# MECHANICA
SIVE
# MOTVS
# SCIENTIA
# ANALYTICE
EXPOSITA

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

---

## TOMVS I.



---

*INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.*



PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

VIRO ILLVSTRI
ATQVE
EXCELLENTISSIMO
# JOANNI ALBERTO
# DE KORFF
DOMINO HAEREDITARIO PRAEDIORVM
RENGENHOFFIENSIVM
SERENISSIMAE
ATQVE
POTENTISSIMAE RVSSORVM
IMPERATRICIS
CAMERARIO ORDINARIO
ATQVE
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPER.
PRAEFECTO.

## VIR ILLVSTRIS

*Cum, quae his praeteritis annis de motu corporum partim collegi et in ordinem digessi, partim ipse sum meditatus, mandauisses Vir Illustris, vt typis excuderentur, ea Tibi potissimum offerre atque dedicare non vereor. Tanta enim sunt*

Tua

Tua tam ad excolendas et augendas omnis generis ſcientias et artes, quam ad academiam ad ſummum felicitatis faſtigium euehendam, ſtudia et curae, vt Tibi omnes harum rerum cultores multum, academici autem plurimum deuincti eſſe debeant. Maximum propterea in poſterum et feliciſſimum ſucceſſum certo ſperare poſſumus, quod Auguſtae, Imperatrici noſtrae Clementiſſimae pro ſumma Eius in ſtudia propenſione placuerit Tibi potiſſimum academiae ſcientiarum curam committere, Teque laborum noſtrorum arbitrum atque iudicem conſtituere. Hoc igitur munere ita defungi decreuiſti, vt ante omnia ſtatum Academiae ad inſtitutum fundationis reformares, atque in ordinem conuenientem redigeres, tum vero vt academicorum quisque tam in docendis quam excolendis ſcientiis omne ſtudium operamque impenderet, ad quae officia exequenda non ſolum Ipſe Tuo exemplo et auctoritate quemque excitas, ſed etiam ex Auguſtae ſumma munificentia, quicquid opus eſt, largiter ſuppeditas. Equidem in hoc tractatu de motu vtrique horum officiorum, quae requiris satisfecisse mihi videor; primo enim omnia ordine ad docendum maxime idoneo disposui, atque in iis explicandis perpetuo vsus sum methodo analytica, quae synthesi in instruendo merito longe praeferri solet. Deinde vero non pauca omnino noua passim adieci, quibus hanc de motu scientiam pro viribus adauxi atque locupletaui. Hunc ergo laborem meum, quem tam docentibus quam discentibus non inutilem fore confido, vt benigne excipere digneris enixe rogo atque obsecro, meque Tuo fauori atque beneuolentiae submisse commendo

VIR ILLVSTRIS
ATQVE
EXCELLENTISSIME

Dabam Petropoli
die 1. Aug. A. 1736.

Tui obseruantissimus

Leonhardus Euler.

# PRAEFATIO.

*Mechanicae vox longo ab hinc temporis interuallo duplicem obtinuit significationem, et hoc quidem tempore eo nomine appellantur duae scientiae tam ratione principiorum, quam ratione materiae inter se prorsus diuersae. Mechanicae enim nomen tum ei scientiae tribui solet, quae de aequilibrio potentiarum tractat, earumque inter se comparatione; tum etiam ei, in qua ipsa motus natura, generatio et alteratio explicatur. Quanquam enim in hac posteriore disciplina potentiae quoque praecipue considerantur, cum iis motus et generetur et immutetur; tamen tractationis ratio multum discrepat a priore scientia. Ad vitandam igitur omnem ambiguitatem iuuabit illam scientiam, quae de potentiarum aequilibrio et comparatione agit, Staticam appellasse, alteri vero motus scientiae soli Mechanicae nomen reliquis-*

*liquisse, quo quidem sensu hae voces iam passim sunt vsurpari solitae. Temporis praeterea ingens intercedit discrimen inter has disciplinas: Statica enim iam ante Archimedis tempora excoli coepit, Mechanicae vero prima demum iecit fundamenta Galilaeus, dum grauium descensum inuestigauit.* His *vero posterioribus temporibus post inuentam Analysin infinitorum tanta vtraque scientia cepit incrementa, vt quae ante tam longo temporis interuallo erant eruta, prae his propemodum euanescant. Ista vero tam multa inuenta, quibus hae scientiae ad hoc vsque tempus sunt adauctae et promotae, per tot diaria et opera sunt sparsa, vt harum rerum studioso sit difficillimum ea conquirere et peruoluere. Praeterea, quod maximam parit molestiam, alia sine omni analysi et demonstratione sunt proposita, alia nimis perplexis et more veterum concinnatis demonstrationibus sunt munita, alia vero ex alienis et minus genuinis principiis deriuata, vt nisi cum summo labore maximoque temporis dispendio cognosci et digeri nequeant. Quod quidem ad Staticam attinet, completum fere et omnibus numeris absolutum opus prodiit* Varignonii *duobus constans voluminibus, Gallico idiomate conscriptum. Quod etiamsi Mechanicae titulum prae se ferat, tamen totum est occupatum in*

*defi-*

*definiendo aequilibrio potentiarum cuiusque modi corporibus applicatarum; neque ibi vix quicquam continetur, quod ad motum, eamque scientiam, quam hic Mechanicae nomine indicamus, pertineat. Celeb.* Wolfius *etiam in suis Matheseos Elementis praesertim nouissimae editionis multa praeclara cum ad Staticam tum ad Mechanicam spectantia in Elementis Mechanicis exposuit, coniunctim quidem neque vllo discrimine inter has scientias facto. Praestituti autem limites, ipsaque operis ratio ipsi non permisisse videntur tum has scientias a se inuicem discernere, tum vtramque satis ampliter explicare. Quamobrem nescio an praeter* Hermanni *Phoronomiam vnquam aliud in publicum prodierit opus, in quo haec de motu scientia seorsim et tot tantisque eximiis inuentis locuplecata esset pertractata. Etenim* Hermannus *cum ipse hanc scientiam plurimis adauxit accessionibus, tum quae illo tempore aliorum industria erant detecta, simul adiecit. At cum in illo non satis magno opere praeter Mechanicam constituisset reliquas quoque affines scientias, Staticam scilicet, et Hydrostaticam vna cum Hydraulica complecti, nimis exiguum spatium pertractandae Mechanicae restabat; quo factum est, vt omnia quae ad hanc scientiam pertinent, nimis breuiter et concise proferre co-*

 *gere-*

*geretur. Praeterea, quod lectorem maxime distinet, omnia more veterum synthetice geometricis demonstrationibus est persecutus, atque analysin, qua ad completam harum rerum cognitionem peruenitur, celauit. Non multum dissimili quoque modo conscripta sunt* Newtoni *Principia Mathematica Philosophiae, quibus haec motus scientia maxima est adepta incrementa. Sed quod omnibus scriptis, quae sine analysi sunt composita, id potissimum Mechanicis obtingit, vt Lector, etiamsi de veritate eorum, quae proferuntur, conuincatur, tamen non satis claram et distinctam eorum cognitionem assequatur, ita vt easdem quaestiones, si tantillum immutentur, proprio marte vix resoluere valeat, nisi ipse in analysin inquirat, easdemque propositiones analytica methodo euoluat. Idem omnino mihi cum* Newtoni *Principia et* Hermanni *Phoronomiam perlustrare coepissem, vsu venit, vt quamuis plurium problematum solutiones satis percepisse mihi viderer, tamen parum tantum discrepantia problemata resoluere non potuerim. Illo igitur iam tempore, quantum potui, conatus sum analysin ex synthetica illa methodo elicere, easdemque propositiones ad meam vtilitatem analytice pertractare, quo negotio insigne cognitionis meae augmentum percepi. Si-*

 *mili*

mili deinde modo alia quoque passim dispersa ad hanc scientiam spectantia scripta sum persecutus, quae omnia ad meum vsum methodo plana et aequabili exposui, atque in ordinem idoneum digessi. Hoc in negotio occupatus non solum in plurimas antea nondum tractatas incidi quaestiones, quas feliciter solutas dedi: sed etiam complures peculiares methodos sum adeptus, quibus tam mechanica quam ipsa analysis non parum augmenti accepisse videantur. Hinc igitur natus est iste de motu tractatus, in quo cum ea, quae in aliorum scriptis de motu corporum inueni, tum quae ipse sum meditatus, methodo analytica et commodo ordine exposui. Operis autem partitionem tum ab ipso corporum, quae mouentur, discrimine, tum ab eorum statu vel libero vel non libero petii. Ipsa corporum indoles mihi hanc suppeditauit diuisionem, vt primo corporum infinite paruorum et quasi punctorum motum inuestigarem, tum vero ad corpora finitae magnitudinis eaque vel rigida vel flexibilia vel ex partibus a se inuicem omnino dissolutis progrederer. Quemadmodum enim in Geometria, in qua dimensio corporum traditur, tractatio a punctis ordiri solet, ita etiam corporum finitae magnitudinis motus explicari non potest, nisi prius punctorum, ex quibus corpora composita concipienda

 sunt,

sint, motus sit diligenter examinatus. Namque corporis finitam habentis magnitudinem motus aliter considerari et determinari non potest, nisi vt definiatur, qualem quaeque eius particula seu punctum habeat motum. Quocirca haec de motu punctorum tractatio est fundamentum et praecipua pars totius Mechanicae, cui reliquae partes omnes innituntur. Huic igitur disquisitioni de motu punctorum duos hos priores Tomos destinaui, in quorum altero puncta libera in altero vero non libera sum contemplatus. Latius autem pleraque, quae in his libris tradidi, patent quam sola puncta, ex iisque saepenumero corporum finitorum motus potest determinari, totalis scilicet non vero is, quo partes singulae inter se mouentur. Ex eo enim, quod punctum in vacuo proiectum parabolam describat, quoque intelligitur quaeque corpora finita si proiiciantur, in parabolis moueri debere, motus vero singularum partium lexinde non constat, sed haec inquisitio propria est sequentium Librorum, in quibus corporum finitorum motus definietur. Simili quoque modo, quae Newtonus de motu corporum a viribus centripetis sollicitatorum demonstrauit, de punctis tantum valent, interim vero tamen ea ad motum planetarum recte transtulit. In hoc itaque primo Tomo puncta libera examini

ſubiicio, atque quamnam motus alterationem quaeque potentiae ſollicitantes iis inferant, inueſtigo: liberum autem mihi eſt corpus, quando nihil impedit, quo minus corpus ea celeritate et ſecundum eam directionem, quas tum ratione motus iam inſiti, tum ratione potentiarum ſollicitantium habere debet, progrediatur. Ita planetae et in terra corpora vel delabentia vel proiecta libere moueri dicuntur, quia in motu et vim inſitam et effectum potentiae ſollicitantis ſequuntur; at corpus ſuper pla-
no ro inclinato descendens, aut pendulum oscillationes peragens no n
libere mouetur, planum enim ſubiectum, vel pendulum altern o
termino fixum impedit, quominus corpus directe descendat, vto i
vis grauitatis poſtulat. Expono igitur Capite primo generales motus proprietates, et quae de celeritate, ſpatio et tempore tradi ſolent: atque demonſtro leges naturae vniuerſales, quas corpus liberum a nullis potentiis ſollicitatum obſeruat. Quod ſcilicet huiusmodi corpus ſi ſemel quieuerit, perpetuo in quiete perſeuerare debeat; at ſi motum habuerit, perpetuo eadem celeritate in directum progredi debeat, quarum vtraque lex ſub nomine conſeruationis ſtatus commodiſſime comprehendi poteſt. Ex quo ſequitur conſeruationem ſtatus eſſe corporum omnium proprietatem eſſentialem, atque

*omnia corpora, quatenus sunt talia, habere vim seu facultatem in statu suo perpetuo permanendi, quae nil aliud est nisi ipsa vis inertiae. Minus quidem apte vis nomen huius conseruationis caussae tribuitur, quia non est homogenea cum aliis viribus proprie sic dictis, cuiusmodi est vis grauitatis, neque cum iis comparari potest; in quo errore plures et imprimis Methaphysici versari solent, vocis ambiguitate decepti. Cum ergo omne corpus natura sua in statu eodem siue quietis siue motus perseueret, externis viribus tribuendum est, si corpus hanc legem non sequatur, sed vel motu inaequabili, vel secundum lineam curuam progrediatur. Huiusmodi vero externae vires sunt potentiae, de quarum aequilibrio et comparatione in Statica est tractandum, quae, quando in corpus agunt, eius statum perturbant, id vel mouendo vel accelerando, vel retardando vel directionem mutando. In secundo igitur Capite persequor, cuiusmodi effectum quaeque potentia in punctum liberum siue quiescens siue motum exercere debeat. Hinc conficiuntur vera Mechanicae principia, ex quibus, quicquid ad motus alterationem pertinet, explicari debet; quae, cum adhuc nimis leuiter essent confirmata, ita demonstraui, vt non solum certa sed etiam necessario vera esse intelligantur. Expositis principiis, ex quibus*

*in-*

*intelligi potest, quemadmodum motus tum conseruetur, tum a potentiis vel generetur vel alteretur, progredior ad ipsum motum corporum a potentiis vtcunque sollicitatorum determinandum et examinandum. Atque primo quidem motum considero rectilineum tanquam determinatu facillimum, qui oritur, si punctum liberum ab vnica potentia vel quiescens ad motum sollicitatur, vel iam motum in ipsa potentiae directione siue acceleratur, siue retardatur, cui disquisitioni Capita tertium et quartum dicaui, in quorum priore motum rectilineum in vacuo, in posteriore vero motum rectilineum in medio quomodocunque resistente pertracto. Quamuis enim resistentia ad potentias proprie sic dictas reduci queat, tamen in hac tractatione consultum visum est alterationem motus a resistentia seorsim tradere; cum vt alios, qui hac de re scripserunt, sequerer, tum etiam propter essentialem, quae inter potentias absolutas et resistentiam intercedit differentiam. Potentia enim absoluta seu proprie sic dicta determinatam et a motu corporis non pendentem habet directionem, atque insuper in corpus motum aeque agit, ac in quiescens; cum contra resistentiae directio sit semper in ipsa corporis moti directione sita, eiusque quantitas a celeritate corporis pendeat. Etsi vero in natura praeter resistentiam, quae quadratis celeritatum est proportionalis, alia non obseruetur, tamen alias etiam quasque resistentias pertractaui, cum vt plurium circa motum in medio resistente agitatorum problematum solutiones simul exponerem, tum vero imprimis vt plurima egregia* *calculi specimina afferendi esset occasio. In duobus denique postremis capitibus motus corporum curuilineos sum contemplatus, qui oriuntur, quando potentiarum sollicitantium directio cum corporis proiecti directione non congruit. Hoc enim casu corpus perpetuo a recto tramite retrahitur et in linea curua moueri cogitur. In quinto quidem capite motum huiusmodi curuilineum in vacuo exposui, in sexto vero capite medii resistentiam simul consideraui. Primaria ergo problemata, quae in his capitibus continentur, in hoc versantur, vt corporis vtcunque proiecti et a quibuscunque potentiis sollicitati curua, in qua moueatur, determinetur, atque simul corporis celeritas in singulis curuae punctis indicetur, hocque tam in vacuo, quam in medio resistente. Ex his vero primariis propositionibus tunc aliae sunt natae, in quibus vel ex data curua a corpore descripta, vel ex data motus quadam indole tum potentiae sollicitantes tum resistentia quaeruntur. In quo negotio in id imprimis incubui, vt omnia tam a* Newtono *quam ab aliis tractata hucque spectantia problemata complecterer, atque solutiones genuinas methodo analytica traderem. His igitur Tomus iste primus absoluitur, quem pariter ac sequentem ita conscripsi, vt qui in analysi tam finitorum quam infinitorum satis fuerit exercitatus, is mira facilitate omnia intelligere, atque sine vlla manuductione integrum hoc opus perlegere queat.*

)( o )(

# CAPUT PRMUM
## DE MOTU IN GENERE.

### DEFINITIO I.

1.

Motus est translatio corporis ex loco, quem occupabat, in alium. Quies vero est permansio corporis in eodem loco.

### Corollarium I.

2. Motus igitur et quietis ideae in alias res cadere non possunt, nisi quae locum occupant. Quare cum hoc sit corporum proprium, locum occupare, de solo corpore dici potest, quod moueatur vel quiescat.

### Corollarium 2.

3. Atque haec motus quietisque idea ita est propria corpori, vt ad omnia prorsus corpora pertineat. Nullum enim existere potest corpus, quod non vel moueatur vel quiescat.

### DEFINITIO 2.

4. Locus est pars spatii immensi seu infiniti, in quo vniuersus mundus consistit. Vocari hoc sen-

ſu acceptus locus ſolet abſolutus, vt diſtinguatur a loco relatiuo, cuius mox fiet mentio.

## Corollarium 1.

5. Quando igitur corpus ſucceſſiue aliam atque aliam huius immenſi ſpatii partem occupat, mouetur: at ſi perpetuo in eadem ſede perſeuerat, tum quieſcit.

## Corollarium 2.

6. Concipi autem animo ſolent huius ſpatii termini fixi ad quos corpora referuntur. Atque iſta relatio eſt id, quod ſitus appellatur. Quae igitur corpora eundem ſeruant ſitum reſpectu horum terminorum ea quieſcere dicuntur. Contra vero, quae ſitum ſuum mutant, moueri dicuntur.

## Scholion 1.

7. Si hac ſignificatione expoſitae voces accipiantur, vocari ſolent motus abſolutus, quiesque abſoluta. Atque hae ſunt verae et genuinae iſtarum vocum definitiones, ſunt enim accommodatae ad leges motus, quae in ſequentibus explicabuntur. Quoniam autem immenſi illius ſpatii eiusque terminorum, quorum in datis definitionibus mentio eſt facta, nullam nobis certam formare poſſumus ideam; loco huius immenſi ſpatii eiusque terminorum conſiderare ſolemus ſpatium finitum, limitesque corporeos, ex quibus de corporum motu et quiete iudicamus. Sic dicere ſolemus, corpus, quod reſpe-

ſpectu horum limitum ſitum eundem conſeruat, quiescere, id vero, quod ſitum eodem reſpectu mutat, moueri.

## Scholion 2.

8. Quae hic de immenſo et infinito ſpatio eiusque terminis dicta ſunt, conſiderari debent vt conceptus pure mathematici. Qui, quanquam metaphyſicis ſpeculationibus videntur contrarii, nihilo tamen minus ad inſtitutum noſtrum recte adhibentur. Namque non aſſerimus, dare huiusmodi ſpatium infinitum, quod habeat limites fixos et immobiles; ſed ſiue ſit, ſiue non ſit, non curantes, poſtulamus tantum, vt motum abſolutum et abſolutam quietem contemplaturus ſibi tale ſpatium repraeſentet, ex eoque de corporum ſtatu vel quietis vel motus iudicet. Ratiocinium enim commodiſſime hoc modo inſtituetur, vt animum a mundo abſtrahentes imaginemur nobis ſpatium infinitum atque vacuum, et in eo corpora collocata eſſe concipiamus, quae ſi in hoc ſpatio ſitum ſuum retinent, abſolute quieſcere, ſin autem ex alia huius ſpatii parte in aliam tranſeunt, abſolute moueri iudicanda ſunt.

## DEFINITIO 3.

9. Motus relatiuus eſt ſitus mutatio reſpectu cuiusdam ſpatii pro lubitu aſſumti. Atque quies relatiua eſt permanſio in eodem ſitu reſpectu eiusdem ſpatii. *Ita terram pro hoc ſpatio accipientes, ea quiescere dicimus, quae in terra ſitum ſuum immutatum tenent; ea vero moueri, quae ex alio ſitu reſpectu ter-*

*rae in alium progrediuntur, hocque ſenſu ſolem moueri dicimus. Simili modo in naui propulſa relatiue quieſcunt, quae eundem in naui tenent locum, et relatiue mouentur, quae in naui locum ſuum mutant.*

## Corollarium 1.

10. Conueniunt motus relatiuus et quies relatiua cum abſolutis, quando ſpatium corpusue, cuius reſpectu motus et quies iudicantur, reuera quieſcit reſpectu ſpatii illius immenſi et infiniti. Si enim terra reuera quieſcit, quae huius reſpectu mouentur et quieſcunt, etiam abſolute mouentur et quieſcunt.

## Corollarium 2.

11. Diſcrepant autem relatiuus motus et quies ab abſolutis, ſi ſpatium illud mouetur. Nam ſi terra reſpectu ſpatii infiniti non quieſcit, neque quae eius reſpectu quieſcunt, abſolute quieſcunt; atque etiam motus abſolutus differet a relatiuo. Quin imo fieri poteſt, vt corpus, quod relatiue mouetur, idem abſolute quieſcat.

## Scholion.

12. Perſpicuum eſt ſtatum hunc corporum relatiuum vel motus vel quietis innumerabilibus modis poſſe eſſe diuerſum: prout enim aliud atque aliud aſſumitur ſpatium, cuius reſpectu motus et quies diiudicantur, alii prodibunt motus relatiui aliaque quies. Sic ſtellae fixae reſpectu telluris mouentur, quaelibet vero reſpectu reliquarum quieſcit. Atque

 pla-

planetae tam respectu terrae, quam stellarum fixarum mouentur. In sequentibus autem semper et motum et quietem absolutam intelligi volo, nisi expresse monuero etiam ad relatiua pertinere, quae afferentur.

## PROPOSITIO I.
### Theorema.

13. *Omne corpus, quod siue motu absoluto siue relatiuo in alium locum transfertur, per omnia loca media transit, neque subito ex primo in vltimum potest peruenire.*

### Demonstratio.

*Pro motu absoluto* si corpus subito ex loco primo in extremum perueniret, necesse esset, vt in primo fuisset annihilatum, statimque in vltimo de nouo productum, id quod per leges naturae, nisi accedat miraculum, fieri non potest. Procedet igitur ex primo in proximum quendam, ex hocque in sequentem, donec tandem in extremum perueniat. *Pro motu relatiuo* si corpus, quod in locum spatii infiniti substituitur, re vera quiescit, superius valet ratiocinium (10). At si moueatur, ipsum quoque per singula loca media transire debet, et propterea etiam motus relatiuus erit successiuus, fietque per singula media loca. Q. E. D.

### Corollarium I.

14. Sequitur ex his etiam motum non posse fieri in instanti, sed tempore opus esse, quo ex

alio loco in alium perueniat corpus. Quia enim per ſingula loca media debet tranſire, hoc cum motu inſtantaneo conſiſtere non poteſt.

## Corollarium 2.

15. Poterit igitur etiam via aſſignari, per quam corpus tranſiit, atque ea cognita, nullum in ea erit punctum, quod corpus ex primo loco in vltimum progreſſum non attigerit. Vocari autem ſolet haec via ſpatium percurſum.

## Scholion.

16. Facile quoque eſt haec ad corpora circa axem rotata accommodare. Quoniam enim ipſum corpus ſitum ſuum non mutat: tamen motus ineſt in eius partibus, qui cognoſcetur, ſi ſingulae partes vt totidem diuerſa corpora ſeorſim conſiderantur. Singulae enim reſpectu ſpatii infiniti ſitum ſuum mutare deprehendentur, neque vllae quieſcent niſi quae in ipſo axe ſunt poſitae. Atque ſimili modo omnia corpora contemplari oportet, vt non ſolum ipſius totius, ſed ſingularum etiam partium ſitus eiusque mutatio inſpiciatur.

ullae partes quiescere
ergo

## DEFINITIO 4.

17. Corpus aequabiliter vel vniformiter moueri dicitur, quod aequalibus temporibus per aequalia ſpatia currit. Motus vero inaequabilis eſt, qui aequalibus temporibus fit per ſpatia inaequalia, ſeu qui aequalia ſpatia inaequalibus temporis interuallis abſoluit.

Corol-

## Corollarium I.

18. Corpus igitur motu aequabili latum duplo tempore abſoluit ſpatium duplum, triplo triplum, atque in genere ſpatia percurſa ſunt temporibus proportionalia, temporaque ſpatiis viciſſim. Vt nauis ſuper mari aequabili motu incedens, ſi vna hora duo percurrit milliaria, eadem duabus horis quatuor abſoluet milliaria, tribus ſex, et *n* horis 2*n* milliaria.

## Corollarium 2.

19. Quamobrem ſi datur motus aequabilis, habebitur ex eo accurata temporis menſura, quae niſi ex motu cognoſci non poteſt. Metiendis enim ſpatiis, quae corpus aequabiliter motum percurrit, innoteſcet ſimul temporum, quibus ea erant percurſa, ratio.

## Scholion.

20. Neque vero aliunde habemus temporis in annos, dies, et horas diuiſionem, niſi ex motu, quem tanquam aequabilem ſpectamus. Poſita enim terra quiescente crediderunt veteres ſolem motu aequabili ferri, tempusque, quo circa terram reuoluitur, diem appellauerunt. Porro ſumſerunt ſtellarum fixarum circa terram motum quoque eſſe aequabilem, atque tempus, quo ſol in eundem reſpectu ſtellarum fixarum locum, reuertitur, annum poſuerunt. Denique haec tempora in partes aequales diuiſerunt, hocque modo horas, et minuta ſunt ade-

adepti. Facile autem patet, si motus isti non sint, vt creduntur, aequabiles, hanc quoque temporum mensuram esse erroneam. Atque re ipsa recentiores astronomi in his motibus inaequalitatem detexerunt, et inuenerunt dies omnes non esse aequales inter se, quamobrem correctionem etiam adhibere solent ex aliis magis aequabilibus motibus; quam temporis aequationem vocant, ex qua inaequalitas dierum cognoscitur.

## DEFINITIO 5.

21. Omne corpus, quod mouetur, celeritatem seu velocitatem habere dicitur, eaque mensuratur spatio, quod id corpus aequabiliter motum dato tempore percurrit. *Scilicet quando corpus* B *eodem tempore duplum spatium motu aequabili absoluit, quo corpus* A *etiam aequabiliter motum simplum percurrit, corpus* B *duplo maiorem habere dicitur celeritatem, quam corpus* A.

### Corollarium 1.

22. Quia igitur in motu aequabili corpus aequabilibus temporibus aequalia percurrit spatia (17.), habebit corpus aequabiliter motum perpetuo eandem celeritatem, seu velocitatem. In motu vero inaequabili corpus successiue aliam atque aliam induit celeritatem.

### Corollarium 2.

23. Celeritas autem, quam corpus inaequabiliter motum in quouis spatii percursi puncto habet,

bet, mensuranda est ex spatio, quod ea celeritate aequabiliter motum dato tempore percurrere posset.

## Corollarium 3.

23. Celeritas porro corporis aequabiliter moti absolute mensurari potest spatio, quod dato tempore verbi gratia vno minuto secundo percurritur. Atque is celeritatem corporis cuiuspiam perfecte cognoscere censendus est, qui spatium definire valet, quod corpus ea celeritate motum tempore minuti secundi percurrit.

## Scholion.

24. Maxime etiam est in vsu haec celeritatis metiendae ratio. Nautas enim nauis celeritatem exploraturos videmus spatium mensurare, quod nauis dato tempore percurrit. Vulgo autem accipiunt interuallum quatuor horarum, et inuestigant, quot milliaria nauis hoc tempore absoluat. Ex quo simul intelligitur, quot pedes nauis tempore minuti secundi percurrat, siquidem motu aequabili progrediatur.

# PROPOSITIO 2.

## Theorema.

25. *Duorum corporum aequabili motu progredientium celeritates sunt directe vt spatia quaecunque percursa et inuerse vt tempora, quibus ea spatia erant percursa.*

## Demonſtratio.

Sint duo corpora A et $a$, eorumque celeritates C et $c$; percurrat illud A ſpatium S tempore T, hoc vero $a$ ſpatium $s$ tempore $t$. Iam quia in motu aequabili ſpatia ſunt temporibus proportionalia (18.); determinabitur ſpatium, quod corpus $a$ tempore T abſoluit, ex hac proportione $t:T=s:\frac{sT}{t}$: mouebitur ergo corpus $a$ tempore T per ſpatium $\frac{sT}{t}$. At corpus A mouetur eodem tempore T per ſpatium S. Celeritates vero corporum menſurari debent ſpatiis eodem tempore percurſis (18). Quocirca erit $C:c=S:\frac{sT}{t}$ ſeu $C:c=\frac{S}{T}:\frac{s}{t}$. Ex quo ſequitur celeritates eſſe directe vt ſpatia et inuerſe vt tempora, quibus ea ſunt percurſa. Q. E. D.

## Corollarium 1.

26. Ex vltima analogia prodit haec aequatio $\frac{CT}{S}=\frac{ct}{s}$. In quouis igitur motu aequabili factum ex celeritate in tempus, ſi diuidatur per ſpatium eo tempore percurſum, dabit ſemper eundem quotum.

## Corollarium 2.

27. Erit etiam $T:t=\frac{S}{C}:\frac{s}{c}$. Ex quo ſequitur tempora eſſe in ratione compoſita ex directa ſpatiorum et inuerſa celeritatum, ſeu eſſe vt ſpatia per celeritates diuiſa.

## Corollarium 3.

28. Deinde inuenta proportio transmutatur etiam in hanc $S:s=CT:ct$. Ex qua colligitur ſpatia motu aequabili percurſa eſſe in ratione compoſita ex ratione celeritatum et ratione temporum.

Co-

## Corollarium 4.

29. Data igitur celeritate corporis aequabiliter moti vna cum ſpatio quouis deſcripto, innoteſcet tempus, quo hoc ſpatium eſt percurſum; diuidendo ſcilicet ſpatium per celeritatem. Cum enim hunc quotum tempori ſemper proportionalem eſſe oſtenderimus, poterimus eundem pro temporis menſura vſurpare.

## Corollarium 5.

30. Similiter celeritas poterit exprimi per ſpatium percurſum diuiſum per tempus, atque ſpatium etiam ipſum per factum ex tempore in celeritatem.

## Scholion 1.

31. Si enim celeritas tanta ſit, vt corpus ea motum tempore minuti ſecundi abſoluat ſpatium trium pedum, et propterea celeritatem exponamus numero 3; poterimus inuenire tempus, quo 60 pedes v. gr. eodem motu abſoluuntur. Diuidatur enim 60 per 3 quotus 20 indicabit hos 60 pedes 20 minutis ſecundis percurri. Et ſi quaeratur ſpatium tempore 12 minutis ſecundis percurſum, prodibit id 36 pedum. Atque etiam corporis 6 minutis ſecundis 48 ped. percurrentis proueniet celeritas 8, quae indicat hoc corpus minuto ſecundo 8 ped. percurrere.

## Scholion 2.

32. Atque hanc tempora, ſpatia et celeritates menſurandi rationem in ſequentibus ſemper adhibe-

bimus. Tempora nempe in minutis ſecundis perpetuo exprimemus, et ſpatia pedibus, iisque Rhenanis. Celeritates vero, vt iam eſt factum, denotabimus numero pedum, qui minuto ſecundo percurrunt. Infra quidem commodior celeritates determinandi ratio occurret, qua deinceps ſumus vſuri, ſed ea tamen ex hac naſcitur, ad eamque facile reuocatur.

## PROPOSITIO 3.

### Theorema.

33. *In motu quantumvis inaequabili, minima ſpatii elementa motu aequabili percurri concipi poſſunt.*

### Demonſtratio.

Quemadmodum enim in geometria curuarum linearum elementa vt lineolae rectae conſiderantur, ita etiam ſimili modo in mechanica motus inaequabilis in infinitos aequabiles reſoluitur. Vel enim reuera elementa aequabili motu percurruntur, vel mutatio celeritatis per huiusmodi elementa eſt tantilla, vt incrementum aut decrementum ſine errore negligi poſſit. In vtroque caſu ergo apparet propoſitionis veritas. Q. E. D.

### Corollarium 1.

34. Omnis ergo celeritatis mutatio in motu inaequabili in ſingulorum elementorum initiis fieri concipienda eſt, quia integra elementa aequabili motu percurri ponuntur.

Co-

## Corollarium 2.

35. Quare ſecundum notandi modum analyſeos infinite paruorum, ſi celeritas in primo elemento fuerit $c$, erit celeritas in ſecundo $c+dc$, in tertio $c+2dc+ddc$, et ita porro.

## Scholion.

36. Demonſtrationis datae vis hoc nititur fundamento, quod celeritatis mutatio, quae fieri poteſt, dum elementum infinite paruum percurritur, debeat eſſe infinite exigua et euaneſcere prae celeritate, quam corpus iam habet, hoc enim niſi eſſet, generaretur motus finitus in inſtanti, quod eſſet abſurdum. Interim tamen videtur haec propoſitio admitti non poſſe, ſi ipſe motus et celeritas eſt infinite parua, quo caſu incrementum vel decrementum momentaneum habere poteſt rationem finitam ad illam. Sed de hoc infra videbimus, vbi motus generatio conſiderabitur.

# PROPOSITIO 4.

## Theorema.

37. *Moueatur corpus motu vtcunque inaequabili per lineam* AM, *data vero ſit celeritas corporis in quouis loco: oportet determinare tempus, quo arcus* AM *abſoluitur.* Tab. I. Fig. 1.

## Solutio.

Sit ſpatium AM, ſiue ſit linea recta ſiue curua, $=s$, et celeritas, quam corpus habet in M ſit $c$, quae erit functio quaedam ipſius $s$. Ab M accipiatur elementum $Mm$, quod igitur motu aequabili idque celeritate $c$ percurri concipiendum est. Vocato elemento $Mm$, $ds$; erit tempus, quo hoc elementum pecurritur $= \frac{ds}{c}$ (29.). Integrando ergo habebitur tempus, quo totus arcus AM absoluitur $= \int \frac{ds}{c}$. Ad integrale vero talis adiici debebit constans, quae reddat hoc tempus $= 0$, si ponitur $s = 0$, secundum notas integrationis regulas. Q. E. J.

## Exemplum I.

38. Sit celeritas in M vt potestas quaecunque spatii iam descripti AM, scilicet $c = s^n$; erit $\int \frac{ds}{c} = \frac{s^{1-n}}{1-n}$. Ad quod constantem non opus est adiicere si $n \lessgtr 1$, vel negatiuum habeat valorem: dabit enim ipsum $\frac{s^{1-n}}{1-n}$ tempus, quo arcus AM percurritur. At si fuerit $1-n$ numerus negatiuus habebitur $\int \frac{ds}{c} = \frac{-1}{(n-1)s^{n-1}}$. Ad quod constans $\frac{1}{(n-1)0^{n-1}}$ i. e. infinita quantitas debet addi, quo totum habeatur tempus per AM. Tempore ergo in his casibus opus est infinito, quo corpus ex A in alium quemuis locum M perueniat. Quamobrem perpetuo in A persistet, neque vnquam inde egredietur. Fit hoc vero, quoties est $n$ numerus positiuus vnitate maior. Si vero est $n = 1$, tempus nequidem algebraice potest exhiberi, prouenit enim $\int \frac{ds}{s} = ls$, ad quod etiam quantitatem infinitam addi oporteret, quo tempus per AM haberetur.

Co-

## Corollarium 1.

39. In mundo ergo alii casus subsistere nequeunt, nisi in quibus celeritates motus saltem principio sint vt spatiorum percursorum potestates exponentis minoris, quam est vnitas.

## Corollarium 2.

40. Progrediatur corpus in recta AM, sitque in quouis loco celeritas eius vt applicata MN curuae AN, quae cum recta AM in A concurrat, ita vt celeritas corporis in principio A sit nulla. Perspicuum est ex praecedentibus, quo tempus per AM fiat finitum, oportere tangentem AB in A esse ad AM perpendicularem. Coincidente enim M in A debet MN fieri $= AM^n$, et $n$ numerus vnitate minor scilicet fractio ex quo normalitas tangentis sequitur. Sin vero tangens AB angulum constituat acutum vel infinite paruum cum AM, tempus per AM fiet infinitum. Tab. I. Fig. 2.

## Exemplum 2.

41. Moueatur corpus per rectam AB ita, vt descripto super ea semicirculo ANB celeritas in quouis puncto M sit vt applicata circuli in eo loco MN. Id quod ita potest intelligi, celeritatem in M tantam esse, qua corpus minuto secundo possit percurrere spatium $= m.$ MN. Ponatur huius semicirculi radius $AC = a$, spatium iam percursum $AM = s$; erit $MN = \sqrt{(2as - ss)}$. Celeritas ergo in M, quam posuimus $c$, erit hoc casu $= m\sqrt{2as-ss}$. Tab. I. Fig. 3.

Id

Idcirco tempus, quo ſpatium AM percurritur, erit $= \int \frac{ds}{m\sqrt{(2as-ss)}} = \frac{1}{ma} \int \frac{ads}{\sqrt{(2as-ss)}}$. At $\int \frac{ads}{\sqrt{(2as-ss)}}$ denotat ipſum circuli arcum AN. Quamobrem tempus, quo ſpatium AM percurritur erit $= \frac{AN}{m.AC}$ minut. ſecundis. Atque tempus, quo corpus ab A ad B mouetur erit $= \frac{ANB}{m.AC}$ min. ſec. Eſt vero quam proxime $\frac{ANB}{AC} = \frac{22}{7}$. Ergo tempus hoc erit $= \frac{22}{7m}$ minutis ſecundis. Ex quo intelligitur quantacunque ſit linea AB, eam perpetuo eodem tempore percurri.

## Corollarium 3.

Tab. I. Fig. 1. 42. Ex ſolutione problematis apparet etiam eodem tempore, quo corpus ex A in M peruenit, idem motu retrogrado ex M in A peruenturum, ſi modo in vtroque motu in iisdem locis aequales habeat celeritates.

## Corollarium 4.

Tab. I. Fig. 4. 43. Repraeſentent curuae AN applicatae MN celeritates, quas corpus in recta AN motum habet in ſingulis punctis M, conſtituat autem curua in A cum recta AM angulum recto minorem. His poſitis iam eſt oſtenſum, tempus, quo corpus ex A in M perueniet, fore infinite magnum. Quare etiam motu retrogrado corpus ex M verſus A latum poſt tempus demum infinitum i. e. nunquam in A pertingit, quamuis vbique, niſi in A habeat celeritatem finitam.

PRO-

## PROPOSITIO 5.
### Theorema.

44. *Moueantur duo corpora in rectis* AM *et* am *exprimanturque eorum celeritates applicatis curuarum* AN *et* an *similium. Dico haec corpora percursura ſpatia homologa* AM *et* am *eodem tempore.* Tab. I. Fig. 5.

### Demonſtratio.

Sint igitur AM et *am* ſpatia homologa, habebunt ea eandem rationem, quam applicatae MN et *mn*, ſit iſta ratio $m:n$; erit, poſitis AM$=s$, et MN $=c$, $am=\frac{ns}{m}$ et $mn=\frac{nc}{m}$. Eſt vero tempus per AM $=\int\frac{ds}{c}$ (37.), tempus autem per *am* habebitur ponendo $\frac{nds}{m}$ loco $ds$, et $\frac{nc}{m}$ loco $c$, in $\int\frac{ds}{c}$. Hoc vero facto iterum prodit $\int\frac{ds}{c}$: quare vtrumque tempus per AM et *am* erit $\int\frac{ds}{c}$, ſunt igitur ea aequalia. Q. E. D.

### Corollarium I.

45. Intelligitur hinc quoque ratio eius, quod §. 41. eſt dictum, ſunt enim circuli omnes curuae ſimiles et diametri ſpatia homologa.

### Corollarium 2.

46. Sit curuae AN parameter $a$, quae ſiue maior ſiue minor accipiatur, curua AN mutetur in aliam ſui ſimilem. Hoc vero vt eueniat, huiusmodi debet eſſe aequatio pro curua AN, vt applicata $c$ aequetur ſunctioni ipſarum $a$ et $s$ vnius tantum dimenſionis. Pro variis autem valoribus ipſius $a$, $s$ exprimet ſpatia homologa, ſi accipiatur $=a$ vel

*na*. Quoties igitur $c$ huiusmodi definitur aequatione, ſpatia *na*, ſiue magnum ſiue paruum ponatur $a$, aequalibus percurruntur temporibus.

## Scholion.

47. Quemadmodum, ſi $c$ aequatur functioni ipſarum $a$ et $s$ vnius dimenſionis, tempora per $a$ vel *na* ſunt omnia aequalia, quicquid ſit $a$: Ita etiam ſi fuerit $c$ aequale functioni ipſarum $a$ et $s$, quae habeat $m$ dimenſiones, tempora per $a$ vel *na*, quicquid ſit $a$, tenebunt rationem $a^{1-m}$. Nam $\frac{c}{a^{m-1}}$, erit functio vnius dimenſionis ipſarum $a$ et $s$, quae ponatur $k$. Erit ergo $c = a^{m-1}k$, et $\int\frac{ds}{c} = a^{1-m}\int\frac{ds}{k}$. At $\int\frac{ds}{k}$ dabit, poſito $s = a$ vel *na*, quantitatem conſtantem, vtcunque varietur $a$ (46.). Quamobrem $a^{1-m}\int\frac{ds}{k}$, dabit multiplum quoddam poteſtatis $a^{1-m}$. Erit conſequenter tempus per *na* vt $a^{1-m}$.

## DEFINITIO 6.

48. Scala celeritatum eſt curua, cuius applicatae repraeſentant celeritates, quas corpus motum habet in locis reſpondentibus ſpatii, quod percurrit.
Tab. I. *Ita corporis in recta* AM *moti ſcala celeritatum eſt cur-*
Fig. 6. *ua* AN, *cuius applicatae* MN *exponunt celeritatem corporis in ſingulis punctis* M.

## DEFINITIO 7.

49. Scala temporum eſt curua, cuius applicatae repraeſentant tempora, quibus partes ſpatii percurſi reſpondentes abſoluuntur. *Ita ſi curua* AT *fue-*

*fuerit eiusmodi, vt eius applicata quaeuis MT exhibeat tempus, quo ſpatium AM percurritur, curua AT erit ſcala temporum.*

## Corollarium.

50. Quemadmodum ex data ſcala celeritatum AN inueniri debeat ſcala temporum, iam ex praecedente problemate (37.) apparet. Scilicet ſi dicatur ſpatium AM$=s$, celeritas in M i. e. MN$=c$, et tempus, quo AM percurritur i. e. MT$=t$, erit $t=\int\frac{ds}{c}$. Ex data igitur curua AN conceſſis quadraturis conſtrui poteſt curua AT.

# PROPOSITIO 6.

## Problema.

51. *Data ſcala temporum* AT *inuenire et conſtruere ſcalam celeritatum* AN.

## Solutio.

Ponantur vt ante AM$=s$, MN$=c$, et MT$=t$ oportebit ex data aequatione inter $s$ et $t$ inueniri aequationem inter $s$ et $c$. Facile vero hoc efficietur ex ſupra inuento canone $t=\int\frac{ds}{c}$. Fit enim differentiando $dt=\frac{ds}{c}$, atque $c=\frac{ds}{dt}$. Ducatur ergo ad curuam AT in T normalis TO erit $\frac{ds}{dt}=\frac{MT}{MO}$. Fiat ergo vt MO ad MT, ita linea quaedam vnitate expreſſa, qua minutum ſecundum indicatur, ad quartam proportionalem, quae erit $=$MN. Sumatur igitur ab M interuallum MQ$=1$, et ducatur QN parallela normali TO, erit punctum N in ſcala celeritatum quaeſita. Q. E. I.

 Exem-

## Exemplum I.

52. Sit scala temporum linea recta ad AM vtcunque inclinata; erit $t = ms$, et $dt = mds$. Prodibit igitur $c = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{m}$. Scala celeritatum ergo erit linea recta ipsi AN parallela, atque corpus motu feretur aequabili.

## Exemplum 2.

53. Sint tempora vt potestates quaecunque spatiorum descriptorum, seu $t = s^m$, ideoque $dt = ms^{m-1}ds$. Ex quo erit $c = \frac{1}{ms^{m-1}} = \frac{1}{m}s^{1-m}$. Quare si curua AT fuerit parabola Appolloniana i. e. $t = s^{\frac{1}{2}}$; erit $m = \frac{1}{2}$, atque $c = 2s^{\frac{1}{2}}$. Ex quo apparet hoc casu scalam celeritatum quoque esse huiusmodi parabolam.

## Corollarium.

54. Intelligitur etiam, si detur aequatio inter $c$ et $t$, quomodo inueniendum sit spatium percursum $s$, atque vtraque scala celeritatum et temporum. Quia enim est $c = \frac{ds}{dt}$; erit $ds = cdt$, et $s = \int cdt$.

## Scholion.

55. Monendum hic est, ista, quae hactenus de scalis celeritatum et temporum sunt tradita, non solum ad motum absolutum spectare, sed etiam ad relatiuum pertinere. Nondum enim ipsa motus natura est considerata, neque quicquam est assumtum, quod motui absoluto esset proprium. Nunc vero afferemus quasdam propositiones, quae motui ab-

abſoluto ſunt peculiares, ex quibusque quodammodo interna inter motus abſolutos et relatiuos differentia poterit perſpici.

## PROPOSITIO 7.
### Theorema.

56. *Corpus abſolute quieſcens perpetuo in quiete perſeuerare debet, niſi a cauſa externa ad motum ſollicitetur.*

### Demonſtratio.

Concipiamus corpus hoc exiſtere in ſpatio infinito atque vacuo, perſpicuum eſt nullam eſſe rationem, quare potius in hanc vel illam plagam moueatur. Conſequenter ob defectum ſufficientis rationis, cur moueatur, perpetuo quieſcere debebit. Neque vero haec ratio in mundo ceſſat; quamuis obiici poſſet eſſe in mundo ſufficientem rationem, quare in hanc potius, quam illam plagam, cedat. Etenim non eſt credendum in ſpatio infinito illo et vacuo defectum ſufficientis rationis ad motum vnicam eſſe cauſam permanſionis in quiete; ſed nullum eſt dubium, quin in ipſa corporis natura ſita ſit cauſa huius phaenomeni. Defectus ſcilicet ſufficientis rationis non poteſt pro vera et eſſentiali cuiusquam euentus cauſa haberi, ſed tantum veritatem idque rigide demonſtrat. Quin et ſimul indicat in ipſa rei natura occultam eſſe cauſam veram eſſentialem, quae non ceſſat, ceſſante illo ſufficientis rationis defectu. Ita Archimedis demonſtratio de aequilibrio bilancis vtrinque ſibi ſimilis, non ſolum in vacuo, ſed etiam in mundo rei veritatem euincit. Alia autem eaque ge-

genuina datur huius aequilibrii ratio, quae etiam in mundo locum habet. Cum igitur in vacuo ſpatio verum ſit corpus quieſcens in quiete permanere debere; erit in ipſa corporis natura etiam huius rei ratio poſita, propter quam in mundo quoque corpus, quod ſemel quieſcit, niſi ab alia cauſa vrgeatur, in quiete perſiſtere cogatur. Q. E. D.

## Corollarium 1.

57. Eſt igitur lex in ipſa rerum natura fundata, quod omne corpus quieſcens, niſi ab alia cauſa externa ad motum ſollicitetur, in quiete debeat perſeuerare.

## Corollarium 2.

58. Quemadmodum fundamentum huius demonſtrationis ex ipſa quietis abſolutae natura eſt petitum, perperam iſta lex ad quietem relatiuam extenditur.

## Scholion.

59. Experientia autem ipſa edocemur hanc legem in quiete relatiua non valere. Videmus enim corpora in naui relatiue quiescentia, ſi nauis ſubito concutiatur, in quiete non permanere, ſed ſimul concuti et de loco ſuo moueri; etiamſi ante quieuiſſent, nullaque acceſſiſſet cauſa ea commoueus.

## Corollarium 3.

60. Simili modo, quo euicimus corpus ſemel quiescens perpetuo quiescere debere, niſi a cauſa externa afficiatur, poteſt oſtendi, corpus, quod nunc

nunc quiescit abſolute, ante hac ſemper quoque quieuiſſe, ſiquidem ſibi ipſi fuerit relictum. Vti enim nulla eſt ratio, quare potius ex hac, quam illa plaga, in eum, quo nunc ſtat, locum peruenerit, ita concludendum eſt etiam in eo loco antea ſemper conſtitiſſe.

## Corollarium 4.

61. Corpus igitur, quod ſemel quieſcit, ſi vlla cauſa externa in id neque agat, neque egerit, id non ſolum in poſterum quieſcet ſemper, ſed etiam ante perpetuo quieuiſſe ſtatuendum eſt.

## Corollarium 5.

62. Sequitur ex hoc corpus ſemel abſolute motum in quietem peruenire nunquam poſſe ſibi relictum. Nam ſi tandem quieſceret, idem oporteret antea quoque ſemper quieuiſſe, quod eſt contra hypotheſin.

# PROPOSITIO 8.

## Theorema.

63. *Corpus abſolutum habens motum, aequabiliter perpetuo mouebitur, et eadem celeritate iam antea quouis tempore fuit motum; niſi cauſa externa in id agat aut egerit.*

## Demonſtratio.

Si enim corpus motum celeritatem non conſeruaret ſemper eandem, tum vel augeri deberet vel diminui eius celeritas. Hoc autem caſu ad quietem inclinaret quod, quia nunquam quietem conſeſequi poteſt (62.) accidere nequit. Illo caſu vero ex quiete prouenisſe cenſendum eſſet, quod aeque foret abſurdum. Praeterea ſi hoc corpus in ſpatio infinito et vacuo poſitum concipiatur, eiusque via, qua eſt ingreſſum et ingredietur, conſideretur; nulla eſt ratio, quare potius in hoc maiorem minoremue habeat celeritatem, quam in illo loco, quocirca perpetuo eadem moueri debebit celeritate. Q. E. D.

## Corollarium.

64. Quoties igitur corpus motum vel celerius vel tardius ingredi videmus, cauſae externae hanc mutationem adſcribere debemus.

## PROPOSITIO 9.

## Theorema.

65. *Corpus abſoluto motu praeditum progredietur in linea recta, ſeu ſpatium, quod deſcribit, erit linea recta.*

## Demonſtratio.

Nulla eſt enim ratio, ſi corpus hoc in ſpatio infinito et vacuo poſitum concipiatur, quare in hanc potius quam aliam regionem a linea recta declinaret. Ex quo concludendum eſt, hoc ab ipſa corporis natura pendere, vt motum in linea recta progrediatur. Quamobrem in mundo etiam, vbi quidem hoc ſufficientis rationis principium ceſſat, nihilominus ſtatuendum eſt, omne corpus motum in directum progredi debere, niſi ſcilicet impediatur. Q. E. D.

Co-

## Corollarium I.

66. Ex his duabus propositionibus conficitur ista lex vniuersalis: omne corpus motu praeditum aequabiliter in linea recta progredi.

## Corollarium 2.

67. Corpus ergo quod a causis externis coactum fuit in linea curua AM progredi, si cum in M peruenerit, causae hae externae subito cessent, tum ea celeritate, quam habebat in M aequabiliter secundum directionem, quam ipso tempore liberationis habuit, in recta progredietur. Est vero tangens MT nil aliud, nisi curuae elementum in M in directum productum, quamobrem, corpus in M sibi relictum in tangente MT aequabiliter ea celeritate, quam in M habuit, progredietur. Tab. I. Fig. 7.

## Scholion I.

68. Has de absoluta quiete et motu leges auctores in vna sunt complexi. Hancque *Neutonus* in Principiis Phil. ita proponit, vt dicat: Omne corpus perseuerare in statu suo quiescendi vel mouendi vniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

## Corollarium 3.

69. Pertinent autem hae leges de motus continuatione ad motus tantum absolutos, neque eae in motibus relatiuis vim suam retinent. Quemadmodum enim fieri potest, vt corpus relatiue quiescens non perseueret in quiete, etiamsi a nullis causis

ſis externis agitetur (59.), ita etiam corpora motum habentia relatiuum non ſemper aequabiliter in directum relatiue mouebuntur.

## Corollarium 4.

70. Quando igitur corpus a nullis cauſis externis eſt ſollicitatum, id, quomodocunque inaequabiliter relatiue moueatur, tamen vel abſolute quieſcere vel vniformiter in directum moueri cenſendum eſt. Ex hocque quodammodo poteſt intelligi, quantum ſtatus relatiuus ab abſoluto differat.

## Scholion 2.

71. In Aſtronomiae principiis mechanicis, prout a *Neutono* ſunt tradita, ſtatuuntur ſol et ſtellae fixae a cauſis externis vel omnino non affici, vel tam parum, vt effectus ſit inſenſibilis. Quanquam igitur ſolem neque aequabiliter neque in directum progredi videmus reſpectu terrae, tamen eum abſolute vel quieſcere vel vniformiter in directum moueri certum erit. Difformitates ergo illae in motu ſolis obſeruatae in ipſa terra poſitae ſint neceſſe eſt.

## DEFINITIO 8.

72. Motus directio ſiue determinatio eſt linea recta in qua corpus motum vniformiter progredi conatur, et re ipſa progreditur, niſi a cauſis externis impediatur.

## Corollarium.

73. Corpus igitur habens motum abſolutum, niſi ab aliis cauſis afficiatur, perpetuo eandem motus directionem eandemque celeritatem conſeruabit.

DE-

# DEFINITIO 9.

74. Vis inertiae est illa in omnibus corporibus insita facultas vel in quiete permanendi, vel motum vniformiter in directum continuandi.

## Corollarium I.

75. Quanquam enim permansionem in quiete, motusque vniformem continuationem in directum ex principio sufficientis rationis demonstrauimus, tamen iam notauimus hanc non esse causam phaenomeni efficientem, sed eam in ipsa corporis natura esse sitam. Haec igitur ex corporum natura pendens causa status sui conseruationis est id, quod vis inertiae appellatur.

## Scholion.

76. *Keplerus*, qui primus hanc vocem formauit, tribuit eam ei vi, quam omnia habent corpora, resistendi omni illi, quod ea de statu suo deturbare conatur; atque haec vox inertiae melius cum hac resistentiae idea congruit, quam illa perseuerantiae, cum qua nos coniunximus. Sed facile intelligitur has definitiones re a se inuicem non differre, eadem enim est vis motum vel quietem continuans, et quae impedimentis resistit. Malui vero hac vti definitione, quam Kepleriana, quia nondum constat, quomodo corpora viribus sollicitantibus resistant. Praeterea vero haec ipsa resistendi vis originem habet suam ab hac quietem motumue continuandi facultate; ideoque ex hac debet explicari.

# PROPOSITIO 10.

## Theorema.

77. *Quando ſpatium, ex quo motus relatiuus determinatur, abſolute vel quieſcit vel mouetur vniformiter in directum; tum leges datae de motu et quiete etiam in ſtatu corporum relatiuo valebunt.*

## Demonſtratio.

Si ſpatium ex quo motus relatiuus diiudicatur abſolute quieſcit, propoſitum per ſe eſt clarum; Nam hoc caſu quies et motus relatiui cum abſolutis congruunt, adeoque omne corpus etiam relatiue vel perpetuo quieſcet vel vniformiter mouebitur in directum (10.). Sin vero illud ſpatium ipſum moueatur vniformiter in directum, tum ea corpora, quae relatiue quieſcunt, eundem habebunt motum abſolutum, quem habet ipſum ſpatium. Quare ea quoque vniformiter indirectum progrediuntur, hancque motum ex ſua natura poterunt continuare: vt igitur et hoc caſu lex (66.) obſeruetur. Corpus vero quod relatiue mouetur vniformiter in directum, id etiam, ſi ipſum ſpatium vniformem habet motum rectilineum, aequabiliter in recta progredietur abſolute, quemadmodum tum ex ſequente apparebit propoſitione, tum per ſe perſpicuum eſt. Motus ergo hic relatiuus quoque legi eſt conſentaneus et propterea ſine vi externa continuari poterit. Q. E. D.

## Corollarium 1.

78. Corpus igitur a nulla causa externa affectum, quod relatiue vel quiescit vel vniformiter mouetur in directum, indicio erit ipsum spatium ad quod eius motus iudicatur, absolute vel quiescere, vel in directum aequabiliter moueri.

## Corollarium 2.

79. Talis quoque motus relatiuus in suo statu per se ipsum perpetuo conseruabitur. Non solum enim ipsum, quod mouetur, corpus absolute mouetur vniformiter in directum; sed etiam spatium illud, quo relatio aestimatur, iuxta eandem legem progreditur. Quamobrem vterque motus per se continuabitur, atque motus relatiuus iste in hoc statu nulla accedente causa externa perseuerabit.

## Corollarium 3.

80. Quia omnis idea, quam de motu habemus est relatiua (7.), hae quoque leges non sufficiunt ad cognoscendum, qualis sit cuiuspiam corporis motus absolutus. Quando enim corpus a nulla causa externa affectum aequabiliter in recta progredi videmus, plus inde concludere non possumus, quam hoc corpus etiam absolute vel vniformiter in directum moueri vel quiescere. Quantus vero sit eius motus absolutus definire non licet, neque quam habeat directionem.

## Corollarium 4.

81. Quae igitur ex hac corporum natura, quod in statu suo vel quietis vel motus vniformis in-

rectum permaneant, deducentur, non solum ad motum et quietem absolutam pertinebunt, sed etiam ad eum statum relatiuum, quo spatium corpusue, ex quo motus aestimatur, vniformiter in directum progreditur.

## Scholion.

82. Atque etiam non admodum erimus solliciti de motu absoluto, cum iste relatiuus iisdem contineatur legibus. Et propterea motum hunc relatiuum ipsum saepius mutabimus in alios huiusmodi: ita tamen vt traditae leges obseruentur; si scilicet eum, relatione ad aliud corpus vniformiter in directum quoque progrediens facta, contemplabimur. Qua ratione non cessabit aequabiliter in recta progredi, idque innumerabilibus modis fieri potest, ex quibus, qui commodissimus erit, seligi poterit.

## PROPOSITIO II.

## Problema.

Tab. I. Fig. 8. 83. *Moueatur corpus absolute aequabiliter in recta* AL, *aliudque corpus aequabiliter quoque in recta* AM. *Quaeritur corporis in* AL *absoluto motu lati motus relatiuus respectu corporis alterius in* AM *progredientis.*

## Solutio.

Sit celeritas corporis in AL progredientis, $a$; et celeritas alterius in AM moti, $b$: simulque egrediantur haec corpora ex puncto A. Perspicuum est si sumantur duo spatia AL, AM in ratione celeri-

ta-

tatum *a* et *b*, ambo corpora eodem momento in L et M peruenire. Ducta igitur recta ML cum recta AM angulum faciente AML, cuius ſinus eſt ad ſinum anguli ALM, quem cum AL efficiet, vt AL ad AM i. e. vt *a* ad *b*, deſignabit L locum, in quo reperietur corpus in AL progrediens eodem momento, quo alterum in M exiſtit. Quia vero corporis illius motus relatiuus reſpectu huius deſideratur, hoc, quod in AM reuera mouetur, vt quiescens in A debet conſiderari. Puncto igitur M cogitatione in A translato, perueniet L in N ducta AN parallela et aequali ipſi ML ex A. Simili modo quando corpus in AM motum peruenit in locum proximum *m*, alterum in *l* reperietur, eritque *ml* parallela ipſi ML, quia $Mm:Ll=b:a=AM:AL$. Puncto vero *m* ſimili modo in A translato ſumendo $An=ml$ perueniet *l* in *n*, eritque *n* in eadem recta AN. Ex quo ſequitur corpus abſolute in AL motum relatiue in recta AN moueri. Celeritas autem relatiua erit ad abſolutam vt N*n* ad L*l*, ſeu vt ML ad AL. Quae ratio cum ſit conſtans ob triangulum ALM ſpecie datum corpus abſolute in AL aequabiliter motum, relatiue quoque aequabiliter in recta AN progredietur. Poſitio vero rectae AN inuenietur ſumendo angulo LAN tanto, vt eius ſinus ſit ad ſinum anguli NAM, vt *b* ad *a*. Celeritas denique abſoluta per AL erit ad celeritatem relatiuam per AN, vt ſinus anguli MAN ad ſinum anguli LAM. Q. E. I.

Co-

## Corollarium 1.

84. Corpus igitur abſolute aequabiliter in directum progrediens, quoque relatiue aequabiliter in directum promouebitur, ſi modo corpus, ex quo relatio iudicatur, quoque aequabiliter in directum progrediatur. Atque hoc eſt quod in praecedente demonſtratione (77.) aſſumſimus.

## Corollarium 2.

85. Conſtructio ceterum lineae AN et celeritatis relatiuae inuentio facillime hoc modo inſtitui poteſt. Sumtis, vt iam fecimus, AL et AM in ratione *a* ad *b* ductaque ML, ducatur huic ML parallela AN ex A, erit haec via motu relatiuo deſcripta. Celeritas vero relatiua erit ad abſolutam, vt ML ad AL.

## Corollarium 3.

86. Idem ratiocinium valet, ſi AL non motu abſoluto, ſed relatiuo percurratur, et AM eadem relatione. Tum vero prodibit corporis per AL moti alius motus relatiuus reſpectu corporis AM lati.

## Corollarium 4.

87. Patet igitur, quomodo motus abſolutus in infinitos relatiuos poſſit transmutari, qui ſemper erunt aequabiles et in directum fient, ſi modo motus abſolutus fuerit huiusmodi, et motus eorum corporum, ex quibus relatiui oriuntur.

Scho-

## Scholion.

88. Aſſumſimus in ſolutione ambo corpora ex eodem loco A egredi: ſed ſolutio non minus ſuccedit, ſi ambo corpora in principio in diuerſis punctis A et B fuerint poſita. Nam progrediatur corpus A motu abſoluto aequabiliter in recta AL, alterum vero B ſimiliter in recta BM, ita vt celeritates ſint vt *a* ad *b*. Sumantur AL et BM in eadem ratione *a* ad *b*, peruenient ambo corpora ſimul in L et M. At quia corporis A motus relatiuus reſpectu corporis B requiritur, corpus B vt quieſcens in B debet conſiderari. Transferatur ergo cogitatione corpus B ex M in B, perueniet corpus A ex L in N, ducendo BN parallelam et aequalem ipſi ML: dico punctum N fore in recta per A tranſeunte, ita vt corpus A relatiue moueatur in recta AN, idque aequabiliter. Ducta enim NL aequalis erit et parallela ipſi BM. His factis ſpecie datur triangulum ANL: quare NL ad AL habebit rationem datam, ergo ob NL=BM, erit ratio AL ad BM data, quae ergo ſi ſemel ſumta fuerit in ratione *a* ad *b*, ſemper erit eadem. Ex quo apparet punctum N eſſe in recta AN et celeritatem relatiuam per AN eſſe ad abſolutam per AL, vt AN ad AL i. e. in ratione data. Motus igitur relatiuus per AN fiet in recta, eritque aequabilis. Tab. I. Fig. 9.

## Corollarium 5.

89. Si igitur detur corporis A motus abſolutus per rectam AL, eiusque relatiuus aequabilis per

AN quacunque celeritate, poterit inueniri motus corporis B, cuius respectu motus relatiuus corporis A oritur. Sumtis enim duobus spatiis AL et AN eodem tempore percursis, ducatur per punctum quoduis arbitrarium B recta BM parallela ipsi NL, determinabit haec viam a corpore B percursam, eiusque celeritas erit ad celeritatem corporis A absolutam per AL vt est NL ad AL. Erit vero corpus B in B eodem tempore, quo est A in A.

## Corollarium 6.

90. Dantur ergo innumerabiles motus corporis B, quia punctum B pro lubitu potest assumi, ex quibus motus relatiuus corporis A idem prouenit. At corporis B celeritas semper erit eadem, eiusque directio secundum parallelam ipsi NL.

## Corollarium 7.

91. Intelligitur etiam motum absolutum aequabilem in directum tendentem transmutari posse in relatiuum quemcunque itidem aequabilem et in recta factum. Potest enim recta AN pro arbitrio duci, et celeritas per eam poni quaecunque. Semper enim datur motus aequabilis quoque et recta progrediens corporis B, ex quo hic motus relatiuus existit.

## Corollarium 8.

92. Motus deinde iste relatiuus per se sine vlla vi externa poterit continuari. Motus enim absoluti per AL et per BM, quia fiunt aequabiliter

in lineis rectis, per se continuantur. Quamdiu vero isti motus durant, tamdiu etiam relatiuus per AN continuare debet.

# PROPOSITIO 12.

## Problema.

93. *Moueatur corpus* A *absolute quomodocunque in linea* AL, *et corpus* B *in linea* BM. *Requiritur motus relatiuus corporis* A *respectu corporis* B. Tab. I. Fig. 10.

## Solutio.

Abscindantur in curuis AL et BM arcus, qui aequalibus temporibus percurruntur, AL et BM. Reperietur ergo corpus A in L, quando B in M pertingit. Sed quia corporis A motus relatiuus respectu B desideratur, corpus B vt quiescens in B debet considerari. Quare transferatur id cogitatione ex M per rectam MB in B, peruenietque corpus L in N, ducta LN parallela et aequali ipsi MB. Curua igitur in qua est punctum N hoc modo inuentum, erit via a corpore A motu relatiuo descripta. Atque hoc motu relatiuo arcus AN eodem tempore percurretur, quo arcus AL et BM absoluuntur. Ex quo celeritas relatiua in N quoque innotescit. Q. E. I.

## Corollarium I.

94. Determinari igitur hoc modo poterit motus relatiuus corporis quocunque motu lati respectu corporis quomodocunque etiam moti.

## Corollarium 2.

95. Intelligitur etiam ex ſolutione, quomodo datis curuis AN et AL vna cum motibus per eas inueniri poſſit curua BM et motus per eam. Nec non definietur curua AL ex curuis BM et AN.

## Corollarium 3.

96. Perſpicuum quoque eſt curuam BM ob punctum B arbitrarium infinitis modis poſſe aliter eſſe poſitam. Quia tamen arcus BM, qui eodem tempore, quo AL et AN, deſcribitur, ſubtenſa BM ſemper eſt aequalis et parallela lineae LN, ea ſemper erit ſibi ſimilis et aequalis et parallela, atque motus per eam perpetuo idem.

## Scholion.

97. Et haec ſunt, quae de comparatione motuum abſolutorum et relatiuorum afferenda iudicaui. Motus autem relatiuus alias hoc modo ſolet deſcribi, vt motus per AN dicatur motus corporis A, quod reuera in linea AL mouetur, qualis ex corpore B in BM moto ſpectatur. Spectator vero in corpore B relatiue quieſcens ponitur, et ipſum B vt quieſcens conſiderans. Ita motus ſtellarum relatiuus reſpecta telluris, congruit cum eo motu, quem nos in terra degentes eamque tanquam quieſcentem conſiderantes intuemur. Terra enim ex B in M promota et ſtella ex A in L, videmus eam ex M ſecundum plagam ML et in diſtantia ML. Quia vero nos de loco B motos eſſe non apprehendimus, ſed etiam nunc in B conſiſtere putamus, videbimus ſtel-

lam

iam ex B non in L, ſed in N, eadem ſcilicet plaga eademque diſtantia. Propterea recta BN aequalis erit et parallela rectae ML, vt noſtro conſiderandi modo inuenimus.

# SCHOLION GENERALE.

98. Iſtae motus leges, quas corpus ſibi relictum vel quietem vel motum continuando obſeruat, ſpectant proprie ad corpora infinite parua, quae vt puncta poſſunt conſiderari. In corporibus enim finitae magnitudinis quorum ſingulae partes alios habent motus inſitos, quaelibet pars quidem has leges obſeruare conabitur, quod autem non ſemper propter corporis ſtatum fieri poteſt. Corpus igitur ipſum eum ſequetur motum, qui ex ſingularum partium conatibus componitur, isque adhuc ob inſufficientiam principiorum non poteſt definiri, ſed haec tractatio ad ſequentia eſt differenda. Diuerſitas igitur corporum ſuppeditabit nobis operis diuiſionem primariam. Primo enim contemplabimur corpora infinite parua ſeu quae tanquam puncta ſpectari poſſunt. Deinde corpora finitae magnitudinis aggrediemur ea, quae ſunt rigida neque figuram ſuam mutari patiuntur. Tertio agemus de corporibus flexibilibus. Quarto de iis quae extenſionem et contractionem admittunt. Quinto plurium corporum ſolutorum motus examini ſubiiciemus, quorum alia impediunt, quin motus ſuos poſſint, vt conantur, abſoluere. Sexto vero de motu fluidorum erit agendum. De his vero corporibus non ſolum videbimus, quomodo ſibi

relicta motus continuent; sed praeterea inquiremus, quomodo ea a causis externis scilicet potentiis afficiantur. Denique in his omnibus disquisitionibus magnam inferet varietatem status corporum vel liber vel non liber. Per statum non liberum hic intelligo, quando corpora impediuntur, quo minus in ea directione progrediantur, qua conantur; cuiusmodi est motus corporum pendulorum, quae, quia non possunt directe, vti conantur, descendere, oscillationes efficiunt. Ex quo intelligitur statum liberum esse, quando corpora nullum inueniunt impedimentum in quamuis plagam progrediendi, in quam tum ex propria vi tum a potentiis sollicitata tendunt. Apparet igitur, quibus de rebus in Mechanica sit agendum, et quam sint multa, quae etiam nunc nequidem sunt libata. Nam praeter motum punctorum, quae adhuc sunt tractata, tam pauca sunt, vt fere omnia demum inuenire et ex principiis deriuare necesse sit. Incipio igitur a motu punctorum liberorum a potentiis quibuscunque sollicitatorum, quia, quos sibi ipsa relicta sequantur motus, hoc capite iam est ostensum. Hanc ob rem primum istum Tomum motui punctorum libero destinaui, in sequente vero punctorum motum non liberum pertractare constitui; in quorum vtroque, quae occurrent, cum ex his iam traditis, tum ex sequentibus principiis methodo analytica sum deriuaturus.

CAPUT

# CAPUT SECUNDUM
## DE
## EFFECTU POTENTIARUM IN PUNCTUM LIBERUM AGENTIUM.

### DEFINITIO 10.

99.

Potentia est vis corpus vel ex quiete in motum perducens, vel motum eius alterans. *Huiusmodi vis, ideoque et potentia est grauitas, per eam enim corpora, remotis impedimentis, ex quiete deorsum delabuntur, motusque ipse descensus ab ea continuo acceleratur.*

### Corollarium I.

100. Omne corpus sibi relictum vel in quiete perseuerat, vel motu aequabili in directum progreditur. Quoties igitur euenit, vt corpus liberum, quod quiescebat, moueri incipiat, aut motum vel non aequabiliter vel non in directum progrediatur, causa est potentiae cuidam adscribenda: quicquid enim corpus de statu suo deturbare valet, potentiam appellamus.

### Scholion I.

101. Doctrina de potentiis, quatenus plures corpori applicatae in aequilibrio consistunt, corpusque in quiete conseruant, iam in statica est exposita. Ibique potentia ita quoque est definita, vt denotet omne id, quod corpora mouere valet. Motus

tus vero ipſe in ſtatica non conſideratur, ſed ii tantum caſus inueſtigantur, quibus plures potentiae ſeſe deſtruunt, corpusque, in quod agunt, in quiete permanet. Nunc autem in Mechanica explicandum eſt, quomodo potentiae in corpus agentes, quae inter ſe non ſunt contrariae, re ipſa motum producant in corpore quiescente, in moto vero motum immutent.

## Scholion 2.

102. Vtrum huiusmodi potentiae ex ipſis corporibus originem ſuam habeant, an vero per ſe tales dentur in mundo, hic non definio. Sufficit enim hoc loco potentias in mundo reuera exiſtere, id quod vel ſola vis grauitatis, qua omnia corpora terreſtria deorſum delabi conantur, docet. Praeterea vero huiusmodi vires corpora ſollicitantes conſpicuuntur in motibus planetarum, qui niſi a quadam potentia eſſent affecti, vniformiter in lineis rectis progredi deberent. Similes etiam potentiae deprehenduntur in corporibus magneticis et electricis ineſſe, quae certa tantum corpora attrahunt. Quas omnes a motu materiae cuiusdam ſubtilis oriri alii putant, alii ipſis corporibus vim attrahendi et repellendi tribuunt. Quicquid autem ſit, videmus certe ex corporibus elaſticis et vorticibus huiusmodi potentias originem ducere poſſe, ſuoque loco inquiremus, num ex inde phaenomena haec potentiarum explicari poſſint. Interim vero potentiarum quarumuis in corpora effectus determinare co-

conabimur, quo deinceps, cum ad eorum pleniorem cognitionem peruentum fuerit, ſtatim, quae eruta ſunt, ad eas accommodari queant.

## DEFINITIO II.

103. Directio potentiae eſt linea recta, ſecundum quam ea corpus mouere conatur. *Ita grauitatis directio eſt linea recta verticalis, corpora enim grauia ſecundum eam delabi conatur.*

### Scholion 1.

104. In ſtatica, vbi omnia in quiete permanere ponuntur, omnes potentiae ſuas directiones perpetuo easdem ſeruare ſtatuuntur. At in mechanica, cum corpus perpetuo in alium perueniat locum, potentiae in id agentis directio continuo mutabitur: Pro diuerſis enim corporis locis vel potentiae directiones erunt inter ſe parallelae, vel ad fixum punctum conuergentes, vel aliam tenebunt legem, ex quo tam multiplex potentiarum in mechanica tractatio oritur.

### Scholion 2.

105. Potentiarum diuerſarum comparatio et menſura ex ſtatica quoque eſt repetenda. In qua traditum eſt potentiam aliquam $a$ ſe habere ad aliam $b$ vt $m$ ad $n$, quando potentia $a$ puncto A, $n$ vicibus Tab. I.
ſecundum directionem AB applicata, et potentia $b$, $m$ Fig. 11.
vicibus ſecundum directionem contrariam AC, punctum A perſeuerat in aequilibrio. Tum enim potentia $a$, $n$ vicibus ſumta aequiualet potentiae $b$, $m$ vicibus ſumtae, eritque $na = mb$ ſeu $a:b = m:n$.

## Scholion 3.

106. In hoc vero differt menſura potentiarum mechanica a ſtatica, quod in hac omnes magnitudinem eandem retinere ponuntur, in mechanica vero, vt perueniente corpore in alium locum earum directiones mutabiles ponuntur; ita earum quantitas ſecundum certam legem variabilis eſſe poteſt.

## PROPOSITIO 13.

## Theorema.

107. *Quando punctum a pluribus potentiis eſt ſollicitatum, eundem ab iis adipiſcetur motum, ac ſi ab vnica iis omnibus aequiualente fuiſſet ſollicitatum.*

## Demonſtratio.

Tab. I. Fig. 12. Sit punctum A ſollicitatum a potentiis AB, AC, AD, AE, quibus aequiualeat potentia AM. Sumatur huic aequalis et contrarie poſita AN, haec, vt ex ſtatica notum eſt deſtruet actionem potentiarum AB, AC, AD, AE. Primo igitur momento potentia AN tantum imprimeret puncto A motum ſecundum, AN quantum potentiae AB, AC, AD, AE ſimul agentes ei imprimerent ſecundum earum mediam directionem, quae eſt AM. Potentia vero AM ſola, quia aequalis eſt potentiae AN, tantum quoque promouebit punctum A verſus AM, quantum AN verſus AN. Quare potentia AM tantum etiam puncto A imprimet motum ſecundum AM, quantum potentiae AB, AC, AD, AE ſimul agentes

tes secundum eandem directionem AM. In vtroque igitur casu effectus erit idem. Q. E. D.

## Corollarium 1.

108. Si igitur punctum a pluribus potentiis sollicitetur, poterit id tanquam ab vnica sollicitatum considerari, quae iis omnibus est aequiualens.

## Corollarium 2.

109. Atque vicissim loco vnius potentiae in punctum agentis, possunt plures in id agentes considerari, quibus illa aequiualeat: id quod, vt ex statica manifestum est, infinitis modis fieri potest.

## Scholion.

110. Quia vero, quam primum corpus de loco suo est motum, potentiae in id agentes directiones suas et magnitudines mutant vel mutare ponuntur, potentia quoque aequiualens quouis momento erit alia. Hanc ob rem quouis momento potentiarum punctum sollicitantium aequiualens debet inuestigari, neque id diutius ab eadem potentia affici ponendum est quam per temporis elementum infinite paruum.

# DEFINITIO 12.

111. Potentia absoluta est potentia, quae in corpus siue motum siue quiescens aequaliter agit. *Huiusmodi potentia absoluta est vis grauitatis, quae corpora siue moueantur siue quiescant aequaliter deorsum trahit.*

## Corollarium.

112. Si igitur cognitus fuerit potentiae absolutae effectus in corpus quiescens, innotescet quoque eius effectus in corpus vtcunque motum.

## DEFINITIO 13.

113. Potentia relatiua est, quae aliter agit in corpus quiescens, aliter in motum. *Huiusmodi potentia est vis fluuii corpus secum abripientis, quo enim celerius corpus mouetur, eo vis fluuii in id fit minor; eaque prorsus euanescit, quando corpus iam eandem, quam habet fluuius, celeritatem est adeptum.*

x in eadem directione qua fluuii

## Corollarium 1.

114. Si igitur data sit corporis celeritas vna cum lege potentiae relatiuae, inueniri poterit vis, quantum potentia in corpus agit. Haecque deinde vt potentia absoluta poterit considerari, quamdiu corpus eandem habet celeritatem, eiusque effectus ex potentiarum absolutarum actione determinari. Vim enim potentiae relatiuae in corpus data celeritate motum determinare, nil aliud est, nisi potentiam absolutam hoc casu aequiualentem assignare.

## Corollarium 2.

115. Hoc igitur differunt a se inuicem potentiae absolutae et relatiuae, quod potentiae absolutae quantitas et directio a solo corporis, in quod agit, loco pendeat; relatiuae vero quantitas et directio insuper a corporis, in quod agit, celeritate.

Scho-

## Scholion 1.

116. Reſpiciunt potiſſimum potentiae relatiuae ad motum corporum in fluidis, horum enim actio in corpora a celeritate eorum pendet relatiua; quae, quo eſt maior, eo quoque maiorem vim corpus a fluido patitur. Praeter alios autem caſus motuum in fluidis, qui maiorem cognitionem fluidorum requirunt, duo ſunt tractatu faciliores; alter quando fluidum quieſcit, alter quando mouetur vniformiter in directum. Poterit vero iſte ad illum ſubſtituendo motum relatiuum loco abſoluti ſemper reduci; fluidum ſcilicet vt quieſcens conſiderandum eſt, in quo ſtatu quoque vi propria permanebit. Quae igitur in ſequentibus de potentiis relatiuis proferentur, ea ad motum corporum in fluidis quieſcentibus potiſſimum pertinebunt. Actio vero fluidorum in corpora mota conſiſtit tota in motu eorum diminuendo, et propterea reſiſtentia appellatur, quae, quo celerius corpora mouentur, maior eſt quoque, et euaneſcit omnino, quando corpora quieſcunt. Hanc ob rem in poſterum loco potentiarum relatiuarum media reſiſtentia ſubſtituemus; motus vero, qui a ſolis potentiis abſolutis afficiuntur, in vacuo fieri ponemus.

## Scholion 2.

117. Motus quidem in mediis reſiſtentibus, ſi maxime ordinem ſequi vellemus, ad vltimam partem, quae fluidis eſt deſtinata, eſſet reſeruanda, cum etiam nunc non conſtet, qua lege fluidum cor-

poribus in iis motis resistant. Verum quia haec materia a plerisque ita tractari est solita, vt prorsus a fluidorum natura sit reuocata, et vti hypothesis pure mathematica considerata: hanc methodum retinere malui, quam plurima elegantia problemata praeterire, quae in tractatione de fluidis etiam locum non inueniunt. Attamen hanc medii resistentiam non nisi punctorum motui accommodabo, pro corporibus enim finitae magnitudinis calculus fieret insuperabilis. Quando autem corpora instar punctorum considerari possunt, hoc inde nascitur commodum, quod directio vis resistentis congruat cum motus directione, si quidem ea a fluido quiescente oriatur. Hanc ob rem in hac de motu punctorum tractatione potentiis relatiuis eandem semper directionem tribuemus, quam habet ipsum punctum, eamque semper vt motum diminuentem considerabimus.

## PROPOSITIO 14.

### Problema.

118. *Dato effectu potentiae absolutae in punctum quiescens, inuenire effectum eiusdem potentiae in punctum idem quomodocunque motum.*

### Solutio.

Tab. II. Fig. 1. Sit punctum in A positum, vnde moueatur celeritate *c* secundum directionem AB, potentiae vero in id agentis directio sit AC. Assumatur temporis aliquod elementum *dt*, hocque tempusculo protrahatur punctum A, si quiesceret in A, per spatiolum

olum AC, quod vocetur $dz$, ita vt post tempus $dt$ non amplius sit in A, sed in C. Hic motus igitur per AC erit effectus potentiae in punctum quiescens. Effectus vero eiusdem potentiae, quia ponitur absoluta in idem punctum motum aequalis esse debet effectui in quiescens (111.). Abscindatur nunc in puncti A directione, quam habet secundum AB, spatium AB, quod celeritate sua $c$ tempusculo $dt$ percurret, si a nulla potentia sollicitaretur, erit AB $= cdt$ (30.). Agente vero potentia post temporis elementum $dt$ punctum non reperietur in B, sed alibi in D, ita vt effectus, qui mensurandus est deuiatione a puncto B, quae est spatium BD, aequalis sit effectui eiusdem potentiae in punctum quiescens (111.) i. e. AC. Erit ergo BD$=$AC. Praeterea vero erit BD ipsi AC parallela, quia BD est effectus potentiae, ideoque in eius directionem incidere debet, quae durante tempusculo infinite paruo $dt$ non mutatur. Quamobrem punctum A celeritatem $c$ habens secundum directionem AB, et sollicitatum a potentia absoluta, elapso tempusculo $dt$, non in B, sed D reperietur, ducta BD aequali et parallela ipsi AC. Spatia vero infinite paruo tempusculo percursa, vt lineolae rectae possunt considerari; propterea punctum tempusculo $dt$ spatium AD percurrisse censendum est. Q. E. I.

## Corollarium I.

119. Quia etiam motus per spatiola infinite parua pro aequabilibus haberi possunt, (33.) erit celeritas, qua elementum AD percurritur $= \frac{AD}{dt}$ (30.)

Co-

## Corollarium 2.

120. Ponatur celeritas per $AD = c + dc$, quia praecedens erat $c$ (35.), erit $c + dc = \frac{AD}{dt}$, at ante erat $AB = cdt$, ex quo fit $c = \frac{AB}{dt}$. Prodit ergo $dc = \frac{AD - AB}{dt}$. Abſcindatur igitur in AD portio $Ab = AB$, erit $dc = \frac{Db}{dt}$.

## Scholion 1.

121. Notandum autem eſt AC vel BD infinities eſſe minorem, quam AB, nam AB eſt ſpatium celeritate finita tempore $dt$ percurſum, at AC ſpatiolum celeritate infinite parua eodem tempore abſolutum, corpori enim quieſcenti nulla potentia finitam celeritatem tempuſculo infinite paruo poteſt inferre.

## Corollarium 3.

122. Hanc ob rem angulus BAD erit infinite paruus, et iunctis punctis B et $b$, lineola $Bb$ erit in AD perpendicularis. Vocetur ſinus anguli BAC, quippe qui datur $k$, poſito ſinu toto 1, erit ſinus ang. $BDb$ etiam $k$, quia illi eſt aequalis, ſinus vero ang. $DBb$ erit $\sqrt{(1-kk)}$. Ex his, quoniam eſt $BD = AC = dz$, erit $Db = dz\sqrt{(1-kk)}$ et $Bb = kdz$.

## Corollarium 4.

123. Incrementum igitur celeritatis $dc$, quod ante inueneramus $= \frac{Db}{dt}$, erit $\frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$. Intelligitur vero $dz$ eſſe infinities minus quam $dt$, eſt enim $dz$ infinite paruum reſpectu AB i. e. $cdt$, ideoque etiam reſpectu ipſius $dt$, quia $c$ ponitur finitae magnitudinis.

Co-

## Corollarium 5.

124. Inuento celeritatis incremento $dc$ a potentia illato, considerandus quoque est angulus BAD declinationem puncti ab insita directione AB repraesentans, quae itidem a potentia producitur. Est vero eius sinus $=\frac{Bb}{AB}=\frac{kdz}{cdt}$.

## Corollarium 6.

125. Duplex igitur est effectus potentiae punctum motum sollicitantis. Alter in celeritate immutanda consistit, alter in eius directione. Ille dat incrementum celeritatis $dc=\frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$, hic vero anguli declinationis sinum $=\frac{kdz}{cdt}$.

## Corollarium 7.

126. Si angulus BAC fuerit rectus, ideoque $k=1$; erit $dc=0$. Hoc igitur casu celeritas a potentia manet immutata. Anguli vero declinationis BAD sinus fit $=\frac{dz}{cdt}$.

## Corollarium 8.

127. Si angulus BAC fit obtusus seu recto maior erit eius cosinus $\sqrt{(1-kk)}$ negatiuus, et propterea celeritatis incrementum $dc$ prodibit negatiuum $=\frac{-dz\sqrt{(1-kk)}}{dz}$. Id quod indicat, celeritatem a potentia diminui. Declinatio vero $\frac{kdz}{cdt}$ eadem manet, quae ante.

## Corollarium 9.

128. Si potentiae directio AC cum motus puncti A directione AB congruit, fit $k=0$. Hoc

igitur casu motus directio a potentia non immutatur. Celeritatis vero incrementum $dc$ fiet $=\frac{dz}{dt}$, si potentiae directio conspirat cum directione motus. Sin autem ei fuerit contraria, fit $dc=\frac{-dz}{dt}$.

## Scholion 2.

129. Apparet itaque ex huius propositionis solutione, quomodo potentiae absolutae effectus in punctum quomodocunque motum inueniri debeat, si cognitus fuerit effectus eiusdem potentiae in idem punctum quiescens. Hanc ob rem in sequentibus huius capitis propositionibus sufficiet punctum a potentiis sollicitatum quiescens ponere, vel motum in eadem, quam habet potentia, directione. Nam si punctum A habeat celeritatem $c$, eaque moueatur secundum directionem AB; interea vero sollicitetur a potentia eandem habente directionem AB, ita vt elapso tempusculo $dt$ non in B, quo sola celeritate $c$ latum perueniret, sed in $b$ reperiatur, erit potentiae effectus spatiolum $Ab$. Atque per tantumdem spatiolum $ao$ punctum A, si in $a$ quiesceret, fuisset eodem tempusculo $dt$ pertractatum. Innotescit ergo ex motu puncti A a potentia sollicitati effectus eiusdem potentiae in idem punctum quiescens, porroque hinc effectus potentiae in punctum vtcunque motum.

Tab. II. Fig. 2.

Bb

# PROPOSITIO 15.

## Problema.

130. *Dato celeritatis incremento, quod quaedam potentia in puncto A tempusculo* dt *producit, inuenire*

*nire incrementum celeritatis, quod eadem potentia in eodem puncto tempusculo* $d\tau$ *producit.*

## Solutio.

Habeat punctum A celeritatem $c$ eandemque directionem AB, quam habet potentia id sollicitans, sitque $ao$ spatiolum, per quod haec potentia punctum A, si quiesceret, tempusculo $dt$ traheret. Sit porro AB spatium, quod punctum A celeritate $c$ tempusculo $dt$ percurrit, percurret idem insuper a potentia sollicitatum spatium $Ab$, sumto $Bb=ao$: hocque spatium quia est infinite paruum aequabili motu descripsisse aestimandum est. Sequente igitur tempusculo $dt$ hac celeritate percurreret spatium $bC=Ab$, nisi a potentia sollicitetur; at agente iterum potentia, quae immutata manere ponitur saltem per tempus infinite paruum, perueniet id vltra C in $c$, sumto $Cc=ao$. Simili modo tertio tempusculo $dt$, percurret spatium $cd=cD+Dd$, vbi $cD=bc$ et $Dd=ao$. Et quarto tempusculo $dt$ percurret spatium $de=dE+Fe$, vbi rursus est $dF=cd$ et $Fe=ao$. Est vero $Ab=AB+ao$; $bc=AB+2ao$; $cd=AB+3ao$; $dc=AB+4ao$. Erit ergo $\frac{ao}{dt}$ incrementum celeritatis tempusculo $dt$ productum a potentia; $\frac{2ao}{dt}$ erit celeritatis incrementum tempusculo $2dt$ acquisitum; similiter $\frac{3ao}{dt}$ incrementum tempusculi $3dt$: et generaliter tempusculo $ndt$ crescet celeritas puncti $c$ elemento $\frac{nao}{dt}$. Ponatur $ndt=d\tau$, erit $n=\frac{d\tau}{dt}$. Celeritatis igitur incrementum tempus- Tab. II. Fig. 2.

 culo

culo $d\tau$ acquisitum erit $\frac{ao \cdot d\tau}{dt^2}$. Quia vero pro tempusculo $dt$ incrementum celeritatis est $\frac{ao}{dt}$, prodibit ista analogia; Celeritatis incrementum temp. $dt$ est ad celeritatis incrementum temp. $d\tau$ acquisitum vt $dt$ ad $d\tau$. Consequenter celeritatis incrementa sunt temporibus, quibus producuntur, proportionalia. Q. E. I.

## Corollarium 1.

131. Apparet haec incrementa celeritatis non pendere ab ipsa celeritate $c$, sed eundem habitura esse valorem, quantumuis magna aut parua ponatur $c$. Hocque natura potentiarum absolutarum melius intelligitur, quod aequaliter agant in corpora mota et quiescentia.

## Corollarium 2.

132. Si ergo fuerit $c=o$, punctumque A quiescens a potentia ad motum sollicitetur, erunt ipso motus initio celeritates acquisitae, vt tempora: scilicet duplo tempore duplam, triplo triplam adipiscetur celeritatem.

## Corollarium 3.

133. Si igitur ipso motus initio celeritas tempusculo $t$ acquisita, dicatur $c$, et spatium percursum sit $s$; erit $t=nc$. Sed est etiam $t=\int\frac{ds}{c}$ (37). Ergo prodit $nc=\int\frac{ds}{c}$, seu $ncdc=ds$ hincque $s=\frac{nc^2}{2}=\frac{t^2}{2n}$. Spatia igitur primo motus initio descripta sunt in duplicata ratione temporum, siue celeritatum, per ea spatia acquisitarum.

$\partial t$

Scho-

## Scholion 1.

134. Veritas huius propositionis, quod celeritatis incrementa temporibus, quibus generantur, sint proportionalia etiam in quantitatibus finitis constat, si modo potentia punctum sollicitans manet eadem, et eandem perpetuo retinet directionem, quam habet ipse puncti motus. In infinite paruis hac restrictione non est opus, potentia enim vtcunque variabilis per tempusculum quam minimum nullius mutationis capax est consideranda. Quomodo autem se habeant diuersarum potentiarum effectus mox sumus exposituri, atque etiam in punctis, quae a potentiis sollicitantur diuersitatem ponemus, vt aliud in data ratione maius minusue esse possit. Neque vero haec inaequalitas aduersatur extremae punctorum paruitati, non enim puncta mathematica intelligimus, sed physica ex quorum compositione corpora oriuntur. Possunt enim duo pluraue in vnum coalescere concipi, quod, quanquam simplicibus est maius, infinite tamen exiguae manet magnitudinis.

## Scholion 2.

135. Theoremate hoc ex solutione problematis inuento primus est vsus Galilaeus ad motum grauium delabentium inuestigandum. Eius quidem demonstrationem non dedit, sed tamen propter insignem eius cum phaenomenis congruentiam de eo amplius dubitari noluit. Refutauit vero etiam alias hac de re opiniones, quo suam sententiam non

parum confirmauit. Alii enim ſtatuebant celeritatis incrementa non temporibus, ſed ſpatiis percurſis eſſe proportionalia, huius vero abſurditas a Galilaeo iam tunc plerisque Philoſophis erat perſuaſa. Apparet autem, ſi potentiarum actiones hanc ſequerentur legem nulla corpora ad motum perduci vnquam poſſe. Foret enim $dc = nds$ et $c = ns$, tempus vero $t$, quod eſt $\int \frac{ds}{c}$ euaderet $= \frac{1}{n}\int \frac{dc}{c} = \frac{1}{n} lc = \frac{1}{n} lns$ conſt. quae conſtans eſſe debet $= -\frac{1}{n} lon$. Tempus ſcilicet logarithmo ſpatii deſcripti per $o$ diuiſi eſſet proportionale et propterea infinitum. Nullum igitur corpus ex quiete vnquam ad motum poſſet perduci. Recte itaque Galilaeus aduerſariis reſpondit, quod in inſtanti motus finitus hoc poſito generari deberet, alioquin motum produci prorſus non poſſe. Etſi enim in initio infinite parua in puncto ponatur celeritas, ea tamen ab huiusmodi potentia imaginaria nunquam effici poterit finita. Ex data vero problematis ſolutione intelligitur legem inuentam neceſſariam eſſe, neque vllam aliam vi principii contradictionis exiſtere poſſe.

## PROPOSITIO 16.

### Theorema.

136. *Potentia* q *in punctum* b *eundem habet effectum, quem potentia* p *in punctum* a; *ſi fuerit* q : p = b : a.

### Demonſtratio.

Ponatur $q = np$, erit $b = na$. Concipiatur iam punctum $na$ in $n$ partes aequales diuiſum, quarum

quae-

quaelibet erit $= a$; harum partium vnaquaeque ſollicitata ſit a parte $n$ ſima ipſius potentiae $np$ id eſt a potentia $p$. His poſitis quaeuis pars eodem modo trahetur a ſua potentia, quo punctum ipſum $a$ a potentia $p$. Neque vero hae puncti $na$ partes a ſuis potentiis ſollicitatae a ſe inuicem ſegregabunt; ſed perpetuo vnitae manebunt, ſi quidem initio fuerint coniunctae. Perſpicuum autem eſt hos duos caſus eodem redire, nec a ſe inuicem discrepare, ſiue punctum $na$ a potentia $np$ trahatur, ſiue quaeuis puncti $na$ pars $a$ a ſimili parte $p$ potentiae $np$ trahatur, dummodo partes non a ſe inuicem diuellantur. Quapropter conſtat punctum ~~propoſitum~~ $na$ aeque a potentia $np$ vrgeri ac punctum $a$ a potentia $p$. Q. E. D.

## Corollarium 1.

137. Punctum igitur $na$ a potentia $np$ easdem adipiscetur accelerationes, quas punctum $a$ a potentia $p$.

## Corollarium 2.

138. Ad eandem ergo maiori puncto celeritatem inducendam, quam minori, opus eſt maiori potentia, idque tanto maiori, quanto illud punctum maius eſt quam hoc.

## Scholion 1.

139. Propoſitio iſta fundamentum complectitur ad vim inertiae metiendam, hac enim nititur omnis ratio, quare corporum materia ſeu maſſa in Mechanicis conſiderari debeat. Attendi enim oportet ad punctorum numerum, ex quibus corpus

mo-

mouendum est conflatum, eique massa corporis proportionalis est ponenda. Puncta vero ea inter se aequalia censeri debent, non quae aeque sunt parua, sed in quae eadem potentia aequales exerit effectus. Si igitur vniuersam materiam in huiusmodi aequalia puncta seu elementa concipiamus diuisam, quantitatem materiae cuiusque corporis ex numero punrum ex quibus est compositum, aestimari necesse est. Vim autem inertiae proportionalem esse huic punctorum numero seu quantitati materiae in sequenti propositione demonstrabimus.

## Corollarium 3.

140. Aequalia ergo sunt, quod ad quantitatem materiae attinet, duo corpora, quae ex aequali punctorum numero sunt composita. Atque duo corpora sunt in ratione *m* ad *n*, si punctorum, ex quibus constant, numeri teneant rationem hanc *m* ad *n*.

## Scholion 2.

141. Ostendetur vero in sequentibus hanc ipsam quantitatis materiae mensurandae rationem re ipsa adhiberi, et apud omnes esse receptam. Ex pondere enim cuiusque corporis materia solet inuestigari, ponderique materiae quantitas proportionalis censetur. Corpora autem omnia aequaliter in spatio vacuo descendere per experimenta constat, et propterea omnia a vi grauitatis aequaliter accelerantur. Quo circa necesse est, vt vis grauitatis in singula corpora agens eorum quantitati materiae sit

pro-

proportionalis. Pondus vero corporis indicat vim grauitatis, qua illud sollicitatur. Quare cum illa sit proportionalis materiae quantitati, ponderatione simul quantitas materiae innotescit, eo ipso sensu, quem hic materiae tribuimus.

# PROPOSITIO 17.

## Theorema.

142. *Vis inertiae cuiuscunque corporis proportionalis est quantitati materiae, ex qua constat.*

## Demonstratio.

Vis inertiae est vis in quouis corpore insita in statu suo quietis vel motus aequabilis in directum permanendi (74.). Ea igitur aestimanda est ex vi, vel potentia, qua opus est ad corpus ex statu suo deturbandum. Diuersa vero corpora aequaliter in statu suo perturbantur a potentiis, quae sunt vt quantitates materiae in illis contentae. Eorum igitur vires inertiae proportionales sunt his potentiis. Consequenter etiam materiae quantitatibus sunt proportionales. Q. E. D.

## Corollarium 1.

143. Perspicitur simul ex demonstratione idem corpus siue quiescat siue moueatur eandem habere semper vim inertiae. Nam siue quiescat siue moueatur aequaliter ab eadem potentia afficitur scilicet absoluta.

## Corollarium 2.

144. Neque vero vis inertiae homogenea eſt cum vlla potentia: fieri enim non poteſt, vt corpus quantumuis magnum a minima potentia non afficiatur, vt in ſequentibus demonſtrabitur.

## Scholion.

145. Apparet hinc origo vocis vis inertiae, quam ſupra (76.) innuimus, ex eo, quod vis inertiae actioni potentiarum quodammodo reſiſtit. *Neutonus* quoque in Princ. Phil. Nat. Definitione III, cum vi inertiae et hac vi reſiſtendi eandem ideam coniungit, et vtramque quantitati materiae proportionalem ſtatuit.

# PROPOSITIO 14.

## Problema.

146. *Dato effectu vnius potentiae in punctum aliquod, inuenire effectum cuiusuis alius potentiae in idem punctum.*

## Solutio.

Tab. II. Fig. 3. Quiescat punctum in A et conſiſtat potentiae datae AB in id effectus in hoc, quod ab ea tempusculo $dt$ per ſpatiolum A$b$ deducatur. Quaeritur iam per quantum ſpatium idem hoc punctum tempusculo $dt$ ab alia potentia AC protrahatur. Ducantur lineae AB et AC, ita vt iuncta BC ſit in AC normalis, id quod ſemper fieri poteſt, ſi AC$<$AB. At ſi AC$>$AB ſolutio ex illa facile deducetur. Ex altera parte ducatur recta AD ita vt BAD ſit triangugulum isosceles. Bisecentur AB et AD in E et F, et per AE repraesentetur dimidium potentiae AB, et per AF tantadem potentia. Manifestum est potentiam AC idem praestare in punctum A, quod duae potentiae AE et AF coniunctim (107.) quia AC aequiualet ob parallelogrammum AECF ambabus AE et AF. Loco igitur potentiae AC ponamus punctum A sollicitari a potentiis AE et AF. Hoc vero modo rem concipiamus, quasi quaelibet potentia AE et AF dimidium puncti A afficiat. Medietates vero istae sint ad tempusculum *dt* saltem a se inuicem solutae, hocque finito eas subito ad se inuicem rursus accedere ponemus. Quia nunc potentia AB punctum A tempusculo *dt* per spatium A*b* protrahit, protrahet dimidia potentia AE puncti dimidium eodem tempusculo *dt* per idem spatium A*b* (136.). Similiter tempusculo *dt* altera medietas puncti A a potentia AF protrahetur per spatium A*d*=A*b*. Finito igitur tempusculo *dt*, altera medietas puncti A erit in *b* altera in *d*. Coeant nunc rursus subito ad se mutuo, seu contrahantur vi cohaesionis infinita, conuenient in puncto medio *c* lineolae *bd*: nulla enim est ratio, quare propius ad *b* quam *d* conueniant. A potentiis ergo AE et AF coniunctim agentibus punctum A tempusculo *dt* per spatiolum A*c* protrahetur. Quamobrem etiam potentia AC aequiualens potentiis AE et AF tempusculo *dt* protrahet per spatiolum A*c*. Est vero *bd* parallela ipsi BD et propterea A*b*:A*c*=AB:AC. Dato igitur spatiolo A*b*, per quod punctum A a potentia AB protrahitur, dabitur ſpatiolum $Ac$, per quod idem punctum A ab alia potentia AC protrahitur eodem tempusculo. Atque ſimul patet, ſi effectus $Ac$ minoris potentiae AC fuerit datus, quantus ſit maioris AB effectus $Ab$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

147. Spatia igitur, per quae aequalia puncta a quibuscunque potentiis protrahuntur aequalibus temporibus, ſunt vt ipſae potentiae.

## Corollarium 2.

148. Quia ſpatia motus initio deſcripta inaequalibus temporibus ſunt in duplicata ratione temporum (133.); erunt ſpatia per quae aequalia puncta a quibuscunque potentiis inaequalibus temporibus protrahuntur in ratione compoſita ex ratione ſimplici potentiarum et duplicata temporum.

## Scholion.

149. Principium, quo in huius problematis ſolutione ſumus vſi, in hoc conſiſtit, vt corpus a pluribus potentiis ſollicitatum in totidem partes concipiatur diuiſum, quarum quaelibet ab vna tantum potentia trahatur. Deinde cum ſingulae a potentiis ſuis momento temporis fuerint protractae, ſubito ad ſe mutuo compelli in vnumque congredi intelligantur, quo facto locus, in quo conuenerunt, erit is, ad quem integrum corpus ab omnibus potentiis ſimul agentibus eodem tempore fuiſſet pertractum. Veritas huius principii ex hoc poteſt perſpici, quod corporis partes elaſtris fortiſſimis coniun-

iunctae possint concipi, quae quanquam indesinenter agunt, tamen per interualla cedere moxque se subito contrahere vi infinita poni possunt, ita vt tempus, quo partes solutae ad se inuicem reducuntur, sit nullum. Eodem vero hoc principio iam alii in pluribus mechanicis problematibus soluendis sunt vsi. Atque plerique adoptauerunt istud re non diuersum, quod potentias non indesinenter, sed per saltus effectum suum exercere posuerunt. Hoc autem principio admisso manifestum est duas partes aequales recta ad se mutuo accedere et interualli sui medio congredi debere.

## PROPOSITIO 19.

### Theorema.

150. *Moueatur punctum in directione* AM *et sollicitetur, dum per spatiolum* Mm *percurrit a potentia* p *secundum eandem directionem trahente, erit incrementum celeritatis, quod interea punctum acquirit vt potentia sollicitans ducta in tempusculum, quo elementum* Mm *percurritur.* Tab. II. Fig. 4.

### Demonstratio.

Sit tempusculum $dt$, et absoluat punctum hoc tempore spatium M$\mu$, si a potentia non sollicitaretur; sed celeritate, quam in M habuit, vniformiter progredi pergeret. Effectus vero potentiae in hoc consistit, vt punctum ab ea vlterius per $\mu m$ protrahatur, quod spatiolum aequale est illi, per quod idem punctum, si quiesceret ab eadem potentia eodem tempusculo $dt$ protraheretur, quia potentia ponitur abſoluta (111.). Huic ſpatiolo dato tempore proportionale eſt celeritatis incrementum. At ſi potentia eſt eadem, celeritatis incrementum eſt vt tempusculum $dt$ (130.). Quare cum ſpatiolum $m\mu$ ſeu incrementum celeritatis ſit dato tempusculo vt potentia $p$, erit celeritatis incrementum pro quocunque tempusculo et quibuscunque potentiis vt $pdt$, i. e. vt potentia ducta in tempusculum. Q. E. D.

## Corollarium 1.

151. Sit puncti in M celeritas $c$, et ſpatiolum $Mm = ds$, erit $dt = \frac{ds}{c}$, quia ad tempus determinandum, elementum M$m$ motu aequabili deſcribi ponendum eſt. Cum autem ſit $dc$ vt $pdt$, erit quoque $dc$ vt $\frac{pds}{c}$, ſeu $cdc$ vt $pds$. Incrementum ergo quadrati celeritatis eſt vt potentia ducta in ſpatii elementum percurſum.

## Corollarium 2.

152. Apparet igitur non ſolum verum eſſe hoc theorema, ſed etiam neceſſario verum, ita vt contradictionem inuolueret ponere $dc = p^2 dt$ vel $p^3 dt$ aliamue functionem loco $p$. Quae omnes cum Clar. *Dan. Bernoullio* in Comment. Tom. I. aeque probabiles videantur, de rigidis harum propoſitionum demonſtrationibus maxime eram ſollicitus.

## Scholion.

153. Propoſitionis huius demonſtratio facilius ſequitur ex 148. vnde prodit ſpatiolum $m\mu$ propor-

portionale potentiae $p$ ductae in quadratum tempusculi $dt$, ita vt ſit $m\mu$ vt $pdt^2$. At $m\mu$ diuiſum per tempus $dt$ dat incrementum celeritatis; quare celeritatis incrementum erit vt $pdt$, quemadmodum in propoſitione erat enunciatum.

## PROPOSITIO 20.

### Theorema.

154. *Congruente puncti directione motus cum potentiae directione, erit incrementum celeritatis, vt potentia ducta in tempusculum et diuiſa per materiam ſeu quantitatem puncti.*

### Demonſtratio.

Sint duo puncta ſeu corpuscula inaequalia A et B mota in rectis AM, BN. Sollicitentur ea a potentiis $p$ et $\pi$ reſpectiue, dum percurrunt ſpatiola M$m$, N$n$, et ſint tempora, quibus ea percurruntur $dt$, $d\tau$. Manifeſtum eſt punctum B a potentia $\pi$ eodem modo affici ac punctum A a potentia $\frac{A\pi}{B}$ (136.). Quare ſubſtituto loco B puncto ipſi A aequali, pro potentia $\pi$ ſubſtitui debet potentia $\frac{A\pi}{B}$, hocque modo obtinemus caſum propoſitionis praecedentis, quo puncta ponuntur aequalia. Hanc ob rem incrementum celeritatis per M$m$ eſt ad incrementum celeritatis per N$n$ vt $pdt$ ad $\frac{A\pi}{B}d\tau$, ſeu vt $\frac{pdt}{A}$ ad $\frac{\pi d\tau}{B}$ (150.). Ex quo conſtat propoſitum, quod celeritatis incrementum, ſit vt factum ex potentia et tempusculo diuiſum per puncti materiam ſeu quantitatem. Q. E. D. Tab. II. Fig. 5.

