

E 3808 II A1904I  
ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
P O L S K I E J A K A D E M I I N A U K

---

t.1

# ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

I

FRANCISZEK SZELAŃGOWSKI

Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie  
współrzędnych prostokątnych

O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy  
nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego

---

W A R S Z A W A

1 9 5 3

# ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI  
I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI  
ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

WITOLD NOWACKI – PRZEWODNICZĄCY

JULIAN BONDER, MICHAŁ BROSZKO

WACŁAW OLSZAK, BOHDAN STEFANOWSKI

STANISŁAW TURSki, WITOLD WIERZBICKI

JERZY NOWIŃSKI – SEKRETARZ NAUKOWY

Adres Redakcji

WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

---

FRANCISZEK SZELAŃGOWSKI

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA PŁASKIEGO TEORII SPRĘŻYSTOŚCI  
W UKŁADZIE WSPÓLRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH

O PEWNYCH SZCZEGÓLNYCH PRZYPADKACH WYTRZYMAŁOŚCI  
TARCZY NIEOGRANICZONEJ Z ODMIENNYM OŚRODKIEM  
ZARYSU ELIPTYCZNEGO

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE

I

WARSZAWA 1953

---

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE



Inw. L. 16965.

**ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (I)**

Copyright 1953 by Państwowe Wydawnictwo Naukowe  
Warszawa (Poland). Printed in Poland.

**All rights reserved**

No part of this book may be translated or reproduced  
in any form, by mimeograph or any other means,  
without permission in writing from the publishers.

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK *Okc. EO. 13/54*

---

Nakład 1000 + 150 egz. Papier druk. sat. 70x100/16, 70 g Arkuszy wydawniczych 0,87. Arkuszy drukarskich 0,75  
Oddano do składania dn. 13.VI.53 r. Druk. ukończono dn. 13.X.53 r. Zam. 130c. 4-B-51690. Cena 4,—

---

## ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA PŁASKIEGO TEORII SPRĘŻYSTOŚCI W UKŁADZIE WSPÓLRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH

W innej pracy mojej<sup>1)</sup> zostały wyprowadzone ogólne wzory określające wartości naprężeń i przynależnych przesunięć w postaci następującej\*):

$$(1) \quad 2X_y + i(X_x - Y_y) = -4iz_1\omega''(z) - 4if''(z),$$

$$(2) \quad X_x + Y_y = 4\omega'(z) + 4\omega'_1(z_1),$$

$$(3) \quad \mu(v + iu) = -iz_1\omega'(z) + i\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\omega_1(z_1) - if'(z).$$

Jako niewiadome występują tutaj w zasadzie tylko dwie funkcje  $\omega'(z)$  i  $f'(z)$ , które mogą być określone z warunków rozpatrywanego zagadnienia.

Wprowadzając związki

$$(4) \quad \omega'(z) = \varphi + i\psi,$$

$$(5) \quad \omega'_1(z_1) = \varphi - i\psi,$$

$$(6) \quad f'(z) = \xi + i\eta$$

i uwzględniając je w równościach (1) i (2) mamy

<sup>1)</sup> F. Szelągowski, *Zagadnienie płaskie teorii sprężystości w funkcjach zmiennych zespolonych*, ARCH. MECH. STOS., t. III, I (1951).

\*) Oznaczenie składowych naprężenia stosowane przez autora pochodzi, jak wiadomo od G. Kirchhoffa i A. E. H. Love'a; używane jest w literaturze radzieckiej i angielskiej. Symbolikę tę stosuje między innymi również N. I. Muschieliszwili, który (w znanym dziele *Niekotoryje osnovnyje zadaczi matematycznej teorii uprugosti*, wyd. III, Moskwa-Leningrad 1949) dał znakomite rozwinięcie zastosowania teorii funkcji zmiennej zespolonej do zagadnień płaskich teorii sprężystości, które są tematem niniejszej pracy. Dla czytelnika nieprzywykłego do symboliki Love'a podajemy odpowiednie oznaczenia w symbolice T. Kármána:  $X_x = \sigma_x$ ,  $Y_y = \sigma_y$ ,  $Z_z = \sigma_z$ ,  $X_y = \tau_{yx}$ ,  $Y_z = \tau_{zy}$ ,  $Z_x = \tau_{xz}$ . *Uwaga redakcji ROZPRAW.*

$$(7) \quad 2 X_y + i(X_x - Y_y) = -4i(x - iy) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - 4i \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} - i \frac{\partial \xi}{\partial y} \right),$$

$$(8) \quad X_x + Y_y = 8\varphi.$$

W dalszym ciągu z równości (7) i (8) otrzymujemy bezpośrednio wartości odnośnych naprężeń w postaci

$$X_x = 2 \left( 2\varphi - x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right),$$

$$Y_y = 2 \left( 2\varphi + x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right),$$

$$X_y = -2 \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right).$$

Ze wzorów tych widać, że w ogólnym przypadku wyrażenia dla naprężeń zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych zawierają tylko dwie niezależne funkcje harmoniczne, mianowicie  $\varphi$  oraz  $\xi$ .

