

A 19041
P O L Ś K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

z.1

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

XI

WITOLD WIERZBICKI

Dźwigary załamane w planie

W A R S Z A W A

1 9 5 4

R O Z P R A W Y I N Ż Y N I E R S K I E

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI
I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI
ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

WITOLD NOWACKI – PRZEWODNICZĄCY

JULIAN BONDER, MICHAŁ BROSZKO

WACŁAW OLSZAK, BOHDAN STEFANOWSKI

STANISŁAW TURSKI, WITOLD WIERZBICKI

JERZY NOWIŃSKI – SEKRETARZ NAUKOWY

Adres Redakcji

WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

P O L S K A - A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

WITOLD WIERZBICKI

DŹWIGARY ZAŁAMANE W PLANIE

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

XI

W A R S Z A W A 1954

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE



ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (XI)

Copyright 1954 by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa (Poland). Printed in Poland.

All rights reserved

No part of this book may be translated or reproduced
in any form, by mimeograph or any other means,
without permission in writing from the publishers.

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK

Chc. D. 154/54

Nakład 1420 + 160 egz. Papier druk. sat. 70×100/16, 70 g. Arkuszy wydawniczych 5. Arkuszy drukarskich 4,5
Oddano do składania dn. 4.II.54 r. Druk ukończono w maju 1954 r. Zam. 32. 5-B-53825. ~~Cena 1,60~~

Stoł. Zakł. Graf. Drukarnia Naukowa, Warszawa, Śniadeckich 8

PRZEDMOWA

Rozprawa niniejsza została opracowana przede wszystkim na podstawie następujących moich dawniejszych publikacji:

- (1) *Teoria dźwigarów załamanych w planie*, Warszawa 1926,
- (2) *Sur le calcul des poutres à axe brisé*, Paryż 1927,
- (3) *Zastosowanie różnic skończonych do obliczenia dźwigarów załamanych w planie*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1930,
- (4) *Dźwigary załamane w planie o zmiennym kącie załamania*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1931,
- (5) *Belki ciągłe załamane w planie*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1931,
- (6) *De l'application des équations simultanées à différences finies en statique des constructions*, Zurych 1936.

Z zagadnień zawartych w tych pracach opuściłem takie, które stały się już obecnie przedmiotem łatwo osiągalnych podręczników z różnych dziedzin techniki, musiałem natomiast uwypuklić zagadnienia, które wysunęła technika lat ostatnich.

Przy redagowaniu niniejszej rozprawy dokonałem, w porównaniu z treścią prac wymienionych wyżej, nieuniknionej kompresji wywołanej koniecznością zachowania wspólnej skali przy traktowaniu zagadnień poprzednio rozpatrywanych niezależnie od siebie.

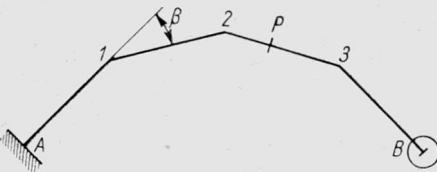
AUTOR

I. CHARAKTERYSTYKA DŹWIGARA ZAŁAMANEGO W PLANIE

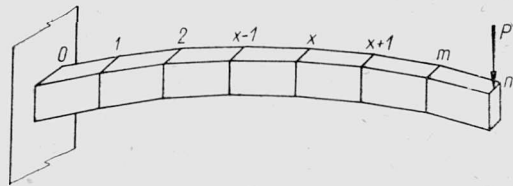
Praktyka inżynierska narzuca nieraz konieczność statycznego obliczenia dźwigara, którego oś podłużna w stanie nieodkształconym jest linią łamaną położoną w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku działania sił (rys. 1). Dźwigar tego rodzaju nazywamy *dźwigarem załamanym w planie*, przy czym płaszczyznę podłużną jego osi będziemy w dalszych rozważaniach przyjmowali za poziomą.

Przykład dźwigara załamanego przedstawiony jest w planie na rys. 2. Koniec *A* dźwigara jest w tym wypadku utwierdzony, a koniec *B* swobodnie podparty; punkt *P* oznacza jednocześnie siłę

prostopadłą do płaszczyzny dźwigara (pionową) i punkt jej zaczepienia. Punkty załamania się osi dźwigara w planie nazywamy *węzłami* (na rys. 2 punkty 1, 2 i 3), odległości między węzłami — *przedziałami*, a kąty między osiami poszczególnych przedziałów — *kątami załamania*.



Rys. 2



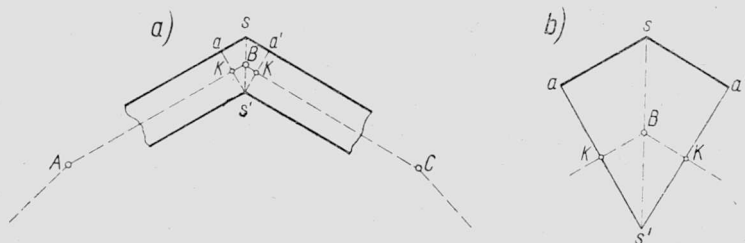
Rys. 1

Dźwigary załamane w planie mogą być podparte w sposób przedstawiony na rys. 2 w punkcie *B* również i w innych węzłach; mogą być też utwierdzone w jednym końcu, a na drugim swobodne (rys. 1, perspektywa).

Cechę charakterystyczną dźwigarów załamanych w planie stanowi okoliczność, że dźwigary tego rodzaju ulegają przy ich obciążeniu nie tylko zginaniu, lecz również skręcaniu poszczególnych elementów prostych.

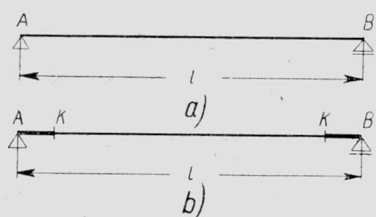
Ponieważ poszczególne przedziały dźwigara załamanego w planie przecinają się pod kątem ostrym i ponieważ szerokość w planie tych przedziałów ma wartość skończoną, to w węzłach wytwarzają się kliny *sas'a'*, które wprowadzają pewną niejasność w obliczenie długości teoretycznej przedziałów (rys. 3a).

W klinie $sas'a'$ proste as' i $a's'$ są do krawędzi dźwigara i do jego osi prostopadłe. W klinie tym rozróżniamy jako jego części kliny ass' i $a'ss'$. W teorii dźwigarów załamanych w planie kliny ass' i $a'ss'$ uważamy za ciała sztywne tworzące jak gdyby niesprężyste przedłużenie KB sprężystych części AK i KC przedziałów AB i BC (powiększenie na rys. 3b).



Rys. 3

Rozmiary części sztywnych dźwigara w węzle zależą od jego kształtu i wymiarów poprzecznych, ocenę zaś wpływu tych części na odkształcenia dźwigara załamane w planie można przeprowadzić w prosty sposób na obliczeniach belek prostych w dwóch punktach swobodnie podpartych, odpowiadających pod względem rozpiętości i wymiarów poprzecznych poszczególnym przedziałom (np. AB i BC). W tym celu wykonujemy obliczenia odkształceń z jednej strony dla belek sprężystych na całej długości (rys. 4a), z drugiej zaś dla belek mających końce (AK i KB) niesprężyste (rys. 4b). Wyniki tego rodzaju obliczeń porównawczych wykonane w warunkach przeciętnej praktyki budowlanej wykazały, że wpływ końców niesprężystych poszczególnych przedziałów na ich odkształcenia jest znikomy.



Rys. 4

Wobec tego w dalszym ciągu będziemy pomijali wpływ klinów ass' i $a'ss'$ na odkształcenia dźwigarów załamanych w planie i będziemy rozpatrywali długości poszczególnych przedziałów dźwigara jako odcinki ich osi przecinające się w węzłach.

Teoria dźwigarów załamanych w planie znajduje między innymi zastosowanie przy obliczeniach statycznych belek balkonowych, przy obliczaniu na działanie wiatru załamanych pasów kratownic mostowych, w szeregu konstrukcji przemysłowych i w wielu przypadkach, kiedy obliczenie dźwigarów załamanych może zastąpić obliczenie niekolistych dźwigarów zakrzywionych w planie.

Literatura przedmiotu nie jest na ogół bogata, a praca wymieniona pod (1) w przedmowie była pierwszą pracą w tej dziedzinie w powszechnej literaturze technicznej.

W pracy niniejszej mowa jest głównie o reakcjach i odkształceniach dźwigarów załamanych w planie, gdyż sprawa obliczenia naprężeń różni się tu niewiele od zagadnienia naprężeń w innych konstrukcjach jednocześnie zginanych i skręcanych.

Obliczenia wykonywane są prawie wyłącznie dla dźwigarów o wypukłości zwróconej w jedną stronę, tzn. dla konstrukcji mających największe znaczenie praktyczne.

Obliczenie odkształceń będzie tu się odbywało przeważnie sposobem geometrycznego dodawania odkształceń, jako sposobem bezpośrednio wpływającym z właściwości mechanicznych rozpatrywanych układów.

Rysunki będą podawane dalej przeważnie w jednym tylko rzucie, w planie.

II. STATYCZNIE WYZNACZALNE DŹWIGARY ZAŁAMANE W PLANIE

1. Siły poprzeczne, momenty zginające i skręcające w dźwigarach-wspornikach załamanych w planie

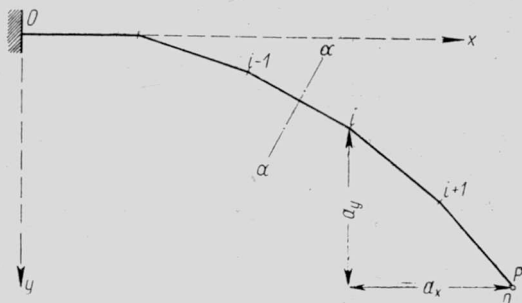
Dźwigar-wspornik przedstawiony jest w planie na rys. 5. W punkcie O mamy tu utwierdzenie, a układ osi współrzędnych XOY określa położenie płaszczyzny dźwigara załamane w planie.

Definicja siły poprzecznej i momentu zginającego w przypadku dźwigarów załamanych w planie pozostaje ta sama, co w przypadku belek prostych. A więc rozumiemy jako siłę poprzeczną w danym przekroju aa dźwigara (rys. 6) sumę sił działających z jednej strony przekroju, a jako moment zginający

w tym przekroju sumę momentów sił uogólnionych działających z jednej strony tego przekroju względem jego środka.

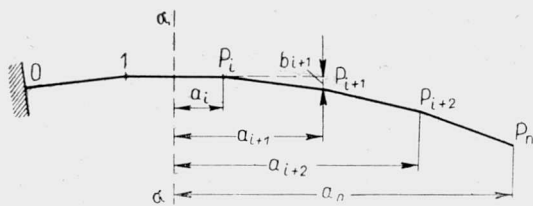
Stąd siła poprzeczna T_a w przekroju aa dźwigara przedstawionego na rys. 6 wyraża się wzorem

$$T_a = \sum_a^n P_i, \quad (1)$$



Rys. 5

gdzie siły P_i są to siły prostopadłe do płaszczyzny XOY i zaczepione w poszczególnych węzłach posiadających numery i , a zawarte między przekrojem aa i końcem dźwigara. Przy obciążeniu pionowym poszczególnych przedziałów prawa strona równania (1) powinna być powiększona o obciążenie zawarte między przekrojem aa i końcem dźwigara.



Rys. 6

Dla momentu zginającego w przekroju aa mamy wzór

$$M_a = \sum_a^n P_i a_i, \quad (2)$$

gdzie a_i oznacza ramię momentu zginającego siły P_i (rys. 6). Przy obciążeniu pionowym poszczególnych przedziałów dźwigara prawa strona wzoru (2) powinna być powiększona o moment statyczny względem środka przekroju aa obciążenia zawartego między tym przekrojem a końcem dźwigara.

Moment skręcający w przekroju aa wyraża się odpowiednio wzorem

$$\mathfrak{M}_a^0 = - \sum_{i+1}^n P_i b_i, \quad (3)$$

gdzie b_i oznacza ramię momentu skręcającego $P_i b_i$. Przy obciążeniu poszczególnych przedziałów dźwigara należy prawą stronę równania (3) uzupełnić w podobny sposób jak dla momentu zginającego.

Momenty zginające M_i w poszczególnych węzłach i możemy poza wzorem (2) wyznaczyć na podstawie momentów obliczonych względem osi $i'i'$ i $i'n$ odpowiednio równoległych do osi OY i OX , czyli na podstawie momentów wyrażających się wzorami (rys. 5):

$$M_x = - \sum P a_{0y}, \quad (4)$$

$$M_y = \sum P a_{0x}. \quad (5)$$

W tym celu przedstawiamy momenty M_i , M_x , M_y i moment \mathfrak{M}_i^0 skręcający przedział $i-1, i$ wektorowo (rys. 7) oznaczając je odpowiednio liniami przerywanymi. Kierunek wektora momentu \mathfrak{M}_i^0 pokrywa się z kierunkiem osi przedziału. Za dodatnie przyjmujemy w obliczeniach momenty prawoskrętne.

Ponieważ w każdym węźle i rozumianym w sensie omówionym w rozdziale poprzednim układ momentów M_i , \mathfrak{M}_i^0 jest równoważny z układem

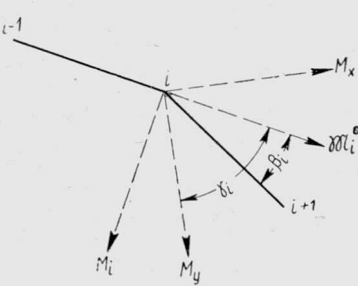
momentów M_x, M_y , dochodzimy na podstawie reguły równoległoboku do wzorów

$$M_i = M_y \sin \gamma_i - M_x \cos \gamma_i, \quad (6)$$

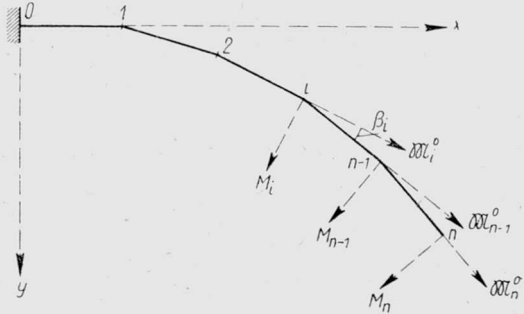
$$\mathfrak{M}_i^0 = M_y \cos \gamma_i + M_x \sin \gamma_i, \quad (7)$$

gdzie kąty γ_i określają położenie przedziałów $i-1, i$ w stosunku do osi Y -ów.

Ze względu na małe wymiary węzłów w stosunku do długości przedziałów możemy uważać, że punkt i na rys. 5 pokrywa się zarówno z punktem B , jak i z punktem K na rys. 3b.



Rys. 7



Rys. 8

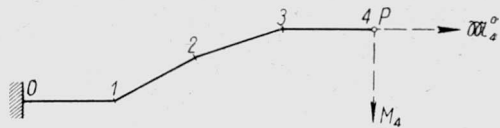
Przypuśćmy dalej, że na dźwigar-wspornik załamany w planie nie działają siły pionowe, lecz same tylko momenty M_n i \mathfrak{M}_n^0 przedstawione wektorowo na rys. 8. Wyznaczenie momentów M_i i \mathfrak{M}_i^0 odbywa się tu drogą rozkładania na kierunki wektorów M_i i \mathfrak{M}_i^0 momentu M_n czy momentu \mathfrak{M}_n^0 . Kąt nachylenia wektorów \mathfrak{M}_n^0 i \mathfrak{M}_i^0

wynosi $\sum_i^{n-1} \beta_i$, wobec czego

$$M_i = M_n \cos \sum_i^{n-1} \beta_j, \quad \mathfrak{M}_i^0 = -M_n \sin \sum_i^{n-1} \beta_j, \quad (8)$$

$$M_i = \mathfrak{M}_n^0 \sin \sum_i^{n-1} \beta_j, \quad \mathfrak{M}_i^0 = \mathfrak{M}_n^0 \cos \sum_i^{n-1} \beta_j. \quad (9)$$

Przy kształcie dźwigara załamanej w planie przedstawionym na rys. 9, a więc w przypadku, kiedy oś dźwigara nie jest jednostronnie wypukłą, wszystkie rozumowania i wzory tego paragrafu zachowują swoją moc, oczywiście przy uwzględnieniu właściwych znaków dla momentów.

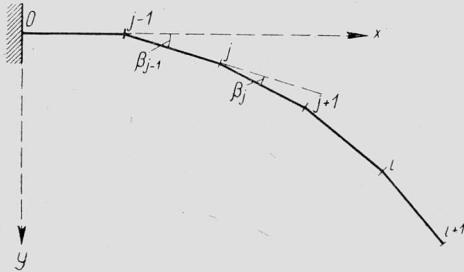


Rys. 9

2. Odształcenie dźwigarów-wsporników załamanych w planie

Odształcenia wszelkich typów dźwigarów załamanych w planie można sprowadzić drogą geometrycznego dodawania odkształceń do odkształcenia dźwigarów-wsporników. Stąd obliczenie odkształceń dźwigarów-wsporników stanowi punkt wyjścia do obliczeń dźwigarów załamanych w planie w ogóle.

Do wyznaczenia odkształceń dźwigarów załamanych w planie potrzebna jest przede wszystkim znajomość odkształceń poszczególnych przedziałów dźwigara. Zasadniczymi elementami tych odkształceń są pionowe przesunięcia końców poszczególnych przedziałów względem ich początków, kąty obrotu końcowych przekrojów względem przekrojów początkowych i kąty skręcenia poszczególnych przedziałów.

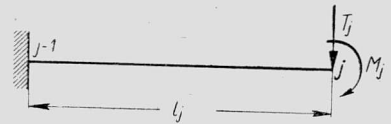


Rys. 10

Bierzemy więc przedział $j - 1, j$ dźwigara (rys. 10) i rozpatrujemy go jako belkę prostą poziomą utwierdzoną w przekroju $j - 1$

i swobodną w przekroju j , o płaszczyznach przekrojów prostopadłych do osi podłużnej belki.

Pionowe przesunięcie z_j punktu j w stosunku do punktu $j - 1$ będzie wywołane siłą pionową zaczepioną w punkcie j , momentem zaczepionym do przekroju j oraz pionowym obciążeniem przedziału $j - 1, j$. Siła, o której mowa, jako suma wszystkich sił działających w tym wypadku na prawo od przekroju poprzecznego j dźwigara załamane w planie, przedstawia siłę poprzeczną T_j [wzór (1) po zastąpieniu znaczka a przez znaczek j], moment zaś M_j wyraża się bądź wzorem (2), bądź wzorem (6).



Rys. 11

W tych warunkach (rys. 11)

$$z_j = \frac{T_j l_j^3}{3 E J} + \frac{M_j l_j^2}{2 E J} + \frac{\mathfrak{M}'_j}{E J}, \quad (10)$$

gdzie E oznacza współczynnik sprężystości przy rozciąganiu i ściskaniu, J moment bezwładności przekroju poprzecznego dźwigara względem osi poziomej, l_j długość przedziału $j - 1, j$ zaś \mathfrak{M}'_j moment statyczny obciążenia wtórnego w przedziale $j - 1, j$ względem środka przekroju j .

Odpowiedni kąt obrotu przekroju j względem przekroju $j - 1$ wyniesie

$$\varphi_j = \frac{T_j l_j^2}{2 EJ} + \frac{M_j l_j}{EJ} + \frac{\mathfrak{S}'_j}{EJ}, \quad (11)$$

gdzie \mathfrak{S}'_j oznacza wypadkową obciążenia wtórnego w przedziale $j - 1, j$.

Jeżeli założymy, że przekrój $j - 1$ nie obraca się w swej płaszczyźnie, wówczas kąt obrotu przekroju j względem przekroju $j - 1$ będzie równy

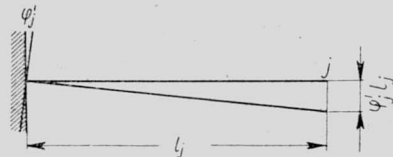
$$\Theta_j = \frac{M_j^0 l_j}{G J_0}, \quad (12)$$

gdzie G oznacza współczynnik sprężystości przy przesuwaniu, a J_0 bądź biegunowy moment bezwładności przekroju poprzecznego belki, bądź inną wielkość zastępującą tę wielkość we wzorach na skręcanie typu (12).

Wielkości z_j , φ_j i Θ_j otrzymane dla poszczególnych przedziałów dźwigara-wspornika załamanego w planie stosujemy do wyznaczenia przesunięcia pionowego w_i pewnego węzła i jako kolejnego węzła całego dźwigara. Na podstawie wzoru

$$w_i = \sum_1^i z_j + \sum_1^i \varphi'_j l_j, \quad (13)$$

gdzie z_j oznacza przesunięcia poszczególnych węzłów dźwigara obliczone na podstawie wzoru (10), a φ'_j kąt obrotu przekroju poprzecznego przedziału $j - 1, j$ przeprowadzonego przez punkt $j - 1$ względem płaszczyzny pionowej przechodzącej przez ten punkt prostopadle do osi $j - 1, j$ (rys. 12). Sumy dotyczą wszystkich węzłów dźwigara-wspornika zawartych między węzłem 0 a węzłem i .



Rys. 12

Aby należycie uzmysłowić sobie znaczenie kąta φ'_j i drugiej sumy wzoru (13) założmy, że poszczególne przedziały dźwigara załamanego w planie (rys. 10) są nieodkształcalne (sztywne) i że połączone są w sposób sprężysty, zresztą dowolny. W tych warunkach iloczyn kąta φ'_j nachylenia przekroju poprzecznego w punkcie $j - 1$ względem płaszczyzny pionowej prostopadłej do osi $j - 1, j$ przez długość l_j przedziału $j - 1, j$ wyraża przy małych przesunięciach pionowe przesunięcie punktu j względem punktu $j - 1$, a suma $\sum \varphi'_j l_j$ — pionowe przesunięcie punktu i . Znajdujemy więc w tym wypadku, że

$$w_i = \sum_1^i \varphi'_j l_j. \quad (14)$$

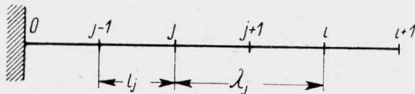
Wzór (14) zachowuje moc swoją niezależnie od tego, w jaki sposób powstał kąt φ'_j .

Dla dźwigarów sprężystych kąt φ'_j jest wynikiem zginania i skręcania poszczególnych przedziałów, przy czym ugięcia tych przedziałów składają się wówczas na pierwszą sumę wzoru (13).

Równanie (13) ma zastosowanie i w przypadku dźwigara prostego, gdy wszystkie kąty $\beta = 0$, przy czym obliczenie kątów φ'_j upraszcza się w tym wypadku wobec tego, że belka nie ulega skręcaniu. Równaniu temu, po rozwinięciu w nim drugiej sumy, możemy nadać w przypadku dźwigara prostego postać

$$w_i = \sum_0^i z_j + \sum_0^i \Delta \varphi_j \lambda_j, \quad (15)$$

gdzie $\Delta \varphi_j$ (rys. 13) oznacza przyrost kąta nachylenia przekroju poprzecznego belki prostej w punkcie j w stosunku do odpowiedniego kąta nachylenia przekroju poprzecznego w punkcie $j-1$, a λ_j sumę długości przedziałów belki w granicach od punktu j do punktu i , którego przesunięcie pionowe wyznaczamy. Przy długości przedziału l_j zmierzającej do zera wzór (15) doprowadza do znanego w statyce budowli wzoru Bresse'a.