Co-

## Corollarium 1.

155. Si igitur celeritas puncti A fuerit $c$, erit $dc = \frac{npdt}{A}$, vbi $n$ in omnibus casibus eundem denotat numerum, neque enim a potentia neque a tempusculo neque a puncti quantitate pendet.

## Corollarium 2.

156. Quantitas materiae A hic in considerationem venit quatenus potentiae sollicitanti reluctatur, i. e. quatenus congruit cum vi inertiae. Hanc ob rem est celeritatis incrementum vt potentia sollicitans et tempusculum directe, atque inuerse vt vis corporis inertiae.

## Corollarium 3.

157. Posito spatio $Mm = ds$, erit $dt = \frac{ds}{c}$. Hinc fiet $dc = \frac{npds}{Ac}$, seu $cdc = \frac{npds}{A}$. Quare incrementum quadrati celeritatis proportionale est facto ex potentia in spatiolum percursum diuiso per massam seu vim inertiae corpusculi.

## Scholion.

157. Propositio ista complectitur omnia principia hactenus tradita motus naturam definientia, omnesque leges motus, si quidem potentiae directio cum motus directione congruit. Quamobrem si haec propositio cum decima quarta coniungitur, qua effectus potentiarum oblique agentium determinatur, omnia habebuntur principia, ex quibus punctorum a quibuscunque potentiis sollicitatorum motus possunt inueniri.

Co-

## Corollarium 4.

159. Quia est $dc = \frac{npdt}{A}$, erit spatiolum per quod punctum A a potentia $p$ tempusculo $dt$ perducitur $= \frac{npdt^2}{A}$. Est enim hoc spatiolum factum ex $dc$ in $dt$. Nam dicto hoc spatiolo $dz$ est $dc = \frac{dz}{dt}$ (128.), adeoque $dz = dcdt = \frac{npdt^2}{A}$.

# PROPOSITIO 21.

## Problema.

160. *Potentiae cuiuscunque in punctum motum oblique agentis effectum determinare.* Tab. II. Fig. 1.

## Solutio.

Habeat punctum A celeritatem $c$ directionemque AB. Sollicitetur vero a potentia $p$, cuius directio AC cum AB faciat angulum, cuius sinus est $k$. Perspicuum est punctum A sibi relictum neque a potentia sollicitatum in recta AB esse progressurum, tempusculoque $dt$ percursurum spatium AB$=cdt$ (30.). Agente vero potentia $p$ declinabit punctum A a recta AB, percurretque interea spatiolum AD, vt in prop. 14 est ostensum. Posuimus autem ibi AC seu BD$=dz$, quod est spatiolum per quod punctum A, si quiesceret, a potentia $p$ tempore $dt$ pertraheretur. Est ergo $dz = \frac{npdt^2}{A}$ (159.). Anguli igitur BAD sinus, qui inuentus est $= \frac{kdz}{cdt}$ (124.) erit $= \frac{nkpdt}{Ac}$. Atque celeritatis incrementum $dc$, quod erat $= \frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$ (123), fit $= \frac{npdt\sqrt{(1-kk)}}{A}$. Q. E. I.

 Co-

## Corollarium 1.

161. Vocetur ſpatium AD$=ds$, erit $dt=\frac{ds}{c}$ adeoque poſito $\frac{ds}{c}$ loco $dt$, prodibit $dc=\frac{npds\sqrt{(1-kk)}}{Ac}$. Ducatur ex D in directionem potentiae AE perpendicularis ~~DE~~, ſitque AF$=dy$, et DF$=dx$, erit $ds^2=dx^2+dy^2$, et $k=\frac{dx}{ds}$, et $\sqrt{(1-kk)}=\frac{dy}{ds}$. Proueniet ergo $dc=\frac{npdy}{Ac}$ ✕ ſeu $Acdc=npdy$.

Tab. II. df Fig. 6.

✕ ponendo dy loco ds prop. 20. corol. 3

## Corollarium 2.

162. Ducatur ad curuam, quam corpuſculum hoc modo deſcribit, in A radius oſculi AO, erit $Bb:AB=AD:AO$. ⊕ Quare erit AO$=\frac{AB.AD}{Bb}$. Eſt vero $\frac{Bb}{AB}$ ſinus anguli BAD, qui inuentus eſt $=\frac{nkpdt}{Ac}$. Erit ergo $\frac{Bb}{AB}=\frac{npdxdt}{Acds}$, atque ob AD$=ds$, prodibit AO$=\frac{Acds^2}{npdxdt}$.

⊕ positis angulis o et x infinite parvis

## Corollarium 3.

163. Quia vero eſt $dt=\frac{ds}{c}$, erit AO$=\frac{Ac^2ds}{npdx}$. Vocetur radius oſculi AO$=r$, habebitur $nprdx=Ac^2ds$.

## Corollarium 4.

164. Si potentiae $p$ directio AE incidat in normalem AO, fiet AF$=dy=o$, et DF$=dx=$AD$=ds$. Quamobrem erit $cdc=o$, atque idcirco haec potentia celeritatem non immutabit.

## Corollarium 5.

165. Hoc porro caſu erit $npr=Ac^2$ ob $dx=ds$, atque ideo $r=\frac{Ac^2}{np}$. Haec igitur potentia, cuius di-

directio est normalis in corporis directionem efficit, vt corpus non in recta motum suum absoluat, sed in arcu curuae.

## Corollarium 6.

166. Si potentiae $p$ directio incidat in tangentem AB; fiet $dx=o$ et $dy=ds$. Habebitur ergo $Acdc=npds$. In hac igitur directione potentia $p$ celeritatem corporis maxime augebit.

## Corollarium 7.

167. Si potentiae $p$ directio in oppositam ipsi AB directionem incidat, ita vt motui corporis sit contraria; fiet $p$ quantitas negatiua, habebiturque $Acdc=-npds$. Tantum igitur hoc casu minuetur celeritas, quantum ante augebatur.

## Corollarium 8.

168. In vtroque autem casu, quo directio potentiae $p$ in tangentem incidit, erit $r=\frac{Ac^2\,ds}{np.o}$ ob $dx=o$. Tum igitur directio corporis non mutabitur, sed id in recta moueri perget.

## Corollarium 9.

169. Determinato ergo in vnico casu ex experimento valore litterae $n$, inseruiet is pro omnibus casibus. Tum igitur omnium, quae in motibus possunt desiderari, poterunt assignari valores absoluti.

## Corollarium 10.

170. Ex corollario primo prodit $A=\frac{npdy}{cdc}$. Quo valore in tertio substituto habebitur $nprdx$

$= \frac{npcdyds}{dc}$, seu $rdxdc = cdyds$. In qua aequatione neque $n$ neque A neque $p$ inest, haec igitur valet pro motu puncti cuiuscunque a quacunque potentia sollicitati.

## Corollarium 11.

171. Quanquam autem in ista aequatione ipsa potentia $p$ non inest, tamen eius directio a qua relatio elementorum $dx$ et $dy$ pendet, adhuc super est. Data igitur directione potentiae punctum in quouis loco sollicitantis, et ipsa curua in qua punctum mouetur, poterit ex his solis datis determinari puncti celeritas in quouis loco. Erit enim $\frac{dc}{c} = \frac{dyds}{rdx}$ seu $c = e^{\int \frac{dyds}{rdx}}$ vbi $e$ denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est 1.

## Corollarium 12.

172. Quia porro est $dt = \frac{ds}{c}$, erit $t = \int e^{-\int \frac{dyds}{rdx}} ds$. Hinc igitur simul innotescit tempus, quo quaeuis curuae portio describitur, neque ad hoc pluribus opus est datis, quam ipsa curua, et directione potentiae.

## Corollarium 13.

173. Si ex O in potentiae directionem AE demittatur perpendicularis OE, quae a quibusdam coradius appellatur, erit $ds:dx = AO:AE$. Posito ergo coradio AE$=q$, erit $\frac{rdx}{ds} = q$. Fiet igitur $c = e^{\int \frac{dy}{q}}$, et $t = \int e^{-\int \frac{dy}{q}} ds$.

Scho-

## Scholion.

174. Ex ſolutione huius problematis apparet, poſſe eius beneficio puncti a quibuscunque potentiis ſollicitati motum determinari. Ex duabus enim aequationibus, definitur et puncti celeritas in loco quouis, et curuatura ſeu radius osculi ipſius curuae percurſae. His vero cognitis ſimul reperietur tempus, quo quaeuis curuae portio abſoluitur, quae abunde ſufficiunt ad motum determinandum.

## DEFINITIO 14.

175. Vis reſtituens eſt vis illa imaginaria et infinita, quae partes corporis ſeparatas momento rurſus congregat, et in ſtatum priſtinum reſtituit. *Huiusmodi vim in ſolutione Prop. 18. adeſſe concepimus,* Tab. II.
*qua duae puncti partes, quae ad momentum ſolutae con-* Fig. 7.
*cipiebam, rurſus contrahebantur.*

## Corollarium 1.

176. Si punctum in duas partes aequales concipiatur diuiſum, eaeque a potentiis fuerint ſeparatae, vis reſtituens eas contrahet in medio rectae illas iungentis, vt §. 146 ex principio ſufficientis rationis eſt oſtenſum.

## Corollarium 2.

177. Quia effectus vis reſtituentis in inſtanti debet produci, poterit vis reſtituens conſiderari vt elaſtrum vi infinita praeditum, quo partes ſeparatae iterum coniunguntur.

## Scholion.

178. Vſus huius vis reſtituentis iam elucet quodammodo ex propoſitione 18, vſus vero eius adhuc erit ampliſſimus in ſequentibus, quando motus corporum finitae magnitudinis ſumus inueſtigaturi. Hic vero effectum eius indagabimus in coniungendis pluribus puncti partibus ſeparatis, quae inquiſitio in ſequentibus magnam habebit vtilitatem. Complectitur ergo vis reſtituens principium aliquod, cuius ope plurimae quaeſtiones facile reſolui poterunt, idque principium reſtitutionis vocabimus.

## PROPOSITIO 22.

### Theorema.

Tab. II. Fig. 7. 179. *Sint duae puncti partes in* b *et* d *ſeparatae, dico eas a vi reſtituente coniunctum iri in puncto* c *centro grauitatis particularum* b *et* d.

### Demonſtratio.

Fuerint hae partes primo coniunctae in A, ſintque eae a potentiis AB, AD pertractae in *b* et *d* eodem tempuſculo *dt*. Harum potentiarum vero aequiualens ſit potentia AC, quae eodem tempuſculo integrum punctum ex A pertrahere valeat in *c*. restituente Manifeſtum igitur eſt partes *b* et *d* a vi ~~reſiſtente~~ in *c* contrahi debere, quia potentia AC eundem in punctum integrum A edit effectum, ac ambae AB et AD in duas eius partes (149). Hinc igitur innoteſcit punctum concurſus *c*, in quod particulae *b* et *d* a vi reſtituente compellentur. Quo autem particula

cula $b$ a potentia AB tempusculo $dt$ per ſpatiolum AB protrahatur debet eſſe $Ab = \frac{n.AB.dt^2}{b}$ (159.) ſeu $AB = \frac{Ab.b}{ndt^2}$. Similem ob rationem erit $AD = \frac{Ad.d}{ndt^2}$, et $AC = \frac{Ac(b+d)}{ndt^2}$. Eſt vero AC diagonalis parallelogrammi, quod a potentiis AB et AD conſtituitur, quia his aequiualet. Ex illis autem aequationibus deducitur $\frac{AB}{Ab} + \frac{AD}{Ad} = \frac{AC}{Ac}$, ſunt vero AB, AD et AC inter ſe vt ſinus angulorum DAC, BAC et BAD. Quamobrem erit $\frac{ſDAC}{Ab} + \frac{ſBAC}{Ad} = \frac{ſBAD}{Ac}$, ex qua proprietate ſequitur puncta $b$, $c$, et $d$ eſſe in directum poſita. Hoc cum ſit, erit $bc : cd = ſBAC.\ Ab : ſDAC.\ Ad = AD.\ Ab : AB.\ Ad$. At eſt $AD : AB = Ad.\ d : Ab.\ b$. Conſequenter prodibit $bc : cd = d : b$ ſeu $b.bc = d.dc$. Ex quo intelligitur punctum $c$ eſſe centrum grauitatis particularum $b$ et $d$. Q. E. D.

## Corollarium I.

180. Vbicunque ergo accipiatur punctum A, ſemper in eundem incidit locum punctum concurſus $c$, ex quo apparet vim reſtituentem conſtantem habere effectum, neque a loco puncti A nec a potentiis particulas $b$ et $d$ ſollicitantibus pendere.

## Scholion.

181. Egregie conuenit hic vis reſtituentis effectus cum effectu vis elaſticae, quam eius loco ſubſtituere licet. Iungat enim particulas $b$ et $d$ filum elaſticum $bd$, quod ſeſe contrahendo $b$ et $d$ congreget in $c$. Vis autem haec contrahens aequaliter aget in

in particulas *b* et *d*, cum vtrinque se aequaliter contrahere conetur. Spatia vero, per quae *b* et *d* eodem tempore protrahuntur, sunt reciproce vt ipsae particulae (159), quia ab eadem potentia afficiuntur. Quare si punctum concursus est *c*, erit *bc* ad *dc* reciproce vt *b* ad *d*, seu $b.bc = d.cd$. Ex quo etiam intelligitur punctum *c* esse centrum grauitatis particularum *b* et *d*.

## Corollarium 2.

182. Quamuis igitur vis restituens sit imaginaria et in sola cogitatione formata, tamen eius effectus sequitur motus leges reales. Hocque magis erimus certi, ope principii restitutionis semper ad veritatem perueniri.

# PROPOSITIO 23.

## Theorema.

Tab. II. Fig. 8. 183. *Sint* a, b, c, d *partes puncti a se inuicem separatae, quae a vi restituente rursus congregentur: conuenient eae in communi centro grauitatis* g.

## Demonstratio.

Ponamus initio integrum punctum fuisse in puncto quocunque O, ex quo singulae hae partes *a*, *b*, *c*, *d* tempusculo *dt* a potentiis OA, OB, OC, OD pertractae sint in *a*, *b*, *c*, *d*. Accipiatur harum potentiarum aequiualens AG, quae eodem tempusculo integrum punctum, quod est $a+b+c+d$, ex O pertraxisset in g; erit g punctum, in quod partes *a*, *b*, *c*, *d* a vi restituente congregabuntur (149.).

Per

Per punctum O ducatur recta quaeuis KN, in eamque ex punctis A, $a$, B, $b$, C, $c$, D, $d$, G, $g$, demittantur perpendicula. Erunt autem $OA = \frac{Oa.a}{ndt^2}$, $OB = \frac{Ob.b}{ndt^2}$, $OC = \frac{Oc.c}{ndt^2}$, $OD = \frac{Od.d}{ndt^2}$, et $OG = \frac{Og(a+b+c+d)}{ndt^2}$ (159). At ob triangula similia OAK, O$ak$; OBL, O$bl$; etc. erit $AK = \frac{OA.ak}{Oa} = \frac{ak.a}{ndt^2}$, $BL = \frac{OB.bl}{Ob} = \frac{bl.b}{ndt^2}$, $CM = \frac{OC.cm}{Oc} = \frac{cm.c}{ndt^2}$, $DN = \frac{OC.dn}{Od} = \frac{dn.d}{ndt^2}$, et $GS = \frac{OG.gs}{Og} = \frac{gs(a+b+c+d)}{ndt^2}$: atque $OK = \frac{OA.Ok}{Oa} = \frac{Ok.a}{ndt^2}$, $OL = \frac{OB.Ol}{Ob} = \frac{Ol.b}{ndt^2}$, $OM = \frac{OC.Om}{Oc} = \frac{Om.c}{ndt^2}$, $ON = \frac{OD.On}{Od} = \frac{On.d}{ndt^2}$ et $OS = \frac{OG.Os}{Og} = \frac{Os(a+b+c+d)}{ndt^2}$. Sed quoniam AG est potentia aequiualens potentiis OA, OB, OC, OD constat ex statica esse $AK+BL+CM+DN = GS$, et $OK+OL-OM-ON = OS$. Fiet ergo $ak.a+bl.b+cm.c+dn.d = gs(a+b+c+d)$, et $Ok.a+Ol.b-Om.c-On.d = Os(a+b+c+d)$. Ex quibus proprietatibus intelligitur punctum $g$ esse centrum grauitatis particularum $a$, $b$, $c$, $d$. Vis ergo restituens has particulas in centro communi grauitatis $g$ congregat. Q. E. D.

## Corollarium I.

184. In hoc igitur vis restituentis effectus consistit, quod corpusculi quotcunque partes separatas in ipsarum communi centro grauitatis congreget.

## Corollarium 2.

185. Hoc igitur modo puncti a pluribus potentiis ſollicitati motus poterit determinari ſine potentiae aequiualentis conſideratione, dum a ſingulis potentiis partes quaecunque affici ponuntur, quolibetque tempuſculo iterum a vi reſtituente congregari.

## Scholion.

Tab. II. Fig. 9. 186. Demonſtratio huius theorematis ope filorum elaſticorum ſeſe contrahentium eodem modo poteſt perfici, quo ante fecimus (181.). Sint enim particulae ſeparatae in *a*, *b*, *c*, *d*, et ponamus primo filum particulas *a* et *b* tantum contrahere, coibunt eae in centrum grauitatis *e*. Nunc concipiamus particulas *a* et *b* in *e* locatas cum particula *c* coniungi erit punctum concurſus in *f*, quod eſt centrum grauitatis trium particularum *a*, *b* et *c*. Iam hae tres in *f* poſitae cum quarta *d* coniungantur, erit punctum concurſus in *g* centro grauitatis omnium quatuor *a*, *b*, *c* et *d*. Quare a vi reſtituente omnes particulae in commune centrum grauitatis congregantur.

## Corollarium 3.

187. Denuo igitur conſtat, vim reſtituentem recte per contractionem filorum elaſticorum binas quasque particulas iungentium repraeſentari.

SCHO-

## SCHOLION GENERALE.

188. His igitur positis principiis, ex quibus puncti liberi a quibuscunque potentiis sollicitati motus determinari poterit, progrediemur ad punctorum liberorum motus inuestigandos. Hanc vero tractationem in duas partes dispesci conueniet, in quarum prima motus tantum rectilinei examinabuntur in altera vero curuilinei quicunque. Illi rectilinei, vt ex dictis intelligitur, oriuntur, quando motus directio cum potentiae directione conuenit; hi vero quando hae directiones discrepant. Vtramque vero partem duplici modo tractabimus, pro duplici potentiarum natura: primum scilicet puncta a solis potentiis absolutis sollicitari ponemus; deinde vero ab absolutis et relatiuis coniunctim. Loco relatiuarum quidem substituemus media resistentia, quia vt iam monuimus potentiae relatiuae ad motus corporum in fluidis determinandos considerantur (116.), quamobrem eos potissimum casus, qui in rerum natura existunt, euoluemus, neque multum iis, qui non nisi in imaginatione reperiuntur, immorabimur. Primum ergo de motu rectilineo puncti liberi a potentiis absolutis sollicitati tractabimus. Deinde inuestigabimus motus rectilineos puncti liberi in medio resistente. Tertio motus curuilineos puncti liberi a potentiis absolutis vtcunque sollicitati euoluemus. Quarto denique motus curuilineos puncti liberi in medio resistente exponemus.

# CAPUT TERTIUM
## DE
## MOTU RECTILINEO PUNCTI LIBERI A POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI.

### PROPOSITIO 24.
### Theorema.

189.

*Quando potentiae et motus directiones in eadem sitae sunt recta, motus erit rectilineus.*

### Demonstratio.

Omne corpus vi insita conatur motum suum in directum continuare, id quod semper praestat, nisi impediatur (65). Potentiae vero in corpus motum duplicem esse ostendimus effectum, alterum quo eius directio immutatur, alterum quo celeritas eius. At diratio manet immutata, si potentiae directio cum ea in directum iacet (128.). Hoc igitur casu punctum in linea recta progredi perget. Q. E. D.

directio

### Corollarium 1.

190. In hoc igitur capite alios non considerabimus casus, nisi in quibus motus et potentiae directiones in eadem recta sunt positae.

### Corollarium 2.

191. Vidimus autem duobus modis hanc congruentiam euenire posse, prout scilicet ambae hae di-

directiones vel in eandem plagam vel in oppositas tendunt. In quorum illo puncti celeritas augetur, in hoc vero diminuitur (128.).

## Scholion.

192. In motu hoc rectilineo duo sunt consideranda, quorum primum est potentia, a qua punctum vbiuis sollicitatur, alterum vero celeritas, quam habet in quolibet spatii loco. His praeterea adiungimus tertium, quod est tempus, quo quaeuis spatii portio percurritur. Tria vero ista ita sunt comparata, vt dato vno reliqua duo semper possint determinari. Primo igitur potentiam tanquam datam considerabimus: deinde vero eam ex data vel celeritatum vel temporum ratione inuestigabimus.

# PROPOSITIO 25.

## Problema.

193. *Protrahatur punctum in* A *quiescens in recta* AP, *a potentia vniformi seu quae vbique punctum eadem vi sollicitat, determinare celeritatem puncti in quouis loco* P. Tab. II. Fig. 10.

## Solutio.

Exponatur massa seu vis inertiae puncti litera A et potentia litera $g$, quae erit constans seu vbique eiusdem quantitatis. Sit spatium AP $= x$, et celeritas in P, quae quaeritur, ponatur $= c$. Sumatur elementum spatii P$p$, quod erit $= dx$; atque incrementum celeritatis, quod punctum, dum elementum P$p$ absoluitur, a potentia $g$ accepit, erit $dc$.

His positis erit $cdc = \frac{ngdx}{A}$ (157.), quia potentiam perpetuo deorsum trahere, et propterea motum accelerare ponimus. Ex hac aequatione, si integretur, oritur $cc = \frac{2ngx}{A} + \text{Const.}$, quae constans ex eo debet determinari, quod celeritas in A euanescat. Factis igitur $c = o$, et $x = o$, prodibit $\text{Const.} = o$, quamobrem habebitur $cc = \frac{2ngx}{A}$, seu $c = \sqrt{\frac{2ngx}{A}}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

194. Punctum A igitur perpetuo in recta AP descendet, et celeritas in quouis loco erit vt radix quadrata ex spatio iam percurso.

## Corollarium 2.

195. Ex his etiam plurium punctorum a potentiis vniformibus seu constantibus descensus poterunt comparari, erunt enim celeritates in ratione subduplicata composita ex directis potentiarum et spatiorum percursorum et inuersa massarum.

## Scholion 1.

196. Casus hic apprime conuenit cum lapsu corporum super terra: grauitas enim, quae potentiae vices sustinet, est vniformis in non nimis magnis a terrae superficie distantiis. Namque idem pondus cuiusuis corporis reperitur in altissimis montibus et profundissimis vallibus; ex pondere autem grauitas innotescit. In descensu igitur grauium libero celeritates sunt vt radices quadratae ex altitudinibus percursis. Haecque est ipsa Galilaei propo-

si-

ſitio, quam primus tum ex experimentis tum ex ratione detexit. Deſcenſus autem in ſpatio ab aere vacuo fieri debet, quia aer motui reſiſtit, hancque regulam euertit.

## Scholion 2.

197. In ſpatio ab aere vacuo, quod ope antliae pneumaticae efficitur, plurimis experimentis eſt demonſtratum, corpora quaecunque aequaliter deſcendere. Ex quo conſequitur, ſi nullus eſſet aer, omnia corpora ex aequalibus altitudinibus delapſa aequales adipiſci celeritates. Hanc ob rem ſi $g$ deſignet vim grauitatis, qua quoduis corpus A cietur, erit $\frac{g}{A}$ quantitas ſemper conſtans. Vis igitur grauitatis proportionalis eſt quantitati materiae corporis, in quod agit. Illa autem vis nil aliud eſt niſi pondus corporis; quare pondera corporum ſunt quantitati materiae proportionalia. *Neutonus* hanc propoſitionem in Princ. Phil. quoque affirmat, eamque praeterea ex experimentis pendulorum probat.

## Corollarium 3.

198. Corpus igitur quodcunque in ſuperficie terrae ex data altitudine delapſum datum acquiret celeritatis gradum. Cognita ergo altitudine ex qua corpus deſcendit, innoteſcet ſimul celeritas eius hoc deſcenſu acquiſita.

## Scholion 3.

199. Ad celeritates igitur menſurandas poterimus has altitudines adhibere, ex quibus graue

in

in terrae ſuperficie deſcendens aequalem acquirit celeritatem. Haec quidem altitudo non poteſt loco ipſius celeritatis ſubſtitui, quia celeritates ſunt in altitudinum ratione ſubduplicata. Verum tamen altitudine commode quadratum celeritatis denotari poterit.

## DEINITIO 15.

200. Altitudinem celeritati cuidam debitam vocabimus poſthac eam altitudinem, ex qua graue in ſuperficie terrae deſcendens eandem illam acquirit celeritatem.

## Corollarium 1.

201. Haec igitur altitudo debita eſt vt quadratum celeritatis ad quam refertur. Celeritate ergo exiſtente $c$ et ipſi debita altitudine $v$, erit $v$ vt $c^2$.

## Scholion 1.

202. Hactenus celeritatem expreſſimus linea recta, quae dato tempore ea celeritate percurri poteſt. In poſterum autem commodius erit altitudinem debitam eius loco introducere. Hanc ob rem ponemus $v = cc$ et $c = \sqrt{v}$. Habebimus ergo in problemate praecedente hanc aequationem $v = \frac{2ngx}{A}$.

## Corollarium 2.

203. In poſterum igitur ſemper loco celeritatis $c$ ponere licebit $\sqrt{v}$, ſeu radicem quadratam ex altitudine celeritati debita.

Co-

## Corollarium 3.

204. Si potentia $g$ denotet ipſam vim grauitatis, erit $x$ ipſa altitudo celeritati $c$ debita, adeoque $v = x$. Eſt vero $v = \frac{2ngx}{A}$, ex quo igitur erit $n = \frac{A}{2g}$. Hoc igitur iam aſſecuti ſumus commodum, vt literam $n$ determinauerimus, quae in omnibus caſibus tenet eundem valorem (155.).

## Scholion 2.

205. Quia hic $g$ vim grauitatis ſignificat erit $\frac{g}{A}$ quantitas conſtans (197.). Hanc ergo ponemus 1, id quod licebit, cum potentiae ad corpora definitam rationem habere nequeant. Atque hinc facile erit in aliis caſibus valorem ipſius $\frac{g}{A}$ ſeu potentiae applicatae ad corpus exhibere. Erit nempe $\frac{g}{A}$ ad 1, ſeu $g : A$ vt vis $g$, qua corpus A ſollicitatur, ad pondus, quod idem corpus haberet in noſtris regionibus. Litera igitur A non amplius materiae quantitatem denotabit, ſed ipſum corporis A pondus, ſi ſuper terra eſſet poſitum. Hoc igitur modo omnes potentias cum ponderibus comparabimus, id quod in potentiis menſurandis ingentem lucem foenerabitur.

## Corollarium 4.

206. Cum in $n = \frac{A}{2g}$, $g$ denotet vim grauitatis, poſitumque ſit $\frac{g}{A} = 1$, erit $n = \frac{1}{2}$. Quem valorem ſemper retinebit, ſi modo celeritates per radices quadratas altitudinum ipſis debitarum exprimantur. Ideoque erit in noſtro caſu $dv = \frac{gdx}{A}$ et $v = \frac{gx}{a}$.

## Corollarium 5.

207. Propterea in hac lege generali $cdc = \frac{npds}{A}$ (157.), si sit altitudo celeritati $c$ debita $v$, erit $cdc = \frac{dv}{2}$, adeoque ob $n = \frac{1}{2}$, habebitur haec lex $dv = \frac{pds}{A}$, vbi $gp$ est ad A, vt vis $p$ ad pondus corporis A.

## Corollarium 6.

208. Simili modo, quae in §. §. 161, et 163 tradita sunt, nempe aequationes $Acdc = npdy$ et $nprdx = Ac^2 ds$, substituendo $v$ loco $c^2$ et $\frac{1}{2}$ loco $n$, transmutantur in has $Adv = pdy$ et $prdx = 2Avds$, vbi $p$ ad A habet rationem modo dictam.

## Corollarium 7.

209. Atque in §. 165. habebitur $r = \frac{2Av}{p}$ seu $pr = 2Av$. Item in §. 166. habebitur $Adv = pds$, et in casu §. 167. habebitur $Adv = -pds$. Hocque modo ante vsitatas quantitates vagas $n$ et $c$ ad determinatos valores reduximus.

# PROPOSITIO 26.

## Theorema.

210. *In diuersis potentiarum vniformium hypothesibus altitudines, ex quibus aequalia corpuscula descendentia aequales acquirunt celeritates, sunt reciproce vt potentiae.*

## Demonstratio.

Sit vniuscuiusque corpusculi massa, seu pondus in superficie terrae A, potentia quaevis vniformis $g$, et altitudo celeritati acquisitae debita $v$. Altitutudo vero, ex qua corpusculum A a potentia g sollicitatum aequalem acquirit descendendo celeritatem, sit $x$, erit $v = \frac{2ngx}{A}$ (202.). At est $n = \frac{1}{2}$ (206.). Ergo fit $v = \frac{gx}{A}$ seu $Av = gx$. Quare cum celeritates a diuersis potentiis productae et corpuscula ponantur aequalia, erit $Av$ quantitas constans, ideoque etiam $gx$. Propterea erit $x$ reciproce vt $g$, i. e. altitudo, ex qua corpusculum A a potentia g sollicitatum acquirit celeritatem $\sqrt{v}$, erit reciproce vt potentia g. Q. E. D.

## Corollarium 1.

211. Ostendit *Neutonus* eiusdem corporis in superficiebus Solis, Iouis, Saturni et terrae positi nisum seu potentiam, qua ad eorum centra sollicitatur esse vt 10000, 835, 525, et 410. Altitudines igitur, ex quibus corpus in superficiebus Solis, Iouis, Saturni et terrae descendens aequales acquirit celeritates sunt inter se vt $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{835}$, $\frac{1}{525}$ et $\frac{1}{410}$.

## Corollarium 2.

212. Statuit autem idem *Neutonus* omnia corpora in his superficiebus aequaliter descendere, pariter vt in superficie terrae. Non igitur opus est hanc adiicere conditionem, quod corpora sint aequalia, sed ex altitudinibus, quae sunt vt $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{835}$, $\frac{1}{525}$ et $\frac{1}{410}$, in superficiebus Solis, Iouis, Saturni et Terrae, quaecunque corpora delabentia eundem acquirunt celeritatis gradum.

## Scholion I.

213. Intelligitur ex his duplicem cuiusuis potentiae esse effectum in corpora, alterum quo certum nisum seu conatum corporibus imprimit, alterum quo ea reipsa mouet. Ille in statica potissimum consideratur, et mensurandus est pondere, quod aequalem habet conatum deorsum, poteritque vocari vis potentiae absoluta. Posterior vero effectus mensurari debet acceleratione, seu celeritatis incremento, quod corpori dato tempore imprimit: proportionalis igitur est illi conatui diuiso per corporis massam (159.). Vocatur hic effectus a *Neutono* vis accelerans, et propterea vis potentiae accelerans proportionalis est vi eius absolutae ad massam corporis seu pondus applicatae. Quapropter cum sit $dv = \frac{pdx}{A}$ (207) et $\frac{p}{A}$ denotet vim accelerantem, erit $dv$ aequale facto ex vi accelerante in elementum spatii percursi. Ita vis grauitatis absoluta est massae corporum, in quae agit, proportionalis, nisum enim eorum deorsum causatur, seu pondus, quod massae proportionale esse ostendimus. Vis autem accelerans grauitatis in omnibus corporibus est aequalis, cum omnia aequaliter descendant, aequalibusque temporibus aequales adipiscantur celeritates.

## Corollarium 3.

214. Vires ergo potentiarum acceleratrices sunt inter se vt vires absolutae, si corpora sint aequalia. Quare cum vis acceleratrix grauitatis sit

1 vt ante posuimus (205), erit vis acceleratrix grauitatis solaris $= 24, 390$; vis acceleratrix grauitatis in superficie Iouis $= 2, 036$; Vis acceleratrix grauitatis, quae est in superficie Saturni $= 1, 280$. Atque grauitatis vim acceleratricem in superficie lunae statuit *Neutonus* $= \frac{1}{3}$.

## Corollarium 4.

215. Quare si Propositio 25. ad lapsum corporum in superficie terrae accommodari debeat, erit $\frac{g}{A} = 1$, quemadmodum fecimus §. 205. Sin vero ad lapsum corporum in superficie solis, erit $\frac{g}{A} = 24, 390$; sin ad lapsum corporum in superficie Iouis, erit $\frac{g}{A} = 2, 036$; sin ad lapsum corporum in superficie Saturni, erit $\frac{g}{A} = 1, 280$, sin denique ad lapsum corporum in superficie Lunae erit $\frac{g}{A} = \frac{1}{3}$.

## Scholion 2.

216. Assumimus hic cum *Neutono* omnia corpora coelestia terrae nostrae esse similia, atque corpora in eorum superficiebus posita vim habere ad eorum centra tendentem, quae similis sit grauitati corporum terrestrium. Ex traditis igitur *Neutonianis* apparet, corpus, cuius hic pondus sit 1 librae, in superficie Solis positum ponderare 24, 39 libras; in superficie Iouis vero 2, 036 libras; in superficie Saturni 1, 280 libras, et in superficie lunae tertiam librae partem.

## Scholion 3.

217. Quo autem facilius grauitatis similiumque potentiarum in corporibus coelestibus natura perspiciatur, singula corporum elementa aequalia aequaliter a grauitate affici concipienda sunt. Ex quo sequitur, quod iam experientia constat, vires grauitatis, quibus quaeque corpora sollicitantur, esse ipsorum massis seu quantitatibus materiae proportionales. Ante vero iam est demonstratum, si potentiae sint massis corporum, quae sollicitant, proportionales, effectus earum in corporibus mouendis esse aequales (136). Quamobrem ex his manifestum est omnia corpora in superficie terrae aequaliter descendere debere, atque etiam pariter in omnibus corporibus coelestibus.

## PROPOSITIO 27.

### Problema.

Tab. II. Fig. 10. 118. *Puncto* A *a potentia uniformi per spatium* AP *promoto, definire tempus, quo spatium* AP *absoluitur.*

### Solutio.

Sit vt ante potentia sollicitans $g$, spatium AP$=x$, et altitudo celeritati, quam in P habet debita $v$; erit ob $n=\frac{1}{2}$, $v=\frac{gx}{A}$. Ipsa igitur celeritas in P erit $=\sqrt{v}=\sqrt{\frac{gx}{A}}$. Habebitur ergo tempus, quo elementum P$p=dx$, percurritur, vt $\frac{dx\sqrt{A}}{\sqrt{gx}}$. Sit tempus, quo spatium AP absoluitur $=t$, ponaturque $dt=\frac{mdx\sqrt{A}}{\sqrt{g.x}}$ oportebit ex vnico experimento determinare li-

literam $m$, quo tempus in data mensura puta in minutis secundis reperiatur. Ex illa vero aequatione prodit integrando $t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}}$, ad quod constantem quantitatem adiicere non est opus, quia posito $x = o$ etiam $t$ euanescit, prout debet. Determinato igitur $m$ ex experimento, habebitur $t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ minut. sec. Quo autem huiusmodi mensura temporis absoluta resultet, oportet vt $x$ quoque secundum constantem mensuram exhibeatur: determinabimus igitur semper spatium $x$ in scrupulis i. e. partibus millesimis pedis Rhenani; fractio enim $\frac{A}{g}$ in numeris absolutis exprimetur, ita vt non opus sit ad eam certam mensuram adhibere. Definita ergo litera $m$, id quod mox faciemus, habebitur plena problematis solutio. Q. E. I.

## Corollarium 1.

219. Si $g$ designet grauitatem, erit $\frac{A}{g} = 1$, (205), hanc ob rem tempus, quo corpus terrestre ex altitudine $x$ scrup. pedis rhenani delabitur, erit $2m\sqrt{x}$ minutorum secundorum.

## Corollarium 2.

220. Experimentis autem compertum est corpus minuto secundo altitudinem 15625 scrup. pedis Rhenani descendendo absoluere. Quam ob rem, si ponatur $x = 15625$, debet prodire $t = 1$. Cum autem sit $t = 2m\sqrt{x}$, erit $1 = 2m\sqrt{15625}$ i. e. $= 250m$. Reperitur ergo valor literae $m = \frac{1}{250}$.

Co-

## Corollarium 3.

221. Quoniam vero litera $m$ in omnibus casibus eundem retinet valorem, erit in casu problematis $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ minut. sec. Expresso igitur spatio percurso $x$ in scrupulis pedis Rhenani dabit $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ numerum minutorum secundorum, quibus hoc spatium percurritur.

## Corollarium 4.

222. Atque ad omnes prorsus casus hic valor ipsius $m$ inuentus accommodari potest. Sit enim elementum spatii descripti $dt$, altitudo celeritati, qua hoc percurritur, debita $v$, erit temporis elementum $dt = \frac{mds}{\sqrt{v}}$ et $t = m\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$. Ex qua aequatione, si $v$ et $s$ in scrup. pedis Rhenani exprimantur et ponatur $m = \frac{1}{250}$, prodibit tempus $t$ in minutis secundis, $t = \frac{1}{250}\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$ min. sec.

## Scholion 1.

223. Ex hoc igitur, quod celeritates per radices quadratas altitudinum debitarum denotamus, istud porro assecuti sumus commodum, quod temporum absolutam mensuram semper inueniamus. Vsi vero sumus experimento, quo definitur altitudo, ex qua graue minuto secundo delabitur, quam *Hugenius* per experimenta pendulorum inuenit 15 ped. Paris. 1 dig. 2 $\frac{1}{18}$ lineas, i. e. in fractionibus decimalibus 15, 0976 ped. Parisinos. Rationem autem pedis Rhenani ad Parisinum adhibemus 1000 ad 1035, ex qua altitudo minuto secundo cadendo per-

percurſa prouenit 15, 625 ped. Rhenanos, ſeu 15625 ſcrupula eiusdem pedis; Hancque menſuram malumus adhibere quam Pariſinam, quia hic numerus eſt quadratus, eoque euitamus frequentes radicis extractiones. Numerus praeterea, per quem $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$ ( $s$ et $v$ in ſcrupulis pedis Rhenani expreſſis ) diuidi debet, vt tempus in minutis ſec. reperiatur, eſt 250, qui facillime memoria teneri poteſt.

## Corollarium 5.

224. Cum $\frac{g}{A}$ denotet potentiae vim accelerantem (213) erunt tempora, quibus ſpatia quaecunque a potentiis vniformibus percurruntur, in ratione ſubduplicata compoſita ex directa ſpatiorum et reciproca virium accelerantium.

## Corollarium 6.

225. Poſita celeritate, quam punctum A ex altitudine $x$ a potentia g ſollicitatum acquirit, $c$, eſt $c$ vt $\sqrt{\frac{gx}{A}}$ (193). Ergo $ct$ erit vt $x$, quia $t$ eſt vt $\sqrt{\frac{Ax}{g}}$. Conſequenter ſpatia percurſa ſunt in ratione compoſita temporum quibus deſcribuntur, et celeritatum, quas deſcenſu adipiscuntur, quaecunque ſint potentiae ſollicitantes, modo ſint vniformes.

## Corollarium 7.

226. Atque ſpatia, quae aequalibus temporibus percurruntur, ſunt vt vires potentiarum ſollicitantium accelerantes.

M Co-

## Corollarium 8.

227. Spatia igitur, per quae corpora aequalibus temporibus in superficiebus Solis, Iouis, Saturni, Lunae et Terrae delabuntur, sunt inter se vt 24390; 2036, 1280, 333; 1000 (214).

## Corollarium 9.

228. In eadem vis accelerantis hypothesi tempora, quibus spatia quaecunque percurruntur, sunt vt celeritates acquisitae, atque tam tempora quam celeritates sunt in ratione subduplicata spatiorum descriptorum.

## Scholion 2.

229. Hic semper ponimus corpora descendentia descensum a quiete inchoare, seu eorum celeritatem in initio descensus esse nullam. In sequentibus vero inuestigabimus eos motus, qui oriuntur, quando corpora in ipso motus initio iam habent quandam celeritatem. In his autem tempora et spatia ea debent intelligi, quae initium suum habent in ipso celeritatis euanescentis puncto, et aequationes inuentae omnes ita sunt comparatae, vt euanescente $t$ vel $v$, simul $x$ et $t$ euanescant.

# PROPOSITIO 28.

## Theorema.

Tab. II. Fig. 10. 230. *Corporis per AP descendentis vt hactenus posuimus, celeritas in P tanta erit, vt ea aequaliter progrediens eodem tempore, quo per AP est delapsum, spatium duplo maius quam AP absoluere possit.*

De-

## Demonstratio.

Manentibus, quae in praecedentibus posuimus, corpore A, potentia $g$, spatio descripto $x$, celeritate in P acquisita $\sqrt{v}$, et tempore descensus $t$, erit $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ (221), et $v = \frac{gx}{A}$ (204). Hanc ob rem habetur $\frac{g}{A} = \frac{v}{x}$, ideoque $t = \frac{x}{125\sqrt{v}} = \frac{2x}{250\sqrt{v}}$. At haec expressio dat tempus quoque, quo spatium $2x$ celeritate uniformi $\sqrt{v}$ percurritur, quia $\frac{2x}{\sqrt{v}}$ est divisum per 250, quem numerum invenimus ad tempus in minutis sec. exprimendum (220). Consequenter spatium $2x$ eodem tempore celeritate $\sqrt{v}$ percurritur, quo spatium $x$ descensu uniformiter accelerato. Q. E. D.

## Corollarium 1.

231. Corpus igitur a potentia uniformi sollicitatum descendens tempore $t$ per spatium $x$ tantam acquirit celeritatem, qua aequabiliter progrediens idem spatium $x$ dimidio tempore $t$ percurrere poterit.

## Corollarium 2.

232. Quia in superficie terrae corpora tempore minuti secundi per spatium 15625 scrup. pedis Rhenani delabuntur, tanta erit eorum celeritas hoc lapsu acquisita, qua uniformi motu spatium 31250 scrup. minuto secundo, seu 15625 scrup. semi minuto secundo percurrent.

## Corollarium 3.

233. Cum celeritas per radices quadratas ex altitudinibus, ex quibus lapsu acquiruntur, exprimere instituerimus, erit celeritas $\sqrt{15625}$ seu 125 tanta, qua minuto secundo spatium 31250 scrup. absolui potest.

## Corollarium 4.

234. Facile igitur erit spatium assignare, quod celeritate hoc modo expressa $\sqrt{v}$ minuto sec. percurritur. Fiat enim, quia spatia eodem tempore descripta sunt vt celeritates, vt 125 ad $\sqrt{v}$ ita 31250 scrup. ad $250\sqrt{v}$. Quo facto erit $250\sqrt{v}$ spatium in scrupulis expressum, siquidem altitudo $v$ in talibus exhibeatur, quod celeritate $\sqrt{v}$ minuto secundo absolui potest, motu scilicet aequabili.

## Exemplum I.

235. Delapsum sit corpus ex altitudine 1000 ped. erit in scrupulis $v = 1000000$, quare ex hoc descensu tantam acquirit celeritatem, qua minuto secundo spatium 250000 scrup. i. e. 250 pedes absoluere posset.

## Corollarium 5.

236. Et reciproce si celeritas per spatium, quod ea minuto secundo percurritur, exprimatur vt initio fecimus, reduci hinc ea poterit ad receptum nostrum modum per radices ex debitis altitudinibus. Sit enim spatium illud $a$ scrup. et altitudo huic celeritati debita $v$ scrup. erit $250\sqrt{v} = a$ atque $v = \frac{a^2}{62500}$ scrup.

Exem-

## Exemplum 2.

237. Habeat corpus tantam celeritatem qua minuto secundo spatium 1000 ped. seu 1000000 percurrere potest, erit altitudo huic celeritati debita $=\frac{1000000000000}{62500}$ scrup. seu 16000 pedes.

## Scholion.

238. Perspicitur igitur, quomodo vtrumque celeritates exprimendi modum inuicem comparari, alterumque ad alterum reduci oporteat. Initio enim celeritates per spatia exprimebamus, quae minuto secundo seu alio dato tempore percurruntur. Postmodum vero celeritates per altitudines debitas exhibere magis congruum visum erat. Nunc vero monstratum, quomodo vterque exprimendi modus ad celeritates mensurandas accommodandus sit.

# PROPOSITIO 29.

## Problema.

239. *Potentia existente vniformi secundum rectam* BP *trahente habeat corpus in initio* B *iam celeritatem datam secundum eandem directionem* BP, *requiritur eius celeritas in quouis puncto* P *rectae* BP. Tab. II. Fig. 11.

## Solutio.

Sit vt ante potentia $g$, et corpus A. Celeritas vero, quam habet in initio B ponatur debita altitudini $c$. Vocetur $BP=x$, et celeritas in P, quam quaerimus, debita sit altitudini $v$. Erit vt ante (207) ob potentiam constantem $g$ per elementum $Pp=dx$ sollicitantem $dv=\frac{gdx}{A}$. Integrando igitur

tur sit $v = \frac{gx}{A} +$ Const. quae quantitas constans ex eo est determinanda, quod facto $x = 0$, fiat $v = c$ (per hyp.) erit ergo Const. $= c$. Consequenter habebimus $v = c + \frac{gx}{A}$, et ipsam celeritatem $\sqrt{v} = \sqrt{(c + \frac{gx}{A})}$. Q. E. I.

## Corollarium I.

240. Ponatur vt sit in casu grauitatis ordinariae $\frac{g}{A} = 1$, erit $v = c + x$. Altitudo igitur celeritati in P debita est aggregatum altitudinis celeritati initiali in B debitae et spatii percursi.

## Scholion.

241. Alia hic occurrit solutio problematis, possumus enim motum per BP cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ in B considerari vt partem motus per lineam AP ex quiete, vt ante posuimus factum, in quo corpus, cum ex A in B peruenerit, habeat celeritatem propositam $\sqrt{c}$. Sit igitur hoc spatium AB $= k$, erit $c = \frac{gk}{A}$ (206), et $v = \frac{g(k+x)}{A} = c + \frac{gx}{A}$, vt iam est inuentum. Spatium autem AB erit $\frac{Ac}{g}$.

# PROPOSITIO 30.

## Problema.

242. *Iisdem quibus in praecedente propositione positis, determinare tempus, quo spatium* BP *percurritur.*

## Solutio.

Sit tempus per spatium BP $= t$, erit $dt = \frac{mdx}{\sqrt{(c + \frac{gx}{A})}}$ (218); est enim celeritas, qua elementum $Pp$ percurcurritur $\sqrt{(c+\frac{gx}{A})}$ vt in praecedente propositione reperimus. Integrando igitur fiet $t=\frac{2mA}{g}\sqrt{(c+\frac{gx}{A})}$ + Const. Constans ~~haec~~ vero quantitas addenda ex hoc definietur, quod posito $x=o$, fieri debeat $t=o$. Prodibit igitur Const. $=\frac{-2mA}{g}\sqrt{c}$. Consequenter habetur $t=\frac{2mA}{g}\sqrt{(c+\frac{gx}{A})}-\frac{2mA}{g}\sqrt{c}$. Expressis $c$ et $x$ in scrupulis ped. Rhen. positoque $m=\frac{1}{250}$ (220), proueniet tempus in minutis secundis expressum. Q. E. I. quae

## Corollarium.

243. Quia in nostris terrestribus regionibus est $\frac{g}{A}=1$, erit tempus quo spatium BP cum celeritate in B initiali $\sqrt{c}$ absoluitur $=\frac{1}{125}\sqrt{(c+x)}-\frac{1}{125}\sqrt{c}$ minut. secund. siquidem $c$ et $x$ in scrupulis pedis Rhenani exprimantur.

## Scholion.

244. Simili modo aliam huius problematis afferimus solutionem, illae quam ~~quo~~ praecedentis in scholio annexam. Posita enim recta AB$=k$, ex qua corpus A delabens in B adipiscitur celeritatem altitudini $c$ debitam, erit tempus, quo hoc spatium AB absoluitur $=\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ak}{g}}$ et tempus, quo spatium AP percurritur erit $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{A(k+x)}{g}}$ (221). Tempus, quo hoc descensu spatium BP absoluitur erit $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{A(k+x)}{g}}-\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ak}{g}}$. Est vero $k=\frac{Ac}{g}$ (241). Consequenter hoc tempus quaesitum per BP fiet $=\frac{A}{125g}\sqrt{(c+\frac{gx}{A})}-\frac{1}{125g}\sqrt{c}$, vt ante inuenimus, si quidem ibi loco $m$ ponatur $\frac{1}{250}$. Atque haec sunt, quae de punctorum descensu rectilineo. ut si ponimus

neo in hypothesi potentiae vniformis exponenda erant. Pergo igitur ad ascensus rectilineos, in quibus celeritatis directio est directe contraria directioni potentiae, quam etiam nunc vniformem seu constantem ponam.

## PROPOSITIO 31.

### Problema.

Tab. II. Fig. 12. 245. *Potentia vniformi tendente deorsum, habeat corpus in* B *celeritatem datam sursus directam; requiritur eius celeritas in quouis puncto spatii* BA, *quod ascensu percurrit.*

### Solutio.

Perspicuum est hoc casu corpus in linea recta esse progressurum motu retardato (191), quia eius directio motus directe est contraria potentiae sollicitantis directioni. Sit itaque celeritas in B debita altitudini $c$, et ponatur corpus iam peruenisse in P. Vocetur altitudo, cui celeritas hoc loco debetur, $v$, spatiumque ipsum iam percursum BP, $x$. Capiatur $Pp = dx$, erit in $p$ altitudo celeritati debita $v + dv$. Quia autem potentia, quam pono $= g$, motui est contraria; tota in diminuendo motu consumitur. Quam ob rem $dv$ aequale poni oportet ipsi $\frac{-g dx}{A}$ denotante A corporis massam. Cum itaque sit $-dv = \frac{g dx}{A}$; erit integrando $C - v = \frac{gx}{A}$. Ad constantem C definiendam ponatur $x = o$, quo casu $v$ in $c$ transmutari debebit; eritque ideo $C = c$. Ex quo prodibit ista aequatio $c - v = \frac{gx}{A}$ seu $v = c - \frac{gx}{A}$, quae determinat ce-

celeritatem corporis in quouis puncto spatii ascensu descripti. Q. E. I.

## Corollarium 1.

246. Celeritas igitur corporis euanescet, quando fit $c = \frac{gx}{A}$, i. e. quando peruenit ad altitudinem $x = \frac{Ac}{g}$. Sit BA ista altitudo ideoque aequalis $\frac{Ac}{g}$, inde $c = \frac{BA.g}{A}$, ex quo intelligitur BA eam ipsam esse altitudinem, ex qua corpus A a potentia $g$ sollicitatum descendendo acquirit celeritatem $c$ (206). Corpus igitur ea celeritate, quam ex data altitudine delapsum est adeptum, sursum progrediens ad eam ipsam pertinget altitudinem, antequam motum suum amittit.

## Corollarium 2.

247. Praeterea corpus ascendens per spatium BA in singulis punctis eas ipsas habet celeritates quas ibidem haberet, si ex A descendisset. Posita enim $AP = y$, erit celeritas in P descensu ex A nata $= V\frac{gy}{A}$; at est celeritas in eodem loco P ascensu ex B relicta $V(c - \frac{gx}{A})$. Quia autem est $x + y = BA = \frac{Ac}{g}$, patet has expressiones celeritatum esse aequales nempe $\frac{gy}{A} = c - \frac{gx}{A}$.

## Corollarium 3.

248. Congruit igitur motus corporis ascendentis cum motu descendentis, atque vtriusque celeritates in iisdem locis, i. e. in iisdem a puncto supremo, quo celeritas euanescit, distantiis, erunt aequales.

## Corollarium 4.

249. Ex his perſpicitur, tempus quoque aſcenſus per ſpatium BA aequale eſſe tempori deſcenſus per idem ſpatium; Quare cum dicto $BA = a$, tempus deſcenſus ſit $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{Aa}{g}}$ min. ſec. (221); eidem valori aequale eſſe debebit tempus aſcenſus per BA; ſeu poſito loco $a$ eius valore $\frac{Ac}{g}$, erit tempus integri aſcenſus $= \frac{A}{125g} \sqrt{c}$.

## Corollarium 5.

250. Simili modo tempus aſcenſus per quamvis portionem BP definietur, manente enim $AP = y$ erit tempus ſiue aſcenſus ſive deſcenſus per AP $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{Ay}{g}}$, quod ablatum ab integro tempore aſcenſus $\frac{A}{125} \sqrt{c}$ relinquet tempus per portionem BP. Eſt vero $y = \frac{Ac}{g} - x$, quare tempus aſcenſus per BP habebitur $= \frac{A}{125g} \sqrt{c} - \frac{A}{125g} \sqrt{(c - \frac{gx}{A})}$.

## Scholion I.

251. Euidenter vero haec aequalitas aſcenſuum a priori oſtendi poteſt ex ipſa potentiarum actione. Cum enim in aſcenſu potentia tantum de celeritate auferat, quantum in deſcenſu ad eam addit, perſpicuum eſt perfectam aequalitatem inter vtrumque motum verſari debere, neque aliud eſſe diſcrimen, niſi temporis ordinem, qui cogitatione duntaxat inuerſus alterum caſum in alterum transformat. Similis vero eſt ratio etiam omnium motuum a potentiis abſolutis productorum: iisdem enim celeritatibus per eandem viam reuerti poterit

cor-

corpus, ſi quidem in reditu impreſſiones easdem, quas in itu, ſed contrarias patitur. Sic planetae in plagas contrarias circa ſolem eodem modo, quo nunc, in ellipſibus mouerentur, ſi initio motus ipſis fuiſſent his contrarii. Nam per idem ſpatii elementum effectus potentiae ad celeritatem immutandam idem eſt ſemper, atque fit ratione corporis negatiuus, quando reuertitur. Effectus autem, qui ad directionem corporis immutandam impenditur, vtroque caſu manet, quo fit vt corpus in itu et reditu eandem percurrat ſemitam. Sed haec infra clarius patebunt, vbi de huius modi motibus ex inſtituto agetur. At vero, ſi adeſt reſiſtentia, haec inter ascenſus et descenſus ſimilitudo euanescit: nam in vtroque caſu reſiſtentia motum corporis minuit, neque effectus eius in altero alterius eſt oppoſitus, quemadmodum vſu venit, ſi potentia ſollicitans eſt abſoluta.

## Scholion 2.

252. Satis igitur expoſito motu rectilineo, qui a potentiis vniformibus oritur, pergendum eſt ad potentias difformes, quae aliis in locis alias exercent in corpora vires, atque exponendum, quomodo motus corporum, quatenus fiunt in linea recta, ab iis varientur. Huiusmodi enim difformitati omnes potentiae, quas in mundo obſeruamus, ſunt obnoxiae, neque vlla potentia poteſt aſſignari, quae corpus, in quocunque loco ſit poſitum, aequaliter aſficiat. Sic planetae, quo ſoli ſunt propiores, ve-

hementius ad ſolem attrahuntur, et quo magis etiam corpus a ſuperficie terrae remouetur, minor in eo fit grauitas ſeu niſus deorſum. Simili haec fere accidunt modo, quo magnetem obſeruamus idem ferri fruſtum in minore diſtantia fortius, in maiore vero debilius attrahere. Quamcunque igitur potentiae diſtantiarum ſeu poſitionum corporis teneant rationem, leges eruemus, ſecundum quas motus corporis ſollicitati immutatur. Et primo quidem potentias poteſtati cuidam diſtantiarum corporis a puncto fixo proportionales contemplabimur.

## DEFINITIO 16.

253. Centrum virium vocatur punctum illud fixum, ad quod corpora attrahuntur vi, quae pendet a diſtantia ab hoc puncto, ſeu quae eſt vt functio diſtantiae quaecunque.

### Corollarium 1.

254. Datur igitur diſtantia ab hoc centro virium, in qua corpus poſitum tanta vi ad centrum trahitur quanta foret vis eius grauitatis, ſi in ſuperficie terrae verſaretur.

### Corollarium 2.

255. Cognita ergo hac diſtantia, et lege attractionis ſcilicet functione diſtantiae, cui attractio eſt proportionalis; innoteſcet ratio, quem habet corporis vbicunque poſiti conatus accedendi ad centrum virium, ad eiusdem corporis vim grauitatis, ſi eſſet in terrae ſuperficie.

## Corollarium 3.

256. Cum itaque hoc modo vires vtcunque variabiles cum vi grauitatis comparare liceat, quia huius in corpora effectus est cognitus; cuiuscunque etiam vis in corpora effectus poterit determinari.

## Scholion 1.

257. Pono hic attractionem centrorum virium similem vi grauitatis, ita vt quoque diuersorum corporum in eadem distantia positorum conatus ad centrum sint vt massae ipsorum, ideoque vires acceleratrices omnium aequales (212). In his igitur pertractandis massam corporis moti non opus est in computum vocare, sed vim acceleratricem duntaxat, quae conatui accedendi ad centrum diuiso per massam est proportionalis. Comparabitur ea autem cum vi grauitatis acceleratrice, quam ponimus =1, atque ad hanc vnitatem reuocabimus omnes vires potentiarum acceleratrices, quippe quantitates homogeneas.

## Corollarium 4.

258. Quando itaque dicemus vires esse distantiis a centro virium seu cuidam functioni earum proportionales, id non de solis nisibus, quos corpora habent ad centrum, sed de viribus acceleratricibus, i. e. de nisibus ad massas corporum applicatis intelligi debebit.

## Corollarium 5.

259. Quoniam igitur potentiae directio, qua corpus vrgetur, semper tendit ad centrum virium;

ſpicuum eſt, ſi corpus vel quieſcit, vel motum habet, cuius directio per centrum virium tranſit, tum corpus in hac linea recta per centrum virium tranſeunte perpetuo moueri debere. (189).

## DEFINITIO 17.

260. Potentia, quae corpora ad huiusmodi virium centrum vrget, vocatur vis centripeta. Haecque, ſi ſit negatiua, vt corpora ab hoc centro repellat, vocatur vis centrifuga.

## Corollarium 1.

261. Cum hic de motu ſit quaeſtio, vis centripeta nobis erit vis acceleratrix ſeu conatus corporis ad centrum tendentis diuiſus per corporis maſſam.

## Corollarium 2.

262. Conatus igitur ſeu niſus, quem habet corpus ad centrum virium, exprimitur vi centripeta in corporis maſſam ducta. Quamobrem erit ad pondus eiusdem corporis, ſi in ſuperficie terrae eſſet poſitum, vt vis centripeta ſeu vis acceleratrix ad vnitatem. (257.)

## Scholion.

263. *Neutonus*, qui voce vis centripetae potiſſimum vtitur, triplici modo eandem menſurari poſſe animaduertit. Primo quantitate eius abſoluta, qua efficaciam ipſius centri virium metitur, ſine reſpectu habito ad corpora attracta; ſic dicit in maiore magnete maiorem ineſſe vis centripetae quantita-

tem

tem absolutam, in minore minorem. Et simili modo secundum eius theoriam in sole quantitas absoluta maior est quam in terra. Haec comparatio autem intelligenda est de centris virium similiter i. e. secundum eandem distantiae functionem attrahentibus, in dissimilibus enim huiusmodi comparatio locum non habet. Haec ergo quantitas absoluta mensuranda est ex conatu, quem datum corpus in data distantia habet versus virium centrum. Loco huius autem considerationis hic adhibeo distantiam in qua corpus positum vi aequali ponderi eius nititur ad centrum (254). Secundo habet vis centripetae quantitatem accelerantem, quae apud ipsum eodem accipitur sensu, quo hic ipsa vis centripeta (261), mensuratur enim conatu ad massam applicato. Tertio inducit vis centripetae quantitatem motricem qua nihil aliud denotat nisi ipsum conatum, quem corpora habent ad centrum virium accedendi; quantitas motus enim, quam mensurare soliti sunt celeritate ducta in massam, quaeque dato tempore generatur, proportionalis est ipsi conatui. Posito namque conatu hoc $p$, massa A, est celeritatis incrementum dato tempusculo vt $\frac{p}{A}$ (154), quod ductum in massam A dat incrementum quantitatis motus, quod itaque ipsi $p$ erit proportionale.

## PROPOSITIO 32.
### Problema.

264. *Sit centrum virium* C, *quod attrahat ad se in ratione quacunque multiplicata distantiarum; ad hoc-* Tab. II. Fig. 13.

*hocque trahatur corpus in* A *quiescens: quaeritur eius celeritas in quouis puncto spatii* AC.

## Solutio.

Sit AC$=a$; AP$=x$; et celeritas quam in P habebit sit debita altitudini $v$. Fiat attractio in ratione $n$ cuplicata distantiarum, et designet $f$ eam distantiam a C, in qua corporis conatus ad C aequalis est ponderi corporis, si esset in terrae superficie positum. Vis igitur acceleratrix, qua corpus in P vrgetur ad C erit ad vim grauitatis, quam pono $=1$, vt CP$^n$ i. e. vt $(a-x)^n$ ad $f^n$; quamobrem ea exprimetur per $\frac{(a-x)^n}{f^n}$. Sumto ergo P$p=dx$, erit $dv = \frac{(a-x)^n dx}{f^n}$. Est enim $dv$ aequale $dx$ multiplicato per vim acceleratricem (213). Integrata hac aequatione prodibit $v = C - \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ad constantem C definiendam ponatur $x=o$, quo casu fieri debet per hypothesin $v=o$, fiet ergo $C = \frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Habebitur ergo $v = \frac{a^{n+1}-(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Seu posito $a-x$ $=$BP$=y$; erit $v = \frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ex qua aequatione celeritas corporis in quouis loco spatii AC cognoscitur. Q. E. I.

## Corollarium I.

265. Si $n+1$ est numerus positiuus, euanescet $y^{n+1}$ facto $y=o$. Hoc igitur casu altitudo celerita-

ritati, quam corpus in C perueniens habebit debita erit $=\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. At si $n+1$ est numerus negatiuus, fiet $y^{n+1}$, facto $y=o$, infinite magnum: hoc ergo casu corporis in C peruenientis celeritas erit infinite magna.

## Corollarium 2.

266. Sed si est $n+1=o$ seu $n=-1$, ex inuenta aequatione valor ipsius $v$ non cognoscitur ob numeratorem et denominatorem euanescentes. Quamobrem hunc casum ex ipsa aequatione differentiali oportebit repetere. Erit autem $dv=\frac{fdx}{a-x}$, cuius integralis est $v=C-fl(a-x)$. Debebit autem esse $C=fla$, quocirca prodibit $v=fl\frac{a}{a-x}=fl\frac{a}{y}$. Qui est verus valor ipsius $v$ quando habetur $n=-1$, i. e. quando vis centripeta est reciproce vt distantia a centro virium.

## Corollarium 3.

267. Hoc igitur casu, quo $n=-1$, cum corpus peruenerit in centrum C, celeritas eius erit infinite magna; fit enim $v=fl\infty$. Qui infinitorum gradus est infimus et quasi proximus finito; quantumuis enim parum $n+1$ cyphram excedat, subito celeritas in C fit finita.

## Corollarium 4.

268. Cum autem fuerit $n+1$ numerus affirmatiuus, quia tum altitudo celeritatis in $c$ debita est $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$, erunt ipsae celeritates plurium corporum

ad centrum C delabentium, quas in C habebunt, vt $a^{\frac{n+1}{2}}$ i. e. in ratione $\frac{n+1}{2}$ plicata distantiarum ex quibus lapsum inchoauerunt.

## Scholion I.

269. Postquam autem corpus ex A in C peruenit, quo tum promoueatur, non tam facile potest definiri. Videtur quidem, si in expressione inuenta $y$ ponatur negatiuum, proditura esse altitudo celeritati in Q debita, quae si est affirmatiua, corpus reuera in Q perueniet; sin vero sit negatiua, indicio hoc est corpus nunquam vltra C in plagam CQ esse peruenturum. Verum hic motum prosequendi modus non semper adhiberi potest; saepe enim ipsi hypothesi, qua ponitur vis attractiua cis et vltra C versus centrum eadem, est contrarius. Namque corpus in P existens, quia trahitur deorsum, cum in Q peruenerit, sursum vrgebitur aequali vi, si est CQ=CP. Hanc ob rem vis, qua corpus in Q sollicitatur, fit negatiua ratione prioris, atque idcirco quantitate negatiua est exprimenda. Vis igitur in P per $\frac{(a-x)^n}{f^n}$ seu $\frac{y^n}{f^n}$ expressa sui fieri debet negatiua, cum $-y$ ponitur loco $y$, id quod nunquam euenit, nisi sit $n$ vel numerus impar vel fractio, cuius numerator et denominator sunt numeri impares. His igitur in casibus prodibit verus valor ipsius $v$, cum corpus in Q peruenerit; in reliquis semper, quia in calculo vis sollicitans corpus in Q cum vero eius valore non congruit, veritati non consentanea lit-

litterae $v$ quantitas elicitur. Si enim eſt $n$ numerus par vis attrahens in Q facto $n$ negatiuo aequalis erit vi in P et tendet in eandem plagam deorſum ſcilicet; Ex quo fit, vt corpus transgreſſum centrum C in recta CQ in infinitum deberet descendere, id quod etiam calculus declarat. Quod cum pugnet cum hypotheſi perſpicuum eſt his caſibus motum corporis, poſtquam in C peruenit, ex inuenta formula definiri non poſſe. Abſurdum autem magis elucet quando eſt $n=\frac{1}{2}$ vel alia huiusmodi fractio, quae $y^n$ transmutat in quantitatem imaginariam, poſito $-y$ loco $y$; id quod indicaret corpus vltra C progreſſum nonſolum non ad C attrahi, ſed vim attrahentem etiam fieri imaginariam, quod quid ſit nequidem intelligi poteſt.

## Corollarium 5.

270. Si igitur $n$ eſt numerus impar, valor ipſius $v$, qui eſt $\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$ non mutatur poſito $-y$ loco $+y$, quia $n+1$ exponens ipſius $y$ euadit numerus par. Ex quo apparet celeritatem corporis in Q aequalem fore ei, quam habet in P, ſi quidem eſt CQ=CP. Pari ergo modo corpus in directione CQ recedit, qua ante per AC acceſſerat; pertingetque in B vsque, ita vt ſit AB=AC, vbi celeritatem ſuam perdet omnem. Reuertetur itaque ſimili modo ad C, et tum rurſus in A perueniet. Quos motus reciprocos, niſi adeſt reſiſtentia, perpetuo perficiet.

## Corollarium 6.

271. Excipiendus est tamen casus, quo $n = -1$, quanquam $-1$ est numerus impar. Facto enim $y$ negatiuo fit $v = fl\frac{-a}{y}$, quae est quantitas imaginaria. Ex quo perspicitur corpus nunquam vltra C esse transgressurum. Aliud ergo iudicium ferendum esse videtur, quando $n$ est numerus negatiuus, etiamsi impar. Huiusmodi enim simile exemplum infra occurret si $n = -3$. (335).

## Scholion 2.

272. Hoc quidem veritati minus videtur consentaneum; vix enim apparet ratio, cur corpus celeritate sua infinite magna, quam in C acquisiuit, in aliam potius plagam, quam in CB, sit progressurum; praesertim cum huius celeritatis infinitae directio sit secundum hanc plagam. Quicquid autem sit hic calculo potius, quam nostro iudicio est fidendum, atque statuendum, nos saltum, si fit ex infinito in finitum, penitus non comprehendere. Eo autem magis in hac sententia confirmamur simili exemplo, quod infra plene explanatum occurret, (655) si est $n = -2$; hoc enim casu corporis in C peruenientis celeritas quoque est infinita, et secundum CB directa, nihilo vero minus corpus non vltra C progreditur, sed subito ex C versus A reuertitur pariter ac accesserat. Ex quo perspicitur, quoties celeritas in C existat infinita, iudicium de vlteriori corporis motu esse suspendendum. Tam diu autem hoc tantum fiat, quoad ad motus curuili-

lineos perueniamus; ex iisque enim qui sint rectilinei, euidentius colligetur (762). Neque enim calculus, qui tum instituetur, obnoxius est huic incommodo, vt a hypothesi dissentiat; sed quaquauersus vis centripeta aequalis ponetur non refragante calculo.

## Scholion 3.

273. Semper autem, quando celeritas in C non est infinite magna, id quod accidit, quoties est $n+1$ numerus affirmatiuus, motum corporis integrum iudicio nostro poterimus cognoscere, etiamsi calculus sit insufficiens. Si enim celeritas in C est finita, habensque directionem secundum CB, quam necessario habere debebit; fieri non potest, vt non in CB motum continuet. Simili autem modo hunc motum continuans a C recedet, quo ante in AC accesserat, atque in puncto quocunque Q eandem habebit celeritatem, quam ante in P puncto aeque dissito a C habebat; sicut ex (251) intelligi potest. Perpetuo igitur motus reciprocos ex A in B et vicissim rediens corpus perficiet.

## PROPOSITIO 33.

### Problema.

274. *Centro C attrahente in ratione quacunque multiplicata distantiarum, habeat corpus in D iam celeritatem datam; Requiritur punctum A in recta CD producta, ex quo corpus descensum ad C inchoans cum in D peruenerit, hanc ipsam acquirat celeritatem.* Tab. II. Fig. 14.

## Solutio.

Denotante vt ſupra $n$ exponentem rationis multiplicatae in qua ſit vis centripeta, et $f$ diſtantiam in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis; ſit CD$=b$, celeritas in D debita altitudini $h$, et quaeſita diſtantia CA ponatur $=q$. Cum igitur hic $q$ idem denotet quod ſupra $a$, et $b$ idem quod $y$, et $h$ idem quod ibi $v$, habebitur iſta aequatio $h=\frac{q^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ex qua fit $q^{n+1}=b^{n+1}+(n+1)hf^n$, atque $q=(b^{n+1}+(n+1)hf^n)^{\frac{1}{n+1}}$. Particulari autem caſu quo $n=-1$ habebitur $h=fl\frac{q}{b}$, hincque $q=e^{\frac{h}{f}}b$, vbi $e$ eſt numerus cuius logarithmus eſt vnitas. Q. E. I.

## Corollarium 1.

275. Si vis centripeta eſt directe vt diſtantia fit $n=1$, eritque $q=\sqrt{(b^2+2fh)}$. Quae quantitas ſemper eſt finita, ſi modo $b$, $f$ et $h$ ſunt tales. Simile euenit ſemper dummodo $n+1$ eſt numerus affirmatiuus. Atque etiam in caſu $n=-1$, diſtantia $q$ nunquam fit infinita.

## Corollarium 2.

276. Sit autem $n+1$ numerus negatiuus puta $-m$, vt ſit $n=-m-1$, erit $q=b\sqrt[m]{\frac{f^{m+1}}{f^{m+1}-mb^m h}}$ quae altitudo toties eſt infinita, quoties eſt $h=\frac{f^{m+1}}{mb^m}$, et, ſi $h$ eſt quantitas adhuc maior, fit $q$ ne-

ga-

gatiua, seu potius infinito maior, vel etiam imaginaria. Ex quo intelligitur his casibus, ne ex infinita quidem distantia corpus delapsum tantam in D acquirere posse celeritatem.

## Corollarium 3.

277. Manente $n+1$ numero negatiuo $-m$, et distante puncto A in infinitum; erit $b=\frac{f^{m+1}}{mb^m}$. Atque distantia a centro C, in qua corpus, ex spatio infinito delapsum, celeritatem habet $\sqrt{b}$, erit $=f\sqrt[m]{\frac{f}{mb}}$.

## Corollarium 4.

278. Si vis centripeta reciproce proportionalis est distantiarum quadratis, erit $m=1$. Quapropter fit $q=\frac{bf^2}{f^2-bb}$. Quando ergo est $b=\frac{f^2}{b}$, distantia AC i. e. $q$ fit infinite magna.

## Corollarium 5.

279. Si hoc problema cum praecedente coniungatur, facile determinabitur motus corporis, quod ex D descensum ad C inchoat celeritate $\sqrt{b}$: Ex praecedente enim innotescit descensus corporis ex A factus, cuius cum sit descensus ex D celeritate $\sqrt{b}$ inceptus pars, vocetur $CP=y$, et celeritas quam corpus in P habet, debita sit altitudini $v$, erit $v=\frac{q^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$ (266). Est autem $q^{n+1}=b^{n+1}+$

(n+1)

$(n+1)hf^n$. Vnde fit $v = \frac{h^{n+1} + (n+1\ hf^n - y^{n+1}}{(n+1)f^n}$ $= \frac{h^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n} + h$.

## Corollarium 6.

280. Expressio haec ipsius $v$, quando descensus ex D incipitur celeritate altitudini $h$ debita, non differt ab ea, quae prodit, si descensus ex quiete fieret, nisi hoc, quod sit hac ipsa quantitate $h$ vbique maior.

## Scholion.

Tab. II. Fig. 13. 281. Quod ad tempora attinet quibus in quauis hypothesi vis centripetae spatium AC eiusque partes absoluuntur, ea facile ex cognitis celeritatibus cognoscentur. Pro generali quidem valore litterae $n$ tempus non potest in terminis finitis exhiberi, quippe tempus per AP inuenitur $= \int \frac{dx\sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(a^{n+1} - (a-x)^{n+1})}}$ quae quantitas vniuersaliter neque integrari neque ad cognitarum curuarum quadraturas potest reduci. Attamen in variis ipsius $n$ casibus satis concinne exprimi potest, quamobrem missis generalibus praecipuos casus speciales sequentibus propositionibus sumus complexuri.

# PROPOSITIO 34.

## Problema.

Tab. II. Fig. 15. 282. *Si fuerit vis centripeta distantiis a centro C proportionalis, et corpus ex A in C vsque delabatur;*

*tur, determinari oporteat tempus, quo corpus quamque huius ſpatii partem abſoluit.*

## Solutio.

Poſitis AC$=a$, et diſtantia a centro C in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis $=f$, ſit ſpatii quaeuis portio CP$=y$, et celeritas in P debita altitudini $v$. Erit ergo tempus, quo ſpatium CP abſoluitur $\int\frac{dy}{\sqrt{v}}$, negligo hic fractionem $\frac{1}{250}$, quia haec tempori in minutis ſecundis cognoſcendo inſeruit, et cum libuerit, poteſt adiungi. Eſt vero ex prop. 32 facto $n=1$, $v=\frac{a^2-y^2}{2f}$, ergo $\sqrt{v}=\frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{\sqrt{2f}}$. Ex quo fit tempus per PC$=\int\frac{dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=\frac{\sqrt{2f}}{a}\int\frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Super AC conſtruatur circuli quadrans AME, in eoque ducantur applicatae CE, PM. Quo facto erit, vt conſtat, arcus EM$=\int\frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Quamobrem tempus per PC fiet $=\frac{EM.\sqrt{2f}}{a}$. Tempus igitur totius deſcenſus per AC erit $=\frac{AME.\sqrt{2f}}{a}$. Hinc erit tempus deſcenſus per AP$=\frac{AM.\sqrt{2f}}{a}$. Ex his igitur tempus deſcenſus per quamuis ſpatii percurſi portionem innoteſcit, idque in minutis ſecundis, ſi hae expreſſiones per 250 diuidantur, et longitudo $f$ in partibus milleſimis pedis Rhenani exhibeatur. Q. E. I.

## Corollarium I.

283. Denotet $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $2AME:a=\pi:1$, et $\frac{AME}{a}=\frac{\pi}{2}$. Hanc ob rem erit tempus deſcenſus per AC$=\frac{\pi}{2}\sqrt{2f}$.

Id quod non pendet ab altitudine lapſu percurſa $a$, ſed quantacunque haec ſit, eundem valorem retinet. Omnia igitur corpora, quae ad hoc centrum delabuntur aequalibus temporibus eo peruenient.

## Scholion.

284. Sequitur haec temporum aequalitas ex ipſa celeritatis expreſſione $\frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{\sqrt{2f}}$ in qua $a$ et $y$ vnam dimenſionem habere cenſenda ſunt. Quoties enim hoc euenit tempora, quibus quaecunque ſpatia $a$ percurruntur, debebunt inter ſe eſſe aequalia. (40.)

## Corollarium 2.

285. Si praeterea aliud ſit huiusmodi centrum virium, ſed diuerſa praeditum efficacia, ita vt diſtantia, in qua centripeta vis aequalis eſt grauitati, ſit F, erunt tempora deſcenſum ad vtrumque centrum inter ſe vt $\sqrt{f}$ ad $\sqrt{F}$. Sed efficaciae ipſae hoc caſu tenent inuerſam rationem diſtantiarum $f$: F, ſunt enim vt vires, quas haec centra exercent in aequalibus diſtantiis. Quapropter tempora deſcenſuum ad diuerſa huiusmodi virium centra ſunt in ratione reciproca ſubduplicata efficaciarum. Quae quidem ratio in omnibus ſimilibus centris virium locum tenet, ſi ſpatia percurſa ſunt inter ſe aequalia, vt in ſequenti docebitur.

# PROPOSITIO 35.

## Problema.

Tab. III. Fig. 1. 286. *Si fuerit vis centripeta quadratis diſtantiarum a centro C reciproce proportionalis, et cor-*

*corpus ex* A *in* C *vsque delabatur: inueniendum est tempus, quo corpus quamuis huius spatii* AC *portionem percurrat.*

## Solutio.

Manente $AC=a$, et distantia in qua vis centripeta grauitati aequalis est $f$; sit $CP=y$, et celeritas in P debita altitudini $v$. Erit ergo ob $n=-2$, ex prop. 32, $v=f^2(\frac{a-y}{ay})$ et $\sqrt{v}=f\sqrt{\frac{a-y}{ay}}$. Elementum igitur temporis $\frac{dy}{\sqrt{v}}$ fit $=\frac{dy\sqrt{ay}}{f\sqrt{(a-y)}}=\frac{\sqrt{a}}{f}\cdot\frac{ydy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Consequenter tempus per PC est $\frac{\sqrt{a}}{f}\int\frac{ydy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Est vero $\int\frac{ydy}{\sqrt{(ay-y^2)}}=-\sqrt{(ay-y^2)}+\int\frac{\frac{1}{2}ady}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Quare descripto super AC semicirculo AMC ductaque ordinata PM erit $CM=\int\frac{\frac{1}{2}ady}{\sqrt{(ay-y^2)}}$ et $PM=\sqrt{(ay-y^2)}$. Propterea prodibit tempus per $CP=\frac{\sqrt{a}}{f}(CM-PM)$, atque ex hoc tempus totius descensus per $AC=\frac{AMC.\sqrt{a}}{f}$. Tempus ergo, quo portio AP absoluitur, est $\frac{\sqrt{a}}{f}(AM+PM)$. Q. E. I.

## Corollarium I.

287. Denotante igitur $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $AMC=\frac{1}{2}a\pi$. Ideoque erit tempus descensus per $AC=\frac{\pi a\sqrt{a}}{2f}$. Ex quo intelligitur plurium corporum ad C delabentium tempora descensuum esse in sesquiplicata ratione distantiarum.

## Corollarium 2.

288. Atque ad diuerſa huiusmodi centra virium corpora accedent temporibus, quae ſint in ratione compoſita ex directa ſesquiplicata diſtantiarum et inuerſa ſubduplicata efficaciarum. Eſt enim efficacia directe vt diſtantiae $f$ quadratum.

## Scholion.

289. Si ſit vis centripeta reciproce vt cubus diſtantiae, prodit $n=-3$ et $v=\frac{f^3}{2}\left(\frac{a^2-y^2}{a^2y^2}\right)$. Eſt igitur $\sqrt{v}=\frac{f}{ay}\sqrt{f\frac{(a^2-y^2)}{2}}$, et tempus per CP $=\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}\int\frac{ydy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}(a-\sqrt{(a^2-y^2)})$. In circuli autem quadrante eſt PM $=\sqrt{(a^2-y^2)}$; tempus ergo, quo CP abſoluitur et $=\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$(AC−PM), et tempus, quo totum ſpatium AC percurritur eſt $\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$ AC ſeu $\frac{a^2\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$. Conſequenter tempus, quo portio AP percurritur erit $=\frac{\mathrm{AC}.\mathrm{PM}\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$. In hoc igitur caſu tempus algebraice poteſt exhiberi, id quod etiam fit in hisce caſibus quibus $n$ eſt terminus huius ſeriei $-\frac{5}{3}$, $-\frac{7}{5}$, $-\frac{9}{7}$, $-\frac{11}{9}$, etc. Quae autem ſint ipſa tempora ſaltem integra deſcenſuum per AC ſumus inueſtigaturi.

# PROPOSITIO 36.

## Problema.

290. *Determinare tempus deſcenſus per AC ad centrum virium C, ſi vis centripeta proportionalis*

*lis est reciproce huic distantiarum dignitati cuius exponens est $\frac{2m+1}{2m-1}$ denotante m numerum integrum affirmatiuum.*

## Solutio.

Retinentibus $a$, $f$, $y$ et $v$ eosdem, quos supra, valores erit $n = \frac{-2m-1}{2m-1}$. Quo circa fit $v = \frac{2m-1}{2} f^{\frac{2m+1}{2m-1}} \left( \frac{a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}}}{a^{\frac{2}{2m-1}} y^{\frac{2}{2m-1}}} \right)$, adeoque $\int \frac{dy}{\sqrt{v}} =$

$$\sqrt{\frac{2a^{\frac{2}{2m-1}}}{(2m-1) f^{\frac{2m+1}{2m-1}}}} \int \frac{y^{\frac{1}{2m-1}} dy}{\sqrt{(a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}})}},$$

quod integrale ita debet accipi, vt euanescat posito $y=0$. Quo facto si ponatur $y=a$, prodibit tempus totius descensus per AC quaesitum. Ponatur $y^{\frac{2}{2m-1}} = z$, et $a^{\frac{2}{2m-1}} = b$, erit $y^{\frac{1}{2m-1}} = \sqrt{z}$ et $dy = \frac{2m-1}{2} z^{\frac{2m-3}{2}} dz$, quibus substitutis fiet $\int \frac{dy}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{(2m-1) a^{\frac{2}{2m-1}}}{2 f^{\frac{2m+1}{2m-1}}}} \int \frac{z^{m-1} dz}{\sqrt{(v-z)}}$.

Ad $\int \frac{z^{m-1} dz}{\sqrt{(b-z)}}$, inueniendum pono $b-z=u^2$, erit $z=b-u^2$ et $dz=-2udu$, ideoque $\frac{z^{m-1} dz}{\sqrt{(b-z)}} = -2du (b-u^2)^{m-1} = -2du(b^{m-1} - \frac{(m-1)}{1} b^{m-2} u^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2} b^{m-3} u^4 - \text{etc.})$ cuius integrale est $C - 2u(b^{m-1} - \frac{(m-1)}{1.3} b^{m-2} u^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 5} b^{m-3} u^4 - \text{etc.})$, quae quantitas

titas cum debeat euanescere facto $y$ seu $z = o$, i.e. $u^2 = b$, erit $C = 2b^{m-\frac{1}{2}}(1 - \frac{(m-1)}{1.3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5} - \text{etc.})$ Quia autem integrum tempus prouenit facto $y = a$ seu $z = b$, i. e. $u = o$, remanebit pro integrali ipsius $\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(b-z)}}$ sola quantitas $C$, quae loco $b^{m-\frac{1}{2}}$ restituto $a$ est $= 2a(1 - \frac{(m-1)}{1.3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7} +$ etc.). Totum ergo descensus tempus per AC aequabitur facto ex $\frac{a^{\frac{2m}{2m-1}}}{f^{\frac{2m}{2m-1}}}\sqrt{2(2m-1)f}$ in hanc seriem $1 - \frac{(m-1)}{1.3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7} +$ etc. quae toties abrumpitur, quoties $m$ est numerus integer affirmatiuus. His igitur in casibus tempus algebraice potest exhiberi. Q. E. I.

## Corollarium 1.

291. Sit $m = 1$, quo casu est $n = -3$, erit series $= 1$; tempus ergo descensus per AC prodibit $= \frac{a^2}{f^2}\sqrt{2f} = \frac{a^2\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$ vt supra (289) est inuentum.

## Corollarium 2.

292. Si sit $m = 2$, quo casu fit $n = \frac{-5}{3}$, erit seriei valor $= \frac{2}{3}$, atque tempus totius descensus $= \frac{2}{3} \cdot \frac{a^{\frac{4}{3}}}{f^{\frac{4}{3}}}\sqrt{6f}$. Sin est $m = 3$, erit $n = \frac{-7}{5}$, et series $= \frac{2.4}{3.5}$

tempusque $\frac{2.4\,a^{\frac{6}{5}}}{3.5.f^{\frac{6}{5}}}\sqrt{10f}$. Simili modo si est $m=4$, fit $n=\frac{-9}{7}$, atque tempus prodibit $=\frac{2.4.6.a^{\frac{8}{7}}}{3.5.7.f^{\frac{8}{7}}}\sqrt{14f}$.

## Corollarium 3.

293. Colligitur ex his seriei valor generalis $=\frac{2.4.6.\ldots\ldots\ldots(2m-2)}{3.5.7.\ldots\ldots\ldots(2m-1)}$. Generatim igitur tempus descensus erit $=\frac{2.4.6.\ldots\ldots(2m-2).a^{\frac{2m}{2m-1}}}{3.5.7.\ldots\ldots(2m-1).f^{\frac{2m}{2m-1}}}\sqrt{2(2m-1)f}$. Si quidem est $n=\frac{-2m-1}{2m-1}$ seu $m=\frac{n-1}{2n+2}$.

## Corollarium 4.

294. Successiue ergo loco $m$ positis valoribus $1, 2, 3, 4$, etc. seriei valores sequentem constituent progressionem $1$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2.4}{3.5}$, $\frac{2.4.6}{3.5.7}$, etc. in qua concessa circuli quadratura, termini intermedii possunt exhiberi. Si enim est $m=\frac{1}{2}$ terminus respondens inuenitur $\frac{\pi}{2}$ denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam; si $m=\frac{3}{2}$, erit respondens terminus $\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$, et ita porro si $m$ denotet $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$ etc. prouenient hi termini $\frac{1.3.\pi}{2.4.2}$, $\frac{1.3.5.\pi}{2.4.6.2}$, $\frac{1.3.5.7.\pi}{2.4.6.8.2}$, etc.

## Corollarium 5.

295. Innotescit ergo etiam in his casibus tempus descensus per AC. Nam si est $m=\frac{1}{2}$ fit $n=-\infty$, quo casu tempus semper est infinite paruum.

Sit

Sit ergo $m = \frac{3}{2}$, fiet $n = -2$, et tempus descensus $= \frac{1.\pi}{2.2} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}} \sqrt{4f} = \frac{\pi . a\sqrt{a}}{2.f}$ prorsus vt iam inuenimus (287). Sit $m = \frac{5}{2}$, erit $n = -\frac{3}{2}$ et tempus descensus $= \frac{1.3\pi a^{\frac{5}{4}}}{2.4 f^{\frac{5}{4}}} \sqrt{2f}$. Atque si $m = \frac{7}{2}$, fit $n = -\frac{4}{3}$ et tempus descensus $= \frac{1.3.5\,\pi a^{\frac{7}{6}}}{2.4.6\,f^{\frac{7}{6}}} \sqrt{3f}$.

## Corollarium 6.

296. Generaliter igitur si fuerit $m = \frac{2k+1}{2}$, quo casu fit $n = \frac{-k-1}{k}$, erit tempus descensus $=$

$$\frac{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)\,\pi a^{\frac{2k+1}{2k}}}{2.4.6 \ldots\ldots 2k \cdot f^{\frac{2k+1}{2k}}} \sqrt{kf}.$$

# PROPOSITIO 37.

## Problema.

297. *Determinare tempus descensus per* AC *ad virium centrum* C, *si vis centripeta proportionalis est reciproce huic distantiarum dignitati, cuius exponens est* $\frac{m-1}{m}$, *denotante* m *numerum quemcunque integrum affirmatiuum.*

So-

## Solutio.

Eſt itaque $n=\frac{1-m}{m}$, et propterea $v=\frac{a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m}f^{\frac{1-m}{m}}}$ $=mf^{\frac{m-1}{m}}(a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}})$. Elementum igitur temporis, quod eſt $\frac{dy}{\sqrt{v}}$, erit $=dy:\sqrt{mf^{\frac{m-1}{m}}(a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}})}$, et tempus ipſum per $PC=\frac{1}{\sqrt{mf^{\frac{m-1}{m}}}}\int\frac{dy}{\sqrt{(a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}})}}$. Ponatur $a^{\frac{1}{m}}=b$ et $y^{\frac{1}{m}}=z$; erit $dy=mz^{m-1}dz$, fit igitur tempus per $PC=\sqrt{mf^{\frac{1-m}{m}}}\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(b-z)}}$. At integrale ipſius $\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(b-z)}}$ eodem modo, quo in praecedente prop. ſumtum, eſt $2b^{\frac{2m-1}{2}}(1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7}+$ etc. ). Quamobrem integrum tempus deſcenſus per AC poſito $a^{\frac{2m-1}{2m}}$ loco $b^{\frac{2m-1}{2}}$ erit $=2\sqrt{ma^{\frac{2m-1}{m}}f^{\frac{1-m}{m}}}$ ducto in hanc ſeriem $1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7}+$ etc. Quoties igitur $m$ eſt numerus integer affirmatiuus, toties ſeries abrumpitur, ita vt tempus quaeſitum algebraice exprimatur. Q. E. I.

## Corollarium I.

298. Sit $m=1$, quo caſu fit $n=0$, et vis centripeta propterea vniformis ac grauitati aequalis; Series ergo erit $=1$, et tempus deſcenſus per AC $=2\sqrt{a}$ omnino vt iam §. 219 eſt inuentum modo neglecta littera $m$.

## Corollarium 2.

299. Sit $m = 2$, vt ſit $n = \frac{-1}{2}$; erit tempus totius deſcenſus $= \frac{2}{3} \cdot 2a^{\frac{3}{4}} f^{\frac{-1}{4}} \sqrt{2}$. Sit $m = 3$, erit $n = \frac{-2}{3}$; totumque tempus deſcenſus $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} 2a^{\frac{5}{6}} f^{\frac{-1}{3}} \sqrt{3}$. Simili modo ſi $m = 4$, et propterea $n = \frac{-3}{4}$ prodit tempus deſcenſus $= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} 2a^{\frac{7}{8}} f^{\frac{-3}{8}} \sqrt{4}$ etc.

## Corollarium 3.

300. Generaliter igitur quicquid ſit $m$, ideoque $n = \frac{1-m}{m}$, erit tempus deſcenſus totius per $AC =$ $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots (2m-1)} 2a^{\frac{2m-1}{2m}} f^{\frac{1-m}{2m}} \sqrt{m}$.

## Corollarium 4.

301. Iisdem quibus ſupra (294) interpolationibus adhibitis, poterunt tempora deſcenſuum aſſignari, ſi $m$ eſt numerus quicunque integer affirmatiuus $+\frac{1}{2}$. Sit nimirum $m = \frac{1}{2}$, quo caſu fit $n = 1$, erit tempus deſcenſus $= \frac{\pi}{2} \sqrt{2f}$, prorſus vt §. 253, vbi idem caſus, quo $n = 1$ ſeu vis centripeta diſtantiis proportionalis, eſt pertractatus.

## Corollarium 5.

302. Si $m = \frac{3}{4}$ ſeu $n = \frac{-1}{3}$ fit tempus deſcenſus $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{6 a^{\frac{4}{3}} f^{\frac{-1}{3}}}$, ſi $m = \frac{5}{2}$ ſeu $n = \frac{-3}{5}$ prodit tempus deſcenſus $= \frac{1 \cdot 3 \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot 2} \sqrt{10 a^{\frac{8}{5}} f^{\frac{-3}{5}}}$. Atque generaliter caſu quo $n = \frac{1-m}{m}$ reperitur tempus deſcenſus $= \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2m-2)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots (2m-1)} \frac{\pi}{2} \sqrt{4ma^{\frac{2m-1}{m}} f^{\frac{1-m}{m}}}$.

Scho-

## Scholion.

303. Intelligitur ex hisce, quibus casibus tempora descensuum algebraice possint exprimi, videlicet, quando est $n = \frac{-2m-1}{2m-1}$ vel $n = \frac{1-m}{m}$ et $m$ significat numerum affirmatiuum integrum quemcunque. Atque praeter hos casus, dubito, an quisquam alius detur. Deinde etiam apparent casus, quibus temporis definitio a circuli quadratura pendet, hique habentur si fuerit vel $n = \frac{-m-1}{m}$, vel $n = \frac{1-2m}{1+2m}$, denotante $m$ vt supra numerum quemcunque integrum affirmatiuum. Neque vero hi sunt omnes casus, qui ad circuli quadraturam deducuntur; namque singularis casus si $n = -1$ quoque a circuli quadratura pendet, vt sequenti propositione demonstrabimus. At vero hoc differt iste casus ab illis, quod hic in temporis expressione non $\pi$, sed $\sqrt{\pi}$ occurrat; et praeterea etiam totum duntaxat descensus tempus $\sqrt{\pi}$ inuoluat, dum tempus per quoduis spatium indefinitum nonnisi quadraturis transcendentium curuarum potest exhiberi.

## PROPOSITIO 38.

### Theorema.

304. *Existente vi centripeta reciproce distantiis a centro virium* C *proportionali, erit tempus descensus integri per* $AC = \frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}$, *denotantibus* a *spatium* AC, f *distantiam in qua vis centripeta est grauitati aequalis, et* $\pi : 1$ *rationem peripheriae ad diametrum.*

## Demonstratio.

Quia in quouis puncto P altitudo celeritati debita est $fl\frac{a}{y}$, (266); erit ipsa celeritas $=\sqrt{fl\frac{a}{y}}$ et tempus per spatium $PC = \frac{1}{\sqrt{f}}\int\frac{dy}{\sqrt{l\frac{a}{y}}}$. Huius ergo integrale ita acceptum vt euanescat facto $y=o$, dabit verum tempus per PC. Quare si in hac expressione tum ponatur $y=a$, prodibit totum descensus tempus per AC. Ponatur autem $y=az$; et habebitur $\frac{a}{\sqrt{f}}\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$. Demonstraui vero in Commentariis Academiae Scientiarum Petropol. Anno 1730. hanc quantitatem $\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$, si ponatur $z=1$, seu $y=a$, definire in hac progressione 1, 2, 6, 24 etc., eum terminum, cuius index sit $-\frac{1}{2}$, quem alia methodo ibidem ostendi esse $=\sqrt{\pi}$. Ex quo intelligitur tempus totius descensus per AC esse $\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}$. Q. E. D.

## Corollarium.

305. Si ergo plura corpora ad idem centrum C ex diuersis distantiis delabantur, erunt eorum tempora descensuum ipsis distantiis proportionalia.

## Scholion I.

306. Neglexi in hac propositione fractionem $\frac{1}{250}$, quae in temporis expressionem, integratione spatii elementi per radicem quadratam altitudinis celeritati debitae diuisi erutam, est multiplicanda (221), quippe quae ad tempus in minutis secundis inueniendum inseruit, si longitudines in scrupulis pedis rhenani exponuntur. Simili modo etiam in sequen-

quentibus tempora, nisi in minutis secundis desiderentur, sum definiturus, ad ambages vitandas. Facile enim apparet ad numerum minutorum secundorum inueniendum nil aliud esse faciendum, nisi vt huiusmodi temporis expressiones per 250 diuidantur, atque longitudines in scrupulis pedis Rhenani exhibeantur, vti iam saepius est inculcatum.

## Scholion 2.

307. Omnino paradoxon hoc videbitur, quod integrale ipsius $\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$ posito $z=1$, fiat $=\sqrt{\pi}$. Nullo enim modo quisquam hoc directe poterit demonstrare; neque ego hanc aequalitatem nisi a posteriori cognoui, quemadmodum ex citata dissertatione videre licet. Eosdem igitur reddunt valores haec duo integralia $\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$ et $2\sqrt{}\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$, si post integrationem ponatur $z=1$, neque tamen ipsa sunt inter se aequalia; immo nequidem inter se possunt comparari.

# PROPOSITIO 39.

## Theorema.

308. *Si vis centripeta fuerit vt potestas exponentis* n *distantiarum, et plura corpora ex diuersis distantiis ad idem centrum delabantur, erunt descensuum tempora potestatibus distantiarum, quarum exponens est* $\frac{1-n}{2}$, *proportionalia.*

## Demonstratio.

Sit corporis cuiusuis a centro C distantia AC $=a$, et $f$ distantia, in qua vis centripeta grauitati

 aequa-

aequalis eſt. Deinde cum peruenerit corpus in P, ponatur CP$=y$, et altitudo celeritati in hoc loco debita $=v$, erit $v=\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Tempus ergo, quo CP abſoluitur eſt $=\sqrt{(n+1)}f^n\int\frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1}-y^{n+1})}}$. Quod integrale quanquam exhiberi non poteſt, tamen ita erit comparatum, vt $a$ et $y$ in ſingulis terminis $\frac{1-n}{2}$ dimenſiones conſtituant, quia in differentiali eundem dimenſionum numerum efficiunt, conſiderato $dy$ tanquam vna dimenſione. Quamobrem ſi poſt integrationem ponatur $y=a$, quo caſu tempus totius deſcenſus prouenit, habebit ſolum $a$ totidem videlicet $\frac{1-n}{2}$ dimenſiones, ſeu erit multiplum ipſius $a^{\frac{1-n}{2}}$. Quare, cum alter factor non complectatur niſi $f$ et numeros, ideoque eundem valorem retineat, vtcunque $a$ varietur, erunt diuerſorum deſcenſuum tempora vt $a^{\frac{1-n}{2}}$ i. e. vt poteſtates diſtantiarum, quarum exponens eſt $\frac{1-n}{2}$. Q. E. D.

## Corollarium I.

309. Quo igitur omnia deſcenſuum tempora ſint inter ſe aequalia, oportet vt $a^{\frac{1-n}{2}}$ ſit quantitas conſtans, vtcunque $a$ mutetur, id quod accidit ſi $n=1$, ſeu vis centripeta diſtantiis directe proportionalis, vti iam obſeruauimus (283).

Co-

## Corollarium 2.

310. Simili modo ex his ſtatim apparet, ſi vis centripeta eſt reciproce vt quadratum diſtantiae, ſeu $n = -2$, tempora deſcenſuum ad hoc centrum eſſe inter ſe vt diſtantiae eleuatae ad exponentem $\frac{3}{2}$, ſeu in ſesquiplicata diſtantiarum ratione (287).

## Corollarium 3.

311. Si fuerint plura ſimiliter attrahentia virium centra, ſed efficacia differentia, et ad ea corpora ex aequalibus diſtantiis delabantur, erunt tempora inter ſe vt $f^{\frac{n}{2}}$ quia $a$ vt conſtans, $f$ vero vt variabilis conſideratur. Eſt vero efficacia vt vis centripeta in data diſtantia puta 1, erit ergo $f^n$ reciproce vt efficacia, atque tempora illa inter ſe in reciproca ſubduplicata efficaciarum ratione (285).

## Corollarium 4.

312. Et, ſi ad diuerſa huiusmodi virium centra corpora ex quibuscunque diſtantiis delabantur, erunt eorum tempora deſcenſuum in ratione compoſita ex directa $\frac{1-n}{2}$ plicata diſtantiarum, et reciproca ſubduplicata efficaciarum.

## Scholion.

313. Ex his, quae de viribus centripetis dicta ſunt, abunde perſpicitur, quomodo motus corporum inueniri oporteat, ſi loco vis centripetae vis centrifuga ſeu pellens corpus de centro ſubſtituatur. Omnia enim manent, vt in praecedentibus, niſi quod loco formulae vim centripetam exprimentis,

tis, quae erat $\frac{y^n}{f^n}$ (264), eius negatiua debeat adhiberi. Neque tamen ſuperfluum iudico de his caſibus quaedam afferre; cognoſcentur enim ex his generales quaedam regulae ad motus generationem a potentiis pertinentes, quae ex ſolo calculo non poſſunt deduci. Reſpiciunt ea autem actionem potentiarum in corpora quiescentia, ad quae calculus noſter, quippe quo ponitur celeritatis incrementum reſpectu prioris infinite paruum, minus recte accommodatur, et reipſa abſurdi quid praebet, niſi primum ſpatii elementum tempuſculo infinite paruo percurritur. Ad hoc autem dilucidandum hoc vtor axiomate, quod corpus in ipſo centro virium repellente poſitum perpetuo ibi ſit permanſurum, ſi vis centrifuga in ipſo illo puncto fuerit infinite parua ſeu nulla; id quod euenit, quando exponens dignitatis diſtantiarum, cui vis centrifuga eſt proportionalis, eſt numerus nihilo maior ſeu poſitiuus.

## PROPOSITIO 40.
### Problema.

Tab. III. Fig. 2. 314. *E centro virium* C *a ſe repellente in ratione* n plicata *diſtantiarum, egrediatur corpus in recta* CP, *requiritur eius celeritas in loco quouis* P *et tempus, quo ſpatium* CP *percurritur.*

### Solutio.

Sit $f$ diſtantia, in qua vis centrifuga aequalis eſt grauitati, et vocetur CP, $y$, atque altitudo celeritati in P debita $v$. Erit ergo vis, qua corpus in P vrgetur $= \frac{y^n}{f^n}$, et propterea $dv = \frac{y^n dy}{f^n}$ (213), quia corpus motu accelerato propellitur. Quare, cum corpus in C celeritatem nullam habere ponatur, erit $v = \frac{y^{n+1}}{(n+1)f^n}$, si fuerit $n+1$ numerus positiuus, sin autem negatiuus, fiet $v$ infinitum. Ex hoc prodit tempus, quo spatium CP percurritur, $= V(n+1)f^n \int dy : y^{\frac{n+1}{2}} = \frac{2}{1-n} V(n+1) f^n y^{1-n}$ si quidem $y^{1-n}$ fit $=o$, posito $y=o$. Nam si fuerit infinitum, tempus quoque prodiret infinitum, ob addendam constantem infinite magnam; id quod indicio esset corpus nunquam ex C egressurum. Tempus igitur erit $= \frac{2}{1-n} V(n+1) f^n y^{1-n}$, quoties et $1-n$ et $n+1$ fuerint numeri positiui. Q. E. I.

## Corollarium 1.

315. Sunt vero hi ambo numeri $1-n$, et $1+n$ affirmatiui, si $n$ contineatur intra hos limites $-1$ et $+1$. Atque si $n$ illum terminum $-1$ transcendit celeritas vbique erit infinita; et si hunc $+1$ transgreditur, tempus erit infinitum.

## Corollarium 2.

316. Constat autem ex ipsa rei natura, si $n$ fuerit numerus nihilo maior, corpus nunquam ex C esse egressurum (313). Hanc ob rem necesse est, etsi $n$ contineatur intra $o$ et $+1$, calculum hic adhibitum, quippe qui tempus indicat finitum, fallere.

## Corollarium 3.

317. Tempora haec autem ſequuntur ex celeritatibus, ergo et in his ipſis abſurdum ineſſe debebit, quoties $n$ comprehenditur intra $o$ et $+1$. Neque enim hae celeritates generari poterunt, cum corpus nunquam ex C egrediatur.

## Scholion 1.

318. Sit curua AM talis, vt denotantibus abſciſſis $AP = y$, applicata PM ſit $= v$. Haec curua contento $n$ intra hos limites $o$ et $+1$, hanc habebit proprietatem, vt ipſa in A cum axe confundatur, hocque loco curuedinem habeat infiniter magnam nempe radium oſculi euaneſcentem.

## Corollarium 4.

319. Quoties igitur accidit, vt ſcala celeritatum, ſeu potius altitudinum celeritatibus debitarum huiusmodi habeat formam, toties iudicandum eſt, eam a nulla potentia generari potuiſſe, etiamſi calculus aliter oſtendat, ſed eſſe caſum penitus imaginarium ac in rerum natura non exiſtentem.

## Scholion 2.

320. Ratio huius aberrationis calculi a natura in ipſo principio motus ſine dubio eſt ſita, atque hoc loco lex alias vniuerſalis de celeritatis incremento a potentiis producto perperam adhibetur. Quoniam enim, vt iam animaduertimus (313) haec lex locum habet tantum, quando corpus finitam iam habet celeritatem, ſemper in principio motus

tus temere vſurpatur. Cum autem iſte error in ipſo primo tantum elemento inſit, plerumque eſt infinite paruus et hanc ob rem non eſt reſpiciendus. Eſt vero infinite paruus, quoties primum elementum ſpatii tempuſculo infinite paruo percurritur, tum enim neque in celeritatibus neque in temporibus conſiderabile diſcrimen poterit producere. Euenit hoc, ſi potentia, qua corpus in ipſo principio motus ſollicitatur eſt finitae magnitudinis vel etiam infinitae magnae; perſpicuum enim eſt hoc caſu, primum elementum temporis puncto percurri. At ſi potentia, vt in noſtro caſu vſu venit, in principio eſt infinite parua ſeu potius nulla, ad primum tantum elementum abſoluendum non modo finito, ſed etiam infinito opus eſt tempore, quia corpus quieſcens a nulla potentia pulſum de loco ſuo nunquam excedet. In reliquis quidem caſibus, quibus *n* eſt nonſolum nihilo, ſed etiam vnitate maior, tantus eſt error, vt etiam calculus infinitum tempus per primum elementum oſtendat. Verum, ſi *n* intra *o* et 1 comprehenditur, vitium calculi animaduertitur; Tab. III. hocque ideo, vti videtur, quia his caſibus ſcala po- Fig. 4. tentiarum formam habet curuae AM, quae axi AP in A ad angulos rectos occurrit. Statim enim in proximo ipſi A puncto *a* linea *ab* potentiam exprimens infinite maior eſt ſagitta A*a*; perinde autem eſt in motus computatione, ſiue corpus elementum percurrens conſideretur a potentia, quae initio agit, ſollicitatum ſiue ea, qua in fine elementi vrgetur. In hoc autem caſu euidens eſt, errorem nasci oportere, si corpus per totum elementum Aa a potentia *ab* sollicitatum consideretur.

