

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ I ZAKŁAD ELEKTRONIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

# ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

T O M II  
ZESZYT 1-2  
ROK 1953

WARSZAWA

# ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

## ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ I ZAKŁAD ELEKTRONIKI

### POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Tom II

Rok 1953

Zeszyt 1-2

#### SPIS TREŚCI

	str.
J. Osowski: Stany nieustalone w układach pobudzanych ciągiem impulsów . . . . .	2
I. Malecki: Rozszerzenie poprawionego systemu analogii elektromechanicznych na ośrodki ciągle izotropowe . . . . .	23
T. Zagajewski: Liniowe i nieliniowe efekty reaktancyjne w generatorach ze sprzężeniem zwrotnym . . . . .	67
Cz. Jaworski: Metoda analityczna obliczenia jednostkowego zużycia energii trakcyjnej . . . . .	107
Cz. Rąjski: Teoria skośnika . . . . .	137
J. L. Jakubowski: Wpływ światła na strefę chronioną piorunochronów prętowych . . . . .	165
S. Szpor: Uzupełnienie teorii przepięć atmosferycznych indukowanych dla linii z przewodami odgromowymi . . . . .	179

#### СОДЕРЖАНИЕ

Г. Осевски: Нестационарные процессы в контурах возбуждаемых серий импульсов . . . . .	2
И. Малецки: Распространение исправленного метода электромеханических аналогий на сплошные изотропные среды . . . . .	23
Т. Загаевски: Линейные и нелинейные реактивные эффекты в генераторах с обратной связью . . . . .	67
Ч. Яворски: Аналитический метод расчёта единичного расхода тяговой энергии . . . . .	107
Ч. Райски: Теория диагонального соединения электрически длинной цепи . . . . .	137
Я. Якубовски: Влияние коронирования на защитную зону стержневых молниеотводов . . . . .	165
С. Шпор: Дополнение теории атмосферных индуцированных перенапряжений для линии с защитными тросами . . . . .	179

#### CONTENTS-SOMMAIRE

J. Osowski: Transient phenomena in pulsed networks . . . . .	2
I. Malecki: Extension of the corrected system of electromechanical analogies on continous isotropic media . . . . .	23
T. Zagajewski: Linear and nonlinear reactance effects in feedback oscillators . . . . .	67
Cz. Jaworski: An analytic method of calculating the electric traction unit power consumption . . . . .	107
Cz. Rąjski: The theory of the cross-connected long line . . . . .	137
J. L. Jakubowski: L'influence des effluves sur la zone protégée par des paratonnerres à tiges . . . . .	165
S. Szpor: Supplement to the theory of the induced overvoltages for lines with earth conductors . . . . .	179



ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ I ZAKŁAD ELEKTRONIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

# ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

T O M II  
ROK 1953

WARSZAWA

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI  
ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ I ZAKŁAD ELEKTRONIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

---

KOLEGIUM REDAKCYJNE

Profesorowie: J. Groszkowski (W-wa) — przewodniczący, J. L. Jakubowski (W-wa), B. Konorski (Łódź), I. Malecki (W-wa), P. Nowacki (W-wa), P. Szulkin (W-wa), St. Szpor (Gdańsk).

---

ALL RIGHTS RESERVED by P. A. N.

Redaktor techniczny W. Zwolakowski

Sekretariat redakcji i korekta L. Skorupka

Adres redakcji:

Warszawa, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki P. A. N.

---

POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA, UL. FREDRY 10

SPIS TREŚCI

	Str.
J. Osowski — Stany nieustalone w układach pobudzanych ciągiem impulsów . . . . .	2
I. Malecki — Rozszerzenie poprawionego systemu analogii elektromechanicznych na ośrodki ciągle izotropowe . . . . .	23
T. Zagajewski — Liniiowe i nieliniowe efekty reakcyjne w generatorach ze sprzężeniem zwrotnym . . . . .	67
Cz. Jaworski — Metoda analityczna obliczenia jednostkowego zużycia energii trakcyjnej . . . . .	107
Cz. Rajski — Teoria skośnika . . . . .	137
J. L. Jakubowski — Wpływ światła na strefę chronioną piorunochronów prętowych . . . . .	165
S. Szpor — Uzupełnienie teorii przepięć atmosferycznych indukowanych dla linii z przewodami odgromowymi . . . . .	179
J. Kuryłowicz — Metoda kompensacyjno-różnicowa pomiaru oporności . . . . .	191
A. Smoliński — Uzyskiwanie rdzeni transformatorowych o specjalnych własnościach ze stali krzemowej . . . . .	207
L. Szklarski i H. Górecki — Przebiegi nieustalone w napędzie Leonarda maszyny wyciągowej . . . . .	227
S. Szpor — Napięcia wywołujące iskry wtórne i porażenia w urządzeniach piorunochronowych . . . . .	275
J. Groszkowski — Indukcyjność i oporność ujemna elementu pobudzającego o zaskoku napięcia . . . . .	305
Komunikaty — Z prac Zakładu Elektroniki Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN . . . . .	323

СОДЕРЖАНИЕ

И. Осевски — Нестационарные процессы в контурах возбуждаемых серий импульсов . . . . .	2
И. Малецки — Распространение исправленного метода электромеханических аналогий на сплошные изотропные среды . . . . .	23
Т. Загаевски — Линейные и нелинейные реактивные эффекты в генераторах с обратной связью . . . . .	67
Ч. Яворски — Аналитический метод расчёта единичного расхода тяговой энергии . . . . .	107
Ч. Райски — Теория диагонального соединения электрически длинной цепи . . . . .	137
Я. Якубовски — Влияние коронирования на защитную зону стержневых молниеотводов . . . . .	165
С. Шпор — Дополнение теории атмосферных индуцированных перенапряжений для линии с защитными тросами . . . . .	179

Я. Курылович	— Компенсационно-дифференциальный метод измерения сопротивлений . . . . .	191
А. Смолински	— Продукция трансформаторных сердечников со специальными свойствами из кремнистой стали . . . . .	207
Л. Шклярски и Х. Гурецки	— Переходные процессы привода рудничной подъёмной машины по системе Генератор-Двигатель . . . . .	227
С. Шпор	— Напряжения вызывающие вторичные искры и поражения в грозозащитных устройствах . . . . .	275
Я. Грошковски	— Индуктивность и отрицательная ёмкость элемента с петлей гистерезиса . . . . .	305
Сообщения	. . . . .	323

CONTENTS — SOMMAIRE

	Page	
J. Osowski	— Transient phenomena in pulsed networks . . . . .	2
I. Malęcki	— Extension of the corrected system electromechanical analogies on continuous isotropic media . . . . .	23
T. Zagajewski	— Linear and nonlinear reactance effects in feedback oscillators . . . . .	67
Cz. Jaworski	— An analytic method of calculating the electric traction unit power consumption . . . . .	107
Cz. Rajski	— The theory of the cross-connected long line . . . . .	137
J. L. Jakubowski	— L'influence des effluves sur la zone protégée par des paratonnerres à tiges . . . . .	165
S. Szpor	— Supplement to the theory of the induced overvoltages for lines with earth conductors . . . . .	179
J. Kuryłowicz	— A compensated-difference method for measuring resistance . . . . .	191
A. Smoliński	— The method of obtaining silicon steel transformer cores with special properties . . . . .	207
L. Szklarski i H. Górecki	— Transiente in the Ward-Leonard electric mine-winder . . . . .	227
S. Szpor	— Tensions accounting for secondary sparks and shocks in buildings protected against lightning . . . . .	275
J. Groszkowski	— The inductance and negative resistance of a device with hysteresis loop characteristic . . . . .	305
Communiqués	. . . . .	323

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ I ZAKŁAD ELEKTRONIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

# ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

T O M II  
ZESZYT 1-2  
ROK 1953

W A R S Z A W A

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI  
ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ I ZAKŁAD ELEKTRONIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

---

KOLEGIUM REDAKCYJNE

Profesorowie: J. Groszkowski (W-wa) — przewodniczący, J. L. Jakubowski (W-wa), B. Konorski (Łódź), I. Malecki (W-wa), P. Nowacki (W-wa), P. Szulkin (W-wa), St. Szpor (Gdańsk)

---

ALL RIGHTS RESERVED by P. A. N.

Redaktor techniczny W. Zwołakowski

Sekretariat redakcji i korekta L. Skorupka

Adres redakcji:

Warszawa, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki P. A. N.

---

Nr zam. 428/132 — Rękopis otrzymano 30. 7. 1953 — Ark. druk 11<sup>3</sup>/<sub>4</sub> — Druk ukończono 8. 1. 1954  
Nakład 1000 — Papier ilustr. kl. V. form. 70×100/16, waga 70 g. — K-4-52143

---

POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA, UL. FREDRY 10

Cena zł 30,—

1954 E0 2433

J. OSIOWSKI

## Stany nieustalone w układach pobudzanych ciągiem impulsów

*Rękopis dostarczono 15. 12. 1952*

**Streszczenie.** W pracy omówiono w zarysie ogólną metodę rozwiązywania układów elektrycznych pobudzanych ciągiem jednakowych impulsów. Rozpatrywane rozwiązanie dotyczy zarówno stanu nieustalonego, jak i ustalonego. Stosując rachunek operatorowy autor wyprowadza ogólne formuły, a następnie podaje przebieg rozwiązania na konkretnym przykładzie. Jako przykład wybrany został obwód rezonansowy wzmacniacza w. cz. pracującego w klasie C.

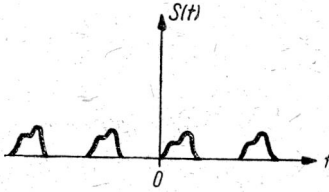
### 1. WSTĘP

W wielu urządzeniach radiotechnicznych spotykamy układy pobudzane ciągiem jednakowych impulsów. W układach takich zachodzi dość złożony proces narastania przebiegów stanu nieustalonego, gdyż w każdej chwili  $t$  zachodzi superpozycja niejako *elementarnych stanów nieustalonych* wywołanych wszystkimi impulsami wzbudzenia wcześniejszymi od chwili  $t$ . Badanie takich przebiegów wydatnie się upraszcza, jeśli przerwa pomiędzy dwoma sąsiednimi impulsami jest dostatecznie długa, a tłumienie układu dostatecznie duże. W takim przypadku można z wystarczającym w praktyce przybliżeniem przyjąć, iż przebiegi przejściowe wywołane impulsem  $k$  są do pominięcia w chwili, gdy następuje impuls  $k+1$ . Uproszczenie to pozwala na traktowanie każdego impulsu z osobna, co wobec identyczności wszystkich impulsów sprowadza zagadnienie do znalezienia reakcji układu na pojedynczy impuls. Reakcja układu na ciąg impulsów składa się w tym przypadku z powtarzających się przebiegów wywołanych każdym impulsem oddzielnie.

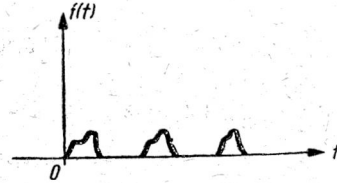
W wielu przypadkach praktycznych wspomniane założenie upraszczające jest jednak nie do przyjęcia. Istnieje wówczas konieczność traktowania ciągu impulsów wzbudzających jako pewnej całości, przy czym reakcja układu jest wtedy wynikiem nałożenia się przebiegów wywołanych wszystkimi poprzedzającymi impulsami.

Metodą rachunkową stosowaną zazwyczaj w tym przypadku jest metoda szeregów Fouriera. Daje ona obok znanych powszechnie korzyści

również i istotne niedogodności. Suma szeregu Fouriera  $S(t)$  (rys. 1) jest funkcją okresową określoną dla każdego  $t$ , podczas gdy istotnie działająca funkcja wzbudzająca  $f(t)$  (rys. 2) nie jest okresowa, gdyż  $f(t)=0$  dla  $t < t_0$  (gdzie  $t_0$  — chwila początkowa; zwykle przyjmujemy dla prostoty  $t_0=0$ ). Każdy impuls określony funkcją  $S(t)$  jest poprzedzany przez nie-



Rys. 1. Suma szeregu Fouriera  $S(t)$



Rys. 2. Funkcja wzbudzająca  $f(t)$

skończenie wiele impulsów; rozwiązanie otrzymane przy użyciu funkcji  $S(t)$  dotyczy zatem wyłącznie stanu ustalonego. Metoda ta eliminuje więc z rozwiązania stany przejściowe stanowiące w tym przypadku istotną treść zagadnienia.

Pełne rozwiązanie z uwzględnieniem procesu narastania przebiegów w układzie otrzymuje się metodami rachunku operatorowego. Metody te, aczkolwiek teoretycznie proste, prowadzą jednak do poważnych trudności rachunkowych.

Praca niniejsza omawia właśnie operatorowe rozwiązanie postawionego zagadnienia. W celu uniknięcia żmudnych rozważań teoretycznych większość rachunków została przeprowadzona już na konkretnym przykładzie. Przykład ten jest jednak typowy i tok rozumowania będzie analogiczny również w innych przypadkach.

## 2. ROZWIĄZANIE OGÓLNE ZAGADNIENIA

Rozważmy dowolny liniowy układ o stałych skupionych pobudzany ze źródła  $Z$  funkcją  $a(t)$  (rys. 3). Interesuje nas przebieg  $f(t)$  na elemencie  $K$  układu. Funkcja  $a(t)$  jest określona następująco (rys. 4):

$$\underline{t > 0}$$

$$a(t) = a_0(t); \quad 0 < t < t_0;$$

$$a(t) = 0; \quad t_0 < t < T;$$

$$a(t + k \cdot T) = a(t); \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

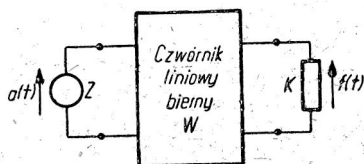
$$\underline{t < 0}$$

$$a(t) = 0;$$

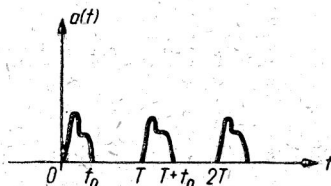
przy czym  $a(t)$  jest funkcją ciągłą dla każdego  $t$  i okresową o okresie  $T$ .



Związki określające  $f(t)$  otrzymamy układając równania Kirchhoffa dla prądów i napięć w układzie. Otrzymany układ równań w założeniu liniowości występujących elementów jest układem równań różniczkowo-całkowych liniowych o stałych współczynnikach. Stosując transformacje



Rys. 3. Układ liniowy o stałych skupionych pobudzany ze źródła  $Z$  funkcją  $a(t)$



Rys. 4. Funkcja  $a(t)$

Laplace'a \*) i rozwiązując układ równań względem transformaty funkcji  $f(t)$  otrzymujemy w założeniu zerowego warunku początkowego

$$F(s) = A(s) \cdot H(s), \quad (1)$$

gdzie

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)],$$

$$A(s) = \mathcal{L}[a(t)],$$

$H(s)$  zaś jest funkcją wymierną  $s$ , która zależy tylko od elementów układu. Stosując transformację odwrotną otrzymujemy

$$f(t) = \int_0^t h(t-\tau) \cdot a(\tau) d\tau, \quad (2)$$

gdzie

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]. \quad (3)$$

Zagadnienie sprowadza się więc do obliczenia całki (2) zwanej spletem funkcji  $h(t)$  i  $a(t)$ .

\* Transformacja Laplace'a

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

przyporządkowuje funkcji zmiennej rzeczywistej  $f(t)$  funkcję zmiennej zespolonej  $F(s)$  zwaną transformatą funkcji  $f(t)$ . Symbolicznie związek pomiędzy funkcjami  $f(t)$  i  $F(s)$  zapisujemy w postaci

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

lub

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)].$$

Z uwagi na przebieg funkcji  $a(t)$  funkcję  $f(t)$  można dla różnych wartości  $t$  wyrazić według wzoru (2) następująco:

$$0 < t < t_0; \quad f(t) = \int_0^t h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau;$$

$$t_0 < t < T; \quad f(t) = \int_0^{t_0} h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau;$$

$$T < t < T + t_0; \quad f(t) = \int_0^{t_0} h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau + \int_T^t h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau;$$

$$T + t_0 < t < 2T; \quad f(t) = \int_0^{t_0} h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau + \int_T^{T+t_0} h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau;$$

.....  
 .....

$$nT < t < nT + t_0; \quad f(t) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_{kT}^{kT+t_0} h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau + \int_{nT}^t h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau;$$

$n=0, 1, 2, \dots$

$$nT + t_0 < t < (n+1)T; \quad f(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \int_{kT}^{kT+t_0} h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau. \quad (4)$$

$n=0, 1, 2, \dots$

Jeśli oznaczymy

$$J(t, \tau) = \int h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau \quad (5)$$

wtedy

$$nT < t < nT + t_0; \quad f(t) = J(t, t) - J(t, nT + t_0) + \sum_{k=0}^{k=n} [J(t, kT + t_0) - J(t, kT)];$$

$$T + t_0 < t < (n+1)T; \quad f(t) = \sum_{k=0}^{k=n} [J(t, kT + t_0) - J(t, kT)]. \quad (6)$$

dla  $n=0, 1, 2, \dots$

Jeśli  $a(t)$  jest funkcją ciągłą, to nierówności określające przedziały, w których słuszne są formuły (4) i (6), przechodzą w nierówności słabe, tzn. można wszędzie znak  $<$  zastąpić znakiem  $\leq$ . Wzory (6) będące rozwiązaniem ogólnym zagadnienia nie są w tej postaci wygodne do stosowania. Okazuje się w praktyce, że wygodniej jest zamiast zmiennej  $t$  wprowadzić zmienne  $t'$  i  $n$  określone zależnością

$$t = t' + nT, \quad (7)$$

przy czym

$$0 < t' < T$$

lub

$$0 \leq t' \leq T$$

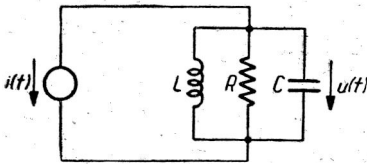
jeśli  $a(t)$  jest funkcją ciągłą;

$$(9) \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

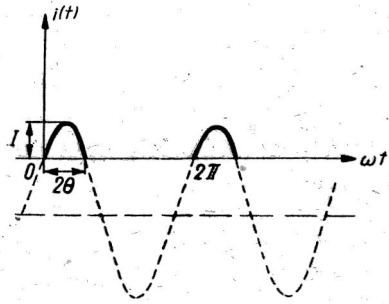
jest całkowitą liczbą okresów poprzedzających chwilę  $t$ .

### 3. PRZYKŁAD

Jako przykład rozpatrzony będzie obwód  $R, L, C$  równoległy (rys. 5) zasilany ze źródła prądu ciągiem impulsów będących częściami sinusoidy. Oporność wewnętrzna źródła jest nieskończenie wielka. Układ taki



Rys. 5. Obwód równoległy  $R L C$  zasilany ze źródła prądu



Rys. 6. Funkcja  $i(t)$

odpowiada obwodowi rezonansowemu wzmacniacza klasy C pracującego z pentodą. Funkcja  $i(t)$  jest określona następująco (rys. 6):

$$0 \leq \omega t \leq 2\theta,$$

$$i(t) = I \frac{\cos(\omega t - \theta) - \cos \theta}{1 - \cos \theta}, \quad (8)$$

$$2\theta \leq \omega t \leq 2\pi,$$

$$i(t) = 0$$

oraz

$$i(t) = i \left( t + k \cdot \frac{2\pi}{\omega} \right)$$

dla

$$t \geq 0,$$

$$k=0, 1, 2, \dots$$

gdyż

$$i(t) = 0 \quad \text{dla } t \leq 0.$$

Załóżmy, że w chwili początkowej  $t=0$  prąd w cewce i napięcie na kondensatorze równe są zeru. Pierwsze prawo Kirchhoffa daje równanie

$$\frac{1}{R} u(t) + C \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau = -i(t). \quad (9)$$

Stosując transformację Laplace'a i oznaczając

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)],$$

$$\mathcal{I}(s) = \mathcal{L}[i(t)],$$

otrzymujemy

$$U(s) \cdot Y(s) = \mathcal{I}(s), \quad (10)$$

gdzie

$$Y(s) = \frac{1}{R} + Cs + \frac{1}{Ls} \quad (11)$$

jest tzw. przewodnością operatorową obwodu. Zakładając:

$$\frac{L}{C} < 4R^2$$

otrzymujemy

$$U(s) = -\frac{1}{C} \cdot \frac{s \cdot \mathcal{I}(s)}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \quad (12)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{1}{2RC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}. \quad (13)$$

Zamiast tłumienia  $\alpha$  często wygodniej jest wprowadzić dobroć obwodu dla częstotliwości  $\omega_0$  określoną jako

$$Q_0 = R \omega_0 C$$

i wtedy

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0}. \quad (14)$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej równania (12) otrzymujemy:

$$u(t) = -\frac{1}{C} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left[ \cos \omega_0(t-\tau) - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau) \right] i(\tau) d\tau, \quad (15)$$

a po podstawieniu funkcji  $i(\tau)$  dla  $0 < t < \frac{2\Theta}{\omega}$ :

$$u(t) = -\frac{I}{C(1 - \cos \Theta)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left[ \cos \omega_0(t-\tau) - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau) \right] \cdot [\cos(\omega\tau - \Theta) - \cos \Theta] d\tau. \quad (16)$$

Całka nieoznaczona wynosi

$$\begin{aligned} J(t, \tau) &= \int e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \left[ \cos \omega_0(t-\tau) - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau) \right] \cdot [\cos(\omega\tau - \Theta) - \cos \Theta] d\tau = \\ &= \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{\omega_0} \left\{ \cos \Theta \cdot \sin \omega_0(t-\tau) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\omega \cos \varphi + [(\omega - \omega_0)\omega_0 - \alpha^2] \sin \varphi}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\alpha\omega \cos \psi + [(\omega + \omega_0)\omega_0 + \alpha^2] \sin \psi}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right\}, \quad (17) \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varphi &= (\omega - \omega_0)\tau - \Theta + \omega_0 t, \\ \psi &= (\omega + \omega_0)\tau - \Theta - \omega_0 t. \end{aligned} \quad (18)$$

Po wykonaniu rachunków i wprowadzeniu oznaczeń

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \operatorname{arctg} \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \operatorname{arctg} 2 Q_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \\ \beta_2 &= \operatorname{arctg} \frac{\omega + \omega_0}{\alpha} = \operatorname{arctg} 2 Q_0 \frac{\omega + \omega_0}{\omega_0} \end{aligned} \quad (19)$$

elementy wzorów (6) można przedstawić następująco:

$$J(t, t) = -\sin(\beta_1 + \beta_2) \cdot \sin(\omega t - \Theta + \beta_1 - \beta_2), \quad (20)$$

$$J\left(t, n \frac{2\pi}{\omega} + \frac{2\Theta}{\omega}\right) =$$

$$= \frac{\omega e^{-\alpha t} \cdot e^{n \frac{\alpha}{\omega} 2\pi}}{2\alpha\omega_0} \left[ A_2 \cos\left(\omega_0 t - \Theta - n \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi\right) + B_2 \sin\left(\omega_0 t - \Theta - n \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi\right) \right], \quad (21)$$

$$J\left(t, k \frac{2\pi}{\omega} + \frac{2\Theta}{\omega}\right) - J\left(t, k \frac{2\pi}{\omega}\right) =$$

$$= \frac{\omega e^{-\alpha t} \cdot e^{k \frac{\alpha}{\omega} 2\pi}}{2\alpha\omega_0} \left[ A_1 \cos\left(\omega_0 t - \Theta - k \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi\right) + B_1 \sin\left(\omega_0 t - \Theta - k \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi\right) \right], \quad (22)$$

gdzie

$$A_2 = e^{\frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\Theta}{Q_0}} \left\{ \cos \beta_1 \cdot \cos \left[ \left( \frac{\omega_0}{\omega} - 1 \right) 2 \Theta - \beta_1 \right] - \cos \beta_2 \cdot \cos \left( \frac{\omega_0}{\omega} 2 \Theta - \beta_2 \right) \right\}, \quad (23)$$

$$B_2 = e^{\frac{\omega_n}{\omega} \cdot \frac{\Theta}{Q_0}} \left\{ \cos \beta_1 \cdot \sin \left[ \left( \frac{\omega_0}{\omega} - 1 \right) 2 \Theta - \beta_1 \right] - \cos \beta_2 \cdot \sin \left( \frac{\omega_0}{\omega} 2 \Theta - \beta_2 \right) \right\}, \quad (24)$$

$$A_1 = A_2 - \cos^2 \beta_1 + \cos \beta_2 \cdot \cos(2 \Theta + \beta_2), \quad (25)$$

$$B_1 = B_2 + \cos \beta_1 \cdot \sin \beta_1 - \cos \beta_2 \sin(2 \Theta + \beta_2). \quad (26)$$

Sumując wyrażenia (22) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{k=n} \left[ J \left( t, k \frac{2\pi}{\omega} + \frac{2\Theta}{\omega} \right) - J \left( t, k \frac{2\pi}{\omega} \right) \right] = \\ & = \frac{\omega e^{-\alpha t}}{2 \alpha \omega_0} \left\{ A_1 \sum_{k=0}^{k=n} \operatorname{Re} \left[ e^{j(\omega_0 t - \Theta)} e^{k \cdot 2\pi \left( \frac{\alpha}{\omega} - j \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \right] + B_1 \sum_{k=0}^{k=n} \operatorname{Im} \left[ e^{j(\omega_0 t - \Theta)} e^{k \cdot 2\pi \left( \frac{\alpha}{\omega} - j \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \right] \right\} = \\ & = \frac{\omega e^{-\alpha t}}{2 \alpha \omega_0} \left\{ A_1 \cdot \operatorname{Re} \left[ e^{j(\omega_0 t - \Theta)} \frac{1 - e^{(n+1)2\pi \left( \frac{\alpha}{\omega} - j \frac{\omega_0}{\omega} \right)}}{1 - e^{2\pi \left( \frac{\alpha}{\omega} - j \frac{\omega_0}{\omega} \right)}} \right] + \right. \\ & \quad \left. + B_1 \operatorname{Im} \left[ e^{j(\omega_0 t - \Theta)} \frac{1 - e^{(n+1)2\pi \left( \frac{\alpha}{\omega} - j \frac{\omega_0}{\omega} \right)}}{1 - e^{2\pi \left( \frac{\alpha}{\omega} - j \frac{\omega_0}{\omega} \right)}} \right] \right\} = \\ & = \frac{\omega e^{-\alpha t}}{2 \alpha \omega_0} Z [A_1 \cos(\omega_0 t - \Theta + \Psi) + B_1 \sin(\omega_0 t - \Theta + \Psi)], \quad (27) \end{aligned}$$

gdzie

$$Z = \left| \frac{1 - e^{(n+1)2\pi \left( \frac{\alpha}{\omega} - j \frac{\omega_0}{\omega} \right)}}{1 - e^{2\pi \left( \frac{\alpha}{\omega} - j \frac{\omega_0}{\omega} \right)}} \right|, \quad (28)$$

$$\Psi = \arg \frac{1 - e^{(n+1)2\pi \left( \frac{\alpha}{\omega} - j \frac{\omega_0}{\omega} \right)}}{1 - e^{2\pi \left( \frac{\alpha}{\omega} - j \frac{\omega_0}{\omega} \right)}}. \quad (29)$$

Zależności (20), (21) i (27) podstawione do wzorów (6) określają w zupełności napięcie wyjściowe  $u(t)$  w każdej chwili  $t$ . Forma tych zależności jest jednak niewygodna w rachunku i uniemożliwia określenie stanu ustalonego w układzie, tzn. przebiegu otrzymanego jako granicę

przy  $n \rightarrow \infty$ . Z tych względów stosujemy zamianę zmiennych, określoną zależnością (7), tzn.

$$t = n \frac{2\pi}{\omega} + t'; \quad 0 \leq t' \leq \frac{2\pi}{\omega}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Po przeprowadzeniu przeliczeń i wprowadzeniu do wzorów zamiast parametru  $\alpha$  dobroci obwodu  $Q_0$  otrzymujemy zależności ostateczne

$$0 \leq \omega t' \leq 2\Theta; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u(t', n) = \frac{IR}{\frac{\omega_0}{\omega} (1 - \cos \Theta)} \left\{ \sin(\beta_1 + \beta_2) \cdot \sin(\omega t' - \Theta + \beta_1 - \beta_2) + \right. \\ \left. + e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q_0}} \cdot [A_2 \cos(\omega_0 t' - \Theta) + B_2 \sin(\omega_0 t' - \Theta)] - \right. \\ \left. - e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q_0}} \cdot P_n [A_1 \cos(\omega_0 t' - \Theta - \varphi + \varphi_n) + B_1 \sin(\omega_0 t' - \Theta - \varphi + \varphi_n)] \right\}, \quad (30)$$

$$2\Theta \leq \omega t' \leq 2\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u(t', n) =$$

$$= -\frac{IR}{\frac{\omega_0}{\omega} (1 - \cos \Theta)} e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q_0}} \cdot P_n [A_1 \cos(\omega_0 t' - \Theta - \varphi + \varphi_n) + B_1 \sin(\omega_0 t' - \Theta - \varphi + \varphi_n)], \quad (31)$$

gdzie

$$P_n = \sqrt{\frac{1 - 2e^{-\frac{(n+1)\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}} \cos(n+1) \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi + e^{-2(n+1)\frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}}}{1 - 2e^{-\frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}} \cos \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi + e^{-2\frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}}}}, \quad (32)$$

$$\varphi_n = \text{arc tg} \frac{e^{-\frac{(n+1)\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}} \sin(n+1) \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi}{1 - e^{-\frac{(n+1)\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}} \cos(n+1) \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi} \quad (33)$$

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{e^{-\frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}} \sin \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi}{1 - e^{-\frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}} \cos \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi}, \quad (34)$$

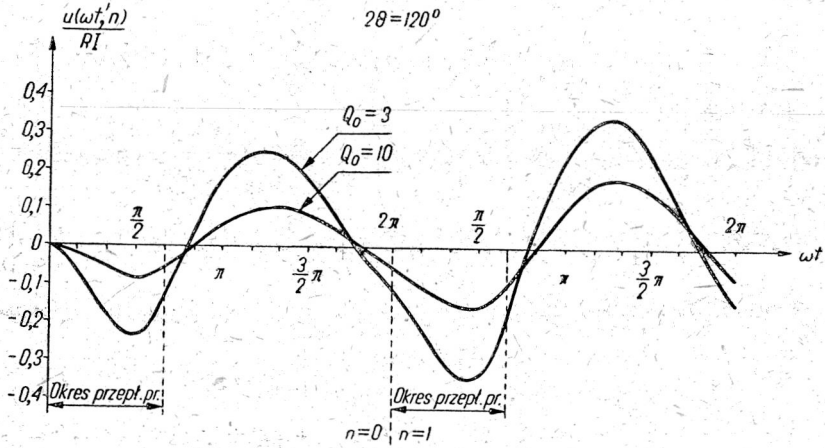
a współczynniki  $A_1, A_2, B_1, B_2$  wyrażają się wzorami (23), (24), (25), (26).

Z równań (30) i (31) otrzymujemy od razu formuły stanu ustalonego obliczając granice przy  $n \rightarrow \infty$ . Ponieważ  $n$  występuje tylko w wyrażeniach

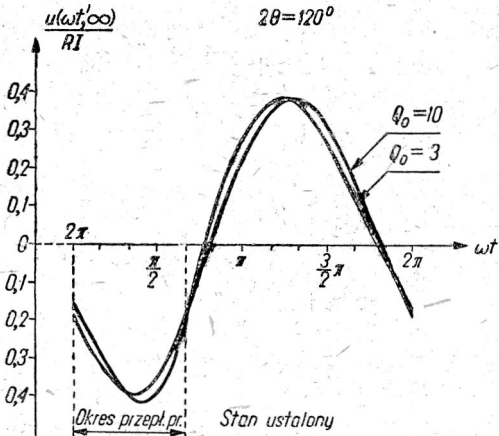
na  $P_n$  i  $\varphi_n$ , zależności dla stanu ustalonego otrzymamy biorąc za  $P_n$  i  $\varphi_n$  ich granice, tzn.

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e^{-\frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}} \cdot \cos \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi + e^{-2\frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}}} \quad (35)$$

$$\varphi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0. \quad (36)$$



Rys. 7. Wykres napięcia wyjściowego. Stan nieustalony



Rys. 8. Wykres napięcia wyjściowego. Stan ustalony

Otrzymane wzory pozwalają na obliczenie napięcia na obwodzie rezonansowym wzmacniacza klasy C przy przyjętych założeniach zarówno w stanie nieustalonym, jak i ustalonym dla dowolnego stosunku częstotliwości wzbudzenia i częstotliwości własnej obwodu.

Istotna wartość otrzymanego rozwiązania tkwi niewątpliwie w wyczerpującej jego dyskusji i analizie oraz wynikających stąd wnioskach dotyczących fizycznych procesów w rzeczywistym wzmacniaczu. Dyskusja taka przekracza jednak ramy niniejszego artykułu mającego jedynie charakter objaśniający metodę stosowaną przy rozwiązy-



waniu tego rodzaju zagadnień; krótką ilustracją otrzymanych zależności dla wzmacniacza klasy C niech będzie wykres napięcia wyjściowego przy  $\omega = \omega_0$  dla dwóch wartości dobroci  $Q_0 = 3$ ;  $Q_0 = 10$  oraz  $\Theta = 60^\circ$ .

#### 4. ZAKOŃCZENIE

Przytoczony przykład ilustruje typowe zalety i niedogodności wynikające ze stosowania omówionej w punkcie 2 metody rozwiązywania układów pobudzanych ciągiem impulsów. Zalety te — to głównie duża ogólność otrzymywanego rozwiązania oraz pełne uwzględnienie procesu kształtowania się przebiegu wyjściowego w stanie nieustalonym. Wadą jej są niewątpliwie duże trudności rachunkowe, skomplikowana i mało przejrzysta forma rozwiązania końcowego. Trudności te w znacznym stopniu mogą być usunięte przez przyjęcie odpowiednich założeń uproszczających. Należy podkreślić, że stosowana metoda rozwiązania poprzez obliczenie splotu jest ogólną metodą rachunku operatorowego dotychczas niemal wcale w układach praktycznych nie stosowaną, ze względu na trudności rachunkowe. Niniejsza praca jest jednak przykładem, że trudności te można przełamać otrzymując rozwiązanie dające pełniejszy obraz zjawiska niż dotąd stosowane rozwiązania otrzymywane innymi metodami.

*Institut Matematyczny  
P. A. N.*

#### WYKAZ LITERATURY

- [1.] Gardner M. F., Barnes J. L. — *Pierechodnyje processy w liniejnych sistie-mach* — 1949, Gostiechizdat, Moskwa—Leningrad (tłumaczenie rosyjskie z angielskiego).
- [2.] Tieumin J. J. — *Sprawocznik po pierechodnym elektriczskim processam* — 1951, Swiazizdat, Moskwa.
- [3.] Wagner K. W. — *Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation* — 1950, J. A. Barth Verlag, Leipzig.

#### И. ОСЕВСКИ

### НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В КОНТУРАХ ВОЗБУЖДАЕМЫХ СЕРИЕЙ ИМПУЛЬСОВ

#### Резюме

1. Вступление. Во многих радиотехнических установках мы встречаемся с системами возбуждаемыми серией одинаковых импульсов. В таких установках происходит довольно сложное явление нарастания нестационарных процессов, так как в каждый момент  $t$  происходит

наложение „элементарных нестационарных процессов”, вызванных всеми возбуждающими импульсами, предшествующими моменту  $t$ . Исследование подобных процессов становится значительно проще, если интервал между двумя последующими импульсами достаточно продолжителен, а затухание системы достаточно велико. В таких случаях можно с достаточным в практике приближением принять, что переходными процессами, выведенными импульсом  $k$ , можно пренебречь в моменте, когда наступает импульс  $k+1$ . Реакция системы на ряд импульсов состоит тогда из повторяющихся процессов, вызванных каждым отдельным импульсом.

В практике такое упрощение однако не всегда может быть допустимо; реакция системы является тогда результатом наложения процессов вызванных всеми предыдущими импульсами.

В основу расчёта в таких случаях положен метод рядов Фурье. При общеизвестных своих преимуществах метод этот имеет однако тот недостаток, что он исключает из решений нестационарные процессы.

Полное решение с учётом нарастания процессов в системе (контуре) может быть получено методами операционного исчисления. Предметом настоящего труда является именно решение поставленного вопроса при помощи операционного исчисления.

2. Общее решение вопроса. Рассмотрим любую линейную цепь с сосредоточенными постоянными возбуждаемую источником с функцией  $a(t)$  (рис. 3). Нас интересует кривая  $f(t)$  в элементе  $K$  системы. Функция  $a(t)$  определяется следующим образом (рис. 4):

при

$$t > 0$$

$$a(t) = a_0'(t) \quad ; \quad 0 < t < t_0$$

$$a(t) = 0 \quad ; \quad t_0 < t < T$$

$$a(t + k \cdot T) = a(t) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

при

$$t < 0$$

$$a(t) = 0;$$

$a_0(t)$  является функцией непрерывной и периодической в периоде  $T$ .

Соотношения определяющие  $f(t)$  получаем, составляя уравнения Кирхгофа для токов и напряжений системы. Применяя преобразование Лапласа и решая полученную систему уравнений относительно изображения функции  $f(t)$ , мы получаем, принимая нулевое начальное условие

$$F(s) = A(s) \cdot H(s), \quad (1)$$

где

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)],$$

$$A(s) = \mathcal{L}[a(t)].$$

а  $H(s)$  — рациональная функция  $s$ , зависящая только от элементов системы. Применяя обратное преобразование, получаем

$$f(t) = \int_0^t h(t-\tau) \cdot a(\tau) d\tau \tag{2}$$

где

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(s)]. \tag{3}$$

Принимая во внимание ход изменения функции  $a(t)$  мы можем следующим образом выразить функцию  $f(t)$  для разных величин  $t$  по формуле (2):

$$nT < t < nT + t_0; \quad f(t) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_{kT}^{kT+t_0} h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau + \int_{nT}^t h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau \tag{4}$$

$$nT + t_0 < t < (n+1)T; \quad f(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \int_{kT}^{kT+t_0} h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau$$

$n=0, 1, 2, \dots$

или же, обозначая

$$J(t, \tau) = \int h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau \tag{5}$$

откуда

$$nT < t < nT + t_0; \quad f(t) = J(t, t) - J(t, nT + t_0) + \sum_{k=0}^{k=n} [J(t, kT + t_0) - J(t, kT)]$$

$$nT + t_0 < t < (n+1)T; \quad f(t) = \sum_{k=0}^{k=n} [J(t, kT + t_0) - J(t, kT)] \tag{6}$$

для  $n=0, 1, 2, \dots$

Эти формулы (6) являются общим решением вопроса.

3. Пример. Для примера рассмотрим параллельный контур  $R, L, C$  (рис. 5), питаемый из источника тока серией импульсов, являющихся частями синусоиды. Внутреннее сопротивление источника — бесконечно велико. Такая система соответствует контуру усилителя класса С, работающего с пентодом. Функция  $i(t)$  возбуждающая цепь определяется следующим образом (рис. 6):

$$\begin{aligned} 0 \leq \omega t \leq 2\theta & & 2\theta \leq \omega t \leq 2\pi \\ i(t) = I \frac{\cos(\omega t - \theta) - \cos \theta}{1 - \cos \theta}; & & i(t) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

и

$$i(t+k.T) = i(t); \quad t \geq 0; \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$i(t) = 0; \quad t < 0$$

Искомое напряжение на цепи  $u(t)$  выражается уравнением

$$\frac{1}{R} u(t) + C \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau = -i(t). \quad (9)$$

Применяя преобразование Лапласа и обозначая:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$$

$$\mathcal{I}(s) = \mathcal{L}[i(t)]$$

мы получим

$$U(s) = -\frac{1}{C} \frac{s \cdot \mathcal{I}(s)}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \quad (12)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2RC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2 C^2}; \quad \frac{L}{C} < 4R^2. \quad (13)$$

После применения обратного преобразования и подстановки функции  $i(t)$  получаем для

$$0 < t < \frac{2\Theta}{\omega}$$

$$u(t) = -\frac{I}{C(1 - \cos \Theta)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot [\cos \omega_0(t-\tau) - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau)] \cdot [\cos(\omega\tau - \Theta) - \cos \Theta] d\tau. \quad (16)$$

Затем рассчитываем отдельные элементы формул общего решения (6), однако применение этих формул в полученной форме в практических расчётах не удобно и поэтому мы вводим новые переменные  $t'$  и  $n$ , определяемые соотношением:

$$t = n \frac{2\pi}{\omega} + t'$$

где:

$$0 \leq \omega t' \leq 2\pi; \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

После введения этих новых переменных получаем следующее общее решение:

$$0 \leq \omega t' \leq 2\Theta; \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$u(t', n) = \frac{IR}{\frac{\omega_0}{\omega} (1 - \cos \Theta)} \left\{ \sin(\beta_1 + \beta_2) \sin(\omega t' - \Theta + \beta_1 - \beta_2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+ e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q_0}} [A_2 \cos(\omega_0 t' - \Theta) + B_2 \sin(\omega_0 t' - \Theta)] - \\
 &- e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q_0}} \cdot P_n [A_1 \cos(\omega_0 t' - \Theta - \varphi + \varphi_n) + B_1 \sin(\omega_0 t' - \Theta - \varphi + \varphi_n)] \Big\} \\
 &2\Theta \leq \omega t' \leq 2\pi; \quad n=0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

$$u(t', n) = \frac{IR}{\frac{\omega_0}{\omega}(1 - \cos \Theta)} e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q_0}} \cdot P_n [A_1 \cos(\omega_0 t' - \Theta - \varphi + \varphi_n) + B_1 \sin(\omega_0 t' - \Theta - \varphi + \varphi_n)] \tag{31}$$

где 
$$Q_0 = R \omega_0 C = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

представляет добротность контура для частоты  $\omega_0$ . Коэффициенты  $\beta_1, \beta_2, A_1, A_2, B_1, B_2, P_n, \varphi, \varphi_n$  выражаются уравнениями: (19), (23), (24), (25), (26), (32), (33), (34) согласно тексту оригинала.

Из уравнений (30) и (31), относящихся к нестационарному режиму можно также получить формулы для стационарного режима, принимая  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $n$  встречается только в выражениях для  $P_n$  и  $\varphi_n$ , то зависимости для стационарного режима получаем, подставляя вместо  $P_n$  и  $\varphi_n$  их пределы, т. е.

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 e^{-\frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}} \cos \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi + e^{-\frac{2\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{Q_0}}}} \tag{35}$$

$$\varphi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0 \tag{36}$$

Полученные при принятых нами условиях формулы дают возможность рассчитать напряжение на резонансном контуре усилителя класса С так для нестационарного как и для стационарного режима при любом соотношении между частотой возбуждения  $\omega$  и собственной частотой контура  $\omega_0$ .

График выходного напряжения при  $\omega = \omega_0$  для двух величин добротности  $Q_0 = 3$  и  $Q_0 = 10$  и при  $\Theta = 60^\circ$  в нестационарном (рис. 7) и в стационарном режиме (рис. 8) иллюстрирует характер полученных зависимостей для усилителя кл. С.

4. Заключение. Приведенный пример иллюстрирует типичные преимущества и недостатки применения описанного в § 2 метода решения уравнений для систем возбуждаемых рядом импульсов. Преимущества метода заключаются главным образом в большой общности

получаемого решения, а также в полном учёте процесса формирования выходного напряжения в нестационарном режиме. Недостатки метода состоят в значительной трудности расчётов, а также в сложной и неясной форме окончательного решения.

J. OSIOWSKI

## TRANSIENT PHENOMENA IN PULSED NETWORKS

### Summary

1. Introduction. In many kinds of radio apparatus the networks are used, which are excited by train of similar pulses. In such networks there occurs a rather complicated process of the transient build-up since at each moment  $t$  there takes place the superposition of what may be called „elementary transients“ produced by all pulses which have occurred before the moment  $t$ . The analysis of the network behaviour is greatly simplified if the time interval between the successive pulses and the attenuation of the network are sufficiently large. In such a case one can assume with reasonable accuracy that the transients, produced by the pulse  $k$ , are negligibly small at the moment when the pulse  $k+1$  occurs. Then the response of the network to the train of pulses is represented by successive transients each to the single pulse.

In many practical cases, however, the above simplified assumption cannot be made and the response of the network is the result of the superposition of the transients corresponding to all proceeding pulses.

It is customary to use in such cases the method of Fourier's series. Apart from its well known advantages this method has the disadvantage of eliminating the transient from the solutions. The full solution which takes into account the build-up of network response can be obtained by means of the operational calculus. The present paper describes the operational solution of the problem under consideration.

2. General solution of the problem. Let us consider a general case of a linear network with lumped elements driven from the source  $Z$  by the function  $a(t)$  (fig. 3). We wish to find the function  $f(t)$  at the  $K$  element of the network. The function  $a(t)$  is defined as follows (fig. 4):

$$\begin{aligned}
 & t > 0 \\
 & \quad a(t) = a_0(t) \quad ; \quad 0 < t < t_0 \\
 & \quad a(t) = 0 \quad ; \quad t_0 < t < T \\
 & \quad a(t+k \cdot T) = a(t) ; \quad k = 0, 1, 2, \dots \\
 & t < 0 \\
 & \quad a(t) = 0
 \end{aligned}$$

where the function  $a_0(t)$  is continuous for all values of  $t$  and periodic with the period  $T$ . We will obtain the relationships defining  $f(t)$  by writing down the Kirchhoff's equations for the currents and voltages in the network. Using the Laplace's transformation and solving the set of obtained equations against the transformation of the function  $f(t)$ , we get, postulating the zero initial condition,

$$F(s) = A(s)H(s) \quad (1)$$

where

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$A(s) = \mathcal{L}[a(t)]$$

and  $H(s)$  is the rational function of  $s$  depending *only* upon the elements of the network. By the use of the inverse transformation we get

$$f(t) = \int_0^t h(t-\tau) a(\tau) d\tau \quad (2)$$

where

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]. \quad (3)$$

Taking into account the form of the function  $a(t)$ , one can represent the function  $f(t)$  for various values of  $t$  according to the formula (2) in the following way

$$nT < t < nT + t_0 \quad ; \quad f(t) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_{kT}^{kT+t_0} h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau + \int_{nT}^t h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau$$

$$n=1, 2, \dots \quad (4)$$

$$nT + t_0 < t < (n+1)T \quad ; \quad f(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \int_{kT}^{kT+t_0} h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau$$

$$n=0, 1, 2, \dots$$

or if we put

$$J(t, \tau) = \int h(t-\tau) a_0(\tau) d\tau \quad (5)$$

then

$$nT < t < nT + t_0 \quad ; \quad f(t) = J(t, t) - J(t, nT + t_0) + \sum_{k=0}^{k=n} [J(t, kT + t_0) - J(t, kT)]$$

$$nT + t_0 < t < (n+1)T \quad ; \quad f(t) = \sum_{k=0}^{k=n} [J(t, kT + t_0) - J(t, kT)]. \quad (6)$$

for  $n=0, 1, 2, \dots$

The formulae (6) give the general solution of the problem.



3. Example. As an example we will consider the parallel  $R, L, C$  circuit fed from the source by the train of pulses each of them being a part of a sinusoide. The internal resistance of the source is supposed to be infinite. Such network corresponds to the class C amplifier using a pentode. The impressed function  $i(t)$  is given by the equations (fig. 6):

$$\begin{aligned} 0 \leq \omega t \leq 2\Theta & & 2\Theta \leq \omega t \leq 2\pi \\ i(t) = I \frac{\cos(\omega t - \Theta) - \cos \Theta}{1 - \cos \Theta}; & & i(t) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

and

$$\begin{aligned} i(t+kT) &= i(t); & t \geq 0; & k=0, 1, 2, \dots \\ i(t) &= 0; & t < 0. \end{aligned}$$

The voltage  $u(t)$  across the circuit is given by the equation

$$\frac{1}{R} u(t) + C \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau = -i(t). \quad (9)$$

Using the Laplace's transformation and putting

$$\begin{aligned} U(s) &= \mathcal{L}[u(t)] \\ \mathcal{I}(s) &= \mathcal{L}[i(t)] \end{aligned}$$

we get

$$U(s) = -\frac{1}{C} \frac{s\mathcal{I}(s)}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2} \quad (12)$$

where

$$\alpha = \frac{1}{2RC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}; \quad \frac{L}{C} < 4R^2. \quad (13)$$

After the inverse transformation and substituting the function  $i(t)$  we get for

$$\begin{aligned} 0 < t < \frac{2\Theta}{\omega} \\ u(t) &= -\frac{I}{C(1-\cos\Theta)} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left[ \cos \omega_0(t-\tau) - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau) \right] \cdot \\ & \quad \cdot [\cos(\omega\tau - \Theta) - \cos \Theta] d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Next we calculate the particular components of the general solution (6). These formulae are, however, inconvenient for practical use and the change of variables is therefore introduced (new variables  $t'$  and  $n$ ) accor-



ding to the formula

$$t = n \frac{2\pi}{\omega} + t'$$

where

$$0 \leq \omega t' \leq 2\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

After the introduction of the new variables we obtain the following general solution

$$0 \leq \omega t' \leq 2\theta; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u(t', n) = \frac{IR}{\frac{\omega_0}{\omega}(1 - \cos \theta)} \left\{ \sin(\beta_1 + \beta_2) \sin(\omega t' - \theta + \beta_1 - \beta_2) + \right. \\ \left. + e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q_0}} [A_2 \cos(\omega_0 t' - \theta) + B_2 \sin(\omega_0 t' - \theta)] - \right. \\ \left. - e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q_0}} P_n [A_1 \cos(\omega_0 t' - \theta - \varphi + \varphi_n) + B_1 \sin(\omega_0 t' - \theta - \varphi + \varphi_n)] \right\} \\ 2\theta \leq \omega t' \leq 2\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

$$u(t', n) = - \frac{IR}{\frac{\omega_0}{\omega}(1 - \cos \theta)} e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q_0}} P_n [A_1 \cos(\omega_0 t' - \theta - \varphi + \varphi_n) + \\ + B_1 \sin(\omega_0 t' - \theta - \varphi + \varphi_n)] \quad (31)$$

where

$$Q_0 = R\omega_0 C = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

is the  $Q$ -factor of the circuit for the frequency  $\omega_0$ . The coefficients  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $P_n$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi_n$  are given by the equations 19, 23, 24, 25, 26, 32, 33, 34 quoted in the Polish text.

From the formulae (30) and (31), which relate to the transient behaviour of the pulsed network, one can obtain the formulae for the steady state conditions by putting  $n \rightarrow \infty$ . As  $n$  appears only in the expressions for  $P_n$  and  $\varphi_n$ , we obtain the relationships for the steady state by substituting for  $P_n$  and  $\varphi_n$  their respective limits

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e^{-\frac{\omega_0}{\omega} \frac{\pi}{Q_0}} \cos \frac{\omega_0}{\omega} 2\pi + e^{-2\frac{\omega_0}{\omega} \frac{\pi}{Q_0}}}} \quad (35)$$

$$\varphi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0. \quad (36)$$

With the aid of the above formulae it is possible to calculate the voltage in the resonant circuit of the class C amplifier, according to the assumptions, for both the transients and the steady state, for any ratio of the impressed frequency  $\omega$  to the resonant frequency  $\omega_0$  of the circuit.

The transient and steady state output voltage of the class C amplifier are shown in fig. 7 and 8 for the case when  $\omega = \omega_0$ . They relate to two values of the  $Q$ -factor of the circuit,  $Q_0 = 3$  and  $Q_0 = 10$ , and to  $\Theta = 60^\circ$ .

4. Final remarks. The above example illustrates the typical advantages and disadvantages of the method formulating the behaviour of the networks upon which the train of the pulses is impressed. The main advantage of this method is that it offers very general solutions and takes full account of the process of the transients build-up. Its disadvantage consists in the difficulty of calculations and in the complicated and obscure form of the final solution.

I. MALECKI

## Rozszerzenie poprawionego systemu analogii elektromechanicznych na ośrodki ciągle izotropowe

*Rękopis dostarczono 29. 12. 52*

**Streszczenie.** Praca stanowi próbę rozszerzenia na ośrodki ciągle systemu analogii elektromechanicznych stosowanych do badania układów o stałych skupionych. Ograniczono się do rozpatrzenia bezstratnych, izotropowych ośrodków przy zaburzeniach nie przekraczających granicy proporcjonalności.

Pola naprężeń i przesunięć sprężystych określono za pomocą potencjałów skalarnych i wektorowych, co pozwoliło oddzielnie rozpatrywać składowe bezwirowe i bezzródłowe tego pola. Ustalono, że odpowiednikiem pola sił i przemieszczeń stycznych są wielkości charakteryzujące pole magnetyczne, gdy analogią składowych normalnych pola sił i przemieszczeń jest pole elektryczne. Słuszność przyjętego systemu analogii sprawdzono przez zbadanie warunków brzegowych dla pola elastostatycznego, magnetostatycznego i elektrostycznego oraz przez porównanie rozkładu przestrzennego tych pól w dowolnym obszarze zamkniętym. Stwierdzono, że opracowany system analogii może być zastosowany do przebiegów zmiennych w czasie. Występujące tutaj niedopasowanie systemu analogii wynika z istotnych różnic fizycznych między zachowaniem się pola elektromagnetycznego i mechanicznego. Przy modelowaniu elektrycznym pól przemieszczeń i sił, niedopasowanie to może być usunięte przez odpowiedni wybór częstotliwości i skal modelu.

Zbadano dalej podobieństwa między zależnościami energetycznymi występującymi w obu systemach. Podobieństwa te są bardzo daleko idące i odnoszą się zarówno do wyrażen na energię potencjalną jak i na strumień energii przepływający przez granicę obszaru.

Proponowane rozszerzenie systemu analogii elektromechanicznych na obszary trójwymiarowe daje teoretyczne przesłanki do modelowania elektrycznego przestrzennych układów mechanicznych lub odwrotnie do odwzorowania pól elektrycznych modelami elastycznymi. Jednocześnie system analogii stanowi ważną pomoc dydaktyczną przy rozpatrywaniu problemów granicznych. Praca niniejsza oświetla jedynie fragment tych zagadnień dotyczący ośrodków ciągłych o najprostszej strukturze.

### 1. ROZWÓJ SYSTEMÓW ANALOGII

Analogie elektromechaniczne są obecnie poważnym instrumentem w pracy technika i naukowca. Układy analogii pozwalają nie tylko na modelowanie jednych wielkości (np. mechanicznych) przy pomocy innych

(np. elektrycznych) [5], lecz stanowią również ważne ogniwo w rozwoju ogólnej teorii drgań [2], przyczyniając się do przenoszenia metod stosowanych w elektrotechnice teoretycznej do mechaniki i odwrotnie.

Analogie te odnoszą się do poszczególnych działów obu nauk, przy czym zależnie od grupy wielkości fizycznych do których są stosowane, zmienia się nieco ujęcie formalne i interpretacja fizykalna tych analogii.

Najbardziej znane i znajdujące najszersze zastosowanie techniczne są analogie między obwodem elektrycznym o stałych skupionych, a układem mechanicznym punktów materialnych lub ciała sztywnego. Długość fali drgań mechanicznych bądź elektromagnetycznych jest w tym przypadku duża w porównaniu z liniowymi wymiarami elementów układu.

Odpowiednikami występującymi w systemie analogii są tu stałe elementy skupione (masa, podatność, oporność mechaniczna i indukcyjność, pojemność, oporność elektryczna) oraz parametry zmienne określające ruch lub stan elektryczny tych elementów (prędkość, przesunięcie, siła i prąd, ładunek, napięcie) [11]. Interpretacja fizykalna tego typu analogii rozwinięta została w innej pracy autora [14].

Pierwszym stopniem uogólnienia takich analogii jest rozpatrywanie podobieństw między układami, których jeden wymiar liniowy jest współmierny lub znacznie większy od długości fali drgań. Z układu elementów punktowych powiązanych między sobą pewnymi zależnościami przechodzimy tutaj do rozpatrywania elementów liniowych, którym przypisujemy pewne wewnętrzne właściwości fizyczne, zmieniające się wzdłuż elementu. W elektrotechnice teoria takich układów ma wielkie znaczenie praktyczne przy badaniu długich linii kablowych i napowietrznych, zarówno energetycznych jak i telekomunikacyjnych. Ostatnio teoria ta znalazła nowe pole zastosowań w dziedzinie elektromagnetycznych fal ultrakrótkich i modelowania przebiegów drganiowych przy pomocy tych fal [3]. W mechanice typowym układem tego rodzaju jest struna, w akustyce — falowód o małym przekroju w porównaniu z długością fali dźwiękowej [15]. Wszystkie te układy stanowią przewodnice falowe, w których rozchodzą się fale płaskie o czole prostopadłym do największego wymiaru liniowego przewodnicy.

Problem polega w tym przypadku na ustaleniu analogii między stałymi rozłożonymi tj. odniesionymi do jednostki długości oraz wielkościami zmiennymi będącymi funkcjami parametrów  $x$  i  $t$ .

Zadaniem niniejszej pracy jest zbadanie podobieństw między obszarami trójwymiarowymi posiadającymi żądane właściwości mechaniczne, elektryczne i magnetyczne. Przechodzimy zatem od teorii obwodów elektrycznych do teorii pola elektromagnetycznego i od mechaniki punktu materialnego do mechaniki ośrodków ciągłych. Powoduje to znaczne:

skomplikowanie zjawisk i konieczność posługiwania się metodami matematycznymi poprzednio zbędnymi, głównie rachunkiem tensorowym.

Jako parametry niezmiennie w czasie i mające określony rozkład przestrzenny, występują w tych rozważaniach stałe charakteryzujące ośrodek (współczynniki sprężystości, stała dielektryczna, przewodność elektryczna, przenikalność magnetyczna).

Wielkościami zmiennymi są pola wywołane zaburzeniem równowagi ośrodka (pole naprężeń, odkształceń, pole elektryczne, pole indukcji magnetycznej).

Analogie tego rodzaju — mimo niewątpliwego znaczenia teoretycznego i praktycznego — są jeszcze bardzo mało zbadane, traktuje się je przeważnie tylko z punktu widzenia zainteresowań matematyka [23], a nie fizyka i technika. Toteż niniejsza praca kładzie raczej nacisk na stronę fizykalną i techniczną zagadnienia, a nie tylko na metodę matematyczną. Tym bardziej, że łączy się to z koniecznością rozwiązania konkretnych zadań technicznych, jakie stają w pracach nad modelowaniem prowadzonych przez Zakład Badania Drgań P. A. N.

## 2. POLE ELASTOSTATYCZNE W OŚRODKU IZOTROPOWYM JEDNORODNYM

Zagadnienie analogii elektromechanicznych odniesionych do ośrodków ciągłych jest tak obszerne i skomplikowane, że w ramach jednej rozprawy trzeba sobie z góry narzucić pewne ramy rozważań, które następnie mogą zostać stopniowo rozszerzone.

Dlatego celowe będzie w pierwszym etapie zbadanie właściwości pól niezmiennych w czasie (stacjonarnych), lub zmieniających się tak powoli, że z dostateczną technicznie dokładnością można je rozpatrywać jako stałe w czasie (quasistacjonarne), aby następnie przejść do przebiegów dynamicznych.

