



7 4434
C813

ZESZYTY NAUKOWE
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Nr 8

858/97/8

BUDOWNICTWO

II

WROCŁAW 1955
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

Adam Cybulski, <i>Krótki rys rozwoju metody kolejnych odkształceń</i>	3
Stefan Fuliński, <i>Zastosowania równania operatorowego osi odkształconej pręta do wyznaczania linii wpływowej</i>	17
Jan Langer, <i>W sprawie modernizacji metody wymiarowania żelbetu w mostownictwie</i>	29
Adam Mitzel, <i>Przyczynek do zagadnienia zbiorników prostokątnych</i>	41
Augustyn Borecz, <i>Wyniki badań na modelu łupiny konoidalnej</i>	53
Igor Kisiel, <i>Drgania tłumione tarczy na sprężystym podłożu</i>	83
<i>Kronika zebrań naukowych Wydziału Inżynierii Politechniki</i>	95
Recenzje	
Igor Kisiel, <i>Kilka uwag o pewnej rozprawie naukowej</i>	101

ZESZYTY NAUKOWE
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Nr 8

BUDOWNICTWO

II

WROCŁAW 1955
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

REDAKTOR ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Igor Kisiel

REDAKTOR DZIAŁU

Adam Mitzel

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WROCŁAW 1955

Nakład 900+125 egz. Ark. wyd. 7,5, druk. 6,75	Oddano do składania 28. V. 1955 r.
Papier druk. sat. kl. V, 70g 70 × 100	Podpisano do druku 23. IX. 1955 r.
Cena zł 15. —	Druk ukończono w październiku 1955 r.
Nr zam. 741/55	F-6-2264

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

KRÓTKI RYS ROZWOJU METODY KOLEJNYCH ODKSZTAŁCEŃ

E R R A T A

Strona	wiersz		jest	ma być
	od góry	od dołu		
18	8		Hy'	EIy'
18	14		$EIy(l)$	$EIy''(l)$
32		1	$\frac{k_z}{3}$	$\frac{k_x}{3}$
33	wzór (8)		O_b	σ_b
48	15		1,2,3	41, 42, 43
104		18	przyłożone	przyłożenia
104		16	położenie	położone
45	9		wyrażenie stojące po $p_0 h \pi$ aż do końca wzoru należy wziąć w nawiasy	

Budownictwo II

dostatecznie wyjaśniony; poza tym spór ten może być pouczającym przykładem, na jakie trudności napotyka nieraz nowy pomysł wskutek niezrozumienia jego istoty czy też nieuzasadnionego uprzedzenia.

Mam zamiar wykazać niesłuszność zarzutów stawianych przez przeciwników tej metody. Dadzą się one ująć w następujące punkty:

- 1) metoda ta nie ma naukowego uzasadnienia;
- 2) daje wyniki przybliżone;
- 3) jest niedydaktyczna.

Stąd wysuwa się aż tak daleko idące wnioski, że metoda ta powinna być z użycia w praktyce, a tym samym z nauczania, usunięta.

REDAKTOR ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Igor Kisiel

REDAKTOR DZIAŁU

Adam Mitzel

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WROCŁAW 1955

Nakład 900 + 125 egz. Ark. wyd. 7,5, druk. 6,75	Oddano do składania 20. V. 1955 r.
Papier druk. sat. kl. V, 70g 70 × 100	Podpisano do druku 23. IX. 1955 r.
Cena zł 15.—	Druk ukończono w październiku 1955 r.
Nr zam. 741/55	F-6-2264

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

KRÓTKI RYS ROZWOJU METODY KOLEJNYCH ODKSZTAŁCEŃ

ADAM CYBULSKI, mgr inż., profesor Statyki Budowli

Autor omawiając rozwój metody kolejnych przybliżeń stosowanej do obliczania ustrojów prętowych, opartej na pierwotnym myślowym unieruchomieniu wszystkich węzłów i kolejnym ich zwalnianiu, usiłuje zwalczyć zarzuty stawiane niejednokrotnie tej metodzie, wykazując ścisłość jej założeń i korzyści z jej stosowania w praktyce, jak również i jej zalety dydaktyczne.

Do napisania niniejszego skłoniły mnie następujące okoliczności:

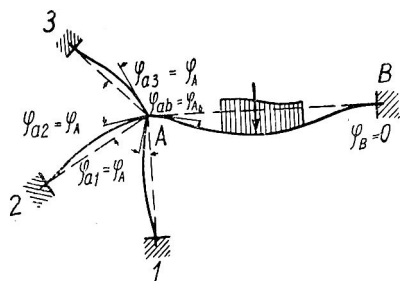
Od dłuższego czasu toczy się u nas spór na temat stosowania do obliczania ustrojów prętowych metody kolejnych przybliżeń, opartej na pierwotnym myślowym unieruchomieniu wszystkich węzłów i późniejszym ich kolejnym „zwalnianiu”. Wydaje się, że obecnie spór ten stracił już na ostrości. Bardzo wyraźnie wystąpił on natomiast przy opracowywaniu przez zespół programowy szczegółowych programów nauczania przy czym ostatecznie został rozstrzygnięty na korzyść omawianej metody. Jednocześnie zostało, mam wrażenie, wyjaśnione nieporozumienie, będące, moim zdaniem, głównym podłożem sporu. Jeżeli jednak mimo to zdecydowałem się na opublikowanie tego opracowania, to czynię to dlatego, że sądząc z niektórych wypowiedzi zarówno w dyskusjach jak i w prasie technicznej, problem ten w rzeczywistości nie został jeszcze dostatecznie wyjaśniony; poza tym spór ten może być pouczającym przykładem, na jakie trudności napotyka nieraz nowy pomysł wskutek niezrozumienia jego istoty czy też nieuzasadnionego uprzedzenia.

Mam zamiar wykazać niesłuszność zarzutów stawianych przez przeciwników tej metody. Dadzą się one ująć w następujące punkty:

- 1) metoda ta nie ma naukowego uzasadnienia;
- 2) daje wyniki przybliżone;
- 3) jest niedydaktyczna.

Stąd wysuwa się aż tak daleko idące wnioski, że metoda ta powinna być z użycia w praktyce, a tym samym z nauczania, usunięta.

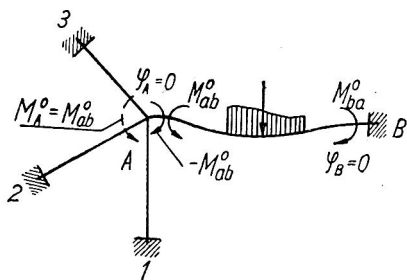
Zarzut pierwszy powstał prawdopodobnie w związku z tym, że przy objaśnianiu tej metody używa się z reguły obrazowego przedstawienia unieruchomienia węzłów przez specjalny mechanizm w postaci fikcyjnej ściany, śrubki zaciskającej itp. Aby wykazać niesłuszność tego zarzutu, jak i pozostałych, postaram się istotę tej metody wyjaśnić posługując się wyłącznie pojęciami i twierdzeniami z mechaniki budowli.



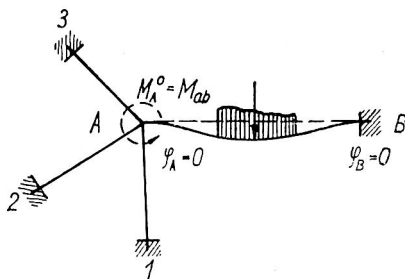
Rys. 1a

Wyobraźmy sobie pręt AB utwierdzony na końcu B idealnie sztywno, na końcu A sprężysto (rys. 1a). Wskutek obciążenia pręta AB węzeł A ulegnie obrotowi o kąt φ_A , a na koniec A pręta AB będzie działał pewien moment M_{ab} . Wartość tego momentu można obliczyć jedną z tzw. metod klasycznych, np. ze wzoru na moment podporowy belki sprężysto ze względu na obrót utwierdzonej, obliczywszy uprzednio wartość k_{ab} współczynnika oporu sprężystego utwierdzenia końca A pręta AB przez trzy pręty $A1$, $A2$ i $A3$. Postać odkształcona przedstawiona jest na rys. 1a.

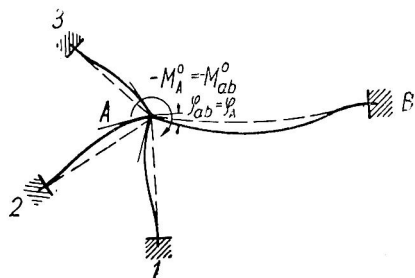
Przy metodzie kolejnych przybliżeń postępujemy inaczej. Jako pierwsze przybliżenie zakładamy, że węzeł A jest unieruchomiony, tzn. w naszym przypadku nie może się obrócić. Można to osiągnąć, obciążając węzeł A dodatkowo momentem o takim zwrocie i takiej wartości, by węzeł A na skutek łącznego obciążenia ustroju obciążeniem zadanym i momentem dodatkowym



Rys. 1b



Rys. 1c

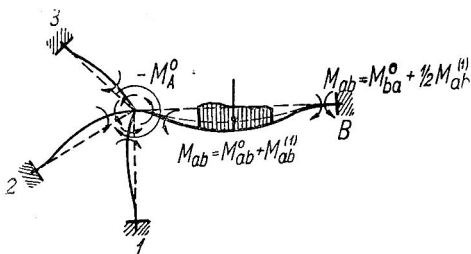


Rys. 1d

nie doznał obrotu. Wobec tego założenia, na koniec A pręta będzie działał moment odpowiadający momentowi pełnego utwierdzenia. Moment ten nazywać będziemy momentem wyjściowym, a jego wartość

oznaczymy symbolem M_{ab}^0 . W naszym przypadku będzie to moment lewoskrętny (rys. 1b). Na węzeł A działa zatem moment o tej samej wartości, ale prawoskrętny. Moment ten spowodowałby sprężysty obrót węzła A . Aby do tego nie dopuścić, należy obciążyć dodatkowo węzeł A momentem lewoskrętnym M_A^0 o wartości równej M_{ab}^0 (rys. 1b, i 1c). W konsekwencji pręty $A1, A2, A3$ nie ulegną odkształceniu, a na końcach pręta AB powstaną momenty M_{ab}^0 i M_{ba}^0 (rys. 1b).

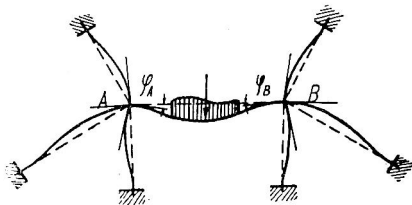
W rzeczywistości obciążenie węzła A momentem M_A^0 nie istnieje. Należy zatem w celu otrzymania właściwego rozwiązania przyłożyć do węzła A moment o wartości $-M_A^0 = -M_{ab}^0$ (w naszym przypadku prawoskrętny), czyli „odciążyć” węzeł A . W konsekwencji węzeł A dozna obrotu o kąt φ_A , na końcach A prętów zbiegających się w tym węźle powstaną momenty o wartościach $M_{ab}^{(1)}, M_{a1}^{(1)}, M_{a2}^{(1)}, M_{a3}^{(1)}$, a na końcach przeciwnych momenty o tych samych zwrotach, ale dwa razy mniejsze. A zatem na końcu B pręta AB powstanie moment $M_{ba}^{(1)} = \frac{1}{2} M_{ab}^{(1)}$. Po dodaniu odpowiednich wartości otrzymamy wynik w tym przypadku matematycznie ścisły. Ostateczne wartości momentów utwierdzenia pręta AB (rys. 1e) wyniosą



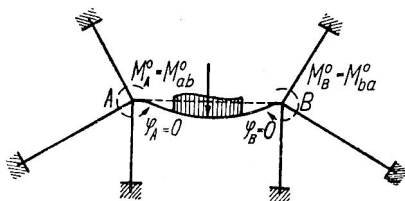
Rys. 1e

$$M_{ab} = M_{ab}^0 - M_{ab}^{(1)}; \quad M_{ba} = M_{ba}^0 + \frac{1}{2} M_{ab}^{(1)}.$$

Rozumowanie to jest podstawą metody, którą, wydaje mi się, byłoby najsluszniej nazywać metodą kolejnych odkształceń.



Rys. 2a.



Rys. 2b.

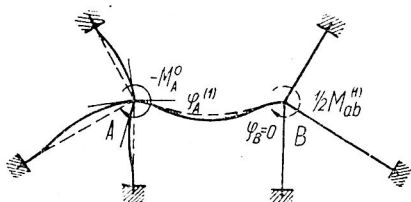
W przypadku, gdy pręt AB na końcu B jest również sprężysto utwierdzony (rys. 2a), wynik matematycznie ścisły otrzymalibyśmy za pomocą szeregów nieskończonych. Natomiast drogą kolejnych przybliżeń będziemy mogli zbliżyć się dowolnie blisko do tego matematycznie ści-

słego wyniku. Zależać to będzie jedynie od ilości tzw. cykli i dokładności działań. Jest to zresztą cechą wszystkich metod iteracyjnych, które już dawno uzyskały prawo obywatelstwa.

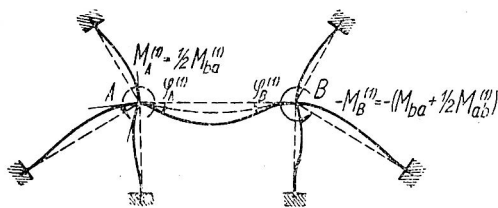
W przypadku rozpatrywanym będziemy musieli w schemacie wyjściowym obciążyć dodatkowo oba węzły A i B odpowiednio momentami $M_A^0 = M_{ab}^0$ (lewoskrętny) oraz $M_B = M_{ba}^0$ (prawoskrętny), jak pokazano na rysunku 2b.

„Odciażanie” węzłów będziemy przeprowadzać kolejno w założeniu, że nie mogą się obracać wszystkie węzły, z wyjątkiem odciażanego; w tym założeniu obliczone są rozdzielniki i przenośniki. Założenie to wymaga dalszych dodatkowych obciążeń odpowiednimi momentami skupionymi węzłów, sąsiadujących z węzłem odciażanym. I tak w naszym przypadku wskutek „odciażenia” węzła A , węzeł ten obróci się o kąt $\varphi_A^{(1)}$ i w przekrojach przywęzłowych prętów zbiegających się w węzle A powstaną momenty $M_{ab}^{(1)}$, $M_{a1}^{(1)}$, $M_{a2}^{(1)}$ oraz $M_{a3}^{(1)}$, a na przeciwległych końcach momenty dwa razy mniejsze. Wynika stąd, że „odciażając” węzeł A , aby do obrotu węzła B nie dopuścić, należy przyłożyć do niego moment prawoskrętny o wartości $\frac{1}{2} M_{ab}^{(1)}$ (rys. 2c). W rezultacie węzeł B jest do-

datkowo obciążony momentem $M_B^{(1)} = M_{ba}^0 + \frac{1}{2} M_{ab}^{(1)}$, dzięki czemu obrotu nie dozna. Należy go następnie „odciażyć”, przykładając moment o tej samej wartości, ale o odwrotnym zwrocie (rys. 2d), co spowoduje obrót



Rys. 2c



Rys. 2d

węzła B o kąt $\varphi_B^{(1)}$ i wywola na końcach B prętów zbiegających się w węzle B odpowiednie momenty (obliczone według rozdzielników) $M_{ba}^{(1)}$, $M_{b4}^{(1)}$, $M_{b5}^{(1)}$ i $M_{b6}^{(1)}$, na przeciwległych zaś końcach (utwierdzonych) momenty dwa razy mniejsze o tych samych zwrotach. Aby węzeł A w wyniku obciążenia węzła B momentem $-M_B^{(1)}$ nie uległ obrotowi, należy obciążyć go momentem (lewoskrętnym) $M_A^{(1)} = \frac{1}{2} M_{ba}^{(1)}$.

„Odciażamy” powtórnie węzeł A przykładając moment $-M_A^{(1)}$, obliczamy $M_{ab}^{(2)}$, obciążając jednocześnie węzeł B momentem $M_B^{(2)} = \frac{1}{2} M_{ab}^{(2)}$ itd., aż wartości $\frac{1}{2} M_{ab}^{(n)}$ bądź $\frac{1}{2} M_{ba}^{(n)}$ przy n -tym cyklu będą z punktu widzenia praktycznej dokładności dostatecznie małe, czyli gdy warunek równowagi węzłów $\sum M_{ai} = 0$ oraz $\sum M_{bi} = 0$ zostanie spełniony z dostateczną dokładnością.

W rozważanych przykładach momenty wyjściowe występowały wskutek obciążenia pręta AB . Nic jednak w naszym rozumowaniu nie zmieni się, jeżeli momenty te powstaną wskutek wzajemnego poprzecznego przemieszczenia węzłów, co ma miejsce w ramach o węzłach przesuwnych lub w wyniku zmian temperatury.

Gdy końce przeciwległe 1, 2, 3, 4... prętów zbiegających się w węzłach A bądź B są utwierdzone sprężystości w węzłach 1, 2, 3, ... to kolejne dodatkowe obciążanie i następnie odciażanie węzłów obejmie również i tamte węzły w myśl poprzednio wyłożonej zasady opartej na zupełnie ścisłym rozumowaniu.

W przypadku ram o węzłach przesuwnych wykorzystujemy dla obliczenia tzw. współczynników poprawkowych warunki równowagi wyciętej lub odciętej części ustroju, a zatem opieramy się również na ścisłej zasadzie, identycznie jak w tzw. metodzie odkształceń Mohra.

Na analogię między metodą Mohra i Crossa zwrócił już dawno uwagę prof. dr S. Błaszowskiak [1] porównując między innymi układ równań z układem tablicy iteracyjnej i wykazując w ten sposób naocznie, że metoda Crossa jest jednym ze sposobów iteracyjnych rozwiązywania równań liniowych.

W tejsze pracy znajdujemy przykład wyprowadzenia tą metodą ścisłego wzoru teoretycznego na momenty przywęzłowe w ramie jednokomorowej, co wskazuje na ścisłość założeń w tej metodzie.

Toteż jest dla mnie zupełnie niezrozumiałe, dlaczego właśnie ten sposób rozwiązywania równań w zastosowaniu do zagadnień technicznych spotkał się z tak wielkim sprzeciwem pewnej grupy naukowców-statyków.

Istnieją niewątpliwie zawsze różnice w poglądach co do celowości stosowania takiej czy innej metody rozwiązywania równań. I tak np. prof. Prokofiew [14] zaleca rozwiązywanie równań sprężystości za pomocą algorytmu Gaussa, uważając jednak również za celowe stosowanie przy obliczaniu ram skomplikowanych między innymi Metody Crossa, którą zresztą niesłusznie zalicza do metod przybliżonych; Nikołajew [11], omawiając metodę kolejnych przybliżeń Southwella, o czym będę mówił

szerzej później, wyraża się o sposobie Gaussa jako o bardzo uciążliwym. U nas mamy gorących zwolenników (i słusznie) metod krakowianowych, choć słyszałem też zdanie, że np. w pewnych przypadkach w zastosowaniu do zagadnień geodezyjnych sposób Gaussa jest wygodniejszy w użyciu; znane są powszechnie i coraz częściej stosowane metody iteracyjne. Oczywiście każdy ze sposobów ma swoje dodatnie i ujemne strony, występujące z większą lub mniejszą wyrazistością, w zależności od przypadku, w którym jest stosowany.

Jeśli spór w sprawie stosowalności tzw. metody Crossa przybrał takie rozmiary, to chyba dlatego, że przez długi czas nie zauważono związku między tzw. sposobem kolejnych przybliżeń Crossa a sposobem iteracji, stosowanym już dawno do rozwiązywania równań. Prawdopodobnie sami nawet autorzy początkowo nie spostrzegli tego związku.

Niewątpliwie z punktu widzenia matematycznego sposoby kolejnych przybliżeń nie dają wyników ścisłych. Z punktu widzenia technicznego natomiast ścisłość wyników zależy jedynie od założeń, jakie przyjęto za podstawę do obliczeń, a dokładność tych wyników może być doprowadzona do dowolnie obranej granicy. I tak np. pierwotny sposób podany przez Crossa w zastosowaniu do obliczania ram, nie uwzględniający przesuwu węzłów, dawał wyniki równorzędne z wynikami otrzymanymi za pomocą metody odkształceń Mohra jedynie w przypadku ram o węzłach nieprzesuwnych. Nieścisłość wyników otrzymanych obydwoma sposobami spowodowana jest jedynie nieuwzględnieniem wpływu odkształceń wywołanych siłami osiowymi i tnącymi. Wprowadzeniu do pierwotnego sposobu Crossa poprawki, opublikowanej przez Pilkeya, uwzględniającej wpływ przesuwu węzłów, zawdzięczamy, że omawiana metoda kolejnych przybliżeń i metoda Mohra są również i w przypadku ram o węzłach przesuwnych z punktu widzenia ścisłości równorzędne.

Jako jeden z dowodów, że przez długi czas nie było to oczywiste, może posłużyć fakt, że sposób Crossa-Pilkeya podany był w literaturze niemieckiej w zeszycie *Bauingenieur* z 21 stycznia 1938 [3], a w tymże czasopiśmie w zeszycie z 5 kwietnia 1941 [6] spotykamy artykuł na analogiczny temat, zawierający zestawienie wyników, otrzymanych a) pierwotnym sposobem Crossa, b) nazywanym tam sposobem Crossa-Takabeya i c) sposobem ścisłym wraz ze skrupulatnym wyliczeniem wielkości błędów w procentach obliczonych w stosunku do wartości ścisłych. Należy podkreślić, że takie obliczanie wysokości błędu nie obrazuje wcale jego rzędu, gdyby bowiem ścisły wynik dawał wartość równą zeru, to najmniejszy błąd w procentach tak obliczonych byłby rzędu nieskończoność. Gdyby przytoczony tam przykład obliczono sposobem Cross-Pilkeya, otrzymano by wyniki zgodne z wynikami ścisłymi otrzymanymi bez uwzględnienia odkształceń wywołanych siłami osiowymi i tnącymi.

Potwierdzenie powyższego znajdujemy w II tomie *Kursu metalicznych konstrukcyj*, opracowanym przez prof. A. Geniewa i docenta W. Bałdina pod redakcją prof. Streleckiego [5]. Znajdujemy tam na stronie 433 w § 5 pod tytułem *Metod Hardy Crossa* opis sposobu obliczania ram z uwzględnieniem przesuwów, a na stronie 439 w § 6 pt. *Przybliżone sposoby Crossa* czytamy na wstępie:

„Przy dostatecznej ilości cykliów stopień dokładności metody Crossa można doprowadzić do stopnia dokładności metody odkształceń kątowych. Przy obliczaniu ram w przypadku obciążenia poziomego główna komplikacja wynika z konieczności rozwiązywania układu równań z wieloma niewiadomymi*). Żeby uniknąć układania i rozwiązywania równań z wieloma niewiadomymi, można do metody Crossa wprowadzić szereg założeń upraszczających, które dają rozwiązania przybliżone z dostateczną w wielu przypadkach praktycznych dokładnością”.

Do mylnego poglądu, że sposób Crossa-Pilkeya jest przybliżony, przyczynić się mógł niemiecki termin *Näherungsverfahren*, który można tłumaczyć jako metoda przybliżeń lub metoda przybliżona.

Pogląd, że sposób Crossa-Pilkeya, zwany zazwyczaj wprost sposobem Crossa, jest przybliżony, trwał bardzo długo. U nas na to nieporozumienie, o ile mi wiadomo, pierwszy zwrócił uwagę Błaszkwia [1] i niezależnie od niego były asystent Politechniki Śląskiej mgr inż. J. Niewiadomski.

Obecnie sprawa ta jest już chyba dostatecznie wyjaśniona: tzw. metoda Crossa jest po prostu jednym ze sposobów iteracji, dającym się zastosować do rozwiązywania równań liniowych. Osobliwość tego sposobu polega na tym, że kolejność przybliżeń znajduje swe odzwierciedlenie w technicznej analizie pracy ustroju prętowego, dobrane odpowiednio do układu równań. Jest rzeczą charakterystyczną, że sposób ten powstał właśnie na podstawie tej technicznej analizy i w zastosowaniu do obliczeń ustrojów prętowych, a dopiero potem zauważono możliwość rozszerzenia stosowności tego rodzaju metody do rozwiązywania równań, związanych z zagadnieniami zupełnie odrębnymi, jak zagadnienia drgań, stateczności ustrojów, zjawisk elektrycznych, akustycznych itd. Uważam, że właśnie dużą zaletą tego sposobu, w szczególności z punktu widzenia dydaktycznego, jest to techniczne podejście.

Pierwszym, któremu zawdzięczamy powyższy pomysł, jest O. Mohr (1906), dalej rozwijali ten pomysł S. Hardesty i I. Waddel (1916), Calisew (1922), Biernacki (1925), wreszcie rozpracował go i rozpowszechnił Cross (1930) i Pilkey (1932). Rozwinięciem omawianej metody jest metoda opracowana przez Southwella (1935) i nazwana przez niego

*) Sposób jednoetapowy podany przez Błaszkwia [1] usuwa tę niedogodność.

metodą relaksacji, czyli metodą odciążeń [15]. Southwell wychodził również z założenia całkowitego unieruchamiania węzłów i późniejszego kolejnego ich zwalniania, uogólniając stosowalność tej metody na wszelkiego rodzaju ustroje prętowe statycznie niewyznaczalne (kratownice oraz ramy płaskie i przestrzenne, ruszty itp.) oraz do rozwiązywania zagadnień z fizyki matematycznej. Metoda Crossa jest zatem w swej istocie szczególnym przypadkiem metody Southwella, choć formalnie metody te różnią się tokiem obliczeń.

Dowodem, że metoda kolejnych przybliżeń, opierająca się na technicznej interpretacji, budzi w świecie naukowym i wśród inżynierów praktyków duże zainteresowanie, może być znaczna ilość prac i artykułów, które zostały już opublikowane i którym metoda zawdzięcza swój dalszy rozwój i rozpowszechnienie. U nas pionierską w tej dziedzinie jest cytowana już poprzednio praca Błaszkowiaka [1], której niewątpliwie w znacznej mierze zawdzięczamy spopularyzowanie omawianej metody w naszym świecie naukowym i technicznym. W pracy tej Błaszkowiak wprowadził szereg chwytów upraszczających obliczenia; śmiało można powiedzieć, że jest ona kopalnią nowych pomysłów, będących podniecią dla innych do prac nad coraz dalszym udoskonaleniem tej metody i rozpowszechnieniem jej stosowalności. Wśród pomysłów na szczególne podkreślenie zasługuje wykorzystanie symetrii ustroju oraz wprowadzenie tzw. jednoetapowej iteracji, dzięki czemu odpada przy obliczaniu ram o wielu stopniach swobody przesuwu węzłów konieczność rozwiązywania układu równań dla wyznaczenia współczynników poprawkowych. W pracy tej Błaszkowiak rozszerzył stosowalność tej metody na zagadnienia wyboczenia i drgań układów ramowych, ilustrując zastosowanie wieloma przykładami.

Obecnie mamy już w literaturze znaczną ilość prac i artykułów poświęconych tej metodzie. Z nich najbardziej wyczerpująco omawia ten temat książka W. Poniza *Metoda kolejnych przybliżeń* część I [13]; sądzę, że interesujący się tą metodą oczekują niecierpliwie ukazania się części II. Poza tym opis tej metody znajdujemy w *Podręczniku Inżynierii* w opracowaniu E. Szczepaniaka [18] oraz w „Czasopiśmie Technicznym” w artykule I. Stella Sawickiego [16]. Posiadamy już szereg skryptów poświęconych tej metodzie, jak R. Mromlińskiego [9], Z. Kączkowskiego [8], Z. Grodeckiego [7]. W skrypcie J. Naleszkiewicza [10] znajdujemy opis metody relaksacji, a w książce W. Nowackiego i Dąbrowskiego [12] zalecenie stosowania metody Crossa do obliczania silosów z podaniem odnośnego przykładu.

Autorzy wyszczególnionych prac reprezentują różne ośrodki naukowe, co wskazuje na szerokie spopularyzowanie tej metody.

Wśród młodej kadry naukowej metody te cieszą się dużą atrakcyjnością i pobudzają ją do poszukiwania nowych dróg dla znalezienia dalszych zastosowań i ulepszeń. Tak np. na Politechnice Wrocławskiej osiągnęli już pewne cenne rezultaty prof. Z. Grodecki, st. asystent E. Gawrych oraz asystent J. Langer. Profesor Grodecki rozwinął sposób dobierania ustroju prętowego, odpowiadającego danemu układowi równań, podając jednocześnie chwyt, pozwalający na przyspieszenie iteracji, oraz ujął w pewien schemat obliczenie rusztu z uwzględnieniem skręcania. Również mgr inż. Langer opracowuje sposób obliczania rusztów, opartych na podobnych zasadach, ale w innym ujęciu. Mgr inż. Gawrych wypracował schemat, przyspieszający obliczenie belek ciągłych, doprowadzając w pewnych przypadkach do ścisłego ogólnego rozwiązania za pomocą szeregu nieskończonego. Należy podkreślić, że niewątpliwie zachętą i pomocą w powyższych pracach jest przykład prof. Błaszkwia i cytowana jego praca.

Znane mi opinie kierowników biur konstrukcyjnych potwierdzają celowość stosowania tej metody do obliczeń statycznych.

Nauka radziecka zajmuje się również bardzo żywo metodami kolejnych przybliżeń. I tak np. w *Inżynierom Sbornikie* tom XIII z 1952 r. (Wydawnictwo Akademii ZSRR) znajdujemy pracę B. I. Chudobca [2] pt. *Energetyczne metody kolejnych przybliżeń w teorii drgań i stateczności sprężystych układów prętowych*, a więc dotyczącą zagadnień, których rozwiązanie znajdujemy u Błaszkwia przy zastosowaniu innej metody. Cały XXVIII zeszyt *Trudy matematyčeskawo Instituta* z 1949 r. (Wydawnictwo Akademii Nauk ZSRR) poświęcony jest zagadnieniom tzw. analizy przybliżonej. Znajdujemy tam interesującą z punktu widzenia poruszanego tutaj tematu pracę M. I. Nikolajewa pt. *O relaksacjonnom metodie Southwella* [11].

„Metoda relaksacji, czytamy w artykule, powstała z dążenia w kierunku udoskonalenia i usprawnienia obliczeń, dotyczących szerokiego zakresu konstrukcji inżynierskich, tzw. ustrojów prętowych”. Autor stwierdza, że metoda ta jest szczególnym przypadkiem metody iteracji. Zaznacza przy tym, że aczkolwiek iteracja znana była już dawno w matematyce, nie znajdowała jednak długiego czasu zastosowania w obliczeniach inżynierskich. W Związku Radzieckim metoda iteracji została zastosowana do rozwiązywania ustrojów prętowych przez Biernackiego już w 1925 r.

Przeprowadzając na wstępie krótki przegląd chronologiczny metod iteracyjnych stosowanych w zagadnieniach inżynierskich (Biernacki 1925, Hardy Cross 1930, Southwell 1935) autor reasumuje: „Analiza tych metod wskazuje, że są one odmianami schematu wyliczeniowego i fizycznej interpretacji procesu iteracyjnego, znanego pod nazwą metody Seidla”. Autor podkreśla zaletę metody Southwella, wyrażającą się w fi-

zycznej interpretacji procesu iteracji, co często pomaga do ustalenia pewnych chwytów przyspieszających iterację, jak np. wybór pierwszych przybliżeń, relaksacja grupowa itp., prowadząc szybciej do wyniku niż sposób Gaussa. Autor artykułu zaznacza, że przy rozwiązywaniu układu równań liniowych można dobrać odpowiedni schemat statyczny z prętów sprężystych, co umożliwia techniczną interpretację i daje możliwość ustalenia wyżej wspomnianych chwytów przyspieszających obliczenie. Autor podając wykaz odnośnej literatury w języku angielskim, składającej się z 33 pozycji, wypowiada się o tych pracach następująco: „Zaletą tych prac, mało oryginalnych co do metody, jest rozpracowana technika wyliczeń i to, że rozpatrzono w nich dużą ilość ciekawych i ważnych zadań”.