## PROPOSITIO 41.

### Problema.

Tab. III. Fig. 5. 321. *Si fuerit vis centripeta functioni cuicunque distantiarum a centro C proportionalis, corpusque ex A ad id delabatur; requiritur celeritas eius in puncto quocunque P atque tempus, quo spatium AP percurritur.*

### Solutio.

Repraesentet curua BMD scalam potentiarum seu legem vis centripetae, ita vt corpus in P trahatur ad C a potentia PM, quae sit ad vim grauitatis vt haec PM ad rectam constantem AE, qua vis grauitatis exprimitur. Sit nunc $AP = x$; $PM = p$; $AE = 1$, et altitudo celeritati in P debita $= v$. Vis igitur accelerans est $p$, et propterea sumto elemento $Pp = dx$, erit $dv = pdx$ (213). Ex qua prodit integrando $v = \int pdx$. At $\int pdx$ exprimit aream ABMP, hanc ob rem habebitur $v = \frac{ABMP}{AE}$, completa homogeneitate recta $AE = 1$. Cognita nunc altitudine $v$ erit tempus, quo spatium AP percurritur $= \int \frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$, quod, quia $p$ per $x$ dari ponitur, per quadraturas innotescit. Q. E. I.

### Corollarium 1.

322. Perspicitur ex his, si corpus ea celeritate, quam in C acquisiuit, retro moueatur sursum, motum eius ascensus similem fore descensui, atque in

in puncto P eandem habiturum esse celeritatem, quam habuit ante, et proinde tempus quoque ascensus per CP aequale esse debere, tempori descensus per idem spatium.

## Corollarium 2.

323. Posuimus hic corpus in A celeritatem habere nullam, atque ex quiete motum inchoare. Sed non difficilior euadit calculus, si ei in A celeritas quaecunqne tribuatur; hoc enim casu differentiale $pdx$ ita debet integrari, vt facto $x=o$, ipsum $\int pdx$ praebeat altitudinem celeritati initiali debitam. Tempus vero ex $\int pdx$ hac ratione accepto inuenietur similiter vt supra.

## Scholion I.

324. Assumsimus quidem $p$ esse functionem ipsius $x$, et propterea non respicere centrum virium C, sed tantum motus initium A. Nihilo tamen minus casus propositionis in solutione continetur; si enim $p$ est functio ipsius distantiae CP a centro virium C, quam vocemus $y$, erit $y=a-x$, posito toto spatio AC$=a$, et hanc ob rem $p$ denotabit functionem ipsius $a-x$, i. e. functionem ipsius $x$ et constantium vt assumsimus. Nostra vero solutio latius patet, determinat enim motum corporis a quacunque potentia sollicitati, nullo respectu ad certum aliquod punctum fixum habito, dummodo hae potentiae vbiuis eandem directionem teneant. Nisi enim hoc fiat, corpus cessabit in linea recta moueri, sed in curua incedet, de quo motu in sequentibus tractabimus.

## Scholion 2.

325. Determinauimus hactenus motus corporis rectilineos ex data potentia, nunc vero pertractanda restat altera huius capitis pars, qua ex data motus conditione potentiarum legem definiri oportet. Sit vero hoc vel ex datis celeritatibus vel temporibus, vtrumque autem duplici modo est pertractandum. Vel enim respicitur ad vnicum descensum seu ascensum, in cuius singulis punctis datae ponuntur vel celeritates vel tempora, quibus quaeque spatii portiones percurruntur. Vel considerantur infiniti descensus ad punctum fixum ex diuersis altitudinibus facti, in quibus dantur vel celeritates vltimae, vel tempora, quibus singuli descensus integri absoluuntur. Ex his igitur quatuor oriuntur problemata primaria, quorum solutiones hic exhiberi oportet. Praeter haec vero aliae afferuntur quaestiones, in quibus neque solae celeritates neque sola tempora dantur, sed aliud quiddam, quod ex vtrisque sit compositum, cuiusmodi vero quaestiones, cum innumerabiles possent excogitari, aliquas tantum magis insignes, et ex quarum solutionibus simul reliquorum solutiones possint intelligi, in medium proferemus.

## PROPOSITIO 42.

### Problema.

Tab. II. Fig. 10. 326. *Data corporis rectam* AP *percurrentis in singulis punctis celeritate; requiritur potentiae lex, quae hunc motum corpus sollicitando efficere valet.*

So-

## Solutio.

Percurso quouis spatio AP, quod ponimus $=x$, sit altitudo celeritati, quam corpus in P habet, debita $=v$, quae proinde data et ipsius $x$ et constantium functio quaedam esse ponitur. Potentia vero in P agens, quam quaerimus, sit $=p$, quae ergo ex corporis acceleratione $dv$, dum elementum $Pp=dx$ percurrit, inueniri poterit. Cum enim sit $dv=pdx$ (213), erit $p=\frac{dv}{dx}$ seu ista potentia quaesita se habebit ad vim grauitatis, vt incrementum altitudinis celeritati debitae, ad spatii elementum, quod interea percurritur. Q. E. I.

## Corollarium I.

327. Si fuerit $v=x$, seu spatium descriptum ea ipsa altitudo celeritati debita; fiet $dv=dx$ et $p=1$, id quod indicat potentiam hunc motum producentem esse vniformen, et ipsi grauitati aequalem.

## Corollarium 2.

328. Si ipsae celeritates ponantur spatiis percursis proportionales; erit $v=\frac{x^2}{f}$, denotante $f$ constantem requisitam, fit ergo $dv=\frac{2xdx}{f}$ et $p=\frac{2x}{f}$. Quamobrem potentia erit spatiis percursis proportionalis.

## Scholion I.

329. Constat autem ex superioribus, hunc casum existere non posse; nam quia potentia in ipso motus initio A est nulla, corpus ex hoc puncto

nunquam egreditur, ſed ibi perpetuo quieſcet. Idem commonſtrat temporis per AP computatio, quod erit $=\int \frac{dx}{x} \sqrt{f}$, quae quantitas eſt infinita, ſi quidem integrale ita accipitur, vt euaneſcat poſito $x=o$.

## Corollarium 3.

330. Quo igitur hoc non eueniat, oportet vt $\frac{dv}{dx}$ ſit eiusmodi quantitas, quae facto $v=o$ non euaneſcat, ſed quae vel fiat finita vel infinita. Ex quo perſpicitur ſcalam altitudinum celeritatibus debitarum AM, in qua ſumtis $AP=v$, applicatae PM repraeſentent has altitudines $v$, non debere in A in axem incidere, ſed angulum cum eo finitum conſtituere oportere.

Tab. III. Fig. 2.

## Scholion 2.

331. Haec intelligenda ſunt tantum de iis caſibus, quibus corporis celeritas in A euaneſcens ponitur, et ſcala AM cum axe in A concurrit. Aliter enim ſe res habet, ſi corpus in A celeritatem iam habet, qua, etiamſi potentia ſit nulla, tamen ex A progredi, potentiaeque actionem ſubire poteſt, ita vt non opus ſit tempore infinito ad ſpatium AP abſoluendum.

## PROPOSITIO 43.

### Problema.

Tab. III. Fig. 5.

332. *Dato tempore, quo corpus in recta* AC *progrediens, percurrit ſingula ſpatia* AP; *oportet definire legem potentiarum, qua efficitur, vt corpus hoc motu feratur.*

So-

## Solutio.

Dicto spatio AP, $x$; et tempore, quo percurritur $=\sqrt{t}$, quia expressionis temporis quadratum vnicam habet dimensionem; sit potentia quaesita $=p$, et altitudo celeritati in P debita $=v$, hac enim opus est ad inueniendum $p$, quamuis ex calculo exire debeat. His positis erit vt ante $dv=pdx$, et $v=\int pdx$. Tempus igitur $\sqrt{t}=\int\frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$, ex qua aequatione sumtis differentialibus prodit $\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$ et $\int pdx=\frac{4tdx^2}{dt^2}$, cuius si denuo sumatur differentialis posito $dx$ constante, habebitur $p=\frac{4dx}{dt}-\frac{4tdxddt}{dt^2}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

333. Si ponatur tempus ipsum $=$T neglecta homogeneitate, erit $t=\mathrm{T}^2$; atque prodibit $p=\frac{-2dxdd\mathrm{T}}{d\mathrm{T}^3}$. Quae expressio simplicior est superiore, et facilius ad casus speciales accommodatur.

## Corollarium 2.

334. Si tempora ponantur spatiis descriptis proportionalia, erit $\mathrm{T}=x$ et $dd\mathrm{T}=o$, ob $dx$ constans. Consequenter potentia erit nulla, qua indicatur corpus vi insita hunc motum aequabilem continuare.

## Scholion.

335. Notandum hic est pro T eiusmodi accipi debere functionem ipsius $x$, quae cum fiat $=o$, posito $x=o$, tum crescentibus $x$ crescat quoque.

Fieri enim omnino non poteſt, vt corpusmoueri pergat, tempus vero diminuatur. Ponamus v. g. $T = \sqrt{(2ax - x^2)}$ quae quantitas ad certum tantum terminum creſcit, creſcente $x$, tum vero decreſcit. Erit ergo $dT = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ et $ddT = \frac{-a^2 dx^2}{(2ax - x^2)^{3:2}}$. Ex his fit $p = \frac{2a^2}{(a-x)^3}$, ſeu poſita $AC = a$, ſollicitabitur corpus in P ad C vi cubo diſtantiae a C reciproce proportionali. Tempus vero $\sqrt{(2ax - x^2)}$ vlterius non valet, quam vsque ad C quo $x = a$. Sed de hoc caſu iam eſt actum (289). Quare ex hoc concludi videtur corpus cum in C peruenerit ex eo nunquam eſſe egreſſurum, quod autem quomodo fieri poſſit, cum celeritas eius in C ſit infinite magna, nullo modo concipi poteſt. Accedit quod, cum ſit $\sqrt{v} = \frac{dx}{dT} = \frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a - x}$, celeritas corporis cum vltra C progrediatur, deberet eſſe negatiua, ideoque corpus a C non recederet, ſed ad C accederet, quae ita pugnant, vt etiam nunc conciliari nequeant.

## Corollarium 3.

336. Cum ſit elementum temporis $dT = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ erit celeritas corporis in quouis loco $\sqrt{v} = \frac{dx}{dT}$, ex data ergo temporum lege, ſimul celeritas corporis in ſingulis locis innoteſcit; quod quidem ex ipſo nexu inter celeritates et tempore conſequitur, nullo reſpectu habito ad potentiam (37).

PRO-

## PROPOSITIO 44.

### Problema.

337. *Si corpus in recta* AP *ita descendat, ut ea celeritate, quam in* P *habet, eodem tempore, quo ſpatium* AP *percurrit, progredi poſſit motu uniformi per ſpatium* PM, *applicatam curuae* AM *datae: determinari oportet legem potentiae ſollicitantis, qua talis motus generatur.* Tab. III. Fig. 6.

### Solutio.

Poſito $AP = x$ et $PM = s$, erit $s$ ob datam curuam AM functio ipſius $x$. Sit porro potentia in P corpus ſollicitans $= p$, altitudo celeritati in P debita $= v$, et tempus, quo ſpatium AP abſoluitur $= T$, Quia iam ſpatium $s$ tempore T celeritate $\sqrt{v}$ abſoluitur motu aequabili, erit $T = \frac{s}{\sqrt{v}}$ (30). Eſt vero $v = \int p dx$ et $T = \int \frac{dx}{\sqrt{\int p dx}}$, quocirca habebitur $\int \frac{dx}{\sqrt{\int p dx}} = \frac{s}{\sqrt{\int p dx}}$, vel relicto $v$ loco $\int p dx$, quo calculus concinnior reddatur, erit $\int \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{s}{\sqrt{v}}$. Quae differentiata dat $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{v}} - \frac{sdv}{2v\sqrt{v}}$, ex qua deducitur haec aequatio $\frac{dv}{v} = \frac{2ds}{s} - \frac{2dx}{s}$; cuius integralis eſt $lv = 2ls - 2\int \frac{dx}{s}$, ſeu $v = e^{-2\int \frac{dx}{s}} s^2$ denotante $e$ numerum, cuius logarithmus eſt 1. Sumantur iterum differentialia, prodibit $dv = pdx = 2e^{-2\int \frac{dx}{s}} (sds - sdx)$. Ex qua tandem elicitur $p = 2se^{-2\int \frac{dx}{s}} \left(\frac{ds - dx}{dx}\right)$. Innoteſcet igitur potentia quaeſita $p$ ex iſta aequatione, quia $s$ in $x$ dari ponitur. Q. E. I.

## Corollarium 1.

338. Quia eſt $v = e^{-2\int \frac{dx}{s}} s^2$, habebitur hinc ipſa corporis, quam in P habet, celeritas $\sqrt{v} = e^{-\int \frac{dx}{s}} s$. Quam autem conſtantem in integratione ipſius $\frac{dx}{s}$ addi oporteat, mox docebitur.

## Corollarium 2.

339. Tempus quoque T, quo ſpatium AP percurritur, facile ex hiſce deducitur. Nam cum ſit $T = \frac{s}{\sqrt{v}}$, habebitur $T = e^{\int \frac{dx}{s}}$. Cum igitur debeat T euaneſcere facto $x = o$, oportet ipſum $\frac{dx}{s}$ ita integrari, vt $e^{\int \frac{dx}{s}}$ euaneſcat, facto $x = o$. Quamobrem neceſſe eſt vt fiat $\int \frac{dx}{s} = -\infty$, ſi ponatur $x = o$.

## Corollarium 3.

340. Sit $s = nx$, erit $\int \frac{dx}{s} = \frac{1}{n} lx + lc$. Quicquid igitur $c$ denotet, ſemper $\int \frac{dx}{s}$ fit $= -\infty$ poſito $x = o$. Quare erit $e^{\int \frac{dx}{s}} = cx^{\frac{1}{n}} = T$. Conſequenter prodibit $p = \frac{2n(n-1)}{c^2} x^{\frac{n-2}{n}}$, atque $\sqrt{v} = \frac{n}{c} x^{\frac{n-1}{n}}$.

## Corollarium 4.

341. Si ponatur $s = x$, perſpicuum eſt motum in AP vniformem eſſe debere, id quod etiam calculus oſtendit. Fit enim $n = 1$, adeoque $p = o$ et $\sqrt{v} = \frac{n}{c}$ ſeu conſtanti.

Co-

## Corollarium 5.

342. Si $n$ est vnitate minor, celeritas in ipso puncto A fit infinite magna, atque etiam potentia $p$, erit enim reciproce vt potestas exponentis $\frac{2-n}{n}$ spatiorum percursorum.

## Corollarium 6.

343. Si $n$ est vnitate maior, attamen binario minor, fit quidem celeritas in $A = o$, sed potentia manet in A infinite magna, decrescitque in ratione quadam multiplicata spatiorum percursorum.

## Corollarium 7.

344. Si $n = 2$, habemus casum potentiae vniformis. Fit enim $p = \frac{4}{c^2}$, et $\sqrt{v} = \frac{2}{c}\sqrt{x}$. Hancque proprietatem iam demonstrauimus propositione 28, (230) vbi ostendimus corpus in hac potentiae vniformis hypothesi ex quiete descendens tantam quouis spatio percurso acquirere celeritatem, qua eodem tempore vniformiter posset duplum spatium percurrere.

## Corollarium 8.

345. Sin vero $n$ binarium excedat, prodeunt ii casus, quos diximus (316) in rerum natura locum obtinere non posse, quamuis calculus aliter ostendat. Fit enim celeritas in A nulla, ibidemque potentia sollicitans euanescit, quamobrem corpus nunquam ex A exire poterit, non obstante calculo, qui tempus T per spatium quoduis AP, exhibet finitum.

## Scholion.

346. Huius propositionis casus est ergo eiusmodi, vt data motus conditio sit ex celeritate et tempore permixta, ex qua legem potentiarum erui oporteat. Plura vero huiusmodi exempla afferre superuacaneum foret, cum ex hoc vno omnium reliquorum soluendorum modus perspiciatur.

# PROPOSITIO 45.

## Problema.

Tab. III. Fig. 7. 347. *Datis celeritatibus, quas corpus ex quibuscunque distantiis ad centrum virium C accedens in ipso centro C acquirit, definire legem vis centripetae huiusmodi descensus producentis, posito quod corpus singulos descensus ex quiete incipiat.*

## Solutio.

Repraesentet CM scalam altitudinum celeritatibus, quas corpus in puncto C acquirit, debitarum, ita vt PM sit ipsa altitudo debita celeritati, quam corpus ex P descensum inchoans in C adipiscitur. Curua vero DN sit scala potentiarum quaesita, cuius scilicet applicatae PN exhibeant vim centripetam corpus in punctis P sollicitantem; linea vero CB designet vim centripetam vi grauitatis aequalem. His positis atque corpore ex P in C descendente erit altitudo celeritati eius in C debita aequalis areae CDNP applicatae ad BC (321). Quamobrem erit $PM = \frac{CDNP}{BC}$. Vocentur nunc CP, $y$; PM, $v$; et PN, $p$;

$p$; positoque BC$=$1; erit $v = \int p dy$, et differentiando $dv = p dy$. Quare cum detur $v$ in $y$ erit $p = \frac{dv}{dy}$. Q. E. I.

## Corollarium I.

348. Sint celeritates in C acquisitae, vt spatia percursa erit $\sqrt{v}$ vt $y$, et consequenter $p$ vt $y$. Vis centripeta igitur proportionalis est distantiis a centro C.

## Corollarium 2.

349. Si celeritates in C acquisitae dignitati exponentis $n$ distantiarum a centro C proportionales ponantur, erit $v$ vt $y^{2n}$; ergo $p$ vt $y^{2n-1}$. Potentia igitur seu vis centripeta distantiarum dignitati $2n-1$ est proportionalis.

## Corollarium 3.

350. Quia celeritas in C acquisita, cum fuerit $y = o$, debet esse quoque $= o$, et praeterea maiori distantiae $y$ maior celeritas respondere debeat; non poterit non $n$ numerum affirmatiuum significare.

## Corollarium 4.

351. Potentia autem $p$ erit constans, cum sit $n = \frac{1}{2}$; quo numero si $n$ fuerit minor, erit vis centripeta reciproce vt dignitas quaedam distantiarum a centro C. Sin $n$ fuerit $> \frac{1}{2}$ erit $p$ directe vt huiusmodi dignitas quaedam. In illo casu ergo vis centripeta in C erit infinite magna, et decrescet crescentibus distantiis; hoc vero casu erit in C$=o$, crescetque crescentibus distantiis.

Co-

## Corollarium 5.

352. Cum ſit $PM = \frac{CDNP}{CB}$, perſpicuum eſt curuam CM eſſe etiam ſcalam altitudinum celeritatibus debitarum, cum corpus ex C egrediatur in recta CP, vi centripeta in centrifugam mutata, atque motum a quiete incipiat (321).

## Scholion.

353. Quanquam autem hoc modo problema reductum ſit ad prop. 42 (326) transmutata vi centripeta in centrifugam; tempus tamen aſcenſus per CP in caſu vis centrifugae non erit aequale tempori deſcenſus per PC in caſu vis centripetae. Neque enim aequalitas celeritatum, quae in vtroque caſu per aequalia ſpatia generantur, temporum aequalitatem inducit; ſed ex ipſo etiam intuitu contrarium apparet. Nam quoties vis centripeta in C eſt $=o$, etiam vis centrifuga in C euaneſcit; quamobrem tempus aſcenſus per CP erit infinitum (313), cum tamen deſcenſus abſoluatur tempore finito. Nullum igitur adminiculum ex iſta ſimilitudine celeritatum ad ſolutionem ſequentis problematis ſuppeditatur. In ſequenti autem propoſitione dari ponuntur tempora, quibus ſinguli deſcenſus abſoluuntur, eaque nonſolum eſt difficillima ſolutu, ſed ex ſcala temporum nequidem ſcala potentiarum vllo modo poteſt conſtrui. Quocirca non niſi caſus particulares in hac propoſitione complectemur, quorum ſolutio vires noſtras non ſuperat.

PRO-

# PROPOSITIO 46.
## Problema.

354. *Si fuerint tempora, quibus corpus ex quibuscunque distantiis PC ad centrum virium C peruenit, in ratione quacunque multiplicata distantiarum; definire legem vis centripetae.* Tab. III. Fig. 8.

## Solutio.

Sint ista tempora vt potestates distantiarum exponentis $n$, sitque curua DN scala vis centripetae quaesita, ita vt applicata $\pi\nu$ exponat potentiam, qua corpus in $\pi$ existens ad C vrgetur, repraesentante CB vim grauitatis. His positis descendat corpus ex puncto quocunque P et ponatur distantia PC$=a$, erit ergo tempus descensus per PC vt $a^n$, quamobrem id ponamus$=Ca^n$, denotante C quantitatem constantem, in qua $a$ non insit, quia $a$ ob punctum P variabile reipsa est quantitas variabilis. Peruenerit nunc corpus in locum quemcunque $\pi$ et vocetur C$\pi=x$, erit altitudo celeritati eius in hoc loco debita $=\frac{PN\nu\pi}{BC}=\frac{CPND-C\pi\nu D}{BC}$ (321). Ponatur autem area CPND$=$A, et area C$\pi\nu$D$=$X, atque BC$=1$; erit ergo altitudo celeritatis in $\pi$ debita $=$A$-$X, et ipsa celeritas $=\sqrt{}($A$-$X$)$. Notandum hic autem est, X esse functionem quandam ipsius $x$ et constantium in qua non sit $a$, area enim C$\pi\nu$D non pendet a puncto P, sed retinet eundem valorem vbicunque accipiatur punctum P, dummodo distantia C$\pi$ maneat eadem. Qualis autem X est functio ipsius $x$, talis etiam esse debebit A functio ipsius $a$, abeunte enim $x$ in $a$, functio X transmutabitur in A. Iam tempus, quo hoc descensu spatium $C\pi$ percurritur erit $=\int\frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$, quod integrale ita debet esse sumtum vt facto $x=o$, ipsum euanescat. Ex hac igitur expressione habebitur integrum tempus descensus per PC si ponatur $x=a$, quo casu X quoque transmutatur in A. Quia autem haec resultans quantitas ita debet esse comparata, vt in ea $a$ habeat $n$ dimensiones; (oportet enim eam aequalem esse ipsi $Ca^n$), in indefinito integrali $\int\frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$ $a$ et $x$ simul habeant necesse est vbique $n$ dimensiones. Quamobrem etiam formula differentialis $\frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$ $n$ habebit dimensiones, dimensionemque vnam constituere existimanda sunt tam $a$ et $x$ quam $dx$. Perspicuum igitur est in $\sqrt{(A-X)}$ $1-n$ inesse debere dimensiones, atque in $A-X$, $2-2n$ dimensiones ipsarum $a$ et $x$. Sed quia in X non inest $a$, debebit X functio esse $2-2n$ dimensionum solius $x$, aliud ergo X esse non poterit nisi $bx^{2-2n}$, et propterea erit $A=ba^{2-2n}$. Constans quidem quantitas ad $bx^{2-2n}$ adiici potest, cum ea, quia ad $ba^{2-2n}$ pariter est addenda, ex $A-X$ iterum excedat. Nam si ponatur $X=bx^{2-2n}$ $+bc^{2-2n}$, erit $A=ba^{2-2n}+bc^{2-2n}$ et idcirco $A-X$ $=b(a^{2-2n}-x^{2-2n})$. Sed quia X denotat aream $C\pi\nu D$, euanescere debet facto $x=o$, quamobrem, si est $2-2n$ numerus positiuus, semper debet esse $bc^{2-2n}=o$, at si $2-2n$ euadet numerus negatiuus quantitas $bc^{2-2n}$ designabit quantitatem infinitam negatiuam. Quicquid igitur sit $bc^{2-2n}$ debet esse $-bo^{2-2n}$, hoc enim si $2-2n$ seu $1-n$ est numerus affirfirmatiuus ſponte euaneſcit, et ſi $1-n$ eſt negatiuum praebet infinitum requiſitum. Sed cum ſit propoſitum legem vis centripetae inuenire, nihil refert ſiue haec quantitas conſtans ſit $=o$ ſiue infinita. Namque poſita vi centripeta in $\pi=p=\pi\nu$, erit area $C\pi\nu D=\int pdx$. Quamobrem habebitur $bx^{2-2n}+bc^{2-2n}=\int pdx$, et ſumtis differentialibus prodibit $p=(2-2n)bx^{1-2n}$. Conſequenter vis centripeta debet eſſe in $1-2n$ *plicata* ratione diſtantiarum. Q. E. I.

## Corollarium 1.

355. Quo igitur omnes deſcenſus ad centrum C ſint iſochroni, ſeu abſoluantur aequalibus temporibus, poni debet $n=o$, quo facto prouenit vis centripeta diſtantiis directe proportionalis. Iam quidem animaduertimus hoc caſu omnes deſcenſus ad centrum eſſe iſochronos (283).

## Corollarium 2.

356. Si ponatur $n=1$, vt tempora deſcenſuum ſint ſpatiis percurſis proportionalia; inuenitur vis centripeta diſtantiis reciproce proportionalis.

## Corollarium 3.

357. Si $n=\frac{1}{2}$ ſeu tempora in ratione ſubduplicata diſtantiarum, vis centripeta habetur conſtans, quam proprietatem iam ſupra eruimus (217). Si ergo $n>\frac{1}{2}$ vis centripeta creſcente diſtantia decreſcet, ſin $n<\frac{1}{2}$ creſcet creſcente diſtantia.

## Scholion.

358. Hae quidem proprietates omnes consequuntur ex propositione 39, (308), vbi demonstrauimus, si vis centripeta fuerit vt potestas exponentis $n$ distantiarum, tempora descensuum fore in ratione $\frac{1-n}{2}$ *plicata* distantiarum. Quae propositio egregie cum hac nostra conspirat, posito enim $n$ loco $\frac{1-n}{2}$ prodibit $1-2n$ loco $n$. Neque tamen me hac propositione acta egisse putandum est, nam hic a priori modo analytico ex data temporum conditione legem vis centripetae erui, cum ibi inuerso ordine, ad idem fuerim perductus. Neque praeterea ante certum erat, praeter has inuentas virium centripetarum leges alias non satisfacere. Ipsa vero solutio incredibilem in posterum praestat vtilitatem. Nam quia mere est analytica et peculiarem a nemine adhuc adhibitam methodum complectitur, ad plurima alia problemata soluenda deducere potest, quae aliis methodis frustra tentantur. Ita cum huiusmodi methodus adhuc incognitus esset, neque hi isochroni descensus, neque curua tautochrona a priori sunt inuenta, sed examinantes vel vim centripetam distantiis proportionalem vel curuam cycloidem inopinato in istas proprietates inciderunt Geometrae.

# PROPOSITIO 47.

## Problema.

Tab. III. Fig. 9. 359. *Data scala potentiarum* BND, *quibus corpus per spatium* AC *descendens sollicitatur, inuenire in-*

*innumerabiles alias vt $\beta\nu\delta$, quibus corpus sollicitatum in C eandem acquirit celeritatem, posito corpore semper in A motum ex quiete inchoante.*

## Solutio.

Cum pro scala potentiarum BND altitudo celeritati, quam corpus in C habebit, aequalis sit areae $\frac{ABCD}{CE}$ exponente CE vim grauitatis (321) et pro scala $\beta\nu\delta$ ista altitudo $=\frac{A\beta\delta C}{CE}$ (cit.); debebit esse $ABDC = A\beta\delta C$, quam proprietatem vtique infinitae curuae habere possunt. In quocunque quidem spatii AC puncto P haec proprietas locum habere nequit, vt esset $ABNP = A\beta\nu P$, nisi curua $\beta\nu\delta$ incidat in alteram BND. Erit ergo discrimen quoddam inter has areas quod vocemus Z ita vt sit $A\beta\nu P = ABNP - Z$, quae differentia Z ita debet esse comparata vt euanescat puncto P tam in A incidente quam in C. Hanc ob rem constructa super axe AC curua quacunque AMC, quae in punctis A et C cum axe occurrat, poterit eius applicata PM loco huius Z vsurpari; euanescit enim puncto P et in A et C translato. Quo autem ex eadem curua AMC innumerabiles curuae $\beta\nu\delta$ deduci queant, expedit functionem quandam ipsius applicatae PM loco D adhibere quam ipsam. Haec vero functio hanc habere debebit proprietatem, vt fiat $=o$, si euanescit PM. His iam ita institutis ponatur $AC = a$, $AP = x$, $PN = y$, $P\nu = Y$, et $PM = z$, quarum quantitatum $a$, $x$, $y$ et $z$, nec non Z functio ipsius $z$ tanquam datae considerari possunt, incognita vero quantitas erit Y, quae ex hac

hac aequatione $\int Ydx = \int ydx - Z$ definietur. Sumtis enim differentialibus prodit $Y = y - \frac{dZ}{dx}$, ex qua aequatione curua $\beta\nu\delta$ construi poterit. Q. E. I.

## Corollarium I.

360. Sit $Z = nz^2$, erit $dZ = 2nzdz$ et $Y = y - \frac{2nzdz}{dx}$. At $\frac{zdz}{dx}$ denotat subnormalem in curua AMC ducta normali MR in puncto M. Si itaque accipiatur $N\nu$, quae linea est $= y - Y$, aequalis cuicunque multiplo subnormalis PR, curua $\beta\nu\delta$ quaesito satisfaciet.

## Corollarium 2.

361. Possumus etiam ponere $dZ = pzdz$ denotante $p$ functionem quamcunque ipsius $z$. Hic enim non opus habemus ad hoc respicere quod Z euanescere debeat, posito $z = o$. Nam quaecunque functio loco $p$ accipiatur, integrale ipsius $pzdz$ semper ita potest accipi vt fiat $= o$ posito $z = o$. Hanc ob rem habebimus $Y = y - \frac{pzdz}{dx} = y - p.\mathrm{PR}$. seu $N\nu = p.\mathrm{PR}$. quae constructio latissime patet.

## Scholion.

362. Notandum hic est non necesse esse, vt loco curuarum BND et AMC curuae regulares, quae aequationibus certis contineantur, adhibeantur. Sed ad construendas curuas $\beta\nu\delta$ sufficit curuas etiam vel maxime irregulares nulla aequatione contentas accipere. Pariter enim constructio determinandis subnormalibus succedit.

PRO-

## PROPOSITIO 48.

### Problema.

363. *Data ſcala potentiarum* BND, *quibus corpus ſpatium* AC *percurrens ſollicitatur, inuenire innumerabiles alias vt* $\beta\nu\delta$, *quibus efficiatur vt corpus eodem tempore ſpatium* AC *abſoluat.*

### Solutio.

Sumto quocunque ſpatio AP, ſit tempus, quo hoc abſoluitur vrgente ſcala potentiarum BND, $= t$ et tempus, quo idem ſpatium agente ſcala $\beta\nu\delta$ abſoluitur, ſit $= T$, ponaturque $T = t + Z$, quae quantitas Z euaneſcat, puncto P tam in A quam in C tranſlato. Hanc ob rem vt ante facio Z functionem applicatae PM curuae AMC in A et C cum axe AC occurrentis, talem, vt euaneſcat facto $PM = z = o$. Dicantur nunc AP, $x$, PN, $y$ et P$\nu$, Y, et erit $t = \int \frac{dx}{\sqrt{\int y dx}}$; atque $T = \int \frac{dx}{\sqrt{\int Y dx}}$, quocirca hanc habebimus aequationem $\int \frac{dx}{\sqrt{\int Y dx}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\int y dx}} + Z$, ex qua Y determinari poterit. Nam differentiando habebitur $\frac{dx}{\sqrt{\int Y dx}} = \frac{dx}{\sqrt{\int y dx}} + dZ$, ex qua prodit $\sqrt{\int Y dx} = \frac{dx \sqrt{\int y dx}}{dx + dZ \sqrt{\int y dx}}$ atque $\int Y dx = \frac{dx^2 \int y dx}{(dx + dZ \sqrt{\int y dx})^2}$. Quia vero iſta quantitas ob datas $x$, $y$ et Z conſtrui poteſt, ponatur ea $= P$, eritque $Y dx = dP$ conſequenter inuenitur $Y = \frac{dP}{dx}$. Q. E. I.

Co-

## Corollarium 1.

364. Sit $dZ = pzdz$ vt ante denotante $p$ functionem quamcunque ipsius $z$, erit $\frac{zdz}{dx} =$ subnormali PR, quam ponamus $= r$. Quo facto habebitur $P = \frac{\int ydx}{(1 + rp\sqrt{\int ydx})^2}$ atque $Y = \frac{dP}{dx}$.

## Corollarium 2.

365. Sit curua data BND linea recta parallela axi AC, ita vt potentia sit vniformis, semper enim potentia vniformis datur, quae efficiat vt corpus dato tempore spatium AC absoluat. Ponatur $AB = PN = b$; erit $\int ydx = bx$. Vnde habebitur $P = \frac{bx}{(1 + rp\sqrt{bx})^2}$ hacque differentiata obtinetur $Y = \frac{dP}{dx}$.

## Scholion.

Duas has posteriores propositiones inter se fere similes ideo innexi, quia peculiarem etiam soluendi modum requirunt, cuius vtilitas in sequentibus reddetur conspicua. Ceterum vero ipsae propositiones non sunt inelegantes et huic capiti, in quo omnes casus motum rectilineum a potentiis productum respicientes exponere constituimus, necessario erant inserendae. Neque vero eas ad casus speciales accommodare idoneum visum est, ob nimis prolixum calculum, ad quem fuisset perueniendum. His igitur relictis pergimus ad motus rectilineos in medio resistente.

# CAPUT QUARTUM
## DE
## MOTU RECTILINEO PUNCTI LIBERI IN MEDIO RESISTENTE.

### DEFINITIO 18.

367.

Lex resistentiae est potestas seu functio celeritatis corporis, cui ipsa resistentia est proportionalis. *Sic si resistentia est celeritatis quadrato proportionalis, lex resistentiae est celeritatis quadratum.*

### Corollarium 1.

368. Cognoscitur igitur ex lege resistentiae, si plura puncta aequalia diuersis ferantur celeritatibus, quomodo se habeant motus diminutiones inter se. Atque dato celeritatis decremento vnius puncti, reliquorum quoque celeritatis decrementa inueniuntur.

### Corollarium 2.

369. Si ergo pro vno celeritatis gradu datur ratio resistentiae ad vim grauitatis, pro omnibus aliis quoque gradibus ratio inter resistentiam et vim grauitatis ex lege resistentiae innotescet. Atque ex hoc effectus resistentiae in corpus motum inuenietur.

## Scholion 1.

370. Pertinet vtique vis resistentiae ad potentias, atque ideo cum vi grauitatis est homogenea, quemadmodum, cum de motu corporum in fluidis tractabitur, apparebit. Semper igitur potentia absoluta poterit assignari eundem in corpore effectum, quem resistentia, producens. Haec vero potentia absoluta pendebit a celeritate corporis, quam ob rem in eius expressione celeritas inerit, seu altitudo celeritati debita. Hoc igitur modo corporis motus in medio resistente reducetur ad corporis motum a potentiis absolutis sollicitatum, cuius, cum supra in capite secundo leges sint expositae, ex iis omnes quaestiones poterunt resolui.

## Scholion 2.

371. Directio vis resistentiae in hac tractatione nobis semper erit congruens cum directione motus corporis (117) et contraria. Quamobrem potentia absoluta ei substituenda motum semper retardabit, directione motus non mutata. Perspicuum itaque est, vim resistentiae, quoties eius expressio prodit negatiua, habituram directionem contrariam, motumque corporis esse acceleraturam. Hic quidem casus in fluidis quiescentibus locum habere nequit, sed tamen in calculo, cum ex dato corporis motu resistentia inuestigabitur, saepe occurret.

Co-

## Corollarium 3.

372. Corpus igitur in medio resistente motum, si a nulla alia potentia sollicitetur, in linea recta moueri debet. Quia enim a vi resistentiae directio motus non mutatur, eius motus, quem a natura in linea recta prosequitur, perpetuo in eadem recta fiat necesse est.

## Corollarium 4.

373. Si praeterea accedit potentia absoluta cuius directio perpetuo cum directione motus congruit, corpus quoque in medio resistente in linea recta progredietur. Neque enim potentia haec absoluta neque vis resistentiae directionem motus immutabit.

## Scholion 3.

374. In hoc igitur capite, in quo motus tantum rectilineos exponere constituimus, alias potentias absolutas cum vi resistentiae non coniungemus, nisi quarum directio cum motus directione conuenit. Hanc ob rem omnes potentias, quas in capite praecedente adhibuimus, etiam in hoc capite cum vi resistentiae coniunctas considerare licebit. Antequam autem potentias absolutas inducemus, conuenit motum corporum a sola resistentiae vi impeditum examini subiicere, quo facilius a simplicioribus ad magis composita progrediamur.

## Scholion 4.

375. In legis resistentiae expressione seu illa celeritatis functione, praeter altitudinem celeritati debitam $v$ inesse possunt quantitates constantes, sed excludimus omnes quantitates variabiles a loco corporis pendentes. Fieri quidem potest, vt resistentia, quam corpus aequali celeritate latum patitur, maior minorue sit, prout corpus in alium atque alium locum perueniat; quemadmodum euenit, quando fluidum, in quo corpus mouetur in alio loco est densius in alio vero rarius, quo casu in resistentiae expressione loci rationem haberi oportet. Neque tamen in lege resistentiae locum respici conuenit, nam per eam resistentiae rationem, quando corpus in eodem loco variis celeritatibus moueri ponitur, exprimere volumus. Discrimen vero quod ex loci varietate oriri potest in exponente resistentiae comprehendemus, quo simul resistentiae intensitas indicatur.

## DEFINITIO 19.

376. Exponens resistentiae est altitudo debita celeritati ei, quam si corpus habet, resistentiam patitur aequalem vi grauitatis. *Hac scilicet celeritate motum corpus tantum a resistentia retardatur, quantum a vi grauitatis sursum proiectum.*

## Corollarium 1.

377. Si igitur corpus in medio resistente motum celeritatem habeat altitudini $v$ debitam, atque haec altitudo $v$ sit ipsi exponenti resistentiae aequa-

aequalis, erit, dum corpus per ſpatiolum $dx$ progreditur, $dv = -dx$; quia potentia reſiſtentiae aequiualens hoc caſu aequalis eſt vi grauitatis, quam ſemper ponimus $= 1$, et motum retardat.

## Corollarium 2.

378. Datis ergo lege et exponente reſiſtentiae motus diminutio poteſt definiri. Namque ex exponente intelligitur, quantam corpus habere deberet celeritatem, vt reſiſtentiae vis aequalis eſſet grauitati, et ex lege reſiſtentiae cognoſcitur ratio, ſecundum quam diuerſae celeritates a reſiſtentia diminuuntur.

## Scholion I.

379. Exponens reſiſtentiae eſt vel conſtans vel variabilis ſeu a loco, in quo eſt corpus, pendens. Illud accidit in medio ſeu fluido vniformi, quod corporibus vbique eandem reſiſtentiam infert, ſi quidem eadem vbique moueantur celeritate. Huiusmodi medium reſiſtens appellabimus vniforme, quippe quod in omnibus locis ſui eſt ſimile. Exponens autem reſiſtentiae variabilis eſt in medio ſeu fluido difformi, etiamſi in quoque loco ſeorſim reſiſtentia eandem teneat legem. Nam quo denſius eſt fluidum ſeu medium, in quo corpus verſatur, eo quoque maiorem patitur corpus reſiſtentiam aequali etiam motum celeritate. Maior ſcilicet erit celeritas reſiſtentiam grauitati aequalem patiens in fluido rariore, minor vero in denſiore. Quia autem denſitas

et raritas medii a loco pendet, perſpicuum eſt reſiſtentiae exponentem, ſi eſt variabilis a loco corporis pendere debere.

## DEFINITIO 20.

380. Media reſiſtentia ſimilia hic vocantur, quae eandem habent reſiſtentiae legem. Diſſimilia vero, quae reſiſtentiae lege differunt. *Sic aqua et mercurius ſunt huiusmodi media ſimilia, ſiquidem ambo haec fluida reſiſtunt, vti videntur, in duplicata celeritatum ratione.*

## Corollarium I.

381. Si ergo media reſiſtentia ſimilia inter ſe differunt, tota differentia conſiſtit in exponente reſiſtentiae, ſeu denſitate et raritate. Sic in aqua exponens reſiſtentiae eſt maior quam in argento viuo, quia hoc eſt fluidum denſius illo.

## Scholion.

382. Media ſimilia cum corporibus aequaliter celeribus diuerſas facere queant reſiſtentias, prout eorum denſitates inter ſe differunt, has ipſas denſitates ex reſiſtentia, quam corpori data celeritate motu inferunt, metiri conuenit. In fluidis enim, vt, cum de motu corporum in fluido agitur, docetur, reſiſtentiae aequalibus celeritatibus factae ſunt denſitatibus fluidorum proportionales. Hancque proprietatem ad alia media quamcunque reſiſtentiae legem tenentia transferimus: quia aliae reſi-

sistentiae leges praeter duplicatam celeritatam rationem mere sunt imaginariae, et ad analysin tantum exercendam adhiberi solent.

# PROPOSITIO 49.

## Problema.

383. *Corporis in recta* AP *moti in medio quocunque resistente, cuius et lex et exponens resistentiae sunt cognita, data celeritate in puncto* P, *inuenire celeritatis decrementum, dum spatii elementum* Pp *percurrit.* Tab. IV Fig. 1.

## Solutio.

Posito elemento $Pp = dx$, sit altitudo celeritati in P debita $= v$, et exponens resistentiae $= q$. Denotat ergo $\sqrt{q}$ celeritatem, quam si corpus in P haberet, vis resistentiae aequalis foret vi grauitatis $= 1$. Quamobrem, si esset $v = q$, tum haberetur vis resistentiae $= 1$ atque $dv = -dx$ (376, 377). Sit autem V ea celeritatis $\sqrt{v}$ functio, qua resistentiae lex exprimitur, atque designet Q similem functionem ipsius $\sqrt{q}$, seu Q est huiusmodi quantitas, quae prodit, si in V loco $v$ substituitur $q$. Resistentia ergo, quam patitur corpus celeritate $\sqrt{q}$ motum, quae est $= 1$, se habebit ad resistentiam corporis celeritate $\sqrt{v}$ moti, vt se habet Q ad V (367). Ex hoc elicitur vis resistentiae, quam corpus celeritate $\sqrt{v}$ latum patitur, $= \frac{V}{Q}$. Quae cum motum retardet erit $dv = \frac{-V dx}{Q}$. Q. E. I.

Co-

## Corollarium 1.

384. Quia quantitas V est functio ipsius $v$ et constantium, atque $q$, ideoque et Q vel est constans vel functio quaedam ipsius $x$ (375); aequatio inuenta $dv = \frac{-Vdx}{Q}$ sponte separatur. Habetur enim $\frac{dv}{V} = \frac{-dx}{Q}$, ex qua integrata vel saltem constructa totus corporis motus per AP cognoscitur.

## Corollarium 2.

385. Cum vis resistentiae sit $= \frac{V}{Q}$, poterit ex hac medii densitas cognosci. Quia enim densitatem metimur ex resistentia, quam corpus data celeritate motum patitur, oportebit in $\frac{V}{Q}$ loco $v$ substituere quantitatem constantem, quo facto habebitur resistentia vt $\frac{1}{Q}$. Densitas igitur medii quoque erit vt $\frac{1}{Q}$ seu reciproce vt Q.

## Scholion.

386. Denotat hic $\frac{V}{Q}$ non tantum potentiam sollicitantem, sed iam ipsam vim retardatricem resistentiae, et hanc ob rem non opus est massam corporis in calculum inducere. Ceterum hic corporis massam constantem seu plurium corporum massas inter se aequales ponimus. Non enim consultum esse iudico hanc tractationem, quae non nisi in vnico casu in vsum venire potest, praeter necessitatem extendere et magis complicatam reddere.

PRO-

# PROPOSITIO 50.
## Problema.

387. *In medio resistenti vniformi, quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, definire corporis moti celeritatem in singulis locis.*

## Solutio.

Moueatur corpus in recta AP, sitque celeritas eius in puncto A debita altitudini $c$. Ponatur spatium percursum $AP = x$, et altitudo celeritati in P debita $= v$. Exponens resistentiae, qui est constans, vocetur $= k$, et lex resistentiae sit $v^m$, ita vt resistentia vbique sit vt celeritatis potestas exponentis $2m$. In praecedente igitur formula $dv = -\frac{Vdx}{Q}$ abit hoc casu V in $v^m$, et Q, quia talis esse debet functio ipsius $q$ seu $k$, qualis est $v^m$ ipsius $v$, erit $= k^m$. Habemus ergo hanc aequationem $dv = -\frac{v^m dx}{k^m}$, seu $\frac{dv}{v^m} = -\frac{dx}{k^m}$. Cuius integralis est $\frac{v^{1-m}}{1-m} = C - \frac{x}{k^m}$. Constans vero C ex hoc determinabitur, quod facto $x = 0$ transmutari debeat $v$ in $c$, quamobrem erit $C = \frac{c^{1-m}}{1-m}$. Hinc itaque resultabit aequatio ista $v^{1-m} = c^{1-m} - \frac{(1-m)x}{k^m}$, seu $v = \sqrt[1-m]{\frac{c^{1-m}k^m - (1-m)x}{k^m}}$, si est $m < 1$. At si erit $m > 1$, habebitur $v = \frac{ck^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt[m-1]{(k^m + (m-1)c^{m-1}x)}}$. Vnicus vero casus, quo

 est

est $m=1$, in his formulis non comprehenditur, sed deriuari debet ex aequatione differentiali, quae, facto $m=1$, erit huiusmodi $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{k}$, cuius integralis est $lv=C-\frac{x}{k}$. Simili vero modo erit $C=lc$, ideoque $lv=lc-\frac{x}{k}$. Logarithmis ad numeros reductis habebitur ergo $v=ce^{\frac{-x}{k}}$. Quemcunque igitur $m$ habeat valorem, corporis celeritas in quouis loco rectae AP innotescit. Q. E. I.

## Corollarium 1.

388. Si resistentia medii est quadratis celeritatum proportionalis, erit $m=1$. Quamobrem pro hoc casu, qui solus in rerum natura existere putatur, valet singularis solutionis casus $v=ce^{\frac{-x}{k}}$. Ex quo apparet corpus celeritatem ante non amittere totam, quam spatium infinitum $x$ percurrerit.

## Corollarium 2.

389. Si medium in maiore quam duplicata celeritatum ratione resistit, erit $m>1$, atque $v=\frac{ck^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt[m-1]{(k^m+(m-1)c^{m-1}x)}}$. Perspicitur autem ex hac aequatione celeritatem non euanescere, nisi ponatur $x=\infty$.

## Corollarium 3.

390. Hoc vero differt iste casus a priore, quo erat $m=1$, quod in illo, si fuerit celeritas initialis infinite magna, prodeat vbique ea tanta. Hoc ve-

vero casu, quo est $m > 1$, si ponatur $c = \infty$, prouenit $v = \sqrt[m-1]{\frac{k^m}{(m-1)x}}$. Erit ergo $v$ semper finitae magnitudinis, nisi sit $x = o$ vel $= \infty$.

## Corollarium 4.

391. Praeterea hoc casu, quo $m > 1$, corpus antequam peruenit in punctum A, semper alicubi puta in C habuit celeritatem infinite magnam. Ad hoc punctum C inueniendum, fieri debet $x$ negatiuum, et $k^m + (m-1)c^{m-1}x$ poni aequale nihilo. Vnde inuenitur $AC = \frac{k^m}{(m-1)c^{m-1}}$. Tab. IV. Fig. 2.

## Corollarium 5.

392. Si resistentia sit in minore quam duplicata ratione celeritatum, ideoque est $m < 1$, erit $v = \sqrt[1-m]{\frac{c^{1-m}k^m - (1-m)x}{k^m}}$. Celeritas corporis ergo euanescit in puncto C, si accipiatur $AC = \frac{c^{1-m}k^m}{1-m}$. Consequenter, cum corpus in C peruenerit, ibi perpetuo quiescet, neque vltra progredietur. Tab. IV. Fig. 1.

## Corollarium 6.

393. Si ponatur $m = o$, erit resistentia constans et aequaliter aget in corpus siue quiescens siue motum. Abit ergo hoc casu resistentia in potentiam absolutam et aequalem vi grauitatis. Nam, quoniam si est $v = k$ resistentia aequalis ponitur vi grauitatis, etiam quacunque alia celeritate corpus moueatur, tantundem resistentiae patietur.

## Scholion 1.

394. Exposuimus in his corollariis primarias motuum differentias, si fuerit vel $m = 1$ vel maior vel minor vnitate. Hae vero differentiae breuibus hisce canonibus comprehendi possunt: si est $m = 1$, corpus per totum spatium nusquam neque celeritatem infinitam neque nullam habebit. Deinde si $m > 1$, corpus alicubi habeat celeritatem infinitam necesse est, euanescentem vero nusquam. Denique si $m < 1$ corpus alicubi celeritatem habebit nullam, infinitam vero nusquam.

## Scholion 2.

395. Haec celeritatis diminutio permanet eadem in quamcunque plagam corpus moueatur, quia resistentiam vbique eandem ostendit. Neque enim hic motus similis est ei, qui a potentia absoluta contra vrgente diminuitur, quo fit, vt corpus in contrariam plagam motum tantumdem acceleretur, quantum ante erat retardatum. Sed ad motum in medio resistente diminutum restituendum atque rursus pariter accelerandum ac ante diminuebatur, oportet vim resistentiae negatiuam statui, atque ita in vim propellentem transmutari. Tum enim fiet $dv = \frac{Vdx}{Q}$, ex quo apparet celeritatem tantundem augeri, quantum ante minuebatur. Vi ergo resistente in propellentem transmutata, motus corporis fiet retrogradus, atque ex P in A reuertetur ita, vt in singulis punctis spatii AP easdem reciperet celeritates, quas ante ibidem habebat.

Scho-

## Scholion 3.

396. In casibus, quibus $m < 1$, corpusque tandem ad quietem peruenit, occurrit eadem difficultas, cuius supra (316) mentio est facta, si motum transmutanda vi resistente in propellentem velimus conuertere. Nam si corporis cum in C peruenerit celeritas est nulla, vis propellens $\frac{v^m}{k^m}$ quoque euanescit, si quidem $m$ non est numerus negatiuus, et hanc ob rem nunquam ex loco C corpus poterit depelli. Hoc igitur casu motus diminutionis non poterit in motum augmentationis conuerti. Calculus quidem contrarium ostendit, nam si dicatur $CP = y$, erit altitudo debita celeritati in P, nempe $v = \sqrt[1-m]{\frac{(1-m)y}{k^m}}$. Quod autem ex hac aequatione ipsa absurdum sequatur, hinc apparet quod $\frac{1}{1-m}$ exponens ipsius $y$ est vnitate maior, ideoque scala altitudinum celeritatibus debitarum rectam AC in C tangat. Quoties enim hoc euenit, corpus ex puncto C nunquam egredi potest, etiamsi calculus secus commonstret (319).

## PROPOSITIO 51.

### Problema.

397. *Moto corpore in medio resistente vniformi, quod resistentiam facit potestati cuicunque celeritatum proportionalem; determinare tempus, quo corpus spatium quodcunque* AP *percurrit.*

## Solutio.

Positis vt in praecedente problemate, celeritate initiali in $A = \sqrt{c}$, $AP = x$, celeritate in $P = \sqrt{v}$, exponente resistentiae $= k$ et lege $= v^m$, ita vt vis resistentiae sit vt celeritatis potestas exponentis $2m$.

Quia iam est $v = \frac{ck^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt[m-1]{(k^m + (m-1)c^{m-1}x)}}$ (387) si quidem $m > 1$, erit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}}{(k^m + (m-1)c^{m-1}x)^{\frac{1}{2m-2}}}$. Elementum ergo temporis quo spatiolum $dx$ percurritur est $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx(k^m + (m-1)c^{m-1}x)^{\frac{1}{2m-2}}}{\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}}$, cuius integralis est

$= \frac{C + 2(k^m + (m-1)c^{m-1}x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{(2m-1)c^{m-1}\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}}$, quod exprimit tempus per spatium AP, si modo constans C recte determinatur, id quod fit efficiendo, vt facto $x = 0$ totum tempus euanescat. Debebit itaque esse

$C = -\frac{2k^{\frac{2m^2-m}{2m-2}}}{(2m-1)c^{m-1}\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}}$; quamobrem totum tempus per spatium $AP = \frac{2(k^m + (m-1)c^{m-1}x)^{\frac{2m-1}{2m-2}} - 2k^{\frac{2mm-m}{2m-2}}}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}k^{\frac{m}{2m-2}}}$.

Quae

Quae expressio quoque valet si $m < 1$. At si est $m = 1$, peculiari operatione opus est, nam quia est $v = ce^{\frac{x}{k}}$, $ce^{-\frac{x}{k}}$ erit $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{e^{\frac{x}{2k}}dx}{\sqrt{c}}$, cuius integrale est $\frac{2ke^{\frac{x}{2k}} - 2k}{\sqrt{c}}$, quod exprimit tempus, quo spatium AP percurritur. Quemcunque ergo valorem habeat $m$, tempus ex his formulis per spatium quodcunque determinatur. Q. E. I.

## Corollarium 1.

398. Si ergo resistentia quadratis celeritatum est proportionalis, et consequenter $m = 1$, tempus quo corpus spatium infinitum describit, quoad scilicet totum suum motum amittit, erit quoque infinitum.

## Corollarium 2.

399. Si vero est $m > 1$, erit quoque $2m > 1$, et consequenter formula exprimens tempus per AP inuenta recte est disposita. Ex ea autem apparet, tempus, donec corpus totum motum amittat, fore infinitum, id quod facile ex hoc perspicitur, quod spatium quoque sit infinitum (389).

## Corollarium 3.

400. Quia vero hoc casu corpus, antequam Tab. IV. Fig. 2.
peruenit in A, alicubi in C habuit celeritatem infinitam, tempus etiam, quo ex C in A pertingit innotescet facto $k^m + (m-1)c^{m-1}x = 0$ (391). Quo facto resultat tempus per CA $= \frac{2k^m}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}}$.

Co-

## Corollarium 4.

401. Si fuerit $m < 1$, duo casus sunt a se inuicem distinguendi, quibus $m$ vel maius est quam $\frac{1}{2}$ vel minus. Si enim est $m > \frac{1}{2}$, manet $2m-1$ numerus affirmatiuus, et tempus quo spatium AP absoluitur erit

$$= \frac{2k^{\frac{m}{2-2m}}}{(2m-1)(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{2m-1}{2-2m}}} - \frac{2k^m}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}}.$$

## Corollarium 5.

Tab. IV. Fig. 1. 402. Quia corpus hac hypothesi motum, omnem celeritatem amittit, cum in C peruenit existente $AC = \frac{c^{1-m}k^m}{1-m}$ (392), erit tempus, quo spatium hoc AC percurrit, ob denominatorem $(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{2m-1}{2-2m}}$ euanescentem, infinitum. Hoc igitur euenit, si $m$ intra limites 1 et $\frac{1}{2}$ continetur.

## Corollarium 6.

403. Sin vero fuerit $m < \frac{1}{2}$ erit tempus, quo spatium quodcunque AP percurritur $= \frac{2c^{\frac{1-2m}{2}}k^m}{1-2m}$ $- \frac{2k^{\frac{m}{2-2m}}(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{1-2m}{2-2m}}}{1-2m}$. Ex quo apparet tempus, quo corpus ex A in C, vbi totum suum motum amittit, esse finitum et $= \frac{2c^{1-2m}k^m}{1-2m}$. Fit enim hoc casu $c^{1-m}k^m-(1-m)x = 0$ (392).

Scho-

## Scholion 1.

404. In his autem formulis non continetur casus, quo $m = \frac{1}{2}$. i. e. si resistentia est celeritatibus proportionalis. Hic igitur casus ex formula differentiali temporis est deducendus. Posito autem $m = \frac{1}{2}$ prodit $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{k}}{2\sqrt{ck}-x}$. Cuius integrale a logarithmis pendet atque est $= 2\sqrt{k}\, l \frac{C}{2\sqrt{ck}-x}$. Constans vero C debet esse $2\sqrt{ck}$, quo tempus euanescat facto $x = 0$. Consequenter tempus quo spatium AP percurritur erit $2\sqrt{k}\, l \frac{2\sqrt{ck}}{2\sqrt{ck}-x}$.

## Corollarium 7.

405. In hoc itaque casu, quo $m = \frac{1}{2}$, quia spatium AC, quo corpus percurrendo totum motum perdit, est $= 2\sqrt{ck}$ (392), tempus quo hoc spatium percurritur est infinitum.

## Corollarium 8.

406. Ex his igitur omnibus colligitur tempus, quo corpus totum suum motum amittit esse infinitum, si fuerit $2m$ vel aequalis vnitati, vel ea maior; contra vero si est $2m$ vnitate numerus minor, tempus totius motus esse finitum.

## Scholion 2.

407. Si vis resistentiae transmutatur in propellentem, quo casu motus fit retrogradus et simili modo augetur, quo ante minuebatur; tempora eadem esse debebunt, quae hic sunt definita. Nam quia corporis spatium AP percurrentis in singulis locis eadem est velocitas siue ex A in P motu retar-

dato siue vicissim ex P in A motu accelerato feratur, inter vtrumque tempus discrimen esse non potest. Attamen iis casibus, quibus spatium totum AC tempore finito absoluitur, haec regula non valet, quia corpus in C quiescens nullam vim propellentem sentire potest (396). Semper vero huic regulae confidere possumus, si corpori finita celeritas initialis tribuatur.

## PROPOSITIO 52.

### Problema.

Tab. IV. Fig. 3. 408. *Sollicitetur corpus, quod mouetur in medio quocunque resistente, a potentia quacunque absoluta, determinare celeritatis incrementum vel decrementum, dum quodvis elementum* Pp *percurrit.*

### Solutio.

Sit corporis celeritas in P debita altitudini $v$, et elementum percurrendum $Pp = dx$. Sit porro potentia absoluta seu potius eius vis accelerans in $P = p$, atque exponens resistentiae $= q$. Designet V eam ipsius $v$ functionem, cui resistentia proportionalis est, sitque Q talis functio ipsius $q$, qualis V est ipsius $v$. His positis retardabitur corpus, dum per elementum P$p$ mouetur, vi resistentiae $\frac{V}{Q}$ (383); interea vero simul acceleratur potentia absoluta $p$. Quamobrem corpus elementum P$p$ percurrens accelerabitur a vi $p - \frac{V}{Q}$. Ex quo igitur erit $dv = pdx - \frac{V}{Q}dx$. Q. E. I.

Co-

## Corollarium 1.

409. Si igitur eſt $p > \frac{V}{Q}$ celeritas corporis elementum P$p$ percurrentis augebitur; ſin vero $p < \frac{V}{Q}$, eius celeritas diminuetur. Atque ſi fuerit $p = \frac{V}{Q}$ celeritas neque augebitur, neque minuetur, ſed immutata manebit per elementum P$p$.

## Corollarium 2.

410. Si potentia abſoluta fuerit motui contraria, eumque retardet; erit $dv = -pdx - \frac{V}{Q}dx$. Hoc igitur caſu corpus ab vtraque vi retardabitur.

## Scholion 1.

411. Si potentia abſoluta corpus deorſum trahat, vt in ſolutione problematis poſuimus, atque corpus ſurſum moueatur, habebit et potentiam abſolutam et vim reſiſtentiae contrariam. Tum igitur habebitur iſta aequatio $dv = -pdx - \frac{V}{Q}dx$. Ex quo apparet motum aſcendentem non ſimilem fore deſcendenti, quia vis ſollicitans in aſcenſu non eſt negatiua ratione vis ſollicitantis in deſcenſu. Quo igitur aſcenſus ſimilis ſit deſcenſui atque corpus in vtroque motu in iisdem locis eandem habeat celeritatem, oportet vim reſiſtentiae in aſcenſu transmutari in propellentem. Quo facto habebitur $dv = -pdx + \frac{V}{Q}dx$, ex qua aequatione perſpicitur corpus aſcendens per P$p$ tantundem retardari, quantum ante in deſcenſu accelerabatur.

## Scholion 2.

412. Aequatio inuenta $dv = pdx - \frac{V}{Q}dx$ hac summa extensione ob defectum analyseos neque separari neque construi potest: et hanc ob rem celeritas corporis in P non potest determinari. Multo minus igitur tempus, quo spatium AP absoluitur poterit assignari. Relinqui ergo oportet hanc generalem aequationem, atque descendi ad casus particulares, quibus aequatio potest separari ac celeritas definiri. Triplici vero modo aequatio ista separationem indeterminatarum $x$ et $v$ admittit. Quorum primus est, si $x$ plus vna dimensione non habet. Secundus si $v$ vnicam tantum obtinet dimensionem. Tertius casus habebitur, si $x$ et $v$ simul vbique eundem dimensionum numerum constituunt; vel si aequatio ad aliam hac proprietate praeditam reduci poterit.

## Corollarium 3.

413. Primus casus ergo habetur, si et $p$ et $q$ fuerint constantes, tum enim quia et Q constans erit, prodit $dx = \frac{Qdv}{pQ - V}$, in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Praeterea vero etiam aequatio separari poterit si fuerit $p = \frac{A}{Q}$. Tum enim erit $\frac{dv}{A - V} = \frac{dx}{Q}$, quae quia V ab $v$, et Q ab $x$ pendent, construi potest.

$\frac{V}{Q}$

## Corollarium 4.

414. Quo $v$ vnicam habeat dimensionem oportet sit $V = v$, quo casu quoque erit $Q = q$, et aequa-

aequatio generalis abibit in hanc $dv = pdx - \frac{vdx}{q}$, quae in determinatarum separationem admittit.

## Corollarium 5.

415. Quo appareat, quando aequatio homogenea sit futura, sit $V = v^\alpha$, et $q = x^\beta$, erit $Q = x^{\alpha\beta}$. Sit porro $p = x^\gamma$, et computetur $v$ constituere $\delta$ dimensiones dum $x$ vnam adimplet. His positis aequatio illa abibit in hanc $dv = x^\gamma dx - \frac{v^\alpha dx}{x^{\alpha\beta}}$ in cuius primo termino censendae sunt $\delta$ dimensiones; in secundo $\gamma + 1$ dimensiones, et in tertio $\alpha\delta + 1 - \alpha\beta$. Debet igitur esse $\delta = \gamma + 1$, atque $\gamma + 1 = \alpha\gamma + \alpha + 1 - \alpha\beta$, seu $\gamma(\alpha - 1) = \alpha(\beta - 1)$. Quoties igitur fuerit $\alpha - 1 : \alpha = \beta - 1 : \gamma$ toties aequatio ad homogeneitatem potest reduci, adeoque celeritas ipsa determinari.

## Scholion 3.

416. Loco V, $q$ et $p$ alias functiones non assumere licet nisi potestates ipsarum $v$ et $x$. Nam, quia in V non inesse potest $x$ atque in $q$ et $p$ non ingreditur $v$, ac insuper numerus dimensionum ipsarum $x$ et $v$ vbique vel debet esse idem, vel ad eundem reducibilis; loco harum quantitatum necessario potestates debent assumi. Hanc ob rem posui $V = v^\alpha$, $q = x^\beta$, et $p = x^\gamma$, atque superiorem analogiam $\alpha - 1 : \alpha = \beta - 1 : \gamma$ elicui. Neglexi quidem coefficientes, qui salua hac reductione possunt adiici: nam homogeneitas hisce perturbari non potest. Itaque potest poni $q = Bx^\beta$ et $p = Cx^\gamma$, manente eadem

eadem analogia. Pro $x$ vero non ſolum ſpatium percurſum AP poteſt ſubſtitui, ſed illud ipſum quacunque conſtante auctum, dummodo eius differentiale ſit $dx$ vel huius aliquod multiplum. Ad $v^{\alpha}$ coefficientem addere non eſt opus, quia per V ratio tantum reſiſtentiae indicatur.

## Corollarium 6.

417. Si medium reſiſtens eſt vniforme ideoque $\beta = 0$; erit $\alpha = -1:\gamma$. Vnde fit $\gamma = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Quare ſi fuerit lex reſiſtentiae $v^{\alpha}$, potentia abſoluta debebit eſſe $= Bx^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, quo aequatio celeritatem definiens ad homogeneitatem poſſit reduci.

## Scholion 4.

418. Hos motus rectilineos in medio reſiſtente ita ſumus pertractaturi, vt primo potentiam abſolutam conſtantem ponamus, tumque ad quasuis vires centripetas progrediamur. Hisque expoſitis quaeſtiones inuerſas contemplabimur, quemadmodum in praecedente capite fecimus, atque ex datis proprietatibus motus cum potentiam abſolutam tum reſiſtentiae vim eruemus.

# PROPOSITIO 53.

## Problema.

419. *Poſita potentia abſoluta, et medio reſiſtente vniformi; determinare corporis deſcendentis celeritatem in ſingulis locis, ſi reſiſtentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis.*

So-

## Solutio.

Manentibus vt hactenus $AP = x$, celeritate in $P = \sqrt{v}$, sit potentia vniformis $= g$, exponens resistentiae $= k$. Quia lex resistentiae est $v$, erit vis resistentiae $= \frac{v}{k}$. Ex quibus prodit $dv = gdx - \frac{vdx}{k}$, seu $dx = \frac{kdv}{gk - v}$; cuius integralis est $x = kl\frac{C}{gk - v}$. Sit celeritas initialis in A debita altitudini $c$ debebit esse $C = gk - c$, atque $x = kl\frac{gk - c}{gk - v}$. Logarithmorum loco sumantur numeri $e^{\frac{x}{k}} = \frac{gk - c}{gk - v}$; ex qua aequatione prouenit $e^{\frac{x}{k}}v = c + gk(e^{\frac{x}{k}} - 1)$ seu $v = e^{\frac{-x}{k}}c + gk(1 - e^{\frac{-x}{k}}) = e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

420. Si corpus in A motum ex quiete inchoet, erit $c = 0$. Hoc igitur in casu habebitur $v = gk(1 - e^{\frac{-x}{k}})$, quae expressio, quo maior accipitur $x$, magis quoque augetur, certum tamen terminum nunquam potest transgredi. Nam sumto $x = \infty$, habebitur $v = gk$. Est ergo $\sqrt{gk}$ asymtotos celeritatum corporis descendentis, quam ante non acquirit, quam ex spatio infinito fuerit delapsum.

## Corollarium 2.

421. Si celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit huic asymtoto $\sqrt{gk}$ aequalis, motus corporis descendentis erit vniformis, fit enim $v = gk = c$. Apparet hoc etiam ex aequatione differentiali, $dv = gdx - \frac{vdx}{k}$.

Nam

Nam si semel fuerit $v = gk$, incrementum celeritatis erit perpetuo euanescens.

## Corollarium 3.

422. Si fuerit $c < gk$, corpus descendens mouebitur motu accelerato, nunquam tamen celeritatem $\sqrt{gk}$ acquiret, nisi spatio infinito percurso. Si enim est $c < gk$, quantitas $e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)$ semper est negatiua, et hanc ob rem $v$ perpetuo erit minor quam $gk$.

## Corollarium 4.

423. Si celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit maior quam $\sqrt{gk}$, erit $e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)$ quantitas positiua, ideoque $v$ vbique maior quam $gk$. Percurso vero spatio infinito fiet $v = gk$. Ex quo perspicitur corpus hoc casu motu retardato descendere.

## Scholion 1.

424. Comprehendi debet in hac aequatione $v = e^{\frac{-x}{k}}(c-gk) + gk$ etiam casus, quo corpus in vacuo a sola potentia absoluta sollicitatum descendit. Hicque habebitur, si resistentia ponatur euanescens, seu exponens $k$ infinitus, tum enim resistentiae vis $\frac{v}{k}$ euanescit. Difficile autem videtur determinatu, quem valorem habitura sit altitudo $v$, facto $k = \infty$. Ad hunc vero inueniendum plurimum conducit $e^{\frac{-x}{k}}$ in seriem aequiualentem $1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} - \frac{x^3}{6k^3} +$ etc. transmu-

mutare, cuius si $k$ est $\infty$ sufficit loco accipere $1-\frac{x}{k}$. Quo valore loco $e^{\frac{-x}{k}}$ substituto habebitur $v=c-\frac{cx}{k}+gx=c+gx$ ob euanescentem terminum $\frac{cx}{k}$. Quae aequatio conuenit cum ea, quam supra (239) inuenimus; nam quod ibi est $\frac{g}{A}$ hic nobis est tantum $g$. Quoniam $g$ nonsolum potentiam absolutam, sed vim eius accelerantem exhibet.

## Scholion 2.

425. Si $k$ non quidem habet valorem infinitum, sed tamen perquam ingentem; prout accidit, quando corpora vehementer grauia in fluido tenui delabuntur; magnam praestabit vtilitatem superior series, sumendis tantum tribus terminis primis $1-\frac{x}{k}+\frac{x^2}{2k^2}$ loco $e^{\frac{-x}{k}}$: error enim erit insensibilis. Hoc igitur casu si corpus ex quiete delabatur, vt sit $c=0$, erit $v=gx-\frac{gx^2}{2k}$. Ex qua aequatione vero proximus ipsius $v$ valor eruitur. At si prorsus nihil negligere velimus, erit $v=gx-\frac{gx^2}{2k}+\frac{gx^3}{6k^2}-\frac{gx^4}{24k^3}+\frac{gx^5}{120k^4}-$ etc. qua serie infinita verus valor ipsius $v$ exprimitur.

# PROPOSITIO 54.

## Problema.

426. *Determinare tempus, quo corpus in medio resistente vniformi, existente resistentia celeritatum quadratis proportionalis, a potentia absoluta vniformi sollicitatum per spatium AP descendit.*

## Solutio.

Positis vt supra $AP = x$, celeritate in $A = \sqrt{c}$, celeritate in $P = \sqrt{v}$, exponente resistentiae $= k$, erit $v = gk + e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)$, (419). Ex quo habebitur elementum temporis $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{\sqrt{(gk + e^{\frac{-x}{k}}(c-gk))}}$. Ad quod integrandum pono $e^{\frac{-x}{k}} = z$ et $c - gk = b$, breuitatis caussa; eritque $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-kdz}{z\sqrt{(gk+bz)}}$. Fiat porro $gk + bz = r^2$, erit $z = \frac{r^2 - gk}{b}$, et $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-2kdr}{r^2 - gk} = \frac{dr\sqrt{\frac{k}{g}}}{r + \sqrt{gk}} - \frac{dr\sqrt{\frac{k}{g}}}{r - \sqrt{gk}}$. Quocirca erit $\int\frac{dx}{\sqrt{v}} = C + \sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{r+\sqrt{gk}}{r-\sqrt{gk}}$. Restituatur loco $r$ suus valor $\sqrt{(gk + e^{\frac{-x}{k}}(c-gk))}$, et habebitur tempus descensus per spatium $AP = C + \sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)} + \sqrt{gk}}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)} - \sqrt{gk}}$. Quod quo euanescat facto $x = o$, debebit esse $C = -\sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}{\sqrt{c}-\sqrt{gk}}$. Ex his conficitur tempus descensus per AP

$$= \sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)} + \sqrt{gk}}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)} - \sqrt{gk}} - \sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}{\sqrt{c}-\sqrt{gk}}.$$

Quae expressio simplicior reddi potest ita, vt prodeat $\frac{x}{\sqrt{gk}} + 2\sqrt{\frac{k}{g}}\, l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)} + \sqrt{gk}}{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}$; cui itaque tempus descensus per AP aequale est. Q. E. I.

Co-

## Corollarium 1.

427. Si celeritas initialis fuerit $=o$, ideoque $c=o$, erit tempus, quo corpus per altitudinem AP descendit $=\frac{x}{\sqrt{gk}}+2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})+1})=\frac{x}{\sqrt{gk}}$ $-2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{1-\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}}{e^{\frac{-x}{k}}}=2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}-\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}}=2\sqrt{\frac{k}{g}}$ $l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$.

## Scholion 1.

428. Formula etiam generalis temporis per AP cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ transmutatur posito $2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\,e^{\frac{x}{2k}}$ loco $\frac{x}{\sqrt{gk}}$ in hanc $2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}gk+c-gk)}+\sqrt{e^{\frac{x}{k}}gk}}{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}$.
Ex qua ea, quam modo pro casu $c=o$ inuenimus, sponte sequitur, prodit enim $2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$.

## Corollarium 2.

429. Si ponatur $c=gk$, quo casu motus descensus est aequabilis (421), prodibit tempus descensus per spatium AP ex hac vltima forma $=2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}=\frac{x}{\sqrt{gk}}$, quemadmodum ex natura motus aequabilis quoque reperitur. Tempus enim debet esse primi spatio percurso $x$ diuiso per celeritatem $\sqrt{gk}$.

## Scholion 2.

430. Tempora haec autem habebuntur in minutis secundis, si inuentae expressiones per 250 di-

diuidantur, et lineae $c$, $k$, $x$ in ſcrupulis pedis Rhenani exhibeantur (222).

## Scholion 3.

431. Poſita celeritate initiali $c=o$, ſi detur tempus, quo ſpatium AP deſcendendo percurritur, poterit ipſum ſpatium AP determinari. Nam ſit tempus $t$ minutorum ſecundorum, denturque $k$ et $x$ in ſcrupulis pedis Rhenani, erit $t=\frac{1}{125}\sqrt{\frac{k}{g}}\, l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$. Conſequenter $e^{125t\sqrt{\frac{g}{k}}}=\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}$. Hinc inuenitur $e^{\frac{x}{2k}}=\frac{e^{250t\sqrt{\frac{g}{k}}}+1}{2e^{125t\sqrt{\frac{g}{k}}}}$ atque $x=2kl(\frac{e^{250t\sqrt{\frac{g}{k}}}+1}{2})-250t\sqrt{gk}$, vel etiam $x=250t\sqrt{gk}-2kl\frac{2}{e^{-250t\sqrt{\frac{g}{k}}}+1}$. Hocque ſpatium $x$ reperitur in partibus milleſimis pedis Rhenanis.

## Scholion 4.

432. Si $k$ fuerit quantitas vehementer magna, et tempus tantum quam proxime deſideretur per AP, exiſtente celeritate initiali $\sqrt{c}=o$; aſſumo hanc formulam $\frac{x}{\sqrt{gk}}+2\sqrt{\frac{k}{g}}\, l(\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}+1)$. In qua, quia $\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}$ fere euaneſcit ſi $k$ eſt valde magnum, erit $l(1+\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})})=\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}-\frac{1+e^{\frac{-x}{k}}}{2}+$

(1-e

$\frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^{2}}{4} + \frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^{\frac{5}{2}}}{5}$. Eſt vero etiam quam proxime $\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}} - \frac{\sqrt{xx}}{4k\sqrt{k}} + \frac{5x^2\sqrt{x}}{96k^2\sqrt{k}}$. Ex quo prouenit $l(1+\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}} - \frac{x}{2k} + \frac{x\sqrt{x}}{12k\sqrt{k}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{480k^2\sqrt{k}}$. Quamobrem habebitur tempus deſcenſus per ſpatium $AP = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$.

## Corollarium 3.

433. Quando itaque reſiſtentia euaneſcit, ideoque fiat $k = \infty$, prodibit deſcenſus corporis per AP a ſola potentia abſoluta g ſollicitati. Huius vero deſcenſus tempus ex hac poſtrema formula, ob euaneſcentes omnes terminos praeter primum, inenitur $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}$, quemadmodum iam ſupra (218) eſt inuentum, neglecto numero $m$ et g poſito loco $\frac{g}{A}$ vt hic inſtituimus.

# PROPOSITIO 55.

## Problema.

434. *Si corpus in medio reſiſtente vniformi, quod reſiſtit in duplicata ratione, ex* B *data celeritate ſurſum proiiciatur, atque ſollicitetur potentia vniformi* g; *determinari oporteat celeritatem corporis in ſingulis locis.* Tab. IV. Fig. 4.

## Solutio.

Sit celeritas in puncto $B = \sqrt{c}$, et celeritas in $P = \sqrt{v}$, ponatur $BP = x$, et reſiſtentiae exponens

$= k$; Quia nunc motus et a potentia absoluta $g$ et a resistentia $\frac{v}{k}$ retardatur erit $dv = -gdx - \frac{vdx}{k}$. Hinc fit $dx = \frac{-kdv}{gk+v}$ et $x = kl\frac{C}{gk+v}$, vbi debet esse $C = gk + c$ quo fiat $v = c$ facto $x = o$. Quamobrem habebimus $x = kl\frac{gk+c}{gk+v}$; ex qua erit $v = e^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - gk$, quae determinat celeritatem in quouis loco P. Q. E. I.

## Corollarium 1.

435. Pertingat corpus hoc modo sursum poiectum ad A vsque, et sit celeritas in $A = o$. Quocirca altitudo tota BA reperietur faciendo $v = o$, quo casu fit $e^{\frac{-x}{k}} = \frac{gk}{c+gk}$ seu $x = kl\frac{c+gk}{gk}$, cui quantitati aequalis est altitudo BA.

## Corollarium 2.

436. Euanescat resistentia, seu fiat $k = \infty$ vt motus fiat in vacuo, erit $e^{\frac{-x}{k}} = 1 - \frac{x}{k}$. Hoc igitur casu erit $v = c - gx$. Eademque aequatio reperitur, si corpus a potentia sola absoluta $g$ sollicitatum consideretur.

## Corollarium 3.

437. Si medium resistens fuerit valde rarum, ita vt $k$ numerum vehementer magnum significet, poterit loco $e^{\frac{-x}{k}}$ accipi $1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} - \frac{x^3}{3k^3}$. Ex quo erit $v = c - \frac{cx}{k} + \frac{cx^2}{2k^2} - gx + \frac{gx^2}{2k} - \frac{gx^3}{3k^2}$ $q.p.$ Quo autem haec quantitas valorem vero proximum ipsius $v$ exhibeat,

at, non solum opus est vt $k$ sit numerus valde magnus, sed insuper requiritur vt altitudo $x$ multo sit minor quam $k$, quo $e^{\frac{-x}{k}}$ non multum ab vnitate differat.

## Scholion I.

438. Iam animaduertimus descensum coporis per AB non similem esse ascensui, si medium in vtroque casu resistens ponatur. Potest tamen descensus per AB cogitatione concipi, qui prorsus similis sit ascensui, ita vt corpus tam in ascensu quam descensu in puncto P eandem habeat celeritatem. Ad hoc autem statui oportet in descensu et potentiam absolutam accelerantem, et medium propellens. Nam quia in ascensu ambae motui erant contrariae, necesse est vt in descensu vtraque secunda constituatur, quo motus fiat perfecte retrogradus.

## Corollarium 4.

439. Posita igitur altitudine $AP = y$, et celetate hoc descensu $= \sqrt{v}$, erit $dv = pdy + \frac{vdy}{k}$. Ex qua integrata prodit $v = gk^{\frac{y}{k}} - 1$.

## Scholion 2.

440. Congruit haec aequatio cum priore quam accensum contemplantes eruimus. Est enim $y = AB - x = k\,l\frac{c+gk}{gk} - x$, ideoque $e^{\frac{y}{k}} = \frac{c+gk}{gk} . e^{\frac{-x}{k}}$. Ex hoc igitur prodit $v = e^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - gk$; quemadmodum

dum ſupra inuenimus in ſolutione problematis. Apparet igitur in hoc deſcenſu corpus in ſingulis punctis P easdem eſſe habiturum celeritates, quas habuit ibidem in aſcenſu. Idem ergo etiam neceſſe eſt reperiatur tempus deſcenſus hoc modo conſiderati, ac ex aſcenſu prouenit.

## PROPOSITIO 56.
### Problema.

441. *Determinare tempus aſcenſus per* BP *corporis in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum ex* B *data celeritate ſurſum proiecti, et interim ſollicitati a potentia abſoluta* g *deorſum tendente.*

### Solutio.

Poſitis celeritate in $B = \sqrt{c}$, eaque in $P = \sqrt{v}$; deinde $BP = x$ et exponente reſiſtentiae $= k$, erit $v = e^{\frac{-x}{k}}(c + gk) - gk$ (434). Ex quo oritur elementum temporis $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk)}}$. Ad quod integrandum pono vt ſupra $e^{\frac{-x}{k}} = z$ et $c + gk = b$, breu. gr. quo facto habebitur $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-kdz}{z\sqrt{(bz-gk)}}$. Sit $bz - gk = r^2$, erit $z = \frac{r^2+gk}{b}$, atque $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-2kdr}{r^2+gk}$, cuius integratio a
Tab. IV. quadratura circuli pendet. Ad hoc igitur conſtru-
Fig. 5. endum conſtituatur quadrans circuli $abc$ cuius radius $ac$ ſit $= 1$, ſumatur in eo tangens $at = \frac{r}{\sqrt{gk}}$, eritque arcus $am = \int \frac{dr\sqrt{gk}}{r^2+gk}$ qui ſignetur hoc modo $A\frac{r}{\sqrt{gk}}$. Hu-

ius-

iusmodi ſcilicet expreſſio A $t$ nobis denotet arcum circuli, cuius tangens eſt $t$ exiſtente radio $=1$. Hanc ob rem erit $\int\frac{-2kdr}{r^2+gk} = -2\sqrt{\frac{k}{g}}\int\frac{dr\sqrt{gk}}{r^2+gk} = C - 2\sqrt{\frac{k}{g}}$ A. $\frac{r}{\sqrt{gk}}$. Quia autem eſt $r = \sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk)}$, erit $\int\frac{dx}{\sqrt{v}} = C - 2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A.$\sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}}$. Quae quantitas cum debeat euaneſcere facto $x=0$, dabit $C = 2\sqrt{\frac{k}{g}}$A. $\sqrt{\frac{c}{gk}}$. Tempus igitur aſcenſus per ſpatium BP inuenitur $= 2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A.$\sqrt{\frac{c}{gk}} - 2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A.$\sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}} = 2\sqrt{\frac{k}{g}}$ Tab. IV. Fig. 4.

$$(\text{A}.\sqrt{\tfrac{c}{gk}} - \text{A}.\sqrt{\tfrac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}}) = 2\sqrt{\tfrac{k}{g}}\text{A}.\frac{\sqrt{cgk}-\sqrt{(gke^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-g^2k^2}}{gk+\sqrt{(ce^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-cgk)}}$$

Q. E. I.

## Corollarium 1.

442. Quia tota altitudo AB ad quam corpus pertingere poteſt habetur faciendo $x = kl\frac{c+gk}{gk}$ quo caſu fit $e^{\frac{-x}{k}} = \frac{gk}{c+gk}$; Inuenietur tempus totius aſcenſus $= 2\sqrt{\frac{k}{g}}$A. $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{gk}}$.

## Corollarium 2.

443. Quare ſi fuerit $c = gk$ erit tempus totius aſcenſus per BA$= 2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A.1. At arcus cuius tangens aequatur radio eſt peripheriae pars octaua. Poſita itaque quarta peripheriae parte $amb = \pi$, erit tempus aſcenſus per BA$= \pi\sqrt{\frac{k}{g}}$.

A 2 Co-

## Corollarium 3.

444. Ex hoc quoque intelligitur, si celeritate infinita corpus ex B sursum proiiciatur tempus ascensus totius nihilo minus fore finitum, fit enim $=2\sqrt{\frac{k}{g}}.A.\infty$; qui arcus cum sit quarta peripheriae pars $=\pi$, erit tempus totius ascensus $=2\pi\sqrt{\frac{k}{g}}$.

## Corollarium 4.

445. Si loco celeritatis initialis $\sqrt{c}$ detur tota altitudo $BA=a$, ad quam corpus pertingit, quia est $a=kl\frac{c+gk}{gk}$ et propterea $c=gk(e^{\frac{a}{k}}-1)$; reperietur tempus totius ascensus per $BA=2\sqrt{\frac{k}{g}}.A.\sqrt{(e^{\frac{a}{k}}-1)}$.

## Scholion 1.

446. Si transmutetur ascensus in descensum medio accelerante, vt supra assumsimus (438) et vocetur $AP=y$, erit tempus descensus per $AP=2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\sqrt{(e^{\frac{y}{k}}-1)}$, substituto $y$ loco $a$ in superiore formula. Ibi enim $a$ denotabat altitudinem ascensu percursam, hic vero est $y$ altitudo integra, ad quam corpus celeritate, quam P habet, pertingere potest.

## Scholion 2.

447. Aequatio fundamentalis pro descensu hoc modo considerata est $dv=gdy+\frac{vdy}{k}$ (438), quae ex aequatione fundamentali pro vero descensu $dv=gdx-\frac{vdx}{k}$ (419) potest formari ponendo $y$ loco $x$ et $-k$ loco $k$. Quare etiam expressio temporis vero

pro-

proxima per ſpatium AP ex ea quam ſupra inuenimus (432) pro vero deſcenſu; accommodari poterit ad hunc deſcenſum imaginarium aſcenſus inuerſum; ponendo quoque $y$ loco $x$ et $-k$ loco $k$. Hoc itaque modo inuenitur tempus deſcenſus per ſpatium $AP = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{g}} - \frac{y\sqrt{y}}{6k\sqrt{g}} + \frac{y^2\sqrt{y}}{240k^2\sqrt{g}}$ *q. p.* dummodo $\frac{y}{k}$ fuerit numerus vnitate minor.

## Corollarium 5.

448. Si medii reſiſtentia prorſus euaneſcat, vt fiat $k = \infty$, erit tempus totius aſcenſus per ſpatium $BA = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$. Quae expreſſio prouenit ex ſuperiore $\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{g}} - \frac{y\sqrt{y}}{6k\sqrt{g}} + \frac{y^2\sqrt{y}}{240k^2\sqrt{g}}$ poſito $a$ loco $y$, omnes enim termini praeter primum euaneſcunt.

## Corollarium 6.

449. Poterit hinc etiam ex dato tempore integri aſcenſus $t$ reperiri altitudo percurſa $a$. Nam quia eſt $t = 2\sqrt{\frac{k}{g}}.A.\sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}$, erit tangens arcus $\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}$. Vocetur illa tangens T, erit $T^2 + 1 = e^{\frac{a}{k}}$ et $a = kl(T^2 + 1)$.

# PROPOSITIO 57.

## Problema.

450. *Dato tempore quo corpus ex* B *ſurſum proiectum iterum in* B *decidit in medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione, et ſollicitante potentia abſoluta vniformi* g, *determinare altitudinem* BA *ad quam* Tabula IV, Fig. 4.

 *cor-*

*corpus peruenit, vt et celeritatem initialem in* B *et finalem post descensum in eodem loco* B; *nec non tempus ascensus per* BA *et tempus descensus per* AB.

## Solutio.

Sit datum tempus $=t$, quod est summa temporum ascensus et descensus per rectam BA, et exponens resistentiae $=k$. Ponatur altitudo BA quaesita $=x$. Erit tempus ascensus par $BA = 2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}$, (445) atque tempus descensus sequentis ex A in $B = 2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$, (427). Ex quibus conflatur ista aequatio $\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = A.\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)} + l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$, ex qua inueniri potest $x$. Cognita autem altitudine $x$ dabitur simul et tempus ascensus per BA et tempus descensus per AB. Porro data altitudine $BA=x$, erit altitudo generans celeritatem in B, qua ascendit $=gk(e^{\frac{x}{k}}-1)$ (420), et altitudo generans celeritatem, qua decidit in $B = gk(1-e^{\frac{-x}{k}})$ (420). Q. E. I.

## Corollarium I.

451. Erit ergo celeritas ascendens in B ad celeritatem descendentem ibidem vt $e^{\frac{2k}{x}}$ ad 1. Ex quo apparet tanto magis de motu amitti quanto corpus altius ascendat.

Scho-

## Scholion 1.

452. Si fuerit $k$ numerus valde magnus neque altitudo $x$ admodum magna, vt loco temporum ſupra inuentas expreſſiones algebraicas adhibere liceat; erit tempus aſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} - \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$ (447), atque tempus deſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{6k\sqrt{g}}{x\sqrt{x}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$ (432). Quorum temporum ſumma, quia data eſt, habebitur $t\sqrt{g} = 4\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{120k^2}$, quam proxime.

## Scholion 2.

453. Accuratius autem definietur haec temporum ſumma magis continuandis ſeriebus tempora aſcenſus et deſcenſus exprimentibus. Fit ſcilicet tempus aſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} - \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}} + \frac{x^3\sqrt{x}}{1344k^3\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{46080k^4\sqrt{g}} -$ etc. et tempus deſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}} - \frac{x^3\sqrt{x}}{1344k^3\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{46080k^4\sqrt{g}} +$ etc. Quamobrem horum temporum ſumma $t = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{120k^2\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{23040k^4\sqrt{g}}$ etc. Vbi notandum ſi tempus detur in minutis ſecundis, et $k$ et $x$ in ſcrupulis pedis Rhenani exprimantur, ſuperiorem ſeriem per 250 eſſe diuidendam. Ita ſi tempus $t$ ſit $\mu$ minutorum ſecundorum debebit pro $t$ ſubſtitui $250\mu$.

## Corollarium 2.

454. Ex ſuperiore aequatione poterit ſerie inuertenda elici $x$ per ſeriem. Fiet autem $\sqrt{x} = \frac{t\sqrt{g}}{4} - \frac{g^2t^5\sqrt{g}}{2^{15}.15.k^2} + \frac{g^4t^9\sqrt{g}}{2^{29}.15.k^2} -$ etc. et conſequenter $x = \frac{gt^2}{2^4} - \frac{g^3t^6}{2^{16}.15k^2} + \frac{g^5t^{10}}{2^{26}.225k^4} -$ etc.

 Co-

## Corollarium 3.

455. Differentia inter tempus descenſus et tempus aſcenſus erit ergo $\frac{x\sqrt{x}}{2k\sqrt{g}} - \frac{x^3\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{g}}$ quam proxime. Inuenta ergo altitudine $x$ ſimul et tempus aſcenſus et tempus deſcenſus innoteſcunt.

## Corollarium 4.

456. In ſerie erit etiam altitudo debita celeritati, qua corpus aſcenſum inchoat $= gx + \frac{gx^2}{2k} + \frac{gx^3}{6k^2} + \frac{gx^4}{24k^3} +$ etc. et altitudo debita celeritati, qua corpus delabitur $= gx - \frac{gx^2}{2k} + \frac{gx^3}{6k^2} - \frac{gx^4}{24k^3} +$ etc.

## Exemplum.

457. Globus ferreus ex tormento bellico ſurſum exploſus recidebat in terram poſt 34 minuta ſecunda, eratque $k = 2250000$ ſcrupulorum pedis Rhenani, et $g = \frac{7499}{7500}$. Habebimus ergo $t = 8500$, et $\frac{t\sqrt{g}}{4\sqrt{k}} = 1,416572$, adeoque $\frac{g^2t^5\sqrt{g}}{2^{15}.15k^2\sqrt{k}} = 0,01188$. Atque $\frac{g^4t^9\sqrt{g}}{2^{29}.15k^4\sqrt{k}} = 0,0007477$. Fiet igitur $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}} = 1,405439$, et $\sqrt{x} = 2108,159$, et tota altitudo $x$ ad quam globus in aere peruenit $= 4443$ ped. Rhen. Sit nunc $\delta$ numerus minutorum ſecundorum, quibus deſcenſus longius durat quam aſcenſus; erit $\frac{250\delta\sqrt{g}}{\sqrt{k}} = \frac{x\sqrt{x}}{3k\sqrt{k}} - \frac{x^3\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{k}}$. Eſt vero $\sqrt{\frac{x}{k}} = \frac{527}{375}$, ex quo prodit $\frac{x\sqrt{x}}{3k\sqrt{k}} = 0,9913$, et $\frac{x^3\sqrt{y}}{672k^3\sqrt{k}} = 0,01893$. Habebimus ergo $\frac{250\delta\sqrt{g}}{\sqrt{k}} = 0,97237$, et hinc $\delta = 5'', 50'''$. Ex quo apparet tempus aſcenſus fuiſſe $14'', 5'''$,

5''', et tempus descensus $=19''$, $55'''$. Altitudo autem generans celeritatem, qua corpus ascensum inchoauit reperitur 15542 ped. et altitudo debita celeritati, qua delabitur $=1969$ ped. Videatur de his Comment. Tom. II. pag. 338.

## Corollarium 5.

458. Quia altitudo celeritati, qua corpus sursum proiicitur $= gk(e^{\frac{x}{k}} - 1) = gx(1 + \frac{x}{2k} + \frac{x^2}{6k^2} + \frac{x^3}{24k^3} + \text{etc.})$. Erit tempus ascensus et descensus simul sumtum, si corpus hac celeritate in vacuo sursum proiiceretur sola sollicitante vi grauitatis, $= 4\sqrt{gx} + \frac{x\sqrt{gx}}{k} + \frac{5x^2\sqrt{gx}}{24k^2} + \frac{x^3\sqrt{gx}}{32k^3} + \text{etc.}$

## Corollarium 6.

450. Erit ergo summa temporum ascensus et descensus in vacuo ad temporum summam in medio resistente vt $g(1 + \frac{x}{4k} + \frac{5x^2}{96k^2} + \frac{x^3}{124k^3} + \text{etc.})$ ad $1 + \frac{x^2}{480k^2} - \frac{x^4}{92160k^4}$ etc. Si scilicet in vtroque casu corpus eadem celeritate proiiciatur.

## Scholion 3.

460. In citato Tomo II. Commentar. pag. 340 est Theorema, quo haec tempora in vacuo et medio resistente in duplicata celeritatum ratione, vt hic quoque statuimus, inter se conferuntur; atque asseritur tempus in vacuo semper esse maius tempore in pleno. At vero ex nostra comparatione apparet, fieri posse, vt tempus in vacuo etiam minus sit tempore in pleno. Nam si fuerit $x$ valde paruum $k$ vero vehementer magnum, ea tempora

in-

inter ſe erunt proxime vt $g$ ad 1. Eſt vero $g$ in medio reſiſtente ob vim grauitatis denſitate medii minutam ſemper minor vnitate, et hanc ob rem tempus in vacuo minus erit his caſibus tempore in pleno. Quando vero $g$ quam minime ab vnitate differt et $x$ non eſt admodum paruum reſpectu $k$, prout in eiaculatione globorum ex tormentis euenit, tempus in vacuo vtique perpetuo erit maius quam in medio reſiſtente. Deinde ſi fuerit $x > k$ facile perſpicitur, dari quoque caſus, quibus euentus illi Theorematí futurus ſit contrarius. In exemplo autem allato corpus celeritate altitudini 15542 ped. debita in vacuo ſurſum proiectum recidet in terram poſt 63 minuta ſecunda, cum tamen in aere non diutius quam 34″ moretur.

## PROPOSITIO 58.

### Problema.

Tabula IV. Fig 6. 461. *Si corpus poſt quemuis deſcenſum ex O reflectatur eaque celeritate, quam in deſcenſu eſt adeptum iterum recta aſcendat, atque hae reflexiones perpetuo, cum in O peruenerit repetantur; quaerendae ſunt altitudines* OA, OB, OC *etc. quas corpus hoc modo ſucceſſiue percurrit in medio reſiſtente vniformi iuxta quadrata celeritatum et ſollicitatum a potentia vniformi* g.

### Solutio.

Poſito, vt hactenus eſt factum, exponente reſiſtentiae $= g$, altitudo prima $AO = a$, eritque celeritati, qua corpus aſcenſum inchoauit, altitudo de-

debita $=gk(e^{\frac{a}{k}}-1)$ (439). Altitudo vero debita celeritati, qua per AO delapſum punctum O attingit eſt $=gk(1-e^{\frac{-a}{k}})$ (420). Hac celeritate iam ſecundum aſcenſum per OB incipiat, ſitque OB$=z$, erit $gk(1-e^{\frac{-a}{k}})=gk(e^{\frac{z}{k}}-1)$. Ex quo prodit OB $=kl(2-e^{\frac{-a}{k}})=z$. Altitudo vero debita celeritati, qua in hoc ſecundo deſcenſu per BO delabitur, erit $=gk(1-e^{\frac{-z}{k}})=\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{2-e^{\frac{-a}{k}}}$, hacque celeritate tertium aſcenſum per OC incipiet. Sit nunc OC$=z$, erit $\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{2-e^{\frac{-a}{k}}}=gk(e^{\frac{z}{k}}-1)$, conſequenter $z=$OC$=kl\frac{3-2e^{\frac{-a}{k}}}{2-e^{\frac{-a}{k}}}$. Celeritas vero, quam in deſcenſu per CO acquirit, debita erit altitudini $gk(1-e^{\frac{-z}{k}})=\frac{gk(-e^{\frac{-a}{k}})}{3-2e^{\frac{-a}{k}}}$. Hac porro celeritate quartum aſcenſum per OD incipit, quam altitudinem OD denuo vocemus $z$, erit $gk(e^{\frac{z}{k}}-1)=\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{3-2e^{\frac{-a}{k}}}$ et conſequenter $z=$OD

 $=kl$

$= kl\frac{4-3e^{\frac{-a}{k}}}{3-2e^{\frac{-a}{k}}}$. Simili modo prodibit altitudo quinta $OE = kl\frac{5-4e^{\frac{-a}{k}}}{4-3e^{\frac{-a}{k}}}$, et sexta $OF = kl\frac{6-5e^{\frac{-a}{k}}}{5-4e^{\frac{-a}{k}}}$. Ex quibus concluditur ea altitudo OP, cuius index est $n$, fore $= kl\frac{n-(n-1)e^{\frac{-a}{k}}}{(n-1)-(n-2)e^{\frac{-a}{k}}} = kl\frac{ne^{\frac{a}{k}}-n+1}{(n-1)e^{\frac{a}{k}}-n+2}$. Manifestum igitur est ad quantam altitudinem corpus in quaque reflexione ex puncto O perueniat. Q. E. I.

## Corollarium I.

462. Ex hac solutione simul perspicitur celeritati, qua in hoc descensu per PO delabitur, debitam altitudinem fore $= \frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{n-(n-1)e^{\frac{-a}{k}}} = \frac{gk(e^{\frac{a}{k}}-1)}{ne^{\frac{a}{k}}-n+1}$ Celeritas vero, qua ascensum per OP est adorsum, debita est altitudini $\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{n-1-(n-2)e^{\frac{-a}{k}}} = \frac{gk(e^{\frac{a}{k}}-1)}{(n-1)e^{\frac{a}{k}}-n+2}$

## Corollarium 2.

463. Quia $OA = a = kle^{\frac{a}{k}}$ et $OB = kl(2-e^{\frac{-a}{k}})$, erit $OA + OB = kl(2e^{\frac{a}{k}}-1)$. Eodemque modo OA

$OA + OB + OC = kl(3e^{\frac{a}{k}} - 2)$, et $OA + OB + OC + OD = kl(4e^{\frac{a}{k}} - 3)$ etc.

## Corollarium 3.

464. Si $k$ est numerus valde magnus, vt $\frac{a}{k}$ fere euanescat, erit quam proxime $OP = a - \frac{(n-1)a^2}{k} + \frac{(n-1)^2 a^3}{k^2} - \frac{(n-1)^3 a^4}{k^3} +$ etc. Quae series cum sit geometrica erit $OP = \frac{ak}{k+(n-1)a}$ q. p.

## Corollarium 4.

465. Si altitudo prima OA fuerit infinite magna reliquae nihilo minus erunt finitae. Prodibit enim $OB = kl2$, $OC = kl\frac{3}{2}$, $OD = kl\frac{4}{3}$, etc. $OP = kl\frac{n}{n-1}$.

## Corollarium 5.

466. Et, si altitudo quaecunque fuerit $= klA$ erit altitudo sequens, ad quam corpus post repercussionem e prima pertingere valet $= kl\frac{2A-1}{A}$. Porro altitudo tertia erit $= kl\frac{3A-2}{2A-1}$ et similiter quarta $= kl\frac{4A-3}{3A-2}$ et ea cuius index est $n$ erit $= kl\frac{nA-n+1}{(n-1)A-n+2}$.

## Scholion I.

467. Possunt etiam loco $n$ numeri negatiui substitui, tumque inuenientur altitudines praecedentes in quarum serie prima existit. Sic altitudo, quam sequitur prima $OA = a$, posito $n = 0$, erit $= kl\frac{1}{2-e^{\frac{a}{k}}}$. Ex quo apparet, si fuerit $e^{\frac{a}{k}} = 2$ seu



$a=$

$a = kl2$, altitudinem praecedentem fuisse infinitam. At si fuerit $e^{\frac{a}{k}} > 2$, altitudo praecedens ob logarithmum quantitatis negatiuae erit imaginaria, id quod indicat, fieri non posse, vt altitudo tanta possit assignari, cuius sequens sit haec assumta $a$.

## Scholion 2.

468. Quod post altitudinem infinitam sequi possit altitudo finita admirabile quidem videtur; sed consideranti, quod corpus in medio resistente ex infinita altitudine delapsum finitam acquirat tantum celeritatem, (420) ratio huius phaenomeni facile patebit. Hac enim finita celeritate ad finitam tantum altitudinem reascendere poterit. Maxima autem celeritas, quam corpus in descensu potest adipisci, est $\sqrt{gk}$. Quare si corpus initio sursum proiiciatur celeritate maiore quam $\sqrt{gk}$ haec celeritas ex nullo quamuis magno descensu antecedente generari potuit; quemadmodum etiam hoc casu calculus altitudinem praecedentem exhibet imaginariae quantitatis.

## PROPOSITIO 59.

### Problema.

Tabula IV. Fig. 3. et 4. 469. *Resistente medio uniformi in celeritatum ratione simplici, et sollicitante potentia absoluta uniformi deorsum tendente, determinare corporis recta vel ascendentis vel descendentis celeritatem in quouis puncto.*

So-

## Solutio.

Descendat primo corpus in recta AP, sitque Tabula IV celeritas eius initialis in A debita altitudini $c$. Po- Fig. 3. natur potentia absoluta $= g$, exponens resistentiae $= k$; atque AP $= x$, et altitudo debita celeritati in P $= v$. His positis erit $dv = g dx - \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$, est enim vis resistentiae $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Hinc fit $dx = \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{v}}$. Fiat $\sqrt{v} = u$, erit $dv = 2udu$, atque $dx = \frac{2udu\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - u} = -2du\sqrt{k} + \frac{2gkdu}{g\sqrt{k} - u}$. Integrata hac aequatione prodit $x = C - 2u\sqrt{k} - 2gkl(g\sqrt{k} - u) = C - 2\sqrt{kv} - 2gkl(g\sqrt{k} - \sqrt{v})$. Posito vero $x = o$ fieri debet $v = c$, ex quo fit $C = 2\sqrt{kc} + 2gkl(g\sqrt{k} - \sqrt{c})$. Habebimus itaque $x = 2\sqrt{kc} - 2\sqrt{kv} + 2gkl\frac{g\sqrt{k} - \sqrt{c}}{g\sqrt{k} - \sqrt{v}}$, ex qua $v$ ope logarithmicae potest deduci Q. E. Alterum.

Iam pro ascensu sit celeritas initialis in B alti- Fig. 4. tudini $c$ debita, et BP $= x$, et altitudo celeritati in P debita $= v$. Quia in ascensu tam potentia absoluta, quam resistentiae vis retardant, erit $dv = -g dx - \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Quae aequatio directe ex priore $dv = g dx - \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ deducitur ponendo $-g$ loco $g$. Quamobrem etiam hoc modo requisitam aequationem integralem ex illa deriuare licet. Fit igitur facto $g$ negatiuo $x = 2\sqrt{kc} - 2\sqrt{kv} - 2gkl\frac{g\sqrt{k} + \sqrt{c}}{g\sqrt{k} + \sqrt{v}}$. Q. E. Alterum.

## Corollarium I.

470. Si celeritas initialis in descensu fuerit Fig. 3. $= o$, erit $x = -2\sqrt{kv} + 2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{v}}$. Ex qua aequatio-

tione determinatur celeritas corporis ex quacunque altitudine delapsi.

## Corollarium 2.

471. Quia vero est $l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}=-l\left(1-\frac{\sqrt{v}}{g\sqrt{k}}\right)$; habebitur in serie $l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}=\frac{\sqrt{v}}{g\sqrt{k}}+\frac{v}{2g^2k}+\frac{v\sqrt{v}}{3g^3k\sqrt{k}}+\frac{v^2}{4g^4k^2}$ + etc. Qua substituta prodibit $x=\frac{v}{g}+\frac{2v\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}}+\frac{v^2}{2g^3k}+\frac{2v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}}$ + etc. Si nunc fuerit $k$ numerus valde magnus erit $v=gx-\frac{2x\sqrt{gx}}{3\sqrt{k}}$ q. p.

## Corollarium 3.

Tabula IV. Fig. 4. 472. Si sit $v=g^2k$, prodit $x=\infty$. Ex quo apparet, corpus ex infinita altitudine delapsum maiorem acquirere non posse celeritatem quam $g\sqrt{k}$. Et si fuerit semel $v=g^2k$, corpus motu aequabili esse progressurum; tum vero motum eius retardari, si sit $v>g^2k$.

