

Na prawach rękopisu

INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport serii PRE nr13 /82

WPŁYW WIELKOŚCI RZĘDU DRUGIEGO
W ANALIZIE NUMERYCZNEJ UKŁADÓW
PRĘTOWYCH SKŁONNYCH DO PRZESKOKU

Wojciech Glabisz

Praca doktorska

Promotor: Doc. dr inż. Edward Gawrych-Żukowski

Słowa kluczowe:

przestrzenne układy prętowe,
stany krytyczne i pokrytycz-
ne, nieliniowość geometrycz-
na, efekty drugiego rzędu,
ścieżki równowagi,
analiza numeryczna.

Wrocław 1982

SPIS RZECZY

	Str.
1. WSTĘP	3
2. WPROWADZENIE	7
2.1. Geometryczna nieliniowość	7
2.2. Kryteria stateczności	9
2.3. Niektóre aspekty analizy numerycznej zagadnień geometrycznie nieliniowych	11
3. KRATOWNICE PRZESTRZENNE O PRĘTACH PEŁNOŚCIENNYCH	14
3.1. Sformułowanie problemu	14
3.2. Sztywność pręta	16
3.2.1. Energia sprężysta pręta	16
3.2.2. Sztywność kierunkowa	17
3.2.3. Sztywność styczna	20
3.2.4. Sztywność styczna pręta przy uwzględnieniu naprężeń początkowych	21
3.3. Obliczanie krzywoliniowych ścieżek równowagi	23
3.3.1. Macierz transformacji	23
3.3.2. Algorytmy rozwiązania	24
3.4. Krótki opis programów na EMC. Przykłady zastosowań	29
3.5. Podsumowanie	38
4. UKŁADY PRĘTOWE O PRĘTACH CIENKOŚCIENNYCH	39
4.1. Wprowadzenie i podstawowe założenia	39
4.2. Sztywność elementu	42
4.2.1. Funkcje przemieszczeń i ich aproksymacja	42
4.2.2. Energia sprężysta pręta cienkościennego przy uwzględnieniu naprężeń początkowych	44
4.2.3. Sztywność styczna elementu	49
4.3. Macierz transformacji dla elementu	61
4.4. Algorytm rozwiązania	65
4.5. Przykłady numerycznej realizacji programu na EMC	67
4.6. Podsumowanie	76
5. ZAKOŃCZENIE I WNIOSKI	
LITERATURA	80

1. WSTĘP

Osobliwością pewnego typu konstrukcji jest to, że w określonych warunkach obciążenia posiadają dwie lub więcej statecznych konfiguracji równowagi. Przejście od jednej do drugiej odbywa się zwykle w sposób nagły, zwany przeskokiem. Do tego typu konstrukcji zalicza się między innymi powłokowe, mało wyniosłe układy prętowe, które są często stosowane jako przekrycia, bądź elementy przekryć dużych powierzchni użytkowych [10,15,20,21,29,32,59]. Konstrukcje te były i są tematem wielu konferencji oraz publikacji. Między innymi obszerna lista zastosowań omawianego typu konstrukcji sporządzona została przez ASCE Subcommittee on Latticed Structures [32]. Jest ona przeglądem powierzchniowych struktur prętowych ujętym w pięciu /typowych dla tego typu opracowań/ działach: analiza, stateczność, wymiarowanie, architektura i historia oraz konstrukcja. Krytyczny przegląd, w aspekcie pięciu wymienionych działów, omawianych konstrukcji znaleźć można także w innych publikacjach [10,36,59].

Jedną z możliwych metod analizy omawianych przekryć prętowych - obok badań modelowych [7,8,35] oraz analizy opartej o analogie powłokowe [14,16,69] - jest liniowa i nieliniowa analiza oparta na modelach dyskretnych [44]. To ostatnie z wymienionych podejść stosowane jest najczęściej, gdyż technika obliczeniowa bazuje obecnie głównie na metodach algebry, nie zaś analizy matematycznej. Mówiąc inaczej rozwiązywanie układów równań algebraicznych jest "efektywniejsze" od rozwiązywania układów równań różniczkowo-całkowych, a to implikuje konieczność tak zwanego dyskretyzacyjnego sformułowania zagadnienia [27].

Ze względu na to, że omawiane konstrukcje mają tendencję do dużych przemieszczeń powszechnie stosowana jest ich analiza uwzględniająca efekty zmian geometrii zadania - czyli tak zwana analiza geometrycznie nieliniowa. Szczegółowe dane dotyczące historycznego rozwoju oraz zastosowań metody elementów skończonych do zagadnień geometrycznie nieliniowych zawarte są między innymi w pracach Argyrisa [2], Martina [39], Turnera i Dilla [62], Haislera i Stricklina [21], Marcala [38] oraz Odena [47].

Rozwiązywanie problemów geometrycznie nieliniowych z jednoczesnym pominięciem nieliniowości fizycznych, czyli z założeniem małych odkształceń, poprawne jest - w odniesieniu do omawianego typu konstrukcji - w przypadku struktur mało wyniosłych [1]. Tylko w takich konstrukcjach przyjąć można, że σ wyczerpaniu ich nośności może decydować przeskok, a nie osiągnięcie nośności granicznej przez element, bądź ich grupę.

W rozwiązaniach przyjmuje się zwykle jeden z dwóch modeli aproksymujących prace konstrukcji rzeczywistych [15,23]. W pierwszym z nich analizuje się struktury obciążane węzłowo o prętach zbiegających się w idealnych przegubach /węzłach/ [23,37,44], zaś w drugim traktuje się je jako konstrukcje ramowe o węzłach sztywnych [8,32,34,52].

Obserwacja zachowania się tych modeli pod obciążeniem daje nam obraz pracy konstrukcji w obszarach przedkrytycznych, krytycznych i pokrytycznych. Choć zwykle uważać się, że analiza tylko dwóch pierwszych obszarów pracy konstrukcji - z punktu widzenia ich zastosowania - jest istotna, to jednak z punktu widzenia pełnego określenia bezpiecznego obciążenia, optymalnego projektowania, jak również określenia skutków ewentualnej katastrofy również istotnym okazuje się obszar pokrytycznej pracy konstrukcji [22,25].

