

A 1911 I

GEODEZJA I KARTOGRAFIA

KWARTALNIK NAUKOWY
TOM II ✦ ZESZYT 1

1 9 5 3

KOMITET GEODEZJI POLSKIEJ AKADEMII NAUK

GEODEZJA
I KARTOGRAFIA

KWARTALNIK NAUKOWY
TOM II * ZESZYT 1



1 9 5 3

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

KOMITET REDAKCYJNY

Jan Różycki (redaktor naczelny), Bronisław Dzikiewicz (zastępca redaktora), Marian Brunon Piasecki (sekretarz)

RADA REDAKCYJNA

Tadeusz Kochmański, Zygmunt Kowalczyk, Stanisław Kryński, Henryk Leśniok, Janusz Tymowski, Edward Warchałowski

Adres Redakcji: Zakład Geodezji Wyższej (Politechnika) Warszawa,
Pl. Jedności Robotniczej 1

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — W A R S Z A W A 1953

Nakład 1000

Oddano do składania 22/I. 53.

Ark. wyd. 4³/₄, druk. 4¹/₃

Podpisano do druku 12/III. 53.

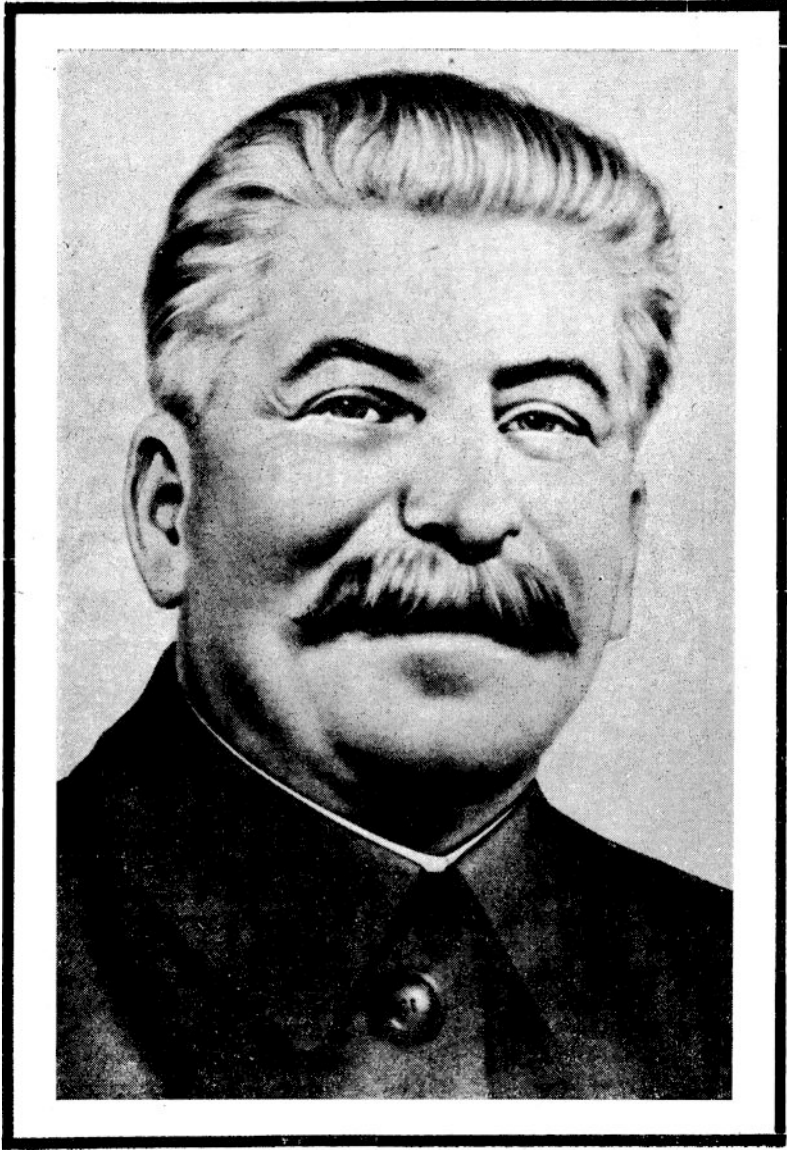
Papier dr. sat. 70 g 70 × 100/16 V kl.

Druk ukończono 18/III. 53.

Cena zł 6.50

Zamówienie 29/92 K-4-100072

POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA — POZNAŃ, FREDRY 10



Józef Stalin nie żyje! Przestało bić serce wielkiego człowieka, mądrego nauczyciela, nieomylnego przywódcy wszystkich prostych ludzi na całym świecie, w ich marszu ku szczęśliwej przyszłości — ku socjalizmowi.

Z nim byli wszyscy uczciwi ludzie złączeni ideą braterstwa narodów, poszanowania ich niepodległości i suwerenności, złączeni ideą wzięcia sprawy pokoju między narodami w swoje ręce i bronięcia jej do końca.

Przeciwko Niemu byli ci, dla których ideą był pieniądź i zysk osiągnięty drogą ucisku, oszustwa i rozboju, a godność prawa i niepodległość narodów przedmiotem handlu i oszukańczych machinacji. Stalin wskazywał, jak na nowym etapie historii realizować naukę Marksa-Engelsa-Lenina, budując pierwsze na świecie państwo socjalistyczne i wytyczając swym genialnym umysłem drogę do komunizmu.

W tych dniach smutku i żałoby jesteśmy sercem z bratnimi narodami Wielkiego Związku Radzieckiego, które z bólem najwyższym żegnały swego ukochanego wodza i nauczyciela.

W tych dniach smutku i żałoby, gdy na Kremlu przestało bić serce największego z ludzi naszej epoki — łączymy się w braterskim uścisku ze wszystkimi narodami, które podobnie jak i my dzięki Wielkiemu Stalinowi budują swe życie wolne od wyzysku i niesprawiedliwości. Łączymy się w bratnim uścisku z prostymi, uczciwymi ludźmi na całym świecie, dla których imię Stalina jest symbolem lepszego jutra, a Jego nauki i przykład uzbrajają do walki ze złem i niesprawiedliwością.

Geniusz Stalina wytyczał nauce nowe drogi rozwoju, podniósł jej godność, nakazał służyć całemu narodowi, przyczyniając się do realizacji podstawowego prawa socjalizmu, maksymalnego zaspakajania stale rosnących potrzeb materialnych i kulturalnych społeczeństwa w drodze nieprzerwanego wzrostu i doskonalenia produkcji socjalistycznej na bazie najwyższej techniki.

Dzięki Stalinowi również nauka polska wkroczyła na nowe drogi zaszczytnej służby dla dobra całego społeczeństwa, ściśle i nierozzerwalnie się z nim zespoliła, czerpiąc z jego potrzeb tematykę do prac badawczych i oddając mu dojrzałe owoce swej myśli i trudu.

Nie będziemy szczędzić sił, aby w pełni zostały urzeczywistnione cele, którym całe swe wspaniałe życie poświęcił Wielki Stalin.

Nie będziemy szczędzić wysiłku, aby na swoim odcinku pracy przyczynić się do szybszej budowy socjalizmu w naszej Umiłowanej Ojczyźnie — Polskiej Rzeczypospolitej Ludowej.

Edward Warchałowski

Wyznaczenie powierzchni odniesienia dla pomiarów geodezyjnych

W zeszycie nr 21 z 1951 r. organu Międzynarodowej Unii Geodezyjno-Geofizycznej „Bulletin Géodésique“ jeden z czołowych uczonych holenderskich — geofizyk prof. Vening-Ménesz wystąpił z propozycją unifikacji geodezyjnych pomiarów podstawowych całego globu ziemskiego w jednym układzie geodezyjnym; w tym celu porusza sprawę ustalenia najwłaściwszej i jedynej powierzchni odniesienia, na której w sposób jednoznaczny mogłyby być umiejscowione punkty oparcia, wyznaczone z pomiarów geodezyjnych niezależnie od tego, w jakim kraju się znajdują.

Zagadnienie obioru powierzchni odniesienia dla pomiarów geodezyjnych nie jest zagadnieniem nowym, zajmowało się tym problemem wielu uczonych, jednak z uwagi na poważne trudności, o których wspominamy niżej, właściwego rozwiązania dotąd nie uzyskano. Do rozwiązania zagadnienia powierzchni odniesienia dla pomiarów i badań geodezyjnych można podejść z dwóch punktów widzenia, w zależności od tego, jakie cele przede wszystkim chcemy osiągnąć.

Jeżeli na przykład główne nasze zadanie miałoby polegać na szczegółowym — mniej lub więcej — badaniu formy rzeczywistej powierzchni geoidalnej na pewnym odcinku globu ziemskiego, to wtedy najwłaściwszą powierzchnią odniesienia byłaby taka możliwie nieskomplikowana powierzchnia matematyczna, która najmniej odchyłać się będzie od przebiegu powierzchni poziomowej na danym odcinku powierzchni ziemskiej. Taką nieskomplikowaną powierzchnią będzie elipsoida obrotowa, która by najbliższą była dopasowana do rzeczywistej powierzchni poziomowej na danym odcinku.

Sprecyzowaliśmy tu z góry, że za powierzchnię odniesienia oberzemy elipsoidę obrotową, ponieważ dotychczasowe badania teoretyczne jak i praktyczne wyznaczenia kształtu powierzchni poziomowej wskazują na to, że właśnie tego rodzaju powierzchnia jest bardzo zbliżona do powierzchni geoidalnej, a jednocześnie jest tworem geometrycznym niezbyt skomplikowanym do obliczeń matematycznych.

Z tego punktu widzenia miałem możność omówić podstawowy problem obioru powierzchni odniesienia i dać dlań pewne rozwiązanie w formie ogólnej w mej pracy z 1931 r. pt.: „Wyrównanie triangulacji jako obserwacji pośrednich“.

Jeżeli jednak postawić zadanie generalne objęcia badaniami przebiegu powierzchni geoidalnej na całym globie ziemskim, to do rozwiązania takiego zadania należy podejść nieco inaczej, aczkolwiek zasadnicza myśl pozostanie ta sama. Różnica polegać będzie jedynie na tym, że w tym przypadku należy w sposób najbardziej celowy zorganizować i wykonać, możliwie równomiernie na globie ziemskim, specjalne pomiary, na podstawie których, podobnie jak w poprzednim przypadku, „dopasowalibyśmy“ powierzchnię odniesienia do przebiegu rzeczywistej powierzchni poziomowej, ograniczającej bryłę ziemską w całości.

Stosowane dotąd metody wyznaczenia ogólnego kształtu ziemi w postaci tzw. pomiarów stopnia, uzupełnione później pomiarami siły ciężkości, odegrały bardzo wielką rolę w kierunku podstawowego poznania tego kształtu. Jednakże metody te nie dały dostatecznego materiału do kompletnego rozwiązania tego ważnego problemu w sposób właściwy.

Dowodem tego jest między innymi wieloznaczność wyników, osiągniętych przez różnych badaczy, operujących różnymi materiałami uzyskanymi z bezpośrednich obserwacji na różnych odcinkach globu ziemskiego, położonych przy tym prawie wyłącznie na półkuli północnej.

Druga bardzo ważna sprawa, która ma niewątpliwie komplikujące znaczenie, polega na tym, że wszystkie nasze operacje pomiarowe wykonywane są na tej właśnie powierzchni poziomowej, która jednocześnie staje się i powierzchnią odniesienia i powierzchnią badaną.

Dodać do tego należy, że przebieg normalny powierzchni poziomowej jest często zakłócany przez nieprawidłowy rozkład masy materii w skorupie ziemskiej.

Trzecia, niemniej istotna okoliczność to fakt, że do chwili obecnej wielkie przestrzenie wodne, które w sposób najbardziej zbliżony do rzeczywistości wyznaczają zewnętrzną poziomą powłokę kuli ziemskiej, były wyłączone z możliwości dokonywania na nich bezpośrednich pomiarów liniowych. A tymczasem tego rodzaju pomiary przedstawiają najbardziej czułą metodę do rozwiązania interesującego nas tu zadania. Przekonywa nas o tym nawet bardzo pobieżna analiza. Otrzymanie długości s linii na powierzchni ziemi z bezpośredniego pomiaru z błędem $10^{-5}s$ nie przedstawia wielkich trudności; stanowi to dla $s=100$ km zaledwie ± 1 m, co odpowiada kątowi przy środku ziemi około $0'',03$. Gdybyśmy tą samą linię wyznaczyli z najbardziej starannego pomiaru szerokości i długości geograficznych końcowych jej punktów, to błąd tego wyznaczenia będzie kilkakrotnie większy od poprzedniego.

Wykonywanie pomiarów siły ciężkości na morzu, zainicjowane i doprowadzone przez prof. Vening-Meinesza do wysokiej doskonałości, dało niezmiernie cenny materiał, w dużym stopniu wypełniający lukę w geometrycznym opanowaniu przestrzeni wodnych, jednak metody te pod względem dokładności ustępują znacznie metodom geometrycznym. Dlatego też, wydaje mi się, że metody geodezyjne, które oznaczyliśmy terminem „geometryczne“, pozostaną jako podstawowe dokładne sposoby rozwiązania zadania o badaniach formy powierzchni ziemi, a metody geofizyczne stanowiąc będą niezbędne bardzo ważne ogniwo uzupełniające.

Pomimo wielkich postępów na drodze do właściwego rozwiązania problemu o formie i wielkości zewnętrznej powierzchni poziomej ziemi jako całości, niesłuszne byłoby twierdzenie, że zadanie to nie wymaga dalszego opracowania i coraz doskonalszego rozwiązania. Zaznaczyć trzeba, że dotychczasowe wyznaczenia elementów powierzchni geoidy były traktowane do pewnego stopnia jako zadanie dodatkowe, połączone z triangulacją krajową. Wydaje mi się, że obecnie należy to zadanie postawić jako samostanny problem naukowy i zgodnie z tym organizować specjalne i odpowiednio do tego celu dostosowane obserwacje (pomiarów) w skali międzynarodowej.

Dzięki wielkim postępom w różnych dziedzinach nauk technicznych powstają nowe środki badawcze, które pozwalają niedostępne — wydawało się do niedawna — zadania ująć w nowe kształty i dać nowe doskonalsze rozwiązania. Najbardziej obiecujące metody, które znajdują niewątpliwie coraz większe i szersze zastosowanie w geodezji, to wykorzystanie fal elektromagnetycznych do pomiaru odległości — chodzi tu tak o fale świetlne, jak i radiowe.

Metoda pomiaru odległości za pomocą zastosowania zjawisk świetlnych, opracowana przez geodetę szwedzkiego E. Bergstranda, daje bardzo wysoką dokładność, dochodzącą do $2 \cdot 10^{-6} \cdot s$, to znaczy na 100 km wynosi $\pm 0,2$ m. Niestety, metoda ta ma dość wąski zakres stosowalności, na razie do 30 km odległości.

Natomiast zastosowanie fal radiowych ma znacznie szerszy zasięg zastosowania, dochodzący do 300 km, lecz błąd otrzymywanej w ten sposób odległości pomiędzy punktami krańcowymi jest dość znaczny i w obecnym stadium technicznego opanowania wynosi co najmniej $10^{-4} \cdot s$, a więc na 100 km wynosi ± 10 m. Taka dokładność leży poniżej dokładności, jaką otrzymać możemy z pomiarów szerokości i długości geograficznych.

Należy mieć nadzieję, że specjaliści w dziedzinie teletechniki, a w szczególności w radiolokacji, zdołają opanować trudności związane z podniesieniem dokładności mierzenia odległości za pomocą fal radiowych; wówczas w dziedzinie ogólnego badania kształtu powierzchni naszej ziemi nastąpi zasadniczy przewrót, gdyż będziemy w stanie opanować przestrzenie

wodne, które, moim zdaniem, najbardziej są odpowiednie do rozstrzygnięcia zagadnienia ogólnego kształtu powierzchni geoidy w ujęciu dla całego globu ziemskiego.

Wówczas mogłoby mieć miejsce rozstrzygnięcie problemu jednego układu geodezyjnego w skali międzynarodowej.

W chwili obecnej zastosowanie metody dra E. Bergstranda może znacznie zmienić dotychczas stosowane metody pomiaru stopnia. Niżej daję próbę tych rozwiązań, jakie wydają mi się za możliwe i celowe.



Rys. 1

Załóżmy w kierunku południka, przechodzącego przez punkt P_0 linię, rozbitą na elementy o długości ok. 30 km — z odchyleniem w dół od tej normy w zależności od terenu, po którym linia ta będzie przebiegać — w taki sposób, aby z każdego punktu dobrze widoczne były dwa sąsiednie — poprzedzający i następny. Rozumie się samo przez się, że w punktach pośrednich będą zbudowane odpowiednie wieże dla wykonywania niezbędnych pomiarów.

W ten sposób otrzymamy poligon, którego oddzielne boki bardzo mało odchyłać się powinny od linii prostej, a wobec tego azymuty poszczególnych boków bardzo mało różnić się będą od 0° .

Linie tego poligonu $P_0 P_1 = s_1$, $P_1 P_2 = s_2 \dots P_{n-1} P_n = s_n$ będą bezpośrednio z całą możliwą dokładnością pomierzone za pomocą geodimetru Bergstranda.

Oprócz tego powinny być pomierzone obydwie kąty załamania na wierzchołkach poligonu z dokładnością, jak w triangulacji I rzędu.

Następnie starannie należy pomierzyć: 1) azymut pierwszego boku $P_0 P_1 = \alpha_1$ oraz azymut boku ostatniego $P_n P_{n-1} = \alpha'_n$ na punkcie P_n ; 2) bardzo dokładnie pomierzyć bezpośrednio geograficzne szerokości φ_0 i φ_n krańcowych punktów P_0 i P_n .

Może być wyznaczona również i różnica długości, co jednak nie jest konieczne.

Ponieważ zgodnie z podstawowym założeniem proponowanej metody poligon biegnie z nieznacznymi tylko odchyleniami od południka punktu początkowego P_0 , to dla obliczenia azymutów α_i poszczególnych boków możemy zastosować uproszczone wzory tym bardziej, że azymuty te potrzebne będą do obliczenia rzutów elementów poligonu na południk.

Również szerokości geograficzne i różnice długości pośrednich punktów potrzebne będą jako argumenty do pomocniczych obliczeń i mogą być wyznaczone z uproszczonych wzorów.

Oznaczmy długości boków $P_{i-1} P_i = s_i$, ich azymuty α_i i następnie oznaczmy

$$s_i \cos \alpha_i = u_i$$

$$s_i \sin \alpha_i = v_i,$$

to z zupełnie wystarczającą dokładnością otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_{i-1} + \varrho'' \frac{u_i}{M_m} - \frac{v_i^2}{2 \varrho'' M_m N_m} \\ \lambda_i &= \lambda_{i-1} + \varrho'' \frac{v_i}{N_i} \sec \varphi_i, \\ \alpha'_i &= \alpha_i + 180^0 + \varrho'' \frac{v_i}{N_i} \operatorname{tg} \varphi_i, \end{aligned} \quad (1)$$

przy czym M_m , N_m , N_i są to promienie główne krzywizny odniesione do szerokości średniej, pomiędzy punktami $P_{i-1} P_i$ lub do szerokości φ_i , a α'_i oznacza odwrotny azymut linii $P_i P_{i-1}$.

Azymut następnego boku $P_i P_{i+1}$ będzie

$$\alpha_{i+1} = \alpha'_i - P_i.$$

W taki sposób możemy obliczyć wartości szerokości i długości geograficznych dla wszystkich pośrednich punktów poligonu oraz wzajemne azymuty boków. Ponieważ w końcowym punkcie P_n mamy dokładnie zaobserwowane bezpośrednio szerokość φ_n oraz azymut α'_n , to różnice pomiędzy tymi wielkościami a ich wartościami obliczonymi zawierać będą wpływy błędów nieuniknionych w pomiarach, ale również i ewentualne wpływy, wywołane zjawiskiem odchylenia pionu. Gdybyśmy zaobserwowali również i różnicę długości geograficznych, to mielibyśmy bardziej kompletny materiał do rozwiązania interesującego nas problemu.

Zmierzone bezpośrednio długości s_i boków poligonu należy zredukować na powierzchnię poziomą zasadniczą, którą potocznie nazywamy poziomem morza. Jeżeli oznaczmy otrzymane z niwelacji wysokości końcowych punktów boku poligonu ogólnie H_{i-1} i H_i , to zredukowana do poziomu morza długość boku s_i^0 mieć będzie wartość

$$s_i^0 = s_i \left(1 - \frac{H_i^{(m)}}{a} \right), \quad (2)$$

gdzie $H_i^{(m)} = \frac{1}{2} (H_{i-1} + H_i)$, a zaś oznacza długość równikowej półosi elip-

soidy przyjętej za powierzchnię odniesienia. Półoś a wstawiono do wzoru (2) na miejsce M_m jako praktycznie wystarczającą.

