacji prawdopodobieństwa ruiny) stały poziom reasekuracji to ten, który maksymalizuje współczynnik dopasowania $R(b)$. Optymalny zmieniający się w czasie poziom reasekuracji można wyznaczyć z równania H–J–B.

4. Proces ryzyka uwzględniający stałe inwestycje i reasekurację

Załóżmy, że wartość jednostki zainwestowanej w akcje jest modelowana geometrycznym ruchem Browna:

$$Z_t = \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}, \qquad (19)$$

Z_t – zdyskontowana wartość w chwili t jednostki zainwestowanej w chwili 0,
$\mu > 0$ – oczekiwana stopa zwrotu (dryf geometrycznego ruchu Browna),
σ^2 – wariancja zwrotu (współczynnik zmienności),
W_t – ruch Browna,
A – zainwestowana suma.

Wtedy proces ryzyka $\{U_t^{Ab}\}$ uwzględniający stałe inwestycje i reasekurację spełnia równanie:

$$dU_t^{Ab} = (c - c(b) + \mu A)dt + \sigma A dW_t - d\left(\sum_{i=1}^{N_t} h(X_i, b)\right),\ U_0^{Ab} = u. \qquad (20)$$

Przyrost kapitału zależy od wpływów ze składek pomniejszonych o część należną reasekuratorowi, od oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji, przyrostu ruchu Browna i sumy części roszczeń pokrywanych przez ubezpieczyciela.

Funkcja prawdopodobieństwa ruiny $\Psi_{Ab}(u)=\Pr\left\{U_t^{Ab}(u)<0,\right.$ dla pewnego $\left.t\geq 0\right\}$ jest rozwiązaniem równania (można to wywnioskować np. z [3]):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \Psi''_{Ab}(u)+\left(c-c(b)+\mu A\right)\Psi'_{Ab}(u)+\lambda\left(\mathrm{E}\Psi_{Ab}(u-h(X,b))-\Psi''_{Ab}(u)\right)=0, \quad (21)$$

Warunki brzegowe to $\Psi_{Ab}(u)=1$ dla $u<0$, $\Psi_{Ab}(\infty)=0$, $\Psi''_{Ab}(0)=-\infty$.

4.1. Rozkłady lekkoogonowe

Współczynnik dopasowania $R(A,b)$ dla stałych strategii jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 R^2-\left(c-c(b)+\mu A\right)R+\lambda\left(M_{h(X,b)}(R)-1\right)=0, \quad (22)$$

Asymptotyka prawdopodobieństwa ruiny (zob. np. [8]):

$$\Psi_{Ab}(u)\sim C\exp\left(-R(A,b)u\right). \quad (23)$$

Wyniki te można otrzymać, stosując rezultaty uzyskane dla procesu ryzyka zaburzonego ruchem Browna (zob. np. [7, s. 568]).

Aby wyznaczyć stałe poziomy inwestycji i reasekuracji, dla których prawdopodobieństwo ruiny jest najmniejsze, szuka się takich A oraz b, które maksymalizują współczynnik dopasowania. Oznaczmy przez A^* oraz b^* te stałe.

4.2. Rozkłady ciężkoogonowe

Reasekuracja proporcjonalna

Współczynnik dopasowania nie istnieje, jeśli $b>0$. Asymptotyka podobna jak w przypadku bez inwestycji.

$$\Psi_{Ab}(u)\sim\frac{\lambda mb}{c-c(b)+\mu A-\lambda mb}\left(1-F_s\left(\frac{u}{b}\right)\right). \quad (24)$$

Reasekuracja nadwyżki szkody

Współczynnik dopasowania istnieje i jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 R^2-\left(c-c(b)+\mu A\right)R+\lambda\left(M_{h(X,b)}(R)-1\right)=0, \quad (25)$$

Asymptotyka jak dla rozkładów lekkoogonowych, czyli

$$\Psi_{Ab}(u)\sim C\exp\left(-R(A,b)u\right). \quad (26)$$

5. Proces ryzyka uwzględniający optymalne strategie inwestycyjne i reasekuracyjne zmieniające się dynamicznie

Niech A_t będzie sumą zainwestowaną w chwili t, a b_t poziomem reasekuracji w chwili t. Naszym celem jest wyznaczenie strategii inwestycyjnej i reasekuracyjnej minimalizujących prawdopodobieństwo ruiny. Schmidli [11] wykazał, że strategie te są funkcjami kapitału w chwili t, to znaczy $A_t = A\left(U_{t-}^{Ab}\right)$, $b_t = b\left(U_{t-}^{Ab}\right)$. W takim przypadku prawdziwa jest równość:

$$dU_t^{Ab} = \left(c - c(b_t) + \mu A_t\right)dt + \sigma A_t dW_t - d\left(\sum_{i=1}^{N_t} h\left(X_i, b_{T_i}\right)\right),\ U_0^{Ab} = u. \qquad (27)$$

