

A 1904 I

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK

TOM II . ZESZYT 2



WARSZAWA . 1954

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

TREŚĆ TOMU II ZESZYTU 2

XIX	BOGUSZ W. Z teorii płyt ortotropowych	191
XX	SZMELTER J. Rozwiązanie zagadnienia błony metodą różnic skończonych z użyciem specjalnego liczydła	201
XXI	SOKOŁOWSKI M. Dwustopniowy sposób obliczania pewnego typu płyt ortotropowych	215
XXII	ŻYCZKOWSKI M. Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów niepryzmatycznych	231

TABLE DES MATIERES DU VOL. II FASC. 2

XIX	BOGUSZ W. Из теории ортотропных пластинок From the Theory of Orthotropic Plates	191
XX	SZMELTER J. Решение проблемы мембраны методом конечных разностей при применении специальных счетов Solution of the Membrane Problem by Means of the Method of Finite Differences with the Use of a Special Computation Device	201
XXI	SOKOŁOWSKI M. Двустадийный способ расчета некоторого типа ортотропных пластинок A Two-Stage Method of Solving Orthotropic Plate Problems	215
XXII	ŻYCZKOWSKI M. Упруго-пластический продольный изгиб некоторых непризматических стержней Elasto-Plastic Buckling of Non-Prismatic Bars	231

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

XIX—XXII



WARSZAWA • 1954

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘ-
ŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AERODYNAMIKI,
TERMODYNAMIKI ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW
KONSTRUKCJI

R A D A R E D A K C Y J N A
WITOLD NOWACKI — PRZEWODNICZĄCY
JULIAN BONDER MICHAŁ BROSZKO WAŁAW OLSZAK
BOHDAN STEFANOWSKI STANISŁAW TURSKI
WITOLD WIERZBICKI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y
JERZY NOWIŃSKI — REDAKTOR
TADEUSZ IWIŃSKI JÓZEF JANICZEK

Adres Redakcji
WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE XIX-XXII

Copyright 1954 by Polska Akademia Nauk
Warszawa (Poland). Printed in Poland. All rights reserved

Nakład 1440+100 nadb. Papier druk. sat. 70x100/16, 70 g. Arkuszy wydawn. 7,5. Arkuszy drukarskich 6³/₄.
Oddano do składania dn. 8.VII.1954. Druk ukończ. w styczniu 1955. Zam. 421. M-5-13819 Cena zł 20.—

Krakowska Drukarnia Naukowa — Kraków, ul. Czapskich 4.

WŁADYSŁAW BOGUSZ

Z TEORII PŁYT ORTOTROPOWYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

XIX

W przypadku płyty izotropowej cienkiej, obciążonej obciążeniem ciągłym $p(x,y)$, równanie powierzchni ugięcia ma postać

$$(1) \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = -\frac{p}{N},$$

gdzie $z(x,y)$ ugięcie płyty, $p(x,y)$ obciążenie, $N = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E moduł sprężystości, h grubość płyty oraz ν liczba Poissona. Dla płyty ortotropowej moduł sprężystości wzdłuż dwóch osi prostopadłych jest różny, np. wzdłuż osi x jest E_1 , a wzdłuż osi y E_2 ($E_1 \neq E_2$); odpowiednie liczby Poissona są ν_1 i ν_2 ($\nu_1 \neq \nu_2$).

Dla takiej płyty równanie powierzchni ugięcia jest

$$(2) \quad A \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + C \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = -\frac{p}{K},$$

gdzie

$$(3) \quad \begin{cases} A = -\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, & C = -\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}, & K = \frac{h^3}{12}, \\ 2B = -\left[\frac{1}{1-\nu_1\nu_2} (E_1\nu_2 + E_2\nu_1) + 4G_0 \right]. \end{cases}$$

Tutaj G_0 jest modułem sprężystości postaciowej. W przypadku gdy $B = -\sqrt{AC}$, można równanie (2) sprowadzić do postaci (1) (por. [1]).

Nasuwa się pytanie, czy można równanie (2) w ogólnym przypadku przedstawić albo w postaci (1), albo w takiej postaci, aby obliczenie płyty nie nastroczało dużych trudności rachunkowych.

Wygodnym sposobem obliczania płyt jest metoda dwustopniowa, podana przez H. Marcusa (por. [2]).

Zastosowanie tej metody wymaga rozłożenia równania powierzchni ugięcia płyty, np. w postaci (1), na dwa równania

$$\begin{aligned} \nabla^2 M &= -p, \\ \nabla^2 z &= -\frac{M}{N}. \end{aligned}$$

Aby więc zastosować metodę Marcusa, należy równanie (2) przedstawić w postaci możliwej do rozłożenia na takie lub podobne równania.

W szczególnym przypadku, mianowicie dla $p = 0$, równanie (2) zostało przedstawione w postaci (por. [3]).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) z = 0 \quad (\beta, \lambda = \text{const}).$$

Okazuje się, że równanie (2) można w ogólnym przypadku przedstawić w postaci

$$(2.1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) z = -\frac{p}{\gamma},$$

gdzie α , β i γ są stałe.

Należy w tym celu rozróżnić trzy przypadki:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \sqrt{E_1 E_2} = \frac{1}{2} [E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1 + 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2)], \\ \text{(II)} \quad & \sqrt{E_1 E_2} > \frac{1}{2} [E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1 + 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2)], \\ \text{(III)} \quad & \sqrt{E_1 E_2} < \frac{1}{2} [E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1 + 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2)]. \end{aligned}$$

W przypadku I dzieląc obie strony przez $(1 - \nu_1 \nu_2)$ otrzymamy

$$\sqrt{\frac{E_1}{(1 - \nu_1 \nu_2)} \frac{E_2}{(1 - \nu_1 \nu_2)}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2} (E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1) + 4G_0 \right],$$

czyli zgodnie z oznaczeniami (3) mamy $B = -\sqrt{AC}$.

W tym przypadku równanie (2) sprowadza się do równania (1) przez zastosowanie transformacji podanej przez M. T. Hubera, [1].

Rozpatrzmy *przypadek II*. Oznaczmy

$$(4) \quad \begin{cases} \sqrt{E_1} = k_1, & \sqrt{E_2} = k_2, & N = \frac{k^3}{12} \frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2}, \\ \sqrt{2\sqrt{E_1 E_2} - E_1 \nu_2 - E_2 \nu_1 - 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2)} = k_2. \end{cases}$$

Rozważmy równanie następujące:

$$(5) \quad -\frac{N}{k_1 k_2} \left(E_1 k_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_1 k_2 k_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + E_2 k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \times \\ \times \left(k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z = f(x, y).$$

Po wykonaniu działań otrzymamy równanie w postaci

$$(6) \quad N \left\{ -E_1 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - [E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1 + 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2)] \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - E_2 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right\} = f(x, y).$$

Wstawiając za N wartość (4) otrzymamy, porównując równanie (6) z równaniem (2), że $f(x, y) = -p(x, y)$, czyli (2) można napisać w postaci (5)

$$(7) \quad -\frac{N}{k_1 k_3} \left(E_1 k_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_1 k_2 k_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + E_2 k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \times \\ \times \left(k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z = -p(x, y).$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$(8) \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2k_1} \sqrt{k_3} + k_2 \sqrt{k_1}} \quad \text{i} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{2k_1} \sqrt{k_3} - k_2 \sqrt{k_1}}.$$

Jeżeli zastosujemy transformacje

$$(9) \quad \xi = \lambda \left(y - x \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right), \quad \eta = \mu \left(y + x \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right),$$

to równanie (7) przyjmie postać

$$(10) \quad -\frac{N\sqrt{k_3}}{k_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left[\lambda^2 \left(2k_3 - k_2 \sqrt{\frac{k_3}{k_1}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \mu^2 \left(2k_3 + k_2 \sqrt{\frac{k_3}{k_1}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] z = -p.$$

Jeżeli oznaczymy

$$(11) \quad \alpha = \lambda^2 \left(2k_3 - k_2 \sqrt{\frac{k_3}{k_1}} \right), \quad \beta = \mu^2 \left(2k_3 + k_2 \sqrt{\frac{k_3}{k_1}} \right), \quad \gamma = -\frac{N\sqrt{k_3}}{k_1},$$

to równanie (10) można napisać w postaci

$$(12) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) z = -\frac{p}{\gamma}.$$

W przypadku III przyjmijmy oznaczenie

$$(13) \quad L = \frac{1}{2} \{ E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1 + 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2) + \\ + \sqrt{[E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1 + 4G_0(1 - \nu_1 \nu_2)]^2 - 4E_1 E_2} \}.$$

Weźmy pod uwagę równanie

$$(14) \quad -\frac{N}{L} \left(L \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(E_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z = f(x, y).$$

Wykonując działania po lewej stronie (14) sprawdzimy, że równanie to przechodzi w równanie

$$(15) \quad -\frac{N}{L} \left(L \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(E_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z = -p(x, y).$$

Wprowadzimy zmianę zmiennej:

$$(16) \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{E_1}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{L}}.$$

Po zastosowaniu transformacji (16) otrzymamy równanie

$$-\frac{N}{L} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{L}{E_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{E_2}{L} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) z = -p.$$

Oznaczając

$$\alpha = \frac{L}{E_1}, \quad \beta = \frac{E_2}{L}, \quad \gamma = -\frac{N}{L},$$

otrzymamy równanie

$$(17) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) z = -\frac{p}{\gamma}.$$

W każdym więc przypadku można równanie (2) napisać w postaci (2.1).
Jeżeli teraz oznaczymy

$$M = \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) z,$$

to otrzymamy układ równań

$$(18) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) M = -\frac{p}{\gamma}, \quad M = \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) z.$$

Przy rozpatrywaniu momentów zginających i skręcających okazuje się, że funkcja M jest liniową kombinacją tych momentów; mianowicie momenty zginające i moment skręcający wyrażają się wzorami (por. [1])

$$\begin{aligned} M_{gx} &= -\frac{1}{1-\nu_1\nu_2} E_1 \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \\ M_{gy} &= -\frac{1}{1-\nu_1\nu_2} E_2 \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \nu_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \\ M_{skr} &= -2G_0 \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Rozważmy funkcję M określoną wzorem (18):

$$M = \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}, \quad \alpha = \frac{L}{E_1}, \quad \beta = \frac{E_2}{L}.$$

Po zastosowaniu transformacji odwrotnej (16) otrzymamy

$$M = L \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Jeżeli pomnożymy M_{gx} przez $12(L\nu_2 - E_2)/E_2 h^3$, a M_{gy} przez $12(E_2\nu_1 - L)/E_1 h^3$, to otrzymamy

$$M_{gx} \frac{12 L \nu_2 - E_2}{h^3 E_2} + M_{gy} \frac{12 E_2 \nu_1 - L}{h^3 E_1} = M.$$

W przypadku II funkcja M jest określona wzorem

$$M = \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2},$$

gdzie α i β są określone wzorami (11), (8) i (4). Po zastosowaniu transformacji odwrotnej (9) otrzymamy na M

$$M = k_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + k_3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Jeżeli pomnożymy M_{gx} przez $12(k_2\nu_1 - k_1)/E_2 h^3$, M_{gy} przez $12(k_1\nu_2 - k_2)/E_1 h^3$, a M_{skr} przez $-12k_2/2G_0 h^3$, to otrzymamy

$$M_{gx} \frac{12 k_2 \nu_1 - k_1}{h^3 E_2} + M_{skr} \left(-\frac{12 k_2}{h^3 2G_0} \right) + M_{gy} \frac{12 k_1 \nu_2 - k_2}{h^3 E_1} = M.$$

Mamy więc analogię do równania belki obciążonej obciążeniem ciągłym q , tj. do równania

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

Na tej analogii oparł swoje rozumowanie H. Marcus. Podał on metodę rozwiązywania płyt izotropowych, polegającą na rozwiązaniu stopniowym dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu metodą kolejnych przybliżeń.

Jak zastosować metodę H. Marcusa do płyt ortotropowych w przypadku III, wyjaśnimy na przykładzie płyty prostokątnej o brzegach swobodnie podpartych, obciążonej równomiernie na całej powierzchni.

Przykład. Obliczenie płyty prostokątnej o brzegach swobodnie podpartych, obciążonej równomiernie na całej powierzchni.

Wymiary płyty są $2a \times 2b$ (rys. 1). Moduł sprężystości wzdłuż osi x jest E_1 , a wzdłuż osi y jest E_2 .

Obierzmy siatkę sprężystą o wymiarach oczek $\lambda_x = a/2$ i $\lambda_y = b/2$.

Aby wykorzystać równanie (17), należy wprowadzić transformację $x = \xi\sqrt{E_1}$ i $y = \eta\sqrt{L}$, gdzie L jest określone wzorem (13). Wprowadzenie powyższych transformacji oznacza zmianę jednostki miary wzdłuż osi x i y .

Jeżeli j_0 jest jednostką miary w układzie x, y (rys. 1), to nowe jednostki będą $j_\xi = j_0/\sqrt{E_1}$ i $j_\eta = j_0/\sqrt{L}$.

Weźmy pod uwagę płytę zastępczą o wymiarach $2\bar{a} = 2a\sqrt{E_1}$ i $2\bar{b} = 2b\sqrt{L}$ (rys. 2) i obierzmy siatkę sprężystą o wymiarach oczek $\lambda_\xi = \lambda_x/\sqrt{E_1}$ i $\lambda_\eta = \lambda_y/\sqrt{L}$.

Rozpatrzmy pierwsze z równań (18) oraz równanie różnic skończonych dla dowolnego węzła siatki II (rys. 2) obciążonej w węzłach obciążeniem p/γ . Równanie to ma postać

$$\frac{(\Delta^2 w_k)_\xi}{\lambda_\xi^2} + \frac{(\Delta^2 w_k)_\eta}{\lambda_\eta^2} = -\frac{p}{S\gamma},$$

gdzie w_k oznacza przesunięcie pionowe (wzdłuż osi ζ) węzła k , a S jest pewną stałą. Przy tych samych warunkach brzegowych dla równania na M i w_k otrzymujemy $M_k = Sw_k$.

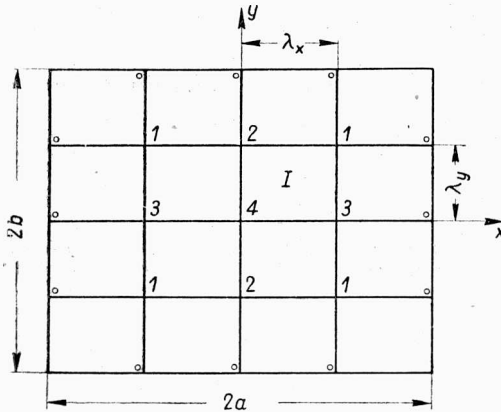
Wyznamy w_k dla siatki II w węzłach 1, 2, 3 i 4.

Równanie różnic skończonych można napisać w postaci

$$(\Delta^2 w_k)_\xi + \frac{\lambda_\xi^2}{\lambda_\eta^2} (\Delta^2 w_k)_\eta = -\frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma},$$

albo oznaczając $\lambda_\xi^2/\lambda_\eta^2$ przez κ^2 w postaci

$$(\Delta^2 w_k)_\xi + \kappa^2 (\Delta^2 w_k)_\eta = -\frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma}.$$

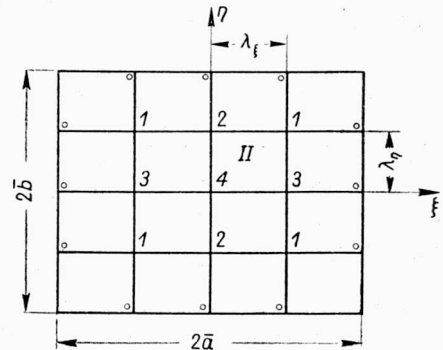


Rys. 1

Dla węzłów 1, 2, 3 i 4 otrzymamy układ równań algebraicznych

$$\begin{aligned} 2w_1(1 + \kappa^2) - w_2 - \kappa^2 w_3 &= \frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma}, \\ -2w_1 + 2w_2(1 + \kappa^2) - \kappa^2 w_4 &= \frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma}, \\ -2\kappa^2 w_1 + 2w_3(1 + \kappa^2) - w_4 &= \frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma}, \\ -2\kappa^2 w_2 - 2w_3 + 2w_4(1 + \kappa^2) &= \frac{p\lambda_\xi^2}{S\gamma}. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy



Rys. 2

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} M_1 = Sw_1 &= \frac{p\lambda_\xi^2(3 + 16\kappa^2 + 3\kappa^4)}{2\gamma(1 + \kappa^2)(1 + 6\kappa^2 + \kappa^4)}, \\ M_2 = Sw_2 &= \frac{p\lambda_\xi^2(4 + 21\kappa^2 + 7\kappa^4)}{2\gamma(1 + \kappa^2)(1 + 6\kappa^2 + \kappa^4)}, \\ M_3 = Sw_3 &= \frac{p\lambda_\xi^2(3 + 21\kappa^2 + 4\kappa^4)}{2\gamma(1 + \kappa^2)(1 + 6\kappa^2 + \kappa^4)}, \\ M_4 = Sw_4 &= \frac{2p\lambda_\xi^2(1 + 7\kappa^2 + \kappa^4)}{\gamma(1 + \kappa^2)(1 + 6\kappa^2 + \kappa^4)}. \end{aligned} \right.$$

Wyznamy ugięcie płyty I (rys. 1) w punktach 1, 2, 3 i 4. W tym celu weźmiemy siatkę II i zmienimy jednostkę długości wzdłuż osi ξ i η tak, aby $\bar{\lambda}_\xi = \lambda_\xi \sqrt{E_1/L}$ i $\bar{\lambda}_\eta = \lambda_\eta \sqrt{L/E_2}$.

Obciążymy tak otrzymaną siatkę w węzłach 1, 2, 3 i 4 obciążeniami w_1, w_2, w_3 i w_4 , obliczonymi ze wzorów (19) po podstawieniu za λ_ξ i λ^2 odpowiednio $\bar{\lambda}_\xi \sqrt{L/E_1}$ i $\bar{\lambda}_\xi^2 L^2 / \bar{\lambda}_\eta^2 E_1 E_2$.

Na przesunięcie węzłów 1, 2, 3 i 4 otrzymamy równanie różnicowe

$$(20) \quad \frac{(\Delta^2 \zeta_k)_\xi}{\bar{\lambda}_\xi^2} + \frac{(\Delta^2 \zeta_k)_\eta}{\bar{\lambda}_\eta^2} = -\frac{w_k}{S_2} = -\frac{M_k}{S_1 S_2},$$

gdzie S_1 i S_2 są stałe.

Weźmy pod uwagę równanie

$$M = \frac{L}{E_1} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{E_2}{L} \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

oraz równanie różnicowe (20).

Podstawmy

$$\bar{\lambda}_\xi = \lambda_\xi \sqrt{\frac{E_1}{L}} \quad \text{i} \quad \bar{\lambda}_\eta = \lambda_\eta \sqrt{\frac{L}{E_2}}.$$

Otrzymamy z równania (20) równanie

$$(21) \quad \frac{(\Delta^2 \zeta_k)_\xi}{\lambda_\xi^2} \frac{L}{E_1} + \frac{(\Delta^2 \zeta_k)_\eta}{\lambda_\eta^2} \frac{E_2}{L} = -\frac{w_k}{S_1} = -\frac{M_k}{S_1 S_2}.$$

Porównując równanie (21) z równaniem na M przy tych samych warunkach brzegowych otrzymamy

$$(22) \quad z_k = \zeta_k S_1 S_2.$$

Należy więc wyznaczyć ζ_k z równania (21). Możemy uprościć obliczenie i rozwiązać równanie (20), a następnie do wyniku podstawić za $\bar{\lambda}_\xi$ i $\bar{\lambda}_\eta$ odpowiednio $\lambda_\xi \sqrt{E_1/L}$ i $\lambda_\eta \sqrt{L/E_2}$.

Dla węzłów 1, 2, 3 i 4 otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} 2\zeta_1(1 + \bar{\kappa}^2) - \zeta_2 - \bar{\kappa}^2 \zeta_3 &= \frac{M_1 \bar{\lambda}_\xi^2}{S_1 S_2}, & -2\bar{\kappa}^2 \zeta_1 + 2\zeta_3(1 + \bar{\kappa}^2) - \zeta_4 &= \frac{M_3 \bar{\lambda}_\xi^2}{S_1 S_2}, \\ -2\zeta_1 + 2\zeta_2(1 + \bar{\kappa}^2) - \bar{\kappa}^2 \zeta_4 &= \frac{M_2 \bar{\lambda}_\xi^2}{S_1 S_2}, & -2\bar{\kappa}^2 \zeta_2 - 2\zeta_3 + 2\zeta_4(1 + \bar{\kappa}^2) &= \frac{M_4 \bar{\lambda}_\xi^2}{S_1 S_2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{\kappa}^2 = \frac{\bar{\lambda}_\xi^2}{\bar{\lambda}_\eta^2}.$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ i ζ_4 , a po podstawieniu do (22) odpowiednio z_1, z_2, z_3 i z_4 . W ten sposób otrzymamy pierwsze

przybliżenie ugięcia płyty I w punktach 1, 2, 3 i 4. Dalsze przybliżenia otrzymamy zagęszczając siatkę I przez przyjęcie wymiarów oczek ($a/4$, $b/4$), ($a/8$, $b/8$) itd.

Obliczenie uprości się, jeżeli będzie wykonane na szczególnych wartościach E_1 , E_2 i L .

Literatura cytowana w tekście

- [1] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, t. 2, Kraków 1950.
- [2] H. Marcus, *Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten*, Wrocław 1924.
- [3] W. Nowacki, *Pasma płytowe ortotropowe*, Arch. Mech. Stos., t. 3, 3-4, Gdańsk 1951.
- [4] H. Marcus, *Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten*, Berlin 1929.

Резюме

ИЗ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

В работе приведено трансформацию, сводящую квази-бигармоническое уравнение поверхности прогиба ортотропной пластинки к двум уравнениям с частными производными второго порядка, из которых одно является гармоническим. Такое представление уравнения поверхности прогиба ортотропной пластинки позволяет использовать двустепенный метод, применяемый в расчетах изотропных пластинок, также и к расчетам ортотропных пластинок. Этот метод состоит в последующих решениях двух уравнений с частными производными второго порядка, вместо одного уравнения четвертого порядка.

Summary

FROM THE THEORY OF ORTHOTROPIC PLATES

The paper brings a transformation reducing the quasi-biharmonic equation of the surface of deflection of an orthotropic plate to two partial differential equations of the second order, one of which is harmonic. Such a way of expressing the equation of the surface of deflection of an orthotropic plate permits the use of the two-stage method as used for isotropic plates, and which consists in a successive solution of two partial differential equations of the second order instead of one equation of the fourth order.

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 października 1953 r.

JAN SZMELTER

**ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA BŁONY
METODĄ RÓŻNIC SKOŃCZONYCH
Z UŻYCIEM SPECJALNEGO LICZYDŁA**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE**

XX

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Myśl przewodnia metody	203
2. Technika rozwiązywania zadań metodą szachów relaksacyjnych	208
3. Przykład zastosowania metody	211

1. Myśl przewodnia metody

Wiele zagadnień matematycznej fizyki sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego Poissona

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -p,$$

w którym u jest poszukiwaną funkcją zmiennych x i y , a p daną funkcją tych zmiennych. Równanie (1) ma być spełnione w pewnym obszarze ograniczonym krzywą G .

Na tej krzywej funkcja u spełnia następujące warunki brzegowe:

(a) na części krzywej G funkcja u przyjmuje z góry zadane wartości brzegowe \bar{u} (gdzie \bar{u} jest funkcją punktu na krzywej G),

(b) na pozostałej części krzywej G pochodna $\partial u/\partial n$ w kierunku zewnętrznej normalnej n przyjmuje założone z góry wartości \bar{p} (gdzie \bar{p} jest funkcją punktu na krzywej G).

Takie równania występują np. w ruchu bezwirowym cieczy idealnej, w zagadnieniu przewodnictwa ciepła, w teorii skręcania prętów pryzmatycznych, w teorii zginania płyt, w teorii potencjału i innych.

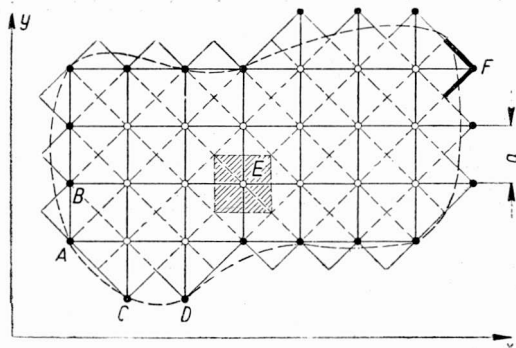
Równanie (1) przedstawia także przesunięcia poprzeczne membrany rozpiętej na krzywej G , obciążonej ciśnieniem p , przy sile rozciągającej membranę równej 1. Brzeg membrany otrzymuje przesunięcia \bar{u} , a siła, którą ten brzeg działa na membranę, wynosi \bar{p} (por. [1], § 137).

Ta ostatnia interpretacja równania Poissona, jako najbardziej obrazowa, służyć nam będzie przy dalszych rozważaniach.

Istnieje wiele metod rozwiązania zagadnienia membrany. Przy prostych kształtach krzywej G z powodzeniem stosuje się metody analityczne, które jednak praktycznie zawodzą dla nieco bardziej złożonych kształtów. Najbardziej uniwersalną i dogodną dla obliczeń praktycznych okazała się metoda różnic skończonych (por. [2], rozdz. 3).

Według metody różnic skończonych obszar membrany pokrywamy siatką kwadratową o boku a (rys. 1) równoległą do osi x i y . Prowadzimy przekątne tej siatki (linia kreskowana, rys. 1), które utworzą drobniejszą siatkę ukośną. Wzdłuż tych przekątnych prowadzimy linię łamaną, jako przybliżenie linii brzegowej membrany. Znaczymy wszystkie wierzchołki

kwadratów siatki zasadniczej, leżące wewnątrz tej linii łamanej oraz na niej. Pierwsze z nich nazywamy węzłami wewnętrznymi, drugie węzłami brzegowymi. Wszystkie węzły łączymy «prętami» wzdłuż zasadniczej siatki kwadratowej. Wszystkie pręty muszą leżeć wewnątrz obszaru objętego linią łamaną. W ten sposób niektóre sąsiednie węzły brzegowe (np. A i B) będą połączone ze sobą prętem, a inne (np. C i D) nie będą. Zamiast szukać funkcji u w całym obszarze membrany ograniczymy się jedynie do wyznaczenia jej przybliżonej wartości w węzłach siatki. Obciążenie p ciągle zastępujemy siłami P skupionymi



Rys. 1

w węzłach wewnętrznych, przypadających na obszar kwadratu o boku a , którego dany węzeł jest środkiem (np. w węzle E na rys. 1 umieszczamy wypadkową sił przypadających na zakre-kowany kwadrat). Podobnie siły krawędziowe p zastępujemy siłami P skupionymi w węzłach brzegowych (np. w węzle F siła P jest wypadkową sił krawędziowych, działających na wykreślonej

grubą linią odcinki linii łamanej). Oczywiście im siatka jest gęstsza, tym dokładniej możemy określić siły P i tym dokładniej przesunięcia węzłów u oddadzą przebieg funkcji u w całym obszarze.

Według zasad rachunku różnic skończonych równanie (1) przekształca się na

$$(2) \quad P = nu - \sum_s u_s,$$

w którym P i u odpowiada sile i przesunięciu jakiegoś węzła siatki, n jest liczbą prętów wychodzących z tego węzła, u_s przesunięciami w węzłach połączonych prętami z węzłem rozpatrywanym i wreszcie sumowanie rozciąga się na wszystkie tego rodzaju węzły sąsiednie. Tak napisany wzór (2) przedstawia wartość siły nie tylko w węzłach wewnętrznych, ale również w węzłach brzegowych. Dla każdego węzła możemy zatem napisać po jednym równaniu (2). Równań będzie tyle, ile jest węzłów. Rozwiązanie postawionego na wstępie równania różniczkowego sprowadza się teraz do zadania następującego:

(a) w niektórych węzłach (będziemy je nazywali stałymi) podane są przesunięcia u ,

(b) w pozostałych węzłach (które nazywać będziemy ruchomymi) założone są siły P .

Należy obliczyć przesunięcia u węzłów ruchomych i siły P w węzłach stałych tak, aby były spełnione równania (2) dla każdego węzła.

Główną trudność stanowi pierwsza część tego zadania, to znaczy określenie przesunięć węzłów ruchomych. Trudność polega na rozwiązaniu układu równań typu (2), których jest tyle, ile jest węzłów ruchomych. Trudność jest natury rachunkowej, spowodowanej dużą ilością niewiadomych. Jedną z licznych metod rozwiązywania układów równań tego rodzaju jest znana iteracyjna metoda Seidela, [3]. Southwell, [4], nadał jej interpretację fizyczną i rozpowszechnił pod nazwą «relaksacji» (tzn. odciążania).

Idea metody relaksacji jest następująca. Wyobraźmy sobie, że membrana została obciążona w węzłach siłami danymi P . Nadajemy dowolne przesunięcia u' ruchomym węzłom siatki, podpierając je (w myśli) na podnośnikach. Jeśliby przesunięcia te były takie, jak tego wymaga rozwiązanie, to siły obciążające P zostałyby całkowicie zrównoważone siłami rozciągającymi membranę i podnośniki nie przenosiłyby żadnej siły. Właściwe położenie podnośników (a tym samym przesunięcia u) poznamy więc po tym, że reakcje podnośników będą równe zeru. W dowolnym przypadku reakcje te nie będą jednak równe zeru i na ogół wyniosą

$$(3) \quad \Delta P = P - nu' + \sum_s u'_s.$$

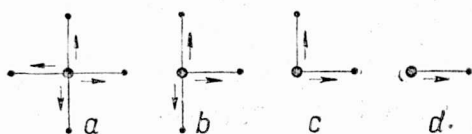
Reakcje powstają bowiem jako nadwyżka siły P nad siłą $P' = nu' - \sum_s u'_s$ wyliczoną z (2) dla przesunięć u' . Proces relaksacji polega na przyjęciu pewnego dowolnego położenia podnośników i następnego takiego ich przesuwania, aby malały reakcje ΔP . Najprościej uzyskamy to w ten sposób, że przesuniemy pojedynczy węzeł, w którym występuje największa reakcja, o pewną wielkość Δu , pozostawiając inne węzły nieruchome. Przesunięcie to dobieramy tak, aby towarzyszył mu w przesuwanym węźle spadek wartości siły o $n\Delta u$ do możliwie małej wielkości. Z (2) wynika, że temu spadkowi towarzyszyć będzie jednoczesny wzrost reakcji w węzłach sąsiednich o wartości Δu . Wygląda to tak, jakby z węzła poruszonego przesunięto wzdłuż prętów siłę Δu do każdego węzła sąsiedniego. Można dowiedzieć, że przesuując za pomocą tej metody coraz to inne węzły, możemy uzyskać spadek sił ΔP we wszystkich węzłach poniżej założonej dowolnej wartości. Innymi słowy, możemy znaleźć rozwiązanie układu równań (2) z dowolną, z góry założoną dokładnością.

Ten tok postępowania znalazł swój wyraz w rozmaitych sposobach tabelarycznego prowadzenia rachunków i ich zapisywania. Proponowana przez nas metoda, którą nazwać można metodą «szachów relaksacyjnych», zastępuje zapisy łatwiejszymi i szybszymi od nich ruchami pionków po odpowiedniej tablicy.

Wyobraźmy sobie, że tablica ta ma kształt siatki z rys. 1 i że obliczono według (3) wielkości ΔP , które należy «wygasić». Połóżmy na każdym węźle taką ilość «kamieni», która (według pewnej umówionej wartości, przypisywanej pojedynczemu kamieniowi) obrazować będzie siły ΔP .

Wówczas nadając jakiemuś węzłowi dodatnie przesunięcie Δu , równe wartości pojedynczego kamienia, będziemy musieli przesunąć z tego węzła po jednym kamieniu do węzłów sąsiednich, wzdłuż prętów siatki (według rys. 2, na którym węzeł poruszany zaznaczono punktem pogrubionym, a przesunięcia kamieni — strzałkami).

Reguła ta słuszna będzie dla wszystkich węzłów ruchomych siatki, nawet dla brzegowych, które połączone są z innymi węzłami mniejszą ilością prętów (rys. 2 b, 2 c i 2 d).