Mając z obliczeń wzajemne azymuty poszczególnych boków poligonu i oznaczając:

$$\alpha_i^{(m)} = \frac{1}{2} (\alpha_i + \alpha'_i)$$

$$\varphi_i^{(m)} = \frac{1}{2} (\varphi_{i-1} + \varphi_i)$$

$$\Delta\alpha_i = (\alpha'_i - \alpha_i \pm 180^\circ)$$

możemy obliczyć odległość m_i liczoną wzdłuż południka między równoleżnikami przechodzącymi przez końcowe punkty danej linii s_i^0 . Posiłkujemy się w tym przypadku wzorami Helmerta, które z wystarczającą dokładnością piszemy, jak niżej

$$m_i = s_i^0 \cdot \frac{\cos \alpha_i^{(m)}}{\cos \frac{\Delta\alpha_i}{2}} \left\{ 1 + \frac{s_i^0}{12a^2} \sin^2 \alpha_i^{(m)} (1 + e^2 \cos^2 \varphi_i^{(m)}) \right\} \quad (3)$$

Obliczone w ten sposób rzuty boków poligonu zredukowane do poziomu morza dadzą nam elementy kolejne południka, a więc suma tych elementów da długość południka w granicach P_i i P_n . Oznaczmy ten wynik przez

$$S = \sum m_i. \quad (4)$$

Biorąc pod uwagę, że bezpośredni pomiar boków poligonu został wykonany z bardzo wysoką dokładnością, możemy przyjąć, że w porównaniu do innych sposobów pośrednich wyznaczenia długości S ten bezpośrednio otrzymany wynik jest praktycznie bezbłędny, a w każdym razie obciążający go błąd jest kilkakrotnie mniejszy od innych sposobów wyznaczenia.

Trzeba podkreślić, że pomierzone bezpośrednio linie s_i redukujemy na poziom morza wzdłuż linii pionowych, wskutek tego S będzie linią położoną na powierzchni poziomej, odpowiadającej odcinkowi w granicach $P_0 P_n$.

Jeżeli w obrębie odcinka powierzchni ziemskiej, na którym przebiega nasz poligon, rozmieszczenie mas materii nie wykazuje żadnych zakłóceń, to linie pionowe są w zasadzie jednocześnie prostopadłe do elipsoidy odniesienia, a wobec tego S będzie odcinkiem południka tej elipsoidy pomiędzy szerokościami φ_0 i φ_n .

Jeżeli natomiast istnieją zakłócenia w przebiegu pola grawitacyjnego, co w większości przypadków ma miejsce w mniejszym lub większym stopniu, z powodu nieregularnego rozmieszczenia materii w skorupie ziemskiej, to przed dalszym opracowaniem materiału zaobserwowanego musimy przenieść zmierzoną linię S z powierzchni geoidy na elipsoidę. Do takiego przeniesienia konieczną będzie znajomość wielkości odchyień linii pionowej w końcowych punktach P_0 i P_n .

Zgodnie z podstawowym założeniem omawianej metody cały poligon nieznacznie odchyła się od kierunku południka początkowego punktu. Wobec tego istotną rolę może tu odgrywać tylko składowa ξ odchylenia pionu, a właściwie różnica składowych ($\xi_n - \xi_0$). Różnicę tę możemy z pewnym przybliżeniem wyznaczyć, wychodząc z następujących przesłanek.

Kąty załamania poligonu, jak było zaznaczone, są mierzone z możliwie wysoką dokładnością, a więc błąd zawarty w wyniku tego pomiaru będzie dość nieznaczny, nie przekraczający $0''{,}5$. Założmy obecnie, że oddzielny poligon od P_0 do P_n składać się będzie z 5 elementów (150 km), tj. mamy w nim 4 kąty. Wpływ błędów pomiaru tych kątów na przeniesienie azymutu od α_1 do α_n wyniesie około $\pm 0''{,}5 \sqrt{4} = \pm 1''{,}0$.

Przeniesienie współrzędnych, a w szczególności szerokości geograficznych będzie znacznie dokładniejsze, co widoczne jest z wzorów (1), z których wynika, że dokładność ta zależy w głównej mierze od dokładności wielkości S , a tę mamy z bardzo wysoką dokładnością. Dlatego też szerokość φ'_n punktu P_n obliczoną z kolejnego przeniesienia współrzędnych, wychodząc od jako nieobciążanej odchyleniem pionu, możemy uważać za szerokość geodezyjną punktu P_n , a wskutek tego różnicę szerokości φ_n , wyznaczaną astronomicznie i φ'_n — geodezyjnie — możemy przyjąć za składową odchylenia pionu w punkcie P_n w kierunku południka, tj. piszemy równanie (przyjmując $\xi_0 = 0$):

$$\xi'_n = \varphi_n - \varphi'_n \quad (5)$$

Oczywiście należy przy tym uwzględnić błąd astronomicznego pomiaru.

Jeżeli odległość pomiędzy powierzchnią geoidy a powierzchnią elipsoidy oznaczymy h , to przechodząc od geoidy na elipsoidę po linii pionowej, linię S zmienimy o wartość

$$\delta S \approx \frac{h \xi'_n}{\rho''}$$

Największa odległość h według dotychczasowych badań nie przekracza 100 m. Odchylenie pionu w warunkach przeciętnych — nie górzystych i nie specjalnie wyjątkowych pod względem rozmieszczenia mas w sko-

rupie ziemskiej — wynosi zaledwie ok. $1'',5$, a więc odpowiadać to będzie, zgodnie z podanym wzorem, znikomo małej wielkości. Stąd wniosek, że pomimo wypowiedzianych zastrzeżeń teoretycznych, praktycznie możemy uważać S za rzut na elipsoidę odniesienia.

Chcąc wszechstronnie opracować interesujące nas zadanie wzajemnego położenia naszych zasadniczych powierzchni, powinniśmy, jak wynika z całokształtu poprzednich rozważań, poddać obszar, na którym prowadzimy badania „geometryczne“, również i badaniom grawimetrycznym, aby poznać pole grawitacyjne na tym obszarze.

Z pomiarów siły ciężkości możemy, jak to wykazał prof. Vening-Meinesz, wyznaczyć składowe ξ i η odchylenia pionu w południku i w kierunku pierwszego wertykału. A w ten sposób po pierwsze mielibyśmy możliwość otrzymać ξ_0, η_0 dla punktu P_0 jak również ξ_n, η_n dla punktu P_n , a po wtóre otrzymać kontrolę równania (5), co wyrazić się powinno równaniem

$$\xi'_n \approx \xi_n - \xi_0,$$

które jest słuszne w granicach błędów obserwacji grawimetrycznych i geodezyjnych.

Z obserwacji grawimetrycznych moglibyśmy również znaleźć przybliżone odległości pomiędzy geoidą a elipsoidą odniesienia, posługując się twierdzeniem Stokesa. Uproszczony wzór dany przez Poincarégo dla obliczenia tej odległości ma formę następującą:

$$h = \frac{1}{2\pi g} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \Delta g \, d\alpha \, dr.$$

W wzorze tym Δg oznacza anomalię siły ciężkości w poszczególnych punktach obszaru, r_0 — promień od punktu danego do granicy obszaru rozpatrywanego, α zaś — azymuty kierunków (promieni) r .

O ile anomalie Δg wewnątrz obszaru o promieniu r_0 są stałe, to dalsze uproszczenie daje:

$$h = \frac{r_0 \Delta g}{g} = 0,00102 \, r_0 \, \Delta g,$$

gdzie r_0 wyraża się w kilometrach, Δg — w miligalach, a h w metrach. Same wielkości składowych odchyień pionu otrzymalibyśmy w mierze kątowej z wzorów

$$\xi'' = -0'',105 \, r \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\eta'' = -0'',105 \, r \frac{\partial g}{\partial y}$$

$\frac{\partial g}{\partial x}$ i $\frac{\partial g}{\partial y}$ są to gradienty siły ciężkości w odniesieniu do osi współrzędnych (x — w kierunku południka, y — w kierunku prostopadłym do południka).

Mając składowe odchylen pionów w południku, otrzymane z bezpośrednich pomiarów astronomicznych szerokości φ_0 i φ_n zamieniamy na szerokości geodezyjne, czyli $(\varphi_0 + \xi_0)$ i $(\varphi_n + \xi_n)$. Obliczymy obecnie długość łuku południka na elipsoidzie odniesienia, ograniczoną tymi szerokościami.

Przypuśćmy, że elementy elipsoidy obrotowej odniesienia wyrażają się przez $(a + \delta a)$ i $(e^2 + \delta e^2)$, gdzie pod a i e^2 rozumiemy wielkości dużej półosi elipsoidy i kwadrat mimośrodu jednej z przyjętych obecnie elipsoid odniesienia, a więc Bessela, Hayforda lub F. N. Krasowskiego. Ostatnia z nich, opublikowana niedawno, oparta jest na wielkich pracach geodezyjnych w Związku Radzieckim z uwzględnieniem i innych badań, a więc należy do najdokładniejszych.

Pod δa i δe^2 rozumiemy te zmiany przyjętych prowizorycznie elementów, które dadzą nam dalsze nowe rozwiązanie, oparte na dalszych odmiennie zorganizowanych badaniach specjalnych.

Promień krzywizny południka elipsoidy odniesienia wyrazi się w postaci

$$M = \frac{(a + \delta a)[1 - (e^2 + \delta e^2)]}{\sqrt{[1 - (e^2 + \delta e^2) \sin^2 \varphi]^3}} = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} + \frac{\partial M}{\partial a} \delta a + \frac{\partial M}{\partial e^2} \delta e^2. \quad (6)$$

Zatrzymaliśmy w rozwinięciu na szereg tylko pierwsze wyrazy z uwagi na to, że dalsze wyrazy będą znikomo małe w porównaniu do wyrazów pierwszych.

Pochodne występujące w równaniu (6) mają wartości

$$\frac{\partial M}{\partial a} = \frac{M'}{a}; \quad \frac{\partial M}{\partial e^2} = M' \left\{ \frac{3}{2} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} - \frac{1}{1 - e^2} \right\},$$

gdzie M' oznacza wartość promienia przy elementach (a, e^2) .

Równanie (6) przyjmie następującą postać

$$M = M' + M' \frac{\delta a}{a} + M' \left\{ \frac{3}{2} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} - \frac{1}{1 - e^2} \right\} \delta e^2 \quad (7)$$

Długość S' południka zawartego między równoleżnikami $(\varphi_0 + \xi_0)$ i $(\varphi_n + \xi_n)$ przedstawi się w postaci całki

$$S' = \int_{\varphi_0 + \xi_0}^{\varphi_n + \xi_n} M d\varphi = \int_{\varphi_0 + \xi_0}^{\varphi_n + \xi_n} M' d\varphi + \frac{1}{\rho} M'_m \left[(\varphi_n - \varphi_0) + (\xi_n - \xi_0) \right] \left[\frac{\delta a}{a} + \left(\frac{3}{2} \frac{\sin^2 \varphi_m}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_n} - \frac{1}{1 - e^2} \right) \delta e^2 \right] \quad (8)$$

Główny wyraz prawej strony równania (8) przedstawiający się w formie całki

$$S'_0 = \int_{\varphi_0 + \xi_0}^{\varphi_n + \xi_n} M' d\varphi$$

można z łatwością obliczyć posilując się pomocniczymi tablicami geodezyjnymi dla elipsoidy (a, e^2). Dla obliczenia wyrazu poprawkowego wzięliśmy średnią wartość funkcji M'_m dla szerokości $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_n)$.

Obliczona w ten sposób długość S' powinna być zasadniczo taka sama, jak S wyznaczona z równania (4) na podstawie bezpośrednich pomiarów liniowych. Ponieważ jednak zarówno w bezpośrednich wyznaczeniach astronomicznych, jak i wyznaczeniach odchyień pionu występują nieuniknione błędy obserwacji znacznie większe od błędów wyznaczenia długości rzutu naszego poligonu na południk, to oznaczając przez v_s wpływ błędów obserwacyjnych na wyznaczenie S' z równania (8) możemy napisać następujące równanie dla błędu (poprawki) v_s .

$$v_{s'} = s - s' = s - s'_0 - \frac{M'_m}{\rho'''}(\varphi_n - \varphi_0 + \delta\xi) \frac{\delta a}{a} + \frac{M'_m}{\rho'''}(\varphi_n - \varphi_0 + \delta\xi) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi_m}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m} - \frac{1}{1 - e^2} \right) \delta e^2 \quad (9)$$

przez $\delta\xi$ oznaczono tu różnicę ($\xi_n - \xi_0$).

Jeżeli dla skrócenia zapisu oznaczymy

$$s - s'_0 = l_\varphi$$

$$-\frac{M'_m}{\rho'''}(\varphi_n - \varphi_0 + \delta\xi) = A_\varphi$$

$$-\frac{M'_m}{\rho'''}(\varphi_n - \varphi_0 + \delta\xi) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi_m}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m} - \frac{1}{1 - e^2} \right) = B_\varphi,$$

to równanie błędów (9) przyjmie taką prostą postać:

$$v_{s'} = A_\varphi \cdot \frac{\delta a}{a} + B_\varphi \cdot \delta e^2 + l_\varphi. \quad (10)$$

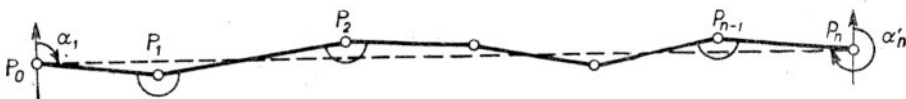
Jest rzeczą oczywistą, że równań typu (10) należy uzyskać możliwie dużo i dla różnych położań naszych specjalnych badań na globie ziemskim.

Ogólny plan badań według przedkładanego projektu byłby taki: Pod różnymi szerokościami geograficznymi obieramy odcinki prawie prostoliniowe w kierunku południka, o możliwie znacznej długości, np. 1000 km i rozbijamy je na kilka poligonów po 100—150 km. Poligony te niekoniecznie muszą być jeden przedłużeniem drugiego. Wzdłuż całej linii przeprowadzamy badania grawimetryczne w celu poznania pola grawitacyjnego na tej przestrzeni, do wyznaczenia odchyleń linii pionowych na końcach każdego poligonu włącznie. Na końcowych punktach każdego poligonu wyznaczamy astronomicznie szerokość geograficzną oraz azymuty początkowej i końcowej linii. W poligonie z całą precyzją mierzymy bezpośrednio boki i kąty na wierzchołkach. Otrzymany materiał na każdym poligonie opracowujemy w sposób podany wyżej i otrzymujemy równania typu (10).

Aby wyniki badań dały pożądane wyniki, opisane pomiary należałoby wykonać możliwie na całej północnej i południowej półkuli, a więc wzdłuż Ameryki (Północnej i Południowej), w Europie od Morza Śródziemnego możliwie najdalej na północ, w Azji — dwa lub trzy kierunki przez cały kontynent do Oceanu Indyjskiego, w Afryce — możliwie poprzez cały kontynent od Morza Śródziemnego do południowych krańców i wreszcie w Australii.

Należy omijać partie o dużych zakłóceniach grawitacyjnych, jak np. wielkie masywy górskie.

Jeszcze raz podkreślam, że istotną sprawą jest tu możliwie dokładny kierunek południka w oddzielnym poligonie, natomiast poszczególne poligony lub ich grupy mogą być rozłożone wzdłuż różnych południków, byleby w sumie przebiegały znaczne różnice szerokości.



Rys. 2

Zasada ta pozwoli tak dobrać tereny do naszych specjalnych badań, aby uniknąć tych okolic, gdzie istnieją większe zaburzenia w strukturze skorupy, a więc i zakłócenia w polu grawitacyjnym.

Otrzymane równania (10) opracowujemy ostatecznie według metody najmniejszych kwadratów, tj. pod warunkiem $\sum p v_s^2 = \text{minimum}$.

Nasze badania byłyby niekompletne, gdybyśmy nie uzupełnili ich analogicznymi pomiarami wykonanymi w kierunku prostopadłym do po-

łudnika, a więc wzdłuż równoleżników. W tym przypadku poligon elementarny będzie miał ogólny azymut bliski 90° (rys. 2).

Przy takim kierunku poligonu, ze szczególną starannością i dokładnością, trzeba zmierzyć astronomicznie różnicę długości geograficznych pomiędzy końcowymi punktami P_0 i P_n oddzielnego elementarnego poligonu. Szerokości geograficzne mogą być pomierzone z mniejszą precyzją.

Jak i w poprzednim przypadku z całą ścisłością będą pomierzone metodą Bergstranda długości boków $P_{i-1}P_i = s_i$.

Posiłkując się wzorami (1) otrzymamy z wystarczającą dokładnością — z uwagi na krótkie 30 km boki poligonu — długości geograficzne punktów pośrednich λ_i i wreszcie λ'_n , którą uważać możemy za długości geodezyjne. A zatem $\lambda_n - \lambda'_n = \delta\lambda_n$, daje nam możliwość obliczenia następnie poprzecznej składowej odchylenia pionu punktu P_n w stosunku do P_0

$$\eta_n - \eta_0 = \delta\eta = (\lambda_n - \lambda'_n) \cos \varphi.$$

Oczywiście obliczona w ten sposób wielkość $\delta\eta$ będzie obciążona wpływami astronomicznych obserwacji i błędami pomiaru kątów załamania.

Każdy z boków poligonu s_i , zmierzony bezpośrednio z wysoką dokładnością rzutujemy na równoleżnik, przechodzący przez punkt początkowy P_0 . Trzeba przy tym pamiętać, że azymuty α_i są tu bardzo bliskie 90° . Formuła Helmerta, którą tu zastosujemy, ma postać

$$p_i = s_i \sin \alpha_i^{(m)} \left\{ 1 - \frac{3^2_i}{24 a^2} [(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)(1 - \sec^2 \varphi_m \sin^2 \alpha_m) - e^2 \cos^2 \alpha_m (10 \sin^2 \varphi_m - 1)] \right\}, \quad (11)$$

gdzie $\alpha_i^{(m)}$ są to azymuty w średnim punkcie boku poligonu, a φ_m szerokość tego równoleżnika, na który rzutujemy s_i . Redukcję na poziom morza otrzymamy z wzoru

$$p_i^0 = p_i \left(1 - \frac{H_m}{a \cos \varphi_n} \right).$$

Suma rzutów p_i^0 w całym poligonie da nam odległość pomiędzy południkami skrajnych punktów P_0 i P_n liczoną po równoleżniku $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_n)$. Oznaczmy tę sumę zredukowaną na poziom morza przez

$$P = \sum p_i^0$$

Podobnie jak i w przypadku pomiarów wzdłuż południka, możemy twierdzić, że wartość P można uważać za obarczoną małym błędem, który możemy pominąć.

Odcinek równoleżnika pod szerokością φ_m możemy obliczyć dla elipsoidy obrotowej o elementach $(a + \delta a)$, $(e^2 + \delta e^2)$ w następujący sposób.

Promień krzywizny w wertykale ma wartość

$$N_m = \frac{(a + \delta a)}{\sqrt{1 - (e^2 + \delta e^2) \sin^2 \varphi_m}} = N'_m + \frac{\partial N}{\partial a} \delta a + \frac{\partial N}{\partial e^2} \delta e^2$$

następne wyrazy szeregu nie odgrywają realnego znaczenia.

Po podstawieniu pochodnych wzór poprzedni przyjmie taką postać:

$$N_m = N'_m + N'_m \frac{\delta a}{a} + N'_m \frac{\sin^2 \varphi_m}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m} \delta e^2. \quad (12)$$

Mając to, obliczamy odległość między południkami P_0 i P_n wzdłuż równoleżnika φ_m

$$P' = N_m \cos \varphi_m \Delta \lambda = N'_m \cos \varphi_m \Delta \lambda + N'_m \cos \varphi_m \Delta \lambda \frac{\delta a}{a} + \\ + N'_m \cos \varphi_m \frac{\sin^2 \varphi_m}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m} \Delta \lambda \delta e^2.$$

Wielkość $\Delta \lambda$ składa się tu z dwóch części: różnicy zaobserwowanych astronomicznie długości geograficznych $(\lambda_n - \lambda_0)$ i względnej wartości odchylenia pionu $\delta \eta \sec \varphi_m = (\eta_n - \eta_0) \sec \varphi_m$.

Jeżeli to uwzględnimy, to ostateczna formuła otrzyma postać taką:

$$P' = N'_m \cos \varphi_m (\lambda_n - \lambda_0 + \delta \eta \sec \varphi_m) + N'_m \cos \varphi_m (\lambda_n - \lambda_0 + \delta \eta \sec \varphi_m) \frac{\delta a}{a} + \\ + N'_m \cos \varphi_m \frac{\sin^2 \varphi_m}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m} (\lambda_n - \lambda_0 + \delta \eta \sec \varphi_m) \delta e^2. \quad (13)$$

Wprowadzając do P' poprawkę v_p wskutek wpływu nieuniknionych błędów obserwacji astronomicznych i innych, otrzymamy takie równanie błędów

$$v_p = A_\lambda \frac{\delta a}{a} + B_\lambda \delta e^2 + l_\lambda, \quad (14)$$

gdzie A_λ , B_λ są to skrócone oznaczenia odpowiednich współczynników równania (12), a

$$l_\lambda = P - N'_m \cos \varphi_m (\lambda_n - \lambda_0 + \delta \eta \sec \varphi_m) \text{''sin 1''}.$$

Za pomocą takiego zespołu obserwacji rozłożonych równomiernie na terenach bliskich równika, oczywiście gdzie to jest możliwe, moglibyśmy skonstatować w doświadczalny sposób ewentualną eliptyczność równika, a wspólnie z obserwacjami południkowymi wyznaczyć najprawdopodobniejsze wymiary trójosiowej elipsoidy ziemskiej.

Trzeba wreszcie zaznaczyć, że opracowując w jednym układzie taki zespół obserwacji rozłożonych na całym globie ziemskim uzyskalibyśmy po ostatecznym obliczeniu cały szereg punktów w różnych krajach świata, których wzajemne położenie zostało ustalone w odniesieniu do tego samego układu (φ, λ) , a więc nawiązując triangulacje krajowe do tych punktów, nawiązemy je do ogólnoświatowego układu geodezyjnego.

Wspomnieliśmy poprzednio, że istotne znaczenie miałyby wykonanie analogicznych do omówionych wyżej obserwacji na wielkich powierzchniach pokrytych wodą. Stosowane obecnie pomiary odległości za pomocą fal radiowych są jeszcze za mało dokładne, aby z tej metody pomiarowej korzystać w badaniach precyzyjnych. Są jednak pewne wskazówki, że i w tej dziedzinie następuje wielki postęp.