Zakładamy w całym toku rozważań, że mamy do czynienia z ośrodkiem o możliwie najmniej skomplikowanych właściwościach, tzn. z ośrodkiem jednorodnym, izotropowym. W dalszym ciągu zobaczymy, że dla uzyskania przejrzystych zależności matematycznych pożyteczne będzie zrobienie dodatkowego założenia, że zaburzenia równowagi ośrodka przebiegają w zakresie jego liniowej charakterystyki, co oznacza, że sinusoidalny przebieg jednej z wielkości zmiennych pociąga za sobą sinusoidalne zmiany innych wielkości charakteryzujących pole w danym obszarze.

Zacniemy od rozpatrzenia strony mechanicznej analogii, gdyż w ujęciu statycznym dają się one opisać jedną grupą równań, gdy dla pola elektrostatycznego i pola magnetostatycznego będziemy mieli niezależne powiązania matematyczne.

Zadanie sprecyzujemy w sposób następujący: mamy obszar  $R$  wypełniony jednorodnym, izotropowym ośrodkiem. Na element tego obszaru działają siły przestrzenne o wartości  $\bar{F}$  odniesionej do jednostki masy obszaru (tzw. siły masowe), na granicy obszaru zakładamy działanie sił powierzchniowych o wartości  $\|G\|\bar{n}$  na jednostkę powierzchni, które równoważą naprężenia wewnętrzne w obszarze.  $\bar{n}$  oznacza tu jednostkowy wektor prostopadły do granicy obszaru,  $\|G\|$  tensor naprężeń w danym punkcie. Pod wpływem tych sił powstają przemieszczenia ośrodka  $\bar{u}$ .

Znalezienie rozkładu przemieszczeń na podstawie rozkładu sił jest jednym z podstawowych problemów mechaniki teoretycznej. Podamy rozwiązanie tego problemu nieco w innej postaci niż to się spotyka w klasycznych podręcznikach mechaniki [21], chodzi bowiem o takie przedstawienie zależności pomiędzy wielkościami charakteryzującymi badany obszar, aby następnie móc w analogicznej formie napisać odpowiedniki tych wielkości w polu elektromagnetycznym.

Ogólne równanie ruchu w ośrodku ciągłym idealnie sprężystym napiszemy w dobrze znanej postaci [19]

$$\varrho \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} = \varrho \bar{F} + \text{Div} \|G\|, \quad (1)$$

gdzie

- $\varrho$  — gęstość ośrodka,
- $\bar{F}$  — siła przestrzenna,
- $\bar{u}$  — przemieszczenie,
- $\frac{d^2}{dt^2}$  — pochodna substancjonalna,
- $\|G\|$  — tensor naprężeń.

W dalszym ciągu mówić będziemy o naprężeniach mechanicznych, w odróżnieniu od napięć elektrycznych.

Ponieważ obecnie ograniczamy się do rozpatrywania stanów statycznych lub quasistatycznych, pochodną substancjonalną można uznać za lokalną i przyrównać ją do zera.

Równanie (1) będzie wtedy

$$\varrho \bar{F} + \text{Div} \|G\| = 0. \quad (2)$$

Równanie Gaussa-Ostrogradzkiego, rozciągnięte na pole tensorowe ma jak wiadomo postać

$$\int_R \bar{r} \text{Div} \|G\| dV = \int_S \bar{r} \|G\| \bar{n} dS - 2 \int_R \|G\|_{(\omega)} dV, \quad (3)$$



gdzie

$\bar{r}$  — jest wektorem wyznaczającym położenie przestrzenne elementu, na który rozciągamy całkowanie,

$\|G\|_{(a)}$  — tensorem antysymetrycznym.

Ogólne wyrażenie na tensor naprężeń będzie

$$\|G\| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}, \quad (4)$$

gdzie

$\sigma_i$  — naprężenia normalne, które dalej wg nomenklatury używanej w teorii drgań [10] nazywamy również podłużnymi,

$\tau_{ij}$  — naprężenia styczne czyli poprzeczne.

Dla ośrodków izotropowych  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ , zatem tensor naprężeń staje się tensorem symetrycznym. Oznacza to, że w równaniu (3) znika wyraz  $\|G\|_{(a)}$ , a stąd

$$\int_R \bar{r} \operatorname{Div} \|G\| dV = \int_S \bar{r} \|G\| \bar{n} dS. \quad (5)$$

Możemy zatem jednoznacznie określić rozkład sił powierzchniowych na granicy obszaru  $R$ , wyznaczony naprężeniami wewnętrznymi.

W przypadku ośrodka płynnego, który jest szczególnie ważny przy rozpatrywaniu problemów akustycznych, mamy  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$  i  $\tau_{ij} = 0$ , tensor naprężeń staje się tensorem kulisto-symetrycznym

$$\|G\| = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} \quad (6)$$

czyli nie występują tu naprężenia styczne, a równanie (2) ogranicza się do wzoru Eulera

$$\operatorname{grad} p = \bar{F}. \quad (7)$$

Wyznaczenie zależności między tensorem naprężeń  $\|G\|$ , a tensorem odkształceń  $\|W\|$ , następuje przez wprowadzenie pojęcia potencjału elastycznego Lamé i określenie zależności między  $\sigma_i$ ,  $\tau_{ij}$  i  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_{ij}$  ( $\varepsilon_i$  oznaczają odkształcenia objętościowe,  $\gamma_{ij}$  — postaciowe).

Tensor odkształceń napiszemy jako

$$\|W\| = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Pomijając rozważania, które znajdziemy w podręcznikach mechaniki, napiszemy wynik końcowy

$$\sigma_i = -P_s + \lambda_s \varepsilon_v + 2 \mu_s \varepsilon_i \quad (9)$$

$$\tau_{ij} = 2 \mu_s \gamma_{ij} \quad (10)$$

$P_s$ ,  $\lambda_s$  i  $\mu_s$  są stałymi Lamé,

$\varepsilon_v$  — stanowi sumaryczne odkształcenie objętościowe

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \operatorname{div} \bar{u}, \quad (11)$$

gdzie  $\bar{u}$  jest przemieszczeniem traktowanym jako wektor. Z zależności tych wynika dalej [19], że jeśli tensor naprężeń jest symetryczny, to symetryczny będzie również tensor odkształceń, a ponieważ składowe obu tensorów poza główną przekątną znikają jednocześnie, więc osie główne tych tensorów są równoległe. Ostatecznie

$$\|G\| = \frac{1}{2 \mu_s} \|W\| - \frac{(\lambda_s \varepsilon_v - P_s)}{2 \mu_s} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Przyjmujemy ośrodek jako idealnie sprężysty, w którym nie występują naprężenia początkowe i wyraz  $P_s = 0$ .

Można wówczas napisać równanie tensorowe naprężeń i odkształceń w formie

$$2 \mu_s \|G\| = \|W\| - \lambda_s |W|, \quad (13)$$

gdzie

$$|W| = W^{ij} \delta_{ij}$$

$\delta_{ij}$  — składowe tensora metrycznego.

### 3. WIELKOŚCI WEKTOROWE I POTENCJALNE POLA ELASTOSTATYCZNEGO

Chcąc otrzymać związki potrzebne do ustalenia analogii elektromechanicznych, nieodzowne jest rozdzielenie wielkości o różnym charakterze potencjalnym, występujących w tensorach naprężeń i odkształceń. Dokonamy tego przez przejście od ujęcia tensorowego na operatory związane z polem wektorowym.

Opierając się na wzorach (9) i (10) określić można składowe  $\operatorname{Div} \|G\|$  i ich sumę

$$\operatorname{Div} \|G\| = (\lambda_s + \mu_s) \operatorname{grad} \varepsilon_v + \mu_s \Delta \bar{u}, \quad (14)$$

$$\operatorname{Div} \|G\| = (\lambda_s + \mu_s) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} + \mu_s \Delta \bar{u}, \quad (14a)$$



stąd otrzymujemy z uwagi na (2) ogólne równanie elastostatyki

$$\rho \bar{F} + (\lambda_s + \mu_s) \text{grad div } \bar{u} + \mu_s \Delta \bar{u} = 0. \quad (15)$$

Symbolem  $\Delta$  oznaczamy w dalszym ciągu laplasjan danej wielkości.

Ogólnie biorąc, jeżeli pominiemy przypadek określony równaniem (6), wszystkie składowe tensora naprężeń są różne od zera. Siłę przestrzenną działającą w danym punkcie ośrodka można zatem przedstawić w postaci wektora  $\bar{f}$  posiadającego składową bezwirową  $\bar{f}_1$ , odpowiadającą naprężeniom podłużnym i składową bezźródłową  $\bar{f}_2$  odpowiadającą naprężeniom poprzecznym. Zgodnie z teorią pola wektorowego, pierwsza składowa będzie gradientem potencjału skalarnego  $\Phi$ , druga składowa — rotacją potencjału wektorowego  $\Psi$ . Można zatem, rozkładając składowe  $\bar{f}$  na współrzędne prostokątne napisać dla potencjału w punkcie  $P$

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_R \left[ f_x(Q) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) + f_y(Q) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) + f_z(Q) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dV_Q, \quad (16)$$

$$\Psi_x = \frac{1}{4\pi} \int_R \left[ f_z(Q) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) - f_y(Q) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dV_Q,$$

$$\Psi_y = \frac{1}{4\pi} \int_R \left[ f_x(Q) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) - f_z(Q) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dV_Q,$$

$$\Psi_z = \frac{1}{4\pi} \int_R \left[ f_y(Q) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) - f_x(Q) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dV_Q. \quad (17)$$

W postaci wektorowej otrzymujemy

$$\bar{f} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 = \text{grad } \Phi + \text{rot } \bar{\Psi} \quad (18)$$

zgodnie z założeniami

$$\text{rot } \Phi = 0; \quad \text{div } \bar{\Psi} = 0. \quad (19)$$

Ponieważ — jak była mowa wyżej — tensor odkształceń jest symetryczny i ma oś główną równoległą do osi głównej tensora naprężeń, więc przemieszczenia można również dla danego punktu przedstawić w postaci wektora o składowej bezwirowej  $\bar{u}_1$ , określonej potencjałem skalarnym  $\varphi$  i składowej bezźródłowej  $\bar{u}_2$  — określonej potencjałem wektorowym  $\bar{\Psi}$

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \text{grad } \varphi + \text{rot } \bar{\Psi}, \quad (20)$$

$$\text{rot } \varphi = 0; \quad \text{div } \bar{\varphi} = 0 \quad (21)$$

oraz

$$\Delta \bar{u}_1 = 0; \quad \Delta \bar{u}_2 = 0.$$

Zauważmy, że zamiast takiego wyrażenia pola przemieszczeń można również, jak to się zwykle robi w wykładzie mechaniki, posługiwać się potencjałem Lamé. Jednak dla naszych celów przyjęty tok rozumowania da znacznie jaśniejsze ujęcie analogii. Przechodząc do pola wektorowego sił, rozciągniętego do nieskończoności, rozpatrujemy wszystkie działające siły jako przestrzenne. Wówczas posługując się równaniem (15) obliczamy:

$$\operatorname{div} \bar{u} = \Delta \varphi; \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} = \operatorname{grad} \varphi,$$

$$\operatorname{rot} \bar{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{\psi} - \Delta \bar{\psi}; \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{u} = -\operatorname{rot} \Delta \bar{\psi},$$

$$(\lambda_s + 2 \mu_s) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} - \mu_s \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{u} = -\varrho \bar{F},$$

$$(\lambda_s + 2 \mu_s) \operatorname{grad} \Delta \varphi + \mu_s \operatorname{rot} \Delta \bar{\psi} = -\varrho (\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \bar{\Psi}), \quad (22)$$

stąd związki między potencjałami sił i przemieszczeń

$$\frac{\lambda_s + 2 \mu_s}{\varrho} \Delta \varphi = -\Phi, \quad (23)$$

$$\frac{\mu_s}{\varrho} \Delta \bar{\psi} = -\bar{\Psi}. \quad (24)$$

Wprowadzimy jeszcze zamiast stałych Lamé powszechnie używane w technice wielkości: moduł Younga  $E_s$  i współczynnik Poissona  $\sigma_s$ . (Indeksy  $s$  służą do odróżnienia tych współczynników od identycznie znakowanych wielkości elektrycznych). Nie wdając się w dobrze znane przekształcenia napiszemy końcowy rezultat

$$E_s = \frac{\mu_s (3 \lambda_s + 2 \mu_s)}{\lambda_s + \mu_s} \quad \text{i} \quad \sigma_s = \frac{\lambda_s}{2 (\lambda_s + \mu_s)},$$

stąd

$$\mu_s = \frac{E_s}{2 (1 + \sigma_s)}; \quad \lambda_s = \frac{E_s \sigma_s}{(1 + \sigma_s) (1 - 2 \sigma_s)} \quad (25)$$

oraz

$$\frac{E_s}{\varrho} \left[ \frac{1 - \sigma_s}{(1 + \sigma_s) (1 - 2 \sigma_s)} \right] \Delta \varphi = -\Phi, \quad (26)$$

$$\frac{E_s}{2 \varrho} \left[ \frac{1}{1 + \sigma_s} \right] \Delta \bar{\psi} = -\bar{\Psi}. \quad (27)$$

Ostatec równania można również przedstawić w postaci (16)

$$c_1^2 \Delta \varphi = -\Phi, \quad (28)$$

$$c_2^2 \Delta \bar{\psi} = -\bar{\Psi}, \quad (29)$$

gdzie  $c_1$  i  $c_2$  są prędkościami rozchodzenia się fal podłużnych i poprzecznych.

W przypadku ośrodka płynnego, aktualne są tylko równania (23), (26) i (28), które dają

$$\frac{E_s}{\rho} \Delta \varphi = -\Phi \quad \text{bądź} \quad \frac{P}{\rho} \Delta \varphi = p. \quad (30)$$

To ostatnie równanie jest zasadniczą zależnością występującą w zagadnieniach akustyki.

#### 4. METODA WYZNACZANIA WIELKOŚCI ANALOGICZNYCH

Z poprzedniego widać, że w polu elastostatycznym mamy do czynienia z dwoma nakładającymi się na siebie układami wielkości, którym odpowiada przesuw i obrót. Układy te mogą być w ośrodku izotropowym traktowane w znacznym stopniu niezależnie, dzięki omówionej wyżej równoległości osi głównych tensorów naprężeń i odkształceń. Wzajemne ścisłe powiązania występują dopiero w ośrodkach anizotropowych, gdzie naprężenia normalne określone tensorem

$$\|G\| = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (31)$$

wytwarzają przesunięcia wyrażające się tensorem, w którym pewne lub wszystkie współczynniki leżące poza osią główną nie są zgodnie z założeniami równe zero. Możemy więc oddzielnie rozpatrywać oba układy i oddzielnie szukać ich odpowiedników elektromagnetycznych. Logiczną drogą znalezienia tych odpowiedników będzie rozciągnięcie na ośrodki ciągle systemów analogii używanych przy układach o stałych skupionych.

Zastąpienie wielkości charakteryzującej element skupiony wielkościami odniesionymi do jednostki objętości, pociąga za sobą konieczność zmiany niektórych określeń, zwykle używanych przy definicji wielkości analogicznych. Przy czym wielkości analogiczne odniesione do pól statycznych, lub quasistatycznych obejmują tylko część systemu analogii, którego pełne rozwinięcie nastąpi w dalszym ciągu w nawiązaniu do przebiegów dynamicznych.

Przypomnimy, że istnieją dwa zasadnicze systemy analogii: klasyczny i poprawiony. W systemie klasycznym mamy następujące pary wielkości analogicznych:

- 1a. prąd  $\equiv$  prędkość,
- 1b. napięcie  $\equiv$  siła,
- 1c. ładunek  $\equiv$  przesunięcie.

W systemie poprawionym występują natomiast wielkości:

- 2a. prąd  $\equiv$  siła,
- 2b. napięcie  $\equiv$  prędkość,
- 2c. strumień indukcji magnetycznej  $\equiv$  przesunięcie,

(znakiem  $\equiv$  oznaczać będziemy w dalszym ciągu odpowiedniość wielkości analogicznych).

Napięcie, siła, ładunek i przesunięcie mogą być równie dobrze rozpatrywane jako wielkości dynamiczne zmienne w czasie jak i wielkości określające układ statyczny. Strumień indukcji magnetycznej i prąd elektryczny jako związane z ruchem ładunków elektrycznych są w zasadzie wielkościami dynamicznymi, prędkość jest niewątpliwie ze swej definicji wielkością dynamiczną.

Wynika stąd, że w klasycznym systemie analogii odpowiednik 1a. jest dynamiczny, gdy 1b. i 1c. mogą być traktowane jako statyczne. Natomiast w poprawionym systemie analogii, z punktu widzenia elektrostatyki, wszystkie pary odpowiedników mają charakter dynamiczny, a więc nie mogłyby być zastosowane do skonstruowania analogii pola elastostatycznego.

Aby ominąć te trudności, musimy za punkt wyjścia przy stosowaniu poprawionego systemu analogii wziąć wielkości magnetyczne. Wówczas obwód prądu stałego traktować można jako dipol magnetyczny a więc element quasistatyczny, to samo dotyczy strumienia indukcji magnetycznej. Trzeba zatem, jeżeli chcemy oprzeć się na poprawionym systemie analogii, zacząć od porównania właściwości pola elastostatycznego z polem magnetostatycznym.

## 5. SYSTEM ANALOGII MAGNETOMECHANICZNYCH

Wiemy, że dowolny zamknięty obwód elektryczny o powierzchni  $dS$ , przez który płynie prąd  $I$  przedstawia dipol magnetyczny o momencie  $I/c dS$  ( $c$  — szybkość światła). Pole wytworzone przez zamknięty obwód prądowy o dowolnym kształcie jest równoważne magnetycznej warstwie podwójnej o momencie na jednostkę powierzchni równym  $I/c$ .

Ponieważ przyjęliśmy za podstawę poprawiony system analogii, odpowiednikiem prądu ma być siła, jeśli jednak zważymy, że prąd jest wiel-

kością wirową i bezźródłową, analogia ta może dotyczyć jedynie drugiej składowej siły z równania (18).

Inaczej mówiąc odwzorowaniem obwodu z prądem będzie para sił dająca moment  $M$ , lub operując kategoriami pola mechanicznego — odpowiednikiem magnetycznej warstwy podwójnej będą powierzchniowe momenty sił stycznych. Jeżeli natomiast pod wpływem pola elektrycznego w ośrodku o przewodności elektrycznej  $\sigma$ , różnej od zera, powstają prądy przestrzenne o gęstości  $i$ , to ich działanie jest odpowiednikiem efektu jaki dają skręcające siły przestrzenne.

Napreżeniom powstającym pod wpływem tych momentów odpowiadać będzie natężenie pola magnetycznego, jako miara kinetycznego działania momentów magnetycznych spowodowanych obwodami prądowymi.

Zgodnie z prawem Biot-Savarta

$$\oint H d\bar{l} = \frac{4\pi I}{c}; \quad \text{rot } H = \frac{4\pi i}{c}. \quad (32)$$

Zauważmy, że prawo Biot-Savarta może być napisane również w postaci

$$\bar{H} = -\frac{I}{c} \oint \left[ d\bar{l} \text{ grad } \frac{1}{r} \right], \quad (33)$$

co zważywszy na związek —  $\left[ d\bar{l} \text{ grad } \frac{1}{r} \right] = \text{rot} \left( \frac{d\bar{l}}{r} \right)$  daje

$$\bar{H} = \text{rot } \bar{A}_H, \quad (34)$$

gdzie

$$\bar{A}_H = \frac{I}{c} \oint \frac{d\bar{l}}{r}. \quad (35)$$

$\bar{A}_H$  wyraża potencjał wektorowy natężenia pola i jest odpowiednikiem potencjału  $\Psi$ .

Wielkością odpowiadającą przesunięciu — w analogiach dotyczących układów o stałych skupionych — był strumień magnetyczny  $\Phi_m$ . Ponieważ w polu istniejącym w ośrodku ciągłym, wartości odniesione są do jednostki powierzchni, zamiast  $\Phi_m$  występować będzie indukcja magnetyczna  $B = \Phi_m/S$ .

Jeżeli proponowany system analogii jest poprawny, to wielkość  $\bar{B}$  jako bezźródłowa i wirowa ma odpowiadać składowej  $u_2$  w równaniu (20), a zatem spełniać równania (21) i (15). Warunki  $\text{div } \bar{B} = 0$  i  $\Delta \bar{B} = 0$  są jak wiemy spełnione.

Aby sprawdzić poprawność związku (15) odniesionego do wartości magnetycznych, wystarczy stwierdzić istnienie zależności o kształcie odpowiadającym równaniu (29).

W tym celu przyjmujemy, jak się to zwykle robi w teorii pola elektrycznego [8], że pole indukcji magnetycznej wyznaczone jest polem potencjału wektorowego, spełniającego równanie.

$$\bar{B} = \text{rot } A_B. \quad (36)$$

Obliczamy zależność między  $\bar{A}_H$  i  $\bar{A}_B$  z równania  $\Delta \bar{B} = 0$

$$\Delta \bar{B} = \text{grad div } \bar{B} - \text{rot rot } \bar{B} = 0,$$

$$\text{rot } \bar{B} = \text{grad div } \bar{A}_B - \Delta \bar{A}_B; \quad \text{rot rot } \bar{B} = -\text{rot } \Delta \bar{A}_B$$

uwzględniając, że  $B = \mu H$  oraz równanie (32), otrzymujemy

$$\mu \text{rot} \left( \frac{4\pi i}{c} \right) = -\text{rot } \Delta \bar{A}_B.$$

Jeżeli całkowanie w równaniu (35) obejmuje cały obwód prądowy, wielkość w nawiasie odpowiada potencjałowi  $\bar{A}_H$  i stanowi gęstość prądu elektrycznego, stąd

$$\frac{c}{\mu} \Delta \bar{A}_B = -\bar{A}_H \quad (37)$$

równanie identyczne z (27) jeżeli położymy

$$\frac{E_s}{2\varrho} \left[ \frac{1}{1 + \sigma_s} \right] \equiv \frac{c}{\mu}.$$

Trzeba się jednak z góry zastrzec, że ta odpowiedniość będzie musiała ulec rewizji, skoro przejdziemy do rozpatrywania przebiegów dynamicznych.

## 6. SYSTEM ANALOGII ELEKTROMECHANICZNYCH

Narzuca się sugestia, aby analogii do składowej  $\bar{f}_1$  pola sił szukać w wielkościach pola elektrostatycznego. Istotnie pole to jest bezwirowe i źródłowe a więc ma pokrewny charakter do pola naprężeń normalnych. Trudność leży w wyborze par analogicznych, wiemy mianowicie, że poprawiony system analogii opiera się na porównaniu wielkości magnetycznych z mechanicznymi. Dlatego trzeba oczekiwać, że przeprowadzenie analogii w systemie klasycznym byłoby łatwiejsze, gdyż operuje się w nim analogiami elektryczno-mechanicznymi. Otrzymalibyśmy analogie ładunek  $\equiv$  przesunięcie i rozkład naprężeń  $\equiv$  rozkład potencjału elektrycznego.

Nasuwają się jednak dwa zastrzeżenia:

1. W ramach tego samego układu nie wolno posługiwać się na przemian różnymi systemami analogii,
2. Poprzednio siłę uważaliśmy za przyczynę powstania pola elastostaticznego i jako jej odpowiednik przyjmowaliśmy obwód prądowy czyli przyczynę powstawania zaburzeń magnetycznych. Obecnie wielkości uległyby przestawieniu, mianowicie porównując ładunek do przesunięcia zakładalibyśmy, że pole naprężeń jest zjawiskiem wynikowym w stosunku do pola przemieszczeń.

Dlatego celem uzyskania logicznie rozbudowanego systemu analogii, konieczne będzie rozszerzenie poprawionego systemu analogii również na pole elektrostatyczne, chyba że zgodzimy się na zupełnie odrębne traktowanie po stronie mechanicznej pola naprężeń normalnych i stycznych, co jednak nie wydaje się słuszne, a przy modelowaniu mogłoby prowadzić do poważnych błędów.

Usprawiedliwione będzie oparcie się na klasycznej analogii między polem elektrycznym i magnetycznym

$$m \equiv Q; \quad \vec{H} \equiv \vec{E}; \quad \vec{B} \equiv \vec{D}; \quad \mu \equiv \varepsilon; \quad (38)$$

choć nie wykluczone jest posługiwanie się innymi spotykanymi w literaturze odpowiednikami.

Pierwsza z tych wielkości, „masa magnetyczna“ jest pojęciem abstrakcyjnym i w naszych rozważaniach była zastąpiona dipolem magnetycznym wytworzonym przez działanie obwodu prądowego. Inne wielkości nie wymagają wyjaśnień. Przyjmiemy zatem, że gdy odpowiednikiem sił stycznych był dipol magnetyczny, odpowiednikiem siły normalnej jest ładunek. Można wysunąć wątpliwość, że ładunek jest wielkością skalarną, gdy siła — wektorową. Nie ma tu jednak sprzeczności, gdyż rozumowanie ograniczamy do sił normalnych. Jako model mechaniczny działania ładunków leżących na powierzchni obszaru wyobrazić sobie możemy ciśnienie ośrodka płynnego (z odwrotnym znakiem). Odwzorowaniem sił masowych są wolne ładunki przestrzenne. Odpowiedniość jest zupełna, jeżeli założymy, że poza obszarem znajduje się warstwa ładunków o odwrotnym znaku, obrazująca wpływ grawitacji ziemskiej.

Odpowiednikiem naprężeń będzie napięcie pola elektrycznego  $E$ . Zwróćmy uwagę, że wielkość  $\vec{E}$  związana jest w polu elektrycznym z ładunkiem swobodnym  $Q$ , podobnie jak naprężenie związane jest z siłą przestrzenną  $F$ . Równanie

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi Q \quad (39)$$

odpowiada równaniu (2), zmiana znaku wynika stąd, że mamy do czynienia z odpychaniem ładunków, a nie z przyciąganiem grawitacyjnym.



Wielkością odpowiadającą potencjałowi  $\Phi$  powstającemu przy działaniu sił podłużnych, będzie potencjał natężenia pola  $K_E$ , uzależniony od przestrzennej gęstości ładunków  $q$

$$K_E = \int_R \frac{q}{r} dV. \quad (40)$$

Podstawiając wartość  $q$  z równania (39) otrzymamy

$$K_E = \frac{1}{4\pi} \int_R \frac{\operatorname{div} \bar{E}}{r} dV, \quad (41)$$

że zaś

$$\frac{\operatorname{div} \bar{E}}{r} = -\bar{E} \operatorname{grad} \frac{1}{r} - \operatorname{div} \frac{\bar{E}}{r}$$

z warunku granicznego  $r = \infty$ ,  $\bar{E} = 0$  wynika, że przy całce rozciągniętej do nieskończoności drugi wyraz zniknie, zatem

$$K_E = -\frac{1}{4\pi} \int_R \bar{E} \operatorname{grad} \frac{1}{r} dV. \quad (42)$$

Jest to wzór analogiczny do równania (16), możemy napisać

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} K_E \quad (43)$$

równanie Laplace'a jest spełnione, bo  $\operatorname{rot} E = 0$ .

Pozostaje określenie pola, które odpowiadałoby polu podłużnych przemieszczeń mechanicznych.

W tym celu wróćmy do równania (28) wiążącego potencjał  $\Phi$  z potencjałem przemieszczeń i określimy wielkość elektryczną  $K$ , która spełniałaby analogiczne równanie

$$k \Delta K = K_E; \quad (44)$$

wielkość  $\bar{X}$  odpowiadająca przesunięciu mechanicznemu spełniać powinna równanie

$$\bar{X} = -\operatorname{grad} K, \quad (45)$$

zatem

$$k \operatorname{div} \bar{X} = -K_E, \quad (46)$$

gdyż należy założyć  $\operatorname{rot} \bar{X} = 0$ .

Przy uwzględnieniu wzoru (40) i rozciągnięciu całkowania na wszystkie wolne ładunki  $Q$  znajdujące się w obszarze  $R$ .

$$k \operatorname{div} \bar{X} = \frac{4\pi Q}{c}. \quad (47)$$



Wielkość  $\bar{X}$  odnosić się powinna do ładunków rzeczywistych  $Q'$ , a nie tylko do ładunków wolnych  $Q$ , jak to miało miejsce przy określaniu  $E$ , gdyż z punktu widzenia zjawisk w ośrodku rozróżnienie odległych ładunków wolnych i związanych nie następuje. Otrzymujemy więc

$$\operatorname{div} \bar{X} = \frac{4\pi Q'}{c} \quad (48)$$

czyli zamiast  $\bar{X}$  podstawić można przesunięcie elektryczne  $\bar{D}$ , co potwierdza zresztą przyjęcie analogii (38).

Ponieważ  $\frac{Q'}{Q} = \frac{\operatorname{div} \bar{D}}{\operatorname{div} E}$  dla ośrodka jednorodnego  $k = \frac{c}{\varepsilon}$ .

Wprowadzając potencjał przesunięcia elektrycznego wyrażony zależnością  $\bar{D} = \operatorname{grad} K_D$ , który odpowiada gęstości przestrzennej ładunków, otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{c}{\varepsilon} \Delta K_D = -K_E \quad (49)$$

odpowiadające równaniu Poissona [4].

Mamy więc formalną zgodność z równaniem (26) kładąc

$$\frac{Es}{\varrho} \left[ \frac{1 - \sigma_s}{(1 + \sigma_s)(1 - 2\sigma_s)} \right] = \frac{c}{\varepsilon}.$$

## 7. WARUNKI BRZEGOWE NA GRANICY OBSZARU

Sprawdzić jeszcze należy, czy przyjęte analogie spełniają identycznie warunki brzegowe na granicy jednorodnego i izotropowego obszaru  $R$ , wówczas gdy otaczający ten obszar ośrodek ma inne właściwości mechaniczne, elektryczne i magnetyczne.

Niech stałe charakterystyczne ośrodka zajmującego obszar  $R$  będą

$E_0, \sigma_0$  — stałe mechaniczne

$\varepsilon_0$  — przenikalność magnetyczna.

$\mu_0$  — stała dielektryczna,

W ośrodku zewnętrznym mamy odpowiednio  $E_1, \sigma_1, \varepsilon_1, \mu_1$ . Funkcje  $k''_i, k'_i$  zależne od stałych mechanicznych, określają proporcjonalność pomiędzy przemieszczeniami, względnie siłami na granicy ośrodków.

Celem bardziej przejrzystego uwidocznienia wyników przyjmujemy, że w punkcie obserwacji krzywizna granicy ośrodków jest do pominięcia. Ustawiamy współrzędną z prostopadłe do granicy ośrodków. Osie współrzędnych  $x, y$  leżą więc w płaszczyźnie granicznej.

W ośrodku mechanicznym obowiązują zależności:

a) nieprzerwalności składowej normalnej wektora przemieszczeń

$$(u_z)_0 = (u_z)_1; \quad (u_x)_0 = k''_x(u_x)_1; \quad (u_y)_0 = k''_y(u_y)_1, \quad (50)$$

b) równowagi sił stycznych działających na granicy ośrodków

$$(f_x)_0 = (f_x)_1; \quad (f_y)_0 = (f_y)_1; \quad (f_z)_0 = k_z^f (f_z)_1. \quad (51)$$

W polu elektrostatycznym:

a) nieprzerwywności składowej normalnej przesunięcia elektrycznego

$$(D_z)_0 = (D_z)_1; \quad \varepsilon_1 (D_x)_0 = \varepsilon_0 (D_x)_1; \quad \varepsilon_1 (D_y)_0 = \varepsilon_0 (D_y)_1, \quad (52)$$

b) ciągłości linii pola elektrycznego

$$(E_x)_0 = (E_x)_1; \quad (E_y)_0 = (E_y)_1; \quad \varepsilon_0 (E_z)_0 = \varepsilon_1 (E_z)_1. \quad (53)$$

W polu magnetycznym:

a) nieprzerwywności składowej normalnej indukcji

$$(B_z)_0 = (B_z)_1; \quad \mu_1 (B_x)_0 = \mu_0 (B_x)_1; \quad \mu_1 (B_y)_0 = \mu_0 (B_y)_1, \quad (54)$$

b) ciągłości linii pola magnetycznego

$$(H_x)_0 = (H_x)_1; \quad (H_y)_0 = (H_y)_1; \quad \mu_0 (H_z)_0 = \mu_1 (H_z)_1. \quad (55)$$

Porównując wielkości  $u$ ,  $D$ ,  $B$  widzimy, że ich składowe normalne pozostają stałe, gdy składowe styczne zmieniają się zależnie od właściwości ośrodka.

Z drugiej strony  $f$ ,  $E$  i  $H$  mają niezmiennic składowe styczne, a ich normalne zmieniają się na granicy obszaru.

Analogia jest więc dla warunków granicznych całkowicie spełniona.

## 8. PRZEBIEGI DYNAMICZNE W OŚRODKACH

Przebiegi elektromechaniczne odniesione do stanu statycznego lub quasistatycznego ośrodków nie wyczerpują całego układu wielkości analogicznych. Co ważniejsze, analogie te nie mogą być użyte bez zastrzeżeń, jeśli nie sprawdzimy czy pozostają one w mocy dla przebiegów zmiennych w czasie.

Jak poprzednio zacniemy od zorientowania się w zjawiskach zachodzących w ośrodku sprężystym. Zachowanie się tego ośrodka charakteryzowało równanie (1), ponieważ przekształcenia (9) — (14) pozostają nadal słuszne, równanie (15) napiszemy teraz w postaci

$$\rho \bar{F} + (\lambda_s + \mu_s) \text{grad div } \bar{u} + \mu_s \Delta \bar{u} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \quad (56)$$

Jako dodatkowy warunek dojdzie równanie ciągłości strugi

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left( \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = 0. \quad (57)$$

Przeprowadziwszy jak poprzednio rozdział składowych bezwirowych [10] i bezźródłowych sił przestrzennych i pola przemieszczeń, zamiast równania (22) będziemy mieli

$$\begin{aligned} (\lambda_s + 2\mu_s) \text{grad } \Delta\varphi + \mu_s \text{rot } \Delta\bar{\psi} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{grad } \varphi) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{rot } \bar{\psi}) = \\ = -\rho (\text{grad } \Phi + \text{rot } \bar{\Psi}) \end{aligned} \quad (58)$$

stad, analogiczne do równań (23) i (24), zależności między potencjałami pola odkształceń

$$\Delta\varphi + \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{c_1^2} \Phi, \quad (59)$$

$$\Delta\bar{\psi} + \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c_1^2} \bar{\Psi}, \quad (60)$$

gdzie

$$c_1^2 = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho} = \frac{E_s}{\rho} \left[ \frac{1 - \sigma_s}{(1 + \sigma_s)(1 - 2\sigma_s)} \right],$$

$$c_2^2 = \frac{\mu_s}{\rho} = \frac{E_s}{2\rho} \left[ \frac{1}{1 + \sigma_s} \right]$$

dla samych przemieszczeń uwzględniając, że  $\bar{u}_1 = \text{grad } \varphi$ ;  $\bar{u}_2 = \text{rot } \bar{\psi}$  mamy

$$\Delta\bar{u}_1 + \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{c_1^2} \text{grad } \Phi, \quad (61)$$

$$\Delta\bar{u}_2 + \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial t^2} = -\frac{1}{c_2^2} \text{rot } \bar{\Psi}, \quad (62)$$

grad  $\Phi$ , rot  $\bar{\Psi}$  stanowią składową bezwirową i bezźródłową siłę przestrzennych.  $c_1$  i  $c_2$  określają prędkość rozchodzenia się fali drgań podłużnych bądź poprzecznych w ośrodku.

Badając układy drgające mierzymy zwykle nie przesunięcie lecz prędkość ruchu. W ośrodku ciągłym możemy odpowiednio wyznaczyć prędkość postępową.

$$\bar{v}_1 = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} \quad (63)$$

i prędkość obrotową

$$\bar{v}_2 = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} \quad (64)$$

W celu ustalenia równań miarodajnych dla pola elektromagnetycznego, będących odpowiednikami równań dynamicznych ośrodka sprężystego, oprzemy się na układzie równań Maxwella

$$\begin{aligned} \text{a. } \operatorname{rot} \bar{H} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \bar{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \\ \text{b. } \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \\ \text{c. } \operatorname{div} \bar{D} &= 4\pi q', \\ \text{d. } \operatorname{div} \bar{B} &= 0, \end{aligned} \quad (65)$$

gdzie

$q'$  — gęstość przestrzenna ładunków,

$\sigma$  — przewodność właściwa ośrodka, iloczyn  $\sigma E$  jest gęstością przestrzenną prądu  $i$ .

Uwzględniając (36) z równania (65b) otrzymujemy

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{A}_B.$$

Wielkość  $\left(\bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}_B}{\partial t}\right)$  jest potencjałem wektorowym, gdyż jego rotacja równa się zeru. Można zatem przyjąć

$$\bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}_B}{\partial t} = -\operatorname{grad} K_E, \quad (66)$$

stąd i równania (65a)

$$\frac{c}{\varepsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A}_B + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \bar{A}_B}{\partial t^2} + \operatorname{grad} K_E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \quad (67)$$

oraz równania (65c)

$$-\frac{\varepsilon}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \bar{A}_B}{\partial t} - \varepsilon \Delta K_E = 4\pi q'. \quad (68)$$

Źródła potencjału  $\bar{A}_B$  nie są równaniem (36) jednoznacznie określone, można więc założyć [1]

$$\operatorname{div} \bar{A}_B = -\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial K_E}{\partial t} \quad (69)$$

ostatecznie z równań (68) i (69)

$$\varepsilon \Delta K_E - \frac{\varepsilon^2 \mu}{c^2} \frac{\partial^2 K_E}{\partial t^2} = -4\pi q', \quad (70)$$

jeżeli zamiast ładunków rzeczywistych podobnie jak w równaniu (39) weźmiemy pod uwagę ładunki swobodne, pamiętając, że  $K_D = \varepsilon K_E$  otrzymamy

$$\Delta K_D - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 K_D}{\partial t^2} = -4\pi \varepsilon q.$$

Z równań (67) i (68) możemy również wyznaczyć zależności dla potencjału

$$\Delta \bar{A}_B - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}_B}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} i.$$

Gęstość ładunków określa potencjał skalarny  $K_E$ , a gęstość prądu potencjał wektorowy  $\bar{A}_H$ . Toteż gdy całkowanie wyznaczone definicją tych potencjałów (35) i (40) rozciągniemy do nieskończoności, poprzednie zależności przybiorą kształt

$$\Delta K_D - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 K_D}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon}{c} K_E, \quad (71)$$

$$\Delta \bar{A}_B - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}_B}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{c} \bar{A}_H. \quad (72)$$

Z równań Maxwella łatwo znaleźć również bezpośrednio zależności ruchu falowego dla indukcji magnetycznej  $B$  i przesunięcia elektrycznego  $D$ . Z równań (65a) i (65b)

$$\Delta \bar{H} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} \text{rot}(\sigma \bar{E}), \quad (73)$$

$$\Delta \bar{B} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{c} \text{rot} \bar{A}_H,$$

podobnie

$$\Delta \bar{D} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{D}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = -\frac{\varepsilon}{c} \text{grad} K_E. \quad (74)$$

Jeżeli istnieć mają trwałe wolne ładunki, będące według poprzedniej definicji odpowiednikiem sił przestrzennych, w równaniu (74) trzeba założyć  $\sigma=0$ , czyli że ośrodek jest bezstratnym dielektrykiem, w przeciwnym bowiem przypadku prawa strona tego równania staje się zerem.

Nie dotyczy to jednak równania (73), gdzie przeciwnie — założenie  $\sigma=0$  oznaczałoby brak przestrzennego rozkładu prądów; a więc przy zastosowaniu przyjętego poprzednio systemu analogii byłoby równoznaczne z brakiem składowej  $F_2$  sił masowych. W równaniu (73) przyjmujemy zatem milcząco, że ośrodek jest przewodnikiem.

## 9. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA NIEDOPASOWANIA SYSTEMU ANALOGII

Założenie dodatkowe, które musieliśmy poczynić, aby nadać sens fizyczny równaniom (73) i (74), doprowadziły do pozornej sprzeczności w układzie wielkości analogicznych, musieliśmy bowiem w jednym przypadku rozpatrywać ośrodek będący dielektrykiem, drugi raz przypisać mu właściwości przewodnika. Należało tego oczekiwać. Znaleźliśmy, w dotychczas zdawałoby się idealnym systemie analogii, *punkt niedopasowania*. Podobna sytuacja istnieje w systemie analogii używanym dla układów o stałych skupionych [18]. W systemie klasycznym, zastosowanym do tych układów, niedopasowanie polega na konieczności przejścia od elektrycznych obwodów szeregowych do mechanicznych układów równoległych (lub odwrotnie). W systemie poprawionym niedopasowanie występując jako odpowiedniość między przewodnościami elektrycznymi a opornościami mechanicznymi (lub odwrotnie).

Tutaj sprawa jest bardziej skomplikowana. Celem bliższego jej wyjaśnienia, napiszemy jeszcze elektryczne odpowiedniki prędkości określonych równaniami (63) i (64). Mianowicie odpowiednikiem prędkości postępowej będzie

$$\bar{v}_e = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \bar{H}, \quad (75a)$$

a odpowiednikiem prędkości obrotowej

$$\bar{v}_m = \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \bar{E}. \quad (75b)$$

Należy sprawdzić czy przyjęte odpowiedniki elektromagnetyczne prędkości mechanicznych spełniają warunki brzegowe. Posługując się tymi samymi oznaczeniami co poprzednio (50) — (55) napiszemy równania ciągłości strugi

$$(v_z)_0 = (v_z)_1; \quad (v_x)_0 = k_x^v (v_x)_1; \quad (v_y)_0 = k_y^v (v_y)_1;$$

$$(\operatorname{rot} E_z)_0 = (\operatorname{rot} E_z)_1; \quad \mu_1 (\operatorname{rot} E_x)_0 = \mu_0 (\operatorname{rot} E_x)_1; \quad \mu_1 (\operatorname{rot} E_y)_0 = \mu_0 (\operatorname{rot} E_y)_1;$$

$$(\operatorname{rot} H_z)_0 = (\operatorname{rot} H_z)_1; \quad \varepsilon_1 (\operatorname{rot} H_x)_0 = \varepsilon_0 (\operatorname{rot} H_x)_1; \quad \varepsilon_1 (\operatorname{rot} H_y)_0 = \varepsilon_0 (\operatorname{rot} H_y)_1.$$

Widać, że istnieje postulowana odpowiedniość warunków brzegowych.

Porównajmy wzory (59), (60), (61) i (62) opisujące ruch falowy w ośrodkach sprężystych, z wzorami (71), (72), (73) i (74) dla pól elektromagnetycznych.

Wzory pierwszej grupy mają dla pola sił  $\overline{f}_1$  i przemieszczeń normalnych kształt

$$\Delta x_1 + \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{c_1^2} X_1, \quad (76)$$

dla pola  $\overline{f}_2$  i przemieszczeń stycznych

$$\Delta x_2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = -\frac{1}{c_2^2} X_2. \quad (77)$$

Druga grupa wzorów daje dla pola elektrycznego zależność

$$\Delta y_1 - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon}{c} Y_1, \quad (78)$$

dla pola magnetycznego

$$\Delta y_2 - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{c} Y_2. \quad (79)$$

Wzory te uwzględniają zależność prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych od rodzaju ośrodka  $W = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ .

Budowa wzorów jest formalnie zupełnie podobna, istotna różnica polega na współczynnikach przy drugich pochodnych i prawych stronach równań. Współczynniki te są odwrotnością kwadratu prędkości rozchodzenia się zaburzenia i w równaniach (76) i (77) mają dla fal podłużnych i poprzecznych inne wartości, natomiast dla fal elektromagnetycznych prędkość rozchodzenia się jest stała, zależna tylko od właściwości ośrodka.

W ten sposób ustaliliśmy drugi *punkt niedopasowania* badanego systemu analogii.

Jakie wynikają stąd wnioski praktyczne i jak usunąć te sprzeczności? Zagadnienie sprowadza się do tego, że ośrodkom w których rozchodzi się fala elektromagnetyczna przypisujemy różne właściwości zależnie od tego, czy fala elektromagnetyczna ma odwzorować fale drgań podłużnych czy poprzecznych. Inaczej mówiąc rozpatrujemy pole elektryczne niezależnie od pola magnetycznego.

W pierwszym przypadku ośrodek będący dielektrykiem spełniać powinien warunki

$$\sigma_1 = 0; \quad \varepsilon_1 \mu_1 = \frac{c^2}{c_1^2}. \quad (80)$$

W drugim przypadku, jeżeli istnieją siły przestrzenne  $\overline{F}_2$ , ośrodek odwzorowujący ma być przewodnikiem i spełnia zależności

$$\sigma_2 \neq 0; \quad \varepsilon_2 \mu_2 = \frac{c^2}{c_2^2}. \quad (81)$$



Warunki dotyczące  $\sigma$  uzależnione są od typu sił przestrzennych występujących w ośrodku. Jeżeli ośrodek nie jest poddany działaniu masowych sił stycznych, trzeba i dla pola sił stycznych położyć  $\sigma=0$ . Wynika stąd, że w modelowaniu drgań ośrodka sprężystego posługiwać się będziemy zazwyczaj dielektrykiem.

Zwróćmy jeszcze uwagę na współczynniki przy  $X$  i  $Y$ . Poprzednio przyjęliśmy pary odpowiedników  $c_1^2 \equiv \frac{c}{\epsilon_1}$  i  $c_2^2 \equiv \frac{c}{\mu_2}$ , teraz otrzymaliśmy  $c_1 \equiv \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$  i  $c_2 \equiv \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}$ . Ostatnie zależności odzwierciedlają sens fizyczny zjawisk, wyrażają bowiem odpowiednie prędkości fal. Poprzednio otrzymane związki wynikają z niezależnego rozpatrywania statycznych pól elektrycznych i magnetycznych, przy badaniu analogii sił normalnych przyjęliśmy bowiem milcząco  $\mu_1 = \mu_0$ , a przy analogii sił stycznych  $\epsilon_2 = \epsilon_0$ . Jeżeli sprowadzimy wszystkie wielkości danego równania do jednego systemu jednostek, otrzymamy dla prawych stron równań (76) — (79)  $c_1 \equiv \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_0}}$  i  $c_2 \equiv \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_2}}$ . Dla jasności pisowni oznaczymy  $w_{01} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_0}}$  i  $w_{02} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_2}}$ . Chcąc przejść przy modelowaniu na ośrodek o stałych  $\epsilon \neq \epsilon_0$  i  $\mu \neq \mu_0$  wystarczy odpowiednio zmienić skalę sił  $X$ . Idąc dalej w tym kierunku można sprecyzować analogie pomiędzy opornością falową dla zaburzenia elektromagnetycznego (24) i odpowiednimi wielkościami ośrodka sprężystego, co jednak wykracza poza ramy niniejszej pracy.

Ze względów rachunkowych i doświadczalnych pożądane jest takie dobranie warunków określających wielkości analogiczne, aby w danym zagadnieniu używać stale tego samego ośrodka drgań elektromagnetycznych, tzn. przyjąć  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  i  $\mu_1 = \mu_2$ . Można tego dokonać, jeżeli zarówno w badaniach elektrycznych jak i mechanicznych ograniczymy się wyłącznie do przebiegów sinusoidalnych. Ponieważ założyliśmy na początku, że w niniejszej pracy rozpatrujemy jedynie przebiegi liniowe, przy których wszystkie współczynniki charakterystyczne ośrodków mają stałe wartości, powyższe ograniczenie nie zmniejsza zakresu rozważań.

Oznaczmy

$$x_1 = x_{m_1} e^{-j\omega_1 t}; \quad x_2 = x_{m_2} e^{-j\omega_2 t}; \quad y_1 = y_{m_1} e^{-j\Omega_1 t}; \quad y_2 = y_{m_2} e^{-j\Omega_2 t}, \quad (82)$$

gdzie

$\omega_1, \omega_2$  — pulsacje zaburzeń sprężystych podłużnych i poprzecznych,

$\Omega_1, \Omega_2$  — pulsacje pola elektromagnetycznego  $\Omega_1 = 2\pi\nu_1$ ,  $\Omega_2 = 2\pi\nu_2$ ,

$x_m, y_m$  — amplitudy odpowiednich wielkości.



Równania (76) — (79) przekształcają się na zależności

$$\Delta x_1 + \frac{\omega_1^2}{c_1^2} x_1 = -\frac{1}{c_1^2} X_1, \quad (83)$$

$$\Delta x_2 + \frac{\omega_2^2}{c_2^2} x_2 = -\frac{1}{c_2^2} X_2, \quad (84)$$

$$\Delta y_1 - \frac{\Omega_1^2}{\omega_1^2} y_1 = -\frac{1}{\omega_{01}^2} Y_1, \quad (85)$$

$$\Delta y_2 - \frac{\Omega_2^2}{\omega_2^2} y_2 = -\frac{1}{\omega_{02}^2} Y_2. \quad (86)$$

Drgania mechaniczne poprzeczne i podłużne generowane są jednocześnie, niewygodnie więc byłoby przyjmować, że oba rodzaje drgań mają różną częstotliwość, to też zakładamy  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Z drugiej strony dążeniem naszym jest operowanie niezmiennym ośrodkiem elektromagnetycznym, czyli dobranie warunku  $w_1 = w_2 = \text{const}$ , stąd obliczamy

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{c_2}{c_1} \quad (87)$$

lub podstawiając wartości  $c$  z równań (26) i (27)

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{1-2\sigma_s}{2(1-\sigma_s)}}. \quad (88)$$

Przy modelowaniu elektrycznym przebiegów falowych w cieczech lub gazach (5)  $v_1 = v_2$ , gdyż nie ma naprężeń stycznych.

Widzimy, że niedopasowanie systemów analogii dla ośrodka izotropowego o parametrach niezmiennych się w funkcji amplitudy zaburzeń, rozwiązuje się przez oddzielne traktowanie odpowiedników elektromagnetycznych — naprężeń i odkształceń normalnych i stycznych oraz właściwy wybór skali odwzorowania sił przestrzennych i częstotliwości. Takie postępowanie jest całkowicie poprawne, gdyż jak wiemy tensory naprężeń  $\|G\|$  i odkształceń  $\|W\|$  są symetryczne i mają osie główne równoległe. Odpowiednikami tych tensorów będą macierze

$$\|G'\| = \begin{vmatrix} E'_x & H'_{xy} & H'_{xz} \\ H'_{yz} & E'_y & H'_{yz} \\ H'_{zx} & H'_{zy} & E'_z \end{vmatrix}, \quad (89)$$

$$\|W'\| = \begin{vmatrix} D'_x & B'_{xy} & B'_{xz} \\ B'_{yz} & D'_y & B'_{yz} \\ B'_{zx} & B'_{zy} & D'_z \end{vmatrix}, \quad (90)$$

$E'_j, H'_{ji}, D'_j$  i  $B'_{ji}$  są elektrycznymi i magnetycznymi odpowiednikami wielkości  $\sigma_j, \tau_{ji}, \epsilon_j, \gamma_{ji}$ .

Oba te wyrażenia dla ośrodków izotropowych są symetryczne, gdyż  $H'_{ij}=H'_{ji}$  i  $B'_{ij}=B'_{ji}$  oraz mają równoległe osie główne, bowiem  $D'_i=\epsilon E'_i$  i  $B'_{ij}=\mu H'_{ij}$ . Różnica z tensorami (4) i (8) polega na tym, że współczynniki poza osiami głównymi mogą zniknąć jedynie wówczas, gdy (z uwagi na równanie 65 b)  $\text{rot } E=0$ , czyli  $\Omega=0$  i wszystkie pola są statyczne.

## 10. OGÓLNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU ROZKŁADU POLA

Dotychczas rozpatrywaliśmy wielkości charakterystyczne odnoszące się do danego punktu bądź też do całego badanego obszaru zajętego przez izotropowy ośrodek jednorodny. Ważne dla teorii analogii i rozwinięcia metod modelowania będzie stwierdzenie zgodności rozkładu pól sprężystych i odpowiadających im pól elektrycznych i magnetycznych — obliczonego metodą analogii. Chodzi zatem o wyznaczenie sił lub przemieszczeń i ich odpowiedników w polu elektromagnetycznym wewnątrz obszaru  $R$ , odnośnie którego nie czynimy żadnych dodatkowych założeń.

Odwróćmy dotychczas stosowaną drogę rozumowania, mianowicie nie wdając się w zależności pomiędzy wielkościami charakterystycznymi, których prawidłowość została już sprawdzona, wyjdziemy od warunków brzegowych jakie spełniać powinny wielkości mechaniczne, elektryczne i magnetyczne na granicy obszaru  $R$ .

W ten sposób zagadnienie sprowadza się do specjalnego typu problemu granicznego Neumanna względnie Dirichleta [20]. Wystarczy zapoznać się z rozwiązaniem zadania na płaszczyźnie  $(x, y)$ , ilość współrzędnych nie jest bowiem czynnikiem decydującym. Rozpatrywać będziemy zatem zjawiska w płaszczyźnie  $(x, y)$ , zakładając, że wielkości charakterystyczne pola elektromagnetycznego i pola naprężeń są niezależne od współrzędnej  $z$ . Na płaszczyźnie znajduje się obszar  $R$ , o obwodzie  $S$ . Ośrodek zapełniający obszar jest izotropowy i jednorodny. Stałe mechaniczne i elektromagnetyczne ośrodka wewnątrz obszaru  $R$  odróżniamy indeksami  $w$ , stałe ośrodka otaczającego ten obszar noszą indeksy  $v$ .

Zacznijmy od pola elektromagnetycznego. Fala rozchodząca się w płaszczyźnie  $(x, y)$  jest, ogólnie biorąc, falą w dowolny sposób spolaryzowaną. Falę taką rozłożyć można na fale o polaryzacji podłużnej i poprzecznej. Ponieważ w całych naszych rozważaniach miarodajny jest poprawiony system analogii, a więc system mechaniczno-magnetyczny, polaryzację rozróżniać będziemy zależnie od położenia wektora  $\bar{H}$  (nie zaś  $\bar{E}$ ).

Wobec tego pole spolaryzowane podłużnie posiadać będzie wektory  $H_1$  o składowych  $(H_x, H_y, 0)$  i  $\bar{E}_1$  o składowych  $(0, 0, E_z)$ , pole spolaryzowane poprzecznie charakteryzuje się wektorem  $\bar{H}_2$  o składowych  $(0, 0, H_z)$  i  $\bar{E}_2$  o składowych  $(E_x, E_y, 0)$ . Na obszar działa pewien zadany rozkład fal elektromagnetycznych  $E_0, H_0$  również rozchodzących się w płaszczyźnie  $(x, y)$ . Wskutek odbicia fal na granicy obszaru  $R$ , powstaje pewien dodatkowy rozkład pól nakładający się na falę bieżącą, w rezultacie otrzymuje się pole zewnętrzne o rozkładzie  $E_v, H_v$  oraz pole wewnątrz obszaru  $E_w, H_w$ . Wszystkie przebiegi elektromagnetyczne są sinusoidalne i mają pulsację  $\Omega$ .

Zgodnie z tym co poprzednio powiedziano traktować będziemy oddzielnie fale spolaryzowane poprzecznie, interesujące nas jako pole magnetyczne i fale spolaryzowane podłużnie, w których znaczenie z punktu widzenia metody analogii mają składowe elektryczne.

Rozpatrzmy rozkład poprzecznego pola elektromagnetycznego. Zakładamy, że przewodność przestrzenna ośrodka wynosi  $\sigma_w$  w obszarze  $R$  i  $\sigma_v$  poza tym obszarem. Wolnych ładunków statycznych nie ma w całej przestrzeni. Założenia te pokrywają się z ustalonymi w poprzednim rozdziale.

Równanie (73) z uwagi na zależność (65b) można napisać jako

$$\Delta H - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (91)$$

dla przebiegów harmoniczných jest to równoznaczne z wyrażeniem

$$\Delta H + \frac{k_i^2}{c^2} H = 0, \quad (92)$$

gdzie

$$k_i^2 = \varepsilon_i \mu_i \Omega^2 + j 4 \pi \sigma_i \mu_i \Omega \quad (i = v, w)$$

$c$  — prędkość światła.

Równanie (92) jest pierwszym warunkiem brzegowym, dalsze warunki wynikają z nieprzerwywalności składowej stycznej do granicy ośrodków  $H_z$  (55) oraz ze znanych zależności dla pochodnej tej składowej względem normalnej do granicy ośrodków

$$(H_z)_w = (H_z)_v; \quad \frac{1}{m_w} \left( \frac{\partial H_z}{\partial n} \right)_w = \frac{1}{m_v} \left( \frac{\partial H_z}{\partial n} \right)_v, \quad (93)$$

gdzie

$$m_i = \varepsilon_i - j \Omega \varepsilon_i \quad (i = v, w).$$

Dodać do tego należy warunek znikania promieniowania w nieskończoności, tzw. warunek Sommerfelda [13]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (H_z - H_0) r < C; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (H_z - H_0) - j \frac{k_v}{c} (H_z - H_0) \right\} r = 0. \quad (94)$$

Jeśli funkcja  $H_z$  spełniać ma warunki (93) i (94) dla punktu ( $P$ ) znajdującego się wewnątrz obszaru  $R$ , natężenia pola magnetycznego obliczymy z równania całkowego Fredholma o postaci

$$H_z(P) = \frac{1}{c^2} \left( \frac{k_w}{k_v} \right)^2 (k_w^2 - k_v^2) \int_R H_z(Q) W(P, Q) dV_Q + \left( \frac{k_v^2}{k_w^2} - 1 \right) M(P) + H_0, \quad (95)$$

gdzie

$$W(P, Q) = -\frac{j}{4} H_0^{(1)} \left[ \frac{k_v}{c} \cdot r(P, Q) \right],$$

$H_0^{(1)}$  — jest funkcją Hankla 1 rodzaju, zerowego rzędu.

Na skutek założenia  $\sigma \neq 0$ , obszar  $R$  jest obszarem w którym panuje gęstość przestrzenna prądu  $i$ , obszar ten należy zatem traktować jako potencjalną warstwę podwójną. Otóż wyraz  $\left( \frac{k_v^2}{k_w^2} - 1 \right) M(P)$  uwzględnia działanie tej warstwy podwójnej, przy czym

$$M(P) = \int_S H_z(Q) \frac{\partial}{\partial n} [W(P, Q)] dS_Q. \quad (96)$$

Rozwinięcie tych równań i szczegółowa dyskusja spełnienia przez nie zadanych warunków brzegowych wykracza poza ramy tej pracy, jest ona w jasny sposób podana przez W. D. Kupradze [10]. Cenne uwagi zawiera również praca R. Hampla [6].

W podobny sposób ułożymy równania dla wektorów  $\bar{E}_2$ , które różnić się jednak będą od poprzednich zarówno warunkami granicznymi jak i charakterem pola potencjalnego.