Rys. 2

Jeżeli nadamy jakiemuś węzłowi jednostkowe przesunięcie ujemne, to ruch pionków będzie przeciwny.

Z tego zasadniczego przesunięcia pojedynczego węzła o jednostkę wyprowadzamy przesunięcie «blokowe» całej grupy węzłów ruchomych o jed-

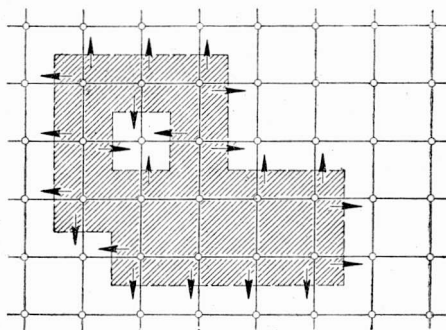
nostkę. Niech na rys. 3 linia kreskowana, przechodząca przez środki prętów, wydziela z siatki zakreskowany obszar, w którym wszystkie węzły doznają równoczesnego przesunięcia jednostkowego dodatniego. Wówczas wszystkie ruchy kamieni wewnątrz tego obszaru znoszą się nawzajem i, w rezultacie, należy z rozpatrywanego obszaru «zsunąć» tylko po jednym kamieniu poprzez każdy przecięty pręt ograniczającą obszar.

Widzimy, że przesuwanie kamienie według tych zasad i notując odpowiednio przesunięcia węzłów moglibyśmy proces prowadzić tak długo, aż znikną wszystkie kamienie z szachownicy, co oznaczałoby całkowite wygaszenie sił ΔP . Powstają jednakże następujące zastrzeżenia:

1) aby proces doprowadzał do dokładnego wygaszenia sił, jednostka odpowiadająca jednemu kamieniowi powinna być mała i, co za tym idzie, ilość kamieni duża;

2) opisany sposób nie uwzględnia możliwości powstania w węzłach ujemnych sił.

Obydwie trudności zostały pokonane.



Rys. 3

Pierwszą udało się pokonać w ten sposób, że początkowo przyjmuje się dużą wartość jednostki kamienia i proces relaksacji prowadzi się dotąd, aż siły ΔP zmniejszą się o połowę swej poprzedniej wartości. Wtedy następuje zamiana wartości kamienia na dwukrotnie mniejszą, ilość kamieni zostaje podwojona i relaksację prowadzi się znowu aż do zmniejszenia sił ΔP o połowę. W ten sposób, zmniejszając stopniowo wartość «pionów», możemy osiągnąć dowolną dokładność wygaszenia sił. Podobne postępowanie przyspiesza również proces relaksacji, gdyż początkowo, gdy siły ΔP są duże, ruchy pojedynczego kamienia wygaszają je szybciej; pod koniec, gdy siły ΔP są małe, wygaszanie jest bardziej precyzyjne.

Tablica 1

Ilość kamieni na szachownicy	Wielkość pojedynczego kamienia		
	$5 \cdot 10^n$	$2 \cdot 10^n$	$1 \cdot 10^n$
	Wielkość siły, którą reprezentują kamienie na szachownicy		
0	$-20 \cdot 10^n$	$-8 \cdot 10^n$	$-4 \cdot 10^n$
1	$-15 \cdot 10^n$	$-6 \cdot 10^n$	$-3 \cdot 10^n$
2	$-10 \cdot 10^n$	$-4 \cdot 10^n$	$-2 \cdot 10^n$
3	$-5 \cdot 10^n$	$-2 \cdot 10^n$	$-1 \cdot 10^n$
4	$0 \cdot 10^n$	$0 \cdot 10^n$	$0 \cdot 10^n$
5	$+5 \cdot 10^n$	$+2 \cdot 10^n$	$+1 \cdot 10^n$
6	$+10 \cdot 10^n$	$+4 \cdot 10^n$	$+2 \cdot 10^n$
7	$+15 \cdot 10^n$	$+6 \cdot 10^n$	$+3 \cdot 10^n$
8	$+20 \cdot 10^n$	$+8 \cdot 10^n$	$+4 \cdot 10^n$
9	$+25 \cdot 10^n$	$+10 \cdot 10^n$	$+5 \cdot 10^n$

Drugą trudność opanowano w ten sposób, że do ilości kamieni, obrazujących wielkość siły ΔP , dodaje się liczbę stałą (4 sztuki).

W ten sposób powstaje tablica 1, w której, dla prostoty rachunków, stosuje się stopniowanie wielkości kamienia według szeregu: 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1, ..., wygodniejszego w rachunkach od ścisłego połowienia tych wartości. Łatwo zauważyć, że jeżeli we wszystkich węzłach, w toku przesuwania kamieni, pozostaną ilości kamieni odpowiadające siłom $\Delta P = (-1, 0, +1, +2)$, to dalsze przesuwanie kamieni nie zmniejszy tych sił.

Na podstawie tej zasady można łatwo udowodnić, że przy pomocy dziewięciu kamieni daje się uzyskać wszystkie możliwości wyrażenia sił ΔP przez kamienie, a po zakończonej relaksacji można przejść do następnej ich wartości.

algebraiczne, złożone ze składników w postaci $5 \cdot 10^n$, $2 \cdot 10^n$, $1 \cdot 10^n$ ($n =$ liczba całkowita) tak, aby każdy składnik powtarzał się najwyżej jeden raz. Na przykład zamiast 3783 wypisujemy kolumnę jak niżej z lewej strony:

+ 5000	(6) Na polach zakreskowanych kładziemy po 4 kamienie. Na polach czarnych dowolną ilość kamieni można dokładać lub zierać w czasie «gry».
- 2000	
+ 500	
+ 200	
+ 100	
- 20	
+ 5	
- 2	

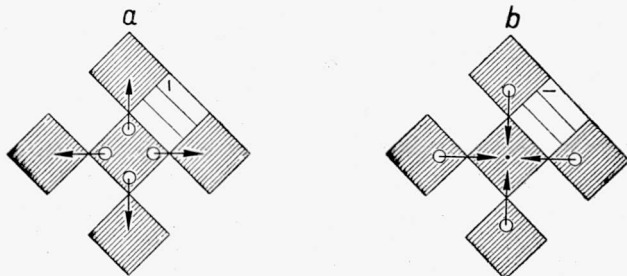
(7) Przyjmujemy, że początkową wartością kamienia jest najwyższa liczba występująca wśród podziałów ΔP na składniki (według p. 6). Liczby te przekreślamy i

(a) dodajemy na polu szarym jeden kamień, jeśli była ona dodatnia,

(b) zabieramy z tego pola 1 kamień, jeśli była ona ujemna.

(8) Przystępujemy do przesunięć relaksacyjnych. Będą na nie się składały następujące przesunięcia zasadnicze:

(a) przesunięcie pojedyncze dodatnie (rys. 6a); jest to przesunięcie po jednym kamieniu z rozpatrywanego pola zacięniowanego na sąsiednie pola zacięniowane (ruchome albo stałe), przy jednoczesnym nakreśleniu w prawym górnym sąsiednim polu pionowej kreseczki |, rejestrującej to przesunięcie (na rysunku 6a występują cztery pola sąsiednie, ale może ich być na brzegu mniej);



Rys. 6

(b) przesunięcie pojedyncze ujemne (rys. 6b), przeciwne do poprzedniego; piony mają przeciwny ruch, a kreseczka rejestrująca jest pozioma —;

(c) przesunięcie grupowe dodatnie; wykonujemy je w trzech fazach.

Faza pierwsza. Zsuwamy z pól zacięniowanych na brzegu pewnego obszaru po jednym kamieniu wzdłuż prętów, wykonując połowę przesunięcia, tzn. pozostawiając kamień w narożniku na granicy pomiędzy polem, z którego go zsuwamy, a polem, na które go nasuwamy (rys. 7a).

Faza druga. Kamienie zatrzymane w pół drogi wyraźnie wydzielają pewien obszar z całości siatki. W białych polach, odpowiadających polom zacięniowanym (z prawej strony u góry), objętych tym obszarem, wpisujemy po jednej kreseczce pionowej | rejestrującej to przesunięcie (rys. 7b).

Faza trzecia. Kończymy przesunięcie zapoczątkowane w pierwszej fazie.

Rozbicie tego przesunięcia na trzy fazy ma na celu zapobieżenie omyłkom przy zaznaczaniu kreseczek rejestrujących.

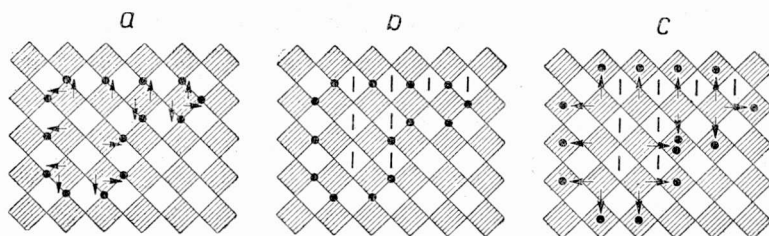
(d) Przesunięcie grupowe ujemne. Ruch pionków jest przeciwny w stosunku do poprzedniego przypadku. Kreseczki rejestrujące są poziome zamiast pionowych.

(9) Proces relaksacyjny prowadzimy tak długo, aż

(a) przeciętna ilość kamieni w większych częściach szachownicy wyniesie dla jednego węzła ruchomego cztery,

(b) ilość kamieni w każdym węzle ruchomym wyniesie będzie od 3 do 6 włącznie.

(10) Po zakończeniu relaksacji przystępujemy do zapisania rejestrowanych przesunięć. Każdej kreseczce pionowej odpowiada przesunięcie dodatnie,



Rys. 7

równe wartości jednego kamienia, a każdej kreseczce poziomej — przesunięcie ujemne. Kreseczki pionowe znoszą się z poziomymi i dlatego możemy zapisywać je jedna na drugiej (rys. 5), tak że powstanie krzyżyk \pm . W rachunku bierzemy pod uwagę kreseczki nieprzekreślone. Wartość tych kreseczek dodajemy do stojącej wyżej wartości przesunięcia u' i zapisujemy pod nią (w kolumnie u) jako nowe przybliżenie przesunięcia u .

(11) Zmieniamy wielkość pozostałych na szachownicy kamieni na następną niższą wielkość z szeregu 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500,...

Postępujemy tu według tablicy 2.

(12) Dodajemy dodatkowe kamienie tak jak w p. 7, skreślając z zapisu rozwinięcia ΔP , otrzymanego na początku, równoważną wartość.

(13) Prowadzimy znowu relaksację według p. 8 i 9, obliczamy zarejestrowane kreseczki według p. 10 i przeprowadzamy wymianę według p. 11 i 12.

(14) W rezultacie otrzymujemy ciąg wartości przesunięć, zapisywanych w kolumnie u , i jednocześnie skreślamy kolejne liczby podziału ΔP . Proces zatrzymujemy wówczas, gdy osiągniemy już żadaną dokładność.

(15) W czasie rachunków, po kilku zmianach wielkości kamieni, sprawdzamy na arytmometrze wyniki. Sprawdzenie polega na tym, że biorąc za podstawę ostatnie wartości u obliczamy według (3) wartości ΔP , które po-

winny być równe sumie wielkości, reprezentowanej przez kamienie leżące na polu szarym, i wielkości nieprzekreślonych składników podziału P . Sprawdzenie to należy przeprowadzać po zakończeniu relaksacji, gdy wszystkie kreski rejestrujące są przekreślone i ani jeden kamień nie leży na polu białym.

Tablica 2

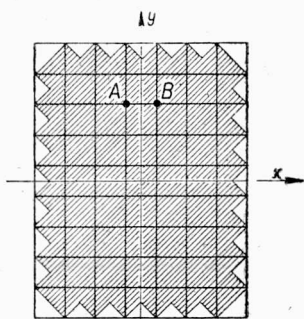
Pozostało kamieni z poprzedniej relaksacji	Z a m i a n a		
	$10 \cdot 10^n \rightarrow 5 \cdot 10^n$	$5 \cdot 10^n \rightarrow 2 \cdot 10^n$	$2 \cdot 10^n \rightarrow 1 \cdot 10^n$
3	odjąć 1 kamień	odjąć 1 kamień oraz przesunąć 1 kamień na pole białe	odjąć 1 kamień
4	bez zmian	bez zmian	bez zmian
5	dodać 1 kamień	dołożyć 1 kamień na pole węzła (zaciemnione) i jeszcze 1 kamień na pole białe	dodać 1 kamień
6	dodać 2 kamienie	dodać 3 kamienie	dodać 2 kamienie

oraz nasunąć kamienie z odpowiednich pól białych (o ile się one tam znajdują)

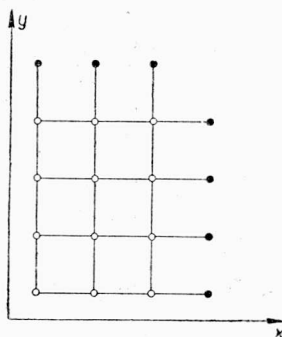
Jeżeli stwierdzimy błąd, to należy poprawić liczbę kamieni (lub wymazać błędny podział ΔP i wpisać nowy). Po zakończeniu rachunków sprawdzenie takie jest konieczne.

3. Przykład zastosowania metody

Pręt pryzmatyczny o przekroju prostokątnym o wymiarach 7×9 poddano skręcaniu. Wyznaczyć linie naprężeń stycznych w przekroju.



Rys. 8

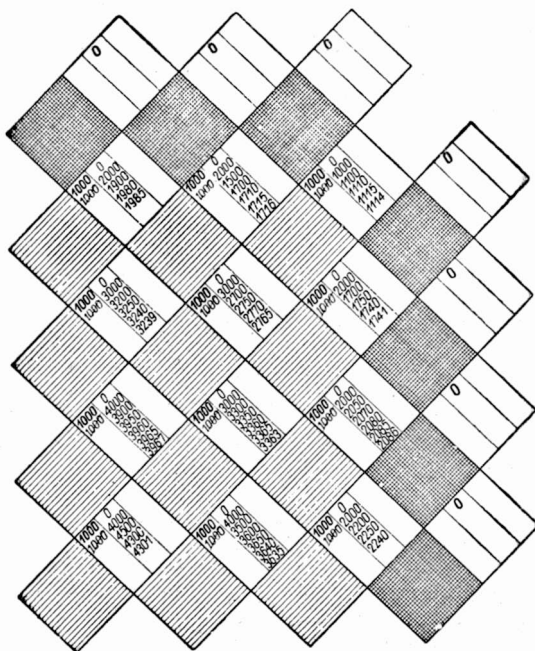


Rys. 9

W rozwiązaniu opieramy się na analogii membranowej, według której linie naprężeń stycznych są warstwicami membrany rozpiętej na brzegu

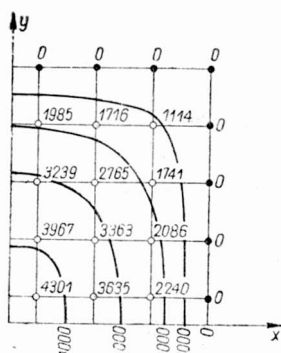
konturu przekroju, obciążonej równomiernie i o przesunięciach na brzegu równych zeru. Membranę zastępujemy siatką według rys. 8.

Wobec symetrii wystarczy rozpatrywać jedną ćwiartkę prostokąta. Przy przesunięciach punkty A i B przesuwają się stale jednakowo, a więc ani jeden



Rys. 10

kamień nie przejdzie wzdłuż pręta łączącego te punkty. Zatem wszystkie pręty przecięte osiami symetrii należy opuścić. Dla ćwiartki otrzymamy zatem siatkę z rys. 9, na której węzły nieruchome oznaczono kolorem czarnym, a ruchome — białym.



Rys. 11

Na rysunku 10 widzimy odpowiednią szachownicę z zapisami. Siły obciążające przyjęto jako równe liczbie 1000. Przesunięcia kamieni prowadzono tak długo, aż siły zawierały się w granicach od -1 do $+2$. Dokonano tego przy 10 zmianach wielkości kamieni. Czas rachunku wraz z narysowaniem szachownicy i trzykrotnym jego sprawdzeniem na aryt-metrze wynosił godzinę i 50 minut. Dla porównania przeprowadzono rachunki innymi sposobami.

Okazało się, że najszybciej osiągnięto wynik metodą «szachów relaksacyjnych». Ponadto okazało się, że metoda powyższa wymaga od rachującego najmniejszej uwagi i wysiłku.

Znając przesunięcia różnych punktów membrany łatwo można nakreślić jej warstwicę (rys. 11).

Literatura cytowana w tekście

- [1] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, Kraków 1948 i 1950.
- [2] L. W. Kantorowicz i W. I. Kryłow, *Pribliżennije metody wysszewo analiza*, Moskwa-Leningrad 1950.
- [3] W. N. Fadijewa, *Wycislitielnyje metody liniejnoy atgiebry*, Moskwa-Leningrad 1950.
- [4] R. V. Southwell, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Londyn 1946.

Резюме

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕМБРАНЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЧЕТОВ

Уравнение мембраны (1), в котором u обозначает перемещение, а p нагрузку, замещено системой уравнений (2), по известному методу конечных разностей. Уравнение написано для квадратной решетки (фиг. 1), причем дает соотношения между силой P нагрузки, приходящейся на данный узел решетки, перемещением u в этом узле, а также перемещениями u_s в соседних узлах. Решение системы этих уравнений производится методом последовательных приближений, названным Р. В. Сауэвеллом «методом релаксации». Вместо того, чтобы производить вычисления таблично, употреблено «шахматную доску» (фиг. 4) в форме решетки, на каждом узле которой помещено некоторое количество камней, соответствующее значению узловой силы P , согласно таблице 1. Процесс разгрузки узлов состоит в передвигании этих камней в соседние узлы, согласно фиг. 6. В начале счета придают камням высшее значение и с большим приближением погашают узловые силы. В последующих стадиях придают камням все меньшие значения, погашая остатки узловых сил с все большей точностью. Этот прием представлен в форме «правил игры», которые настолько просты, что решение задачи может быть поручено неквалифицированному вспомогательному персоналу. В конкретных случаях оказалось, что этот метод гораздо менее трудоемкий и требует от счетчика гораздо меньше усилий.

Summary

SOLUTION OF THE MEMBRANE PROBLEM BY MEANS OF THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES WITH THE USE OF A SPECIAL COMPUTATION DEVICE

The membrane equation, (1), where u denotes the displacement and p the load, is replaced by the system of equations, (2), using the well known method of finite differences. This equation was established for a square net (fig. 1), and expresses the relation between the load P , corresponding to the

given nodal point of the net, and the displacements of the neighbouring points, u_s .

The solution is obtained by means of the method of successive approximations called by R. V. Southwell the «relaxation method». Instead of computations arranged in table form, a kind of «chess board» (fig. 4) in the form of a net is used.

On each nodal point of the net a certain number of «stones» is laid, corresponding to the nodal force P (table 1).

The process of relieving the nodal points consists in shifting the «stones» to the neighbouring points (fig. 6). At the beginning of the computation higher values are assumed for the «stones» and the nodal forces are suppressed roughly. The values assumed in subsequent stages are progressively lower, the suppressing of forces becoming more and more accurate. This procedure is regulated in the form of a kind of «play rules», which are simple enough to permit the solution of the problem to be passed over to unqualified personnel.

This method in numerical examples proved to be more rapid than other methods and at the same time less tedious for the calculator.

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 października 1953 r.

MAREK SOKOŁOWSKI

**DWUSTOPNIOWY SPOSÓB OBLICZANIA
PEWNEGO TYPU PŁYT ORTOTROPOWYCH**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE**

XXI

1. W pracy niniejszej zajmiemy się zagadnieniem numerycznego wyznaczenia wielkości statycznych (tj. momentów zginających i sił tnących) dla zginanej płyty ortotropowej. W szczególności interesować nas będą te przypadki ortotropii, w których współczynnik ϱ [por. wzór (2.1)] jest mniejszy od jedności. Wtedy w równaniach (2.4) i (2.5) występują współczynniki β^2 i λ^2 zespolone, co w pewnym stopniu komplikuje zadanie.

Otrzymane z równań różniczkowych (2.4) i (2.5) (przy pomocy zasad rachunku różnic skończonych) układy równań algebraicznych liniowych o współczynnikach zespolonych rozwiązywać można drogą iteracji; w pracy przytoczono dwa schematy iteracyjne mogące służyć temu celowi.

2. Równanie różniczkowe ugięcia płyty ortotropowej, obciążonej prostopadle do swej płaszczyzny, można przedstawić w postaci, [1],

$$(2.1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\varrho\varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p(x, y)}{D_y}.$$

W równaniu tym wprowadzono oznaczenia

$$\varrho = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}, \quad \varepsilon = \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}.$$

Poza tym przez D_x i D_y oznaczono sztywności płyty na zginanie związane z kierunkami x i y :

$$D_x = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_x \frac{h^3}{12}, \quad D_y = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_y \frac{h^3}{12},$$

a przez H wielkość związaną ze sztywnością płyty na skręcanie:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{D_x}{m_y} + \frac{D_y}{m_x} \right) + 2C, \quad C = \frac{h^3}{12} G_0.$$

G_0 jest modułem odkształcenia postaciowego materiału ortotropowej płyty, E_x i E_y są modułami sprężystości w kierunkach osi x i y , m_x i m_y odwrotnościami współczynników Poissona ν_x i ν_y w tych kierunkach, h jest grubością płyty, $p(x, y)$ obciążeniem oraz w ugięciem płyty.

Równanie (2.1) przedstawić można w postaci operatorowej

$$(2.2) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w = \frac{p(x, y)}{D_y}.$$

Tutaj

$$(2.3) \quad \begin{cases} \beta^2 = \varepsilon^2(\varrho + \sqrt{\varrho^2 - 1}), \\ \lambda^2 = \varepsilon^2(\varrho - \sqrt{\varrho^2 - 1}). \end{cases}$$

Jak wynika z równań (2.3), rozpatrzeć można trzy przypadki w zależności od wielkości parametru ϱ .

Przypadek 1. $\varrho > 1$. β^2 i λ^2 są liczbami rzeczywistymi i wyrażają się bezpośrednio wzorami (2.3).

Przypadek 2. $\varrho = 1$. Wtedy $\beta^2 = \lambda^2 = \varepsilon^2$, a równanie (2.1) przez podstawienie $x = \varepsilon \xi$ przekształcić można w sposób następujący:

$$\Delta \Delta w = \frac{p(\varepsilon \xi, y)}{D_y}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Jest to równanie płyty izotropowej.

Przypadek 3. $\varrho < 1$. β^2 i λ^2 są liczbami zespolonymi i wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \kappa_1 + i \kappa_2, \\ \lambda^2 &= \kappa_1 - i \kappa_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\kappa_1 = \varepsilon^2 \varrho, \quad \kappa_2 = \varepsilon^2 \sqrt{1 - \varrho^2}.$$

W granicy, przy $\varrho = 0$, co odpowiada zagadnieniu płyty ortotropowej posiadającej charakter gęstożebrowego rusztu,

$$\beta^2 = -\lambda^2 = i \varepsilon^2,$$

a równanie (2.1) przybiera postać

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p(x, y)}{D_y}.$$

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy wyłącznie płyty na obwodzie swobodnie podparte. Warunki brzegowe są w tym przypadku

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$$

na wszystkich krawędziach płyty, przy czym n oznacza kierunek normalnej do tych krawędzi.

Równanie (2.1) można za pomocą związku (2.2) zastąpić układem równań rzędu drugiego przez wprowadzenie pomocniczych funkcji $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$. Takie przekształcenie może być dokonane dwoma sposobami:

$$(2.4.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{p(x, y)}{D_y},$$

$$(2.4.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varphi(x, y),$$

lub

$$(2.5.1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p(x, y)}{D_y},$$

$$(2.5.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \psi(x, y).$$

Na podstawie równań (2.4.2) i (2.5.2) łatwo wyrazić można pochodne w_{xx} i w_{yy} za pomocą funkcji $\varphi(x, y)$ oraz $\psi(x, y)$:

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\psi - \varphi}{\beta^2 - \lambda^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\beta^2 \varphi - \lambda^2 \psi}{\beta^2 - \lambda^2}. \end{cases}$$

Momenty i siły tnące w płycie ortotropowej obliczymy z następujących wzorów (por. [1]):

$$M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$T_{xz} = -D_x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (D_x \nu_y + 2C) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right],$$

$$T_{yz} = -D_y \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (D_y \nu_x + 2C) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right].$$

Widać stąd, że zadanie sprowadzić można do wyznaczenia z równań (2.4.1) i (2.5.1) funkcji $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$, przy ich bowiem pomocy nie trudno już na podstawie zależności (2.6) i (2.7) obliczyć poszukiwane wielkości M_x , M_y , T_{xz} i T_{yz} .

3. Obecnie zajmiemy się kwestią rozwiązania równań różniczkowych (2.4.1) i (2.5.1).

Nie będziemy się zatrzymywać nad przypadkami $\varrho > 1$ i $\varrho = 1$, gdyż rozwiązanie równań różniczkowych dla $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ uzyskać można wieloma znanymi sposobami. Interesuje nas natomiast przypadek, gdy $\varrho < 1$, a równania (2.4) i (2.5) przybierają postać

$$(3.1.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (\kappa_1 + i\kappa_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{p}{D_y},$$

$$(3.1.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\kappa_1 - i\kappa_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varphi,$$

$$(3.2.1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (\kappa_1 - i\kappa_2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p}{D_y},$$

$$(3.2.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\kappa_1 + i\kappa_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \psi.$$

Ponieważ $w(x, y)$ (ugięcie płyty) przybierać może tylko wartości rzeczywiste, to z równań (3.1.2) i (3.2.2), napisanych w postaci

$$\begin{aligned} \varphi &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - i\kappa_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \psi &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + i\kappa_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

widać, że $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ są funkcjami zespolonymi sprzężonymi. Wprowadzając więc dwie nowe funkcje rzeczywiste $\Phi(x, y)$ i $\Psi(x, y)$ możemy napisać

$$(3.3) \quad \begin{cases} \varphi = \Phi + i\Psi, \\ \psi = \Phi - i\Psi. \end{cases}$$

Widać stąd, że dla wyznaczenia poszukiwanych funkcji φ i ψ wystarczy znaleźć jedną z nich [np. φ z równania (3.1.1)]; druga funkcja — w danym przypadku ψ — określona jest już w ten sposób jednoznacznie przez prostą zależność (3.3). Podstawiając zatem zależność (3.3) do równań (3.1.2) i (3.2.2) otrzymujemy wzory analogiczne do (2.6), które przedstawiają pochodne funkcji ugięcia płyty przez funkcje $\Phi(x, y)$ i $\Psi(x, y)$:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\Psi}{\varepsilon^2 \sqrt{1 - \varrho^2}}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Phi + \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}} \Psi. \end{cases}$$

Wzory powyższe upraszczają się jeszcze bardziej w przypadku szczególnym $\varrho = 0$ (ortotropowy ruszt gęstoźebrowy). Otrzymamy wtedy

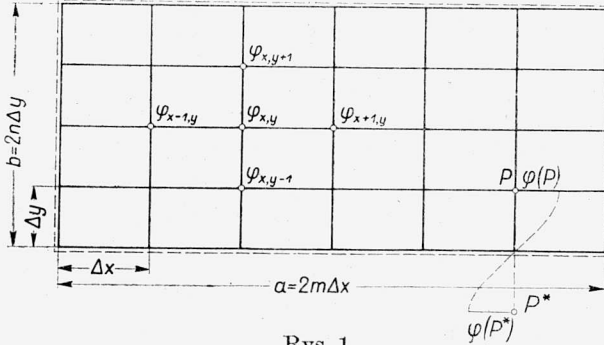
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\Psi}{\varepsilon^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Phi.$$

Obecnie rozpatrzmy sposoby wyznaczania wartości $\Phi(x, y)$ i $\Psi(x, y)$ z równań różniczkowych (3.1.1) i (3.2.1). Zastąpimy te ostatnie układami równań algebraicznych liniowych posługując się znanymi zasadami rachunku różnic skończonych (por. [2]):

$$(3.5.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{\Delta^2 \varphi(x, y)}{\Delta y^2} = \frac{1}{\Delta^2 y} (\varphi_{x, y+1} - 2\varphi_{x, y} + \varphi_{x, y-1}), \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta^2 \varphi(x, y)}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta^2 x} (\varphi_{x+1, y} - 2\varphi_{x, y} + \varphi_{x-1, y}). \end{cases}$$

Znaczenie użytych tutaj symboli wyjaśnia rys. 1.

Warunkiem brzegowym dla φ będzie — ze względu na swobodne podparcie brzegów płyty — $\varphi = 0$ na całym obwodzie. Z tego samego warunku wynika dalej równość $\varphi(P) = -\varphi(P^*)$, gdzie P i P^* są punktami zwierciadlanego odbicia względem dowolnej krawędzi płyty (por. rys. 1).



Rys. 1

Przy większej ilości oczek siatki rozpostartej na płycie — dla zwiększenia dokładności obliczeń — możemy posłużyć się wzorami ściślejszymi

$$(3.5.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{12 \Delta^2 x} (-\varphi_{x+2, y} + 16\varphi_{x+1, y} - 30\varphi_{x, y} + 16\varphi_{x-1, y} - \varphi_{x-2, y}), \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{12 \Delta^2 y} (-\varphi_{x, y+2} + 16\varphi_{x, y+1} - 30\varphi_{x, y} + 16\varphi_{x, y-1} - \varphi_{x, y-2}). \end{cases}$$

Podstawiamy teraz wyrażenia (3.5), na przykład (3.5.1), do równania (3.1.1). Otrzymamy w ten sposób

$$(3.6) \quad (\varphi_{x, y+1} + \varphi_{x, y-1}) + r^2(\kappa_1 + i\kappa_2)(\varphi_{x+1, y} + \varphi_{x-1, y}) + [-2 - 2r^2(\kappa_1 + i\kappa_2)]\varphi_{x, y} = q_{x, y}$$

Tutaj

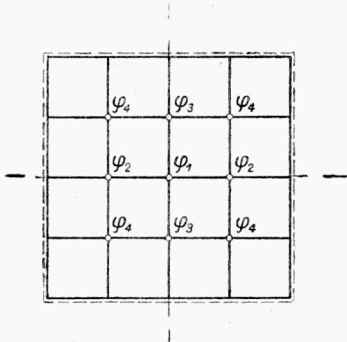
$$q_{x, y} = \frac{p(x, y)}{D_y} \Delta^2 y, \quad r = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Dla płyty prostokątnej o bokach a i b , o ilości oczek siatki $4mn$ (por. rys. 1), będzie

$$q_{x, y} = \frac{p(x, y)}{D_y} \left(\frac{b}{2n}\right)^2, \quad r = \frac{b}{a} \frac{m}{n}.$$

Dla tak podzielonej płyty napisać możemy $(2m-1)(2n-1)$ równań typu (3.6), tj. tyle, ile jest niewiadomych wartości $\varphi_{x, y}$.

4. Przedstawimy obecnie pierwszy sposób iteracji układu równań pięcioczołowych typu (3.6) nie różniący się zasadniczo od sposobu iteracji układów ze współczynnikami rzeczywistymi.



Rys. 2

Posłużymy się prostym przykładem płyty kwadratowej obciążonej równomiernie. Ze względu na symetrię zagadnienia przy podziale płyty na szesnaście kwadratów otrzymamy tylko cztery niewiadome wartości funkcji φ (rys. 2).

Wypisujemy równania (3.6) dla punktów 1, 2, 3 i 4. Otrzymamy przy prostych założeniach $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ i $q = 1$ układ

$$(4.1) \quad \varphi_g + \varphi_d + i(\varphi_l + \varphi_p) - 2(1+i)\varphi_k = 1$$

$$(k = 1, \dots, 4).$$

Oznaczenia φ przyjęto według schematu na rys. 3.