W pracy śledzi się wszystkie trzy stadia pracy konstrukcji idealnych /bez imperfekcji/ poddanych działaniu konserwatywnego, węzłowego obciążenia statycznego charakteryzowanego jednym parametrem.

Przyjęto /zwykle stosowane/ dwa modele odzwierciedlające - na miarę czynionych w nich założeń - pracę omawianego typu konstrukcji. Pierwszym z nich jest kratownica, której elementami są prostoliniowe, pełnościenne pryzmatyczne pręty łączące się w węzłach będących przegubami. Drugim modelem jest układ prętowy z węzłami sztywnymi o prostoliniowych pryzmatycznych cienkościennych elementach o przekrojach otwartych.

W analizie przed, jak i pokrytycznych stanów pracy konstrukcji w modelach stosowanych w rozwiązaniach przyjmuje się wiele upraszczających założeń. Ułatwiają one tak pod względem analitycznym, jak i numerycznym osiągnięcie celu, jakim jest określenie interesujących nas cech modelowanej rzeczywistości.

Z reguły w analizie omawianego typu konstrukcji pomija się jeden z nieliniowych składników tensora odkształceń $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)$ powołując się na to, że kwadrat pochodnej funkcji opisującej przemieszczenie wzdłuż osi elementu względem zmiennej bieżącej osi jest pomijalnie mały w stosunku do pozostałych członów tensora [9,37,43]. W podobny sposób postępuje się z niektórymi członami funkcji opisującymi przemieszczenia w przekroju poprzecznym elementu - odrzucane zostają człony zależne od kąta, bądź jego kwadratu, który opisuje obrót płaszczyzny przekroju poprzecznego elementu [24]. Odrzucane wielkości opisane wyżej traktuje się jak małe rzędu drugiego.

Celem pracy jest wykazanie słuszności następującego stwierdzenia: wpływ wielkości rzędu drugiego na statyczne rozwiązania obciążanych węzłowo układów prętowych skłonnych do przeskoku może być istotny głównie w krytycznych i pokrytycznych obszarach ich pracy.

Osiąga się to poprzez sformułowanie algorytmów rozwiązania, opartych o wyprowadzane geometryczne macierze sztywności elementów, i ich numeryczne testowanie na wybranych - reprezentatywnych dla omawianej klasy konstrukcji - prostych przykładach.

Algorytmy te oparte o przyrostowe sformułowanie metody elementów skończonych pozwalają na śledzenie ścieżki równowagi konstrukcji w przestrzeni przemieszczeniowo-obciążeniowej [70], w całym możliwym cyklu jej obciążenia.

Praca składa się z pięciu rozdziałów. W drugim z nich /pierwszym jest wstęp/ wyjaśnia się podstawowe pojęcia, które dotyczą nieliniowości geometrycznej, stateczności, jak również pewnych aspektów numerycznej realizacji omawianego problemu. Pozwala to na dokładne umiejscowienie rozwiązywanego zagadnienia w tak obszernym dziale jakim jest nieliniowa analiza konstrukcji.

Rozdział trzeci dotyczy pierwszego z dwóch przyjętych modeli konstrukcji, a więc modelu o pełnościennych prętach łączących się w idealnych przegubach. Przytacza się w nim sztywności dla elementu, które pozwalają na sformułowanie algorytmów numerycznych. Algorytmy te - przystosowane do rozwiązywania konstrukcji tak w układzie Lagrange'a jak i w uaktualnionym układzie Lagrange'a - poprzez możliwe ścieżki realizacji pozwalają na wykonanie postawionych zadań. W rozdziale tym szczególną uwagę poświęca się wyborowi algorytmu, który pozwalałby na możliwie prostą i efektywną realizację bardziej złożonych zadań z elementami cienkościennymi.

W rozdziale czwartym wyprowadza się sztywności dla prętowego elementu cienkościennego, który przyjęto jako podstawowy element konstrukcyjny w drugim ze stosowanych modeli. W tym przypadku algorytm numeryczny - obok badania wpływu na rozwiązanie wielkości rzędu drugiego - pozwala na szeroką studialną analizę znaczenia poszczególnych sił wewnętrznych w pręcie. Algorytm przystosowany jest do realizacji zadań odniesionych do uaktualnionego układu Lagrange'a.

Tak rozdział trzeci jak i czwarty kończą przykłady numerycznej realizacji zbudowanych algorytmów ze zwięzłymi ich podsumowaniami. Wnioski stąd wypływające - obok całościowego podsumowania pracy - zamieszczone zostały w piątym, ostatnim rozdziale pracy.

2. WPROWADZENIE

2.1. Geometryczna nieliniowość

Przyczynami nieliniowego zachowania się konstrukcji są:

- nieliniowości materiałowe, które wynikają z niesprężystego zachowania się konstrukcji po przekroczeniu granicy plastyczności,
- nieliniowości geometryczne powodowane obrotami elementów konstrukcji, oraz
- nieliniowości typu dużych odkształceń /sprężystych lub sprężysto-plastycznych/, które poza nieliniowym opisem kinematyki pociągają za sobą konieczność budowania specjalnych praw konstytutywnych.

W pracy rozważa się wyłącznie zagadnienia geometrycznie nieliniowe.

W ciałach masywnych, którym poprzez narzucanie pewnych więzi odebrano swobodę sztywnych ruchów, duże obroty mogą pojawić się jedynie łącznie z dużymi odkształceniami. W przypadku konstrukcji "cienkich" /belki, płyty, powłoki/ względnie duże obroty pojawić się mogą również w zakresie małych odkształceń. Możliwe duże zmiany geometrii pociągają za sobą konieczność uwzględnienia wpływu deformacji na warunki równowagi, co przy wykluczeniu możliwości wystąpienia dużych odkształceń i nieliniowego zachowania się materiału, prowadzi do zadań geometrycznie nieliniowych.

