

J. 1434
C813



ZESZYTY NAUKOWE
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Nr 2

858/97/2
5

BUDOWNICTWO

I

WROCŁAW 1954
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

Adam Mitzel, <i>Napężenia w ściankach zbiorników prostokątnych</i> .	5
Dobrosław Strożecki, <i>Napężenia w przegubach i ciosach łożyskowych</i>	23
Mieczysław Zachara, <i>O zależności marki betonu od marki cementu</i> .	31
Leon Danielski, <i>Ukośne zginanie w żelbecie</i>	41
Jędrzej Kuczyński, <i>Wstępne studium ekonomicznego projektowania belek żelbetowych</i>	61
Jacek Wojciechowski, <i>Wpływ wielkości stopy fundamentowej na częstość drgań własnych fundamentów pod maszyny</i>	79

ZESZYTY NAUKOWE
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Nr 2

BUDOWNICTWO

I

WROCŁAW 1954
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

REDAKTOR ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Jerzy Skowroński

REDAKTOR DZIAŁU

Igor Kisiel

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1, KRAKOWSKIE PRZEDMIEŚCIE 79

Nakład 800+150 egz.+25 nadb. aut.	Oddano do składania 30 X 1953
Ark. wyd. 6,5; druk. 6 1/4	Podpisano do druku 19 I 1954
Papier druk. sat. kl. V, 60 g, 70×100	Druk ukończono w lutym 1954
Cena zł 8,50	Zam. nr 777/53 — F-4-34802

WROCŁAWSKA Drukarnia Naukowa

OD REDAKCJI

Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej — Dział Budownictwa — mają przedstawiać dorobek naukowy Wydziału Inżynierii (obejmującego Oddziały Budownictwa Lądowego, Budownictwa Wodnego i Komunikacji) oraz Wydziału Inżynierii Sanitarnej.

Mają być w nich publikowane prace samodzielnych i pomocniczych pracowników naukowych zarówno teoretyczne, jak i o wartości praktycznej, stanowiące twórczy dorobek lub przyczynki do rozwoju gałęzi nauk reprezentowanych na wymienionych Wydziałach. Dzięki Zeszytom Naukowym Zakłady tych Wydziałów uzyskały możliwość informowania społeczności technicznej w kraju i za granicą o swych osiągnięciach naukowych i publikowania takich prac, które ze względu na swój czysto teoretyczny charakter nie mogły znaleźć dotychczas miejsca na łamach czasopism fachowych.

Redakcja ma nadzieję, że nowe wydawnictwo ułatwiając publikowanie wymienionych prac stanowić będzie bodziec do wzmożenia pracy naukowej na Politechnice Wrocławskiej.

NAPRĘŻENIA W ŚCIANACH ZBIORNIKÓW PROSTOKĄTNYCH

ADAM MITZEL, mgr inż., z-ca profesora Budownictwa Żelbetowego

Praca stanowi próbę rozwiązania zagadnienia prostokątnego zbiornika dla cieczy na podstawie wyników teorii sprężystości. W pracy rozważono kilka przypadków zamocowania ścian zbiornika i podano odpowiednie wzory na momenty i siły poprzeczne.

1. WSTĘP

W przeciwieństwie do zwykłych konstrukcji żelbetowych lub stalowych opracowanie pod względem statycznym ścian zbiorników jako elementów nośnych, mających za zadanie bezpośrednie przeniesienie parcia cieczy, stanowi pod względem kształtu, działania sił i sposobu podparcia zagadnienie układu dwuwymiarowego sprężystego. Problem obliczania zbiorników prostokątnych należy więc sprowadzić do obliczania poszczególnych ścian jako płyt. Pod nazwą płyt rozumie się elementy sprężyste, w których jeden z wymiarów, a mianowicie grubość, jest w porównaniu z pozostałymi stosunkowo mały. Ta właśnie niewielka grubość pozwala przedstawiać występujące w kierunku grubości naprężenia w postaci wypadkowych momentów, naprężeń ścinających i normalnych. Zadaniem nauki o sprężystości jest wyznaczanie dla płyty lub łupiny o danym kształcie, znanym obciążeniu i żądanych warunkach brzegowych, wypadkowych naprężeń w każdym punkcie powierzchni środkowej.

Znając dla danego punktu płyty momenty zginające i skręcające, siły poprzeczne i normalne co najmniej w dwu przecinających się pod kątem prostym kierunkach, można obliczyć potrzebną grubość i zbrojenie (dla żelbetu). Analogicznie wyznacza się w przypadku zbiorników stalowych grubość blach i usztywnienie.

Godne uwagi są wyniki doświadczeń obciążania płyt żelbetowych, jednokierunkowo zbrojonych w porównaniu ze zbrojonymi krzyżowo. Okazało się mianowicie, że dwukierunkowo zbrojone płyty mogą przenieść znacznie większe momenty, siły podłużne i poprzeczne, niż iden-

tycznie grube i tak samo silnie uzbrojone płyty w jednym kierunku. Jest to następstwem wzajemnego oddziaływania naprężeń występujących w prostopadłych do siebie kierunkach.

Obliczanie zbiorników prostokątnych o ścianach monolitycznie związanych z dnem o tyle przedstawia trudności, że do dziś nie ma jasnej i odpowiadającej rzeczywistym warunkom statycznym metody obliczania takich układów.

O ile zagadnienie zbiorników okrągłych należy obecnie uważać za rozwiązane, nie można tego powiedzieć o zbiornikach prostokątnych, z uwagi na brak tabel lub wykresów zawierających potrzebny projektantowi materiał podany w przejrzystej formie.

Stosowany do dziś sposób obliczania zbiorników prostokątnych opiera się na założeniu podziału zbiornika poziomymi płaszczyznami na kilka części, które traktuje się jako poszczególne zamknięte ramy, przy czym jako obciążenie przyjmuje się właściwe dla danej części parcie średnie P_n .

Dno konstruuje się zazwyczaj jako płytę oddzieloną od ścian przerwą dylatacyjną (w przypadku cieczy gęstych) lub złączoną ze ścianami bezpośrednio. W przypadku drugim nie da się jednak dotychczasowymi metodami wyznaczyć występujących momentów utwierdzenia. W praktyce konstruktor kieruje się zwykle własną intuicją lub wzoruje się przy wymiarowaniu i zbrojeniu na istniejących już zbiornikach.

Przyjęcie założeń upraszczających, jak rozłożenie trójkąta parcia na poszczególne pasma, pociąga za sobą jednak pominięcie korzystnego wpływu monolityczności materiału w kierunku pionowym. Mogłoby to być usprawiedliwione przy bardzo wysokich zbiornikach lub prostokątnych silosach i to tylko dla części bardziej oddalonych od dna, jednak przy niezbyt wysokich zbiornikach — jakie często występują w praktyce — w żadnym razie nie należy lekceważyć wpływu ramowego połączenia dna ze ścianami. Występujące bowiem w tym układzie momenty utwierdzenia zmniejszają znacznie naprężenia poziome i pozwalają na stosowanie mniejszych grubości ścian.

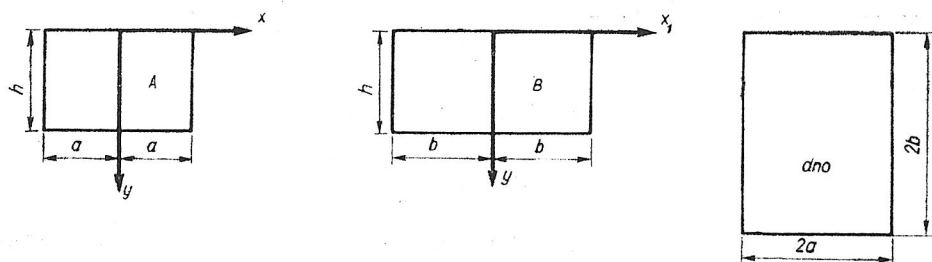
Początkowo zadowalano się dobieraniem takich warunków brzegowych, jak gdyby ściany zbiornika góra i dół były wolno podparte, przy czym wiele przykładów z wykonawstwa usprawiedliwiło takie założenia. Nie należy jednak zapominać, że wobec braku znajomości dokładnego obrazu układu naprężeń, występującego w rzeczywistości konstrukcje te, jakkolwiek pewne w eksploatacji, były często niewłaściwie wymiarowane (i zbrojone), co w konsekwencji powodowało nieekonomiczne zużycie materiału.

Artykuł niniejszy daje w skrócie przegląd teoretycznej części zagadnienia. Ponieważ całość pracy nie mieści się w ramach artykułu, ograniczam się do podania najważniejszych wyników pierwszej części¹⁾.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Rozważamy następujący przypadek (patrz rys. 1):

Oznaczamy równania powierzchni ugięcia ścian *A* i *B* odpowiednio przez W_A i W_B . Wówczas w założeniu wolnego podparcia górnej i dolnej



Rys. 1

krawędzi możemy za pomocą szeregów Fouriera wyznaczyć równania ugięcia *A* i *B*.

Wychodząc z ogólnej, znanej w teorii płyt formy równania różniczkowego powierzchni ugięcia płyty

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{P}{D} \quad (1)$$

można przy uwzględnieniu parcia hydrostatycznego napisać równanie płyty *A* lub *B* wolnopołączonej na całym obwodzie:

$$w_0 = \sum_{n=1,2,3,\dots} \left[C_n + A_n \operatorname{ch} \beta x + B_n x \operatorname{sh} \beta x + \frac{\bar{X}_n}{\beta^2 2 D \operatorname{ch} \beta a} (\beta a \operatorname{th} \beta a \operatorname{ch} \beta x - \right. \\ \left. - \beta x \operatorname{sh} \beta x) \right] \sin \beta y. \quad (2)$$

Wyprowadzenie powyższego równania pomija się.

¹⁾ W całości praca obejmuje następujące cztery części:

1. Wyznaczanie naprężeń i odkształceń ścian zbiornika.
2. Obliczanie momentów utwierdzenia ścian w dnie oraz ich wpływu na wielkości naprężeń w ścianach.
3. Badanie naprężeń w dnie — a) na sprężystym podłożu, b) na sztywnym podłożu.
4. Sporządzenie tabel lub wykresów umożliwiających projektantowi szybkie wyznaczanie zbiorników prostokątnych.

W równaniu (2)

A_n, B_n, C_n — stałe zależne od n ,

D — sztywność zginania płyty, zaś $\beta = \frac{n\pi}{h}$,

$\bar{X}_n$ — wolny parametr — daje nam możliwość spełnienia ewentualnych dodatkowych warunków brzegowych.

Uważamy równanie (2) za całkę szczególną równania ugięcia ścian A i B w warunkach brzegowych rysunku 1.

Ciągłość przejścia powierzchni ugięcia z płyty A do płyty B zachodzi przy spełnianiu następujących warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} \text{przy} \quad w_A &= w_B \\ x = \pm a \quad x_1 &= \mp b, \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_A}{\partial x} &= \frac{\partial w_B}{\partial x_1} \\ x = \pm a \quad x_1 &= \mp b, \end{aligned} \quad (3b)$$

$$D_A \left(\frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_A}{\partial y^2} \right) = D_B \left(\frac{\partial^2 w_B}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right) \quad (3c)$$

$$x = \pm a \quad x_1 = \mp b.$$

Warunki (3) są od razu spełnione, gdyż wyrażenie (2) przyjmuje dla $x = \pm a$ lub $x_1 = \mp b$ wartość zero.

Jeżeli wzdłuż krawędzi $x = +a$ płyty A zaczepimy moment wyrażony w formie parametrowej $M_{xA} = \sum \bar{X}_{nA} \sin \beta y$, przy krawędzi zaś $x_1 = -b$ płyty B moment $M_{xB} = \sum \bar{X}_{nB} \sin \beta y$, momenty te zgodnie z warunkiem (3c) będą sobie równe, czyli

$$M_{xA} = M_{xB} = \sum \bar{X}_{nA} \sin \beta y = \sum \bar{X}_{nB} \sin \beta y.$$

Z tego wniosek, że

$$\bar{X}_{nA} = \bar{X}_{nB} = \bar{X}_n.$$

Należy teraz wyznaczyć $\bar{X}_n$ tak, aby był spełniony również warunek brzegowy (3b):

$$w = w_1 + w_0,$$

a więc

$$\text{dla płyty } A: w_A = w_{1A} + w_{0A},$$

$$\text{dla płyty } B: w_B = w_{1B} + w_{0B}.$$

Napiszemy warunek (3b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_A}{\partial x} &= \frac{\partial w_B}{\partial x_1} \\ x = a \quad x_1 &= -b, \end{aligned}$$

czyli

$$\frac{\partial w_{1A}}{\partial x} + \frac{\partial w_{0A}}{\partial x} = \frac{\partial w_{1B}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_{0B}}{\partial x_1} \quad (4a)$$

lub

$$\frac{\partial w_{0A}}{\partial x} = \sum \frac{\bar{X}_n}{\beta^2 2 D_A \operatorname{ch} \beta a} \sin \beta y (\beta^2 a \operatorname{th} \beta a \operatorname{sh} \beta a - \beta \operatorname{sh} \beta a - \beta^2 a \operatorname{ch} \beta a) \quad (4b)$$

$$\frac{\partial w_{0A}}{\partial x} = \frac{\bar{X}_n \sin \beta y}{\beta^2 2 D_A \operatorname{ch} \beta a} f(a) \quad (5a)$$

i analogicznie

$$\frac{\partial w_{0B}}{\partial x} = \frac{\bar{X}_n \sin \beta y}{\beta^2 2 D_B \operatorname{ch} \beta b} f(-b) \quad (5b)$$

$$\frac{\partial w_{1A}}{\partial x} = \sum (\beta A_n \operatorname{sh} \beta a + B_n \operatorname{sh} \beta a + \beta B_n a \operatorname{ch} \beta a) \sin \beta y$$

lub

$$\frac{\partial w_{1A}}{\partial x} = \sum \sin \beta y F(a) \quad (6a)$$

i analogicznie

$$\frac{\partial w_{1B}}{\partial x_1} = \sum \sin \beta y F(-b). \quad (6b)$$

W równaniach (5a) i (5b) D_A i D_B oznaczają sztywność zginania płyt A i B .

Wstawiając do równania (4) odpowiednie wartości dla

$$\frac{\partial w_{1A}}{\partial x}, \quad \frac{\partial w_{1B}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial w_{0A}}{\partial x} \quad \text{ i } \quad \frac{\partial w_{0B}}{\partial x_1}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & \sin \beta y F(a) + \frac{\bar{X}_n f(a)}{\beta^2 2 D_A \operatorname{ch} \beta a} \sin \beta y = \\ & = \sin \beta y F(-b) + \frac{\bar{X}_n f(-b)}{\beta^2 2 D_B \operatorname{ch} \beta b} \sin \beta y, \end{aligned}$$

zaś $\bar{X}_n$ będzie (dla $D_B = c D_A$):

$$\bar{X}_n = \frac{F(-b) - F(a)}{c \operatorname{ch} \beta b f(a) - \operatorname{ch} \beta a f(-b)} c \beta^2 2 D_A \operatorname{ch} \beta a \operatorname{ch} \beta b. \quad (7)$$

Po wykonaniu przekształceń otrzymamy dla:

$$\left. \begin{aligned} f(a) &= -\frac{\beta^2 a}{\operatorname{ch} \beta a} - \beta \operatorname{sh} \beta a, \\ f(-b) &= \frac{\beta^2 b}{\operatorname{ch} \beta b} + \beta \operatorname{sh} \beta b, \\ F(a) &= \frac{C_n}{2} \beta^2 a - \frac{C_n}{2} \beta \operatorname{th} \beta a (1 + \beta a \operatorname{th} \beta a), \\ F(-b) &= -\frac{C_n}{2} \beta b + \frac{C_n}{2} \operatorname{th} \beta b (1 + \beta b \operatorname{th} \beta b). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Po wstawieniu tych wartości do wzoru (7) otrzymujemy

$$X_n = C_n D_A e \beta^2 \frac{-\operatorname{sh} \beta a \operatorname{ch} \beta a \operatorname{ch}^2 \beta b + \operatorname{sh} \beta b \operatorname{ch} \beta b \operatorname{ch}^2 \beta a - \beta a \operatorname{ch}^2 \beta b - \beta b \operatorname{ch}^2 \beta a}{-\operatorname{ch} \beta a \operatorname{ch} \beta a \operatorname{ch}^2 \beta b - \operatorname{sh} \beta b \operatorname{ch} \beta b \operatorname{ch}^2 \beta a - e \beta a \operatorname{ch}^2 \beta b - \beta b \operatorname{ch}^2 \beta a}. \quad (9)$$

Tym samym równanie powierzchni ugięcia ścian jest rozwiązane i obliczenie momentów oraz naprężeń nie przedstawia żadnych trudności.

Momenty są określone wyrażeniami:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -(1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Różniczkując równanie powierzchni ugięcia:

$$w_0 = \sum_{n=1,2,3,\dots} \left[C_n + A_n \operatorname{ch} \beta x + B_n x \operatorname{sh} \beta x + \frac{X_n}{\beta^2 2 D_A \operatorname{ch} \beta a} (\beta a \operatorname{th} \beta a \operatorname{ch} \beta x - \right. \\ \left. - \beta x \operatorname{sh} \beta x) \right] \sin \beta y \quad (11)$$

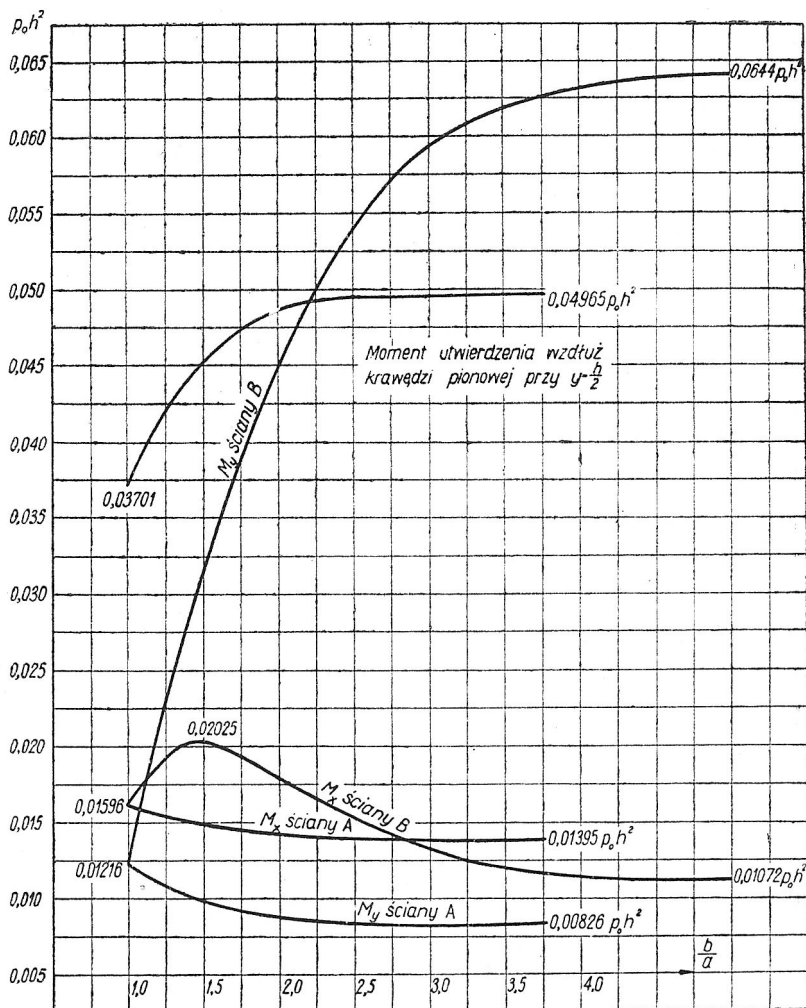
względem x i y otrzymamy

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{n=1,2,3,\dots} \left[\beta^2 A_n \operatorname{ch} \beta x + 2\beta B_n \operatorname{ch} \beta x + \beta^2 B_n x \operatorname{sh} \beta x + \right. \\ \left. + \frac{X_n}{\beta^2 2 D_A \operatorname{ch} \beta a} (\beta^3 a \operatorname{th} \beta a \operatorname{ch} \beta x - 2\beta^2 \operatorname{ch} \beta x - \beta^3 x \operatorname{sh} \beta x) \right] \sin \beta y \quad (12)$$

lub też

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{n=1,2,3,\dots} \left[C_n + A_n \operatorname{ch} \beta x + B_n x \operatorname{sh} \beta x + \right. \\ \left. + \frac{X_n}{\beta^2 2 D_A \operatorname{ch} \beta a} (\beta a \operatorname{th} \beta a \operatorname{ch} \beta x - \beta x \operatorname{sh} \beta x) \right] (-\beta^2 \sin \beta y), \quad (13)$$

przez co momenty są określone.



Rys. 2

Dla ściany B otrzymujemy identyczne równania, należy jednak zastąpić a przez b oraz D_A przez D_B .

Wielkość momentów wzdłuż krawędzi pionowych zbiornika wyraża równanie:

$$M_x = \sum \bar{X}_n \sin \beta y. \quad (14)$$

Zmieniając we wzorach powyższych stosunek $b:a$, otrzymujemy np. dla zbiornika o wysokości $h=2a$, uwidocznione na rys. 2 wartości momentów w pionowym i poziomym przekroju środkowym.

Rysunek 3 podaje wartości największych momentów krawędziowych dla różnych stosunków $\frac{h}{a}$ i $\frac{b}{a}$.

Analizując przebieg momentów można stwierdzić, że ze wzrostem stosunku boków zbiornika $b:a$ zachodzą następujące zmiany poszczególnych momentów (patrz rys. 2):

a) moment M_x ściany A zmniejsza się, nie spadając jednak poniżej wartości granicznej $0,01395 p_0 h^2$;

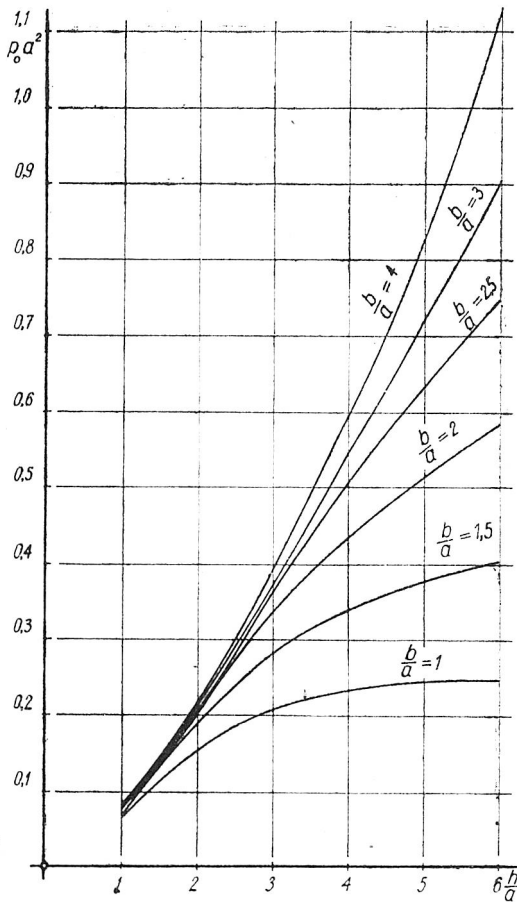
b) moment M_x ściany B początkowo rośnie, osiągając około rzędnej $b:a = 1,5$ wartość największą, następnie maleje do wartości granicznej $0,01072 p_0 h^2$;

c) moment krawędziowy wzrasta, nie przekraczając jednak wartości granicznej $0,04965 p_0 h^2$;

d) moment M_y ściany A maleje do wartości $0,00826 p_0 h^2$;

e) moment M_y ściany B rośnie, zbliżając się do wartości granicznej $0,0625 p_0 h^2$.

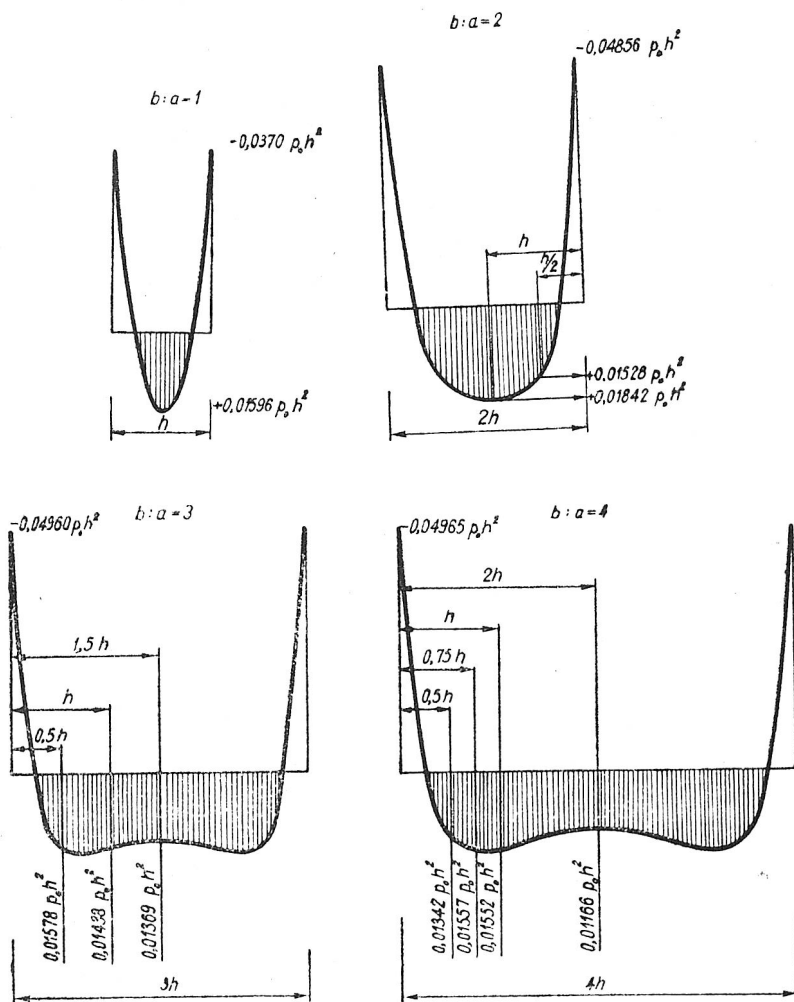
Można łatwo zauważyć, że do wartości $b:a=1,13$ miarodajne są dla wymiarowania przekroju ścian zbiornika momenty poziome M_x , przy



Rys. 3

czym momenty krawędziowe we wszystkich czterech narożach są znacznie większe od przeszłowych, co narzuca konieczność odpowiedniego rozwiązania konstrukcyjnego naroży.

Przy dalszym wzroście $b:a$ rosną szybko momenty ściany B . Wartość M_x ściany B osiąga maksimum około $b:a=1,5$. W przedziale od $b:a=1,13$ do



Rys. 4

$b:a=2,2$ miarodajny dla wymiarowania grubości płyt i ewentualnego zbrojenia jest dla ściany A moment M_x , dla ściany zaś B moment M_y . Charakterystyczny jest spadek wartości M_x ściany B ze wzrostem $b:a$. Mimo wydłużania ściany B względem A momenty przeszłowe poziome zmniejszają się, pionowe zaś rosną.

Jak wykazują dalsze rozważania, począwszy od pewnego $b:a$, maksima momentów M_x ściany B występują już nie w przekroju $x=0$, lecz w strefie między $x=0$ a $x=h$, zaś przy $x=0$ pojawia się minimum (patrz rys. 4).

Wynika z tego, że im bardziej rośnie długość $2b$ w stosunku do szerokości $2a$, tym znaczniejszą część obciążenia ściany B przejmują bliżej położone wolnopodparte dłuższe krawędzie, przy czym zmniejsza się równocześnie oddziaływanie zamocowanych w narożach krótszych krawędzi.

Pamiętać jednak należy, że mimo występującego przy wydłużaniu kształtu zbiornika spadku wartości poziomych momentów przesłowych ściany B , na pionowe krawędzie ścian działają nadal duże momenty utwierdzenia, których nie można lekceważyć przy wymiarowaniu, z uwagi na wywoływane przez nie duże naprężenia.

Przeprowadzenia dalszej analizy otrzymanych wyników dokona się w jednej z następnych prac. Obraz naprężeń panujących w ścianach zbiornika prostokątnego w przypadku przyjętych założeń odpowiada bardziej rzeczywistym warunkom pracy, aniżeli to można osiągnąć dotychczasowymi metodami.

3. ZBIORNIK O KRAWĘDZIACH GÓRNYCH NIEPODPARTYCH

Poniżej będziemy rozważać zbiornik w dwóch alternatywach:

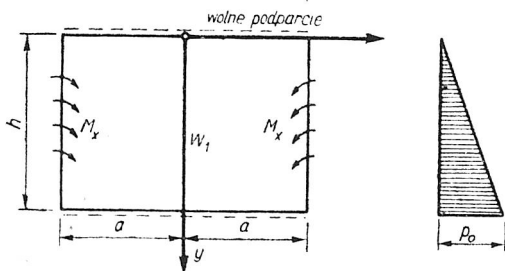
a) ściany zbiornika są dołem wolnopodparte, a górą bez żadnego podparcia;

b) ściany zbiornika są dołem całkowicie zamocowane, a górne krawędzie nie podparte.

Takie ujęcie zagadnienia daje możliwość porównywania wielkości momentów z wynikami otrzymanymi w ustępie 2 i wyciągania odpowied-

nich wniosków odnośnie projektowania zbiorników. Z uwagi na skomplikowany charakter warunków brzegowych poszczególnych ścian, rozłożymy je na dwie części.