Rys. 13

Przechodząc do wyrażenia wchodzących do równania (13) kątów φ'_j przez

kąty φ_j i Θ_j , obliczone ze wzorów (10) i (11), uciekamy się dla wszystkich wchodzących do obliczeń kątów obrotu do oznaczeń wektorowych i do dodawania odpowiednich wektorów. Chodzi o to, że węzeł j dźwigara załamanego w planie, traktowany na rys. 3b jako klin nieodkształcalny, może wziąć udział w obrotach następujących (rys. 14):

- (1) względem osi $j, j+1$ (obrót Θ'_{j+1}),
- (2) względem osi $j-1, j$ (obrót Θ_j),
- (3) względem osi prostopadłej do $j, j+1$ (obrót φ'_{j+1}),
- (4) względem osi prostopadłej do $j-1, j$ (obrót $\bar{\varphi}_j$).

Ponieważ wymiary każdego z węzłów są małe w porównaniu z wymiarami dźwigara, możemy przyjąć, że wszystkie cztery wektory Θ'_{j+1} , Θ_j , φ'_{j+1} i $\bar{\varphi}_j$ przechodzą przez ten sam punkt j (rys. 14) lub B (rys. 3b), który uważamy za środek węzła. Dochodzimy tą drogą do schematu według rys. 15.

Kąty $\bar{\varphi}_j$, φ'_j , i φ_j uważamy za dodatnie, o ile obserwator patrzący na dźwigar z jego strony wklęsłej widzi, że odpowiednie przekroje poprzeczne dźwigara obracają się względem swych poziomych osi obojętnych na

prawo. Kąty $\bar{\theta}_j$, θ'_j i θ_j uważamy za dodatnie, kiedy obserwator posuwając się tyłem wzdłuż dźwigara od jego końca utwierdzonego widzi, że odpowiednie przekroje poprzeczne dźwigara obracają się na prawo względem osi poszczególnych przedziałów.

Obroty $\bar{\varphi}_j$ i $\bar{\theta}_j$ składają się odpowiednio na obroty φ'_{j+1} i θ'_{j+1} . Wobec tego drogą rzutowania wektorów $\bar{\varphi}_j$ i $\bar{\theta}_j$ na kierunki wektorów φ'_{j+1} i θ'_{j+1} znajdujemy :

$$\varphi'_{j+1} = \bar{\varphi}_j \cos \beta_j - \bar{\theta}_j \sin \beta_j, \quad (16)$$

$$\theta'_{j+1} = \bar{\varphi}_j \sin \beta_j + \bar{\theta}_j \cos \beta_j. \quad (17)$$

Są to wzory rekurencyjne, którym można nadać postać

$$\varphi'_j = \bar{\varphi}_{j-1} \cos \beta_{j-1} - \bar{\theta}_{j-1} \sin \beta_{j-1}, \quad (18)$$

$$\theta'_j = \bar{\varphi}_{j-1} \sin \beta_{j-1} + \bar{\theta}_{j-1} \cos \beta_{j-1}. \quad (19)$$

Między kątem nachylenia φ'_{j+1} początkowego (bliższego do punktu utwierdzenia dźwigara) przekroju poprzecznego przedziału $j, j + 1$ a kątem nachylenia $\bar{\varphi}_{j+1}$ jego przekroju końcowego (rys 16) istnieje zależność

$$\bar{\varphi}_{j+1} = \varphi'_{j+1} + \varphi_{j+1}, \quad (20)$$

gdzie kąt φ_{j+1} jest to kąt obliczony ze wzoru (10), czyli kąt obrotu końcowego przekroju $j + 1$ wyznaczony w założeniu, że przedział $j, j + 1$ jest belką utwierdzoną w końcu j , a swobodną w końcu $j + 1$, wyrażający więc nachylenie przekroju poprzecznego $j + 1$ względem przekroju poprzecznego j .

Odpowiednio do zależności (20) znajdujemy (rys. 17)

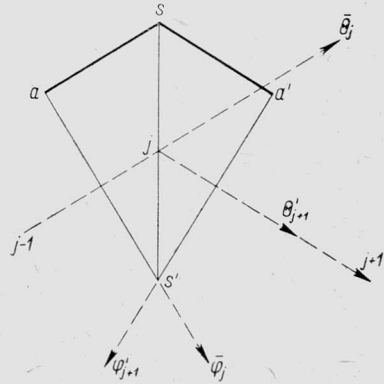
$$\bar{\theta}_{j+1} = \theta'_{j+1} + \theta_{j+1}, \quad (21)$$

co oznacza, że kąt obrotu węzła $j + 1$ względem osi $j, j + 1$ wyraża się sumą kąta obrotu węzła j względem osi $j, j + 1$ oraz kąta skręcenia przedziału $j, j + 1$ obliczonego według wzoru (12).

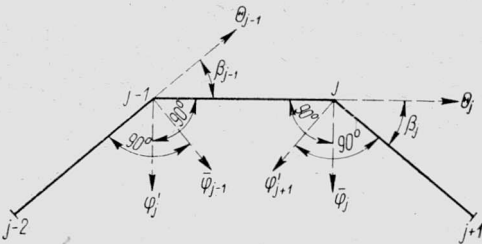
Wstawiając w równania (20) i (21) odpowiednio wyrażenia (16) i (17) znajdujemy

$$\bar{\varphi}_{j+1} = \bar{\varphi}_j \cos \beta_j - \bar{\theta}_j \sin \beta_j + \varphi_{j+1}, \quad (22)$$

$$\bar{\theta}_{j+1} = \bar{\varphi}_j \sin \beta_j + \bar{\theta}_j \cos \beta_j + \theta_{j+1}. \quad (23)$$



Rys. 14



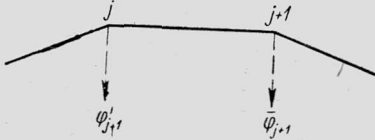
Rys. 15

We wzory (22) i (23) jako wzory rekurencyjne wprowadzamy $j-1$ zamiast j , skąd znajdujemy

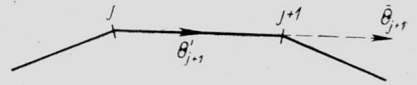
$$\bar{\varphi}_j = \bar{\varphi}_{j-1} \cos \beta_{j-1} - \bar{\Theta}_{j-1} \sin \beta_{j-1} + \varphi_j, \quad (24)$$

$$\bar{\Theta}_j = \bar{\varphi}_{j-1} \sin \beta_{j-1} + \bar{\Theta}_{j-1} \cos \beta_{j-1} + \bar{\Theta}_j. \quad (25)$$

Możemy stąd wyznaczyć kąt nachylenia przekroju poprzecznego w punkcie j i kąt obrotu tego przekroju względem osi $j-1, j$ kolejno



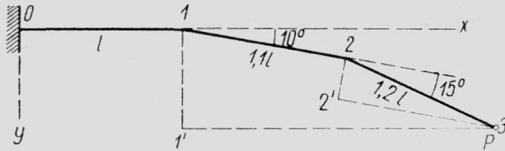
Rys. 16



Rys. 17

ustawiając wzory (24) i (25) dla zmniejszających się o 1 wartości j , aż do $j=1$ włącznie, i następnie dla wzrastających o 1 wartości j , od znanych wartości kątów $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\Theta}_1$ aż do kątów poszukiwanych.

Przytoczone wzory na odkształcenia zachowują swą moc i dla dźwigarów typu przedstawionego na rys. 9 przy uwzględnieniu właściwych znaków wektorów momentów i obrotów.



Rys. 18

Rachunkową stronę obliczenia przesunięcia pionowego pewnego punktu dźwignika-wspornika załamanego w planie sprecyzujemy na przypadku dźwignika trójprzedziałowego podanego na rys. 18.

Tu $l_1 = l$, $l_2 = 1,1l$, $l_3 = 1,2l$ oraz $\beta_1 = 10^\circ$ i $\beta_2 = 15^\circ$; pionowa siła P załączona jest w swobodnym końcu dźwignika, w punkcie 3.

Wzory rekurencyjne (24) i (25) oraz (16) i (17) przybierają w danym razie postać następującą:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_3 &= \bar{\varphi}_2 \cos \beta_2 - \bar{\Theta}_2 \sin \beta_2 + \varphi_3, \\ \bar{\Theta}_3 &= \bar{\varphi}_2 \sin \beta_2 + \bar{\Theta}_2 \cos \beta_2 + \bar{\Theta}_3, \\ \bar{\varphi}_2 &= \bar{\varphi}_1 \cos \beta_1 - \bar{\Theta}_1 \sin \beta_1 + \varphi_2, \\ \bar{\Theta}_2 &= \bar{\varphi}_1 \sin \beta_1 + \bar{\Theta}_1 \cos \beta_1 + \bar{\Theta}_2, \\ \bar{\varphi}_1 &= \varphi_1, \quad \bar{\Theta}_1 = \Theta_1; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_3' &= \bar{\varphi}_2 \cos \beta_2 - \bar{\Theta}_2 \sin \beta_2, \\
 \Theta_3' &= \bar{\varphi}_2 \sin \beta_2 + \bar{\Theta}_2 \cos \beta_2, \\
 \varphi_2' &= \bar{\varphi}_1 \cos \beta_1 - \bar{\Theta}_1 \sin \beta_1, \\
 \Theta_2' &= \bar{\varphi}_1 \sin \beta_1 + \bar{\Theta}_1 \cos \beta_1, \\
 \varphi_1' &= 0, \quad \Theta_1' = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Na podstawie rys. 18 wyznaczamy momenty M i \mathfrak{M}^0 :

$$\left. \begin{aligned}
 M_1 &= P(1,1 l \cos 10^\circ + 1,2 l \cos 25^\circ), \\
 \mathfrak{M}_1^0 &= P(1,1 l \sin 10^\circ + 1,2 l \sin 25^\circ), \\
 M_2 &= P \cdot 1,2 l \cos 15^\circ, \\
 \mathfrak{M}_2^0 &= P \cdot 1,2 l \sin 15^\circ.
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

W tych warunkach i przy $GJ_0 = EJ$ wzory (10), (11) i (12) doprowadzają do wyrażen

$$\left. \begin{aligned}
 z_1 &= \frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{P(1,1 l \cos 10^\circ + 1,2 l \cos 25^\circ)l^2}{2EJ} = \frac{1,41876 Pl^3}{EJ}, \\
 z_2 &= \frac{P(1,1 l)^3}{3EJ} + \frac{P \cdot 1,2 l \cos 15^\circ \cdot (1,1 l)^2}{2EJ} = \frac{1,14493 Pl^3}{EJ}, \\
 z_3 &= \frac{P(1,2 l)^3}{3EJ} = \frac{0,57600 Pl^3}{EJ}, \\
 \varphi_1 &= \frac{Pl^2}{2EJ} + \frac{P(1,1 l \cos 10^\circ + 1,2 l \cos 25^\circ)l}{EJ} = \frac{2,67086 Pl^2}{EJ}, \\
 \varphi_2 &= \frac{P(1,1 l)^2}{2EJ} + \frac{P \cdot 1,2 l \cos 15^\circ \cdot 1,1 l}{EJ} = \frac{1,88003 Pl^2}{EJ}, \\
 \varphi_3 &= \frac{P(1,2 l)^2}{2EJ} = \frac{0,72000 Pl^2}{EJ}, \\
 \Theta_1 &= \frac{P(1,1 l \sin 10^\circ + 1,2 l \sin 25^\circ)l}{EJ} = \frac{0,69816 Pl^2}{EJ}, \\
 \Theta_2 &= \frac{P \cdot 1,2 l \sin 15^\circ \cdot 1,1 l}{EJ} = \frac{0,34164 Pl^2}{EJ}, \\
 \Theta_3 &= 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

a wobec tego wyrażenia (26) i (27) dają

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_2 &= \frac{4,63156 Pl^2}{EJ}, & \varphi'_2 &= \frac{2,7515 Pl^2}{EJ}, & \bar{\Theta}_2 &= -\frac{0,5654 Pl^2}{EJ}, \\ \bar{\varphi}_3 &= \frac{5,34020 Pl^2}{EJ}, & \varphi'_3 &= \frac{4,62010 Pl^2}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Obliczając obie części wzoru (13) odpowiednio mamy

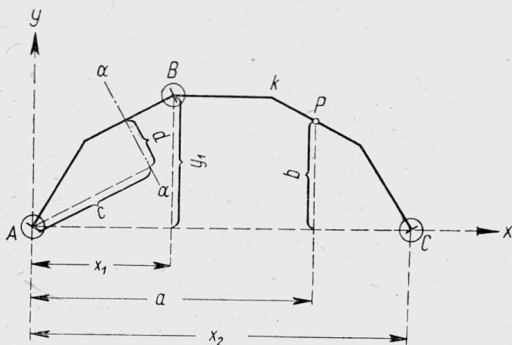
$$\begin{aligned} \sum_1^3 z_j &= \frac{Pl^3}{EJ} (1,41876 + 1,14493 + 0,57600) = \frac{3,13970 Pl^3}{EJ}, \\ \sum_1^3 \varphi'_j l_j &= \frac{Pl^2}{EJ} (2,75153 \cdot 1,1 l + 4,62010 \cdot 1,2 l) = \frac{8,57080 Pl^3}{EJ}, \end{aligned}$$

skąd znajdujemy poszukiwane pionowe przesunięcie punktu 3:

$$w_3 = \frac{11,71050 Pl^3}{EJ}. \quad (31)$$

3. Dźwigary na trzech podporach

Dźwigar załamany w planie i swobodnie podparty w trzech punktach przedstawiony jest na rys. 19. Podpory A, B i C leżą w płaszczyźnie dźwigara i są podporami przegubowo-przesuwnymi, co nie naraża dźwigara na ruch przy siłach obciążających, skierowanych prostopadłe do płaszczyzny ABC. Przyjmujemy, że podpory mogą dawać reakcje posiadające dwa różne zwroty.



Rys. 19

Przedstawiony w ten sposób dźwigar załamany w planie na trzech podporach jest układem statycznie wyznaczalnym, gdyż dla wyznaczenia trzech reakcji podporowych R_A , R_B i R_C możemy tu ustawić trzy równania. Będą to trzy równania spośród sześciu równań równowagi ciała stałego w przestrzeni:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, & \sum M_x &= 0, \\ \sum Y &= 0, & \sum M_y &= 0, \\ \sum Z &= 0, & \sum M_z &= 0, \end{aligned}$$

a mianowicie równania

$$\sum Z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad (32)$$

które przybierają w tym wypadku odpowiednio postać

$$R_A + R_B + R_C - P = 0, \quad (33)$$

$$R_B y_1 - P b = 0, \quad (34)$$

$$R_B x_1 + R_C x_2 - P a = 0. \quad (35)$$

Znając wszystkie 3 reakcje dźwigara w trzech punktach swobodnie podpartego wyznaczamy poszczególne momenty węzłowe M_i i \mathfrak{M}_i^0 oraz międzywęzłowe M_α i \mathfrak{M}_α^0 według wzorów (2) i (3) lub (6) i (7) paragrafu 1 tego rozdziału. Znajdujemy w ten sposób, np. dla przekroju aa na rys. 19 i dla podanych na tym rysunku oznaczeń, że

$$M_\alpha = R_A c, \quad (36)$$

$$\mathfrak{M}_\alpha^0 = R_A d. \quad (37)$$

Przy wyznaczeniu odkształceń dźwigara w trzech punktach swobodnie podpartego opieramy się na omówionym wyżej schemacie dźwigara-wspornika załamanego w planie. Przypuśćmy, że chodzi o wyznaczenie pionowego przesunięcia punktu k dźwigara przedstawionego na rys. 19.

Plan postępowania w tym wypadku jest następujący.

Ponieważ reakcje R_B i R_C mogą być wyznaczone ze wzorów (33) - (35), przyjmujemy je tu za znane. Zastępujemy dalej w punkcie A podpore przegubowo-przesuwną przez całkowite utwierdzenie dźwigara w tym punkcie.

Dochodzimy w ten sposób do schematu dźwigara-wspornika obciążonego siłą P i siłami R_B i R_C . Na podstawie równań podanych w paragrafie 2 tego rozdziału wyznaczamy pionowe przesunięcia punktu k oraz przesunięcia punktów B i C . Znając te ostatnie możemy łatwo wyznaczyć kąt, o który należy obrócić dźwigar względem osi AY , oraz kąt, o który należy obrócić go względem osi AX , aby przekrój A wrócił do swego pierwotnego położenia. W związku z tym należy do pionowego przesunięcia punktu k jako punktu wspornika dodać przesunięcia tego punktu spowodowane obrotami dźwigara względem osi AY i AX , co doprowadza w rezultacie do prawdziwej wartości poszukiwanego przesunięcia.

III. ZASTOSOWANIE RÓŻNIC SKOŃCZONYCH DO OBLICZENIA DŹWIGARÓW ZAŁAMANYCH W PLANIE

1. Dźwigary o stałym kącie załamania

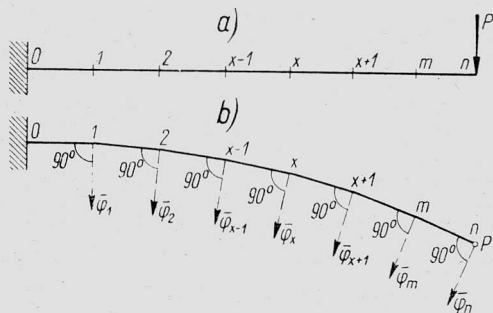
W przypadku gdy liczba przedziałów dźwigara załamane w planie jest duża, stosowanie wzorów rekurencyjnych rozdziału II do ich obliczenia nasunąć może trudności rachunkowe. Narzuca się w związku z tym myśl, aby tam, gdzie to się da zrobić, ująć zagadnienie dźwigarów załamanych w planie, które jest niewątpliwie nieciągłym zadaniem mechaniki budowli, w sposób ciągły i doprowadzić do wzorów zamkniętych. Tendencja tego rodzaju przeciwstawia się jakby tendencji odwrotnej, znacznie częściej ujawniającej się w mechanice budowli, a polegającej na dążeniu do przedstawiania zagadnień ciągłych jako nieciągłe. W obydwóch wymienionych przypadkach uciekamy się do teorii różnic skończonych.

Z formalnego punktu widzenia równania różnicowe teorii dźwigarów załamanych w planie należą do tzw. równań różnicowych jednoczesnych, którym nadać możemy postać następującą:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, z_x, \Delta z_x, \Delta^2 z_x, \dots) &= 0, \\ F_2(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, z_x, \Delta z_x, \Delta^2 z_x, \dots) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

gdzie y_x i z_x oznaczają funkcje tej samej zmiennej niezależnej x , a $\Delta y_x, \Delta z_x, \Delta^2 y_x, \Delta^2 z_x, \dots$ różnice pierwszego i drugiego rzędu tych funkcji.

Rozpatrzmy tu przede wszystkim przypadek dźwigara-wspornika załamane w planie o równych przedziałach i o równych kątach załamania β (rys. 20a i 20b) i wyznaczmy ugięcia tego rodzaju dźwigara.



Rys. 20

Przyjmujemy, że obciążenie stanowi jedna siła zaczepiona w końcu dźwigara. Ze względu na cel przedstawienia ugięć rozpatrywanego dźwigara w postaci zamkniętej, i w związku z tym ze względu na konieczność całkowania

równania różnicowego, właściwiej jest zastąpić w obliczeniach litery j przez symbol x . Stąd oznaczenia na rys. 20. W związku z tymi oznaczeniami wzory rekurencyjne (24), (25) i (18) rozdziału poprzedniego przybierają postać

$$\bar{\varphi}_x = \bar{\varphi}_{x-1} \cos \beta_{x-1} - \bar{\Theta}_{x-1} \sin \beta_{x-1} + \varphi_x, \quad (39)$$

$$\bar{\Theta}_x = \bar{\varphi}_{x-1} \sin \beta_{x-1} + \bar{\Theta}_{x-1} \cos \beta_{x-1} + \Theta_x, \quad (40)$$

$$\varphi'_x = \bar{\varphi}_{x-1} \cos \beta_{x-1} - \bar{\Theta}_{x-1} \sin \beta_{x-1}, \quad (41)$$

gdzie x ma to samo znaczenie co poprzednio j .

Wzór (13) na pionowe przesunięcia poszczególnych węzłów wspornika przybiera wobec tego postać

$$w_m = \sum_1^m z_x + \sum_1^m \varphi'_x l_x. \quad (42)$$

Przy stałych kątach załamania należy we wzorach (39) - (42) przyjmować $\beta_x = \beta = \text{const}$. Poza tym $l_x = l = \text{const}$.

Zgodnie z przytoczonym wyżej określeniem równań różnicowych jednoczesnych należy równania (39) i (40) po rozwinięciu wchodzących do nich różnic uważać za takie właśnie równania. W tym wypadku kąty $\bar{\varphi}_x$ i $\bar{\Theta}_x$ należy uważać za funkcje tej samej zmiennej niezależnej x , a $\sin \beta$ i $\cos \beta$ za niezmiennie współczynniki układu równań.

Mając na widoku rozwiązanie równań jednoczesnych (39) i (40) zmierzamy do zastąpienia ich przez jedno równanie różnicowe wyższego rzędu.

W tym celu wyznaczamy przede wszystkim z równania (39) kąt $\bar{\varphi}_{x+1}$:

$$\bar{\varphi}_{x+1} = \bar{\varphi}_x \cos \beta - \bar{\Theta}_x \sin \beta + \varphi_{x+1}. \quad (43)$$

Wstawiamy tu w dalszym ciągu zamiast $\bar{\Theta}_x$ wyrażenie (40)

$$\bar{\varphi}_{x+1} = \bar{\varphi}_x \cos \beta - \bar{\varphi}_{x-1} \sin^2 \beta - \bar{\Theta}_{x-1} \cos \beta \sin \beta - \Theta_x \sin \beta + \varphi_{x+1}. \quad (44)$$

Z drugiej strony rozwiązujemy równanie (39) względem $\bar{\Theta}_{x-1}$:

$$\bar{\Theta}_{x-1} \sin \beta = -\bar{\varphi}_x + \varphi_{x-1} \cos \beta + \varphi_x \quad (45)$$

i wstawiamy otrzymane wyrażenie w równanie (44)

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{x+1} = \bar{\varphi}_x \cos \beta - \bar{\varphi}_{x-1} \sin^2 \beta + \bar{\varphi}_x \cos \beta - \bar{\varphi}_{x-1} \cos^2 \beta - \\ - \varphi_x \cos \beta - \Theta_x \sin \beta + \varphi_{x+1}. \end{aligned} \quad (46)$$

W ten sposób dochodzimy do następującego równania różnicowego z jedną niewiadomą funkcją $\bar{\varphi}_x$:

$$\bar{\varphi}_{x+1} - 2 \bar{\varphi}_x \cos \beta + \bar{\varphi}_{x-1} = Q_x, \quad (47)$$

gdzie Q_x oznacza sumę następującą:

$$Q_x = \varphi_{x+1} - \varphi_x \cos \beta - \Theta_x \sin \beta. \quad (48)$$

Równanie (47) jest równaniem różnicowym drugiego rzędu, gdyż w tym wypadku $(x+1) - (x-1) = 2$, podczas gdy równania (39) i (40) były równaniami pierwszego rzędu, ponieważ $x - (x-1) = 1$. Równanie to jest równaniem różnicowym o współczynnikach stałych.