W układzie równań (4.1) wyrażamy kolejne φ_k przez pozostałe niewiadome. Otrzymamy w ten sposób

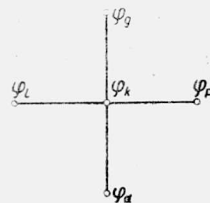
Tablica 1

								2 iteracja
$\Phi_1^{(1)}$	$i\Psi_1^{(1)}$							1 iteracja
$\Phi_1^{(0)}$	$i\Psi_1^{(0)}$	$\Phi_2^{(0)}$	$i\Psi_2^{(0)}$	$\Phi_3^{(0)}$	$i\Psi_3^{(0)}$	$\Phi_4^{(0)}$	$i\Psi_4^{(0)}$	przybl. wstępne
φ_1		φ_2		φ_3		φ_4		
—	—	β_{12}	$i\gamma_{12}$	β_{13}	$i\gamma_{13}$	β_{14}	$i\gamma_{14}$	układ równań
β_{21}	$i\gamma_{21}$	—	—	β_{23}	$i\gamma_{23}$	β_{24}	$i\gamma_{24}$	
β_{31}	$i\gamma_{31}$	β_{32}	$i\gamma_{32}$	—	—	β_{34}	$i\gamma_{34}$	
β_{41}	$i\gamma_{41}$	β_{42}	$i\gamma_{42}$	β_{43}	$i\gamma_{43}$	—	—	
$\beta_{12} \Phi_2^{(0)}$	$i\gamma_{12} \Phi_2^{(0)}$							
$-\gamma_{12} \Psi_2^{(0)}$	$i\beta_{12} \Psi_2^{(0)}$							
$\beta_{13} \Phi_3^{(0)}$	$i\gamma_{13} \Phi_3^{(0)}$							
$-\gamma_{13} \Psi_3^{(0)}$	$i\beta_{13} \Psi_3^{(0)}$							
$\beta_{14} \Phi_4^{(0)}$	$i\gamma_{14} \Phi_4^{(0)}$							
$-\gamma_{14} \Psi_4^{(0)}$	$i\beta_{14} \Psi_4^{(0)}$							
+	β_{10}	$i\gamma_{10}$						
$\Phi_1^{(1)}$	$i\Psi_1^{(1)}$							2 iteracja

$$(4.2) \quad \begin{cases} \varphi_1 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)\varphi_2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)\varphi_3 + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)q, \\ \varphi_2 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)\varphi_1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)\varphi_4 + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)q, \\ \varphi_3 = (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i)\varphi_1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)\varphi_4 + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)q, \\ \varphi_4 = (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i)\varphi_2 + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)\varphi_3 + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)q. \end{cases}$$

Ogólny schemat iteracji układu równań typu (4.2) jest przedstawiony w tabelicy 1. Współczynnik zespolony występujący w k -tym równaniu przy φ_m oznaczono przez $\beta_{km} + i\gamma_{km}$. Przyjmowanie wstępnych, zerowych przybliżeń $\varphi_k^{(0)} = \Phi_k^{(0)} + i\Psi_k^{(0)}$ omówimy w p. 6.

Iteracja układu równań (4.2) na liczbach szczególnych jest przeprowadzona w tabelicy 2.



Rys. 3

Tablica 2

	0,3%	0,3% <i>i</i>	0,2%	0,2% <i>i</i>	0,2%	0,2% <i>i</i>	0,1%	0,1% <i>i</i>	błąd
	-1,17	+1,17 <i>i</i>	-0,835	+0,915 <i>i</i>	-0,915	+0,835 <i>i</i>	-0,6675	+0,6675 <i>i</i>	3 iteracja
	-1,16	+1,16 <i>i</i>	-0,83	+0,92 <i>i</i>	-0,92	+0,83 <i>i</i>	-0,665	+0,665 <i>i</i>	2 iteracja
	-1,18	+1,18 <i>i</i>	-0,84	+0,91 <i>i</i>	-0,91	+0,84 <i>i</i>	-0,67	+0,67 <i>i</i>	1 iteracja
	-1,31	+1,31 <i>i</i>	-0,93	+0,93 <i>i</i>	-0,93	+0,93 <i>i</i>	-0,66	+0,66 <i>i</i>	Przybliżenie wstępne
	φ_1		φ_2		φ_3		φ_4		
			0,5	0,5 <i>i</i>	0,5	-0,5 <i>i</i>			układ równań
	0,25	0,25 <i>i</i>					0,5	-0,5 <i>i</i>	
	0,25	-0,25 <i>i</i>					0,5	0,5 <i>i</i>	
			0,25	-0,25 <i>i</i>	0,25	0,25 <i>i</i>			
	-0,465	-0,465	-0,295	+0,295	-0,295	+0,295	-0,21	+0,21	1 iteracja
	-0,465	+0,465	-0,295	-0,295	+0,295	+0,295	+0,227	+0,227	
	-0,465	+0,465	-0,33	+0,33	-0,33	-0,33	-0,227	-0,227	
	+0,465	+0,465	+0,33	+0,33	-0,33	+0,33	-0,21	+0,21	
	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	
	-1,18	+1,18	-0,84	+0,91	-0,91	+0,84	-0,67	+0,67	2 iteracja
	-0,42	-0,42	-0,29	+0,29	-0,29	+0,29	-0,2075	+0,2075	
	-0,455	+0,455	-0,29	-0,29	+0,29	+0,29	+0,23	+0,23	
	-0,455	+0,455	-0,335	+0,335	-0,335	-0,335	-0,23	-0,23	
	+0,42	+0,42	+0,335	+0,335	-0,335	+0,335	-0,2075	+0,2075	
	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	
	-1,16	+1,16	-0,83	+0,92	-0,92	+0,83	-0,665	+0,665	3 iteracja
	-0,415	-0,415	-0,2925	+0,2925	-0,2925	+0,2925	-0,2087	+0,2087	
	-0,46	+0,46	-0,2925	-0,2925	+0,2925	+0,2925	+0,2287	+0,2287	
	-0,46	+0,46	-0,3325	+0,3325	-0,3325	-0,3325	-0,2287	-0,2287	
	+0,415	+0,415	+0,3325	+0,3325	-0,3325	+0,3325	-0,2087	+0,2087	
	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	-0,25	+0,25	
	-1,17	+1,17	-0,835	+0,915	-0,915	+0,835	-0,6675	+0,6675	

5. Omówimy teraz drugi sposób iteracji układu równań typu (3.6). W tym celu, podobnie jak poprzednio, przekształcimy układ równań

$$\sum_{m=1}^n a_{km} \varphi_m = q_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie a_{km} są to współczynniki zespolone, na układ analogiczny do (4.2). Otrzymamy

$$\varphi_k = \frac{1}{a_{kk}} \left(q_k - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n a_{km} \varphi_m \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Oznaczając

$$\begin{aligned} \frac{q_k}{a_{kk}} &= \beta_{k0} + i\gamma_{k0}, \\ -\frac{a_{km}}{a_{kk}} &= \beta_{km} + i\gamma_{km}, \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi_k + i\Psi_k &= \beta_{k0} + i\gamma_{k0} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (\beta_{km} \Phi_m - \gamma_{km} \Psi_m) + i(\beta_{km} \Psi_m + \gamma_{km} \Phi_m) \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Rozdzielając teraz w powyższych równaniach część rzeczywistą i urojoną otrzymamy dwa układy równań w następującej postaci

$$(5.1) \quad \Phi_k = \beta_{k0} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \beta_{km} \Phi_m - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \gamma_{km} \Psi_m, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

$$(5.2) \quad \Psi_k = \gamma_{k0} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \beta_{km} \Psi_m + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \gamma_{km} \Phi_m,$$

Po ustaleniu początkowych wartości $\Phi_m^{(0)}$ i $\Psi_m^{(0)}$ przeprowadzamy iterację na przemian przy pomocy układu (5.1) i (5.2).

W zestawieniu ze sposobem opisanym poprzednio sposób dopiero co przedstawiony ma tę zaletę, że pozwala uniknąć mnożenia przez siebie liczb zespolonych. W związku z tym stwarza on mniej okazji do popełnienia pomyłek liczbowych i upraszcza postępowanie rachunkowe.

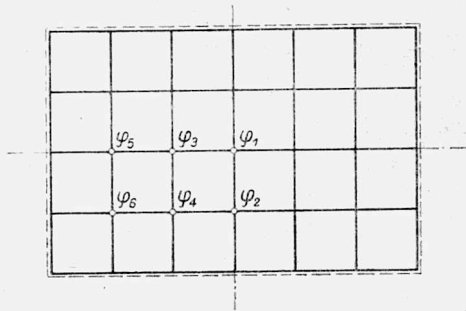
Przykład iteracji na liczbach ogólnych podaje tablica 3, zaś szczegółowe obliczenia dla sześciu niewiadomych tablica 4.

Tablica 3

Φ								Ψ					
$\Phi^{(3)}$	$\Phi^{(2)}$	$\Phi^{(1)}$	$\Phi^{(0)}$		1	2	3	4		$\Psi^{(0)}$	$\Psi^{(1)}$	$\Psi^{(2)}$	$\Psi^{(3)}$
		$\Phi_1^{(1)}$	$\Phi_1^{(0)}$	Φ_1	γ_{10}	γ_{20}	γ_{30}	γ_{40}		$\Psi_1^{(0)}$			
		$\Phi_2^{(1)}$	$\Phi_2^{(0)}$	Φ_2	β_{12}		β_{32}	β_{42}		$\Psi_2^{(0)}$			
		$\Phi_3^{(1)}$	$\Phi_3^{(0)}$	Φ_3	β_{13}	β_{23}		β_{43}		$\Psi_3^{(0)}$			
		$\Phi_4^{(1)}$	$\Phi_4^{(0)}$	Φ_4	β_{14}	β_{24}	β_{34}			$\Psi_4^{(0)}$			
			$-\Psi_1^{(0)}$	$-\Psi_1$		γ_{21}	γ_{31}	γ_{41}	Φ_1	$\Phi_1^{(0)}$	$\Phi_1^{(1)}$		
			$-\Psi_2^{(0)}$	$-\Psi_2$	γ_{12}		γ_{32}	γ_{42}	Φ_2	$\Phi_2^{(0)}$	$\Phi_1^{(2)}$		
			$-\Psi_3^{(0)}$	$-\Psi_3$	γ_{13}	γ_{23}		γ_{43}	Φ_3	$\Phi_3^{(0)}$	$\Phi_1^{(3)}$		
			$-\Psi_4^{(0)}$	$-\Psi_4$	γ_{14}	γ_{24}	γ_{34}		Φ_4	$\Phi_4^{(0)}$	$\Phi_1^{(4)}$		
$-\Psi^{(3)}$	$-\Psi^{(2)}$	$-\Psi^{(1)}$	$-\Psi^{(0)}$		β_{10}	β_{20}	β_{30}	β_{40}		$\Phi^{(0)}$	$\Phi^{(1)}$	$\Phi^{(2)}$	$\Phi^{(3)}$

W przykładzie liczbowym przyjęto płytę w kształcie prostokąta o stosunku boków 4:6 (rys. 4), zaś wszelkie stałe przyjęto w ten sposób, że równanie (3.1.1) przybiera postać

$$(5.3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (0,6 + 0,8 i) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\rho}{D_y}$$



Rys. 4

Dla ułatwienia podajemy gotowe wzory na obliczanie współczynników β_{km} i γ_{km} (tablica 5).

Przy układzie punktów według rys. 3 równania (5.1) i (5.2) przybierają postać

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \beta_{k0} + \beta_{kh}(\Phi_l + \Phi_p) + \beta_{kv}(\Phi_g + \Phi_d) - \gamma_{kh}(\Psi_l + \Psi_p) - \gamma_{kv}(\Psi_g + \Psi_d), \\ \Psi_k &= \gamma_{k0} + \beta_{kh}(\Psi_l + \Psi_p) + \beta_{kv}(\Psi_g + \Psi_d) + \gamma_{kh}(\Phi_l + \Phi_p) + \gamma_{kv}(\Phi_g + \Phi_d), \\ &(k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Tutaj oznaczyliśmy

$$\begin{aligned}\beta_{kl} &= \beta_{kp} = \beta_{kh}, \\ \gamma_{kl} &= \gamma_{kp} = \gamma_{kh}, \\ \beta_{kg} &= \beta_{kd} = \beta_{kv}, \\ \gamma_{kg} &= \gamma_{kd} = \gamma_{kv}.\end{aligned}$$

Tablica 3 pozwala na obliczenie wielkości β i γ dla równania

$$(5.4) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (\alpha_1 + i\alpha_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = q$$

lub

$$(5.5) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (\alpha_1 + i\alpha_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = q.$$

Tablica 5

dla (5.4)	β	γ	dla (5.5)
kh	$\frac{1}{2} - \frac{1 + \alpha_1}{2[(1 + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2]}$	$\frac{\alpha_2}{2[(1 + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2]}$	kv
kv	$\frac{1 + \alpha_1}{2[(1 + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2]}$	$\frac{1}{2} - \frac{\alpha_2}{2[(1 + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2]}$	kh
$k0$	$-q \frac{1 + \alpha_1}{2[(1 + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2]}$	$q \frac{\alpha_2}{2[(1 + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2]}$	$k0$

6. Duży wpływ na przebieg iteracji ma przyjęcie «zerowych przybliżeń» (czyli wielkości wstępnych) $\varphi^{(0)}$ i $\psi^{(0)}$. Metodą najprostszą będzie tutaj rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (\alpha_1 + i\alpha_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{p(x, y)}{D_y}$$

w sposób przybliżony za pomocą rozwinięcia obciążenia $p(x, y)$ w podwójny szereg trygonometryczny i uwzględnienie tylko pierwszego wyrazu tego rozwinięcia.

Na przykład, zakładając dla obciążenia $p(x, y)$ postać przybliżoną

$$A \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b},$$

ustalimy współczynnik A z warunku

$$\frac{\partial}{\partial A} \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left[\frac{p(x, y)}{D_y} - A \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \right]^2 dx dy = 0.$$

Otrzymamy stąd

$$A = \frac{1}{abD_y} \int_0^{2a} \int_0^{2b} p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} dx dy.$$

Teraz równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (\kappa_1 + i\kappa_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{p(x, y)}{D_y} \approx A \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b}$$

rozwiążemy już łatwo, przyjmując dla $\varphi(x, y)$ następującą postać

$$\varphi(x, y) = \varphi_1 \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b}.$$

Otrzymamy wtedy po prostych przekształceniach

$$\varphi_1 = -\frac{4A a^2 b^2}{\pi^2} \frac{n^2 a^2 + \kappa_1 m^2 b^2 - i\kappa_2 m^2 b^2}{(n^2 a^2 + \kappa_1 m^2 b^2)^2 + \kappa_2^2 m^4 b^4},$$

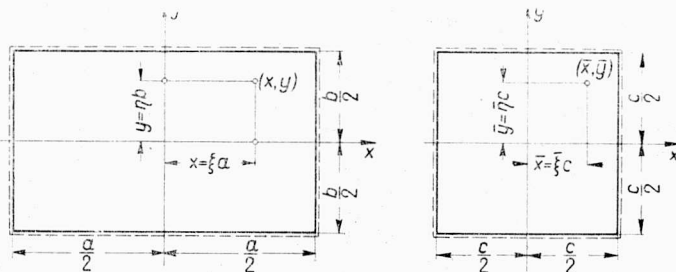
a w końcu

$$\varphi^{(0)}(x, y) = \varphi_1 \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b}.$$

Obliczenia wielkości $\varphi_k^{(0)}$ dla płyty prostokątnej obciążonej równomiernie można dokonać także w inny sposób. Przy pomocy tablicy 6, podającej stosunki $\bar{\varphi}_k/\bar{\varphi}_1$ dla izotropowej kwadratowej płyty obciążonej równomiernie, możemy wyznaczyć przybliżenia wstępne stosunków φ_k/φ_1 rozpatrywanej prostokątnej ortotropowej płyty, zakładając w mało dokładnym przybliżeniu równość

$$\frac{\varphi(\xi, \eta)}{\varphi_1} \approx \frac{\bar{\varphi}(\xi, \eta)}{\bar{\varphi}_1}.$$

Oznaczenia ξ i η wyjaśnione są na rys. 5.



Rys. 5

Wartość φ_1 (w środku płyty) ustalić można wstawiając do któregośkolwiek z pięcioczłonowych równań typu (4.2) zamiast φ_k wyrażenia $\varphi_1 \lambda$ (λ jest

tu odpowiednim współczynnikiem wziętym z tabelicy 6). Z powstałego w ten sposób równania o jednej niewiadomej obliczymy bez trudu $\varphi_1 = \varphi_1^{(0)}$.

Tablica 6

$\lambda = \bar{\varphi}/\varphi_1$	x/a						
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	
$\frac{y}{a}$	0	1,000	0,966	0,860	0,675	0,394	0
	0,1	0,966	0,934	0,833	0,653	0,383	0
	0,2	0,860	0,833	0,744	0,588	0,348	0
	0,3	0,675	0,653	0,588	0,469	0,283	0
	0,4	0,394	0,383	0,348	0,283	0,176	0
	0,5	0	0	0	0	0	0

$\lambda = \bar{\varphi}/\varphi_1$	x/a					
	0	0,125	0,25	0,375	0,5	
$\frac{y}{a}$	0	1,000	0,946	0,778	0,474	0
	0,125	0,946	0,896	0,738	0,452	0
	0,25	0,778	0,738	0,612	0,381	0
	0,375	0,474	0,452	0,381	0,244	0
	0,5	0	0	0	0	0

$\lambda = \bar{\varphi}/\varphi_1$	x/a				
	0	1/6	1/3	1/2	
$\frac{y}{a}$	0	1,000	0,904	0,592	0
	1/6	0,904	0,818	0,541	0
	1/3	0,592	0,541	0,365	0
	1/2	0	0	0	0

Formuła interpolacyjna

$$y = \frac{1}{16} [9(\bar{a} + a) - (b + \bar{b})].$$

Okazuje się, że praktycznie do tego celu nadaje się najlepiej pierwsze równanie, wypisane dla punktu środkowego płyty.

W podanych wyżej przykładach iteracji przybliżenia zerowe, $\varphi_{(0)}^k$, obliczone zostały właśnie opisaną metodą.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Nowacki, *Pasma płytowe ortotropowe*, Arch. Mech. Stos., 1951.
 [2] D. J. Panow, *Sprawocznik po czislennomu rieszenju diffierencjalnych urawnienij w czastnych proizwodnych*, Moskwa-Leningrad 1951.

Резюме

ДВУСТАДИАЛЬНЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА НЕКОТОРОГО ТИПА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

В работе рассмотрено проблему численного расчета статических величин — изгибающих моментов и срезающих сил — в изгибаемой ортотропной пла-

стинке. Особое внимание обращено на те случаи ортотропии, в которых коэффициент ρ [ср. формулу (2.1)] меньше единицы. Тогда в уравнениях (2.4) и (2.5) выступают комплексные коэффициенты β^2 и λ^2 , что, в некоторой степени, усложняет задачу.

Полученные при помощи основ исчисления конечных разностей системы линейных алгебраических уравнений, соответствующие дифференциальным уравнениям (2.4) и (2.5), решаются в работе методом итерации. Для этой цели приведены две итерационные схемы (п. 4 и 5), приспособленные для решения уравнений с комплексными коэффициентами.

Summary

A TWO STAGE METHOD OF SOLVING ORTHOTROPIC PLATE PROBLEMS

The problem of numerical calculation of statical quantities (bending moments and shearing forces) for an orthotropic plate subjected to bending is discussed, particular attention being paid to cases where the coefficient ρ [Eq. (2.1)] is less than one.

In such cases the coefficients β^2 and λ^2 , appearing in Eqs. (2.4) and (2.5), are complex numbers, which renders the problem a little more complicated.

The systems of linear algebraic equations obtained by means of the calculus of finite differences, which correspond to the differential equations (2.4) and (2.5), are solved by using the iteration method, for which two iteration procedures (Arts. 4 and 5) are described for solving problems with complex coefficients.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 grudnia 1953 r.

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

WYBOCZENIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE
NIEKTÓRYCH PRĘTÓW NIEPRYZMATYCZNYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

XXII

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	233
2. Klasyfikacja prętów afinicznych	233
3. Metoda «założenia równania ścisłego» w zastosowaniu do zagadnień stateczności prętów niepryzmatycznych	238
3.1. Opis metody «założenia równania ścisłego»	238
3.2. Wyprowadzenie wzorów na siłę krytyczną i sztywność pręta	241
3.3. Prawo Ylinena. Przypadek wyboczenia sprężysto-plastycznego	246
3.4. Przykłady stosowania wyprowadzonych wzorów i tablic	254
4. Wyboczenie sprężysto-plastyczne prętów zbieżnych	260
4.1. Wyboczenie sprężysto-plastyczne jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych	260
4.2. Wyboczenie sprężysto-plastyczne dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych	266
4.3. Wyboczenie sprężysto-plastyczne jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych	272
4.4. Wyboczenie sprężysto-plastyczne dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych	277
4.5. Określenie kierunku niebezpiecznego dla prętów płasko zbieżnych	277
4.6. Obliczenie siły krytycznej dla prętów zbieżnych metodami przybliżonymi	282
4.7. Przykład liczbowy	286
5. Uwagi końcowe i wnioski	286

1. Wstęp

Stosowanie w praktyce prętów niepryzmatycznych, narażonych na wyboczenie, jest podyktowane różnymi względami. Z jednej strony łatwo przewidzieć, że materiał obliczonego na wyboczenie pręta przyzmatycznego nie jest należycie wykorzystany, że więc zastosowanie prętów niepryzmatycznych pozwoli dokonać pewnych oszczędności na materiale, a tym samym i na ciężarze konstrukcji. W innych przypadkach stosowanie prętów niepryzmatycznych narzuca konstrukcja (korbowody silników spalinowych, sprzężarek, wiertła kręte walcowe i stożkowe itp.).

Obliczaniem siły krytycznej dla różnych rodzajów prętów niepryzmatycznych przy założeniu prawa Hooke'a, a więc sprężystości odkształceń zajmowało się wielu badaczy; szczególne zasługi położył na tym polu A. N. Din'nik, [1], zestawiając między innymi wyniki obliczeń w tablice, nadające się do bezpośredniego wykorzystania w praktyce konstruktorskiej. Stosowalność tablic tych jest jednak ograniczona, bowiem naprężenie krytyczne w najmniejszym z przekrojów pręta nie może przekraczać granicy proporcjonalności. Praca niniejsza stawia sobie za cel rozszerzenie zagadnienia, mianowicie określenie sił krytycznych dla niektórych ważniejszych prętów niepryzmatycznych, podlegających wyboczeniu sprężysto-plastycznemu.

2. Klasyfikacja prętów afinicznych

Obierzmy pewien przekrój poprzeczny nieodkształconego pręta prostego za podstawowy i przyjmijmy w jego środku ciężkości początek prostokątnego układu współrzędnych. Oś x skierowujemy zgodnie z osią pręta, osie y i z zgodnie z głównymi środkowymi osiami bezwładności przekroju podstawowego. Przekrój podstawowy będzie więc posiadał odciętą $x=0$. Wielkości, charakteryzujące go, jak powierzchnię F , momenty bezwładności I_y i I_z itp., będziemy oznaczali wskaźnikami 0. Przekrój podstawowy możemy uważać za pewien obszar D w płaszczyźnie yz , spełniający z założenia warunki

$$(2.1) \quad \int_D y dF = \int_D z dF = \int_D yz dF = 0.$$

Przekroje końcowe pręta będą posiadały odcięte α i β , przy czym albo $\alpha \leq 0$ i $\beta > 0$, albo $\alpha < 0$ i $\beta \geq 0$.

Przez płaszczyznę $\bar{y}\bar{z}$ będziemy rozumieli przesuniętą równoległe o x (w kierunku tej osi) płaszczyznę yz .

Każdy przekrój pręta możemy uważać za pewne przekształcenie przekroju podstawowego, czyli obszaru D . Jeżeli przekształcenie to będzie dla każdego x z przedziału $\langle \alpha, \beta \rangle$ określone związkami

$$(2.2) \quad \begin{cases} \bar{y} = y, \\ \bar{z} = z, \end{cases}$$

to będziemy mieli do czynienia z prętem przyzmatycznym; w przeciwnym razie pręt będzie na ogół nieprzyzmatyczny (jako wyjątek można tu podać np. różne od (2.2) przekształcenie, powodujące obrót obszaru D , będącego kołem, wokół jego środka).

Ogólnie biorąc możemy przekształcenie przekroju podstawowego zapisać w postaci (na ogół różnej dla różnych x)

$$(2.3) \quad \begin{cases} \bar{y} = f_1(y, z), \\ \bar{z} = f_2(y, z). \end{cases}$$

Dla znacznej większości stosowanych w praktyce prętów przekształcenie (2.3) jest dla każdego x z przedziału $\langle \alpha, \beta \rangle$ przekształceniem afinicznym (pokrewieństwem); pręty te wyodrębnimy spośród wszystkich możliwych prętów nieprzyzmatycznych i nazwiemy krótko prętami afinicznymi. Przekształcenie złożone z kilku przekształceń afinicznych oraz odwrotne do afinicznego jest również afiniczne, więc przyjęcie przekroju podstawowego nie odgrywa tu żadnej roli.

Jak wiadomo, przekształcenie (2.3) jest afiniczne, gdy

$$(2.4) \quad \begin{cases} \bar{y} = a_1 y + b_1 z + c_1, \\ \bar{z} = a_2 y + b_2 z + c_2, \end{cases} \quad \text{przy czym} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Cechą istotną przekształcenia afinicznego jest zachowanie równoległości prostych.

Związki (2.4) przekształcają płaszczyznę yz na $\bar{y}\bar{z}$, a wraz z nią i obszar D na pewien obszar \bar{D} . Ponieważ środek ciężkości obszaru \bar{D} ma z założenia leżeć na osi x , to muszą być spełnione warunki

$$(2.5) \quad \int_{\bar{D}} \bar{y} d\bar{F} = \int_{\bar{D}} \bar{z} d\bar{F} = 0,$$

z których wynika $c_1 = c_2 = 0$. Zatem pręt nazywamy afinicznym, gdy każdy jego przekrój można otrzymać z przekroju podstawowego przez przekształcenie

$$(2.6) \quad \begin{cases} \bar{y} = a_1 y + b_1 z, \\ \bar{z} = a_2 y + b_2 z, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Współczynniki a_1, a_2, b_1 i b_2 są na ogół funkcjami zmiennej x . Funkcje te spełniają z założenia warunki

$$(2.7) \quad \begin{cases} a_1(0) = b_2(0) = 1, \\ a_2(0) = b_1(0) = 0. \end{cases}$$

Jeżeli wszystkie one są funkcjami ciągłymi w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, to pręt będziemy nazywali *ciągle* afinicznym, w przeciwnym razie — *nieciągle* afinicznym.

Spśród prętów afinicznych wyodrębnimy te, dla których kierunki główne wszystkich przekrojów poprzecznych będą do siebie odpowiednio równoległe i nazwiemy je prętami afinicznymi o stałych kierunkach głównych. Kierunki te będą kierunkami osi \bar{y} i \bar{z} ; zatem dla prętów tych

$$(2.8) \quad \int_D \int \bar{y}\bar{z} d\bar{F} = 0.$$

Oznaczając

$$\int_D \int y^2 dF = I_{z0}, \quad \int_D \int z^2 dF = I_{y0}$$

i wykorzystując warunek (2.1), po postawieniu (2.6) do (2.8) otrzymujemy

$$(a_1 a_2 I_{z0} + b_1 b_2 I_{y0}) (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0,$$

czyli, ponieważ $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, więc

$$(2.9) \quad a_1 a_2 I_{z0} + b_1 b_2 I_{y0} = 0.$$

Ponieważ nie może zachodzić równocześnie $a_1 = b_1 = 0$ lub $a_2 = b_2 = 0$ [sprzeczne z (2.6)], oraz $a_1 = b_2 = 0$ [sprzeczne z (2.7)], to równanie (2.9) będzie spełnione, gdy

$$(1) \quad a_2 = b_1 = 0,$$

$$(2) \quad \text{wszystkie współczynniki } a_1, a_2, b_1 \text{ i } b_2 \text{ są różne od zera, lecz}$$

$$\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = -\frac{I_{y0}}{I_{z0}}$$

dla każdego x z przedziału $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Zajmiemy się szczegółowo jedynie pierwszą z tych możliwości, ponieważ druga z reguły nie znajduje zastosowania w praktyce. Przekształcenie (2.6) przybierze tu więc postać

$$(2.10) \quad \begin{cases} \bar{y} = a_1 y, \\ \bar{z} = b_2 z. \end{cases}$$

Rozpatrzmy najpierw przypadki szczególne tego przekształcenia

$$(a) \quad a_1 = b_2 \equiv 1.$$

W tym przypadku mamy do czynienia z prętem przyzmatycznym. Pręt przyzmatyczny możemy więc również zaliczyć do afinicznych.

$$(b) \quad \begin{cases} a_1 = \kappa(x), \\ b_2 = \text{const} = 1, \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} a_1 = \text{const} = 1, \\ b_2 = \kappa(x). \end{cases}$$

Przez odpowiednie przyjęcie układu osi możemy zawsze drugi z tych przypadków sprowadzić do pierwszego, toteż tylko tym przypadkiem będziemy się zajmowali. Przekształcenie (2.10) staje się powinowactwem prostokątnym:

$$(2.11) \quad \begin{cases} \bar{y} = \kappa(x)y, \\ \bar{z} = z; \end{cases}$$

pręty takie będziemy zwali płasko afinicznymi, ponieważ zmiana wymiarów przekroju występuje tylko w jednej płaszczyźnie (xy). Gdy $\kappa(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, to dany pręt będzie *ciągle* płasko afiniczny. Oznaczając powierzchnie przekrojów przez F , momenty bezwładności przez I promienie bezwładności przez i oraz współczynniki kształtu przekroju $F/i^2 = \varphi$, możemy łatwo wyprowadzić następujące związki dla prętów płasko afinicznych:

$$(2.12) \quad \begin{cases} F(x) = \kappa(x)F_0, & i_z(x) = \kappa(x)i_{z0}, \\ I_y(x) = \kappa(x)I_{y0}, & \varphi_y(x) = \kappa(x)\varphi_{y0}, \\ I_z(x) = \kappa^3(x)I_{z0}, & \varphi_z(x) = \frac{1}{\kappa(x)}\varphi_{z0}, \\ i_y(x) = i_{y0} = \text{const}, & \end{cases}$$

$$(c) \quad a_1 = b_2 = \kappa(x).$$

Przekształcenie (2.10) staje się w tym przypadku homotetią:

$$(2.13) \quad \begin{cases} \bar{y} = \kappa(x)y, \\ \bar{z} = \kappa(x)z. \end{cases}$$

Mamy zatem do czynienia z podobieństwem geometrycznym wszystkich przekrojów. Pręty takie będziemy zwali *przestrzennie równomiernie* afinicznymi z uwagi na to, że zmiana ich wymiarów w kierunku obu osi jest jednakowa. Będą to pręty o stałym kształcie, a zmiennej wielkości przekroju. Jeżeli funkcja $\kappa(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, to dany pręt będzie *ciągle* przestrzennie równomiernie afiniczny.

Dla prętów przestrzennie równomiernie afinicznych będą obowiązywać związki:

$$(2.14) \quad \begin{cases} F(x) = \kappa^2(x)F_0, \\ I_y(x) = \kappa^4(x)I_{y0}, \\ I_z(x) = \kappa^4(x)I_{z0}, \\ i_y(x) = \kappa(x)i_{y0}, \\ i_z(x) = \kappa(x)i_{z0}, \\ \varphi_y(x) = \varphi_{y0} = \text{const}, \\ \varphi_z(x) = \varphi_{z0} = \text{const}. \end{cases}$$

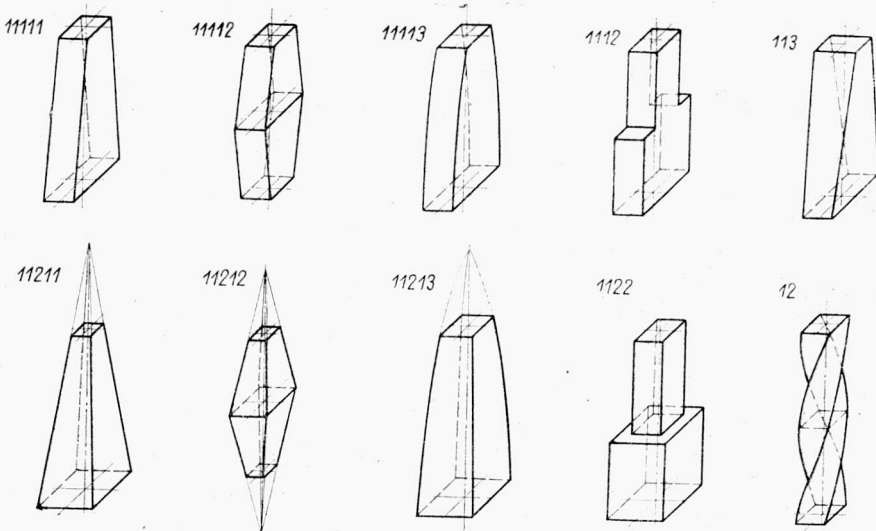
Dwa ostatnie związki są oczywiste z uwagi na stały kształt przekroju pręta.