Mając na uwadze zadanie polegające na odwzorowaniu pola sił normalnych, musimy przede wszystkim zrobić odmienne założenia dotyczące natury ośrodka, przyjmując, że ośrodek jest dielektrykiem, nie ma w nim zatem wolnych prądów przestrzennych ( $\sigma=0$ ), natomiast występują ładunki przestrzenne będące odpowiednikami sił masowych  $F$ . Równanie (74) przypisujemy jako

$$\Delta \bar{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi q}{c^2} = 0 \quad (97)$$

lub podobnie jak równanie (92)

$$\Delta \bar{E} + \frac{l_i}{c^2} \bar{E} = -\frac{4\pi}{c} q, \quad (98)$$

gdzie

$$l_i = \epsilon_i \mu_i \Omega^2 \quad (i=v, w).$$

Warunki brzegowe na granicy ośrodków brzmia

$$(\bar{E}_z)_v = (E_z)_w; \left( \frac{\partial E_z}{\partial n} \right)_v = \left( \frac{\partial E_z}{\partial n} \right)_w, \quad (99)$$

wreszcie warunek Sommerfelda

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (E_z - E_0)r < C; \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (E_z - E_0) - j \frac{l_v}{c} (E_z - E_0) \right\} r = 0. \quad (100)$$

Ponieważ  $\bar{E}$  jest wektorem bezwirowym, w równaniu całkowym (95) zniknie drugi człon, na jego miejsce pojawi się wyrażenie uwzględniające wpływ ładunków przestrzennych zawartych w obszarze  $R$ . Po uwzględnieniu nowych warunków brzegowych można zatem napisać równanie całkowe Fredholma

$$E_z(P) = \frac{1}{c_2} (l_v^2 - l_w^2) \int_R E_z(Q) W(P, Q) dV_Q + \frac{l_w^2}{2\epsilon c^2} \int_R q'(Q) W(P, Q) dS_Q + E_0 \quad (101)$$

$W(P, Q)$  jest jak poprzednio mnożnikiem zawierającym funkcję Hankla.

Z kolei zajmiemy się warunkami drgań mechanicznych w obszarze  $R$  określonym geometrycznie w ten sam sposób jak poprzednio. Nic nie stoi na przeszkodzie, aby rozpatrywać oddzielnie drgania poprzeczne i drgania podłużne rozchodzące się na płaszczyźnie  $(x, y)$ . Naprężenie normalne do płaszczyzny  $(x, y)$  w punkcie  $P$  ma wartość  $f_z$  odpowiadającą składowym  $\tau_{xz} = \mu_s \frac{\partial u_z}{\partial x}$  i  $\tau_{yz} = \mu_s \frac{\partial u_z}{\partial y}$  w tensorze  $\|G\|$  określonym równaniem (4), natomiast  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$  i  $\tau_{xy} = 0$ . Naprężenie to wywołuje zatem jedynie przemieszczenie  $u_z$ , natomiast  $u_x = u_y = 0$ . Odpowiednikiem takiego pola jest więc macierz

$$\|G'\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & H'_{xz} \\ 0 & 0 & H'_{zy} \\ H'_{lx} & H'_{ly} & 0 \end{vmatrix}$$

Łatwo określić warunki brzegowe, wynikające z równowagi sił na granicy obszaru

$$(u_z)_v = (u_z)_w; \mu_{sv} \left( \frac{\partial u_z}{\partial n} \right)_v = \mu_{sw} \left( \frac{\partial u_z}{\partial n} \right)_w \quad (102)$$

oraz równanie ruchu falowego (62)

$$\Delta \bar{u}_2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial t^2} + \frac{1}{c_2^2} \bar{F}_2 = 0. \quad (103)$$

Prócz tego powinien być spełniony warunek Sommerfelda analogiczny do (94).

Aby upodobnić równanie (103) do (92) napiszemy dla przebiegów sinusoidalnych

$$\Delta \bar{u}_2 + k_i'^2 \bar{u}_2 + \frac{1}{c_2^2} \bar{F}_2 = 0, \quad (104)$$

gdzie

$$k_i' = \frac{\omega^2}{c_2} (i = v, w).$$

Wielkość  $\bar{u}_2$  jest wielkością wirową, bezźródłową czyli i tu mamy do czynienia z warstwą podwójną. We wnętrzu obszaru  $R$  równanie całkowe przemieszczeń tego typu będzie miało wygląd

$$\begin{aligned} \bar{u}_z(P) = & \left( \frac{k_w'}{k_v'} \right)^2 (k_w'^2 - k_v'^2) \int_R \bar{u}_z(Q) W(P, Q) dV_Q + \left( \frac{k_v'^2}{k_w'^2} - 1 \right) M(P) - \\ & - \frac{k_w'^2}{2\mu_s} \int_S F_2(Q) [W(P, Q)] dS_Q + \bar{F}_{02}, \end{aligned} \quad (105)$$

gdzie podobnie jak poprzednio

$$W(P, Q) = -\frac{j}{4} H_0^{(1)} [k_v' \cdot r(P, Q)],$$

$$M(P) = \int_S \bar{u}_z(Q) \frac{\partial}{\partial n} [W(P, Q)] dS_Q.$$

Ostatni wyraz równania (105) daje wielkość zewnętrznych sił stycznych działających na obszar  $R$ , odpowiada on wyrazowi  $H_0$  w równaniu (95).

Podobieństwo ostatniego równania z równaniem (95) jasno wykazuje, że analogia rozkładu sił stycznych i pola magnetycznego jest całkowicie zachowana w postawionym przez nas zadaniu. Formalne różnice pisowni wynikają z różnego sposobu ujmowania sił przestrzennych i pola zewnętrznego. Mnożąc równanie (95) przez  $\mu$ , a równanie (101) przez  $\varepsilon$  otrzymujemy związki pomiędzy poprzednio ustalonymi parami wielkości analogicznych.

Pozostaje rozpatrzenie pola sił normalnych w obszarze  $R$ , siły te działają w płaszczyźnie  $(x, y)$  wywołując naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  czyli  $\sigma_z = 0$  i  $\tau_{ij} = 0$ .

Przemieszczenia mają wartości  $u_{xy}$ , przy czym spełnione być powinny warunki brzegowe (50).

$$(u_{xy})_v = (u_{xy})_w; \left( \frac{\partial u_{xy}}{\partial n} \right)_v = \left( \frac{\partial u_{xy}}{\partial n} \right)_w \quad (106)$$

i warunek Sommerfelda.



Równanie (61) przepisemy w formie

$$\Delta \bar{u}_1 + l'_i \bar{u}_1 + \frac{1}{c_1^2} \bar{F}_1 = 0, \quad (107)$$

gdzie 
$$l'_i = \frac{\omega_1}{c_1} \quad (i = v, w).$$

Biorąc pod uwagę bezwirowość przemieszczeń  $u_1$  i formalną identyczność warunków brzegowych z ustalonym dla pola  $\bar{E}$  można podać równanie całkowe przemieszczeń normalnych wewnątrz obszaru  $R$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{xy}(P) = & (l'_v{}^2 - l'_w{}^2) \int_R \bar{u}_{xy}(Q) W(P, Q) dV_Q + \\ & + \frac{l'_w{}^2}{2(\lambda_s + 2\mu_s)} \int_S \bar{F}_1(Q) W(P, Q) dS_Q + \bar{F}_{01}. \end{aligned} \quad (108)$$

Pomiędzy rozkładem przemieszczeń normalnych a polem elektrycznym analogia jest więc również spełniona.

## 11. ANALOGIE ENERGETYCZNE W OŚRODKU CIĄGŁYM

Pojęciem wiążącym wielkości analogiczne przynależne do różnych dziedzin zjawisk fizycznych jest moc, bądź energia jaką układ przenosi lub akumuluje. Wykonując te same operacje matematyczne na wielkościach przyjętych jako odpowiedniki, dojść powinniśmy do tych samych wielkości energetycznych. Takie sprawdzenie systemu analogii pod względem energetycznym ma także zasadnicze znaczenie dla ustalenia sensu fizycznego analogii. Jest ono ważne zwłaszcza wówczas, gdy w układzie podwójnym (przetworniku) następuje przemiana jednej formy energii w inną, a zadanie polega na zbadaniu wpływu zjawisk zachodzących w jednej części układu na przebiegi w drugiej jego części.

W rozpatrywanej przez nas dziedzinie analogii, zarówno w polu elektromagnetycznym jak i w polu w ośrodku sprężystym będziemy mieli do czynienia z pewnym rozkładem przestrzennym energii, a więc jako pojęcie zasadnicze występuje gęstość energii, bądź też jej ilość w określonym obszarze.

W polach statycznych jest to energia potencjalna, zamagazynowana w ośrodku w formie naprężeń (energia sprężysta), lub różnic potencjałów. Przy przebiegach dynamicznych następuje przepływ energii, któremu towarzyszą okresowo-przestrzenne zmiany formy energii z potencjalnej na kinetyczną — w ośrodku sprężystym, oraz z elektrycznej w magnetyczną — przy falach elektromagnetycznych.



Zacniemy od zbadania rozkładu energii w polu statycznym. Energię pola elektrostatycznego określa się zwykle w podręcznikach fizyki pracą, jaka wykonana zostanie przez przesunięcie ładunku elementarnego  $q_0$ . Rozumowanie to nie wymaga dodatkowych wyjaśnień i prowadzi do znanego wzoru na gęstość energii

$$e_e = \frac{1}{8\pi} (DE) = \frac{1}{8\pi\epsilon} D^2, \quad (109)$$

oznaczenia wielkości elektrycznych jak poprzednio.

Podobne rozumowanie przeprowadzić możemy dla pola magnetycznego biorąc za podstawę pracę wykonaną przy przesunięciu elementarnej masy magnetycznej. Gęstość energii tego pola wynosi

$$e_m = \frac{1}{8\pi} (BH) = \frac{1}{8\pi\mu} B^2. \quad (110)$$

Bardziej skomplikowane zależności istnieją w polu elastostaticznym, gdzie rozpatryć trzeba energię potencjalną naprężeń stycznych i normalnych.

Praca sił zewnętrznych powodująca odkształcenie wynosi

$$L = -\frac{1}{2} \int_R \bar{u} \operatorname{div} \|G\| dV + \frac{1}{2} \int_S \bar{u} \|G\| \bar{n} dS = \frac{1}{2} \int_R \|W\| \cdot \|G\| dV. \quad (111)$$

Gęstość energii będąca jednorodną kwadratową funkcją odkształceń bądź naprężeń [9]

$$e_s = \frac{1}{2} \|W\| \cdot \|G\| = W_{ij} G^{ij}. \quad (112)$$

Między składowymi tych tensorów istnieją zależności wynikające z elementarnej teorii sprężystości

$$W_i^i = \frac{1-2\sigma_s}{E_s} G_i^i \quad \text{oraz} \quad W_{ij} = \frac{1+\sigma_s}{E_s} G_{ij}, \quad (113)$$

gdzie

$E_s$  — moduł sprężystości,

$\sigma_s$  — współczynnik Poissona.

Opierając się na tych wzorach napisać można równanie wiążące wszystkie wyrazy tensorów  $\|W\|$  i  $\|G\|$

$$W_{ij} = -\frac{\sigma_s}{E_s} |G| \delta_{ij} + \frac{E_s}{1+\sigma_s} W_{ij},$$

$$G_{ij} = \frac{E_s \sigma_s}{(1+\sigma_s)(1-2\sigma_s)} |W| \delta_{ij} + \frac{E_s}{1+\sigma_s} W_{ij}, \quad (114)$$

gdzie

$$|W| = W^{ij} \delta_{ij}; |G| = G^{ij} \delta_{ij}.$$

Rozwiązując układ równań (114) i wstawiając otrzymane wielkości do równania (112) otrzymujemy gęstość energii potencjalnej pola odkształceń

$$e_s = \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 + \sigma_s} (W_{ij}^2) + \frac{1}{2} \frac{E_s \sigma_s}{(1 + \sigma_s)(1 - 2\sigma_s)} |W|^2 \quad (115)$$

podstawiając wartości równania (25), można także napisać

$$e_s = \mu_s (W_{ij}^2) + \frac{1}{2} \lambda_s |W|^2, \quad (116)$$

gdzie

$$(W_{ij}^2) = W_{ij} W^{ij}.$$

Pierwszy wyraz równania (116) określa energię potencjalną odkształcenia postaciowego, wyraz drugi — energię potencjalną odkształcenia objętościowego [7]. W celu oddzielenia energii reprezentowanej przez oba rodzaje przesunięć, wypiszemy składniki równania (115)

$$e_s = \frac{1}{2} \frac{E_s}{(1 + \sigma_s)} \sum (\epsilon_i)^2 + \frac{1}{4} \frac{E_s}{(1 + \sigma_s)} \sum (\gamma_{ij})^2 + \frac{1}{2} \frac{E_s \sigma_s}{(1 + \sigma_s)(1 - 2\sigma_s)} (\sum \epsilon_i)^2 \quad (117)$$

jako sumę energii odkształcenia objętościowego  $e_v$  i odkształcenia postaciowego  $e_p$

$$\bar{e}_s = e_v + e_p \quad (118)$$

otrzymujemy równanie, będące odpowiednikiem sumy równań (109) i (110).

Równania (109), (110) określają energię potencjalną pola. Wyrażenie energii potencjalnej sił przestrzennych masowych bądź odpowiadających im ładunków przestrzennych i przestrzennych obwodów prądowych nie nastęrcza trudności.

Dla sił przestrzennych całkowita energia potencjalna obszaru

$$e'_s = \int_R \rho \bar{F} u dV \quad (119)$$

dla sił magnetostatycznych pochodzących od znajdujących się w obszarze  $R$  obwodów prądowych

$$e'_m = \frac{1}{8\pi} \int_R B H dV = \frac{1}{8\pi} \int_R H \operatorname{rot} A_B dV = \frac{1}{8\pi} \int_R A_B \operatorname{rot} H dV = \frac{1}{2} \int_R A_B i dV \quad (120)$$

dla sił elektrostatycznych od wolnych ładunków

$$e'_c = \frac{1}{8\pi} \int_R D E dV = -\frac{1}{8\pi} \int_R E \operatorname{grad} K_D dV = \frac{1}{8\pi} \int_R K_D \operatorname{div} E dV = \frac{1}{2} \int_R K_D q dV. \quad (121)$$

Analogia pomiędzy wielkościami pola jest i tutaj zachowana.

Z kolei przejdziemy do rozpatrzenia przebiegów energetycznych zachodzących przy zmiennych w czasie zaburzeniach równowagi ośrodka.

W polu elektromagnetycznym, którego natężenie zmienia się sinusoidalnie w funkcji czasu, gęstość energii wyraża się sumą energii pola elektrycznego (109) i magnetycznego (110)

$$e_{em} = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \quad (122)$$

z równań Maxwella, biorąc pod uwagę tożsamość

$$H \operatorname{rot} E - E \operatorname{rot} H = \operatorname{div} [EH],$$

otrzymujemy wyrażenie bilansu energii elektromagnetycznej w danym obszarze  $R$  o powierzchni  $S$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_R \left( E \frac{\partial D}{\partial t} + H \frac{\partial B}{\partial t} \right) dV = \int_R (iE) dV + \frac{c}{4\pi} \int_S [EH] \bar{n} dS \quad (123)$$

lub inaczej

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_R \left( \frac{\epsilon}{8\pi} E^2 + \frac{\mu}{8\pi} H^2 \right) dV \right\} = \int_R (iE) dV + \int_S \bar{S}_p \bar{n} dS. \quad (124)$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie równania jest tzw. mocą chemiczno-termiczną zużywaną w polu elektromagnetycznym, która idzie na pokrycie pracy sił zewnętrznych i ciepła Joule'a. Ostatni człon równania jest strumieniem energii wypływającym z obszaru  $R$ . Wielkość podcałkowa jest składową normalną wektora Poytinga-Umowa

$$\bar{S}_p = \frac{c}{4\pi} [EH]. \quad (125)$$

Dla zmiennego pola sił sprężystych równanie (116) odnoszące się do energii potencjalnej pozostaje w mocy. Praca sił zewnętrznych określona równaniem (111) jest zrównoważona zmianą energii kinetycznej i przepływem strumienia energii przez ściany obszaru, strumień energii będzie więc zależał od zmiany całej energii wewnątrz obszaru.

Gęstość energii w obszarze wyrazi się wzorem

$$e_s = \frac{1}{2} \lambda_s \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\}. \quad (126)$$

Zmiana tej energii w czasie wyniesie

$$\frac{\partial e_s}{\partial t} = \text{grad} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \text{grad} \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \Delta \bar{u} \right] = \text{div} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \text{grad} \bar{u} \right]. \quad (127)$$

Dla całego obszaru  $R$  stosownie do wzoru Poissona

$$\int_R \frac{\partial e_s}{\partial t} dV = - \int_R \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \text{grad} \bar{u} \right] n dS - e'_s \quad (128)$$

$e'_s$  wyraża ogólne straty w ośrodku powodowane tarciem oraz pracą sił masowych. Ponieważ jednak w całym toku rozumowania przyjmowaliśmy, że ośrodek sprężysty jest bezstratny,  $e'_s$  wyraża jedynie działanie sił masowych wedle równania (119). Można więc napisać

$$- \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_R e_s dV \right\} = \int_R \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \text{grad} \bar{u} \right] n dS + \int_R \rho \bar{F} \bar{u} dV. \quad (129)$$

Porównajmy w ramach badanego systemu analogii równania (123) i (129). Lewe strony tych równań wyrażają energię zawartą w danej chwili w obszarze  $R$ , odpowiedniość tych wyrażań została wyżej przedyskutowana.

Człon  $e'_s$  możemy rozłożyć na składowe bezwirowe i bezźródłowe

$$e'_s = \int_R (\bar{F}_1 \bar{u}_1 + \bar{F}_2 \bar{u}_2) dV, \quad (130)$$

zgodnie z przyjętym systemem analogii  $e'_s$  powinno odpowiadać  $e'_e + e'_m$  z równań (120) i (121). Istotnie przy pominięciu strat Joule'a, kładąc  $F_1 \equiv q$ ,  $F_2 \equiv i$  otrzymujemy przewidywane zależności.

Analogię uzupełnia fakt, że pierwszy wyraz prawej strony równania (129) reprezentuje strumień energii wypływającej z obszaru, zatem wyrażenie  $S_s = \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \text{grad} \bar{u} \right]$  jest wektorem analogicznym do wektora Poytinga, co napiszemy w postaci

$$S_s \equiv S_p, \quad (131)$$

## 12. OCENA PRZYDATNOŚCI ROZSZERZONEGO SYSTEMU ANALOGII

Przeprowadzone w niniejszej pracy rozważania, mimo pewnych punktów wymagających jeszcze wyjaśnień, stanowiąc mają udokumentowanie formalnej i energetycznej prawidłowości przyjętego systemu analogii. Nadaje się on zarówno do określenia rozkładu przestrzennego jak i prze-

biegów czasowych pola sił i przemieszczeń w ośrodku sprężystym z jednej strony, a pola elektromagnetycznego — z drugiej. Podane zależności mogą być zastosowane równie dobrze do pól statycznych i quasistatycznych jak i do przebiegów dynamicznych.

Dla podsumowania wyników pożyteczne będzie zestawienie wielkości analogicznych w poniższej tabelce. Kolumna pierwsza odnosząca się do „wielkości mechanicznych normalnych“ (drgań podłużnych) odpowiada kolumnie „wielkości elektryczne“, analogicznie „wielkości mechaniczne“ (drgania poprzeczne) z kolumny drugiej są odpowiednikiem rubryki „wielkości magnetyczne“. Podział taki jest uzasadniony przyjętym przy budowie systemu analogii rozdziałem odpowiedników drgań podłużnych i poprzecznych.

Zestawienie wielkości analogicznych			
Pole sprężyste		Pole elektromagnetyczne	
drgania podłużne	drgania poprzeczne	drgania elektryczne	drgania magnetyczne
$\overline{F}_1$	$\overline{F}_2$	$q$	$i$
$f_1$	$f_2$	$E$	$H$
$\Phi$	$\Psi$	$K_F$	$A_H$
$u_1$	$u_2$	$D$	$B$
$\varphi$	$\psi$	$K_D$	$A_B$
$v_1$	$v_2$	$c \operatorname{rot} \overline{H}$	$c \operatorname{rot} \overline{E}$
$c_1$	$c_2$	$\frac{c}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_0}}$	$\frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_2}}$
$e'_{s1}$	$e'_{s2}$	$e'_e$	$e'_m$
$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} \operatorname{grad} u \right]$		$\frac{c}{4\pi} \left[ \overline{E} \overline{H} \right]$	

Opracowane tutaj zasady analogii stanowią tylko wycinek zagadnienia i w wielu punktach są jeszcze niedostatecznie rozwinięte i pogłębione. Należałoby przede wszystkim spróbować dalszego rozszerzenia systemu analogii na ośrodki sprężyste ze stratami i naprężeniami początkowymi. Prawie zupełnie niezbadana jest kwestia analogii pomiędzy układami nieliniowymi, mającymi ogromne znaczenie w mechanice technicznej i elektrotechnice. Należałoby na przykład przestudiować podobieństwa pomiędzy ośrodkiem sprężystym obciążonym powyżej granicy proporcjonalności, a polem elektromagnetycznym powstającym w obecności obwodów magnetycznych bliskich nasycenia. Można jeszcze rzucić takie problemy jak ustalenie analogii w zjawiskach piezoelektrycznych i magneto-

strykcyjnych, oraz rozciągnięcie opisanych analogii na ośrodki anizotropowe, gdzie zależności matematyczne stają się znacznie bardziej skomplikowane [12].

Zachodzi pytanie, czy tak duży zakres prac teoretycznych nad analogiami znajduje swoje uzasadnienie w ich bezpośredniej przydatności w technice, a przynajmniej przydatności w innych szeroko rozwijanych dziedzinach teoretycznych elektrotechniki i mechaniki.

Odpowiedź na to pytanie jest niewątpliwie twierdząca. Prace Instytutu Elektrotechniki i innych placówek badawczych Akademii Nauk Z. S. R. R. [5], [22] dobitnie wykazały ile konkretnych zastosowań znajduje modelowanie elektryczne i mechaniczne, którego niezbędną podbudową są prace nad analogiami.

Ściśle związane z bieżącymi potrzebami przemysłu prace modelowe rozpoczęte w Zakładzie Badania Drgań P. A. N. również już od samego początku wymagają prowadzenia studiów teoretycznych nad analogiami modelowanych układów.

Trzeba jeszcze dodać, że przejrzyste ułożenie systemu analogii i zbadanie podobieństw formalnych i fizycznych pomiędzy odpowiednikami ma dużą wartość dydaktyczną. Racjonalnie zastosowana metoda analogii staje się doskonałym przewodnikiem dla naukowca, który pracując nad problemami granicznymi musi przerzucać się z dobrze sobie znanej dziedziny wiedzy do dziedzin sąsiednich, gdzie spotyka się z obcymi dla niego symbolami i pojęciami, a często z odrębnym ujęciem matematycznym.

*Zakład Badania Drgań  
P. A. N.*

#### WYKAZ LITERATURY

- [1] Abraham - Becker: Theorie der Elektrizität — Leipzig 1932, V. 1, s. 175.
- [2] Bułgakow B. W.: Kolebanija — Moskwa 1949, V. 1.
- [3] Colombo S.: La similitude électromagnétique. Principes généraux et application a l'étude de l'antenne — Annales des telecommunications, nr 11, 1949, s. 370.
- [4] Goworkow W. A.: Elektrizieskije i magnitnyje pola — Moskwa 1951, s. 56.
- [5] Gutenmacher L. J.: Elektrizieskije modeli — Moskwa 1949.
- [6] Hampel R.: Quelques applications des équations intégrales dans la théorie d'électricité. — Prace matematyczno-fizyczne, t. 48, Warszawa 1952, s. 79.
- [7] Huber M. T.: Stereomechanika techniczna — t. I, Warszawa 1951, s. 41.
- [8] Konorski B.: Podstawy elektrotechniki — Warszawa 1951.
- [9] Krutkow J. A.: Tensor funkcji naprężenia i obszczijsze rieszienija w statikie teorii uprugosti — Moskwa 1949, s. 154.
- [10] Kupradze W. D.: Granicnyje zadaczi teorii kolebanij i intiegralnyje urawnienija — Moskwa 1950, s. 98.



- [11] Lansard R.: Construction d'un modèle électrique d'une suspension d'automobile — L'onde électrique, nr 7, 1951, s. 307.
- [12] Liechnickij C. G.: Teorija uprugosti, anizotropnowo tieła — Moskwa 1950.
- [13] Lichtenstein L.: Neure Entwicklung der Potentialtheorie — Enziklopädie d. Mathem.-Wiss. V. II, s. 177.
- [14] Malecki I.: Poprawiony system analogii elektromechanicznych i jego interpretacja fizyczna — Przegląd Elektrotechniczny nr 1, 1952.
- [15] Malecki I.: Oporność akustyczna jako pojęcie falowe — Zeszyty Naukowe P. W. nr 1, 1953.
- [16] Madelung E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers — Berlin 1936, s. 248.
- [17] Prescott J.: Applied elasticity — New York 1948.
- [18] Reichardt W.: Analogien zwischen mechanischen und elektrischen Größen-Frequenz — nr 1, 2, 3, 1952, s. 25.
- [19] Rubinowicz W.: Wykłady z mechaniki ośrodków ciągłych — Warszawa 1951, s. 46.
- [20] Smirnow W. J.: Kurs wyższej matematyki — Moskwa 1951, V. I.
- [21] Susłow C. K.: Teoreticzeskaja mechanika — Moskwa 1946.
- [22] Tetelbaum J. M.: Modelirowanie kak metod issledowanija nagruzow wałow. Dinamika i procnost kolebatielnych wałow — (Praca zbiorowa), Moskwa 1948.
- [23] Tichonow A. H.; Samarskij A. A.: Urawnienija matematycznej fiziki — Moskwa 1951, s. 414.
- [24] Wallot J.: Theorie der Schwachstromtechnik — Berlin 1940, s. 170.

И. МАЛЕЦКИ

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИСПРАВЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ НА СПЛОШНЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

Резюме

1. Вступление. В электрической моделировке и в теоретических трудах в области общей теории колебаний обыкновенно применяются электромеханические аналогии, относящиеся к системам с сосредоточенными постоянными. Следовательно, размеры этих систем малы в сравнении с длиной волны возмущения.

Первым обобщением этих аналогий является исследование системы с распределёнными вдоль прямой параметрами. Такие системы встречаются в энергетике и в связи, а именно длинные линии электропередач и линии далёкой связи, в механике же примером этой системы является струна.

Задачей настоящей работы является распространение метода аналогии на системы, занимающие известную область в трёхмерном пространстве. Мы ограничились исследованием изотропной, однородной



— в данной области — среды без потерь. Затем положено, что все колебательные явления происходят в пределах линейных изменений состояния среды. Следовательно, механические деформации происходят по закону Гука, а магнитные и электрические явления — ниже предела магнитного насыщения или разряда в диэлектрике.

Положено, наконец, что при отсутствии внешних сил в среде нет первоначальных напряжений. Исследуемые системы аналогии имеют важное значение для работ при моделировке сложных механических систем, а также для дидактических целей.

2. Упругое статическое поле в изотропной среде. Из общей теории упругости известно, что если на среду лежащую в области  $R$ , действуют пространственные силы  $\vec{F}$ , то под их влиянием в среде возникают напряжения, выражаемые тензором  $\|G\|$ , удовлетворяющим уравнению (4), а также деформации, выражаемые тензором  $\|W\|$  — формула (8).

Принимая вышеприведенные положения, мы установили, что оба тензора симметричны, а их главные оси параллельны. Из этого следует, что поля продольных (нормальных) перемещений и напряжений могут быть рассматриваемы независимо от полей поперечных (составляющих) перемещений и напряжений. Из формул (9) и (10) для соотношений между составляющими тензоров напряжений и деформаций — следует общее уравнение статической теории упругости (15).

Встречаемые в этом уравнении величины  $\vec{F}$  и  $u$  могут быть разложены на составляющие: безвихревые  $\vec{f}_1$  и  $u_1$  и безисточниковые  $\vec{f}_2$  и  $u_2$ .

Первые составляющие могут быть выражены скалярными потенциалами  $\Phi$  и  $\phi$  (формула 16), а безисточниковые составляющие векторными потенциалами  $\vec{\Psi}$  и  $\vec{\psi}$  (формула 17). Такое представление упругого статического поля, принимая во внимание условия (19) и (21), позволяет нам выразить состояние среды в виде (22), а затем найти зависимости (23) и (24) между скалярными и векторными потенциалами в изотропной среде.

Известно, что эти зависимости могут быть выражены при помощи постоянных Ламе (формулы 23 и 24) или же при помощи модуля Юнга и коэффициента Пуассона (формулы 26 и 27). В формулах (28) и (29)  $c_1$  и  $c_2$  обозначают скорости распространения продольных и поперечных волн.

3. Магнитно-механическая аналогия для статических полей. Чтобы найти электромагнитный эквивалент электростатического поля — целесообразно распространить метод электромеханических аналогий, применяемых к системам с сосредоточенными параметрами. Для более ясной физической интерпретации мы приняли

за исходную точку так называемая исправленная система аналогии, в котором приняты следующие пары эквивалентов:

$$\begin{aligned} \text{сила тока} &\equiv \text{сила} \\ \text{напряжение} &\equiv \text{скорость} \\ \text{магнитный поток} &\equiv \text{перемещение.} \end{aligned}$$

Для установления статических зависимостей — самой важной является последняя пара эквивалентов, при отнесении которых к единице поверхности мы получим аналогию между перемещением среды и магнитной индукцией. Однако, так как магнитная индукция является вихревой величиной без источников, то ей соответствует только втсрая составляющая перемещения в упругом статическом поле.

Исходя из закона Био-Савара (формулы 32 и 33) можно принять, что эквивалентом пространственных моментов будет двойной потенциальный слой, а поле соленоидальных сил будет отвечать магнитному полю  $\bar{H}$ . Векторные потенциалы магнитного поля  $\bar{A}_H$  и магнитной индукции  $\bar{A}_B$  — отвечают, следовательно, потенциалам  $\Psi$  и  $\psi$ , а формула (37) — аналогична формуле (27).

4. Электромеханические аналогии для статических полей. Подобные рассуждения можно применить для отыскания аналогии между полем нормальных сил и электростатическим полем. Однако здесь зависимости не вытекают непосредственно из исправленного метода аналогии, принятого для систем с сосредоточенными параметрами. Принимая во внимание электромагнитную аналогию (38) мы всё же можем вывести все дальнейшие зависимости между электромеханическими величинами. Свободные пространственные заряды отвечают тогда массовым силам, электрическое перемещение — механическому перемещению. Существует также и точное соответствие между скалярными потенциалами электрического поля  $K_E$  и электрического перемещения  $K_D$  — с одной стороны, потенциалами  $\Phi$  и  $\varphi$  с другой (формулы 26 и 49).

Следует подчеркнуть, что принятые аналогии вполне обязательны также на границе сред с разными характерными параметрами (формулы 50-55), а именно для величин  $u, D, B$  непрерывными являются нормальные составляющие, для величин же  $f, E, H$  — составляющие касательные.

5. Динамические процессы в средах. Вышеприведенное сопоставление аналогичных величин было бы неполно, если бы не были введены аналогии процессов, развивающихся во времени. Согласно общему уравнению движения (56), мы получаем зависимости между безвихревыми величинами (61) и величинами без источников (62) поля упругих колебаний. Как электромагнитные эквиваленты этих уравнений, пользуясь уравнением Максвелла (65), получаем формулы

(71) и (72), которые являются распространением приведенных раньше формул (37) и (49) на динамические процессы.

Из условий непрерывности струи следует, что и здесь краевые условия на границе сред с различными механическими и электромагнитными свойствами вполне соблюдены, (таблица после формулы 75).

Однако исследуемая система имеет некоторое внутреннее несогласие, следующее не из несовершенства самого метода установления аналогии, но из существенных физических различий между электромагнитными и механическими колебаниями. Сравним общие зависимости между полем сил и полем перемещений (76) и (77), и между электрическим (78) и магнитным (79) полями.

Структура этих формул совершенно схожа, а различие состоит в разных величинах постоянных коэффициентов, ибо тогда как скорость распространения электрических и магнитных волн одинакова — скорость волны механических поперечных продольных колебаний различна. Эту трудность мы можем при моделировке побороть, принимая, что все колебания синусоидальны и для них важны тогда формулы (83) — (86). Это предположение ни в чём не суживает общности рассуждений. Подбирая пульсации для изображения механических колебаний на электрической модели ( $\Omega_1$ ) и на магнитной модели ( $\Omega_2$ ) таким образом, чтобы числовые коэффициенты при  $x$  и  $y$  в формулах (83) — (86) были одинаковы, мы получим зависимость (87), а для соответственных частот  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — формулу (88).

Пересчёт коэффициентов при  $X$  и  $Y$  не представляет затруднений, так как масштаб для сил может быть произвольно подобран.

6. Аналогии для произвольного распределения колебаний. Для исследования правильности принятого метода аналогии в области с произвольными формами ограничивающих поверхностей, рассмотрена область  $R$ , находящаяся на плоскости  $(x, y)$ . Среда в этой области, как положено, изотропна и однородна. Постоянные механические и электромагнитные параметры среды внутри области  $R$  обозначены индексами  $w$ , постоянные же среды окружающей эту область имеют индексы  $v$ .

Рассмотрены два рода поляризованных электромагнитных полей со взаимно перпендикулярными поляризационными плоскостями. Одно из этих полей с составляющими  $(H_x, H_y, 0)$  и  $(0, 0, E_z)$  является эквивалентом поля поперечных колебаний, в котором

$$\tau_{xz} \neq 0 \text{ и } \tau_{yz} \neq 0, \text{ но } \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0.$$

Второе электромагнитное поле, имеющее составляющие  $(0, 0, H_z)$  и  $(E_x, E_y, 0)$  является аналогией поля продольных колебаний, в котором выступают величины  $\sigma_x, \sigma_y$ , а остальные составляющие тензора

напряжений равны нулю. Оказывается, что для данного распределения сил действующих в плоскости  $(x, y)$  области  $R$ , мы получаем краевые условия (102) и (106), такие же, как и для соответственных электромагнитных полей (93) и (99). Далее установлено, что между распределением магнитного поля (95) и распределением поперечных перемещений (105) возникают почти одинаковые зависимости, определенные интегральными уравнениями Фредгольма. Такое же сходство возникает между распределением электрического поля (101) и распределением продольных перемещений (108),

7. Энергетические аналогии. Понятием связывающим аналогические величины, принадлежащие к разным областям физических явлений — это мощность или энергия, переносимая или накапливаемая системой. Проверка энергетической правильности системы аналогии имеет, следовательно, принципиальное значение. В рассматриваемой нами проблеме аналогии мы встречаемся с пространственным распределением энергии, причём мерой этого распределения является плотность энергии в данной точке среды. Энергия поля статических упругих сил, выраженная формулой (111) может быть представлена в форме (115) или (116). Из этого следует, что она является эквивалентом суммы электростатической (109) и магнитостатической (110) энергии.

Далее, потенциальная энергия пространственных сил (119) может быть точно изображена магнитостатическими силами, производимыми цепями токов (120) и электростатическими силами свободных зарядов (121). Наконец, эквивалентом потока механической энергии протекающей сквозь данную предельную поверхность произвольного пространства (129), является поверхностный интеграл вектора Пойтинга-Умова (124). Таким образом система аналогий вполне соблюдена. В таблице сопоставлены все рассматриваемые аналогичные величины.

Настоящий труд не исчерпывает, очевидно, проблемы электро-механических аналогий в непрерывных средах. Для практических целей моделировки — следовало бы прежде всего распространить эти аналогии на системы с нелинейными характеристиками, работающие выше предела пропорциональности. Следовало бы также заняться имеющими большое значение в технике средами с неравным нулю удельным коэффициентом потерь.

I. MALECKI

## EXTENSION

OF THE CORRECTED SYSTEM OF ELECTROMECHANICAL  
ANALOGIES ON CONTINUOUS ISOTROPIC MEDIA

## Summary

1. Object of the study. In electrical modelling and in theoretical investigations on the general theory of vibrations, electromechanical analogies relating to lumped constant systems are usually applied. Consequently the elements of these systems have small dimensions as compared with the length of the disturbing wave.

The first degree of generalisation of these analogies consists in studying the systems with constants distributed along a straight line. Power and communication lines in electrical engineering, strings and bars in mechanics may be quoted as examples of such systems.

The object of this paper is to extend the system of analogies to continuous bodies in three-dimensional space while limiting the investigations to an isotropic medium, which is free of losses and homogeneous in the given region. It is further assumed that all vibration phenomena occur within the range of proportionality.

This means that for mechanical deformations the Hook's law is applicable and that the magnetic and electric processes occur below the limit of magnetic saturation or of discharges in the dielectric, respectively. Finally it is, assumed that the medium has no initial voltages or stresses in the absence of electric charge or force.

The investigated systems of analogies are of great importance for modelling complex mechanical system and for the didactic work of the Vibration Research Laboratory of the Polish Academy of Science.

2. Elastostatic field in an isotropic medium. According to the general theory of elasticity, if space forces  $F$  act on a medium lying in the region  $R$ , stresses arise under their influence which can be expressed by the tensor  $\|G\|$ , fulfilling the equation (4), and strains expressed by the tensor  $\|W\|$ , formula (8).

Having accepted the above assumptions, we shall find that both tensors are symmetrical and their main axes parallel. This means that the fields of longitudinal strains and stresses may be considered independently from the fields of transverse strains and stresses. The formulae (9) and (10) for the relations between the components of the stress- and strain-tensors give as a result the general equation (15) of elastostatics.

The quantities  $\bar{F}$  and  $\bar{u}$  appearing in this equation may be resolved into curlless and sourceless components  $\bar{f}_1, \bar{u}_1$  and  $\bar{f}_2, \bar{u}_2$  (formulae 18



and 20). The former may be expressed by scalar potentials  $\varphi$ ,  $\Phi$  the second by vector potentials  $\psi$ ,  $\Psi$  (formulae 16, 17). Such a representation of an elastostatic field, taking into account the conditions (19) and (20), makes it possible to express the medium's status in the form (22), and to deduce the relations (23) and (24) separately between the scalar and vector potentials in the isotropic medium.

These relations may, of course, be expressed by Lamé's constants (formulae 23 and 24) or by Young's modulus and Poisson's coefficient (formulae 26 and 27). In the formulae (28) and (29)  $c_1$  and  $c_2$  denote the velocities of propagation of longitudinal and of transverse waves.

3. Magneto-mechanical analogies for static fields. To find electromagnetic equivalent of an elastostatic field, it is necessary to extend the system of electromechanical analogies as used for lumped constant networks. For the sake of clearer physical interpretation the so-called corrected system of analogies has been chosen as the starting point, the following pairs of equivalents have been accepted

$$\begin{aligned} \text{current} &\equiv \text{force} \\ \text{voltage} &\equiv \text{velocity} \\ \text{magnetic induction flux} &\equiv \text{displacement.} \end{aligned}$$

To establish the statical relations the last pair of equivalents is most important. This, when related to surface unit, is interpreted as an analogue between the displacement of the medium and the magnetic induction  $\bar{B}$ . However, since the magnetic induction is a sourceless quantity, only the second component of the elastostatic field is its equivalent.

On the basis of the Biot-Savart law (formulae 32 and 33) it may be accepted that the equivalent of tangential (transverse) space forces is the potential double layer, and the field tangential displacements corresponds to the magnetic field  $\bar{H}$ . Hence the vector potentials of the magnetic field  $\bar{A}_H$  and of the magnetic induction  $\bar{A}_B$  — correspond to the potentials  $\bar{\Psi}$  and  $\bar{\psi}$ , and the formula (37) is analogous to (27).

4. Electromechanical analogies for static fields. Similarly one may find the analogies between a field of normal (longitudinal) forces and an electrostatic field. In this case, however the relations, do not follow directly from the corrected analogy system adopted by us for lumped constant circuits. Yet, adopting the electromagnetic analogy (38), it is possible to deduce all connexions between electrical and mechanical quantities. Then the free space charges correspond to mass forces and the electrical displacement to the mechanical displacement. There is also an exact correspondence between the potentials of the electric

field  $K_E$  and of the electric displacement  $K_D$  on one side — and the potentials  $\Phi$  and  $\varphi$  on the other side (formulae 26 and 49).

It must be emphasized that the accepted analogies are also fully valid at the boundaries of media with different characteristic constants (formulae 50—55), i. e. there exists a continuity of normal components for the quantities  $u$ ,  $D$ ,  $B$ , whereas for the quantities  $f$ ,  $E$ ,  $H$  the tangent components are continuous.

5. Dynamic processes in the media. The above mentioned comparison of analogous quantities would be incomplete without introducing an analogy between processes varying in time. On the basis of the general equation of movement (56) we obtain connexions between curlless (61) and sourceless (62) quantities of the elastic vibration field. By using Maxwell's equations (65) we obtain formulae (71) and (72), the electromagnetic equivalents of those equations which represent the extension of the aforementioned formulae (37) and (49) on dynamic processes. As a consequence of the continuity of stream, the border conditions at the boundary of media with different mechanical and electromagnetic characters are also fulfilled. (Table after formula 75). Nevertheless the investigated system of analogies shows a certain discrepancy which does not result from an imperfection of the system of analogies itself, but from essential physical differences existing between the electromagnetic and mechanical vibrations.

Let us compare the general relations between: a field of forces and displacements (76) and (77) on the one side and an electric (78) and magnetic field (79) on the other. The structure of the formulae is quite similar. The difference lies in different values of the constant coefficients. This results from the fact that the velocity of propagation electric and magnetic waves is identical, which is not true for transverse and longitudinal waves of mechanical vibrations. While modelling we overcome this difficulty by considering sinusoidal vibrations for which formulae (83) — (86) are valid. Such a supposition in no way restricts the general character of our considerations. We choose the angular velocity copying mechanical vibrations ( $\Omega_1$ ) on the electric model and ( $\Omega_2$ ) on the magnetic model in such a way as to obtain equal numerical coefficients by  $x$  and  $y$  in the formulae (83) — (86); then we obtain the relation (87) for angular velocities and the formula (88) for corresponding frequencies  $\nu_1$  and  $\nu_2$ . The calculation of coefficients by  $X$  and  $Y$  is quite easy, since the scale of forces may be chosen freely.

6. Analogies for an arbitrarily distributed vibrations. To check the validity of the adopted system of analogies for



a region with boundary surfaces of arbitrary form, a region  $R$  lying on the surfaces  $(x, y)$  was examined. The medium filling this region is as formerly isotropic and homogeneous. Mechanical and electromagnetic constants inside the region have indices  $w$ , while constants of the surrounding medium have indices  $v$ .

Two polarized electromagnetic fields with perpendicular polarization planes were examined. One field with the components  $(H_x, H_y, 0)$  and  $(0, 0, E_z)$  is the equivalent of the field of transverse forces, where

$$\tau_{xy} \neq 0 \text{ and } \tau_{yz} \neq 0, \quad \text{but } \tau_{xy} = 0 \quad \text{and } \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0.$$

The second electromagnetic field with the components  $(0, 0, H_z)$  and  $(E_x, E_y, 0)$  is analogous to the field of longitudinal vibrations, where the values  $\sigma_x, \sigma_y$  occur, while the remaining components of the stress tensor are equal to zero. It appears that, for a given distribution of forces acting on the region  $R$  in the plane  $(x, y)$ , we get boundary conditions (102) and (106) such as those for corresponding electromagnetic fields (93) and (99). It was further found that almost identical relations, defined by Fredholm's integral equations, occur between the distribution of the magnetic field (95) and the distribution of the transverse displacements (105). Equally similar are the distributions of the electric field (101) and of the longitudinal displacements (108).

7. Energetic analogies. The value which binds analogous quantities belonging to various fields of physical phenomena is the energy translated or accumulated by the system. The test for energetical correctness of the system of analogies is therefore of fundamental importance.

In the examined kind of analogies we deal with a space distribution of energy defined by its density in a given point of the medium. The energy of the field of static elastic forces, expressed by the formula (111), may be put in the form (115) or (116). It follows that this is an equivalent of the sum of the electrostatic (109) and magnetostatic (110) energies.

Further the potential energy of space forces (119) may be exactly represented by magnetostatic forces caused by the current circuits (120) and by electrostatic forces produced by free charges (121). Finally, the equivalent of the energy flux through a given boundary surface of an arbitrary region (129) is a surface integral from the Poyting vector (124).

In this way the system of analogies is strictly fulfilled. The table contains all examined analogous quantities. This paper, evidently, does not exhaust the problem of electromechanical analogies in continuous media. For practical modelling this method ought to be, above all, extended to cover the systems with nonlinear characteristics working above the limit of proportionality. Farther investigation of greatest practical importance would be devoted of the problem of analogies of dissipative media.

T. ZAGAJEWSKI

## Liniowe i nieliniowe efekty reaktancyjne w generatorach ze sprzężeniem zwrotnym

*Rękopis dostarczono 30. 12. 52*

**Streszczenie.** Analiza generatorów ze sprzężeniem zwrotnym, przeprowadzona metodą współczynników nieliniowych, wykazuje znaczny wpływ lampy na właściwości generatora. Ponieważ fizykalna interpretacja wyrowadzonych wzorów prowadzi do wydzielenia efektów podobnych do zjawisk występujących w lampowych układach reaktancyjnych, przeto efekty te nazwano reaktancyjnymi. Pierwszy z nich (efekt pierwotny), będący wynikiem zmian średniego nachylenia charakterystyki lampy przy zmianach warunków pracy, jest zależny od współczynnika sprzężenia zwrotnego dla częstotliwości podstawowej oraz od stałych lampy. Drugi efekt (wtórny), będący wynikiem powstawania składowych kombinowanych prądu o częstotliwości podstawowej, zależy od współczynników sprzężenia zwrotnego dla harmonicznnych oraz od nieliniowych współczynników lampy.

Istnienie tych efektów stwierdzono doświadczalnie, przy czym ich wpływ na wszystkie właściwości generatora jest bardzo znaczny, a zależny w dużym stopniu od wartości współczynnika sprzężenia zwrotnego i jego przebiegu w funkcji częstotliwości. Wielkości te — jak wykazują pomiary — różnią się znacznie od obliczonych, przy czym różnice te są wynikiem działania prądu siatkowego. Wartość tego prądu i jego kształt mają ogromny wpływ na wszystkie właściwości generatora, przede wszystkim na zniekształcenia napięcia siatkowego i anodowego, na wartość współczynnika sprzężenia zwrotnego oraz na wartość i stabilność częstotliwości drgań generatora. Znaczną poprawę własności generatora można uzyskać za pomocą ujemnego sprzężenia zwrotnego dla składowych harmonicznnych napięcia; zbadano dwa takie układy i otrzymano dobrą stałość częstotliwości przez równoczesne wykorzystanie ujemnego sprzężenia zwrotnego i wpływu kształtu prądu siatki; regulacja tych układów jest prosta, dzięki możliwości niezależnego nastawienia optymalnej stabilności częstotliwości w odniesieniu do zmian napięcia żarzenia i do zmian napięcia anodowego.

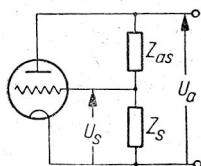
Przeprowadzone pomiary potwierdzają wyniki analizy generatora ze sprzężeniem zwrotnym oraz nakazują zwrócić bacniejszą uwagę na własności obwodu siatkowego, przede wszystkim na wpływ prądu siatki oraz na zniekształcenia napięcia siatkowego.

### 1. WSTĘP

Przy rozpatrywaniu lampowych układów generacyjnych otrzymuje się — wychodząc z pewnych podstawowych praw elektrotechniki — wzory określające warunki powstawania drgań oraz ich częstotliwość.

Wzory te mają zazwyczaj bardzo złożoną postać, zwłaszcza dla bardziej skomplikowanych układów, co utrudnia ich dyskusję oraz fizykalną interpretację zjawisk zachodzących w generatorze. Zagadnienie komplikuje się jeszcze bardziej, jeżeli uwzględnia się nieliniowość charakterystyki pewnych elementów układu, przede wszystkim lampy. Wzory otrzymane za pomocą metod nieliniowych (np. metody harmonicznych [2], [3], metody nieliniowych współczynników [7], są tak złożone, że tylko dla najprostszycch przypadków spotyka się fizykalną interpretację zjawisk zachodzących w generatorze; np. zmianę częstotliwości generatora z opornością ujemną spowodowaną nieliniowością jej charakterystyki tłumaczy się naruszeniem równowagi mocy biernej układu przez prądy o częstotliwościach harmonicznych. Wzory otrzymywane dla generatorów ze sprzężeniem zwrotnym są — nawet w najprostszycch przypadkach — tak skomplikowane, że zazwyczaj rezygnuje się z prób fizykalnego tłumaczenia zjawisk. Utrudnia to w dużym stopniu rozpatrywanie właściwości generatorów lampowych ze sprzężeniem zwrotnym oraz ich ulepszanie, zwłaszcza w układach bardziej skomplikowanych.

Sprzeżenie zwrotne ma zastosowanie również w innych układach lampowych, np. we wzmacniaczach ze sprzężeniem zwrotnym oraz w układach reaktancyjnych. Zwłaszcza te ostatnie układy wykazują wiele podobieństwa z generatorami lampowymi, co może rzucić pewne światło na zjawiska powstające w złożonych układach generacyjnych. Celem poniższej pracy jest rozpatrzenie możliwości zastosowania wyni-



Rys. 1. Schemat układu reaktancyjnego ze sprzężeniem zwrotnym.

ków opracowanej przez autora [8] analizy układów reaktancyjnych z uwzględnieniem nieliniowości charakterystyki lampy, do generatorów ze sprzężeniem zwrotnym.

Analiza lampowych układów reaktancyjnych wykazuje, że na efektywną wartość ich pojemności lub indukcyjności wpływają pewne czynniki, które można zgrupować następująco:

- a) Liniowy efekt reaktancyjny, występujący przy idealnie liniowej charakterystyce lampy powoduje powstanie przewodności zespolonej, wyrażonej wzorem

$$\hat{Y}_{ao} = \frac{1}{\varrho} + S_1 \hat{w}_1, \quad (1)$$

gdzie  $S_1$  jest nachyleniem charakterystyki lampy,  $\varrho$  jej opornością wewnętrzną, natomiast  $\hat{w}_1 = \frac{\hat{Z}_s}{\hat{Z}_s + \hat{Z}_{as}}$  jest współczynnikiem sprzężenia zwrotnego układu (rys. 1).

- b) Pierwotny efekt nieliniowy powstaje wskutek nieliniowości charakterystyki lampy przy przyłożeniu na jej anodę sinusoidalnego napięcia zmiennego; efekt ten powoduje zmianę przewodności zespolonej do wartości

$$\hat{Y}_{a1} \approx S_1 w_1 \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} w_1^2 \bar{U}_a^2 \right), \quad (2)$$

gdzie  $S_3$  jest nieliniowym współczynnikiem charakterystyki lampy trzeciego stopnia,  $\bar{U}_a$  jest amplitudą zmiennego napięcia anodowego.

Zjawisko zmiany oporności urojonej układu tłumaczy się zmianą średniego nachylenia lampy przy zmianie napięcia anodowego skutkiem zakrzywienia jej charakterystyki.

- c) Wtórny efekt nieliniowy powstaje wskutek nieliniowości charakterystyki lampy przy przyłożeniu na anodę zniekształconego napięcia zmiennego, czyli napięcia złożonego ze składowej podstawowej i składowych harmonicznyc. Efekt ten powoduje zmianę przewodności zespolonej układu, wyrażoną wzorem

$$\begin{aligned} \Delta \hat{Y}_{a11} = & S_2 w_1 w_2 \bar{U}_{a2} e^{j(\gamma_1 + \alpha_2 + 90^\circ)} - \frac{1}{3} S_3 w_1^2 w_3 \bar{U}_{a1} \bar{U}_{a3} e^{j(\gamma_1 + \alpha_3)} + \dots \\ & + G_2 \bar{U}_{a2} e^{j(\gamma_1 - \gamma_2 + \alpha_2 + 90^\circ)} - \frac{1}{3} G_3 \bar{U}_{a1} \bar{U}_{a3} e^{j(\gamma_1 - \gamma_3 - \alpha_3)} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

w którym  $S_2, S_3, G_2, G_3$  są nieliniowymi współczynnikami charakterystyki lampy;  $\bar{U}_{a2}, \bar{U}_{a3}$  są amplitudami harmonicznyc napięcia anodowego;  $w_2, w_3 \dots$  są to współczynniki sprzężenia zwrotnego dla częstotliwości harmonicznyc,  $\gamma_2, \gamma_3 \dots$  ich kąty przesunięcia fazowego,  $\alpha_2, \alpha_3 \dots$  kąty przesunięcia fazowego napięć harmonicznyc.

Zjawisko zmiany zespolonej oporności lampy wywołane jest tu przez powstanie składowyc prądu anodowego o częstotliwości podstawowej jako wynik mieszania poszczególnyc składowyc napięcia typu  $(f_n - f_m)_{n-m=1}$ .

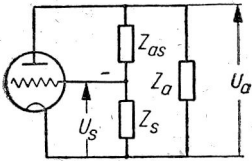
Wszystkie trzy wymienione efekty dają się wyodrębnić również w układach generacyjnych, a przeto należy sprawdzić ich powstawanie i wpływ na właściwości generatora oraz wyciągnąć odpowiednie wnioski.

## 2. LINIOWY EFEKT REAKTANCYJNY

Liniowa teoria generatora ze sprzężeniem zwrotnym jest znana od dawna. jej końcowe wzory podawane są w wielu podręcznikach i szeroko dyskutowane. Będziemy się starali przedstawić te wzory w takiej postaci, która pozwoli uwydatnić ich fizyczny sens oraz ułatwi zrozumienie me-

chanizmu działania generatora, a w szczególności zależność jego częstotliwości od stałych układu i lampy.

Zasadnicze wzory określające właściwości układu generatora (rys. 2) wyprowadza się z warunku utrzymania drgań



Rys. 2. Schemat układu generatora ze sprzężeniem zwrotnym

$$\hat{k} = \frac{1}{\hat{w}_1}, \quad (4)$$

w którym

$$\hat{k} = -\frac{\hat{Z}K}{\varrho + \hat{Z}} \quad (5)$$

jest wzmocnieniem napięciowym układu,

$$\hat{w}_1 = \frac{\hat{Z}_s}{\hat{Z}_s + \hat{Z}_{as}} \quad (6)$$

jest współczynnikiem sprzężenia zwrotnego,

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_a(\hat{Z}_s + \hat{Z}_{as})}{\hat{Z}_a + \hat{Z}_s + \hat{Z}_{as}} \quad (7)$$

jest zastępczą opornością obwodu rezonansowego.

Podstawiając (5) i (6) do (4) otrzymuje się zasadnicze liniowe równanie generatora

$$\varrho + \hat{Z} + K\hat{w}_1\hat{Z} = 0 \quad (8)$$

z którego wyprowadza się wzory na częstotliwość i warunek utrzymania drgań układu. Dochodzi się do tego zakładając

$$\hat{Z}_a = r_a + jx_a, \quad \hat{Z}_s = r_s + jx_s, \quad \hat{Z}_{as} = r_{as} + jx_{as}$$

przez proste obliczenia (p. Dodatek 1); wzór na częstotliwość drgań generatora ma postać

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left\{ 1 - \omega_0 C \left[ \frac{(r_a + r_s + r_{as})r_a}{x_a} + x_a S_1 \left( r_s + \frac{r_s}{K} + \frac{r_{as}}{K} \right) \right] \right\}, \quad (9)$$

gdzie

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  jest pulsacją (częstotliwością) rezonansową obwodu, —  $L$ ,  $C$  zastępczą indukcyjnością i pojemnością obwodu rezonansowego.

Wzór ten można interpretować w ten sposób, że częstotliwość drgań różni się od częstotliwości rezonansowej obwodu w wyniku działania następujących czynników:

- Wskutek istnienia oporów rzeczywistych w poszczególnych gałęziach obwodu rezonansowego, które zmieniają częstotliwość własną obwodu o wartość

$$\Delta_1 \omega = -\frac{1}{2} \omega_0 C \frac{(r_a + r_s + r_{as})r_a}{x_a}. \quad (10)$$

Znak tej zmiany częstotliwości zależy tylko od charakteru oporności urojonej gałęzi  $x_a$ , będzie więc różny w zasadniczych układach generacyjnych.

- b) Wskutek oddziaływania lampy generacyjnej na układ generacyjny, które powoduje zmianę częstotliwości wyrażoną wzorem

$$\Delta_2 \omega = -\frac{1}{2} \omega_0 C S_1 \left[ r_s \left( 1 + \frac{1}{K} \right) + \frac{r_{as}}{K} \right] x_a \quad (11)$$

Wyrażenie to określa wpływ lampy na częstotliwość, o czym świadczy jego budowa, bowiem oba wyrazy w nawiasie zawierają stałe lampy  $S_1$  lub  $K$  przy czym charakterystyczny jest dużo silniejszy wpływ oporu  $r_s$  niż oporu  $r_{as}$ . Interpretację fizykalną tego wyrażenia ułatwi zestawienie ze wzorem (1) wyrażającym przewodność zespoloną układu reaktancyjnego

$$\hat{Y} = \frac{1}{\rho} + S_1 \hat{w}_1.$$

Podobieństwo budowy obu wzorów jest uderzające i można łatwo udowodnić, że nie jest to jedynie przypadek.

Wzór (11) daje w wyniku zero tylko wtedy, gdy w gałęzi sprzężenia zwrotnego nie ma oporu rzeczywistego, czyli gdy

$$r_s = 0, \quad r_{as} = 0.$$

W tym przypadku wykres napięć i prądów generatora (rys. 3a), np. dla układu Hartleya, wykazuje przesunięcie fazy napięcia siatkowego w stosunku do napięcia anodowego dokładnie o  $180^\circ$  (tzw. układ *fazowoczysty*), prąd anodowy zaś jest w fazie z napięciem anodowym.

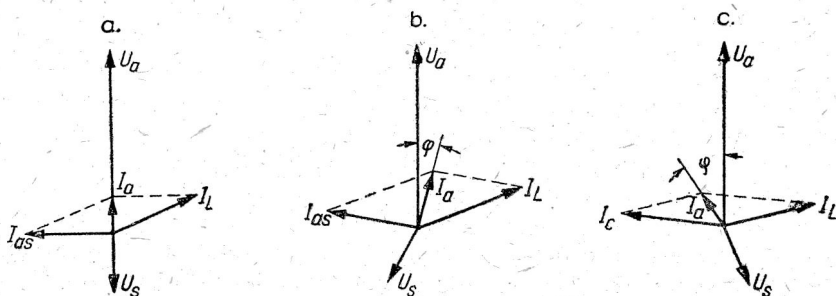
W takim przypadku lampa działa jak oporność rzeczywista (ujemna) i nie wnosi żadnej oporności urojonej, a więc nie powoduje zmiany częstotliwości generatora.

Jeżeli gałąź sprzężenia zwrotnego zawiera oporności rzeczywiste ( $r_s \neq 0$ ,  $r_{as} \neq 0$ ), to następuje przesunięcie fazy napięcia siatki w stosunku do napięcia anodowego (rys. 3b) o kąt różny od  $180^\circ$ , wskutek czego prąd anodowy ulega przesunięciu fazowemu w stosunku do napięcia anodowego. Lampa przedstawia w tym przypadku pewną oporność zespoloną, której składowa urojona powoduje zmianę częstotliwości drgań generatora.