Po wyznaczeniu funkcji φ_x z równania (47) możemy obliczyć Θ_x z równania (40).

Obliczenie wartości Q_x według wzoru (48) wymaga przedstawienia kątów φ_x i Θ_x jako funkcji x . Korzystamy tu ze wzorów (11) i (12), które przybierają w danym razie postać:

$$\varphi_x = \frac{Pl^2}{2EJ} + \frac{M_x l}{EJ}, \quad (49)$$

$$\Theta_x = \frac{\mathfrak{M}_x^0 l}{GJ_0}. \quad (50)$$

Momenty M_x i \mathfrak{M}_x^0 obliczamy na podstawie wzorów (2) i (3):

$$M_x = Pa_x, \quad (51)$$

$$\mathfrak{M}_x^0 = -Pb_x. \quad (52)$$

Wzoram (49) i (50) nadajemy postać

$$\varphi_x = fl + 2fa_x, \quad (53)$$

$$\Theta_x = -2eb_x, \quad (54)$$

gdzie

$$\frac{Pl}{EJ} = 2f \quad \text{i} \quad \frac{Pl}{GJ_0} = 2e. \quad (55)$$

Ramiona momentów M_x i \mathfrak{M}_x^0 obliczamy na podstawie rys. 21; znajdujemy mianowicie

$$a_x = l [\cos \beta + \cos 2\beta + \dots + \cos (n-x)\beta] = \quad (56)$$

$$= \frac{l \cos \frac{n-x}{2} \beta \sin \frac{n-x+1}{2} \beta}{\sin \frac{\beta}{2}} - l,$$

$$b_x = l [\sin \beta + \sin 2\beta + \dots + \sin (n-x)\beta] = \quad (57)$$

$$= \frac{l \sin \frac{n-x}{2} \beta \sin \frac{n-x+1}{2} \beta}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Wprowadzając kąty φ_x i θ_x we wzór (48) nadajemy mu postać następującą:

$$Q_x = C_1 \cos x\beta + C_2 \sin x\beta + C_3, \quad (58)$$

gdzie współczynniki C_1 , C_2 i C_3 równają się odpowiednio

$$C_1 = \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \left(fl \sin \frac{2n-1}{2} \beta - fl \cos \beta \sin \frac{2n+1}{2} \beta - e l \sin \beta \cos \frac{2n+1}{2} \beta \right), \quad (59)$$

$$C_2 = \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \left(-fl \cos \frac{2n-1}{2} \beta + fl \cos \beta \cos \frac{2n+1}{2} \beta - e l \sin \beta \sin \frac{2n+1}{2} \beta \right), \quad (60)$$

$$C_3 = 2 e l \cos^2 \frac{\beta}{2}. \quad (61)$$

Dla uproszczenia przeróbek algebraicznych dalsze obliczenia będziemy przeprowadzali w założeniu, że $e = f$, co odpowiada przekrojom poprzecznym o kształcie owalu wydłużonego w kierunku osi pionowej. W tym wypadku współczynniki C_1 , C_2 i C_3 przybierają postać następującą:

$$C_1 = - \frac{2 fl \sin \beta \cos \frac{2n+1}{2} \beta}{\sin \frac{\beta}{2}}, \quad (62)$$

$$C_2 = - \frac{2 fl \sin \beta \sin \frac{2n+1}{2} \beta}{\sin \frac{\beta}{2}}, \quad (63)$$

$$C_3 = 2 fl \cos^2 \frac{\beta}{2}. \quad (64)$$

Wyprowadzone równanie różnicowe kątów $\bar{\varphi}_x$:

$$\bar{\varphi}_{x+1} - 2 \bar{\varphi}_x \cos \beta + \bar{\varphi}_{x-1} = C_1 \cos x\beta + C_2 \sin x\beta + C_3 \quad (65)$$

posiada rozwiązanie, które może być przedstawione jako suma

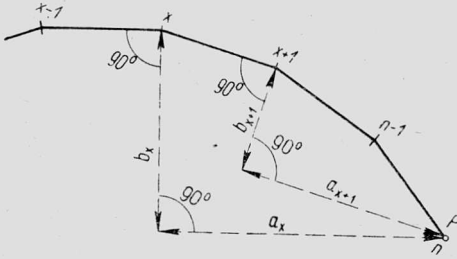
$$\bar{\varphi}_x = \psi_x^0 + \psi_x, \quad (66)$$

gdzie ψ_x^0 oznacza pewne dowolne rozwiązanie szczególne tego równania, ψ_x zaś rozwiązanie odpowiedniego równania bez ostatniego wyrazu Q_x , czyli równania

$$\bar{\varphi}_{x+1} - 2\bar{\varphi}_x \cos \beta + \bar{\varphi}_{x-1} = 0. \quad (67)$$

Wobec otrzymanej wyżej postaci wzoru na Q_x rozwiązanie szczególne równania (65) mogłoby mieć postać trójmianu

$$\psi_x^0 = D_1 \sin x\beta + D_2 \cos x\beta + D_3, \quad (68)$$



Rys. 21

gdyby nie okoliczność, że równanie to jest równaniem symetrycznym. Stosujemy więc inną, następującą postać rozwiązania szczególnego:

$$\psi_x^0 = D_1 x \sin x\beta + D_2 x \cos x\beta + D_3. \quad (69)$$

Wstawiając to rozwiązanie w równanie (65) otrzymujemy, że

$$\left. \begin{aligned} \psi_{x+1}^0 &= D_1 (x+1) \sin (x+1)\beta + D_2 (x+1) \cos (x+1)\beta + D_3, \\ 2\psi_x^0 \cos \beta &= 2D_1 x \cos \beta \sin x\beta + 2D_2 x \cos \beta \cos x\beta + 2D_3 \cos \beta, \\ \psi_{x-1}^0 &= D_1 (x-1) \sin (x-1)\beta + D_2 (x-1) \cos (x-1)\beta + D_3. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

W związku z tym dochodzimy do równości

$$\begin{aligned} 2D_1 \sin \beta \cos x\beta - 2D_2 \sin \beta \sin x\beta + 4D_3 \sin \frac{\beta}{2} &= \\ &= C_1 \sin x\beta + C_2 \cos x\beta + C_3. \end{aligned} \quad (71)$$

Obie strony wyrażenia (71) będą sobie tożsamościowo równe, jeżeli będzie

$$D_1 = \frac{C_1}{2 \sin \beta}, \quad D_2 = -\frac{C_2}{2 \sin \beta}, \quad D_3 = \frac{C_3}{4 \sin^2 \frac{\beta}{2}}. \quad (72)$$

W związku z tym, w przypadku gdy $e = f$, mamy

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{fl \cos \frac{2n+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}}, \\ D_2 &= \frac{fl \sin \frac{2n+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}}, \\ D_3 &= \frac{fl}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}. \end{aligned} \quad (73)$$

Aby otrzymać rozwiązanie równania (67), tzn. równania różnicowego kątów $\bar{\varphi}_x$ bez wyrazu swobodnego, rozwiązujemy przede wszystkim równanie charakterystyczne

$$\xi^2 - 2\xi \cos \beta + 1 = 0. \quad (74)$$

Równanie to należy do typu równań

$$y^2 - py + q = 0 \quad (75)$$

i w danym wypadku ma pierwiastki zespolone typu

$$y = \sqrt{q} (\cos \vartheta \pm i \sin \vartheta), \quad (76)$$

gdzie $q = 1$, a

$$\cos \vartheta = -\frac{p}{2\sqrt{q}} = -\frac{2 \cos \beta}{2\sqrt{1}} = -\cos \beta.$$

Jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego (74) typu (76) oznaczymy odpowiednio przez ξ_1 i ξ_2 , wówczas rozwiązanie ogólne równania różnicowego bez wyrazu swobodnego przybierze postać

$$\psi_x = K_1 \xi_1^x + K_2 \xi_2^x \quad (77)$$

lub postać

$$\psi_x = B_1 \sin x\beta + B_2 \cos x\beta. \quad (78)$$

Wstawiając wyrażenia (68) i (78) we wzór (66) otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie równania (65). Wypisujemy je tutaj dla przypadku, gdy $e = f$:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_x = B_1 \sin x\beta + B_2 \cos x\beta - \frac{fl \cos \frac{2n+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} x \sin x\beta + \\ + \frac{fl \sin \frac{2n+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} x \cos x\beta + \frac{fl}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}. \end{aligned} \quad (79)$$

Aby wyznaczyć stałe B_1 i B_2 , bierzemy pod uwagę, że kąt $\bar{\varphi}_0 = 0$ i że kąt $\bar{\varphi}_1$ wyraża się na podstawie wzorów (49) i (53) w sposób następujący:

$$\bar{\varphi}_1 = -fl + \frac{2 \cos \frac{n-1}{2}\beta \sin \frac{n}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} fl. \quad (80)$$

Zakładając kolejno w równaniu (79) $\bar{\varphi}_x = \bar{\varphi}_0$ i $\bar{\varphi}_x = \bar{\varphi}_1$ znajdujemy z warunków brzegowych zadania

$$B_1 = -\frac{fl}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}, \quad B_2 = -\frac{fl}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}. \quad (81)$$

W związku z tym wzór (79) przybiera następującą postać zamkniętą:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_x = & -\frac{fl}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \sin x\beta - \frac{fl}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} \cos x\beta - \frac{fl \cos \frac{2n+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} x \sin x\beta + \\ & + \frac{fl \sin \frac{2n+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} x \cos x\beta + \frac{fl}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}. \end{aligned} \quad (82)$$

Po znalezieniu funkcji $\bar{\varphi}_x$ funkcję $\bar{\Theta}_x$ obliczyć możemy z równania (40), a funkcję φ'_x z równania (41) lub też ze wzoru

$$\varphi'_x = \bar{\varphi}_x - \varphi_x. \quad (83)$$

Biorąc pod uwagę zależność (83) nadajemy wzorowi (42) na pionowe przesunięcie punktu m dźwigara załamanego postać

$$w_m = \sum_1^m z_x + l \sum_1^m \bar{\varphi}_x - l \sum_1^m \varphi_x. \quad (84)$$

Na wielkość z_x , ugięcia przedziału $x-1, x$, mamy wzór (11), który przybiera w danym razie postać

$$z_x = \frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{M_x l^2}{2EJ}. \quad (85)$$

Mając na uwadze wyrażenie (51) na moment zginający i wyrażenie (56) na ramię tego momentu znajdujemy, że suma $\sum_1^m z_x$ wynosi przy jednej sile P zaczepionej do końca dźwigara i przy $e = f$

$$\sum_1^m z_x = \frac{2}{3} m f l^2 + f l^2 \sum_1^{m-1} \left(\frac{\cos \frac{m-x}{2}\beta \sin \frac{m-x+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} - 1 \right). \quad (86)$$

Obliczenie iloczynu $l \sum_1^m \bar{\varphi}_x$ odbywa się tu w porządku kolejnych wyrazów wzoru (79):

$$l \sum_1^m \bar{\varphi}_x = -\frac{fl^2}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \sum_1^m \sin x \beta - \frac{fl^2}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} \sum_1^m \cos x \beta + \quad (87)$$

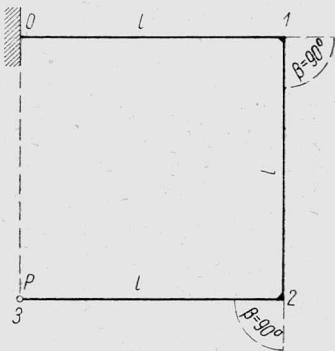
$$+ \frac{fl^2}{\sin \frac{\beta}{2}} \sum_1^m x \sin \left(n \beta + \frac{1}{2} \beta - x \beta \right) + \frac{m fl^2}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Sumę $\sum \varphi_x$ obliczamy na podstawie wzoru (53)

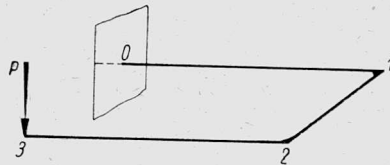
$$l \sum_1^m \varphi_x = m fl^2 + 2 fl^2 \sum_1^{m-1} \left(\frac{\cos \frac{m-x}{2} \beta \sin \frac{m-x+1}{2} \beta}{\sin \frac{\beta}{2}} - 1 \right). \quad (88)$$

Przy niewielkiej liczbie przedziałów dźwigara załamane w planie najprościej jest ze wzorów (86), (87) i (88) korzystać bezpośrednio, przy większej zaś liczbie przedziałów należy wstawić w nie wyrażenia na poszczególne sumy.

Wzory (84) - (88) zastosujemy dalej do dźwigara przedstawionego na rys. 22 i 23 (perspektywa). W tym wypadku $n=m=3$, a $\beta=90^\circ$.



Rys. 22



Rys. 23

Wzory (86) - (88) dają tu przy $e = f$ wyniki następujące:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^3 z_x &= \frac{2}{3} m fl^2 + fl^2 (-1 + 1 - 1) = fl^2, \\ l \sum_1^3 \bar{\varphi}_x &= -fl^2 (1 + 0 - 1) - \frac{fl^2}{2} (0 - 1 - 0) + \\ &+ fl^2 \left(\frac{-1 \sin 45^\circ + 2 \sin 45^\circ + 3 \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ} \right) + \frac{3}{2} fl^2, \\ l \sum_1^3 \varphi_x &= 3 fl^2 + 2 fl^2 (-1 + 1 - 1) = fl^2. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

W rezultacie ze wzoru (84) otrzymujemy

$$w_3 = fl^2 + 6fl^2 - fl^2 = 6fl^2 = \frac{3Pl^3}{EJ}. \quad (90)$$

Zastosowanie równań różnicowych do obliczenia dźwigarów załamanych w planie jest szczególnie wygodne, gdy chodzi o dużą liczbę przemiałów, np. w przypadku gdy zastępujemy w obliczeniach dźwigar zakrzywiony w planie przez dźwigar załamany.

2. Dźwigary o zmiennym kącie załamania

W przypadku dźwigarów o zmiennym kącie załamania sinusy i cosinusy kątów β wchodzące do równań (39) i (40) są funkcjami x , czyli równania te stają się równaniami różnicowymi o zmiennych współczynnikach. Układ równań jest w dalszym ciągu układem równań pierwszego rzędu, ponieważ największa różnica wskaźników przy każdej z niewiadomych funkcji wynosi 1.

Zarówno kąty φ_x i Θ_x , jak również $\sin \beta_{x-1}$ i $\cos \beta_{x-1}$ są znanymi funkcjami x , podczas gdy kształt funkcji $\bar{\varphi}_x$ i $\bar{\Theta}_x$ jest dopiero poszukiwany. Podobnie jak w przypadku dźwigarów o stałym kącie załamania rugujemy z układu równań (39) i (40) niewiadomą $\bar{\Theta}_x$ i dochodzimy do równania różnicowego z jedną tylko niewiadomą $\bar{\varphi}_x$, które będzie równaniem drugiego rzędu. Przytaczamy tu więc ponownie równania (39) i (40):

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_x &= \bar{\varphi}_{x-1} \cos \beta_{x-1} - \bar{\Theta}_{x-1} \sin \beta_{x-1} + \varphi_x, \\ \bar{\Theta}_x &= \bar{\varphi}_{x-1} \sin \beta_{x-1} + \bar{\Theta}_{x-1} \cos \beta_{x-1} + \Theta_x. \end{aligned}$$

Obliczamy przede wszystkim, podobnie jak w paragrafie 1 tego rozdziału, z równania (39) funkcję $\bar{\varphi}_{x+1}$:

$$\bar{\varphi}_{x+1} = \bar{\varphi}_x \cos \beta_x - \bar{\Theta}_x \sin \beta_x + \varphi_{x+1}. \quad (91)$$

Funkcję $\bar{\Theta}_x$ zastępujemy przez wyrażenie (40)

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{x+1} &= \bar{\varphi}_x \cos \beta_x - \bar{\varphi}_{x-1} \sin \beta_{x-1} \sin \beta_x - \\ &\quad - \bar{\Theta}_{x-1} \cos \beta_{x-1} \sin \beta_x - \bar{\Theta}_x \sin \beta_x + \varphi_{x+1}. \end{aligned} \quad (92)$$

Zamiast funkcji $\bar{\Theta}_{x-1}$ wstawiamy tu wyrażenie otrzymane dla niej z równania (39)

$$\bar{\Theta}_{x-1} \sin \beta_{x-1} = -\bar{\varphi}_x + \bar{\varphi}_{x-1} \cos \beta_{x-1} + \varphi_x, \quad (93)$$

$$\bar{\Theta}_{x-1} = \frac{1}{\sin \beta_{x-1}} (-\bar{\varphi}_x + \bar{\varphi}_{x-1} \cos \beta_{x-1} + \varphi_x). \quad (94)$$

W ten sposób znajdujemy

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{x+1} = & \bar{\varphi}_x \cos \beta_x - \bar{\varphi}_{x-1} \sin \beta_{x-1} \sin \beta_x + \bar{\varphi}_x \operatorname{ctg} \beta_{x-1} \sin \beta_x - \\ & - \bar{\varphi}_{x-1} \operatorname{ctg} \beta_{x-1} \cos \beta_{x-1} \sin \beta_x - \varphi_x \operatorname{ctg} \beta_{x-1} \sin \beta_x - \Theta_x \sin \beta_x + \varphi_{x+1}. \end{aligned} \quad (95)$$

Równaniu temu możemy nadać postać

$$A\bar{\varphi}_{x+1} + B\bar{\varphi}_x + C\bar{\varphi}_{x-1} = Q_x, \quad (96)$$

gdzie

$$A = 1, \quad B = -\frac{\sin(\beta_x + \beta_{x-1})}{\sin \beta_{x-1}}, \quad C = \frac{\sin \beta_x}{\sin \beta_{x-1}}, \quad (97)$$

$$Q_x = \frac{\varphi_{x+1} \sin \beta_{x-1} - \varphi_x \sin \beta_x \cos \beta_{x-1} - \Theta_x \sin \beta_x \sin \beta_{x-1}}{\sin \beta_{x-1}}.$$

Po odrzuceniu wspólnego mianownika $\sin \beta_{x-1}$ doprowadzamy równanie (96) do następującej postaci:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{x+1} \sin \beta_{x-1} - \bar{\varphi}_x \sin(\beta_x + \beta_{x-1}) + \bar{\varphi}_{x-1} \sin \beta_x = \\ = \varphi_{x+1} \sin \beta_{x-1} - \varphi_x \sin \beta_x \cos \beta_{x-1} - \Theta_x \sin \beta_x \sin \beta_{x-1}. \end{aligned} \quad (98)$$

Aby umożliwić rozwiązanie tego równania, musimy tu wstawić na miejsce współczynników przy niewiadomych wyrażenia przedstawiające te współczynniki jako pewne funkcje x . Należy przy tym zauważyć, że o ile kształt dźwigara załamanego w planie nie jest jeszcze w projekcie budowli szczegółowo ustalony, możemy przy jego projektowaniu kształt ten tak dobrać, aby kąty β_x odpowiadały regule pozwalającej nadać równaniu (98) postać możliwie łatwą do rozwiązania.

Rozpatrzmy tu przypadek, kiedy kąty załamania są nieduże i kiedy czynią zadość warunkowi

$$\frac{\sin \beta_x}{\sin \beta_{x-1}} = q. \quad (99)$$

Równanie (99) wyraża, że sinusy kątów załamania zmieniają się według postępu geometrycznego; stąd wynika, że

$$\sin \beta_x = q^x \sin \beta_0, \quad (100)$$

gdzie β_0 oznacza pewien kąt wyjściowy.

Oznaczając przez Q'_x drugą stronę równania (98), której poszczególne wyrazy są znanymi funkcjami x , nadajemy temu równaniu postać

$$\bar{\varphi}_{x-1} \sin \beta_{x-1} - \bar{\varphi}_x \sin(\beta_x + \beta_{x-1}) + \bar{\varphi}_{x-1} \sin \beta_x = Q'_x. \quad (101)$$

Przekształcenie równania (101) rozpoczynamy od rozwinięcia wchodzącego tu $\sin(\beta_x + \beta_{x-1})$. Ponieważ zastrzeżliśmy się, iż kąty β_x są małe, przyjmujemy, iż $\cos \beta_x = \cos \beta_{x-1} = 1$, a więc

$$\sin(\beta_x + \beta_{x-1}) = \sin \beta_x + \sin \beta_{x-1}. \quad (102)$$

Błąd, który popełniamy zakładając, że $\cos \beta_x = 1$, wynosi przy 10 bokach dźwigara na ćwierci zamkniętego obwodu około $1\frac{1}{2}\%$.

Wprowadzając do równania (101) wyrażenie (100) dochodzimy do równania

$$\bar{\varphi}_{x+1} q^{x-1} \sin \beta_0 - \bar{\varphi}_x (q^x + q^{x-1}) \sin \beta_0 + \bar{\varphi}_{x-1} q^x \sin \beta_0 = Q'_x \quad (103)$$

lub do równania

$$\bar{\varphi}_{x+1} q^x - \bar{\varphi}_x q^x (q+1) + \bar{\varphi}_{x-1} q^{x+1} = \frac{Q'_x q}{\sin \beta_0}. \quad (104)$$

Wykonujemy dalej następujące podstawienia:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_x &= y_x q^{\frac{x}{2}}, & \bar{\varphi}_x q^x &= y_x q^{\frac{3x}{2}}, \\ \bar{\varphi}_{x+1} &= y_{x+1} q^{\frac{x+1}{2}}, & \bar{\varphi}_{x+1} q^x &= y_{x+1} q^{\frac{3x+1}{2}}, \\ \bar{\varphi}_{x-1} &= y_{x-1} q^{\frac{x-1}{2}}, & \bar{\varphi}_{x-1} q^{x-1} &= y_{x-1} q^{\frac{3x-1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Podstawienia te nadają równaniu (104) postać

$$y_{x+1} - y_x \frac{q+1}{\sqrt{q}} + y_{x-1} = \frac{Q'_x q^{\frac{1-3x}{2}}}{\sin \beta_0} \quad (106)$$

W ten sposób zastępujemy równanie drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach przez równanie różnicowe drugiego rzędu o współczynnikach stałych, którego lewa strona jest w dodatku symetryczna. Poważną trudność w rozwiązywaniu tego równania stanowi złożona postać jego prawej strony, wobec czego znalezienie jakiegokolwiek szczególnego rozwiązania tego równania natrafia na trudności, dla których przezwyciężenia należy uciekać się do przybliżeń dosyć daleko posuniętych.