W przypadku ogólnym przekształcenie (2.10) nie da się sprowadzić ani do (2.11), ani do (2.13). Odpowiednie pręty będziemy zwali przestrzennie *nierównomiernie* afinicznymi.

Pręty przestrzennie równomiernie lub płasko afiniczne, dla których funkcja $\kappa(x)$ jest funkcją liniową, a zatem z uwagi na (2.7) ma postać

$$(2.15) \quad \kappa(x) = 1 + \kappa_0 x,$$

gdzie κ_0 jest pewną liczbą stałą, będziemy zwali przestrzennie równomiernie lub płasko *zbieżnymi*. Krawędzie prętów zbieżnych będą, oczywiście, liniami prostymi. Szczególnie częste zastosowanie znajdują pręty przestrzennie równomiernie zbieżne, do których należą ostrosłupy i stożki proste (ewentualnie ścięte).



Rys. 1. Pręty afiniczne

Pręty złożone z dwóch jednakowych prętów zbieżnych (płasko lub przestrzennie równomiernie), złączonych odpowiednimi podstawami, będziemy zwali prętami *dwuzbieżnymi*. W przypadku gdy między tymi podstawami

znajduje się część przymatyczna, pręt można by nazwać *przymatyczno-dwuzbieżnym*. Wyboczenie sprężyste takich właśnie prętów (zbieżnych, dwuzbieżnych i przymatyczno-dwuzbieżnych) opracował już szczegółowo A. N. Dinnik.

W podobny sposób można również przeprowadzić podział prętów afinicznych o zmiennych kierunkach głównych, czym jednak nie będziemy się tutaj zajmowali.

Usystematyzujemy teraz pręty afiniczne tworząc klasyfikację dziesiętną ważniejszych typów. Przykłady klasyfikowanych prętów podaje rys. 1.

Tablica 1. Klasyfikacja prętów afinicznych

-
1. Pręty afiniczne
 11. Pręty afiniczne o stałych kierunkach głównych
 111. Pręty płasko afiniczne
 1111. Pręty ciągle płasko afiniczne:
 - 11111, których krawędzie są liniami prostymi — pręty płasko zbieżne
 - 11112, których krawędzie są liniami łamanymi, np. pręty płasko dwuzbieżne
 - 11113, których krawędzie są liniami krzywymi
 1112. Pręty nieciągle płasko afiniczne
 112. Pręty przestrzennie równomiernie afiniczne
 1121. Pręty ciągle przestrzennie równomiernie afiniczne:
 - 11211, których krawędzie są liniami prostymi — pręty przestrzennie równomiernie zbieżne
 - 11212, których krawędzie są liniami łamanymi, np. pręty przestrzennie równomiernie dwuzbieżne
 - 11213, których krawędzie są liniami krzywymi
 1122. Pręty nieciągle przestrzennie równomiernie afiniczne
 113. Pręty przestrzennie nierównomiernie afiniczne
 12. Pręty afiniczne o zmiennych kierunkach głównych
-

3. Metoda «założenia równania ściślego» w zastosowaniu do zagadnień stateczności prętów nieprzyrzmatycznych

3.1. Opis metody «założenia równania ściślego». Rozwiązanie ściśle zagadnienia stateczności polega z reguły na scałkowaniu odpowiedniego równania różniczkowego i obliczeniu wartości właściwych tego równania przy uwzględnieniu pewnych warunków brzegowych. W wielu przypadkach rozwiązanie to natrafia jednak na znaczne trudności natury matematycznej; dla ominięcia ich podano cały szereg metod przybliżonych, które na ogół z dostateczną dokładnością pozwalają rozwiązać zagadnienie, a więc obliczyć siłę krytyczną dla danego elementu. Stosując je ograniczamy się zwykle do obliczenia pierwszej tylko siły krytycznej, co z reguły jest dla zastosowań zupełnie wystarczające.

Zastanówmy się nad możliwościami obliczenia siły krytycznej dla prętów niepryzmatycznych poddanych wyboczeniu sprężysto-plastycznemu. Ograniczymy się do rozpatrywania prętów o stałych kierunkach głównych, dla których można przyjąć, że linia ugięcia będzie krzywą płaską, położoną w płaszczyźnie xy lub xz .

Przez E^* oznaczmy moduł wyboczenia. Zależy on od naprężenia i od kształtu przekroju, przy czym dla przekrojów symetrycznych według badań Jeżeka, [5], Urbana, [20], Ylлина, [21], i innych tę ostatnią zależność można pominąć. Naprężenie zależy od siły ściskającej P i od powierzchni przekroju $F = F(x)$, zatem $E^* = E^*(P, x)$. Jeżeli przyjmiemy najprostszyp przypadk zamocowania końców i obciążenia pręta (pręt dwuprzegubowy lub jednostronnie utwierdzony, ściskany skupioną siłą osiową), to siła krytyczna będzie określona mniejszą z najmniejszych wartości właściwych równań

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} y'' + \frac{Py}{E^*(P, x)I_z(x)} = 0, \\ z'' + \frac{Pz}{E^*(P, x)I_y(x)} = 0. \end{cases}$$

Ponieważ zależność $E^* = E^*(\sigma)$ jest z reguły dość skomplikowana, to widoki na scałkowanie tych równań nawet dla najprostszych zależności $I = I(x)$ wydają się być nikłe, tym bardziej, że nawet po znalezieniu ich całki ogólnej i uwzględnieniu warunków brzegowych spore trudności mogłyby powstać przy obliczeniu wartości właściwych: siła P występuje bowiem w równaniach dwukrotnie i to w sposób złożony.

Również zastosowanie wzoru Ritza-Timoszenki, który (po zastąpieniu w nim E przez E^*) przyjmie postać

$$(3.1.2) \quad P_k = \frac{\int_0^l E^* I_z y''^2 dx}{\int_0^l y'^2 dx}$$

(lub analogiczną dla wyboczenia w płaszczyźnie xz), nie doprowadzi bezpośrednio do celu z uwagi na to, że moduł wyboczenia E^* jako zależny od P nie jest znany. Trudność tę można by ominąć za pomocą metody kolejnych przybliżeń. Ponieważ jednak obliczenie całek występujących w tym wzorze z reguły daje się przeprowadzić jedynie w sposób przybliżony, to biorąc pod uwagę, że sam wzór (3.1.2) w przypadku nieznanomości ścisłego równania linii ugięcia jest również wzorem przybliżonym, nie możemy się spodziewać dobrych wyników przy stosowaniu tak dużej ilości przybliżeń.

Również inne znane metody przybliżone, jak Galerki na i Trefftza, wydaje się, że nie prowadzą do celu. Większe może nadzieje rokowałyby

metoda różnic skończonych, choć i tu przy kilkakrotnej iteracji nakład pracy byłby niewątpliwie duży, a ocena wielkości błędu — stosunkowo trudna.

Zagadnienie rozwiążemy zatem inną metodą, którą nazwiemy «metodą założenia równania ścisłego». Dla uproszczenia zajmiemy się jedynie wyboczeniem w płaszczyźnie xy , co nie ogranicza ogólności rozważań. Punkt wyjściowy tej metody jest podobny jak w metodach Ritz'a i Galerkin'a. Obieramy, mianowicie, funkcję $y = y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x)$ o kilku chwilowo nieoznaczonych parametrach $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, spełniającą ściśle warunki brzegowe, a na ogół nie spełniającą danego równania, które w najprostszym przypadku posiada postać

$$(3.1.3) \quad y'' + \frac{P}{B_d} y = 0.$$

Przez B_d oznaczyliśmy sztywność wyboczenia danego pręta. Założymy na razie, że mamy do czynienia z wyboczeniem sprężystym, więc funkcja

$$B_d = B_d(x) = EI(x)$$

jest funkcją znaną; przystosowaniem tej metody do zagadnień wyboczenia sprężysto-plastycznego zajmiemy się później.

Założona funkcja y spełnia jednak na ogół jakies inne równanie

$$(3.1.4) \quad y'' + \frac{P}{B} y = 0,$$

z którego będziemy mogli otrzymać zależność $B = B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x)$, czyli kształt pręta, którego wyboczenie nastąpi według obranej linii ugięcia, oraz siłę krytyczną dla tego pręta. Kształt ten jest jednak uzależniony od wartości parametrów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; dobierając je odpowiednio możemy uzyskać w przybliżeniu z góry zadany kształt pręta $B_d = B_d(x)$. Teoretycznie, optymalne wartości parametrów możemy obliczyć z warunku

$$(3.1.5) \quad \int_0^l [B_d(x) - B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x)]^2 dx = \text{minimum},$$

choć praktycznie spełnienie tego warunku jest z reguły wskutek trudności rachunkowych bardzo kłopotliwe i wobec tego będziemy postępowali nieco inaczej.

Istotna różnica między metodą «założenia równania ścisłego» i metodami Ritz'a i Galerkin'a polega na tym, że w tych ostatnich metodach obrana funkcja spełnia równanie w przybliżeniu i wartość siły krytycznej jest wartością przybliżoną, natomiast w metodzie «założenia równania ścisłego» równanie [np. (3.1.4)] jest spełnione ściśle i wartość siły krytycznej jest ścisła, a jedyne przybliżenie kryje się w tym, że pręt, dla którego przeprowadzamy obliczenia, jest tylko zbliżony do pręta danego. Kształt otrzy-

manego pręta różni się bowiem nieco od kształtu pręta, dla jakiego chcieliśmy siłę krytyczną obliczyć.

Metoda zaproponowana pozwala na bardzo łatwą ocenę błędów, pozostających w ścisłym związku z tolerancją wykonania danego pręta, i często błędy wymiarowe, określone różnicą funkcji $B_d(x)$ i $B(x)$, będą leżały w granicach błędów obróbki. Wtedy z technicznego punktu widzenia obliczenie będzie można uznać nawet za ścisłe. Przy stosowaniu metody «założenia równania ścisłego» nie jest istotne posiadanie analitycznej zależności $I = I(x)$; wystarczy znajomość sztywności pręta w kilku punktach (możliwie równomiernie rozłożonych na długości pręta), ponieważ wartości parametrów można dobrać przez bezpośrednie porównanie otrzymanej i założonej sztywności w tych punktach.

Główna zaleta metody polegać jednak będzie na stosunkowo łatwym zastąpieniu stałego modułu Younga E zmiennym modulem wybożenia E^* , co umożliwi rozwiązanie zagadnienia wybożenia sprężysto-plastycznego prętów niepryzmatycznych. Prócz tego omawiana metoda może oddać pewne usługi przy stosowaniu metod Galerki i Ritz, ponieważ obliczając rzeczywisty kształt pręta, dla którego założone równanie linii ugięcia jest równaniem ścisłym, można łatwo zdać sobie sprawę z rzędu popełnianych błędów.

3.2. Wyprowadzenie wzorów na siłę krytyczną i sztywność pręta. Rozważmy wybożenie pręta w płaszczyźnie xy i dla czterech podstawowych przypadków wybożenia przyjmujemy układy odniesienia jak na rys. 2. Zgodnie z oznaczeniami, przyjętymi w p. 2, układ osi narzuca nam wybór przekroju podstawowego: jest to przekrój, któremu odpowiada $x = 0$. We wszystkich czterech przypadkach przyjęliśmy więc $\alpha = 0$ i $\beta = l$. Należy jednak pamiętać, że rozwiązanie tych przypadków jest zarazem rozwiązaniem kilku innych. Na przykład łatwo wykazać, że siła krytyczna dla pręta jednostronnie utwierdzonego jest zarazem siłą krytyczną dla pręta dwuprzegubowego, złożonego z dwóch takich prętów, złączonych odpowiednimi podstawami, a więc dla pręta, dla którego $\alpha = -l$ i $\beta = l$. W ten sposób obliczymy np. siłę krytyczną dla dwuprzegubowego pręta dwuzbieżnego.

Dla uproszczenia obliczeń wprowadzimy nowe zmienne bezwymiarowe. Oznaczmy mianowicie

$$(3.2.1) \quad \frac{x}{l} = t,$$

$$(3.2.2) \quad \frac{B(x)}{B_0} = b(x) \quad \text{lub} \quad \frac{B(t)}{B_0} = b(t),$$

gdzie B_0 jest sztywnością pręta na wybożenie w przekroju podstawowym. Po wprowadzeniu tych oznaczeń równanie zasadnicze zginania

$$(3.2.3) \quad \frac{M}{B} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

przybierze postać

$$\frac{M}{bB_0} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 y}{dt^2},$$

czyli, oznaczając dla skrócenia $\frac{d^2 y}{dt^2}$ przez y'' ,

$$(3.2.4) \quad y'' - \frac{Ml^2}{bB_0} = 0.$$

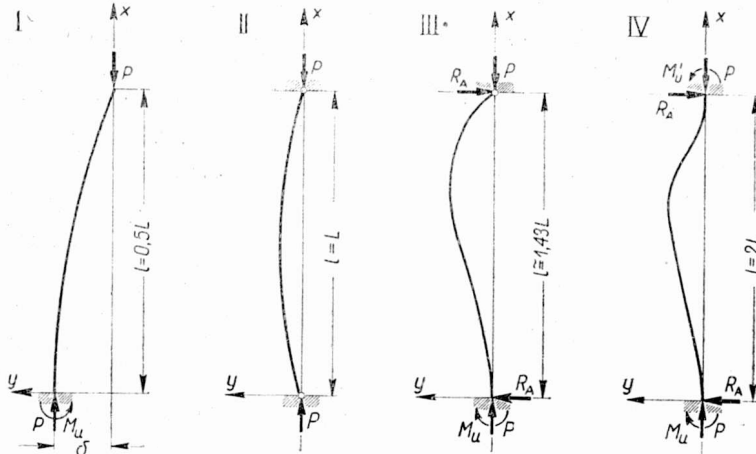
Zajmiemy się najpierw pierwszym przypadkiem wyboczenia. Ponieważ mamy tu $M = -Py$, więc po wstawieniu jest

$$(3.2.5) \quad y'' + \frac{Pl^2}{bB_0} y = 0.$$

Założymy teraz z góry równanie linii ugięcia w postaci

$$(3.2.6) \quad y = \delta f(t)$$

— na ogół z pewną ilością parametrów, których dla skrócenia zapisu nie będziemy wyszczególniali — określimy kształt pręta, dla którego równanie to



Rys. 2. Przyjęte układy odniesienia

będzie ściśle obowiązywać, oraz obliczymy siłę krytyczną dla tego pręta. Przez δ oznaczymy tu strzałkę ugięcia pręta; zdążanie jej do zera zapewni zdążanie siły do wartości krytycznej. Równanie (3.2.6) musi spełniać warunki brzegowe, więc $f(1) = 0$ i $f'(0) = 0$; poza tym $f(0) = 1$, a jeżeli założymy, że sztywność w przekroju $t=1$ (swobodny koniec pręta) ma być różna od zera, to musi być ponadto spełniony warunek $f''(1) = 0$, co jest widoczne z równania (3.2.5). Po podstawieniu mamy

$$(3.2.7) \quad \delta f''(t) + \frac{P\delta l^2}{bB_0} f(t) = 0.$$

Równanie to ma być spełnione dla każdej wartości t w przedziale $0 \leq t \leq 1$; wstawiając do równania $t = 0$ [zatem $b = 1$, jak widać z (3.2.2)], otrzymujemy

$$(3.2.8) \quad \delta f''(0) + \frac{P \delta l^2}{B_0} = 0.$$

Stąd wartość siły krytycznej

$$(3.2.9) \quad P_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[-\frac{B_0 \delta f''(0)}{\delta l^2} \right] = -\frac{B_0}{l^2} f''(0).$$

Oczywiście, w przypadku prawidłowego wyboru funkcji $f(t)$ wartość ta wypadnie dodatnia, ponieważ z rys. 2 jest rzeczą widoczną, że $f''(0) < 0$. Wprowadzając, jak się to zazwyczaj czyni, współczynnik stateczności \mathfrak{J} , określony dla pierwszego przypadku wyboczenia równaniem

$$(3.2.10) \quad P_k = \mathfrak{J} \frac{EI_0}{L^2} = \mathfrak{J} \frac{EI_0}{4l^2},$$

gdzie przez L oznaczyliśmy długość zredukowaną pręta $L = 2l$, otrzymujemy ze wzoru (3.2.9) w przypadku wyboczenia sprężystego wprost

$$(3.2.11) \quad \mathfrak{J} = -4f''(0),$$

natomiast w przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego

$$(3.2.12) \quad \mathfrak{J} = -4f''(0) \frac{E_0^*}{E},$$

gdzie E_0^* jest modułem wyboczenia w przekroju podstawowym¹⁾. W tym ostatnim przypadku nie możemy na razie obliczyć konkretnej wartości \mathfrak{J} , ponieważ nie znamy E_0^* . Posłużymy się więc tylko wzorem (3.2.11) oznaczając wynik przez $\bar{\mathfrak{J}}$; będzie to pozorny współczynnik stateczności.

Wprowadzimy również pojęcia naprężeń krytycznych: w przekroju podstawowym (utwierdzonym)

$$(3.2.13) \quad \sigma_{k0} = \frac{P_k}{F_0}$$

oraz w przekroju swobodnym

$$(3.2.14) \quad \sigma_{k1} = \frac{P_k}{F_1},$$

gdzie F_1 jest powierzchnią przekroju dla $t = 1$. Z (3.2.10) otrzymujemy na naprężenie σ_{k0} wzór analogiczny do wzoru Eulera

$$(3.2.15) \quad \sigma_{k0} = \mathfrak{J} \frac{E}{\lambda_0^2},$$

w którym oznaczyliśmy

$$(3.2.16) \quad \lambda_0 = \frac{L}{i_0} = \frac{2l}{i_0}.$$

¹⁾ Przypominamy, że każdy pręt będzie miał na ogół różne wartości E_0^* , zależnie od rozpatrywanego kierunku wyboczenia.

Wielkość tę będziemy nazywali *smukłością dolną* pręta niepryzmatycznego. Z jednej bowiem strony obrany przez nas przekrój podstawowy pręta w większości konstrukcyj będzie się znajdował na dole, z drugiej zaś strony spośród wszystkich możliwych smukłości pręta, określonych jako stosunek L/i , λ_0 posiadać będzie z reguły wartość najmniejszą, inaczej wartość dolną. Przypomnimy tu, że każdy pręt niepryzmatyczny o stałych kierunkach głównych posiada dwie smukłości dolne, ponieważ oprócz rozpatrywanego przez nas wyboczenia w płaszczyźnie xy jest również możliwe wyboczenie w płaszczyźnie xz .

Podstawiając (3.2.11) do (3.2.15) otrzymujemy w przypadku wyboczenia sprężystego

$$(3.2.17) \quad \sigma_{k0} = -4f''(0) \frac{E}{\lambda_0^2}.$$

W przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego będzie to wartość pozorna którą oznaczymy przez $\bar{\sigma}_{k0}$. Rzeczywiste naprężenie wyniesie

$$(3.2.18) \quad \sigma_{k0} = \bar{\sigma}_{k0} \frac{E_0^*}{E}.$$

Określiliśmy już wartość siły krytycznej i naprężenia krytycznego dla pręta, choć nie wiemy jeszcze, jaki jest jego kształt — jak zmienia się sztywność wzdłuż osi. Wstawiając (3.2.9) do (3.2.7) i zakładając, że $\delta \rightarrow 0$, otrzymamy

$$(3.2.19) \quad b = b(t) = \frac{f''(0)f(t)}{f''(t)},$$

co przy przyjęciu sztywności przekroju podstawowego równej B_0 określa poszukiwany kształt pręta.

Ponieważ jednym z warunków, które spełnia funkcja $f(t)$, jest $f(1) = 0$, więc ze wzoru (3.2.19) widzimy, że $b(1)$, oznaczone dalej krótko przez b_1 , może być tylko wtedy różne od zera, gdy $f''(1) = 0$, co podkreślaliśmy już wyżej; wtedy

$$(3.2.20) \quad b_1 = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f''(0)f(t)}{f''(t)} = \frac{f''(0)f'(1)}{f'''(1)},$$

zgodnie z regułą de l'Hospitala.

Analogiczne wzory wyprowadzimy bez trudu dla drugiego przypadku wyboczenia. Po wprowadzeniu oznaczeń (3.2.1) i (3.2.2) otrzymujemy tu także równanie (3.2.5). Równanie linii ugięcia założymy w postaci (3.2.6), zmieniają się jedynie warunki brzegowe: mamy tu $f(0) = 0$ i $f(1) = 0$, a jeżeli założymy, że sztywność w przekrojach $t = 0$ i $t = 1$ ma być różna od zera, to muszą być również spełnione warunki $f''(0) = 0$ i $f''(1) = 0$, co jest widoczne z równania (3.2.5). Po podstawieniu otrzymujemy równanie (3.2.7).

Wstawiając $t=0$ mamy

$$\delta f''(0) + \frac{P\delta l^2}{B_0} f(0) = 0,$$

skąd

$$P_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[-\frac{B_0 \delta f''(0)}{\delta l^2 f(0)} \right] = -\frac{B_0 f''(0)}{l^2 f(0)}.$$

Z warunków brzegowych wynika, że $f''(0) = f(0) = 0$, więc siłę krytyczną znajdziemy jako granicę

$$(3.2.21) \quad P_k = \lim_{t \rightarrow 0} \left[-\frac{B_0 f''(t)}{l^2 f(t)} \right] = -\frac{B_0 f'''(0)}{l^2 f'(0)}.$$

Współczynnik stateczności ϑ i naprężenie krytyczne σ_{k0} będą tu określone wzorami

$$(3.2.22) \quad \vartheta = -\frac{f'''(0)}{f'(0)},$$

$$(3.2.23) \quad \sigma_{k0} = -\frac{f'''(0) E}{f'(0) \lambda_0^2}.$$

W przypadku wyboczenia sprężystego będą to wartości rzeczywiste, w przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego — pozorne, które oznaczymy, jak poprzednio, kreską u góry.

Funkcję $\bar{b} = \bar{b}(t)$, określającą kształt pręta, otrzymamy z równania (3.2.7) wstawiając wartość siły krytycznej (3.2.21) i zakładając, że $\delta \rightarrow 0$:

$$(3.2.24) \quad \bar{b} = \bar{b}(t) = \frac{f'''(0) f(t)}{f'(0) f''(t)}.$$

Podobnie, jak w poprzednim przypadku, $\bar{b}(1) = b_1$ znajdziemy jako granicę

$$(3.2.25) \quad b_1 = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f'''(0) f(t)}{f'(0) f''(t)} = \frac{f'''(0) f'(1)}{f'(0) f'''(1)}$$

korzystając z reguły de l'Hospitala.

W trzecim i czwartym przypadku wyboczenia wyprowadzenie analogicznych wzorów jest nieco trudniejsze. Nie zajmując się nimi szczegółowo pokażemy jedynie, w jaki sposób można otrzymać wzór na siłę krytyczną dla pręta dwustronnie utwierdzonego, zakładając odpowiednie równanie linii ugięcia. Moment gnący jest tu określony wzorem $M = -Py + M_u - R_A lt$, gdzie M_u i R_A są reakcjami statycznie niewyznaczalnymi. Zakładając równanie linii ugięcia w postaci (3.2.6) z odpowiednimi warunkami brzegowymi, po wstawieniu do (3.2.4) otrzymujemy

$$(3.2.26) \quad \frac{\delta b B_0}{l^2} f''(t) + P \delta f(t) = M_u - R_A lt.$$

Zanim przejdziemy do określenia siły krytycznej, musimy najpierw obliczyć reakcje M_u i R_A . Założona przez nas linia ugięcia musi posiadać dwa punkty przegięcia; oznaczmy ich odcięte przez t_{p1} i t_{p2} . Mamy więc $f''(t_{p1}) = f''(t_{p2}) = 0$, a po wstawieniu do (3.2.26) otrzymujemy układ dwóch równań, z którego obliczymy M_u i R_A :

$$(3.2.27) \quad \begin{cases} P\delta f(t_{p1}) = M_u - R_A t_{p1}, \\ P\delta f(t_{p2}) = M_u - R_A t_{p2}. \end{cases}$$

Po wstawieniu obliczonych wartości do (3.2.26) i podstawieniu $t = 0$ oraz $\delta \rightarrow 0$ otrzymujemy ostatecznie

$$(3.2.28) \quad P_k = \frac{B_0}{l^2} \frac{(t_{p2} - t_{p1})f''(0)}{t_{p2}f(t_{p1}) - t_{p1}f(t_{p2})}.$$

Kształt pręta można teraz określić z równania (3.2.26).

3.3. Prawo Ylinena. Przypadek wyboczenia sprężysto-plastycznego. Za pomocą wyprowadzonych wyżej wzorów możemy obliczyć efektywnie siłę krytyczną i kształt pręta tylko w przypadku wyboczenia sprężystego, a więc stałego modułu wyboczenia $E^* = E$. Przypadek wyboczenia sprężysto-plastycznego możemy rozwiązać dopiero po przyjęciu zależności $E^* = E^*(\sigma)$, a więc zależności modułu wyboczenia od naprężenia, uwzględniającej własności plastyczne materiału. Wyboczenie pręta niepryzmatycznego będzie wyboczeniem sprężystym tylko wtedy, gdy naprężenie krytyczne w najmniejszym z przekrojów pręta nie przekroczy granicy sprężystości. Łatwo przewidzieć, że dzięki nierównomiernemu rozkładowi naprężeń będziemy tu mieli znacznie częściej do czynienia z wyboczeniem sprężysto-plastycznym niż w przypadku prętów przyzmatycznych. Tak, na przykład, dla stożka ściętego, którego średnica podstawy górnej jest dwa razy mniejsza od średnicy podstawy dolnej ($\sigma_{k1} = 4\sigma_{k0}$), czyli nawet gdy σ_{k0} jest znacznie mniejsze od granicy sprężystości, σ_{k1} może ją już przekroczyć.

Oprzemy się tu na prawie, które sformułował badacz fiński A. Ylinen, [21]. Podobnie jak prawo Hooke'a ujmuje zależność między odkształceniami i naprężeniami we wzór

$$(3.3.1) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E = \text{const},$$

tak (dla materiałów plastycznych o rzeczywistej granicy plastyczności σ_{pl}) prawo Ylinena można wyrazić wzorem

$$(3.3.2) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_{pl}} \right)^n \right],$$

przy czym wykładnik n jest traktowany jako stała materiałowa. Wartości tej stałej dla różnych materiałów wyznaczyli Gehler, Roš, Ylinen i inni.

Wzór Ylinena różni się od wzoru Hooke'a o czynnik $[1 - (\sigma/\sigma_{pl})^n]$; czynnik ten można by nazwać poprawką Ylinena lub poprawką na plastyczność. Ponieważ wykładnik n jest stosunkowo duży (dla stali $n = 6$ do 18), to przy niewielkich naprężeniach czynnik ten jako bliski jedności nie posiada wpływu i prawo Ylinena sprowadza się do prawa Hooke'a. Przy większych naprężeniach obniża on wartość pochodnej $d\sigma/d\varepsilon$, co jest zgodne z wynikami doświadczeń. Dlatego też prawo Ylinena można uważać za uogólnienie prawa Hooke'a: podczas gdy prawo Hooke'a jest ważne tylko wtedy, gdy naprężenie nie przekracza granicy proporcjonalności zarówno przy ściskaniu, jak i przy rozciąganiu (granicy tej nie da się określić, zresztą, ściśle na podstawie doświadczeń), to prawo Ylinena jest ważne aż do granicy plastyczności. We wzorze (3.3.2) przez σ należy rozumieć bezwzględną wartość naprężenia (jeżeli wykładnik n jest parzysty, to nie odgrywa to roli).

Stosując teorię wyboczenia sprężysto-plastycznego Kármána, Ylinen wyprowadza podobny wzór na moduł wyboczenia:

$$(3.3.3) \quad E^* = E \left[1 - \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_{pl}} \right)^m \right],$$

przy czym w przybliżeniu $m = 1,3n$. Wzorem tym, który Ylinen zastosował do obliczenia siły krytycznej dla prętów przyzmatycznych, posłużymy się teraz przy rozwiązywaniu zagadnienia wyboczenia sprężysto-plastycznego prętów nieprzyzmatycznych metodą «założenia równania ścisłego».

Obliczymy najpierw wartość siły krytycznej dla pręta, którego linię ugięcia założyliśmy. W tym celu wystarczy obliczyć naprężenie krytyczne σ_{k0} ; jest ono określone wzorem (3.2.18) (ogólnie ważnym dla wszystkich przypadków wyboczenia), w którym występuje niewiadoma dotąd wartość E_0^* . Ponieważ ze wzoru (3.3.3)

$$(3.3.4) \quad E_0^* = \left[1 - \left(\frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{pl}} \right)^m \right] E,$$

to po wstawieniu do (3.2.18)

$$(3.3.5) \quad \sigma_{k0} - \left[1 - \left(\frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{pl}} \right)^m \right] \bar{\sigma}_{k0} = 0.$$

Jest to zależność uwikłana, z której mamy wyznaczyć $\sigma_{k0} = f(\bar{\sigma}_{k0})$. Wobec wysokiej wartości wykładnika m , a więc wysokiego stopnia równania, rozwiązanie ogólne jest tu niemożliwe; możemy jednak łatwo określić funkcję odwrotną $\bar{\sigma}_{k0} = f(\sigma_{k0})$, mianowicie

$$(3.3.6) \quad \bar{\sigma}_{k0} = \frac{\sigma_{k0}}{1 - \left(\frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{pl}} \right)^m},$$

wartości jej zestawień w formie tablicy i przez interpolację otrzymać σ_{k0} dla danego $\bar{\sigma}_{k0}$. W równaniu (3.3.6) występują jako parametry dwie stałe ma-

teriałowe, σ_{pl} i m ; dla każdego materiału musimy zatem sporządzić osobną tablicę funkcji $\bar{\sigma}_{k0} = f(\sigma_{k0})$. W naszych rozważaniach ograniczymy się do stali St37, odpowiadającej dość dokładnie polskiej stali 015; dla stali tej według Ylinena $\sigma_{pl} = 2370 \text{ kG/cm}^2$ oraz $m = 13$. Wprowadzimy wygodne w dalszych obliczeniach oznaczenie bezwymiarowego stosunku

$$(3.3.7) \quad \frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{pl}} = S;$$

wtedy

$$(3.3.8) \quad \bar{\sigma}_{k0} = \frac{S}{1 - S^m} \sigma_{pl},$$

a więc dla stali 015

$$(3.3.9) \quad \bar{\sigma}_{k0} = \frac{S}{1 - S^{13}} 2370 \text{ kG/cm}^2.$$

Wartości tej funkcji zebrane są w tablicy 2. Dla $S < 0,5$ można z dostateczną dokładnością przyjąć $\bar{\sigma}_{k0} = \sigma_{k0}$.

Zakres tablicy 2, mianowicie $0 \leq S \leq 1$, obejmuje wszystkie możliwe przypadki, ponieważ naprężenie krytyczne nie może nigdy przekroczyć rzeczywistej granicy plastyczności σ_{pl} , na co zwraca uwagę wielu autorów, np. [3], [5] i [11] (aczkolwiek technicznie ważne naprężenie niszczące dla prętów o bardzo małej smukłości może być znacznie wyższe od granicy plastyczności).

Obliczenie siły krytycznej dla pręta o założonej linii ugięcia w przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego nie przedstawia już teraz żadnych trudności; ze wzorów (3.2.17), (3.2.23) lub podobnych obliczamy naprężenie pozorne $\bar{\sigma}_{k0}$, a z tablicy 2 dla stali 015 lub z analogicznych tablic dla innych materiałów odczytujemy rzeczywiste naprężenie krytyczne σ_{k0} , które mnożone przez powierzchnię przekroju podstawowego F_0 daje w wyniku siłę krytyczną.