Jeżeli przez w_1 oznaczymy równanie ugięcia ścian w warunkach brzegowych przyjętych w ustępie 2 (rys. 5), a przez w_2



Rys. 5

równanie płyty (ściany) nieobciążonej prostopadle do płaszczyzny, a poddanej na krawędziach tylko działaniu momentów lub sił poprzecznych

(rys. 6 i 7), wówczas poszukiwane równanie ugięcia dla obu alternatyw będzie przedstawiało się:

$$w = w_1 + w_2.$$

Jasne jest, że przy zsumowaniu równań różniczkowych w_1 i w_2 muszą być spełnione wszystkie warunki brzegowe. Posługując się oznaczeniami wprowadzonymi w ustępie 2, warunki te będą następujące (założymy, że $\mu = 0$):

1. Ugięcie ściany A i B jednakowe (rys. 5):

$$w_{1a} + w_{2a} = w_{1b} + w_{2b}, \quad (15)$$

$$x = \pm a \quad x_1 = \mp b.$$

2. Momenty jednakowe (rys. 5):

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2}, \quad (16)$$

$$x = \pm a \quad x_1 = \mp b.$$

3. Kąty jednakowe (rys. 5):

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \quad (17)$$

$$x = \pm a \quad x_1 = \mp b.$$

4. Górna krawędź niepodparta (oddziaływanie równe zeru) (rys. 6 i 7):

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + \frac{2\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} + \frac{2\partial^3 w_2}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (18)$$

$$\text{przy } y = 0.$$

5. Zamocowanie dolnej krawędzi (rys. 7):

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

$$\text{przy } y = h.$$

6. Dolna krawędź wolnopodparta (momenty równe zeru) (rys. 6):

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0 \quad (20)$$

$$\text{przy } y = h.$$

7. Ugięcia równe zeru (dolna krawędź) (rys. 6 i 7):

$$w_1 + w_2 = 0 \quad (21)$$

przy $y = h$.

8. Momenty równe zeru (górną krawędź) (rys. 6):

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0 \quad (22)$$

przy $y = 0$.

Równanie powierzchni ugięcia płyty pokazanej na rysunku 5 brzmi:

$$w_1 = \sum_1^n \left[C_n + A_n \operatorname{ch} \beta x + B_n x \operatorname{sh} \beta x + \frac{\bar{X}_n}{\beta^2 2 D \operatorname{ch} \beta a} (\beta a \operatorname{th} \beta a \operatorname{ch} \beta x - \right. \\ \left. - \beta x \operatorname{sh} \beta x) \right] \sin \beta y, \quad (22a)$$

gdzie $\beta = \frac{2n\pi}{h}$, C_n , A_n i B_n są stałymi znanymi, zaś $\bar{X}_n$ można wyznaczyć z warunków 1, 2 i 3.

Należy więc jeszcze wyznaczyć równanie ugięcia płyt w warunkach brzegowych określonych pod a) i b) (rys. 6 i 7).

Jako całka szczególna w tym przypadku może posłużyć równanie:

$$w_2 = \frac{1}{a^2} (A \operatorname{ch} ay + ay B \operatorname{sh} ay + C \operatorname{sh} ay + ay D \operatorname{ch} ay) \sin \frac{n\pi}{2}, \quad (23)$$

gdzie A , B , C i D są stałymi całkowania zależnymi od warunków brzegowych, zaś $a = \frac{n\pi}{2a}$.

Warunki brzegowe przypadku a) na rys. 6:

$$\text{dla } x = \pm a, \quad w_{2a} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{2a}}{\partial x^2} = 0; \quad (24)$$

$$\text{dla } y = h, \quad w_{2a} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{2a}}{\partial x^2} = 0; \quad (25)$$

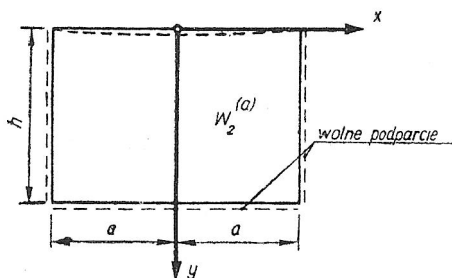
$$\text{dla } y = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{2a}}{\partial y^2} = 0, \quad q_{2a} = Z_n \sin \frac{n\pi}{2} \cos ax, \quad (26)$$

przy czym oddziaływanie przy krawędzi $y=0$ zostało wyrażone w postaci parametrowej:

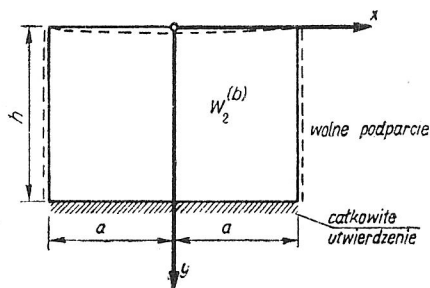
$$q_{ay} = Z_n \sin \frac{n\pi}{2} \cos ax,$$

gdzie Z_n może być obliczone z warunku (18).

Warunki brzegowe (24) są od razu spełnione. Do obliczenia stałych A , B , C i D również wystarczają warunki (25) i (26). Po odpowiednim



Rys. 6



Rys. 7

zróżniczkowaniu równania (23) otrzymujemy następujące cztery zależności:

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} ah + ah B \operatorname{sh} ah + ah D \operatorname{ch} ah &= 0, \\ (A + 2B) \operatorname{ch} ah + ah B \operatorname{sh} ah + (C + 2D) \operatorname{sh} ah + ah D \operatorname{ch} ah &= 0, \end{aligned} \right\} \text{(warunki 25)}$$

$$\left. \begin{aligned} A + 2B &= 0, \\ D - C &= \frac{Z_n}{aK}. \end{aligned} \right\} \text{(warunki 26)}$$

Po rozwiązaniu powyższych równań stałe A , B , C i D przybierają następujące wartości:

$$\left. \begin{aligned} A &= - \frac{2Z_n \operatorname{sh}^2 ah}{aK (ah + 3 \operatorname{sh} ah \operatorname{ch} ah)}, \\ B &= \frac{Z_n \operatorname{sh}^2 ah}{aK (ah + 3 \operatorname{sh} ah \operatorname{ch} ah)}, \\ C &= \frac{Z_n (ah + 2 \operatorname{sh} ah \operatorname{ch} ah)}{aK (ah + 3 \operatorname{sh} ah \operatorname{ch} ah)}, \\ D &= - \frac{Z_n \operatorname{sh} ah \operatorname{ch} ah}{aK (ah + 3 \operatorname{sh} ah \operatorname{ch} ah)}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

gdzie K oznacza sztywność zginania płyty.

Warunki brzegowe przypadku b) na rys. 7:

$$\text{dla } x = \pm a, \quad w_{2b} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{2b}}{\partial x^2} = 0; \quad (28)$$

$$\text{dla } y = h, \quad w_{2b} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{2b}}{\partial y^2} = Y_n \sin \frac{n\pi}{2} \cos \alpha x; \quad (29)$$

$$\text{dla } y = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{2b}}{\partial y^2} = 0, \quad q_{yb} = Z_n \sin \frac{n\pi}{2} \cos \alpha x. \quad (30)$$

Wyznaczenie stałych w tym przypadku również nie następuje trudności, albowiem warunki (28) są od razu spełnione.

Warunki na konturze (29) i (30) umożliwiają obliczenie wartości A , B , C i D .

Po rozwiązaniu otrzymanych z warunków (29) i (30) równań uzyskamy dla A , B , C i D następujące wyrażenia:

$$\left. \begin{aligned} A &= + \frac{Y_n}{K \operatorname{ch} ah} + 2R \operatorname{sh} ah, \\ B &= - \frac{Y_n}{2K \operatorname{ch} ah} - R \operatorname{sh} ah, \\ C &= \frac{Z_n}{\alpha K} - R \operatorname{sh} ah \operatorname{ch} ah, \\ D &= R \operatorname{ch} ah, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\text{gdzie } R = \frac{Y_n \left(\frac{\alpha^2 h}{2} \operatorname{sh} ah - a \right) - Z_n \operatorname{sh} ah}{\alpha K (ah + 3 \operatorname{sh} ah \operatorname{ch} ah)}$$

Jeżeli w równaniach (31) podstawimy $Y_n = 0$, (tzn., że na krawędzi $y = h$ nie działa moment), stałe A , B , C i D będą identyczne z wartościami otrzymanymi w przypadku a) (patrz (27)).

Przy znanych wartościach stałych A , B , C i D dla obu przypadków równania w_2^a i w_2^b są jednoznacznie ustalone.

W celu wyznaczenia równania dla $w = w_1 + w_2$ trzeba, aby tak w_1 jak w_2 spełniły ustalone warunki brzegowe (15) do (22).

Analiza warunków (15) do (22).

Warunek (15):

$$\text{dla } x = +a \text{ i } x_1 = -b, \quad w_{1a} = w_{2a} = 0,$$

$$\text{dla } x = +a \text{ i } x_1 = -b, \quad w_{1b} = w_{2b} = 0.$$

Tutaj przez w_{2a} i w_{2b} należy rozumieć ugięcia ścian A i B (dla przypadków a) i b)).

Warunek (16) jest również całkowicie spełniony, tak że

$$X_{nA} = X_{nB} = X_n.$$

Warunek (17) nie jest spełniony. Nie są również spełnione przez w_1 warunki (18), (19) i przez w_{2b} warunek (20).

Natomiast warunki (21) i (22) spełnione są przez w_1 i w_{2a} i w_{2b} .

Z powyższej analizy wynika, że dla obliczenia niewiadomych parametrów X_n , Y_n i Z_n mamy do dyspozycji w przypadku a) — dwa równania i dwie niewiadome (X_n i Z_n), w przypadku b) — trzy równania i trzy niewiadome (X_n , Y_n i Z_n).

Schemat według rys. 6

Obliczenie X_n i Z_n dokonuje się za pomocą równań (17) i (18).

X_n jest stałą zależną od sposobu podparcia i warunków ciągłości ścian A i B .

Z_n natomiast jest funkcją zależną przede wszystkim od sposobu podparcia górnej krawędzi i tylko pośrednio zależną od warunków ciągłości przylegających ścian.

Oznaczając kolejno pierwsze pochodne równania (17) przez f_{1a} , f_{2a} , f_{1b} i f_{2b} , a trzecie pochodne równania (18) przez f_3 , f_4 , f_5 i f_6 , równania te można napisać w następującej postaci:

$$f_{1a} + f_{2a} = f_{1b} + f_{2b}$$

$$\text{dla } x = \pm a \quad x_1 = \mp b$$

$$f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 0 \quad \text{dla } y = 0.$$

Na podstawie analizy powyższych 8 funkcji można stwierdzić, że

f_{1a} i f_{1b} są funkcjami zależnymi tylko od $\sin \beta y$ (przy $x=a$ i $x_1=b$),
 f_{2a} i f_{2b} są funkcjami od y lub $\operatorname{ch} \alpha y$ bądź $y \operatorname{sh} \alpha y$,
 f_3 i f_4 są funkcjami od x lub $\operatorname{ch} \beta x$ bądź $x \operatorname{sh} \beta x$,
 f_5 i f_6 są funkcjami zależnymi tylko od $\cos \alpha x$.

Napiszemy teraz równania (17) i (18) stosując wyżej podane skróty:

$$f_{1a}(X_n) \sin \beta y + f_{2a}(Z_n, y) = f_{1b}(X_n) \sin \beta y + f_{2b}(Z_n, y), \quad (17a)$$

$$f_3(X_n, x) + f_4(X_n, x) + f_5(Z_n) \cos \alpha x + f_6(Z_n) \cos \alpha x = 0. \quad (18a)$$

Aby z powyższych równań wyznaczyć niewiadome wartości X_n i Z_n , trzeba wyeliminować zmienną niezależną y lub $\sin \beta y$ z równania (17a) i zmienną x lub też $\cos \alpha x$ z równania (18a).

Jeżeli rozwinieśmy funkcje $f_{2a} + f_{2b}$ w szereg nieparzysty Fouriera (od $\sin \beta y$) w przedziale od $y=0$ do $y=h$, wybierając okres $L=2h$, to równanie (17a) będzie zawierać tylko niewiadome X_n i Z_n .

W podobny sposób należy wyeliminować x i $\cos \alpha x$ z równania (18a). Tutaj funkcje f_3 i f_4 rozwinieśmy w szereg Fouriera parzysty (od $\cos \alpha x$).

Po dokonaniu tych przeróbek obliczenie X i Z nie przedstawia żadnych trudności i zadanie postawione dla przypadku a) jest rozwiązane, albowiem należy tylko zsumować wyrażenia dla w_1 i w_2 .

Podobny tok postępowania umożliwia obliczenia stałych X_n, Y_n, Z_n dla przypadku b).

Wyznaczenie momentów zginających, skręcających i oddziaływań nie jest rzeczą trudną. Z uwagi na szczupłość miejsca ta część zagadnienia oraz wyciągnięcie wniosków z otrzymanych wyników będą podane w jednej z następujących prac.

*Katedra Budownictwa
Żelbetowego*

Wpłynęło do Redakcji w styczniu 1953 r.

LITERATURA

- [1] A. Nadai, *Elastische Platten*, 1925.
- [2] K. Girkmann, *Flächentragwerke*, 1948.
- [3] M. Huber, *Teoria sprężystości*, 1948.
- [4] A. Löve, *Lehrbuch der Elastizität*, 1907.
- [5] S. Timoszenko, *Theory of Elasticity*, 1951.
- [6] B. Galerkin, *Sobranie sočiniženij*, 1952.
- [7] Föppl, *Drang und Zwang*, 1924.
- [7] Karman i Bio, *Matematyczne metody w inżynierii*, 1948.
- [8] H. Markus, *Die Theorie elastischer Gewebe*, 1924.

НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕНКАХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ

Применяемые до настоящего времени методы расчета прямоугольных резервуаров являются лишь приближенными, не учитывающими таких факторов, как сложное напряженное состояние и трещиностойчивость железобетона. Настоящая работа является попыткой дать решение этого вопроса, основываясь на строгих методах теории упругости. Представление гидростатического давления жидкости при помощи рядов Фурье дает возможность провести интегрирование основного дифференциального уравнения для квадратного резервуара. Переход к общему случаю прямоугольного резервуара осуществлен при соблюдении условий неразрывности на вертикальных ребрах. Из общего интеграла уравнения стен получены выражения для изгибающих и касательных моментов и поперечных сил (опорных реакций).

Таким образом пространственная задача прямоугольного резервуара сводится к плоской задаче, в которой взаимодействие стен соприкасающихся вдоль вертикальных рёбер обусловлено соблюдением упомянутых выше условий неразрывности.

Во втором разделе принято свободное опирание верхней и нижней кромок вертикальных стен резервуара, третий раздел содержит попытку решения задачи в следующих двух случаях: а) в предположении свободного опирания нижней кромки в то время, как верхняя остается свободной (не опирающейся); б) в предположении полной заделки нижней кромки при свободной, как в предыдущем случае, верхней кромке.

Вследствие сложных краевых условий интегрирование основного дифференциального уравнения проведено путем суммирования двух решений. Первое получено из интегрирования неоднородного уравнения, второе, — как интеграл однородного уравнения плиты, нагруженной только краевыми моментами и поперечными силами. Определение параметров X_n , Y_n , Z_n введенных во второе решение проводится путем разложения их, как функции от переменных x , y , в ряды Фурье.

Дальнейший расчет моментов и опорных реакций в обоих приведенных случаях не представляет затруднений. Расчет этот а также анализ полученных результатов будет заключать одна из следующих статей по данному вопросу.

SPANNUNGEN IN RECHTECKIGEN BEHÄLTERN

Die bis nun angewendeten Berechnungsmethoden von rechteckigen Flüssigkeitsbehältern sind Näherungsmethoden. In anbetracht des komplizierten Spannungszustandes und der benötigten Rissicherheit geben sie nur angenäherte Werte. Vorliegende Arbeit ist ein Versuch die Lösung dieses Problems auf Grund genauere Methoden der Elastizitätstheorie herzuleiten. — Die Darstellung der hydrostatischen Belastung durch Fourierreihen, ermöglicht die Integration der grundlegenden Differenzialgleichung des quadratischen Behälters. Der Übergang zum allgemeinen Fall des rechteckigen Behälters wurde durch Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingungen vollzogen, welche längs der senkrechten Kanten vorliegen. Durch Differenzieren der Biegungsgleichung der Wände wurden die einzelnen Ausdrücke für die Biegemomente, Drehmomente und Auflagerkräfte gefunden.

Auf diese Weise wurde das räumliche Problem des rechteckigen Behälters in ein ebenes verwandelt, wobei der gegenseitige Einfluss der Wände durch die vorhin erwähnten Übergangsbedingungen längs der senkrechten Kanten erfasst wurde.

Während in Abschnitt 2 freie Auflagerung der oberen und unteren Kante der Wände den Untersuchungen zu Grunde gelegt wurde, stellt Abschnitt 3 einen Versuch dar, das Behälterproblem in zwei weiteren Alternativen zu lösen. Die erste setzt freie Auflagerung der unteren Wandkanten voraus, wobei die obere ungestützt bleibt. Die zweite Alternative nimmt unten vollkommene Einspannung an, — die oberen Wandkanten sind ebenfalls nicht unterstützt. —

In anbetracht der komplizierten Randbedingungen wurde die Integration der Differenzialgleichungen durch Summierung zweier Lösungen erreicht. Die eine Lösung wurde durch die Integration der nicht homogenen Differenzialgleichung der Wand (als Platte) erhalten. Die zweite Lösung ergibt sich durch Integrieren der nur mit Randmomenten und Randkräften belasteten Platte (homogene Differenzialgleichung).

Die Ermittlung der in die letztere Gleichung eingeführten Parameter X_n , Y_n und Z_n erfolgt durch Entwicklung der die Veränderlichen x und y enthaltenden Ausdrücke in Fourierreihen. —

Dadurch sind die grundlegenden Differenzialgleichungen beider Fälle gelöst und die Ermittlung der Momente und Auflagerdrücke bereitet weiter keine Schwierigkeiten. —

Dieser Teil des Problems wie auch die Analyse der erhaltenen Resultate werden einer nächsten Arbeit überlassen.

NAPRĘŻENIA W PRZEGUBACH I CIOSACH ŁOŻYSKOWYCH

DOBROŚLAW STROŻECKI, mgr inż., profesor Budowy Mostów

Praca podaje wzór na rozkład naprężeń rozrywających w ciosach podporowych i przegubach, nadający się do praktycznych zastosowań, oraz tablicę wartości funkcji tych naprężeń dla ułatwienia użycia wzoru w praktyce.

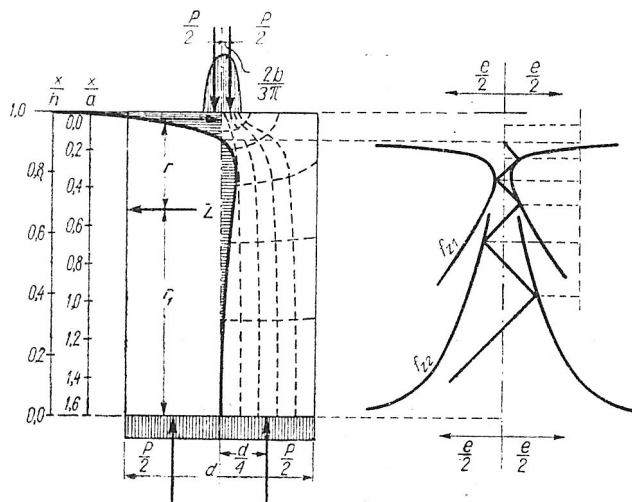
Stosowany dotychczas powszechnie sposób obliczania naprężeń w przegubach i ciosach łożyskowych mostów, podany w pracach Krügera z r. 1894, często odbiega bardzo od stanu faktycznego. Badania Mesnagera i Cokera, przeprowadzone na szklanych modelach ciosów łożyskowych za pomocą spolaryzowanego światła, wykazały przebieg trajektorii naprężeń, przedstawiony na rys. 1. Z kształtu tych krzywych wynika, że bezpośrednio pod łożyskiem lub przegubem panuje na krótkiej przestrzeni ciśnienie, poniżej zaś ciągnienie schodzące ku podstawie ciosu prawie do zera. Inaczej bowiem nie można by wytłumaczyć dwukrotnej zmiany kierunku linii i sił. Wnioski te potwierdzają: badająca podobne zagadnienie praca dra Ziemby [1], wyniki doświadczeń Laboratorium w Grénoble (Francja) oraz badania teoretyczne i doświadczenia Bortscha [3], który wykazał, że największe ciągnienia poprzeczne występują w górnej 1/3 wysokości ciosu.

Opierając się na teorii sprężystości podał Bortsch sposób obliczania naprężeń w przegubach, ale wzory jego są zawile i okazały się nieprzydatne do praktycznego użytku.

Rozpatrując to zagadnienie przy dwuosiowym stanie napięcia, co jest słuszne przy długich przegubach mostów, przyjęto poniżej funkcję zmiany naprężeń poprzecznych. Funkcja ta jest czysto empiryczna, odpowiada jednak w swych skrajnych wartościach wynikom doświadczalnym oraz wyliczeniom Bortscha. Doświadczenia oraz dociekania Bortscha i Ziemby wykazują, że dopiero w głębokości około $h=1,6d$ (gdzie h jest wysokością, a d szerokością ciosu) można uważać ciśnienie za jednostajnie rozłożone na całej szerokości ciosu i tam też ciągnienia poprzeczne równe są zeru. Jeżeli cios jest niższy, to naprężenia normalne przenoszą się na podłoże niejednostajnie. Podłoże to, np. beton przyczółka lub łuku, musi

więc w dalszym ciągu przenieść ciągnięcia poprzeczne, które zresztą poniżej $1,0d$ są już niewielkie.

Rozcinając cios wzdłuż osi przegubu (rys. 1) otrzymamy połowę, obciążoną parą sił $\frac{P}{2}$, których ramię wyniesie: $\frac{d}{4} - \frac{2b}{3\pi}$ (przyjmując według Hertza eliptyczny rozkład naprężeń w samym przegubie). Moment



Rys. 1

Rys. 1a

ten musi być zrównoważony przez naprężenia działające w płaszczyźnie przekroju. Wypadkowe naprężeń cisnących i ciągnących muszą zatem również tworzyć parę sił. Stąd

$$\frac{P}{2} \left(\frac{d}{4} - \frac{2b}{3\pi} \right) = Z r. \quad (1)$$

Zakładając początek układu u dołu ciosu w głębokości $h=1,6d$ pod przegubem, przyjęto, że naprężenia będą się zmieniać według funkcji:

$$\zeta = A \frac{Z}{lh} \left[\left(\frac{x}{h} \right)^4 - \left(\frac{x}{h} \right)^5 - B \left(\frac{x}{h} \right)^{30} \right]. \quad (2)$$

Z powyższego równania A i B są to stałe, które poniżej wyznaczymy, a Z jest wypadkową ciśnień lub ciągnięć. Suma naprężeń poprzecznych musi być równa zeru, a zatem:

$$\int_0^h \zeta dx = 0,$$

czyli

$$A \frac{Z}{lh} \int_0^h \left[\left(\frac{x}{h} \right)^4 - \left(\frac{x}{h} \right)^5 - B \left(\frac{x}{h} \right)^{30} \right] dx = 0,$$

stąd

$$B = \frac{31}{30},$$

gdzie l oznacza grubość ciosu w głąb.

Szukając punktu zerowego naprężeń otrzymujemy dla $\zeta = 0$:

$$\left(\frac{x}{h} \right)^4 - \left(\frac{x}{h} \right)^5 - \frac{31}{30} \left(\frac{x}{h} \right)^{30} = 0,$$

który to warunek spełni się w rozważanym przez nas przedziale funkcji dla wartości $\frac{x}{h} = 0$ i 0,91.

Całkując teraz funkcję w przedziale od 0 do 0,91 wiemy, że całka ta przedstawia powierzchnię naprężeń równoważną wypadkowej Z .

$$l \int_0^{0,91h} \zeta dx = \int_0^{0,91h} A \frac{Z}{h} \left[\left(\frac{x}{h} \right)^4 - \left(\frac{x}{h} \right)^5 - \frac{31}{30} \left(\frac{x}{h} \right)^{30} \right] dx = Z,$$

stąd

$$A = \frac{1}{\frac{1}{h} \int_0^{0,91h} \left[\left(\frac{x}{h} \right)^4 - \left(\frac{x}{h} \right)^5 - \frac{31}{30} \left(\frac{x}{h} \right)^{30} \right] dx} = 35,25. \quad (3)$$

Brakującą nam jeszcze siłę Z otrzymamy z równania (1). W tym celu musimy wyznaczyć ramię momentu pary sił wewnętrznych r . Podstawiając w równaniu (1) $b:d=c$ otrzymamy:

$$Z = \frac{Pd}{24r\pi} (3\pi - 8c). \quad (4)$$

Moment statyczny powierzchni naprężeń ze względu na oś x równa się momentowi pary sił:

$$l \int_0^h \zeta x dx = Z r_1 - Z(r + r_1) = -Z r,$$

a stąd

$$r = -35,25 \int_0^h \left[\left(\frac{x}{h} \right)^5 - \left(\frac{x}{h} \right)^6 - \frac{31}{30} \left(\frac{x}{h} \right)^{31} \right] dx = 0,299h = 0,478d.$$

Po wstawieniu tej wartości w równanie (4) otrzymujemy

$$Z = \frac{P}{36,06} (3\pi - 8v), \quad (5)$$

a z równania (3) ostatecznie

$$\xi = 0,611 \frac{P}{dl} (3\pi - 8v) \left[\left(\frac{x}{h} \right)^4 - \left(\frac{x}{h} \right)^5 - \frac{31}{30} \left(\frac{x}{h} \right)^{30} \right]. \quad (6)$$

Ażeby znaleźć $\xi_{\max}$ różniczkujemy równanie (6) według x :

$$\frac{d\xi}{dx} = 0,611 \frac{P}{dl} (3\pi - 8v) \left[\frac{4x^3}{h^4} - \frac{5x^4}{h^5} - 31 \frac{x^{29}}{h^{30}} \right].$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy

$$4 \left(\frac{x}{h} \right)^3 - 5 \left(\frac{x}{h} \right)^4 - 31 \left(\frac{x}{h} \right)^{29} = 0,$$

a stąd

$$\frac{x}{h} = 0,79$$

oraz

$$\xi_{\max} = 0,0494 \frac{P}{dl} (3\pi - 8v),$$

które nie powinno przekroczyć wartości $0,14R_{28}$ przy betonie zbrojonym. Oznaczając przez l grubość ciosu w głąb, a przez σ naprężenie dopuszczalne w stali, oraz uważając f_z za całkowity przekrój uzbrojenia poprzecznego, przypadającego na całą grubość ciosu, otrzymujemy odstępów zbrojenia przy zmianie średnicy lub ilości prętów w miarę zmniejszania się naprężeń:

$$e_1 = \frac{f_{z1}\sigma}{l\zeta_1}, \quad e_2 = \frac{f_{z2}\sigma}{l\zeta_2}, \quad \dots, \quad e_n = \frac{f_{zn}\sigma}{l\zeta_n}.$$

Na rysunku 1a pokazano graficzne wyznaczenie odstępów uzbrojenia. Obliczamy e_n dla kilku przekrojów z uwzględnieniem zmiany f_z , odcinamy po $\frac{e_n}{2}$ w prawo i w lewo od osi i kreślimy krzywe. Kreśląc następnie proste pod kątem 45° i na przemian poziome, otrzymujemy odstępów siatek zbrojeniowych.

Podobnie przedstawia się zagadnienie w przypadku wahaczy żelbetowych łożysk ruchomych. Jeżeli chcemy, jak to przyjmuje Gehler [6], ażeby w połowie wysokości wahacza naprężenia normalne były jednostajnie rozłożone, musimy przyjąć:

$$h = 2 \cdot 1,6d = 3,2d,$$

czego nigdy nie stosuje się. (Wtedy mielibyśmy w połowie wysokości wahacza $\zeta=0$, a nie $\zeta_{\max}$, jak to przyjmuje Gehler). Stosując wahacze krótsze, o wysokości 1,6 do 2,0 musimy nałożyć na siebie wykresy naprężeń poprzecznych, wynikających z obustronnego ściskania (rys. 2).

Z powyższych rozważań wynika, że wysokość wahacza nie powinna wynosić mniej aniżeli 1,6*d*.

Przyjęta funkcja posiada punkty zerowe dla $X/h=0$ i 0,91, maksimum zaś dla odciętej $x=0,79h$. Wartości te, jak również $\zeta_{\max}$ odpowiadają zarówno danym doświadczalnym, jak i dociekaniom teoretycznym Bortscha.