Inną drogę w tym kierunku wskażemy nadając nową postać równaniu (98). Mając, mianowicie, na widoku równość (102) oraz założenie, że $\cos \beta = 1$, znajdujemy

$$\begin{aligned} (\bar{\varphi}_{x+1} - \bar{\varphi}_x - \varphi_{x+1}) \sin \beta_{x-1} - (\bar{\varphi}_x - \bar{\varphi}_{x-1} - \varphi_x) \sin \beta_x &= \\ &= -\Theta_x \sin \beta_x \sin \beta_{x-1}, \end{aligned} \quad (107)$$

co po przyjęciu

$$\eta_x = \bar{\varphi}_x - \bar{\varphi}_{x-1} - \varphi_x \quad (108)$$

doprowadza do równania pierwszego rzędu względem η_x :

$$\eta_{x+1} \sin \beta_{x-1} - \eta_x \sin \beta_x = -\Theta_x \sin \beta_x \sin \beta_{x-1}, \quad (109)$$

czyli do równania

$$\eta_{x+1} - \frac{\sin \beta_x}{\sin \beta_{x-1}} \eta_x = -\Theta_x \sin \beta_x \quad (110)$$

lub równania

$$\eta_{x+1} - q \eta_x = -\Theta_x q^x \sin \beta_0. \quad (111)$$

Kąt skręcenia Θ_x wchodzący do prawej strony równania (111) jest proporcjonalny do momentu skręcającego, a ramię momentu skręcającego w przypadku jednego ciężaru zaczepionego na końcu dźwigara wyraża się wzorem (por. rys. 21)

$$b_x = l [\sin \beta_x + \sin (\beta_x + \beta_{x+1}) + \dots + \sin (\beta_x + \beta_{x-1} + \dots + \beta_{n-1})]. \quad (112)$$

Sumowanie szeregu (112) nasuwa trudności, które rosną wraz z liczbą sił obciążających dźwigar. Z tego powodu zastępujemy ten szereg przez pewną krzywą interpolacyjną typu

$$b_x = \sum_0^n A_k x^k, \quad (113)$$

wobec czego możemy nadać równaniu (111) przy trzech współczynnikach A_k we wzorze (113) — współczynnikach a , b i c — postać

$$\eta_{x+1} - q_x \eta_x = \mu (a x^2 + b x + c) q^x, \quad (114)$$

gdzie

$$\mu = 2 e \sin \beta_0.$$

Nie nasuwające żadnych trudności rozwiązanie równania (114) będzie miało postać

$$\eta_x = (A x^3 + B x^2 + C x) q^x + D q^x, \quad (115)$$

wobec czego wyrażenie (108) da nam następujące równanie różnicowe pierwszego rzędu:

$$\bar{\varphi}_x - \bar{\varphi}_{x-1} = \varphi_x + (A x^3 + B x^2 + C x) q^x + D q^x, \quad (116)$$

gdzie, jak wynika z rozumowań poprzednich, współczynniki A , B , C i D są wielkościami znanymi. Wchodząca tu wielkość φ_x zależy od momentu zginającego M_x , który jest proporcjonalny do ramienia a_x wyrażającego się szeregiem

$$a_x = l [\cos \beta_x + \cos (\beta_x + \beta_{x+1}) + \dots + \cos (\beta_x + \beta_{x-1} + \dots + \beta_{n-1})]. \quad (117)$$

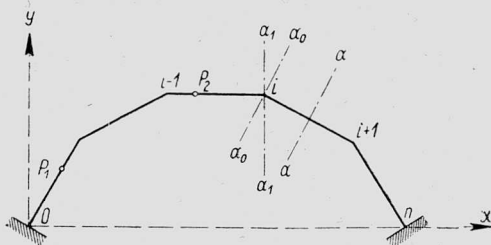
Musimy więc tu zastąpić wyrażenie a_x , podobnie jak to było wyżej z wyrażeniem na b_x , przez pewną krzywą interpolacyjną typu parabolicznego, po czym już bez trudności dochodzimy po rozwiązaniu równania (116) do poszukiwanego wyrażenia na $\overline{\varphi_x^1}$.

Operacja przedstawiona na wzorach od (107) do (117) doprowadziła do zastąpienia jednego równania (107) o współczynnikach zmiennych przez dwa równania (111) i (116) o współczynnikach stałych, jednak trudności rachunkowe przy rozwiązywaniu równań różnicowych dźwigara załamane w planie o zmiennym kącie załamania zmuszają nieraz do wyrzeczenia się w tym wypadku metody różnic skończonych i do oparcia się na wzorach rekurencyjnych podanych w rozdziale II.

IV. STATYCZNIE NIETYCZALNE DŹWIGARY ZAŁAMANE W PLANIE

1. Dźwigary balkonowe

Przez dźwigary balkonowe rozumiemy przede wszystkim dźwigary typu przedstawionego w planie na rys. 24, tj. dźwigary załamane o wypukłości zwróconej w jedną stronę i utwierdzone na końcach. Za



Rys. 24

dźwigary balkonowe uważać można również dźwigary załamane w planie podparte w szeregu węzłów, lecz nie we wszystkich, przy czym dźwigary takie mogą być na końcach swobodnie podparte lub utwierdzone (rys. 33), mogą wreszcie tworzyć obwody

zamknięte (rys. 35). Innymi słowami, mówiąc o dźwigarach balkonowych mamy na myśli dźwigary załamane o wypukłości zwróconej w jedną stronę, podparte w dwóch punktach lub w większej liczbie punktów i posiadające części niepodparte.

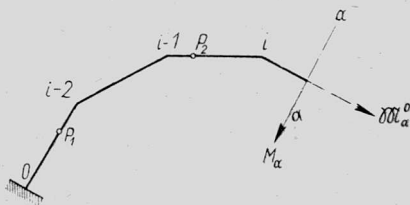
¹⁾ Przykład obliczenia numerycznego znajduje się w pracy autora wymienionej pod p. 4 w przedmowie.

Aby ustalić stopień statycznej niewyznaczalności dźwigara przedstawionego na rys. 24, bierzemy przede wszystkim pod uwagę okoliczność, że spośród 6 równań równowagi w przestrzeni

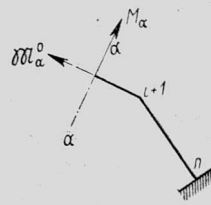
$$\begin{aligned} \sum X &= 0, & \sum M_x &= 0, \\ \sum Y &= 0, & \sum M_y &= 0, \\ \sum Z &= 0, & \sum M_z &= 0, \end{aligned}$$

w przypadku dźwigarów załamanych w planie, obciążonych prostopadle do płaszczyzny dźwigara, pierwsze dwa równania oraz równanie ostatnie są tożsamościami.

Z drugiej strony, sposób podparcia dźwigara balkonowego przedstawionego na rys. 24 daje sześć składowych reakcji dwóch płaskich podpór dźwigara, w postaci dwóch sił (R_A i R_B), dwóch momentów działających w płaszczyznach pionowych, przechodzących przez dwa skrajne przęsła (M_A i M_B) i dwóch momentów działających w płaszczyznach utwierdzenia (\mathcal{M}_A^0 i \mathcal{M}_B^0). Mamy tu więc ostatecznie do obliczenia trzy wielkości statycznie niewyznaczalne.



Rys. 25



Rys. 26

Dla wyznaczenia tych trzech wielkości robimy przekrój aa prostopadły do jednego z przedziałów dźwigara. Wzajemne oddziaływanie na siebie dwóch części dźwigara rozdzielonych przekrojem aa wyrażamy za pomocą siły pionowej T_α oraz dwu momentów, z których wektor jednego \mathcal{M}_α^0 skierowany jest wzdłuż osi podłużnej przedziału $i, i+1$, a wektor drugiego M_α prostopadły do tej osi. Na rysunkach 25 i 26 przedstawione są obie rozdzielone przekrojem aa części dźwigara, przy czym wektory momentów M_α i \mathcal{M}_α^0 mają na każdym z tych rysunków zwrot odmienny. Odmiennie zwroty mają też i siły T_α w zastosowaniu do każdej z dwóch części dźwigara. Wielkości T_α , M_α i \mathcal{M}_α^0 uważamy dalej za wielkości nadliczbowe zadania.

Oznaczamy przez w_l i w_p pionowe przesunięcia końców a lewej i prawej części dźwigara, traktowanych jako dźwigary-wsporniki załamane

w planie, utwierdzone w punktach O i n i swobodne w punktach a , przez φ_l i φ_p odpowiednie kąty nachylenia przekrojów aa względem płaszczyzny pionowej, wreszcie przez Θ_l i Θ_p kąty obrotu tych przekrojów względem osi $i, i+1$ prostopadłej do płaszczyzny aa . Każda z wielkości w , φ i Θ jest funkcją składowych T_a , M_a i \mathfrak{M}_a^0 oddziaływania na siebie dźwigarów Oa i an .

Z powodu jednolitości rozpatrywanego dźwigara muszą mieć miejsce zależności

$$w_l = w_p, \quad (118)$$

$$\varphi_l = -\varphi_p, \quad (119)$$

$$\Theta_l = \Theta_p. \quad (120)$$

Wszystkie wchodzące do powyższych równań wielkości są funkcjami składowych reakcji T_a , M_a i \mathfrak{M}_a^0 , a więc np. $w_l = f_1(T_a, M_a, \mathfrak{M}_a^0)$, $w_p = f_2(T_a, M_a, \mathfrak{M}_a^0)$, $\varphi_l = f_3(T_a, M_a, \mathfrak{M}_a^0)$ itd. W ten sposób z równań (118)-(120) obliczymy wszystkie wielkości statycznie niewyznaczalne zadania T_a , M_a i \mathfrak{M}_a^0 . Sześć funkcji wchodzących do równań (118)-(120) ustalimy, zgodnie ze wskazaniem rozdziału II. 2, jako odkształcenia dźwigarów-wsporników załamanych w planie, znajdujących się, poza przypadającą na nie częścią obciążenia dźwigara balkonowego, jeszcze pod działaniem nieznanymi sił uogólnionych T_a , M_a i \mathfrak{M}_a^0 .

W pewnych przypadkach okazuje się rzeczą celową przeprowadzenie przekroju aa w samym węźle i , a nie między węzłami $i-1$ a i . Wówczas płaszczyzna aa (w danym razie płaszczyzna $a_1 a_1$) będzie prostopadła do osi przedziału $i, i+1$, a z osią przedziału $i-1, i$ tworzyć będzie kąt $90^\circ - \beta_i$ (płaszczyzna $a_0 a_0$). Równania (119) i (120) muszą być w tych warunkach zastąpione przez równania

$$\varphi_l \cos \beta_i - \Theta_l \sin \beta_i = -\varphi_p, \quad (121)$$

$$\varphi_l \sin \beta_i + \Theta_l \cos \beta_i = \Theta_p, \quad (122)$$

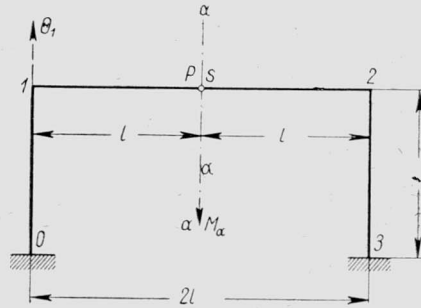
gdzie φ_l i Θ_l rozumiemy jako kąty odpowiadające przekrojowi poprzecznemu $a_1 a_1$, a φ_p i Θ_p jako kąty odpowiadające przekrojowi $a_0 a_0$. Wzory (119) i (120) stanowią w tych warunkach przypadek szczególny wzorów (121) i (122).

Obliczenia szczegółowe przeprowadzamy na przykładzie.

Jako przykład bierzemy dźwigar w kształcie połowy kwadratu (rys 27). Oba końce dźwigara 0 i 3 są utwierdzone, a przekrój poprzeczny jest stały. W środku przedziału 12 zaczepiona jest siła skupiona P .

Z powodu symetrii kształtu i obciążenia dźwigara względem jego środka mamy tu do czynienia z układem jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym, gdyż z warunków symetrii wynika bezpośrednio, że $T_\alpha = 0$ i $\mathcal{M}_\alpha^0 = 0$.

Robimy przekrój aa przez środek dźwigara (punkt s) i dochodzimy w ten sposób ze względów symetrii do dźwigara-wspornika załamane w płanie $01s$, obciążonego w punkcie s siłą pionową równą $P/2$ i nieznanym momentem M_α , który uważamy w danym razie za wielkość nadliczbową. Moment ten wyraża oddziaływanie jednej z rozdzielonych przekrojem aa części dźwigara balkonowego na drugą, tj. oddziaływanie dźwigara $s23$ na dźwigar $01s$.



Rys. 27

Obliczamy kąt $\bar{\varphi}_\alpha$ nachylenia przekroju poprzecznego aa względem płaszczyzny pionowej; w tym celu korzystamy ze wzoru (24) z rozdziału II.2 mając na widoku, że w danym razie kąt $\beta = 90^\circ$.

$$\bar{\varphi}_\alpha = -\bar{\Theta}_p + \varphi_\alpha \quad (123)$$

lub wobec $\bar{\Theta}_1 = \Theta_1$

$$\bar{\varphi}_\alpha = -\Theta_1 + \varphi_\alpha. \quad (124)$$

Kąt Θ_1 jako kąt skręcenia przedziału 01 równa się

$$\Theta_1 = -\frac{P}{2} l \frac{l}{GJ_0} - \frac{M_\alpha l}{GJ_0}, \quad (125)$$

a kąt φ_α jako kąt nachylenia przekroju aa względem płaszczyzny pionowej wyraża się wzorem

$$\varphi_\alpha = \frac{P}{2} l \frac{l}{2EJ} + \frac{M_\alpha l}{EJ}. \quad (126)$$

W tych warunkach równanie (123) przybiera postać

$$\varepsilon M_\alpha l + 0,5 \varepsilon P l^2 + M_\alpha l + 0,25 P l^2 = 0. \quad (127)$$

Przy $\varepsilon = EJ/GJ_0 = 1$ znajdujemy stąd

$$M_\alpha = -0,375 P l. \quad (128)$$

Wzór (13) z rozdziału II.2 doprowadza w tym wypadku do następującej wartości pionowego przesunięcia punktu s dźwigara:

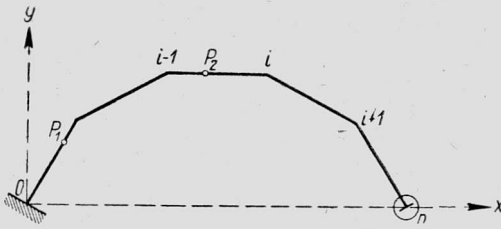
$$w_s = \frac{0,1665 P l^3 - 0,375 P l^3 + 0,5 P l^3}{EJ} = \frac{0,2915 P l^3}{EJ}. \quad (129)$$

Przy obliczeniu dźwigarów balkonowych można by przekrój aa wykonać na jednej z podpór dźwigara, co pozwoliłoby na zastąpienie równań (118) - (120) np. przez równania

$$w_l = 0, \quad \varphi_l = 0, \quad \Theta_l = 0 \quad (130)$$

i uczyniłoby zbędnym obliczenie $w_p, \bar{\varphi}_p$ i Θ_p . Nie byłoby to jednak celowe, gdyż wobec algebraicznej zależności od siebie przesunięć kolejnych węzłów szybciej można obliczyć przesunięcia dwóch dźwigarów-wsporników niż jednego o tej samej liczbie węzłów, co tamte dwa razem.

Wyznaczenie składowych reakcji podpór dźwigara balkonowego przedstawionego na rys. 24 ulega uproszczeniu, o ile jedna z podpór płaskich zostanie zastąpiona przez podporę przegubowo-przesuwną (rys. 28) lub

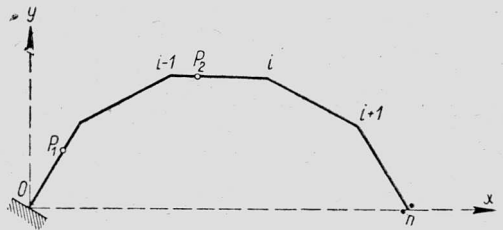


Rys. 28

przez podporę, która pozwala na przesuwanie się końca dźwigara, lecz uniemożliwia obrót przekroju podporowego względem osi ostatniego przedziału $n - 1, n$ dźwigara (rys. 29). Dźwigar balkonowy przedstawiony na rys. 28 jest jednokrotnie, a dźwigar przedstawiony na rys. 29 dwukrotnie statycznie niewyznaczalny.

Do znalezienia składowych reakcji podpór korzystamy w pierwszym przypadku z pierwszego, a w drugim przypadku z pierwszego i trzeciego z równań (130).

W przypadku symetrii kształtu i obciążenia dźwigara balkonowego (rys. 24) liczba składowych reakcji jego podpór spada do trzech, a liczba równań równowagi różnych od tożsamości do dwóch i wobec tego dźwigar staje się jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.



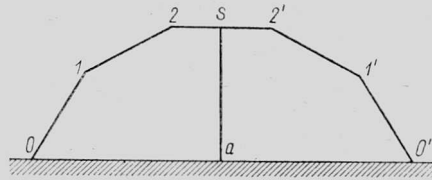
Rys. 29

Rozpatrzmy dalej przypadek, gdy belka balkonowa, symetryczna względem środka i symetrycznie obciążona, jest w pewnym punkcie podparta przez prostą belkę wspornikową (rys. 30). O ile podparcie dźwigara w punkcie s belką as nie ma charakteru połączenia sztywnego, wówczas podparcie dźwigara balkonowego wspornikiem wprowadza do obliczenia dźwigara jedną nową niewiadomą, za jaką

przyjmujemy reakcję R_s dźwigara w punkcie s . Jeżeli jednak mamy w punkcie s sztywne połączenie dźwigara ze wspornikiem, wówczas w miejscu połączenia s występuje moment \mathfrak{M}_s^0 skręcający przedział $22'$ dźwigara balkonowego; moment ten wywołuje zginanie wspornika as w płaszczyźnie as , jako moment zaczepiony do końca s tego wspornika.

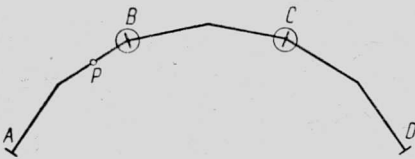
W tym wypadku możemy obrać za wielkości statycznie niewyznaczalne wielkości $\mathfrak{M}_0^0 = \mathfrak{M}_n^0$, R_s oraz \mathfrak{M}_s^0 i możemy wyznaczyć je z równań wyrażających, że kąty obrotów przekrojów 0

i n (kąty $\theta_0 = \theta_n$) są równe zero ($\theta_s = 0$), że kąt obrotu przekroju s przedziału $22'$ jest równy kątowi nachylenia przekroju s wspornika as względem płaszczyzny pionowej (θ_s dźw. = φ_s wsp.) oraz że w punkcie s równe są ugięcia dźwigara i wspornika (w_s dźw. = w_s wsp.).

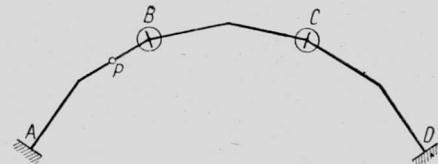


Rys. 30

Podobny do powyższego sposób rozumowania możemy zastosować i do obliczenia dźwigarów balkonowych w rodzaju przedstawionych na rys. 31 i na rys. 32, a więc do dźwigarów posiadających, poza utwierdzeniem lub swobodnym podparciem końców, jeszcze między nimi podpory przegu-



Rys. 31

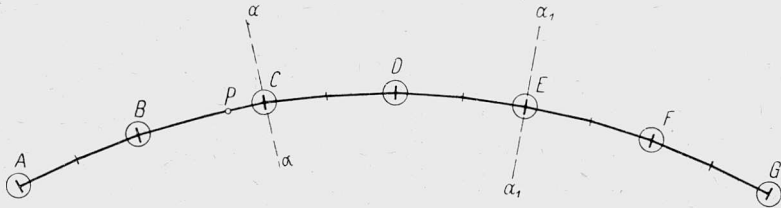


Rys. 32

bowo-przesuwne. Uogólnienie tych schematów stanowi dźwigar przedstawiony na rys. 33, który można by nazwać *dźwigarem balkonowym ciągłym* w przeciwieństwie do *dźwigara ciągłego załamane go w planie*, tzn. dźwigara podpartego w każdym węźle.

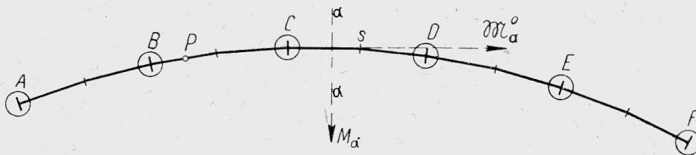
Aby obliczyć reakcje dźwigara przedstawionego na rys. 33, dzielimy przede wszystkim dźwigar myślowo na odcinki zawierające po trzy podpory, a więc na odcinki AC , CE i EG , przeprowadzając na podporach C i E , nad którymi się te odcinki stykają, przekroje aa i a_1a_1 prostopadłe do osi końcowych przedziałów danego odcinka. Przekroje te dzielą cały dźwigar na szereg dźwigarów trzypodporowych, a więc statycznie wyznaczalnych. Gdy liczba podpór całego dźwigara nie pozwala na rozdzielenie go na grupy trzypodporowe, np. przy liczbie podpór sześć, robimy przekrój aa między podporami (rys. 34) i dochodzimy w ten sposób do dźwigarów

trzyopodporowych ze wspornikami, które też są układami statycznie wyznaczalnymi. Możemy w tym wypadku wyodrębnić również i trzy dźwigary statycznie wyznaczalne, mianowicie, dwa dźwigary trzyopodporowe AC i CE oraz jedną belkę EF podpartą w dwóch punktach.



Rys. 33

Przebieg obliczenia statycznego omówionego tu rodzaju dźwigarów balkonowych przedstawimy przede wszystkim na schemacie prostszym, na schemacie według rys. 34. Wzajemne oddziaływanie na siebie dwu części tego dźwigara — statycznie wyznaczalnego dźwigara wspornikowego $ABC\alpha$ i statycznie wyznaczalnego dźwigara-wspornikowego $aDEF$ — wyraża się za pomocą dwu momentów, z których jeden M_α^0 ma wektor skierowany wzdłuż osi przedziału Cs , a drugi wektor M_α prostopadły do tej osi i pewnej siły pionowej T_α . Jeżeli w dalszym ciągu oznaczymy odpowiednio przez φ'_α i φ''_α kąty nachylenia przekrojów aa względem płaszczyzny pionowej końcowego przekroju aa dźwigara $ABC\alpha$ i końcowego przekroju aa dźwigara $aDEF$, to przyrównując do siebie kąty φ'_α i φ''_α dojdziemy do równania zawierającego momenty M_α i M_α^0 oraz siłę T_α . Drugie równanie potrzebne do wyznaczenia tych momentów da nam przyrównanie kątów obrotu θ'_α i θ''_α przekrojów aa wzglę-

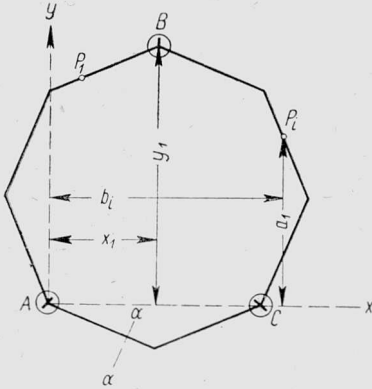


Rys. 34

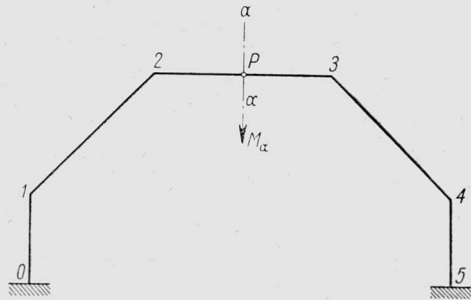
dem osi przedziału Cs , również jako końcowych przekrojów dźwigara $ABC\alpha$ i dźwigara $aDEF$. Trzecie wreszcie równanie da nam przyrównanie do siebie pionowych przesunięć końców a obydwóch dźwigarów, tj. przesunąć w'_α i w''_α .