Lampa generacyjna pracuje więc jako pewien układ reaktancyjny o przesunięciu fazowym między napięciem siatkowym i anodowym bliskim  $180^\circ$  (w odróżnieniu od zwykłych układów reaktancyjnych, w których kąt ten bliski jest  $90^\circ$ ), przy czym oporność urojona lampy powoduje zmianę częstotliwości generatora. Znak zmiany częstotliwości zależy od przesunięcia fazowego napięcia siatki, mianowicie uwarunkowany jest budową dzielnika napięć  $\hat{Z}_{as} \hat{Z}_s$ . Wyjaśniają to rys. 3b i 3c, które przedsta-



wiają wykresy napięć i prądów dla układu Hartleya i Colpittsa; przesunięcie fazowe prądu anodowego w stosunku do napięcia anodowego ma w tych dwóch układach przeciwny znak, a mianowicie w układzie Hartleya



Rys. 3. Wykres napięć i prądów generatora ze sprzężeniem zwrotnym: a. generator w układzie Hartleya ( $r_s=0$ ,  $r_{as}=0$ ,  $r_a \neq 0$ ), b. generator w układzie Hartleya ( $r_s \neq 0$ ,  $r_{as} \neq 0$ ,  $r_a \neq 0$ ), c. generator w układzie Colpittsa ( $r_s \neq 0$ ,  $r_{as} \neq 0$ ,  $r_a \neq 0$ ).

przesunięcie fazy ma charakter indukcyjny, w układzie zaś Colpittsa — pojemnościowy, czyli w pierwszym z nich lampa przedstawia oporność urojoną dodatnią, w drugim — ujemną, wskutek czego jeden z nich powoduje powiększenie, drugi — zmniejszenie częstotliwości generatora.

Tablica 1

Częstotliwość liniowych układów generacyjnych ze sprzężeniem zwrotnym

Układ \ Warunki	$r_a \neq 0, r_s \neq 0, r_{as} \neq 0$	$r_a \neq 0, r_s = 0, r_{as} = 0$
Hartleya	$\omega = \omega_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{r_a (r_a + r_s + r_{as})}{\omega^2 L_a^2} + \right.$ $\left. - \frac{1}{2} S_1 \left[ r_s \left( 1 + \frac{1}{K} \right) + r_{as} \frac{1}{K} \right] \right\}$	$\omega = \omega_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{r_a^2}{\omega^2 L_a^2} \right]$
Meissnera	$\omega = \omega_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \omega^2 C_a^2 r_a (r_a + r_s + r_{as}) + \right.$	$\omega = \omega_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \omega_0^2 C_a^2 r_a^2 \right]$
Colpittsa	$\left. + \frac{1}{2} S_1 \left[ r_s \left( 1 + \frac{1}{K} \right) + r_{as} \frac{1}{K} \right] \right\}$	

W tablicy 1 podane są wzory, obliczone z równania (9), określające częstotliwość drgań trzech podstawowych układów generacyjnych; wzory te potwierdzają omówioną wyżej zasadę, iż znak zmiany częstotliwości zależy od znaku oporności urojonej  $x_a$  i jest stały dla danego układu.



## 3. EFEKTY NIELINIOWE

Analizę pracy generatora można przeprowadzić np. metodą współczynników nieliniowych [7] zakładając, że charakterystyka prądu anodowego lampy daje się przedstawić szeregiem potęgowym w pewnym obszarze bliskim początkowego punktu pracy; szereg ten ograniczamy do trzech pierwszych wyrazów

$$i_a = S_1 u_s + S_2 u_s^2 + S_3 u_s^3 + G_1 u_a + G_2 u_a^2 + G_3 u_a^3, \quad (12)$$

w których  $S_1$  i  $G_1$  są nachyleniem charakterystyki i przewodnością lampy, współczynniki zaś  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  są nieliniowymi współczynnikami lampy drugiego i trzeciego rzędu.

Lampa otrzymuje zmienne napięcie siatkowe z obwodu sprzężenia zwrotnego, wyrażone wzorem

$$\hat{U}_{sk} = \hat{w}_k \hat{U}_{ak} = w_k \hat{U}_{ak} e^{j\gamma_k}, \quad (13)$$

w którym  $\hat{w}_k = w_k e^{j\gamma_k}$  jest współczynnikiem sprzężenia zwrotnego dla harmonicznnej rzędu  $k$ .

W ustalonych warunkach pracy generatora napięcie na obwodzie generatora będzie zniekształcone, a przeto można je wyrazić wzorem

$$u_a = \bar{U}_{a1} \sin \omega t + \bar{U}_{a2} \sin (2 \omega t + \varphi_2) + \bar{U}_{a3} \sin (3 \omega t + \varphi_3) + \dots \quad (14)$$

Podstawiając wzory (13) i (14) do (12) otrzymuje się wyrażenie na prąd anodowy, będące sumą pewnej ilości składowych harmonicznnych, zależnych od współczynników lampy i obwodu. Korzystając z zależności między napięciem i prądem każdej składowej harmonicznnej

$$\hat{I}_{ak} = -\hat{Y}_{ak} \hat{U}_{ak},$$

gdzie  $\hat{Y}_{ak} = 1/\hat{Z}_{ak}$  jest przewodnością zespoloną obwodu generatora dla harmonicznnej rzędu  $k$ , oblicza się dalej współczynniki zawartości kolejnych harmonicznnych napięcia na obwodzie anodowym. Współczynnik ten można wyrazić ogólnym wzorem (p. Dodatek II)

$$m_k^2 = Z_{ak}^2 \frac{\left[ 1 - \frac{1}{\hat{q}} + \hat{N}_2(w_k, S_k, G_k) \right]^{k-1} w_1^{k-1}}{\hat{N}_1(w_1, G_3, S_3) \left[ \left( \hat{w}_k + \frac{1}{K} \right) \hat{Z}_{ak} + \frac{1}{S_1} \right]^2 \hat{F}_{1k}}, \quad (15)$$

w którym:

$\hat{q} = \frac{-w_1 \cdot K}{1 + \frac{q}{\hat{Z}_a}}$  jest współczynnikiem przewzbudzenia układu generacyjnego;

$\hat{F}_{1k}$  jest współczynnikiem zależnym od stałych lampy i obwodu;

$\hat{N}_1(w_1, G_2, S_3)$  jest współczynnikiem uwzględniającym wpływ nieliniowych współczynników lampy trzeciego stopnia, a zależnym od  $w_1$ ;

$\hat{N}_2(\hat{w}_k, \hat{Z}_{ak}, S_k, G_k)$  — jest współczynnikiem uwzględniającym wpływ wszystkich nieliniowych współczynników lampy, a zależnym od wartości współczynników sprzężenia zwrotnego dla wszystkich składowych harmonicznych.

Podstawienie wzoru (15) do znanego wzoru (p. [3]) wyrażającego częstotliwość generatora ze sprzężeniem zwrotnym daje

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} Z_{ak}^2 \frac{\omega_1^{k-1} \left[ 1 - \frac{1}{q} + \hat{N}_2 \right]^{k-1}}{\hat{N}_1 \left[ \left( \hat{w}_k + \frac{1}{K} \right) \hat{Z}_{ak} + \frac{1}{S_1} \right]^2} \frac{\hat{F}_{2k}}{S_1^2} F_1(x). \quad (16)$$

Wzór ten przedstawia zależność częstotliwości układu od warunków pracy, przy czym występują w nim wyraźnie wyrażenia określające wpływ efektów nieliniowych, związanych z działaniem sprzężenia zwrotnego, w postaci współczynników:  $\hat{N}_1$  (zależnego od  $w_1$ ) oraz  $\hat{N}_2$  (zależnego od  $w_1$  i  $w_k$ ). W układzie generatora ze sprzężeniem zwrotnym istnieją więc efekty nieliniowe, które można by nazwać — w analogii do układów reaktancyjnych — nieliniowym efektem reaktancyjnym pierwotnym ( $\hat{N}_1$ ) i wtórnym ( $\hat{N}_2$ ). Ich interpretacja fizyczna jest trudniejsza w przypadku generatora ze względu na samowzbudność układu, jednak można ją krótko ująć następująco: wielkość  $\hat{N}_1$  przedstawia wpływ nieliniowości charakterystyki lampy (głównie współczynników  $S_3, G_3$ ) na składową podstawową napięcia i prądu anodowego, o czym świadczy zależność od  $w_1$ : wpływ ten można tłumaczyć zmianą średniego nachylenia charakterystyki lampy, podobnie jak w układach reaktancyjnych [8], co zmienia oddziaływanie lampy na częstotliwość drgań. Wielkość  $\hat{N}_2$  określa wpływ harmonicznych napięcia siatkowego (o czym świadczy zależność od współczynników sprzężenia zwrotnego dla harmonicznych  $w_k$ ) na zniekształcenia napięcia anodowego i częstotliwość generatora. Mechanizm tego wpływu jest bardzo złożony, z jednej bowiem strony tworzą się pewne składowe typu  $(f_n - f_m)_{n-m=1}$  o częstotliwości podstawowej, które oddziałują na częstotliwość generatora, z drugiej strony składowe harmoniczne zmieniają rozptyw prądu i mocy w obwodzie rezonansowym, co również powoduje zmianę częstotliwości.

Oprócz efektów reaktancyjnych istnieje oczywiście również w generatorze ze sprzężeniem zwrotnym wpływ rozptywu prądów harmonicznych i ich mocy biernych w obwodzie rezonansowym, podobnie jak w generatorze z opornością ujemną. Można jednak przypuszczać, że w generatorze ze sprzężeniem zwrotnym wpływ rozptywu mocy prądów

harmonicznych jest mniejszego rzędu niż wpływ reaktancyjny. Wynika to między innymi z zasadniczego wzoru metody harmonicznych ([3] str. 179).

$$\oint i_e du_e = 0,$$

który można przedstawić w postaci symbolicznej jako sumę

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \hat{U}_{ak} \check{I}_{ek} + K \hat{U}_{sk} \check{I}_{ek} \right|_{ur} = 0. \quad (17)$$

W tym wzorze pierwszy iloczyn  $\hat{U}_{sk} \check{I}_{ek}$  przedstawia — podobnie jak w przypadku generatora z opornością ujemną — wpływ rozplywu prądów harmonicznych i równowagi ich mocy biernych w obwodzie rezonansowym generatora; wyraz ten określa wyłącznie wpływ budowy samego obwodu rezonansowego generatora, nie zawiera on bowiem stałych lampy, natomiast daje się wyrazić przez oporności zespolone elementów obwodu rezonansowego.

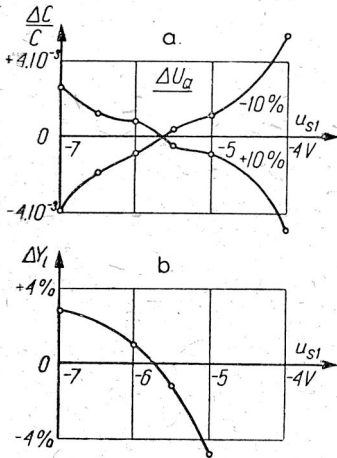
Drugi iloczyn występujący w tym wzorze ( $K \hat{U}_{sk} \check{I}_{ek}$ ) przedstawia wpływ lampy generacyjnej, o czym świadczy obecność w nim współczynnika amplifikacji lampy  $K$ . Całe to wyrażenie można traktować jako wynik efektu reaktancyjnego zależnego od współczynnika amplifikacji  $K$  oraz od składowych harmonicznych  $U_{sk}$  napięcia siatki, które dają się określić za pomocą współczynników sprzężenia zwrotnego dla składowych harmonicznych  $\omega_k$ . Podobnie jak we wszystkich wzorach tego typu decydujące są te wyrazy, które zawierają współczynnik amplifikacji  $K$ , gdyż dla lamp generacyjnych spełniony jest zazwyczaj warunek  $K \gg 1$ ; należy więc wnioskować, że efekt reaktancyjny jest w generatorach ze sprzężeniem zwrotnym wybitny, być może nawet decydujący.

Tego rodzaju interpretacja wzorów (16) i (17) wskazuje na konieczność zwrócenia baczniejszej uwagi na gałąź sprzężenia zwrotnego oraz na zależności w obwodzie siatkowym generatora i na ich wpływ na właściwości generatora. Należy więc przeprowadzić analizę układu sprzężenia zwrotnego uwzględniając zależność współczynnika sprzężenia zwrotnego od częstotliwości oraz wpływ prądu siatkowego płynącego przez gałąź sprzężenia zwrotnego.

#### 4. PIERWOTNY EFEKT NIELINIOWY

Doświadczalne wykazanie istnienia pierwotnego efektu nieliniowego nie jest łatwe ze względu na równoczesne występowanie z nim innych efektów; oddzielenie wpływu różnych czynników jest jednak możliwe w pewnych punktach osobliwych, w których następuje np. zmiana znaku

jednego z czynników. Wpływ efektu pierwotnego zmienia znak w punkcie przegięcia nachylenia charakterystyki, czyli w punkcie zmiany znaku współczynników nieliniowych lampy  $S_3$  i  $G_3$ . W triodzie trudno jest otrzymać taki punkt pracy, natomiast w lampach wielosiatkowych można go uzyskać przez odpowiedni dobór napięć poszczególnych elektrod. Do pomiarów wybrano heptodę 6L7, która, jak wykazały pomiary wykonane poprzednio przez autora [8], ma punkt przegięcia przy napięciu siatki pierwszej  $U_{s1} = -5,7 \text{ V}$ . Lampy tej użyto w generatorze pracującym w układzie Hartleya o częstotliwości 1440 c/s, którego stałość częstotliwości badano w funkcji napięć zasilania przy różnych wartościach napięcia  $U_{s1}$ . Istnienie pierwotnego efektu nieliniowego powinno się objawiać zmianą znaku odchyień częstotliwości przy przejściu przez punkt przegięcia charakterystyki, a więc przy  $U_{s1} = -5,7 \text{ V}$ . Pomiary wykazały, że odchylenia częstotliwości przy zmianie napięcia żarzenia i siatki osłonowej prawie nie zależą od napięcia  $U_{s1}$ , natomiast odchylenia częstotliwości przy zmianie napięcia anodowego mają przewidziany przebieg (rys. 4a), a mianowicie zmieniają one znak i przechodzą przez zero przy  $U_{s1} = -5,7 \text{ V}$ . Dla porównania podano na rys. 4b względne zmiany przewodności urojonej układu reaktancyjnego z tą samą lampą, spowodowane przez pierwotny efekt nieliniowy (rys. b).



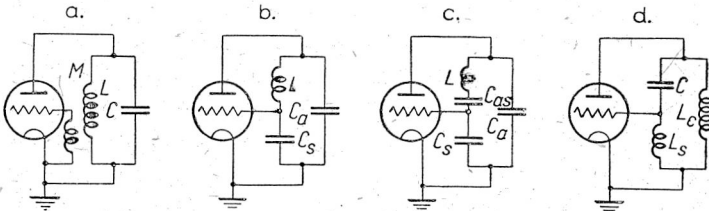
Rys. 4. Odchylenie częstotliwości generatora w układzie Hartleya z lampą 6L7 (heptoda) przy zmianie napięcia anodowego o  $\pm 10\%$  (rys. a) oraz zmiany przewodności urojonej układu reaktancyjnego z tą samą lampą, spowodowane przez pierwotny efekt nieliniowy (rys. b).

lampy w obu badanych układach. Zgodność przebiegu krzywych dla obu układów jest uderzająca, co świadczy o istnieniu pierwotnego efektu reaktancyjnego w generatorach ze sprzężeniem zwrotnym, który w badanym przypadku odgrywa decydującą rolę dla zmian napięcia anodowego, jest zaś do pominięcia przy zmianach innych napięć zasilających.

## 5. WSPÓŁCZYNNIK SPRZEŻENIA ZWROTNEGO

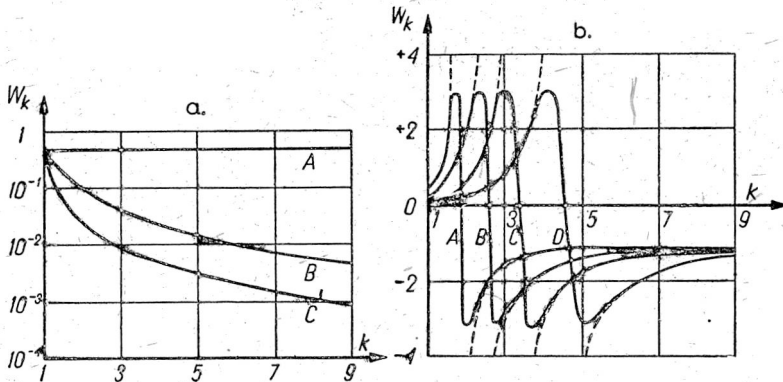
Warunki pracy układu generacyjnego zależą w znacznym stopniu od doboru współczynnika sprzężenia zwrotnego, którego wartość dla częstotliwości podstawowej drgań decyduje o ich utrzymaniu; aby zapewnić stabilną pracę generatora lampowego obiera się wartość współczynnika

sprężenia zwrotnego większą od wartości granicznej, poniżej której utrzymanie drgań jest niemożliwe. Z drugiej jednak strony jest rzeczą wiadomą z analizy teoretycznej i z przeprowadzonych pomiarów (np. [9]), że stałość częstotliwości generatora jest tym lepsza, im mniejsza jest wartość



Rys. 5. Układy generatorów ze sprzężeniem zwrotnym: a. układ Meissnera, b. układ Colpittsa, c. układ Clappa, d. układ Hartleya

współczynnika sprzężenia zwrotnego. Natomiast, o ile autorowi wiadomo, nie przeprowadzono dotychczas dyskusji zależności tego współczynnika od częstotliwości (od rzędu harmonicznej drgań) i wpływu tej zależności na właściwości generatora. Znany jest wpływ wartości prądu siatkowego



Rys. 6. Współczynnik sprzężenia zwrotnego generatora w funkcji rzędu harmonicznej: rys. a. A — układ Meissnera, B — układ Colpittsa, C — układ Clappa, rys. b. — układ Hartleya przy różnych wartościach stosunku  $L_s : L_a$  — A — 0,5; B — 0,2; C — 0,1; D — 0,05.

lampy generacyjnej na współczynnik sprzężenia zwrotnego i na właściwości generatora, np. rozpatruje to zagadnienie szczegółowo S. I. Jewtjanow [5], [6]; natomiast wpływ kształtu impulsu prądu siatkowego na właściwości generatora jest zazwyczaj pomijany w rozważaniach, przeto należy go wyjaśnić.

Dla każdego z trzech zasadniczych układów generacyjnych otrzymuje się różną zależność współczynnika  $w_k$  od częstotliwości. W układzie Meisnera (rys. 5a) otrzymuje się przy założeniach  $r_a = r_{as} = r_s = 0$  wzór

$$w_k \approx \frac{j\omega M}{j\omega L} = \frac{M}{L} = \text{const.},$$

a więc wartość współczynnika sprzężenia zwrotnego nie zależy od częstotliwości (rys. 6a), czyli dla wszystkich harmonicznym otrzymuje się dodatnie sprzężenie zwrotne o tej samej wartości.

W układzie Colpittsa (rys. 5b) otrzymuje się wyrażenie

$$w_k = \frac{C_a}{C_s} \cdot \frac{1}{k^2 + (k^2 - 1) \frac{C_a}{C_s}} \quad (18)$$

czyli sprzężenie zwrotne jest zawsze dodatnie, ale szybko maleje z częstotliwością (rys. 6a); podobną zależność otrzymuje się dla układu Clappa (rys. 5c).

$$w_k = \frac{C_w}{C_s} \cdot \frac{1}{k^2 - \frac{C_w}{C_s} - \frac{C_w}{C_{as}}}, \quad (19)$$

gdzie

$$C_w = \frac{C_a C_s C_{as}}{C_a C_s + C_a C_{as} + C_{as} C_s},$$

przy czym również i tu sprzężenie zwrotne jest zawsze dodatnie lecz maleje szybciej z częstotliwością (rys. 6a) niż w układzie Colpittsa.

Układ Hartleya (rys. 5d) ma zupełnie inny przebieg współczynnika sprzężenia zwrotnego, mianowicie tu

$$w_k = \frac{L_s}{L_a} \cdot \frac{k^2}{1 - (k^2 - 1) \frac{L_s}{L_a}}, \quad (20)$$

czyli dla częstotliwości podstawowej i harmonicznym niskiego rzędu otrzymuje się sprzężenie dodatnie rosnące z częstotliwością (rys. 6b), natomiast powyżej częstotliwości rezonansu układu sprzężenia zwrotnego, sprzężenie zwrotne jest ujemne i maleje z częstotliwością asymptotycznie do wartości (-1). Wynika to z budowy dzielnika napięć sprzężenia zwrotnego, który tworzy obwód rezonansu szeregowego; dla częstotliwości rezonansu sprzężenie dąży do wartości  $\pm \infty$  w obwodach pozbawionych tłumienia, natomiast w rzeczywistych obwodach z uwzględnieniem oporu tłumienia sprzężenie zwrotne przechodzi przez zero i zmienia znak przy tej częstotliwości (rys. 6b). Częstotliwość, przy której pojawia się ujemne sprzężenie zwrotne, jest tym większa, im mniejsza jest wartość  $w_1$ , czyli

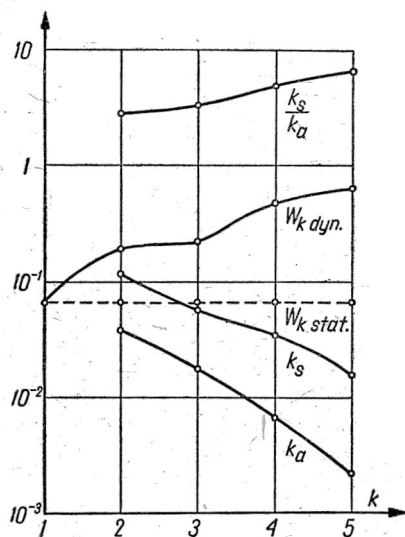


przy dużym  $w_1$  ujemne sprzężenie zwrotne otrzymuje się już dla drugiej lub trzeciej harmonicznej, natomiast dla układów o małej wartości  $w_1$  sprzężenie jest dodatnie dla kilku pierwszych harmonicznych, staje się zaś ujemne dopiero dla wyższych harmonicznych.

Z wzorów (16) i (17) wynika, że zniekształcenia napięcia anodowego i niestałość częstotliwości powinny być tym mniejsze, im mniejsze są wartości współczynnika sprzężenia zwrotnego  $w_k$ ; należy się również spodziewać, że ujemne sprzężenie zwrotne dla częstotliwości harmonicznych może znacznie zmniejszyć efekty nieliniowe w generatorze. Wynikałoby z tego, że w układzie Meissnera efekty nieliniowe są silniejsze, niż w układzie Colpittsa, jeszcze mniejsze powinny być w układzie Clappa; własności układu Hartleya powinny zależeć od wartości  $w_1$ , im ona jest większa, tym słabszy powinien być efekt nieliniowy dla wyższych harmonicznych.

Wszystkie te wnioski są słuszne, jeżeli rzeczywisty przebieg współczynnika sprzężenia zwrotnego w funkcji częstotliwości odpowiada obliczeniom. Dla sprawdzenia tego wykonano pomiary generatorów w czterech zasadniczych układach, pracujących na małej częstotliwości (1440 lub 2880 c/s) celem umożliwienia pomiaru poszczególnych składowych harmonicznych za pomocą analizatora. Współczynnik sprzężenia zwrotnego mierzono w tych układach dwójako: statycznie, czyli przy nieczynnej lampie generacyjnej, zasilając obwód anodowy napięciem z generatora akustycznego, którego częstotliwość zmieniano w potrzebnym zakresie, oraz dynamicznie, czyli przy normalnej pracy układu. Poszczególne składowe napięcia na anodzie i siatce mierzono za pomocą analizatora harmonicznych.

Wyniki pomiarów wykazują dobrą zgodność z wartościami obliczonymi dla współczynników sprzężenia zwrotnego w stanie statycznym, natomiast bardzo znaczne różnice występują w stanie dynamicznym. Na rys. 7 przedstawione są wyniki pomiarów układu Meissnera: współczynnik sprzężenia zwrotnego mierzony w stanie statycznym jest niezależny od

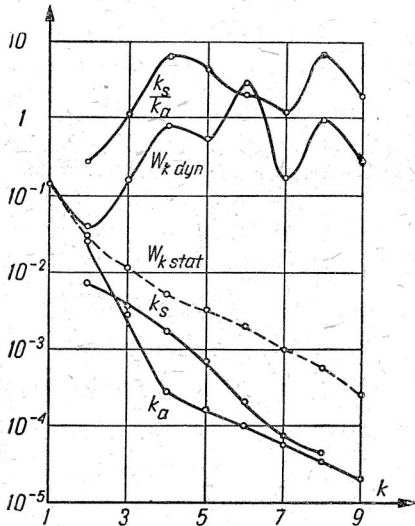


Rys. 7. Wyniki pomiaru generatora Meissnera z lampą 6F5 przy  $f=2830$  c/s; współczynnik sprzężenia zwrotnego w stanie statycznym i dynamicznym, zniekształcenia napięcia anodowego i siatkowego oraz ich stosunek w funkcji rzędu harmonicznej.

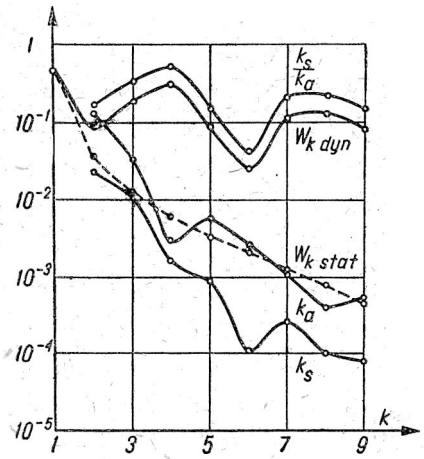


częstotliwości, podczas gdy w stanie dynamicznym wzrasta on z rzędem harmoniczej. Wartość składowych napięcia anodowego i siatkowego maleje z rzędem harmoniczej, przy czym jednak harmoniczne napięcia siatki są zawsze większe od harmonicznych napięcia anodowego i stosunek ten rośnie z rzędem harmoniczej.

Podobny wynik dały pomiary układu Colpittsa (rys. 8): współczynnik sprzężenia zwrotnego w stanie statycznym maleje z częstotliwością, zgod-



Rys. 8. Wyniki pomiaru generatora Colpittsa z lampą 6F5 przy  $f=1440$  c/s; współczynnik sprzężenia zwrotnego w stanie statycznym i dynamicznym, zniekształcenia napięcia anodowego i siatkowego oraz ich stosunek w funkcji rzędu harmoniczej.



Rys. 9. Wyniki pomiaru generatora Clappa z lampą 6F5 przy  $f=1440$  c/s; współczynnik sprzężenia zwrotnego w stanie statycznym i dynamicznym, zniekształcenia napięcia siatkowego i anodowego oraz ich stosunek w funkcji rzędu harmoniczej.

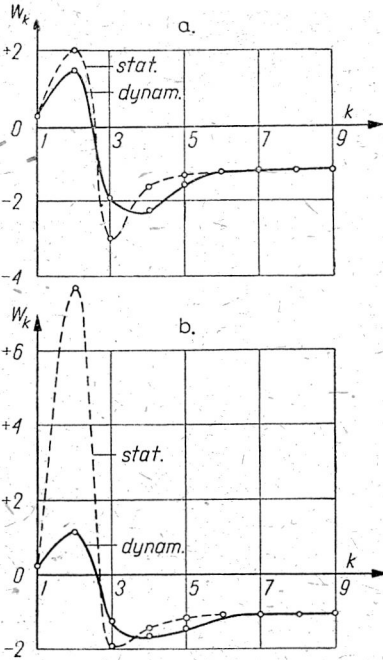
nie ze wzorem (18), podczas gdy w stanie dynamicznym ma on tendencję do dość silnego wzrostu; również i tu zniekształcenia napięcia anodowego i siatkowego maleją szybko z częstotliwością (o wiele szybciej niż w układzie Meissnera), chociaż wbrew przypuszczeniom wyższe harmoniczne ( $k \geq 3$ ) napięcia siatki są większe od harmonicznych napięcia anodowego, co do pewnego stopnia można tłumaczyć dodatnim sprzężeniem zwrotnym dla harmoniczych.

W układzie Clappa (rys. 9) statyczny współczynnik sprzężenia zwrotnego maleje szybko z częstotliwością, natomiast w stanie dynamicznym maleje o wiele powolniej i bardzo nieregularnie; harmoniczne napięcia anodowego i siatkowego maleją tu szybko, przy czym zazwyczaj utrzy-

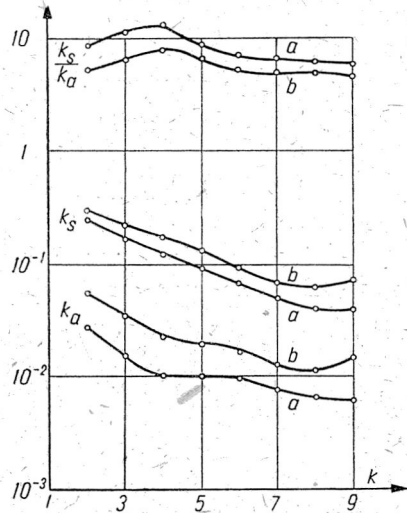
muje się stosunek  $k_s/k_a$  mniejszy od jedności i w zasadzie maleje on z częstotliwością mimo pewnych wahań.

Badanie układu Hartleya wykazało również znaczne rozbieżności między przebiegiem statycznej i dynamicznej wartości współczynnika sprzężenia zwrotnego; rozbieżności te są szczególnie duże dla harmonicznich niskich rzędów (2 i 3), przy czym są one tym większe, im większa jest

wartość  $\omega_1$  oraz indukcyjność  $L_s$ .  
Rys. 10 przedstawia przebieg współczynnika sprzężenia zwrot-



Rys. 10. Zależność współczynnika sprzężenia zwrotnego od rzędu harmonicznej dla układu Hartleya; a. przy  $L_s : L_a = 0,1$ , b. przy  $L_s : L_a = 0,2$ .



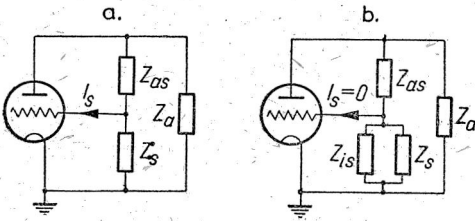
Rys. 11. Wyniki pomiaru generatora Hartleya z lampą 6F5 przy  $f=1440$  c/s; zniekształcenia napięcia siatkowego i anodowego oraz ich stosunek w funkcji rzędu harmonicznej; a. przy  $L_s : L_a = 0,1$ , b. przy  $L_s : L_a = 0,2$ .

nego dla stosunku  $L_s/L_a = 0,1$  oraz  $0,2$ ; z rysunku tego wyraźnie wynika, że istnieją poważne różnice między wartościami statycznymi i dynamicznymi, szczególnie duże dla 2. 3. harmonicznej. W układzie tym zawartość harmonicznich maleje ze wzrostem ich rzędu (rys. 11), ale zniekształcenia w obwodzie siatki są zawsze znacznie większe niż w obwodzie anodowym, zwłaszcza przy małej wartości  $\omega_1$ .

Z pomiarów tych wynika, że przebieg współczynnika sprzężenia zwrotnego jest zgodny z obliczeniem tylko dla stanu statycznego, natomiast w stanie dynamicznym odstępstwa są bardzo poważne. Wyjaśnienia zauważonych rozbieżności należy szukać we wpływie prądu siatki, który przepływając przez gałąź  $x_s$  powoduje zmianę sprzężenia zwrotnego.

## 6. WPŁYW WARTOŚCI PRĄDU SIATKI

Analizę generatora lampowego metodami nieliniowymi przeprowadza się zwykle przy założeniu, że prąd siatkowy jest równy zero, co uzasadniane jest małą wartością tego prądu w stosunku do wartości prądu anodowego. Uwzględnienie prądu siatki utrudnia ogromnie analizę generatora, gdyż prąd ten jest bardzo silnie zniekształcony, powoduje więc powstanie dodatkowych efektów nieliniowych.



Rys. 12. Układ zastępczy uwzględniający przepływ prądu siatkowego; a. układ rzeczywisty, b. układ zastępczy.

Działanie prądu siatki można przedstawić schematycznie (rysunek 12) jako działanie elementu o oporności zespolonej  $\hat{Z}_{is}$  dołączonej równolegle do oporności elementu  $\hat{Z}_s$  dzielnika napięć sprzężenia zwrotnego.

W wyniku dołączenia oporności  $\hat{Z}_{is}$  do dzielnika napięć następuje na nim zmiana podziału napięcia, czyli zmiana wartości współczynnika sprzężenia zwrotnego wyrażona wzorem

$$\hat{w}' = \frac{\hat{Z}_s}{\hat{Z}_s + \hat{Z}_{as}} \cdot \frac{\hat{Z}_{is}}{\hat{Z}_{is} + \frac{\hat{Z}_{as} \cdot \hat{Z}_s}{\hat{Z}_{as} + \hat{Z}_s}} = \hat{w} \frac{\hat{Z}_{is}}{\hat{Z}_{is} + \frac{\hat{Z}_{as} \cdot \hat{Z}_s}{\hat{Z}_s + \hat{Z}_{as}}} \quad (21)$$

Wpływ prądu siatki na wartość współczynnika sprzężenia zwrotnego jest więc tym większy, im większa jest wartość tego prądu i im większa jest oporność  $\hat{Z}_s$ , co jasno wynika z tego wzoru. Wobec wybitnie nieliniowego przebiegu prądu siatki wzór (21) można traktować tylko jako orientacyjny, w rzeczywistości należy się spodziewać szczególnie dużego wpływu prądu siatki na napięcia harmoniczne w obwodzie siatki i w obwodzie anody. Własności generatora będą więc zależeć nie tylko od wartości prądu siatki ale i od kształtu jego impulsów, zależnego od kształtu charakterystyki prądu siatki i od wartości elementów jego obwodu.

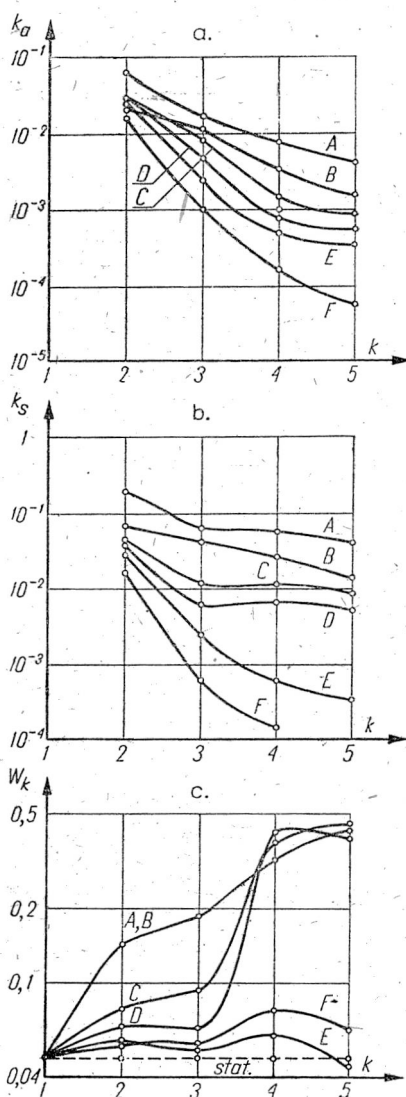
Ponieważ ilościowe określenie wpływu prądu siatki nie jest możliwe za pomocą metod matematycznych ze względu na skomplikowane wzory otrzymywane metodami nieliniowymi, wobec tego przeprowadzono szereg pomiarów typowych układów generacyjnych.

Pierwszą serię pomiarów wykonano zmieniając wartość oporu siatkowego przy stałych innych wartościach układu generacyjnego; mierzono

przy tym za pomocą analizatora harmonicznego wartości poszczególnych składowych napięcia anodowego i siatkowego i obliczano stąd wartość współczynnika sprzężenia zwrotnego.

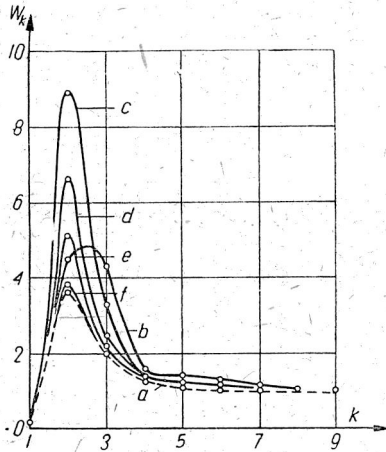
Wyniki pomiarów dla układu Meissnera przedstawia rys. 13c; współczynnik sprzężenia zwrotnego wzrasta z rzędem harmonicznego, przy czym jednak wzrost ten jest tym powolniejszy, im większa jest oporność  $R_g$ ; prawie stałą wartość  $w_k$  otrzymuje się dopiero przy wartościach oporu siatkowego rzędu 10 M $\Omega$ . Z tego wynika, że wpływ prądu siatki na własności generatora jest duży, nawet jeżeli jego wartość jest rzędu 1  $\mu$ A, a więc jest przeszło 1000-krotnie mniejsza od wartości prądu anodowego. Zwiększanie oporu siatkowego daje równocześnie bardzo widoczne zmniejszenie zniekształceń napięcia anodowego i siatkowego (rys. 13 a i 13 b), prawie równomiernie dla wszystkich składowych harmonicznego.

Podobne wyniki otrzymuje się dla innych układów, np. dla układu Hartleya (rys. 14) przebieg współczynnika sprzężenia zwrotnego dąży do wartości statycznej przy wzroście oporu siatkowego, przy czym wartość tę osiąga już przy  $R_g=1$  M $\Omega$ . Większe rozbieżności wartości współczynnika  $w_k$  występują tu tylko dla drugiej i trzeciej harmonicznego, natomiast dla harmonicznego wyższych rzędów  $w_k$  prawie nie zależy od wartości oporu siatkowego. W układzie Colpittsa (rys. 15) przebiegi są o wiele bardziej złożone, gdyż przy małych wartościach oporu  $R_g$  współczynnik sprzężenia zwrot-

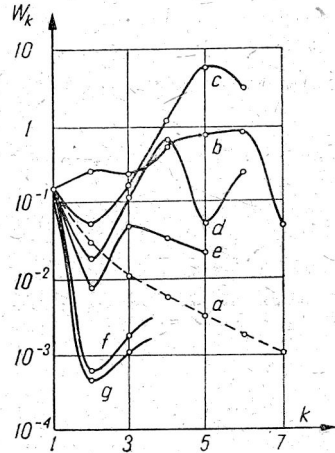


Rys. 13. Wpływ oporu siatkowego na właściwości generatora Meissnera przy  $f=2880$  c/s; a. zniekształcenia napięcia anodowego, b. zniekształcenia napięcia siatki, c. współczynnik sprzężenia zwrotnego. Wartości oporu siatkowego: A — 7 k $\Omega$ , B — 100 k $\Omega$ , C — 500 k $\Omega$ , D — 1 M $\Omega$ , E — 10 M $\Omega$ , F — 100 M $\Omega$ .

nego jest zawsze większy od wartości statycznej, przy większych ( $R_g \geq 1 \text{ M}\Omega$ ) staje się on od niej mniejszy; otrzymane krzywe są jednak mało regularne, zaznacza się uwydatnianie pewnych składowych wywołane wyraźną przewagą nieparzystych harmonicznych napięcia anodowego.



Rys. 14. Wpływ wartości oporu siatkowego na współczynnik sprzężenia zwrotnego układu Hartleya przy  $f=1440 \text{ c/s}$ ; krzywa a. pomiar statyczny, b.  $-R_g=7 \text{ k}\Omega$ , c.  $-R_g=35 \text{ k}\Omega$ , d.  $-R_g=100 \text{ k}\Omega$ , e.  $-R_g=500 \text{ k}\Omega$ , f.  $-R_g=1 \text{ M}\Omega$ .



Rys. 15. Wpływ wartości oporu siatkowego na współczynnik sprzężenia zwrotnego układu Colpittsa przy  $f=1440 \text{ c/s}$ : a. pomiar statyczny, b.  $-R_g=7 \text{ k}\Omega$ , c.  $-R_g=35 \text{ k}\Omega$ , d.  $-R_g=100 \text{ k}\Omega$ , e.  $-R_g=500 \text{ k}\Omega$ , f.  $-R_g=1 \text{ M}\Omega$ , g.  $-R_g=10 \text{ M}\Omega$ .

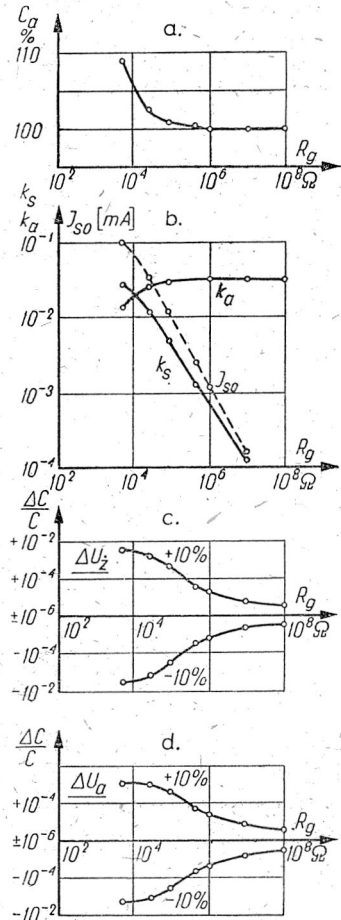
W zasadzie jednak i tu różnica między wartością statyczną a dynamiczną współczynnika  $w_k$  jest tym mniejsza im większa jest wartość oporu  $R_g$ , czyli im mniejszy jest prąd siatkowy, co potwierdza wnioski wysnute z dyskusji wzoru (21).

Drugą serię pomiarów wykonano dla zbadania wpływu wartości oporu siatkowego na częstotliwość generatora, a mianowicie na jej wartość oraz stałość w odniesieniu do zmian napięć zasilających. Pierwszą własność badano doprowadzając częstotliwość generatora zawsze do ustalonej wartości za pomocą zmiennego kondensatora obwodu rezonansowego przy różnych wartościach oporu siatkowego. Zmiana pojemności kondensatora  $\Delta C$  jest miarą zmiany częstotliwości generatora wywołaną przez przepływ prądu siatki lampy generacyjnej, lub przez jego działanie reaktancyjne, co daje pewne wskazówki co do wartości efektu nieliniowego wywołanego przez prąd siatki. Stałość częstotliwości generatora badano przy zmianie napięcia żarzenia i napięcia anodowego (oddzielnie o  $\pm 10\%$ ) przy czym

mierzono zmianę pojemności kondensatora obwodu potrzebną do powrotu do pierwotnej częstotliwości pracy po zmianie odpowiedniego napięcia.

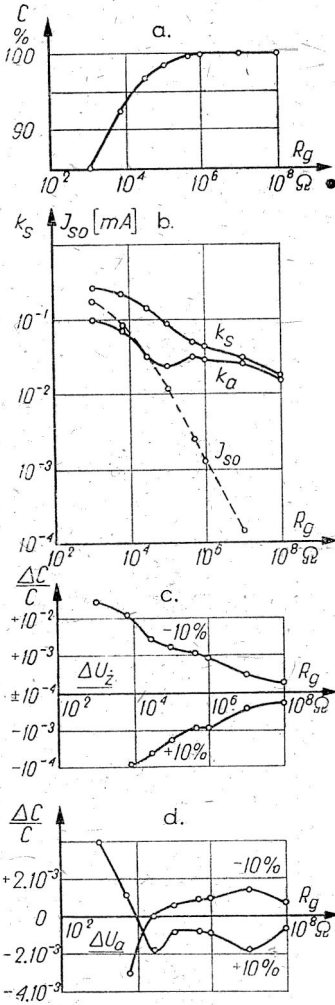
Rys. 16, 17 i 18 przedstawiają wyniki pomiarów w układzie Colpittsa, Meissnera i Hartleya. Wykresy *a* podają zależność względnej zmiany pojemności obwodu ( $\Delta C/C$ ) potrzebnej do utrzymania stałej częstotliwości generatora przy zmianie oporu siatkowego; przebiegi te dla wszystkich trzech układów są zupełnie podobne (pomijając znak zmian pojemności): nachylenie zmian maleje z wartością oporu  $R_g$ , osiągając wartość bliską zero powyżej 1 M $\Omega$ . Zmiana oporu  $R_g$  od  $10^4$  do  $10^6 \Omega$  daje w każdym układzie zmianę pojemności rzędu 6%, czyli bardzo znaczną. Dowodzi to, że efekt reaktancyjny prądu siatki jest bardzo silny i może powodować znaczne zmiany własności generatora. Efekt ten jest do pominięcia tylko przy bardzo dużych wartościach oporu siatkowego, powyżej kilku megomów. W praktyce efekt ten może powodować duże zmiany częstotliwości generatora przy zmianie oporu  $R_g$ , np. wywołanej zmianą temperatury lub zjawiskiem starzenia się opornika.

Wykresy *b* przedstawiają zależność współczynnika zniekształceń nieliniowych napięcia anodowego i siatkowego od wartości oporu  $R_g$ ; dla porównania wrysowano również przebieg składowej stałej prądu siatki  $I_{s0}$ . Najbardziej charakterystyczne zależności otrzymuje się dla układu Colpittsa (rys. 16): zniekształcenia napięcia siatkowego maleją ze wzrostem oporu  $R_g$  równoległe z krzywą prądu  $I_{s0}$ , natomiast zniekształcenia anodowe nieznacznie wzrastają. Widoczny tu jest wyraźnie wpływ prądu siatki, który powoduje zwiększenie zniekształceń w gałęzi siatki. Dla porównania przedstawiono na rys. 16c i 16d zmiany częstotliwości pod wpływem zmian napięcia żarzenia i anody: są one również pra-

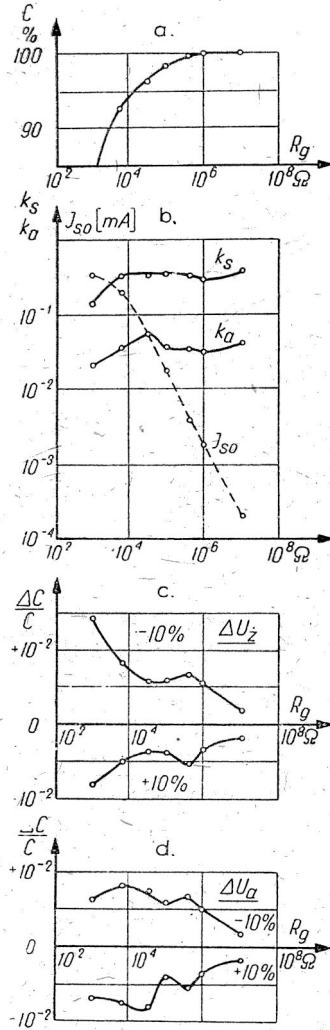


Rys. 16. Wpływ oporu siatkowego na właściwości generatora Colpittsa na lampie 6F5 przy  $f=1440$  c/s; *a*. wpływ oporu siatkowego na częstotliwość, *b*. współczynnik zniekształceń napięcia siatkowego i anodowego oraz składowa stała prądu siatki, *c*. odchylenia częstotliwości przy zmianach napięcia żarzenia i *d* przy zmianach napięcia anodowego.





Rys. 17. Wpływ oporu siatkowego na własności generatora Meissnera na lampie 6F5 przy  $f=2880$  c/s; a. wpływ oporu siatkowego na częstotliwość, b. współczynnik zniekształceń napięcia siatkowego i anodowego oraz składowa stała prądu siatki, c. odchylenia częstotliwości przy zmianach napięcia żarzenia, d. odchylenia częstotliwości przy zmianach napięcia anodowego.



Rys. 18. Wpływ oporu siatkowego na właściwości generatora Hartleya na lampie 6F5 przy  $f=1440$  c/s; a. wpływ oporu siatkowego na częstotliwość, b. współczynnik zniekształceń napięcia siatkowego i anodowego oraz składowa stała prądu siatki, c. odchylenia częstotliwości przy zmianach napięcia żarzenia, d. odchylenia częstotliwości przy zmianach napięcia anodowego.



wie dokładnie proporcjonalne do prądu siatki i do współczynnika zniekształceń napięcia siatki. Pomiaru te dowodzą, że w tym przypadku decydujący wpływ na stałość częstotliwości generatora wywiera działanie prądu siatki oraz wpływ zniekształceń napięcia siatkowego.

W układzie Meissnera (rys. 17) wartość oporu siatki wpływa na zniekształcenia zarówno anodowe jak i siatkowe, a mianowicie oba ulegają zmniejszeniu ze wzrostem oporu  $R_g$ . Zmniejszenie zniekształceń jest powolniejsze niż spadek prądu siatki oraz mniej regularne, mimo to polepszenie stałości częstotliwości w odniesieniu do zmian napięcia żarzenia jest zupełnie prawidłowe, chociaż mniejsze niż w układzie Colpittsa. Natomiast zmiany częstotliwości w odniesieniu do zmian napięcia anodowego mają przebieg dość nieregularny, połączony ze zmianą znaku, ale wyraźnie opadający.

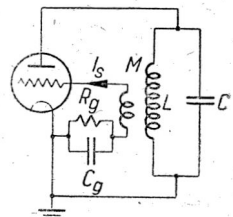
W układzie Hartleya (rys. 18 b) zniekształcenia anodowe i siatkowe wzrastają ze wzrostem oporu  $R_g$ , mimo zmniejszania się prądu siatki. Jest to — być może — związane z ujemnym sprzężeniem zwrotnym dla harmonicznych, występującym w tym układzie. Jest rzeczą charakterystyczną, że mimo wzrostu zniekształceń zmiany częstotliwości w odniesieniu do zmian napięć zasilających wyraźnie maleją, co również wskazuje na duży wpływ wartości prądu siatki.

Przeprowadzone pomiary wykazują, że wpływ wartości prądu siatkowego wynikający z doboru wartości  $R_g$ , na własności układu generacyjnego jest bardzo znaczny, niekiedy decydujący o stałości częstotliwości oraz o zniekształceniach napięcia generatora, zwłaszcza w obwodzie siatki.

## 7. WPŁYW KSZTAŁTU IMPULSÓW PRĄDU SIATKOWEGO

Po przeprowadzeniu pomiarów potwierdzających istnienie silnego wpływu wartości prądu siatki na właściwości generatora, należało sprawdzić wpływ kształtu impulsu tego prądu.

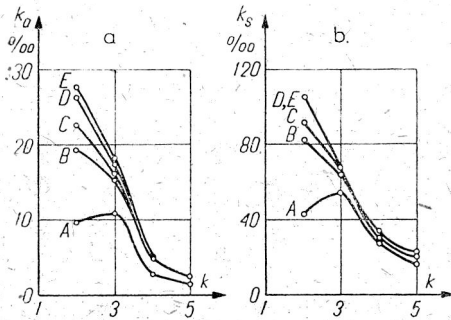
Prąd ten płynie w obwodzie podobnym do układu detekcji szczytowej (rys. 19), czyli przepływ prądu odbywa się krótkimi impulsami w pobliżu szczytu napięcia zmiennego. Kształt impulsu prądu siatkowego można określić jego kątem przepływu, który zależy od stosunku stałej czasowej obwodu siatkowego  $\tau_g = C_g R_g$  do okresu drgań generatora  $T_o$ ; stosunek ten wygodniej jest wyrazić iloczynem  $\tau_g f_o = \tau_g / T_o$ , w którym  $f_o$  jest częstotliwością drgań układu. Zmiana np. pojemności kondensatora  $C_g$  powoduje zmianę kąta przepływu a więc i kształtu impulsu prądu siatki, co powinno wywołać zmianę efektu reaktancyjnego tego prądu i zmianę zniekształceń napięcia generatora.



Rys. 19. Obwód siatkowy generatora.

Celem zbadania tego zagadnienia wykonano pomiary układów Meissnera i Hartleya, w których zmieniano pojemność  $C_g$  wykonując pomiary takie same jak opisane w poprzednim rozdziale.

Pomiary wykazały duży wpływ doboru stałej czasowej  $\tau_g$  w zakresie jej małych wartości w stosunku do okresu drgań, a mianowicie dla  $\tau_g f_0 < (5 \div 10)$ . Wartość stałej czasowej wpływa mianowicie na wartość poszczególnych składowych harmonicznych napięcia siatkowego i anodowego np. w układzie Meissnera następuje wyraźne ich zmniejszenie przy małej wartości  $\tau_g$  (zwłaszcza drugiej i trzeciej harmonicznej patrz rys. 20), natomiast np. w układzie Hartleya zniekształcenia wzrastają przy małej wartości stałej czasowej  $\tau_g$ .



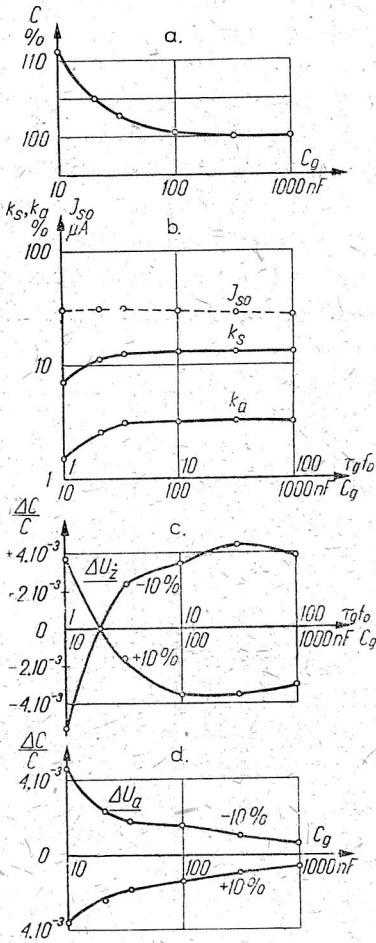
Rys. 20. Zniekształcenia napięcia anodowego (a) i napięcia siatkowego (b) generatora Meissnera ( $f=2880$  c/s) przy różnych wartościach pojemności  $C_g$ ; A — 10 nF, B — 20 nF, C — 33 nF, D — 100 nF, E — 1000 nF.

Zmiana stałej czasowej obwodu siatki wywołuje również znaczne działanie reaktancyjne objawiające się dużą zmianą częstotliwości generatora oraz zmianą stałości częstotliwości. Na rys. 21 i 22 podane są wyniki badania wpływu zmian pojemności kondensatora  $C_g$  na częstotliwość układu Meissnera i Hartleya.

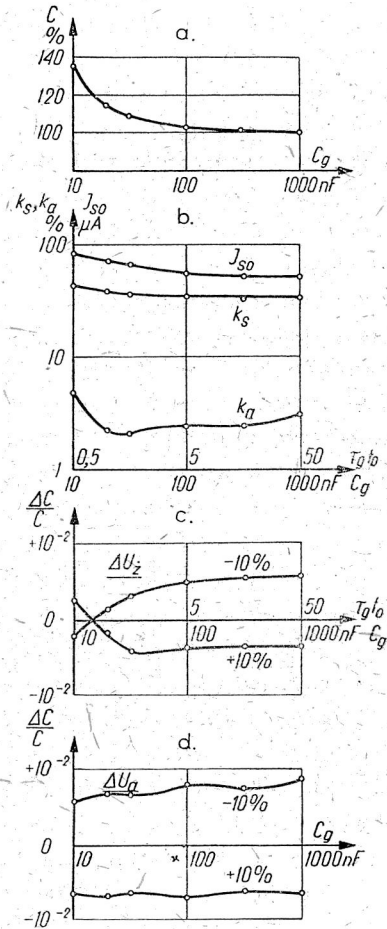
Wykresy te podają procentowe zmiany pojemności potrzebne do utrzymania stałej częstotliwości układu przy różnych wartościach iloczynu  $\tau_g f_0$  (przy różnych wartościach  $C_g$ ). Krzywe te mają duże nachylenie przy małych wartościach  $C_g$ , maleje ono prawie do zera dopiero przy  $\tau_g f_0 \geq (50 \div 100)$ , całkowite zaś zmiany pojemności są bardzo duże, dochodząc do kilkudziesięciu procent.

Pojemność  $C_g$  ma również duży wpływ na stałość częstotliwości w odniesieniu do zmian napięcia żarzenia (krzywe c), a mianowicie w funkcji  $C_g$  następuje zmiana znaku zmian częstotliwości przy małym  $\tau_g f_0$ . Dzięki temu otrzymuje się dobrą stałość częstotliwości przy zmianie napięcia żarzenia przy pewnej wartości  $\tau_g f_0$  (równiej 2,2 w układzie Meissnera oraz 0,8 w układzie Hartleya). Przez odpowiedni dobór wartości  $C_g$  można otrzymać w tych układach prawie zupełne uniezależnienie częstotliwości od napięcia żarzenia.

Wpływ pojemności  $C_g$  na stałość częstotliwości w odniesieniu do zmian napięcia anodowego jest bardzo mały (krzywe d) w obu układach, co wskazuje na inny mechanizm oddziaływania prądu siatki przy zmianach napięcia anodowego i napięcia żarzenia.



Rys. 21. Wpływ pojemności siatkowej  $C_g$  na właściwości generatora Meissnera na lampie 6F5 przy  $f=2880$  c/s; a. wpływ prądu siatkowego na częstotliwość, b. współczynnik zniekształceń, napięcia siatkowego i anodowego oraz składowa stała prądu siatki, c. odchylenia częstotliwości przy zmianach napięcia żarzenia, d. odchylenia częstotliwości przy zmianach napięcia anodowego.



Rys. 22. Wpływ pojemności siatkowej  $C_g$  na właściwości generatora Harteya na lampie 6F5 przy  $f=1440$  c/s; a. wpływ prądu siatkowego na częstotliwość, b. współczynnik zniekształceń napięcia siatkowego i anodowego oraz składowa stała prądu siatki, c. odchylenia częstotliwości przy zmianach napięcia żarzenia, d. odchylenia częstotliwości przy zmianach napięcia anodowego.

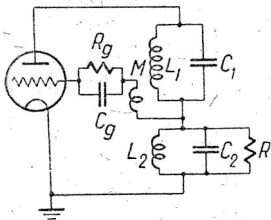
Zmiana pojemności  $C_g$  pozwala więc — jak wykazują wyniki powyższych pomiarów — na uzyskanie stabilizacji częstotliwości generatora w układzie Meissnera i Hartleya przy zmianach napięcia żarzenia, natomiast nie ma ona prawie żadnego wpływu na stałość częstotliwości w odniesieniu do zmian napięcia anodowego. Własność tę można wyzyskać do niezależnego nastawienia stałości częstotliwości układu w funkcji napięcia żarzenia przy pomocy zmiany pojemności  $C_g$ , oraz w funkcji napięcia anodowego przez zmianę jakiegś innej wielkości układu.

W układzie Colpittsa wpływ wartości  $C_g$  jest innego rodzaju. Mianowicie przy małych wartościach  $\tau_g f_0$  następuje znaczne zwiększenie zmian częstotliwości w funkcji napięcia żarzenia (bez zmiany znaku); również i w tym układzie  $C_g$  wpływa tylko nieznacznie na stałość częstotliwości w funkcji napięcia anodowego.

Wykonane serie pomiarów potwierdzają w zupełności hipotezę o dużym wpływie wartości i kształtu prądu siatkowego na właściwości generatora ze sprzężeniem zwrotnym, a więc na zniekształcenia jego napięcia oraz na stałość częstotliwości przy zmianach napięć zasilania, co świadczy o istnieniu silnego efektu reaktancyjnego prądu siatki.

## 8. UJEMNE SPRZEŻENIE ZWROTNE DLA HARMONICZNYCH

Na możliwość wykorzystania ujemnego sprzężenia zwrotnego dla częstotliwości harmonicznych wskazał po raz pierwszy Groszkowski [4] oraz podał układ (rys. 23), będący modyfikacją układu Meissnera; dodatkowo

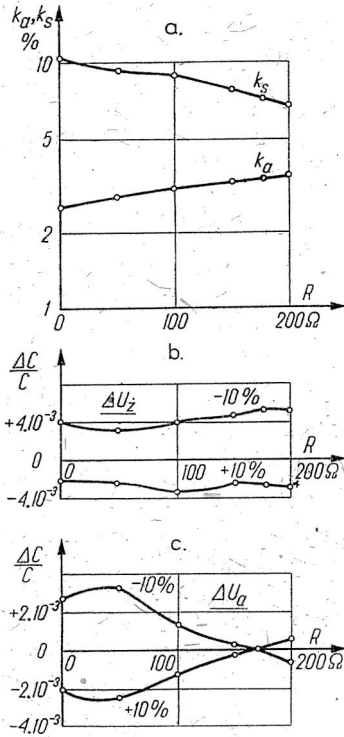


Rys. 23. Układ generatora Meissnera z ujemnym sprzężeniem zwrotnym dla harmonicznych podany przez Groszkowskiego [4].