## Corollarium 4.

473. Si corpus ex B sursum proiiciatur celeritate $\sqrt{c}$, altitudo BA reperietur facto $v=0$. Prodibit autem $BA=2\sqrt{kc}-2gkl\left(1+\frac{\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}\right)=\frac{c}{g}-\frac{2c\sqrt{c}}{3g^2\sqrt{k}}+\frac{c^2}{2g^3k}$. Altitudo vero ex qua corpus descendendo hanc celeritatem acquirere potest erit $=-2\sqrt{kc}$ $2gkl\left(1-\frac{\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}\right)=\frac{c}{g}+\frac{2c\sqrt{c}}{3g^2\sqrt{k}}+\frac{c^2}{2g^3k}+$ etc.

## Corollarium 5.

474. Si corpus sursum proiiciatur celeritate $g\sqrt{k}$, maxima scilicet, quam descensu acquirere potest, erit altitudo ad quam pertingit $=2gk(2-l2)$.

PRO-

## PROPOSITIO 60.

### Problema.

475. *Resistente medio uniformi in ratione simplici celeritatum et sollicitante potentia absoluta uniformi; determinare tempus, quo corpus vel ascendens vel descendens spatium quoduis percurrit.*

### Solutio.

Positis vt ante pro descensu per AP celeritate in $A = \sqrt{c}$, et ea in $P = \sqrt{v}$; exponente resistentiae $= k$ et potentia absoluta $= g$, spatioque $AP = x$, erit $dx = \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}} = \frac{2udu\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-u}$ posito $u^2$ loco $v$. Iam dicto tempore per $AP = t$ erit $dt = \frac{dx}{u} = \frac{2du\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-u}$. Ex qua prodit $t = 2\sqrt{k}\,l\frac{g\sqrt{k}-\sqrt{c}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum. Tabula IV. Fig. 3.

Quia ascensus per $BP = x$, cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ prodit ponendo $-g$ loco $g$, erit tempus ascensus per $BP = 2\sqrt{k}\,l\frac{g\sqrt{k}+\sqrt{c}}{g\sqrt{k}+\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum. Problemate vero praecedente definitur $v$ ex dato $x$. Quare et hic tempus, quo spatium quoduis percurritur poterit cognosci. Q. E. I. Fig. 4.

### Corollarium 1.

476. Si celeritas initialis, qua corpus descendit fuerit nulla, erit tempus descensus per spatium $AP = 2\sqrt{k}\,l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. At $v$ definitur ex hac aequatione $x = -2\sqrt{kv} + 2gk\,l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Fig. 3.

Co-

## Corollarium 2.

477. Tota altitudo BA, ad quam corpus ex B ascendens peruenire potest, absoluetur tempore $= 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}+\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$.

## Corollarium 3.

478. Si ergo celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit infinita, erit etiam tempus, quo tota altitudo BA percurritur, infinitum, nempe $= 2\sqrt{k}\, l\infty$.

## Scholion 1.

479. Hoc igitur vehementer differt haec resistentiae hypothesis a priore, quae quadratis celeritatum posita erat proportionalis. Nam illo casu corpus infinita celeritate sursum proiectum ad summum punctum pertingit tempore finito (444). Hoc vero notandum est tempus $2\sqrt{k}\, l\infty$ esse numerum infinitum infimi ordinis: Ex quo concludi posse videtur; si resistentia fuerit in maiore quam simplici ratione celeritatum, tempus ascendens totius semper esse finitum. Sin autem resistentia sit in simplici vel minore celeritatum ratione, tempus ascensus totius esse infinitum, si quidem celeritas initialis est infinite magna.

## Scholion 2.

490. Has duas resistentiae hypotheses ideo fusius pertractandas esse censui, quod eae a *Neutono*, aliisque, qui eum secuti sunt, praecipue sint consideratae. Haec quidem posterior hypothesis, qua resistentiam celeritatibus proportionalem posuimus, me-

mere mathematica eſt, neque vllum in phyſicis habere poteſt vſum. Sed quia initio putarunt, reſiſtentiam fluidorum a tenacitate oriundam celeritatibus eſſe proportionalem, diligentius in huiusmodi motus inquirendum eſſe exiſtimauerunt. Poſtmodum tamen, cum reſiſtentiam tenacitatis longe aliter ſe habere intellexiſſent, hanc tractationem nihilo minus retinuerunt. Prior vero, qua reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis eſt, maxime explorari meretur: certum enim eſt praecipuam fluidorum reſiſtentiam hanc tenere rationem. Praeterea etiam haec hypotheſis in calculo prae reliquis tantam habet praerogatiuam, vt, quod in aliis hypotheſibus minime poteſt praeſtari, in hac tamen ſola calculus non refragetur. Omnia enim fere problemata, quae in vacuo ſolutionem non reſpuunt, in hac reſiſtentiae hypotheſi reſolui poſſunt. Hanc ob rem in ſequentibus iſtam reſiſtentiam potiſſimum examinabimus, reliquas autem, niſi concinno computo quaeſitum inueniri poteſt, plerumque negligemus.

## PROPOSITIO 61.
### Problema.

481. *Reſiſtat medium vniforme in ratione quacunque multiplicata celeritatum, ſitque potentia ſollicitans vniformis; determinari oporteet motum corporis recta vel aſcendentis vel deſcendentis.*

## Solutio.

Tabula IV. Fig. 3. Consideremus primo descensum, et ponamus celeritatem in A $=\sqrt{c}$, spatium iam percursum AP $=x$ et celeritatem in P $=\sqrt{v}$. Sit resistentiae exponens $=k$ et lex resistentiae $=v^m$, atque potentia absoluta $=g$. His igitur positis erit $dv = g\,dx - \frac{v^m dx}{k^m}$, et $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Habemus ergo $x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$ ex qua ope quadraturarum $v$ in $x$ determinari poterit. Ponatur tempus, quo spatium AP percurritur $=t$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{k^m dv}{gk^m\sqrt{v} - v^m\sqrt{v}}$. Atque $t = \int \frac{k^m dv}{gk^m\sqrt{v} + v^m\sqrt{v}}$ Q. E. Alterum.

Iam pro ascensu maneat $\sqrt{c}$ celeritas initialis in B, sitque BP $=x$, et celeritas in P $=\sqrt{v}$, atque tempus, quo spatium BP percurritur $=t$. His positis erit $dv = -g\,dx - \frac{v^m dx}{k^m}$ quae aequatio ex illa elicitur ponendo $-g$ loco $g$. Quo facto erit pro ascensu $x = -\int \frac{k^m dv}{gk^m + v^m}$ et $t = -\int \frac{k^m dx}{gk^m\sqrt{v} + v^m\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum inueniendorum.

## Corollarium I.

482. Si fuerit $c^m = gk^m$, corpus hac celeritate descendens motu aequabili feretur. Nam perpetuo potentiae absolutae, qua corpus acceleratur, aequalis erit vis resistentiae, qua retardatur.

## Corollarium 2.

483. Corpus vero ex quiete delapsum perpetuo accelerabitur, neque tamen vnquam celeritatem acquiret altitudini $g^{\frac{1}{m}}k$ debitam. Sed haec celeritas est quasi assymtotos, quam siue celerius siue tardius corpus moueatur, affectat.

## Scholion.

484. Quia hae inuentae aequationes neque integrari possunt, neque $v$ vel $t$ in $x$ definiri, diutius iis immorari non expedit. Ad alia igitur progredior, atque medium resistens variabile contemplabor manente potentia absoluta vniformi. Huiusmodi tamen accipiam hypothesin, qua aequatio $dv$ determinans fiat homogenea, ideoque his difficultatibus non sit obnoxia. Deinde potentiam absolutam non amplius vniformem sed variabilem pono, seu eius loco vim centripetam considero, qua corpus perpetuo ad certum aliquod punctum fixum attrahitur. Cum hac quidem primum aliam resistentiam non coniungam, nisi quae quadratis celeritatum est proportionalis. Deinde vero cum aliis resistentiae hypothesibus eas tantum vires centripetas coniungi conuenit, quae integrationem aequationis differentialis admittunt.

# PROPOSITIO 62.

## Problema.

485. *Potentia absoluta existente vniformi, et exponente resistentiae distantiis a puncto C proportionali,* Tabula IV. Fig 7.

 *at-*

*atque lege resistentiae celeritatum ratione quacunque multiplicata, requiritur corporis in recta* AC *ad* C *vel accedentis vel ab eo recedentis celeritas in quouis loco.*

## Solutio.

Potentia vniformis ad C vrgens sit $=g$ altitudo debita celeritati in loco quocunque P$=v$. Ponatur AC quae est maxima altitudo ad quam corpus pertingit $=a$ et CP$=x$, erit exponens resistentiae vt $x$, sit is $\lambda^{\frac{1}{m}}x$ et lex resistentiae sit $v^m$. His positis erit vis resistentiae$=\frac{v^m}{\lambda x^m}$, et pro ascensu per CA, quo et potentia absoluta et vis resistentiae retardant, habebitur ista aequatio $dv=-g\,dx-\frac{v^m\,dx}{\lambda x^m}$. Descensum hic quoque tanquam ascensum consideremus, et quia in descensu vero potentia accelerans, resistentia vero retardans est, in hoc ascensu substituto contrario modo potentia retardans et resistentia accelerans poni debet (411), ex quo oritur pro descensu haec aequatio $dv=-g\,dx+\frac{v^m\,dx}{\lambda x^m}$. Quae aequatio ex illa deriuatur faciendo $\lambda$ negatiuum, et hanc ob rem alteram tantum aequationem integrari opus est. Sumamus aequationem pro descensu, quae erit huiusmodi $\lambda x^m dv+\lambda g x^m dx=v^m dx$, et ponamus $v=xz$. Erit ergo $dv=x\,dz+z\,dv$, ex quo prodibit ista aequatio, $\lambda x^{m+1}dz$

$+\lambda x$

$+\lambda x^m z dx + \lambda g x^m dx = x^m z^m dx$. Quae diuisa per $x^{m+1}(z^m - \lambda z - \lambda g)$ abit in hanc $\frac{\lambda dz}{z^m - \lambda z - \lambda g} = \frac{dx}{x}$ in qua indeterminatae iam sunt separatae. Haec igitur aequatio ita integretur, vt facto $x = a$, celeritas euanescat; quo facto ex aequatione integrali celeritas corporis descendentis in quouis loco innotescet. Eadem vero ipsa aequatio facto $\lambda$ negatiuo inseruiet ad celeritates in ascensu per CA definiendas. Q. E. I.

## Corollarium 1.

486. Si fuerit $m = 1$ seu resistentia quadratis celeritatum proportionalis, erit $\frac{\lambda dz}{(1-\lambda)z - \lambda g} = \frac{dx}{x}$, adeoque $\frac{\lambda}{1-\lambda} l((1-\lambda)z - \lambda g) = lx + C = \frac{\lambda}{1-\lambda} l \frac{(1-\lambda)v - \lambda g x}{x}$ substituo $\frac{v}{x}$ loco $z$. Quia autem si $x = a$ debet esse $v = o$, erit $C = \frac{\lambda}{1-\lambda} l - \lambda g - la$, ideoque $lx = la + \frac{\lambda}{1-\lambda}$ $l\frac{\lambda g x - (1-\lambda)v}{\lambda g x}$. Ex qua prodit $v = \frac{\lambda g x}{\lambda - 1}\left(\frac{a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} - x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}\right)$ $= \frac{\lambda g}{\lambda - 1}(a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} x^{\frac{1}{\lambda}} - x)$.

## Corollarium 2.

487. Si fuerit $\lambda$ vnitate minor, haec aequatio ad aliam formam redigi debet; Prodibit autem $v = \frac{\lambda g}{1-\lambda}\left(\frac{a^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} x - x^{\frac{1}{\lambda}})}{a^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}}\right)$.

## Corollarium 3.

488. Casus, quo $\lambda = 1$, seu exponens resistentiae ipsi distantiae a puncto C est aequalis, in his formulis non continetur, sed ex differentiali $\frac{-dz}{g} = \frac{dx}{x}$ est deducendus. Prodibit autem $C - \frac{z}{g} = lx$ hincque $v = gx(la - lx)$.

## Corollarium 4.

489. Ex his intelligitur casu $m = 1$ corporis descendentis celeritatem tam in A quam in C fore $= o$. Fit enim $v = o$ in tribus hisce aequationibus, tam posito $x = o$ quam $x = a$. Corpus igitur ex A in C delapsum omnem motum amittet atque in C perpetuo quiescet, ob resistentiam in eo loco infinite magnam.

## Corollarium 5.

490. Dum igitur corpus rectam AC percurrit, alicubi inter A et C habebit celeritatem maximam, quae inuenitur ex aequatione differentiali faciendo $dv = o$. Fiet autem tum $v = \lambda g x$, quo valore loco $v$ in integratis aequationibus substituto prodibit $\lambda x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} = a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$, atque $x = \frac{a}{\lambda^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}}$, si $\lambda > 1$.

Sin autem $\lambda < 1$ erit $x = \lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} a$. At si $\lambda = 1$; erit $1 = la - lx$ ideoque $x = \frac{a}{e}$, denotante $e$ numerum, cuius logarithmus est vnitas.

Scho-

## Scholion 1.

491. Ex his colligere licet etiam in reliquis resistentiae hypothesibus celeritatem corporis, cum ad C peruenerit, esse euanituram. Vis enim resistentiae est $\frac{v^m}{\lambda x^m}$, quae ergo fit infinita si $x = o$. Quare si corpus in C quandam haberet velocitatem, ea a vi resistentiae infinita statim in nihilum redigi deberet. Maximam vero in descensu celeritatem habebit quando est $v^m = \lambda g x^m$. Ex quo apparet maximam celeritatem esse debitam altitudini $x \sqrt[m]{\lambda g}$. Sed quia $x$ ignoratur seu locus, quo corpus celerrime descendit, etiam ipsa celeritas non potest determinari, nisi per quadraturas curuarum, quarum ope aequatio differentialis construitur.

## Corollarium 6.

492. Pro ascensu ex C in A si $m = 1$ celeritates corporis in singulis locis P determinabuntur ex hac aequatione $v = \frac{\lambda g x}{\lambda + 1}\left(\frac{a^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} - x^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{x^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}\right)$, quae ex illis pro descensu formatur, facto $\lambda$ negatiuo, vti oportet.

## Corollarium 7.

493. In ascensu ergo corporis celeritas in C semper est infinita. Facto enim $x = o$, quia $\frac{\lambda+1}{\lambda}$ est vnitate maius, denominator euanescit.

Scho-

## Scholion 2.

494. Perspicuum etiam est ex sola contemplatione, celeritatem in C esse debere infinitam. Nam nisi tanta esset, corpus vim resistentiae in C infinitam superare non posset, sed perpetuo in C haerere deberet.

## PROPOSITIO 63.

### Theorema.

495. *Iisdem positis, quae in praecedente propositione, si plura corpora ex diuersis distantiis ad punctum C accedant, erunt tempora, quibus eo perueniunt in subduplicata ratione distantiarum.*

### Demonstratio.

In solutione praecedentis problematis ad celeritatem in P determinandam obtinuimus hanc aequationem, $\lambda x^m dv + \lambda g x^m dx = v^m dx$, (485). In qua aequatione $x$ et $v$ vbique eundem dimensionum numerum constituunt. Eius igitur integralis ita accepta, vt posito $x = a$ fiat $v = o$, habebit hanc proprietatem, vt $x$, $v$ et $a$ vbique eundem dimensionum numerum constituant. Ex ea ergo prodibit $v$ aequalis functioni cuidam ipsarum $a$ et $x$, in qua $a$ et $x$ vnicam vbique dimensionem constituunt; seu $v$ erit functio ex $a$ ex $x$ constans vnius dimensionis. Quare in elemento temporis per CP quod est $\frac{dx}{\sqrt{v}}$, erit ipsarum $x$, $dx$, et $a$ dimidia dimensio, et hanc ob rem tempus per CP aequabitur functioni ex $a$ et $x$ constanti dimidiae dimensionis. Posito ergo $x = a$,

quo

quo casu totum tempus descensus per AC inuenitur, habebitur functio ipsius solius $a$ dimidiae dimensionis. Quamobrem tempus per AC exprimetur huiusmodi expressione $C\sqrt{a}$ in qua C ex quantitatibus $\lambda$, $m$ et $g$ constat, non vero pendet ab $a$. Quia iam $a$ denotat altitudinem AC, perspicuum est plurium descensuum tempora esse inter se in subduplicata ratione altitudinum percursarum. Q. E. D.

## Corollarium 1.

496. Simili modo intelligitur plurium ascensuum ex C tempora tenere etiam rationem altitudinum, ad quas peruenitur, subduplicatam.

## Corollarium 2.

497. In quacunque igitur multiplicata celeritatum ratione medium resistat, dummodo potentia absoluta est constans et resistentiae exponens distantiis a C proportionalis, tempora vel ascensuum vel descensuum rationem tenent subduplicatam altitudinum.

## Scholion 1.

498. Neque vero ascensus cum descensibus comparare licet, neque plures ascensus vel descensus inter se, in quibus litterae $\lambda$, $m$ et $g$ non eosdem tenent valores. Nam in expressione $C\sqrt{a}$, quantitas C in omnibus casibus, qui inter se comparantur, eadem esse debet.

## Scholion 2.

499. In hac propositione eadem vsi sumus methodo varia descensuum ad punctum fixum tempora comparandi, quam supra in propositionibus 39 et 46. Hoc autem casu eo magis huius methodi praestantia cernitur, quia nequidem celeritatem in $x$ determinare licebat. Hoc enim solum nobis perspicere sufficiebat, cuiusmodi functio ipsarum $a$ et $x$ futura sit ea expressio, cui $v$ esset aequalis. In sequentibus autem plura specimina egregia huius methodi occurrent.

# PROPOSITIO 64.

## Problema.

Tabula IV. Fig. 7. 500. *Existente vi centripeta cuicunque potestati distantiarum a centro* C *proportionali, medioque vniformi resistente in duplicata celeritatum ratione; determinare corporis in recta* AC *moti siue sursum siue deorsum in singulis locis* P *celeritatem.*

## Solutio.

Sit corpus in P, habeatque celeritatem altitudini $v$ debitam. Vocetur AP, $x$, et sit vis centripeta vt $x^n$, atque ea distantia, in qua vis centripeta aequalis est grauitati $= f$. Deinde ponatur exponens resistentiae $k$. His praemissis erit vis absoluta, qua corpus in P sollicitatur $= \frac{x^n}{f^n}$, et vis resistentiae in hoc loco $\frac{v}{k}$, existente vi grauitatis $= 1$.

Des-

Descendat iam corpus ad C et habebit, dum per elementum $pP$ mouetur, vim centripetam accelerantem, atque vim resistentiae retardantem. Quia hic autem corpus inuerse ex P in $p$ peruenire ponimus crescente $x$, contrarias harum virium actiones statui oportet, seu quod eodem redit $dx$ negatiuum est ponendum, quia descensu distantia PC$=x$ minuitur. Prodibit ergo $dv = -\frac{x^n}{f^n}dx + \frac{vdx}{k}$. In vero autem corporis ascensu per $Pp$, vtraque vis erit retardans, ideoque habebitur $dv = -\frac{x^n}{f^n}dx - \frac{vdx}{k}$. Ex quo perspicitur alteram aequationem ex altera oriri faciendo $k$ negatiuum. Hanc ob rem alterutram tantum aequationem integrari opus est. Sumamus eam pro ascensu $dv = -\frac{x^n dx}{f^n} - \frac{vdx}{k}$, seu $dv + \frac{vdx}{k} = \frac{-x^n dx}{f^n}$ haecque multiplicetur per $e^{\frac{x}{k}}$ vt prodeat $e^{\frac{x}{k}}(dv + \frac{vdx}{k}) = -\frac{e^{\frac{x}{k}}x^n dx}{f^n}$, cuius integralis est $e^{\frac{x}{k}}v = -\int\frac{e^{\frac{x}{k}}x^n dx}{f^n}$. Erit ergo $v = -e^{\frac{-x}{k}}\int\frac{e^{\frac{x}{k}}x^n dx}{f^n}$. Pro descensu igitur erit $v = -e^{\frac{x}{k}}\int\frac{e^{\frac{-x}{k}}x^n dx}{f^n}$. In vtraque vero integratione quantitas constans adiicienda ex eo determinari debet, quod corporis moti alicubi celeritas sit data: alioquin enim motus non esset determinatus. Q. E. I.

## Corollarium 1.

501. Perspicitur igitur si $n$ fuerit numerus integer affirmatiuus, has formulas fore integrabiles. Est enim $\int e^{\frac{x}{k}} x^n dx = k e^{\frac{x}{k}} x^n - nk^2 e^{\frac{x}{k}} x^{n-1} + n(n-1)k^3 e^{\frac{x}{k}} x^{n-2} - n(n-1)(n-2)k^4 e^{\frac{x}{k}} x^{n-3} + \text{etc.} + C$. Quae series non sit infinita, quoties $n$ est numerus integer affirmatiuus.

## Corollarium 2.

502. Sit celeritas in C data et debita altitudini $c$, erit pro ascensu $v = e^{\frac{-x}{k}} c - \frac{kx^n}{f^n} + \frac{nk^2x^{n-1}}{f^n} - \frac{n(n-1)k^3x^{n-2}}{f^n} + \text{etc.} \pm n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 2.\,1.\, \frac{k^{n+1}e^{\frac{-x}{k}}}{f^n}$; quorum signorum ambiguorum superius valet si $n+1$ fuerit numerus impar, inferius vero si $n+1$ fuerit numerus par. Pro descensu autem erit $v = e^{\frac{x}{k}} c + \frac{kx^n}{f^n} + \frac{nk^2x^{n-1}}{f^n} + \frac{n(n-1)k^3x^{n-2}}{f^n} + \text{etc.} - n(n-1) \ldots\ldots\ldots 2.\,1.\, \frac{k^{n+1}e^{\frac{x}{k}}}{f^n}$. Loco C debita substituta constante.

Co-

## Corollarium 3.

503. Integrale ipsius $\frac{e^{\frac{x}{k}} x^n dx}{f^n}$ ita acceptum vt fiat $=o$, facto $x=o$, ponatur $=X$. Eritque $v=e^{\frac{-x}{k}}(c-X)$, quia facto $x=o$, fieri debet $v=c$. Inseruit quidem haec aequatio ascensui, sed facto $k$ negatiuo ad descensum accommodatur.

## Corollarium 4.

504. Cognito X apparebit altitudo CA ad quam corpus vel ascendere potest, vel ex ea delapsum celeritatem acquirit $=\sqrt{c}$. Ex hac enim aequatione $X=c$ radix $x$ dabit altitudinem CA.

## Corollarium 5.

505. Ex differentiali aequatione pro descensu $dv=-\frac{x^n dx}{f^n}+\frac{vdx}{k}$, apparet alicubi corpus habiturum esse celeritatem maximam antequam ad C pertingit, quae ibi erit, vbi est $v=\frac{kx^n}{f^n}$, si quidem $n$ non est numerus negatiuus.

## Corollarium 6.

506. Detur altitudo $CA=a$, ex hacque si quaeratur $c$, oportet eam habere quantitatem, quae resultat in X posito $a$ loco $x$. Sit $ea=A$ erit pro ascensu $v=e^{\frac{-x}{k}}(A-X)$, et pro des-

censu $v = e^{\frac{x}{k}}(A-X)$. Facto enim $x = a$ debet euanescere $v$. Iam facto $x = o$, quo casu etiam fit $X = o$ (503), erit $v = c = A$.

## Corollarium 7.

507. Manifestum est ex hisce, quomodo tempus quo spatium CP percurritur, inueniendum sit. Scilicet pro ascensu erit tempus per CP $= \int \frac{e^{\frac{x}{2k}} dx}{\sqrt{(A-X)}}$ atque pro descensu tempus per CP erit $= \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2k}} \sqrt{(A-X)}}$

## Exemplum.

508. Sit vis centripeta vt distantia a centro C, quo casu fit $n = 1$; Erit ergo pro ascensu $v = e^{\frac{-x}{k}} c - \frac{kx}{f} + \frac{k^2}{f} - \frac{k^2 e^{\frac{-x}{k}}}{f}$. Pro descensu vero $v = e^{\frac{x}{k}} c + \frac{kx}{f} + \frac{k^2}{f} - \frac{k^2 e^{\frac{x}{k}}}{f}$ (502). In descensu maxima celeritas erit, vbi est $v = \frac{kx}{f}$ (505), qua aequatione cum illa coniuncta habebitur $f e^{\frac{x}{k}} c + k^2 = k^2 e^{\frac{x}{k}}$. Erit ergo $e^{\frac{x}{k}} = \frac{k^2}{k^2 - cf}$ et $x = k\,l \frac{k^2}{k^2 - cf}$. Haec igitur distantia fit infinita si $cf = k^2$, omnino vero imaginaria si $cf > k^2$. Sit porro in A corporis celeritas $= o$, positaque $AC = a$, erit pro ascensu celeritatis initialis in C altitudo debita $= \frac{e^{\frac{a}{k}} ka}{f} - \frac{e^{\frac{a}{k}} k^2}{f} + \frac{k^2}{f}$.

In

In descensu vero erit celeritatis finalis in C altitudo debita $= -\frac{c^{\frac{-a}{k}} ka}{f} - \frac{c^{\frac{-a}{k}} k^2}{f} + \frac{k^2}{f}$. Ex qua apparet si fuerit $a$ infinitum fore celeritatis vltimae in C altitudinem debitam $= \frac{k^2}{f}$.

## PROPOSITIO 65.

### Problema.

509. *Existente vi centripeta ad C quacunque et medio resistente secundum quadrata celeritatum vtcunque difformi: determinare motum corporis recta vel accedentis vel recedentis a C.*

### Solutio.

Sit corpus in P, et ponatur $CP = x$, et celeritas in $P = \sqrt{v}$. Deinde sit vis centripeta in $P = p$, posita vi grauitatis $= 1$, et exponens resistentiae $= q$, quae litterae $p$ et $q$ denotant functiones quascunque ipsius $x$. Erit ergo vis resistentiae $= \frac{v}{q}$. Hanc ob rem habebitur pro ascensu $dv = -pdx - \frac{vdx}{q}$. Pro descensu vero haec $dv = -pdx + \frac{vdx}{q}$. Quarum altera in alteram transmutatur facto $q$ negatiuo. Consideremus igitur alterutram tantum ascensui accommodatam, quae induit hanc formam $dv + \frac{vdx}{q} = -pdx$. Multiplicetur haec per $e^{\int \frac{dx}{q}}$ vt fiat integralis. Erit autem aequatio integralis $e^{\int \frac{dx}{q}} v = -\int e^{\int \frac{dx}{q}} pdx$; ergo $v = -e^{-\int \frac{dx}{q}} \int e^{\int \frac{dx}{q}} pdx$. Sit corpoporis in A, posita $AC = a$, celeritas nulla, et scribatur X loco integralis ipsius $e^{\int \frac{dx}{q}} pdx$ ita accepti vt euanescat facto $x = o$. Deinde loco $x$ posito $a$ abeat X in A erit $-\int e^{\int \frac{dx}{q}} pdx = A - X$, atque $v = e^{-\int \frac{dx}{q}} (A - X)$. Tempus igitur quo spatium PC absoluitur est $= \int \frac{e^{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{q}} dx}{\sqrt{(A-X)}}$. Pro descensu erit autem scripto A−X simili modo loco $-\int e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx$, altitudo celeritati in P debita $v = e^{\int \frac{dx}{q}} (A - X)$ et tempus quo spatium PC absoluitur erit $= \int \frac{dx}{e^{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{q}} \sqrt{(A-X)}}$

Q. E. I.

## Corollarium 1.

510. Celeritas in puncto infimo C reperietur facto $x = o$, quo casu et X euanescit, et $\int \frac{dx}{q}$ euanescere ponamus. Prodibit igitur tam pro ascensu quam pro descensu $v = A$. Notandum autem est A in vtroque casu non eundem habere valorem, sed diuersum. Formatur enim ex X, quod pro ascensu est $= \int e^{\int \frac{dx}{q}} pdx$, pro descensu vero $= \int e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx$.

## Corollarium 2.

511. In descensu maximam habebit corpus celeritatem quando est $v = pq$, tum enim fit $dv = o$.

Lo-

Locus ergo, in quo celeritas eſt maxima, determinabitur ex iſta aequatione $pq = e^{\int \frac{dx}{q}}(A-X)$.

## Scholion.

512. In hypotheſi tam potentiae quam medii vniformis, corpus delapſum ſpatio demum infinito percurſo acquirebat maximam ſuam celeritatem, et ſi principio ea ſtatim promoueatur, eam perpetuo retinebat. Hic vero vbi $p$ et $q$ ſunt quantitates variabiles corpus ex quiete delapſum finito tempore maximam celeritatem acquirere poteſt, neque ſi eam ſemel habuit retinere debet; niſi ſit $pq$ perpetuo quantitas conſtans, ſeu medii denſitas vi centripetae proportionalis (385).

# PROPOSITIO 66.

## Problema.

513. *Data lege vis centripetae ad centrum C trahentis, et medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione; ſi dentur celeritates corporis, quas ex quibuscunque altitudinibus delapſum in C acquirit, determinare denſitatem ſeu reſiſtentiae exponentem in ſingulis locis.* Tabula IV. Fig. 8.

## Solutio.

Poſita quacunque diſtantia CP$=x$ et vi centripeta in P$=p$; ſit curua CMB huius indolis vt eius applicata quaeuis AB ſit aequalis altitudini debitae celeritati, quam corpus ex A delapſum in C acquirit, quae curua igitur data erit. Exponens vero reſiſtentiae, qui quaeritur, ſit in P$=q$. Sit porro

Ee diſtan-

distantia AC ex qua corpus delabitur $=a$, erit AB certa quaedam functio ipsius $a$, quam ponamus L. Eiusdem vero curuae applicata PN sit R, eritque R talis functio ipsius $x$ qualis L est ipsius $a$. Ex praecedente autem propositione apparet, corporis ex distantia AC$=a$ delapsi altitudinem celeritati in C acquisitae debitam fore $=$A (510). Quamobrem erit L$=$A, atque etiam R$=$X, est enim quoque X talis functio ipsius $x$, qualis A est ipsius $a$, R igitur talis esse debet functio ipsius $x$, vt euanescat facto $x=o$. Quoniam vero est $X=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}pdx$ erit $R=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}pdx$, et $l\frac{pdx}{dR}=\int\frac{dx}{q}$. Ex qua posito $dx$ constante, elicitur $q=\frac{pdxdR}{dpdR-pddR}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

514. Si fuerit CMB linea recta, adeoque $R=\alpha x$, erit $ddR=o$ et $q=\frac{pdx}{dp}$. Si fit praeterea $p=\mathfrak{C}x^n$ erit $q=\frac{x}{n}$, seu medii densitas erit distantiis a centro reciproce proportionalis.

## Corollarium 2.

515. Si fuerit $n=o$ seu vis centripeta vbique eadem erit $q=\infty$, ideoque medii densitas nulla, et ipsa resistentia euanescens. Hicque est casus corporis invacuo descendentis a potentia absoluta vniformi sollicitati.

## Corollarium 3.

516. Si fuerit $n$ numerus negatiuus, habebit $q$ quoque valorem negatiuum. Ex quo cognoscitur

tur resistentiam transmutandam esse in vim propellentem.

## Scholion 1.

517. Ex hisce facile quoque resoluitur eadem quaestio ad ascensum accommodata, si nimirum detur altitudo, ad quam corpus ex C quacunque celeritate proiectum pertingit. Posita enim celeritate $=\sqrt{R}$, qua spatium $x$ absoluitur, $q$ tantummodo in sui negatiuum transmutari debebit, quo facto habebitur $q=\frac{pdxdR}{pddR-dpdR}$.

## Scholion 2.

518. Vtraque aequatio definiens $q$ tam pro ascensu quam pro descensu ita est comparata, vt idem valor ipsius $q$ inueniatur, quaecunque multipla loco $p$ et R accipiantur. Neque tamen ex his concludere licet, si determinatae sint $q$ et $p$, R vagum quendam habere posse valorem: sed necessario debebit esse determinatus. Quo autem ille ipse valor ipsius R, qui est assumtus, prodeat, non vero eius quoddam multiplum, vis centripeta $p$ ad hoc est vel remittenda vel intendenda. Quando autem vis centripetae in singulis locis quantitas ipsa datur, problema erit plus quam determinatum, si quidem celeritates quibusvis distantiis respondentes dentur: sed duntaxat earum ratio proposita esse debet. Ratio vero difficultatis in hoc consistit, quod inuenimus $q$ ex aequatione $R=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}pdx$ bis differentiata. Dif-

ferentiata enim aequatio latius patet plusque in se complectitur quam integralis

## Scholion 3.

519. Ex solutione problematis sponte sequitur, quomodo, si data fuerit medii densitas in singulis locis seu quantitas $q$, inueniri oporteat vim centripetam $p$, reliquis iisdem, quibus ante, manentibus datis. Ex hac enim aequatione $l\frac{pdx}{dR} = \int\frac{dx}{q}$, deducetur $p = \frac{dR}{dx}e^{\int\frac{dx}{q}}$, qui valor est determinatus, quia $\int\frac{dx}{q}$ ita sumtum ponimus, vt euanescat, facto $x = o$ (510).

# PROPOSITIO 67.

## Problema.

Tabula IV. Fig. 7. 520. *Resistente medio in duplicata celeritatum ratione, dataque eius densitate, seu exponente resistentiae in singulis locis: determinare vim centripetam, quae faciat, vt corpus, ex quacunque altitudine ad centrum C delabatur, perpetuo tamen eodem tempore eo perueniat.*

## Solutio.

Descendat corpus ex puncto quocunque A sitque $AC = a$. Vocetur indeterminata $CP = x$ et ponantur altitudo celeritati in P debita $= v$, exponens resistentiae in $P = q$, et vis centripeta ibidem $= p$, quae est inuenienda. Habebitur igitur $v = e^{\int\frac{dx}{q}}$ $(A - X)$ et tempus, quo spatium PC absoluitur $= \int$

$= \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}} \sqrt{(A - X)}}$, (509). Vbi eſt $X = \int e^{\frac{-dx}{q}}$ $pdx$ ita accepto, vt euaneſcat poſito $x = o$: et A oritur ex X poſito $x = a$. Totum igitur tempus per AC habebitur ſi in integrali ipſius $\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}} \sqrt{(A - X)}}$ ponatur $x = a$ vel $X = A$. Expreſſio vero reſultans ita eſſe debebit comparata, vt in ea omnino non inſit $a$ vel A: quod obtinetur, ſi $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}} \sqrt{(A - X)}}$ fuerit functio ipſarum $a$ et $x$ vel ipſarum A et X nullius dimenſionis. Quamobrem et differentialis huiusmodi ſit functio neceſſe eſt. Ponatur igitur $\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = \frac{dX}{P}$; habebimus pro differentiali temporis $\frac{dX}{P\sqrt{(A - X)}}$, in quo A et X dimenſionem obtinent dimidiam; P ergo, quo nulla adſit dimenſio, quoque dimidiam dimenſionem habere debebit. Sed in P non ineſſe poteſt $a$ vel A, eius enim quantitas a ſolo puncto P pendere debet, non a puncto A. Hanc ob rem erit $P = \frac{\sqrt{X}}{b}$, et elementum temporis $= \frac{bdX}{\sqrt{(AX - XX)}}$, quod requiſitam habet proprietatem. Erit igitur $\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = \frac{bdX}{\sqrt{X}}$, et integratione peracta $2b\sqrt{X} = \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}}$, quod integrale ita eſſe debet ſumtum, vt euanescat facto $x = o$. Quia autem est $X = \int e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx$, habebitur $4b^2 \int e^{-\int \frac{dx}{q}} pdx = \left(\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}}\right)^2$, et hinc differentiando tandem $p = \frac{e^{\int \frac{dx}{2q}}}{2b^2} \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

521. Quia elementum temporis est $\frac{bdX}{\sqrt{(AX - XX)}}$ erit tempus, quo spatium PC absoluitur = arcui circuli, cuius sinus versus est X, existente diametro $= A$, ducto in $\frac{2b}{A}$. Et posita ratione peripheriae ad diametrum $\pi : 1$, erit tempus totius descensus per $AC = b\pi$, quod est constans, neque ab $a$ pendens.

## Corollarium 2.

522. Quia est $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = 2b\sqrt{X}$ et $e^{\int \frac{dx}{2q}} = \frac{dx\sqrt{X}}{bdX}$ erit $p = \frac{Xdx}{b^2 dX}$. Estque $X = \frac{1}{4b^2}\left(\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}}\right)^2$.

## Corollarium 3.

523. Sit medium resistens vniforme, et ideo $q = k$; erit $e^{\int \frac{dx}{2q}} = e^{\frac{x}{2k}}$ et $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = 2k(1 - e^{\frac{-x}{2k}})$. Ex

quo

quo prodibit $p=\frac{k}{b^2}(e^{\frac{x}{2k}}-1)$. Vis igitur centripeta in C erit $=0$.

## Corollarium 4.

524. Si $q$ est constans et $=k$; erit $2bVX = 2k(1-e^{\frac{-x}{2k}})$ et $X=\frac{k^2}{b^2}(1-e^{\frac{-x}{2k}})^2$. Quia vero X abit in A posito $x=a$, erit $A=\frac{k^2}{b^2}(1-e^{\frac{-a}{2k}})^2$, atque $v=\frac{k^2}{b^2}e^{\frac{x}{k}}((1-e^{\frac{-a}{2k}})^2-(1-e^{\frac{-x}{2k}})^2)$.

## Corollarium 5.

525. In infimo igitur loco C altitudo celeritati debita erit $=A=\frac{k^2}{b^2}(1-e^{\frac{-a}{2k}})^2$.

## Corollarium 6.

526. Maximam habebit corpus celeritatem, vbi est $v=pk$. Erit ergo $e^{\frac{-x}{2k}}(1-e^{\frac{-x}{2k}})=(1-e^{\frac{-a}{2k}})^2-(1-e^{\frac{-x}{2k}})^2$. Ex quo reperitur $e^{\frac{-x}{2k}}=2e^{\frac{-a}{2k}}-e^{\frac{-a}{k}}$, hincque $x=2al(2e^{\frac{k}{2k}}-1)$.

## Scholion.

527. Si $q$ et $k$ accipiantur negatiua inuenitur lex vis centripetae, quae efficit, vt omnes ascensus ex C facti absoluantur aequalibus temporibus. Hoc

Hoc enim ſemper locum habet, deſcenſum in aſcenſum transmutari vi reſiſtentiae negatiua facta. Quo igitur omnes aſcenſus fiant iſochroni erit $p = \frac{e^{-\int \frac{dx}{2q}}}{2b^2} \int e^{\int \frac{dx}{2q}} dx$. In caſuque medii vniformis erit $p = \frac{k}{b^2} ( 1 - e^{\frac{-x}{2k}} )$.

## PROPOSITIO 68.

### Problema.

Tabula IV. Fig. 9. 528. *Si vis centripeta ſit diſtantiis a centro* C *proportionalis, et medium vniforme reſiſtat in ſimplici celeritatum ratione: oportet determinari motum corporis tam recto accedentis ad centrum* C, *quam recedentis ab eo.*

### Solutio.

Sit diſtantia, in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis $= f$, et exponens reſiſtentiae $= k$. Iam accedat corpus in recta AC ad centrum C et ponatur altitudo celeritati, quam C habebit debita $= c$. Hacque celeritate tum vltra C in recta CB recedat a C. Conſideremus primo aſcenſum, et ponamus $CP = x$ et celeritatis in P altitudinem debitam $= v$. His poſitis erit vis centripeta in $P = \frac{x}{f}$, et vis reſiſtentiae $= \frac{\surd v}{\surd k}$; ex quibus oritur iſta aequatio $dv = -\frac{xdx}{f} + \frac{dx\surd v}{\surd k}$. Quo haec aequatio fiat homogenea ponatur $\surd v = u$ et $\surd k = b$; erit ergo $dv = 2udu$, et et $2udu = -\frac{xdx}{f} + \frac{udx}{b}$. Fiat $u = rx$; erit $2r^2 xdx + 2rx^2 dr = -\frac{xdx}{f} + \frac{rxdx}{b}$, ex qua oritur $\frac{dx}{x} = \frac{2fbrdr}{fr - b - 2fbr^2}$. Quae integrata cum debita adiecta constante, et restitutis $v$ et $k$, abit in hanc $\frac{v}{c} - \frac{x\sqrt{v}}{2c\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2fc} = \left(\frac{4\sqrt{fkv} - x\sqrt{f} + x\sqrt{(f-8k)}}{4\sqrt{fkv} - x\sqrt{f} - x\sqrt{(f-8k)}}\right)^{\sqrt{\frac{f}{f-8k}}}$ Si autem $8k > f$ aequatio differentialis ope circuli quadraturae debet construi. Ponatur scilicet $b = \frac{1}{4\alpha}$ et $f = \frac{1}{2\beta}$, et habebitur ista aequatio differentialis $0 = \frac{dx}{x} + \frac{rdr}{r^2 - 2\alpha r + \beta} = \frac{dx}{x} + \frac{rdr - \alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta} + \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta}$. Cuius integralis est $C = l\sqrt{(u^2 - 2\alpha ux + \beta x^2)} + \int \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta}$. Est vero $\int \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta} = \frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot am$, arcusque $am$ tangens $at = \frac{r - \alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}$, existente radio $ac = 1$. Posito ergo $\frac{u}{x}$ loco $r$, erit $at = \frac{u - \alpha x}{x\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}$. Ad constantem C determinandam ponatur $x = 0$ et $u = \sqrt{c}$, quo facto loco $\frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot am$ habebitur $\frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot amb$. Erit ergo $l\sqrt{c} + \frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot amb = l\sqrt{(u^2 - \alpha ux + \beta x^2)} + \frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot am$. Vnde fit $bm = \frac{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{\alpha} l\sqrt{\frac{u^2 - 2\alpha ux + \beta x^2}{c}}$, estque $bm$ arcus cuius tangens $bs$ est $= \frac{x\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{u - \alpha x}$. Pro recessu a centro C si ponatur, vt ante $CQ = x$, et celeritas in $Q = \sqrt{v}$, retinentibus $b$, $f$, $k$, $\alpha$, $\beta$, $r$ et $u$ eosdem quos ante valores, habebitur $0 = \frac{dx}{x} + \frac{rdr}{r^2 + 2\alpha r + \beta}$. Ex qua obtinebitur $bm = -\frac{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{\alpha} l\sqrt{\frac{u^2 + 2\alpha ux + \beta x^2}{c}}$, estque arcus $bm$ tangens $bs = \frac{x\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{u + \alpha x}$. At si fuerit $\alpha^2 > \beta$ seu $f > 8k$ poterit integratio algebraice exhiberi, erit $\frac{v}{c} + \frac{x\sqrt{v}}{2c\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2fc} = \left(\frac{4\sqrt{fkv} + x\sqrt{f} - x\sqrt{(f-8k)}}{4\sqrt{fkv} + x\sqrt{f} + x\sqrt{(f-8k)}}\right)^{\sqrt{\frac{f}{f-8k}}}$. Restat

Tabula IV. Fig. 10.

ſtat autem caſus quo $\alpha^2 = \mathfrak{C}$, ſeu $f = 8k$ qui ſeorſim pertractari debet. Inuenitur autem pro acceſſu haec aequatio $l \frac{4\sqrt{kv}-x}{4\sqrt{kc}} = \frac{x}{4\sqrt{kv}-x}$. Atque pro receſſu iſta $l \frac{4\sqrt{kv}+x}{4\sqrt{kc}} = \frac{-x}{4\sqrt{kv}+x}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

Tabula IV Fig. 9. 529. In caſu ergo quo $f = 8k$ ſemper pro acceſſu eſſe debet $4\sqrt{kv} > x$, alioquin $\frac{x}{4\sqrt{kv}-x}$ aequaretur quantitati imaginariae. Quare niſi $x = o$, non poterit eſſe $v = o$, atque ideo celeritas in C neceſſario debet eſſe $= o$. Quamobrem ſi ea ponatur finita $\sqrt{c}$ initium deſcenſus erit imaginarium.

## Corollarium 2.

530. Hoc autem caſu $f = 8k$ receſſus ex aequatione cognoſcitur facto enim $v = o$ inuenitur $l \frac{x}{4\sqrt{kc}} = -1$, hincque $x = BC = \frac{4\sqrt{kc}}{e}$ denotante $e$ numerum cuius logarithmus eſt vnitas. Ergo diſtantia BC eſt proportionalis celeritati in C.

## Corollarium 3.

531. Quia igitur, quando reſiſtentia tanta eſt, vt ſit $8k = f$, corpus in acceſſu ad C omnem amittit celeritatem; multo maiore ratione ſi $8k < f$, ſeu reſiſtentia adhuc maior fuerit, corpus ad C accedens omnem celeritatem amittet.

Co-

## Corollarium 4.

532. Quare ſi vel $8k = f$ vel $8k < f$, corpus poſt acceſſum ad C in C perpetuo quieſcet, atque his caſibus nullus receſſus ſequi poterit. At ſi reſiſtentia fuerit minor, ſeu $8k > f$, tum corpus accedens in C finitam celeritatem habere poterit, qua deinde a C recedet, atque motu oscillatorio mouebitur.

## Corollarium 5.

533. Sin autem $8k > f$ pro acceſſu haec habetur aequatio; arcus cuius tangens eſt $\frac{x\sqrt{(\beta-\alpha^2)}}{u+\alpha x} = \frac{\sqrt{(\beta-\alpha^2)}}{\alpha} l \sqrt{\frac{u^2-2\alpha ux+\beta x^2}{c}}$. Vnde initium acceſſus A inuenitur ponendo $u=0$, prodit autem arcus cuius tangens eſt $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} l \frac{\sqrt{2fc}}{x}$. Pro receſſu vero ſimiliter inuenitur arcus cuius tangens eſt $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} l \frac{\sqrt{2fc}}{x}$.

## Scholion 1.

534. Hinc ſequi videtur diſtantiam BC ſemper aequalem eſſe diſtantiae AC, quia hae duae aequationes inter ſe congruunt. At cum, ſi $8k < f$ nullus omnino detur receſſus, fieri non poteſt, vt, ſi $8k$ aliquantulum tantum maius fuerit quam $f$, ſpatium receſſus aequale fiat ſpatio acceſſus. Difficultas haec autem tollitur, ſi attendamus innumerabiles arcus eidem tangenti $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}}$ reſpondere, quorum

rum alius pro accessu alius pro recessu accipi debet. Ponatur $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} = \tau$, et minimus arcus tangenti $\tau$ respondens sit $\gamma$; et semiperipheria circuli $\pi$, erit $\tau$ tangens omnium horum arcuum $\gamma$, $\pi+\gamma$, $2\pi+\gamma$, $3\pi+\gamma$ etc. nec non horum $-\pi+\gamma$, $-2\pi+\gamma$ etc. Pro recessu nunc BC sumi debet arcus $\gamma$, eritque $\frac{\gamma}{\tau} = l\frac{\sqrt{2fc}}{BC}$, atque $BC = e^{\frac{-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Atque pro accessu sumi debet arcus $-\pi+\gamma$ fitque $AC = e^{\frac{\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Reliqui arcus dant puncta, in quibus corpus circa C oscillando successiue habet celeritatem $= o$. Cum igitur in prima oscillatione sit spatium accessus $= e^{\frac{\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$; erit spatium accessus secundae oscillationis aequale spatio recessus in prima oscillatione atque ideo $= e^{\frac{-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. In tertia oscillatione erit spatium accessus $= e^{\frac{-\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Atque in oscillatione, quae numero $n$ indicatur est spatium accessus $e^{\frac{-(n-2)\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Hacque ratione cuiuscunque oscillationis tam spatium accessus, quam spatium recessus poterit determinari.

## Corollarium 6.

535. Quando igitur corpus oscillationes absoluit circa centrum C, constituent spatia accessus progressionem geometricam, cuius denominator est

est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$. Similemque progressionem constituunt spatia recessus, atque etiam integra spatia singulis oscillationibus percursa.

## Scholion 3.

536. Quia aequatio differentialis $2udu = \frac{-xdx}{f} + \frac{udx}{b}$ pro descensu, et aequatio $2udu = \frac{-xdx}{f} - \frac{udx}{b}$ pro ascensu est homogenea: erit in vtroque casu $u$ = functioni ipsarum $x$ et $a$ vnius dimensionis, denotante $a$ maximam a centro C elongationem AC aut BC. Quamobrem in temporis expressione $\int\frac{dx}{u}$ nulla inerit dimensio ipsarum $a$ et $x$, et ideo omnia tempora tam ascensuum, quam descensuum erunt inter se aequalia. Integrale enim ipsius $\frac{dx}{u}$, erit functio ipsarum $a$ et $x$ nullius dimensionis, haecque expressio posito $x = a$ erit aequalis quantitati constanti. Simili modo erunt omnium descensuum tempora vsque ad punctum maximae celeritatis inter se aequalia. Distantia enim puncti, in quo corpus maximam habet celeritatem, proportionalis est ipsi $a$ seu maximae elongationi a centro C (528).

# PROPOSITIO 69.

## Theorema.

537. *Si fuerit vis centripeta vt potestas distantiae a centro C, cuius exponens est* n; *et medium* Tabula IV. Fig. 7.

*um resistat in ratione* 2m *multiplicata celeritatum; exponens vero resistentiae sit proportionalis distantiarum a centro* C *potestati exponentis* $\frac{mn+m-n}{m}$: *Erunt plurium descensuum vel ascensuum tempora in spatiorum totorum descriptorum ratione* $\frac{1-n}{2}$ *multiplicata.*

## Demonstratio.

Sit AC spatium totum vel ascensu vel descensu descriptum $=a$, eiusque portio quaecunque $CP=x$, et celeritas corporis in $P=\sqrt{v}$. Ponatur distantia $f$, in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis. His positis erit vis centripeta in $P=\frac{x^n}{f^n}$, et sumto pro resistentiae exponente $\lambda^{\frac{1}{m}}x^{\frac{mn+m-n}{m}}$ erit vis resistentiae $\frac{v^m}{\lambda x^{mn+m-n}}$. Hinc pro descensu habebitur ista aequatio $dv=\frac{-x^n dx}{f^n}+\frac{v^m dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$ pro ascensu vero $dv=\frac{-x^n dx}{f^n}-\frac{v^m dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$. Quae aequationes inter se prorsus conueniunt nisi quod $\lambda$ in altera negatiuum habeat valorem. Ponatur nunc $v=u^{n+1}$, et habebitur $(n+1)u^n du=\frac{x^n dx}{f^u}+\frac{u^{mn+m}dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$, in qua aequatione $u$ et $x$ eundem vbique dimensionum numerum constituunt. Haec vero aequatio ita debet integrari, vt, facto $x=a$, euanescat $u$. Quam ob rem aequatio integralis ita erit comparata vt $a$, $x$ et $u$ vbi-

vbique eundem constituant dimensionum numerum. Ex ea igitur reperietur $u$ aequalis functioni ipsarum $a$ et $x$ vnius dimensionis. Consequenter aequabitur $v$ functioni ipsarum $a$ et $x$ dimensionum $n+1$. Quocirca tempus, quo spatium PC percurritur, nempe $\int \frac{dx}{\sqrt{v}}$ erit functio ipsarum $a$ et $x$, quae habebit $\frac{1-n}{2}$ dimensiones. Facto deinde $x=a$, quo totum tempus per AC habeatur, prodibit functio ipsius tantum $a$ dimensionum $\frac{1-n}{2}$. Totum ergo tempus vel ascensus vel descensus erit $= A a^{\frac{1-n}{2}}$, vbi A est quantitas constans ex literis $f$ et $\lambda$, quae immutatae manent, vtcunque $a$ varietur. Perspicuum igitur est omnes tam ascensus, quam descensus esse inter se in totorum spatiorum descriptorum ratione $\frac{1-n}{2}$ multiplicata. Q. E. D.

## Corollarium 1.

538. Si medium resistens sit vniforme, ideoque $mn+m-n=0$, erit $n=\frac{m}{1-m}$, seu vis centripeta vt distantia eleuata ad $\frac{m}{1-m}$. Tempora vero vel ascensuum vel descensuum erunt in spatiorum percursorum ratione $\frac{1-2m}{2-2m}$ multiplicata.

## Corollarium 2.

539. Si fuerit $n=1$, seu vis centripeta distantiis a centro C proportionalis, erunt omnia tempora tam ascensuum quam descensuum inter se aequa-

aequalia. Hoc vero casu cum resistentiae lex sit celeritatum potestas exponentis $2m$, erit resistentiae exponens vt distantia a centro C eleuata ad $\frac{2m-1}{m}$.

## Corollarium 3.

540. Ex hoc patet, quod ex praecedente propositione inuenimus (536), si resistentia sit celeritatibus proportionalis, et hanc ob rem $m=\frac{1}{2}$, et medium vniforme; omnia tempora tam ascensuum quam descensuum fore inter se aequalia.

## Corollarium 4.

541. Si vis centripeta fuerit constans seu $n=0$, erunt tempora vel ascensuum vel descensuum in subduplicata spatiorum percursorum ratione. Exponens vero resistentiae fit distantiis a centro C proportionalis. Eundem hunc casum iam exposuimus supra (495).

## Scholion.

542. Hisce concludimus hoc Caput de motu puncti rectilineo in medio resistente; atque iuxta diuisionem factam progredimur ad motus curuilineos in vacuo corporum a quibuscunque potentiis absolutis sollicitatorum.

CA-

# CAPUT QUINTUM
## DE
## MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO A QUIBUSCUNQUE POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI.

## DEFINITIO 21.

543.

*Vis tangentialis est potentia corpus, quod lineam curuam* AMB *describit, sollicitans, cuius directio incidit in tangentem* TM*t puncti* M, *in quo corpus, cum sollicitatur, est versatur.* Tabula IV. Fig. 11.

### Corollarium 1.

544. Vis igitur tangentialis in corpus, dum elementum M*m* percurrit, alium effectum non exerit, nisi quod motum eius vel acceleret vel retardet, prout scilicet corpus trahit vel secundum directionem MT vel M*t*.

### Corollarium 2.

545. Cum igitur corpus in linea curua mouetur; vis tangentialis directionem suam perpetuo mutat, et secundum aliam plagam effectum suum exerit.

### Scholion.

546. Vis quidem tangentialis per se in rerum natura vix vnquam oriri potest; nihilo vero minus

eius vſus latiſſime patet. Quamcunque enim potentia ſollicitans habeat directionem, ea ſemper in duas alias poteſt reſolui, quarum alterius directio in tangente ſit ſita.

## DEFINITIO 22.

547. *Vis normalis eſt potentia corpus lineam curuam* AMB *deſcribens ſollicitans, cuius directio* MR *eſt normalis in curuae elementum* Mm *ſeu tangentem* MT.

### Corollarium 1.

548. Vis igitur normalis corporis celeritatem neque auget neque minuit, quia eius directio MR neque in ſequentia neque in antecedentia vergit (164).

### Corollarium 2.

549. In hoc vero eius effectus conſiſtit, vt in ſequentibus oſtendetur, vt corporis tantum directionem immutet, et efficiat, vt corpus, quod per ſe in recta eſſet progreſſurum, in linea curua promoueatur (165).

### Scholion 1.

550. Si corpus in eodem plano moueatur, in eoque etiam poſitae ſint potentiarum ſollicitantium directiones; ſingulae potentiae reſolui poſſunt in binas, quarum altera ſit normalis, altera tangentialis, quemadmodum ex principiis ſtaticis apparet. Quare cum virium tangentialis et normalis effectus in corpus determinauerimus, ſimul quoque cu-

cuiusuis potentiae obliquae effectus innotescet. Vocamus autem potentiam seu vim obliquam omnes potentias corpus sollicitantes, quae neque normales sint neque tangentiales.

## Scholion 2.

551. Hinc oritur primaria huius capitis diuisio. Primo enim eos motus considerabimus, quorum semitae sunt in eodem plano, atque simul omnes potentiae sollicitantes in eodem ipso plano constitutae. Deinceps autem de iis motibus explicabimus, quorum semitae non sunt positae in eodem plano; ad quos cognoscendos singulas potentias in binas resoluere non sufficit, sed eas in ternas resolui oportet, propter tres spatii, in quo corpus mouetur, dimensiones.

# PROPOSITIO 70.

## Problema.

552. *Si corpus, dum elementum* Mm *percurrit, sollicitatur a duabus potentiis altera normali altera tangentiali: determinare vtriusque effectum in motu corporis alterando.* Tabula IV. Fig. 11.

## Solutio.

Sit corporis elementum $Mm$ describentis celeritas debita altitudini $v$, et vis normalis secundum MR trahens $=$N, et vis tangentialis secundum MT trahens $=$T, ponaturque elem. $Mm = ds$ et radius osculi in $M = r$. Ad effectum vis N determinandum, quia eius directio est normalis in $Mm$, vtemur

mur formula §. 165, quae erat $npr = Ac^2$. Haec vero transmutata est in hanc $pr = 2Av$ (209). Quod autem hic nobis est N, id in citatis locis erat $\frac{p}{A}$, intelligimus enim per N non impressionem solum potentiae N in corpus, sed ipsam vim acceleratricem; seu potentiam absolute consideratam diuisam per massam corporis (218). Quare loco $\frac{p}{A}$ hic substitui debet N, quo facto habebitur $Nr = 2v$. *Quod erat alterum.* Deinde ad effectum vis tangentialis T determinandum adhibeo canonem §. 166, hunc $Acdc = npds$, seu huius loco mutatum $Adv = pds$ (209). Atque ob allegatas rationes hic loco $\frac{p}{A}$ substituo T, eritque $dv = Tds$. Q. E. *Alterum.*

## Corollarium 1.

553. Quia vis grauitatis ponitur 1, erit vis normalis ad vim grauitatis vt altitudo celeritati debita ad dimidium radii osculi curuae; quae analogia sequitur ex aequatione $Nr = 2v$.

## Corollarium 2.

554. Ex data igitur vi normali et curua quam corpus describit statim innotescit corporis celeritas. Nam expressa celeritate per $\sqrt{v}$ erit $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{Nr}{2}}$.

## Corollarium 3.

555. Incrementum vero altitudinis celeritatem exponentis semper aequale est facto ex vi tan-

tangentiali et ſpatiolo a corpore percurſo. Seu hoc elementum ipſius $v$ eſt ad ſpatiolum deſcriptum $ds$ vt vis tangentialis ad vim grauitatis.

# PROPOSITIO 71.

## Problema.

556. *Si corpus, dum elementum Mm percurrit, ſollicitetur a potentia quacunque obliqua directionis* MC; *oportet determinari effectum huius potentiae in corporis motu alterando.* Tabula IV. Fig. 11.

## Solutio.

Sit potentia haec obliqua ad corporis grauitatem, ſi in ſuperficie terrae eſſet poſitum vt P ad 1, elementum $Mm = ds$, et celeritas in M debita altitudini $v$. Quia vero obliquitas potentiae MC data eſſe ponitur, angulus CMT datus erit, et propterea triangula CMT, $Mmr$, quae oriuntur ex C in MT et ex $m$ in MC perpendiculis demiſſis, erunt ſpecie data. Ponamus igitur $Mr = dy$ et $mr = dx$, erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$; et ratio inter $ds$ et $dx$ et $dy$ data erit. Conferantur iam cum his, quae ſupra (161, 163) nec non poſtea (203) tradita ſunt. Ea enim prorſus ſimilia ſunt hisce, de quibus hic quaerimus: hoc tantum differunt, quod hic nobis ſit P:1, quod ibi erat $p$:A. Hanc ob rem habebimus $dv = Pdy$, et, poſito radio osculi MR in $M = r$, haec aequatio $Prdx = 2vds$ (208), ſcripto P loco $\frac{p}{A}$. Harum aequationum illa $dv = Pdy$ definit celeritatis incrementum, dum corpus elementum $Mm$

 per-

percurrit. Altera vero $Prdx = 2vds$ seu $\frac{2vds}{Pdx}$ exhibet lineae a corpore descriptae curuaturam in M. Innotescit ergo totus potentiae obliquae effectus in corpus motum. Q. E. I.

## Corollarium 1.

Tabula IV. Fig. 12. 557. Si potentia obliqua constituit angulum obtusum cum elemento $Mm$, omnia manent vt ante, nisi nisi quod lineola $mr = dy$ accipi debeat negatiua. Erit ergo $dv = -Pdy$, et altera aequatio $Prdx = 2vds$ vt ante.

## Corollarium 2.

558. Si ergo potentiae directio MC intra normalem MR et elementum $Mm$ cadit, vt in fig. 11. motus corporis acceleratur. At si CM extra vtramque cadit, vt in fig. 13. motus retardatur.

## Corollarium 3.

Fig. 11. 559. Si directio potentiae MC incidit in tangentem MT, euanescit angulus $mMr$, et fit $Mr = Mm$ seu $dx = o$ et $dy = ds$. Habebitur itaque $dv = Pds$, et $r = \infty$, id quod indicat corporis directionem ab hac potentia tangentiali non affici.

## Corollarium 4.

Fig. 12. 560. Si directio potentiae MC incidit in alteram partem $Mt$, quo casu fit $Mr = dx = o$, et $dy = ds$, erit $dv = -Pds$ et $r = \infty$ vt ante. Vis igitur tangentialis celeritatem corporis tantum afficit, directionem vero prorsus non immutat (544).

Co-

## Corollarium 5.

561. Incidat potentiae directio MC in normalem MR, quo effectum vis normalis cognoscamus. Hoc ergo casu erit $dy = o$ et $dx = ds$. Et consequenter prodit $dv = o$, et $Pr = 2v$. Vis ergo normalis celeritatem non afficit, sed tantum motus directionem (548).

## Scholion 1.

562. Hinc igitur tam vis normalis, quam vis tangentialis effectus in corpus motum cognoscuntur. Quamobrem cum omnes potentiae, quotquot corpus sollicitant, modo sint in eodem plano positae cum motus directione, in binas alteram normalem alteram tangentialem possint resolui, etiam quarumcunque potentiarum effectus in corpus motum cognoscitur.

## Scholion 2.

563. Hanc ergo priorem partem de motu in eodem plano facto ita subdiuidi maxime conuenit, vt primo directiones potentiae sollicitantis sint inter se parallelae, quemadmodum in nostris regionibus vis grauitatis directiones sibi parallelae obseruantur. Deinde contemplabimur casus, quibus potentiae directiones omnes in vno puncto conuergunt, quo etiam corpora perpetuo attrahuntur, et qui est casus virium centripetarum, qua de re tam egregiae inuentiones a *Neutono* sunt factae in *Princ. Phil. Nat. Parte I.* Tertio vero potentias quas-

quascunque corpus ſollicitantes inducemus et inueſtigabimus, qui motus ſit perpetuo ſecuturus. Ita autem in his ſingulis verſabimur, vt primo quaeſtiones directas proponamus, tum vero etiam quaeſtiones quasque inuerſas, vt hactenus fecimus, ſimus reſoluturi. Perpetuo denique, quantum licet, a caſibus ſimplicioribus ad magis compoſitos et difficiliores progrediemur.

## PROPOSITIO 72.

### Problema.

Tabula IV. Fig.13.

564. *Si fuerit potentia conſtans, eiusque directio vbique normalis ad rectam* AB; *atque ex* A *data celeritate ſecundum directionem* AH *proiiciatur corpus: determinari oportet curuam* AMDB, *quam corpus deſcribet, motumque corporis in hac curua.*

### Solutio.

Vocetur potentia ſollicitans g, et ſit celeritas, qua corpus in A proiicitur debita altitudini $c$, atque coſinus anguli HAB$=\lambda$, poſito ſinu toto $=1$. Iam percurrente corpore elementum M$m=ds$, ſit celeritas in M debita altitudini $v$, et AP$=x$, atque PM$=y$, itemque radius oſculi in M$=r$. Propterea erit M$r=dx$, et $mr=dy$, ex quo apparet hunc caſum referri ad fig. 12, quo corporis motus retardabatur. Habebimus ergo $dv=-gdy$ et $grdx=2vds$ (557). Ex harum vero aequationum illa oritur $v=C-gy$, in qua conſtans C ex hoc debet determinari, quod poſito $y=o$, fieri debeat $v=c$. Habetur

betur ergo $v = c - gy$. In altera nunc aequatione loco $v$ substituatur hic valor inuentus, et prodibit $\frac{grdx}{2ds} = c - gy$. Est vero $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$ posito $dx$ constante, quo substituto erit $\frac{-gds^2}{2ddy} = c - gy$, seu $2cddy = 2gyddy - gdx^2 - gdy^2$ posito $dx^2 + dy^2$ loco $ds^2$. Huius aequationis integralis reperitur $\frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{C}{c-gy}}$. Posito autem $y = o$, designat $\frac{dx}{ds}$ cosinum anguli HAB, qui est $\lambda$, erit ergo $\lambda^2 = \frac{C}{c}$ et $C = \lambda^2 c$. Habebimus igitur $\frac{dx}{ds} = \lambda\sqrt{\frac{c}{c-gy}}$ et hinc $\frac{\lambda dy\sqrt{c}}{\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)}} = dx$. Cuius integralis est $C - 2\lambda\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)} = \frac{x}{\sqrt{c}} = 2\lambda\sqrt{c(1-\lambda^2)} - 2\lambda\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)}$, ita determinata constante $c$ vt euanescat $y$ posito $x = o$. Ponatur breuitatis gratia sinus anguli HAB seu $\sqrt{(1-\lambda^2)} = \mu$, erit $gx = 2\lambda\mu c - 2\lambda\sqrt{(\mu^2 c^2 - gcy)}$; atque hinc $y = \frac{\mu x}{\lambda} - \frac{gx^2}{4\lambda^2 c}$. Erit ergo etiam $v = c - \frac{\mu g x}{\lambda} + \frac{g^2 x^2}{4\lambda^2 c}$, et $ds^2 = dx^2 (1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} - \frac{\mu g x}{\lambda^3 c} + \frac{g^2 x^2}{4\lambda^4 c^2}) = \frac{dx^2}{\lambda^2}(1 - \frac{\mu g x}{\lambda c} + \frac{g^2 x^2}{4\lambda^2 c^2})$. Consequenter erit $\frac{ds^2}{v} = \frac{dx^2}{\lambda^2 c}$ et $\int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{x}{\lambda\sqrt{c}} =$ tempori, quo arcus AM percurritur. Q. E. I.

## Corollarium 1.

565. Recidet ergo corpus in puncto B in lineam horizontalem AB sumta $AB = \frac{4\lambda\mu c}{g}$. Tempus vero, quo corpus supra AB versatur et curuam ADB absoluit, est $= \frac{4\mu\sqrt{c}}{g}$.

## Corollarium 2.

566. Denotat autem $2\lambda\mu$ sinum anguli, qui est duplus anguli HAB. Quare, si huius dupli an-

guli ſinus vocetur $\varkappa$, erit $AB = \frac{2\varkappa c}{g}$. Ex quo apparet diſtantiam AB fore maximam, ſi fuerit $\varkappa = 1$, ideoque angulus HAB ſemirectus, ſi quidem corpus eadem celeritate $\sqrt{c}$ proiiciatur.

## Corollarium 3.

567. Intelligitur etiam motum corporis horizontalem eſſe aequabilem. Tempora enim quibus quilibet arcus deſcribitur, ſunt reſpondentibus abſciſſis in recta AB proportionalia.

## Corollarium 4.

568. Si corpus perpetuo eadem celeritate $\sqrt{c}$ proiiciatur, ſed ſub diuerſis angulis cum AB, erunt tempora, quibus ſupra AB verſabitur, inter ſe vt ſinus angulorum HAB ( 565 ).

## Corollarium 5.

569. Maxima altitudo DE ad quam corpus pertinget erit applicata in puncto E, ſumto $AE = \frac{2\lambda\mu c}{g}$. Ex quo apparet eſſe AE ſubduplam ipſius AB. Ipſa vero maxima altitudo DE erit $= \frac{\mu^2 c}{g}$, quae proinde quadrato ſinus anguli HAB eſt proportionalis.

## Corollarium 6.

570. Ex aequatione $y = \frac{\mu x}{\lambda} - \frac{gx^2}{4\lambda^2 c}$ perſpicitur curuam ADB eſſe parabolam, cuius axis ſit recta DE, et parameter $= \frac{AE^2}{DE} = \frac{4\lambda^2 c}{g}$. Parameter ergo proportionalis eſt quadrato coſinus anguli HAB.

Co-

## Corollarium 7.

571. Huius ergo parabolae vertex erit punctum D, et distantia DF foci F a vertice D est $=\frac{\lambda^2 e}{g}$. Quare si ducatur recta MF erit haec MF=DQ+DF ex natura parabolae.

## Corollarium 8.

572. Porro autem erit MF=DE–MP+DF $=\frac{e}{g}-y=\frac{c-gy}{g}$. Quia vero est $v=c-gy$, erit altitudo debita celeritati in M$=g$. MF. Patet ergo etiam fore AF$=\frac{c}{g}$.

## Corollarium 9.

573. Perspicuum igitur est corpus hanc parabolam describens in loco quouis M tantam habere celeritatem, quantam corpus idem ab eadem potentia vniformi $g$ sollicitatum recta descendens acquirere potest ex altitudine, quae aequalis sit distantiae puncti M a foco F parabolae.

## Corollarium 10.

574. Cosinus anguli FAE est $=\frac{AE}{AF}=2\lambda\mu=\kappa$. Ex quo manifestum est angulum FAE esse complementum dupli anguli HAE ad rectum, seu potius excessum huius dupli anguli super angulum rectum.

## Corollarium 11.

575. Quia angulus AFD est deinceps positus anguli AFE, hicque complementum anguli FAE, erit angulus AFD duplus anguli HAB.

## Scholion 1.

576. Facile ergo ex his deducitur constructio parabolae, quam corpus data celeritate et in data directione proiectum describet. Ducti enim AG normali ad AB capiatur angulus GAF = duplo angulo HAE, et in hac directione sumatur AF aequalis altitudini, ex qua idem corpus recta descendens acquirit celeritatem aequalem ei, qua ex A proiicitur, quo facto erit punctum F focus parabolae quaesitae (573, 575). Normalis porro DE per E in rectam AB ducta erit axis huius parabolae, atque vertex D reperitur, sumendo $DF = \frac{AF - FE}{2}$. Cum igitur parameter aequalis sit 4DF, in promtu erit parabolae descriptio.

## Scholion 2.

577. Si est $g = 1$, habemus casum grauitatis terrestris. Quocirca, si nullus adesset aer, qui ob resistentiam corpora mota impediret, omnia corpora proiecta mouerentur in parabolis. Hanc veritatem primus elicuit *Galilaeus*, et post eum omnes scriptores mechanici demonstrauere. Plerique quidem multo breuiore modo et sine differentio-differentialibus ad eam peruenerunt, sed nos hic maluimus vti methodo vniuersali, quae latissime pateret, quam nimis particulari, quae ad hunc solum casum esset accommodata.

PRO-

# PROPOSITIO 73.

## Problema.

578. *Si corpus in A data celeritate et in data directione proiectum perpetuo attrahatur ad rectam* AB *in ratione quarumcunque functionum distantiarum ab hac recta; determinare curuam* ADB, *quam corpus ita sollicitatum describet et motum totum in hac curua.* Tabula V Fig. 1.

## Solutio.

Sit celeritas in A$=\sqrt{c}$ et sinus anguli HAB$=\mu$, posito sinu toto $=1$, et cosinus $=\lambda$. Ponatur celeritas corporis in M debita altitudini $v$, et elementum $Mm=ds$, itemque abscissa AP$=x$, applicata PM$=y$ et radius osculi MR$=r$. Dum autem corpus elementum $Mm$ percurrit, trahitur interea a potentia data, quae sit $=$P functioni cuidam ipsius $y$, in directione MP. His positis erit $dv=-Pdy$, et $Prdx=2vds$ (557). Sit autem $\int Pdy=Y$, atque Y talis functio ipsius $y$, quae fiat $=o$ posito $y=o$. Hanc ob rem erit $v=c-Y$. Deinde ex priore aequatione valor ipsius P i. e. $\frac{-dv}{dy}$ substituatur in altera $Prdx=2vds$, et habebitur $\frac{-dv}{v}=\frac{2dyds}{rdx}$. Est vero posito $ds$ constante $r=\frac{dsdy}{ddx}$, vnde fit $\frac{-dv}{v}=\frac{2ddx}{dx}$, et integrando $lC-lv=l\frac{dx^2}{ds^2}$. Constans C determinabitur ex hoc, quod in puncto A, in quo fit $v=c$, fiat $\frac{dx}{ds}=\lambda$. Quocirca erit $lC=lc+2l\lambda$, porroque sumendis numeris $\lambda^2cds^2=vdx^2$. Ex hac aequatione ſtatim habetur elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{\lambda\sqrt{c}}$, et hinc tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$. Pro ipſa autem curua AMDB habebitur aequatio ex duabus aequationibus inuentis $v = c - Y$ et $\lambda^2 cds^2 = vdx^2$ eliminando $v$, orietur enim $\lambda^2 cds^2 = cdx^2 - Ydx^2 = \lambda^2 cdx^2 + \lambda^2 cdy^2$. Sed quia $1 - \lambda^2 = \mu^2$, prodibit $dx = \frac{\lambda dy\sqrt{c}}{\sqrt{(\mu^2 c - Y)}}$, in qua aequatione, cum ſint indeterminatae $x$ et $y$ a ſe inuicem ſeparatae, conſtrui poterit curua quaeſita ADB. Q. E. I.

## Corollarium I.

579. Tempora igitur, quibus arcus quicunque AM deſcribuntur, ſunt, vt abſciſſae reſpondentes AP. Eſt enim tempus per AM $= \frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$.

## Scholion I.

580. Motus corporis in curua AM in duos alios cogitatione poteſt reſolui, quorum alter fiat ſecundum parallelas rectae AB, alter ſecundum perpendiculares in hanc AB. Illo motu corpus progreditur ſecundum rectam AB, iſto vero vel aſcendit vel deſcendit reſpectu huius rectae AB. Iam vero perſpicuum eſt a potentia, cuius directio perpetuo eſt in perpendiculis ad AB, motum progreſſiuum horizontalem non immutari, et hanc ob rem hic motus perpetuo eſſe debebit aequabilis, et ea celeritate factus, quae oritur ex ſimili motus reſolutione initialis. Cum vero motus initialis directio ſit recta AH, erit eius celeritas $\sqrt{c}$ ad celeritatem progreſſiuam ſecundum AB vt ſinus totus 1 ad coſinum angu-

guli HAB, qui est $\lambda$. Celeritas ergo progressiua secundum AB erit $\lambda \surd c$, ex qua tempus, quo motus horizontalis perficitur per spatium $AP = x$, prouenit $= \frac{x}{\lambda \surd c}$ vt inuenimus.

## Corollarium 2.

581. Si corpus celeritate $\surd c$ ex A perpendiculariter ascendat in AC, et sumatur $AL = PM = y$, erit celeritas in L aequalis celeritati in M nempe $= \surd v$. Est enim $dv = -Pdy$, atque $v = c - Y$, quemadmodum pro puncto M inuenimus.

## Corollarium 3.

582. Si fuerit AC tota altitudo, ad quam corpus ex A celeritate $\surd c$ sursum proiectum pertingere potest; erit CL altitudo, ex quo corpus cadendo eandem acquirit celeritatem quam habet in M.

## Corollarium 4.

583. Maxima altitudo DE reperitur, faciendo $dy = o$, quo casu erit $Y = \mu^2 c$, ex qua aequatione valor ipsius $y$ erutus dabit altitudinem DE, et celeritas in P tanta erit, quantam corpus ex altitudine CI delapsum acquirit.

## Corollarium 5.

584. Inuenimus autem quoque $v = \frac{\lambda^2 c ds^2}{dx^2}$. Quare cum in puncto D sit $dx = ds$ erit celeritas in $D = \lambda \surd c$, quae est aequalis ipsi celeritati horizontali, qua corpus secundum AB progreditur.

Scho-

## Scholion 2.

585. Amplitudo quidem AB ex aequatione quia non poteſt integrari, non apparet. Nihilo tamen minus perſpicuum eſt, partes AE et EB oportere eſſe aequales, et ramum DB ſimilem et aequalem ipſi arcui DA. Namque poſtquam corpus in D peruenit, ſimili modo rurſus accelerabitur, quo ante per AD erat retardatum; quia potentia in iisdem ab AB diſtantiis eſt eadem, hocque modo motus iterum perfecte reſtituitur.

## Scholion 3.

586. Facile hinc etiam problema reciprocum, quo ex data curua ADB et celeritate corporis in A, quaeritur potentiarum lex, quae faciat vt corpus in hac curua moueatur, reſolui poterit. Ex aequatione enim $dx = \frac{\lambda dy\surd c}{\surd(\mu^2 c - Y)}$, habetur $Y = \mu^2 c - \frac{\lambda^2 c dy^2}{dx^2}$, atque $dY = Pdy = \frac{-2\lambda^2 c dy ddy}{dx^2}$, poſito $dx$ conſtante. Quia eſt vero $r = \frac{ds^3}{-dx ddy}$ eodem $dx$ poſito conſtante, erit $-ddy = \frac{ds^3}{r dx}$. Hoc ſubſtituto habebitur $P = \frac{2\lambda^2 c ds^3}{r dx^3} =$ potentiae ſollicitanti corpus in M ſecundum directionem MP.

# PROPOSITIO 74.

## Problema.

587. *Trahatur corpus in A proiectum vbique ad virium centrum C a vi centripeta quacunque; oporteatque determinari naturam curuae AM, in qua corpus mouebitur, et motum corporis in hac curua.*

Tabula V. Fig. 2.

So-

## Solutio.

Ponatur vis centripeta corpus in M ad C sollicitans $=P$ et celeritas corporis M debita sit altitudini $v$. Vocentur deinde distantia CM, $y$; elementum $Mm$, $ds$, et perpendiculum CT in tangentem curuae MT, $p$, necnon elementum $Mr$, $dx$, et radius osculi MR, $r$. Erit ergo ob triangula similia $Mmr$ et CMT, $ds\surd(y^2-p^2)=ydy$, et $dx\surd(y^2-p^2)=pdy$. Atque radius osculi $r$ reperitur $=\frac{ydy}{dp}$. His positis habebimus $dv=-Pdy$ et $Prdx=2vds$ (557). His aequationibus coniunctis eliminato P erit $rdvdx=-2vdsdy$ seu $\frac{dv}{v}=\frac{-2dsdy}{rdx}$. Substituantur $\frac{ydy}{dp}$ loco $r$, et $\frac{y}{p}$ loco $\frac{ds}{dx}$; prodibitque $\frac{dv}{v}=\frac{-2dp}{p}$. Quae integrata dat $v=\frac{C}{p^2}$. Constans haec C definietur ex data celeritate initiali in A, quae sit debita altitudini $c$, et directione proiectionis, quam ita definiemus vt, posita distantia $CA=a$, perpendiculum CD in tangentem AD sit $=h$. Propterea erit $C=ch^2$ et $v=\frac{ch^2}{p^2}$. Hinc erit $\frac{ds}{\surd v}=\frac{pds}{h\surd c}=$ elemento temporis per $Mm$. Consequenter ob $pds=2MCm$, erit tempus, quo arcus AM percurritur $=\frac{2.ACM}{h\surd c}$. Ipsa curua vero determinabitur substituendo $\frac{ch^2}{p^2}$ loco $v$ in aequatione $Prdx=2vds$, quo facto prodibit $Pp^2rdx=2ch^2ds$. Haec aequatio loco $r$ et $\frac{ds}{dx}$ substitutis valoribus $\frac{ydy}{dp}$ et $\frac{y}{p}$, transmutabitur in hanc $Pdy=\frac{2ch^2dp}{p^3}$. Quae aequatio, quaecunque P sit functio ipsius $y$, ob indeterminatas separatas poterit construi. Q. E. I.

## Corollarium I.

588. Quia tempus, quo arcus AM percurritur, est $\frac{2.ACm}{b\sqrt{c}}$, erunt tempora, quibus arcus quicunque describuntur, vt areae comprehensae arcu descripto et rectis ad centrum C ductis.

## Corollarium 2.

589. Deinde cum sit $v = \frac{cb^2}{p^2}$, erit $\sqrt{v} = \frac{b\sqrt{c}}{p}$. Celeritas igitur corporis in quocunque loco curuae percursae est reciproce vt perpendiculum ex centro C in tangentem in illo puncto demissum.

## Scholion I.

590. Haec arearum aequabilis descriptio constituit apud *Neutonum* primam propositionem, ex qua sequentia fere omnia deducit. Sunt autem hae duae propritates maxime generales, et id tantum requirunt, vt vis centripetae directio sit perpetuo versus centrum. Quacunque enim vis centripeta quantitate siue ipsarum CM functione siue secus exprimatur, aeque tamen vtraque valet. Nam cum in eas incidissemus, ex calculo vis centripeta P exterminabatur, eiusque tantum directio in consideratione relinquebatur.

## Corollarium 3.

591. Ad curuam, quam corpus describit, cognoscendam ipsam vim centripetam dari oportet,

tet, ex hacque data aequatio pro curua habebitur. Eſt enim $Pdy = \frac{2cb^2dp}{p^3}$, quae exprimit curuae naturam ſi P fuerit quantitas data.

## Corollarium 4.

592. Quia eſt $\frac{ydy}{dp} = r$, erit etiam $P = \frac{2cb^2y}{p^3r}$. Atque hoc eſt Theorema Moyvreanum, illud vero $P = \frac{2cb^2dp}{p^3dy}$ *Keilius* primus ſe inueniſſe contendit.

## Scholion 2.

593. Hae aequationes duplicem habent vtilitatem: Primo enim ex data vi centripeta poterit natura curuae, quam corpus proiectum deſcribit, determinari. Deinde etiam viciſſim ope harum aequationum, ſi fuerit data curua, quam corpus circa virium centrum C deſcribit, definiri poteſt in quouis loco vis centripeta efficiens, vt corpus in hac curua libere moueatur.

## Corollarium 5.

594. Quia eſt etiam $dv = -Pdy$, perſpicuum eſt, ſi P fuerit functio ipſius $y$, celeritatem vbique a diſtantia corporis a centro pendere, et in iisdem diſtantiis corpus eandem habere debere celeritatem.

## Corollarium 6.

595. Quoties igitur P eſt functio ipſius $y$ toties etiam curua deſcripta, ita erit comparata vt in aequalibus a centro diſtantiis perpendicula ex centro in tangentes demiſſa ſint inter ſe aequalia, quia celeritates ſunt reciproce vt haec perpendicula (589).

## Scholion 3.

596. Atque semper si P fuerit functio ipsius $y$, poterit assignari recta EC, in qua corpus a vi centripeta sollicitatum descendens in singulis punctis N eandem habebit celeritatem, quam habet in curua AM motum in punctis M aequaliter a centro distantibus. Sumto enim $CN = CM = y$, et $Nn = mr = dy$. Si fuerit celeritas in N aequalis celeritati in M scilicet debita altitudini $v$, erit etiam dum corpus per elementum $Nn$ moueatur $dv = -Pdy$. Ex quo intelligitur celeritatem in $n$ aequalem fore celeritati in $m$. Atque ita in singulis punctis rectae EC corpus tantam habebit celeritatem, quantam habet in curua AM in iisdem a centro C distantiis. Si ergo fuerit E motus initium in quo celeritas est $= o$, ex data linea EC corporis in curua AM moti in singulis punctis innotescet celeritas. Hac igitur recta EC in posterum vtemur ad celeritates corporis in curua moti definiendas, eamque vocabimus distantiam celeritates determinantem.

## Corollarium 7.

597. Cum igitur data sit celeritas in A nempe debita altitudini $c$, ex hoc tota distantia EC reperietur. Tantum enim punctum E distans a C accipi debet, vt corpus ex E hac vi centripeta sollicitatum descendens in A acquirat celeritatem $= \sqrt{c}$.

Co-

## Corollarium 8.

598. Si vocetur angulus $MCm = dw$, erit $dw = \frac{dx}{y} = \frac{pdy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Vnde prodit $p = \frac{y^2dw}{\sqrt{(y^2dw^2+dy^2)}}$. Tempusculum vero, quo angulus $MCm$ abſoluitur eſt $= \frac{pds}{b\sqrt{c}} = \frac{pydy}{b\sqrt{c}(y^2-p^2)}$. Hoc igitur tempusculum erit $= \frac{y^2dw}{b\sqrt{c}}$.

## Corollarium 9.

599. Si celeritatem angularem ſeu eam qua angulus $MCm$ percurritur metiri velimus ipſo hoc angulo per tempus diuiſo prodibit celeritas angularis in $M = \frac{b\sqrt{c}}{y^2}$. Celeritas igitur angularis eſt reciproce vt quadratum diſtantiae corporis a centro C.

## Scholion 4.

600. Quia autem curua, quam corpus a data vi centripeta ſollicitatum deſcribit, aliter non cognoscitur, niſi per aequationem inter corporis diſtantiam a centro et perpendiculum in tangentem ex centro demiſſum; difficile plerumque eſt iudicare qualis ſit curua inuenta, cum curuarum naturas conſueuerimus aequationibus inter coordinatas orthogonales exponere. Interim tamen huiusmodi aequationes inter diſtantiam a centro et perpendiculum in tangentem, ſi modo ſint vel algebraicae vel differentiales in quibus indeterminatae ſint a ſe inuicem ſeparatae, ſufficiunt ad curuas quaeſitas conſtruendas. Sed quo natura et ordo curuarum harum penitus poſſit inueſtigari, dabimus

 hic

hic methodum aequationes inter distantiam et perpendiculum ad consuetas aequationes inter coordinatas reducendi.

## PROPOSITIO 75.

### Problema.

Tabula V. Fig. 3. 601. *Naturam curuae* AM, *quam corpus a quacunque vi centripeta sollicitatum describit, definire aequatione inter coordinatas orthogonales* CP *et* PM *ad axem fixum* AC *relatas.*

### Solutio.

Positis vt ante celeritate initiali in A$=\sqrt{c}$, AC$=a$ et perpendiculo ex C in tangentem in A demisso $=b$. Atque praeterea CM$=y$, CT$=p$, et vi centripeta in M$=$P, quae sit functio quaedam ipsius $y$. Vocetur deinde CP$=x$, et PM$=z$, erit CM$=\sqrt{(x^2+z^2)}=y$, seu $z=\sqrt{(y^2-x^2)}$, retinebimus enim loco $z$ in calculo $y$, quia hoc modo calculus fit facilior et breuior, atque post peractam totam operationem in promtu est $z$ loco $y$ introducere. His positis erit M$m=\sqrt{(dx^2+dz^2)}$ $=\frac{\sqrt{(y^2dy^2-2yxdydx+y^2dx^2)}}{\sqrt{(y^2-x^2)}}$ et M$r=\frac{-ydx+xdy}{\sqrt{(y^2-x^2)}}$. Fiet igitur $\frac{Mr}{Mm}=\frac{p}{y}=\frac{xdy-ydx}{\sqrt{(y^2dy^2-2yxdydx+y^2dx^2)}}$, et consequenter $p=\frac{yxdy-y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2-2yxdydx+y^2dx^2)}}$. Sed pro curua AM hanc ante elicuimus aequationem P$dy=\frac{2cb^2dp}{p^3}$. Ponamus autem Y integrale ipsius P$dy$ ita assumtum vt euanescat posito $y=a$. Quo facto erit Y$=$C$-\frac{cb^2}{p^2}$, vbi constans C ob $p=b$, si est $y=a$, debet esse $=c$. Erit er-

ergo $Y = \frac{cp^2 - cb^2}{p^2}$, ex qua prodit $p = \frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}}$. Quae quantitas cum sit Y functio ipsius $y$, est quoque functio quaedam ipsius $y$. Hanc ob rem habebimus hanc aequationem $\frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}} = \frac{yxdy - y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2)}}$. Ponamus $x = uy$ et $\frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}} = Q$ breuitatis gratia, erit $Q = \frac{-y^2du}{\sqrt{(dy^2 - u^2dy^2 + y^2du^2)}}$, ex qua oritur $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{Qdy}{y\sqrt{(y^2 - Q^2)}} = \frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - cb^2 - y^2Y)}}$ restituto $\frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}}$ loco Q. Quae igitur aequatio, cum in ea indeterminatae $u$ et $y$ sint separatae, semper poterit construi. Q. E. I.

## Corollarium 1.

602. Quia est $u = \frac{x}{y}$, exprimet $u$ cosinum anguli MCA. Et hanc ob rem vltima aequatio separata erit inter distantiam corporis a centro et anguli ACM cosinum. Ex hac vero aequatione sponte oritur aequatio inter $x$ et $z$.

## Corollarium 2.

603. Aequatio vero nunquam esse poterit algebraica, nisi denotet $\int \frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - cb^2 - y^2Y)}}$ arcum circuli commensurabilem cum arcu $\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$.

## Corollarium 3.

604. Quoties ergo $\frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - cb^2 - y^2Y)}}$ reduci poterit ad formam huiusmodi $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2 - Z^2)}}$ et $\lambda$ sit numerus rationalis, aequatio algebraica pro curua quaesita poterit exhiberi.

Scho-

## Scholion 1.

605. Si autem $\frac{du}{\surd(1-u^2)}$ aequabitur huiusmodi quantitati $\frac{\lambda dZ}{\surd(A^2-Z^2)}$, habebitur integratione per logarithmos imaginarios peracta haec aequatio $\frac{\surd(1-u^2)+u\surd-1}{\surd(1-u^2)-u\surd-1} = \left(\frac{\surd(A^2-C^2)-C\surd-1}{\surd(A^2-C^2)+C\surd-1}\right)^\lambda \left(\frac{\surd(A^2-Z^2)+Z\surd-1}{\surd(A^2-Z^2)-Z\surd-1}\right)^\lambda$. Est vero hic C constans quantitas ex eo determinanda, quod, si sit $CM(y) = CA(a)$, simul quoque fieri debeat $x=a$, seu $u=1$. Ex illa autem aequatione conficitur ista

$$u = \frac{(\surd(A^2-C^2)-C\surd-1)^\lambda(\surd(A^2-Z^2)+Z\surd-1)^\lambda}{2A^{2\lambda}\surd-1}$$
$$-\frac{(\surd(A^2-C^2)+C\surd-1)^\lambda(\surd(A^2-Z^2)-Z\surd-1)^\lambda}{2A^{2\lambda}\surd-1}$$

Quae quoties $\lambda$ est numerus rationalis, ab imaginariis $\surd-1$ affectis libera redditur, et in algebraicam certi ordinis transmutatur.

## Corollarium 4.

606. Quia est $x=uy$, habebitur ista aequatio $x=$

$$\frac{(\surd(A^2-C^2)-C\surd-1)^\lambda(\surd(A^2-Z^2)+Z\surd-1)^\lambda y-(\surd(A^2-C^2)+C\surd-1)^\lambda(\surd(A^2-Z^2)-Z\surd-1)^\lambda y}{2A^{2\lambda}\surd-1}$$

quae, cum sit $Z$ functio ipsius $y$, et $y=\surd(x^2+z^2)$ facile in aequationm inter $x$ et $z$ mutatur.

## Scholion 2.

607. Superior aequatio etiam in hanc potest transmutari $Z=\frac{1}{2\surd-1}((\surd(1-u^2)+u\surd-1)^{\frac{1}{\lambda}}$

$(\surd$

$(\sqrt{}(A^2-C^2)+C\sqrt{}-1)-(\sqrt{}(1-u^2)-u\sqrt{}-1)^{\frac{1}{\lambda}}(\sqrt{}(A^2-C^2)-C\sqrt{}-1))$, quae commodior est, si $\frac{1}{\lambda}$ fuerit numerus integer affirmatiuus.

## Scholion 3.

608. At si fuerit $\lambda$ numerus negatiuus $=-\mu$, habebitur $\frac{(\sqrt{}(A^2-C^2)+C\sqrt{}-1)^\mu(\sqrt{}(A^2-Z^2)-Z\sqrt{}-1)^\mu}{2A^{2\mu}\sqrt{}-1}$

$$-\frac{(\sqrt{}(A^2-C^2)-C\sqrt{}-1)^\mu(\sqrt{}(A^2-Z^2)+Z\sqrt{}-1)^\mu}{2A^{2\mu}\sqrt{}-1}=u.$$

Ex quo apparet si $\lambda$ fuerit negatiuum, ipsius $u$ valorem tantum fieri negatiuum, id quod quidem ex aequatione differentiali intelligitur. Simili vero modo erit etiam $Z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}((\sqrt{}(1-u^2)-u\sqrt{}-1)^{\frac{1}{\mu}}(\sqrt{}(A^2-C^2)-C\sqrt{}-1)-(\sqrt{}(1-u^2)+u\sqrt{}-1)^{\frac{1}{\mu}}(\sqrt{}(A^2-C^2)+C\sqrt{}-1))$.

## Corollarium 5.

609. Si fuerit $\lambda=1$, erit $u=\frac{Z\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^2}$ et $x=\frac{Zy\sqrt{(A^2-C^2)}-Cy\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^2}$. Si fuerit $\lambda=-1$, etiam $u$ vel $x$ sumi debet negatiuum.

## Corollarium 6.

610. Si fuerit $\lambda=2$, erit $u=\frac{2Z(A^2-2C^2)\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^4}-\frac{2C(A^2-2Z^2)\sqrt{(A^2-C^2)}}{A^4}$. At si fuerit $\lambda=\frac{1}{2}$ erit $Z=C-2Cu^2+2u\sqrt{}(1-u^2)(A^2-C^2)$.

# PROPOSITIO 26.

## Theorema.

Tabula V. Fig. 4.

611. *Si fuerit vis centripeta vt functio quaecunque distantiarum a centro* C, *et corpus in* A *proiiciatur secundum directionem normalem in* AC *celeritate, cuius altitudo debita se habeat ad dimidiam* AC, *vt vis centripeta in* A *ad vim grauitatis* 1: *hoc corpus in peripheria circuli* AMBA *cuius centrum est* C *mouebitur aequabiliter.*

## Demonstratio.

Moueatur enim corpus in hoc circulo; quia eius distantia a centro non variatur, perpetuo ab eadem vi centripeta versus C sollicitabitur, cuicunque functioni distantiarum etiam sit proportionalis vis centripeta. Atque quia ad centrum C sollicitatur, erit directio potentiae sollicitantis normalis semper in curuae portiunculam, in qua corpus mouetur. Quocirca corpus sollicitabitur perpetuo a vi normali nunquam a tangentiali, et hanc ob rem eius celeritas semper manebit eadem (591), ac ideo corpus motu aequabili peripheriam describet. Deinde quia vis centripeta seu normalis vbique est eadem, ponatur ea $=g$, et celeritas itidem constans debita altitudini $c$, atque radius AC$=a$, quae quantitas $a$ vbique exhibet curuae radium osculi. His igitur positis erit $ag=2c$ (561). Ex quo haec oritur analogia: Vt altitudo celeritati corporis, qua initio in A proiicitur debita $c$ ad dimidiam distanti-

am

am AC, $\frac{1}{2}a$ ita vis centripeta $g$ ad vim grauitatis 1. Q. E. D.

## Corollarium 1.

612. Quando ergo corpus semel arcum circuli describit, cuius centrum est in ipso centro virium C; tum perpetuo in ea circuli peripheria reuoluetur. Si quidem vis centripeta a solis distantiis a centro pendeat, ita vt in aequalibus distantiis vis centripeta sit aequalis.

## Corollarium 2.

612. Posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, erit peripheria circuli, in quo corpus mouetur $=2\pi a$. Quia deinde celeritas, qua corpus mouetur, est $=\sqrt{c}=\sqrt{\frac{ag}{2}}$; erit tempus vnius periodi per totam peripheriam $=\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$.

## Corollarium 3.

614. Si ergo plura corpora in diuersis circulis moueantur, erunt tempora reuolutionum in subduplicata ratione composita ex directa radiorum circulorum et inuersa virium centripetarum.

## Corollarium 4.

615. Si corpus ex A perpendiculariter ad AC proiiciatur, sed celeritate vel maiore vel minore quam $\sqrt{\frac{ag}{2}}$. Corpus arculum circuli describet, cuius radius erit vel maior vel minor quam AC.

## Corollarium 5.

615. Hoc ergo casu, quo corpus incipit in arcu circulari moueri, cuius centrum non est in C statim ad centrum vel magis accedet vel magis ab eo recedet. Et hanc ob rem statim ab alia sollicitabitur vi centripeta, nisi forte vis centripeta vbique est eadem.

## Scholion.

Tabula V, Fig. 5.

617. Quacunque autem corpus in A celeritate proiiciatur, modo sit eius directio in rectam AC per centrum virium C transseuntem perpendicularis, curua BMAND hanc habebit proprietatem, vt eius portiones AMB, AND cis et vltra rectam AC positae sint inter se similes et aequales, atque AC axis et diameter huius curuae. Nam, quia, vt iam innuimus, vis centripeta functioni cuidam distantiarum a centro est proportionalis, corpus siue supra siue infra AC in aequalibus a C distantiis aequaliter sollicitatur, et hanc ob rem eodem modo per DNA ad A accedere debet, quo ab A per AMB recedit, atque in punctis homologis M et N eandem quoque habebit celeritatem.

## Corollarium 6.

618. Omnis igitur recta ex centro C ducta, quae in curuam est normalis, erit simul curuae diameter; ita vt curuae partes cis et vltra hanc rectam positae sint inter se similes et aequales.

PRO-

## PROPOSITIO 77.

### Theorema.

619. *Si plura corpora circa centrum virium* C *moueantur, atque describant curuas* AM, am *circa* C *similes: erunt celeritates in punctis similibus* M *et* m, *in subduplicata ratione composita ex rationibus laterum homologorum et virium centripetarum in locis homologis* M *et* m. Tabula V. Fig. 6.

### Demonstratio.

Quia est $AC : aC = MC : mC$, erit etiam radius osculi in M ad radium osculi in $m$ in eadem ratione, nec non etiam perpendiculum CT ad C$t$. Ex propositione 74 vero apparet esse $Prdx = 2vds$ seu loco $\frac{ds}{dx}$ posito $\frac{y}{p}$, $Ppr = 2vy$. Hinc ergo erit celeritas $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{Ppr}{2y}}$. Ex quo prodit haec analogia; celeritas in M est ad celeritatem in $m$ in ratione subduplicata composita ex directis virium centripetarum in M et $m$, radiorum osculi in M et $m$, atque perpendiculorum CT ad $c$T; atque ratione inuersa distantiarum MC ad $m$C. Quia vero est CT ad $c$T vt MC ad $m$C, et radius osculi in M ad radium osculi in $m$ vt MC ad $m$C, erit celeritas in M ad celeritatem in $m$ in ratione subduplicata composita ex rationibus virium centripetarum in M et $m$, et laterum homologorum MC ad $m$C. Q. E. D.

### Corollarium I.

620. Si ergo dicatur $AC = A$; $aC = a$. $CD = H$ et $Cd = b$, itemque celeritas in $A = \sqrt{C}$, et in $a = \sqrt{c}$; erit celeri-

 ri-

ritas angularis in $M = \frac{H\sqrt{C}}{MC^2}$ et celeritas angularis in $m = \frac{b\sqrt{c}}{mC^2}$ (599). Quia autem est $H : b = MC : mC = A : a$; erunt celeritates angulares in M et $m$ vt $\frac{\sqrt{C}}{A}$ ad $\frac{\sqrt{c}}{a}$, i. e. in ratione constante.

## Corollarium 2.

*621.* Tempora igitur, quibus aequales anguli ACM, $aCm$, seu spatia homologa AM et $am$ absoluuntur sunt reciproce vt celeritates angulares in M et $m$, i. e. directe vt latera homologa et reciproce vt celeritates in punctis homologis.

## Scholion 1.

*622.* Quin etiam celeritates in punctis homologis vbique eandem tenent rationem. Est enim celeritas in $M = \frac{H\sqrt{C}}{CT}$ et celeritas in $m = \frac{b\sqrt{c}}{Ct}$ (589). Quamobrem cum sit $H : b = CT : Ct$, erit celeritas in M ad celeritatem in $m$ vt $\sqrt{C}$ ad $\sqrt{c}$ i. e. vt celeritas in A ad celeritatem in $a$.

## Corollarium 3.

*623.* Ex ipsa autem propositione perspicitur esse celeritatem in A, $\sqrt{C}$ ad celeritatem in $a$, $\sqrt{c}$ in ratione subduplicata composita ex rationibus virium centripetarum in A et $a$, et laterum homologorum A ad $a$. Quare si dicatur vis centripeta in $A = G$ et vis centripeta in $a = g$; erit $\sqrt{C} : \sqrt{c} = \sqrt{AG} : \sqrt{ag}$.

Co-

## Corollarium 4.

624. Consequenter tempus per AM erit ad tempus per *am*, vt $V\frac{A}{G}$ ad $V\frac{a}{g}$ i. e. in ratione subduplicata composita ex directa laterum homologorum et inversa virium centripetarum in punctis A et *a*. Quae ergo ratio est constans, eandemque tenere debent inter se integra reuolutionum tempora.

## Scholion 2.

625. Hoc etiam casu, quo plures figurae similes circa centrum C describuntur, vires centripetae in punctis homologis eandem vbique tenere debent rationem. Quia enim est $P = \frac{2cb^2y}{p^3r}$ (592) erit vis centripeta in M ad vim centripetam in *m* directe vt quadratum celeritatis in A ad quadratum celeritatis in *a* et reciproce vt AC ad *a*C quae est ratio constans. Quamobrem quo possint plures figurae similes circa centrum C describi, oportet vt vis centripeta huiusmodi distantiarum functione exprimatur, quae in locis homologis vires centripetas eandem rationem tenentes praebeat. Scilicet posita P vi centripeta in distantia *y* et Q in distantia *my*, debebit P ad Q habere rationem constantem, in qua non insit *y*. Hoc enim nisi fuerit, fieri non potest, vt circa centrum C plures figurae similes describantur.

## Corollarium 5.

626. Hoc autem obtineri non potest, nisi sit P potestas quaedam ipsius *y*, vt $\frac{y^n}{f^n}$. Hoc enim

ca-

casu fit $Q = \frac{m^n y^n}{f^n}$ et ratio $P:Q$ erit $1 : m^n$, quae est constans.

## Corollarium 6.

627. Nisi ergo vis centripeta cuidam dignitati distantiarum a centro C sit proportionalis, ne fieri quidem potest, vt plures figurae similes circa centrum C describantur. Atque in his solis casibus locum habebunt proprietates, quas ex hac propositione eruimus.

## Corollarium 7.

628. Si autem fuerit $P = \frac{y^n}{f^n}$, erit $G = \frac{A^n}{f^n}$ et $g = \frac{a^n}{f^n}$. Celeritates ergo in locis homologis tenebunt rationem $A^{\frac{n+1}{2}}$ ad $a^{\frac{n+1}{2}}$.

## Corollarium 8.

629. Atque tempora quibus arcus similes AM et *am* absoluuntur erunt in ratione $A^{\frac{1-n}{2}}$ ad $a^{\frac{1-n}{2}}$ seu in ratione multiplicata laterum homologorum cuius exponens est $\frac{1-n}{2}$.

## Scholion 3.

630. In praecedente et hac propositione continentur omnia Theoremata, quae *Hugenius* de viribus centrifugis in tractatu suo de Horologio oscil-

cillatorio annexit. Eaque partim re ipsa hic apposui, partim euidentissime ex ipsis propositionibus deduci possunt.

# PROPOSITIO 78.

## Problema.

631. *Si centrum* C *attrahat in ratione distantiarum directa, et corpus ex* A *secundum directionem ad radium* AC *normalem data cum celeritate proiiciatur: determinare curuam* AMDBH, *quam corpus describet, corporisque celeritatem in singulis locis.* Tabula VI. Fig. 1.

## Solutio.

Ponatur distantia CA$=a$, erit perpendiculum, quod ex centro C in motus directionem demittitur $=a$. Celeritas vero in A debita sit altitudini $c$. Peruenerit corpus in M, sitque CM$=y$, et perpendiculum ex C in tangentem in M demissum CT ponatur $=p$, atque celeritas in M debita sit altitudini $v$. Sit porro distantia, in qua vis centripeta aequalis est grauitati, $f$; erit vis centripeta in M $=\frac{y}{f}$ posita vi grauitatis $=1$. His cum prop. 75 (601) comparatis, erit $P=\frac{y}{f}$ et $Y=\frac{y^2-a^2}{2f}$. Quamobrem habebitur $p=\frac{a\sqrt{2cf}}{\sqrt{(a^2+2cf-y^2)}}$. Est vero $v=\frac{a^2c}{p^2}$ (587), ex quo erit $v=\frac{a^2+2cf-y^2}{2f}$. Ob elementum curuae autem $=\frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$, erit elementum temporis $\frac{ydy\sqrt{2f}}{\sqrt{(a^2y^2+2cfy^2-y^4-2a^2cf)}}$. Demisso ex M in CA perpendiculo MP, vocetur CP$=x$, po-

 na-

naturque $x = uy$. His positis erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{ady\sqrt{2cf}}{y\sqrt{(2cfy^2-2a^2cf-y^4+a^2y^2)}}$ (601). Fiat $y = \frac{1}{\sqrt{(q+\frac{2cf+a^2}{4a^2cf})}}$ et prodibit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{-\frac{1}{2}dq}{\sqrt{((\frac{a^2-2cf}{4a^2cf})^2-q^2)}}$. Quo collato cum formula $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (604), erit $\lambda = \frac{1}{2}$, $Z = -q$
Tabula VI. Fig. 4. et $A = \frac{a^2-2cf}{4a^2cf}$. Ex his autem inuenitur $Z = -q = C - 2Cu^2 + 2u\sqrt{(A^2-C^2)(1-u^2)} = \frac{a^2+2cf}{4a^2cf} - \frac{1}{y^2}$. Constans quantitas C ex hoc determinabitur, quod facto $u = 1$ fieri debeat $y = a$. Hinc ergo erit $C = \frac{2cf-a^2}{4a^2cf}$ vnde fit $\sqrt{(A^2-C^2)} = 0$. His substitutis habebitur $\frac{1}{2cf} - \frac{1}{y^2} = \frac{(a^2-2cf)u^2}{2a^2cf} = \frac{(a^2-2cf)x^2}{2a^2cfy^2}$ ob $u = \frac{x}{y}$. Aequatio igitur resultabit ista $a^2y^2 - 2a^2cf = (a^2-2cf)x^2$. Ponatur applicata $MP = z$, erit $y^2 = x^2 + z^2$. Hinc sequens prodibit pro curua quaesita aequatio inter coordinatas orthogonales, $a^2z^2 + 2cfx^2 = 2a^2cf$. Haec aequatio est ad ellipsin, cuius centrum in C est situm, et $AB = 2a$ est alter eius axis; alter vero $DH = 2\sqrt{2cf}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

632. Altitudo celeritati in M debita $v$ est $= \frac{a^2+2cf-y^2}{2f}$. Quia autem est $a^2 + 2cf = AC^2 + CD^2 = AD^2$, erit $v = \frac{AD^2-CM^2}{2f}$.