O ile przekrój aa będzie przeprowadzony nie między węzłami, lecz przez sam węzeł, a podpory dźwigara są stałe, wówczas oddziaływanie na siebie poszczególnych części ciąglego dźwigara balkonowego będą się wyrażały za pomocą samych tylko momentów M_α i M_α^0 .

Weźmy wreszcie pod uwagę dźwigar załamany w planie z osią w kształcie zamkniętego wieloboku (rys. 35), podparty swobodnie w trzech punktach i obciążony w dowolny sposób. Układ taki jest zewnętrznie statycznie wyznaczalny, gdyż reakcje jego podpór dają się obliczyć z równań równowagi.



Rys. 35



Rys. 36

Aby wyznaczyć wielkości statycznie nadliczbowe dźwigara w kształcie wieloboku zamkniętego jako układu wewnątrznie statycznie niewyznaczalnego, przeprowadzamy przekrój aa przez jeden z prętów wieloboku. Powstaje w ten sposób dźwigar ciągły typu balkonowego $aABCa$ z dwoma wspornikami Aa i Ca . Oddziaływanie jednego z pokrywających się przekrojów a na drugi wyraża się za pomocą siły poprzecznej pionowej T_α oraz dwu momentów M_α^0 i M_α , z których pierwszy ma wektor pokrywający się z kierunkiem Aa boku wieloboku, a wektor drugiego jest do tego boku prostopadły. Znajdujemy w dalszym ciągu, w myśl rozważań rozdziału II. 3, pionowe przesunięcie się wzajemne w_α dwóch przekrojów a jako funkcję wielkości T_α , M_α^0 i M_α i przyrównujemy ją do zera. Przyrównujemy dalej do siebie dwa kąty nachylenia φ'_α i φ''_α obydwóch przekrojów aa względem płaszczyzny pionowej oraz dwa kąty obrotu θ'_α i θ''_α tych przekrojów względem osi Aa . Ponieważ zarówno kąty φ_α , jak i kąty θ_α są funkcjami wielkości T_α , M_α^0 i M_α , to dochodzimy do trzech równań, z których te wielkości wyznaczamy.

Obliczenie ugięć dźwigara balkonowego odbywa się na podstawie wzoru (13).

Obliczenie to przeprowadzamy na przypadku szczególnym dźwigara przedstawionego na rys. 36. Chodzi tu o wyznaczenie pionowego przesunięcia punktu zaczepienia siły P . Wobec symetrii dźwigara względem tego punktu wzór (13) powinien być zastosowany do połowy 012 P roz-

patrywanego dźwignika przy obciążeniu składającym się z siły $P/2$ zaczepionej w końcu P dźwignika $012P$ oraz z momentu M_α wyrażającego oddziaływanie jednej połowy dźwignika na drugą, który według obliczeń przytoczonych na początku rozdziału VI wynosi $M_\alpha = -0,3955 Pr$ (r — promień półkoła wpisanego w oś dźwignika). Wzór (13) przybiera postać

$$w_\alpha = \sum_1^3 z_j + \sum_1^3 \varphi'_j l_j. \quad (131)$$

Na podstawie wzoru (10) dla omówionego obciążenia znajdujemy

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= 0,06503 \frac{Pl^3}{EJ}, & z_2 &= 0,11521 \frac{Pl^3}{EJ}, \\ z_\alpha &= -0,02861 \frac{Pl^3}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Wzory (11) i (12) dają w tym wypadku (przy $GJ_0 = EJ$)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 0,23920 \frac{Pl^2}{EJ}, & \Theta_1 &= -0,10401 \frac{Pl^2}{EJ}, \\ \varphi_\alpha &= 0,37454 \frac{Pl^2}{EJ}, \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

skąd ze wzoru (18) mamy

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_2 &= 0,70711 (\varphi_1 - \Theta_1) = 0,24274 \frac{Pl^2}{EJ}, \\ \varphi'_\alpha &= \varphi_\alpha = 0,37454 \frac{Pl^2}{EJ}, \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

wobec czego

$$\varphi'_2 l = 0,24274 \frac{Pl^3}{EJ}, \quad \varphi'_\alpha \frac{l}{2} = 0,18727 \frac{Pl^3}{EJ}. \quad (135)$$

W tych warunkach suma (131) daje ostatecznie

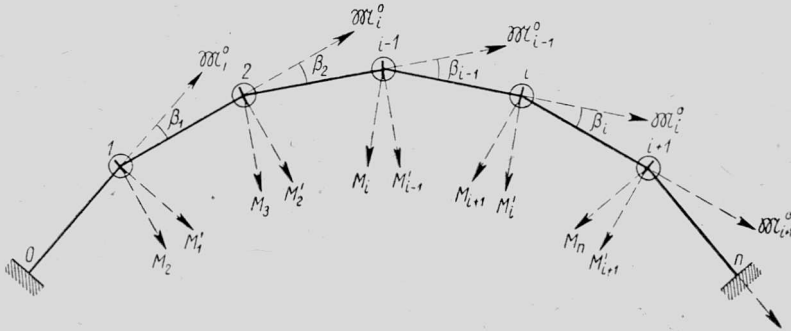
$$w_\alpha = 0,58164 \frac{Pl^3}{EJ}. \quad (136)$$

Analogiczne obliczenia wykonane dla $GJ_0 \neq EJ$ wykazują, że stosunek $\varepsilon = EJ/GJ_0$ więcej wpływa na ugięcie dźwignika niż na momenty nadliczbowe. W miarę wzrastania ε szybko wzrastają ugięcia.

Należy stąd wysnuć wniosek, że tam, gdzie można się obawiać znacznych odkształceń dźwignika załamanego w planie, trzeba stosować przekroje o mniejszym ε .

2. Dźwigary ciągle załamane w planie

Będziemy dalej nazywali, zgodnie z umową przyjętą w paragrafie poprzednim, dźwigarami ciągłymi załamanymi w planie dźwigary załamane w planie, podparte we wszystkich węzłach. Dźwigar taki przedstawiony

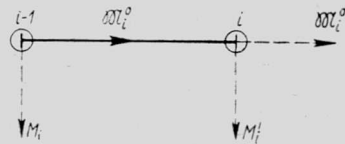


Rys. 37

jest na rys. 37. Tu w punktach $1, 2, 3, \dots, i, i+1, \dots, n-1$ mamy podpory wielokierunkowo-przesuwne w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny, w której leży oś pozioma dźwigara, a w punktach 0 i n mamy całkowite utwierdzenie końców.

Dźwigar przedstawiony na rys. 37 jest $n+2$ -krotnie statycznie niewyznaczalny, gdyż dźwigar załamany w planie, utwierdzony na końcach daje trzy wielkości nadliczbowe, a każda z podpór wielokierunkowo-przesuwnych — dodatkowo po jednej.

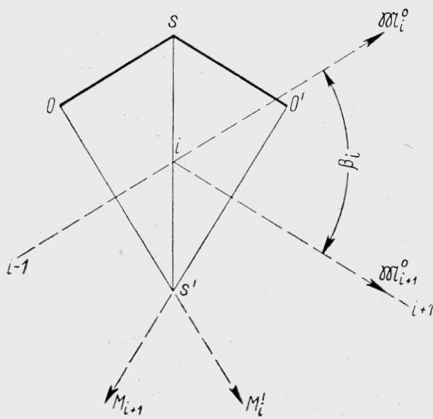
Wyobraźmy sobie, że pewien przedział $i-1, i$ dźwigara ciągłego został wycięty za pomocą dwu płaszczyzn prostopadłych do osi przedziału (rys. 38). Oddziaływanie na węzeł i odrzuconego przesła $i, i+1$ zastępujemy przez pewien moment, którego składowe M'_i i \mathfrak{M}_i^0 przedstawiamy sobie w postaci wektorów leżących w płaszczyźnie poziomej dźwigara, z których jeden jest prostopadły do osi $i-1, i$, a drugi ma kierunek tej osi (rys. 38 i 39). Momenty M'_i i \mathfrak{M}_i^0 uważamy za prawoskrętne.



Rys. 38

Wytnijmy dalej z dźwigara przedział $i, i+1$, podobnie jak to miało miejsce wyżej z przedziałem $i-1, i$. Oddziaływanie węzła i na przedział $i, i+1$ sprowadzi się wówczas do pewnego momentu, którego składowe M_{i+1} i \mathfrak{M}_{i+1}^0 przedstawione są wektorowo na rys. 39 i na rys. 40. W tych warunkach oddziaływanie przedziału $i, i+1$ na węzeł i wyraża się momentami $-M_{i+1}$ i $-\mathfrak{M}_{i+1}^0$.

Wobec małych wymiarów węzłów w stosunku do długości przedziałów możemy tu, podobnie jak w rozdziale II, uważać, że wektory wszystkich momentów działających na dany węzeł przechodzą przez środek węzła.



Rys. 39

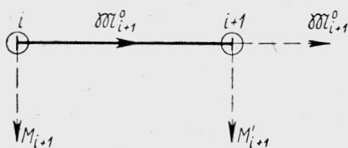
Należy podkreślić, że momenty skręcające \mathfrak{M}^0 zachowują stałe wartości na całej długości przedziałów.

Dla równowagi poszczególnych węzłów i potrzeba, aby suma wektorowa momentów działających na dany węzeł, a więc momentów M_i^i , \mathfrak{M}_i^0 , $-M_{i+1}^i$ i $-\mathfrak{M}_{i+1}^0$, była równa zero, czyli aby suma rzutów tych wektorów na dwie prostopadłe osie była równa zero. Rzutując wobec tego wymienione momenty na kierunki M_i^i i \mathfrak{M}_i^0 (rys. 37, 39 i 41) dochodzimy do wzorów następujących:

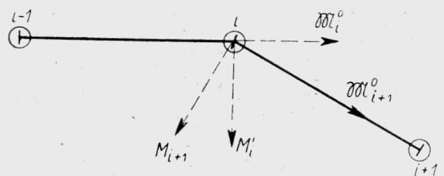
$$M_i^i = \mathfrak{M}_{i+1}^0 \sin \beta_i + M_{i+1}^i \cos \beta_i, \quad (137)$$

$$\mathfrak{M}_i^0 = \mathfrak{M}_{i+1}^0 \cos \beta_i - M_{i+1}^i \sin \beta_i. \quad (138)$$

Momenty te pozwalają na obliczenie odkształceń poszczególnych przedziałów dźwigara ciągłego. Odkształcenia, których wprowadzenie jest po-



Rys. 40



Rys. 41

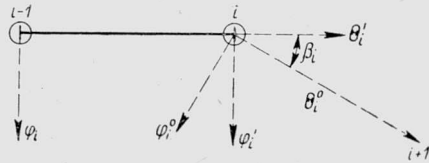
trzebne do wyznaczenia wielkości nadliczbowych zadania, są następujące (rys. 42):

- φ_i kąt nachylenia przekroju poprzecznego przedziału $i-1, i$ w punkcie $i-1$ względem płaszczyzny pionowej,
- φ_i' kąt nachylenia przekroju poprzecznego przedziału $i-1, i$ w punkcie i względem płaszczyzny pionowej,
- φ_i^0 kąt nachylenia przekroju ukośnego przedziału $i-1, i$ w punkcie i prostopadłego do osi przedziału $i, i+1$ (ściślej przekroju $o's'$ na rys. 39) względem płaszczyzny pionowej,
- Θ_i kąt skręcenia przedziału $i-1, i$,

- θ_i^0 kąt obrotu przekroju poprzecznego przedziału $i, i + 1$ w punkcie i , prostopadłego do osi przedziału $i, i + 1$ względem tej osi,
 θ_i' kąt obrotu przekroju ukośnego przedziału $i - 1, i$ w punkcie i , prostopadłego do osi przedziału $i, i + 1$ (inaczej kąt obrotu węzła i) względem osi $i - 1, i$.

Obroty $\varphi_i, \varphi_i^0, \varphi_i'$ i θ_i^0 i θ_i' przedstawiamy w sposób wektorowy (rys. 42) i przyjmujemy co do ich zwrotów umowę odpowiednią do przyjętej dla dźwigara-wspornika w rozdziale

II.2, tzn. kąty φ_i, φ_i^0 i φ_i' uważamy za dodatnie, jeżeli obserwator patrzący na dźwigar z jego strony wklęsłej widzi, że odpowiednie przekroje dźwigara obracają się na prawo, a kąty θ_i^0 i θ_i' uważamy za dodatnie, kiedy obserwator posuwający się tyłem wzdłuż dźwigara ciągłego od jego lewego końca do prawego widzi, że odpowiednie przekroje dźwigara obracają się na prawo względem osi poszczególnych przedziałów.



Rys. 42

Z powodów omówionych w rozdziale II.2 przyjmujemy, że wektory $\varphi_i^0, \varphi_i', \theta_i^0$ i θ_i' przechodzą przez środek węzła i .

Obroty φ_i' i θ_i' składają się odpowiednio na obroty φ_i^0 i θ_i^0 . Wobec tego rzutując wektory φ_i' i θ_i' na kierunku φ_i^0 i θ_i^0 otrzymujemy

$$\varphi_i^0 = \varphi_i' \cos \beta_i - \theta_i' \sin \beta_i, \quad (139)$$

$$\theta_i^0 = \varphi_i' \sin \beta_i + \theta_i' \cos \beta_i, \quad (140)$$

przy czym, jak wynika z przyjętych oznaczeń,

$$\theta_i' = \theta_{i-1}^0 + \theta_i. \quad (141)$$

Aby ustawić potrzebną liczbę $n + 2$ równań brakujących do wyznaczenia $n + 2$ wielkości nadliczbowych zadania, bierzemy przede wszystkim pod uwagę, że pomimo dokonanych myślowo nad podporami przecięć, dźwigar musi pozostać ciągły i wobec tego nad każdą podporą suma kąta nachylenia przekroju ukośnego przedziału $i - 1, i$ w punkcie i , jako przekroju prostopadłego do osi przedziału $i, i + 1$, względem płaszczyzny pionowej, i kąta nachylenia przekroju poprzecznego przedziału $i, i + 1$ w punkcie i , względem płaszczyzny pionowej, musi być równa zero. Dochodzimy w ten sposób do równań

$$\varphi_i^0 + \varphi_{i+1} = 0. \quad (142)$$

Równań takich mamy do rozporządzenia tyle, ile jest podpór pośrednich w dźwigarze ciągłym, tj. $n - 1$.

W punktach utwierdzenia dźwigara kąt nachylenia przekroju poprzecznego względem płaszczyzny pionowej jest równy zeru, wobec czego dochodzimy do dwu równań

$$\varphi_0 = 0 \quad \text{i} \quad \varphi'_n = 0. \quad (143)$$

Wreszcie ostatnie ($n + 2$ -gie) równanie brakujące do rozwiązania zadania uzyskamy z warunku, że kąt obrotu przekroju utwierdzenia dźwigara w punkcie n równa się zeru:

$$\Theta_n^0 = 0. \quad (144)$$

Należy zauważyć, że równania (139), (140), (141) i (142) znajdują zastosowanie również i w przypadku dźwigarów ciągłych balkonowych, tzn. dźwigarów podpartych nie we wszystkich węzłach.

Wyrażenie kątów zawartych w równaniach (142) - (144) przez poszukiwane momenty opieramy na wzorach rekurencyjnych (137), (138), (139) i (140) oraz na wzorach dotyczących odkształceń przedziału $i - 1, i$ dźwigara ciągłego uważanego za belkę w dwóch punktach swobodnie podpartą. A więc

$$\varphi_i = \frac{M_i l_i}{3 E J} - \frac{M'_i l_i}{6 E J} + \frac{\tilde{\mathfrak{T}}_{i-1}}{E J}, \quad (145)$$

$$\varphi'_i = \frac{M'_i l_i}{3 E J} - \frac{M_i l_i}{6 E J} + \frac{\tilde{\mathfrak{T}}_i}{E J}, \quad (146)$$

gdzie l_i oznacza długość przedziału $i - 1, i$, a $\tilde{\mathfrak{T}}_{i-1}$ i $\tilde{\mathfrak{T}}_i$ są siłami poprzecznymi od obciążenia wtórnego przedziału, odpowiednio na końcach $i - 1$ oraz i . Kąt skręcenia przedziału $i - 1, i$ momentem \mathfrak{M}_i^0 wynosi

$$\Theta_i = \frac{\mathfrak{M}_i^0 l_i}{G J_0}, \quad (147)$$

przy czym bierzemy pod uwagę, że skręcanie przedziału $i - 1, i$, dzięki należycie wykonanemu przegubowemu połączeniu przedziału $i - 1, i$ z przedziałem $i - 2, i - 1$, jest możliwe nawet pomimo to, że przedział został wycięty z dźwigara ciągłego.

Liczba momentów niezbędnych do wyznaczenia naprężeń w poszczególnych przedziałach $i - 1, i$ dźwigara ciągłego wynosi trzy. Są to momenty M_i , M'_i oraz \mathfrak{M}_i^0 . Ogólna liczba potrzebnych momentów dla całego dźwigara jest więc $3n$. Równania rekurencyjne (137) i (138) mogą być ustawione dla każdej podpory pośredniej, czyli że liczba ich wynosi

$2(n - 1)$, przy czym nie wprowadzają one nowych niewiadomych, gdyż momenty utwierdzenia M_1, M'_n i M_n^0 zawarte są już w liczbie $3n$. Równania te łącznie z równaniami (142)-(144) dają liczbę zależności konieczną do wyznaczenia wszystkich potrzebnych momentów.

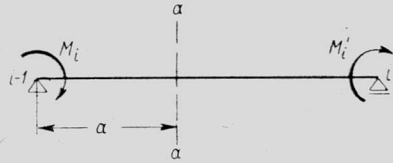
Znając momenty nad poszczególnymi podporami i obliczamy momenty zginające w przekrojach aa przęseł $i - 1, i$ jak dla belki w dwóch punktach swobodnie podpartej za pomocą wzoru

$$M_\alpha^{i-1,i} = M_{0\alpha} + M_i \frac{l_i - a}{l_i} - M'_i \frac{a}{l_i}, \quad (148)$$

gdzie $M_{0\alpha}$ oznacza moment zginający wywołany w przekroju aa siłami zaczepionymi w przęśle. Wzór ten, tak samo jak i następny, dotyczy każdej belki w dwóch punktach swobodnie podpartej i obciążonej momentami na końcu (rys. 43 przedstawiający przęśło w widoku).

Siła poprzeczna w przekroju aa przęśla $i - 1, i$ wyraża się wzorem

$$T_\alpha^{i-1,i} = T_{0\alpha}^{i-1,i} - \frac{M'_i + M_i}{l_i}, \quad (149)$$



Rys. 43

gdzie $T_{0\alpha}^{i-1,i}$ oznacza siłę poprzeczną spowodowaną tylko obciążeniem znajdującym się między węzłami.

Reakcja podpory i jako podpory belki $i - 1, i$ w dwóch punktach swobodnie podpartej wyraża się wzorem

$$R_i^{i-1,i} = R_{0i}^{i-1,i} - \frac{M'_i + M_i}{l_i}. \quad (150)$$

Odpowiednio reakcja podpory i jako podpory belki $i, i + 1$ w dwóch punktach swobodnie podpartej równa się

$$R_i^{i,i+1} = R_{0i}^{i,i+1} + \frac{M'_{i+1} + M_{i+1}}{l_{i+1}}. \quad (151)$$

Całkowitą reakcję podpory i znajdujemy jako różnicę sił poprzecznych w punktach położonych bezpośrednio na prawo (tzn. od strony podpory 0) i na lewo (tzn. od strony podpory n) od punktu i :

$$R_i = R_{0i}^{i,i+1} - R_{0i}^{i-1,i} + \frac{M'_{i+1} + M_{i+1}}{l_{i+1}} - \frac{M'_i + M_i}{l_i}. \quad (152)$$

Powyższe obliczenie dźwigara ciągłego załamanego w planie ulega uproszczeniu, jeżeli w punktach 0 i n podpory płaskie (utwierdzenia) zastąpimy przez podpory przegubowe. Istotnie, w tym wypadku liczba wiel-

kości statycznie niewyznaczalnych jest o cztery mniejsza niż poprzednio, czyli równa $n - 2$, ponieważ nad podporami przegubowymi mamy

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 0, & \mathfrak{M}_1^0 &= 0, \\ M'_n &= 0, & \mathfrak{M}_n^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

Wyznaczenie wielkości nadliczbowych oprócz tu należy na równaniach typu (142).

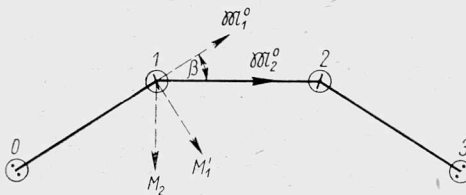
W przypadku kiedy końcowe przekroje dźwigara ciągłego nie mogą się obracać względem osi końcowych przedziałów, lecz mogą się nachylać względem płaszczyzn pionowych, momenty

$$M_1 = 0 \quad \text{i} \quad M'_n = 0, \quad (154)$$

momenty jednak \mathfrak{M}_1^0 i \mathfrak{M}_n^0 różne są od zera. Liczba niewiadomych zmniejszy się tu o dwie w porównaniu z zadaniem dźwigara ciągłego o końcach utwierdzonych, będzie więc równa n , a do znalezienia tych niewiadomych służyć będą w dalszym ciągu równania typu (142) oraz równania wyrażające, że obrót przekroju poprzecznego dźwigara na końcu n równa się zero, czyli że

$$\Theta_n = 0. \quad (155)$$

Weźmy dla przykładu dźwigar ciągły załamany w planie na czterech podporach (rys. 44) obciążony w sposób ciągły i równomierny (obciążenie jednostkowe q kg na mb). W punktach 1 i 2 mamy podpory wielokierunkowo-przesuwne, podpory zaś 0 i 3 są wprawdzie przegubowo-przesuwne, nie pozwalają jednak na obrót przekrojów 0 i 3 względem osi 01 i 23.



Rys. 44

Wobec symetrii obciążenia i kształtu dźwigara możemy przeprowadzić obliczenie tylko dla połowy dźwigara. Liczba wielkości statycznie niewyznaczalnych spada przy tym z $n = 3$ do $n = 1$.

Zależność między momentami przedstawionymi wektorowo na rys. 44 znajdujemy na podstawie równań (137):

$$M'_1 = M_2 \cos \beta, \quad (156)$$

$$\mathfrak{M}_1^0 = -M_2 \sin \beta, \quad (157)$$

ponieważ ze względu na warunki symetrii środkowy przedział dźwigara nie będzie skręcany i moment \mathfrak{M}_2^0 równy będzie zero.

Kąty obrotu końcowych przekrojów poprzecznych poszczególnych przedziałów dźwigara ciągłego przedstawione są wektorowo na rys. 45. Do wyznaczenia kątów φ'_1 i Θ_1 służą wzory (145) i (146), skąd

$$\varphi'_1 = \frac{M'_1 l}{3 EJ} + \frac{q l^3}{24 EJ} = \frac{M'_2 l}{3 EJ} \cos \beta + \frac{q l^3}{24 EJ}, \quad (158)$$

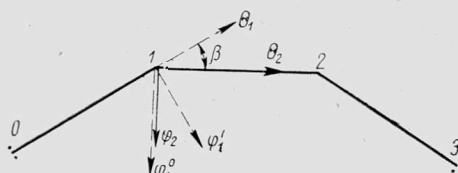
$$\Theta_1 = \frac{\mathfrak{M}_1^0 l}{GJ_0} = -\frac{M_2 l}{GJ_0} \sin \beta. \quad (159)$$

Odpowiednio

$$\varphi_2 = \frac{M_2 l}{2 EJ} + \frac{q l^3}{24 EJ}. \quad (160)$$

Momenty $-M'_1$ i $-\mathfrak{M}_1^0$ są tu, w myśl znakowania momentów przyjętego wyżej, momentami oddziaływania węzła 1 na przęsło 01.