W niektórych przypadkach wpływ nieliniowości geometrycznej pozostaje nieznaczny aż do pewnej krytycznej wartości obciążenia, której przekroczenie powoduje gwałtowną zmianę konfiguracji. W takich przypadkach utrata stateczności oznacza nagłe przejście konstrukcji do alternatywnej postaci równowagi. Następuje przy tym wyraźna zmiana konfiguracji konstrukcji czyli tak zwane wyboczenie [43,70]. Zwykle przy obciążeniu większym niż krytyczne możliwe są dwa stany równowagi: niestateczna równowaga dla postaci początkowej albo równowaga dla postaci wyboczonej, która może być stateczna lub nie. Takie rozszczepienie krzywej obciążenie - przemieszczenie nazywane jest wyboczeniem bifurkacyjnym [43].

Jeżeli celem jest poznanie wartości siły krytycznej i postaci konstrukcji po wyboczeniu, to w rozwiązywaniu zagadnienia stosować można liniową analizę sprężystości [4,43]. W rozwiązywaniu wykorzystuje się warunki na ekstremum energii potencjalnej przy uwzględnieniu nieliniowych związków między odkształceniami i przemieszczeniami [43]. Przy zastosowaniu odcinkowej aproksymacji funkcji przemieszczeń - jak zwykle czyni się to w metodzie elementów skończonych - zadanie sprowadza się do rozwiązywania zagadnienia na wartości własne macierzy [70]. Liniowość zachowania się konstrukcji przed wyboczeniem pozwala przeprowadzić analizę utraty stateczności na podstawie wyników jednorazowego obliczenia stanu konstrukcji metodą przemieszczeń [43].

Jednak w wielu konstrukcjach obserwować można istotne zmiany w ich konfiguracjach od samego początku obciążenia. Wyklucza to możliwość stosowania założenia o liniowym charakterze pracy konstrukcji w jej przedkrytycznym stanie równowagi. W tym przypadku w rozwiązaniach stosuje się często teorię stanowiącą uogólnienie podejścia naturalnego na przypadek dużych przemieszczeń [43]. Podstawą metody rozwiązania takich zagadnień jest sztywność geometryczna /lub sztywność spowodowana wstępnymi naprężeniami/, generowana na podstawie zmian w równaniach równowagi zachodzących przy małych przyrostach obciążenia [27]. Możliwe jest również inne, które zastosowano w pracy, równoważne podejście oparte na analizie członów nieliniowych w związkach geometrycznych. Utrata stateczności tego typu konstrukcji nastąpić może poprzez bifurkacyjne rozszczepienie krzywej równowagi w przestrzeni obciążeniowo-przemieszczeniowej, bądź przez przeskok do nowej, z reguły statecznej postaci równowagi [70].

2.2. Kryteria stateczności

Stateczność równowagi sprężystej konstrukcji można najogólniej zdefiniować jako szczególny przypadek stateczności jej ruchu [70]. Ruch stateczny konstrukcji to taki ruch - w myśl definicji sformułowanej przez Lapunowa - dla którego niewielkie zakłócenia położenia początkowego i prędkości początkowej powodują niewielkie zakłócenia położenia i prędkości w dowolnej chwili t . W szczególnym przypadku równowagę konstrukcji nazywa się stateczną, gdy nadanie jej pewnego niewielkiego wychylenia i pewnej niewielkiej prędkości spowoduje ruch o niewielkich przemieszczeniach i prędkościach w dowolnej chwili t . Bezpośrednie zastosowanie definicji Lapunowa do badania stateczności równowagi nosi nazwę kinetycznego kryterium stateczności w sensie szerszym [70].

W myśl tego kryterium - jak wiadomo - ruch wokół położenia równowagi jest stateczny, a zatem i równowaga jest stateczna, gdy wszystkie współczynniki charakteryzujące narastanie lub ubywanie amplitudy ruchu są ujemne. Utrata stateczności następuje wtedy, gdy choć jeden - "i-ty" - z tych współczynników zeruje się. Jeżeli przy zerowej wartości wspomnianego wyżej "i-tego" współczynnika "i-ta" częstość ruchu drgającego jest różna od zera, to mamy do czynienia z utratą stateczności przez flutter. Warunek ten nosi nazwę kinetycznego kryterium stateczności w sensie węższym [70]. Jeżeli także "i-ta" częstość drgań ruchu jest równa zeru, to mówimy o utracie stateczności przez diwergencję. Zerowanie się "i-tego" współczynnika opisującego narastanie amplitudy, jak i "i-tej" częstości ruchu drgającego jest podstawą sformułowania statycznego kryterium stateczności. Tak więc kryterium kinetyczne w sensie szerszym obejmuje kryterium statyczne jak i kryterium kinetyczne w sensie węższym [70].

Określone wyżej statyczne kryterium utraty stateczności oznacza istnienie równowagi również w pewnym położeniu sąsiednim do położenia badanego. Tworzyć się wtedy może bifurkacyjna postać równowagi, bądź też parametr charakteryzujący wzrost obciążenia osiąga lokalne ekstremum, co przy sterowaniu obciążeniem uwidacznia się w formie przeskoku.

Prowadzone w pracy rozważania dotyczą tej formy utraty stateczności, której towarzyszy przeskok.

Energetyczna forma kryterium statycznego dla stanu krytycznego układu o "n" stopniach swobody przyjmuje postać [70]

$$\det \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right] = 0, \quad /2.1/$$

gdzie $i, j = 1 \dots n$, a przez V oznaczono całkowitą energię potencjalną układu. Powyższe kryterium jest szczególnie dogodne przy rozwiązywaniu problemów przeskoku [63], co wynika z łatwości obliczania wartości wyznacznika podczas rozwiązywania liniowego układu równań metody elementów skończonych w postępowaniu przyrostowym.