Przejdziemy teraz do określenia wymiarów pręta. W tym celu musimy założyć pewne prawo zmiany przekroju pręta wzdłuż jego osi. Rozważymy tu, technicznie najważniejsze, pręty przestrzennie równomiernie i płasko afiniczne. Jak widać z wzorów (2.12) i (2.14), wymiary takich prętów będą w zupełności określone dowolnie, zresztą, przyjętymi wymiarami przekroju podstawowego i funkcją $\kappa(x)$, którą dzięki oznaczeniu (3.2.1) zastąpimy teraz przez $\kappa(t)$. Wymiary liniowe przekroju prętów przestrzennie równomiernie afinicznych (np. średnicę, bok, przekątną itp.) można przedstawić jako iloczyn odpowiednich wymiarów przekroju podstawowego przez κ ; wymiary liniowe przekroju prętów płasko afinicznych w kierunku osi z będą stałe, a w kierunku osi y będą iloczynami odpowiednich wymiarów przekroju podstawowego przez κ . Celem naszym będzie zatem określenie funkcji $\kappa = \kappa(t)$.

Dla prętów przestrzennie równomiernie afinicznych obowiązują związki (2.14). Załóżmy, że $I_{z_0} \leq I_{y_0}$, zawsze bowiem można obrać układ osi w ten sposób, aby powyższy warunek był spełniony. W takim razie dla prętów tych mamy stale $I_z \leq I_y$, z uwagi na stałość współczynników kształtu prze-

Tablica 2. Wartości funkcji $\bar{\sigma}_{k0} = f(\sigma_{k0})$ dla stali 015

S	σ_{k0}	$\bar{\sigma}_{k0}$	S	σ_{k0}	σ_{k0}
0,50	1185	1185	0,75	1778	1821
1	1209	1209	6	1801	1854
2	1232	1232	7	1825	1888
3	1256	1256	8	1849	1925
4	1280	1280	9	1872	1964
0,55	1304	1304	0,80	1896	2006
6	1327	1328	1	1920	2052
7	1351	1352	2	1943	2103
8	1375	1376	3	1967	2159
9	1398	1400	4	1991	2221
0,60	1422	1424	0,85	2015	2292
1	1446	1448	6	2038	2372
2	1469	1472	7	2062	2465
3	1493	1497	8	2086	2574
4	1517	1521	9	2109	2704
0,65	1541	1546	0,90	2133	2860
6	1564	1571	1	2157	3052
7	1588	1597	2	2180	3295
8	1612	1622	3	2204	3609
9	1635	1649	4	2228	4031
0,70	1659	1675	0,95	2252	4626
1	1683	1703	6	2275	5525
2	1706	1731	7	2299	7031
3	1730	1760	8	2323	10056
4	1754	1790	9	2346	19157
0,75	1778	1821	1,00	2370	∞

kroju φ . Kierunkiem niebezpiecznym ze względu na wyboczenie będzie zatem kierunek y i możemy rozpatrywać wyboczenie jedynie w płaszczyźnie xy .

W przypadku wyboczenia sprężystego

$$(3.3.10) \quad b = \frac{EI_z}{EI_{z_0}} = \alpha^4,$$

więc wprost

$$(3.3.11) \quad \alpha = \sqrt[4]{b}$$

przy czym funkcja $b = b(t)$ jest określona wzorami (3.2.19), (3.2.24) lub analogicznymi dla innych przypadków wyboczenia.

W przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego

$$(3.3.12) \quad b = \frac{E^* I_z}{E_0^* I_{z0}} = \alpha^4 \frac{E^*}{E_0^*},$$

a po podstawieniu wzoru Ylлина (3.3.3)

$$(3.3.13) \quad b = \alpha^4 \frac{1 - \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_p}\right)^m}{1 - \left(\frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{pl}}\right)^m},$$

czyli po wprowadzeniu oznaczenia (3.3.7) i po podstawieniu

$$(3.3.14) \quad \frac{\sigma_k}{\sigma_{pl}} = \frac{P_k}{F \sigma_{pl}} = \frac{P_k}{\alpha^2 F_0 \sigma_{pl}} = \frac{S}{\alpha^2}$$

otrzymujemy do obliczenia α równanie

$$(3.3.15) \quad \alpha^4 \left[1 - \left(\frac{S}{\alpha^2}\right)^m \right] - b(1 - S^m) = 0.$$

Jest to równanie algebraiczne stopnia $2m$ ze względu na α . Rozwiązanie ogólne tego równania i otrzymanie stąd poszukiwanej zależności $\alpha = f(b, m, S)$ jest niemożliwe [podobnie jak równania (3.3.5)]. Dla danych b , m i S można jednak równanie to rozwiązać ze względu na α jedną z metod przybliżonych. Podobnie jak poprzednio ograniczymy się tu do stali 015. Wtedy według Ylлина $m = 13$ i ilość parametrów równania (3.3.15) zredukujemy do dwóch:

$$(3.3.16) \quad \alpha^4 \left[1 - \left(\frac{S}{\alpha^2}\right)^{13} \right] - b(1 - S^{13}) = 0.$$

Rozwiązując to równanie dwudziestego szóstego stopnia przy różnych wartościach parametrów b i S i zestawiając wyniki otrzymujemy tablicowe przedstawienie funkcji $\alpha = f(b, S)$. Podaje je tablica 3, którą możemy posługiwać się w przypadku prętów ze stali 015 lub z innych materiałów posiadających wykładnik Ylлина $m = 13$ (na przykład ze stali St 52). Tablica ta ogranicza się do $b \leq 1$, ponieważ w praktyce z reguły przekrój podstawowy jest przekrojem największym i dalsze jej rozszerzanie, nieco żmudne, wydaje się niecelowe.

Dla prętów płasko afinicznych nie możemy na ogół określić z góry kierunku niebezpiecznego, musimy więc rozpatrzyć wyboczenie zarówno w pł-

Tablica 3. Dodatnie pierwiastki równania (3.3.16) przy różnych b i S

$S \backslash b$	0	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
0	0,000	447	500	548	592	632	671	707	742	775	806	837	866	894	922	949
0,02	0,376	459	507	553	596	636	674	709	744	776	808	838	867	895	923	949
0,04	0,447	474	516	559	600	639	676	712	746	778	809	839	868	897	924	950
0,06	0,494	501	529	566	605	643	679	714	748	780	811	841	870	898	925	951
0,08	0,532	533	546	575	611	647	683	717	750	782	812	842	871	899	926	951
0,10	0,562	563	565	587	618	652	686	720	752	784	814	844	872	900	926	952
0,12	0,588	588	590	602	627	658	690	723	755	786	816	845	874	901	927	952
0,14	0,611	611	612	619	637	664	695	726	758	788	818	847	875	902	928	953
0,16	0,632	632	633	636	648	671	700	730	760	790	820	849	877	903	929	954
0,18	0,651	651	651	653	660	680	705	734	763	793	822	850	879	904	930	955
0,20	0,668	668	668	670	674	689	711	738	767	795	824	852	881	906	931	956
0,25	0,707	707	707	707	709	715	729	750	776	803	830	857	884	909	934	958
0,30	0,740	740	740	740	741	743	750	766	786	811	836	862	888	912	937	960
0,35	0,770	770	770	770	770	771	774	783	799	820	844	868	892	916	940	962
0,40	0,795	795	795	795	795	795	797	803	814	831	852	874	897	920	943	964
0,45	0,819	819	819	819	819	819	820	823	830	843	861	881	903	924	946	966
0,50	0,841	841	841	841	841	841	841	843	848	857	871	889	909	929	950	969
0,55	0,861	861	861	861	861	861	861	862	865	871	883	898	915	934	954	972
0,60	0,880	880	880	880	880	880	880	880	882	887	895	907	922	940	958	974
0,65	0,898	898	898	898	898	898	898	898	899	902	907	918	930	946	962	977
0,70	0,915	915	915	915	915	915	915	915	916	918	921	928	939	953	966	980
0,75	0,931	931	931	931	931	931	931	931	931	932	934	940	948	960	971	983
0,80	0,946	946	946	946	946	946	946	946	946	947	948	952	958	967	976	986
0,85	0,960	960	960	960	960	960	960	960	960	961	962	964	968	974	981	989
0,90	0,974	974	974	974	974	974	974	974	974	975	975	977	979	982	987	993
0,95	0,987	987	987	987	987	987	987	987	987	987	987	988	989	991	993	996
1,00	1,000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000

szczyźnie xy , jak i w płaszczyźnie xz . Wobec tego, że wymiary przekroju pręta płasko afinicznego zmieniają się tylko w płaszczyźnie xy (rys. 3), to wyboczenie w płaszczyźnie xy nazwiemy wybočeniami w płaszczyźnie zbieżności, a wyboczenie w płaszczyźnie xz — wybočeniami z płaszczyzny zbieżności.

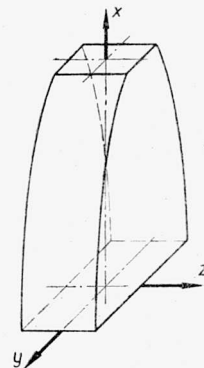
W przypadku wyboczenia sprężystego w płaszczyźnie zbieżności

$$(3.3.17) \quad b = \frac{EI_z}{EI_{z0}} = z^3,$$

więc wprost

$$(3.3.18) \quad z = \sqrt[3]{b}.$$

W przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego w płaszczyźnie zbieżności jest natomiast



Rys. 3

$$(3.3.19) \quad b = \frac{E^* I_z}{E_0^* I_{z0}} = \kappa^3 \frac{E^*}{E_0^*},$$

a ponieważ dla prętów płasko afinicznych

$$(3.3.20) \quad \frac{\sigma_k}{\sigma_{pl}} = \frac{P_k}{F \sigma_{pl}} = \frac{P_k}{\kappa F_0 \sigma_{pl}} = \frac{S}{\kappa},$$

więc korzystając ze wzoru (3.3.3) Ylinena otrzymujemy do obliczenia κ równanie

$$(3.3.21) \quad \kappa^3 \left[1 - \left(\frac{S}{\kappa} \right)^m \right] - b(1 - S^m) = 0.$$

Ograniczając się do stali 015 i podstawiając $m = 13$ mamy

$$(3.3.22) \quad \kappa^3 \left[1 - \left(\frac{S}{\kappa} \right)^{13} \right] - b(1 - S^{13}) = 0.$$

Pierwiastki tego równania podaje tablica 4.

Tablica 4. Dodatnie pierwiastki równania (3.3.22) przy różnych b i S

$S \backslash b$	0	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	
0	0,000	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	
0,02	0,271	273	288	322	365	412	459	506	555	604	654	703	753	802	852	901	
0,04	0,342	342	344	356	385	424	469	514	561	609	658	706	756	805	854	903	
0,06	0,391	391	391	395	410	440	479	522	568	614	662	710	759	807	856	904	
0,08	0,431	431	431	432	439	459	491	531	574	619	666	714	762	810	858	906	
0,10	0,464	464	464	464	467	480	505	540	581	625	670	717	765	812	860	907	
0,12	0,493	493	493	493	495	502	521	551	589	631	675	721	768	815	862	909	
0,14	0,519	519	519	519	520	524	538	563	598	637	680	725	771	817	864	910	
0,16	0,543	543	543	543	544	546	555	576	607	644	685	729	774	820	866	912	
0,18	0,565	565	565	565	565	567	573	590	617	651	690	733	778	823	868	913	
0,20	0,585	585	585	585	585	586	591	604	627	658	696	738	782	826	871	915	
0,25	0,630	630	630	630	630	630	633	639	654	679	712	750	791	833	876	919	
0,30	0,669	669	669	669	669	669	671	674	683	702	729	762	801	841	882	924	
0,35	0,705	705	705	705	705	705	706	707	713	726	747	776	812	850	889	928	
0,40	0,737	737	737	737	737	737	737	738	742	751	767	792	824	859	896	932	
0,45	0,766	766	766	766	766	766	766	767	770	776	788	808	836	868	903	937	
0,50	0,794	794	794	794	794	794	794	794	796	800	809	825	849	878	910	942	
0,55	0,819	819	819	819	819	819	819	819	820	824	830	842	863	888	917	947	
0,60	0,843	843	843	843	843	843	843	843	844	847	851	860	877	899	925	952	
0,65	0,866	866	866	866	866	866	866	866	866	869	872	879	892	910	933	958	
0,70	0,888	888	888	888	888	888	888	888	888	890	892	897	907	922	942	963	
0,75	0,909	909	909	909	909	909	909	909	909	910	912	915	923	935	951	969	
0,80	0,928	928	928	928	928	928	928	928	928	928	928	930	933	939	948	960	975
0,85	0,947	947	947	947	947	947	947	947	947	947	947	948	950	954	961	970	981
0,90	0,965	965	965	965	965	965	965	965	965	965	965	965	967	970	974	980	987
0,95	0,983	983	983	983	983	983	983	983	983	983	983	983	984	985	987	990	993
1,00	1,000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000

W przypadku wyboczenia sprężystego z płaszczyzny zbieżności

$$(3.3.23) \quad z = b.$$

W przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego z płaszczyzny zbieżności otrzymujemy natomiast do rozwiązania równanie

$$(3.3.24) \quad z \left[1 - \left(\frac{S}{z} \right)^m \right] - b(1 - S^m) = 0,$$

które dla stali 015, przy założeniu $m = 13$, sprowadza się do postaci

$$(3.3.25) \quad z \left[1 - \left(\frac{S}{z} \right)^{13} \right] - (1 - S^{13}) = 0.$$

Dodatknie pierwiastki tego równania trzynastego stopnia ze względu na z podaje tablica 5.

Tablica 5. Dodatknie pierwiastki równania (3.3.25) przy różnych b i S

$\frac{S}{b}$	0	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
0	0,000	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0,02	0,020	202	252	301	351	401	451	501	551	601	651	701	751	801	851	901
0,04	0,040	203	253	303	353	403	453	503	553	603	653	703	753	803	852	902
0,06	0,060	205	255	305	355	405	455	505	555	605	655	705	755	805	854	904
0,08	0,080	207	257	307	357	407	457	507	557	607	657	707	756	806	856	905
0,10	0,100	210	260	309	359	409	459	509	559	608	658	708	758	808	857	906
0,12	0,120	213	262	312	361	411	461	511	560	610	660	710	760	809	859	907
0,14	0,140	217	265	314	364	413	463	513	562	612	662	712	762	811	860	908
0,16	0,160	222	268	317	366	416	465	515	565	614	664	714	764	813	862	910
0,18	0,180	227	273	320	369	418	467	517	567	617	666	716	766	815	864	911
0,20	0,200	234	277	324	372	420	470	519	569	619	668	718	768	817	865	913
0,25	0,250	260	291	334	380	428	477	526	575	625	674	723	772	821	869	916
0,30	0,300	302	316	350	392	438	485	534	582	631	680	729	778	826	874	920
0,35	0,350	351	354	372	408	450	495	542	590	638	687	736	784	832	879	924
0,40	0,400	400	401	408	430	466	508	553	600	647	695	743	791	838	884	928
0,45	0,450	450	450	452	462	488	525	566	611	657	704	751	798	844	889	932
0,50	0,500	500	500	501	505	520	546	582	624	668	714	760	806	851	895	936
0,55	0,550	550	550	550	552	559	575	604	641	682	726	770	815	859	902	941
0,60	0,600	600	600	600	601	603	612	632	662	699	740	781	825	868	909	946
0,65	0,650	650	650	650	650	651	655	667	688	720	756	796	838	878	917	951
0,70	0,700	700	700	700	700	700	702	708	722	746	776	813	851	889	925	957
0,75	0,750	750	750	750	750	750	751	754	762	778	801	832	867	902	934	963
0,80	0,800	800	800	800	800	800	800	802	807	816	831	856	886	916	944	969
0,85	0,850	850	850	850	850	850	850	851	853	858	868	885	908	932	956	976
0,90	0,900	900	900	900	900	900	900	901	901	904	909	919	934	951	969	984
0,95	0,950	950	950	950	950	950	950	950	951	951	954	958	965	974	984	992
1,00	1,000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000

Dzięki tablicom od 2 do 5 możemy z łatwością obliczyć siłę krytyczną i wymiary pręta przestrzennie równomiernie lub płasko afinicznego, wykonanego ze stali 015 i poddanego wyboczeniu sprężysto-plastycznemu. W przypadku prętów wykonanych z innych materiałów należałoby sporządzić tablice analogiczne.

3.4. Przykłady stosowania wyprowadzonych wzorów i tablic. Zanim przejdziemy do zasadniczego zastosowania metody «założenia równania ścisłego», jakim jest obliczenie siły krytycznej dla prętów niepryzmatycznych, poddanych wyboczeniu sprężysto-plastycznemu, podamy kilka przykładów «pobocznego» zastosowania tej metody. Sprawdzimy, mianowicie, kilka równań linii ugięcia, stosowanych najczęściej przy posługiwaniu się metodą Ritz a Timoszenki.

Założmy najpierw dla pierwszego przypadku wyboczenia (rys. 2)

$$(3.4.1) \quad y = \delta \cos \frac{\pi x}{2l} = \delta \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Jak wiadomo, jest to równanie linii ugięcia pręta pryzmatycznego, ściśle w przypadku ugięć nieskończenie małych, jakimi wyłącznie się zajmujemy. Ze wzoru (3.2.6) wynika więc, że

$$(3.4.2) \quad f(t) = \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Korzystając ze wzorów (3.2.9 i (3.2.19) otrzymujemy

$$(3.4.3) \quad P_k = -\frac{B_0}{l^2} \left(-\frac{\pi^2}{4} \cos 0 \right) = \frac{\pi^2 B_0}{4l^2},$$

$$(3.4.4) \quad b = \frac{-\frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} t}{-\frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} t} = 1.$$

Zgodnie z przewidywaniami otrzymaliśmy w wyniku pręt pryzmatyczny i wzór Eulera-Kármána.

Weźmiemy teraz pod uwagę funkcję, której druga pochodna zmienia się liniowo,

$$(3.4.5) \quad y'' = C \left(1 - \frac{x}{l} \right) = C(1 - t),$$

i założmy, że przedstawia ona równanie linii ugięcia pewnego pręta. Jest to jedno z najczęściej używanych równań przybliżonych dla pierwszego

przypadku wyboczenia. Po scałkowaniu i uwzględnieniu warunków brzegowych

$$(3.4.6) \quad y = C \left(-\frac{1}{3} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right),$$

a ponieważ $y(0) = \delta$, więc $C = -3\delta$, i ostatecznie

$$(3.4.7) \quad y = \delta \left(1 - \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{2} \right) = \delta f(t).$$

Ze wzorów (3.2.9) i (3.2.19) otrzymamy teraz siłę krytyczną i wymiary pręta:

$$(3.4.8) \quad P_k = -\frac{B_0}{l^2} f''(0) = \frac{3B_0}{l^2},$$

$$b = \frac{2 - 3t^2 + t^3}{2 - 2t},$$

lub po uproszczeniu

$$(3.4.9) \quad b = 1 + t - \frac{t^2}{2}.$$

Przyjmijmy, że pręt jest prętem przestrzennie równomiernie afinicznym o przekroju kołowym. Przy założeniu wyboczenia sprężystego obowiązuje wzór (3.3.11). Przyjmując z za stosunek średnicy bieżącego przekroju pręta do średnicy przekroju podstawowego (utwierdzonego) otrzymujemy

$$(3.4.10) \quad d = d_0 \sqrt[4]{1 + t - \frac{t^2}{2}}.$$

Wymiary pręta przy założeniu $d_0 = 1$ podaje tablica 6. Jest to więc pręt, którego najmniejszy przekrój jest przekrojem utwierdzonym. Największe odchylenie od wymiarów pręta przyrzątecznego o średnicy $d = 1$ wynosi 10,7%, jest więc dość duże. Błąd, jaki popełniamy przy podstawieniu równania (3.4.7), jako przybliżonego równania linii ugięcia pręta przyrzątecznego, do wzoru Ritz'a-Timoszenki (3.1.2), wynosi 1,32%.

Tablica 6. Wymiary pręta o równaniu linii ugięcia (3.4.7) przy wyboczeniu

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
b	1	1,095	1,180	1,255	1,320	1,375	1,420	1,455	1,480	1,495	1,500
d	1	1,023	1,042	1,058	1,072	1,083	1,092	1,098	1,103	1,106	1,107

Przy założeniu wyboczenia sprężysto-plastycznego wymiary pręta będą mniejsze od podanych w tablicy 6 z nieznacznymi różnicami. Wymiarów tych

nie można otrzymać bezpośrednio z tablicy 3, ponieważ nie obejmuje ona zakresu $b > 1$. Jednak prętów takich (o najmniejszym przekroju utwierdzonym) w praktyce na ogół się nie stosuje i rozbudowanie tablicy 3 jest właściwie niepotrzebne, jak to stwierdziliśmy poprzednio.

Dla prętów dwuprzegubowych często zakłada się równanie linii ugięcia w postaci wielomianu trygonometrycznego, na przykład

$$(3.4.11) \quad y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Potraktujemy równość (3.4.11) za ścisłą i obliczymy wymiary pręta oraz siłę krytyczną. Po sprowadzeniu do postaci (3.2.6) będzie to równanie z jednym parametrem. Przyjmując na przykład $a_1 = \delta$ i $a_2 = a\delta$ i stosując oznaczenie (3.2.1) mamy

$$(3.4.12) \quad y = \delta(\sin \pi t + a \sin 2\pi t).$$

Ze wzoru (3.2.21) otrzymujemy

$$(3.4.13) \quad P_k = \frac{1 + 8a \pi^2 B_0}{1 + 2a} l^2,$$

a ze wzoru (3.2.24) określamy sztywność pręta

$$(3.4.14) \quad b = \frac{(1 + 8a)(\sin \pi t + a \sin 2\pi t)}{(1 + 2a)(\sin \pi t + 4a \sin 2\pi t)}.$$

Przyjmijmy $a = 0,5$ i podstawmy $t = 0,75$:

$$b(0,75) = \frac{5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right)}{2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right)} = -0,400.$$

Sztywność pręta, dla którego założyliśmy równanie linii ugięcia w postaci (3.4.12), przy przyjęciu wartości parametru $a = 0,5$ musiałyby być zatem w pewnych przedziałach ujemna. Jest to, oczywiście, pozbawione fizycznego sensu, zatem posługiwanie się równaniem (3.4.12) przy tej wartości parametru nie może prowadzić do prawidłowych wyników.

Dla ustalenia przedziału, z którego można wybierać wartości parametru a w równaniu (3.4.12), aby sens fizyczny metody Ritz-Timoszenki był zachowany, musimy rozwiązać nierówność $b > 0$, przy czym b jest określone wzorem (3.4.14). Nierówność ta ma obowiązywać dla każdego t z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. W wyniku otrzymujemy $-1/8 < a < 1/8$, przeto stosowalność wzoru (3.4.12) jest ograniczona do takiego zakresu zmienności parametru a . Przy posługiwaniu się wielomianami trygonometrycznymi, jako przybliżo-

nymi równaniami linii ugięcia, należy zatem zachować szczególną ostrożność, by nie zatracić fizycznego sensu metody.

Bardzo interesujący przykład zastosowania metody Ritz'a-Timoshenki podaje Mutermilch, [8]. Dla obliczenia ugięć skończonych jednostronnie utwierdzonego idealnie sprężystego pręta pryzmatycznego, ścisłkanego osiowo i mimośrodowo siłą skupioną, założono tam łuk koła jako przybliżoną postać linii ugięcia. Zajmiemy się teraz określeniem kształtu pręta, dla którego równanie łuku koła byłoby ścisłym równaniem linii ugięcia.

Ponieważ zajmiemy się ugięciami skończonymi, to wzory wyprowadzone w p. 3.2 przy założeniu ugięć nieskończenie małych nie mogą znaleźć zastosowania. Jednak wyprowadzenie analogicznych wzorów dla ugięć skończonych nie sprawi trudności, jeżeli linią ugięcia ma być łuk koła o promieniu r . Zamiast równania (3.2.5) będziemy tu mieli

$$(3.4.15) \quad -\frac{1}{r} + \frac{P}{bB_0} y = 0,$$

a jeżeli przez s oznaczymy zmienną mierzoną po łuku koła, to z rys. 4 widać, że

$$(3.4.16) \quad \delta = r - r \cos \frac{l}{r},$$

$$(3.4.17) \quad y = \delta - r + r \cos \frac{s}{r} = r \left(\cos \frac{s}{r} - \cos \frac{l}{r} \right).$$

Po wstawieniu (3.4.17) do (3.4.15) otrzymujemy

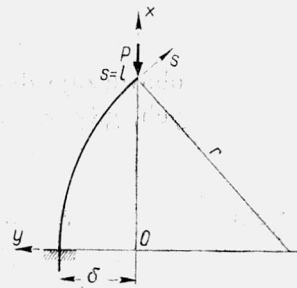
$$(3.4.18) \quad \frac{Pr^2}{bB_0} \left(\cos \frac{s}{r} - \cos \frac{l}{r} \right) = 1.$$

Równanie to ma być spełnione dla każdej wartości zmiennej s . Zakładając $s=0$ otrzymujemy stąd zależność $P=f(r)$:

$$(3.4.19) \quad P = \frac{B_0}{r^2 \left(1 - \cos \frac{l}{r} \right)}.$$

Wartość siły krytycznej obliczymy z warunku $r \rightarrow \infty$:

$$(3.4.20) \quad P_k = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{B_0}{r^2 \left(1 - \cos \frac{l}{r} \right)} = \frac{2B_0}{l^2},$$



Rys. 4

natomiast kształt pręta, określony tym razem funkcją $b = b(s)$, otrzymamy przez podstawienie (3.4.19) do (3.4.18):

$$(3.4.21) \quad b = \frac{\cos \frac{s}{r} - \cos \frac{l}{r}}{1 - \cos \frac{l}{r}}.$$

Wzór ten obowiązuje dla ugięć skończonych, natomiast dla ugięć nieskończenie małych, gdy $r \rightarrow \infty$ i $s \rightarrow x$, otrzymujemy w granicy

$$(3.4.22) \quad b = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ s \rightarrow x}} \frac{\cos \frac{s}{r} - \cos \frac{l}{r}}{1 - \cos \frac{l}{r}} = 1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2 = 1 - t^2.$$

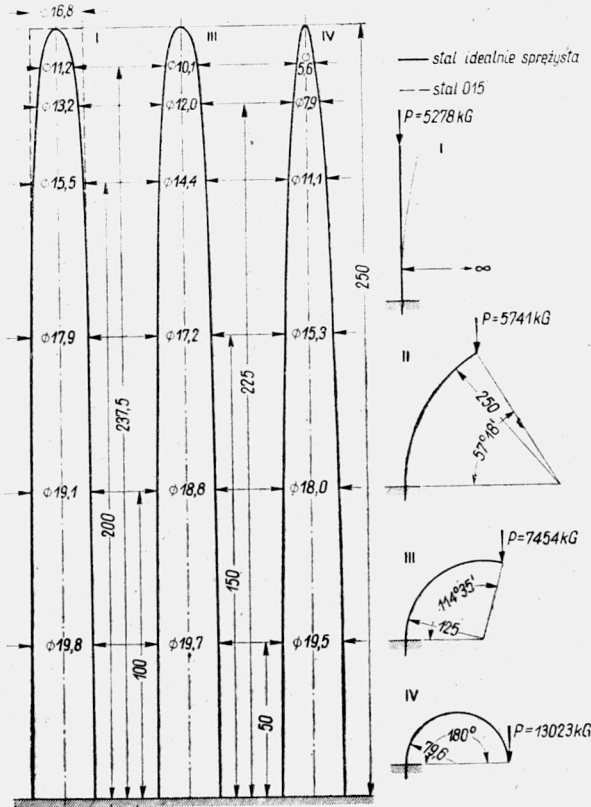
Podstawiając do równania (3.4.21) różne wartości r otrzymujemy w wyniku różne zależności $b = b(s)$. Różne pręty ugną się po łukach kół o różnych promieniach, zatem równania (3.4.19) nie można traktować jako zależności między siłą i promieniem krzywizny dla tego samego pręta. Zakładając pewne r otrzymujemy z (3.4.19) wartość siły P , która spowoduje ugięcie po łuku koła o tym promieniu, ale tylko w przypadku pręta, którego sztywność określa wzór (3.4.21), po podstawieniu doń tej samej wartości r . Zauważmy wreszcie, że dla omawianych prętów nie znamy siły krytycznej [z wyjątkiem pręta (3.4.22)], ale znamy jedynie siłę, która wywoła ugięcie pręta po łuku koła.

Weźmy pod uwagę liczbowe dane. Załóżmy, że rozpatrywane pręty są prętami przestrzennie równomiernie afinicznymi o długości $l = 25$ cm i o przekrojach kołowych; niech $d_0 = 2$ cm. Jako materiał przyjmijmy stal o module Younga $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm². Załóżmy dalej, że pręty wybaczą się po łukach kół o promieniach $r = 25/\pi$ cm (półkoło), 12,5 cm, 25 cm i, w granicy, ∞ . Przy przyjęciu idealnej sprężystości stali odpowiednie wartości sił obliczymy ze wzorów (3.4.19) i (3.4.20), a poszczególne średnice prętów ze wzorów (3.4.21) i (3.4.22) oraz (3.3.11). Rysunek 5 przedstawia kształty trzech spośród tych prętów oraz podaje schematy wszystkich czterech prętów, poddanych działaniu siły P wywołującej ugięcie po łuku koła.

Jeżeli materiałem pręta ma być stal «rzeczywista», na przykład stal 015, to będzie można rozważyć jedynie przypadek ugięć nieskończenie małych, czyli przypadek $r \rightarrow \infty$. Podstawiając tym razem do wzoru (3.4.20) $B_0 = EI_0$ otrzymamy tylko pozorną wartość siły krytycznej, którą oznaczymy przez \bar{P}_k ; dla obliczenia wartości rzeczywistej będziemy musieli skorzystać z tablicy 2. Mamy, mianowicie, $\bar{P}_k = 5278$ kG, a ponieważ $F_0 = \pi cm^2$, więc $\bar{\sigma}_{k0} = \bar{P}_k/F_0 = 1680$ kG/cm². Z tablicy 2 otrzymujemy, interpolując, $\sigma_{k0} = 1663$ kG/cm², stąd rzeczywista wartość siły krytycznej $P_k = 1663 \pi = 5230$ kG. Siła kry-

tyczna jest tu więc nieco niższa niż w przypadku pręta idealnie sprężystego, sam pręt natomiast, jak zobaczymy zaraz, wypadnie grubszy.

Wymiary pręta określimy posługując się tabelką 3. W tym celu obliczamy $S = 1663 : 2370 = 0,702$ (lub interpolujemy tę wartość z tabelicy 2) i dla obliczonych ze wzoru (3.4.22) wartości b odczytujemy z tabelicy 3 odpowiednie wartości α . Na przykład dla $t = 0,8$ ze wzoru (3.4.22) $b = 0,36$;



Rys. 5. Pręty, których linia ugięcia przy wyoboczeniu jest łukiem koła

z tabelicy 3 odczytujemy (dwukrotnie interpolując) $\alpha = 0,870$, a więc średnica pręta dla tej wartości t wyniesie $d = \alpha d_0 = 0,870 \cdot 2 = 1,740$ cm. W ten sposób uzyskany zarys pręta został oznaczony na rys. 5 linią przerywaną.

Rysunek 5 wskazuje wyraźnie, że pręty, dla których łuk koła będzie linią ugięcia przy wyoboczeniu, odbiegają znacznie swymi kształtami od pryzmatycznych. Stosunkowo dokładne wyniki, jakie otrzymał w swej pracy Mutermilch, [8], osiągnięto jedynie dzięki umiejętnemu wprowadzeniu pewnej poprawki w obliczeniach.

4. Wyboczenie sprężysto-plastyczne prętów zbieżnych

4.1. Wyboczenie sprężysto-plastyczne jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych. Zastosujemy teraz metodę «założenia równania ścisłego» do obliczenia siły krytycznej dla prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych, podlegających wyboczeniu sprężysto-plastycznemu. Jak zwykle przyjmiemy układ osi w ten sposób (rys. 2), aby $I_{z0} \leq I_{y0}$, co pozwoli rozpatrywać wyboczenie wyłącznie w płaszczyźnie xy . Momenty bezwładności I_x i promienie bezwładności i_x będziemy dla krótkości oznaczać przez I oraz i . Posłużymy się oznaczeniami p. 3 oraz oznaczeniem

$$(4.1.1) \quad k = \frac{i_1}{i_0} = \alpha(1);$$

przez i_1 rozumiemy tu promień bezwładności przekroju $t=1$, tzn. na swobodnym końcu pręta. Bezwymiarowy stosunek k będzie zatem miarą zbieżności pręta. Ponieważ w praktyce zasadniczo nie stosuje się prętów o zbieżności $k > 1$ (najmniejszy przekrój utwierdzony), to zajmiemy się jedynie przypadkiem $k < 1$, podobnie, jak to uczynił Dinnik przy rozpatrywaniu wyboczenia sprężystego.