Wzór (139) na kąt φ_1^0 daje w tych warunkach



Rys. 45

$$\varphi_1^0 = \left(\frac{M_2 l}{3 EJ} \cos \beta + \frac{q l^3}{24 EJ} \right) \cos \beta + \frac{M_2 l}{GJ_0} \sin \beta, \quad (161)$$

a równanie (142) przybiera tu postać

$$\left(\frac{M_2 l}{3 EJ} \cos \beta + \frac{q l^3}{24 EJ} \right) \cos \beta + \frac{M_2 l}{GJ_0} \sin^2 \beta + \frac{M_2 l}{2 EJ} + \frac{q l^3}{24 EJ} = 0 \quad (162)$$

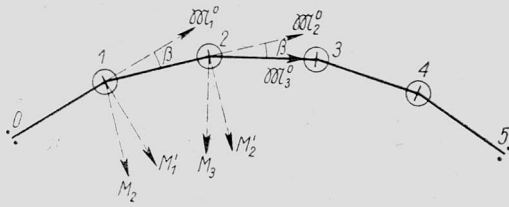
lub przy oznaczeniu $\varepsilon = EJ/GJ_0$ postać

$$-0,33333 M_2 \cos^2 \beta + 0,04167 q l^2 \cos \beta + \varepsilon M_2 \sin^2 \beta + 0,5 M_2 + 0,04167 q l^2 = 0. \quad (163)$$

Obliczone stąd momenty M_2 przybierają dla $\varepsilon = 1, 2$ i 10 i dla różnych kątów β wartości następujące:

β	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 10$
90°	$-0,0272 q l^2$	$-0,0167 q l^2$	$-0,00378 q l^2$
60°	$-0,0468 q l^2$	$-0,0300 q l^2$	$-0,00774 q l^2$
45°	$-0,0600 q l^2$	$-0,0422 q l^2$	$-0,01235 q l^2$
30°	$-0,0777 q l^2$	$-0,0618 q l^2$	$-0,02390 q l^2$
10°	$-0,0964 q l^2$	$-0,0930 q l^2$	$-0,07320 q l^2$
0°	$-0,1000 q l^2$	$-0,1000 q l^2$	$-0,10000 q l^2$

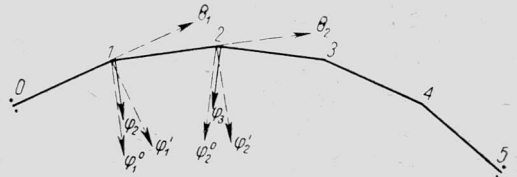
Z powyższego zestawienia można wyciągnąć wniosek, że wpływ współczynnika ε na momenty zginające zmniejsza się przy zmniejszaniu



Rys. 46

kąta β . Może to mieć znaczenie dla obliczenia na wiatr zakrzywionych górnych pasów mostów stalowych, których poszczególne przedziały tworzą ze sobą zwykle kąty wahające się około 10° , pasy takie bowiem mogą być uważane za załamane w planie dźwigiary ciągłe, o ile tylko most ma w płaszczyźnie pasów rozpórki wiatrowe.

Rozpatrzmy w dalszym ciągu dźwigar o pięciu przęsłach przedstawiony na rys. 46, obciążony w sposób ciągły i równomierny. Dźwigar jest symetryczny i symetrycznie obciążony względem środka w sposób ciągły i równomierny. Kąt $\beta = 30^\circ$, długość przęseł równa l .



Rys. 47

Dźwigar jest w zasadzie pięciokrotnie statycznie niewyznaczalny, ze względu jednak na warunki symetrii liczba wielkości nadliczbowych spada tu do dwu. Ogólna liczba niewiadomych momentów podporowych będzie w tym wypadku wynosiła sześć, a więc będą to momenty M_1' , M_2 , M_1^0 , M_2^0 , M_2' i M_3 (rys. 46). Moment M_3^0 ze względu na warunki symetrii równa się zero.

Aby wyznaczyć wymienione wyżej momenty, korzystamy tu z czterech równań typu (137) i (138) oraz z dwu równań (142), dochodząc w ten sposób do dwóch następujących grup równań (rys. 47):

na pierwszą grupę składają się równania

$$\left. \begin{aligned} M_1' &= M_2^0 \sin \beta + M_2 \cos \beta, \\ M_1^0 &= M_2^0 \cos \beta - M_2 \sin \beta, \\ M_2' &= M_3 \cos \beta, \\ M_2^0 &= -M_3 \sin \beta; \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

drugą grupę stanowią równania:

$$\varphi_1^0 + \varphi_2 = 0, \quad \varphi_2^0 + \varphi_3 = 0, \quad (165)$$

gdzie kąty φ_1^0 i φ_2^0 obliczone są na podstawie wzorów

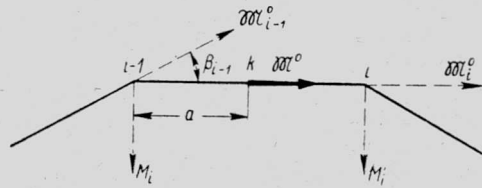
$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^0 &= \varphi_1' \cos \beta - \Theta_1' \sin \beta, \\ \Theta_1^0 &= \varphi_1' \sin \beta + \Theta_1' \cos \beta, \\ \varphi_2^0 &= \varphi_2' \cos \beta - \Theta_2' \sin \beta, \\ \Theta_2^0 &= \varphi_2' \sin \beta + \Theta_2' \cos \beta, \\ \Theta_2' &= \Theta_1^0 + \Theta_1. \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

Wprowadzamy tu momenty M i \mathfrak{M}^0 na podstawie wzorów (145)-(147), po czym z równań (164) i (165) znajdujemy

$$\left. \begin{aligned} M_3 &= -0,0335 q l^2, & M_2' &= -0,0295 q l^2, \\ M_2 &= -0,0900 q l^2, & \mathfrak{M}_2^0 &= -0,0168 q l^2, \\ M_1' &= -0,0688 q l^2, & \mathfrak{M}_1^0 &= -0,0595 q l^2. \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

Z tego rozwiązania wynika, że w okolicach środka dźwigara momenty skręcające maleją i warunki pracy poszczególnych przedziałów zbliżają się do warunków pracy belki prostej.

Poza obciążeniem dźwigara ciągłego załamane w planie siłami pionowymi i momentami działającymi w płaszczyznach poszczególnych przęseł pewne przęśło $i-1, i$ bywa obciążone momentem działającym w płaszczyźnie prostopadłej do osi $i-1, i$ (rys. 48). Wektor \mathfrak{M}^0 tego momentu zaczepiony w pewnym punkcie k odległym o a od podpory $i-1$ skierowany jest wzdłuż osi $i-1, i$.



Rys. 48

W tych warunkach na węzeł $i-1$ poza momentem \mathfrak{M}_i^0 działa jeszcze moment \mathfrak{M}^0 , wobec czego równania (137) i (138) w zastosowaniu do węzła $i-1$ przybierają postać

$$M_{i-1}' = (\mathfrak{M}_i^0 + \mathfrak{M}^0) \sin \beta_{i-1} + M_i \cos \beta_{i-1}, \quad (168)$$

$$\mathfrak{M}_{i-1}' = (\mathfrak{M}_i^0 + \mathfrak{M}^0) \cos \beta_{i-1} - M_i \sin \beta_{i-1}. \quad (169)$$

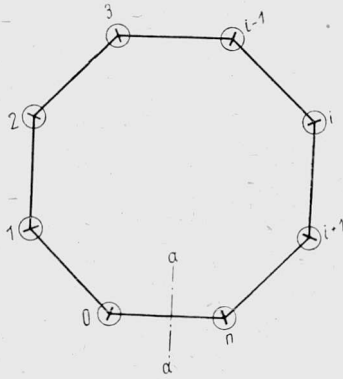
Kąt obrotu Θ_i przekroju poprzecznego w punkcie i przedziału $i-1, i$ równa się tu

$$\Theta_i = \frac{\mathfrak{M}^0 a}{GJ_0} + \frac{\mathfrak{M}_i^0 l_i}{GJ_0}, \quad (170)$$

dalsze zaś obliczenie odkształceń i momentów odbywa się tak samo, jak przy pionowym obciążeniu dźwigara

Specjalny rodzaj dźwigarów ciągłych załamanych w planie przedstawia dźwigar ciągły o kształcie zamkniętego wieloboku (rys. 49).

Aby dźwigar taki obliczyć, przeprowadzamy przekrój aa przez jeden z przedziałów, np. przez przedział $0n$, i oznaczamy przez T_α , M_α i \mathfrak{M}_α^0 trzy składowe oddziaływania na siebie dwu przekrojów aa , z których jeden stanowi końcowy przekrój wspornika $0a$ dźwigara ciągłego $a012 \dots na$, a drugi końcowy przekrój wspornika na tegoż dźwigara.



Rys. 49

Ponieważ dźwigar ciągły załamany w planie na trzech podporach jest układem statycznie wyznaczalnym, dźwigar $a012 \dots na$ będzie układem o liczbie $n - 3$ wielkości statycznie niewyznaczalnych. Dodając do tego liczbę trzech niewiadomych T_α , M_α i \mathfrak{M}_α^0 dochodzimy do wniosku, że dźwigar ciągły o kształcie zamkniętego wieloboku będzie układem o n wielkościach nadliczbowych, gdyż $(n - 3) + 3 = n$.

Podobnie jak w przypadku dźwigara o kształcie zamkniętego wieloboku w dwóch punktach swobodnie podpartego (przedostatni ustęp paragrafu 1 tego rozdziału) przedstawiamy składowe przesunięcie dwóch przekrojów aa , mianowicie w_α , φ'_α i φ''_α oraz θ'_α i θ''_α jako funkcje wielkości T_α , M_α i \mathfrak{M}_α^0 i ustawiamy równania

$$w_\alpha = 0, \quad \varphi'_\alpha = -\varphi''_\alpha, \quad \theta'_\alpha = \theta''_\alpha, \quad (171)$$

które uzupełniają liczbę równań typu (137), (138) i (142) do liczby n i pozwalają na rozwiązanie zadania.

V. RÓWNANIE PIĘCIU MOMENTÓW SKRĘCAJĄCYCH

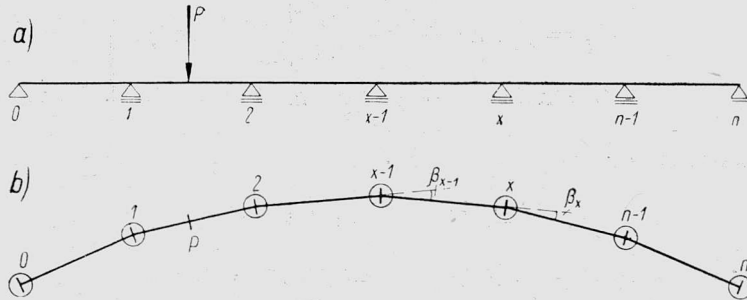
Zastosowanie różnic skończonych do obliczenia dźwigarów ciągłych załamanych w planie pozwala na znalezienie w ich teorii pewnych uogólnień, które mają poważne znaczenie praktyczne.

W dziedzinie belek ciągłych prostych pierwszy korzystał z teorii różnic skończonych C l e b s c h²⁾, który potraktował równanie trzech momentów jako równanie różnicowe.

O ile jednak C l e b s c h miał w swych badaniach na widoku scałkowanie znanego mu równania trzech momentów jako równania różnicowe

²⁾ C l e b s c h, *Theorie der Elastizität fester Körper*, Lipsk 1862, str. 392.

wego, o tyle w przypadku dźwigara ciągłego załamane go w planie teoria różnic skończonych pozwala na samo ustawienie równania odgrywającego w teorii tych dźwigarów rolę podobną do roli, jaką odgrywa równanie trzech momentów w teorii prostych belek ciągłych, mianowicie *równania pięciu kolejnych momentów skręcających*.



Rys. 50

Rozpatrzmy dźwigar ciągły przedstawiony na rys. 50. Podpory jego są wielokierunkowo-przesuwne, podpory końcowe pozwalają na nachylenie się przekrojów końcowych względem płaszczyzny pionowej, wyłączają natomiast obrót tych przekrojów względem osi podłużnej ostatnich przęseł. Długości poszczególnych przęseł dźwigara są równe l . Kąty załamania $\beta_x = \beta$ są również wielkością stałą.

Opieramy się dalej na wzorach wyprowadzonych w rozdziale IV.2. Potrzebne tutaj zależności (141), (139), (140) i (142) przybierają w danym wypadku postać

$$\Theta'_x = \Theta_{x-1}^0 + \Theta_x, \quad (172)$$

$$\varphi_x^0 = \varphi'_x \cos \beta - \Theta'_x \sin \beta, \quad (173)$$

$$\Theta_x^0 = \varphi'_x \sin \beta + \Theta'_x \cos \beta, \quad (174)$$

$$\varphi_x^0 + \varphi_{x+1} = 0. \quad (175)$$

Wzory (137) i (138) wyrażające momenty zginające i skręcające doprowadzają do wzorów

$$M'_x = \mathfrak{M}_{x+1}^0 \sin \beta + M_{x+1} \cos \beta, \quad (176)$$

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{x+1}^0 \cos \beta - M_{x+1} \sin \beta. \quad (177)$$

Równanie (175) w związku z równaniem (173) daje

$$\varphi_x^0 \cos \beta - \Theta'_x \sin \beta = -\varphi_{x+1}. \quad (178)$$

Ponieważ

$$\Theta'_x = \Theta^0_{x-1} + \Theta_x = \frac{\varphi'_x \cos \beta + \varphi_{x+1}}{\sin \beta}, \quad (179)$$

więc z równania (174) znajdujemy

$$\left. \begin{aligned} \Theta^0_x &= \varphi'_x \sin \beta + \frac{\varphi'_x \cos \beta + \varphi_{x+1}}{\sin \beta} \cos \beta, \\ \Theta^0_x \sin \beta &= \varphi'_x + \varphi_{x+1} \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

Z równania tego wyznaczamy Θ^0_{x-1} :

$$\Theta^0_{x-1} \sin \beta = \varphi'_{x-1} + \varphi_x \cos \beta, \quad (181)$$

w związku z czym równanie (178) otrzymuje postać

$$\varphi'_x \cos \beta - \varphi'_{x-1} - \varphi_x \cos \beta - \Theta_x \sin \beta = -\varphi_{x+1}. \quad (182)$$

Przyjmujemy dalej oznaczenia

$$\frac{l}{3EJ} = 2f, \quad \frac{l}{6EJ} = f, \quad \frac{l}{GJ_0} = \frac{l}{3EJ} = 2f. \quad (183)$$

Wzorum (145) i (146) poprzedniego rozdziału nadajemy postać

$$\varphi_x = M_x 2f + M'_x f + \psi_x, \quad (184)$$

$$\varphi'_x = M'_x 2f + M_x f + \psi'_x, \quad (185)$$

gdzie przyjmujemy, że oba momenty działające na jedno przęsło wyginają to przęsło w jedną stronę i gdzie

$$\psi_x = \frac{\bar{\Delta}_{x-1}}{EJ} \quad \text{i} \quad \psi'_x = \frac{\bar{\Delta}_x}{EJ}.$$

Odpowiednio do wzorów (184) i (185) mamy

$$\Theta_x = \mathfrak{M}_x^0 \cdot 2f. \quad (186)$$

Mnożymy dalej równanie (176) przez $\cos \beta$, a równanie (177) przez $\sin \beta$ i odejmujemy je od siebie oraz mnożymy równanie (176) przez $\sin \beta$, a równanie (177) przez $\cos \beta$ i dodajemy je do siebie. W ten sposób dochodzimy do równań

$$M'_x \cos \beta - \mathfrak{M}_x^0 \sin \beta = M_{x+1}, \quad (187)$$

$$M'_x \sin \beta + \mathfrak{M}_x^0 \cos \beta = \bar{\mathfrak{M}}^0_{x+1}. \quad (188)$$

Z równania (188) wyznaczamy bezpośrednio

$$M'_x = \mathfrak{M}_{x+1}^0 \frac{1}{\sin \beta} - \mathfrak{M}_x^0 \operatorname{ctg} \beta, \quad (189)$$

wstawiając zaś wyrażenie (188) w równanie (176) znajdujemy

$$M_{x+1} = \mathfrak{M}_{x+1}^0 \operatorname{ctg} \beta - \mathfrak{M}_x^0 \frac{1}{\sin \beta}, \quad (190)$$

a więc

$$M_x = \mathfrak{M}_x^0 \operatorname{ctg} \beta - \mathfrak{M}_{x-1}^0 \frac{1}{\sin \beta}. \quad (191)$$

W związku z otrzymanymi wyrażeniami na momenty zginające wzory (184) i (185) przybierają postać

$$\varphi_x = \mathfrak{M}_{x+1}^0 \frac{f}{\sin \beta} - \mathfrak{M}_x^0 f \operatorname{ctg} \beta - \mathfrak{M}_{x-1}^0 \frac{2f}{\sin \beta} + \psi_x, \quad (192)$$

$$\varphi'_x = \mathfrak{M}_{x+1}^0 \frac{2f}{\sin \beta} - \mathfrak{M}_x^0 2f \operatorname{ctg} \beta - \mathfrak{M}_{x-1}^0 \frac{f}{\sin \beta} + \psi'_x. \quad (193)$$

Wstawiamy wreszcie wyrażenia na kąty φ_x , φ'_x i Θ_x w równanie (182) i dochodzimy w ten sposób do równania

$$\mathfrak{M}_{x+2}^0 + 2 \cos \beta \cdot \mathfrak{M}_{x+1}^0 - 6 \mathfrak{M}_x^0 + 2 \cos \beta \cdot \mathfrak{M}_{x-1}^0 + \mathfrak{M}_{x-2}^0 = Q_x, \quad (194)$$

gdzie

$$Q_x = \frac{\sin \beta}{f} (-\psi'_x \cos \beta + \psi'_{x-1} + \psi_x \cos \beta - \psi_{x+1}). \quad (195)$$

Równanie (194) jest poszukiwanym *równaniem pięciu momentów skręcających*. Jest to równanie różnicowe czwartego rzędu, którego cała ogólna przedstawia sumę

$$\mathfrak{M}_x^0 = \mu_x^0 + \mu_x, \quad (196)$$

gdzie μ_x^0 oznacza pewne dowolne rozwiązanie szczególne danego równania, μ_x zaś rozwiązanie ogólne odpowiedniego równania bez wyrazu Q_x , tzn. równania

$$\mathfrak{M}_{x+2}^0 + 2 \cos \beta \mathfrak{M}_{x+1}^0 - 6 \mathfrak{M}_x^0 + 2 \cos \beta \mathfrak{M}_{x-1}^0 + \mathfrak{M}_{x-2}^0 = 0. \quad (197)$$

Równanie charakterystyczne w tym wypadku przedstawia się w sposób następujący:

$$r^4 + 2 \cos \beta \cdot r^3 - 6 r^2 + 2 \cos \beta \cdot r + 1 = 0 \quad (198)$$

lub

$$r^2 + 2 \cos \beta \cdot r - 6 + 2 \cos \beta \cdot r^{-1} + r^{-2} = 0. \quad (199)$$

Niewiadomej r poszukujemy pod postacią

$$r = e^{\alpha},$$

gdzie e jest to podstawa logarytmów naturalnych, α zaś pewna liczba niewiadoma. Mamy więc

$$e^{2\alpha} + 2 \cos \beta e^{\alpha} - 6 + 2 \cos \beta e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} = 0. \quad (200)$$

W rezultacie równanie (200) przybiera postać

$$2 \cosh 2\alpha + 4 \cosh \alpha \cos \beta - 6 = 0 \quad (201)$$

lub postać

$$\cosh^2 \alpha + \cos \beta \cosh \alpha - 2 = 0, \quad (202)$$

skąd

$$\cosh \alpha = -\frac{\cos \beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{4} + 2}, \quad (203)$$

przy czym pierwiastki równania

$$\alpha = \alpha_1, \quad \alpha = -\alpha_1, \quad \alpha = \alpha_2, \quad \alpha = -\alpha_2. \quad (204)$$

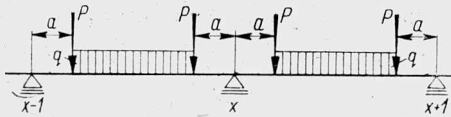
Ogólna całka równania (197) przybiera w ten sposób postać

$$\mu_x = C_1 e^{x\alpha_1} + C_2 e^{-x\alpha_2} + C_3 e^{x\alpha_2} + C_4 e^{-x\alpha_1}, \quad (205)$$

gdzie C_1, C_2, C_3 i C_4 są to dowolne wielkości stałe.

Przechodząc do rozwiązania pełnego równania (194) musimy ustalić przede wszystkim kształt wyrazu Q_x zależny od obciążenia belki ciągłej.

Przypuścimy, że wszystkie przęsła belki ciągłej obciążone są w jednaki sposób i że obciążenie każdego z nich jest symetryczne względem środka przęsła. Przykład takiego obciążenia podany jest na rys. 51, na którym fragment belki ciągłej przed-



Rys. 51

stawiony został w rozwinięciu na płaszczyznę pionową. Przy tego rodzaju obciążeniu

$$\psi'_x = \psi'_{x-1} = \psi_x = \psi_{x+1}, \quad (206)$$

a więc wyrażenie (195) staje się równe zero, czyli $Q_x = 0$.

Do takiego samego wyniku dojdziemy również w razie obciążenia jednego z końców belki bądź przez moment działający w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez oś ostatniego przęsła dźwigara, bądź też przez moment działający w płaszczyźnie prostopadłej do osi tego przęsła.

Jeżeli obciążenie wszystkich przęseł belki ciągłej jest takie samo, lecz nie jest symetryczne względem środków poszczególnych przęseł (rys. 52), wówczas

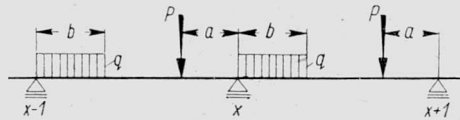
$$\psi'_x = \psi'_{x-1}, \quad \psi_x = \psi_{x+1}, \quad \psi'_x \neq \psi_x, \quad (207)$$

wyrażenie zaś (195) przybiera postać

$$Q_x = \frac{\sin \beta}{f} [\psi'_x (1 - \cos \beta) - \psi_x (1 - \cos \beta)] = a, \quad (208)$$

gdzie a oznacza wielkość od x niezależną.