Z opublikowanych w „Bulletin Géodésique“ sprawozdań o triangulacji wykonanej w Ameryce systemem „Shoran“ wynikałoby, że uzyskano już dość znaczną dokładność, która wynosi około 1 : 59 000.

Jest zatem nadzieja, że dokładność ta może być jeszcze powiększona.

Metoda pomiaru odległości za pomocą fal radiowych ma znacznie większy zasięg od wysoce precyzyjnej metody geodimetru Bergstranda. Zasięg ten dochodzi nawet ponad 300 km. Jeżeli sobie wyobrazimy na obszarze oceanu (morza) wysepki w odległości do około 300 km jedna od drugiej, na których można wykonać obserwacje astronomiczne długości i szerokości geograficznych i pomiędzy tymi punktami pomierzyć odległość bezpośrednio drogą fal radiowych, to dla każdej w ten sposób zaobserwowanej pary punktów możemy ustalić związek pomiędzy współrzędnymi wyznaczonymi astronomicznie, a odległością zmierzoną bezpośrednio. W tej metodzie nie będziemy mieć azymutalnych obserwacji, które dają możliwość kontrolowania zasadniczych wyznaczeń współrzędnych.

Z uwagi na to, że odległości między sąsiednimi punktami obserwacyjnymi będą w zasadzie dość duże, to najkorzystniejsze wydaje się zastosowanie przy obliczeniach formuł dla średniej szerokości $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ z uwzględnieniem wyrazów czwartego rzędu, co daje prawo stosowania tych formuł do odległości nawet większych od 400 km.

Rozumieć będziemy, że są wprowadzone ewentualne korektywy ze względu na odchylenia pionu, jak również redukcje do poziomu morza.

Fodajemy te formuły w postaci logarytmicznej

$$\left. \begin{aligned} \lg s^0 \cos \alpha^{(m)} &= \lg(\varphi_2 - \varphi_0) - \lg(1) - (5) \Delta \lambda^2 \cos^2 \varphi_m - (6) \Delta \varphi^2 + \Delta \lg s \cos \alpha \\ \lg s^0 \sin \alpha^{(m)} &= \lg(\lambda_2 - \lambda_1) + \lg \cos \varphi_m - \lg(2) - (5) \Delta \lambda^2 \sin^2 \varphi_m + (4) \Delta \varphi^2 + \\ &\quad + \Delta \lg s \sin \alpha \\ \lg(\alpha_2 - \alpha_1) &= \lg(\lambda_2 - \lambda_1) + \lg \sin \varphi_m + (7) \Delta \lambda^2 \cos^2 \varphi_m + (8) \Delta \varphi^2 + \Delta \lg \Delta \alpha \end{aligned} \right\} (15)$$

Wartości symboli występujących we wzorach (15) można znaleźć w odpowiednich tablicach geodezyjnych pomocniczych dla określonej elipsoidy; znaczenie wspomnianych symboli jest następujące:

$$10^7 \text{ Mod} = \mu; \quad Q^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_m; \quad V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi_m$$

$$(1) = \frac{V^2}{N_m} \varphi''; \quad (2) = \frac{1}{N_m} \varphi''$$

$$(3) = \frac{\mu}{24 \varrho^2}; \quad (4) = \frac{1 + Q^2 - 9 Q^2 \text{tg}^2 \varphi_m}{V^4} \cdot \frac{\mu}{24 \varrho^2}$$

$$(5) = (2 + 2 \text{tg}^2 \varphi_m + 2 Q^2) \frac{\mu}{24 \varrho^2}; \quad (6) = Q^2 \frac{\text{tg}^2 \varphi_m - 1 - Q^2 + 4 Q^2 \text{tg}^2 \varphi_m}{V^4} \cdot \frac{\mu}{8 \varrho^2}$$

$$(7) = V^2 \cdot \frac{\mu}{12 \varrho^2}; \quad (8) = \frac{3 + 8 Q^2 + 5 Q^4}{V^4} \cdot \frac{\mu}{24 \varrho^2}$$

Dodatkowe człony poprawkowe, przy wzięciu pod uwagę dalszych wyrazów 4—5 rzędu, tj. $\Delta \lg s \cos \alpha$, $\Delta \lg s \sin \alpha$ i $\Delta \lg \Delta \alpha$, które mogą wchodzić w rachubę przy projektowanych odległościach, są bardzo małe. Jeżeli wziąć krańcowe przypadki $\Delta \varphi = 4^0$ i $\Delta \lambda = 4^0$, to pod średnią szerokością $\varphi_m = 50^0$ dałoby to zaledwie 1,4 jednostek w siódmym miejscu mantysy logarytmu, a dla różnicy azymutów $\Delta \alpha$ wyniosłoby około $0'',0015$. Widzimy więc, że praktycznie można stosować normalne formuły ze średnią szerokością (15) podane szczegółowo wyżej.

Obliczone z tych formuł s^0 , $\alpha_1 = \alpha^{(m)} - \frac{1}{2} \Delta \alpha$ i $\alpha_2 = \alpha^{(m)} + \frac{1}{2} \Delta \alpha$ odnoszą się do elipsoidy o przyjętych *a priori* elementach a i e^2 . Dla poszukiwanej elipsoidy odniesienia mieć będziemy $(a + \delta a)$ i $(e^2 + \delta e^2)$, należy wobec tego do obliczonych wartości s^0 i $\alpha^{(m)}$ dodać pewne poprawki, które obecnie postaramy się wyznaczyć.

Pomijając człony wyższych rzędów w formułach (15), możemy dla określenia zachodzących zmian w s i a wyjść z wzorów przybliżonych następujących:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_m &\approx \frac{N_m \cos \varphi_m}{M_m} \cdot \frac{\Delta \lambda}{\Delta \varphi} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m}{1 - e^2} \cdot \frac{\Delta \lambda}{\Delta \varphi} \\ s^{0,2} &\approx (M_m \Delta \varphi)^2 + (N_m \cos \varphi_m \Delta \lambda)^2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Ze struktury pierwszego z równań (16) wynika, że zmiana rozmiarów elipsoidy nie wpłynie na zmiany azymutów, natomiast forma elipsoidy będzie mieć wpływ na wielkość azymutów. Różniczkując pierwsze z równań (16), otrzymamy zależność pomiędzy zmianą kwadratu mimośrodru e^2 , a zmianą azymutu, mianowicie będzie istnieć równanie

$$\delta \alpha^{(m)} = \frac{\cos^2 \varphi_m}{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)} \sin \alpha^{(m)} \cos \alpha^{(m)} \delta e^2.$$

Wzór ten wskazuje, że zmiany $\delta \alpha$ będą bardzo małe rzędu e^4 , ponieważ δe^2 jest tego rzędu.

Biorąc drugi z wzorów (16), stwierdzamy, że zarówno zmiana rozmiarów półośi jak i kwadratu mimośrodru elipsoidy wpływa na długość łuku s . Ogólny wpływ zmiany elementów elipsoidy przedstawi się w tym przypadku w takiej postaci:

$$\delta s = \frac{\partial s}{\partial a} \delta a + \frac{\partial s}{\partial e^2} \delta e^2,$$

przy czym odrzucamy następane wyrazy wyższych rzędów, jako znikomo małe.

Po dokonaniu różniczkowania i przeprowadzeniu uproszczeń otrzymamy poprzednie równanie w następującej rozwiniętej postaci:

$$\delta s = +s^0 \cdot \frac{\delta a}{a} \frac{s^0}{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)} \left(\cos^2 \varphi_m \cos^2 \alpha^{(m)} - \frac{1 - e^2}{2} \sin^2 \varphi_m \right) \delta e^2 \quad (17)$$

W ten sposób ostateczna wartość odległości $P_1 P_2$, obliczona na podstawie pomiarów astronomicznych spórzędnych φ , λ , będzie $s^0 + \delta s$.

Jeżeli pomierzona za pomocą fal radiowych odległość ta , zredukowana jak i poprzednia, do poziomu morza była s_r , to oznaczając przez v_s poprawkę wynikającą z działania nieuniknionych błędów pomiaru, otrzymamy takie równania błędów

$$v_s = (s^0 - s_r) + s^0 \frac{\delta a}{a} + \frac{s^0}{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)} \left(\cos^2 \varphi_m \cos^2 \alpha_m - \frac{1 - e^2}{2} \sin^2 \varphi_m \right) \delta e^2. \quad (18)$$

Ta metoda tzw. „геометричных“ badań kształtu elipsoidy niewątpliwie będzie bardziej korzystna z tego względu, że można będzie wykonywać pomiary zarówno na przestworzach oceanicznych, jak i na lądzie.

Jest to tylko ogólny szkic tych możliwości, jakie otwierają się przed geodezją jutra. Myślę jednak, że pożyteczne byłoby bliższe przestudiowanie zagadnienia w szczególach, jak również przeprowadzenie eksperymentów na szerszą skalę dla opanowania metody obserwacyjnej i organizacji pracy.

РЕЗЮМЕ

Исходя из соображений возможности применения новых методов непосредственного измерения сравнительно значительных расстояний на земной поверхности при помощи световых волн и радио-волн, автор предлагает использовать эти возможности с целью определения наиболее подходящих размеров земного эллипсоида, как поверхности относимости для геодезических измерений.

Сущность предлагаемого способа заключается в заложении специальных полигонов в направлении меридианов, весьма мало отклоняющихся от прямой линии, стороны которых непосредственно измеряются с высокой точностью при помощи „геодиметра“ Бергстранда. В конечных точках измеряется тщательно астрономические широты, а также азимуты первой и конечной стороны полигона. Необходимо гравиметрическое обследование окрестностей конечных пунктов для установления отклонений отвеса в этих точках.

Стороны полигона, измеренные непосредственно проектируем на меридиан исходной точки полигона, на геоид. В виду высокой точности линейных измерений „геодиметром“ можно считать длину отрезка меридиана между широтами крайних точек безошибочными. Ту же самую длину можем вычислить, пользуясь соответствующими формулами для эллипсоида относимости. Сравнивая эти две величины, получаем уравнение погрешностей. Из обработки ряда таких полигонов по способу наименьших квадратов можно получить вероятнейшие размеры полуоси и эксцентриситета.

Такие же измерения следует провести и в направлении параллели. В этом случае особо тщательно нужно исполнить определение разницы астрономических долгот крайних пунктов. Ясно, что полигоны по меридианам и по параллелям следует обрабатывать совместно.

В случае развития применимости радио-волн в смысле значительного повышения точности результатов, следовало бы произвести многочисленные измерения на водных пространствах (пользуясь островами) расстояний ок. 300 км, а в конечных точках весьма тщательно определить астрономические широты и долготы. Обработка в этом случае будет заключаться в определении из вычислений длины расстояния между точками наблюдений, как функции элементов эллипсоида относимости и сравнение ее с измеренной непосредственно величиной этого расстояния. Отсюда получится уравнение погрешностей.

Работы следовало бы провести планомерно в международном масштабе, чтобы получить единую систему координат.

R É S U M É

Pour déterminer une surface générale de référence, l'auteur propose une méthode basée sur la mesure directe et précise de la distance entre deux points éloignés sur la surface terrestre à l'aide d'ondes lumineuses respectivement de radio.

Cette méthode consisterait à former un polygone rectiligné dans la direction du méridien. Les éléments linéaires du polygone seraient mesurés à l'aide d'un géodimètre de Bergstrand. Aux points extrêmes du polygone il faudrait mesurer exactement les latitudes géographiques, astronomiques ainsi que les azimuts du premier et du dernier côté.

Outre cela, des observations gravimétriques on peut éventuellement déterminer la déviation de la verticale. Les côtés particuliers du polygone seront projetés sur la surface du géoïde et dans la direction du méridien du point initial.

En nous basant sur ces mesures, nous pouvons établir le rapport existant entre les éléments de l'ellipsoïde de référence et la longueur mesurée du polygone projeté sur le méridien.

Il est essentiel de faire de pareilles observations le long des parallèles; et c'est avec des soins particuliers qu'il faut observer la différence des longitudes des points extrêmes. Ainsi on peut établir de l'équation entre les grandeurs des éléments (a , e^2) mesurés et la longueur du polygone sur le parallèle.

L'élaboration commune des deux mesures effectuées sur le globe terrestre entier donnera les éléments les plus probables de l'ellipsoïde de référence pour toute la terre.

Il serait particulièrement important de se servir des ondes de radio pour les mesures linéaires aux environ de 300 km. de longueur sur la surface de la mer ou de l'océan. En ces cas les latitudes et les longitudes géographiques des points extrêmes devraient être mesurées avec la grande précision.

De cette façon on aurait pu réaliser sur une échelle mondiale un système uniforme des coordonnées pour toutes les mesures géodésiques.

Stefan Hausbrandt

Wzory na błąd średni dowolnego punktu w poligonie typowym i wnioski dotyczące koordynowania dokładności pomiarów kątowych i liniowych w poligonach typowych

1. W literaturze geodezyjnej ustala się wzory wyrażające maksymalną wartość średniego błędu poprzecznego w prostoliniowym i równobocznym ciągu poligonowym, nawiązanym do punktów i kierunków stałych. Ponieważ tego rodzaju ciągi poligonowe — nazywamy je dalej krótko ciągami typowymi — są w praktyce bardzo rozpowszechnione¹⁾, wydaje się celowe postawić zagadnienie analizy dokładnościowej w sposób bardziej ogólny, nie ograniczając się do badania średniego błędu poprzecznego czy podłużnego w położeniu punktu równoodległego od punktów nawiązania, ale ustalając związki, jakie zachodzą między średnim błędem poprzecznym, względnie średnim błędem podłużnym d_{pop} i d_{pod} tego punktu w poligonie typowym wyznaczającym n punktów, a średnim błędem pomiaru kąta, średnim błędem pomiaru boku i długością boku (względnie długością całego poligonu).

Tego rodzaju uogólnienie zagadnienia — poza korzyściami natury pojęciowej wynikającymi z wszelkich uogólnień — przynosi dwie korzyści natury praktycznej a mianowicie:

a) pozwala przy minimalnym nakładzie pracy rachunkowej, w poprawny naukowo sposób charakteryzować dokładnościowo każdy punkt poligonu przez obliczanie wartości jego średniego błędu na drodze spierwiastkowania sumy kwadratów błędów poprzecznego i podłużnego,

b) pozwala ustalić prosty związek, jaki powinien zachodzić między średnim błędem pomiaru kąтового (wyrażać go zawsze będziemy w mierze radialnej), a średnim błędem względnym pomiaru liniowego w poligonie typowym, aby przeciętna wartość kwadratu błędu poprzecznego była równa przeciętnej wartości kwadratu błędu podłużnego lub, co na jedno wychodzi, aby suma kwadratów błędów poprzecznych była równa sumie kwadratów błędów podłużnych.

¹⁾ Praktyka daje nam oczywiście te ciągi w postaci niedoskonałej, tzn. założenie, że kąt między osią ciągu a bokiem spełnia warunek: $\cos \alpha = 1$ $\sin \alpha = 0$ oraz założenie pomijalności różnic w długości boków $d_i - d_k = 0$ są słuszne tylko w przybliżeniu.

Pierwsza z wymienionych korzyści natury praktycznej ma raczej znaczenie dla pomiarów o wyższej dokładności, pretendujących do poprawnej naukowo charakterystyki dokładności rezultatów.

Znaczenie drugiej z wymienionych korzyści natury praktycznej wydaje się większe. Jak bowiem można stwierdzić, porównując wzory, które dalej podamy i uzasadnimy z praktyką techniczną, obowiązujące przepisy pomiarowe są przeważnie dalekie od dokładnościowego skoordynowania pomiarów długościowych z pomiarami kątowymi w pracach poligonowych. Często np. zaleca się zabiegi mające na celu „kierunkowe usztywnienie“ poligonu, tzn. zmniejszenie średnich błędów poprzecznych, pomimo że w danym poligonie zarówno przeciętna, jak i maksymalna wartość błędu poprzecznego, dużo jest mniejsza od odpowiadającej wartości błędu podłużnego. Dodatkowy nakład pracy i kosztów włożony w zmniejszenie błędów poprzecznych jest tu oczywiście niecelowy i pozostaje niemal bez wpływu na przeciętną i maksymalną wartość błędu położenia punktu. Zmniejszenie natomiast przeciętnej i maksymalnej wartości błędów podłużnych — dokonane czy to na drodze zwiększenia dokładności pomiarów długościowych, czy też na drodze nawiązań kątowych do punktów stałych obserwowanych prostopadle do kierunku ciągu z jego środka — będzie w tego rodzaju ciągu poligonowym celowe. Włożony bowiem nakład pracy i kosztów wydatnie zmniejszy zarówno przeciętną, jak i maksymalną wartość błędu położenia punktu i zamieni wadliwą konstrukcję geodezyjną, wyznaczającą położenie punktu na płaszczyźnie z wybitnie większą dokładnością w jednym niż w drugim z dwóch prostopadłych kierunków, na konstrukcję geodezyjną prawidłową nie wyróżniającą żadnego z tych kierunków. Rozpocznijmy od podania i uzasadnienia wzorów stanowiących podstawę dalszych rozważań. Wzory te wyrażają związek między średnim błędem poprzecznym m_{poprz} średnim błędem podłużnym $m_{podł}$ i -tego punktu w poligonie wyznaczającym n punktów ($i=1, 2, \dots, n$) a średnim błędem pomiaru kąta m_α , średnim błędem pomiaru boku m_d i długością boku d . Mają one kształt:

Średni błąd poprzeczny i -tego punktu poligonu

$$m_{poprz} = m_\alpha d \cdot \sqrt{\frac{i(i+1)(n+1-i)(n+2-i)}{6(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot [(2i+1)n - (2i^2 - 2i - 3)]} \quad (1)$$

Średni błąd podłużny i -tego punktu poligonu

$$m_{podł} = m_d \cdot \sqrt{\frac{i(n+1-i)}{n+1}} \quad (2)$$

Czytelnik nie interesujący się wywodem matematycznym słuszności wzorów (1) (2) może opuścić następujący dalej tekst (str. 23—35) bez obawy o trudności w przyswojeniu wniosków praktycznych.

2. Wyobraźmy sobie układ współrzędnych prostokątnych, którego oś główna $O X$ jest równoległa do osi $A B$ typowego ciągu poligonowego, łączącego punkty stałe A i B (rys. 1). Jeżeli wartościom „przybliżonych współrzędnych“ wyznaczanych przez poligon punktów:

$$1, 2, 3 \dots \dots \dots n$$

nadać drobne przyrosty dx_i dy_i ($i=1, 2, \dots n$), wówczas boki d i kąty α poligonu otrzymają drobne przyrosty dd , da . Łatwo zauważyć, że przyrost długości boku wyznaczonego przez punkty o wskaźnikach $(i-1)$ i (i) wyrazi wzór:

$$dd_i = dx_i - dx_{i-1}$$

przyrost zaś kąta, którego wierzchołkiem jest punkt o wskaźniku (i) , wyrazi wzór:

$$da_i = -\frac{1}{d} dy_{i-1} + \frac{2}{d} dy_i - \frac{1}{d} dy_{i+1}.$$

Zakładamy tu oczywiście, jak to zawsze ma miejsce w operacjach wyrównawczych, że przyrosty są dostatecznie małe, aby drugie ich potęgi uważać za zaniedbywalne.

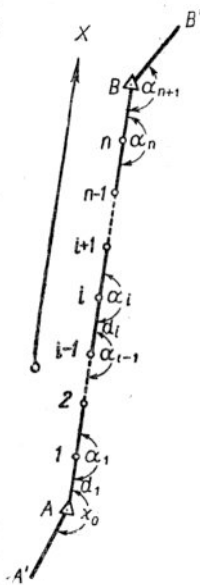
Wartość najprawdopodobniejszą boku względnie kąta po wyrównaniu wyrazić możemy bądź to: 1) jako sumę wartości zaobserwowanej tego boku d_{obs} (względnie kąta α_{obs}) i poprawki wyrównawczej v_d (względnie v_a) spełniającej warunek minimum sumy kwadratów:

$$[v] = \text{minimum},$$

bądź też: 2) jako sumę obliczonej z przybliżonych współrzędnych długości boku d_{przzyb} (względnie wartości kąta α_{przzyb}) i przyrostu dd (względnie da), jaki otrzyma bok (względnie kąt), gdy przybliżone współrzędne wyznaczanych punktów poligonu zamienimy na najprawdopodobniejsze przez nadanie im przyrostów wyrównawczych dx , dy . Mamy więc:

$$d_{obs} + v_d = d_{przzyb} + dd \quad \text{lub: } v_d = dd + d_{przzyb} - d_{obs}$$

$$\alpha_{obs} + v_a = \alpha_{przzyb} + da \quad \text{lub: } v_a = da + \alpha_{przzyb} - \alpha_{obs}.$$



Rys. 1

Stąd łatwo już napisać równanie błędu obserwacji liniowej oraz równanie błędu obserwacji kątovej. Podstawiając wartości dd względnie da znajdziemy:

$$\text{równanie błędu obserwacji liniowej } dx_i - dx_{i-1} + l_a = v_a,$$

$$\text{równanie błędu obserwacji kątovej}$$

$$-\frac{1}{d} dy_{i-1} + \frac{2}{d} dy_i - \frac{1}{d} dy_{i+1} + l_a = v_a,$$

przy czym przez l oznaczyliśmy różnicę między wartością przybliżoną i zaobserwowaną elementu liniowego (l_d) względnie kątowego (l_a).