Metodą «założenia równania ścisłego» możemy dojść do dobrych wyników w dwojaki sposób: albo dobierając równanie linii ugięcia o dużej ilości nieoznaczonych parametrów i znajdując następnie optymalne ich wartości, albo przyjmując stosunkowo małą ilość parametrów, lecz przewidując z góry kształt linii ugięcia w sposób dość precyzyjny. Postaramy się obrać drugą z tych możliwości, gdyż dobór odpowiedniej wartości dużej liczby parametrów byłby żmudny. W tym celu udowodnimy najpierw następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja $\alpha(t)$, określająca wymiary pręta przestrzennie równomiernie lub płasko afinicznego, utwierdzonego jednym końcem i obciążonego na drugim, swobodnym, siłą osiową P (I przyp. wyboczenia) jest klasy $C^{(1)}$ w przedziale $0 \leq t \leq 1$ i spełnia warunek $\alpha'(0) < 0$, to krzywizna osi pręta ugiętego osiąga wartość maksymalną w pewnym punkcie t_m leżącym wewnątrz przedziału $(0, 1)$.

Dowód. Z równań (3.3.15), (3.3.21) i (3.3.24) można wyrazić b w postaci ogólnej

$$(4.1.2) \quad b = \frac{\alpha^{n_1}}{1 - S^m} \left[1 - \left(\frac{S}{\alpha^{n_2}} \right)^m \right],$$

gdzie $n_1 = 4, 3, 1$ oraz $n_2 = 2, 1, 1$ odpowiednio dla prętów przestrzennie równomiernie afinicznych oraz dla prętów płasko afinicznych przy wyboczeniu w płaszczyźnie i z płaszczyzny zbieżności. Różniczkując równanie (4.1.2) względem t i oznaczając dla skrótowania $db/dt = b'$ oraz $d\alpha/dt = \alpha'$, otrzymujemy

$$(4.1.3) \quad b' = \left(\frac{n_1 b}{z} + \frac{m n_2 S^m}{1 - S^m} z^{n_1 - m n_2 - 1} \right) z',$$

skąd jest rzeczą widoczną, że pochodne b' i z' są tego samego znaku. Z zasadniczego równania zginania (3.2.5), napisanego w postaci ścisłej

$$(4.1.4) \quad K = \frac{P l^2 y}{b B_0},$$

gdzie przez K oznaczyliśmy krzywiznę linii ugięcia pisząc dla krótkości $dK/dt = K'$ otrzymujemy

$$(4.1.5) \quad K' = \frac{P l^2}{b B_0} \left(y' - \frac{b' y}{b} \right).$$

Do równania tego podstawimy $t=0$ i $t=1$:

$$(4.1.6) \quad K'(0) = - \frac{P \delta l^2}{B_0} b'(0),$$

$$(4.1.7) \quad K'(1) = \frac{P l^2}{b_1 B_0} y'(1).$$

Z przyjętego układu osi (rys. 2) widać, że $y'(1) < 0$; z założenia i z (4.1.3) wynika $b'(0) < 0$. W takim razie pochodna krzywizny jest dodatnia dla $t=0$, a ujemna dla $t=1$. Wobec założonej ciągłości krzywizny twierdzenie jest zatem udowodnione.

Przy dowodzie posłużyliśmy się prawem Ylлина. Pozostaje on jednak w mocy dla każdej innej zależności $E^* = E^*(\sigma)$, przedstawionej funkcją nierosnącą, a więc, na przykład, przy założeniu prawa Hooke'a.

Z twierdzenia powyższego skorzystamy przy doborze równania linii ugięcia dla jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych. Mamy tu bowiem

$$(4.1.8) \quad z(t) = 1 - (1 - k)t,$$

$$(4.1.9) \quad z'(0) = -(1 - k),$$

więc, z uwagi na ograniczenie naszych rozważań do przypadku $k < 1$, założenia twierdzenia 1 są spełnione.

Dobór bezpośredni odpowiedniego równania linii ugięcia byłby trudny z uwagi na stosunkowo dużą ilość narzuconych warunków. Dobierzemy więc najpierw drugą pochodną (krzywiznę), a następnie przez scałkowanie uzyskamy samą linię ugięcia. Krzywizna musi spełniać warunki wynikające z twierdzenia 1, mianowicie $K'(0) > 0$ oraz $K'(1) < 0$. Wiadomo również, że $K(0) \neq 0$, a $K(1) = 0$, gdy chcemy otrzymać pręt o różnej od zera sztywności przekroju swobodnego. Nie wiemy natomiast, w jakim punkcie wystąpi maksimum krzywizny, o którym mówi twierdzenie 1, i musimy

dobrac taką funkcję, aby przy odpowiednim doborze wartości parametrów mogła osiągać maksimum w całym przedziale $(0, 1)$. Funkcją taką będzie, na przykład, funkcja

$$(4.1.10) \quad K = C(1 + at)(1 - t^n)$$

o dwóch nieoznaczonych parametrach a i n , spełniających warunki $a > 0$ oraz $n > 1$; dodatnią stałą C wyznaczmy z warunków brzegowych. Ponieważ z przyjętego układu osi wynika, że $K = -y''$ (przy założeniu ugięć nieskończenie małych), więc całkowaniu ulega równanie

$$(4.1.11) \quad y'' = -C(1 + at)(1 - t^n).$$

Po scałkowaniu i uwzględnieniu warunków $y'(0) = 0$ oraz $y(0) = \delta$ mamy

$$(4.1.12) \quad y = -C \left(\frac{t^2}{2} + \frac{at^3}{6} - \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{at^{n+3}}{(n+2)(n+3)} \right) + \delta,$$

a z warunku $y(1) = 0$ obliczymy stałą C :

$$(4.1.13) \quad C = \frac{6\delta(n+1)(n+2)(n+3)}{(a+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6a(n+1) - 6(n+3)}.$$

Wstawiając (4.1.13) do (4.1.12) otrzymujemy ostatecznie równanie linii ugięcia w postaci (3.2.6), mianowicie

$$(4.1.14) \quad y = \delta \left[1 - \frac{(at+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6at^{n+1}(n+1) - 6t^n(n+3)}{(a+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6a(n+1) - 6(n+3)} t^2 \right].$$

Wartość pozornego współczynnika stateczności otrzymamy teraz ze wzoru (3.2.11):

$$(4.1.15) \quad \bar{\mathfrak{F}} = \frac{24(n+1)(n+2)(n+3)}{(a+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6a(n+1) - 6(n+3)}.$$

Pozorna wartość naprężenia krytycznego w przekroju podstawowym wyniesie

$$(4.1.16) \quad \bar{\sigma}_{k0} = \bar{\mathfrak{F}} \frac{E}{\lambda_0^2}.$$

Korzystając z tablicy 2 w przypadku prętów ze stali 015 lub z analogicznych tablic opracowanych dla innych materiałów, możemy już bez trudu znaleźć rzeczywistą wartość naprężenia krytycznego σ_{k0} , a więc również siłę krytyczną.

Podstawiając (4.1.14) do (3.2.19) otrzymujemy

$$(4.1.17) \quad b = \frac{1 - \frac{(at+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6at^{n+1}(n+1) - 6t^n(n+3)}{(a+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6a(n+1) - 6(n+3)} t^2}{(1+at)(1-t^n)}$$

Wzór ten określa b dla każdej wartości t różnej od 1; b_1 obliczymy ze wzoru (3.2.20): po wstawieniu i uproszczeniu

$$(4.1.18) \quad b_1 = \frac{3(n+3)[(a+2)(n+1)(n+2) - 2a(n+1) - 2(n+2)]}{n(a+1)[(a+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6a(n+1) - 6(n+3)]}$$

Znając b dla poszczególnych wartości zmiennej t możemy dla tych samych t odczytać z tablicy 3 odpowiednie wartości α , a tym samym określić kształt pręta.

Wobec posiadania gotowych tablic 2 do 5 ograniczymy nasze rozważania do prętów ze stali 015, co nie przeszkadza rozszerzeniu tych rozważań również na inne materiały po opracowaniu, oczywiście, odpowiednich tablic.

Dochodzimy teraz do następującego zagadnienia: dany jest pręt przestrzennie równomiernie zbieżny (znamy więc charakteryzujące go wielkości k i λ_0). Czy można się posłużyć wyprowadzonymi równaniami do określenia siły krytycznej dla tego pręta, a jeśli tak, to w jaki sposób dobrać odpowiednie wartości parametrów a i n ? Inaczej mówiąc, w jaki sposób dobrać a i n , aby wyznaczony z równań (4.1.17), (4.1.18) i z tablicy 3 kształt pręta możliwie najmniej odbiegał od kształtu pręta danego?

Odpowiedź na tak postawione pytania byłaby trudna, a obliczenie optymalnej wartości parametrów bezpośrednio z warunku (3.1.5) jest nawet teoretycznie niemożliwe, ponieważ przy wyboczeniu sprężysto-plastycznym nie można określić sztywności pręta B , dopóki nie jest znana siła krytyczna. Dobór tych wartości mógłby nastąpić przy pomocy prób, ale należy wątpić, czy w ten sposób uzyskane rozwiązanie mogłoby być całkowicie wykorzystane w praktyce inżynierskiej.

Obierzemy zatem inną drogę, wymagającą większego jednorazowego nakładu pracy, ale prowadzącą do wyników, które dadzą się bezpośrednio stosować w praktyce. Będziemy, mianowicie, zakładali z góry pewne wartości parametrów a i n , a następnie dobierali λ_0 i k w ten sposób, aby uzyskany pręt możliwie najmniej odbiegał od pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego. Takie postępowanie będzie znacznie łatwiejsze od poprzedniego. W ten sposób uzyskamy wartości naprężeń krytycznych σ_{k_0} i współczynników stateczności \mathfrak{D} , tzn. również sił krytycznych, dla szeregu prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych (w przybliżeniu), o zupełnie, zresztą, przypadkowych wartościach λ_0 i k . Po dokonaniu odpowiednio dużej liczby przeliczeń będziemy mogli drogą interpolacji otrzymać σ_{k_0} oraz \mathfrak{D} również dla innych, pośrednich, wartości λ_0 i k . Uzyskane wyniki można zebrać w tablice i wykresy, aby umożliwić korzystanie z nich w każdym przypadku bez dodatkowych przeliczeń.

Postępowanie uwidoczni się najlepiej na przykładzie. Założmy wartości parametrów $n=5$ oraz $a=1$. Ze wzorów (4.1.17) i (4.1.18) obliczamy $b(0,5) = 0,527$ oraz $b(1) = 0,191$; pamiętamy również, że $b(0) = 1$, co jest

oczywiste według oznaczeń (3.2.1) i (3.2.2). Przyjmując wartość S mogli-
 byśmy teraz z tablicy 3 odczytać odpowiednie wartości $\kappa(0,5)$ i $\kappa(1)$. Dla
 pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego wartości te powinny spełniać
 równanie

$$(4.1.19) \quad \kappa(0,5) = \frac{\kappa(0) + \kappa(1)}{2} = \frac{1 + \kappa(1)}{2}.$$

Wyberzemy jednak drogę odwrotną: założymy, mianowicie, że ma być
 spełniony warunek (4.1.19) i z tablicy 3 dobierzemy wartość S , dla której
 warunek ten zachodzi. Łatwo przekonać się, że w danym przypadku war-
 tością taką jest $S = 0,441$, bowiem przy tej wartości S i przy podanych
 wyżej b możemy — stosując dwukrotną interpolację — odczytać z tablicy 3
 $\kappa(0,5) = 0,852$ oraz $\kappa(1) = 0,704$. W istocie zatem warunek (4.1.19) jest speł-
 niony. Nasuwa się jednak pytanie, w jaki sposób można szybko znaleźć S
 o takiej własności. Jest to łatwe o tyle, że, jak wynika z tablicy 3, dla
 większych wartości b a małych S , κ zależy jedynie od b . Tak, na przykład,
 dla $b = 0,527$ otrzymujemy przez interpolację $\kappa = 0,852$ dla wszystkich S
 mniejszych od około 0,5. Zakładając $\kappa(0,5) = 0,852$ możemy obliczyć z wa-
 runku (4.1.19)

$$(4.1.20) \quad \kappa(1) = 2\kappa(0,5) - 1,$$

czyli w naszym przypadku $\kappa(1) = 0,704$. Ponieważ znamy $b(1) = 0,191$, więc
 z tablicy 3 można odczytać odpowiednią wartość S , mianowicie $S = 0,441$.
 Otrzymaliśmy $S < 0,5$, więc dla $b = 0,527$ w istocie $\kappa = 0,852$, jak przewi-
 dywaliśmy. Gdyby natomiast $\kappa(0,5)$ uległo pewnej zmianie, co się zresztą
 zdarza rzadko, to należałoby również nieco zmienić (powiększyć) S , aby
 warunek (4.1.19) był spełniony.

Dla upewnienia się dodatkowo, o ile otrzymany pręt zbliża się kształtem
 do przestrzennie równomiernie zbieżnego, obliczmy jeszcze $\kappa(0,25)$ i $\kappa(0,75)$.
 Ponieważ zmiana κ powinna być liniowa, to powinniśmy otrzymać

$$\kappa(0,25) = \frac{\kappa(0) + \kappa(0,5)}{2} = \frac{1 + 0,852}{2} = 0,926,$$

$$\kappa(0,75) = \frac{\kappa(0,5) + \kappa(1)}{2} = \frac{0,852 + 0,704}{2} = 0,778.$$

Ze wzoru (4.1.17) mamy $b(0,25) = 0,757$ oraz $b(0,75) = 0,333$; z tablicy 3
 przy założeniu $S = 0,441$ odczytujemy $\kappa(0,25) = 0,933$ oraz $\kappa(0,75) = 0,765$.
 Różnice wynoszą 0,007 jako nadmiar dla $t = 0,25$ i 0,013 jako niedomiar
 dla $t = 0,75$ — są więc nieznaczne, jak na jedyne błędy w obliczeniu. Od-

chylenia takie może zresztą posiadać również sam pręt wskutek pewnych niedokładności obróbki. Poza tym są to odchylenia o znakach przeciwnych, a więc w pewnym stopniu nawzajem się znoszące. Łatwo się przekonać, iż dla innych wartości t odchylenia nie będą większe.

Należy jednak zbadać, jakie odchylenia zwiększają bezpieczeństwo, a jakie je zmniejszają. Jeżeli dla pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego ma z przy pewnym t przybrać określoną wartość, gdy tymczasem pręt, którego siłę krytyczną obliczyliśmy, ma mniejszą wartość z dla tej samej wartości t (błąd przez niedomiar), to oznacza to, że w rzeczywistości siła krytyczna dla pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego jako grubszego jest nie mniejsza niż siła obliczona dla pręta cieńszego; błędy zwiększają zatem bezpieczeństwo. Stąd oczywiście, wynika, że błędy popełniane wskutek nadmiarów zmniejszają bezpieczeństwo.

Obliczymy jeszcze naprężenie krytyczne σ_{k0} , współczynnik stateczności \mathfrak{F} i smukłość «dolną» dla rozpatrywanego pręta. Z (3.3.7) otrzymujemy wprost $\sigma_{k0} = S\sigma_{pl} = 0,441 \cdot 2370 = 1045 \text{ kG/cm}^2$. Z (4.1.15) obliczamy teraz pozorny współczynnik stateczności uzyskując $\bar{\mathfrak{F}} = 6,40$. Rzeczywisty współczynnik stateczności uzyskamy najłatwiej ze wzoru

$$(4.1.21) \quad \mathfrak{F} = \bar{\mathfrak{F}} \frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{k0}}$$

Wartość $\bar{\sigma}_{k0}$ dla danego σ_{k0} znajdziemy w tablicy 2; w danym przypadku $\bar{\sigma}_{k0} = \sigma_{k0} = 1045 \text{ kG/cm}^2$, więc także $\mathfrak{F} = \bar{\mathfrak{F}} = 6,40$. Z odwróconego wzoru (3.2.15) obliczamy ostatecznie

$$(4.1.22) \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{\mathfrak{F}E}{\sigma_{k0}}}$$

otrzymując w danym przypadku $\lambda_0 = 113,5$.

Wyniki obliczeń są następujące: dla jednostronnie utwierdzonego pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego, wykonanego ze stali 015, o zbieżności $k = i_1/i_0 = z(1) = 0,704$ oraz o smukłości dolnej $\lambda_0 = 113,5$, naprężenie krytyczne w przekroju podstawowym (utwierdzonym) jest równe $\sigma_{k0} = 1045 \text{ kG/cm}^2$, a współczynnik stateczności wynosi $\mathfrak{F} = 6,40$.

Wyniki powyższe otrzymaliśmy przyjmując wartość parametrów w równaniu (4.1.14) $n = 5$ oraz $a = 1$. Podobnie przyjmując $n = 4$ oraz $a = 0,5$ otrzymujemy pręt, dla którego $k = 0,791$, $\lambda_0 = 108,5$, $\sigma_{k0} = 1325 \text{ kG/cm}^2$, $\mathfrak{F} = 7,44$ itd. Wyniki obliczeń naniesiemy na wykres o osiach λ_0 i k , a po uzyskaniu kilkudziesięciu punktów przeprowadzimy bez trudu linie stałych naprężeń krytycznych σ_{k0} i stałych współczynników stateczności \mathfrak{F} . Sporządzenie tych wykresów przyjdzie tym łatwiej, że ich «brzegi» są znane. Mianowicie w przypadku małych smukłości λ_0 mamy do czynienia z wyboczeniem czysto plastycznym i praktycznie $\sigma_{k1} = \sigma_{pl}$, więc $\sigma_{k0} = k^2 \sigma_{pl}$;

w przypadkach dużych smukłości wyboczenie będzie sprężyste, zatem rozpatrzone przez Dinnika; wreszcie przypadek pręta pryzmatycznego ($k=1$) został rozwiązany przez Ylinena. Należy pamiętać, że w przypadku wyboczenia sprężystego współczynnik stateczności \mathfrak{S} zależy tylko od k (Dinnik).

Sporządzone w ten sposób wykresy zamieszczone są na rysunkach 6 i 7. Dla pewnych zastosowań korzystniejsze jest przedstawienie funkcji jak na tablicach 7 i 8²⁾.

Obliczenie siły krytycznej dla danego pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego, jednostronnie utwierdzonego nie przedstawia już teraz żadnych trudności. Znając, mianowicie, k i λ_0 odczytujemy z wykresu na rys. 6 lub 7 albo z tablicy 7 lub 8 odpowiednią wartość \mathfrak{S} lub σ_{k0} i obliczamy siłę krytyczną za pomocą wzoru (3.2.10) lub (3.2.13).

Ponieważ siła krytyczna dla jednostronnie utwierdzonego pręta zbieżnego jest zarazem siłą krytyczną dla odpowiedniego dwuprzegubowego pręta dwuzbieżnego, to rozwiązaliśmy równocześnie zagadnienie wyboczenia sprężysto-plastycznego dwuprzegubowych prętów przestrzennie równomiernie dwuzbieżnych (rys. 1, pręt 11212).

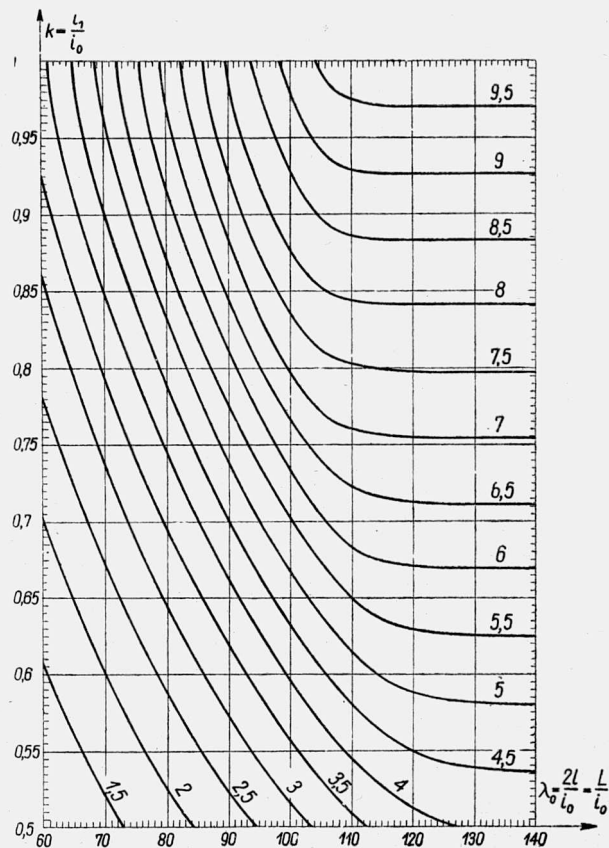
4.2. Wyboczenie sprężysto-plastyczne dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych. Obierzemy układ osi w ten sposób, aby przekrój podstawowy był przekrojem największym. Będziemy zatem zakładali $k \leq 1$ nie ograniczając ogólności rozważań. Podobnie jak w przypadku poprzednim będziemy zajmowali się tylko wyboczeniem w płaszczyźnie xy , gdyż zawsze można obrócić osie y i z w ten sposób, aby kierunek osi y był kierunkiem niebezpiecznym przy wyboczeniu.

Aby należycie dobrać równanie linii ugięcia skorzystamy z twierdzenia 2, którego dowód pominiemy jako analogiczny do dowodu twierdzenia 1.

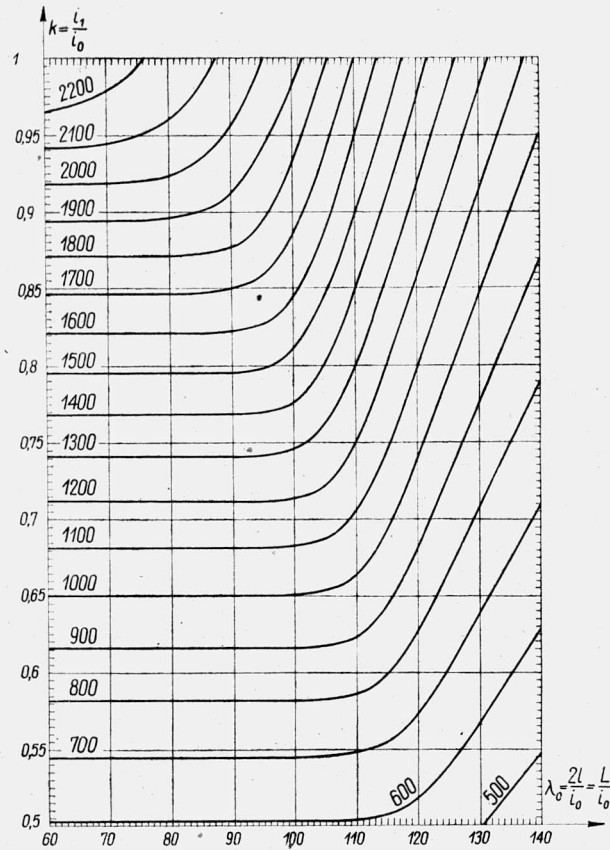
Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja $x(t)$ określająca wymiary pręta przestrzennie równomiernie lub płasko afinicznego, zamocowanego dwuprzegubowo (II przyp. wyboczenia), jest klasy $C^{(2)}$ w przedziale $0 \leq t \leq 1$ i spełnia warunek $x'(0) \cdot x'(1) > 0$, to istnieje wewnątrz przedziału $(0, 1)$ taki punkt t_p , w którym druga pochodna krzywizny osi pręta ugiętego (a więc czwarta pochodna ugięcia) w punkcie zero zmienia znak (krzywizna posiada punkt przegięcia).

W przypadku prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych $x'(t) = -(1-k) = \text{const}$, więc gdy wyłączymy możliwość $k=1$ (pręt pryzmatyczny), to założenia twierdzenia 2 są spełnione. Podobnie jak poprzednio, zamiast dobrać bezpośrednio równanie linii ugięcia, dobierzemy najpierw równanie krzywizny; mamy tu jedynie do spełnienia warunki

²⁾ Ograniczymy się przy tym do zakresu $0,5 \leq k \leq 1$ z dwóch powodów: z jednej strony pręty o $k < 0,5$ są rzadko stosowane w praktyce, z drugiej — równanie (4.1.14) daje tu mniej dokładne wyniki.



Rys. 6. Wartości współczynnika stateczności ϑ dla jednostronnie utwardzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015



Rys. 7. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0} (kg/cm²) dla jednostronnie utwardzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015

Tablica 7. Wartości współczynnika stateczności ϑ dla jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda_0$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1,02	1,23	1,46	1,72	1,99	2,28	2,60	2,93	3,29	3,65	3,91
65	1,19	1,44	1,72	2,01	2,33	2,67	3,05	3,44	3,86	4,28	4,53
70	1,38	1,67	1,99	2,33	2,71	3,10	3,54	3,98	4,48	4,94	5,21
75	1,59	1,92	2,38	2,67	3,10	3,57	4,06	4,58	5,14	5,62	5,91
80	1,81	2,18	2,60	3,05	3,54	4,06	4,63	5,22	5,85	6,31	6,63
85	2,04	2,46	2,93	3,44	3,99	4,58	5,22	5,88	6,64	7,02	7,35
90	2,29	2,76	3,29	3,86	4,48	5,14	5,85	6,56	7,25	7,67	8,03
95	2,55	3,08	3,67	4,30	4,98	5,72	6,49	7,22	7,82	8,25	8,65
100	2,82	3,41	4,06	4,76	5,51	6,28	7,03	7,71	8,24	8,71	9,18
105	3,12	3,75	4,47	5,22	5,98	6,73	7,38	7,99	8,56	9,08	9,54
110	3,39	4,07	4,79	5,52	6,28	6,91	7,49	8,08	8,69	9,27	9,74
115	3,65	4,36	5,06	5,72	6,33	6,93	7,51	8,10	8,70	9,28	9,84
120	3,83	4,50	5,13	5,75	6,35	6,94	7,52	8,11	8,70	9,28	9,87
125	3,97	4,57	5,18	5,77	6,36	6,95	7,53	8,12	8,70	9,28	9,87
130	4,05	4,62	5,21	5,80	6,37	6,96	7,53	8,12	8,70	9,28	9,87
135	4,08	4,65	5,23	5,81	6,38	6,96	7,53	8,12	8,70	9,28	9,87
140	4,10	4,66	5,24	5,81	6,38	6,96	7,53	8,12	8,70	9,28	9,87

Tablica 8. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0} (kG/cm²) dla jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda_0$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2130	2280
65	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2130	2260
70	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2120	2210
75	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2100	2210
80	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2070	2180
85	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1900	2040	2130
90	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1700	1880	1990	2080
95	593	717	853	1000	1160	1330	1510	1680	1820	1920	2010
100	593	717	853	1000	1160	1320	1480	1620	1730	1830	1930
105	592	714	850	994	1140	1280	1400	1520	1630	1730	1820
110	588	706	831	959	1090	1200	1300	1400	1500	1600	1690
115	580	692	803	908	1010	1100	1190	1290	1380	1470	1560
120	558	657	749	839	927	1010	1100	1180	1270	1350	1440
125	533	614	695	775	855	934	1010	1090	1170	1250	1330
130	503	575	648	720	792	864	936	1010	1080	1160	1230
135	470	536	602	668	734	801	868	935	1000	1070	1140
140	438	500	561	622	683	745	808	870	933	995	1060

$K(0) = K(1) = 0$ oraz wynikający z twierdzenia 2 warunek istnienia punktu t_p , w którym $K''(t_p) = 0$. Równaniem takim będzie, na przykład, równanie

$$(4.2.1) \quad K = \delta(1 + at)(t - t^n)$$

o dwóch nieoznaczonych parametrach a i n , spełniających warunki $a > 0$ oraz $n > 1$. Scalkowaniu ulega więc tutaj równanie

$$(4.2.2) \quad y'' = -\delta(1 + at)(t - t^n).$$

Po wykonaniu całkowania i uwzględnieniu warunków brzegowych $y(0) = y(1) = 0$ otrzymujemy równanie linii ugięcia w postaci (3.2.6), mianowicie

$$(4.2.3) \quad y = \delta t \left[\frac{1 - t^2}{6} - \frac{1 - t^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + a \frac{1 - t^3}{12} - a \frac{1 - t^{n+2}}{(n+2)(n+3)} \right].$$

Wartość pozornego współczynnika stateczności otrzymamy teraz ze wzoru (3.2.22):

$$(4.2.4) \quad \vartheta = \frac{6(n+2)}{(n-1) \left[\frac{n+4}{n+1} + \frac{a(n+6)}{2(n+3)} \right]},$$

a pozorną wartość naprężenia krytycznego w przekroju podstawowym określiliśmy wzór (4.1.16). Korzystając z tablicy 2 możemy bez trudu znaleźć rzeczywistą wartość naprężenia krytycznego σ_{k0} i tym samym siłę krytyczną.

Podstawiając (4.2.3) do (3.2.24) otrzymujemy

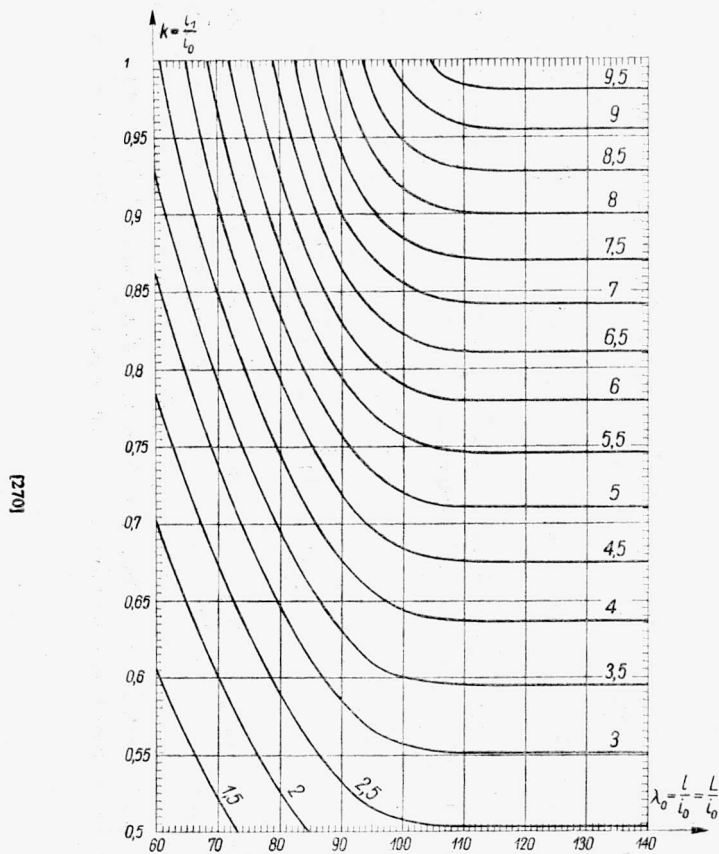
$$(4.2.5) \quad b = \frac{(n+2) \left[(1 - t^2) + \frac{a}{2}(1 - t^3) \right] - 6 \left[\frac{1 - t^{n+1}}{n+1} + \frac{a(1 - t^{n+2})}{n+3} \right]}{(n-1)(1+at)(1-t^{n-1}) \left[\frac{n+4}{n+1} + \frac{a(n+6)}{2(n+3)} \right]}.$$

Wzór ten określa b dla każdej wartości t różnej od 1; b_1 obliczymy ze wzoru (3.2.25). Po wstawieniu i uproszczeniu

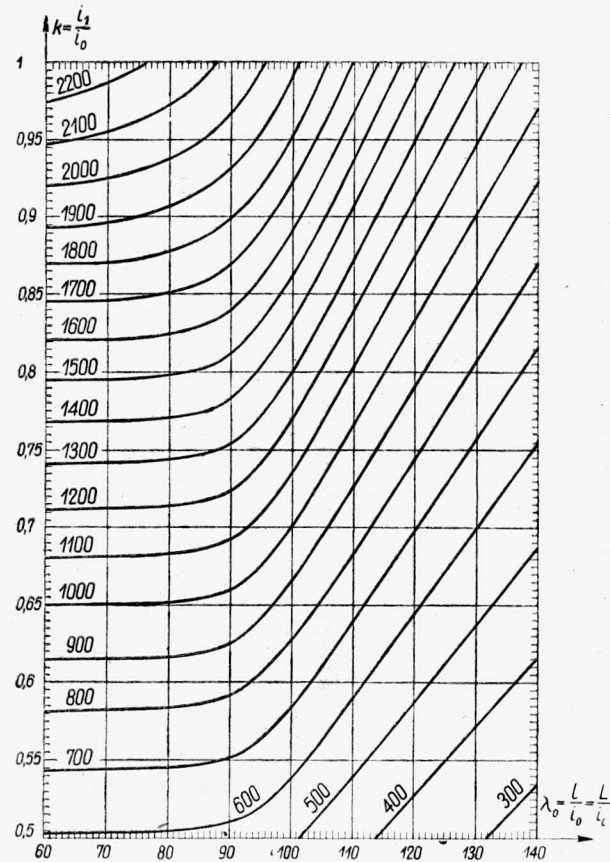
$$(4.2.6) \quad b_1 = \frac{2 + \frac{3}{2}a \frac{n+2}{n+3}}{(n-1)(a+1) \left[\frac{n+4}{n+1} + \frac{a(n+6)}{2(n+3)} \right]}.$$

Znając b dla poszczególnych wartości zmiennej t możemy dla tych samych t odczytać z tablicy 3 odpowiednie wartości α_1 , a tym samym określić kształt pręta.