Dla obciążenia zmieniającego się według prawa linii prostej (rys. 53) kąty ψ_x i ψ'_x przybierają wartości następujące :



Rys. 52

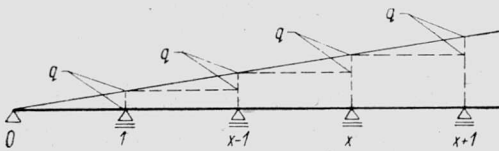
$$\left. \begin{aligned} \psi'_x &= \frac{8ql^3}{360EJ} + \frac{ql^3}{24EJ}(x-1), \\ \psi_x &= \frac{7ql^3}{360EJ} + \frac{ql^3}{24EJ}(x-1). \end{aligned} \right\} \quad (209)$$

Stąd

$$\psi_x - \psi'_x = -\frac{ql^3}{360EJ}, \quad (210)$$

$$\psi'_{x-1} - \psi_{x+1} = \frac{ql^3}{360EJ} - \frac{ql^3}{12EJ} \quad (211)$$

i $Q_x = a$, gdzie a oznacza wielkość stałą.



Rys. 53

Weźmy wreszcie pod uwagę obciążenie belki zmieniające się według prawa (rys. 54)

$$P_{x-1,x} = \frac{ql}{2}x + ql \frac{(x-1)x}{2}. \quad (212)$$

Kąty ψ_x i ψ'_x wyrażają się tu za pomocą wzorów następujących:

$$\left. \begin{aligned} \psi'_x &= \frac{8ql^3}{360EJ}x + \frac{ql^3}{24EJ} \frac{(x-1)x}{2}, \\ \psi_x &= \frac{7ql^3}{360EJ}x + \frac{ql^3}{24EJ} \frac{(x-1)x}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (213)$$

wobec czego

$$Q_x = ax + b, \quad (214)$$

gdzie współczynniki a i b nie są od x zależne.

Do podobnego wyrażenia na Q_x doprowadzają również wszystkie połączenia rozpatrywanych tu rodzajów obciążenia.

Wobec tego nadajemy równaniu (194) postać

$$\mathfrak{M}_{x+2}^0 + 2 \cos \beta \mathfrak{M}_{x+1}^0 - 6 \mathfrak{M}_x^0 + 2 \cos \beta \mathfrak{M}_{x-1}^0 + \mathfrak{M}_{x-2}^0 = ax + b. \quad (215)$$

Poszukujemy całki szczególnej równania (215) pod postacią

$$\mu_x^0 = Ax + B, \quad (216)$$

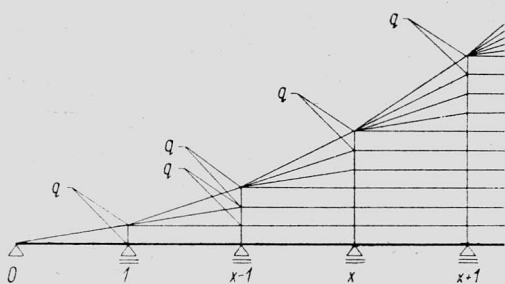
gdzie współczynniki A i B są pewnymi wielkościami stałymi.

Wstawiamy wyrażenie (216) w równanie (215):

$$\begin{aligned} A(x+2) + B + A(x+1) 2 \cos \beta + B \cdot 2 \cos \beta - 6Ax - 6B + \\ + A(x-1) 2 \cos \beta + B \cdot 2 \cos \beta + A(x-2) + B = ax + b. \end{aligned} \quad (217)$$

Po przyrównaniu do siebie współczynników przy x w obydwóch częściach równania oraz wyrazów od x niezależnych znajdujemy

$$A = -\frac{a}{8 \sin^2 \frac{\beta}{2}}, \quad B = -\frac{b}{8 \sin^2 \frac{\beta}{2}}, \quad (218)$$



Rys. 54

skąd mamy

$$\mu_x^0 = \frac{ax + b}{8 \sin^2 \frac{\beta}{2}}. \quad (219)$$

Ostatecznie dochodzimy, zgodnie ze wzorem (196), do następującego wyrażenia dla całki ogólnej równania (194) lub (215):

$$\mathfrak{M}_x^0 = C_1 e^{x \alpha_1} + C_2 e^{-x \alpha_2} + C_3 e^{x \alpha_3} + C_4 e^{-x \alpha_4} - \frac{ax + b}{8 \sin^2 \frac{\beta}{2}}. \quad (220)$$

Współczynniki C_1 , C_2 , C_3 i C_4 wyznaczamy z warunków podparcia końców dźwigara ciągłego.

Rozważmy tu niektóre przypadki tego podparcia.

Bierzemy pod uwagę dźwigar ciągły załamany w planie, czyniący za-
dość wszystkim założeniom wymienionym na początku tego rozdziału
i obciążony jednakowo we wszystkich przęsłach w sposób symetryczny
względem ich środków. Przyjmujemy dalej, że końce dźwigara są swo-
bodnie podparte i mogą się swobodnie obracać względem osi podłużnych
przęseł końcowych. Z warunków podparcia końca dźwigara wynika:

$$\mathfrak{M}_0^0 = \mathfrak{M}_n^0 = M_1 = M'_n = 0. \quad (221)$$

Ponieważ w rozpatrywanym przypadku $a = b = 0$, więc na podsta-
wie równania (220) oraz wzorów (189) i (191) warunki brzegowe zadania
wyrażają się za pomocą równań:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_0^0 = 0: & \quad C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0, \\ \mathfrak{M}_n^0 = 0: & \quad C_1 e^{n\alpha_1} + C_2 e^{-n\alpha_1} + C_3 e^{n\alpha_2} + C_4 e^{-n\alpha_2} = 0, \\ M'_n = 0: & \quad \frac{1}{\sin \beta} [C_1 e^{(n+1)\alpha_1} + C_2 e^{-(n+1)\alpha_1} + C_3 e^{(n+1)\alpha_2} + C_4 e^{-(n+1)\alpha_2}] = 0, \\ M_n = 0: & \quad \operatorname{ctg} \beta [C_1 e^{\alpha_1} + C_2 e^{-\alpha_1} + C_3 e^{\alpha_2} + C_4 e^{-\alpha_2}] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

Z równań tych wynika, że wszystkie współczynniki C równają się
zeru, jeżeli tylko nie ma miejsca równość.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{n\alpha_1} & e^{-n\alpha_1} & e^{n\alpha_2} & e^{-n\alpha_2} \\ \frac{e^{(n+1)\alpha_1}}{\sin \beta} & \frac{e^{-(n+1)\alpha_1}}{\sin \beta} & \frac{e^{(n+1)\alpha_2}}{\sin \beta} & \frac{e^{-(n+1)\alpha_2}}{\sin \beta} \\ e^{\alpha_1} \operatorname{ctg} \beta & e^{-\alpha_1} \operatorname{ctg} \beta & e^{\alpha_2} \operatorname{ctg} \beta & e^{-\alpha_2} \operatorname{ctg} \beta \end{vmatrix} = 0. \quad (223)$$

Można stąd wyciągnąć wniosek, że poszczególne przęsła dźwigara
ciągłego załamane w planie o równych kątach załamania β i o równych
przęsłach l , czyli dźwigar, który jest w planie wpisany w odcinek koła,
na końcach swobodnie podparty i obciążony jednakowo we wszystkich
przęsłach w sposób symetryczny względem ich środków, zachowują się
jak proste belki swobodnie podparte, gdyż będzie tu

$$\mathfrak{M}_x^0 = M_x = M'_x = 0. \quad (224)$$

Wynika stąd między innymi, że skręcanie poszczególnych przedziałów
pasów stalowych dźwigarów mostowych pod działaniem bocznego dzia-

łania wiatru nie jest duże, ponieważ pasy kratownic wielobocznych mogą być uważane w tym wypadku za dźwigary załamane w planie.

Rozpatrzmy teraz dźwigar ciągły załamany w planie, mający jeden koniec (koniec 0) swobodnie podparty i swobodnie obracający się, drugi zaś (koniec n) swobodnie podparty, lecz nie ulegający obrotom; obciążenie dźwigara wyobrażamy sobie jako należące do jednego z omówionych wyżej rodzajów obciążeń.

Przedstawionemu tu dźwigarowi odpowiadają następujące warunki brzegowe:

$$\mathfrak{M}_0^0 = 0, \quad M_1 = 0, \quad M'_n = 0, \quad \Theta'_n = 0. \quad (225)$$

Ostatnie z równań (225) wyraża, że przekrój poprzeczny w końcu n dźwigara ciągłego nie może się obracać względem osi podłużnej przęsła $n - 1, n$. Zamiast takiego ograniczenia obrotu możemy wprowadzić tu nieznaną na razie moment $\mathfrak{M}_n^0 = \mathfrak{M}^0$.

Moment \mathfrak{M}^0 zaczepiony do końca dźwigara nie wpływa na kąty ψ_x i ψ'_x , które są spowodowane przez bezpośrednie obciążenie poszczególnych przęseł, a przy $\psi_x = \psi'_x = 0$, a więc przy symetrycznym i jednakowym obciążeniu poszczególnych przęseł dźwigara ciągłego, mamy tu do czynienia z przypadkiem, gdy $Q_x = 0$. W tym stanie rzeczy trzy pierwsze z warunków (225) przybierają postać trzech pierwszych równań (222).

Rozwiązujemy dalej względem współczynników C_1, C_2, C_3 i C_4 cztery równania liniowe

$$\mathfrak{M}_0^0 = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_n = 0, \quad \mathfrak{M}_n^0 = \mathfrak{M}^0, \quad (226)$$

w wyniku czego możemy przedstawić poszczególne z tych współczynników jako znane funkcje nieznanego momentu \mathfrak{M}^0 :

$$C_1 = f_1(\mathfrak{M}^0), \quad C_2 = f_2(\mathfrak{M}^0), \quad C_3 = f_3(\mathfrak{M}^0), \quad C_4 = f_4(\mathfrak{M}^0). \quad (227)$$

Na podstawie równań (172) i (180) otrzymujemy wreszcie dla ostatniego z warunków (225) wyrażenie następujące:

$$\Theta'_n = \varphi'_{n-1} \sin \beta + (\Theta_{n-1}^0 + \Theta_n) \cos \beta + \Theta_n = 0. \quad (228)$$

Wstawiając zamiast wchodzących tu kątów ich wyrażenia przez momenty, a zamiast współczynników C wyrażenia typu (227), będziemy mogli nadać warunkowi $\Theta'_n = 0$ postać

$$F(\mathfrak{M}^0) = 0, \quad (229)$$

skąd znajdujemy moment \mathfrak{M}^0 , co nam rozwiązuje zadanie.

Przyjęte przy wyprowadzeniu równania (194) założenie (183) nie wpływa na kształt samego równania, wpłynąć może tylko, jak to wynika ze wzoru (186), na wielkość współczynnika przy \mathfrak{M}_x^0 , a więc jedynie na wyraz środkowy równania (194).

We wszystkich rozpatrzonych przypadkach obciążenia i podparcia dźwigara ciągłego załamane w planie możemy, po wyznaczeniu momentów \mathfrak{M}_x^0 na podstawie równań (189) i (191), otrzymać również i wszystkie momenty M_x i M'_x potrzebne do obliczenia momentów zginających M_a w poszczególnych przekrojach dźwigara.

VI. DŹWIGAR ZAŁAMANY W PLANIE JAKO SCHEMAT STATYCZNY DŹWIGARA ZAKRZYWIONEGO

Obliczeniem prętów zakrzywionych w planie zajmował się pierwszy, zresztą w formie bardzo ogólnej, *Poisson* w r. 1833. *Saint-Venant* w r. 1843, a następnie w bieżącym stuleciu *Love* i *Timoszenko* oraz kilku innych autorów zajmowało się obliczeniem dźwigarów kolistych, tzn. mających w planie kształt odcinka koła. Zagadnienie dźwigarów mających w planie inny kształt krzywoliniowy poza częścią koła nie zostało dotąd wyczerpująco rozwiązane. Nasuwa się wobec tego twierdzenie, że obliczenie dźwigarów zakrzywionych w planie, nie posiadających dotąd rozwiązania, można by zastąpić przez obliczenie dźwigarów załamanych w planie, których osie byłyby w stosunku do osi dźwigarów zakrzywionych wpisane, opisane lub też wpisano-opisane.

Słuszność takiego twierdzenia opieramy na znacznej zgodności wyników obliczeń dźwigarów załamanych w planie z wynikami obliczeń dźwigarów zakrzywionych kolistych.

Zgodność tę niżej wykażemy.

Bierzemy przede wszystkim pod uwagę dźwigar załamany w planie, omówiony w rozdziale IV.1 i przedstawiony na rys. 36. Tu $l_i = l = \text{const}$, a $\beta = 45^\circ$. Siła P zaczepiona jest w środku dźwigara. Końce 0 i 5 są całkowicie utwierdzone. Dźwigar ten jest symetryczny i symetrycznie obciążony, jest więc jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

Przeprowadzamy przekrój aa przez punkt P i rozdzielamy w ten sposób dźwigar załamany w planie 012345 na dwa dźwigary 012P i P345. Wzajemne oddziaływanie na siebie tych dźwigarów wyraża się momentem zginającym M_a , który przedstawiony jest na rysunku wektorowo i który przyjmujemy za wielkość nadliczbową. Moment skręcający przedział 23 dźwigara załamane w planie równa się zeru ze względu na symetrię dźwigara i jego obciążenia względem punktu P (ściślej osi aa). Na sku-

tek tej samej symetrii każdy z dźwigarów-wsporników 012P i P345 jest obciążony w punkcie P siłą równą $P/2$.

Momenty przedstawione wektorowo na rys. 55 wyznaczamy w zależności od P ze wzorów (2) i (3) i w zależności od M_α ze wzorów (8) i (9). W związku z tym otrzymujemy ($\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0,70711$)

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 0,70711 \frac{Pl}{2}, \\ M_2 &= 0,70711 \left(M_\alpha + \frac{Pl}{4} \right), \\ \mathfrak{M}_1^0 &= - \left(M_\alpha + 1,20711 \frac{Pl}{2} \right), \\ \mathfrak{M}_2^0 &= - 0,70711 \left(M_\alpha + \frac{Pl}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (230)$$

W zależności od tych momentów obliczamy ze wzorów (11) i (12) kąty φ_i i Θ_i (rys. 56):

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= - \frac{l}{2} \frac{l}{GJ_0} \left(M_\alpha + 1,20711 \frac{Pl}{2} \right), \\ \varphi_2 &= \frac{Pl^2}{4} \frac{l}{EJ} + 0,70711 \left(M_\alpha + \frac{Pl}{4} \right) \frac{l}{EJ}, \\ \Theta_2 &= - 0,70711 \left(M_\alpha + \frac{Pl}{4} \right) \frac{l}{GJ_0}, \\ \varphi_\alpha &= \frac{Pl}{16} \frac{l}{EJ} + \frac{M_\alpha}{2} \frac{l}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

Wzory (24) i (25) przybierają w danym razie postać

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_2 &= 0,70711 (\varphi_1 - \Theta_1) + \varphi_2, \\ \bar{\Theta}_2 &= 0,70711 (\varphi_1 + \Theta_1) + \Theta_2, \\ \bar{\varphi}_\alpha &= 0,5 (\varphi_1 - \Theta_1) + 0,70711 \varphi_2 - 0,5 (\varphi_1 + \Theta_1) - 0,70711 \Theta_2 + \varphi_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

Ponieważ z warunku symetrii wynika, że kąt nachylenia $\bar{\varphi}_\alpha$ przekroju poprzecznego w punkcie P względem płaszczyzny pionowej powinien być równy zero, czyli $\bar{\varphi}_\alpha = 0$, dochodzimy stąd do równania

$$\bar{\varphi}_\alpha = -\Theta_1 + 0,70711 (\varphi_2 - \Theta_2) + \varphi_\alpha = 0, \quad (233)$$

czyli do równania

$$\begin{aligned} \frac{M_\alpha l}{2GJ_0} + 1,20711 \frac{Pl^2}{4GJ_0} + 0,70711 \frac{Pl^2}{4EJ} + \frac{0,5 M_\alpha l}{EJ} + \\ + \frac{0,5 Pl^2}{4EJ} + \frac{0,5 M_\alpha l}{GJ_0} + \frac{0,5 Pl^2}{4GJ_0} + \frac{Pl^2}{16EJ} + \frac{M_\alpha l}{2EJ} = 0 \end{aligned} \quad (234)$$

lub, przy $\varepsilon = EJ/GJ_0$, do równania

$$1,5 M_\alpha l + 0,5 \varepsilon M_\alpha l + 0,48927 Pl^2 + 0,30178 \varepsilon Pl^2 = 0, \quad (235)$$

skąd

$$M_\alpha^z = -0,3955 Pr. \quad (236)$$

Weźmy pod uwagę w dalszym ciągu dźwigar zakrzywiony w planie mający oś w kształcie półkola o promieniu r , wpisanego w oś dźwigara przedstawionego na rys. 55. Dźwigar kolisty jest utwierdzony, podobnie jak dźwigar załamany, w punktach 0 i 5 i obciążony ciężarem P w środku. Moment zginający M_α w punkcie P równa się w tym wypadku

$$M_\alpha^k = -0,3183 Pr. \quad (237)$$

Z równania (238) natomiast, wobec zależności geometrycznej $l = 0,8284 r$ i przy $\varepsilon = 1$, znajdujemy

$$M_\alpha^z = -0,3278 Pr. \quad (238)$$

Momenty M_α obliczone dla dźwigara załamane go w planie i dla dźwigara półkolistego, przy ich wzajemnym rozmieszczeniu według rys. 55, różnią się od siebie o 3⁰/₀.

O ile oś dźwigara załamane go jest wielobokiem wpisanym-opisanym w stosunku do dźwigara kolistego, a więc gdy $l = 0,7969 r$, wówczas otrzymujemy, że

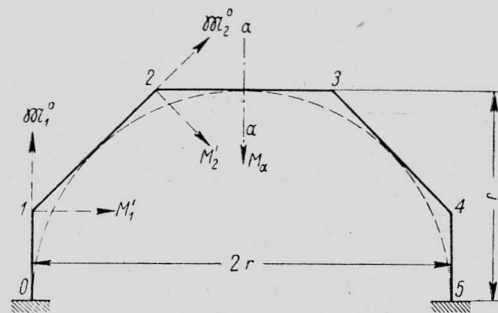
$$M_\alpha^k = -0,3150 Pr, \quad (239)$$

czyli że różnica między momentami M_α^k i M_α^z spada tu do 1⁰/₀.

W przypadku dźwigara załamane go w planie wpisanego w dźwigar półkolisty, tzn. przy $l = 0,7659 r$, będziemy mieli

$$M_\alpha^z = -0,3027 Pr, \quad (240)$$

przy czym różnica między M_α^z i M_α^k wynosi 5⁰/₀.



Rys. 55

Wahania stosunku ε przyjętego wyżej za równy 1 w małym tylko stopniu odbijają się na wartościach momentu M_α^z . Widać to z zestawienia następującego opartego na równaniu (235):

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } \varepsilon = 1 \qquad R_\alpha^z = -0,315 Pr, \\ \text{dla } \varepsilon = 10 \qquad R_\alpha^z = -0,335 Pr, \\ \text{dla } \varepsilon = 100 \qquad R_\alpha^z = -0,338 Pr, \\ \text{dla } \varepsilon = 1000 \qquad R_\alpha^z = -0,339 Pr, \end{array} \right\} \quad (241)$$

z którego wynika też, że wpływ wartości stosunku ε na momenty M_α jest mniejszy przy dużych ε niż przy małych. Jest to szczególnie ważne z tego powodu, że dla przekrojów dwuteowych, często występujących w konstrukcjach budowlanych, stosunek ε dojść może do wartości 500.

Bardziej złożony typ obciążenia może spowodować większe rozbieżności między wartościami wielkości statycznie niewyznaczalnych dźwigara załamanego w planie, a wpisanego dźwigara półkolistego. Ma to miejsce z tego powodu, że w danym razie większość punktów zaczepienia obciążenia nie pokrywa się w obu dźwigarach ze sobą. Niezgodność wyników obliczenia nie jest jednak zbyt wielka i może być pokryta przez pewne przesunięcie osi dźwigara półkolistego w stosunku do osi dźwigara załamanego w planie. Wskazuje na to obliczenie następujące.

Rozpatrujemy, mianowicie, dźwigar przedstawiony na rys. 55, obciążony w sposób ciągły i równomierny przy natężeniu obciążenia q kg/cm. Przypadek ten różni się więc od przypadku tylko co rozpatrzonego jedynie obciążeniem dźwigara.

Rozdzielamy dźwigar, jak poprzednio, przekrojem aa na dźwigary-wsporniki 012 a i a 345 i zaczepiamy do ich końców moment M_α przedstawiony na rysunku wektorowo. Moment M_α wyznaczamy tu, jak poprzednio, z równania (233). Dla kątów φ i Θ otrzymujemy wyrażenia następujące:

$$\left. \begin{array}{l} \Theta_1 = -\frac{M_\alpha l}{2GJ_0} \left[0,70711 \frac{ql^2}{2} + (0,70711 + 0,25) \frac{ql^2}{2} \right] \frac{l}{2GJ_0} = \\ \qquad \qquad \qquad = -0,5 \frac{M_\alpha l}{GJ_0} - 0,41605 \frac{ql^3}{GJ_0}, \\ \varphi_2 = \frac{ql^3}{4EJ} + 0,70711 \frac{l}{EJ} \left(M_\alpha + \frac{ql^2}{8} \right) + \frac{ql^3}{6EJ} = \\ \qquad \qquad \qquad = 0,70711 \frac{M_\alpha l}{EJ} + 0,50514 \frac{ql^3}{EJ}, \\ \Theta_2 = -0,70711 \frac{M_\alpha l}{GJ_0} - 0,08839 \frac{ql^3}{GJ_0}, \\ \varphi_\alpha = \frac{ql^3}{48EJ} + \frac{M_\alpha l}{2EJ} = \frac{0,5 M_\alpha l^2}{EJ} + \frac{0,021 ql^3}{EJ}. \end{array} \right\} \quad (242)$$

Wstawiając wyrażenia (242) we wzór (233) dochodzimy przy $\varepsilon = 1$ do równania

$$2 M_{\alpha} l + 0,8567 q l^3 = 0, \quad (243)$$

skąd

$$M_{\alpha} = -0,428 q l^2. \quad (244)$$

W przypadku dźwigara półkolistego, którego oś pozioma wpisana jest w oś dźwigara załamane w planie, przedstawionego na rys. 55, moment M_{α} w środku dźwigara wyniesie ³⁾

$$M_{\alpha}^k = -0,272 q r^2. \quad (245)$$

Wstawiając $l = 0,8284 r$ we wzór (244) znajdujemy

$$M_{\alpha}^z = -0,293 q r^2. \quad (246)$$

Różnica między momentami M_{α}^k i M_{α}^z , tzn. między momentami obliczonymi, z jednej strony, dla dźwigara zakrzywionego, a z drugiej, dla dźwigara załamane w planie, stanowi więc 6%. Jeżeli jednak porównamy ze sobą dźwigary o tym samym obwodzie, a więc dźwigary załamane w planie o boku $l = \pi r/4$, to moment M_{α}^z stanie się wówczas równy

$$M_{\alpha}^z = -0,264 q r^2, \quad (247)$$

a różnica między M_{α}^z i M_{α}^k spadnie do 3%.

Jeżeli dźwigar załamany w planie jest wpisano-opisany w stosunku do dźwigara półkolistego, to wartość momentu M_{α}^z będzie tu równa wartości momentu M_{α}^k . Jeżeli dźwigar załamany jest wpisany w dźwigar półkolisty, wówczas

$$M_{\alpha}^z = -0,251 q r^2, \quad (248)$$

a różnica między M_{α}^k i M_{α}^z wynosi 7%.