Tablica funkcji

$f_1(x)$			$f_2(v)$	
$\frac{y}{d}$	$\frac{x}{h}$	$f_1(x)$	v	$f_2(v)$
0,000	1,0000	-1,03333	0,1	5,261
0,050	0,9688	-0,37085	0,15	5,017
0,100	0,9375	-0,10105	0,20	4,773
0,200	0,8750	0,05490	0,25	4,529
0,300	0,8125	0,07967	0,30	4,285
<u>0,336</u>	<u>0,7900</u>	<u>0,08092</u>		
0,400	0,7500	0,07892		
0,500	0,6875	0,06976		
0,600	0,6250	0,05721		
0,700	0,5625	0,04380		
0,800	0,5000	0,03126		
0,900	0,4375	0,02661		
1,000	0,3750	0,01236		
1,100	0,3125	0,00656		
1,200	0,2500	0,00293		
1,300	0,1875	0,00100		
1,400	0,1250	0,00021		
1,500	0,0625	0,000014		
1,600	0,0000	0,000000		

W powyżej podanej tablicy rozłożono funkcję ζ na 2 części.

$$\zeta = \frac{P}{dl} f(x, v) = \frac{P}{dl} f_1(x) f_2(v),$$

gdzie

$$f_1(x) = \left[\left(\frac{x}{h} \right)^4 - \left(\frac{x}{h} \right)^5 - \frac{31}{30} \left(\frac{x}{h} \right)^{30} \right],$$

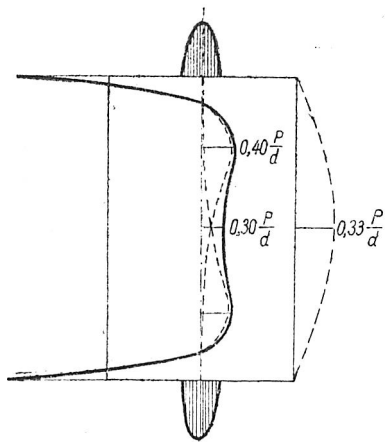
$$f_2(v) = 0,611(3\pi - 8v),$$

przy czym oprócz x/h liczonego od początku układu, podano także y/h liczone od styku (przegubu), co ułatwi superpozycję przy obliczaniu wahaczy krótszych niż $3,2d$.

Ilorazy rosną: y/d ku dołowi, x/h zaś ku górze.

Na rysunku 2 przedstawiono przykład superpozycji naprężeń poprzecznych dla wahacza łożyskowego o wysokości $1,6d$.

Dla $y/d = 0$ wypadają z wzoru (6) bardzo duże ciśnienia. Np. dla $v = 0,1$ zachodzi $\zeta_{\min} = -5,5454P/dl$, co daje naprężenia przekraczające granicę $0,45$ wytrzymałości R_{w28} . Ciśnienie to jest jednak obustronne, tj. działa w obu



Rys. 2

kierunkach, normalnym i poprzecznym. Nie ma zatem obawy zniszczenia materiału. Natomiast materiał poddany obukierunkowemu ciśnieniu nabiera wyższej wytrzymałości i w rezultacie tworzy się pod siłą P rodzaj kłina, rozsadzającego poniżej znajdującego się tworzywo. Uwidacznia się to w ukształtowaniu funkcji naprężeń poprzecznych, która ma swoje maksimum właśnie w odległości $y = 0,336d$ (a zatem niedaleko).

Za pomocą tabeli funkcji $f_1(x)$ i $f_2(v)$ można także obliczyć konieczną wysokość uzbrojonego ciosu przegubowego. Jeżeli wysokość jego będzie mniejsza aniżeli $1,6d$, to jak już wyżej wspomniano, część naprężeń rozciągających będzie musiał przenieść materiał łuku. Znajac naprężenie dopuszczalne na docisk w przegubie σ_d oraz na rozciąganie w materiale łuku σ_r , możemy obliczyć wartość funkcji $f_1(x)$, a znalazłszy odpowiednią wartość w tabeli, ustalić wysokość ciosu przegubowego.

Naprężenie na docisk w przegubie:

$$\sigma_d = \frac{P}{bl} = \frac{P}{vdl}, \quad \text{zatem} \quad \frac{P}{dl} = \sigma_d v,$$

naprężenie zaś rozrywające

$$\sigma_r = \frac{P}{dl} f_1(x) f_2(v) = \sigma_d v f_1(x) f_2(v),$$

stad

$$f_1(x) = \frac{\sigma_r}{\sigma_d v f_2(v)}.$$

W tabeli znajdziemy odpowiadający tej wartości stosunek $\frac{y}{d}$ i przyjmujemy następnie $y=h$.

LITERATURA

- [1] Ziembra, *Walec kołowy pełny pod działaniem sił osiowo-ściskających*, Archiwum Mechaniki Stosowanej — Gdańsk, t. III (1951).
- [2] Poliwanow, *Żelzobetonnyje Mosty*, 1947.
- [3] Bortsch, *Spannungen in Wälzelenkquadern*, Beton u. Eisen, 1935.
- [4] *Versuche mit Eisenbetongelenken*, Beton u. Eisen, 1926.
- [5] Krebitz, *Wälzelenke aus Beton u. Stein*, Beton u. Eisen, 1926.
- [6] Gehler, *Balkenbrücken*, Hdbuch f. Eisenbetonbau, Emperger, 1924.

Katedra Budowy Mostów

Wpłynęło do Redakcji w maju 1953 r.

НАПРЯЖЕНИЯ В ШАРНИРАХ И ПОДОПОРНИКАХ

Для расчета напряжений в шарнирах и подпорниках часто применяется еще и в настоящее время метод, основанный на опытах Крюгера (г. 1894).

Борч в г. 1935 (Beton u. Eisen) опубликовал правильный, основанный на методах теории упругости, способ расчета, однако полученные им уравнения слишком сложны и поэтому не нашли в практике должного распространения.

Автор в настоящей статье предлагает эмпирическую формулу, соответствующую как краевым условиям Борча, так и результатам лабораторных исследований. Функция эта относительно проста и поэтому легко применима в практике. Уравнение растягивающих напряжений в центре сечения шарнира:

$$\xi = 0,611 \frac{P}{dl} (3\pi - 8v) \left[\left(\frac{x}{h} \right)^4 - \left(\frac{x}{h} \right)^5 - \frac{31}{30} \left(\frac{x}{h} \right)^{30} \right],$$

где P — полная сжимающая нагрузка (kg), d — ширина шарнира (в плоскости чертежа); l — длина шарнира (перпендикулярно к плоскости чертежа); b — определенная по формулам Герца ширина площади действия силы P или ширина опорной плиты; v — частное $\frac{b}{d}$; x — расстояние рассматриваемого сечения от начала координат, принимаемого на расстояние $h=1,6d$ от шарнира.

Наибольшее растягивающее напряжение действует на расстоянии $0,336d$ от шарнира и равно:

$$\zeta_{\max} = 0,0494 \frac{P}{dl} (3\pi - 8v)$$

Для облегчения расчета растягивающих напряжений составлена соответствующая таблица.

SPANNUNGEN IN GELENK UND WIDERLAGERQUADERN

Zur Spannungsberechnung in Gelenk- und Widerlagerquadern wird noch immer die aus den Krüger'schen Versuchen v. J. 1894 ermittelte Methode verwendet.

Bortsch hat zwar im J. 1935 (Bet. u. Eisen) eine genaue, auf Grund der Elastizitätstheorie abgeleitete Berechnungsmethode angegeben, es sind jedoch die von ihm ermittelten Gleichungen zu kompliziert und haben deshalb in der Praxis keine Anwendung gefunden.

Der Verfasser gibt eine, den Bortsch'schen Randbedingungen wie auch den Versuchsergebnissen entsprechende empirische Funktion an, die verhältnismässig einfach und praktisch anwendbar ist

$$Z = 0,611 \frac{P}{dl} (3\pi - 8v) \left[\left(\frac{x}{h} \right)^4 - \left(\frac{x}{h} \right)^5 - \frac{31}{30} \left(\frac{x}{h} \right)^{30} \right].$$

Es bedeutet: P — die Axialkraft, d — die Quaderbreite, l — die Quadertiefe, b — die nach den Hertz'schen Gleichungen berechnete Angriffsbreite der Kraft P , oder die Lagerbreite, v — den Quotient b/d , und x — den Abstand des untersuchten Querschnittes von dem in einer Tiefe $h = 1,6 d$ vom Gelenke angenommenen Koordinatenursprung. Die grösste Zugspannung wirkt in einer Entfernung $0,336 d$ vom Gelenke und beträgt:

$$Z_{\max} = 0,0494 \frac{P}{dl} (3\pi - 8v).$$

Zur raschen Berechnung der Zugspannungen ist eine Tabelle zusammengestellt worden.

O ZALEŻNOŚCI MARKI BETONU OD MARKI CEMENTU

MIECZYSLAW ZACHARA, dr inż., z-ca profesora Technol. Mat. Bud.

Praca rozważa możliwości zmiany przyjętej w Polsce postaci wzoru Bolomeya przez uwzględnienie zależności wytrzymałości betonu od wytrzymałości cementu. Wprowadzenie tych zmian może wpłynąć na osiągnięcie oszczędności w zużyciu cementu.

1. CZYNNIKI WPŁYWAJĄCE NA MARKĘ BETONU

Jednym z głównych problemów technologii betonu jest metoda ustalenia 28-dniowej wytrzymałości na ściskanie, czyli marki betonu. Problem ten od wielu lat mobilizuje wysiłki wielu badaczy i mimo znacznych dotychczasowych osiągnięć nie przestaje być aktualnym zagadnieniem w laboratorium i na budowie.

Według dotychczasowych osiągnięć badawczych na jakość betonu w określeniu marki mają wpływ następujące czynniki:

- 1) jakość cementu pod względem wytrzymałościowym (marka cementu),
- 2) ilość cementu w betonie,
- 3) współczynnik wodno-cementowy $\frac{w}{c}$,
- 4) jakość kruszywa pod względem gatunku materiału kamiennego, uziarnienia, kształtu i charakteru ziarn, czystości itp.,
- 5) rodzaj mieszania betonu,
- 6) konsystencja betonu,
- 7) sposób transportu, ułożenia betonu i jego zagęszczenia,
- 8) temperatura podczas wiązania i twardnienia,
- 9) opieka nad gotowym betonem w pierwszym okresie twardnienia,
- 10) metoda sprawdzania wytrzymałości (kształt i wielkość próbek, szybkość zgniatania itp.).

W metodach projektowania betonu określonej marki nie wszystkie wymienione czynniki brane są pod uwagę. Wpływ tych czynników na markę betonu jest bardzo różny. Tylko ważniejsze z nich znajdują swój bezpośredni wyraz w istniejących wzorach technologicznych.

Do najważniejszych czynników zaliczamy jakość cementu i współczynnik wodno-cementowy $\frac{w}{e}$. W pierwszych badaniach usiłowano powiązać ilość cementu w prawa dotyczące wytrzymałości betonu, jednak z powodu trudności jednoczesnego uchwycenia innych czynników zaniechano tego na korzyść współczynnika $\frac{w}{e}$. Doświadczenia wykazały, że stosunek $\frac{w}{e}$, który można nazwać stopniem rozcieńczenia cementu, jest związany z innymi czynnikami (także z ilością cementu) i że $\frac{w}{e}$ można przyjąć za zmienną charakterystyczną jakości betonu.

Liczne formuły ustalają markę betonu jako funkcję $\frac{w}{e}$ lub $\frac{e}{w}$. Do najbardziej znanych zalicza się wzory Fereta, Bolomeya, Abramsa, Grafa, Bielajewa. Największe rozpowszechnienie zdobył sobie wzór Bolomeya dzięki swojej prostocie i łatwości użycia dla celów praktycznych z zadowalającą dokładnością w zakresie betonów plastycznych.

Inne betony dla ustalenia wytrzymałości wymagają wzorów bardziej skomplikowanych¹⁾.

Wzór Bolomeya przyjęły także nasze normy w postaci:

$$R_{b28} = A \left(\frac{e}{w} - 0,5 \right),$$

gdzie

R_{b28} — wytrzymałość betonu na ściskanie po 28 dniach,

$\frac{e}{w}$ — stosunek ilości wagowej cementu do wody,

A — współczynnik zależny od pozostałych czynników wpływających na jakość betonu, głównie od jakości cementu.

Przy ujednostajnieniu wszystkich czynników A może przyjąć pewną wartość statystyczną o małych wahanach. I tak w historii technologii betonu w Polsce współczynnik A przyjmował w pewnych okresach czasu wielkości 250, 220, 200, 160, a ostatnio według rozporządzenia Przewodniczącego PKPG z maja 1950 r. oraz normy PN/B — 03260 przyjmuje wartość 140 dla cementu marki 350, zaś 120 dla cementu marki 250.

Na przyjęcie wartości dla A : 250, 220 i 200 musiały się składać szczególnie dobre warunki dla betonu, jak odpowiednia jakość kruszywa,

¹⁾ Krystian Eyman, *Metoda projektowania betonów porowatych i konstrukcyjnych*, Materiały Budowlane nr 5, 1952 r.

staranność wykonania betonu i jego zagęszczenia, głównie zaś wysoka marka cementu.

Stosowanie takich warunków było nieekonomiczne w przypadku wykonywania betonów niskich marek, tj. o wytrzymałości poniżej 170 kg/cm^2 .

Wprowadzenie obecnie cementu niskich marek umożliwiło bardziej ekonomiczne wykorzystanie najczęściej stosowanych betonów $R_b=110$ do 170 kg/cm^2 , jednak wielkości A określone normami wydają się za niskie. Powoduje to zbyt duży wydatek cementu, świadomość zaś tego u wykonawców może obniżać staranność wytwarzania betonu na budowach.

2. OKREŚLENIE PARAMETRÓW, OD KTÓRYCH ZALEŻY WSPÓŁCZYNNIK A WE WZORZE BOLOMEYA

Wielkość A jest wypadkową charakterystyką wpływu większości czynników na jakość betonu. Główny wpływ na wielkość A ma jakość cementu, którą charakteryzujemy przez tzw. markę cementu R_c . Stąd współczynnik A określa się nawet mianem „współczynnika jakości cementu”. Możemy go wyrazić przez iloczyn

$$A = a R_c,$$

przy czym a — może być funkcją parametrów przyjmujących wartości charakteryzujące pozostałe wpływy na markę betonu, jak jakość kruszywa, konsystencja, staranność mieszania, zagęszczenie, temperatura itp.

Przy możliwości ścisłego ujęcia tych parametrów (np. w wytwórniach betonu) wielkość a można oznaczyć dokładnie zależnie od wymienionych wpływów. Na przeciętnych budowach taka szczegółowa ocena wartości a byłaby zbyt trudna, wobec czego istnieje dążność do korzystania z gotowego a określonego z wielu danych statystycznych dla przeciętnych warunków.

Dotychczas w naszej literaturze przyjmowano wielkości $A = \frac{R_c}{1,8 \div 2,7}$, tj. $a=0,55 \div 0,37$, czyli dla przeciętnych warunków wykonania betonu $a=0,46$ przy określaniu marki cementu wg starych norm na zaprawach ubijalnych.

Obecnie dla przeciętnych warunków

przy cemencie marki 250 $a=0,48$,

przy cemencie marki 350 $a=0,40$,

czyli średnia: $a=0,44$ — niższa niż dawniej, mimo oznaczania marki cementu w nowych normach na zaprawach plastycznych.

W Związku Radzieckim przyjęto dla przeciętnych warunków wykonania betonu

$a = 0,5$ dla kruszyw naturalnych,

$a = 0,55$ dla kruszyw tłuczniowych.

Spróbujmy przetransponować do naszych warunków ustalony i potwierdzony w ZSRR przez praktykę wzór Bolomeya:

$$R'_b = 0,5 R'_c \left(\frac{c}{w} - 0,5 \right)$$

na obliczenie naszej marki betonu:

$$R_b = a R_c \left(\frac{c}{w} - 0,5 \right).$$

R_b — marka betonu u nas określana na walcach równobocznych $\varnothing 16$ cm,

R'_b — marka betonu w ZSRR określana na kostkach sześciennych o krawędzi 20 cm.

Według badań inż. Kuczyńskiego¹⁾ można przyjąć

$$R'_b = 1,17 R_b,$$

stąd

$$a = 0,5 \cdot \frac{R_b}{R'_b} \cdot \frac{R'_c}{R_c} = 0,427 \frac{R'_c}{R_c}.$$

Marka cementu R'_c w ZSRR jest różna od naszej R_c ze względu na inne normy dotyczące metody badania, składników, wielkości próbek itp.²⁾

Marka cementu w ZSRR oznacza wytrzymałość 28-dniową na ściskanie kostek o wymiarach $7,1 \times 7,1 \times 7,1$ cm, wykonanych z zapraw ubijalnych, przygotowanych w sposób podobny, jak podawano w naszych starych normach. Metoda określania marki cementu R_c według naszych norm obecnie obowiązujących oznacza wytrzymałość na ściskanie po 28 dniach próbek o wymiarach $6,25 \times 4 \times 4$ cm wykonanych z zaprawy plastycznej.

W celu znalezienia $x = \frac{R'_c}{R_c}$ oznaczono R_c dla 12 cementów według norm polskich PN/B — 204 i te same cementy zbadano na R'_c metodą zastępczą według normy radzieckiej OST/NKTP — 6307/275 określającej w sposób przybliżony i przyśpieszony markę cementu przez naparzenie zaczynów cementowych. Wyniki badań podano w tablicy 1.

¹⁾ Władysław Kuczyński, *Korelacja wytrzymałości próbek walcowych i kostkowych betonu*, Inżynieria i Budownictwo nr 8 1952 r.

²⁾ Ahrends i Błach, *Badanie cech fizycznych i wytrzymałościowych cementu według norm polskich i zagranicznych*, Cement, Wapno, Gips nr 6/52.

Tablica 1

L. p.	Czas wiązania			Przebieg		Wytrzymałość na ściskanie kg/cm ²		$\frac{R'_c}{R_c}$
	Początek godz. min.	Koniec godz. min.	Właści- wa ilość wody w%	Pozostaje na sicie w %				
				200 μ	80 μ	R_c	R'_c	
1	2 ³⁵	3 ⁵⁰	23,5	0,75	12,35	229	317	1,38
2	1 ⁵²	4 ²²	29,5	0,01	1,60	387	459	1,19
3	3 ²⁵	3 ³⁵	25,5	0,40	11,20	259	320	1,24
4	3 ²⁵	5 ²⁰	27,5	0,27	6,60	256	446	1,74
5	2 ⁴⁵	4 ²⁰	26,0	0,30	8,15	259	396	1,53
6	3 ⁵⁰	5 ¹⁷	26,0	0,40	13,80	224	327	1,46
7	1 ²⁵	3 ⁵⁰	27,0	0,40	12,00	283	334	1,18
8	3 ⁵⁵	4 ⁵⁰	26,0	0,55	12,40	311	328	1,06
9	3 ⁴⁵	6 ¹⁵	26,8	0,75	17,10	193	250	1,30
10	3 ¹⁵	4 ⁴⁰	25,3	1,10	14,50	251	288	1,15
11	3 ²⁵	5 ³⁵	26,5	1,05	18,60	162	249	1,54
12	2 ³⁰	4 ⁴⁵	26,5	0,65	11,90	194	253	1,30

Po odrzuceniu wyników różniących się od średniej więcej niż o 20% otrzymamy średnią $\frac{R'_c}{R_c} = 1,32$, stąd $a = 0,56^1$).

Zatem wzór Bolomeya stosowany w ZSRR

$$R_b = 0,5 R'_c \left(\frac{c}{w} - 0,5 \right)$$

mógłby u nas przedstawiać się w formie:

$$R_b = 0,56 R'_c \left(\frac{c}{w} - 0,5 \right) \quad \text{dla kruszyw naturalnych,}$$

$$R_b = 0,61 R'_c \left(\frac{c}{w} - 0,5 \right) \quad \text{dla kruszyw tłuczniowych.}$$

Dla sprawdzenia podanych wyżej wartości współczynnika a zestawiono w tablicy 2 charakterystykę 10 różnych betonów wykonanych w Laboratorium Budowlano-Drogowym Politechniki Wrocławskiej w IV kwartale 1951 r.

¹⁾ Roman Malinowski w referacie na I Konferencji Prefabrykacji w Budownictwie Zagadnienia technologiczno-materiałowe przy produkcji elementów prefabrykowanych z betonu ciężkiego podaje dla naszych marek cementu przy kruszywie żwirowym współczynnik $a = 0,55$.

Tablica 2

L. p.	R_c kg/cm ²	$\frac{c}{w}$	Punkt piaskowy ‰	Konsysten- cja betonu. Opad stoż- ka w cm	R_b kg/cm ²	A	$a = \frac{A}{R_c}$
1	206	1,91	49	3	185	131	0,635
2	206	2,12	49	5	201	124	0,602
3	209	1,84	49	5	186	138	0,660
4	209	2,13	49	3	205	126	0,603
5	261	1,57	49	5	156	145	0,555
6	261	1,80	49	5	178	137	0,524
7	261	1,62	86	0	146	130	0,497
8	329	1,23	66	0	120	164	0,499
9	215	2,00	34	2	222	148	0,689
10	215	1,94	48	6	170	118	0,549

Przy próbkach stosowano przeważnie betony plastyczne, mieszanie ręczne, wykonanie próbek średnio staranne (zagęszczanie sztychowaniem), pospółki w większości przypadków za drobne. Średnia arytmetyczna tych prób przy sprawdzonych markach cementu dała $A = 0,58R_c$. Odrzucając wyniki 7 i 8 odnoszące się wyraźnie do betonów ubijalnych, których próbki nie poddano odpowiedniemu zagęszczeniu, otrzymamy średnią z pozostałych wyników: $a = 0,60$.

Tablica 3

L. p.	Ilość cementu w kg na 1 m ³ betonu	$\frac{c}{w}$	Marka ce- mentu R_c (nie spraw- dzona)	R_b	A	$a = \frac{A}{R_c}$
1	400	1,96	250	190	130	0,52
2	400	1,96	250	216	148	0,59
3	466	2,33	250	275	150	0,60
4	350	1,91	250	223	158	0,63
5	315	1,92	250	158	111	0,44
6	375	1,95	250	226	156	0,62
7	416	2,08	350	246	155	0,44
8	310	1,71	350	184	152	0,43
9	335	1,71	350	197	163	0,47
10	340	1,71	350	201	166	0,47

Dla porównania tego wyniku otrzymanego w Zakładzie Badawczym z uzyskanym w praktyce, przeprowadzono podobne obliczenie dla betonów wykonanych na przeciętnej budowie.

Jedno z laboratoriów polowych przy większej budowie otrzymało wyniki w okresie I kwartału 1952 r., które zestawiono w tablicy 3. Średnia z 10 betonów przy nie kontrolowanej marce cementu dała wynik $a = 0,52$. Stosunkowo małe wartości a dla cementu marki 350 wskazują że cementy te, jako wrażliwsze na magazynowanie, uległy pewnemu zwietrzeniu.

Aby zorientować się w wielkości współczynnika a w warunkach szczególnie korzystnych, podaję zestawienie wyciągów z protokołów wykonania i badania próbek betonu (sierpień 1952 r.) pochodzących z budowy dobrze zorganizowanej w zakresie wykonywania betonu (tablica 4).

Używano cementu marki 350 ze świeżych dostaw; kruszywo naturalne (żwir i drobna pospółka) z nastawionym punktem piaskowym 35%; konsystencja betonu wykazywała opad stożka Abramsa około 1 cm; walec typu B ($\varnothing 16$ cm) wykonywano starannie stosując zagęszczenie przez wibrację; próbki przechowywano według wskazań PN/B — 196. Badanie walców przeprowadzono w Laboratorium Budowlano-Drogowym Politechniki Wrocławskiej. W tablicy podano średnie z 3 próbek.

Tablica 4

L. p.	Ilość cementu w kg na 1 m ³ betonu	$\frac{c}{w}$	R_c (nie kontrolowane)	R_b kg/cm ²	A	$a = \frac{A}{R_c}$
1	325	2,17	350	373	223	0,635
2	325	2,17	350	335	201	0,575
3	325	2,17	350	346	207	0,591
4	325	2,17	350	415	248	0,708
5	325	2,17	350	396	237	0,677
6	325	2,17	350	312	187	0,534
7	325	2,17	350	331	198	0,566
8	325	2,17	350	379	227	0,650
9	325	2,17	350	330	197	0,564
10	325	2,17	350	325	195	0,558
Średnio	325	2,17	350	354	212	0,605

3. WNIOSKI

Metody technologiczne projektowania betonu o ustalonej wytrzymałości na ściskanie powinny posługiwać się wzorami, w których obok współczynnika $\frac{c}{w}$ należy uwzględnić markę cementu R_c . Stosowany dotychczas u nas w praktyce wzór Bolomeya uwzględniał częściowo tylko markę cementu i to bardzo niedokładnie. Jeśli bowiem cement 250 nie sprawdzony pod względem wytrzymałości na ściskanie posiada w rzeczywistości wytrzymałość znacznie wyższą, np. 290 kg/cm², to przyjęcie we wzorze Bolomeya $A=120$ powoduje niepotrzebny nadmiar tego najcenniejszego składnika betonu. W myśl hasła ekonomicznego stosowania cementów należy się starać charakteryzować je dokładnie przez zbadanie wytrzymałości, i sprawdzoną wielkość R_c wstawiać do wzoru $A = a R_c$.

Z podanych badań wynika, iż stosując cementy o kontrolowanej marce, możemy przyjmować przy warunkach przeciętnych dla betonów o konsystencji plastycznej co najmniej współczynnik $A=0,5R_c$, co dla cementu marki 350 da $A=175$, a nie jak dotychczas 140. Przy betonach np. marki 200, spowoduje to oszczędność na cemencie około 15%.

Przy starannym doborze kruszywa (np. przez ustalenie i dobranie klas pospólek według instrukcji Ministerstwa Budownictwa z dnia 31.VI. 1950 r.) przy mieszaniu mechanicznym i odpowiedniej metodzie zagęszczania (wibracja) można dla betonów plastycznych przy wszystkich dodatkach wpływach przyjmować $A=0,6R_c$.

Stosowane obecnie na podstawie norm wielkości $A=140$ i 120 dla cementów 350 i 250 wskazują wartość na $a=0,4$ do $0,48$. Tak mały współczynnik jest przejawem „braku zaufania” do wszystkich czynników wpływających na jakość betonu, a więc składników i wykonawstwa.

Współczynniki te, jako przewidujące wyniki najniższe, można stosować przy budowach słabo zorganizowanych, bez należytej kontroli materiałów i wykonawstwa.

Na I Konferencji Technologii Betonu w kwietniu 1951 r. w Warszawie podkreślono potrzebę podwyższenia współczynnika jakości cementu.

Badania laboratoryjne, których mały wycinek podano w tablicach, potwierdzają słuszność tych tendencji.

Ścisłejsze oznaczenie wielkości a można uzyskać w oparciu o rachunek wyrównawczy na podstawie wielu danych statystycznych posiadanych przez laboratoria kontrolujące jakość betonu dla lepiej zorganizowanych budów.

LITERATURA

- [1] B. Bukowski, *Przepowiadanie 28-dniowej wytrzymałości betonu*, Warszawa 1936.
- [2] *Sprawocznik Architekta*, tom IX, cz. I 1950.
- [3] A. Hummel und H. Lenhard, *Von der Beziehung zwischen Zementfestigkeit und Betonfestigkeit* Zement 1942 nr 31/32 i 33/34.
- [4] O. Graf, *Die Baustoffe*, Stuttgart 1947.

K ВОПРОСУ ЗАВИСИМОСТИ МАРКИ БЕТОНА ОТ МАРКИ ЦЕМЕНТА

Применяющаяся до настоящего времени в Польше формула Боломея $R_b = A \left(\frac{c}{w} - 0,5 \right)$ не учитывает соответствующим образом зависимости временного сопротивления бетона от сопротивления цемента. Величину A необходимо определять (подобно тому, как это принято в СССР), как произведение двух компонентов, из которых одним является марка цемента R_c , второй же можно представить как статистический коэффициент, определенный на основании многократных лабораторных исследований. Приведенные в настоящем труде примеры доказывают между прочим, что формула принятая в СССР и оправдавшая себя на практике, может быть применена и в Польше с несколько большим коэффициентом безопасности вследствие применения у нас иного, чем в СССР, способа определения марки цемента а также вследствие низкого до сих пор качества производства бетона. Принимая в наших нормах временно $A = 0,5 R_c$ получим значительную экономию цемента в бетонах обычного качества. В условиях высококвалифицированного производства и соответствующего качества песка и гравия было бы возможно принять даже $A = 0,6 R_c$.

ZUR FRAGE DER ABHÄNGIGKEIT ZWISCHEN
BETON-UND ZEMENTFESTIGKEIT

Die bisher in Polen gebrauchte Bolomey'sche Formel $R_b = A \left(\frac{c}{w} - 0,5 \right)$ berücksichtigt nicht in einer näher bestimmten Weise die Abhängigkeit der Druckfestigkeit des Betons von der des Zements. Man sollte, ähnlich wie in der U. d. S. S. R., den Wert A als Produkt zweier Faktoren auffassen, von denen der eine die Zementmarke „ R_c “, der andere einen Zahlenkoeffizient darstellte. Letzteren könnte man aus Versuchen ermitteln.

Die angegebenen Beispiele beweisen unter anderem, dass die in der U. d. S. S. R. angenommene und in der Praxis bewährte Formel, bei uns mit einer grösseren Sicherheitskoeffizienten angewendet werden und zwar wegen des bestehenden Unterschiedes der Methoden beim Bestimmen der Zementmarke, wie auch wegen mangelhafter Ausführung des Betons auf der Baustelle. Bei einer vorläufigen Annahme in unseren Normen des Wertes: $A = 0,5 R_c$, wird bei den mittelfesten Betonarten eine bedeutende Zementersparniss erreicht. Bei einer guten Ausführung und der Verwendung des entsprechenden Steinmaterials wird man $A = 0,6 R_c$ annehmen können.

UKOŚNE ZGINANIE W ŻELBECIE

LEON DANIELSKI, *mgr inż., adiunkt Katedry Budowy Mostów*

Dla prostokątnego przekroju żelbetowego pracującego na ukośne zginanie wyprowadzono zależność wielkości ramienia sił wewnętrznych w stadium złamania od mocy zbrojenia, położenia środka ciężkości wkładek rozciąganych i pochylenia płaszczyzny obciążenia, oraz sporządzono wykresy wielkości ξ_x i s_{bx} pomocnych przy wymiarowaniu takich przekrojów. W dalszym ciągu rozważono sprawę właściwego rozmieszczenia wkładek w przekroju ukośnie zginanym.

