

A 1904.1

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK
TOM II • ZESZYT 1



WARSZAWA • 1954

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

T R E Ś Ć T O M U I I Z E S Z Y T U 1

XVI	MALECKI, I. Metody zastosowania rachunku tensorowego w technice	1
XVII	NOWIŃSKI, J. Podstawy teorii plastyczności (I). Siedem wykładów	69
XVIII	NOWACKI, W. Statyka rusztów płaskich	143

TABLE DES MATIÈRES DU VOL. II FASC. 1

XVI	MALECKI, I. Методы применения тензорного исчисления в технике The Methods of Application of Tensor Calculus to Technical Problems	1
XVII	NOWIŃSKI, J. Основы теории пластичности (I). Семь лекций The Basic Principles of the Theory of Plasticity (I). Seven Lectures	69
XVIII	NOWACKI, W. Статика плоских ростверков The Statics of Flat Gridwork Systems	143

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

XVI – XVIII



WARSZAWA • 1954

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

R O Z P R A W Y I N Ż Y N I E R S K I E

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI
I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI
ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

R A D A R E D A K C Y J N A
WITOLD NÓWACKI — PRZEWODNICZĄCY
JULIAN BONDER MICHAŁ BROSZKO
WACŁAW OLSZAK BOHDAN STEFANOWSKI
STANISŁAW TURSKI WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y
JERZY NOWIŃSKI — REDAKTOR
TADEUSZ IWIŃSKI JÓZEF JANICZEK

Adres Redakcji
WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE XVI—XVIII

Copyright 1954 by Polska Akademia Nauk.
Warszawa (Poland). Printed in Poland. All rights reserved

Nakład 1440+100 nadb. Papier druk. sat. 70x100/16, 70 g. Arkuszy wydawn. 14.3. Arkuszy drukarskich 11²/₃.
Oddano do składania dn. 8.5.1954. r. Druk ukończ. w sierpniu 1954 r. Zam. 159. 5-B-14686. Cena zł 20.—

Stoł. Zakł. Graf., Drukarnia Naukowa. Warszawa, Śniadeckich 8.

IGNACY MALECKI

METODY ZASTOSOWANIA RACHUNKU TENSOROWEGO
W TECHNICE

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

XVI

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Rozwój zastosowań rachunku tensorowego	3
2. Podstawowe pojęcia rachunku tensorowego	5
3. Interpretacja fizyczna wielkości tensorowych	16
4. Znaczenie metody tensorowej w technice	20
5. Wielkości tensorowe w ośrodkach ciągłych	26
6. Metody tensorowe w technicznych zagadnieniach pola	33
7. Wielkości tensorowe występujące w systemach o wielu stopniach swobody	43
8. Metoda tensorowa badania systemów mechanicznych	49
9. Metoda tensorowa badania systemów elektrycznych	54
10. Główne problemy zastosowań metody tensorowej w technice	60
11. Bibliografia	62

1. Rozwój zastosowań rachunku tensorowego

Rachunek tensorowy rozwinął się na pograniczu, a raczej skrzyżowaniu, zainteresowań matematyków, fizyków i techników. Pojęcia typowe dziś dla zastosowań rachunku tensorowego znane już były od dawna, że zacytujemy konstrukcję elipsoidy bezwładności podaną przez Poinsot (1834 r.). Teoria sprężystości i krystalografia, które posługiwały się wówczas prymitywnym aparatem matematycznym, operowały przez przeszło pół wieku elementarnymi obrazami elipsoid dla unaocznienia naprężeń powstających w ośrodkach ciągłych. Dopiero W. Voigt w 1898 r., [81], zdecydował się na wprowadzenie nowego pojęcia matematycznego i fizycznego nazwanego tensorem, czyli obrazem naprężeń ośrodka. Jak często się zdarza w rozwoju nauki, pojęcie tensora znalazło pogłębienie i rozszerzenie w zupełnie innej dziedzinie wiedzy, mianowicie w «czystej» matematyce. Okazało się, że pozwala ono w sposób dogodny wyrazić własności przestrzeni nieeuklidesowych, n -wymiarowych, bodaj po raz pierwszy ujętych w pracach Grassmanna [33], Ricci i Levi-Civita, [72], oraz przestrzeni zakrzywionej, opisanej przez Riemanna, [71], i Christoffela, [15]. Dopiero jednak prace Minkowskiego, [65], Lorentza, [56], a zwłaszcza Łobaczewskiego i Einsteina, [22], nadały temu pojęciu głębokie znaczenie fizyczne. Śmiało można powiedzieć, że bez pomocy rachunku tensorowego ogólna teoria względności nie mogłaby znaleźć tak pełnego i logicznego wyrazu matematycznego. Rachunek tensorowy stał się podstawowym narzędziem badania właściwości kontinuum czaso-przestrzeni, a następnie pozwolił na rozwinięcie mechaniki kwantowej. Podstawowe wielkości tej mechaniki, jak funkcje *bra* i *ket* Diraca, [19], są szczególnymi przypadkami tensorów sprężonych.

Rachunek tensorowy wprowadzono z powodzeniem i do innych dziedzin fizyki, głównie elektrodynamiki i mechaniki ośrodków ciągłych; ma on tam przeważnie na celu ustalenie niezmienników oraz opis pewnych złożonych wielkości fizycznych.

Metoda tensorowa w fizyce jest jedną z metod najbardziej generalnych, służących do syntetycznego ujęcia zjawisk i ich zmian, przy czym fizycy nie troszczyli się przeważnie o sprowadzenie wyników analizy ten-

sorowej do pojedynczych konkretnych przypadków. Nic dziwnego, że w swym ujęciu klasycznym, jakie spotykamy w podręcznikach, [67], pisanych przez fizyków i matematyków, teoria tensorów obca jest technikom i wydaje się pomysłową wprawdzie, lecz mało praktyczną spekulacją. Przypomina to trochę sytuację sprzed 50 lat, gdy technicy podobnie traktowali rachunek liczb zespolonych, [16], uważając go za bezpłodną abstrakcję matematyczną.

Trzeba jednak z drugiej strony stwierdzić, że próby zastosowania rachunku tensorowego lub metod pokrewnych spotykamy w technice od dość dawna; dotyczy to zarówno teorii sprężystości, jak i teorii obwodów elektrycznych. Na przykład, jest rzeczą ciekawą, że Kirchhoff, [40], w swoich pionierskich pracach nad przepływem strumienia elektryczności używał metody zbliżonej do topologii; również geodezji nie były obce niektóre pojęcia tensorowe. Jednakże stałe narastanie szczegółowej wiedzy technicznej i ogromnej liczby faktów, z którymi zapoznać się musi niemal każdy inżynier, a tym bardziej pracownik nauki — technik, spowodowało zacieśnienie i wyspecjalizowanie metod używanych w poszczególnych dyscyplinach, spowodowało następnie zróżnicowanie języka symbolów matematycznych w technice. Na przykład, do opisu podobnych zjawisk z dziedziny mechaniki, elektrotechniki i termodynamiki używamy dziś zupełnie innych symbolów i metod. Rezultatem tego są nie tylko trudności dydaktyczne, lecz i trudności porozumienia się różnych specjalistów pracujących nad rozwiązywaniem problemów granicznych oraz opóźnienia we wzajemnym przekazywaniu doświadczeń.

Wprowadzenie rachunku tensorowego do techniki spowodowane jest w dużej mierze chęcią przełamania tego stanu rzeczy, chęcią równoległego używania tych samych metod matematycznych w różnych dziedzinach techniki. Wydaje się to paradoksem, ale właśnie wobec zróżnicowania metod rachunkowych stosowanych w technice, syntetyczność i ogólność opisu zjawisk metodą tensorową staje się rzeczą szczególnie cenną.

Burgatti, [10], jeden z pierwszych teoretyków rachunku tensorowego, stwierdził: «Ogólność tej metody, która pozwala mówić i pisać w języku zrozumiałym we wszystkich gałęziach fizyki technicznej, jej jasna i często wymowna zwięzłość, jej zdolność przeniesienia idei w formę i formy w ideę, charakterystyczne dla niej jednoczesne ujęcie przez indukcję i dedukcję, syntezę i analizę — czyni z tej metody naprawdę pierwszorzędne narzędzie pracy naukowej i dydaktycznej».

Warunkiem zastosowania rachunku tensorowego w technice jest jednak pewna zmiana metody w porównaniu z klasycznym ujęciem spotykanym w fizyce. Nie chodzi tu tylko o uproszczenie i łatwe podanie zawiłych rozważań matematycznych. Rzecz polega przede wszystkim na uzupełnieniu rozważań fizyków konkretnymi, numerycznymi rozwiązaniami, chociażby najprostszych problemów technicznych. Jest to nie-

odczownym warunkiem, aby technik nabrał zaufania do metody matematycznej, aby miał z niej pożytek, jeżeli nie przy rozwiązywaniu szczegółowego zadania, jakie mu stawia produkcja, to przynajmniej przy zrozumieniu fizycznego sensu zjawiska. Warunek ten spełniony jest zresztą w naszym przypadku pośrednio, mianowicie metoda tensorowa umożliwia stosowanie rozwiązań numerycznych właściwych rachunkowi macierzy.

Trzeba się dla porządku zastrzec, że rachunek tensorowy — poza nielicznymi wyjątkami — jest w zastosowaniach technicznych pewnym udogodnieniem dającym się zastąpić bardziej uciążliwymi i mniej prostymi metodami elementarnymi. Wiele poważnych podręczników, że wymienimy teorię sprężystości S. T i m o s z e n k i, [78], ogranicza się do metody analizy elementarnej i rachunku całkowego, nie dając interpretacji tensorowej tak typowych wielkości, jak np. elipsoida naprężeń.

2. Podstawowe pojęcia rachunku tensorowego

Nowoczesny rachunek tensorowy, zwłaszcza w formie wprowadzanej do zagadnień elektrotechniki, jest dyscypliną, która zaczyna się rozwijać i nie okrzepła jeszcze w ściśle ustalone tradycją oznaczenia i definicje poszczególnych symbolów. Czytanie prac różnych autorów, z których wielu na własną rękę tworzy skomplikowany system oznaczeń, sprawia często znaczne trudności. Dlatego dla wzajemnego zrozumienia się nieodzowne będzie omówienie głównych pojęć rachunku tensorowego. Zaznaczymy, że robimy to jako technicy dla techników w celu pokazania perspektyw przydatności rachunku tensorowego i znalezienia nowych jego zastosowań w technice, bez szukania oryginalnych dowodów i równań matematycznych. Pomijamy również zagadnienia algebry i analizy tensorowej ograniczając się do omówienia pojęć niezbędnych do zrozumienia metod stosowania tego rachunku w technice.

W pracy niniejszej została użyta symbolika stosowana w najnowszych podręcznikach radzieckich, [43], [71], i w pracach zajmujących się specjalnie zastosowaniami rachunku tensorowego w fizyce, [8]. Rozmiary pracy nie pozwalają jednak na rozwinięcie całego systemu symbolów tensorowych. W tym zakresie dla polskiego czytelnika miarodajna będzie znajdująca się w druku książka S. G o ł ą b a i J. L i t w i n i s z y n a *Rachunek tensorowy*.

Zacznijmy od zdefiniowania samego pojęcia tensora. Nie jest to rzeczą łatwą, można bowiem podejść do zagadnienia od strony matematyka lub fizyka; w obu przypadkach będzie ono miało nieco odmienne aspekty. Trzeba dalej zwrócić uwagę, że sam termin *tensor* nie jest używany jednoznacznie. Będziemy się tutaj trzymali definicji stosowanej przez większość autorów, (por. np. [76] i [70]), którzy wyrazem tensor określają

najogólniejsze pojęcie matematyczno-fizyczne. Inaczej postępują tacy autorzy jak J. Schouten, [74], i A. D. Michal, [64], którzy wprowadzają jako pojęcie ogólne *afinor*, rezerwując nazwę tensora dla przypadku tensora symetrycznego zwłaszcza drugiego rzędu. Zresztą i termin *afinor* bywa używany w nieco odmiennym znaczeniu, [76]. W dalszym ciągu pracy posługiwać się będziemy pierwszą, ogólniejszą definicją tensora.

Żeby zrozumieć sens fizyczny tensora, należy najpierw omówić jego interpretację matematyczną. Napotykamy tu na pewien kłopot, gdyż poszczególne autorzy dochodzą do matematycznego pojęcia tensora z zupełnie innych punktów wyjścia, zależnie od tego, czy rozpatrują zagadnienie czysto analitycznie, czy też przypisują mu sens geometryczny w przestrzeni metrycznej bądź wektorowej (p. niżej).

Wydaje się, że dla potrzeb techniki łatwiejsze będzie wyjście ze swoich pojęć trójwymiarowej geometrii euklidesowej, opisując tensor prymitywnym pojęciem obrazu geometrycznego, następnie rozszerzając rozważania na bardziej ogólne zależności w przestrzeni r -wymiarowej, aby wreszcie przejść do opisu zjawisk fizycznych ujmowanych za pomocą geometrii wektorowej.

Otóż w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej tensor, zwany tensorem 2-go rzędu, zdefiniujemy jako operator T , który dowolnemu wektorowi \mathbf{a} (rys. 1), przyporządkowuje inny wektor \mathbf{u} , będący jego funkcją liniową. Liniowość polega na spełnieniu warunku, [35] i [73],

$$(1) \quad f(k\mathbf{a}) = kf(\mathbf{a}),$$

zatem

$$(2) \quad \mathbf{u} = f(\mathbf{a}) = T\mathbf{a}.$$

Można inaczej powiedzieć, [43], że operator nazwany tensorem 2-go rzędu wyznaczony jest 9 wielkościami powstałymi przez pomnożenie parami składowych dwóch dowolnych wektorów \mathbf{e} i \mathbf{d}

$$(3) \quad \begin{cases} t_{xx} = e_x d_x, & t_{xy} = e_x d_y, & t_{xz} = e_x d_z, \\ t_{yx} = e_y d_x, & t_{yy} = e_y d_y, & t_{yz} = e_y d_z, \\ t_{zx} = e_z d_x, & t_{zy} = e_z d_y, & t_{zz} = e_z d_z. \end{cases}$$

Warunek sprowadzenia tensora do dwóch wektorów nie jest zresztą konieczny i nie zawsze da się spełnić; wystarczy, że 9 wielkości t_{ij} , tworzących kwadratową macierz, zmienia się przy zmianie układu osi współrzędnych, tak jakby to istotnie były składowe iloczynu wektorów. Inaczej

można zatem powiedzieć, że tensor 2-go rzędu w przestrzeni 3-wymiarowej jest zespołem trzech wektorów $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, transformujących się liniowo przy zmianie układu współrzędnych; 9 składowych tych wektorów stanowi składowe tensora.

Jeżeli wyżej omówiona operacja tensorowa przeprowadzona będzie w stosunku do dwóch wektorów \mathbf{a} i \mathbf{b} , którym przyporządkujemy jak poprzednio wektor \mathbf{v} , będący ich funkcją liniową

$$(4) \quad \mathbf{v} = T(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

to odpowiedni operator nazwiemy tensorem 3-go rzędu. Na tej samej zasadzie określić można tensory wyższych rzędów. Trzeba zaznaczyć, że jest to tylko interpretacja geometryczna tensora, który stanowi ogólne pojęcie matematyczne.

Liniową zależność między wektorami \mathbf{a} i \mathbf{u} otrzymamy w szczególnym przypadku także wówczas, gdy tensor jest iloczynem wektora przez skalar, czyli że sam jest także *wektorem*. Wektor jest więc również tensorem, mianowicie tensorem 1-go rzędu. Podobnie dowolną wielkość liczbową, tj. *skalar*, przez którą pomnożymy wektor \mathbf{a} , otrzymując jako funkcję liniową \mathbf{u} , nazywamy tensorem zerowego rzędu.

Widzimy, że w geometrii pojęcie tensora jest ogólne i obejmuje również wektory i skalary. Zastanówmy się jeszcze bliżej nad jego interpretacją geometryczną, związaną z obrotem osi współrzędnych, zasadniczą bowiem cechą rachunku tensorowego jest badanie zachowania się danej wielkości przy zmianie układu odniesienia.

Niech wektor \mathbf{a} ma w pierwotnym układzie współrzędnych składowe a^x, a^y, a^z , a osie współrzędnych wyznaczone są *wektorami jednostkowymi* $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$.

Wektor \mathbf{a} wyraża się więc sumą

$$(5) \quad a^x \mathbf{e}_x + a^y \mathbf{e}_y + a^z \mathbf{e}_z;$$

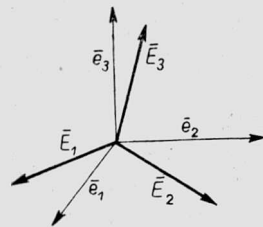
rozdzielenie dolnych i górnych indeksów wyjaśnimy dalej.

Zmienimy teraz — na przykład przez obrót osi — układ współrzędnych. Nowe osie wyznaczone będą znowu trzema wektorami jednostkowymi $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ (rys. 2). Co się stanie ze składowymi wektora \mathbf{a} ? Jaka będzie ich wartość w nowym układzie współrzędnych? Jaki jest stosunek nowych i starych wektorów jednostkowych? Oto typowe pytania dla metody algorytmu tensorowej.

Przejdzie do nowych wektorów jednostkowych odbywa się za pomocą zależności

$$(6) \quad \mathbf{E}_i = \sum_k C_i^k \mathbf{e}_k,$$

gdzie za i i k należy kolejno podstawić x, y, z .



Rys. 2

Zestaw dziewięciu wielkości C_i^k przedstawia zgodnie z definicją składowe tensora $\|C\|$. Dla zaznaczenia, że dana wielkość jest tensorem 2-go rzędu, ujmujemy ją w znaki $\| \ \|$, wówczas gdy wielkość macierzową zamykamy nawiasem $[\]$:

$$(7) \quad \|C\| = \begin{vmatrix} C_x^x & C_x^y & C_x^z \\ C_y^x & C_y^y & C_y^z \\ C_z^x & C_z^y & C_z^z \end{vmatrix}.$$

Tensor $\|C\|$, tzw. *tensor transformujący*, jest pojęciem zupełnie ogólnym, z którym często spotykać się będziemy w dalszych rozważaniach.

Analogicznie z nowych osi na stare przejdziemy za pomocą zależności

$$(8) \quad \mathbf{e}_k = \sum_l C_k^l \mathbf{E}_l,$$

przy czym

$$(9) \quad \sum_k C_i^k C_k^l = \delta_i^l = \begin{cases} 1 & \text{dla } l = i, \\ 0 & \text{dla } l \neq i. \end{cases}$$

δ_i^l nazywamy *wskaźnikami* (symbolami) *K r o n e c k e r a*, [48]; liczbowo

$$(10) \quad C_l^k = \frac{M_i^k(C')}{\Delta(C')}, \quad C_k^l = \frac{M_k^l(C)}{\Delta(C)},$$

gdzie M_i^k oznacza minor algebraiczny macierzy $\|C\|$, tj. wyznacznik, w którym wykreślony został wiersz i i kolumna k , pomnożony przez $(-1)^{i+k}$. Przez Δ oznaczono zwykły wyznacznik tejże macierzy.

Wielkości geometryczne, których składowe zmieniają się według tego samego prawa jak wektory jednostkowe osi współrzędnych, nazywamy *współmienniczymi* (*kowariantnymi*); składowe te oznaczamy literami zaopatrzonymi w dolne indeksy. Jeżeli z kolei zbadamy jak następuje transformacja w przestrzeni współrzędnych punktu $P(a^x, a^y, a^z)$, lub inaczej wektora o tych składowych wyprowadzonego z początku układu współrzędnych, to okaże się, że prawa transformacji są tu przeciwnie niż przy zmianie samych osi układu. Mianowicie współrzędna A^l w nowym układzie osi wyniesie

$$(11) \quad A^l = \sum_k C_k^l a^k,$$

a przy powrocie do starych współrzędnych a^k otrzymamy zależność

$$(12) \quad a^k = \sum_i C_i^k A^i.$$

Tensor transformujący C'_k związany jest z tensorem C_i^k zależnością (9), stanowi więc jego odwrócenie. Gdy poprzednio tensor C' służył do powrotu do starych osi, obecnie transformuje układ na nowe osie współrzędnych.

Dla obliczenia całego wektora \mathbf{A} trzeba zsumować geometrycznie składowe A^l .

$$(13) \quad \mathbf{A} = \sum_l C'_k a^k \mathbf{E}_l.$$

We wzorze tym znak sumowania według indeksów « k » pominięto, gdyż operacja sumowania wynika już z samego położenia indeksów — jest to tzw. konwencja *E i n s t e i n a*, znacznie upraszczająca pisownię wzorów tensorowych. W dalszym ciągu będziemy się zasadniczo trzymali tej konwencji, jedynie w pewnych przypadkach pozostawiając znak sumy ze względów dydaktycznych. Jak widać z równań (11) i (12), współrzędne wektora są wielkościami *przeciwzmiennicznymi* (*kontrawariantnymi*), transformującymi się odwrotnie niż wektory jednostkowe układu odniesienia. Aby odróżnić tę właściwość, wielkościom kontrawariantnym przypisujemy górne indeksy. Rozróżnienie wielkości współzmiennicznych i przeciwzmiennicznych ma podstawowe znaczenie w rachunku tensorowym i może być rozciągnięte na dowolne obiekty geometryczne.

Prócz tego będziemy mieli do czynienia z wielkościami *niezmiennicznymi* (*inwariantnymi*), które zachowują swą wartość przy dowolnych zmianach układu współrzędnych.

Pewne kombinacje składowych tensora mają taki niezmienniczy charakter. Z uwagi na ich znaczenie w problemach fizyki i techniki napiszemy trzy niezależne od siebie niezmienniki J tensora 2-go rzędu w przestrzeni trójwymiarowej i osiach kartezjańskich:

$$(14) \quad \begin{aligned} J_1 &= t_{xx} + t_{yy} + t_{zz}, \\ J_2 &= \begin{bmatrix} t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{zz} & t_{zx} \\ t_{xz} & t_{xx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} \\ t_{yx} & t_{yy} \end{bmatrix}, \\ J_3 &= \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Funkcje tych niezmienników pozostają również niezmiennicze. Tensory, w których pierwszy niezmiennik jest równy zeru, nazywa się czasem *dewiatorami*, [43]; mają one duże znaczenie praktyczne w zagadnieniach teorii sprężystości i reologii.

Skalar jest, oczywiście, niezmiennikiem, wektor zaś, jak stwierdziliśmy, posiada składowe o właściwościach przeciwności. Zachodzi pytanie, czy można dać interpretację geometryczną wektora współzmienniczego, ponieważ matematycznie można sobie taki wektor wyobrazić. Otóż wektor kowariantny o składnikach a_i , wyprowadzony z początku układu współrzędnych, wyznaczony jest kierunkiem i płaszczyzną do tego kierunku prostopadłą, która na osiach współrzędnych odcina wielkości x^i , spełniające zależność niezmienniczą (rys. 3)

$$(15) \quad k = a_i x^i .$$

Składowe tensora 2-go rzędu powstały, jak wiemy, z iloczynów składowych dwóch wektorów, co do których nie robiliśmy dodatkowych założeń; mogą to być zatem równie dobrze wektory kowariantne, jak kontrawariantne. Z dwóch wektorów kowariantnych otrzymujemy tensor kowariantny dwukrotnie współzmienniczy, co zaznaczamy dwoma dolnymi indeksami. Odwrotnie zachowuje się tensor podwójnie przeciwnościowy, cechowany dwoma górnymi indeksami. Wreszcie przez kombinację wektora kowariantnego i kontrawariantnego powstaje tensor mieszany. Odpowiednio zapiszemy następujące typy tensorów 2-go rzędu:

$$(16) \quad T_{ik}, \quad T^i_k, \quad T^{ik} .$$

Podobnie dla tensorów trzeciego rzędu o trzech indeksach wystąpią cztery kombinacje

$$(16.1) \quad T_{ikl}, \quad T^i_{kl}, \quad T^{ik}_l, \quad T^{ikl} .$$

Tensor posiada w zasadzie co najwyżej $p = r - 1$ różnych indeksów, jeżeli został wyznaczony w układzie r osi współrzędnych. W przypadku gdy $p = r$ otrzymujemy w przestrzeni euklidesowej wielkość zwaną pseudo-skalarem, do której omówienia wrócimy później (por. str. 27). W rozważaniach geometrycznych i fizycznych mamy zwykle do czynienia z *tensorami jednorodnymi*, posiadającymi wszystkie górne lub dolne indeksy.

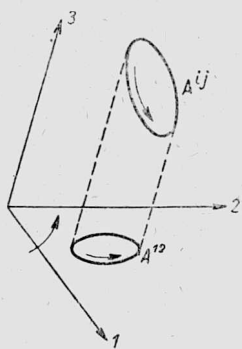
Dowolny tensor jednorodny przedstawić można jako sumę dwóch tensorów: *symetrycznego* właściwego tensora $\|S\|$ i tensora *antysymetrycznego* $\|A\|$ (skośnego), zwanego inaczej multiwektorem. Składowe tych tensorów spełnić muszą równanie

$$(17) \quad t_{ij} = kt_{ji}, \quad \text{gdzie} \quad \begin{cases} k = 1 & \text{dla } \|S\|, \\ k = -1 & \text{dla } \|A\|. \end{cases}$$

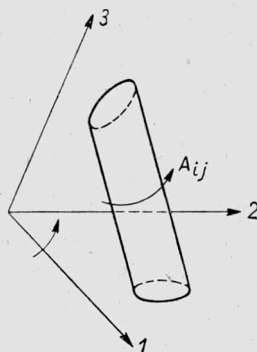
Wyszczególniając wszystkie indeksy przedstawimy odpowiednią zależność w formie

$$(18) \quad \|T\| = \|S\| + \|A\| = \begin{vmatrix} t_{xx} & \frac{1}{2}(t_{xy} + t_{yx}) & \frac{1}{2}(t_{xz} + t_{zx}) \\ \frac{1}{2}(t_{yx} + t_{xy}) & t_{yy} & \frac{1}{2}(t_{yz} + t_{zy}) \\ \frac{1}{2}(t_{zx} + t_{xz}) & \frac{1}{2}(t_{zy} + t_{yz}) & t_{zz} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(t_{xy} - t_{yx}) & \frac{1}{2}(t_{xz} - t_{zx}) \\ -\frac{1}{2}(t_{xy} - t_{yx}) & 0 & \frac{1}{2}(t_{yz} - t_{zy}) \\ -\frac{1}{2}(t_{xz} - t_{zx}) & -\frac{1}{2}(t_{yz} - t_{zy}) & 0 \end{vmatrix}.$$

Widzimy, że w drugim tensorze składowe na głównej przekątnej równe są zeru, a wyrazy poza przekątną główną są składowymi skalarnymi iloczynu zewnętrznego (wektorowego). W przypadku indeksów kontrawariantnych obrazem (rys. 4) tensora antysymetrycznego jest zatem



Rys. 4



Rys. 5

pole o wewnętrznej orientacji określonej porządkiem indeksów ijk . Inaczej, tensor ten można uważać za biwektor kontrawariantny, który oprócz kierunku i wielkości posiada *znak* zmieniający się zależnie od porządku osi współrzędnych. Jego wartość liczbowa jest, oczywiście, równa wyróżnikowi macierzy tensora antysymetrycznego. Odpowiednio iloczyn zewnętrzny wektorów kowariantnych przedstawić można (rys. 5) jako walec o określonym kierunku, przekroju i orientacji zewnętrznej; będzie to obraz biwektora kowariantnego. Widzimy, że tensor, antysymetryczny

o dwóch indeksach w przestrzeni trójwymiarowej daje się sprowadzić do nieco prostszego pojęcia geometrycznego.

Bardziej złożona jest interpretacja geometryczna *tensora symetrycznego*. W literaturze znajdujemy, [12], [21] i [38], szereg mniej lub więcej udanych sposobów geometrycznego ujęcia tensora 2-go rzędu; często się przy tym zdarza pomieszanie sensu fizycznego, zaczerpniętego z teorii sprężystości, z interpretacją czysto geometryczną. Ponieważ chodzi nam o różnorodne zastosowania fizyczne rachunku tensorowego, wygodniej będzie na razie ograniczyć się do ściśle geometrycznego zobrazowania tensora, aby nie zaciemnić jego obrazu fizycznego zbyt ogólną definicją. Ponieważ mówimy obecnie o tensorze symetrycznym, to równanie (2) wypisane z uwzględnieniem zmienniczości ma postać

$$(19) \quad \mathbf{u}_i = T_{ik} \mathbf{a}^k \quad \text{lub} \quad \mathbf{u}^i = T'^{ik} \mathbf{a}_k,$$

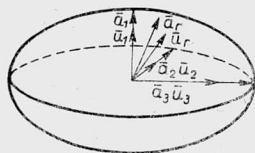
czyli przy operacji tensorowej wektor kowariantny przechodzi w kontrawariantny lub odwrotnie.

Jeżeli sformujemy wyrażenie

$$(20) \quad \mathbf{a}^i T_{ik} \mathbf{a}^k = K,$$

to jest ono niezmiennicze i określa zachowanie się wektora kowariantnego $\mathbf{u}_i = T_{ik} \mathbf{a}^k$ przy zmianie kierunku normalnej płaszczyzny, określającej wektor kontrawariantny \mathbf{a}^i .

Miejscem geometrycznym końców tego wektora będzie powierzchnia drugiego stopnia, która w przypadku, gdy wszystkie $T_{rr} \geq 0$, staje się elipsoidą (rys. 6), a dla tensora symetrycznego jest elipsoidą symetryczną względem środka. Wektory \mathbf{a} i \mathbf{u} mają na ogół różne kierunki w przestrzeni, istnieją jednak pewne osie, będące osiami symetrii powierzchni tensorowej, dla których oba wektory mają ten sam kierunek. Osie te nazywamy *osiąmi głównymi tensora*. Operacja tensorowa na tych osiach redukuje się do pomnożenia wektora \mathbf{a} przez skalar $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{a}$.



Rys. 6

Dla uzyskania możliwości stosowania różnych układów odniesienia rzeczą pożyteczną będzie wprowadzenie pojęcia tzw. *podstawowego tensora metrycznego* $\|g\|$. Składowe tego tensora są współczynnikami, przez które należy pomnożyć iloczyn dwóch wektorów jednostkowych \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j danego punktu, aby je sprowadzić do wspólnej skali, czyli *metryki*. Wektory jednostkowe można otrzymać przez transformację wektora przyjętego za podstawę skali długości, zatem posługując się równaniem (6) możemy napisać

$$(21) \quad g_{lm} = \sum_{i,k} C_l^i C_m^k.$$

Mnożąc wektor (lub tensor) przez funkcję podstawowego tensora, zmieniamy w przestrzeni metrycznej charakter zmienniczości tego wektora (lub tensora), czyli poziom indeksów.

Ponieważ odległość ds między dwoma sąsiednimi punktami pozostaje stałą w przestrzeni euklidesowej, niezależną od wyboru współrzędnych, zdefiniujemy ją za pomocą równania

$$(22) \quad (ds)^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k.$$

Jeżeli wybraliśmy osie kartezjańskie o jednakowej skali, odległość ds wynosi

$$(23) \quad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

i podstawowy tensor metryczny ma postać

$$(24) \quad \|g\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Przejście na inne współrzędne przestrzeni euklidesowej nie sprawia również specjalnych trudności. W przypadku gdy zachowana jest ortogonalność (tj. gdy w każdym punkcie osie współrzędnych są do siebie prostopadłe), pociąga to za sobą jedynie zmianę składowych tensora metrycznego na jego głównej przekątnej. Np. dla ortogonalnych współrzędnych cylindrycznych

$$(25) \quad \|g\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

dla współrzędnych sferycznych

$$(26) \quad \|g\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix}.$$

Przy użyciu współrzędnych prostoliniowych ukośnokątnych zjawiają się prócz tego różne od zera wyrazy poza główną przekątną. Np. dla dwóch osi współrzędnych prostoliniowych, tworzących kąt φ , podstawowy tensor metryczny na płaszczyźnie jest

$$(27) \quad \|g\| = \begin{vmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 \cos \varphi \\ e_2 e_1 \cos \varphi & e_2^2 \end{vmatrix}.$$

Dla potrzeb elektrotechniki pewne znaczenie posiada geometria przestrzeni euklidesowej charakteryzującej się tym, że podstawowy tensor metryczny ma także składowe g_{rr} ujemne, a więc niektóre osie są urojone.

Rozważania dotyczące trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej przenieść można bez trudności na przestrzeń euklidesową o r wymiarach.

Wyróżniającą właściwością przestrzeni euklidesowej jest to, że zawsze można w niej dobrać taki układ współrzędnych (np. współrzędne kartezjańskie), dla którego podstawowy tensor metryczny ma wartość stałą, niezależną od punktu przestrzeni. Przestrzeń euklidesowa jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego pojęcia, tzw. *przestrzeni* $R i e m a n n a$. W przestrzeni tej tensor metryczny, będący funkcją ciągłą, jest tensorem symetrycznym ($g_{ik} = g_{ki}$), a jego wyróżnik nie równa się zeru, [39]. Prócz tego, jeśli przestrzeń ma być rzeczywistą, forma kwadratowa $g_{ik} x^i x^k$ musi być określona i dodatnia. Przestrzeń taka jest, ogólnie biorąc, zakrzywiona, tzn. nie potrafimy znaleźć podstawowego tensora, który byłby stały dla całego obszaru. Natomiast zależność (22) jest tutaj nadal spełniona, co oznacza, że odległość dwóch sąsiednich punktów jest w przestrzeni $R i e m a n n a$ określoną jednorodną formą kwadratową. Ponieważ składowe tensora metrycznego zmieniają się od punktu do punktu, dane zależności geometryczne obowiązują jedynie w określonym punkcie przestrzeni. Typową metodą postępowania w zagadnieniach tensorowych tego typu jest *usztynwienie* tensora $\|g\|$ dla danego punktu, to jest przejście do przestrzeni euklidesowej *stycznej* w danym punkcie do przestrzeni $R i e m a n n a$. Zazwyczaj nie stoi na przeszkodzie, aby w owej pomocniczej przestrzeni stycznej wybrać najdogodniejszy dla badanego przypadku, np. kartezjański, układ współrzędnych. Składowe wektora lub tensora sprowadzone do tych współrzędnych kartezjańskich — zamiast do współrzędnych krzywoliniowych — niektórzy autorzy, [17], [49], nazywają *współrzędnymi fizycznymi*. Termin ten usprawiedliwiony jest faktem, że współrzędne kartezjańskie zostają tu utworzone za pomocą podstawowego tensora metrycznego, a więc uwzględniają właściwości przestrzeni $R i e m a n n a$ w danym punkcie. Klasycznym przykładem zastosowania tej metody jest układ osi odniesienia przyjmowany w szczególnej teorii względności. Takie postępowanie stwarza jednak pewne niedogodności. Otrzymane związki matematyczne dotyczyć będą wówczas (i to z pewnymi zastrzeżeniami) bezpośredniego otoczenia punktu przyjętego za początek układu współrzędnych.

Dlatego w rachunku tensorowym stosujemy często inną metodę. Mówiąc o odległości między dwoma nieskończenie bliskimi punktami w przestrzeni $R i e m a n n a$ rozumiemy przez nią długość najkrótszej drogi

łączącej te punkty. Droga ta przeprowadzona od punktu do punktu wyznacza tzw. *krzywą geodezyjną*, której równanie różniczkowe ma postać

$$(28) \quad \frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0,$$

gdzie Γ_{ij}^k jest tzw. *symbolem Christoffela drugiego rodzaju*

$$(29) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_r g^{rk} \left[\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} \right] = \sum_r g^{rk} \Gamma_{r,ij}.$$

$\Gamma_{r,ij}$ oznacza symbol Christoffela pierwszego rodzaju.

Niektórzy autorzy, [75], wprowadzają odmienne oznaczenia, tzw. *nawiasy Christoffela*

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \quad \text{oraz} \quad \Gamma_{r,ij} = [r,ij].$$

Zwróćmy uwagę, że symbol Christoffela drugiego rodzaju nie jest tensorem. Wynika to chociażby z faktu, że w osiach prostoliniowych $\Gamma_{ij}^s = 0$, a przy innych współrzędnych ma on wartość różną od zera. Symbol Christoffela określa poprawkę, jaką trzeba dodać do wektora (lub tensora) A^r przy jego przeniesieniu do sąsiedniego punktu w przestrzeni Riemanna. Obowiązuje tu zależność

$$(30) \quad A^r + \delta A^r = A^r - \Gamma_{ij}^r A^i dx^j.$$

Metoda ta pozwala na wygodne przekształcenie układu współrzędnych i dobranie najdogodniejszych w danych warunkach osi odniesienia.

Poprzednio omówiona interpretacja geometryczna tensora w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej służyła do elementarnego wprowadzenia w zagadnienia tensorowe i stanowiła wąski wycinek problemu. Przy przejściu do przestrzeni Riemanna pojęcia geometryczne stają się znacznie ogólniejsze, chociaż bardziej abstrakcyjne. Matematycy przedstawiają tu wielkość tensorową jako *obiekt geometryczny* (liniowy), tj. utwór matematyczny, posiadający składowe transformujące się liniowo przy przejściu od jednego układu współrzędnych do drugiego za pomocą dowolnych transformacji tworzących *grupę*. Prawo, jakiemu podlega grupa transformacji, określa typ obiektu geometrycznego, czyli charakter tensora. W tym najogólniejszym ujęciu obiekt geometryczny zostaje opisany nie intuicyjnym obrazem plastycznym, lecz istotnymi cechami zmienności danej grupy. Rozumiemy teraz, że omówiona na początku transformacja układu współrzędnych nie jest przypadkową operacją matematyczną, lecz ma podstawowe znaczenie zarówno fizyczne, jak geometryczne. Za pomocą transformacji możemy bowiem wykryć niezmiennicze, a więc najistotniejsze właściwości obiektu.

3. Interpretacja fizyczna wielkości tensorowych

Celowo zaczęliśmy od rozpatrzenia geometrycznego obrazu tensorów, aby na tej podstawie przejść do określenia ich sensu fizycznego. Wydaje się bowiem, że metoda geometryzacji zjawisk fizycznych, szeroko stosowana w fizyce teoretycznej, jest zbyt mało wykorzystana w technice, mimo swych niewątpliwych walorów logicznych i dydaktycznych. Geometryczne, a ściślej biorąc tensorowe przedstawienie zjawisk fizycznych stwarza bowiem uniwersalny język, pozwalający opisać bardzo odległe od siebie zjawiska przyrody. W niektórych dziedzinach — zwłaszcza w elektrotechnice — *rachunek symboliczny* dał tak łatwe i przejrzyste metody geometryzacji, że stały się one codziennym narzędziem pracy inżyniera nie tylko w zakładzie naukowym, lecz i w produkcji. W bardziej złożonych przypadkach *technika* napawa jeszcze lękiem wyobrażenie układu mechanicznego o n stopniach swobody, jako punktu w przestrzeni r -wymiarowej. Tu jednak właśnie tkwią możliwości potencjalne zastosowań rachunku tensorowego, który może być bardziej ogólnym środkiem geometryzacji niż rachunek liczb zespolonych.

W celu przejścia od wielkości geometrycznych do zjawisk fizycznych musimy przede wszystkim uogólnić pojęcie przestrzeni, a właściwie geometrii. Dotychczas posługiwaliśmy się *przestrzenią metryczną*, w której określić można było jednoznacznie odległości i kąty liniowe w przestrzeni, używając podstawowego tensora metrycznego. W fizyce i technice mamy natomiast przeważnie do czynienia z parametrami danego zjawiska, które nie dadzą się mierzyć wspólną miarą, chociaż z powodzeniem można je przedstawić w postaci wykresu geometrycznego płaskiego, przestrzennego czy r -wymiarowego. Takim wykresem jest np. obraz entropii w funkcji ciśnienia, gęstości i temperatury gazu lub obraz napięcia w funkcji zmian oporności rzeczywistej i urojonej obwodu elektrycznego.

Pojęcie przestrzeni metrycznej trzeba będzie zastąpić ogólniejszym pojęciem *przestrzeni wektorowej*. Układem odniesienia jest tu układ «wektorów», których długości nie dadzą się porównać ze sobą. Jedna z nich jest, na przykład, miarą czasu, druga oznacza temperaturę stygnącej bryły lub też trzy wektory są mierzone długością i wyznaczają miejsce pomiaru wewnątrz sali, ale czwarty odpowiada głośności dźwięku wyrażonej, oczywiście, nie w cm, lecz w fonach. Pojęcie wektora jest tu bardzo uogólnione i mówi o porównaniu lub przejściu między dwoma stanami fizycznymi danego układu. Takie pojęcia, jak kąty między osiami współrzędnych, skale wspólne dla tych osi i podstawowy tensor metryczny, tracą w tych warunkach określony sens.

Analitycznie można zdefiniować taki uogólniony wektor jako ciąg o n wyrazach $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, przy czym wyrazy te są elementami pew-

nego zbioru liczb, zwanego niekiedy *ciałem matematycznym*, [66]. Zbiór takich wektorów określa n -wymiarową przestrzeń wektorową.

Należy tutaj przejść na kategorie rozumowania geometrii afinicznej, aby zbadać niezmiennicze właściwości układu, niezależne od przypadkowego wyboru osi współrzędnych. Brzmi to nieco abstrakcyjnie, w rzeczywistości jednak jest tłumaczeniem na język geometrii różniczkowej najprostszych czynności technicznych, jakie spełniamy np. określając moc maszyny parowej na podstawie wykresu indykatorowego.

Chcąc więc najogólniej określić znaczenie fizykalne tensora, musimy przenieść to pojęcie do przestrzeni wektorowej. Właściwości tensorowe obiektów, wyrażone w geometrii euklidesowej lub np. geometrii Ł o b a c z e w s k i e g o, stanowią szczególne przypadki geometrii wektorowej.

Otóż trzeba przede wszystkim odpowiedzieć na pytanie, czy rzeczą słuszną będzie traktowanie tensora jako obrazu wielkości fizycznej, a nie tylko pojęcia geometrycznego i analitycznego.

Postaramy się pośrednio odpowiedzieć na to pytanie. Każdy z nas zdaje sobie sprawę, że poprawne zależności matematyczne układać można jedynie między wielkościami o tych samych mianach lub, idąc dalej, określonych tymi samymi jednostkami. Ta naczelna zasada ważnej dla potrzeb praktyki dyscypliny matematycznej, jaką jest *analiza wymiarowa*, [13], staje się zrozumiała już dla ucznia szkoły podstawowej.

Może się czasem zdarzyć, że dla wielkości wyrażonych w pewnych odpowiednio dobranych, chociaż różnych, jednostkach potrafimy ułożyć równania pozornie sprzeczne z zasadami analizy wymiarowej. Na przykład, w podstawowym dla akustyki wzorze $S a b i n e' a$, [60], po lewej stronie figuruje czas pogłosu w sekundach, po prawej mamy iloraz pojemności sali w m^3 przez zdolność pochłaniania w m^2 . Rzecz polega na tym, że występujący we wzorze współczynnik 0,161 ukrywa w sobie odwrotność prędkości rozchodzenia się dźwięku, wyrażoną w sek/m. Jeżeli zamiast w metrach wielkość po prawej stronie wzoru wyrazimy w stopach, wzór przestaje obowiązywać, gdyż zmienia się jego współczynnik liczbowy. Używając języka tensorowego powiemy zatem, że *charakter niezmienniczy* (inwariantny), tj. niezależny od wyboru jednostek, mają tylko równania o tych samych *mianach*.

Zasadę tę można potraktować szerzej odnosząc ją nie tylko do jednostek miar, lecz ogólnie do obiektów geometrycznych, pozostających w określonym stosunku do układu wektorów jednostkowych, wyznaczających współrzędne w geometrii afinicznej. Inaczej mówiąc, cechy inwariantne mają jedynie równania wiążące wielkości o tym samym charakterze tensorowym, a więc wielkości identycznie zachowujące się przy zmianie układu współrzędnych. To ogólne prawo ma równie głębokie

znaczenie, jak przytoczona zasada zgodności wymiarów. W tym punkcie, jak zresztą i w innych, występuje silne powiązanie analizy wymiarowej z rachunkiem tensorowym. Nawet pewne symbole graficzne, [52], używane w analizie wymiarowej mają swój odpowiednik w rachunku tensorowym i macierzowym.

Na przykład, typowe równanie analizy wymiarowej, odnoszące się do zespołu wielkości x_i

$$(31) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

przy zmianie wielkości i typu jednostek na zespół X_i transformuje się za pomocą zależności

$$(32) \quad \|X\| = \begin{vmatrix} k_1^1 & k_2^1 & \dots & k_n^1 \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ k_1^n & k_2^n & \dots & k_n^n \end{vmatrix} \cdot \|x\|,$$

gdzie $k_i^m = \partial X_m / \partial x_i$ jest odpowiednikiem tensora (7). W przypadku gdy wymiary wielkości są zachowane, a zmienia się tylko ich wartość, równanie należy pomnożyć przez symbol **K r o n e c k e r a** δ_r^k , otrzymujemy wówczas elementarną zależność

$$(33) \quad X_s = k_s^r \delta_r^k x_k.$$

W geometrii elementarnej spotykamy się z dwoma rodzajami wielkości. Pierwsze z nich są to skalary, które nie reagują na najbardziej wymyślne zmiany układu współrzędnych. Drugie — to wektory, do których określenia obok wartości bezwzględnej potrzebne jest podanie kierunku; inaczej mówiąc, musimy znać r składowych wektora wzdłuż jego osi współrzędnych. Przy zmianie układu odniesienia składowe dowolnych wektorów (mówimy o wektorach geometrii elementarnej) transformują się w ten sam sposób.

Ujęcie zjawisk przyrody za pomocą ruchu i sumowania się wektorów nie jest jednak w bardzo wielu przypadkach wystarczające. Zjawiska te podlegają znacznie bardziej skomplikowanym prawom niż proste przekształcenia wektorowe. Okazało się, że istnieje wielka grupa faktów przynależnych do bardzo, zdawałoby się, odległych od siebie dziedzin fizyki i techniki, które to fakty zmieniają się wedle tych samych praw, dających się wyrazić za pomocą odpowiednich tensorów. Ponieważ, jak widzieliśmy poprzednio, zarówno skalary, jak wektory są niczym innym jak tensorami szczególnego rodzaju, fragmentaryczna i przypadkowa interpretacja geometryczna zjawisk przyrody może być ujęta w logicznie

zamkniętą całość, w system rozumowania matematycznego dający się wszechstronnie wykorzystać. Rodzaj charakteru tensorowego równań matematycznych pozwala na sklasyfikowanie nie tylko obiektów geometrycznych, ale i zjawisk fizycznych. Daje to nadzwyczaj dogodny sposób zorientowania się, czy obserwowana zależność matematyczna ma charakter przypadkowy, związany z lokalnymi warunkami przeprowadzonego doświadczenia, czy też jest inwariantna i reprezentuje istotne powiązanie parametrów fizycznych.

Można tu sformułować ogólne twierdzenie, że charakter niezmienniczy posiadają jedynie zależności między zjawiskami przyrody dającymi się przedstawić tensorami tego samego rzędu i typu zmienniczości. Dla zjawisk, w których występują parametry nie dające się mierzyć wspólną miarą, a więc dla zjawisk wymagających opisu kategoriami geometrii wektorowej, oba warunki są równie istotne. Przy opisie zjawisk, ujmowanych za pomocą geometrii metrycznej, warunek drugi może być pomijany, gdyż posługując się podstawowym tensorem metrycznym mamy, jak wiadomo, prawo zmieniać charakter zmienniczości, co wyraża się zmianą poziomu indeksów. Natomiast w przestrzeni wektorowej nie można na ogół utworzyć tensora metrycznego, a więc charakter zmienniczości (poziom indeksów) staje się istotną cechą opisywanej wielkości.

Często się zdarza, że zjawisko fizyczne opisujemy zespołem równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Rachunek tensorowy jest wówczas szczególnie pożyteczny, gdyż pozwala usunąć wpływ przypadkowego wyboru osi odniesienia na przebieg różniczkowania.

Posługujemy się w tym celu metodą różniczkowania bezwzględnego, stanowiącego trzonowy składnik rachunku tensorowego. Metodę różniczkowania bezwzględnego bodaj najjaśniej ujmuje P. K. R a s z e w s k i, [71]. Jeżeli badamy dowolne pole tensorowe $T_{klm}^{ij}(M)$ w bezpośrednim otoczeniu punktu M , wówczas w zwykłym rachunku różniczkowym rozpatrujemy pełne pochodne $dT_{klm}^{ij}(M)/dx^i$ tej funkcji względem kolejnych współrzędnych. Wielkość ta zawiera wyrazy podobnego typu jak równanie (28), które nie będąc tensorami zaciemniają charakter zmienności zjawisk i nie pozwalają na transformację układu współrzędnych. Opisaną trudność przewyżczamy przy tensorowym różniczkowaniu w ten sposób, że równolegle przesuwamy do punktu M tensor $T_{klm}^{ij}(M')$ z punktu M' nieskończenie bliskiego punktu M . Liniowa część różnicy tego tensora z tensorem dla punktu M daje właśnie różniczkę bezwzględną $D T_{klm}^{ij}$ tensora. Otrzymana tą metodą pochodna tensora ma np. dla prostego przypadku kowariantnego wektora postać

$$(34) \quad D_i A_k = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - A_s \Gamma_{ik}^s.$$

Jako symbolu różniczkowania bezwzględnego niektórzy autorzy, [43] używają symbolu nabła, ∇ .

W ten sposób przy różniczkowaniu wyeliminowany został wpływ czynnika zawierającego symbol *C h r i s t o f f e l a*. Nastąpiło jakby wyprostowanie i sprowadzenie do stałej skali osi współrzędnych, co przejawia się tym, że przy różniczkowaniu bezwzględnym podstawowy tensor metryczny przechodzi jako wielkość stała:

$$(35) \quad D_r g_{ik} = 0.$$

Jest to tzw. *twierdzenie Ricci'ego*.

Jak wspomniano poprzednio, ujęcie geometryczne matematyki tensorowej wcale nie jest konieczne; z powodzeniem można by się ograniczyć do operowania zbiorami symboli nie przypisując im elementarnych właściwości geometrycznych, a jedynie pewne prawa transformacji. Nie wynika stąd jednak równoznaczność pojęć tensora i macierzy; podobieństwo graficzne symboli jest tu zwodnicze. W teorii przekształceń liniowych *macierz kwadratowa* przedstawia, jak wiemy, współczynniki rodziny równań liniowych zachodzących między m wielkościami. Współczynnikiem tym, czyli składowym macierzy, nie przypisujemy specjalnych właściwości transformowania. Mogą to być zależności między dwoma wielkościami przestrzeni r -wymiarowej, obowiązujące jedynie dla danego układu współrzędnych. Przy zmianie układu współrzędnych macierz traci na ogół sens i na jej podstawie nie potrafimy wnioskować o niezmienniczych właściwościach obiektu, które głównie nas interesują. Macierz pozwala na zrytmizowanie rachunku, na zrutyinizowanie przekształceń pośrednich, sama przez się nie jest jednak wielkością, której można by przypisać sens fizyczny; nie kryje się też za nią synteza zjawisk przyrody. Tymczasem tensor przedstawiony w postaci macierzy posiada specjalne właściwości, które czynią z niego obraz wielkości fizycznej; mianowicie, macierz tensorowa przy zmianie układu współrzędnych wykazuje określone *prawa transformacji*, a jej składniki są ze sobą w organiczny sposób związane. Trzeba przy tym zwrócić uwagę, że tensory 2-go rzędu, określone wyżej omówionymi prawami transformacji, mogą być rozwinięte zasadniczo jedynie na macierze kwadratowe, gdy odpowiednikami tensorów 1-go rzędu (poliwektorów) są macierze wierszowe lub słupowe: «Tensor to macierz (kwadratowa) plus prawa jej transformowania», [9].

4. Znaczenie metody tensorowej w technice

Przejdźmy do głównego interesującego nas zagadnienia, tj. do perspektyw wykorzystania rachunku tensorowego w technice. Zagadnienie należałoby podzielić na odpowiedzi na dwa pytania:

(1) co może dać rachunek tensorowy w zagadnieniach technicznych, w których występują typowe wielkości tensorowe, a więc w których dają się stosować metody tego rachunku i

(2) w jakich dziedzinach techniki występują wielkości tensorowe, a więc gdzie oczekiwać należy konkretnych korzyści z zastosowania tej metody.

Pytanie pierwsze wymaga syntetycznej odpowiedzi, opartej na ogólnej znajomości rachunku tensorowego, pytanie drugie pociąga za sobą konieczność analizy związków i zjawisk fizycznych za pomocą rachunku tensorowego.

Wydaje się, że istotna cecha użyteczności rachunku tensorowego polega na stopniu uogólnienia wprowadzanym przez ten rachunek. Proces technicznego obliczenia opiera się przecież na zastąpieniu konkretnych liczb odnoszących się, na przykład, do obwodu elektrycznego — symbolami oraz na wykonaniu na tych symbolach działań matematycznych, aby potem od symbolów przejść z powrotem do wartości numerycznych.

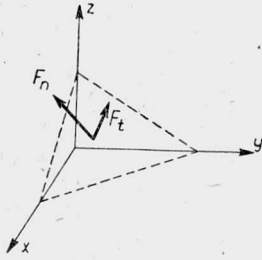
Najprostszym rodzajem uogólnienia będzie uogólnienie *algebraiczne*, w którym symbolami zastępujemy poszczególne liczby. Na podstawie takiego uogólnienia wnioskować możemy o przebiegu pojedynczego zjawiska. Jeżeli zaś rozważania chcemy odnieść do zbioru elementów, nie zajmując się każdym z nich z osobna, to użyjemy metody *macierzowej* zastępując dany zbiór liczb lub symboli algebraicznych pojedynczym symbolem macierzowym. Geometrycznie biorąc jest to przejście od układu o r stopniach swobody do pojedynczego punktu w przestrzeni r -wymiarowej. W postępowaniu takim kryje się jednak poważne niebezpieczeństwo. Ujęcie macierzowe skróciło formę zapisu, ale do poznania zjawiska nie wniosło nowych elementów, gdyż otrzymane wnioski odnoszą się tylko do pewnych warunków, czyli do wybranego układu współrzędnych.

Jeżeli chcemy zmienić układ współrzędnych, czyli rozciągnąć dane równanie na całą grupę zjawisk o analogicznych właściwościach lub zbadać wpływ jednego z parametrów (współrzędnych) danego przebiegu, to staje się nieodzowne znalezienie *inwariantnych* cech tej grupy elementów, a więc metody przejścia z jednego układu współrzędnych na inne. Staje się więc rzeczą konieczną zastosowanie metody *tensorowej*. Zależnie od charakteru badanego obiektu geometrycznego (zjawiska fizycznego) oraz od stopnia zmian i uogólnień, jakie mamy wprowadzić, zmienia się rodzaj potrzebnej transformacji tensorowej.

Schematyczna klasyfikacja metod transformacji przydatnych w technice jest dość ryzykowna i może doprowadzić do zupełnie błędnych wniosków, jak to miało miejsce w pracach G. K r o n a, [45], i [47]. Wydaje się natomiast rzeczą logiczną przeprowadzenie podziału opartego na roz-

różnieniu celu, któremu ma służyć transformacja. W poglądowy sposób można tu rozróżnić trzy grupy problemów technicznych, którym podporządkować można swoiste metody transformacji tensorowych.

(1) Najprostszy typ transformacji ogranicza się zazwyczaj do przesunięcia lub obrotu sztywnego układu współrzędnych. Transformacja ta ma na celu zbadanie właściwości danego obiektu geometrycznego bez czynnego wkraczania w przebieg zjawiska. Poglądowo można powiedzieć, że obserwator, znajdujący się na układzie osi współrzędnych luźno związanych z badanym obiektem, a więc nie podlegających zmianom zachodzącym w obiekcie, ogląda ten obiekt z różnych stron.



Rys. 7

Przykładem tej metody będzie np. obliczenie za pomocą transformacji tensorowej naprężeń panujących w różnych przekrojach bryły przestrzennej. Jeżeli w pierwotnym kartezjańskim układzie współrzędnych wyznaczyliśmy tensor naprężeń $\|\sigma\|$ (rys. 7) o składowych σ_{ij} , to dla znalezienia sił normalnych F_n i stycznych F_t , panujących w pewnej płaszczyźnie P , trzeba w ten sposób obrócić osie współrzędnych, aby w nowym układzie X^i np. oś X^1 była równoległa do kierunku normalnej do płaszczyzny. Posługujemy się w tym celu transformacją analogiczną do (11)

$$(36) \quad \sigma'^{kl} = \sum_{i,j} C_i^k C_j^l \sigma^{ij};$$

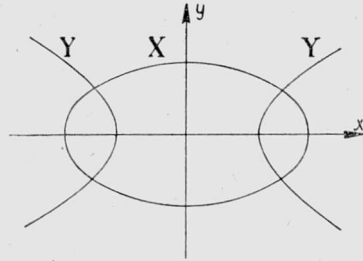
składowe σ'^{kl} dają żądane składowe sił.

(2) Bardziej skomplikowana transformacja będzie potrzebna wówczas, gdy będziemy chcieli *formalnie przekształcić* badany obiekt geometryczny. Przekształcenie takie może mieć na celu uproszczenie rozpatrywanego zjawiska lub sprowadzenie dwóch różnych obiektów do obiektów o tej samej postaci w celu ich porównania. Po rozpatrzeniu takiego uproszczonego obiektu musimy z powrotem transformować wyniki na układ pierwotny, czyli dokonać transformacji, która ma za zadanie wyciągnięcie wniosków o obiekcie bardziej skomplikowanym na podstawie prostego obiektu. We wszystkich tych przypadkach transformacja wpływa na formalny opis zjawiska nie zmieniając jego istotnego przebiegu. Zależnie od rodzaju obiektu i wymaganego stopnia uproszczenia trzeba przy tego rodzaju problemach posługiwać się transformacją przez przesunięcie lub obrót, bądź też zmianę układu osi współrzędnych, co oznacza zmianę podstawowego tensora metrycznego. Na przykład, chcąc sprowadzić układ trzech symetrycznych cewek sprzężonych do trzech niezależnych obwodów wystarczy transformacja przez obrót w układzie kartezjańskim, jeżeli natomiast przepływ ciecży w przewodzie eliptycznym chcemy spro-

wadzić do przepływu w rurze okrągłej, to potrzebna jest transformacja osi odniesienia. Dla walca o przekroju kołowym podstawowy tensor metryczny $\|g_0\|$ wyznaczony był przez równanie (25), gdy dla przekroju elipsoidalnego przy wprowadzeniu osi ortogonalnych XY (rys. 8)

$$(37) \quad \|g_e\| = \begin{vmatrix} a\sqrt{\cosh^2 X - \cos^2 Y} & 0 & 0 \\ 0 & a\sqrt{\cosh^2 X - \cos^2 Y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Współrzędna Z pozostaje niezmienniona, można więc ją opuścić. Transformacji dokonamy posługując się wzorem (22). Transformacje tego typu możemy sobie uzmysłowić jako oglądanie przedmiotu w krzywym zwierciadle, które nadaje obrazowi pożądane przez nas uproszczone zarysy.



Rys. 8

(3) Wreszcie celem trzeciego typu transformacji jest *odwzorowanie rzeczywistych procesów* zachodzących w obiekcie przez zmianę układu współrzędnych. Gdy w obu poprzednich problemach osie współrzędnych były niejako luźno związane z obiektem, a transformacja miała charakter formalny, uzależniony od położenia (pierwszy problem) lub sposobu patrzenia (drugi problem) postronnego widza, to w ostatnim problemie transformacja jest wyrazem istotnego przebiegu zjawiska fizycznego. Obserwator, zamiast patrzeć z boku, został przyczepiony do pewnego elementu układu (np. do cząstki materii i z tego stanowiska widzi zjawiska. Problemy tego typu są nadzwyczaj różnorodne, przeważnie wymagają one transformacji na współrzędne krzywoliniowe i przejścia od przestrzeni euklidesowej do przestrzeni Riemanna. W wielu jednak przypadkach sprawa ogranicza się do przesunięcia lub obrotu osi współrzędnych. Najprostszym przykładem jest odwzorowanie względnego ruchu dwóch obiektów przez odpowiednie przemieszczenie osi współrzędnych. Często metoda ta jest stosowana przy badaniu odkształceń ośrodka ciągłego, mianowicie ze współrzędnych nieruchomych x^i przechodzimy na współrzędne X^i związane z materią odkształconego ośrodka (współrzędne *Lagrange'a*). W nowych współrzędnych otrzymujemy znacznie prostszą postać niektórych wzorów, opłaca się zatem użycie skomplikowanego układu odniesienia. Na przykład praca dL naprężeń σ^{kl} powodujących przemieszczenia δu_i da się przedstawić w osiach odkształconych X^i różniczkami absolutnymi

$$(38) \quad dL = \frac{1}{2} \sum_{kl} \int_V \sigma^{kl} \left[\frac{D \delta u_k}{D X^l} + \frac{D \delta u_l}{D X^k} \right] dX^1 dX^2 dX^3,$$

co sprawiałoby trudność, gdyby równanie to odnosiło się do osi x^i . Po-
wyższy podział da się streścić w następujący sposób:

grupa 1 obejmuje transformacje formalne nie zmieniające postaci
obiektu,

grupa 2 obejmuje transformacje formalne powodujące zmianę po-
staci (składowych) obiektu,

grupa 3 obejmuje transformacje odwzorowujące rzeczywiste zmiany
w obiekcie.