Aby otrzymać tablice i wykresy podające zależności ϑ i σ_{k0} od k i λ_0 , będziemy postępowali tak samo, jak w przypadku poprzednim. Obierając zatem różne wartości parametrów a i n otrzymamy w wyniku pręty o róż-



Rys. 8. Wartości współczynnika stateczności φ dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015



Rys. 9. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0} (kg/cm²) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015

Tablica 9. Wartości współczynnika stateczności φ dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015

$\lambda_0 \backslash k$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1,02	1,23	1,46	1,72	1,99	2,28	2,60	2,93	3,29	3,62	3,91
65	1,19	1,44	1,72	2,01	2,33	2,67	3,05	3,44	3,86	4,23	4,53
70	1,38	1,67	1,99	2,33	2,71	3,10	3,54	3,99	4,48	4,85	5,21
75	1,59	1,92	2,28	2,67	3,10	3,57	4,06	4,56	5,09	5,51	5,91
80	1,80	2,17	2,59	3,04	3,52	4,03	4,58	5,18	5,73	6,22	6,63
85	2,02	2,44	2,90	3,40	3,92	4,49	5,09	5,75	6,36	6,92	7,35
90	2,22	2,67	3,18	3,72	4,29	4,92	5,59	6,29	6,98	7,58	8,03
95	2,36	2,85	3,38	3,96	4,59	5,25	5,96	6,71	7,44	8,12	8,65
100	2,45	2,96	3,51	4,11	4,75	5,43	6,17	6,95	7,77	8,52	9,18
105	2,46	2,98	3,53	4,15	4,81	5,52	6,27	7,06	7,91	8,74	9,54
110	2,46	2,98	3,54	4,16	4,82	5,54	6,30	7,09	7,96	8,82	9,74
115	2,46	2,98	3,54	4,16	4,83	5,54	6,31	7,11	7,98	8,88	9,84
120	2,47	2,99	3,55	4,17	4,84	5,55	6,32	7,13	7,99	8,91	9,87
125	2,47	2,99	3,55	4,17	4,84	5,55	6,32	7,13	7,99	8,91	9,87
130	2,47	2,99	3,55	4,17	4,84	5,55	6,32	7,13	7,99	8,91	9,87
135	2,47	2,99	3,55	4,17	4,84	5,55	6,32	7,13	7,99	8,91	9,87
140	2,47	2,99	3,55	4,17	4,84	5,55	6,32	7,13	7,99	8,91	9,87

Tablica 10. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0} (kg/cm²) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015

$\lambda_0 \backslash k$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2110	2280
65	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2100	2260
70	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1910	2080	2240
75	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1700	1900	2060	2210
80	591	714	850	997	1150	1320	1500	1690	1880	2040	2180
85	587	710	842	989	1140	1310	1480	1670	1850	2010	2130
90	575	693	824	963	1110	1280	1450	1630	1810	1960	2080
95	550	663	786	921	1070	1220	1390	1560	1730	1890	2010
100	515	621	737	862	998	1140	1300	1460	1630	1790	1930
105	470	568	673	790	915	1050	1190	1350	1510	1670	1820
110	430	521	616	722	837	955	1090	1230	1380	1530	1690
115	392	475	565	663	768	880	1000	1130	1270	1410	1560
120	360	435	518	608	705	810	920	1040	1170	1300	1440
125	331	401	477	560	650	746	848	958	1070	1200	1330
130	306	371	441	518	600	690	785	886	994	1110	1230
135	284	344	409	480	556	640	727	821	921	1030	1140
140	264	320	380	446	518	595	676	763	856	955	1060

nych k i λ_0 , nieznacznie odbiegające od prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych, i odpowiednie wartości \mathcal{D} i σ_{k0} . Na przykład, obierając $n=7$ i $a=2$ otrzymamy pręt o $k=0,586$ i $\lambda_0=99,5$, przy czym dla tego pręta $\mathcal{D}=3,36$ oraz $\sigma_{k0}=711 \text{ kG/cm}^2$. Przeliczając odpowiednio dużo takich prętów i postępując podobnie, jak w przypadku poprzednim, możemy otrzymać wykresy i tablice do obliczenia \mathcal{D} i σ_{k0} . Będą to wykresy przedstawione na rysunkach 8 i 9 oraz tablice 9 i 10, za pomocą których można już bez trudu znaleźć wartość siły krytycznej dla dowolnego dwuprzegubowego pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego, który został wykonany ze stali 015³⁾.

4.3. Wyboczenie sprężysto-plastyczne jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych. Musimy tu rozpatrzyć zarówno wyboczenie w płaszczyźnie, jak i z płaszczyzny zbieżności. Dla rozróżnienia będziemy wszystkie wielkości, odnoszące się bezpośrednio do wyboczenia w płaszczyźnie zbieżności, oznaczali jedną, a przy wyboczeniu z płaszczyzny zbieżności dwiema kreskami u góry. W takim razie przy przyjęciu układu osi jak na rys. 2 i 3 oznaczymy $i_z \equiv i'$, $i_y \equiv i''$; $i'' = \text{const}$, natomiast i' dla prętów płasko zbieżnych zmienia się liniowo. Analogicznie do (4.1.1) oznaczymy tu

$$(4.3.1) \quad k = \frac{i'_1}{i'_0} = z(1).$$

Przypadek $k=1$ jest przypadkiem pręta pryzmatycznego.

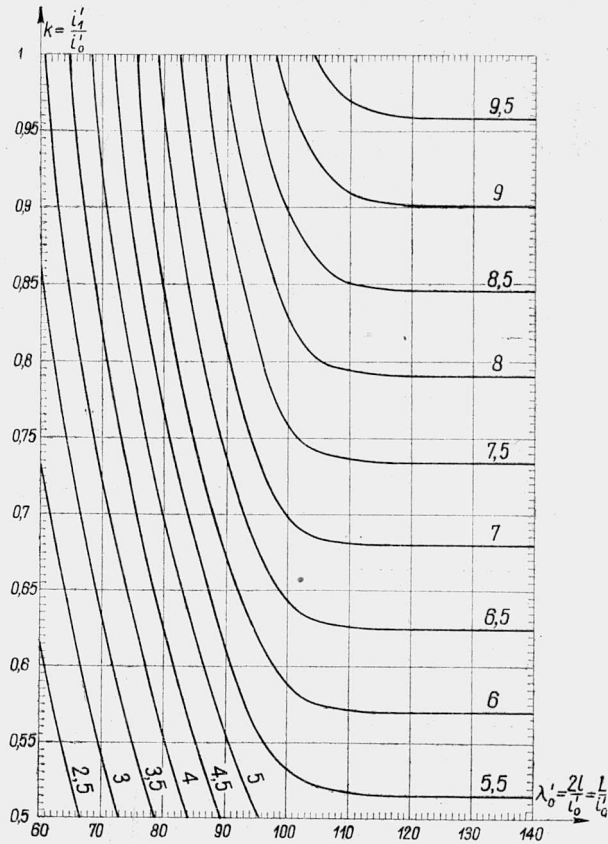
Zarówno do wyboczenia w płaszczyźnie, jak i do wyboczenia z płaszczyzny zbieżności prętów płasko zbieżnych odnosi się twierdzenie 1, więc nie stoi na przeszkodzie do zastosowania również i tutaj równania linii ugięcia (4.1.14). Ponieważ tym razem będziemy korzystali z tablic 4 i 5 zamiast tablicy 3, to otrzymamy inne wyniki: tak, na przykład, przyjmując $n=5$ oraz $a=1$ otrzymujemy przy założeniu wyboczenia w płaszczyźnie zbieżności pręt o danych $k=0,619$ oraz $\lambda'_0=102$; dla pręta tego $\mathcal{D}'=6,40$ oraz $\sigma'_{k0}=1290 \text{ kG/cm}^2$. Natomiast zakładając powstanie wyboczenia z płaszczyzny zbieżności nie możemy w ogóle, przy powyższych wartościach parametrów, otrzymać pręta zbliżonego kształtem do zbieżnego; okazuje się, że równanie (4.1.14) daje się tu również zastosować, ale należy dobrać małe wartości parametru n (na przykład $n=2$ lub $n=3$).

Wyniki obliczeń uwidaczniają wykresy 10-13 oraz tablice 11-14.

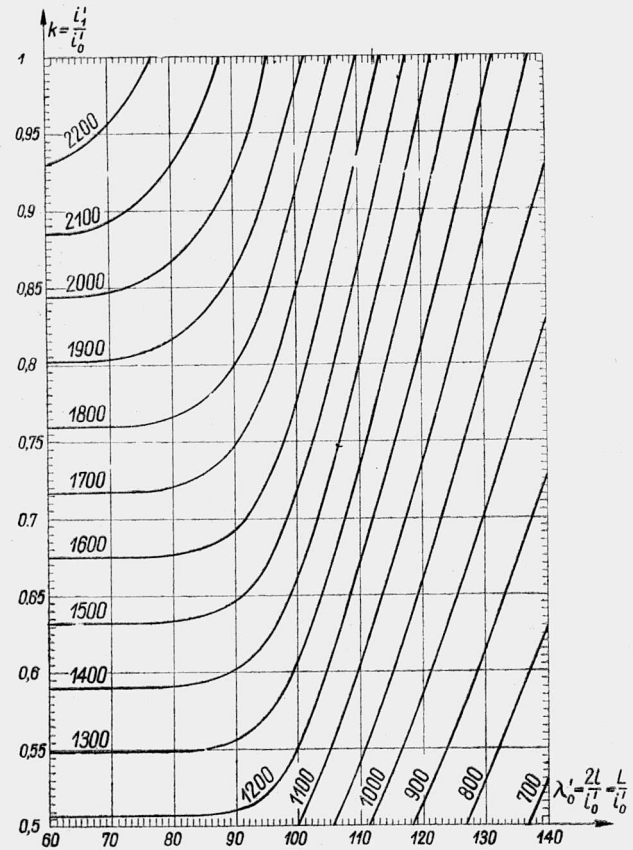
Powyższe wykresy i tablice znajdują bezpośrednie zastosowanie również przy obliczaniu siły krytycznej dla dwuprzegubowych prętów płasko dwuzbieżnych. Prętami takimi są, na przykład, korbowody niektórych parowozów

³⁾ Przy założeniu $0,5 \leq k \leq 1$, podobnie jak w przypadku I.

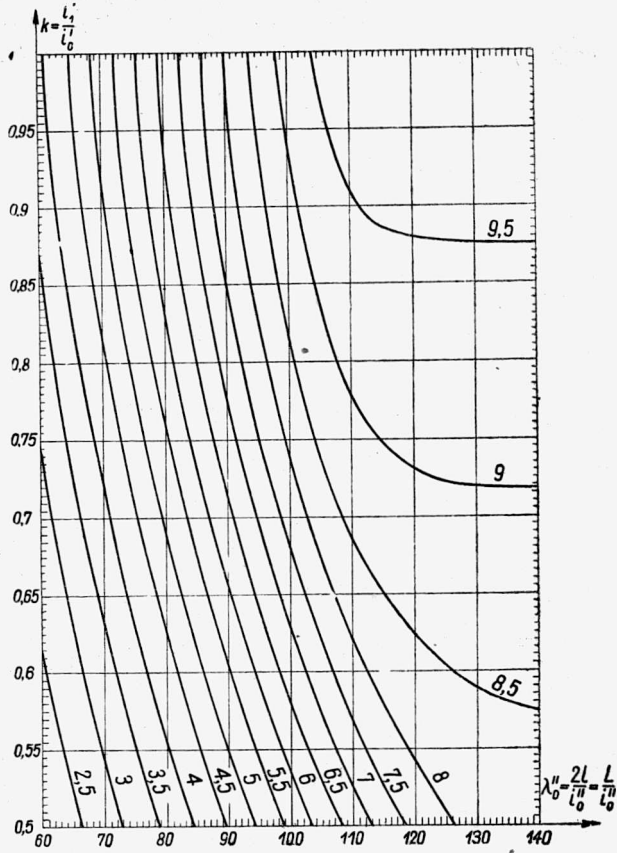
[273]



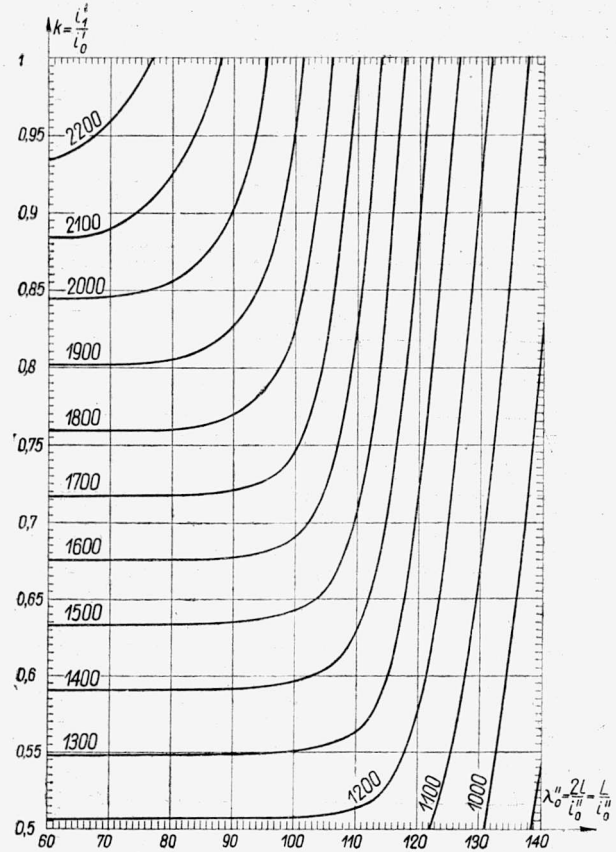
Rys. 10. Wartości współczynnika stateczności β' (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015



Rys. 11. Wartości naprężeń krytycznych σ'_{R0} (kg/cm^2) (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015



Rys. 12. Wartości współczynnika stateczności μ'' (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015



Rys. 13. Wartości naprężeń krytycznych σ'' (kg/cm^2) (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

Tablica 11. Wartości współczynnika stateczności β' (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla jednostronnie utwardzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda'_0$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	2,04	2,24	2,44	2,64	2,85	3,05	3,25	3,45	3,65	3,81	3,91
65	2,39	2,62	2,86	3,10	3,34	3,58	3,82	4,05	4,28	4,44	4,53
70	2,77	3,04	3,32	3,59	3,87	4,15	4,42	4,69	4,93	5,10	5,21
75	3,17	3,49	3,81	4,13	4,44	4,76	5,06	5,33	5,60	5,78	5,91
80	3,61	3,97	4,33	4,69	5,06	5,41	5,73	6,01	6,28	6,49	6,63
85	4,08	4,47	4,86	5,27	5,68	6,04	6,37	6,66	6,95	7,17	7,35
90	4,55	4,97	5,40	5,82	6,23	6,60	6,94	7,25	7,55	7,83	8,03
95	4,98	5,41	5,84	6,27	6,70	7,08	7,43	7,77	8,11	8,42	8,65
100	5,26	5,72	6,15	6,58	7,02	7,44	7,82	8,18	8,53	8,87	9,18
105	5,30	5,78	6,24	6,69	7,15	7,60	8,01	8,39	8,77	9,16	9,54
110	5,34	5,81	6,28	6,73	7,19	7,64	8,07	8,51	8,92	9,34	9,74
115	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,08	8,53	8,96	9,40	9,84
120	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,09	8,54	8,99	9,43	9,87
125	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,09	8,54	8,99	9,43	9,87
130	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,09	8,54	8,99	9,43	9,87
135	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,09	8,54	8,99	9,43	9,87
140	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,09	8,54	8,99	9,43	9,87

Tablica 12. Wartości naprężeń krytycznych σ'_{k0} (kg/cm²) (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla jednostronnie utwardzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda'_0$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2220	2280
65	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2210	2260
70	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2120	2190	2240
75	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1890	1990	2090	2160	2210
80	1190	1300	1420	1540	1660	1770	1880	1970	2060	2130	2180
85	1190	1300	1410	1530	1650	1750	1850	1940	2020	2080	2130
90	1180	1290	1400	1510	1620	1710	1800	1880	1960	2030	2080
95	1160	1260	1360	1460	1560	1650	1730	1810	1890	1960	2010
100	1100	1200	1290	1380	1470	1560	1640	1720	1790	1860	1930
105	1010	1100	1190	1270	1360	1450	1520	1600	1670	1740	1820
110	924	1010	1090	1170	1250	1330	1400	1480	1550	1620	1690
115	847	922	997	1070	1140	1210	1280	1350	1420	1490	1560
120	779	848	915	981	1050	1120	1180	1250	1310	1380	1440
125	719	781	843	905	966	1030	1090	1150	1210	1270	1330
130	664	722	780	837	893	950	1010	1060	1120	1170	1230
135	616	670	723	776	829	881	933	984	1040	1090	1140
140	573	623	672	721	770	819	867	915	963	1010	1060

Tablica 13. Wartości współczynnika stateczności β'' (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla jednostronnie utwardzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

λ_0^k	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	2,04	2,24	2,44	2,64	2,85	3,05	3,25	3,45	3,65	3,82	3,91
65	2,39	2,62	2,86	3,10	3,34	3,58	3,82	4,05	4,27	4,44	4,53
70	2,77	3,04	3,32	3,59	3,87	4,15	4,42	4,70	4,94	5,12	5,21
75	3,17	3,49	3,81	4,13	4,44	4,76	5,08	5,37	5,62	5,81	5,91
80	3,61	3,97	4,33	4,69	5,06	5,42	5,76	6,06	6,32	6,51	6,63
85	4,08	4,48	4,89	5,30	5,71	6,11	6,47	6,78	7,03	7,20	7,35
90	4,57	5,03	5,48	5,94	6,40	6,82	7,17	7,47	7,71	7,88	8,03
95	5,09	5,60	6,11	6,61	7,09	7,52	7,86	8,12	8,34	8,51	8,65
100	5,63	6,19	6,73	7,24	7,71	8,13	8,44	8,67	8,88	9,05	9,18
105	6,19	6,77	7,34	7,82	8,24	8,61	8,87	9,08	9,28	9,44	9,54
110	6,74	7,32	7,83	8,24	8,60	8,88	9,12	9,32	9,49	9,63	9,74
115	7,24	7,74	8,18	8,50	8,76	9,01	9,24	9,41	9,56	9,71	9,84
120	7,68	8,02	8,36	8,62	8,85	9,06	9,26	9,42	9,57	9,72	9,87
125	7,98	8,25	8,48	8,70	8,90	9,08	9,26	9,42	9,57	9,72	9,87
130	8,12	8,35	8,56	8,75	8,93	9,10	9,26	9,42	9,57	9,72	9,87
135	8,21	8,41	8,59	8,77	8,94	9,10	9,26	9,42	9,57	9,72	9,87
140	8,23	8,42	8,60	8,77	8,94	9,10	9,26	9,42	9,57	9,72	9,87

Tablica 14. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0}'' (kG/cm²) (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla jednostronnie utwardzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

λ_0^k	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2220	2280
65	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2120	2210	2260
70	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2110	2190	2240
75	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2100	2170	2210
80	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1890	1990	2070	2130	2180
85	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1880	1970	2040	2090	2130
90	1190	1300	1420	1540	1660	1770	1860	1940	2000	2040	2080
95	1190	1300	1420	1540	1650	1750	1830	1890	1940	1980	2010
100	1180	1300	1410	1520	1620	1710	1770	1820	1860	1900	1930
105	1180	1290	1400	1490	1570	1640	1690	1730	1770	1800	1820
110	1170	1270	1360	1430	1490	1540	1580	1620	1650	1670	1690
115	1150	1230	1300	1350	1390	1430	1470	1500	1520	1540	1560
120	1120	1170	1220	1260	1290	1320	1350	1370	1400	1420	1440
125	1070	1110	1140	1170	1200	1220	1240	1260	1290	1310	1330
130	1010	1040	1060	1090	1110	1130	1150	1170	1190	1210	1230
135	946	969	990	1010	1030	1050	1070	1090	1100	1120	1140
140	881	902	922	940	958	975	992	1010	1030	1040	1060

4.4. Wyboczenie sprężysto-plastyczne dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych. Podobnie jak w przypadku poprzednim musimy tu również rozpatrzyć wyboczenie w płaszczyźnie i z płaszczyzny zbieżności. Przyjmijmy oznaczenie (4.3.1) i inne oznaczenia p. 4.3. Zarówno do wyboczenia w płaszczyźnie, jak i z płaszczyzny zbieżności dwuprzegubowych prętów płasko zbieżnych odnosi się twierdzenie 2, więc posłużymy się i tutaj równaniem linii ugięcia (4.2.3). Jednak tym razem będziemy korzystali z tablic 4 i 5, zamiast z tablicy 3, więc otrzymamy inne wyniki niż w p. 4.2.

Wyniki obliczeń podają wykresy 14-17 oraz tablice 15-18.

4.5. Określenie kierunku niebezpiecznego dla prętów płasko zbieżnych. Znając już wartości sił krytycznych dla prętów płasko zbieżnych, zarówno w przypadku wyboczenia w płaszczyźnie, jak i z płaszczyzny zbieżności, możemy dla prętów tych określić kierunek niebezpieczny ze względu na wyboczenie. W przypadku granicznym (równych sił krytycznych dla obu możliwych kierunków wyboczenia) możemy napisać równość

$$(4.5.1) \quad \mathfrak{P}' \frac{EI_0'}{L^2} = \mathfrak{P}'' \frac{EI_0''}{L^2}$$

lub po uproszczeniu

$$(4.5.2) \quad \mathfrak{P}' i_0'^2 = \mathfrak{P}'' i_0''^2.$$

Oznaczmy teraz charakterystyczną dla każdego pręta wartość

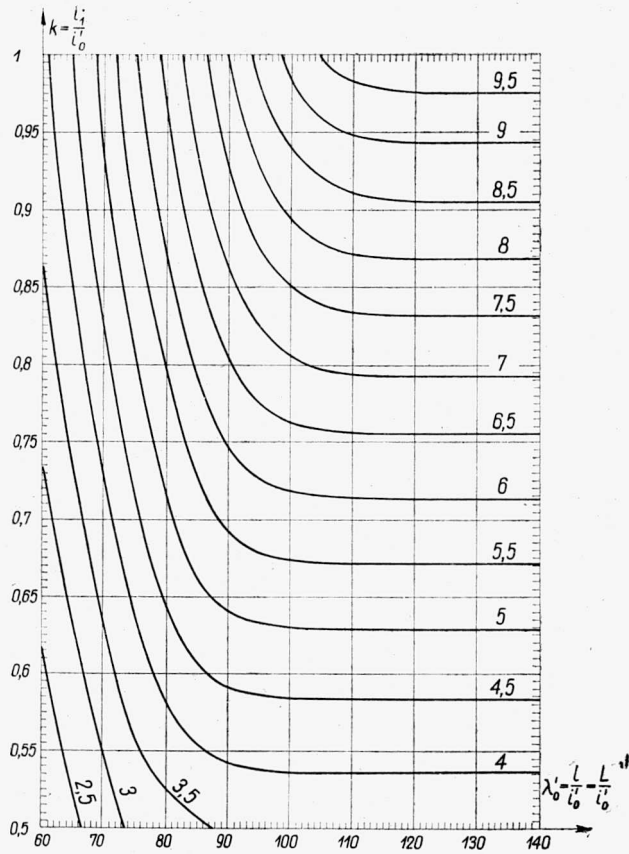
$$(4.5.3) \quad \frac{i_0''}{i_0'} = \xi;$$

w takim razie w przypadku granicznym

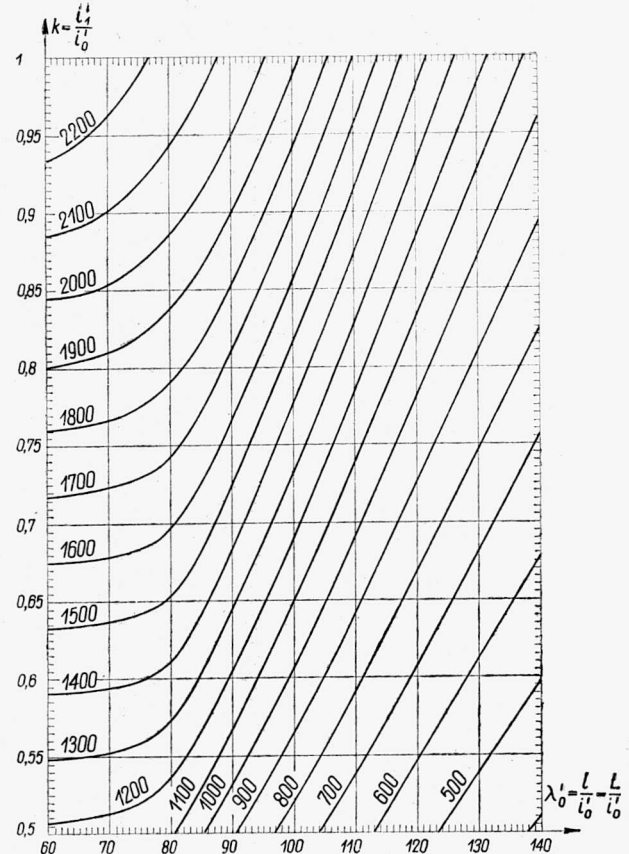
$$(4.5.4) \quad \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}''} = \xi^2.$$

Przy wyboczeniu sprężystym współczynniki stateczności \mathfrak{P} zależą tylko od k , wobec czego równanie (4.5.4) przedstawia pewną linię w płaszczyźnie $k\xi$, dzielącą płaszczyznę tę na dwa obszary: w jednym z nich mniejszą jest siła, powodująca wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności, w drugim — siła, powodująca wyboczenie z płaszczyzny zbieżności. Dla dwóch typowych przypadków zamocowań końców pręta linie takie przedstawione są na rys. 18.

W przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'(k, \lambda_0')$ oraz $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}''(k, \lambda_0'')$, a ponieważ z (4.5.3) wynika, że $\lambda_0'' = \xi \lambda_0'$, więc równanie (4.5.4)

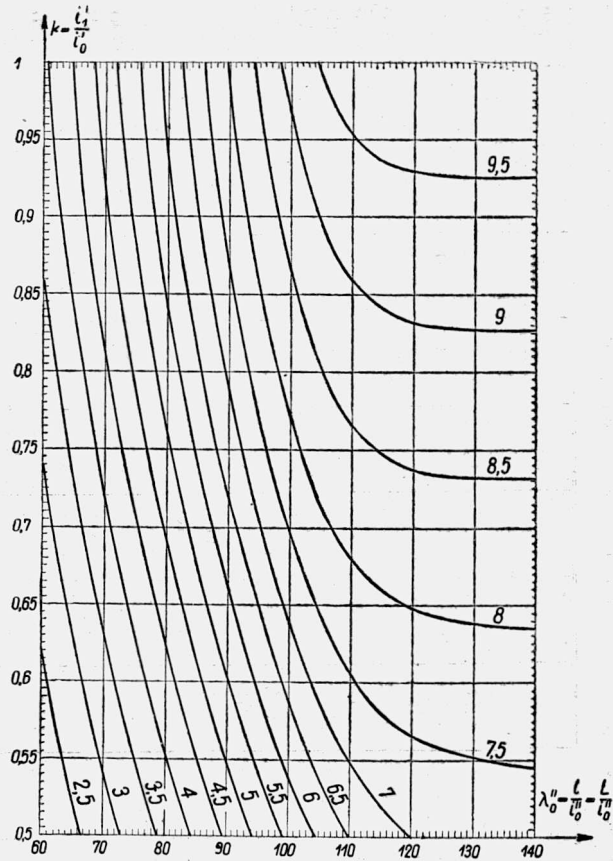


Rys. 14. Wartości współczynnika stateczności ϑ' (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

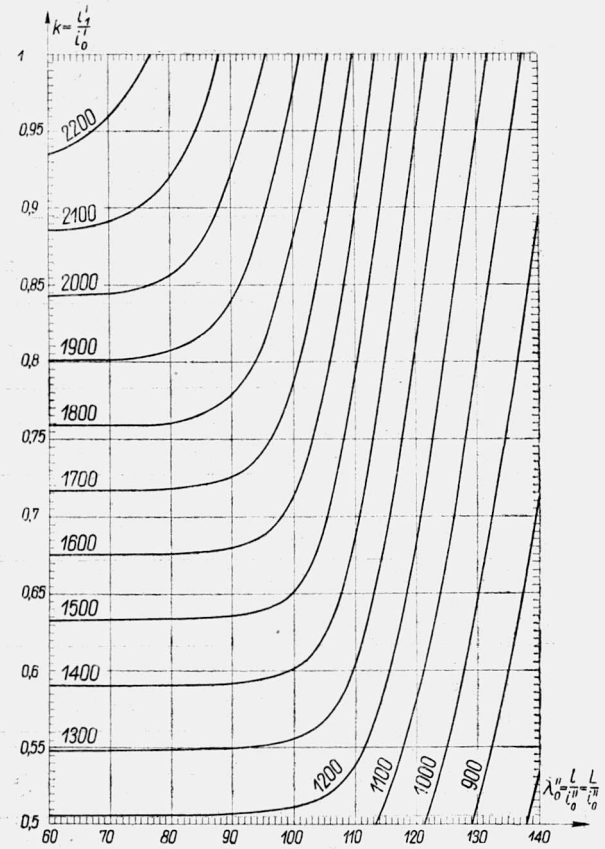


Rys. 15. Wartości naprężeń krytycznych σ'_{R0} (kG/cm^2) (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

[279]



Rys. 16. Wartości współczynnika stateczności φ'' (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali O15



Rys. 17. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0}'' (kg/cm²) (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali O15

Tablica 15. Wartości współczynnika stateczności β' (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali O15

$\lambda'_0 \backslash k$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	2,04	2,24	2,44	2,64	2,85	3,05	3,25	3,45	3,65	3,81	3,91
65	2,39	2,62	2,86	3,10	3,34	3,58	3,82	4,05	4,26	4,43	4,53
70	2,77	3,04	3,31	3,59	3,86	4,13	4,40	4,66	4,90	5,08	5,21
75	3,13	3,45	3,77	4,09	4,40	4,71	5,01	5,29	5,55	5,76	5,91
80	3,38	3,78	4,18	4,56	4,91	5,25	5,58	5,89	6,18	6,43	6,63
85	3,47	3,99	4,47	4,90	5,29	5,68	6,07	6,44	6,78	7,08	7,35
90	3,51	4,06	4,60	5,13	5,59	6,04	6,49	6,92	7,34	7,71	8,03
95	3,55	4,09	4,65	5,21	5,74	6,24	6,75	7,26	7,77	8,25	8,65
100	3,59	4,12	4,67	5,24	5,81	6,38	6,96	7,54	8,11	8,68	9,18
105	3,62	4,14	4,68	5,25	5,83	6,42	7,03	7,66	8,29	8,92	9,54
110	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,74	8,41	9,09	9,74
115	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,13	9,84
120	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,14	9,87
125	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,14	9,87
130	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,14	9,87
135	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,14	9,87
140	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,14	9,87