1. OKREŚLENIE ZAGADNIENIA

Ukośnym zginaniem nazywamy takie przypadki zginania, gdzie płaszczyzna obciążenia nie pokrywa się z żadną z głównych osi przekroju. Zewnętrzny moment zginający określony jest wtedy za pomocą wielkości M_0 oraz pochylenia płaszczyzny obciążeń m , albo za pomocą składowych M_x i M_y . Moment ten musi być zrównoważony momentem sił wewnętrznych, którym w przypadku przekroju żelbetowego są: wypadkowa ciśnień betonu oraz wypadkowa ciągnięć wkładek uzbrojenia.

Napreżenia w odpowiednio rozmieszczonych w przekroju wkładkach rozciąganych osiągają w stadium złamania przedział plastyczności Q_r . Wypadkowa ciągnięć Z pokrywa się wtedy ze środkiem ciężkości przekroju wkładek ciągniowych. Bryła ciśnień o podstawie trójkątnej lub trapezowej ograniczona jest w tym stadium nieokreśloną ściśle powierzchnią o rzędnych wzrastających od zera w osi obojętnej do R_m .

Bryłę tę, bez wielkiego uszczerbku dla dokładności wyniku, można przy obliczaniu takiego przekroju zastąpić równoważną bryłą o stałej wysokości R_m . Wypadkowa ciśnień D będzie przechodzić przez środek ciężkości podstawy takiej bryły.

Jeżeli oznaczymy współrzędne środka ciężkości przekroju wkładek przez h_x i h_y , a współrzędne środka ciężkości podstawy zastępczej bryły ciśnień (strefy ściskanej) przez y_x i y_y , to warunki równowagi przekroju w chwili złamania będą brzmiały:

$$M_x^l = D(h_x - y_x), \quad (1)$$

$$M_y^l = D(h_y - y_y), \quad (2)$$

$$D = Z, \quad (3)$$

przy czym składowe momentu łamiącego wynoszą

$$M_x^l = s M_x, \quad M_y^l = s M_y.$$

Wypadkowa ciągnięć $Z = F_z Q_r$,

Wypadkowa ciśnień $D = F_b R_m$,

gdzie F_b jest powierzchnią trójkątnej lub trapezowej podstawy zastępczej bryły ciśnień.

W przypadku mimośrodowego ściskania siłą nie trafiającą żadnej z osi głównych, warunki równowagi przybierają postać:

$$M_{zx}^l = D_b (h_x - y_x), \quad (1a)$$

$$M_{zy}^l = D (h_y - y_y), \quad (2a)$$

$$D - P^l = Z, \quad (3a)$$

przy czym M_{zx}^l i M_{zy}^l są składowymi momentu siły łamiącej $P^l = sP$ względem wypadkowej ciągnięć (środką ciężkości przekroju wkładek ciągniętych).

Przyjęcie bryły ciśnień o przekroju prostokątnym lub ściślej — założenie, że wypadkowa ciśnień betonu trafia w środek ciężkości podstawy zastępczej bryły ciśnień, dostarcza dalszych dwóch warunków wyrażających związek między y_x , y_y i F_b .

Z warunków równowagi możemy znaleźć trzy niewiadome. W przypadku sprawdzenia danego przekroju będą nimi wymiary strefy ściskanej oraz współczynnik bezpieczeństwa. W przypadku projektowania (mamy zazwyczaj dane wymiary przekroju betonowego b i h) niewiadomymi będą wymiary strefy ściskanej oraz przekrój wkładek, przy czym należy z góry założyć współrzędne środka ciężkości wkładek h_x i h_y .

Wyliczanie w każdym konkretnym przypadku niewiadomych bezpośrednio z równań równowagi jest bardzo uciążliwe. Niewiadome otrzymuje się z równań drugiego (strefa ściskania trapezowa) lub trzeciego stopnia (strefa ściskana trójkątna)¹⁾, przy czym nie są to jeszcze wartości ostateczne.

W przypadku sprawdzania może się okazać po pierwszym obliczeniu, że pewne wkładki niesłusznie zaliczono do rozciąganych, w przypadku zaś projektowania otrzymuje się przekrój wkładek potrzebny dla założonego położenia ich środka ciężkości, które tylko przypadkowo może okazać się trafne. Zazwyczaj obliczenie trzeba powtórzyć tak w pierwszym, jak i w drugim przypadku.

¹⁾ I. Kisiel, *Zginanie niesymetryczne w żelbecie*, Inżynieria i Budownictwo 1952, nr 3.

Elementy ukośnie zginane występują w żelbecie tak często, zwłaszcza w budownictwie przemysłowym (belki podsuwnicowe, rygle ścian szkieletowych, słupy narożnikowe budynków szkieletowych itp.), że celowe wydaje się sporządzenie tablic, które przy ich wymiarowaniu pozwolą uniknąć znużonej pracy rachunkowej.

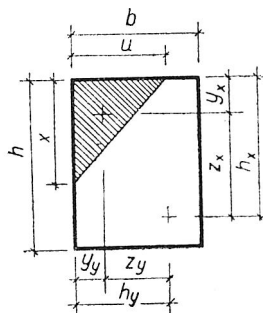
WYKRESY DO WYMIAROWANIA

Przy wymiarowaniu przekrojów prostokątnych na zginanie w kierunku jednej z osi głównych posługujemy się wielkościami:

$$\zeta = \frac{z}{h_1}; \quad s_b = a\zeta \quad \text{oraz} \quad r_0 = \sqrt{\frac{1}{s_b}}$$

zestawionymi dla różnych wartości $a = \mu\beta_r$. Tok postępowania jest znany. Poniżej wyprowadzono wzory, które posłużyły do obliczenia wielkości ζ_x i s_{bx} , służących do wymiarowania przekrojów prostokątnych na ukośne zginanie. Przy wymiarowaniu postępuje się analogicznie jak w przypadku zginania w kierunku jednej z osi głównych, należy tylko w odnośnych wzorach wstawić M_x w miejsce M , h_x zamiast h_1 oraz z_x zamiast z .

Wielkości ζ_x i s_{bx} są tu funkcjami nie tylko a , ale jeszcze dwóch czynników, z których jeden charakteryzuje pochylenie płaszczyzny obciążenia, drugi rozmieszczenie w przekroju wkładki ciągnionych. Składowe momentu zewnętrznego M_x i M_y zazwyczaj pochodzą od różnych obciążeń, z których jedno albo nawet oba mogą być zmienne. Wtedy zmienia się zarówno wartość jak i płaszczyzna działania momentu wypadkowego. Przy stałym położeniu środka ciężkości wkładki ciągnionych (wypadkowej ciągnięć) zmieniają się wymiary i kształt strefy ściskanej. Wykresy sporządzono dla różnych pochyłeń płaszczyzny obciążenia $m = \frac{M_y}{M_x}$ mieszczących się w granicach od 0 do $\frac{b}{h_x}$. Przy zmianie m w tych granicach możliwe są cztery poniżej rozpatrzone przypadki.



Rys. 1

Przykład 1 — strefa ściskana trójkątna, usytuowana względem środka ciężkości wkładki ciągnionych jak na rys. 1. Przy oznaczeniach jak na rysunku, położenie wypadkowej ciśnienia (środku ciężkości strefy ściskanej) w układzie prostokątnym o początku w wierzchołku prostokąta

Przykład 1 — strefa ściskana trójkątna, usytuowana względem środka ciężkości wkładki ciągnionych jak na rys. 1. Przy oznaczeniach jak na rysunku, położenie wypadkowej ciśnienia (środku ciężkości strefy ściskanej) w układzie prostokątnym o początku w wierzchołku prostokąta

najdalej odległym od środka ciężkości wkładek ciągnionych określają współrzędne:

$$y_x = \frac{x}{3}, \quad (4)$$

$$y_y = \frac{u}{3}. \quad (5)$$

Wypadkowa ciśnień

$$D = F_b R_m = \frac{xu}{2} R_m = \frac{9y_x y_y}{2} R_m. \quad (6)$$

Wypadkowa ciągnięć

$$Z = F_z Q_r = \mu b h_x Q_r. \quad (7)$$

Z warunku równowagi sił w przekroju (3) otrzymamy

$$\frac{9}{2} y_x y_y R_m = \mu b h_x Q_r,$$

stąd

$$y_y = \frac{\mu Q_r}{R_m} \cdot \frac{b h_x}{y_x} \cdot \frac{2}{9} = \mu \beta_r b \frac{h_x}{y_x} \cdot \frac{2}{9} = ab \frac{h_x}{y_x} \cdot \frac{2}{9}. \quad (8)$$

Z ilorazu równań momentów (1) i (2) dostaniemy

$$m = \frac{M_y}{M_x} = \frac{(h_y - y_y)}{(h_x - y_x)},$$

stąd

$$y_y = h_y - m(h_x - y_x) = h_y - m \zeta_x h_x. \quad (9)$$

Z przyrównania do siebie obu wyrażeń na y_y (8) i (9) otrzymamy

$$ab \frac{h_x}{y_x} \cdot \frac{2}{9} = h_y - m \zeta_x h_x,$$

po podzieleniu tego równania przez b oraz po podstawieniu

$\frac{y_x}{h_x} = (1 - \zeta_x)$ otrzymamy ostatecznie

$$(1 - \zeta_x) \left(\frac{h_y}{b} - m \frac{h_x}{b} \zeta_x \right) = \frac{2}{9} a. \quad (10)$$

Otrzymaliśmy równanie wyrażające związek między wielkościami niemianowanymi $a, \zeta_x, m \frac{h_x}{b}$ oraz $\frac{h_y}{b}$.

Przypadek 1 ma miejsce, jeżeli $y_y \leq \frac{b}{3}$ oraz $y_x \leq \frac{h}{3}$.

Przy $y_y = \frac{b}{3}$ otrzymamy z równania (8)

$$ab \frac{h_x}{y_x} \frac{2}{9} = \frac{b}{3}, \quad \text{stad} \quad a = \frac{3}{2} \frac{y_x}{h_x} = \frac{3}{2} (1 - \zeta_x), \quad (11)$$

a z równania (10)

$$m \frac{h_x}{b} = \left(\frac{h_y}{b} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{\zeta_x}. \quad (12)$$

Przypadek 2 — strefa ściskana trapezowa usytuowana względem środka ciężkości wkładek ciągnionych jak na rys. 2. Współrzędne wypadkowej ciśnień (środkła ciężkości strefy ściskanej):

$$y_y = \frac{b}{3} \frac{(2v+x)}{(v+x)} = \frac{b}{3} \left[1 + \frac{v}{(x+v)} \right], \quad (13)$$

$$y_x = \frac{x^2 + xv + v^2}{3(x+v)} = \frac{(x+v)^2 - xv}{3(x+v)} = \frac{(x+v)}{3} - \frac{xv}{3(x+v)}. \quad (14)$$

Wypadkowa ciśnień:

$$D = F_b R_m = \frac{(x+v)}{2} b R_m. \quad (15)$$

Wypadkowa ciągnięć jak poprzednio:

$$Z = F_z Q_r = \mu b h_x Q_r.$$

Z warunku równowagi sił w przekroju:

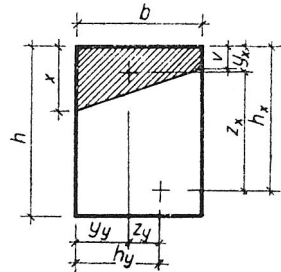
$$\frac{(x+v)}{2} b R_m = b h_x \mu Q_r,$$

stad

$$(x+v) = 2 h_x a.$$

Po wstawieniu tego do wyrażen na y_y (13) i y_x (14) i wyrugowaniu v otrzymamy

$$2a \left(3 \frac{y_y^2}{b^2} - 3 \frac{y_x}{b} + 1 \right) = \frac{y_x}{h_x} = (1 - \zeta_x), \quad (15a)$$



Rys. 2

z ilorazu warunków momentów jak poprzednio (9):

$$y_y = h_y - mh_x + my_x = h_y - m(h_x - y_x) = h_y - m\zeta_x h_x.$$

Z ostatnich dwóch równań otrzymamy ostatecznie

$$\left[\frac{m^2 h_x^2}{b^2} \zeta_x^2 + \frac{mh_x}{b} \zeta_x \left(1 - 2 \frac{h_y}{b} \right) + \frac{h_y^2}{b^2} - \frac{h_y}{b} + \frac{1}{3} \right] \frac{6}{(1 - \zeta_x)} = \frac{1}{a}.$$

Równanie to wyraża związek między omówionymi poprzednio czterema wielkościami niemianowanymi.

Przypadek 2 ma miejsce, jeżeli $\frac{b}{3} < y_x \leq \frac{b}{2}$.

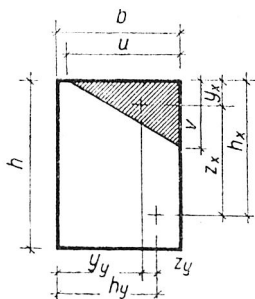
Dla $y_y = \frac{b}{2}$ otrzymuje się z równania (15a):

$$a = 2(1 - \zeta_x), \quad (17)$$

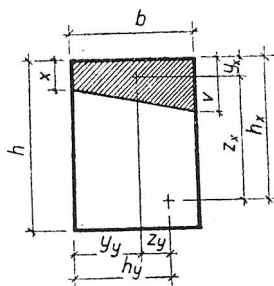
a z równania (9):

$$m \frac{h_x}{b} = \frac{1}{\zeta_x} \left(\frac{h_y}{b} - \frac{1}{2} \right). \quad (18)$$

W przypadku szczególnym, kiedy $m=0$ (tj. $M_y=0$) i $\frac{h_y}{b}=0,5$, pozostaje tylko równanie (17), wyrażające zależność między a i ζ_x . Jest to przypadek zginania w kierunku jednej z osi głównych — zginania symetrycznego.



Rys. 3



Rys. 4

Przypadek 3 — różni się będzie od poprzedniego ustawieniem trapezowej strefy ściskanej (rys. 3). Obowiązują dla niego te same wzory, co dla poprzedniego.

Granice jego określa warunek $\frac{b}{2} < y_y < \frac{2}{3} b$.

Przypadek 4 — strefa ściskana trójkątna, przy czym trójkąt w położeniu jak na rys. 4.

Współrzędne jego środka ciężkości:

$$y_x = \frac{v}{3}, \quad (19)$$

$$y_y = b - \frac{u}{3}. \quad (20)$$

Postępując podobnie jak w przypadku 1 otrzymamy

$$(1 - \zeta_x) \left(m \frac{h_z}{b} \zeta_x + 1 - \frac{h_y}{b} \right) = \frac{2}{9} a. \quad (21)$$

Na granicy przypadku 3 i 4:

$$a = \frac{3}{2} (1 - \zeta_x), \quad (22)$$

$$m \frac{h_x}{b} = \left(\frac{h_y}{b} - \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{1}{\zeta_x}. \quad (23)$$

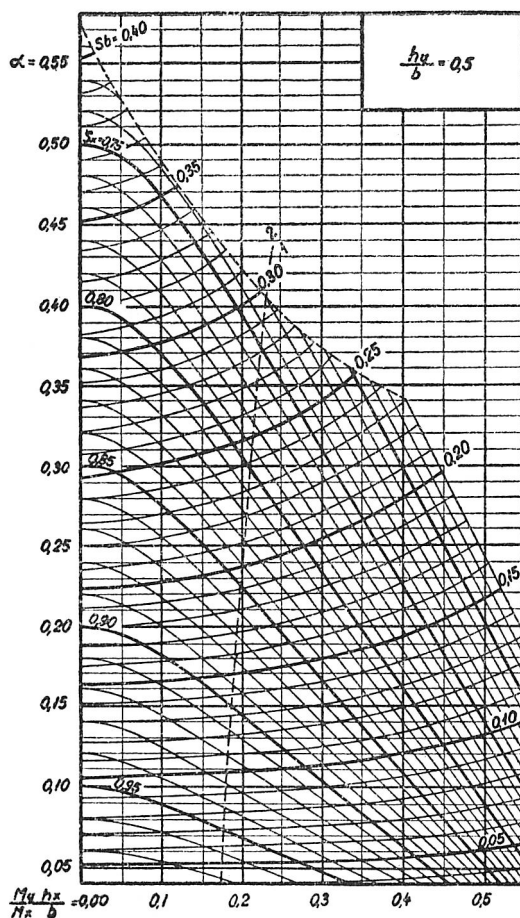
Granice przypadku 4 określają warunki:

$$y_y \geq \frac{2}{3} b,$$

$$y_x \leq \frac{h}{3}.$$

Jeżeli przy $y_y < \frac{b}{3}$ lub $\frac{2}{3} b < y_y$ druga współrzędna wypadkowej ciśnienia $y_x > \frac{h}{3}$, to będziemy mieli przypadek 2 obrócony o 90° . Należy wtedy przemianować osie i rozpatrywać jak przypadek 2.

Za pomocą wyprowadzonych wzorów wyliczono wartości ζ_x oraz $s_{bx} = a \zeta_x$ dla a w granicach od 0,04 do 0,575, $m \frac{h_x}{b}$ w granicach od 0 do 1 i $\frac{h_y}{b}$ od 0,5 do 0,9 i przedstawiono je za pomocą nomogramów warstwicznych na 5 wykresach (rys. 5—9).



Rys. 5

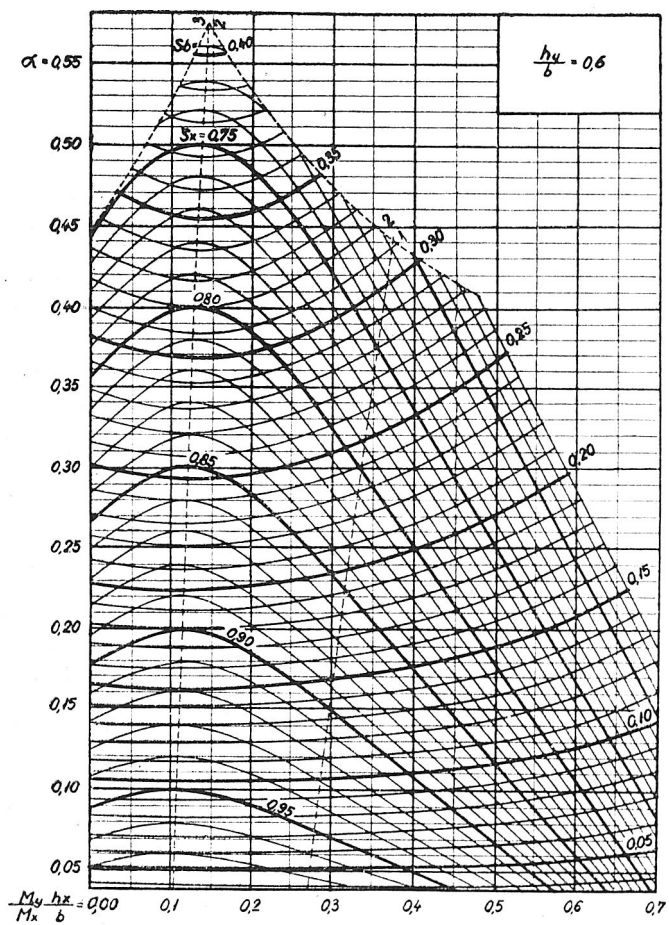
3. ROZMIESZCZENIE WKŁADEK CIĄGNIONYCH

Wymiarowanie przekrojów żelbetowych na zginanie metodą odkształceń plastycznych opiera się na założeniu, że w stadium złamania naprężenia wkładek uzbrojenia osiągają przedział plastyczności przed zmiążdżeniem betonu strefy ściskanej lub równocześnie z nim.

Taki przebieg procesu zniszczenia nośności belki musi być zagwarantowany przez utrzymanie procentu zbrojenia poniżej pewnej granicy.

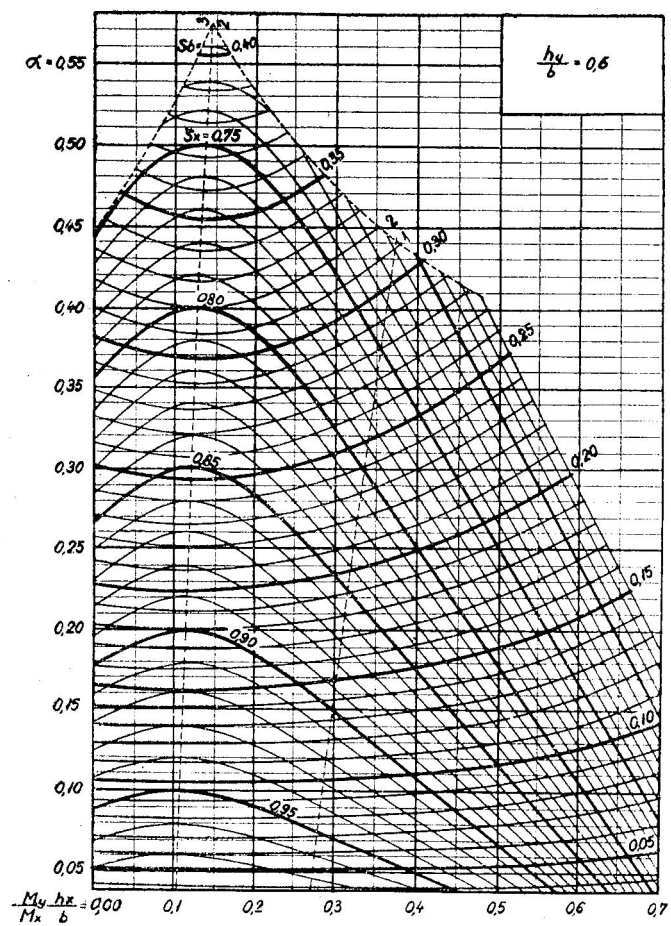
Normy radzieckie opierając się na doświadczeniach przeprowadzonych w CNJPS określają granicę zbrojenia warunkiem:

$$S_b = 0,75 S_{b0}, \quad (24)$$



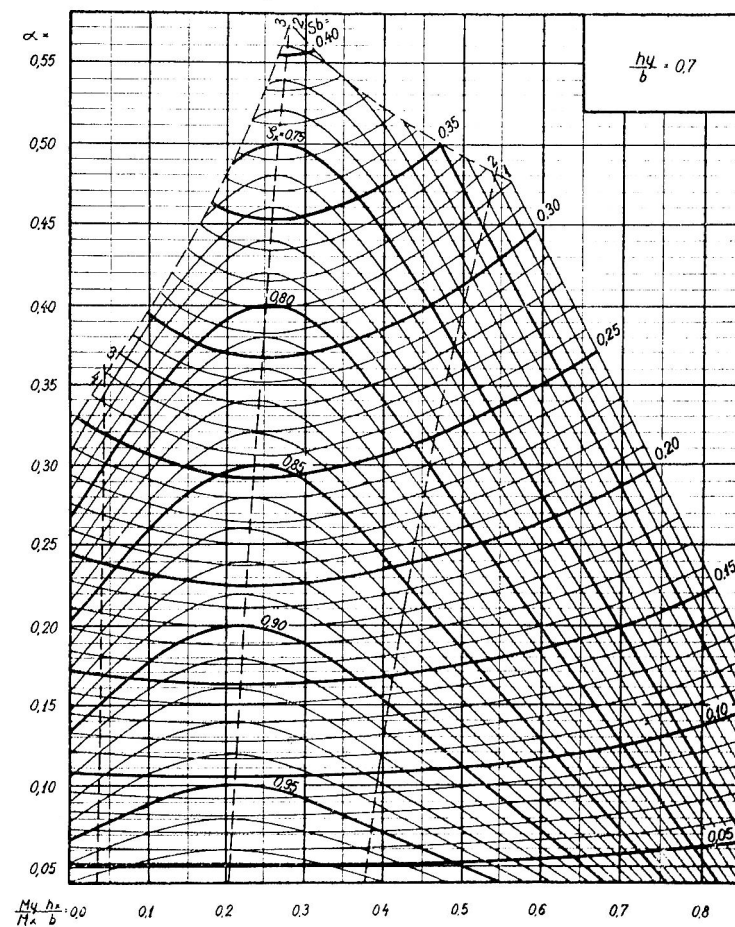
Rys. 6

I₆ Danielski, *Ukośne zginanie w żelbiecie*



Rys. 6

L. Danielski, *Ukośne zginanie w żelbiecie*



Rys. 7

gdzie

$S_b = E_b z$ — moment statyczny powierzchni strefy ściskanej (przy równomiernym rozkładzie ciśnień) względem środka ciężkości wkładek rozciąganych,

$S_a = F u_0$ — moment statyczny powierzchni użytecznej przekroju względem środka ciężkości wkładek rozciąganych.

Wzór ten ma jednak tylko zastosowanie do przekrojów symetrycznych względem płaszczyzny zginania.

W naszej normie PN/B-03260 graniczny procent uzbrojenia określa wzór wyprowadzony na drodze teoretycznej ze stosunku odkształceń, przy równoczesnym osiągnięciu przez zbrojenie granicy plastyczności Q_r i przez beton na krawędzi strefy ściskanej wytrzymałości R_m , przy założeniu płaskości przekroju w tym stadium:

$$\frac{x}{h_1} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + 1,5 \varepsilon_z} = \frac{1}{(1 + 0,03 \beta_r)} = \mu_y \frac{\beta_r}{\omega}. \quad (25)$$

Jakkolwiek wzór ten oparty jest na nieściśłym założeniu płaskości przekroju, to wyznaczone za jego pomocą graniczne procenty zbrojenia dla przekrojów zginanych w kierunku jednej z osi głównych przy najczęściej stosowanych markach betonu niewiele odbiegają od wartości określonych na drodze doświadczalnej (24), toteż rezygnując z ścisłości, posłużono się nim poniżej.

W przekroju prostokątnym, zginanym w kierunku jednej z osi głównych, wszystkie wkładki ciągnięte są ułożone w jednej odległości od osi obojętnej, leżą bowiem najczęściej na jednej prostej równoległej do osi obojętnej. Naprężenia wszystkich wkładek wzrastają równomiernie, jednocześnie też wszystkie osiągają granicę plastyczności. Natomiast w przekroju ukośnie zginanym wkładki rozmieszczone są zazwyczaj wzdłuż jednej lub dwu prostych wzajemnie prostopadłych (krawędzi przekroju), z których żadna nie jest równoległa do osi obojętnej. Odległości wkładek od osi są tu więc różne, a naprężenia w ich przekrojach w okresie sprężystej pracy — proporcjonalne do tych odległości — wyrównują się dopiero w miarę osiągania przedziału plastyczności. W stadium złamania naprężenia wszystkich wkładek powinny osiągać przedział plastyczności zanim zostanie zmiażdżony beton strefy ściskanej, co jak powyżej wspomniano, wynika z założenia metody.

Posługując się warunkiem płaskości przekroju w stadium złamania, można dla każdego przypadku określić położenie prostej równoległej do osi obojętnej, ograniczającej pole przekroju w obrębie którego mają się mieścić wkładki, aby warunek ten był spełniony. Pole to można nazwać strefą plastyczności. Jest ono tym większe, im niższy jest procent uzbro-

jenia przekroju. Właściwe rozmieszczenie wkładek w przekroju ukośnie zginanym zależy więc od procentu uzbrojenia i na odwrót.

Maksymalną wartość granicznego procentu zbrojenia dostaniemy, jeżeli skupimy przekrój stali w jednym punkcie najdalej odległym od osi. Praktycznie, jeżeli całe zbrojenie będzie reprezentowane przez jedną wkładkę umieszczoną w narożu. Przypadek ten odpowiada w załączonych wykresach krzywym, ograniczającym je od góry.

Dla celów wymiarowania bardziej przydatne jest kryterium należytego rozmieszczenia wkładek przy określonym procencie zbrojenia, a więc położenie prostej ograniczającej strefę plastyczności.

Do tego potrzebna jest znajomość położenia osi obojętnej. Za pomocą wielkości $\alpha, \zeta_x, m \frac{h_x}{b}, \frac{h_y}{b}$ możemy w każdym przypadku określić położenie ukośnej krawędzi trójkątnej lub trapezowej podstawy zastępczej bryły ciśnień.

W przypadku 1:

$$x = 3h_x(1 - \zeta_x), \quad (26)$$

$$u = \frac{2abh_x}{x} = \frac{2ab}{(1 - \zeta_x)} \quad (27)$$

albo

$$u = 3(h_y - z_y) = 3b \left(\frac{h_y}{b} - m \frac{h_x}{b} \zeta_x \right). \quad (28)$$

W przypadkach 2 i 3 z warunków:

$$y_y = \frac{b}{3} \left[1 + \frac{c}{(x+v)} \right] \quad \text{i} \quad \frac{(x+v)}{2} = h_x \alpha, \quad (29)$$

$$x = 2ah_x \left(2 - 3 \frac{h_y}{b} + 3m \frac{h_x}{b} \zeta_x \right), \quad (29)$$

$$c = 2ah_x \left(-1 + 3 \frac{h_y}{b} - 3m \frac{h_x}{b} \zeta_x \right). \quad (30)$$

W przypadku 4:

$$c = 3h_x(1 - \zeta_x), \quad (31)$$

$$u = \frac{2ab}{3(1 - \zeta_x)} \quad (32)$$

albo

$$u = 3b \left(1 - \frac{h_y}{b} + m \frac{h_x}{b} \zeta_x \right). \quad (33)$$

Położenie rzeczywistej osi obojętnej będzie przesunięte bardziej ku wypadkowej cięgnięć.