## Corollarium 2.

633. Simili modo perpendiculum CT in tangentem MT demissum erit $p = \frac{AC.CD}{\sqrt{(AD^2-CM^2)}}$ et ipsa tangens

gens $MT = \frac{\sqrt{(AD^2.CM^2 - CM^4 - AC^2.CD^2)}}{\sqrt{(AD^2 - CM^2)}} = \frac{(AC^2 - CD^2)CP.PM}{AC.CD\sqrt{(AD^2 - CM^2)}}$. Si quidem est $AC > CD$.

## Corollarium 3.

634. Hoc autem casu quo $AC > CD$, erit AB ellipsis axis transuersus, in eoque foci F et G siti. Erit autem $CF = CG = \sqrt{(AC^2 - CD^2)}$. Adeoque $MT = \frac{CF^2.CP.PM}{AC.CD\sqrt{(AD^2 - CM^2)}}$.

## Corollarium 4.

635. Anguli ergo TMC, quem corporis in M directio cum radio MC constituit, sinus est $= \frac{AC.CD}{CM.\sqrt{(AD^2 - CM^2)}}$, et cosinus $= \frac{CF^2.CP.PM}{CM.AC.CD.\sqrt{(AD^2 - CM^2)}}$.

## Scholion 1.

636. Distantia celeritates determinans CE (596, 597) aequalis est semper subtensae AD. Nam posita $CE = k$, descendat corpus ex E versus C a vi centripeta tractum; habere debebit corpus cum in A peruenerit celeritatem altitudini $c$ debitam. Quamobrem erit $k = \sqrt{(a^2 + 2cf)}$, (275). Quia autem est $AC = a$, et $CD = \sqrt{2cf}$, erit $CE = \sqrt{(AC^2 + CD^2)} = AD$.

## Corollarium 5.

637. Altitudo debita celeritati, quam corpus in recta EC motum acquiret, cum in C peruenerit, erit $\frac{k^2}{2f} = \frac{a^2 + 2cf}{2f} = \frac{AD^2}{2f}$.

## Corollarium 6.

638. Tempus quo arcus AM absoluitur $= \frac{2.ACM}{a\sqrt{c}}$ (588) ob $h = a$ hoc casu. Quamobrem

 tem-

tempus totius reuolutionis per ellipsis perimetrum ADBHA erit $= \frac{2.\,Areae\ Ellipticae}{a\sqrt{c}}$. Est vero posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, spatium ellipticum $= \pi a \sqrt{2cf}$. Consequenter tempus vnius reuolutionis erit $2\pi\sqrt{2f}$.

## Corollarium 7.

639. Si ergo plura corpora circa idem centrum virium attrahens in ratione distantiarum reuoluantur in ellipsibus, erunt singulorum tempora integrarum reuolutionum inter se aequalia.

## Scholion 2.

640. Quando corporis directio initialis in puncto A non ponitur normalis ad radium AC, calculus non praebet ellipsin pro curua a corpore descripta; sed aliam curuam ordinis quarti, quae tamen nullo modo satisfacere potest. Causa huius discrepantiae calculi a veritate in hoc consistit, quod expressio sinus anguli, quem curua cum radio constituit, in $y$ et $u$ sumta semper euadat $=1$, posito $y=a$ et $u=1$, etiamsi secundum hypothesin alia prodire debeat quantitas. Sinus enim anguli, quem curua cum radio comprehendit est $\frac{ydu}{\sqrt{(dy^2-u^2dy^2+y^2du^2)}}$ quae expressio facto $u=1$ euidenter abit in vnitatem, cum tamen prodire debeat $\frac{b}{a}$. Quamobrem perspicuum est, nisi ponatur $b=a$, calculum hoc modo institutum nunquam cum veritate conspirare posse, si quidem aequatio inter $u$ et $y$ quaeri debeat. Haec ergo regula perpetuo est tenenda, quoties

ties curua descripta secundum praecepta propos. 75 (601) inuestigabitur. Methodus autem hac propositione tradita ad curuas algebraicas tantum inueniendas est accommodata; alia enim methodo, si curuae sint transcendentes, vti oportet. At omnes curuae algebraicae hac gaudent proprietate, vt in eas ex puncto quocunque duci possit perpendicularis. Quocirca, quoties corpus in curua algebraica circa centrum virium reuoluitur, semper in ea vel vnum vel plura poterunt assignari puncta, in quibus radius ad curuam sit perpendicularis. In huiusmodi igitur punctis corpus motum inchoare ponendum est, atque calculus semper veritati erit consentaneus. Ex tali autem solutione facile inuenietur corporis in quouis alio loco celeritas, atque hinc methodo inuersa data corporis celeritate in loco, in quo radius non est ad curuam normalis, reperietur celeritas in loco, vbi radius in curuae normalem incidit. Quomodo autem hoc effici debeat ex propositione sequente perspicietur. Supra memorata curuarum algebraicarum proprietas vero, qua ex quocunque puncto dato in eas perpendicularis potest demitti, non in omnes curuas transcendentes competit. In spirali enim logarithmica nullum radium ex centro ad curuam ductum esse normalem, sed perpetuo cum ea constantem constituere angulum, cuique est notum. Quo tandem ratio intelligatur, quare $\frac{ydu}{\sqrt{(dy^2-u^2dy^2+y^2du^2)}}$ semper facto $u=1$ mutetur in vnitatem, cum tamen quiuis alius quoque angulus praeter rectum ex ea produci deberet; animaduertendum est abeunte $u$ in $1$, elementum $du$ euanescere prae $dy$, nisi sit tangens in A ad radium AC normalis. Hancque ob causam posito $u=1$, elementum $dy^2(1-u^2)$ non est negligendum ratione $y^2du^2$, cum vtrumque euanescat, vt et numerator $ydu$. Quo fit, vt cuiusuis arbitrarii anguli sinus illa formula facto $u=1$ possit exprimi. Sed quoniam haec cautela in calculo non potest obseruari, praeter casus $b=a$ calculus nunquam veram curuam exhibet.

## PROPOSITIO 79.

### Problema.

641. *Attrahente centro virium in ratione distantiarum, et proiiciatur corpus in M celeritate quacunque, et secundum quamcunque directionem MT: determinari oportet ellipsin in qua corpus mouebitur.*

### Solutio.

Solutionem huius problematis esse possibilem ex hoc intelligi potest, quod numerus datorum non sit nimis magnus ad ellipsin determinandam, provt apparebit. Ponantur radius $CM=y$, sinus anguli $CMT=s$, posito sinu toto $=1$, et altitudo celeritati in M debita $=v$, distantia praeterea a centro C, in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis maneat $=f$. Hae igitur quantitates tanquam datae et cognitae erunt considerandae; incognitae vero et inueniendae sunt ellipsis axes, eorumque positio: ho-

horum ponatur AC$=a$ et CD$=b$, eritque $b=\sqrt{2cf}$ (631). His positis habebitur statim $2fv=a^2+b^2-y^2$ (632), vnde fit $a^2+b^2=\mathrm{AD}^2=2fv+y^2$, cognoscitur ergo iam subtensa AD, huicque aequalis distantia CE celeritates determinans. Deinde quoque habetur $s=\frac{ab}{y\sqrt{(a^2+b^2-y^2)}}=\frac{ab}{y\sqrt{2fv}}$, ex quo oritur $ab=sy\sqrt{2fv}$. His coniunctis oritur $(a^2-b^2)^2=4f^2v^2+4fvy^2+y^4-8fs^2vy^2=4f^2v^2+y^4+4fvy^2(1-2s^2)$. Est vero $1-2s^2$ cosinus dupli anguli CMT, quem vocemus $i$. Erit ergo $a^2-b^2=\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}$. Ex his aequationibus prouenit $a^2=fv+\frac{1}{2}y^2+\sqrt{(f^2v^2+\frac{1}{4}y^4+fivy^2)}$ et $b^2=fv+\frac{1}{2}y^2-\sqrt{(f^2v^2+\frac{1}{4}y^4+fivy^2)}$. Inuentis vero axibus positio eorum facile habebitur. Est enim cosinus anguli ACM$=\frac{x}{y}=\frac{1}{y}\sqrt{(\frac{a^2y^2-a^2b^2}{a^2-b^2})}=\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{fiv+\frac{1}{2}y^2}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}})}$ seu cosinus dupli anguli ACM$=\frac{2fiv+y^2}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}}$, atque sinus huius anguli 2ACM$=\frac{2fv\sqrt{(1-i^2)}}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}}$. Q. E. I.

## Corollarium I.

642. Vbicunque igitur corpus proiiciatur, et quacunque celeritate, atque secundum quamvis directionem, corpus circa centrum virium in perimetro ellipsis mouebitur, cuius centrum est in ipso centro virium.

## Scholion.

643. Hactenus vis centralis distantiis proportionalis attrahens est posita; simili autem modo reperientur curuae descriptae, si vis corpora a centro

tro in eadem ratione repellat. Praecedentia enim omnia ad hunc casum accommodantur, si modo $-f$ loco $f$ scribatur. Hoc vero facto, curua, quae ante erat ellipsis transmutatur in hyperbolam, axe minore imaginario facto, centrumque virium manet in centro hyperbolae.

## PROPOSITIO 80.

### Problema.

Tabula VI. Fig. 2. 644. *Si vis centripeta fuerit quadratis distantiarum reciproce proportionalis, corpusque in A data celeritate proiiciatur in directione ad radium AC normali: oportet determinare curuam AMDBHA, quam corpus describet, et motum ipsum per illam.*

### Solutio.

Positis vt ante $AC=a$, et celeritate in A debita altitudini $c$, sit $f$ distantia, in qua vis centripeta aequalis est grauitati. Ponatur tum $CM=y$, perpendiculum, quod in tangentem demittitur, $CT=p$, et altitudo celeritati in M debita $=v$. His cum prop. 75 (601) comparatis erit $h=a$, $P=\frac{f^2}{y^2}$, et $Y=\frac{f^2}{a}-\frac{f^2}{y}$. Demittatur ex M in AC perpendiculum MP, et vocetur $CP=x$, ponaturque $x=uy$. Quo facto erit $\frac{du}{\surd(1-u^2)}=\frac{ady\surd c}{y\surd(cy^2-a^2c-\frac{f^2y^2}{a}+f^2y)}$. Ponatur $y=\frac{1}{\frac{f^2}{2a^2c}-q}$, eritque $\frac{du}{\surd(1-u^2)}=\frac{dq}{\surd((\frac{2ac-f^2}{2a^2c})^2-q^2)}$. Conferatur haec formula cum $\frac{\lambda dZ}{\surd(A^2-Z^2)}$ (604), eritque $\lambda=1$, $A=\frac{2ac-f^2}{2a^2c}$ et $Z=q$. Quamobrem habebebitur ſequens aequatio $u = \frac{q\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{(A^2-q^2)}}{A^2}$ (609). Eſt vero $q = \frac{f^2}{2a^2c} - \frac{1}{y}$, et conſtans quantitas C ex eo debet definiri, quod facto $u=1$ fiat $y=a$. Aequatio vero illa parum mutata in hanc tranſit $C + u\sqrt{(A^2-q^2)} = q\sqrt{(1-u^2)}$. In qua facto $u=1$ et $q = \frac{f^2-2ac}{2a^2c}$, prodit $C=o$. Conſequenter habebitur $(\frac{f^2-2ac}{2a^2c})^2 u^2 = q^2$, ſeu $(f^2-2ac)u = 2a^2cq = f^2 - \frac{2a^2c}{y}$. Quia vero eſt $u = \frac{x}{y}$, erit $(f^2-2ac)x = f^2y - 2a^2c$, atque $f^4y^2 = 4a^4c^2 - 4a^2cx(f^2-2ac) + (f^2-2ac)^2x^2$. Vocetur applicata $PM = z$, erit $f^4z^2 = 4a^4c^2 - 4a^2cx (f^2-2ac) - 4acf^2x^2 + 4a^2c^2x^2$. Ponatur $x = t + \frac{2a^2c-af^2}{2f^2-2ac}$, quo facto habebitur $f^4z^2 = \frac{a^3cf^4}{f^2-ac} - 4act^2 (f^2-ac)$. Quae eſt aequatio ad ellipſin abſciſſis in axe transuerſo a centro G ſumtis, cuius axis transuerſus eſt $= \frac{af^2}{f^2-ac}$ et coniugatus $= \frac{2a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}}$. Centrique virium C a centro ellipſis G diſtantia $CG = \frac{2a^2c-af^2}{2f^2-2ac}$, quae aequalis eſt ſemidiſtantiae focorum. Hanc ob rem centrum virium C in alterutro foco ellipſis eſt poſitum. Apparet igitur corpus in A celeritate $\sqrt{c}$ proiectum circa centrum C deſcripturum eſſe ellipſin AMDBHA, cuius focus alter in C eſt ſitus. Eritque $AC = a$, $AG = \frac{af^2}{2f^2-2ac}$, $AB = \frac{af^2}{f^2-ac}$, $BC = \frac{a^2c}{f^2-ac}$, axisque coniugatus $DH = \frac{2a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}}$. Latus vero rectum ellipſis eſt $= \frac{4a^2c}{f^2}$. Ad celeritatem in M determinandam vſu erit aequatio $v = \frac{a^2c}{p^2}$. Eſt autem $p = \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}} = \frac{a\sqrt{acy}}{\sqrt{(acy+(a-y)f^2)}}$, ergo $v = \frac{acy+(a-y)f^2}{ay}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

645. Distantia celeritates determinans CE inuenitur $=\frac{af^2}{f^2-ac}$ (274). Ex quo apparet distantiam hanc CE aequalem esse axi transuerso ellipsis AB.

## Corollarium 2.

646. Toties autem curua a corpore descripta est re vera ellipsis, quoties est $f^2 > ac$ seu $c < \frac{f^2}{a}$. At si est $c > \frac{f^2}{a}$, tum axis transuersus fit negatiuus, et coniugatus imaginarius, id quod indicio est curuam his casibus abire in hyperbolam.

## Corollarium 3.

647. Quando vero est $c = \frac{f^2}{a}$, curua medium tenebit inter hyperbolam et ellipsin axemque transuersum habebit infinitum. Erit itaque tum curua a corpore descripta parabola.

## Corollarium 4.

648. Si $c = \frac{f^2}{2a}$, ellipsis abit in circulum, aequales enim euadunt axes, transuersus et coniugatus. Centrum vero virium in ipsum centrum circuli incidet.

## Corollarium 5.

649. Ducatur in ellipsi ex altero foco F recta FM ad M, erit $FM = AB - y = \frac{f^2(a-y)+acy}{f^2-ac}$. Ex quo cognoscitur fore $v = \frac{(f^2-ac).FM}{a.CM}$. Est ergo celeritas in puncto quouis M vt $\sqrt{\frac{FM}{CM}}$.

Co-

## Corollarium 6.

650. Sinus anguli, quem radius CM cum tangente MT constituit est $= \frac{p}{y} = \frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(acy^2 + (a-y)f^2y)}}$ posito sinu toto $= 1$. Sed quia est $FM = \frac{f^2(a-y) + acy}{f^2 - ac}$, erit sinus anguli $CMT = \frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)FM.CM}}$.

## Corollarium 7.

651. Quia est $GC = \frac{2a^2c - af^2}{2f^2 - 2ac}$, centrum virium erit in remotiore foco a vertice A, quoties est $c > \frac{f^2}{2a}$. In propiorem vero incidet si $c < \frac{f^2}{2a}$.

## Corollarium 8.

652. Posito axe maiore $AB = E$, parametro $= L$, erit $E = \frac{af^2}{f^2 - ac}$, et $L = \frac{4a^2c}{f^2}$. Hinc reperitur $a = \frac{E \pm \sqrt{(E^2 - EL)}}{2}$ atque $\sqrt{c} = \frac{f\sqrt{L}}{E \pm \sqrt{(E^2 - EL)}}$.

## Corollarium 9.

653. Tempus, quo corpus integram ellipsis circumferentiam percurrit, est $= \frac{2.\,Areae\ Ellipt.}{a\sqrt{c}} = \frac{4.\,Areae\ Ellipt.}{f\sqrt{L}}$ (588). Posita vero ratione diametri ad peripheriam $1 : \pi$, est area elliptica $= \frac{\pi E\sqrt{EL}}{4}$. Tempus ergo vnius reuolutionis est $= \frac{\pi E\sqrt{E}}{f}$.

## Corollarium 10.

654. Si ergo plura corpora circa centrum virium C reuoluantur attracta in reciproca duplicatata ratione distantiarum; erunt tempora periodica inter se in sesquiplicata ratione axium transuersorum ellipsium.

## Corollarium II.

655. Si celeritas initialis in A euanescit, abit ellipsis in lineam rectam AC. In hac igitur recta corpus perpetuo mouebitur ab A ad C, hincque subito rursus ad A reuertetur, ita vt nunquam vltra centrum C pertingat (272).

## PROPOSITIO 81.

### Problema.

656. *Posita vi centripeta distantiarum quadratis reciproce proportionali, proiiciatur corpus ex M celeritate quacunque et iuxta directionem quamuis MT: ex quo oporteat determinari ellipsin MDBHAM, in qua corpus mouebitur.*

### Solutio.

Sit $MC = y$, sinus anguli $CMT = s$, et celeritas in M debita altitudini $v$, distantia a centro, in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis, maneat $= f$. Haeque sunt quantitates cognitae, ex quibus quaesitae axis transuersus AB, eius positio, et latus rectum debent definiri. Sit axis transuersus $= E$, et latus rectum $= L$, reliquaeque litterae $a$, $c$, seruent suas significationes, vt in praecedente propositione. Erit iam ex natura ellipsis $FM = E - y$, ex quo fiet $v = \frac{(f^2 - ac)(E-y)}{ay}$ (649) $= \frac{f^2(E-y)(2E - L \pm 2\sqrt{(E^2 - EL)})}{y(E \pm \sqrt{(E^2-EL)})^2}$ (652) $= \frac{f^2(E-y)}{Ey}$. Hinc reperitur $E = \frac{f^2 y}{f^2 - vy}$. Deinde est sinus anguli $CMT = s = \frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)y(E-y)}}$ (650). At est $f^2 - ac = \frac{f^2(E \pm \sqrt{(E^2-EL)})}{2E}$

et

et $a^3c = \frac{1}{8}f^3L(E \pm \sqrt{}(E^2 - EL))$ (652), ex quo fit $\frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2 - ac)}} = \frac{1}{2}\sqrt{}EL$, hincque $s = \frac{\sqrt{EL}}{2\sqrt{(Ey - y^2)}}$. Erit igitur axis coniugatus $DH = \sqrt{}EL = 2s\sqrt{}(Ey - y^2) = \frac{2sy\sqrt{vy}}{\sqrt{(f^2 - vy)}}$, et latus rectum $L = \frac{4s^2vy^2}{f^2}$. Ad positionem axis transuersi inueniendum quaeratur cosinus anguli MCP seu $\frac{x}{y} = \frac{f^2y - 2a^2c}{y(f^2 - 2ac)} = \frac{2Ey - LE}{2y\sqrt{(E^2 - EL)}} = \frac{ff - 2ssvy}{\sqrt{(f^4 - 4ffssvy + 4s^2v^2y^2)}}$. Ex quo erit tangens ang. $MCP = \frac{2svy\sqrt{(1 - ss)}}{ff - 2ssvy}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

657. Si est $f^2 > vy$ vel $v < \frac{f^2}{y}$ curua descripta semper erit ellipsis. At si $v > \frac{f^2}{y}$ curua erit hyperbola, fit enim axis transuersus negatiuus. Sin autem $v = \frac{f^2}{y}$, curua erit parabola.

## Corollarium 2.

658. Quia neque axis transuersus neque latus rectum vllo casu fieri potest imaginarium quomodocunque corpus proiiciatur; ideo semper in sectione conica mouebitur, in cuius alterutro foco positum est centrum virium.

## Scholion 1.

659. Postquam *Keplerus* ostendisset planetas in ellipsibus moueri, in qu rum alterutro foco sol esset positus; atque tempora esse proportionalia areis, quas rectae ad solem ductae cum arcu descripto compehenderent; *Neutonus* demonstrauit vim planetas in orbitis continentem ad solem ten-

dere, atque esse quadratis distantiarum planetarum a sole reciproce proportionalem. Haec eadem veritas ex hisce duabus propositionibus consequitur; nam centro virium in ratione inuersa duplicata distantiarum attrahente, corpora in ellipsibus vel hyperbolis moueri debebunt, quarum alteruter focus in centrum virium incidit.

## Corollarium 3.

666. Secundum *Neutonum* vis attrahens solis est ad vim attrahentem terrae in aequalibus ab vtriusque centris distantiis vt 227512 ad 1. Quare cum vis attrahens terrae in distantia semidiametri suae a centro seu in superficie aequalis sit vi grauitatis 1; corpus a centro solis semidiametrum terrestrem distans, ad id trahetur vi 227512 vicibus maiore quam grauitate. Ex quo concluditur, si corpus a centro solis distet 477 semidiametros terrae, vim, qua ad solem trahetur, fore aequalem vi grauitatis.

## Corollarium 4.

667. Si igitur sol locum centri virium in reciproca duplicata ratione distantiarum attrahentis sustineat, pro $f$ accipi debebit distantia 447 semidiametris telluris aequalis.

## Scholion 2.

668. Quo hae propositiones ad motum planetarum possint accommodari sit sol in C et planeta moueatur in ellipsi ADBHA cuius axis transuersus AB sit $=E$, distantia focorum $CF=D$, et celeritas,

tas, quam planeta habet in summa abside A debita sit altitudini $c$. Eritque $c = \frac{227512(E-D)}{(E+D)E}$. Iam pro mercurio est $E = 15991$ semid. telluris, quam mensuram hic constanter ad distantias exprimendas adhibebimus, $D = 3367$. Quare erit $c = 7, 368$. Pro Venere est $E = 29882$ et $D = 206$, vnde reperitur $c = 7, 598$. Pro Tellure est $E = 41312$ et $D = 743$. Vnde erit $c = 5, 323$. Pro Marte est $E = 62959$ et $D = 5887$, vnde fit $c = 3, 049$. Pro Ioue est $E = 214870$ et $D = 10350$, vnde $c = 0, 9633$. Pro Saturno est $E = 394042$, et $D = 22391$, vnde $c = 0, 5173$. Quae sufficiunt ad cuiusque planetae motum absolutum determinandum.

## Scholion 3.

669. *Neutonus*, prout iam innuimus, ex ellipsi, quam corpus describit, cognita, et centro virium in alterutro foco posito, deduxit vim centripetam esse quadratis distantiarum reciproce proportionalem. Post modum autem a Cel. *Ioh. Bernoulli* aliisque huius propositionis inuersa fuit agitata, vt scilicet quaeratur curua, quam corpus circa centrum virium in ratione reciproca duplicata distantiarum attrahens, describet. Negabant enim a *Neutono* satis esse demonstratum, praeter sectiones conicas nullam aliam curuam quaesito satisfacere, quamuis prop. XVII. Lib. I. Princ. Naturalis hoc satis clare euincere videatur. Huius igitur quaestionis his duabus quaestionibus plenam exhibuimus solutionem, qua *Neutoni* assertio extra dubium ponitur.

tur. Alias huius problematis ſolutiones videre licet in Comm. Acad. Pariſ. et Horis ſubſecivis Francof.

## Scholion 4.

670. Tempus vnius reuolutionis planetae circa ſolem eſt $\frac{\pi E\sqrt{E}}{250f}$ minutorum ſecundorum (653) ſi quidem E et $f$ in partibus milleſimis pedis Rhenani exprimantur. Quia autem E et $f$ commodius in ſemidiametris telluris exhibentur, quarum vnus continet 20302353 pedes; loco fractionis $\frac{1}{250}$ per quam $\frac{\pi E\sqrt{E}}{f}$ multiplicandum eſt, adhiberi oportet 569, 945. Hanc ob rem tempus vnius reuolutionis planetae erit $\frac{569945\pi E\sqrt{E}}{1000f}$ minutorum ſecundorum, ſeu ob $\pi = 3,14159265538$ et $f = 477$ ſemidiam. terrae, (667), erit tempus periodicum planetae $= 3,758.E\sqrt{E}$, minutorum ſecundorum, expreſſo axe transuerſo in ſemidiametris terrae.

## PROPOSITIO 82.

### Problema.

Tabula VI. Fig. 3.

671. *Si vis centripeta fuerit reciproce vt cubus diſtantiae a centro; requiritur curua, quam corpus vtcunque proiectum deſcribet, corporisque motus in ea.*

### Solutio.

Sit centrum in C et proiiciatur corpus ex A celeritate $\sqrt{c}$ et ſecundum directionem cum A$c$ facientem angulum cuius ſinus ſit $\frac{g}{e}$, poſita A$C = a$.

Per-

Peruenerit corpus in M, vbi ſit CM$=y$, et in tangentem MT ex C demiſſum perpendiculum CT$=p$. Celeritas vero in M debita ſit altitudini $v$. Atque diſtantia a centro C, in qua vis centripeta aequalis eſt grauitati, ſit $=f$. Hinc ergo erit vis centripeta in M$=\frac{f^3}{y^3}=$P (601); ex quo prodit $Y=\frac{f^2}{2a^2}-\frac{f^2}{2y^2}$. Habebitur igitur pro curua quaeſita iſta aequatio $\frac{f^3}{2a^2}-\frac{f^3}{2y^2}=c-\frac{cb^2}{p^2}$. Atque cum ſit $v=\frac{cb^2}{p^2}$ (587), erit etiam $v=c-\frac{f^3}{2a^2}+\frac{f^3}{2y^2}$. Has aequationes per ſequentes caſus examinabimus.

I. Si fuerit $c=\frac{f^2}{2a^2}$, erit $\frac{1}{y^2}=\frac{b^2}{a^2p^2}$ ſeu $p=\frac{by}{a}$. Perſpicitur autem ex hoc angulum CMT, cuius ſinus eſt $\frac{p}{y}$, aequalem fore angulo ad A. Quamobrem curua his caſibus deſcripta erit ſpiralis logarithmica, cuius centrum eſt in ipſo centro virium C. Ita autem corpus mouebitur in hac ſpirali, vt ſemper ſit $v=\frac{f^3}{2y^2}$ ſeu celeritas diſtantiae a centro reciproce proportionalis. Tabula VI. Fig. 6.

Si non fuerit $c=\frac{f^3}{2a^2}$, demittatur ex M in AC perpendicularis MP, et vocetur CP$=x$ atque $x=uy$. Habebitur igitur $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-cb^2-\frac{f^3y^2}{2a^2}+\frac{f^3}{2})}}$ (601). Eſt vero $u$ coſinus anguli ACM ſinu toto exiſtente $=1$. Radio igitur 1 ſi deſcribatur arcus circuli GN, erit GN$=-\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$. Vocetur autem GN$=t$, atque habebitur iſta aequatio $dt=-\frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-cb^2-\frac{f^3y^2}{2a^2}+\frac{f^3}{2})}}$.

II. Sit $c = \frac{f^3}{2b^2}$, erit $dt = -\frac{abdy}{y^2\sqrt{(a^2-b^2)}}$, adeoque $t = C + \frac{ab}{y\sqrt{(a^2-b^2)}}$. Conſtans vero C erit $= -\frac{b}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$, quia euaneſcente $t$ fit $y = a$. Sit autem tangens anguli ad $A = \theta$, eritque $t = \theta(\frac{a}{y} - 1)$ ſeu $y = \frac{\theta a}{1+\theta}$. Vnde ex dato angulo ACM reperitur recta CM, ideoque punctum M in curua quaeſita. Haec curua autem eſt ſpiralis hyperbolica, quam Cel. *Ioh. Bernoulli* pro eodem caſu ſatisfacientem inuenit in Act. Lipſ. 1713.

Si $c$ neque $= \frac{f^3}{2a^2}$, neque $= \frac{f^3}{2b^2}$; ponatur $c = \frac{\delta f^3}{2a^2}$, erit $dt = \frac{-bdy\sqrt{\delta}}{y\sqrt{((\delta-1)y^2+a^2-\delta b^2)}}$. Ponatur $y = \frac{1}{q}$, erit $dt = \frac{bdq\sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta-1+(a^2-\delta b^2)q^2)}}$. Hinc duo oriuntur caſus primarii.

III. Si $a^2 - \delta b^2$ ſit numerus affirmatiuus, pendebit integratio a logarithmis. Erit enim $t = \frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} l \frac{C}{\sqrt{(\delta-1+(a^2-\delta b^2)q^2)} - q\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} = \frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} l \frac{Cy}{\sqrt{((\delta-1)y^2+a^2-\delta b^2)} - \sqrt{(a^2-\delta b^2)}}$. Atque determinata debito modo conſtante C erit $t = \frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} l \frac{y\sqrt{\delta(a^2-b^2)} - y\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{a\sqrt{((\delta-1)y^2+a^2-\delta b^2)} - a\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}$; atque $y =$

$$\frac{2ae^{\frac{t\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{b\sqrt{\delta}}}(\sqrt{\delta(a^2-b^2)(a^2-\delta b^2)} - a^2 + \delta b^2)}{e^{\frac{2t\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{b\sqrt{\delta}}}a^2(\delta-1) - (\sqrt{\delta(a^2-b^2)} - \sqrt{(a^2-\delta b^2)})^2}.$$

IV. Si $\delta > \frac{a^2}{b^2}$, erit $dt = \frac{bdq\sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta-1-(\delta b^2-a^2)q^2)}}$. Integrale vero huius membri eſt $\frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta b^2-a^2)}}$ ductum in arcum circuli, cuius ſinus eſt $q\sqrt{\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1}}$ poſito radio $= 1$.

At-

Atque addita idonea conſtante erit $\frac{1\sqrt{(\delta b^2-a^2)}}{b\sqrt{\delta}}$ = Arcui cuius ſinus eſt $\frac{1}{y}\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})}$ — Arcui cuius ſinus eſt $\frac{1}{a}\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})}$ = Arcui cuius ſinus eſt $\frac{D}{ay}(\sqrt{(a^2-D^2)}-\sqrt{(y^2-D^2)})$ poſito $\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})}=D$. Hinc conſtructio curuae facilis fluit: ſumatur enim arcus GL, qui ad GN habeat rationem vt $\sqrt{(\delta b^2-a^2)}$ ad $b\sqrt{\delta}$. Huius arcus ſinus LR ponatur = R. Erit ergo $Ray = D\sqrt{(a^2-D^2)}-D\sqrt{(y^2-D^2)}$, atque $y=\frac{aDR\sqrt{(a^2-D^2)}-aD^2\sqrt{(1-R^2)}}{a^2R^2-D^2}$. Vnde et conſtructio et aequatio curuae quaeſitae deducitur. In his autem quatuor caſibus, omnia ad problema pertinentia continentur. Q. E. I.

## Corollarium I.

672. Diſtantia celeritates determinans reperitur $=\frac{a^2f\sqrt{f}}{\sqrt{(f^3-2a^2c)}}$. Quare ſi $c=\frac{f^3}{2a^2}$, quo caſu corpus in ſpirali logarithmica mouetur, diſtantia celeritates determinans eſt infinita.

## Corollarium 2.

673. Quia, ſi corpus in ſpirali logarithmica mouetur, eſt $p=\frac{by}{a}$ et $v=\frac{f^3}{2y^2}$, erit tempus, quo arcus AM abſoluitur $=\frac{a^3-ay^2}{f\sqrt{2f(a^2-b^2)}}$. Tabula V. Fig. 5.

## Corollarium 3.

674. Si hoc tempus ponatur T, et coſinus anguli CMT = $i$, erit $y=\sqrt{(a^2-fiT\sqrt{2f})}$. Ex qua aequatione poſt quoduis tempus datum reperitur corporis a centro C diſtantia.

## Corollarium 4.

675. Corpus igitur in ipſum centrum C perueniet tempore $T = \frac{a^2}{fi\sqrt{2f}}$, dum interim reuolutiones infinitas circa C perfecerit.

## Corollarium 5.

676. Si T capiatur maius quam $\frac{a^2}{fi\sqrt{2f}}$, fit $y$ imaginaria. Ex quo ſequitur, poſtquam corpus in C peruenerit, nusquam amplius reperiri, ſed quaſi annihilari.

## Corollarium 6.

Tabula VI. Fig. 4. 677. Si ſit $\delta = \frac{a^2}{b^2}$ ſeu $c = \frac{f^3}{2b^2}$, corpus mouebitur in ſpirali hyperbolica, atque etiam poſt infinitas circa C peractas reuolutiones in ipſum centrum C perueniet tempore quoque finito. Eſt enim tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{2\theta a(a-y)}{f\sqrt{2f}}$, ideoque tempus, quo corpus in C peruenit $= \frac{2\theta a^2}{f\sqrt{2f}}$.

## Corollarium 7.

678. Si $\delta < \frac{a^2}{b^2}$ ſeu $c < \frac{f^3}{2b^2}$, qui erat caſus tertius, corpus in lineis ſpiralibus quoque mouebitur, atque tandem poſt infinitos percurſos gyros in centrum C perueniet. Apparet hoc ex aequatione; nam facto $t = \infty$ demum fit $y = o$.

## Scholion I.

679. Quando eſt $c = \frac{f^3}{2b^2}$, ſpiralis hyperbolica quam corpus deſcribit, hanc habet proprietatem,

tem, vt posito $t = -\theta$ fiat $y = \infty$. Iste igitur radius ex centro C ductus videtur esse curuae ex infinito accedentis asymtotos. At potius curua ab eo perpetuo recedit, neque tamen vltra datum interuallum $\theta a$. Recta ergo ipsi huic radio parallela ab eoque interuallo $\theta a$ distans erit vera asymtotos. Huius praeterea curuae insignis est proprietas, quod ex infinitis circulis concentricis arcus abscindat aequales, ex qua natura et forma curuae magis elucet. Similem quoque proprietatem habent curuae, quae describuntur, si $\delta < \frac{a^2}{b^2}$, simul vero $\delta > 1$. Fit enim $y = \infty$, si capiatur $t = -\frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2 - \delta b^2)}} l \frac{a\sqrt{(\delta - 1)}}{\sqrt{\delta}(a^2 - b^2) - \sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}$. Ex quo perspicitur, si sit $\delta < 1$, locum, quo fit $y = \infty$ fore imaginarium. At si $\delta = 1$, erit $t = -\infty$: curua enim hoc casu orta est spiralis logarithmica. Ceterum omnes hae curuae ita sunt comparatae, vt sint vbique versus C concauae, neque enim ex motus natura usquam habere possunt punctum flexus vel reversionis.

## Corollarium 8.

680. Si est $\delta > \frac{a^2}{b^2}$ seu $c > \frac{f^3}{2b^2}$, curua a corpore descripta non erit amplius spiralis, sed algebraica, si quidem inter algebraicas etiam eae referantur in quarum aequationibus continentur exponentes irrationales.

## Scholion 2.

681. Ad has igitur inueniendas oportet poni $b = a$ (640). Quo facto haec habebitur aequatio

 $dt =$

$dt = \frac{adq\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\sqrt{(1-a^2q^2)}}$. Seu posito $aq=r$, et loco $dt$ valore $\frac{-du}{\sqrt{(1-u^2)}}$, erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{-dr\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\sqrt{(1-r^2)}}$. Hac forma comparata cum $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (605), erit $Z=-r$, $A=1$, $\lambda=\frac{\delta}{\delta-1}$. Habebitur propterea ista aequatio $u=$

$$\frac{(\sqrt{(1-C^2)}-C\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}(\sqrt{(1-r^2)}-r\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}(\sqrt{(1-C^2)}+C\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}(\sqrt{(1-r^2)}+r\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}}{2\sqrt{-1}}$$

Seu $2r\sqrt{-1}=(\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}}(\sqrt{(1-C^2)}-C\sqrt{-1})-(\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}}(\sqrt{(1-C^2)}+C\sqrt{-1})$ (605 et 607). Constans vero C ex hoc determinabitur, quod facto $u=1$ fieri debeat $y=a$, seu $q=\frac{1}{a}$, seu $r=1$. Determinata igitur C erit $2r=(u+\sqrt{(u^2-1)})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}}+(u-\sqrt{(u^2-1)})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}}=\frac{2a}{y}$, seu $u=\frac{1}{2y^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}}((a+\sqrt{(a^2-y^2)})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}+(a-\sqrt{(a^2-y^2)})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}})=\frac{x}{y}$. Quae est aequatio pro curua quaesita.

## Exemplum I.

682. Sit $\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}=2$, seu $\delta=\frac{4}{3}$, atque $c=\frac{2f^6}{3a^2}$. Erit $2xy=(a+\sqrt{(a^2-y^2)})^2+(a-\sqrt{(a^2-y^2)})^2=4a^2-2y^2$. Ponatur applicata PM$=z$, fiet $x\sqrt{(x^2+z^2)}=2a^2-x^2-z^2$, et sumendis quadratis $o=4a^4-4a^2x^2-4a^2z^2+x^2z^2+z^4$, siue $x=\frac{2a^2-z^2}{\sqrt{(4a^2-z^2)}}$. Haec

Haec curua igitur ad inſtar parabolae progreditur, ſed habet aſymtoton rectae AC parallelam et ab ea interuallo $2a$ diſſitam, quam nunquam attingit.

## Exemplum 2.

683. Sit $\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}=3$, ſeu $\delta=\frac{9}{8}$ et $c=\frac{9f^3}{16a^2}$ Oritur ergo $2xy^2=(a+\sqrt{(a^2-y^2)})^3+(a-\sqrt{(a^2-y^2)})^3=8a^3-6ay^2$. Atque inducta applicata $PM=z$, habebitur $x^3=4a^3-xz^2-3ax^2-3az^2$. Haec curua ordinis tertii pertinet ad ſpeciem 41 in enumeratione a *Neutono* facta.

## Scholion 3.

684. Innumerabiles aliae inueniri poſſunt curuae algebraicae, quae a corpore proiecto in hac hypotheſi deſcribuntur, ſi ponatur $\delta=\frac{m^2}{m^2-1}$, denotante $m$ numerum quemcunque rationalem vnitate maiorem ne fiat $\delta$ negatiuum. Hae autem tres hypotheſes pertractatae, quibus vis centripeta primo diſtantiis, ſecundo reciproce quadratis diſtantiarum et tertio reciproce cubis diſtantiarum eſt poſita proportionalis, ſunt ſolae, quae deducunt ad curuas vel algebraicas vel a circuli aut hyperbolae quadraturis pendentes; ſi quidem loco P potentia ipſius $y$ ſubſtituatur. Quanquam autem in aliis poteſtatibus ipſius $y$ loco P ſubſtitutis aequatio pro curua deſcripta non poteſt ab irrationalitate liberari, et hanc ob rem neque algebraica neque a quadratura circuli vel hyperbolae pendens eſſe poteſt; tamen dantur caſus ſpeciales, quibus curua quaeſita fit al-

ge-

gebraica. Namque quemadmodum linea recta et circulus in omnibus hypothesibus satisfacere possunt; ita etiam quandoque aliae curuae algebraicae reperiuntur. Has autem quomodo inueniri oporteat in sequenti propositione declarabimus.

## PROPOSITIO 83.
### Problema.

685. *Existente vi centripeta vt potestas distantiarum quaecunque, inuenire casus speciales, quibus corpus certo quodam modo proiectum in linea algebraica moueatur.*

### Solutio.

Manentibus omnibus, vt hactenus, pro curua quaesita inuenta est haec aequatio $\frac{du}{\surd(1-u^2)} = \frac{bdy\surd c}{y\surd(cy^2-cb^2-y^2Y)}$ (601). Nostro autem casu est $P = \frac{y^n}{f^n}$, denotante $f$ distantiam, in qua vis centripeta grauitati aequatur. Hinc erit $Y = \int Pdy = \frac{y^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Deinde quia curuas algebraicas requirimus, ponimus $b = a$ (640). His substitutis erit $\frac{du}{\surd(1-u^2)}$
$= \frac{ady\surd cf^n(n+1)}{y\surd((n+1)cf^n(y^2-a^2)-y^2(y^{n+1}-a^{n+1}))}$. Sit distantia celeritates determinans $k$, erit $c$ $= \frac{k^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Hac igitur loco $c$ introducta erit

$\frac{du}{\surd(1-u^2)}$

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{a\,dy\sqrt{(k^{n+1}-a^{n+1})}}{y\sqrt{(a^{n+3}-a^2k^{n+1}+k^{n+1}y^2-y^{n+3})}}.$$

Patet hinc si $k=a$, quo casu fit $c=o$, fore $u=$ const. $=1$, ideoque $x=y$, qui est casus, quo corpus recta descendit ad centrum. Si $k$ est infinita, erit $c$ quoque infinita, quoties $n+1$ est numerus affirmatiuus. Hoc igitur casu corpus etiam in recta progredi debebit, quia vis finita corporis infinita celeritate moti directionem non valet mutare. Ponamus ergo $n+1$ esse numerum negatiuum $=-m$, seu $n=-m-1$, fiet

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{y^{\frac{m-4}{2}}dy\sqrt{(k^m-a^m)}}{\sqrt{(a^{m-2}k^m+a^my^{m-2}-k^my^{m-2}-a^{m-2}y^m)}}.$$

Fiat $k$ infinite magna, erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{y^{\frac{m-4}{2}}dy}{\sqrt{(a^{m-2}-y^{m-2})}}$ euanescentibus reliquis terminis; et ponatur $y^{m-2}=q^2$, erit $y=q^{\frac{2}{m-2}}$. Hacque facta substitutione oritur sequens aequatio $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{2dq}{(m-2)\sqrt{(a^{m-2}-q^2)}}$. Qua formula comparata cum vniuersali $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (604), erit $\lambda=\frac{2}{m-2}$, $A=a^{\frac{m-2}{2}}$ et $Z=q=y^{\frac{m-2}{2}}$. Emerget igitur ista aequatio algebraica pro curua quaesita, $2y^{\frac{m-2}{2}}\sqrt{-1}$ $=(\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\frac{m-2}{2}}(\sqrt{a^{m-2}-C^2})+C\sqrt{-1})-$

$(\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\frac{m-2}{2}}(\sqrt{(a^{m-2}-C^2)}-C\sqrt{-1})$ (607). Constans C ex hoc determinatur, quod facto $u=1$ fieri debeat $y=a$. Hanc ob rem erit $2y^{\frac{m-2}{2}}=a^{\frac{m-2}{2}}((u-\sqrt{(u^2-1)})^{\frac{m-2}{2}}+(u+\sqrt{(u^2-1)})^{\frac{m-2}{2}})$. Quoties igitur $m$ est numerus rationalis affirmatiuus, inuenitur curua algebraica, quam corpus normaliter proiectum existente distantia celeritates determinante infinita, describet. Q. E. I.

## Corollarium 1.

686. Sumendis quadratis obtinebitur $4y^{m-2}-2a^{m-2}=a^{m-2}((u+\sqrt{(u^2-1)})^{m-2}+(u-\sqrt{(u^2-1)})^{m-2})$ seu ob $m=-n-1$, haec aequatio $4y^{-n-3}-2a^{-n-3}=a^{-n-3}((u+\sqrt{(u^2-1)})^{-n-3}+(u-\sqrt{(u^2-1)})^{-n-3})$.

## Corollarium 2.

687. Oportet esse $m$ numerum affirmatiuum nihilo maiorem. Nam si esset $m$ vel $=o$ vel numerus negatiuus, celeritas corporis foret infinita, et curua propterea linea recta.

## Corollarium 3.

688. Si sit $n=-2$, habebitur ista aequatio $\frac{4a}{y}-2=2u=\frac{2x}{y}$, seu $2a=x+y$. Quae posita applicata PM, $\sqrt{(y^2-x^2)}=z$ abit in hanc aequationem $z^2=4a^2-4ax$, pro parabola centro virium in foco posito, vt iam inuenimus (647).

Co-

## Corollarium 4.

689. Si $n = -3$ seu $m = 2$, qui est casus in praecedente propos. tractatus, erit $2y^{\frac{m-2}{2}} = 2a^{\frac{m-2}{2}}$ seu $y = a$. Curua ergo quam corpus describet erit circulus, in cuius centrum ipsum centrum virium incidit.

## Scholion 1.

690. Si $n$ est numerus impar, erit $m$ par ideoque $\frac{m-2}{2}$ integer. His igitur casibus formula in solutione problematis inuenta vti coueniet. At si $n$ fuerit par, formula (686) quadratis sumtis producta debet adhiberi. Statim enim vtroque casu ad aequationem rationalem inter $x$ et $y$ peruenitur vt in sequentibus exemplis apparebit.

## Exemplum 1.

691. Attrahat centrum in ratione reciproca quadruplicata distantiarum, et corpus normaliter proiiciatur existente distantia celeritates determinante infinita; curua, quam corpus describit erit algebraica sequens. Ob $n = -4$ erit $4y - 2a = 2au = \frac{2ax}{y}$, seu $2y^2 = a(y + x)$. Introducta vero applicata $z = \sqrt{(y^2 - x^2)}$ erit $2x^2 + 2z^2 = ax + a\sqrt{(x^2 + z^2)}$, quae aequatio est pro curua ordinis quarti.

## Exemplum 2.

692. Sit vis centripeta reciproce in quintuplicata distantiarum ratione, seu $n = -5$ et $m = 4$.

Habebitur ergo $2y = 2au = \frac{2ax}{y}$, atque $yy = ax = x^2 + z^2$, quae est aequatio ad circulum centro virium in eius peripheria posito. Casum hunc habet *Neutonus* in Princ. Lib. 1. Prop. VII.

## Exemplum 3.

693. Sit $n = -7$, seu $m = 6$, erit $2y^2 = 4a^2u^2 - 2a^2$ seu $y^4 = 2a^2x^2 - a^2y^2$. Posita applicata PM $= z$, prodibit ista aequatio $(x^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - a^2z^2$, pro linea ordinis quarti, in qua centrum virium quoque in peripheriam incidit.

## Scholion 2.

694. De figuris, quas corpora a datis viribus centripetis sollicitata describunt, hic plura addere operae non esset pretium, cum in Physica et Astronomia aliae virium centripetarum hypotheses, nisi quae quadratis distantiarum reciproce est proportionalis, vsum habeant nullum. Quando tamen in Astronomia corpus a pluribus huiusmodi viribus sollicitatum considerari debet, quarum vna prae reliquis maximam vim exercet, haec prout res postulat ne reliquas in computum ducere opus sit, aliquantum vel augetur vel diminuitur, quo saltem quam fieri potest proxime motus illius corporis cognoscatur. His igitur casibus curua, quam corpus describit, non multum discrepabit ab ellipsi. Hanc ob rem Astronomi hanc curuam ad instar ellipsis contemplari solent, quae autem non est fixa sed mobilis, ita vt corpus in ellipsi circa focum reuol-

uoluente moueri concipiant. Ex hocque oritur mobilitas orbitarum planetarum, qua lineae absidum perpetuo in alium situm transferuntur. Nos vero quo propius ad veritatem accedamus praeter mobilitatem axis ellipsis etiam speciem eius tanquam variabilem considerabimus. Ita igitur hac in re versabimur, vt de quolibet elemento curuae, quam corpus describit, determinemus, cuiusnam ellipsis focum in centro virium habentis sit portio, ex quo tam positio quam species istiusmodi ellipsium innotescet. Omnes autem hae ellipses alterutrum focum in ipso centro virium positum habebunt, quia ad id punctum corpus perpetuo retrahitur.

## PROPOSITIO 84.

### Problema.

695. *Si vis centripeta non multum discrepat a ratione reciproca duplicata distantiarum; determinare motum ellipsis, eiusque continuam speciei mutationem, atque corporis motum in ista mutabili ellipsi.* Tabula VI. Fig. 5.

### Solutio.

Sit centrum virium C, habeatque corpus in M secundum directionem MT celeritatem altitudini $v$ debitam. Ponatur vis centripeta in M agens $=P$, distantia $CM=y$ et sinus anguli $CMT=s$. Iam perspicuum est, quamcunque legem teneat P, semper tamen aequari posse huic formae $\frac{f^2}{y^2}$, dummodo $f$ non

non quantitatem constantem vt hactenus, sed variabilem denotet. Erit ergo $f^2 = Py^2$. Quia autem dum corpus elementum $Mm$ percurrit $f$ constans manet, poterit determinari ellipsis, cuius focus est C et elementum $Mm$, in qua corpus, si $f$ perpetuo maneret constans, moueretur. Sit igitur AC huius ellipsis axis transuersi positio, erit tangens anguli $MCA = \frac{2svy\surd(1-ss)}{ff-2ssvy}$ (656), quae ergo erit $= \frac{2sv\surd(1-ss)}{Py-2s^2v}$. At latus rectum erit $= \frac{4s^2v}{P}$ et axis transuersus $\frac{Py^2}{Py-v}$ (cit.). Ex centro C demittatur perpendiculum CT in tangentem MT, quod ponatur $= p$, erit $s = \frac{p}{y}$. Atque vbi perpendiculum in tangentem est $= h$, quod fiat in G posita $CG = a$, sit corporis celeritas debita altitudini $c$, ex quo erit $v = \frac{ch^2}{p^2}$ (589). Tangens vero $MT = \surd(y^2 - p^2)$ ponatur breuitatis gratia $= t$. His positis erit tang. ang. $MCA = \frac{2ch^2t}{Py^3p - 2ch^2p}$ et latus rectum $= \frac{4ch^2}{Py^2}$, transuersum vero $= \frac{Py^2p^2}{Pyp^2 - ch^2}$. Praeterea vero est ex natura attractionis $Pdy = \frac{2ch^2dp}{p^3}$ (587). Ex qua aequatione $p$ in $y$ poterit determinari, adeoque tota ellipsis ex solo $y$, et $c$ et $h$. Sit iam CE linea fixa, cum qua angulus, quem recta CM constituit, ex natura curuae potest definiri. Ab hoc igitur angulo, si auferatur angulus MCA, habebitur inclinatio lineae absidum AC in rectam fixam CG. Motus autem corporis ex cognita celeritate, $v = \frac{ch^2}{p^2}$ facile innotescet. Q. E. I.

Scho-

## Scholion 1.

696. Ellipsis hoc modo determinata merito potest vocari ellipsis curuam osculans ad similitudinem circulorum osculatorum, quibus curuedines linearum mensurantur. Haec vero consideratio non est pure geometrica, sed ad hanc ellipsin osculantem inueniendam praeter curuae naturam nosse oportet celeritatem corporis et vim centripetam.

## Corollarium 1.

697. Si $t$ euanescit linea absidum AC seu positio axis ellipsis osculantis incidit in radium CM, ob euanescentem angulum MCA.

## Corollarium 2.

698. Si fuerit $P = \frac{2cb^2}{y^3}$, fiet angulus MCA rectus: Hoc igitur casu erit vis centripeta vt cubus distantiae reciproce. Quare posito $P = \frac{f^2}{y^3}$, erit $c = \frac{f^2}{2b^2}$. Curua autem, quae tum a corpore describitur, est spiralis hyperbolica (679). Pro hac igitur curua linea absidum perpetuo est normalis cum radio MC. At latus rectum ellipsis osculantis erit $= 2y = 2$MC.

## Corollarium 3.

699. Si fuerit $P = \frac{f^n}{y^n}$, erit $\int P dy = -\frac{f^n}{(n-1) y^{n-1}} = C - \frac{cb^2}{p^2}$. Quia vero facto $y = a$ fieri debet $p = b$ erit $C = c + \frac{f^n}{(n-1) a^{n-1}}$. Hinc inuenietur

$p^2 =$

$p^2 = \frac{(n-1)cb^2a^{n-1}y^{n-1}}{(n-1)ca^{n-1}y^{n-1}+f^n(a^{n-1}-y^{n-1})}$. Latus rectum ergo ellipsis osculantis erit $\frac{4cb^2y^{n-2}}{f^n}$. Latus trausuersum et ang. MCA ex his etiam in $y$ determinabuntur.

## Corollarium 4.

700. Si fuerit $P = \frac{cb^2}{yp^2}$, ellipsis osculans semper erit parabola. Fiet autem hoc valore loco P in aequatione $Pdy = \frac{2cb^2dp}{p^3}$ substituto $p^2 = \frac{b^2y}{a}$. Et consequenter $P = \frac{ac}{yy}$. Hoc autem casu curua descripta haec ipsa est parabola ob $f^2 = ac$ (647).

## Scholion 2.

701. Non confundenda est haec ellipsium osculantium doctrina cum motu corporum in orbibus mobilibus, de quo *Neutonus* aliique post eum tractauerunt. Hoc enim loco determinauimus, cuiusnam ellipsis portio sit quoduis elementum curuae a corpore descriptae. At, quando de orbibus mobilibus sermo erit, inuestigabitur vis centripeta efficiens, vt corpus in data curua circa centrum virium reuoluente moueatur.

## PROPOSITIO 85.

## Theorema.

Tabula VI. Fig. 6. 702. *Si corpus vtcunque proiectum attrahatur ad quotcunque centra virium* A, B, C, *quorum singulorum vires sint distantiis ab ipsis proportionales:*

*les: corpus eodem modo mouebitur ac si ad punctorum* A, B, C, *commune centrum grauitatis* O *attraheretur pariter in ratione distantiarum simplici.*

## Demonstratio.

Positis centrorum A, B, C, viribus, quas in distantia 1 exercent, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, respectiue, sit *ac* directio motus, quam corpus in M habet, ideoque tangens curuae EMF descriptae in M. At sit O centrum grauitatis corporum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, in punctis A, B, C positorum, et in O concipiatur vis distantiis directe proportionalis, quae in distantia 1, attrahat vi $=\alpha+\beta+\gamma$. His positis corpus in M attrahetur ad A vi AM.$\alpha$, ad B vi BM.$\beta$, et ad C vi CM.$\gamma$. His autem viribus simul agentibus demonstrandum est aequalem esse vim OM.$(\alpha+\beta+\gamma)$ corpus ad O trahentem. Ad hoc ostendendum ex punctis A, B, C et O in tangentem *ac* demittantur perpendicula A*a*, B*b*, C*c* et O*o*. Hoc modo quaelibet vis in normalem et tangentialem resoluetur, eritque summa normalium ex viribus ad A, B, C tendentibus ortarum $=\alpha.\,Aa+\beta.\,Bb+\gamma.\,Cc$, summa vero tangentialium erit $=-\alpha.\,Ma+\beta.\,Mb+\gamma.\,Mc$. At quia O est centrum grauitatis corporum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in A, B, C sitorum, liquet ex staticis fore $\alpha.\,Aa+\beta.\,Bb+\gamma\,Cc=(\alpha+\beta+\gamma).\,Oo$ et $-\alpha.\,Ma+\beta.\,Mb+\gamma.\,Mc=(\alpha+\beta+\gamma)\,Mo$. Ex quo perspicitur viribus $\alpha$.AM, $\beta$.BM, $\gamma$.CM coniunctis aequiualere vim $(\alpha+\beta+\gamma)$OM. Q. E. D.

## Corollarium 1.

703. Corpus igitur in hac hypothesi ellipsin describet, cuius centrum in ipso centro grauitatis O est positum (631). Omnes enim vires idem efficiunt, quod vnica in O posita et attrahens in ratione directa distantiarum.

## Corollarium 2.

704. Manifestum quoque est, quotcunque etiam sint huiusmodi virium centra in ratione distantiarum attrahentia; semper tamen corpus in ellipsi motum iri, omnino ac si ad vnicum virium centrum in eorum communi centro grauitatis positum attraheretur.

## Scholion 1.

705. Demonstratio porro pari quoque modo succedit, si illa quotcunque virium centra non sint in eodem plano posita, quemadmodum ex staticis principiis cuique perspectum esse potest. Hincque intelligitur, corpus nihilominus perpetuo in eodem plano moueri debere, etiamsi centra virium in diuersissimis planis sint dispersa.

## Scholion 2.

706. Si centra virium in alia ratione quacunque praeter simplicem distantiarum ad se trahant, huiusmodi reductio ad vnicum virium centrum locum prorsus non habet, atque motus corporis calculo vix, re ipsa autem ne vix quidem potest

test determinari. His igitur in casibus ad approximationes erit confugiendum, quae pro variis conditionibus diuersimode sunt instituendae. Atque hanc ob rem *Neutonus* verum lunae motum, qui ex duplici attractione oritur, determinare non suscepit, sed vero tantum proxime hoc praestare conatus est. Ad hoc autem opus est peculiaribus considerationibus, atque inuersa methodus est adhibenda, qua ex curua, quam corpus describit cognita, ad vires attrahentes receditur. Quamobrem, quae subsidia ad hoc institutum afferri possunt, ea in sequentibus, cum inuerso ordine vim sollicitantem tanquam incognitam sumus inuestigaturi, explicabimus. Ad hanc igitur tractationem progrediemur quae duplici modo institui potest. Primo enim praeter curuam descriptam vt cognita sumetur potentiae sollicitantis directio in singulis locis, ex hisque quantitas potentiae sollicitantis et ipse corporis motus determinabitur. In altera contemplatione curua et corporis motus in ea pro datis accipientur, ex quibus potentiam sollicitantem erui oportebit.

# PROPOSITIO 86.
## Problema.

707. *Inuenire legem vis perpetuo dorsum secundum rectas* MP *inter se parallelas tendentis, quae faciat, vt corpus in data curua* AM *moueatur; atque determinare corporis in singulis locis* M *celeritatem.* Tabula VII. Fig. 1.

## Solutio.

Per rectas MP ducatur normali AP, et vocetur AP, $x$ et PM, $y$. Ponatur curua AM$=s$, et radius osculi MR in M$=r$, erit $r=\frac{dsdy}{ddx}$ sumto $ds$ pro constante. Porro debita sit corporis in M celeritas altitudini $v$, et vis corpus in M trahens secundum MP ponatur P. Ex his habebuntur duae istae aequationes $dv=-Pdy$ et $Prdx=2vds$ (547), ex quibus si cognita esset $v$ statim appareret quantitas ipsius P. Eliminetur igitur P ad $v$ inueniendum ex hac aequatione $rdxdv=-2vdsdy$, quae posito loco $r$ eius valore $\frac{dsdy}{ddx}$ abit in hanc $-\frac{dv}{v}=\frac{2ddx}{dx}$, quae integrata dat $lC-lv=l\frac{dx^2}{ds^2}$. Cognita autem sit celeritas in puncto A, eaque debeatur altitudini $c$, atque sit cosinus anguli MAP seu valor ipsius $\frac{dx}{ds}$ incidente puncto M in A$=\lambda$. Hinc ergo erit $lC=lc+2l\lambda$ et consequenter $v=\frac{\lambda^2 c ds^2}{dx^2}$, vnde corporis in singulis locis M celeritas innotescit. Vis autem sollicitans P reperietur $=\frac{2\lambda^2 c ds^3}{rdx^3}=\frac{2\lambda^2 c ds^2 ddx}{dx^3 dy}$. Siue sumto $dx$ pro constante, quo casu est $r=\frac{ds^3}{-dxddy}$, erit $P=\frac{-2\lambda^2 c ddy}{dx^2}$. Tempus denique, quo arcus AM percurritur erit $=\int\frac{ds}{\sqrt{v}}=\frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$. Q. E. I.

## Corollarium I.

708. Quaecunque ergo sit vis sollicitans, corpus perpetuo aequabiliter secundum horizontem progreditur, ob tempus per AM proportionale ipsi AP, vti iam supra est obseruatum (579).

Co-

## Corollarium 2.

709. Si ex R in rectam MP productam demittatur perpendicularis RS, et ex S in MR quoque perpendiculum ST, atque denique tertium perpendiculum TV ex T in MS: erit $MV = \frac{rdx^3}{ds^3}$. Quare vis sollicitans P se habebit ad vim grauitatis vt $2\lambda^2 c$ ad MV, seu P est reciproce vt MV.

## Corollarium 3.

710. Si angulus ad A est rectus, fiet $\lambda = o$. Quo casu corpus directe sursum ascendere debebit. At si tantum sit $\lambda$ infinite paruum atque $c$ infinite magnum, ita vt $2\lambda^2 c$ finitum habeat valorem, corpus in huiusmodi curua vtique moueri poterit.

## Exemplum 1.

711. Sit curua AM circulus, cuius diameter posita sit in axe AP, et radius $= a$. Erit itaque $r = a$, et $ds : dx = a : y$. Hanc ob rem fiet $P = \frac{2\lambda^2 a^2 c}{y^3}$, et $v = \frac{\lambda^2 a^2 c}{y^2}$. Vis ergo corpus in M deorsum trahens est reciproce, vt cubus applicatae MP et celeritas reciproce vt haec ipsa applicata. Altitudo vero generans celeritatem in summo peripheriae puncto, vbi fit $y = a$ est $= \lambda^2 c$.

## Exemplum 2.

712. Sit curua AMC parabola, cuius axis CB est verticalis et parameter $= a$. Ducatur horizontalis MQ, et ponatur $CQ = t$ et $MQ = z$, erit $z^2 = at$. Praeterea vero erit $dx = -dz$ et $dy = -dt$, Tabula VII. Fig. 2.

 et

et vt ante $\sqrt{(dt^2+dz^2)}=ds$. Quo circa fiet $v=\frac{\lambda^2 c ds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2\lambda^2 c ddt}{dz^2}$ Debita ſit celeritas in puncto ſummo C altitudini $b$, eritque ob $ds=dz$ in C, $\lambda^2 c=b$, ideoque $v=\frac{bds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2bddt}{dz^2}$ ſumto $dz$ pro conſtante. Ex aequatione vero $z^2=at$ fit $dt=\frac{2zdz}{a}$ et $ddt=\frac{2dz^2}{a}$, atque $ds^2=dz^2(1+\frac{4z^2}{a^2})$. Conſequenter inuenitur $v=b(\frac{a^2+4z^2}{a^2})=b(\frac{a+4t}{a})$ et $P=\frac{4b}{a}$. Ex quo apparet potentiam deorſum tendentem, quae efficit, vt corpus in hac parabola progrediatur eſſe conſtantem. Quae igitur, ſi aequalis ſit grauitati $=1$, fiet $b=\frac{a}{4}=$ diſtantiae foci a vertice. Quae conueniunt cum ſupra inuentis (454 et ſqq.).

## Exemplum 3.

Tabula VII. Fig. 3.

713. Sit curua MAN hyperbola centro C deſcripta habens axem CP verticalem. Ponatur ſemiaxis transuerſus $AC=a$, et ſemi coniugatus $=e$, atque $CP=t$ ac $PM=z$, ſitque inſuper altitudo celeritati quam corpus in A habet, debita $=b$, erit vt ſupra pro parabola fecimus, $v=\frac{bds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2bddt}{dz^2}$ ſumto $dz$ conſtante. Eſt vero ex natura hyperbola $a^2z^2=-a^2e^2+e^2t^2$, ex qua fit $dt=\frac{a^2zdz}{e^2t}$ et $ddt=\frac{a^2dz^2}{e^2t}-\frac{a^2zdzdt}{e^2t^2}=\frac{a^2e^2t^2dz^2-a^4z^2dz^2}{e^4t^3}=\frac{a^4dz^2}{e^2t^3}$. Conſequenter erit $P=\frac{2a^4b}{e^2t^3}$, ſeu potentia corpus deorſum trahens vbique in M proportionalis eſt reciproce cubo diſtantiae ML puncti M ab horizontali LC per centrum C ducta. Porro erit $\frac{ds^2}{dz^2}=\frac{e^4t^2+a^4z^2}{e^4t^2}=\frac{(a^2+e^2)t^2-a^4}{e^2t^2}$. Atque praeterea habebitur $v=\frac{b(a^2+e^2)t^2-a^4b}{e^2t^2}$.

PRO-

# PROPOSITIO 87.
## Problema.

714. *Data curua AMB vna cum centro virium C inuenire legem vis centripetae, quae faciat, vt corpus in hac curua libere moueatur, vt et celeritatem corporis in loco quouis M.* Tabula VII. Fig. 4.

## Solutio.

Quia curua AMB vna cum puncto C est data, quaeratur aequatio inter distantiam MC cuiusque curuae puncti M a centro C et perpendiculum CT, quod ex C in tangentem MT demittitur. Quare posita $CM = y$ et $CT = p$ habebitur inter $p$ et $y$ aequatio. Iam sit corporis in dato loco A celeritas debita altitudini $c$, atque perpendiculum ex C in tangentem in A demissum $= b$. Eorum vero, quae sunt incognita, vocetur altitudo debita celeritati in $M = v$, et vis centripeta in $M = P$. His positis erit $v = \frac{cb^2}{p^2}$ (589), atque $P = \frac{2cb^2dp}{p^3dy}$ (592). Vel posito radio osculi in $M = r$ erit $P = \frac{2cb^2y}{p^3r}$ (592). Q. E. I.

## Corollarium 1.

715. Tempus etiam, quo corpus quem vis Arcum AM absoluit, erit $= \frac{2\,ACM}{b\sqrt{c}}$ seu erit proportionale areae ACM (588).

## Corollarium 2.

716. Quia $cb^2$ est quantitas constans, erit vis centripeta in puncto quouis M proportionalis huic va-

valori $\frac{dp}{p^3 dy}$ seu huic $\frac{y}{p^3 r}$. Celeritas vero $Vv$ proportionalis est reciproce perpendiculo CT in tangentem MT demisso (589).

## Exemplum I.

717. Sit curua data ellipsis, et centrum virium C in ipso eius centro positum. Vocetur eius semi axis transuersus, $a$ et semiaxis coniugatus, $b$ erit ex natura ellipsis $p = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2-y^2)}}$. Habebitur ergo $dp = \frac{abydy}{(a^2+b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, ideoque $\frac{dp}{p^3 dy} = \frac{y}{a^2 b^2}$. Quocirca prodibit vis centripeta $P = \frac{2cb^2 y}{a^2 b^2}$, quae igitur proportionalis est distantiae corporis a centro.

## Exemplum 2.

718. Sit curua data iterum ellipsis, at centrum virium C in eius alterutro foco positum. Ponatur eius axis transuersus $=$A et latus rectum $=$L, eritque ex natura ellipsis $4pp = \frac{ALy}{A-y}$. Differentiando ergo fit $8pdp = \frac{A^2 L dy}{(A-y)^2}$. Quia vero est $16p^4 = \frac{A^2 L^2 y^2}{(A-y)^2}$ erit $\frac{dp}{2p^3} = \frac{dy}{Ly^2}$, et consequenter $P = \frac{4cb^2}{Ly^2}$. Vis igitur centripeta reciproce erit proportionalis quadrato distantiae corporis a centro virium C.

## Exemplum 3.

719. Sit curua spiralis logarithmica, et centrum virium in eius centro positum; erit $p = ny$ et $\frac{dp}{p^3 dy} = \frac{1}{n^2 y^3}$, ideoque $P = \frac{2cb^2}{n^2 y^3}$. Quare vis centripeta erit reciproce vt cubus distantiae corporis a centro.

PRO-

# PROPOSITIO 88.

## Theorema.

720. *Vis tendens ad centrum* C, *quae facit, vt corpus in data curua* AM *moueatur, se habet ad vim tendentem ad aliud centrum* c, *quae facit, vt corpus in eadem curua et eodem tempore periodico moueatur, vt cubus rectae* cV *ex* c *ad tangentem* TM *parallele rectae* CM *ductae, ad solidum ex recta* cM *in quadratum rectae* CM. Tabula VII, Fig. 5.

## Demonstratio.

Sit corporis celeritas in dato puncto A, cum corpus circa centrum virium C reuoluitur debita altitudini $c$, et perpendiculum ex C in tangentem in A demissum $=h$. At cum corpus circa centrum virium $c$ mouetur, sit celeritas in A debita altitudini $\gamma$, et perpendiculum ex centro $c$ in tangentem in A demissum $=\theta$. Quia autem tempora periodica circa vtrumque virium centrum sunt aequalia erit $h\sqrt{c} = \theta\sqrt{\gamma}$ seu $ch^2 = \gamma\theta^2$ (715). Ex centro C et $c$ porro in tangentem in M demittantur perpendicula CT et $ct$, sitque radius osculi in M$=r$. His positis erit vis centripeta in M ad centrum C tendens, quam vocemus $P = \frac{2ch^2.CM}{r.CT^3}$. Atque vis centripeta in M ad centrum $c$ tendens, quam vocemus $\Pi = \frac{2\gamma\theta^2.cM}{r.ct^3}$ (714). Quamobrem ob $ch^2 = \gamma\theta^2$ erit $P:\Pi = \frac{CM}{CT^3} : \frac{cM}{ct^3}$. Ducta autem $c$V parallela rectae CM erit, ob triangula TCM et $tc$V similia, CT : $ct$ $=$ CM : $c$V. Hanc ob rem erit $P:\Pi = \frac{1}{CM^2} : \frac{cM}{cV^3} = cV^3 : cM.CM^2$. Q. E. D.

 Co-

## Corollarium 1.

721. In eodem puncto M erit celeritas corporis, dum ad virium centrum C attrahitur ad celeritatem, dum ad alterum centrum $c$ attrahitur, reciproce vt CT ad $ct$, siue directe vt $c$V ad CM. Sequitur hoc ex eo, quod est $cb^2 = \gamma\theta^2$.

## Corollarium 2.

722. Si tempora periodica non sint aequalia, sed sint inter se vt T ad $t$; erit $T:t = \frac{1}{b\sqrt{c}} : \frac{1}{\theta\sqrt{\gamma}}$ seu $cb^2 : \gamma\theta^2 = t^2 : T^2$. Consequenter erit $P : \Pi = t^2 . cV^3 : T^2 . cM . CM^2$. Seu vires P et $\Pi$ erunt in ratione composita ex ratione in theoremate assignata, et inuersa duplicata temporum periodicorum.

## Corollarium 3.

723. Eodem hoc casu, quo tempora periodice sunt inaequalia, erit celeritas in M centro virium in C posito, ad celeritatem in M centro virium in $c$ posito in ratione reciproca composita ex ratione perpendiculorum CT et $ct$ et ratione temporum periodorum $T : t$.

## Scholion 1.

724. Propositionem hanc *Neutonus* deduxit ex Lib. I. prop. VII. in coroll. 3. Princ. eaque vtitur ad inueniendam vim centripetam tendentem ad punctum quodcunque ex cognita vi ad aliud quodpiam centrum trahente. Nos hic vsum eius in vnico exemplo sequente ostendemus.

Ex-

## Exemplum.

725. Sit curua data circulus $AMc$, alterumque centrum virium positum sit in ipso circuli centro C. Vis igitur centripeta P ad C tendens vbique erit constans, dicaturque $g$. Ex hac quaeratur vis ad centrum virium $c$ in peripheria situm tendens $\Pi$, faciensque, vt corpus eodem tempore periodico in circulo moueatur. Demittatur ergo ex $c$ in tangentem MV perpendiculum CV, quod ex natura circuli simul parallelum erit rectae CM. Quamobrem erit $g:\Pi = cV^3 : cM.CM^2$, ideoque $\Pi = \frac{g.cM.CM^2}{cV^3}$. Ducatur recta AM erunt triangula $cVM$, $cMA$ ob ang. $cMV = cAM$, similia; et propterea $cV : cM = cM : cA$. Habetur ergo $cV = \frac{cM^2}{2CM}$, ex quo fit $\Pi = \frac{8g.CM^5}{cM^5}$. Est igitur haec vis $\Pi$ reciproce vt potestas quinta distantia $Mc$ corporis a centro virium $c$, vt iam supra (692) est inuentum. Tabula VII. Fig. 6.

## Corollarium 4.

726. Sit celeritas corporis in peripheria circuli circa centrum C reuoluentis debita altitudini $c$, et celeritas corporis in M circa centrum virium $c$ reuoluentis debita altitudini $v$. Eritque $\sqrt{c} : \sqrt{v} = cV : CM = cM^2 : 2.CM^2$ (721) seu $v = \frac{4c.CM^4}{cM^4}$. Quamobrem celeritas corporis circa centrum $c$ reuoluentis erit vbique reciproce vt quadratum distantiae eius ab $c$.

## Corollarium 5.

727. Quia centro virium in centro circuli C existente, est $b = y = p = r =$ radio CM; erit $P = g = \frac{2c}{CM}$ (592). Hanc ob rem fiet posito $\Pi = \frac{fs}{CM^3}$, $g = \frac{fs}{8.CM^3}$, et $c = \frac{fs}{16.CM^4}$. Ideoque $v = \frac{fs}{4.CM^4}$.

## Scholion 2.

728. In his propositionibus posuimus curuam, quam corpus describit, absolute esse datam et aequationem pro ea haberi. Sed dantur etiam casus, quibus curua ipsa quam corpus describit non datur, sed ex certis conditionibus ad ipsum motum spectantibus ante debet inueniri, quam lex vis centripetae potest determinari. Hucque pertinent, quae passim tradita sunt de motu corporum in orbibus mobilibus, qua de re igitur in sequenti propositione tractabimus.

# PROPOSITIO 89.

## Problema.

Tab. VIII. Fig. 1. 729. *Si orbita* (A) (M) (B) *vtcunque reuoluatur circa centrum virium* C; *oportet definiri vim centripetam perpetuo ad* C *tendentem, quae faciat vt corpus in hac orbita mobili moueatur.*

## Solutio.

Dum orbita ex situ (A) (M) (B) in situm AMB peruenit, ponatur corpus interea ex (A) in M peruenisse, ita vt corpus interea in orbita angulum (A)C(M)=ACM, reuera autem angulum (A)CM =(A)

$=(A)C(M)+(A)CA$ descripserit. Existente initio corpore in (A) sit eius celeritas vera non ea, quam in orbita habet, debita altitudini $c$, et recta C(A), quae tam in orbitam quam in veram curuam, in qua corpus mouetur, sit perpendicularis $=a$. Porro sit celeritas corporis in M, quatenus in orbita mouetur, debita altitudini $u$, et vera corporis celeritas in M debita altitudini $v$. At celeritas angularis in orbita sit ad veram celeritatem angularem circa C, dum corpus in M versatur, vt 1 ad $w$. In orbita igitur tanquam immobili spectata elementum $(M)(m)$ celeritate $\sqrt{u}$ describetur. Ponatur distantia $C(M)=CM=y$, et perpendiculum in tangentem orbitae in (M) vel M ex C demissum, $C(T)=CT=p$, habebiturque ob orbitam datam aequatio inter $p$ et $y$. Iam dum corpus in orbita elementum $Mm$ describit, progrediatur ipsa orbita motu angulari circa C per angulum $=mC\mu$, et hanc ob rem corpus reipsa non in $m$, sed in $\mu$ reperietur, sumto $C\mu=Cm$, atque idcirco interea elementum $M\mu$ descripsisse censendum est, id quod fecit celeritate debita altitudini $v$. Erit itaque $M\mu : Mm = \sqrt{v} : \sqrt{u}$, atque centro C descripto arculo $M\nu$ (ob datam motuum angularium circa C in orbita et reuera rationem $1:w$) erit $Mn : M\nu = 1 : w$. Est vero posita tangente $MT=\sqrt{(y^2-p^2)}=q$, $Mm=\frac{ydy}{q}$, et $Mn=\frac{pdy}{q}$. Quo circa habebitur $M\mu=\frac{ydy\sqrt{v}}{q\sqrt{u}}$, et $M\nu=\frac{wpdy}{q}$. Ex quo ob $\mu\nu=mn=dy$ prodibit $1+\frac{w^2p^2}{q^2}=\frac{vy^2}{uq^2}$ seu $vy^2=uq^2+w^2up^2$. Quia $M\mu$ est ele-

 men-

mentum verae curuae, quam corpus describit, demittatur in hoc productum ex C perpendiculum $C\Theta$, eritque $M\mu : M\nu = CM : C\Theta$, vnde fit $C\Theta = \frac{wp\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Ex hoc vero perpendiculo cognoscitur vera corporis celeritas, erit enim $v = \frac{a^2cv}{w^2up^2}$ (589) ideoque $u = \frac{a^2c}{w^2p^2}$ et $v = \frac{a^2c(q^2+w^2p^2)}{w^2p^2y^2}$. His loco $u$ et $v$ positis valoribus, erit $C\Theta = \frac{wpy}{\sqrt{(q^2+w^2p^2)}}$, quam breuitatis gratia vocemus $\pi$. Ex hac autem $\pi$ cognita innotescit ipsa vis centripeta P, quae facit vt corpus in hac data orbita, hocque modo mobili moueatur. Namque erit $P = \frac{2a^2cd\pi}{\pi^3dy}$ (592). At ob $\pi^2 = \frac{w^2p^2y^2}{q^2+w^2p^2}$, erit $\frac{1}{\pi^2} = \frac{q^2}{w^2p^2y^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{w^2y^2} + \frac{1}{w^2p^2}$, ideoque $-\frac{2d\pi}{\pi^3} = -\frac{2dy}{y^3} + \frac{2dw}{w^3y^2} + \frac{2dy}{w^2y^3} - \frac{2dw}{w^3p^2} - \frac{2dp}{w^2p^3}$ seu $\frac{d\pi}{\pi^3} = \frac{dy(w^2-1)}{w^2y^3} + \frac{q^2dw}{w^3y^2q^2} + \frac{dp}{w^2p^3}$. Consequenter habebitur $P = \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2y^3} + \frac{2a^2cq^2dw}{w^3y^2p^2dy}$. Q. E. I.

## Corollarium I.

730. Posito radio $= 1$, est $\frac{m\mu}{CM} = \frac{(w-1)pdy}{qy}$ elementum anguli (A)CA quem orbita confecit dum corpus arcum (A)(M) percurrit. Hanc ob rem erit ang. (A)CA $= \int \frac{(w-1)pdy}{qy}$. Estque $w-1 : 1$ vt celeritas angularis orbitae, ad celeritatem angularem corporis, dum est in M, in ipsa orbita.

## Corollarium 2.

731. Celeritas corporis in orbita, quae est vt $\sqrt{u}$, reciproce proportionalis est ipsi $wp$. Ergo, nisi $w$ sit constans, fieri non potest, vt corpus hoc mo-

modo in orbita quiescente moueatur, attractum ad centrum C.

## Corollarium 3.

732. Posito igitur $w$ constante, i. e. ratione motus angularis corporis ad motum angularem orbitae perpetuo eadem, erit etiam celeritas corporis in orbita $\sqrt{u}$ reciproce proportionalis perpendiculo C(T) in tangentem. Atque vis centripeta ad C tendens, atque efficiens vt corpus hac ratione in orbita quiescente moueatur erit $= \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy}$. Sit enim celeritas respectu orbitae quam corpus in (A) habet, debita altitudini $\gamma$, erit $\sqrt{\gamma} : \sqrt{c} = 1 : w$ (*p. hyp.*) atque $c = w^2\gamma$, ex quo vis centripeta ad C tendens, faciensque vt corpus in orbita quiescente moueatur, erit $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, vt etiam ex supra traditis inuenitur (592).

## Corollarium 4.

733. Angulus igitur (A)CA in hac hypothesi, qua $w$ ponitur constans, qui ab orbita absoluitur, dum corpus arcum (A)(M) percurrit, erit $= (w-1)\int\frac{pdy}{qy} = (w-1)$ *ang.* (A)C(M). Ergo vna tota corporis in orbita reuolutione, ipsa orbita circa C gyrabitur angulo $(w-1)$ 360 graduum.

## Corollarium 5.

734. Vis autem, quae efficit, vt corpus in hac orbita mobili proportionaliter motui angulari in ipsa orbita, moueatur erit $= \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2y^3}$

seu

seu $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$. Quare differentia inter vim centripetam pro orbita immobili et vim pro orbita mobili reciproce proportionalis est cubo distantiae corporis a centro virium C.

## Corollarium 6.

735. Si sit $w=1$, erit $w-1=0$, motusque orbitae nullus, quo casu etiam vis centripeta fit $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy}$ euanescente altero termino. Idem euenit si $w=+1$ seu $w-1=-2$, quo casu orbita in antecedentia mouetur duplo velocius, quam ipsum corpus in orbita ingreditur. At vera curua, quae hoc motu a corpore describitur, non differt ab orbita, nisi quod sit inuersa.

## Corollarium 7.

736. Si $w>1$ orbita in consequentia mouetur qui motus, quo sit maior, eo maior etiam erit vis centripeta. At si $w<1$, orbita in antecedentia tendit, et vis centripeta fit minor, ob $w^2-1$ negatiuum.

## Corollarium 8.

737. Si $w=0$ fit etiam $c=0$, corpusque in recta linea mouebitur, quia motus angularis orbitae hoc casu aequalis fit et contrarius motui angulari corporis in orbita.

## Corollarium 9.

738. Si $w$ est numerus negatiuus, nempe $=-n$, corpus in eadem mouebitur curua ac si esset

$w=$

$w = +n$, hoc tantum discrimine, quod corpus in contrarias plagas progrediatur. Et hanc ob rem vis centripeta eundem retinet valorem, siue $w$ affirmatiue siue negatiue accipiatur. Idem etiam vniuersaliter, si $w$ est quantitas variabilis, obtinet.

## Exemplum.

739 Sit curua (A)(M)(B) ellipsis, et centrum virium C eius alteruter focus. Ponatur eius latus rectum $=$L et axis transuersus (A)(B)$=$A; erit $a = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - AL)}$, et $4pp = \frac{ALy}{A-y}$. Sit praeterea $w$ constans, erit vis, quae facit vt corpus in hac ellipsi mobili moueatur $= \frac{4a^2\gamma}{Ly^2} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$ (734). Angulus vero (A)CA, quem orbita absoluit, dum corpus in ea arcum (A)(M) percurrit, erit $= (w-1)$(A)C(M) (733). Aequatio vero pro ipsa curua, quam corpus describit, cuius elementum est M$\mu$, habebitur inuenienda aequatione inter CM$=y$, et C$\Theta = \pi$. Est autem $pp = \frac{ALy}{4A-4y}$, et $qq = \frac{4Ay^2 - 4y^3 - ALy}{4A - 4y}$, qui valores in aequatione $\pi = \frac{wpy}{\sqrt{(qq + w^2p^2)}}$ substituti dabunt aequationem pro ipsa curua descripta hanc $\pi\pi = \frac{w^2ALy^2}{4Ay - 4y^2 + (w^2-1)Ay}$.

## Scholion I.

740. Curuae ipsae, quas corpora a huiusmodi viribus centripetis sollicitata describunt, difficillime alias cognoscerentur, earumque forma hac consideratione non adhibita nequaquam posset

determinari. Maximam igitur habent vtilitatem huiusmodi virium centripetarum inuestigationes pro curuis ex datis vtcunque generatis, quo reciproce ex viribus centripetis datis ipsae curuae earumque proprietates innotescant. Occurrunt enim in motibus corporum coelestium tam complexae virium ea sollicitantium expressiones, vt omnino eorum orbitae determinari nequeant, nisi forte illae vires comprehendantur in tali quodam casu, de quo a posteriori vis centripeta est inuenta.

## Scholion 2.

741. Si corpus in huiusmodi orbita mobili moueri deprehenditur, motus eius et distantia quouis tempore a centro C poterit determinari. Atque quoties corpus in orbita in puncta (A) et (B) peruenit, tum in minima vel maxima a C erit distantia. Quare cum motus gyratorius lineae (A)(B), quae linea absidum vocatur, sit datus; definiri poterit, quando corporis a centro C distantia sit maxima vel minima. *Neutonus* hanc rem pertractauit in princ. Libro 1. tota Sect. IX. eaque theoria vtitur ad motum lineae absidum orbitae lunaris determinandum. Sed minus accurate haec consideratio ad lunam accommodari potest, cum vis lunam sollicitans non ad punctum quoddam fixum C, vt hic posuimus, sed perpetuo variabile tendat. Operam igitur dabimus, vt, postquam reliqua huc pertinentia explicauerimus, alias propositiones magis idoneas afferamus, quae ad motum lunae transferri queant.

PRO-

## PROPOSITIO 90.
### Problema.

742. *Cognita curua, quam corpus vi quacunque centripeta V sollicitatum describit, determinare curuam, quam corpus a vi centripeta* $V + \frac{c}{y^3}$ *( denotante y distantiam MC corporis a centro virium C), sollicitatum describet.*

### Solutio.

Agente vi centripeta $V + \frac{c}{y^3}$, sit corporis celeritas, qua in (A) secundum directionem ad radium C(A) normalem proiicitur, debita altitudini $c$, et ponatur $C(A) = a$. Vrgente autem vi V, sit (A)(M)(B) orbita, in qua corpus mouebitur proiectum in (A) secundum eandem directionem, sed celeritate debita altitudini $\gamma$. Iam ex praecedente propositione manifestum est, vi $V + \frac{c}{y^3}$ effici, vt corpus in eadem orbita (A)(M)(B), sed circa centrum C in data ratione ad motum angularem in ipsa orbita mobili, moueatur. Sit igitur $w - 1$ ad $1$ vt motus angularis orbitae ad motum angularem corporis in ipsa orbita dum est in M, et sit etiam $c = w^2 \gamma$ (732), atque vocetur perpendiculum ex C in tangentem orbitae in M demissum $CT = p$. Hinc perspicuum est, vim centripetam facientem, vt corpus in orbita immobili (A)(M)(B) moueatur, fore $= \frac{2a^2 \gamma dp}{p^3 dy}$, ideoque $V = \frac{2a^2 \gamma dp}{p^3 dy}$; quam aequationem ergo ob datam curuam (A)(M)(B) construibilem ponimus (*p. hyp.*). Vis autem efficiens, vt corpus in eadem orbita descripto modo mobili moueatur, erit $=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}+\frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$ (734). Quamobrem habebitur $V+\frac{C}{y^3}=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}+\frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$. Ex quo prodit $C=2a^2\gamma(w^2-1)=\frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2}$ atque $w^2=\frac{2a^2c}{2a^2c-C}$. Erit ergo $w-1:1=\frac{\sqrt{2a^2c}-\sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}:1$ atque $\gamma=\frac{2a^2c-C}{2a^2}$. Inuenta igitur curua, quam corpus in (A) celeritate altitudinis $\frac{2a^2c-C}{2a^2}$ proiectum describit sollicitatum a vi V, vis $V+\frac{C}{y^3}$ efficiet, vt corpus in (A) celeritate $\sqrt{c}$ proiectum moueatur in eadem orbita mobili ita, vt sit motus angularis orbitae ad motum angularem corporis in hac orbita, quemadmodum est $\frac{\sqrt{2a^2c}-\sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}$ ad 1. Motus autem corporis in ipsa orbita idem erit, quem habet in orbita immobili a vi tantum V sollicitatum et in (A) celeritate debita altitudini $\frac{2a^2c-C}{2a^2}$ proiectum, qui motus per hypothesin est cognitus. Q. E. I.

## Corollarium 1.

743. Dum igitur corpus in orbita ex (A) ad (B) peruenit, seu circa centrum C angulo 180 gr. reuoluitur, ipsa orbita interea angulo $\frac{\sqrt{2a^2c}-\sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}$. 180 grad. circa C gyrabitur.

## Corollarium 2.

764. Si igitur recta (A)(B) est linea absidum, erit punctum (A) ima, punctum (B) vero summa absis, vti in astronomia vocantur; corpus igitur ab abside ima ad summam perueniet absoluto motu angulari circa C gradus $\frac{180}{\sqrt{(1-\frac{C}{2a^2c})}}$.

## Corollarium 3.

745. Tempus, quo corpus in orbita mobili ex (A) in M peruenit, aequatur tempori quo in quiescente ex (A) in (M) pertingit. Angulus vero (A)CM se habet ad ang. (A)C(M) vt $w$ ad 1 i. e. vt $\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{C}{2a^2c})}}$ ad 1.

## Exemplum.

746. Sit vis V reciproce proportionalis quadrato distantiae a centro seu $V = \frac{ff}{yy}$, erit curua (A)(M)(B) ellipsis, in cuius foco positum est centrum virium C. Sit eius axis transuersus (A)(B) $=$ A, et latus rectum $=$ L, erit $a = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - AL)} =$ (A)C et (B)C $= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - AL)}$. Ob $4pp = \frac{ALy}{A-y}$ erit $\frac{2a^2ydp}{p^3dy} = \frac{4a^2y}{Ly^2} = \frac{ff}{yy}$. Hinc fit $4a^2y = Lff = 4a^2c - 2C$, vnde $L = \frac{4a^2c - 2C}{ff}$. Atque $c = \frac{Lff + 2C}{4a^2}$. Quae est altitudo debita celeritati corporis in (A) pro orbita mobili ex vi centripeta $\frac{ff}{y^2} + \frac{C}{y^3}$. Motus vero angularis orbitae erit ad motum angularem corporis in orbita vt $\frac{\sqrt{(\frac{1}{2}Lff + C)} - \sqrt{\frac{1}{2}Lff}}{\sqrt{\frac{1}{2}Lff}}$ ad 1. Atque corpus ab abside ima ad summam perueniet, postquam motu angulari ang. $\frac{180\sqrt{(\frac{1}{2}Lff + C)}}{\sqrt{\frac{1}{2}Lff}} = 180 \sqrt{(1 + \frac{2C}{Lff})}$ grad. absoluerit.

# PROPOSITIO 91.
## Problema.

747. *Si figura, quam corpus a quacunque vi centripeta describit, non multum differt a circulo, determinare motum absidum.*

## Solutio.

Comparandus est huiusmodi motus cum motu corporis in ellipsi mobili parum excentrica cuius focus alteruter positus sit in centro virium. In hac igitur orbita quiescente corpus mouebitur sollicitatum a vi centripeta quadratis distantiarum reciproce proportionali. In eadem vero orbita mobili corpus mouebitur, si fuerit vis centripeta $=\frac{ffy+C}{y^3}$ (746). Manentibus praecedentibus denominationibus ponatur $y=a+z$, erit $z$ respectu ipsius $a$ valde paruum, quia curua a corpore descripta circulo proxima ponitur. Quare vis centripeta illa erit $=\frac{aff+C+ffz}{y^3}$, et $2a$ quam proxime erit aequalis ipsi lateri recto L. Iam ponatur vis centripeta corpus sollicitans $=\frac{P}{y^3}$ in qua P sit functio quaecunque ipsius $y$. Ponatur in P loco $y$ eius valor $a+z$ abeatque P reiectis terminis, in quibus $z$ plus vna habet dimensionem, ob $z$ tam paruum in $E+Fz$. Hac ergo formula cum $aff+C+ffz$ comparata habebitur $F=ff$, seu $f=\surd F$ et $aF+C=E$, seu $C=E-aF$. His substitutis corpus ab hac vi centripeta $\frac{P}{y^3}$ sollicitatum ab abside ima ad summam perueniet, absoluto to motu angulari angulo $180\sqrt{(1+\frac{2C}{Lff})}$ grad. (746). Seu posito $2a$ loco L, et F loco $ff$ atque E–$a$F loco C erit iste angulus graduum $180\sqrt{\frac{E}{aF}}$. Si quidem orbita non multum a circulari discrepat. Q. E. I.

## Corollarium 1.

748. Linea vero absidum (A)(B), dum corpus circa C reuoluitur angulo 360 gr. mouebitur motu angulari per angulum $\frac{\sqrt{E}-\sqrt{aF}}{\sqrt{E}}$ 360 grad. Motus enim angularis orbitae proportionalis ponitur motui angulari corporis, ob vim centripetam $=\frac{ff}{yy}+\frac{C}{y^3}$ (734).

## Corollarium 2.

749. Quia E est functio talis ipsius $a$, qualis P est ipsius $y$, erit F$z$ incrementum ipsius E crescente $a$ elemento $z$. Quare posito $z=da$ erit F$da$ $=d$E, ideoque, angulus, quo corpus ab abside ima ad summam peruenit est $=180\sqrt{\frac{Eda}{adE}}$ grad.

## Corollarium 3.

750. Quia E talis est functio ipsius $a$, qualis P ipsius $y$, poterit in $\frac{Eda}{adE}$ poni $y$ loco $a$ et P loco E. Quamobrem existente vi centripeta $\frac{P}{y^3}$, corpus ab abside ima ad summam perueniet absoluto angulo $180\sqrt{\frac{Pdy}{ydP}}$ graduum. Atque in hac expressione si restet $y$, poterit eius loco $a$ scribi, quippe parum ab $y$ discrepans.

Co-

## Corollarium 4.

757. Si fuerit $\frac{da}{a} > \frac{dE}{E}$ seu $\frac{dy}{y} > \frac{dP}{P}$, ellipsis motu suo verum corporis motum exprimens mouebitur in consequentia. Sin vero $\frac{dy}{y} < \frac{dP}{P}$ linea absidum in antecedentia mouebitur. At si $\frac{dy}{y} = \frac{dP}{P}$ seu $P = \alpha y$, quo casu vis centripeta reciproce proportionalis est quadratis distantiarum, linea absidum quiescet, seu corpus, postquam motu angulari angulum 180 gr. absoluerit ab abside ima ad summam et vicissim pertingit.

## Corollarium 5.

725. Dato autem angulo, quo corpus ab abside altera ad alteram peruenit qui sit $360\mu$ grad. erit $\mu^2 = \frac{Pdy}{ydP}$ ideoque $P^{\mu\mu} = \alpha y$, seu $P = \alpha y^{\frac{1}{\mu\mu}}$. Vis ergo centripeta quae facit, vt lineae absidum tantus sit motus, erit $y^{\frac{1-3\mu^2}{\mu^2}}$.

## Corollarium 6.

763. Si accidit vt $\frac{Pdy}{ydP}$ seu $dP$ fiat negatiuum, motus absidum erit imaginarius. Ex quo cognoscitur corpus nunquam ad absidem alteram peruenire posse ab altera progressum. Sed perpetuo vel magis recessurum a centro vel ad id accessurum, siue in orbita clausa prorsus non moueri.

## Corollarium 7.

754. Si vis centripeta proportionalis sit distantiarum potestati $y^n$, erit $P = y^{n+3}$. Quare fiet

$\frac{rdy}{ydp} = \frac{1}{n+3}$, atque corpus ab abside ima ad summam perueniet absoluto angulo circa C graduum $\frac{180}{\sqrt{(n+3)}}$; a summa vero vel ima abside ad eandem reuertetur absoluto angulo $\frac{360}{\sqrt{(n+3)}}$ grad.

## Corollarium 8.

755. Si ergo fuerit $\sqrt{(n+3)}$ numerus rationalis, et $m$ minimus numerus integer, quo fiat $\frac{m}{\sqrt{(n+3)}}$ quoque numerus integer; tum corpus post $\frac{m}{\sqrt{(n+3)}}$ reuolutiones circa centrum C peractas in idem punctum incidet, totidemque curua a corpore descripta absoluet spiras, antequam in se ipsam redeat atque claudatur. At si $n+3$ non est quadratum curua nunquam in se redibit, sed infinitas circa centrum C habebit spiras, neque vnquam corpus in eandem viam reuertetur.

## Exemplum 1.

756. Attrahat centrum virium in ratione reciproca triplicata distantiarum, erit $n+3=0$. Hac ergo hypothesi corpus ab altera abside egressum, ad alteram nisi infinitis reuolutionibus peractis non perueniet. Atque si vis centripeta in maiore ratione quam triplicata distantiarum decrescat curua prorsus non habebit duas absides sed vel in infinitum abibit, vel in ipso centro, vt spiralis logarithmica terminabitur.

## Exemplum 2.

757. Si vis centripeta est quadratis distantiarum reciproce proportionalis erit $n+3=1$. Quare tum corpus motu angulari absolutis 180 gr. ab altera abside ad alteram perueniet, et curua post quamuis reuolutionem in se ipsam redibit. Corpus enim in ellipsi in cuius alterutro foco centrum virium est positum mouebitur, eiusque axis transuersus est ipsa linea absidum.

## Exemplum 3.

758. Sit vis centripeta distantiis reciproce proportionalis, est $n+3=2$. Corpus igitur ab abside ima ad summam perueniet absoluto angulo $\frac{180}{\sqrt{2}}$ grad. seu 227 gr. 16′. Orbita vero ob $\sqrt{2}$ irrationale nusquam in se redibit.

## Exemplum 4.

759. Si vis centripeta est constans in omni distantia, erit $n=0$. Hoc ergo casu corpus ab altera abside egressum ad alteram perueniet motu angulari percurso angulo $\frac{180}{\sqrt{3}}$ grad. i. e. 103 gr. 55′, quam proxime.

## Exemplum 5.

760. Si vis centripeta est directe, vt corporis a centro distantia, quo casu corpus in ellipsi moueri constat, in cuius centro centrum virium est positum (631). Absis igitur ima ab summa distabit angulo 90 grad. Idem vero ex hac regula deducitur; nam ob $n=1$, erit $\frac{180}{\sqrt{n+3}}=90$.

Scho-

## Scholion 1.

761. Quoties igitur corpus circa centrum virium tanta velocitate proiicitur, vt fere in circulo deberet reuolui, ope huius propositionis vera curua, quamcorpus describet potest determinari, id quod ex sola vis centripetae consideratione fieri non potest. Ex quibus eo magis huiusmodi contemplationum vsus perspicitur, cum res, quae alias determinatu essent difficillimae ex iis facile definiantur. *Neutonus* eandem hanc propositionem exposuit Sect. IX. prop. 45.

## Scholion 2.

762. Iam supra ostendimus corpus in hypothesi vis centripetae cubo distantiae reciproce proportionalis ad centrum descendens ad id tempore finito peruenire, neque deinde ex eo egredi sed quasi subito annihilari ( 675 ) ( 676 ). Idem etiam valet, si corpus recta ad centrum descendat. Atque simili modo, si vis centripeta in maiore quam triplicata distantiarum ratione decrescat, corpus statim ac in centrum peruenerit, ibi euanescet, neque vltra centrum progredietur, neque reuertetur. Vtrum vis enim eueniat, curua, quam corpus velocitate quadam proiectum describeret, haberet duas absides, quod esset absurdum ( 756 ). Quoties autem vis centripeta in minore quam triplicata ratione decrescit, vt in simplici distantiarum ratione vel ea maiore, corpus, postquam in centrum per-

uenerit, in eadem recta, qua ad centrum accessit, recedet; perspicitur hoc enim ex ratione reciproca duplicata (655), et simplici de qua patet (266) corpus non vltra centrum posse progredi. At si $n+1>0$ corpus recta ad centrum descendens finitam habebit celeritatem, qua vltra centrum in eadem recta progredietur, quoad motum amiserit (273). Hoc ergo modo satisfecimus desiderato superiori (272), quo motum corporis recta descendentis, cum in centrum peruenisset, definiri oportebat.

# PROPOSITIO 92.

## Problema.

Tab. VIII. Fig. 2. 763. *Inuenire vires centripetas tendentes ad duo virium centra C et D, quae faciant, vt corpus in data curua AMB et data in singulis punctis M celeritate moueatur.*

## Solutio.

Moueatur corpus ab A per M ad B, et sit eius celeritas in M debita altitudini $v$, ponatur $CM=y$ et $DM=z$. Ducta vero tangente TV in eamque ex C et D demissis perpendiculis CT et DV, dicantur $CT=p$ et $DV=q$. Vis centripeta porro, quae ad C tendit sit $=P$, et ea, quae ad D trahit sit $=Q$. Vis igitur normalis ex vtraque orta erit $=\frac{Pp}{y}+\frac{Qq}{z}$, et vis tangentialis accelerans motum corporis erit $=-\frac{P\sqrt{(y^2-p^2)}}{y}-\frac{Q\sqrt{(z^2-q^2)}}{z}$ cadentibus tangentibus in antecedentia. Posito ergo radio osculi in $M=r$,

et

et elemento curuae $=ds$ erit $\frac{Pp}{y}+\frac{Qq}{z}=\frac{2v}{r}$ (561), et $dv=-\frac{Pds\surd(y^2-p^2)}{y}-\frac{Qds\surd(z^2-q^2)}{z}$ (559). Est vero $ds=\frac{ydy}{\surd(y^2-p^2)}=\frac{zdz}{\surd(z^2-q^2)}$, ideoque $dv=-Pdy-Qdz$. Ex his duabus aequationibus coniunctis habebitur $P=\frac{2vyzdz+qrydv}{przdz-qrydy}$ et $Q=\frac{2vzydy+przdv}{qrydy-przdz}=-\frac{2vzydy-przdv}{przdz-qrydy}$. Est vero $r=\frac{ydy}{dp}=\frac{zdz}{dq}$; ergo $zdz=\frac{ydy\surd(z^2-q^2)}{\surd(y^2-p^2)}$ atque $dq=\frac{dp\surd(z^2-q^2)}{\surd(y^2-p^2)}$. Tandem dicta $CD=k$ erit $k^2=y^2+z^2-2pq-2V(y^2-p^2)(z_1^2-q^2)$, ex quibus P et Q prout libuerit determinari possunt. Q. E. I.

## Corollarium 1.

764. Si corpus in curua motu aequabili debeat moueri ita vt sit $v=c$, et $dv=o$; erit $P=\frac{2cyzdz}{przdz-qrydy}$ et $Q=-\frac{2czydy}{przdz-qrydy}$. Atque $P:Q=dz:-dy$.

## Corollarium 2.

865. Si fuerit $v=\frac{cb^2}{p^2}$, seu celeritas corporis reciproce vt perpendiculum ex centro C in tangentem demissum; erit $dv=-\frac{2cb^2dp}{p^3}$. His substitutis fit $Q=o$, erit enim $przdv=-\frac{2cb^2rzdp}{pp}=-\frac{2cb^2zydy}{pp}=-2vzydy$. Atque $P=\frac{2cb^2pyzdz-2cb^2qy^2dy}{p^3r(pzdz-qydy)}=\frac{2cb^2y}{p^3r}$ (714). Haec enim vis sola efficiet, vt corpus hoc modo in ista curua moueatur.

## Exemplum.

766. Sit curua data AMB ellipsis et centra C et D eius foci. Ponatur eius axis transuersus $AB=A$ et latus rectum $=L$, eritque ex natura el-

lipſis $4pp = \frac{ALy}{A-y}$ et $4qq = \frac{ALz}{A-z}$. At praeterea erit $z = A - y$, et $r = \frac{4(Ay-yy)^{\frac{3}{2}}}{A\sqrt{AL}} = \frac{4(Az-zz)^{\frac{3}{2}}}{A\sqrt{AL}}$. Ex quo prodibit $P = \frac{Avdy - ydv(A-y)}{2ydy(A-y)}$ et $Q = \frac{Avdz - zdv(A-z)}{2zdz(A-z)} = \frac{Avdy + ydv(A-y)}{2ydy(A-y)}$, ideoque $P + Q = \frac{Av}{yz}$ et $Q - P = \frac{dv}{dy}$.

## PROPOSITIO 95.
### Problema.

Tab. VIII. Fig. 3. 767. *Moueatur corpus data celeritate in curua etiam data* AMB, *et oportet inueniri vim centripetam ad centrum* C *tendentem vna cum vi perpetuo ad rectam* AB *normaliter in directione* MP *corpus trahente, quae duae vires efficiant, vt corpus in hac curua cum praeſcriptaque celeritate libere moueatur.*

### Solutio.

Sit corporis in puncto M exiſtentis celeritas debita altitudini $v$, et diſtantia $MC = y$, perpendicularis vero $MP = z$. Ponatur vis corpus ad centrum C trahens $= P$ et vis ſecundum MP trahens $= Q$. Ducta tangente MV in M demittantur in eam perpendicula CT et PQ, quae dicantur $p$ et $q$. His factis erit vis normalis ex vtraque orta $= \frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z}$ et vis tangentialis $= \frac{P\sqrt{(y^2-p^2)}}{y} + \frac{Q\sqrt{(z^2-q^2)}}{z}$. Poſito ergo radio osculi in $M = r$ erit $\frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z} = \frac{2v}{r}$ (561) et $dv = -Pdy - Qdz$ (559). Ex his itaque reperietur $P = \frac{2vyzdz + qrydv}{przdz - qrydy}$ et $Q = -\frac{2vzydy - przdv}{przdz - qrydy}$. Ponatur autem $CP = x$, erit $\sqrt{(dx^2 + dz^2)} : dx = z : q$; vnde



$q =$

$q = \frac{zdx}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}$ et poſito $dx$ conſtante eſt $r = \frac{(dx^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddz}$. Erit autem porro $y = \sqrt{(x^2+z^2)}$, et $p = \frac{zdx-xdz}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}$. His ſubſtitutis prodibit $P = \frac{2vydxdzddz - ydxdv(dx^2+dz^2)}{x(dx^2+dz^2)^2}$, et $Q = -\frac{2vydydxddz + (zdx-xdz)(dx^2+dz^2)dv}{x(dx^2+dz^2)^2}$. Q. E. I.

## Corollarium I.

768. Si corpus aequabiliter in curua moueri debeat ita vt ſit $v = c$ et $dv = o$, erit $P = \frac{2cydxdzddz}{x(dx^2+dz^2)^2}$ et $Q = -\frac{2cydydxddz}{x(dx^2+dz^2)^2}$.