Napisanie takich równań dla każdej z $n+1$ obserwacji liniowych oraz dla każdej z $n+2$ obserwacji kątowych pozwoli nam zestawić tabele współczynnikowe układów równań błędów. Podajemy poniżej te tabele pomijając w nich wyrazy wolne, jako nie mające znaczenia dla dalszej pracy.

Tabela współczynnikowa układu równań błędów obserwacji liniowych

dx_1	dx_2	dx_3	dx_4	dx_{n-1}	dx_n
1						
-1	1					
	-1	1				
		-1	1			
					
					-1	1
						-1

Tabela współczynnikowa układu równań błędów obserwacji kątowych

dy_1	dy_2	dy_3	dy_4	dy_{n-2}	dy_{n-1}	dy_n
$\frac{1}{d}$							
$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$						
$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$					
	$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$				
						
					$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$
						$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$
							$-\frac{1}{d}$
							$\frac{2}{d}$
							$-\frac{1}{d}$

Z tabel tych wynika od razu, że tabele wyznaczników charakterystycznych układów równań normalnych Gaussa mają odpowiednio postać:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & & & & & & \\ & & -1 & \dots & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & 2 & -1 & & \\ & & & & & -1 & 2 & & \end{vmatrix} \quad \text{oraz} \quad D^1 = \frac{1}{d^{2n}} \begin{vmatrix} 6 & -4 & & & & & & & \\ -4 & 6 & & & & & & & \\ 1 & -4 & & 1 & & & & & \\ & & 1 & & -4 & 1 & & & \\ & & & & & 6 & -4 & 1 & \\ & & & & & -4 & 6 & -4 & \\ & & & & & & 1 & -4 & 6 & \end{vmatrix}$$

(dla obserwacji liniowych) (dla obserwacji kątowych)

Związek między średnim błędem i -tej niewiadomej układu równań normalnych Gaussa, wyznacznikiem charakterystycznym Δ układu równań normalnych i minorem Δ_{ii} przyporządkowanym i -temu elementowi przekątnej tabeli wyznacznika wyraża znany wzór:

$$m_i = M_0 \cdot \sqrt{\frac{\Delta_{ii}}{\Delta}}$$

gdzie M_0 jest średnim błędem pojedynczej obserwacji.

Oznaczając przez m_d i m_o błędy średnie pomiaru boku i kąta, wyrazimy tedy błąd podłużny i -tego punktu poligonu, tzn. w przyjętym układzie błąd odciętej m_x , oraz błąd poprzeczny i -tego punktu poligonu, tzn. w przyjętym układzie błąd rzędnej m_y , za pomocą wzorów:

$$m_{podl} = m_d \cdot \sqrt{\frac{D_{ii}}{D}} \quad (2_1)$$

$$m_{poprz} = m_o \cdot \sqrt{\frac{D'_{ii}}{D'}} = m_o d \cdot \sqrt{\frac{D_{ii}}{D}} \quad (1_1)$$

gdzie oznaczyliśmy przez D' wyznacznik, w którego tabeli elementy na głównej przekątnej równe są 6, elementy na przekątnych sąsiadujących z przekątną główną są równe -4 , elementy na przekątnych sąsiadujących z poprzednimi są równe 1, zaś pozostałe elementy są zerami.

Jest więc wyraźnie:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & & & & \dots & \end{vmatrix} \quad \text{oraz} \quad D' = \begin{vmatrix} 6 & -4 & & 1 & & & & & \\ -4 & 6 & & -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Otrzymane wzory pozwalają już na liczbowe rozwiązywanie zagadnienia obliczenia błędu podłużnego i poprzecznego i -tego punktu w poligonie wyznaczającym n punktów. Tak np. dla obliczenia błędów drugiego punktu w poligonie wyznaczającym trzy punkty mieć będziemy:

$$m_{poprz} = m_0 \cdot \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}}} = m_0 \cdot \sqrt{\frac{35}{50}} = 0,837 m_0 d$$

$$m_{podl} = m_d \cdot \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}} = m_d \cdot \sqrt{\frac{4}{4}} = m_d.$$

Jeżeli więc — skonkretyzujemy nasz przykład — założono poligon o czterech bokach długości po 200 metrów, zmierzonych ze średnimi błędami $\pm 0,10$ metra, przy czym kąty w tym poligonie zmierzono ze średnimi błędami $\pm 1'$, tzn. w mierze radialnej $\pm 0,00029$, wówczas błędy: poprzeczny i podłużny drugiego punktu w tym poligonie wyniosą:

$$m_{poprz} = \pm 0,837 \cdot 0,00029 \cdot 200 = \pm 0,048$$

$$m_{podl} = \pm 1 \cdot 0,10 = \pm 0,10.$$

Punkt wyznaczony tu będzie z błędem średnim:

$$m_p = \sqrt{0,05^2 + 0,10^2} = \pm 0,12 \text{ metra.}$$

Otrzymane wzory, jako wymagające każdorazowego obliczania wartości wyznaczników, nie są praktyczne w rachunku liczbowym. Ponieważ z chwilą ustalenia stopnia wyznacznika n wartość wyznacznika D względnie D' staje się funkcjonalnie zależna od jednej tylko zmiennej n , postaramy się sformułować odnośne związki funkcyjne: $D = F_1(n)$ oraz: $D' = F_2(n)$.

Ponieważ dalej z chwilą ustalenia stopnia wyznacznika n oraz wielkości wskaźnika i wyznaczającego liczbę porządkową elementu głównej przekątnej, któremu przyporządkowany jest minor o wskaźniku u war-

tość minora D_{ii} względnie wartość minora D_{ii} staje się funkcjonalnie zależna od dwóch tylko zmiennych: n i i — postaramy się sformułować i tu odnośne związki funkcyjne: $D_{ii}=f_1(n, i)$ oraz: $D_{ii}=f_2(n, i)$. Pozwoli nam to następnie zastąpić we wzorach na błąd poprzeczny i błąd podłużny stosunki wyznaczników przez stosunki wielomianów zmiennych n oraz i i doprowadzić te wzory do postaci (1) (2).

3. Dla wyznaczenia związku, jaki zachodzi między wartością wyznacznika

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

oraz liczbą n określającą jego stopień, pomnożmy pierwszą kolumnę tabeli przez 1, drugą przez 2, trzecią przez 3 itd. itd., wynosząc przed znak wyznacznika dla zachowania jego wartości iloczyn:

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

Mieć będziemy, pisząc wyraźnie elementy k -tej kolumny i k -tego wiersza:

$$D = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 4 & -3 & & \\ & -2 & 6 & & \\ & & -3 & \cdot & -(k-1) \\ & & & \cdot & 2(k-1) & -k \\ & & & \cdot & -(k-1) & 2k & -(k+1) \\ & & & & & -k & 2(k+1) \\ & & & & & & -(k+1) \end{vmatrix}$$

Pozostawmy teraz bez zmiany pierwszą kolumnę, a do każdej następnej dodawajmy kolumnę poprzedzającą. W wyniku tej operacji, nie zmieniającej wartości wyznacznika, otrzymamy tabelę wyznacznikową, w której wszystkie elementy ponad główną przekątną będą równe zeru, każdy zaś element na głównej przekątnej będzie o jedność większy od liczby porządkowej swego miejsca na tej przekątnej. Mamy bowiem:

$$2-2=0 \quad -1+4-3=0 \quad -2+6-4=0 \text{ itd.}$$

$$\text{a ogólnie: } -(k-1)+2k-(k+1)=0$$

oraz: $2=2$ $-1+4=3$ $-2+6=4$ itd,

a ogólnie: $-(k-1)+2k=k+1$.

Ponieważ zaś wartość wyznacznika, którego tabela ma tylko zerowe elementy ponad główną przekątną, równa jest iloczynowi elementów tej przekątnej, otrzymamy:

$$D = \frac{1}{n!} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n(n+1) = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1,$$

co zapiszemy ostatecznie pod postacią:

$$D = n+1$$

Prościej, choć bez ścisłości matematycznej, można ustalić ten związek przez obliczanie wartości, jakie przybiera wyznacznik D , gdy zmieniać w jego tabeli ilość rzędów. Oznaczając przez $D(k)$ wyznacznik, którego tabela posiada k rzędów, otrzymamy przy zmianie k :

$$D(1) = |2| = 2, \quad D(2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad D(3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Analogicznie $D(4)=5$, $D(5)=6$ itd. itd.

Uogólniając to napiszemy ostatecznie: $D(n)=n+1$.

4. Przejdźmy teraz do związku, jaki zachodzi między wartością podwyznacznika D_{ii} , którego tabela powstaje w drodze skreślenia i -tego wiersza i i -tej kolumny w tabeli wyznacznika D o n rzędach a wielkościami n i i .

Rozwińmy taki wyznacznik:

$$D_{ii} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ \hline & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

w myśl ogólnego twierdzenia Laplace'a według zespołu pierwszych $i-1$ kolumn — nazywamy dalej ten zespół pierwszych $i-1$ kolumn „pierwszym pasem“ tabeli wyznacznika, nazywając „drugim pasem“ tabeli

wyznacznika zespół pozostałych $n-i$ kolumn. Należy więc pomnożyć każdy z „majorów“ pierwszego pasa, tzn. każdy z wyznaczników, dających się utworzyć z wierszy pierwszego pasa branych po $i-1$, przy zachowaniu kolejności, przez odpowiadający mu „major“ drugiego pasa, tzn. wyznacznik utworzony z tych wierszy drugiego pasa, które nie występują w majorze pasa pierwszego — nadając iloczynowi znak plus lub minus zależnie od tego, czy suma wskaźników wierszy i kolumn majora pierwszego pasa jest liczbą parzystą, czy nie parzystą. Suma obliczonych tak iloczynów (zwana też sumą iloczynów majorów przez ich dopełnienia algebraiczne) daje, jak wiadomo, wartość wyznacznika.

W rozpatrywanym wypadku wyznacznika D_{ii} , z wyjątkiem majora pasa pierwszego utworzonego z $i-1$ pierwszych wierszy, wszystkie majory pasa pierwszego, jako zawierające wiersz zerowy, będą zerami. Suma iloczynów ograniczy się więc tutaj do iloczynu wyznacznika utworzonego z $i-1$ pierwszych wierszy pasa pierwszego przez odpowiadający mu major drugiego pasa, który będzie tegoż samego typu znanym nam już wyznacznikiem D utworzonym z $n-i$ wierszy końcowych drugiego pasa. Oznaczając więc przez $D(k)$ wyznacznik znanego nam typu D , składający się z k rzędów napiszemy:

$$D_{ii} = D(i-1) \cdot D(n-i).$$

Ponieważ zaś, jak to uprzednio wykazaliśmy $D(k) = k+1$, będzie:

$$D(i-1) = i-1+1 = i \text{ oraz } D(n-i) = n-i+1.$$

Podstawiając to otrzymamy

$$D_{ii} = i(n-i+1)$$

Wzór na podłużny błąd średni i -tego punktu w poligonie wyznaczającym n punktów (patrz wzór 2i) mieć więc będzie ostatecznie postać:

$$m_{podl} = m_d \sqrt{\frac{i(n+1-i)}{n+1}}$$

5. Przejdźmy do obliczania wartości wyznaczników występujących we wzorze na błąd poprzeczny.

Dla obliczenia wartości wyznacznika oznaczonego przez D pomnożmy kolejne kolumny tabeli tego wyznacznika:

Napisaliśmy tu wyraźnie wartości wszystkich elementów k -tego wiersza powstające w drodze sumowania: jednego, dwóch, trzech, czterech i pięciu elementów k -tego wiersza poprzedniej tabeli. Mamy mianowicie:

$$1(k-2)(k-1) = k^2 - 3k + 2$$

$$1(k-2)(k-1) - 4(k-1)k = -3k^2 + k + 2$$

$$1(k-2)(k-1) - 4(k-1)k + 6k(k+1) = 3k^2 + 7k + 2$$

$$1(k-2)(k-1) - 4(k-1)k + 6k(k+1) - 4(k+1)(k+2) = -k^2 - 5k - 6$$

$$1(k-2)(k-1) - 4(k-1)k + 6k(k+1) - 4(k+1)(k+2) + 1(k+2)(k+3) = 0$$

Operacja wykonana nad elementami tabeli wyznacznika doprowadziła, jak widać, do uzyskania tabeli nad przekątną główną, której tylko jedna przekątna znajduje się już o niezerowych elementach. Otrzymaliśmy bowiem dla elementów drugiej sąsiadującej pośrednio z przekątną główną przekątnej:

w pierwszym wierszu: $12 - 24 + 12 = 0$,

w drugim wierszu $-8 + 36 - 48 + 20 = 0$,

w trzecim wierszu $2 - 24 + 72 - 80 + 30 = 0$ itd., itd., a ogólnie:

$$(k^2 - 3k + 2) + (-4k^2 + 4k) + (6k^2 + 6k) + (-4k^2 - 12k - 8) + (k^2 + 5k + 6) = 0.$$

Powtórzmy teraz raz jeszcze operację polegającą na pozostawieniu bez zmiany pierwszej kolumny otrzymanej ostatnio tabeli wyznacznikowej i dodawaniu do każdej następnej kolumny wszystkich poprzedzających ją kolumn. Otrzymamy tabelę, w której wszystkie elementy ponad główną przekątną będą zerami. Jest bowiem: $12 - 12 = 0$ $-8 + 28 - 20 = 0$ itd. itd., a ogólnie:

$$(k^2 - 3k + 2) + (-3k^2 + k + 2) + (3k^2 + 7k + 2) - (k^2 + 5k + 6) = 0.$$

Elementami przekątnej głównej tworzonej w wyniku opisanego postępowania tabeli będą: $12 - 8 + 28 = 20$ itd. itd., a ogólnie:

$$(k^2 - 3k + 2) + (-3k^2 + k + 2) + (3k^2 + 7k + 2) = k^2 + 5k + 6.$$

Wartość wyznacznika obliczyć możemy więc jako iloczyn elementów przekątnej głównej. Pisząc ogólny wyraz przekątnej równy $k^2 + 5k + 6$ pod postacią:

$$(k+2)(k+3)$$

i podstawiając kolejno $k=1, 2, 3, \dots, n$ otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{n!(n+1)!} [(3 \cdot 4)(4 \cdot 5)(5 \cdot 6) \dots (n+2)(n+3)] = \\
 &= \frac{1}{n!(n+1)!} [3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n+2) \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (n+3)] = \frac{(n+2)!(n+3)!}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \\
 &= \frac{(n+2)!(n+3)!}{n!(n+1)! \cdot 12} \quad \text{i ostatecznie:} \quad \boxed{D = \frac{(n+1)(n+2)(n+2)(n+3)}{12}}
 \end{aligned}$$

Związek można też ustalić przez obliczanie wartości, jakie przybiera wyznacznik D , gdy zmieniać w jego tabeli ilość rzędów.

Oznaczając $D(k)$ wyznacznik typu D , którego tabela posiada k rzędów, będziemy tu mieć kolejno:

$$\begin{aligned}
 D(1) &= |6| = 6 & D(2) &= \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 20 \\
 D(3) &= \begin{vmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 50 \text{ itd.}
 \end{aligned}$$

Zestawiając obliczone dla wartości zmiennej k równych kolejno:

1 2 3 4 5 6 7

wartości wyznacznika $D(k)$ równe odpowiednio:

6 20 50 105 196 336 540

stwierdzić można, że jest to wielomian czwartego stopnia. Z jakichkolwiek pięciu wartości zmiennej k i wielomianu:

$$D(k) = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + c_3 k^3 + c_4 k^4$$

można wyznaczyć wtedy wartości współczynników wielomianu, po czym przez rozkład na czynniki doprowadzić wzór do przyjętej przez nas postaci. Ponieważ jednak nie jest *a priori* widoczne, że funkcja $D(k)$ jest wielomianem czwartego stopnia, takiemu postępowaniu można by zarzucić brak ścisłości. Woleliśmy więc pójść tu drogą dowodu wyznacznikowego.

6. Pozostaje znaleźć związek, jaki zachodzi pomiędzy wartością podwyznacznika D_{ii} , którego tabela powstaje w drodze skreślenia i -tego wiersza i i -tej kolumny w tabeli wyznacznika D o n rzędach, a wielkościami n oraz i .

Weźmy tedy wyznacznik D_{ii} (dla uzmysłwienia piszemy tabelę takiego wyznacznika dla konkretnego wypadku ośmiu rzędów) i obliczymy jego wartość, stosując znów twierdzenie Laplace'a w postaci uogólnionej i rozwijając wyznacznik według pierwszych $i - 1$ kolumn.

$$D_{ii} = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 1 & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & & & \\ \hline & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}$$

Łatwo zauważyć, że spośród wszystkich możliwych iloczynów majorów pasa pierwszego przez odpowiadające majory pasa drugiego różnymi od zera będą tylko dwa iloczyny:

1) iloczyn wyznacznika pasa pierwszego o tabeli składającej się z pierwszych $i-1$ wierszy przez wyznacznik pasa drugiego o tabeli składającej się z ostatnich $n-i$ wierszy;

2) iloczyn wyznacznika pasa pierwszego o tabeli składającej się z pierwszych $i-2$ wierszy oraz wiersza i -tego (w tabeli D_{ii}), tj. wiersza zawierającego elementy zerowe i jedność, przez odpowiadający mu wyznacznik pasa drugiego, tj. przez wyznacznik o tabeli zawierającej w pierwszym swym wierszu jedność i elementy zerowe, a w następnych elementy ostatnich $n-i-1$ wierszy.

Wyznaczniki wymienione w p. 1 są to wyznaczniki znanego typu D' . Pierwszy z nich jest wyznacznikiem o ilości rzędów równej $(i-1)$, drugi o ilości rzędów $(n-i)$. Pamiętając, jak to wykazaliśmy, że zachodzi związek:

$$D' = \frac{(n+1)(n+2)(n+2)(n+3)}{12}$$

napiżemy iloczyn omawianych wyznaczników pod postacią:

$$D' (i-1) \cdot D' (n-i) = \frac{i(i+1) \cdot (i+1) \cdot (i+2)}{12} \cdot \frac{(n-i+1)(n-i+2)(n-i+2)(n-i+3)}{12}$$

Przed iloczynem postawimy znak plus, suma bowiem wskaźników wierszy i kolumn wyznacznika pierwszego, jako równa $i-1+i-1=2i-2$, jest liczbą parzystą.

Przejdźmy do wyznaczników wymienionych w p. 2. Dla skonkretyzowanego wypadku przedstawionej powyżej tabeli miałyby one postać:

$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 1 & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \quad \text{oraz:} \quad \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ -4 & 6 & -4 & & \\ 1 & -4 & 6 & & \end{vmatrix}$$

Rozwijając pierwszy z omawianych wyznaczników według ostatniego wiersza, drugi zaś według pierwszego wiersza, otrzymamy:

$$D \cdot (i-2) \quad \text{oraz:} \quad D \cdot (n-i-1).$$

Pamiętając znowu o związku między wartością wyznacznika o tabeli typu D a ilością rzędów w jego tabeli napiszemy iloczyn wyznaczników wymienionych pod 2 pod postacią:

$$D \cdot (i-2) \cdot D \cdot (n-i-1) = \frac{(i-1) i i (i+1)}{12} \cdot \frac{(n-1)(n-i+1)(n-i+1)(n-i+2)}{12}.$$

Przed iloczynem postawimy znak minus, bowiem suma wskaźników wierszy i kolumn wyznacznika pierwszego pasa jest liczbą nieparzystą:

$$1+2 \dots (i-2)+i+1+2 \dots (i-2)+(i-1) = 2(1+2 \dots (i-2)) + 2i - 1.$$

Ostatecznie więc wartość wyznacznika D_{ii} wyrazi dla tabeli o n rzędach następujący wzór:

$$D_{ii} = \frac{i(i+1)^2(i+2)(n-i+1)(n-i+2)^2(n-i+3) - (i-1)i^2(i+1)(n-i)(n-i+1)^2(n-i+2)}{144}$$

Zadanie zostało zasadniczo rozwiązane i wzór na błąd poprzeczny i -tego punktu w poligonie wyznaczającym n punktów

$$m_{\text{poprz}} = m_0 d \sqrt{\frac{D_{ii}}{D}}$$

może być napisany pod postacią:

$$m_{\text{poprz}} = m_0 d \sqrt{\frac{i(i+1)^2(i+2)(n-i+1)(n-i+2)^2(n-i+3) - (i-1)i^2(i+1)(n-i)(n-i+1)^2(n-i+2)}{12(n+1) \cdot (n+2)^2(n+3)}}$$

Proste przekształcenia algebraiczne pozwalają doprowadzić ten wzór do postaci:

$$m_{poprz} = m_0 d \sqrt{\frac{i(n+1-i)(n+2-i)(i+1)}{6(n+1)(n+2)(n+3)} [(2i+1)n - (2i^2 - 2i - 3)]},$$

pod którą podaliśmy go na początku artykułu, uważając tę postać za nieco wygodniejszą w rachunku ²⁾.

Po ukończeniu dowodów warto podkreślić, że rozwiązanie zagadnienia w oparciu o pojęcia wyznacznikowe jest tu bardzo istotne. Właśnie bowiem wzory wyznacznikowe wyrażają niewiadome układu równań liniowych pod postacią zwykłych ułamków, pozwalającą stwierdzić, że wyrazy podpierwiastkowe we wzorach na błędy średnie są tutaj stosunkami wielomianów zmiennych n i i .