Funkcja prawdopodobieństwa ruiny $\Psi_{**}(u) = \inf_{A,b} \Psi_{Ab}(u)$ spełnia równanie Hamiltona–Jackobiego–Bellmana (H–J–B):

$$\inf_{A\ge 0}\inf_{b\ge 0}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \Psi''_{**}(u) + \left(c - c(b) + \mu A\right)\Psi'_{**}(u) + \lambda\left(\mathrm{E}\Psi_{**}\left(u - h(X,b)\right) - \Psi_{**}(u)\right)\right\} = 0, \qquad (28)$$

Strategie A oraz b wyznaczamy jako funkcje kapitału początkowego $A(u)$ oraz $b(u)$. Dla każdego u wartościami przybieranymi przez te funkcje będą stałe minimalizujące lewą stronę równania H–J–B. Oznaczmy optymalne strategie przez $A^{**}(u)$, $b^{**}(u)$.

Wyniki prac [4; 11; 13] dotyczą inwestycji i reasekuracji proporcjonalnej. Jednak można przypuszczać, że dla reasekuracji nadwyżki szkody prawdziwe są analogiczne twierdzenia. Heurystyczne wyprowadzenie równania H–J–B oraz jego numeryczne rozwiązania dla reasekuracji nadwyżki szkody zostały przedstawione w pracy [6].

5.1. Rozkłady lekkoogonowe

Współczynnik dopasowania $R\left(A^{**}, b^{**}\right)$ dla optymalnych strategii jest rozwiązaniem równania:

$$\inf_{A\ge 0}\inf_{b\ge 0}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 - \left(c - c(b) + \mu A\right)R + \lambda\left(M_{h(X,b)}(R) - 1\right)\right\} = 0. \qquad (29)$$

Można wykazać (zob. [10]), że $R\left(A^{**}, b^{**}\right) = R\left(A^{*}, b^{*}\right) = \sup_{A\ge 0,\, b\ge 0} R(A,b)$, ponadto asymptotyka prawdopodobieństwa ruiny jest następująca:

$$\Psi_{**}(u) \sim C\exp\left(-R\left(A^{*}, b^{*}\right)u\right). \qquad (30)$$

5.2. Rozkłady ciężkoogonowe

Reasekuracja proporcjonalna

Można wykazać [13], że w przypadku dużych szkód $b^{**}(u) \to 0$. To znaczy, że przy dużym kapitale firma ubezpieczeniowa powinna reasekurować prawie całe szkody. Wcześniej zakładaliśmy, że reasekurator stosuje wyższy narzut niż ubezpieczyciel, w takiej sytuacji ubezpieczyciel, przekazując całe ryzyko, musi zapłacić większą składkę, niż otrzymał. W przypadku nie uwzględniającym inwestycji prowadziłoby to do ruiny. Jednak jeśli ubezpieczyciel stosuje optymalną strategię inwestycyjną, to przy pewnym kapitale lepiej jest (ze względu na prawdopodobieństwo ruiny) mieć „ujemny dochód" ze składek niż mieć dodatnie wpływy ze składek, ale być narażonym na ryzyko związane z dużymi szkodami. Współczynnik dopasowania istnieje, jeśli $b = 0$, tzn. reasekurator pokrywa całą szkodę. Jeśli w równaniu (19) wstawimy $b = 0$, otrzymamy

$$\inf_{A \geq 0}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 R^2 - \left(c - c(0) + \mu A\right)R\right\} = 0, \tag{31}$$

a stąd $A^{**} = \dfrac{2(c(0) - c)}{\mu}$ i $R\left(A^{**}, 0\right) = \dfrac{\mu^2}{2(c(0) - c)\sigma^2}$. Asymptotyka prawdopodobieństwa ruiny

$$\Psi_{**}(u) \sim C \exp\left(-R\left(A^{**}, 0\right)u\right). \tag{32}$$

Reasekuracja nadwyżki szkody

Współczynnik dopasowania $R\left(A^{**}, b^{**}\right)$ można wyznaczyć podobnie jak w przypadku rozkładów lekkoogonowych z równania

$$\inf_{A \geq 0}\inf_{b \geq 0}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 R^2 - \left(c - c(b) + \mu A\right)R + \lambda\left(M_{h(X,b)}(R) - 1\right)\right\} = 0. \tag{33}$$