W numerycznej analizie stateczności konstrukcji poddanych działaniu obciążeń konserwatywnych stosuje się różne kryteria osiągnięcia stanu granicznego [63], czyli chwili w której konstrukcja może "przeskoczyć" do innej, statecznej konfiguracji równowagi. Pierwszym z nich jest już wspomniane zerowanie się wyznacznika drugiej pochodnej całkowitej energii potencjalnej V po współrzędnych uogólnionych q . Jest to równoważne zerowaniu się wyznacznika stycznej macierzy sztywności konstrukcji.

Do innych, często stosowanych kryteriów zaliczyć można [63]:

- zerowanie się najniższej wartości własnej macierzy stycznej,
- zerowanie się najniższej częstości drgań własnych,
- zerowanie się przyrostu obciążenia, bądź bieżącego parametru sztywności konstrukcji [11].

Ze względu na wspomniane już zalety w pracy przyjęto zerowanie się wyznacznika stycznej macierzy sztywności, jako kryterium osiągnięcia stanu granicznego.

2.3. Niektóre aspekty numerycznej analizy zagadnień geometrycznie nieliniowych

W rozwiązywaniu zagadnień nieliniowych metoda elementów skończonych stosowana jest w "przemieszczeniowym", bądź "siłowym" jej sformułowaniu. I tak w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych korzystniejszym okazuje się operowanie sformułowaniem "przemieszczeniowym", gdy w przypadku nieliniowości fizycznej "siłowe" sformułowanie jest bardziej przydatne [13,44]. W przypadku wystąpienia obu typów nieliniowości jednocześnie stosować można łącznie dwa te podejścia [44]. W pracy wykorzystuje się wersję "przemieszczeniową" metody elementów skończonych.

Przy rozwiązywaniu problemów geometrycznie nieliniowych szczególnie efektywne są procedury przyrostowe, które poprzez odcinkową linearyzację nieliniowego układu równań algebraicznych metody elementów skończonych sprowadzają rozwiązanie do sekwencji zadań liniowych [26].

Metody analizy problemów geometrycznie nieliniowych, polegające na śledzeniu ścieżki równowagi w przestrzeni przemieszczeniowo-obciążeniowej, podzielić można na dwie grupy [58]. Do grupy pierwszej zalicza się te metody, które nie wymagają spełnienia warunków równowagi w każdym kroku obciążenia - powoduje to stopniowe "odchodzenie" od rzeczywistej krzywej równowagi. Grupę drugą stanowią algorytmy, które w każdym kroku - z zadaną dokładnością - spełniają warunki równowagi. Prowadzi to do wyznaczenia - na miarę poczynionych założeń, przyjętego kryterium zbieżności oraz błędów numerycznych - rzeczywistej ścieżki równowagi. Żądany duży stopień dokładności rozwiązywanych w pracy problemów wymaga zastosowania metody z drugiej grupy rozwiązań.

Jako narzędzie rozwiązywania stawianych w pracy problemów przyjęto metodę Newtona-Raphsona. Uważana jest ona za jedną z najlepszych metod, szczególnie efektywną w stosowanym w pracy opisie przyrostowym z siłami residualnymi [63].

Przy poszukiwaniu ścieżek równowagi bardzo ważną rolę odgrywa przyjęcie odpowiedniego, niezależnego parametru, który steruje

realizacją algorytmów numerycznych. Na ogół stosuje się trzy podejścia [63]:

- sterowanie obciążeniem,
- sterowanie przemieszczeniem,
- sterowanie tak zwanym parametrem łuku.

Choć trzeci z powyższych sposobów - poprzez wprowadzenie pewnych uproszczeń - prowadzi do pierwszych dwóch, to jednak zdecydowano się na taki podział ze względu na to, że dla wielu realizacji numerycznych analizowanych problemów wystarczają dwa pierwsze sposoby. Tak sterowanie procesu numerycznego obciążeniem, jak i przemieszczeniem ma - ze względu na możliwy różny charakter krzywych równowagi - obszary niestabilności [63]. W tych wypadkach sterowanie parametrem łuku rozwiązuje problem, choć komplikuje nieco obliczenia poprzez rozszerzenie układu równań i zakłócenie symetrii macierzy sztywności [63].

Przyjęto wyłącznie sterowanie obciążeniem, które stosuje się w całym analizowanym obszarze pracy konstrukcji. Jak wiadomo ten parametr sterowania zawodzi w otoczeniu punktów krytycznych, czyli tam gdzie macierz sztywności stycznej jest słabo uwarunkowana, a nawet osobliwa. Dlatego też w obszarach krytycznych, które wyznaczyć można dzięki ekstrapolacyjnemu określeniu wartości wyznacznika stycznej macierzy sztywności [63], stosuje się pewną modyfikację metody Newtona-Raphsona [5], którą zaproponował Riks. Polega ona na wprowadzeniu wektora normalnego do wektora przyrostu przemieszczenia, co prowadzi do znalezienia rozwiązania ściśłego dla nowego, automatycznie skorygowanego przyrostu obciążenia. Z uwagi na uzmiennianie wielkości i kierunku przyrostu obciążenia, sposób ten pozwala na stosowanie parametru obciążenia jako jedynej zmiennej sterującej procesem obliczania ścieżki równowagi.

Istotną rolę w rozwiązywaniu zagadnień nieliniowych odgrywa wybór układu odniesienia. I tak w zagadnieniach geometrycznie liniowych wybór nieruchomego układu odniesienia jest bezdyskusyjny i stosowany z powodzeniem w programach metody elementów skończonych. Odmienną sytuację spotykamy w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych, w których duże przemieszczenia podsuwają jeden z dwóch możliwych opisów stosowanych w przyjętej przestrzeni kartezjańskiej [26]:

- opis w stałym /lokalnym/ układzie początkowym,
- opis w układzie konwekcyjnym /lub którejś z jego modyfikacji, np. w układzie sztywno-współobrotowym/.

Stosowany jest na ogół drugi z tych opisów, który jest bardziej naturalny w opisie zjawisk, którym towarzyszą duże przemieszczenia. Jednak część algorytmów - w rozdziale dotyczącym stosowania pierwszego z dwóch przyjętych modeli - opiera się na opisie w stałym układzie odniesienia, czyli na tak zwanym opisie w układzie Lagrange'a.