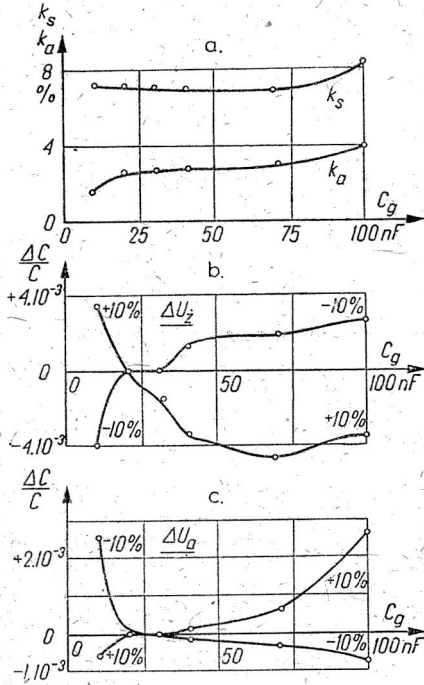
sprzężenie zwrotne, potrzebne do wzbudzenia układu uzyskuje się przez sprzężenie indukcyjne z jednym obwodem rezonansowym o dużej dobroci, dodatkowe ujemne sprzężenie zwrotne powstaje przez włączenie na siatkę napięcia z drugiego obwodu rezonansowego o małej dobroci. Dzięki pobieraniu ujemnego sprzężenia zwrotnego z obwodu rezonansowego jest ona niezmienna dla częstotliwości podstawowej, natomiast duże dla częstotliwości harmonicznych, co pozwala na otrzymanie dobrej stałości częstotliwości przy zmianach napięć zasilania. Pewną wadą układu jest konieczność stosowania dwóch obwodów rezonansowych dostrojonych do tej samej częstotliwości oraz trudność równoczesnego otrzymania dobrej stałości częstotliwości dla zmian napięcia anodowego i żarzenia.

Celem poprawy własności układu, a więc celem otrzymania równoczesnej stałości częstotliwości przy zmianach napięcia anody i żarzenia

postanowiono wykorzystać wpływ kształtu impulsu prądu siatki przy różnych wartościach pojemności  $C_g$ . Wykonano najpierw pomiary układu przy stałej wartości  $C_g$  zmieniając wartość oporu  $R$  bocznikującego dolny obwód rezonansowy. Otrzymane wyniki (rys. 24) wykazują duży wpływ



Rys. 24. Właściwości generatora Meissnera ze sprzężeniem zwrotnym ujemnym w funkcji oporu bocznikującego  $R$ , a. zniekształcenia napięcia siatkowego i anodowego, b. niestalość częstotliwości przy zmianach napięcia żarzenia, c. niestalość częstotliwości przy zmianach napięcia anodowego.

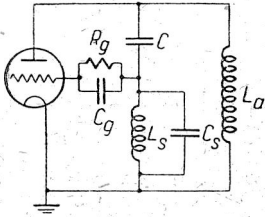


Rys. 25. Zależność właściwości generatora Meissnera z ujemnym sprzężeniem zwrotnym od wartości pojemności  $C_g$ : a. zniekształcenia napięcia anodowego i siatkowego, b. niestalość częstotliwości przy zmianach napięcia żarzenia, c. niestalość częstotliwości przy zmianach napięcia anodowego.

ujemnego sprzężenia zwrotnego na zmiany częstotliwości w funkcji napięcia anodowego i zmianę ich znaku przy  $R=175 \Omega$ , natomiast na zmiany wywołane napięciem żarzenia sprzężenie zwrotne prawie nie wpływa. Ujemne sprzężenie zwrotne zmienia również znacznie zniekształcenia na-

pięcia, a mianowicie wzrastają zniekształcenia napięcia anodowego, natomiast maleją zniekształcenia napięcia siatki, co prowadzi do polepszenia stałości częstotliwości.

Następnie badano wpływ pojemności siatkowej  $C_g$  na stałość częstotliwości, przy czym najkorzystniejsze warunki pracy uzyskano przy  $R = 220 \Omega$ , przedstawione na rys. 25 w funkcji pojemności  $C_g$ . Otrzymuje się tu wyraźnie sprowadzenie zmian częstotliwości



Rys. 26. Układ generatora Hartleya z ujemnym sprzężeniem zwrotnym dla harmonicznych.

do zera (przy  $\tau_g f_0 \approx 2,0$ ) dla zmian napięcia zarzenia i anody, przy czym obszar optymalny jest tu dość szeroki, zwłaszcza dla zmian napięcia anodowego. W ten sposób przez wykorzystanie ujemnego sprzężenia oraz reaktancyjnego działania prądu siatki uzyskuje się układ łatwy do regulacji i mający dobrą stałość częstotliwości.

Analiza układu Hartleya wykazuje istnienie ujemnego sprzężenia zwrotnego dla wyższych harmonicznych, podczas gdy dla harmonicznych niskich rzędów (przede wszystkim dla drugiej) sprzężenie zwrotne jest dodatnie i to o dużej wartości.

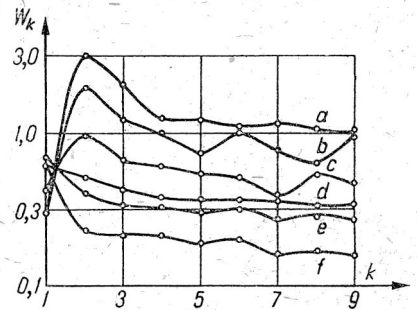
Z tego powodu działanie ujemnego sprzężenia zwrotnego jest nikłe i układ ma małą stałość częstotliwości. Przez niewielką modyfikację układu można jednak otrzymać ujemne sprzężenie zwrotne dla wszystkich harmonicznych, a mianowicie przez włączenie kondensatora o pojemności  $C_s$  (rys 26) równolegle do indukcyjności  $L_s$ ; wartość pojemności  $C_s$  powinna być taka, by układ  $L_s C_s$  przedstawiał zastępczą oporność indukcyjną dla częstotliwości drgań, natomiast oporność pojemnościową dla wszystkich harmonicznych.

Warunek ten będzie spełniony, gdy

$$f_0 < \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_s}} < 2f_0$$

lub

$$C_{srez} > C_s > \frac{1}{4} C_{srez}$$

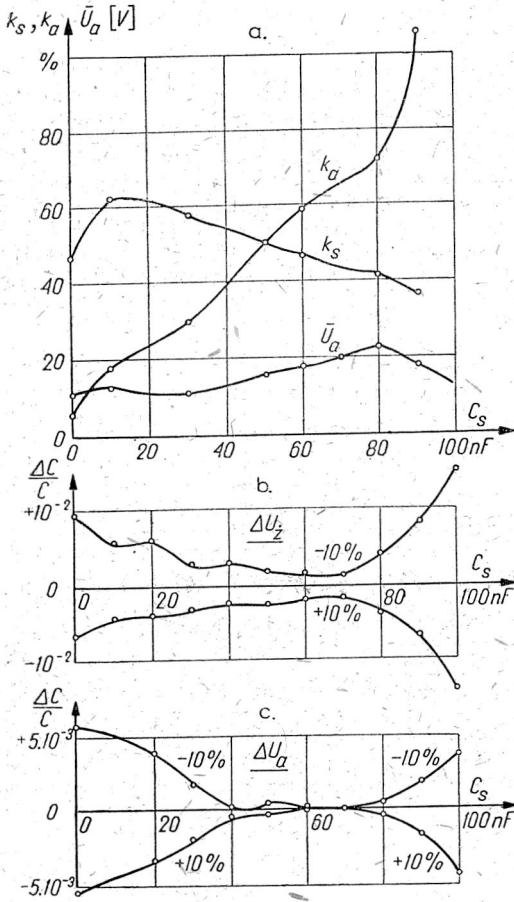


Rys. 27. Współczynnik sprzężenia zwrotnego układu z rys. 26 przy różnych wartościach pojemności  $C_s$ : a. 0, b. 10 nF, c. 30 nF, d. 60 nF, e. 70 nF, f. 100 nF.

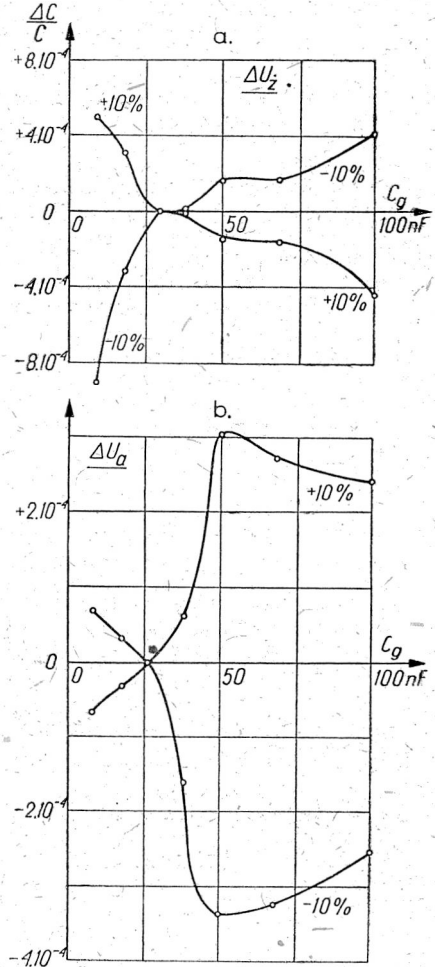
Układ badano zmieniając wartość  $C_s$  od zera do 100 nF (ok.  $0,85 C_{srez}$ ), przy czym stwierdzono bardzo wybitny wpływ ujemnego sprzężenia zwrotnego na wszystkie własności wzmacniacza. Na rys. 27 podany jest



przebieg współczynnika sprzężenia zwrotnego układu przy różnych wartościach  $C_s$ ; widoczny jest wyraźnie coraz silniejszy wpływ ujemnego



Rys. 28. Zależność właściwości generatora Hartleya z ujemnym sprzężeniem zwrotnym od wartości pojemności  $C_s$ : a. zniekształcenia napięcia siatkowego i anodowego, b. niestaość częstotliwości przy zmianach napięcia żarzenia, c. niestaość częstotliwości przy zmianach napięcia anodowego.



Rys. 29. Zależność niestaości częstotliwości generatora Hartleya z ujemnym sprzężeniem zwrotnym od wartości pojemności siatkowej  $C_g$ : a. przy zmianach napięcia żarzenia, b. przy zmianach napięcia anodowego.

sprzężenia zwrotnego przy większych  $C_s$ , objawiający się zmniejszeniem  $w_k$  dla harmonicznnych przy wzroście wartości  $w_1$ . Ujemne sprzężenie zwrotne powoduje zmniejszenie zniekształceń napięcia siatkowego (rys. 28a)



przy bardzo silnym wzroście zniekształceń napięcia anodowego. Zmiany częstotliwości zależne od napięcia anodowego są prawie równe zeru w szerokim zakresie zmian  $C_s$  (rys. 28c), również i zmiany zależne od napięcia żarzenia ulegają dużemu zmniejszeniu, choć nie osiągają zera. Ujemne sprzężenie zmniejsza zmiany częstotliwości w dużym stopniu, lecz nie daje ich całkowitego usunięcia.

Poprawę własności układu uzyskano przez odpowiedni dobór pojemności kondensatora  $C_g$ . Wpływ wartości  $C_g$  na stałość częstotliwości badano przy znalezionej poprzednio optymalnej — ze względu na wpływ napięcia anodowego — wartości  $C_s = 60$  nF; wyniki pomiarów przedstawione na rys. 29 wykazują możliwość znalezienia wartości  $C_g$  (30 nF), przy której uzyskuje się równocześnie dobrą stabilizację częstotliwości w odniesieniu do zmian napięcia anodowego i napięcia żarzenia.

Układ ten jest bardzo prosty i łatwy do nastawienia, gdyż stabilizację częstotliwości w odniesieniu do napięcia anodowego osiąga się przez dobór wartości  $C_s$ , stabilizację zaś w odniesieniu do napięcia żarzenia przez dobór pojemności  $C_g$ , przy czym dobór obu pojemności nie jest krytyczny. W ten sposób uzyskuje się dobrą stałość częstotliwości generatora przez równoczesne wykorzystanie ujemnego sprzężenia zwrotnego i reaktancyjnego wpływu prądu siatkowego.

## 9. WNIOSKI

Przeprowadzona analiza generatorów ze sprzężeniem zwrotnym oraz pomary typowych układów wykazały istnienie efektów nieliniowych, zależnych od wartości współczynnika sprzężenia zwrotnego dla częstotliwości roboczej i harmonicznych, których mechanizm działania podobny jest do zjawisk powstających w układach reaktancyjnych. Te efekty reaktancyjne wywierają wpływ na zniekształcenia nieliniowe napięcia anodowego i siatkowego oraz na częstotliwość generatora i jej stałość w funkcji napięć zasilających. Stwierdzono szczególnie duży wpływ wartości prądu siatki i kształtu jego impulsu na te właściwości układu, przy czym prąd ten, jak wynika z pomiarów, ma w wielu przypadkach decydujący wpływ na stałość częstotliwości generatora.

*Politechnika Śląska  
Gliwice*

## WYKAZ LITERATURY

- [1.] D r o b o w S. A.: Radiopieredajuszczije ustrojstwa — Moskwa 1951.
- [2.] G r o s z k o w s k i J.: Zmiany częstotliwości a zawartość harmonicznych w układach oscylacyjnych — Przegl. Radiot. t. 10, z. 23/24, 1932 i t. 11, z. 1/2, 3/4, 1933.
- [3.] G r o s z k o w s k i J.: Generacja i stabilizacja częstotliwości — Warszawa 1951.

- [4.] Groszkowski J.: Generatory wielkiej stałości częstotliwości z ujemnym sprzężeniem zwrotnym — Archiwum Elektrotechniki, t. I, z. 1.  
 [5.] Jewtjanow S. I.: Raszot czastoty awtokolebanij — Radiotekhnika, z. 2, 1946.  
 [6.] Jewtjanow S. I.: Radiopieredajuszczije ustrojstwa — Moskwa 1951.  
 [7.] Zagajewski T.: Analiza pracy generatorów samowzbudnych metodą współczynników nieliniowych — Prace P. I. T., t. 2, nr 3, s. 1, 1951.  
 [8.] Zagajewski T.: Efekty nieliniowe w lampowych układach reaktancyjnych — Archiwum Elektrotechniki, t. I, z. 2.  
 [9.] Zagajewski T.: Wpływ stałych obwodu generatora samowzbudnego na stałość jego częstotliwości — Prace P. I. T., t. 2, nr 5, s. 3, 1951.

## DODATEK I

CZĘSTOTLIWOŚĆ LINIOWEGO GENERATORA  
ZE SPRZEŻENIEM ZWROTNYM

W zasadniczym równaniu generatora (8)

$$\varrho + K\hat{w}_1 \hat{Z} + \hat{Z} = 0 \quad (\text{I. 1})$$

podstawiamy na  $\hat{w}$  i  $\hat{Z}$  wartości określone wzorami (6) i (7) otrzymując wyrażenie

$$\varrho + \frac{\hat{Z}_a (\hat{Z}_s + \hat{Z}_{as})}{\hat{Z}_a + \hat{Z}_s + \hat{Z}_{as}} \left[ K \frac{\hat{Z}_s}{\hat{Z}_s + \hat{Z}_{as}} + 1 \right] = 0. \quad (\text{I. 2})$$

Określamy warunek fazy układu przez przyrównanie do zera urojonej części tego równania, przy czym wprowadza się oznaczenia

$$\hat{Z}_a = r_a + jx_a, \quad \hat{Z}_s = r_s + jx_s, \quad \hat{Z}_{as} = r_{as} + jx_{as},$$

$$R = r_a + r_s + r_{as}, \quad X = x_a + x_s + x_{as}.$$

Warunek fazy przybiera w ten sposób postać

$$\left| \frac{(r_a + jx_a) [r_{as} + jx_{as} + (K+1)(r_s + jx_s)]}{R + jX} \right|_i = 0; \quad (\text{I. 3})$$

po uwolnieniu mianownika od wyrazów urojonych otrzymuje się wzór

$$R [(K+1)(r_s x_a + r_a x_s) + r_{as} x_a + r_a x_{as}] - \\ - X [K+1)(r_a r_s - x_a x_s) + r_a r_{as} - x_a x_{as}] = 0,$$

z którego obliczamy

$$X = R \frac{r_a [x_{as} + (K+1)x_s] + x_a [r_{as} + (K+1)r_s]}{r_a [r_{as} + (K+1)r_s] - x_a [x_{as} + (K+1)x_s]}. \quad (\text{I. 4})$$

Podobnie określa się warunek amplitudy układu generacyjnego przez przyrównanie do zera rzeczywistej części równania (I. 2); w tym przy-

padku można założyć  $X=0$ , co jest dopuszczalne dla warunku amplitudy, gdyż wprowadza niewielki tylko błąd. Z warunku amplitudy otrzymuje się wzór, z którego można obliczyć sprzężenie zwrotne potrzebne do utrzymania drgań generatora

$$[(K+1)x_s + x_{as}] = \frac{\varrho R + r_a [(K+1)r_s + r_{as}]}{x_a} \quad (\text{I. 5})$$

Istnienie drgań układu możliwe jest tylko i wyłącznie przy równoczesnym spełnieniu obu podanych wyżej wzorów: warunku fazy (I. 4) oraz warunku amplitudy (I. 5). Można je połączyć w jeden konieczny i dostateczny warunek istnienia drgań liniowego układu generatora ze sprzężeniem zwrotnym przez podstawienie (I. 5) do (I. 4), w wyniku czego otrzymuje się wzór

$$X = R \frac{r_a \frac{\varrho R + r_a [(K+1)r_s + r_{as}]}{x_a} + x_a [(K+1)r_s + r_{as}]}{r_a [(K+1)r_s + r_{as}] - \varrho R - r_a [(K+1)r_s + r_{as}]}$$

Po uproszczeniu i uporządkowaniu wzór ten przybiera postać

$$X = - \left\{ \frac{r_a + r_s + r_{as}}{x_a} + \frac{r_a^2 [(K+1)r_s + r_{as}]}{\varrho x_a} + S_1 x_a \left[ r_s \left( 1 + \frac{1}{K} \right) + r_{as} \frac{1}{K} \right] \right\} \quad (\text{I. 6})$$

We wzorze tym można pominąć drugi wyraz jako o wiele mniejszy od pozostałych, a przeto można napisać z dobrym przybliżeniem

$$X \cong - \left\{ \frac{r_a + r_s + r_{as}}{x_a} + S_1 x_a \left[ r_s \left( 1 + \frac{1}{K} \right) + r_{as} \frac{1}{K} \right] \right\} \quad (\text{I. 7})$$

Ze znanych zależności dochodzi się stąd do ogólnego wzoru wyrażającego jednoznacznie częstotliwość drgań liniowego układu generatora ze sprzężeniem zwrotnym

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left\{ 1 - \omega_0 C \left[ \frac{r_a + r_s + r_{as}}{x_a} + S_1 x_a \left( r_s + \frac{r_s}{K} + \frac{r_{as}}{K} \right) \right] \right\} \quad (\text{I. 8})$$

w którym  $C$  jest zastępczą pojemnością odpowiedniej gałęzi obwodu rezonansowego generatora.

## DODATEK II

### EFEKTY NIELINIOWE W GENERATORZE ZE SPRĘŻENIEM ZWROTNYM

Zakładając nieliniową charakterystykę lampy wyrażoną wzorem (12), wartość sprzężenia zwrotnego wyrażoną wzorem (13) oraz ustalone niezkształcone napięcie anodowe wyrażone szeregiem harmonicznym (14),

otrzymuje się wzór określający przebieg prądu anodowego w postaci sumy wyrazów trygonometrycznych o różnych częstotliwościach harmonicznyc, podany w pracy autora [5]. Z wzoru tego obliczamy zawartości poszczególnych składowych harmonicznyc przy pominięciu pewnych wyrazów mniejszego rzędu. W ten sposób dochodzi się do wzorów wyrażających składową podstawową napięcia anodowego.

$$\bar{U}_{a1}^2 = -\frac{4}{3} \frac{\hat{Y}_{a1} + G_1 + \hat{w}_1 S_1}{G_3 + w_1^2 \hat{w}_1 S_3} \quad (\text{II. 1})$$

oraz współczynnik zawartości harmonicznyc napięcia anodowego

$$\hat{w}_k = \frac{[\hat{Y}_{a1} + G_1 + \hat{w}_1 S_1]^{\frac{k-1}{2}} \hat{F}_{1k}}{\hat{Y}_{ak} + G_1 + \hat{w}_k S_1} \quad (\text{II. 2})$$

lub

$$w_k = \frac{1}{S_1^2} \cdot \frac{w_1^{k-1} \left(1 - \frac{1}{\hat{q}}\right)^{k-1}}{\left[\hat{w}_k + \frac{1}{K} + \frac{1}{S_1 \hat{Z}_{ak}}\right]^2} \hat{F}'_{1k} \quad (\text{II. 3})$$

gdzie  $\hat{q} = \frac{-\hat{w}_1 K}{1 + \hat{q}/\hat{Z}_{a1}}$  jest współczynnikiem przewzbudzenia układu. (II. 4)

Lepsze przybliżenie powyższych wzorów otrzymuje się przez uwzględnienie większej ilości wyrazów harmonicznyc ogólnego wzoru. I tak, składową podstawową prądu anodowego można wyrazić wzorem

$$I_{a1} = \bar{U}_{a1} \left\{ G_1 \sin \omega t + w_1 S_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + \frac{3}{4} \bar{U}_{a1}^2 [G_3 \sin \omega t + w_1^3 S_3 \sin(\omega t + \gamma_1)] + \right. \\ \left. + \bar{U}_{a2} [G_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + w_1 w_2 S_2 \cos(\omega t + \varphi_2 + \gamma_1 + \gamma_2)] + \right. \\ \left. + \bar{U}_{a2} \bar{U}_{a1} [G_3 \sin(\omega t - \varphi_2 + \varphi_4) + w_1 w_2 w_4 S_3 \sin(\omega t - \varphi_2 - \varphi_4 - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_4)] + \dots \right\}$$

Te wyrazy wzoru (II. 5), które zawierają wyższe harmoniczne napięcia, zastąpimy — uwzględniając (II. 2) — wyrażeniem

$$\hat{N}'_2(\hat{w}_k, \hat{Y}_{ak}, S_k, G_k) = \hat{N}'_2.$$

Uwzględniając to przepisujemy wzór (II. 5) w postaci symbolicznej

$$\hat{I}_{a1} = \hat{U}_{a1} e^{j\omega t} \left\{ G_1 + \hat{w}_1 S_1 + \frac{3}{4} \bar{U}_{a1}^2 [G_3 + w_1^2 \hat{w}_1 S_3] + \hat{N}'_2 \right\}.$$

Na podstawie znanej zależności

$$\hat{I}_{a1} = -\hat{Y}_{a1} \hat{U}_{a1}$$

dochodzi się do dokładniejszego wzoru wyrażającego składową podstawową napięcia anodowego

$$\bar{U}_{a1}^2 = -\frac{4}{3} \frac{\hat{Y}_{a1} + G_1 + \hat{w}_1 S_1 + \hat{N}'_2}{G_3 + w_1^2 \hat{w}_1 S_3} = -\frac{4}{3} \frac{\hat{Y}_{a1} + G_1 + \hat{w}_1 S_1 + \hat{N}'_2}{\hat{N}'_1 (\hat{w}_1, S_3, G_3)}. \quad (\text{II. 6})$$

W podobny sposób dochodzi się do ogólnego wzoru na zawartość harmoniczných napięcia anodowego

$$m_k^2 = \frac{[\hat{Y}_{a1} + G_1 + \hat{w}_1 S_1 + \hat{N}'_2]^{k-1}}{\hat{N}'_1 [\hat{Y}_{ak} + G_1 + \hat{w}_k S_1]^2} \hat{F}_{2k}, \quad (\text{II. 7})$$

który można przekształcić za pomocą wyrażenia (II. 4) i przedstawić w postaci

$$m_k^2 = Z_{ak}^2 \frac{w_1^{k-1} \left[ 1 - \frac{1}{\hat{q}} + \hat{N}'_2 \right]^{k-1}}{\hat{N}'_1 \left[ \left( \hat{w}_k + \frac{1}{K} \right) \hat{Z}_{ak} + \frac{1}{S_1} \right]^2} \hat{F}_{2k}. \quad (\text{II. 8})$$

T. ЗАГАЕВСКИ

## ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕАКТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ГЕНЕРАТОРАХ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Резюме

Общеизвестно большое влияние генераторной лампы на свойства генератора с обратной связью. Влияние это может быть доказано линейным, а равно и нелинейным методом, но его физическое изъяснение неудовлетворительно. Автор предпринял попытку изъяснения влияния лампы на частоту генератора, пользуясь реактивным эффектом, производимым лампой на резонансный контур, ибо лампа представляет некоторый импеданс, величина которого зависит от условий работы, вследствие чего изменяется резонансная частота контура и частота колебаний генератора. Можно здесь указать на аналогию с реактивными лампами, в которых происходят — как доказал это автор в своём предыдущем труде [8] — весьма схожие явления.

Полагая прямолинейную характеристику лампы, можно выразить частоту генератора формулой выведенной из основного уравнения системы с обратной связью

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left\{ 1 - \omega_0 C \left[ \frac{(r_a + r_s + r_{as})r_a}{x_a} + x_a S_1 \left( r_s + \frac{r_s}{K} + \frac{r_{as}}{K} \right) \right] \right\} \quad (1)$$

Частота колебаний системы отклоняется от собственной частоты резонансного контура под влиянием следующих факторов:

а- вследствие сопротивлений затухания отдельных ветвей, которые изменяют его резонансную частоту на величину

$$\Delta_1 \omega = -\frac{1}{2} \omega_0 C \frac{(r_a + r_s + r_{as})r_a}{x_a} \quad (2)$$

б- вследствие воздействия генераторной лампы, которое выражается формулой

$$\Delta_2 \omega = -\frac{1}{2} \omega_0 C S_1 \left[ r_s \left( 1 + \frac{1}{K} \right) + \frac{r_{as}}{K} \right] x_a \quad (3)$$

Влияние это можно интерпретировать как реактивное влияние лампы, т. к. оно проявляется только тогда, когда,  $r_s \neq 0$  и  $r_{as} \neq 0$ , т. е. когда (рис. 3) анодный ток сдвинут в фазе по отношению к анодному напряжению на угол не равняющийся нулю.

Полагая, что нелинейная характеристика лампы выражается рядом

$$i_a = S_1 u_s + S_2 u_s^2 + S_3 u_s^3 + G_1 u_a + G_2 u_a^2 + G_3 u_a^3 \quad (4)$$

можно рассчитать частоту генератора по указанному автором методу [7], пользуясь формулой

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} Z_{ak}^2 \frac{\omega_1^{k-1} \left[ 1 - \frac{1}{\hat{q}} + \hat{N}_2 \right]^{k-1} \hat{F}_{2k}}{\hat{N}_1 \cdot \left[ \left( \hat{\omega}_k + \frac{1}{K} \right) \hat{Z}_{ak} + \frac{1}{S_1} \right]^2 S_1^2} F_1(x) \quad (5)$$

где

$$\hat{\omega}_k = \frac{\hat{Z}_{sk}}{\hat{Z}_{sk} + \hat{Z}_{ask}} \quad \text{— коэффициент обратной связи,}$$

$$\hat{q} = \frac{-\hat{\omega}_1 \cdot K}{1 + \frac{\hat{q}}{\hat{Z}_a}} \quad \text{— коэффициент перевозбуждения,}$$

- $F_1, \hat{F}_{2k}$  — постоянные, зависящие от данных системы.
- $\hat{N}_1$  — коэффициент выражающий влияние нелинейных постоянных (параметров) лампы и зависящий от коэффициента обратной связи системы для частоты колебаний  $\omega_1$ ,
- $\hat{N}_2$  — коэффициент, выражающий влияние нелинейных параметров лампы и зависящий от коэффициентов обратной связи системы для гармонических частот  $\omega_k$ .

Формуле (5) можно дать следующую физическую интерпретацию. Коэффициент  $N_1$  — выражает влияние нелинейности характеристики лампы на частоту генератора, вызванное первичным реактивным эффектом, т. е. зависимостью реактанса лампы от величины переменного сеточного напряжения (или от средней величины крутизны характеристики лампы); коэффициент  $N_2$  — представляет влияние вторичного нелинейного эффекта, т. е. влияние гармоник сеточного напряжения на частоту генератора. Кроме того существует еще общеизвестное [2, 3] влияние расплыва гармонических токов в резонансном контуре и влияние их реактивной мощности.

При такой интерпретации формулы (5) следует обратить внимание на ветвь обратной связи, на величину коэффициента обратной связи для частоты колебаний и её гармоник, а также на величину переменного сеточного напряжения.

На опыте доказано существование первичного реактивного эффекта в ламповом генераторе с гептодом 6Л7; ибо в этой лампе легко найти точку перегиба характеристики, в которой происходит перемена знака нелинейных коэффициентов [5], тогда как в триоде трудно получить такие условия. В исследуемом генераторе, в точке перегиба характеристики, получена перемена знака отклонений частоты (рис. 4а), вызванных изменением анодного напряжения; в той же точке происходит изменение адмиттанса этой лампы в реактивной системе (рис. 4 б), что служит доказательством первичного нелинейного эффекта.

Затем исследована была кривая коэффициента обратной связи как функция частоты для основных генераторных систем; на рис. 6 показана эта зависимость, рассчитанная для системы Мейснера, Кольпитса и Клаппа ( $w_k > 0$  для всех гармоник) и для системы Гартли (здесь для высоких гармоник  $w_k < 0$ , а следовательно обратная связь отрицательна).



Измерение коэффициента обратной связи для этих систем производилось в состоянии покоя (лампа не действует) и оно дало результаты согласные с расчётом, но в динамическом состоянии генератора величина этого коэффициента даёт очень значительные отклонения от рассчитанных величин (рис. 7, 8, 9, 10, 11). Измерения — производились на малой частоте (1440 или 2880 гц) при помощи анализатора гармоник: измеряемы были гармонические составляющие сеточного напряжения ( $k_s$ ), анодного напряжения ( $k_a$ ) и коэффициент обратной связи  $w_k$ .

Причину замеченных отклонений следует искать во влиянии сеточного тока, текущего по ветви обратной связи (рис. 12), и вызывающего изменение коэффициента обратной связи и искажений генератора. Проверено было это подобными измерениями при разных величинах сеточного сопротивления  $R_g$  в системах Мейсснера, Гартли и Кольпитса (рис. 13, 14 и 15); величины  $w_k$  тем ближе статической (рассчитанной) величины, чем больше сеточное сопротивление ( $R_g$ ), а следовательно чем меньше сила сеточного тока.

Подобным образом проверено влияние величины сеточного тока на частоту генератора и на его постоянство при изменениях питающих напряжений для систем Кольпитса, Мейсснера, и Гартли (рис. 16, 17, 18). Замечено весьма сильное реактивное влияние сеточного тока дающее изменения ёмкости порядка до  $10^0\%$ , а также взаимную зависимость сеточного тока и отклонений частоты, в особенности при изменениях напряжения накала.

Реактивный эффект сеточного тока должен также зависеть от его формы, которая является функцией постоянной времени сеточного контура  $\tau_g = R_g C_g$ . Найдено, что постоянная времени  $\tau_g$  имеет очень сильное влияние на устойчивость частоты по отношению к изменениям напряжения накала, при чём в системах Мейсснера и Гартли (рис. 21 и 22) при малом  $\tau_g$  ( $f_0 \cdot \tau_g = 1 \div 2$ ) происходит перемена знака отклонений частоты. Обстоятельство это можно использовать для стабилизации частоты генератора; так нпр. способ этот позволил улучшить качества генератора с отрицательной обратной связью для гармоник (Грошцовски [4]) рис. 24 и 25, благодаря возможности отдельного установления устойчивости по отношению к изменениям напряжения накала и анодного напряжения.

Исследовано было также влияние отрицательной обратной связи для частоты гармоник, встречающейся в системе Гартли. В обычной системе связь эта положительна для гармоник низкого порядка (2, 3) и поэтому свойств отрицательной обратной связи нельзя использовать. Параллельное присоединение конденсатора  $C_s$  (рис. 26) к катушке  $L_s$

в ветви обратной связи позволяет получить отрицательную обратную связь уже для второй гармоники, если

$$f_0 < \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_s}} < 2f_0$$

Система была исследована при изменениях  $C_s$ , причём возрастание вызывает уменьшение коэффициента обратной связи для гармоник (рис. 27) и улучшение устойчивости частоты (рис. 28 b и c), несмотря на значительное увеличение коэффициента нелинейных анодных искажений. При соответствующем изменении постоянной сеточного сопротивления  $R_g C_g$ , можно и здесь получить хорошую устойчивость, при одновременном изменении анодного напряжения и напряжения накала (рис. 29).

Результаты исследований подтверждают существование первичного и вторичного реактивных эффектов в генераторах с обратной связью, при значительном влиянии величины и формы сеточного тока и сеточного напряжения.

T. ZAGAJEWSKI

## LINEAR AND NONLINEAR REACTANCE EFFECTS IN FEEDBACK OSCILLATORS

### Summary

Although the influence of the oscillator valve parameters on the properties of the feedback oscillator can be shown by the analytical methods, its physical interpretation has been, so far, unsatisfactory. The author attempts to explain the influence of the oscillator valve on its oscillation frequency by the reactance effect, which the valve exerts on the resonant circuit. Since the impedance represented by the valve depends upon the operating point, its variation changes the resonant frequency and therefore the frequency of oscillations. There is here an analogy to the reactance valve circuits, which behave in a very similar manner as was shown by the author in his other work [8].

Assuming a linear valve characteristic the oscillator frequency is determined from the fundamental equation for the feedback circuit, as follows:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left\{ 1 - \omega_0 C \left[ \frac{(r_a + r_s + r_{as}) r_a}{x_a} + x_a S_1 \left( r_s + \frac{r_s}{K} + \frac{r_{as}}{K} \right) \right] \right\}. \quad (1)$$

The frequency of the oscillator differs from the resonant circuit's own frequency for the following reasons:

- a) the influence of the damping resistances of the circuit branches upon the resonance frequency of the circuit

$$\Delta_1 \omega = -\frac{1}{2} \omega_0 C \frac{(r_a + r_s + r_{as}) r_a}{x_a}, \quad (2)$$

- b) the influence of the oscillator valve:

$$\Delta_2 \omega = -\frac{1}{2} \omega_0 C S_1 \left[ r_s \left( 1 + \frac{1}{K} \right) + \frac{r_{as}}{K} \right] x_a. \quad (3)$$

The above term may be interpreted as the reactance effect of the valve, for it occurs only when  $r_s \neq 0$  and  $r_{as} \neq 0$ , i. e. when the anode current is shifted in phase in respect to the anode voltage (fig. 3) by an angle differing from zero.

If we assume a nonlinear valve characteristic represented by the power series

$$i_a = S_1 u_s + S_2 u_s^2 + S_3 u_s^3 + G_1 u_a + G_2 u_a^2 + G_3 u_a^3 \quad (4)$$

then the oscillator frequency can be evaluated by means of the method given by the author [7], from the formula

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} Z_{ak}^2 \frac{\omega_1^{k-1} \left[ 1 - \frac{1}{\hat{q}} + \hat{N}_2 \right]^{k-1} \hat{F}_{2k}}{\hat{N}_1 \left[ \left( \hat{\omega}_k + \frac{1}{K} \right) \hat{Z}_{ak} + \frac{1}{S_1} \right]^2 S_1^2} F_1(x) \quad (5)$$

where

$$\hat{\omega}_k = \frac{\hat{Z}_{sk}}{\hat{Z}_{sk} + \hat{Z}_{ask}} \quad \text{— feedback factor,}$$

$$\hat{q} = \frac{-\hat{\omega}_1 K}{1 + \frac{\hat{q}}{\hat{Z}_a}} \quad \text{— coefficient of over-excitation,}$$

$$F_1, \hat{F}_{2k} \quad \text{— constants depending on the conditions of the circuit,}$$

$\hat{N}_1$  — coefficient expressing the influence of nonlinear valve parameters and being a function of the circuit feedback factor at the frequency  $\omega_1$

$\hat{N}_2$  — coefficient similar to  $N_1$ , being a function of the feedback factors at the harmonic frequencies  $\omega_k$ .

The coefficients  $\hat{N}_1$  and  $\hat{N}_2$  in the formula (5) have the following physical meaning. The coefficient  $\hat{N}_1$  determines the influence of the nonlinear valve characteristic on the oscillator frequency, arising from the primary reactance effect, that is from the relation between the valve reactance and the varying grid voltage (or the average slope). The coefficient  $\hat{N}_2$  expresses the influence of the secondary nonlinear effect, i.e. the influence of grid voltage harmonics upon the frequency of the oscillator. Besides, there is the well known [2, 3] influence of harmonic currents division in the resonant circuit branches and the influence of their reactive power.

This interpretation of the formula (5) calls the attention to the feedback circuit, the value of the feedback factor at the fundamental and harmonic frequencies of the oscillations and the amplitude of the grid voltage.

The existence of the primary reactance effect was proved experimentally in an oscillator employing a pentagrid 6L7. This type of valve has a characteristic with an easily determined inflection point at which the nonlinear coefficients [8] change their signs; a triode is unsuitable in this respect.

The change of signs of the frequency deviations at the inflection point of the characteristic (fig. 4a) were observed in the above mentioned oscillator, when the anode voltage was varied. The admittance variation occurring at the same point when the valve is used as a reactance valve (fig. 4 b) proves the existence of the primary nonlinear effect.

The function of the feedback factor against frequency was then examined for typical oscillating systems. The results of calculations of this function are shown in fig. 6 for the Meissner, Colpitts and Clapp oscillators ( $w_k > 0$  for all harmonics) and for the Hartley oscillator (in this case  $w_k < 0$  for high order of harmonics at which feedback becomes negative).

The feedback factor measurement for the above circuits carried out in static condition (the valve off) were in agreement with calculations but showed appreciable discrepancies when performed on working oscillators (fig. 7, 8, 9, 10, 11). Measurements were conducted for low frequency

(1440 or 2880 c/s), by means of a wave analyser. The quantities measured were the harmonics of the grid voltage ( $k_s$ ), anode voltage ( $k_a$ ) and the feedback factor  $w_k$ .

The observed discrepancies can be explained by the influence of the grid current, which flows through the feedback branch (fig. 12), thus changing the feedback factor, and the harmonics content of the oscillator. This was confirmed by the measurements carried out for different grid-leak resistances  $R_g$  in Meissner, Hartley and Colpitts oscillators (fig. 13, 14, 15). The value of  $w_k$  approaches the static (and calculated) value in proportion to the increasing grid-leak resistance  $R_g$ , i. e. decreasing grid current.

Similarly there was examined the influence of the grid current value upon the frequency of the oscillator and its stability at the varying supply voltages in case of Colpitts, Meissner and Hartley oscillators (fig. 16, 17, 18). A very pronounced influence of the grid current was observed resulting in the capacitance variation of the order of 10%. There was also a correlation between the grid current and frequency deviation, particularly when the heater voltage was changed.

The reactance effect of the grid current should also be a function of the waveform, which in turn depends upon the time constant of the grid circuit  $\tau_g = R_g C_g$ . It was found that this time constant  $\tau_g$  exerts a very strong influence upon the frequency stability in the case of the heater voltage change. In the Meissner and Hartley circuits (fig. 21, 22) the change of sign of the frequency deviation occurs at small value of  $\tau_g$  ( $f_0 \tau_g = 1 \div 2$ ). This phenomenon can be used to stabilize the oscillator frequency; e.g. the frequency stability of the oscillator with negative feedback for the harmonics was greatly improved (Groszkowski [4]), fig. 24, 25 due to the possibility of separate compensation of the influence of the anode and heater voltage variation.

There was also examined the influence of the negative feedback for the harmonic frequencies, which exists in Hartley circuit. In ordinary arrangement the feedback is positive for small harmonic order (2, 3) and therefore the property of negative feedback cannot be utilised. The addition in the feedback branch of the condenser  $C_s$  parallel to the inductance  $L_s$  (fig. 26) provides the negative feedback at the second harmonic if

$$f_0 < \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_s}} < 2f_0.$$

The above arrangement was examined by varying  $C_s$ . The increase of  $C_s$  leads to a reduction of the feedback factor for harmonics (fig. 27) and to an improvement of the frequency stability (fig. 28 b and c) in spite

of the appreciable increase of the nonlinear distortion of the anode current. A suitably selected grid circuit time constant secures good frequency stability for simultaneously varying anode and heater voltages (fig. 29).

The above results confirm the existence of the primary and secondary reactance effect in feedback oscillators and a large influence of the grid current amplitude and of the grid voltage waveform.



CZ. JAWORSKI

## Metoda analityczna obliczania jednostkowego zużycia energii trakcyjnej

*Rękopis dostarczono 21. I. 53.*

**Streszczenie.** Przy projektowaniu elektryfikacji kolei zachodzi konieczność obliczenia przewidywanego zużycia energii trakcyjnej. W tym celu wykonywa się dla poszczególnych rodzajów pociągów na przewidywanych dla nich trasach tzw. przejazdy teoretyczne pochłaniające dużą ilość czasu projektującego i wymagające uprzedniego wstępnego zaprojektowania elektrowozu.

Wychodząc z założenia, że bez względu na warunki pracy elektrowozu, pobrana przez niego energia musi się równoważyć z sumą wykonanej pracy użytecznej i wszystkich zachodzących przy tym strat, autor wyprowadza wzór ogólny na jednostkowe zużycie energii, który pozwala obliczyć je a priori dla każdego rodzaju pociągu w zależności od rodzaju pociągu, profilu, gęstości przystanków, szybkości maksymalnej i technicznej oraz szybkości końcowej rozruchu i początkowej hamowania, natomiast niezależnie od innych okoliczności, takich jak typ i moc silników, sposób jazdy itd. Wzór uwzględnia wpływ hamowania elektrycznego oporowego i z odzyskiem energii i może być stosowany dla różnych systemów i rodzajów trakcji elektrycznej. Możliwość obliczenia na podstawie tego wzoru jednostkowego zużycia energii pozwala łatwo określić z góry moc średnią elektrowozu i ułatwić, zdaniem autora, obliczenie na tej drodze jego mocy znamionowej.

### 1. WSTĘP

Jedną z wielkości potrzebnych przy projektowaniu elektryfikacji kolei, w szczególności dla obliczenia zasilania oraz ilości, wielkości, rodzaju i mocy podstacji trakcyjnych, jest przewidywane przy trakcji elektrycznej zużycie energii. Zużycie to oblicza się zwykle na podstawie wykonanych uprzednio przejazdów analitycznych poszczególnymi rodzajami pociągów na danej trasie, w wyniku których uzyskuje się przebieg szybkości pociągów i prądów silników w funkcji drogi i czasu. Te dość żmudne zawsze przejazdy analityczne uwarunkowane są koniecznością uprzedniego zaprojektowania lokomotyw i doboru silników trakcyjnych; przybliżone zaś z natury rzeczy wyniki opartych na tych przejazdach obliczeń zużycia energii przez poszczególne rodzaje pociągów są o tyle bliskie zużycia rzeczywistego, o ile rzeczywisty przebieg pociągu zbli-



żony będzie do założonego. Na podstawie uzyskanego tą drogą, dla każdego rodzaju pociągu, zużycia energii elektrycznej na danej trasie, oblicza się następnie dla tych pociągów ich tzw. jednostkowe zużycie energii w Wh/tkm (tzn. zużycie w watogodzinach, przypadające na jeden brutto-tonokilometr wykonanych przewozów). Ta ostatnia wielkość jest charakterystycznym dla każdego rodzaju pociągu wskaźnikiem zużycia energii i pozwala ocenić z punktu widzenia ekonomicznego słusność założonych z góry, przy projektowaniu trakcji elektrycznej, warunków ruchu i wielkości poszczególnych parametrów.

Dotyczy to w szczególności założonych szybkości maksymalnych i technicznych, szybkości końca rozruchu oporowego i początku hamowania, wielkości przyspieszeń, gęstości przystanków, itd.

Opisana metoda obliczenia zużycia energii w trakcji elektrycznej na podstawie przejazdów analitycznych wymaga długich i żmudnych obliczeń, znanych dobrze wszystkim projektującym elektryfikację kolei. Obliczenia te uległyby znacznemu uproszczeniu, jeśliby można było, zmieniając ich kolejność, ów wskaźnik intensywności zużycia energii elektrycznej obliczyć z góry w postaci zużycia jednostkowego — na drodze analitycznej — a więc bez uciekania się do przejazdów teoretycznych, aby następnie dopiero na jego podstawie i na podstawie przewidywanego rozkładu jazdy uzyskać wielkość całkowitego zużycia energii, przebiegu obciążeń sieci i podstawcy, mocy podstawcy itd.

Zauważmy poza tym, że znając jednostkowe zużycie energii  $j_0$  mierzone na pantografie w Wh/tkm, szybkość handlową pociągu  $v$  w km/godz. oraz całkowity ciężar pociągu  $G$  w tonach, można obliczyć średnią moc lokomotywy  $N_{sr}$  w kW, jaka będzie czerpana z sieci, ze wzoru

$$N_{sr} = \frac{j_0 VG}{1000}$$

a stąd i prąd średni  $m$  silników lokomotywy na prąd stały ze wzoru

$$J_{sr} = \frac{j_0 VG}{mU}$$

gdzie

$U$  — napięcie na zaciskach silników,

$m$  — ilość silników.

Jeśli oznaczymy przez  $\eta$  średnią sprawność silników trakcyjnych, wtedy moc lokomotywy na wale silników można wyrazić w postaci

$$N_{sr} = \frac{\eta j_0 VG}{1000} = \frac{jVG}{1000},$$

gdzie

$$j = 1, j_0$$

i wyraża jednostkowe zużycie energii mierzone na wale silników.

Jeśli oznaczymy z kolei przez  $c$  stosunek prądu znamionowego (mocy ciągłej) silnika  $I$ , do jego prądu średniego  $I_{sr}$ , wtedy moc znamionowa lokomotywy wyrazi się

$$N = \frac{c j V G}{1000}$$

Ponieważ wielkość współczynnika  $c$  daje się wyznaczyć w stosunkowo wąskich granicach, w zależności od czasu pracy silnika pod prądem [1], obliczenie a priori jednostkowego zużycia energii pozwala zarazem określić potrzebną moc silników lokomotywy.

## 2. JEDNOSTKOWE ZUŻYCIE ENERGII

Elektrowóz czerpie z sieci roboczej energię dla napędu silników trakcyjnych (będziemy ją nazywali energią trakcyjną) oraz dla szeregu celów pomocniczych, jak napęd wszelkich silników i urządzeń pomocniczych, ogrzewanie, oświetlenie, itd. W dalszym ciągu niniejszych rozważań będzie mowa jedynie o pierwszym rodzaju energii, energii trakcyjnej.

Część dopływającej z sieci energii trakcyjnej tracona jest w oporach rozruchowych, cała pozostała reszta dochodzi do silników trakcyjnych. Część tej ostatniej zostaje w trakcie pracy silników stracona w postaci ciepła, powodując nagrzewanie się silników, reszta zamieniona jest w silnikach na pracę mechaniczną na wale silników.

Energia mechaniczna przeniesiona za pomocą przekładni, a więc z pewnymi stratami w przekładni, na koła pędne idzie częściowo na pokonanie oporów ruchu pociągu zasadniczych i zależnych od pionowego i poziomego prof. lu linii, częściowo zaś zostaje zamieniona na energię kinetyczną i potencjalną masy pociągu oraz energię kinetyczną mas wirujących (zestawów kołowych, wirników silników, itp.). Ta całkowita energia mas pociągu zostaje następnie częściowo zamieniona w dalszym ciągu na pracę konania w/w uporów ruchu pociągu, częściowo zaś zostaje stracona w hamulcach przy przyhamowywaniu pociągu na spadkach i hamowaniu na przystankach.

Obliczenie poszczególnych w/w części energii trakcyjnej w porządku chronologicznym napotyka na poważne trudności, wymagające szczególnej znajomości nie tylko trasy pociągu i jego szybkości, lecz także charakterystyki lokomotywy i sposobu jazdy; dotyczy to w szczególności obliczenia energii kinetycznej pociągu, która następnie zostaje zużyta na pracę

użyteczną względnie stracona w hamulcach. Z tych względów prościej jest użyć tu innej metody, a mianowicie sporządzając i obliczając bilans energii trakcyjnej wg jej ostatecznego przeznaczenia.

Otrzymamy wówczas następujące zestawienie poszczególnych rodzajów energii trakcyjnej:

1. praca użyteczna silników idąca na pokonanie:
  - a) zasadniczych oporów ruchu pociągu,
  - b) oporów krzywizn,
  - c) oporów wzniesień,
2. straty przy przyhamowywaniu pociągu na większych spadkach,
3. straty w oporach rozruchowych,
4. straty dodatkowe w silnikach spowodowane ich pracą przy obniżonym napięciu (w połączeniach szeregowych),
5. straty przy hamowaniu pociągów na stacjach,
6. straty normalne silników w połączeniu zasadniczym (równoległym).

Aby zużycie energii trakcyjnej móc wyrazić w przyjętych jednostkach, tj. w Wh/tkm, zauważmy następującą zależność:

Dla podniesienia bez strat 1 tony na wysokość 1 m trzeba wykonać pracę:

$$1 \text{ tm} = 1000 \text{ kgm} = 9,81 \cdot 1000 \text{ W sek} = \frac{9,81 \cdot 1000}{3600} \text{ Wh} = 2,725 \text{ Wh},$$

a więc

$$1 \text{ tm} = 2,725 \text{ Wh}.$$

Dzieląc obie strony powyższego równania przez 1 tkm otrzymamy:

$$1 \text{ ‰} = 2,725 \frac{\text{Wh}}{\text{tkm}}.$$

Ze względu na zupełnie ogólny sens wyrażenia 1‰ otrzymana wyżej zależność oznacza z jednej strony, że aby pociąg poruszający się ze stałą szybkością bez żadnych oporów ruchu wszedł na drodze 1 km na wysokość 1 m trzeba mu dostarczyć 2,725 Wh na każdą tonę ciężaru, jak też z drugiej strony, że tyleż energii musi on otrzymać, aby na poziomie i prostej móc pokonywać przy stałej szybkości opory ruchu wynoszące 1 kg/t czyli pisząc inaczej — także 1‰.

Rozpatrzmy obecnie kolejno poszczególne grupy zużycia energii.

### 3. PRACA UŻYTECZNA

Zasadnicze opory ruchu pociągu najwygodniej jest liczyć wg wzoru typu

$$r = r_0 + \frac{1}{k} \left( \frac{V}{10} \right)^2.$$

Jednostkowe zużycie energii na pokonanie tych oporów na drodze  $s$  będzie

$$j'_r = \frac{2,725}{S} \int_0^S r ds = \frac{2,725}{S} \int_0^S \left[ r_0 + \frac{1}{k} \left( \frac{V}{10} \right)^2 \right] ds = 2,725 \left[ r_0 + \frac{1}{100 k S} \int_0^S V^2 ds \right].$$

Występujące we wzorze wyrażenie  $\frac{1}{S} \int_0^S V^2 ds$  oznacza kwadrat pewnej średniej szybkości, którą nazwiemy zastępczą  $V_z$ . W normalnych warunkach trakcyjnych szybkość ta zawiera się pomiędzy szybkością techniczną, a maksymalną pociągu i z pewnym przybliżeniem można przyjąć, że jest ona średnioproporcjonalna pomiędzy tymi szybkościami, tzn. że

$$v_z^2 = \frac{1}{S} \int_0^S V^2 ds \approx V_M V_t, \text{ w rzeczywistości } V_z < \sqrt{V_M V_t}.$$

Wówczas

$$j'_r = 2,725 \left( r_0 + \frac{V_M V_t}{100 k} \right).$$

Opyry krzywizn można obliczyć wg wzoru

$$r'_k = \frac{700}{R - 20},$$

gdzie

$R$  — promień krzywizn w metrach.

Średni opór krzywizn dla danej drogi  $S$  będzie równy

$$r_k = \frac{1}{S} \sum r'_k dS.$$

Średni opór krzywizn danej linii można też obliczyć ze wzoru

$$r_k = \frac{S_k}{S} \cdot \frac{700}{R_p - 20}$$

gdzie

$S_k$  — suma długości wszystkich łuków danej linii,

$S$  — całkowita długość linii,

$R_p$  — przeciętny promień krzywizny.

Średni opór krzywizn linii kolejowych, szczególnie głównych, jest zwykle stosunkowo niewielki i dlatego można go albo w ogóle pominąć, albo przyjąć w przybliżeniu, w zależności od rodzaju linii, w granicach od 0,25 do 0,5 dla linii równinnych oraz od 1 do 2 dla linii górskich.

Jednostkowe zużycie energii na pokonanie oporów krzywizn wyniesie

$$j'_k = 2,725 r_k.$$

Przy obliczaniu jednostkowego zużycia energii na pokonanie wzniesień należy uwzględnić jedynie wzniesienie średnie  $i$ , pomiędzy stacjami krańcowymi, którego wielkość określa zależność

$$i_0 = \frac{h}{S},$$

gdzie

$h$  — różnica wzniesień stacji krańcowych — w metrach,

$S$  — długość linii kolejowej pomiędzy stacjami krańcowymi — w kilometrach.

Jednostkowe zużycie energii na pokonanie wzniesienia średniego będzie

$$j'_h = \pm 2,725 i_0$$

przy czym znak plus czy minus zależy od tego, czy stacja końcowa leży wyżej, czy niżej od wyjściowej.

#### 4. STRATY PRZYHAMOWYWANIA

Przy zjeżdżaniu pociągu ze znaczniejszych spadków, szczególnie gdy są one dość długie, pociąg musi być przyhamowywany, aby nie przekroczył dopuszczalnej szybkości. Jego energia potencjalna jest wtedy tracona w hamulcach, przy czym strata energii jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy wielkością spadku, a oporem zasadniczym ruchu pociągu. Na linii o długości  $S$  km średnie dodatkowe opory wywołane przyhamowywaniem pociągu wyniosą w ‰

$$i_{sp} = \frac{1}{S} \sum (i_r - r_i) \Delta S,$$

gdzie

$i_r$  — spadek przekraczający opory ruchu pociągu przy szybkości na tym spadku dopuszczalnej,

$r_i$  — opory ruchu pociągu przy szybkości na danym spadku dopuszczalnej.

Jednostkowe zużycie energii traconej na przyhamowywanie na spadkach

$$j'_{sp} = 2,725 i_{sp}.$$

#### 5. STRATY HAMOWANIA

Przy hamowaniu pociągu aż do zatrzymania tracimy prawie całą jego energię kinetyczną. tylko drobna jej część idzie na użyteczną pracę pociągu na drodze hamowania. Jeśli hamowanie ze stałym opóźnieniem  $a_H$

w m/sek<sup>2</sup> rozpoczynamy od szybkości  $v_H$  w m/sek, to droga hamowania w metrach będzie

$$s_H = \frac{v_H^2}{2 a_H},$$

jeśli zaś szybkość  $V_H$  będzie wyrażona w km/godz, to droga  $S$  — w km będzie

$$S_H = \frac{V_H^2}{2 a_H \cdot 3,6^2 \cdot 10^3}.$$

Użyteczna praca pociągu na tej drodze obliczona na jednostkę ciężaru pociągu wyrazi się w metrach jako iloczyn tej drogi  $S$  w km przez średnie opory ruchu pociągu  $r_H$  w ‰

$$h'' = r_H \cdot S_H = \frac{r_H \cdot V_H^2}{2 a_H \cdot 3,6^2 \cdot 10^3}.$$

Podstawiając

$$a_H = \frac{F_H \cdot g}{1000 G \alpha} = \frac{f_H \cdot g}{1000 \alpha},$$

gdzie

$g$  — przyspieszenie ziemskie,

$\alpha$  — współczynnik uwzględniający wpływ obracających się mas pociągu,

$f_H$  — jednostkowa siła hamowania w kg/t,

otrzymamy

$$h'' = \frac{r_H V_H^2 \alpha}{2 g f_H \cdot 3,6^2} = \frac{r_H \alpha}{2,54 f_H} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2.$$

Natomiast całkowita energia kinetyczna pociągu o masie zastępczej  $M = \frac{G \alpha}{g}$  przy szybkości pociągu  $V_H$  w km/godz. w przeliczeniu na jedną tonę ciężaru pociągu wyniesie

$$h' = \frac{M V_H^2}{2 G \cdot 3,6^2} = \frac{G \alpha V_H^2}{2 \cdot 3,6^2 G g} = \frac{\alpha}{2,54} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2.$$

Wzór powyższy wyraża teoretyczną wysokość w metrach, na jaką wszedłby pociąg o szybkości początkowej  $V_H$ , gdyby nie działała nań żadna siła poza przyciąganiem ziemskim. Tak np. przy  $\alpha = 1,06$  pociąg o szybkości 70 km/godz. ma energię kinetyczną równoważną w powyższym sensie wysokości

$$h' = \frac{1,06}{2,54} \left( \frac{70}{10} \right)^2 = 20,4 \text{ m}.$$



Energia tracona przy hamowaniu będzie więc różnicą pomiędzy całkowitą energią kinetyczną pociągu i pracą użyteczną na drodze hamowania

$$h = h' - h'' = \frac{\alpha}{2,54} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2 - \frac{r_H \alpha}{2,54 f_H} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2 = \frac{\alpha}{2,54} \left( 1 - \frac{r_H}{f_H} \right) \left( \frac{V_H}{10} \right)^2 = \frac{\alpha'}{2,54} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2,$$

gdzie

$$\alpha' = \alpha \left( 1 - \frac{r_H}{f_H} \right)$$

przy czym

$$r_H = r_0 + \frac{1}{2k} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2. *$$

Jeśli zatrzymywanie pociągu odbywa się co  $L$  km, wtedy zużycie energii trakcyjnej traconej przy hamowaniu będzie

$$j_H' = \frac{2,725}{L} \cdot h = \frac{2,725 \alpha'}{2,54 L} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2 = \frac{1,036 \alpha'}{L} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2.$$

## 6. STRATY ROZRUCHU OPOROWEGO

Wszystkie obliczone wyżej grupy energii trakcyjnej mierzone były, jako praca lokomotywy, na obwodzie kół pędnych. Jeżeli sumę tych energii podzielimy przez sprawność przekładni, otrzymamy energię trakcyjną na wale silników, a więc już ze stratami w przekładni; jeśli tę ostatnią podzielimy przez sprawność silników, otrzymamy energię trakcyjną na zaciskach silników, tzn. łącznie także ze stratami w silnikach.