7. Wyznamy jeszcze maksymalne wartości, jakie przybierać będą błędy poprzeczny i podłużny w typowym ciągu poligonowym. Ponieważ będzie to zachodzić dla punktów ciągu jednakowo odległych od punktów nawiązania, znajdziemy poszukiwane maksima podstawiając do wzorów podstawowych:

$$i = \frac{n+1}{2} \text{ dla ciągów o nieparzystej ilości punktów wyznaczanych,}$$

względnie:

$$i = \frac{n}{2} \text{ lub } i = \frac{n}{2} + 1 \text{ dla ciągów o parzystej ilości punktów wyznaczanych.}$$

Otrzymamy:

$$D_{ii} = \frac{i(i+1)(n-i+1)(n-i+2)[(i+1)(i+2)(n-i+2)(n-i+3) - (i-1)i(n-i)(n-i+1)]}{144}.$$

Ponieważ wielomian otrzymany w wyniku zrealizowania działań w nawiasie kwadratowym równy jest:

$$-4i^2n - 8i^2 + 8i + 4n^2i + 12in + 2n^2 + 10n + 12$$

a, jako zmieniający się tożsamościowo na zero dla wartości zmiennej $n = -2$, daje się napisać pod postacią:

$$2(n+2)(2in + n - 2i^2 + 2i + 3),$$

więc otrzymamy: $D_{ii} = \frac{i(i+1)(n-i+1)(n-i+2)(n+2)[(2i+1)n - (2i^2 - 2i - 3)]}{72}$

Stąd, pamiętając że $D = \frac{(n+1)(n+2)(n+2)(n+3)}{12}$, otrzymamy ostatecznie:

$$m_{poprz} = m_0 d \sqrt{\frac{D_{ii}}{D}} = m_0 d \sqrt{\frac{i(i+1)(n+1-i)(n+2-i)}{6(n+1)(n+2)(n+3)} [(2i+1)n - (2i^2 - 2i - 3)]}.$$

²⁾ Szczegóły dotyczące tych przekształceń wyglądają jn.: wynosząc w ułamku wyrażającym wartość wyznacznika D_{ii} wspólne czynniki przed nawias otrzymamy:

a) przy nieparzystej ilości punktów wyznaczanych:

$$m_{\text{poprz maks}_1} = m_0 d \sqrt{\frac{(n+1)(n+3)(n^2+4n+7)}{192(n+2)}} \quad (1,2)_1$$

oraz

$$m_{\text{pod maks}_1} = m_d \sqrt{\frac{n+1}{4}}$$

b) przy parzystej ilości punktów wyznaczanych:

$$m_{\text{poprz maks}_2} = m_0 d \sqrt{\frac{n(n+2)(n+4)(n^2+4n+6)}{192(n+1)(n+3)}} \quad (1,2)_2$$

oraz

$$m_{\text{pod maks}_2} = \sqrt{\frac{n(n+2)}{4(n+1)}}$$

Pierwszy z tych wzorów jest popularnym w literaturze geodezyjnej wzorem na maksymalne wychylenie poprzeczne w obustronnie nawiązanym ciągu poligonowym. W „Handbuch der Vermessungskunde“ Jordana - Eggerta napisano ten wzór pod postacią:

$$q = s \frac{m}{\rho} \sqrt{\frac{n^4 + 2n^2 - 3}{192n}},$$

przy czym przez n oznacza się tam łączną ilość punktów: wyznaczanych i nawiązujących. Symbol n u Jordana odpowiada więc symbolowi $n+2$ naszych oznaczeń. Podstawiając $n+2$ na miejsce n do wzoru Jordana otrzymamy:

$$q = s \frac{m}{\rho} \sqrt{\frac{(n+2)^4 + 2(n+2)^2 - 3}{192(n+2)}}$$

Dla stwierdzenia identyczności liczników wyrażeń podpierwiastkowych we wzorze naszym (1, 2)₁ i Jordana (mianowniki są już identyczne) wystarczy wykonać zasymbolizowane działania. Otrzymamy w obu wypadkach:

$$n^4 + 8n^3 + 26n^2 + 40n + 21.$$

Woleliśmy oznaczyć przez n ilość punktów wyznaczanych ze względu na przyporządkowanie wówczas każdemu z n wskaźników błędu średniego.

8. Posiłkowanie się wzorami wyznaczającymi wartości średnich błędów poprzecznych i podłużnych (1, 2) jak również wzorami wyznaczają-

Tabela wartości średnich błędów: $\frac{\text{poprzedniego}}{\text{podłużnego}}$ i tego punktu w poligonie obustronnie nawiązanym wyznaczającym n punktów.

Kolejność punktu wyznaczanego i

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	$m_0 d$	0,41																				
	m_d	0,71																				
2	$m_0 d$	0,55	0,55																			
	m_d	0,82	0,82																			
3	$m_0 d$	0,63	0,84	0,63																		
	m_d	0,87	1,00	0,87																		
4	$m_0 d$	0,69	1,04	1,04	0,68																	
	m_d	0,89	1,10	1,10	0,89																	
5	$m_0 d$	0,73	1,20	1,36	1,20	0,73																
	m_d	0,91	1,15	1,22	1,15	0,91																
6	$m_0 d$	0,76	1,31	1,62	1,62	1,31	0,76															
	m_d	0,93	1,20	1,31	1,31	1,20	0,93															
7	$m_0 d$	0,79	1,41	1,83	1,97	1,83	1,41	0,79														
	m_d	0,94	1,22	1,37	1,41	1,37	1,22	0,94														
8	$m_0 d$	0,81	1,49	2,00	2,27	2,27	2,00	1,49	0,81													
	m_d	0,94	1,25	1,41	1,49	1,49	1,41	1,25	0,94													
9	$m_0 d$	0,83	1,55	2,14	2,52	2,65	2,52	2,14	1,55	0,83												
	m_d	0,95	1,26	1,45	1,55	1,58	1,55	1,45	1,26	0,95												
10	$m_0 d$	0,84	1,60	2,26	2,74	2,99	2,99	2,74	2,26	1,60	0,84											
	m_d	0,95	1,28	1,48	1,60	1,65	1,65	1,60	1,48	1,28	0,95											
11	$m_0 d$	0,85	1,65	2,37	2,93	3,30	3,40	3,30	2,93	2,37	1,65	0,85										
	m_d	0,96	1,29	1,50	1,63	1,71	1,73	1,71	1,63	1,50	1,29	0,96										
12	$m_0 d$	0,86	1,69	2,46	3,09	3,54	3,77	3,77	3,54	3,09	2,46	1,69	0,86									
	m_d	0,96	1,30	1,52	1,66	1,75	1,80	1,80	1,75	1,66	1,52	1,30	0,96									
13	$m_0 d$	0,87	1,72	2,54	3,24	3,77	4,10	4,21	4,10	3,77	3,24	2,54	1,72	0,87								
	m_d	0,96	1,31	1,54	1,69	1,79	1,85	1,87	1,85	1,79	1,69	1,54	1,31	0,96								
14	$m_0 d$	0,88	1,75	2,61	3,37	3,97	4,39	4,60	4,60	4,39	3,97	3,37	2,61	1,75	0,88							
	m_d	0,97	1,32	1,55	1,71	1,83	1,90	1,93	1,93	1,90	1,83	1,71	1,55	1,32	0,97							
15	$m_0 d$	0,89	1,78	2,67	3,48	4,15	4,66	4,97	5,08	4,97	4,66	4,15	3,48	2,67	1,78	0,89						
	m_d	0,97	1,32	1,56	1,73	1,85	1,94	1,98	2,00	1,98	1,94	1,85	1,73	1,56	1,32	0,97						
16	$m_0 d$	0,89	1,81	2,73	3,58	4,32	4,90	5,30	5,50	5,30	4,90	4,32	3,58	2,73	1,81	0,89						
	m_d	0,97	1,33	1,57	1,75	1,88	1,97	2,03	2,06	2,06	2,03	1,97	1,88	1,75	1,57	1,33	0,97					
17	$m_0 d$	0,90	1,83	2,78	3,68	4,47	5,12	5,60	5,89	5,99	5,89	5,60	5,12	4,47	3,68	2,78	1,83	0,90				
	m_d	0,97	1,33	1,58	1,76	1,90	2,00	2,07	2,11	2,12	2,11	2,07	2,00	1,90	1,76	1,58	1,33	0,97				
18	$m_0 d$	0,90	1,85	2,82	3,76	4,60	5,32	5,87	6,25	6,45	6,45	6,25	5,87	5,32	4,60	3,76	2,82	1,85	0,90			
	m_d	0,97	1,34	1,59	1,78	1,92	2,03	2,10	2,15	2,18	2,18	2,15	2,10	2,03	1,92	1,78	1,59	1,34	0,97			
19	$m_0 d$	0,91	1,87	2,87	3,84	4,73	5,50	6,12	6,58	6,87	6,96	6,87	6,58	6,12	5,50	4,73	3,84	2,87	1,87	0,91		
	m_d	0,97	1,34	1,60	1,79	1,94	2,05	2,13	2,19	2,22	2,24	2,22	2,19	2,13	2,05	1,94	1,79	1,60	1,34	0,97		
20	$m_0 d$	0,91	1,88	2,90	3,91	4,84	5,67	6,36	6,89	7,25	7,44	7,44	7,25	6,89	6,36	5,67	4,84	3,91	2,90	1,88	0,91	
	m_d	0,98	1,35	1,60	1,80	1,95	2,07	2,16	2,23	2,27	2,29	2,29	2,27	2,23	2,16	2,07	1,95	1,80	1,60	1,35	0,98	

Przykład

Z jakimi błędami średnimi wyznaczone będą punkty poligonu typowego określającego położenie pięciu punktów, jeżeli długości boków poligonu wynoszą po ca 200 metrów, błąd średni pomiaru kąta równy jest 30'' a błąd średni pomiaru boku 0,05 metra.

Mnożąc $m_0 d = (30''/Q) \cdot 200 = 0,029$ oraz $m_d = 0,05$ przez czynniki z tablicy dla $n=5$ $i=1, 2, 3, 4, 5$ równe odpowiednio: 0,73 1,20 1,36 1,20 0,73

0,91 1,15 1,22 1,15 0,91

znajdziemy średnie błędy poprzeczne i średnie błędy podłużne punktów równe

kolejno: poprzeczne... 0,021 0,035 0,039 0,035 0,021

podłużne... 0,046 0,058 0,061 0,058 0,046

Stąd błędy wyznaczenia punktów $\sqrt{m_{poprz}^2 + m_{podl}^2}$ wyniosą kolejno:

$\pm 0,05 \pm 0,07 \pm 0,07 \pm 0,07 \pm 0,05$

cymi maksymalne wartości błędów poprzecznych i podłużnych $(1, 2)_1$, $(1, 2)_2$ na drodze bezpośredniej realizacji tych wzorów rachunkowo byłoby dość kłopotliwe.

Z tego względu, jak również dla ułatwienia wglądu w charakter zmienności błędów, zestawiliśmy tabelkę funkcyjną podającą wartości błędów średnich poprzecznego i podłużnego dla wszystkich punktów w poligonach wyznaczających od jednego do dwudziestu punktów. Według argumentu n (kolumna nagłówkowa) oraz argumentu i (wiersz nagłówkowy) odnajdujemy w tabelce liczbowe wartości czynników, przez które należy mnożyć m_o dla otrzymania średniego błędu poprzecznego (czynnik górny) oraz m_d dla otrzymania średniego błędu podłużnego (czynnik dolny).

Tak więc np. dla trzeciego punktu w poligonie wyznaczającym siedem punktów określimy błędy średnie znajdując w tabelce według argumentów 3 i 7 czynniki 1,83 oraz 1,37 i mnożąc iloczyn radialnej wartości błędu kąтового razy długość boku przez pierwszy czynnik, zaś średni błąd pomiaru boku przez drugi czynnik. Konkretyzując — dla trzeciego punktu w poligonie o 300 metrowych bokach wyznaczającego siedem punktów w razie pomierzenia kątów ze średnim błędem $30''$, tj. w mierze radialnej 0,00014 oraz pomierzenia boków ze średnim błędem 0,10 metra, otrzymamy następujące błędy:

$$\text{śr. błąd poprzeczny: } \pm 0,00014 \cdot 300 \cdot 1,83 = \pm 0,077 \text{ metra}$$

$$\text{śr. błąd podłużny: } \pm 0,10 \cdot 1,37 = \pm 0,137 \text{ metra.}$$

Błąd średni wyznaczenia punktu wyniesie tu więc: $\sqrt{0,08^2 + 0,14^2} = \pm 0,16$ metra i będzie, jak to widać, w dużo większym stopniu spowodowany przez błędy pomiarów liniowych niż przez błędy pomiarów kątowych.

Inny przykład liczbowy umieszczono pod tabelą (str. 37).

9. Obliczymy teraz sumę kwadratów błędów podłużnych wszystkich punktów poligonu:

$$\sum m_{podl}^2$$

oraz sumę kwadratów błędów poprzecznych wszystkich punktów poligonu:

$$\sum m_{poprz}^2,$$

co pozwoli nam następnie ustalić wartość „średniego błędu podłużnego dla całego poligonu“ oraz „średniego błędu poprzecznego dla całego poligonu“. Przez błąd średni dla całego poligonu rozumiemy tu pierwiastek ze średniej arytmetycznej kwadratów błędów wszystkich punktów tego

poligonu. Będzie więc wyraźnie oznaczając przez $M_{podł}$ oraz M_{poprz} średni błąd podłużny i średni błąd poprzeczny dla całego poligonu:

$$M_{poprz} = \sqrt{\frac{\sum m_{poprz}^2}{n}} \quad M_{podł} = \sqrt{\frac{\sum m_{podł}^2}{n}}$$

Jednocześnie uzyskamy możliwość określenia, jaki ma zachodzić stosunek między średnim błędem pomiaru kąta oraz średnim błędem względnym pomiaru boku w poligonie wyznaczającym n punktów, aby średni błąd poprzeczny na całym poligonie był taki sam, jak średni błąd podłużny, to znaczy, aby otrzymane w efekcie pomiaru i wyrównania współrzędne nie były bardziej obciążone wpływem błędów pomiaru boków niż kątów — ani odwrotnie.

Korzystając z wzorów podstawowych (1) (2) napiszemy dla poszukiwanych sum kwadratów równania:

$$\sum m_{pod}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_d^2 \cdot \frac{i(n+1-i)}{n+1}$$

$$\sum m_{poprz}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_0^2 \cdot d^2 \cdot \frac{i(i+1)(n+1-i)(n+2-i)}{6(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot [(2i+1)n - (2i^2 - 2i - 3)].$$

Ponieważ zmienną w procesie sumowania jest tu wielkość i (mająca przybierać kolejno wartości liczb szeregu naturalnego 1, 2, 3 n), możemy od razu przepisać ostatnie równania pod postacią:

$$\sum m_{pod}^2 = \frac{m_d^2}{n+1} \cdot W, \text{ gdzie } W = \sum_{i=1}^{i=n} i(n+1-i) \quad (3)$$

$$\sum m_{poprz}^2 = \frac{m_0^2 d^2 \cdot U}{6(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad (4)$$

gdzie $U = \sum_{i=1}^{i=n} i(i+1)(n+1-i)(n+2-i) \cdot [(2i+1)n - (2i^2 - 2i - 3)]$

Zadanie sprowadza się teraz do obliczenia wielkości W i U , które, jak to łatwo *a priori* zauważyć, muszą być wielomianami zmiennej n , przy czym wielkość W będzie wielomianem stopnia trzeciego, wielkość zaś U będzie wielomianem stopnia siódmego. Nadając bowiem w procesie sumowania zmiennej i kolejne wartości liczb szeregu naturalnego:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad (n-2) \quad (n-1) \quad n$$

otrzymamy, w wypadku obliczania wielkości W , n składników drugiego stopnia względem n , w wypadku zaś obliczania wielkości U , otrzymamy

n składników szóstego stopnia względem n . Ponieważ zaś ilość składników wynosi n , odnośne wielomiany nie mogą być stopnia wyższego ponad $2+1=3$ w pierwszym wypadku ani też stopnia wyższego ponad $6+1=7$ w drugim wypadku.

Ponieważ wielomian trzeciego stopnia wyznaczają cztery parametry, wielomian zaś siódmego stopnia osiem parametrów, w zasadzie do rozwiązania zagadnienia wystarczy znajomość czterech wartości W — niech będą to wartości

$$W(1) \quad W(2) \quad W(3) \quad W(4)$$

odpowiadające wartościom zmiennej n równym odpowiednio:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

oraz znajomość ośmiu wartości U — niech będą to wartości:

$$U(1) \quad U(2) \quad U(3) \quad U(4) \quad U(5) \quad U(6) \quad U(7) \quad U(8)$$

odpowiadające wartościom zmiennej n równym odpowiednio:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8.$$

Dla kontroli rachunku liczbowego znaleźć lepiej jeszcze wartości wielomianów odpowiadające wartościom zmiennej n równym 5 oraz 9 — niech odpowiednie wartości wielomianów będą: $W(5)$ oraz $U(9)$ — i sprawdzić, czy zachodzą związki:

$$\begin{pmatrix} W(1) \\ W(2) \\ W(3) \\ W(4) \\ W(5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} U(1) \\ U(2) \\ U(3) \\ U(4) \\ U(5) \\ U(6) \\ U(7) \\ U(8) \\ U(9) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 28 \\ -56 \\ 70 \\ -56 \\ 28 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

stwierdzające, że obliczone wartości W względnie U są wartościami wielomianów trzeciego względnie siódmego stopnia.

Obliczenie pięciu wartości wielomianu W odpowiadających wartościom $n=1, 2, 3, 4, 5$ daje:

$$W(1) = \sum_i (n+1-i) = 1(1+1-1) = 1$$

$$W(2) = 1(2+1-1) + 2(2+1-2) = 4$$

$$W(3) = 1(3+1-1) + 2(3+1-2) + 3(3+1-3) = 10$$

$$W(4) = 1(4+1-1) + 2(4+1-2) + 3(4+1-3) + 4(4+1-4) = 20$$

$$W(5) = 1(5+1-1) + 2(5+1-2) + 3(5+1-3) + 4(5+1-4) + \\ + 5(5+1-5) = 35$$

przy czym, jak być powinno w wypadku bezbłędnego rachunku:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \\ 35 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{array} \right\} = 0.$$

Do wyznaczenia wartości współczynników c_i wielomianu:

$$W = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3$$

mamy więc obecnie układ równań liniowych:

$$1 c_0 + 1 c_1 + 1^2 c_2 + 1^3 c_3 = 1$$

$$1 c_0 + 2 c_1 + 2^2 c_2 + 2^3 c_3 = 4$$

$$1 c_0 + 3 c_1 + 3^2 c_2 + 3^3 c_3 = 10$$

$$1 c_0 + 4 c_1 + 4^2 c_2 + 4^3 c_3 = 20$$

to znaczy układ o tabeli współczynnikowej:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{array} \right\} \text{ i kolumnie wyrazów wolnych: } \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \end{array} \right\}$$

Mnożąc krakowian kolumnowy wyrazów wolnych przez odwrotność krakowianu współczynnikowego wyznaczymy krakowian niewiadomych³⁾.

Rachunek daje:

$$\left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} 24 & -26 & 9 & -1 \\ -36 & 57 & -24 & 3 \\ 24 & -42 & 21 & -3 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{array} \right\} \frac{1}{6} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 2/6 \\ 3/6 \\ 1/6 \end{array} \right\}$$

Jest więc: $c_0 = 0$ $c_1 = 2/6$ $c_2 = 3/6$ $c_3 = 1/6$, czyli wielomian W ma postać:

$$W = 2/6 n + 3/6 n^2 + 1/6 n^3 = \frac{n(2 + 3n + n^2)}{6}.$$

³⁾ Rozwiązywanie układu równań liniowych w drodze mnożenia kolumny wyrazów wolnych przez odwrotność krakowianu współczynnikowego (tzw. rozwiązanie nieoznaczone) jest, na ogół biorąc, opłacalne rachunkowo tylko wówczas, gdy można korzystać z gotowych zbiorów odwrotności obliczanych dla tabel pewnego typu. Ma to właśnie miejsce w wypadku krakowianów potęgowych szeregu naturalnego, z którymi mamy do czynienia w naszym zagadnieniu.

Ponieważ jednak $2+3n+n^2=(n+1)(n+2)$, napiszemy ostatecznie:

$$W = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad (5)$$

Przeprowadzenie operacji sumowania potrzebnej do ustalenia wielkości $W = \sum_{i=1}^{i=n} i(n+1-i)$ można nieco prędzej wykonać, wykorzystując wzór na sumę kwadratów pierwszych n liczb naturalnych:

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Mamy mianowicie $W = \sum_{i=1}^{i=n} in + \sum_{i=1}^{i=n} i - \sum_{i=1}^{i=n} i^2$ lub:

$$W = n \sum_1^n i + \sum_1^n i - \sum_1^n i^2 = (n+1) \sum_1^n i - \sum_1^n i^2.$$

Podstawiając $\sum_1^n i = \frac{i+n}{2} n$ (suma wyrazów postępu arytmetycznego)

oraz $\sum_1^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (suma kwadratów jw.) otrzymamy:

$$W = \frac{(n+1)(n+1)}{2} n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{3(n+1)(2n+1)}{6} n(n+1)$$

i ostatecznie: $W = \frac{(n+2)n(n+1)}{6}$.

Woleliśmy iść drogą uprzednio obraną jako ogólniejszą.