W układzie konwekcyjnym wykorzystuje się wygodne w rachunkach układy współobrotowe, czyli takie które obracają się wraz z elementem zachowując jednocześnie swą ortogonalność i prostoliniowość. Obliczanie przyrostów przemieszczeń przeprowadza się w stałym układzie współrzędnych, to znaczy przyjmuje się, że w ramach iteracji rozpatrywanego kroku obciążenia, układ współrzędnych jest stały i taki, jaki był na początku iteracji. Po obliczeniu przyrostów wszystkich wielkości występujących w problemie, układ odniesienia jest uaktualniony. Utożsamiając konfigurację odniesienia z konfiguracją aktualną na początku każdej iteracji podejście to zwykło nazywać się uaktualnionym opisem Lagrange'a [17,26].

3. KRATOWNICE PRZESTRZENNE O PRĘTACH PEŁNOŚCIENNYCH

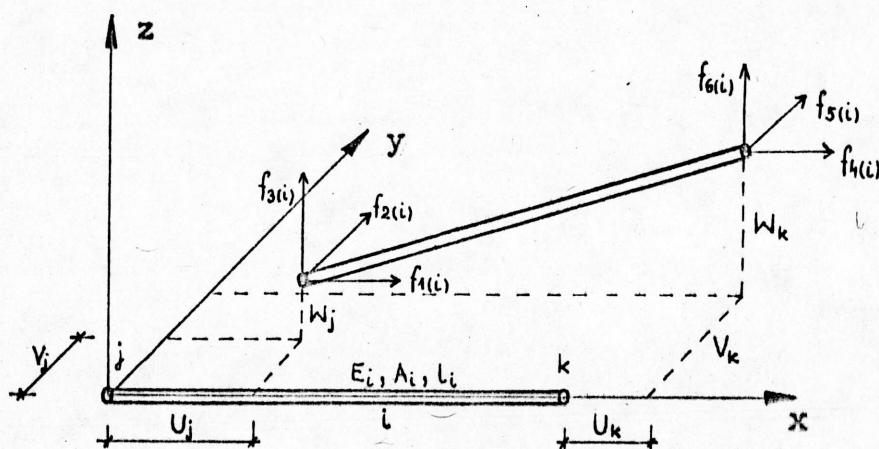
3.1. Sformułowanie problemu

Przedmiotem rozważań jest powierzchniowa struktura kratowa o dowolnych warunkach brzegowych zbudowana z prętów pełnościennych.

W dalszych rozważaniach przyjęto następujące - zwykle stosowane - założenia:

- węzłami struktury są idealne przestrzenne przeguby,
- elementami struktury są prostoliniowe, pryzmatyczne, osiowo-symetryczne, pełnościenne izotropowe pręty,
- pręty - na przestrzeni całego cyklu obciążenia - nie wybaczają się, ani nie osiągają nośności granicznej,
- struktura obciążana jest jednoparametrowym, konserwatywnym, statycznym obciążeniem węzłowym,
- materiał, z którego zbudowane są pręty jest liniowosprężysty, a powstające w nim odkształcenia są małe,
- możliwe są duże przemieszczenia węzłów struktury.

Lokalny, prawoskrętny układ odniesienia $o-x-y-z$ dla pręta $j-k$ w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej, przyjęto tak, że oś $o-x$ pokrywa się z osią ciężkości pręta /rys. 3.1/



Rys. 3.1

Wektor przemieszczenia "i-tego" elementu konstrukcji w lokalnym układzie odniesienia zdefiniowano jako

$$\{q\}_i^T = \{U_j, V_j, W_j, U_k, V_k, W_k\}_i, \quad /3.1/$$

gdzie U, V, W są funkcjami przemieszczeń pręta odpowiednio w kierunkach x, y i z .

Osiowe odkształcenie pręta - zgodnie z definicją tensora odkształceń Greena [17] - zapisać można w postaci

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \quad /3.2/$$

Na ogół do dalszych rozważań przyjmuje się prostsze wyrażenie na ϵ_{xx} , które wynika z /3.2/ po pominięciu składnika

$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2$, co uzasadniane jest występowaniem małych odkształceń [43]. Pominięcie tego składnika prowadzi do powstawania naprężeń w elemencie przy jego obrocie jako ciała sztywnego [58]. Ze względu na to, że w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych tak przemieszczenia, jak i obroty nie są małe, uproszczenie to powodować może istotne różnice w rozwiązaniach.

W dalszych rozważaniach składnik $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2$ tensora odkształceń /3.2/ jak i wyrażenia na energię sprężystą oraz wynikające z nich składowe sztywności /powstałe w wyniku uwzględnienia tego składnika/ ujęto w kwadratowe nawiasy i oznaczono gwiazdką ([...]*).

W macierzy sztywności - tak kierunkowej, jak i stycznej [43] - która jest funkcją przemieszczeń wprowadza się podział jej składowych ze względu na stopień ich zależności od przemieszczeń [23]. W ten sposób wydziela się macierz sztywności sprężystej /macierz sztywności pręta z teorii liniowej/, której elementy nie zależą od przemieszczeń, a także dwie macierze zależne od przemieszczeń. Pierwszą z nich nazywa się macierzą sztywności rzędu pierwszego /zależna jest ona liniowo od przemieszczeń/, a drugą macierzą sztywności rzędu drugiego /zależna jest ona od iloczynów przemieszczeń/. Wprowadzony podział macierzy sztywności pozwala na badanie wpływu macierzy rzędu pierwszego i drugiego na rozwiązanie.