Asymptotyka prawdopodobieństwa ruiny

$$\Psi_{**}(u) \sim C \exp\left(-R\left(A^{**}, b^{**}\right)u\right). \tag{34}$$

6. Wnioski

Dla rozkładów lekkoogonowych oraz dowolnych strategii reasekuracyjnych i inwestycyjnych prawdopodobieństwo ruiny jest asymptotycznie wykładnicze. Nawet dobór optymalnych strategii nie zmienia typu funkcji asymptotycznej. Zmienia się oczywiście wartość współczynnika Lundberga. Na jego podstawie możemy porównywać wpływ różnych strategii na ryzyko.

W przypadku rozkładów ciężkoogonowych sama reasekuracja proporcjonalna nie zmienia typu funkcji asymptotycznej. Reasekuracja nadwyżki szkody niweluje wpływ „grubych" ogonów rozkładu i poprawia asymptotykę prawdopodobieństwa ruiny na wykładniczą. W przypadku reasekuracji proporcjonalnej i inwestycji można uzyskać asymptotykę wykładniczą, ale pod warunkiem, że strategie (reasekuracyjna i inwestycyjna) będą dobrane optymalnie.

Ponadto, jeśli istnieje współczynnik dopasowania, to optymalne strategie zmieniające się dynamicznie dążą do stałych strategii maksymalizujących ten współczynnik. Pozwala to na łatwiejsze wyznaczanie optymalnych lub suboptymalnych strategii. W przypadku kapitału początkowego bliskiego zeru optymalne jest niepodejmowanie reasekuracji. Od jakiego kapitału firma powinna zacząć stosować reasekurację i na jakim poziomie, dowiemy się, rozwiązując (numerycznie) odpowiednie równanie Hamiltona–Jacobiego–Bellmana. Przy dużym kapitale wystarczy stosować maksymalizację współczynnika dopasowania.

Literatura

[1] Asmussen S., *Ruin Probabilities*, World Scientific, Singapore 2000.

[2] Hald M., Schmidli H., *On the maximisation of the adjustment coefficient under proportional reinsurance*, „Astin Bulletin" 2004, vol. 34, no. 1,.

[3] Hipp C., *Stochastic control with application in Insurance*, [w:] *Stochastic Methods in Finance*, „Lecture Notes in Mathematics", vol. 1856, Springer-Verlag, Berlin 2004, s. 127-164.

[4] Hipp C., Schmidli H., *Asymptotics of ruin probabilities for controlled risk processes in the small claims case*, „Scandinavian Actuarial Journal" 2004, no. 5.

[5] Hipp C., Vogt M., *Optimal dynamic XL reinsurance*, „Astin Bulletin" 2003, vol. 33, no. 2.

[6] Kwaśniewska M., *Optimal investment and XL reinsurance*, „Mathematical Economics" 2005, no. 9.

[7] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, New York 1999.

[8] Schmidli H., *Characteristics of ruin probabilities in classical risk models with and without investment. Cox risk models and perturbed risk models*, Preprint, 2000.

[9] Schmidli H., *Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting*, „Scandinavian Actuarial Journal" 2001, no. 1.

[10] Schmidli H., *Asymptotics of ruin probabilities for risk processes under optimal reinsurance policies: the small claim case*, Working Paper 180, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, 2002.

[11] Schmidli H., *On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance*, „Annals of Applied Probability" 2002, vol. 12, no. 3.

[12] Schmidli H., *On Cramér–Lundberg approximations for ruin probabilities under optimal excess of loss reinsurance*, Working Paper 193, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, 2004.

[13] Schmidli H., *Asymptotics of ruin probabilities for risk processes under optimal reinsurance and investment policies: the large claim case*, „Queueing Systems" 2004, no. 46.

[14] Schmidli H., *Optimisation in non-life insurance*, „Stochastic Models" 2006, vol. 22, no. 4.
[15] Waters H.R., *Some mathematical aspects of reinsurance*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1983, no. 2.

ASYMPTOTICS OF RUIN PROBABILITY FOR RISK PROCESSES UNDER INVESTMENT AND REINSURANCE STRATEGIES

Summary

Ruin probability is one of the main problems related to risk theory. We are able to calculate it only in a few cases. So we are interested in its asymptotics. In this article, we will present the asymptotics of the ruin probability in several different models. We will analyze the influence of investment and reinsurance on ruin probability.