Obliczając dziewięć wartości wielomianu U odpowiadających wartościom $n=1, 2, \dots, 9$ znajdujemy:

$$U(1) = \sum_{i=1}^{i=n} i(i+1)(n+1-i)(n+2-i) \cdot [(2i+1)n - (2i^2 - 2i - 3)] = \\ = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2(3+3) = 24$$

$$U(2) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (6+3) + 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2(10-1) = 216$$

$$U(3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (9+3) + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (15-1) + 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (21-9) = 1080$$

$$U(4) = 3936 \text{ (szczegóły cyfrowe rachunku pomijamy)}$$

$$U(5) = 11664$$

$$U(6) = 29808$$

$$U(7) = 68112$$

$$U(8) = 142560$$

$U(9)=277992$, przy czym, jak być powinno w wypadku bezbłędnego rachunku:

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 216 \\ 1080 \\ 3936 \\ 11664 \\ 29808 \\ 68112 \\ 142560 \\ 277992 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 28 \\ -56 \\ 70 \\ -56 \\ 28 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Do wyznaczenia wartości c_i współczynników wielomianu U

$$U = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3 + c_4 n^4 + c_5 n^5 + c_6 n^6 + c_7 n^7$$

mamy obecnie układ równań liniowych o tabeli współczynnikowej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 & 279936 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 & 823543 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 & 32768 & 262144 & 2097152 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{i kolumnie} \\ \text{wyrazów} \\ \text{wolnych:} \end{matrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 216 \\ 1080 \\ 3936 \\ 11664 \\ 29808 \\ 68112 \\ 142560 \end{pmatrix}$$

Dla znalezienia zespołu niewiadomych układu wystarczy pomnożyć krakowian wyrazów wolnych przez odwrotność krakowianu współczynnikowego. Ponieważ krakowian współczynnikowy jest tu również krakowianem potęgowym szeregu naturalnego, oszczędzimy sobie znów szczegółowego i żmudnego rachunku przy rozwiązywaniu układu równań, korzystając z gotowej wartości odwrotności krakowianu potęgowego⁴⁾. Po-

⁴⁾ Podajemy poniżej tę odwrotność krakowianu potęgowego:

$$\begin{pmatrix} 40320 & -69264 & 48860 & -18424 & 4025 & -511 & 35 & -1 \\ -141120 & 312984 & -256942 & 107023 & -25060 & 3346 & -238 & 7 \\ 282240 & -673008 & 602532 & -270144 & 67095 & -9387 & 693 & -21 \\ -352800 & 870660 & -815920 & 384755 & -100240 & 14630 & -1120 & 35 \\ 282240 & -710640 & 684740 & -334040 & 90335 & -13685 & 1085 & -35 \\ -141120 & 360024 & -353430 & 176589 & -49140 & 7686 & -630 & 21 \\ 40320 & -103824 & 103292 & -52528 & 14945 & -2401 & 203 & -7 \\ -5040 & 13068 & -13132 & 6769 & -1960 & 322 & -28 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5040}$$

mnożenie krakowianu wyrazów wolnych przez odwrotność krakowianu potęgowego daje kolumnę niewiadomych:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15552 \\ 39312 \\ 38808 \\ 20160 \\ 6048 \\ 1008 \\ 72 \end{pmatrix} \cdot 1/5940$$

Wielomian U może więc być napisany pod postacią:

$$U = \frac{15552n + 39312n^2 + 38808n^3 + 20160n^4 + 6048n^5 + 1008n^6 + 72n^7}{5040}$$

lub, po skróceniu przez 72:

$$U = \frac{216n + 546n^2 + 539n^3 + 280n^4 + 84n^5 + 14n^6 + n^7}{70}$$

Jeżeli zauważymy, że wielomian zamienia się na zero przy wartościach n równych $0 - 1 - 2 - 3 - 4$ i wykonamy dzielenie przez $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)$, otrzymamy w liczniku wielkość $n^2 + 4n + 9$.

Ostatecznie więc wielomianowi U możemy nadać postać:

$$U = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4) \cdot (n^2 + 4n + 9)}{70} \quad (6)$$

Podstawienie znalezionych wartości wielomianów W i U (Wzory 5 i 6) do wzorów (3) i (4) daje następujące wzory na sumę kwadratów błędów poprzecznych i sumę kwadratów błędów podłużnych w poligonie typowym wyznaczającym n punktów:

$$\sum_1^n m_{poprz}^2 = (m_d)^2 \cdot \frac{n(n+4)(n^2+4n+9)}{420} \quad (7)$$

$$\sum_1^n m_{podl}^2 = m_d^2 \cdot \frac{n(n+2)}{6} \quad (8)$$

Dzieląc te wzory przez n znajdziemy przeciętne wartości kwadratu błędu poprzecznego względnie podłużnego. Dzieląc przez n i pierwiastku-

jąc znajdziemy wielkości M_{poprz} oraz $M_{podł}$, które umówiliśmy się nazywać terminami:

Średni błąd
poprzeczny poligonu

$$M_{poprz} = m_0 d \sqrt{\frac{(n+4)(n^2+4n+9)}{420}} \quad (9)$$

Średni błąd
podłużny poligonu

$$M_{podł} = m_d \sqrt{\frac{n+2}{6}} \quad (10)$$

10. Jeżeli teraz założyć, że suma kwadratów błędów poprzecznych w poligonie ma być równa sumie kwadratów błędów podłużnych, lub, co na jedno wychodzi, że średni błąd poprzeczny poligonu ma być równy średniemu błędowi podłużnemu, otrzymamy przyrównując do siebie (7) i (8) względnie (9) i (10) następujący prosty wzór na stosunek średniego błędu pomiaru kąтового do średniego błędu względnego pomiaru liniowego, spełniający założenie równości sumy kwadratów błędów poprzecznych i sumy kwadratów błędów podłużnych.

$$\frac{m_0}{m_d/d} = \sqrt{\frac{70(n+2)}{(n+4)(n^2+4n+9)}} \quad (11)$$

Wzory (9) i (10) względnie (10) i (11) oraz tabelka błędów średnich umieszczona na str. 37 stanowią wystarczający materiał zarówno do racjonalnego projektowania zaleceń instrukcyjnych dla prac poligonalnych, czy też krytyki zaleceń istniejących, jak też i do przeprowadzania analizy przedwstępnej, mającej rozstrzygnąć w konkretnym wypadku, z jaką dokładnością należy mierzyć kąty, a z jaką boki w danym poligonie, aby osiągnąć założony z góry błąd średni w wyznaczaniu współrzędnych.

Poniżej przeprowadzmy dwie analizy, ilustrujące posiłkowanie się wzorami i tabelką błędów średnich.

Przykład 1.

Przewiduje się zakładanie ciągów typowych, wyznaczających przeciętnie po 10 punktów przy długościach boków rzędu 500 metrów. Jakie mają być dokładności pomiarów kątowych i liniowych, aby średni błąd położenia punktu w poligonie wynosił $\pm 0,05$ metra.

Ponieważ zakładamy równość średniego błędu poprzecznego i podłużnego, każdy z nich wyniesie ma: $0,05 : \sqrt{2} = 0,0354$ metra $= M_{poprz} = M_{podł}$

Podstawiając to do wzorów (9) i (10) znajdziemy:

$$0,0354 = 500 m_0 \sqrt{\frac{14 \cdot 149}{420}} = 500 m_0 \sqrt{4,966..} = 1114 m_0$$

Stąd $m_0 = 0,0354 : 1114 = 0,0000318$ lub w sekundach $m_0'' = \pm 6,6''$.

Dalej:

$$0,0354 = m_d \sqrt{\frac{12}{6}} = 1,414 m_d, \text{ skąd } m_d = \pm 0,0250 \text{ metra.}$$

Wprowadzając pożyteczne pojęcie błędu względnego otrzymalibyśmy:

$$\frac{m_d}{d} = 0,00005 = \frac{1}{20\,000}.$$

Skontrolujmy jeszcze rachunek, sprawdzając, czy stosunek błędów:

$$m_0 : m_d/d = \frac{0,0000318}{0,00005} = 0,636$$

spełnia równanie (11). Mamy:

$$\sqrt{\frac{70 \cdot 12}{14 \cdot 149}} = \sqrt{0,4027} = 0,635$$

jak i być powinno.

Wyznamy jeszcze błędy średnie poszczególnych punktów w ciągu. Mnożąc odszukane w tabelce na str. 37 (według argumentów 10 i 1, 2, ..., 10) szeregi:

0,84 1,60 2,26 2,74 2,99 2,99 2,74 2,26 1,60 0,84 przez $m_0 d = 0,0159$

0,95 1,28 1,48 1,60 1,65 1,65 1,60 1,48 1,28 0,95 przez $m_d = 0,0250$

znajdziemy błędy poprzeczne i błędy podłużne kolejnych punktów równe:

0,013 0,025 0,036 0,044 0,048 0,048 0,044 0,036 0,025 0,013

0,024 0,032 0,037 0,040 0,041 0,041 0,040 0,037 0,032 0,024 ,

obliczone stąd błędy średnie wyznaczenia punktów równe: $\sqrt{m^2_{poprz} + m^2_{podl}}$ wynoszą kolejno:

0,027 0,041 0,052 0,059 0,063 0,063 0,059 0,052 0,041 0,027

lub, po zaokrągleniu i zaopatrzeniu w podwójny znak, opuszczamy w rachunku:

$\pm 0,03 \pm 0,04 \pm 0,05 \pm 0,06 \pm 0,06 \pm 0,06 \pm 0,06 \pm 0,05 \pm 0,04 \pm 0,03$

Błąd średni dla wszystkich punktów ciągu $= \sqrt{0,1(0,027^2 + 0,041^2 + \dots)}$
wyniesie, zgodnie z założeniem, $\pm 0,05$.

Dokładność wyznaczenia punktów nie ustępuje dokładności dobrej sieci triangulacyjnej lokalnej. Wymaganą dokładność pomiarów kątowych można osiągnąć stosując nowoczesny teodolit poligonalny, np. Wild T 1. Wymaganą dokładność pomiarów liniowych, charakteryzującą się błędem $\pm 2,5$ cm na 500 metrów, w sprzyjającym pomiarom terenie osiągnąć można przez staranny pomiar stumetrową taśmą stalową. W terenie niesprzyjającym należałoby raczej stosować pomiary optyczne wykorzystując największy walor tych pomiarów, tak podkreślany w opisach odnośnych narzędzi: łatwość dostosowania błędu względnego do postawionych założeń na drodze odpowiedniego doboru „prześel“, czyli odcinków, na które podzielono długość podlegającą pomiarowi.

Przykład 2.

Poddamy teraz analizie przepisy dokładnościowe stosowane w prowadzonych u nas pracach z poligonizacji precyzyjnej, której zadaniem jest dostarczanie podkładu geodezyjnego, mającego zastąpić triangulację drugiego i niższych rzędów. Poddamy przy tym analizie przepisy normujące dokładność pracy przy ciągach pierwszej klasy.

Dla uniknięcia nieporozumień nadmieniamy, że przepisy odnoszące się do poligonizacji precyzyjnej uważamy za najbardziej przepracowane i konsekwentne spośród wszystkich obowiązujących u nas i dawniej i obecnie norm dokładnościowych poligonizacji. Poddanie więc analizie tych a nie innych przepisów dokładnościowych nie ma w żadnym razie na celu podważania ich fachowości, a wprost przeciwnie jest stwierdzeniem, że te właśnie przepisy uważamy za najbardziej dojrzałe do analizy naukowej. Skutkiem tej analizy mogłoby się stać pewne, drobne zresztą, znowelizowanie wymienionych przepisów.

W ciągach poligonowych pierwszej klasy, których analizą się zajmujemy, kąty mierzy się z błędem średnim rzędu $5''$, boki zaś z błędem średnim względnym rzędu 1 : 30 000, przy czym długości boków wynoszą przeciętnie 1,2 km, a z reguły nie mogą być krótsze od 0,8 km⁵⁾). Maksymalna długość ciągu wynosi 12 km.

⁵⁾ Podane tu wartości średnich błędów zostały wydedukowane z odnośnych przepisów przy przyjęciu założenia, że za granicę błędu uważa się dwukrotny błąd średni. Czy materiał pomiarowy spełnia postawione założenia — nie jest autorowi wiadome. Nie jest również autorowi znana wielkość błędów średnich, jakimi obciążone są współrzędne punktów nawiazania trygonometrii względnie węzły). Uzyskane w rachunkach błędy średnie oparte są więc na milczącym założeniu bezbłądności punktów oparcia, przyjmowanym zresztą ogólnie w tego typu analizach.

Mamy więc tutaj $m_0 = 0,00000785$ oraz $\frac{m_d}{d} = 0,0000333$, wreszcie $\frac{m_0}{\left(\frac{m_d}{d}\right)} = 0,236$.

W najdłuższym ciągu pierwszej klasy przy zachowaniu średniej długości boku 1,2 km określimy ilość punktów wyznaczanych n z równania:

$$(n+1) 1,2 \text{ km} = 12 \text{ km, tzn. } n = 9.$$

Stosunek błędu kąтового do średniego błędu względnego boku powinien wynosić (w myśl wzoru 11):

$$\sqrt{\frac{70(n+2)}{(n+4) \cdot (n^2+4n+9)}} = \sqrt{\frac{70 \cdot 11}{13 \cdot 126}} = 0,686.$$

Porównując to z liczbą 0,236 stwierdzamy, że kąty mierzone są trzy razy za dokładnie, tj., że średni błąd poprzeczny, obliczony dla całego ciągu, będzie około trzy razy mniejszy (ściślej 2,9) od błędu podłużnego.

Na ciągach krótszych wystąpi to jeszcze wyraźniej. Dla wyznaczenia błędów poszczególnych punktów ciągu o dziewięciu punktach wyznaczanych skorzystamy z tabeli na str. 37 i pomnożymy szereg:

0,83 1,55 2,14 2,52 2,65 2,52 2,14 1,55 0,83 przez $m_0 d = 0,00942$ i szereg
0,95 1,26 1,45 1,55 1,58 1,55 1,45 1,26 0,95 przez $m_d = 0,04000$

otrzymując:

0,008 0,015 0,020 0,024 0,025 0,024 0,020 0,015 0,008 (błędy poprzeczne)

oraz

0,038 0,050 0,058 0,062 0,063 0,062 0,058 0,050 0,038 (błędy podłużne).

Średnie błędy wyznaczenia punktów $\sqrt{m_{poprz}^2 + m_{podl}^2}$ wyniosą kolejno:

0,039 0,052 0,061 0,066 0,068 0,066 0,061 0,052 0,039 lub, po zaokrągleniu:
 $\pm 0,04 \pm 0,05 \pm 0,06 \pm 0,07 \pm 0,07 \pm 0,07 \pm 0,06 \pm 0,05 \pm 0,04$.

Średnie błędy: poprzeczny i podłużny dla całego poligonu wyniosą odpowiednio: $\pm 0,019$ i $\pm 0,054$.

Na ogół biorąc jest widoczne, że ciąg spełnia zadanie zastąpienia triangulacji niższorzędnych. Chcąc podnieść rezultaty dokładnościowe można by zmniejszyć średni błąd pomiaru boku. Zmniejszenie natomiast średniego błędu pomiaru kąta, czy też wyznaczanie pośrodku ciągu azymutu astro-

nomicznego, jako zabiegi zmniejszające błędy poprzeczne — byłyby tu zupełnie bezcelowe.

Nawet bowiem nieosiągalne w praktyce sprowadzenie błędów poprzecznych do wartości zerowych nie wpłynie praktycznie na wielkości błędów wyznaczenia punktu (maksymalny błąd zmalałby tu z 68 mm do 63 mm, co byłoby oczywiście iluzoryczne).

Jeżeli zmniejszenie średniego błędu pomiaru długości nie jest możliwe, względnie nie jest wskazane ze względów ekonomicznych (wzrost kosztów pomiaru), osiągnięcie zaś większej dokładności rezultatów jest pożądane, można to osiągnąć zachowując ten sam błąd względny pomiaru długości, lecz zmniejszając przeciętną długość boku. Ponieważ wydać się to może paradoksalne, podkreślamy specjalnie, że takie podniesienie dokładności na drodze skrócenia przeciętnej długości boku odbyć się może przy zachowaniu tej samej wartości średniego błędu względnego pomiaru boku.

Ze wzorów (9) i (10) wynika bowiem, że, jeżeli przyjmiemy za wartość stałą całkowitą długość ciągu — oznaczmy ją przez D , to znaczy jest $D = d(n+1)$ — będziemy zaś zmniejszać średnią wartość boku d , a więc zwiększać wartość n , wówczas błąd poprzeczny będzie wzrastał, błąd zaś podłużny, w razie zachowania stale tego samego błędu względnego pomiaru boku, będzie malał.

Wprowadzając bowiem do wzorów (9) (10) długość całkowitą ciągu D napisać je możemy pod postacią:

$$M_{\text{poprz}} = m_0 D \sqrt{\frac{(n+4)(n^2+4n+9)}{420(n+1)^2}} \quad (9_1)$$

$$M_{\text{podl}} = \left(\frac{m_d}{d}\right) D \sqrt{\frac{n+2}{6(n+1)^2}}, \quad (10_1)$$

z której widoczne jest, że przy ustaleniu m_0 , $\left(\frac{m_d}{d}\right)$ oraz D zwiększanie n powodować będzie nieograniczony wzrost błędu poprzecznego i nieograniczone zmniejszanie się błędu podłużnego.

Ze wzoru nie należy oczywiście wyciągać daleko idących wniosków praktycznych dotyczących pożyteczności takiego zmniejszania długości boku. Założenie bowiem zachowania dokładności względnej, pomimo zmniejszania się mierzonej długości, daje się praktycznie realizować w pewnym tylko i to nieznacznym zakresie zmienności i wyłącznie przy stosowaniu pewnych metod i narzędzi (podkreślaliśmy już w innym miejscu szerokie możliwości pomiarów optycznych w dziedzinie dostosowywania dokładności pomiarów liniowych do założeń dokładnościowych). Poza tym w miarę zwiększania n nie tylko że błąd poprzeczny szybko wzrasta,

ale jeszcze staje się coraz trudniejsze a wreszcie niemożliwe zachowanie założenia stałości błędu kąтового. Omawiamy tę sprawę nazbyt może szczegółowo. Autor pragnie jednak wykluczyć możliwość stawiania mu zarzutów, że sugeruje on generalnie skracanie długości boków w poligonach dla podniesienia dokładności wyznaczenia położenia punktu, co byłoby oczywiście absurdalne. W pewnych jednak wypadkach i w pewnych granicach skrócenie długości boków w poligonie jako środek na podniesienie dokładności wyznaczania punktów może być celowe i skuteczne.

Zachodzić to będzie wyłącznie wtedy, gdy błąd poprzeczny jest tak mały w porównaniu z błędem podłużnym, że zwiększenie go będzie w efekcie mniej ważne od korzyści, jakie osiągniemy przez zmniejszenie błędu podłużnego wynikające ze skrócenia długości boków. Powróćmy do naszego wypadku, gdzie właśnie możemy jeszcze przez skrócenie długości boków wywołać efekt wzrostu dokładności. Załóżmy więc np., że przeciętna długość boku wyniesie połowę długości założonej uprzednio. Mamy więc obecnie przy zachowaniu długości ciągu 12 km na określenie ilości punktów wyznaczanych równanie:

$$(n + 1) 0,6 \text{ km} = 12 \text{ km}, \text{ skąd } n = 19.$$

Zachowując dokładność pomiaru kąta i względną dokładność pomiaru boku będziemy mieć obecnie:

$$m_0 d = 600 \cdot 0,00000785 = 0,00471$$

$$m_d = 0,0000333 \cdot 600 = 0,020$$

Wynika stąd, że wartości błędu poprzecznego i podłużnego na ciągu (patrz wzory 9 i 10) wyniosą przy obecnych założeniach:

$$M_{poprz} = 0,00471 \sqrt{\frac{23 \cdot 446}{420}} = 0,0233$$

$$M_{podl} = 0,020 \sqrt{\frac{21}{6}} = 0,0374,$$

podczas gdy uprzednie ich wartości były: 0,019 i 0,054.

Widzimy, że w efekcie zmiany błąd poprzeczny wzrośnie o 4 mm, lecz błąd podłużny zmaleje o 17 mm, że zaś błąd poprzeczny jest w naszym wypadku dużo mniejszy od błędu podłużnego, zmiana ta spowoduje wzrost dokładności wyrażający się zmniejszeniem się błędu przeciętnego wyznaczenia punktu na całym ciągu z 0,057 metra do 0,044 metra. Efekt jest nieduży, lecz niewątpliwy.

Rozważania teoretyczne w oparciu o wzory (9₁) (10₁) pozwoliłyby na przewidywanie jeszcze większego wzrostu dokładności wyznaczenia punktów, gdyby dalej skracać długości boków! Nie wydaje się jednak to celowe z przyczyn już omówionych: założenie utrzymania dokładności pomiaru kąta rzędu 5^{cc} przy skróceniu boków poniżej 0,5 km wydaje się trudno osiągalne, gdyż wpływ ekscentryczności celu i ekscentryczności sygnału staje się coraz to większy.

Gdybyśmy chcieli określić, jakie będą błędy wyznaczenia poszczególnych punktów przy przyjęciu rozważanego założenia posługiwania się bokami o przeciętnej długości 0,6 km, należałoby znów posłużyć się tabelą błędów średnich. Nie przerabiamy tu tego rachunku uważając, że poprzednie przykłady dość go wyjaśniły. Odnośny szereg błędów średnich poszczególnych punktów wyniósłby tu:

0,02 0,03 0,03 0,04 0,04 0,05 0,05 0,05 0,06 0,06 0,06 0,05 0,05 0,05 0,04 itd.

Uwagi dotyczące przepisów omawiających konstrukcję ciągów pierwszej klasy, nasuwające się w związku z przeprowadzoną powyżej analizą, można by ostatecznie sformułować jak następuje:

1. Założone przez przepisy błędy średnie pomiarów elementów podstawowych poligonizacji (5^{cc} i 1 : 30 000), przy średniej długości boków 1,2 km, powodować będą obciążenie współrzędnych w dużo większym stopniu błędami pomiarów liniowych niż kątowych. Dla zaradzenia temu można by zmniejszyć średnią długość boku np. do 600 metrów nie zniżając dokładności względnej pomiarów długościowych. Spowoduje to zmniejszenie i średniej i maksymalnej wartości błędu wyznaczenia punktu, ponadto zaś nasyci teren większą ilością wysokowartościowych punktów geodezyjnych.