3.2. Sztywność pręta

3.2.1. Energia sprężysta pręta

Energię sprężystą "i-tego" pręta - przy uwzględnieniu postaci odkształcenia danej wzorem /3.2/, przyjętych założeń /pkt 3.1/ oraz przyjęciu zerowych wartości naprężeń i odkształceń początkowych [74] - wyrazić można jako

$$U_i = \int_0^{l_i} \frac{A_i E_i}{2} \epsilon_{xx}^2 dx = \int_0^{l_i} \frac{A_i E_i}{2} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^3 \right]^* + \frac{\partial U}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial U}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^4 \right]^* + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^4 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right]^* + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^* + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad \dots, \quad /3.3/$$

gdzie A_i, E_i, l_i są odpowiednio: polem przekroju poprzecznego, modułem Younga i długością pręta.

Funkcje przemieszczeń U, V, W liniowo zmienne wzdłuż osi pręta zapisać można w postaci

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \{q\}_i, \quad /3.4/$$

gdzie $\xi = \frac{x}{l_i}$.

Uwzględnienie: - liniowego zachowania się materiału konstrukcji,
- występowania tylko małych odkształceń oraz
założonej postaci funkcji przemieszczeń /3.4/.
w zależności /3.3/ pozwala na wyrażenie energii sprężystej pręta j-k wzorem

$$\begin{aligned}
 U_i = & \frac{E_i A_i}{2l_i} (-U_j + U_k)^2 + \left[\frac{E_i A_i}{8l_i^3} (-U_j + U_k)^4 \right]^* + \frac{E_i A_i}{8l_i^3} (-V_j + V_k)^4 + \\
 & + \frac{E_i A_i}{8l_i^3} (-W_j + W_k)^4 + \left[\frac{E_i A_i}{2l_i^2} (-U_j + U_k)^3 \right]^* + \frac{E_i A_i}{2l_i^2} (-U_j + U_k) (-V_j + V_k)^2 + \\
 & + \frac{E_i A_i}{2l_i^2} (-U_j + U_k) (-W_j + W_k)^2 + \left[\frac{E_i A_i}{4l_i^3} (-U_j + U_k)^2 (-V_j + V_k)^2 \right]^* + \\
 & + \left[\frac{E_i A_i}{4l_i^3} (-U_j + U_k)^2 (-W_j + W_k)^2 \right]^* + \frac{E_i A_i}{4l_i^3} (-V_j + V_k)^2 (-W_j + W_k)^2 \quad /3.5/
 \end{aligned}$$

3.2.2. Sztywność kierunkowa

Korzystając z twierdzenia Castigliano, które można zastosować w wypadku dużych przemieszczeń przy odpowiednim wyrażeniu odkształceń [49], relację siła - przemieszczenie dla rozpatrywanego elementu prętowego można zapisać w prostym zapisie macierzowym

$$\{f\}_i = [k]_i \{q\}_i \quad /3.6/$$

Przez $[k]_i$ oznaczono kierunkową macierz sztywności dla i -tego pręta sformułowaną w jego lokalnym układzie odniesienia, a wektor sił $\{f\}_i$ zapisać można w postaci

$$\{f\}_i^T = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}_i \quad /3.7/$$

Macierz $[k]$ rozbić można na sumę trzech macierzy

$$[k] = [k]_E + [k]_{G1} + [k]_{G2} \quad , \quad /3.8/$$

z których pierwsza $([k]_E)$ jest sprężystą macierzą sztywności pręta, a druga $([k]_{G1})$ i trzecia $([k]_{G2})$ tworzą macierz geometryczną pręta [13,74].

Macierz $[k]_E$ ma postać

$$[k]_E = \begin{bmatrix} [k]^1 & -[k]^1 \\ -[k]^1 & [k]^1 \end{bmatrix}, \quad /3.9/$$

gdzie

$$[k]^1 = \frac{EA}{I} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad /3.10/$$

Macierz sztywności rzędu pierwszego ($[k]_{G1}$) przyjmuje postać

$$[k]_{G1} = \begin{bmatrix} [k]^2 & -[k]^2 \\ -[k]^2 & [k]^2 \end{bmatrix}, \quad /3.11/$$

gdzie

$$[k]^2 = \frac{1}{2I} \begin{bmatrix} [3F_x]^* & F_y & F_z \\ 0 & 2F_x & 0 \\ 0 & 0 & 2F_x \end{bmatrix}. \quad /3.12/$$

Wielkości F_x, F_y, F_z określa się jako

$$F_x = \frac{EA}{I} (U_k - U_j), \quad /3.13/$$

$$F_y = \frac{EA}{I} (V_k - V_j),$$

$$F_z = \frac{EA}{I} (W_k - W_j).$$

Macierz sztywności rzędu drugiego ($[k]_{G2}$) zapisać można jako

$$[k]_{G2} = \begin{bmatrix} [k]^3 & -[k]^3 \\ -[k]^3 & [k]^3 \end{bmatrix}, \quad /3.14/$$

gdzie $[k]^3 = \frac{1}{2EAI} \begin{bmatrix} [F_x^2]^* & [F_x F_y]^* & [F_x F_z]^* \\ [F_x F_y]^* & F_y^2 & F_y F_z \\ [F_x F_z]^* & F_y F_z & F_z^2 \end{bmatrix} . \quad /3.15/$

Należy zwrócić uwagę na to, że macierz sztywności rzędu pierwszego nie jest macierzą symetryczną [74]. W algorytmach rozwiązania opartych na powyżej sformułowanych macierzach przeprowadza się porównawczą analizę rozwiązań przy uwzględnieniu macierzy danej wzorami /3.11/ i /3.12/ oraz stosowanej symetrycznej macierzy uzyskanej przez Malleta [37], Martina [39], Rajasekarna i Murraya [50] i Jagannathana [23]. Zapisać ją można w postaci

$$[k]_{G1}' = \begin{bmatrix} [k]^{2'} & -[k]^{2'} \\ -[k]^{2'} & [k]^{2'} \end{bmatrix} , \quad /3.16/$$

gdzie

$$[k]^{2'} = \frac{1}{2I} \begin{bmatrix} 3F_x & F_y & F_z \\ F_y & F_x & 0 \\ F_z & 0 & F_x \end{bmatrix} . \quad /3.17/$$

W pracy bada się także wpływ na rozwiązanie prostej symetryzacji macierzy sztywności rzędu pierwszego.