W zastosowaniach będziemy mieli czasem dō czynienia z kombinacją
różnych grup transformacji, najczęściej będzie to dotyczyło badania za
pomocą transformacji grupy pierwszej właściwości obiektu, który uległ
transformacji grupy trzeciej.

Transformacje takie występują w wielu zagadnieniach fizyki, jeżeli
posługujemy się równoległe różnymi typami współrzędnych, np. współ-
rzędnymi E u l e r a i L a n g r a n g e' a. Przyjęty tu podział wydaje
się znacznie logiczniejszy od koncepcji K r o n a, [45], która nigdy nie
znalazła udokumentowania w praktycznych zastosowaniach.

Uzyskanie formuły, uogólniającej w formie równania tensorowego
szczególne zależności, występujące w jakiejś konstrukcji czy procesie
technologicznym, nie zadowoli jednak praktycznych wymagań inżyniera.
W celu uzyskania przydatnego technicznie rozwiązania, po wykonaniu
generalizacji obiektu metodą tensorową, przejść trzeba drogę powrotną
do coraz bardziej szczegółowych przypadków. Należy zatem rozwinąć ten-
sory na odpowiednie macierze, następnie znaleźć wartości algebraiczne
tych macierzy i wreszcie podstawić wartości liczbowe, znajdując potrzeb-
ne dane techniczne.

Nasuwa się wobec tego pytanie, czy istotnie dla potrzeb techniki lub
nauk technicznych potrzebne jest to uogólnienie. Równie dobrze można
zapytać, czy z doliny (od znanych wartości numerycznych) warto piąć się
na górę (ku uogólnieniom), aby potem znów zejść w doliny (do wartości
numerycznych poszukiwanych). Czy nie byłoby lepiej wędrować dolina-
mi, to jest stosować stopniowe przeliczanie wartości liczbowych.

Otóż przedłużając nasze porównanie można powiedzieć, że na szczyt
góry warto wejść w czterech przypadkach: (1) jeżeli chcemy zbadać, z cze-
go składa się wierzchołek góry, (2) jeżeli pragniemy obejrzeć widok ze
szczytu, (3) gdy droga przez góry okaże się w wyniku łatwiejsza niż bar-
dzo długa droga dolinami, i, wreszcie, wówczas (4) gdy dolina jest cał-
kowicie otoczona górami, nie ma więc z niej innego wyjścia.

Podobnie jest w naszym przypadku. Błędne byłoby twierdzenie, że
rachunek tensorowy jest wszędzie i zawsze przydatny; nie ma sensu
silić się na jego zastosowanie wówczas, gdy kompletny i jasny opis zja-
wiska dają prostsze metody, chyba że zależy jedynie na ilustracji zasto-

sowania symboli tensorowych. Tam jednak, gdzie użycie pojęć tensorowych jest uzasadnione, mogą one dać poczwórną korzyść.

(1) Proste w swej formie algebraicznej wzory tensorowe ujmują w sposób *syntetyczny* bardzo skomplikowane przebiegi i pozwalają technikowi zorientować się w generalnych zależnościach, które rządzą projektowanym przez niego urządzeniem. Równanie takie, nawet bez rozwiązania numerycznego, pozwala konstruktorowi na w \acute{p} ólintuicyjne określenie, w jaki sposób należy dobrać parametry układu, aby uzyskać zamierzony efekt, lub też daje możliwość zorientowania się, jak wpłynie zmiana jednego z elementów na działanie całego urządzenia. Ustalenie typów tensorów opisujących badaną grupę zjawisk pozwala na ich *sklasyfikowanie*, daje zatem możliwość określania charakteru zmienniczości i inwariantnych związków, łączących poszczególne części danego urządzenia czy też czynniki procesu technologicznego. W ten sposób głębiej wnikamy w istotę zjawisk fizycznych. Zamiast rzutu oka z jakiejś określonej perspektywy, mogącej wytworzyć złudne skróty obrazu, oglądamy obiekt ze wszystkich stron, wyławiając jego istotne cechy, a odrzucając przypadkowe deformacje obrazu zależne od kierunku patrzenia.

(2) Równania tensorowe mają identyczną postać dla bardzo różnych zjawisk fizycznych. Raz ustalone zależności można więc stosować do różnych dziedzin techniki. Ten właśnie aspekt zagadnienia jest dla autora osobiście szczególnie atrakcyjny, pozwala bowiem na bardziej przejrzyste niż w dotychczasowych pracach, [58] i [59], ujęcie *analogii* elektromechanicznych. Nie będziemy tu powtarzać podanych wówczas motywów decydujących o wadze zagadnienia analogii we współczesnej technice. Podkreślić tylko wypada, że rachunek tensorowy posiada w tym zakresie ogromne walory dydaktyczne.

W możliwości operowania tymi samymi związkami w różnych dziedzinach nauk technicznych tkwi jeszcze, oprócz zagadnienia analogii, inna ważna korzyść praktyczna. Chodzi o to, że obecne problemy techniczne, zwłaszcza problemy, które przed nami stawia *kompleksowy* przemysł gospodarki ludowej, są z reguły wieloparametrowe i bardzo różnorodne, wiążące się z zupełnie odrębnymi dziedzinami wiedzy. Otóż przy metodzie tensorowej możemy, przynajmniej symbolicznie, operować dowolną ilością zmiennych (wektorów podstawowych), a wskaźniki zmienniczości pozwalają na zorientowanie się, jaki jest wpływ poszczególnych czynników.

(3) O ile chodzi o *rachunkowe zastosowanie* metody tensorowej, a więc zejście do rozwiązań numerycznych, to sytuacja wygląda analogicznie jak przy użyciu algebry macierzowej, do niej bowiem sprowadzają się działania arytmetyczne, które trzeba wykonać przy rozwijaniu tensorów. Sprawa ta była w swoim czasie przedmiotem dyskusji w Zakładzie Elek-

trotechniki Teoretycznej PAN; wartościowe uwagi zawiera praca T. Cholewickiego, [14]. Zainteresowani znajdą szczegóły w podręcznikach specjalnych, [25]. O przydatności rachunku macierzowego (i tensorowego) decyduje tu stopień skomplikowania zagadnienia i jego powtarzalność. Pojedynczy obwód prądowy lub rozkład naprężeń w mało skomplikowanej bryle na pewno łatwiej rozwiążemy rachunkiem elementarnym (pójdziemy do celu dolinami). Natomiast przy zagadnieniach wymagających żmudnych i często powtarzających się przeliczeń metoda macierzowa staje się przewodnikiem i organizatorem rachunku, pozwala bowiem, jak już wspomnieliśmy, na zautomatyzowanie obliczeń. Trudno się jeszcze zorientować, w jakim stopniu rachunek tensorowy i macierzowy będzie przydatny przy posługiwaniu się maszynami matematycznymi. Wydaje się jednak, że zarówno przy opracowaniu programu, jak i przy ustalaniu analogii będzie on bardzo użyteczny.

(4) Trzeba wreszcie stwierdzić, że są pewne problemy, które nie dadzą się w ogóle praktycznie rozwiązać bez użycia metody tensorowej, co oznacza, że zastosowanie rachunkowe tej metody do *istotnego* numerycznego *rozwiązania* zagadnienia sięga dalej niż zastosowanie metody macierzowej. Wynika to z wyżej omówionego faktu, że metoda macierzowa nadaje się tylko do określonego typu współrzędnych, podczas gdy przechodząc na równania tensorowe możemy operować przestrzenią o niemal dowolnych własnościach. Możemy zatem skomplikowane zagadnienia — nie dające się rozwiązać w układzie odwzorowywanym według praw geometrii euklidesowej — sprowadzić do stosunkowo prostych zależności obowiązujących przy odpowiednio dobranych współrzędnych krzywoliniowych [problemy grupy (2) i (3)].

Przejdźmy teraz do zbadania, jak te ogólne wytyczne dostosować do różnych gałęzi techniki. Byłoby rzeczą niecelową przypadkowe wymienianie tych dziedzin, w których sporadycznie spotykamy przykłady użycia metody tensorowej. Należy raczej zapytać, jakie są *podstawowe problemy techniki* dające się wyrazić i rozwiązać symbolami tensorowymi.

5. Wielkości tensorowe w ośrodkach ciągłych

Na wstępie stwierdziliśmy, że rachunek tensorowy powstał z potrzeb krystalografii i teorii sprężystości rozwijając się przede wszystkim jako narzędzie badania kontinuum r -wymiarowego. Obecnie jednak znaleziono już, [3], [6], dogodne metody adaptacji tego rachunku do systemów o stałych skupionych. Rachunek tensorowy może zatem przeniknąć do elektrotechniki i mechaniki zarówno przez zagadnienia pola, jak i przez problemy systemów. Używać będziemy nazwy *system* dla określania obiektu składającego się z elementów skupionych, natomiast termin *układ* rezerwujemy nadal dla zespołu osi odniesienia.

Zachowamy historyczną kolejność i zaczniemy od zagadnienia pola abstrahując na razie od tego, czy jest to pole sił sprężystych, czy też pole elektromagnetyczne. Należy przede wszystkim zbadać, jaki charakter tensorowy mają występujące w polu wielkości fizyczne, co pozwoli na prawidłowe ułożenie równań tensorowych i ocenę ich przydatności.

Przedtem jednak musimy uzupełnić nasze wiadomości dotyczące różnego typu niepełnych tensorów, jakie skonstruować możemy w przestrzeni metrycznej i wektorowej. Użyjemy przy tym możliwie prostych określeń, nie wdając się w subtelności wprowadzone przez niektórych autorów, [55].

Poprzednio mówiliśmy, że tensor antysymetryczny może być przedstawiony w formie multiwektora. Ta interpretacja fizykalna ma sens wówczas, gdy rząd tensora n jest mniejszy od ilości współrzędnych p . W przypadku gdy n równa się r , a tensor jest antysymetryczny względem wszystkich indeksów, wartość różną od zera będzie miał tylko wyraz i, j, \dots, r tego tensora, mianowicie wyraz nie zawierający dwóch jednakowych indeksów. Pozostałe wyrazy równe są zeru. Tensor tego typu daje się więc przedstawić pojedynczą liczbą, która jednak nie jest skalar, lecz tzw. *pseudoskalar*, gdyż zmienia swą wartość zależnie od układu współrzędnych. Oznaczmy go literą gotycką \mathfrak{A} . Używa się również oznaczenia literami pisanymi półgrubym drukiem, [74].

W problemach technicznych i fizycznych nie stoi na przeszkodzie, aby przyjąć jako stałe obowiązującą pewną kolejność indeksów, podobnie jak to robimy w rachunku wektorowym, oznaczając zwrot wektora względem osi. Wtedy naszemu pseudoskalarowi przypisujemy jeszcze określony zwrot (według Schoutena jest to tzw. *W-skalar*, [74].

W jaki sposób transformuje się pseudoskalar przy zmianie współrzędnych? Na podstawie wzoru (10), zważywszy ponadto znikanie składników o dwóch lub więcej jednakowych indeksach, otrzymamy

$$(39) \quad \mathfrak{A} = \Delta^a \mathfrak{A} \begin{cases} a = 1 & \text{dla tensora kontrawariantnego,} \\ a = -1 & \text{dla tensora kowariantnego.} \end{cases}$$

Litery w nawiasach nie mają tu takiego znaczenia jak indeksy w zwykłych równaniach tensorowych, służą jedynie do określenia, do jakiego systemu współrzędnych odnosi się pseudoskalar (litery duże) i czy powstał on z wektora kontrawariantnego (indeks górny), czy też kowariantnego (indeks dolny). Ważną własnością pseudoskalara jest zależność jego transformacji od rodzaju zmienniczości wyjściowego tensora. W geometrii wektorowej oznacza to istotną różnicę cech danego zjawiska. W geometrii metrycznej sprawa daje się z łatwością wyjaśnić, mianowicie ilo-

czyn składników o różnych indeksach będzie miał w tensorze kontrawariantnym postać

$$(40) \quad \mathfrak{A}^{(x)} = x^1 x^2 x^3,$$

przedstawia zatem *pojemność* elementu przestrzennego. Odpowiedni iloczyn składników wektora kowariantnego

$$(41) \quad \mathfrak{A}_{(y)} = y_1 y_2 y_3,$$

przedstawia odwrotność pojemności, jakie tworzą odpowiednie wektory kontrawariantne. Stąd nazwa *gęstość* skalarna. Wygodne przy rozważaniach fizycznych rozróżnienia gęstości i pojemności skalarnej wprowadzone zostało przez L. Brillouin, [8]; inni autorzy mówią ogólnie o gęstości. Iloczyn gęstości przez pojemność

$$(42) \quad \mathfrak{A}_{(x)} \mathfrak{A}^{(y)} = K$$

jest wielkością niezmienniczą, która w ośrodku ciągłym odpowiada za wartości materii w danym elemencie.

Iloczyn gęstości (pojemności) przez dowolny tensor daje tzw. *gęstość (pojemność) tensorową*. Wielkości te można ogólnie nazwać *pseudotensarami*: Dubnow, [20], używa terminu «tensor względny». W przestrzeni trójwymiarowej pojemność tensorowa jest powierzchnią o określonym kierunku normalnej i określonym zwrocie, stanowi zatem odpowiednik poprzednio wspomnianego biwektora kontrawariantnego. Dla odróżnienia pseudotensory oznaczać będziemy literami gotyckimi.

W przestrzeni metrycznej, ze względu na wzory (22) i (39), przejście z tensora A na pseudotensor \mathfrak{A} następuje za pomocą wielkości

$$(43) \quad A = (|\gamma|)k/2 \mathfrak{A} \begin{cases} k = -1 & \text{dla } \mathfrak{A}^{ij}, \\ k = +1 & \text{dla } \mathfrak{A}_{ij}, \end{cases}$$

gdzie γ jest wyróżnikiem podstawowego tensora metrycznego $\|g\|$.

Zauważymy mimochodem ważną w zastosowaniach technicznych zależność geometryczną, mianowicie rzeczywista objętość elementu dV w układzie współrzędnych x^i równa się

$$(44) \quad dV = (|\gamma|)^{\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Zmiana wartości pseudoskalara następuje, jak widać z równania (39), jedynie wówczas, gdy zmieni się podstawowy tensor metryczny.

Przejście z tensorów właściwych na pseudotensory w wielu przypadkach bardzo upraszcza rachunek, gdyż tensor antisymetryczny rzędu n w przestrzeni r -wymiarowej, posiadający $r!/n!$ ($r - n!$) na ogół różnych od zera i różnych między sobą składowych, redukuje się do pseudotensora o $(r - n)$ składowych. Takim pseudotensorem pierwszego rzędu jest np. multiwektor o określonym zwrocie, który poprzednio rozpatrzyliśmy. W przestrzeni trójwymiarowej objętość tensorowa jest powierzchnią o określonym kierunku normalnej i określonym zwrocie; odpowiada ona biwektorowi kontrawariantnemu.

Mamy tu doskonałą logikę systemu wielkości tensorowych, pozwalającą na łatwe orientowanie się w skomplikowanych zagadnieniach wielowymiarowych.

W problemach elektrotechniki i drgań mechanicznych specjalne znaczenie mają tensory, których składniki są liczbami zespolonymi typu $a + jb$. Tensory takie przy odwróceniu przechodzą na tensory sprzężone o składowych typu $a - jb$. Tensory zawierające składniki proste i sprzężone, tzw. tensory *H e r m i t e' a* czyli *spinory*, zajmują ważne miejsce w fizyce atomowej. W technice macierze tego typu znajdują zastosowania w zagadnieniach złożonych obwodów elektrycznych.

Wróćmy do określenia charakteru tensorowego wielkości pola. Postaramy się wyjść z interpretacji operatorów polowych w geometrii wektorowej, gdyż daje to najogólniejszy obraz zjawisk. Trzeba przy tym pamiętać, że wówczas od punktu do punktu zmieniają się prawa transformacji, a poziom indeksów określających zmienniczość musi pozostać nie naruszalny. Przypadek przestrzeni metrycznej traktować będziemy jako szczególny, jest on zresztą mniej interesujący i wyczerpująco rozważony w literaturze, np. [37].

Przejdźmy kolejno podstawowe operacje wektorowe, ograniczając się do sformułowania najważniejszych wzorów tensorowych.

Gradientem nazywamy pewien wektor G przyporządkowany funkcji skalarnej V (potencjałowi):

$$(45) \quad G = \text{grad } V;$$

można to również przedstawić przez formalne pomnożenie potencjału przez operator *H a m i l t o n a* ∇ (nabla), mający jednocześnie charakter wektorowy i będący symbolem różniczkowym (por. np. N. A. G o r k o w a, [32]):

$$(46) \quad G = \nabla V.$$

W postaci tensorowej gradient określamy wzorem

$$(47) \quad G_k = \frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

W przestrzeni metrycznej wzór ten będzie uzupełniony do postaci

$$(48) \quad G_k = \frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial x^k},$$

gdzie l jest długością jednostkową, określoną przez jednostkowe składowe za pomocą wzoru (22). Za pośrednictwem tensora podstawowego przejść możemy w przestrzeni metrycznej na wygodniejszy w analizie geometrycznej wektor kontrawariantny

$$(49) \quad G^i = \sum_k \frac{g^{ik}}{l} \frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

Następnym pojęciem jest *rotacja*

$$(50) \quad \mathbf{R} = \text{rot } \mathbf{B},$$

którą można formalnie przedstawić jako iloczyn zewnętrzny (wektorowy) operatora *H a m i l t o n a* przez wektor \mathbf{B} :

$$(51) \quad \mathbf{R} = [\nabla \cdot \mathbf{B}].$$

Składniki rotacji w formie tensorowej przedstawiają się następująco:

$$(52) \quad R_{ik} = \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \frac{\partial B_k}{\partial x^i}.$$

Jest to jednorodny tensor antisymetryczny, który odpowiada biwektorowi. Jeżeli wybierzemy jako obowiązujący pewien porządek indeksów tego tensora, to sprowadzimy rotację do gęstości tensorowej.

Przy przejściu do współrzędnych metrycznych ortogonalnych znajdziemy rzeczywiste długości składników wektora rotacji przez wprowadzenie jednostkowych długości $l_{(i)}$, $l_{(k)}$ przyporządkowanych wielkościom B_i , B_k ; przyjmując $B_i = B'_i/l_{(i)}$ oraz $B_k = B'_k/l_{(k)}$ otrzymujemy

$$(53) \quad R_{ik} = \frac{1}{l_{(i)} l_{(k)}} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (l_{(k)} B'_k) - \frac{\partial}{\partial x^k} (l_{(i)} B'_i) \right].$$

Ciekawe właściwości posiada w ujęciu tensorowym *divergencja*. Równanie

$$(54) \quad D = \text{div } \mathbf{C}$$

przedstawia inaczej iloczyn wewnętrzny (skalarny) operatora *H a m i l t o n a* przez wektor

$$(55) \quad D = \nabla \cdot \mathbf{C}.$$

Diwergencja w przestrzeni r -wymiarowej ma następującą postać, w której nie sprecyzowaliśmy na razie charakteru tensorowego poszczególnych wielkości:

$$(56) \quad D = \sum_i \frac{\partial C^i}{\partial x^i}.$$

Zauważyć trzeba, że całka diwergencji przedstawia strumień wpływający z danego obszaru. Szukanie rozbieżności jest więc operacją wektorową, którą przeprowadzamy na wektorze kontrawariantnym C^i pomnożonym przez gęstość skalarną \mathcal{G} , czyli na gęstości tensorowej pierwszego rzędu (wektorowej) \mathcal{G}^i . Łatwo udowodnić, że wówczas diwergencja jest również gęstością skalarną, czyli że wzór (56) należy poprawnie napisać jako

$$(57) \quad \mathfrak{D} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{G}^i}{\partial x^i}.$$

Rozumowanie pozostaje w mocy, jeżeli zamiast gęstości wektorowej wprowadzimy gęstość tensorową wyższego, np. n -rzędu w przestrzeni r -wymiarowej, pod warunkiem, że gęstość ta pozostanie całkowicie antysymetryczną; w przeciwnym razie pojawią się czynniki wyższego rzędu tensorowego. Możemy teraz podać ważną zależność dla gęstości tensorowej drugiego rzędu:

$$(58) \quad \mathfrak{D}^i = \text{Div } \mathcal{G}^{ij} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{G}^{ij}}{\partial x^i}.$$

Diwergencja jest tu wielkością wektorową, a nie jak w rachunku elementarnym skalarną, i dlatego piszemy ją dla odróżnienia z dużej litery.

W przestrzeni metrycznej, gdy szukamy rozbieżności pól zwykłych wektorów, rozumowanie jest uproszczone, gdyż przez operację $\mathcal{G}^i = \sqrt{|\gamma|} C^i$ przechodzimy od wektora do gęstości wektorowej. Dla współrzędnych ortogonalnych w przestrzeni trójwymiarowej, podobnie jak we wzorze (53), możemy przejść do długości rzeczywistych wektorów według wzoru

$$(59) \quad \text{div } C = \frac{1}{l_{(1)} l_{(2)} l_{(3)}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (l_{(2)} l_{(3)} C_1^i) + \frac{\partial}{\partial x^2} (l_{(1)} l_{(3)} C_2^i) + \frac{\partial}{\partial x^3} (l_{(1)} l_{(2)} C_3^i) \right].$$

Na uwagę zasługują jeszcze właściwości *laplasjanu* w ujęciu tensorowym. Możemy go napisać w postaci

$$(60) \quad \nabla^2 V = \text{div grad } V = \sum_k \frac{\partial^2 V}{(\partial x^k)^2};$$

jest to, inaczej mówiąc, iloczyn skalarny (kwadrat) operatora *H a m i l t o n a*:

$$(61) \quad \nabla^2 V = (\nabla \cdot \nabla) V.$$

W przestrzeni wektorowej wielkości takiej nie można w prosty sposób utworzyć, gdyż nie mamy przejścia od składowych kowariantnego wektora gradientu G_k do kontrawariantnego wektora potencjału o składowych B^i .

W przestrzeni metrycznej jest to manipulacja dająca ze skalara skalar, która musi być przeprowadzona przy uwzględnieniu zmiany położenia indeksów:

$$(62) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|\gamma|} g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right).$$

Zamiast $\sqrt{|\gamma|}$ podstawić można odpowiednie długości jednostkowe, co dla osi ortogonalnych w przestrzeni trójwymiarowej daje dobrze znane z analizy wektorowej, [24], wyrażenie laplasjanu

$$(63) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{l_{(1)} l_{(2)} l_{(3)}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{l_{(2)} l_{(3)}}{l_{(1)}} \frac{\partial V}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{l_{(1)} l_{(3)}}{l_{(2)}} \frac{\partial V}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{l_{(1)} l_{(2)}}{l_{(3)}} \frac{\partial V}{\partial x^3} \right) \right].$$

Za pomocą analizy tensorowej pojęcia gradientu, rotacji i dywergencji można rozszerzyć nie tylko na wektory i skalary, ale i na tensory dowolnego rzędu. Wymienione operacje polegają tu na zmianie rzędu tensora, czego szczególnym przypadkiem są przekształcenia analizy wektorowej. Obowiązują przy tym następujące reguły:

- (1) *gradient tensora* ma rząd o 1 wyższy od tensora pierwotnego,
- (2) *dywergencja tensora* jest o 1 rząd niższa od tensora pierwotnego,
- (3) *rotacja tensora* wyraża się tensorem o 1 rząd wyższym, ale zawsze antysymetrycznym.

Istotne korzyści w ujęciu tensorowym dynamicznych przebiegów zachodzących w ośrodku ciągłym otrzymamy przez wprowadzenie czasu jako współrzędnej niezależnej lub związanej, co otwiera drogę do zastosowań rachunku tensorowego w zagadnieniach teorii drgań, [9]. Aby zachować fizyczną poprawność określić, musimy tu zaczerpnąć wzory ze szczególnej *teorii względności*. Jak wiemy, główną trudnością w przejściu z układu o współrzędnych nieruchomych do układu o współrzędnych ruchomych jest fakt niezmiennego prędkości światła (doświadczenie *M i c h e l s o n a*). Zagadnienie to zostało rozwiązane w 1905 roku przez *E i n*

stein a za pomocą wprowadzenia pojęcia względności czasu i związanego z tym zasadniczego równania

$$(64) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 - c^2 t''^2,$$

z którego wynikają transformacje Lorentza, [7].

W technice — przynajmniej na razie — posługujemy się tak małymi prędkościami, że wielkość v^2/c^2 może być w transformacji Lorentza pominięta. Interesuje nas natomiast podana w 1908 roku przez Minkowskiego, [65], interpretacja geometryczna równania Einsteina. Ma ona duże znaczenie praktyczne, mimo pozornie abstrakcyjnej formy, którą w dodatku w antynaukowy sposób starano się zaciemnić różnymi idealistycznymi hipotezami. Minkowski wprowadza pojęcie współrzędnych czasowo-przestrzennych x, y, z, jct oraz pojęcie «wektora w świecie» wyznaczonego tymi współrzędnymi. Ruch punktu materialnego w przestrzeni przedstawia «linię w świecie».

Wielkości cosinusów kierunkowych są tu określone przez równanie

$$(65) \quad a_1 = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad a_2 = \frac{dy}{ds}, \quad a_3 = \frac{dz}{ds}, \quad a_4 = jc \frac{dt}{ds}.$$

Z transformacji Lorentza wynika

$$\frac{dt}{ds} = \frac{j}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

zaś $dx/dt, dy/dt, dz/dt$ są składowymi prędkościami v .

Jeżeli «linia w świecie» zlewa się z osią jct , $a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_4 = 1$, to punkt materialny pozostaje w spoczynku. Zmiany prędkości tłumaczą się jako przesunięcia kątowe. Widzimy, że stwarza to bogate możliwości operowania tak wygodnymi w rachunku tensorowym pojęciami przestrzeni r -wymiarowej, przy czym zaniedbanie czynników wynikających z transformacji Lorentza znacznie przyspiesza obliczenia.

6. Metody tensorowe w technicznych zagadnieniach pola

Rachunek tensorowy odniesiony do ośrodków ciągłych znajduje liczne zastosowania w mechanice i elektrotechnice. Przedmiotem niniejszej pracy nie jest szczegółowe omawianie tych zastosowań, punkt ciężkości położyliśmy bowiem na samej metodzie podejścia do zagadnienia. Niemniej należy wymienić przynajmniej główne kierunki, w jakich rozwijają się lub będą się zapewne rozwijały zastosowania, aby na tym tle uwydatnić specyficzne dla techniki metody posługiwania się rachunkiem tensorowym.

Klasyczną dziedziną zastosowania rachunku tensorowego w technice są zagadnienia statyczne teorii sprężystości. Metody tensorowe w tej nau-

ce nie tylko były najdawniej znane i stosowane jeszcze przed właściwym sprecyzowaniem pojęć tensorowych [69], ale i nadal pozostaną zapewne stosunkowo najbardziej popularne. Wynika to z dwóch przyczyn:

(1) Tensor pola sił sprężystych jest łatwo dającą się wyobrazić, niemal namacalną, wielkością fizyczną. Specyficzne właściwości geometryczne elipsoidy naprężeń lub odkształceń są tak zrozumiałe, że wprowadzenie pojęcia matematycznego, które jednym symbolem ujęłoby te własności, narzuca się samo przez się.

(2) Obliczanie naprężeń i odkształceń w różnych przekrojach ośrodka spotyka się stale w konkretnych zagadnieniach technicznych, a jednocześnie stanowi typowy problem transformacji tensorowej.

Ze względu na bogatą i szeroko znaną literaturę przedmiotu (np. [32a]) nie będziemy się tutaj zajmowali teorią tensora sprężystości. Trzeba jednak podkreślić, że stopień przydatności metody tensorowej do istotnego rozwiązania problemów teorii sprężystości, a nie tylko do ich zwięzłego zapisu i wygodnej manipulacji, zależy w dużej mierze od rodzaju zagadnienia. Przy rozpatrywaniu w układzie osi kartezjańskich ośrodka izotropowego o liniowej charakterystyce — zależności matematyczne są stosunkowo proste i dadzą się wyrazić metodami elementarnymi. Niemniej transformacja tensorowa, należąca do problemów grupy (2), może tu oddać cenne usługi. Upraszcza ona kształt rozpatrywanego obszaru i daje wzory uwidoczniające wszystkie interesujące technika właściwości elipsoidy naprężeń i odkształceń.

Posługując się poprzednio omówioną metodą *R i e m a n n a - C h r i s t o f f e l a* uzyskuje się znaczną oszczędność przeliczeń i przejrzystą formę zależności. Jako przykład, [49], rozpatrzmy zachowanie się ośrodka sprężystego ograniczonego powierzchnią walcową. Zagadnienie polega na znalezieniu zależności tensora naprężeń $\|\sigma\|$ od tensora potencjału naprężeń $\|T\|$. Użyjemy współrzędnych walcowych ρ , Θ i z przyjmując, że tensor $\|T\|$ jest niezależny od kąta Θ . Ograniczymy się do podania toku rozumowań wymagających gruntowniejszej znajomości rachunku tensorowego. Badaną zależność napiszemy w postaci tensorowej w sposób naderzwykaj prosty:

$$(66) \quad \|\sigma\| = \text{Rot}(\text{Rot}\|T\|)_s,$$

gdzie indeks s oznacza, że drugą rotację wyznaczamy w stosunku do transponowanego, a nie prostego tensora ($\text{Rot}\|T\|$).

Tensor $\|T\|$ ma postać

$$\|T\| = \begin{vmatrix} t_{\rho\rho} & 0 & t_{\rho z} \\ 0 & t_{\Theta\Theta} & 0 \\ t_{z\rho} & 0 & t_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & t_{13} \\ 0 & t_{22} & 0 \\ t_{31} & 0 & t_{33} \end{vmatrix}.$$

Długość elementu liniowego wynosi

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2 + (dz)^2;$$

stąd tensor metryczny

$$(67) \quad \|g\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \rho^2,$$

i symbole C h r i s t o f f e l a

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\rho}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\rho, \quad \text{pozostałe } \Gamma_{jk}^i = 0.$$

Rotacja tensora $\|T\|$ jest tensorem 3-go rzędu o składowych

$$(68) \quad R_{ijk} = \frac{\partial t_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial t_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^r t_{ir} - \Gamma_{ik}^r t_{jr}.$$

Dzieląc te składowe przez $\sqrt{|\gamma|}$ odwracamy charakter ich zmienniczości względem ij , traktowanych jako łączny indeks l . W ten sposób otrzymujemy tensor mieszany $\|S\|$ o składowych S_k^l , który po transponowaniu daje kowariantny tensor

$$(68.1) \quad \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \rho \left(\frac{\partial t_{13}}{\partial \rho} - \frac{\partial t_{11}}{\partial z} \right) & 0 \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial t_{22}}{\partial z} - \rho t_{13} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial t_{22}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} t_{22} + \rho t_{11} \right) \\ 0 & \rho \left(\frac{\partial t_{33}}{\partial \rho} - \frac{\partial t_{13}}{\partial z} \right) & 0 \end{array} \right\|.$$

Łatwo teraz obliczyć składowe $\|\sigma\|$ jako rotację ostatniego tensora:

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 t_{22}}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial t_{33}}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial t_{13}}{\partial z}, \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial t_{22}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} t_{22} + \rho t_{11} \right), \\ \sigma_{22} = \rho^2 \left(\frac{\partial^2 t_{33}}{\partial \rho^2} - 2 \frac{\partial^2 t_{13}}{\partial \rho \partial z} + \frac{\partial^2 t_{11}}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_{33} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 t_{22}}{\partial \rho^2} - \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial t_{22}}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^4} t_{22} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial t_{11}}{\partial \rho}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0. \end{array} \right.$$

Równania te można przedstawić w dogodniejszej formie wprowadzając wspomniane wyżej fizyczne składowe tensorów oznaczone * (gwiazdką). Dochodzimy do nich przez transformację

$$t_{ij}^* = \frac{t_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}},$$

$$t_{11}^* = t_{11}, \quad t_{22}^* = \frac{t_{22}}{\rho}, \quad t_{33}^* = t_{33}, \quad t_{13}^* = t_{13}.$$

Dalsze przeliczenie nie nastęrcza większych trudności. Przykład ten wskazuje dobitnie na zwięzłość przeprowadzonego rachunku i drogę dojścia do numerycznych wyników poprzez uogólnienie tensorowe. Również pożyteczna jest wyżej wspomniana transformacja tensorowa odniesiona do *ośrodka odkształconego*, należąca do (3) grupy zagadnień. Szereg przykładów zastosowania tej transformacji znajdziemy w pracach specjalnych, [8], [42]. Autor wykorzystał tę transformację do obliczenia ciśnienia promieniowania fali ultradźwiękowej, [61].

Klasyczna teoria sprężystości operuje odkształceniami nieskończenie małymi. Taki uproszczony obraz zjawisk nie zawsze jednak nas zadowala nie tylko pod względem teoretycznym, ale i w zastosowaniach praktycznych. Dlatego poświęcono dużo uwagi zbadaniu *odkształceń skończonych*, które występują przede wszystkim w szeroko stosowanych w nowoczesnej technice materiałach o dużej podatności jak guma i plastyki, [2].

Otóż do rozwiązywania zagadnień z zakresu odkształceń skończonych rachunek tensorowy staje się niezbędnym narzędziem. Wynika to z dwóch powodów.

(1) Teoria odkształceń nieskończenie małych operuje jednym układem współrzędnych, gdy dla odkształceń skończonych posługujemy się dwoma odmiennymi układami związanymi z ośrodkiem współrzędnymi *L a n g e' a*, przy których za punkt wyjścia przyjmuje się pierwotny (nieodkształcony) stan ośrodka, i sztywnymi współrzędnymi *E u l e r a*, opartymi na ośrodku już odkształconym. Przy przejściu z jednych współrzędnych do drugich nieodzowne staje się, zazwyczaj, użycie krzywoliniowego układu odniesienia, a więc posługiwanie się pojęciami geometrii *R i e m a n n a*.

(2) Przy odkształceniach nieskończenie małych pominąć można wyrazy rzędu drugiego i wyższych, co bardzo upraszcza rachunek. Dla odkształceń skończonych takie uproszczenie jest, oczywiście, niesłuszne; pociąga to za sobą niewygodne skomplikowanie wzorów elementarnych. Używając natomiast rachunku tensorowego i wprowadzając symbole *Christoffela* możemy pozostać przy klasycznych zależnościach zawierających jedynie odpowiednie poprawki.

Dla zilustrowania zalet metody, rozpatrzmy składowe tensora odkształceń skończonych, [51]. Przy odkształcaniu ośrodek odległość między dwoma sąsiednimi jego elementami P i P' zmienia się z pierwotnej ds na $d\bar{s}$. Ze stosunków geometrycznych wynika

$$(70) \quad (d\bar{s})^2 - (ds)^2 = 2 d\mathbf{r} (d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u}) + (d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u})^2,$$

gdzie \mathbf{r} jest promieniem (wektorem poprowadzonym z początku układu punktu P , $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ promieniem punktu P' (do chwili odkształcenia $dr = ds$), a \mathbf{u} wektorem przemieszczenia punktu P .

Przy odkształceniach skończonych nie możemy, jak to się robi dla odkształceń nieskończenie małych, pominąć ostatniego wyrazu równania (70). Zamiast jednak wykonywać skomplikowany rachunek elementarny, znacznie logiczniejsze i łatwiejsze będzie sprowadzenie tego równania do formy dwuliniowej:

$$(71) \quad (d\bar{s})^2 - (ds)^2 = 2 (d\mathbf{r} \cdot \varepsilon_{ij} r^i) (r^j d\mathbf{r}).$$

Jeżeli ε_{ij} charakteryzuje odkształcenie w danym punkcie, to $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} r^i r^j$ są składowymi tensora odkształceń we współrzędnych Lagrange'a. Z równania (70)

$$(72) \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j}.$$

Z drugiej strony posługując się równaniem (22) otrzymamy

$$(72.1) \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij} - g_{ij}),$$

gdzie g_{ij} i \bar{g}_{ij} są tensorami metrycznymi ośrodka przed i po odkształceniu. Jeżeli wychodzimy ze współrzędnych kartezjańskich, to g_{ij} redukuje się do symbolu K r o n e c k e r a [równanie (9)].

Widzimy, że zagadnienie sprowadza się do równań tensorowych używanych w klasycznej teorii sprężystości. Różnica polega na tym, że składowe odpowiednich tensorów nie są tu wielkościami stałymi.

Niezaprzeczone usługi oddaje rachunek tensorowy w badaniach ośrodków anizotropowych, [53], i to zarówno kryształów, jak i ośrodków o makroskopowej, sztucznej lub naturalnej, strukturze anizotropowej. Zagadnienia te są interesujące przede wszystkim dla budownictwa, gdzie spotykamy się często z elementami anizotropowymi. Jednak i w innych dziedzinach — nieraz od siebie bardzo odległych — występują przebiegi w ośrodkach anizotropowych, dające się doskonale ująć metodą tensorową. Wymienić tu można badania rozchodzenia się fal ultradźwiękowych w ośrodkach uwarstwionych. Praca nad tym zagadnieniem, [44], była zresztą punktem wyjścia do bliższego zajęcia się przez autora sprawą zastosowań rachunku tensorowego.

Rachunek tensorowy stał się niezbędnym narzędziem w pracach nad drganiami *elementów piezoelektrycznych*, mających podstawowe znaczenie w telekomunikacji. Przypomnijmy, że w krytalografii mamy do czynienia z nader skomplikowanymi zagadnieniami anizotropii (36 współczynników), dotyczącymi 32 klas kryształów, i że anizotropię wykazują nie tylko wielkości mechaniczne, ale również własności elektromagnetyczne kryształów, [63]. Dla zorientowania się w rodzaju zagadnienia wystarczy zestawić występujące przy drganiu kryształów efekty fizyczne; niżej podano, [11], charakter tensorowy parametrów tych wielkości (S = skalar, V = wektor, T = tensor 2-go rzędu):

Zjawisko	Parametry
sprężystości	$T \quad T$
dielektryczne	$V \quad V$
piezooptyczne	$T \quad T$
piezomagnetyczne	$T \quad V$
piezoelektryczne	$T \quad T$
elektrooptyczne	$T \quad V$
pyroelektryczne	$S \quad T$
rozszerzalności cieplnej	$S \quad T$
tarcia wewnętrznego	$T \quad T$

Również w niektórych zagadnieniach *hydro-* i *aerodynamiki* można posługiwać się metodą tensorową. W hydrodynamice klasycznej zakres jej zastosowań jest mniejszy niż w mechanice ciała stałego, gdyż w przeważnej liczbie przypadków nie występują tu siły ścinające i zagadnienie sprowadza się do tensorów kulisto-symetrycznych, które można przedstawić prościej klasycznymi metodami analizy. Natomiast w problemach przepływów cieczy lepkich i przy badaniu przepływów naddźwiękowych rachunek tensorowy może być w pełni wykorzystany. Na przykład, dla przepływów w cieczech lepkich, [17], obowiązuje równanie tensorowe

$$(73) \quad -\frac{\partial p}{\partial x^k} + g^{it} \frac{\partial E_{ki}}{\partial x^t} + \rho F_k = \rho f_k,$$

gdzie p jest ciśnieniem, f wektorem przyspieszenia, F siłą masową oraz ρ gęstością ośrodka.

W równaniu tym E_{ki} jest tensorem lepkości (wiskozy) zależnym od współczynników lepkości γ_{ik}^{mn} i odkształceń ośrodka W_{mn} :

$$E_{ki} = \gamma_{ki}^{mn} W_{mn}.$$

Odpowiednio dobierając tensor metryczny g^{it} znaleźć możemy dogodny sposób liczbowego wyrażenia interesujących nas zależności $p(f)$ dla skomplikowanych geometrycznie przypadków.

Rozszerzenie równań hydrodynamiki na przestrzeń nieeuklidesową zostało podane w pracy J. Litwinişyna, [54].

W ostatnich latach żywe zainteresowanie, zarówno uczonych jak i konstruktorów, wzbudziły zagadnienia *reologii*, tj. nauki traktującej o zmianach zachodzących w czasie w ośrodku poddanym działaniu sił zewnętrznych. Na przykład, sprawa pełzania metali i betonu stała się poważnym zagadnieniem gospodarczym, oczekującym teoretycznego ujęcia. W zagadnieniach reologicznych rachunek tensorowy daje najwygodniejsze przedstawienie zależności fizycznych. Mamy tu do czynienia z uogólnieniem pojęcia tensora odkształceń ε_{ij} na skutek wprowadzenia tensora szybkości zmiany odkształceń $\partial\varepsilon_{ij}/\partial t$. Sprawę komplikuje fakt, że przy ustalaniu zależności między naprężeniami σ_{ij} i odkształceniami ε_{ij} trzeba uwzględnić *odkształcenia plastyczne*, [31], przy których występują nieliniowe zależności między σ_{ij} i ε_{ij} . Właśnie przez użycie równań tensorowych sens fizyczny tych złożonych procesów zostaje wyraźnie uwypuklony. Widać to na przykładzie ogólnego równania tensora szybkości odkształceń

$$(74) \quad \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = F_0(J_1, J_2, J_3) \delta_{ij} + F_1(J_1, J_2, J_3) \sigma_{ij} + F_2(J_1, J_2, J_3) \sum_k \sigma_{ik} \sigma_{kj},$$

gdzie F_0, F_1, F_2 są niezmienniczymi funkcjami niezmienników J_1, J_2, J_3 tensora naprężeń σ_{ij} a δ_{ij} , symbolem *Kroneckera*. Równanie to po wyznaczeniu niezmienników staje się bardzo przejrzyste i pozwala na obliczenie pełzania materiału w różnych przekrojach. Dlatego również uogólnienia prac doświadczalnych, zmierzające np. do ujęcia zjawiska *pełzania betonu*, [4], przedstawiane bywają w postaci równania tensorowego o empirycznie ustalonych współczynnikach.

Zastosowania rachunku tensorowego do badania zagadnień technicznych *rozkładu pola elektromagnetycznego* i elektrodynamiki pól nie mają takich tradycji i nie są tak rozwinięte, jak zastosowania w mechanice. Zakres przydatności rachunku jest jednak analogiczny. Trzeba zaznaczyć, że niektóre podstawowe równania pola elektromagnetycznego są w formie tensorowej nadzwyczaj proste i łatwe do stosowania w złożonych układach, w których niezbędne jest wprowadzenie współrzędnych krzywoliniowych.

W innej pracy, [59], analizując podobieństwa pola sprężystości i pola elektromagnetycznego, autor przechodzi od wielkości tensorowych do operatorów wektorowych. Otrzymane rezultaty, przydatne do prostych układów, nie odznaczają się zbyt dużą jasnością w rozważaniach ogólnych. Tymczasem posługiwanie się wielkościami tensorowymi daje bardzo przejrzystą i ogólną interpretację matematyczną, która po odpowiednim przystosowaniu z korzyścią służyć może potrzebom techniki.

W związku z powiększeniem napięć i mocy w urządzeniach energetycznych i coraz lepszym wykorzystaniem obwodów magnetycznych, wzrasta znaczenie techniczne przebiegów *nieliniowych* w polu elektromagnetycz-

nym. Berendiejew, [6], zwrócił uwagę na pewne możliwości, jakie kryje rachunek tensorowy przy rozwiązywaniu nieliniowych zagadnień elektrotechniki. Dotyczą one przede wszystkim zagadnień pola, choć dają się użyć także do obwodów elektrycznych.

Jest rzeczą charakterystyczną, że gdy w mechanice punkt ciężkości zastosowania rachunku tensorowego do ośrodków ciągłych leży dotychczas w zagadnieniach statyki, to w elektrotechnice chodzi prawie wyłącznie o przebiegi falowe, a więc dynamiczne. Dlatego w badaniach pola elektromagnetycznego występują przeważnie wzory tensorowe w układzie czterech zmiennych x^i (czasoprzestrzeń). Dla przykładu podajemy równania Maxwella, [36], przedstawione w postaci tensorowej przez Minkowskiego:

$$(75) \quad \begin{cases} \frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = s^i, & \frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0, \\ \frac{\partial F^{*ik}}{\partial x^k} = 0, & F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}. \end{cases}$$

We wzorach tych H^{ik} , F^{*ik} i F_{ik} są to tensory antysymetryczne, wyrażające się następująco:

$$(76) \quad H^{ik} = \begin{vmatrix} 0 & H^z & -H^y & -jD^x \\ -H^z & 0 & H^x & -jD^y \\ H^y & -H^x & 0 & -jD^z \\ jD^x & jD^y & jD^z & 0 \end{vmatrix},$$

$$(77) \quad F_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & B_z & -B_y & -jE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -jE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -jE_z \\ jE_x & jE_y & jE_z & 0 \end{vmatrix},$$

$$(78) \quad F^{*ik} = \begin{vmatrix} 0 & E_x & -E_y & jB_x \\ -E_x & 0 & E_x & jB_y \\ E_y & -E_x & 0 & jB_z \\ -jB_x & -jB_y & -jB_z & 0 \end{vmatrix}.$$

F^{*ik} nazywamy tensorem dualnym F_{ik} .

Pozostałe wielkości we wzorach (75) oznaczają:
współrzędne przestrzennoczasowe

$$x^i = x, y, z, jct,$$

potencjał

$$\varphi = A_x, A_y, A_z, jK$$

(A potencjał wektorowy indukcji magnetycznej B , K = potencjał skalarny pola elektrycznego E),

wektor gęstości przepływu ładunku (prądu)

$$\frac{s^i}{4\pi} = \sigma_0 v^x, \sigma_0 v^y, \sigma_0 v^z, j\sigma_0 c$$

(v jest prędkością ładunku, σ_0 gęstością ładunku).

Równania (75)-(78) odnoszą się do współrzędnych prostoliniowych. Przy ich wyrażeniu we współrzędnych krzywoliniowych pojawiają się wyrazy z symbolami Christoffela. Równania te nadają się szczególnie do rozpatrywania wzajemnych zależności między polami elektromagnetycznymi w układach poruszających się względem siebie, np. w maszynach elektrycznych. Ostatnio w pracach G. Marksa, [62], znajdujemy zastosowanie tych równań do ośrodków *anizotropowych* poruszających się względem siebie.

Również dogodnie wyrażenia matematyczne otrzymamy stosując metodę tensorową do ważnego w technice zagadnienia, jakim jest obliczanie *naprężeń mechanicznych* występujących w polu elektrycznym i magnetycznym (naprężeń *Maxwella*). Siła działająca na element o jednostkowej pojemności, [1], równa jest divergencji tensorowej tensora naprężeń, obliczonej z uwzględnieniem wzoru (44). Tensor ten jest analogiczny do tensora naprężenia spotykanego w klasycznej teorii sprężystości. Dla pola elektrostatycznego tensor naprężenia ma postać

$$(79) \quad \|\sigma_e\| = \begin{vmatrix} \frac{\epsilon}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + \kappa E^2) & \frac{\epsilon}{4\pi} (E_x E_y) & \frac{\epsilon}{4\pi} (E_x E_z) \\ \frac{\epsilon}{4\pi} (E_y E_z) & \frac{\epsilon}{8\pi} (E_y^2 - E_z^2 - E_x^2 + \kappa E^2) & \frac{\epsilon}{4\pi} (E_y E_x) \\ \frac{\epsilon}{4\pi} (E_z E_x) & \frac{\epsilon}{4\pi} (E_z E_y) & \frac{\epsilon}{8\pi} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 + \kappa E^2) \end{vmatrix},$$

gdzie κ jest stałą elektrostrykcji, $\kappa = (\rho/\epsilon) (d\epsilon/d\rho)$.

Dla pola magnetostatycznego tensor $\|\sigma_m\|$ ma analogiczną formę, ale E_j zostaje zastąpione przez H_i , zaś ϵ przez μ . W elektrodynamice ujęcie

matematyczne naprężen jest bardziej złożone i wymaga wprowadzenia wektora P o y t i n g a - U m o w a bądź operowania *tensorem energii impulsu*.

Ta ostatnia wielkość ma znaczenie praktyczne nie tylko w mechanice falowej. Interesujące perspektywy rokuje użycie pojęcia dwukrotnie kontrawariantnego tensora energii-impulsu S^{ik} w zagadnieniach telekomunikacji. Tensor $\|S\|$ zapisujemy podobnie jak inne wielkości pola w przestrzeni czterowymiarowej. Składowa S^{ik} tego tensora przedstawia gęstość strumienia energii w kierunku osi k dla rzutu wektora impulsu na oś i . Składowa S^{00} określa gęstość energii w polu, zaś składowa S^{0k} (podzielona przez c) gęstość strumienia energii w kierunku osi k . Tensor energii impulsu jest pojęciem ogólnym, odnoszącym się zarówno do fal elektromagnetycznych, jak i do fal mechanicznych; można go również z powodzeniem wykorzystać w teorii fal ultradźwiękowych. Dla pola elektromagnetycznego tensor ten wyraża się wzorem

$$(80) \quad S_{ik} = \frac{1}{4\pi} [F_{ir} H_{kr} - \frac{1}{4} g_{ik} F_{rs} H_{rs}]$$

[oznaczenia wielkości jak we wzorach (75)]. Jest to tensor asymetryczny, tzw. *tensor M i n k o w s k i e g o*. Odpowiedni tensor symetryczny (*A b r a h a m a*), [26], ma budowę bardziej skomplikowaną i nie nadającą się do praktycznych przeliczeń. Tensor *M i n k o w s k i e g o* charakteryzuje rozkład pola i przepływ energii występujący w wielu problemach telekomunikacji, związanych z nowoczesną techniką impulsową.

Do zagadnień związanych z zastosowaniami rachunku tensorowego do ośrodków ciągłych można zaliczyć niektóre problemy *geodezji*. Zmianę współrzędnych geodezyjnych lub rodzaju siatki geograficznej traktować można jako typowe przekształcenie tensorowe na płaszczyźnie lub zakrzywionej powierzchni. Praktyczne zastosowanie znalazł rachunek tensorowy w *aerotriangulacji przestrzennej*, polegającej na kolejnym dołączeniu sąsiadujących ze sobą zdjęć lotniczych, przedstawiających różne wiązki perspektywiczne.

Pojedyncze zdjęcie daje obraz w pewnym układzie współrzędnych określonych osią zdjęcia, osią perspektywy i osią głównego pionu. Przyłączeniu tych zdjęć we wspólny obraz przestrzenny dokonać trzeba obrotu osi współrzędnych i zrównania skali poszczególnych obrazów. Przekształcenia tego dokonuje się za pomocą *tensora obrotu*, [79], będącego podwójnym tensorem mieszanym (7) w kartezjańskim układzie współrzędnych. Ogólne pojęcie tensora obrotu używane jest zresztą w algebrze tensorowej, niezależnie od zastosowań w geodezji, i nosi czasem nazwę *wersora*, [51]. Osobliwość przyjętej w geodezji metody polega na tym,

że kąty obrotu dla sąsiednich obrazów (wiązek perspektywicznych) są bardzo małe, można zatem pominąć wyrazy rzędu trzeciego i wyższych i przedstawić składowe tensora w formie algebraicznych, a nie trygonometrycznych kombinacji funkcji a_x, a_y, a_z kątów obrotu współrzędnych:

$$(81) \quad \|C\| = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} a_x^2 - \frac{1}{2} a_z^2 & a_z - \frac{1}{2} a_x a_y & a_x \\ -a_z - \frac{1}{2} a_x a_y & 1 - \frac{1}{2} a_y^2 - \frac{1}{2} a_z^2 & a_y \\ -a_x + a_y a_z & -a_y - a_x a_y & 1 - \frac{1}{2} a_x^2 - \frac{1}{2} a_y^2 \end{vmatrix}.$$

Operując jeszcze większym przybliżeniem — przez pominięcie wyrazów drugiego rzędu — tensor (81) przekształcamy w sumę tensora $\|g\|$ i tensora antysymetrycznego. Składowe tego ostatniego można przedstawić za pomocą wektora, zwanego *wektorem elementarnego obrotu*. Iloczyn zewnętrzny dowolnego wektora \mathbf{R} przez wektor \mathbf{a} daje zmianę wektora \mathbf{R} przy elementarnym obrocie

$$(82) \quad \delta \mathbf{R} = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}].$$

Jak widać, w omawianych zagadnieniach przejście na metodę tensorową oznacza ściślejsze ujęcie niektórych wzorów traktowanych w pierwszym przybliżeniu jako wzory wektorowe.

Istnieje, wreszcie, szereg problemów *fizyki* teoretycznej i doświadczalnej, w których, jak na początku wspomniano, metody tensorowe odgrywają ważną rolę. Zagadnienia te są jeszcze na razie obce technice, jednak perspektywy coraz szerszego wykorzystania energii atomowej zbliżą je w przyszłości do techników-pracowników nauki.

7. Wielkości tensorowe występujące w systemach o wielu stopniach swobody

W dotychczasowych zastosowaniach technicznych rachunek tensorowy odnoszono głównie do ośrodków ciągłych. Wynika to z faktu, że wielkości tensorowe bezpośrednio odzwierciedlają zjawiska zachodzące w obszarze zajętym przez ośrodek ciągły. Sens fizyczny tensora, jako wielkości obrazującej zachowanie się *systemu* mechanicznego lub elektrycznego o stałych skupionych, jest mniej popularny niż przy analizie ośrodków ciągłych [30], jednak i tutaj, jak między innymi wykazała dyskusja na łamach *Elektryczestwa*, [34], [57], wprowadzenie tego pojęcia może dać duże korzyści.

W najogólniejszej formie zagadnienie przedstawić możemy w sposób następujący. Mamy system przestrzenny N elementów powiązanych między sobą określonymi zależnościami, przy czym może to być system w dowolnej metrycznej lub wektorowej przestrzeni r -wymiarowej. Pod nazwą *elementu* rozumiemy część układu, która przy dalszych rozważaniach traktowana jest jako jedna całość, posiadająca pewną ograniczoną ilość stopni swobody, mniejszą niż cały system. Elementem może być zatem nie tylko punkt, ale również obwód prądowy lub magnetyczny. Zależnie od natury elementów połączenia między nimi mogą mieć różny charakter: sprzężeń magnetycznych, połączeń galwanicznych, połączeń za pomocą sprężyn lub urządzeń tarcowych.

Otóż przy użyciu analizy elementarnej rozpatrujemy zachowanie się pojedynczego elementu, odcinając go od pozostałych. Odwrotnie postępujemy przy metodzie tensorowej, a częściowo i macierzowej. Cały system traktujemy jako pewną wielkość fizyczną, dającą się przedstawić jednym symbolem lub sprzężoną grupą symbolów, i badamy prawa rządzące tą wielkością. Na przykład, zamiast mówić o poszczególnych prądach w sieci, macierz zawierająca te prądy składowe oznaczamy jedną literą; podobnie postępujemy przy określaniu szybkości układu mechanicznego o wielu stopniach swobody.

Przy zastosowaniu rachunku tensorowego do problemów ośrodków ciągłych transformacja oznaczała przeważnie przesunięcie, obrót lub zakrzywienie przestrzennych osi odniesienia, zatem operacje te można było przedstawić za pomocą *realnego modelu geometryczno-fizycznego*.

W przypadku systemu o stałych skupionych składowymi tensora są poszczególne rzeczywiste wielkości fizyczne, np. prędkości lub prądy związane z oddzielnymi elementami układu, transformacja nie ma więc bezpośredniego odbicia przestrzennego. Podstawowy tensor metryczny na ogół posiada tu określony sens fizyczny, mamy bowiem do czynienia z kilku współmiernymi wielkościami fizycznymi; nie możemy natomiast przypisać temu tensorowi prostego znaczenia geometrycznego. Mówiąc więc o własnościach tensorowych systemu, traktujemy go jako *obiekt geometryczny* w ogólniejszym rozumieniu tego terminu, czyli, jak wyjaśniliśmy wyżej, opisujemy dany obiekt przez sposoby jego transformowania, a nie przez rzeczywiste stosunki przestrzenne. Nasuwa się pytanie, czy tensor obrazujący system przedstawia istotnie pewną wielkość fizyczną, czy też mamy tu do czynienia ze zwykłymi macierzami, a wprowadzenie pojęć tensorowych stanowi niepotrzebną komplikację. Otóż jest rzeczą bezsporną, że rachunkowe przeliczenie równań tensorowych sprowadza się do algebry macierzowej, a tensor jest macierzą o określonych prawach transformacji.

Jeżeli mamy dowolny układ równań liniowych o stałych parametrach obrazujących zachowanie się wielkości fizycznych

$$(83) \quad \begin{cases} a_{11} x^1 + a_{12} x^2 + \dots + a_{1n} x^n = C_1, \\ a_{21} x^1 + a_{22} x^2 + \dots + a_{2n} x^n = C_2, \\ a_{n1} x^1 + a_{n2} x^2 + \dots + a_{nn} x^n = C_n, \end{cases}$$

to przy jego rozwiązaniu nie potrzeba wprowadzać tensorów, a metody macierzowej można użyć jako pewnego ułatwienia rachunkowego, pod warunkiem, że wyznacznik charakterystyczny układu równań jest różny od zera. W technice rzadko jednak mamy do czynienia z tak prostym zagadnieniem. Zazwyczaj albo ilość równań jest mniejsza od ilości współrzędnych x^i i zadanie polega na wybraniu optymalnych wartości tych współrzędnych, albo też zbadać należy wpływ zmiany parametrów na przebieg zjawiska, gdy wiadomo, że związek między tymi parametrami jest funkcją liniową (lub nieliniową):

$$(84) \quad f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}) = 0.$$

W obu przypadkach spotykamy typowy problem transformacji tensorowej. Krok w uogólnieniu od macierzy do tensora rozszerza więc możliwości analizy zmierzającej do znalezienia optymalnego rozwiązania problemu technicznego. Samo ujęcie skomplikowanego zespołu zjawisk jako jednej wielkości o bardzo bogatych właściwościach fizycznych stanowi cenną syntezę, mającą swój odpowiednik w dialektycznej współzależności różnorodnych czynników, charakteryzujących przebieg procesu technicznego jako zjawiska przyrodniczo-ekonomicznego. Przy posługiwaniu się metodą tensorową wymagana jest jednak pewna ostrożność; wyeliminować trzeba, mianowicie, pozorne transformacje tensorowe, które są w istocie przekształceniami macierzy, a ich geometryzacja wprowadza jedynie zamęt. Do sprawy tej wrócimy jeszcze przy omawianiu możliwości użycia rachunku tensorowego do analizy obwodów elektrycznych.

Metoda tensorowa, którą zastosujemy przy analizie systemów o wielu stopniach swobody, jest nieco odmienna od tej, z jaką zapoznaliśmy się przy badaniu ośrodków ciągłych. W zagadnieniach ośrodków ciągłych tensor zapisujemy zwykle we współrzędnych przestrzeni trój- lub czterowymiarowej; dodatkowe osie współrzędnych, np. temperatury, mają charakter pomocniczy. Natomiast w przypadku systemu o stałych skupionych konieczne jest operowanie przestrzenią o liczbie wymiarów zależnej od rodzaju systemu, na tym bowiem polega istota geometryzacji obiektu fizycznego i otwarcia drogi do prawidłowego stosowania transformacji tensorowych.

Metoda jest zupełnie ogólna i może być zastosowana zarówno do systemów mechanicznych, jak i elektrycznych, magnetycznych lub termodynamicznych. Załóżmy, że badany system składa się z N elementów. Chwilowy stan elementu (m) określony jest przez K współrzędnych $x_{(m)}^1, x_{(m)}^2, \dots, x_{(m)}^K$. Każdy z elementów można więc przedstawić w przestrzeni K -wymiarowej.

Jeżeli badamy mechanikę systemu punktów materialnych, to element określony jest współrzędnymi przestrzennymi punktu, $K = 3$ i czasem t . Własności fizyczne elementu mogą być jednak wyrażone inną liczbą współrzędnych, np. pojedynczemu obwodowi prądowemu przypisujemy dwie współrzędne: chwilowe wartości napięcia i prądu.

Do opisu całego systemu — w przypadku gdy wszystkie elementy są niezależne — użyć trzeba $p = NK$ współrzędnych przestrzennych plus czas, czyli rozpatrywać problem jako badanie ruchu umyślnego punktu P w przestrzeni p -wymiarowej. Współrzędne tego punktu, wystarczające do jednoznacznego określenia stanu systemu nazywamy *współrzędnymi uogólnionymi* q^i . W systemie o elementach od siebie niezależnych liczba stopni swobody systemu M jest równa liczbie współrzędnych p i punkt P może zajmować dowolne położenie w przestrzeni p -wymiarowej, a system rozpada się na N prostych elementów.