2. Należałoby rozważyć w oparciu o materiał z terenu, czy celowe jest usztywnianie ciągów poligonizacji precyzyjnej przez obserwacje astronomiczne. Obserwacje te — przy wysokiej dokładności wyznaczenia azymutu — mają wpływ na zmniejszenie błędów poprzecznych w ciągu poligonowym. Błędy poprzeczne jednak, przy stosowanych w myśl przepisów normach dokładnościowych, są wydatnie mniejsze od błędów podłużnych. Zmniejszanie błędów poprzecznych nie będzie więc z reguły mieć tu wpływu praktycznego na wzrost dokładności wyznaczenia punktów w poligonie.

РЕЗЮМЕ

Автор приводит и доказует формулы, выражающие ср. кв. ошибку поперечного и продольного сдвигов i -й точки в двухсторонне привязанном прямолинейном и равностороннем полигоне, определяющим n точек ($i=1, 2, 3 \dots n$).

Таким образом получается общая форма связей, особенный случай которых (максимальные отклонения) рассматривается в геодезической литературе.

Выражение связей в общем виде (формулы 1 и 2) позволяет вычислить суммы квадратов ошибок продольного и поперечного сдвигов полигона для всех его n точек (формулы 7 и 8), определить ср. кв. ошибки поперечного и продольного сдвигов полигона, понимаемые как корень из ср. арифметических соответствующих сумм квадратов (формулы 9 и 10), а также определить условие, которому в полигоне должно отвечать соотношение ср. кв. ошибки измерения угла m_0 к относительной ошибке измерения длины m_d так, что бы суммы квадратов ошибок поперечного и продольного сдвигов всех точек полигона были равны между собой (формула 11).

Выражение формул в общем виде делает возможным быстрое определение ср. кв. ошибок для всех точек полигона. Вычисления облегчается приводимая на стр. 37 функциональная таблица, являющаяся численной иллюстрацией формул (1) и (2).

По аргументам, n и i в ней находятся значения множителей, на которые следует умножить:

1. произведение ср. кв. ошибки измерения угла на длину стороны, что бы получить ошибку поперечного сдвига точки (первый множитель),
2. ср. кв. ошибку измерения стороны, чтобы получить ошибку продольного сдвига точки (второй множитель).

RESUMÉ

L'auteur donne et justifie les formules exprimant l'erreur moyenne latérale et l'erreur moyenne longitudinale d'un point i dans un polygone rectiligne et équilatéral qui détermine n points ($i=1, 2, 3, \dots, n$).

C'est donc une forme générale, dont le cas particulier (les écarts maximaux) est traité dans les publications géodésiques. L'expression des relations sous une forme générale (formule 1 et 2) permet de calculer la somme des carrés des erreurs transversales ainsi que la somme des carrés des erreurs longitudinales pour tous les points du polygone (formules 7 et 8). Grâce à ces formules on peut trouver l'erreur moyenne transversale et l'erreur moyenne longitudinale définies comme racines des moyennes ordinaires des sommes des carrés respectifs (formules 9 et 10). Ces formules permettent aussi de trouver la condition à laquelle doit être soumise dans le polygone, la relation entre l'erreur moyenne de la mesure de l'angle m_0 et l'erreur moyenne relative de la mesure de la longueur m_d de la manière à ce que la somme des carrés des erreurs transversales de tous les points du polygone soit égale à la somme des erreurs longitudinales de tous les points du polygone (formule 11).

L'expression des formules sous forme générale permet en outre de déterminer rapidement les erreurs moyennes de tous les points du polygone. Les calculs sont facilités par une table des valeurs de fonction; la table qui se trouve à la page 37 est une illustration numérique des formules (1) et (2).

Les valeurs d'entrée sont les arguments n et les valeurs numériques des facteurs par lesquels il faut multiplier soit

1. le produit de l'erreur moyenne de la mesure de l'angle par la longueur du côté, lorsqu'on veut obtenir l'erreur transversale du point (le premier facteur),
2. soit l'erreur moyenne de la mesure du côté lorsqu'on veut avoir l'erreur longitudinale du point (le second facteur).

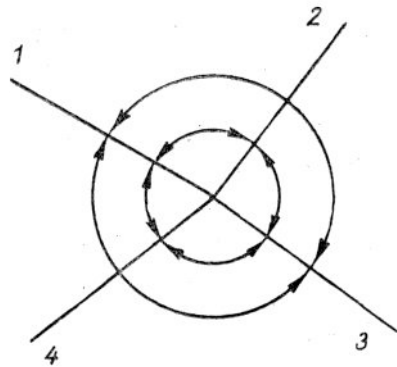
Bronisław Dzikiewicz

Uwagi dotyczące obserwacji metodą kątową w sieciach wypełniających

Istota metody kątowej, w odróżnieniu od metody kierunkowej, polega na obserwowaniu na stanowisku wszystkich poszczególnych kątów utworzonych przez sąsiednie pary kierunków.

Metoda ta ma duże zalety podobnie jak metoda Schreibera. Obserwujemy w niej poszczególne kąty w najodpowiedniejszych warunkach, ponadto można tak obserwować, aby wagi poszczególnych kątów na poszczególnych stacjach były jednakowe. Dużą zaletą tej metody jest również możliwość obserwowania wszystkich kątów w jednakowej ilości poczetów (serii). Również zaletą tej metody jest jej prostota w przeciwieństwie do skomplikowanego układu przestawień limbusea przy obserwacji metodą Schreibera i sektorową. Jedną z zalet tej metody jak i metody sektorowej jest to, że w wypadku, gdy na stacji jest jeden kierunek zły, jest on tylko związany z kierunkiem lewym i prawym, stąd błąd przypadkowy psuje jedynie dwa kąty, do których wchodzi — w przeciwieństwie do metody Schreibera, w której taki kierunek psuje wyniki pomiaru dla całej stacji.

Poważną wadą tej metody jest to, że posiada tylko jedną kontrolę zamknięcia horyzontu. Np. może zajść taki wypadek, że jeden z kątów został obciążony za dużym błędem dodatnim, a inny takim samym błędem ujemnym, wskutek czego kontrola zamknięcia horyzontu błędów tych nie wykaze. Podobny przypadek może zajść przy zamknięciu trójkąta, w którym jeden z kątów będzie obciążony za dużym błędem dodatnim a drugi ujemnym. Zamknięcie trójkąta będzie w dopuszczalnych granicach, jednak poprawki otrzymane z wyrównania sieci będą niedopuszczalne, dla



Rys. 1

tego metoda ta wymaga bardzo sumiennych i doświadczonych obserwatorów. Żeby zwiększyć ilość kontroli i przez to zwiększyć dokładność obserwacji w sieciach wypełniających, obserwowanych w 6 poczetach Wildem T3, proponuję następującą modyfikację obserwacji na poszczególnych stacjach: obserwować poszczególne kąty bezpośrednio mniejszą ilość razy, za to mierzyć poszczególne pary kątów w ten sposób, żeby wagi kątów były te same co w sieci wypełniającej, tj. równe 6 poczetom. Np. gdy mamy 4 kierunki na stacji w sieci wypełniającej (rys. 1) w tym przypadku obserwujemy kąty (1—2), (2—3), (3—4) i (4—1) w 4 poczetach zamiast w 6 poczetach, prócz tego obserwujemy kąty (1—3) i (3—1) też w 4 poczetach i otrzymamy wagę dla poszczególnego kąta 6 jak w sieci wypełniającej.

Kąt (1—2) będzie obliczony z bezpośrednio pomierzonego kąta (1—2) oraz z różnicy kąta [(1—3) — (2—3)], czyli:

$$(1-2) = \frac{(1-2) + [(1-3) - (2-3)]}{2}$$

W ten sposób obliczamy następne kąty (2—3), (3—4) i (4—1). Przy czym mamy następujące kontrole:

- I. Zamknięcie horyzontu z poszczególnych kątów,
- II. Zamknięcie horyzontu z pary kątów,
- III. Kontrola sumy poszczególnych kątów w parach.

Jak z tego wynika, mamy trzy kontrole, na podstawie których możemy już wywnioskować o dokładności obserwacji, co jest niemożliwe mając tylko jedną kontrolę zamknięcia horyzontu. Kontrolę zamknięcia horyzontu przyjmuję jak w sieciach wypełniających $3^{cc} \sqrt{n}$, gdzie n — ilość kierunków, suma zaś kątów w poszczególnych parach nie powinna być większ od 3^{cc} ,

$$\text{tj. } [(1-2) + (2-3)] - (1-3) \leq 3^{cc}.$$

W wypadkach nieparzystej ilości kierunków rozbijamy kierunki na poszczególne pary, a z ostatnich trzech kierunków robimy nie jedną, a dwie pary. Np. przy 5 kierunkach pary (3—5) i (4—1).

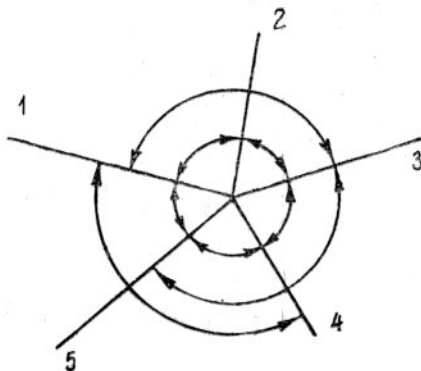
Przy 5 kierunkach na stacji (rys. 2) obserwacje wykonujemy w następujący sposób: obserwujemy poszczególne kąty (1—2), (2—3), (3—4), (4—5) i (5—1) jak również kąty (1—3), (3—5) i (4—1) w 4 poczetach. Kąty te obliczamy w następujący sposób:

$$(1-2) = \frac{(1-2) + [(1-3) - (2-3)]}{2}$$

$$(4-5) = \frac{(4-5) + [(3-5) - (3-4)]}{2}$$

$$(3-4) = \frac{(3-4) + [(3-5) - (4-5)]}{2}$$

$$(5-1) = \frac{(5-1) + [(4-1) - (4-5)]}{2}$$



Rys. 2

Obliczone z wyrównania stacyjnego kąty powinny dać w sumie 360° (400^g). Odchyłkę rozrzucamy proporcjonalnie na wszystkie kąty.

Metoda ta daje bardzo prosty sposób wyrównania kąta na stacji, przy czym wartość kątów bezpośrednio zaobserwowanych należy przyjąć oczywiście z wagą dwukrotnie większą od wartości kąta obliczonego z sumy lub różnicy dwóch kątów.

Średnie błędy będziemy obliczać według niżej podanych wzorów:

średni błąd obserwowanego kierunku
(pojedynczego spostrzeżenia) $m_1 = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{(n-1)(n-2)}}$

średni błąd pomierzonego kąta
(pojedynczego spostrzeżenia) $m_2 = \pm \sqrt{\frac{2[\Delta\Delta]}{(n-1)(n-2)}}$

średni błąd wyrównanego kierunku
(średniej ogólnej) $m_3 = \pm \sqrt{\frac{2[\Delta\Delta]}{n(n-1)(n-2)}}$

średni błąd wyrównanego kąta
(średniej ogólnej) $m_4 = \pm \sqrt{\frac{4[\Delta\Delta]}{n(n-1)(n-2)}}$

gdzie Δ jest różnicą między wartościami ostatecznymi kątów otrzymanych z wyrównania stacyjnego zamknięcia horyzontu i odpowiadającymi im wartościami z poczetów.

PRZYKŁAD

Kąty zaobserwowane	pary kątów zaobserwowanych
$(1-2) = 67^{\circ} 48' 35''.14$	$(1-3) = 123^{\circ} 15' 41''.76$
$(2-3) = 55 27 05.09$	$(3-5) = 168 54 15.12$
$(3-4) = 84 17 23.72$	$(4-1) = 152 26 53.61$
$(4-5) = 84 36 50.93$	
$(5-1) = 67 50 03.16$	

WYRÓWNIANIE STACYJNE

$$(1-2) = 67^{\circ}48' + \frac{2 \times 35''.14 + 36''.67}{3} = 67^{\circ}48' 35''.65$$

$$(2-3) = 55 27 + \frac{2 \times 05''.09 + 06''.62}{3} = 55 27 05.60$$

$$(3-4) = 84 17 + \frac{2 \times 23''.72 + 24''.19}{3} = 84 17 23.88$$

$$(4-5) = 84 36 + \frac{2 \times 50''.93 + 51''.40}{3} = 84 36 51.09$$

$$(5-1) = 67 50 + \frac{2 \times 03''.16 + 02''.68}{3} = 67 50 03.00$$

SPRAWDZENIE

$$(1-2) = 67^{\circ}48' 35''.65$$

$$(2-3) = 55 27 05.60$$

$$(1-3) = 123 15 41.25$$

$$(3-4) = 84^{\circ}17' 23''.88$$

$$(4-5) = 84 36 51.09$$

$$(3-5) = 168 54 14.97$$

$$(1-2) = 67^{\circ}48' 35''.65$$

$$(2-3) = 55 27 05.60$$

$$(3-4) = 84 17 23.88$$

$$(4-5) = 84 36 51.09$$

$$(5-1) = 67 50 03.00$$

$$\Sigma = 359 59 59.22$$

$$(4-5) = 84^{\circ}36' 51''.09$$

$$(5-1) = 67 50 03.00$$

$$(4-1) = 152^{\circ}26' 54''.09$$

Wartość 0.78 otrzymaną z zamknięcia horyzontu rozrzucamy na 5 kątów po 0'',16 i otrzymamy ostateczne wartości kątów:

$$(1-2) = 67^{\circ}48' 35''.65 + 0''.16 = 67^{\circ}48' 35''.81$$

$$(2-3) = 55 27 05.60 + 0.16 = 55 27 05.76$$

$$(3-4) = 84 17 23.88 + 0.16 = 84 17 24.04$$

$$(4-5) = 84 36 51.09 + 0.16 = 84 36 51.25$$

$$(5-1) = 67 50 03.00 + 0.16 = 67 50 03.16$$

$$\text{Razem} = 360^{\circ}00'00''.02$$

РЕЗЮМЕ

При методе наблюдения углов имеется только единственный контроль — замыкание горизонта. С целью увеличения количества контролей и тем самым увеличения точности наблюдений предлагается наблюдать отдельные углы 4-мя приемами, вместо 6-и, с применением теодолита Т-3, но с обязательным наблюдением пары углов тоже 4-мя приемами.

При таком методе наблюдения получается вместо одного — три контроля.

Нпр. при 4 направлениях следует наблюдать углы: 1—2, 2—3, 3—4, 4—1, а так же пары углов: 1—3, 3—1.

RÉSUMÉ

Dans la méthode angulaire nous avons uniquement un contrôle de fermeture de l'horizon. Pour augmenter le nombre des contrôles et par cela même augmenter la précision de l'observation, on propose d'observer avec le théodolite T3 des angles particuliers, non pas en 6 séries, mais en 4 séries et d'observer en plus les paires des angles adjacents, pareillement en 4 séries.

En faisant les observations de la sorte nous obtenons 3 contrôles au lieu de 1. Par exemple dans le cas de 4 directions nous observons les angles 1—2, 2—3, 3—4, 4—1 et les paires d'angles 1—3, 3—1.

Ludwik Winiewicz

Rozwój i stan współczesny fotogrametrii w ZSRR

Zwycięska Rewolucja Październikowa dała potężny impuls do rozwoju sił wytwórczych socjalistycznego państwa.

Likwidacja wiekowego zacofania gospodarczego Rosji carskiej wymagała głębokiej analizy bogactw naturalnych kraju i gruntownego opracowania zagadnienia rozmieszczenia sił wytwórczych.

Toteż wielki twórca państwa socjalistycznego Lenin przywiązywał ogromne znaczenie do mapy, jako podstawy przy rozwiązywaniu gigantycznych zadań planów gospodarczych. Już nazajutrz po zwycięstwie Rewolucji Lenin podpisał dekret (15 marca 1919) o organizacji państwowej służby geodezyjnej, mającej na celu wykonanie zdjęcia topograficznego Kraju Rad:

„Dla zbadania terytorium RSFRR w sensie topograficznym w celu podniesienia i rozwoju sił wytwórczych kraju, ekonomii sił technicznych środków przewozowych i czasu... organizuje się Wyższy Zarząd Geodezji”.

Od tego czasu datuje się wspaniały rozwój geodezji w ZSRR, która na przestrzeni 35 lat potrafiła trafnie rozwiązać najbardziej skomplikowane zagadnienia związane z pomiarami i zdjęciami topograficznymi na obszarze jednej szóstej części ziemi.

Opracowanie topograficznych map dla takiego obszernego terytorium było możliwe tylko dzięki zastosowaniu nowoczesnych metod topograficznego zdjęcia, opartych na wykorzystaniu geometrycznych właściwości zdjęć fotograficznych, wykonanych z samolotu. Fotografowanie powierzchni ziemi z samolotu jeszcze podczas pierwszej wojny światowej dało świetne rezultaty przy unowocześnianiu map wojskowych, niemniej jednak zacofanie techniczne Rosji carskiej, brak materialnej bazy w postaci przemysłu awiacyjnego, optyczno-mechanicznego i chemicznego, konserwatyzm czynników państwowych nie pozwoliły rozwinąć się nowej metodzie.

Dopiero około 1924 r. przystąpiono do organizacji pierwszych komórek mających na celu ustalenie metodyki wykonywania zdjęć lotniczych i ich opracowania dla zaspokojenia wymagań rozmaitych organizacji gospodarczych.

Równocześnie trwały prace związane ze stworzeniem rodzimej bazy optyczno-mechanicznej i nowych fotogrametrycznych przyrządów, a również przygotowanie kadry specjalistów.

W tym okresie w wyniku fotogrametrycznego opracowania zdjęć lotniczych otrzymywano fotoplany na podstawie pełnego polowego dowiązania zdjęć, tj. na podstawie 4-ch punktów o znanych współrzędnych x i y na każde zdjęcie lotnicze.

W latach 1928—1930 prof. Aleksapolski opracował metodę wykonania topograficznych map sposobem kombinowanego aerofototopograficznego zdjęcia, przy którym warstwicę rysuje się na fotoplane sposobami zdjęcia stolikowego.

Prace prof. Drobyszewa pozwoliły w 1939 r. zastąpić w znacznej mierze polowe dowiązanie zdjęć lotniczych kameralnymi procesami tzw. fototriangulacji sytuacyjnej.

W tym wypadku punkty zagęszczenia otrzymuje się w wyniku rozwinięcia pojedynczych szeregów rozet na podstawie 2—4 punktów osnowy polowej.

Wzrastające z dnia na dzień potrzeby gospodarki narodowej zmuszały fotografów radzieckich do opracowania nowych bardziej doskonałych metod wykonania topograficznych map, przy minimalnej osnowie polowej.

W 1925 r. na bazie stereoplanigrafów powstała metoda uniwersalna opracowania zdjęć topograficznego; prace prof. Skiridowa odnośnie analitycznego rozwiązania zadania wzajemnej orientacji zdjęć lotniczych i przestrzennej aerofototriangulacji pozwoliły w ZSRR wcześniej aniżeli w innych państwach rozwinąć praktyczne prace w dziedzinie przestrzennej fototriangulacji.

Pierwszy pięcioletni plan rozwoju gospodarki narodowej (1928—1932), plan budowy podstaw socjalistycznej ekonomiki, postawił przed geodezyjną służbą nowe zadania w kierunku stworzenia topograficznych map w dużej skali. W związku z tymi zadaniami zaczęły się intensywne badania fotogrametryczne w kierunku stworzenia oryginalnej metody aerofotogrametrycznego zdjęcia, która pozwoliłaby opracować topograficzne mapy w szybkim czasie, tanio i w oparciu o proste przyrządy fotogrametryczne nadające się do pracy nawet w warunkach wypraw.

Od tego czasu datuje się organizacja Naukowo-Badawczego Instytutu Aerofotogrametrii, w którym opracowywano metodyczne zagadnienia i konstruowano nowe przyrządy. Powstałe przy tej okazji zagadnienie uproszczenia procesu wykonania zdjęć lotniczych przez zastosowanie odpowiednich kamer lotniczych zostało pomyślnie rozwiązane przez optyków radzieckich. W 1931 r. prof. Rusinow skonstruował szerokokątny obiektyw „Liar“ ($2\beta=100^\circ$), co pozwoliło zastąpić wieloobiektywowe kamery lotnicze jednoobiektywowymi, obejmującymi znaczne obszary i uproszczającymi fotogrametryczne procesy. Warto podkreślić, że podobne prace miały miejsce i w krajach kapitalistycznych, jednak w USA doszli do wniosku, że pomyślnie zakończenie tych prac może nastąpić dopiero po wielu latach. W Niemczech dopiero po upływie sześciu lat Zeiss wypuścił szerokokątny obiektyw jednak z mniejszym kątem ($2\beta=93^\circ$).

W następnym okresie czasu prof. Rusinow udoskonalił osiągnięte wyniki i skonstruował obiektyw „Russar“, który przy ogniskowej $f=7$ cm pokrywa zdjęcie formatu 18×18 cm. Przy kącie $2\beta=122^\circ$ za pomocą tego obiektywu można sfotografować obszar 100 km² z wysokości 4000 m.