W przypadku zginania w kierunku jednej z osi głównych, wykres ciśnień betonu w stadium złamania jest ograniczony krzywą scharakteryzowaną dwoma wielkościami: ω i γ , przy czym według Loleita $\omega = 0,8$, zaś $\gamma = 0,425$.

Z uwagi na ramię momentu sił wewnętrznych zastąpienie rzeczywistej bryły ciśnień bryłą o przekroju prostokątnym jest równoznaczne z przyjęciem $\gamma = \frac{\omega}{2}$. Wtedy położenie rzeczywistej osi obojętnej $x' = \frac{x}{\omega}$ (jeżeli przez x oznaczamy wymiar strefy ściskanej przy prostokątnej bryle ciśnień).

Przesunięcie

$$(x' - x) = x \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right). \quad (34)$$

Dla przypadków ukośnego zginania wydaje się bardzo prawdopodobne założenie wykresu ciśnień według krzywej określonej tymi samymi wielkościami ω i γ .

Niezbyt błędne będzie drugie założenie, że oś obojętna jest równoległa do ukośnej krawędzi podstawy zastępczej bryły ciśnień, a przesunięcie osi względem tej krawędzi określają z dostatecznym przybliżeniem wzory:

$$x \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \quad \text{w przypadku 1 i 2}$$

albo

$$v \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \quad \text{w przypadku 3 i 4.}$$

Położenie prostej ograniczającej strefę plastyczności znajdziemy z prostej proporcji. Jeżeli przez p_x i p_y oznaczymy punkty leżące na tej prostej, to posługując się warunkiem płaskości przekroju, otrzymamy jej równanie.

W przypadku 1 (rys. 10):

$$\frac{x'}{p_x + p_y \frac{x}{u}} = \frac{1}{1 + 0,03\beta_r}.$$

Po założeniu $x' = \frac{x}{\omega}$ otrzymamy

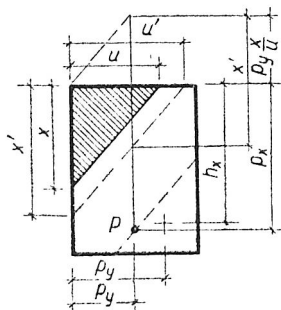
$$\frac{x}{p_x + p_y \frac{x}{u}} = \frac{\omega}{1 + 0,03\beta_r}.$$

stąd

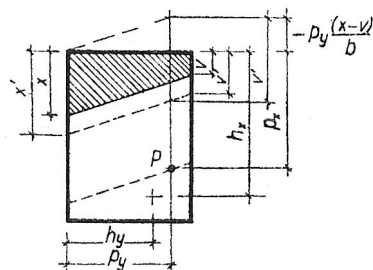
$$p_x + p_y \frac{x}{u} - x \left(\frac{1 + 0,03\beta_r}{\omega} \right) = 0. \quad (35)$$

W przypadku 2 (rys. 11):

$$\frac{x'}{p_x + p_y \frac{(x-v)}{b}} = \frac{1}{1 + 0,03\beta_r},$$



Rys. 10



Rys. 11

a stąd

$$p_x + p_y \frac{(x-v)}{b} - x \left(\frac{1 + 0,03\beta_r}{\omega} \right) = 0. \quad (36)$$

Przypadek 3 (rys. 12):

$$\frac{v'}{p_x + (b - p_y) \frac{(v-x)}{b}} = \frac{1}{1 + 0,03\beta_r},$$

a stąd

$$p_x - p_y \left(\frac{x-v}{b} \right) + v - x - v \left(\frac{1 + 0,03\beta_r}{\omega} \right) = 0. \quad (37)$$

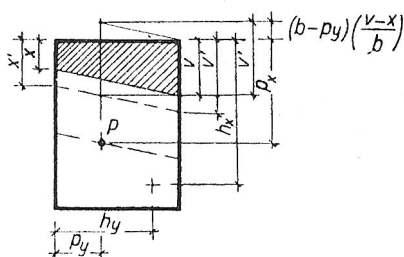
Przypadek 4 (rys. 13):

$$\frac{v'}{p_x + (b - p_y) \frac{v}{u}} = \frac{1}{1 + 0,03\beta_r},$$

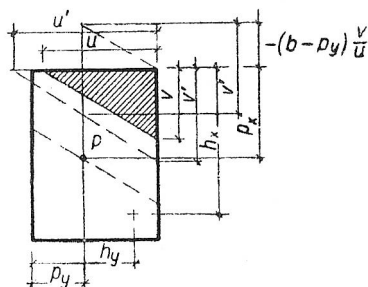
stąd

$$p_x - p_y \frac{v}{u} + \frac{bv}{u} - v \left(\frac{1 + 0,03\beta_r}{\omega} \right) = 0. \quad (38)$$

Jeżeli w powyższych równaniach wyrazimy boki trójkątnej lub trapezowej strefy ściskanej za pomocą ζ_x , $m \frac{h_x}{b}$, $\frac{h_y}{b}$, to otrzymamy dla każdego położenia wypadkowej ciągnięć $\frac{h_y}{b}$ i pochylenia płaszczyzny obciążeń $m \frac{h_x}{b}$ zależność między położeniem prostej ograniczającej strefę plastyczności, a graniczną wartością ζ_x odpowiadającą $\alpha_{\max}$.



Rys. 12



Rys. 13

Tak otrzymane wzory okazują się jednak mało przydatne, toteż nie przytoczono ich tutaj. Posłużyły one — jak już wspomniano — do ograniczenia wykresów.

4. UWAGI KOŃCOWE

Użycie omówionych wykresów do wymiarowania przekrojów prostokątnych na ukośne zginanie jest proste. W większości przypadków wystarczy obliczyć potrzebny przekrój wkładek ciągniętych i tak je rozmieścić, aby współrzędne ich środka ciężkości nie różniły się zbyt wiele od przyjętych. Sprawdzenie, czy wkładki leżą w obrębie strefy plastyczności, potrzebne będzie przy większych pochyleniach płaszczyzny obciążeń oraz wyższych niż najczęściej stosowane procentach zbrojenia. Sprawdzenie to przy braku innych kryteriów uzyskanych na drodze doświadczeń może dać projektującemu tylko pewną orientację co do rozmieszczenia wkładek.

Wykresy sporządzone są dla wartości $m \frac{h_x}{b} \leq 1$, zawsze więc należy osie tak mianować, aby warunek ten był spełniony.

Pewną trudność może stanowić przyjęcie z góry współrzędnych środka ciężkości. Przy stałych wartościach składowych M_x i M_y , środek ciągnięć, tj. środek ciężkości wkładek ciągniętych, powinien leżeć na płaszczyźnie obciążeń, przechodzącej zazwyczaj przez środek przekroju betonowego.

Tylko wtedy bowiem unika się skrećania. Możliwy jest wtedy przypadek 1 albo 2 według powyżej przyjętych oznaczeń. Przy zmiennych wartościach obu składowych M_x i M_y albo tylko jednej z nich możliwe są wszystkie 4 rozważane przypadki. Wypadkowa cięgnięć powinna leżeć na płaszczyźnie obciążen przy najniekorzystniejszym zestawieniu wartości składowych M_x i M_y .

Z warunku, aby płaszczyzna momentu sił wewnętrznych przechodziła przez środek przekroju, otrzymamy

$$h_y = \frac{b}{2} + \left(h_x - \frac{h}{2} \right) m = \frac{b}{2} + \left(1 - \frac{h}{2h_x} \right) h_x m \quad (39)$$

albo w wielkościach nie mianowanych:

$$\frac{h_y}{b} = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{h}{2h_x} \right) m \frac{h_x}{b}. \quad (39a)$$

W zależności od pochylenia płaszczyzny momentu stosunek $\frac{h}{h_x}$ może się wahać w granicach 1,05—1,25. Przyjmując przeciętnie

$$\frac{h}{h_x} = 1,1,$$

otrzymany jako warunek uniknięcia skrećania

$$\frac{h_y}{b} = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1,1}{2} \right) m \frac{h_x}{b} = 0,5 + 0,45 m \frac{h_x}{b}. \quad (40)$$

Skrećanie występujące przy innych pochyleniach płaszczyzny obciążeń można przenieść za pomocą wkładek podłużnych w narożach oraz odpowiednio zagęszczonych strzemion zamkniętych.

Użycie tych wykresów do wymiarowania przekrojów prostokątnych na mimośrodowe ściskanie przy dużym mimośrodku, gdy siła nie trafia żadnej z osi głównych, nie nastręcza trudności.

Przy mimośrodkach małych można według PN/B-03260 liczyć przekroje w fazie I, tj. przy współpracy całego przekroju betonowego na ściskanie i rozciąganie i liniowym rozkładzie naprężeń.

Sposób posługiwania się wykresami zilustrują najlepiej przykłady.

5. PRZYKŁADY

1. Dane: $M_x = 24,0 \text{ tm}$, $M_y = 6,0 \text{ tm}$, $s = 1,6 \text{ tm}$, $b = 40 \text{ cm}$,

$h = 70 \text{ cm}$, $Q_r = 2300 \text{ kg/cm}^2$, $R_w = 170 \text{ kg/cm}^2$.

Zaprojektować zbrojenie belki.

$$\text{Przyjęto } h_x = 64,0 \text{ cm, wtedy } m \frac{h_x}{b} = \frac{6,0}{24,0} \cdot \frac{64,0}{40,0} = 0,40,$$

$$\frac{h_y}{b} = 0,5 + 0,45 \cdot 0,40 = 0,68, \quad h_y = 0,68 \cdot 40 = 27,0 \text{ cm.}$$

Dla $R_w = 170$ wytrzymałość obliczeniowa $R_m = 140 \text{ kg/cm}^2$:

$$\beta_r = \frac{2300}{140} = 16,4, \quad s_b = \frac{2\,400\,000 \cdot 1,6}{40 \cdot 64^2 \cdot 140} = 0,168.$$

$$\text{Z wykresów odczytano dla } \frac{h_y}{b} = 0,6, \quad \zeta_x = 0,832, \quad \alpha = 0,20,$$

$$\text{dla } \frac{h_y}{b} = 0,7, \quad \zeta_x = 0,878, \quad \alpha = 0,19.$$

$$\text{Z interpolacji dla } \frac{h_y}{b} = 0,68, \quad \zeta_x = 0,832 + 0,004 \cdot 8 = 0,869$$

$$\alpha = 0,20 - 0,001 \cdot 8 = 0,192,$$

$$F_z = \frac{2\,400\,000 \cdot 1,6}{0,869 \cdot 64 \cdot 2300} = 30,0 \text{ cm}^2$$

albo

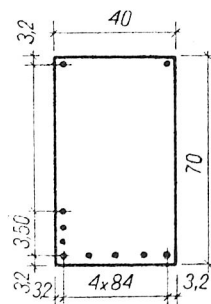
$$F_z = \frac{0,192 \cdot 64 \cdot 40}{16,4} = 30,0 \text{ cm}^2.$$

Dano 8 $\emptyset 22$ $F_z = 30,41 \text{ cm}^2$ i rozmieszczono je jak na rys. 14.

Współrzędne środka ciężkości tak rozmieszczonych wkładek wynoszą

$$h_x = \frac{5 \cdot 66,8 + 3 \cdot 56,8}{8} = 63,05 \text{ cm,}$$

$$h_y = \frac{5 \cdot 20 + 3 \cdot 36,8}{8} = 26,3 \text{ cm.}$$



Rys. 14

Są one bardzo zbliżone do założonych, wobec tego nie zachodzi potrzeba powtarzania rachunku.

2. Dane: $M_y = 16,0$ tm, M_x pochodzi od obciążenia zmiennego i może się zmieniać w granicach $0 \leq M_x \leq 24,0$ tm, wymiary przekroju b i h jak również Q_r i R_w jak w przykładzie 1.

Wyznaczyć potrzebny przekrój i rozmieszczenie wkładek.

Przyjmując $h_x = 63,0$ cm otrzymamy dla najniekorzystniejszego obciążenia, tj. $M_x = 24,0$ tm, $M_y = 16,0$ tm,

$$m \frac{h_x}{b} = \frac{16,0}{24,0} \cdot \frac{63,0}{40,0} > 1$$

należy przemianować osi. Nazwiemy więc:

$$M_x = 16 \text{ tm}, \quad M_y = 24,0 \text{ tm}, \quad h = 40,0 \text{ cm}, \quad b = 70,0 \text{ cm}.$$

Przyjmując $h_x = 34,0$ cm, będziemy mieli

$$m \frac{h_x}{b} = \frac{24,0}{16,0} \cdot \frac{34,0}{70,0} = 0,73,$$

$$\frac{h_y}{b} = 0,5 + 0,45 \cdot 0,73 = 0,83 \text{ przyjęto } 0,8,$$

wtedy

$$h_y = 0,8 \cdot 70 = 56,0 \text{ cm},$$

$$s_{bx} = \frac{1600000 \cdot 1,6}{70 \cdot 34^2 \cdot 140} = 0,225.$$

Dla tej wartości z wykresów $\zeta_x = 0,74$, $a = 0,304$, przy czym odczyty te leżą w obszarze przypadku 1 (trójkątna strefa ściskana):

$$F_z = \frac{16000000 \cdot 1,6}{0,74 \cdot 34 \cdot 2300} = 44,2 \text{ cm}^2$$

lub

$$F_z = \frac{0,304}{16,4} \cdot 70,0 \cdot 34,0 = 44,2 \text{ cm}^2.$$

Dano

$$10 \text{ } \emptyset \text{ } 24 \quad F_z = 45,2 \text{ cm}^2.$$

Wymiary strefy ściskanej:

$$x = 3 \cdot 34,0(1 - 0,74) = 26,5 \text{ cm},$$

$$u = 3 \cdot 70,0(0,8 - 0,74 \cdot 0,73) = 54,5 \text{ cm}.$$

Strefę plastyczności określają odcinki:

$$\text{przy } p_x = 40,0 \text{ cm} \quad p_y = (26,5 \cdot 1,86 - 40) \frac{54,5}{26,5} = 19,0 \text{ cm},$$

$$\text{przy } p_y = 70,0 \text{ cm} \quad p_x = 26,5 \cdot 1,86 - 70 \frac{26,5}{54,5} = 15,3 \text{ cm}$$

$$\left(\text{w powyższych wzorach } \frac{1 + 0,03}{\omega} \beta_r = \frac{1 + 0,03 \cdot 16,4}{0,8} = 1,86 \right).$$

Wkładki rozmieszczono w obrębie strefy plastyczności jak na rys. 15. Współrzędne ich środka ciężkości:

$$h_x = \frac{7 \cdot 36,8 + 3 \cdot 25,6}{10} = 33,5 \text{ cm},$$

$$h_y = \frac{7 \cdot 50,9 + 3 \cdot 66,8}{10} = 55,6 \text{ cm}.$$

Są one dostatecznie zbliżone do założonych.

Przekrój sprawdzono również dla przypadku, kiedy $M_x = 16,0 \text{ cm}$, $M_y = 0 (m = 0)$.

Uwzględniono tylko wkładki w dolnym rzędzie ($8 \phi 24$), wtedy

$$F_z = 33,16 \text{ cm}, \quad h_x = 36,8 \text{ cm}, \quad h_y = \frac{1 \cdot 3,2 + 7 \cdot 50,9}{8} = 45,0 \text{ cm}$$

$$\frac{h_y}{b} = \frac{45,0}{70,0} = 0,64, \quad a = \frac{36,16}{70,0 \cdot 36,8} \cdot \frac{2300}{140} = 0,23.$$

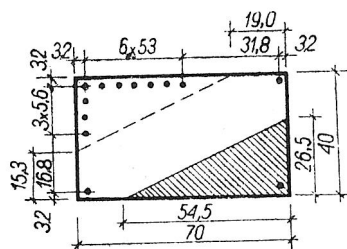
Z wykresów odczytano:

$$\text{dla } \frac{h_y}{b} = 0,6 \quad s_{bx} = 0,20, \quad \text{dla } \frac{h_y}{b} = 0,7 \quad s_{bx} = 0,19.$$

$$\text{Z interpolacji dla } \frac{h_y}{b} = 0,64 \quad s_{bx} = 0,20 - 0,001 \cdot 4 = 0,196.$$

Współczynnik bezpieczeństwa wyniesie

$$s = \frac{0,196 \cdot 70 \cdot 36,8^2 \cdot 140}{1\,600\,000} = 1,62 > 1,6.$$



Rys. 15

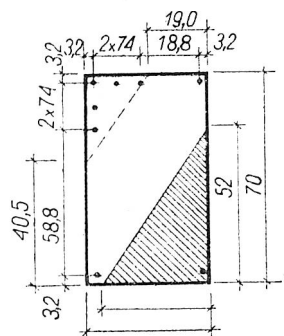
3. Dane: $M_x = 19,4$ tm, $M_y = 8,6$ tm, $N = 42,0$ t, $s_z = 1,9$.

Wymiary przekroju h i b jak również Q_r i R_w jak w przykładach poprzednich. Wyznaczyć przekrój i rozmieszczenie wkładek.

$$\text{Przyjęto } h_x = 62,0 \text{ cm, } m \frac{h_x}{b} = \frac{8,6}{19,4} \cdot \frac{62,0}{40,0} = 0,69,$$

$$\frac{h_y}{b} = 0,5 + 0,5 \cdot 0,69 = 0,81 \text{ przyjęto } \frac{h_x}{b} = 0,8,$$

wtedy $h_y = 0,8 \cdot 40,0 = 32,0$ cm,



Rys. 16

$$M_{xx} = 19,4 + 42,0(0,62 - 0,35) = 30,8 \text{ tm,}$$

$$M_{yy} = 8,6 + 42,0(0,32 - 0,20) = 13,6 \text{ tm,}$$

$$m \frac{h_x}{b} = \frac{13,6}{30,8} \cdot \frac{62}{40} = 0,68,$$

$$s_{bx} = \frac{3080000 \cdot 1,9}{40 \cdot 62,0^2 \cdot 140} = 0,272.$$

Tej wartości odpowiada $\xi_x = 0,72$ (1 wyp.),

$$F_z = \frac{3080000 \cdot 1,9}{0,72 \cdot 62,0 \cdot 2300} - \frac{42000 \cdot 1,9}{2300} = 57,1 - 34,6 = 22,5 \text{ cm}^2.$$

Dano 5 $\emptyset 24$ $F_z = 22,6 \text{ cm}^2$.

Wymiary strefy ściskanej:

$$x = 3 \cdot 62,0(1 - 0,72) = 52,0 \text{ cm,}$$

$$u = 3 \cdot 40,0(0,8 - 0,68 \cdot 0,72) = 37,0 \text{ cm.}$$

Strefę plastyczności określają współrzędne:

$$\text{przy } p_x = 70,0 \text{ cm } p_y = (52,0 \cdot 1,86 - 70,0) \frac{37,0}{52,0} = 19,0 \text{ cm,}$$

$$\text{przy } p_y = 40,0 \text{ cm } p_x = 52,0 \cdot 1,86 - 40,0 \frac{52,0}{37,0} = 40,5 \text{ cm.}$$

Wkładki rozmieszczone jak na rys. 16.

Współrzędne środka ciężkości wkładek rozciąganych:

$$h_x = \frac{3 \cdot 66,8 + 2 \cdot 55,7}{5} = 62,3 \text{ cm} \sim 62,0 \text{ cm},$$

$$h_y = \frac{3 \cdot 36,8 + 2 \cdot 25,7}{5} = 32,3 \text{ cm} \sim 32,0 \text{ cm}.$$

Katedra Budowy Mostów 1

Wpłynęło do redakcji w maju 1952 r.

LITERATURA

- [1] PN/B — 03260 *Konstrukcje żelbetowe. Obliczenia statyczne i projektowanie*, Maj 1951.
 [2] I. Kisiel, *Zginanie niesymetryczne w żelbecie*, Inżynieria i Budownictwo nr 3, 1952.
 [3] K. W. Sachnowski, *Żelazobetonnyje konstrukcii*, Moskwa 1946 i 1951.
 [4] R. Saliger, *Der Stahlbetonbau*, Wien 1949.

КОСЫЙ ИЗГИБ В ЖЕЛЕЗОБЕТОНЕ

В случае косо́го изгиба́ прямоугольного железобетонного сечения, приня́мая равномерное распределе́ние напряже́ний в сжа́той зоне бетона, для опре́деления необходи́мого сече́ния арма́туры достато́чно усло́вий равнове́сия в фа́зе разруше́ния сече́ния. При тех же усло́виях можно́ найти́ коэффи́циент запаса́ для заданной арма́туры.

Из усло́вия равнове́сия момен́тов можно́ опре́делить разме́ры треу́гольной или трапецо́идальной сжа́той зо́ны сече́ния, а из усло́вия равнове́сия сил — вну́тренние си́лы в сече́нии.

Одна́ко тако́й спосо́б тре́бует значи́тельной затра́ты вычисли́тельного тру́да, так как неизвес́тные вхо́дят в ура́внения второ́й или тре́тьей степе́ни, а кро́ме того́ расче́ты необходи́мо повто́рять не́сколько раз, что́бы получи́ть то́чное зна́чение коо́рдинат це́нтра ра́стянутой арма́туры.

Зна́чительным о́блегчением это́го тру́да явля́ется использо́вание разрабо́танных ау́тором гра́фиков коэффи́циентов $\xi_x = \frac{\tilde{\sigma}_x}{h_x}$ и $s_{bx} = \xi_x a$. Коэффи́циенты э́ти предстáвляют собо́ю фу́нкции вели́чин:

$$\alpha = \frac{F_z}{bh_x} \cdot \frac{Q_r}{R_m}, \quad \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{h_x}{b}, \quad \frac{h_y}{b}.$$

Применение этих коэффициентов для расчета или проверки сечения на ко-
сой изгиб ничем не отличается от случая простого изгиба.

При помощи величины ζ_x можно найти так размеры сжатой зоны бетона,
как и размеры области, в которой должна находиться растянутая арматура.

В конце статьи приведены примеры расчета сечений.

SCHIEFE BIEGUNG IM EISENBETON

Im Falle schiefer Biegung des rechteckigen Eisenbetonquerschnittes genügen —
bei Annahme gleichmässiger Spannungsverteilung in der Druckzone — zur Bestim-
mung des notwendigen Eisenquerschnittes die Gleichgewichtsbedingungen im Bruch-
zustand. Ebenso kann bei gegebenem Eisenquerschnitt der Sicherheitskoeffizient
nachgeprüft werden.

Aus der Momentenbedingung können die Ausmasse der dreieckigen bzw. trapez-
förmigen Druckzone ermittelt werden, während aus der Summengleichung der inne-
ren Kräfte die Eiseneinlagen errechnet werden.

Solch ein Verfahren verursacht mühsame Arbeit, da die Unbekannten in Gleichun-
gen zweiten und dritten Grades auftreten, wobei des öfteren, besonders bei der Be-
messung, die Rechnung einigemal wiederholt werden muss um genauere Werte der
Koordinaten des Querschnittsschwerpunktes der Eiseneinlagen zu erreichen.

Eine besondere Erleichterung stellen die in vorliegender Arbeit errechneten
und in Tabellen zusammengefassten Koeffizienten $\zeta_x = \frac{z_x}{h_x}$ und $s_{bx} = \zeta_x a$ dar. Es sind
die Funktionen der Werte

$$a = \frac{F_z}{b h_x} \frac{Q_r}{R_m}, \quad \frac{M_y}{M_x} \frac{h_x}{b}, \quad \frac{h_y}{b}.$$

Die Verwendung dieser Koeffizienten zur Bemessung bzw. Nachprüfung des Quer-
schnittes bei schiefer Biegung ist die ähnliche wie im Falle der Biegung bezüglich
einer der Hauptachsen des Querschnittes.

Mit Hilfe des Wertes ζ_x kann man die Ausmasse sowohl der gedrückten Zone,
wie auch des Bereiches in dem die gezogenen Eiseneinlage untergebracht werden
sollen, ermitteln.

Die praktische Anwendung der Tafeln zeigen Zahlenbeispiele.

WSTĘPNE STUDIUM EKONOMICZNEGO PROJEKTOWANIA BELEK ŻELBETOWYCH

JĘDRZEJ KUCZYŃSKI, mgr inż., adiunkt Katedry Budownictwa Ogólnego

W pracy rozważono zagadnienie ekonomicznego projektowania belek żelbetowych wychodząc z naprężeń stycznych i wysokości belki oraz biorąc pod uwagę powiększenie się kosztu budynku przy zwiększeniu wysokości belek.

1. WSTĘP

Zagadnienie ekonomicznego projektowania belek żelbetowych było już wielokrotnie poruszane przez różnych autorów. Wszystkie starsze prace opierały się na klasycznej metodzie wymiarowania żelbetu, która praktycznie uniemożliwiała jednoczesne wykorzystanie obu materiałów, gdyż założonym naprężeniom dopuszczalnym σ_b dop i σ_z dop odpowiadała tylko jedna wartość współczynnika uzbrojenia μ . W związku z tym zamiast trzech zmiennych niezależnych b , h , F_z , koniecznych do wyrażenia kosztu belki, można było uzyskać tylko dwie¹⁾.

Dla wyeliminowania tej trudności autorzy określali zwykle szerokość belki wzorami empirycznymi^{2), 3)}.

Założenia tego rodzaju nie prowadziły, rzecz prosta, do rozwiązań dokładnych i w wypadkach szczególnych mogły powodować znaczniejsze błędy.

Wspomniane prace pozostawiły dwie, pokutujące jeszcze wśród naszych konstruktorów, zasady:

¹⁾ Z równania $F_z \approx \sigma_z = M$ otrzymujemy $F_z = \mu(\sigma_b, \sigma_z) bh_1 = \frac{M}{\zeta \sigma_z} = \frac{M}{\zeta h_1 \sigma_z}$, a stąd

$bh_1^2 = \frac{M}{\mu(\sigma_b, \sigma_z) \zeta(\sigma_b, \sigma_z) \sigma_z} = \text{const}$ dla założonych wartości M, σ_b, σ_z . Natomiast $F_z = \mu(\sigma_b, \sigma_z) bh$, jest funkcją wymiarów przekroju, gdyż $\mu = \text{const}$ dla przyjętych wartości σ_b i σ_z .

²⁾ Domke [3] str. 329 podaje $b = \frac{z}{2}$ lub $b = 41/z$.

³⁾ Saliger [4] podaje za Mayetem [1] $b = b_1 + \beta_1 F_z$, gdzie $b_1 = 12$ do 15 cm i $\beta_1 = 0,4$ cm.

1. Stosowanie niskich współczynników uzbrojenia niezależnie od marki stali i betonu, ich cen oraz wymiarów i rodzaju konstrukcji. Pogląd ten reprezentowany jest również przez normę PN/B — 03260, która w *Zaleceniach dotyczących racjonalnego wymiarowania elementów żelbetowych* określa najkorzystniejszy % uzbrojenia belek równy 0,9 do 1,5.

2. Przyjmowanie wymiarów belek „na oko“, co powoduje niewykorzystanie betonu na ścinanie i zwiększenie ciężaru własnego konstrukcji lub w przypadku skrajnie przeciwnym — konieczność ponownego przeliczenia belki.

Metoda odkształceń plastycznych rozpatruje element konstrukcyjny w chwili jego zniszczenia. Wynika stąd, że zagadnienie jednoczesnego wykorzystania obu materiałów jest rozwiązane a priori. Przyjętym wartościom M_r , Q_r i R_w odpowiada tu wiele wartości μ .

Koszt jednostki długości belki przyjmuje się zazwyczaj jako sumę kosztów betonu, uzbrojenia i deskowania $K = K_b + K_z + K_d$, pomija się zatem zasadniczy składnik kosztu belki jako elementu budynku — koszt zwiększonej wysokości kondygnacji o wysokość belki¹⁾.

Rzeczywisty koszt belki wyraża się więc wzorem:

$$K = K_b + K_z + K_d + K_w \quad (1)$$

K_w stanowi tu koszt murów, słupów, schodów, przewodów instalacyjnych oraz eksploatacji budynku (ogrzewanie, transport pionowy w budynkach przemysłowych itp.) liczone na jednostkę wysokości budynku. Jeśli w budynku mieszkalnym lub podobnym wszystkie belki ukryte są w ścianach działowych, czynnik K_w jest rzecz oczywista nieistotny i powinien być pominięty.

Wzór (1) możemy napisać w postaci:

$$K = F_b k_b + q_z F_z k_z + 2(h - t) k_d + h k_w, \quad (2)$$

gdzie h — wysokość belki,

t — grubość płyty,

q_z — współczynnik konstrukcyjny²⁾,

k_b, k_z, k_d, k_w — odpowiednie ceny jednostkowe.

¹⁾ K. K. Antonow [5] str. 7 wzór 2.

²⁾ Współczynnik konstrukcyjny q_z wyraża stosunek rzeczywistego zużycia stali do obliczeniowego, przy uwzględnieniu zużycia na strzemiiona, haki, odgięcia, zakłady itp. K. K. Antonow podaje na str. 6 „W belkach żelbetowych, projektowanych w przęsłach skrajnych na moment $\frac{ql^2}{11}$, a w pośrednich $\frac{ql^2}{16}$, wielkość q_z waha się w granicach 1,4 do 1,5 w stosunku do obliczonego przekroju w przęśle skrajnym“. Saliger przyjmuje dla belek wolnopodpartych $q_z = 1,3$, dla belek ciągłych $q_z = 1,7$.

We wzorze (2) nie znamy wielkości h , $F_b = b h$ i $F_z = \mu b h l$.