## Corollarium 2.

769. Si curua ſit circulus, cuius centrum in C exiſtat, et radius dicatur $= a$. Erit $r = a$, $y = a$ $p = a$, et $q = \frac{z^2}{a}$. Quare prodibit $P = \frac{2v}{a} + \frac{zdv}{adz}$ et $Q = -\frac{dv}{dz}$. Ergo cognita Q erit $P = \frac{2v}{a} - \frac{Qz}{a}$. Atque ſi eſt $v = c$ et $dv = o$, erit $Q = o$, et $P = \frac{2c}{a}$.

## Scholion.

770. Ex hac propoſitione in ſe ſpectata, qua ipſa curua a corpore deſcripta datur, parum vtilitatis conſequitur ad curuas, quas corpora a compoſitis viribus ſollicitata deſcribunt, determinandas. Ab hac vero ad alias propoſitiones progredi licet, in quibus curuae a corporibus deſcriptae non ipſae dantur; ſed generantur ex motu vnius pluriumue datarum, quemadmodum in ſuperioribrs propoſitionibus, in quibus de motu abſidum tractauimus, eſt factum.

PRO-

# PROPOSITIO 94.

## Problema.

Tab. VIII. Fig. 4. 771. *Si moueatur corpus vtcunque in curua AMB ipsa vero curua interea reuoluatur circa punctum fixum C: inueniri oportet duas vires, quarum altera perpetuo ad punctum fixum C, altera normaliter ad rectam positione datam PC sit directa, quae duae vires efficiant, vt corpus in hac orbita mobili libere moueatur.*

## Solutio.

Sit corporis in M existentis celeritas, qua in ipsa curua elementum $Mm$ percurrit, debita altitudini $v$, atque celeritas angularis corporis in orbita ad veram celeritatem angularem corporis circa C vt 1 ad $w$, seu celeritas angularis corporis in orbita ad celeritatem angularem ipsius orbitae, dum corpus est in M vt 1 ad $w-1$. Ponatur radius $CM=y$, et perpendiculum CT, ex C in tangentem orbitae in M demissum $=p$, ipsa vero tangens $MT=q$, ita vt sit $q=\sqrt{(y^2-p^2)}$. Ex M in rectam positione datam DP demittatur perpendiculum MP, quod dicatur $z$, et CP, $x$, ita vt sit $x=\sqrt{(y^2-z^2)}$. Iam dum corpus elementum $Mm$ percurrit, ponatur orbita interea angulo $=mC\mu$ circumferri; quamobrem motu composito corpus in $\mu$ perueniet, sumto $C\mu=Cm$, eritque $M\mu$ elementum verae curuae, in qua corpus mouetur, in quod productum demittatur ex C perpendiculum $C\Theta$. Centro C describatur ar-

arculus $Mn\nu$, erit $mn = \mu\nu = dy$, et $Mn : M\nu = 1 : w$. Est vero $Mm = \frac{ydy}{q}$, vnde $M\nu = \frac{wpdy}{q}$, ex quo habebitur $M\mu = \frac{dy}{q}\sqrt{(w^2p^2 + q^2)}$, atque porro $C\Theta = \frac{wpy}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ et $M\Theta = \frac{qy}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Fiat $Mm : M\mu = \sqrt{v} : \frac{\sqrt{v(w^2p^2+q^2)}}{y}$, cuius quadratum $\frac{v(w^2p^2+q^2)}{y^2}$ exhibet altitudinem debitam verae corporis celeritati; huius igitur incrementum est $= \frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} + \frac{2vp^2wdw}{y^2}$. Radius osculi autem verae curuae, in qua corpus incedit est

$$= \frac{ydy}{d.C\Theta} = \frac{ydy(w^2p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{w(w^2-1)p^3dy + wy^3dp + py^3dw - p^3ydw}$$

$$= \frac{ydy(w^2p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{w(w^2-1)p^3dy + wy^3dp + pq^2ydw}.$$ Posito sinu toto $= 1$, erit sinus anguli $CMP = \frac{x}{y}$ et cosinus $= \frac{z}{y}$. At anguli $CM\Theta$ sinus erit $= \frac{wp}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ eiusque cosinus $= \frac{q}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Ex quibus reperitur anguli $PM\Theta$ sinus $= \frac{wpz - qx}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$, eiusque cosinus $= \frac{wpx + qz}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Demisso ex P in tangentem $M\Theta$ perpendiculo PQ erit $PQ = \frac{wpz^2 - qxz}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ et $MQ = \frac{wpxz + qz^2}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Atque percurrente corpore elementum $M\mu$ erit lineae PM incrementum $dz = \frac{wpxdy + qzdy}{qy}$. Ex qua aequatione relatio inter $w$ et $x$ innotescit, et simul positio lineae absidum AB respectu rectae CP inueniri potest. Iam ponatur vis corpus sollicitans versus $MC = P$ et vis secundum MP trahens $= Q$, ex quibus oritur vis tangentialis

motum corporis retardans $= \frac{Pq}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}} + \frac{Qwpx+Qqz}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ quae ergo ducta in $\frac{dy}{q}\sqrt{(w^2p^2+q^2)}$ aequalis poni debet $= -\frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} - \frac{2vp^2wdw}{y^2}$, ita vt prodeat $Pdy + \frac{Qwpxdy}{qy} + \frac{Qzdy}{y} = -\frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} - \frac{2vp^2wdw}{y^2}$. Vis autem normalis ex vtraque orta est $\frac{Pwp}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}} + \frac{Qwpz-Qqx}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$, quae aequalis esse debet $\frac{2w(w^2-1)vp^3dy+2wvy^3dp+2vpq^2ydw}{y^3dy\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ (561), quare habebitur $Pwpydy + Qwpzdy - Qqxdy = \frac{2w(w^2-1)vp^3dy}{y^2} + 2wvydp + \frac{2vpq^2dw}{y}$. Ex quibus aequationibus coniunctis obtinetur $Q = -\frac{wpqdv}{yxdy} - \frac{2wvqdp}{yxdy} - \frac{2vpqdw}{yxdy}$, atque $P = \frac{qdv(wpz-qx)}{y^2xdy} + \frac{2(w^2-1)vp^2}{y^3} + \frac{2vdp(wqz+px)}{y^2xdy} + \frac{2vpqzdw}{y^2xdy}$. Angulus vero, quem linea absidum AB facit cum recta CP erit $= \int\frac{(w-1)pdy}{qy}$, vnde eius positio quouis tempore innotescit. Q.E.I.

## Corollarium 1.

772. Quia est $dz = \frac{wpxdy+qzdy}{qy}$ ponatur $z = ty$; eritque $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{wpdy}{qy}$. Ex qua aequatione, si detur $w$ in $y$, in qua etiam ob curuam AMB datam $p$ et $q$ exprimuntur, inuenietur $t$, ideoque etiam $z$ et $x$.

## Corollarium 2.

773. Si fuerit celeritas corporis in orbita $\sqrt{v}$ reciproce vt perpendiculum CT ex C in tangentem demissum, seu $v = \frac{a^2c}{p^2}$ erit $P = \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3} + \frac{2a^2cqzdw}{py^2xdy}$ et $Q = -\frac{2a^2cqdw}{pyxdy}$.

Co-

## Corollarium 3.

774. Si hoc casu est $w$ constans, euanescit vis Q et sola remanet $P = \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3}$ ad centrum tendens, quae efficiet, vt corpus in orbita AMB circa C mobili progrediatur prorsus vt supra inuentum est (734).

## Corollarium 4.

775. Si $v$ non est $= \frac{a^2c}{p^2}$, sed $w$ constans, ita vt motus angularis orbitae proportionalis sit motui angulari corporis in orbita, nempe vt $w-1$ ad $1$, erit $Q = -\frac{wpqdv - 2wvqdp}{yxdy}$ et $P = \frac{qdv(wpz - qx)}{y^2xdy} + \frac{2(w^2-1)vp^2}{y^3} + \frac{2vdp(wqz + px)}{y^2xdy}$.

## Exemplum.

776. Posito $v = \frac{a^2c}{p^2}$, sit curua AMB ellipsis alterutrum focum in C habens. Cuius igitur axis transuersus si vocetur A et latus rectum L erit $4pp = \frac{ALy}{A-y}$, seu $p = \frac{\sqrt{ALy}}{2\sqrt{(A-y)}}$ et $q = \frac{\sqrt{(4Ay^2 - 4y^3 - ALy)}}{2\sqrt{(A-y)}}$, atque $\frac{dp}{p^3} = \frac{2dy}{Ly^2}$. Quare habebitur $Q = -\frac{2a^2cdw\sqrt{(4Ay - 4y^2 - AL)}}{yxdy\sqrt{AL}}$ et $P = \frac{4a^2c}{Ly^2} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3}$ $\frac{2a^2czdw\sqrt{(4Ay - 4y^2 - AL)}}{y^2xdy\sqrt{AL}}$. Atque $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{wdy\sqrt{AL}}{y\sqrt{(4Ay - 4y^2 - AL)}}$.

## Scholion 1.

777. Hae formulae existente curua ellipsi variis modis simpliciores effici possunt, si curua in qua corpus mouetur ad circulum proxime accedat. Atque hic casus tum non parum habebit vtilitatis in motu lunae theoretice definiendo. Terra enim vt

in C quiescens ponatur, et Sol in recta ad CP in C perpendiculari pariter tanquam quiescens consideretur, quo facto et his viribus cum viribus solis et terrae comparatis, elicietur motus Lunae synodicus pro quauis lineae absidum positione, et simul ipsius lineae absidum motus, qui a vero lunae motu quam minime differet.

## Scholion 2.

778. Multo latius quidem patet ista propositio, quam superior (729), in qua vis omnis ad centrum rotationis orbitae erat directa, haec enim illam in se complectitur, euanescente vi Q. Neque tamen perfecte ad motum lunae explicandum quadrat propter vim reciproce cubo distantiae MC proportionalem in vi P (773). Hanc ob rem alios orbitae motus praeter gyratorium in medium proferemus, qui et latius pateant, et magis cum quaestionibus physicis congruant. Huiusmodi sunt motus orbitarum per quasque curuas manente orbita sibi semper parallela, quae contemplatio aliis ideo anteferri meretur, quod vires sollicitantes et facile inueniri, et simplicioribus formulis possint comprehendi. Ad hoc autem praestandum opus est sequens theorema praemitti.

## PROPOSITIO 95.

### Theorema.

Tabula IX. Fig. 1. 779. *Moueatur corpus* M *in curua* AM *a vi quacunque sollicitatum circa punctum* C, *atque insuper et* *et corpus M et punctum C ab aequali vi et in eadem directione sollicitentur: erit motus relatiuus corporis M respectu puncti C, seu motus corporis M qualis ex C spectatur idem, ac si haec noua vis non accessisset.*

## Demonstratio.

Puncto C quiescente perueniat puncto temporis $dt$ corpus ex M in $m$. Hoc igitur tempusculo finito corpus M distabit a C interuallo $m$C, et cum plaga quadam fixa recta AC expressa constituet angulum $m$CA. Ponatur iam corpore existente in M et corpus M et punctum C ab aequali et in eandem plagam tendente vi vrgeri, ita vt punctum C ab hac vi tempusculo $dt$ promoueatur per C$c$. Eodem igitur tempusculo $dt$ corpus M, si quiesceret, ab hac vi transferretur per M$m$ parallelam et aequalem ipsi C$c$. At quia corpus C iam habet motum insitum, quo tempusculo $dt$ elementum M$m$ percurrit, vtroque motu coniuncto describet diagonalem M$\mu$ completo parallelogrammo M$m\mu n$. Quocirca accedente hac noua vi corpus M finito tempusculo $dt$ distabit a puncto C, quod interea in $c$ est translatum, interuallo $\mu c$, et ducta $ac$ parallela ipsi AC cum plaga fixa constituet angulum $\mu c \alpha$. At est ob $m$C$c\mu$ parallelogrammum $\mu c = m$C et ang. $m$CA $=$ ang. $\mu c \alpha$. Consequenter vis vtrumque punctum M et C aequaliter et secundum eandem directionem sollicitans non immutat motum relatiuum corporis M respectu puncti C. Q. E. D.

 Co-

## Corollarium 1.

780. Quaecunque igitur vis punctum C sollicitat, si eadem simul corpus M secundum eandem plagam vrgeat; motus relatiuus corporis M respectu puncti C non mutabitur.

## Corollarium 2.

781. Huiusmodi ergo vi M et C aequaliter sollicitante effici potest, vt corpus M in orbita AM quomodocunque mobili moueatur. Orbita autem ipsa motu suo ita sequetur puncti C motum, vt eius positio sibi semper maneat parallela.

## Corollarium 3.

782. Perspicitur etiam ex demonstratione propositionis, si et puncto C et corpori M aequalis celeritas imprimatur secundum eandem plagam, motum relatiuum non perturbatum iri.

## Corollarium 4.

783. Atque cum talis motus puncto C impressus perpetuo duret aequabilis in directum sine vlla vis continuatione, sequitur corpus M circa punctum C aequabiliter indirectum progrediens aeque moueri posse, ac circa quiescens. Hoc enim obtinebitur, si modo corpori M aequalis celeritas in eandem plagam directa adiiciatur.

## Corollarium 5.

784. Corpus ergo circa centrum virium vniformiter in directum progrediens, eandem curuam li-

libere deſcribere poterit, quam circa quieſcens deſcriberet, modo ei ſuperaddatur tanta celeritas quantam accepit centrum virium.

## Corollarium 6.

785. Quemadmodum autem corpus ſibi ipſum relictum non poteſt in linea curua progredi, neque inaequabiliter in recta; ita corpus circa centrum virium vel in curua motum vel difformiter in directum non poteſt libere circa id eandem curuam deſcribere quam circa quieſcens, ſed perpetuo tanta vi inſuper vrgeri debet, quanta ad centrum in ſua via retinendum requiritur.

# PROPOSITIO 96.

## Problema.

786: *Si corpus* M *circa centrum virium* L *quieſcens reuoluatur in curua* BM; *determinare vim, quae efficit, vt corpus in eadem orbita ſecundum curuam* AL *ſibi ipſi ſemper parallele mota ingrediatur.* Tabula IX. Fig. 2.

## Solutio.

Quia corpus M in orbita BM libere mouetur circa centrum virium quieſcens L, erit, poſita diſtantia $LM = y$ et perpendiculo ex L in tangentem in M demiſſo $= p$, altitudo debita celeritati in $M = \frac{a^2c}{p^2}$ (589) et vis centripeta ad L tendens $= \frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ (592). Iam ponatur centrum L in curua AL moueri attractum ad centrum virium C, ſitque $CL = s$ et perpendiculum ex C in tangentem in L de-

demiſſum $= w$. Quo poſito erit altitudo debita celeritati in L $= \frac{v^2 e}{w^2}$ (589) et vis punctum L ad C trahens $= \frac{2b^2 edw}{w^3 ds}$ (592). Ponatur autem primo puncto L celeritas ſecundum tangentem imprimi $= \frac{b\sqrt{e}}{w}$, eademque etiam corpori M ſecundum directionem huic tangenti parallelam; atque perſpicuum erit ſi nulla inſuper vis punctum L ſollicitet, ſed tantum hunc motum impreſſum conſeruet, corpus M libere in eadem curua BM motum puncti L ita ſequente, vt axis BL ſibi ſemper maneat parallelus, motum iri (783). At quo corpus M eodem modo circa punctum L in curua AL incedens moueatur, oportet, vt ipſi perpetuo tanta vis imprimatur, quanta requiritur ad punctum L in hac curua AL retinendum (781). Ducta igitur MN parallela ipſi LC, corpus M praeter vim, quae ad L vrgetur, ſollicitari debebit vi $= \frac{2b^2 edw}{w^3 ds}$ ſecundum directionem MN. Quare haec duplex vis efficiet vt problemati ſatisfiat. Quo autem appareat, quanam vi corpus M reſpectu puncti C et rectae fixae AC ipſi BL parallelae ſollicitari oporteat, reſoluantur vires corpus M ſecundum MN et ML trahentes in duas alias, quarum altera habeat directionem MC altera MP, quae linea MP ad AC perpendiculariter eſt ducta. Ad hoc praeſtandum ipſi MP ducatur parallela KLN rectam MC in O ſecans, et vocetur LI $= x$, MI $= z$; CK $= r$, KL $= t$; atque CP $=$ X, PM $=$ C et CM $=$ Y. Quocirca erit $y = \sqrt{(x^2 + z^2)}$; $s = \sqrt{(r^2 + t^2)}$ et $Y = \sqrt{(X^2 + Z^2)}$. Atque poro $p = \frac{xdz - zdx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$ et

$w =$

$w = \frac{rdt - tdr}{\sqrt{(dr^2 + dt^2)}}$. Praeterea vero erit $X = r + x$ et $Z = t + z$. Quare cum ob curuas AL et BM datas, $z$, $y$ et $p$ in $x$, itemque $t$, $s$ et $w$ in $r$ dentur, poterunt hae omnes quantitates in X, Z et Y exhiberi. Aequatio vero inter X et Z ex eo deducetur, quod temporis incrementum per BM aequale esse debeat temporis incremento per AL. Hinc ergo erit $\frac{p\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}{a\sqrt{c}} = \frac{w\sqrt{(dr^2 + dt^2)}}{b\sqrt{e}}$ et integralibus sumtis erit area ACL + constante quadem area ad aream BLM vt $b\sqrt{e}$ ad $a\sqrt{c}$. Vis igitur secundum ML trahens resoluatur in binas secundum MO et LO seu MI trahentes, et simili modo vis secundum MN in binas secundum MO et NO trahentes, quarum posterior corpus M secundum directionem ipsi MI contrariam sollicitabit; ad quas resolutiones instituendas angulos nosse oportet. Est vero MLO = LMI, eiusque igitur sinus $= \frac{x}{y}$ et cosinus $= \frac{z}{y}$, sumto 1 pro sinu toto. Similiter est MON = CMP, huius igitur sinus $= \frac{X}{Y}$ et cosinus $= \frac{Z}{Y}$. Anguli ergo LMO, qui horum est differentia sinus erit $= \frac{Xz - Zx}{Yy}$. Denique est MNQ = CLK, quare eius sinus est $\frac{r}{s}$ et cosinus $= \frac{t}{s}$. Consequenter ob NMO = MNQ − MON, erit eius sinus $= \frac{Zr - Xt}{Ys}$. Est vero $Xz - Zx = Cr - Xt$ ob $V = r + x$ et $Z = t + z$. Ex his fiet MN : MO seu $\frac{X}{Y} : \frac{r}{s}$ ita vis secundum MN tendens $\frac{2b^2edw}{w^3ds}$ ad vim secundum MC, quae ergo erit $= \frac{2b^2eYrdw}{Xsw^3ds}$. Atque MN : NO seu $\frac{X}{Y} : \frac{Zr - Xt}{Ys}$ ita vis secundum MN $\frac{2b^2edw}{w^3ds}$ ad vim se-

ſecundum ON quae ergo eſt $= \frac{2b^2edw(Zr-Xt)}{Xsw^3ds}$. Simili modo erit ML : MO $= \frac{X}{Y} : \frac{x}{y}$ ita vis ſecundum ML, $\frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ ad vim ſecundum MC quae ergo erit $= \frac{2a^2cYxdp}{Xyp^3dy}$. Atque ML:LO ſeu $\frac{X}{Y} : \frac{Zr-Xt}{Yy}$ ita vis ſecundum ML $\frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ ad vim ſecundum OL ſeu MP quae ergo eſt $= \frac{2a^2cdp(Zr-Xt)}{Xyp^3dy}$. Ex quibus colligitur corpus M trahi debere a vi tendente ſecundum MC $= \frac{Y}{X}\left(\frac{2b^2erdw}{sw^3ds} + \frac{2a^2cxdp}{yp^3dy}\right)$ atque a vi ſecundum MP $= \frac{(Zr-Xt)}{X}\left(\frac{2a^2cdp}{yp^3dy} - \frac{2b^2edw}{sw^3ds}\right)$. Quae expreſſiones omnes in X, Z et Y exhiberi poterunt, et praeterea inter has quantitates, quae veram curuam a corpore M deſcriptam pertinent, aequatio aſſignari. Q. E. I.

## Corollarium I.

787. Si curua AL ſit peripheria circuli, cuius centrum in C et radius AC $= b$, erit $s = w = b$, et $r^2 + t^2 = b^2$. Hoc ergo caſu vis ſecundum MC trahens erit $= \frac{Y}{X}\left(\frac{2er}{b^2} + \frac{2a^2cxdp}{yp^3dy}\right) = \frac{2eY}{b^2} - \frac{2Yx}{X}\left(\frac{e}{b^2} - \frac{a^2cdp}{yp^3dy}\right)$ et vis ſecundum MP $= \frac{(Zr - X\sqrt{(b^2-r^2)})}{X}\left(\frac{2a^2cdp}{yp^3dy} - \frac{2e}{b^2}\right)$. Atque $e$ erit altitudo debita celeritati quam habet punctum L.

## Corollarium 2.

788. Sit curua BM ellipſis centrum habens in L, et BL eius ſemiaxis transuerſus $= a$, ita vt altitudo debita celeritati in B ſit $= c$, alter vero ſemi axis ſit $= h$. Eritque $a^2z^2 + h^2x^2 = a^2h^2$ et $\frac{2a^2cdp}{p^3dy} = \frac{2cy}{h^2}$. Quare vis ſecundum MC fit $=$

$= \frac{Y}{X}\left(\frac{2b^2erdw}{sw^3ds} + \frac{2cx}{b^2}\right) = \frac{2b^2eYdw}{sw^3ds} - \frac{2Yx}{X}\left(\frac{b^2edw}{sw^3ds} - \frac{c}{b^2}\right)$. Atque vis ſecundum $MP = \frac{(Zr - Xt)}{X}\left(\frac{2c}{b^2} - \frac{2b^2edw}{sw^3ds}\right)$.

## Corollarium 3.

789. Si et curua AL fuerit circulus vt coroll. 1. et curua BM ellipſis vt coll. 2. erit vis ſecundum $MC = \frac{Y}{X}\left(\frac{2er}{b^2} + \frac{2cx}{b^2}\right) = \frac{2eY}{b^2} - \frac{2Yx}{X}\left(\frac{e}{b^2} - \frac{c}{b^2}\right)$ et vis ſecundum $MP = \frac{(Zr - Xt)}{X}\left(\frac{2c}{b^2} - \frac{2e}{b^2}\right)$, vbi $r$ et $t$ et $x$ in X, Z et Y poterunt determinari ex his aequationibus $a^2z^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, $r^2 + t^2 = b^2$, $r + x = X$ et $t + z = Z$. Aequatio autem emergens ad quatuor dimenſiones aſcendit.

## Corollarium 4.

790. Si ellipſis BM ponatur infinite parua ſeu ſaltem perquam exigua reſpectu circuli AL ita tamen vt tempus periodicum ellipſis ſit finite magnum, erit $x = \frac{a^2X(Y^2 - b^2) \pm abZ\sqrt{(4a^2X^2 + 4b^2Z^2 - (Y^2 - b^2)^2)}}{2a^2X^2 + 2b^2Z^2}$ et $z = \frac{b^2Z(Y^2 - b^2) \mp abX\sqrt{(4a^2X^2 + 4b^2Z^2 - (Y^2 - b^2)^2)}}{2a^2X^2 + 2b^2Z^2}$.

## Corollarium 5.

791. Si curua BM fuerit quoque circulus in L centrum habens; fiet $b = a$, ideoque $x^2 + z^2 = a^2$, $r^2 + t^2 = b^2$, $r = X - x$ et $t = Z - z$, ex quibus poſito $b^2 - a^2 = f^2$ reperietur $2x = \frac{(Y^2 - f^2)X \pm Z\sqrt{(4a^2Y^2 - (Y^2 - f^2)^2)}}{Y^2}$ et $2z = \frac{(Y^2 - f^2)Z \mp X\sqrt{(4a^2Y^2 - (Y^2 - f^2)^2)}}{Y^2}$. Atque $2Zr - 2Xt = -\sqrt{(4a^2Y^2 - (Y^2 - f^2)^2)}$.

## Scholion 1.

792. Extremum hoc corollarium adiecimus, vt appareat, quales vires requirantur ad corpus in epicyclo circa centrum virium circumagendum, quemadmodum Ptolemaici planetas moueri existimauerunt.

## Corollarium 6.

793. Ex hypothesi coroll. 3. intelligitur si fuerit $\frac{e}{b^2} = \frac{c}{b^2}$ seu celeritas corporis L ad celeritatem corporis M in B vt diameter circuli AL ad axem coniugatum ellipsis BM; tum veram curuam a corpore M descriptam fore ellipsin centrum habentem in C, cum vis sollicitans ad C tendens sit $= \frac{2eY}{b^2}$, euanescente vi secundum MP. Huius ellipsis semiaxis maior erit $b+a$, minor vero $b+b$.

## Scholion 2.

794. Propositionem hanc ideo praecipue attuli, quod in appendice nouae Principiorum *Neutoni* editionis anglicae Cl. *Machin* asseuerat, lunae motum considerari posse tanquam in ellipsi cuius axis transuersus sit ad coniugatum vt 2 : 1 circa centrum factum, dum interea ipsa ellipsis motu sibi semper parallelo secundum peripheriam circuli libere progrediatur, quemadmodum in coroll. 3. explicui. Equidem non nego hac ratione motum perquam conformem motui lunae posse exhiberi, sed an exacte congruat vehementer dubito. Sequente autem propositione determinare statui, quid

 ad

ad lunae motum indicandum requiratur. Etiamsi vero ista propositio ad astronomiam pertineat, tamen eam, vt genuina huiusmodi quaestiones resoluendi methodus perspiciatur, hic afferre e re visum est.

# PROPOSITIO 97.

## Problema.

795. *Quiescente sole in S, et terra T circa eum in circulo TD vniformiter mota, attrahatur luna L tum ad terram T tum ad solem S in ratione reciproca distantiarum duplicata; quibus positis determinari oporteat motum lunae, qualis ex terra T spectatur.* Tabula IX. Fig. 3.

## Solutio.

Ponatur distantia terrae a sole $ST = a$, et vis qua terra ad solem trahitur $= \frac{f}{a^2}$. Distantia lunae a terra LT sit $= y$, et distantia lunae a sole LS sit $= z$. Vis qua luna ad terram trahitur sit $= \frac{b}{y^2}$; vis vero qua luna ad solem trahitur secundum LS erit $= \frac{f}{z^2}$. Ab his igitur viribus lunam sollicitantibus, qualis motus producatur, est inuestigandum. At quia lunae motus, qualis a spectatore in terra constituto obseruatur, definiri debet, terra tanquam quiescens est consideranda; id quod fit, dum toti systemati motus ei, quem terra habet, aequalis et contrarius imprimitur, simulque sollicitationes, quas terra a sole recipit, contrario modo in lunam et solem cogitatione transferuntur. Celeritas autem terrae in circulo TB debita eſt altitudini $\frac{f}{2a}$, vti ex vi $\frac{f}{a^2}$, qua terra ad ſolem vrgetur colligi poteſt. Tanta igitur celeritas et ſoli et lunae ſecundum directionem ad TS normalem imprimi debet. Praeterea, quia terra ad ſolem trahitur vi $\frac{f}{a^2}$, oportet ad huius vis effectum deſtruendum res ita concipi, ac ſi ſol perpetuo tanta vi ad terram traheretur, luna vero eadem vi ſecundum LN ipſi ST parallelam. Hoc facto ſol deſcribet circa terram in T quieſcentem circulum SE eadem celeritate, qua ante terra circa ſolem ferebatur. Luna vero praeter vires ſecundum LT et LS tendentes inſuper vrgebitur verſus LN vi $= \frac{f}{a^2}$. Ducta LM parallela quoque ipſi TS, reſoluatur vis ſecundum LS agens $\frac{f}{z^2}$ in has duas, quarum alterius directio ſit LT, alterius LM. Ex conſideratione ergo trianguli LTS orietur vis ſecundum LT agens $= \frac{fy}{z^3}$ et vis ſecundum LM trahens $= \frac{af}{z^3}$. Quare omnibus coniunctis luna trahetur verſus LT vi $= \frac{h}{y^2} + \frac{fy}{z^3}$, atque verſus LM vi $= \frac{f}{a^2} - \frac{af}{z^3} = \frac{f(z^3 - a^3)}{a^2 z^3}$, ex quibus viribus motus lunae debet determinari. Notandum autem directionem LM non eſſe conſtantem ſed variabilem, quippe perpetuo parallelam radio TS, qui ob motum ſolis ſecundum peripheriam SE circumfertur. Producta igitur ST in A, vt AB ſit linea ſyzygiarum, et ex L in eam demiſſo perpendiculo LP erit TP aequalis et parallela ipſi LM. Perueniat tempuſculo $dt$ luna

Tabula IX. Fig. 3.

ex

ex L in $l$, ſol autem ex S in $s$; transferetur ergo interea linea ſyzygiarum in $ab$, et luna in $l$ ſollicitabitur partim a vi ſecundum $l$T, partim a vi ſecundum parallelam ipſi T$p$ trahente, demiſſo ſcilicet ex $l$ in T$a$ perpendiculo $lp$. Ex his autem viribus reſoluendis reperiuntur vis normalis et tangentialis, quarum vtraque celeritatem lunae dabit. Hae autem aequationes coniunctae eliminata celeritate praebebunt aequationem pro curua ABL in qua luna moueri cernitur. Q. E. I.

## Scholion I.

796. Aequationes, quae hinc ad motum lunae deducuntur, tam fiunt complexae, vt ex iis neque celeritas lunae, neque orbita, neque poſitio lineae abſidum eiusque motus exacte poſſint determinari. Vero autem proxime ex eodem calculo negligendis quantitatibus vehementer exiguis quodammodo concluſiones in uſum aſtronomiae poſſunt elici, quemadmodum fecit Summus *Neutonus* in Phil. Princ. Libr. III. Etiamſi autem hoc incommodo calculus non laboraret, tamen iſta propoſitio non ſummo rigore motum lunae eſſet exhibitura. Poſuimus enim ſolem prorſus quiescere, quod a vero parumper discrepat; deinde terram in circulo motam conſideramus, et orbitam lunae in ipſo terrae plano poſitam, quae itidem re ipſa ſecus ſe habent. Interim tamen certum eſt, ſi huius propoſitionis ſolutio poſſet euolui ex eaque tabula confici,

hoc

hoc in Astronomia maximam habiturum esse vtilitatem.

## Corollarium 1.

797. Quia lunae a terra distantia est admodum parua respectu distantiae terrae a sole, sine sensibili errore fere poterit poni $z = a$, quo casu vis secundum LM agens euanescit, et luna tantum ad terram trahetur vi $= \frac{b}{y^2} + \frac{fy}{a^3}$.

## Corollarium 2.

798. Cum orbita lunae non multum differat a circulo, poterit ea instar ellipsis mobilis considerari, vt fecimus prop. 90 (747). Quare ad motum absidum cognoscendum, erit ex illius prop. coroll. 3 (750) $P = \frac{a^3by + fy^4}{a^3}$, atque luna a perigaeo ad apogaeum perueniet absoluto motu angulari circa terram angulo $= 180 \sqrt{\frac{a^3b + fy^3}{a^3b + 4fy^3}}$ grad. vbi $y$, quia non multum variatur tanquam constans est considerandum.

## Scholion 2.

799. Regrederetur ergo perpetuo linea absidum motus lunaris, quia $\frac{a^3b + fy^3}{a^3b + 4fy^3}$ minor et vnitate, id quod est contra obseruationes. Ratio vero huius erroris est quod $z$ vt constantem quantitatem considerauimus. Nam etsi $z$ non multum neque augeatur neque minuatur ratione sui ipsius, tamen eius incrementa et decrementa respectu incrementorum ipsius $y$ minime negligi possunt. Quare cum ipsius

P dis-

P differentiale ſit accipiendum, in eo perperam $z$ tanquam conſtantem ſumus contemplati, eiusque loco $a$ poſuimus. Quia autem $z$ non poteſt dari per $y$, motus abſidum non poteſt hoc modo determinari. Interim tamen hoc colligitur, ſi fuerit $ady > ydz$, lineam abſidum in antecedentia, at ſi $ady < ydz$ in conſequentia promoueri, ſi quidem cogitationem abſtrahamus a vi ſecundum LM agente.

## Corollarium 3.

800. Poſito $LM = TP = x$, erit proxime $z = a + x$, vbi $x$ eſt admodum paruum reſpectu $a$. Neglecto ergo $x$ prae $a$ erit vis qua luna ad terram trahitur $= \frac{h}{y^2} + \frac{fy}{a^3}$ et vis qua ſecundum LM trahitur $= \frac{3fx}{a^3}$. Haec igitur euaneſcit quando luna eſt in quadraturis, maxima vero eſt, quando luna eſt in ſyzygiis.

## Scholion 3.

801. Cum autem non ſit huius loci haec ad motum lunae ſpectantia ſuſius perſequi, quippe quae ad Aſtronomiam Theoreticam pertinent; ad reliqua inſtituto noſtro accommodata progrediemur. Sufficere enim poſſunt iſta ad intelligendum, quomodo canones motuum traditi, ad quosuis caſus motusque reſpectiuos inueniendos in vſum verti queant. Quae autem in hoc capite reſtant, motum corporum liberum, qui non fit in eodem plano, comple-

plectuntur. Ex praecedentibus quidem manifestum est, vnica existente vi centripeta, motum corporis semper fieri in eodem pluno, quomodocunque etiam corpus initio fuerit proiectum; et si plura sint centra virium in eodem plano sita, in eodemque plano corporis fiat proiectio, curua a corpore descripta similiter tota in eodem plano erit posita. Ad sequentia igitur referri debet, quando corpus a pluribus viribus, quarum directiones in diuersis planis existunt, sollicitatur, vel etiam quando directio, secundum quam corpus initio proiicitur, non in eo, in quo sunt virium directiones, sita est plano. His igitur in casibus motus corporis ita debet considerari, quasi fieret in superficie quadam conuexa seu concaua, in eaque lineam quandam describeret. Natura autem superficiei exprimitur aequatione tres indeterminatas inuoluente, et lineae in ea superficie ductae natura continetur eadem illa aequatione coniuncta cum alia aequatione vel tres quoque illas indeterminatas complectente vel duas tantum. Ex his enim deduci poterit curuae lineae proiectio in dato plano, et ex proiectione et superficie simul innotescit ipsa curua a corpore descripta et in superficie posita. Quemadmodum porro in plano quaeuis vires ad duas normalem et tangentialem possunt reduci, ita in hoc negotio virium reductio ad tres vires fieri debet (545), quae, quales in corpus exerant effectus, primum sumus inuestigaturi.

PRO-

# PROPOSITIO 98.

## Theorema.

802. *Tres principales vires, quae faciunt, vt corpus in curua non in eodem plano existente moueatur, et in quas aliae vires resolui debent, singulae sunt inter se normales: Earum vna est tangentialis, reliquae duae normales ad eam, quarum altera directionem habet in dato plano, alterius vero directio est normalis ad hoc planum. Harumque virium nulla reliquarum actiones immutare valet.*

## Demonstratio.

Assumto plano fixo APQ, in eoque axe AP, sit M$m$ elementum a corpore descriptum. Ex punctis M et $m$ in planum fixum demittantur perpendicula MQ et $mq$, et ex punctis Q et $q$ perpendicula in axem, QP, $qp$. Iam si corpus a nulla vi sollicitaretur, in recta M$m$ producta progrederetur celeritate quam habuit in M$m$; aequali ergo tempusculo, quo M$m$ percurrit, perueniet in $n$, descripto elemento $mn$ aequali et in directum posito elemento M$m$. Quare demisso quoque ex $n$ in planum APQ perpendiculo $nr$, erunt elementa Q$q$ et $qr$ inter se quoque aequalia et in directum posita: hanc ob rem perpendiculum $r\pi$ ex $r$ in axem AP demissum abscindet elementum $p\pi =$ P$p$. Sit celeritas qua corpus elementum M$m$ describit, debita altitudini $v$, et consideretur primo vis tangentialis, quae directionem habet iuxta $mn$ et tota in alteranda celeritate absumitur. Ponatur haec vis tangentialis T Tabula IX. Fig. 4.

existente vi grauitatis $=1$, erit $dv = T.Mm$, et elementum $mn$ absoluitur celeritate debita altitudini $v+dv$. Deinde in plano $Mr$ concipiatur vis directionem habens $ms$ normalem ad corporis directionem $Mm$. Haec ergo efficiet vt corpus ab $mn$ declinet, et in $m\nu$ elemento in eodem plano $Mr$ posito progrediatur. Sit haec vis $= N$, et cum radius osculi elementorum $Mm$ et $m\nu$, demisso ex $\nu$ in $mn$ perpendiculo $\nu\varepsilon$ sit $= \frac{m\nu^2}{\nu\varepsilon}$, erit $\frac{2v.\nu\varepsilon}{m\nu^2} = N$ (561). Est vero $\frac{\nu\varepsilon}{m\nu}$ sinus anguli $nm\nu$. Quamobrem erit $2v.$ sin. $nm\nu = N.m\nu = N.Mm$, ideoque sin. $nm\nu = \frac{N.Mm}{2v}$. Tertia vis sit normalis ad vtramque expositarum $mn$ et $ms$, ita vt eius directio $mt$ sit normalis in planum $Mr$. Haec igitur vis neque praecedentium actiones impediet, neque ab ipsis impedimentum seu immutationem patietur. Tota ergo impendetur ad corpus a plano $Mr$ detrahendum; deducat ea corpus ex $\nu$ in $\mu$, ita vt planum $\nu m\mu$ sit normale in planum $Mr$; eritque eius effectus angulus $\nu m\mu$. Hoc igitur effectu eodem, quo circa praecedentem vim normalem fecimus, modo aestimato, si fuerit haec vis $M$, erit sin. $\nu m\mu = \frac{M.Mm}{2v}$. Tres ergo hae vires simul efficient, vt corpus, postquam elementum $Mm$ descripsit, progrediatur in elemento $m\mu$, aucta celeritate debita scilicet altitudini $v + T.Mm$. Quaecunque autem aliae vires corpus sollicitent, eae omnes resolui possunt in huiusmodi tres, quarum directiones sunt $mn$, $ms$, $mt$. Quarum effectus in corpus cum determinauerimus, simul

simul quarumcunque virium effectus cognoscentur. Q. E. D.

## Corollarium 1.

803. Sumta $\nu\mu$ in plano $nr\pi$, et demisso ex $\mu$ in planum APQ perpendiculo $\mu\varrho$, erit $\mu\varrho$ parallela ipsi $rn$. Tres igitur coordinatae pro punctis M, $m$ et $\mu$ erunt AP, PQ, QM; A$p$, $pq$, $qm$; et A$\pi$, $\pi\varrho$, $\varrho\mu$.

## Corollarium 2.

804. Quare si ex $\mu$ in $m\nu$ perpendiculum $\mu\eta$ demittatur, erit id in planum M$r$ normale; similique modo $\varrho\theta$, quae est ad $qr$ perpendicularis, in idem planum normalis erit. Quamobrem ob $\varrho$ et $\mu$ in recta $\varrho\mu$ huic plano parallela posita, erit $\varrho\theta = \mu\eta$, et $\theta\eta = \varrho\mu$.

## Corollarium 3.

805. Si ad Q$q$ ducatur normalis $q$T in plano fixo APQ, erit haec $q$T normalis in planum M$r$. Cum igitur $mt$ in idem planum sit quoque normalis, erit $mt$ parallela ipsi $q$T; inter hasque distantia erit altitudo $mq$.

## Corollarium 4.

806. Trium coordinatarum dicantur AP $= x$, PQ $= y$ et QM $= z$. Eritque P$p = p\pi = dx$; $pq = y + dy$; $qm = z + dz$; atque $\pi\varrho = y + 2dy + ddy$; et $\varrho\mu = z + 2dz + ddz = \theta\eta$. At Q$q = \surd(dx^2 + dy^2) = qr$; $q\varrho = \surd(dx^2 + (dy + ddy)^2) = q\theta = \surd(dx^2 + dy^2) + \frac{dyddy}{\surd(dx^2 + dz^2)}$; ideoque $r\theta = \frac{-dyddy}{\surd(dx^2 + dy^2)}$. Porro erit

 $\pi r =$

$\pi r = y + 2dy$ et $rn = z + 2dz$. Denique erit $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = mn$ et $m\mu = \sqrt{(dx^2 + (dy + ddy)^2 + (dz + ddz)^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + \frac{dyddy + dzddz}{\sqrt{(dz^2 + dz^2 + dz^2)}}$.

## Corollarium 5.

807. Quia $mq$, $\theta\eta$ et $r\nu$ sunt inter se parallelae, in eodem plano et rectis $qr$ ac $m\nu$ terminatae, erit $\theta\eta - qm : q\theta = r\nu - mq : qr$. Est vero $\theta\eta - qm = dz + ddz$; $q\theta = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ et $qr = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Quare est $r\nu - mq = \frac{(dz + ddz)(dx^2 + dy^2}{dx^2 + dy^2 + dyddy}$ hincque $n\nu = rn - r\nu = -ddz + \frac{dydzddy}{dx^2 + dy^2}$. Vnde reperitur sin. $nm\nu = \frac{dydzddy - dx^2ddz - dy^2ddz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

## Corollarium 6.

808. Cum deinde sit $r\varrho = -ddy$, et $Qq : Pp = r\varrho : \varrho\theta$ erit $\theta\varrho = -\frac{dxddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \mu\eta$. Hanc ob rem habebitur sin. $\nu m\mu = -\frac{dxddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

## Corollarium 7.

809. Ex datis igitur tribus viribus T, N et M corpus sollicitantibus orientur tres sequentes aequationes: $dv = T\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, $2vdydzddy - 2vddz(dz^2 + dy^2) = N(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ atque $-2vdxddy = M(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ex quibus tum celeritas corporis in singulis locis tum ipsa curua cognoscuntur.

Co-

## Corollarium 8.

810. Duae posteriores aequationes coniunctae et eliminata $v$ dant istam aequationem $\frac{ddz(dx^2+dy^2)}{dxddy} - \frac{dydz}{dx} = \frac{N\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{M}$. Quae assumi potest pro aequatione naturam superficiei exprimente, in qua curua descripta extat.

## Scholion.

811. Hac igitur propositione primarias dedimus regulas, ex quibus motus corporis ita sollicitati, vt in eodem plano moueri nequeat, deduci poterit. Ostendimus enim omnes potentias in ternas, quarum effectus determinauimus, posse resolui; et idcirco, quaecunque proponantur potentiae sollicitantes ope talis resolutionis, quem motum eae in corpore producant, cognoscitur. Apparet etiam si potentia M desit, corpus motum suum in plano esse absoluturum, qui igitur casus huc non pertinet. At si potentia tangentialis T euanescat manentibus reliquis M et N, corpus quidem orbitam non planam describet, sed tamen motu vniformi feretur. Quo igitur situs orbitae in vniuersum cognoscatur, inclinationem plani, in quo sunt elementa $Mm$ et $m\mu$, ad planum APQ eiusque cum hoc intersectionem inuestigari oportebit.

## PROPOSITIO 99.

### Problema.

812. *Determinare plani, in quo duo elementa* Mm *et* mμ *a corpore descripta sunt posita, inclina-* Tabula X. Fig. 1.

*nationem ad planum fixum* APQ, *eiusque cum hoc intersectionem.*

## Solutio.

In plano, cuius inclinationem quaerimus, dantur tria puncta M, $m$ et $\mu$; in hoc igitur plano posita erit quaeuis recta per horum punctorum duo transiens. Quare si recta $m$M producatur, donec ipsi $q$Q productae occurrat in S, erit punctum S tum in plano M$m\mu$ tum in plano fixo APQ; transibit ergo per S recta, qua haec plana se mutuo intersecant. Manentibus igitur vt ante AP$=x$, PQ $=y$ et QM$=z$, et elementis abscissae P$p$ et $p\pi$ inter se aequalibus, erit $qm-$QM : Q$q=$QM : QS, hincque QS$=\frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$. Lineae vero QS positio cognoscitur ex angulo PQS, cuius sinus est $=\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Deinde in plano M$m\mu$ quoque situm est punctum $n$; hanc ob rem recta per $n$ et $\mu$ transiens seu huic parallela per M ducta in eodem extabit plano. Haec autem recta occurret plano APQ in puncto R rectae QP productae, et QR cognoscetur ex hac analogia $rn-\varrho\mu : r\varrho = \mu$QM : QR; hinc erit QR$=\frac{zddy}{ddz}$, ideoque PR$=\frac{zddy}{ddz}-y$. Est vero vt Q$q$ : P$p=$QS : PT ducta ST perpendiculari in AP. Ex quo oritur PT$=\frac{zdx}{dz}$. Porro est quoque P$p$ : $pq-$PQ $=$PT : PQ$+$ST, ideoque PQ$+$ST$=\frac{zdy}{dz}$, et ST$=\frac{zdy}{dz}-y$. Occurrat recta RS producta axi AP in O; eritque PR $-$ ST : PT $=$ PR : PO, ex quo inuenitur PO$=\frac{zdxddy-ydxddz}{dzddy-dyddz}$; atque AO $=$

$=\frac{xdzddy-xdyddz+ydxddz-zdxddy}{dzddy-dyddz}$. Porro ex his eſt tangens anguli POR$=\frac{PR}{PO}=\frac{dzddy-dyddz}{dxddz}$; vnde poſitio interſectionis RO plani $Mm\mu$ cum plano fixo APQ innotescit. Inclinatio autem horum planorum mutua inuenitur demittendo ex Q in RS perpendiculo QV; tum enim erit anguli inclinationis tangens $=\frac{MQ}{QV}$. Eſt vero QV$=\frac{PO.QR}{RO}=\frac{zdxddy}{\sqrt{(dx^2ddz^2+(dzddy-dyddz)^2)}}$ ideoque $\frac{MQ}{QV}=\frac{\sqrt{(dx^2ddz^2+(dzddy-dyddz)^2)}}{dxddy}$, ex quo angulus inclinationis mutuae planorum $Mm\mu$ et APQ determinatur. Q. E. I.

## Corollarium 1.

813. Si angulus POR ſemper maneat idem, erit $\alpha dxddz+dyddz=dzddy$, eſtque huius anguli tangens $=\alpha$. Aequatio haec integrata dat $\alpha dx+dy+\beta dz=o$, atque $\alpha x+y+\beta z=f$. Ex qua aequatione cognoscitur orbitam a corpore deſcriptam totam fore in eodem plano poſitam.

## Corollarium 2.

814. Si enim fuerit $\alpha x+y+\beta z=f$, erit $\alpha dx+dy+\beta dz=o$, et $ddy+\beta ddz=o$. Hinc fiet AO$=x+\frac{ydx+\beta zdx}{-dy-\beta dz}$, et cum ſit $-dy-\beta dz=\alpha dx$, erit AO $x+\frac{y}{\alpha}+\frac{\beta z}{\alpha}=\frac{f}{\alpha}$, ideoque et AO conſtans.

## Corollarium 3.

815. Deinde manente angulo POR conſtante ſeu $\alpha x+y+\beta z=f$; erit tangens anguli inclinati-

onis planorum $Mm\mu$ et APQ$=\frac{\sqrt{(dx^2+(-dy-\mathfrak{C}dz)^2)}}{-\mathfrak{C}dx}=\frac{\sqrt{(1+\alpha^2)}}{-\mathfrak{C}}$. Quare et iſte angulus erit conſtans.

## Corollarium 4.

816. Neque etiam punctum interſectionis O inuariabile poni poteſt, niſi ſimul orbita a corpore deſcripta fiat plana. Nam ſit AO$=f$, et ponatur $x-f=t$, et $dx=dt$; erit $tdzddy-tdyddz=zdtddy-ydtddz$; hincque $\frac{ddy}{tdy-ydt}=\frac{ddz}{tdz-zdt}$. Multiplicetur per $t$, quo habeatur $\frac{tddy}{tdy-ydt}=\frac{tddz}{tdz-zdt}$. Quae aequatio ob $dt$ conſtans eſt integrabilis; namque erit $tdy-ydt=\alpha tdz-\alpha zdt$. Haec diuiſa per $tt$ et integrata dabit $\frac{y}{t}=\frac{\alpha z}{t}+\mathfrak{C}$, ſeu $y=\alpha z+\mathfrak{C}x-\mathfrak{C}f$. Quam perſpicuum eſt eſſe ad ſuperficiem planam.

## Corollarium 5.

817. At ſi ponatur tangens anguli inclinationis planorum $Mm\mu$ et APQ conſtans, huius modi aequatio $\alpha x+y+\mathfrak{C}z=f$ non prodit; Atque aliunde manifeſtum eſt orbitam a corpore deſcriptam tum non neceſſario eſſe planum.

## Corollarium 6.

818. Quare ne curua a corpore deſcripta ſit plana, neque punctum O, neque angulus POR inuariabiles accipi poſſint. Haec autem ſi ſint variabilia, nihilo tamen minus angulus inclinationis planorum $Mm\mu$ et APQ conſtans eſſe poteſt.

Co-

## Corollarium 7.

819. Linea interſectionis RO, quae in Aſtronomia linea nodorum appellatur, ſi non habeat conſtantem poſitionem, conuertitur circa punctum S. Nam recta $mMS$ poſita eſt in plano elementorum $Mm$ et praecedentis. Quare interſectio RO et praecedens ſe in S decuſſabunt.

## Corollarium 8.

820. Punctum igitur hoc S eſt in eo loco, vbi eſt $AT = \frac{xdz - zdx}{dz}$ et $ST = \frac{zdy - ydz}{dz}$. Ex quibus poſitio puncti S cognoſcitur.

## Corollarium 9.

821. Si ponatur punctum S inuariabile, erit $xdz - zdx = adz$ et $zdz - ydz = bdz$, vnde reperitur $x - a = \alpha z$ et $y - b = \beta z$. Hoc igitur caſu orbita a corpore deſcripta non ſolum eſt plana, ſed etiam linea recta; quia proiectio eius $Qq\varrho$ fit recta, et propter $y - b = \beta z$ etiam $Mm\mu$.

## Scholion.

822. Expoſitis nunc principiis, quae ad motum corporum in ſuperficiebus non planis pertinent, ipſa tractatio vt prior de motu in plano in duas partes poteſt diuidi. In quarum prima docebimus ex datis viribus inuenire curuam a corpore deſcriptam, in altera vero oſtendetur, ſi data fuerit curua, quam corpus deſcribit, quales vires ad hoc requirantur. Hic vel curua ipſa tantum poteſt eſſe

data, vel simul quoque celeritas corporis in singulis locis.

## PROPOSITIO 100.

### Problema.

Tabula X. Fig. 2. 824. *Si corpus sollicitetur a tribus potentiis quarum directiones* Mf, Mg *et* MQ *sint parallelae tribus coordinatis* AP, PQ *et* QM; *determinare motum corporis et orbitam, in qua mouebitur.*

### Solutio.

Quia $Mf$ et $Mg$ sunt parallelae ipsis AP et PQ, erit planum $fMg$ parallelum plano APQ. In hoc plano ducatur $Mi$ parallela elemento $Qq$, erit haec $Mi$ quoque posita in plano $Mq$. In elementum $mM$ productum demittatur ex Q perpendiculum $Qd$; atque ex $f$ et $g$ in $Mi$ perpendicula $fi$ et $gk$. Deinde ex $i$ et $k$ in $Md$ cadant perpendicula $ib$ et $kc$. Erunt autem $fi$ et $gk$ perpendiculares in planum $Mq$, quia planum $fMg$ est normale ad planum $Mq$. Manentibus nunc vt ante $AP = x$. $PQ = y$; et $QM = z$: sit vis corpus secundum $Mf$ trahens $= P$; vis, quae corpus secundum $Mg$ trahit $= Q$ et vis secundum MQ trahens $= R$. Hae igitur vires, vt earum effectus cognoscantur, resolui debent in vires tangentialem iuxta $Mm$ agentem; normalem ad $Mm$ in plano MQ sitam, et normalem ad planum $Mq$. Ob ang. $Mfi = Qqp$ erit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy = P : \frac{Pdy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ exprimitque $\frac{Pdy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ vim ex P ortam secundum $if$ agentem, et si P sola ageret foret per (802) M=

$M = -\frac{Pdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Deinde vis secundum $Mi$ trahens erit $= \frac{Pdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Haec porro resoluitur in vim secundum $bi$ trahentem $= \frac{Pdxdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et vim secundum $Mb$ trahentem $= \frac{Pdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Ex P igitur erit $N = -\frac{Pdxdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et $T = -\frac{Pdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Simili modo vis Q, cuius directio est $Mq$, resoluitur in vim secundum $kg$ agentem $= \frac{Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ et vim secundum $Mk = \frac{Qdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Haec vlterius resoluitur in vim secundum $ck = \frac{Qdydx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et vim secundum $Mc = \frac{Qdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Quare si haec vis sola ageret, haberetur $T = -\frac{Qdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$; $N = -\frac{Qdydz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et $M = \frac{Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Denique vis R directionem MQ habens resoluitur in vim secundum $Md = \frac{Rdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et vim secundum $dQ = \frac{R\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Ex vi R igitur foret $T = -\frac{Rdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et $N = \frac{R\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ Omnibus igitur hisce tribus viribus P, Q et R simul agentibus erit vis tangentialis ex omnibus orta $T = -\frac{Pdx - Qdy - Rdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$, vis normalis in plano $Mq$, quae posita est $N = -\frac{Pdxdz - Qdydz + Rdx^2 + Rdy^2}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Atque altera vis normalis $M = -\frac{Pdy + Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. His valoribus loco T, N et M in aequationibus §. 809 substitutis prodibunt tres sequentes aequationes $dv = -Pdx - Qdy - Rdz$; $\frac{2vdydzddy - 2vddz(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2+dz^2} = -Pdxdz - Qdydz + R(ux^2+dy^2)$, atque $\frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdy - Qdx$.

$= Qdx$. Quae aequationes motum corporis determinant. Q. E. I.

## Corollarium 1.

824. Duae hae posteriores aequationes dant istam analogiam: $dydzddy - ddz(dx^2 + dy^2) : dxddy = -Pdxdz - Qdydz + R(dx^2 + dy^2) : Pdy - Qdx$. Ex qua reperitur $ddy : ddz = Pdy - Qdx : Pdz - Rdx$.

## Corollarium 2.

Tabula X. Fig. 1. 825. Planum ergo $Mm\mu$, in quo sunt elementa $Mm$ et $m\mu$ hoc modo definitur. Erit $AO = x - \frac{Pydz + Pzdy - Qzdx + Rydx}{Qdz - Rdy} = -\frac{Pydz + Pzdy + Qxdz - Qzdx + Rydx - Rxdy}{Qdz - Rdy}$; et tang. angulus $POR = -\frac{Qdz + Rdy}{Pdz - Rdx}$. Atque tangens anguli, quem planum $Mm\mu$ facit cum plano $APQ = \frac{\sqrt{((Pdz - Rdx)^2 + (Qdz - Rdy)^2)}}{Pdy - Qdx}$.

## Corollarium 3.

826. Si potentia P euanescat, reperitur $Q = -\frac{2vddy}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ et $R = -\frac{dv}{dz} + \frac{2vdyddy}{dz(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, ex duabus aequationibus inuentarum. Et ex tertia prodibit $\frac{dv}{2v} = \frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, cuius integralis est $vdx^2 = a(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ seu $dx\sqrt{v} = \sqrt{a(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

## Corollarium 4.

827. Hac igitur hypothesi erit tempus seu $\int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a}} = \frac{x}{\sqrt{a}}$. Ex quo intelligitur

tur motum corporis progressiuum secundum axi AP parallelas esse vniformem.

## Corollarium 5.

828. Eadem porro hypothesi erit $Q = -\frac{2add y}{dx^2}$ et $R = -\frac{2addz}{dx^2}$, propter $ddy : ddz = Q : R$ (824). Ex quibus aequationibus ipsa curua a corpore descripta determinabitur.

## Scholion.

829. Ex resolutione potentiarum facile perspicitur ad tres potentias, quas in hac propositione considerauimus, omnes omnino potentias, quae excogitari possunt, reduci posse. Quare cum datis his potentiis non difficulter curua a corpore descripta inueniatur, etiam pro quibusque casibus propositis ista propositio maximam habebit vtilitatem.

# PROPOSITIO 101.

## Problema.

830. *Si corpus perpetuo vrgeatur versus axem AP secundum perpendicula MP a corpore ad axem demissa; determinari oportet motum corporis.* Tabula X. Fig. 3.

## Solutio.

Ductis coordinatis vt ante AP, $x$; PQ, $y$; et QM, $z$: erit $MP = \sqrt{(y^2 + z^2)}$ Sit vis secundum MP agens $= V$, eaque resoluatur in duas secundum MQ et Mg trahentes, vbi Mg est parallela ipsi PQ

eique

eique aequalis. Erit igitur vis ſecundum MQ agens $= \frac{Vz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et vis ſecundum $Mg = \frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. His cum propoſitione praecedente comparatis erit $P = o$, $Q = \frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et $R = \frac{Vz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. Quare habebitur $ddy : ddz = Q : R = y : z$ (828) atque $yddz = zddy$ ſeu $yddz - zddy = o$; cuius aequationis integralis eſt $ydz - zdy = bdx$. Porro erit $\frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = -\frac{2addy}{dx^2}$. Quae aequationes coniunctae determinant curuam a corpore deſcriptam. Corporis autem celeritas dabitur per aequationem $vdx^2 = a(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, ſeu ipſa celeritas erit $= \frac{\sqrt{a(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dx}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

831. Ponatur $dx = pdy$, erit ob $dx$ conſtans, $o = pddy + dpdy$ ſeu $ddy = -\frac{dpdy}{p}$. His ſubſtitutis ad cognoscendam curuam deſcriptam habebuntur iſtae aequationes $ydz - zdy = bpdy$ et $\frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = \frac{2adp}{p^3 dy}$.

## Corollarium 2.

832. Si porro ponatur $z = qy$, iſtae aequationes tranſibunt in $y^2 dq = bpdy$ et $\frac{V}{\sqrt{(1+qq)}} = \frac{2adp}{p^3 dy}$. Quae etiam tres continent variabiles.

## Scholion 1.

833. Ad haec clarius exponenda maxime conuenit exempla adhibere. Quamobrem aliquot afferemus in quibus vis V a diſtantia MP pendere ponitur, eamque poteſtatibus aliquibus ipſius MP proportionalem ponemus; quo iſte motus cum mo-

motu in plano a vi centripeta distantiarum potestati cuidam proportionali comparari possit. Inter hos enim casus magna est similitudo, cum quod est in plano centrum virium hoc loco est quasi axis virium, ad quem corpus perpetuo attrahitur. Atque si initio corpus ita proiiciatur, vt non habeat motum progressiuum secundum axem AP, motus eius fiet in plano PQM, et corpus attrahetur perpetuo ad punctum P centrum virium.

## Exemplum 1.

834. Sit vis V distantiae MP directe proportionalis, ponaturque $V = \frac{\surd(y^2+z^2)}{f}$. Erit ergo $\frac{y}{f} = \frac{2adp}{p^3dy}$ (831) et integrando $\frac{y^2}{2f} = C - \frac{a}{p^2}$. seu $\frac{1}{pp} = \frac{2cf-yy}{2af}$ et $p = \frac{\surd 2af}{\surd(2cf-y^2)}$. Cum autem sit $dq = \frac{bpdy}{y^2}$ (832) erit $\frac{bdy\surd 2af}{y^2\surd(2cf-y^2)} = dq$. Cuius integralis est $q = \alpha - \frac{\mathfrak{b}\surd(2cf-y^2)}{y}$, denotante $\mathfrak{b} = \frac{b\surd 2af}{2cf}$. Quare habebitur $z = \alpha y - \mathfrak{b}\surd(2cf-y^2)$, quae aequatio exprimit proiectionem curuae descriptae in plano ad axem AP normali, quam igitur perspicitur esse ellipsin, cuius centrum in axe AP est positum. Deinde cum sit $dx = pdy$, erit $dx = \frac{dy\surd 2af}{\surd(2cf-y^2)}$, quae aequatio exprimit proiectionem curuae quaesitae in plano APQ. Haec itaque est linea sinuum *Leibnitiana*, cum abscissa $x$ sit vt arcus, cuius sinus est applicata $y$.

## Exemplum 2.

835. Si fuerit vis V reciproce vt quadratum distantiae MP; seu $V = \frac{ff}{y^2+z^2} = \frac{ff}{yy(1+q^2)}$, ob $z = qy$.

 Quam-

Quamobrem habebitur $\frac{ff}{y^2(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2adp}{p^3dy}$. Quia autem est $dy = \frac{y^2dq}{bp}$ (832), erit $\frac{f^2dq}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2abdp}{p^2}$; cuius integralis est $\frac{ffq}{\sqrt{(1+qq)}} = C - \frac{2ab}{p} = C - \frac{2ab^2dy}{y^2dy}$, loco $p$ ipsius valore $\frac{y^2dq}{bdy}$ substituto. Hinc fit $\frac{f^2qdq}{\sqrt{(1+q^2)}} = Cdq - \frac{2ab^2dy}{y^2}$, et integrando $f^2\sqrt{(1+q^2)} = Cq + \frac{2ab^2}{y} + D$. Quare dum sit $q = \frac{z}{y}$; prodibit $f^2\sqrt{(y^2 + z^2)} = Cz + Dy + 2ab^2$. Quae est aequatio pro proiectione curuae descriptae in plano ad axem AP normali; quam igitur colligi potest esse ad sectionem conicam, cuius alteruter focus sit in axe AP positus.

## Scholion 2.

836. Ex his intelligitur proiectiones curuarum descriptarum in plano ad axem AP normali, congruere cum curuis, quas corpora in hoc plano mota describerent ab eadem vi sollicitata. Neque autem hoc mirum est; nam motus, quem hoc loco consideramus, reduci potest ad motum in plano ad axem AP normali factum a corpore ad axem perpetuo attracto; dummodo huic plano motus vniformis secundum axem AP impressus concipiatur. Namque iste motus progressiuus, quia fit vniformiter in directum, motum corporis in plano turbare nequit. Haec igitur conuenientia iam deduci potuisset ex 827, vbi si vis P euanescit, motus corpo-

ris

ris ſecundum axem progreſſiuus aequabilis eſt oſtenſus. Quamobrem quoties vis P in nihilum abit; tum ſemper motus quaeſitus ad motum in plano factum poteſt reduci. Hoc ſcilicetfiet ſi plano ad axem AP normali tantus motus retro ſecundum PA imprimatur, quantum habere inuentum eſt ſecundum AP progreſſiuum (827).

## Scholion 3.

837. Interim tamen hoc maxime attendi meretur, quod tam facile in exemplis propoſitis aequationes inter coordinatas orthogonales pro curuarum proiectionibus in plano ad axem AP normali atque adeo pro ipſis curuis a corpore deſcriptis ſi motus progreſſiuus euanescat, inuenerimus. In huius capitis enim priore parte qua motus in plano a vi centripeta generales conſiderauimus, multo maiore opus fuit labore et comparatione arcuum circularium vt ad aequationes conſuetas pro curuis deſcriptis peruenerimus. Maior igitur generalitas, quae ſaepiſſime inuentionem quaeſiti difficiliorem reddit, hoc loco non ſolum non eſt impedimento, ſed etiam facillime id determinat, quod in particulariori ſenſu difficile erat inuentu.

## Corollarium 3.

838. In caſu huius propoſitionis planum elementorum $Mm$ et $m\mu$ facile determinatur. Nam ob $ddy:ddz=y:z$ erit $PO=o$ et $AO=x$, incidetque O Tabula X. Fig. I.

 in

in P. Porro tang. ang. POR $= \frac{ydz - zdy}{zdx} = \frac{b}{z}$ ob $ydz - zdy = bdx$. Cotangens igitur anguli POR est vt QM. Denique tangens anguli inclinationis plani $Mm\mu$ ad planum APQ est $= \frac{\surd(z^2 + b^2)}{y}$.

## Scholion 4.

839. Cum casus, quo vis P euanescit, ad motum in plano possit reduci; reduci quoque poterit ad motum in plano si vel Q vel R desit. Nam si axis capiatur in recta ad AP normali in plano APQ, vis Q directionem habebit axi parallelam, et reliquae P et R tractabuntur, vt ante Q et R. At si axis sumatur normalis ad AP et ad planum APQ, vis R locum vis P axi parallelae occupabit. Scilicet quemadmodum coordinatae $x$, $y$ et $z$ respectu situs inter se possunt commutari, similiter etiam de viribus P, Q et R est iudicandum.

# PROPOSITIO 102.

## Problema.

Tabula XI. Fig. 1.

840. *Si corpus in singulis punctis M duplici vi sollicitetur vna cuius directio est MA; et altera cuius directio est MQ normalis ex M in planum APQ demissa: oportet determinari motum corporis M, et orbitam eius.*

## Solutio.

Ducta MP, quae sit normalis in AP, vis MA resoluatur in vires secundum Ms ipsi AP parallelam, et secundum MP agentes. Haec vero vis iuxta MP re-

resoluitur in vires secundum MQ et $Mg$ agentes. Positis igitur vt ante $AP=x$, $PQ=y$ et $QM=z$; et vi secundum MA trahente $=V$, et vi secundum $MQ=W$, atque resolutione virium instituta et comparatione facta cum prop. 100. reperietur $P=\frac{Vx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$, $Q=\frac{Vy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$ et $R=W+\frac{Vz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$. Atque ex aequationibus eiusdem prop. prodibit $V=\frac{2v\,dx\,ddy\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{(xdy-ydx)(dx^2+dy^2+dz^2)}$ et $W=\frac{2vddy(xdz-zdx)-2vddz(xdy-ydx)}{(xdy-ydx)(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Ex his inuenitur $\frac{dv}{2v}=\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}-\frac{xddy}{xdy-ydx}$; hincque integrando $l\sqrt{v}=l\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{xdy-ydx}+la\sqrt{a}$, seu $\sqrt{v}=\frac{a\sqrt{a}(dx^2+dy^2+dz^2)}{xdy-ydx}$; siue $v=\frac{a^3(dx^2+dy^2+dz^2)}{(xdy-ydx)^2}$. Hic valor loco $v$ substitutus dat has aequationes $V=\frac{2a^3dxddy\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{(xdy-ydx)^3}$ et $W=\frac{2a^3ddy(xdz-zdx)-2a^3ddz(xdy-ydx)}{(xdy-ydx)^3}$. Ex quibus curua descripta determinatur. Q. E. I.

## Corollarium 1.

841. Tempus quo corpus in M vsque peruenit, est $\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{v}}$. Cum autem sit $\sqrt{v}=\frac{a\sqrt{a}(dx^2+y^2+dz^2)}{xdy-ydx}$, erit illud tempus $=\frac{\int xdy-\int ydx}{a\sqrt{a}}$, quod per quadraturam proiectionis curuae descriptae in plano APQ cognoscitur.

## Corollarium 2.

842. Si ponatur $y=px$ et $z=qx$; prodibunt sequentes aequationes $V=\frac{2a^3dx(xddp+2dxdp)\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{x^5dp^3}$

et $W = \frac{2a^3 dq ddp - 2a^3 dp ddq}{x^3 dp^3}$, Quae ad curuam cognoscendam inseruiunt.

## Exemplum.

843. Si vis V fuerit distantiae MP proportionalis et vis W perpendiculo MQ; ponatur $V = \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{f}$ et $W = \frac{z}{g}$, vt itaque sit $V = \frac{x\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{f}$ et $W = \frac{qx}{g}$. Quare per aequationes praeced. Coroll. erit $x^6 dp^3 = 2a^3 f dx (x ddp + 2dx dp)$ et $x^4 q dp^3 = 2a^3 g dq ddp - 2a^3 g dp ddq$. Illius aequationis integralis est $x^2 = C - \frac{2a^3 f dx^2}{x^4 dp^2}$; ex qua oritur $dp = \frac{a dx \sqrt{2af}}{x^2 \sqrt{(c^2-x^2)}}$; huiusque integralis $p = \frac{y}{x} = C - \frac{a\sqrt{2af(c^2-x^2)}}{c^2 x}$, seu $y = nx - \frac{a\sqrt{2af(c^2-x^2)}}{c^2}$, pro aequatione proiectionis curuae descriptae in plano APQ, quae igitur est ellipsis, cuius centrum in A est positum. Ex inuento ipsius $dp$ valore erit porro $ddp = -\frac{a dx^2 (2c^2-3x^2)\sqrt{2af}}{x^3 (c^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ quibus loco $dp$ et $ddp$ valoribus in altera aequatione substitutis orietur $afqx dx^2 = -2accg dx dq + 3agx^2 dx dq - ac^2 gx ddq + agx^3 ddq$. Ponatur $q = e^{\int r dx}$ prodibit $fx dx = -c^2 gx dr + gx^3 dr - 2ccgr dx + 3gx^2 r dx - c^2 gx r^2 dx + gx^3 r^2 dx$. Fiat $r = \frac{u}{x^2\sqrt{(c^2-x^2)}}$, prouenietque $fx dx = -\frac{g du\sqrt{(cc-x^2)}}{x} - \frac{gu^2 dx}{x^3}$ seu $du + \frac{u^2 dx}{x^2\sqrt{(c^2-x^2)}} + \frac{fx^2 dx}{g\sqrt{(c^2-x^2)}} = 0$. Quae posito $t = \frac{\sqrt{(c^2-x^2)}}{x}$ seu $x = \frac{c}{\sqrt{(1+tt)}}$ transibit in hanc;

Tabula X. Fig. 1. $du - \frac{u^2 dt}{cc} = \frac{ccf dt}{g(1+tt^2)^2}$; cuius integrale postea exhibebimus. Ad planum cognoscendum, in quo elementa $Mm$ et $m\mu$ sunt sita, ob $ddy : ddz = gx dy - gy dx :$

$gx dz$

$gxdz-hzdx$ posito $h$ loco $f+g$ reperietur $AO = \frac{fz(xdy-ydx)}{hzdy-gydz}$; tang. ang. $POR = \frac{hzdy-gydz}{gxdz-hzdx}$. Atque tang. ang. plani $Mm\mu$ cum plano $APQ = \frac{\sqrt{\left(\left(hzdy-gydz\right)^2+(gxdz-hzdx)^2\right.}}{g(xdy-ydx)}$. Denique tempus quo corpus in M peruenit cum sit $= \frac{\int xxdp}{a\sqrt{a}}$, erit $= \int \frac{dx\sqrt{2f}}{\sqrt{(c^2-x^2}}$. Erit itaque hoc tempus proportionale angulo cuius ſinus eſt abſciſſa $x$, exiſtente ſinu toto $=c$, ſeu cuius ſinus eſt $\frac{x}{c}$, ſi ſinus totus capiatur $=1$. Ex quo perſpicitur motum corporis in proiectione in plano APQ facta angularem circa A eſſe vniformem, et tempus vnius reuolutionis eſſe vt $\sqrt{f}$.

## Corollarium 3.

844. Proiectio curuae deſcriptae in plano APQ fit circulus, ſi eſt $n=0$ et $-a\sqrt{2af} = cc$; cuius centrum eſt in A et radius $=c$. Erit igitur $y=\sqrt{(c^2-x^2)}$. Atque $z$ dabitur ex hac aequatione $\frac{gddz}{dx} = \frac{gxdz-hzdx}{cc-xx}$, quae aeque late patet ac caſus exempli praecedentis, etiamſi hic caſus particularis ſit conſideratus.

## Corollarium 4.

845. Ad inuentum ipſius $z$ valorem ex aequatione $\frac{gddz}{dx} = \frac{gxdz-hzdx}{cc-xx}$, pono $z = e^{\int rdx}$. Quo facto prodibit aequatio differentialis primi gradus haec: $gdr + gr^2dx = \frac{grxdx-hdx}{cc-xx}$. Fiat $r = \frac{u}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ prodibitque $gdu + \frac{gu^2dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} + \frac{hdx}{\sqrt{c^2-x^2}} = 0$. Poſito $\frac{h}{g}$ ſeu $\frac{f+g}{g} = m^2$,

$= m^2$, orietur aequatio ista $\frac{du}{u^2+m^2} + \frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = 0$, in qua indeterminatae iam sunt a se inuicem separatae.

## Corollarium 5.

846. Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = +\sqrt{-1}\, l(\sqrt{(cc-xx)} - x\sqrt{-1})$ et $\int \frac{du}{u^2+m^2} = \frac{1}{2m\sqrt{-1}}\, l \frac{u-m\sqrt{-1}}{u+m\sqrt{-1}}$. Addita igitur constante et sumtis numeris habebitur $\left(\frac{\sqrt{(cc-xx)} - x\sqrt{-1}}{b}\right)^{2m} = \frac{u-m\sqrt{-1}}{u+m\sqrt{-1}}$ hincque $u = \frac{(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\, m\sqrt{-1}}{b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m}}$.

## Corollarium 6.

847. Cum vero sit $lz = \int r dx$, atque $r = \frac{u}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$, erit $lz = \int \frac{m\, dx\, (b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Ponatur $\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = s$; erit $s = \sqrt{-1}\, l \frac{\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1}}{b}$ et $e^{\frac{s}{\sqrt{-1}}} b = \sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1}$, atque $lz = \int \frac{m\, ds\, (1 + e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}})\sqrt{-1}}{1 - e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}}}$, seu posito $e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}} = t$ vt sit $ds = \frac{dt\sqrt{-1}}{2mt}$, erit $lz = \int \frac{-dt(1+t)}{2t(1-t)} = l \frac{(1-t)k}{\sqrt{t}}$, vnde fit $z = \frac{(1 - e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}})k}{e^{\frac{ms}{\sqrt{-1}}}} = \frac{(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})k}{b^m(\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^m}$

Co-

## Corollarium 7.

848. Inuento nunc valore ipsius $z$ erit $dz = \frac{mzdx(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Atque $\frac{gxdz - bzdx}{z} = \frac{mgdx(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})}{(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}} - m^2gdx$

Porroque posito $y = \sqrt{(c^2-x^2)}$ erit $\frac{bzdy - gydz}{z} = -\frac{m^2gxdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} - \frac{mgdx(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m}}$.

## Corollarium 8.

849. Ex his denique inuenictur $AO = \frac{fcc(b^{2m} - (\sqrt{c^2-x^2}) - x\sqrt{-1})^{2m})}{m^2gx(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m} + mg(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m}\sqrt{-1}(c^2-x^2)}$, et tang.

$$POR = \frac{mx(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m}) + (b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m}\sqrt{-1}(c^2-x^2)}{m(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)} - x(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}.$$

Simili modo ex his inuenitur angulus inclinationis plani, in quo corpus mouetur, ad planum APQ.

 Scho-

## Scholion.

850. Inuentorum valorum ipsius $z$ et orbitae inclinationis applicatio fit ad modum difficilis ob quantitates imaginarias inuicem permixtas. Hanc ob rem iis longius immorari noluimus ad intersectiones curuae a corpore descriptae cum plano APQ determinandas. Quia autem magni est momenti haec quaestio in Astronomia ad motum nodorum inueniendum, sequens huic negotio destinata est propositio, in quo loco, vbi corpus motu suo in planum APQ perueniat, inuestigabimus. Corpus enim partim supra hoc planum motum suum absoluit partim infra; et siue supra sit siue infra, corpus perpetuo trahitur altera vi W ad hoc planum in ratione directa distantiae ab hoc plano. Punctum vero in plano APQ, per quod corpus ex superiore parte in inferiorem transit vocatur nodus descendens, punctum vero per quod in superiora reuertitur nodus ascendens.

# PROPOSITIO 103.

## Problema.

851. *Si corpus attrahatur perpetuo partim ad punctum fixum* A *in ratione distantiarum ab eodem, partim normaliter ad planum* APQ *in ratione quoque distantiarum ab hoc plano: determinare nodos seu puncta, in quibus corpus in hoc planum peruenit; et praeter-*

Tabula XI. Fig. 1.

*terea etiam puncta, in quibus corpus ab hoc plano maxime distat.*

## Solutio.

Manentibus vt ante tribus coordinatis $x$, $y$ et $z$, atque vi, qua corpus ad A trahitur $= \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{f}$, ac vi, qua corpus ad planum APQ trahitur $= \frac{z}{g}$, positoque $\frac{f+g}{g} = m^2$: manifestum est corpus in ipsum planum APQ incidere, vbi erit $z=0$. Fit autem $z=0$, quoties est $b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m} = 0$ (847). Hocque euenit quoties est $u = \infty$ (846). Cum igitur sit $\frac{du}{u^2+m^2} + \frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = 0$ (845), centro A describatur circulus BQC, radio AB$=c$; corpusque iuxta plagam BQC moueatur; et loco illius aequationis sumatur haec aequiualens $\frac{\frac{c^3}{m^2}du}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2} + \frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = 0$, seu $\frac{\frac{1}{m}.\, cc.\frac{cdu}{m}}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2} = -\frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Cuius integralis est $\frac{1}{m}\int \frac{cc.\frac{cdu}{m}}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2} = C - \int \frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$; in qua $\int \frac{cc.\frac{cdu}{m}}{\frac{ccuu}{m^2}+c^2}$ exprimit arcum cuius tangens est $\frac{cu}{m}$, et $\int \frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ arcum BQ cuius sinus est AP$=x$. Sit C arcus BQC, seu quadrans circuli, et tangens CS$=\frac{cu}{m}$, cui respondeat arcus CR. Transibit ergo illa aequatio in hanc $\frac{1}{m}$CQR$=$CQ, atque CR$=m$. CQ. Ex hoc perspicuum est fore $u=\infty$, quo-

quoties angulus CAR fuerit rectus, vel aequalis tribus aut quinque aut 7 etc. rectis. Sequendo itaque corporis motum, erit $u$ infinitum, ſi arcus CR ſucceſſiue fiat aequalis ſequentibus graduum numeris; $90$; $-90$; $-270$; $-450$; $-630$; etc. Tunc autem arcus CQ tenebit gradus; $\frac{90}{m}$; $-\frac{90}{m}$; $-\frac{270}{m}$; $\frac{450}{m}$; $-\frac{630}{m}$; etc. atque arcus BQ: $90-\frac{90}{m}$; $90+\frac{90}{m}$; $90+\frac{270}{m}$; $90+\frac{450}{m}$; $90+\frac{630}{m}$; etc. Quare ſi corpus alicubi fuerit in nodo, ad alios nodos perueniet ſucceſſiue abſolutis motu angulari circa A angulis graduum: $\frac{180}{m}$; $\frac{360}{m}$; $\frac{540}{m}$; $\frac{720}{m}$; etc. Duo igitur nodi proximi a ſe inuicem diſtabunt angulo $\frac{180}{m}$ grad. Atque nodus ascendens vel descendens diſtabit a ſequente nodo eiusdem nominis angulo $\frac{360}{m}$ grad. i. e. angulo $\frac{360.\sqrt{g}}{\sqrt{(g+f)}}$ grad. Q. E. Prius.

Maxime deinde corpus a plano APQ diſtabit, vbi erit $dz=o$; id quod euenit quoties $b^{2m}+(V(c^2-x^2)-xV-1)^{2m}=o$ (848). His autem in caſibus fit $u=o$. Manente ergo priore conſtructione euadet $u=o$, quoties fit $CR=o$, vel $-180$, vel $-360$; etc. grad. Tum autem arcus CQ continebit gradus; $o$, $-\frac{180}{m}$, $-\frac{360}{m}$, $-\frac{540}{m}$, etc. ideoque arcus BQ habebit gradus: $90$; $90+\frac{180}{m}$; $90+\frac{360}{m}$; $90+\frac{540}{m}$, etc. Maxima igitur corporis a plano APQ diſtantia aequaliter diſtat a nodis vtrinque proximis. Q. E. Poſterius.

Co-

## Corollarium 1.

852. Nodi igitur in idem tandem recident punctum si fuerit $m$ numerus rationalis seu $\frac{(f+g)}{g}$ numerus quadratus. At si $\frac{f+g}{g}$ non fuerit numerus quadratus, corpus nunquam in eodem puncto in planum APQ incidet, in quo ante aliquando inciderit.

## Corollarium 2.

853. Si $f$ est numerus affirmatiuus, seu si corpus perpetuo ad planum attrahatur vi positiua; erit $m$ numerus vnitate maior. Interuallum ergo inter duos nodos proximos minus erit quam ang. 180 grad. Quare nodi retrogrediuntur: et nodus sequens ab oppositione praecedentis nodi distabit angulo $\frac{180(m-1)}{m}$ grad.

## Corollarium 3.

854. Si corpus perpetuo a plano APQ repellatur fit $g$ numerus negatiuus, atque $m = V\frac{g-f}{g}$. Quare si $g > f$, est $m$ numerus realis sed vnitate minor; tum igitur nodi in consequentia progrediuntur eo celerius, quo minus $f$ ab $g$ distabit. Atque si $f = g$, tum corpus e nodo egressum nunquam in superficiem APQ reuerteretur. At si $f > g$, corpus perpetuo ab hoc plano discedet.

## Corollarium 4.

855. Quia corpus a plano APQ maxime distat, quando fit $(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}=-b^{2m}$: ipsa maxima distantia habebitur, si in valore ipsius $z$ inuento (847), haec fiat substitutio. Inuenietur autem haec maxima distantia $=\frac{2k}{\sqrt{-1}}$, quae igitur vbique est eadem.

## Corollarium 5.

856. Si hic circulus BQC fuerit proiectio orbitae a corpore descriptae in plano APQ, erit anguli inclinationis plani orbitae ad planum APQ tangens $=\frac{2k}{c\sqrt{-1}}$ in locis vbi corpus maxime ab hoc plano distat; seu $=\frac{2k}{c}$ posito $k$ loco $\frac{k}{\sqrt{-1}}$, cum constans $k$ talem debeat habere valorem ad imaginaria euitanda.

## Corollarium 6.

857. Eadem manente hypothesi, in locis vbi corpus in planum APQ incidit tangens anguli inclinationis erit $=\frac{dz\sqrt{(c^2-x^2)}}{cdx}$, existente $(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}=b^{2m}$. Fiet itaque ista tangens

$$=\frac{mz(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})c}$$

(et loco $z$ suo posito valore) $=\frac{2mk\sqrt{-1}}{c}$ seu ido-

idoneo loco $k$ valore ſubſtituto erit illa tangens $= \frac{2mk}{c}$.

## Corollarium 7.

858. Tangens igitur inclinationis orbitae a corpore deſcriptae ad planum APQ, ſi corpus a plano APO maxime diſtat eſt ad eandem tangentem ſi corpus in hoc planum incidit vt 1 ad $m$. Fiet ergo vt diſtantia duorum nodorum ad 180 gradus, ita inclinatio orbitae, ſi corpus a nodis maxime diſtat, ad inclinationem orbitae a corpore deſcriptae, ſi corpus in ipſis verſatur nodis.

## Scholion.

859. Haec quidem propoſitio parum vtilitatis habere videtur in aſtronomia, eo quod vim, qua corpus ad punctum fixum A trahitur, diſtantiae proportionalem faciamus; in corporibus vero coeleſtibus vis reciproce quadratis diſtantiarum proportionalis locum habeat. Vſus tamen eius eximius eſt, ſi orbitae corporum non multum a circulis differant; nam orbita in circulum abeunte, nihil intereſt, quomodocunque vis centripeta a diſtantiis pendeat. Quamobrem cum orbitae planetarum non multum a circulis diſcrepent, haec propoſitio bono cum ſucceſſu ad

ad eos motus potest accommodari. Hocque tum maxime est faciendum, vt linea $f$ inueniatur, quae se habeat ad corporis a centro distantiam, vt vis grauitatis ad vim centripetam. Altera vis, quae corpus ad planum datum trahit, quodammodo distantiae proportionalis effici potest; id tamen si non accidat, litera $g$ vt variabilis debet considerari, ex quo vero proxime motus nodorum poterit colligi, inter omnes ipsius $g$ valores quasi medium eligendo. In motu lunae nodorum motus maxime attendi meretur, quippe qui iuxta nostram determinationem fit in antecedentia. Obseruatur autem nodi ab oppositione praecedentis nodi distantia fere $43'$, ita vt sit $\frac{180(m-1)}{m} = \frac{43}{60}$ atque $m = 1 + \frac{43}{10757} = 1\frac{1}{250}$. Ex quo vis lunam ad planum eclipticae perpetuo trahens a posteriore potest cognosci.

---

# CAPUT SEXTUM
## DE
## MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO IN MEDIO RESISTENTE.

## PROPOSITIO 104.
### Theorema.

860.

*Si corpus moueatur in medio resistente a quotcunque potentiis absolutis sollicitatum: vis resistentiae actionem potentiarum absolutarum aliter non turbat, nisi quod vim tangentialem ex illis ortam minuat.*

### Demonstratio.

Ex capite praecedente satis intelligitur omnes potentias absolutas resolui posse in duas vires tangentialem et normalem, si quidem motus fit in eodem plano. At si corpus non in eodem mouetur plano, tum tres vires aequiualentes assignari possunt loco quotcunque potentiarum sollicitantium, quarum vna est tangentialis et duae normales. Vis autem, quam resistentia in corpus exerit, directio semper congruere ponitur cum directione corporis (117). Quamobrem vis resistentiae ad vim tangentialem est referenda, quam

 im-

imminuit, quia motum corporis retardat; vires vero normales prorſus non afficit. Manifeſtum igitur eſt reſiſtentiam potentiarum abſolutarum effectum aliter non turbare, niſi quatenus vis tangentialis ex iis orta a reſiſtentia minuitur. Q. E. D.

## Corollarium 1.

861. Reſiſtentiae igitur effectus totus in alteranda corporis celeritate conſiſtit, neque eius directionem immutat, niſi quatenus virium normalium actio variatur variata celeritate.

## Corollarium 2.

862. Niſi igitur praeter reſiſtentiam adſint potentiae abſolutae, fieri non poteſt, vt corpus in linea curua moueatur, ſed perpetuo in recta moueri perget, quoad motum ſuum perdiderit.

## Scholion 1.

863. In hoc igitur capite, quo motus curuilineos tractabimus, neceſſe eſt, vt cum reſiſtentia ſimul potentias abſolutas conſideremus; easque tales, quae reſolutione praebeant vim normalem, ne in eandem rem capite 4. pertractatam incidamus. Hanc ob rem primo potentiam ad punctum infinite diſtans tendentem, ſeu directionem ſibi perpetuo parallelam conſeruantem conſiderabimus. Deinde ad vires centripetas progrediemur, aliasque quouis modo diſpoſitas potentias. Denique etiam motus non

non in eodem plano factos, quales oriantur in medio resistente, examini subiiciemus.

## Corollarium 3.

864. Si vis tangentialis sit T, et vna seu duae normales N seu N et M, et vis resistentiae R; canones effectum harum virium continentes, quos in praecedente capite dedimus, etiam hic locum habebunt, si modo in iis loco T ponatur T − R.

## Scholion 2.

865. Quemadmodum resistentiam, cuius vis a celeritate corporis pendere ponitur, exponi oporteat per legem resistentiae et exponentem in cap. 4. fuse est ostensum. Hoc vero capite varietas resistentiae magnum campum rerum pertractandarum aperiet, quae in capite praecedente locum non inueniebant. Praeterea hanc tractationem ita subdiuidemus, vt primo ex datis potentiis absolutis et resistentia curuam descriptam et motum corporis in ea determinemus. Deinde si curua et potentia absoluta fuerit data, ex his resistentiam deducemus. Tertio ex data curua et resistentia potentia absoluta datam habens directionem erit inuestiganda. Denique ex data curua, et celeritate corporis in singulis eius punctis et resistentia, potentia absoluta eiusque directio poterit inueniri. Primariam

autem huius capitis diuisionem motus in eodem plano et non in eodem plano factus constituet.

## PROPOSITIO 105.

### Problema.

866. *Si corpus moueatur in medio resistente quocunque sollicitatum a potentiis absolutis quibuscunque ita tamen vt motum suum in eodem plano absoluat; definire canones, quos in motu suo corpus obseruat.*

Tabula XI. Fig. 3.

### Solutio.

Describat corpus hac ratione sollicitatum curuam AMB; sit eius celeritas in M debita altitudini $v$, et curuae elementum $Mm = ds$. Ponatur porro vis normalis ex omnibus potentiis absolutis orta $=$ N, cuius ergo directio erit MN normalis in curuam; vis vero tangentialis ex iisdem potentiis absolutis orta $=$ T, cuius directio est MT tangens curuae in M. Atque vis resistentiae in M sit $=$ R. His positis motus corporis definiri debet ex vi normali N et vi tangentiali T$-$R (864). Sit iam radius osculi in $M = r$, eritque $N = \frac{2v}{r}$ (552) et $dv = (T - R)\, ds$; (cit.). Ex his duabus aequationibus, si eliminetur $v$, prodibit aequatio naturam curuae AMB exponens, simulque corporis in singulis locis celeritas ex aequatione $N = \frac{2v}{r}$ innotescit. Q. E. I.

## Corollarium 1.

867. Erit igitur $v = \frac{Nr}{2}$. Vnde habebitur $dv = \frac{Ndr + rdN}{2}$. Qui valor si in aequatione $dv = (T - R)ds$ substituatur loco $dv$, et in R ponatur $\frac{Nr}{2}$ loco $v$; prodibit aequatio pro curua a corpore descripta.

## Corollarium 2.

868. Si in R, $v$ vnicam habuerit dimensionem, id quod accidit, si resistentia est quadratis celeritatum proportionalis; aequatio $dv = (T - R)ds$, poterit separari, ex eaque $v$ determinari. Haecque aequatio cum $v = \frac{Nr}{2}$ coniuncta dabit simpliciorem aequationem pro curua descripta.

## Scholion.

869. Praeter hunc casum, quo $v$ vnicam habet dimensionem in R, plurimi dantur alii, quibus aequatio $dv = (T - R)ds$ potest integrari; sed eos euoluere non est opus, cum nihilominus $v$ possit eliminari. Hunc vero casum ideo praecipue notauimus, quia reuera ad fluidorum resistentiam pertinet, et quem propterea prae aliis diligentius examinabimus.

# PROPOSITIO 106.

## Problema.

870. *Tendat vis sollicitans vbique normaliter ad rectam positione datam* AP; *et moueatur cor-* Tabula XI. Fig. 4.

 *pus*

*pus in medio quocunque resistente; determinare curuam* AMB *in qua corpus mouebitur, et ipsum corporis motum.*

## Solutio.

Sit vis quae corpus in M sollicitat $=P$, cuius ergo directio erit MP. Celeritas corporis in M debeatur alt. $v$, et vis resistentiae ibi sit $=R$. Capiatur elementum $Mm$, ductaque $mp$ sit $AP=x$, $PM=y$ et $Mm=ds$. Erit $Pp=Mr=dx$ et $mr=dy$. Porro ducatur tangens MT in eamque ex P perpendicularis PT. His factis vis P resoluetur in normalem $\frac{P.PT}{PM}=\frac{Pdx}{ds}$ et tangentialem $\frac{P.MT}{MP}=\frac{Pdy}{ds}$. Quia autem haec vis tangentialis motum corporis retardat eius negatiuum est capiendum. Posito igitur radio osculi in $M=r$, erit $\frac{Pdx}{ds}=\frac{2v}{r}$ et $dv=-Pdy-Rds$ (866). Ex quibus aequationibus tum ipsa curua tum motus corporis poterit inueniri. Q. E. I.

## Corollarium I.

871. Posito $dx$ constante est radius osculi $r=-\frac{ds^3}{dxddy}$. Hanc ob rem habebitur sequens aequatio $P=-\frac{2vddy}{ds^2}$. Qui valor ipsius P in altera aequatione substitutus dabit aequationem $dv=\frac{2vdyddy}{ds^2}-Rds$, seu ob $dyddy=dsdds$ haec $dv=\frac{2vdds}{ds}-Rds$. Quae aequatio locum habet, quaecunque fuerit potentia P, modo eius directio sit MP.

Co-

## Corollarium 2.

872. Si resistentiae lex fuerit ratio quaecunque multiplicata celeritatum et exponens resistentiae sit quantitas vtcunque variabilis $q$ ita vt sit $R = \frac{v^m}{q^m}$, tum habebitur ista aequatio $dv = \frac{2vdds}{ds} - \frac{v^m ds}{q^m}$, cuius integralis est $v^{1-m} = \frac{(m-1)dx^{2m-2}}{ds^{2m-2}} \int \frac{ds^{2m-1}}{q^m dx^{2m-2}}$.

## Corollarium 3.

873. Si in eadem hypothesi fuerit $m = 1$, erit $\frac{dv}{v} = \frac{2dds}{ds} - \frac{ds}{q}$, cuius integralis est $lv = 2l\frac{ds}{dx} - \int\frac{ds}{q}$, seu $e^{\int\frac{ds}{q}} v = \frac{ads^2}{dx^2}$. Si praeterea resistentia fuerit vniformis seu $q = c$, erit $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{ads^2}{dx^2}$ seu $v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}} ds^2}{dx^2}$. Tempus igitur hoc casu quo arcus AM absoluitur erit $= \int \frac{e^{\frac{s}{2c}} dx}{\sqrt{a}}$.

# PROPOSITIO 107.

## Problema.

874. *Si et potentia et medium resistens sit vniforme, illiusque directio sit MP normalis in rectam datam AP; medium vero resistat in ratione duplicata celeritatum, determinare motum corporis proiecti.* Tabula XI. Fig. 4.

Solu-

## Solutio.

Ponatur potentia corpus perpetuo versus AP trahens $=g$ et exponens resistentiae $=c$, reliquae denominationes vero maneant vt ante. Erit igitur $P=g$ et $R=\frac{v}{c}$. Vnde orientur sequentes aequationes $\frac{gdx}{ds}=\frac{2v}{r}$ seu $gds^2+2vddy=0$ posito $dx$ constante; atque $dv=-gdy-\frac{vds}{c}$. Ex his vero aequationibus coniunctis iam inuenimus $e^{\frac{s}{c}}v=\frac{ads^2}{dx^2}$ (873). Quare cum sit $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$ prodit eliminata $v$ ista aequatio $ge^{\frac{s}{c}}dx^2=-addy$, qua natura curuae descriptae continetur. Cum sit $dsdds=dyddy$ erit etiam $ge^{\frac{s}{c}}dx^2dy=-2adsdds$. Ponatur $dx=pds$, erit $dds=-\frac{dpds}{p}$ et $dy=ds\surd(1-pp)$. His substitutis proueniet ista aequatio $ge^{\frac{s}{c}}ds=\frac{2adp}{p^3\surd(1-pp)}$, quae ad construendam curuam descriptam sufficit. Aequationis vero huius integralis aequatio est $gce^{\frac{s}{c}}=C-\frac{a\surd(1-pp)}{p^2}-a.l\frac{1+\surd(1-p^2)}{p}$. Restituto vero $\frac{dx}{ds}$ loco $p$ habetur $gce^{\frac{s}{c}}=C-\frac{adyds}{dx^2}-al\frac{ds+dy}{dx}$. Quae est aequatio differentialis primi gradus atque simplicior reddi non potest. Q. E. I.

## Corollarium I.

875. Pro curua descripta aequatio statim differentialis tertii gradus prodit: Nam ob $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$, erit

erit $dv = -gdy + \frac{gds^2 d^3 y}{2ddy^2}$, quibus valoribus in aequatione $dv = -gdy - \frac{vds}{c}$ substitutis prodibit $dsdd y = c d^3 y$.

## Corollarium 2.

876. Sit sinus anguli, quem curua in A cum axe AP constituit $= \mu$, eiusque cosinus $= \sqrt{(1-\mu^2)} = \nu$ et altitudo celeritati in A debita $= b$. Facto ergo $s = o$ et $ds : dx = 1 : \nu$, fieri debet $v = b$, habebitur ergo ex $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{ads^2}{dx^2}$ haec $\nu^2 b = a$, vnde constans $a$ cognoscitur.

## Corollarium 3.

877. Porro in aequatione curuae vltima facto $s = o$ et $ds : dx = 1 : \nu$ et $ds : dy = 1 : \mu$, inuenietur constans $C = gc + \mu b + \nu^2 b l \frac{1+\mu}{\nu}$. Quare pro curua descripta haec orietur aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = \frac{\mu dx^2 - \nu^2 dyds}{dx^2} + \nu^2 l \frac{(1+\mu)dx}{\nu(dy+ds)}$. Ad celeritatem vero nueniendam inseruit aequatio $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{\nu^2 bds^2}{dx^2}$.

## Corollarium 4.

878. Si fuerit D punctum supremum, erit ibi $dx = ds$ et $dy = o$. Habebitur ergo $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = \mu + \nu^2 l \frac{1+\mu}{\nu}$ seu $e^{\frac{s}{c}} = \frac{b\mu + gc + \nu^2 b l \frac{\nu+\mu}{\nu}}{gc}$. Ex qua

 aequa-

aequatione reperitur arcus $AMD = cl \frac{b\mu + gc + \nu^2 b l \frac{1+\mu}{\nu}}{gc}$. Altitudo vero debita celeritati quam corpus habebit in D erit $= \frac{\nu^2 gbc}{gc + b\mu + \nu^2 bl\frac{1+\mu}{\nu}}$.

## Corollarium 5.

879. Si in B curua eandem habere ponatur inclinationem ad axem AP quam habuit in A, erit $ds:dx:dy = 1:\nu:-\mu$. Hinc ergo emerget ista aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = 2\mu + \nu^2 l\frac{1+\mu}{1-\mu}$ ex qua prodit arcus $ADB = cl\frac{2\mu b + gc + \nu^2 bl\frac{1+\mu}{1-\mu}}{gc}$.

## Corollarium 6.

880. Constructio curuae etiam facilis deduci potest ex aequatione $dsddy = cd^3y$. Namque ponatur $dy = pdx$, erit $dpdx\sqrt{(1+pp)} = cddp$. Porro fiat $dx = \frac{dp}{q}$, erit ob $ddx = 0$; $ddp = \frac{dpdq}{q}$, vnde prodibit ista aequatio $dp\sqrt{(1+pp)} = cdq$, atque $q = \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}$. Sumta igitur abscissa $x = \int \frac{cdp}{\int dq\sqrt{(1+pp)}}$ erit $y = \int \frac{cpdp}{\int dp\sqrt{(1+pp)}}$. Hisque respondebit $v = -\frac{cg(1+pp)}{2\int dp\sqrt{(1+pp)}}$. Vnde cognoscitur pro $p$ accipiendam esse quantitatem negatiuam.

## Corollarium 7.

Tabula XI. Fig. 5. 881. Si corpus in A proiiciatur secundum directionem ipsius AP, et potentia tendat deorsum, tota

tota curua A M a corpore deſcripta cadet infra AP, fietque $y$ ſeu PM negatiua; atque cum ſit $\mu = o$ et $\gamma = 1$, habebitur pro curua AM iſta aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = \frac{dy\,ds}{dx^2} - l\frac{dx}{ds+dy}$ (877).

## Corollarium 8.

882. Data igitur tangentis in quocunque puncto M inclinatione ad rectam AP ſeu ratione inter $ds$, $dy$ et $dx$, inueniri poteſt ex hac aequatione longitudo arcus AM.

## Scholion.

883. Experimenta docuere aerem corporibus reſiſtere in duplicata celeritatum ratione. Cum igitur vis grauitatis ſit vniformis et aer in non nimis altis diſtantiis eandem fere denſitatem ſeruet, caſus corporum in aere proiectorum apprime ad hanc propoſitionem refertur. Determinauimus igitur veram curuam, quam globi ex ſclopetis vel tormentis vel alio modo proiecti deſcribunt. Sumitur vulgo pro hac curua parabola, quippe quae in vacuo eſt proiectoria, et aer tam ſubtile fluidum eſſe creditur, vt eius reſiſtentia in computum duci non mereatur. Inſenſibilis quidem vtique eſt reſiſtentia aeris, ſi corpus magnum parua celeritate proiiciatur. Sed longiſſime a parabola aberrabit proiectoria, ſi exiguum corpus magna vi proiiciatur. His autem in caſibus, tametſi hic vera aſſignata eſt proiectoria, maxime dolendum eſt, aequationem tam

esse intricatum, vt vix quicquam ad vsum practicum ex ea possit deduci. *Neutonus* in Phil hoc problema non attigit, neque post eum quisquam tentauit, donec *Keilius* ad hoc problema *Ioh. Bernoulli* prouocauerit, etsi ipse solutionem exhibere non potuerit. Dedit autem solutionem non solum *Ioh. Bernoullius* in Act. Lips. 1719 m. Mai, sed eodem fere tempore *Iac. Hermannus* Phoronomiae suae inseruit. Sequens autem problema, in quo resistentia ipsis celeritatibus proportionalis ponitur, tum a *Neutono* in Princ. tum a *Hugenio* in tract. de causa grauitatis, est solutum.

## PROPOSITIO 108.

### Problema.

Tabula XI. Fig. 4. 884. *Si medii resistentia fuerit vt ipsa corporis celeritas et potentiae directio MP; praetereaque tam potentia sit vniformis quam medium resistens: determinare curuam, quam corpus proiectum describit, atque celeritatem in singulis locis.*

### Solutio.

Positis vt in praecedente Prop. potentia vniformi $=g$, exponente medii resistentis $=c$, altitudine celeritati in M debita $=v$; AP$=x$, PM$=y$ et arcu AM$=s$; erit ex vi normali vt ante $gds^2 + 2vddy = o$, sumto $dx$ pro constante. Ex vi tangentiali vero ob resistentiam hoc casu $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ habebitur ista aequatio $dv = -gdy - \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$. Ex his aequationibus con-

coniunctis per §. 872 vbi fit $q = c$ et $m = \frac{1}{2}$ obtinetur $\sqrt{v} = -\frac{ds}{2dx}\int \frac{dx}{\sqrt{c}} - \frac{ds\sqrt{a}}{2dx} - \frac{xds}{2dx\sqrt{c}} = \frac{ds(\sqrt{ac}-x)}{2dx\sqrt{c}}$, eritque ergo $v = \frac{ds^2(\sqrt{ac}-x)^2}{4cdx^2}$. Vnde pro curua descripta prouenit ista aequatio $2gcdx^2 = -ddy(\sqrt{ac}-x)^2$ seu $-\frac{ddy}{dx} = \frac{2gcdx}{(\sqrt{ac}-x)^2}$ cuius integralis est $\frac{dy}{dx} = -\frac{2gc}{\sqrt{ac}-x} + k$. Atque iterum integrando $y = kx - 2gcl\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}-x}$. Vnde simul constabit $v$, ex aequatione $v = \frac{ds^2(\sqrt{ac}-x)^2}{4cdx^2}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

885. Pro curua descripta statim haec aequatio differentialis tertii gradus prodiisset, si ex aequatione $v = -\frac{gds^2}{2ddy}$, eiusque differentiali $dv = -gdy + \frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$ valores in aequatione $dv = -gdy - \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ fuissent substituti. Prouenisset enim $d^3y\sqrt{gc} = -ddy\sqrt{-2ddy}$.

## Corollarium 2.

886. Si corpus in A proiiciatur celeritate altitudini $b$ debita, et sinus anguli, quem tangens in A cum AP constituit sit $= \mu$ eius cosinus $\sqrt{(1-\mu^2)} = \nu$, erit in puncto A, $b = \frac{a}{4\nu^2}$ seu $a = 4\nu^2 b$, ex quo constans indefinita $a$ determinatur.

## Corollarium 3.

887. Aequatio porro $\frac{dy}{dx} = -\frac{2gc}{\sqrt{ac}-x} + k$ ad punctum A translata dabit $\frac{\mu}{\nu} = -\frac{2g\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + k$

$= -\frac{g\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}} + k$ ob $a = 4\nu^2 b$. Hinc inuenietur indifinita quantitas $k = \frac{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}}$.

## Corollarium 4.

888. Pro curua igitur deſcripta inuenietur iſta aequatio differentialis $dy = \frac{2\mu\nu b dx\sqrt{c} - \mu x dx\sqrt{b} - gxdx\sqrt{c}}{2\nu^2 b\sqrt{c} - \nu x\sqrt{b}}$ $= \frac{\mu dx}{\nu} - \frac{gxdx\sqrt{c}}{2\nu^2 b\sqrt{c} - \nu x\sqrt{b}}$. Ex qua deducitur $\frac{ds^2}{dx^2} = \frac{(2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2 - 2\mu gx(2\nu bc - x\sqrt{bc}) + g^2cx^2}{\nu^2(2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2}$. Quare cum ſit $v = \frac{ds^2(2\nu\sqrt{bc} - x)^2}{4cdx^2}$. Reperietur tandem $v = \frac{(2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2 - 2\mu gx(2\nu bc - x\sqrt{bc}) + g^2cx^2}{4\nu^2 bc}$.

## Corollarium 5.

889. Aequatio autem integralis pro curua quaeſita erit $y = \frac{\mu x\sqrt{b} + gx\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}} - 2gc\, l\frac{2\nu\sqrt{bc}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$. Ex qua conſtructio curuae per logarithmicam facile perficitur.

## Corollarium 6.

890. Tempus etiam, quo arcus AM abſoluitur facile definitur. Nam cum ſit $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{c}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$ erit tempus per arcum $AM = 2\sqrt{c}\, l\frac{2\nu\sqrt{bc}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$.

## Corollarium 7.

891. Apparet etiam ex aequatione pro curua AM eam habere aſſymtoton: Nam cum $x$ non poſſit eſſe maior quam $2\nu\sqrt{bc}$; ſi capiatur $AE = 2\nu\sqrt{bc}$ erit applicata in $E = -\infty$ ideoque aſſymtotos curuae AMDB. Intelligitur hoc etiam ex tempore

re quod sit infinitum antequam corpus ad perpendicularem per E ductam peruenit.