Drugi pięcioletni plan rozwoju gospodarki narodowej (1933—1937) jeszcze bardziej niż pierwszy zmienił geografii Związku Radzieckiego i postawił przed służbą geodezyjną zadanie pokrycia całego kraju mapami topograficznymi. O rozmachu tych prac świadczy wyliczenie specjalistów, że w warunkach carskiego reżimu trzeba by było na wykonanie tego zadania 150 lat. Zrozumiałe jest, że ustrój radziecki nie mógł się pogodzić z takim tempem i zażądał od służby geodezyjnej rozwiązania zadania w krótkim czasie przy minimalnych kosztach.

Zaczęte jeszcze w 1931 r. badania prof. Drobyszewa nad konstrukcją stereometru zostały uwieńczone powodzeniem. W 1934 r. prof. Drobyszew skonstruował stereometr, który pozwala otrzymać ze zdjęć lotniczych z małymi kątami nachylenia wyniki odpowiadające zdjęciom lotniczym pionowym.

Stereometr stworzył pełną podstawę do opracowania oryginalnej radzieckiej stereofotogrametrycznej metody, znanej pod nazwą metody zróżnicowanych procesów.

W 1936 r. w Centralnym Naukowo-badawczym Instytucie Geodezji, Aerofotogrametrii i Kartografii, prof. Korszyn opracował teorię zróżnicowanej metody, która znalazła szerokie zastosowanie przy kartowaniu w skali $1:50\,000$. W wyniku badań doktora Romanowskiego nad zdjęciem aerofototopograficznym w skali $1:100\,000$

został oddany do użytku tzw. „sposób prostej linii“, pozwalający zagęszczać sieć punktów wysokościowych przy użyciu zwykłego stereoskopu pomiarowego.

Na bazie teoretycznych prac znanego fotogrametry radzieckiego Żukowa został opracowany w 1938—1939 latach sposób przestrzennej fototriangulacji, zamieniający skomplikowane przyrządy stereokomparatorem.

W związku ze świetnymi wynikami w dziedzinie pokrycia kraju mapą topograficzną w skali 1 : 100 000, od 1940 r. datują się teoretyczne i praktyczne prace nad wykonaniem map w skali 1:25 000 i 1:5 000.

Wojna z hitlerowskimi Niemcami nie przerwała prac fotogrametrów radzieckich; warunki wojny wymagały opracowania nowych uproszczonych sposobów kartowania i specjaliści radzieccy siły swe poświęcili dziełu pomocy frontowi. Równoległe z tym, radziecka fotogrametryczna szkoła przygotowała kadry wybitnych specjalistów dla prac po zakończeniu wojny i prowadziła teoretyczne badania. W 1942 r. wyszła w druku praca prof. Urmajewa o teorii fotogrametrii w ujęciu wektorowym, a w 1943 r. ukazała się publikacja prof. Korszyna o teorii opracowania zdjęć przy skażonym pęku promieni.

Po zakończeniu wojny prof. Romanowski i prof. Korszyn oddali do użytku metodę nieskażonego modelu, znacznie rozszerzającą zasięg fotogrametrii w dziedzinie prac topograficznych.

W dziedzinie optyki osiągnięto dzięki pracom prof. Rusinowa doskonałe wyniki w konstrukcji hiperszerokokątnego obiektywu. Radziecki przemysł opanował konstrukcję stereoplanigrafów i stworzył wieloprojektorowy szerokokokątny aeroprojektor multipleks, co pozwoliło szeroko zastosować uniwersalną metodę aerofototopograficznego zdjęcia.

Powojenny pięcioletni plan odbudowy i rozwoju gospodarki narodowej dał nowy impuls do rozwoju fotogrametrii. Powstało zagadnienie pokrycia całego terytorium ZSRR topograficzną mapą w skali 1 : 25 000 i niektórych obszarów mapami w skali od 1:10 000 do 1:2 000.

Zadanie to rozwiązują pomyślnie radzieccy fotogrametry przy użyciu najbardziej doskonałej metody stereofotogrametrii.

Wielki Stalinowski plan przekształcenia przyrody stawia wysokie wymagania radzieckiej geodezji. Nie ulega wątpliwości, że radziecka szkoła fotogrametryczna upora się z tymi trudnymi zadaniami w terminie. Rękomią tego jest fakt, że radziecka aerofotogrametria osiągnęła świetne wyniki w dziedzinie teorii i praktyki i wyprzedza znacznie osiągnięcia krajów kapitalistycznych.

Przy opracowaniu topograficznych map w ZSRR stosuje się zasadniczo dwie metody:

1. kombinowaną metodę aerofotogrametrii i
2. stereofotogrametryczną metodę.

Przy metodzie kombinowanej zdjęcie topograficzne wykonuje się albo na fotoplanach, albo na oddzielnych zdjęciach lotniczych, w zależności od charakteru ukształtowania terenu.

W tych wypadkach gdy błędy, ze względu na deniwelację dla punktów znajdujących się w obrębie roboczej powierzchni zdjęcia, nie przekraczają 0,4 mm, zestawia się fotoplany. Podstawą do przetworzenia zdjęć są punkty osnowy polowej, które służą do fotogrametrycznego zagęszczenia sieci fotopunktów.

Fotogrametryczne zagęszczenie sieci sytuacyjnej wykonuje się za pomocą graficznej fototriangulacji, sposobem fotopoligonometrii albo też za pomocą aeroprojektora multipleks.

Do ostatniego czasu stosowano przy zagęszczeniu osnowy geodezyjnej głównie fototriangulację. Z przejściem jednak do opracowania map w dużych skalach

i w związku z rozwojem stereofotogrametrycznych metod, coraz częściej stosuje się przyrządy uniwersalnego typu oraz metodę fotopoligonometrii, co daje dodatkowe oszczędności w osnowie polowej i wydatne zwiększenie dokładności wyników.

Graficzną fototriangulację stosuje się w zasadzie dla terenu dostatecznie równinnego i bogatego sytuacyjnie, gdy błędy w kierunkach są bliskie ± 2 minuty. W danym wypadku przy ilości baz, w szeregu triangulacji, równej 8 średni błąd określenia współrzędnych może osiągnąć wartość 0,45 mm.

Fotopoligonometria zwiększa dokładność określenia współrzędnych do 0,30 mm, a dokładność zagęszczenia osnowy sytuacyjnej za pomocą multipleksu wynosi 0,94 mm w zastosowaniu do szerokokątnej kamery.

Fototriangulacją za pomocą triangulatora radialnego nie znalazła szerszego zastosowania ze względu na nieznaczne tylko zwiększenie dokładności pracy w porównaniu z triangulacją graficzną i znaczny zakres fotogrametrycznych procesów.

Wymienione sposoby zagęszczenia osnowy polowej stosuje się w zależności od wymagań, jakie stawia się mapie, i od charakteru terenu. Przy opracowaniu topograficznych map należy stosować głównie ciągi poligonowe, ponieważ przy nieznacznym zwiększeniu zakresu prac fotogrametrycznych pozwolą one otrzymać współrzędne punktów zagęszczenia z potrzebną dokładnością.

W wypadku opracowania map w średniej skali można stosować graficzną fototriangulację dla terenu równinnego, kiedy można się ograniczyć wyborem wierzchołka fototriangulacji w punkcie głównym zdjęcia.

Przy opracowaniu mapy w dużej skali należy stosować w myśl instrukcji radzieckich przyrządy uniwersalnego typu w rodzaju stereoplanigrafu i multipleksu, a również i fotopoligonometrię, przy czym celowe jest stosowanie stereoplanigrafu przy zagęszczeniu osnowy polowej dla opracowania map w skali 1:2 000 — 1:5 000.

Stereofotogrametryczna metoda opracowania topograficznej mapy dzieli się na dwa warianty: 1. metodę zróżnicowaną,
2. metodę uniwersalną.

Metoda zróżnicowana opracowana ostatecznie przez zespół uczonych i fotogrametrów praktyków pozwala otrzymywać na podstawie zdjęć lotniczych sytuację i rzeźbę terenu.

Jak już wyżej wspomniano, podstawą do zastosowania metody zróżnicowanej jest stereometr konstrukcji prof. Drobyszewa. Przyrząd ten jest swego rodzaju stereokomparatorem zaopatrzonym w urządzenia korekcyjne, które wprowadzają automatycznie poprawki do pomierzonych różnic paralaks podłużnych.

Dzięki temu pomierzone różnice paralaks podłużnych są wolne od skażeń, wynikających z kąta nachylenia zdjęć lotniczych i różnic wysokości lotu. Pomierzone różnice paralaks pozwalają łatwo obliczyć wysokości poszczególnych punktów i narysować na zdjęciach warstwie.

Sporządzenie mapy polega na optycznym przetworzeniu zdjęć za pomocą projektorów. W tym celu ze zdjęć z wykreślonymi warstwicami i sytuacją sporządza się diapozytywy, które następnie przerzutowuje się na plansze.

Sytuacje i warstwie przenosi się według stref wysokościowych.

Różnymi sposobami można wykonać zagęszczenie sieci punktów osnowy wysokościowej. Szczególną uwagę zwraca się na zagęszczenie sposobem nieskażonego modelu, który pozwala otrzymać równocześnie trzy współrzędne x , y i z . Sposób nieskażonego modelu nie zależy od charakteru rzeźby terenu i pozwala rozwijać sieci triangulacyjne na znacznej długości.

Tzw. sposób Centralnego Naukowo-badawczego Instytutu Geodezji Aerofotogrametrii i Kartografii może być stosowany z powodzeniem dla terenów z deniwe-

lacjami do trzystu metrów na obszarze jednej stereopary. Sieci triangulacyjne w danym wypadku można rozwijać na znacznej długości — do 12 baz.

Zagęszczenie sieci punktów osnowy wysokościowej sposobem „prostej linii“ stosuje się z powodzeniem w terenach z deniwelacjami nieprzekraczającymi wartości jednej trzydziestej części $\left(\frac{H}{30}\right)$ wysokości fotografowania.

Główną zaletą metody różnicowanej jest możliwość rozdzielenia oddzielnych procesów wykonania mapy między poszczególnymi wykonawcami wąskiej specjalności i zastosowanie stosunkowo prostych i lekkich fotogrametrycznych przyrządów.

Uniwersalna metoda stereofotogrametrycznego opracowania zdjęć lotniczych daje możliwość wykonania topograficznych map w dowolnej skali. W wyniku kameralnego opracowania otrzymuje się graficzny plan terenu w rzucie prostopadłym, niezależnie od rzeźby.

Zastosowanie fotogrametrycznych przyrządów typu stereoplanigrafu i multipleksu znacznie upraszcza wykonanie mapy i wydatnie zmniejsza zakres prac polowych. Przestrzenna aerofototriangulacja na stereoplanigrafie zapewnia dokładność wymaganą od mapy w skali 1 : 25 000. Stereoplanigrafy stosuje się dla opracowania map w skali 1 : 2 000 do 1 : 25 000.

Multipleksy zapewniają dostateczną dokładność przy opracowaniu map w skali 1 : 50 000. W poszczególnych wypadkach multipleksy można stosować przy opracowaniu map w skali 1 : 25 000.

Główną zaletą uniwersalnej metody jest brak zawiłych wyliczeń przy opracowaniu zdjęć lotniczych.

Obecnie w ZSRR przyjęta jest następująca zasada zastosowania poszczególnych aerofotogrametrycznych metod opracowania topograficznych map:

w terenach z nieznacznymi deniwelacjami stosować — metodę kombinowaną,

w terenach falistych i pagórkowatych z deniwelacjami do 300 m — metodę różnicowaną,

w terenach górzystych — metodę uniwersalną.

Szczególną uwagę zwraca się na możliwość kombinacji poszczególnych metod: tak np. przy metodzie kombinowanej istnieje możliwość wykorzystania przyrządów uniwersalnego typu do zagęszczenia sieci osnowy sytuacyjnej, a racjonalna kombinacja metody różnicowanej i uniwersalnej daje dostatecznie dobre wyniki i pozwala znacznie zmniejszyć zakres prac polowych przy zagęszczeniu sieci punktów osnowy wysokościowej.

W dobie obecnej zasadniczym rodzajem prac w ZSRR, związanym z pokryciem kraju topograficznymi mapami, jest opracowanie mapy w skali 1:25 000. Mapy wykonuje się metodami wymienionymi w tym artykule w zależności od rzeźby terenu i posiadanych przyrządów.

Kameralne zagęszczenie osnowy geodezyjnej najwygodniej wykonywać sposobem przestrzennej aerotriangulacji na stereoplanigrafach i sposobem nieskażonego modelu rozwijając szeregi długości do 5 km, gdy szereg opiera się na 4 punktach, i do 9—10 km, gdy szereg opiera się na 5 punktach osnowy.

Dla obszarów górzystych można wykorzystać aeroprojektor multipleks, w tym wypadku jednak długość szeregu aerotriangulacji nie powinna przekraczać trzech baz.

Dla obszarów równinnych może znaleźć zastosowanie sposób „prostej linii“, przy długości ciągu nie przekraczającej 3,5 km.

Fotogrametryczne opracowanie zdjęć lotniczych odbywa się przy wykorzystaniu stereometrów konstrukcji prof. Drobyszewa.

Przy opracowaniu mapy dla obszarów górzystych metodą uniwersalną celowe jest zastosowanie stereoplanigrafów i aeroprojektorów multipleks.

Dla ilustracji kosztów, związanych z opracowaniem map topograficznych podajemy niżej tabelę, opracowaną przez radzieckiego uczonego docenta Suchowa dla obszaru 10 000 km² średniej kategorii trudności:

Rodzaj pracy	Metody opracowania mapy			
	Zdjęcie stolikowe	Kombinowana metoda	Zróżnicowana metoda	Uniwersalna metoda
1. Prace polowe:				
techniko-miesiące	317	187	105	105
robotniko-miesiące	901	722	197	197
2. Wykonanie zdjęć lotniczych:				
techniko-miesiące	—	32	32	32
3. Prace kameralne:				
inżyniero-miesiące	—	—	29	—
techniko-miesiące	—	16	318	218
Razem miesiące	1218	967	681	552

Jeśli wziąć pod uwagę wielkość powierzchni ZSRR, staje się zrozumiałą waga, jaką przykłada się do aerofototopograficznych metod opracowania mapy.

Znaczne zmniejszenie ilości prac polowych i możliwość rozdzielania pracy na poszczególne operacje wykonywane przez oddzielnych specjalistów czynią aerofotogrametryczne metody podstawowymi przy rozwiązywaniu zadań gospodarki narodowej i obronności kraju.

Rozwój nauki niewątpliwie wpłynie na dalsze zmniejszenie zakresu prac polowych. Określenie elementów orientacji zdjęć lotniczych za pomocą automatycznych przyrządów i zastosowanie radaru do celów pomiarowych znacznie powiększy dokładność fotogrametrycznego opracowania zdjęć i zmniejszy zakres osnowy geodezyjnej.

Metodyka wykorzystania danych statoskopu, opracowana przez kandydata nauk technicznych Kraszennikowa, znalazła już obecnie praktyczne zastosowanie przy aerotriangulacji przestrzennej.

Badania naukowe idą obecnie w kierunku dalszej automatyzacji określenia elementów orientacji zewnętrznej i w kierunku zastosowania fotogrametrii do różnorodnych dziedzin nauki i praktyki.

Ogromne doświadczenie fotogrametrów radzieckich może być śmiało wykorzystane w warunkach Polski Ludowej. Rozmach naszej gospodarki narodowej stawia przed służbą geodezyjną i kartograficzną zaszczytne zadanie pokrycia obszarów naszego kraju wysokowartościowymi mapami szczegółowymi. Zadanie to może być zrealizowane tylko na podstawie naukowej, z zastosowaniem współczesnych metod aerofotogrametrii.

Przed fotogrametrami polskimi stoi zadanie jak najszybszego opracowania metodyki wykonania takich map, przeanalizowania dorobku fotogrametrii radzieckiej i zastosowanie jego wybitnych osiągnięć do potrzeb gospodarki narodowej.

SPIS TREŚCI

	Str.
<i>Edward Warchatowski</i> — Wyznaczenie powierzchni odniesienia dla pomiarów geodezyjnych	5
<i>Stefan Hausbrandt</i> — Wzory na błąd średni dowolnego punktu w poligonie typowym i wnioski dotyczące koordynowania dokładności pomiarów kątowych i liniowych w poligonach typowych	23
<i>Bronisław Dzikiewicz</i> — Uwagi dotyczące obserwacji metodą kątową w sieciach wypełniających	55
<i>Ludwik Winiewicz</i> — Rozwój i stan współczesny fotogrametrii w ZSRR.	60

СОДЕРЖАНИЕ

Э. Вархаловски — Определение поверхности относимости для геодезических измерений	5
С. Хаусбрандт — Формулы ср. кв. ошибки любой точки типового полигона и выводы относительно координирования угловых и линейных измерений в типовых полигонах	23
Б. Дзикевич — Примечания к методу наблюдения углов в заполняющих сетях	55
Л. Виневич — Успехи и современное состояние фотограмметрии в СССР.	60

SOMMAIRE

<i>E. Warchatowski</i> — Détermination de la surface de référence pour les mesures géodésiques	5
<i>S. Hausbrandt</i> — Formules pour l'erreur moyenne d'un point quelconque dans un polygone typique et conclusions concernant la coordination d'exactitude des mesures angulaires et linéaires dans les polygones typiques	23
<i>B. Dzikiewicz</i> — Remarques concernant les observations faites par la méthode angulaire dans les réseaux complémentaires	55
<i>L. Winiewicz</i> — Développement et l'état contemporain de la photogrammétrie en USSR	60



SPIS TREŚCI

	Str.
<i>Edward Warchałowski</i> — Wyznaczenie powierzchni odniesienia dla pomiarów geodezyjnych	5
<i>Stefan Hausbrandt</i> — Wzory na błąd średni dowolnego punktu w poligonie typowym i wnioski dotyczące koordynowania dokładności pomiarów kątowych i liniowych w poligonach typowych	23
<i>Bronisław Dzikiewicz</i> — Uwagi dotyczące obserwacji metodą kątową w sieciach wypełniających	55
<i>Ludwik Winiewicz</i> — Rozwój i stan współczesny fotogrametrii w ZSRR.	60

СОДЕРЖАНИЕ

Э. Варчаловски — Определение поверхности относимости для геодезических измерений	5
С. Хаусбрандт — Формулы ср. кв. ошибки любой точки типового полигона и выводы относительно координирования угловых и линейных измерений в типовых полигонах	23
Б. Дзикевиц — Примечания к методу наблюдения углов в заполняющих сетях	55
Л. Виневич — Успехи и современное состояние фотограмметрии в СССР.	60

SOMMAIRE

<i>E. Warchałowski</i> — Détermination de la surface de référence pour les mesures géodésiques	5
<i>S. Hausbrandt</i> — Formules pour l'erreur moyenne d'un point quelconque dans un polygone typique et conclusions concernant la coordination d'exactitude des mesures angulaires et linéaires dans les polygones typiques	23
<i>B. Dzikiewicz</i> — Remarques concernant les observations faites par la méthode angulaire dans les réseaux complémentaires	55
<i>L. Winiewicz</i> — Développement et l'état contemporain de la photogrammétrie en USSR	60



ERRATA DO ZESZYTU 1, TOMU II „GEODEZJI I KARTOGRAFII”

Str.	wiersz od góry	wiersz od dołu	jest	powinno być
3		15	wytyczał	wytyczył
9	7		$\lambda_i = \lambda_{i-1} + \varrho'' \frac{v_i}{N_i} \sec \varphi_i$	$\lambda_i = \lambda_{i-1} + \varrho'' \frac{v_i}{N_i} \sec \varphi_i$
13		8	$\frac{\partial M}{\partial e^2} = M' \left\{ \frac{3}{2} \frac{\sin^2 \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{1-e^2} \right\}$	$\frac{\partial M}{\partial e^2} = M' \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{1-e^2} \right]$
13		5	$M = M' + M' \frac{\delta a}{a} + M' \left\{ \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{1-e^2} \right\} \delta e^2$	$M = M' + M' \frac{\delta a}{a} + M' \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{1-e^2} \right] \delta e^2$
14	14		v_s	$v_{s'}$
16		9 (we wzorze (11))	$\frac{3^2}{24 a^2}$	$\frac{s_i^2}{24 a^2}$
16		5	$p_i^0 = p_i \left(1 - \frac{H_m}{a \cos \varphi_n} \right)$	$p_i^0 = p_i \left(1 - \frac{H_m}{a \cos \varphi_m} \right)$
21	18		измеряется	измеряются
22		3	avec la grande	avec une grande
22		11	établir de l'équation	établir l'équation
25	2		(str. 23—35)	(str. 25—37)
30	6		$= \frac{(n+1)!}{n!} - n + 1,$	$= \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$
33		6	12—8+28=20	12 —8+28=20
37		3—8	Szczegóły przekształceń podane petitem nad odsyłaczem powinny być umieszczone w odsyłaczu.	
39		11	polignonu	poligону
40		11	(str. 37)	(str. 39)
41	13		$\sum_{i=1}^{i=n}$	$\sum_{i=1}^{i=n}$
43		4	ożna	można
47		15	na str. 37	na str. 39
47		9	przeprowadźmy	przeprowadzamy
48		13	na str. 37	na str. 39
48		3	opuszczamy	opuszczany
49		3	trygonometry względnie węzły)	(trygonometry względnie węzły)

Str.	wiersz od góry	wiersz od dołu	jest	powinno być
50		16	na str. 37	na str. 39
54	6		соответсрвующих	соответствующих
54	7		условне	условие
54	10		попигона	попигона
54	12		стр. 37	стр. 39
56	14		oraz z różnicy kąta	oraz z różnicy kątów
56		9	większ od 3 ^{cc}	większa od 3 ^{cc}
66		1	USSR	URSS
66		2	et l'état contemporain de la photo- grammétrie	et état actuel de la photogrammétrie