Aby zaprojektować belkę, musimy znać jej schemat statyczny i rzeczywiste obciążenie, które składa się z obciążenia (ciężar własny stropu i obciążenie użytkowe) i z ciężaru własnego belki.

2. OKREŚLENIE CIĘŻARU WŁASNEGO BELKI

Powierzchnię przekroju belki możemy określić, zadając aby maksymalne naprężenia styczne osiągnęły założoną wielkość τ .

Naprężenie styczne wyrażone jest wzorem:

$$\tau = \frac{Q}{b z} = \frac{Q}{\xi \eta F_b}, \quad (3)$$

jeśli $z = \xi h_1$ — ramię sił wewnętrznych w cm, $\eta = \frac{h_1}{h}$, Q maksymalna siła poprzeczna w kg i $F_b = b h$ powierzchnia przekroju belki w cm^2 .

Wartość maksymalnej siły poprzecznej wynosi

$$Q = Q_0 + 0,24 F_b l n (1 + \psi), \quad (4)$$

przy czym

Q_0 — maksymalna siła poprzeczna od obciążeń z pominięciem ciężaru własnego belki,

l — rozpiętość w m,

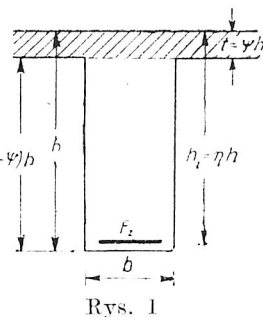
$n = \frac{Q}{\Sigma P}$ współczynnik, przez który należy pomnożyć całkowite

obciążenie belki, aby otrzymać siłę poprzeczną.

Podstawiając wartość (4) do równania (3), piszemy

$$\tau = \frac{Q_0 + 0,24 F_b l n (1 - \psi)}{\xi \eta F_b}. \quad (5)$$

Rozwiązując równanie (5) względem F_b , otrzymamy powierzchnię przekroju belki, potrzebną do przeniesienia maksymalnej siły poprzecznej przy założonym naprężeniu stycznym τ .



$$F_b = \frac{Q_0}{\eta \xi \tau - 0,24 l n (1 - \psi)} = \frac{q l n}{\eta \xi \tau - 0,24 l n (1 - \psi)} \quad (\text{cm}^2), \quad (6)$$

jeśli $q = \frac{\Sigma P}{l}$ — zastępcze obciążenie równomiernie rozłożone.

Zatem jednostkowy ciężar belki wynosi

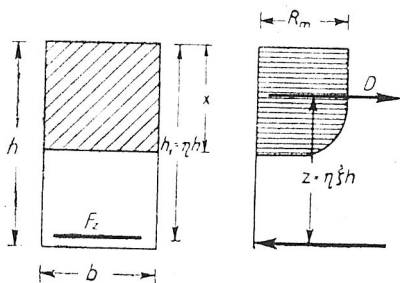
$$g = 0,24 F_b (1 - \psi) = \frac{0,24 l n (1 - \psi)}{\eta \xi \tau - 0,24 l n (1 - \psi)} q \quad (\text{kg/m}), \quad (7)$$

a całkowite jednostkowe obciążenie zastępcze równe jest

$$q' = q + g = q \left[1 + \frac{0,24 l n (1 - \psi)}{\eta \xi \tau - 0,24 l h (1 - \psi)} \right] = \frac{\eta \xi \tau q}{\eta \xi \tau - 0,24 h l (1 - \psi)}. \quad (8)$$

3. OBLICZENIE POWIERZCHNI PRZEKROJU WKŁADEK

Powierzchnię przekroju wkładek obliczamy z warunków równowagi w chwili zniszczenia belki. Zgodnie z oznaczeniami rys. 2 piszemy



Rys. 2

$$F_z = \frac{M_\tau}{Q_r z} \quad (\text{cm}^2). \quad (9)$$

Przyjmujemy tu: M_τ w kgm, z — w m, Q_r — w kg/cm².

Jeżeli obciążenie belki przyjmiemy zgodnie z wzorem (8), wielkość momentu łamiącego możemy wyrazić następująco:

$$M_\tau = s m q' l^2 = \frac{s m q l^2 \eta \xi \tau}{\eta \xi \tau - 0,24 l n (1 - \psi)} \quad (\text{kgm}), \quad (10)$$

gdzie

$$m = \frac{M}{q l^2},$$

s — współczynnik pewności,

l — rozpiętość belki w m,

q' — obciążenie zastępcze.

Po wstawieniu wartości M_τ i z do wzoru (10) otrzymamy

$$F_z = \frac{s m q l^2 \tau}{Q_r h [\eta \xi \tau - 0,24 l n (1 - \psi)]}. \quad (11)$$

W równaniach (6) i (11) występuje obok zmiennych niezależnych τ i h zmienna zależna ξ , określona za pomocą wskaźnika uzbrojenia:

$$\xi = 1 - 0,53 \mu \beta_r. \quad (12)$$

Współczynnik uzbrojenia μ wyznaczamy z warunku, że przekrój betonu powinien przenieść w chwili zniszczenia belki również założone naprężenie styczne τ . Uzyskujemy to rozwiązując równanie (9) względem M_τ i dzieląc je przez równanie (3) rozwiązane względem Q .

$$\frac{M_\tau}{Q} = \frac{Q_r F_z z}{b \tau z} = \frac{100 Q_r F_z}{\tau b}. \quad (13)$$

Współczynnik 100 wprowadzamy tu ze względu na niejednolite mianowanie; ramię sił wewnętrznych z wyrażone jest we wzorze (3) w cm, w (9) zaś w m.

Rozwiązując równanie (13) ze względu na F_z dostaniemy

$$F_z = \frac{100 M_z b \tau}{Q \cdot Q_r}$$

lub inaczej

$$\mu = \frac{F_z}{b h_1} = \frac{s m l \tau}{n Q_r \eta h} = \frac{s \lambda l \tau}{Q_r \eta h}, \quad (14)$$

przy czym wielkości l i h wyrażone są w m; $\lambda = \frac{m}{n} = \frac{M}{Q \cdot l}$.

Wartość ξ możemy więc określić za pomocą zmiennych niezależnych μ i a .

$$\xi = 1 - 0,53 \frac{s \lambda a \tau}{\eta R_m} \quad (15)$$

jeśli $a = \frac{l}{h}$.

4. RÓWNANIE KOSZTÓW BELKI

Jeżeli do wzoru (2) wstawimy wartość F_b i F_z , określone wzorami (6) i (11), uwzględniając wartość ξ ze wzoru (15), otrzymamy podstawowe równanie kosztów belki żelbetowej.

$$K = \frac{q l n}{\eta \tau - 0,53 \frac{s \lambda a}{R_m} \tau - 0,24 l n (1 - \vartheta)} \left[1 + \frac{s \lambda a \tau}{Q_r} \vartheta \right] \frac{k_b}{10000} + \\ + [2(1 - \vartheta) k_d + k_w] h, \quad (16)$$

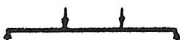
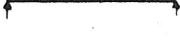
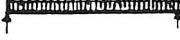
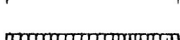
gdzie

$$\vartheta = \frac{\varphi_z k_z}{k_b}.$$

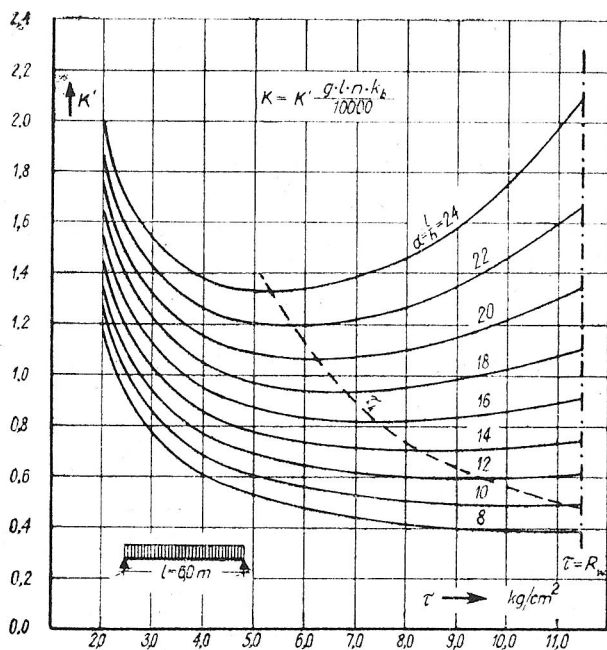
Równanie powyższe jest słuszne dla wszystkich schematów obciążeń po wstawieniu obciążenia zastępczego $q = \frac{\Sigma p}{l}$ i zastosowaniu odpowiednich wartości n i λ z tabl. 1.

Tablica 1

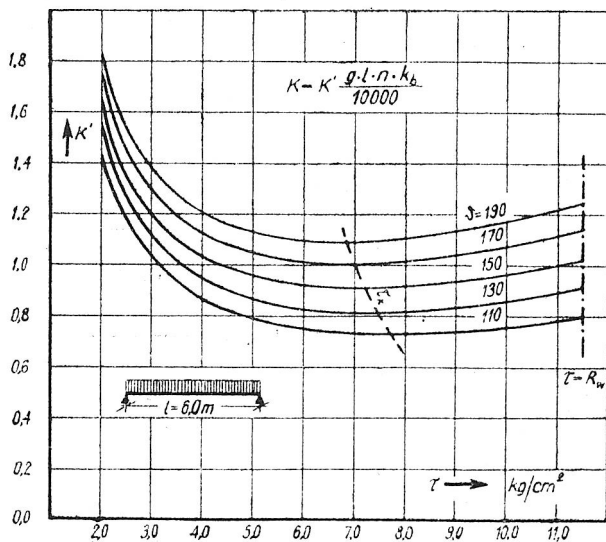
Współczynniki m, n i λ oraz obciążenia zastępcze q

Schemat belki	Współczynniki			Obciążenie zastępcze
	m	n	λ	
	0,1250	0,500	0,2500	q
	0,2500	0,500	0,5000	$\frac{P}{l}$
	0,1667	0,500	0,3333	$\frac{2P}{l}$
				
	0,1500	0,500	0,3000	$\frac{3P}{l}$
	0,0703	0,625	0,1125	q
	0,1565	0,688	0,2270	$\frac{P}{l}$
	0,1110	0,665	0,1670	$\frac{2P}{l}$
	0,0840	0,620	0,1355	q
	0,1950	0,670	0,2910	$\frac{P}{l}$
	0,1350	0,650	0,2075	$\frac{2P}{l}$
	0,0705	0,500	0,1410	q
	0,1680	0,500	0,3360	$\frac{P}{l}$
	0,0940	0,500	0,1880	$\frac{2P}{l}$

Równanie (16) jest funkcją dwóch zmiennych τ i $a = \frac{l}{h}$ i z ich pomocą możemy jednoznacznie określić wymiary i uzbrojenia belki. W niniejszej pracy omówimy wyłącznie wpływ zmienności τ , znajdziemy więc wartość naprężenia stycznego, przy którym koszt belki osiągnie minimum, przy założeniu stałej wysokości h . W związku z powyższym nie potrzebujemy rozpatrywać drugiego członu równania (16), gdyż daje on wartość stałą.



Rys. 3. Przyjęto: $\frac{Q_r}{R_w} = \frac{2300}{110} \text{ kg/cm}^2$; $l = 6,0 \text{ m}$; $\eta = 0,94$; $\psi = 0,1$;
 $s = 1,6$; $\vartheta = 130$.



Rys. 4. Przyjęto: $\frac{Q_r}{R_w} = \frac{2300}{110} \text{ kg/cm}^2$; $l = 6,0 \text{ m}$; $\eta = 0,94$; $\psi = 0,1$;
 $s = 1,6$; $\alpha = 16$.

Na rysunku 3 podano wykres pierwszej części funkcji (16), przy założeniu: $Q_r = 2300 \text{ kg/cm}^2$, $R_w = 110 \text{ kg/cm}^2$, $l = 6,0 \text{ m}$, $\eta = 0,94$, $\psi = 0,1$, $s = 1,6$, $\vartheta = 130$, dla belki jednoprzęsłowej, wolnopodpartej, obciążonej ciężarem równomiernie rozłożonym. Rysunek 4 przedstawia funkcję (16) przy założeniach jak wyżej, z tym, że $a = 16$.

Z wykresów widać, że funkcja K osiąga minimum dla przeciętnie spotykanych wartości naprężeń stycznych τ . W pobliżu ekstremum krzywa jest stosunkowo płaska. Dość znaczny błąd w przyjęciu korzystnego naprężenia stycznego τ_k powoduje zatem nieznaczne zwiększenie kosztu belki.

Dla znalezienia minimum kosztów belki przy stałej jej wysokości różniczkujemy K ze względu na τ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \tau} &= \frac{q \ln k_b}{10000} \frac{s \lambda a \vartheta}{Q_r} \left[\eta \tau - 0,53 \frac{s \lambda a \tau^2}{R_m} - 0,24 \ln(1 - \psi) \right] \\ &\quad - \frac{q \ln k_b}{10000} \frac{\left[\eta \tau - 0,53 \frac{s \lambda a \tau^2}{R_m} - 0,24 \ln(1 - \psi) \right]^2}{\left[\eta \tau - 0,53 \frac{s \lambda a \tau^2}{R_m} - 0,24 \ln(1 - \psi) \right]^2} = \\ &= \frac{q \ln k_b}{10000} \frac{\left[\eta - 1,06 \frac{s \lambda a \tau}{R_m} \right] \left[1 + \frac{s \lambda a \tau \vartheta}{Q_r} \right]}{\left[\eta \tau - 0,53 \frac{s \lambda a \tau^2}{R_m} - 0,24 \ln(1 - \psi) \right]^2} = \\ &= \frac{q \ln k_b}{10000} \frac{0,53 \frac{s^2 \lambda^2 a^2 \vartheta \tau^2}{Q_r R_m} + 1,06 \frac{s \lambda a \tau}{R_m} - \eta}{\left[\eta \tau - 0,53 \frac{s \lambda a \tau^2}{R_m} - 0,24 \ln(1 - \psi) \right]^2} - \\ &\quad - \frac{q \ln k_b}{10000} \frac{-0,24(1 - \psi) \frac{\ln s \lambda a \vartheta}{Q_r}}{\left[\eta \tau - 0,53 \frac{s \lambda a \tau^2}{R_m} - 0,24 \ln(1 - \psi) \right]^2} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

Aby znaleźć wartość τ_k odpowiadającą minimum funkcji K , wystarczy przyrównać do zera wyrażenie w liczniku.

$$0,53 \frac{s^2 \lambda^2 a^2 \vartheta}{R_m} \tau^2 + 1,06 s \lambda a \beta_r \tau - \eta Q_r - 0,24(1 - \psi) \ln s \lambda a \vartheta = 0 \quad (17a)$$

Rozwiązując równanie (17a) ze względu na τ_k otrzymamy

$$\tau_k = \frac{-\beta_r + \sqrt{\beta_r^2 + \frac{2 \vartheta}{1,06 R_m} [Q_r \eta + 0,24(1 - \psi) \ln s \lambda a \vartheta]}}{s \lambda a \vartheta} R_m \quad (18)$$

lub

$$\tau_k = \frac{-Q_r + \sqrt{Q_r^2 + \frac{2\vartheta R_w}{1,06} [Q_r \eta + 0,24(1-\varphi) \ln s \lambda \vartheta]}}{s \lambda \alpha \vartheta} \quad (18a)$$

Wykres (rys. 5) przedstawia wartość τ_k dla założeń:

$$Q_r = 2300 \text{ kg/cm}^2, \quad l = 6,0 \text{ m}, \quad \eta = 0,94, \quad \varphi = 0,1, \quad \vartheta = 130$$

dla belki jednoprzęsłowej, wolnopodpartej, obciążonej ciężarem równomiernie rozłożonym — marki betonu zmienne. Wykres (rys. 6) przedstawia zmienność funkcji τ_k dla belki ciągłej przy założeniach: $Q_r = 2300 \text{ kg/cm}^2$, $R_w = 140 \text{ kg/cm}^2$, $\eta = 0,94$, $\varphi = 0,1$, $l = 6,0 \text{ m}$, $n = 0,6$, $s = 1,6$, $\vartheta = 160$ dla różnego rodzaju obciążeń.

Dla przeciętnie spotykanych warunków wykonawstwa współczynniki kosztów wynoszą dla różnych marek stali i betonu jak podano w tabelcy 2.

Tabela 2

Współczynniki kosztów ϑ

Marka stali	Marka betonu kg/cm ²	Współczynnik kosztów ϑ przy wsp. konstr. $\varphi =$	
		1,3 (jednoprzęsłowe)	1,7 (ciągłe)
O,OW37	110—200	130—110	170—145
OW50	140—250	150—130	195—170

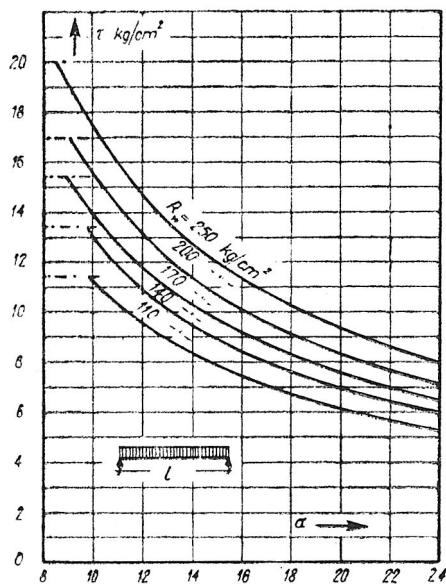
W tabelcy 3 podano wartości funkcji τ_k dla założeń: $Q_r = 2300 \text{ kg/cm}^2$, $R_w = 110 \text{ kg/cm}^2$, $l = 6,0 \text{ m}$, $s = 1,6$, $\eta = 0,94$, $\varphi = 0,1$ i dla belki jednoprzęsłowej, wolnopodpartej, obciążonej ciężarem równomiernie rozłożonym.

Tabela 3

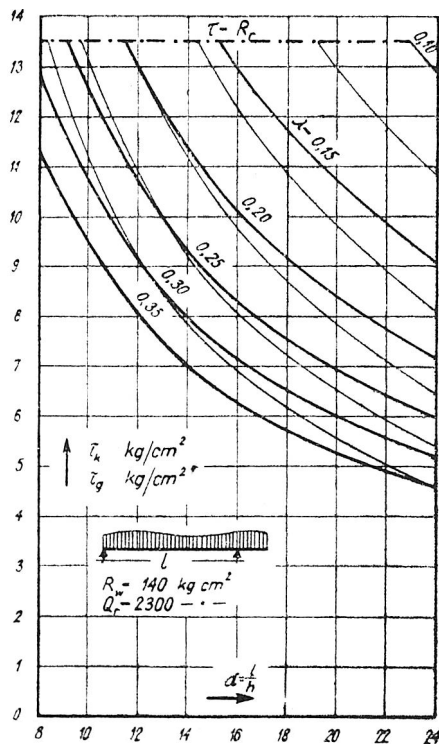
Przebieg funkcji τ_k

$\vartheta \backslash \alpha$	8	10	12	14	16	18	20	22	24
110	14,51	11,79	9,98	8,68	7,70	6,94	6,33	5,83	5,42 kg/cm ²
130	13,84	11,27	9,55	8,32	7,40	6,68	6,11	5,64	5,24 „
150	13,28	10,84	9,20	8,03	7,16	6,47	5,91	5,47	5,10 „
170	12,81	10,47	8,91	7,79	6,95	6,29	5,77	5,34	4,97 „
190	12,41	10,16	8,66	7,58	6,77	6,14	5,64	5,22	4,87 „

Jak wynika z powyższej tabelcy, wpływ współczynnika kosztów ϑ na wartość τ_k jest niewielki, możemy więc przyjąć z dużą dokładnością dla belek jednoprzęsłowych $\vartheta = 130$, dla ciągłych $\vartheta = 160$.



Rys. 5. Przyjęto: $Q_r = 2300$ kg/cm²; $l = 6,0$ m; $\mu = 0,94$; $\psi = 0,1$; $s = 1,6$; $\theta = 130$.



Rys. 6. Przyjęto: $\frac{Q_r}{R_w} = \frac{2300}{140}$ kg/cm²; $l = 6,0$ m; $\eta = 0,94$; $\psi = 0,1$; $n = 0,6$; $\theta = 160$.

Cienką linią pokazano wykresy τ_g .

Również współczynnik η, ψ, n oraz rozpiętość l nie wpływają w istotny sposób na wielkość τ_k , możemy zatem napisać wzory przybliżone.

Dla belki jednoprzęsłowej, przy założeniu $Q_r = 2300 \text{ kg/cm}^2$

$$s = 1,6, \quad l = 4,0 \text{ m} \quad \eta = 0,92, \quad \psi = 0,1, \quad n = 0,5, \quad \vartheta = 130,$$

$$\tau_k = \frac{-11,0 + \sqrt{121 + [12,0 + 0,51 \lambda \alpha] R_m}}{\lambda \alpha} \quad (19)$$

Dla belek ciągłych, przy założeniu $Q_r = 2300 \text{ kg/cm}^2$

$$s = 1,6, \quad l = 6,0 \text{ m}, \quad \eta = 0,92, \quad \psi = 0,1, \quad n = 0,6, \quad \vartheta = 160,$$

$$\tau_k = \frac{-9,0 + \sqrt{81 + [9,8 + 0,57 \lambda \alpha] R_m}}{\lambda \alpha} \quad (19a)$$

Projektując belkę ze względu na τ_k , należy zwracać uwagę, aby nie przekroczyć granicznego wskaźnika uzbrojenia μ_g . Graniczne naprężenie styczne τ_g otrzymamy porównując wartość granicznego wskaźnika uzbrojenia według PN/B — 03260 z wyrażeniem na μ , otrzymanym z wzoru (14)

$$\mu_g = \frac{0,8}{\beta_r(1 + 0,03 \beta_r)} = \frac{s \lambda \alpha \tau}{\eta Q_r},$$

a stąd

$$\tau_g = \frac{0,8 \eta R_m}{(1 + 0,03 \beta_r) s \lambda \alpha} \quad (20)$$

Na rysunku 6 podano obok wykresu τ_k również wykres τ_g (cienką linią).

5. MINIMALNE ZUŻYCIE STALI

W związku z deficytem stali zbrojeniowej niezmiernie ważnym zagadnieniem stało się zredukowanie zużycia tego materiału do minimum.

Jeśli pochodną funkcji (11) ze względu na τ przy uwzględnieniu wartości ξ z wzoru (15) przyrównamy do zera, otrzymamy naprężenie styczne, przy którym F_z osiąga minimum.

$$\frac{\partial F_z}{\partial \tau} = \frac{smql^2}{Q_r h} \cdot \frac{0,53 \frac{s \lambda \alpha \tau^2}{R_m} - 0,24 \ln(1 - \psi)}{\left[\eta \tau - 0,53 \frac{s \lambda \alpha \tau^2}{R_m} - 0,24 \ln(1 - \psi) \right]^2} = 0. \quad (21)$$

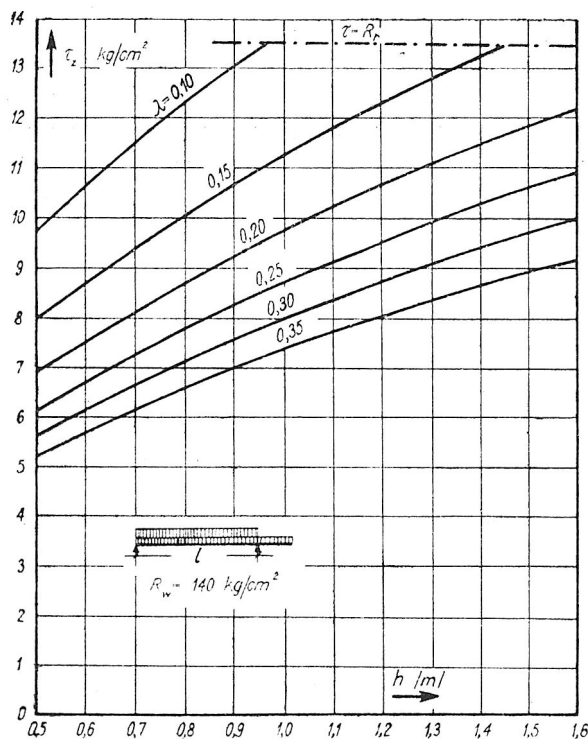
Dla uzyskania minimum funkcji wystarczy przyrównać do zera licznik wyrażenia (21)

$$0,53 \frac{s\lambda a\tau^2}{R_m} = 0,24 \ln(1-\psi),$$

a stąd

$$\tau_z = \sqrt{\frac{0,24 \ln(1-\psi) R_m}{0,53 s\lambda a}} = 0,672 \sqrt{\frac{hn(1-\psi) R_m}{s\lambda}}. \quad (22)$$

Na wykresie rysunku 7 podano wartości τ_z dla belek ciągłych przy założeniu $R_w = 140 \text{ kg/cm}^2$, $\psi = 0,1$, $n = 0,6$, $s = 1,6$.



Rys. 7. Przyjęto: $R_w = 140 \text{ kg/cm}^2$; $\psi = 0,1$; $n = 0,6$; $s = 1,6$.

6. BELKA TEOWA

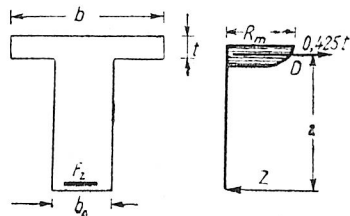
W przekroju teowym ramie sił wewnętrznych jest praktycznie niezależne od wskaźnika uzbrojenia. W wyrażeniu na powierzchnię przekroju belki (równanie 6) wartość ξ jest więc stała.

Z równania tego widać wprost, że funkcja maleje ze wzrostem τ , najmniejszą wartość osiąga zatem dla $\tau = \tau_{\max} = R_r$.

Powierzchnia przekroju wkładek wyrażona jest wzorem (9) $F_z = \frac{M_\tau}{Q_r \cdot z}$.

W równaniu tym wartość mianownika jest stała, natomiast licznik jest funkcją obciążenia $q = p + 0,24 F_b (1 - \psi)$. Ponieważ p jest stałe, wartość q , a więc i M_τ są najmniejsze, jeśli $F_b = \text{minimum}$, co osiąga się, jak powiedziano wyżej, dla $\tau = R_r$.

W konkluzji możemy stwierdzić, że koszt belki teowej i zużycie stali osiągnie minimum przy możliwie największym naprężeniu stycznym $\tau = R_r$.



Rys. 8

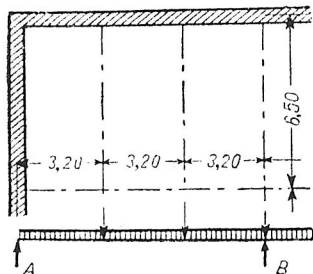
7. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione wyżej rozważania stanowią pierwszy etap rozwiązania problemu ekonomicznego projektowania belek żelbetowych. Podane tu wyniki pozwalają przystąpić do rozpatrywania zmienności funkcji kosztów ze względu na h i znaleźć najkorzystniejszą wysokość konstrukcyjną belki.

Wprowadzone w niniejszej pracy wyrażenia na τ_k i τ_z mogą posłużyć do sprawdzenia ekonomiczności zaprojektowanych belek o założonej wysokości. Zilustrują to następujące przykłady.

Przykład 1

W budynku magazynowym zaprojektowano strop o układzie belek jak na rys. 9. Należy sprawdzić, czy poprawnie przyjęto szerokość podeiągu.



Rys. 9

Wymiary elementów stropu przyjęto jak następuje:

grubość płyty $t = 9$ cm,

żebra $= 25/45$ cm,

podeiągi $= 40/90$ cm,

uzbrojenie podeiągu 9 $\varnothing 24 - F_z = 40,7$ cm² dla

$$\frac{Q_r}{R_w} = \frac{2300}{140} \text{ kg/cm}^2.$$

Obciążenie żebra:

płyta z wyprawą i posadzką $300 \cdot 3,20 = 960$ kg/m

ciężar własny żebra $0,36 \cdot 0,25 \cdot 2400 = 220$ kg/m

razem $g = 1180$ kg/m,

obciążenie użytkowe $p = 400 \cdot 3,20 = 1280$ kg/m,

Obciążenie podciagu:

$$\text{obciążenie stałe } G = 1180 \cdot 6,50 = 7680 \text{ kg}$$

$$\text{obciążenie użytkowe } P = 1280 \cdot 6,50 = 8320 \text{ kg}$$

$$\text{ciężar własny } g_1 = 0,81 \cdot 0,40 \cdot 2400 = 780 \text{ kg/m.}$$

Moment maksymalny w prześle skrajnym wynosi wg Winklera

$$M_I = (0,240 \cdot 7680 + 0,287 \cdot 8320) \cdot 9,60 + 0,0781 \cdot 780 \cdot 9,60^2 = \\ = 40500 + 5600 = 46100 \text{ kgm.}$$

$$\text{Dla przekroju teowego } \zeta = (1 - 0,425 \varphi) = 0,9575, \text{ jeśli } \varphi = \frac{t}{h} = \frac{9}{90} = 0,1.$$

Powierzchnia przekroju wkładek wyniesie przy założeniu $\eta = 0,95$:

$$F_z = \frac{M s}{Q_r h \eta \zeta} = \frac{46100 \cdot 1,6}{2300 \cdot 0,90 \cdot 0,95 \cdot 0,9575} = 39,2 \text{ cm}^2.$$

Przyjęto $9 \text{ } \emptyset 24$ $F_z = 40,7 \text{ cm}^2$.