## Corollarium 8.

892. Punctum summum D reperietur si fiat $dy = o$. Tum autem inuenitur $x = \frac{2\mu\sqrt{b}\sqrt{c}}{\mu\sqrt{b}+g\sqrt{c}} = AC$. Deinde cum sit in D $ds = dx$ et $2\nu\sqrt{bc} - x = \frac{2\nu g c\sqrt{b}}{\mu\sqrt{b}+g\sqrt{c}}$ erit altitudo debita celeritati in puncto D $= \frac{\nu^2 g^2 bc}{(\mu\sqrt{b}+g\sqrt{c})^2}$ et ipsa celeritas in D $= -\frac{\nu g\sqrt{bc}}{\mu\sqrt{b}+g\sqrt{c}}$.

## Corollarium 9.

893. Applicata vero CD seu distantia puncti D ab axe AP erit $= 2\mu\sqrt{bc} - 2gc\, l\frac{\mu\sqrt{b}+g\sqrt{c}}{g\sqrt{c}}$ et tempus quo corpus ex A in D peruenit erit $= 2\sqrt{c}\, l\frac{\mu\sqrt{b}+g\sqrt{c}}{g\sqrt{gc}}$.

## Scholion.

894. Reduci igitur potest casus, quo corpus ex A oblique proiicitur ad casum, quo ad directionem potentiae normaliter ex D proiicitur. Cognita enim celeritate, qua corpus in A proiicitur, et directione inueniri poterit punctum D in quo tangens ipsi AC est parallela, et celeritas corporis in D. Quare ad meliorem huius motus cognitionem expedit motum tanquam in D incipientem considerari, quem in finem sequentem propositionem adiecimus.

PRO-

# PROPOSITIO 109.

## Problema.

Tabula XI. Fig. 5.

895. *Si corpus vbique aequaliter deorsum attrahatur, atque in A secundum directionem horizontalem AP data velocitate proiiciatur in medio vniformi, quod in simplici celeritatum ratione resistat: determinare curuam AM, quam corpus describet et motum corporis in hac curua.*

## Solutio.

Cum propositio haec sit casus specialis praecedentis, maneant omnes denominationes vt ante. Fiet autem $y$ seu applicata PM negatiua, quia curua AM infra AP cadet, atque erit $\mu = o$ et $\nu = 1$. Existente ergo $g$ potentia sollicitante, $c$ exponente resistentiae, $b$ altitudine celeritati in A debita, $v$ altitudine coleritati in M debita, et $AP = x$ et $AM = s$; habebitur aequatio pro curua AM haec differentialis $dy = \frac{gxdx\sqrt{c}}{2b\sqrt{c} - x\sqrt{b}}$ (888), atque haec integralis $y = \frac{gx\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + 2gcl\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc} - x}$ (889). Porro erit $v = \frac{(2b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2 + g^2cx^2}{4bc}$ (888). Atque tempus quo arcus AM percurritur $= 2\sqrt{c}\, l\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc} - x}$ (890). Quae aequationes tam curuam AM quam motum in hac curua determinant. Q. E. I.

## Corollarium I.

896. Si $l\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc} - x}$ in seriem conuertatur prodibit $\frac{x}{2\sqrt{bc}} + \frac{x^2}{2.4bc} + \frac{x^3}{3.8bc\sqrt{bc}} + \frac{x^4}{4.16b^2c^2} +$ etc. Quamobrem

obrem erit $y = \frac{gx^2}{4b} + \frac{gx^3}{12b\sqrt{bc}} + \frac{gx^4}{32b^2c} +$ etc. et tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{x^2}{4b\sqrt{c}} + \frac{x^3}{12bc\sqrt{b}} + \frac{x^4}{32b^2c\sqrt{c}} +$ etc.

## Corollarium 2.

897. In vacuo igitur quando $c$ fit infinite magnum erit $y = \frac{gx^2}{4b}$; quo igitur casu curua AM abit in parabolam, cuius parameter est $\frac{4b}{g}$, et tempus quo arcus AM absoluitur est $= \frac{x}{\sqrt{b}}$, atque $v = b + \frac{g^2x^2}{4b} = b + gy$, quemadmodum ex Prop. 72. colligere licet.

## Corollarium 3.

898. Sumta $AE = 2\sqrt{bc}$ erit verticalis EF curuae AM assymtotos. Quare si ex M in EF demittatur perpendiculum MQ, erit $MQ = PE = 2\sqrt{bc} - x$, et $EQ = y$. Ponatur $MQ = z$, erit $y = -2cg + \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + 1gcl\frac{2\sqrt{bc}}{z}$, et tempus quo arcus AM percurritur $= 2\sqrt{c}\, l\frac{2\sqrt{bc}}{z}$.

## Corollarium 4.

899. Punctum igitur E per quod transit asymtotos EF tantum distat a puncto A, quousque corpus ex A si nulla adesset potentia sollicitans $g$, posset pertingere, antequam motum omnem amitteret. Atque simili modo patet tempus per AM aequale esse tempori per AP potentia $g$ euanescente.

te. Intelligitur hoc ex eo, quod $g$ in his expressionibus non inest.

## Corollarium 5.

900. Ducatur ex $M$ tangens $MT$, erit $QT = -\frac{zdy}{z} = 2gc - \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Per M ducatur $MR$ constituens cum EF angulum, cuius tangens est $= \frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{c}}$. Quo facto erit $QR = \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$; ideoque $RT = 2gc$.

## Corollarium 6.

901. Si igitur MT consideretur vt applicata curuae AM ad axem EF obliquangula; erit curua AM ob subtangentem RT constantem logarithmica obliquangula subtangentis $= 2gc$, et tangens anguli inclinationis applicatarum MR ad asymtoton EF $= \frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{c}}$.

## Scholion.

902. Proiectoriam in hac resistentiae et vis sollicitantis hypothesi non solum ope logarithmicae construi posse, sed ipsam esse logarithmicam obliquangulam obseruauit *Ioh. Bernoulli* in Actis Lips. 1719. Cuius solutio cum hac nostra egregie conuenit.

# PROPOSITIO 110.

## Problema.

Tabula XI. Fig. 4. 903. *Posita potentiae absolutae vniformis directione MP verticali et medio, quod etiam vniforme* *me ponitur, resistente in quacunque multiplicata celeritatum ratione: determinare curuam* AM, *quam corpus proiectum describit.*

## Solutio.

Manente AP$=x$; PM$=y$, M$m=ds$, celeritate in M$=\sqrt{v}$, potentia $=g$, exponente medii resistentis $=c$, resistat medium in ratione $2m$ *cuplicata* celeritatum; eritque R$=\frac{v^m}{c^m}$, et P$=g$ (870). Quare habebuntur istae aequationes $gds^2=-2vddy$ et $dv=-g\,dy-\frac{v^m\,ds}{c^m}$, ex quibus tum curua AM tum motus corporis in curua determinatur. Aequatio autem $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$ dat $dv=-gdy+\frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$, et $v^m=\frac{g^m ds^{2m}}{2^m(-ddy)^m}$. Hinc eliminata $v$ peruenitur ad istam aequationem $c^m d^3y=-\frac{g^{m-1}ds^{2m-1}}{2^{m-1}(-ddy)^{m-2}}$ pro curuae natura. Ad hanc construendam ponatur $dy=pdx$, eritque $ddy=dxdp$, $d^3y=dx\,ddp$ et $ds=dx\sqrt{(1+p^2)}$. Quibus substitutis habebitur $2^{m-1}c^m(-dp)^{m-2}ddp=-g^{m-1}dx^m(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}$. Ponatur porro $dx=\frac{dp}{q}$, eritque $ddp=\frac{dpdq}{q}$. Vnde habebitur $2(-2)^{m-2}c^m q^{m-1}dq=-g^{m-1}dp(1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}$, et inte-



gran-

grando $q^m = -\frac{mg^{m-1}}{2(-2)^{m-2}c^m}\int dp(1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}$. Ex qua aequatione datur $q$ in $p$, quo inuento sumta abscissa $x = \int\frac{dp}{q}$, est respondens applicata $y = \int\frac{pdp}{q}$. Atque celeritati debita altitudo $v = -\frac{g(1+pp)}{2q}$; et tempus quo arcus AM absoluitur i. e. $\int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \int\frac{dp\sqrt{2}}{\sqrt{-gq}}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

904. Perspicuum est quoties $2m$ fuerit vel numerus affirmatiuus impar vel numerus negatiuus par valorem ipsius $q$ algebraice per $p$ posse exhiberi.

## Corollarium 2.

905. Si resistentia est constans seu $m=0$, et corpus initio in A proiectum sit celeritate $\sqrt{b}$ secundum horizontalem AP, erit applicata PM, $y$ negatiua, ideoque habebuntur hae aequationes $gds^2 = 2vddy$ et $dv = gdy - ds$ seu $v = b + gy - s$. Vnde prodibit haec aequatio $\frac{gds^2}{2ddy} = b + gy - s$.

## Corollarium 3.

906. Commodius autem hic casus tractabitur, si in aequatione differentiali tertii gradus ponatur $m=0$ prodit enim $gd^3y = -\frac{2ddy^2}{as}$ seu substitutionibus per $p$ et $q$ factis haec $\frac{gdq}{q} = -\frac{2dp}{\sqrt{(1+p^2)}}$, cuius integralis est $glq = 2l\frac{\sqrt{(1+pp)}-p}{a}$, seu obseruata homoge-

geneitate $aq = (\sqrt{(1+p^2)}-p)^{\frac{2}{g}} = \frac{adp}{dx}$. Hinc habebitur $dx = \frac{adp}{(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2}{g}}}$. Quae denuo integrata dat $2x = \frac{ga}{(2+g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2+g}{g}}} + \frac{ga}{(2-g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2-g}{g}}} + k$. Hincque reperitur $y = \int p\,dx$ et absoluta integratione $4y = \frac{ga}{(2+2g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2+2g}{g}}} - \frac{ga}{(2-2g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2-2g}{g}}} + i$. Patet igitur hanc curuam fore algebraicam nisi sit $g$ vel $1$ vel $2$.

## Scholion.

907. Aeque late patet *Ioh. Bernullii* solutio proiectoriarum in medio resistente quam dedit in Act. Lips. A. 1719 Mai. ac haec nostra solutio vbi etiam constructionem generalem pro his curuis dedit. Antequam autem hanc potentiae vniformis hypothesin relinquamus, problemata inuersa soluemus, quibus determinabimus resistentiam, quae efficit vt corpus in hac potentiae vniformis et deorsum tendentis hypothesi datam curuam describat. Haec enim materia tum a *Neutono* in Phil. tum a *Ioh. Bernoullio* in Act. Lips. A. 1713 pluribus est pertractata; vbi Viri acutissimi multa eximia notauerunt.

# PROPOSITIO III.

## Problema.

Tabula XI. Fig. 6. 908. *Posita potentia absoluta g uniformi et deorsum tendente, determinare resistentiam in singulis locis M, qua fiat, vt corpus datam curuam BAM describat.*

## Solutio.

Ponatur vt ante $AP = QM = x$, $PM = AQ = y$, et elementum arcus $AM = ds$. Deinde sit celeritas in $M = \sqrt{v}$ et resistentia in $M = R$. His igitur comparatis cum Prop. 106. fiet $P = g$, et $y$ negatiue debet accipi; eritque $gds^2 = 2vddy$, sumto $dx$ constante (871) et $dv = gdy - Rds$ (870). Ex illa aequatione autem est $v = \frac{gds^2}{2ddy}$ ideoque $dv = gdy - \frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$. Coniunctis igitur his aequationibus prodibit $R = \frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$. Quare cum curua sit data, ex eius aequatione reperietur finitus valor ipsius R, ideoque innotescit resistentia Q. E. I.

## Corollarium I.

909. Erit igitur vis resistentiae in M ad vim sollicitantem $g$ vt $dsd^3y$ ad $2ddy^2$. Seu posito radio osculi in $M = r$, ob $r = \frac{ds^3}{dxddy}$ erit $\frac{dsd^3y}{2ddy^2} = \frac{3dsdy - dxdr}{2ds^2}$. Quare erit $g : R = 2ds^2 : 3dsdy - dxdr$.

## Corollarium 2.

910. Altitudo generans celeritatem in M nempe $v$ ex ipsa curua determinatur est enim

$v =$

$v = \frac{g ds^2}{2ddy}$. Seu introducto radio osculi $r$ ob $\frac{ds^2}{ddy} = \frac{rdx}{ds}$ erit $v = \frac{grdx}{2ds}$.

## Corollarium 3.

911. Si resistentia ponatur in duplicata celeritatum ratione, exponens vero resistentiae sumatur incognitus $q$ erit $R = \frac{v}{q} = \frac{gds^2}{2qddy}$. Cum igitur inuentum sit $R = \frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$; inuenietur medii resistentis exponens $q = \frac{dsddy}{d^3y}$. Similique modo pro aliis medii resistentis hypothesibus inueniri potest medii resistentis exponens.

## Corollarium 4.

912. Introducto ad $q$ determinandum radio osculi $r$, erit $\frac{d^3y}{ddy} = \frac{ddy(3dsdy - dxdr)}{ds^3} = \frac{3dsdy - dxdr}{rdx}$. Consequenter fiet $q = \frac{rdxds}{3dsdy - dxdr}$. Cognito igitur radio osculi $r$ tam $R$ quam $q$ per differentialia primi gradus determinabuntur.

## Corollarium 5.

913. Si curua AM fuerit parabola, cuius axis est verticalis AC, quia in ea est $d^3y = 0$, prodibit quoque resistentia $R = 0$. Ex quo cognoscitur parabolam in vacuo describi posse a corpore vniformiter deorsum tracto, quemadmodum cuique satis constat.

Co-

## Corollarium 6.

914. Si curua fuerit parabola quaecunque superioris ordinis ita vt sit $a^{n-1}y = x^n$, erit $dy = \frac{nx^{n-1}dx}{a^{n-1}}$ et $ds = \frac{dx\sqrt{(a^{2n-2}+n^2x^{2n-2})}}{a^{n-1}}$. Porroque ob $dx$ constans $ddy = \frac{n(n-1)x^{n-2}dx^2}{a^{n-1}}$ et $d^3y = \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3}{a^{n-1}}$. Quare fiet $R = \frac{(n-2)g\sqrt{(a^{2n-2}+n^2x^{2n-2})}}{3n(n-1)x^{n-1}}$. Atque posita resistentia quadratis celeritatum proportionali erit exponens resistentiae $q = \frac{x\sqrt{(a^{2n-2}+n^2x^{2n-2})}}{(n-2)a^{n-1}}$.

## Scholion.

915. Alia exempla curuarum, quae loco AM assumi possunt hic non adiungo; sed iis sequentes propositiones destino, cum diligentius examinari mereantur. Considerabo autem praecipue circulum et hyperbolam cum hae curuae a Viris citatis maxime sint tractatae.

## PROPOSITIO 112.

### Problema.

Tabula XI. Fig. 6. 616. *Posita vi absoluta g uniformi et perpetuo deorsum trahente; inuenire resistentiam, quae faciat*

*ciat vt corpus libere in peripheria circuli* BAMD *moueatur.*

## Solutio.

Sit radius circuli $AC = a$, erit $x^2 = 2ay - y^2$, et radius osculi in $M = a = MC$. Quare ob $dr = o$ erit $g : R = 2ds : 3dy$. Est vero $ds : dy = a : x = AC : QM$. Hanc ob rem erit $g : R = 2AC : 3QM$ seu $R = \frac{3g.QM}{2AC}$. Altituto vero generans celeritatem in M erit $= \frac{gadx}{2ds} = \frac{g.QC}{2}$. At si resistentia quadratis celeritatum proportionalis ponatur erit exponens resistentiae $q = \frac{adx}{3dy} = \frac{a.QC}{3QM}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

917. Dum corpus per arcum BA ascendit ob QM tum existentem negatiuam, erit quoque resistentia per BA negatiua; seu motus corporis per CA a medio accelerabitur vi tangentiali $\frac{3g.QM}{2AC}$.

## Corollarium 2.

918. Resistentia vero in puncto A, quia QM euanescit, erit nulla; corpus igitur in A tanquam in vacuo mouebitur. In puncto vero D resistentia erit ad potentiam $g$ in sesqui altera ratione. In B vero tantundem sursum a resistentia sollicitabitur.

## Corollarium 3.

919. Cum igitur in B et D directio vis resistentiae cum directione potentiae $g$ conueniat; Corpus in B sursum vrgebitur vi $\frac{1}{2}g$; in A deorsum trahetur a vi $g$, et in D sursum iterum a vi $\frac{1}{2}g$.

## Corollarium 4.

920. Quia $\frac{QM}{AC}$ exprimit sinum anguli ACM posito radio $=1$, erit resistentia in $M = \frac{3}{2}g$ sin. ACM, seu resistentia vbique est vt sinus anguli ACM, quo corpus ab A declinauit.

## Corollarium 5.

921. Porro est $\frac{a.QC}{QM}$ tangens arcus MD. Quare posita resistentia quadratis celeritatum proportionali erit exponens resistentiae $q$ aequalis tertiae parti cotangentis arcus AM.

## Corollarium 6.

922. Cum altitudo debita celeritati in M sit $=\frac{g.QC}{2}$; erit celeritas in $A = \sqrt{\frac{g.AC}{2}}$; in B vero et D erit celeritas $=o$. Quia igitur corpus in B reuera sursum pellitur vi $=\frac{g}{2}$, mirum non est corpus in B sursum moueri incipere.

## Corollarium 7.

923. Corpus igitur tam in quadrante BA quam AD in loco aeque dissitis a puncto A aequales ha-

habebit celeritates. Infra vero horizontalem BD corpus peruenire non potest ob QC negatiuam, quo casu celeritas sit imaginaria.

## Scholion.

924. Quorsum autem corpus, cum in D peruenerit, sit progressurum, facile ex allatis colligi potest. Nam cum celeritas in D sit $=o$ et corpus in D sursum vrgeatur vi $\frac{1}{2}g$, perspicuum est corpus iterum sursum moueri debere. Eodem autem modo iterum per arcum DMA ascendet, quo initio per BA acsendit, quia tam in D quam in B vi $=\frac{1}{2}g$ sursum vrgetur. Hoc vero mirabile in hoc motu occurrit, quod corpus in B quiescens sursum pellatur et nihilominus in curua moueatur, etiamsi nulla vis adesse videatur, quae corporis directionem quam in E sursum accepit, posset inflectere. Sed ad hoc respondeo vis in B directionem non perfecte sursum tendere, sed infinite parum a vera verticali aberrare, id quod sufficit ad motum obliquum producendum. Directio enim vis resistentiae in B seu potius vis accelerantis est elementum peripheriae circuli in B insistens, quod non perfecte est recta verticalis, sed infinite parum inclinata ad BC. Ceterum haec nostra egregie conueniunt cum iis quae Cel. *Bernoulli* dedit in Act. Lips. A. 1713 et quae sunt in *Neutoni* Princ. Phil. posterioribus editionibus. In prima enim editione error in solutio-

nem irrepsit, quo inductus fuit, vt rationem g ad R statueret aequalem rationi AC ad QM. Monitus autem de hoc a *Bernoullio* in sequentibus editionibus hunc lapsum emendauit.

## PROPOSITIO 113.

### Problema.

Tabula XII. Fig. 1. 925. *Posita vt ante vi absoluta* g *vniformi et deorsum trahente; inuenire vim resistentiae, qua efficitur vt corpus in hyperbola* NAM *axem* CAQ *verticalem habente libere moueri possit.*

### Solutio.

Sit C centrum hyperbolae et semiaxis transuersus $AC = a$, semiaxis vero coniugatus sit $= c$. Ponatur $CQ = t$ et $QM = AP = x$; eritque ex natura hyperbolae $c^2t^2 = a^2x^2 + a^2c^2$. Sumta autem $PM = AQ = y$ erit $y = t - a$, et $dy = dt$, $d^2y = d^2t$ atque $d^3y = d^3t$. Ex aequatione vero habebitur $t = \frac{a\sqrt{(x^2+c^2)}}{c}$ et $dt = \frac{axdx}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$ ideoque $ds = \frac{dx\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$. Porro fiet $ddt = ddy = \frac{acdx^2}{(x^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$ et $d^3t = d^3y = -\frac{3acxdx^3}{(x^2+c^2)^{\frac{5}{2}}}$. Ex quibus erit $\frac{d^3y}{ddy} = -\frac{3xdx}{x^2+c^2}$ et $\frac{d^3y}{ddy^2} = -\frac{3x\sqrt{(x^2+c^2)}}{acdx}$. Consequenter pro-

proueniet refiftentia $R = -\frac{3gx\sqrt{(c^4 + c^2x^2 + a^2x^2)}}{2ac^2}$ atque $v = \frac{g(c^4 + c^2x^2 + a^2x^2)\sqrt{(x^2 + c^2)}}{2ac^3}$. Refiftentia vero quadratis celeritatum proportionali pofita erit exponens refiftentiae $q = -\frac{\sqrt{(x^2 + c^2)}(c^4 + c^2x^2 + a^2x^2)}{3cx}$. Q. E. I.

## Corollarium I.

926. Ducta tangente MT erit $QT = \frac{ax^2}{c\sqrt{(x^2 + c^2)}}$ et $MT = \frac{x\sqrt{(c^4 + c^2x^2 + a^2x^2)}}{c\sqrt{(x^2 + c^2)}}$. Confequenter prodibit $R = -\frac{3g.MT.\sqrt{(x^2 + c^2)}}{2ac} = -\frac{3g.CQ.MT}{2a^2}$ feu $R : g = -3.CQ.MT : 2.AC^2$.

## Corollarium 2.

927. Quia refiftentia R inuenitur negatiua, indicio id eft defcenfum per AM in hyperbola fieri non poffe in medio refiftente, fed requiri vt corpus a medio promoueatur. At dum corpus per arcum NA afcendit, quia fit $dv$ negatiuum, refiftentia R erit affirmatiua. Hanc ob rem fi corpus eft in N, erit refiftentia $R = \frac{2g.CQ.NT}{2AC^2}$.

## Corollarium 3.

928. Ex natura hyperbolae eft $CQ : AC = AC : CT$. Itaque erit refiftentia in N feu $R = \frac{3g.NT}{2CT}$. Vel erit refiftentia R ad potentiam abfolutam $g$ vt $3NT$ ad $2CT$. In vertice ergo A refiftentia euanefcit, crefcitque quo magis N ab A diftat.

 Co-

## Corollarium 4.

929. Altitudo debita celeritati corporis in M vel N, est $=\frac{g.CQ^2.MT^2}{2.AC^2.QT}$ vti ex valore ipsius $v$ et natura hyperbolae facile deducitur. Cum autem sit $MT=NT$ et $CQ.NT=\frac{2R.AC^2}{3g}$, erit $v=\frac{2R^2.AC^2}{9g.QT}$.

## Corollarium 5.

930. Si resistentia ponatur celeritatibus proportionalis et exponens resistentiae sit $q$, erit $R=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{q}}$ et $v=R^2q$. Quare inuenietur $q=\frac{2AC^2}{9g.QT}$. Hac igitur hypothesi exponens erit reciproce vt subtangens QT.

## Corollarium 6.

931. At si resistentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis sitque exponens resistentiae $q$ erit existente corpore in N hic exponens $q=\frac{NT.CQ}{3.TQ}$. Seu ducta ex C parallela CR tangenti NT occurrens applicatae QM productae in R erit $q=\frac{CR}{3}$.

## Scholion.

932. Quod ante in circulo et nunc in hyperbola obseruauimus resistentiam in altero arcu fieri affirmatiuam in altero negatiuam, id in omnibus curuis circa supremum punctum A duos arcus similes et aequales vt AN et AM habentibus locum obti-

tinet. Nam cum generaliter pro arcu AM ſit reſiſtentia $R = \frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$, quia in arcu AN ſit *ds* negatiuum erit in N reſiſtentia $R = -\frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$, ita vt reſiſtentia in N ſit negatiuum reſiſtentiae in M. Quare cum in rerum natura non detur reſiſtentia negatiua, qua motus corporis acceleratur, fieri non poteſt, vt corpus in medio reſiſtente curuam deſcribat, quae circa ſummum punctum A habeat duos ramos ſimiles et aequales. Altitudo vero generans celeritatem tam in M quam in N eſt eadem, eius enim valor $\frac{gds^2}{2ddy}$ non mutatur, etiamſi *ds* fiat negatiuum. Cum igitur iſtius modi curuae a *Neutono* ideo ſint conſideratae, vt aliquam erueret, pro qua medii reſiſtentis denſitas non multum variaret; ſeu noſtro tractandi modo in qua exponens reſiſtentiae vbique fere ſit eiusdem valoris; quo talem curuam pro proiectoria in medio reſiſtenti vniformi habere poſſet ſine ſenſibili errore: alias curuas non diametro verticali praeditas cum *Neutono* conſiderabimus, cuius modi ſunt hyperbolae aſſymtoton verticalem habentes, quippe quae propius accedunt ad logarithmicam, quae a corpore in medio reſiſtente in ſimplici celeritatum ratione eoque vniformi deſcribitur. In alia enim reſiſtentiae hypotheſi *Neutonus* proiectorias non determinauit, ſed contentus fuit veris proximas aſſignare. Quod inſtitutum, cum verae proiectoriae a nobis datae tam ſint implicatae, vt vix quicquam ex iis ad praxin poſſit deduci, etiam ſequemur.

PRO-

# PROPOSITIO 114.

## Problema.

Tabula XII. Fig. 2. 933. *Sit curua NM hyperbola cuiuscunque gradus alteram habens asymtoton CP verticalem, determinare resistentiam, quae efficiat vt corpus perpetuo vi g deorsum sollicitatum in hac hyperbola possit moueri.*

## Solutio.

Consideretur asymtotos CP tanquam axis, ad cumque ex M normalis ducatur MP. Posita CP $= y$ et MP $= x$, quae supra generaliter tradidimus haec locum habebunt, si modo ibi $dx$ sumatur negatiuum. Sit RC altera assymtotos et C centrum hyperbolae; sinus ang. RCP $= \alpha$, eiusque cosinus $\surd(1 - \alpha^2) = \mathcal{E}$. Erit ergo producta PM in R, PR $= \frac{\alpha y}{\mathcal{E}}$ et CR $= \frac{y}{\mathcal{E}}$. Ex M ducatur MQ parallela asymtoto CR, erit MQ $= \frac{x}{\alpha}$ et PQ $= \frac{\mathcal{E}x}{\alpha}$; ideoque CQ $= \frac{\alpha y - \mathcal{E}x}{\alpha}$. At ex natura hyperbolarum erit $a^n = \frac{x^{n-1}(\alpha y - \mathcal{E}x)}{\alpha^n}$, atque hinc $y = \frac{\mathcal{E}x}{\alpha} + \frac{\alpha^{n-1}a^n}{x^{n-1}}$ et $dy = \frac{\mathcal{E}dx}{\alpha} - \frac{(n-1)\alpha^{n-1}a^n dx}{x^n}$. Ducta tangente MT erit PT $= -\frac{xdy}{dx} = -\frac{\mathcal{E}x}{\alpha} + \frac{(n-1)\alpha^{n-1}a^n}{x^{n-1}}$, MT $= \frac{xds}{dx}$, ita vt sit $ds = \frac{\mathrm{MT}.dx}{x}$. Hoc vero casu quo $x$ in altera parte sumitur fit MT ne-

negatiua. Porro ob $dx$ conſtans erit $d^2y = \frac{n(n-1)\alpha^{n-1}a^n dx^2}{x^{n+1}}$ et $d^3y = -\frac{(n+1)(n-1)n\alpha^{n-1}a^n dx^3}{x^{n+2}}$

Ex his oritur $\frac{g\,ds\,d^3y}{2\,ddy^2} = -\frac{g(n+1)x^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$ qui valor facto MT negatiuo aequatur reſiſtentiae R. Erit itaque $R = \frac{g(n+1)x^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$ (908). atque altitudo debita celeritati in M ſeu $v = \frac{g\,x^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$. Si medium reſiſtere ponatur in ratione $2m$ *cuplicata* ratione celeritatum et exponens reſiſtentiae ſit $q$, erit $R = \frac{v^m}{q^m}$ ideoque $q = \frac{v}{R^{\frac{1}{m}}}$

Ex quo fiet $q = \frac{g^{\frac{m-1}{m}}\,x^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}}\,MT^{\frac{2m-1}{m}}}{2^{\frac{m-1}{m}}(n^2-n)^{\frac{m-1}{m}}(n+1)^{\frac{1}{m}}\alpha^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}}a^{\frac{n(m-1)}{m}}}$

ſeu $q^m = \frac{g^{m-1}x^{(m-1)(n-1)}M\,T^{2m-1}}{2^{m-1}(n^2-n)^{m-1}(n+1)\alpha^{(m-1)(n-1)}a^{n(m-1)}}$.

Q. E. I.

## Corollarium I.

934. Quia eſt $x^{n-1} = \frac{\alpha^n a^n}{\alpha y - \beta x}$, erit reſiſtentia $R = \frac{g(n+1)\alpha.\,MT}{2n(n-1)(\alpha y - \beta x)} = \frac{g(n+1)MT}{2n(n-1)CQ}$. Vnde erit reſiſtentia R ad potentiam $g$ vt $(n+1)MT$ ad

 $2n(n$

$2n(n-1)CQ$. Simili modo hoc loco $x^{n-1}$ valore substituto erit $v = \frac{g.MT^2}{2n(n-1)CQ}$ et $q^m =$
$\frac{g^{m-1}MT^{2m-1}}{2^{m-1}(n^2-n)^{m-1}(n+1)CQ^{m-1}}$.

## Corollarium 2.

935. Descendente corpore in infinitum fiet $x=0$, et $MT=PT=\frac{(n-1)\alpha^{n-1}a^n}{x^{n-1}}$, euanescente $x$. In profunditate ergo infinita erit $R=\frac{g(n+1)}{2n}$, ideoque finitae magnitudinis, at erit $v = \frac{g(n-1)\alpha^{n-1}a^n}{2nx^{n-1}}$. Quare cum necessario sit $n > 1$, euanescente $x$ fiet corporis celeritas infinitae magna.

## Corollarium 3.

936. Posita igitur resistentia $R=\frac{v^m}{q^m}$, in profunditate infinita, debebit etiam $q$ esse infinite magna; his itaque locis corpus in vacuo mouebitur. Ex quo sequitur quo magis corpus descendat eo minorem fore resistentiam, seu potius medium eo rarius.

## Corollarium 4.

937. In hyperbola appolloniana fit $n = 2$. Pro hac igitur curua inuenitur $R = \frac{3gx.MT}{4\alpha a^2}$ $=$

$= \frac{3g.MT}{4.CQ}$, et $v = \frac{g.MT^2}{4.CQ}$, atque $q^m = \frac{g^{m-1}.MT^{2m-1}}{3.2^{2m-2}.CQ^{m-1}}$.

## Corollarium 5.

938. Si resistentia ponatur celeritatibus proportionalis, erit in omnibus his hyperbolis exponens resistentiae directe vt CQ, ob $m = \frac{1}{2}$ hoc casu. Hac igitur resistentiae hypothesi corpus omnes hyperbolas poterit libere describere.

## Corollarium 6.

939. Si resistentia ponatur in duplicata celeritatum ratione vt sit $m = 1$, erit exponens resistentiae in $M = \frac{MT}{n+1}$. Quo magis igitur MT variatur, eo magis quoque medium erit difforme.

## Corollarium 7.

940. Tempus praeterea quo elementum $Mm$ describitur seu $\frac{ds}{\sqrt{v}}$ erit $= \frac{\sqrt{2ddy}}{\sqrt{g}}$. Tempus igitur, quo corpus in M vsque peruenit, est vt $\int \frac{dx}{x^{\frac{n+1}{2}}}$ i. e. vt $C - \frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}}$, seu potius vt $\frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}} - C$. Quare tempus, quo corpus ex N in M peruenit, erit vt $\frac{1}{MP^{\frac{n-1}{2}}} - \frac{1}{NP^{\frac{n-1}{2}}}$.

## Corollarium 8.

950. In parabola igitur appolloniana in qua $n=2$ erit tempus, quo corpus ab N ad M peruenit vt $\sqrt{NP}-\sqrt{MP}$ ob NP.MP constans nempe $=\frac{\alpha a^2}{\varepsilon}$.

## Scholion.

951. Ex his manifestum est corpus in medio resistente vniformi huiusmodi hyperbolas describere non posse, cum exponens resistentiae nimium sit variabilis, quippe qui tandem fit infinite magnus. Quamobrem *Neutoni* institutum, quo has hyperbolas loco verarum proiectoriarum in medio resistente vniformi substituere voluit probari non potest. In medio enim secundum quadrata celeritatum resistente, exponens est vt tangens MT, quae tam descendendo, quam ad punctum N regrediendo vehementer variatur. Intelligi etiam haec inconuenientia potest ex celeritate, quae descendendo in infinitum crescit, cum tamen in medio vniformi non vltra datum terminum crescere queat. Praeterea non satis liquet in resistentiae quadratis celeritatum proportionalis hypothesi curuam descriptam habere asymtoton verticalem, quemadmodum in medio resistente in simplici ratione celeritatum. Nam hac resistentia etiam, si corpus a nulla potentia vrgetur, totius motus linea est finita; quae vero si resistentia quadratis celeritatum proportionalis ponitur, fit infinita. Ex quo etiam con-

consequi videtur proiectoriam in hac resistentia non esse habituram asymtoton. Hoc saltem certum est non habere hanc curuam asymtoton hyperbolicam. Interim tamen habet asymtoton verticalem alius generis, quae ex quadratura curuae, per rectificationem parabolae datae, determinatur. Sed relicta potentiae vniformis hypothesi, pergamus ad potentiam variabilem, cuius tamen directio vbique sibi sit parallela. Ex datis quidem potentia et resistentia curuam descriptam non inuestigabimus cum hoc Prop. 106 iam sit factum; sed data curua atque vel potentia vel resistentia vel celeritate reliqua determinabimus.

## PROPOSITIO 115.

### Problema.

953. *Sit potentia absoluta vtcunque variabilis et vbique deorsum tendens iuxta* MP, *determinare resistentiam requisitam ad hoc, vt corpus in data curua* AM *moueatur.* Tabula XII. Fig. 3.

### Solutio.

Sit $AP = x$, $PM = y$ et elementum arcus AM $= ds$: tum sit vis qua corpus in M secundum MP sollicitatur $= P$, et altitudo celeritati in M debita $= v$, atque resistentia in $M = R$. His positis erit $dv = -Pdy - Rds$ (870), et $v = -\frac{Pds^2}{2ddy}$ (871), sumto to $dx$ constante. Ex hac ergo aequatione erit $dv = -Pdy - \frac{dPds^2}{2ddy} + \frac{Pds^2d^3y}{2ddy^2}$; vnde prodibit $R = \frac{dPds}{2ddy} - \frac{Pdsd^3y}{2ddy^2}$ seu $\frac{2R}{ds} = d.\frac{P}{ddy}$. Inueniuntur ergo tam $v$ quam $R$ per datas quantitates $P$, $x$ et $y$ expressa. Q. E. I.

## Corollarium I.

953. Posito radio osculi in $M = r$ erit $ddy = -\frac{ds^3}{rdx}$, et $d^3y = -\frac{3dsdyddy}{rdx} + \frac{ds^3dr}{r^2dx} = \frac{3ds^4dy}{r^2dx^2} + \frac{ds^3dr}{r^2dx}$. Vnde prodit $v = \frac{Prdx}{2ds}$ et $R = -\frac{rdPdx - Pdxdr - 3Pdsdy}{2ds^2}$.

## Corollarium 2.

954. Si lex resistentiae sit celeritatum ratio duplicata et exponens $= q$ erit $R = \frac{v}{q}$ et $q = \frac{v}{R}$. Quocirca reperietur $q = \frac{Pdsddy}{Pd^3y - dPddy}$, seu $q = -\frac{Prdxds}{rdPdx + Pdxdr + 3Pdsdy}$.

## Corollarium 3.

955. Sit vis $P$ ad grauitatem 1 vt $y$ ad $f$ erit $P = \frac{y}{f}$, ideoque $R = -\frac{rdxdy - ydxdr - 3ydsdy}{2fds^2}$ et $v = \frac{yrdx}{2fds}$, atque $q = -\frac{yrdxds}{rdydx + ydxdr + 3ydsdy}$.

## Corollarium 4.

956. Si curua $AM$ fuerit circulus radii $AC = a$, erit $r = a$, $dr = 0$, $dy = \frac{(a-x)dx}{y}$ et $ds =$

$ds = \frac{adx}{y}$. Vnde prodit $v = \frac{Py}{2}$, et reſiſtentia $R = -\frac{ydP}{2adx} - \frac{3P(a-x)}{2a}$, atque $q = -\frac{aPydx}{y^2dP + 3P(a-x)dx}$.

## Exemplum 1.

957. Sit curua AM circulus cuius centrum C et radius $AC = a$. Corpus autem perpetuo ad axem AC attrahatur in ratione diſtantiarum ita vt ſit $P = \frac{y}{f}$; erit $v = \frac{y^2}{2f}$, ideoque celeritas in M erit ut applicata MP. Deinde reſiſtentia R fiet $= -\frac{y(a-x) - 3y(a-x)}{2af} = -\frac{2y(a-x)}{af} = -\frac{2\,PM.CP}{f.AC}$ et $q = -\frac{PM.AC}{4.CP}$. Celeritas autem in puncto A erit $= 0$, et reſiſtentia, dum corpus in quadrante aſcendit negatiua, ſeu corpus a medio accelerabitur. Tempus vero quo corpus ex A in M peruenit erit infinite magnum, fit enim $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{adx\sqrt{2f}}{2ax - x^2} = -\sqrt{\frac{f}{2}}\, l\, 0 + \sqrt{\frac{f}{2}}\, l \frac{x}{2a-x}$. Id quod etiam per ſe intelligitur, nam cum celeritas in A ſit $= 0$, et hic tam vis ſollicitans $\frac{y}{f}$, quam vis medii euaneſcat, corpus perpetuo in A debebit perſeuerare.

## Exemplum 2.

958. Manente curua AM circulo, ſi vis abſoluta fuerit reciproce vt diſtantia PM ſeu $P = \frac{f}{y}$, erit $v = \frac{f}{2}$. Quare celeritas corporis vbique erit eadem, ſeu corpus feretur motu aequabili per circuli peripheriam et tempus, quo arcus quiuis AM abſoluitur erit vt ipſe arcus AM. At reſiſtentia in M erit $= -\frac{f(a-x)}{ay} = -\frac{f.CP}{AC.PM}$. Reſiſtentia igitur dum corpus

pus per quadrantem ascendit erit negatiua; dum autem per ſequentem quadranten descendit, reſiſtentia fiet affirmatiua ſeu erit vera reſiſtentia. Ex reſiſtentia porro inuenitur $q = -\frac{AC.PM}{2.CP}$. In puncto igitur A reſiſtentiae vis promouens erit infinite magna; vt et potentia ſollicitans, quae reſiſtentiae eſt aequalis.

## Exemplum 3.

959. Manente AM circulo ſit vis ſollicitans vt poteſtas quaecunque diſtantiae MP, ſeu $P = \frac{y^n}{f^n}$; erit $dP = \frac{ny^{n-2}(a-x)dx}{f^n}$. Ex his igitur prodibit $v = \frac{y^{n+1}}{2f^n}$ et reſiſtentia $R = -\frac{(n+3)y^n(a-x)}{2af^n}$ Vnde fit $R:P = -(n+3)CP:2AC$. Quare ſi fuerit $n = -3$, ſeu potentia P reciproce vt cubus diſtantiae MP, euaneſcet reſiſtentia R, corpusque ab hac potentia ſollicitatum in vacuo moueri poterit in circulo AM. Deinde ſi $n+3$ eſt numerus affirmatiuus reſiſtentia per quadrantem aſcenſus erit negatiua. At ſi $n+3$ eſt numerus negatiuus reſiſtentia per hunc quadrantem ſit affirmatiua.

## Exemplum 4.

Tabula XII. Fig. 4. 960. Si curua AMB fuerit talis, vt radius oſculi in M ſit reciproce, vt applicata PM, id quod omnes

omnes curuas elasticas competit erit $r = \frac{a^2}{y}$ et $dr = -\frac{a^2 dy}{y^2}$. Fiet igitur $v = \frac{a^2 P dx}{2y ds}$, et $R = \frac{a^2 P ddx dy}{2y^2 ds^2} - \frac{a^2 dP dx}{2y ds^2} - \frac{3 P dy}{2 ds}$. Cum autem sit $-\frac{ds^3}{dx ddy} = \frac{a^2}{y}$, atque integrando $2a^2 dx = ds(y^2 + b^2)$, et $dy = \frac{dx\sqrt{(4a^4 - (y^2+b^2)^2)}}{y^2+b^2}$. Hinc erit $v = \frac{P(y^2+b^2)}{4y}$. Atque $R = \frac{P(b^2 - 5y^2)\sqrt{(4a^4 - (y^2+b^2)^2)}}{8a^2 y^2} - \frac{dP(y^2+b^2)^2}{8a^2 y dx}$. Sit nunc $P = \frac{y}{f}$, et $dP = \frac{dx\sqrt{(4a^4 - (y^2+b^2)^2)}}{f(b^2+y^2)}$, erit $v = \frac{y^2+b^2}{4f}$ et $R = -\frac{3y\sqrt{(4a^4 - (y^2+b^2)^2)}}{4a^2 f} = -\frac{3y dy}{2f ds}$. Ideoque $R : P = -3dy : 2ds$. Quam diu igitur corpus ascendit resistentia est negatiua, at quando descendit erit affirmatiua.

# PROPOSITIO 116.

## Problema.

961. *Si data sit curua* AM *et resistentia per quantitates ad curuam pertinentes; inuenire potentiam absolutam* P *perpetuo normaliter ad axem* AC *tendentem, quae faciat vt corpus in hac curuum libere moueri possit.* Tabula XII. Fig. 3.

## Solutio.

Sit $AP = x$, $PM = y$ et elementum curuae $= ds$. Deinde sit resistentia in $M = R$, quae ergo per $x$, $y$ et $s$ dabitur; potentia quaesita sit $= P$ et celeritas in M debita altitudini $v$. His positis erit; $P = -\frac{2v ddy}{ds^2}$ (871), et $dv = \frac{2v dy ddy}{ds^2} - R ds$ (cit.).

 Ex

Ex hac aequatione ob $dx$ constans reperitur integrando $v = \frac{ads^2}{dx^2} - \frac{ds^2}{dx^2}\int\frac{Rdx^2}{ds}$. Inuenta autem $v$ innotescet P ex aequatione $P = -\frac{2vddy}{ds^2}$. Q. E. I.

## Corollarium I.

962. Erit igitur $P = -\frac{2addy}{dx^2} + \frac{2ddy}{dx^2}\int\frac{Rdx^2}{ds}$. Per meras igitur quantitates datas determinatur P.

## Corollarium 2.

963. Quia constans addita $a$ prolubitu potest accipi, ita ea poterit determinari, vt corpus in puncto A vel alio quodam dato puncto datam habeat celeritatem.

## Corollarium 3.

964. Si resistentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis et exponens resistentiae $q$ erit $q = \frac{ads^2}{Rdx^2} - \frac{ds^2}{Rdx^2}\int\frac{Rdx^2}{ds}$.

## Corollarium 4.

965. Tempus quo arcus AM percurritur est $\int\frac{ds}{\surd v}$, in qua expressione si valor ipsius $v$ substituatur proueniet tempus per $AM = \int\frac{dx}{\surd(a - \int\frac{Rdx^2}{ds})}$

## Corollarium 5.

966. Si resistentia ponatur ad vim grauitatis 1 vt tangens in M ad subtangentem seu vt $ds$ ad $dx$, erit $v = \frac{ds^2}{dx^2}(a-x)$ et $P = -\frac{2ddy}{dx^2}(a-x)$ atque tempus per AM $= \int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)}} = 2\sqrt{a} - 2\sqrt{(a-x)}$. At porro erit $q = \frac{ds}{dx}(a-x)$.

## Exemplum.

967. Sit curua circulus cuius radius AC $= b$, erit $y = \sqrt{(2bx-xx)}$ et $dy = \frac{dx(b-x)}{y}$ et $ds = \frac{bdx}{y}$, atque $ddy = -\frac{b^2dx^2}{y^3}$. Ex his habebitur $v = \frac{b^2}{y^2}(a - \int \frac{Rydx}{b})$ atque $P = \frac{2b^2}{y^3}(a - \int \frac{Rydx}{b}$. Ponatur resistentia $= \frac{ds}{dx}$ seu $R = \frac{b}{y}$, erit $v = \frac{b^2}{y^2}(a-x)$, et $P = \frac{2b^2}{y^3}(a-x)$, atque $q = \frac{b}{y}(a-x)$. Tempus vero quo corpus ex A in M peruenit erit $= 2\sqrt{a} - 2\sqrt{(c-x)}$. Si vlterius sit $b = a$, erit $v = \frac{AC^2.PC}{PM^2}$, et $P = \frac{2AC^2 PC}{PM^3}$, et $R = \frac{AC}{PM}$. Celeritas igitur corporis in supremo circuli puncto erit $= o$, et potentia P ibidem euanescit. Corpus autem vltra hoc punctum non poterit progredi, quia alias celeritas fieret imaginaria, inde igitur reuertetur ad punctum A, quia a resistentia quae in recessu fit negatiua acceleratur. Dum autem peruenerit in A, quia hic celeritas est infinite magna, hoc motu suo describet quadrantem infra AC, in quo ob potentiam P negatiuam sursum vrgebitur.

# PROPOSITIO 117.

## Problema.

Tabula XII. Fig. 3. 968. *Si medium fuerit uniforme atque resistat in duplicata ratione celeritatum determinare potentiam absolutam deorsum tendentem, quae faciat vt corpus in hoc medio resistente describat curuam datam* AM.

## Solutio.

Posita $AP = x$, $PM = y$, elemento arcus $AM = ds$, celeritate in $M = \sqrt{v}$, exponente medii resistentis $= c$, et potentia absoluta $= P$, erit igitur $R = \frac{v}{c}$. His positis erit $P = -\frac{2vddy}{ds^2}$ et $dv = \frac{2vdyddy}{ds^2} - \frac{vds}{c}$ (871). Quare habebitur $\frac{dv}{v} = \frac{2dyddy}{ds^2} - \frac{ds}{c}$ et integrando $lv = l\frac{ads^2}{dx^2} - \frac{s}{c}$ seu $v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dx^2}$. Valore igitur ipsius $v$ inuento erit $P = -\frac{2ae^{-\frac{s}{c}}ddy}{dx^2}$. Data ergo curua tum $v$ tum P inueniuntur. Q. E. I.

## Corollarium I.

969. Tempus quo corpus arcum AM absoluit seu $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$ erit $= \int\frac{e^{\frac{s}{2c}}dx}{\sqrt{a}}$. Data ergo curua seu

aequa-

aequatione inter $s$ et $x$, habebitur quoque tempus saltem per quadraturas. Eae igitur curuae ad hoc sunt commodissimae, pro quibus datur aequatio inter $s$ et $x$.

## Corollarium 2.

970. Quia $a$ pro lubitu potest accipi, vtpote quantitas integratione adiecta, eius determinatione effici potest, vt vel celeritas in dato curuae loco sit data, vel potentia sollicitans.

## Corollarium 3.

971. Si curua AM versus axem AP est concaua, tum est $ddy$ negatiuum, his igitur casibus potentia corpus ad axem AP trahet. At si curua erit conuexa versus AP, quia tum $ddy$ fit affirmatiuum, potentia P fit negatiua, seu corpus ab axe AP repelletur.

## Exemplum 1.

972. Sit curua AM parabola axem habens normaliter insistentem rectae AP, qualis in vacuo a corpore ex A oblique proiecto describitur, erit $by = fx - x^2$, ideoque $dy = \frac{fdx}{b} - \frac{2xdx}{b}$ atque $ddy = -\frac{2dx^2}{b}$. His substitutis erit potentia sollicitans $P = \frac{4a}{be^{\frac{s}{c}}}$. Ex quo intelligitur quo diutius motus

continuetur, eo magis decreſcere potentiam P. Facto autem $c$ infinite magno id quod fit in vacuo erit $c^{\frac{s}{c}} = 1$ atque potentia $P = \frac{4a}{b}$ et idcirco conſtans.

## Exemplum 2.

973. Sit curua AM talis vt eius aequatio ſit $y = \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3$, erit $dy = \alpha dx - 2\beta x dx - 3\gamma x^2 dx$ et $d^2 y = -2\beta dx^2 - 6\gamma x dx^2$. Hinc erit $P = \frac{4\beta a + 12\gamma a x}{e^{\frac{s}{c}}}$. In puncto A eſt $dy = \alpha dx$, et $\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \alpha^2$. Altitudo igitur debita celeritati initiali in A eſt $a(1 + \alpha^2)$ quae ſi dicatur $b$ erit $a = \frac{b}{1 + \alpha^2}$ et $\alpha$ eſt tangens anguli ſub quo corpus ex A proiicitur. Deinde ex ipſius $dy$ valore reperitur $ds = dx \sqrt{(1 + \alpha^2 - 4\alpha\beta x + 4\beta^2 x^2 - 6\alpha\gamma x^2 + 12\beta\gamma x^3 + 9\gamma^2 x^4)} = dx \sqrt{(1 + \alpha^2)} - \frac{2\alpha\beta x dx}{\sqrt{(1 + \alpha^2)}}$ etc. Neglectis igitur reliquis terminis foret $s = x\sqrt{(1 + \alpha^2)} - \frac{\alpha\beta x^2}{\sqrt{(1 + \alpha^2)}}$, atque $e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{x\sqrt{(1 + \alpha^2)}}{c} - \frac{\alpha\beta x^2}{c\sqrt{(1 + \alpha^2)}} + \frac{x^2(1 + \alpha^2)}{2c^2}$ etc. qui termini quoque reiici poſſunt ſi $c$ fuerit valde magnum. Quare quo P fiat quam proxime conſtans nempe $= g$, debebit eſſe $4\beta a = g$, et $\frac{3\gamma}{\beta} = \frac{\sqrt{(1 + \alpha^2)}}{c}$. Atque ſi aſſumta fuiſſet haec aequatio $y = \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4$, prodiiſſet $\frac{6\delta}{\beta} = \frac{(1 + \alpha^2)}{2c^2} - \frac{\alpha\beta}{c\sqrt{(1 + \alpha^2)}}$. Erit ergo

$$\beta = \frac{g(1 + \alpha^2)}{4b}, \quad \gamma = \frac{g(1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{12bc} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{g(1 + \alpha^2)^2}{48bc^2}$$

$-\alpha g$

$-\frac{ag^2(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}{96b^2c}$. Haec igitur curua quarti ordinis erit quam proxime proiectoria in medio valde raro vniformi, quod resistit in duplicata celeritatum ratione, et potentia vniformi $g$ deorsum tendente.

## Corollarium 4.

974. Quia aeris resistentia est quadratis celeritatum proportionalis, si in aere valde grauis globus atque magnus ingenti vi proiiciatur, tum $b$ et $c$ erunt quantitates maximae. Quare pro proiectoria huius corporis accipi poterit haec aequatio $y = \alpha x - \frac{g(1+\alpha^2)}{4b}x^2 - \frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{12bc}x^3$, quae curua a vera proiectoria quam minime differet.

## Corollarium 5.

975. Sit AMDB haec proiectoria; in qua vt inueniatur punctum B, quo corpus proiectum incidit in horizontalem AB pono $y=0$, eritque Tabula XII. Fig. 5.
$x^2 = -\frac{3cx}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$, hincque $x = -\frac{3c}{2\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \sqrt{\left(\frac{9c^2}{4(1+\alpha^2)} + \frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}$. Erit

ita-

itaque $AB = \sqrt{\left(\frac{9c^2}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)} - \frac{3c}{2\sqrt{(1+\alpha^2)}}$. Innotescit igitur ex hac aequatione longitudo iactus ex data celeritate initiali, et inclinatione.

## Corollarium 6.

976. Punctum iactus summum D reperietur faciendo $dy = 0$. Fiet autem $0 = \alpha - \frac{g(1+\alpha^2)}{2v}x - \frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{4bc}x^2$ seu $x^2 = -\frac{2cx}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \frac{4\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$. Atque ex hac aequatione $AC = \sqrt{\left(\frac{c^2}{1+\alpha^2} + \frac{4\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)} - \frac{c}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$.

## Corollarium 7.

977. Iactus longissimus, qui eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ producitur, prodibit si anguli inclinationis tangens $\alpha$ ex ista aequatione determinatur $3\alpha\sqrt{(1+\alpha^2)} - \frac{8b(1+\alpha^2)}{g} + \frac{24\alpha^2 b}{g} = \alpha\sqrt{(9c^2(1+\alpha^2) + \frac{48\alpha bc\sqrt{(1+\alpha^2)}}{g})}$ seu hac $4b(1-2\alpha^2)^2 - 3\alpha gc(1-2\alpha^2)\sqrt{(1+\alpha^2)} = 3\alpha^3 gc\sqrt{(1+\alpha^2)}$ seu ista simpliciore $4b(1-2\alpha^2)^2 = 3\alpha gc(1-\alpha^2)\sqrt{(1+\alpha^2)}$.

Co-

## Corollarium 8.

978. Si sinus anguli quem curua in A cum horizontali AC constituit, sit $=\varepsilon$, posito sinu toto $=1$ erit $9\varepsilon^4-6\varepsilon^2+1=\frac{3gc\varepsilon}{4b}(1-2\varepsilon^2)$. Ex qua aequatione valor ipsius $\varepsilon$ erutus, dabit directionem pro iactu longissimo. Ex hac autem aequatione reperitur quam proxime $\varepsilon=\sqrt{\frac{5b+gc\sqrt{2}}{12b+2gc\sqrt{2}}}$.

## Corollarium 9.

979. Angulus igitur, qui iactum longissimum producit, aliquantulum est minor quam semi rectus, qui in vacuo satis facit. Nam si esset $\varepsilon=\sqrt{\frac{6b+gc\sqrt{2}}{12b+2gc\sqrt{2}}}$ foret $\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{2}}$, ideoque angulus semirectus. At cum hic in numeratore habeamus tantum $5b$, parumper erit minor.

## Corollarium 10.

980. Si corpus in A horizontaliter proiiciatur celeritate $\sqrt{a}$, fiet $\alpha=o$, atque $y$ negatiua. Quamobrem positis AP$=x$ et PM$=y$, istius proiectoriae natura hac exprimetur aequatione $y=\frac{gx^2}{4b}+\frac{gx^3}{12bc}+\frac{gx^4}{48bc^2}$. Pro curua autem AN in qua corpus ascendit erit $y=\frac{gx^2}{4b}-\frac{gx^3}{12bc}+\frac{gx^4}{48bc^2}$.

## Corollarium 11.

981. Si adhuc plures termini quam quatuor accipiantur prodiret aequatio pro curua AM haec

 $y=$

$y = \frac{gx^2}{4b} + \frac{gx^3}{12bc} + \frac{gx^4}{48bc^2} + \frac{gx^5}{240bc^3} +$ etc. qui termini cum seriem summabilem constituant, quam minime a vero aberrabitur, si $y$ ponatur aequalis summae huius seriei. Erit autem $2by = c^2g(e^{\frac{x}{c}} - 1) - cgx$. Pro arcu vero ascensus AN erit $2by = cgx - c^2g(1 - e^{-\frac{x}{c}})$.

## Corollarium 12.

982. Tempus quo arcus AM percurritur est $= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{\sqrt{2ddy}}{\sqrt{g}}$, cum sit $g = \frac{2vddy}{ds^2}$. Est vero $2bdy = cge^{\frac{x}{c}}dx - cgex$ et $2bddy = ge^{\frac{x}{c}}dx^2$. Prodibit igitur $\int \frac{\sqrt{2ddy}}{\sqrt{g}} = \int \frac{e^{\frac{x}{2c}}dx}{\sqrt{b}} = \frac{2c}{\sqrt{b}}(e^{\frac{x}{2c}} - 1)$. Atque si $b$ et $c$ in scrupulis pedis rhenani exprimuntur erit tempus per $AM = \frac{c}{125\sqrt{b}}(e^{\frac{x}{2c}} - 1)$ minutis secundis (222).

## Scholion.

983. Hac igitur ratione vero proxime determinauimus proiectoriam in aere a corporibus proiectis descriptam, quae non difficulter loco parabolae, quae vulgo adhiberi solet, potest substitui. Hanc quidem eandem aequationem deducere potuissemus ex vera aequatione $dsddy = cd^3y$ (875), harum proiectarum supra inuenta. Sed cum ibi

haec

haec reductio esset omissa, hic eam afferre maluimus, praecipue quod hoc loco clarius appareat aequationis assumtae terminos posteriores vehementer decrescere. Denique simili quoque modo curuae cum proiectoriis in aliis medii resistentis hypothesibus proxime conuenientes possunt inueniri; sed cum aliae hypotheses in mundo locum non habeant iis inueniendis hic non immorabimur.

# PROPOSITIO 118.

## Problema.

684. *Inuenire tam resistentiam in singulis locis* M, *quam potentiam absolutam deorsum secundum* MP *tendentem, quae faciant vt corpus in data curua* AM *et data cum celeritate in singulis punctis* M *moueri possit.* Tabula XII. Fig. 3.

## Solutio.

Positis vt ante $AP = x$, $PM = y$, elemento arcus $AM = ds$ et altitudine celeritati in M debita $= v$, quae igitur omnia dantur. Deinde sit potentia corpus in M deorsum trahens $= P$ et resistentia $= R$. His positis statim reperitur P ex aequatione $P = -\frac{2vddy}{ds^2}$ (871). At resistentia R inuenietur ex aequatione $dv = \frac{2vdyddy}{ds^2} - Rds$ (cit.). Quare erit $R = \frac{2vdyddy}{ds^3} - \frac{dv}{ds}$. Si resistentiae lex ponatur duplicata celeritatum ratio, eiusque exponens $= q$;

erit $R = \frac{v}{q}$, ex quo prodibit $q = \frac{vds^3}{2vdyddy - dvds^2}$ sumto $dx$ pro constante. Q. E. I.

## Corollarium I.

985. Quia $dx$ est constans erit $dyddy = dsdds$. Hanc ob rem erit $R = \frac{2vdds}{ds^2} - \frac{dv}{ds}$, seu $R = ds\, d. - \frac{v}{ds^2}$. Atque hinc erit $q = \frac{vds^2}{2vdds - dvds}$ seu $q = \frac{v}{ds\, d. - \frac{v}{ds^2}}$.

## Corollarium 2.

986. Si corpus debet motu uniformi per curuam AM ferri ita ut sit $v = b$, proueniet $P = -\frac{2bddy}{ds^2}$ et $R = \frac{2bdyddy}{ds^3} = \frac{2bdds}{ds^2}$, atque $q = \frac{ds^2}{2dds}$.

## Corollarium 3.

987. In motu igitur uniformi, dum corpus in curua AM ascendit, resistentia R semper est negatiua seu motum corporis accelerat. At quando corpus iterum descendit, medium reuera resistet.

## Corollarium 4.

988. Posito radio osculi in $M = r$, quia est $r = -\frac{ds^3}{dxddy}$ erit $ddy = -\frac{ds^3}{rdx}$. Hanc ob rem habebitur $P = \frac{2vds}{rdx}$ et $R = -\frac{2vdy}{rdx} - \frac{dv}{ds}$, atque $q = -\frac{rvdxds}{2vdyds + rdxdv}$.

Co-

## Corollarium 5.

989. Posito iterum $v = b$ et $dv = o$, erit $P = \frac{2bds}{rdx}$ et $R = -\frac{2bdy}{rdx}$, atque $q = -\frac{rdx}{2dy}$. In supremo igitur puncto quo fit $dy = o$ et $ds = dy$ erit $P = \frac{2b}{r}$ atque resistentia ibi euanescit, nisi forte curuatura ibi sit infinite magna seu $r = o$.

## Exemplum.

990. Sit curua AM circulus cuius centrum in C, qui motu aequabili seu celeritate $\sqrt{b}$ debeat describi. Posito eius radio $AC = a$, erit $dy = \frac{dx(a-x)}{y}$, $ds = \frac{adx}{y}$ et $r = a$. Ex quibus inuenitur potentia absoluta deorsum tendens $P = \frac{2b}{y}$, seu erit reciproce vt distantia PM. Resistentia vero erit $= -\frac{2b(a-x)}{ay}$. Dum igitur corpus ascendit resistentia erit negatiua atque reciproce proportionalis tangenti arcus AM. Ac si resistentia sit quadratis celeritatum proportionalis, erit eius exponens $q = -\frac{dy}{2(a-x)} = -\frac{AC.PM}{2PC}$. Est itaque $q$ negatiua atque aequalis dimidiae tangenti arcus AM. Quando autem corpus versus horizontem AC accedit, fiet tum resistentia R tum $q$ affirmatiua, seu medium reuera resistet.

# PROPOSITIO 119.

## Problema.

991. *Si medium sit uniforme atque resistat in quacunque multiplicata celeritatum ratione: detur-* Tabula XIII. Fig. 1.

 *que*

*que praeterea motus corporis progressiuus secundum horizontalem* AP; *inuenire potentiam deorsum tendentem et curuam quam corpus describet.*

## Solutio.

Posita CP$=x$, PM$=y$, arcu AM$=s$, sit celeritas horizontalis corporis, dum est in M, debita altitudini $u$, erit verae celeritatis in M altitudo debita $=\frac{uds^2}{dx^2}=v$. Sit porro exponens medii resistentis $=c$ et lex ratio $2m$ *plicata* celeritatis, erit resistentia R$=\frac{v^m}{c^m}=\frac{u^m ds^{2m}}{c^m dx^{2m}}$. His positis erit P$=\frac{2vddy}{ds^2}=\frac{2uddy}{dx^2}$ (871), pono enim $ddy$ loco $-ddy$, quia in nostro casu $y$ deorsum cadit. Deinde erit $dv=\frac{2vdyddy}{ds^2}-\text{R}\,ds$ (cit.). At vero est $dv=\frac{duds^2}{dx^2}+\frac{2udsdds}{dx^2}$. Hinc ergo ob $dsdds=$ $=dyddy$ habebitur $\frac{duds}{dx^2}=-\frac{u^m ds^{2m+1}}{c^m dx^{2m}}$ seu $c^m d$ $x^{2m-2}du+u^m ds^{2m-1}=o$. Datur autem $u$ in $x$; et hanc ob rem $ds$ ex hac aequatione per $x$ tantum poterit determinari; erit scilicet $ds=$ $\frac{c^{\frac{m}{2m-1}}dx^{\frac{2m-2}{2m-1}}(-du)^{\frac{1}{2m-1}}}{u^{\frac{m}{2m-1}}}$. Vnde inuenire licet aequationem pro curua inuenta. Hac vero inuenta simul innotescit P ex aequatione P$=\frac{2uddy}{dx^2}$. Q. E. I.

Co-

## Corollarium 1.

992. Motus igitur horizontalis non poteſt eſſe vniformis, foret enim ob $du = o$, etiam $ds = o$; niſi in vacuo quo $c = \infty$, vbi ſemper et neceſſario eſt aequabilis. Multo minus quoque in medio reſiſtente motus horizontalis poterit eſſe acceleratus, tum enim $ds$ vel negatiuum vel imaginarium obtineret valorem, quod vtrumque abſurdum. Motus ergo horizontalis debebit eſſe retardatus, quo fiat $du$ negatiuum.

## Corollarium 2.

993. Si reſiſtentia fuerit ipſis celeritatibus proportionalis, fiet $m = \frac{1}{2}$ et aequatio pro curua abit in $du\sqrt{c} + dx\sqrt{u} = o$. Quae autem, quia non continet $s$ vel $y$, ad curuam pertinere non poteſt. Haec autem aequatio ipſum motum horizontalem determinat. Id quod indicio eſt in hac reſiſtentiae hypotheſi, non quemuis motum horizontalem pro lubitu accipi poſſe, ſed neceſſario eum eſſe accipiendum, qui hac aequatione determinatur.

## Corollarium 3.

994. Iſte autem motus horizontalis congruit cum motu corporis horizontali in AP in eodem medio reſiſtente, ſed a nulla potentia ſollicitatum. Ex quo cognoſcitur, quaecunque fuerit potentia corpus ſollicitans, modo eius directio vbique de-

or-

orsum tendat, in medio resistente in simplici celeritatum rationem motum horizontalem perpetuo esse eundem. Qua in re motus in hac resistentiae hypothesi similis est motui in vacuo, in quo motus horizontalis semper est aequabilis, quantum cunque potentia deorsum tendens sit variabilis.

## Corollarium 4.

995. Assumto igitur hoc motus horizontalis valore, altera aequatio $P = \frac{2uddy}{dx^2}$ curuam descriptam determinabit, in qua pro P vero quamcunque quantitatem assumere licebit. In hac igitur resistentiae hypothesi, hoc problema generaliter est solutum: vt inueniatur curua, quam corpus vtcunque deorsum sollicitatum describit.

## Corollarium 5.

996. Cum autem sit $-\frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u}} = dx$, erit $2\sqrt{bc} - 2\sqrt{cu} = x$, posita celeritate initiali in $A = \sqrt{b}$. Fiet ergo $2\sqrt{cu} = 2\sqrt{bc} - x$ et $u = \frac{(2\sqrt{bc}-x)^2}{4c}$. Pro curua ergo descripta haec habebitur aequatio $2cP\, dx^2 = ddy(2\sqrt{bc} - x)^2$.

## Corollarium 6.

997. Hae igitur omnes curuae asymtoton habebunt verticalem in distantia $2\sqrt{bc}$ a vertice A. Namque $x$ maius esse nequit quam $2\sqrt{bc}$ et cum cor-

corpus horizontaliter motum vltra hunc terminum progredi nequeat, etiam corpus in curua latum non vltra pertingere poterit.

## Corollarium 7.

998. Si in aliis quoque resistentiae hypothesibus motus horizontalis in curua AM cum motu horizontali in recta AP in eadem resistentiae hypothesi congruens accipiatur, ita vt ponatur $du = -\frac{u^m dx}{c^m}$; prodibit pro curua AM haec aequatio $ds = dx$ et $P = 0$. Illa igitur congruentia in aliis resistentiae hypothesibus nequidem locum habet.

## Corollarium 8.

999. Sit igitur resistentia vt quadratum celeritatis seu $m = 1$. Quare erit $ds = -\frac{cdu}{u}$, et integrando posita $b$ altitudine celeritati in A debita, $s = c\, l \frac{b}{u}$. In hac igitur resistentiae hypothesi erit arcus AM diuisus per $2c$ aequalis differentiae logarithmorum celeritatum horizontalium in A et M.

## Corollarium 9.

1000. In hac ergo resistentiae hypothesi erit $u = e^{-\frac{s}{c}} b$. Ex quo prodibit $P = \frac{2bddy}{e^{\frac{s}{c}} dx^2}$.

Seu cum ſit $ds = -\frac{c\,du}{u}$ erit $dds = \frac{cudd u + c du^2}{du^2} = \frac{dyddy}{ds}$. At eſt $dy = \frac{\sqrt{(c^2du^2 - u^2dx^2)}}{u}$. Vnde habebitur $ddy = \frac{c^2ududdu - c^2du^3}{u^2\sqrt{(c^2du^2 - u^2dx^2)}}$. Conſequenter erit $P = \frac{2c^2ududdu - 2c^2du^3}{udx^2\sqrt{(c^2du^2 - u^2dx^2)}}$.

## Corollarium 10.

1001. Si aequatio inter $u$ et $x$ accipiatur iſta $du = -\frac{u^n dx}{f^n}$, ſeu $\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)b^{n-1}} = \frac{x}{f^n}$, erit $dx = -\frac{f^n du}{u^n}$ et $ddu = \frac{ndu^2}{u}$. His ſubſtitutis prodibit in medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione $P = \frac{2(n-1)c^2u^{3n-2}}{f^{2n}\sqrt{(c^2u^{2n-2} - f^{2n})}}$. Pro curua autem quaeſita haec habebitur aequatio $dy = \frac{du\sqrt{(c^2u^{2n-2} - f^{2n})}}{u^n}$.

## Corollarium 11.

1002. Hoc igitur caſu $u^{2n-2}$ maius eſſe debet quam $\frac{f^{2n}}{c^2}$ ſeu $u$ maius quam $\frac{f^{\frac{n}{n-1}}}{c^{\frac{1}{n-1}}}$. Quare ſi motus horizontalis fieri poteſt minor quam haec quantitas, motus in curua non toti motui horizontali dato reſpondebit. Nam ſi curua vlterius tenderet foret tam $dy$ quam $P$ imaginarium.

Co-

## Corollarium 12.

1003. Ad inconueniens hoc euitandum debebit $n$ minus esse vnitate, fiat ergo $n-1=-k$, seu $n=1-k$. Hoc posito erit $u^k=b^k-f^{k-1}kx$. Existente vero AP tangente curuae in A erit vbi $ds=dx$, ibi $u=b$. Hinc erit $b^{n-1}c=f^n$ seu $\frac{c}{b^k}=f^{1-k}$, ideoque $u^k=b^k(1-\frac{kx}{c})$. Porro autem fit $P=\frac{2kb^{3k}u^{1-2k}}{c\sqrt{(b^{2k}-u^{2k})}}$ et $dy=\frac{dx}{u^k}\sqrt{(b^{2k}-u^{2k})}=\frac{dx\sqrt{(2kcx-k^2x^2)}}{c-kx}$.

## Scholion.

1004. Nulla igitur huiusmodi hypothesis motus horizontalis in proiectoriam in fluido potest quadrare. Quicquid enim sit $k$ potentia in A vbi fit $u=b$, est infinite magna; deinde vero perpetuo decrescit. Hae curuae etiam omnes habent tangentem verticalem vbi est $x=\frac{c}{k}$, quae est asymtotos curuae. Ceterum hoc problemate finem imponimus huic primae tractationi, qua directionem potentiae sibi semper parallelam posuimus; atque progredimur ad vires centripetas considerandas, examinaturi, quomodo medium resistens motum corporum ad fixum punctum attractorum turbet.

# PROPOSITIO 120.

## Problema.

1005. *Attrahatur corpus in medio quocunque resistente perpetuo ad punctum fixum C vi quacunque; determinare curuam AM, quam corpus vtcunque proiectum describit.*

## Solutio.

Cum corpus est in M ponatur eius distantia a centro MC $= y$, elementum M$m = ds$; celeritas in M sit debita altitudini $v$. Ducatur $m$C et ex M in eam normalis M$r$, erit $mr = dy$. Porro ducta tangente MT, sit ex C perpendiculum in eam demissum CT$= p$, et radius osculi in M$= r$, qui erit $= \frac{ydy}{dp}$. Iam sit vis qua corpus in M ad C trahitur $=$ P et vis resistentiae in M$=$R. Ex potentia autem P resoluta prodit vis normalis $= \frac{\mathrm{P}p}{y}$ et tangentialis $= -\frac{\mathrm{P}dy}{ds}$, retardabit enim corporis motum. Ex vi autem normali habebitur haec aequatio $\frac{2v}{r} = \frac{\mathrm{P}p}{y}$ seu $2vdp = \mathrm{P}pdy$ (552). Cum praeterea vis tangentialis resistentia minuta sit $-\frac{\mathrm{P}dy}{ds} - \mathrm{R}$ erit $dv = -\mathrm{P}dy - \mathrm{R}ds$ (cit.). Ex quibus aequationibus coniunctis tum celeritas corporis in singulis locis, tum ipsa curua AM cognoscitur. Q. E. I.

## Corollarium 1.

1006. Ob similia triangula $Mmr$, CMT erit $ds:dy = y:\sqrt{(y^2-p^2)}$ ideoque $ds = \frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Quo substituto prodibit $dv = -Pdy - \frac{Rydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Eliminata igitur $v$ obtinebitur aequatio inter $y$ et $p$, quae sufficit ad curuam determinandam.

## Corollarium 2.

1007. Quia est $P = \frac{2vdp}{pdy}$; substituatur hic valor in altera aequatione. Quo facto prodibit $dv + \frac{2vdp}{p} = -Rds = -\frac{Rydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Ex qua aequatione si R fuerit potentia ipsius $v$ poterit valor ipsius $v$ inueniri.

## Corollarium 3.

1008. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis et medium vniforme, ita vt sit $R = \frac{v}{c}$. Hinc igitur erit $dv + \frac{2vdp}{p} = -\frac{vds}{c}$, quae aequatio integrata dat $vp^2 = bh^2 e^{-\frac{s}{c}}$, vbi $b$ est altitudo debita celeritati in initio A, et h est perpendiculum ex C in tangentem in A demissum.

## Corollarium 4.

1009. Cum igitur in hac resistentiae hypothesi sit $v = \frac{bh^2}{e^{\frac{s}{c}} p^2}$, erit vis $P = \frac{2bh^2 dp}{e^{\frac{s}{c}} p^3 dy}$. Quando igitur P in $y$ datur, haec aequatio erit aequatio quaesita pro curua AM, celeritas autem in quouis loco M est reciproce vt perpendiculum in tangentem et vt numerus cuius logarithmus est via descripta per $2c$ diuisa coniunctim.

## Corollarium 5.

1010. In hac igitur resistentiae hypothesi corpus eandem curuam describet sollicitatum a vi centripeta $\frac{V}{e^{\frac{s}{c}}}$, quam describit in vacuo sollicitatum a vi V. In vtroque enim casu aequatio pro curua quaesita erit haec $Vdy = \frac{2bb^2 dp}{p^3}$. Quare quo corpus in hoc medio resistente eandem quam in vacuo curuam describat, vis centripeta perpetuo debet decrescere in ratione, cuius logarithmus est spatium descriptum ad $c$ applicatum.

## Corollarium 6.

1011. Sit resistentia potestati exponentis $2m$ celeritatum proportionalis et medium vniforme ita vt sit $R = \frac{v^m}{c^m}$. Erit igitur $dv + \frac{2vdp}{p} = -\frac{v^m ds}{c^m}$. Quae integrata dat $v^{1-m} = \frac{(m-1)p^{2m-2}}{c^m} \int \frac{ds}{p^{2m-2}}$.

Co-

## Corollarium 7.

1012. Sit resistentia celeritatibus proportionalis seu $m = \frac{1}{2}$, erit $\sqrt{v} = -\frac{1}{2p\sqrt{c}}\int p\,ds$. Exprimit autem $\int p\,ds$ duplam aream ACM, quae nobis sit S. Et detracta constante erit $\sqrt{v} = \frac{C-2S}{2p\sqrt{c}} = \frac{h\sqrt{bc}-S}{p\sqrt{c}}$. Habentibus $b$ et $h$ eosdem quos ante Coroll. 3. valores.

## Corollarium 8.

1013. In hac igitur resistentiae hypothesi celeritas corporis euanescit, quando corpus sectorem seu aream absoluerit aequalem ipsi $h\sqrt{bc}$. Hoc igitur spatium tantum est, vt corpus nunquam possit aream ipsi aequalem abscindere. Atque celeritas corporis in M est directe vt hoc spatium area iam absoluta minutum et reciproce vt perpendiculum in tangentem.

## Corollarium 9.

1014. In eadem resistentiae hypothesi est $v = \frac{(h\sqrt{bc}-S)^2}{cp^2}$. Vis igitur centripeta erit $= \frac{2(h\sqrt{bc}-S)^2dp}{cp^3dy} = P$. Deinde vero tempus, quo arcus AM absoluitur est $= \int \frac{p\,ds\sqrt{c}}{h\sqrt{bc}-S} = \int \frac{2dS\sqrt{c}}{h\sqrt{bc}-S} = 2\sqrt{c}\, l\frac{h\sqrt{bc}}{h\sqrt{bc}-S}$. Tempore ergo infinito opus est, antequam corpus aream abscindat $= h\sqrt{bc}$, seu antequam omnem motum amittat.

Scho-

## Scholion.

1015. Hae igitur ſunt generales leges, quas corpus in medio reſiſtente a vi centripeta quacunque ſollicitatum obſeruat. Eas autem pro reſiſtentia ipſis celeritatibus et celeritatum quadratis proportionali fuſius deduxi, tum quia licuit, quod in aliis hypotheſibus fieri non potuiſſet, tum quia in ſequentibus has duas reſiſtentias, vt hactenus fecimus, potiſſimum ſumus conſideraturi. Nunc autem datas ſumemus vires centripetas vt quae ſint diſtantiarum poteſtatibus proportionales, et inueſtigabimus, quales differentias reſiſtentia curuis deſcriptis inducat. Deinde iuxta inſtitutum in praecedentibus adhibitum, curuam datam ponemus vna cum vel vi centripeta vel reſiſtentia vel celeritate atque in reliqua inquiremus.

# PROPOSITIO 121.

## Problema.

Tabula XIII Fig. 2.

1016. *Si vis centripeta fuerit diſtantiarum poteſtati cuicunque a centro proportionalis, corpusque moueatur in medio reſiſtente vniformi, quod reſiſtat in duplicata celeritatum ratione: determinare curuam* A M *quam corpus deſcribet, et motum corporis in ea.*

## Solutio.

Manentibus vt ante $AM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$, celeritate in M debita altitudini $v$, erit

P=

$P = \frac{y^n}{f^n}$ et $R = \frac{v}{c}$. Hinc habebitur pro curua quaesita haec aequatio $\frac{y^n}{f^n} = \frac{2bh^2dp}{e^{\frac{s}{c}}p^3dy}$ et $v = \frac{bh^2}{e^{\frac{s}{c}}p^2}$ $= \frac{y^npdy}{2f^ndp}$. Ex illa autem aequatione non multum ad curuam cognoscendam proficitur ob $e^{\frac{s}{c}}$ inuolutum; quare sumtis logarithmis erit $\frac{s}{c} = l\,2bf^nh^2 + l\,dp - nly - 3lp - ldy$, atque $\frac{ds}{c} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$ sumto $dy$ constante. Quia vero est $ds = \frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$ erit $\frac{ydy}{c\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$. Quae est aequatio inter $y$ et $p$ pro curua quaesita. Q. E. I.

## Corollarium 1.

1017. Quaenam proditura sit aequatio, si vis centripeta fuerit vel distantiis vel reciproce quadratis distantiarum proportionalis, ex aequatione inuenta facile apparet, si modo 1 vel $-2$ loco $n$ substituatur. Huiusmodi autem substitutiones omnes nihil iuuant ad aequationem generalem tractabiliorem efficiendam.

## Corollarium 2.

1018. Si medium non positum fuisset vniforme sed eius exponens variabilis $q$, loco $e^{\frac{s}{c}}$ pro-

 diis-

diisset $e^{\int \frac{ds}{q}}$ (873). Atque pro curua descripta haec aequatio $\frac{ydy}{q\surd(y^2-p^2)} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$. Vbi si $q$ distantiae $y$ fiat proportionalis aequatio ad differentialem primi gradus poterit reduci.

## Corollarium 3.

1019. Sit igitur exponens resistentiae $q = \frac{y}{\alpha}$, atque curua descripta sequente aequatione exprimetur: $\frac{\alpha dy}{\surd(y^2-p^2)} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$. In qua cum in singulis terminis dimensionum numerus euanescat, reductio ad differentialem primi gradus locum habet.

## Corollarium 4.

1020. Hoc autem modo reperietur aequatio differentialis primi gradus. Ponatur $y = e^{\int zdt}$ et $p = e^{\int zdt}t$; erit $dy = e^{\int zdt}zdt$, et $ddy = e^{\int zdt}(zddt + dzdt + z^2dt^2) = 0$. Quare erit $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$. Porro erit $dp = e^{\int zdt}(dt + ztdt)$ et $ddp = e^{\int zdt}(ddt + ztddt + tdtdz + 2zdt^2 + z^2tdt^2) = e^{\int zdt}(-\frac{dzdt}{z} + zdt^2)$. Ex quibus reperietur $\frac{\alpha zdt}{\surd(1-t^2)} = -\frac{dz+tz^2dt}{z+z^2t} - nzdt - \frac{3dt}{t} - 3zdt = \frac{tdz - 3zdt - (n+5)tz^2dt - (n+3)t^2z^3dt}{tz(1+tz)} = -\frac{tdz - zdt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t} - (n+3)zdt$.

## Corollarium 5.

1021. Si vis centripeta reciproce proportionalis ponatur cubis distantiarum, erit $n = -3$.

Cur-

Curua ergo descripta continebitur hac aequatione $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = -\frac{tdz - zdt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t}$.

## Corollarium 6.

1022. Si vis centripeta fuerit reciproce proportionalis quadratis distantiarum erit $n = -2$. Atque curua descripta sequente exprimetur aequatione $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-tt)}} = -\frac{tdz - zdt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t} - zdt$. Eodem modo si vis centripeta ipsis distantiis seu $n = 1$ posita esset prodiisset $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-tt)}} = -\frac{tdz - zdt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t} - 4zdt$.

## Corollarium 7.

1023. Omnes hae aequationes curuas in vacuo descriptas dabunt, si ponatur $\alpha = o$. Hoc enim casu fit resistentiae exponens infinite magnus atque ideo resistentia infinite parua. Habebitur autem haec aequatio $\frac{tdz + zdt}{tz(1+tz)} + \frac{2dt}{t} + (n+3)zdt = o$.

## Scholion.

1024. Quando igitur exponens medii resistentis, quod in duplicata celeritatum ratione resistere ponitur, proportionalis est distantiis a centro, aequatio pro curua descripta ad differentialem primi gradus reduci potest; id quod in aliis exponentis resistentiae $q$ hypothesibus vix fieri potest. Intelligo autem tales ipsius $q$ valores, qui a solis distantiis $y$ pendent, quippe quae positio sola admitti potest ratione. Incongruum enim esset $q$ per $p$ i. e. per ipsam curuam, quae adhuc est incognita, dare. Interim tamen aequatio differentio-differentialis semper ad differentialem primi gradus potest reduci, quoties $q$ fuerit functio vnius dimensionis ipsarum $y$ et $p$ coniunctim. Sed cum hae aequationes, tametsi sunt differentiales primi gradus, neque integrari neque separari queant, nihil praestant vtilitatis. Hanc ob rem resistentiam, quae celeritatibus ipsis est proportionalis, considerabimus cum vi centripeta cuicunque distantiarum potestati proportionali coniunctam.

## PROPOSITIO 122.

### Problema.

Tabula XIII Fig. 2.

1025. *In medio vniformi, quod resistit in simplici celeritatum ratione, moueatur corpus attractum ad centrum C vi potestati cuicunque distantiarum proportionali: determinare curuam AM quam corpus describet.*

### Solutio.

Positis $CM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$, celeritate in M debita altitudini $v$, et exponente resistentiae $= q$, sit vis centripeta $= \frac{y^n}{f^n}$, et area $ACM = \frac{1}{2}\int p\, ds = S$. His praemissis erit $\sqrt{v} = \frac{h\sqrt{bc} - S}{p\sqrt{c}}$, et $\frac{y^n}{f^n}$ $=$

$= \frac{2(b\sqrt{bc}-S)^2 dp}{cp^3 dy}$ (1012 et 1014), vbi $b$ est altitudo celeritati in A debita, et $h$ perpendiculum ex C in tangentem in A demissum. Quo eliminetur S, aequationi inuentae haec induatur forma $b\sqrt{bc}-S = \frac{\sqrt{cp^3 y^n dy}}{\sqrt{2f^n dp}}$. Ex qua differentiando posito $dp$ constante oritur $-\frac{p'ds}{2} = -\frac{ypdy}{2\sqrt{(y^2-p^2)}}$ $= \frac{cp^3y^n ddy + 3cp^2y^n dydp + ncp^3y^{n-1}dy^2}{2\sqrt{2f^n cp^3 y^n dy dp}}$ seu $o =$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} + \frac{cpy^{\frac{n-2}{2}} ddy + 3cy^{\frac{n-2}{2}} dydp + ncpy^{\frac{n-4}{2}} dy^2}{\sqrt{2f^n cpdydp}}$$

Quae aequatio naturam curuae descriptae AM exprimit. Hac vero cognita statim innotescit celeritas corporis ex area curuae et perdendiculo $p$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

1026. Si loco $dp$ assumtum fuisset elementum $dy$ constans, prodiisset ista aequatio $\frac{dp}{\sqrt{(y^2-p^2)}} =$

$$\frac{cpy^{\frac{n-2}{2}} ddp - 3cy^{\frac{n-2}{2}} dp^2 - ncpy^{\frac{n-4}{2}} dydp}{\sqrt{2f^n cpdydp}}.$$

Ex quibus aequationibus autem, quia ad differentiales primi gradus reduci nequeunt, nihil potest concludi.

## Corollarium 2.

1027. Reductio supra (1020) adhibita semper locum habet, si in aequatione differentio-differentiali indeterminatae $p$ et $y$ eundem dimensionum numerum constituunt. Hoc autem accidit si $n=1$, i. e. si vis centripeta fuerit ipsis distantiis a centro proportionalis. Erit tum enim pro curua quaesita $\frac{ydp}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{cpyddp-3cydp^2-cpdydp}{\sqrt{2fcypdydp}}$. Posito $dy$ const.

## Corollarium 3.

1028. Hac igitur hypothesi ponatur $y=e^{\int zdt}$ et $p=e^{\int zdt}t$; vnde fit $dy=e^{\int zdt}zdt$; $dp=e^{\int zdt}dt(1+zt)$ et $ddp=e^{\int zdt}dt(-\frac{dz}{z}+zdt)$. His substitutis habebitur $\frac{dt(1+tz)^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2ftz}}{\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{tdz}{z} - 3dt - 6tzdt - 4t^2z^2dt. = -\frac{tdz-zdt}{z} - 2dt(1+tz)(1+2tz)$. Seu posito $tz=u$ prodibit $\frac{dt(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2fu}}{\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{tdu}{u} - 2dt(1+u)(1+2u)$.

## Corollarium 4.

1029. Aequatio haec integrationem admittit si diuidatur per $tt(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{u}$, prodibit enim

$$\frac{dt\sqrt{2f}}{tt\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{du}{tu(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{u}} - \frac{2dt(1+2u)}{tt\sqrt{(u+u^2)}}$$

Cuius integralis est $C - \frac{\sqrt{2f(1-tt)}}{t\sqrt{c}} = \frac{2(1+2u)}{t\sqrt{(u+u^2)}}$, seu $Ct - \frac{\sqrt{f(1-tt)}}{\sqrt{2c}} = \frac{1+2u}{\sqrt{(u+u^2)}} = \frac{1+2tz}{\sqrt{(tz+t^2z^2)}}$.

Co-

## Corollarium 5.

1030. Eſt vero vi ſubſtitutionum factarum $t = \frac{p}{y}$, $z = \frac{ydy}{ydp - pdy}$ et $u = \frac{pdy}{ydp - pdy}$ ac $1 + u = \frac{ydp}{ydp - pdy}$ Quamobrem pro curua quaeſita erit $\frac{Cp}{y} - \frac{\sqrt{f(y^2 - p^2)}}{y\sqrt{2c}} = \frac{ydp + pdy}{\sqrt{pydpdy}}$.

## Corollarium 6.

1031. Quo autem differentialia fiant rationalia eſt $2u + 1 = \frac{Ct\sqrt{2c} - \sqrt{f(1-tt)}}{\sqrt{((Ct\sqrt{2c} - \sqrt{f(1-tt)})^2 - 8c)}} = \frac{ydp + pdy}{ydp - pdy} = \frac{y^2dt + 2ytdy}{y^2dt}$ reſtituto $p = yt$. Habebitur ergo ſequens aequatio in qua indeterminatae $y$ et $t$ ſunt a ſe inuicem ſeparatae $\frac{Ctdt\sqrt{2c} - dt\sqrt{f(1-tt)}}{t\sqrt{((Ct\sqrt{2c} - \sqrt{f(1-tt)})^2 - 8c)}} - \frac{dt}{t} = \frac{2dy}{y}$. Ex qua aequatione curua conſtrui poterit.

## Scholion.

1032. Huic aequationi vlterius reducendae non immoror, etſi ſuſpicor eam denuo poſſe integrari. Hoc quidem certum ſi fuerit $C\sqrt{2b} = f$; quo caſu integrale tam fit compoſitum, vt huc transferre noluerim. Ex quo intelligi poteſt integrale generaliter ſumtum maxime fore perplexum, ita vt vix quicquam ad motum cognoſcendum inde deduci poſſet. Quamobrem his miſſis ad inuerſa problemata pergo.

PRO-

# PROPOSITIO 123.

## Problema.

Tabula XIII Fig. 2. 1033. *Si data fuerit curua AM quam corpus describit et resistentia in singulis locis M, determinare vim centripetam ad centrum C perpetuo directam, et celeritatem in singulis locis.*

## Solutio.

Ponantur vt ante $CM = y$, $Mm = ds$, $CT = p$, altitudo debita celeritati in $M = v$, resistentia $= R$, et vis centripeta $= P$. His positis habebitur ista aequatio $dv + \frac{2vdp}{p} = -Rds$ (1007), ex qua cum curua AM et resistentia R dentur, inuenietur $v$ ex aequatione integrali $p^2 v = -\int Rp^2 ds$, nempe $v = -\frac{\int Rp^2 ds}{p^2}$. Inuenta autem $v$ reperietur $P = \frac{2vdp}{pdy} = -\frac{2dp\int Rp^2 ds}{p^3 dy}$ (1005). Q. E. I.

## Corollarium 1.

1034. Si celeritas in initio A ponatur $\sqrt{b}$ et perpendiculum in tangentem in A ex C demissum $= h$, in casu nullius resistentiae seu in vacuo prodiissent hae aequationes $p^2 v = bh^2$ et $P = \frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$.

## Corollarium 2.

1035. In medio igitur resistente si $\int Rp^2 ds$ ita capiatur, vt euanescat, euanescente arcu AM, erit $v = \frac{bh^2 - \int Rp^2 ds}{p^2}$ et $P = \frac{2dp(bh^2 - \int Rp^2 ds)}{p^3 dy}$.

Co-

## Corollarium 3.

1036. Si corpus in vacuo moueretur in curua AM eadem celeritate initiali in A, et si dicatur celeritas, quam in M habiturum esset $Vu$, et vis centripeta in $M = V$, tum foret $u = \frac{bh^2}{p^2}$ et $V = \frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$. Quare erit $u : u - v = bh^2 : \int Rp^2 ds$ et $V : V - P = bh^2 : \int Rp^2 ds$.

## Corollarium 4.

1037. Cum igitur hoc problema, quo curua AM et celeritas initialis in A datur, vis centripeta vero quaeritur, iam sit solutum in cap. praec. ex eadem solutione simul hoc problema soluitur. Inuenta enim $\int Rp^2 ds$, statim innotescit differentia virium centripetarum in vacuo et medio resistente, atque ideo ipsa vis centripeta in medio resistente.

## Exemplum 1.

1039. Si curua AM fuerit circulus radii $a$, centrum in C habens, et resistentia vbique eadem seu $R =$ constanti $\lambda$; erit $y = p = a$ et $h = a$. Quare habebitur $\int Rp^2 ds = \lambda a^2 s$, ideoque $v = b - \lambda s$ et $P = \frac{2b - 2\lambda s}{a}$. Celeritas ergo perpetuo decrescit, et prorsus euanescit descripto arcu $= \frac{b}{\lambda}$, quo loco etiam vis centripeta in nihilum abit. Est autem vis centripeta vbique vt quadratum celeritatis.

Tempus praeterea, quo arcus AM percurritur est $\frac{2\surd b - 2\surd(b-\lambda s)}{\lambda}$, et tempus quo corpus ad quietem redigitur est $\frac{2\surd b}{\lambda}$.

## Exemplum 2.

Tabula XIII Fig. 2.

1039. Sit curua AMC logarithmica spiralis, cuius centrum in C, et resistentia sit potestas quaecunque distantiae CM, nempe $R = \frac{y^n}{f^n}$. Erit ergo $p = \alpha y$ et posito $\mathfrak{G} = \surd(1-\alpha^2)$, $ds = -\frac{dy}{\mathfrak{G}}$. Ponatur vero $AC = a$, erit $h = \alpha a$. Fiet igitur $\int R p^2 ds = \frac{\alpha^2 a^{n+3} - \alpha^2 y^{n+3}}{(n+3)\mathfrak{G} f^n}$, hincque $v = \frac{(n+3)\mathfrak{G} a^2 b f^n - a^{n+3} + y^{n+3}}{(n+3)\mathfrak{G} f^n y^2}$. Atque $P = \frac{2(n+3)\mathfrak{G} a^2 b f^n - 2a^{n+3} + 2y^{n+3}}{(n+3)\mathfrak{G} f^n y^3}$. In casu vero quo $n = -3$, qui a logarithmis pendet est $\int R p^2 ds = \frac{\alpha^2 f^3}{\mathfrak{G}} l \frac{a}{y}$. Atque $v = \frac{\mathfrak{G} a^2 b - f^3 l \frac{a}{y}}{\mathfrak{G} y^2}$, et $P = \frac{2\mathfrak{G} a^2 b - 2f^3 l \frac{a}{y}}{\mathfrak{G} y^3}$.

## Corollarium 5.

1040. Si tanta corpori in A imprimatur celeritas initialis vt sit $b = \frac{a^{n+1}}{(n+3)\mathfrak{G} f^n}$; erit etiam

vbi-

vbique $v = \frac{y^{n+1}}{(n+3)\,ℭ f^n}$ et $P = \frac{2 y^n}{(n+3)\,ℭ f^n}$ Hoc igitur casu vis centripeta P erit ad resistentiam R vt 2 ad $(n+3)ℭ$. i. e. in data ratione.

## Corollarium 6.

1041. Eodem hoc casu est $y = (n+3)^{\frac{1}{n+1}} ℭ^{\frac{1}{n+1}} f^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{1}{n+1}}$ atque $\frac{y^n}{f^n} = \frac{(n+3)^{\frac{n}{n+1}} ℭ^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{n}{n+1}}}{f^{\frac{n}{n+1}}}$ $= R$. Resistentia igitur erit in $\frac{2n}{n+1}$ *plicata* ratione celeritatum medio existente vniformi, quippe cuius exponens est $\frac{f}{(n+3)ℭ}$.

## Corollarium 7.

1042. Si $n = 1$, erit resistentia in ratione celeritatum, et medii exponens $\frac{f}{4ℭ}$. In hoc igitur medio corpus spiralem logarithmicam describere poterit, si vis centripeta fuerit distantiis proportionalis nempe $= \frac{y}{2ℭf}$ et si initio in A proiiciatur celeritate $\frac{a}{2\sqrt{ℭf}}$. In quocunque praeterea medio resistente vniformi spiralis data poterit describi a corpore, excepto casu, quo resistentia est quadratis celeritatum proportionalis.



Scho-

## Scholion.

1043. Qualis vis centripeta et qualis resistentia requiratur ad id, vt corpus in spirali logarithmica moueatur, Viri iam saepius citati *Neutonus* et *Bernoullius* in Princip. Phil. et Act. Lips. 1713 exposuere. In sequentibus deinde exemplis plura hac de re afferemus.

# PROPOSITIO 124.

## Problema.

Tab. XIII. Fig. 2. 1044. *Si resistentia fuerit cuicunque celeritatum potestati proportionalis eiusque exponens in singulis locis detur: inuenire vim centripetam, quae faciat vt corpus in data curua* AM *moueatur.*

## Solutio.

Manentibus vt ante $CM = y$, $CT$, $p$, $Mm$, $ds$, celeritate in $M = \sqrt{v}$, et exponente resistentiae $= q$, sit resistentia $R = \frac{v^m}{q^m}$ et vis centripeta $= P$. His positis erit $P = \frac{2v\,dp}{p\,dy}$ (1005), et $dv + \frac{2v\,dp}{p} = -\frac{v^m ds}{q^m}$ (1007). Haec aequatio integrata dat $v^{1-m} = -\frac{(1-m)}{p^{2(1-m)}} \int \frac{p^{2(1-m)} ds}{q^m}$. Casu vero quo

quo $m=1$ est $v=\frac{1}{p^2 e^{\int\frac{ds}{q}}}$. Inuenta autem $v$ simul innotescit P ex aequatione $P=\frac{2vdp}{pdy}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

1045. Sit celeritas, qua corpus in A proiicitur, debita altitudini $b$, et perpendiculum ex C in tangentem in A demissum $=h$. Atque $\int\frac{(m-1)p^{2(1-m)}ds}{q^m}$, ita sumatur vt euanescat facto $s=o$ seu M in A incidente; hocque integrale ponatur $=S$. Addita igitur constante erit $v^{1-m}=\frac{C+S}{p^{2(1-m)}}$. Fiat nunc $S=o$, erit $p=h$ et $v=b$, ideoque $C=b^{1-m}h^{2(1-m)}$. Determinata ergo constante C habebitur $v^{1-m}=\frac{b^{1-m}h^{2(1-m)}+S}{p^{2(1-m)}}$.

## Corollarium 2.

1046. In casu $m=1$, qui peculiarem integrationem requirit, si $\int\frac{ds}{q}$ ita sumatur vt euanescat facto $s=o$; erit $v=\frac{bh^2}{p^2 e^{\int\frac{ds}{q}}}$, ideoque $P=\frac{2bh^2dp}{e^{\int\frac{ds}{q}}p^3dy}$. In vacuo prodiisset $P=\frac{2bh^2dp}{p^3dy}$

Erit ergo vis centripeta in vacuo ad vim centripetam in hoc medio resistente vt 1 ad $e^{-\int\frac{ds}{q}}$.

## Corollarium 3.

1047. Denotante autem $m$ quemcunque alium numerum praeter 1 est $v = \frac{(b^{1-m}h^{2(1-m)}+S)^{\frac{1}{1-m}}}{p^2}$. Ex quo prodit $P = \frac{2(b^{1-m}h^{2(1-m)}+S)^{\frac{1}{1-m}}dp}{p^3\,dy}$. In vacuo vero prodiisset vis centripeta $= \frac{2bh^2dp}{p^3dy}$, quae si dicatur $= V$ erit $V:P = bh^2 : (b^{1-m}h^{2(1-m)}+S)^{\frac{1}{1-m}}$. Atque hinc $V^{1-m}:P^{1-m}-V^{1-m} = b^{1-m}h^{2(1-m)}:S$.

## Corollarium 4.

1048. Quare si reperta fuerit vis centripeta, quae in vacuo datam curuam AM producit, ex ea ope huius analogiae inuenietur vis centripeta, quae idem in medio quocunque resistente praestabit, si modo determinetur valor ipsius $\int\frac{(m-1)p^{2(1-m)}ds}{q^m}$.

## Exemplum 1.

1049. Si curua data fuerit circulus centrum in D habens, cuius radius $MC = a$, erit $y = p = a$ et et $b=a$. Sit praeterea medium vniforme seu $q=c$; erit $\int\frac{(m-1)p^{2(1-m)}ds}{q^m}=\frac{(m-1)a^{2(1-m)}s}{c^m}=S$ et $V=\frac{2b}{a}$. Habebitur igitur $\frac{2b}{a}:P=a^2b:(a^{2(1-m)}b^{1-m}+\frac{(m-1)a^{2(1-m)}s}{c^m})^{\frac{1}{1-m}}$, seu $P:1=(b^{1-m}+(m-1)c^{-m}s)^{\frac{1}{1-m}}:\frac{a}{2}$. Vnde oritur $P=\frac{2(b^{1-m}+(m-1)c^{-m}s)^{\frac{1}{1-m}}}{a}$. Si resistentia fuerit in simplici ratione celeritatum erit $m=\frac{1}{2}$ et $P=\frac{(2\sqrt{bc}-s)^2}{2ac}$, et $v=\frac{(2\sqrt{bc}-s)^2}{4c}$, vnde ipsa celeritas erit $=\frac{2\sqrt{bc}-s}{2\sqrt{c}}$ et tempus, quo arcum AM absoluit $2\sqrt{c}\,l\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}-s}$. Opus ergo est tempore infinito, antequam corpus arcum absoluat $=2\sqrt{bc}$, quo, cum peruenerit omnem motum amittit et simul vis centripeta euanescit. Si resistentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis erit $v=be^{-\frac{s}{c}}$ et $P=\frac{2b}{ae^{\frac{s}{c}}}$. Ceterum motus corporis in peripheria circuli prorsus congruit cum motu rectilineo, quo corpus motum impressum a resistentia amittit. Vis enim centripeta quia semper est normalis celeritatem prorsus non afficit, sed tantum motum in circulum inflectit.

Exem-

## Exemplum 2.

Tabula XIII Fig. 3.

1050. Descendat corpus ex A versus centrum C in logarithmica spirali AM, sitque exponens resistentiae $q$ vt dignitas quaecunque distantiae MC, $y$ ita vt sit $q = \frac{y^{n+1}}{f^n}$. Ex natura logarithmicae est $p = \alpha y$, atque facta $AC = a$ erit $s = \alpha a$, et posito $\mathfrak{B} = \sqrt{(1-\alpha^2)}$ erit $ds = -\frac{dy}{\mathfrak{B}}$. Hinc erit $\int (m-1)\frac{p^{2(1-m)}ds}{q^m} = \frac{(1-m)\alpha^{2(1-m)} f^{mn}}{(3-3m-mn)\mathfrak{B}}(y^{3-3m-mn} - a^{3-3m-mn}) = S$. Sit praeterea $b^{1-m} = \frac{(1-m)a^{1-m-mn} f^{mn}}{(3-3m-mn)\mathfrak{B}}$ erit $v = \frac{(1-m)^{\frac{1}{1-m}} f^{\frac{mn}{1-m}} y^{1-\frac{mn}{1-m}}}{(3-3m-mn)^{\frac{1}{1-m}} \mathfrak{B}^{\frac{1}{1-m}}}$

atque $P = \frac{2(1-m)^{\frac{1}{1-m}} f^{\frac{mn}{1-m}} y^{-\frac{mn}{1-m}}}{(3-3m-mn)^{\frac{1}{1-m}} \mathfrak{B}^{\frac{1}{1-m}}}$. Vis centripeta igitur erit reciproce vt potestas distantiae cuius exponens est $\frac{mn}{1-m}$.

## Corollarium 5.

1051. Si vis centripeta est constans $= \frac{2}{(3\mathfrak{B})^{\frac{1}{1-m}}}$, corpus in spirali logarithmica, cuius anguli intersectionis radiorum cum curua cosinus est $\mathfrak{B}$, moueri poterit, si existente exponen-

te

te resistentiae $=y$, et celeritate initiali debita alt. $(3\mathfrak{C})^{\frac{1}{1-m}}$.

## Corollarium 6.

1052. Si vis centripeta fuerit vt distantia $y$ eleuata ad $k$, erit $-\frac{mn}{1-m}=k$ et $n=-\frac{k(1-m)}{m}$; vnde $P=\frac{2y^k}{(3+k)^{\frac{1}{1-m}}\mathfrak{C}^{\frac{1}{1-m}}f^k}$. Resistente ergo exponens debet esse $=\frac{y^{\frac{m+mk-k}{k}}}{f^{\frac{mk-k}{m}}}$, et $v=\frac{y^{k+1}}{(2\mathfrak{C}+\mathfrak{C}k)^{\frac{1}{1-m}}f^k}$ vnde $b=\frac{a^{k+1}}{(3\mathfrak{C}+\mathfrak{C}k)^{\frac{1}{1-m}}f^k}$.

## Corollarium 7.

1053. Tempus praeterea, quo arcus AM absoluitur est $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}=\frac{2\mathfrak{C}^{\frac{2m-1}{2-2m}}f^{\frac{k}{2}}}{1-k}\left(a^{\frac{1-k}{2}}-y^{\frac{1-k}{2}}\right)$. Tempus igitur, quo in centrum C vsque descendit est finitum si $k<1$, infinitum vero erit si vel $k=1$ vel $k>1$.

## Corollarium 8.

1054. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis et exponens resistentiae $=\frac{y}{\delta}$ erit

$\int \frac{ds}{q} = \frac{\delta}{\varepsilon} l \frac{a}{y}$ et $e^{\int \frac{ds}{q}} = \frac{a^{\frac{\delta}{\varepsilon}}}{y^{\frac{\delta}{\varepsilon}}} = \frac{a^i}{y^i}$ posito $i = \frac{\delta}{\varepsilon}$

Hinc erit $v = \frac{by^{i-2}}{a^{i-2}}$ et $P = \frac{2by^{i-3}}{a^{i-2}}$. In medio igitur hoc resistente corpus quamcunque logarithmicam spiralem describere poterit, si fuerit vis centripeta $= \frac{2by^{i-3}}{a^{i-2}}$ et exponens resistentiae $= \frac{y}{\varepsilon i}$.

## Scholion.

1055. In hoc igitur exemplo et corollariis annexis omnes continentur casus, quibus corpus in medio quocunque resistente logarithmicam spiralem describere potest, sollicitatum a vi centripeta potestati cuicunque distantiarum proportionali. Vbi casus quo resistentia proportionalis est quadratis celeritatum et eius exponens distantiis a centro hoc habet peculiare, vt statim det vim centripetam potestati distantiarum proportionalem, quod in aliis resistentiae hypothesibus demum post certo modo determinatam celeritatem initialem obtinebatur. In illa autem resistentiae hypothesi, existente exponente resistentiae $\frac{y}{\delta}$, si corpus in A celeritate quacunque $\sqrt{b}$ secundum directionem, cuius cum AC inclinationis cosinus est $\varepsilon$ proiiciatur, et vis centripeta in A fuerit $= \frac{2b}{a}$, corpus semper in logarithmica spirali mouebitur, si praeterea vis centritripeta fuerit vt $y^{t-3}$, datur autem $i$ quia eſt $i = \frac{\delta}{\varepsilon}$. In his igitur ſatis ſunt expoſita, quae motum in ſpirali logarithmica ſpectant.

## PROPOSITIO 125.

### Problema.

1056. *Si detur curua* AM, *quam corpus deſcribit et vis centripeta ad centrum* C *tendens; inuenire reſiſtentiam requiſitam in ſingulis locis* M *et celeritatem corporis.* Tab. XIII. Fig. 2.