W roku 1954 ukazała się książka P. Szagina [17], podająca metodę obliczania ram wielopiętrowych, będąca połączeniem metody kolejnych odkształceń i metody sprężystego utwierdzenia. Niestety, jej zastosowanie autor ogranicza do ram symetrycznych.

Timoszenko w pracy *Teoria konstrukcji* [19] podaje również metodę kolejnych przybliżeń, opartą na założeniach Mohra i rozpracowaną przez Crossa, zalecając ją jako bardzo pożyteczną przy rozwiązywaniu równań, otrzymanych przy zastosowaniu metody odkształceń.

Z punktu widzenia dydaktycznego omawiana metoda posiada duże zalety. Zmusza bowiem studenta do wniknięcia w fizyczną stronę zjawiska, w istotę pracy konstrukcji. Stwierdziłem w mojej pracy pedagogicznej, że prawdopodobnie właśnie dlatego jest ona dla studentów bardzo atrakcyjna. Zespół programowy dla wydziałów budownictwa lądowego wprowadził ją do oficjalnego programu, niestety, moim zdaniem, w zbyt szczupłym zakresie. Poza tym program ten przewiduje wyłożenie tej metody w III symestrze, kiedy studenci posiadają jeszcze za mało technicznego wyczucia pracy konstrukcji, a tym samym są mało przygotowani do przyswojenia sobie tej metody. Dla należytego zrozumienia istoty tej metody wskazane jest w toku wykładów ilustrowanie jej zasady na modelach, pozwalających na unieruchomianie i zwalnianie węzłów.

Oczywiście, na kursie magisterskim dział obliczania ustrojów prętowych powinien być potraktowany możliwie wszechstronnie, z zastosowaniem między innymi do rozwiązywania równań metod krakowianowych. Wyszczególnić tu należy pracę Z. Dowgirda i R. Dowgirda *Metody krakowianowe* [4], która dzięki usystematyzowaniu i zmechanizowaniu układania równań i ich rozwiązywania daje inżynierowi statykowi cenne narzędzie w jego pracy.

Wydaje mi się, że istotę sprawy naświetliłem dostatecznie wyczerpująco. Pozostałaby otwarta sprawa nazwy tej metody, sprawa natury czysto formalnej, którą można by poddać dyskusji. Czy zasługi Crossa

w tej dziedzinie są aż tak duże, by ten specjalny sposób iterowania nazwać jego imieniem, tym bardziej, że prymat nie należy do niego, lecz do Mohra, a dużo szersze ujęcie tego sposobu znajdujemy u Błaszkowiaka. Wydaje mi się, że z tych względów byłoby słuszniejsze ten sposób iterowania nazwać metodą Mohra-Crossa-Błaszkowiaka, albo wychodząc z założenia, że nazwa metody powinna możliwie odzwierciedlać jej istotę — metodą kolejnych odkształceń lub sposobem iteracji technicznej, dla odróżnienia od zwykłej iteracji matematycznej.

Nazwa „metoda kolejnych odkształceń” w zastosowaniu do sposobów obliczania ustrojów prętowych znajduje swe uzasadnienie w analogii do nazwy „metoda odkształceń Mohra”, stosowanej do obliczania ram; nazwa taka odzwierciedla sposób postępowania. Traci ona natomiast właściwy sens, gdy jest stosowana do rozwiązywania układu równań związanych z innymi zagadnieniami. Ponieważ jednak metoda ta daje i w tym przypadku możliwość dobrania odpowiedniego schematu statycznego w postaci układu prętów sprężystych (i to jest jedną z jej zalet), wydaje mi się, że proponowana nazwa jest uzasadniona.

Stosowanie nazwy „metoda Crossa” tłumaczy się tym, że poznaliśmy ją pod tą nazwą i nazwa taka przyjęła się. Zgodnie jednak z wyżej powiedzianym wydaje mi się, że nazwę tę należałoby zmienić. Na poparcie tego punktu widzenia dodam, że Timoszenko w uprzednio wymienionej pracy [19] metody tej nie nazywa metodą Crossa, podając tylko jego nazwisko jako tego, który metodę tę rozwinął.

Wydaje mi się, że analogicznie należałoby się zastanowić nad szeregiem innych stosowanych nazw, jak np. „metoda Rittera” na sposób obliczania momentów sił w prętach kratownic. Niewątpliwie w pomysłe będącym podstawą tego sposobu jest dużo mniej oryginalności niż w pomysłach Biernackiego, Crossa, Southwella czy Błaszkowiaka.

Reasumując, można stwierdzić, że omawiana metoda kolejnych odkształceń, oparta na równie ścisłych założeniach co i metoda odkształceń Mohra, zyskała sobie już mocną pozycję zarówno w świecie naukowym jak i technicznym, nie tylko jako narzędzie do obliczania ustrojów prętowych, ale również do rozwiązywania różnorodnych zagadnień z dziedziny techniki i fizyki matematycznej. Niewątpliwie nie wszystkie możliwości zastosowania zostały już wyczerpane. Tym wszystkim, którzy pracują nad rozszerzeniem zakresu stosowalności tej metody, należy życzyć jak najowocniejszych osiągnięć.

LITERATURA

- [1] S. Błaszkowiak, *Metoda Crossa*, Gdańsk 1948.
- [2] B. Chudobiec, *Energetičeskie metody posledowatielnych približenij*, Inżyniernyj Sbornik, t. XIII (1952).

- [3] W.Dernedde, *Näherungsweise Berechnung von durchlaufenden Trägern und Rahmen*. Der Bauingenieur, 21. 1. 1938.
- [4] Z. Dowgird i R. Dowgird, *Krakowianowe metody obliczania konstrukcji ramowych*, cz. I, Warszawa (1952).
- [5] A. Geniew i W. Baldin, *Kurs nietalliczeskich konstrukcyj*, Moskwa-Leningrad (1940).
- [6] J. Göttlicher, *Die Anwendung des Näherungsverfahrens nach Cross-Tababeya bei Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Stockwerkrahmen*, Der Bauingenieur, 5. 4. (1941).
- [7] Z. Grodecki, *Zadania z mechaniki budowli*, Wrocław-Warszawa (1949).
- [8] Z. Kączkowski, *Metoda Crossa*, Szczecin-Poznań (1949).
- [9] R. Mromliński, *Obliczenie belek ciągłych i ram metodą Crossa*, Wrocław (1949 i 1950).
- [10] J. Naleszkiewicz, *Wytrzymałość konstrukcji lotniczych*, Gdańsk (1950).
- [11] M. Nikolajew, *O relaksacjonnom nietodie Southwella*. Trudy matematyckaja Instituta, zesz. XXVIII (1949).
- [12] W. Nowacki i R. Dąbrowski, *Silosy*. Metody obliczeń i konstrukcja, Warszawa (1953).
- [13] W. Poniż, *Metoda kolejnych przybliżeń* (H. Crossa), Warszawa (1951).
- [14] I. P. Prokofiew, *Teoria sooruzenij*, cz. I, Moskwa (1947).
- [15] R. V. Southwell, *Relaxation Methods in Engineering Science*, Oxford (1940).
- [16] I. Stella-Sawicki, *Obliczanie belek ciągłych i ram metodą iteracji*. Czasopismo Techniczne. Kraków styczeń-luty (1948).
- [17] P. Szagin, *Rasczot mnogojarusnych ram sposobom posledowatel'no sopriażenija*, Leningrad-Moskwa (1954).
- [18] E. Szczepaniak, *Sposób Crossa rozwiązywania ram*. Podręcznik inżynierii, Warszawa (1948).
- [19] S. Timoszenko, D. Young, *Theory of Structures*, New York-London (1945)

Katedra Statyki Budowli

Wpłynęło do Redakcji w kwietniu 1954 r.

КРАТКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В статье рассмотрено историческое развитие метода последовательных приближений, известного до настоящего времени под наименованием „метода Кросса“; рассматриваемый метод расчета сооружений в некоторых кругах специалистов считается ненаучным и неточным.

На простом примере упруго закрепленного с обеих сторон стержня показано, что основы этого метода выводятся путем строгого рассуждения из основных теорем строительной механики, и что точность результатов расчета может быть доведена до любой желаемой степени в зависимости исключительно от числа приближений.

Исходные положения метода суть те же, что и метода деформаций Мора. Факт, что это тождество долгое время оставалось незамеченным, объясняется именно тем, что в рамках со смещающимися узлами первоначально не был разработан способ определения влияния этих смещений.

Крупным преимуществом метода для дидактических целей является то, что процесс итерации легко иллюстрируется физическим анализом деформаций упругой системы.

Благодаря такой физической интерпретации процесса последовательных приближений метод этот нашел применение при решении систем линейных уравнений в многочисленных задачах математической физики. Ускорение процесса сходимости можно достичь при помощи различных вычислительных приемов.

KURZE ÜBERSICHT ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER METHODE DER STUFENWEISEN ANNÄHERUNG

Im vorliegenden Aufsatz wird der Entwicklungsweg der Methode der stufenweisen Annäherungen besprochen. Das bis nun unter dem Namen „Cross'sche Methode“ bekannte Rechenverfahren wird in manchen Fachkreisen als unwissenschaftliches und ungenaues Verfahren bezeichnet.

Am einfachen Beispiel des beiderseitig eingespannten Stabes wird gezeigt, dass der Grundsatz dieser Methode sich auf Erwägungen stützt, die aus Begriffen der Baumechanik bestehen und dass die Genauigkeit der Ergebnisse jedwede Grenze erreichen kann, was lediglich von der Anzahl der Annäherungen abhängt.

Die Grundlagen dieser bei der Rahmenberechnung angewandten Methode sind dieselben wie die der Verformungsmethode Mohr's. In der Tatsache, dass diese Identität längere Zeit nicht erkannt wurde, liegt der Grund, dass diese Methode als ungenaue bezeichnet wurde. Diese Ansicht war bei Rahmenwerken mit verschieblichen Knoten begründet, solange man den Einfluss der Verschieblichkeit bei der Berechnung nicht zu berücksichtigen verstand.

Als grossen Vorteil für didaktische Zwecke ist die Tatsache zu bezeichnen, dass sich die Iteration auf der technischen Analyse der Verformung des elastischen Grundsystems begründet.

Dank der physikalischen Auffassung des Iterationsprozesses fand diese Methode Anwendung bei der Auflösung von linearen Gleichungen technischer Probleme und Problemen der physikalischen Mathematik; dabei kann die Beschleunigung des Iterationsprozesses durch verschiedene mathematische Kunstgriffe erreicht werden.

ZASTOSOWANIE RÓWNANIA OPERATOROWEGO OSI ODKSZTAŁCONEJ PRĘTA PRYZMATYCZNEGO DO SPORZĄDZANIA LINII WPŁYWOWEJ

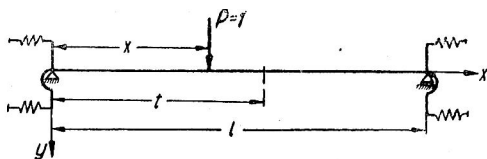
STEFAN FULIŃSKI, mgr-inż., st. asystent Katedry Statyki Budowli

W pracy podano wzory na obliczenie linii wpływowych ugięcia, kąta obrotu stycznych do osi pręta i momentów zginających dla płaskiego ustroju prętowego o węzłach nieprzesuwnych. Do wyprowadzenia wzorów wykorzystano operatorowe równanie osi odkształconej pręta pryzmatycznego oraz metodę sprężystego utwierdzenia.

Obliczenie ustrojów prętowych statycznie niewyznaczalnych za pomocą rachunku operatorowego przedstawione zostało w pracach T. Iwińskiego [1] i S. Drobota [2]. W obydwu artykułach zagadnienie sprowadzono do rozwiązywania układu równań liniowych, ułożonych na podstawie warunków pracy konstrukcji. Z równań tych należy obliczyć stałe potrzebne do dalszego rozwiązywania.

W niniejszej pracy przedstawimy sposób, pozwalający bez rozwiązywania wielu równań liniowych uzyskać wzory na linie wpływowe ugięcia kątów obrotów stycznych do osi pręta oraz momentów zginających dla płaskiego ciągłego ustroju prętowego o węzłach nieprzesuwnych.

Każdy pręt ustroju prętowego o węzłach nieprzesuwnych możemy rozpatrywać w ogólnym przypadku jako sprężyscie (względem obrotu) utwierdzone na podporach (rys. 1).



Rys. 1.

Wprowadzamy oznaczenia:

- x — odcięta punktu przyłożenia siły,
- t — odcięta punktu rozpatrywanego przekroju,
- l — rozpiętość belki (przęsła).

Operatorowe równanie osi odkształconej ma postać [2]:

$$EJ/s^4 Y - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) = e^{-sx}, \quad (1)$$

gdzie

E — moduł Younga,

I — moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej,

s — operator różniczkowania.

Po uporządkowaniu

$$EIY = \frac{1}{s^4} e^{-sx} + EI \frac{1}{s} y(0) + EI \frac{1}{s^2} y'(0) + EI \frac{1}{s^3} y''(0) + \frac{1}{s^4} EI y'''(0) \quad (1a)$$

oraz równania kąta obrotu stycznych do osi pręta i momentu zginającego:

$$Hy' = \frac{1}{s^3} e^{-sx} + EI \frac{1}{s} y'(0) + EI \frac{1}{s^2} y''(0) + EI \frac{1}{s^3} y'''(0),$$

$$M = \frac{1}{s^2} e^{-sx} + EI \frac{1}{s} y''(0) + EI \frac{1}{s^2} y'''(0).$$

Warunki brzegowe w przyjętym układzie osi są następujące:

- 1) $EIy(0) = 0$,
- 2) $EIy''(0) = -M_{ab}$,
- 3) $EIy(l) = 0$,
- 4) $EIy(l) = -M_{ba}$,

Wartości M_{ab} i M_{ba} momentów podporowych obliczymy poniżej metodą sprężystego utwierdzenia. Po uwzględnieniu warunków brzegowych w równaniu (1a) otrzymamy

$$EIY = \frac{1}{s^4} e^{-sx} + \frac{1}{s^2} y'(0) - \frac{1}{s^3} M_{ab} - \frac{1}{s^4} EIy'''(0). \quad (2)$$

Wykorzystując pisownię operatorową wracamy do pisowni funkcyjnej [1].

$$\left. \begin{aligned} EIY &= \frac{\langle t-x \rangle^3}{6} + tEIy'(0) - \frac{t^2}{2} M_{ab} + \frac{t^3}{6} EIy'''(0), \\ EIY' &= \frac{\langle t-x \rangle^2}{2} + EIy'(0) - tM_{ab} + \frac{t^2}{2} EIy'''(0), \\ EIY'' &= \langle t-x \rangle - M_{ab} + tEIy'''(0). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Symbol $\langle t-x \rangle^n$ oznacza funkcję, która jest równa zeru dla $t \leq x$ i równa $(t-x)^n$ dla $t > x$.

Na podstawie warunków brzegowych dla $t=l$ jest

$$\left. \begin{aligned} EIy(l) &= \frac{(l-x)^3}{6} + lEIy'(0) - \frac{l^2}{2} M_{ab} + \frac{l^3}{6} EIy'''(0) = 0, \\ EIy''(l) &= l-x-M_{ab} + lEIy'''(l) = -M_{ba} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

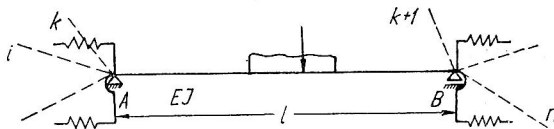
stąd

$$\begin{aligned} EIy'''(0) &= -\frac{l-x}{l} + \frac{M_{ab}-M_{ba}}{l}, \\ EIy'(0) &= -\frac{(l-x)^3}{6l} + \frac{l}{6}(l-x) + \frac{l}{3}M_{ab} + \frac{l}{6}M_{ba}. \end{aligned}$$

Po wstawieniu tych stałych do równań (3) otrzymujemy wyrażenia na rzędne linii wpływowych:

$$\left. \begin{aligned} EIy &= \frac{\langle t-x \rangle^3}{6} - \frac{t(l-x)^3}{6l} + \frac{t(l-x)}{6l} (l^2-t^2) + \\ &\quad tM_{ab} \left(\frac{l}{3} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6l} \right) + tM_{ba} \left(\frac{1}{6} - \frac{t^2}{6l} \right), \\ EIy' &= \frac{\langle t-x \rangle^2}{2} - \frac{(l-x)^3}{6l} + \frac{l-x}{6l} (l^2-3t^2) + M_{ab} \left(\frac{l}{3} - t + \frac{t^2}{2l} \right) + \\ &\quad + M_{ba} \left(\frac{l}{6} - \frac{t^2}{2l} \right), \\ EIy'' &= \langle t-x \rangle - \frac{t(l-x)}{l} + M_{ab} \left(-1 + \frac{t}{l} \right) + M_{ba} \left(-\frac{t}{l} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Obliczenie momentów podporowych M_{ab} i M_{ba} dla pręta sprężysto utwardzonego na podporach (rys. 2) odbywa się jak następuje:



Rys. 2

Jeżeli φ_{ab} i φ_{ba} oznaczają kąty nachylenia końców pręta względem osi x , a k_{ab} i k_{ba} współczynniki utwardzenia sprężystego, to

$$\varphi_{ab} = -\frac{M_{ab}}{k_{ab}}; \quad \varphi_{ba} = -\frac{M_{ba}}{k_{ba}}$$

oraz

$$\varphi_{ab} = \frac{M_{ab}l}{3EI} + \frac{M_{ba}l}{6EI} + \frac{V'_{ab}}{EI};$$

$$\varphi_{ba} = \frac{M_{ab}l}{6EI} + \frac{M_{ba}l}{3EI} + \frac{V'_{ba}}{EI}.$$

Przyjmując, że w węzłach A i B zbiega się wiązka prętów sprężystych, otrzymujemy zgodnie z oznaczeniami na rysunku 2 wzory na [4]:

A. Współczynniki sprężystego utwierdzenia końców pręta AB w węzłach.

$$k_{ab} = \sum_{i=1}^{i=k} 4S_{ia} \frac{3 + \frac{k_{ia}}{S_{ia}}}{4 + \frac{k_{ia}}{S_{ia}}};$$

$$k_{ba} = \sum_{i=k+1}^{i=n} 4S_{ib} \frac{3 + \frac{k_{ib}}{S_{ib}}}{4 + \frac{k_{ib}}{S_{ib}}},$$

gdzie $S_{ia} = \frac{(EI)_{ia}}{l_{ia}}$ jest sztywnością jednostkową pręta i zbiegającego się w węzle A ,

k_{ia} jest współczynnikiem sprężystego utwierdzenia pręta i w węzle przeciwnym.

B. Momenty przywęzłowe

$$M_{ab} = -\frac{6(m_{ba}V'_{ab} - V'_{ba})}{l_{ab}r}; \quad M_{ba} = -\frac{6(m_{ba}V'_{ba} - V'_{ab})}{l_{ab}r}, \quad (6)$$

gdzie

$$r = m_{ab}m_{ba} - 1;$$

$$m_{ab} = 2 + 6 \frac{S_{ab}}{k_{ab}};$$

$$m_{ba} = 2 + 6 \frac{S_{ba}}{k_{ba}};$$

V'_{ab} i V'_{ba} są oddziaływaniami wtórnymi na podporach A i B . Dla belki AB obciążonej poruszającą się jednostkową siłą skupioną jest

$$V'_{ab} = \frac{x(l-x)(2l-x)}{6l}; \quad V'_{ba} = \frac{x(l-x)(l+x)}{6l}. \quad (7)$$

Wstawiając wyrażenia (7) do (6) otrzymamy

$$M_{ab} = -\frac{x(l-x)}{l^2 r} [l(2m_{ba}-1) - x(m_{ba}+1)];$$

$$M_{ba} = -\frac{x(l-x)}{l^2 r} [l(2m_{ab}-2) + x(m_{ab}+1)].$$
(8)

Dla rozpatrywanego pręta obciążonego siłą do wzorów (5) należy wstawić wyrażenia (8). Wówczas jest

$$EIy = \frac{\langle t-x \rangle^3}{6} - \frac{t(l-x)^3}{6l} + \frac{t(l-x)}{6l} (l^2 - t^2) - t \frac{x(l-x)}{l^2 r} [l(2m_{ba}-1) - x(m_{ba}+1)] -$$

$$\left(\frac{l}{3} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6l} \right) - t \frac{x(l-x)}{l^2 r} [l(m_{ab}-2) + x(m_{ab}+1)] \left(\frac{l}{6} - \frac{t^2}{6l} \right);$$

$$EIy' = \frac{\langle t-x \rangle^2}{2} - \frac{(l-x)^3}{6l} + \frac{l-x}{6l} (l^2 - 3t^2) - \frac{x(l-x)}{l^2 r} [l(2m_{ba}-1) - x(m_{ba}+1)] -$$

$$\left(\frac{l}{3} - t + \frac{t^2}{2l} \right) - \frac{x(l-x)}{l^2 r} [l(m_{ab}-2) + x(m_{ab}+1)] \left(\frac{l}{6} - \frac{t^2}{2l} \right);$$

$$EIy'' = \langle t-x \rangle - \frac{t(l-x)}{l} + \frac{x(l-x)}{l^2 r} [l(m_{ba}-1) - x(m_{ba}+1)] \left(1 - \frac{t}{2} \right) +$$

$$+ \frac{x(l-x)}{l^2 r} [l(m_{ab}-2) + x(m_{ab}+1)] \left(\frac{t}{l} \right).$$
(9)

Jeżeli siła nie obciąża przęsła, w którym znajduje się dany przekrój, należy zastosować wzory (5) bez członów zawierających zmienną x ; będzie więc

$$EIy = +tM_{ab} \left(\frac{l}{3} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6l} \right) + tM_{ba} \left(\frac{l}{6} - \frac{t^2}{6l} \right);$$

$$EIy' = +M_{ab} \left(\frac{l}{3} - t + \frac{t^2}{2l} \right) + M_{ba} \left(\frac{l}{6} - \frac{t^2}{2l} \right);$$

$$EIy'' = +M_{ab} \left(-1 + \frac{t}{l} \right) + M_{ba} \left(-\frac{t}{l} \right).$$
(9a)

Zmiennymi są tu wartości momentów przywęzłowych, obliczonych metodą sprężystego utwierdzenia [4], [5].

Wzory (9) i (9a) przedstawiają wartości rzędnych linii wpływowych y , y' oraz y'' (y, φ oraz M) dla każdego pręta belki ciągłej i ramy o węzłach nieprzesuwnych.

Przykład

Sporządzenie linii wpływowej ugięcia, kątów obrotu stycznych do osi pręta i momentów zginających w przekroju 15 przeszła 2, 3 (dane liczbowe tego przykładu zaczerpnięto z tablic Angera [6]) (rys. 3).

Obliczenie wielkości niezależnych od obciążenia:

$$k_{1,2} = 0; \quad k_{2,3} = k_{4,3} = 0,3; \quad S_{2,3} = S_{3,2} = \frac{1,0}{14,0} = 0,0715.$$

$$k_{3,2} = 4,0,0715 \frac{3 + \frac{0,3}{0,0715}}{4 + \frac{0,3}{0,0715}} = 0,251;$$

$$m_{2,3} = 2 + 6 \frac{0,0715}{0,30} = 3,43; \quad m_{3,2} = 2 + 6 \frac{0,0715}{0,251} = 3,71;$$

$$r = 3,43 \cdot 3,71 - 1 = 11,72.$$

Dalsze obliczenie przeprowadzamy w tablicach stosując wzory (9) i (9a). Podano obliczenie linii wpływowych, gdy siła obciąża przeszło 2,3, częściowe obliczenie, gdy siła obciąża przeszło 1, 2. W celu zmniejszenia objętości pracy nie podano rzędnych linii wpływowych dla przeszła 3,4 i 4,5 oraz linii wpływowych momentów przywęzłowych w przeszła 2,3, gdy siła znajduje się poza nim.

Podany sposób obliczenia linii wpływowej ugięcia, kątów obrotu stycznej do osi pręta i momentu zginającego może mieć zastosowanie przy obliczaniu ram o węzłach nieprzesuwnych oraz belek o różnej rozpiętości i różnej sztywności (EI) przeszła.

Za pomocą uzyskanych wzorów można obliczyć szukane rzędne przy różnych sztywnościach poszczególnych prętów przypuszczalnie nieco prędzej niż metodą punktów stałych.

W praktycznym zastosowaniu wzorów ułożonych w tablicach przy obliczaniu linii wpływowych dla ciągu prętów połączonych sztywno w węzłach, niektóre kolumny powtarzają się. Wtedy wystarczy liczyć np. dwie kolumny tablicy, które po zsumowaniu odpowiednich wierszy dają szukane wartości (por. tablica I (1,2) oraz II (2,3)).

Rzędne linii wpływowej ugięcia w przekr. „15“
(Siła obciąża przeszło 2,3)

$l=14,0 \text{ m}; \quad t=7,0 \text{ m}$ $k_{23}=0,30; \quad k_{32}=0,25$ $m_{23}=3,43; \quad m_{32}=3,71$	$P=1$ w przekr.	x	$l-x$	$\frac{\langle t-x \rangle^3}{6}$	$\frac{t(l-x)^3}{6l}$	$\frac{t(l-x)}{6l} \left(\frac{l^2-t^2}{l} \right)$	$\frac{tx(l-x)}{l^2 r}$	$x(m_{23}+1)$	$\frac{[l(2m_{32}-1)-x(m_{23}+1)]}{l^2 r}$	$(7) \cdot (9) \cdot V$	$x(m_{23}+1)$	$\frac{[l(m_{23}-2)+x(m_{23}+1)]}{l^2 r}$	$(7) \cdot (12) \cdot (IX)$	η_y (4)-(5)+(6) (10)-(13)
					(I)·(3) ³	(I)(II)(3)	(III)·(2)·(5)	(2)·(V)	(IV)-(8)		(2)·(VIII)	(VII)+(11)		
$r=11,72$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
I. $\frac{t}{6l} = 0,0834$	11	1,40	12,60	29,27	166,83	154,47	0,054	6,60	83,50	7,90	6,20	26,22	2,478	6,532
II. $l^2-t^2=147$	12	2,80	11,20	12,35	117,17	137,31	0,095	13,22	76,88	12,80	12,40	32,42	5,390	14,30
III. $\frac{t}{l^2 r} = 0,00305$	13	4,20	9,80	3,66	78,49	120,15	0,125	19,82	70,28	15,39	18,61	38,63	8,451	21,479
IV. $l(2m_{32}-1)=90,0$	14	5,60	8,40	0,46	49,43	102,98	0,143	26,43	63,67	15,95	24,81	44,83	11,219	26,841
V. $m_{32}+1=4,71$	15	7,00	7,00	—	28,61	85,82	0,149	33,04	57,06	14,89	31,01	51,03	13,305	29,015
VI. $\frac{l}{3} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6l} = 1,75$	16	8,40	5,60	—	14,65	68,65	0,143	39,65	50,45	12,64	37,21	57,23	14,322	27,038
VII. $l(m_{23}-2)=20,0$	17	9,80	4,20	—	6,17	51,49	0,125	46,26	43,84	9,60	43,41	63,43	13,876	21,840
VIII. $m_{23}+1=4,43$	18	11,20	2,80	—	1,83	34,33	0,095	52,86	37,14	5,66	49,62	69,64	11,578	15,262
IX. $\frac{l}{6} - \frac{t^2}{6l} = 1,75$	19	12,60	1,40	—	0,23	17,16	0,054	59,47	30,63	5,72	55,82	75,82	7,166	7,044

Rzędne linii wpływowej kątów obrotu stycznej w przekr. „15“
(Siła obciąża przesło 2,3)

Tablica II (2, 3)

	$P=1$ w przekr.	x	$l-x$	$\frac{\langle t-x \rangle^2}{2}$	$\frac{(l-x)^3}{6l}$	$\frac{l-x}{6l} (l^2-3l^2)$	$\frac{x(l-x)}{l^2}$ (2)·(3)·(XI)	$\frac{[l(2m_{32}-1)-x(m_{32}+1)]}{-}$ wg (9) tabl. I	(IX)·(8)·(7) (7)	$\frac{[m_{23}-2]+x(m_{23}+1)]}{x(m_{23})}$ wg (12) tabl. I	(XIII)·(10)·(7) (7)	η_y' $\frac{(11)-(6)+(6)-(5)-(4)}{+}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X. $l^2-3t^2=49$	11	1,40	12,60	15,68	23,80	7,35	0,0077	83,50	0,375	26,22	0,117	-0,512
XI. $\frac{1}{l^2 r} = 0,00435$	12	2,80	11,20	8,82	16,72	6,53	0,0136	76,88	0,608	32,42	0,256	-0,946
XII. $\frac{l}{3} - t + \frac{t^2}{2l} = -0,583$	13	4,20	9,80	3,92	11,20	5,72	0,0179	70,28	0,761	38,63	0,402	-1,201
XIII. $\frac{l}{6} - \frac{t^2}{2l} = 0,58$	14	5,60	8,40	0,98	7,05	4,90	0,0205	63,67	0,762	44,83	0,534	-0,942
	15	7,00	7,00	—	4,08	4,08	0,0213	57,06	0,707	51,03	0,633	-0,074
	16	8,40	5,60	—	2,09	3,26	0,0205	50,45	0,603	57,23	0,680	+1,093
	17	9,80	4,20	—	0,88	2,45	0,0179	43,84	0,458	63,43	0,658	+1,370
	18	11,20	2,80	—	0,26	1,63	0,0136	37,14	0,288	69,64	0,550	+1,108
	19	12,60	1,40	—	0,033	0,817	0,0077	30,63	0,137	75,82	0,338	+0,584

Rzędne linii wpływowej momentu w przekr. „15”
(Siła obciąża przęsło 2, 3)

Tablica III (2, 3)

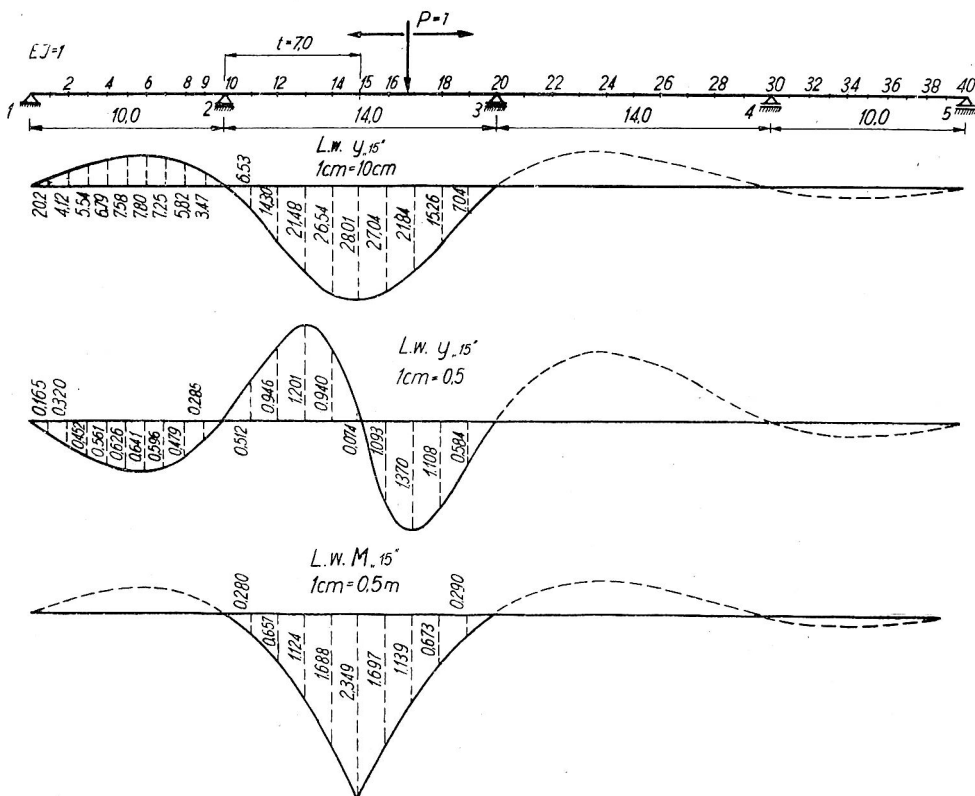
$l = 14,0 \text{ m};$ $t = 7,0 \text{ m};$	$P = 1 \text{ w przekr.}$	x	$l - x$	$\langle t - x \rangle$	$\frac{t(l-x)}{l}$	$\frac{x(l-x)}{l^2 r}$ wg (7) tabl. II	wg (9) tabl. I	(6) · (7) · (XIV) (6) · (7) · (XIV)	wg (12) tabl. I	(6) · (9) · (XV) (6) · (9) · (XV)	η_M (10) + (4) - (5) (8)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
XIV. $1 - \frac{t}{l} = 0,5$	11	1,40	12,60	29,27	6,30	0,0077	83,50	0,319	26,20	0,101	0,280
XV. $\frac{t}{l} = 0,5$	12	2,80	11,20	12,35	5,60	0,0136	76,88	0,523	32,40	0,220	0,657
	13	2,80	9,80	3,66	4,90	0,0176	70,27	0,630	38,60	0,340	1,124
	14	5,60	8,40	0,46	4,20	0,0205	63,67	0,652	44,80	0,460	1,688
	15	7,00	7,00	—	3,50	0,0213	57,06	0,608	51,01	0,543	2,349
	16	8,40	5,60	—	2,80	0,0205	50,45	0,517	57,21	0,586	1,697
	17	9,80	4,20	—	2,10	0,0179	43,84	0,393	63,41	0,568	1,139
	18	11,20	2,80	—	1,40	0,0136	37,14	0,253	69,62	0,474	0,673
	19	12,60	1,40	—	0,70	0,0077	30,63	0,118	75,81	0,292	0,290

Rzędne linii wpływowej ugięcia oraz kątów obrotu stycznych w przekr. „15“
(Siła obciąża przesło (1, 2))

Tablica IV (1, 2)

$l=14,0 \text{ m}$ $t=7,0$	$P=1 \text{ w przekr.}$	x	M_{23}		M_{32}		η_y			η_y'
				(3) · (VI)		(5) · (IX)	$[(-4)-(6)] \cdot t$	(3) · (XII)	(5) · XIII)	(8)-(9)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VI. $\frac{l}{3} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6l} = 1,75$	1	1	-0,224	-0,393	0,060	+0,105	-2,02	-0,130	0,0348	0,165
IX. $\frac{l}{6} - \frac{t^2}{6l} = 1,75$	2	2	-0,434	-0,760	0,117	+0,205	-4,12	-0,252	0,0680	0,320
	3	3	-0,617	-1,082	0,166	+0,291	-5,54	-0,356	0,0965	0,452
	4	4	-0,760	-1,330	0,205	+0,359	-6,79	-0,442	0,119	0,561
XII. $\frac{l}{3} - t + \frac{t^2}{2l} = 0,58$	5	5	-0,848	-1,485	0,229	+0,402	-7,58	-0,493	0,133	0,626
XIII. $\frac{l}{6} - \frac{t^2}{6l} = 0,58$	6	6	-0,868	-1,523	0,234	+0,410	-7,80	-0,505	0,136	0,641
	7	7	-0,807	-1,415	0,218	+0,382	-7,25	-0,470	0,126	0,596
	8	8	-0,651	-1,140	0,176	+0,308	-5,82	-0,377	0,102	0,479
	9	9	-0,387	-0,678	0,104	+0,182	-3,47	-0,225	0,060	0,285

Praca niniejsza jest początkiem próby praktycznego zastosowania rachunku operatorów do zagadnień mechaniki budowli. W zagadnieniu poruszonym wyżej podany sposób daje przypuszczalnie te same korzyści przy stosowaniu, co metoda Crossa lub metoda kinematyczna.