Jak stwierdzono poprzednio dla belki teowej $\tau_k = R_r$.

Siła poprzeczna od obciążeń (bez ciężaru własnego) wynosi przy podporze B :

$$Q_0 = 1,281 \cdot 7680 + 1,319 \cdot 8320 = 9850 + 10980 = 20830 \text{ kg.}$$

Powierzchnia przekroju belki wynosi wg wzoru (6) przy założeniu $\eta = 0,94$

$$F_b = \frac{Q_0}{\eta \zeta \tau - 0,24 t n (1 - \varphi)} = \frac{20830}{0,94 \cdot 0,9575 \cdot 13,5 - 0,24 \cdot 9,60 \cdot 0,62 \cdot 0,9} = \\ = \frac{20830}{12,14 - 1,29} = 1920 \text{ cm}^2,$$

$$b = \frac{F_b}{h} = \frac{1920}{90} = 21,4 \sim 22 \text{ cm.}$$

Ciężar własny belki wynosi

$$g_1 = 0,81 \cdot 0,22 \cdot 2400 = 430 \text{ kg/m.}$$

Moment przęsłowy ulegnie zatem zmniejszeniu do wartości:

$$M_I = 40500 + 0,0781 \cdot 430 \cdot 9,60^2 = 40500 + 3100 = 43600 \text{ kgm.}$$

Powierzchnia wkładek ulegnie również redukcji;

$$F_z = \frac{43600 \cdot 1,6}{2300 \cdot 0,90 \cdot 0,94 \cdot 0,9575} = 37,4 \text{ cm}^2.$$

Przyjęto $7 \text{ } \emptyset 26$ — $F_z = 37,2 \text{ cm}^2$ (w dwu warstwach).

Odległość środka ciężkości wkładek od dolnej krawędzi:

$$a = 2,0 + 1,3 + 3,9 \cdot \frac{3}{7} = 5,0 \text{ cm; } \eta = \frac{90,0 - 5,0}{90,0} = 0,945.$$

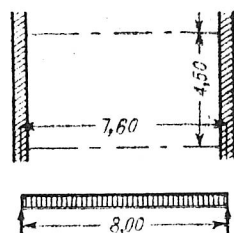
Najekonomiczniejsza szerokość belki wynosi więc 22 cm. Przy tej samej szerokości uzyskujemy również minimalne zużycie stali.

Przykład 2

Nad budynkiem o rozpiętości 7,60 m w świetle murów zaprojektowano stropodach gęstożebrowy, oparty na belkach o wymiarach 25/70, rozpiętości $l=8,00$ m, rozstawionych co 4,50 m. Do konstrukcji użyto betonu marki 170 i stali o umownej granicy plastyczności $Q_r=2300$ kg/cm².

Obciążenie stropu:

ciężar stropu surowego	— 300 kg/m ²
wyprawa i izolacja	— 110 kg/m ²
obciążenie użytkowe	— 250 kg/m ²
razem	660 kg/m ²



Rys. 10

Obciążenie belki: $q=660 \cdot 4,50=2970$ kg/m.

Najkorzystniejsze naprężenie styczne możemy obliczyć przy założonej wysokości belki wzorem (18) lub w przybliżeniu wzorem (19), bądź też odczytać z wykresu 5.

Współczynnik ψ obliczamy dla zastępczej grubości płyty, równej

$$t_z = \frac{g}{\gamma_b} = \frac{300}{2400} = 0,125 \text{ m},$$

$$\psi_z = \frac{t_z}{h} = \frac{12,5}{70} = 0,18.$$

Przyjmujemy: $\eta=0,93$, $s=1,6$, $n=0,5$ (z tabl. 1), $\lambda=0,25$ $\vartheta=125$,

$$\alpha = \frac{l}{h} = \frac{800}{70} = 11,4, \quad \beta_r = 2300/140 = 16,4.$$

Obliczanie wzorem (18):

$$\tau_k = \frac{-16,4 + \sqrt{16,4^2 + \frac{2 \cdot 125}{1,06 \cdot 140}}}{1,6 \cdot 0,25 \cdot 11,4 \cdot 125}$$

$$\frac{[2300 \cdot 0,93 + 0,24(1 - 0,18) \cdot 8,0 \cdot 0,5 \cdot 1,6 \cdot 0,25 \cdot 11,4 \cdot 125]}{1,6 \cdot 0,25 \cdot 11,4 \cdot 125} \cdot 140 =$$

$$= \frac{-16,4 + \sqrt{269 + 4360}}{570} \cdot 140 = \frac{-16,4 + 68,0}{570} \cdot 140 = 12,7 \text{ kg/cm}$$

Z wzoru (19) otrzymamy natomiast

$$\begin{aligned}\tau_k &= \frac{-11,0 + \sqrt{121 + (12,0 + 0,51 \cdot 0,25 \cdot 11,4) \cdot 140}}{0,25 \cdot 11,4} = \frac{-11,0 + \sqrt{121 + 1880}}{2,85} = \\ &= \frac{-11,0 + 44,7}{2,85} = 11,8 \text{ kg/cm}^2.\end{aligned}$$

Z rysunku 5 odczytujemy $\tau_k = 12,4 \text{ kg/cm}^2$.

Jak widać z rys. 3 i 4 niewielkie odchylenie od wartości τ_k nie wpływa w istotny sposób na koszt belki, możemy zatem stosować do wyznaczania najkorzystniejszego naprężenia stycznego wzoru (19) lub odczytywać je wprost z odpowiedniego wykresu.

Przyjmując $\tau_k = 12,5 \text{ kg/cm}^2$ i $\eta = 0,95$ otrzymamy z wzoru (15)

$$\zeta = 1 - 0,53 \frac{1,6 \cdot 0,25 \cdot 11,4 \cdot 12,5}{0,93 \cdot 140} = 1 - 0,232 = 0,768,$$

$$Q_0 = \frac{2970 \cdot 8,00}{2} = 11900 \text{ kg},$$

$$F_b = \frac{11900}{0,93 \cdot 0,768 \cdot 12,5 - 0,24 \cdot 8,0 \cdot 0,5 \cdot 0,82} = \frac{11900}{8,93 - 0,79} = 1460 \text{ cm}^2;$$

$$b = \frac{1460}{70} = 20,9 \text{ cm}.$$

Najmniejsze zużycie stali osiągniemy przy naprężeniu stycznym τ_z wyliczonym wg wzoru (22):

$$\tau_z = 0,672 \sqrt{\frac{0,70 \cdot 0,5 \cdot 0,82 \cdot 140}{1,6 \cdot 0,25}} = 6,72 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\zeta = 1 - 0,53 \cdot \frac{1,6 \cdot 0,25 \cdot 11,4 \cdot 6,72}{0,93 \cdot 140} = 1 - 0,125 = 0,875,$$

$$F_b = \frac{11900}{0,93 \cdot 0,875 \cdot 6,72 - 0,79} = \frac{11900}{5,47 - 0,79} = 2540 \text{ cm}^2,$$

$$b = \frac{2540}{70} = 36,3 \text{ cm}.$$

Ponieważ zaprojektowana belka leży w przedziale między $K_{\min}$ i $F_{z\min}$, możemy uznać, że szerokość jej została przyjęta poprawnie.

LITERATURA

- [1] Mayer, *Die Wirtschaftlichkeit als Konstruktionsprinzip im Eisenbetonbau*, Berlin 1913.
- [2] Stickel, *Beitrag zur Frage der Wirtschaftlichen Ausnutzung der Festigkeits-eigenschaften hochwertiger Baustoffe im Eisenbetonbau*, Hannover 1929.
- [3] Domke, *Theorie des Eisenbetons, Handbuch für Eisenbetonbau*, Berlin 1930.
- [4] Saliger, *Der Eisenbeton, seine Berechnung und Gestaltung*, Leipzig 1933.
- [5] Antonow, *Elementy ekonomiczieskogo rasczota armirowannykh konstrukcij*, Moskwa 1948.
- [6] Stiepanienko — *Ekonomiczieskij rasczot zielezobietonnykh balok*, Stroitielnaja promyslennost Nr 7 1952.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА ЭКОНОМИЧЕСКОГО
ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

В статье рассматривается вопрос экономического проектирования железобетонных балок, рассчитываемых по стадии разрушения.

Кроме принимаемых обычно факторов стоимости в статье вводится дополнительный фактор: стоимость приращения высоты здания вследствие увеличения высоты балок.

Три независимые переменные, определяющие размеры балки: ширина — b , высота — h , и площадь поперечного сечения продольной арматуры F_z , сведены в статье к двум: касательному напряжению — τ , и высоте балки — h .

Прилагаемые графики представляют характер изменения функций стоимости а также наиболее выгодные в экономическом отношении значения касательных напряжений.

EINFÜHRUNG IN DAS PROBLEM DES EKONOMISCHEN ENTWURFES
DER EISENBETONBALKEN

In vorliegender Betrachtung erwägt man das Problem des ekonomischen Entwurfes von Stahlbetonbalken, welche nach der Methode plastischer Formänderungen (Grenzbeanspruchungen) berechnet sind.

Zum Unterschied von anderen Bearbeitungen dieser Art führt man einen zusätzlichen Kostenfaktor ein, und zwar die Kosten der um die Balkenhöhe vergrößerten Gebäudehöhe.

Drei unabhängige, variable Grössen, welche die Stahlbetonbalkenausmasse bezeichnen, d. h. die Breite — b , die Höhe — h und der Bewehrungsquerschnitt F_z , bezw. Bewehrungskoeffizient μ werden zu zwei reduziert: es sind dies die Schubspannung τ und die Balkenhöhe h .

Beigelegte Diagramme illustrieren den Verlauf der Kostenfunktionen sowie der vorteilhaftesten Werte der Schubspannungen.

WPLYW WIELKOŚCI STOPY FUNDAMENTOWEJ NA CZĘSTOŚĆ DRGAŃ WŁASNYCH FUNDAMENTÓW POD MASZYNY

JACEK WOJCIECHOWSKI, mgr inż., aspirant przy Kat. Bud. Przem.

Praca omawia zagadnienie możliwości zmiany ilości drgań własnych fundamentu blokowego poprzez zmianę jego ciężaru i wymiarów.

1. WSTĘP

Projektując fundamenty pod maszyny o ruchu okresowym staramy się uniknąć rezonansu przez odpowiednie dostrojenie fundamentu, to znaczy, takie dobranie częstości drgań własnych fundamentu, aby była ona znacznie mniejsza lub większa od częstości impulsów maszyny.

Przy ramowej konstrukcji fundamentów możemy uzyskać pożądaną częstość drgań własnych przez odpowiednie dobranie masy i sztywności ustroju. Przy zastosowaniu podkładek sprężynujących dysponujemy, choć w ograniczonym zakresie, ich cechami sprężystymi, natomiast przy fundamentach blokowych lub skrzynkowych, posadowionych wprost na gruncie, na cechy sprężyste podłoża nie mamy przeważnie wpływu. Ciężarem i kształtem możemy dysponować także tylko w ograniczonym zakresie, musimy bowiem trzymać się rysunku dyspozycyjnego, który podaje nam minimalne, a często i maksymalne wymiary płyty górnej i korpusu fundamentu. Pewną swobodę, i to nie zawsze, mamy jedynie przy projektowaniu wymiarów stopy fundamentowej.

Z ograniczeń tych wynikają poważne trudności w odpowiednim dostrojeniu fundamentu, pogłębione jeszcze tym, że własności sprężyste gruntów zależą od bardzo wielu trudno uchwytnych czynników i można je określić tylko z pewnym przybliżeniem.

Omówienie możliwości dostrojenia fundamentu przez odpowiednie zaprojektowanie jego stopy jest treścią niniejszej pracy.

2. WSPÓŁCZYNNIKI PODATNOŚCI DYNAMICZNEJ GRUNTU

2.1. ZAŁOŻENIA I OKREŚLENIA

Rozpatrujemy grunt o ustalonych własnościach sprężystych nie wykazujący już trwałych odkształceń pod wpływem obciążeń zmieniających się w dopuszczalnych granicach.

Fundament (lub przyrząd do badań) jest zagłębiony w gruncie na taką głębokość, że z jednej strony nie następuje wypieranie gruntu, a z drugiej można pominąć wpływ ciężaru i parcia bocznego warstwy ziemi ponad stopą fundamentu oraz nie uwzględniać zmian własności sprężystych gruntu ze zmianą głębokości.

Przesunięcia (amplitudy drgań) są we wszystkich kierunkach bardzo małe, a odpowiadające im zmiany naprężeń pionowych są praktycznie małe w stosunku do naprężeń niezmiennych.

Stopa fundamentu jest płaska, pozioma i prostokątna; środek ciężkości całego układu (fundamentu wraz z maszynami) leży na jednym pionie ze środkiem ciężkości pola stopy fundamentowej.

Współczynniki podatności dynamicznej gruntu¹⁾, a to:
równomiernego nacisku (pionowy) C_z ,

przesuwania (poziomy) C_x ,

nierównomiernego nacisku (przy obrocie) C_a .

określamy równaniami:

$$C_z = \frac{R_z}{Fz_0}, \quad (1)$$

$$C_x = \frac{R_x}{Fx_0}, \quad (2)$$

$$C_a = \frac{M}{Ia_0}, \quad (3)$$

gdzie

R_z, R_x — odpowiednio pionowa i pozioma składowa wypadkowej oddziaływania gruntu;

M — moment tej wypadkowej względem środka podstawy;

F — pole stopy fundamentowej;

I — moment bezwładności pola stopy fundamentowej względem głównej osi prostopadłej do płaszczyzny obrotu fundamentu;

¹⁾ Cytowicz N. A., *Mechanika gruntów*, Moskwa-Leningrad 1951, str. 355—359.

- z_0, x_0 — odpowiednio pionowe i poziome przesunięcie środka ciężkości pola stopy fundamentowej;
 α_0 — kąt obrotu fundamentu.

2.2. DAWNIEJSZE BADANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW PODATNOŚCI GRUNTU

Przed ostatnią wojną dokonano szeregu pomiarów współczynników podatności gruntu. Najwięcej rozpowszechnione w literaturze są wyniki badań berlińskiej firmy „Baugrund GmbH⁽¹⁾”.

Pomierzono tylko C_z i C_x , przyjmując $C_\alpha = C_x$.

Stwierdzono, że współczynniki zależą od wielu parametrów: własności danego rodzaju gruntu, wielkości średniego ciśnienia statycznego na grunt, wielkości i kształtu stopy fundamentu; nie podjęto jednak prób matematycznego ujęcia tych zależności, podając jedynie wartości współczynników dla kilku wartości ciśnienia na grunt. Wyniki firmy „Baugrund” są rozbieżne również z dawniejszymi badaniami radzieckimi, które podaje Zawrijew²⁾). Wartości zestawione przez Zawrijewa są kilkakrotnie niższe od wartości firmy „Baugrund”.

2.3. NOWSZE PRACE

O. A. Sawinow (ZSRR) wyprowadził w ostatnich czasach teoretyczne wzory dla prostokątnej stopy fundamentu, potwierdzone następnie doświadczalnie. Z pominięciem wpływów nie mających dla praktyki znaczenia brzmią one następująco:

$$C_z = C_0 \left[1 + \frac{2(l+b)}{F} \right] \sqrt{\frac{p}{p_0}}, \quad (4)$$

$$C_x = D_0 \left[1 + \frac{2(l+b)}{F} \right] \sqrt{\frac{p}{p_0}}, \quad (5)$$

$$C_\alpha = C_0 \left[1 + \frac{2(l+3b)}{F} \right] \sqrt{\frac{p}{p_0}}, \quad (6)$$

$$D_0 = \frac{1-\mu}{1-0,5\mu} C_0. \quad (7)$$

We wzorach tych oznaczają:

- C_0, D_0 — współczynniki zależne tylko od właściwości gruntu,
 l — wymiar stopy fundamentu równoległy do płaszczyzny obrotu fundamentu w m,
 b — pozostały wymiar stopy w m,

¹⁾ Kłóś Cz., *Fundamenty pod maszyny*, Warszawa 1949, str. 18—19.

²⁾ Kisiel I., *Działania dynamiczne w budownictwie*, Gliwice 1949, str. 183.

$F=lb$ — w m^2 ,

p — statyczne średnie ciśnienie fundamentu na grunt,

p_0 — statyczne ciśnienie urządzenia pomiarowego na grunt,

μ — stała Poissona dla gruntów pod działaniem dynamicznym.

Cytowicz¹⁾ podaje ustalone doświadczalnie dla $p_0=2\text{ t/m}^2$ wartości C_0 , jak następuje:

Określenie gruntów	C_0 tys. t/m^3
Piaski	
a) pylaste, bardzo mokre i nasycone wodą	0,8 — 1,0
b) drobnoziarniste niezależnie od wilgotności i zagęszczenia	1,0 — 1,2
c) średnioziarniste, gruboziarniste i żwirowate niezależnie od wilgotności i zagęszczenia	1,2 — 1,6
Gliny, grunty gliniaste i piaszczysto-gliniaste	
a) plastyczne w pobliżu granicy płynności	0,5 — 1,0
b) plastyczne	1,0 — 2,0
c) twarde	2,0 — 3,0

Dla dynamicznego współczynnika Poissona μ zaleca Cytowicz wartości:

grunty piaszczyste	0,30 — 0,35
grunty gliniaste	0,40 — 0,50

2.4. ZNACZENIE PRAKTYCZNE WZORÓW SAWINOWA

W praktyce tylko w wyjątkowych przypadkach wyznacza się doświadczalnie współczynniki podatności dla gruntu pod projektowanym obiektem. Zwykle przyjmuje się z literatury jedną lub dwie wartości: największą i najmniejszą możliwą, odpowiadające średniemu przewidywanemu ciśnieniu — i dalej — operuje się tymi wartościami jak wielkościami stałymi, niezależnie od zmian wielkości stopy fundamentu w toku projektowania. Niesłuszność takiego podejścia jest oczywista.

¹⁾ op. cit. str. 358 i 354.

W przypadkach wyznaczania doświadczalnego, z reguły przeprowadzamy próby na powierzchni gruntu za pomocą urządzenia o polu znacznie mniejszym niż pole stopy projektowanego fundamentu, o innym kształcie i przy mniejszym ciśnieniu niż projektowane. Bez matematycznego ujęcia wpływu tych warunków na wynik, próby takie są prawie bez wartości.

Największą zaletą wzorów Sawinowa jest właśnie to, że pozwalają prawidłowo zastosować wyniki doświadczeń dokonanych w określonych warunkach do obliczenia cech sprężystych gruntu jako podłoża fundamentów maszyn i stwarzają podstawy do doświadczalnego wyznaczenia współczynników C_0 i D_0 dla różnych gruntów.

3. WYPROWADZENIE ZALEŻNOŚCI

3.1. DRGANIA PIONOWE

Weźmy pod uwagę fundament składający się z korpusu (z ewentualną płytą górną), którego wymiary są w zasadzie określone przez fabrykę maszyn, i płyty dolnej, której wymiary i konstrukcja zależą od projektanta fundamentu.

Oznaczmy:

$G_k = \text{const}$ — ciężar korpusu fundamentu wraz z maszyną,

$G_p = p_p F$ — ciężar płyty dolnej,

$G = G_k + G_p$ — ciężar całego układu.

Dalsze oznaczenia według 2.1 i 2.3.

Operujemy układem jednostek praktycznych: m, t, min.

Częstość pionowych drgań własnych:

$$n_z = 30 \sqrt{\frac{C_z}{p}} = 30 \sqrt{\frac{C_z F}{G}} = 30 \sqrt{\frac{C_z F}{G_k + G_p}}. \quad (8)$$

Podstawiając wzór (4) i wydzielając czynniki niezależne od F , otrzymamy

$$n_z = \frac{30 \sqrt{C_0}}{\sqrt[4]{G_k p_p}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{F} + \frac{2(l+b)}{\sqrt{F}}}}{\sqrt[4]{1 + \frac{G_p}{G_k}}}. \quad (9)$$

Wprowadziwszy oznaczenia:

$$\frac{b}{l} = \varphi \text{ — stała} \quad l = \sqrt{\frac{F}{\varphi}}, \quad b = \sqrt{F\varphi}, \quad (10)$$

$$\frac{30\sqrt{C_0}}{\sqrt[4]{G_k p_p}} = K_z, \quad (11)$$

$$\sqrt[4]{1 + \frac{G_p}{G_k}} = \sqrt[4]{1 + F \frac{p_p}{G_k}} = \zeta, \quad (12)$$

otrzymujemy

$$n_z = K_z \frac{\sqrt{\sqrt{F} + 2\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\varphi}\right)}}{\zeta}. \quad (13)$$

Przy możliwości zmian ciężaru korpusu fundamentu można zmieniając F (w pewnym niewielkim przedziale) zachować

$$G_k + G_p = G = \text{const.} \quad (14)$$

Traktujemy wówczas całość jako korpus, czyli przyjmujemy

$$G_p = 0 \quad \text{i} \quad \zeta = 1.$$

Wykres zmienności stosunku $\frac{n_z}{K_z}$ w zależności od F , dla różnych wartości φ , przedstawia rysunek 1.

Jak widać, zmiany φ (w praktycznie realnych granicach) wpływają bardzo nieznacznie na częstość drgań pionowych. Zwiększając F otrzymujemy, jak się tego należało spodziewać, wyższe strojenie, jednakże potrzeba znacznego zwiększenia F dla uzyskania praktycznie spostrzegalnego zwiększenia częstości drgań własnych. Jeżeli mamy np. początkowo $F=50 \text{ m}^2$ i chcemy podnieść częstość drgań własnych pionowych o 20%, musimy zwiększyć F prawie 3-krotnie. Przy zachowaniu konstrukcji blokowej i warunku (14) jest to zadanie praktycznie niewykonalne, zazwyczaj bowiem powiększając stopę fundamentu, zwiększamy także i jego ciężar.

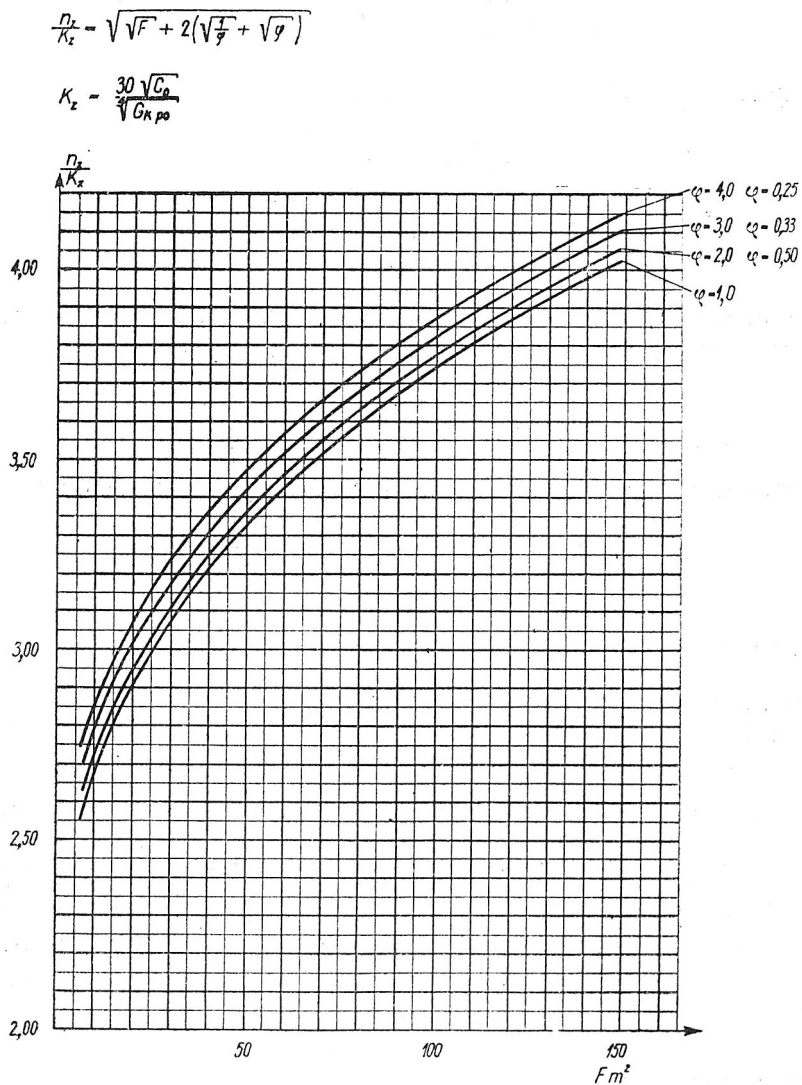
Przyjmijmy warunek

$$p_p = \text{const.} \quad (15)$$

Dla znacznej większości praktycznych przypadków można przyjąć

$$0,005 \text{ m}^{-2} < \frac{p_p}{G_K} < 0,050 \text{ m}^{-2},$$

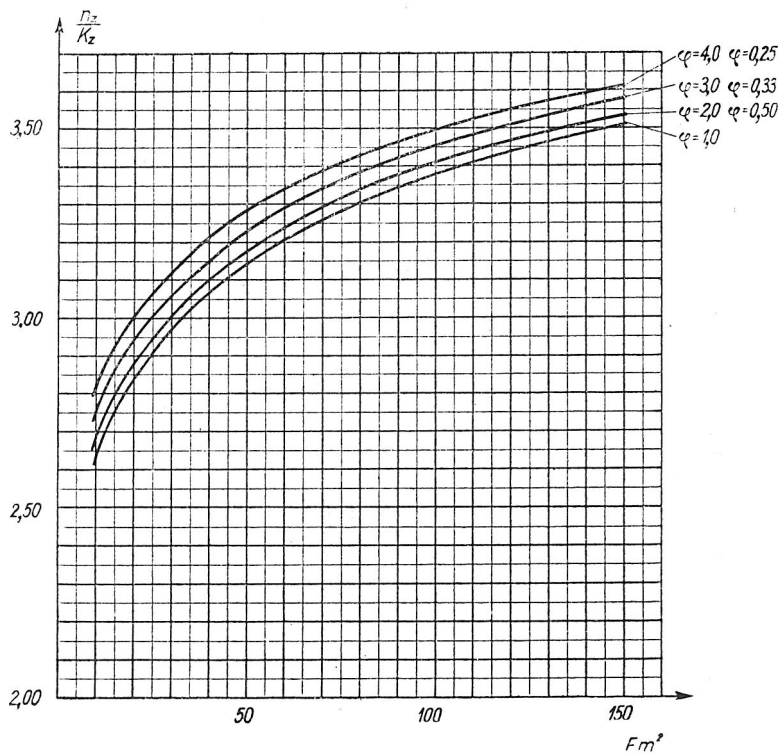
przy czym mniejsze wartości dotyczą większych fundamentów, a większe — mniejszych.



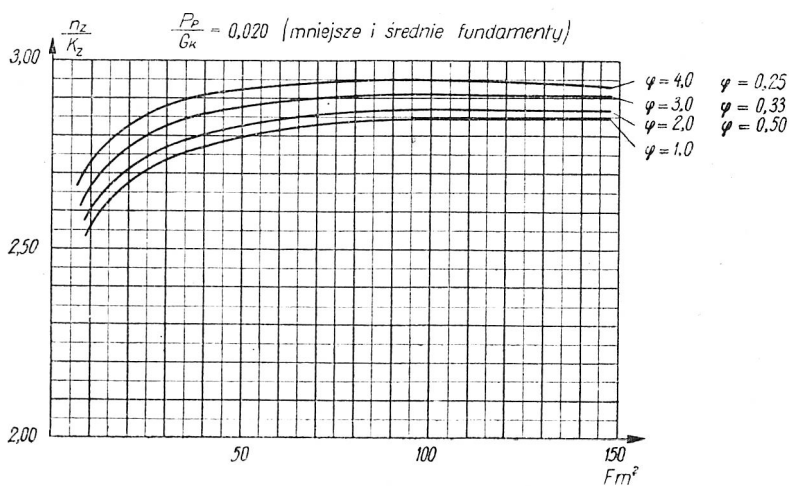
Rys. 1

Odpowiednie wykresy przedstawiono na rys. 2, 3 i 4.

$\frac{F_p}{G_k} = 0,005$ (większe fundamenty)



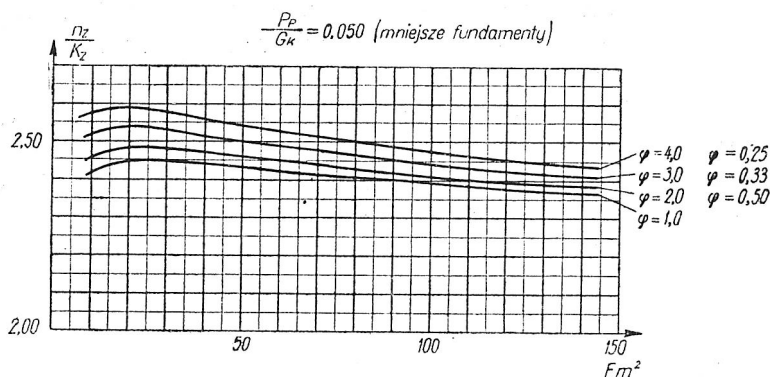
Rys. 2



Rys. 3

Gdy dla $\frac{p_p}{G_K} = 0,005 \text{ m}^{-2}$, podobnie jak poprzednio, zwiększymy F z 50 m^2 na 150 m^2 , częstość drgań pionowych wzrośnie tylko o około 10%. Dla $\frac{p_p}{G_K} = 0,20$ częstość drgań prawie nie zmienia się, zaś dla $\frac{p_p}{G_K} = 0,50$ nawet maleje.

$$\frac{n_z}{K_z} = \frac{1}{z} \sqrt{F + 2 \left(\sqrt{\frac{F}{\varphi}} + \sqrt{\varphi} \right)} ; \quad z = \sqrt{1 + F \frac{p_p}{G_K}} ; \quad K_z = \frac{30 \sqrt{C_0}}{\sqrt{G_{K p_0}}}$$



Rys. 4

Jeżeli chcielibyśmy osiągnąć zmianę strojenia przez zmianę ciężaru G przy stałym F (np. przez znaczne pogrubienie płyty), to podstawiając wzór (4) do (8) otrzymujemy

$$n_z = 30 \frac{\sqrt{\frac{C_0}{\sqrt{p_0}} \left[\sqrt{F} + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\varphi} \right) \right]}}{\sqrt[4]{G}} \quad (16)$$

Dla obniżenia drgań o 20% musielibyśmy zwiększyć ciężar G około 2,5 — krotnie, co znów jest praktycznie niewykonalne.