Oprócz rozpatrzonych w ten sposób wszystkich grup energii trakcyjnej występują jeszcze dodatkowe jej straty podczas rozruchu oporowego lokomotywy. W celu przeanalizowania tych strat posłużymy się poniższymi wykresami mocy rozruchowych w funkcji czasu (rys. 1) wykonanymi dla lokomotyw typu BB i CC, tzn. z dwukrotnym lub trzykrotnym rodzajem połączeń silników. Dla zachowania jasności obrazu przyjęto przy wykonywaniu rysunków sprawność silników przy prądzie rozruchowym i pełnym napięciu  $\eta = 0,85$  oraz założono dla tych warunków, że straty w miedzi silników stanowią przy prądzie rozruchowym  $2/3$  strat całkowitych. Założono, że rozruch odbywa się przy stałej wartości prądu rozruchowego, a więc i przy stałej sile rozruchowej; jeśli przyjmiemy ponadto, że opory ruchu pociągu są przy małych szybkościach stałe, wtedy otrzymamy, że przy stałej sile przyspieszającej, a więc i stałym przyspieszeniu, szybkość pociągu będzie proporcjonalna do czasu trwania roz-

\* Słuszności tego wzoru na średnie opory ruchu przy hamowaniu (jak też i przy rozruchu) można łatwo dowieść pod warunkiem stałej wartości przyspieszenia i przy założeniu, że opory ruchu pociągu zmieniają się wg wzoru  $r = r_0 + \frac{1}{k} \left( \frac{V}{10} \right)^2$ .





na wale silników podzielimy przez sprawność odpowiadającą prądowi rozruchowemu przy pełnym napięciu silników, tj. przy końcu rozruchu, wtedy przebieg mocy na zaciskach silników przedstawi prosta  $OD$ . Oznacza to, że do obliczonej w ten sposób całkowitej energii pobranej przez silniki musimy dodać jeszcze nieuwzględnione tym rachunkiem dodatkowe straty proporcjonalne do powierzchni trójkąta  $OED$ , a równe połowie rzeczywistych strat w miedzi silników.

Prąd płynący do silników w czasie ich rozruchu przepływa przez opory rozruchowe powodując straty w oporach. Jeśliby opory te były włączone przy pełnym napięciu, wtedy straty w nich byłyby proporcjonalne do powierzchni trójkąta  $EID$ . Ponieważ jednak przez przełączanie silników obniżamy napięcie przypadające na silnik w lokomotywie typu BB dwukrotnie, zaś w CC — początkowo trzykrotnie, potem w stosunku  $2/3$ , w tym samym stosunku zmienia się (ciągle przy stałej wartości prądu rozruchowego) pobierana z sieci moc trakcyjna lokomotyw. Straty w oporach rozruchowych będą więc reprezentowane polami trójkątów  $EFG$  i  $GHD$  dla lokomotyw typu BB oraz trójkątów  $EFG$ ,  $GHK$  i  $KLD$  — dla lokomotywy typu CC.

Przystępując do obliczenia rozpatrzonych ostatnio strat w oporach rozruchowych i nieuwzględnionych strat w miedzi silników oznaczymy przez  $k''$  stosunek strat w miedzi przy końcu rozruchu do całkowitej mocy lokomotywy mierzonej na zaciskach silników; wtedy, jak wynika z obu rysunków

$$OE = CD = \frac{N}{\eta} k''.$$

Zauważmy teraz, że dla lokomotywy BB z podobieństwa trójkątów  $EFG$  i  $EID$  wynika

$$\frac{FG}{JD} = \frac{FE}{IE},$$

albo

$$\frac{t_1}{t} = \left( \frac{N}{2\eta} - \frac{Nk''}{\eta} \right) : \left( \frac{N}{\eta} - \frac{Nk''}{\eta} \right) = \frac{\frac{1}{2} - k''}{1 - k''};$$

stąd

$$t_1 = t \frac{\frac{1}{2} - k''}{1 - k''}.$$

Dla lokomotywy CC otrzymamy odpowiednio

$$\frac{t_1}{t} = \left( \frac{N}{3\eta} - \frac{Nk''}{\eta} \right) : \left( \frac{N}{\eta} - \frac{Nk''}{\eta} \right) = \frac{\frac{1}{3} - k''}{1 - k''},$$

stąd

$$t_1 = t \frac{\frac{1}{3} - k''}{1 - k''}$$

czyli

$$t_2 = t_3 = \frac{t - t_1}{2} = \frac{t}{2} \left( 1 - \frac{t_1}{t} \right) = \frac{t}{2} \left( 1 - \frac{\frac{1}{3} - k''}{1 - k''} \right) = \frac{t}{3} \cdot \frac{1}{1 - k''}.$$

Całkowite wyżej omówione straty  $\Delta A$ , reprezentowane na obu wykresach przez pola zakreskowane, obliczyć można dla lokomotywy BB jako różnicę pól trójkąta *OID* i prostokąta *FIHG*; otrzymamy

$$\Delta A = \frac{Nt}{2\eta} - \frac{Nt_1}{2\eta} = \frac{Nt}{2\eta} \left( 1 - \frac{t_1}{t} \right) = \frac{Nt}{2\eta} \left( 1 - \frac{\frac{1}{3} - k''}{1 - k''} \right) = \frac{Nt}{4\eta} \cdot \frac{1}{1 - k''}.$$

Ponieważ zaś całkowita energia trakcyjna lokomotywy pobrana przez silniki i mierzona na ich zaciskach, a reprezentowana polem trójkąta *ODA*, wyrazi się w tym samym układzie wzorem

$$A = \frac{Nt}{2\eta},$$

więc stosunek  $\mu$  powyższych strat dodatkowych  $\Delta A$  do pracy  $A$  silników lokomotywy BB będzie

$$\mu = \frac{\Delta A}{A} = \frac{Nt}{4\eta} \cdot \frac{1}{1 - k''} : \frac{Nt}{2\eta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - k''}.$$

Dla lokomotywy CC otrzymamy odpowiednio

$$\Delta A = S_{OID} - S_{FIHG} - S_{HJLK},$$

albo

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{Nt}{2\eta} - \frac{2Nt_1}{3\eta} - \frac{Nt_2}{3\eta} = \frac{Nt}{6\eta} \left( 3 - 4 \frac{t_1}{t} - 2 \frac{t_2}{t} \right) = \\ &= \frac{Nt}{6\eta} \left( 3 - 4 \cdot \frac{\frac{1}{3} - k''}{1 - k''} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - k''} \right) = \frac{Nt}{6\eta} \cdot \frac{3 - 3k'' - \frac{4}{3} + 4k'' - \frac{2}{3}}{1 - k''} = \frac{Nt}{6\eta} \cdot \frac{1 + k''}{1 - k''}. \end{aligned}$$

Ponieważ zaś, tak jak i poprzednio

$$A = \frac{Nt}{2\eta},$$

więc

$$\mu = \frac{\Delta A}{A} = \frac{Nt}{6\eta} \cdot \frac{1 + k''}{1 - k''} : \frac{Nt}{2\eta} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + k''}{1 - k''}.$$

Całkowitą pracę lokomotywy wykonaną w okresie rozruchu oporowego można wyrazić jako sumę

- energii kinetycznej pociągu o szybkości równej szybkości końcowej rozruchu,
- pracy idącej w okresie rozruchu na pokonanie oporów ruchu pociągu.

Jednostkowe zużycie energii odpowiadające tej sumie energii kinetycznej i pracy rozruchu wyrazi się wielkością analogiczną do różnicy energii kinetycznej pociągu hamowanego i pracy wykonanej na drodze hamowania, a więc będzie

$$\frac{1,036 \alpha'' \left(\frac{V_R}{10}\right)^2}{L},$$

gdzie analogicznie do wartości  $\alpha'$ :

$$\alpha'' = \alpha \left(1 + \frac{r_R}{f_R}\right),$$

przy czym

$$r_R = r_0 + \frac{1}{2K} \left(\frac{V_R}{10}\right)^2$$

i gdzie

$r_R$  — jednostkowe średnie opory ruchu pociągu podczas rozruchu,

$f_R$  — jednostkowa siła przyspieszająca podczas rozruchu.

Wyrażona w powyższy sposób praca rozruchu lokomotywy została już w innej postaci uwzględniona w ogólnym bilansie energii, przeliczonej na jednostkowe jej zużycie. Dla obliczenia całkowitego jednostkowego zużycia energii trzeba więc dodać jedynie składnik odpowiadający nieuwzględnionym dotąd stratom w oporach rozruchowych i nieuwzględnionym w pełni stratom w miedzi silników. Składnik ten będzie

$$j'_R = \frac{1,036 \alpha'' \mu \left(\frac{V_R}{10}\right)^2}{L}.$$

## 7. ZUŻYCIE CAŁKOWITE

Całkowite jednostkowe zużycie energii mierzone na obwodzie kół pędnych będzie równe sumie wszystkich obliczonych wyżej składników

$$j' = 2,725 \left[ r_0 + r_k + i_{sp} \pm i_0 + \frac{V_M V_t}{100 K} \right] + \frac{1,036}{L} \left[ \alpha' \left(\frac{V_H}{10}\right)^2 + \mu \alpha'' \left(\frac{V_R}{10}\right)^2 \right].$$

To samo jednostkowe zużycie energii mierzone na wale silników będzie

$$j = \frac{j'}{\eta_z},$$

gdzie

$\eta_z$  — sprawność przekładni.

Zakładając średnią wartość sprawności przekładni 0,97 otrzymamy

$$j = 2,81 (r_0 + r_{sp} + i_{sp} \pm i_0) + \frac{2,81 V_M V_t}{100 K} + \frac{1,07}{L} \left[ \alpha' \left( \frac{V_H}{10} \right)^2 + \mu \alpha'' \left( \frac{V_R}{10} \right)^2 \right].$$

Wreszcie jednostkowe zużycie energii trakcyjnej mierzone na zaciskach silników będzie

$$j_0 = \frac{j}{\eta},$$

gdzie

$\eta$  — sprawność silników.

Zakładając średnią sprawność silników  $\eta = 0,89$  i zaokrąglając liczby otrzymamy

$$j_0 = 3,2 (r_0 + r_k + i_{sp} \pm i_0) + \frac{3,2 V_M V_t}{100 K} + \frac{1,2}{L} \left[ \alpha' \left( \frac{V_H}{10} \right)^2 + \mu \alpha'' \left( \frac{V_R}{10} \right)^2 \right],$$

ściślej zaś i ogólnie

$$j_0 = \frac{2,725}{\eta \cdot \eta_z} \left[ r_0 + r_k + i_{sp} \pm i_0 + \frac{V_M V_t}{100} + \frac{\alpha'}{2,54 L} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2 + \frac{\mu \alpha''}{2,54 L} \left( \frac{V_R}{10} \right)^2 \right].$$

Rozpatrzmy obecnie wartości poszczególnych parametrów występujących w wyprowadzonym wzorze.

Wartość współczynnika  $\mu$  zależy wyłącznie od parametru  $k''$ , który oznacza stosunek strat w miedzi silnika do mocy pobieranej przez niego przy prądzie rozruchowym. Zauważmy, że wielkość tego stosunku można obliczyć opierając się na następującym rozumowaniu:

$$k'' = \frac{m I_R^2 R_S}{N} = \frac{m I_R^2 R_S}{m U I_R} = \frac{I_R R_S}{U} = \frac{R_S}{U} = \frac{R_S}{R_0},$$

gdzie

$m$  — ilość silników,

$U$  — napięcie znamionowe silnika,

$R_S$  — oporność wewnętrzna silnika,

$R_0$  — opór rozruchowy w chwili ruszania lokomotywy.

Można przyjąć w przybliżeniu, że przy prądzie rozruchowym straty w miedzi stanowią około 2/3—3/4 strat całkowitych

$$k'' = \left( \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \right) N \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) : \frac{N}{\eta} = \left( \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \right) (1 - \eta).$$

Przyjmując  $\eta=0,89$  otrzymamy  $k''=0,073 \div 0,083$ .

Wówczas

$$\mu_{BB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-k''} \approx 0,539 \div 0,545 \approx 0,55,$$

$$\mu_{CC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1+k''}{1-k''} \approx 0,386 \div 0,394 \approx 0,40.$$

Jeśli na podstawie powyższego wzoru na jednostkowe zużycie energii chcemy korzystać dla obliczenia mocy znamionowej lokomotywy ze wzoru podanego na wstępie niniejszych rozważań należy uwzględnić następujące momenty:

- a) moc znamionową silników trakcyjnych rozumie się jako moc ciągłą mierzoną na wale silników, wobec czego należy stosować wzór na  $j$ , a nie na  $j'$  (na obwodzie pól pędnych) ani na  $j_0$  (na zaciskach silników),
- b) straty w oporach rozruchowych nie obciążają mocy silników,
- c) napięcie obniżone przez zmianę połączeń silników i przez włączenie oporów rozruchowych obniża moc silników, ale nie obniża ich prądu, który decyduje o nagrzewaniu silników.

Z tych względów we wzorze na jednostkowe zużycie energii należy w tym przypadku (tj. dla celów obliczenia mocy znamionowej lokomotywy) przyjmować wartość  $\mu=1$  bez względu na typ lokomotywy; obliczone w ten sposób jednostkowe zużycie energii trakcyjnej nazwiemy *po z o r n y m*, dla odróżnienia od zużycia *r z e c z y w i s t e g o*, jakie otrzymujemy zakładając  $\mu=0,55$  dla lokomotyw typu BB i  $\mu=0,40$  dla lokomotyw typu CC.

Wielkość współczynnika  $\alpha'$  można przyjmować w przybliżeniu równą 1 (od 0,95 — dla ciężkich pociągów towarowych, do 1,05 — dla pociągów pospiesznych i złożonych z jednostek elektrycznych); wynika to z wartości występującego we wzorze na  $\alpha'$  stosunku  $\frac{r_H}{f_H}$ , wahającej się od 0,04 do 0,06.

Współczynnik  $\alpha''$  przybiera odpowiednio wartość od 1,4 dla ciężkich pociągów towarowych na poziomie do 1,1 dla lekkich składów jednostkowych.

Powyższe średnie wartości współczynników  $\alpha'$  i  $\alpha''$  obliczone zostały dla linii poziomej i prostej. Wartości te mogą ulec dużym zmianom w innych warunkach rozruchu i hamowania; w szczególności znacznemu wzrostowi ulegnie współczynnik  $\alpha''$ , gdy rozruch ciężkiego pociągu towarowego odbywać się będzie na dużym wzniesieniu.

Zauważmy, że wielkość współczynnika  $\alpha''$  da się przedstawić następująco:

$$\alpha'' = \alpha \left( 1 + \frac{r_R}{f_R} \right) = \alpha \left( 1 + \frac{r_R}{f - r_R} \right) = \alpha \frac{f}{f - r_R} = \alpha \frac{F}{F - R},$$

gdzie

$F$  — siła lokomotywy przy rozruchu na obwodzie kół pędnych,

$R$  — opory ruchu pociągu przy rozruchu.

Niech będzie rozruch na wzniesieniu  $i = 6\text{‰}$  pociągu towarowego o ciężarze  $G = 2000$  t przy sile lokomotywy  $F = 20$  t, wtedy

$$f = \frac{F}{G} = \frac{20}{2000} = 10\text{‰}; \quad r_R \approx 2 + 6 = 8\text{‰},$$

więc

$$\alpha'' = \alpha \frac{f}{f - r_R} \approx 1,03 \cdot \frac{10}{10 - 8} = 5,15$$

podczas gdy dla poziomu otrzymamy odpowiednio tylko

$$\alpha'' = 1,03 \frac{10}{10 - 2} = 1,287.$$

Wielkości parametrów  $V_M$ ,  $V_t$ ,  $r_o$ ,  $K$  oraz  $L$  zależą od rodzaju pociągu i założonych warunków ruchowych, zaś parametrów  $r_k$ ,  $i_{sp}$ ,  $i_o$  — od rodzaju linii kolejowej.

Zwykle przyjmuje się niezależnie od rodzaju pociągu stałą oporów zasadniczych  $r_o = 2$ , choć wielkość ta prawdopodobnie może być znacznie obniżona (do ok. 1,5), szczególnie dla ciężkich pociągów towarowych.

Współczynnik  $K$  należy przyjmować:

40 — dla ciężkich pociągów towarowych,

40 — dla lokomotywowych pociągów pasażerskich z wagonami 4-osio-  
wymi,

30 — dla lokomotywowych pociągów pasażerskich z wagonami 2-  
i 3-osioowymi,

30 — dla długich składów jednostkowych,

25 — dla średnich,

20 — dla krótkich składów jednostkowych,

20 — dla pociągów towarowych w połowie naładowanych,

15 — dla samych lokomotyw i wagonów motorowych,

10 — dla pociągów towarowych próżnych.

Jeśli nie zależy na zbyt dokładnych obliczeniach lub jeśli brak jest danych ściślejszych można przyjmować dla pozostałych parametrów następujące wartości:



Dla linii równinnych można przyjmować, jak to było podane wyżej, średni opór krzywizn  $r_k = 0,25 \div 0,50$ , dla górskich zaś  $1,0 \div 2,0$ ; dla równinnych magistrali kolejowych można przyjąć  $r_k \approx 0$ .

Dodatkowy opór przyhamowywania pociągów na spadkach można pominąć całkowicie na liniach równinnych. Natomiast opór ten powinien być dokładnie policzony na liniach górskich, gdyż stanowi znaczny udział oporów całkowitych.

Krańcową szybkość rozruchową  $V_R$  można przyjąć:

35—40 km/godz. dla lokomotyw towarowych i dla jednostek podmiejskich i lokalnych,

45 km/godz. dla lokomotyw uniwersalnych,

50 km/godz. dla lokomotyw i jednostek pospiesznych.

Początkową szybkość hamowania można przyjmować dla pociągów podmiejskich równą  $3/4$  szybkości maksymalnej, zaś dla wszystkich innych —  $2/3$  szybkości maksymalnej dopuszczalnej dla danego rodzaju pociągu.

Wreszcie średnią wartość sprawności przekładni można przyjmować  $\eta_z = 0,97$ , średnią zaś sprawność silników, ze względu na płaski jej przebieg w zakresie stosowanych prądów, o 1% niższą od sprawności maksymalnej.

## 8. PRZYKŁAD OBLICZENIA JEDNOSTKOWEGO ZUŻYCIA ENERGII TRAKCYJNEJ DLA RÓŻNYCH RODZAJÓW POCIĄGÓW

Na zelektryfikowanej systemem prądu stałego 3000 V kolejowej linii magistralnej o łagodnym profilu pionowym i poziomym mają kursować wymienione niżej rodzaje pociągów o danych charakterystycznych zestawionych w poniższej tabelicy, przy czym pociągi lokomotywowe mają być prowadzone tą samą lokomotywą uniwersalną typu BoBo o ciężarze 90 ton. Należy obliczyć jednostkowe rzeczywiste i pozorne zużycie energii trakcyjnej każdego pociągu.

Tabela 1

Rodzaj pociągu	Ciężar pociągu w tonach	Średnia odległość międzyprzystankowa w km	Szybkość w km/godz.				
			maks.	techn.	handl.	pocz. ham.	końc. rozr.
	G	L	$V_M$	$V_t$	$V_h$	$V_H$	$V_R$
Pospieszny	600	35	120	95	85	80	45
Osobowy	450	6	100	70	55	70	45
Towarowy	1800	45	70	55	50	45	45
Jednostkowy	160	3,5	90	65	55	70	35

Jednostkowe rzeczywiste zużycie energii trakcyjnej obliczamy wg wprowadzonego wyżej wzoru ogólnego

$$j_0 = \frac{2,725}{\eta_z \eta} \left[ r_0 + r_k + i_{sp} \pm i_0 + \frac{V_M \cdot V_t}{100 K} + \frac{\alpha'}{2,54 L} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2 + \frac{\mu \alpha''}{2,54 L} \left( \frac{V_R}{10} \right)^2 \right],$$

gdzie

$$\alpha' = \alpha \left( 1 - \frac{r_H}{f_H} \right)$$

oraz

$$\alpha'' = \alpha \left( 1 + \frac{r_R}{f_R} \right)$$

lub

$$\alpha'' = \frac{\alpha f}{f - r_R} = \frac{\alpha F}{F - R}$$

Przyjmujemy następujące założenia wspólne dla wszystkich rodzajów pociągów:  $\eta_z = 0,97$ ;  $\eta = 0,90$ ;  $r_0 = 2$ ;  $r_k \approx 0$ ;  $i_{sp} \approx 0$ ;  $i_0 = 0$ ;  $\mu = 0,55$  względnie  $\mu = 1$  (dla zużycia pozornego),  $K = 40$  — dla pociągów lokomotywowo-tych i  $K = 25$  — dla jednostkowych,  $\alpha = 1,06$  — dla pasażerskich oraz  $\alpha = 1,035$  — dla towarowych.

Wielkość współczynnika  $\alpha'$  można założyć w przybliżeniu równą 1 dla wszystkich rodzajów pociągu, zaś  $\alpha'' = 1,15$  dla pociągów pasażerskich oraz  $\alpha'' = 1,4$  dla towarowych.

Przy założonych wyżej wartościach sprawności średnich oraz współczynników  $\alpha'$  i  $\alpha''$  wzór ogólny na jednostkowe zużycie energii trakcyjnej otrzymuje postać

$$j_0 = 6,24 + \frac{3,12 V_M V_t}{100 K} + \frac{1,23}{L} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2 + \frac{0,78}{L} \left( \frac{V_R}{10} \right)^2,$$

przy czym dla pociągu towarowego współczynnik 0,78 zamienia się na 0,95.

Na podstawie tego wzoru dla poszczególnych rodzajów pociągów otrzymujemy:

a) pociąg pociąg

$$j_0 = 6,24 + \frac{3,12 \cdot 120 \cdot 95}{100 \cdot 40} + \frac{1,23}{35} \left( \frac{80}{10} \right)^2 + \frac{0,78}{35} \left( \frac{45}{10} \right)^2 =$$

$$= 6,24 + 8,89 + 2,25 + 0,45 = 17,84 \text{ Wh/tkm},$$

zużycie pozorne

$$j'_0 = 17,84 + 0,45 \frac{1 - \mu}{\mu} = 17,84 + 0,45 \frac{0,45}{0,55} = 17,84 + 0,37 = 18,11 \text{ Wh/tkm},$$

b) osobowy

$$j_0 = 6,24 + \frac{3,12 \cdot 100 \cdot 70}{100 \cdot 40} + \frac{1,23}{6} \left( \frac{70}{10} \right)^2 + \frac{0,78}{6} \left( \frac{45}{10} \right)^2 =$$

$$= 6,24 + 5,46 + 10,04 + 2,64 = 24,38 \text{ Wh/tkm},$$

$$j'_0 = 24,38 + 2,64 \frac{0,45}{0,55} = 24,38 + 2,16 = 26,54 \text{ Wh/tkm},$$

c) towarowy

$$j_0 = 6,24 + \frac{3,12 \cdot 70 \cdot 55}{100 \cdot 40} + \frac{1,23}{45} \left( \frac{45}{10} \right)^2 + \frac{0,95}{45} \left( \frac{45}{10} \right)^2 =$$

$$= 6,24 + 3,00 + 0,55 + 0,43 = 10,22 \text{ Wh/tkm},$$

$$j'_0 = 10,22 + 0,43 \frac{0,45}{0,55} = 10,22 + 0,35 = 10,57 \text{ Wh/tkm},$$

d) jednostkowy

$$j_0 = 6,24 + \frac{3,12 \cdot 90 \cdot 65}{100 \cdot 25} + \frac{1,23}{3,5} \left( \frac{70}{10} \right)^2 + \frac{0,78}{3,5} \left( \frac{35}{10} \right)^2 =$$

$$= 6,24 + 7,30 + 17,23 + 2,73 = 33,50 \text{ Wh/tkm},$$

$$j'_0 = 33,50 + 2,73 \frac{0,45}{0,55} = 33,50 + 2,24 = 35,74 \text{ Wh/tkm}.$$

Jak wynika z powyższych przykładów, obliczenie jednostkowego zużycia energii na podstawie wyprowadzonego wyżej wzoru i przy założeniu z góry wartości  $\alpha'$  i  $\alpha''$  nie następuje żadnych trudności i prowadzi szybko do celu.

Celem ewentualnego wyznaczenia dokładniejszych wartości współczynników  $\alpha'$  i  $\alpha''$  obliczamy dla hamowania i rozruchu średnie opory ruchu pociągu i siły hamowania względnie trakcyjne.

### 8. 1. Hamowanie

Zakładamy opóźnienie hamowania:  $\alpha_H = 1$  — dla jednostek,  $\alpha_H = 0,5$  — dla lokomotywowch pociągów pasażerskich i  $\alpha_H = 0,3$  — dla towarowych.

a) pośpieszny

$$\left. \begin{array}{l} r_H = 2 + \frac{1}{2,40} \left( \frac{80}{10} \right)^2 = 2,80 \text{ ‰}, \\ b) \text{ osobowy} \\ r_H = 2 + \frac{1}{2,40} \left( \frac{70}{10} \right)^2 = 2,61 \text{ ‰}, \end{array} \right\} f_H = \frac{1000 a}{g a} = \frac{1000 \cdot 0,5}{9,81 \cdot 1,06} = 54,0 \text{ ‰}.$$

c) towarowy

$$r_H = 2 + \frac{1}{2,40} \left( \frac{45}{10} \right)^2 = 2,50 \text{ ‰} \quad f_H = \frac{1000 \cdot 0,3}{9,81 \cdot 1,035} = 31,6 \text{ ‰},$$

d) jednostkowy

$$r_H = 2 + \frac{1}{2,25} \left( \frac{70}{10} \right)^2 = 2,98 \text{ ‰} \quad f_H = \frac{1000 \cdot 1,0}{9,81 \cdot 1,06} = 108,0 \text{ ‰}.$$

Na tej podstawie otrzymujemy wartość  $\alpha'$ :

a) pospieszny

$$\alpha' = 1,06 \left( 1 - \frac{2,80}{54,0} \right) = 1,005,$$

b) osobowy

$$\alpha' = 1,06 \left( 1 - \frac{2,61}{54,0} \right) = 1,009,$$

c) towarowy

$$\alpha' = 1,035 \left( 1 - \frac{2,50}{31,6} \right) = 0,951,$$

d) jednostkowy

$$\alpha' = 1,06 \left( 1 - \frac{2,98}{108,0} \right) = 1,030.$$

Jak z tego wynika, obliczone dokładne wartości współczynnika  $\alpha'$  nie wiele różnią się od założonej wartości  $\alpha' = 1$ . Wielkość tego współczynnika decyduje o wielkości trzeciego z rzędu składnika jednostkowego zużycia energii, który z kolei tym znacznie wpływa na wielkość całego zużycia, im krótsza jest odległość międzyprzystankowa. Znaczy to, że dla pociągów bezpośrednich (pospiesznych, towarowych) wystarczy przyjąć  $\alpha' = 1$  bez obawy większego błędu.

## 8. 2. R o z r u c h

Średnia siła rozruchowa lokomotywy uniwersalnej może być przyjęta dla wszystkich trzech rodzajów pociągów nią prowadzonych w tej samej wysokości odpowiadającej ze względu na przyczepność 0,2 ciężaru napędowego, tj.

$$F = 0,2 \cdot 90 = 18 \text{ ton}.$$

Dla jednostki elektrycznej o ciężarze 160 ton, zakładając średnie przyspieszenie rozruchu 0,5 m/sek<sup>2</sup>, otrzymamy odpowiednio na siłę przyspieszającą rozruchu:

$$F_R = F - R = \frac{G \alpha}{g} \cdot a = \frac{160 \cdot 1,06}{9,81} \cdot 0,5 = 8,65 \text{ ton}.$$

Srednie opory ruchu przy rozruchu oporowym wyniosą dla pociągów lokomotywowch

$$r = 2 + \frac{1}{2.40} \left( \frac{45}{10} \right)^2 = 2,50\text{‰},$$

dla jednostek

$$r = 2 + \frac{1}{2.25} \left( \frac{35}{10} \right)^2 = 2,25\text{‰}.$$

Dla poszczególnych rodzajów pociągów otrzymamy więc:

a) pospieszny

$$R = 690 \cdot 2,50\text{‰} = 1,73 \text{ t}; \quad \alpha'' = \frac{1,06 \cdot 18}{18 - 1,73} = 1,170;$$

b) osobowy

$$R = 540 \cdot 2,50\text{‰} = 1,35 \text{ t}; \quad \alpha'' = \frac{1,06 \cdot 18}{18 - 1,35} = 1,150;$$

c) towarowy

$$R = 1890 \cdot 2,50\text{‰} = 4,73 \text{ t}; \quad \alpha'' = \frac{1,035 \cdot 18}{18 - 4,73} = 1,410;$$

d) jednostkowy

$$R = 160 \cdot 2,25\text{‰} = 0,36 \text{ t}; \quad \alpha'' = \frac{1,06(8,65 + 0,36)}{8,65} = 1,104.$$

Obliczone wartości  $\alpha''$  potwierdzają założenia dotyczące jego wielkości. Obliczenia jednostkowego zużycia energii wykonane przy otrzymanych wyżej wartościach współczynników  $\alpha'$  i  $\alpha''$  dają następujące wyniki:

a) pospieszny

$$j_0 = 17,85 \text{ (poprzednio 17,84)}$$

b) osobowy

$$j_0 = 24,46 \text{ (poprzednio 24,38)}$$

c) towarowy

$$j_0 = 10,20 \text{ (poprzednio 10,22)}$$

d) jednostkowy

$$j_0 = 33,91 \text{ (poprzednio 33,50)}$$

Wyprowadzony wzór na rzeczywiste jednostkowe zużycie ważny jest dla systemu prądu stałego, a więc nie tylko dla kolei ogólnego znaczenia,

lecz także dla szybkiej kolej miejskiej (metro), dla tramwaj i trolejbusów bez względu na to czy stosowane jest hamowanie pneumatyczne, czy elektryczne oporowe. Natomiast przy hamowaniu z rekuperacją energii oraz dla obliczenia zużycia pozornego także przy elektrycznym hamowaniu oporowym wzór ulegnie odpowiednim zmianom.

## 9. REKUPERACJA I HAMOWANIE OPOROWE

Oddawanie przez pociąg energii do sieci odbywa się przy przyhamowaniu pociągu na spadkach oraz w pierwszym okresie jego hamowania przy zatrzymywaniu, kiedy początkowa szybkość hamowania  $V_H$  zostaje obniżona do pewnej wartości  $V_{HH}$ , od której począwszy musi być zastosowane hamowanie pneumatyczne. Oddawanie energii na spadkach powoduje, że zamiast zużycia energii proporcjonalnego do obliczonego wyżej wyrażenia  $i_{sp}$  będziemy obecnie mieli jedynie zużycie proporcjonalne do wielkości  $i_{sp} \cdot (1 - \eta_z^2 \eta_r)$  gdzie  $\eta_r$  oznacza sprawność maszyn (tym razem prądnic) przy rekuperacji. Tłumaczy się to tym, że mierzona na obwodzie kół pędnych energia proporcjonalna do wielkości  $i_{sp}$  musiała być uprzednio pobrana z sieci w ilości proporcjonalnej do  $\frac{i_{sp}}{\eta_z \eta}$ , zaś oddana jest do sieci w ilości proporcjonalnej do  $i_{sp} \eta_z \eta_r$ , strata więc energii mierzonej na zaciskach silników wynosi obecnie  $\frac{i_{sp}}{\eta_z \eta} (1 - \eta_z^2 \eta_r)$  tzn. w porównaniu z energią traconą bez rekuperacji uległa zmianie w stosunku  $(1 - \eta_z^2 \eta_r)$ . Rozumując podobnie dojdziemy do wniosku, że zużycie energii przy hamowaniu pociągu, które było dotychczas proporcjonalne do wielkości  $V_H^2$  będzie obecnie proporcjonalne do

$$V_{HH}^2 + (V_H^2 - V_{HH}^2)(1 - \eta_z^2 \eta_r).$$

Przy obliczaniu pozornego zużycia energii, które ma służyć dla obliczenia prądu średniego silników, a które oznacza energię przepracowaną przez „silniki“ trakcyjne bez względu na kierunek jej przepływu, musimy w obu powyższych wyrażeniach zastąpić znak minus, występujący przed iloczynem sprawności, przez plus. Ostatecznie więc otrzymamy następujący wzór ogólny na jednostkowe zużycie trakcyjne, rzeczywiste względnie pozorne, mierzone na zaciskach silników

$$j_0 = \frac{2,725}{\eta_z \eta} \left\{ r_0 + r_k + i_{sp} (1 \pm \eta_z^2 \eta_r) \pm i_0 + \frac{V_M V_t}{100 K} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha'}{254 L} [V_{HH}^2 + (V_H^2 - V_{HH}^2)(1 \pm \eta_z^2 \eta_r)] + \frac{\mu \alpha''}{254 L} V_R^2 \right\}.$$

W tym wzorze ogólnym, którego wszystkie parametry zostały już wyżej omówione, należy:

1. dla obliczenia rzeczywistego zużycia energii przyjmować:
  - a)  $\mu=0,55$  dla elektrowozów typu BB oraz  $\mu=0,40$  dla lokomotyw typu CC,
  - b) znak minus przed iloczynem sprawności,
  - c)  $\eta_r=0$ , jeśli nie ma rekuperacji energii;
2. dla obliczenia pozornego zużycia energii przyjmować:
  - a)  $\mu=1$  dla obu typów elektrowozów,
  - b) znak plus przed iloczynem sprawności,
  - c)  $\eta_r=0$ , jeśli nie ma żadnego rodzaju hamowania elektrycznego

Sformułowanie punktu 2c. oznacza, że przy zastosowaniu hamowania oporowego musi być uwzględniona dodatkowa praca wykonana przez prądnice, mimo że przetworzona przez nie energia nie zostaje zwrócona do sieci.

Znając jednostkowe zużycie energii można obliczyć średni prąd silnika odpowiadający handlowej względnie technicznej szybkości pociągu ze wzoru

$$I_{sr} = \frac{j_0 VG}{mU} \quad *$$

## 10. INNE SYSTEMY ZASILANIA

Podany wyżej wzór ogólny na  $j_0$  może być stosowany dla obliczenia jednostkowego rzeczywistego zużycia energii także dla innych systemów zasilania, w szczególności przy systemie jednofazowym obniżonej częstotliwości, pod warunkiem uwzględnienia we współczynniku  $\eta$  sprawności łącznej silników i transformatora oraz przy odpowiednim doborze współczynnika  $\mu$ , którego wartość zmaleje wybitnie wobec braku strat w oporach rozruchowych i który przy odpowiednim obniżeniu współczynnika sprawności może być przyjęty równy zero. Natomiast dla obliczenia zużycia pozornego, a więc przy  $\mu=1$ , stosowanie tego wzoru wymaga uwzględnienia dodatkowo wpływu współczynnika mocy,  $\cos \varphi$ , który będzie grał dużą rolę ze względu na wzrost nagrzewania się silników i transformatora.

\* Należy zwrócić uwagę na wybór szybkości  $V$ . W dalszym ciągu przy obliczaniu mocy ciągłej silnika będziemy się posługiwać wzorem na prąd średni silnika i wtedy dla silników sztucznie przewietrzanych miarodajny będzie prąd odpowiadający szybkości handlowej, natomiast przy silnikach samoprzewietrzanych, które chłodzą się na postoiu znacznie gorzej niż w ruchu, miarodajny będzie prąd średni odpowiadający szybkości technicznej lub co najwyżej średniej arytmetycznej obu tych szybkości.



## 11. ZAKOŃCZENIE

Z ogłoszonych dotychczas wzorów na jednostkowe zużycie energii trakcyjnej najbardziej zbliżony do wzoru autora i dający na ogół podobne wyniki jest wzór podany w [2] (str. 220), który jednak

- a) wymaga uprzedniego obliczenia tzw. profilu zastępczego linii,
- b) przyjmuje średnią stałą wartość zasadniczych oporów ruchu pociągu, która powinna być także uprzednio obliczona,
- c) nie uwzględnia użytecznej pracy pokonywania oporów ruchu w okresie rozruchu i hamowania,
- d) przyjmuje tylko przybliżone wartości analogicznych parametrów i współczynników np. przyjęty współczynnik rozruchu różni się od obliczonego przez autora o około:

21% dla lokomotywy typu BB,

27% dla lokomotywy typu CC.

Mimo wymienione daleko idące przybliżenia wzór ten może być stosowany z powodzeniem dla zwykłych typowych warunków, przy których daje wyniki wystarczająco dokładne, nie może natomiast być zastosowany w przypadkach szczególnych, jak np. przy obliczaniu średniego prądu lokomotywy towarowej, gdy rozruch następuje na większym wzniesieniu itp.

### WYKAZ LITERATURY

1. Podolski R.: Trakcja elektryczna — t. I, s. 238.
2. Rozenfeld W. E., Sidorow N. N., Kuzin S. E.: — Elektriceskije železnye dorogi — 1951, Transzeldorizdat.

Ч. ЯВОРСКИ

### АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЁТА ЕДИНИЧНОГО РАСХОДА ТЯГОВОЙ ЭНЕРГИИ

Резюме

При проектировании электрификации железнодорожных линий и узлов необходимо определить расход энергии при электрической тяге.

Для такого расчёта производятся для разных родов поездов на предусмотренных для них линиях т. наз. теоретические пробеги. Такие пробеги поглощают большое количество труда проектирующего и тре-

буют предварительного составления проекта соответственного электровоза. На основании полученных во время теоретических пробегов скоростей поездов и токов двигателей в функции пути и времени определяют потом между прочим количества израсходованной энергии а также средний и временный ток двигателя.

Для значительного упрощения и сокращения труда по проектированию электрификации железных дорог, автор разрабатывает аналитический метод и общую формулу единичного расхода тяговой энергии.

В основу своих рассуждений автор принял условие, что для всех возможных случаев и требований энергия расходуемая электровозом компенсируется суммой работы произведенной при преодолении сопротивления движения поезда и всех связанных с этим потерь. Разработанный аналитический метод\* дает возможность быстро и с достаточной для технической надобности точностью заранее определить единичную потребность тяговой энергии для всякого рода электрических поездов независимо от рода пути, от типа и от мощности двигателей, от способа движения и ряда других условий, и к тому же не нуждаясь в кропотливых аналитических пробегеах. Кроме того преимуществом разработанного автором аналитического метода расчёта является то, что общие формулы единичного расхода энергии дают возможность ясно определить влияние отдельных параметров, входящих в состав названных формул, на расход энергии. Это обстоятельство может оказать влияние на выбор параметров уже при проектировании электрификации линии и связанной с этим проектированием новой организации железнодорожного движения.

Кроме того определение заранее единичного, т. наз. кажущегося расхода энергии, т. е. энергии переработанной тяговыми двигателями, независимо от её направления, даёт возможность определить среднюю величину тока двигателя для всяких типовых и специальных условий, а величина эта имеет решающее влияние на величину номинального тока двигателя, а следовательно и на его номинальную мощность.

Формула выведена для системы питания постоянным током: она учитывает влияние электрического, реостативного и рекуперационного торможения на расход энергии и на величину среднего тока двигателей. Формула применима для всякого рода электрической тяги а следовательно для железных дорог общего значения, для скорых городских железных дорог (метро), для трамваев и троллейбусов, а при надлежащем изменении величин коэффициентов и учёте коэффициента

\* Упрощенные формулы автора, выведенные на основании предложенного способа приведены в труде проф. Романа Подоского под заглавием: „Тракция elektryczna” (Том I, стр. 237).

мощности — также и для иных систем питания, в частности для однофазной системы с уменьшенной частотой.

Общий вид формулы следующий:

$$j_0 = \frac{2,725}{\eta_z \eta} \left\{ r_0 + r_k + i_{sp} (1 \pm \eta_z^2 \eta \eta_r) \pm i_0 + \frac{V_m V_t}{100 K} + \frac{\alpha'}{254 L} \left[ V_{HH}^2 + (V_H^2 - V_{HH}^2) (1 \pm \eta_z^2 \eta \eta_r) \right] + \frac{\eta \alpha''}{254 L} \cdot V_R^2 \right\}$$

где

- $j_0$  — единичный расход тяговой энергии в вт·ч/ткм.  
 $\eta_z$  — коэффициент полезного действия передачи,  
 $\eta$  — коэффициент полезного действия машин во время работы двигателей,  
 $\eta_r$  — коэффициент полезного действия машин во время работы динамо,  
 $r_0$  — единичные сопротивления движения при нулевой скорости поезда в кг/т,  
 $r_k$  — средние единичные сопротивления на кривых в кг/т  
 $i_0$  — средние уклоны линии в ‰  
 $i_{sp}$  — средние сопротивления при торможения поезда на уклонах в кг/т, причём

$$i_{sp} = \frac{1}{S} \sum (i_{sr} - r_i) \Delta S$$

где

- $i_{sr}$  — уклон в ‰ требующий приторможения поезда.  
 $r_i$  — единичные сопротивления движения на уклоне  
 $\frac{1}{K}$  — коэффициент сопротивлений при движении по формуле:

$$r = r_0 + \frac{1}{K} \left( \frac{V}{10} \right)^2$$

причем:

- $K=40$  для тяжёлых товарных поездов и для пассажирских с 4-х осевыми вагонами,  
 $K=30$  для пассажирских поездов с 2- и 3-х осевыми вагонами и для длинных единичных составов,  
 $K=25$  для средних единичных составов,  
 $K=20$  для коротких единичных составов,  
 $K=15$  для одних электровозов и мотовозов,  
 $K=10$  для порожних товарных поездов.

$L$  — среднее расстояние между остановками в км,

$V_M$  — наибольшая скорость поезда в км/ч,

$V_t$  — техническая скорость поезда в км/ч,

$V_H$  — начальная скорость торможения в км/ч,

$V_{HH}$  — конечная скорость при рекуперационном торможении в км/ч

$V_R$  — конечная скорость реостативного пуска с места в км/ч

$$\alpha' = \alpha \left( 1 - \frac{r_H}{f_H} \right), \quad \text{причём } r_H = r_0 + \frac{1}{2K} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2$$

и где  $f_H$  — единичная сила торможения в кг/т

$$\alpha' = \alpha \left( 1 + \frac{r_R}{f_R} \right), \quad \text{причем } r_R = r_0 + \frac{1}{2K} \left( \frac{V_R}{10} \right)^2$$

и где  $f_R$  — единичная сила пуска в кг/т

$\alpha$  — коэффициент учитывающий влияние вращающихся масс

$\mu$  — коэффициент влияния добавочных потерь при пуске.

Применяя вышеприведенную формулу, следует принять:

1. для определения действительного расхода энергии:

а)  $\mu = 0,55$  для электровозов типа ВВ и

$= 0,40$  для электровозов типа СС,

б)  $\eta_r = 0$ , если нет рекуперации энергии,

если есть, то:

в) знак минус перед произведением коэффициентов полезного действия.

2. для определения расхода энергии переработанной двигателем:

а)  $\mu = 1$

б)  $\eta_r = 0$ , если нет электрического торможения;

если есть, то:

в) знак плюс перед произведением коэффициентов полезного действия.

Формула становится значительно проще, если нет электрического торможения; при условии  $\eta_z = 0,97$  и  $\eta = 0,89$  она принимает вид:

$$j_0 = 3,2 (r_0 + r_k + i_{sp} \pm i_0) + \frac{3,2 V_M V_t}{100 K} + \frac{1,2}{L} \left[ \alpha' \left( \frac{V_H}{10} \right)^2 + \mu \alpha'' \left( \frac{V_R}{10} \right)^2 \right]$$

причём для средних условий можно принять:

$\alpha' \approx 1$  — для поездов всякого рода,

$\alpha'' = 1,15$  — для пассажирских поездов и

$\alpha'' = 1,4$  — для товарных поездов.

Кроме того для линий с нерезким профилем можно принять  $r_k \approx 0$  и  $i_{sp} \approx 0$ .

CZ. JAWORSKI

AN ANALYTIC METHOD OF CALCULATING  
THE ELECTRIC TRACTION UNIT ENERGY CONSUMPTION

## Summary

When designing the electric traction lines and junctions it is necessary to calculate the estimated energy consumption. For this purpose the theoretical runs are carried out for particular types of trains and routes. This is a very laborious procedure which must be preceded by a preliminary design of an electric locomotive. The average and equivalent currents and the power consumed by the electric motors are then calculated from the values of speeds and motor currents obtained along the route.

In order to simplify and shorten the labour involved in the desining of the electric traction network the author has worked out an analytic method and the general formula for the unit energy consumption. The author has based his calculations on the principle, that, in any assumed conditions, the electric energy consumed by the locomotive must be equal to the sum of the useful work done and of all the losses, which then occur. This analytic method<sup>1</sup> gives the designer the means of a very quick, for the technical purposes, sufficiently accurate calculation of the unit electric energy consumption for any sort of electric train, any route and any conditions of their work, irrespective of the type and power of the locomotive motors, of the way the run is made and of a number of other circumstances — without resorting to the tedious analytic runs.

Moreover, the general formula for the unit energy consumption arrived at by this analytic method permits to estimate the influence of the particular parameters entering into this formula. This may help to choose the right parameters when designing an electric traction system and traffic organisation.

In addition, the precalculated unit „imaginary energy consumption“ i. e. the electric energy flowing through the traction motors, irrespective of the direction of flow, permits to find, for all the typical and particular conditions, the average motor current, which has a decisive influence upon the nominal current and nominal power of the motor.

---

<sup>1</sup>) The simplified formulae given by the author and deduced by means of this method, can be found in the book „Trakcja elektryczna“ (volume I p. 237) by prof. R. Podoski, 1951 edition.

The above formula has been derived for the D.C. supply. It takes into consideration the influence of the electric braking, by the dissipation and by the recuperation of the energy, on the consumption at this energy and on the value of the average current.

The formula may be used for any kind of electric traction e. g. for the general purpose electric train lines, urban and suburban electric lines (underground), tramway and the trolleybus lines. It also finds application for other mains supplies, in particular for the lowered frequency single-phase system, after substituting proper values of the coefficients and introducing the power factor.

The most general form of this expression is as follows:

$$j_0 = \frac{2,725}{\eta_z \eta} \left\{ r_0 + r_k + i_{sp}(1 \pm \eta_z^2 \eta \eta_r) \pm i_0 + \frac{V_m V_t}{100 K} + \frac{\alpha'}{254 L} \left[ V_{HH}^2 + (V_H^2 - V_{HH}^2) (1 \pm \eta_z^2 \eta \eta_r) \right] + \frac{\mu \alpha''}{254 L} V_R^2 \right\},$$

where:

- $j_0$  — unit traction energy consumption Wh/tkm,
- $\eta_z$  — efficiency of the gear,
- $\eta$  — efficiency of the el. motors used as motors,
- $\eta_r$  — efficiency of the el. motors used as generators,
- $r_0$  — unit resistance due to the train motion in kg/t at speed equal zero,
- $r_k$  — average unit line curvature resistance in kg/t,
- $i_0$  — average line slope in ‰,
- $i_{sp}$  — average resistance due to the train braking on falling off slope in kg/t

$$i_{sp} = \frac{1}{S} \sum (i_{,r} - r_i) \Delta S,$$

where:

- $i_{,r}$  — falling off slope in ‰ requiring the breaking of the train,
- $r_i$  — unit resistance on falling off slope,

$\frac{1}{K}$  — motion resistance factor, of the formula:

where:

$$r = r_0 + \frac{1}{K} \left( \frac{V}{10} \right)^2$$



$K = 40$  for heavily loaded goods trains and for passenger trains with 4-axles carriages,

$K = 30$  for passenger trains with 2 and 3 axles coaches and for long unit trains,

$K = 25$  for average unit trains,

$K = 20$  for short unit trains,

$K = 15$  for locomotives or motor-coaches,

$K = 10$  for empty goods trains,

$L$  — average distance between stations in km,

$V_M$  — maximum train speed in km/h,

$V_t$  — technical train speed in km/h,

$V_H$  — initial breaking speed in km/h,

$V_{HH}$  — final speed of breaking by recuperation in km/h,

$V_R$  — final speed of resistor starting in km/h,

$$\alpha' = \alpha \left( 1 - \frac{r_H}{f_H} \right), \quad \text{where:} \quad r_H = r_0 + \frac{1}{2K} \left( \frac{V_H}{10} \right)^2$$

$f_H$  — unit breaking force in kg/t,

$$\alpha'' = \alpha \left( 1 + \frac{r_R}{f_R} \right), \quad \text{where:} \quad r_R = r_0 + \frac{1}{2K} \left( \frac{V_R}{10} \right)^2$$

$f_R$  — unit starting force in kg/t,

$\alpha$  — factor allowing for the influence of the rotating masses,

$\mu$  — factor allowing for additional losses during starting.

The following assumptions are to be made when applying the formula:

1. for calculation of the energy actually consumed put:

a)  $\mu = 0,55$  for locomotives of BB type and  
 $= 0,40$  for CC type,

b)  $\eta_r = 0$  if there is no recuperation of energy,

c) the negative sign before the efficiencies product, if there is energy recuperation,

2. for calculation of the electric energy, which has flown through the motors (generators) put:

a)  $\mu = 1$ ,

b)  $\eta_r = 0$  if there is no electric breaking,

c) the positive sign before the efficiencies product.



The formula can be simplified appreciably, if there is no electric breaking. Under the assumptions  $\eta_z=0,97$  and  $\eta=0,89$  we get:

$$j_0 = 3,2(r_0 + r_k + i_{sp} + i_0) + \frac{3,2V_M V_t}{100K} + \frac{1,2}{L} \left[ \alpha' \left( \frac{V_H}{10} \right)^2 + \mu \alpha'' \left( \frac{V_R}{10} \right)^2 \right],$$

$\alpha' \approx 1$  for all kinds of trains and

$\alpha'' = 1,15$  for passanger trains

$\alpha'' = 1,4$  for goods trains.

For lines of a gentle profile one can put  $r_k \approx 0$  and  $i_{sp} \approx 0$ .

CZ. RAJSKI

## Teoria skośnika

*Rękopis dostarczono 8. 2. 53*

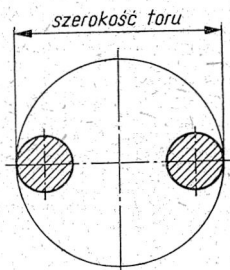
**Streszczenie.** Autor rozpatruje właściwości dwójnika, zwanego przez niego skośnikiem, utworzonego z toru długiego w ten sposób, że jednym zaciskiem dwójnika jest początek jednego przewodu toru a drugim zaciskiem jest koniec drugiego przewodu toru. Praca obejmuje ustawienie równań różniczkowych, rozwiązanie ich, wyznaczenie stałych całkowania, wyprowadzenie wzoru na opór pozorny skośnika oraz dyskusję tego wzoru dla przypadku toru symetrycznego bez strat oraz dla przypadku toru koncentrycznego z uwzględnieniem strat. Wyniki pomiarów przeprowadzone dla kabelka koncentrycznego potwierdzają pewną szczególną konsekwencję rozważań teoretycznych. Na zakończenie autor omawia możliwości zastosowań praktycznych wyprowadzonych wzorów.

### 1. TEMAT I ZAKRES PRACY

Tematem niniejszej pracy jest określenie oporu pozornego dwójnika utworzonego z toru długiego w ten sposób, że jednym zaciskiem dwójnika jest początek jednego przewodu toru a drugim zaciskiem jest koniec drugiego przewodu toru. Dwójnik taki będziemy w niniejszej pracy nazywali skośnikiem. Zakres pracy jest ograniczony do rozpatrywania skośników powstających z torów długich spełniających trzy niżej wymienione warunki geometryczne.

**Warunek 1.** Powierzchnie boczne przewodów toru powstają przy użyciu jednej z dwóch niżej wymienionych reguł.

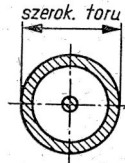
**Reguła A.** Obieramy dwie zamknięte i nieprzecinające się krzywe płaskie, zwane konturami, leżące w tej samej płaszczyźnie, zwanej płaszczyzną konturów (rys. 1). Pole ograniczone przez każdą z konturów nazywamy przekrojem przewodu. Prostą przechodzącą przez środki ciężkości obu przekrojów nazywamy osią poprzeczną. Przez środek osi poprzecznej i prostopadłe do płaszczyzny konturów prowadzimy pewną linię, zwaną osią podłużną toru. Przesuwamy następnie płaszczyznę konturów wzdłuż osi w taki sposób, aby była ona stale do tej osi prostopadła. Uznajemy wresz-



Rys. 1. Dwa kontury obok siebie

cie powierzchnie zakreślone przez kontury jako powierzchnie boczne przewodów.

**Reguła B.** Obieramy trzy zamknięte i nieprzecinające się krzywe płaskie, zwane konturami, leżące w tej samej płaszczyźnie, zwanej płaszczyzną konturów. Kontury te powinny być położone względem siebie



Rys. 2. Jeden kontur wewnątrz drugiego, drugi wewnątrz trzeciego.

w taki sposób, aby jeden z nich, zwany pierwszym, leżał wewnątrz drugiego a drugi wewnątrz trzeciego (rys. 2). Pole ograniczone przez pierwszy kontur nazywamy przekrojem wewnętrznego przewodu toru a pole zawarte między drugim a trzecim konturem nazywamy przekrojem zewnętrznego przewodu toru. Odcinek prostej przechodzącej przez środki ciężkości obu przekrojów nazywamy osią poprzeczną toru. Przez środek osi poprzecznej i prostopadłe do płaszczyzny konturów prowadzimy pewną linię, zwaną osią podłużną toru. Jeśli środki ciężkości obu przekrojów znajdują się w tym samym punkcie, to oś podłużną toru prowadzimy przez ten właśnie punkt. Przesuwamy następnie płaszczyznę konturów wzdłuż osi podłużnej w taki sposób, aby była ona do tej osi prostopadła. Uznajemy wreszcie powierzchnie zakreślone przez kontury jako powierzchnie boczne przewodów.

Zarówno w przypadku A, jak i w przypadku B, pod długością toru rozumiemy długość odcinka osi podłużnej przebytego przez punkt przecięcia się jej z osią poprzeczną.

Tory uzyskiwane na podstawie reguły A składają się z dwóch masywnych przewodów biegnących obok siebie. Można sformułować jeszcze dwie reguły dodatkowe, w wyniku stosowania których, otrzymujemy tory, w których bądź jeden, bądź oba przewody są wydrążone.

Tory uzyskiwane na podstawie reguły B składają się z dwóch przewodów, zawartych jeden wewnątrz drugiego, przy czym przewód wewnętrzny jest masywny. Również i w tym przypadku można sformułować regułę dodatkową, w wyniku stosowania której uzyskuje się tor, w którym przewód wewnętrzny jest wydrążony. Te trzy reguły dodatkowe pomijamy, ponieważ nie wnoszą one nic istotnie nowego do tematu.

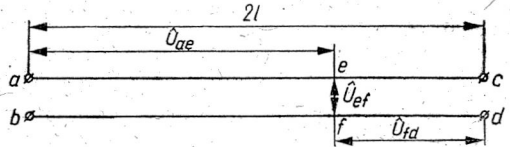
**Warunek 2.** W każdym punkcie toru promienie krzywizny osi podłużnej oraz promienie krzywizny osi obu przewodów powinny być znacznie większe od szerokości toru. Pod szerokością toru będziemy rozumieli średnicę najmniejszego koła, wewnątrz którego mieszczą się przekroje obu przewodów.

**Warunek 3.** Odległość w linii prostej między dwoma dowolnymi punktami toru, z wyjątkiem punktów przyległych do początku i do końca toru, powinna być znacznie większa od szerokości toru.

## 2. ANALIZA WSTĘPNA

Niech będzie dany tor długi o długości  $2l$  (rys. 3). Poszukiwany opór pozorny  $\hat{Z}_s$  skośnika jest to opór pomiędzy zaciskami  $a$  i  $d$ , bądź też opór pomiędzy zaciskami  $b$  i  $c$ . Dla jednoznaczności rozważań będziemy poszukiwali oporu pomiędzy zaciskami  $a$  i  $d$ . Jest on równy stosunkowi spadku napięcia  $\hat{U}_{ad}$  między punktami  $a$  i  $d$  do natężenia  $\hat{I}_s$  prądu przepływającego przez skośnik

$$\hat{Z}_s = \frac{\hat{U}_{ad}}{\hat{I}_s} \quad (1)$$



Rys. 3. Spadki napięć w skośniku założonym w obwód elektryczny zaciskami  $a$  i  $d$ .

Oznaczamy wskaźnikiem 1 ten przewód toru (na rys. 3 — górny), który jest dołączony do zacisku  $a$ , zaś wskaźnikiem 2 oznaczamy ten przewód toru (na rys. 3 — dolny), który jest dołączony do zacisku  $d$ . Oznaczmy następnie przez  $x$  mierzoną wzdłuż osi podłużnej odległość danego przekroju toru od środka tej osi. Przekrojem toru będziemy nazywali płaszczyznę konturów w określonym położeniu.

Obierzmy przekrój toru przecinający osie przewodów w punktach  $e$  i  $f$ . Wówczas całkowity spadek napięcia  $\hat{U}_{ad}$  na skośniku możemy rozbić na trzy części a mianowicie spadek napięcia  $\hat{U}_{ae}$  wzdłuż przewodu 1 od początku toru aż do przekroju  $ef$ , następnie poprzeczny spadek napięcia  $\hat{U}_{ef}$  w przekroju  $ef$  i wreszcie spadek napięcia  $\hat{U}_{fd}$  wzdłuż przewodu 2 od przekroju  $ef$  aż do końca toru.

$$\hat{U}_{ad} = \hat{U}_{ae} + \hat{U}_{ef} + \hat{U}_{fd} \quad (2)$$

Jasnym jest, że to równanie jest ważne dla każdego przekroju toru.

Natężenie  $\hat{I}_1$  prądu w przewodzie 1 na początku toru jest równe natężeniu  $\hat{I}_s$  prądu przepływającego przez skośnik, zaś natężenie  $\hat{I}_2$  prądu w przewodzie 2 na początku toru jest równe zero. Odwrotnie na końcu toru  $\hat{I}_1 = 0$ , zaś  $\hat{I}_2 = \hat{I}_s$ . Na każdym odcinku toru pod wpływem napięcia poprzecznego  $\hat{U}_{ef}$  następuje przepływ prądu pojemnościowego i upływnościowego między przewodami. Wynikające z tego na jakimkolwiek odcinku długości toru zmniejszenie natężenia prądu w jednym przewodzie jest równe powiększeniu natężenia prądu w drugim przewodzie. Zatem

w każdym przekroju toru suma natężeń prądów jest stała i równa natężeniu prądu płynącego przez skośnik

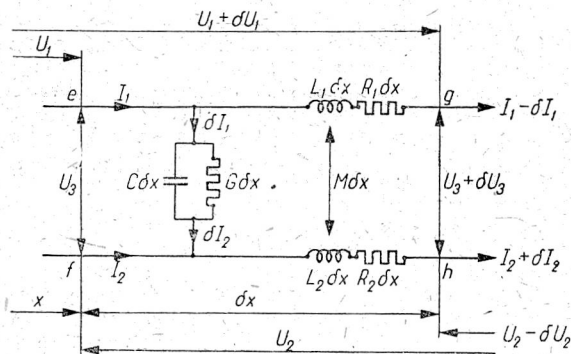
$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{I}_s. \quad (3)$$

Jak widać z powyższego rozpatrzenia do scharakteryzowania stanu elektrycznego skośnika konieczna jest znajomość w każdym przekroju toru pięciu wielkości a mianowicie trzech spadków napięć i dwóch natężeń prądów. Zatem należy ustawić pięć równań wiążących te wielkości ze sobą oraz z parametrami rozłożonymi toru, z którego jest skośnik utworzony.