Rys. 3

LITERATURA

- [1] T. Iwiński, O zastosowaniu transformacji Laplace'a do zagadnień statyki budowli, Arch. Mech. Stos. 1 (1953).
- [2] S. Drobot, Uwagi o zastosowaniu rachunku operatorów do statyki konstrukcji, Arch. Mech. Stos. 1 (1954).
- [3] W. Wierzbicki, Mechanika budowli, Warszawa (1948).
- [4] E. Szczepaniak, Rozwiązanie ram sposobem sprężystego utwierdzenia prętów w węzłach, Podręcznik Inżynierii, (1946).
- [5] Z. Grodecki, Zadania z mechaniki budowli cz. I, Warszawa (1953).
- [6] G. Anger, Zehnteilige Einflusslinien für durchlaufende Träger, Berlin (1942).

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗОГНУТОЙ ОСИ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

В статье приводится способ, позволяющий без решения системы линейных уравнений определить формулы для линий влияния изогнутой оси, углов поворотов сечений и изгибающих моментов в плоской неразрезной стержневой системе с несмещающимися углами.

Упомянутые формулы выведены при помощи операторного уравнения изогнутой оси призматического стержня (формула (1). Моменты на концах стержня вычислены методом упругой заделки.

Переходя затем от операторной к функциональной записи уравнений и вычислив две дальнейшие постоянные интегрирования из краевых условий, получены упомянутые формулы линий влияния.

Статья иллюстрируется примером расчета линий влияния четырехпролетной неразрезной балки (фиг. 3).

Предлагаемый способ может найти применение при вычислении линий влияния рам с несмещающимися углами и балок разных пролетов и различной жесткости в отдельных пролетах.

DIE ANWENDUNG DER DIFFERENZIALGLEICHUNG DER BIEGELINIE DES PRISMATISCHEN STABES ZUR ERMITTLUNG VON EINFLUSSLINIEN

In der Arbeit wird eine Methode angegeben, die ohne Auflösung linearer Gleichungen gestattet, die für die Berechnung von Einflusslinien der Durchbiegungen, der Drehwinkel der Tangenten zur Biegelinie und der Momentengrößen notwendigen Formeln des durchlaufenden Stabes zu ermitteln.

Die Herleitung dieser Formeln gelang durch Verwertung der mit Hilfe der Operatorenrechnung dargestellten Gleichung der Biegelinie in Form (1). Die Konstanten $EIy''(0) = -M_{ab}$ und $EIy''(l) = -M_{ba}$ wurden mit der Methode der elastischen Einspannung ermittelt.

Am Beispiel des 4-feldigen durchlaufenden Balkens wurde die Anwendung der Methode gezeigt. Ebenso gute Dienste leistet die Methode bei Ermittlung der Einflusslinien von Rahmen mit unverschieblichen Ecken und durchlaufender Balken mit verschiedenen Spannweiten und Steifheiten der einzelnen Felder.

W SPRAWIE MODERNIZACJI METODY WYMIAROWANIA ŻELBETU W MOSTOWNICTWIE *)

JAN LANGER, *mgr inż., asystent Katedry Statyki Budowli*

W pracy omówiono zagadnienie zmienności liczby n przy wymiarowaniu żelbetu w mostownictwie oraz podano nowe ujęcie tablic i wzorów do wymiarowania, które uwzględniają tę zmienność.

1. WSTĘP

Żelbet w mostownictwie wymiarujemy metodą naprężeń liniowych albo krócej tzw. „metodą klasyczną”.

W artykule niniejszym nie zamierza się analizować tego faktu; w każdym razie należy wspomnieć, iż nie bez znaczenia jest to, że w wysokich markach betonu, z reguły stosowanych w mostownictwie, zjawisko plastyczności zachodzi w niższym stopniu aniżeli w markach średnich, co powoduje zbliżenie wykresu naprężeń przy zginaniu raczej do prostoliniowego.

Metoda klasyczna jest metodą starą i dotychczasowe jej ujęcie nie jest wystarczające w dzisiejszej praktyce w mostownictwie.

Modernizacja metody klasycznej powinna obejmować przede wszystkim trzy podstawowe zagadnienia:

- 1) ustalenie właściwych związków pomiędzy marką betonu a dopuszczalnymi naprężeniami;
- 2) ustalenie właściwych związków pomiędzy marką betonu a obliczeniowymi współczynnikami sprężystości betonu;
- 3) ustalenie właściwych stosunków współczynników sprężystości stali i betonu przy współpracy tych materiałów, czyli tzw. liczb n .

Co do zagadnień wymienionych w punktach 1) i 2) należy stwierdzić, że zostały one pozytywnie rozwiązane przez naukę radziecką i wpro-

*) Rozwiązanie zagadnienia przedstawionego w niniejszej pracy zostało opublikowane, już po złożeniu przez autora pracy do Redakcji Zeszytów Naukowych Politechniki Wrocławskiej, w *Inżynierii i Budownictwie* nr 6, 1954 przez prof. dra L. Suwalskiego z Warszawy. Ze względu jednak na niewątpliwie zupełnie niezależne od prof. Suwalskiego rozwiązanie, na nieco odmienny sposób podejścia (przy tych samych oczywiście wynikach końcowych) i na kilka cennych danych zawartych w tej pracy, Redakcja uważa za celowe opublikowanie niniejszej pracy w postaci nieco skróconej w porównaniu z jej pierwotnym ujęciem.

wadzone do tamtejszych przepisów projektowania mostów [1]. Podano tam tabelarycznie dla różnych normowych marek betonu odpowiednie naprężenia dopuszczalne, które, co łatwo zauważyć, nie są liniowo zależne od marki betonu, jak to ma miejsce np. w polskiej normie PN/B-195 z r. 1946 i w źródłach starszych.

Wartości współczynnika sprężystości betonu przy gięciu, podane we wspomnianych wyżej przepisach radzieckich, wyliczone są ze znanego wzoru Grafa w oparciu o markę betonu:

$$E_{bg} = \frac{0,63 \cdot 1\,000\,000}{1,7 + \frac{360}{R_w}} \text{ at.} \quad (1)$$

Szczegółowe wartości E_{bg} przytoczone są w tablicy I, w wierszu 3.

Polska norma żelbetowa dla mostownictwa [2], która obecnie znajduje się w opracowaniu, zajmuje w poruszonych wyżej kwestiach stanowisko analogiczne do przepisów radzieckich.

2. O LICZBIE n

Zagadnienie liczby n wymaga szerszego naświetlenia. Źródła starsze, łącznie z normą PN/B-195 oraz najnowsza norma żelbetowa dla budownictwa PN/B-03260 podają liczbę n jako stałą, równą 15.

Po porównaniu $n=15$ z liczbami n obliczonymi teoretycznie dla każdej marki betonu w oparciu o właściwy moduł sprężystości (patrz tablica I, wiersz 4) stwierdzamy, że:

- 1) liczba $n=15$ znacznie odbiega od teoretycznej średniówki 12,27;
- 2) dyspersja wartości teoretycznych n wobec $n=15$ jest zbyt wielka ($-5,67$ oraz $+1,80$, co stanowi -38% i $+12\%$).

W wyniku porównania można się zgodzić na przyjmowanie $n=15$ tylko dla marek niskich, co ma miejsce w budownictwie, natomiast w mostownictwie zwykle nie jest wystarczające. Aby temu zaradzić, przepisy radzieckie [1] oraz wspomniana polska norma dla mostownictwa [2] rozróżniają dwie grupy marek betonu i przyporządkowują grupie marek wysokich (200–350) liczbę $n=10$ oraz grupie marek niskich (110–170) liczbę $n=15$ (patrz tablica I wiersz 6).

Takie ujęcie zagadnienia należy już uznać za poważną modernizację; otrzymujemy w wyniku zmniejszenie różnic podanych wartości liczb n wobec odpowiednich teoretycznych średniówek oraz obniżenie dyspersji wartości granicznych. Rażąco jest jedynie znaczny skok wartości n przy przejściu z marki 170 do marki 200. Jednakże z opisanym przyjęciem związana jest poważna trudność natury praktycznej. Mianowicie z chwilą częstego stosowania liczby $n=10$ nie można by praktycznie

wykorzystywać tablic do wymiarowania żelbetu na gięcie, do których polski świat techniczny jest bardzo przyzwyczajony, ponieważ tablice te opracowane są dla liczby $n=15$. Opracowanie całego kompletu nowych tablic jako uzupełnienia tablic obecnie rozpowszechnionych wydaje się wysoce niewłaściwe ze względu na dużą ich ilość (około 20 sztuk), stosunkowo wąski zakres (tylko dla konkretnie ustalonych naprężeń w stali) oraz trudność masowego rozpowszechnienia.

Zdaniem autora, znacznie właściwsze będzie takie ujęcie samej metody wymiarowania, aby praktycznie konieczne tablice nie były bezpośrednio zależne od przyjętej wartości liczby n , a nawet od przyjętego naprężenia w stali.

Ujęcie takie zostało opracowane przez autora i będzie omówione w dalszej części artykułu.

Liczba n dla różnych marek betonu

Tablica I

1.	Marka betonu R_w	350	300	250	200	170	140	110
2.	$E_z - (t/cm^2)$	2100						
3.	E_{bg} —wg Grafa— (t/cm^2)	225	210	200	180	160	145	125
4.	n — obl. teoret.	9,33	10,00	10,50	11,67	13,12	14,48	16,80
5.	n — wg PN/B-195 i 9	15 (śr. 12,27)						
6.	n — wg przep. radz.	10 (śr. 10,36)			15 (śr. 14,80)			
7.	n — prop. przez aut.	9	10	11	12	13	15	17

Tutaj nasuwa się pewna koncepcja, która wprowadziłaby dalszą modernizację zagadnienia liczby n . Jeżeli potrafimy tak ująć metodę wymiarowania żelbetu, że pomocnicze współczynniki tablicowe nie będą bezpośrednio zależne od wartości liczby n , możemy sobie pozwolić nie tylko na przyjęcie dwóch różnych liczb n , co do pewnego stopnia jest rozwiązaniem połowicznym, ale na przyjmowanie całego wachlarza tych liczb, odpowiednio dla każdej kombinacji betonu i stali.

Takie podejście byłoby teoretycznie najbardziej prawidłowe. Oczywiście można by sobie przy tym pozwolić na drobne zaokrąglenia wartości teoretycznych do liczb całkowitych. W tablicy I wiersz 7 podane są w tym przedmiocie konkretne propozycje autora.

3. NOWE UJĘCIE METODY WYMIAROWANIA

W dotychczasowym ujęciu tablic do wymiarowania żelbetu współczynniki tablicowe były zależne oddzielnie od trzech pozycji wyjściowych:

- 1) liczby n ,
- 2) naprężenia w stali — σ_z ,
- 3) naprężenia w betonie — σ_b .

Rozmiary tablic są proporcjonalne do iloczynu ilości haseł każdej pozycji. Oczywiście ze wzrostem haseł i pozycji rozmiary te rosłyby bardzo szybko. Chcąc temu zaradzić, należy wprowadzić tylko jeden rodzaj pozycji wyjściowej drogą utworzenia nowego pojęcia, mieszczącego w sobie te trzy wspomniane rodzaje pozycji wyjściowych łącznie.

To nowe pojęcie w tej pracy nazwiemy „wskaźnikiem mocy przekroju”, oznaczmy je literą v i ustalimy wzór:

$$v = \frac{n\sigma_b}{\sigma_z}. \quad (2)$$

W tym założeniu rozmiary tablic, o bardzo szerokich możliwościach, będą zależne tylko od ilości haseł wskaźnika, która w odniesieniu do poprzedniego ujęcia może być co najwyżej równa ilości haseł pozycji σ_b w jednej tablicy.

Jeżeli przekrój jest wykorzystany, naprężenia σ_b i σ_z osiągają wartości dopuszczalne σ_{bd} i σ_{zd} , wtedy mamy do czynienia z najwyższym dla danych warunków wskaźnikiem mocy przekroju, który nazwiemy dopuszczalnym, zatem

$$v_d = \frac{n\sigma_{bd}}{\sigma_{zd}}. \quad (3)$$

W miejsce dotychczasowych współczynników typu k_x, k_z, k_h, k_u, k_o (patrz [3]) wprowadzimy współczynniki niezależne oddzielnie od n, σ_z, σ_b i przez analogię nazwiemy je r_x, r_z, r_h, r_u, r_o .

Wyprowadzenie i związki między tymi współczynnikami podane są poniżej:

$$1) \quad k_x = \frac{n\sigma_b}{n\sigma_b + \sigma_z} = \frac{v}{v+1} = r_x,$$

$$r_x = \frac{v}{v+1}. \quad (4)$$

$$2) \quad k_z = 1 - \frac{k_x}{3} = 1 - \frac{r_x}{3} = r_z,$$

$$r_z = 1 - \frac{r_x}{3}. \quad (5)$$

$$3) \quad k_o = \frac{2}{\sigma_b k_x k_z} = \frac{2}{\sigma_b r_x r_z} = \frac{2n}{\sigma_z r_x r_z v} = \frac{n}{\sigma_z} \cdot \frac{1}{r_o},$$

$$r_o = \frac{v r_x r_z}{2}. \quad (6)$$

$$4) \quad k_u = \frac{k_x \sigma_b}{2 \sigma_z} = \frac{r_x \sigma_b n}{2 \sigma_z n} = \frac{r_x v}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot r_u,$$

$$r_u = \frac{r_x v}{2}. \quad (7)$$

$$5) \quad k_h = \sqrt{k_o} = \sqrt{\frac{2}{k_b r_x r_z}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_b}} \sqrt{\frac{2v}{r_x r_z}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{o_b}} \sqrt{\frac{v}{r_o}} = \frac{1}{o_b} \cdot r_h, \quad r_h = \sqrt{\frac{v}{r_o}}. \quad (8)$$

Łatwo zauważyć, że wszystkie współczynniki r są zależne wyłącznie od wskaźnika mocy przekroju v .

Zakres tablicy ustalimy np. z warunku, że współczynnik $r_x = x/h_1$ może się praktycznie wahać w granicach 0,1 do 0,6, stąd dostaniemy przedział wartości v w granicach 0,10 do 1,50.

Jeżeli dla wartości $v = 0,1$ do $1,0$ wprowadzimy interwał 0,01, wówczas otrzymamy tablice o znacznej dokładności.

Wartości współczynników obliczone przez autora podane są w tablicy II.

Technika wymiarowania przekrojów za pomocą tablicy II przedstawia się następująco:

I. Prostokąt zginany, pojedynczo zbrojony

1. Poszukiwane F_z

$$\text{Dane: } M, b, h_1, \sigma_{bd}, \sigma_{zd}, n = \frac{E_z}{E_{bg}}.$$

$$\text{Obliczamy: } F_s = \frac{bh_1}{n}; r_o = \frac{M}{F_s \sigma_{zd} h_1} \rightarrow r_u, v \text{ albo } r_z, v_1,$$

wtedy

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{zd}}{n} v \leq \sigma_{bd}$$

$$F_z = r_u F_s \text{ albo } z = h_1 r_z; F_z = \frac{M}{\sigma_{zd} z}.$$

Tablica II

Współczynniki do wymiarowania przekroju prostokątnego

v	r_x	r_z	r_h	r_u	r_0	v	r_x	r_z	r_h	r_u	r_0
0,10	0,091	0,969	4,77	0,0046	0,0044	0,62	0,383	0,873	2,44	0,119	0,104
0,11	0,099	0,967	4,58	0,0054	0,0052	0,63	0,387	0,871	2,44	0,122	0,106
0,12	0,107	0,964	4,41	0,0064	0,0062	0,64	0,391	0,870	2,43	0,125	0,109
0,13	0,115	0,962	4,26	0,0075	0,0072	0,65	0,394	0,869	2,42	0,128	0,111
0,14	0,123	0,959	4,13	0,0086	0,0082	0,66	0,398	0,868	2,41	0,131	0,114
0,15	0,130	0,957	4,01	0,0098	0,0093	0,67	0,401	0,866	2,40	0,134	0,116
0,16	0,138	0,954	3,90	0,0110	0,0105	0,68	0,405	0,865	2,39	0,138	0,119
0,17	0,145	0,952	3,80	0,0123	0,0117	0,69	0,408	0,863	2,38	0,141	0,122
0,18	0,153	0,949	3,71	0,0137	0,0130	0,70	0,412	0,862	2,38	0,144	0,124
0,19	0,160	0,947	3,63	0,0152	0,0144	0,71	0,415	0,861	2,37	0,147	0,127
0,20	0,167	0,945	3,56	0,0167	0,0158	0,72	0,418	0,860	2,36	0,151	0,129
0,21	0,174	0,942	3,50	0,0182	0,0172	0,73	0,422	0,858	2,35	0,154	0,132
0,22	0,180	0,940	3,44	0,0198	0,0187	0,74	0,425	0,857	2,35	0,157	0,134
0,23	0,187	0,938	3,38	0,0215	0,0202	0,75	0,428	0,856	2,34	0,161	0,137
0,24	0,194	0,936	3,33	0,0232	0,0218	0,76	0,432	0,855	2,33	0,164	0,140
0,25	0,200	0,933	3,28	0,0250	0,0234	0,77	0,435	0,854	2,32	0,167	0,143
0,26	0,206	0,931	3,23	0,0268	0,0250	0,78	0,438	0,853	2,31	0,171	0,146
0,27	0,213	0,929	3,18	0,0287	0,0267	0,79	0,441	0,852	2,30	0,174	0,149
0,28	0,219	0,928	3,14	0,0306	0,0284	0,80	0,445	0,851	2,30	0,178	0,152
0,29	0,225	0,925	3,10	0,0326	0,0301	0,81	0,448	0,850	2,29	0,182	0,155
0,30	0,231	0,923	3,06	0,0346	0,0319	0,82	0,451	0,849	2,29	0,185	0,157
0,31	0,237	0,921	3,03	0,0367	0,0337	0,83	0,454	0,848	2,28	0,188	0,160
0,32	0,243	0,919	3,00	0,0388	0,0356	0,84	0,457	0,847	2,27	0,192	0,163
0,33	0,248	0,917	2,97	0,0409	0,0375	0,85	0,460	0,846	2,27	0,195	0,165
0,34	0,254	0,916	2,94	0,0431	0,0395	0,86	0,463	0,845	2,26	0,199	0,168
0,35	0,259	0,914	2,91	0,0454	0,0415	0,87	0,465	0,844	2,26	0,202	0,171
0,36	0,265	0,912	2,88	0,0477	0,0435	0,88	0,468	0,843	2,25	0,206	0,174
0,37	0,270	0,910	2,86	0,0500	0,0455	0,89	0,471	0,843	2,25	0,210	0,177
0,38	0,275	0,909	2,83	0,0524	0,0476	0,90	0,473	0,842	2,24	0,213	0,179
0,39	0,281	0,907	2,80	0,0548	0,0497	0,91	0,476	0,841	2,24	0,217	0,182
0,40	0,286	0,905	2,78	0,0572	0,0518	0,92	0,479	0,840	2,23	0,220	0,185
0,41	0,291	0,903	2,76	0,0597	0,0539	0,93	0,482	0,839	2,22	0,224	0,188
0,42	0,296	0,902	2,74	0,0622	0,0560	0,94	0,485	0,838	2,22	0,228	0,191
0,43	0,301	0,900	2,72	0,0647	0,0581	0,95	0,487	0,838	2,21	0,231	0,194
0,44	0,306	0,898	2,70	0,0672	0,0603	0,96	0,490	0,837	2,21	0,235	0,197
0,45	0,310	0,897	2,68	0,0697	0,0625	0,97	0,492	0,836	2,20	0,239	0,200
0,46	0,315	0,895	2,66	0,0723	0,0648	0,98	0,495	0,835	2,20	0,243	0,203
0,47	0,320	0,893	2,65	0,0749	0,0671	0,99	0,498	0,834	2,19	0,247	0,206
0,48	0,324	0,892	2,63	0,0776	0,0694	1,00	0,500	0,833	2,19	0,250	0,208
0,49	0,329	0,892	2,62	0,0804	0,0717	1,02	0,505	0,832	2,18	0,258	0,214
0,50	0,333	0,890	2,60	0,0832	0,0740	1,04	0,510	0,830	2,18	0,265	0,220
0,51	0,338	0,888	2,58	0,0860	0,0764	1,06	0,515	0,828	2,17	0,273	0,226
0,52	0,342	0,886	2,57	0,0889	0,0788	1,08	0,519	0,827	2,16	0,281	0,232
0,53	0,346	0,885	2,56	0,0918	0,0812	1,10	0,523	0,825	2,15	0,288	0,238
0,54	0,351	0,883	2,55	0,0947	0,0837	1,12	0,528	0,824	2,14	0,296	0,244
0,55	0,355	0,882	2,53	0,0977	0,0862	1,14	0,533	0,823	2,14	0,304	0,250
0,56	0,359	0,881	2,52	0,101	0,0887	1,16	0,537	0,822	2,13	0,312	0,256
0,57	0,363	0,879	2,51	0,103	0,0912	1,18	0,541	0,820	2,12	0,319	0,262
0,58	0,367	0,878	2,50	0,106	0,0937	1,20	0,545	0,818	2,11	0,327	0,268
0,59	0,371	0,877	2,48	0,110	0,0962	1,30	0,565	0,812	2,09	0,367	0,298
0,60	0,375	0,876	2,46	0,113	0,0988	1,40	0,583	0,807	2,06	0,408	0,329
0,61	0,379	0,874	2,45	0,116	0,1014	1,50	0,600	0,800	2,04	0,450	0,360

2. Poszukiwane F_z i h_1 Dane: M , b , σ_{bd} , σ_{zd} , n .

Obliczamy:

$$v_d = \frac{n\sigma_{bd}}{\sigma_{zd}} \rightarrow r_h, r_u,$$

wtedy

$$h_1 = r_h \sqrt{\frac{M}{b\sigma_{bd}}}, \quad F_s = \frac{bh_1}{n}, \quad F_z = r_u F_s.$$

II. Prostokąt zginany podwójnie zbrojony

1. Poszukiwane F_z i F'_z Dane: M , b , h_1 , a' , σ_{bd} , σ_{zd} , n .Obliczamy $v_d = \frac{n\sigma_{bd}}{\sigma_{zd}} \rightarrow r_o, r_u, r_u$,

wtedy

$$F_s = \frac{bh_1}{n}; \quad M_o = r_o F_s h_1 \sigma_{zd}; \quad m = M - M_o; \quad a = \frac{a}{h_1};$$

$$\sigma'_{zd} = \left(1 - \frac{a}{r_x}\right) v_d \sigma_{zd},$$

$$F_z = r_u F_s + \frac{m}{\sigma_{zd} h_1 (1 - a)}; \quad F'_z = \frac{m}{\sigma'_{zd} h_1 (1 - a)}.$$

Jeżeli chcielibyśmy zestawić ważniejsze zalety przedstawionego ujęcia, to należałoby podkreślić następujące momenty:

1) przedstawione ujęcie metody klasycznej nadaje się do wykorzystania w obecnych warunkach przy stałej liczbie n , w warunkach norm radiowych przy dwóch wartościach liczby n oraz w warunkach proponowanych przez autora, to znaczy przy zmiennej liczbie n ;

2) we wszystkich wymienionych przypadkach operujemy tylko jedną tablicą (zamiast odpowiednio dziesięcioma, dwudziestoma albo siedemdziesięcioma tablicami), przy najzupełniej dowolnym doborze warunków;

3) stałe korzystanie z jednej tablicy ułatwia i przyspiesza obliczenia, a wydanie jednej tablicy nie skomplikuje jej rozpowszechnienia;

4) przedstawione ujęcie metody jest praktycznie tylko nieznacznie różne od ogólnie uznanego, zatem zapoznanie się z nim nie wymaga dodatkowych studiów;

5) zakres nowego ujęcia metody obejmuje nie tylko kombinację „beton+stal” ale i szereg innych kombinacji, np. „beton+kabel szklany”, „gips+trzcina” itp., przy czym wzory i tablica nie wymagają żadnej adaptacji.

Powyższa uwaga świadczy o uniwersalności omawianego ujęcia, gdyż obejmuje ono ogólnie zagadnienie współpracy dwóch materiałów typu np. „beton i stal”.

Podobna metodyka modernizacji tablic do wymiarowania żelbetu została zastosowana przez P. Butenkę i ogłoszona w Konstrukcjach żelbetowych B. Bukowskiego [4].

Jednakże w metodzie Butenki zagadnienie liczby n nie jest poruszone, a pozycją wyjściową uproszczonej tablicy jest hasło $\beta = \sigma_z / \sigma_b$. Liczba n została tam przyjęta jako wartość stała, równa 15.

4. SPRAWDZANIE NAPRĘŻEŃ

Przy omawianiu zagadnienia wymiarowania należałoby wspomnieć i o zagadnieniu sprawdzania naprężeń.

Stosowane dziś wzory i wieloetapowość operacji są co najmniej nie- wygodne. Zagadnieniu sprawdzania naprężeń wskazane jest nadać taką formę, aby operacja ta, np. w prostokątnej belce żelbetowej, była co naj- wyżej nieznacznie trudniejsza niż w przypadku takiejże belki jednorodnej.

Wprowadzilibyśmy zatem znane skądinąd pojęcie „wskaźnika wytrzy- małości przekroju W ”, którego postać byłaby następująca:

$$W_b = \frac{bh_1^2}{B}. \quad (9)$$

Jak widać, mianownik nie jest równy 6 jak przy materiale jednorod- nym, ale zmiennej liczbie B , zależnej od procentu zbrojenia. I tak np. dla przekroju prostokątnego, zbrojonego pojedynczo, otrzymujemy bar- dzo prosty wzór:

$$B = r_h^2. \quad (10)$$

Obliczamy wtedy

$$\sigma_b = \frac{M}{W_b} \quad (11)$$

oraz

$$\sigma_z = n\sigma_b s, \quad (12)$$

gdzie

$$s = \frac{1}{v}. \quad (13)$$

Podobne związki można wyprowadzić dla innych przypadków, wy- kracza to jednak poza ramy niniejszego artykułu. Rozwinięcie tego te- matu nastąpi w jednym z dalszych Zeszytów.

Konieczne jest wyjaśnienie, że tego rodzaju metodyka sprawdzania naprężeń nie jest nowa. Ogłosił ją i podał odpowiednie wykresy W. Paszkowski [5] już w 1926 r., jednakże w założeniu stałej liczby $n=15$.

5. PRZYKŁADY

Przykład 1. Przekrój prostokątny żelbetowy.

Dane: $M = 1,50 \text{ tm}$, $b = 100 \text{ cm}$, $h_1 = 12 \text{ cm}$,

$\sigma_{bd} = 70 \text{ at}$, $\sigma_{zd} = 1300 \text{ at}$, $n = 12$.

Poszukiwane: F_z .

$$F_s = \frac{100 \cdot 12}{12} = 100 \text{ cm}^2; \quad r_o = \frac{150\,000}{100 \cdot 1300 \cdot 12} = 0,096 \rightarrow v = 0,59;$$

$$r_u = 0,110; \quad \sigma_b = \frac{1300}{12} \cdot 0,59 = 64 \text{ at} < 70 \text{ at},$$

$$F_z = 0,110 \cdot 100 = 11 \text{ cm}^2.$$

Przykład 2. Przekrój prostokątny szklano-gipsowy.

Dane: $M = 300 \text{ kgm}$, $b = 100 \text{ cm}$,

$$\sigma_{gd} = 40 \text{ at}, \quad \sigma_{sd} = 500 \text{ at}, \quad n = \frac{E_s}{E_g} = \frac{560\,000}{100\,000} = 5,6.$$

Poszukiwane h_1 i $F_{z(s)}$.

$$v_d = \frac{5 \cdot 6 \cdot 40}{500} = 0,45 \rightarrow r_u = 0,0697; \quad r_h = 2,68;$$

$$h_1 = 2,68. \quad \sqrt{\frac{30\,000}{100 \cdot 40}} = 7,5 \text{ cm}; \quad F_{z(s)} = 0,0697 \cdot 100 \cdot 7,5 : 5,6 = 9,3 \text{ cm}^2.$$

Przykład 3. Przekrój prostokątny żelbetowy.

Dane: $M = 27,5 \text{ tm}$; $b = 40 \text{ cm}$; $h_1 = 80 \text{ cm}$; $a' = 8 \text{ cm}$;

$\sigma_{bd} = 50 \text{ at}$; $\sigma_{zd} = 1400 \text{ at}$; $n = 17$.