O ile chodzi o wartości przynależnych przesunięć  $v$  i  $u$ , to można je z kolei określić ze wzoru (3) po uprzednim uwzględnieniu związków (4), (5) i (6). Wzór (3) można przekształcić następująco:

$$\mu(v + iu) = -i(x - iy)(\varphi + i\psi) + i \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int (\varphi - i\psi) d(x - iy) - i(\xi + i\eta),$$

wobec czego odpowiednie wartości  $v$  i  $u$  otrzymujemy w postaci

$$(9) \quad v = \frac{1}{\mu} \left[ -y\varphi + x\psi + \eta + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int (\varphi dy + \psi dx) \right],$$

$$(10) \quad u = \frac{1}{\mu} \left[ -x\varphi - y\psi - \xi + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int (\varphi dx - \psi dy) \right].$$

Jak można zauważyć, są tutaj cztery funkcje harmoniczne  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\xi$  oraz  $\eta$ .

Spośród tych czterech funkcji tylko dwie są niezależne, mianowicie funkcje  $\varphi$  i  $\xi$ ; funkcje  $\psi$  i  $\eta$ , jako sprzężone z funkcjami  $\varphi$  i  $\xi$ , są określone z dokładnością do pewnej stałej za pomocą poniższych wzorów:

$$(11) \quad \psi = \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \right),$$

$$(12) \quad \eta = \int \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dx \right).$$

Wobec tego wprowadzając zależności (11) i (12) do wzorów (9) i (10) otrzymamy ostatecznie

$$v = \frac{1}{\mu} \left\{ -y\varphi + x \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \right) + \int \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dx \right) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \left[ \int \varphi dy + \int dx \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \right) \right] \right\},$$

$$u = \frac{1}{\mu} \left\{ -x\varphi - \xi - y \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \right) + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \left[ \int \varphi dx - \right. \right. \\ \left. \left. - \int dy \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \right) \right] \right\}.$$

Jak widać, we wzorach powyższych występują również tylko dwie niezależne funkcje harmoniczne  $\varphi$  i  $\xi$ .

#### Резюме

#### РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Автор приводит общее решение плоской проблемы теории упругости в прямоугольных координатах, используя формулы из своей предыдущей статьи, озаглавленной Проблема плоской теории упругости в функциях комплексной переменной; последняя печаталась в АРХ. ПРИКЛ. МЕХ., том III, 1 (1951).

#### R é s u m é

#### SOLUTION DU PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES RECTANGULAIRES

L'auteur présente la solution générale du problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées rectangulaires, en utilisant les formules de son article précédent, intitulé *Problème plan de l'élasticité en fonctions de variable complexe*, ARCH. MECH. STOS. vol. III, 1 (1951).

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 października 1952 r.

**O PEWNYCH SZCZEGÓLNYCH PRZYPADKACH WYTRZYMAŁOŚCI  
TARCZY NIEOGRANICZONEJ Z ODMIENNYM OŚRODKIEM  
ZARYSU ELIPTYCZNEGO**

Badanie stanu napięcia w tarczy nieograniczonej z ośrodkiem odmienną sprężystości zarysu niekołowego może być w teorii sprężystości przeprowadzone najdogodniej za pomocą odwzorowania wiernego.