W praktyce interesować nas będą systemy o elementach współzależnych. W takim systemie ułożyć można R niezależnych od siebie równań typu

$$(85) \quad f^i(x_{(1)}^1, x_{(1)}^2, \dots, x_{(1)}^K, \dots, x_{(N)}^1, x_{(N)}^2, \dots, x_{(N)}^K) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, R),$$

co we współrzędnych uogólnionych napiszemy

$$(86) \quad f^i(q^1, \dots, q^p) = 0.$$

System taki posiada $M = NK - R$ stopni swobody. W przestrzeni $p = NK$ -wymiarowej punkt P może teraz poruszać się jedynie po pewnej powierzchni $(p - R)$ -wymiarowej. Ruch punktu jest natomiast swobodny w podprzestrzeni $p' = M$ -wymiarowej. Dla takiej przestrzeni nie będziemy mogli ułożyć niezależnego równania (85), zatem punkt P może znowu zajmować w podprzestrzeni dowolne położenie. Zależnie od rodzaju zagadnienia posługujemy się obydwoma metodami, bądź sprowadzając system do niezbędnej liczby współrzędnych, bądź też dla zachowania symetrii współrzędnych pozostawiając p -wymiarowy układ odniesienia.

Zwróćmy uwagę, że współrzędne punktu P określają pewien wektor w przestrzeni p -wymiarowej. W dalszym ciągu wektor taki dla odróżnienia od wektora w przestrzeni trójwymiarowej nazywać będziemy *poliwektorem*, nie dając zresztą temu terminowi znaczenia używanego czasem w podręcznikach rachunku wektorowego. Tensory wyższych rzędów wy-

stąpią bądź jako parametry stałe poszczególnych elementów, bądź też jako liniowe kombinacje różnych współrzędnych tych elementów.

Do wyjaśnienia pozostaje sprawa omówionych w p. (4) trzech grup transformacji tensorowych. Zgodnie z tym co powiedziano przy równaniu (83), transformacja dotyczy zmiany układu współrzędnych bieżących poszczególnych elementów x^i lub zmiany parametrów stałych tych elementów a_{rs} związanych równaniem (84). Na przykład, zmieniamy położenie punktu materialnego (x^i) bądź jego masę (a_{rs}) lub też regulujemy napięcie (x^i) albo indukcyjność obwodu (a_{rs}).

Przy przejściu do współrzędnych uogólnionych q^i rozróżnienie to z punktu widzenia matematycznego nie ma zasadniczego znaczenia, gdyż zmienne parametry a_{rs} traktujemy jako dodatkowe współrzędne q^j, q^k, \dots .

(1) Transformacja formalna *bez zmiany postaci obiektu* służy do zbadania, w jaki sposób powiązane są ze sobą współrzędne poszczególnych elementów i jakie są niezmiennicze właściwości systemu. Tą metodą można np. ustalić, jaki kierunek powinna mieć oś obrotu systemu, aby uzyskać maksymalny moment bezwładności lub tak dobrać częstotliwość sprzężonych obwodów elektrycznych, aby w danym przewodzie prąd był jak najmniejszy.

Często spotykaną transformacją jest przejście z układu nieruchomego do ruchomego. Można przy tym posługiwać się poprzednio omówioną metodą wprowadzenia czasu jako dodatkowej współrzędnej. Wprawienie systemu w ruch odwzorowuje się jako obrót osi współrzędnych względem osi t .

W wielu jednak przypadkach dogodniejsze będzie posługiwanie się nieco odmiennym przekształceniem. Zamiast wprowadzać czas jako nowy wymiar, prostsze rachunkowo okazać się może użycie czasu jako wielkości transformującej przestrzenny układ współrzędnych. Sposób ten można zastosować równie dobrze w geometrii metrycznej, jak i wektorowej. Prędkość postępową tłumaczy się wówczas jako przesunięcie układu współrzędnych, obrót układu przedstawiamy jako odpowiedni obrót osi odniesienia.

Oczywiście, metoda tego rodzaju jest znacznie łatwiejsza do zastosowania w układach skleronomicznych, tj. takich, w których współrzędne x^i zależą od n czynników typu p^j , natomiast nie zależą wyraźnie od czasu. Sprawa komplikuje się w układach reonomicznych, w których układ współrzędnych zmienia się nie tylko w funkcji czynników p^j , lecz i czasu t :

$$(87) \quad x^i = x^i(p^j, t).$$

Czas jest tu parametrem niezależnym, co odpowiada ujęciu problemu w fizyce klasycznej.

W zagadnieniach technicznych ruch jednostajny postępowy można traktować jako przekształcenie czysto formalne. Z chwilą gdy występują przyspieszenia, w systemie mogą powstać zmiany wewnętrzne, np. wzajemne przesunięcia elementów powodujące zakłócenie przebiegu zjawiska fizycznego. Transformacja taka wiąże się ze stanem fizycznym układu i przestaje być tylko formalna.

(2) Transformacja formalna *zmieniająca typ systemu* ma przeważnie na celu dogodnie ujęcie sprzężeń między elementami. Przez odpowiedni wybór układu odniesienia możemy np. sprowadzić do zera niektóre sprzężenia i w ten sposób rozbić system na kilka prostszych podsystemów, co jest szczególnie przydatne w elektrotechnice.

Transformacji tego typu możemy dokonać przez odpowiedni wybór podstawowego tensora metrycznego, bądź obrót i przesunięcie sztywnego układu współrzędnych. Możemy również od razu uwzględnić transformację przez odpowiedni wybór związku między współrzędnymi elementu $x_{(m)}^i$ i współrzędnymi uogólnionymi q^r :

$$(88) \quad x_{(m)}^i = x_{(m)}^i(q^1, q^2, \dots, q^p).$$

Wtedy składowe prędkości uogólnianej dq/dt wyrażą składowe prędkości punktu M przy pomocy równania często spotykanego przy rozwiązywaniu systemów

$$(89) \quad \frac{dx_{(m)}^i}{dt} = \frac{\partial x_{(m)}^i}{\partial q^r} \frac{dq^r}{dt} + \frac{\partial x_{(m)}^i}{\partial t}.$$

Przykładem pożytecznej transformacji upraszczającej system jest sprowadzenie tensora do jego osi głównych. Dokonujemy tego przez rozwiązanie tzw. *równania sekularnego* (wiekowego), stosowanego między innymi w astronomii do wyznaczania względnych ruchów planet,

$$(90) \quad \begin{vmatrix} t_{xx} - \lambda & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} - \lambda & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tego równania wyznaczają kierunki, dla których transformacja tensorowa jest równoważna mnożeniu przez skalar.

(3) Transformacja odwzorowująca *rzeczywiste zmiany obiektu* może mieć różnorodny charakter i polega zwykle na związaniu osi odniesienia z wybranym elementem systemu (współrzędne L. a g r a n g e'a), gdy chodzi np. o zbadanie, co się dzieje z tym elementem przy dowolnych ruchach.

Konieczność posługiwania się krzywoliniowym układem odniesienia napotykamy tu przede wszystkim w zagadnieniach zniekształceń *nie*linio-

wych. Wynika to z faktu, że umyślony punkt P porusza się po płaszczyźnie $(p - R)$ -go stopnia w przestrzeni p -wymiarowej jedynie wówczas, gdy równania (85) są liniowe. Jeżeli równania (85) są nieliniowe, to punkt P związany jest z powierzchnią przestrzenną; podprzestrzeń $p' = (NK - R)$ -wymiarowa nie zawsze jest euklidesowa, lecz staje się zakrzywioną. Wobec tego zagadnienia nieliniowe sprowadzają się często do badania systemów w przestrzeni R i e m a n n a, co jest dotychczas problemem bardzo słabo opracowanym i stanowiącym wdzięczne pole do pracy naukowej.

8. Metoda tensorowa badania systemów mechanicznych

Poprzednio stwierdziliśmy, że tensor jest macierzą podlegającą określonemu prawu transformacji. Rozpatrując zakres zastosowań rachunku tensorowego w technice dorzucić trzeba jeszcze trzeci warunek, mianowicie transformacja wielkości tensorowej powinna mieć *określony sens fizyczny*, wiążący się z procesami technicznymi, zachodzącymi w systemie. Motyw ten decyduje o przydatności transformacji tensorowej do zbadania właściwości systemu.

W przeciwnym razie wystarczy przedstawić zespoły wielkości fizycznych symbolami pojedynczymi lub macierzami. W problemach technicznych ograniczamy się wówczas do metod algebraicznych i macierzowych, nie potrzebując uciekać się do metody tensorowej. Trzeba się zastrzec, że chodzi tu o zakres użyteczności metody tensorowej, a nie o charakter wielkości fizycznych. To, czy wykorzystujemy lub nie właściwości tensorowe w obliczeniu technicznym, nie zmienia, oczywiście, w niczym faktu ich obiektywnego istnienia. Na przykład, typowa transformacja elektrycznej oporności pozornej (p. niżej) obrazuje wpływ zmiany częstotliwości i może być pożyteczna np. w radiotechnice. Natomiast w energetyce, gdzie prawie wyłącznie operujemy częstotliwością 50 c/s, transformacja taka jest, oczywiście, możliwa, ale nie posiada technicznego uzasadnienia.

Sprawy tej nie poruszaliśmy przy rozpatrywaniu ośrodków ciągłych, tam bowiem *transformacja przestrzenna* metrycznego układu odniesienia stanowiła klucz do rozwiązania problemów technicznych i nie było powodów do kwestionowania jej przydatności technicznej. W systemach o wielu zmiennych zagadnienie jest bardziej skomplikowane. Tutaj również nie budzą zastrzeżeń transformacje odwzorowujące fizyczne przesunięcia lub ruchy przestrzenne systemu bądź osi odniesienia. Wprawdzie samo pojęcie tensora staje się przy tym nieco bardziej abstrakcyjne niż w mechanice ośrodków ciągłych, ale transformacja przestrzenna układu odniesienia pozostaje nadal głównym sposobem badania systemu. Obrót i przesunięcie sztywnych osi współrzędnych lub przejście do współrzęd-

nych krzywoliniowych ma w tym przypadku oczywisty sens fizyczny. Fakt, że operacje te — przy użyciu współrzędnych uogólnionych — odbywają się w przestrzeni p -wymiarowej, nie ma większego znaczenia. Jeżeli natomiast transformacja tensorowa ma dotyczyć zmian niektórych wielkości fizycznych — nie zaś współrzędnych przestrzennych elementu — to zalecana jest daleko idąca ostrożność, możemy bowiem albo niepotrzebnie skomplikować zagadnienie, albo też dojść do błędnych wniosków, używając transformacji fizycznie nieprawidłowych.

W zagadnieniach mechaniki brył lub punktów materialnych przeważają transformacje przestrzenne, dlatego właśnie zakres zastosowania rachunku tensorowego do tych problemów jest jasno wytyczony. Tymczasem w zagadnieniach obwodów elektrycznych mamy prawie wyłącznie do czynienia z *transformacjami fizycznymi*, które często bywają stosowane zbyt szeroko i schematycznie. W rezultacie rola rachunku tensorowego w elektrotechnice nie jest do dziś całkowicie wyjaśniona i wywołuje żywe dyskusje.

Z tych względów użycie rachunku tensorowego w zastosowaniach technicznych mechaniki systemów o wielu stopniach swobody nie wymaga szczegółowych komentarzy. Metoda tensorowa pozwala na bardzo proste i przejrzyste zapisanie praw mechaniki klasycznej we współrzędnych uogólnionych q^i , co już stanowi duże udogodnienie dla technika. Jako przykład możemy podać równanie L a g r a n g e' a wiążące uogólnioną siłę Φ i energię kinetyczną T systemu punktów materialnych,

$$(91) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \Phi_i.$$

To proste równanie w rozwinięciu analitycznym staje się długie i zawiąklane, gdy tymczasem w ujęciu tensorowym otrzymamy nieskomplikowane zależności

$$(92) \quad T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

oraz

$$(92.1) \quad \Phi_i = \Sigma F_r \frac{\partial x^r}{\partial q^i} = a_{ij} (\ddot{q}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{q}^k \dot{q}^l);$$

tutaj a_{ij} jest tensorem transformującym system we współrzędnych uogólnionych

$$a_{ij} = \Sigma_k g_{rs} m_r \frac{\partial x^r}{\partial q^i} \frac{\partial x^s}{\partial q^j} \quad (r, s = 1, 2, 3).$$

We wzorach powyższych przyjęto następujące oznaczenia:

- x^i współrzędne przestrzenne punktu materialnego,
- m_r masa punktu materialnego,

F_r składowe siły działającej na punkt,
 \dot{q} pochodna q względem czasu.

Wychodząc z równania Lagrange'a rozwiązać można metodą tensorową wiele szczegółowych zagadnień mechaniki. Dla przykładu obliczymy, [75], równanie podwójnego wahadła płaskiego (rys. 9). Jako współrzędne uogólnione wybieramy kąty odchylenia $q_1 = \varphi$ i $q_2 = \psi$. Współrzędne prostokątne x^i zawieszonych mas m_1 i m_2 będą

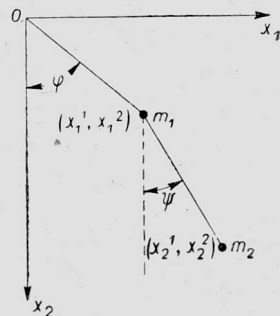
$$(93) \quad \begin{cases} x_1^1 = l_1 \sin q^1, & x_2^1 = l_1 \sin q^1 + l_2 \sin q^2, \\ x_1^2 = l_1 \cos q^1, & x_2^2 = l_1 \cos q^1 + l_2 \cos q^2, \end{cases}$$

Obliczamy energię kinetyczną

$$(94) \quad T = \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^i \dot{x}_k^j$$

oraz siłę uogólnioną (posługując się metodą pracy wirtualnej)

$$(95) \quad \Phi_i = -gl_i \sin q^i \sum_l m_l,$$



Rys. 9

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim.

Stąd na zasadzie równania Lagrange'a znajdujemy żądane równanie ruchu.

Innym przykładem dobitnie podkreślającym zalety metody tensorowej są jej zastosowania do równań Hamiltona - Jacobiego, [8].

Specjalnym polem zastosowania rachunku tensorowego jest obliczanie ramownic przestrzennych. W najprostszym przypadku siły działające w prętach ramownicy można uważać za składowe siły uogólnionej, która przy zmianie sił zewnętrznych ulega pewnej transformacji tensorowej. Tego rodzaju ujęcie może być w pewnych przypadkach pożyteczne, z punktu widzenia rozwinięcia metody tensorowej nie wnosi jednak nowych momentów.

Interesujące perspektywy otwiera natomiast zastosowanie rachunku tensorowego do kratownic o dźwigarach powierzchniowych, gdy konieczne staje się bliższe zbadanie odkształceń i naprężeń w poprzecznym przekroju pręta. Kompletny obraz naprężeń występujących w danym przekroju lub węźle ramownicy daje zespół sił i momentów. Zespół ten traktować można jako pewną wielkość fizyczną, którą Gorbunow, [28], [29], nazywa motorem sił; analogicznie wyznacza on motor przemieszczeń. Motor sił \bar{F} określony jest siedmioma składowymi, z których

q_1, q_2, q_3 są rzutami na osie współrzędnych sił działających w przekroju (lub węźle),

q_4 odpowiada bimomentowi,

q_5, q_6, q_7 są składowymi momentu działającego w badanym przekroju.

Współrzędne te związane są w różny sposób z kartezjańskim układem przestrzennych osi odniesienia x, y, z . Współrzędne q_1, q_2, q_3 i q_4 nie zależą od równoległego przesunięcia układu odniesienia, podczas gdy q_5, q_6, q_7 ulegają zmianie przy przesunięciu osi. Jeżeli jedną z osi (np. x) ustawimy wzdłuż dźwigara (rys. 10), a początek układu odniesienia umieścimy w środku ciężkości przekroju, to q_1 określać będzie siłę podłużną w dźwigarze, q_2 i q_3 siły poprzeczne, q_5 i q_6 odpowiadają momentom zginającym dźwigar, wreszcie q_7 jest momentem skręcającym, ale jedynie wówczas, gdy środek ciężkości przekroju pokrywa się ze środkiem zginania.

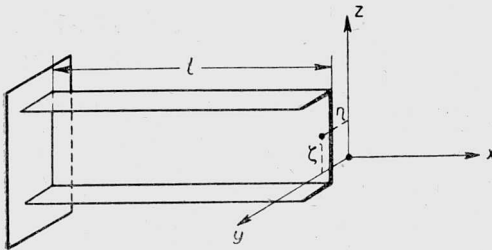
Podobnie *motor* przemieszczeń \bar{U} wyznaczony jest siedmioma składowymi, z których

p^1, p^2, p^3 są kątami obrotu przekroju w stosunku do osi,

p^4 jest miarą deplanacji przekroju,

p^5, p^6, p^7 są składowymi przesunięcia liniowego początku osi współrzędnych.

Analogicznie jak w «motorze» sił jedynie składowe p^5, p^6, p^7 zależą od przesunięcia osi odniesienia. Zespół wielkości nazwanych motorem



Rys. 10

nie jest wielkością tensorową, gdyż, jak widzimy, jego składowe w rozmaity sposób reagują na zmianę układu odniesienia. Natomiast operator R , za pomocą którego przechodzimy od motoru \bar{U} do motoru \bar{F} , nosi cechy tensora w myśl elementarnego określenia podanego na początku niniejszej pracy [wzór (2)], jeżeli zamiast wektorów operować będziemy «motorami».

Równanie ogólne ma zatem postać

Równanie ogólne ma zatem postać

$$(96) \quad \bar{F} = \|R\| p^i.$$

Ponieważ zmienność sił i przemieszczeń posiada odmienny charakter, tensor $\|R\|$ jest tensorem jednorodnym drugiego rzędu. Jeżeli za punkt wyjścia przyjmujemy przesunięcia p przypisując im charakter kontrawariantny, to tensor $\|R\|$ ma składowe R_{ik} . Transformacja dokonana za pomocą tego tensora nie jest w sensie fizycznym transformacją przestrzenną, gdyż ze względu na specyficzne właściwości motoru przestrzenna zmiana układu odniesienia nie będzie odpowiadała przekształceniu tensorowemu.

W rozpatrywanym przypadku mamy typową transformację «fizyczną». Zobaczymy później, że podobny charakter ma transformacja poliwektora prądów na poliwektor napięć poprzez tensor oporności o składowych Z_{ik} . Analogia między wielkościami elektrycznymi i mechanicznymi jest utrzymana według klasycznego systemu analogii, [58].

Dla przykładu napiszemy, [28], składowe tensora dla dźwigara przedstawionego na rysunku 10:

$$(97) \quad \|R\| = \begin{vmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES\xi}{l} & -\frac{ES\eta}{l} \\ 0 & \frac{12EJ_z}{(l)^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{(l)^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{(l)^3} & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{(l)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ_x\alpha & GJ_x\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ_x\beta & GJ_x\gamma & 0 & 0 \\ \frac{ES\xi}{l} & 0 & \frac{6EJ_y}{(l)^2} & 0 & 0 & \frac{E}{l} [4J_y + S(\xi)^2] & -\frac{ES\xi\eta}{l} \\ -\frac{ES\eta}{l} & -\frac{6EJ_z}{(l)^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES\xi\eta}{l} & \frac{E}{l} [4J_z + S(\eta)^2] \end{vmatrix}.$$

We wzorze tym przyjęto następujące oznaczenia:

- E moduł sprężystości objętościowej,
- G moduł sprężystości postaciowej,
- S przekrój poprzeczny dźwigara,
- J_i momenty bezwładności,
- η, ξ współrzędne środka ciężkości przekroju, odniesione do układu, którego początek znajduje się w środku zginania przekroju.
- α, β, γ współczynniki będące funkcjami (algebraiczno-hyperbolicznymi) zmiennej $w = l\sqrt{GJ_x/EJ_0}$.

Zespół wielkości określonych wzorem (97) jest macierzą kwadratową o wyróżniku nierównym zeru.

Przy zmianie układu współrzędnych składowe tej macierzy transformują się jako funkcje momentów bezwładności.

Nasuwa się zastrzeżenie, czy wobec ograniczonych możliwości transformacji i jej «fizycznego» charakteru usprawiedliwione jest tutaj wprowadzenie pojęcia tensora. Wydaje się, że — przynajmniej w obecnym stanie rozwoju techniki — używanie wielkości tensorowych w praktycz-

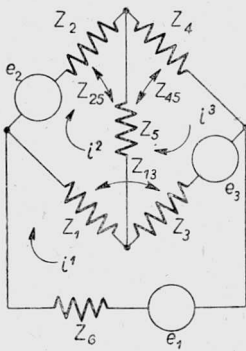
nych obliczeniach ramownic przestrzennych byłoby zbyt dużą komplikacją. Natomiast w pewnych pracach naukowych, zwłaszcza w połączeniu z teorią «motorów», metoda tensorowa może dać dogodny sposób zapisu i przejrzyste ujęcie skomplikowanych zależności między siłami i przemieszczeniami w ramownicy.

Dla uzupełnienia obrazu zasięgu metody tensorowej w mechanice trzeba wspomnieć o ogromnym znaczeniu tej metody dla rozwoju mechaniki relatywistycznej. Obliczenie ruchu peryhelium planety Merkury, ugięcia światła w sferze przyciągania słońca i przesunięcia linii spektralnych widma gwiazd stanowią klasyczne już dziś, [82], przykłady poznania tą drogą zjawisk przyrody. Oczywiście rząd wielkości obserwowanych zjawisk wybiega daleko poza aktualne potrzeby techniki, zagadnienie wykracza zatem poza ramy określone niniejszym opracowaniem.

9. Metoda tensorowa badania systemów elektrycznych

Wyżej omówiliśmy powody, dla których sprawa użycia rachunku tensorowego w elektrotechnice wymaga szczególnie starannej i krytycznej analizy. Sytuację zaciemnia jeszcze fakt rozreklamowania przez amerykański koncern *General Electric Co* «metody G. Krona».

Metoda «zastosowania tensorów do obliczeń sieci i maszyn elektrycznych» została przedstawiona przez Krona w szeregu artykułów, poczynając od 1935 r., [47], i w dwóch książkach, [45] i [46]. Metoda ta zyskała pewien rozgłos i naśladowców, [77], nie można więc nad nią przejść do porządku dziennego, tym bardziej, że niezorientowany czytelnik może w niej widzieć istotnie nowe perspektywy zastosowań rachunku tensorowego. Kilku autorów, [6], [21], [34], [57], przeprowadziło analizę błędów popełnionych przez Krona, toteż tutaj ograniczamy się do wyjaśnienia, w toku ogólnego rozumowania, podstawowego nieporozumienia, które tkwi w ujęciu «tensorowym» Krona.



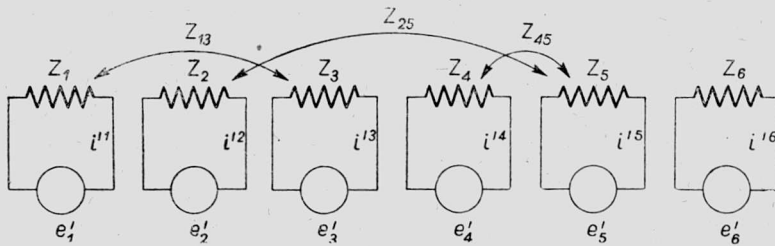
Rys. 11

W obwodach elektrycznych mamy do czynienia z dwoma rodzajami wielkości zmiennych: prądami i i napięciami e , oraz z parametrami stanowiącymi składowe oporności pozornej (impedancji) Z : indukcyjnością L , pojemnością C i opornością rzeczywistą R . Chcąc wprowadzić rachunek tensorowy musimy posługiwać się wyżej omówioną metodą przedstawienia systemu we współrzędnych uogólnionych. W tym celu trzeba rozbić rozpatrywaną sieć na obwody elementarne, będące odpowiednikiem punktów materialnych systemu mechanicznego. Na przykład sieć uwidocznioną na rys. 11, [14], przedstawimy w postaci sześciu obwodów elementarnych

nych (rys. 12), powiązanych opornościami kojarzącymi Z_{ij} . Oporności te tworzą macierz kwadratową, która w rozpatrywanym przypadku ma postać

$$(98) \quad [Z] = \begin{vmatrix} Z_{11} & 0 & Z_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{22} & 0 & 0 & Z_{25} & 0 \\ Z_{31} & 0 & Z_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{44} & Z_{45} & 0 \\ 0 & Z_{52} & 0 & Z_{54} & Z_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{66} \end{vmatrix}$$

Prądy w obwodach elementarnych wyznaczymy bez trudu jako kombinacje rozplywu prądów sieci pierwotnej. Prądy te można przedstawić w postaci macierzy jednowskaźnikowych (kolumnowych) $[i]$ i $[i']$. Zależ-



Rys. 12

ność między tymi dwoma macierzami wyraża się przez zespół równań algebraicznych i może być zapisana w formie macierzy łączącej

$$(99) \quad [C] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Kolumny macierzy odnoszą się do prądów w obwodach elementarnych, wiersze — do prądów w oczkach sieci pierwotnej. Otóż cała filozofia systemu K r o n a ogranicza się do tego przekształcenia, które jest typowym przekształceniem algebry macierzowej, znanym zresztą przed

K r o n e m. Macierz łączącą (99) K r o n nazywa tensorem transformującym bez żadnego przekonywującego uzasadnienia, gdyż nie mamy tu do czynienia z transformacją w danym układzie współrzędnych, a jedynie z przebudową sztywnych osi odniesienia. Obiekt geometryczny, odwzorowujący badany system elektryczny, otaczamy jakby rusztowaniami różnych systemów, ale samego obiektu jeszcze nie poruszyliśmy i nie dokonaliśmy żadnej z typowych transformacji tensorowych. Podział na obwody elementarne trzeba zatem traktować jako swoistą metodę *wyłącznie macierzową*, która stanowi dopiero punkt wyjścia do ewentualnych zastosowań rachunku tensorowego. Trzeba przy tym pamiętać, że macierz odwrotna w stosunku do macierzy łączącej, niezbędna do dalszych wywodów K r o n a, nie zawsze istnieje, [57], co ogranicza zakres stosowalności metody rozczłonkowania systemu. Podobnie jak przy rozpatrywaniu zagadnień pola trzeba przede wszystkim stwierdzić, jaki charakter tensorowy mają napięcia, prądy i oporności i jak je przedstawić we współrzędnych uogólnionych. Rozpatrzymy wartości chwilowe napięć i prądów. Ponieważ prądy odwzorowujemy w postaci macierzy wierszowej, więc nic nie stoi na przeszkodzie, aby każdemu prądowi w obwodzie elementarnym podporządkować współrzędną uogólnioną q^k . Wówczas obrazem zespołu prądów płynących w obwodach elementarnych jest poliwektor kontrawariantny o składowych i^k . Gdyby obwody elementarne były nieskojarzone, to koniec poliwektora i^k mógłby poruszać się w przestrzeni p -wymiarowej w dowolny sposób. Jeżeli jednak sieć składa się z połączonych ze sobą obwodów, to dla każdego z R węzłów napisać można równanie Kirchhoffa, co we współrzędnych uogólnionych wyrazimy wzorem

$$(100) \quad \sum_r \sum_s C_{rs} i^r = 0.$$

Równania te oznaczają zmniejszenie liczby stopni swobody o R , w następstwie czego wszystkie prądy są jednoznacznie określone przez napięcia zasilające system. Przy zmianie jednego z tych napięć punkt P porusza się po torze wyznaczonym parametrami systemu.

Mnożąc składowe i^k przez odpowiednie składowe macierzy oporności (98) znajdujemy składowe innego poliwektora, mianowicie poliwektora napięcia. Poliwektor ten posiada przeciwny charakter zmienniczości niż \mathbf{i} , jest więc poliwektorem kowariantnym o składowych e_l .

Widzimy, że za pomocą macierzy $[Z]$ poliwektor i^k przekształciliśmy na poliwektor e_l , wobec czego dokonaliśmy przekształcenia, które na początku przyjęliśmy za transformację tensorową [równania (2) i (19)]. Fakt, że przy transformacji zmienił się charakter fizyczny wielkości — z prądów przeszliśmy na napięcia — nie ma znaczenia z punktu widzenia geo-

metryzacji przebiegu. Dochodzimy więc do wniosku, że macierz oporności traktować można jako podwójnie kowariantny tensor transformacji i równanie wiążące prądy i napięcia napisać należy w postaci tensorowej

$$(101) \quad e_l = \sum_k Z_{kl} i^k.$$

Rozumowanie można równie dobrze przeprowadzić biorąc za punkt wyjścia poliwektor napięć; tensorem transformującym jest wtedy macierz przewodności (admitacji) systemu [Y]:

$$(103) \quad i^r = \sum_s Y^{rs} e_s.$$

W ośrodkach ciągłych mieliśmy do czynienia z transformacjami, które przez zmianę układu odniesienia pozwalały zbadać przebieg zjawiska. Podobnie możemy postępować w obwodach elektrycznych, z tym, oczywiście, że transformacja dotyczyć będzie zmian pewnych właściwości fizycznych układu.

Zauważmy, że dla każdej składowej napięcia w obwodzie e_{kl} w ogólnym przypadku obowiązuje zależność

$$(103) \quad e_{kl} = R i^l + L \frac{d i^l}{dt} + \frac{1}{C} \int i^l dt.$$

Wprowadzając operator różniczkowania (H e a v i s i d e'a) $p = d/dt$ możemy napisać

$$(104) \quad e_{kl} = (R + L p + C^{-1} p^{-1}) i^l.$$

Jeżeli założymy przez analogię z systemami mechanicznymi, że w najprostszym przypadku R , L i C są parametrami stałymi, to wielkością, którą możemy zmieniać, jest p . Oznacza to, że transformacja tensorowa pozwala na zbadanie wpływu przebiegów czasowych na zachowanie się systemu. Jeżeli wprowadzilibyśmy dodatkową oś współrzędnych t , to zmiana d/dt oznaczałaby obrót układu odniesienia względem osi. To samo zagadnienie można ująć bardziej poglądowo, gdy mamy do czynienia z prądami sinusoidalnymi o stałych amplitudach. Każdemu z prądów w obwodzie elementarnym przyporządkowujemy wówczas dwie współrzędne, q^{rk} i q^{jk} , odpowiadające składowym rzeczywistej i urojonej prądu i^k . Odpowiednikiem zmiany d/dt jest zmiana częstotliwości napięć zasilających układ. Zmiana częstotliwości pociąga za sobą obrót wektorów prądowych we współrzędnych q^{rk} , q^{jk} .

System elektryczny o stałych R , L i C jest przypadkiem szczególnym, który nie wyczerpuje zagadnień stojących przed techniką w dziedzinie energetyki, zwłaszcza w telekomunikacji. Dlatego nieodzowne jest roz-

ciągnięcie przekształcenia tensorowego na systemy o zmiennych R , L i C . Sprawa ta jest bardzo skomplikowana i jeszcze mało zbadana.

Dla scharakteryzowania metody, jakiej należy użyć, rozpatrzmy system elektryczny złożony z obwodów elementarnych o samych indukccyjnościach własnych L_{ij} lub wzajemnych L_{ij} ($i \neq j$), [6]. Najogólniejsza zależność między napięciem i prądem jest

$$(105) \quad e_k = \sum_l L_{kl} \frac{di^l}{dt} + \sum_l i^l \frac{dL_{kl}}{dt} - \sum_{l,m} \Gamma_{lk}^m \dot{\Phi}_m \frac{di^l}{dt},$$

gdzie Φ_m oznacza strumień magnetyczny skojarzony z indukccyjnością, a Γ_{lk}^m symbol *Christoffela*, który wyznaczamy z równania

$$(106) \quad \sum_m L_{hm} \Gamma_{kl}^m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{kh}}{\partial i^l} + \frac{\partial L_{lh}}{\partial i^k} - \frac{\partial L_{kl}}{\partial i^h} \right).$$

Trzy wyrazy prawej strony równania (105) mają ważny sens fizyczny:

(a) wyraz pierwszy charakteryzuje zmiany $e(i)$ w systemie liniowym o parametrach stałych;

(b) wyraz drugi oznacza zmiany parametryczne systemu, które w przypadku napięć sinusoidalnych o stałych amplitudach są odpowiednikiem zniekształceń liniowych;

(c) wyraz trzeci charakteryzuje nieliniowość systemu, jedynie bowiem w systemach nieliniowych lewa strona równania (106) nie jest tożsamościowo równa zero. Tu właśnie tkwi drugi zasadniczy błąd *Krona*, który szafuje symbolami *Christoffela* w układach liniowych, nie sprawdzwszy, że wszystkie człony zawierające ten symbol równe są zero.

Z równania (105) widać, że, obok transformacji odpowiadającej zmianie częstotliwości w układzie o stałych parametrach, możliwe są inne przekształcenia układu odniesienia. Transformacja *parametryczna* wynikająca ze zmiany wartości R , L i C może mieć dwojaki charakter:

(a) w przypadkach gdy badamy zachowanie się systemu w funkcji częstotliwości, przy czym jest $R(\omega)$, $L(\omega)$, $C(\omega)$, to mamy do czynienia z transformacją, która odwzorowuje rzeczywiste zmiany systemu [problemy grupy (3)], co nie wymaga dodatkowych wyjaśnień;

(b) możemy jednak zastosować zmianę R , L i C jako transformację formalną, mającą na celu uproszczenie systemu [problemy grupy (2)].

Takiej metody używamy w pewnych zagadnieniach energetycznych przeważnie dla usunięcia sprzężeń wzajemnych między obwodami, tj. składowych Z_{ij} ($i \neq j$) w tensorze oporności, gdy częstotliwość napięć zasilających pozostaje stała. Transformację realizujemy przez odpowiednie dobranie podstawowego tensora metrycznego. Przykładem tego typu transformacji jest znane od dawna *przekształcenie Fortescue*, [23], za

pomocą którego symetryzuje się i pozbawia sprzężeń np. układ cewek silnika.

Układ trzech cewek silnika asynchronicznego posiada oporność

$$(107) \quad \|Z\| = \begin{vmatrix} Z & M_1 & M_2 \\ M_1 & Z & M_1 \\ M_2 & M_1 & Z \end{vmatrix}.$$

Zastępujemy prądy (wartości skuteczne) w obwodach rzeczywistych J^1, J^2 i J^3 prądami umyślnymi J^{11}, J^{12} i J^{13} stosując tensor metryczny

$$(108) \quad \|g\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & h^2 & h \\ 1 & h & h^2 \end{vmatrix},$$

gdzie $h = e^{j 120^\circ}$.

Oporność zastępcza dla prądów umyślonych wynosi

$$(109) \quad \|Z'\| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} Z + M_1 + M_2 & 0 & 0 \\ 0 & Z + h^2 M_1 + h M_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z + h M_1 + h^2 M_2 \end{vmatrix}$$

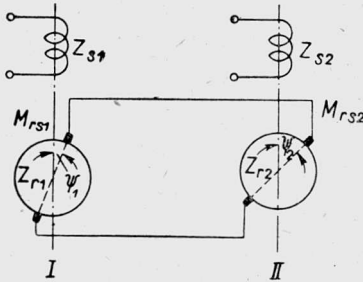
W nowym układzie prądów sprzężenia zostały wyeliminowane i tensor $\|Z'\|$ przybrał postać macierzy diagonalnej. Metoda diagonalizacji macierzy posiada zresztą szereg poważnych opracowań, [68], i jest szczególnie przydatna do rozwiązywania sprzężonych obwodów trójfazowych.

Powyżej przytoczyliśmy przykład, w którym tensor $\|Z\|$ był symetryczny. Tego typu tensory spotykamy z reguły w obwodach energetycznych, gdzie kierunek sprzężenia nie wpływa na rozptyw prądów $Z_{ij} = Z_{ji}$. Natomiast w urządzeniach z elementami czynnymi (lampami elektronowymi) tensor $\|Z\|$ jest na ogół niesymetryczny; np. w lampie trójelektrodowej podporządkowanie prądu anodowego prądowi siatki nie jest równoznaczne z zależnością odwrotną.

W przemyśle spotykamy wiele urządzeń elektrycznych, w których obok przebiegów elektrycznych następują przesunięcia przestrzenne elementów systemu. W pojedynczych silnikach czy prądnicach zastosowanie metody tensorowej byłoby zbyt dużą komplikacją. Natomiast w systemach bardziej złożonych, np. przy obliczaniu współpracy kilku prądnic lub projektowaniu urządzeń sterujących, zwięzłość i przejrzystość zapisu tensorowego może być bardzo pożyteczna. Na przykład dla zespołu selsyn (rys. 13), [45], w którym szczotki maszyny sterującej ustawione są pod kątem ψ_1 , a silnika sterowanego pod kątem ψ_2 , otrzymamy macierz oporności dla prądów chwilowych w postaci

$$(110) \quad \|Z\| = \begin{vmatrix} R_{s1} + pL_{s1} & pM_{rs1}e^{j\psi_1} & 0 \\ pM_{rs1}e^{-j\psi_1} & R_{r1} + R_{r2} + p(L_{r1} + L_{r2}) & -pM_{rs2}e^{-j\psi_2} \\ 0 & -pM_{rs2}e^{j\psi_2} & R_{s2} + pL_{s2} \end{vmatrix}.$$

Indeksy r odnoszą się do wirnika, indeksy s do stojana pierwszej lub drugiej maszyny. Obracając przestrzenny układ współrzędnych o kąt $-\psi_1$ otrzymamy tensor transformujący o zmiennym parametrze $\psi_1 - \psi_2$, który w dogodny sposób obrazuje wpływ przesunięcia szczotek na pracę układu.



Rys. 13

Można by podać wiele przykładów obliczania podobnych urządzeń złożonych z maszyn komutatorowych. Powyższa metoda może się również nadawać do badania przebiegu prądów w silniku w czasie rozruchu, gdy prędkość kątowna pola wirnika jest parametrem zmiennym.

10. Główne problemy zastosowań metody tensorowej w technice

W niniejszej pracy starano się znaleźć sposoby właściwego wykorzystania rachunku tensorowego dla potrzeb techniki. Widzieliśmy, że potencjalne możliwości tych zastosowań w różnych dziedzinach techniki są bardzo rozległe. Z drugiej jednak strony zakres aktualnego wprowadzenia metody tensorowej jest bardzo nierównomierny, gdyż w jednych gałęziach techniki — jak np. w teorii sprężystości — stała się ona ważnym narzędziem pracy naukowców, natomiast w innych jest prawie nieznaną i wymaga pionierskich badań matematyków i techników.

Droga tych badań jest ułatwiona dzięki temu, że, jak wykazano w niniejszej pracy, metody przystosowania rachunku tensorowego do różnych dziedzin techniki noszą wiele cech wspólnych. Przy atakowaniu problemów technicznych, związanych z ośrodkami ciągłymi lub z systemami o stałych skupionych, kierować się należy następującymi wytycznymi, wynikającymi z poprzednio przeprowadzonej analizy:

(1) Rachunek tensorowy stosować można jedynie do obiektów, które dadzą się przedstawić za pomocą tensorów i których właściwości tensorowe występują w badanym przez nas problemie technicznym. Dlatego podstawą prawidłowego posługiwania się metodą tensorową w technice jest zbadanie sensu fizycznego zależności matematycznych.

(2) Wyniki obliczeń tensorowych szczególnie łatwo dają się przenosić z jednej dziedziny techniki do innej. Dlatego stając przed nowym problemem trzeba przede wszystkim stwierdzić, czy w innych dyscyplinach technicznych nie opracowano już zagadnienia o zbliżonym charakterze matematycznym.

(3) Geometryzacja zjawiska powinna być przeprowadzona w ten sposób, aby we wzorach tensorowych uwydatniły się najistotniejsze dla technika współzależności między parametrami, będącymi przedmiotem projektowania, bądź też między wielkościami zmiennymi, decydującymi o ekonomice danego procesu technologicznego.

(4) Układ odniesienia trzeba tak dobrać, aby uzyskać najwygodniejsze zależności matematyczne. W zagadnieniach ośrodków ciągłych posługujemy się zasadniczo trój- lub czterowymiarowym układem odniesienia; dalsze osie współrzędnych noszą przeważnie charakter pomocniczy. W systemach o stałych skupionych stosuje się współrzędne uogólnione, których liczba jest funkcją liczby stopni swobody układu. Zależnie od charakteru badanego zjawiska czas można traktować jako niezależną współrzędną lub też odwzorowywać zmiany w czasie przez transformację układu odniesienia.

(5) Nie wolno sugerować się efektywnym ujęciem wzorów tensorowych we współrzędnych krzywoliniowych; rzeczą konieczną jest sprawdzenie, czy wyrażenia w tych wzorach lub ich częściach nie stają się tożsamościowo równe zero.

(6) Pożądane jest, aby transformacje tensorowe upraszczały badane zjawisko, sprowadzając je do typowego, lepiej znanego obiektu. Należy sprawdzić prawidłowość transformacji przez określenie niezmienników i zbadanie ich znaczenia fizycznego.

(7) Należy ściśle rozgraniczać metodę tensorową od zastosowań technicznych algebry macierzowej. Sprawdzianem jest tutaj sposób transformacji i jej użyteczność przy obliczeniach technicznych.

Posługiwanie się metodą tensorową jako narzędziem badawczym wymaga opanowania zasad algebry tensorowej oraz zdobycia pewnej rutyny w obliczeniach. Dlatego stosowanie metody tensorowej do fragmentarycznych, rzadko spotykanych zagadnień technicznych jest nieuzasadnione, chyba że inne prostsze metody obliczeniowe całkowicie zawiodą. Główny nacisk należy zatem położyć na gruntowne zbadanie przydatności metody tensorowej do rozwiązywania problemów podstawowych, występujących w wielu dziedzinach techniki lub mających zasadnicze znaczenie dla jakiejś ważnej dyscypliny technicznej. Jedynie wówczas opłaca się trud opanowania specjalnego aparatu matematycznego.

Trudno na podstawie dotychczasowego stanu nauki podać ściśłą i kompletną liczbę zagadnień, które należałoby badać metodą tensorową. Nasuwają się jednak następujące zagadnienia, które ze względu na ich doniosłość dla nauki i gospodarki narodowej zasługują przede wszystkim na zbadanie metodą tensorową:

(1) obliczenia rozkładu pól statycznych oraz przebiegów falowych i impulsowych w ośrodkach anizotropowych,

(2) badania zmian reologicznych w ośrodkach ciągłych,

(3) ogólna teoria przebiegów nieliniowych w ośrodkach ciągłych i systemach,

(4) określanie optymalnych parametrów złożonych obwodów elektrycznych.

Wymienione zagadnienia są bardzo obszerne i stosunkowo mało zbadane, wobec czego opracowanie ich może dać cenne rezultaty jedynie przy zespołowej i planowej współpracy matematyków i techników.

Bibliografia

- [1] M. Abraham-R. Becker, *Theorie der Elektrizität*, t. 1, Teubner, Lipsk 1932.
- [2] R. Ariano, *Deformazioni finite*, Hoepli, Mediolan 1936.
- [3] P. Appel - R. Thiry, *Mécanique rationelle*, t. 5, Gauthier-Villars, Paryż 1932.
- [4] N. H. Arutiunian, *Trudy IV konfieriencji po bietonu i żelzobietonnym konstrukcjam*, Strojizdat, Moskwa 1949.
- [5] J. Barbotte, *Le calcul tensoriel*, Masson, Paryż 1948.
- [6] W. Bieriendiejew, *O rabotach Krona po primienienju tiensornowo isczislenja w elektrotiechnike*, Elektrichestwo 12 (1950), str. 78.
- [7] P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice-Hall, Naw York 1942.
- [8] L. Brillouin, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Masson, Paryż 1949.
- [9] W. Bułgakow, *Kolebanja*, t. 1, Gostiechizdat, Moskwa 1949.
- [10] P. Burgatti, *Sulle deformazioni finite dei corpi continui*, Mem. dell'Ac. di Bologna, ser. 7a I, 1913 (cyt. według [76]).
- [11] W. G. Cady, *Piezoelectricity*, McGraw-Hill, New York 1946.
- [12] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paryż 1928. (Tłumaczenie ros. ONTI, Moskwa 1936).
- [13] P. Chałmor, *Tieorja miery*, Izd. Inostr. Lit., Moskwa 1951.
- [14] T. Cholewicki, *Zastosowania macierzy w elektrotechnice*, PWN, Warszawa 1952.
- [15] L. B. Christoffel, *Über die Fortpflanzung von Stößen durch elastische feste Körper*, Ann. d. Math., t. 8, 1877, str. 193.
- [16] R. V. Churchill, *Introduction to Complex Variable and Applications*, McGraw-Hill, New York 1948.
- [17] A. J. Mc. Connell, *Applications of the Absolute Differential Calculus*, Blackie-Sons, Londyn 1947.
- [18] M. Denis - Papin - A. Kaufmann, *Cours de calcul tensoriel appliqué*, Paryż 1953.
- [19] P. A. M. Dirac, *Homogeneous Variables in Classical Dynamics*, Proc. Cambr. Phil. Soc., t. 29, 1933, str. 389.
- [20] J. Dubnow, *Osnowy wiektornowo isczislenja*, t. 2, Moskwa 1952.
- [21] A. Duschek - A. Hochrainer, *Grundzüge der Tensorrechnung in analitischer Darstellung*, Springer, t. 1, Wiedeń 1948, t. 2, 1950.
- [22] A. Einstein, *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie*, Barth, Lipsk 1916.
- [23] C. L. Fortescue, *Method of Symmetrical Co-ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks*, Trans. Amer. Inst. of Elect. Eng., t. 37, cz. 2, 1918.

- [24] P. Frank - R. Mises, *Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, Vieweg, Brunswik 1930.
- [25] Frazer - Duncan - Collar, *Elementary Matrices*, Cambridge Univ. Press, 1938.
- [26] J. Frenkel, *Lehrbuch der Elektrodynamik*, Springer, Berlin 1928.
- [27] B. G. Galerkin, *Obszczaje reszenje urawnienja teorji uprugosti*, Wiestnik miech. i prikl. mat., t. 2, Leningrad 1931, str. 3.
- [28] B. N. Gorbunow - J. Krotow, *Osnowy rasczeta prostranstwiennyh ram*, ONTI, Moskwa 1936.
- [29] B. N. Gorbunow - A. Strielbickaja, *Tieorja ram iz tonkostiennyh stierżniej*, OGIZ, Moskwa 1948.
- [30] F. R. Gautmachie - M. G. Kriejn, *Oscillacionnyje matricy i małyje kolebanja miechaniczeskich sistiem*, Moskwa-Leningrad 1941.
- [31] J. Goldienblat, *Wwiedienje w tieorju potzuczesti stroitielnyh materialow*, Gosizdat, Moskwa 1952.
- [32] W. A. Gorkow, *Elektriczeskije i magnitnyje pola*, Swjazizdat, Moskwa 1951.
- [32a] A. Grzędzielski, *Zarys ogólnej teorii sprężystości*, Spraw. Inst. Techn. Lot. 1 (1938).
- [33] M. G. Grassmann, *Die Ausdehnungslehre*, Berlin 1862.
- [34] L. N. Gruzow, *K statje Maksimowicza, Elektriczestwo* (12) 1952, str. 82.
- [35] A. Haas, *Vektoranalysis*, Gruyter, Berlin 1929.
- [36] L. Infeld, *Elektrodynamika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1953 (skrypt).
- [37] D. Iwanienko - A. Sokolow, *Klasiczeskaja tieorja pola*, Gosizdat tiechn.-tieor. lit., Moskwa 1951.
- [38] G. Juvvert, *Introduction au calcul tensoriel*, Blanchard, Paryż 1922.
- [39] W. G. Kagan, *Osnowy teorji powierchnostiej w tienzornom izłożenji*, Gostiechizdat, t. 1, Moskwa 1947.
- [40] R. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik, Elektrizität und Magnetismus*, M. Planck, Berlin 1891.
- [41] E. Karaszkiewicz, *Zarys teorii wektorów i tensorów*, PWN, Poznań 1953 (skrypt).
- [42] P. Kotielnikow - W. A. Fok, *Niekotoryje primienienja idiei neewklidowej geometriji Łobaczewskowo w miechanikie i fizikie*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1950.
- [43] N. E. Koczin, *Wiektornoje isczislenje i naczala tienzornowo isczislenja*, Izdat. A. N. SSSR, Moskwa 1951.
- [44] W. Kołtoński - I. Malecki, *La méthode ultrasonore pour les recherches des couches géologiques*, Bull. de l'Acad. Pol. des Sc. kl. IV. t. 1, 3 (1953).
- [45] G. Kron, *Tensor Analysis for Electrical Engineers*, J. Wiley, New York 1942.
- [46] G. Kron, *Tensor Analysis of Networks*, J. Wiley, New York 1949.
- [47] G. Kron, *The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery*, Gen. Electr. Rev., kwiecień 1935.
- [48] I. L. Kronecker, *Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale*, Teubner, Lipsk 1894.
- [49] J. A. Krutkow, *Tienzor funkcij napriażenij*, Izdat. A. N. SSSR, Moskwa 1949.
- [50] R. Courant - D. Hilbert, *Mietody matiematycznej fiziki*, Gostiechizdat, Moskwa 1949.
- [51] D. I. Kutilin, *Tieorja koniecznych dieformacij*, Gostiechizdat, Moskwa 1947.

- [52] M. Landolt - E. Thomas, *Grandeur, mesure et unité*, Paryż 1947.
- [53] S. G. Lechnicki, *Tieorja uprugosti anizotropnowo tiela*, Gosizdat tiechn.-tieor. lit., Moskwa 1950.
- [54] J. Litwiniszyn, *Uogólnienie równań hydromechaniki*, Prace mat.-fiz. t. 48 (1952).
- [55] T. Levi - Civita, *The absolute Differential Calculus (Calculus of Tensor)*, Blackie-Sons, Londyn 1947.
- [56] H. A. Lorentz, *Das Relativitätssprinzip*, Berlin 1914.
- [57] N. G. Maksimowicz, *K tieorji prieobrazowanja schiem G. Krona*, Elektriczestwo 11 (1952), str. 56.
- [58] I. Malecki, *Interpretacja fizyczna analogii elektromechanicznych*, Przegląd Elektr., 1 (1952), str. 3.
- [59] I. Malecki, *Rozszerzenie poprawionego systemu analogii na ośrodki ciągłe izotropowe*, Arch. Elektr. 1 (1953).
- [60] J. Malecki, *Akustyka filmowa i radiowa*, PWT, Warszawa 1950.
- [61] I. Malecki, *Teoria ciśnienia promieniowania fal ultradźwiękowych*, Mat. I Konf. Ultradźw., PWN, Warszawa 1953 (w druku).
- [62] G. Marx, *Das elektromagnetische Feld in bewegten anizotropen Medien*, Acta Phys. Acad. Sci. Hung., t. 3, 2 (1953), str. 75.
- [63] W. P. Mason, *First and Second Order Equations for Piezoelectric Crystals Expressed in Tensor Form*, Bell System Techn. Journ., t. 26, 1947, str. 80.
- [64] A. D. Michal, *Matrix and Tensor Calculus*, J. Wiley, New York 1948.
- [65] H. Minkowski, *Raum und Zeit*, Getynga 1909.
- [66] A. Mostowski - M. Stark, *Algebra wyższa*, cz. 1, P.T.M., Warszawa 1953.
- [67] O. Nikodym, *Teoria tensorów wraz z zastosowaniem do geometrii i fizyki matematycznej*, Kasa im. Mianowskiego, Warszawa 1938.
- [68] L. A. Pipes, *Steady-state Analysis of Multiconductor Transmission Lines*, Journ. of Appl. Physics, 11 (1942).
- [69] H. Poincaré, *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, Carré, Paryż 1829.
- [70] W. Pogorzelski, *Analiza matematyczna*, t. 3, Czytelnik, Warszawa 1949.
- [71] P. K. Raszewski, *Rimanowa geometrija i tienzornyj analiz*, Gosizdat tiechn.-tieor. lit., Moskwa 1953.
- [72] G. Ricci - T. Civita, *Méthodes de calcul differential absolu et leur application*, Math. Ann., t. 54, 1901, str. 195.
- [73] W. Rubinowicz, *Wektory i tensor*, Warszawa 1950.
- [74] J. A. Schouten, *Tensor Analysis for Physicists*, Clarendon, Oksford 1951.
- [75] I. S. Sokolnikoff, *Tensor Analysis*, J. Wiley, New York 1951.
- [76] P. A. Szirkow, *Tienzornyje isczislenja*, Moskwa-Leningrad 1934.
- [77] S. A. Stigant, *Modern Electrical Engineering Mathematics*, Hutchinson, Londyn 1947.
- [78] S. Timoshenko, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York 1936.
- [79] N. A. Urmajew, *Elemienty fotogrammetriji, Geodiezizdot*, Moskwa 1941.
- [80] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Getynga 1910.
- [81] W. Voigt, *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Kristalle*, Teubner, Lipsk 1898.
- [82] H. Weyl, *Raum, Zeit und Materie*, Springer, Berlin 1921.
- [83] E. W. Zieliach, *Osnowy obszczej tieorji liniejnych elektrieskich schiem*, Izwiest. A. N. SSSR, 1951.

МЕТОДЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ТЕХНИКЕ

Целью настоящей работы является определение степени полезности тензорного исчисления в различных отраслях техники и исследование классических методов приспособления тензорных методов для решения технических проблем.

Краткое историческое введение указывает пути перенесения тензорных методов из математики и теоретической физики в область механики и электротехники. В виду того, что работа предназначена главным образом для техников, необходимо было привести основные тензорные понятия. Исходным пунктом принято геометрическую интерпретацию тензорных трансформаций в декартовых координатах, обобщая затем эти понятия на криволинейные координаты и пространство Римана.

Основой для технических применений метода является физическая интерпретация тензора. Рассмотрено тензорный характер физических зависимостей и тензорный метод определения инвариантных свойств объектов. Проведено аналогия между методами, применяемыми в анализе мер и тензорной алгебре. Далее, исследованы, различия физического характера между понятиями тензора и матрицы.

Подтверждено, что в технических проблемах существуют три типа тензорных трансформаций:

- (а) формальные трансформации, не изменяющие типа объекта,
- (б) формальные трансформации, вызывающие изменение типа объекта,
- (в) трансформации, отображающие действительные изменения, происходящие в объекте.

Приведена характеристика и примеры каждого из этих типов трансформаций.

Проанализировано выгоды применения тензорного исчисления в технике, вытекающие из его универсальности, синтетичности и пригодности для расчётов.

Совокупность применений тензорного исчисления в технике разделено на вопросы, касающиеся сплошных сред и систем со многими степенями свободы.

Исследовано тензорный характер физических величин, появляющихся в упругом и электромагнитном поле, и особенные типы тензоров, употребляемых при исследовании сплошных сред.

Далее указывается, что соответственно модифицированные тензорные методы могут быть полезны в следующих отраслях техники, связанных с вопросами сплошных сред:

(а) классической теории упругости, а в особенности анизотропных сред,

- (б) теории конечных деформаций,
- (в) гидродинамике вязких жидкостей,
- (г) теории пластичности и реологии,
- (д) нелинейных явлениях в электромагнитном поле,
- (е) импульсной передаче электромагнитных волн,
- (ж) пространственной аэротриангуляции.

Для каждой из этих областей определены наиболее соответствующие тензорные методы и приведены примеры.

Следует подчеркнуть, что в работе рассмотрены: техническая применимость тензора энергии импульса, тензорная форма уравнений Максвелла, а также и тензор с переменными составляющими, выступающий в вопросах реологии и конечных деформаций.

Проведено сравнение физического смысла тензора в системах с сосредоточенными постоянными и в сплошных средах. Кроме того исследовано область применения метода обобщенных координат.

На этом основании установлено, что тензорное исчисление пригодно для исследования систем, выступающих в:

- (а) некоторых вопросах классической механики (например в уравнениях Лагранжа и Гамильтона),
- (б) пространственных фермах,
- (в) сложных электрических сетях,
- (г) сложных системах телесвязи, работающих на переменной частоте.

Особенное внимание обращено на соответствующие разграничение между тензорным исчислением и исчислением матриц. Отсюда следует отношение к теории Г. Крона и заключающихся в ней погрешностей. Исследован тензорный характер мнимого электрического сопротивления и пригодные для техники методы его трансформирования. Далее указаны возможности, скрывающиеся в применении криволинейных координат и теории „моторов” Горбунова при исследовании механических систем.

Самыми актуальными проблемами применения тензорного исчисления в технике, по мнению автора, являются:

- (а) определение статических полей, волновых и импульсных явлений в анизотропных средах,
- (б) исследование реологических изменений в сплошных средах,
- (в) общая теория нелинейных процессов в системах и сплошных средах,
- (г) исследование сложных электрических цепей.

S u m m a r y

METHODS OF APPLICATION OF TENSOR CALCULUS TO TECHNICAL PROBLEMS

The author's aim is to determine the degree of utility of the tensor calculus in various branches of technical sciences and to discuss the application of the classical methods of tensor analysis to technical problems.

A short historical introduction indicates the ways in which the methods of tensor calculus have been applied to problems of mechanics and electrotechnics. Since the paper is destined for technicians, it has been considered desirable to explain some fundamental notions relating to tensors. The geometrical interpretation of tensor transformations in Cartesian co-ordinates was taken as the starting point, generalizing the notion to curvilinear co-ordinates and to R i e m a n n i a n space.

The basis of technical applications of tensor analysis is the physical interpretation of the tensor. The tensorial character of physical relations and the use of tensors for detecting invariable features of the investigated object are discussed. The methods of dimensional analysis are compared with those of tensor algebra. Next, the physical differences between the notion of the tensor and that of the matrix are investigated.

It was found that in technical problems there are three types of tensor transformations:

- (a) formal transformations, in which the type of the object is not changed,
- (b) formal transformations changing the type of the object,
- (c) transformations representing real changes in the object.

Each type of transformation is characterised and examples given.

The advantages of tensor calculus in technical problems resulting from its general and synthetic character and its suitability for calculations are analysed. The whole of the applications discussed is divided into two groups of problems, the first concerning continuous media, and the other — systems of many degrees of freedom.

The tensorial character of physical quantities relative to the elastic and the electromagnetic fields are discussed, as well as special types of tensors used for investigation of continuous media.

It was found that the methods of tensor calculus, when suitably modified, can be applied in the following branches of technics, concerning continuous media:

- (a) classical theory of elasticity, especially the theory of anisotropic bodies,
- (b) theory of finite deformations,

- (c) hydrodynamics of viscous liquids,
- (d) theory of plasticity and rheology,
- (e) non-linear phenomena in an electromagnetic field,
- (f) impulse processes in electromagnetic waves,
- (g) aerotriangulation in three dimensions.

For each of these problems suitable methods of tensor analysis are determined and examples given.

In particular, the author discusses the technical applicability of the tensor of impulse energy, the tensorial form of Maxwell's equations and the tensor of variable components, appearing in the problems of rheology and finite deformations.

Physical interpretations of the tensor in systems with concentrated constants and in continuous mediums are compared and the applicability of generalized co-ordinates discussed.

In conclusion it is stated that the tensor calculus is suitable for investigation of the following problems:

- (a) certain problems of classical mechanics (e.g. the equations of Lagrange and Hamilton),
- (b) three-dimensional trusses,
- (c) multi-circuit electrical power systems,
- (d) complicated telecommunication systems operating with variable frequency.

Special attention has been paid to a correct delimitation between the tensor calculus and that of matrices. In conclusion the theory of G. Kron is discussed and its errors pointed out. The tensorial character of the apparent resistance is investigated, as well as the corresponding methods of transformation, suitable for technical problems. Next, the possibilities of application of curvilinear co-ordinates and the Gorbunov theory of «motors» for investigation of mechanical systems are discussed.

The following problems are considered by the author to be most interesting from the point of view of tensorial calculus:

- (a) computation of distribution of static fields and wave and impulse processes in anisotropic mediums,
- (b) investigation of rheological changes in continuous mediums,
- (c) general theory of non-linear processes in continuous mediums and systems,
- (d) investigation of complicated electrical circuits.

ZAKŁAD BADAŃ DRGAN
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 stycznia 1954 r.

JERZY NOWIŃSKI

PODSTAWY TEORII PLASTYCZNOŚCI (I).