Poszukiwane F_z i F'_z .

$$v_d = \frac{17 \cdot 50}{1400} = 0,61 \rightarrow r_o = 0,1014; \quad r_u = 0,116; \quad r_x = 0,379;$$

$$F_s = \frac{40 \cdot 80}{17} = 188 \text{ cm}^2; \quad M_o = 0,1014 \cdot 188 \cdot 80 \cdot 1400 = 2145000 \text{ kg cm};$$

$$m = 2750\,000 - 2145\,000 = 605\,000 \text{ kgcm}; \quad \alpha = \frac{8}{80} = 0,1;$$

$$\sigma'_{zd} = \left(1 - \frac{0,1}{0,379}\right) \cdot 0,61 \cdot 1400 = 630 \text{ at};$$

$$F_z = 0,116 \cdot 188 + \frac{605\,000}{1400 \cdot 80 \cdot (1-0,1)} = 21,8 + 6,0 = 27,8 \text{ cm}^2$$

$$F'_z = \frac{605\,000}{630 \cdot 80 \cdot (1-0,1)} = 13,3 \text{ cm}^2.$$

Przykład 4. Przekrój prostokątny żelbetowy

Dane: $M = 40 \text{ tm}$; $b = 36 \text{ cm}$; $h_1 = 100 \text{ cm}$;

$$F_z = 35 \text{ cm}^2; \quad n = 10.$$

Poszukiwane: naprężenia σ_b i σ_z

$$r_u = \frac{10 \cdot 35}{36 \cdot 100} = 0,0975 \rightarrow r_h = 2,53; \quad v = 0,55;$$

$$B = 2,53^2 = 6,4; \quad s = \frac{1}{0,55} = 1,82; \quad W_b = \frac{36 \cdot 100^2}{6,4} = 56\,200 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_b = \frac{4\,000\,000}{56\,200} = 71 \text{ at}; \quad \sigma_z = 10 \cdot 71 \cdot 1,82 = 1290 \text{ at}.$$

LITERATURA

- [1] *Tiechniczieskije usłowia i normy projektirowanija iskusstwiennych sooruzenij na gorodskich putiach soobszczenija*, Moskwa (1948).
- [2] PN/B-03261, *Konstrukcje mostowe, betonowe i żelbetowe. Obliczanie statyczne i projektowanie*, Warszawa (1953).
- [3] PN/B-199, *Konstrukcje żelbetowe. Obliczanie statyczne i projektowanie*, Warszawa (1949).
- [4] B. Bukowski, *Konstrukcje żelbetowe*, Warszawa (1953).
- [5] W. Paszkowski, *Teoria żelbetu*, Podręcznik Inżynierii t. I, Warszawa (1948).

Katedra Statyki Budowli

Wpłynęło do Redakcji w lutym 1954

МОДЕРНИЗАЦИЯ РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОНА В СТРОИТЕЛЬСТВЕ МОСТОВ

Расчет железобетонных сечений в строительстве мостов проводится на основе закона линейного распределения напряжений. Для этого употребляются таблицы коэффициентов, вычисленные для постоянного отношения

$$n = \frac{E_z}{E_b} = 15,$$

и для определенных величин допускаемых напряжений.

Поскольку в настоящее время часто употребляется высокопрочный бетон, не является правильным принимать постоянное число $n=15=\text{const}$; желательно принимать в каждом отдельном случае соответствующее n , причем модуль E_b можно вычислить по формуле Граафа (1). Предлагаемые числа n приведены в таблице I.

Далее, составлена таблица II коэффициентов, не зависящих от допускаемого напряжения стали; в основу составления таблицы положено понятие характеристики сечения: $v=n\sigma_b/\sigma_s$.

Значение новых коэффициентов выясняют формулы (4)–(8), а способ их применения показан на примерах.

Обобщенная таким образом таблица II коэффициентов может оказать услуги и при проектировании сечений, составленных из различных материалов (например, гипс с тростником и пр.),

MODERNISIERUNG DER BEMESSUNGSMETHODE VON STAHLBETON IM BRÜCKENBAU

Stahlbetonquerschnitte werden im Brückenbau mit Hilfe der Methode der linearen Spannungen bemessen (klassische Methode). Dabei werden Koeffiziententabellen benutzt, die auf Grund der festen Zahl $n=E_s/E_b=15$ berechnet wurden. Ausserdem entsprechen diese Koeffizienten bestimmten Werten der zulässigen Stahlspannungen.

Da jetzt im Stahlbetonbrückenbau oft hochwertiger Beton Anwendung findet, ist die Annahme von $n=15=\text{const}$ nicht richtig. Angezeigt ist es für jeden besonderen Fall die entsprechende Zahl n zu berücksichtigen, wobei E_b nach der Graf'schen Formel (1) berechnet werden kann. Die vorgeschlagenen Zahlen n sind in Tabelle I angegeben.

Ebenso, um die Koeffizienten von den zulässigen Stahlspannungen unabhängig zu machen, wurden durch Einführung des Begriffes „Querschnittszahl“ $v=n\sigma_b/\sigma_s$ neue Koeffizienten errechnet (Tabelle II).

Die neuen Koeffizienten wurden and Hand der Formeln 4,5,6,7 und 8 aufgeklärt, deren Anwendung in Zahlenbeispielen (im Abschnitt 5) gezeigt.

Die Universaltablelle kann ausserdem beim Bemessen von anderen nichthomogenen Querschnitten, wie z.B. Gips und Schilfrohr, ebenso gute Dienste leisten.

PRZYCZYNEK DO ZAGADNIENIA ZBIORNIKÓW PROSTOKĄTNYCH

ADAM MITZEL, kand. nauk techn., zast. prof. Budownictwa Żelbetowego

W pracy rozpatrywano stan naprężeń w ścianach zbiorników prostokątnych powstałych wskutek działania sił rozciągających, tj. oddziaływań sąsiednich ścian. Zastosowanie wywodów teoretycznych wyjaśniono na konkretnym przykładzie.

W jednej z poprzednich prac [4] omówilem sposób wyznaczania momentów w ścianach zbiornika prostokątnego o różnych sposobach podparcia górnej i dolnej krawędzi.

Do wymiarowania są potrzebne jeszcze siły rozciągające na pionowych krawędziach każdej ściany; są to oddziaływania sąsiednich ścian na skutek parcia cieczy. Można by to zagadnienie potraktować w sposób uproszczony nie szukając skomplikowanych teoretycznych rozwiązań i obliczyć ciągnięcie jako oddziaływanie sąsiednich ścian, w założeniu wyciętej ramy o wysokości równej jedności, wprowadzając przy tym parcie cieczy odpowiadające danej wysokości. Widzimy od razu, że takie podejście nie dawałoby realnych wyników, albowiem ciśnienie cieczy przekazuje się nie tylko na krawędzie pionowe, lecz także na dolną i górną krawędź ściany, które przenoszą również część parcia.

Chcąc znaleźć proste wzory do celów praktycznych, trzeba uprzednio rozwiązać zagadnienie w sposób ścisły. Umożliwia to z jednej strony pogląd na całość zagadnienia, z drugiej zaś pozwala na wyłączenie nieistotnych elementów i uzyskanie dla praktyki bardziej przydatnych wzorów.

Opierając się na znanych z teorii płyt zależnościach pomiędzy siłami poprzecznymi i ugięciami, możemy napisać:

$$\begin{aligned} q_x &= -D \frac{\partial \Delta w}{\partial x}, \\ q_y &= -D \frac{\partial \Delta w}{\partial y}, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Moment skręcający wyrażony jest następującym wzorem:

$$M_{xy} = -(1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

Przy znanym kształcie powierzchni ugięcia płyty $w=f(x,y)$ i po wyznaczeniu zawartych w równaniu ugięcia stałych całkowania, tak wewnątrz płyty, jak też na obwodzie, stan naprężeń jest jednoznacznie określony. Do wyznaczenia stałych służą zależności zachodzące na obwodzie płyty między odkształceniami lub naprężeniami, gwarantujące spełnienie żądanych warunków oparcia. Są to tak zwane warunki brzegowe.

Określonej funkcji $w=f(x,y)$ odpowiadają na każdym elemencie konturu cylindrycznego płyty ds określone wartości momentu gnącego M_n , skręcającego $\bar{M}_n$ i siły poprzecznej q_n . Kelvin i Tait wykazali, że dla cienkiej płyty poza tymi wielkościami istnieje jeszcze szereg innych układów sił, które na obwodzie płyty dają (w sposób przybliżony) taką samą powierzchnię ugięcia, a zatem również doprowadzają do tego samego stanu naprężeń, jak M_n , $\bar{M}_n$ i q_n .

Dowód tego twierdzenia opiera się na zasadzie Saint-Venanta, według której układ sił, znajdujących się w równowadze i działających na niewielki obszar ciała sprężystego, wpływa na istniejący stan naprężeń tylko w bezpośredniej okolicy tego obszaru. Wywołane zaburzenie maleje szybko i zanika w nieznaczej odległości od miejsca działania sił.

Wyobraźmy sobie wycinek z płyty (rys. 1). Na nieskończenie małym prostokącie $ABCD$ powierzchni obwodu działa siła poprzeczna $q_n ds$, moment gnący $M_n ds$ oraz moment skręcający $\bar{M}_n ds$. Przykładamy do prostokąta dwa równe, lecz przeciwdziałające momenty skręcające $\bar{M}_0 ds$ i $-\bar{M}_0 ds$. Moment $-\bar{M}_0 ds$ zastępujemy przez naprężenia τ działające równoległe do powierzchni płyty, to znaczy tak samo, jak momenty $\bar{M}_n ds$, moment zaś $\bar{M}_0 ds$ zastąpimy przez parę sił $P_0 ds$, działających (w odległości ds) wzdłuż boków AB i DC .

Ten układ sił powoduje nieznaczące zaburzenie stanu naprężeń w płycie, lecz z powodu bardzo małego obszaru, jakim jest prostokąt $ABCD$, wpływ jego zanika w bezpośredniej okolicy obwodu. Jeżeli w identyczny sposób dodamy do sąsiednich prostokątów podobne układy sił, które różnią się od poprzedniego o różniczkę, to po zsumowaniu pozostaje wzdłuż boku AB tylko jedna siła wielkości dP_0 , która dodana do siły poprzecznej $q_n ds$ daje nam nową siłę poprzeczną, równą

$$q'_n ds = q_n ds + dP_0.$$

Podstawiając

$$\bar{M}_0 ds = P_0 ds$$

oraz

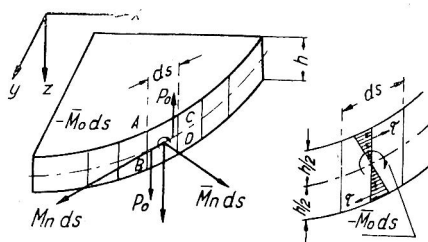
$$\bar{M}_0 = P_0,$$

otrzymamy

$$q'_n = q_n + \frac{\partial M_0}{\partial s}.$$

Moment skręcający maleje zatem do wartości

$$\bar{M}'_n = \bar{M}_n - \bar{M}_0.$$



Rys. 1. Momenty skręcające

Moment gnący pozostaje bez zmian,
 $M'_n = M_n$.

Takie rozumowanie daje nam możliwości zastąpienia pierwotnego układu sił M_n , $\bar{M}_n$ i q_n przez nowy układ M'_n , $\bar{M}'_n$ i q'_n , który z wyjątkiem małego obszaru na krawędzi płyty doprowadza do tego samego stanu naprężeń, co siły M_n , $\bar{M}_n$ i q_n .

Ponieważ wielkość momentu zastępczego M_0 została przyjęta dowolnie, możemy tak samo przyjmować:

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_n.$$

Nowe siły przyjmują wówczas postać:

$$q'_n = q_n + \frac{\partial \bar{M}_n}{\partial s},$$

$$\bar{M}'_n = 0,$$

$$M'_n = M_n.$$

Jak widać, moment skręcający w tym przypadku jest równy zero (wzdłuż krawędzi płyty). Siłę poprzeczną q'_n , przy której moment skręcający zanika wzdłuż obwodu, nazywamy oddziaływaniem płyty:

$$q'_n = q_n + \frac{\partial \bar{M}_n}{\partial s}.$$

Stosując powyższy wzór dla kierunków x i y oraz wykorzystując zależności (1), otrzymamy

$$\begin{aligned} q'_x &= q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ q'_y &= q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Aby nie wprowadzać nowych oznaczeń, będziemy w dalszym ciągu pracy zamiast q'_x i q'_y pisać q_x i q_y .

Jeżeli przyjmiemy liczbę Poissona μ równą zero, to równania q_y i q_x przybiorą postać:

$$q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right),$$

$$q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right).$$

Jak wiadomo, dla żelbetu $\mu = 0,167$, zaś $(2 - \mu) = 1,833$, co stanowi różnicę zaledwie około 9%.

Po wyliczeniu pochodnych od „ w ”¹⁾ i wstawieniu ich do powyższych równań otrzymamy dla ściany A:¹⁾

$$q_y = -Da \sum \beta \cos \beta y [-\beta^2 \ln + \beta^2 An \operatorname{ch} \beta x + 4\beta Bx \operatorname{sh} \beta x + \\ + \frac{Kn}{2Da \operatorname{ch} \beta a} (\beta a \operatorname{th} \beta a \operatorname{ch} \beta x - 4 \operatorname{ch} \beta x - \beta x \operatorname{sh} \beta x)]$$

oraz

$$q_x = -Da \sum \beta^2 \sin \beta y [-\beta An \operatorname{sh} \beta x + Bn \operatorname{sh} \beta x - \beta Bnx \operatorname{sh} \beta x + \\ + \frac{Kn}{2Da \operatorname{ch} \beta a \beta^2} (-\beta^2 a \operatorname{th} \beta a \operatorname{sh} \beta x - \beta \operatorname{sh} \beta x + \beta^2 x \operatorname{ch} \beta x)].$$

Wyrażenia dla q_y i q_x ściany B¹⁾ będą zawierać D_b zamiast D_a oraz b zamiast a .

Ponieważ nas interesują oddziaływania, to znaczy siły poprzeczne wzdłuż krawędzi ścian, obliczamy q_y dla $y=0$ i $y=h$, zaś q_x dla $x=+a$ i $x=-a$.

Wtedy będziemy mieli

dla $y=0$

$$q_y = -D_a \sum \beta [-\beta^2 \ln + \beta^2 An + \operatorname{ch} \beta x + 4\beta Bn \operatorname{ch} \beta x + \\ + \frac{Kn}{2Da \operatorname{ch} \beta a} (\beta a \operatorname{th} \beta a \operatorname{ch} \beta x - 4 \operatorname{ch} \beta x - x \operatorname{ch} \beta x)], \quad (4)$$

dla $y=h$

$$q_y = (-1)^{n+2} \cdot D_a \sum \beta [\text{jak wyżej}], \quad (5)$$

¹⁾ Patrz praca [4].

dla $x = +a$

$$q_x = -D_a \sum \beta^2 \sin \beta y [-\beta A n \operatorname{sh} \beta a + B n \operatorname{sh} \beta a - B n x \operatorname{ch} \beta a + \\ + \frac{K n}{2 \beta^2 D_a \operatorname{ch} \beta a} (-\beta^2 a \operatorname{th} \beta a \operatorname{sh} \beta a - \beta \operatorname{sh} \beta a + \beta^2 \operatorname{ch} \beta a)]. \quad (6)$$

Jako przykład obliczmy przebieg oddziaływań dla zbiornika o stosunku boków $\frac{b}{a} = 2$ i $h = 2a$. Na podstawie powyższych równań otrzymujemy dla q_y

przy $y = 0$ i $x = 0$:

a) $n = 1$

$$q_y = p_0 h \cdot \pi / -\pi \cdot 0,00654 - \pi \cdot 0,000448 + 4 \cdot 0,00409 - \\ - \frac{0,0484 \cdot 0,616}{2 \cdot 2,51} = +0,120 p_0 h;$$

b) $n = 2$

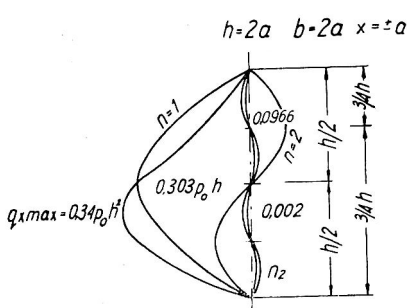
$$q_y = -p_0 h \cdot 39,36 (0,000285 + 0,001275 - 0,000223 - \\ - 0,0000461) = -0,0507 p_0 h;$$

c) $n = 3$

$$q_y = 0,0231 p_0 h.$$

Wobec tego przy $n = 1, 2, 3$,

$$q_y = (0,120 - 0,0507 + 0,0231) p_0 h = 0,0924 p_0 h.$$



Dla $x = \pm a$, q_y wynosi

$$\text{dla } n=1 \quad q_y = -0,304 p_0 h,$$

$$\text{dla } n=2 \quad q_y = +0,098 p_0 h,$$

$$\text{dla } n=3 \quad q_y = -0,045 p_0 h,$$

zatem przy $n = 1, 2, 3$

$$q_y = (-0,304 + 0,098 - 0,045) p_0 h = \\ = -0,251 p_0 h.$$

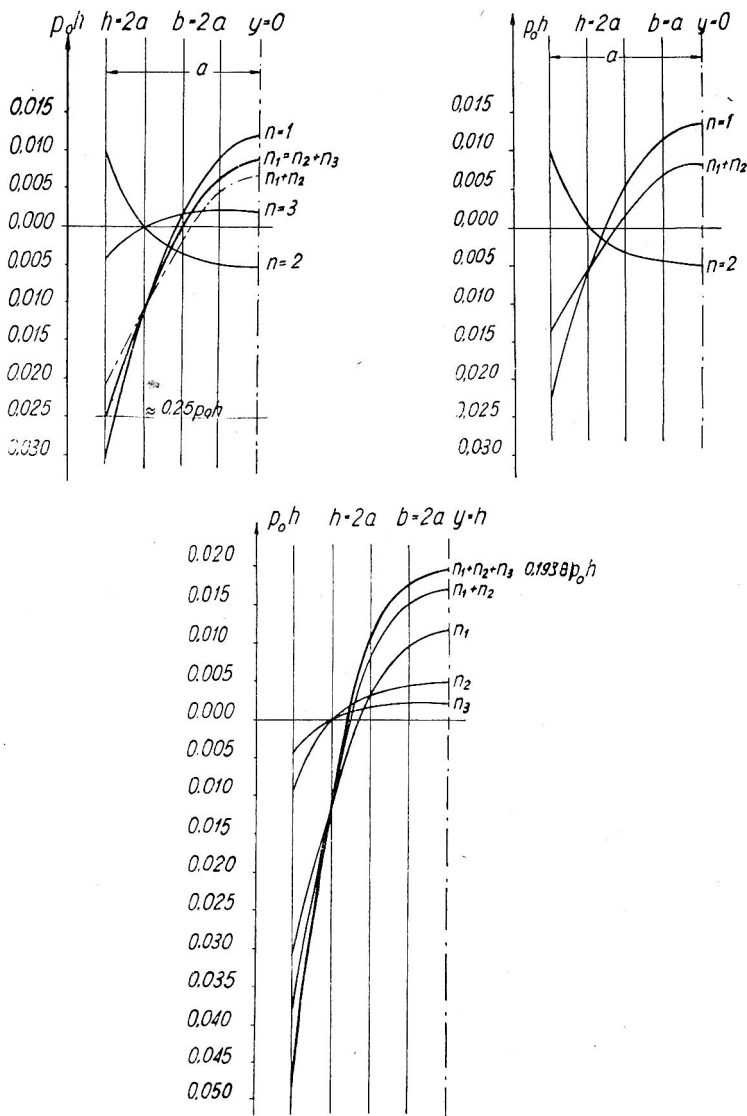
Rys. 2a. Wykres oddziaływań q_x Wyliczone w analogiczny sposób wielkości dla dowolnej krawędzi są następujące:

dla $y = h$, $x = 0$ i $n = 1, 2, 3$,

$$q_y = -0,1938 p_0 h$$

oraz dla $y=h$, $x=-a$ i $n=1,2,3$

$$q_y = +0,447 p_0 h.$$



Rys. 2b. Wykresy oddziaływań q_y

Oddziaływanie q_x wzdłuż pionowych krawędzi obliczamy dla $x = \pm a$ dla $y = \frac{h}{2}$. Tutaj ze względu na niesymetryczną postać wykresu (na skutek parcia trójkątnego) chodzi również o znalezienie wartości maksymalnej

i miejsca jej występowania. Uwzględniamy przy tym również trzy człony szeregu. Widać od razu, że dla $y=0$ i $y=h$ oddziaływanie q_x przybiera również wartość zero. Amplitudy poszczególnych fal dla $n=1,2,3$ wynoszą

$$\begin{aligned} n=1 \quad \text{przy } y &= \frac{h}{2} & q_x &= -0,303p_0h, \\ n=2 \quad \text{przy } y &= \frac{h}{4}, \frac{3h}{4} & q_x &= \pm 0,0066p_0h, \\ n=3 \quad \text{przy } y &= \frac{h}{8}, \frac{3h}{8}, \frac{5h}{8}, \frac{7h}{8} & q_x &= \mp 0,0022p_0h. \end{aligned}$$

Rysunki 2a i 2b przedstawiają przebieg q_x i q_y dla poszczególnych n oraz sumę n_1+n_2 lub $n_1+n_2+n_3$. Jak można się przekonać, trzeci człon szeregu ma nieznaczny wpływ na wielkość q_x (zaledwie 0,6%), tak że można go pominąć.

Z wykresu wynika, że q_x maksimum występuje przy $y=0,60h$ i wynosi $-0,340p_0h$.

Z powyższych wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Przebieg oddziaływań wzdłuż pionowych krawędzi zbiornika ma postać zbliżoną do trójkąta lub trapezu. Wartość maksymalna występuje poniżej połowy wysokości.

Przy górnym i dolnym brzegu oddziaływania są równe zero.

2. Wykres reakcji podporowych przy górnej i dolnej krawędzi wykazuje, że w środkowej części występują siły rozciągające, w pobliżu naroży natomiast siły ściskające. Stąd wniosek, że płyta denna np. rozciągana jest w swej środkowej partii, a ściskana przy narożach. Wynikające stąd odkształcenia w samej płaszczyźnie płyty dennej dążą do zmiany kształtu z prostokąta na figurę zbliżoną do elipsy. Można to zjawisko tłumaczyć tendencją zbliżania się zbiornika (na skutek ciśnienia wewnętrznego) do postaci ciała obrotowego (w tym przypadku do cylindra), to jest do takiego kształtu w rzucie, przy którym momenty zanikają, a pozostają tylko siły rozciągające. To, co stwierdzono przy płycie dennej, ważne jest również dla górnej krawędzi (w przypadku swobodnego podparcia, zgodnie z założeniami).

3. Z powyższego przykładu wynika również, że ściany sąsiednie przenoszą każda 33% całkowitego parcia cieczy, dno około 17%, górny brzeg zaś 7%. Rzecz jasna, że ten podział jest funkcją kształtu samej ściany. W rozważanym przypadku była to ściana kwadratowa. Przy bardziej wydłużonym kształcie, tzn. przy większym h , udział górnej i dolnej krawędzi będzie mniejszy i odwrotnie, przy niskiej ścianie oddziaływania u dołu i u góry będą wzrastały.

Wielkości te są również zależne od stosunku boków b/a .

4. Przy wymiarowaniu zbiorników żelbetowych wywody te dają cenne wskazówki dla prawidłowego rozmieszczenia zbrojenia. Aczkolwiek rzeczywisty rozkład naprężeń w elementach (ściany i dno) zbiorników nie był dotąd należycie wyjaśniony, pewność konstrukcji była zapewniona dzięki przesadzie w dobieraniu grubości ścian oraz przekroju i rozstawu wkładek zbrojeniowych. Inaczej przedstawia się kwestia szczelności.

Znajomość rozkładu, wielkości i rodzaju naprężeń jest warunkiem nieodzownym dla uniknięcia utworzenia się rys. Nie wystarczy bowiem jakimiś metodami przybliżonymi znaleźć np. przeciętną wielkość reakcji podporowej wzdłuż krawędzi dolnej, jeżeli będzie ona mniejsza niż rzeczywista reakcja, występująca w niektórych miejscach. Skutkiem tego będzie po pierwsze marnotrawstwo stali, a po drugie nie wystarczające uzbrojenie najbardziej narażonych miejsc.

Na podstawie wywodów przytoczonych na stronach 1,2,3 można wywnioskować, co następuje:

1. Jeżeli na obwodzie płyty wykres momentów skracających wykazuje nieciągłość (skoki), wówczas przy zastąpieniu momentów $\bar{M}_n$ przez układ sił, otrzymane oddziaływanie będzie nieskończenie duże. Jeżeli natomiast całka $\int \frac{\partial \bar{M}_n}{\partial s} ds$ w okolicy takich miejsc ma wartość skończoną, powstają tam siły skupione.

Jeżeli naroża wykresu pokazanego na rys. 3 są zaokrąglone, wówczas $\frac{\partial \bar{M}_n}{\partial s}$ przyjmuje na małych odcinkach duże wartości, tak że

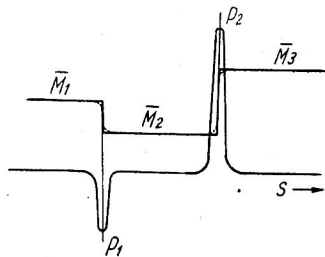
$$P_1 = \bar{M}_2 - \bar{M}_1,$$

$$P_2 = \bar{M}_3 - \bar{M}_2.$$

2. W przypadku nieciągłości konturu płyty, np. przy ostrych narożach, występują również siły skupione.

Jeżeli kąt między dwiema przylegającymi krawędziami płyty jest α , a odpowiednie momenty skracające $\bar{M}_1$ i $\bar{M}_2$, to siła skupiona wynosi $P = \bar{M}_1 - \bar{M}_2$. Przy $\alpha = 90^\circ$ momenty będą sobie równe, tak że siła skupiona równa się podwójnej wartości momentu skracającego, występującego w danym narożu:

$$P = 2\bar{M}.$$



Rys. 3. Przebieg momentów skracających przy nieciągłym obwodzie

Z powyższego wynika, że na krawędziach płyty, gdzie moment skracający jest równy zero, nie mogą występować siły skupione. Jakkolwiek

moment skręcający jest funkcją pierwszej pochodnej powierzchni ugięcia względem x i y , to przy płycie całkowicie utwardzonej momenty skręcające na obwodzie zanikają, a zatem nie powstają również siły skupione.

W naszym przypadku mamy do czynienia z płytami (ścianami zbiornika) sprężyste utwardzonymi wzdłuż krawędzi pionowych i swobodnie podpartych górną i dołem. Tutaj więc występują w narożach siły skupione.

Dla zbiornika o wysokości $h=2a$ i $b=2a$ momenty skręcające:

$$M_{xy} = -(1-\mu) Da \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Przy $x=+a$ i $y=0$

dla $n=1$

$$M_{xy} = -(1-\mu) Da \left[\frac{1\pi}{h} A_1 \operatorname{sh} \beta a + B_1 \operatorname{sh} \beta a + \frac{\pi}{h} B_1 a \operatorname{ch} \beta a + \right. \\ \left. + \frac{K_1}{\beta^2 2Da \operatorname{ch} \beta a} (\beta^2 a \operatorname{th} \beta a - \pi \operatorname{sh} \beta a - \pi^2 a \operatorname{ch} \beta a) \right] \pi 1.$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości dla stałych A, B i K otrzymamy

$$M_{xy} = -(1-\mu) \cdot \pi (-0,0068 + 0,00901) = -(1-\mu) \cdot 0,00695 P_0 h^2.$$

dla $\mu=0$

$$M_{xy} = -0,00695 p_0 h^2,$$

dla $\mu=0,167$

$$M_{xy} = -0,00578 p_0 h^2,$$

dla $n=2$

$$M_{xy} = -(1-\mu) 6,28 - 0,00005,$$

dla $\mu=0$

$$M_{xy} = +0,000314 p_0 h^2,$$

dla $\mu=0,167$

$$M_{xy} = 0,000260 p_0 h^2.$$

Sumując człony dla $n=1$ i $n=2$ otrzymamy

$$M_{xy} = -0,00663 p_0 h^2 \quad \text{przy } \mu=0$$

oraz

$$M_{xy} = -0,00552 p_0 h^2 \quad \text{przy } \mu=0,167.$$

Dla współrzędnych $x=+a$ i $y=h$ moment skręcający wynosi
(dla $n=1,2$)

$$M_{xy} = +0,00663 p_0 h^2,$$

dla $\mu=0$

dla $x = -a, y = 0$

$$M_{xy} = +0,00663 p_0 h^2$$

oraz dla $x = -a, y = h$

$$M_{xy} = -0,00663 p_0 h^2.$$

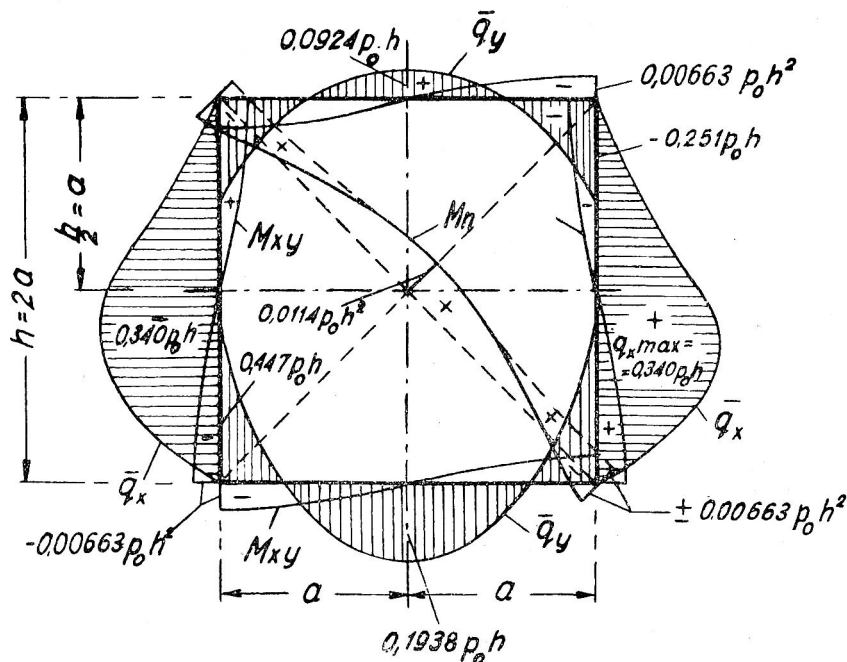
Przy znanych wartościach momentów skręcających możemy wyznaczyć siły skupione w narożach ścian. Będą one równe podwójnej wartości momentu M_{xy} , czyli

dla $x = \pm a, y = 0$

$$A = 2\bar{M}_{xy} = +0,01326 p_0 h^2$$

oraz dla $x = \pm a, y = h$

$$A = -0,01326 p_0 h^2.$$



Rys. 4. Wykres momentów i oddziaływań

Momenty zginające wzdłuż przekątnej ściany A wyznaczamy według wzoru:

$$M_n = \frac{1}{2} (M_x + M_y) \pm \frac{1}{2} (M_x - M_y)^2 - 4M_{xy}.$$

Dla $x = 0$ i $y = \frac{h}{2}$

$$M_x = 0,0140 p_0 h^2,$$

$$M_y = 0,0088 p_0 h^2.$$

Przy $\varphi = 45^\circ$ ($h = 2a$, $b = 2a$) momenty M_n przybierają postać:

$$M_n = \sin^2(M_x + M_y) \sin 2\varphi M_{xy},$$

$$M_n = \frac{M_x + M_y}{2} + 0 \cdot M_{xy} = +0,0114 p_0 h^2.$$

Dla $x = -a$ i $y = 0$

$$M_n = \pm 0,00663 p_0 h^2.$$

Z tego wynika, że wszystkie momenty M_n , których oś obrotu jest prostopadła do przekątnej, mają wartość ujemną, wówczas gdy momenty o osi obrotu równoległej do przekątnej są dodatnie i większe od odpowiednich momentów M_x i M_y . Wykres momentów i oddziaływań zobrażony jest na rys. 4.

LITERATURA

- [1] A. Nadai, *Elastische Platten* (1925).
- [2] M. Huber, *Teoria sprężystości* (1948).
- [3] K. Girkmann, *Flächentragwerke* (1948).
- [4] A. Mitzel, *Napężenia w ścianach zbiorników prostokątnych* (1953).