W rozpatrywanych tutaj przypadkach rozważane będzie odwzorowanie wiernie płaszczyzny z otworem eliptycznym na płaszczyznę z otworem kołowym przez wprowadzenie funkcji

$$(1) \quad z = \omega(\zeta) = K \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right),$$

w której

$$\zeta = \rho e^{i\theta},$$

a parametry rzeczywiste  $K$  i  $m$  są określone nierównościami następującymi:

$$K > 0,$$

$$0 \leq m < 1.$$

Okręgowi koła  $|\zeta| = 1$  odpowiada tutaj elipsa ze środkiem znajdującym się w początku układu i z półosiami

$$a = K(1 + m),$$

$$b = K(1 - m).$$

Przy danych wartościach  $a$  i  $b$  jest, oczywiście,

$$K = \frac{a + b}{2},$$

$$m = \frac{a - b}{a + b}.$$

W przypadku gdy  $m = 0$ , elipsa przekształca się w koło, zaś w przypadku gdy  $m = 1$ , elipsa przekształca się w odcinek osi  $x$  o długości  $4K$  zawarty pomiędzy punktami  $x = \pm 2K$ , co oznacza, że dany obszar w tym



szczególным przypadku przekształca się w płaszczyznę nieograniczoną ze szczeliną prostą.

Zasadnicze wzory dotyczące zagadnienia dwuwymiarowego będą miały postać następującą:

$$(2) \quad 2 X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2} \omega_1(\zeta_1) \Phi'(\zeta) \frac{1}{\omega'(\zeta)} + F(\zeta),$$

$$(3) \quad X_x + Y_y = \frac{1}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)],$$

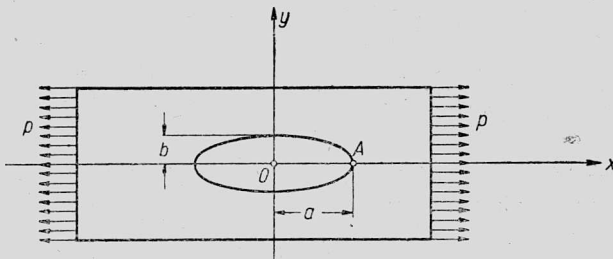
$$(4) \quad v + iu = -\frac{i}{8\mu} \omega_1(\zeta_1) \Phi(\zeta) + \\ + \frac{i}{8\mu} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int \Phi_1(\zeta_1) \omega'_1(\zeta_1) d\zeta_1 + \frac{1}{4\mu} \int F(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta.$$

Po uwzględnieniu zależności (1) otrzymujemy

$$2 X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2} K\left(\zeta_1 + \frac{m}{\zeta_1}\right) \Phi'(\zeta) \frac{1}{K\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)} + F(\zeta),$$

$$X_x + Y_y = \frac{1}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)],$$

$$v + iu = -\frac{i}{8\mu} K\left(\zeta_1 + \frac{m}{\zeta_1}\right) \Phi(\zeta) + \\ + \frac{i}{8\mu} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int \Phi_1(\zeta_1) K\left(1 - \frac{m}{\zeta_1^2}\right) d\zeta_1 + \frac{1}{4\mu} \int F(\zeta) K\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) d\zeta.$$



Rys. 1

Po omówieniu powyższych spraw podstawowych można przejść z kolei do rozpatrzenia zagadnienia pierwszego, dotyczącego jednokierunkowego rozciągania tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym zarysu eliptycznego (rys. 1).

Określimy najpierw przesunięcia dowolnego punktu obwodu elipsy dla tarczy jednorodnej rozciąganej jednokierunkowo.

Odpowiednie przesunięcia będą równe

$$(5) \quad u = \frac{p}{E} x = \frac{p}{E} K (1 + m) \cos \Theta,$$

$$(6) \quad v = -\frac{\sigma p}{E} y = -\frac{\sigma p}{E} K (1 - m) \sin \Theta,$$

gdyż z zależności (1) wynika, że jest

$$z = x + iy = K \left[ \varrho (\cos \Theta + i \sin \Theta) + \frac{m}{\varrho} (\cos \Theta - i \sin \Theta) \right],$$

skąd

$$x = K \left( \varrho + \frac{m}{\varrho} \right) \cos \Theta,$$

$$y = K \left( \varrho - \frac{m}{\varrho} \right) \sin \Theta,$$

przy czym dla  $\varrho = 1$  jest

$$x = K (1 + m) \cos \Theta,$$

$$y = K (1 - m) \sin \Theta.$$

Przesunięcia  $u$  i  $v$  określone wzorami (5) i (6) można napisać, jak łatwo sprawdzić, w postaci zespolonej

$$-v + iu = \frac{ipK}{2E} \left[ \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right) (1 + \sigma) + \left( \zeta_1 + \frac{m}{\zeta_1} \right) (1 - \sigma) \right]$$

lub w postaci nieco odmiennej

$$(7) \quad -v + iu = \frac{ipK}{2E} \left[ \left( \frac{1}{\zeta_1} + \frac{m}{\zeta} \right) (1 + \sigma) + \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{m}{\zeta_1} \right) (1 - \sigma) \right],$$

gdyż dla punktów położonych na okręgu koła o promieniu równym jedności zachodzi związek następujący:

$$(8) \quad \zeta \zeta_1 = 1.$$

W ten sposób, w wyniku przekształceń, otrzymana zależność (7) odpowiada warunkom rozpatrywanego zagadnienia.