Zapisać ją można w postaci

$$[k]_{G1}'' = \frac{1}{2} ([k]_{G1} + [k]_{G1}^T) , \quad /3.18/$$

gdzie

$$[k]_{G1}'' = \begin{bmatrix} [k]^{2''} & -[k]^{2''} \\ -[k]^{2''} & [k]^{2''} \end{bmatrix} , \quad /3.19/$$

a macierz $[k]^{2''}$ wyrazić można jako

$$[k]^{2''} = \frac{1}{2I} \begin{bmatrix} [3F_x]^* & \frac{1}{2}F_y & \frac{1}{2}F_z \\ \frac{1}{2}F_y & 2F_x & 0 \\ \frac{1}{2}F_z & 0 & 2F_x \end{bmatrix}. \quad /3.20/$$

3.2.3. Sztywność styczna

Sformułowanie przyrostowe [43] rozwiązywanego problemu zgodnie z poczynionymi założeniami prowadzi do macierzy sztywności stycznej [70]. W lokalnym układzie odniesienia dla pręta ma ona postać

$$[k]_i^s = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial U_j^2} & \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial U_j \partial V_j} & \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial U_j \partial W_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial U_j \partial W_k} \\ \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial V_j \partial U_j} & \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial V_j^2} & \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial V_j \partial W_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial V_j \partial W_k} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial W_k \partial U_j} & \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial W_k \partial V_j} & \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial W_k \partial W_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Delta U_i}{\partial W_k^2} \end{bmatrix}. \quad /3.21/$$

Po uwzględnieniu relacji opisanej wzorem /3.5/ macierz sztywności stycznej pręta w lokalnym układzie odniesienia zapisać można jako

$$[k]^s = [k]_E + [k]_{G1}^s + [k]_{G2}^s, \quad /3.22/$$

gdzie macierz $[k]_E$ opisana jest wzorem /3.9/ i /3.10/, a macierze $[k]_{G1}^s$ i $[k]_{G2}^s$ są odpowiednio stycznymi macierzami rzędu pierwszego i drugiego.

Macierz sztywności rzędu pierwszego ma postać

$$[k]_{G1}^s = \begin{bmatrix} [k]^{2s} & -[k]^{2s} \\ -[k]^{2s} & [k]^{2s} \end{bmatrix}, \quad /3.23/$$

gdzie

$$[k]^{2s} = \frac{1}{I_i} \begin{bmatrix} [3F_x]^* & F_y & F_z \\ F_y & F_x & 0 \\ F_z & 0 & F_x \end{bmatrix}. \quad /3.24/$$

Macierz sztywności rzędu drugiego zapisać można jako

$$[k]_{G2}^s = \begin{bmatrix} [k]^{3s} & -[k]^{3s} \\ -[k]^{3s} & [k]^{3s} \end{bmatrix}, \quad /3.25/$$

gdzie

$$[k]^{3s} = \frac{1}{2EA I} \begin{bmatrix} [3F_x^2 + F_y^2 + F_z^2]^* & [2F_x F_y]^* & [2F_x F_z]^* \\ [2F_x F_y]^* & [F_x^2]^* + 3F_y^2 + F_z^2 & 2F_y F_z \\ [2F_x F_z]^* & 2F_y F_z & [F_x^2]^* + F_y^2 + 3F_z^2 \end{bmatrix}. \quad /3.26/$$

Macierze sztywności stycznej rzędu pierwszego i drugiego tworzące styczną macierz sztywności geometrycznej są symetryczne.

3.2.4. Sztywność styczna pręta przy uwzględnieniu naprężeń początkowych

Rozpatrzmy pręt z rys. 3.1 poddany początkowym normalnym naprężeniom σ_0 będącym w równowadze z początkową siłą osiową P^0 . Przyrost energii sprężystej pręta (ΔU_i) przy małym przyroście jego obciążenia wyrazić można jako

$$\Delta U_i = \Delta U_{i0} + \Delta U_{i1}, \quad /3.27/$$

gdzie
$$\Delta U_{i0} = \int_V \zeta_0 \epsilon_{xx} dv , \quad /3.28/$$

$$\Delta U_{i1} = \frac{1}{2} \int_V E \epsilon_{xx}^2 dv .$$

Odształcenie ϵ_{xx} wyrażone wzorem /3.2/ jest odształceniem wywołanym zmianą /przyrostem/ obciążenia.

Zgodnie ze sformułowaniem sztywności stycznej w algorytmie przyrostowym /3.21/ i przy uwzględnieniu poczynionych założeń, poszukiwana macierz sztywności stycznej przyjmie postać:

$$[k]^s_o = [k]_E + [k]^s_{G1} + [k]^s_{G2} + [k]\zeta_o . \quad /3.29/$$

Macierz $[k]\zeta_o$ wynika z zależności /3.28/₁, a macierze $[k]_E$, $[k]^s_{G1}$, $[k]^s_{G2}$ wynikające z zależności /3.28/₂ opisane są odpowiednio wzorami /3.9/ i /3.10/, /3.23/ i /3.24/ oraz /3.25/ i /3.26/.

Macierz $[k]\zeta_o$ zapisać można jako

$$[k]\zeta_o = \begin{bmatrix} [k]^1_{\zeta_o} & -[k]^1_{\zeta_o} \\ -[k]^1_{\zeta_o} & [k]^1_{\zeta_o} \end{bmatrix} . \quad /3.30/$$

gdzie

$$[k]^1_{\zeta_o} = \frac{\zeta_o^A}{I} \begin{bmatrix} [1]^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad /3.31/$$

3.3. Obliczanie krzywoliniowych ścieżek równowagi

3.3.1. Macierz transformacji

Sztywności zbudowane w punktach 3.2.2., 3.2.3. i 3.2.4. sformułowane zostały w lokalnych układach odniesienia dla pręta. Transformacja macierzy sztywności, jak i transformacja przemieszczeń i sił węzłowych z lokalnego do globalnego układu odniesienia odbywa się - jak zwykle - przy pomocy macierzy $[T]$ cosinusów kierunkowych wersorów lokalnego układu odniesienia [13,74]

$$\begin{aligned} \{q\} &= [T]\{Q\} , \\ \{f\} &= [T]\{F\} , \\ [K] &= [T]^T [k] [T] , \end{aligned} \quad /3.32/$$

gdzie: $\{Q\}$, $\{F\}$, $[K]$ wyrażają odpowiednio przemieszczenia, siły oraz macierz sztywności w globalnym układzie odniesienia.