Katedra Budownictwa Żelbetowego

Wpłynęło do Redakcji w maju 1954.

К РАСЧЕТУ ПРЯМОГОЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ

На основании формул, выведенных ранее для упругой поверхности стенок резервуара см. *Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej* nr 2. Budownictwo I, 1954) приводятся формулы для определения растягивающих усилий в стенах резервуара. При помощи известной из теории пластинок теоремы Кельвина-Тайта, приравниваются нулю крутящие моменты вдоль линий опирания стенок, приведенные же силы от кручения прибавляются к поперечным силам вдоль опор. В результате этого получаются окончательные формулы для опорных реакций.

Применение этих формул показано на примере резервуара с заданным отношением сторон. Из графической обработки результатов сделаны выводы, имеющие практическое значение при армировании прямоугольных железобетонных резервуаров.

BEITRAG ZUM PROBLEM DES RECHTECKBEHÄLTERS

Auf Grund der in einer früheren Arbeit abgeleiteten (siehe Heft „Zeszyty naukowe“ Budownictwo I 1954) Formeln für die Biegungsfläche der Behälterwände, werden die Ausdrücke für die zur Bemessung der Wände notwendigen Zugkräfte

bestimmt. Mit Hilfe des in der Plattentheorie bekannten Satzes von Kelvin und Tait werden die Torsionsmomente längs der Auflagerkanten zum Verschwinden gebracht und die Ersatzkräfte zu den dort auftretenden Querkraften hinzuaddiert. Auf diese Weise wurden die entgeltigen Ausdrücke für die gesuchten Auflagerkräfte erhalten.

Die Anwendung der erhaltenen Formeln wird an einem Behälter von gegebenem Seitenverhältnis erläutert. An Hand der graphischen Darstellung der Ergebnisse werden Schlussfolgerungen gezogen, die beim Entwerfen von Eisenbetonbehältern für die Bewehrung der Wände von Bedeutung sind.

WYNIKI BADAŃ MODELOWYCH ŁUPINY KONOIDALNEJ

AUGUSTYN BORCZ, mgr inż., adiunkt Katedry Żelbetu

Na podstawie badań wykonanych na gipsowym modelu pokrycia konoidalnego dachu hali przemysłowej w skali 1:20 określono odkształcenia konoidy pod obciążeniem równomiernie rozłożonym, a następnie określono siły i momenty. Praca podaje metodę, wyniki pomiarów i rezultaty przeliczenia wyników z modelu na obiekt.

1. WSTĘP

Katedra Budownictwa Żelbetowego przy Politechnice Wrocławskiej wykonała dla potrzeb przemysłu projekt żelbetowej konstrukcji halowej, w której dach był łupiną konoidalną.

Ze względu na brak poprawnych teoretycznych metod obliczeniowych projekt dachu został wykonany w oparciu o badania na modelu, przeprowadzone przez wyżej wymienioną katedrę.

W pracach [1], [2], [3] czyniono próby rozwiązania przybliżonego stanu naprężeń (bez momentów) w łupinie konoidalnej; co prawda podano poprawną całość ogólną układu równań równowagi dla stanu błonowego w łupinie konoidalnej, jednak nie znaleziono rozwiązania, które spełniałoby sprężyste warunki brzegowe, występujące zawsze w łupinie zastosowanej jako przykrycie dachowe.

Próby spełnienia choćby w przybliżeniu warunków brzegowych wzdłuż krawędzi pokrywających się z tworzącymi konoidy dały osobliwe rozwiązanie, ponieważ powierzchnie rozwiązujące, utkane z charakterystyk różniczkowych równań równowagi dla stanu błonowego w konoidzie, nie przykrywają całego rozpatrywanego obszaru powłoki [4].

Spełniając warunki brzegowe również na krawędziach połączonych z łukiem, da się uniknąć osobliwości w rozwiązaniu; jednak w pracach [1], [2], [3] nie poczyniono tego rodzaju prób.

W pracach [2], [3] podane jest rozwiązanie stanu błonowego w konoidzie kołowej, którego autorstwo przypisuje się prof. K. Hrubanowi [14]. Rozwiązanie to polega na przyjęciu pewnej całki szczególnej dla układu równań równowagi stanu błonowego. Całka ta przyjmuje na brzegu pewne wartości, które na pierwszy rzut oka mogą wydawać się dosyć realne.

Rozwiązanie uzyskane w ten sposób nie jest jednoznaczne, a rozwiązań równie dobrych lub równie złych można podać nieskończenie wiele.

Z wyżej wymienionych powodów projektowanie łupin konoidalnych opiera się przede wszystkim na doświadczeniach [1], [2], [3], [5], [6], [7], wykonanych na modelach lub na doświadczeniach z budowy [8], [9], [13].

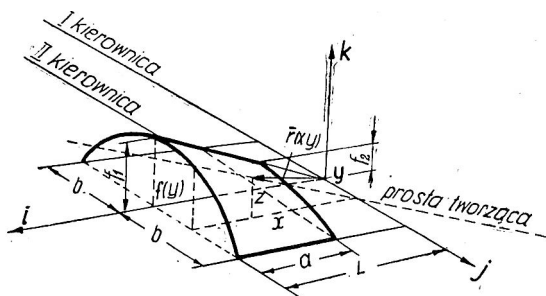
Dotychczas wykonywano doświadczenia na modelach w skali naturalnej albo nieznacznie pomniejszonej. Duży model jest bardzo trudno obciążyć, dlatego badacz nie może sobie pozwolić na wielokrotne powtarzanie pomiarów; tym zapewne należy tłumaczyć fragmentaryczny charakter dotychczasowych doświadczeń nad łupiną konoidalną.

Badania opisane w niniejszym artykule były wykonane na małym modelu, a pomiarów zrobiono kilka tysięcy. Autor jednak nadal uważa, że praca konstrukcji łupiny konoidalnej jest pod względem teoretycznym i doświadczalnym zagadnieniem otwartym. Z powyższych powodów artykuł nie będzie zawierał wniosków końcowych, ani też porównania wyników otrzymanych za pomocą badań modelowych z wynikami jakichkolwiek obliczeń teoretycznych.

2. KSZTAŁT GEOMETRYCZNY ŁUPINY DACHU

Powierzchnia środkowa łupiny konoidalnej jest rozpięta nad rzutem prostokątnym o bokach $2b$ i L .

Na rys. 1 zorientowano tak osie układu i, j, k , ażeby prostokąt o bokach $2b$ i L leżał w płaszczyźnie poziomej (ij). Powierzchnię konoidy otrzymuje się przez ruch prostej tworzącej, równoległej do płaszczyzny (ik), ślizgającej się po dwóch kierownicach. Jedną kierownicą jest prosta pokrywająca się z osią j , drugą krzywa leżąca w płaszczyźnie równoleg-



Rys. 1

lej do płaszczyzny (jk), a oddalanej od początku przyjętego układu o L w kierunku dodatnim osi i . Krzywa ta ma tę własność, że jest ciągła wraz ze swoimi pochodnymi, symetryczna względem osi k oraz dla $y = \pm b$ przenika płaszczyznę (ij).

Równanie tej krzywej zapisane wektorowo w przyjętym układzie odniesienia przedstawia się następująco:

$$\mathbf{a} = Li + y\mathbf{j} + f(y)\mathbf{k}. \quad (1)$$

Zapiszmy równanie powierzchni konoidy ze współrzędnych x i y :

$$\mathbf{R}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \quad (2)$$

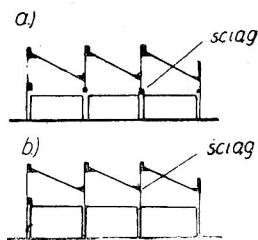
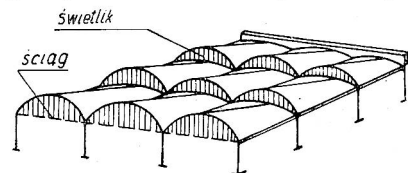
$$\frac{z}{x} = \frac{f(y)}{L}, \quad \text{stad} \quad z = \frac{f(y)}{L} x. \quad (3)$$

Po wstawieniu równania (3) do równania (2) otrzymamy wzór na powierzchnię konoidalną w postaci

$$\mathbf{R}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \frac{f(y)}{L} x\mathbf{k}. \quad (4)$$

Ze względów statycznych wykorzystuje się tylko część tej powierzchni, a mianowicie tę część, która jest rozpięta na prostokącie o bokach $2b$ i a (rys. 1).

Projektowany dach o wymiarach $2b=18,0$ m oraz $a=9,25$ m jest podparty w narożach słupami. Z poszczególnych elementów zestawionych obok siebie tworzy się dach pilasty (rys. 2).



Rys. 2

Przyjęty kształt przykrycia pozwala na umieszczenie na dachu światlika, dzięki czemu hala ma dużo światła; jest to jedna z największych jej zalet. Od czoła powłoka jest ograniczona elementem konstrukcyjnym, wykształconym od strony kierownicy II w łuk ze ściągami. Szczeliny okienne stanowią podwieszenie ściagu na łuku. Z boków elementy przykrycia są połączone monolitycznie za pomocą żeber, które wykształca się dla usztywnienia brzegów; zebro to nazywać będziemy dalej belką prostą.

Połączenie dwóch elementów powłoki w miejscu światlika może być dwójakiego rodzaju:

alternatywa a) — rozpór poziomy przenosi się za pomocą osobnego ściagu;

alternatywa b) — nie daje się osobnego ściagu dla przeniesienia parcia poziomego. Ściąg umieszcza się w odpowiednio pogrubionej krawędzi powłoki.

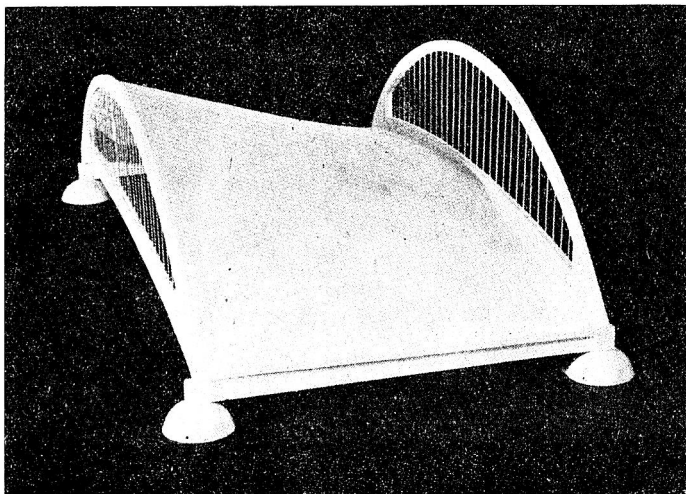
W ten sposób w każdym następnym elemencie czołowa krawędź stanowi łuk, tylna zaś krawędź jest połączona bezpośrednio, monolitycznie ze ściągami i jest rozciągana.

Ostatni element przykrycia opiera się od tyłu na stosunkowo sztywnej belce prostej.

Omawiany projekt opracowano według alternatywy b).

3. OPIS MODELU

Wymiary obiektu przyjęto na podstawie już wybudowanych w kraju i za granicą konstrukcji konoidalnych. Model jest 20-krotnym pomniejszeniem projektowanej konstrukcji (rys. 3); zrobiony jest z gipsu. Powłoka



Rys. 3

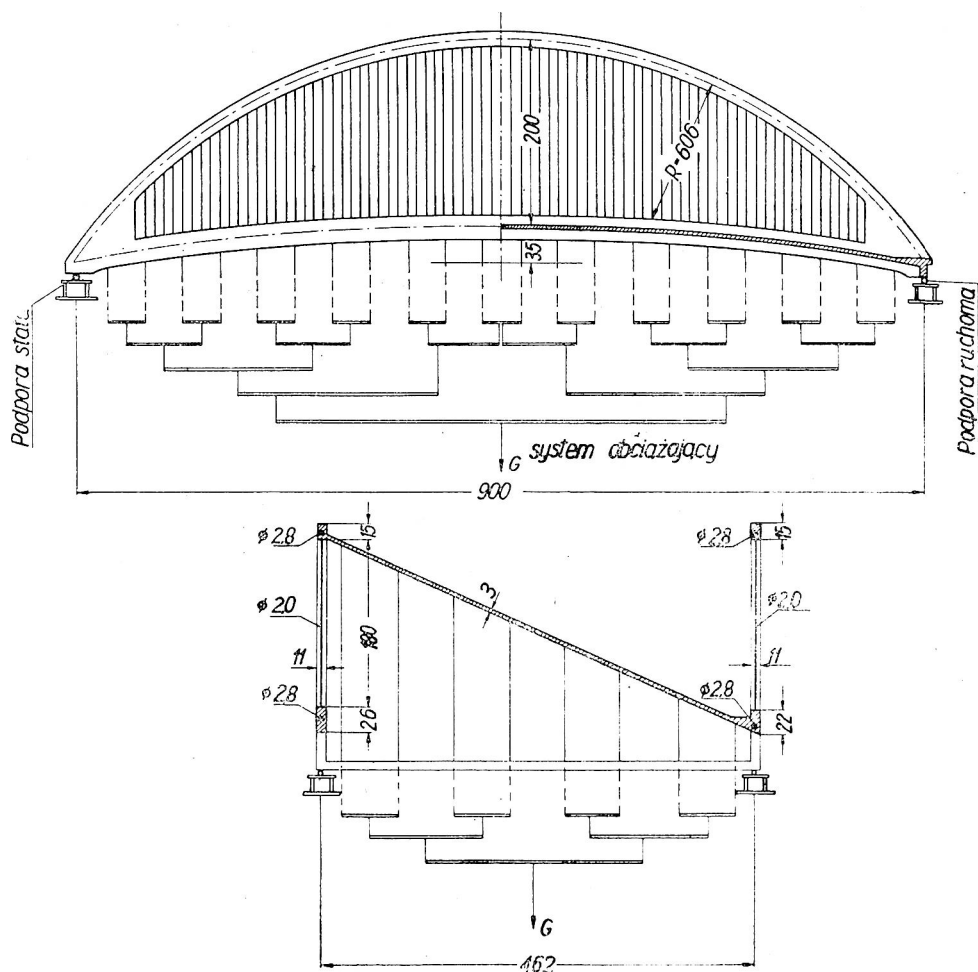
ma 3 mm grubości; ze względu na wykonanie modelu uzbrojono ją drutami żelaznymi o średnicy 0,1 mm, rozmieszczonymi w odstępach około 10 cm.

Wieszaki wykonano z drutu żelaznego pocynkowanego, o średnicy 2 mm oraz o $E=2000000 \text{ kg/cm}^2$. W ściągach i łuku jest drut z jakiegoś stopu, o średnicy 2,8 mm a współczynniku sprężystości $E=620000 \text{ kg/cm}^2$. W belce prostej, w osi przekroju znajdują się również (ze względu na wykonanie modelu) 4 druciki stalowe o średnicy 0,1 mm.

Wymiary modelu w mm podane są na rys. 4.

Model jest oparty w narożach na łożyskach. Z jednej strony łożyska są przegubowo-nieprzesuwne, z drugiej zaś strony przesuwne. Przewidywano badanie pracy modelu pod obciążeniem równomiernie rozłożonym na powierzchni powłoki. Tego rodzaju obciążenie zostało zastąpione systemem sił skupionych, równomiernie rozłożonych na powierzchni. Dla

zaczepienia tych sił nawiercono w powłoce otwory o średnicy 1 mm. W tych otworach przyczepiono nici nylonowe, na których z kolei zawieszono cały system obciążający (rys. 4) w ten sposób, żeby sprowadzić obciążę-



Rys. 4

nie wieloma siłami skupionymi do obciążenia pojedynczą siłą. Sprawdzono prawidłowość obciążenia za pomocą dynamometru. Wyniki były zupełnie zadowalające.

4. PODOBIENSTWO MODELU DO OBIEKTU

A. Obiekt jest z żelbetu; jest to materiał niejednorodny, jednak powszechnie traktuje się go w obliczeniach konstrukcji jako materiał jedno-

rodny. Przewiduje się beton o wytrzymałości $R_{28}=170 \text{ kg/cm}^2$. Według PN-B-03260 odpowiadają mu następujące współczynniki sprężystości:

dla elementów ściskanych $E_b=260\,000 \text{ kg/cm}^2$,

dla elementów zginanych $E_b=160\,000 \text{ kg/cm}^2$.

Współczynnik Poissona wynosi $\mu=0,16-0,18$.

Ciężar powłoki wraz z ociepleniem gładzią cementową, papą podwójną na lepiku, obciążeniem użytkowym pochodzącym od śniegu i od wiatru wynosi $Q=58,5 \text{ t}$.

Ściąg jest zaprojektowany w ten sposób, że całkowita siła pozioma jest przenoszona za pomocą uzbrojenia.

Łuk uzbrojony jest konstrukcyjnie, szczeliny okienne są wykonane z teowników. Powierzchnia przekroju jednej szczeliny wynosi $7,54 \text{ cm}^2$.

B. Model, jak już wspomniano wyżej, jest gipsowy. Ponieważ gips wykonano z jednego zarobu, można przyjąć, że materiał jest jednorodny. Współczynnik sprężystości wyznaczono wprost z modelu i otrzymano $E_g=78\,000 \text{ kg/cm}^2$.

Druty w ściąg i w łuku uwzględniono przy przeliczeniach w ten sposób, że zakładając przyczepność drutu do gipsu, zamieniono przekrój niejednorodny na odpowiadający mu jednorodny przekrój gipsowy $\left(\frac{620\,000}{78\,000}=8,0\right)$.

Współczynnik Poissona dla gipsu wynosi $\mu=0,04-0,06^*)$.

Wszystkie wymiary obiektu pomniejszono ($n=20$) dwudziestokrotnie, dlatego wystarczy rozpatrywać tylko jeden wymiar, np. L' , będący reprezentantem wielkości geometrycznych modelu.

Model obciążono w sposób już przedstawiony w opisie modelu.

Obciążenie zmienne $Q'=20 \text{ kg}$.

Obiekt i model są określone następującymi wielkościami:

Obiekt	Model
$[E]=\text{kgm}^{-2}$	$[E']=\text{kgm}^{-2}$
$[\mu]=1$	$[\mu']=1$
$[Q]=\text{kg}$	$[Q']=\text{kg}$
$[L]=m$	$[L']=m$

(5)

$$L = nL'.$$

*) Podaną wartość μ otrzymano z pomiarów wykonanych przez Katedrę Żelbetu.

Wpływu temperatury oraz skurczu betonu nie będziemy badać, natomiast będą nas interesować w modelu i w obiekcie następujące wielkości:

Dla obiektu		Dla modelu	
Odształcenie	$\varepsilon = \Phi(E, \mu, L, Q)$	$\varepsilon' = \Phi'(E', \mu', L', Q')$	(6)
Napięcie	$N = \Theta(E, \mu, L, Q)$	$N' = \Theta'(E', \mu', L', Q')$	(7)
Moment	$M = H(E, \mu, L, Q)$	$M' = H'(E', \mu', L', Q')$	(8)
Ugięcie	$F = \Xi(E, \mu, L, Q)$	$F' = \Xi'(E', \mu', L', Q')$	(9)
Naprężenie	$\sigma = Z(E, \mu, L, Q)$	$\sigma' = Z'(E', \mu', L', Q')$	(10)

Na podstawie twierdzenia π [10, str. 246] stosowanego w analizie wymiarowej, przyjmując wielkości wymiarowo niezależne E , L , można równania (6)-(10) napisać w następującej postaci:

Dla obiektu		Dla modelu	
Odształcenie	$\varepsilon = \varphi\left(\mu, \frac{Q}{L^2 E}\right)$	$\varepsilon' = \varphi'\left(\mu', \frac{Q'}{L'^2 E'}\right)$	(11)
Napięcie	$N = \delta\left(\mu, \frac{Q}{L^2 E}\right) EL$	$N' = \delta'\left(\mu', \frac{Q'}{L'^2 E'}\right) E' L'$	(12)
Moment	$M = \eta\left(\mu, \frac{Q}{L^2 E}\right) \frac{EL^3}{L}$	$M' = \eta'\left(\mu', \frac{Q'}{L'^2 E'}\right) \frac{E' L'^3}{L'}$	(13)
Ugięcia	$F = \xi\left(\mu, \frac{Q}{L^2 E}\right) L$	$F' = \xi'\left(\mu', \frac{Q'}{L'^2 E'}\right) L'$	(14)
Naprężenie	$\sigma = \zeta\left(\mu, \frac{Q}{L^2 E}\right) E$	$\sigma' = \zeta'\left(\mu', \frac{Q'}{L'^2 E'}\right) E'$	(15)

Dla przykładu podamy, w jaki sposób sprowadzono równanie (6) do postaci (11).

Twierdzenie π można wypowiedzieć w następujący sposób:

Jeżeli w wymiarowo niezmienniczej i jednorodnej funkcji $\Phi(E, \mu, L, Q)$ argumenty E, L są wymiarowo niezależne, a argumenty μ, Q są od E, L wymiarowo zależne, to znaczy wyrażają się one w następujący sposób:

$$\mu = \pi_1 E^{e_1} L^{l_1}; \quad (16)$$

$$Q = \pi_2 E^{e_2} L^{l_2}; \quad (17)$$

gdzie π_1, π_2 są wielkościami bezwymiarowymi (liczbami), a wykładniki e_1, e_2, l_1, l_2 są liczbami rzeczywistymi, to funkcja Φ musi mieć postać

$$\Phi(E, \mu, L, Q) = \varphi(\pi_1, \pi_2) E^c L^l; \quad (18)$$

gdzie $\varphi(\pi_1, \pi_2)$ jest zwykłą funkcją liczbową argumentów bezwymiarowych (liczbowych) π_1, π_2 i nie zależy od E, L , a wykładniki e, l (rzeczywiste) nie zależą od π_1, π_2 ani od E, L .

Z równania (16) otrzymamy

$$\mu = 1 = \pi_1 \text{ kg}^{e_1} \text{ m}^{-2e_1} \text{ m}^{l_1}. \quad (19)$$

Porównując stronami wykładniki potęgowe przy jednakowych wymiarach otrzymamy

$$e_1 = 0,$$

$$l_1 - 2e_1 = 0,$$

stąd

$$e_1 = 0; \quad l_1 = 0; \quad \mu = \pi_1 E^0 L^0$$

oraz

$$\pi_1 = \mu.$$

Podobnie z równania (17)

$$\text{kg} = \pi_2 \text{ kg}^{e_2} \text{ m}^{-2e_2} \text{ m}^{l_2}. \quad (20)$$

Porównując stronami wykładniki potęgowe przy jednakowych wymiarach otrzymamy

$$e_2 = 1,$$

$$l_2 - 2e_2 = 0,$$

stąd

$$e_2 = 1; \quad l_2 = 2,$$

a z równania (20)

$$Q = \pi_2 E^1 L^2 \quad \text{oraz} \quad \pi_2 = \frac{Q}{L^2 E}.$$

Na podstawie równania (18) równanie (6) można przekształcić:

$$\varepsilon = \Phi(E, \mu, L, Q) = \varphi\left(\mu, \frac{Q}{L^2 E}\right) E^e L^l.$$

Porównując stronami wykładniki potęgowe przy jednakowych wymiarach otrzymamy

$$e = 0; \quad l = 0,$$

a stąd wzór (11):

$$\varepsilon = \varphi\left(\mu, \frac{Q}{L^2 E}\right) E^0 L^0 = \varphi\left(\mu, \frac{Q}{L^2 E}\right).$$

Przekształcenie równań (7)-(10) do postaci (12)-(15) wykonano w analogiczny sposób.

Podobieństwo modelu do obiektu wynika z następującego warunku: żądamy, ażeby wielkości statyczne w modelu można było obliczać takimi samymi wzorami jak w obiekcie. Warunek ten sprowadza się do wymagania, ażeby funkcje liczbowe (bezwymiarowe) były jednakowe dla obiektu i dla modelu:

$$\left. \begin{array}{lll} \varphi = \varphi' & \text{stad} & \mu = \mu'; \quad \frac{Q}{L^2 E} = \frac{Q'}{L'^2 E'} \\ \delta = \delta' & ,, & \mu = \mu'; \quad \frac{Q}{L^2 E} = \frac{Q'}{L'^2 E'} \\ \eta = \eta' & ,, & \mu = \mu'; \quad \frac{Q'}{L^2 E} = \frac{Q'}{L'^2 E'} \\ \xi = \xi' & ,, & \mu' = \mu'; \quad \frac{Q}{L^2 E} = \frac{Q'}{L'^2 E'} \\ \zeta = \zeta' & ,, & \mu = \mu'; \quad \frac{Q}{L^2 E} = \frac{Q'}{L'^2 E'} \end{array} \right\} \quad (21)$$

Z warunku podobieństwa modelu do obiektu wynika, że współczynnik Poissona powinien być taki sam dla modelu jak dla materiału obiektu.

$$\mu = \mu' \quad \text{ale} \quad \mu = 0,16-0,18; \quad \mu' = 0,04-0,06.$$

Ten warunek nie jest spełniony.

W dalszych rozważaniach podobieństwa modelu do obiektu pomija się w ogóle wpływ współczynnika Poissona na wielkości statyczne w badanym modelu *).

Z drugiego warunku podobieństwa modelu do obiektu otrzymujemy

$$\frac{Q}{L^2 E} = \frac{Q'}{L'^2 E'}.$$

$$\text{Dla } L=20L', E=\frac{260000}{78000} \quad E'=3,33E' \quad (\text{przy ściekaniu}) \text{ znajdujemy}$$

*) Jaki jest wpływ pominięcia współczynnika Poissona na wielkości statyczne w powłoce, można wnioskować z uogólnionego prawa Hooke'a, wyrażonego równaniem (44). Wpływ ten można oszacować tylko dla szczególnego przypadku.

$$\frac{Q}{400 L'^2 \cdot 3,33 E'} = \frac{Q'}{L'^2 E'},$$

stąd

$$Q' = 44 \text{ kg} \quad (22)$$

oraz przy zginaniu

$$E = \frac{160\,000}{78\,000} E' = 2,05 E'$$

znajdujemy

$$Q' = 71,3 \text{ kg}. \quad (23)$$

Ponieważ obawiano się, że wyliczone obciążenie zniszczy model, zdecydowano się obciążyć go ciężarem $Q' = 20 \text{ kg}$.

Jak wykazały wyniki pomiarów, największe naprężenie w modelu pod wpływem obciążenia $Q' = 20 \text{ kg}$ wynosiły

$$\sigma'_{\max} = 7,0 \text{ kg/cm}^2.$$

Na tej podstawie można twierdzić, że gips pracował w strefie sprężystej oraz że można zastosować do materiału modelu prawo Hooke'a. Przyjmujemy takie samo założenie dla materiału obiektu.

Przyjęto, że odkształcenia obiektu wyrażają się wzorem

$$\varepsilon = \frac{a}{L^2 E} Q \text{ oraz modelu } \varepsilon' = \frac{a}{L'^2 E'} Q', \quad (24)$$

gdzie a jest współczynnikiem proporcjonalności pomiędzy odkształceniem a obciążeniem*).

*) Na podstawie (11)

$$\varepsilon = \varphi \left(\mu, \frac{Q}{L^2 E} \right).$$

Pomijając wpływ współczynnika Poissona

$$\varepsilon = \varphi \left(\frac{Q}{L^2 E} \right).$$

Rozwijamy funkcję φ w szereg potęgowy

$$\varepsilon = \varphi \left(\frac{Q}{L^2 E} \right) = \dots + a_{-1} \left(\frac{Q}{L^2 E} \right)^{-1} + a_1 \frac{Q}{L^2 E} + a_2 \left(\frac{Q}{L^2 E} \right)^2 + \dots$$

Do obliczenia współczynników k_i przyjęto jeden wyraz rozwinięcia, tj:

$$\varepsilon = \frac{a_1}{L^2 E} Q; \quad \varepsilon' = \frac{a_1 Q'}{L'^2 E'},$$

analogicznie

$$N = \frac{b_1}{L} Q; \quad M = c_1 Q; \quad F = d_1 \frac{Q}{LE}; \quad \sigma = e_1 \frac{Q}{L^2}.$$

Przy tych założeniach

$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{Q}{L^2 E} \cdot \frac{L'^2 E'}{Q'};$$

dla zginania $E=2,05E'$ oraz dla $L=20L'$

$$Q = 58500 \text{ kg}, \quad Q' = 20 \text{ kg};$$

$$k_1 = \frac{58500}{400 L'^2 2,05 E'} \cdot \frac{L'^2 E'}{20} = 3,57. \quad (25)$$

Analogicznie dla napięcia

$$k_2 = \frac{N}{N'} = \frac{QL'}{LQ'} = \frac{58500 L'}{20 L' \cdot 20} = 146; \quad (26)$$

dla momentów

$$k_3 = \frac{M}{M'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{58500}{20} = 2925; \quad (27)$$

dla ugięć

$$k_4 = \frac{F}{F'} = \frac{QL' E'}{LEQ'} = \frac{58500 L' E'}{20 L' 2,05 E' \cdot 20} = 71,5; \quad (28)$$

dla naprężeń

$$k_5 = \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{QL'^2}{L^2 Q'} = \frac{58500 L'^2}{400 L'^2 \cdot 20} = 7,31. \quad (29)$$

Otrzymaliśmy

$$\varepsilon = k_1 \varepsilon'; \quad (30)$$

$$N = k_2 N'; \quad (31)$$

$$M = k_3 M'; \quad (32)$$

$$F = k_4 F'; \quad (33)$$

$$\sigma = k_5 \sigma'. \quad (34)$$

Warto zauważyć, że odkształcenie obiektu ε oraz ugięcia F są zależne od współczynnika sprężystości, natomiast wielkości statyczne od niego nie zależą. Wielkości statyczne w powłoce, obliczone za pomocą wzorów (31), (32), (34) nie zmieniają się, jeżeli zamiast $E_b = 260\,000 \text{ kg/cm}^2$ odpowiadającemu elementom ściskanym weźmiemy $E = 160\,000 \text{ kg/cm}^2$ odpowiadające elementom zginanym. Natomiast odkształcenia i ugięcia otrzymamy wówczas różne.

Niezależnie od poczynionych uproszczeń model nie odzwierciedla wiernie obiektu z następujących powodów:

- a) stanowi on tylko jeden segment przykrycia hali. W obiekcie hala jest zestawiona z szeregu segmentów połączonych ze sobą monolitycznie;
- b) zakłada się, że powłoka niesie pełne obciążenie ciężarem własnym i użytkowym. W obiekcie współpracuje z płytą również warstwa ocieplająca;
- c) model nie uwzględnia obciążenia ciężarem własnym belek prostych oraz łuków ze ściągami.

5. POMIARY NA MODELU POTRZEBNE DO ZAPROJEKTOWANIA KONSTRUKCJI

Do zaprojektowania konoidalnej konstrukcji dachu potrzebne są następujące dane, dotyczące wielkości statycznych spowodowanych obciążeniem własnym i użytkowym:

- a) siły w ściągach oraz siły w łukach,
- b) największe naprężenia ściskające w powłoce oraz miejsce ich występowania,
- c) wielkości naprężeń rozciągających oraz miejsce ich występowania,
- d) wielkości statyczne w belce prostej.

Rozwiązanie powyższego zagadnienia otrzymano za pomocą pomiarów na modelu:

1. Dla wyznaczenia sił w ściągach potrzebna jest znajomość własności sprężystych gipsu. Ze względu na to, że współczynnik sprężystości gipsu zależy od naprężeń, czasu twardnienia, stosunku wodno-gipsowego, a przy tym, że inny jest przy ściskaniu, inny przy rozciąganiu, a inny przy zginaniu — bardzo celowe jest znalezienie współczynnika sprężystości wprost z modelu.

Obliczymy go z równania:

$$E' = \frac{M^0}{\int_{f_2}^{f_1} \varepsilon_1 h(z) z dz}, \quad (35)$$

gdzie

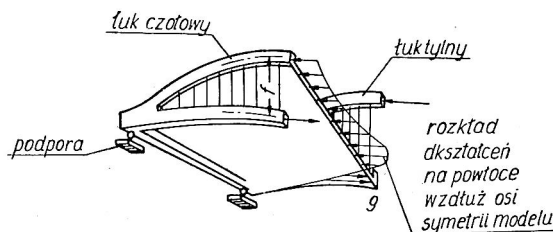
M^0 — moment zewnętrzny w środku rozpiętości powłoki rozpatrywanej jako całkowity element konstrukcyjny, statycznie wyznaczalny,

$h(z)$ — wysokość przekrojonych elementów konstrukcyjnych, tj. grubość lupiny, wysokość ściągów i łuków,

f_1, f_2 — strzałka łuku czołowego i strzałka ściągu (rys. 1).