3.2. DRGANIA WAHADŁOWE

3.2.1. IŁOŚĆ PARAMETRÓW

Przy drganiach pionowych mieliśmy do czynienia z funkcją:

$$n_z = f \left(F, \varphi, \frac{p_p}{G_K} \right),$$

przy czym F traktowaliśmy jako zmienną niezależną, a pozostałe zmienne, jako parametry. Przy drganiach wahadłowych dochodzą dwa dodatkowe

parametry niezależne od siebie i od pozostałych zmiennych, a mianowicie:

- z — odległość środka ciężkości całego układu od płaszczyzny stopy fundamentu,
- j — promień bezwładności całego układu względem osi przechodzącej przez środek S i prostopadłej do płaszczyzny wahań.

Dalszy parametr i — promień bezwładności pola stopy fundamentowej względem głównej osi tego pola prostopadłej do płaszczyzny wahań fundamentu (por. 2) jest zależny od F i φ .

Przy dwóch parametrach, przyjmując po 4 wartości dla każdego z nich, mielibyśmy $4 \times 4 = 16$ krzywych. Przy czterech parametrach mielibyśmy analogicznie 256 krzywych. Zarówno obliczenie wykresów, jak i późniejsze korzystanie z nich byłoby bardzo kłopotliwe i nie dawałoby jasnego obrazu pracy fundamentu. Wobec czego wprowadzimy pewne uproszczenia i ograniczymy się do podania sposobu, za pomocą którego będziemy mogli łatwo zorientować się w zmianach częstości drgań wahań w zależności od F dla każdego szczególnego przypadku.

3.2.2. ZASTĘPCZA STOPA FUNDAMENTU

Oznaczamy

x_1, a_1 — przesunięcia analogiczne jak pod 2.1, ale przy

$$R_x = 1 \text{ t}, \quad M = 1 \text{ tm}.$$

Wyobraźmy sobie, że do stopy fundamentu przylega od spodu połączona z nią sztywna, nieważka, cienka prostokątna płyta o osiach symetrii pokrywających się z osiami symetrii stopy, o polu F_0 i momencie bezwładności pola (analogicznym jak dla stopy) I_0 , spełniających równości:

$$\frac{1}{C_x F} = x_1 = \frac{1}{D_0 \sqrt{\frac{p}{p_0} F_0}}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{C_a I} = a_1 = \frac{1}{C_0 \sqrt{\frac{p}{p_0} I_0}}, \quad (18)$$

(przy czym jak poprzednio $p = \frac{G}{F}$).

stad

$$F_0 = \frac{C_x F}{D_0 \sqrt{\frac{p}{p_0}}}; \quad I_0 = \frac{C_a I}{C_0 \sqrt{\frac{p}{p_0}}}, \quad (19)$$

a po uwzględnieniu wzorów (5) i (6):

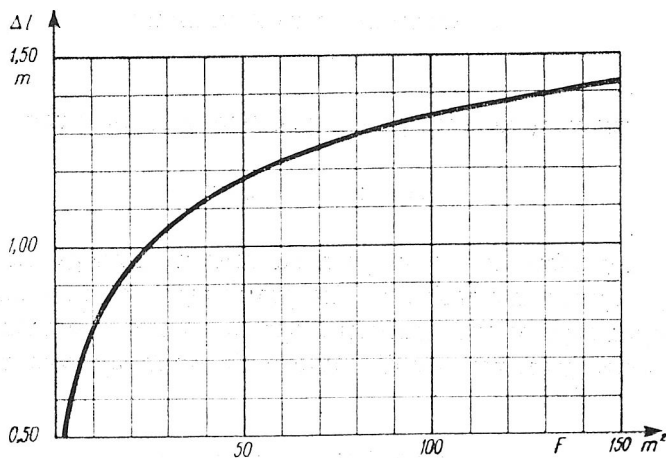
$$F_0 = F + 2(l + b), \quad (20)$$

$$I_0 = \frac{Fl^2}{12} \left[1 + \frac{2(l + 3b)}{F} \right], \quad (21)$$

$$l_0^2 = \frac{12I_0}{F_0} = l^2 \left[1 + \frac{4b}{F + 2(l + b)} \right] = \frac{F}{\varphi} \left[1 + \frac{4\sqrt{\varphi}}{\sqrt{F} + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\varphi} \right)} \right]. \quad (22)$$

Różnica $\Delta l = l_0 - l^1$) waha się dla wartości $F = 10 - 150 \text{ m}^2$ w granicach

$$\Delta l = \left[\sqrt{1 + \frac{4}{F + 4}} - 1 \right] \sqrt{F}$$



Rys. 5

około 0,8 do 1,4 m i przy stałym F zmienia się bardzo nieznacznie ze zmianą φ , tak że praktycznie można przyjąć jak dla $\varphi = 1$ (rys. 5):

$$\Delta l = \left[\sqrt{1 + \frac{4}{F + 4}} - 1 \right] \sqrt{F}. \quad (23)$$

¹⁾ Można to łatwo stwierdzić, obliczając Δl dla różnych wartości.

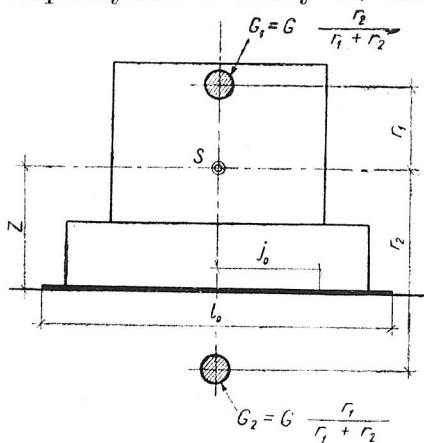
3.2.3. ZASTĘPCZA BRYŁA

Przyjmijmy, że promień i pozostaje w pewnym stałym stosunku do analogicznego promienia bezwładności bryły prostopadłościennej o podstawie F_0 i wysokości $2z$:

$$i^2 = \vartheta i_0^2 = \vartheta \left(\frac{l_0^2}{12} + \frac{z^2}{3} \right) = \vartheta \left(i_0^2 + \frac{z^2}{3} \right). \quad (24)$$

Współczynnik ϑ zależy od wielkości fundamentu i sposobu rozłożenia ciężarów. Dla praktycznych przypadków można przyjąć

$$0,5 < \vartheta < 1,5^1)$$



Rys. 6

Poza te granice wykraczają tylko fundamenty o konstrukcji specjalnej, jak np. fundamenty wentylatorów kopalnianych z wysokimi dyfuzorami, wysokie fundamenty skrzynkowe ciężkich maszyn o ciężkiej płycie dolnej ($\vartheta > 1,5$) oraz niskie fundamenty z ciężkim blokowym korpusem i lekką a długą płytą dolną ($\vartheta < 0,5$).

3.2.4. WYPROWADZENIE ZALEŻNOŚCI

Według znanych wzorów na drgania wahadłowe (rys. 6):

$$r_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\frac{x_1 + z^2 - i^2}{a_1}}{2z} \right)^2 + i^2 \mp \frac{\frac{x_1 + z^2 - i^2}{a_1}}{2z}}. \quad (25)$$

Wahania wokół dolnego bieguna: (26)

$$n_1 = \frac{30}{\sqrt{G \frac{r_2}{r_1 + r_2} [x_1 + (r_1 + z)^2 a_1]}} = \frac{30}{\sqrt{G x_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{r_2}{r_1 + r_2} \left[1 + (r_1 + z)^2 \frac{a_1}{x_1} \right]}},$$

wokół górnego: (27)

$$n_2 = \frac{30}{\sqrt{G \frac{r_1}{r_1 + r_2} [x_1 + (r_2 - z)^2 a_1]}} = \frac{30}{\sqrt{G x_1}} \cdot \frac{30}{\sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r_2} \left[1 + (r_2 - z)^2 \frac{a_1}{x_1} \right]}}.$$

¹⁾ Przyjęto na podstawie wielu wykonanych projektów.

Ze wzorów (17) i (18):

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{C_0}{D_0} j_0^2, \quad (28)$$

oznaczamy

$$\frac{C_0}{D_0} = \eta, \quad (29)$$

$$\frac{j_0}{z} = \psi, \quad (30)$$

$$\frac{30}{\sqrt{Gx_1}} = n_x. \quad (31)$$

Zgodnie ze wzorem (7) i podanymi w 2.3 wartościami μ można przyjąć: $1,2 < \eta < 1,5$.

Po podstawieniu i sprowadzeniu do postaci dogodnej do obliczeń otrzymujemy

$$r_{1,2} = \left\{ \frac{\psi}{2} \sqrt{\Phi} \mp \frac{1}{2} \left[(n - \vartheta) \psi + \frac{3 - \vartheta}{3} \cdot \frac{1}{\psi} \right] \right\} j_0, \quad (32)$$

$$\frac{n_{1,2}}{n_x} = \sqrt{\frac{2\eta}{\eta + \vartheta + \frac{3 + \vartheta}{3\psi^2} \pm \sqrt{\Phi}}}, \quad (33)$$

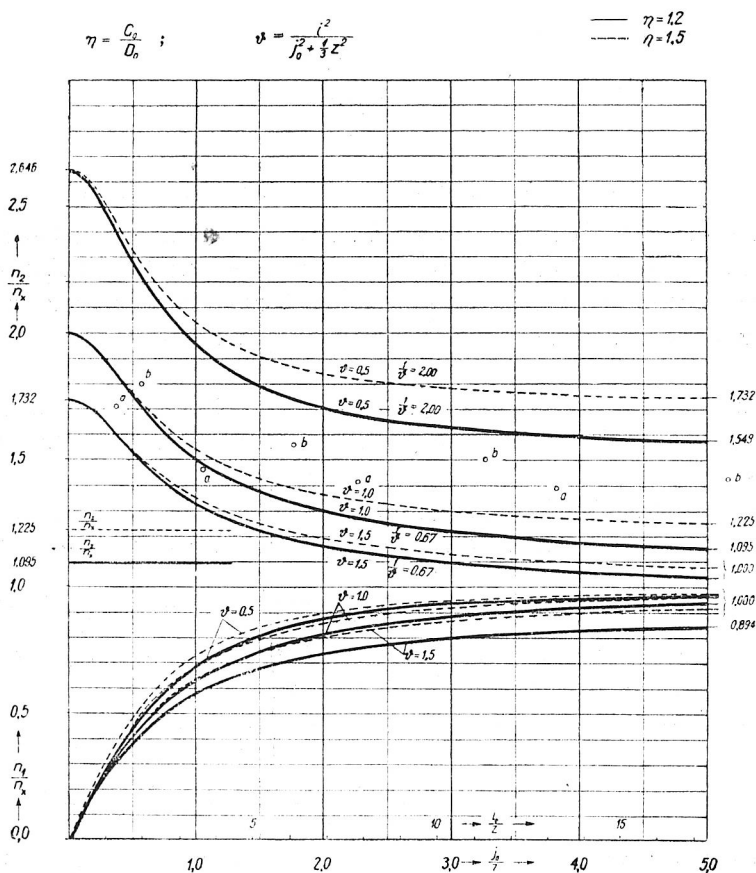
gdzie

$$\Phi = (\eta - \vartheta)^2 + 2 \left[\frac{3 + \vartheta}{3} \vartheta + \frac{3 - \vartheta}{3} \eta \right] \frac{1}{\psi^2} + \left(\frac{3 + \vartheta}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{\psi^4}. \quad (34)$$

Granice funkcji $\frac{n_{1,2}}{n_x} = f(\psi)$ przedstawiają się następująco: (35)

lim	dla $\psi \rightarrow 0$		dla $\psi \rightarrow \infty$	
	$\eta \geq \vartheta$	$\eta < \vartheta$	$\eta \geq \vartheta$	$\eta < \vartheta$
$\frac{n_1}{n_x}$	0	0	1	$\sqrt{\frac{\eta}{\vartheta}}$
$\frac{n_2}{n_x}$	$\sqrt{\frac{3 + \vartheta}{\vartheta}}$	$\sqrt{\frac{3 + \vartheta}{\vartheta}}$	$\sqrt{\frac{\eta}{\vartheta}}$	1

Przebieg tej funkcji przedstawiono na wykresach¹⁾ (rys. 7) dla wartości granicznych η i trzech wartości ϑ . Na osi odciętych podano podwójną podziałkę dla $\psi = \frac{j_0}{z}$ i $\frac{l_0}{z}$. Dla $\frac{n_2}{n_x}$ podano wartości $\frac{1}{\vartheta}$, ponieważ przy tych wartościach można dokładniej interpolować.



Rys. 7

Bezwzględna wartość n_1 i n_2 łatwo znaleźć, wyznaczając n_x z poprzednich wykresów:

$$n_x = n_z \sqrt{\frac{D_0}{C_0}} = \frac{n_z}{\sqrt{\eta}}$$

¹⁾ Podobne wykresy podaje Rausch (*Maschinenfundamente*, tom I Berlin 1936, str. 71), lecz tylko dla prostopadłościanu — ($\theta = 1$) i oczywiście bez uwzględnienia zależności C_x i C_z od F .

lub wprost

$$n_x = K_x \frac{\sqrt{\sqrt{F} + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\varphi} \right)}}{\zeta},$$

gdzie

$$K_x = \frac{30 \sqrt{D_0}}{\sqrt[4]{G_K p_0}}.$$

3. 2. 5. BADANIE ZMIENNOŚCI n_1 i n_2 PRZY ZMIANIE $F=bl$

Jeżeli teraz, podobnie jak poprzednio, dla ustalonego kształtu i wielkości korpusu fundamentu dobieramy wielkość płyty fundamentowej o ustalonej grubości (lub o ustalonym ciężarze na jednostkę pola), to ze zmianą l ulega zmianie również z i ϑ . Dla danego gruntu η pozostaje stałe.

Zmiana z ma tylko to znaczenie, że trzeba tę wielkość obliczyć dla każdej wartości l . Zmiana ϑ pociąga za sobą przejście z jednej krzywej na drugą (rys. 7).

Gdy l i φ rosną, to z początku (dla $\varphi < 1$) ϑ szybko maleje, dalej maleje coraz wolniej, wreszcie (przeważnie już poza wykresem) powoli wzrasta, zmierzając asymptotycznie do 1. Ma to taki skutek, że $\frac{n_2}{n_x}$ zmienia się bardzo powoli ze zmianą ϑ . Na wykresie zaznaczono kilka punktów dla dwóch charakterystycznych przykładów (uproszczonych):

	Wysoki fundament	Niski fundament
	$\eta = 1,5$	$\eta = 1,5$
ciężar korpusu	$G_k = 100 \text{ t}$	$G_k = 50 \text{ t}$
promień bezwł. korpusu	$j_k = 2,00 \text{ m}$	$j_k = 1,22 \text{ m}$
wysokość środka ciężkości korpusu ponad stopą fundamentową	$z_k = 4,00 \text{ m}$	$z_k = 2,50 \text{ m}$
wysokość środka ciężkości płyty dolnej	$z_p = 0,50 \text{ m}$	$z_p = 0,50 \text{ m}$
ciężar jednostkowy płyty	$p_p = 2,2 \text{ t/m}^2$	$p_p = 2,4 \text{ t/m}^2$
stała	$\varphi = \frac{5}{3},$	$\varphi = 1,00$

Zmieniamy płytę przyjmując kolejno: $l=3,0$; $6,0$; $12,0 \text{ m}$.

Na podstawie tych i szeregu innych przykładów można stwierdzić, że stosunek $\frac{n_2}{n_x}$ praktycznie nie zależy od wielkości stopy fundamentowej, podobnie jak to ma miejsce dla częstości drgań pionowych n_z .

Stosunek $\frac{n_1}{n_x}$ zależy znów w bardzo małym stopniu od ϑ i η , a więc możemy wyznaczyć wartość n_1 z dobrym przybliżeniem bez obliczania tych współczynników lub też przyjmując je szacunkowo.

Dla $\vartheta > \eta$ krzywe w prawym końcu wykresu rozbiegają się. Jest to jednak bez znaczenia, ponieważ duże ϑ nie występują w praktyce przy dużym stosunku $\frac{l}{z}$.

4. WNIOSKI PRAKTYCZNE

4.1. DOKŁADNOŚĆ OBLICZEŃ

Należy brać pod uwagę, że dla gruntów nie można określić ścisłych wartości współczynników podatności, nawet w przypadkach przeprowadzonych bez zarzutu prób dynamicznych, dlatego że zmieniają się one w czasie pod wpływem czynników obiektywnych, jak wilgotność, oraz często pod wpływem pracy samej maszyny. Dlatego jest celowe przeprowadzenie obliczeń równoległe dla dwóch granicznych wartości współczynników podatności albo odpowiednie poszerzenie obliczeniowej strefy rezonansu.

Dalsze niedokładności wynikają z nieściśłego spełnienia założeń z 2.1. W tej sytuacji duża dokładność obliczeń jest zupełnie niecelowa. Bezprzedmiotowe byłoby posługiwanie się wykresami dla n_z (rys. 1 do rys. 4) w praktycznych obliczeniach. Posłużyły one jedynie do udowodnienia tej niniejszej pracy.

Dla konstrukcji przyjmuje się zwykle strefę rezonansu¹⁾:

$$0,8 n_m \text{ do } 1,25 n_m,$$

n_m — częstość drgań wzbudzających.

Przyjmując, że z nieściśłości założeń i metod, może powstać błąd około $\pm 10\%$, możemy przyjąć strefę rezonansu dla obliczeń przeprowadzonych dla granicznych wartości:

$$\left(\frac{0,8}{1,10} \text{ do } \frac{1,25}{0,90} \right) n_m \approx (0,7 \text{ do } 1,4) n_m. \quad (36)$$

Gdy chcemy posługiwać się tylko jedną wartością, to przyjmujemy

$$C_0 = \sqrt{C_{0 \max} \cdot C_{0 \min}} \quad (37)$$

¹⁾ Kłóś, op. cit. str. 107.

i wtedy, ponieważ C_0 wchodzi do wzorów na częstość drgań pod pierwiastkiem, strefa rezonansu będzie

$$\left(0,7 \cdot \sqrt[4]{\frac{C_{0\min}}{C_{0\max}}} \quad \text{do} \quad 1,4 \sqrt[4]{\frac{C_{0\max}}{C_{0\min}}}\right) n_m, \quad (38)$$

dla $\frac{C_{0\max}}{C_{0\min}} = 2$ wzór (38) da wartości:

$$(0,6 \text{ do } 1,65) n_m$$

4.2. WNIOSKI ZASADNICZE

Częstości drgań własnych fundamentów pionowych n_z i wahadłowych wokół górnego bieguna n_2 są praktycznie niezależne od wielkości stopy fundamentowej i w małym stopniu zależą od ciężaru całkowitego G .

Jeśli więc dla pierwszej przyjętej wielkości stopy fundamentowej stwierdzimy, że znajdujemy się w strefie rezonansu, to nie ma praktycznej możliwości wyjścia z niej. Spotykane często w literaturze zalecenia przekonstruowania fundamentu dla uniknięcia rezonansu są przy przyjęciu wzorów Sawinowa bezprzedmiotowe.

Częstość n_1 drgań własnych wahadłowych wokół dolnego bieguna jest praktycznie niezależna od wielkości η i ϑ . Przy bardzo wysokich i krótkich fundamentach ($\psi < 1$) można zmieniając długość l uzyskać znaczne zmiany częstości n_1 . Dla dużych wartości ψ częstość n_1 staje się praktycznie niezależna od l i bliska n_z , a więc znów nie istnieją możliwości wyjścia z rezonansu.

4.3. TOK POSTĘPOWANIA PRZY USTALANIU WIELKOŚCI STOPY FUNDAMENTOWEJ I OKREŚLANIU STROJENIA

1. Obliczamy w przybliżeniu G , dobieramy F i φ i wyznaczamy

$$n_z = 30 \frac{\sqrt{\frac{C_0}{\sqrt{p_0}} \sqrt{F} + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\varphi} \right)}}{\sqrt{G}},$$

$$n_x = \frac{n_z}{\sqrt{\eta}}$$

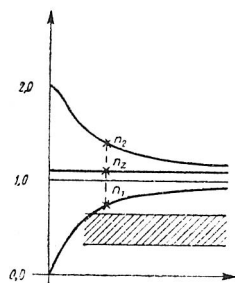
oraz przyjmujemy granice strefy rezonansu według 4.1.

2. Obliczamy wysokość środka ciężkości z i przyjmujemy Δl z rys. 5, znajdujemy $l_0 = l + \Delta l$ oraz

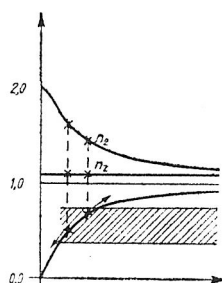
$$\psi = \frac{l_0}{z\sqrt{12}}$$

i stwierdzamy, w jakim obszarze rysunku 7 znajdują się punkty odpowiadające n_1 i n_2 dla naszego fundamentu i jakie jest położenie obszaru rezonansu (co możemy łatwo zrobić mając wartość n_x).

3. Jeżeli okaże się, że górna granica strefy rezonansu leży poniżej n_1 dla $\vartheta=1,0$ (rys. 8), mamy wówczas strojenie zdecydowanie wysokie



Rys. 8



Rys. 9

dla wszystkich drgań w płaszczyźnie rysunku. Wtedy można przyjąć $\vartheta=1,0$ i obliczyć odpowiednie współczynniki dynamiczne. Obliczenie dynamiczne jest zakończone.

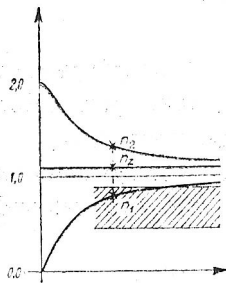
4. Jeżeli stwierdzimy, że n_1 leży w strefie rezonansu, wtedy postępujemy zależnie od wielkości ψ .

Dla małych ψ (fundamenty wysokie i krótkie — rys. 9) istnieje możliwość wyjścia z rezonansu przez odpowiednie zaprojektowanie płyty fundamentowej. Należy z tej możliwości skorzystać, ponieważ rezonans w n_1 dla wysokich fundamentów pociąga za sobą duże amplitudy.

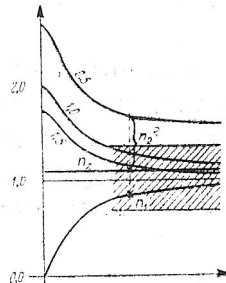
Przyjmując płytę mniejszą, posuwamy się po krzywej n_1 w lewo i otrzymujemy strojenie wysokie. Wybór zależy od możliwości konstrukcyjnych i warunków miejscowych.

Dla dużych ψ (fundamenty niskie i długie — rys. 10) krzywa n_1 przebiega prawie poziomo i nie ma praktycznych możliwości wyjścia z rezonansu. Częstotliwości n_1 , n_2 i n_3 są tu niezbyt odległe od siebie, tak że przy rezonansie w n_1 otrzymujemy dość wysokie współczynniki dynamiczne dla n_2 i n_3 . Ponieważ dla niskich fundamentów przyjęcie nieco wyższych wartości współczynników dynamicznych na ogół nie wpływa na wymiarowanie, możemy postąpić, jak podano niżej.

5. Przy dużych ψ zdarza się często, że częstotliwości n_1 i n_2 znajdują się w strefie rezonansu (rys. 11). Położenie n_2 można określić dopiero po dokładnym ustaleniu ϑ , ale jest oczywiste, że częstota ta, o ile nie leży również w strefie rezonansu, znajduje się w pobliżu jej granicy. Wobec wątpli-



Rys. 10



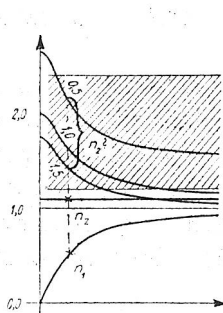
Rys. 11

wych korzyści ze zmuśnionych obliczeń wielkości ϑ , można dla wszystkich trzech rodzajów drgań przyjąć rezonansowy współczynnik dynamiczny.

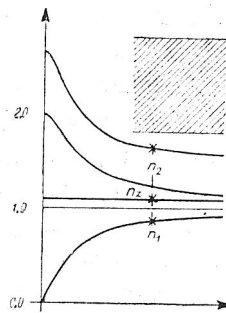
6. Jeżeli dla małych ψ istnieje prawdopodobieństwo, że n_2 znajduje się w strefie rezonansu (rys. 12), należy sprawę tę wyjaśnić, obliczając wielkość:

$$\vartheta = \frac{i^2}{j_0^2 + \frac{z^2}{3}}$$

Jest to jedyny przypadek, w którym to obliczenie jest celowe. Jest ono konieczne również ze względu na obliczenie amplitud, obowiązkowe



Rys. 12



Rys. 13

w tym przypadku. Częstota n_2 może znajdować się jednocześnie w strefie rezonansu lub też pozostawać poniżej tej strefy.

7. Jeżeli wreszcie częstota n_2 dla $\vartheta=0,5$ znajduje się poniżej strefy rezonansu (rys. 13), mamy do czynienia ze strojeniem zdecydowanie niskim.

Przyjmujemy $\vartheta = 0,5$ i obliczamy współczynniki dynamiczne. W razie wątpliwości obliczamy dokładniej ϑ .

8. Warto wreszcie zaznaczyć, że dla wartości C_0 podanych w tablicy w rozdz. 2 i przy praktycznie stosowanych obciążeniach jednostkowych gruntu, częstość drgań pionowych

$$n_z \approx (500 \text{ do } 1400) \text{ drg/min},$$

a wartość porównawcza

$$n_x \approx (400 \text{ do } 1200) \text{ drg/min}.$$

W związku z tym, dla częstości drgań wzbudzających

$$n_m = (500 \text{ do } 1000) \text{ drg/min}$$

w ogromnej większości praktycznych przypadków będziemy mieli rezonans dla częstości n_1 , n_z i n_2 .

Katedra Budownictwa Przemysłowego

Wpłynęło do Redakcji w lutym 1953 r.

LITERATURA

- [1] N. A. Cytowicz, *Mechanika gruntów*, Moskwa-Leningrad, 1951.
- [2] Cz. Kłos, *Fundamenty pod maszyny*, Warszawa 1949.
- [3] I. Kisiel, *Działania dynamiczne w budownictwie*, Gliwice, 1949.
- [4] E. Rausch, *Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben*, tom I, Berlin, 1936.

РЕЗОНАНС МАССИВНЫХ ФУНДАМЕНТОВ

В статье рассмотрен вопрос изменения частоты собственных колебаний массивных фундаментов при изменении их размеров и веса. После сравнения различных методов определения динамических коэффициентов постели выбрано для дальнейших исследований формулы Савинова.

Далее рассмотрены факторы влияющие на частоту собственных колебаний, в зависимости от величины их влияния на частоту, число их сведено до минимума.

Основываясь на соответствующим образом определенных понятиях расчетной площади и расчетной формы фундамента автор доходит до следующих результатов:

- а) вертикальные колебания практически не зависят от величины площади основания и мало зависят от веса фундамента;
- в) зависимость верхних горизонтальных колебаний от веса и площади основания фундамента выражается аналогично вертикальным;

с) нижние горизонтальные колебания сильно зависят от отношения длины площади основания к её ширине.

В заключение приведены некоторые практические указания для проектировщиков.

RESONANZ DER MASSIVEN FUNDAMENTE

Der vorliegende Aufsatz betrachtet die Änderung der Eigenschwingzahlen des massiven Maschinenfundamentes infolge der Änderung seines Gewichtes und seiner Abmessungen. Zuerst werden einige Methoden zur Bestimmung der dynamischen Bettungsziffer verglichen und als Folge dieses Vergleichs die Sawinowschen Formeln zu weiteren Betrachtungen angenommen.

Weiter werden einzelne Faktoren betrachtet, die den Einfluss auf die Eigenschwingzahlen erzeugen; in Abhängigkeit von der Wichtigkeit und der Stärke des Einflusses wird die Anzahl dieser Faktoren zum Minimum gebracht. Auf Grund der entsprechend definierten Begriffe der Berechnungsfläche und Berechnungsgestalt des Fundamentes kommt der Autor zu folgenden praktischen Schlüssen:

a) dass die betrachteten Eigenschwingungen praktisch von der Grösse der Grundfläche des Maschinenfundamentes unabhängig und vom Gewicht nur in geringem Masse abhängig sind,

b) dass die Abhängigkeit der oberen Pendelschwingungen von der Grundfläche und dem Gewicht sich ähnlich wie in Falle a) gestaltet,

c) dass die unteren Pendelschwingungen in starkem Maasse von dem Verhältniss der Länge zur Breite der Fundamentsgrundfläche abhängen.

Zum Schluss werden einige praktische Bemerkungen zum Entwerfen der massiven Maschinenfundamente angegeben.