SIEDEM WYKŁADÓW

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

XVII

SPIS TREŚCI

	Str.
Wykład I	71
§ 1. Stany naprężenia i odkształcenia	72
§ 2. Stan naprężenia w punkcie. Naprężenia główne	78
§ 3. Naprężenia ośmiościenne (tzn. na ścianach ośmiościanu foremnego)	80
Wykład II	83
§ 4. Krańcowe wartości naprężeń stycznych (główny dwunastościan rombowy)	85
§ 5. Stan odkształcenia w punkcie	87
§ 6. Prawo sprężystości	89
§ 7. Prawo zmiany objętości i prawo zmiany postaci	92
Wykład III	94
§ 8. Warunki plastyczności (hipotezy wytrzymałościowe)	94
Wykład IV	105
§ 9. Teoria plastyczności	108
Wykład V	114
§ 10. Twierdzenie Iljuszina	114
§ 11. Podstawowe równania mechaniki ciał sprężysto-plastycznych	117
Wykład VI	119
§ 12. Zadanie Lamégo (rura grubościenna poddana ciśnieniu wewnętrznemu i zewnętrznemu)	119
§ 13. Zginanie czyste	124
Wykład VII	129
§ 14. Związek pomiędzy zjawiskami wytrzymałościowymi i budową materii	129

W Y K Ł A D I *)

Chociaż w obecnym stanie wiedzy trudno byłoby określić ściśle, co stanowi istotę plastyczności materiałów, przedmiotem rozważań teorii plastyczności są, niewątpliwie, odkształcenia trwałe, tzn. odkształcenia nie znikające całkowicie lub częściowo po usunięciu sił obciążających. Tym samym w zakres rozważań teorii plastyczności wchodzi przemiany całkowicie lub częściowo nieodwracalne. Pod tym względem teoria plastyczności stanowi przeciwieństwo teorii sprężystości, która zajmuje się jedynie przemianami odwracalnymi i w której w związku z tym zakłada się jedno-jednoznaczność odpowiedniość pomiędzy stanami odkształcenia i naprężenia (jeżeli pominąć tzw. «samonaprężenia», czyli naprężenia «wstępne» lub «własne» w stanie nieobciążonym ciała). Teoria plastyczności opiera się na ujęciu fenomenologicznym rozpatrywanych zjawisk i nie wnika w ich istotę fizykalną. Posługuje się ona różnymi modelami ciał, jak ciało sprężysto-plastyczne, idealne ciało plastyczne, ciało plastyczne ulegające tzw. wzmocnieniu wraz ze wzrostem odkształcenia (tzn. wykazujące «hartowność mechaniczną») itp. Jeżeli wprowadzamy dodatkowo pojęcie czasu, to teoria plastyczności przeobraża się w tzw. reologię, czyli naukę o przepływie plastycznym (*rheos* oznacza «prąd»). Reologia zaj-

*) Przedstawiony tutaj zarys teorii małych odkształceń ciał sprężysto-plastycznych stanowił treść wykładów wygłoszonych w pierwszych miesiącach 1953 r. na seminarium Grupy Technicznej B Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk. Za materiał do wykładów posłużyły głównie znane podręczniki Biezuchowa, Iljuszina, Nádaia, Sokółowskiego, Filonienki-Bórodcza, Goldienblata i innych**). Autor składa podziękowanie kierownikowi Grupy, profesorowi dr. Stanisławowi Turskiemu, za inicjatywę dotyczącą opublikowania wykładów oraz pracownikowi Grupy, mgr Irene Glass, za wydatną pomoc przy uporządkowaniu i opracowaniu notatek. Drugą część niniejszych *Siedmiu Wykładów* stanowią będą wykłady seminaryjne prof. dr. Wacława Olszaka, które ukażą się w druku jako *Podstawy teorii plastyczności (II)*.

***) Por. wykaz literatury na końcu pracy. W celu nierozpraszczenia uwagi czytelnika zaniechano w tekście powoływania się na źródła, jednakże uważny czytelnik z łatwością dostrzeże wpływ dzieł, z których autor wykładów czerpał materiały szczególnie obszernie.

muje się takimi zjawiskami, jak pełzanie (wzrost odkształceń przy stałym naprężeniu, głównie w wysokich temperaturach), relaksacja czyli rozluźnienie (spadek naprężeń wraz z upływem czasu, przy stałym odkształceniu) itp. Modelami ciał w reologii są ciała sprężysto-lepkie, plastyczno-lepkie itp.

Wykłady nasze nie obejmują reologii ani teorii tzw. stanów granicznych związanych z uplastycznieniem materiału. Celem ich nie jest również wyłożenie całokształtu teoretycznych i doświadczalnych podstaw teorii plastyczności, lecz tylko podanie podstawowych wiadomości, które umożliwią orientowanie się w zasadniczych zagadnieniach tej nauki i, ewentualnie, ułatwią dalsze studia.

Na początku zajmiemy się rozpatrzeniem stanów naprężenia i odkształcenia, znanych dobrze z teorii sprężystości, jednakże w ujęciu innym niż to, do którego przywykliśmy przy studiowaniu tej ostatniej nauki, kierować się bowiem będziemy myślą zastosowania wyprowadzonych wzorów do rozważań innej nauki, którą jest właśnie teoria plastyczności.

§ 1. Stany naprężenia i odkształcenia

Zauważmy, że przy rozważaniu stanu naprężenia materii w spoczynku nie ma potrzeby uwzględniania rodzaju materii, jeżeli tylko nie czyni się dodatkowych założeń co do szczególnych własności tego stanu (np. że nie istnieją siły tarcia). Może to być zarówno ciało stałe, jak i ciecz lepka (dla cieczy idealnej przyjmujemy już szczególne założenie: $\tau = 0$), gdzie τ oznacza naprężenie ścinające.

Podobnie rzecz ma się ze stanem odkształcenia. Jeżeli ograniczymy się, jak to się zwykło czynić, do rozważania małych odkształceń, to stan ten obejmuje małe odkształcenia dowolnej substancji, byleby była ona uważana za kontinuum materialne.

Jak już wspomnieliśmy, teoria plastyczności wymaga odrębnego pod względem formalnym potraktowania pojęć znanych z teorii sprężystości. Rozważmy zatem naprężenia i odkształcenia właśnie pod kątem potrzeb teorii plastyczności.

Weźmy pod uwagę składowe naprężenia panującego na dowolnej płaszczyźnie o normalnej ν , o cosinusach kierunkowych l , m , n (rys. 1). Składowe te będą się wyrażały następującymi wzorami:

$$(1.1) \quad \begin{cases} p_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases}$$

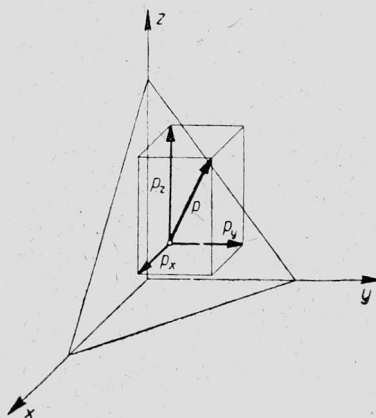
Stan naprężenia w punkcie określony jest przez tzw. tensor naprężenia T_σ :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

(Klamry obejmują tutaj tabliczkę ułożoną ze składowych stanu naprężenia i mają za zadanie przypomnieć, że chodzi o pewną macierz).

Z warunku równowagi momentów sił działających na element objętości ciała otrzymuje się równość składowych stycznych naprężenia:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$



Rys. 1

Z określenia tensora symetrycznego wynika zatem, że tensor T_σ jest tensorem symetrycznym.

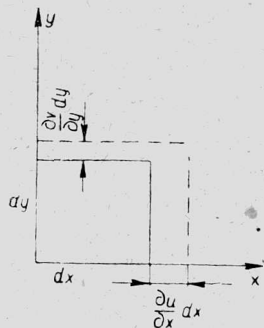
Ogólny stan odkształcenia elementu można rozłożyć na:

- (1) czyste odkształcenie objętości,
- (2) czyste odkształcenie postaci,
- (3) ruchy bryły sztywnej (przesunięcie i obrót).

(1) Czyste odkształcenie objętości, zwane również «rozszerzeniem» objętościowym (rys. 2), przedstawia następujący wzór:

$$\Theta = \frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) \left(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) \left(dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) - dx dy dz}{dx dy dz} =$$

$$= (1 + \epsilon_x) (1 + \epsilon_y) (1 + \epsilon_z) - 1 \approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z.$$



Rys. 2

Przyjeliśmy tutaj oznaczenie

$$\frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x$$

i podobnie

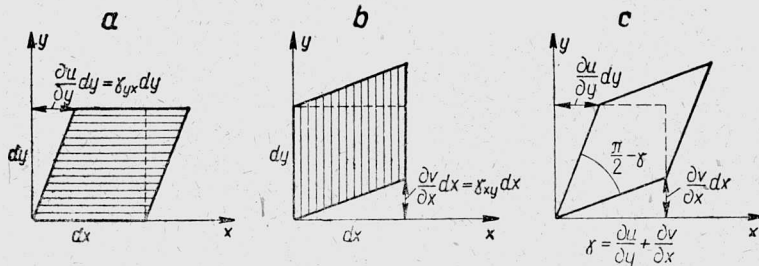
$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{oraz} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

gdzie u , v i w przedstawiają składowe przemieszczenia. Jest rzeczą zrozumiałą, że wielkość θ nie zależy od układu odniesienia; podobnie suma

$$\pi_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

przedstawiająca z pewnym przybliżeniem wielkość θ , jest niezmiennikiem; niezmiennik ten nosi nazwę pierwszego niezmiennika stanu odkształcenia (por. dalej § 5).

(2) Czyste odkształcenie postaci można przedstawić za pomocą jednego z rysunków 3a, 3b lub 3c.



Rys. 3

Przedstawiają one te same stany odkształcenia, różniące się między sobą jedynie o obrót danego elementu traktowanego jako ciało sztywne.

Tensor odkształcenia (w znaczeniu ogólnym) można przedstawić w postaci następującej tabliczki (macierzy):

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Można udowodnić (jak to uczynił Helmholtz), że podczas przemieszczenia o składowych u , v , w kąty obrotu elementu, rozpatrywanego jako bryła sztywna, dokoła osi układu odniesienia są równe odpowiednio

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Biorąc pod uwagę znane związki C a u c h y ' e g o

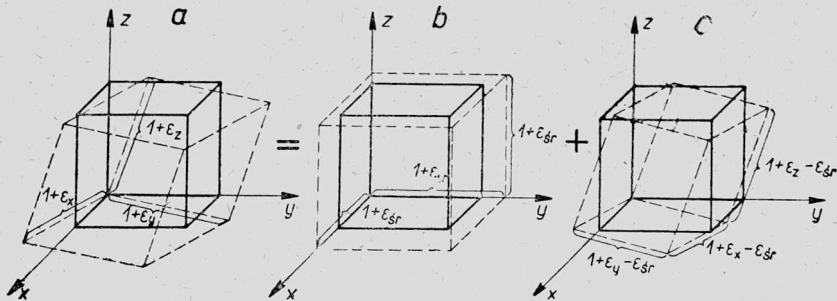
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned}$$

możemy przedstawić tensor odkształcenia w postaci następującej:

$$\begin{aligned} T &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}(\gamma_{xy} - \omega_z) & \frac{1}{2}(\gamma_{xz} + \omega_y) \\ \frac{1}{2}(\gamma_{yx} + \omega_z) & \varepsilon_y & \frac{1}{2}(\gamma_{yz} - \omega_x) \\ \frac{1}{2}(\gamma_{zx} - \omega_y) & \frac{1}{2}(\gamma_{zy} + \omega_x) & \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_z & \frac{1}{2}\omega_y \\ \frac{1}{2}\omega_z & 0 & -\frac{1}{2}\omega_x \\ -\frac{1}{2}\omega_y & \frac{1}{2}\omega_x & 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

gdyż np.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\gamma_{xy} - \omega_z).$$



Rys. 4

Pierwszy składnik wyrażenia dla T jest tensorem odkształcenia czystego (rys. 4a); będziemy go oznaczali przez T_ε . Drugi składnik przedstawia tensor obrotu ciała sztywnego (tzn. obrotu zachodzącego bez jakiegokolwiek odkształcenia właściwego).

Rozważać będziemy w dalszym ciągu jedynie tensor T_ε .

Można wykazać, że jeżeli liczba P o i s s o n a ν jest równa zero, to dla ciała izotropowego sprężystego każdy wyraz tensora T_ε jest proporcjonalny do odpowiedniego wyrazu tensora T_σ , przy czym współczynnik proporcjonalności jest równy $1/E$ (tutaj E oznacza moduł Y o u n g a).

Odształceniem średnim nazwiemy wielkość

$$\varepsilon_{sr} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}\Theta,$$

gdzie Θ jest odształceniem objętościowym.

Jest rzeczą oczywistą, że w przypadku (b) — rys. 4 — odształcenie jest czysto objętościowe.

Że w przypadku (c) nie ma odształcenia objętości, które oznaczamy przez Θ' (rys. 4c), stwierdzamy za pomocą następującego rachunku:

$$\Theta' = (\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}) + (\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}) + (\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon_{sr} = 0.$$

Odształcenie w przypadku (b) określa tensor

$$(1.2) \quad T_\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{sr} \end{pmatrix}.$$

Jest to tzw. kulisty tensor odształcenia, gdyż

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{sr},$$

w związku z czym powierzchnia odształceń C a u c h y' e g o przedstawia powierzchnię kuli.

Odształcenie w przypadku (c) określa tensor

$$(1.3) \quad D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{sr} \end{pmatrix}.$$

Jest to tzw. dewiator odształcenia. (W dewiatorze suma wyrazów położonych wzdłuż głównej przekątnej jest — z określenia — równa zero; por. wyżej podany warunek dla Θ').

Oczywiście jest

$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^0 + D_\varepsilon.$$

Wykażemy teraz, że stan naprężenia w dowolnym punkcie ciała można również rozłożyć na dwa stany składowe, mianowicie na równomierne

wszeghstronne ciśnienie (ściskanie lub rozciąganie) o wielkości σ_{sr} , dążące do zmiany objętości elementu ciała, oraz na tzw. dewiacyjny stan naprężenia, dążący do zmiany postaci elementu bez zmiany jego objętości.

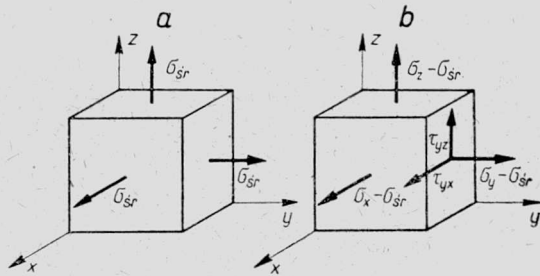
W jakim celu przeprowadzamy ten podział stanów odkształcenia i naprężenia? Otóż doświadczenia wykazują, że osiągnięcie granicy plastyczności lub wytrzymałości materiału zależy nie tylko od wielkości naprężeń, ale i od charakteru stanu naprężenia. Mianowicie, ciśnienie hydrostatyczne, powodujące w ciałach jednorodnych izotropowych odkształcenie czysto objętościowe, praktycznie nie jest w stanie spowodować uplastycznienia materiału (świadczą o tym m. inn. doświadczenia B r i d g m a n a z ciśnieniem hydrostatycznym dochodzącym do 30 000 atm; nie dotyczy to jednak ciał posiadających pory). Natomiast siły wywołujące zmianę postaci, np. siły ścinające, stosunkowo łatwo powodują powstanie stanu plastycznego materiału. Stąd wypływa celowość podziału odkształceń na część czysto objętościową (jak się okazuje z doświadczeń, niemal całkowicie sprężystą, aż do bardzo wysokich ciśnień włącznie) i na część dewiacyjną, miarodajną dla uplastycznienia (lub zniszczenia) materiału.

Podobnie jak to robiliśmy poprzednio dla tensora odkształcenia, rozkładamy teraz tensor naprężenia.

Oznaczmy naprężenie średnie (hydrostatyczne) przez

$$\sigma_{sr} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Dowolny stan naprężenia $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$, określony tensorem naprężenia T_c , możemy rozłożyć na dwa nakładające się na siebie stany naprężenia, przedstawione na rys. 5a i 5b.



Rys. 5

Stanowi odkształcenia czysto objętościowego (rys. 5a) odpowiada kulisty tensor naprężenia

$$(1.4) \quad T_c^0 = \begin{pmatrix} \sigma_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{sr} \end{pmatrix}.$$

Stanowi odkształcenia czysto postaciowego (rys. 5b) odpowiada dekwator naprężenia

$$(1.5) \quad D_c = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{sr} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{sr} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{sr} \end{pmatrix}.$$

Jest więc ogólnie

$$T_{\circ} = T_{\circ}^0 + D_{\circ}.$$

Różniczkując względem czasu wszystkie wyrazy wchodzące w skład wielkości T_{\circ} , T_{\circ}^0 , D_{\circ} i D_{\circ} otrzymamy tensory szybkości wzrostu naprężeń, tensory szybkości wzrostu odkształceń, dewiatory szybkości wzrostu naprężeń, dewiatory szybkości wzrostu odkształceń itd.

§ 2. Stan naprężenia w punkcie. Naprężenia główne

Całkowite naprężenie p_n na płaszczyźnie dowolnie nachylonej względem osi współrzędnych przedstawia wzór

$$(2.1) \quad p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2,$$

w którym σ_n jest naprężeniem normalnym, a τ_n naprężeniem stycznym w płaszczyźnie rozpatrywanej.

Jeżeli kierunek normalnej do płaszczyzny, na której badamy naprężenia, określają cosinusy kierunkowe l , m , i n , to jest

$$\sigma_n = p_x l + p_y m + p_z n.$$

Korzystając ze związków (1.1) i uwzględniając równości $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, mamy w dalszym ciągu

$$(2.2) \quad \sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl.$$

Założmy, że na pewną płaszczyznę działa wyłącznie naprężenie normalne σ_n (wtedy $\tau_n = 0$); nazwiemy je naprężeniem głównym. Jest

wówczas $p_n = \sigma_n$. Oznaczmy naprężenie główne przez σ (rys. 6). Otrzymujemy w tym przypadku

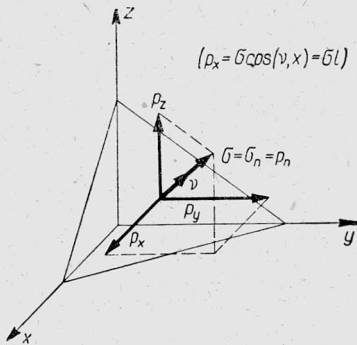
$$(2.3) \quad \sigma l = p_x, \quad \sigma m = p_y, \quad \sigma n = p_z.$$

Z równań (1.1) wynika, że

$$\sigma l = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n,$$

$$\sigma m = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n,$$

$$\sigma n = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n,$$



Rys. 6

czyli

$$(2.4) \quad \begin{cases} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0, \\ \tau_{yx} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz} n = 0, \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma) n = 0. \end{cases}$$

Ponadto jest

$$(2.5) \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Z układu równań (2.4) można wyznaczyć współczynniki kierunkowe l , m i n . Równania te są liniowe i jednorodne. Wobec istnienia związku (2.5) wielkości l , m i n nie mogą być jednocześnie równe zero. Zatem wyznacznik układu powinien zniknąć:

$$(2.6) \quad \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwijając ten wyznacznik otrzymujemy równanie trzeciego stopnia względem niewiadomej σ :

$$(2.7) \quad \sigma^3 - \sigma^2 u_1 + \sigma u_2 - u_3 = 0,$$

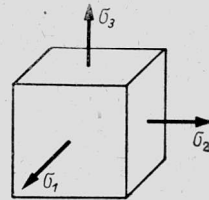
w którym przyjęto następujące oznaczenia:

$$(2.8) \quad \begin{cases} u_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ u_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ u_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{cases}$$

Można udowodnić, że wszystkie trzy pierwiastki równania (2.7) (tymi pierwiastkami są naprężenia główne) są rzeczywiste (w podobny sposób w geometrii analitycznej przeprowadza się dowód istnienia rzeczywistych osi dla powierzchni środkowych drugiego stopnia). Ponieważ pierwiastki te jako naprężenia główne nie zależą od obranego układu odniesienia, to współczynniki równania przedstawione wzorami (2.8) również nie zależą od wyboru układu.

Wielkości u_1 , u_2 i u_3 są zatem niezmiennikami stanu naprężenia, przy czym pierwszy niezmiennik, u_1 , jest tzw. niezmiennikiem liniowym, drugi, u_2 — kwadratowym, a trzeci, u_3 — sześciennym. Oznaczmy pierwiastki równania (2.7) przez σ_1 , σ_2 i σ_3 numerując je tak, aby było zawsze

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$



Rys. 7

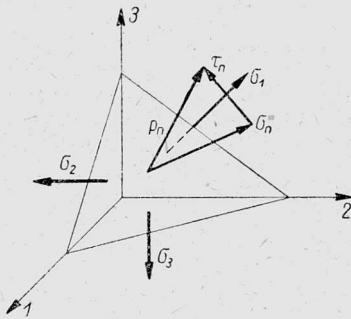
Można wyróżnić w przestrzeni tzw. sześcian główny, o ścianach prostopadłych do kierunków głównych, daje się bowiem wykazać, że naprężenia główne tworzą układ prostokątny (rys. 7).

W uzależnieniu od naprężeń głównych (dla przekrojów odpowiadających kierunkom głównym jest, oczywiście, zgodnie z określeniem $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$) niezmienniki stanu naprężenia wyrażają się następującymi wzorami:

$$(2.9) \quad \begin{cases} u_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ u_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ u_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{cases}$$

§ 3. Naprężenia ośmiościenne (tzn. na ścianach ośmiościanu foremnego)

Znajdźmy naprężenia na ścianach ośmiościanu foremnego, którego ściany są jednakowo nachylone względem osi współrzędnych. Osie obierzmy w kierunku naprężeń głównych (rys. 8). Cosinusy kierunkowe l , m i n normalnych do tych ścian spełniają następujące równości:



Rys. 8

$$|l| = |m| = |n|,$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1;$$

zatem

$$|l| = |m| = |n| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Na podstawie wzoru (1.1) otrzymujemy (dla kierunków głównych)

$$p_1 = \sigma_1 l, \quad p_2 = \sigma_2 m, \quad p_3 = \sigma_3 n,$$

stąd

$$(3.1) \quad p_n^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2).$$

Według wzoru (2.2) jest teraz

$$(3.2) \quad \sigma_n = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{sr}.$$

Dalej mamy według (2.1)

$$(3.3) \quad \tau_n^2 = p_n^2 - \sigma_n^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2,$$

wobec czego

$$(3.4) \quad \tau_n = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Naprężenie τ_n nosi nazwę naprężenia stycznego «ośmiościennego» (oktaedrycznego).

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenia:

$$(3.5) \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{12}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \tau_{23}, \quad \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \tau_{31}.$$

Wykażemy dalej, że τ_{12} , τ_{23} i τ_{31} przedstawiają tzw. główne naprężenia styczne (tzn. naprężenia styczne ekstremalne).

Na wszystkich płaszczyznach ośmiościanu panują jednakowe naprężenia normalne o wielkości [por. (3.2)]

$$(3.6) \quad \sigma_n = \sigma_{sr}.$$

Te naprężenia normalne «ośmiościenne» odpowiadają stanowi ciśnienia hydrostatycznego (rys. 9).

Naprężenia styczne «ośmiościenne» noszą również nazwę intensywności naprężeń stycznych¹⁾ według propozycji H. H e n c k y' e g o.

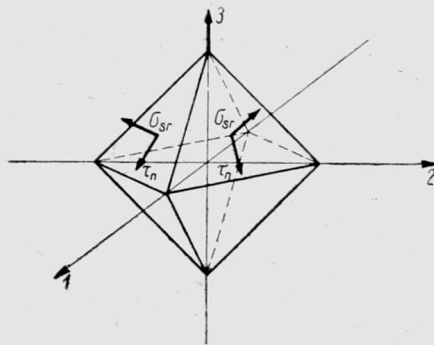
Uwzględniając oznaczenia (3.5) możemy zapisać równość (3.4) w postaci

$$(3.7) \quad \tau_n = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}.$$

Sens mechaniczny intensywności naprężeń stycznych jako naprężenia stycznego na ścianach ośmiościanu podali uczeni szwajcarscy R o š i E i c h i n g e r.

Naprężenia styczne ośmiościenne przedstawimy jeszcze w innej formie. Weźmy w tym celu pod uwagę wyrażenie $2(u_1^2 - 3u_2)/9$ napisane w naprężeniach głównych [korzystamy tutaj ze wzorów (2.9)]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{9} (u_1^2 - 3u_2) &= \frac{2}{9} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1 - 3(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] = \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{2}{9} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \end{aligned}$$



Rys. 9

¹⁾ Należałoby je, właściwie, nazywać w literaturze polskiej «wytężeniem», według znanej propozycji twórcy tego pojęcia M. T. H u b e r a — por. dalszy ciąg niniejszego wykładu, zwłaszcza związek (3.10) — jednakże aby ułatwić czytelnikowi studiowanie literatury obcej poprzestaniemy tutaj na nazwie «intensywność».

Wynika stąd, że na podstawie (3.3) jest według (3.7.1)

$$\tau_n^2 = \frac{2}{9} (u_1^2 - 3u_2).$$

Przyjmując zapis u_1 i u_2 zgodnie ze wzorami (2.8) otrzymujemy następujące wyrażenie dla intensywności naprężeń stycznych:

$$(3.8) \quad \tau_n = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

[por. wyrażenie dla τ_n w naprężeniach głównych, wzór (3.4)].

Jedną z hipotez wytrzymałościowych, tzn. jedną z hipotez określających stan naprężenia, przy którym w danym miejscu ciała następuje jego uplastycznienie, jest hipoteza H u b e r a-M i s e s a-H e n c k y'e g o, czyli tzw. hipoteza największej stałej energii czystego odkształcenia postaciowego. Według tej hipotezy uplastycznienie materiału w pewnym jego miejscu następuje wówczas, gdy wielkość tzw. naprężenia zredukowanego, określonego wzorem

$$(3.9) \quad \sigma_{zred} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

przekroczy pewną wartość krytyczną (charakterystyczną dla danego materiału).

Wykażemy, że wyrażenie (3.9) jest niezmiennicze, a więc że nadaje się do formułowania praw fizycznych.

Według (1.5) dewiator naprężenia napisany w naprężeniach głównych przedstawia następująca macierz:

$$D_s = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{sr} \end{pmatrix},$$

gdzie, jak poprzednio,

$$\sigma_{sr} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Drugi niezmiennik, \bar{u}_2 , dewiatora D_s jest według wzoru (2.9) równy

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 &= (\sigma_1 - \sigma_{sr})(\sigma_2 - \sigma_{sr}) + (\sigma_2 - \sigma_{sr})(\sigma_3 - \sigma_{sr}) + (\sigma_3 - \sigma_{sr})(\sigma_1 - \sigma_{sr}) = \\ &= \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_{sr} - \sigma_{sr}\sigma_2 + \sigma_{sr}^2 + \sigma_2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_{sr} - \sigma_{sr}\sigma_3 + \sigma_{sr}^2 + \sigma_3\sigma_1 - \sigma_3\sigma_{sr} - \\ &\quad - \sigma_1\sigma_{sr} + \sigma_{sr}^2 = 3\sigma_{sr}^2 - 2\sigma_{sr}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \\ &= -3\sigma_{sr}^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1. \end{aligned}$$

Po przekształceniu wyrażenia występującego pod pierwiastkiem we wzorze (3.9) otrzymujemy dla naprężenia zredukowanego wzór

$$\begin{aligned}\sigma_{zred} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}.\end{aligned}$$

Porównując to wyrażenie z wyrażeniem \bar{u}_2 dla dewiatora widzimy, że

$$\sigma_{zred} = \sqrt{-3\bar{u}_2}.$$

Wynika stąd, że, istotnie, σ_{zred} daje się przedstawić przez niezmiennik. Z porównania (3.4) lub (3.8) z (3.9) otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{zred} = \tau_n.$$

Zauważyć tu możemy ścisły związek zachodzący pomiędzy niebezpieczeństwem uplastycznienia (według hipotezy H u b e r a) oraz naprężeniem ośmiościennym ścinającym. W teorii plastyczności σ_{zred} wyprowadzone zostaje niezależnie od hipotez wytrzymałościowych i nazywa się intensywnością naprężeń, σ_i . Intensywność (natężenie) naprężeń jest równa

$$(3.10) \quad \sigma_i = \sigma_{zred} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n.$$

WYKŁAD II

W pierwszym wykładzie omówiliśmy nieco szczegółowiej stan naprężenia w punkcie i określiliśmy pojęcia głównego sześcianu i głównego ośmiościanu. Przypomnijmy inne ważniejsze wnioski. Wprowadziliśmy więc pojęcia:

(1) intensywności naprężeń ścinających, wyrażającej się w naprężeniach głównych jako, (3.4),

$$\tau_n = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

oraz

(2) intensywności naprężeń, czyli naprężenia zredukowanego, (3.9),

$$\sigma_i = \sigma_{zred} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Oczywiście jest, jak już o tym mówiliśmy, (3.10),

$$\sigma_i = \sigma_{zred} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n.$$

Wyjaśniliśmy również, że naprężenie τ_n jest naprężeniem ścinającym na ścianach ośmiościanu głównego.

Znaleźliśmy poza tym trzy niezmienniki stanu naprężenia, wyrażające się w naprężeniach głównych w postaci następującej, (2.9),

$$\begin{cases} u_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3 \sigma_{sr}, \\ u_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ u_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{cases}$$

Przypomnijmy, że dewiator naprężenia charakteryzujący czyste odkształcenie postaciowe wyraża się w naprężeniach głównych jako, (1.5),

$$D_s = \begin{Bmatrix} \sigma_1 - \sigma_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{sr} \end{Bmatrix}.$$

Macierz powyższa przedstawia rzeczywiście dewiator, gdyż suma wyrazów leżących na głównej przekątnej jest równa zeru.

Łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące związki: dla niezmienników całego tensora naprężenia, (3.7.1),

$$\tau_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{u_1^2 - 3u_2},$$

czyli, (3.7.2),

$$\sigma_i = \sqrt{u_1^2 - 3u_2};$$

dla niezmienników dewiatora naprężenia, (3.7.3),

$$\sigma_i = \sqrt{-3\bar{u}_2},$$

gdzie

$$\bar{u}_2 = (\sigma_1 - \sigma_{sr})(\sigma_2 - \sigma_{sr}) + (\sigma_2 - \sigma_{sr})(\sigma_3 - \sigma_{sr}) + (\sigma_3 - \sigma_{sr})(\sigma_1 - \sigma_{sr}).$$

Ostatni związek, (3.7.3), wynika wprost ze wzoru (3.7.2), gdyż dla dewiatora pierwszy niezmiennik stanu naprężenia znika ($u_1 = 0$).

Wielkości τ_n i σ_i są niezmiennicze, wobec czego można się nimi posługiwać dla formułowania praw fizycznych.

§ 4. Krańcowe wartości naprężeń stycznych (główny dwunastościan rombowy)

Obierzmy kierunki główne za osie układu odniesienia. Naprężenie normalne σ_n panujące na płaszczyźnie, której normalna ma kierunek określony współczynnikami l , m i n , wyraża się w tym układzie następującym wzorem [por. (2.2)]:

$$(4.1) \quad \sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2.$$

Ze wzoru (1.1) mamy

$$(4.2) \quad p_n^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2,$$

zatem [por. (2.1)]

$$(4.3) \quad \tau_n^2 = p_n^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2.$$

Zastąpmy w (4.3) n^2 przez $1 - l^2 - m^2$. Znajdźmy następnie pochodne τ_n względem l oraz m i przyrównajmy je do zera. Otrzymamy wówczas dla wyznaczenia współczynników kierunkowych l i m dwa równania, określające kierunek płaszczyzny ukośnej, na której τ_n przybiera wartości ekstremalne:

$$(4.4) \quad \begin{cases} l [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)] = 0, \\ m [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)] = 0. \end{cases}$$

Równania (4.4) posiadają następujące rozwiązania:

$$\left. \begin{array}{l} l = 0, \\ m = 0, \end{array} \right\} n = \pm 1;$$

$$l = 0, \quad \begin{cases} m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ n = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}; \end{cases} \quad m = 0, \quad \begin{cases} l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ n = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Jeżeli wyrugowalibyśmy ze związku (4.3) nie n lecz l lub m , to otrzymalibyśmy inne, pozostałe jeszcze rozwiązania.

Wszystkie uzyskane rozwiązania zebrane są w tablicy 1.

Pierwsze trzy kolumny tablicy — zawierające cyfry — określają płaszczyzny główne (na nich τ_n ma wartość ekstremalną, równą zero). Trzy dalsze kolumny określają płaszczyzny przechodzące przez jedną z głównych osi i dzielące na połowy kąt między dwoma pozostałymi osiami głównymi. Zespół wszystkich płaszczyzn, odpowiednio równoległe przesuniętych w przestrzeni, tworzy dwunastościan rombowy (rys. 12).

Tablica 1

l	± 1	0	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
m	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
n	0	0	± 1	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Oznaczając przez $\tau_{\mu\nu}$ naprężenia ścinające główne na ścianach tego dwunastościanu, przecinających się z osiami μ i ν ($\mu, \nu = 1, 2, 3; \mu \neq \nu$), otrzymamy po podstawieniu odpowiednich cosinusów kierunkowych do wzoru (4.3)

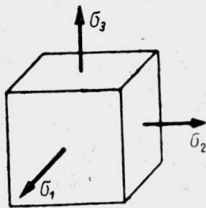
$$(4.5) \quad \tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

O wzorach (4.5) mówiliśmy już poprzednio [por. (3.5)].

Zauważmy, że po dodaniu związków (4.5) stronami otrzymamy

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0.$$

Dla płaskiego stanu naprężenia możemy teraz wyprowadzić z łatwością dobrze znany wniosek, że największe naprężenie styczne działa pod kątem 45° względem kierunków głównych i jest równe połowie różnicy naprężeń głównych.



Rys. 10

Reasumując to, co powiedzieliśmy o stanie naprężenia, wypada stwierdzić, że wyróżniliśmy następujące wielkości, nazwane głównymi:

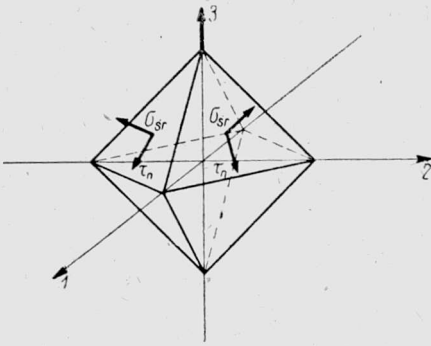
(1) sześcian główny (rys. 10); na ścianach sześcianu głównego występują jedynie naprężenia normalne, zwane naprężeniami normalnymi głównymi;

(2) ośmiościan główny (rys. 11); na ściany ośmiościanu głównego działają naprężenia normalne, odpowiadające stanowi ciśnienia hydrostatycznego

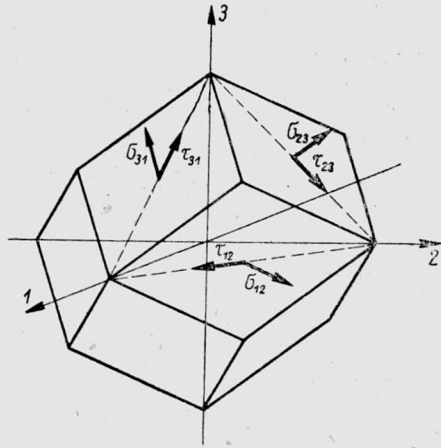
$$\sigma_{sr} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

oraz naprężenia ścinające «ośmiościenne»

$$\tau_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{zred} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2};$$



Rys. 11



Rys. 12

(3) dwunastościan główny (rys. 12); na ściany dwunastościanu głównego działają naprężenia ścinające główne

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

oraz naprężenia normalne

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \sigma_{23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{31} = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}.$$

§ 5. Stan odkształcenia w punkcie

Pomiędzy stanami odkształcenia i naprężenia istnieje ścisła analogia.

Wydłużenie odcinka, którego kierunek określają współczynniki l , m , i n , jest równe

$$(5.1) \quad \varepsilon = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl.$$

Wyrażenie to jest podobne do wyrażenia (2.2) dla naprężenia normalnego. We wzorze (5.1) nie występują atoli dwójki, gdyż do tensora odkształcenia wprowadzone zostały wielkości $\gamma_{xy}/2, \dots$, zamiast odpowiednio τ_{xy}, \dots (por. str. 75). Na podstawie analogii możemy wnioskować, że w każdym punkcie ciała istnieją trzy główne osie odkształcenia; włókna skierowane wzdłuż tych osi doznają tylko samych wydłużeń, a kąty proste pomiędzy kierunkami tych włókien nie ulegają zmianie.

Wydłużenia główne $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i ε_3 wyznaczyć można z równania sześciennego [analogicznego do (2.7)].

$$(5.2) \quad \varepsilon^3 - \varepsilon^2 \pi_1 + \varepsilon \pi_2 - \pi_3 = 0,$$

gdzie π_1, π_2 i π_3 są niezmiennikami stanu odkształcenia (określonymi przez wyrazy tensora odkształcenia, przy czym symbol $\pi_1 = \varepsilon_{sr} = \Theta$; por. str. 76).

$$(5.3) \quad \begin{cases} \pi_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ \pi_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2), \\ \pi_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} (\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2). \end{cases}$$

W ciele izotropowym główne osie odkształcenia i naprężenia pokrywają się ze sobą.

Stosując dalej wzmiankowaną analogię otrzymamy wartość wydłużenia ε_n w kierunku normalnym do płaszczyzn ośmiościanu głównego [por. wzór (3.6)] równą

$$(5.4) \quad \varepsilon_n = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \varepsilon_{sr}.$$

Posunięcia dla płaszczyzn ośmiościanu [por. wzór (3.4), w którym τ_n zastąpić trzeba przez $\gamma_n/2$] są równe

$$(5.5) \quad \gamma_n = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Wyrażenie powyższe nazwał H e n c k y intensywnością odkształceń stycznych.

Wzór (5.5) można przedstawić również w postaci podobnej do (3.8), mianowicie

$$(5.6) \quad \gamma_n = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{2}{3} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Wyrażenia dla posuwów²⁾ głównych [analogiczne do wyrażen (4.5) dla naprężeń głównych] przybierają postać następującą:

$$(5.7) \quad \begin{cases} \gamma_{12} = \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ \gamma_{23} = \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\ \gamma_{31} = \pm (\varepsilon_3 - \varepsilon_1). \end{cases}$$

W teorii plastyczności dużą rolę odgrywa wielkość proporcjonalna do tzw. posuwu «ośmiościennego», zwana intensywnością odkształceń i definiowana w sposób następujący:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)} \gamma_n = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2} + \frac{2}{3} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \end{aligned}$$

Dla liczby Poissona ν równej 1/2 otrzymuje się

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_n.$$

§ 6. Prawo sprężystości

Jak wiadomo, dla ciała izotropowego podlegającego prawu Hooke'a przy założeniu małych odkształceń można zapisać prawo sprężystości w następującej postaci Lamégo:

$$(6.1) \quad \begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\Theta, & \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\Theta, & \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\Theta, & \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{cases}$$

Tutaj λ jest jedną z dwóch stałych Lamégo, wyrażającą się przez moduł odkształcenia postaciowego G i liczbę Poissona ν w następujący sposób:

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu};$$

Θ jest odkształceniem objętościowym, co oznacza, jak wiemy, że

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_{sr}.$$

²⁾ Używamy tutaj również terminu «posuw» zamiast dwuznacznego «posunięcia» lub długiego «kąta odkształcenia postaciowego».

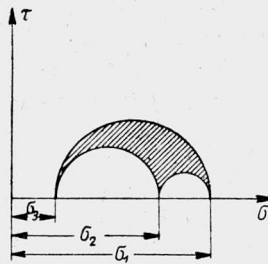
Odejmując od siebie parami pierwsze trzy równości (6.1) otrzymamy

$$(6.2) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_y = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_y), \\ \sigma_y - \sigma_z = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_z), \\ \sigma_z - \sigma_x = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_x), \end{cases}$$

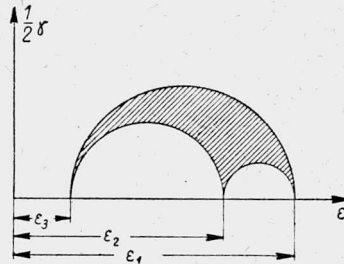
skąd

$$(6.3) \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\varepsilon_y - \varepsilon_z}, \quad \frac{\sigma_y - \sigma_z}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{\varepsilon_z - \varepsilon_x}.$$

Przypomnijmy (por. rys. 13 i 14), jak wyglądają koła Mohra dla trójwymiarowych stanów naprężenia i odkształcenia (w założeniu, że, jak to już wspomnieliśmy, jest $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ i ponadto $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$).



Rys. 13



Rys. 14

Równania (6.3) dowodzą, że koła Mohra dla naprężeń są w sposób ciągły geometrycznie podobne do kół Mohra dla odkształceń.

Podobieństwo kół Mohra dla naprężeń i odkształceń bywa często przyjmowane w teorii plastyczności jako jeden z aksjomatów.

Zapiszmy równania (6.2) w naprężeniach głównych, czyli dla «głównego sześcianu»:

$$(6.4) \quad \begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ \sigma_2 - \sigma_3 = 2G(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\ \sigma_3 - \sigma_1 = 2G(\varepsilon_3 - \varepsilon_1). \end{cases}$$

Według zależności (4.5) jest (z pominięciem znaków)

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_{12}, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2\tau_{23}, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = 2\tau_{31},$$

a według zależności (5.7)

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \gamma_{12}, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \gamma_{23}, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \gamma_{31}.$$

Wobec tego zamiast wzorów (6.4) otrzymujemy

$$(6.5) \quad \begin{cases} \tau_{12} = G \gamma_{12}, \\ \tau_{23} = G \gamma_{23}, \\ \tau_{31} = G \gamma_{31}. \end{cases}$$

Wynik ten można otrzymać z bezpośredniego zastosowania prawa Hooke'a, jeżeli rozpatrywać sześcián, którego ściany są równoległe do trzech ścian głównego dwunastościanu rombowego. Na ściany tego sześciánu będą działały główne naprężenia ścinające, określone właśnie wzorami (6.5).

Rozważmy z kolei sześcián zorientowany względem kierunków głównych tak, aby para ścian równoległych była przynależna do «głównego ośmiościanu», to znaczy, aby na te ściany i na drugą parę ścian, prostopadłych do nich, działały naprężenia ścinające «ośmiościenne» τ_n . Niech te naprężenia będą prostopadłe do odpowiednich krawędzi tych ścian. Wówczas na podstawie prawa Hooke'a otrzymujemy

$$(6.6) \quad \tau_n = G \gamma_n.$$

Zgodnie ze wzorami (3.8) i (5.5) mamy teraz dla kierunków głównych

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \tau_n &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= G \gamma_n = G \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \end{aligned}$$

Nazwijmy, jak poprzednio, «intensywnością naprężeń» lub «naprężeniem uogólnionym» (jest to również naprężenie zwane sprowadzonym lub zredukowanym) wielkość [por. wzory (3.8) i (3.10)]

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n,$$

a «intensywnością odkształceń» lub «odkształceniem uogólnionym» wielkość [por. wzory (5.6) i (5.8)], (3.10),

$$\varepsilon_i = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)} \gamma_n.$$

Biorąc pod uwagę związek

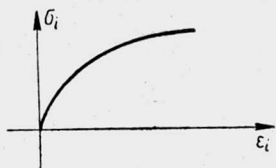
$$(6.7.1) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

otrzymujemy

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n = \frac{3}{\sqrt{2}} G \gamma_n = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_n = E \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)} \gamma_n = E \varepsilon_i.$$

Korzystając z zależności (3.10) otrzymujemy ostatecznie

$$(6.8) \quad \sigma_i = E \varepsilon_i.$$



Rys. 15

W teorii plastyczności równanie powyższe posiada doniosłe znaczenie, jednakże symbol E nie przedstawia *sensu stricto* modułu Younga (rys. 15), lecz współczynnik zmieniający się wraz ze zmianą stanu odkształcenia i ponadto zmienny od miejsca do miejsca (gdy stan naprężenia jest niejednorodny).

§ 7. Prawo zmiany objętości i prawo zmiany postaci

Dodajmy do siebie stronami trzy pierwsze równości (6.1). Otrzymamy wówczas

$$(7.1) \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (2G + 3\lambda)(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

gdzie wobec istnienia związku (por. str. 89)

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$$

jest

$$2G + 3\lambda = 2G \left(\frac{1-2\nu+3\nu}{1-2\nu} \right) = \frac{E}{1-2\nu}.$$

Wobec tego ze wzoru (7.1), po podzieleniu obu jego stron przez 3, otrzymujemy

$$(7.2) \quad \sigma_{sr} = E^0 \varepsilon_{sr};$$

tutaj przyjęto oznaczenie

$$E^0 = \frac{E}{1-2\nu} = 3K$$

(E^0 można uważać za objętościowy moduł sprężystości; symbolem K oznacza się często $E^0/3$).

Ponieważ jest

$$\Theta = 3 \varepsilon_{sr},$$

więc możemy również napisać

$$(7.3) \quad \sigma_{sr} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \Theta.$$

Wzory (7.2) lub (7.3) wyrażają tzw. *prawo zmiany objętości*. Według tego prawa naprężenie średnie jest proporcjonalne do odkształcenia średniego lub też do odkształcenia objętościowego.

Doświadczenia wskazują, że prawo (7.3) nie traci ważności również przy bardzo dużych σ_{sr} (o wiele większych od granicy sprężystości przy prostym rozciąganiu) i wobec tego Θ obliczane ze wzoru (7.3) jest praktycznie, w bardzo szerokim zakresie zmienności σ_{sr} , sprężyste. Czysta zmiana objętości jest więc niemal zawsze sprężysta, lub też inaczej: tensorowi kulistemu T_o^0 odpowiada, praktycznie, sprężysty stan materii.

Wróćmy teraz do związków (6.1). Odejmijmy od nich stronami równość (7.2). Otrzymujemy w ten sposób pierwszą zależność w postaci

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{sr} &= 2G\varepsilon_x + \lambda\Theta - \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{sr} = \\ &= 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}3\varepsilon_{sr}\right) - \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_{sr} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}) \end{aligned}$$

i podobnie dwie dalsze zależności.

Ostatecznie mamy

$$(7.4) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}), & \tau_{xy} = 2G\frac{\gamma_{xy}}{2}, \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}), & \tau_{yz} = 2G\frac{\gamma_{yz}}{2}, \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}), & \tau_{zx} = 2G\frac{\gamma_{zx}}{2}. \end{cases}$$

Związki powyższe można również przedstawić w następującym symbolicznym zapisie tensorowym:

$$(7.5) \quad \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{sr} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{sr} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{sr} \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{sr} \end{pmatrix}.$$

Korzystając z oznaczeń (1.3) i (1.5) mamy

$$(7.6) \quad D_o = 2GD_e.$$

Wzór (7.6) wyraża *prawo zmiany postaci*. Prawo to stwierdza, że dewiator naprężenia jest proporcjonalny do dewiatora odkształcenia, lub że czyste odkształcenie postaci jest wywołane przez dewiator naprężenia.

Jeżeli wrócimy do prawa zmiany objętości (7.2), to po zastosowaniu oznaczeń (1.4) i 4.2) możemy je zapisać również w postaci tensorowej

$$(7.7) \quad T_{\alpha}^0 = E^0 T_{\alpha}^0,$$

gdzie $E^0 = E/(1-2\nu)$ jest objętościowym modułem sprężystości. Dla $\nu = 1/2$, tzn. dla ciał, których objętość uważamy za nie ulegającą zmianie w trakcie odkształcenia, otrzymujemy wniosek o znaczeniu czysto formalnym $E^0 = \infty$.

W Y K Ł A D III

§ 8. Warunki plastyczności (hipotezy wytrzymałościowe)

Hipotezy wytrzymałościowe nazywa się dzisiaj raczej warunkami plastyczności. Ta nazwa jest o tyle słuszniejsza, że w istocie chodzi tutaj o uplastycznienie materiału, a nie o jego zniszczenie przez rozdzielenie, przesuw lub zmiażdżenie. O hipotezach wytrzymałościowych należałoby raczej mówić przy rozważaniu granicznej nośności ciał kruchych, czyli pękających bez uprzednich, widocznych, trwałych odkształceń. Takie zaś ciała są właściwie dotychczas nie zbadane. W dalszych naszych rozważaniach zajmiemy się wyłącznie ciałami ciągliwymi, tzn. ciałami odkształcającymi się w sposób trwały przed wystąpieniem zniszczenia (np. stal niezbyt twarda), czyli tzw. ciałami sprężysto-plastycznymi. Zagadnienie, które chcemy teraz rozważyć, sprowadza się do pytania, jakie czynniki sprawiają, że pewne miejsce ciała ulega uplastycznieniu: czy tymi czynnikami są naprężenia występujące w danym miejscu, czy też odkształcenia, czy jedno i drugie, czy wreszcie niektóre z ich składowych. Przy rozciąganiu, tzn. przy naprężeniu jednoosiowym, sprawa jest jasna: ekstremalnym naprężeniem wywołującym uplastycznienie jest naprężenie σ_{pl} , równe tzw. granicy plastyczności (obserwowanej na wykresie próby na rozciąganie). Przy złożonym, przestrzennym stanie naprężenia sprawa się komplikuje. Wiemy, że wtedy stan naprężenia w danym miejscu charakteryzuje sześć wielkości lub właściwie trzy, tzn. naprężenia główne, gdyż kierunki tych ostatnich dla rozpatrywanych tutaj ciał izotropowych uznać wypada za obojętne. Jeżeli za osie układu odniesienia obierzemy naprężenia główne, to można zbudować powierzchnię, zwaną graniczną powierzchnią uplastycznienia, określoną równaniem

$$(8.1) \quad f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0.$$

Zbiór trójek liczb σ_1 , σ_2 i σ_3 odpowiadających tej powierzchni ma przedstawiać wszystkie stany naprężenia, które powodują w danym miejscu przejście materiału w stan plastyczny.

Znamy różne hipotezy co do przyczyn powstawania stanu plastycznego materiałów.

Pierwszą hipotezę podał G a l i l e u s z w XVII w. Twierdził on, że uplastycznienie wywołane jest przez największe naprężenie główne; gdy to ostatnie osiąga pewną wartość σ_{pl} , następuje uplastycznienie materiału. Hipoteza ta należy do przeszłości, gdyż obala ją doświadczenie z wszechstronnym ściskaniem; ciśnienie może być w tym przypadku znacznie większe od σ_{pl} przy rozciąganiu, a mimo to materiał nie ulega zniszczeniu lub uplastycznieniu (doświadczenia A. F ö p p l a i następnie P. B r i d g m a n a). Gdyby tę hipotezę ograniczyć tylko do maksymalnego naprężenia rozciągającego, to i tak nie potwierdza się ona dla ciał ciągliwych.

Według drugiej hipotezy przyczyną uplastycznienia materiałów jest największe wydłużenie jednostkowe (główne). Doświadczenia obaliły również i tę hipotezę; mimo to była ona jako oparta na autorytecie S a i n t V e n a n t a długo uznawana we Francji i w Niemczech

Trzecią hipotezę, hipotezę największego naprężenia stycznego, podał C o u l o m b w XVIII w. Jeżeli przyjąć, jak to poprzednio czyniliśmy, że

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3,$$

to ze wzorów (4.5) otrzymuje się pomijając znak

$$(8.2) \quad \tau_{max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Według hipotezy C o u l o m b a uplastycznienie materiału następuje wówczas, gdy τ_{max} przekroczy pewną wielkość τ_{plast} .

Dla czystego rozciągania w kierunku σ_1 jest

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

więc w momencie uplastycznienia jest tutaj

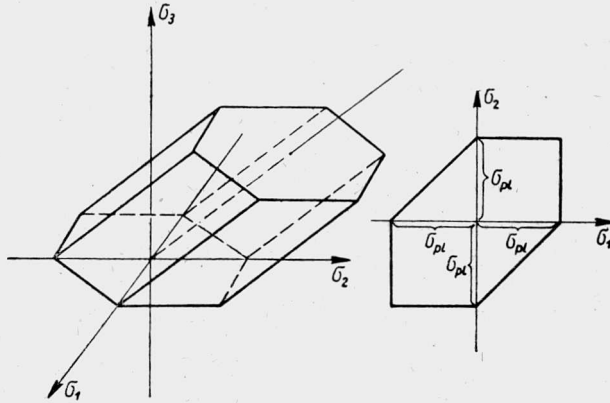
$$(8.3) \quad \tau_{max} = \tau_{plast} = \frac{\sigma_{pl}}{2}.$$

Zauważmy od razu, że współczynnik 1/2 w tym wzorze nie odpowiada wynikom doświadczeń, które określają jego wartość na bliską 0,58.

Dla hipotezy C o u l o m b a równania określające powierzchnię graniczną, (8.1), zapisane w układzie osi głównych, przyjmują następującą postać:

$$(8.4) \quad \begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_{pl}, \\ |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_{pl}, \\ |\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_{pl}. \end{cases}$$

Nie trudno zauważyć, że warunki (8.4) określają graniastosłup heksagonalny, jednakowo nachylony względem trzech osi współrzędnych σ_1 , σ_2 i σ_3 (rys. 16).



Rys. 16

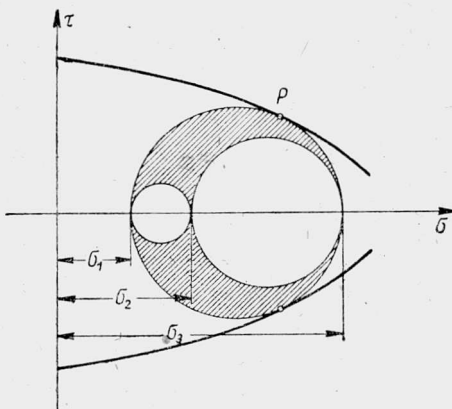
Ze wzorów (8.4) dla $\sigma_3 = 0$ otrzymuje się (por. sześciobok po prawej stronie rys. 16)

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_{pl}, \\ \sigma_2 &= \pm \sigma_{pl}, \\ \sigma_1 &= \pm \sigma_{pl}.\end{aligned}$$

Doświadczenia G u e s t a potwierdzają słuszność tej hipotezy (objęły one rozciąganie i skręcanie rur poddanych równocześnie działaniu ciśnienia wewnętrznego).

M o h r, twórca czwartej hipotezy, uogólnia hipotezę C o u l o m b a - G u e s t a zarówno na ciała

kruche (zniszczenie ich następuje na skutek pęknięcia czyli rozdzielania), jako też i na ciała ciągłe (zniszczenie ich następuje w ogólności na skutek przesuwów, czyli poślizgów plastycznych). Twierdzi on, że uplastycznienie lub zniszczenie materiału zależy od właściwości samego materiału: mianowicie, te stany następują albo przy pewnej granicznej wartości naprężenia stycznego τ , zależnej jeszcze od wartości naprężenia



Rys. 17

nia normalnego σ w tych płaszczyznach, w których działa τ , albo przy pewnej wartości naprężenia rozciągającego.

Przedstawmy przestrzenny stan naprężenia w danym punkcie, (tutaj $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$) za pomocą kół M o h r a (rys. 17).

Największe koło M o h r a, wyznaczone przez naprężenia σ_1 i σ_3 , przedstawia stan naprężenia dla płaszczyzn równoległych do osi o kierunku σ_2 . Części zacienione wykresu przedstawiają naprężenia w przekrojach skierowanych dowolnie.

Ponieważ zarówno w teorii C o u l o m b a, jak i w teorii M o h r a chodzi o największe naprężenia ścinające τ_{max} [por. wzór (8.2)], to znaczenie istotne posiada właściwie okrąg największy, natomiast wartość σ_2 staje się obojętna (nie potwierdzają takiej opinii doświadczenia L o d e g o i analiza ważniejszych nowych doświadczeń, przeprowadzona przez I l j u s z i n a). Niech punkt $P(\sigma, \tau)$ reprezentuje naprężenia σ i τ w płaszczyźnie najniebezpieczniejszej — gotowej do poślizgu plastycznego (jak wiemy, po przekroczeniu granicy plastyczności na powierzchniach ciała pojawiają się delikatne ślady układów linii poślizgowych materiału). Zbiór tego rodzaju punktów P tworzy linie stanów granicznych, które muszą być obwiedniami rodziny kół M o h r a, bo z założenia P jest najniebezpieczniejszym stanem dla danego koła, a więc nie może być innych przecięć

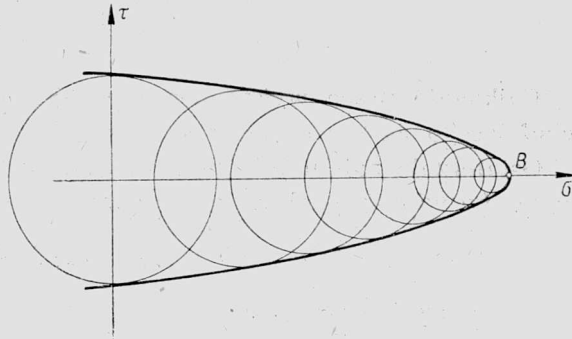
tego koła z liniami stanów granicznych poza punktami P . Gdy naprężenia główne z rozciągających przechodzą w ściskające, to koła M o h r a przesuwają się coraz bardziej w lewo. Obwiednia ich musi albo rozbiegać się z lewej strony osi τ , albo być równoległa do osi σ .

W przeciwnym razie miejsce jej przecięcia z osią σ wyznaczałoby wartość niebezpieczną wszechstronnego ściskania, dla którego koło M o h r a redukowałoby się do punktu, i byłoby

$$\sigma_1 = \sigma_3 (= \sigma_2) = -p \quad (p > 0).$$

A przecież stanowi wszechstronnego ściskania nie odpowiada, jak mówiliśmy, żaden stan niebezpieczny (przynajmniej praktycznie). Natomiast punkt B (por. rys. 18) odpowiada stanowi wszechstronnego rozciągania:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p.$$



Rys. 18

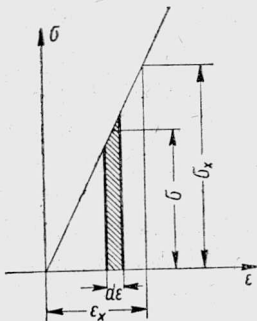
Zagadnieniom tym poświęcona jest bogata literatura, jakkolwiek brak jest dotychczas dostatecznie ścisłego ich rozstrzygnięcia. Warto wymienić tu m. inn. ostatnie prace uczonych wiedeńskich związanych ze szkołą A. L e o n a.

Zdecydowanym przeciwnikiem teorii M o h r a był twórca ogólnie dziś przyjętej (piątej) hipotezy energetycznej, M. T. H u b e r. Szkoła radziecka (I l j u s z i n, K a c z a n o w, S o k o ł o w s k i i inni) zdecydowanie popiera teorię H u b e r a jako najbardziej zgodną z doświadczeniem (warto wspomnieć przy tej okazji, że istnieje również nowa

rosyjska teoria D a w i d i e n k o w a - F r i d m a n a). Część uczonych zachodnich opowiada się jednak w dalszym ciągu za teorią M o h r a.

Teoria H u b e r a oparta jest, jak wiadomo, na pojęciu energii sprężystej, tzn. na pojęciu energii potencjalnej, nagromadzonej w ciele sprężystym odkształconym (rys. 19).

Jeżeli ciało podlega prawu H o o k e' a, to praca elementarna, wykonana przez naprężenia normalne σ , działające na dwie przeciwległe ściany sześcianu »jednostkowego«, przy jego odkształceniu o wielkości $d\varepsilon$ jest równa



Rys. 19

$$\sigma d\varepsilon.$$

Całkowita praca wykonana przez te naprężenia do momentu odpowiadającego stanowi σ_x , ε_x jest równa $\sigma_x \varepsilon_x / 2$.

Ostatecznie zatem energię sprężystą jednostkową (właściwą) przedstawia (w naprężeniach głównych) wzór

$$(8.5) \quad 2\mathcal{D} = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3$$

lub w zapisie tensorowym

$$(8.6) \quad 2\mathcal{D} = T_{\sigma} T_{\varepsilon}.$$

Wobec istnienia związków (por. str. 76 i 78)

$$(8.7) \quad \begin{cases} T_{\sigma} = T_{\sigma}^0 + D_{\sigma}, \\ T_{\varepsilon} = T_{\varepsilon}^0 + D_{\varepsilon}, \end{cases}$$

po ich przemnożeniu otrzymujemy

$$(8.8) \quad 2\mathcal{D} = T_{\sigma}^0 T_{\varepsilon}^0 + D_{\sigma} D_{\varepsilon} + T_{\sigma}^0 D_{\varepsilon} + T_{\varepsilon}^0 D_{\sigma} = T_{\sigma}^0 T_{\varepsilon}^0 + D_{\sigma} D_{\varepsilon},$$

gdź można wykazać, że jest

$$T_{\sigma}^0 D_{\varepsilon} + T_{\varepsilon}^0 D_{\sigma} = 0.$$

Wynika stąd, że energia sprężysta jest równa sumie energii sprężystej odkształcenia objętości i odkształcenia postaci. Przedstawimy to jednak wyraźniej przekształcając odpowiednio wzór (8.5).