Jeżeli ε — jest odkształceniem konstrukcji wzdłuż osi symetrii modelu, czyli odkształceniem zmierzonym w tym samym przekroju, dla

którego obliczono moment M^0 , to przez ε_1 oznaczono jego składową w kierunku normalnym do płaszczyzny przekroju (x, z) .



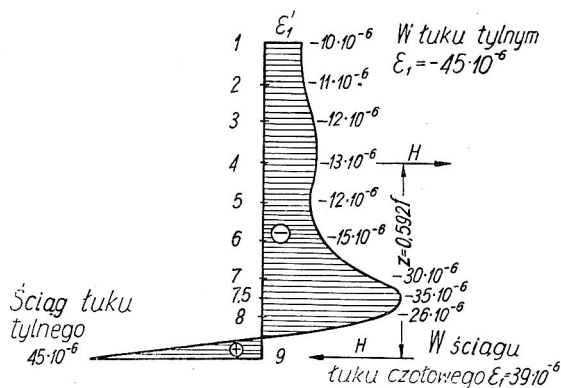
Rys. 5

W równaniu (35) został pominięty wpływ współczynnika Poissona. Wyrażenie

$$E' \int_{f_2}^{f_1} \varepsilon_1 h(z) \quad (36)$$

określa bryłę naprężeń w przekroju przeprowadzonym wzdłuż osi symetrii modelu (rys. 5 i 6).

W celu wyznaczenia wartości (36) zmierzono tenszometrem Huggenbergera odkształcenie ε_1 ; otrzymane wartości podano na rys. 6.



Rys. 6

Ze względu na brak odpowiedniej aparatury do pomiaru odkształceń można było zmierzyć odkształcenia tylko na górnej powierzchni powłoki. Przyjęcie, że taki pomiar odpowiada powierzchni środkowej powłoki, oczywiście tylko w przybliżeniu odzwierciedla bryłę odkształceń. Przybliżenie jest tym większe, im bardziej praca powłoki jest zbliżona do stanu błonowego.

Ramię wewnętrzne bryły odkształceń obliczone na podstawie pomiarów wyniosło

$$z = 0,582(f_1 - f_2).$$

Siła pozioma w ściąгах wynosi

$$H = \frac{M_0}{0,582(f_1 - f_2)}.$$

Na ścią w łuku czołowym przypada około 40% całkowitej siły poziomej, na ścią zaś w łuku tylnym około 60% całkowitej siły poziomej.

2. Największe naprężenia ściskające w powłoce w przekroju przechodzącym przez oś symetrii konstrukcji są równe:

W modelu	W obiekcie
$\sigma' = -78000 \times 35 \times 10^{-6} = -2,7 \text{ kg/cm}^2$	$\sigma = -2,7 \times 7,31 = -19,5 \text{ kg/cm}^2$

Maksymalne naprężenia ściskające występują w narożu powłoki przy łuku tylnym i wynoszą (rys. 14):

W modelu	W obiekcie
$\sigma'_{\max} = -7,0 \text{ kg/cm}^2$	$\sigma_{\max} = -7,0 \times 7,31 = -51,0 \text{ kg/cm}^2$

Dopuszczalne naprężenia w betonie na ściskanie wynoszą

$$\sigma_b = \frac{140}{2,3} = 60,8 \text{ kg/cm}^2 > \sigma_{\max}$$

i nie przekraczają największych naprężeń ściskających w konstrukcji.

3. Największe naprężenia rozciągające występują w ściągu łuku tylnego:

Dla modelu	Dla obiektu
$\sigma'_{\min} = 78000 \times 45 \times 10^{-6} = 3,5 \text{ kg/cm}^2$	$\sigma_{\min} = 3,5 \times 7,31 = 25,6 \text{ kg/cm}^2$

Naprężenia rozciągające występują również w powłoce wzdłuż ściągu oraz wzdłuż belki prostej.

W projekcie całkowitą siłę rozciągającą przeniesiono za pomocą uzbrojenia.

4. Zmierzone ugięcia belki prostej wskazują na charakter jej pracy. Zmierzono dwie składowe ugięcia:

a) w kierunku poziomym,

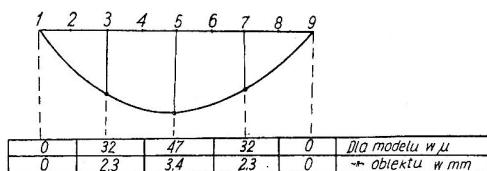
b) w kierunku pionowym.

Obciążenie modelu $Q' = 20 \text{ kg}$.

Otrzymano następujące wyniki:

1) w kierunku poziomym — belka ugina się na zewnątrz modelu (rys. 7).

Pomiar ten wykonano czujnikami zegarowymi oraz metodą optyczną za pomocą mikroskopu pomiarowego. Otrzymano zadowalającą zgodność;



Rys. 7

2) w kierunku pionowym belka ugina się do góry (rys. 8).

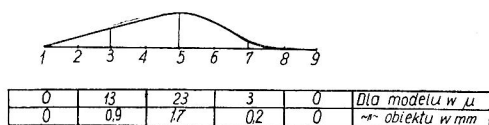
Pomiar wykonano za pomocą czujników zegarowych.

Z pomiaru ugięć można wnioskować o pracy belki prostej, a mianowicie:

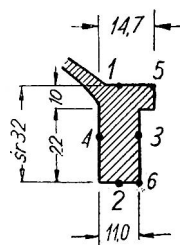
a) belka prosta nie niesie powłoki, lecz odwrotnie powłoka unosi belkę do góry,

b) rozpór poziomy od płyty powłoki jest stosunkowo bardzo mały, na co wskazują ugięcia poziome belki.

Pomiar odkształceń belki prostej za pomocą tensometru Huggenbergera wykazał, że jest ona rozciągana i pracuje jak ściąg, a mianowicie:



Rys. 8



Rys. 9

wicie otrzymano następujący rozkład naprężeń w środku rozpiętości belki prostej (rys. 9):

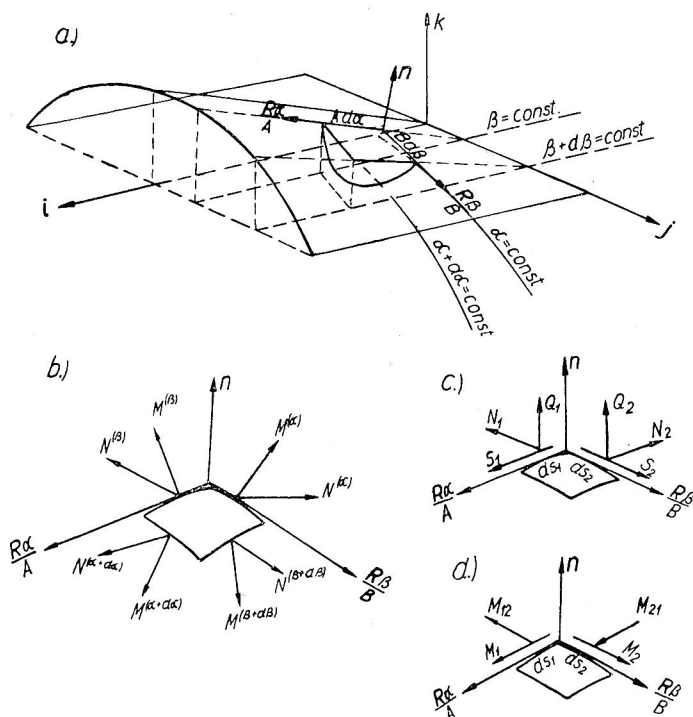
Na modelu			W obiekcie	
punkt 1	$\sigma' = 3,5 \text{ kg/cm}^2$		$\sigma = 25,6 \text{ kg/cm}^2$	
5	4,7	„	34,4	„
3	2,0	„	14,6	„
6	1,0	„	7,3	„

Po uwzględnieniu wpływu zginania belki obliczono, że siła rozciągająca belkę wynosi $\sim \frac{1}{3} Q'$.

6. POMIAR NAPRĘŻEŃ ORAZ MOMENTÓW

Wielkości statyczne w powłoce

Ciężar własny oraz obciążenie użytkowe są przyczynami powstania w powłoce naprężeń. Określimy obecnie, co nazwalimy wielkościami statycznymi w powłoce. W tym celu wytnijmy w niej element zawarty



Rys. 10

między przekrojami normalnymi do powierzchni środkowej wzdłuż linii $\alpha = \text{const}$ i $\alpha + d\alpha = \text{const}$ oraz $\beta = \text{const}$ i $\beta + d\beta = \text{const}$ (rys. 10a). Boki tego elementu są $ds_1 = A d\alpha$; $ds_2 = B d\beta$. Zarówno $A = A(\alpha, \beta)$ jak też $B = B(\alpha, \beta)$.

Utwórzmy na powierzchni środkowej zadanej równaniem $R(\alpha, \beta)$ w punkcie (α, β) układ, określony za pomocą wektorów:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha} &= \frac{\mathbf{R}_\alpha}{A}, \\ \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} &= \frac{\mathbf{R}_\beta}{B}, \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{R}_\alpha}{A} \times \frac{\mathbf{R}_\beta}{B}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

W kierunku $\mathbf{n}$ będziemy odkładać rzędne γ , przy czym

$$-\frac{h}{2} \leq \gamma \leq \frac{h}{2},$$

gdzie h — grubość powłoki *).

Oznaczmy przez $ds_1^* = A^* da$ oraz $ds_2^* = B^* d\beta$ element długości łuku linii, którą wykreśla koniec wektora $\gamma \mathbf{n}$ poruszając się po linii $\alpha = \text{const}$ lub $\beta = \text{const}$ przy ustalonym γ .

Oznaczmy przez $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\alpha, \beta, \gamma)$ wektor naprężenia działającego w rozpatrywanym przekroju. Naprężenia te redukujemy do wektora siły i momentu działających na bok elementu powierzchni środkowej, tj. na ds_1 lub na ds_2 . Wektor sił określamy równaniami:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}^{(\beta)} ds_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \bar{\sigma}(\alpha, \beta_0, \gamma) ds_1^* d\gamma; \\ \mathbf{N}^{(\alpha)} ds_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \bar{\sigma}(\alpha_0, \beta, \gamma) ds_2^* d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Wektory momentów:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}^{(\beta)} ds_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{\sigma}(\alpha, \beta_0, \gamma) \times \gamma \mathbf{n}] ds_1^* d\gamma; \\ \mathbf{M}^{(\alpha)} ds_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{\sigma}(\alpha_0, \beta, \gamma) \times \gamma \mathbf{n}] ds_2^* d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Gęstości wektorów sił i momentów rozkładamy na składowe w kierunku przyjętego układu odniesienia, określonego wektorami:

$$\frac{\mathbf{R}_\alpha}{A}; \quad \frac{\mathbf{R}_\beta}{B}; \quad \mathbf{n}, \quad (\text{rys. 10c, d})$$

*) W równaniu (37) znak $\times$ oznacza iloczyn wektorialny.

$$\mathbf{N}^{(\beta)} = S_1 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{A} - N_1 \frac{\mathbf{R}_\beta}{B} + Q_1 \mathbf{n}, \quad (40)$$

$$\mathbf{N}^{(\alpha)} = -N_2 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{A} + S_2 \frac{\mathbf{R}_\beta}{B} + Q_2 \mathbf{n}; \quad (41)$$

oraz

$$\mathbf{M}^{(\beta)} = M_1 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{A} - M_{12} \frac{\mathbf{R}_\beta}{B}; \quad (42)$$

$$\mathbf{M}^{(\alpha)} = M_{21} \frac{\mathbf{R}_\alpha}{A} + M_2 \frac{\mathbf{R}_\beta}{B}. \quad (43)$$

Składowe wektorów sił i momentów:

$$S_1, S_2, N_1, N_2, Q_1, Q_2, M_1, M_2, M_{12}, M_{21}$$

będziemy nazywać wielkościami statycznymi w powłoce.

Na podstawie prawa Hooke'a dla ciała izotropowego można wyprowadzić związki pomiędzy wielkościami statycznymi a odkształceniami, które dla ortogonalnej parametryzacji α, β , przy pewnych uproszczeniach mają postać*):

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), \\ N_2 &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1), \\ S &= S_1 = S_2 = \frac{Eh}{2(1 + \mu)} \omega, \\ M_1 &= -\frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} (\kappa_1 + \mu \kappa_2), \\ M_2 &= -\frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} (\kappa_2 + \mu \kappa_1), \\ M_{12} &= M_{21} = \frac{Eh^3}{12(1 + \mu)} \tau. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Sily poprzeczne:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (A M_{12}) + M_{12} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} (B M_1) + M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right], \\ Q_2 &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (B M_{12}) + M_{12} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} (A M_2) + M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

*) Porównaj [4] str. 70, 81 i 28 oraz [11] str. 299 i 300.

W równaniach tych oznaczają:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w, \\ \omega &= \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right), \\ \kappa_1 &= -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ \tau &= -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Przez u , v , w oznaczono składowe przemieszczenia w danym punkcie, leżącym na powierzchni środkowej powłoki. Składowa u i v leży w płaszczyźnie ściśle stycznej, składowa zaś w jest normalna do powierzchni środkowej.

Przez h oznaczono grubość powłoki.

k_1 , k_2 oznaczają krzywizny powierzchni powłoki w kierunku α i β .

Wzory (44), (45) i (46) znacznie uproszczą się, jeżeli wprowadzimy taką parametryzację α' , β' , przy której $A'=B'=1$; a więc

$$\frac{\partial A'}{\partial \alpha} = \frac{\partial A'}{\partial \beta} = \frac{\partial B'}{\partial \alpha} = \frac{\partial B'}{\partial \beta} \equiv 0.$$

Przejdźcie od parametryzacji α , β do α' , β' otrzymamy z warunku:

$$\left. \begin{aligned} da' &= A da; & \alpha' &= \int A da; \\ d\beta' &= B d\beta; & \beta' &= \int B d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

O ile analityczne przekształcenie parametru może stanowić duże trudności rachunkowe, a nawet czasem nie uda się nam scałkować równań (47), o tyle naniesienie parametrów α' , β' na model powłoki nie przedstawia większych trudności. Długości łuków α' , β' można odkładać i mierzyć bezpośrednio na modelu nie obliczając ich analitycznie.

Pominięcie wpływu współczynnika Poissona na wielkości statyczne w powłoce upraszcza jeszcze bardziej równania (44), a nawet wówczas parametry α , β nie muszą być ortogonalne.

Przy poczynionych założeniach, równania (44), (45) i (46) mają postać:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= Eh\varepsilon_1, \\ N_2 &= Eh\varepsilon_2, \\ S &= S_1 = S_2 = \frac{Eh}{2} \omega, \\ M_1 &= -\frac{Eh^3}{12} \varkappa_1, \\ M_2 &= -\frac{Eh^3}{12} \varkappa_2, \\ M_{12} &= M_{21} = \frac{Eh^3}{12} \tau, \\ Q_1 &= \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} - \frac{\partial M_1}{\partial \alpha}, \\ Q_2 &= \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_2}{\partial \beta}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

gdzie oznaczono

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w; & \varkappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w; & \varkappa_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}; \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}; & \tau &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Naprężenia w powłoce oraz momenty obliczono posługując się równaniami (48) i (49).

Metody pomiarowe

Z wzorów (44) oraz (46) wynikają dwie metody pomiarowe:

1) metoda przemieszczeń polegająca na pomiarze składowych przemieszczania u , v , w ;

2) metoda odkształceń, polegająca na bezpośrednim pomiarze odkształceń ε_1 , ε_2 , ω , $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ .

1. Wykonano najpierw pomiary przemieszczeń spowodowanych odkształceniem powłoki pod wpływem obciążenia $Q' = 10$ kg za pomocą mikroskopu pomiarowego. Wykonano 500 pomiarów w 57 punktach na powłoce.

Poniżej zestawiono rozrzuty otrzymane przy odczytach*).

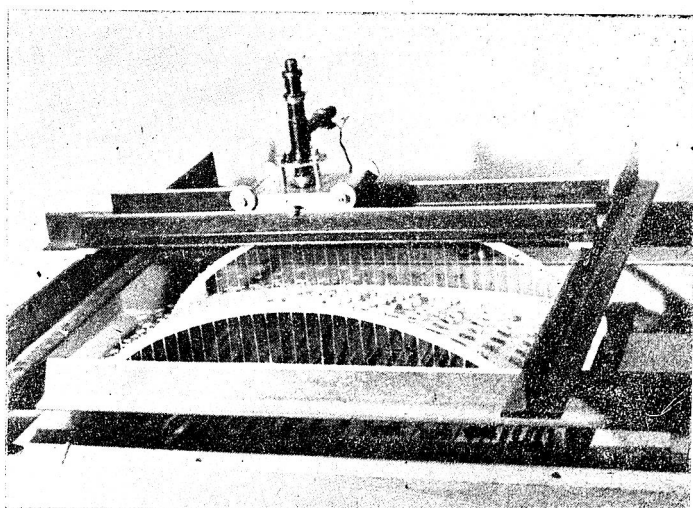
Pomiar poziomych składowych przemieszczenia (czujnik $\frac{1}{1000}$ mm)

Rozrzut odczytów w μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9—10	11—15	15—29
% od całkowitej ilości odczytów	0	1,75	7,0	7,0	12,3	8,8	8,8	8,8	5,25	15,8	19,3	5,20
	28,05					31,65					40,30	

Pomiar składowej pionowej przemieszczenia (czujnik $\frac{1}{100}$ mm)

Rozrzut odczytów w μ	0	7	10	11—15	16—20	21—30	31—45	45—50
% od całkowitej ilości odczytów	0	5	10	30	10	15	20	10
	55					45		

Jak widać z zestawienia, dokładność pomiarów jest za mała, ażeby można było na ich podstawie obliczać wielkości statyczne w powłoce [12].



Rys. 11

2. Pomiar wykonano metodą odkształceń (rys. 11).⁵ Wyznaczono tensometrem Huggenbergera linie równych odkształceń na górnej powierzchni

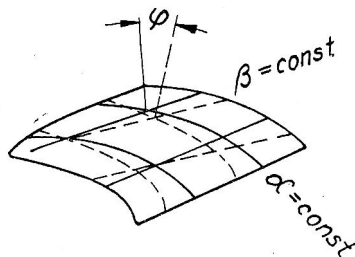
*) Przez rozrzut pomiaru w danym punkcie powłoki rozumie się różnicę pomiędzy największym i najmniejszym odczytem przemieszczenia.

powłoki. Odpowiadające tym odkształceniom naprężenia obliczono za pomocą wzorów (48), a następnie po pomnożeniu przez współczynnik k_3 z równania (29) zestawiono na rys. 12 jako rozkład naprężeń w obiekcie na powierzchni powłoki.

Za pomocą uchyłomierza zmierzono kąty obrotu normalnej do powłoki, powstające przy obciążaniu i odciążaniu modelu. Wyniki z pomiaru kątów powierzchni konoidalnej obciążonej równomiernie ciężarem $Q' = 20$ kg zestawiono na rys. 13.

Na podstawie zmierzonych kątów obrotu normalnej do powierzchni środkowej pod wpływem obciążenia $Q' = 20$ kg można obliczyć momenty w powłoce.

Na rysunku 14 pokazany jest element powłoki przed odkształceniem. Liniami przerywanymi zaznaczono element po odkształceniu. Normalna do powłoki przed odkształceniem tworzy z normalną po odkształceniu kąt φ .



Rys. 14

Kąt φ rozkładamy na dwie składowe:

składowa w kierunku α jest $\varphi^{(1)}$

składowa w kierunku β jest $\varphi^{(2)}$.

Kąt φ oraz jego składowe są bardzo małe w porównaniu do wymiarów powłoki, dlatego można napisać:

$$\varphi^{(1)} \approx \operatorname{tg} \varphi^{(1)} = \frac{\partial w}{\partial \alpha},$$

$$\varphi^{(2)} \approx \operatorname{tg} \varphi^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial \beta},$$

gdzie $w(\alpha, \beta)$ jest składową normalną przemieszczenia powierzchni środkowej pod wpływem obciążenia konstrukcji.

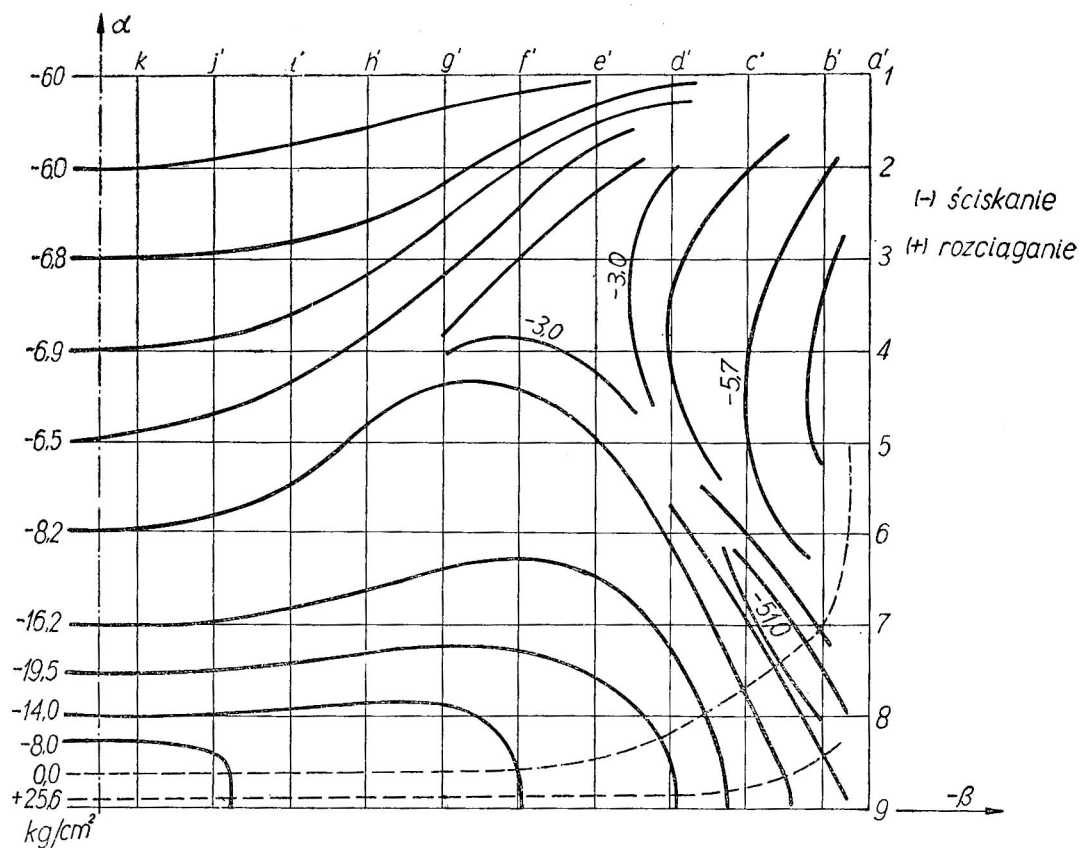
Dla wyznaczenia momentów trzeba znać pochodne kątów φ_1 i φ_2 *)

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi^{(1)},$$

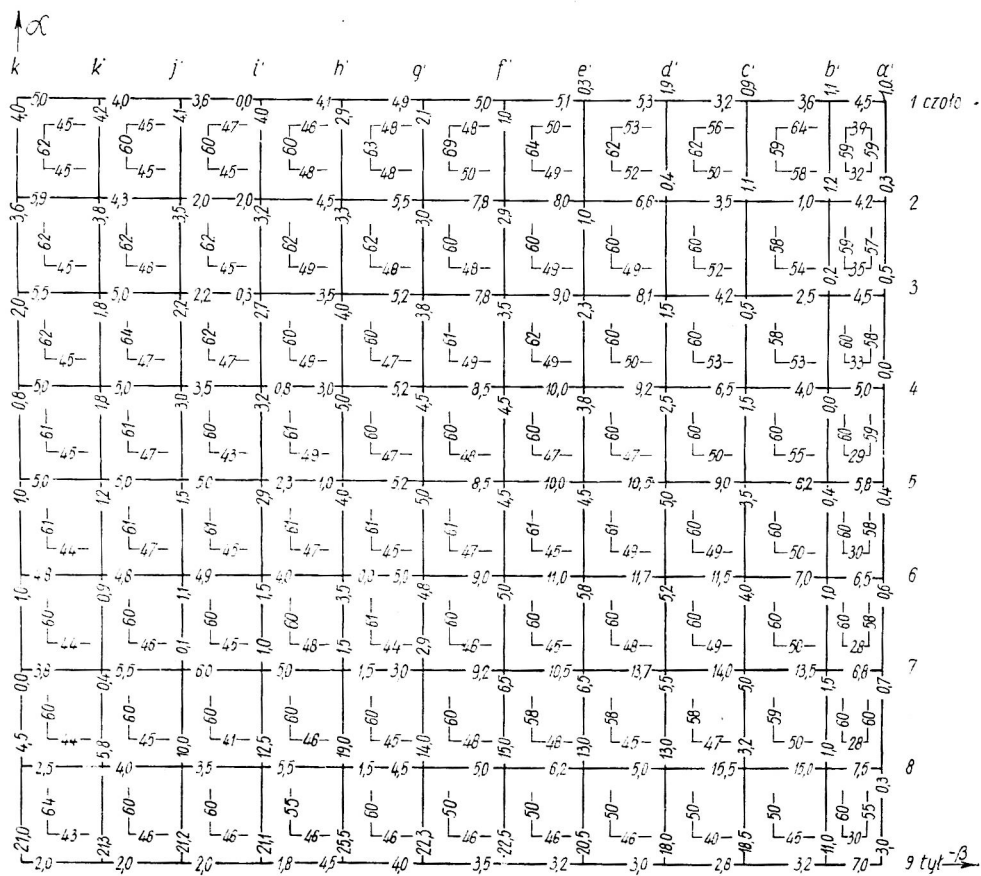
$$\kappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \varphi^{(2)},$$

$$\tau = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \varphi^{(1)}.$$

*) Porównaj równanie (49).



Rys. 12. Rozkład równych naprężeń na powierzchni konoidy. Wartości naprężeń przeliczono dla obiektu



Rys. 13. Wyniki pomiarów kątów ugięcia powierzchni modelu konoidy obciążonego równomiernie ciężarem $G=20$ kg. Jednostka odczytu wynosi $30''$ czyli $0,0001454$

Kąty $\varphi^{(1)}$ i $\varphi^{(2)}$ zmierzono w węzłach siatki. Pochodne kątów wyznaczono metodą różnic skończonych. (rys. 15*). W węzłach siatki oznaczono kąty obrotu. Jednostka odczytu kąta $S=0,0001454$. W polach siatki oznaczono długość odpowiednich boków siatki w mm. Na przykład dla węzła 3d:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi_{3d}^{(1)} = \frac{\varphi_{2d}^{(1)} - \varphi_{4d}^{(1)}}{2\Delta\alpha} =$$

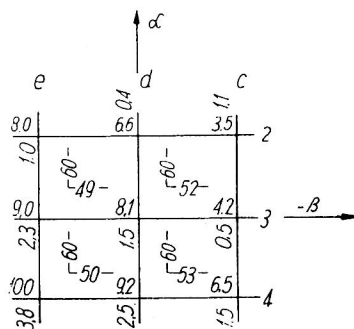
$$= \frac{0,4 + 2,5}{12,0} = 0,242 \text{ cm}^{-1} S,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = \frac{\partial}{\partial \beta} \varphi_{3d}^{(2)} = \frac{\varphi_{3e}^{(2)} - \varphi_{3c}^{(2)}}{2\Delta\beta} =$$

$$= \frac{9,0 - 4,2}{10,1} = 0,475 \text{ cm}^{-1} S,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \beta} \varphi_{3d}^{(1)} = \frac{\varphi_{3c}^{(1)} - \varphi_{3e}^{(1)}}{2\Delta\beta} = \frac{-2,3 + 0,5}{10,1} = -0,178 \text{ cm}^{-1} S$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi_{3d}^{(2)} = \frac{\varphi_{2d}^{(2)} - \varphi_{4d}^{(2)}}{2\Delta\alpha} = \frac{6,6 - 9,2}{12,0} S = -0,200 \text{ cm}^{-1} S.$$



Z przeprowadzonego obliczenia otrzymujemy różne wielkości na pochodne mieszane. Różnice wynikają z następujących powodów:

- a) z błędów odczytów przy pomiarze kątów,
- b) z metody obliczenia pochodnych mieszanych.

Obliczając pochodną $\frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha}$ znaleźliśmy jej wartość w punkcie pośrednim pomiędzy 3e i 3c. Podobnie obliczając pochodną $\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}$ znaleźliśmy jej wartość znów w jakimś pośrednim punkcie pomiędzy 2d i 4d. Punkty te w pierwszym i drugim przypadku nie pokrywają się, stąd pochodzi również różna ich wartość**). Momenty zginające obliczamy na podstawie wzorów (48).

Dla $E=78\,000 \text{ kg/cm}^2$, $h=0,3 \text{ cm}$

$$M_{3d}^{(1)} = -\frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = -\frac{78\,000 \cdot 0,3^3}{12} \cdot 0,0001454 \cdot 0,242 =$$

$$= -0,0255 \cdot 0,242 = -0,0062 \text{ kgcm/cm};$$

*) Oznaczenia węzłów jak na rys. 13.