Odrzućmy teraz wiadome obciążenie  $p$  i do punktów obwodu elipsy przyłożmy, dla części tarczy znajdującej się wewnątrz tej elipsy, naprężenia  $p$ , lecz odwrotnego znaku; dla części tarczy położonej na zewnątrz

elipsy przyłożmy takie naprężenia, które spowodowałyby przesunięcia odwrotne do określonych równościami (7), przy czym naprężenia te w punktach dostatecznie odległych od obwodu elipsy (teoretycznie rzecz biorąc — dla punktów tarczy położonych w nieskończoności) nie powinny już wywoływać jakichkolwiek przemieszczeń tarczy.

Tak sformułowane zagadnienie rozwiążemy stosując wzory przytoczone na wstępie.

Biorąc pod uwagę zależność (8) otrzymamy tutaj dla wzoru wyjściowego (4) następującą postać:

$$(9) \quad -\frac{i p}{2 E} \left[ \left( \frac{1}{\zeta_1} + \frac{m}{\zeta} \right) (1 + \sigma) + \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{m}{\zeta_1} \right) (1 - \sigma) \right] = -\frac{i}{8 \mu} \left( \frac{1}{\zeta} + m \zeta \right) \Phi(\zeta) + \\ + \frac{i}{8 \mu} \frac{\lambda + 3 \mu}{\lambda + \mu} \int \Phi_1(\zeta_1) \left( 1 - \frac{m}{\zeta_1^2} \right) d\zeta_1 + \frac{1}{4 \mu} \int F(\zeta) \left( 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right) d\zeta.$$

Związkowi (9), jak łatwo sprawdzić, czynią zadość następujące funkcje

$$\Phi(\zeta) = \frac{4 p \mu}{E k} [1 + \sigma + m(1 - \sigma)] \frac{1}{\zeta^2 - m},$$

$$\Phi_1(\zeta_1) = \frac{4 p \mu}{E k} [1 + \sigma + m(1 - \sigma)] \frac{1}{\zeta_1^2 - m},$$

$$F(\zeta) = \frac{i 2 p \mu}{E} \frac{1}{\zeta^2 - m} \left\{ 1 - \sigma + m(1 + \sigma) + \frac{1}{k} [1 + \sigma + \right. \\ \left. + m(1 - \sigma)] \frac{m(1 - \zeta^4) - \zeta^2(3 + m^2)}{(\zeta^2 - m)^2} \right\},$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$k = \frac{\lambda + 3 \mu}{\lambda + \mu}.$$

Uwzględniając powyższe funkcje  $\Phi(\zeta)$ ,  $\Phi_1(\zeta_1)$  oraz  $F(\zeta)$ , można z kolei z równań (2) i (3) określić odpowiednie naprężenia w tarczy (na zewnątrz elipsy).

Największa wartość naprężenia  $X'_x$  zachodzi w punkcie A elipsy (rys. 1), tj. dla  $\Theta = 0$ , i może być przedstawiona w postaci następującej:

$$[X'_x]_A = \frac{p}{2} \frac{1}{1 - m} \left[ m + \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} + \frac{1 + \sigma + m(1 - \sigma)}{3 - \sigma} \right].$$

Dodając teraz na podstawie prawa niezależności działania sił i odkształceń rozpatrzone wyżej dwa stany obciążenia tarczy, otrzymamy ja-

ko ostateczny wynik jednokierunkowe rozciąganie tarczy z ośrodkiem sztywnym zarysu eliptycznego.

Największe naprężenie rozciągające w punkcie  $A$  tarczy określa zatem ostatecznie następujący wzór<sup>1)</sup>:

$$(10) \quad [X_x]_A = p + [X'_x]_A.$$

W przypadku ośrodka sztywnego zarysu kołowego, tj.  $m = 0$ , ze wzoru (10) otrzymujemy

$$[X_x]_A = p \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} + \frac{1 + \sigma}{3 - \sigma} \right) \right],$$

gdy zaś  $m = 1$ , a więc w przypadku sztywnej szczeliny, wartość naprężenia  $X_x$  jest teoretycznie równa nieskończoności.