Drugim środkiem do oceny, w jakim stopniu obliczenie dźwigarów zakrzywionych może być zastąpione przez obliczenie dźwigarów załamanych w planie, jest zastosowanie do wyznaczenia odkształceń dźwigarów, wpisanych w dźwigary koliste lub opisanych dookoła nich, teorii różnic skończonych.

Weźmy pod uwagę dźwigar-wspornik o kształcie ćwierci koła (rys. 57) obciążony siłą P zaczepioną w końcu wspornika prostopadle do płaszczyzny dźwigara.

³⁾ S. P. Timoszenko, *Kurs teorii uprugosti*, t. 2.

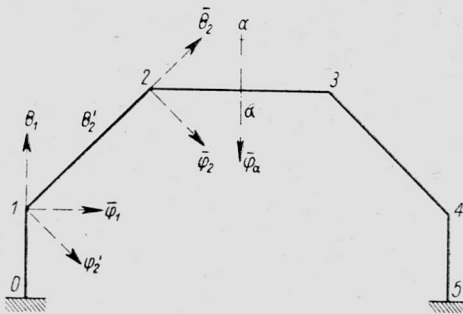
Przy $e = f$ kąt nachylenia względem płaszczyzny pionowej przekroju poprzecznego dźwigara kolistego w m odpowiadającego kątowi ω wyraża się wzorem

$$\bar{\varphi}_m = \frac{Pr^2}{EJ} (1 - \cos \omega + \omega \cos \omega), \quad (249)$$

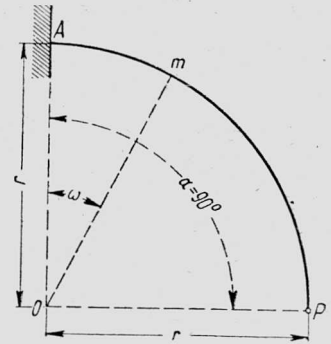
a pionowe przesunięcie w_m punktu m równa się

$$w_m = \frac{Pr^3}{EJ} (\omega - \sin \omega - 1 + \cos \omega + \omega \sin \omega). \quad (250)$$

Rozpatrzmy w dalszym ciągu dźwigar załamany w planie wpisany w ćwiartkę koła i porównajmy nachylenia końcowych, a więc dotyczących punktu zaczepienia siły P , przekrojów poprzecznych dźwigara załamane w planie i dźwigara zakrzywionego.



Rys. 56



Rys. 57

Przy $n = 10$ i $\beta = 9^\circ$ ze wzorów (73) i (81) znajdujemy

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= fl, & D_2 &= 12,70 fl, & D_3 &= 80,84 fl, \\ B_1 &= -6,44 fl, & D_2 &= -80,84 fl. \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

Wobec tego równanie (79) przybiera postać

$$\bar{\varphi}_x = -6,44 fl \sin x \beta - 80,84 fl \cos x \beta + fl x \sin x \beta + 12,70 fl x \cos x \beta + 80,84 lf, \quad (252)$$

skąd

$$\bar{\varphi}_{10} = 84,40 fl. \quad (253)$$

Wobec zależności geometrycznej między długością przedziału l dźwigara załamane w planie a promieniem r dźwigara kolistego opisanego

$$r = \frac{l}{2 \sin \frac{\beta}{2}},$$

otrzymujemy dla dźwigara kolistego dla $\omega = 90^\circ$, czyli dla punktu zaczepienia siły P ,

$$\bar{\varphi}_P = 81,84 \text{ fl.} \quad (254)$$

Różnica między kątami wyrażonymi za pomocą wzorów (253) i (254) wynosi $3,5\%$, a przy $n = 20$ spada do 3% . Wreszcie przy $n = \infty$ różnica staje się równa zeru, tzn. że kąty $\bar{\varphi}_x$ obliczone dla punktu zaczepienia siły P mają wartości te same niezależnie od tego, czy są obliczone ze wzoru (79), czy też ze wzoru (249). Przekonamy się o tym łatwo wstawiając w równanie (79)

$$n\beta = \frac{\pi}{2}, \quad l = r\beta, \quad x = \frac{\omega}{\beta},$$

i znajdując granicę kąta $\bar{\varphi}_x$, przy β dążącym do zera, jako sumę odpowiednich granic poszczególnych wyrazów równania (79). Mamy w ten sposób

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{fl}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{Pl^2}{2EJ 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{Pr^2}{EJ}, \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{fl \sin x\beta}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} &= 0, \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{fl \cos x\beta}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} &= \frac{Pr^2}{EJ} \cos \omega, \end{aligned} \quad (255)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ \frac{flx}{\sin \frac{\beta}{2}} \left[\sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) \beta \cos x\beta - \cos \left(\frac{2n+1}{2} \right) \beta \sin x\beta \right] \right\} = \frac{Pr^2}{EJ} \omega \cos \omega.$$

W rezultacie znajdujemy, że wzór (79) przybiera postać wzoru (249).

W podobny sposób postępujemy również, aby wykazać, że i wzory na pionowe przesunięcie punktu zaczepienia siły P pokrywają się ze sobą przy β dążącym do zera, tzn. że wzór (84) doprowadza w tych warunkach do wzoru (250). Robimy to, jak poprzednio, dla $n\beta = \pi/2$, czyli dla dźwigara w kształcie ćwierci koła obciążonego na końcu siłą skupioną P . Ponieważ w tym wypadku $l = r\beta$, pierwsza i trzecia suma we wzorze (84) w porównaniu z sumą drugą powinny być uważane za zera, czyli że przesunięcia w powinniśmy tu szukać pod postacią granicy sumy następującej:

$$w_m = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(l \sum_1^m \bar{\varphi}_x \right). \quad (256)$$

Na podstawie rozważań dotyczących porównania ze sobą obliczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych i odkształceń w przypadku dźwigarów załamanych w planie i dźwigarów w kształcie odcinka koła, z których ważniejsze wyłożone zostały wyżej, dochodzimy do wniosków następujących:

(1) zastąpienie przy wyznaczaniu wielkości nadliczbowych dźwigarów kolistych przez wpisane lub wpisano-opisane dźwigary załamane jest możliwe nawet przy niewielkiej liczbie przedziałów;

(2) zastąpienie przy wyznaczaniu odkształceń dźwigarów kolistych przez dźwigary załamane w planie jest możliwe tylko przy znacznej liczbie przedziałów dźwigara załamanego, np. 10-20 na ćwiartkę koła, gdyż przy małej liczbie przedziałów błąd w odkształceniach może być niedopuszczalnie duży.

Zarówno te wnioski, jak również wszystkie rozważania poprzednie pozwalają twierdzić, że obliczenie dźwigarów krzywoliniowych innego kształtu niż odcinek koła również może być zastąpione przez obliczenie dźwigarów załamanych w planie. Należy wtedy kierować się wskazówkami następującymi:

(1) jeżeli decydujemy się na dużą liczbę przedziałów dźwigara załamanego w planie, należy wpisać w oś dźwigara zakrzywionego oś dźwigara załamanego w ten sposób, aby obie osie jak najlepiej do siebie przylegały;

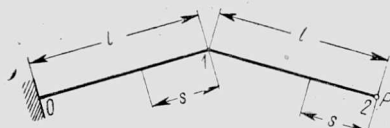
(2) jeżeli pragniemy ograniczyć liczbę przedziałów dźwigara załamanego w planie, wówczas wykreślamy osie dźwigara załamanego wpisano-opisanego oraz wpisano-opisanego, przeprowadzamy obliczenie wielkości nadliczbowych we wszystkich trzech wypadkach i za prawdziwe przyjmujemy te ich wartości, które dają największą gwarancję bezpieczeństwa;

(3) momenty zginające, siły poprzeczne i naprężenia wskazane jest obliczać już na podstawie rzeczywistego krzywoliniowego kształtu dźwigara biorąc pod uwagę wielkości statycznie niewyznaczalne obliczone dla dźwigara załamanego.

Zastąpienie obliczenia dźwigara zakrzywionego w planie przez obliczenie dźwigara załamanego o odpowiednim kształcie jest w wielu wypadkach jedynym sposobem obliczenia dźwigara krzywoliniowego, gdyż liczba rozwiązanych przypadków dźwigarów zakrzywionych w planie jest jeszcze mała. Dokładność obliczeń może tu być przystosowana do warunków konstrukcji; odpowiada ona na ogół dokładności obliczenia łuków na podstawie podziału ich osi na odcinki skończone.

VII. UWAGI DOTYCZĄCE WSZYSTKICH TYPÓW
DŹWIGARÓW ZAŁAMANYCH W PLANIE

Wyznaczenie odkształceń dźwigarów załamanych w planie wykonane było wszędzie wyżej sposobem geometrycznego dodawania odkształceń jako najwłaściwszym do gruntownego zbadania pracy konstrukcji. Sposób ten daje z kolei podstawę do oceny możliwości zastosowania w przypadku dźwigarów załamanych w planie innych znanych metod obliczenia odkształceń i wyznaczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych, w szczególności metody energii sprężystej oraz metody Maxwella i Mohra.



Rys. 58

Obliczymy tu pierwszą z tych metod odkształcenie dźwigara przedstawionego na rys. 58, a więc dźwigara-wspornika załamane w planie o dwóch równych przedziałach l , obciążonego na końcu siłą P .

Na podstawie wzorów (1) i (2) rozdziału II ustalamy, że przedział 01 jest zginany siłą $T_1 = P$ zaczepioną w węźle 1 oraz momentem $M_1 = Pl$ zaczepionym do końca przedziału 01. W tych warunkach momenty zginające w przedziałach 01 i 12 w odległościach s od końców 1 lub 2 wyrażają się wzorami

$$M_{12} = Ps, \quad M_{01} = Pl \cos \beta + Ps, \quad (257)$$

a odpowiednie momenty skręcające wynoszą tu

$$\mathfrak{M}_{12}^0 = 0, \quad \mathfrak{M}_{01}^0 = Pl \sin \beta. \quad (258)$$

W tych warunkach energia sprężysta zginania w obydwóch przęsłach dźwigara wynosi odpowiednio

$$V_{12} = \int_0^l \frac{(Ps)^2 ds}{2EJ}, \quad (259)$$

$$V_{01} = \int_0^l \frac{(Pl \cos \beta + Ps)^2 ds}{2EJ}. \quad (260)$$

Dla ustalenia energii sprężystej skręcania nagromadzonej w danym układzie musimy przyjąć pewien określony kształt przekroju poprzecznego dźwigara. W przypadku przekroju poprzecznego kolistego będziemy mieli (w przęśle 01)

$$V_{01}^0 = \frac{(\mathfrak{M}_{01}^0)^2 l}{2GJ_0} + \frac{(Pl \sin \beta)^2 l}{2GJ_0}. \quad (261)$$

Całość energii sprężystej nagromadzonej w dźwigarze-wsporniku wyraża się wobec tego sumą

$$V = V_{12} + V_{01} + V_{01}^0. \quad (262)$$

Aby stąd wyznaczyć pionowe przesunięcie w_2 punktu zaczepienia siły P , stosujemy równanie *Castigliana*

$$w_2 = \frac{\partial V}{\partial P}, \quad (263)$$

skąd znajdujemy (wobec $GJ_0 = 2EJ$)

$$w_2 = \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{EJ} + \frac{Pl^3}{EJ} \cos^2 \beta + \frac{Pl^3}{EJ} \cos \beta + \frac{Pl^3}{2EJ} \sin \beta, \quad (264)$$

co zgadza się całkowicie z wynikiem otrzymanym w drodze geometrycznego dodawania odkształceń.

W przypadku bardziej skomplikowanego kształtu przekroju poprzecznego metody energii sprężystej nasuwają przy obliczeniu dźwigarów załamanych w planie pewne trudności, o ile chodzi o ustawianie wzorów na energię skręcania.

Stosując metodę *Maxwella* i *Mohra* do wyznaczenia przesunięcia w_2 obliczamy momenty zginające i skręcające w dźwigarze wywołane siłą 1 zaczepioną w punkcie 2:

$$\bar{M}_{12} = 1 \cdot s, \quad (265)$$

$$\bar{M}_{01} = 1 \cdot l \cos \beta + 1 \cdot s, \quad (266)$$

$$\bar{\mathfrak{M}}_{12}^0 = -1 \cdot s. \quad (267)$$

Wzór *Maxwella* i *Mohra* dla dźwigarów-wsporników załamanych w planie przyjmuje w zastosowaniu do przesunięcia w_2 postać następującą:

$$w_2 = \int \frac{M \bar{M} ds}{EJ} + \int \frac{\mathfrak{M}^0 \bar{\mathfrak{M}}^0 ds}{EJ}, \quad (268)$$

gdzie całki dotyczą całej długości dźwigara. Wstawiając tu momenty M i \mathfrak{M}^0 ze wzorów (257) i (258), a momenty \bar{M} i $\bar{\mathfrak{M}}^0$ ze wzorów (265)-(267) i wykonując całkowanie w granicach długości poszczególnych przedziałów dźwigara dochodzimy znowu do wyniku (264).

Jak widzimy, nie może być zasadniczych zastrzeżeń również co do stosowania metody *Maxwella* i *Mohra* do dźwigarów-

wsporników załamanych w planie, a tym samym, w myśl uwag paragrafu 2 rozdziału II, i do dźwigarów załamanych w planie w ogóle.

We wszystkich przykładach obliczonych w tej pracy przyjmowaliśmy, nie zmniejszając tym ogólności wysnuwanych wniosków, a skracając natomiast obliczenia, że $EJ = GJ_0$, lub że przekrój poprzeczny dźwigara ma kształt koła. Przy innych przekrojach poprzecznych należy zastosować dla obliczenia kąta skręcenia te wzory i teorie, które zagadnienie skręcenia rozwiązują w przypadku różnych typów prętów.

Poszczególne przedziały dźwigarów załamanych w planie doznają jednocześnie zginania i skręcania. Wymiary ich należy wobec tego sprawdzać według reguł teorii wytrzymałości materiałów dotyczących prętów, w których występują złożone stany naprężenia, w szczególności prętów narażonych jednocześnie na naprężenia normalne i styczne.

Резюме

БАЛКИ, ИМЕЮЩИЕ В ПЛАНЕ ВИД ЛОМАНЫХ ЛИНИЙ

Работа основана на шести трудах автора, перечисленных в предисловии.

Балку, имеющую в плане вид ломаной линии, будем называть дальше просто многоугольной балкой и под этим термином будем понимать балку, продольная ось которой в недеформированном состоянии является ломаной линией, лежащей в плоскости, перпендикулярной к направлению действия сил. Пример такой балки представлен в перспективе на фиг. 1 и в плане на фиг. 2. Её характерной чертой является то обстоятельство, что при нагрузке она подвергается не только изгибу, но и скручиванию.

На фиг. 5 представлена многоугольная консольная балка. Поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты в таких балках выражены формулами (1)-(9). Деформации всякого рода многоугольных балок можно свести к деформации многоугольных консольных балок. Отдельные узлы балки принимают участие в следующих оборотах, представленных в виде векторов на фиг. 14:

- (1) по отношению к оси $j, j+1$ (угол оборота θ'_{j+1}).
- (2) по отношению к оси $j-1, j$ (угол оборота $\bar{\theta}_j$).
- (3) по отношению к оси перпендикулярной к оси $j, j+1$ (угол оборота φ'_{j+1}).
- (4) по отношению к оси перпендикулярной к оси $j-1, j$ (угол оборота $\bar{\varphi}_j$).

Для этих углов оборота установлены рекуррентные формулы (16)-(25). В связи с этим, прогибы балки в отдельных её узлах выражены формулой (13). Для расчета многоугольных балок удобно воспользоваться теорией конечных разностей.

Этот вопрос рассмотрен в главе III.

Глава IV посвящена статически неопределимым многоугольным балкам. Это баллонные (фиг. 33) и неразрезные (фиг. 37) балки.

В главе V выведено уравнение (194) пяти последовательных крутящих моментов \mathfrak{M} в неразрезной балке. Это уравнение облегчает расчет неразрезных многоугольных балок, подобно тому, как уравнение трех моментов облегчает расчет прямых неразрезных балок. Уравнение (194) является уравнением конечных разностей 4-го порядка.

В главе VI доказано, что для расчета балки кривой в плане, можно воспользоваться расчетом многоугольной балки, ось которой является в отношении к оси кривой балки многоугольником вписанным, описанным или же вписано-описанным.

Рассуждения приведенные в отдельных главах сопровождаются численными примерами.

Summary

BEAMS HAVING A HORIZONTAL PROJECTION IN THE SHAPE OF A BROKEN LINE

This paper is based on the six treatises by the same author which are listed in the introduction.

Beams having a horizontal projection in the shape of a broken line, will be referred to in this paper, as broken line beams. A broken line beam is defined as beam whose axis represents, in non-deformed state, a broken line in the plane perpendicular to the direction of active forces. An example of such a beams is shown in perspective in Fig. 1, and in horizontal projection in Fig. 2. It is subjected not only to bending but also to torsion, which is its main feature.

Fig. 5 shows a broken line cantilever beam. Shearing forces as well as bending and twisting moments are expressed by Eqs. (1)-(9). The deformations of various types of broken line beams can be reduced to those of ordinary cantilever beams, each point undergoing rotations, represented vectorially in Fig. 14, about the following axes:

- (1) $j, j + 1$ (angle of rotation θ'_{j+1}),
- (2) $j - 1, j$ (angle of rotation θ_j),
- (3) perpendicular to $j, j + 1$ (angle of rotation φ'_{j+1}),
- (4) perpendicular to $j - 1, j$ (angle of rotation $\bar{\varphi}_j$).

For these angles of rotation the formulae of recurrence (16) - (25) are deduced. Thus the deflection at each point is represented by Eq. (13).

The theory of finite differences provides a good calculation method for broken line beams. This problem is discussed in chapter III.

Chapter IV deals with statically indeterminate broken line girders represented by «balcony» and continuous girders, Figs. 33 and 37 respectively.

In chapter V the equation of five successive twisting moments M , (194), for a continuous girder is deduced. This facilitates the calculation of a continuous broken line girder in a similar manner, as the equation of three moments facilitates the calculation of a straight continuous beam. This is a difference equation of the fourth order.

In chapter VI the author shows, that the calculation of beams curved in the horizontal plane can be replaced by one pertaining to broken line beams, the axes of which are inscribed or circumscribed or representing a broken line, part of which is inscribed and the rest circumscribed

The considerations of each chapter are illustrated by numerous examples.

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 października 1953 r.



SPIS TREŚCI

	Str.
Przedmowa	3
I. Charakterystyka dźwigara załamane go w planie	5
II. Statycznie wyznaczalne dźwigary załamane w planie^a	7
1. Siły poprzeczne, momenty zginające i skręcające w dźwigarach-wspornikach załamanych w planie	7
2. Ódkształcenie dźwigarów-wsporników załamanych w planie	10
3. Dźwigary na trzech podporach	16
III. Zastosowanie różnic skończonych do obliczenia dźwigarów załamanych w planie	18
1. Dźwigary o stałym kącie załamania	18
2. Dźwigary o zmiennym kącie załamania	26
IV. Statycznie niewyznaczalne dźwigary załamane w planie	30
1. Dźwigary balkonowe	30
2. Dźwigary ciągłe załamane w planie	39
V. Równanie pięciu momentów skręcających	48
VI. Dźwigar załamany w planie jako schemat statyczny dźwigara zakrzywionego	57
VII. Uwagi dotyczące wszystkich typów dźwigarów załamanych w planie	65

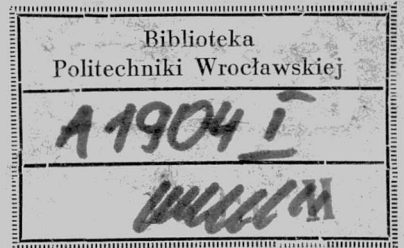
KOMITET REDAKCYJNY

R O Z P R A W I N Ż Y N I E R S K I C H

prosi autorów o przestrzeganie następujących wskazówek

- (1) Prace w języku polskim, przepisane na maszynie (nie światłodruki), należy składać w dwóch egzemplarzach. Wzory powinny być napisane wyraźnie atramentem, rysunki (szkice) dołączone na oddzielnych kartach (nie w tekście).
 - (2) Obowiązuje numeracja dziesiętna wzorów [np. wzór 5 w p. 2 oznacza się (2.5)]. Numery wzorów należy umieszczać z lewej strony. Należy unikać numeracji rzymskiej i alfabetycznej (wzorów, rysunków, paragrafów, rozdziałów).
 - (3) Do pracy należy dołączyć streszczenie nie przekraczające jednej strony maszynopisu w języku polskim (również wtedy, gdy autor składa streszczenie w języku obcym) i podać ewentualnie terminologię w dwóch językach (w tym jeden rosyjski), na które streszczenie ma być przełożone.
 - (4) Literaturę cytowaną w tekście należy zestawić w końcu pracy podając nazwisko i imię autora, tytuł pracy, miejsce i rok wydania (w przypadku cytowania czasopisma również numer zeszytu). Nazwiska i tytuły rosyjskie należy pisać alfabetem rosyjskim. W tekście należy powoływać się na numery prac (w nawiasie kwadratowym, np. [5]) według zestawienia.
 - (5) Funkcje trygonometryczne należy oznaczać przez \sin , \cos , tg , ctg ; funkcje hiperboliczne z dodaniem litery h . Współczynnik Poissona oznacza się przez ν . Kresek pionowych używa się tylko do oznaczenia wartości bezwzględnej. Wszelkie zestawienia należy nazywać tablicami (nie tabelami).
 - (6) Autorowi przysługuje prawo do przeprowadzenia ostatecznej korekty (bez zmian tekstu) dokładnie w terminie wyznaczonym przez Redakcję.
 - (7) Redakcji przysługuje prawo do przeprowadzenia korekty stylistycznej i do dostosowania oznaczeń oraz układu pracy do norm przyjętych w ROZPRAWACH.
- Niestosowanie się do powyższych wskazówek opóźnia publikację pracy

WYDAWNICTWO
ZAKŁADU MECHANIKI OŚRODKA
P O L S K I E J A K A D



ARCHIWUM MECHANIKI

KWARTALNIK POŚWIĘCONY PRACOM NAUKOWYM Z ZAKRESU TEORII
SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMO-
DYNAMIKI ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TEORII KONSTRUKCJI

Ukazały się tomy I—V oraz zeszyt 1 tomu VI. W druku zeszyt 2 tomu VI

R O Z P R A W Y I N Ź Y N I E R S K I E

U K A Z A Ł Y S I Ę

- I. F. Szelaḡowski, Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych
— O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego
- II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic
- III. Z. Klębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia
- IV. M. Zyczkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej
- V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć
- VI. W. Olszak, Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (Plastyczne wyczerpanie nośności)
- VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu
- VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt na podstawie metody Ritza
- IX. W. Fiszdon, O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań
- X. Z. Wasiułyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych

W D R U K U

- XI. W. Wierzbicki, Dźwigary załamane w planie
- XII. W. Wierzbicki, O powstawaniu wybočenja prętów prostych
- XIII. I. Malecki, Metody zastosowania rachunku tensorowego w technice
- XIV. W. Żenczykowski, Podstawy wytrzymałościowe obliczeń statycznych konstrukcji murowanych z cegły
- XV. J. Nowiński, Podstawy teorii plastyczności. Siedem wykładów z teorii plastyczności
- XVII. W. Nowacki, Statyka rusztów płaskich