W dalszym ciągu niniejszej pracy daszki nad symbolami wektorów napięć, prądów i oporów zespolonych będziemy pomijali, ponieważ nie będziemy rozpatrywali wielkości chwilowych lub skutecznych.

### 3. USTAWIENIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Rozpatrzmy przebiegi zachodzące na odcinku długości toru zawartym między przekrojami o współrzędnych  $x$  i  $x + \delta x$  (rys. 4). Oznaczmy parametry jednostkowe toru w sposób następujący. Opory przewodów  $R_1$  i  $R_2$ , indukcyjności własne  $L_1$  i  $L_2$ , indukcyjność wzajemną  $M$ , pojemność międzyprzewodową  $C$  oraz upływność  $G$ . Założymy, że



Rys. 4. Element skośnika o długości  $\delta x$ .

wartość każdego z tych parametrów są te same w każdym przekroju toru i równe ilorazom odpowiednich wielkości dla całego toru przez długość toru. Założenie to jest ściśle słuszne tylko wówczas, gdy promienie krzywizn osi obu przewodów są stałe na całej długości toru.

Jednakże błąd wynikający z dopuszczenia torów o zmiennych promieniach krzywizn osi jest nieznaczny, o ile wymienione w poprzednim rozdziale warunki drugi i trzeci są spełnione.

Jeśli długość odcinka  $\delta x$  jest dostatecznie mała, to możemy uważać, że poprzeczny spadek napięcia  $U_3$  jest ten sam na całej długości  $\delta x$  (rys. 4). Do odcinka  $\delta x$  dopływa w przewodzie 1 prąd o natężeniu  $I_1$ , z odcinka  $\delta x$  wypływa prąd o natężeniu  $I_1 - \delta I_1$ , zaś prąd o natężeniu  $\delta I_1$  przechodzi z pierwszego przewodu do drugiego w poprzek toru. Przepływ prądu

w poprzek toru przez przewodność zespoloną  $G \cdot \delta x + j\omega C \cdot \delta x$  powoduje spadek napięcia  $U_3$ . Zatem możemy napisać

$$-\delta I_1 = (G + j\omega C) \cdot \delta x \cdot U_3.$$

Ponieważ zmniejszeniu natężenia prądu o  $\delta I_1$  w przewodzie 1 towarzyszy równy mu wzrost o  $\delta I_2$  w przewodzie 2 możemy napisać

$$\delta I_2 = (G + j\omega C) \cdot \delta x \cdot U_3.$$

Wzrost  $\delta U_1$  spadku napięcia w przewodzie 1 na odcinku  $\delta x$  składa się z trzech części, a mianowicie ze spadku  $R_1 \cdot \delta x \cdot I_1$  na oporze tego odcinka, z siły elektromotorycznej samoindukcji  $L_1 \cdot \delta x \cdot j\omega I_1$  i z siły elektromotorycznej indukcji wzajemnej  $M \cdot \delta x \cdot j\omega I_2$ . Znaki wyrazów odpowiadających samoindukcji oraz indukcji wzajemnej są te same, ponieważ kierunki prądów w obu przewodach w każdej chwili są te same. Zatem możemy napisać

$$U_1 = R_1 \cdot \delta x \cdot I_1 + L_1 \cdot \delta x \cdot j\omega I_1 + M \cdot \delta x \cdot j\omega I_2.$$

Analogicznie dla drugiego przewodu

$$U_2 = R_2 \cdot \delta x \cdot I_2 + L_2 \cdot \delta x \cdot j\omega I_2 + M \cdot \delta x \cdot j\omega I_1.$$

Piąte równanie otrzymamy stosując drugie prawo Kirchhoffa do obwodu *eghf*.

$$U_{eg} + U_{gh} + U_{hf} + U_{fe} = 0.$$

Wielkości poszczególnych spadków są widoczne wprost z rys. 4, a mianowicie

$$U_{eg} = \delta U_1$$

oraz

$$U_{gh} = U_3 + \delta U_3,$$

gdzie  $\delta U_3$  oznacza przyrost, jakiego doznaje poprzeczny spadek napięcia  $U_3$  na odcinku toru o długości  $\delta x$ .

$$U_{hf} = -\delta U_2$$

oraz

$$U_{fe} = -U_3,$$

gdzie znaki minus pochodzą stąd, że kierunki spadków napięć są na tych odcinkach odwrotne do kierunków prądów. Korzystając z powyższego otrzymamy poszukiwane piąte równanie

$$\delta U_1 - \delta U_2 + \delta U_3 = 0.$$



Dzieląc obie strony odpowiednich równań przez  $\delta x$  i przechodząc do granicy, gdy  $\delta x$  dąży do zera, otrzymamy pięć następujących równań różniczkowych

$$-\frac{dI_1}{dx} = (G + j\omega C) U_3, \quad (4)$$

$$\frac{dI_2}{dx} = (G + j\omega C) U_3, \quad (5)$$

$$\frac{dU_1}{dx} = R_1 I_1 + j\omega L_1 \cdot I_1 + j\omega M \cdot I_2, \quad (6)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = R_2 I_2 + j\omega L_2 \cdot I_2 + j\omega M \cdot I_1, \quad (7)$$

$$\frac{dU_1}{dx} - \frac{dU_2}{dx} + \frac{dU_3}{dx} = 0, \quad (8)$$

#### 4. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

##### 4.1. Sprowadzenie do jednego równania różniczkowego.

Najprostszą metodą rozwiązania równań różniczkowych ustawionych w poprzednim rozdziale jest eliminacja czterech z pośród pięciu niewiadomych, rozwiązanie otrzymanego równania różniczkowego i następnie odnajdywanie pozostałych niewiadomych drogą różniczkowania lub całkowania. O ile ogólny tok postępowania wydaje się oczywisty, o tyle nie jest jasne na pierwszy rzut oka, do wyeliminowania których zmiennych należy dążyć.

Wskazówką może tu być istnienie lub nieistnienie warunków początkowych. Rozwiązanie równania różniczkowego w pierwotnej postaci zawiera zawsze pewne stałe całkowania, które wyznaczamy z warunków początkowych. Otóż w naszym zagadnieniu nie wszystkie niewiadome funkcje posiadają takie warunki, mianowicie nie posiadają ich spadki napięć  $U_1$ ,  $U_2$  i  $U_3$  bowiem ich wartości nie są znane w żadnym punkcie toru. Zatem stałe całkowania można wyznaczyć tylko z warunków początkowych dla prądów, o których wiemy np. to, że na początku i na końcu toru jeden z prądów jest równy zero. Wobec tego wydaje się celowe wyeliminowanie przede wszystkim trzech spadków napięć. W toku przekształceń okazało się korzystne wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, a mianowicie różnicy prądów w obu przewodach.



Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 - j\omega M, \quad (9)$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 - j\omega M, \quad (10)$$

$$Z_w = Z_1 + Z_2, \quad (11)$$

oraz

$$\sigma = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (12)$$

$Z_1$  i  $Z_2$  są to jednostkowe oporności zespolone przewodów.  $Z_w$  jest jednostkową opornością zespoloną wzdłużną toru a  $\sigma$  jest pewnym współczynnikiem charakteryzującym asymetrię elektryczną przewodów.

Jak to już zostało stwierdzone poprzednio, suma natężeń prądów w obu przewodach w każdym przekroju jest równa natężeniu prądu przechodzącego przez skońnik.

Biorąc to pod uwagę, otrzymamy z (6), (7) i (8) przy wykorzystaniu oznaczeń wprowadzonych wzorami (9), (10), (11) i (12)

$$-2 \frac{dU_3}{dx} = Z_w(I_1 - I_2) + \sigma Z_w I_3. \quad (13)$$

Wprowadzając następnie oznaczenie

$$G + j\omega C = Y, \quad (14)$$

otrzymamy z równań (4) i (5) po zróżniczkowaniu względem  $x$

$$-2 \frac{dU_3}{dx} = \frac{1}{Y} \frac{d^2}{dx^2} (I_1 - I_2). \quad (15)$$

Przyrównując do siebie prawe strony (13) i (15) i wprowadzając oznaczenia

$$I_1 - I_2 = I_3 \quad (16)$$

oraz

$$YZ_w = \gamma^2 \quad (17)$$

otrzymamy ostatecznie

$$\frac{d^2 I_3}{dx^2} = \gamma^2 I_3 + \sigma \gamma^2 I_3. \quad (18)$$

W ten sposób sprowadziliśmy zagadnienie rozwiązania układu pięciu równań różniczkowych (4) — (8) do rozwiązania równania (18). Znaczenie wielkości  $\gamma$  w tym równaniu jest to samo, co w zwykłej teorii toru długiego. Jest to zespolone tłumienie jednostkowe.

Łatwo jest dowieść, że całą równania różniczkowego (18) jest funkcja

$$I_3 = Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x} - \sigma I_s. \quad (19)$$

#### 4. 2. Wyznaczenie stałych całkowania.

Stałe  $A$  i  $B$  w równaniu (19) możemy wyznaczyć z warunków, że dla  $x = -l$  mamy  $I_1 = I_s$  oraz  $I_2 = 0$ , zatem  $I_3 = I_s$ , zaś dla  $x = l$  mamy  $I_1 = 0$  oraz  $I_2 = I_s$  zatem  $I_3 = -I_s$ . Wstawiając to kolejno do (19) i rozwiązując otrzymamy

$$A = \frac{I_s}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} + \frac{\sigma I_s}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}},$$

$$B = \frac{I_s}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} + \frac{\sigma I_s}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}.$$

Wyniki te możemy przepisać w wygodniejszej postaci używając funkcji hiperbolicznych

$$A = \frac{2I_s}{\sinh \gamma l} + \frac{2\sigma I_s}{\cosh \gamma l}; \quad B = \frac{2I_s}{\sinh \gamma l} - \frac{2\sigma I_s}{\cosh \gamma l}.$$

Wstawiając wartości na  $A$  i  $B$  do (19) otrzymamy

$$I_3 = -I_s \frac{\sinh \gamma x}{\sinh \gamma l} + \sigma I_s \frac{\cosh \gamma x}{\cosh \gamma l} - \sigma I_s. \quad (20)$$

#### 4. 3. Wyznaczenie natężeń prądów w przewodach.

Z równań (3) i (16) możemy znaleźć  $I_1$  oraz  $I_2$

$$I_1 = \frac{I_s + I_3}{2},$$

$$I_2 = \frac{I_s - I_3}{2},$$

skąd po wstawieniu wyrażenia na  $I_3$  z (20) otrzymamy

$$I_1 = \frac{I_s}{2} - \frac{I_s}{2} \frac{\sinh \gamma x}{\sinh \gamma l} + \frac{\sigma I_s}{2} \frac{\cosh \gamma x}{\cosh \gamma l} - \frac{\sigma I_s}{2} \quad (21)$$

$$I_2 = \frac{I_s}{2} + \frac{I_s}{2} \frac{\sinh \gamma x}{\sinh \gamma l} - \frac{\sigma I_s}{2} \frac{\cosh \gamma x}{\cosh \gamma l} + \frac{\sigma I_s}{2}. \quad (22)$$

#### 4. 4. Wyznaczenie spadków napięć.

Dla znalezienia spadków napięć należy wstawić do (6) i (7) wartości na  $I_1$  i  $I_2$  dane wzorami (21) i (22), następnie podzielić obie strony przez

$\frac{I_s/2}{2}$  i wreszcie scałkować. Dla  $U_1$  granice całkowania są od  $-l$  do  $x$  a dla  $U_2$  od  $x$  do  $l$ . Po wykonaniu tych działań otrzymamy

$$\frac{2}{I_s} U_1 = -\frac{Z_1}{\gamma} \frac{\cosh \gamma x - \cosh \gamma l}{\sinh \gamma l} + \frac{\sigma Z_1}{\gamma} \frac{\sinh \gamma x + \sinh \gamma l}{\cosh \gamma l} + (Z_1 + 2j\omega M - \sigma Z_1)(x+l) \quad (23)$$

$$\frac{2}{I_s} U_2 = \frac{Z_2}{\gamma} \frac{\cosh \gamma l - \cosh \gamma x}{\sinh \gamma l} - \frac{\sigma Z_2}{\gamma} \frac{\sinh \gamma l - \sinh \gamma x}{\cosh \gamma l} + (Z_2 + 2j\omega M + \sigma Z_2)(l-x). \quad (24)$$

Dla wyznaczenia poprzecznego spadku napięcia  $U_3$  przepisujemy (15) w postaci

$$-2U_3 = -\frac{1}{Y} \frac{dI_3}{dx}.$$

Wstawiając tu wartości na  $I_3$  określoną równaniem (20) i wykonując różniczkowanie otrzymamy

$$\frac{2}{I_s} U_3 = -\frac{\gamma}{Y} \frac{\cosh \gamma x}{\sinh \gamma l} - \sigma \frac{\gamma}{Y} \frac{\sinh \gamma x}{\cosh \gamma l}. \quad (25)$$

Wprowadźmy obecnie oznaczenie

$$\frac{Z_w}{Y} = Z^2 \quad (26)$$

Z jest tu oczywiście oporem falowym toru. Z porównania (17) i (26) wynika, że

$$\frac{\gamma}{Y} = Z. \quad (27)$$

Korzystając z (27) otrzymamy z (25)

$$\frac{2}{I_s} U_3 = Z \frac{\cosh \gamma x}{\sinh \gamma l} - \sigma Z \frac{\sinh \gamma x}{\cosh \gamma l}. \quad (28)$$

#### 4. 5. Wyznaczenie pozornego oporu skośnika.

Dodając stronami (23), (24) i (28), wynosząc po lewej stronie za nawias czynnik  $2/I_s$  i przegrupowując wyrazy po prawej stronie, otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{2}{I_s} (U_1 + U_2 + U_3) &= \frac{\cosh \gamma x}{\sinh \gamma l} \left( -\frac{Z_1}{\gamma} - \frac{Z_2}{\gamma} + Z \right) + \sigma \frac{\sinh \gamma x}{\cosh \gamma l} \left( \frac{Z_1}{\gamma} + \frac{Z_2}{\gamma} - Z \right) + \\ &+ \sigma \frac{\sinh \gamma l}{\cosh \gamma l} \left( \frac{Z_1}{\gamma} - \frac{Z_2}{\gamma} \right) + \frac{\cosh \gamma l}{\sinh \gamma l} \left( \frac{Z_1}{\gamma} + \frac{Z_2}{\gamma} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+x(Z_1 - \sigma Z_1 + 2j\omega M - Z_2 - 2j\omega M - \sigma Z_2) + \\
 &+l(Z_1 - \sigma Z_1 + 2j\omega M + Z_2 + 2j\omega M + \sigma Z_2). \quad (29)
 \end{aligned}$$

Suma spadków napięć po lewej stronie (29) w myśl (2) jest równa całkowitemu spadkowi napięcia  $U_{ad}$  na skośniku a stosunek  $U_{ad}/I_s$  jest równy poszukiwanemu oporowi pozornemu  $Z_s$  skośnika, zatem lewa strona (29) jest równa  $2Z_s$ . Jeśli chodzi o prawą stronę, to biorąc pod uwagę, że  $Z_1 + Z_2 = Z_w$ ,  $Z_1 - Z_2 = \sigma Z_w$ , zaś  $Z_w/\gamma = Z$ , stwierdzimy łatwo, że pierwszy, drugi i piąty wyraz są równe zeru. Po prostych przeróbkach pozostałych trzech wyrazów otrzymamy poszukiwane wyrażenie na opór pozorny skośnika

$$2Z_s = Z \operatorname{ctgh} \gamma l + \sigma^2 Z \operatorname{tgh} \gamma l + (1 - \sigma^2) Z \gamma l + 4j\omega Ml. \quad (30)$$

## 5. DYSKUSJA ROZWIĄZANIA

### 5.1. Przypadek toru symetrycznego bez strat.

Symetria oznacza, że  $\sigma = 0$ , zatem wzór (30) upraszcza się do postaci

$$2Z_s = Z \operatorname{ctgh} \gamma l + Z \gamma l + 4j\omega Ml,$$

co po podzieleniu obu stron przez  $Z$  daje

$$\frac{2Z_s}{Z} = \operatorname{ctg} \gamma l + \gamma l + \frac{4j\omega Ml}{Z}. \quad (31)$$

Wprowadźmy obecnie nową zmienną  $\varphi$  przy pomocy równania

$$\gamma l = j\varphi. \quad (32)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\operatorname{ctgh} j\varphi = -j \operatorname{ctg} \varphi$$

oraz podstawiając

$$l = \frac{j\varphi}{\gamma}$$

otrzymamy z (31)

$$\frac{2Z_s}{Z} = -j \operatorname{ctg} \varphi + j\varphi + \frac{4j\omega M}{\gamma Z} \cdot j\varphi.$$

Na zasadzie (26) i (27)

$$Z_w = \gamma Z \quad (33)$$

zatem

$$\frac{2Z_s}{Z} = -j \operatorname{ctg} \varphi + j\varphi + \frac{4j\omega M}{Z_w} j\varphi.$$

Na zasadzie (9), (10) i (11)

$$Z_w = R_1 + R_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2 - 2j\omega M.$$

Biorąc pod uwagę, że dla toru bez strat  $R_1=0$  i  $R_2=0$  oraz wprowadzając oznaczenie

$$L=L_1+L_2-2M \quad (34)$$

będziemy mogli napisać

$$Z_w=j\omega L$$

skąd

$$\frac{2Z_s}{Z} = -j \operatorname{ctg} \varphi + j\varphi + j\varphi \frac{4M}{L}. \quad (35)$$

Ponieważ opór falowy toru bez strat wyznacza się ze wzoru

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

możemy (35) przepisać w postaci

$$2Z_s \sqrt{\frac{C}{L}} = -j \operatorname{ctg} \varphi + j\varphi \left(1 + \frac{4M}{L}\right). \quad (36)$$

Łatwo stwierdzić, że  $\varphi$  jest proporcjonalne do częstotliwości. Rzeczywiście w przypadku toru bez strat

$$\gamma = j\omega \sqrt{LC}.$$

W połączeniu z (32) z tego wynika, że

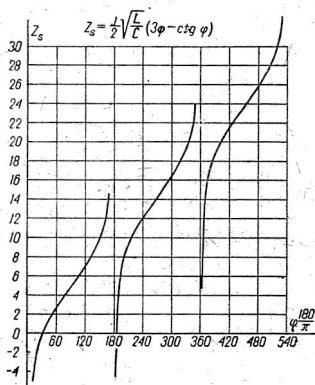
$$\varphi = \omega l \sqrt{LC}.$$

Zatem równanie (36) charakteryzuje ogólnie zależność oporu pozornego od częstotliwości dowolnego symetrycznego skośnika bez strat. Jak widać, opór ten jest zawsze urojony i jest on sumą dwóch wyrazów, z których jeden ma stałe reakcję indukcyjną, drugi zaś ma na przemian reakcję pojemnościową lub indukcyjną. Reakcja pojemnościowa tego drugiego wyrazu zachodzi w przedziałach zmienności  $\varphi$  od  $\frac{\pi}{2} 2n$  do  $\frac{\pi}{2} (2n+1)$  a reakcja indukcyjna w przedziałach zmienności  $\varphi$  od  $\frac{\pi}{2} (2n+1)$  do  $\frac{\pi}{2} (2n+2)$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę naturalną. Jeśli  $\varphi = n\pi$ , to opór pozorny skośnika jest nieskończenie wielki. Jeśli

$$\operatorname{ctg} \varphi = \varphi \left(1 + \frac{4M}{L}\right), \quad (37)$$

to opór pozorny skośnika jest równy zeru.

Równanie (37) posiada nieskończenie wiele pierwiastków, których wartości zależą od wyrażenia w nawiasach. Przykładowe przeliczenia dla torów o różnych wymiarach wskazują, że nawet przy bardzo małych odległościach między przewodami wyrażenie to nie przekracza 10. Dlatego też przebieg oporu pozornego skośnika w funkcji częstotliwości



Rys. 5. Przebieg oporu pozornego  $Z_s$  skośnika symetrycznego bez strat dla  $1 + 4M/L = 3$ . Jednost-

ką oporu jest  $\frac{j}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ;  
 $\varphi = \omega l \sqrt{LC}$ .

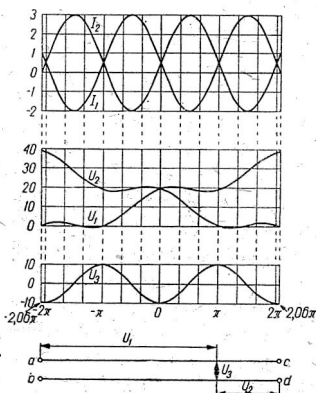
został obliczony dla  $1 + \frac{4M}{L} = 3$ , co nieźle ilustruje przeciętną wartość tego, co można spotkać w praktyce. Odpowiedni wykres znajduje się na rys. 5.

Jak widać z wykresu pierwiastki równania (37)  $\varphi_1, \varphi_2$  itd. są nieco większe od najbliższych wartości  $\pi n$ , przy czym różnice  $\varphi_n - \pi n$  stale pojemnościowej oporu pozornego skośnika są coraz mniejsze i skośnik prawie stale przedstawia reakcję indukcyjną.

Jeśli chodzi o rozkłady natężeń prądów i spadków napięć wzdłuż skośnika, to można je łatwo określić z równań (21), (22), (23), (24) i (28). Dla prądów w przypadku symetrycznego skośnika mamy

$$2I_1 = I_s - I_s \frac{\sinh \gamma x}{\sinh \gamma l},$$

$$2I_2 = I_s + I_s \frac{\sinh \gamma x}{\sinh \gamma l},$$



Rys. 6. Rozkłady natężeń prądów i spadków napięć w skośniku symetrycznym bez strat. Dane wykresu:  $1 + 4M/L = 3$ ; częstotliwość spełnia równanie  $\varphi = 2,06\pi$ ; jednostką natężenia prądu jest  $I_s$ ; jednostką spadku napięcia jest  $jZI_s/4$ ; całkowity spadek napięcia na skośniku  $U_1 + U_2 + U_3 \cong 29 jZI_s/4$ .

kładąc

$$\gamma x = j\psi$$

i biorąc pod uwagę (32) oraz to, że

$$\sinh j\psi = j \sin \psi$$

będziemy mogli napisać

$$2I_1 = I_s \left( 1 - \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \right), \quad (38)$$

$$2I_2 = I_s \left( 1 + \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \right). \quad (39)$$

W podobny sposób możemy dowieść, że rozkłady napięć są dane wzorami

$$U_1 = j \frac{ZI_s}{4} \left[ \frac{\cos \psi - \cos \varphi}{\sin \varphi} + (\varphi + \psi) \left( 1 + \frac{4M}{L} \right) \right], \quad (40)$$

$$U_2 = j \frac{ZI_s}{4} \left[ \frac{\cos \psi - \cos \varphi}{\sin \varphi} + (\varphi - \psi) \left( 1 + \frac{4M}{L} \right) \right], \quad (41)$$

$$U_3 = -j \frac{ZI_s}{2} \frac{\cos \psi}{\sin \varphi}. \quad (42)$$

Na rys. 6 zostały wykreślone rozkłady natężeń prądów i rozkłady spadków napięć dla przypadku, gdy długość skośnika jest w przybliżeniu równa całkowitej wielokrotności długości fali. Na rys. 6 przyjęto  $\sin \varphi = 0,2$

oraz  $1 + \frac{4M}{L} = 3$ .

## 5. 2. Przypadek toru koncentrycznego.

Przy rozpatrywaniu tego przypadku będziemy oznaczali przewód wewnętrzny wskaźnikiem 1, a przewód zewnętrzny wskaźnikiem 2. Charakterystyczną cechą toru koncentrycznego jest to, że indukcyjność wzajemna jest równa indukcyjności przewodu zewnętrznego

$$M = L_2. \quad (43)$$

Korzystając z tego będziemy mogli znacznie uprościć wzór (30). Przede wszystkim z (11) i (12) wynika, że

$$1 - \sigma^2 = \frac{4Z_1Z_2}{Z_w^2}. \quad (44)$$



Na zasadzie definicji (9), (10) i (11) z uwzględnieniem (43) będziemy mogli napisać

$$Z_1 = R_1 + j\omega(L_1 - L_2),$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 - j\omega M = R_2,$$

$$Z_w = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 - L_2).$$

Dla torów koncentrycznych spotykanych w praktyce mamy przeważnie

$$R_2 \ll \omega(L_1 - L_2) \quad (45)$$

zatem

$$Z_1 \approx Z_w,$$

skąd

$$1 - \sigma^2 \approx \frac{4R_2}{Z_w}. \quad (46)$$

Korzystając z tego oraz pamiętając, że  $\gamma Z = Z_w$ , będziemy mogli dwa ostatnie wyrazy wzoru (30) uprościć w sposób następujący

$$(1 - \sigma^2) \cdot \gamma Z l + 4j\omega M l \approx \frac{4R_2}{Z_w} \cdot Z_w \cdot l + 4j\omega L_2 l = 4l(R_2 + j\omega L_2) \quad (47)$$

Obecnie przekształćmy dwa pierwsze wyrazy wzoru (30). Możemy napisać mianowicie

$$\begin{aligned} Z \operatorname{ctgh} \gamma l + \sigma^2 Z \operatorname{tgh} \gamma l &= Z(\operatorname{ctgh} \gamma l + \operatorname{tgh} \gamma l) - (1 - \sigma^2) Z \operatorname{tgh} \gamma l = \\ &= 2Z \operatorname{ctgh} 2\gamma l - (1 - \sigma^2) Z \operatorname{tgh} \gamma l. \end{aligned}$$

Ze względu na (45) i (46) możemy ostatni wyraz pominąć i napisać

$$Z \operatorname{ctgh} \gamma l + \sigma^2 Z \operatorname{tgh} \gamma l \cong 2Z \operatorname{ctgh} 2\gamma l. \quad (48)$$

Korzystając z (47) i (48) możemy podstawowy wzór (30) na opór pozorny skośnika przedstawić dla toru koncentrycznego w postaci

$$Z_s \approx Z \operatorname{ctgh} 2\gamma l + 2l(R_2 + j\omega L_2). \quad (49)$$

Wzór ten możemy doprowadzić do bardziej przejrzystej postaci korzystając z tego, że pierwszy wyraz po prawej stronie (49) jest równy oporowi pozornemu w biegu luzem toru długiego o długości  $2l$ , o oporze falowym  $Z$  i o zespolonym tłumieniu jednostkowym  $\gamma$ . Opór ten oznacza się zazwyczaj przez  $Z_0$ . Zatem możemy napisać

$$Z_s \approx Z_0 + 2l(R_2 + j\omega L_2).$$

Dla dostatecznie małych częstotliwości mamy oczywiście

$$2l(R_2 + j\omega L_2) = Z_{bd},$$

skąd

$$Z_s \approx Z_0 + Z_{bd}. \quad (50)$$

Niespodzianie okazało się, że wzór ten jest ważny dla wszelkich częstotliwości. Aby dowieść tego wróćmy na chwilę do wzoru (2), który stwierdzał, że całkowity spadek napięcia na skośniku jest równy sumie trzech spadków napięć, a mianowicie sumie spadku wzdłuż przewodu 1 od początku toru aż do pewnego dowolnie obranego przekroju, spadku napięcia w tym przekroju od przewodu 1 do przewodu 2 i wreszcie spadku napięcia wzdłuż przewodu 2 od obranego przekroju do końca toru. Obierzmy przekrój na początku toru. Wówczas  $U_1=0$ ,  $U_2=U_{bd}$ ,  $U_3=U_{ab}$ . Kładąc  $x=-l$  otrzymamy ze wzorów (24) i (28)

$$\frac{2U_{bd}}{I_s} = (\sigma^2 - \sigma)Z \operatorname{tgh} \gamma l + (1 - \sigma^2)Z \gamma l + 4j\omega Ml, \quad (51)$$

$$\frac{2U_{ab}}{I_s} = \operatorname{ctgh} \gamma l + \sigma Z \operatorname{tgh} \gamma l. \quad (52)$$

Dla toru koncentrycznego  $\sigma \approx 1$  zatem  $\sigma^2 - \sigma \approx 0$ , wobec czego pierwszy wyraz po prawej stronie (51) można pominąć. Drugi i trzeci można przekształcić na zasadzie (47) i napisać ostatecznie

$$U_{bd} \approx I_s \cdot 2l(R_2 + j\omega L_2). \quad (53)$$

Prawą stronę (52) możemy przekształcić jak następuje

$$Z \operatorname{ctgh} \gamma l + \sigma Z \operatorname{tgh} \gamma l = Z \operatorname{ctgh} \gamma l + Z \operatorname{tgh} \gamma l - (1 - \sigma) Z \operatorname{tgh} \gamma l.$$

Ponieważ  $\sigma \approx 1$  ostatni wyraz po prawej stronie możemy pominąć i napisać

$$Z \operatorname{ctgh} \gamma l + \sigma Z \operatorname{tgh} \gamma l \cong 2 \operatorname{ctgh} 2\gamma l$$

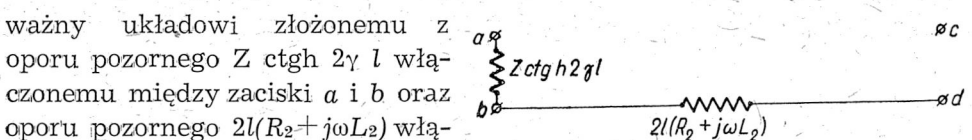
a na podstawie tego przedstawić (52) w postaci

$$U_{ab} \approx I_s \cdot Z \operatorname{ctgh} 2\gamma l. \quad (54)$$

Sumując stronami (53) i (54) otrzymamy

$$U_s \approx I_s \cdot Z \operatorname{ctgh} 2\gamma l + I_s \cdot 2l(R_2 + j\omega L_2). \quad (55)$$

Na zasadzie wzoru (55) możemy zbudować schemat zastępczy skośnika koncentrycznego (rys. 7). Widzimy, że skośnik koncentryczny jest równoważny układowi złożonemu z



Rys. 7. Schemat zastępczy skośnika koncentrycznego.

Istotną nowością w stosunku do wzoru (49) jest tu stwierdzenie, że wspólnym punktem dla połączonych szeregowo oporów jest zacisk b. Z tego wynika możliwość obliczenia oporu pozornego takiego skośnika,

w którym do zacisków  $b$  i  $d$  jest załączony pewien opór pozorny  $Z'$ . Wówczas opór pozorny między zaciskami  $b$  i  $d$  jest równy.

$$Z_{bd} = \frac{1}{\frac{1}{2l(R_2 + j\omega L_2)} + \frac{1}{Z'}}$$

zaś opór pozorny skośnika

$$Z_s \approx Z_0 + Z_{bd}. \quad (56)$$

Wzór (56) jest identyczny ze wzorem (50), zatem ten ostatni jest ważny przy dołączeniu do zacisków  $b$  i  $d$  dowolnego oporu pozornego.

Dla dostatecznie wielkich częstotliwości staje się dostrzegalny wpływ pojemności rozłożonych występujących pomiędzy częściami przewodu zewnętrznego. Wpływ ten można formalnie uwzględnić zawsze jako dołączenie do zacisków  $b$  i  $d$  odpowiednio dobranego oporu pozornego. Z tego wynika, że wzór (50) jest ważny dla wszelkich częstotliwości.

Dokładność wzoru (50) możemy scharakteryzować w sposób następujący. Błąd wzoru (46) jest bardzo nieznaczny, ponieważ pochodzi on z założenia, że wektory  $Z_1$  i  $Z_w$  posiadają równe składowe rzeczywiste, zaś te są małe w stosunku do składowych urojonych, które są dokładnie równe sobie.

Znacznie większy błąd powstaje natomiast przez odrzucenie wyrazu  $(1-\sigma^2) Z \operatorname{tgh} \gamma l$  przy wprowadzeniu wzoru (48) i tylko ten błąd zasługuje na bliższe rozpatrzenie. Dla składowej urojonej błąd ten jest niedostrzegalnie mały. Ze wzoru (46) wynika mianowicie, że kąt wektora  $(1-\sigma^2)$  jest bardzo mało różny od  $-\frac{\pi}{2}$ , ponieważ  $R_1 + R_2 \ll \omega(L_1 - L_2)$ .

Poza tym dla toru o małych stratach kąt wektora  $Z$  jest mało różny od zera, a kąt wektora  $\operatorname{tgh} \gamma l$  jest mało różny od  $\frac{\pi}{2}$  lub  $-\frac{\pi}{2}$ . Zatem kąt wektora  $(1-\sigma^2) Z \operatorname{tgh} \gamma l$  jest mało różny od zera lub inaczej mówiąc wektor ten ma składową urojoną znacznie mniejszą od rzeczywistej. Ponieważ cały wektor jest niewielki, spowodowany jego odrzuceniem błąd wzoru (50) dla składowej urojonej jest z pewnością bardzo nieznaczny, a dokładność wzoru (50) dla składowej urojonej jest bardzo dobra.

## 6. SPRAWDZENIE DOŚWIADCZALNE

Wzór (50) będący pewną konsekwencją przedstawionych wyżej rozważań teoretycznych jest łatwy do sprawdzenia doświadczalnego. Pomiarom został poddany odcinek kabelka antenowego o długości 36 m i o budowie przedstawionej na rys. 8. Ze względu na swą długość kabelek

został zawieszony na ścianach pokoju, przy czym przeważna część kabelka przyjęła kształt zbliżony do kilkakrotnie powtórzonej litery U, a reszta obiegała dokoła pokoju.

Pomiar był wykonywany metodą mostkową. Ze względu na budowę mostka dolną granicą częstotliwości pomiarowych było 400 kc/s. W zakresie częstotliwości od 1,5 Mc/s do 2,2 Mc/s przynajmniej jeden z oporów mierzonych leżał poza zakresem pomiaru. Wyniki pomiarów są zestawione w poniższej tablicy.

Tablica 1

Wyniki pomiarów kabelka koncentrycznego

$f$	$Z_0$	$Z_{bd}$	$Z_s$	$Z_0 + Z_{bd} - Z_s$
Mc/s	$\Omega$	$\Omega$	$\Omega$	$\Omega$
0,4	1,8 — j360	1,6 + j 94	3 — j265	0,4 + j 1
0,5	1,5 — j280	1,8 + j122	2,9 — j156	0,4 — j 2
0,8	2,6 — j156	8,4 + j232	10,3 + j 76	0,7 + j 0
1,0	2,5 — j111	39 + j322	40 + j210	1,5 — j 1
1,2	3,0 — j 77	72 + j491	73,5 + j417	1,5 — j 3
1,4	3,1 — j 50	385 + j993	382 + j922	6,1 — j21
2,3	7,5 + j123	182 — j290	193 — j160	— 3,5 — j 7
2,4	8,2 + j162	143 — j159	154 + j 6	— 2,8 — j 3
2,5	9,1 + j198	127 — j 8	137 + j180	— 1,0 + j10
2,6	10,4 + j252	133 + j168	144 + j410	— 0,6 + j10
2,7	11,8 + j310	152 + j280	167 + j600	— 3,2 — j10
2,8	14,8 + j380	162 + j395	180 + j800	— 3,2 — j25

Fakt, że składowe wektora  $Z_0 + Z_{bd} - Z_s$  są różne od zera tłumaczy się częściowo błędem pomiaru, częściowo zaś niedokładnością wzoru (50). Dokładnie ten wzór należałoby napisać w postaci

$$Z_s = Z_0 + Z_{bd} = \frac{\Delta Z}{2},$$

gdzie

$$\Delta Z = (1 - \sigma^2) Z \operatorname{tgh} \gamma l.$$

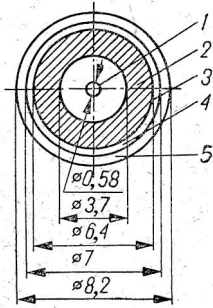
Z pomiarów oporu w biegu luzem i w stanie zwarcia oraz z przeliczeń opartych na założeniu, że wzrost oporu spowodowany zjawiskiem naskórkowości jest zlokalizowany w masywnym przewodzie wewnętrznym kabelka, wynika, że dla częstotliwości 1 Mc/s

$$\Delta Z = 1,03 \cdot e^{-3^2 22'} = 1,03 - j 0,006.$$

Jak widać błąd składowej urojonej we wzorze (50) jest niedostrzegalnie mały, zaś składowa rzeczywista ma właściwy znak. Pomierzona skła-

dowa rzeczywista wielkości  $Z_0 + Z_{bd} - Z_s$  dla częstotliwości 1 Mc/s wynosi  $1,5 \Omega$  z czego przypada na błąd  $\frac{\Delta Z}{2}$  wzoru (50) około  $0,5 \Omega$ , a na błąd pomiaru około  $1 \Omega$ .

Dla uzupełnienia opisanych wyżej pomiarów dodatkowo zostało przeprowadzone sprawdzenie wzoru (50) przy załączeniu do zacisków b i d kondensatora obrotowego. Dla częstotliwości 1 Mc/s przy pewnym położeniu kondensatora otrzymano (w omach)



Rys 8. Budowa mierzonego kabla. 1 — Przewód wewnętrzny 2 — Spirala styrofoksowa 3 — Folia styrofoksowa, 4 — Oplot stanowiący przewód zewnętrzny, 5 — Izolacja zewnętrzna.

skąd

$$Z_0 = 2,5 - j112,$$

$$Z_{bd} = 35 + j300,$$

$$Z_s = 38,5 + j190,$$

$$Z_0 + Z_{bd} - Z_s = 1 - j2.$$

Przy innym położeniu kondensatora otrzymano

$$Z_0 = 2,5 - j112.$$

$$Z_{bd} = 55 + j386.$$

$$Z_s = 57 + j277,$$

skąd

$$Z_0 + Z_{bd} - Z_s = 0,5 - j3.$$

Oba wyniki potwierdzają bardzo dobrze wzór (50).

W tym miejscu składam podziękowanie prof. W. Nowickiemu za wiele cennych rad i wskazówek udzielonych mi podczas przygotowywania niniejszej pracy.

## 7. ZASTOSOWANIA

W obecnym stadium opracowania tematu zarysowały się trojaki możliwości zastosowania wyprowadzonej teorii do potrzeb praktyki.

Pierwsze z tych zastosowań dotyczy projektowania anten sztucznych. Przy badaniu urządzeń radiowych w warunkach laboratoryjnych nie zawsze mamy możliwość posługiwania się taką anteną, jaka będzie stosowana w warunkach rzeczywistej pracy. Dotyczy to zwłaszcza urządzeń radiowych ruchomych, np. lotniczych, gdzie zbudowanie w laboratorium anteny, która miałaby rozmiary i właściwości anteny samolotowej jest niemożliwe. W takich przypadkach posługujemy się antenami sztucz-

nymi. Najprostsza antena sztuczna stanowi układ zawierający opornik i kondensator połączone szeregowo. Rzecz jasna, że układ taki może posiadać opór pozorny dokładnie równy oporowi anteny tylko dla jednej częstotliwości. Bardziej skomplikowane układy mogą nieco lepiej odwzorowywać przebieg oporu pozornego w funkcji częstotliwości anten rzeczywistych, ale wraz ze wzrostem ilości elementów rośnie cena, a odwzorowanie pozostaje niezupełne. Przyczyną tego jest fakt, że antena rzeczywista jest obwodem elektrycznym o stałych rozłożonych, a antena sztuczna zawiera zazwyczaj tylko elementy o stałych skupionych. Otóż w sprawie tej udzielił mi cennej informacji prof. J. Groszkowski, że zbudowana przez niego antena sztuczna w postaci zwiniętego spiralnie skośnika posiadała przebieg oporu pozornego w funkcji częstotliwości znacznie bardziej zbliżony do przebiegu w antenie rzeczywistej, aniżeli posiadają zazwyczaj używane anteny sztuczne złożone z niewielkiej ilości elementów o stałych skupionych. Stąd wyłania się możliwość zastosowania teorii skośnika do projektowania anten sztucznych o zadanych z góry charakterystykach.

Możliwość drugiego zastosowania zawdzięczam uprzejmej sugestii prof. S. Ryżko. Dotyczy ona kondensatorów stałych, wykonywanych w postaci zwijek zawierających taśmy materiału izolacyjnego, zazwyczaj papieru, oraz taśmy folii metalowej. Na skutek spiralnego zwinięcia tych taśm prądy ładowania i wyładowania kondensatora wytwarzają pole magnetyczne przejawiające się w postaci indukcyjności. Indukcyjność ta jest nieszkodliwa przy małych częstotliwościach, ale czyni kondensator całkowicie bezużytecznym przy wielkich częstotliwościach. Znana jest co prawda powszechnie metoda produkcji tzw. kondensatorów bezindukcyjnych, ale kondensatory te są droższe. Większość kondensatorów jest produkowana metodą zwykłą, tańszą. Brak jest obecnie metody obliczenia do jakiej co najwyżej częstotliwości kondensator taki może być używany. Przy pewnym wprowadzeniu końcówek zastosowanie mogłaby tu znaleźć teoria skośnika. Obliczenia wykonane na podstawie tej teorii powinny określić granicę między racjonalnym stosowaniem kondensatorów bezindukcyjnych i kondensatorów zwykłych oraz, być może, dać pewne wskazówki konstrukcyjne do budowy tych ostatnich.

Trzecie zastosowanie dotyczy budowy torów zasilających anteny nadawcze. Jednym z podstawowych wymagań stawianych takiemu torowi jest dostatecznie mały opór falowy, który zapewnia przeniesienie energii od nadajnika do anteny przy odpowiednio niskim napięciu. Im większy jest opór falowy toru tym większe jest napięcie pracy, tym większe są straty dielektryczne. Najmniejszy opór falowy osiągany przy stosowanych konstrukcjach dwudrutowych wyraża się w setkach omów,



czemu przy dużych nadajnikach odpowiadają napięcia rzędu 10 kV. Poza sprawą strat wchodzi tu w grę wysoki koszt budowy toru zasilającego na tak wysokie napięcie przy wielkiej częstotliwości.

Wydaje się, że opisane trudności znacznie maleją w przypadku toru, którego każdy przewód składa się z pewnej liczby szeregowo połączonych skośników. Przybliżone rozważania wskazują, że opór falowy może być wówczas bardzo mały. Zamiarem autora jest przedstawienie w następnej pracy ścisłej teorii takiego toru.

## 8. ZAKOŃCZENIE

Literatura omawianego tematu w ścisłym znaczeniu tego słowa nie istnieje, ponieważ — o ile mi wiadomo — teorii skośnego połączenia toru długiego nikt nie usiłował stworzyć. Podany wykaz obejmuje dzieła podstawowe, w których teoria obwodów elektrycznych o stałych rozłożonych została potraktowana szczególnie gruntownie i wyczerpująco [2], [3], [5].

Informacje wskazujące na znaczenie, jakie może mieć dla praktyki zastosowanie opracowanej przeze mnie teorii budowy niskooporowych torów zasilających anteny nadawcze, znajdują się w książce [4].

Przy obliczaniu przykładów liczbowych korzystałem z książki [1].

*Praca niniejsza jest skrótem pracy pt.: „Teoria skośnego włączenia toru długiego w obwód elektryczny” uznanej przez Radę Wydziału Łączności Politechniki Warszawskiej w dniu 30 czerwca 1952 r. za pracę doktorską*

## WYKAZ LITERATURY

- [1.] Grover F. W.: Inductance calculations. New Jork 1946.
- [2.] Krug K. A. Osnovy elektrotechniki, Moskwa 1946.
- [3.] Nowicki, W.: Podstawy techniki przenoszenia przewodowego. W-wa 1948.
- [4.] Pistol Kors A. A.: Antenny. Moskwa 1947.
- [5.] Ramo S., Whinnery J. R.: Fields and waves in modern radio. New Jork 1945.

## Ч. РАЙСКИ

### ТЕОРИЯ ДИАГОНАЛЬНОГО СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ДЛИННОЙ ЦЕПИ

#### Резюме

1. Вступление. Настоящий труд является выводом свойств электрически длинной цепи, примененной в виде двухполюсника таким образом, что одним зажимом двухполюсника является начало одного



провода, а другим его зажимом — конец второго провода. Рассмотрены только цепи с равномерно распределенными единичными параметрами. Положено, что в случае даже неправильных изгибов цепи, распределение единичных параметров остаётся равномерным при условии, что как радиусы кривизны в каждой точке цепи, так и наименьшие расстояния между разными не-смежными частями цепи достаточно велики в сравнении с поперечными размерами цепи.

2. Предварительный анализ. Пусть цепь наша — рис. 3 — имеет длину  $2l$ . Главным интересующим нас предметом будет определение комплексного сопротивления  $z_s$  между зажимами  $a$  и  $d$ , которое мы назовём сопротивлением диагонального соединения электрически длинной цепи. Сопротивление это равно отношению потери напряжения  $V_{ad}$  между зажимами  $a$  и  $d$  к интенсивности тока  $I_s$  (уравн. 1).

Рассмотрим некоторое сечение  $ef$  этой цепи. Полную потерю напряжения  $V_{ad}$  можно подразделить на три части, а именно: на продольную потерю напряжения в первом проводе между точками  $a$  и  $e$ , поперечную потерю напряжения между точками  $e$  и  $f$  и, наконец, продольную потерю напряжения во втором проводе между точками  $f$  и  $d$  (уравн. 2). Вследствие наличия ёмкости и проводимости изоляции между проводами, на каждом участке цепи появляется поперечный ток. Этот ток уменьшает интенсивность тока в первом проводе и увеличивает её на ту же величину во втором проводе.

Вследствие этого сумма интенсивностей токов в обоих проводах остаётся постоянной в каждой точке и равной интенсивности тока  $I_s$  входящей в цепь или исходящей из неё (уравн. 3).

3. Дифференциальные уравнения проблемы. Применяя законы Ома и Кирхгоффа к участку цепи между сечениями находящимися в расстоянии  $x$  и  $x + \delta x$  от середины цепи (рис. 4), мы получим 5 дифференциальных уравнений — от (14) до (18). Входящие в эти уравнения обозначения имеют следующие значения:

- $U_1$  и  $U_2$  — продольные потери напряжения,
- $U_3$  — поперечная потеря напряжения,
- $R_1$  и  $R_2$  — активные сопротивления проводов на единицу длины,
- $L_1$  и  $L_2$  — собственные индуктивности проводов на единицу длины,
- $G$  — проводимость изоляции на единицу длины,
- $C$  — ёмкость цепи на единицу длины,
- $M$  — взаимная индуктивность цепи между проводами на единицу длины.

4. Решение дифференциальных уравнений. При решении приведенных уравнений были введены следующие новые величины:

- $Z_1$  и  $Z_2$  — определённые по ур. (9) и (10) комплексные сопротивления проводов на единицу длины,  
 $Z_w$  — определённое по ур. (11) комплексное продольное сопротивление цепи на единицу длины,  
 $\sigma$  — определённый по ур. (12) коэффициент асимметрии цепи,  
 $Y$  — определённая по ур. (14) комплексная поперечная проводимость на единицу длины,  
 $\gamma$  — определённая по ур. (17) постоянная распространения цепи,  
 $Z$  — определённое по ур. (26) сопротивление волновое

Кроме того, для получения решения в симметрической форме — введена при помощи уравнения (16) новая переменная  $I_3$ .

Упомянутые 5 дифференциальных уравнений можно свести к одному дифференциальному уравнению (18) второго разряда, решение которого даёт нам формула (19). Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  можно определить на основании первичных условий, которые гласят, что на том конце цепи, где  $x = -l$ , суммарный ток проходит только по первому проводу, а на другом конце цепи, где  $x = l$ , суммарный ток проходит только по второму проводу. После использования начальных условий решение (19) заменяется на (20), из которого легко получить распределения (21) и (22) интенсивности токов и распределения (23), (24) и (28) падений напряжения. Деля сумму падений напряжений на суммарную интенсивность тока, мы получим формулу (30), на сопротивление длинной цепи для диагонального соединения электрически длинной цепи.

5. Обсуждение общей формулы. Рассмотрены два частных случая: симметрическая цепь с очень малыми потерями и случай концентрического кабеля. В первом случае коэффициент асимметрии сопротивления проводов и проводимость изоляции следует принять равными нулю. Общая формула комплексного сопротивления  $Z_s$  получает более простой вид (36), в котором новый параметр  $\varphi$  — определяется при помощи формулы (32), а  $L$  — обозначает обычную индуктивность электрически длинной цепи на единицу длины (34).

Как видно из формулы (36) комплексное сопротивление  $Z_s$  — в этом случае реактивно и оно складывается из двух членов. Первый член может иметь индуктивную или ёмкостную реакцию, второй же — имеет всегда индуктивную реакцию. Параметр  $\varphi$  пропорционален частоте. Отсюда следует, что при повышении частоты равнодействующее комплексное сопротивление также изменяет свой знак, но диапазоны частот соответствующие отрицательному реактивному сопротивлению гораздо уже диапазонов частот, соответствующих положительной индуктивной реакции, как это видно на примере показанном на рис. 5. Распределение токов вдоль цепи дано в формулах (38) и (39), распределение напря-

жений интенсивности — в формулах (42), (43) и (44). Все распределения, за исключением последнего, являются суммами синусоидальных и линейных членов.

В случае концентрического кабеля коэффициент асимметрии очень незначительно отличается от единицы. Это следует из того, что взаимная индуктивность между проводами концентрического кабеля равна собственной индуктивности внешнего провода, а также из того, что в практически встречаемых случаях действительное сопротивление внешнего провода на единицу длины значительно меньше его комплексного сопротивления на единицу длины. Общая формула комплексного сопротивления  $Z_s$  таким образом упрощается и принимает вид формулы (49). В этой формуле оба члена имеют физическую интерпретацию. Первый член является входным сопротивлением холостого хода электрически длинной цепи, длиной  $2l$  с волновым сопротивлением  $Z$  и с постоянной распространения  $\gamma$ . Это именно и есть полное сопротивление между зажимами  $a$  и  $b$  при разъединенных зажимах  $c$  и  $d$ . Второй член равен сопротивлению  $Z_{bd}$  между зажимами  $b$  и  $d$  при достаточно малых частотах когда можно пренебречь влиянием ёмкостей рассеяния между разными частями внешнего провода. Эта физическая интерпретация выражена формулой (50), которая не включает в себе ничего нового по сравнению с формулой (49).

Формула (50) на первый взгляд кажется очевидной, ибо она выражает только последовательное соединение двух комплексных сопротивлений. В действительности вопрос этот представляется иначе, так как формула (50) действительна только для некоторых родов цепей, между прочим приблизительно действительна для концентрической цепи, но ошибочна для симметрической цепи. Значение формулы (50) заключается в том, что она действительна даже тогда, когда к зажимам  $b$  и  $d$  присоединено внешнее комплексное сопротивление. Это можно доказать принимая  $x = -l$  и применяя формулы (24) и (28).

Так как ёмкости рассеяния можно заменить соответственно подобранной ёмкостью, присоединённой к зажимам  $b$  и  $d$ , то формула (50) действительна для всяких частот.

Ошибка формулы (50) для действительной составляющей комплексного сопротивления — того же разряда, что и ошибка измерения, а для полной составляющей она значительно меньше и настолько мала, что формулу (50) можно в этом отношении считать точной.

6. Опытная проверка. Теоретические результаты были проверены на опыте на участке антенного кабеля длиной ок. 36 м. Сечение кабеля видно на рис. 8. Для измерений кабель был подвешен на стене в форме приблизительно нескольких буквам  $U$ . Оба конца кабеля были доведены до измерительного моста.

Проверка общей формулы (30) затруднительна вследствие ёмкости рассеяния между разными частями внешнего провода а также вследствие ёмкости по отношению к земле. Однако формула (50), представляющая частный случай теории, очень пригодна для опытной проверки. Следует только измерить комплексное сопротивление  $Z_s$  диагонального соединения, комплексное сопротивление  $Z_0$  между зажимами  $a$  и  $b$  при разединенных зажимах  $c$  и  $d$  и комплексное сопротивление  $Z_{be}$  между зажимами  $b$  и  $d$ . Если формула (50) правильна, то выражение  $Z_0 + Z_{bd} - Z_s$  должно равняться нулю. Результаты измерений для диапазона частот от 0,4 мгц до 2,8 мгц приведены в таблице. Они, как кажется, подтверждают правильность формулы в границах точности измерений.

Дальнейшая проверка состояла в том, что к зажимам  $b$  и  $d$  был присоединен конденсатор переменной ёмкости и производились измерения при разных его положениях. Результаты тоже подтвердили правильность формулы (50).

Настоящий труд представлен Совету Отдела Связи Варшавского Политехнического Института, как диссертация для получения докторской степени.

CZ. RAJSKI

## THE THEORY OF THE CROSS-CONNECTED LONG LINE

### Summary

**Introduction.** This paper presents the derivation of the properties of the long line when connected as a two-pole network with one pole at the beginning of one conductor and the other pole at the end of another conductor. Only the lines with uniformly distributed constants are considered. It has been assumed that even if the line is bent in an irregular manner the constants remain uniformly distributed, provided the radius of curvature at each point of the line and the closest distance between various non-successive parts of the line are both large enough as compared with the transverse dimensions of the line.

**Preliminary analysis.** Suppose we have a long line of the length  $2l$  as shown in fig. 3. We will be mainly interested in finding the impedance  $Z_s$  between the terminals  $a$  and  $d$ , which we will call the cross-impedance of the long line. This impedance is equal to the voltage drop  $U_{ad}$  across the terminals  $a$  and  $d$  divided by the intensity of the current  $I_s$  flowing through the line (eq. 1).

Let us consider a cross section  $ef$  of this line. The total voltage drop  $U_{ad}$  may be divided into three parts, namely the longitudinal drop in the first conductor between the points  $a$  and  $e$ , the transverse drop between  $e$  and  $f$

and the longitudinal drop in the second conductor between  $f$  and  $d$  (eq. 2). Owing to the existence of the capacity and leakage between the conductors there is a transverse current in every section of the line which decreases the current intensity  $I_1$  in the first conductor and increases by the same amount the current intensity  $I_2$  in the second conductor. The sum of the current intensities in both conductors is therefore constant along the line and is equal to the current intensity  $I_s$  entering or leaving the line (eq. 3).

The differential equations of the problem. By applying the Ohm's and Kirchhoff's laws to the section of the long line comprised between the cross sections lying at the distances  $x$  and  $x+\delta x$  respectively from the mid point of the line (fig. 4) five differential equations (4) to (8) were obtained. The symbols used in these equations have the following meanings.

$U_1$  and  $U_2$  — longitudinal voltage drops.

$U_3$  — transverse voltage drop.

$R_1$  and  $R_2$  — resistances of the conductors per unit length.

$L_1$  and  $L_2$  — self inductances of the conductors per unit length.

$G$  — leakage of the line per unit length.

$C$  — capacity of the line per unit length.

$M$  — mutual inductance between the conductors per unit length of the line.

The solution of the differential equations. In the process of solving the equations (4) to (8) some further symbols were introduced.

$Z_1$  and  $Z_2$  — impedances of conductors per unit length as defined by (9) and (10),

$Z_w$  — series impedance of the line per unit length as defined by (11),

$\sigma$  — asymmetry coefficient of the line as defined by (12),

$T$  — shunt admittance of the line per unit length as defined by (14),

$\gamma$  — propagation constant of the line as defined by (17),

$Z$  — characteristic impedance of the line as defined by (26).

Besides to obtain a symmetrical solution, a new variable  $I_3$  was introduced by (16). The above five differential equations can be reduced to a single second order differential equation (18), whose general solution is given by (19). The integration constants  $A$  and  $B$  can be evaluated from boundary conditions stating that at one end the line, where  $x = -l$ , the total current flows through the first conductor only and at the other, end, where  $x = l$ , the total current flows through the second conductor only. By



force of boundary conditions the solution (19) takes the form given by (20) from which it is easy to derive the distributions (21) and (22) of the current intensities as well the distributions (23), (24) and (28) of the voltage drops. Dividing the sum of voltage drops by the total current intensity we obtain the general formula (30) for the impedance of the cross-connected long line.

Discussion of the general formula. Two cases are considered: the parallel wires system with negligible losses and the coaxial cable. In the former case the asymmetry coefficient, the resistances of the conductors and the leakage of the line are all to be equal to zero. The general formula for the cross-impedance  $Z_s$  is therefore simplified to the expression (36) where the new parameter  $\varphi$  is defined by (32) and where  $L$  denotes the customary inductance of the long line per unit length (34).

As shown by (36) the impedance  $Z_s$  is in this case purely imaginary and consists of two terms. The first term may have either an inductive or capacitive reactance. The second term has always inductive reactance. The parameter  $\varphi$  is proportional to the frequency. It is therefore clear that as the frequency increases the resulting impedance also changes its sign, but the frequency ranges corresponding to the capacitive reactance are much narrower than those corresponding to the inductive reactance, as exemplified by fig. 5. The current distributions along the line are given by (38) and (39) and the voltage drop distributions by (42), (43) and (44). All distributions but the last are the sums of sinusoidal and linear terms.

In the case of the coaxial cable the asymmetry coefficient only slightly differs from unity (46). This is due to the fact that the mutual inductance between the conductors of the coaxial cable is equal to the self inductance of the external conductor; moreover in practical cases the resistance of the external conductor is very small as compared with its reactance.

The general expression (30) for the cross-impedance  $Z_s$  of the long line is thus simplified and takes the form given by (49). Here both terms have a physical interpretation. The first one represents the input impedance of the open circuit line of the length  $2l$  with the characteristic impedance  $Z$  and the propagation constant  $\gamma$ . But this is just the impedance  $Z_0$  between the terminals  $a$  and  $b$  with  $c$  and  $d$  open. The second term is equal to the impedance  $Z_{bd}$  between the terminals  $b$  and  $d$  at sufficiently low frequencies when the effect of stray capacities between various parts of outer conductor may be neglected. This physical interpretation is expressed by the formula (50) which is otherwise a restatement of (49).

At first glance the formula (50) may seem to be trivial, as it represents nothing but a series connection of two impedances. In fact it is not so.

Formula (50) does not hold for each kind of line; it is approximately valid for a coaxial line but is not true for a parallel wires system. The importance of the formula (50) lies in the fact that it remains true even when terminals  $b$  and  $d$  are shunted by some external impedance. This can be proved by putting  $x = -l$  and using the formulae (24) and (28). As the stray capacities may be represented by a suitable capacity shunted across the terminals  $b$  and  $d$ , so the formula (50) holds actually for all frequencies.

The error of the formula (50) for the real component of the impedance is of the same order as the error of measurement. For the imaginary component of the impedance the error is much smaller, so small in fact, that in this respect formula (50) may be regarded as quite accurate.

**Experimental verification.** The theoretical results were verified experimentally on a section of an aerial cable about 36 m long. The cross section of the cable is shown in fig. 8. For the sake of measurements the cable was hung up on a wall in the shape of several letters U. Both ends of the cable were led to the measuring bridge. Verification of the general formula (30) is rather difficult owing to stray capacities between various parts of the external conductor and the capacity to the ground. But the formula (50) which represents a particular result of the theory lends itself very well to the experimental verification. One has only to measure the cross-impedance  $Z_s$ , the impedance  $Z_0$  between the terminals  $a$  and  $b$  with  $c$  and  $d$  left open and the impedance  $Z_{bd}$  between the terminals  $b$  and  $d$ . If the formula (50) is correct the expression  $Z_0 + Z_{bd} - Z_s$  should be zero. The results of the measurements for frequencies ranging from 0.4 Mc/s to 2.8 Mc/s are shown in the table. They seem to confirm the formula within the accuracy of the measurements.

Further check consisted in connecting a variable condenser across the terminals  $b$  and  $d$  and making the measurements at various positions of the condenser. The results also supported the formula (50).