Tablica 16. Wartości naprężeń krytycznych σ'_{k0} (kG/cm²) (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali O15

$\lambda'_0 \backslash k$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2220	2280
65	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2120	2200	2260
70	1190	1300	1420	1540	1650	1770	1890	2000	2100	2180	2240
75	1170	1290	1410	1530	1640	1760	1870	1970	2070	2150	2210
80	1110	1240	1370	1500	1610	1720	1830	1930	2030	2110	2180
85	1010	1160	1300	1430	1540	1650	1760	1870	1970	2060	2130
90	911	1050	1190	1330	1450	1570	1680	1790	1900	2000	2080
95	828	952	1080	1210	1330	1450	1570	1690	1810	1920	2010
100	756	865	979	1100	1220	1340	1460	1580	1700	1820	1930
105	691	789	893	1000	1110	1220	1340	1460	1580	1700	1820
110	630	719	813	911	1010	1120	1230	1340	1460	1580	1690
115	576	658	744	834	927	1030	1130	1230	1340	1450	1560
120	529	604	683	766	852	941	1030	1130	1230	1330	1440
125	488	557	630	706	785	867	953	1040	1130	1230	1330
130	451	515	582	652	726	802	881	963	1050	1140	1230
135	418	478	540	605	673	744	817	893	972	1050	1140
140	389	444	502	563	626	691	760	830	904	979	1060

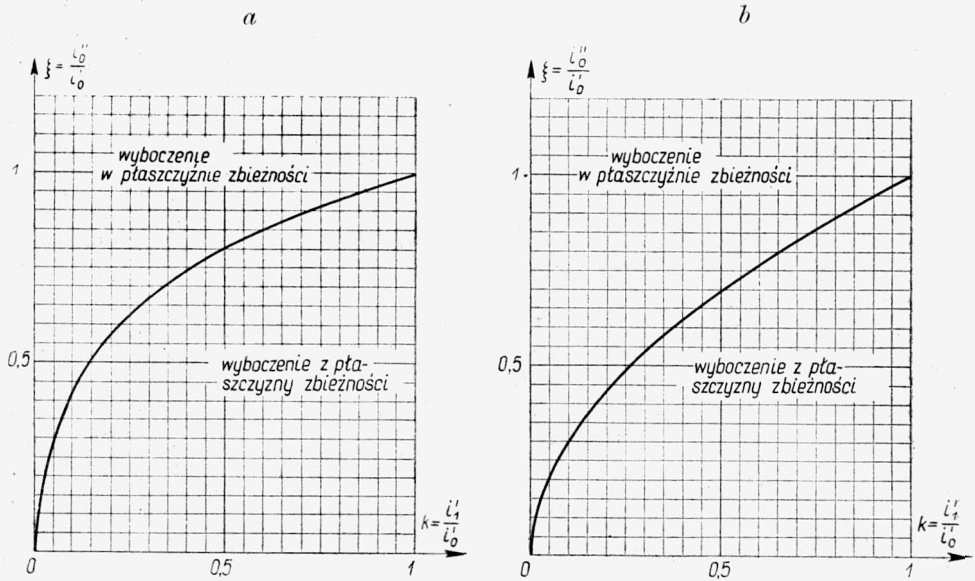
Tablica 17. Wartości współczynnika stateczności β'' (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda_0''$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	2,04	2,24	2,44	2,64	2,85	3,05	3,25	3,45	3,65	3,82	3,91
65	2,39	2,62	2,86	3,10	3,34	3,58	3,82	4,05	4,27	4,44	4,53
70	2,77	3,04	3,32	3,59	3,87	4,15	4,42	4,68	4,94	5,12	5,21
75	3,17	3,49	3,81	4,13	4,44	4,76	5,07	5,35	5,62	5,81	5,91
80	3,61	3,97	4,33	4,69	5,06	5,42	5,74	6,03	6,31	6,52	6,63
85	4,08	4,48	4,89	5,29	5,69	6,07	6,41	6,71	6,98	7,20	7,35
90	4,57	5,03	5,48	5,90	6,32	6,71	7,06	7,36	7,62	7,84	8,03
95	5,08	5,58	6,06	6,53	6,96	7,35	7,68	7,95	8,20	8,43	8,65
100	5,57	6,14	6,67	7,14	7,54	7,88	8,17	8,43	8,68	8,93	9,18
105	6,05	6,61	7,14	7,56	7,92	8,22	8,50	8,76	9,02	9,28	9,54
110	6,52	7,03	7,48	7,83	8,13	8,41	8,69	8,96	9,23	9,49	9,74
115	6,85	7,25	7,62	7,95	8,25	8,53	8,80	9,06	9,32	9,58	9,84
120	7,00	7,36	7,69	8,01	8,30	8,57	8,84	9,11	9,37	9,62	9,87
125	7,11	7,44	7,75	8,05	8,33	8,60	8,86	9,12	9,37	9,62	9,87
130	7,18	7,49	7,79	8,08	8,34	8,61	8,86	9,12	9,37	9,62	9,87
135	7,23	7,52	7,81	8,08	8,34	8,61	8,86	9,12	9,37	9,62	9,87
140	7,25	7,53	7,81	8,08	8,34	8,61	8,86	9,12	9,37	9,62	9,87

Tablica 18. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0}'' (kG/cm²) (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda_0''$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2220	2280
65	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2210	2260
70	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2120	2190	2240
75	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2000	2100	2170	2210
80	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1880	1980	2070	2140	2180
85	1190	1300	1420	1540	1650	1760	1860	1950	2030	2090	2130
90	1190	1300	1420	1530	1640	1740	1830	1910	1980	2030	2080
95	1180	1300	1410	1520	1620	1710	1790	1850	1910	1960	2010
100	1170	1290	1400	1500	1580	1660	1720	1770	1820	1870	1930
105	1150	1260	1360	1440	1510	1570	1620	1670	1720	1770	1820
110	1130	1220	1300	1360	1410	1460	1510	1550	1600	1640	1690
115	1090	1150	1210	1260	1310	1360	1400	1440	1480	1520	1560
120	1020	1070	1120	1170	1210	1250	1290	1330	1370	1400	1440
125	956	1000	1040	1080	1120	1160	1190	1230	1260	1290	1330
130	893	931	968	1000	1040	1070	1100	1130	1160	1200	1230
135	833	867	900	931	961	992	1020	1050	1080	1110	1140
140	777	807	837	865	894	922	950	977	1000	1030	1060

przedstawia dość skomplikowaną zależność między trzema zmiennymi, na przykład k , ξ i λ_0'' . Łatwo jednak przekonać się na konkretnych przykładach, iż wpływ λ_0'' jest tak nieznaczny, że wykresy na rys. 18 można i tu uważać za obowiązujące.



Rys. 18. Określenie kierunku wyboczenia prętów płasko zbieżnych: *a* — pręty jednostronnie utwierdzone, *b* — pręty zamocowane dwuprzegubowo

4.6. Obliczenie siły krytycznej dla prętów zbieżnych metodami przybliżonymi
 Dokonane przez nas obliczenie siły krytycznej dla prętów zbieżnych można uważać w pewnym sensie za ścisłe, ponieważ błędy nie przekraczające 1% są zasadniczo w technice pomijane, a podane tablice i wykresy niewątpliwie wykazują ten stopień dokładności (wobec nieznacznych i nawzajem się znośzących błędów wymiarowych, wynikających ze stosowania metody «założenia równania ścisłego»). Czasami jednak, dla uzyskania najdalej idącej prostoty obliczeń, dopuszcza się błędy nawet rzędu kilku procent: obliczenia takie będziemy nazywali dalej przybliżonymi.

Najczęściej stosowany przybliżony sposób obliczenia prętów zbieżnych polega na tym, że pręty te traktujemy jako przyzmatyczne, o przekroju równym najmniejszemu przekrojowi danego pręta zbieżnego. W ten sposób uzyskujemy pewność, że błędy obliczenia podwyższają bezpieczeństwo bez względu na to, czy wyboczenie będzie sprężyste, czy też sprężysto-plastyczne. Błędy te, zwłaszcza przy małych wartościach stosunku k , dochodzą jednak do kilkudziesięciu procent, co znacznie obniża lub często przekreśla wartość obliczeń.

Przyglądając się wykresom 6-17 zauważymy możliwość przybliżonego obliczenia siły krytycznej w inny sposób. Wyboczenie prętów o dużych smukłościach odbiega bowiem nieznacznie od wyboczenia sprężystego i, w stosunkowo dużym zakresie smukłości (zależnym od zbieżności k), różnice nie przekraczają 1%. Zakres ten nazwiemy zakresem sprężystym. Linią ograniczającą go można nazwać linią smukłości sprężysto-granicznej; można przyjąć, że dla prętów pryzmatycznych smukłość ta przechodzi w ogólnie znaną smukłość graniczną. Wyboczenie prętów o małych smukłościach odbiega natomiast nieznacznie od wyboczenia plastycznego: siła krytyczna jest w przybliżeniu równa iloczynowi powierzchni najmniejszego przekroju pręta przez granicę plastyczności σ_{pl} . Zakres, w którym różnice te nie przekraczają 1%, będziemy nazywali zakresem plastycznym, a ograniczającą go linię — linią smukłości plastyczno-granicznej.

Tak więc w pewnych zakresach smukłości możemy zakładać idealną sprężystość, a w innych — idealną plastyczność wyboczenia. Zajmiemy się teraz określeniem linii dzielącej płaszczyznę $\lambda_0 k$ na dwa obszary: w jednym z nich popełnimy mniejszy błąd traktując wyboczenie jako sprężyste, w drugim zaś — jako plastyczne. Linia ta będzie zatem linią równych błędów; nazwiemy ją linią smukłości sprężysto-plastycznej, ponieważ wpływ zarówno własności sprężystych, jak i plastycznych materiału można tu uważać za jednakowy.

Dla określenia przebiegu linii smukłości sprężysto-plastycznej zauważymy, że w obu dopiero co wspomnianych sposobach obliczeń przybliżonych popełniamy błędy na niekorzyść bezpieczeństwa; siła krytyczna jest bowiem w rzeczywistości mniejsza od obliczonej. Stanowi to niewątpliwą wadę obliczeń (podobnie jak metody Ritz'a-Timoszenki). W istocie, jeżeli zwiększamy smukłość począwszy od wartości najmniejszych, to naprężenie krytyczne w najmniejszym przekroju (a więc σ_{k1} przy założeniu $k \leq 1$), równe σ_{pl} przy wyboczeniu plastycznym, stale maleje; zakładając $\sigma_{k1} = \sigma_{pl}$ przeceniamy wytrzymałość pręta. Podobnie jest w drugim przypadku: gdy zmniejszamy smukłość począwszy od jej dużych wartości, to własności plastyczne materiału obniżają wielkość naprężeń krytycznych; zakładając zatem, że wyboczenie pręta będzie sprężyste, podczas gdy w istocie tak nie jest, przeceniamy również jego wytrzymałość. Oba błędy zrównoważą się, gdy naprężenie krytyczne w najmniejszym przekroju $\bar{\sigma}_{k1}$, obliczone przy założeniu sprężystości odkształceń, będzie równe granicy plastyczności σ_{pl} .

W przypadku pręta pryzmatycznego ($k=1$)

$$(4.6.1) \quad \bar{\sigma}_{k1} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2},$$

zatem smukłość sprężysto-plastyczna

$$(4.6.2) \quad \lambda_{sp} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}}$$

jest stałą materiałową oczywiście niższą od smukłości granicznej (sprężysto-granicznej). Na przykład dla stali 015 (St 37) podstawiając dane według Ylinea otrzymujemy $\lambda_{sp} = 93,5$.

W przypadku prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych

$$(4.6.3) \quad \bar{\sigma}_{k1} = \frac{1}{k^2} \bar{\sigma}_{k0} = \bar{\vartheta} \frac{E}{k^2 \lambda_0^2}.$$

Przez $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(k)$ oznaczyliśmy tu, jak zwykle, współczynnik stateczności obliczony przy założeniu prawa Hooke'a. Linię dolnej smukłości sprężysto-plastycznej, którą oznaczymy przez λ_{0sp} , określi równanie

$$(4.6.4) \quad \lambda_{0sp} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\bar{\vartheta} E}{\sigma_{pl}}}.$$

W przypadku prętów płasko zbieżnych otrzymamy natomiast

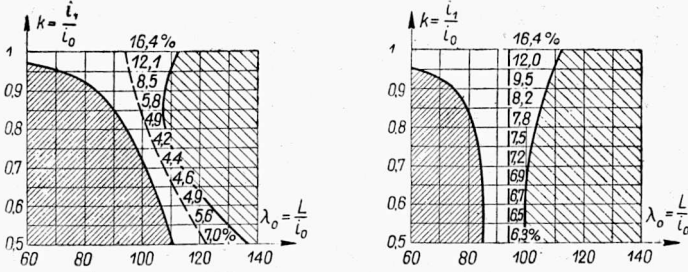
$$(4.6.5) \quad \lambda_{0sp} = \sqrt{\frac{\bar{\vartheta} E}{k \sigma_{pl}}}.$$

Rysunek 19 uwidacznia linie smukłości dolnej plastyczno-granicznej, sprężysto-granicznej i sprężysto-plastycznej dla prętów zbieżnych ze stali 015, jednostronnie utwierdzonych i opartych dwuprzegubowo. Obok linii smukłości sprężysto-plastycznej jako linii równych błędów w obu sposobach obliczeń podano procentowe wartości tych błędów. Jedynie dla błędów przyrzątecznych błędy dochodzą do 16,4%; w przypadku prętów o mniejszych wartościach zbieżności k możemy w przybliżeniu traktować wyboczenie jako idealnie sprężyste lub idealnie plastyczne, nie popełniając błędu większego od kilku procent.

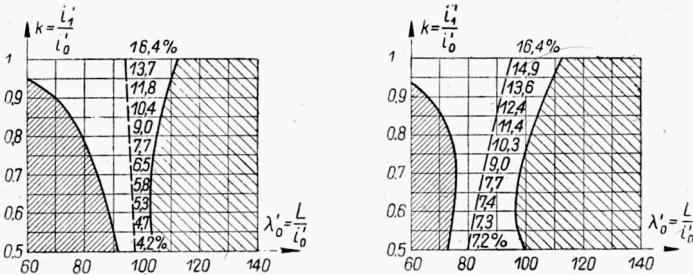
Przy obliczaniu siły krytycznej dla prętów zbieżnych podanym wyżej sposobem przybliżonym odpada konieczność posługiwania się dużą liczbą tablic lub wykresów. Przebiegi linii, podanych na rys. 19 dla stali 015 lub analogicznych dla innych materiałów, można bowiem zapamiętać w ogólnej formie i od razu z tych danych zorientować się, czy wyboczenie pręta będzie bardziej zbliżone do wyboczenia sprężystego, czy do wyboczenia plastycznego. Obliczenie jednak za pomocą tablic 7-18 lub podobnych dla innych materiałów nie wymaga jednak więcej pracy, a jest znacznie dokładniejsze.

1. Pręty jednostronnie utwardzone 2. Pręty zamocowane dwuprzegubowo

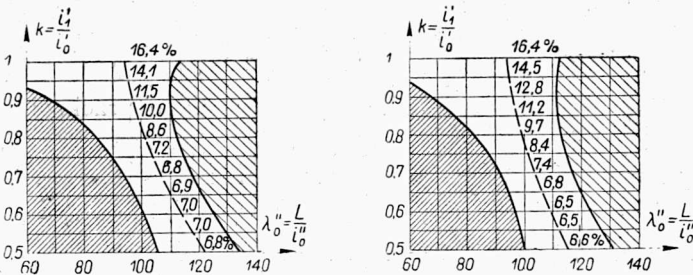
a. Pręty przestrzennie równomiernie zbieżne



b. Pręty płasko zbieżne, wyoboczenie w płaszczyźnie zbieżności



c. Pręty płasko zbieżne, wyoboczenie z płaszczyzny zbieżności



Zakres plastyczny: błąd mniejszy od 1% przy obliczeniu przyjmującym naprężenia krytyczne σ_{kl} równe granicy plastyczności σ_{pl}



Zakres sprężysty: błąd mniejszy od 1% przy obliczeniu przyjmującym sprężystość odkształceń

--- Linia równych błędów przy obu sposobach obliczeń przybliżonych (smukłość sprężysto-plastyczna). Wielkości tych błędów są podane w procentach

Rys. 19. Zakres stosowalności przybliżonych obliczeń sił krytycznych dla prętów zbieżnych ze stali 015

4.7. Przykład liczbowy. Obliczymy siłę krytyczną dla pręta zamocowanego dwuprzegubowo, płasko zbieżnego, o przekrojach prostokątnych; wymiary jednej z podstaw wynoszą 5×4 cm, a drugiej odpowiednio 3×4 cm; długość pręta $l = 120$ cm. Założymy, że materiałem pręta jest stal 015.

Większą z podstaw przyjmiemy za przekrój podstawowy; w takim razie $i'_0 = 5/\sqrt{12} = 1,443$ cm, $i'_1 = 3/\sqrt{12} = 0,866$ cm, $i''_0 = i''_1 = 4/\sqrt{12} = 1,155$ cm, a charakteryzujące pręt parametry wynoszą: $k = i'_1/i'_0 = 0,600$, $\xi = i''_0/i'_0 = 0,800$, $\lambda'_0 = L/i'_0 = l/i'_0 = 83,2$, $\lambda''_0 = L/i''_0 = l/i''_0 = 103,9$. Z wykresu 18 wnosimy, że pręt ulegnie wyboczeniu w płaszczyźnie zbieżności; posługując się zatem tablicą 16 lub wykresem 15 odczytujemy $\sigma'_{k0} = 1330$ kG/cm², skąd $P_k = P'_k = 26\,600$ kG. Dla sprawdzenia obliczymy jeszcze siłę krytyczną, powodującą wyboczenie z płaszczyzny zbieżności: dla $k = 0,600$ i $\lambda''_0 = 103,9$ odczytujemy z tablicy 18 lub z wykresu 17 $\sigma''_{k0} = 1370$ kG/cm²; siła krytyczna $P''_k = 27\,400$ kG jest więc istotnie większa od P'_k . Różnica między tymi wartościami jest jednak nieznaczna, ponieważ odpowiadający rozpatrywanemu prętowi punkt o współrzędnych $k = 0,600$ oraz $\xi = 0,800$ leży na rys. 18 blisko linii granicznej. Wyniki te możemy również otrzymać posługując się współczynnikami stateczności \mathcal{D} .

Dla porównania przeprowadzimy jeszcze obliczenie sposobem przybliżonym, opisanym w p. 4.6. Rozpatrzmy wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności. Punkt o współrzędnych $\lambda'_0 = 83,2$ oraz $k = 0,600$ leży na wykresie 2b rysunku 19 na linii smukłości sprężysto-plastycznej; zakładając więc sprężystość lub plastyczność wyboczenia popełniamy równe błędy. W istocie, gdyby wyboczenie było idealnie plastyczne, to $P_k = \sigma_{pl} F_1 = 2370 \cdot 3 \cdot 4 = 28\,400$ kG; gdyby natomiast wyboczenie było idealnie sprężyste, to $\mathcal{D} = 4,68$; stosując wzór (3.2.10) otrzymujemy w tym przypadku również $P_k = 28\,400$ kG. Błędy obu obliczeń przybliżonych są więc równe i wynoszą około 7%.

Potraktujemy wreszcie pręt jako pryzmatyczny o przekroju F , równym najmniejszemu przekrojowi danego pręta zbieżnego, $F_1 = 12$ cm². Smukłość takiego pręta wyniesie 138,6; możemy zatem zastosować wzór Eulera, otrzymując $P_k = 13\,000$ kG. Błąd obliczenia wynosi tu 51% i jest, oczywiście, niedopuszczalny w ogólnym przypadku.

5. Uwagi końcowe i wnioski

Metoda «założenia równania ścisłego» pozwoliła rozwiązać zagadnienie wyboczenia sprężysto-plastycznego prętów przestrzennie równomiernie i płasko zbieżnych w głównej mierze dzięki ominięciu całkowań, występujących zarówno przy rozwiązywaniu odpowiednich równań różniczkowych zginania, jak i przy zastosowaniu metod przybliżonych Ritz'a, Galerkin'a i innych. Posługiwanie się rozważaną metodą może napotykać na trudności przy bezpośrednim obliczaniu siły krytycznej dla danego pręta niepryzmatycz-

nego, jednak metoda ta dobrze nadaje się do sporządzenia zbiorczych wykresów i tablic, z których korzystanie w praktyce inżynierskiej nie przedstawia żadnych trudności.

Literatura cytowana w tekście

[1] A. N. Dinnik, *Ustojcziwost' uprugich sistiem*, Akad. Nauk ZSSR, Moskwa-Leningrad 1950.

[2] B. G. Galerkin, *Sobranje soczinienij* t. 1, Akad. Nauk ZSSR, Moskwa 1952.

[3] M. T. Huber, *Stereomechanika techniczna*, t. 2 i 4, Państw. Zakł. Wyd. Szkoln., Warszawa 1951.

[4] F. S. Jasiński, *Izbrannyje raboty po ustojcziwosti szatych stierzniej*, Gostechizdat, Moskwa-Leningrad 1952.

[5] K. Ježek, *Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl*, Springer, Wiedeń 1937.

[6] T. Kármán, *Untersuchungen über Knickfestigkeit*, Perlin 1910.

[7] S. E. Mikieladze, *Nowyje metody intiegrirowanja differencjalnych urawnień*, Gostechizdat, Moskwa-Leningrad 1951.

[8] J. Mutermilch, *Ścisły wzór na krzywiznę w zastosowaniu do mimośrodowego ściskania*, Arch. Mech. Stos., t. 1, Gdańsk 3 (1949).

[9] J. Naleszkiewicz, *Rozważania ogólne nad zginaniem prostych belek ściskanych*, Księga Jubil. dla Uczcz. Zasług Prof. M. T. Hubera, Gdańsk 1950.

[10] J. Naleszkiewicz, *Wytrzymałość konstrukcji lotniczych*, Państw. Zakł. Wyd. Szkoln., 1950.

[11] J. Naleszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, Wydawn. Komunik., Warszawa 1953.

[12] W. Nowacki *Z zastosowań rachunku różnic skończonych w mechanice budowli*, Arch. Mech. Stos., t. 3, Gdańsk 1951.

[13] M. Piątek, *Linia ugięcia belki obustronnie utwierdzonej przy dowolnym obciążeniu i zmiennym przekroju*, cz. III Mat. nadesł. na VI Zjazd Nauk. PZITB w Gdańsku, Wydawn. Min. Budown., Nr 37.

[14] A. Pflüger, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer, Berlin-Getynga-Heidelberg 1950.

[15] S. D. Ponomariew i inni, *Osnovy sovremiennych metodow rasczeta na procznost' w maszynostrojenji*, Maszgiz., 1952.

[16] M. Stark, *Geometria analityczna*, Polskie Tow. Matem., Warszawa-Wrocław 1951.

[17] R. V. Southwell, *An Introduction to the Theory of Elasticity*, wyd. 2 1941 (tłum. ros. Moskwa 1948).

[18] F. Szelański, *W sprawie stateczności prętów o zmiennym momencie bezwładności*, Wydawn. Przegł. Techn., Warszawa 1927.

[19] F. Szelański, *W sprawie wyznaczania krytycznych wartości obciążeń prętów o zmiennym momencie bezwładności*, cz. III Mat. nadesł. na VI Zjazd Nauk. PZITB w Gdańsku, Wydawn. Min. Budown., Nr 37.

[20] L. W. Urban, *Ustojcziwost' szatowo stierznja w zonie pieriechodnoj kriwoj diagrammy szatja*, Trudy MEMIT, z. 60, Transzeldo izdat, Moskwa 1951

[21] A. Ylinen, *Die Knickfestigkeit eines zentrisch gedrückten Stabes im elastischen und unelastischen Bereich*, rozpr. doktorska, Helsinki 1938 (cyt. według [3]).

[22] K. Zweiling, *Gleichgewicht und Stabilität*, VEB Verl. Technik, Berlin 1953.

Резюме

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ НЕКОТОРЫХ НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Основной целью работы является вычисление критической силы для более важных непризматических стержней, подвергаемых упруго-пластическому продольному изгибу.

В первой части работы приведено классификацию важнейших непризматических стержней. Отдельные сечения стержня рассматриваются, как некоторые преобразования основного сечения, что дает возможность свести классификацию стержней классификации этих преобразований.

Во второй части работы приведен и подробно рассмотрен новый метод решения проблемы устойчивости непризматических стержней, названный методом приема точного уравнения. Если предположим уравнение кривой, согласно которой должен произойти прогиб некоторого пока еще ближе неопределенного, стержня, тогда по дифференциальному уравнению изгиба можно определить форму этого стержня и значение критической силы. Предполагая однако в этом уравнении некоторые, пока что еще не определенные, параметры, можно в результате, подбирая их соответствующее значение, определить форму стержня, близкую требуемой. В этом случае можно также сравнительно легко учесть пластичность материала, подставляя вместо постоянного модуля Юнга E переменный модуль продольного изгиба E^* ; применяя этот метод, мы избегаем всякого рода затруднений, связанных с интегрированием. Этот метод, несмотря на название, является все же приближенным методом, но определение точности приближения не вызывает затруднений, ибо чаще всего различия размеров между предположенным и полученным стержнями не превышают пределов погрешностей обработки.

Для решения случая упруго-пластического продольного изгиба использовано формулу Иллина (3.3.3, определяющую зависимость модуля продольного изгиба от критического напряжения; формула основана на теории упруго-пластического продольного изгиба Кармана и на гипотезе Иллина (3.3.2) о зависимости напряжений от деформаций. Так как расчет должен здесь производиться отдельно для каждого материала, в качестве образцового материала принято сталь Ст. 37 (по польским стандартам-сталь 015).

Третья часть работы занимается численным определением значения критической силы для чаще всего применяемых непризматических стержней, для которых упругий продольный изгиб разработан Динником. В работе приведены таблицы и графики, которые можно непосредственно применять на практике.

Summary

ELASTO-PLASTIC BUCKLING OF NON-PRISMATIC BARS

The principal object of this paper is the computation of critical forces for more important types of non-prismatic bars, subjected to elasto-plastic buckling.

In the first part of the paper the more important types of non-prismatic bars are classified.

The cross sections of a bar are considered as transformations of a basic cross-sections; the classification of bars is then reduced to the classification of these transformations.

The second part contains a detailed account of a new method of solving stability problems of non-prismatic bars.

This method is called the method of «assumed accurate equations». Assuming a deflection line equation for a certain bar, it is possible to determine, from the differential equation of bending, the form of the bar and the corresponding critical force. Assuming in that equation certain undetermined parameters, for which suitable values are chosen, it is possible to obtain a shape approximating the desired form of the bar.

It is also possible to take into consideration the plasticity of the material, without any special difficulty. This can be done by substituting a variable buckling modulus E^* , instead of Young's constant modulus. By using this method it is possible to avoid the difficulties of integration. In spite of the name, this method is, of course, only an approximate one; it is, however, not difficult to determine the degree of exactness. The differences between the shape of a given bar and a bar thus obtained do not exceed the manufacturing errors.

In order to solve the case of elasto-plastic buckling the formula of Ylinen, (3.33), is used which determines the dependence of the modulus of buckling on the critical stress. This is in accordance with Kármán's theory of elasto-plastic buckling and the hypothesis of Ylinen, concerning the relation between stress and deformation, (3.3.2). In view of the fact that separate calculations are required for each material used, St 37 (steel 015, according to Polish standards) is taken as being typical.

The third part brings a numerical definition of critical forces for common non-prismatic bars, the elastic buckling of which has been investigated by Dinnik. Tables and graphs for direct use in engineering practice are also given.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lutego 1954 r.



ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

UKAZAŁY SIĘ

Tom I obejmuje oddzielne zeszyty I—XII i XIV

- I. F. Szelaḡowski, Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych
— O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego
- II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic
- III. Z. Klębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia
- IV. M. Życzkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej
- V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć
- VI. W. Olszak, Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (Plastyczne wyczerpanie nośności)
- VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu
- VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt na podstawie metody Ritza
- IX. W. Fiszdón, O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań
- X. Z. Wiasiutyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych
- XI. W. Wierzbicki, Dźwigary załamane w planie
- XII. W. Wierzbicki, O powstawaniu wybočenja prętów prostych
- XIV. W. Żenczykowski, Podstawy wytrzymałościowe obliczeń statycznych konstrukcji murowanych z cegły

Tom II zeszyt 1

- XVI. I. Malecki, Metody zastosowania rachunku tensorowego w technice
- XVII. J. Nowiński, Podstawy teorii plastyczności (I). Siedem wykładów
- XVIII. W. Nowacki, Statyka rusztów płaskich

Tom II zeszyt 2

- XIX. W. Bogusz, Z teorii płyt ortotropowych
- XX. J. Szmelter, Rozwiązanie zagadnienia błony metodą różnic skończonych z użyciem specjalnego liczydła
- XXI. M. Sokołowski, Dwustopniowy sposób obliczania pewnego typu płyt ortotropowych
- XXII. M. Życzkowski, Wybočenje sprężysto-plastyczne niektórych prętów niepryzmatycznych

Cena zł 20.—

NAUKI TECHNICZNE

WYDAWNICTWA SERYJNE I CZASOPISMA

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIK I AKADEMII GÓRNICZO-HUTNICZEJ

Wydawnictwo seryjne publikuje wyniki prac naukowych poszczególnych ośrodków badawczych politechnik. Każdy z zeszytów jest poświęcony jednemu z działów (mechanika, elektryka, budownictwo itd.)

W tej serii ukazały się dotychczas: ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ — Elektryka nr 1, 2, 3, 4, 5; Mechanika nr 1; Chemia nr 1. ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ — Budownictwo nr 1; Elektryka nr 1; Chemia nr 1; ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ — Budownictwo nr 1, 2; Mechanika nr 1, 2; Chemia nr 1. ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ — Mechanika nr 1; Elektryka nr 1. ZESZYTY NAUKOWE AKAD. GÓRNICZO-HUTNICZEJ — Górnictwo nr 1, 2. Zamówienia na Zeszyty wydane oraz dalsze kolejne przyjmuje Księgarnia Naukowa, Warszawa, Krak. Przedmieście 7.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

Wydawnictwo Instytutu Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk.

Zamówienia na Zeszyty wydane przyjmuje Księgarnia Naukowa, Warszawa, Krak. Przedmieście 7.

Zamówienia w przedpłacie na rok 1955 należy kierować do PPK „RUCH“.

CZASOPISMA

wydawane przez Polską Akademię Nauk:

ARCHIWUM BUDOWY MASZYN,	pren. rocznie	60 zł
ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI	„ „	60 zł
ARCHIWUM GÓRNICZWA I HUTNICTWA	„ „	60 zł
ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ	„ „	60 zł
GEODEZJA I KARTOGRAFIA	„ „	40 zł
ROZPRAWY INŻYNIERSKIE	„ „	80 zł

* * *

Wpłaty na prenumeratę czasopism: PPK „RUCH“, Centralna Ekspedycja,
Warszawa, ul. Srebrna 12, Nr konta PKO dla wpłat: 1-110-14 000

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ *ukazuje się jako czasopismo (kwartalnik) i kosztuje w prenumeracie rocznej 60 zł.*

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE *ukazywały się do połowy 1954 r. jako wydawnictwo seryjne. Zeszyty od I do XII i zeszyt XV są do nabycia w księgarniach naukowych Domu Książki. Zamówienia za zaliczeniem: Księgarnia Naukowa, Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7.*

Poczynając od III kwartału 1954 r. Rozprawy Inżynierskie *ukazują się jako czasopismo (kwartalnik) i kosztują w prenumeracie rocznej 80 zł.*

Prenumeratę na czasopisma Archiwum Mechaniki Stosowanej i Rozprawy Inżynierskie na rok 1955 przyjmuje do 15. XII. 1954, Centralna Ekspedycja „Ruchu“, Warszawa, Srebrna 12, konto PKO nr 1-110-14 000.

Sprzedaż bieżących numerów czasopisma — w księgarniach naukowych Domu Książki i w placówkach „Ruchu“.