W związku z powyższym należy zauważyć, że wartość naprężenia rozciągającego w punkcie  $A$  tarczy będzie wzrastała niepomieranie w miarę zwięzania się przekroju ośrodka sztywnego.

Rozpatrzmy teraz stan napięcia w tarczy nieograniczonej z ośrodkiem zarysu eliptycznego, kurczącym się pod wpływem powracania z wyższej temperatury do temperatury otaczającej atmosfery, co może mieć miejsce np. w przypadku zapełnienia takiego otworu stopiwem.

W tym przypadku, gdy ośrodek jeszcze rozgrzany nabierze własności sprężystych, przesunięcia spowodowane kurczeniem się dowolnego punktu  $M$  obwodu elipsy będą równe (rys. 2)

$$u = -atx,$$

$$v = -aty,$$

gdzie  $t$  oznacza różnicę temperatur, a  $a$  współczynnik liniowej rozszerzalności tworzywa.

Przesunięcia te można przedstawić w postaci zespolonej

$$-v - iu = -iatK \left( \xi_1 + \frac{m}{\xi_1} \right) = -iatK \left( \frac{1}{\xi} + \frac{m}{\xi_1} \right)$$

przyjawszy uprzednio pod uwagę zależność (8). Wówczas wzór (4) przyjmie postać następującą:

<sup>1)</sup> Odpowiedni wzór, (10), w pracy mojej *Influence d'une partie centrale rigide sur la répartition des contraintes dans un élément tendu ou comprimé* (Ass. Int. des Ponts et Charpentes, 1947) został wyprowadzony za pomocą współrzędnych krzywoliniowych.

Chociaż wzór ten daje wartości bardzo zbliżone, jednakże przekształcony wzór w tej pracy, określający funkcje  $\Phi(z)$ ,  $\Phi_1(z_1)$  i  $F(z)$  na podstawie danych przesunięć, nie spełnia w zupełności warunków ogólnie postawionego zagadnienia dwuwymiarowego.

$$-i a t \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{m}{\zeta_1} \right) = -\frac{i}{8\mu} \left( \frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) \Phi(\zeta) + \frac{ik}{8\mu} \int \Phi_1(\zeta_1) \left( 1 - \frac{m}{\zeta_1^2} \right) d\zeta_1 + \\ + \frac{1}{4\mu} \int F(\zeta) \left( 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right) d\zeta.$$

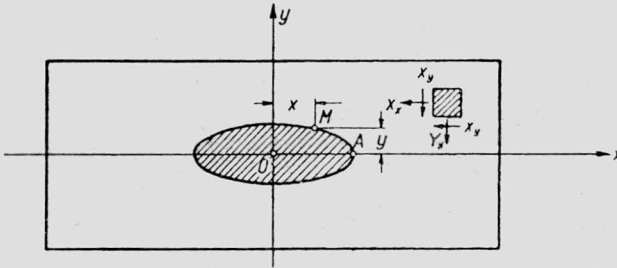
Równości tej czynią zadość funkcje

$$\Phi(\zeta) = \frac{8 a t m \mu}{k} \frac{1}{\zeta^2 - m},$$

$$\Phi_1(\zeta_1) = \frac{8 a t m \mu}{k} \frac{1}{\zeta_1^2 - m},$$

$$F(\zeta) = i 4 a t \mu \frac{1}{\zeta^2 - m} \left[ 1 + \frac{m m - \zeta - (2 + m^2)\zeta^2 + m\zeta^3 - 2m\zeta^4}{(\zeta^2 - m)^2} \right].$$

Przynależne wartości naprężeń w tarczy, tzn. w obszarze położonym na zewnątrz elipsy, można określić, podobnie jak to miało miejsce w poprzednim przypadku, ze wzorów (2) i (3) uwzględniając w nich wyżej podane funkcje  $\Phi(\zeta)$ ,  $\Phi_1(\zeta_1)$  i  $F(\zeta)$ .