Przyjmijmy, że naprężenia i odkształcenia główne zostają rozłożone na dwie składowe:

$$(8.9) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \bar{\sigma}_1 + \sigma_{sr}, & \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_{sr}, \\ \sigma_2 = \bar{\sigma}_2 + \sigma_{sr}, & \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_{sr}, \\ \sigma_3 = \bar{\sigma}_3 + \sigma_{sr}, & \varepsilon_3 = \bar{\varepsilon}_3 + \varepsilon_{sr}, \end{cases}$$

gdzie, jak zwykle,

$$\sigma_{sr} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \varepsilon_{sr} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Podstawmy powyższe wyrażenia do wzoru (8.5), a otrzymamy po przekształceniu

$$(8.10) \quad 2\vartheta = 3 \sigma_{sr} \varepsilon_{sr} + \bar{\sigma}_1 \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\sigma}_2 \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\sigma}_3 \bar{\varepsilon}_3.$$

Jak wiemy, jest

$$3 \varepsilon_{sr} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \vartheta,$$

gdzie symbol ϑ oznacza odkształcenie objętościowe jednostkowe. Gdy na tę samą objętość jednostkową działa naprężenie hydrostatyczne σ_{sr} , to

$$(8.11) \quad 3 \sigma_{sr} \varepsilon_{sr} = 2\vartheta_v,$$

gdzie ϑ_v oznacza pracę (energię) odkształcenia objętości. Wobec tego reszta wyrazów we wzorze (8.10) przedstawia energię odkształcenia postaci (ϑ_f). Jest zatem

$$(8.12) \quad 2\vartheta_f = \bar{\sigma}_1 \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\sigma}_2 \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\sigma}_3 \bar{\varepsilon}_3.$$

Otóż według hipotezy H u b e r a warunkiem uplastycznienia materiału jest osiągnięcie przez ϑ_f (czy też przez $2\vartheta_f$) wartości maksymalnej; gdy nastąpi już uplastycznienie, wielkość ta pozostaje stała (dlatego hipoteza ta była nazywana hipotezą stałej największej energii czystego odkształcenia postaciowego). Mamy zatem dla materiału przeprowadzonego w stan plastyczny

$$(8.13) \quad \bar{\sigma}_1 \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\sigma}_2 \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\sigma}_3 \bar{\varepsilon}_3 = \text{const.}$$

Według prawa H o o k e'a jest

$$\bar{\sigma}_k = E \bar{\varepsilon}_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Zamiast zatem wzoru (8.13) napisać można

$$(8.14) \quad \bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_3^2 = \text{const.}$$

Odejmijmy teraz od powyższego wzoru stronami równość

$$\frac{(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3)^2}{3} = 0.$$

Po przekształceniu i powtórным wprowadzeniu składowych σ_1 , σ_2 i σ_3 otrzymujemy

$$(8.15) \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = c^2$$

(symbol c oznacza tutaj wielkość stałą).

Dochodzimy z kolei do ważnego wniosku porównując ten wzór z wyrażeniem (3.4) dla τ_n . Okazuje się, mianowicie, że jest

$$(8.16) \quad \tau_n = \frac{c}{3}.$$

Wynika stąd, że hipoteza H u b e r a równoważna jest hipotezie największego (stałego) naprężenia ścinającego ośmiościennego.

Zastanówmy się teraz, czemu jest równa stała c . Dla czystego rozciągania w momencie uplastycznienia materiału mamy $\sigma_1 = \sigma_{pl}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Z (8.15) otrzymujemy wówczas

$$(8.17) \quad c = \sqrt{2} \sigma_{pl}.$$

Oznacza to, że warunkiem uplastycznienia, zgodnie ze wzorem (8.16), jest osiągnięcie przez naprężenia ścinające ośmiościenne, tzn. przez tzw. intensywność naprężeń ścinających, wartości krańcowej

$$\tau_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{pl}.$$

Ponieważ wykazaliśmy poprzednio, (3.10), że

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n,$$

więc warunek uplastycznienia materiału, w uzależnieniu od intensywności naprężeń, przyjmuje następującą postać:

$$\sigma_i = \sigma_{pl}.$$

Powyższy warunek można również wyprowadzić w nieco odmienny sposób.

Jak wiadomo, energia odkształcenia postaci [por. także wzór (8.15)] jest równa

$$\mathcal{D}_f = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Dla prostego rozciągania otrzymujemy

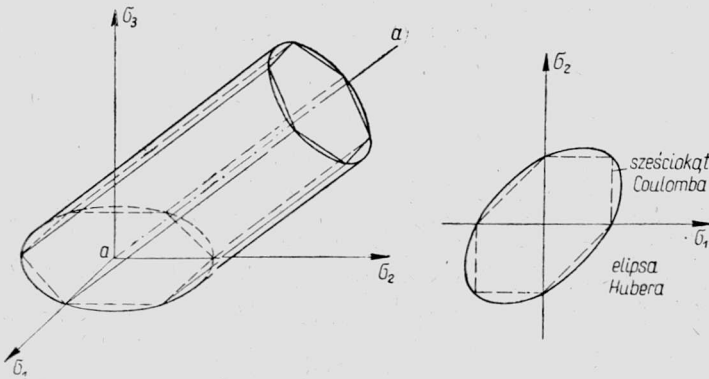
$$\mathcal{D}_{f\text{rozcz}} = 2 \frac{1+\nu}{6E} \sigma_{\text{rozcz}}^2,$$

wobec czego wprowadzając pojęcie σ_{zred} , tzn. «sprowadzając» złożony stan naprężenia do prostego rozciągania, mamy

$$\mathcal{D}_f = 2 \frac{1+\nu}{6E} \sigma_{zred}^2 = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Możemy zatem napisać [por. (3.9)]

$$\sigma_{zred} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$



Rys. 20

Podobnie więc jak istnieje warunek uplastycznienia materiału przy prostym rozciąganiu,

$$\sigma_{\text{rozcz}} = \sigma_{pl},$$

tak też otrzymuje się warunek uplastycznienia w przypadku ogólnym

$$\sigma_{zred} = \sigma_{pl}.$$

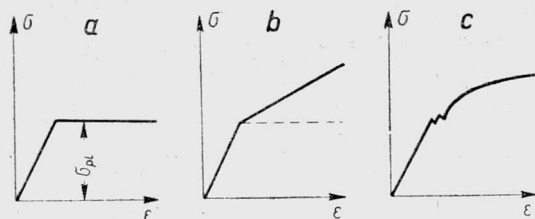
Warunek (8.15) określa tzw. walec (kołowy) H u b e r a nachylony jednakowo względem osi współrzędnych, które obrano w kierunkach naprężeń głównych. Zarówno widok samego walca H u b e r a, jak i jego przecięcie z płaszczyzną współrzędnych σ_1, σ_2 przedstawione zostały na rys. 20.

Z dokładniejszych rozważań wynika, że walec H u b e r a opisany jest na tzw. graniastosłupie C o u l o m b a. Stąd wniosek, że powierzchnie graniczne, przedstawione równaniem $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, nie wykazują w ujęciu H u b e r a i C o u l o m b a znaczniejszych od siebie odstępstw; obie zatem hipotezy, a więc hipoteza energetyczna i hipoteza największych naprężeń ścinających, są niemal równoważne. Doświadczenia (przeprowadzane głównie na rurach poddanych ciśnieniu wewnętrznemu: L o d e, N á d a i, R o š i E i c h i n g e r, T a y l o r i Q u i n n e y, S c h m i d t i ostatnio w 1945 r. D a v i e s) wykazały wyraźnie lepszą zgodność z wynikami pomiarów warunku H u b e r a niż innych hipotez.

Zatrzymajmy się więc ostatecznie na warunku plastyczności H u b e r a, który stwierdza, że uplastycznienie materiału następuje w chwili, gdy wyrażenie (3.9)

$$\sigma_i = \sigma_{zred} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

osiąga wartość równą σ_{pl} (tzn. równą granicy plastyczności określonej dla prostego rozciągania), i to niezależnie od tego, jaki (liniowy, płaski czy



Rys. 21

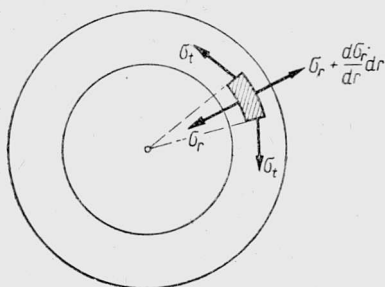
przestrzenny) stan naprężenia panuje w danym miejscu. Dla materiału idealnie plastycznego $\sigma_{zred} = \sigma_i$ pozostaje stałe w całym okresie plastycznym. Na rys. 21a przedstawiony jest wykres (σ, ϵ) dla ciała idealnie plastycznego, na rys. 21b dla

ciała plastycznego ze wzmocnieniem liniowym, a na rys. 21c dla materiału rzeczywistego (stali).

Obecnie, dla skonkretyzowania naszych dotychczasowych wywodów, pokażemy, jak rozwiązać stosunkowo proste (zresztą dość ważne) zadanie teorii plastyczności «w naprężeniach».

Przykład. Płaski pierścień z materiału plastycznego (rys. 22).

Załóżmy, że mamy pierścień poddany kołowo-symetrycznemu stanowi naprężenia. Niech odkształcenia w kierunku prostopadłym do płaszczyzny pierścienia nie natrafiają na opór (tzn. niech $\sigma_z \equiv 0$).



Rys. 22

Jest z założenia

$$\sigma_r = \sigma_r(r) \quad \text{oraz} \quad \sigma_t = \sigma_t(r).$$

Wobec symetrii obciążenia i układu jest również $\tau_{rt} = 0$, zatem σ_r i σ_t są naprężeniami głównymi. Załóżmy, że odkształcenia są małe (robimy to w tym celu, aby równania równowagi elementu móc ułożyć dla elementu nieodkształconego). Z równowagi rzutów naprężeń na promień r otrzymujemy równanie, znane ogólnie z tzw. zagadnienia L a m é g o,

$$(8.18) \quad r \frac{d\sigma}{dr} = \sigma_t - \sigma_r.$$

Warunkiem idealnej plastyczności materiału (zauważmy, że chodzi o idealną plastyczność w każdym miejscu rozpatrywanej konstrukcji) jest

$$\sigma_{zred} = \sigma_{pl} = k,$$

gdzie k jest pewną stałą.

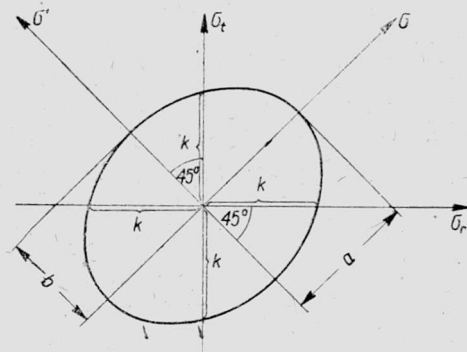
Stąd dla $\sigma_3 = \sigma_z = 0$, $\sigma_1 = \sigma_r$ oraz $\sigma_2 = \sigma_t$ otrzymujemy

$$(8.19) \quad \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2 = k^2.$$

Jak wynika z równań (8.18) i (8.19), zadanie można rozwiązać na podstawie tych równań bez rozważania odkształceń (oczywiście, tutaj — tylko trwałych odkształceń).

Równanie (8.19) przedstawia elipsę plastyczności H u b e r a. Wprowadzimy nowe zmienne. W tym celu obróćmy współrzędne σ_r i σ_t o kąt 45° ; przyjmą one wówczas położenia odpowiednio σ i σ' i pokryją się z osiami elipsy (rys. 23).

Można dowieść, że półosie tej elipsy są równe odpowiednio



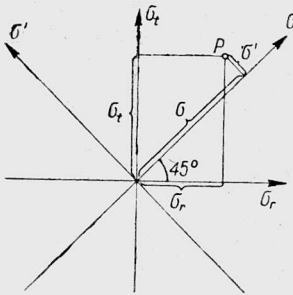
Rys. 23

$$(8.20) \quad a = \sqrt{2} k \quad \text{i} \quad b = \sqrt{\frac{2}{3}} k,$$

a więc równanie kanoniczne elipsy w postaci parametrycznej jest

$$(8.21) \quad \begin{cases} \sigma = a \sin \Theta = \sqrt{2} k \sin \Theta, \\ \sigma' = b \cos \Theta = \sqrt{\frac{2}{3}} k \cos \Theta. \end{cases}$$

W wyniku dokonanego obrotu otrzymujemy (rys. 24)



Rys. 24

$$\sigma = (\sigma_r + \sigma_t) \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sigma' = (\sigma_t - \sigma_r) \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stąd

$$(8.22) \quad \begin{cases} \sigma_r + \sigma_t = 2k \sin \Theta, \\ \sigma_t - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} k \cos \Theta, \end{cases}$$

i po wykonaniu przekształceń

$$(8.23) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{2k}{\sqrt{3}} \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{6} \right), \\ \sigma_t = \frac{2k}{\sqrt{3}} \sin \left(\Theta + \frac{\pi}{6} \right). \end{cases}$$

Naprężenia σ_r i σ_t określone związkami (8.23) spełniają, oczywiście, warunek (8.19)³⁾

Pozostała więc tylko jedna zmiana zależna, mianowicie kąt $\Theta = \Theta(r)$, [jest, naturalnie, $\Theta = \Theta(r)$, gdyż, jako kąt pomocniczy w układzie współrzędnych σ_r i σ_t w danym miejscu, zmienia się on w zależności od zmiany r]. Podstawiamy (8.23) do (8.18) i otrzymujemy równanie dla $\Theta(r)$:

$$(8.24) \quad r \frac{d}{dr} \left[\sin \left(\Theta - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \cos \Theta.$$

³⁾ Sprawdzmy to twierdzenie:

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2 &= \frac{4}{3} k^2 \sin^2 \left(\Theta - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{4}{3} k^2 \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\Theta + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{4}{3} k^2 \sin^2 \left(\Theta + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{2}{3} k^2 \left[1 - \cos \left(2\Theta - \frac{\pi}{3} \right) - \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\Theta \right) + 1 - \cos \left(2\Theta + \frac{\pi}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{3} k^2 \left(2 - \cos 2\Theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\Theta \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2\Theta - \cos 2\Theta \cos \frac{\pi}{2} + \sin 2\Theta \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= \frac{2}{3} k^2 \left(2 - 2 \cos 2\Theta \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cos 2\Theta \right) = k^2, \quad \text{c. b. d. d.} \end{aligned}$$

Całą tego równania jest

$$(8.25) \quad \frac{C^2}{r^2} = e^{-\sqrt{3}\theta} \cos \theta,$$

gdzie C jest stałą całkowania.

Widzimy, że w przeciwieństwie do stosunków zachodzących w teorii sprężystości warunek brzegowy może tutaj być tylko jeden (odpowiednie równanie różniczkowe jest pierwszego rzędu); np. może być dane albo ciśnienie wewnętrzne, albo ciśnienie zewnętrzne itp. Zadanie jest więc w swej istocie rozwiązane. Szczegółową dyskusję uzyskanych wyników pominiemy na tym miejscu jako mało istotną.

W Y K Ł A D I V

Zanim przejdziemy do ogólnego rozpatrzenia teorii plastyczności, zapoznamy się krótko z nową pracą W. W. Nowożiłowa, [10]. Praca ta rzuca ciekawe światło na poprzednie nasze wywody wykazując wyraźnie, że teoria plastyczności znajduje się jeszcze wciąż *in statu nascendi*. Z drugiej strony na podstawie pracy Nowożiłowa możemy stwierdzić, że skromne wiadomości, które posiadaliśmy z poprzednich wykładów, umożliwiają już rozumienie prac oryginalnych.

Nowożiłow zastanawia się nad fizycznym sensem intensywności naprężeń stycznych $\tau_n = k \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$, gdzie $k = 1/3$. Twierdzi on, że o ile sens fizyczny niezmiennika $\sigma_{sr} = 1/3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ jako średniego naprężenia normalnego jest wyraźny, to interpretacja Roša i Eichingera τ_n jako naprężenia stycznego ośmiościanowego jest wątpliwa. Nie wiadomo bowiem, dlaczego właśnie temu naprężeniu ma być nadane tak wielkie znaczenie w teorii plastyczności (można tutaj osłabić ten zarzut przypominając, że na ścianach ośmiościanu naprężenia normalne odpowiadają stanowi ciśnienia hydrostatycznego, a więc pozostają bez wpływu na zjawiska plastyczne). Również interpretacja energetyczna τ_n jako wielkości związanej z pracą odkształcenia postaciowego jest wątpliwa, gdyż praca ta zostaje obliczona tylko dla ciała izotropowego i podlegającego prawu Hooke'a; τ_n staje się zatem jak gdyby funkcją cech ośrodka, a nie czystą charakterystyką stanu naprężenia. Jakiż będzie wobec tego sens τ_n , gdy materiał jest anizotropowy i nie podlega prawu Hooke'a?

Aby usunąć te trudności pojęciowe, Nowożiłow rozumuje w sposób następujący.

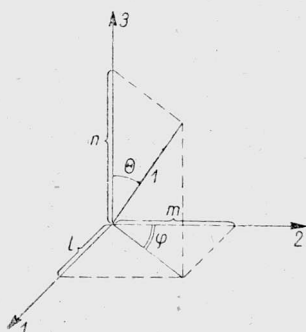
Weźmy pod uwagę naprężenia ścinające na elemencie dF powierzchni ograniczającej małą objętość w okolicy danego punktu. Na elemencie tym panuje naprężenie ścinające, przedstawione poprzednio wzorem (4.3),

$$\tau^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2,$$

gdzie l , m i n są to cosinusy kierunkowe normalnej do powierzchni w układzie odniesienia, którego osie są równoległe do kierunków naprężeń głównych. Obliczmy średnie naprężenie styczne τ_{sr} określone w sposób następujący:

$$\tau_{sr} = \lim_{F \rightarrow 0} \left(\frac{1}{F} \int_F \tau^2 dF \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Graniczna wartość zależy tu od kształtu powierzchni i od jej orientacji względem naprężeń głównych; np. dla sześcianu głównego (na którego ścianach $\tau = 0$) jest $\tau_{sr} = 0$. Przyczyna takiego



Rys. 25

wyniku tkwi w tym, że ściany sześcianu wiążą się jedynie z sześcioma różnymi zwrotami normalnej. «Wobec tego, cytujemy słowa autora, nie będzie właściwy również inny kształt elementu objętościowego poza kulą, gdyż tylko na kuli — wobec jej pełnej symetrii — przedstawione są w równej mierze wszystkie bez wyjątku kierunki pól elementarnych». Przenosząc środek kuli do danego punktu i używając współrzędnych kulistych (rys. 25) otrzymujemy:

$$l = \sin \theta \sin \varphi,$$

$$m = \sin \theta \cos \varphi,$$

$$n = \cos \theta,$$

$$dF = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta,$$

$$F = 4 \pi r^2.$$

Wobec tego po scałkowaniu mamy

$$\tau_{sr} = \frac{1}{\sqrt{15}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

skąd $k = 1/\sqrt{15}$.

Wynika stąd, że τ_n i τ_{sr} różnią się od siebie tylko czynnikiem stałym. Podobnie jak σ_{sr} jest naprężeniem normalnym średnim, również τ_n można (przy $k = 1/\sqrt{15}$) interpretować jako średnie naprężenie styczne.

Zrozumiałą rzeczą jest z tego punktu widzenia różnica pomiędzy założeniem C o u l o m b a (uplastycznienie materiału warunkuje naprężenie τ_{max} pojawiające się w danym miejscu) i założeniem H u b e r a - M i s e s a - H e n c k y (uplastycznienie warunkuje wielkość średniego naprężenia ścinającego). Takie ujęcie podaje również ten sam warunek plastyczności dla ciał anizotropowych i dla ciał nie podlegających prawu H o o k e' a.

Z drugiej atoli strony nie wydaje się rzeczą możliwą, aby kryterium plastyczności mogło być zależne tylko od stanu naprężenia, a nie od rodzaju materiału. Pogląd taki narzuca się zwłaszcza przy rozważaniu materiału niejednorodnego. Dla przykładu przeprowadźmy odpowiednie obliczenie dla ośrodka, w którym moduł Y o u n g a jest funkcją miejsca, $E = E(x, y, z)$. Energia jednostkowa czystego odkształcenia postaciowego jest, jak już mówiliśmy poprzednio (str. 101), równa

$$(8.26) \quad \mathcal{D}_f = \frac{1 + \nu}{6 E(x, y, z)} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Dla czystego rozciągania pręta jednorodnego o module Y o u n g a E_0 otrzymujemy

$$(8.27) \quad \mathcal{D}_f^{rozcz} = \frac{1 + \nu}{6 E_0} 2 \sigma_1^2 = \frac{1 + \nu}{3 E_0} \sigma_{red}^2 \text{ niejedn.}$$

Do porównania wybraliśmy tutaj jednorodny pręt, aby uzyskać jak najprostsze kryterium porównawcze. Przyrównując (8.26) i (8.27) mamy

$$\frac{1 + \nu}{6 E(x, y, z)} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1 + \nu}{3 E_0} \sigma_{red}^2 \text{ niejedn.}$$

skąd dla ciała niejednorodnego byłoby

$$\sigma_{red} \text{ niejedn.} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{E_0}{E(x, y, z)} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{E_0}{E(x, y, z)}} \sigma_i,$$

gdzie σ_i jest to znane już dobrze σ_{zred} Hubera [por. wzory (3.9) i (3.10)]. Otrzymujemy tu jak gdyby pewną pozorną sprzeczność z hipotezą energetyczną Hubera; σ_{zred} Hubera zależy bowiem, jak widać (choć pozornie — po skróceniu wielkości E — nie zależy) od modułu E (tj. od rodzaju materiału), podczas gdy według interpretacji Rośa i Eichingera tej wielkości jako naprężenia ośmiościennego σ_{zred} zależałoby tylko od stanu naprężenia.

Przejdźmy obecnie do krótkiego przedstawienia podstawowych pojęć teorii plastyczności. Jak się z tego przedstawienia okaże, z teorią tą zapoznaliśmy się już w dużej mierze w poprzednich naszych rozważaniach.

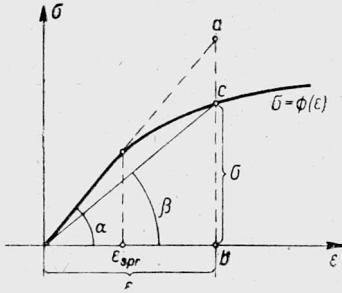
§ 9. Teoria plastyczności

Przyjmijmy, że dla danego materiału jest znany doświadczalny wykres rozciągania (rys. 26).

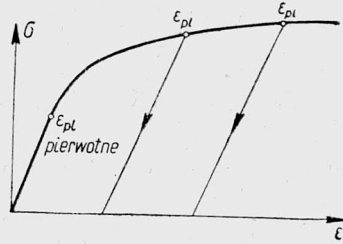
Dopóki wydłużenie jednostkowe $\varepsilon < \varepsilon_{spr}$ (ε_{spr} oznacza tutaj graniczne wydłużenie sprężyste), to związek pomiędzy σ i ε jest na ogół liniowy (czyli zgodny z prawem Hooke'a):

$$(9.1) \quad \sigma = E \varepsilon.$$

Dla $\varepsilon > \varepsilon_{spr}$ związek między naprężeniem i odkształceniem jest na ogół nieliniowy i oczywiście nieodwracalny (w tym sensie, że powrót do stanu bez naprężeń zachodzi według innego prawa niż proces pierwot-



Rys. 26



Rys. 27

nego obciążenia, por. rys. 27 i 28a). Zależy on praktycznie tylko od właściwości materiału, a nie od kształtu próbki, przynajmniej dla elementów o niezbyt małych wymiarach. Jest zatem

$$(9.2) \quad \sigma = \Phi(\varepsilon).$$

Dla uzyskania analogii do (9.1) zapiszmy ostatni związek w nieco innej formie, mianowicie

$$(9.3) \quad \sigma = E' \varepsilon,$$

gdzie E' jest pewną wielkością zmienną.

Z rysunku 27 widzimy, że

$$(9.4) \quad E' = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \Psi(\varepsilon),$$

co oznacza, że E' jest znaną funkcją odkształcenia, jeżeli znany jest wykres rozciągania. E' nazywamy sprowadzonym modułem sprężystości pierwszego rodzaju.

Zachodzi pytanie, w jakiej postaci należy zapisać związek między naprężeniami i odkształceniami, gdy rzecz nie dotyczy prostego rozcią-

gania, ale skomplikowanego, przestrzennego układu naprężeń, którego od-
dzielne składowe przekroczyły granicę sprężystości. Przypomnijmy, że
w granicach sprężystości istniał dla takiego złożonego stanu zapis bar-
dzo praktyczny z punktu widzenia swej zwartości [por. (68)],

$$(9.5) \quad \sigma_i = E \varepsilon_i \quad (\text{dla } \varepsilon_i < \varepsilon_{spr}),$$

zastępujący sześć związków w postaci L a m é g o (lub w innej formie).

Jak widać, wzór (9.5) odpowiada całkowicie znanemu związkowi (9.1)
z tym tylko zastrzeżeniem, że wzór (9.1) dotyczy określonych składo-
wych naprężenia i odkształcenia, a wzór (9.5) naprężeń i odkształceń
«uogólnionych» (tzn. intensywności naprężeń). Powstaje zatem pytanie,
czy w przypadku, gdy odkształcenia są niesprężyste i gdy panuje prze-
strzenny stan naprężenia, zachodzi również związek analogiczny do (9.5),
tzn. czy

$$(9.6) \quad \sigma_i = E' \varepsilon_i \quad (\text{dla } \varepsilon_i > \varepsilon_{spr}).$$

Chcielibyśmy, rzecz jasna, by E' w tym związku było tożsame z E' ze
związku (9.3), czyli pragnęlibyśmy, aby

$$(9.7) \quad E' = \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \text{było równe} \quad \frac{\Phi(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i}.$$

Doświadczenia wykazują, że taka właśnie równość zachodzi i że, istot-
nie, $\Phi(\varepsilon_i)$ zależy w istocie swej tylko od rodzaju materiału, a nie od stanu
naprężenia. Oznacza to, że funkcja $\Phi(\varepsilon_i)$ ma tę samą postać, co $\Phi(\varepsilon)$ przy
prostym rozciąganiu. Stąd wynika ogromna waga pojęć intensywności
naprężeń, σ_i , i intensywności odkształceń, ε_i ; wielkości te sprowadzają
bowiem jakby stan przestrzenny naprężenia do stanu prostego rozciągania.
Zauważmy poza tym, że prawo (9.6) obowiązuje niezależnie od tego,
czy rozpatrywany obszar jest obszarem sprężystym, czy też niespręży-
stym.

Wobec pełnej analogii pomiędzy związkami (9.5) i (9.6) wszystkie za-
leżności zachodzące w stanie sprężystym przenieść można na stan pla-
styczny, o ile wielkość E zastąpić wielkością E' . Muszą zatem istnieć
związki podobne do poprzednio przez nas podanych dla sprężystej fazy
odkształcenia:

$$(9.8) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = 2G'(\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}), & \tau_{xy} = G' \gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = 2G'(\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}), & \tau_{yz} = G' \gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = 2G'(\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}), & \tau_{zx} = G' \gamma_{zx}. \end{cases}$$

Tutaj, jak poprzednio [por. (6.7.1)],

$$(9.8.1) \quad G' = \frac{E'}{2(1+\nu')},$$

gdzie G' oznacza sprowadzony moduł drugiego rodzaju, zaś ν' rodzaj «współczynnika P o i s s o n a».

Ponieważ w obszarze plastycznym objętość materiału praktycznie można uważać za stałą, więc dla prostego rozciągania

$$\Theta = \varepsilon_x - 2\nu'\varepsilon_x = 0,$$

czyli

$$(9.9.1) \quad \nu' = \frac{1}{2},$$

a zatem

$$(9.9.2) \quad G' = \frac{E'}{3}.$$

(Przyjmuje się, że przy przechodzeniu do coraz to dalszych faz stanu plastycznego $\nu' \rightarrow 1/2$, poczynając od wartości odpowiadającej fazie sprężystej, np. dla stali od wartości $\nu' = \nu = 0,3$).

Z (9.6) wynika, że

$$E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},$$

a więc

$$(9.10) \quad G' = \frac{E'}{3} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}$$

i dalej

$$(9.11) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}), & \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}), & \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}), & \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{zx}. \end{cases}$$

Tutaj intensywności, jak poprzednio, wyrażają się wzorami

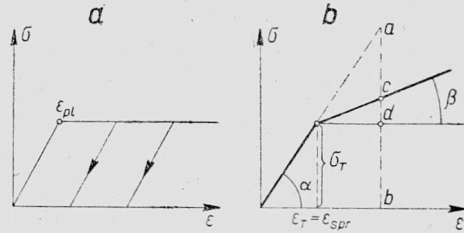
$$(9.12) \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)},$$

$$(9.13) \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Rzeczywiste wykresy wytrzymałościowe wskazują na istnienie tzw. «wzmocnienia»⁴ materiału (rys. 27). Oznacza to, że nowe granice plastyczności, po uprzednim uplastycznieniu materiału, stają się coraz wyższe (oczywiście, do pewnej granicy).

Jedynie dla uproszczenia zjawiska wprowadziliśmy poprzednio pojęcie materiału idealnie plastycznego (nie przejawiającego wzmocnienia).

W związku z tym dla uzyskania większej dokładności wyników rzeczywisty wykres wytrzymałościowy zastępuje się często dwoma liniami prostymi o różnych nachyleniach (rys. 28b).



Rys. 28

Dla najogólniejszego przypadku można wzór (9.6) przekształcić w ten sposób, aby (stały) współczynnik E wystąpił jako mnożnik. Z rysunku 26 odczytujemy wówczas, że

$$(9.14) \quad \sigma_i = \varepsilon_i \operatorname{tg} \alpha - \overline{ac}.$$

Oczywiście, \overline{ac} jest funkcją ε_i i na ogół rośnie wraz z ε_i :

$$(9.15) \quad \overline{ac} = \varphi(\varepsilon_i).$$

Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha = E$, więc z (9.14) mamy

$$\sigma_i = E \varepsilon_i - \varphi(\varepsilon_i)$$

lub też

$$(9.16) \quad \sigma_i = E \varepsilon_i \left(1 - \frac{\varphi(\varepsilon_i)}{E \varepsilon_i} \right) = E \varepsilon_i [1 - \omega(\varepsilon_i)],$$

gdzie

$$\omega(\varepsilon_i) = 0 \quad \text{dla} \quad \varepsilon < \varepsilon_{spr}$$

oraz

$$\omega(\varepsilon_i) = \frac{\varphi(\varepsilon_i)}{E \varepsilon_i} \quad \text{dla} \quad \varepsilon > \varepsilon_{spr}.$$

Porównując (9.16) z (9.6) otrzymujemy następujący wzór dla (zmiennego) modułu pierwszego rodzaju:

$$(9.17) \quad E' = E [1 - \omega(\varepsilon_i)].$$

⁴ Jak słusznie zwrócił uwagę autora J. N a l e s z k i e w i c z, zamiast zapożyczonego z dawniejszej literatury terminu «wzmocnienie» (ros. *uprocchnienie*, ang. *strain-hardening*, niem. *Verfestigung*) należałoby raczej używać właściwszego terminu «konsolidacja» (lub podobnego), wprowadzonego przez G. L a u r e n t a i wierniej oddającego treść fizyczną zjawiska.

W skróconym zapisie opuszcza się na ogół argument funkcji ω .

Moduł sprowadzony drugiego rodzaju dla ciała nieściśliwego wyraża się wzorem następującym:

$$(9.18) \quad G' = G(1 - \omega).$$

Wzór ten uważać można za konsekwencję wzoru (9.17), jeżeli wykorzystać związki (6.7.1) i (9.8.1) i przyjąć $\nu' = \nu^5$.

Prawo (9.6) i jego rozwinięcie (9.8) uzyskaliśmy opierając się na analogii istniejącej pomiędzy stanem sprężystym i stanem plastycznym ciała. Obecnie postaramy się to prawo wyprowadzić z danych doświadczalnych. Przeprowadzone doświadczenia nad stanem plastycznym ciał pozwalają sformułować następujące wnioski w przypadku *obciążenia prostego* (obciążenie proste oznacza takie obciążenie, w którym wszystkie siły rosną proporcjonalnie wraz ze wzrostem pewnego parametru, np. czasu):

(1) kierunki głównych wydłużeń pokrywają się z kierunkami głównych naprężeń normalnych,

(2) gęstość (lub objętość) ciała nie zmienia się dostrzegalnie,

(3) wykres *M o h r a* dla odkształceń (we współrzędnych γ i ε) jest zawsze geometrycznie podobny do wykresu *M o h r a* dla naprężeń (we współrzędnych σ i τ).

Wniosek drugi możemy zapisać następująco:

$$(9.19) \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,$$

a wniosek trzeci jako

$$(9.20) \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}.$$

(Analogiczne zależności — mowa o zależnościach (9.20) — poznaliśmy poprzednio dla stanu sprężystego, por. str. 90).

Na podstawie wzorów (9.19) i (9.20) mamy teraz

$$(9.21) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = c \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ \varepsilon_2 = c \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right], \\ \varepsilon_3 = c \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right], \end{cases}$$

gdzie c jest pewną wielkością stałą.

Widzimy zatem, że przy ustalonym procesie płynięcia plastycznego zachodzą związki podobne do związków w stanie sprężystym ciała. Jed-

⁵⁾ Por. treść odsyłacza 7).

nie zamiast współczynnika E występuje stała $1/c$, a zamiast ν liczba $1/2$. Przeprowadziwszy wszystkie poprzednie rozumowania otrzymamy w sposób czysto formalny związek

$$\sigma_i = \frac{1}{c} \varepsilon_i$$

lub, przyjmując

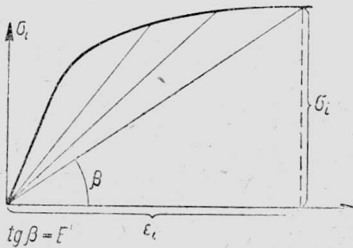
$$E' = \frac{1}{c},$$

również

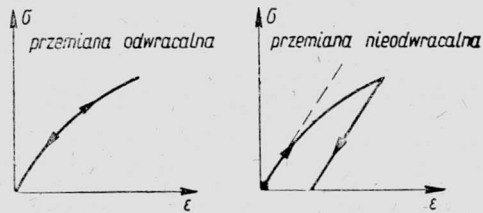
$$\sigma_i = E' \varepsilon_i.$$

Jest to właśnie prawo, które zamierzaliśmy wyprowadzić z danych uzyskanych doświadczalnie.

Powyższa zależność odkształcenia od naprężenia w fazie plastycznej ma postać podobną do postaci prawa obowiązującego w stanie sprężystym ciała. Należy jednak przypomnieć, że tutaj, tzn. w fazie plastycznej, współczynnik E' (moduł odkształcenia) ulega zmianie w zależności od wielkości odkształcenia i maleje tym bardziej, im dalej posuwamy się w fazie odkształcenia plastycznego (rys. 29).



Rys. 29



Rys. 30

Zauważmy, że dla ciała sprężystego (nawet nie podlegającego prawu Hooke'a) obowiązują te same prawa, zarówno w procesie obciążania, jak i w procesie odciążania; natomiast dla ciała plastycznego rzecz się ma inaczej: przemiany zachodzące w ciele plastycznym są bowiem w większości swej nieodwracalne (rys. 30).

Przy czystym rozciąganiu uważa się, że ciało ulega uplastycznieniu, gdy $\sigma_{rozcz} > \sigma_{spr} \approx \sigma_{pl}$; σ_{spr} oznacza tutaj graniczne naprężenie sprężyste. Dla złożonego stanu naprężenia, według energetycznej hipotezy H u b e r a, ciało przechodzi w stan plastyczny, gdy $\sigma_i > \sigma_{pl}$. Przy opisie zachodzących zjawisk trzeba jednak jeszcze uwzględnić naszą poprzednią uwagę o nieodwracalności przemian w okresie plastycznym. W tym celu posłużymy się pojęciami wprowadzonymi przez Iljuszina,

mianowicie pojęciami odkształcenia aktywnego (czynnego) i odkształcenia biernego.

Odkształcenie czynne ma miejsce wtedy, gdy intensywność naprężeń jest funkcją nie malejącą procesu obciążenia, tzn. taką⁶⁾, dla której $(\sigma_i)_{nast} \geq (\sigma_i)_{poprz}$. Natomiast podczas odkształcenia biernego jest $(\sigma_i)_{nast} < (\sigma_i)_{poprz}$.

Zauważmy, że wszystko, o czym mówiliśmy dotychczas, nie dotyczyło jawnie odwracalności lub nieodwracalności przemian. K a c z a n o w przeprowadzając termodynamiczną analizę procesu czynnego odkształcenia plastycznego udowodnił, że w przypadku takiego odkształcenia wszystkie wielkości i związki dla stanu plastycznego (tzn. naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia oraz związki pomiędzy tymi wielkościami) nie powinny się niczym różnić od odpowiednich wielkości i związków dla ciała sprężystego nieliniowego, z identycznym wykresem przy rozciąganiu. Tylko podczas odkształcenia biernego (odciążenia) ciało nieliniowo sprężyste różni się od ciała plastycznego. W przypadku odkształcenia czynnego nieodwracalność procesu staje się jak gdyby niewyczuwalna. Wszystko zatem, o czym mówiliśmy dotychczas, dotyczy zarówno ciała nieliniowo sprężystego, jak i ciała plastycznego (oczywiście, w fazie czynnego odkształcenia).

W Y K Ł A D V

§ 10. Twierdzenia Iljuszina

W ciągu ostatniego ćwierćwiecza powstało wiele teorii plastyczności, ale znaczna ich liczba uległa obaleniu przez coraz to nowe doświadczenia. Do wyjaśnienia sytuacji przyczynił się w znacznej mierze Iljusz in. Udowodnił on, że dla czynnego odkształcenia powstającego przy prostym obciążeniu znane teorie plastyczności są przypadkami szczególnymi jednej, ogólnej teorii (którą tu właśnie przedstawiliśmy), zgodnej z doświadczeniem, o ile ograniczymy się do małych sprężystych i plastycznych (sprężysto-plastycznych) odkształceń. Należy jednak w tym celu pominąć wpływ czasu (czyli pominąć takie zjawiska, jak np. pełzanie, relaksacja itp.), a przemiany zachodzące uważać za nieodwracalne, lecz przebiegające poprzez kolejne stany równowagi. Jest to tzw. twierdzenie I l j u s z i n a o *prostym obciążeniu*. Przy prostym obciążeniu odkształcenie jest wszędzie czynne — nawet wówczas, gdy stan naprężenia nie jest jednorodny — a σ_i wszędzie rośnie. To właśnie pozwala na stosowanie poprzednio poznanych praw, które obowiązują tylko w przypadku czynnych odkształceń.

⁶⁾ Wskaźniki przy symbolu σ_i oznaczają stan poprzedzający i następujący w procesie obciążenia.

Prawo dotyczące odciążania (dla odkształcenia biernego) uzyskano na podstawie doświadczeń. Wyniki badań eksperymentalnych przedstawia wykres na rys. 31.

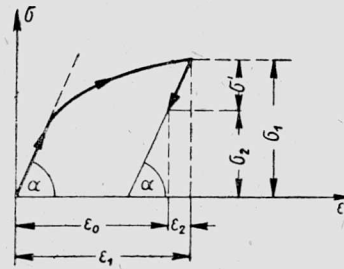
Ciało poddano najpierw obciążeniu σ_1 przy czym

$$\sigma_1 > \sigma_{pl}.$$

Następnie obciążenie zmniejszono do wartości σ_2 :

$$\sigma_2 < \sigma_1.$$

Z wykresu widzimy, że pozostałe jeszcze odkształcenie wynosi



Rys. 31

$$\epsilon_0 = \epsilon_1 - \epsilon_2,$$

gdzie

$$(10.1) \quad \epsilon_2 = E(\sigma_1 - \sigma_2) = E\sigma';$$

ϵ_2 jest to sprężysta część odkształcenia całkowitego.

Wynika stąd, że dla znalezienia elasto-plastycznego odkształcenia, pozostałego po odciążeniu, trzeba od całego odkształcenia ϵ_1 odjąć jego część sprężystą ϵ_2 .

Rozumowanie to, oczywiście dla prostego rozciągania, daje się zastosować również do stanu naprężenia przestrzennego i niejednorodnego, jeżeli odciążenie jest proste, tzn. jeżeli w stanie biernego odkształcenia siły zmieniają się proporcjonalnie do pewnego parametru. Jest to twierdzenie I l j u s z i n a o odciążeniu.

Prawa dotyczące małych odkształceń sprężysto-plastycznych można wypowiedzieć jeszcze w nieco inny sposób. Podkreślamy jednak, że w podanym sformułowaniu nie są one od siebie niezależne (ale, oczywiście, są niesprzeczne).

(I) Prawo zmiany objętości:

$$(10.2) \quad \sigma_{sr} = \frac{E}{1 - 2\nu} \epsilon_{sr}.$$

W tym wzorze ν oznacza liczbę P o i s s o n a ⁷⁾, a E moduł Y o u n g a.

⁷⁾ Oczywiście, ponieważ odkształcenie powstałe przy czystej zmianie objętości — według prawa (10.2) — jest całkowicie sprężyste, to wartość liczby P o i s s o n a wypada tutaj przyjąć równą jej wartości w fazie sprężystej. Powstaje zatem odmiennosc w stosunku do założenia (9.9.1). Zwróćmy jeszcze uwagę, że jeżeli dodać stronami równości (9.21) przyjmując $c = 1/E'$ i $\nu' = 1/2$ — to otrzymamy $\sigma_{sr} = (E'/1 - 2\nu') \epsilon_{sr}$, wobec czego na podstawie (10.2) jest $E'/1 - 2\nu' = E/1 - 2\nu$. Pewne uwagi na temat wewnętrznej zgodności założeń teorii plastyczności znaleźć można np. w [9]. Na tym miejscu zagadnienia tego, jako dotyczącego formalnej strony teorii plastyczności, nie będziemy bliżej omawiali.

Prawo to jest ważne dla odkształceń czynnych i biernych przed i poza granicą sprężystości.

(II) Prawo zmiany postaci przy odkształceniu czynnym:

$$(10.3) \quad D_{\varepsilon} = 2 G' D_{\varepsilon}.$$

Prawo to w innym zapisie wyrażają wzory (9.8) i (9.11); G' oznacza tutaj, jak zwykle, sprowadzony moduł odkształcenia drugiego rodzaju, zależny od wielkości intensywności odkształceń w danym miejscu [por. wzór (9.18)].

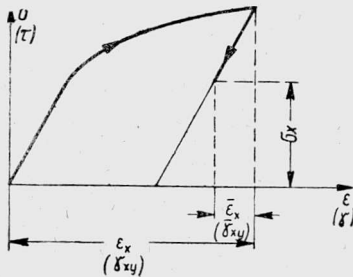
(III) Prawo zależności zachodzącej pomiędzy σ_i oraz ε_i dla aktywnego odkształcenia sprężysto-plastycznego.

Według tego prawa intensywność naprężeń σ_i w danym punkcie jest określoną funkcją intensywności odkształceń ε_i w tym punkcie, niezależnie od rodzaju stanu odkształcenia i od drogi, na jakiej dany stan odkształcenia osiągnięto. Jest zatem

$$(10.4) \quad \sigma_i = \Phi(\varepsilon_i).$$

Postać funkcji $\Phi(\varepsilon_i)$ zależy wyłącznie od materiału ciała. Postać tę określamy doświadczalnie, przy czym na mocy poznanej właśnie prawa wystarczy przeprowadzić próbę rozciągania.

(IV) Prawo odkształcenia biernego.



Rys. 32

Według tego prawa przy prostym (całkowitym lub częściowym) odciążeniu w założeniu liniowej zależności odkształceń od naprężeń (rys. 32), zachodzi następująca zależność:

$$(10.5) \quad D_{\varepsilon} = 2 G' D_{\varepsilon} - 2 G \bar{D}_{\varepsilon},$$

gdzie \bar{D}_{ε} jest tzw. sprężystym dewiatorem odkształcenia odpowiadającym naprężeniu $(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Biorąc pod uwagę składowe odpowiednich wielkości w kierunku osi współrzędnych otrzymamy zamiast (10.5)

$$(10.6) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}) - 2 G (\bar{\varepsilon}_x - \bar{\varepsilon}_{sr}), \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}) - 2 G (\bar{\varepsilon}_y - \bar{\varepsilon}_{sr}), \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}) - 2 G (\bar{\varepsilon}_z - \bar{\varepsilon}_{sr}), \\ \tau_{xy} = G' \gamma_{xy} - G \bar{\gamma}_{xy}, \\ \tau_{yz} = G' \gamma_{yz} - G \bar{\gamma}_{yz}, \\ \tau_{zx} = G' \gamma_{zx} - G \bar{\gamma}_{zx}. \end{cases}$$

§ 11. Podstawowe równania mechaniki ciał sprężysto-plastycznych

Obecnie możemy już dokonać syntezy naszych wiadomości i przedstawić matematyczny aparat teorii plastyczności. W skład jego wchodzi:

(1) Trzy równania równowagi N a v i e r a (bez uwzględnienia sił masowych)

$$(11.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

(2) Sześć związków C a u c h y' e g o pomiędzy składowymi odkształcenia i przemieszczenia

$$(11.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{cases}$$

(3) Sześć związków fizycznych między naprężeniami i odkształceniami, np. w postaci (9.11),

$$(11.3) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = \frac{2\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}), & \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = \frac{2\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}), & \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = \frac{2\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}), & \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{zx}, \end{cases}$$

(4) Wyrażenia dla intensywności naprężeń (9.12) i dla intensywności odkształceń (9.13) oraz związek pomiędzy nimi:

$$(11.4) \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)},$$

$$(11.5) \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)},$$

$$(11.6) \quad \sigma_i = E' \varepsilon_i.$$

Mamy zatem ogółem $3+6+6+3=18$ równań oraz tyleż niewiadomych (6 składowych naprężenia, 6 składowych odkształcenia, 3 składowe przemieszczenia oraz σ_i, ε_i i E'). Rozwiązania zadań teorii plastyczności muszą spełniać 18 wyżej podanych równań oraz odpowiednie warunki brzegowe, np. dla składowych sił zewnętrznych znane równania typu

$$(17.7) \quad \begin{cases} p_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_y = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_z = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{cases}$$

lub też odpowiednie warunki dla przemieszczeń.

Jeżeli rozpatrujemy sprężysto-plastyczny stan równowagi i nie interesują nas przemieszczenia, to zamiast sześciu związków Cauchy'ego można przyjąć jedną grupę równań nierozdzielności Saint-Venant'a (np. związki między składowymi odkształcenia w jednej płaszczyźnie):

$$(11.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{cases}$$

Dysponujemy zatem ostatecznie w tym przypadku

(a) trzema równaniami statyki, (11.1);

(b) trzema równaniami nierozdzielności, (11.8);

(c) sześcioma związkami, (11.3), pomiędzy naprężeniami i odkształceniami; związki te według (9.8) można zapisać również w postaci następującej:

$$(11.9) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}), & \tau_{xy} = G' \gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}), & \tau_{yz} = G' \gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}), & \tau_{zx} = G' \gamma_{zx}; \end{cases}$$

(d) jednym równaniem, (11.5), dla ε_i ;

(e) jednym związkiem przedstawiającym G' w zależności od ε_i (9.18)

$$G' = G [1 - \omega(\varepsilon_i)].$$

Razem otrzymujemy więc 14 równań i tyleż niewiadomych (12 składowych stanu naprężenia i odkształcenia, ε_i oraz G'), czyli z punktu

widzenia formalno-matematycznego zadanie jest rozwiązane. Efektywne jednak rozwiązanie tak ogólnie postawionego zadania jest niemożliwe, między innymi również ze względu na nieliniowość równań (występują w nich tego rodzaju iloczyny, jak np. $G'\varepsilon_x$ itp.). W związku z tym znane są dotychczas efektywne rozwiązania jedynie niewielkiej liczby prostych zadań.

W Y K Ł A D VI

§ 12. Zadanie Lamégo

(rura grubościenna poddana ciśnieniu wewnętrznemu i zewnętrznemu)

Zbliżone zadanie rozważaliśmy w § 8. Wówczas mieliśmy na uwadze dysk w płaskim stanie naprężenia (co matematycznie wyrażało się założeniem $\sigma_z = 0$) z materiału całkowicie uplastycznionego. Obecnie założymy, że stan odkształcenia jest płaski (rura nieskończenie długa), czyli że $\varepsilon_z = 0$. Równanie równowagi przybiera znaną postać

$$(12.1) \quad \sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0.$$

Skorzystajmy teraz z równań (9.21) pamiętając, że

$$\frac{1}{c} = E'.$$

Mamy

$$(12.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E'} \left[\sigma_r - \frac{1}{2} (\sigma_t + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_t = \frac{1}{E'} \left[\sigma_t - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_r) \right], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E'} \left[\sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_t) \right] = 0. \end{cases}$$

Z ostatniego z równań (12.2) otrzymujemy w danym razie

$$(12.3) \quad \sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_t).$$

Warunkiem plastyczności H u b e r a jest

$$(12.4) \quad \sigma_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} = \sigma_{pl} = k.$$

Po podniesieniu obu stron (12.4) do kwadratu i uwzględnieniu związku (12.3) otrzymujemy

$$2k^2 = (\sigma_r - \sigma_t)^2 + \left(\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2}\right)^2 = \sigma_r^2 - 2\sigma_r\sigma_t + \sigma_t^2 + \\ + 2\left(\frac{\sigma_t^2}{4} - \frac{\sigma_r\sigma_t}{2} + \frac{\sigma_r^2}{4}\right) = \sigma_r^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \sigma_t^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) - 3\sigma_r\sigma_t = \frac{3}{2}(\sigma_t - \sigma_r)^2.$$

Ostatecznie więc jest

$$(12.4.1) \quad \sigma_t - \sigma_r = + \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

Założyliśmy tutaj, że ciśnienie wewnętrzne p_a jest znacznie większe od ciśnienia zewnętrznego p_b , tzn. że $p_a \gg p_b$, i że wobec tego $\sigma_t > 0$, czyli σ_t jest naprężeniem rozciągającym; natomiast σ_r jest ujemne, gdyż ścianki rury poddane są ciśnieniu.

Po podstawieniu (12.4.1) do (12.1) otrzymujemy kolejno

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2k}{\sqrt{3}}, \\ (12.5) \quad \sigma_r = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln r + C.$$

Niech dla $r = b$ będzie $\sigma_r = -p_b$. Stąd mamy

$$-p_b = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln b + C$$

i wobec tego

$$(12.6) \quad C = -p_b - \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln b.$$

Zatem

$$(12.7) \quad \sigma_r = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b} - p_b.$$

Założmy, że dla $r = a$ jest $\sigma_r = -p_a$; otrzymamy stąd następujący związek pomiędzy ciśnieniami p_a i p_b (równanie różniczkowe dla określenia σ_r było równaniem pierwszego rzędu, a więc dysponujemy tylko jedną stałą całkowania):

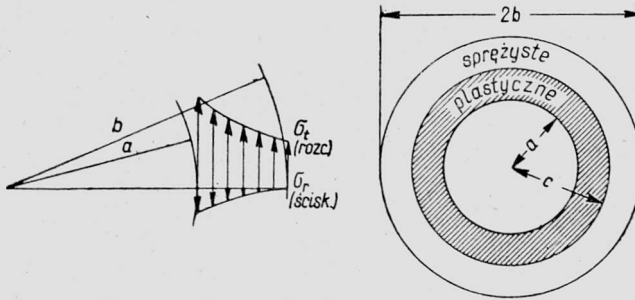
$$(12.8) \quad p_a - p_b = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}.$$

Wzór (12.8) przedstawia warunek plastyczności. Aby każde miejsce rury przeszło w stan plastyczny (idealny), trzeba, by ciśnienie wewnętrzne przewyższało ciśnienie zewnętrzne o wartość wyrażoną wzorem (12.8).

Gdy $p_b = 0$, to graniczna plastyczna nośność rury odpowiada ciśnieniu

$$(12.9) \quad p_a^{max} = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}.$$

Gdy ciśnienie przekroczy tę wartość, to dla materiału nie podlegającego wzmocnieniu opór plastyczny rury nie będzie wzrastał; rura zacznie się wobec tego gwałtownie odkształcać (płynąć) i w rezultacie pęknąć.



Rys. 33

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy ciśnienie wewnętrzne w rurze jest mniejsze od ciśnienia odpowiadającego nośności plastycznej, p_a^{max} , ale większe od granicy nośności sprężystej. Wówczas w rurze powstają dwie strefy: wewnętrzna—plastyczna i zewnętrzna—sprężysta. Wynika to z rozkładu naprężeń powstających w rurze jeszcze w jej stanie sprężystym.

Na rysunku 33 z lewej strony podano wykresy odpowiednich naprężeń, gdy cały materiał rury znajduje się w stadium sprężystym; przyjęto tutaj, że $p_b = 0$ (p_b jest bowiem częstokroć małe).

Ponieważ zwykle $\sigma_t \gg \sigma_r$, to można przyjąć, że wartość różnicy $\sigma_t - \sigma_r$, miarodajna dla uplastycznienia materiału [por. (12.4.1)], jest największa tam, gdzie σ_t jest największe, czyli na wewnętrznej powierzchni rury. Moment pojawienia się odkształceń plastycznych we wnętrzu rury jest jednak na ogół daleki od momentu pełnego wyczerpania nośności rury. To ostatnie następuje dopiero wówczas, gdy strefa plastyczna dojdzie do powierzchni zewnętrznej. Rozpatrzmy pewną fazę pośrednią (rys. 33 i 34), tzn. taką fazę, w której pierścień plastyczny o promieniu zewnętrznym c jest otoczony pierścieniem sprężystym o tym samym wewnętrznym promieniu (przy czym $a < b < c$).

Niech oba te pierścienie oddziałują na siebie za pomocą ciśnień q . Wobec tego dla strefy plastycznej, dla której powinien być spełniony warunek plastyczności (12.8), mamy

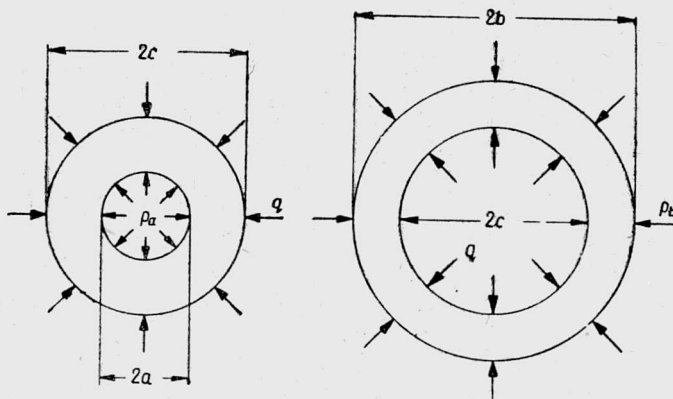
$$(12.10) \quad p_a - q = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{c}{a}.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\beta_{pl} = \frac{c}{a}.$$

Wówczas

$$(12.11) \quad p_a - q = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \beta_{pl}.$$



Rys. 34

Dla strefy sprężystej stanem granicznym jest osiągnięcie granicy sprężystości, co następuje wówczas (oczywiście, najpierw na konturze wewnętrznej pierścienia sprężystego), gdy naprężenie przekroczy granicę sprężystości σ_{spr} . Jako warunek graniczny (12.4) mamy zatem

$$\sigma_i = \sigma_{spr} \approx \sigma_{pl} = k$$

lub to samo w postaci (12.4.1)

$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

Rozwiązanie zadania L a m é g o w teorii sprężystości ma, jak to można łatwo stwierdzić, następującą postać:

$$(12.12) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{q c^2 - p_b b^2}{b^2 - c^2} - \frac{(q - p_b) b^2 c^2}{r^2 (b^2 - c^2)}, \\ \sigma_t = \frac{q c^2 - p_b b^2}{b^2 - c^2} + \frac{(q - p_b) b^2 c^2}{r^2 (b^2 - c^2)}; \end{cases}$$

stąd

$$(12.13) \quad \sigma_t - \sigma_r = \frac{2(q - p_b) b^2 c^2}{r^2 (b^2 - c^2)}.$$

W miejscu $r = c$ (tzn. na granicy pierścienia sprężystego i plastycznego) ma nastąpić uplastycznienie materiału; wobec tego biorąc pod uwagę związki (12.4.1) i (12.13) otrzymujemy

$$(12.14) \quad \frac{2(q - p_b) b^2 c^2}{c^2 (b^2 - c^2)} = \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

Stąd

$$(12.15) \quad q - p_b = \frac{k}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - c^2}{b^2}$$

lub, przyjmując oznaczenie

$$\beta_{spr} = \frac{b}{c},$$

również

$$(12.16) \quad q - p_b = \frac{k}{\sqrt{3}} \frac{\beta_{spr}^2 - 1}{\beta_{spr}^2}.$$

Dodając stronami równości (12.16) i (12.11) otrzymujemy następujący związek pomiędzy p_a i p_b :

$$(12.17) \quad p_a - p_b = \frac{2k}{\sqrt{3}} \left[\ln \beta_{pl} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta_{spr}^2} \right].$$

(1) Gdy $c = b$ (tzn. gdy cały przekrój rury jest w stanie plastycznym), to

$$\beta_{pl} = \frac{b}{a} \quad \text{i} \quad \beta_{spr} = 1;$$

wówczas mamy

$$(12.18) \quad p_a - p_b = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}.$$

Warunek ten jest identyczny z poznanym już poprzednio warunkiem (12.8).

(2) Gdy $c = a$ (początek procesu uplastycznienia na wewnętrznej powierzchni rury), to $\beta_{pl} = 1$ oraz $\beta_{spr} = b/a$; wówczas jest

$$(12.19) \quad p_a - p_b = \frac{k}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - a^2}{b^2}.$$

Założmy, że ciśnienie zewnętrzne $p_b = 0$. W tym przypadku początek uplastycznienia materiału następuje w chwili, gdy ciśnienie wewnętrzne osiąga wartość

$$(12.20) \quad (p_a)_{pocz. pl.} = \frac{k}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - a^2}{b^2},$$

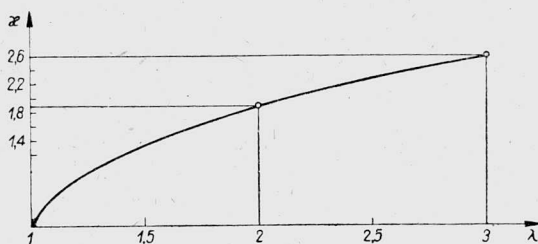
co wynika ze wzoru (12.19).

Cały przekrój przechodzi w stan plastyczny wówczas, gdy [na podstawie związku (12.18)] jest

$$(12.21) \quad (p_a)_{kon. pl.} = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}.$$

Oznaczmy przez \varkappa stosunek granicznej plastycznej nośności rury do jej granicznej wytrzymałości, określonej według teorii sprężystości. Mamy wówczas

$$(12.22) \quad \varkappa = \frac{(p_a)_{kon. pl.}}{(p_a)_{pocz. pl.}} = 2 \frac{b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} = 2 \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \ln \frac{b}{a}$$



Rys. 35

lub, oznaczając stosunek b/a przez λ , również (rys. 35)

$$\varkappa = 2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \ln \lambda.$$

Oczywiście, gdy $\lambda \rightarrow 1$, to również $\varkappa \rightarrow 1$.

(Stosując twierdzenie L'Hospitala otrzymujemy bowiem

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\ln \lambda \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 1} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\lambda} \lambda^2 + \ln \lambda \cdot 2\lambda}{2\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{1 + 2 \ln \lambda}{2} = \frac{1}{2}).$$

Na przykład, gdy $\lambda = b/a = 2$, to $\varkappa \approx 1,85$.

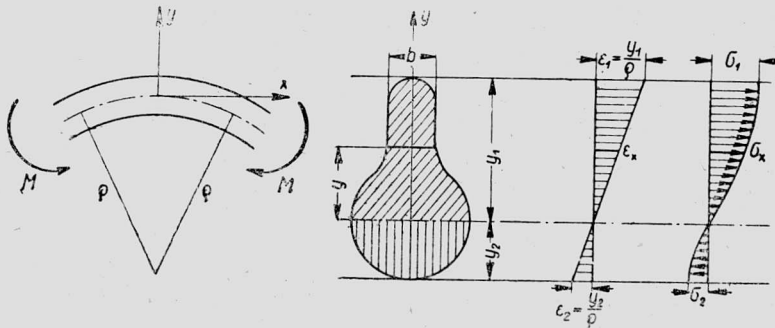
Jak widzimy, faktyczna nośność (odpowiadająca pełnemu uplastycznieniu) jest znacznie większa od granicznej nośności sprężystej (przy grubych rurach nawet dwu- i trzykrotnie).