### Solutio.

Poſita $MC = y$, $CT = t$, $Mm = ds$, ſit vis centripeta in $M = P$. Deinde ponatur reſiſtentia in $M = R$, et altitudo debita celeritati in $M = v$. His poſitis erit $P = \frac{2vdp}{pdy}$ ( 1005 ) et $dv + \frac{2vdp}{p} = -Rds$ ( 1007 ). Ob datam curuam et vim centripetam ex illa aequatione inuenitur $v = \frac{Ppdy}{2dp}$, et differentiando poſito $dy$ conſtante eſt $dv = \frac{3Pdy}{2} + \frac{pdPdy}{2dp} - \frac{Ppdyddp}{2dp^2}$. Quibus loco $v$ et $dv$ valoribus ſubſtitutis erit $R = \frac{Ppdyddp}{2dsdp^2} - \frac{pdPdy}{2dsdp} - \frac{3Pdy}{2ds}$. Si reſiſtentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis eius exponens ponatur $q$ erit $R = \frac{v}{q}$ et $q = \frac{v}{R}$. Quare habebitur

$$q = \frac{Ppdsdp}{Ppddp - pdP - 3Pdp}.$$

Ex data ergo curua ſeu aequatione inter $y$ et $p$, et vi centripeta tam

 reſi-

resistentiam R, quam celeritatem in singulis locis determinauimus. Q. E. I.

## Corollarium 1.

1057. Alio exprimendi modo erit resistentia $R = -\frac{1}{p^2 ds} d. \frac{Pp^3 dy}{2dp}$ et $q = -\frac{Pp^3 dy ds}{2 dp. d. \frac{Pp^3 dy}{2dp}}$ Ex quo perspicitur si fuerit P vt $\frac{dp}{p^3 dy}$, euanescere resistentiam. Hoc enim casu vis centripeta sola sufficit ad curuam datam producendam.

## Corollarium 2.

1058. Posita celeritate initiali in A $= \sqrt{b}$ et perpendiculo ex C in tangentem in A demisso $= h$ sit vis centripeta, quae in vacuo faciat est corpus in hac curua moueatur, $= V$ erit $V = \frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$ (592). Hanc ob rem $R = -\frac{bh^2}{p^2 ds} d. \frac{P}{V}$, et $q = -\frac{P ds}{V\, d. \frac{P}{V}}$ Atque $v = \frac{bh^2 P}{V p^2}$.

## Corollarium 3.

1059. Si corpus in hac curua in vacuo a vi V sollicitatum moueretur, sit eius celeritas in M debita altitudini $u$; eritque $u = \frac{bh^2}{p^2}$. Vnde haec habebitur analogia $u : v = V : P$. Atque generalitet hoc theorema obtinet: celeritates corporis in eodem loco M sunt in subduplicata ratione virium centripetarum.

Co-

## Corollarium 4.

1060. Si vis centripeta fuerit constans seu $P = g$, erit $R = \frac{bh^2 g\,dV}{V^2 p^2 ds}$ et $q = \frac{V ds}{dV}$. Atque $v = \frac{bh^2 g}{V p^2}$.

## Exemplum.

1061. Descendat corpus in spirali hyperbolica AM, cuius natura hac aequatione exprimitur; $p = \frac{ay}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, et sit vis centripeta vt dignitas quaecunque a centro spiralis C; scilicet $P = \frac{y^n}{f^n}$. Erit $ds = -\frac{dy\sqrt{(a^2+y^2)}}{y}$, et $\frac{p^3\,dy}{dp} = y^3$. Vnde prodit $R = \frac{(n+3)y^{n+1}\sqrt{(a^2+y^2)}}{2a^2 f^n}$ et $v = \frac{y^{n+3}(a^2+y^2)}{2a^2 f^n}$ atque ex his $q = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{n+3}$. Si medium ergo resistit in duplicata celeritatum ratione erit exponens resistentiae $= \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{n+3}$. At si medium resistat in simplici ratione celeritatum, et exponens resistentiae sit $q$ erit $\sqrt{q} = \frac{Vv}{R} = \frac{af^{\frac{n}{2}}\sqrt{2}}{(n+3)y^{\frac{n+1}{2}}}$, atque $q = \frac{2a^2 f^n}{(n+3)^2 y^{n+1}}$. In hac igitur resistentiae hypothesi medium erit vniforme si $n = -1$; hoc est si vis centripeta est in reciproca ratione distantiarum. Fit enim $q = \frac{a^2}{f}$. At si vis centripeta est reciproce vt quadratum distantiae, fiet resistentiae exponens $= \frac{2a^2y}{f^2}$ seu erit proportionalis ipsis a centro distantiis.

## Scholion.

1062. Sequi hic deberet iuxta nostrum institutum problema, quo ex data curua et celeritate in singulis locis quaeruntur tam vis centripeta, quam resistentia; sed cum huius solutio sit facillima et ex ipsis canonibus supra (1007), datis sponte fluat; atque praeterea ex eo nihil notatu digni deduci queat, hic praetermitto. Inuenitur autem $P = \frac{2vdp}{pdy}$ et $R = -\frac{pdv - 2vdp}{pds}$, quae formulae problema soluunt. Adiicio vero loco huius problematis aliud affine, quo praeter curuam motus angularis circa centrum virium datur et tam vis centripeta quam vis resistentiae quaeruntur.

# PROPOSITIO 126.

## Problema.

Tabula XIII Fig. 4.

1063. *Si detur curua* A M *in qua corpus mouetur et motus angularis circa centrum virium* C, *inuenire tam vim centripetam ad* A *tendentem, quam resistentiam in singulis locis.*

## Solutio.

Positis vt hactenus $CM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$ celeritate in M debita altitudini $v$, vi centripeta $= P$ et vi resistentiae $= R$, concipiatur centro C radio $EC = 1$ descripta peripheria circuli $ELl$, in

qua

qua corpus eodem motu angulari circa C feratur, quo corpus in curua AM. Elementum ergo L$l$ eodem tempore absoluitur, quo elementum M$m$. Sit nunc celeritas per L$l$ debita altitudini $u$; erit $u$ data, quia motus angularis datur. Atque habebitur $\frac{Ll}{\sqrt{u}} = \frac{Mm}{\sqrt{v}}$. Est vero $Ll : mr = 1 : y$ seu $Ll = \frac{mr}{y}$, porroque est $mr : Mm = p : y$, ideoque $mr = \frac{p.Mm}{y}$, et consequenter $Ll = \frac{p.Mm}{y^2}$. Hanc ob rem habebitur $\frac{p}{y^2\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{v}}$, hincque $v = \frac{y^4 u}{p^2}$. Inuenta iam hac ratione $v$ erit $P = \frac{2y^4 u dp}{p^3 dy}$ (1005), et $R = -\frac{y^4 du - 4y^3 u dy}{p^2 ds}$ (1007). Atque si resistentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis et exponens resistentiae $= q$, erit $q = -\frac{yuds}{ydu + 4udy}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

1064. Si vis centripeta P proportionalis est ipsi $\frac{dp}{p^3 dy}$, id quod accidit, quando corpus mouetur in vacuo; erit $u$ reciproce vt $y^4$. Quare celeritas angularis tum est reciproce vt quadratum distantiae corporis a centro. Facto autem $y^4 u$ constante ex aequatione altera perspicitur euanescere resistentiam R.

## Corollarium 2.

1065. Si corpus ad centrum C accedit ita vt $y$ decrescat erit $ds = -\frac{ydy}{\sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Quare erit resistentia $R = \frac{(y^3 du + 4y^2 udy)\sqrt{(y^2 - p^2)}}{ppdy}$, et $q = \frac{y^2 udy}{(ydu + 4udy)\sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Ex quo intelligitur si $y^4 u$ fuerit potestas ipsius $y$, cu-

cuius exponens est numerus affirmatiuus, resistentiam fore affirmatiuam. At si exponens illius potestatis ipsius $y$ fuerit negatiuus resistentia quoque erit negatiua.

## Corollarium 3.

1066. Si motus angularis debeat esse aequabilis seu $u$ constans, erit $du = o$ ideoque $R = \frac{4y^2u\sqrt{(y^2-p^2)}}{p^2}$ et $q = \frac{y^2}{4\sqrt{(y^2-p^2)}}$.

## Corollarium 4.

1067. Sit celeritas angularis vt potestas exponentis $n$ distantiae $y$ seu $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$ erit resistentia $R = \frac{2(n+2)y^{2n+2}\sqrt{(y^2-p^2)}}{f^{2n-1}p^2}$, vis centripeta $P = \frac{2y^{2n+4}dp}{f^{2}\, p^3dy}$; et $v = \frac{y^{2n+4}}{f^{2n-1}\, p^2}$ atque pro medio resistente in duplicata ratione celeritatum erit exponens resistentiae $q = \frac{y^2}{2(n+2)\sqrt{(y^2-p^2)}}$.

## Exemplum.

1068. Sit curua AM iterum spiralis hyperbolica aequatione $p = \frac{ay}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$ expressa, et celeritas angularis sit vt $y^n$ seu vt ante $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$. Cum autem sit $\sqrt{(y^2-p^2)} = \frac{y^2}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, erit

R=

$R = \frac{2(n+2)y^{2n+2}\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2 f^{2n-1}}$; $v = \frac{y^{2n+2}(a^2+y^2)}{a^2 f^{2n-1}}$

et vis centripeta $P = \frac{2y^{2n+1}}{f^{2n-1}}$. Si resistentia ponatur ipsis celeritatibus proportionalis erit, exponens resistentiae $= \frac{a^2 f^{2n-1}}{(2n+4)^2 y^{2n+2}}$. Sin resistentia quadratis celeritatum ponatur proportionalis, et exponens resistentiae sit $q$, erit $q = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{2n+4}$. Quae prorsus conueniunt, cum iis quae superiore exemplo (1061) sunt tradita.

# PROPOSITIO 127.

## Problema.

1069. *Si detur resistentia per quamuis celeritatum potestatem simulque exponens resistentiae, praeterea etiam datus sit motus angularis corporis circa centrum* C: *ex his inuenire curuam, quam corpus describet et vim centripetam ad centrum* C *tendentem.* Tabula XIII Fig. 4.

## Solutio.

Positis $CM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$, altitudine celeritati in M debita $= v$, vi centripeta $= P$, resistentia $= R$; sit resistentia $R = \frac{v^m}{q^m}$, vbi $q$ detur per $y$. Deinde motus angularis consideretur vt ante

Nnn

te tanquam motus puncti factus in peripheria circuli EL$l$, cuius radius CE$=1$. Posita nunc celeritate, qua L$l$ describitur, debita altitudini $u$, erit vt in praec. Prop. elicuimus $v = \frac{y^4 u}{p^2}$, $P = \frac{2y^4 udp}{p^3 dy}$ et $R = -\frac{y^4 du - 4y^3 udy}{p^2 ds} = \frac{v^m}{q^m} = \frac{y^{4m} u^m}{p^{2m} q^m}$. Haec posterior aequatio autem, quia $u$ et $q$ sunt quantitates datae, exprimet naturam curuae quaesitae, pro qua ergo habebitur $ydu + 4udy + \frac{y^{4m-3} u^m ds}{p^{2m-2} q^m} = o$ seu $ydu + 4udy = \frac{y^{4m-2} u^m dy}{p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2-p^2)}}$. Cognita vero curuae descriptae natura, seu aequatione inter $p$ et $y$ innotescet statim vis centripeta P quippe est $P = \frac{2y^4 udp}{p^3 dy}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

1070. Si celeritas angularis debeat esse aequabilis, quod in vacuo nisi in circulo fieri nequit, erit $du = o$, haecque prodibit pro curua quaesita aequatio $4p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2-p^2)} = y^{4m-2} u^{m-1}$. Data ergo $q$ per $y$, aequatio haec est integralis inter $p$ et $y$, ex qua curua potest construi.

## Corollarium 2.

1071. Si fuerit $u$ per $y$ data vt $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$, erit $(2n+4) p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2-p^2)} =$



$y^{2mn}$

$\frac{y^{2mn+4m-2n-2}}{j^{(m-1)(2n-1)}}$. Quae quoque eſt integralis inter $y$ et $p$, ideoque ad curuam conſtruendam eſt idonea.

## Corollarium 3.

1072. Si celeritas angularis detur per arcum EL, ſeu $du$ per eius elementum $Ll = \frac{p.Mm}{y^2}$ (1063) $= -\frac{p\,dy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$, ita vt ſit $du = \frac{u^k p\,dy}{g^k y\sqrt{(y^2-p^2)}}$; erit $\frac{dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{g^k y\,du}{u^k p}$. Hoc valore ſubſtituto habebitur $y\,du + 4u\,dy = \frac{g^k y^{4m-1} u^{m-k} du}{p^{2m-1} q^m}$ atque $p^{2m-1} = \frac{g^k y^{4m-1} u^{m-k} du}{q^m y\,du + 4q^m u\,dy}$. Ex qua aequatione valor ipſius $p$ ſubſtitutus in aequatione $du = \frac{u^k p\,dy}{g^k y\sqrt{(y^2-p^2)}}$, determinabit $u$ in $y$. Vnde quoque aequatio inter $p$ et $y$ obtinebitur.

## Corollarium 4.

1073. Si reſiſtentia fuerit in ſimplici ratione celeritatum ſeu $m = \frac{1}{2}$; aequatio $1 = \frac{g^k y u^{\frac{1}{2}-k} du}{(y\,du + 4u\,dy)\sqrt{q}}$ ſtatim dabit $u$ per $y$. Qui va-

 lor

lor in aequatione $du = \frac{u^k p\,dy}{g^k y \sqrt{(y^2-p^2)}}$ substitutus dabit aequationem inter $y$ et $p$.

## Exemplum 1.

1074. Resistat medium in duplicata ratione distantiarum sitque medii exponens $q = \frac{y}{\alpha}$. Motus vero angularis sit aequabilis seu $u = b$. Erit $m = 1$, atque $4\sqrt{(y^2-p^2)} = \alpha y$ (1070). Vnde prodit $p = \frac{y\sqrt{(16-\alpha^2)}}{4}$. Quare curua descripta erit spiralis logarithmica, in qua anguli quem radius cum tangente conficit sinus est $\frac{\sqrt{(16-\alpha^2)}}{4}$ et cosinus $= \frac{\alpha}{4}$. Vis centripeta vero erit $= \frac{32by}{16-\alpha^2}$. Sin autem medium ponatur vniforme seu $q = c$, erit $4c\sqrt{(y^2-p^2)} = y^2$, et $p = \frac{y\sqrt{(16cc-yy)}}{4c}$.

## Exemplum 2.

1075. Resistat medium in simplici ratione celeritatum, sitque id vniforme: ponatur vero etiam motus angularis vniformis, erit $m = \frac{1}{2}$, $q = c$, $u = b$. His substitutis habebitur pro curua descripta haec aequatio $p = 4\sqrt{bc(y^2-p^2)}$ seu $p = \frac{4y\sqrt{bc}}{\sqrt{(1+16bc)}}$. Quae curua quoque est spiralis logarithmica, in qua anguli intersectionis sinus est $\frac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{(1+16bc)}}$, cosinus $= \frac{1}{\sqrt{(1+16bc)}}$ atque tangens $= 4\sqrt{bc}$. Vis centripeta vero erit $= \frac{y(1+16bc)}{8c}$. Quod in his formulis vniformitas dimensionum non obseruetur ratio est, quod radium circuli EC posuimus $= 1$. Hac igitur vnitate vniformitas dimensionum est restituenda.

## Scholion.

1076. Plura centra virium in hoc capite non considerabimus, cum in vacuo etiam pro hoc casu vix quicquam ad motum determinandum deduci potuerit. Si centra quidem attrahant in simplici ratione distantiarum, quotcunque centra plus non habent difficultatis quam vnum in eadem ratione attrahens, quemadmodum ostendimus supra (702). Haecque conuenientia in medio resistente aeque locum habet ac in vacuo. Quamobrem cum iam vnum centrum in simplici ratione distantiarum attrahens considerauerimus, non opus est vt de pluribus eiusdem naturae verba faciamus. Progrediemur igitur ad casum latissime patentem, in quo omnes motus, qui fiunt in eodem plano, comprehenduntur. Considerabimus scilicet duas vires absolutas, quarum directiones sunt ad se inuicem normales, singulae vero inter se parallelae. Ad huiusmodi enim duas vires quasuis potentias in eodem plano existentes resolui posse constat. Praeterea in hac tractatione non solum omnes casus potentiarum absolutarum complectemur, sed etiam quaedam eximia pro vacuo obseruare licebit circa vires centripetas, quae in praecedentibus difficulter patent. Namque hic statim curuam descriptam ad aequationem inter coordinatas orthogonales reducemus, quod ibi inter distantiam a centro et perpendiculum in tangentem est factum.

# PROPOSITIO 128.

## Problema.

Tab. XIII. Fig. 5. 1077. *Si corpus in M a duabus viribus ſollicitetur, quarum vna habeat directionem MP normalem ad datam AC, altera vero directionem MQ parallelam ipſi AC ſeu normalem in BC, determinare curuam AM quam corpus in quocunque medio reſiſtente ab his potentiis ſollicitatum deſcribet.*

## Solutio.

Vocetur $CM = MQ = x$, $PM = CQ = y$, elementum $Mm = ds$: ductisque $mp$ et $mq$, erit $Pp = -dx$ et $Qq = dy$; atque $ds\sqrt{}=(dx^2+dy^2)$. Sit vis qua corpus ſecundum MP trahitur $=P$ et vis qua corpus ſecundum MQ trahitur $=Q$, reſiſtentia vero ſit $=R$, et celeritas in M debita altitudini $v$. Reſoluantur nunc vires P et Q in normales et tangentiales ope demiſſorum perpendiculorum ex P et Q in tangentem $Tt$; erit ergo vis normalis ex P orta $=\frac{P.PT}{PM} = -\frac{Pdx}{ds}$, et vis tangentialis $=\frac{P.MT}{MP} = \frac{Pdy}{ds}$. Ex vi Q vero reſoluta oritur vis tangentialis $=\frac{Q.Mt}{MQ} = -\frac{Qdx}{ds}$, et vis normalis $=\frac{Q.Qt}{MQ} = \frac{Q.dy}{ds}$. Tota ergo vis normalis erit $=\frac{Qdy-Pdx}{ds}$; et vis tangentialis promouens $=-\frac{Qdx-Pdy}{ds}$, quae vi reſiſtentiae R debet diminui, quo tota vis motum accelerans prodeat. Ex his, ergo poſito $r$ radio oſculi in M, erit $\frac{Qdy-Pdx}{ds} = \frac{2v}{r}$ et et $dv = -Qdx - Pdy - Rds$ (866). Eliminata ergo $v$ ex his aequationibus orietur aequatio naturam curuae descriptae exprimens. Q. E. I.

## Corollarium 1.

1078. Si ponatur elementum curua $ds$ constans erit radius osculi $r = -\frac{ds\,dy}{ddx} = \frac{ds\,dx}{ddy}$. Hoc igitur valore substituto erit $\frac{2v\,ddx}{dy} = Pdx - Qdy$.

## Corollarium 2.

1079. Ex aequationibus inuentis coniungendis reperietur $P = -\frac{2vddy - dvdy - Rdyds}{ds^2}$ et $Q = -\frac{2vddx - dvdx - Rdxds}{ds^2}$. Ex quibus si relatio inter P et Q datur, statim habetur aequatio, in qua $v$ per solam curuam inuenitur.

## Corollarium 3.

1080. Si corpus perpetuo a vi quacunque ad centrum C attrahatur erit $P:Q = y:x$. Tunc igitur habebitur ista aequatio $2vxddy + xdvdy + Rxdyds = 2vyddx + ydvdx + Rydxds$. Quae posito $y = px$ abit in hanc $2vxddp + 4vdpdx + xdvdp + Rxdpds = o$, seu $d.vx^4dp^2 + Rx^4dp^2ds = o$.

## Corollarium 4.

1081. In vacuo, quo R euanescit et corpus ad centrum C attrahitur, erit $vx^4dp^2 = Ads^2$ seu $v = \frac{Ads^2}{x^4dp^2}$. Praeterea vero erit $\int Pdy = \frac{vdy^2}{ds^2}$ et

$v =$

$v = -\frac{ds^2 \int P dy}{dy^2}$. Quare habebitur ista aequatio $-\frac{A dy^2}{x^4 dp^2} = \int P dy$, seu assumto Q loco P haec aequatio $-\frac{A dx^2}{x^4 dp^2} = \int Q dx$.

## Corollarium 5.

1082. Si vis centripeta ad C tendens fuerit $= \frac{MC^n}{f^n} = \frac{x^n (1+pp)^{\frac{n}{2}}}{f^n}$, erit $Q = \frac{x^n (1+pp)^{\frac{n+1}{2}}}{f^n}$. In vacuo igitur pro curua descripta habebitur haec aequatio $-\frac{A dx^2}{x^4 dp^2} = \int \frac{x^n dx (1+pp)^{\frac{n-1}{2}}}{f^n}$. Posito B pro $-Af^n$, et $dx$ constante, orietur differentiando haec aequatio $2Bx dx ddp + 4B dx^2 dp + x^{n+5} dp^3 (1+pp)^{\frac{n-1}{2}} = 0$. Posito vero $dp$ constante prodiisset haec aequatio $2Bx ddx - 4B dx^2 = x^{n+5} dp^2 (1+pp)^{\frac{n-1}{2}}$. Fiat $x = \frac{1}{q}$; erit $2B q^{n+2} ddq + dp^2 (1+pp)^{\frac{n-1}{2}} = 0$. Harum aequationum quamuis integratio non appareat, tamen integralis est $x^{n+5} dp^2 (1+pp)^{\frac{n+1}{2}} = C ds^2$, quae ex cap. praeced. inuenitur.

## Corollarium 6.

1083. Quanquam autem haec aequatio $2B q^{n+2} ddq + dp^2 (1+p^2)^{\frac{n-1}{2}} = 0$ est differentialis secundi gradus, tamen commodior est quam differenrentialis primi gradus ad curuas determinandas, quas corpus proiectum describit attractum vel in simplici distantiarum ratione vel in reciproce duplicata. In simplici enim ratione habebitur $n = 1$ atque $2Bq^3 ddq + dp^2 = 0$. Fiat $dp = w dq$ ob $dp$ constans erit $ddq = -\frac{dw dq}{w}$, vnde $2Bq^3 dw = w^3 dq$, et $\frac{B}{w^2} = \frac{1}{q^2} + C$. Erit ergo $w = \frac{q\sqrt{B}}{\sqrt{(1 + Cq^2)}}$ atque $p + \alpha = \frac{\sqrt{B(1 + Cq^2)}}{C} = \frac{\sqrt{B(x^2 + C)}}{Cx} = \frac{y}{x} + \alpha$ seu $\alpha x + \beta y = V(a^2 - x^2)$. Quia B est quantitas negatiua.

## Corollarium 7.

1084. Si est $n = -2$ seu si corpus in reciproca duplicata ratione distantiarum attrahitur, erit in vacuo curua descripta $2Bddq = \frac{dp^2}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$ sumto B negatiuo, vt oportet. Integrando ergo erit $2Bdq + C dp = \frac{pdp}{\sqrt{(1 + pp)}}$, denuoque integrando $2Bq + Cp = D + V(1 + pp)$ seu $2B + Cy = Dx + V(x^2 + y^2)$. Quarum curuarum vtraque est sectio conica, illa quidem ellipsis tantum, haec vero omnes complectitur.

## Scholion 1.

1085. In Capite praecedente, quo de motu corporum in vacuo egimus, curuas quoque determinauimus, quas corpus a vi centripeta vel ipsis distantiis vel reciproce earum quadratis proportionali describit; easque conuenientes inuenimus cum his in corollariis datis. Modi quidem maxime sunt

 di-

diuersi, nam ibi ex comparatione arcuum circularium aequationes algebraicas ſumus adepti, hic vero ipſa integratio ſponte aequationem algebraicam inter coordinatas dedit. Haec vero methodus, quamuis in praefatis caſibus duobus multo ſit commodior, tamen aliis laborat defectibus. Nam in aliis vis centripetae hypotheſibus nequidem hac methodo aequatio differentialis dari poteſt pro curua deſcripta, quod tamen illa directa methodo ſemper aeque facile fieri poteſt. Hoc tamen ipſius analyſeos defectui potius eſt adſcribendum quam methodo cum aequationis differentio-differentialis $2Bxddx - 4Bddx^2 = x^{n+5}dp^2(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}$ integralem $x^{n+5}dp^2(1+p^2)^{\frac{n+1}{2}} + Cds^2 = 0$ eſſe ſciamus ex ipſa methodo cap. praeced. vſitata, hanc vero integralem ex ipſa aequatione differentio-differentiali eruere nequeamus.

## Scholion 2.

1086. Problematum reciprocorum, quae circa has potentias proponi poſſunt, hoc iam eſt ſolutum coroll. 2. quo ex data curua, medio reſiſtente et celeritate in ſingulis punctis quoque data, quaeruntur vires ſecundum MP et MQ tendentes, quae hunc motum producant. Vt ſi curua AMB fuerit circulus centrum in C et radium $AC = a$ habens, et reſiſtentia ſit $= \frac{v}{c}$, atque celeritas conſtans nempe $v = b$, erit $x^2 + y^2 = a^2$ et $P = \frac{2bcy - abx}{a^2c}$ et

 Q=

$Q = \frac{2bcx + aby}{a^2c}$. Simili modo cum ſint quinque res, quae in conſiderationem veniunt, nempe duae potentiae P et Q, tertio reſiſtentia R, qu rto celeritas in ſingulis locis ſeu $v$, et quinto natura curuae deſcriptae ſeu aequatio inter $x$ et $y$; ſemper tria horum tanquam data accipi poſſunt et duo reliqua ex iis inueniri. Hanc ob rem decem formari poſſent problemata pro numero combinationum, quo tria ex quinque accipi poſſunt. Sed ne nimis detineamur in his euoluendis, e quibus non multum ad vſum deduci poterit, vnicum problema quo in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum ex data vi centripeta curua deſcripta quaeritur.

## PROPOSITIO 129.

### Problema.

1087. *Si corpus moueatur in medio, quod in duplicata ratione celeritatum reſiſtit; et ſi potentia* P *fuerit ad* Q *vt* MP *ad* MQ, *ſeu quod idem eſt, ſi corpus trahatur ad centrum* C *vi quacunque determinare curuam* AMB, *quam corpus deſcribet.* Tab. XIII. Fig. 5.

### Solutio.

Poſitis vt ante $CP = x$, $PM = y$, $Mm = ds$, et $y = px$, ſit celeritas in M debita altitudini $v$ et exponens reſiſtentiae $q$, erit $R = \frac{v}{q}$. Et cum ſit P: $Q = y : x$ erit $2vxddp + 4vdpdx + xdvdp + \frac{vxdpds}{q} = 0$ (1080).

(1080). Quae aequatio diuisa per $vxdp$ abit in hanc $\frac{2ddp}{dp} + \frac{4dx}{x} + \frac{dv}{v} + \frac{ds}{q} = 0$; cuius integralis est $e^{\int \frac{ds}{q}} x^4 v dp^2 = A ds^2$; seu $v = \frac{A e^{-\int \frac{ds}{q}} ds^2}{x^4 dp^2}$. Haec vero aequatio $Q ds^2 + 2v ddx + dv dx + \frac{vdxds}{q} = 0$ (1079) per $\frac{e^{\int \frac{ds}{q}} dx}{ds^2}$ multiplicata et integrata dat $\int e^{\int \frac{ds}{q}} Q dx + \frac{e^{\int \frac{ds}{q}} v dx^2}{ds^2} = 0$; in qua ille valor ipsius $v$ inuentus substitutus dat $\int e^{\int \frac{ds}{q}} Q dx + \frac{A dx^2}{x^4 dp^2} = 0$. Differentietur haec aequatio posito $dx$ constante erit $e^{\int \frac{ds}{q}} Q x^5 dp^3 = 5 A dx^2 dp + 2 A x dx ddp$. Quae est aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.

## Corollarium 1.

1088. Aequatio haec pro curua descripta non differt ab aequatione in vacuo inuenta (1081) nisi quod hic habeatur $\int e^{\int \frac{ds}{q}} Q dx$, cum ibi ipsi $-\frac{Adx^2}{x^4 dp^2}$ aequaretur tantum $\int Q dx$.

## Corollarium 2.

1089. Si elementum $dp$ pro constante fuisset assumtum, tum prodiisset haec aequatio $e^{\int \frac{ds}{q}} Q x^5 dp^2$

$= 4A$

$=4Adx^2 - 2Axddx$.. In qua si ponatur $x = \frac{1}{z}$, oritur $e^{\int \frac{ds}{q}} Q dp^2 = 2Az^2 ddz$.

## Corollarium 3.

1090. Si vis centripeta ad C tendens fuerit $= \frac{MC^n}{f^n} = \frac{x^n (1+p^2)^{\frac{n}{2}}}{f^n}$, erit $Q = \frac{x^n (1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}}{f^n} = \frac{(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}}{f^n z^n}$. Quare pro curua descripta habebitur ista aequatio $e^{\int \frac{ds}{q}} dp^2 = \frac{2Af^n z^{n+2} ddz}{(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}}$. Quae sumtis logarithmis et differentiata dat $\frac{ds}{q} = \frac{(n+2)dz}{z} + \frac{d^3 z}{ddz} - \frac{(n-1)pdp}{1+pp}$. Est vero $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\sqrt{(dz^2 + p^2 dz^2 + z^2 dp^2 - 2pzdpdz)}}{z^2}$.

## Corollarium 4.

1091. Iisdem manentibus sit $q = \frac{MC}{\alpha} = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\alpha z}$, erit $\frac{\alpha\sqrt{(dz^2 + p^2 dz^2 + z^2 dp^2 - 2pzdpdz)}}{z\sqrt{(2+pp)}} = \frac{(n+2)dz}{z} + \frac{d^3 z}{ddz} - \frac{(n-1)pdp}{1+pp}$ Ponatur $z = e^{\int udp}$, atque prodibit ista aequatio $\frac{\alpha dp\sqrt{(1 - 2pu + u^2 + p^2 u^2)}}{\sqrt{(1+pp)}} = (n+3)udp + \frac{ddu + 2ududp}{du + u^2 dp} + \frac{(n-1)pdp}{1+pp}$

## Scholion.

1092. Hanc aequationem differentialem secundi gradus dubito, an in quoquam casu ad differentiatialem primi gradus possit reduci; id quod tamen supra, vbi vires centripetas ex instituto consideravimus, fecimus (1020). In medio igitur resistente haec operandi ratio non tantam vtilitatem afferre videtur, quantam in vacuo attulit, saltem pro pro casibus quibus $n$ est vel 1 vel $-2$. Quamobrem cum in hac re vix quicquam amplius sperari possit, hic motum in medio resistente, qui in plano fit relinquo atque ad motus non in plano factos considerandos progredior, coniuncta cum potentiis absolutis corpus sollicitantibus vi resistentiae. Quo in negotio, cum facile intelligatur, parum ad euidentem cognitionem perducere licere, contentus ero regulas generales tradidisse, quibus pro quouis problemate proposito ad aequationem peruenire poterimus.

## PROPOSITIO 130.
### Problema.

Tabula XIII Fig. 6.

1093. *In medio quocunque resistente sollicitetur corpus a tribus potentiis, quarum vna sit tangentialis, reliquae duae normales ad directionem corporis et in duobus planis inter se normalibus ad se inuicem normales, determinare motum corporis et curuam quam describet.*

### Solutio.

Ex elementi $Mm$ quod corpus describit, terminis M et $m$ in planum fixum APQ demittantur per-

perpendicula QP et $qp$. Deinde ponatur $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, altitudo celeritati in $M$ debita $= v$. Iam ſit vis tangentialis $= T$. Normalium altera cuius directio in plano $Mq$ eſt ſita, ſit $= N$, et altera cuius directio ad planum $Mq$ eſt normalis ſit $= M$. Vis reſiſtentiae vero ſit $= V$. Quia autem vis reſiſtentiae V vires normales non afficit, ſed tantum effectum vis tangentialis minuit; effectus virium N et M immutatus manet, ſed in effectu vis tangentialis definiendo loco T poni debet $T - V$. Quare cum harum virium effectus iam ſupra (809) determinauerimus, eaedem aequationes ibi datae et hic valebunt ſi modo $T - V$ loco T ponatur. Hanc ob rem pro medio reſiſtente prodibunt hae aequationes $dv = (T - V)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; $2vdy\,dzddy - 2vddz(dx^2 + dy^2) = N(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; atque $-2vdxddy = M(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (809). Ex quibus eliminata $v$ duae habebuntur aequationes tres coordinatas $x$, $y$ et $z$ inuoluentes, quae naturam curuae quaeſitae exprimunt. In illis autem aequationibus elementum $dx$ conſtans eſt aſſumtum. Q. E. I.

## Corollarium I.

1094. Duae poſteriores aequationes coniunctae eliminanda $v$ dant aequationem hanc; $\frac{ddz(dx^2 + dy^2)}{dxddy} - \frac{dydz}{dx} = \frac{N\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{M}$. Quae pro medio quocunque aeque ac pro vacuo valet (810).

Co-

## Corollarium 2.

1095. Perſpicitur ex hac aequatione, ſi vel N vel M euaneſcit, qualis ſit motus corporis. Nam poſito $N=o$ erit $\frac{ddz}{dz}=\frac{dyddy}{dx^2+dy^2}$ ſeu $\alpha dz=\surd(dx^2+dy^2)$. Eſt vero $\frac{dz}{\surd(dx^2+dy^2)}$ tangens anguli, quo elementum $Mm$ inclinat ad $Qq$. Quare hic angulus eſt conſtans, propterea QM habet ad proiectionem BQ curuae deſcriptae in plano APQ datam rationem.

## Corollarium 3.

1096. Si $M=o$ erit $ddy=o$, ideoque proiectio BQ erit linea recta. Tota igitur curua a corpore deſcripta poſita erit in plano ad planum APQ normali, idque ſecante recta BQ.

## Corollarium 4.

1097. Ex aequatione § 1094 erit $ddz(dx^2+dy^2)=dydzddy+\frac{Ndxdy^2\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}{M}$. Quare cum ſit $-2vdxddy=M(dx^2+dy^2+dz^2)\surd(dx^2+dy^2)$ erit $-2vdxddz(dx^2+dy^2)=Mdydz(dx^2+dy^2+dz^2)\surd(dx^2+dy^2)+Ndx(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\surd(dx^2+dy^2)$.

## Corollarium 5.

1098. Quare ſi fuerit $\frac{Mdydz}{dx}+N\surd(dx^2+dy^2+dz^2)=o$, corpus etiam mouebitur in plano, cum tunc ſit $ddy=o$ et $dz=\alpha dx$. Proiectio enim cur-

curuae descriptae in plano ad planum APQ in AP normali erit linea recta.

## Corollarium 6.

1099. Planum autem in quo posita sunt duo elementa $Mm$ et $m\mu$, quae corpus describit, simili modo quo in vacuo determinatur, cum eius determinatio tantum a coordinatis $x$, $y$ et $z$ pendeat. Nempe si hoc planum sit SMR et secet planum APQ recta OR, erit $AO = x - \frac{zdxddy + ydxddz}{dzddy - dyddz}$; tangens ang. $POR = \frac{dzddy - dyddz}{dxddz}$. Atque tangens anguli quem planum RMS cum plano APQ constituit seu $\frac{MQ}{QV} = \frac{\surd(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}{dxddy}$ (812). Tab. XIV. Fig. 1.

## Corollarium 7.

1100. Erit igitur tangens anguli, quem planum RMS cum plano APQ constituit, aequalis secanti anguli POR ductae in $\frac{ddz}{ddy}$.

## Corollarium 8.

1101. In casu igitur, quo vis N euanescit cum sit $ddz : ddy = dydz : dx^2 + dy^2$, erit tangens anguli $POR = \frac{dx}{dy}$, seu POR=RQS. Tum igitur QV in QS incidet. Tangens vero anguli quem RMS cum RQS constituit est $= \frac{dz}{\surd(dx^2 + dy^2)}$. Quare hic angulus est constans ob $\alpha dz = \surd(dx^2 + dy^2)$ (1095). Reperitur vero $AO = \frac{xdx + ydy - \alpha^2 zdz}{dx}$.

## Corollarium 9.

1102. Cum in coroll. 1 ratio detur inter $ddy$ et $ddz$, per vires normales M et N, si eorum proportionalia ipsorum loco substituantur, determinabitur positio plani RMS per differentialia primi gradus. Sed haec omnia non magis ad medium resistens respiciunt, quam ad vacuum. Quare etiam haec prorsus conueniunt cum iis, quae supra Prop. 98 sunt tradita.

# PROPOSITIO 131.

## Problema.

1103. *Si corpus* M *in medio quocunque resistente trahatur a tribus viribus, quarum vnius directio sit* M$f$ *parallela axi* AR *alterius directio* M$q$ *parallela ipsi* PQ *applicatae in plano* APQ *positae, et tertiae directio sit ipsa* MQ *ex* M *in planum* APQ *normaliter demissa: inuenire motum corporis et lineam quam describet.*

Tab. XIV. Fig. 2.

## Solutio.

Positis vt ante AP $= x$, PQ $= y$ et QM $= z$, atque celeritate in M debita altitudini $v$, sit vis secundum M$f$ trahens $=$ P, vis secundum M$g$ trahens $=$ Q et vis secundum MQ trahens $=$R atque vis resistentiae in M$=$V. Hae tres vires si resoluantur in tres alias, quarum directiones cum iis in Prop. praec. conueniunt, prodit vis tangentialis $T = -\frac{Pdx - Qdy - Rdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$; $N = -\frac{Pdxdz - Qdydz + R(dx^2+dy^2)}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ atque $M = -\frac{Pdy + Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ (823). Iisdem enim hic denominationibus vtimur, quibus ibi Prop. 99. His igitur valoribus in formulis praec. Prop. iuuentis substitutis habebuntur sequentes tres aequationes $dv = -Pdx - Qdy - Rdz - V\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$; $\frac{2vdydzddy - 2vddz(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2+dz^2} = -Pdxdz - Qdydz + R(dx^2+dy^2)$; atque $\frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdy - Qdx$. Quae tres aequationes eliminata $v$ dabunt duas aequationes coordinatas $x$, $y$ et $z$ continentes., quae naturam curuae descriptae exprimunt. In his autem formulis elementum $dx$ constans est assumtum. Q. E. I.

## Corollarium 1.

1104. Duae posteriores aequationes cum iis quas pro vacuo inuenimus (823) perfecte conueniunt. Quare quae ex iis sequuntur tam in vacuo quam medio quocunque resistente locum habent. Discrimen autem totum, quod inter motum in vacuo et medio resistente interest, a prima pendet aequatione.

## Corollarium 2.

1105. Ex duabus posterioribus aequationibus autem coniunctis oritur haec analogia $ddy : ddz = Pdy - Qdx : Pdz - Rdx$. Quamobrem loco secundae aequationis, quae reliquis magis est composita subſtitui poteſt haec: $\frac{2v\,dx\,ddz}{dx^2+dy^2+dz^2} = P\,dz - R\,dx$, vel $P\,dy\,ddz - Q\,dx\,ddz = P\,dz\,ddy - R\,dx\,ddy$, quae $v$ non inuoluit.

## Corollarium 3.

1105. Ope analogiae $ddy : ddz = P\,dy - Q\,dx : P\,dz - R\,dx$ inuenitur determinatio plani RMS in differentialibus primi gradus vt ſequitur; $AO = x - \frac{Py\,dz + Pz\,dy - Qz\,dx + Ry\,dx}{Q\,dz - R\,dy}$; tangens anguli POR $= \frac{Q\,dz + R\,dy}{P\,dz - R\,dx}$ atque tangens anguli inclinationis plani RMS ad planum fixum RQS $= \frac{\sqrt{((P\,dz - R\,dx)^2 + (Q\,dz - R\,dy)^2)}}{P\,dy - Q\,dx}$ (825).

## Corollarium 4.

1106. Si virium P, Q, R duae euaneſcant motum corporis in plano fieri neceſſe eſt. Nam ſi P et Q euaneſcunt ſit $ddy = o$, ſi P et R euaneſcunt fit $az\,ddy = dy\,ddz$ ſeu $dz = \alpha\,dy$. Quae omnia indicant motum fieri in plano.

## Corollarium 5.

1107. Si P, Q et R ſint proportionales ipſis $x$, $y$ et $z$, corpus perpetuo ad punctum A trahetur, ideoque motus eius fiet in plano. Hoc idem indicant formulae, fiet enim $AO = o$. At ob $ddy : ddz = x\,dy - y\,dx : x\,dz - z\,dx$, eſt $\frac{x\,ddy}{x\,dy - y\,dx} = \frac{x\,ddz}{x\,dz - z\,dx}$ et integrando $x\,dy - y\,dx = \alpha x\,dz - \alpha z\,dx$. Quare eſt $\alpha\,ddz = ddy$, vnde conſtat propoſitum.

Co-

## Corollarium 6.

1108. Si vis P euanescit erit $ddy:ddz = Q:R$, atque $R = -\frac{2vddz}{dx^2+dy^2+dz^2}$ et $Q = -\frac{2vddy}{dx^2+dy^2+dz^2}$. His valoribus loco P, Q et R in aequatione, qua $dv$ definitur, substitutis oritur $dv = \frac{2vdyddy+2vdzddz}{dx^2+dy^2+dz^2} - V\sqrt{}(dx^2+dy^2+dz^2)$. Vbi si resistentia V fuerit $= \frac{v}{c}$ ponaturque $\sqrt{}(dx^2+dy^2+dz^2)$ seu $Mm = ds$, erit

$$lv = l\frac{ads^2}{dx^2} - \frac{s}{e}; \text{ seu } v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dx^2}.$$

## Corollarium 7.

1109. Si vis R euanescit erit $ddy:ddz = Pdy - Qdx : Pdz$, atque $P = \frac{2vdxddz}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}$ et $Q = \frac{2v(dyddz-dzddy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}$. Erit igitur $dv = \frac{2vdx^2ddz-2vdy^2ddz+2vdydzddy}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz} - V\sqrt{}(dx^2+dy^2+dz^2)$. Vbi si $V = \frac{v}{c}$ erit $lv = l\frac{ads^2}{dz^2} - \frac{s}{c}$ seu $v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dz^2}$. Simili modo si Q euanescit prodit

$$v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dy^2}.$$

## Scholion.

1110. Ad has tres vires P, Q et R omnes potentiae, quaecunque excogitari queant, reduci possunt. Quamobrem quodcunque problema propositum fuerit, duae aequationes erui possunt naturam curuae descriptae continentes. Harum vero altera erit differentialis secundi gradus altera differentialis tertii gradus, si quidem valor ipsius $v$ inuentus ex aequatione $\frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2}=Pdy-Qdx$ differentietur; et differentiale loco $dv$ in aequatione $dv=-Pdx-Qdy-Rdz-V\surd(dx^2+dy^2+dz^2)$ substituatur.

# PROPOSITIO 132.

## Problema.

Tabula XIV Fig. 2.

1111. *In medio uniformi, quod resistit in simplici ratione celeritatum, trahatur corpus perpetuo normaliter ad rectam* AP; *definire curuam quam corpus utcunque proiectum describet.*

## Solutio.

Ponantur vt hactenus $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, celeritas in $M=\surd v$, exponens resistentiae $=c$, vis qua corpus in M iuxta MP trahitur $=S$. His positis erit resistentia $V=\frac{\surd v}{\surd c}$, $P=o$, $Q=\frac{Sy}{\surd(y^2+z^2)}$ et $R=\frac{Sz}{\surd(y^2+z^2)}$, vnde fit $Q:R=y:z$. Quamobrem habebitur $ddy:ddz=y:z$, atque $yddz-zddy=o$. Cuius aequationis integralis est $ydz-zdy=adx$. Porro quoque ob $P=o$ haec habebitur aequatio $dv=\frac{2vdds}{ds}-Vds=\frac{2vdds}{ds}-\frac{ds\surd v}{\surd c}$ (1108), posito $ds=\surd(dx^2+dy^2+dz^2)$. Cuius integralis est $2\surd cv=\frac{ds}{dx}(b-x)$, seu $v=\frac{ds^2(b-x)^2}{4cdx^2}$. Hoc valore substituto prodibit $\frac{-ddy(b-x)^2}{2cdx}=-\frac{Sydx}{\surd(y^2+z^2)}$. Ponatur $z=py$; habebuntur se-

ſequentes duae aequationes, ex quibus natura curuae deſcriptae debet determinari, $y^2dp = adx$ et $ddy(b-x)^2 = -\frac{2cSdx^2}{\sqrt{(1+pp)}}$. Q. E. I.

## Corollarium 1.

1112. Cum ſit $2\sqrt{cv} = \frac{ds}{dx}(b-x)$ erit elementum temporis $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{c}}{b-x}$. Integrum ergo tempus, quo corpus motu horizontali ſecundum AP eſt promotum erit $= 2\sqrt{c}\, l\frac{b}{b-x}$. Motus igitur horizontalis conuenit cum motu corporis in eodem medio reſiſtente per rectam AP a nulla potentia ſollicitati, celeritate initiali in A debita altitudini $bb:4c$.

## Corollarium 2.

1113. Neque vero haec temporis proprietas tantum locum habet, ſi corpus ſecundum MP trahitur; ſeu ſi fuerit $Q:R = y:z$, ſed ſemper valet ſi modo eſt $P=o$. Sequitur enim ex § 1108, quo non niſi $P=o$ ponebatur.

## Corollarium 3.

1114. Motus igitur progreſſiuus corporis ſecundum AP eſt retardatus, et non vltra datum terminum qui eſt $x=b$, fieri poteſt. Tempus autem eſt infinite magnum, quo corpus ad hunc terminum pertingere poteſt.

## Exemplum.

1115. Ponamus vim, qua corpus ad rectam AP attrahitur esse ipsis distantiis MP proportionalem seu $S = \frac{\sqrt{(y^2+z^2)}}{f} = \frac{y\sqrt{(1+pp)}}{f}$. Ad curuam igitur determinandam habebuntur hae aequationes $fddy(b-x)^2 = -2cydx^2$, et $y^2dp = adx$, in illa ponatur $y = e^{\int udx}$, fietque $du + u^2dx = -\frac{2cdx}{f(b-x)^2}$. Quae aequatio separabilis fit ponendo $u = \frac{q}{b-x}$; prodit enim $\frac{fdq}{2c+fq+fq^2} = -\frac{dx}{b-x}$. Dabitur igitur $q$ et propterea etiam $u$ in $x$. Consequenter etiam $y$ per $x$ cognoscetur, ex quo habebitur proiectio curuae descriptae in plano APQ. Deinde ex dato $y$ per $x$, dabitur quoque $p$ ob $dp = \frac{adx}{y^2}$ per $x$, et propterea simul $z$ per $x$. Quocirca tota curua a corpore descripta poterit construi.

## Corollarium 4.

1116. Si $b$ euanescit, simul quoque motus progressiuus corporis secundum AP euanescit, et hanc ob rem corpus in plano in A ad AP normali mouebitur attractum ad A in ratione distantiarum. Curuam autem quam hoc casu corpus describit quoque construere licuit §. 1027 et seqq.

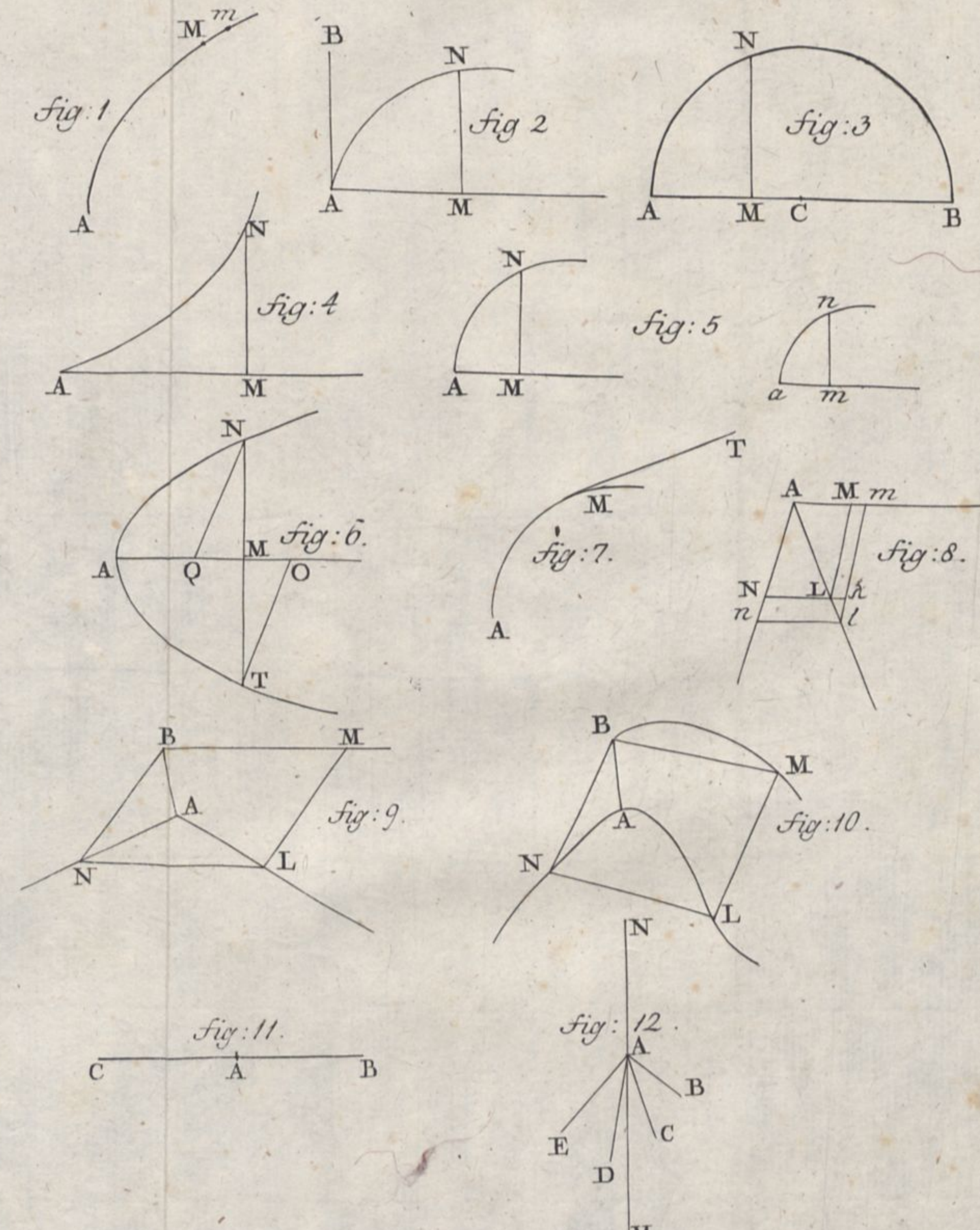


fig:1
fig 2
fig:3
fig:4
fig:5
fig:6.
fig:7.
fig:8.
fig:9.
fig:10.
fig:11.
fig:12.

Tom:I.Tab:I.

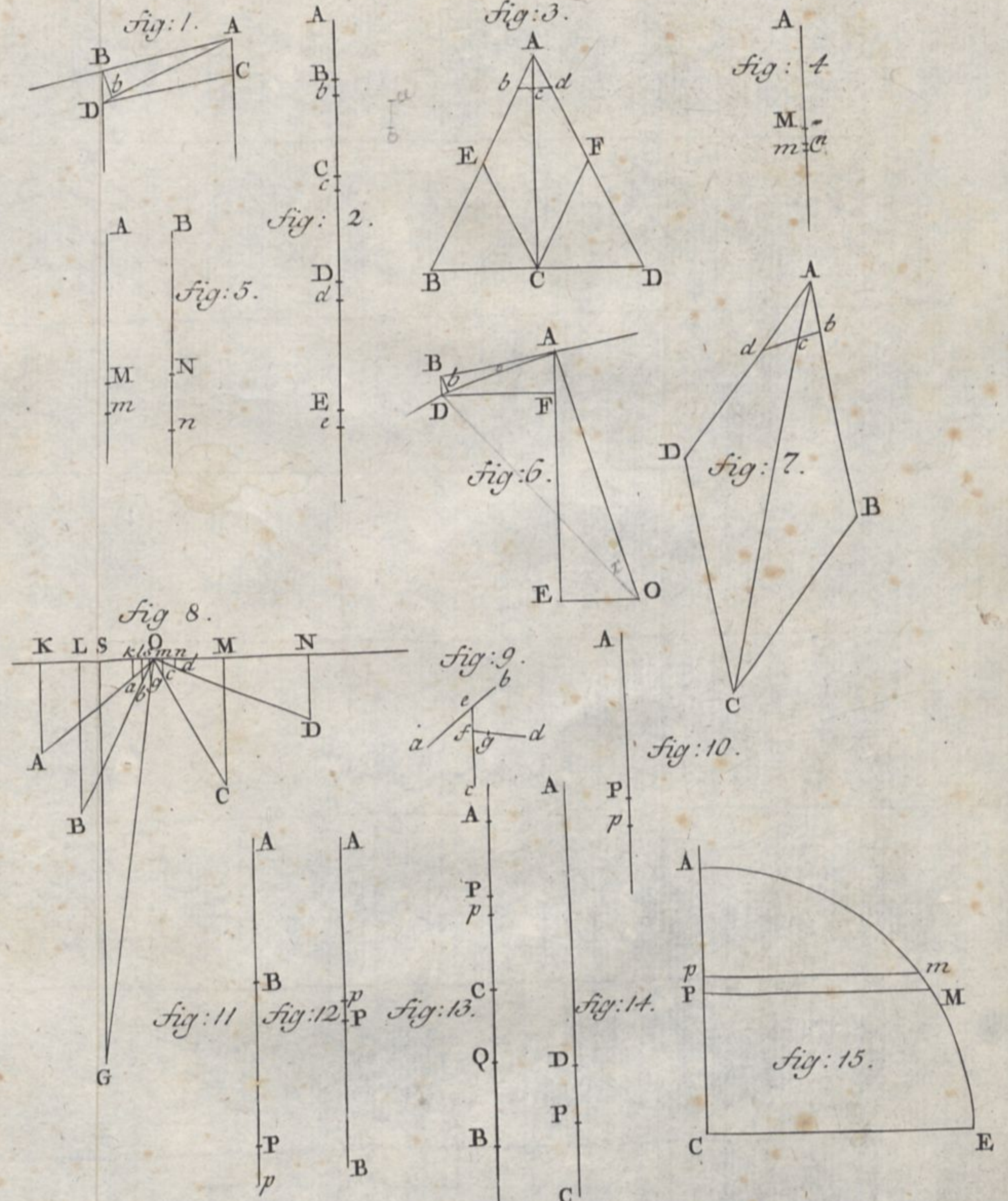


Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7.
Fig 8.
Fig: 9.
Fig: 10.
Fig: 11
Fig: 12
Fig: 13.
Fig: 14.
Fig: 15.

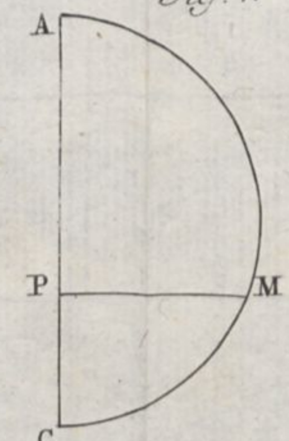



*Fig: 1.*

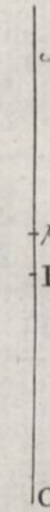



*Fig: 2.*

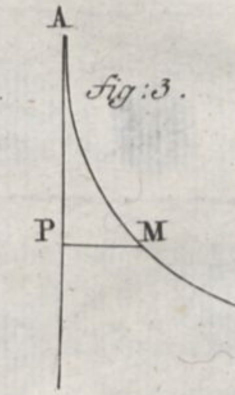



*Fig: 3.*

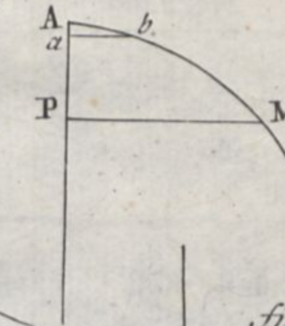



*Fig: 4.*

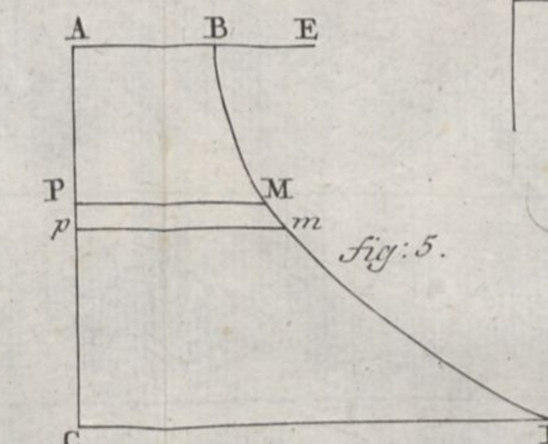



*Fig: 5.*

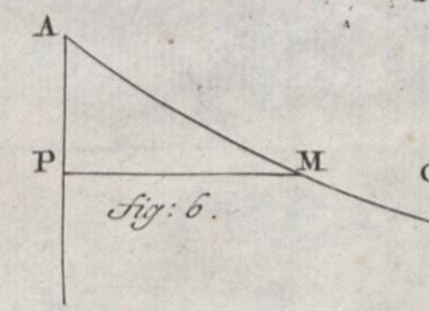



*Fig: 6.*

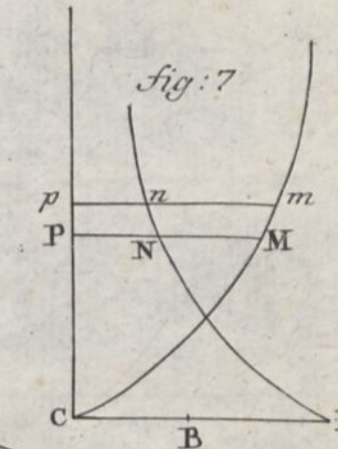



*Fig: 7*

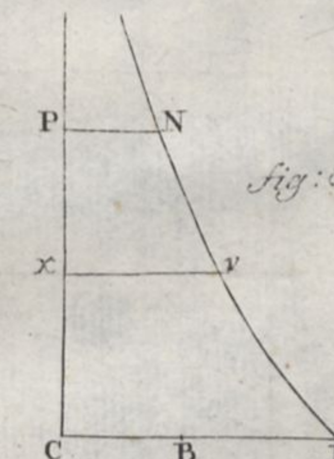



*Fig: 8.*

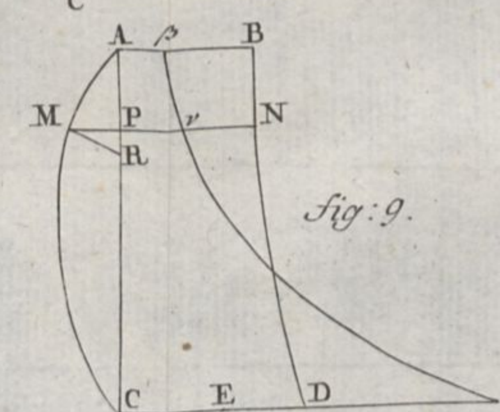



*Fig: 9.*

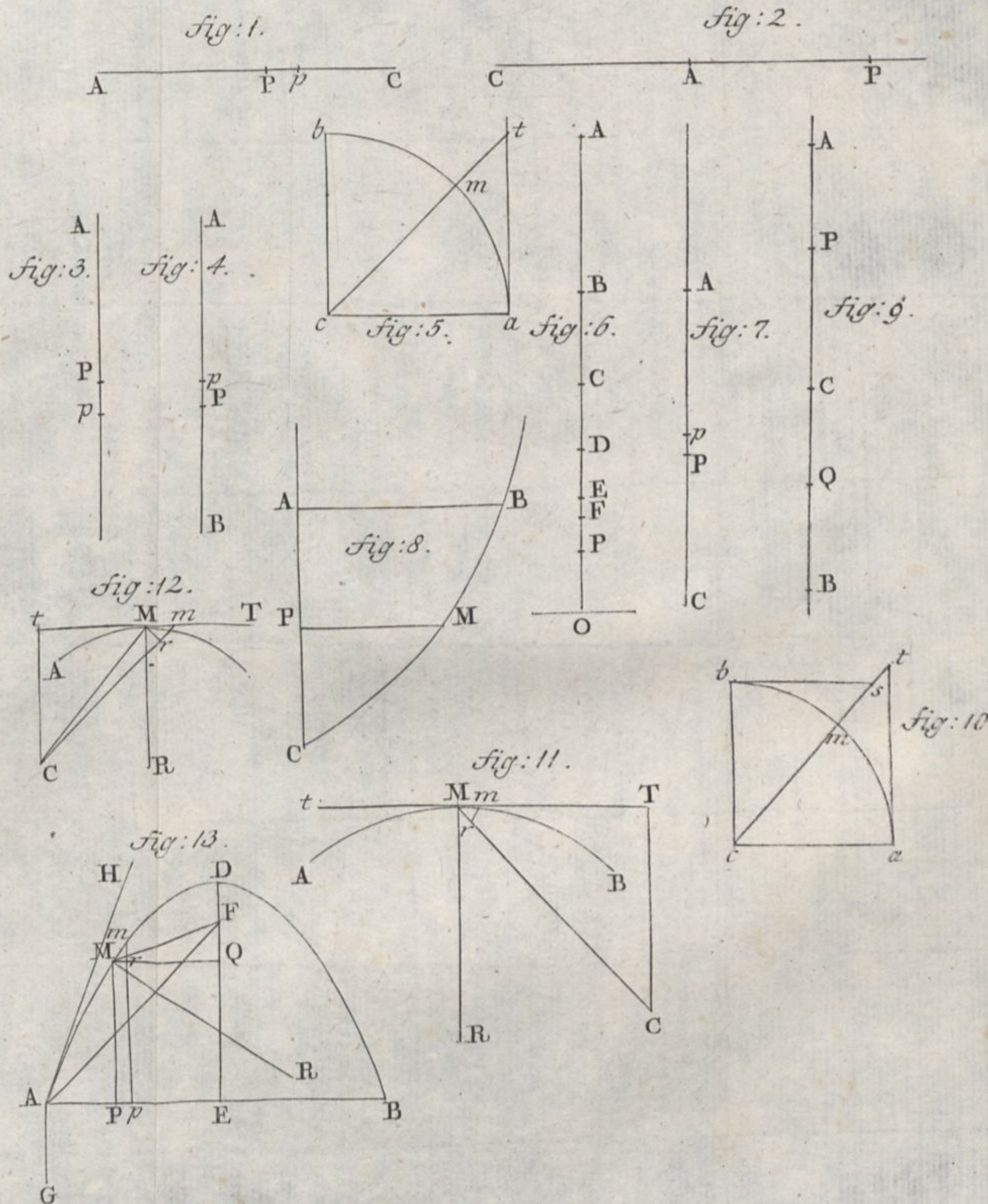


fig: 1.
A P p C
fig: 2.
C A P
fig: 3.
A P p
fig: 4.
A p P B
fig: 5.
b t m c a
fig: 6.
A B C D E F P O
fig: 7.
A p P C
fig: 9.
A P C Q B
fig: 8.
A B P M C
fig: 12.
t M m T A r C R
fig: 10.
b t s m c a
fig: 11.
t M m T A r B R C
fig: 13.
H D m F M r Q R A P p E B G

Tom: I. Tab: IV.

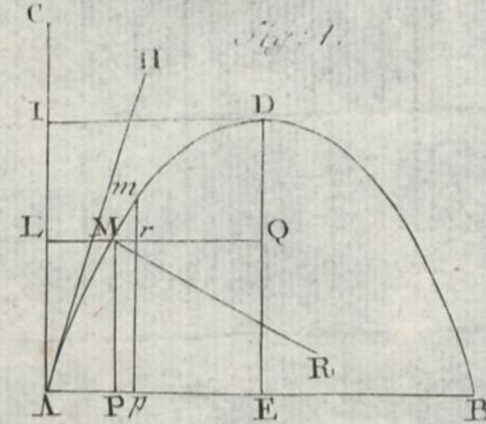


Fig: 1.

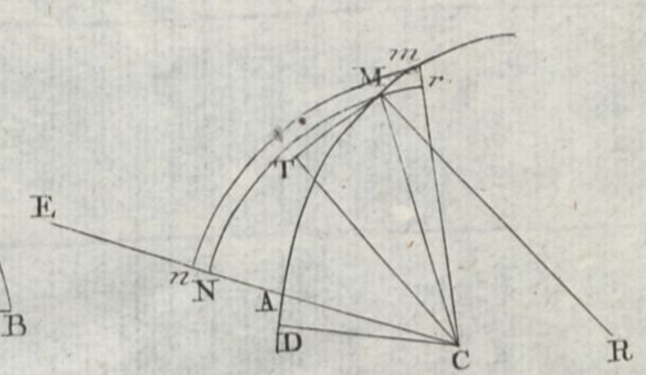


Fig: 2

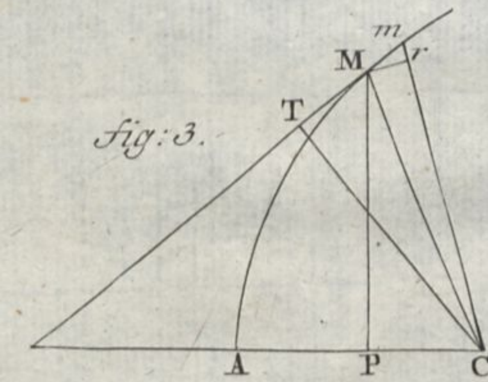


Fig: 3.

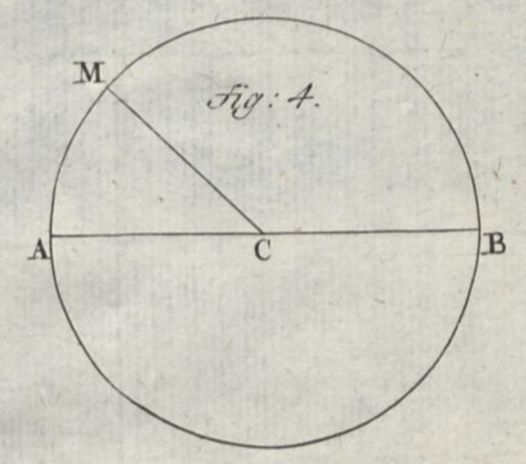


Fig: 4.

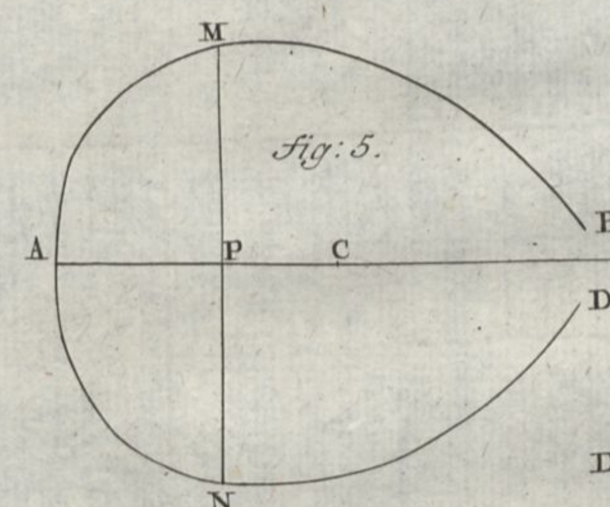


Fig: 5.

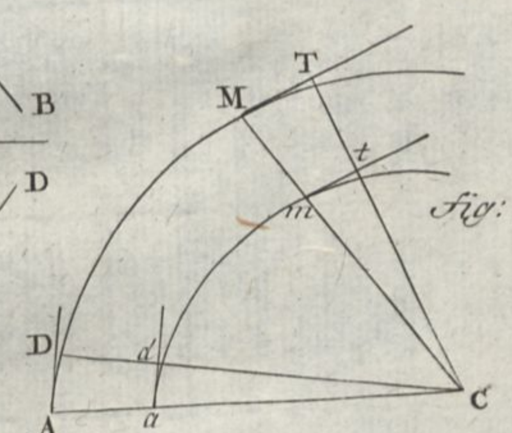


Fig: 6.

fig: 1.

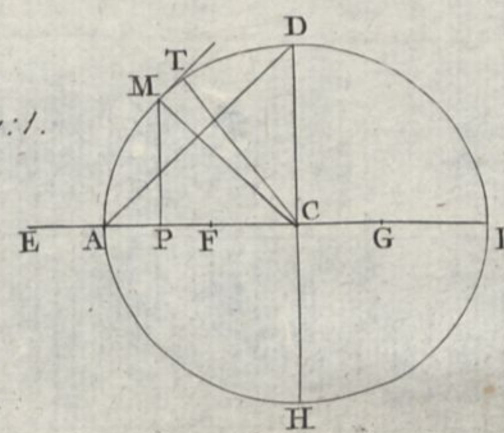



fig: 2.

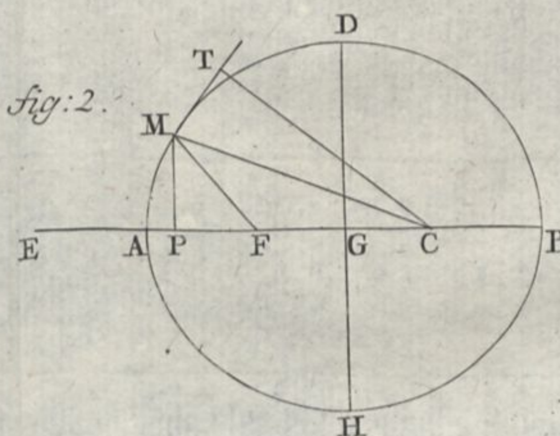



fig: 3.

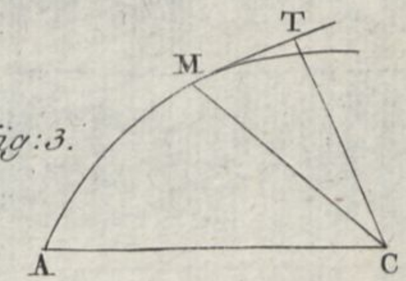



fig: 4.

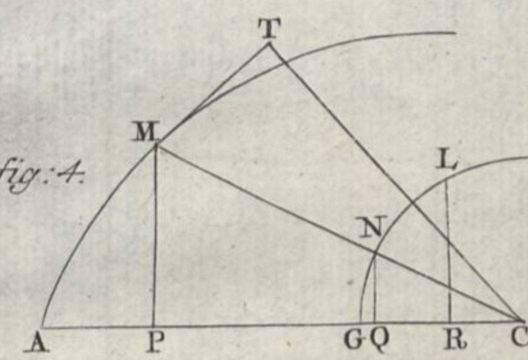



fig: 5.

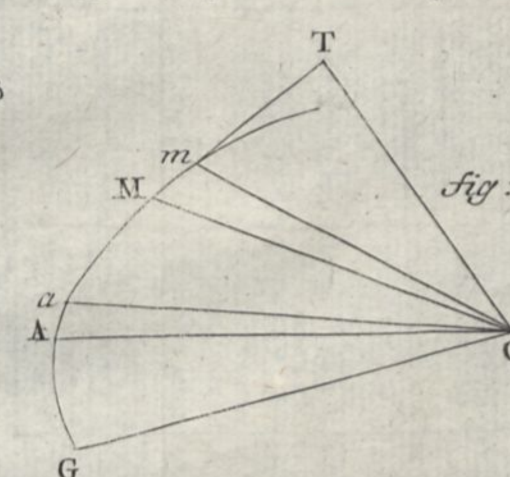
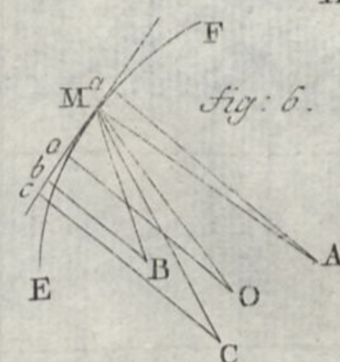



fig: 6.



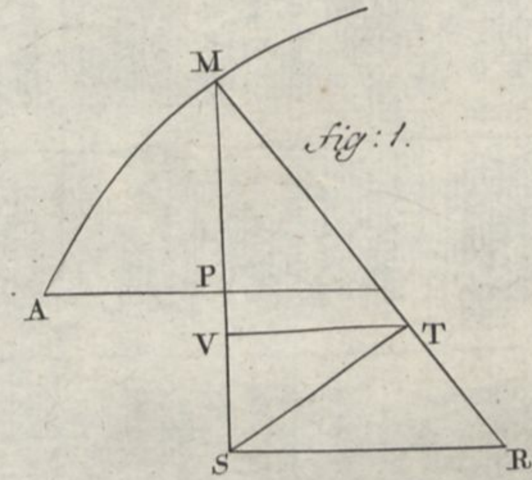



fig: 1.

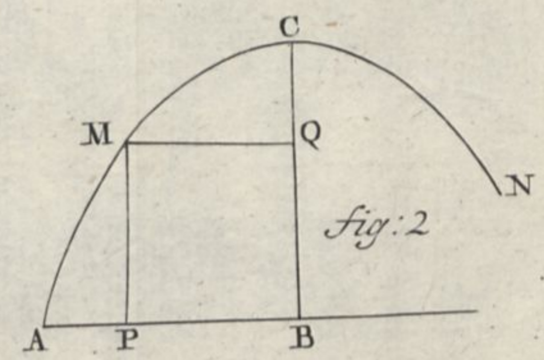



fig: 2

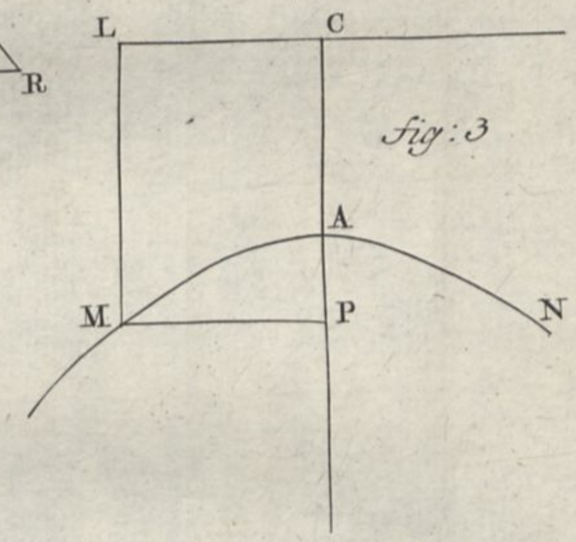



fig: 3

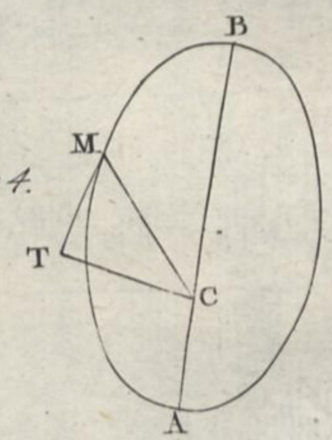



fig: 4.

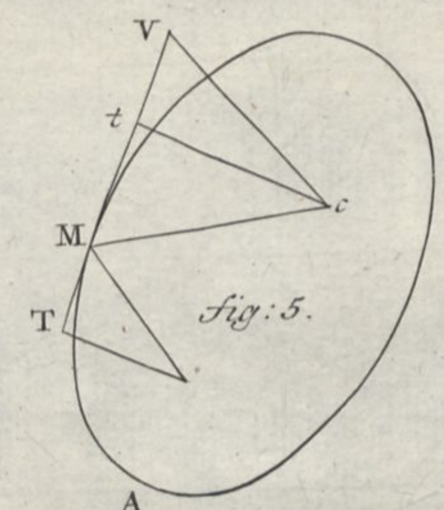



fig: 5.

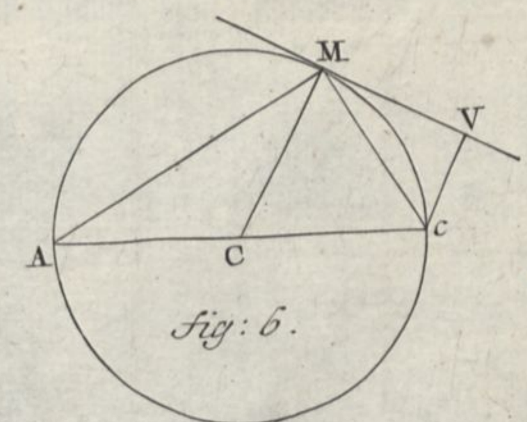



fig: 6.

fig: 1.

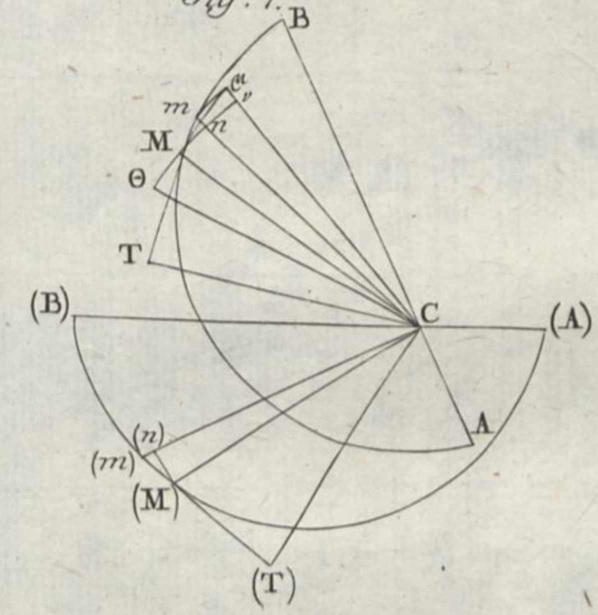



fig: 2.

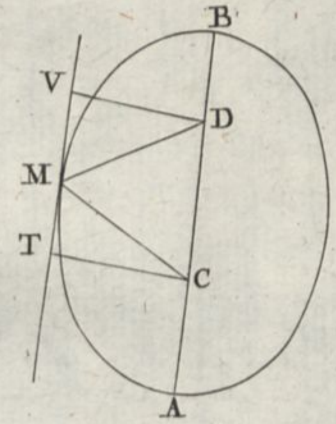



fig: 3.

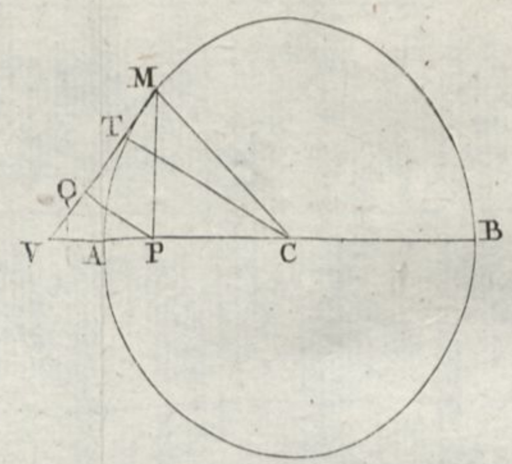
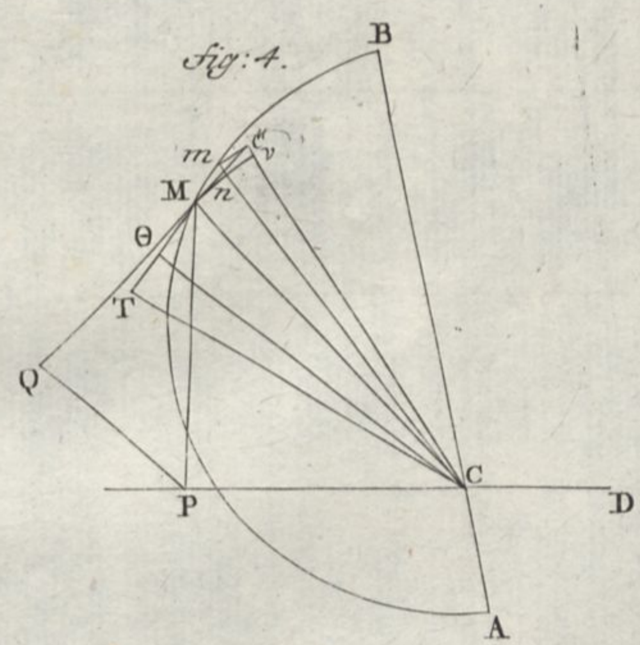



fig: 4.



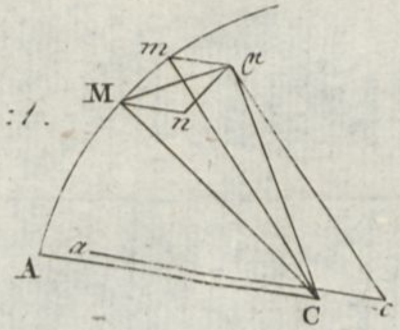



*fig: 1.*

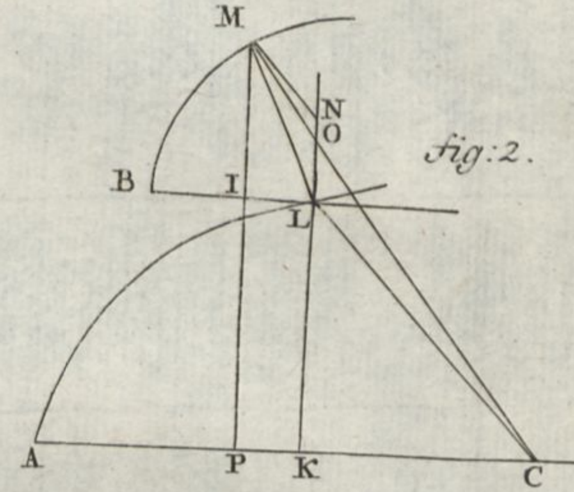



*fig: 2.*

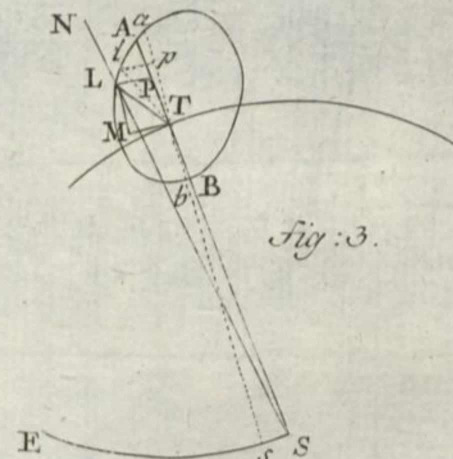



*fig: 3.*

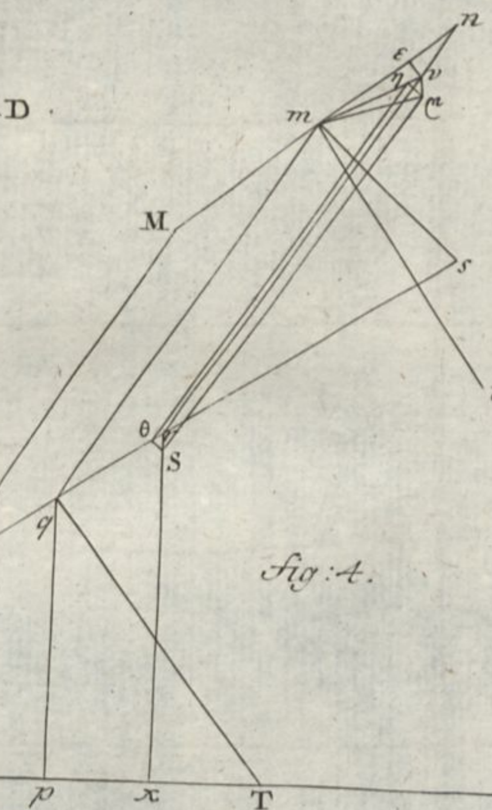



*fig: 4.*

*Tom: I. Tab: IX.*

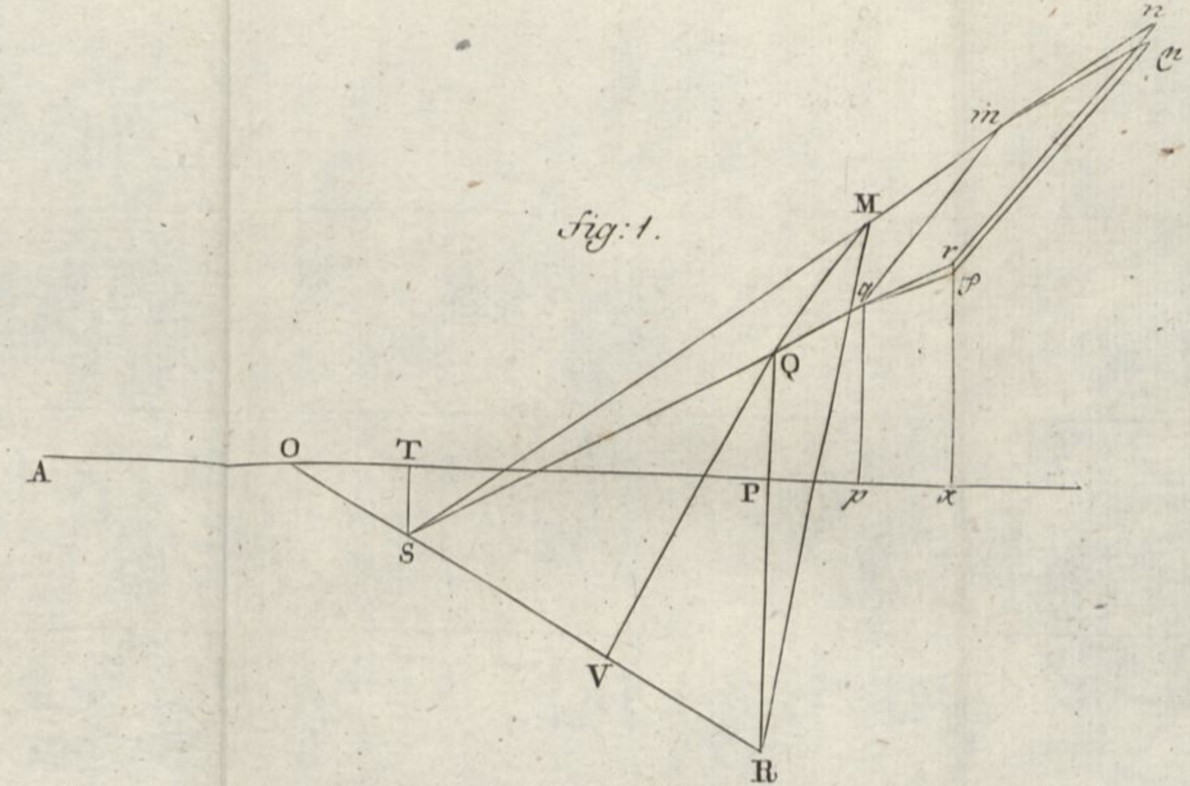



fig: 1.

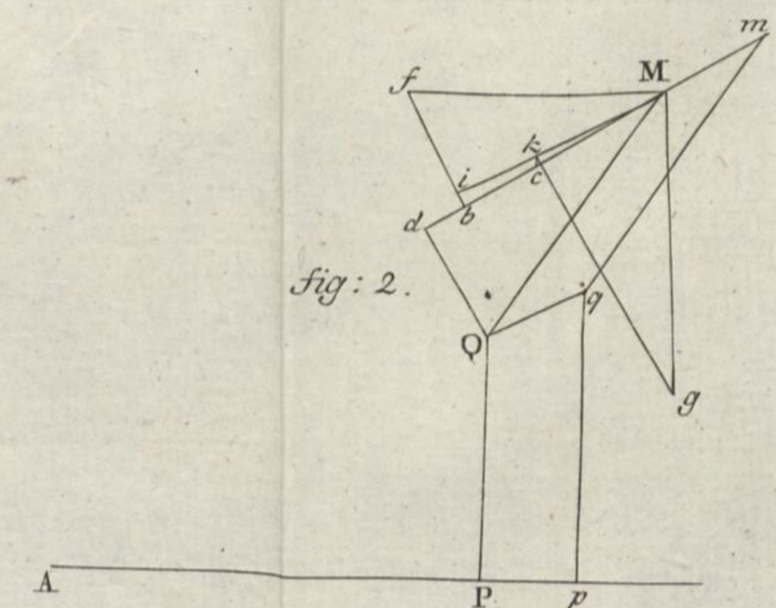



fig: 2.

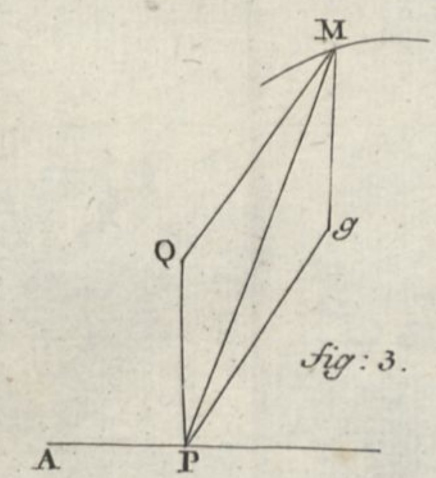



fig: 3.

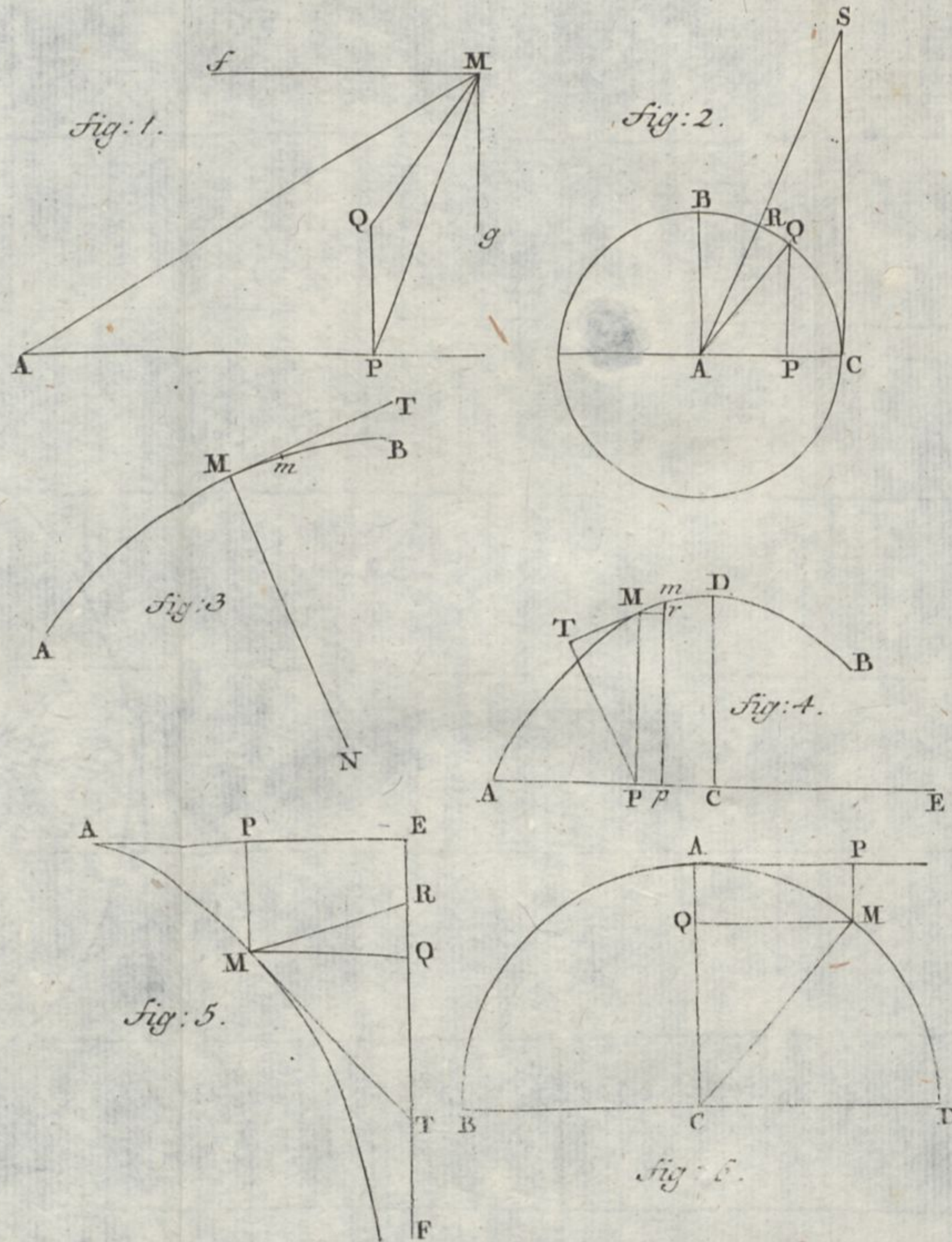


fig: 1.
f
M
Q
g
A
P
fig: 2.
S
B
R
Q
A
P
C
T
M
m
B
fig: 3
A
N
M
m
D
T
r
B
fig: 4.
A
P
p
C
E
A
P
E
R
M
Q
fig: 5.
T
F
A
P
Q
M
B
C
D
fig: 6.

Tom: I. Tab: XI.

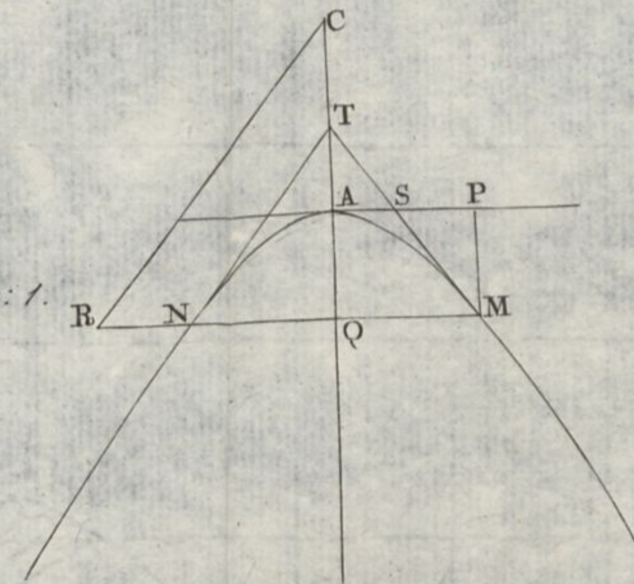



*Fig: 1.*

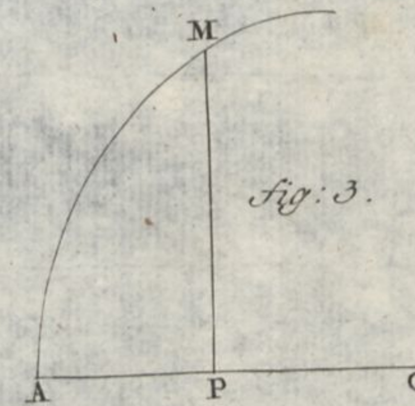
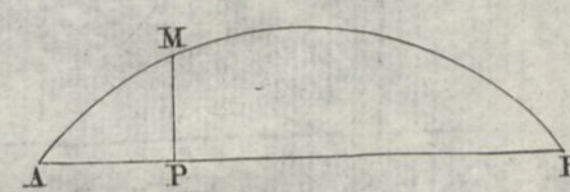



*Fig: 3.*

*Fig: 4.*



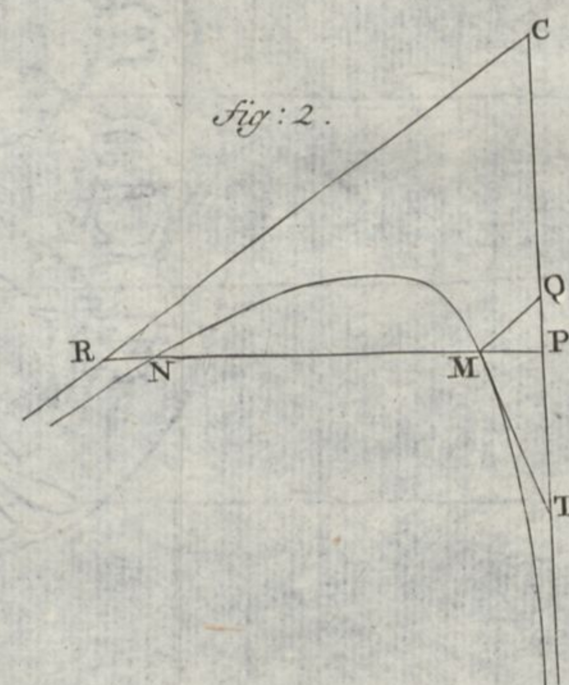




*Fig: 2.*

*Fig: 5.*

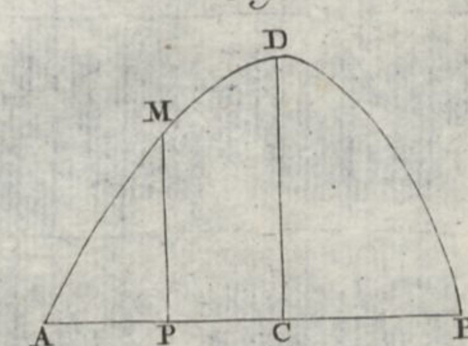


*Fig: 1.*

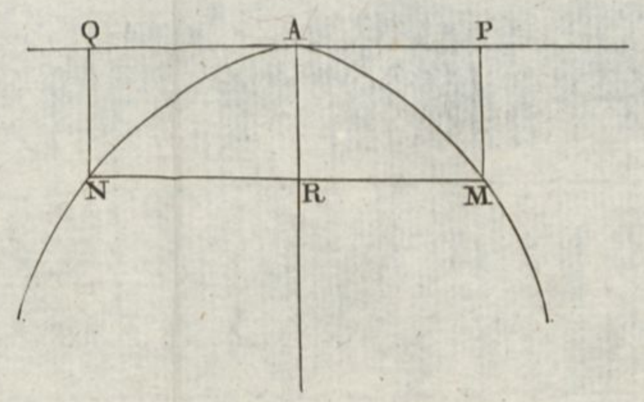



*Fig: 2.*

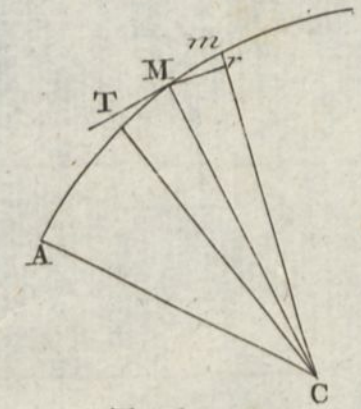



*Fig: 3.*

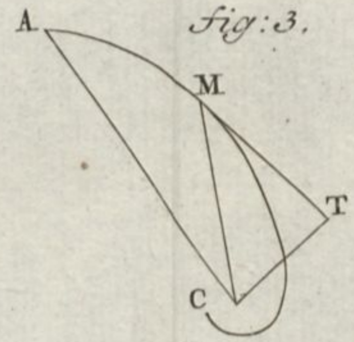



*Fig: 4.*

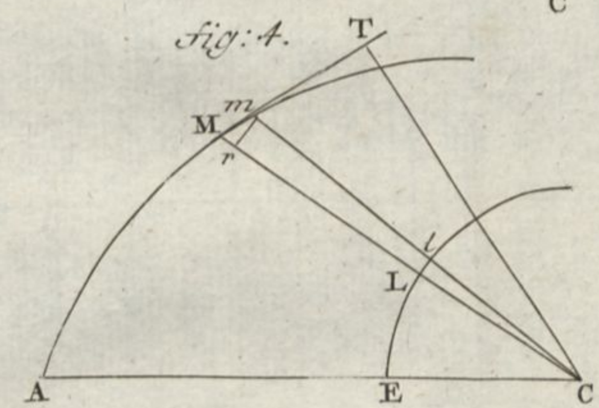



*Fig: 5.*

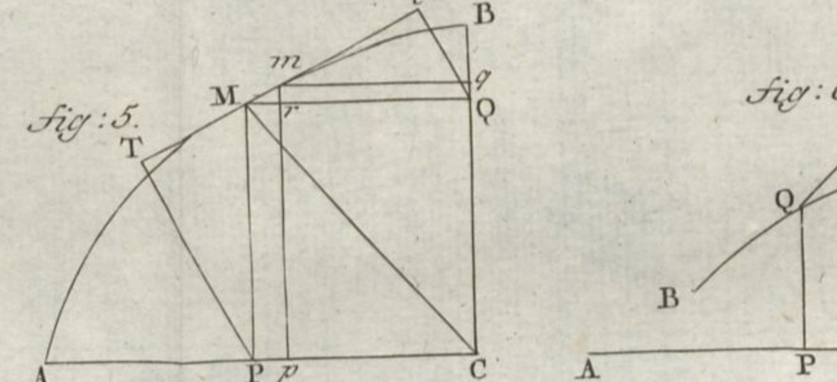



*Fig: 6.*

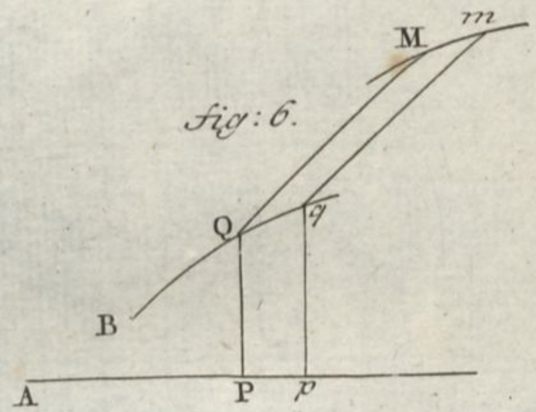


Fig: 1.

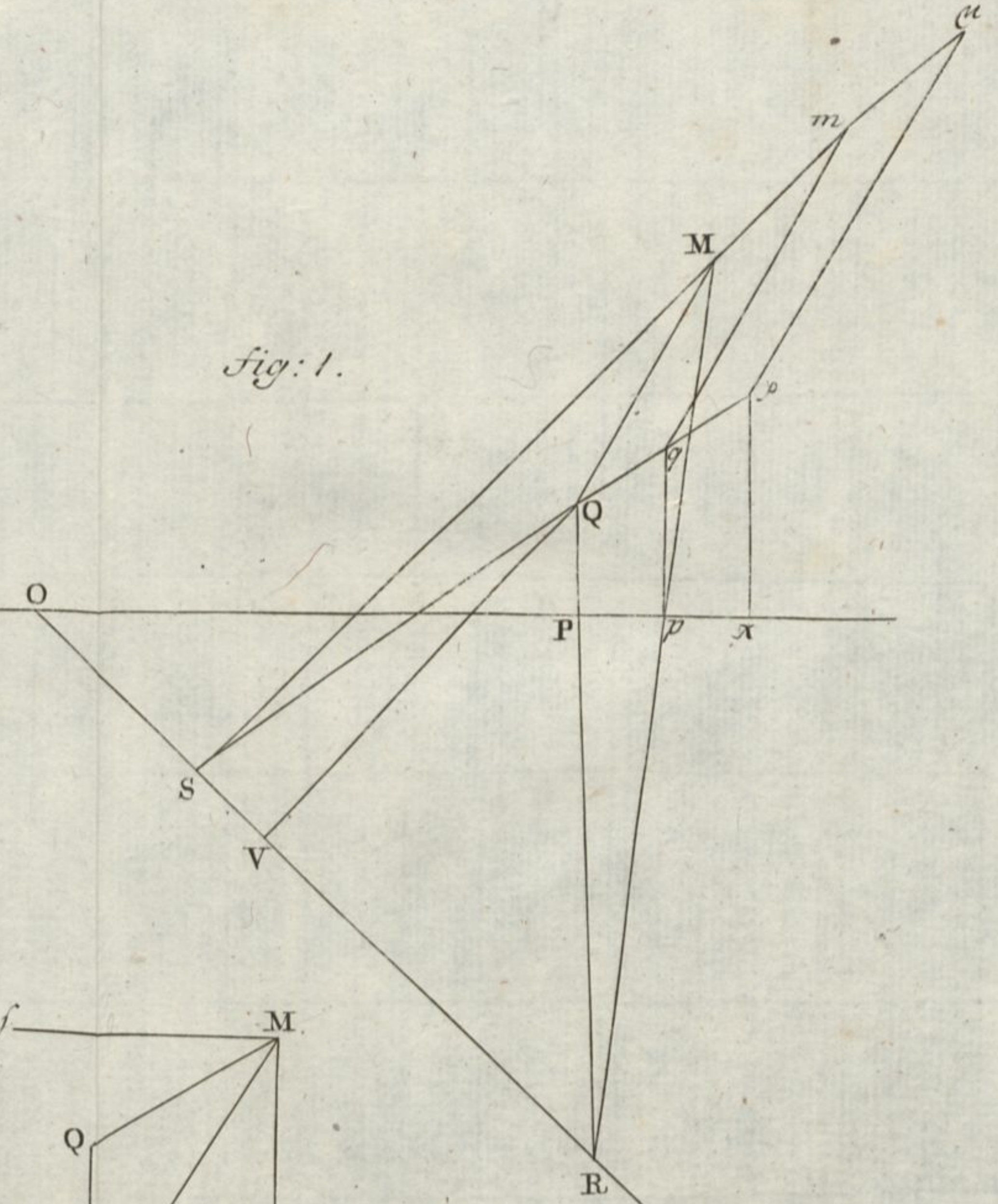
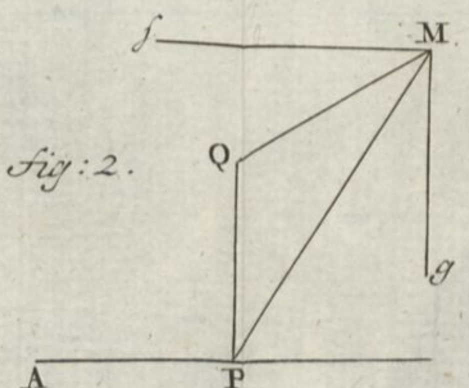



Fig: 2.




Tom: I. Tab. XIV.