Rys. 2

Należy jednak zauważyć, że największe naprężenie rozciągające będzie miało miejsce w punkcie A tarczy, tzn. dla wartości  $\theta = 0$ , przy czym wartość tego naprężenia będzie równa

$$[X_x]_A = \frac{2 a t \mu}{1-m} \left[ 1 + \frac{m}{k(1-m)} \left( 4 - \frac{3+m^2}{1-m} \right) \right],$$

gdzie

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

Analizując powyższy wzór stwierdzimy, że w przypadku koła, tzn. dla  $m = 0$ , wartość naprężenia  $[X_x]_A$  wynosi

$$[X_x]_A = 2 a t \mu = \frac{a t E}{1+\sigma},$$

zaś w przypadku szczeliny, tzn. dla  $m = 1$ , wartość naprężenia  $[X_x]_A$  równa się nieskończoności.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ СОПРОТИВЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ЯДРОМ ИЗ ДРУГОГО МАТЕРИАЛА

Применяя конформное отображение автор решил при помощи теории упругости

(1) проблему одноосного растяжения бесконечной пластинки с жестким эллиптическим ядром,

(2) проблему охлаждения эллиптического ядра бесконечной пластинки.

Résumé

SUR CERTAINS CAS PARTICULIERS DE RÉSISTANCE D'UNE TÔLE INFINIE AVEC UNE PARTIE CENTRALE DIFFÉRENTE DE SECTION ELLIPTIQUE

En appliquant la représentation conforme l'auteur a résolu à l'aide de la théorie de l'élasticité

(1) le problème de la traction, suivant une seule direction, d'une tôle infinie avec une partie centrale rigide de section elliptique,

(2) le problème du refroidissement d'une partie centrale de section elliptique d'une tôle infinie.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 listopada 1952 r.*



KOMITET REDAKCYJNY

R O Z P R A W I N Ż Y N I E R S K I C H

prosi autorów o przestrzeganie następujących wskazówek

- (1) Prace w języku polskim, przepisane na maszynie (nie światłodruki), należy składać w dwóch egzemplarzach. Wzory powinny być napisane wyraźnie atramentem, rysunki (szkice) dołączone na oddzielnych kartach (nie w tekście).
  - (2) Obowiązuje numeracja dziesiętna wzorów [np. wzór 5 w p. 2 oznacza się (2.5)]. Numery wzorów należy umieszczać z lewej strony. Należy unikać numeracji rzymskiej i alfabetycznej (wzorów, rysunków, paragrafów, rozdziałów).
  - (3) Do pracy należy dołączyć streszczenie w języku polskim (również wtedy, gdy autor składa streszczenie w języku obcym) i podać ewentualnie terminologię w dwóch językach (w tym jeden rosyjski), na które streszczenie ma być przełożone.
  - (4) Literaturę cytowaną w tekście należy zestawić w końcu pracy podając nazwisko i imię autora, tytuł pracy, miejsce i rok wydania (w przypadku cytowania czasopisma również numer zeszytu). Nazwiska i tytuły rosyjskie należy pisać alfabetem rosyjskim. W tekście należy powoływać się na numery prac (w nawiasie kwadratowym, np. [5]) według zestawienia.
  - (5) Funkcje trygonometryczne należy oznaczać przez  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$ ; funkcje hiperboliczne z dodaniem litery  $h$ . Współczynnik Poissona oznacza się przez  $\nu$ . Kreski pionowych używa się tylko do oznaczenia wartości bezwzględnej. Wszelkie zestawienia należy nazywać tablicami (nie tabelami).
  - (6) Autorowi przysługuje prawo do przeprowadzenia ostatecznej korekty (bez zmian tekstu) dokładnie w terminie wyznaczonym przez Redakcję.
  - (7) Redakcji przysługuje prawo do przeprowadzenia korekty stylistycznej i do dostosowania oznaczeń oraz układu pracy do norm przyjętych w ROZPRAWACH.
- Niestosowanie się do powyższych wskazówek opóźnia publikację pracy.

Cena zł 4

WYDAWNICTWA  
ZAKŁADU MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

---

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ  
KWARTALNIK POŚWIĘCONY PRACOM NAUKOWYM Z ZAKRESU TEORII  
SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMO-  
DYNAMIKI ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TEORII KONSTRUKCJI

Ukazały się tomy I—IV oraz zeszyty 1 i 2 tomu V.

W przygotowaniu zeszyty 3 i 4 tomu V.

Cena zeszytu zł 20.

---

R O Z P R A W Y     I N Ż Y N I E R S K I E

W D R U K U

- II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic
- III. Z. Klębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia
- IV. M. Życzkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej
- V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć
- VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu
- VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt na podstawie metody Ritza
- IX. W. Fiszdón, O pewnej metodzie obliczenia amplitud drgań

W P R Z Y G O T O W A N I U

- VI. W. Olszak, Podstawy teorii nośności granicznej ortotropowych ustrojów płytowych
  - X. Z. Wasiutyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych
-