This paper is an abbreviation of a dissertation presented at the Warsaw Technical University for acquiring the degree of Eng. D. The author wishes to acknowledge the general guidance and most valuable hints obtained from prof. W. Nowicki, Eng. D. and prof. S. Ryżko, Eng. D. during the work.





J. L. JAKUBOWSKI

## Wpływ światła na strefę chronioną piorunochronów prętowych

*Rękopis dostarczono 7. 5. 53*

**Streszczenie.** Autor analizuje możliwość działania zwodu prętowego, albo jako elementu ściągającego pioruny, albo niedopuszczającego do wyładowań piorunowych, a następnie ustala warunki, jakie winny być spełnione przy sprawdzaniu teorii Frenkla za pomocą badań modelowych. Warunki te zostały ustalone w oparciu o wstępną serię pomiarów polegających na porównaniu rozdziału przeskoków pomiędzy piorunochron, obiekt chroniony i ziemię przy stosowaniu napięcia stałego i bez niego. Kontrolni podano taki układ, w którym rozdział przeskoków pomiędzy wymienione trzy elektrody uziemione był równomierny, przy czym model składał się z 3 ostrzy: piorunowego, zwodu i obiektu chronionego.

Pomiarów dokonano posługując się generatorem udarowym Głównego Instytutu Elektrotechniki 2,8 MV, 32 kWs.

W wyniku wstępnych badań autor stwierdza brak wpływu światła w badanym układzie na wybiórczość pioruna; nie pozwoli to jednak na wyciągnięcie wniosków ogólnych, jeśli w dalszych badaniach nie będzie uwzględniony szereg dezyderatów.

### 1. OBECNY STAN ZAGADNIENIA

Historia piorunochronów zaczyna się już w starożytnym Egipcie, jednak podejście naukowe i rozpowszechnienie przyrządy te zyskują dopiero począwszy od końca XVIII w., od pionierskich prac M. W. Łomonosowa i B. Fränkлина. Przez całą nowoczesną historię piorunochronów przewijają się wyraźnie dwa sprzeczne poglądy. Według jednych badaczy rola piorunochronu polega na niedopuszczaniu do uderzenia pioruna, według drugich badaczy, stanowiących olbrzymią większość, zwód piorunochronu ściąga na siebie uderzenia pioruna i przez to nie dopuszcza do trafienia w obiekt chroniony. Zwolennicy pierwszej hipotezy najczęściej przypuszczają, iż ostrze zwodu rozbraja chmurę, a to dzięki powstającemu przy nim wyładowaniu świetlącemu i związanemu z nim prądowi w powietrzu, między chmurą a ziemią. Mówią oni o elektrycznym drenowaniu chmury.

Nawet bez bliższej analizy jest jasne, iż zwód, choćby silnie świetlący, a więc odprowadzający prąd rzędu kilku  $\mu\text{A}$ , nie potrafi zabrać znacznego ładunku z chmury, odległej od niego co najmniej o wiele setek metrów. Badania J. S. Stiekolnikowa [16], który wprowadzał przy pomocy balonów uziemione przewody do wnętrza chmury burzowej, wykazały, że nawet tak radykalne posunięcie nie powodowało rozbrojenia chmury. Pioruny były mianowicie nawet wtedy, gdy do chmury wprowadzono kilka zwodów uziemionych. Stiekolnikow udowodnił również, że rozładowanie chmury powierzchniowe, za pomocą sieci drutów kolczastych, zawieszonych kilkadziesiąt metrów nad ziemią (prąd świetlenia rzędu  $1000 \mu\text{A}$  na metr długości drutu), nie może wyraźnie wpłynąć na ładunek chmury. Jako jeszcze jeden argument, popierający to twierdzenie, można przytoczyć fakt, że nie zauważono, aby intensywność wyładowań piorunowych malała, gdy chmura przechodzi nad liniami bardzo wysokich napięć. A przecież przewody ogromowe i robocze takich linii wtedy silnie świetlą i powodują przepływy stosunkowo dużych prądów w otaczającym powietrzu.

Podane wyżej zastrzeżenia co do niemożności rozładowywania chmur przez zwykle zwody dotyczą także zwodów radioaktywnych francuskiej firmy Helita, pomysłu badacza węgierskiego Szillarda. Zwody te zakończone są izolatorem, pokrytym substancją radioaktywną, przy czym jony wytwarzane w otaczającym powietrzu są, stosownie do opisu, wyrzucane w górę w kierunku chmury. Do tego celu służy izolowany ekran metalowy, który przyjmuje potencjał otaczającego pola za pośrednictwem sond radioaktywnych. Jak wykazał Stiekolnikow [16], zwody takie wytwarzają jednak ładunek zbyt mały na to, aby — nawet gdyby całkowicie dotarł do chmury — mógł ją rozładować. Również doświadczenia, wykonane w Instytucie Fizyki Uniwersytetu we Fryburgu [7], polegające na rozładowywaniu przez zwód systemu Helita izolowanej płyty, odłączonej od źródła napięcia, nie mogą stanowić dowodu skuteczności działania zwodu radioaktywnego w naturze, gdzie odległość zwodu od chmury mierzy się w setkach metrów, a nie centymetrów. Doświadczenia te budzą zresztą zastrzeżenia natury metodycznej, ze względu na niewyeliminowanie wpływów po jedwabnych sznurach, na których była zawieszona płyta. Z drugiej strony także brak doświadczeń eksploatacyjnych, a opublikowane są nieprzekonywujące (P. Grenier [6]).

Inny sposób tłumaczenia działania zwodów systemu Helita przypomina w pewnym stopniu teorię L. N. Bogojawleńskiego, który zakładał istnienie przewodzących słupów powietrza nad tzw. gniazdami piorunowymi. Teoria ta zbankrutowała nie mogąc znaleźć źródła dość silnej jonizacji słupów.

Jak wynika z powyższego przeglądu wydaje się, że hipoteza *drenowania* chmur, związanego ze świetleniem ostrzy, nie ma podstaw. Dlatego też tym bardziej ciekawa jest próba J. I. Frenkla [5] tłumaczenia działania zwodu przy pomocy świetlenia. Według Frenkla: „rola zwodu piorunowego sprowadza się nie tyle do rozładowania otaczającego powietrza, ile do jego jonizacji. Zgodnie z badaniami G. I. Prussakowa i W. A. Sołowjewa, analogiczny efekt powoduje jonizacja powietrza promieniami rentgenowskimi. Przy tym zjonizowane warstwy powietrza działają jak ziemia, lub jeśli kto woli, jak uziemiony przewodnik, górujący nad chronionym obiektem, który w ten sposób znajduje się jakby wewnątrz klatki Faradaya“. Przy takim założeniu — przestrzeń chroniona przez zwód to jakby płaszcz silnie przewodzącego powietrza. Płaszcz ten Frenkiel identyfikuje z przestrzenią, w której powietrze jest wymieszane przez wiatr jonowy. Ładunkom przestrzennym, skupiającym się wokół zwodu, Frenkiel przypisuje tylko niewielką rolę niedopuszczania do uderzenia pioruna.

Ładunek przestrzenny jest oczywiście powiązany z przewodnością powietrza, ale związek ten nie jest prosty, wobec istnienia jonów „lekkich“ i „ciężkich“ (Stiekolnikow [15], str. 206). Dane w literaturze co do strefy z ładunkiem przestrzennym w pobliżu ostrza są mało sprecyzowane.

C. W. Lutz [9] mówi o „ładunku dodatnim w warstwie powietrza, bliskiej ziemi“<sup>1</sup>. Warstwa ta może być „przenoszona przez wiatr“<sup>2</sup>. Gierasimowa znalazła, że ładunek przestrzenny w czasie burzy, wywołany ulotem z ostrza, rozprzestrzenia się na dziesiątki, a nawet setki metrów<sup>3</sup>. W. I. Arabadzi [3] twierdzi: „Emitowany przez ostrze ładunek rozkłada się przy zwodzie stosownie do pola elektrycznego koło niego i daje w stosunku do chmury pole przeciwne, o symetrii stożkowej, mające istotne znaczenie przy działaniu zwodu. Jednocześnie należy nadmienić wpływ na konfigurację przestrzeni chronionej takich czynników, jak wiatr, wydmuchujący ładunki przestrzenne...“

Frenkiel nie podaje w swej książce badań doświadczalnych, potwierdzających jego teorię. Winny one iść w dwóch kierunkach: badań stanu elektrycznego otoczenia zwodu w skali naturalnej i badań przestrzeni chronionej na modelach w skali zmniejszonej. Celem niniejszej pracy jest właśnie określenie warunków badań na modelach w oparciu o pomiary wstępne.

<sup>1</sup>) O hipotezie B. F. J. Schonlanda, dotyczącej wpływu ładunku przestrzennego (z dala od ostrza) na rozwój wyładowania wstępnego, idącego od chmury, patrz [13].

<sup>2</sup>) Zwykły, nie jonowy.

<sup>3</sup>) Podane przez W. I. Arabadziego [3].

## 2. DYSKUSJA WARTOŚCI BADAŃ NA MODELACH

Określenie przestrzeni chronionej przy pomocy badań na modelach stanowi podstawę wielu przepisów ochrony budowli i linii. Dyskusję wartości tej metody przeprowadzili A. Matthias [10], [11], I. S. Stiekolnikow [16], E. B. Wedmore [4], C. F. Wagner i G. D. Mc. Cann [17], [18] i inni. Dla potwierdzenia jej wyników brak dostatecznie obszernych danych statystycznych odnośnie naturalnego pioruna. Punkt zwrotny w badaniach modelowych stanowiło odkrycie przez A. A. Akopiana [1]<sup>1</sup>, że mechanizm wyładowań na modelu odpowiada naturalnemu tylko wtedy, gdy chmura na modelu ma biegunowość dodatnią, mimo że chmura w naturze może mieć biegunowość ujemną albo dodatnią. Gdy chmura jest ujemna, przy badaniach modelowych występują mianowicie bardzo silne wyładowania wstępne oddolne, zwierające dużą część przestrzeni ziemia-chmura. Wyładowania takie nie zachodzą w naturze. Poza tym mechanizm wyładowań na modelu i w naturze jest taki sam (wyładowanie wstępne i główne)<sup>2</sup>.

Modelowanie obejmuje wymiary geometryczne, natomiast rezygnuje się obecnie ze zmniejszenia w skali napięcia. Wychodzi się z założenia, że czoło kanału wyładowania wstępnego pioruna (czoło lidera) samo wytwarza natężenie pola, niezbędne do posuwania się. Ponadto bierze się pod uwagę, że czoło to *decyduje się* co do miejsca trafienia w obiekt uziemiony dopiero w jego pobliżu. Przy tych założeniach wystarcza, by elektroda, z której wychodzi lider, była dostatecznie wysoko nad ziemią. Jako tę elektrodę bierze się zwykle ostrze. Jako poważne zarzuty stawiano badaniom modelowym to, że nie odtwarzają w skali odległości cząsteczek powietrza, a więc jego gęstości (Slepian [4]) oraz wilgotności (I. S. Stiekolnikow [16]).

Przy modelowaniu nie uwzględniano dotychczas światła długotrwałych na zwodach i chronionych obiektach pod wpływem pola elektrycznego między chmurą a ziemią. Należy je odróżnić od światła krótkotrwałych, zjawiających się przy zbliżeniu czoła kanału pioruna; te ostatnie są odtwarzane automatycznie przy pomiarach. Świetlenia długotrwałe grają, według teorii Frenkla istotną rolę, jeśli chodzi o wielkość przestrzeni chronionej. Ma on niewątpliwie na myśli te świetlenia, a nie świetlenia krótkotrwałe, gdyż tylko przy nich może wytworzyć się wiatr jonowy o stosunkowo małej szybkości rzędu 2 m/s (W. I. Arabadzi [2]).

<sup>1</sup>) Porównaj także [4] i [17].

<sup>2</sup>) Zastrzeżenia co do słuszności stosowania tylko udarów dodatnich wynikają z badań H. Norindera i O. Salki [12].

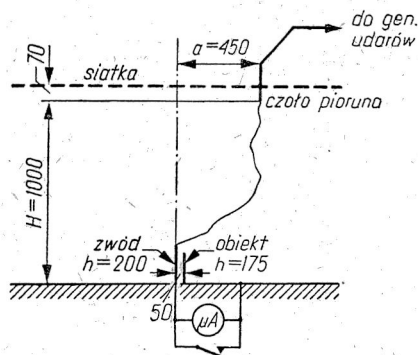
Świetlenia długotrwałe można wytworzyć na modelu, przykładając napięcie stałe między chmurę a ziemię, przy czym do wytworzenia pioruna stosuje się, jak zwykle, napięcie udarowe. Wprawdzie badania na modelach były już wykonywane z napięciem stałym, jako źródłem iskry piorunowej, ale bez zwrócenia uwagi na wpływ światlenia (R. W. Sorensen i tow. [4], A. M. Zalesski [19]).

### 3. CEL BADAŃ WSTĘPNYCH

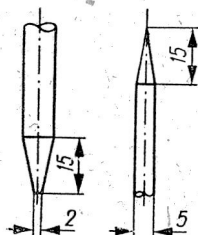
Z podanych wyżej rozważań wynikają założenia opisanych niżej badań na modelach. Wobec małej znajomości struktury, warunków występowania i nasycenia ładunków przestrzennych oraz związanej z nimi strefy przewodzącej, nie ma na razie podstaw do racjonalnego ich modelowania, tj. odtwarzania w skali. Dlatego w niniejszej pracy postawiono sobie na razie, jako cel, stwierdzenie czy w ogóle świetlenia mają wpływ na przestrzeń chronioną na modelu. Z tego punktu widzenia wydaje się celowe zbadanie wpływu światła bardzo intensywnych. W badaniach poniższych zastosowano świetlenia, dające taki sam prąd upływu, jak w naturze, tj. rzędu kilku  $\mu\text{A}$  (W. I. Arabadzi [2], C. W. Lutz [9]).

### 4. UKŁAD POMIAROWY

Do badań posługiwano się generatorem Głównego Instytutu Elektrotechniki w Warszawie 2,8 MV, 32 kW. Stosowano udary nieco większe niż 100-procentowe napięcie przeskoku układu badanego. Kształt udaru był  $0,5/\infty\mu\text{s}$ . Kształt taki, przy biegunowości dodatniej, daje według C. F. Wagnera i G. D. Mc Canna [17] praktycznie te



Rys. 1. Model układu: „czoło pioruna — zwód piorunochronowy — obiekt chroniony“.



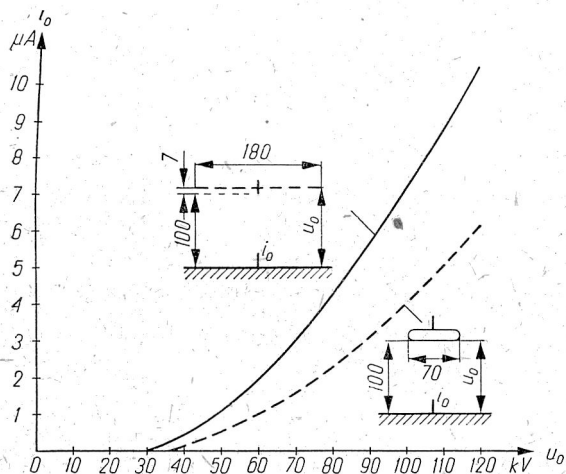
Rys. 2. Szkic zakończeń górnej i dolnych elektrod ostrzowych.

same wymiary strefy chronionej, jak wolniejszy wzrost napięcia, bardziej odpowiadający przebiegom naturalnym. Wartość szczytowa udaru wynosiła +1550 kV.



Stosunek wysokości  $H$  ostrza piorunowego nad ziemią (rys. 1) do wysokości ostrza-zwodu  $h$  przyjęto równy  $\frac{H}{h} = 5$  (porównaj [4], [10], [14]

i [17]). Jako obiekt chroniony (rys. 2) wybrano ostrze, zdając sobie sprawę,



Rys. 3. Zależność prądu świetlenia od napięcia stałego w przypadku stosowania górnej elektrody pod postacią siatki i — pod postacią płyty (odległości w cm).

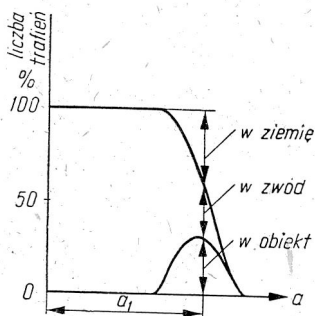
ka-płyta uziemiona ( $600 \times 600$  cm) wynosiło 100 kV. Było to napięcie ładowania generatora udarowego, stosowanego do wytwarzania iskier, które doprowadzono na siatkę, zwierając iskiernik włączający generatora. Napięcie stałe trzymano na wysokości ok. 100 kV w ciągu ok. 0,5 minuty przed każdym przeskokiem.

Średnie natężenie pola (stosunek napięcia do odstępów) w przestrzeni siatka-ziemia przy 100 kV wynosiło 1 kV/cm. Jest to wartość ok. 10 razy większa niż zachodząca w naturze [2], [8], [9], ale dająca prąd świetlenia rzędu prądów notowanych w naturze, mianowicie 6  $\mu A$ . Zależność prądu świetlenia od napięcia stałego podaje rys. 3. Z rysunku tego widać, jaki był wpływ świetlenia górnego ostrza i świetleń na krawędziach siatki na wartość prądu dolnego ostrza.

Metodyka badań polega zwykle na poziomym przesuwaniu ostrza piorunowego i określaniu wzrokowym liczby uderzeń iskry w pioruno-

że kształt tej elektrody ma istotne znaczenie (A. Matthias [11]). Nie chodziło tu jednak o dokładne wyznaczenie strefy chronionej dla celów praktycznych, ale o badania porównawcze wybiórczości pioruna przy istnieniu świetleń i bez świetleń.

Celem zwiększenia świetleń z ostrza-zwodu, nad ostrzem piorunowym (górnym) umieszczono połączoną z nim siatkę metalową o wymiarach  $100 \times 180$  cm (rys. 1). Napięcie stałe, przyłożone do układu siatka-płyta uziemiona ( $600 \times 600$  cm) wynosiło 100 kV. Było to napięcie ładowania generatora udarowego, stosowanego do wytwarzania iskier, które doprowadzono na siatkę, zwierając iskiernik włączający generatora. Napięcie stałe trzymano na wysokości ok. 100 kV w ciągu ok. 0,5 minuty przed każdym przeskokiem.



Rys. 4. Typowa krzywa, podająca rozdział liczby trafień ( $a_1$  — patrz rys. 1).

chron, obiekt chroniony i ziemię. Takie pomiary pozwalają wykreślić charakterystykę, jak na rys. 4. We wstępnej fazie badań zrezygnowano z porównywania całej charakterystyki według rys. 4 dla przypadku ze światłem i bez światła, a ograniczono się do porównywania jednego jej punktu.

A. Matthias [11] wyznaczał granicę przestrzeni chronionej przez zwód, jako leżącą między dwoma punktami, określonymi przez 0 trafień w obiekt chroniony na 100 udarów i przez 1 trafienie na 100 udarów. Metoda ta wymaga stosowania bardzo dużej liczby udarów, a poza tym nie daje pewności, czy przy braku przeskoków przy 100 udarach nie wystąpi przeskok przy 101. Poza tym zmiany kształtu ostrza przy dużej liczbie udarów lub jego ogrzanie mogą powodować zmiany warunków przeskoku, wprowadzające dodatkową niepewność.

W pracy niniejszej jako punkt kontrolny przyjęto punkt odpowiadający odległości  $a_1$  z rys. 4, przy której przeskoki rozkładają się równomiernie między ostrze-zwód, ostrze-obiekt chroniony i ziemię (na każde przypada mniej więcej 33%). Jeśli wpływ światła jest istotny, winien wyraźnie odbić się na tym rozkładzie przeskoków.

## 5. WYNIKI POMIARÓW

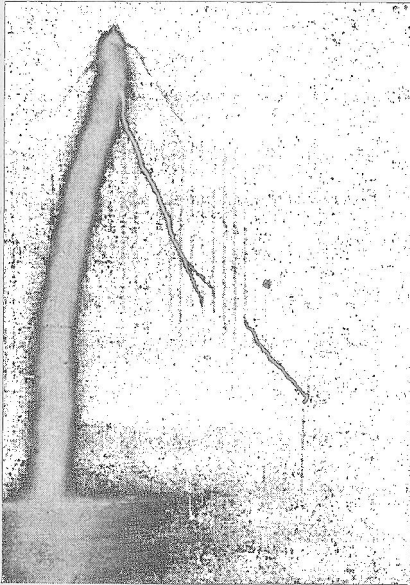
Wstępna seria pomiarów wykazała, iż w opisanych warunkach światlenia nie mają wpływu na rozkład przeskoków między zwód, obiekt chroniony i ziemię. Wprawdzie nie upoważnia to jeszcze do wniosku, że kształt przestrzeni chronionej nie zmienia się, ale wniosek taki jest bardzo prawdopodobny, zwłaszcza wobec bardzo dużej wartości prądu światlenia. Decydujące znaczenie będą miały dalsze pomiary, które zostaną wznowione po przebudowie laboratorium.

Jak zaznaczono, badania opisane były traktowane jako wstępne. Przy ich krytyce nasuwają się następujące zastrzeżenia. Po pierwsze prąd światlenia był nie w skali, a więc i obszar ładunków przestrzennych wokół ostrza nie w skali. Następnie oprócz dolnego ostrza (zwodu) świeciło również górne (piorunowe) i to daleko silniej. W badaniach dalszych należałoby uchwycić również wpływ światlenia ostrza-obiektu chronionego. Jest bardzo prawdopodobne, że ładunki wypełniały całą przestrzeń między elektrodami siatka- płyta. Ponadto pochodziły one niewątpliwie nie tylko ze światła ciągłych, ale i z przeskoków iskier, których w ciągu 10-godzinnej serii pomiarów wykonywano ok. 300.

Intensywność światła była, jak zaznaczono wyżej, bardzo duża. Jeśli mimo to nie wpływały one wyraźnie na decyzję pioruna, świadczyć to może, że albo jonizacja przy badaniach modelowych wogóle nie ma wpływu, albo że jonizacja wywołana przez światlenia ma wpływ pomijalny wobec

jonizacji, pochodzącej od przeskoków iskrowych. Potwierdzenie się drugiego przypuszczenia postawiłoby pod znakiem zapytania w ogóle wszystkie dotychczasowe badania modelowe, co wydaje się mało prawdopodobne.

Przy obserwacji wzrokowej przeskoków w badanym układzie nasunęło się jeszcze zastrzeżenie innej natury. Mianowicie wielokrotnie stwierdzono stosunkowo długie wyładowania wstępne (lidery), wychodzące z uziemionego ostrza-zwodu lub ostrza-obiektu chronionego (rys. 5). Nie były one



Fot. J. Bader. GIEL

Rys. 5. Stosunkowo długie wyładowanie wstępne oddolne.

jednak dłuższe niż w przypadku, gdy nie stosowano górnej siatki z rysunku 1. Długość ich można ocenić na  $\frac{1}{5}$  przerwy iskrowej ostrze piorunowe — ostrze uziemione, a więc nieco mniej niż według danych I. E. Allibone'a i J. M. Meeka [4]. C. F. Wagner i G. D. McCann [17] twierdzą, iż tak długie wyładowania występują tylko przy krótkich udarach, typu udarów normalnych  $1,5/40 \mu s$ . Jest to związane prawdopodobnie z większą szybkością liderów, idących do ziemi, a może i ze świetleniem ostrza piorunowego, jak to przypuszczają Wagner i McCann. Autorzy ci twierdzą wprawdzie, że omawiane lidery nie mają wpływu na wielkość przestrzeni chronionej, jednak nie można się oprzeć wrażeniu, że rola ich musi być większa niż świetleń pod wpływem napięcia stałego.

Przyszłe prace doświadczalne muszą uwzględnić w szerokim zakresie wpływ różnych parametrów na miejsce uderzenia pioruna.

Wydaje się, iż dla doświadczalnego określenia wpływu świetleń na model należy stosować małe prądy świetleń, wychodząc z założenia, że przestrzeń wypełniona ładunkiem maleje z prądem świetlenia. Dalej należałoby usuwać z przestrzeni międzyelektrodowej jony, pochodzące od uprzednich przeskoków. Wreszcie należałoby ograniczyć świetlenie ostrzowej elektrody górnej. Jednak zastąpienie ostrza kulą nie wydaje się wskazane, gdyż mogłoby to spowodować powstawanie długich wyładowań wstępnych z ostrza-zwodu. Aby uniknąć tych ostatnich nawet przy stosowaniu ostrza, jako górnej elektrody, wydaje się wskazane posługiwać się udarami wolniej rosnącymi niż  $0,5/\infty \mu s$ . Z górnej siatki należy zrezygnować.

Badania na modelach wartoby rozszerzyć, stosując wiatr sztuczny, przewyższający wiatr jonowy; byłoby to celowe oczywiście tylko w przypadku, gdyby rola świetleń okazała się istotna.

Pomiary modelowe wymagają uzupełnienia badaniami na zwodach w skali 1:1, mającymi na celu stwierdzenie, jak wygląda i zachowuje się strefa przewodząca z ładunkiem przestrzennym.

## 6. WNIOSKI

1. Zbadanie wpływu świetleń, wywołanych polem stałym w przestrzeni chmura-ziemia, jest możliwe na modelu, ale wymaga spełnienia szeregu warunków, dotyczących intensywności świetlenia, przebiegu napięcia udarowego, kształtu górnej elektrody i usuwania ładunków pochodzących od iskier.

2. Konieczne są badania zwodów w skali naturalnej, dotyczące własności elektrycznych, przestrzennych i czasowych otoczenia świetlącego ostrza.

3. Badania wstępne, opisane w artykule, nie pozwalają definitywnie wnioskować o wpływie świetleń na strefę chronioną. Wynik ich wydaje się być negatywny, chyba że wpływ ładunków przestrzennych, wywołanych przez poprzednie iskry jest istotny.

## WYKAZ LITERATURY

1. Akopian A. A. — Recherches de laboratoire sur les zones protégées par des parafoudres à tiges multiples. — Conf. Grands Réseaux, 1937, t. III, s. 328.
2. Arabadzi W. I. — Razriad s ostria — Priroda, 1948, s. 11.
3. Arabadzi W. I. — O zaszczie ot groz. — Priroda, 1950, s. 17.
4. E. R. A. — (Electrical Research Association). Surge phenomena — Londyn, 1941.
5. Frenkiel J. I. — Teoria jawlenij atomosferного elektricestwa — Leningrad, 1949.
6. Grenier P. — La foudre et les paratonnerres — Bull. Soc. Fr. des Electr. 1936, s. 513.
7. Institut de Physique, Université Fribourg. — Essai d'un paratonnerre radio-actif „Helita“ — Fribourg, 1937 (z materiałów reklamowych firmy Helita).
8. Jakubowski J. L. — Technika wysokich napięć — Warszawa 1951, s. 253.
9. Lutz C. W. — Über die Spitzenentladung bei Gewittern und Schauern — Gerlands Beitr. z. Geophysik, 1941, s. 317.
10. Matthias A. — Modellversuche über Blitzeinschläge — ETZ, 1927, s. 881, 928 i 973.
11. Matthias A., Burkhardtmaier W. — Der Schutzraum von Blitzfang-Vorrichtungen und seine Ermittlung durch Modellversuche — ETZ, 1929, s. 681 i 720.
12. Norinder H., Salka O. — Propriété des coups de foudre artificiels sur une surface géologiquement hétérogène — Conf. Grands Réseaux, 1950, t. III, s. 313.

13. Schonland B. F. J. — Progressive Lightning. — Proc. Roy. Soc. (A), 1934, s. 673 i 1938 s. 146.
14. Sirotinskij L. I. — Tіechnika vysokich napriaženij — t. III, Moskva 1945.
15. Stiekolnikow I. S. — Mołnia — Ak. Nauk ZSSR, 1940.
16. Stiekolnikow I. S. — Fizika mołnii i grozozaszczita — Ak. Nauk ZSSR, 1943.
17. Wagner G. F., Mc Cann G. D., Mac Lane G. L. — Shielding of transmission lines — Trans. A. I. E. E., 1941, s. 313.
18. Wagner G. F., Mc Cann G. D., Lear C. M. — Shielding of substations — Trans. A. I. E. E., 1942, s. 96.
19. Zalesski A. M. — Recherches sur modèles relatifs à la protection des lignes et des sous-stations contre les décharges de la foudre — Conf. Grands Réseaux, 1935, t. III, s. 317.

Я. Л. ЯКУБОВСКИ

## ВЛИЯНИЕ КОРОНИРОВАНИЯ НА ЗАЩИТНУЮ ЗОНУ СТЕРЖНЕВЫХ МОЛНИЕОТВОДОВ

Резюме

Автор анализирует возможность действия стержневого молниеотвода как устройства притягивающего молнию или же предупреждающего взрывной разряд. Согласно второму принципу действия происходит „дренирование“ зарядов туч благодаря токам коронирования молниеотвода. Этот принцип в настоящее время не имеет достаточного научного обоснования.

Я. И. Френкель приписывает коронированию молниеотвода иное влияние, а именно—молниеотвод окружён слоем ионизированного воздуха, играющим роль фарадеевой клетки. Этот проводящий „плащ“ совпадает по мнению этого автора с защитной зоной молниеотвода.

Целью настоящего труда является определение условий, необходимых при проверке теории Френкеля при помощи опытов на моделях. Эти условия были определены на основании предварительной серии измерений, проведенных в Главном Институте Электротехники при помощи импульсного генератора 2,8 м г в, 32 к в т. с е к. Модель (рис. 1) подвергалась положительному импульсному напряжению  $0,5/\infty$  м к. сек, несколько большему чем 100% - ное разрядное напряжение (напряжение 1550 к в). Кроме этого напряжения, вызывающего искровой разряд, было применяемо постоянное напряжение, вызывающее коронирование острия - молниеотвода. Напряжение это равное 100 к в было получено из указанного импульсного генератора путём короткого замыкания включающего разрядника (напряжение питания генератора). Предварительные измерения позволили сравнить распределение разрядов между молниеотводом, защищаемым объектом и землёй при од-



новременном приложении постоянного напряжения и без него. Контроль был проведен при такой расстановке электродов, при которой распределение разрядов между тремя названными заземленными электродами было равное.

Модель состояла из трёх острий: острия, из которого выходит молния, острия - молниеотвода и острия защищаемого объекта. Соотношение  $H/h$  высоты молниевоего электрода над землёй  $H$  к высоте молниеотвода  $h$  было принято равным 5. Высота  $h$  была 20 см (рис. 1).

Ток коронирования был равен 6 мка, т. е. масштаб его не был уменьшён. Сделано это было с целью более рельефного представления влияния коронирования. Для получения такого тока необходимо было наличие постоянной напряженности ок. 1 кв/см, т. е. приблизительно в 10 раз больше, чем напряженность выступающая в природе во время бури.

В результате предварительных исследований можно было констатировать отсутствие влияния коронного разряда на поражаемость молнией в исследуемых условиях. Однако это не позволит сделать общих выводов, если в дальнейших исследованиях не будут приняты во внимание следующие условия:

- а) ток коронирования должен быть уменьшён так, чтобы пространство с объёмным зарядом соответствовало масштабу модели;
- б) при исследовании моделей—для контроля—следует очищать междуэлектродное пространство от зарядов вызванных предыдущими разрядами;
- в) следует ограничить коронирование молниевоего острия;
- г) следует применять напряжения сравнительно медленно возрастающие так, чтобы уменьшить длину предварительных разрядов из заземлённых острий; следует тоже отказаться от сетки примененной на рис. 1.
- д) исследовать влияние искусственного ветра на защищаемую зону.

Опыты на моделях следует дополнить исследованиями в масштабе 1:1, определяющими электрические свойства ионизированного слоя в пространстве и во времени.

J. L. JAKUBOWSKI

## L'INFLUENCE DES EFFLUVES SUR LA ZONE PROTÉGÉE PAR DES PARATONNERRES À TIGES

### Resumé

L'auteur soumet à l'analyse les possibilités de fonctionnement du paratonnerre comme appareil attirant la foudre, ou empêchant la décharge de la foudre. Selon le second principe il se produit „un drainage“



causé par les courants des effluves (corona). Ce dernier principe ne peut être actuellement considéré comme fondé.

J. I. Frenkel suppose une autre possibilité de l'influence des effluves. Selon cet auteur la tige du paratonnerre est entourée d'une couche d'air conductrice ionisée jouant le rôle de cage de Faraday. L'auteur identifie ce manteau conducteur avec la zone protégée du paratonnerre.

Le présent article a pour but de déterminer les conditions qui devraient être remplies lors de la vérification de la théorie de Frenkel à l'aide d'essais sur modèles. Pour formuler ces conditions on a exécuté des essais préliminaires.

Les essais de laboratoire ont été effectués à l'aide d'un générateur de choc 2,8 MV, 32 kW à l'Institut Electrotechnique d'Etat à Varsovie. La tension appliquée au modèle avait la forme  $0,5/\infty \mu s$ , une polarité positive et une valeur un peu plus grande que la tension de 100% de décharge (1550 kV). Outre cette tension produisant la décharge de la foudre artificielle on appliquait la tension continue produisant les effluves du paratonnerre. Cette tension à valeur de 100 kV était fournie du générateur mentionné ci-dessus, par le court-circuit de l'éclateur d'enclenchement (c'était la tension d'alimentation du générateur). Les recherches préliminaires consistaient à comparer la répartition des décharges entre le paratonnerre, l'objet protégé et la terre avec application ou sans application d'une tension continue.

La disposition des électrodes soumise à la vérification était faite de telle façon que la répartition des décharges entre les trois électrodes soit la même.

Le modèle était composé de trois pointes: la première imitant le front du canal de la foudre, la seconde jouant le rôle du paratonnerre et la troisième — le rôle de l'objet protégé. Le rapport  $H/h$  entre la hauteur  $H$  de l'électrode à haute tension au-dessus de la terre et celle de la tige du paratonnerre  $h$  était choisie égale à 5, la hauteur  $h$  étant de 20 cm (Fig. 1). Le courant des effluves était de  $6 \mu A$ , c'est-à-dire qu'il n'a pas été diminué à l'échelle. Il s'agissait d'exagérer l'effet des effluves. Pour obtenir la valeur de ce courant il fallait produire une intensité de champ électrique de 1 kV/cm, c'est-à-dire 10 fois plus grande que celle qui se produit pendant l'orage.

Comme résultat des essais préliminaires on peut constater que les effluves ont été sans effet sur l'orientation de la foudre. Néanmoins ceci ne permet pas d'en tirer des conclusions générales à moins qu'au cours des essais définitifs on ne prenne en considération les conditions suivantes:

- a. Le courant des effluves devrait être diminué de telle façon que l'étendue de la charge de l'espace corresponde à l'échelle du modèle.

- b. Lors des essais sur modèles afin de pouvoir les contrôler, on devrait éliminer les charges produites par les étincelles antérieures.
- c. Il faudrait appliquer une tension à l'accroissement relativement lent afin de diminuer la longueur des décharges préliminaires partant des pointes mises à terre. Il faudrait renoncer à l'application de la grille employée sur la Fig. 1.
- d. Il faudrait diminuer l'intensité des effluves de la pointe qui imite le front du canal de la foudre.
- e. Il faudrait vérifier l'influence du vent artificiel.

Les essais sur modèles doivent être complétés par des recherches à échelle 1 : 1, ayant pour but de déterminer les conditions électriques de la couche conductrice et leurs changements dans l'espace et dans le temps.



S. SZPOR

## Uzupełnienie teorii przepieć atmosferycznych indukowanych dla linii z przewodami odgromowymi

*Rękopis dostarczono 7. 5. 53.*

**Streszczenie.** Artykuł uzupełnia opracowaną przez autora teorię przepieć atmosferycznych indukowanych, biorąc w rachubę dwie składowe: elektryczną od zmian pola elektrycznego oraz magnetyczną od zmian pola magnetycznego. Uzupełnienie to omawia w sposób uproszczony wpływ obniżający przewodów odgromowych na przepięcia indukowane. Najpierw rozpatruje się ten wpływ na składową elektryczną i dochodzi się do wzorów (6), (7) na współczynnik obniżenia. Następnie wyprowadza się podobny wzór (18) dla składowej magnetycznej. Okazuje się, że przy pominięciu wpływu ułotu i wpływu oporności gruntu na pojemności oraz indukcyjności otrzymuje się wspólny wzór (19) lub (20) na współczynnik obniżenia dla obu składowych. W dyskusji krytykuje się założenia upraszczające, które mogą znacznie odbiegać od rzeczywistości: nagłość zmian pola oraz doskonałość uziemień przewodu odgromowego. Przykład liczbowy wskazuje na obniżenie przepięcia do około 75% — 58% — 46% przy pojedynczym — podwójnym — potrójnym przewodzie odgromowym.

### 1. WSTĘP

Referat autora z roku 1948 [3] rozpatruje w przepięciu atmosferycznym indukowanym dwie składowe:

1. elektryczną — wytwarzaną przez zmiany pola elektrycznego,
2. magnetyczną — wytwarzaną przez zmiany pola magnetycznego.

Wzięcie w rachubę składowej magnetycznej, pomijanej w dawniejszych publikacjach [3], ma szczególnie wielkie znaczenie dla obliczania przepieć w bliskim sąsiedztwie miejsca uderzenia pioruna. Ostatnio również Dołginow [1] wskazuje na jednoczesne występowanie obu składowych.

Wspomniany referat autora obejmuje tylko prosty przypadek linii bez przewodów odgromowych. Tematem niniejszego uzupełnienia są wzory matematyczne na działanie obniżające przewodów odgromowych. Dla składowej elektrycznej opracowania tego rodzaju istnieją już z okresu około roku 1930, na przykład w referacie

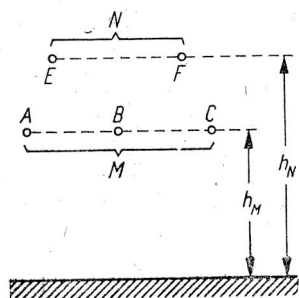
Peeka [2]. Publikacje z tego czasu przeceniają wysokość przepięć indukowanych i wskazują przewody odgromowe jako skuteczny środek zaradczy.

Według obecnych poglądów przewody odgromowe służą prawie wyłącznie do ochrony od przepięć bezpośrednich. Pomimo to zagadnienie wpływu przewodów odgromowych na przepięcie indukowane nie jest bez znaczenia, gdyż przepięcie indukowane jest jednym z licznych czynników, które decydują o przeskokach wstecznych przy uderzeniach piorunów w słupy lub w przewody odgromowe. Zwłaszcza w chronionych odcinkach linii na niższe napięcia znamionowe (na podejściach do rozdzielni) rola przepięć indukowanych może być wyraźna.

Obok wyprowadzenia brakujących zależności dla składowej magnetycznej, praca niniejsza przedstawia również podobne ujęcie dla składowej elektrycznej, ażeby dać obraz całkowity i wykazać podobieństwo sformułowań dla obu składowych. W rozważaniach tych przyjmuje się bardzo proste założenia, unikając bardziej uciążliwych sformułowań, któreby jednak mogły zapewnić lepsze zbliżenie do rzeczywistości.

## 2. SKŁADOWA ELEKTRYCZNA

Rys. 1. przedstawia układ przewodów roboczych  $A, B, C \dots$  oraz przewodów odgromowych  $E, F \dots$ . W grupie  $A, B, C \dots$  wszystkie przewody są mniej więcej w jednakowych stanach elektrycznych; w celu uproszczenia rozważań oznaczamy tę grupę literą  $M$  i traktujemy jako jeden przewód zastępczy.



Rys. 1. Grupa  $M$  przewodów roboczych  $A, B, C$  oraz grupa  $N$  przewodów odgromowych  $E, F$ .

Podobnie grupę przewodów odgromowych  $E, F \dots$  traktujemy jako jeden przewód zastępczy  $N$ . Wysokość  $h_M, h_N$  nad ziemią należy rozumieć jako średnie geometryczne obliczone z wysokości przewodów w każdej grupie.

Przed nagłą zmianą pola, która wytwarza przepięcie, istnieje na powierzchni ziemi natężenie pola elektrycznego  $K_0$ . Najdawniejsza teoria K. W. Wagnera przyjmuje  $K_0$  jako pole pierwotne, wytwarzane przez ładunki chmury burzowej przed wystąpieniem pioruna.

Nowsze ujęcia teoretyczne uwzględniają w natężeniu  $K_0$  silny wpływ zbliżającego się kanału piorunowego w czasie rozwoju wyładowania wstępnego od chmury do ziemi. W każdym razie powstawanie natężenia  $K_0$  jest stosunkowo powolne, tak że jednocześnie w przewodach  $M, N$  indukują się niby-statycznie na jednostce długości ładunki  $Q_M, Q_N$ , które dopływają np. poprzez uziemienia lub upływności.

Ładunki te sprowadzają potencjały wypadkowe przewodów  $M$ ,  $N$  mniej więcej do zera, według wzorów, w których dla każdego z przewodów  $M$ ,  $N$  występują po trzy potencjały składowe, związane z natężeniem  $K_O$  i z ładunkami  $Q_M$ ,  $Q_N$ :

$$K_O h_M + \frac{Q_M}{C_{MM}} + \frac{Q_N}{C_{MN}} = 0, \quad (1)$$

$$K_O h_N + \frac{Q_M}{C_{MN}} + \frac{Q_N}{C_{NN}} = 0, \quad (2)$$

gdzie:

$C_{MM}$ ,  $C_{NN}$  — pojemności własne przewodów  $M$ ,  $N$ ,  
 $C_{MN}$  — pojemność wzajemna przewodów  $M$ ,  $N$ .

Na podstawie wzorów (1) i (2) można łatwo określić ładunki  $Q_M$  oraz  $Q_N$ . Interesują nas głównie pierwsze z nich:

$$Q_M = -K_O h_M C_{MM} \left( 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{C_{NN}}{C_{MM}} \right) \frac{C_{MN}^2}{C_{MN}^2 - C_{MM} C_{NN}}. \quad (3)$$

Iloczyn —  $K_O h_M C_{MM}$  przedstawia ładunek, który indukowałyby się w przewodach  $M$  w przypadku bez ochrony przewodami  $N$ . Dalsze części wyrażenia (3), dwumian w nawiasach i następujący po nim stosunek, określają zmniejszenie ładunku  $Q_M$  dzięki działaniu przewodów  $N$ .

Przyjmujemy dalej w najprostszy sposób nagły zanik pola  $K_O$  w myśl teorii K. W. Wagnera. Zakładamy ponadto tytułem niedoskonałego przybliżenia, że na przewodach odgromowych  $N$  utrzymuje się w dalszym ciągu potencjał zerowy dzięki gęsto rozmieszczonym i dobrym uziemieniom, poprzez które może nastąpić natychmiastowe wyrównanie indukowanych ładunków do nowych wartości  $Q'_N$ . Natomiast w przewodach roboczych ładunki pozostają w pierwszej chwili po zaniku  $K_O$  bez zmiany, ponieważ nie mogą odpłynąć nagle na wielkie odległości. W tym stanie warunek napięciowy dla grupy  $N$  ma postać:

$$\frac{Q'_N}{C_{NN}} + \frac{Q_M}{C_{MN}} = 0, \quad (4)$$

$$Q'_N = -Q_M \frac{C_{NN}}{C_{MN}}.$$

Ładunki  $Q_M$ ,  $Q'_N$  wytwarzają w pierwszej chwili po zaniku  $K_O$  stan początkowy napięcia w przewodach roboczych  $M$ :

$$u_{MO} = \frac{Q_M}{C_{MM}} + \frac{Q'_N}{C_{MN}}.$$



Po podstawieniu wyrażen (3) i (4) dochodzimy do wzoru

$$u_{MO} = -K_O h_M \left( 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{C_{NN}}{C_{MN}} \right). \quad (5)$$

Iloczyn  $-K_O h_M$  jest to napięcie, które wystąpiłoby bez przewodów odgromowych. Dalsza część wyrażenia (5), w nawiasach, przedstawia wpływ obniżający przewodów odgromowych. Nazywamy ją współczynnikiem obniżenia  $\eta_e$  i piszemy

$$\eta_e = 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{C_{NN}}{C_{MN}}. \quad (6)$$

Pojemności  $C_{MN}$ ,  $C_{NN}$  wyrażamy w zależności od pojemności odpowiadających pojedynczym przewodom:

$$C_{MN} = C_{AE},$$

$$C_{NN} = \frac{n C_{EE}}{1 + (n-1) \frac{C_{EE}}{C_{EF}}},$$

gdzie

- $n$  — liczba przewodów odgromowych,
- $C_{AE}$  — średnia pojemność wzajemna między pojedynczym przewodem roboczym a pojedynczym przewodem odgromowym,
- $C_{EE}$  — średnia pojemność własna pojedynczego przewodu odgromowego,
- $C_{EF}$  — średnia pojemność wzajemna między dwoma przewodami odgromowymi.

Podstawienie we wzorze (6) daje ostatecznie

$$\eta_e = 1 - \frac{h_N}{h_M} n \frac{C_{EE}}{C_{AE}} \frac{1}{1 + (n-1) \frac{C_{EE}}{C_{EF}}}. \quad (7)$$

Nie dodajemy tutaj znanych rozważań nad rozkładem napięcia  $u_{MO}$  na fale biegnące w różnych kierunkach. Również te fale składowe są obniżane w stosunku  $\eta_e$  pod działaniem przewodów odgromowych  $N$ .

### 3. SKŁADOWA MAGNETYCZNA

Rys. 2 przedstawia mechanizm powstawania składowej magnetycznej przepięcia indukowanego. Przewody  $M$  oraz  $N$  zastępują w dalszym ciągu grupę przewodów roboczych i grupę przewodów odgromowych. Linia  $P$  przedstawia kanał piorunowy w określonej odległości od przewodów. Roz-

patrujemy zjawiska w odcinku linii  $\Delta x$ , w odległości  $x$  od punktu linii najbardziej zbliżonego do kanału  $P$ . Działają tutaj zmiany indukcji magnetycznej  $B$ , wytwarzanej przez prąd piorunowy  $i_p$ , a w szczególności czynna jest składowa  $B_n$  prostopadła do przewodów (prostopadła do płaszczyzny na rys. 2). Zmiany pola  $B$  indukują w grupie  $M$  prąd  $i_M$  oraz w grupie  $N$  prąd  $i_N$ .

Podobnie jak w rozważaniach nad składową elektryczną rozpatrujemy tutaj w najprostszy sposób nagłą zmianę pola  $B$ . Pojemności pokazane na rys. 2 nie mogą naładować się nagle, tak że przewody  $M$ ,  $N$  pozostają w pierwszej chwili bez napięć. W grupie przewodów odgromowych wynika to również z działania gęsto rozmieszczonych uziemień. Siły elektromotoryczne wytwarzane na odcinku  $\Delta x$  przez bardzo szybkie zmiany  $B_n$  zużywają się więc na spadki napięciowe związane z indukcyjnościami własnymi  $L_{MM} \cdot \Delta x$ ,  $L_{NN} \cdot \Delta x$  oraz z indukcyjnością wzajemną  $L_{MN} \cdot \Delta x$ ; pomijamy spadki na opornościach czynnych jako znacznie mniejsze przy bardzo szybkich zmianach. W ten sposób otrzymujemy kolejno dla grup  $M$  oraz  $N$  zależności

$$-0,1 h_M \frac{dB_n}{dt} = L_{MM} \frac{di_M}{dt} + L_{MN} \frac{di_N}{dt}, \quad (8)$$

$$-0,1 h_N \frac{dB_n}{dt} = L_{MN} \frac{di_M}{dt} + L_{NN} \frac{di_N}{dt}. \quad (9)$$

z jednostkami m,  $\mu s$ , gauss, kA,  $\mu H/m$ .

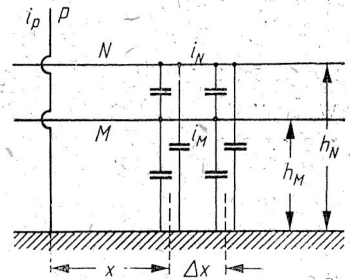
Rugowanie pochodnej  $\frac{di_N}{dt}$  z tych dwóch równań prowadzi do wzoru

$$\frac{di_M}{dt} = -0,1 \frac{h_M}{L_{MM}} \frac{dB_n}{dt} \left( 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{L_{MN}}{L_{NN}} \right) \frac{L_{MM} L_{NN}}{L_{MM} L_{NN} - L_{MN}^2}. \quad (10)$$

Dla nagłej zmiany od 0 do  $B_{n0}$  oraz jednocześnie od 0 do  $i_{M0}$  całkowanie daje

$$i_{M0} = -0,1 B_{n0} \frac{h_M}{L_{MM}} \left( 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{L_{MN}}{L_{NN}} \right) \frac{L_{MM} L_{NN}}{L_{MM} L_{NN} - L_{MN}^2}. \quad (11)$$

Iloczyn  $-0,1 B_{n0} \frac{h_M}{L_{MM}}$  jest to prąd, który wystąpiłby bez ochrony przewodami odgromowymi  $N$ . Dalsze części wyrażenia (11), dwumian



Rys. 2. Kanał piorunowy  $P$ , grupa przewodów roboczych  $M$ , grupa przewodów odgromowych  $N$ .

w nawiasach i następujący po nim stosunek, określają zmniejszenie prądu  $i_{MO}$  dzięki działaniu przewodów  $N$ . Można stwierdzić podobną budowę tych części jak we wzorze (3).

Musimy dalej zająć się falami składowymi, ponieważ od prądu wypadkowego  $i_{MO}$  nie można przejść bezpośrednio do interesujących nas przepięć. Prąd  $i_{MO}$  rozkładamy na dwie jednakowe fale  $i_{M1}$ ,  $i_{M2}$  biegnące z tą samą szybkością  $v$  w przeciwnych kierunkach [3]. Pomijamy tutaj wpływ ulotu i wpływ oporności gruntu, które powodowałyby występowanie czterech fal składowych o dwóch różnych szybkościach. Piszemy więc

$$i_{M1} = i_{M2} = \frac{1}{2} i_{MO}. \quad (12)$$

Do fal napięciowych przechodzimy według znanych wzorów

$$u_{M1} = Z_{MM} i_{M1} + Z_{MN} i_{N1}, \quad (13)$$

$$u_{N1} = Z_{MN} i_{M1} + Z_{NN} i_{N1}, \quad (14)$$

w których występują oporności falowe

$$Z_{MM} = v L_{MM}, \quad Z_{NN} = v L_{NN}, \quad Z_{MN} = v L_{MN}. \quad (15)$$

Falę  $i_{N1}$  określamy na podstawie warunku, że gęsto rozmieszczone i bardzo dobre uzziemienia przewodów odgromowych zapewniają im w każdym miejscu i w każdej chwili stan beznapięciowy, co jest możliwe tylko przy

$$u_{N1} = 0, \quad u_{N2} = 0.$$

Wzór (14) daje przy tym warunku

$$i_{N1} = - \frac{Z_{MN}}{Z_{NN}} i_{M1}. \quad (16)$$

Podstawiając wyrażenia (11), (12), (15) i (16) we wzorze (13) otrzymujemy ostatecznie

$$u_{M1} = -0,05 B_{nO} v h_M \left( 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{L_{MN}}{L_{NN}} \right), \quad (17)$$

z jednostkami kV, gauss, m/ $\mu$ s, m.

Iloczyn  $-0,05 B_{nO} v h_M$  przedstawia napięcie, które otrzymuje się bez wpływu przewodów odgromowych [3]. Dalsza część wyrażenia (17), w nawiasach, stanowi współczynnik obniżenia.

$$\eta_m = 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{L_{MN}}{L_{NN}}. \quad (18)$$

Wyrażenia (6) oraz (18) na współczynniki obniżenia dla obu składowych przedstawiają ten sam wynik, jeżeli pominąć wpływ ulotu i wpływ oporności gruntu. Wtedy bowiem zachodzi równość

$$\frac{L_{MN}}{L_{NN}} = \frac{C_{NN}}{C_{MN}}$$

wynik można przedstawić również w postaci

$$\eta_m = \eta_e = \eta = 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{Z_{MN}}{Z_{NN}} \quad (19)$$

Działanie przewodu odgromowego jest w tych warunkach takie samo na składową elektryczną i na składową magnetyczną. Wzór rozwinięty (7) można więc stosować dla obu składowych i dla przepięcia wypadkowego. Można wreszcie napisać po przekształceniu

$$\eta_m = \eta_e = \eta = 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{Z_{AE}}{Z_{EE}} \frac{1}{1 + (n-1) \frac{Z_{EF}}{Z_{EE}}} \quad (20)$$

#### 4. Dyskusja i przykład liczbowy

Między tym najprostszym ujęciem matematycznym a rzeczywistością istnieją różnice trzech rodzajów:

- Zmiany pola elektrycznego i pola magnetycznego odbywają się z ograniczoną szybkością.
- Uziemienia przewodów odgromowych nie są doskonałe. Odległości między uziemieniami kolejnych słupów i oporności uziemień sprawiają, że wielkim prądom udarowym indukowanym towarzyszą w przewodach odgromowych znaczne napięcia względem ziemi. Wskutek tych napięć współczynnik obniżenia wypada większy (bliższy jedności) niż według rozważań przyjmujących potencjał zerowy na przewodach odgromowych.
- Wpływ ulotu i wpływ oporności właściwej gruntu sprawiają, że zjawiska falowe są bardziej zawiłe. Wynikają stąd różnice między współczynnikami obniżenia dla składowej elektrycznej i dla składowej magnetycznej.

Na zakończenie przedstawiamy na przykładzie liczbowym działanie obniżające przy różnych liczbach  $n$  przewodów odgromowych. Jako dość prawdopodobne dane liczbowe przyjmujemy

$$\frac{h_N}{h_M} = 1,25, \quad \frac{Z_{AE}}{Z_{EE}} = 0,2, \quad \frac{Z_{EF}}{Z_{EE}} = 0,2$$

i obliczamy według wzoru (7)

$$\begin{array}{rcc} \text{przy } n = & 1 & 2 & 3 \\ \eta_e = & 0,75 & 0,583 & 0,464 \end{array}$$

Obniżenie przepięcia indukowanego wynosi więc kilkadziesiąt procent, a zwiększenie liczby przewodów odgromowych, pożądane dla lepszej osłony przewodów roboczych od uderzeń piorunów i dla łatwiejszego uniknięcia przeskoków odwrotnych, jest korzystne również ze względu na przepięcia indukowane.

#### WYKAZ LITERATURY

1. Dolginow A. I. — Induktirowannyje napriazhenia na liniach elektropieriedaczii — Elektrichestwo, 1949, Nr 10, s. 19.
2. Peek F. W., Jr. La foudre.-Congrès Int. d'EL., 1932, Nr 4/7, t. 6, s. 465.
3. Szpor S. — Nouvelle théorie des surtensions induites — Conf. Int. Grands Réseaux EL., 1948, s. 308.

C. ШПОР

#### ДОПОЛНЕНИЕ ТЕОРИИ АТМОСФЕРНЫХ ИНДУКТИРОВАННЫХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ЛИНИИ С ЗАЩИТНЫМИ ТРОСАМИ

Резюме

Настоящий труд является дополнением обработанной автором теории индуцированных атмосферных перенапряжений, учитывающей две составляющие: электрическую, происходящую от электрического поля и магнитную — от магнитного поля. В настоящей статье автор рассматривает упрощенным способом влияние защитных тросов на понижение индуцированных перенапряжений сперва на электрическую составляющую, причём получается формула коэффициента понижения  $\eta_e$ , а затем выведена аналогичная формула коэффициента  $\eta_m$  для магнитной составляющей. Не учитывая влияния коронного разряда и сопротивления земли на ёмкость и индуктивность получаем общую зависимость:

$$\eta = \eta_e = \eta_m = 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{Z_{MN}}{Z_{NN}},$$

в которой:

- $h_M$  — средняя высота над землёй группы  $M$  рабочих проводов,
- $h_N$  — средняя высота над землёй группы  $N$  защитных тросов,
- $Z_{NN}$  — собственное волновое сопротивление группы  $N$  защитных тросов,
- $Z_{MN}$  — взаимное волновое сопротивление между группой  $M$  рабочих проводов и группой  $N$  защитных тросов.

Переходя к волновым сопротивлениям отдельных проводов, получаем формулу:

$$\eta = \eta_e = \eta_m = 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{Z_{AE}}{Z_{EE}} \frac{-1}{1 + (n-1) \frac{Z_{EF}}{Z_{EE}}}$$

в которой:

- $n$  — число защитных тросов в группе  $N$ ,
- $Z_{EE}$  — среднее собственное волновое сопротивление одного защитного троса  $E$ ,
- $Z_{EF}$  — среднее взаимное сопротивление между двумя защитными тросами  $E$  и  $F$ ,
- $Z_{AE}$  — среднее взаимное волновое сопротивление между одним рабочим проводом  $A$  и одним защитным тросом  $E$ .

Критика упрощающих предпосылок, которые могут значительно отклоняться от действительности: внезапность изменений поля и совершенство заземлений защитных тросов. Числовой пример указывает на понижение перенапряжения на около 75% — 58% — 46% при одном, при двойном и при тройном защитном тросе.

S. SZPOR

## SUPPLEMENT TO THE THEORY OF THE INDUCED OVERVOLTAGES FOR LINES WITH EARTH CONDUCTORS

### Summary

The theory of the induced overvoltages is complemented in an approximative manner for lines with earth conductors. Two components of these overvoltages are considered, according to the author's formulation of 1948: the electric component produced by the changes of the electric field, and the magnetic component produced by the changes of the magnetic field. First the influence of the earth conductors on the electric component is considered and formulae, for the lowering factor  $\eta_e$  are recorded. Then similar formulae are found for the coefficient  $\eta_m$  of the magnetic component. Both results are identical, if the influence of corona and of earth resistivity is neglected. Then one obtains a common equation

$$\eta = \eta_e = \eta_m = 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{Z_{MN}}{Z_{NN}},$$



where

$h_M$  — mean height of the phase conductors, belonging to the group  $M$ ,

$h_N$  — mean height of the earth conductors, belonging to the group  $N$ ,

$Z_{NN}$  — surge impedance of the group  $N$ ,

$Z_{MN}$  — mutual surge impedance of the groups  $M$  and  $N$ .

Introducing the surge impedances of single conductors, one obtains

$$\eta = \eta_e = \eta_m = 1 - \frac{h_N}{h_M} \frac{Z_{AE}}{Z_{EE}} \frac{1}{1 + (n-1) \frac{Z_{EF}}{Z_{EE}}},$$

where

$n$  — number of earth conductors in the group  $N$ ,

$Z_{EE}$  — mean surge impedance of a single earth conductor  $E$ ,

$Z_{EF}$  — mean mutual surge impedance of the earth conductors  $E, F$ ,

$Z_{AE}$  — mean mutual surge impedance of one phase conductor  $A$  and one earth conductor  $E$ .

Simplifications adopted in these considerations are critically reviewed as regards sudden changes of the field and perfect earthing of the earth conductors. A numerical example sets the values of the lowering factor  $\eta$  at about 0,75 — 0,58 — 0,46 for single-double-triple earth conductors respectively.

## WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarza h.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
4. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim lub francuskim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza obszerniejsze streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem terminologii w języku rosyjskim oraz angielskim lub francuskim.
5. Każda praca napisana w języku obcym powinna być zaopatrzona w obszernie streszczenie w języku polskim a także streszczenia w innych językach.
6. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy lub nazwisko autora.
7. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
8. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom lub numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].

U w a g a: Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki“, Warszawa, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki PAN.

Cena 30.- zł