§ 13. Zginanie czyste

Zagadnienie czystego zginania należy również do tzw. prostych zadań teorii plastyczności, w których nie ma potrzeby operowania wszystkimi równaniami tej teorii; część tych równań spełniona jest tożsamościowo,

pozostałe zaś sprowadzają się do układu rozwiązalnego za pomocą prostych środków matematycznych.

Stwierdzono doświadczalnie, że hipoteza płaskich przekrojów B e r n o u l l i e g o dla czystego zginania ciał sprężystych jest ważna również



Rys. 36

w obszarze plastycznym (rys. 36). Wobec tego i tutaj, podobnie jak w elementarnej wytrzymałości materiałów, otrzymuje się związek

$$(13.1) \quad \varepsilon_x = \frac{y}{\rho},$$

gdzie y oznacza odległość włókien od osi obojętnej, a ρ promień krzywizny osi obojętnej.

Przy czystym zginaniu nie ma sił poprzecznych; można zatem przyjąć, że nie ma naprężeń ścinających i że wzajemne oddziaływanie na siebie włókien nie istnieje. Oznacza to, że

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0, \\ \sigma_y = \sigma_z &= 0, \end{aligned}$$

i jedynie

$$\sigma_x \neq 0.$$

Ze związku (11.4) wynika więc, że

$$(13.2) \quad \sigma_i = |\sigma_x|;$$

poza tym (przyjmując dla uproszczenia $\nu = 1/2$ dla całego bez wyjątku przekroju) jest

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{1}{2} \varepsilon_x.$$

Ostatecznie więc na podstawie (11.5) mamy

$$(13.3) \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2 \varepsilon_x^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Z (11.6) mamy dalej

$$(13.4) \quad \sigma_x = E' \varepsilon_x.$$

Ponieważ σ_x nie jest funkcją x , jak wynika ze wzorów (13.1) i (13.4), więc równania równowagi (11.1) są spełnione tożsamościowo. Podobnie są również spełnione równania Saint-Venanta.

Ze związków pomiędzy naprężeniami i odkształceniami pozostaje tylko jedno równanie, (13.4), z którego wynika, że rozkład naprężeń σ_x w przekroju odpowiada wykresowi otrzymanemu w próbie rozciągania i ściskania. Jeżeli znamy wykres dla rozciągania i ściskania, czyli związek

$$(13.5) \quad \sigma_x = \Phi(\varepsilon_x),$$

to można wówczas znaleźć z tzw. równań całkowych równowagi położenie warstwy obojętnej i zakrzywienie belki.

Zakładając, że zginanie następuje w płaszczyźnie symetrii xy , otrzymujemy następujące dwa równania:

$$(13.6) \quad \int_F \sigma_x dF = 0,$$

$$(13.7) \quad \int_F \sigma_x y dF = M.$$

Z warunku (13.6) określić można położenie osi obojętnej. Zauważmy, że jest [dla $b(y)$ oznaczającego zmienną szerokość belki]

$$dF = b(y) dy.$$

Z (13.1) mamy dla $\rho = \text{const}$

$$dy = \rho d\varepsilon_x,$$

wobec czego

$$dF = \rho b(\rho \varepsilon_x) d\varepsilon_x.$$

Zatem

$$\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \rho \Phi(\varepsilon_x) b(\rho \varepsilon_x) d\varepsilon_x = 0,$$

czyli

$$(13.8) \quad \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \Phi(\varepsilon_x) b(\rho \varepsilon_x) d\varepsilon_x = 0.$$

Ponadto jest

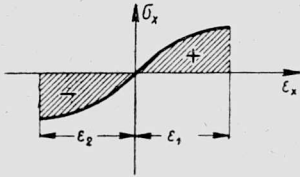
$$(13.9) \quad \rho^2 \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \Phi(\varepsilon_x) b(\rho \varepsilon_x) \varepsilon_x d\varepsilon_x = M.$$

Tutaj wszędzie ε_1 i ε_2 są wydłużeniami skrajnych włókien (ε_1 jest dodatnie, a ε_2 ujemne).

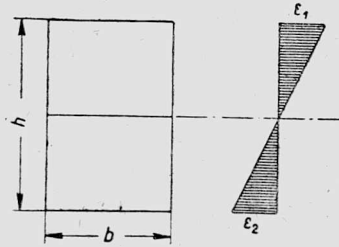
Dla $b = \text{const}$, tzn. dla przekroju prostokątnego, mamy na podstawie wzoru (13.8)

$$(13.10) \quad \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \Phi(\varepsilon_x) d\varepsilon_x = 0.$$

Wyrażenie podcałkowe przedstawia tutaj element powierzchni wykresu z próby na rozciąganie, a sama całka przedstawia sumę pól zakreskowanych na rys. 37.



Rys. 37



Rys. 38

Wynika stąd, że pole oznaczone znakiem + jest równe polu oznaczonemu znakiem -. Jeżeli wykres przebiega jednakowo dla rozciągania i ściskania, to równość pola dodatniego i ujemnego na wykresie (ε_x , σ_x) oznacza w danym razie równość $y_1 = y_2$, czyli dla przekroju prostokątnego jest $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ oraz $\sigma_1 = \sigma_2$ (to samo jest dla każdego przekroju o dwu osiach symetrii, np. dla przekroju dwuteowego).

W fazie czysto sprężystej granicą nośności jest pojawienie się odkształceń plastycznych w warstwach skrajnych, gdyż tam wystąpią one najwcześniej (rys. 38). Oznacza to, że wówczas jest [por. (13.1)].

$$(13.11) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{pl} = \frac{h}{2\varrho}.$$

Według prawa Hooke'a mamy

$$(13.12) \quad \sigma_x = \sigma_{pl} \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{pl}}.$$

Podstawmy wyrażenia (13.11) i (13.12) do (13.9). Otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned} \varrho^2 2 \int_0^{\frac{h}{2\varrho} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{pl}} \sigma_{pl} \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{pl}} b \varepsilon_x d\varepsilon_x &= 2 \varrho^2 \frac{\sigma_{pl}}{\varepsilon_{pl}} b \left| \frac{\varepsilon^3}{3} \right|_0^{\frac{h}{2\varrho} = \varepsilon_{pl}} = \\ &= \frac{2 \varrho^2}{3} b \frac{\sigma_{pl}}{\varepsilon_{pl}} \left(\frac{h^2}{4 \varrho^2} \varepsilon_{pl} \right) = \sigma_{pl} \frac{b h^2}{6} = M. \end{aligned}$$

Zatem nośność sprężysta jest równa

$$M_{spr} = \sigma_{pl} \frac{bh^2}{6}$$

($bh^2/6$ jest to znany wskaźnik wytrzymałości przekroju oznaczany zazwyczaj przez W).

Jeżeli ciało poddamy dalszemu odkształceniu aż do momentu, gdy uplastyczni się cały przekrój (rys. 39), to dla materiału idealnie plastycznego będzie

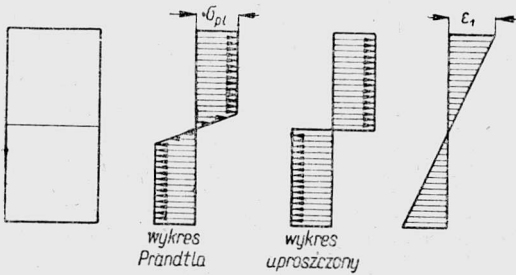
$$\Phi(\varepsilon_x) = \sigma_{pl}$$

i, jak poprzednio,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{pl} = \frac{h}{2\varrho};$$

mamy wobec tego wszędzie

$$\sigma_x = \sigma_{pl}.$$



Rys. 39

Z (13.9) wynika wówczas, że

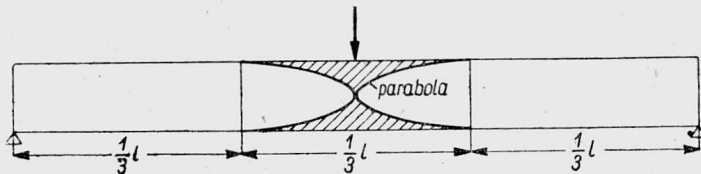
$$\varrho^2 2 \int_0^{\frac{h}{2\varrho} = \varepsilon_{pl}} \sigma_{pl} b \varepsilon_x d\varepsilon_x = \varrho^2 2 \sigma_{pl} b \left. \frac{\varepsilon_x^2}{2} \right|_0^{\frac{h}{2\varrho}} = \varrho^2 \sigma_{pl} b \frac{h^2}{4\varrho^2} = \sigma_{pl} \frac{bh^2}{4} = M,$$

czyli że nośność plastyczna (bez uwzględnienia wzmocnienia materiału) jest równa

$$M_{pl} = \sigma_{pl} \frac{bh^2}{4}$$

Nośność ta jest, jak widać, półtora razy większa od nośności sprężystej.

Gdy cały przekrój przeszedł w stan plastyczny, to mówimy, że utworzył się przegub plastyczny. Nazwa ta wynika stąd, że dla belki prostej, obciążonej siłą skupioną, strefa plastyzacji wygląda tak, jak na rys. 40.



Rys. 40

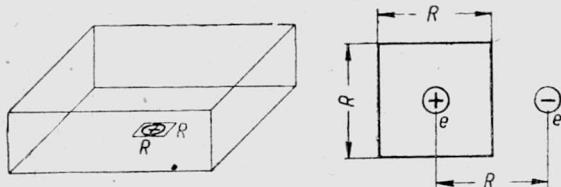
Belka może się wówczas odkształcać bez żadnych ograniczeń, tzn. staje się kinematycznie zmienna (ruchliwa), jak gdyby posiadała faktyczny

przegub. Belka taka nabywa jeden stopień swobody, tzn. ma o jedną więź wewnętrzną mniej niż przed uplastycznieniem. Upraszcza to znacznie obliczenia statyczne bardziej skomplikowanych układów. Metoda odnośna nosi nazwę metody obliczania nośności granicznej (czyli określania stanów granicznych konstrukcji).

W Y K Ł A D VII

§ 14. Związek pomiędzy zjawiskami wytrzymałościowymi i budową materii

Wspominaliśmy o tym, że teoria plastyczności jest teorią fenomenologiczną. Obecnie zwrócimy uwagę na związek jej z teorią budowy materii. Wyjaśnienie zachowania się materiałów poddanych działaniu sił i ulegających pod ich wpływem odkształceniom, nie jest powodowane samą ciekawością poznawczą. Być może, rozpatrzenie zjawisk wytrzymałościowych pod kątem widzenia budowy materii pozwoli kiedyś na wykorzystanie ogromnych, jak się wydaje, rezerw wytrzymałościowych, które tkwią w ciałach stałych. Na istnienie tych rezerw wskazują następujące znane fakty.



Rys. 41

(1) Z obliczeń fizyków (np. P o l a n y i e g o i Z w i c k y e g o) wynika, że wytrzymałość ciał stałych powinna być wielokrotnie wyższa od wytrzymałości obserwowanej. Przytoczmy dla przykładu jedno z takich obliczeń dotyczące kryształu o sieci jonowej, dla której energia elektrostatyczna stanowi nieośmielającą całą energię wiązania sieci (rys. 41).

Siła C o u l o m b a przyciągania jonów jest równa

$$\frac{e^2}{R^2}.$$

Każdy atom «zajmuje» pole o powierzchni równej około

$$R^2,$$

czyli na jednostkę powierzchni rozdzielającej ciało działa siła

$$p = \frac{e^2}{R^2 R^2}.$$

Dopiero więc takie naprężenie powinno spowodować pęknięcie ciała. Jeżeli przyjąć, że

$$e \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ cm dyn}^{\frac{1}{2}} \quad \text{i}$$

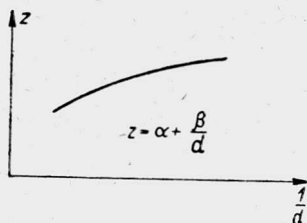
$$R \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm},$$

to otrzymujemy

$$p \approx \frac{25 \cdot 10^{-20}}{16 \cdot 10^{-32}} \text{ dyn/cm}^2 \approx 1,5 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2 \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$$

Pomiary wykazują, że faktyczna wytrzymałość jest znacznie mniejsza od obliczonej w ten sposób. Według teorii atomistycznej (P o l a n y i, Z w i c k y) molekularna (idealna) wytrzymałość powinna wynosić np. dla soli $E/10$, tzn. 20 000 do 40 000 kG/cm² wobec istotnie obserwowanej ok. 50 kG/cm², czyli 400-800 razy mniejszej.

(2) Doświadczenia J o f f e g o i L e w i c k i e j z kryształami NaCl. J o f f e i L e w i c k a badali wytrzymałość kryształów NaCl rozmywając ich powierzchnię pod wodą. Wytrzymałość kryształów soli w tych warunkach wyniosła około 20 000 kG/cm², podczas gdy pomiary dokonywane w zwykłych warunkach dają, jak wzmiankowaliśmy, 50 kG/cm². Wymienieni badacze przypisywali to zmniejszenie wytrzymałości rysom, występującym na powierzchni ciała, i związanej z nimi koncentracji naprężeń.



Rys. 42

(3) Tzw. efekt skali, czyli efekt cienkich nici. Doświadczenia G r i f f i t h a, T a y l o r a i innych (najwcześniejsze pochodzą jeszcze z XIX w., Q u i n c k e i K a r m a r s c h) z niemi szklanymi i kwarcowymi wykazały następującą zależność wytrzymałości nici z od ich średnicy d (rys. 42):

$$z = a + \frac{\beta}{d}.$$

Między innymi uzyskano następujące dane doświadczalne:

średnica nici w μ	wytrzymałość w kG/cm ²
22	2 200
16	10 700
12,5	14 600 (wytrzymałość stali)
8	20 700
2,5	56 000

Według pomiarów A n d e r e g g a przeprowadzonych nad niemi szklanymi i silikatowymi (pomiary dokonane były w innych warunkach niż pomiary, których wyniki podane są w poprzedniej tabeli) wytrzymałość

ich wynosi 121 000 kG/cm² dla nici o średnicy 6,6 μ , oraz 367 000 kG/cm² dla nici o średnicy 3,1 μ .

(4) Efekt P o d a s z e w s k i e g o. P o d a s z e w s k i badał wpływ barwienia fotochemicznego promieniami ultrafioletowymi i rentgenowskimi na wytrzymałość kryształów NaCl. Wyniki jego badań były następujące.

(a) Granica plastyczności i wytrzymałości kryształów zabarwionych jest podwyższona w stosunku do wytrzymałości kryształów niezabarwionych; przy sile zabarwienia odpowiadającej współczynnikowi absorpcji $k_{max} = 55 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$ granica sprężystości podniosła się maksymalnie o 230⁰%, średnio o 144⁰%, a granica wytrzymałości podniosła się maksymalnie o 104⁰%, średnio o 76⁰%.

(b) Badania kryształów zabarwionych tylko w pewnych strefach wykazały, że płaszczyzny poślizgowe występują wyłącznie w częściach niezabarwionych, dochodząc do kilkuset na milimetr, przy absolutnym braku przesunięć w częściach zabarwionych. Pęknięcia takich kryształów następują w częściach niezabarwionych.

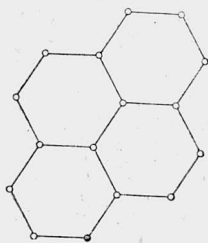
(c) Kryształy zabarwione zachowywały się po odbarwieniu jak zabarwione. Podobnych efektów można by podać jeszcze wiele. Gdyby np. udało się zamiast zbrojenia stalowego betonu zastosować zbrojenie niemi szklanymi o wytrzymałości równej wytrzymałości stali, to mogłoby to mieć doniosłe znaczenie gospodarcze (w chwili obecnej wyrób takich nici jest jeszcze bardzo kosztowny). Widzimy więc, że aczkolwiek rozważanie związków zachodzących pomiędzy nauką o wytrzymałości materiałów i teorią budowy materii nie dało jeszcze żadnych wyników konkretnych, które można by zastosować w procesach technologicznych i w produkcji, to jednak nie jest rzeczą wykluczoną, że zastosowania takie mogą nastąpić w przyszłości.

W dalszym ciągu poprzestaniemy na kilku uwagach o fizykalnym wytłumaczeniu zjawisk wytrzymałościowych związanych z plastycznością materiałów. Dokładniejsze ujęcie tych zagadnień byłoby trudne, głównie z tego względu, że brak dotychczas jakichś wyraźnych myśli przewodnich, które pozwoliłyby na uporządkowanie i wyjaśnienie ogromnego materiału doświadczalnego w tej dziedzinie. Obecny stan rzeczy można by nawet przyrównać do stanu spektroskopii przed powstaniem modelu atomu B o h r a.

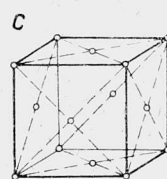
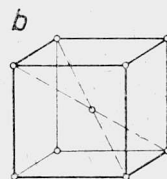
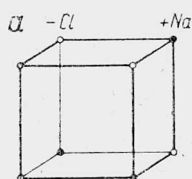
Jak wiadomo, ciała stałe dzielą się na bezpostaciowe i krystaliczne. Niektórzy uważają za ciała stałe tylko kryształy, a ciała bezpostaciowe zaliczają do cieczy przechłodzonych. W kryształach atomy względnie cząsteczki tworzą pewien regularny i periodyczny układ przestrzenny, czyli tzw. sieć krystaliczną (rys. 43). Na rysunku 44 widzimy komórki elementarne kilku typów sieci krystalicznych [44a — sieć regularna (np. sól ka-

mienna), 44b — sieć regularna scentrowana przestrzennie (np. żelazo α i β), 44c — sieć regularna scentrowana na ścianach (np. żelazo γ)].

Odległości atomów względnie cząstek w sieci krystalicznej są rzędu \AA n g s t r ö m ó w. Ciałami krystalicznymi są między innymi metale



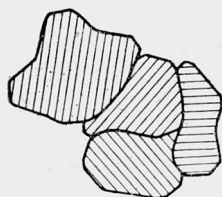
Rys. 43



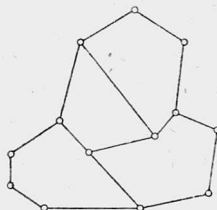
Rys. 44

i ich stopy (rys. 45). W ciałach bezpostaciowych (jak np. w szkłe, kalafonii, paku) atomy tworzą również pewien określony układ przestrzenny, ale jest on nieregularny (rys. 46).

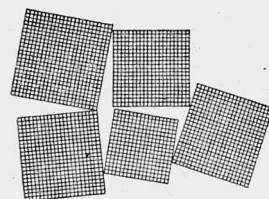
Regularność sieci krystalicznej odbija się nawet na wyglądzie makroskopowym ciał krystalicznych: swobodnie tworzący się kryształ ma postać bryły regularnej. Można sztucznie hodować pojedyncze wielkie kryształy, np. metali (Cz o c h r a l s k i wyhodował kilkunastocentymetrowe kryształy miedzi), ale na ogół roztopiona masa zaczyna krystalizować



Rys. 45



Rys. 46



Rys. 47

zować jednocześnie w wielu miejscach, przy czym tworzy się tzw. polikryształ, składający się z wielu przylegających do siebie kryształitów. Średnica kryształitów w metalach waha się od 0,01 mm do kilku milimetrów. Metale zatem i ich stopy są agregatami kryształitów (rys. 45).

Kryształy nie są idealnymi kryształami, jakby się to mogło wydawać; każde ziarno składa się z oddzielnych bloków o wymiarach 10^{-6} do 10^{-4} cm, (czyli o wymiarach 10 do 100 tysięcy elementarnych komórek), tworzących tzw. mozaikę (rys. 47). Każdy blok można uważać za idealny kryształ. Krawędzie tych kryształów na ogół nie przylegają do siebie, ale tworzą niewielkie kąty (do kilku stopni).

Niektórzy przypuszczają, że właśnie budowa mozaikowa powoduje koncentrację naprężeń i zmniejsza wytrzymałość ciał makroskopowych, stanowiących zbiorowiska kryształów. Są także inne próby wyjaśnienia tych zjawisk, jak np. teorie Prandtla, Taylora, Beckera, Smekala, Orowana. Jedni (Smekal, Zwicky, Griffith) twierdzą, że kryształ posiada w swym wnętrzu miejsca rozluźnienia (tzw. *Lockerstellen*) oraz zanieczyszczenia lub inne nieregularności, które działają jak karby. Griffith rozwiązał nawet zadanie o koncentracji naprężeń dokoła bardzo cienkiego nacięcia w formie elipsy. Inni (Joffe, Orowan) uważają, że przyczyną koncentracji naprężeń są uszkodzenia powierzchni zewnętrznej. Frankiel znowu jest zwolennikiem teorii dyslokacji atomów; o teorii tej powiemy teraz kilka słów.

Pomiędzy dwiema cząsteczkami należącymi do sieci krystalicznej działają jednocześnie siły przyciągające i odpychające (każda molekula zachowuje się jak dipol). Niech siła przyciągania będzie

$$f_{atr} = -\frac{c_1}{r^m},$$

a siła odpychania

$$f_{rep} = \frac{c_2}{r^n},$$

przy czym

$$m < n.$$

Oznacza to, że siły odpychania zmieniają się szybciej i przy dostatecznie dużych odległościach przewyższają siły przyciągania (rys. 48).

Wypadkowa sił wzajemnego działania na siebie dwu cząstek będzie równa

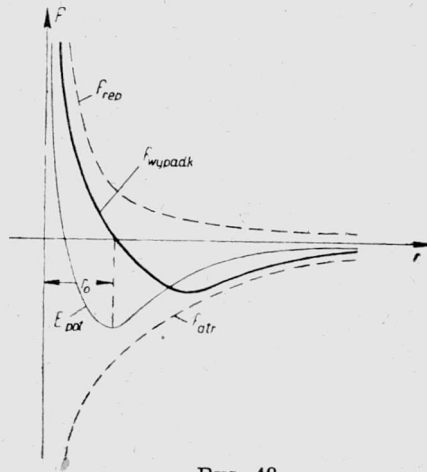
$$F(r) = f_{atr} + f_{rep}.$$

Przy $r = r_0$ mamy do czynienia ze stanem równowagi, o ile

$$F(r_0) = 0,$$

wtedy bowiem energia potencjalna (energia wiązania) osiąga ekstremum (minimum), ponieważ

$$F(r) = -\frac{dE_{pot}}{dr}.$$

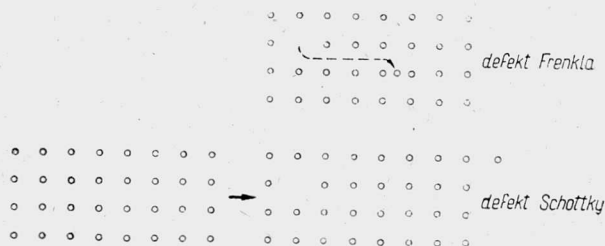


Rys. 48

Uważamy, że energia cieplna, jaką posiada dane ciało stałe, jest energią drgań cząsteczek lub atomów wokół położenia równowagi, czyli węzłów sieci. Wynika stąd, że dopóki ciało nie osiągnęło temperatury 0°K , cząsteczki jego nie tkwią nieruchomo w węzłach sieci. Abstrahując zresztą od ruchu cieplnego cząsteczek położenie ich w węzłach sieci trzeba uważać, według praw mechaniki statystycznej, jedynie za położenie najprawdopodobniejsze i cząstki mogą również znajdować się w innych położeniach, w których

$$E_{pot} \neq \text{minimum}.$$

Ten fakt, że zawsze część cząsteczek zajmuje położenie poza węzłami sieci, narusza regularność sieci (rys. 49), przy czym struktura jej jest tym silniej zaburzona, im wyższa jest temperatura. Nieregularność sieci może dochodzić nawet do zupełnego braku atomów w niektórych węzłach (tzw. «dziury») i do wklinowywania się innych w międzywęzła (tzw. atomy dyslokowane).



Rys. 49

Dziury i atomy dyslokowane nie mają stałych położenia, lecz wędrują, przeskakując pod wpływem energii cieplnej z położenia w położenie. Przy gwałtownym obniżeniu się temperatury następuje «koagulacja» dziur w postaci mikropęknięć.

Należy podkreślić, że to, co wyżej opowiedzieliśmy, przedstawia mniej lub więcej pewne przypuszczenia. Być może, że do wyjaśnienia tych zagadnień przyczyni się zastosowanie mikroskopu elektronowego, którego zdolność rozdzielcza dochodzi już do rzędu \AA . Jednak dotychczasowy brak syntetycznej teorii ciała stałego powoduje, że nawet uzyskanie bezpośrednich obrazów struktury cząsteczkowej ciał stałych nie wyjaśni chyba w pełni ich cech mechanicznych.

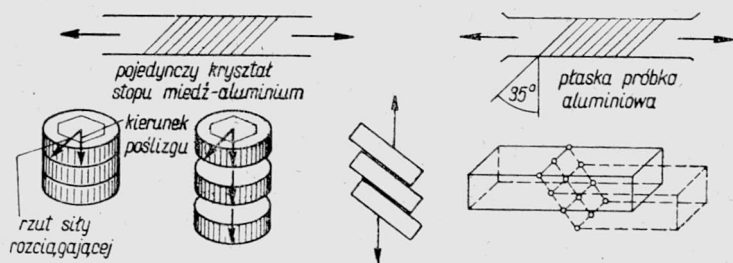
Po tych wstępnych uwagach przejdziemy do krótkiego wyjaśnienia istoty odkształceń plastycznych.

A. *Monokryształy*. Na ogół sądzimy obecnie, że odkształcenie plastyczne kryształów polega na *poślizgach* wzdłuż określonych płaszczyzn

krystalograficznych, a właściwie w pewnych kierunkach na tych płaszczyznach. Poszczególne bloki przesuwiają się przy tym względem siebie jak karty w talii kart. Rysunek 50 przedstawia wyniki doświadczeń Marka, Polanyiego i Schmid'a oraz Taylora i Miss Elam.

Okazuje się, że poślizg następuje zazwyczaj wzdłuż płaszczyzn najbliższej obsadzonych przez atomy. Proces ten jest nieodwracalny, a po ustąpieniu poślizgu pozostają w jego płaszczyźnie znaczne naprężenia. Na powierzchniach kryształu widać wyraźnie linie poślizgu.

Widoczne linie poślizgów są właściwie «pakietami» linii odległych od siebie o około 2 000 odległości atomowych. Pakiety, czyli pasy poślizgowe odpowiadają przesunięciom równym setkom i tysiącom odległości ato-



Rys. 50

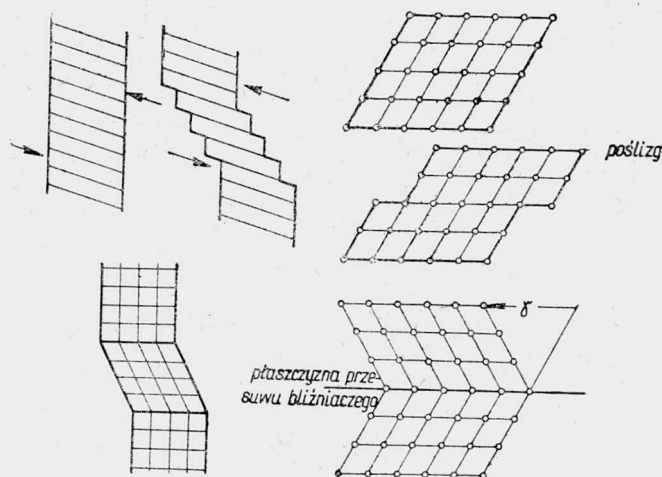
mowych. Aby nastąpił poślizg, naprężenie ścinające musi osiągnąć pewną wartość krytyczną (stąd znaczenie maksymalnego naprężenia ścinającego i intensywności naprężeń w hipotezach wytrzymałościowych); wartość ta jest charakterystyczna dla materiału i dla danej płaszczyzny krystalograficznej materiału. Jednakże również przy naprężeniach mniejszych od krytycznych następują bardzo powolne odkształcenia plastyczne (tzn. poślizgi). Są to zjawiska pełzania monokrytalitów. Poślizgi takie zachodzą bardzo powoli i dopiero, gdy naprężenie osiąga wartość krytyczną, poślizgi następują tak szybko, że można je obserwować nawet za pomocą mało dokładnych metod laboratoryjnych.

Z doświadczeń wynika, że wraz ze wzrostem odkształcenia rośnie wartość naprężeń stycznych, koniecznych do przedłużenia procesu odkształcenia (np. dla kryształu cynku ten wzrost wynosi 600%). Zjawisko takie odpowiada poznanemu już poprzednio wzmocnieniu materiału.

Z przeprowadzonych doświadczeń wynika, że odkształcenie plastyczne w monokrystalicie może nastąpić nie tylko przez poślizg, ale również przez tzw. *przesuwę bliźniacze*. W tym procesie część siatki przechodzi w położenie będące odbiciem zwierciadlanym sąsiedniej części. Kryształ tak uzyskany nosi nazwę bliźniaka. Za przykład może tu służyć rozcią-

ganie bizmutu w temperaturze pokojowej: odkształcenie plastyczne polega tutaj całkowicie na przesuwach bliźniaczych. Rysunek 51 ilustruje opisane wyżej zjawiska poślizgów i przesuwów bliźniaczych.

B. *Ciała bezpostaciowe*. Odkształcenie plastyczne ciał bezpostaciowych zbliżone jest do płynięcia cieczy lepkich; jest to proces całkowicie izotropowy, a nie, jak to było w monokrystalitach, związany z określonymi płaszczyznami i kierunkami krystalograficznymi. Poza tym nie występuje tu zjawisko wzmocnienia, natomiast obserwuje się silny wpływ temperatury. Dawniej przypuszczano, że ciecze i ciała bezpostaciowe odznaczają się brakiem uporządkowania atomów względnie cząsteczek. Doświadczenia ostatnich lat przeczą temu całkowicie, wskazując na fakt, że



Rys. 51

w ciałach bezpostaciowych istnieje lokalne uporządkowanie atomów (cząsteczek), zanikające przy rozpatrywaniu większych obszarów na skutek narastania drobnych odchyłeń. Również i tutaj, podobnie jak w kryształach, atomy i cząsteczki prowadzą «życie osiadłe», tzn. wykonują drgania około położenia określonych najmniejszą ilością energii potencjalnej. Jednakże drgania takie dokoła określonego położenia równowagi trwają tutaj krótko (np. w niektórych cieczach okres ten wynosi 10^{-13} sek) i cząsteczka lub atom przeskakuje następnie w położenie sąsiadujące z innym położeniem równowagi. Zauważmy, że czas przebywania cząsteczki w sąsiedztwie jednego położenia równowagi odpowiada czasowi relaksacji, tzn. okresowi, w ciągu jakiego siły obciążające mogą zmaleć e ($\approx 2,718$) razy przy niezmiennym odkształceniu. Dla wody np. czas relaksacji jest rzędu 10^{-11} sek. Warto zauważyć, że w ciągu tego mgnienia woda zachowuje się jak ciało sztywne sprężyste; ale już w okresie trwającym np. 1 sekundę nie

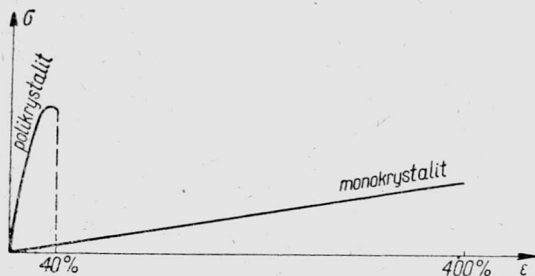
można zaobserwować — powiedzmy — oporu sprężystego wody na ścinanie, gdyż obserwację tego oporu uniemożliwia wysuwająca się na pierwszy plan cecha płynności.

Czas «osiadłego życia», czyli czas relaksacji szkła wynosi 100 lat, wobec czego w doświadczeniach trwających minuty zachowuje się ono jak ciało stałe sprężyste. Natomiast w okresach czasu rzędu tysiącleci i więcej szkło zachowuje się jak płyn, przejawiający swą własność «ciekłości». Podobnie warstwy skorupy ziemskiej w geologicznych okresach czasu (setki tysięcy lat) zachowują się jak płyny.

Krótki czas «życia osiadłego» atomów cieczy sprawia, że są one bardzo ruchliwe i stąd pochodzi zdolność płynięcia cieczy. Gdy przyłożymy np. siłę ścinającą, to przeskoki atomów, z sąsiedztwa jednych położeń równowagi do innych, stają się częstsze; następuje częściowe uporządkowanie kierunku tych przeskoków, tak że w rezultacie stwierdzamy zjawisko «płynięcia». W tej fazie opór przeciw siłom ścinającym zależy wyłącznie od gradientu szybkości płynięcia. Jest to właśnie przepływ lepki. Widzimy więc, że u ciał bezpostaciowych surogatem odkształcenia plastycznego jest właśnie płynięcie lepkie.

Należy zauważyć, że również w ciałach krystalicznych podczas występowania poślizgów mają miejsce przeskoki atomów, dyslokacje i naruszenia prawidłowości sieci. Zbliża to odkształcenia plastyczne tych ciał do płynięcia lepkiego ciał bezpostaciowych.

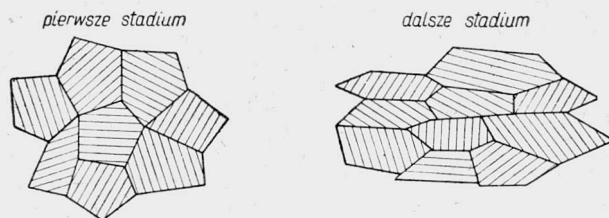
C. *Polikrystality*. Procesy plastyczne w polikrytalitach są bardzo skomplikowane. Wobec w pełni chaotycznego układu pojedynczych monokrytalitów siły zewnętrzne powodują odkształcenia plastyczne, tzn.



Rys. 52

poślizgi, jedynie w odpowiednio zorientowanych kryształach; inne kryształy doznają wyłącznie odkształceń sprężystych. Dlatego polikrytalit stawia znacznie większy opór uplastycznieniu niż monokrytalit (rys. 52). Szczególnie wyraźnie jest to widoczne na polikrytalitach metali krystalizujących w układzie heksagonalnym, gdyż przesunięcia w tego typu kryształach mogą zachodzić jedynie w płaszczyznach równoległych do podstawy komórki elementarnej (cynk).

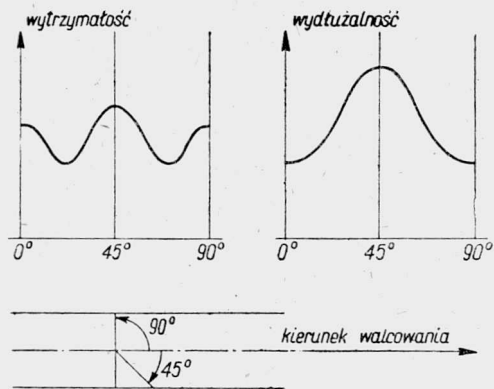
Podczas procesu uplastycznienia w pojedynczych kryształach tworzących polikryształ powstają często poślizgi w różnych kierunkach. Jednakże w dalszych fazach uplastycznienia tworzy się grubowłóknista struktura, powstała na skutek wydłużenia się poszczególnych kryształów w kierunku zachodzących odkształceń (rys. 53).



Rys. 53

Tego rodzaju budowy wynikające z procesów plastycznych, o własnościach odpowiadających dość silnej anizotropii wymuszonej, noszą nazwę *tekstur*. Ich szczególne własności przedstawiają wykresy podane na rys. 54.

Na ogół odkształcenie plastyczne jest cechą wewnętrzną poszczególnych ziaren i płaszczyzny poślizgowe nie przechodzą przez granice kryształów.



Rys. 54

Lepiszczki międzykryształiczne, czyli otoczki ziaren, wydają się szczególnie wytrzymałe i trudne do uplastycznienia. Wnioski takie potwierdzone zostały przez dokładne badania eksperymentalne. Jednakże w zjawiskach pełzania stwierdzamy sytuację odwrotną; główną rolę odgrywa tutaj przesuwanie się wzajemne kryształitów po sobie. Według ostatnio przeprowadzonych badań zjawisko pełzania w niskich temperaturach polega całkowicie

na wzajemnym przesuwaniu się kryształitów i dopiero w wyższych temperaturach występują poślizgi wewnątrz kryształów.

Z krótkiego przeglądu, jakiego dokonaliśmy w kilku wykładach, wyciągnijmy pewną syntezę, stanowiącą w pełni osobisty pogląd autora.

Fizyka teoretyczna, w szczególności fizyka ciała stałego, stawia sobie jako cel objaśnienie własności substancji na podstawie własności cząstek elementarnych. Poznawszy budowę ciał pragnęlibyśmy przewidzieć np.

ich własności mechaniczne, a wszystkie zjawiska makroskopowe zachodzące pod działaniem sił chcielibyśmy wyjaśnić na podstawie znajomości budowy samych ciał. Dla kryształów jonowych, w szczególności dla kryształów typu metal alkaliczny-chlorowiec (np. NaCl), próby takiej dokonał B o r n otrzymując teorię ilościową zgodną z wynikami doświadczeń. Jakże jednak daleko od tych prostych kryształów do skomplikowanych polikryształitów! Wierząc w potęgę nauki mamy prawo, oczywiście, twierdzić, że zagadnienie własności mechanicznych polikryształitów znajdzie w przyszłości rozwiązanie w formie pozwalającej na praktyczne zastosowania. Jednakże z punktu widzenia aktualnych potrzeb techniki wydaje się, że droga ta jest na długo jeszcze zamknięta. Musimy jeść obiad, jak powiedział H e a v i s i d e, nie rozumiejąc w pełni procesów trawienia. Interesuje nas bowiem zachowanie się zbiorowisk cząstek niezależnie od tego, ile wiemy o zachowaniu się poszczególnych cząsteczek tych zbiorowisk. Wydaje się więc, że poznanie ogólnych, fenomenologicznych, praw przyrody jest obecnie bardziej ważne dla dalszego, istotnego, rozwoju teorii plastyczności i jej praktycznych zastosowań, niż badanie cech makroskopowych ciała stałego z punktu widzenia jego struktury.

Literatura cytowana w tekście

- [1] N. I. B i e z u c h o w, *Wwiedzenie w teorju uprugosti i plasticznosti*, Moskwa-Leningrad 1950.
- [2] A. A. I l j u s z i n, *Plasticznost'*, Gostiechizdat 1948.
- [3] N á d a i, *The Theory of Flow and Fractures of Solids*, t. 1, New York 1950.
- [4] W. W. S o k o ł o w s k i, *Teorja plasticznosti*, Moskwa-Leningrad 1950.
- [5] M. M. F i ł o n i e n k o - B o r o d i c z i n n i, *Kurs soprotiwlenja, matieriałow*, t. 1, Moskwa-Leningrad 1949.
- [6] I. I. G o l d i e n b ł a t, *Wwiedzenie w teorju polzuczesti stroitielnych matieriałow*, Moskwa 1952.
- [7] A. D. T o m l e n o w, *Teorja plasticzeskich dieformacij mietallow*, Moskwa 1951.
- [8] Ł. M. K a c z a n o w, *Miechanika plasticzeskich sried*, Leningrad-Moskwa 1948.
- [9] J. N o w i Ń s k i i W. O l s z a k, *O podstawach teorii ciał sprężystych fizykalnie nieliniowych*, Arch. Mech. Stos., t. 6, 1 (1954).
- [10] W. W. N o w o ż i ł o w, *Prikl. Mat. Miec.*, 5 (1952).

Резюме

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ (1). СЕМЬ ЛЕКЦИИ

Настоящие лекции были прочитаны на семинарии в Математическом Институте Польской Академии Наук в 1953 году. Они основаны на известных научных пособиях Б е з у х о в а, И л ь ю ш и н а,

Надаи, Соколовского, Филоненко-Бородича, Гюльденבלата и других (см. перечень литературы).

Лекция I охватывает основные понятия напряженных и деформированных состояний, рассмотренных с точки зрения потребностей теории пластичности. Изложены также напряженное состояние в точке и понятия главных и октаэдрических напряжений.

В лекции II рассмотрены предельные значения касательных напряжений на плоскостях главного ромбического додекаэдра, деформированное состояние в точке, закон линейной упругости, в форме зависящей от интенсивности напряжений и деформаций, а также законы изменения объема и изменения формы.

Лекция III рассматривает условия пластичности (т. е. так называемые гипотезы прочности).

В первой части IV лекции приведено содержание новой научной работы В. В. Новожилова [Прикл. Мат. Мех. 5 (1952)], в которой автор представил оригинальное определение интенсивности напряжений. В дальнейших рассуждениях даны основы теории малых упруго-пластических деформаций, по методам советской школы.

Лекция V рассматривает теорему Ильюшина о так называемом простом нагружении и разгрузке, а также основные уравнения механики упруго-пластических тел.

В лекции VI рассмотрены примеры применения теории, являющейся темой предыдущих лекций, а именно вопрос толстостенной трубы, подвергаемой внутреннему давлению, а также чистый изгиб.

Лекция VII рассматривает связи, существующие между явлениями сопротивления и строением вещества. В этой лекции рассмотрено последовательно, на основании [6] — монокристаллиты, аморфные тела и поликристаллы. В заключение выражено мнение, что, при настоящем состоянии науки, дальнейшее развитие теории пластичности может, главным образом, состоять в феноменологическом представлении рассматриваемых явлений, без более тщательного анализа их субмикроскопической структуры.

S u m m a r y

BASIC PRINCIPLES OF THE THEORY OF PLASTICITY (I) SEVEN LECTURES

These lectures were held by the author at the Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences in 1953. They are based on the well known manuals by Bezukhov, Iliushin, Nădai, Sokolowski, Filonenko-Boroditsch, Goldenblat and others (see list of references).

Lecture I contains fundamental notions of the state of stress and strain from the point view of the requirements of the theory of plasticity. The state of stress at a point is discussed, as well as the principal and the octahedral stresses.

In lecture II the principal values of shear stresses (on the walls of the principal rhombic dodecahedron) are discussed, as well as the state of deformation at a point, the law of linear elasticity in the form depending on the intensity of stress and deformation and the laws of change of volume and shape.

In Lecture III the conditions of plasticity (strength theories) are discussed.

Lecture IV brings a short account of a new paper by W. W. Novozhilov (Prikl. Math. Mech. 5, 1952) in which a definition of stress intensity is given. Next, the basic principles of the theory of small deformations are explained in the form developed by Soviet scientists.

In Lecture V a discussion of the theorem of Iliushin, concerning the so-called simple loading and unloading, and the basic equations of elastic-plastic bodies are given.

Lecture VI is illustrated by examples of application of the theory, discussed in the foregoing lectures.

The problems considered are: a thick-walled tube subjected to internal and external pressures and the problem of pure bending.

In Lecture VII relations between the strength phenomena and the structure of matter are considered.

Monocrystalline, amorphous and polycrystalline bodies are discussed on the basis of [6]. Finally, the author expresses the opinion that further development of the theory of plasticity should be based chiefly on the phenomenological approach to the considered problems, without deeper consideration of submicroscopic structure.

**INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 stycznia 1954 r.

WITOLD NOWACKI

STATYKA RUSZTOW PŁASKICH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

XVIII

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Ogólna metoda rozwiązywania układów	145
2. Związki między siłami brzegowymi i składowymi	148
3. Równania kanoniczne	166
4. Belki ciągle załamane i zakrzywione w planie	168
5. Ruszty o ortogonalnej siatce prętowej i ruszty nieregularne	175
6. Ruszty spoczywające na sprężystym podłożu	179

Ruszty płaskie stanowią istotny element konstrukcyjny wielu budowli inżynierskich. Występują one w rozmaitej postaci, jako stropy żebrowe, dźwigary załamane w planie, wreszcie jako układy ramowe obciążone siłami prostopadłymi do płaszczyzny układu ramowego.

Rozwiązanie tych układów metodą sił napotyka na znaczne trudności, spowodowane dużą ilością wielkości nadliczbowych, zwłaszcza w przypadku sztywnego połączenia prętów z węzłami. Dla stosunkowo prostego układu rusztowego, jakim jest ruszt o siatce ortogonalnej, podaje się w metodzie sił rozwiązanie przybliżone, pomijające sztywne połączenie belek w węzłach, a tym samym pomijające udział momentów skręcających w pracy rusztu.

Do rozwiązania tych złożonych układów posłużono się w niniejszej pracy metodą odkształceń. Stanowi ona dziś dualną formę rozwiązywania płaskich układów ramowych i znajduje szerokie zastosowanie w statyce ram wielokrotnie hyperstatycznych. Zaletą tej metody jest łatwość prawie że schematycznego ustawiania równań kanonicznych, w których współczynniki przy wielkościach nadliczbowych występują w postaci scałkowanej. Metoda omawiana posiada ponadto cechy pogładowości i zezwala na prostą interpretację mechaniczną przy rozwiązywaniu układów równań metodą iteracji.

Praca niniejsza jest próbą zastosowania metody odkształceń do złożonych układów rusztowych o węzłach sztywnych; jest zarazem rozszerzeniem dawniejszej pracy autora, [4], dotychczas nieopublikowanej.

W ustępie pierwszym podano ogólną metodę rozwiązywania układów, w ustępie drugim wyprowadzono ogólne wzory transformacyjne metody odkształceń dla prętów zakrzywionych i załamanych w planie.

W dalszych ustępach wyprowadzono równania kanoniczne metody odkształceń dla typowych układów rusztowych.

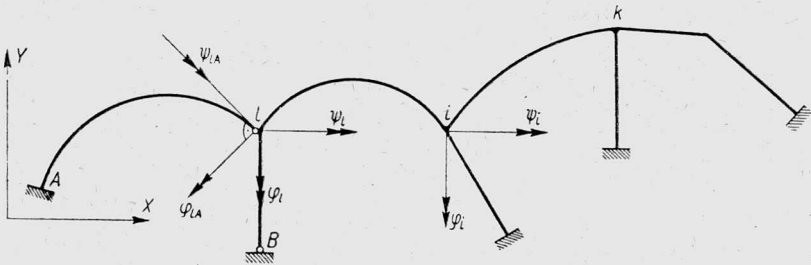
1. Ogólna metoda rozwiązywania układów

Rozważmy dowolną ramę płaską, składającą się z prętów prostych i zakrzywionych, połączonych ze sobą węzłami sztywnymi lub przegubami. Niech rama ta leży w płaszczyźnie XY . Niech rama będzie obciążona siłami skupionymi (P) lub obciążeniem ciągłym (p) o wektorach prostopadłych do płaszczyzny ramy oraz momentami skupionymi (M) i w spo-

sób ciągły rozłożonymi (m), o wektorach leżących w płaszczyźnie XY . Układ taki nazywać będziemy rusztem płaskim.

Przez «pręt» rusztu płaskiego, łączący dwa węzły, rozumiemy pręt pryzmatyczny przenoszący momenty zginające M , momenty skręcające \mathfrak{M} oraz siły tnące T . Wektory momentów M , \mathfrak{M} leżą w płaszczyźnie układu, wektory sił tnących są prostopadłe do tej płaszczyzny. Oś pręta może być linią zakrzywioną, prostą lub załamana, przekrój pręta stały lub zmienny. W rozważaniach ograniczymy się do prętów o przekroju symetrycznym pełnym lub grubościennym; wyłączamy zatem z naszych rozważań profile cienkościennie stosowane w budownictwie stalowym.

Układy rusztowe o węzłach sztywnych są układami o wysokim stopniu statycznej niewyznaczalności. Rozwiązanie ich przy użyciu metody sił nastęrcza znaczne trudności i doprowadza do rozwiązania układu równań kanonicznych o wielkiej liczbie wielkości nadliczbowych. W niniejszej pracy rozwiązanie tych złożonych układów nastąpi przy użyciu metody odkształceń.



Rys. 1

Zajmijmy się układem, przedstawionym na rys. 1. Pod wpływem obciążenia zewnętrznego układ odkształci się, a węzły doznają przesunięć i obrotów. Weźmy pod uwagę węzeł i układu ramowego. Pod wpływem obciążenia węzeł ten dozna przesunięcia δ_i prostopadłego do płaszczyzny ramy oraz obrotu o wektorze leżącym w płaszczyźnie układu. Nieznana jest wielkość przesunięcia δ_i , wielkość obrotu oraz nachylenie wektora obrotu względem przyjętego układu współrzędnych.

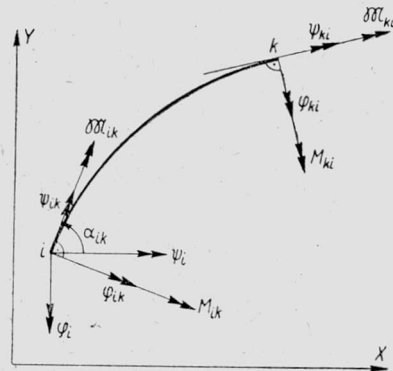
Obrót węzła rozłożymy na dwie składowe: φ_i i ψ_i . Tak więc węzeł scharakteryzowany jest przez trzy wielkości δ , φ i ψ . Stanowią one wielkości nadliczbowe układu lub, jak będziemy mówili krócej, «nadliczbowe».

W węzle podporowym, w którym pręt jest utwierdzony zupełnie, przesunięcie i obrót są równe zero. Tak więc dla układu składającego się z r węzłów swobodnych i t podporowych ilość nadliczbowych geometrycznych wyniesie $3r$.

W przypadku węzła podporowego przegubowego, np. węzła B , otrzymamy $\delta_B = 0$, $\varphi_B \neq 0$ i $\psi_B \neq 0$. Zobaczymy później, że wielkości φ_B i ψ_B dadzą się łatwo wyeliminować z rozwiązań dzięki warunkowi zerowej wartości momentu zginającego i skręcającego w przegubie ($M_B = \mathfrak{M}_B = 0$).

Rozważmy wreszcie węzeł swobodny, do którego jeden z prętów przymocowany jest za pomocą przegubu, na przykład węzeł l (rys. 1). Ruch węzła scharakteryzowany jest trzema wielkościami, przesunięciem δ_l oraz składowymi obrotu ψ_l i φ_l . Przegub dozna przesunięcia δ_l oraz obrotu o składowych φ_{lA} i ψ_{lA} . Te dwie wielkości można jednak wyeliminować z warunków zerowej wartości momentu zginającego i skręcającego ($M_{lA} = 0$, $\mathfrak{M}_{lA} = 0$) w przegubie. Tak więc w węźle swobodnym, w którym co najmniej dwa pręty są połączone w sposób sztywny, ilość nadliczbowych wyniesie trzy. W węźle, do którego wszystkie pręty przytwierdzone są za pomocą przegubu, ilość nadliczbowych ograniczy się do jednej, mianowicie do przesunięcia δ .

Rozważmy pręt $i-k$, połączony w sposób sztywny z węzłami i oraz k . Dla dalszych rozważań będzie rzeczą wygodną rozłożyć składowe obroty węzła i na dwie składowe: składową φ_{ik} o wektorze, którego kierunek pokrywa się z kierunkiem normalnej, i składową ψ_{ik} o wektorze zwróconym w kierunku stycznej do osi pręta w punkcie i .



Rys. 2

Z rys. 2 odczytamy proste zależności

$$(1.1) \quad \varphi_{ik} = \psi_i \sin \alpha_{ik} + \varphi_i \cos \alpha_{ik}, \quad \psi_{ik} = \psi_i \cos \alpha_{ik} - \varphi_i \sin \alpha_{ik}.$$

Ponadto jest $\delta_{ik} = \delta_i$.

W przekrojach, którymi wycięto pręt, działają składowe stanu naprężeń: momenty zginające M_{ik} i M_{ki} , momenty skręcające \mathfrak{M}_{ik} i \mathfrak{M}_{ki} , o wektorach leżących w płaszczyźnie układu, oraz siły tnące T_{ik} i T_{ki} o wektorach prostopadłych do płaszczyzny XY . Wielkości te nazywać będziemy ogólnie siłami brzegowymi pręta $i-k$.

Siły brzegowe wyrazić możemy (uczynimy to szczegółowo w p. 2) jako funkcje liniowe obciążenia zewnętrznego oraz nieznanymi wielkościami φ_{ik} , φ_{ki} , ψ_{ik} , ψ_{ki} , δ_{ik} i δ_{ki} . Dzięki związkom (1.1) możemy siły brzegowe pręta $i-k$ wyrazić jako funkcje liniowe obciążenia oraz nieznanymi wielkościami układu, przesunięć δ_i i δ_k oraz obrotów φ_i , ψ_i , φ_k i ψ_k .

Ilości nieznanymi wielkościami nadliczbowymi przeciwstawić możemy tyleż równań warunkowych. Otrzymamy je ze zrównoważenia węzłów.

Dla każdego węzła swobodnego wyciętego z układu ustawić można trzy równania równowagi. Tak więc dla węzła i mamy

$$(1.2) \quad \Sigma M_{\varphi_i} = 0, \quad \Sigma M_{\psi_i} = 0, \quad \Sigma R_{\delta_i} = 0.$$

M_{ψ_i} i M_{φ_i} oznaczają tutaj rzuty momentów przywęzłowych (które działają na węzeł z przeciwnymi zwrotami niż na pręt) na kierunki działania nadliczbowych φ_i i ψ_i , a R_{δ_i} oznacza siły tnące, działające na węzeł. Jeżeli bezpośrednio na węzeł działa siła skupiona P_i oraz moment skupiony M_i o składowych M_{X_i} i M_{Y_i} , to zamiast (1.2) uzyskamy

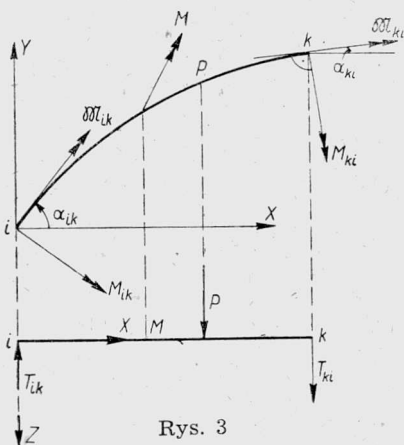
$$(1.3) \quad M_{X_i} + \Sigma M_{\varphi_i} = 0, \quad M_{Y_i} + \Sigma M_{\psi_i} = 0, \quad P_i + \Sigma R_{\delta_i} = 0.$$

Ponieważ siły przywęzłowe są funkcjami liniowymi nadliczbowych i obciążenia zewnętrznego, to z równań (1.3) wypisanych dla węzła swobodnego otrzymamy układ trzech równań liniowych niejednorodnych o nadliczbowych φ , ψ i δ .

Otrzymane z układu równań δ , φ i ψ pozwalają na wyznaczenie sił brzegowych poszczególnych prętów, a tym samym na wyznaczenie wielkości statycznych w dowolnym przekroju pręta. Tak naszkicowaną metodę rozwiązania rusztów płaskich rozwiniemy szczegółowo w dalszych ustępach niniejszej pracy.

2. Związki między siłami brzegowymi i składowymi stanu przemieszczeń

Weźmy pod uwagę pręt i - k zakrzywiony lub załamany w planie, łączący dwa węzły: węzeł i oraz węzeł k . Niech pręt ten będzie obciążony siłami prostopadłymi do płaszczyzny pręta i momentami o wektorach leżących w tej płaszczyźnie. Pod wpływem obciążenia zewnętrznego pręt i - k jako pręt układu rusztowego dozna odkształcenia. Końce pręta, węzły i oraz k doznają przesunięć i obrotów. Wydzielmy pręt dwoma przekrojami leżącymi nieskończenie blisko węzłów. W przekrojach tych działać będą składowe stanu naprężeń, momenty zginające M_{ik} i M_{ki} , momenty skręcające \mathfrak{M}_{ik} i \mathfrak{M}_{ki} oraz siły tnące T_{ik} i T_{ki} . Zwroty tych wielkości przyjęte jako dodatnie przedstawiono na rys. 3. Również na tym



Rys. 3

rysunku pokazano dodatnie zwroty składowych stanu przemieszczeń węzłów, przesunięcia δ_{ik} i δ_{ki} , kąty obrotu φ_{ik} i φ_{ki} oraz kąty skręcania

ψ_{ik} i ψ_{ki} . Dodatkowo zwroty tych wielkości pokrywają się z dodatnimi zwrotami składowych stanu naprężeń. Załóżmy, że wielkości $\delta_{ik}, \dots, \psi_{ki}$, są wielkościami znanymi, z góry podanymi. Dążyć będziemy do wyrażenia wielkości statycznych brzegowych jako funkcji obciążenia zewnętrznego i znanych składowych stanu odkształceń węzłów. Układ jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalny; dla jednoznacznego określenia sześciu sił brzegowych mamy do dyspozycji trzy równania równowagi. Przy założeniach małych ugięć w stosunku do liniowych wymiarów pręta, tj. proporcjonalności między odkształceniami i naprężeniami — słowem, przy założeniach statyki układów prętowych niewiotkich — związki między brzegowymi siłami statycznymi a obciążeniem zewnętrznym i składowymi stanu przemieszczeń węzłów będą związkami liniowymi.

Można je w sposób najogólniejszy przedstawić w następującej postaci:

$$(2.1.1) \quad M_{ik} = M_{ik}^0 + M_{ik}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + M_{ik}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + M_{ik}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + M_{ik}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + M_{ik}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + M_{ik}^{\delta_{ki}} \delta_{ki},$$

$$(2.1.2) \quad M_{ki} = M_{ki}^0 + M_{ki}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + M_{ki}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + M_{ki}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + M_{ki}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + M_{ki}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + M_{ki}^{\delta_{ki}} \delta_{ki},$$

$$(2.1.3) \quad \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ik}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + \mathfrak{M}_{ik}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\delta_{ki}} \delta_{ki},$$

$$(2.1.4) \quad \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 + \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ki}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + \mathfrak{M}_{ki}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\delta_{ki}} \delta_{ki},$$

$$(2.1.5) \quad T_{ik} = T_{ik}^0 + T_{ik}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + T_{ik}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + T_{ik}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + T_{ik}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + T_{ik}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + T_{ik}^{\delta_{ki}} \delta_{ki},$$

$$(2.1.6) \quad T_{ki} = T_{ki}^0 + T_{ki}^{\varphi_{ik}} \varphi_{ik} + T_{ki}^{\varphi_{ki}} \varphi_{ki} + T_{ki}^{\psi_{ik}} \psi_{ik} + T_{ki}^{\psi_{ki}} \psi_{ki} + T_{ki}^{\delta_{ik}} \delta_{ik} + T_{ki}^{\delta_{ki}} \delta_{ki}.$$

Związki te nazywamy wzorami transformacyjnymi metody odkształceń. Ze wzorów (2.1) wysnuć można szereg wniosków. Jeżeli uczynić $\varphi_{ik} = 1$, a pozostałe składowe stanu przemieszczeń węzłów oraz obciążenie zewnętrzne przyrównać do zera, to

$$\begin{aligned} M_{ik} &= M_{ik}^{\varphi_{ik}}, & \mathfrak{M}_{ik} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi_{ik}}, & T_{ik} &= T_{ik}^{\varphi_{ik}}, \\ M_{ki} &= M_{ki}^{\varphi_{ik}}, & \mathfrak{M}_{ki} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi_{ik}}, & T_{ki} &= T_{ki}^{\varphi_{ik}}. \end{aligned}$$

Wielkości $M_{ik}^{\varphi_{ik}}, M_{ki}^{\varphi_{ik}}, \dots$, są siłami przywęzłowymi powstałymi w układzie podstawowym geometrycznie wyznaczalnym ($\varphi_{ik} = \varphi_{ki} = \dots = \delta_{ki} = 0$), wywołanymi stanem $\varphi_{ik} = 1$.

Jeżeli przyrównać do zera wszelkie składowe stanu przemieszczenia węzłów, to

$$\begin{aligned} M_{ik} &= M_{ik}^0, & \mathfrak{M}_{ik} &= \mathfrak{M}_{ik}^0, & T_{ik} &= T_{ik}^0, \\ M_{ki} &= M_{ki}^0, & \mathfrak{M}_{ki} &= \mathfrak{M}_{ki}^0, & T_{ki} &= T_{ki}^0. \end{aligned}$$

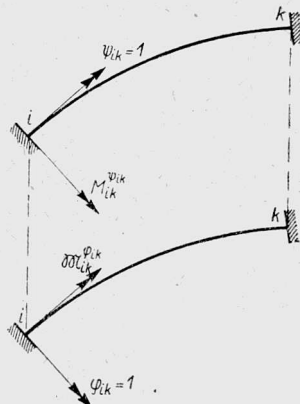
Wielkości $M_{ik}^0, \dots, T_{ki}^0$ są zatem siłami przywęzłowymi pręta $i-k$ obustronnie zupełnie utwierdzonego, wywołanymi obciążeniem zewnętrznym.