**) Obciążenie składające się z systemu sił skupionych wpływa również niekorzystnie na otrzymane wyniki.

$$M_{3d}^{(2)} = -\frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = -0,0255 \cdot 0,475 = -0,0121 \text{ kgcm/cm};$$

$$M_{3d}^{(21)} = \frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} = -0,0255 \cdot 0,178 = -0,0045 \text{ kgcm/cm};$$

$$M_{3d}^{(12)} = \frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} = -0,0255 \cdot 0,200 = -0,0051 \text{ kgcm/cm}.$$

Dla obiektu obliczone momenty wnoszą:

$$M_{3d}^{(1)} = -2925 \cdot 0,0062 = -18,1 \text{ kgcm/cm} = -18,1 \text{ kgm/m};$$

$$M_{3d}^{(2)} = -2925 \cdot 0,0121 = -35,5 \text{ kgcm/cm} = -35,5 \text{ kgm/m};$$

$$M_{3d}^{(21)} = -2925 \cdot 0,0045 = -13,2 \text{ kgcm/cm} = -13,2 \text{ kgm/m};$$

$$M_{3d}^{(12)} = -2925 \cdot 0,0051 = -14,9 \text{ kgcm/cm} = -14,9 \text{ kgm/m}.$$

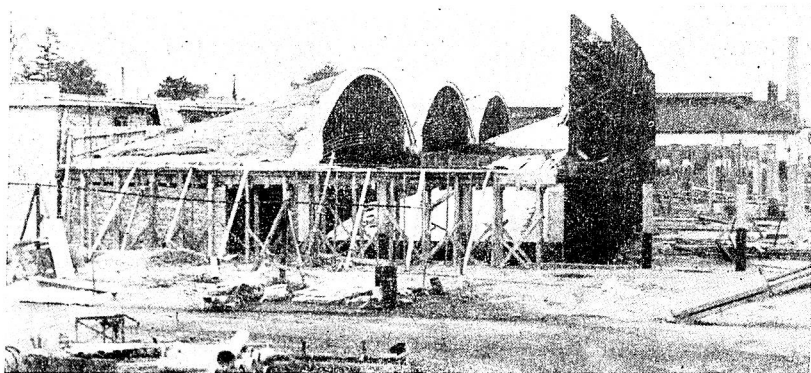
Naprężenia w powłoce od momentu $M_{4d}^{(2)}$

$$1 \text{ cm } M_{3d}^{(2)} = -35,5 \text{ kgcm},$$

$$W_x = \frac{bh^3}{6} = \frac{1,0 \cdot 6,0^3}{6} = 6,0 \text{ cm}^3;$$

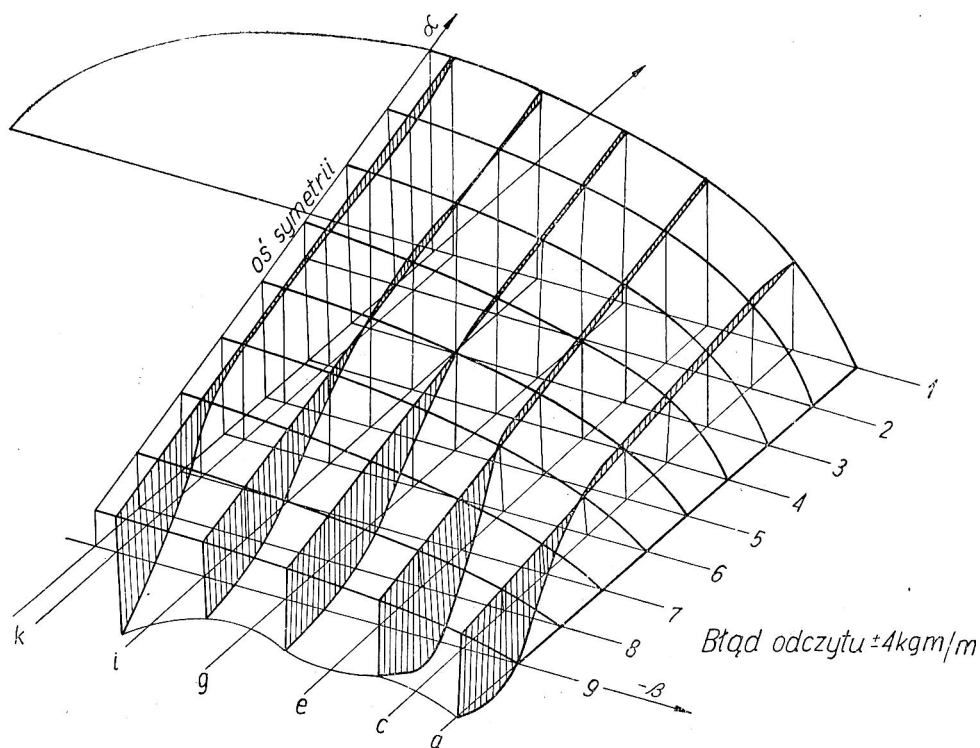
$$\sigma = \mp \frac{35,5}{6,0} = \mp 5,95 \text{ kg/cm}^2.$$

Na podstawie otrzymanych wyników zaprojektowano konstrukcję hali. Rysunek 16 przedstawia łupinę podczas budowy.



Rys. 16

Wykresy momentów M_1 i M_2 pokazano na rysunkach 17, 18 oraz zestawiono je w tablicach I, II i III.



Rys. 17

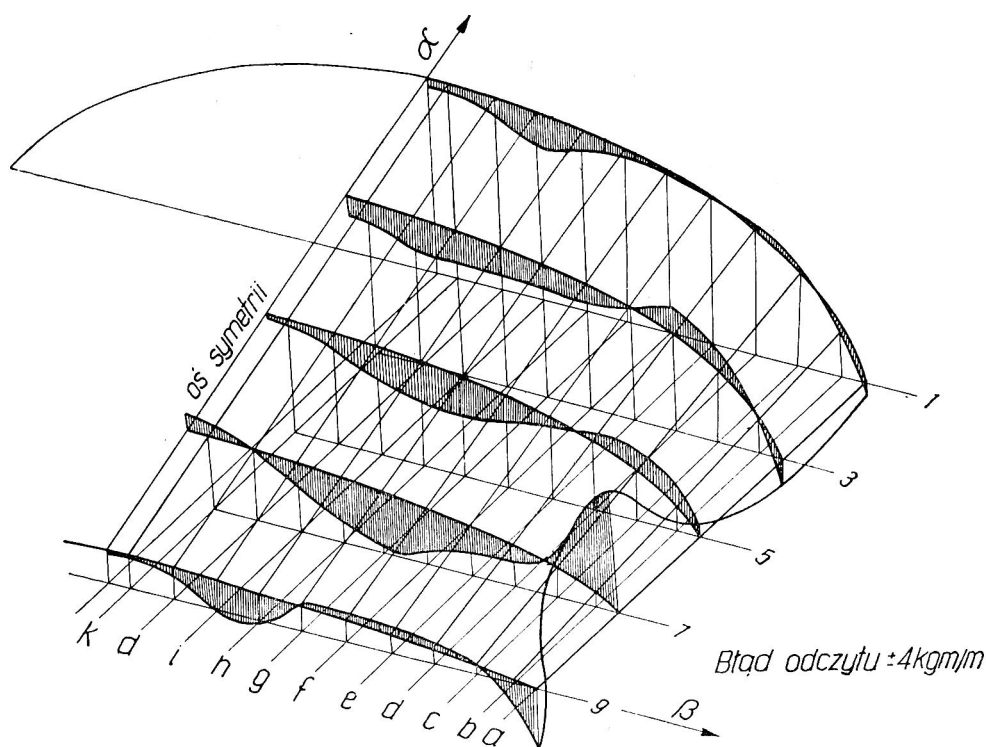
Tablica I

Wartości momentów M_1 w kgm/m obliczone dla obiektu $Q = 58,5 t$

9	8	7	6	5	4	3	2	1	Prze- krój
45,0	24,0	1,9	-1,9	-3,8	-5,8	-1,9	-4,2	-8,8	a
228,0	160,0	45,1	-9,3	-15,5	-18,9	-16,7	-8,9	2,5	c
111,8	186,0	118,5	-12,3	-12,3	-13,7	-17,4	-15,9	-15,7	e
123,6	131,5	117,0	48,6	-1,8	-7,4	-9,3	-9,9	-9,8	g
116,5	131,0	87,0	23,9	10,4	-1,2	0,0	8,0	10,0	i
192,5	134,7	42,2	4,9	5,4	3,6	11,9	14,7	4,9	k

Moment dodatni wygina na dół.

Moment ujemny wygina do góry.



Rys. 18

Tablica II

Wartości momentów M_2 w kgm/m obliczone dla obiektu $Q=58,5 t$.

l	k	j	i	h	g	f	e	d	c	b	a	Prze- krój
0,0	0,0	1,6	52,7	47,0	- 8,1	- 6,5	- 4,0	- 3,5	- 1,8	41,7	94,5	9
-28,8	-18,3	4,1	36,0	63,9	88,5	61,5	36,0	26,9	- 1,5	-68,8	-178,0	7
0,0	0,0	22,3	48,6	58,1	58,9	37,7	15,9	- 7,7	-30,5	-28,4	- 10,3	5
8,3	27,0	43,4	45,3	37,6	33,4	24,2	2,3	-35,4	-39,3	2,5	42,6	3
16,5	11,6	32,4	61,7	38,8	7,0	1,5	2,2	-12,9	-10,6	9,4	17,2	1

Moment dodatni wygina na dół, moment ujemny wygina w górę.

Wartości momentów M_{12} i M_{21} w kg/m obliczone dla obiektu $Q=58,5$ t.

l	k	j	i	h	g	f	e	d	c	b	a	Przekrój	
- 15,4	- 24,8	- 18,6	- 50,1	- 74,5	7,4	22,4	44,7	29,8	189,1	159,1	6,8	M_{12}	9
- 5,2	- 1,6	1,6	- 34,0	- 8,9	24,3	14,6	36,3	17,4	61,5	153,8	198,6	M_{21}	9
- 16,3	- 27,8	- 24,8	- 20,7	- 37,3	- 6,8	39,3	50,0	74,3	76,0	64,0	- 1,3	M_{12}	8
- 22,0	- 45,5	- 58,1	- 76,7	- 12,3	32,1	7,7	16,0	79,3	92,0	33,4	18,7	M_{21}	8
- 9,6	- 4,9	- 8,7	9,3	25,3	3,1	25,3	30,4	42,3	- 25,1	- 49,7	- 6,3	M_{12}	7
- 6,8	- 0,9	- 11,5	- 11,2	15,5	66,0	75,2	- 8,0	- 11,6	- 30,2	- 41,0	- 21,3	M_{21}	7
- 1,2	- 1,2	8,7	21,3	18,5	1,2	- 3,1	- 6,2	- 15,2	- 31,0	- 18,6	- 9,5	M_{12}	5
3,3	4,0	19,9	20,2	16,3	3,9	- 3,9	3,9	- 7,7	- 32,7	- 27,5	0,0	M_{21}	5
- 5,4	4,1	0,9	17,1	9,1	1,1	- 4,3	- 12,4	- 16,1	- 11,8	- 18,8	- 5,3	M_{12}	3
- 13,3	1,6	7,3	14,3	8,4	- 3,9	- 11,6	- 15,2	- 13,3	- 11,9	- 8,5	- 6,4	M_{21}	3
7,2	3,7	- 19,8	- 24,9	- 4,7	- 6,5	- 32,5	- 34,9	- 15,5	- 3,8	- 32,8	3,9	M_{12}	1
3,3	0,8	- 1,6	- 9,6	- 15,0	- 14,8	- 18,2	- 20,9	- 4,1	4,9	- 0,8	2,0	M_{21}	1

LITERATURA

- [1] A. Jilek, *Speciální Železobetonové Konstrukce*, (1951) c. 201.
- [2] S. Kajfasz, *Badanie na modelach sklepienia w kształcie konoidy do przykrycia hal*, Prace ITB, nr 185.
- [3] Z. Leśniak, *Obliczanie i projektowanie cienkościennych sklepień wichrowatych*, Inżynieria i Budownictwo, (1952) nr 11 oraz (1954) nr, 8.
- [4] A. L. Goldenweizer, *Teoria uprugich tonkich oboloczek*, Moskwa (1953), s. 424.
- [5] R. Kowalezyk, Z. Konarzewski, J. Arendarski, L. Milbrandt, J. Szule, *Badania modelu konstrukcji konoidalnej*, Budownictwo Przemysłowe (1952), nr 10 s. 13.
- [6] *Z prac badawczych i doświadczalnych I. T. B.*, Inżynieria i Budownictwo (1953), nr 5.
- [7] B. Babicki, *Z badań łupin konoidalnych*, Inżynieria i Budownictwo (1952), nr 6.
- [8] B. Koy, *Doświadczenia Biura Studiów i Projektów Typowych Budownictwa Przemysłowego nad nowymi konstrukcjami*, Budownictwo Przemysłowe (1954), nr 10, s. 30.
- [9] W. Łada, *Obserwacje i doświadczenia z budowy pionierskiej*, Budownictwo Przemysłowe (1954), nr 2, s. 21.
- [10] S. Drobot, *O analizie wymiarowej, Zastosowania matematyki*, Warszawa-Wrocław (1954), I, Zeszyt 4, s. 233-272.
- [11] W. Z. Własow, *Obszczaja teorija oboloczek*, Moskwa (1949).
- [12] A. Lisowski, *Optyczna metoda mierzenia odkształceń sprężystych układów przestrzennych na modelach*, Inżynieria i Budownictwo (1952), nr 3.
- [13] M. Fanconnier, *Essais de rupture d'une voûte mince conoïde en beton armé*, Génie civil, (1933) t. I, s. 533.
- [14] K. Hruban, *O některých nových družích tenkých kleneb*, Technický obzor nr. 12,13 (1942)

Wpłynęło do Redakcji w kwietniu 1954

Katedra Budownictwa Żelbetowego

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ КОНОИДА

Для нужд промышленного строительства спроектирован железобетонный цех с коноидальным перекрытием. Ввиду отсутствия строгих методов расчета коноида проект составлен на основании измерения деформации модели. Модель была изготовлена из гипса в масштабе 1:20. Равномерная нагрузка была заменена регулярной системой сосредоточенных сил.

При помощи метода размерности был найден масштаб нагрузки, при которой результаты измерения деформаций на модели можно было перенести на проектируемую конструкцию.

Коэффициент Пуассона для гипса примененного при изготовлении модели составлял $\mu = 0,04 - 0,06$. Распределение напряжений на поверхности коноида установлено при помощи тензометров Гуггенбергера. Изгибающие моменты были определены посредством оптического клинометра, а прогибы поддерживающих коноид элементов найдены при помощи мессур. Вычисленные для железобетонного коноида статические величины представлены на графиках.

VERSUCHSERGEBNISSE AM MODELL DER KONOIDSCHALE

Für Industriezwecke wurde am Lehrstuhl für Stahlbetonbau der T. H. — Wrocław der Entwurf einer Stahlbetonhalle bearbeitet, deren Dachkonstruktion als Konoidschale ausgebildet ist. Da bis heute keine einwandfreie Berechnungsmethode derartiger Dachkonstruktionen besteht, wurde die Bemessung auf Grund von Verformungsmessungen an Modellen durchgeführt. Das Modell wurde im Masstabe 1:20 aus Alabastergips hergestellt, wobei die gleichmässig verteilte Belastung (aus Schnee und Eigengewicht) durch ein regelmässiges Einzelkräftesystem dargestellt wurde.

Mit Hilfe der Dimensionsanalyse wurde der Maasstab berechnet, der gestattet auf Grund der Messergebnisse am Modell die statischen Grössen der wirklichen Konstruktion zu berechnen.

Die Poisson'sche Zahl des verwendeten Gipses beträgt $\mu = 0,04 - 0,06$. Der Verlauf der Spannungen an der Oberfläche wurde mittels Huggenbergerscher Tensometer gefunden. Die Momentengrössen wurden mit Hilfe eines optischen Neigungsmessers ermittelt, während die Durchbiegungen der die Konoidschale umrahmenden Konstruktionselemente mit Hilfe von Messuhren festgestellt wurden. Die für die Stahlbetonkonstruktion errechneten statischen Grössen wurden graphisch dargestellt.

DRGANIA TŁUMIONE TARCZY NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

IGOR KISIEL, *dr inż., profesor Budownictwa Przemysłowego*

Praca podaje rozwiązanie zagadnienia drgań tarczy na sprężystym podłożu z uwzględnieniem tłumienia i wnioski wypływające z tego rozwiązania dla projektowania fundamentów pod maszyny.

Zgodnie z dotychczasowymi przepisami projektowania fundamentów pod maszyny [1], [2], obliczenie amplitud drgań wymuszonych fundamentów blokowych przeprowadza się bez uwzględnienia tłumienia drgań w podłożu. Wydaje się zatem uzasadnione postawienie następującego pytania: czy pomijanie tłumienia jest słuszne i czy w przypadkach bliskości drgań wzbudzających do którychkolwiek drgań własnych układu nie wynikają ze wzorów nie uwzględniających tłumienia przesadnie duże wielkości amplitud?

Odpowiedź na to pytanie przy założeniu płaskiego ustroju (co, jak wiadomo, przyjmuje się przy obliczaniu fundamentów blokowych pod maszyny) ma dać niniejsza praca.

Rozważana jest tarcza sztywna, symetryczna, ustawiona na podłożu, którego charakterystyki sprężyste są C i T (kg/cm³ lub t/m³). Ciężar Ciężar własny tarczy wynosi Q ; ponadto na tarczę działa pozioma siła wzbudzająca

$$P = P_0 \sin \alpha_0 t$$

przyłożona w odległości z_p od środka ciężkości tarczy, przyjętego równocześnie za środek nieruchomego układu odniesienia. Środek ciężkości pola podstawy tarczy odległy o z_s od środka ciężkości tarczy (rys. 1) stanowi początek innego układu współrzędnych, którego oś X_0 jest równoległa do osi X układu środkowego, zaś oś Z , przechodząca przez oba środki ciężkości, jest wspólna dla obu układów.

Oprócz współczynników podłoża C i T dane są opory właściwe środowiska podłoża, przeciwdziałające prędkościom przemieszczeń tarczy, powstających wskutek działania siły wzbudzającej, a oznaczone:

c_t — kgsek/cm³ (lub tsek/m³) — opór właściwy środowiska podłoża przeciw prędkościom posuwnym w kierunku poziomym,

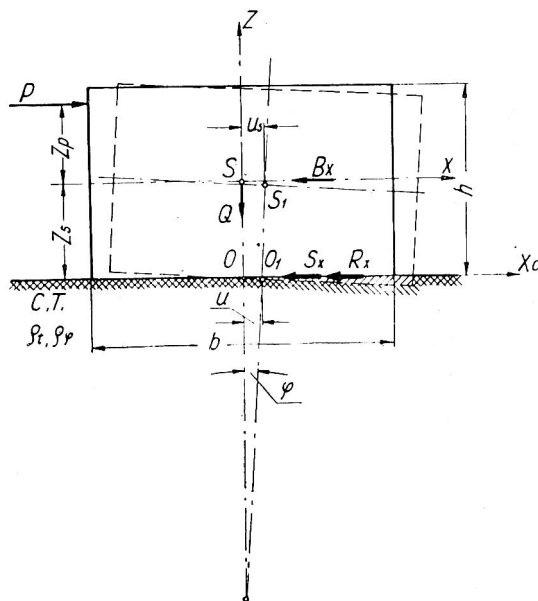
q_φ — w jednostkach jak wyżej — opór właściwy przeciw prędkościom liniowym obrotu tarczy dookoła jej środka podstawy.

Ponadto w dalszym ciągu oznaczono:

A — pole podstawy tarczy,

I — moment bezwładności tego pola lub osi przechodzącej przez punkt O (rys. 1) i prostopadłej do płaszczyzny rysunku,

J — moment bezwładności ciężaru Q tarczy lub osi przechodzącej przez punkt S (rys. 1) i prostopadłej do płaszczyzny rysunku.



Rys. 1

Układ jednostek: kg, cm, sek (lub t, m, sek), gdzie przez kg rozumie się kilogram-siłę.

Ruch tarczy wskutek działania siły P powoduje przemieszczenie środka jej podstawy o wielkość u oraz obrót tarczy dookoła tegoż środka o kąt φ . Siły działające na tarczę w jej wychylonym położeniu wynoszą:

a) siła bezwładności wskutek przemieszczenia i obrotu, skierowana poziomo:

$$B_x = -\frac{Q}{g} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} + z_s \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right), \quad (1)$$

b) siła sprężynowania podłoża w kierunku poziomym:

$$S_x = -TAu, \quad (2)$$

c) siła oporu tłumienia posuwnego w kierunku poziomym:

$$R_x = -\varrho_t A \frac{du}{dt}, \quad (3)$$

d) siła wzbudzająca:

$$P = P_0 \sin a_0 t. \quad (4)$$

Momenty działające na tarczę w jej wychylonym położeniu, a wzięte względem jej środka ciężkości, wynoszą:

e) moment sił bezwładności:

$$M_B = -\frac{J}{g} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (5)$$

f) moment siły sprężynowania w kierunku poziomym:

$$M_{sx} = +TAz_s u, \quad (6)$$

g) moment siły oporu tłumienia poziomego:

$$M_{Tx} = +\varrho_t A z_s \frac{du}{dt}, \quad (7)$$

h) moment siły sprężynowania w kierunku pionowym:

$$M_{qz} = -CI_\varphi, \quad (8)$$

i) moment sił oporu tłumienia pionowego:

$$M_{Tz} = -\varrho_\varphi I \frac{d\varphi}{dt}, \quad (9)$$

j) moment siły wzbudzającej:

$$M_p = Pz_p = P_0 z_p \sin a_0 t. \quad (10)$$

Suma wyrażen (1) do (4) po przyrównaniu jej do zera jest równaniem rzutów sił na oś X , suma zaś wyrażen (5) do (10) — równaniem momentów względem początku układu (X, Z); zgodnie z zasadą d'Alemberta i na skutek braku sił pionowych (por. pracę [3]) równania te opisują ruch tarczy:

$$-\frac{Q}{g} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} + z_s \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) + T A u - \varrho_t A \frac{du}{dt} + P_0 \sin a_0 t = 0, \quad (11)$$

$$-\frac{J}{g} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + T A z_s u + \varrho_t A z_s \frac{du}{dt} - C I_\varphi + \varrho_\varphi I \frac{d\varphi}{dt} + P_0 z_p \sin a_0 t = 0. \quad (12)$$

Przyjmując rozwiązania układu tych równań w postaci:

$$u = K_1 \cos \alpha_0 t + K_2 \sin \alpha_0 t, \quad (13-1)$$

$$\varphi = K_3 \cos \alpha_0 t + K_4 \sin \alpha_0 t, \quad (14-1)$$

otrzymuje się po podstawieniu i przyrównaniu do zera współczynników przy $\cos \alpha_0 t$ i $\sin \alpha_0 t$ następujący układ czterech równań liniowych dla wyznaczenia stałych całkowania $K_1, \dots, K_4$:

$$\left(\frac{Q}{g} \alpha_0^2 - TA \right) K_1 - \varrho_t \alpha_0 A K_2 + \frac{Q}{g} \alpha_0^2 z_s K_3 = 0, \quad (15-1)$$

$$\varrho_t \alpha_0 A K_1 + \left(\frac{Q}{g} \alpha_0^2 - TA \right) K_2 + \frac{Q}{g} \alpha_0^2 z_s K_4 + P_0 = 0, \quad (15-2)$$

$$TA z_s K_1 + \varrho_t \alpha_0 A z_s K_2 + \left(\frac{J}{g} \alpha_0^2 - CI \right) K_3 - \varrho_\varphi \alpha_0 I K_4 = 0, \quad (15-3)$$

$$- \varrho_t \alpha_0 A z_s K_1 + TA z_s K_2 + \varrho_\varphi \alpha_0 I K_3 + \left(\frac{J}{g} \alpha_0^2 - CI \right) K_4 + P_0 z_p = 0. \quad (15-4)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$U = \frac{Q}{g} \alpha_0^2 TA z_s^2 - \left(\frac{J}{g} \alpha_0^2 - CI \right) \left(\frac{Q}{g} \alpha_0^2 - TA \right) + \varrho_t \varrho_\varphi \alpha_0^2 AI, \quad (16-1)$$

$$W = \frac{Q}{g} \alpha_0^2 \varrho_t \alpha_0 A z_s^2 + \left(\frac{J}{g} \alpha_0^2 - CI \right) \varrho_t \alpha_0 A + \left(\frac{Q}{g} \alpha_0^2 - TA \right) \varrho_\varphi \alpha_0 I, \quad (17-1)$$

$$M = \frac{Q}{g} \alpha_0^2 z_s z_p - \left(\frac{J}{g} \alpha_0^2 - CI \right), \quad (18-1)$$

$$N = \varrho_\varphi \alpha_0 I, \quad (19-1)$$

$$Z = \frac{TA - \frac{Q}{g} \alpha_0^2}{\frac{Q}{g} \alpha_0^2 z_s}, \quad (20-1)$$

$$V = \frac{\varrho_t \alpha_0 A}{\frac{Q}{g} \alpha_0^2 z_s}, \quad (21-1)$$

Wyrażenia na $K_1, \dots, K_4$ można zapisać w następującej postaci:

$$K_1 = \frac{MW - NU}{U^2 + W^2} P_0, \quad (22)$$

$$K_2 = \frac{NW - MU}{U^2 + W^2} P_0, \quad (23-1)$$

$$K_3 = ZK_1 + VK_2, \quad (24)$$

$$K_4 = ZK_2 - VK_1 - \frac{P_0}{\frac{Q}{g} \alpha_0^2 z_s}. \quad (25-1)$$

Jeśli, opierając się na definicji współczynnika logarytmicznego tłumienia dla układu o jednym stopniu swobody, oznaczyć:

Δ_t — logarytmiczny współczynnik tłumienia drgań poziomych posuwnych,

Δ_φ — logarytmiczny współczynnik tłumienia drgań obrotowych względem punktu 0 (rys. 1), to oczywiste są równości:

$$\frac{Q}{g} \vartheta_t = \varrho_t \alpha_0 A, \quad (26)$$

$$\frac{J}{g} \vartheta_\varphi = \varrho_\varphi \alpha_0 I, \quad (27)$$

gdzie oznaczono:

$$\vartheta_t = \frac{\Delta_t}{\pi}, \quad (28)$$

$$\vartheta_\varphi = \frac{\Delta_\varphi}{\pi}. \quad (29)$$

Wprowadzając zaś dalsze oznaczenia

$$j^2 = \frac{J}{Q} \quad (30-1)$$

$$r_s = \frac{z_s^2}{j^2}, \quad (30-2)$$

$$r_p = \frac{z_s z_p}{j^2}, \quad (30-3)$$

$$\alpha_t^2 = \frac{TA g}{Q}, \quad (30-4)$$

$$\alpha_\varphi^2 = \frac{CI g}{J}, \quad (30-5)$$

wyrażenia na $U, \dots, V$ można przepisać w następującej postaci:

$$U = \frac{QJ}{g} [a_0^2 a_t^2 r_s - (a_0^2 - a_t^2)(a_0^2 - a_\varphi^2) + \vartheta_t \vartheta_\varphi], \quad (16-2)$$

$$W = \frac{QJ}{g} [a_0^2 \vartheta_t r_s + (a_0^2 - a_t^2) \vartheta_\varphi + (a_0^2 - a_\varphi^2) \vartheta_t], \quad (17-2)$$

$$M = \frac{J}{g} [a_0^2 r_\nu - (a_0^2 - a_\varphi^2)], \quad (18-2)$$

$$N = \frac{J}{g} \vartheta_t, \quad (19-2)$$

$$Z = \frac{a_t^2 - a_0^2}{a_0^2 z_s}, \quad (20-2)$$

$$V = \frac{\vartheta_t}{a_0^2 z_s}. \quad (21-2)$$

W przypadku, gdy $\vartheta_t = \vartheta_\varphi = 0$ (brak tłumienia), zachodzi

$$W = N = V = 0,$$

skąd

$$K_1 = K_3 = 0,$$

$$K_2 = -\frac{M}{U} P_0, \quad (23-2)$$

$$K_4 = ZK_2 - \frac{P_0}{\frac{Q}{g} a_0^2 z_s}, \quad (25-2)$$

gdzie K_2 odpowiada oznaczeniu u_0 przyjętemu w pracy [3], zaś K_4 — oznaczeniu φ_0 z tejże pracy. Wówczas wyrażenia na u i φ przybierają postać, podaną w pracy [3]:

$$u = K_2 \sin a_0 t, \quad (13-2)$$

$$\varphi = K_4 \sin \alpha_0 t. \quad (14-2)$$

W braku tłumienia rezonans zachodzi przy $U=0$, tj. dla

$$\alpha^2 \alpha_t^2 r_s - (\alpha^2 - \alpha_q^2)(\alpha^2 - \alpha_t^2) = 0,$$

tj. po rozwinięciu

$$\alpha^4 - [\alpha_t^2(1+r_s) + \alpha_q^2]\alpha^2 + \alpha_t^2 \alpha_q^2 = 0. \quad (16-3)^*)$$

Już przy nieznacznym oddaleniu od rezonansu (przy braku tłumienia) $U \geq M$; wielkość Z maleje od wartości dodatnich — przy małym α_0 — poprzez zero i przy $\alpha_0 \rightarrow \infty$ zdąża do $Z = -1$, mając dla przeważającej ilości ustrojów spotykanych w praktyce wartość około lub poniżej jedności.

W przypadku uwzględnienia tłumienia — wobec tego, że iloczyn $\vartheta_t \vartheta_q < 1$ — wyrażenie U ma właściwie (z dokładnością do znikomo małych wartości) tę samą wielkość, co i bez tłumienia; wyrażenie W jest znacznie mniejsze od U i ma ten sam rząd wielkości co i M . Wielkość V jest zwykle bardzo małym ułamkiem.

Dlatego też jedynie w przypadku ścisłej zgodności drgań własnych z wymuszonymi stosowanie wzorów (22), (23-1), (24), (25-1) daje wyniki odmienne od wzorów (23-2) i (25-2) o tyle, że mogłoby to mieć znaczenie praktyczne, natomiast już przy bardzo nieznacznym odchyleniu drgań wzbudzających od drgań własnych wzory uwzględniające tłumienie dają praktycznie te same wielkości amplitud, co i wzory wyprowadzone bez uwzględnienia tłumienia. Wniosek ten został potwierdzony na licznych przykładach. Poniżej przytacza się jeden z nich:

Dane są: szerokość podstawy tarczy $b=10$ m, wysokość tarczy $h=2$ m, grubość tarczy $c=3$ m. Siła wzbudzająca $P=P_0 \sin \alpha_0 t$ działa poziomo w kierunku szerokości b tarczy w pionowej płaszczyźnie symetrii i jest przyłożona do jej górnej krawędzi. Tarcza ustawiona jest na podłożu o współczynnikach $C=6000$ t/m³ i $T=3000$ t/m³ oraz o współczynnikach tłumienia $\vartheta_t = \vartheta_q = 0,1$ ($\Delta_t = \Delta_q = 0,314$). Przyjęto $P_0=10$ t. Tarcza jednorodna, jej ciężar $Q=132$ t (por. rys. 1).

Drgania własne tarczy przy braku tłumienia wyznacza się ze wzoru (16-3).

Zgodnie z warunkami zadania: $z_s = z_p = 1$ m

$$A = 3 \cdot 10 = 30 \text{ m}^2; \quad I = 3 \cdot \frac{10^3}{12} = 250 \text{ m}^4; \quad J' = 132 \cdot \frac{10^2 + 2^2}{12} = 1144 \text{ tm}^2$$

*) Wzór ten jest wzorem (33) z pracy [3], jedynie przy zmienionych oznaczeniach.

$$j^2 = \frac{1144}{132} = 8,667 \text{ m}^2; \quad r_s = r_p = \frac{1}{8,667} = 0,1153;$$

$$\frac{Q}{g} = \frac{132}{9,81} = 13,46 \text{ tsek}^2/\text{m}; \quad \frac{J}{g} = \frac{1144}{9,81} = 116,62 \text{ tmsek}^2;$$

$$\alpha_t^2 = \frac{3000 \cdot 30}{13,48} = 6686,5; \quad \alpha_\varphi^2 = \frac{6000 \cdot 250}{116,62} = 12862,3.$$

Równanie drgań własnych:

$$\alpha^4 = [6686,5(1 + 0,1153) + 12862,3] \cdot \alpha^2 + 6686,5 \cdot 12862,3 = 0,$$

skąd

$$\alpha_1^2 = 6009,6; \quad \alpha_2^2 = 14311,0; \quad \alpha_1 = 77,52; \quad \alpha_2 = 119,21.$$

Przyjmując $a_0 = a_1$ ($n_0 = 740,32$ drg/min) otrzymuje się:

a) przy uwzględnieniu tłumienia: $\alpha_0^2 - \alpha_t^2 = -676,9; \quad \alpha_0^2 - \alpha_\varphi^2 = -6852,7;$

$$U = 13,46 \cdot 116,62 [6009,6 \cdot 6686,5 \cdot 0,1153 - (-676,9) \cdot (-6852,7) + \\ + 0,1 \cdot 0,1] = +15,70;$$

$$W = 13,46 \cdot 116,62 [6009,6 \cdot 0,1 \cdot 0,1153 - 676,9 \cdot 0,1 - 6852,7 \cdot 0,1] = \\ = -1073000;$$

$$M = 116,62 (6009,6 \cdot 0,1153 + 6852,7) = +880000;$$

$$N = 116,62 \cdot 0,1 = 11,662;$$

$$Z = \frac{676,9}{6009,6 \cdot 1} = 0,1127;$$

$$V = \frac{0,1}{6009,6 \cdot 1} = 0,00001664$$

i ze wzorów (22) do (25-1):

$$K_1 = \frac{-1073000 \cdot 880000 - 11,662 \cdot 15,70}{15,70^2 + 1073000^2} \cdot 10 = -8,1975 \text{ m};$$

$$K_2 = \frac{-11,662 \cdot 1073000 - 15,70 \cdot 880000}{15,70^2 + 1073000^2} \cdot 10 = -0,0002268 \text{ m};$$

$$K_3 = 0,1127 - 8,1975 + 0,00001664 - 0,0002268 = -0,924 \text{ radiana};$$

$$K_4 = 0,1127 - 0,0002268 - 0,00001664 - 8,1975 - \frac{10}{13,46 \cdot 6009,6} =$$

$$= -0,0000127 \text{ rad.}$$

b) Natomiast przy braku tłumienia

$$K_1 = K_3 = 0 \quad \text{zaś} \quad K_2 = K_4 = \infty,$$

co, jak było do przewidzenia, jest w sprzeczności z poprzednim wynikiem. Należy zauważyć, że przy uwzględnieniu tłumienia otrzymuje się duże wartości dla K_1 i K_3 , podczas gdy przy nieuwzględnieniu tłumienia otrzymuje się nieskończenie wielkie wartości dla K_2 i K_4 ; wskazuje to na oczywisty fakt, że przebieg zjawiska przy braku i przy uwzględnieniu tłumienia jest zupełnie odmienny.