Opierając się na twierdzeniu o wzajemności reakcji można znacznie uprościć związki (2.1). Rozważmy dwa kolejne stany w układzie podstawowym geometrycznie wyznaczalnym, stan $\varphi_{ik} = 1$ oraz stan $\psi_{ik} = 1$ (rys. 4).

Ze stanem $\psi_{ik} = 1$ związane są wielkości statyczne brzegowe $M_{ik}^{\psi}, M_{ki}^{\psi}, \mathfrak{M}_{ik}^{\psi}, \mathfrak{M}_{ki}^{\psi}, T_{ik}^{\psi}$ i T_{ki}^{ψ} , a ze stanem $\varphi_{ik} = 1$ wielkości $M_{ik}^{\varphi}, M_{ki}^{\varphi}, \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi}, \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi}, T_{ik}^{\varphi}$ i T_{ki}^{φ} .

Stosując twierdzenie o wzajemności reakcji otrzymamy

$$(2.2.1) \quad 1_{\psi_{ik}} \cdot \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi} = 1_{\varphi_{ik}} \cdot M_{ik}^{\psi}.$$



Rys. 4

W analogiczny sposób uzyskamy, przyjmując coraz to inne stany, dalsze związki

$$(2.2.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi} &= M_{ki}^{\psi}, & \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\psi}, & M_{ik}^{\varphi} &= M_{ki}^{\psi}, & T_{ik}^{\psi} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\delta}, & T_{ki}^{\psi} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\delta}, \\ M_{ik}^{\psi} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi}, & T_{ki}^{\psi} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\delta}, & T_{ik}^{\varphi} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\delta}, & T_{ik}^{\varphi} &= M_{ki}^{\delta}, & T_{ki}^{\varphi} &= M_{ik}^{\delta}, \\ T_{ik}^{\varphi} &= M_{ki}^{\delta}, & M_{ki}^{\psi} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi}, & T_{ki}^{\varphi} &= M_{ki}^{\delta}, & \mathfrak{M}_{ik}^{\psi} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi}, \\ M_{ik}^{\varphi} &= M_{ki}^{\delta}, & M_{ki}^{\delta} &= M_{ki}^{\delta}, & \mathfrak{M}_{ik}^{\delta} &= \mathfrak{M}_{ik}^{\delta}, & \mathfrak{M}_{ki}^{\delta} &= \mathfrak{M}_{ki}^{\delta}, \\ T_{ik}^{\delta} &= T_{ik}^{\delta}, & T_{ki}^{\delta} &= T_{ki}^{\delta}. \end{aligned} \right.$$

Powyższe związki zmniejszają ilość współczynników przy wielkościach $\varphi_{ik}, \varphi_{ki}, \dots$ w równaniach (2.1) z trzydziestu sześciu do piętnastu. Stwierdzimy później, że dla poszczególnych kształtów prętów, na przykład dla prętów symetrycznych i prostych, uzyskamy dalsze zmniejszenie ilości współczynników.

Dzięki związkom (2.2.2.) napiszemy równanie transformacyjne (2.1) w następującej postaci:

$$(2.3.1) \quad M_{ik} = M_{ik}^0 + M_{ik}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + M_{ik}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ik}^{\psi ik} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\psi ki} \psi_{ki} + T_{ik}^{\delta ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}),$$

$$(2.3.2) \quad M_{ki} = M_{ki}^0 + M_{ki}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + M_{ki}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ki}^{\psi ik} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\psi ki} \psi_{ki} + T_{ki}^{\delta ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}),$$

$$(2.3.3) \quad \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ik}^{\psi ik} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^{\psi ki} \psi_{ki} + T_{ik}^{\delta ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}),$$

$$(2.3.4) \quad \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 + \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + \mathfrak{M}_{ki}^{\psi ik} \psi_{ik} + \mathfrak{M}_{ki}^{\psi ki} \psi_{ki} + T_{ki}^{\delta ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}),$$

$$(2.3.5) \quad T_{ik} = T_{ik}^0 + T_{ik}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + T_{ik}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + T_{ik}^{\psi ik} \psi_{ik} + T_{ik}^{\psi ki} \psi_{ki} + T_{ik}^{\delta ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}),$$

$$(2.3.6) \quad T_{ki} = T_{ki}^0 + T_{ki}^{\varphi ik} \varphi_{ik} + T_{ki}^{\varphi ki} \varphi_{ki} + T_{ki}^{\psi ik} \psi_{ik} + T_{ki}^{\psi ki} \psi_{ki} + T_{ki}^{\delta ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}).$$

Dalszym więc zadaniem będzie wyznaczenie wielkości $M_{ik}^{\varphi ik}, \dots$, leżących ponad linią schodkową we wzorach (2.3). Rozwiązanie tego trzykrotnie statycznie niewyznaczalnego zadania nastąpi metodą sił.

Wychodzimy z zasady prac wirtualnych przy wariacji stanu naprężenia.

Rozważmy dwa stany: stan odkształceń, wywołany obciążeniem zewnętrznym układu, osiadaniem i obrotami podpór oraz wzrostem temperatury (wzrost liczony w stosunku do temperatury montażowej pręta), oraz stan obciążeń wirtualnych, \bar{K} , będący w równowadze z reakcjami podporowymi przezeń wywołanymi, \bar{D} .

Równanie prac wirtualnych przyjmuje tu postać

$$(2.4) \quad \Sigma \bar{K} \delta + \Sigma \bar{D} \Delta = \int_s (\bar{M} d\varphi + \bar{\mathfrak{M}} d\psi + \bar{T} dh).$$

Tutaj δ oznaczają rzuty przesunięć na kierunek działania sił \bar{K} w punktach zaczepienia tych sił, Δ rzuty przesunięć podpór pręta na kierunek działania reakcji \bar{D} , $d\varphi$ jest obrotem, $d\psi$ skręceniem, a dh przesunięciem przekroju pręta wywołanym obciążeniem zewnętrznym. Wreszcie \bar{M} , $\bar{\mathfrak{M}}$ i \bar{T} są wielkościami statycznymi wywołanymi obciążeniem wirtualnym \bar{K} .

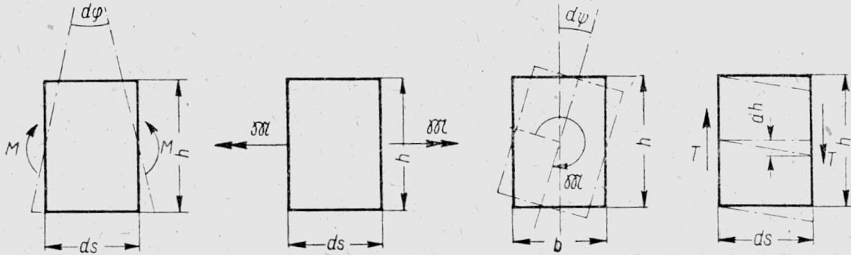
Z wytrzymałości materiałów wiadomo, że

$$(2.5) \quad d\varphi = \left(\frac{M}{EI} + \Delta t \frac{\varepsilon_t}{h} \right) ds, \quad d\psi = \frac{\mathfrak{M}}{GC} ds, \quad dh = k \frac{T}{GA} ds.$$

Tutaj M , \mathfrak{M} i T są siłami przekroju wywołanymi obciążeniem zewnętrznym, E modułem sprężystości, G modułem odkształcenia postaciowego,

I momentem bezwładności względem głównej poziomej osi bezwładności $a-a$ przekroju, A polem przekroju pręta oraz C wielkością (w cm^4) zależną od kształtu przekroju.

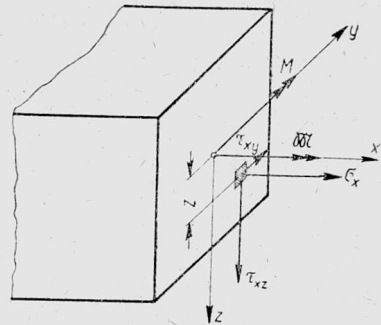
Iloczyn EI nazywamy sztywnością na zginanie, GC sztywnością na skręcanie, a GA/k sztywnością na ścinanie; wielkość k charakteryzuje kształt przekroju.



Rys. 5

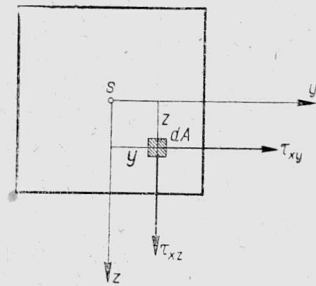
Wielkości M , \mathfrak{M} i T , składowe wypadkowej stanu naprężeń, związane są z naprężeniami normalnymi σ_x i tnącymi τ_{xz} oraz τ_{xy} następującymi zależnościami:

$$(2.6) \quad \begin{cases} M = \int_A \sigma_x z dA, \\ \mathfrak{M} = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA, \\ T = \int_A \tau_{xz} dA. \end{cases}$$



Występująca we wzorze (2.5) wielkość Δt jest różnicą temperatur w skrajnych włóknach pręta. Zatem $\Delta t = t_1 - t_2$, gdzie t_2 jest temperaturą w górnym włóknie, a t_1 w dolnym włóknie pręta.

Ogólnie jest $t(z) = t_0 + (\Delta t/h)z$, gdzie t_0 jest temperaturą na osi głównej bezwładności $a-a$ pręta. W naszych rozważaniach nie będziemy omawiali wpływu jednostajnego wzrostu temperatury t_0 ; wywołuje on siły tnące i podłużne T' i N' , o wektorach leżących w płaszczyźnie układu, oraz momenty M' ; o wektorach prostopadłych do płaszczyzny układu. Mamy tu do czynienia z ramą płaską, a nie z rusztem.



Rys. 6

Oznaczmy nadliczbowe naszego trzykrotnie niewyznaczalnego układu przez X_1 , X_2 i X_3 .

Wielkości statyczne M , \mathfrak{M} i T są funkcjami obciążenia zewnętrznego i nadliczbowych statycznych

$$(2.7) \quad S = [S] + X_1 S_1 + X_2 S_2 + X_3 S_3 \quad (S = M, \mathfrak{M}, T).$$

Tutaj $[S]$ jest wielkością w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym, wywołaną obciążeniem zewnętrznym, a S_i jest wielkością statyczną, wywołaną w układzie podstawowym stanem $X_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$).

Jeżeli jako obciążenie wirtualne przyjąć kolejne stany $X_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$), to w myśl związku (2.4) otrzymamy

$$(2.8) \quad \bar{1}_i \delta + \Sigma \bar{D}_i \Delta = \int_s (\bar{M}_i d\varphi + \bar{\mathfrak{M}}_i d\psi + \bar{T}_i dh) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Zważywszy, że $\bar{1}_i \delta = 0$, gdyż względne przesunięcia przekrojów w kierunku działania \bar{X}_i są równe zeru, otrzymamy układ trzech równań

$$(2.9) \quad \Sigma \bar{D}_i \Delta = \int_s (\bar{M}_i d\varphi + \bar{\mathfrak{M}}_i d\psi + \bar{T}_i dh) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wstawiając do związków (2.9) zależności (2.5) i (2.7) otrzymamy układ równań

$$(2.10) \quad \Sigma D_i \Delta = \delta_{i0} + X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} + X_3 \delta_{i3} \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

gdzie

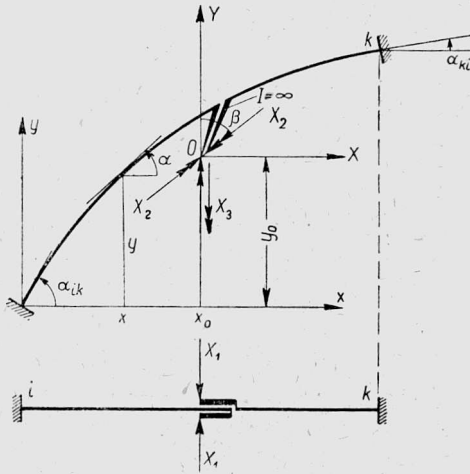
$$(2.10.1) \quad \begin{cases} \delta_{ik} = \int \left(M_i \frac{M_k}{EI} + \mathfrak{M}_i \frac{\mathfrak{M}_k}{GC} + k T_i \frac{T_k}{GA} \right) ds, \\ \delta_{i0} = \int \left([M] \frac{M_i}{EI} + [\mathfrak{M}] \frac{\mathfrak{M}_i}{GC} + k [T] \frac{T_i}{GA} \right) ds, \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Wielkości nadliczbowych przyjmować będziemy w ten sposób, aby otrzymać układ trzech równań o jednej tylko niewiadomej w każdym równaniu:

$$(2.11) \quad \dot{L}_i = \delta_{i0} + X_i \delta_{ii}, \quad L_i = \Sigma D_i \Delta \quad (i = 1, 2, 3).$$

Taką postać równań otrzymamy umieszczając nadliczbowe w biegunie sprężystym układu. Niech układem podstawowym, statycznie wyznaczalnym, będą dwa wsporniki (rys. 7). Nadliczbowe, siłę pionową X_1 oraz momenty X_2 i X_3 zaczepiamy na końcach nieskończenie sztywnych ramion, łączących biegun sprężysty 0 z przekrojem B . Współrzędne bie-

guna x_0, y_0 oraz kąt β zawarty między kierunkami działania momentów X_2 i X_3 dobieramy tak, aby w układzie równań (2.10) zniknęły wielkości δ_{12}, δ_{13} i δ_{23} .



Rys. 7

Ządamy zatem, aby

$$(2.12) \quad EI_c \delta_{ik} = \int (M_i M_k ds' + \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_k ds'' + T_i T_k ds''') = 0$$

$$(i, k = 1, 2, 3; \quad k \neq i).$$

Tutaj

$$ds' = \frac{I_c}{I} ds, \quad ds'' = \frac{EI_c}{GC} ds, \quad ds''' = \frac{EI_c}{GA} k ds.$$

Wielkość EI_c jest dowolnie przyjętą sztywnością zginania. Stanom $X_1 = 1, X_2 = 1$ i $X_3 = 1$ odpowiadają następujące wielkości statyczne:

$$(2.13) \quad \begin{cases} M_1 = -(x_0 - x) \cos a - (y_0 - y) \sin a = X \cos a + Y \sin a, \\ \mathfrak{M}_1 = -(x_0 - x) \sin a + (y_0 - y) \cos a = X \sin a - Y \cos a, \\ M_2 = \cos(a + \beta), \quad M_3 = \cos a, \quad \mathfrak{M}_2 = \sin(a + \beta), \\ \mathfrak{M}_3 = \sin a, \quad T_1 = 1, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że ostatni człon pod znakiem całki (2.12) znika, gdyż $T_2 = T_3 = 0$.

Z warunku $\delta_{23} = 0$ otrzymamy

$$(2.14) \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{\int \sin 2a (ds' - ds'')}{2 \int (\cos^2 a ds' + \sin^2 a ds'')}.$$

Z warunku $\delta_{12} = 0$ znajdziemy

$$(2.15) \quad y_0 = \frac{\int y [\sin \alpha \cos (\alpha + \beta) ds' - \cos \alpha \sin (\alpha + \beta) ds'']}{\int [\sin \alpha \cos (\alpha + \beta) ds' - \cos \alpha \sin (\alpha + \beta) ds'']} - \frac{\int x [\cos \alpha \cos (\alpha + \beta) ds' + \sin \alpha \sin (\alpha + \beta) ds'']}{\int [\sin \alpha \cos (\alpha + \beta) ds' - \cos \alpha \sin (\alpha + \beta) ds'']}.$$

Wreszcie z zależności $\delta_{13} = 0$ otrzymamy

$$(2.16) \quad x_0 + y_0 \operatorname{ctg} \beta = \frac{\int x (\cos^2 \alpha ds' + \sin^2 \alpha ds'') + \frac{1}{2} \int y \sin 2\alpha (ds' - ds'')}{\int (\cos^2 \alpha ds' + \sin^2 \alpha ds'')}.$$

Znając parametry x_0 , y_0 i β występujące w związkach (2.13) łatwo wyznaczyć wielkości δ_{i0} oraz δ_{ii} ze wzorów

$$(2.17) \quad \begin{cases} EI_i \delta_{i0} = \int (M_i [M] ds' + \mathfrak{M}_i [\mathfrak{M}] ds'' + T_i [T] ds''' + M_i \frac{4t}{h} \varepsilon_t ds), \\ EI_i \delta_{ii} = \int (M_i^2 ds' + \mathfrak{M}_i^2 ds'' + T_i^2 ds''') \end{cases} \\ (i = 1, 2, 3)$$

W powyższych wzorach można pominąć wpływ sił tnących na wielkości δ_{i0} oraz δ_{ii} jako mały w porównaniu z wpływem momentów.

Należy jeszcze wyznaczyć wpływ przemieszczeń węzłów na stan naprężenia pręta.

Na rysunku 8a przedstawiono stan przemieszczeń węzłów, a na rys. 8b, 8c i 8d siły brzegowe wywołane stanami $\bar{X}_1 = \bar{1}$, $\bar{X}_2 = \bar{1}$ i $\bar{X}_3 = \bar{1}$ w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym.

Rozważmy stan $\bar{X}_1 = \bar{1}$. Praca wirtualna sił brzegowych, wywołanych stanem $\bar{X}_1 = \bar{1}$, na rzeczywistych przemieszczeniach węzłów daje

$$(2.18.1) \quad L_1 = \Sigma \bar{D}_1 \Delta = \bar{1} (\delta_{ik} + \delta_{ki}) - \bar{1} c_i \varphi_{ik} - \bar{1} c_k \varphi_{ki} + \bar{1} d_i \psi_{ik} - \bar{1} d_k \psi_{ki}.$$

Analogicznie dla stanu $\bar{X}_2 = \bar{1}$ znajdziemy

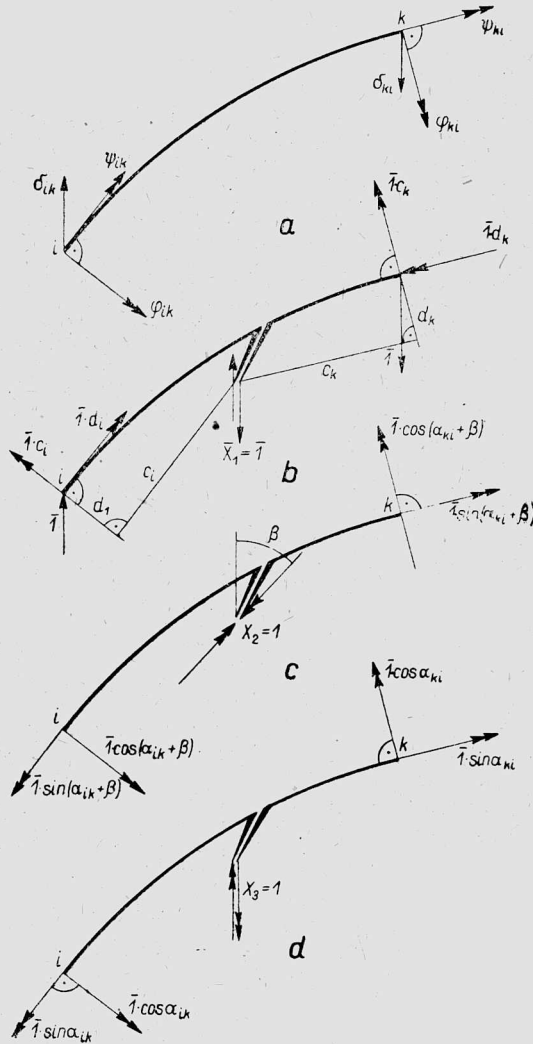
$$(2.18.2) \quad L_2 = \Sigma \bar{D}_2 \Delta = \bar{1} \cos (\alpha_{ik} + \beta) \varphi_{ik} - \bar{1} \cos (\alpha_{ki} + \beta) \varphi_{ki} - \\ - \bar{1} \sin (\alpha_{ik} + \beta) \psi_{ik} + \bar{1} \sin (\alpha_{ki} + \beta) \psi_{ki}.$$

Wreszcie dla stanu $\bar{X}_3 = \bar{1}$ otrzymamy

$$(2.18.3) \quad L_3 = \Sigma \bar{D}_3 \Delta = \bar{1} \cos \alpha_{ik} \varphi_{ik} - \bar{1} \cos \alpha_{ki} \varphi_{ki} - \bar{1} \sin \alpha_{ik} \psi_{ik} + \bar{1} \sin \alpha_{ki} \psi_{ki}.$$

Znajomość elementów L_i , δ_{ii} oraz δ_{i0} pozwala wyznaczyć nadliczbowe X_i . Otrzymujemy je ze wzoru

$$(2.19) \quad X_i = -\frac{\delta_{i0}}{\delta_{ii}} + \frac{L_i}{\delta_{ii}} = X_{i,0} + X_{i,\Delta} \quad (i = 1, 2, 3).$$



Rys. 8

Znając wartości nadliczbowych przystąpić można do wyprowadzenia wzorów transformacyjnych (2.7), które wypisujemy dla przekrojów przywęzłowych i oraz k .

Korzystając z brzegowych wielkości statycznych, wywołanych stanami $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ i $X_3 = 1$ (rys. 8a, 8b, 8c), oraz mając na uwadze dodatnie kierunki sił przywęzłowych według rys. 3 piszemy

$$(2.20) \quad \begin{cases} M_{ik} = -X_1 c_i + X_2 \cos(a_{ik} + \beta) + X_3 \cos a_{ik} + [M_{ik}], \\ M_{ki} = -X_1 c_k - X_2 \cos(a_{ki} + \beta) - X_3 \cos a_{ki} + [M_{ki}], \\ \mathfrak{M}_{ik} = X_1 d_i - X_2 \sin(a_{ik} + \beta) - X_3 \sin a_{ik} + [\mathfrak{M}_{ik}], \\ \mathfrak{M}_{ki} = -X_1 d_k + X_2 \sin(a_{ki} + \beta) + X_3 \sin a_{ki} + [\mathfrak{M}_{ki}], \\ T_{ik} = X_1 + [T_{ik}], \\ T_{ki} = X_1 + [T_{ki}]. \end{cases}$$

Jeżeli do powyższych wzorów wstawić wielkości X_i ze wzoru (2.19), to po prostych przekształceniach uzyskamy wzory (2.20) w postaci analogicznej do (2.3):

$$(2.21) \quad \begin{cases} M_{ik} = M_{ik}^0 + \mu_{ik} \varphi_{ik} + \bar{\mu}_{ik} \varphi_{ki} - v_{ik} \psi_{ik} + \bar{v}_{ik} \psi_{ki} - \mu'_{ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ M_{ki} = M_{ki}^0 + \bar{\mu}_{ik} \varphi_{ik} + \mu_{ki} \varphi_{ki} - \bar{v}_{ki} \psi_{ik} + v_{ki} \psi_{ki} - \mu'_{ki} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 - v_{ik} \varphi_{ik} - \bar{v}_{ik} \varphi_{ki} + k_{ik} \psi_{ik} - \bar{k}_{ik} \psi_{ki} + k'_{ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 + \bar{v}_{ki} \varphi_{ik} + v_{ki} \varphi_{ki} - \bar{k}_{ik} \psi_{ik} + k_{ki} \psi_{ki} - k'_{ki} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \mu'_{ik} \varphi_{ik} - \mu'_{ki} \varphi_{ki} + k'_{ik} \psi_{ik} - k'_{ki} \psi_{ki} + \mu''_{ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ T_{ki} = T_{ki}^0 - \mu'_{ik} \varphi_{ik} - \mu'_{ki} \varphi_{ki} + k'_{ik} \psi_{ik} - k'_{ki} \psi_{ki} + \mu''_{ki} (\delta_{ik} + \delta_{ki}). \end{cases}$$

Tutaj przyjęto następujące oznaczenia:

$$(2.22) \quad \begin{cases} \mu_{ik} = \frac{c_i^2}{\delta_{11}} + \frac{\cos^2(a_{ik} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\cos^2 a_{ik}}{\delta_{33}}, \\ \bar{\mu}_{ik} = \frac{c_i c_k}{\delta_{11}} - \frac{\cos(a_{ik} + \beta) \cos(a_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} - \frac{\cos a_{ik} \cos a_{ki}}{\delta_{33}}, \\ v_{ik} = \frac{c_i d_i}{\delta_{11}} + \frac{\cos(a_{ik} + \beta) \sin(a_{ik} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\cos a_{ik} \sin a_{ik}}{\delta_{33}}, \\ \bar{v}_{ik} = \frac{c_k d_i}{\delta_{11}} - \frac{\cos(a_{ki} + \beta) \sin(a_{ik} + \beta)}{\delta_{22}} - \frac{\cos a_{ki} \sin a_{ik}}{\delta_{33}}, \\ \bar{v}_{ki} = \frac{c_i d_k}{\delta_{11}} + \frac{\cos(a_{ik} + \beta) \sin(a_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\cos a_{ik} \sin a_{ki}}{\delta_{33}}, \end{cases}$$

$$(2.22) \quad \left. \begin{aligned} \mu'_{ik} &= \frac{c_i}{\delta_{11}}, \\ \mu'_{ki} &= \frac{c_k}{\delta_{11}}, \\ \mu_{ki} &= \frac{c_k^2}{\delta_{11}} + \frac{\cos^2(a_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\cos^2 a_{ki}}{\delta_{33}}, \\ \nu_{ki} &= \frac{c_k d_k}{\delta_{11}} - \frac{\cos(a_{ki} + \beta) \sin(a_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} - \frac{\cos a_{ki} \sin a_{ki}}{\delta_{33}}, \\ k_{ik} &= \frac{d_i^2}{\delta_{11}} + \frac{\sin^2(a_{ik} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\sin^2 a_{ik}}{\delta_{33}}, \\ k_{ki} &= \frac{d_k^2}{\delta_{11}} + \frac{\sin^2(a_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\sin^2 a_{ki}}{\delta_{33}}, \\ \bar{k}_{ik} &= \frac{d_i d_k}{\delta_{11}} + \frac{\sin(a_{ik} + \beta) \sin(a_{ki} + \beta)}{\delta_{22}} + \frac{\sin a_{ik} \sin a_{ki}}{\delta_{33}}, \\ k'_{ik} &= \frac{d_i}{\delta_{11}}, \quad k'_{ki} = \frac{d_k}{\delta_{11}}, \quad \mu''_{ik} = \frac{1}{\delta_{11}}. \end{aligned} \right\}$$

Wielkości M_{ik}^0 , M_{ki}^0 , ..., otrzymamy ze wzorów (2.20) wstawiając zamiast wielkości X_1 , X_2 i X_3 , wielkości $X_{1,0}$, $X_{2,0}$, $X_{3,0}$.

Równania transformacyjne (2.21) mieszczą w sobie szereg przypadków szczególnych. Rozważmy przypadek pręta i - k z przegubem w punkcie B , w którym $M_B = \mathfrak{M}_B = 0$. Jediną nadliczbową jest siła X_1 działająca w punkcie B . W równaniach (2.20) należy postawić $X_2 = X_3 = 0$. Słuszne pozostaną wzory (2.21), jeśli we współczynnikach wyrażonych wzorami (2.22) przyjmą

$$\delta_{22} = \infty, \quad \delta_{33} = \infty.$$

Również w przypadku pręta zakrzywionego w planie, z przegubem w punkcie i , posłużyć się można wzorami (2.21) odpowiednio je przekształcając.

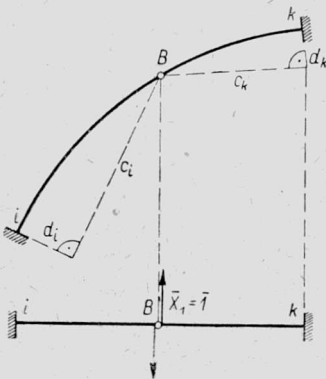
W przegubie i jest $M_{ik} = 0$ oraz $\mathfrak{M}_{ik} = 0$. Z pierwszego i trzeciego równania (2.21) wyznaczmy, rozwiązując układ tych dwu równań, wielkości φ_{ik} i ψ_{ik} . Wstawimy je następnie do pozostałych wzorów grupy (2.21).

Otrzymamy układ równań

$$(2.23) \quad \begin{cases} M_{ik} = 0, \\ M_{ki} = M_{ki}^0 + \mu_{ki} \varphi_{ki} + \nu_{ki} \psi_{ki} - \mu'_{ki} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ \mathfrak{M}_{ik} = 0, \\ \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 + \nu_{ki} \varphi_{ki} + k_{ki} \psi_{ki} - k'_{ki} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \mu'_{ki} \varphi_{ki} - k'_{ki} \psi_{ki} + \mu''_{ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}), \\ T_{ki} = T_{ki}^0 - \mu'_{ki} \varphi_{ki} - k'_{ki} \psi_{ki} + \mu''_{ik} (\delta_{ik} + \delta_{ki}). \end{cases}$$

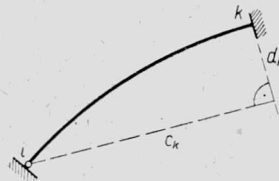
Tutaj $M_{ki}^0, \mathfrak{M}_{ki}^0, \dots$ są siłami przywęzłowymi węzła k w układzie podstawowym jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym (pręt i - k według rys. 10); wielkości $\mu_{ki}, \nu_{ki}, \dots$ posiadają odmienną postać, niż to wynika ze wzorów (2.22). Zresztą łatwo je wyznaczyć, jeśli punkt B z rys. 9 przenieść do punktu i . W punkcie tym umieszczamy jedyną nadliczbową X_1 .

Ponieważ $x_0 = y_0 = 0$ i $c_i = d_i = 0$, więc otrzymamy



Rys. 9

$$\begin{aligned} \mu_{ki} &= \frac{c_k^2}{\delta_{11}}, & \nu_{ki} &= \frac{c_k d_k}{\delta_{11}}, \\ k_{ki} &= \frac{d_k^2}{\delta_{11}}, & \mu'_{ki} &= \frac{c_k}{\delta_{11}}, \\ k'_{ki} &= \frac{d_k}{\delta_{11}}, & \mu''_{ik} &= \frac{1}{\delta_{11}}. \end{aligned}$$



Rys. 10

Wielkości $\mathfrak{M}_{ki}^0, M_{ki}^0, \dots$ otrzymamy ze wzorów (2.20) kładąc tam $X_2 = X_3 = 0$ oraz wstawiając $X_1 = X_{1,0} = -\delta_{10}/\delta_{11}$.

Znaczne uproszczenie wzorów transformacyjnych (2.21) uzyskamy w przypadku symetrycznej postaci pręta i - k (rys. 11). Ze wzoru (2.14) odczytamy (przy założeniu symetrycznego kształtu oraz symetrycznej zmienności przekrojów pręta), że $\text{ctg } \beta = 0$. Wynika to stąd, że funkcja $\sin 2\alpha$ jest antysymetryczna, a funkcje $I_c E/GC$ i I_c/I są symetryczne. Zatem

$$(2.24) \quad \int_s \sin 2\alpha (d s' - d s'') = 0$$

$$\beta = \pi/2.$$

Wstawiając $\beta = \pi/2$ do wzoru (2.16) otrzymamy

$$(2.16.1) \quad x_0 = \frac{\int x (\cos^2 a ds' + \sin^2 a ds'')}{\int (\cos^2 a ds' + \sin^2 a ds'')} = \frac{l}{2}.$$

Ze wzoru (2.15) znajdziemy

$$(2.16.2) \quad y_0 = \frac{\int y (\sin^2 a ds' + \cos^2 a ds'') + \int x \sin a \cos a (ds' - ds'')}{\int (\sin^2 a ds' + \cos^2 a ds'')}.$$

Stany X_1 , X_2 i X_3 wywołują powstanie następujących wielkości statycznych:

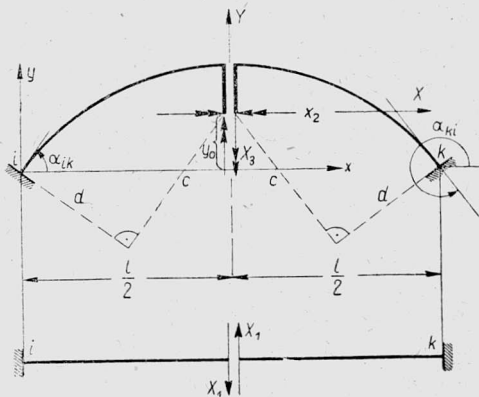
$$\begin{aligned} M_1 &= X \cos a + Y \sin a, & \mathfrak{M}_1 &= X \sin a - Y \cos a, & T_1 &= 1, \\ M_2 &= -\sin a, & \mathfrak{M}_2 &= \cos a, & T_2 &= 0, \\ M_3 &= \cos a, & \mathfrak{M}_3 &= \sin a, & T_3 &= 0, \end{aligned}$$

Stany $X_1 = 1$ i $X_2 = 1$ dają antymetryczne wykresy momentów zginających oraz symetryczne wykresy momentów skręcających. Stan $X_3 = 1$ daje symetryczną postać momentów zginających, a antymetryczną momentów skręcających.

Wobec tego, że dla pręta symetrycznego jest

$$\begin{aligned} c_i &= c_k = c, \\ d_i &= d_k = d, \\ \alpha_{ki} &= 2\pi - \alpha_{ik}, \end{aligned}$$

liczba współczynników wzorów transformacyjnych zmniejsza się z piętnastu do dziewięciu.



Rys. 11

Mamy tu

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu_{ik} = \mu_{ki} &= \frac{c^2}{\delta_{11}} + \frac{\sin^2 a_{ik}}{\delta_{22}} + \frac{\cos^2 a_{ik}}{\delta_{33}}, & \nu_{ik} = \nu_{ki} &= \frac{c d}{\delta_{11}} - \frac{1}{2} \sin 2 a_{ik} \left(\frac{1}{\delta_{22}} - \frac{1}{\delta_{33}} \right), \\ k_{ik} = k_{ki} &= \frac{d^2}{\delta_{11}} + \frac{\cos^2 a_{ik}}{\delta_{22}} + \frac{\sin^2 a_{ik}}{\delta_{33}}, & \bar{\mu}_{ik} &= \frac{c^2}{\delta_{11}} + \frac{\sin^2 a_{ik}}{\delta_{22}} - \frac{\cos^2 a_{ik}}{\delta_{33}}, \\ \bar{\nu}_{ik} &= \frac{c d}{\delta_{11}} - \frac{1}{2} \sin 2 a_{ik} \left(\frac{1}{\delta_{22}} + \frac{1}{\delta_{33}} \right), & \bar{k}_{ik} &= \frac{d^2}{\delta_{11}} + \frac{\cos^2 a_{ik}}{\delta_{22}} - \frac{\sin^2 a_{ik}}{\delta_{33}}, \\ \mu'_{ik} = \mu'_{ki} &= \frac{c}{\delta_{11}}, & \mu''_{ik} &= \frac{1}{\delta_{11}}, & k'_{ik} = k'_{ki} &= \frac{d}{\delta_{11}}, \end{aligned} \right.$$

W przypadku pręta symetrycznego z przegubem w punkcie i ($M_{ik} = \mathfrak{M}_{ik} = 0$) posłużyć się można wzorami (2.24). We wzorach tych wstawić należy $c_k = d_k = 0$.

Z pręta zakrzywionego symetrycznego bez trudu przejdziemy do pręta prostego. W tym przypadku mamy

$$x_0 = l/2, \quad y_0 = 0, \quad a_{ik} = 0,$$

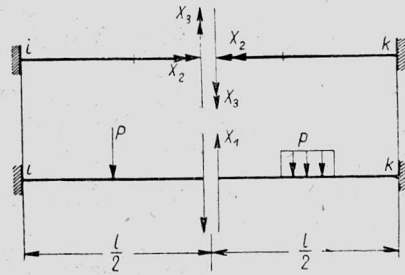
$$a_{ki} = 2\pi, \quad c = l/2, \quad d = 0.$$

Stany $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ i $X_3 = 1$ wywołują pojawienie się następujących wielkości statycznych:

$$M_1 = -(l/2 - x), \quad \mathfrak{M}_1 = 0, \quad T_1 = 1,$$

$$M_2 = 0, \quad \mathfrak{M}_2 = 1, \quad T_2 = 0,$$

$$M_3 = 1, \quad \mathfrak{M}_3 = 0, \quad T_3 = 0,$$



Rys. 12

Współczynniki równań transformacyjnych (2.25) zmniejszają się tu z liczby dziewięciu do pięciu.

Otrzymamy

$$v_{ik} = 0, \quad \bar{v}_{ik} = 0, \quad k'_{ik} = 0, \quad \mu'_{ik} = \frac{c}{\delta_{11}},$$

$$\mu_{ik} = \frac{c^2}{\delta_{11}} + \frac{1}{\delta_{33}}, \quad \bar{\mu}_{ik} = \frac{c^2}{\delta_{11}} - \frac{1}{\delta_{33}}, \quad k_{ik} = \bar{k}_{ik} = \frac{1}{\delta_{22}}, \quad \mu''_{ik} = \frac{1}{\delta_{11}}.$$

Zważywszy, że dla pręta o stałym przekroju jest

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 dx = \frac{l^3}{12EI}, \\ \delta_{22} = \frac{1}{GC} \int_0^l 1 \cdot dx = \frac{l}{GC}, \\ \delta_{33} = \frac{1}{EI} \int_0^l 1 \cdot dx = \frac{l}{EI}, \end{array} \right.$$

wypiszemy równania transformacyjne w postaci znanej ze statyki układów ramowych

$$(2.27) \quad \begin{cases} M_{ik} = M_{ik}^0 + \frac{2EI}{l} [2\varphi_{ik} + \varphi_{ki} - \frac{3}{l}(\delta_{ik} + \delta_{ki})], \\ M_{ki} = M_{ki}^0 + \frac{2EI}{l} [\varphi_{ik} + 2\varphi_{ki} - \frac{3}{l}(\delta_{ik} + \delta_{ki})], \\ \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 + \frac{GC}{l}(\psi_{ik} - \psi_{ki}), \\ \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 - \frac{GC}{l}(\psi_{ik} - \psi_{ki}), \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \frac{6EI}{l^2} [\varphi_{ik} + \varphi_{ki} - \frac{2}{l}(\delta_{ik} + \delta_{ki})], \\ T_{ki} = T_{ki}^0 - \frac{6EI}{l^2} [\varphi_{ik} + \varphi_{ki} - \frac{2}{l}(\delta_{ik} + \delta_{ki})]. \end{cases}$$

W przypadku pręta prostego z przegubem w węźle i ($M_{ik} = 0$, $\mathfrak{M}_{ik} = 0$) jedyną nadliczbową będzie X_1 działająca w przegubie i . Mamy tu $x_0 = 0$ i $c = l$.

Równania transformacyjne przyjmują znaną postać

$$(2.28) \quad \begin{cases} M_{ik} = 0, \\ M_{ki} = M_{ki}^0 + \frac{3EI}{l} [\varphi_{ki} - \frac{1}{l}(\delta_{ik} + \delta_{ki})] \end{cases}$$

i podobnie dalsze równania.

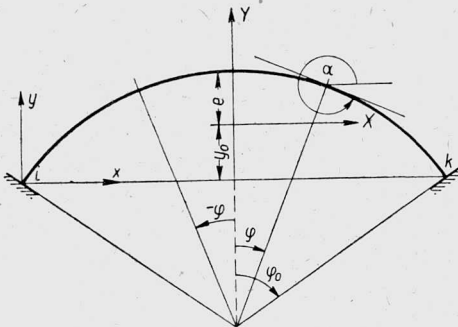
Pręt prosty i pręt kołowy są elementami, które najczęściej występują w układach rusztowych. Zajmiemy się nieco szczegółowiej prętem kołowym o stałym przekroju.

Z rysunku 13 odczytamy

$$X = r \sin \varphi, \quad Y = r(\cos \varphi - \vartheta),$$

$$\vartheta = \cos \varphi_0 + \varepsilon, \quad y_0 = \varepsilon r,$$

$$c = r(1 - \vartheta) = \beta r.$$



Rys. 13

Dalej mamy ze wzorów

$$(2.29) \quad \begin{cases} M_1 = X \cos \varphi - Y \sin \varphi = r \vartheta \sin \varphi, \\ \mathfrak{M}_1 = -X \sin \varphi - Y \cos \varphi = r(\vartheta \cos \varphi - 1), \\ M_2 = \sin \varphi, \quad M_3 = \cos \varphi, \quad \mathfrak{M}_2 = \cos \varphi, \quad \mathfrak{M}_3 = -\sin \varphi, \\ T_1 = 1, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0. \end{cases}$$

Z warunku

$$\delta_{12} = \int (M_1 M_2 + \varrho \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2) ds = 0 \quad \varrho = \frac{EI}{GC},$$

otrzymamy $c = \beta r$,
gdzie

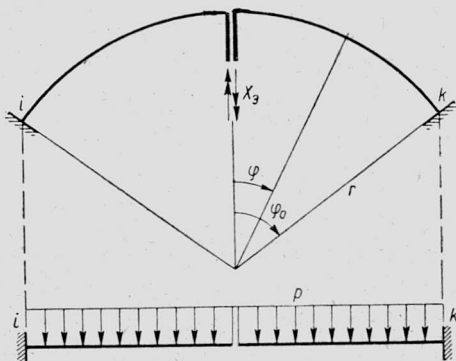
$$(2.30) \quad \beta = 1 - \frac{4 \varrho \sin \varphi_0}{2 \varphi_0 (1 + \varrho) + (\varrho - 1) \sin 2 \varphi_0}.$$

Ze wzorów (2.10.1) obliczymy

$$(2.31) \quad \begin{cases} EI \delta_{11} = 2 \varrho r^3 [\varphi_0 - (1 - \beta) \sin \varphi_0], \\ EI \delta_{22} = \frac{r}{2} [2 \varphi_0 (1 + \varrho) + (\varrho - 1) \sin 2 \varphi_0], \\ EI \delta_{33} = \frac{r}{2} [2 \varphi_0 (1 + \varrho) + (1 - \varrho) \sin 2 \varphi_0]. \end{cases}$$

Znajomość wielkości $\delta_{ii} (i=1, 2, 3)$ pozwoli na wyznaczenie współczynników $\mu_{ik}, \bar{\mu}_{ik}, \dots$ na podstawie wzorów (2.25).

Ponieważ dla symetrycznego obciążenia pręta kołowego w układzie podstawowym momenty zginające mają wykresy symetryczne, a momenty skręcające wykresy antysymetryczne, zatem $X_{1,0} = X_{2,0} = 0$ i $X_{3,0} \neq 0$; jedyną nadliczbową jest moment skręcający na osi symetrii pręta.



Rys. 14

Dla jednostajnie rozłożonego obciążenia p wzdłuż łuku pręta mamy

$$(2.32) \quad [M] = -pr^2 (1 - \cos \varphi), \quad [\mathfrak{M}] = pr^2 (\varphi - \sin \varphi).$$

Nadliczbową $X_{3,0}$ wyznaczmy ze wzoru

$$X_{3,0} = - \frac{\delta_{30}}{\delta_{33}},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \delta_{30} &= \int ([M] M_3 + \varrho [\mathfrak{M}] \mathfrak{M}_3) ds = \\ &= -2 pr^4 \int_0^{\varphi_0} [\vartheta \sin \varphi (1 - \cos \varphi) + \varrho (1 - \vartheta \cos \varphi) (\varphi - \sin \varphi)] d\varphi. \end{aligned}$$

Po wykonaniu całkowania i dłuższych uproszczeniach znajdziemy

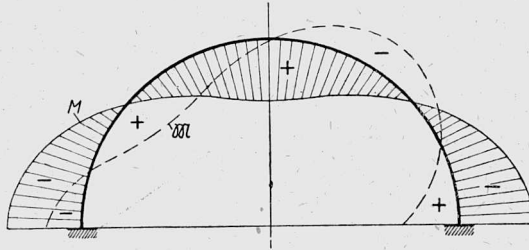
$$(2.33) \quad X_{3,0} = p r^2 \frac{(1 + \varrho) (4 \sin \varphi_0 - 2 \varphi_0) - 4 \varrho \varphi_0 \cos \varphi_0 + (\varrho - 1) \sin 2 \varphi_0}{2 (1 + \varrho) \varphi_0 - (\varrho - 1) \sin 2 \varphi_0}.$$

W przypadku szczególnym $\varphi_0 = \pi/2$ (półkole) $X_{3,0}$ jest niezależne od ϱ :

$$X_{3,0} = p r^2 \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right).$$

Wielkości statyczne otrzymamy ze wzorów (2.13):

$$(2.34) \quad \begin{cases} M = [M] + X_{3,0} \cos \alpha = [M] + X_{3,0} \cos \varphi, \\ \mathfrak{M} = [\mathfrak{M}] + X_{3,0} \sin \alpha = [\mathfrak{M}] - X_{3,0} \sin \varphi, \\ T = -p r \varphi. \end{cases}$$



Rys. 15

Dla $\varphi_0 = \pi/2$ znajdziemy

$$M = -p r^2 (1 - \cos \varphi) + p r^2 \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \cos \varphi,$$

$$\mathfrak{M} = p r^2 (\varphi - \sin \varphi) - p r^2 \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \sin \varphi.$$

Dalej ze wzorów (2.34) otrzymujemy

$$(2.35) \quad \begin{cases} M_{ik}^0 = -M_{ki}^0 = -p r^2, \\ \mathfrak{M}_{ik}^0 = \mathfrak{M}_{ki}^0 = p r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right), \\ T_{ik}^0 = -T_{ki}^0 = \frac{p r \pi}{2}. \end{cases}$$

Dla siły skupionej P działającej w połowie rozpiętości pręta mamy $X_{1,0} = 0$, $X_{2,0} = 0$ i $X_{3,0} \neq 0$.

Otrzymamy tu

$$(2.36) \quad X_{3,0} = -Pr \frac{2\rho(\cos\varphi_0 - 1) + (\rho - 1)\sin^2\varphi_0}{2(\rho + 1)\varphi_0 - (\rho - 1)\sin 2\varphi_0}.$$

Na odcinku C-k łuku jest

$$M = -\frac{P}{2} r \sin\varphi + X_{3,0} \cos\varphi,$$

$$\mathfrak{M} = \frac{Pr}{2}(1 - \cos\varphi) - X_{3,0} \sin\varphi.$$

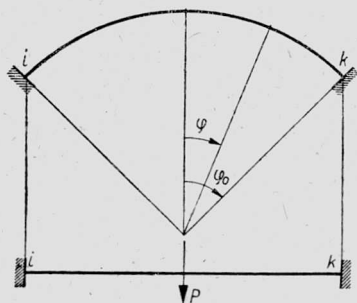
Dla $\varphi_0 = \pi/2$ jest

$$X_{3,0} = \frac{Pr}{\pi}, \quad M = -\frac{Pr}{2} \left(\sin\varphi - \frac{2}{\pi} \cos\varphi \right),$$

$$\mathfrak{M} = \frac{Pr}{2} \left(1 - \cos\varphi - \frac{2}{\pi} \sin\varphi \right).$$

Zatem

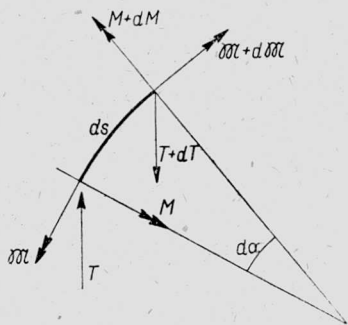
$$M_{ki}^0 = \frac{Pr}{2}, \quad \mathfrak{M}_{ki}^0 = \frac{Pr}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right),$$



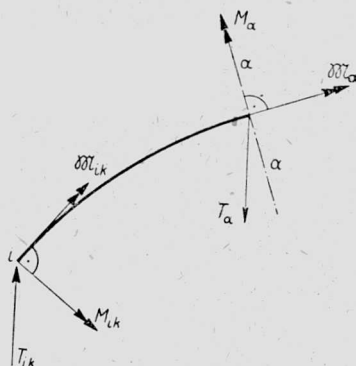
Rys. 16

$$T_{ki}^0 = -P/2.$$

W powyższych rozważaniach przyjmowaliśmy w obrębie pręta dodatnie kierunki wielkości statycznych zgodnie z umową stosowaną w statyce dźwigarów załamanych w planie. Dodatnie kierunki tych wielkości przedstawiono na rys. 17.



Rys. 17



Rys. 18

Przejdźmy teraz do wyznaczenia sił w dowolnym przekroju pręta między węzłami i-k.

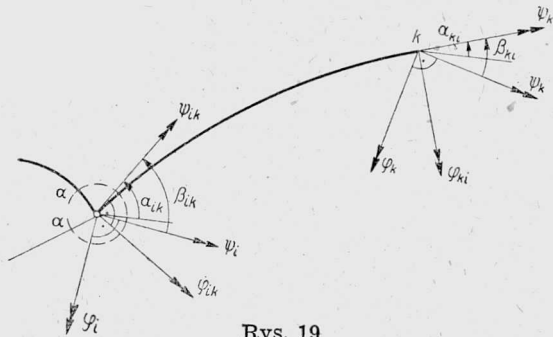
Założmy, że z rozwiązania równań kanonicznych, wypisanych dla rusztu, uzyskaliśmy składowe stanu przemieszczeń pręta i-k. Wyznaczyć należy

wielkości M , \mathfrak{M} i T w dowolnym przekroju pręta $i-k$ między węzłami $i-k$. Tok postępowania jest następujący. Wyliczamy ze wzorów (2.18.1)-(2.18.3) wielkości L_i , a ze wzorów (2.19) nadliczbowe X_i . Wreszcie ze wzoru (2.7) wyznaczamy żądane wielkości statyczne. Można posłużyć się również inną drogą. Ze wzorów (2.21) wyznaczmy siły przywęzłowe \mathfrak{M}_{ik} , M_{ik} i T_{ik} . Traktujemy je jako obciążenie wspornika $i-k$, utwierdzonego w węźle k . Wielkości statyczne w przekroju $a-a$, to jest wielkości M_a , \mathfrak{M}_a i T_a , uzyskamy z trzech równań równowagi wypisanych dla pręta $i-A$ (rys. 18).

Przesunięcia, obroty i skręcenia poszczególnych przekrojów pręta w dowolnym przekroju $a-a$ znajdziemy ze wzoru (2.4) przyjmując jako obciążenie wirtualne siłę $\bar{K}=1$, skierowaną wzdłuż poszukiwanego przemieszczenia.

3. Równania kanoniczne

Rozważmy węzeł i rusztu. W węźle tym zbiega się n prętów. Stan przemieszczenia węzła jest scharakteryzowany trzema wielkościami: przesunięciem δ_i , prostopadłym do płaszczyzny układu, oraz składowymi obrotu, kątami φ_i i ψ_i , o wektorach leżących w płaszczyźnie xy . Kierunki działania



Rys. 19

nadliczbowych φ_i oraz ψ_i dobieramy w zależności od typu układu w sposób najrozmaitszy. Na rysunku 19 podano stan najogólniejszy, kiedy kierunki działania nadliczbowych φ_i i φ_k oraz ψ_i i ψ_k nie są do siebie równoległe. Brzegowe wartości przemieszczeń pręta $i-k$ związane są z nadliczbowymi następującymi związkami :

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \varphi_{ik} = \psi_i \sin \beta_{ik} + \varphi_i \cos \beta_{ik}, \\ \psi_{ik} = \varphi_i \cos \beta_{ik} - \varphi_i \sin \beta_{ik}, \end{cases} \quad \delta_{ik} = -\delta_i,$$

$$(3.1.2) \quad \begin{cases} \varphi_{ki} = \psi_k \sin \beta_{ki} + \varphi_k \cos \beta_{ki}, \\ \psi_{ki} = \varphi_k \cos \beta_{ki} - \varphi_k \sin \beta_{ki}. \end{cases} \quad \delta_{ki} = \delta_k.$$

Wytnijmy węzeł i przekrojem $a-a$. Na węzeł ten działać będą siły przywęzłowe oraz obciążenie zewnętrzne działające bezpośrednio na węzeł. Na rysunku 20 przedstawiono siły przywęzłowe pręta $i-k$ w przekroju dokonany nieskończenie blisko węzła i . Siły przywęzłowe M_{ik} , \mathfrak{M}_{ik} i T_{ik} działają z odwrotnymi kierunkami na węzeł. Rzuty tych sił na kierunki wektorów φ_i , ψ_i i z oznaczmy przez M_{φ_i} , M_{ψ_i} i T_{ik} .

Tutaj

$$(3.2) \begin{cases} M_{\psi_i} = -M_{ik} \sin \beta_{ik} - \mathfrak{M}_{ik} \cos \beta_{ik}, \\ M_{\varphi_i} = -M_{ik} \cos \beta_{ik} + \mathfrak{M}_{ik} \sin \beta_{ik}. \end{cases}$$

Niech na węzeł działają obciążenia bezpośrednio, moment M_i oraz siła pionowa P_i .

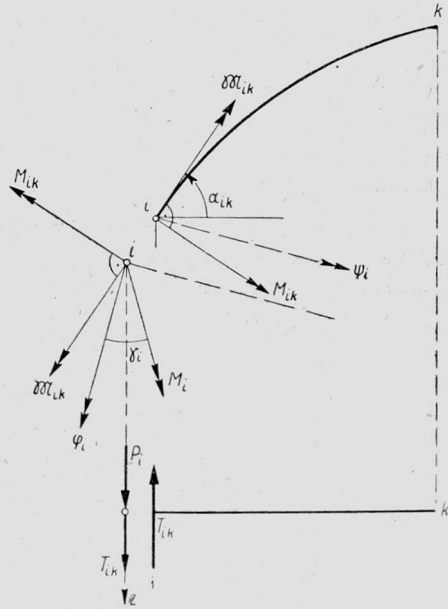
Równania równowagi węzła i przy uwzględnieniu sił brzegowych wszystkich prętów zbiegających się w węźle i obciążenia bezpośrednio działającego na węzeł przyjmują postać

$$(3.3) \begin{cases} M_i \cos \gamma_i - \sum (M_{ik} \cos \beta_{ik} - \mathfrak{M}_{ik} \sin \beta_{ik}) = 0, \\ M_i \sin \gamma_i - \sum (M_{ik} \sin \beta_{ik} + \mathfrak{M}_{ik} \cos \beta_{ik}) = 0, \\ P_i + \sum T_{ik} = 0. \end{cases}$$

Jeżeli do równań (3.3) wstawimy siły przywęzłowe ze wzorów transformacyjnych (2.21), a dalej posłużymy się wzorami (3.1.1) i (3.1.2), to uzyskamy układ równań kanonicznych metody odkształceń typu

$$(3.4) \begin{cases} \varphi_i A_{ii}^{\bar{}} + \sum \varphi_k A_{ik}^{\bar{}} + \psi_i B_{ii}^{\bar{}} + \sum \psi_k B_{ik}^{\bar{}} + \delta_i C_{ii}^{\bar{}} + \sum \delta_k C_{ik}^{\bar{}} + m_{i0} = 0, \\ \varphi_i A_{ii}^{\psi} + \sum \varphi_k A_{ik}^{\psi} + \psi_i B_{ii}^{\psi} + \sum \psi_k B_{ik}^{\psi} + \delta_i C_{ii}^{\psi} + \sum \delta_k C_{ik}^{\psi} + m_{i0} = 0, \\ \varphi_i A_{ii}^{\delta} + \sum \varphi_k A_{ik}^{\delta} + \psi_i B_{ii}^{\delta} + \sum \psi_k B_{ik}^{\delta} + \delta_i C_{ii}^{\delta} + \sum \delta_k C_{ik}^{\delta} + r_{i0} = 0. \end{cases}$$

We wzorach tych $A_{ii}^{\bar{}}$ oznacza sumę rzutów wektorów momentów przywęzłowych węzła i na kierunek wektora φ_i , powstałych w układzie podstawowym geometrycznie wyznaczalnym pod wpływem stanu $\varphi_i = 1$; $A_{ik}^{\bar{}}$ jest sumą rzutów momentów przywęzłowych na kierunek wektora φ_i , wywołanych stanem $\varphi_k = 1$, wreszcie m_{i0} jest sumą rzutów wektorów momentów przywęzłowych węzła i na kierunek działania wektora φ_i , wywołanych w ukła-



Rys. 20

dzie podstawowym stanem obciążeń zewnętrznych. Podobne znaczenie mają inne wielkości występujące we wzorach (3.5).

Z twierdzenia o wzajemności reakcji wynika, że

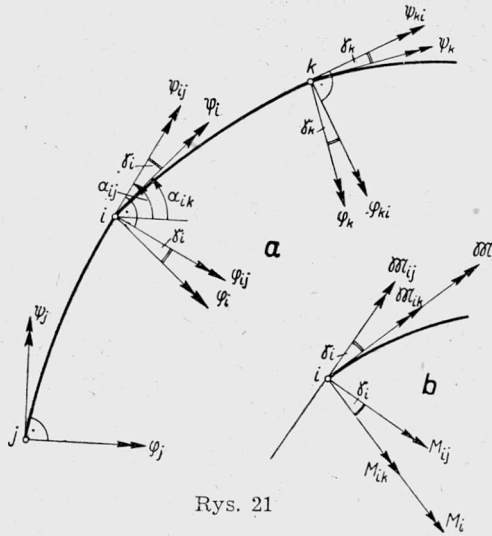
$$A_{ii}^{\delta} = B_{ii}^{\psi}, \quad C_{ii}^{\delta} = A_{ii}^{\psi}, \quad C_{ii}^{\psi} = B_{ii}^{\delta}.$$

Na podstawie tego twierdzenia wykazać można, że układ równań kanonicznych (3.5) wypisanych dla wszystkich węzłów swobodnych będzie układem równań o macierzy symetrycznej (względem głównej przekątnej).

Równania (3.5) podane tu w postaci najogólniejszej i dla dowolnego kształtu prętów dadzą się znacznie uprościć w przypadku układów rusztowych regularnych, jak ruszty o siatce prętowej ortogonalnej, belki załamane w planie, belki pierścieniowe itd.

4. Belki ciągle załamane i zakrzywione w planie

Rozpatrzmy układ prętów przedstawiony na rys. 21. Pręty połączone są ze sobą sztywnymi węzłami stanowiącymi jednocześnie podpory belki. Nadliczbowe przyjęto tak, aby kierunki ich działania pokrywały się z kierunkami stycznych i normalnych do osi prętów w węzłach.



Rys. 21

Na rysunku 21 przedstawiono siły przywęzłowe oraz wielkości M_i i \mathfrak{M}_i , tj. składowe momentu skupionego, działającego jako obciążenie zewnętrzne bezpośrednio na węzeł. Zrównoważenie węzła i prowadzi do równań

$$(4.1) \quad \begin{cases} M_{ik} + M_{ij} \cos \gamma_i - \mathfrak{M}_{ij} \sin \gamma_i - M_i = 0, \\ \mathfrak{M}_{ik} + M_{ij} \sin \gamma_i + \mathfrak{M}_{ij} \cos \gamma_i - \mathfrak{M}_i = 0, \end{cases} \quad \gamma_i = \alpha_{ij} - \alpha_{ik}.$$

Jeżeli do wzorów (4.1) wstawimy momenty przywęzłowe z równań transformacyjnych (2.21), a ponadto skorzystamy ze związków

$$(4.2) \quad \begin{cases} \varphi_{ik} = \varphi_i, & \psi_{ik} = \psi_i, & \varphi_{ji} = \varphi_j, & \psi_{ji} = \psi_j, \\ \varphi_{ki} = \varphi_k \cos \gamma_k + \psi_k \sin \gamma_k, & \psi_{ki} = -\varphi_k \sin \gamma_k + \psi_k \cos \gamma_k, \\ \varphi_{ij} = \varphi_i \cos \gamma_i + \psi_i \sin \gamma_i, & \psi_{ij} = -\varphi_i \sin \gamma_i + \psi_i \cos \gamma_i, \end{cases}$$

to otrzymamy układ równań o nadliczbowych geometrycznych φ i ψ :

$$(4.3.1) \quad \varphi_j [\bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\mu}_{ij} - \varepsilon_i \bar{v}_{ji}] + \varphi_i [\mu_{ik} + \bar{\varepsilon}_i^2 \mu_{ij} + k_{ij} \varepsilon_i^2 - 2v_{ij} \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i] + \\ + \varphi_k [\bar{\mu}_{ik} \bar{\varepsilon}_k - \bar{v}_{ik} \varepsilon_k] - \psi_j [\bar{v}_{ij} \bar{\varepsilon}_i - \bar{k}_{ji} \varepsilon_i] - \psi_i [v_{ik} - v_{ij} (\bar{\varepsilon}_i^2 - \varepsilon_i^2)] + \\ + (k_{ij} - \mu_{ij}) \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i - \psi_k [\bar{v}_{ik} \bar{\varepsilon}_k - \bar{\mu}_{ik} \varepsilon_k] + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 \bar{\varepsilon}_i - \mathfrak{M}_{ij}^0 \varepsilon_i - M_i = 0,$$

$$(4.3.2) \quad \varphi_j (\bar{\mu}_{ij} \varepsilon_i + \bar{v}_{ji} \bar{\varepsilon}_i) - \varphi_i [v_{ik} + (k_{ij} - \mu_{ij}) \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i + v_{ij} (\varepsilon_i^2 - \bar{\varepsilon}_i^2)] + \\ + \varphi_k (\bar{k}_{ik} \varepsilon_k - \bar{v}_{ik} \bar{\varepsilon}_k) - \psi_j (\bar{k}_{ji} \bar{\varepsilon}_i - \bar{v}_{ij} \varepsilon_i) + \psi_i [\mu_{ij} \varepsilon_i^2 + 2v_{ij} \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i + \\ + k_{ij} \bar{\varepsilon}_i^2 + k_{ik}] - \psi_k (\bar{k}_{ik} \bar{\varepsilon}_k + \bar{v}_{ik} \varepsilon_k) + \mathfrak{M}_{ij}^0 \bar{\varepsilon}_i + \mathfrak{M}_{ik}^0 + M_{ij}^0 \varepsilon_i - \mathfrak{M}_i = 0.$$

W powyższych wzorach oznaczono dla krótkości $\varepsilon_i = \sin \gamma_i$ oraz $\bar{\varepsilon}_i = \cos \gamma_i$. Równania (4.3) można znacznie uprościć dla pewnych typów belek ciągłych.

Założmy, że wszystkie kąty γ są równe zeru; pręty mają wtedy wspólne styczne w węzłach. Z równań (4.3) otrzymamy

$$(4.4.1) \quad \bar{\mu}_{ij} \varphi_j + \varphi_i (\mu_{ik} + \mu_{ij}) + \bar{\mu}_{ik} \varphi_k - \bar{v}_{ij} \psi_j - \psi_i (v_{ik} - v_{ij}) + \\ + \bar{v}_{ik} \psi_k + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 - M_i = 0,$$

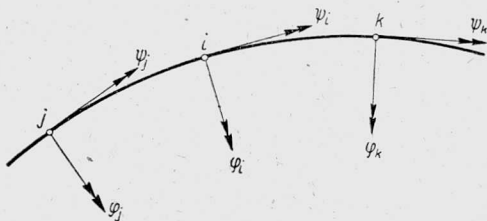
$$(4.4.2) \quad \bar{v}_{ji} \varphi_j - \varphi_i (v_{ik} - v_{ij}) - \bar{v}_{ik} \varphi_k - \psi_j \bar{k}_{ji} + \psi_i (k_{ij} + k_{ik}) - \\ - \psi_k \bar{k}_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ij}^0 - \mathfrak{M}_i = 0.$$

W przypadku szczególnym jednakowych pręseł i prętów o jednakowych własnościach geometrycznych i symetrycznych otrzymamy dalsze uproszczenia wzorów (4.4). Ponieważ w tym przypadku współczynniki przy niewiadomych nie zależą od wskaźników węzłów, to uzyskamy

$$(4.5.1) \quad \bar{\mu} \varphi_j + 2\mu \varphi_i + \bar{\mu} \varphi_k - \bar{v} (\psi_j - \psi_k) + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 - M_i = 0,$$

$$(4.5.2) \quad \bar{v} (\varphi_j - \varphi_k) - \bar{k} \psi_j + 2k \psi_i - \bar{k} \psi_k + \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ij}^0 - \mathfrak{M}_i = 0.$$

Zauważmy jeszcze, że w równaniach (4.4) otrzymamy dalsze uproszczenia w przypadku $\bar{\nu} = 0$. Odpowiada to przypadkowi belki ciągłej o prętach prostych [patrz wzory (2.26)]. Otrzymamy wówczas dwa niezależne układy równań trójczłonowych jako znane równania belek ciągłych.



Rys. 22

Dla belki ciągłej załamanej w planie układ równań (4.3.1) i (4.3.2) przechodzi w

$$(4.6.1) \quad \varphi_j \bar{\varepsilon}_i \bar{\mu}_{ij} + \varphi_i [2(\bar{\mu}_{ij} \bar{\varepsilon}_i^2 + \bar{\mu}_{ik}) + \bar{k}_{ij} \varepsilon_i^2] + \varphi_k \bar{\mu}_{ik} \bar{\varepsilon}_k + \psi_j \bar{k}_{ji} \varepsilon_i - \\ - \psi_i [\bar{k}_{ji} - 2\bar{\mu}_{ij}] \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i + \psi_k \bar{\mu}_{ik} \varepsilon_k + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 \bar{\varepsilon}_i - \mathfrak{M}_{ij}^0 \varepsilon_i - M_i = 0.$$

$$(4.6.2) \quad \varphi_j \bar{\mu}_{ij} \varepsilon_i - \varphi_i (\bar{k}_{ij} - 2\bar{\mu}_{ij}) \bar{\varepsilon}_i \varepsilon_i + \varphi_k \bar{k}_{ik} \varepsilon_k - \psi_j \bar{\varepsilon}_i \bar{k}_{ji} + \\ + \psi_i (2\bar{\mu}_{ij} \varepsilon_i^2 + \bar{k}_{ik} + \bar{k}_{ij} \varepsilon_i^2) - \psi_k \bar{k}_{ik} \bar{\varepsilon}_k + \mathfrak{M}_{ij}^0 \bar{\varepsilon}_i + \mathfrak{M}_{ik}^0 + M_{ij}^0 \varepsilon_i - \mathfrak{M}_i = 0.$$

Tutaj przyjęto według wzorów (2.27) $\mu_{ik} = 2\bar{\mu}_{ik}$.

Dla belek ciągłych załamanych w planie (jednakowe przęsła i przekroje belek oraz jednakowe kąty γ w węzłach) otrzymamy dalsze uproszczenia polegające na tym, że współczynniki przy niewiadomych nie zależą od numeracji węzłów:

$$\bar{\mu}_{ij} = \bar{\mu}_{ik}, \quad \bar{k}_{ij} = \bar{k}_{ik}, \dots; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_k = \varepsilon_j = \dots = \varepsilon; \quad \bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}_k = \bar{\varepsilon}_j = \dots = \bar{\varepsilon}.$$

Ponieważ w równaniach (4.3)-(4.6) wielkości φ i ψ występują w postaci trójczłonowej, to sposób rozwiązania tych układów równań najwygodniej doprowadzić do algorytmu rozwiązania dwu układów równań trójczłonowych, zawierających jedynie nadliczbowe φ lub ψ .

Postępując się będziemy układem podstawowym geometrycznie niewyznaczalnym. Układem tym niech będzie belka ciągła, zakrzywiona lub załamana w planie, o tak skonstruowanych węzłach, aby wielkości ψ we wszystkich węzłach były równe zero. Przy n węzłach swobodnych układ jest n -krotnie geometrycznie niewyznaczalny.

W tym układzie podstawowym wykonujemy następujące działania.

(a) W układzie równań (4.3.1)-(4.6.1) zakładamy

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_k = \dots = \psi_n = 0.$$

Pozostaje wówczas układ równań trójczłonowy. Rozwiązanie tego układu daje kąty $\varphi_{i,0}$ ($i=1, 2, \dots, n$) wywołane działaniem obciążeń zewnętrznych na układ.

(b) Niech w układzie podstawowym działa stan $\psi_r = 1$. W równaniach (4.3.1)-(4.6.1) należy przyrównać do zera człony pochodzące od obciążenia zewnętrznego, a z występujących w tych równaniach kątów ψ zachować jedynie kąt ψ_r . Rozwiązanie układu równań daje kąty $\psi_{i,r}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Powyższe działanie powtarzamy kolejno dla stanów $\psi_r = 1$ ($r = 1, 2, \dots, n$). Przy wyznaczaniu wartości $\varphi_{i,r}$ wygodnie tu będzie posłużyć się macierzą układu równań trójczłonowych.

(c) Wyznaczamy w układzie podstawowym momenty przywęzłowe, wywołane obciążeniem zewnętrznym oraz stanem $\psi_r = 1$ ($r = 1, 2, \dots, n$).

(d) Ustawiamy układ równań

$$(4.7) \quad a_{ij}^{(n)} \psi_j + a_{ii}^{(n)} \psi_i + a_{ik}^{(n)} \psi_k + a_{i0}^{(n)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Tutaj $a_{ij}^{(n)}$ oznacza sumę rzutów momentów przywęzłowych węzła i , obliczonych w p. (c), na kierunek działania nadliczbowej ψ_i . Momenty te wywołane są w układzie podstawowym niewyznaczalnym stanem $\psi_j = 1$.

Wielkość $a_{i0}^{(n)}$ jest sumą rzutów momentów przywęzłowych węzła i na kierunek działania nadliczbowej ψ_i , wywołanych w układzie podstawowym działaniem obciążenia zewnętrznego.

Rozwiązując układ równań (4.7) otrzymamy nadliczbowe ψ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Kąty φ_i uzyskamy z następującego wzoru superpozycyjnego

$$\varphi_i = \varphi_{i,0} + \sum_{r=1}^n \varphi_{i,r} \psi_r \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Rozwiązanie układu równań omówionych w p. (a) i (b) oraz równań (4.7) nastąpić może również metodą kolejnych przybliżeń (metodą Crossa), która do tego celu nadaje się bardzo dobrze.

Zajmijmy się szczególnym przypadkiem belki ciągłej zakrzywionej, mianowicie belką pierścieniową o jednakowych przesłach obciążonych w sposób jednakowy (cykliczna symetria obciążeń). Załóżmy, że na węzły nie działają momenty skręcające skupione ($\mathfrak{M}_i = 0$). Ze względu na symetrię obciążeń jest $\varphi_j = \varphi_i = \varphi_k = \dots = \varphi = 0$ oraz $\psi_j = \psi_i = \psi_k = \dots = \psi$. Z drugiego równania (4.5) otrzymamy

$$(4.8) \quad 2(k - \bar{k})\psi + \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ij}^0 = 0.$$

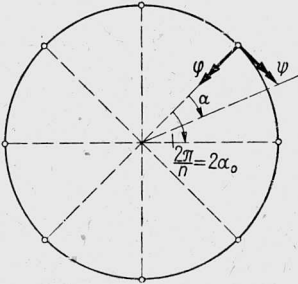
Ze względu na symetrię obciążeń mamy $\mathfrak{M}_{ik}^0 = \mathfrak{M}_{ij}^0 = \dots = \mathfrak{M}^0$, wobec tego

$$(4.9) \quad \psi = -\frac{\mathfrak{M}^0}{k - \bar{k}}.$$

Ze wzorów transformacyjnych (2.21) otrzymamy

$$\mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}^0 + (k - \bar{k}) \psi = \mathfrak{M}^0 - \mathfrak{M}^0 = 0,$$

$$M_{ik} = M_{ik}^0 - (v - \bar{v}) \psi = M_{ik}^0 + \frac{v - \bar{v}}{k - \bar{k}} \mathfrak{M}^0.$$



Rys. 23

Ze wzorów (2.25) dla symetrycznych prętów zakrzywionych wynika, że

$$v - \bar{v} = \frac{\sin 2\alpha_0}{\delta_{33}},$$

$$k - \bar{k} = \frac{\sin^2 \alpha_0}{\delta_{33}}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{n}.$$

Tak więc

$$M_{ik} = M_{ik}^0 + \text{ctg} \frac{\pi}{n} \mathfrak{M}^0.$$

Zważywszy, że

$$M_{ik}^0 = [M_{ik}] + X_{3,0} \cos \alpha_0, \quad \mathfrak{M}^0 = [\mathfrak{M}_{ik}^0] - X_{3,0} \sin \alpha_0,$$

otrzymamy

$$M_{ik} = [M_{ik}] + \text{ctg} \frac{\pi}{n} [\mathfrak{M}_{ik}^0].$$

Wobec tego momenty skręcające w węzłach są równe zero, a momenty zginające są niezależne od nadliczbowych $X_{3,0}$.

Dla obciążenia p jednostajnie rozłożonego we wszystkich przęsłach mamy [wzór (2.32)]

$$(4.10) \quad M_{ik} = pr^2 (\cos \alpha_0 - 1) + \text{ctg} \alpha_0 pr^2 (\alpha_0 - \sin \alpha_0) = pr^2 (\alpha_0 \text{ctg} \alpha_0 - 1).$$

Otrzymaliśmy tu wyniki zgodne z wynikami uzyskanymi na innej drodze; prostota wzorów końcowych pochodzi stąd, że układ jest statycznie wyznaczalny. Wykresy momentów zginających i skręcających oraz sił tnących uzyskamy ze wzorów

$$(4.11) \quad M_\alpha = pr^2 \left[\alpha_0 \frac{\cos(\alpha_0 - \alpha)}{\sin \alpha_0} - 1 \right], \quad \mathfrak{M}_\alpha = -pr^2 \left[\alpha_0 \frac{\sin(\alpha_0 - \alpha)}{\sin \alpha_0} - (\alpha_0 - \alpha) \right],$$

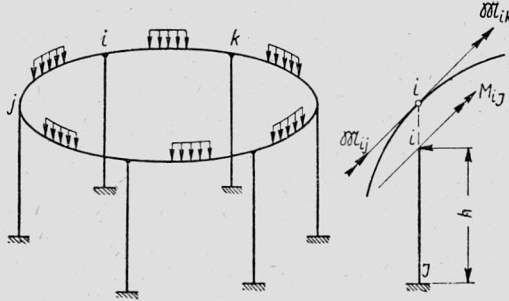
$$T_\alpha = pr(\alpha_0 - \alpha).$$

Zajmijmy się bardziej złożonym przypadkiem, mianowicie pierścieniową ramą obciążoną w sposób jednakowy we wszystkich przęsłach. Tutaj jest $\varphi = 0$ i $\psi \neq 0$. Zrównoważenie węzła i daje tu równanie

$$(4.12) \quad M_{iI} + \mathfrak{M}_{ik} + \mathfrak{M}_{ij} = 0.$$

Zważywszy, że

$$(4.13) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 + (k - \bar{k}) \psi, \\ \mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_{ij}^0 + (k - \bar{k}) \psi, \\ M_{il} = \mu_{il} \psi, \end{cases}$$



Rys. 24

gdzie $\mu_{il} = 4 E I_{il} / h$, otrzymamy wstawiając powyższe wartości do równania (4.12)

$$(4.14) \quad [2(k - \bar{k}) + \mu_{il}] \psi + 2 \mathfrak{M}^0 = 0,$$

gdzie

$$\mathfrak{M}_{ik}^0 = \mathfrak{M}_{ij}^0 = \dots = \mathfrak{M}^0.$$

Ze wzorów (4.13) uzyskamy siły przywęzłowe

$$(4.15) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}^0 - \frac{2(k - \bar{k})}{2(k - \bar{k}) + \mu_{il}} \mathfrak{M}^0 = \mathfrak{M}_{ij}, \\ M_{il} = \mu_{il} \psi = -2 \mathfrak{M}^0 \frac{\mu_{il}}{2(k - \bar{k}) + \mu_{il}}. \end{cases}$$

Dalej ze wzoru (2.21) uzyskamy

$$(4.16) \quad M_{ik} = M^0 - (v - \bar{v}) \psi = M^0 + 2 \mathfrak{M}^0 \frac{v - \bar{v}}{2(k - \bar{k}) + \mu_{il}}.$$

Dla $\mu_{il} = 0$, a więc w braku słupa, otrzymujemy wyrażenie (4.9).

W przypadku ram piętrowych, składających się ze słupów pionowych i rygli kołowych, otrzymamy w założeniu węzłów nieprzesuwnych w kierunku poziomym następujące równanie trójczłonowe:

$$\psi_{r-1} \bar{\mu}_{r,r-1} + \psi_r [2(k_r - \bar{k}_r) + \mu_{r,r-1} + \mu_{r,r+1}] + \psi_{r+1} \bar{\mu}_{r,r+1} + 2 \mathfrak{M}_r^0 = 0$$

$$(r = 1, 2, \dots, n).$$

Tutaj

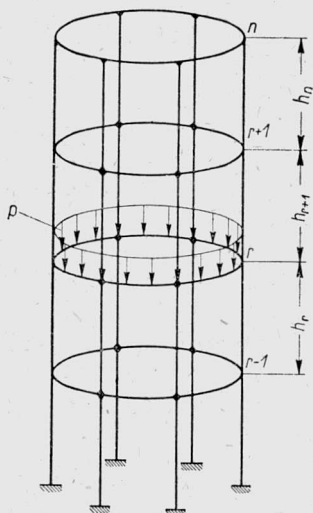
$$\bar{\mu}_{r,r-1} = \frac{2EI_r}{h_r}, \quad \mu_{r,r-1} = \frac{4EI_{r-1}}{h_{r-1}},$$

a I_r jest momentem bezwładności słupa względem osi $\beta\text{-}\beta$. W podobnie prosty sposób rozwiązać można zagadnienie belek pierścieniowych współśrodkowych, obciążonych w sposób jednakowy we wszystkich przęsłach poszczególnych pierścieni. W każdej belce pierścieniowej wystąpi jedyna tylko nadliczbowa, kąt ψ (rys. 26). Otrzymamy i tu równanie trójczłonowe

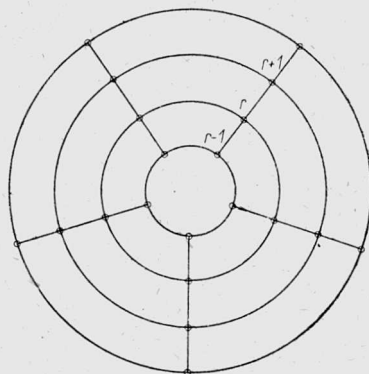
$$\psi_{r-1} \bar{\mu}_{r,r-1} + \psi_r [2(k_r - \bar{k}_r) + \mu_{r,r-1} + \mu_{r,r+1}] + \psi_{r+1} \bar{\mu}_{r,r+1} + 2M_r^0 = 0$$

$$(r = 1, 2, \dots, n).$$

Przykłady tego typu można by mnożyć. Należy jednak stwierdzić, że belki proste załamane w planie znacznie wygodniej rozwiązać przy użyciu metody sił, [2]. Rozwiązanie równań kanonicznych metody sił daje bowiem bezpośrednio wartości momentów zginających i skręcających przywęzłowych.



Rys. 25



Rys. 26

Jeżeli węzeł i belki załamanej w planie jest węzłem nie podpartym ($\delta_i \neq 0$), to rozwiązanie takiego układu może nastąpić w dwojaki sposób.

(a) W równaniach (4.1), w wyrażeniach dla momentów przywęzłowych, należy uwzględnić wpływ przesunięcia. We wzorach (4.3.1) i (4.3.2) dochodzą wtedy człony zawierające wielkość δ_i . Dalej skorzystać należy z warunku równowagi węzła $T_{ik} - T_{ij} + P_i = 0$, gdzie P_i jest pionową siłą skupioną działającą na węzeł. Wyrażając T_{ik} i T_{ij} według wzorów (2.21) otrzymamy brakujące równanie kanoniczne.

(b) Traktować można pręty $j-i-k$ jako jeden pręt i ustawić dla niego wzory transformacyjne (2.21).

W przypadku dźwigarów załamanych w planie należy w węzłach pośrednich nie podpartych stosować metodę sił (p. 2), traktując układ prętów jako jeden pręt [14].

5. Ruszty o ortogonalnej siatce prętowej i ruszty nieregularne

Rozważać tu będziemy ruszty składające się z prętów prostych i zakrzywionych, ale symetrycznych. Jako nadliczbowe występują w węzłach kąty φ i ψ oraz przesunięcie δ . Kierunki φ i ψ pokrywają się z normalną i styczną do osi prętów zakrzywionych.

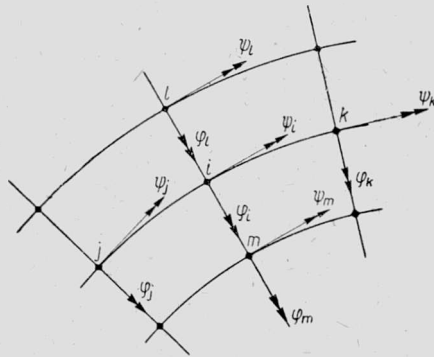
Dla każdego węzła swobodnego ustawimy trzy równania równowagi. Dla węzła i mamy zatem

$$(5.1.1) \quad M_{ik} + M_{ij} + \mathfrak{M}_{im} + \mathfrak{M}_{il} - M_i = 0,$$

$$(5.1.2) \quad \mathfrak{M}_{ik} + \mathfrak{M}_{ij} + M_{im} + M_{il} - \mathfrak{M}_i = 0,$$

$$(5.1.3) \quad -T_{ik} + T_{ij} + T_{im} - T_{il} - P_i = 0.$$

Tutaj M_i oraz \mathfrak{M}_i są składowymi momentu M działającego bezpośrednio na węzeł i .



Rys. 27

Wstawiając do wzorów (5.1) odpowiednie wartości ze wzorów transformacyjnych (2.21) otrzymamy następujący układ równań:

$$(5.2.1) \quad \bar{\mu}_{ij} \varphi_j + \varphi_i (\mu_{ik} + \mu_{ij} + k_{il} + k_{im}) + \bar{\mu}_{ik} \varphi_k - k_{im} \varphi_m - k_{il} \varphi_l - \bar{v}_{ij} \psi_j - \psi_i (v_{ik} - v_{ij}) + \bar{v}_{ik} \psi_k + \mu'_{ij} \delta_j + (\mu'_{ik} - \mu'_{ij}) \delta_i - \mu'_{ik} \delta_k + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 + \mathfrak{M}_{im}^0 + \mathfrak{M}_{il}^0 - M_i = 0,$$

$$(5.2.2) \quad \bar{v}_{ji} \varphi_j - \varphi_i (v_{ik} - v_{ij}) - \bar{v}_{ik} \varphi_k - \bar{k}_{ji} \psi_j + \psi_i (k_{ij} + k_{ik} + \mu_{im} + \mu_{il}) - \bar{k}_{ik} \psi_k + \bar{\mu}_{im} \psi_m + \bar{\mu}_{il} \psi_l + k'_{ij} \delta_j + k'_{ik} \delta_k - \delta_i (k'_{ik} + k'_{ij} + \mu'_{im} - \mu'_{il}) + \mu'_{im} \delta_m - \mu'_{il} \delta_l + \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ij}^0 + M_{im}^0 + M_{il}^0 - \mathfrak{M}_i = 0,$$

$$(5.2.3) \quad -\varphi_j \mu'_{ji} + \varphi_i (\mu'_{ik} - \mu'_{ij}) + \varphi_k \mu'_{ik} + k'_{ij} \psi_j - \psi_i (k'_{ik} + k'_{ij} - \mu'_{il} + \mu'_{im}) + k'_{ik} \psi_k - \mu'_{im} \psi_m + \mu'_{il} \psi_l - \mu''_{ij} \delta_j - \mu''_{ik} \delta_k - \mu''_{im} \delta_m - \mu''_{il} \delta_l + \delta_i (\mu''_{ik} + \mu''_{ij} + \mu''_{il} + \mu''_{im}) + T_{ij}^0 + T_{im}^0 - T_{ik}^0 - T_{il}^0 - P = 0.$$

Wybitne uproszczenie układu równań uzyskamy dla rusztu składającego się jedynie z prętów prostych. Otrzymamy wówczas

$$(5.3.1) \quad \varphi_i \bar{\mu}_{ij} + \varphi_i (\mu_{ik} + \mu_{ij} + k_{il} + k_{im}) + \varphi_k \bar{\mu}_{ik} - k_{im} \varphi_m - k_{il} \varphi_l + \mu'_{ij} \delta_j + \\ + (\mu'_{ik} - \mu'_{ij}) \delta_i - \mu'_{ik} \delta_k + M_{ik}^0 + M_{ij}^0 + \mathfrak{M}_{im}^0 + \mathfrak{M}_{il}^0 - M_i = 0,$$

$$(5.3.2) \quad -k_{ij} \psi_j + \psi_i (k_{ij} + k_{ik} + \mu_{im} + \mu_{il}) - \psi_k k_{ik} + \bar{\mu}_{im} \psi_m + \bar{\mu}_{il} \psi_l - \mu'_{il} \delta_l + \\ + (\mu'_{il} - \mu'_{im}) \delta_i + \mu'_{im} \delta_m + \mathfrak{M}_{ik}^0 + \mathfrak{M}_{ij}^0 + M_{im}^0 + M_{il}^0 - \mathfrak{M}_i = 0,$$

$$(5.3.3) \quad -\mu'_{ij} \varphi_j + (\mu'_{ik} - \mu'_{ij}) \varphi_i + \mu'_{ik} \varphi_k - \mu'_{im} \psi_m + (\mu'_{im} - \mu'_{il}) \psi_i + \mu'_{il} \psi_l - \mu''_{ik} \delta_k - \\ - \mu''_{ij} \delta_j - \mu''_{im} \delta_m - \mu''_{il} \delta_l + \delta_i (\mu''_{ij} + \mu''_{ik} + \mu''_{il} + \mu''_{im}) - \\ - T_{ik}^0 + T_{ij}^0 - T_{im}^0 + T_{il}^0 - P_i = 0.$$

Znamienne jest to, że wielkości φ i ψ związane są tylko trzecim równaniem.

W przypadku rusztu podpartego we wszystkich węzłach do dyspozycji pozostają równania (5.3.1) i (5.3.2), czyli równania trójczłonowe względem φ , ψ .

Układ równań (5.3.1)-(5.3.3) rozwiązać można najprościej, rozpatrując układ podstawowy geometrycznie niewyznaczalny. Układem tym będzie ruszt o wszystkich węzłach podpartych. Przy r węzłach swobodnych będzie to układ $2r$ -krotnie geometrycznie niewyznaczalny.

Wyliczmy w tym układzie reakcje przywęzłowe wywołane obciążeniem zewnętrznym. Odpowiednie wartości kątów oznaczymy przez $\varphi_{i,0}$ oraz $\psi_{i,0}$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

Dalej obciążmy układ podstawowy kolejnymi stanami $\delta_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots, r$) i wyznaczmy przynależne siły tnące przywęzłowe. Uzyskane kąty oznaczymy przez $\varphi_{i,k}$ oraz $\psi_{i,k}$ ($i, k = 1, 2, \dots, r$). Zrównoważmy następnie węzeł i układu rusztowego.

Otrzymamy równanie

$$(5.4) \quad \sum_{k=1}^r a_{ik}^{(2r)} \delta_k + a_{i0}^{(2r)} = 0.$$

Tutaj $a_{ik}^{(2r)}$ oznacza sumę sił tnących przywęzłowych węzła i , wywołanych stanem $\delta_k = 1$, zaś $a_{i0}^{(2r)}$ sumę sił tnących przywęzłowych węzła i , spowodowanych stanem obciążeń zewnętrznych w układzie podstawowym $2r$ -krotnie geometrycznie niewyznaczalnym. Z układu równań (5.4) uzyskamy wielkości δ , a ze wzorów

$$(5.5) \quad \varphi_i = \varphi_{i,0} + \sum_{k=1}^r \varphi_{i,k} \delta_k, \quad \psi_i = \psi_{i,0} + \sum_{k=1}^r \psi_{i,k} \delta_k, \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

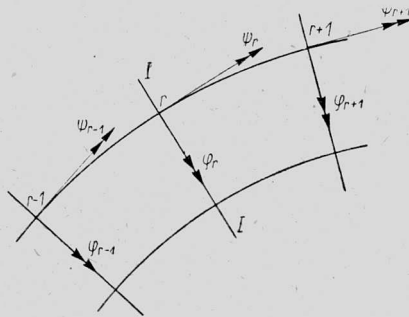
wielkości φ_i , ψ_i .

Dalsze uproszczenia otrzymamy w przypadku układów symetrycznych względem jednej lub więcej osi symetrii. Rozważmy układ przedstawiony na rys. 28 o jednej osi symetrii $I-I$. Mamy tu przy obciążeniu symetrycznym względem osi $I-I$

$$(5.6) \quad \begin{cases} \varphi_{r-1} = -\varphi_{r+1}, & \varphi_r = 0, \\ \psi_{r-1} = \psi_{r+1}, & \psi_r \neq 0, \\ \delta_{r-1} = \delta_{r+1}, & \delta_r \neq 0. \end{cases}$$

Dla obciążenia antymetrycznego względem osi $I-I$ jest

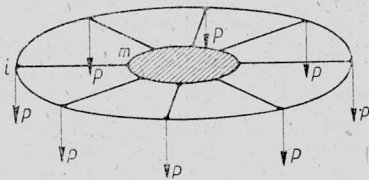
$$(5.7) \quad \begin{cases} \varphi_{r-1} = \varphi_{r+1}, & \varphi_r \neq 0, \\ \psi_{r-1} = -\psi_{r+1}, & \psi_r = 0, \\ \delta_{r-1} = -\delta_{r+1}, & \delta_r = 0. \end{cases}$$



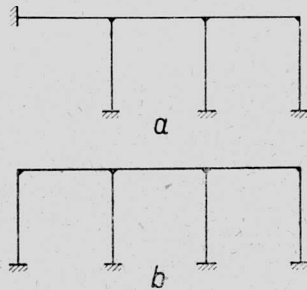
Rys. 28

Obciążenie niesymetryczne należy zatem rozłożyć na część symetryczną i część antymetryczną.

Niezwykle prosto rozwiązuje się układy o symetrii cyklicznej i obciążone w sposób osiowo symetryczny. Dla przykładu podamy rozwiązanie dla rusztu przedstawionego na rys. 29. Jako jedyne niewiadome wystąpią tu nadliczbowe ψ i δ , wspólne dla wszystkich węzłów.



Rys. 29



Rys. 30

Z układu równań (5.2.2) i (5.2.3) otrzymamy

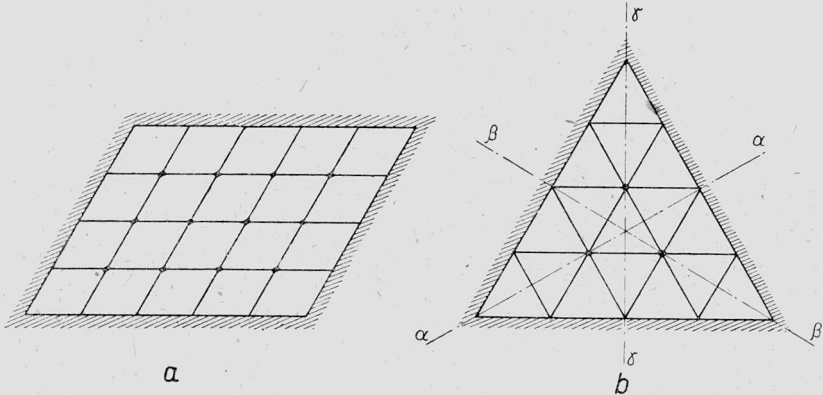
$$(5.8) \quad \begin{cases} \psi (2k - 2\bar{k} + \mu_{mi}) - \delta \mu'_{mi} = 0, \\ -\psi \mu'_{im} + \delta \mu''_{im} - P = 0. \end{cases}$$

Z rozwiązania tego układu równań uzyskamy

$$(5.9) \quad \delta = P \frac{2(k - \bar{k}) + \mu_{im}}{-\mu'_{im} + \mu''_{im} + \mu'_{im} [\mu_{im} + 2(k - \bar{k})]}, \quad \psi = \frac{\mu'_{im}}{2(k - \bar{k}) + \mu_{im}} \delta.$$

Szczególnym przypadkiem rusztu prostokątnego składającego się z prętów prostych jest rama ciągła, obciążona prostopadle do swojej płaszczyzny.

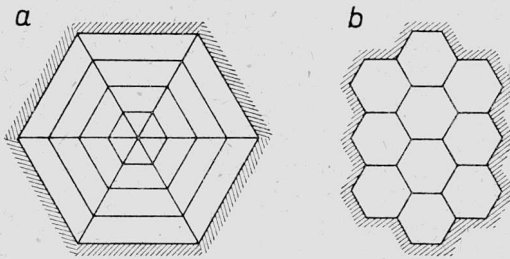
Obciążenie to występuje przy działaniu wiatru na ramę lub jako działanie ciężaru własnego ramy w trakcie jej montażu. Na rysunku 30 przedstawiono dwie ramy tego typu. Piewsza rama jest układem dziewięciokrotnie niewyznaczalnym statycznie i geometrycznie, druga jest niewyznaczalna dwunastokrotnie geometrycznie i dziewięciokrotnie statycznie. W pierwszym przypadku posłużymy się metodą odkształceń jako prostszą i prędzej do celu prowadzącą, w drugim natomiast należy rozwiązać układ metodą sił.



Rys. 31

Pośród rusztów regularnych na uwagę zasługują ruszty składające się z dwu lub więcej gromad prętów, krzyżujących się pod tym samym kątem. Należą tu ruszty przedstawione na rys. 31.

Często spotykanymi rusztami są ruszty o siatce składającej się z belek promienistych i belek pierścieniowych, w postaci wieloboków umiarowych (rys. 32 a), lub ruszty składające się z wieloboków foremnych (rys. 32 b).



Rys. 32

lub więcej osi symetrii, to otrzymamy znaczne zmniejszenie ilości nadliczbowych.

Wskazać należy wreszcie na to, że w praktyce konstrukcyjnej spotkać się można z rusztami o dowolnej siatce. Nie podajemy tu jednak ogólnej postaci równań kanonicznych dla tych układów jako zbyt złożonej.

6. Ruszty spoczywające na sprężystym podłożu

Ruszty spoczywające na sprężystym podłożu występują nader często w budownictwie jako fundamenty pod konstrukcjami ramowymi. Układy rusztowe tego typu rozwiązuje się na ogół z pominięciem sztywności skręcania belek, co, oczywiście, nie daje ekonomicznej konstrukcji.

Rozwiązanie rusztów spoczywających na sprężystym podłożu przy użyciu metody odkształceń nie nastęrcza znaczniejszych trudności; tok postępowania jest identyczny jak dla rusztów nie spoczywających na sprężystym podłożu.

Korzystamy tu ze związków wyprowadzonych w p. 1 i 3. Należy jedynie dodatkowo ułożyć równania transformacyjne, których współczynniki są nie tylko funkcjami wielkości geometrycznych i sprężystych pręta, ale również zależą od współczynnika gruntu.

Założymy tu uproszczony model podłoża, przyjmujący proporcjonalność ugięcia $w(x)$ pręta do odporu $r(x)$ podłoża:

$$(6.1) \quad w(x) = \frac{r(x)}{c}.$$

Tutaj c jest współczynnikiem zależnym od fizycznych własności podłoża. Wielkość c waha się w granicach od 5 kG/cm^3 (drobny piasek) do 200 kG/cm^3 (ił ściśły). Zależność (6.1) odpowiada dostatecznie rzeczywistości tylko dla małych ugięć. Załóżmy dalej, że związek (6.1) jest słuszny dla każdego x w obrębie pręta; jest to równoznaczne z pozostawieniem belki w styczności z podłożem na całej swej długości. Ponadto pomijamy tarcie występujące między podłożem i belką. Mimo że związek (6.1) nie obrazuje dostatecznie dokładnie pracy podłoża [w rzeczywistości $w(x)$ jest zależne od odporu podłoża nie tylko w punkcie x , ale również od odporu wzdłuż całej belki], posłużymy się tym związkiem w dalszych rozważaniach ze względu na jego prostotę; poza tym przy założeniu (6.1) uzyskano dobre wyniki w obliczeniach wielu konstrukcji (fundamenty słuz, statyka nawierzchni kolejowej itd.) Ograniczymy się jedynie do belek prostych, spoczywających na sprężystym podłożu.

Rozważmy pręt i - k spoczywający na sprężystym podłożu. Niech węzły układu doznają przemieszczenia o składowych φ_{ik} , ψ_{ik} i δ_{ik} oraz φ_{ki} , ψ_{ki} i δ_{ki} . Dla wyznaczenia ugięcia belki posługujemy się równaniem różniczkowym

$$(6.2) \quad EI \frac{d^4 w}{dx^4} + cwb = 0,$$

gdzie EI jest sztywnością zginania belki, a b jej szerokością.

Równanie to doprowadzamy do postaci

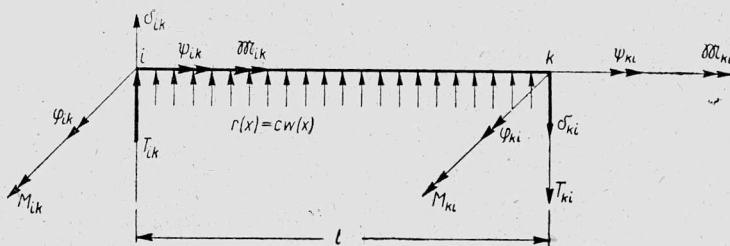
$$(6.3) \quad \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = 0,$$

gdzie

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{bc}}$$

Rozwiązaniem równania (6.3) jest

$$(6.4) \quad w = U_1 \cos \xi \cosh \xi + U_2 \cos \xi \sinh \xi + U_3 \sin \xi \cosh \xi + U_4 \sin \xi \sinh \xi.$$



Rys. 33

Stałe całkowania wyznaczmy z następujących warunków brzegowych

$$(6.5) \quad \begin{aligned} w(0) &= -\delta_{ik}, & w(\eta) &= \delta_{ki}, \\ \frac{EI}{L^2} w''(0) &= -M_{ik}, & \frac{EI}{L^2} w''(\eta) &= M_{ki}, \end{aligned}$$

gdzie $\eta = l/L$.

Otrzymamy wówczas

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{aligned} U_1 &= -\delta_{ik}, \\ U_2 &= \frac{\delta_{ki} \cos \eta \sinh \eta + \delta_{ik} \sinh \eta \cosh \eta}{\sinh^2 \eta \cos^2 \eta + \cosh^2 \eta \sin^2 \eta} - \\ &\quad - \frac{L^2}{2EI} \frac{(M_{ki} \sin \eta \cosh \eta + M_{ik} \sin \eta \cos \eta)}{\sinh^2 \eta \cos^2 \eta + \cosh^2 \eta \sin^2 \eta}, \\ U_3 &= \frac{\delta_{ki} \sin \eta \cosh \eta + \delta_{ik} \sin \eta \cos \eta}{\cos^2 \eta \sinh^2 \eta + \cosh^2 \eta \sin^2 \eta} + \\ &\quad + \frac{L^2}{2EI} \frac{(M_{ik} \cosh \eta \sinh \eta + M_{ki} \cos \eta \sin \eta)}{\cos^2 \eta \sinh^2 \eta + \cosh^2 \eta \sin^2 \eta}, \\ U_4 &= -\frac{M_{ik} L^2}{2EI}. \end{aligned} \right.$$

Wyrażając wielkości φ_{ik} i φ_{ki} za pomocą związków

$$\left[\frac{dw}{dx} \right]_{x=0} = \frac{dw}{L d\xi} = \varphi_{ik}, \quad \left[\frac{dw}{dx} \right]_{x=l} = \left[\frac{dw}{L d\xi} \right]_{\xi=\eta} = \varphi_{ki},$$

i zastępując występujące tu stałe całkowania za pośrednictwem wzorów (6.6), otrzymamy związki między momentami przywęzłowymi i składowymi przemieszczeń węzłów φ_{ik} , φ_{ki} , δ_{ik} i δ_{ki} .

Po prostych przekształceniach uzyskamy

$$(6.7) \quad \begin{cases} M_{ik} = \mu_{ik} \varphi_{ik} + \bar{\mu}_{ik} \varphi_{ki} - \mu'_{ik} \delta_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \delta_{ki}, \\ M_{ki} = \bar{\mu}_{ik} \varphi_{ki} + \mu_{ik} \varphi_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \delta_{ik} - \mu'_{ik} \delta_{ki}. \end{cases}$$

Tutaj

$$\mu_{ik} = \frac{2EI}{l} \eta \frac{\sinh \eta \cosh \eta - \sin \eta \cos \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta},$$

$$\bar{\mu}_{ik} = \frac{2EI}{l} \eta \frac{\cosh \eta \sin \eta - \cos \eta \sinh \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta},$$

$$\mu'_{ik} = \frac{2EI}{l^2} \eta^2 \frac{\sinh^2 \eta + \sin^2 \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta},$$

$$\bar{\mu}'_{ik} = \frac{2EI}{l^2} 2\eta^2 \frac{\sinh \eta \sin \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta}.$$

Dla $\eta = 0$, a więc w braku sprężystego podłoża, otrzymamy

$$\mu_{ik} = \frac{4EI}{l}, \quad \bar{\mu}_{ik} = \frac{2EI}{l}, \quad \mu'_{ik} = \bar{\mu}'_{ik} = \frac{6EI}{l^2},$$

zgodnie ze wzorami (2.27).

Siły tnące otrzymamy ze wzorów

$$T_{ik} = - \left[\frac{EI}{L^3} \frac{d^3 w}{d\xi^3} \right]_{\xi=0}, \quad T_{ki} = - \left[\frac{EI}{L^3} \frac{d^3 w}{d\xi^3} \right]_{\xi=\eta}$$

Po przekształceniach uzyskamy wreszcie

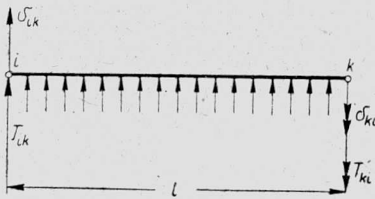
$$(6.8) \quad \begin{cases} T_{ik} = - \mu'_{ik} \varphi_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \varphi_{ki} + \mu''_{ik} \delta_{ik} + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ki}, \\ T_{ki} = - \bar{\mu}'_{ik} \varphi_{ki} - \mu'_{ik} \varphi_{ik} + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ik} + \mu''_{ik} \delta_{ki}. \end{cases}$$

Tutaj

$$(6.9) \quad \begin{cases} \mu''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} 2\eta^3 \frac{\sinh \eta \cosh \eta + \cos \eta \sin \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta}, \\ \bar{\mu}''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} 2\eta^3 \frac{\cosh \eta \sin \eta + \cos \eta \sinh \eta}{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta}. \end{cases}$$

Dla $\eta = 0$ otrzymamy $\mu''_{ik} = \bar{\mu}''_{ik} = 12EI/l^3$ zgodnie ze wzorami (2.27). Oporu podłoża przy skręcaniu prętów nie uwzględniamy, gdyż belki fundamentowe betonuje się w deskowaniu bocznym, które się usuwa po stwardnieniu betonu.

Przywęzłowe momenty skręcające wyrazimy związkami



Rys. 34

$$\mathfrak{M}_{ik} = \frac{GC}{l} (\psi_{ik} - \psi_{ki}),$$

$$\mathfrak{M}_{ki} = -\frac{GC}{l} (\psi_{ik} - \psi_{ki}).$$

Dla obciążenia zewnętrznego działającego na pręt oraz przy podanych przemieszczeniach brzegowych równania transformacyjne przyjmują postać

$$(6.10.1) \quad M_{ik} = M_{ik}^0 + \mu_{ik} \varphi_{ik} + \varphi_{ki} \bar{\mu}_{ik} - \mu'_{ik} \delta_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \delta_{ki},$$

$$(6.10.2) \quad M_{ki} = M_{ki}^0 + \bar{\mu}_{ik} \varphi_{ik} + \varphi_{ki} \mu_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \delta_{ik} - \mu'_{ik} \delta_{ki},$$

$$(6.10.3) \quad \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ik}^0 + k_{ik} (\psi_{ik} - \psi_{ki}),$$

$$(6.10.4) \quad \mathfrak{M}_{ki} = \mathfrak{M}_{ki}^0 - k_{ik} (\psi_{ik} - \psi_{ki}),$$

$$(6.10.5) \quad T_{ik} = T_{ik}^0 - \mu'_{ik} \varphi_{ik} - \bar{\mu}'_{ik} \varphi_{ki} + \mu''_{ik} \delta_{ik} + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ki},$$

$$(6.10.6) \quad T_{ki} = T_{ki}^0 - \bar{\mu}'_{ik} \varphi_{ik} - \mu'_{ik} \varphi_{ki} + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ik} + \mu''_{ik} \delta_{ki}.$$

Wielkości $M_{ik}^0, M_{ki}^0, \dots, T_{ki}^0$ są siłami brzegowymi, wywołanymi obciążeniem zewnętrznym, działającym w układzie podstawowym geometrycznie wyznaczalnym. Wartości te nie trudno wyznaczyć znanymi metodami.

Niech w węzle i istnieje przegub tak skonstruowany, że $M_{ik} = 0$ i $\mathfrak{M}_{ik} = 0$. Z równań (6.10.1) i (6.10.3) wyznaczamy φ_{ik} oraz ψ_{ik} i wstawiamy te wielkości do wzorów (6.10.2) i (6.10.4).

Otrzymamy następujące wzory transformacyjne :

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{ik} = 0, \\ M_{ki} = M_{ki}^0 + \mu_{ik} \varphi_{ki} - \bar{\mu}'_{ik} \delta_{ik} - \mu'_{ik} \delta_{ki}, \\ \mathfrak{M}_{ik} = 0, \\ \mathfrak{M}_{ki} = [\mathfrak{M}_{ki}], \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \bar{\mu}'_{ik} \varphi_{ki} + \mu''_{ik} \delta_{ik} + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ki}, \\ T_{ki} = T_{ki}^0 - \mu'_{ik} \varphi_{ki} + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ik} + \mu''_{ik} \delta_{ki}. \end{array} \right.$$

Tutaj $M_{ki}^0, \dots, T_{ki}^0$ są siłami przywęzłowymi w pręcie utwierdzonym zupełnie w węźle k , a podpartym w sposób swobodny w węźle i .

We wzorach (6.11) oznaczają

$$(6.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_{ik} = \frac{2EI}{l} \eta \frac{\cosh^2 \eta - \cos^2 \eta}{\sinh \eta \cosh \eta - \sin \eta \cos \eta}, \\ \bar{\mu}_{ik} = \frac{2EI}{l^2} \eta^2 \frac{\sinh \eta \cosh \eta + \sin \eta \cos \eta}{\sinh \eta \cosh \eta - \sin \eta \cos \eta}, \\ \mu'_{ik} = \frac{2EI}{l^2} 2\eta^2 \frac{\sinh \eta \cos \eta + \cosh \eta \sin \eta}{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}, \\ \mu''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} 2\eta^3 \frac{\cosh^2 \eta + \cos^2 \eta}{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}, \\ \bar{\mu}''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} 4\eta^3 \frac{\cosh \eta \cos \eta}{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}, \\ \mu''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} 4\eta^3 \frac{\cosh^2 \eta - \sin^2 \eta}{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}. \end{array} \right.$$

Dla $\eta \rightarrow 0$ otrzymamy

$$\mu_{ik} = \frac{3EI}{l}, \quad \mu'_{ik} = \bar{\mu}_{ik} = \frac{3EI}{l^2}, \quad \mu''_{ik} = \bar{\mu}''_{ik} = \mu''_{ik} = \frac{3EI}{l^3},$$

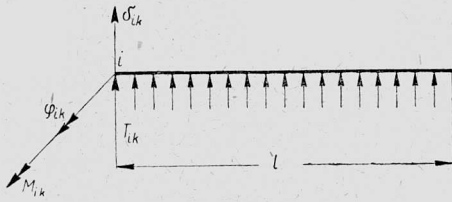
zgodnie ze wzorami (2.28).

W przypadku przegubów w i oraz k mamy

$$(6.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{ik} = T_{ik}^0 + \mu''_{ik} \delta_{ik} + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ki}, \\ T_{ki} = T_{ki}^0 + \bar{\mu}''_{ik} \delta_{ik} + \mu''_{ik} \delta_{ki}. \end{array} \right.$$

Tutaj jest

$$(6.14) \quad \begin{cases} \mu''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} \frac{\eta^3}{2} \frac{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}{\cosh^2 \eta - \cos^2 \eta}, \\ \mu'_{ik} = \frac{2EI}{l^3} \eta^3 \frac{\sinh \eta \cos \eta - \cosh \eta \sin \eta}{\cosh^2 \eta - \cos^2 \eta}. \end{cases}$$



Rys. 35

Dla belki wspornikowej (rys. 35) otrzymamy następujące wzory transformacyjne:

$$(6.15) \quad \begin{cases} M_{ik} = M_{ik}^0 + \mu_{ik} \varphi_{ik} - \mu'_{ik} \delta_{ik}, \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \mu'_{ik} \varphi_{ik} + \mu''_{ik} \delta_{ik}, \end{cases}$$

gdzie

$$(6.16) \quad \begin{cases} \mu_{ik} = \frac{2EI}{l} \frac{\eta}{2} \frac{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}{\cosh^2 \eta + \cos^2 \eta}, \\ \mu'_{ik} = \frac{2EI}{l^2} \eta^2 \frac{\sinh^2 \eta + \sin^2 \eta}{\cosh^2 \eta + \cos^2 \eta}, \\ \mu''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} \eta^2 \frac{\sinh 2\eta + \sin 2\eta}{\cosh^2 \eta + \cos^2 \eta}. \end{cases}$$

Dla belki wspornikowej nieskończenie długiej ($l \rightarrow \infty$) otrzymamy

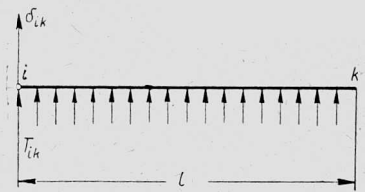
$$(6.17) \quad \begin{cases} M_{ik} = M_{ik}^0 + \frac{2EI}{l} \eta \varphi_{ik} - \frac{2EI}{l^2} \eta^2 \delta_{ik}, \\ T_{ik} = T_{ik}^0 - \frac{2EI}{l^2} \eta^2 \varphi_{ik} + \frac{2EI}{l^3} \eta^3 \delta_{ik}. \end{cases}$$

Dla wspornika o skończonej długości, opatrzonego przegubem w węźle i (rys. 36), mamy

$$(6.18) \quad T_{ik} = T_{ik}^0 + \mu''_{ik} \delta_{ik},$$

gdzie

$$(6.19) \quad \mu''_{ik} = \frac{2EI}{l^3} 2\eta^3 \frac{\sinh^2 \eta - \sin^2 \eta}{\sinh 2\eta - \sin 2\eta}.$$



Rys. 36

W szczególnym przypadku nieskończenie długiego wspornika znajdziemy

$$(6.20) \quad T_{ik} = T_{ik}^0 + \frac{2EI}{l^3} 2\eta^3 \delta_{ik}.$$

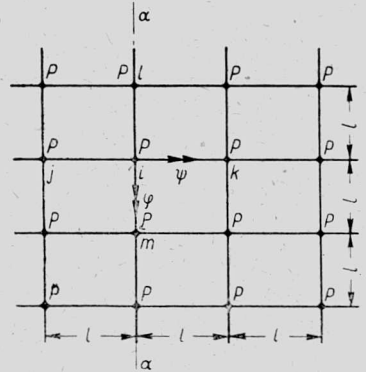
Przy obciążeniu rusztu leżącego na sprężystym podłożu siłami prostopadłymi do płaszczyzny rusztu lub momentami o wektorach leżących

w płaszczyźnie rusztu pozostają w mocy równania warunkowe, omówione w p. 1 i 3.

Po wyznaczeniu nadliczbowych układu wyznaczamy siły przywęzłowe korzystając z równań transformacyjnych. Znajomość wielkości M_{ik} , M_{ki} , δ_{ik} oraz δ_{ki} pręta $i-k$ pozwoli na wyznaczenie stałych U_1, \dots, U_4 ze wzorów (6.6). Tym samym określona jest linia ugięcia pręta $i-k$ (wzór 6.4). Momenty zginające i siły tnące, w dowolnej odległości $x = \xi l$ od podpory i , otrzymamy ze znanych związków

$$(6.21) \quad M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad T = -EI \frac{d^3 w}{dx^3}.$$

Dla przykładu podamy rozwiązanie dla nader prostego przypadku rusztu ortogonalnego nieograniczonego, składającego się z prętów o jednakowych właściwościach sprężystych i geometrycznych. Niech ruszt ten obciążony będzie jedynie w węzłach (rys. 37).



Rys. 37

Ponieważ osie $\alpha-\alpha$ i $\beta-\beta$ są osiami symetrii, jako jedyne równanie pozostaje

$$(6.22) \quad -T_{ik} + T_{ij} + T_{im} - T_{il} - P = 0.$$

Z równań (6.10) otrzymamy

$$(6.23) \quad \begin{cases} T_{ij} = \bar{\mu}'' (-\delta_j) + \mu'' \delta_i, \\ -T_{ik} = -\mu'' (-\delta_i) - \bar{\mu}'' \delta_k, \\ T_{im} = \bar{\mu}'' (-\delta_m) + \mu'' \delta_i, \\ -T_{il} = -\mu'' (-\delta_i) - \bar{\mu}'' \delta_l. \end{cases}$$

Równanie (6.22) napiszemy zważywszy, że $\delta_i = \delta_j = \delta_k = \delta_l = \delta_m = \delta$, w postaci

$$4(\mu'' - \bar{\mu}'')\delta - P = 0.$$

Stąd

$$\delta = \frac{P}{4(\mu'' - \bar{\mu}'')}.$$

Ze wzorów (6.23) obliczymy

$$T_{ij} = -T_{ik} = T_{im} = -T_{il} = \frac{P}{4}.$$

Ze wzoru (6.10.1) obliczymy moment

$$(6.24) \quad \begin{cases} M_{ik} = -\mu'(-\delta_i) - \bar{\mu}'\delta_k = (\mu' - \bar{\mu}')\delta = \frac{P}{4} \frac{\mu' - \bar{\mu}'}{\mu'' - \bar{\mu}''}, \\ M_{ik} = \frac{Pl}{8\eta} \frac{(\sinh \eta - \sin \eta)^2}{\cosh \eta (\sinh \eta - \sin \eta) + \cos \eta (\sinh \eta + \sin \eta)}. \end{cases}$$

Dla $\eta > 7$ traktować można pręty jako nieskończenie długie.

Stosując wzory (6.17) otrzymamy z równania (6.22)

$$(6.25) \quad \begin{cases} \delta = \frac{Pl^3}{8EI\eta^3}, & T_{ij} = -T_{ik} = T_{im} = -T_{il} = \frac{P}{4}, \\ M_{ik} = -M_{ij} = M_{il} = -M_{im} = \frac{Pl}{8\eta}. \end{cases}$$

Wyprowadzone tu związki znaleźć mogą również zastosowanie do rozwiązywania układów ramowych płaskich i przestrzennych, których słupy związane są w sposób sztywny lub przegubowy z belkami fundamentowymi spoczywającymi na sprężystym podłożu.

Literatura cytowana w tekście

- [1] K. Beyer, *Die Statik im Eisenbetonbau*, Berlin 1935.
- [2] A. Hawnanek, *Allgemeine Theorie der Wirkung von Querriegeln bei zweiseitigen Bogenbrücken*, Zurych 1927.
- [3] L. Mann, *Theorie der Rahmentragwerke auf neuer Grundlage*, Berlin 1927.
- [4] W. Nowacki, *Statyka rusztów płaskich*, 1945 (dysertacja doktorska, maszynopis w bibl. centr. Politechniki Warszawskiej).
- [5] P. Noli, *Il metodo delle deformazione nel piano*, Mediolan 1939.
- [6] A. Ostefeld, *Die Deformationsmethode*, Berlin 1928.
- [7] I. M. Rabino wicz, *Kurs stroitielnoj miechaniki stierzniowych sistem*, Moskwa 1940.
- [8] M. B. Remez, *K woprosom o rascetie kriwoliniejnych i łomanych w planie bałok*, Leningrad 1938.
- [9] A. A. Umanski, *Prostranstwiennyje sistemy*, Moskwa 1948.
- [10] St. Szegö, *Über die Berechnung quadratischer Kreuzeckroste*.
- [11] W. Wierzbicki, *Teoria dźwigarów załamanych w planie*, Warszawa 1926.
- [12] W. Wierzbicki, *Belki ciągłe załamane w planie*, 1931.
- [13] W. Wierzbicki, *De l'application des équations simultanées à différences finies en statique des constructions*, Zurych 1936.
- [14] W. Wierzbicki, *Dźwigary załamane w planie*, Warszawa 1954.

Резюме

СТАТИКА ПЛОСКИХ РОСТВЕРКОВ

Работа занимается применением метода деформаций, широко используемого в статике плоских рам, к рамным системам, нагруженным силами, перпендикулярными к плоскости рамы, или моментами, векторы которых лежат в плоскости рамной системы. Системы такого типа называем плоскими ростверками.

Эти системы находят широкое применение в железобетонном строительстве, в виде изогнутых в плане балок, кольцевых балок, плоских рам, под действием ветровой нагрузки и т. д.

В первом пункте приведен общий метод решения систем этого типа; во втором пункте выведены общие формулы трансформации этого метода для закрученных и изогнутых в плане стержней.

В далее следующих пунктах выведено каноническое уравнение этого метода, специализируя его на типичные для строительства системы.

Наконец в последнем пункте методы деформаций расширены на ростверки, лежащие на упругом основании.

Summary

THE STATICS OF FLAT GRIDWORK SYSTEMS

The subject of this paper is the application of the deformation method, widely used in the statics of flat frames, for frame systems loaded with forces perpendicular to the plane of the frame or with moments, whose vectors lie in the plane of the system. Systems of this kind are called flat gridwork systems.

These systems are applied extensively in reinforced concrete structures such as broken line girders, annular beams, flat frames loaded by forces caused by the wind, etc.

In the first section a general method of solution is given, while the second section deals with the formulae of general transformation for curved and broken line bars.

In the following sections the canonical equation of the above method is expanded. This is then reduced to more specialized forms which are typical for building technique.

Finally, in the last section, the deformation methods are extended to include gridwork systems resting on an elastic foundation.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1954 r.



KOMITET REDAKCYJNY

ROZPRAW INŻYNIERSKICH

prosi autorów o przestrzeganie następujących wskazówek

(1) Prace w języku polskim, przepisane na maszynie (nie światłodruki), należy składać w dwóch egzemplarzach. Wzory powinny być napisane wyraźnie atramentem, rysunki (szkice) dołączone na oddzielnych kartach (nie w tekście).

(2) Obowiązuje numeracja dziesiętna wzorów [np. wzór 5 w p. 2 oznacza się (2.5)]. Numery wzorów należy umieszczać z lewej strony. Należy unikać numeracji rzymskiej i alfabetycznej (wzorów, rysunków, paragrafów, rozdziałów).

(3) Do pracy należy dołączyć streszczenie nie przekraczające jednej strony maszynopisu w języku polskim (również wtedy, gdy autor składa streszczenie w języku obcym) i podać ewentualnie terminologię w dwóch językach (w tym jeden rosyjski), na które streszczenie ma być przełożone.

(4) Literaturę cytowaną w tekście należy zestawić w końcu pracy podając nazwisko i imię autora, tytuł pracy, miejsce i rok wydania (w przypadku cytowania czasopisma również numer zeszytu). Nazwiska i tytuły rosyjskie należy pisać alfabetem rosyjskim. W tekście należy powoływać się na numery prac (w nawiasie kwadratowym, np. [5]) według zestawienia.

(5) Funkcje trygonometryczne należy oznaczać przez \sin , \cos , tg , ctg ; funkcje hiperboliczne z dodaniem litery h . Współczynnik Poissona oznacza się przez ν . Kresek pionowych używa się tylko do oznaczenia wartości bezwzględnej. Wszelkie zestawienia należy nazywać tablicami (nie tabelami).

(6) Autorowi przysługuje prawo do przeprowadzenia ostatecznej korekty (bez zmian tekstu) dokładnie w terminie wyznaczonym przez Redakcję.

(7) Redakcji przysługuje prawo do przeprowadzenia korekty stylistycznej i do dostosowania oznaczeń oraz układu pracy do norm przyjętych w ROZPRAWACH.

Niestosowanie się do powyższych wskazówek opóźnia publikację pracy

Cena zł 20.—

WYDAWNICTWA
ZAKŁADU MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH IPPT
P O L S K I E J A K A D E M I I N A U K

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ
KWARTALNIK POŚWIĘCONY PRACOM NAUKOWYM Z ZAKRESU TEORII
SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMO-
DYNAMIKI ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TEORII KONSTRUKCJI
Ukazały się tomy I—V oraz zeszyt 1 i 2 tomu VI. W druku zeszyt 3 tomu VI

R O Z P R A W Y I N Ż Y N I E R S K I E
U K A Z A Ł Y S I Ę

- I. F. Szelaḡowski, Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych
— O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego
- II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic
- III. Z. Klębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia
- IV. M. Życzkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej
- V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć
- VI. W. Olszak, Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (Plastyczne wyczerpanie nośności)
- VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu
- VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt na podstawie metody Ritz'a
- IX. W. Fiszdón, O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań
- X. Z. Wasiutyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych
- XI. W. Wierzbicki, Dźwigary załamane w planie
- XII. W. Wierzbicki, O powstawaniu wyboczenia prętów prostych
- XIV. W. Żenczykowski, Podstawy wytrzymałościowe obliczeń statycznych konstrukcji murowanych z cegły
- XVI. I. M a l e c k i, Metody zastosowania rachunku tensorowego
- XVII. J. N o w i ń s k i, Podstawy teorii plastyczności (I). Siedem wykładów
- XVIII. W. N o w a c k i, Statyka rusztów płaskich