Jeśli przyjąć

$$n_0 = 738 \text{ drg/min, a więc } a_0 = 77,27 \text{ rad/sek, to:}$$

a) przy uwzględnieniu tłumienia otrzymuje się:

$$U = -505500000;$$

$$W = -1086000;$$

$$M = 886000;$$

$$N = 11,662; \quad Z = 0,1199; \quad V = 0,00001675,$$

zatem

$$K_1 = -0,0000373 \text{ m; } K_2 = +0,01745 \text{ m; } K_3 \approx 0;$$

$$K_4 = +0,001968 \text{ rad.}$$

b) bez uwzględnienia tłumienia:

$$K_2 = +0,01752 \text{ m; } K_4 = +0,001976 \text{ rad.,}$$

a więc różnice nie mające żadnego praktycznego znaczenia.

Przyjmując, że tłumienie wzrosło dwukrotnie i wynosi $\vartheta_t = \vartheta_\varphi = 0,2$, otrzymuje się dla przypadku $a_0 = a_1 = 77,52 \text{ rad/sek}$:

$$U = 62,80; \quad N = 23,324;$$

$$W = -2146000; \quad Z = 0,1127;$$

$$M = 880000; \quad V = 0,00003328;$$

zatem

$$K_1 = -4,10 \text{ m; } K_2 = -0,000229 \text{ m; } K_3 = -0,463 \text{ rad;}$$

$$K_4 = -0,0000124 \text{ r.}$$

a więc dwukrotny wzrost tłumienia powoduje dwukrotne prawie zmniejszenie K_1 i K_3 oraz prawie niezmienione wielkości K_2 i K_4 .

Natomiast dla przypadku $\alpha_0 = 77,27$ rad/sek ($n_0 = 738$ drg/min) przy takim samym jak poprzednio wzroście tłumienia:

$$U = -505500000$$

$$N = 23,324$$

$$W = -2172000$$

$$Z = 0,1199$$

$$M = 886000$$

$$V = 0,0000335$$

$$K_1 = -0,0000742 \text{ m}; \quad K_2 = 0,01738 \text{ m}; \quad K_3 \approx 0; \quad K_4 = 0,00196 \text{ rad.}$$

Tutaj więc w porównaniu do przypadku mniejszego tłumienia zachodzi dwukrotny wzrost K_1 , choć wielkość bezwzględna pozostaje nadal znikomą małą i prawie niezmienione wielkości K_2 i K_4 .

Z przedstawionego przykładu wynika więc, że wpływ tłumienia (przyjęty wszakże dość znaczny) nie jest istotny dla obliczeń do celów praktycznych. Rzeczywiście przy różnicy częstotliwości wynoszącej zaledwie 0,27% różnica amplitud obliczonych bez uwzględnienia tłumienia i z uwzględnieniem znacznego tłumienia ($\Delta = 0,528$) wynosi zaledwie

0,8% wartości mniejszej.

Wynika stąd, że „czułość” układu o dwu stopniach swobody dynamicznej na tłumienie jest bez żadnego porównania mniejsza niż układu o jednym stopniu swobody. Potwierdza to ostatecznie celowość stosowania do obliczeń fundamentów blokowych pod maszyny wzorów nie uwzględniających tłumienia.

LITERATURA

- [1] *Warunki techniczne projektowania fundamentów pod maszyny z obciążeniami dynamicznymi* (TU-60-49), tłum. z ros. J. Lipiński, BSiPTBP, Warszawa (1953).
- [2] Rausch, *Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben* I, Berlin (1936), II (1940), III (1942).
- [3] I. Kisiel, *Drgania bryły na sprężystym podłożu*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, II, Gdańsk (1950) zesz. 1.

Katedra Fundamentowania

Wpłynęło do Redakcji w marcu 1954.

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В настоящей статье рассмотрены колебания тяжелого диска на пропорциональном основании, характеризуемом двумя коэффициентами постели C и T и двумя коэффициентами затухания: ϱ_t — коэффициентом затухания горизонтального перемещения диска и ϱ_φ — коэффициентом затухания вращения. Частные решения системы дифференциальных уравнений движения диска (11) и (12)

приняты в форме (13) и (14), после чего определены постоянные интегрирования (22) — (25), а тем самым и амплитуды колебаний.

Из дискуссии полученных результатов сделан вывод, что в практических расчетах (например фундаментов под машины) введение в расчет затухания не является целесообразным, так как чувствительность системы на резонанс в рассматриваемом случае значительно ниже, чем чувствительность системы с одной степенью свободы. Вывод этот иллюстрирован численным примером.

GEDÄMPFTE SCHWINGUNGEN DER SCHEIBE AUF ELASTISCHER UNTERLAGE

Im vorliegendem Beitrag werden die gedämpften Schwingungen der schweren Scheibe auf Winklerscher Unterlage mit zwei Bettungsziffern: C und T und zwei Dämpfungskoeffizienten: Dämpfungskoeffizient der waagrechten Verschiebung und Dämpfungskoeffizient der Drehung betrachtet. Die Lösungen des Differenzialgleichungssystems der Scheibenbewegung (11) und (12) werden in Form von (13) und (14) angenommen, woraus die Integrationskonstanten (22) bis (25) und damit die Schwingweiten berechnet wurden.

Aus den Schlussfolgerungen ergibt sich, dass in praktischen Berechnungen (zB. bei Maschinenfundamenten) die Berücksichtigung der Dämpfung unzuweckmässig ist, da die Resonanzempfindlichkeit des betrachteten Systems erheblich kleiner ist als die des Systems mit einem Freiheitsgrade. Diese Feststellung wurde durch ein Zahlenbeispiel illustriert.

KRONIKA

ZEBRAŃ NAUKOWYCH WYDZIAŁU INŻYNIERII
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

W roku akademickim 1953/54 odbyło się łącznie 21 zebrań naukowych ogółu pracowników naukowych Wydziału. Cztery zebrania poświęcone były omawianiu zagadnień ogólnych, pozostałe 17 zebrań — pracom i referatom indywidualnym poszczególnych pracowników naukowych Wydziału. Wystąpili z referatami: 3 profesorowie i 8 pomocniczych pracowników nauki. Wygłoszono 11 sprawozdań z prac naukowych własnych i 5 referatów z dziedziny postępu technicznego różnych gałęzi wiedzy inżynierskiej.

Tematami poszczególnych zebrań naukowych były:

1) 7. X. 1953 — referat mgra inż. St. Beka, st. asystenta Katedry Budowy Dróg i Ulic, pt. *Najnowsze teorie wytrzymałości nawierzchni drogowych i metody obliczenia ich grubości.*

Omówiono: metody obliczania nawierzchni podatnych, tj. odkształcających się trwale pod działaniem obciążeń (np. nawierzchnie bitumiczne). Oprócz rozwiązań teoretycznych, opierających się na analizie naprężeń i odkształceń w nawierzchni (Pokrowski, Burmister i inni) przytoczono wiele metod empirycznych i teoretyczno-doświadczalnych, w szczególności omówiono metodę Iwanowa. W dalszym ciągu omówiono metody obliczania nawierzchni sztywnych (np. z betonu cementowego) a szczególnie metody oparte na teorii sprężystości (O. Szechter, Gersewanow, Gorbunow-Posadow) oraz na hipotezie Winklera-Zimmermanna (Westergaard, Goldbeck, Older, Kelley).

2) do 5). 14. X, 21. X, 11. XI i 18. XI. 1953 — praca mgra inż. J. Langera, asystenta Katedry Statyki Budowli pt. *Obliczanie ustrojów przestrzennych metodą kolejnych przybliżeń.*

W pracy przedstawiono opracowaną przez autora ogólną metodę kolejnych przybliżeń do obliczania wszelkich ustrojów o węzłach sztywnych, prętach przyrzutowych i siatce prostokątnej.

Węzeł sztywny w najogólniejszym przypadku może podlegać obrotom i przesuwom. Rozważono obrót węzła w płaszczyźnie prętów, co powoduje ich zginanie i ścinanie, dalej obrót węzła w płaszczyźnie prosto-

padlej do prętów, co powoduje ich skrećanie, wreszcie przesuw węzła prostopadły do osi prętów, powodujący ich zginanie i ścinanie, jednakże innego rodzaju niż przy obrocie. Do rozważań przyjęto ogólny schemat pręta podpartego i utwierdzonego sprężystości.

Dla tak przyjętego schematu określono pojęcia charakteryzujące pręty i podpory oraz wyprowadzono ogólne wzory na sztywność (współczynniki oporu sprężystego) prętów przy obrotach i przesuwach węzłów. Sztywności te są wzajemnie uzależnione; zależności wyznaczono z warunków ciągłości konstrukcji. Wyprowadzono również wzory na przenośniki momentów i sił; komplet tych wzorów dostosowany do przypadków mogących znaleźć zastosowanie w praktyce ujęto w tablice pomocnicze. Technika stosowania ogólnej metody kolejnych przybliżeń jest podobna do stosowanej powszechnie metody Crossa, jednakże, wobec uwzględnienia różnych typów ruchu węzłów jest w stosunku do metody Crossa bardziej ogólna, ale i bardziej skomplikowana. Pokazana ona została na kilku przykładach.

Kontrola równowagi ustroju i węzłów za pomocą obliczonych momentów i sił nie jest wystarczająca. Konieczne jest sprawdzenie ciągłości konstrukcji. Wyprowadzono zatem związki między przemieszczeniami węzłów a ich obciążeniem. Analiza tych przemieszczeń daje pełny obraz ustroju odkształconego i pozwala przeprowadzić również kontrolę wyników obliczeń statycznych.

6) 2. XII. 1953. Referat mgra inż. Z. Szafrana, aspiranta Katedry Budownictwa Przemysłowego i mgra inż. St. Dmیتruka, st. asystenta tejże Katedry pt. *W sprawie klasyfikacji gruntów*.

Referat zgłoszony na Zjazd Mechaniki Gruntów i Fundamentowania, organizowany w r. 1954 przez PAN.

7) 13. I. 1954. Praca prof. dra I. Kisiela, kierownika Katedry Budownictwa Przemysłowego pt. *O pewnym uogólnieniu w mechanice budowlanej*.

Wychodząc z odpowiednio zdefiniowanych pojęć węzła sztywnego wyprowadzono twierdzenie o rozkładzie dowolnego obciążenia węzła na poszczególne pręty zbiegające się w tym węźle. Twierdzenie to może stanowić uogólnienie matematyczne wszelkich metod obliczenia ustrojów prętowych na dowolne obciążenia (zginanie, skrećanie, przesuw węzłów itp.).

8) 17. II. 1954. Referat prof. inż. R. Mromlińskiego, kierownika Katedry Budownictwa Stalowego pt. *Doświadczałne Badanie naprężeń*.

Referent zwrócił uwagę na dwojaki rodzaj podejście do zagadnień wytrzymałościowych: abstrakcyjno-matematyczne (dla którego jednak doświadczenie jest podstawą i sprawdzianem) oraz fizyczno-doświad-

czalne. W skomplikowanych ustrojach badania doświadczalne górują nad podejściem matematycznym. Zaletą ich jest poglądowość, wadą — brak uogólnień.

Omówiono następnie przyrządy do badania stanu naprężeń a) oparte na badaniu wydłużeń: mechaniczne, optyczne, elektryczne, pneumatyczne; b) zastosowanie promieni Roentgena; c) zasady elastooptyki; d) analogie: blonowe i hydrodynamiczne; e) metody kruchych powłók. Ponadto omówiono badanie naprężeń dynamicznych i własnych.

9) 24. II. 1954. Dwie prace mgra inż. St. Dmित्रuka, st. asystenta Katedry Budownictwa Przemysłowego i mgra inż. Z. Szafrana, aspiranta tejże katedry, pt. *Laboratoryjne badanie rozmakania i badania konsystencji za pomocą stożka*.

Obie prace zgłoszono na Zjazd Mechaniki Gruntów (p. poz. 6).

10) 3. III. 1954. Referat prof. inż. R. Mromlińskiego, kierownika Katedry Budownictwa Stalowego, pt. *Aluminium w budownictwie*.

Omówiono: występowanie rud glinu, jego wytwarzanie, stopy Al z Cu, Mg, Mn, Si, Zn. Własności stopów Al w porównaniu ze stałą: wyboczenie giętne, skrętne oraz wyboczenie ścianek kształtowników cienkościennych. Kształtowanie i obróbka glinu; łączenie elementów. Zalety konstrukcji aluminiowych w porównaniu ze stalowymi (ciężar, montaż, transport, lżejsze fundamenty, małe koszty utrzymania). Przykłady konstrukcji wykonanych ze stopów aluminium.

11) 10. III. 1954. Praca inż. A. Skorupy, zast. asyst. Katedry Budownictwa Żelbetowego, stud. kursu magisterskiego pt. *Badania płyt w przedziale sprężystym*.

Przedstawiono sposób badania płyt za pomocą lunety autokolimacyjnej. Obliczenia momentów gnących i skręcających przeprowadzono za pomocą rachunku różnic skończonych. Na kilku przykładach zilustrowano tok postępowania. Metoda nadaje się do wyznaczania momentów gnących i skręcających w płytach o dowolnych warunkach brzegowych.

Praca mgra inż. A. Boreza, st. asyst. tejże katedry, pt. *Podobieństwo modelu i obiektu*.

Przedstawiono zagadnienie podobieństwa modelu do obiektu. Wzory na wielkości statyczne wyprowadzono za pomocą metod analizy wymiarowej. Rozpatrzono na ogólnym przykładzie warunki, które muszą być spełnione dla zapewnienia podobieństwa modelu do obiektu. Rozważono wpływ ciężaru własnego konstrukcji, obciążenia użytkowego oraz temperatury.

12) 17. III. 1954. Praca mgra inż. St. Jasmana, st. asystenta Katedry Budownictwa Żelbetowego i mgra inż. J. Suwalskiego, adiunkta tejże katedry, pt. *Gips jako materiał do wykonywania modeli*.

Przedstawiono wyniki doświadczeń nad gipsem, używanym do wykonywania modeli, przeprowadzonych w Laboratorium Katedry Budownictwa Żelbetowego w celu wyznaczenia stałych materiałowych E i ν . Podano wyniki, uzyskane przy próbach gipsu na ściskanie, rozciąganie i przyczepność dla różnych stosunków wody do gipsu. Następnie omówiono sposoby wykonywania modeli konstrukcji żelbetowych z gipsu, jak płyty, elementy belkowe i przestrzenne (łupinowe) rozwijalne i nierozwijalne. Zwrócono na uwagę możliwości wykonywania z gipsu modeli, które nie mogą być wykonywane z innych materiałów, służących do modelowania konstrukcji a produkowanych w postaci gotowych płyt i prętów. Podano różne sposoby nanoszenia gipsu (m. in. próby przeprowadzone w Katedrze za pomocą sprężonego powietrza oraz przy użyciu specjalnie skonstruowanych przyrządów).

13) 24. III. 1954. Praca prof. inż. A. Mitzla, kier. Katedry Budownictwa Żelbetowego, pt. *Przyczynek do zagadnienia zbiorników prostokątnych*. Praca publikuje się w niniejszym numerze Zeszytów Naukowych Politechniki Wrocławskiej.

14) 7. IV. 1954. Praca mgra inż. A. Boreza, st. asystenta Katedry Budownictwa Żelbetowego pt. *Wyniki Badań na modelu łupiny konoidalnej*. Praca publikuje się w niniejszym numerze Zeszytów Naukowych Politechniki Wrocławskiej.

15) 21. IV. 1954. Praca mgra inż. J. Langer, asystenta Katedry Statyki Budowli, pt. *W sprawie modernizacji metody wymiarowania żelbetu w mostownictwie*.

Praca publikuje się w niniejszym numerze Zeszytów Naukowych Politechniki Wrocławskiej.

16) 5. V. 1954. Referat prof. inż. A. Mitzla, kierownika Katedry Budownictwa Żelbetowego pt. *Teoria plastyczności w zastosowaniu do płyt*. Omówiono podstawowe pojęcia teorii plastyczności i przedstawiono metody wyznaczania momentów plastycznych w płytach o dowolnym kształcie i obciążeniu. Wykorzystanie sposobu zastępczych sił poprzecznych pozwala na szybkie w wielu przypadkach wyznaczenie wielkości momentów łamiących. Omówiono zasadnicze zależności kinematyczne odkształconej płyty w strefie plastycznej. Zastosowanie metody pracy wirtualnej oraz wykorzystanie sposobu zastępczych sił poprzecznych zilustrowano na kilku przykładach liczbowych dotyczących obliczania płyt trójkątnych.

Metoda otwiera duże możliwości dla praktyki projektowania ustrojów płytowych i przestrzennych, których rozwiązania nie są dotychczas znane ze względu na trudności natury matematycznej w przedziale sprężystym.

17) 26. V. 1954. Praca prof. dr I. Kisiela, kierownika Katedry Budownictwa Przemysłowego pt. *O wymiarowaniu bryły drgającej*.

Praca zgłoszona na Zjazd Mechaniki Gruntów (p. poz. 6).

W dniu 16 grudnia 1953 odbyło się rozszerzone posiedzenie naukowe pracowników Wydziału Inżynierii Politechniki Wrocławskiej przy udziale przedstawicieli innych Wydziałów Politechniki i zainteresowanych Katedr Politechniki Gdańskiej i Krakowskiej, na którym prof. dr M. Zachara, kierownik Zakładu Technologii Materiałów Budowlanych i Drogowych przy Katedrze Budowy Dróg i Ulic Politechniki Wrocławskiej wygłosił referat pt. *O potrzebie utworzenia samodzielnych placówek dydaktyczno-naukowych w dziedzinie materiałów budowlanych na wydziałach inżynierii*. W referacie podano krótką historię tej dyscypliny, zdefiniowano pojęcie przedmiotu w szerokim jego zakresie, wykazano braki pod względem programowym i szkolenia kadr w dziedzinie materiałoznawstwa budowlanego na wydziałach inżynierii lądowej w porównaniu z sytuacją na innych wydziałach.

Ożywiona dyskusja, w której zabralo głos 17 osób, wykazała zgodność poglądów wszystkich obecnych na omawiany temat. Stwierdzono, iż obecny schemat organizacyjny Wydziału nie uwzględnia należycie ważności zagadnienia materiałów budowlanych, przez co nauczanie na Wydziale nie nadąża za postępem techniki, dyktowanym potrzebami gospodarczymi kraju.

Utworzenie samodzielnych placówek naukowo-dydaktycznych (katedr) materiałoznawstwa budowlanego w oparciu o odpowiednio wyposażone laboratoria poprawiłoby znakomicie obecny stan nauki i nauczania na tym odcinku.

W dniu 25. XI. 1953 odbyło się zebranie poświęcone sprawom dydaktyki w laboratoriach budowlanych, zorganizowane wspólnie przez władze związkowe i Dziekanat Wydziału.

W dniu 14. IV. 1954 odbyło się takie samo zebranie poświęcone pracy kół naukowych S. T. N. Wydziału; wreszcie w dniu 2. VI. 1954 — zebranie zwołane przez dziekana, a poświęcone omówieniu odbytych w letnim semestrze hospitacji wykładów.

KILKA UWAG O PEWNEJ ROZPRAWIE NAUKOWEJ

IGOR KISIEL *doc. dr, profesor Budownictwa Przemysłowego*

W roku 1953 ukazała się praca prof. nadzw. dr Edmunda Szczepaniaka pt. *Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć* (Rozprawy Inżynierskie PAN, nr V). W pracy wyraźnie podkreślono oryginalność metody i wartość wprowadzonych w niej uogólnień.

W ciągu blisko dwóch lat od chwili ukazania się wspomnianej pracy nie spotkałem się w periodykach naukowych z żadnym ustosunkowaniem się do tej pracy, na które ona, bez wątpienia, zasługuje. Z tego jedynie względu postanowiłem podać w niniejszej recenzji kilka cytatów i uwag, mających na celu naświetlić zagadnienie nieco inaczej, niż to uczynił autor wymienionej pracy. Wszystkie podkreślenia tekstu w dalszym ciągu — moje.

A. Na stronie 3, wiersze 4 do 1 od dołu oraz str. 4, wiersze 1 i 2 od góry, autor rozprawy mówiąc o poprzedniej swej pracy¹⁾, pisze: „...rozwiązane zostało wówczas przez autora nowe zagadnienie, mianowicie, badanie wpływów niemechanicznych na modelach ustrojów prętowych, np. wpływu zmiany temperatury elementów konstrukcji, skurczu materiału, wstępnego sprężenia elementu, zmiany wysokości podpory itp., co zostało ujęte we wzór, całkowicie rozwiązujący to zagadnienie”...

W pracy¹⁾, do której odnosi się wyżej podany cytat, na str. 798 wiersze 4 i 5 od dołu, czytamy:

„...wpływ zmiany temperatury i skurczu materiału może być znaleziony w następujący sposób”...

a dalej podaje się ten sposób i wzór (60), w odniesieniu do przypadków zmiany temperatury i skurczu; nie ma w tekście nigdzie mowy o wpływach niemechanicznych, które na widownięć wówczas jeszcze nie występowały.

W pracy prof. nadzw. dra Mariana Janusza²⁾, będącej w istocie pracą doktorską, której obrona odbyła się w zimie 1949, a której kore-

¹⁾ E. Szczepaniak, *Ramy wielokrotnie statycznie niewyznaczalne*, Podręcznik Inżynierii, t. I, Trzaska, Evert i Michalski, Warszawa 1948.

²⁾ M. Janusz, *Teoria badań modelowych*, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, Wrocław 1952.

ferentem był prof. Szczepaniak, na str. 13, wiersze 14 do 19 od góry czytamy:

„...Również Szczepaniak zajmuje się tylko wpływami temperatury i skurczu, nie rozpatrując zagadnienia w całej ogólności. Te braki ma uzupełnić niniejsza praca przez podanie ogólnych metod modelowego badania wpływów niemechanicznych”.

Opinia prof. Szczepaniaka o pracy doktorskiej M. Janusza wydana w roku akad. 1948/49 stwierdzała, że część pracy o wpływach niemechanicznych jest najbardziej wartościowa. Dokładnego sformułowania po siedmiu latach nie pamiętam, można jednak znaleźć tę opinię w aktach b. Wydziału Inżynieryjno-budowlanego w Gliwicach. W opinii nie było wspomniane o tym, że referent, a nie Janusz, zagadnienie to rozwiązał w całej ogólności, mianowicie w pracy. (Patrz Szczepaniak op. cit.)

Któż zatem — autor rozprawy inżynierskiej nr V, czy M. Janusz rozwiązał zagadnienie wpływów niemechanicznych? Nie ulega wątpliwości, że nazwa należy do prof. Janusza. A zestawienie przytoczonych wyżej cytatów mówi coś niecoś i o priorytecie.

B. Na str. 4 omawianej rozprawy inżynierskiej, wiersz 20 od dołu czytamy:

„...w opracowanej przez autora nowej metodzie rozwiązania”, a na str. 10 tejże rozprawy wiersze 1 i 2 od góry:

„...zgodnie z podanym w niniejszej pracy opisem nowej metody badań modelowych”...

Czy jednak... nowej?

W 1947 r. wydana została w Anglii książeczka A. J. S. Pipparda ³⁾, z której w dalszym ciągu przytaczam dwa wyjątki — w tłumaczeniu: jeden ze str. 17-18 z paragrafu pt. *Slope deflexion Method of Analysis*, a drugi ze str. 29, z paragrafu pt. *Experimental Application of Slope-deflexion method*. Brzmiały one jak następuje:

1. „Jako podstawa do powyższej analizy służy zależność:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} \left(2\Phi_A + \Phi_B - 3 \frac{\delta}{L} \right) - \frac{A}{L};$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} \left(2\Phi_B + \Phi_A - 3 \frac{\delta}{L} \right) + \frac{A}{L}; \dots$$

po czym po omówieniu oznaczeń:

³⁾ A. J. S. Pippard, *The experimental study of structures*, Edward Arnold et Co, London 1947.

„...Otrzymawszy z pomiarów na modelu wartości kątów obrotu i przemieszczeń, możemy na podstawie powyższych wzorów obliczyć wartości momentów M_{AB} i M_{BA} ”...

Tyle mówi wyjątek pierwszy. Wyjątek drugi brzmi:

2. „... Model badanej ramy wycina się z cienkiej blachy mosiężnej, tak by był zachowany właściwy stosunek momentów bezwładności przekrojów. Model układa się poziomo na stole rysunkowym i opiera się na kulkach w celu możliwego zmniejszenia tarcia. Obciążenie jest wywoływane albo przy pomocy ciężarów przerzuconych przez bloczki, albo sprzęgieł śrubowych i wag sprężynowych. Do końca każdego pręta przymocowane są lekkie wskazówki, długie około 6 cali; ruchy końców tych wskazówek są mierzone przy pomocy mikroskopów pomiarowych z mikrookularami. Z odczytów mikroskopów można otrzymać wartości kątów obrotu i przemieszczeń, które to wartości są wstawiane do wyrażeń na momenty przywęzłowe, które w ten sposób zostają określone”...

Poza tym, w omawianym paragrafie pracy (Patrz A. J. S. Pippard op. cit.) podane są jeszcze trudności, jakie należy pokonać przy przeprowadzeniu pomiaru, a ponadto uwaga, że technikę tego pomiaru opracował prof. J. F. Baker.

Rozprawa inżynierska nr V na str. 10 wiersze 20 i niżej od dołu podaje:

„... W opracowanej przez autora nowej metodzie rozwiązania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach pręty modelu nie są przecinane i na jednym modelu może być wykonany całokształt badań”...

Dalej, po omówieniu podstaw teoretycznych metody, opartych na sposobie sprężystego utwierdzenia prętów w węzłach⁴⁾ autor rozprawy inżynierskiej nr V na str. 7 podaje wzory (14) i (15) — te same co i u Pipparda — (podkreślić należy tutaj błąd drukarski u Pipparda), że wzorów zaś tych wyprowadza wyrażenia na współczynniki sprężystego utwierdzenia.

A więc i tu i tam modelu się nie przecina; i tu i tam wychodzi się z tych samych wzorów; i tu i tam mierzy się przemieszczenia katowe. Gdzie więc różnica?

W rozprawie inżynierskiej nr V proponuje się korzystanie ze współczynników sprężystego utwierdzenia; jednakże praktycznie możliwe jest to jedynie przy uwzględnieniu wpływu zginania. Wpływy ścinania i siły osiowej prowadzą do wzorów podanych tam jako wzory (9) do (13); są one jednak tak skomplikowane, że wątpię, iżby stosowanie ich przyniosło więcej, niż kłopoty rachunkowe.

⁴⁾ Patrz np. M. Mayer *Neue Statik der Tragwerke aus biegesteifen Stäben*, Bauwelt Verlag, Berlin 1942 (pierwsze wydanie w 1937).

A dodać należy, że wspomniane wzory (9) do (13) są li tylko wzorami na oddziaływania na końcach pręta, a nie wzorami na współczynniki sprężystego utwierdzenia, które dopiero stanowić mają kwintesencję pracy.

Wyposażenie pomiarowe u obu autorów jest różne — gdy chodzi o pomiar tylko kątów. Autor rozprawy inżynierskiej nr V stosuje lusterka — por. np. ekstensometr Martensa — zaś Pippard — pomiar przy pomocy mikroskopu. Ale gdyby chcieć pomierzyć przemieszczenia — np. gdy się chce korzystać ze wzorów (9) do (13) — potrzebny jest i w omawianej metodzie mikroskop pomiarowy — a więc tak samo, jak u Pipparda.

Są dane do przypuszczeń, że autor rozprawy inżynierskiej nr V znalazł pracę Pipparda w okresie opracowywania swej metody.

6. We wniosku 1 na str. 10 omawianej rozprawy inżynierskiej nr V wiersze 4 do 7 od góry, czytamy:

„... Sposób sprężystego utwierdzenia prętów w węzłach, stanowiący podstawę teoretyczną nowej metody badań modelowych, daje w rozwiązaniach uogólnienie o znaczeniu nie mniejszym, niż linie wpływowe”...

To samo w nieco innej postaci podano także na str. 4, wiersze 13 do 7 od dołu omawianej rozprawy inżynierskiej.

Jak wiadomo, linie wpływowe dają związek między badaną wielkością statyczną a położeniem obciążenia. Współczynnik sprężystego utwierdzenia według autora rozprawy nr V ma podobne znaczenie. Tym samym nie może on zależeć ani od cech geometrycznych, ani od właściwości obciążenia i jego miejsca przyłożone. Tak jest istotnie w belkach ciągłych. Czy jednak tak samo jest w ramach o komorach zamkniętych, gdzie obciążenie można uważać raz za położenie w lewo a raz w prawo od badanego przekroju, w zależności od tego, z której strony zacznie się obliczać współczynnik sprężystego utwierdzenia k — rozprawa inżynierska nr V wątpliwości tej bynajmniej nie wyjaśnia. A skoro nie wyjaśnia, to dlaczego aż tak wysoko podniesiona została „wartość” uogólnienia, znanego pod nazwą „współczynnik sprężystego utwierdzenia”? Nie można przecież sformułowania wniosku 1 traktować jako aksjomatu; a jako wniosek z treści rozprawy bynajmniej on nie wynika.

Należy przeto żałować, że autor rozprawy nie podał nic, co usprawiedliwiłoby twierdzenie zawarte we wniosku 1, skazując tym samym pracę swą na zarzut co najmniej braku uzasadnienia.

D. Z wniosku 2 na str. 10, wiersze 12 do 3 od dołu omawianej rozprawy, który brzmi:

„... po ustaleniu współczynników k dla wszystkich prętów i węzłów... linia wpływowa dowolnej wielkości statycznej może być... dalej łatwo znaleziona na drodze czysto analitycznej”...

wynika, przy wszelkich zastrzeżeniach co do „łatwości” tego znalezienia, że bezpośrednio wyznaczyć linii wpływowej omawianą metodą nie można. A stąd — większa możliwość pomyłek — wynikających choćby z konieczności odejmowania od siebie bliskich wielkości, a zatem i mniejsza wartość sposobu, gdy chodzi o wyznaczenie linii wpływowych, niż np. sposobu Beggsa.

E. We wniosku 5 omawianej rozprawy (str. 11) mówi autor jej, że:

„Omawiana tutaj metoda jest precyzyjna i jako taka służyć może do sprawdzenia założeń teorii”...

a w poprzedniej swej pracy (patrz E. Szczepaniak op. cit.) autor omawianej rozprawy to samo mówi o metodzie Beggsa.

Otóż — żadna z obu wymienionych w ten sposób przez autora rozprawy inżynierskiej nr V metod nie nadaje się do sprawdzania założeń teoretycznych, wbrew temu, co się o tym mówi, albowiem, jeśli rozważać nie tylko wpływ momentu zginającego ale i siły osiowej, a tym bardziej poprzecznej — podstawowe twierdzenia analizy wymiarowej przeczą możliwości sprawdzenia teorii. Nie istnieje bowiem praktyczna możliwość wykonania modelu, który by mógł dać jedną skalę dla wszystkich trzech rodzajów sił uogólnionych, wspomnianych wyżej, nie mówiąc ponadto o momencie skręcającym.

F. W świetle wymienionych wyżej cytatów i przytoczonych rozważań wydaje się, że tytuł rozprawy inżynierskiej nr V nie powinien zawierać słowa „Nowa”, spis literatury zaś należałoby wzbogacić co najmniej o dwie pozycje: pracę prof. M. Janusza i pracę A. J. S. Pipparda — wymienione już wyżej. Ponadto należałoby co najmniej przeredagować wnioski pracy, o ile dokładniejsze rozważania potwierdzą słuszność głoszonych w nich postulatów.