W celu uzyskania możliwie prostej budowy macierzy transformacji przyjęto, że oś $o-y$ lokalnego układu współrzędnych leży w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny wyznaczonej przez osie OX i OY globalnego układu współrzędnych. Przy takim założeniu macierz transformacji przyjmuje postać

$$[T] = \begin{bmatrix} [T]^1 & [0] \\ [0] & [T]^1 \end{bmatrix} , \quad /3.33/$$

gdzie

$$[T]^1 = \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \beta & \mu \\ -\frac{\beta}{\sqrt{\mathcal{L}^2 + \beta^2}} & \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{\mathcal{L}^2 + \beta^2}} & 0 \\ -\frac{\mathcal{L}\mu}{\sqrt{\mathcal{L}^2 + \beta^2}} & -\frac{\beta\mu}{\sqrt{\mathcal{L}^2 + \beta^2}} & \sqrt{\mathcal{L}^2 + \beta^2} \end{bmatrix} . \quad /3.34/$$

Przez $\mathcal{L}$, β , μ oznaczono odpowiednio

$$\alpha = \frac{l_x}{l}, \quad \beta = \frac{l_y}{l}, \quad \mu = \frac{l_z}{l}, \quad /3.35/$$

gdzie l_x, l_y, l_z są rzutami długości pręta l odpowiednio na osie OX, OY, OZ globalnego układu współrzędnych.

3.3.2. Algorytmy rozwiązania

Równanie metody elementów skończonych wyprowadzone w oparciu o zasadę prac przygotowanych - wykorzystujące kierunkową macierz sztywności - ma postać [74]

$$[K]\{Q\} = \{F\}, \quad /3.36/$$

a równanie przyrostowe [26] zapisuje się jako

$$[K]^s \Delta\{Q\} = \Delta\{F\} + \{R\}. \quad /3.37/$$

Macierze $[K]$ i $[K]^s$ są odpowiednio macierzami sztywności kierunkowej i stycznej konstrukcji, wektory $\{Q\}$ i $\Delta\{Q\}$ są wektorami przemieszczeń i przyrostów przemieszczeń węzłów, a $\{F\}$, $\Delta\{F\}$ i $\{R\}$ są odpowiednio wektorami obciążeń, przyrostów obciążeń i węzłowych sił niezrównoważonych. Wszystkie wielkości występujące w równaniach /3.36/ i /3.37/ wyrażone są we współrzędnych globalnych.

Wykorzystując postacie macierzy wyprowadzone w punkcie 3.2 sformułowano trzy - uznawane za podstawowe [44,70] - algorytmy rozwiązania, które służą do śledzenia ścieżek równowagi konstrukcji w przestrzeni przemieszczeniowo-obciążeniowej.

Pierwszy z nich polega na łącznym wykorzystaniu równań /3.36/ i /3.37/ i stosowany jest w obszarze przedkrytycznym pracy konstrukcji [23].

Krótki opis jednego cyklu iteracyjnego algorytmu, który realizowany jest przy wykorzystaniu stałego układu odniesienia /układu Lagrange'a/, ująć można w następujących punktach:

- 1/ Pod obciążeniem $\{F\}$, będącym częścią obciążenia całkowitego konstrukcji, przybliżenie przemieszczenia $\{Q\} - (\{Q\}_\ell, \ell - \text{ kolejny cykl iteracji; } \ell = 1, 2, \dots)$ znajduje się z równania /3.36/.
- 2/ Po wygenerowaniu nowej postaci macierzy sztywności $[K]$ ($[K]_\ell$) oblicza się wektor $\{F\}_\ell$ wykorzystując równanie /3.36/ i znany wektor $\{Q\}_\ell$.
- 3/ Wartość obciążenia $\Delta\{F\}_\ell = \{F\} - \{F\}_\ell$ wprowadzona do równania /3.37/ /przy $\{R\} = \{0\}$ / pozwala obliczyć przyrost przemieszczenia $\Delta\{Q\}_{\ell+1}$, który poprawia dotychczasowy wektor rozwiązania $\{Q\}_\ell$.

Wektor ten stanowi podstawę następnej iteracji, w której powtarza się czynności opisane w punktach 2/ i 3/. Cykl iteracji uważa się za skończony, gdy stosunek przyrostu przemieszczenia $\Delta\{Q\}_\ell$ do pewnej normy przemieszczeniowej jest mniejszy od wielkości określającej żadaną dokładność rozwiązania.

Symboliczny opis procedury ująć można w następującą sekwencję wzorów

$$\begin{aligned}
 \{F\}_\ell &= [K]_\ell \{Q\}_\ell, & /3.38/ \\
 \Delta\{F\}_\ell &= \{F\} - \{F\}_\ell, \\
 \Delta\{Q\}_{\ell+1} &= [K]_\ell^{S-1} \Delta\{F\}_\ell, \\
 \{Q\}_{\ell+1} &= \{Q\}_\ell + \Delta\{Q\}_{\ell+1},
 \end{aligned}$$

gdzie $[K]$ i $[K]^S$ oznaczają kierunkową i styczną macierz sztywności bazującą na wektorze $\{Q\}_\ell$.

Algorytm ten wykorzystując różne postacie kierunkowej macierzy sztywności opisane wzorami /3.11/ i /3.12/ lub /3.16/ i /3.17/ lub /3.19/ i /3.20/ oraz macierz rzędu drugiego /3.14/ i /3.15/ umożliwia analizę ich wpływu na końcowe rozwiązanie.

Opisana procedura, choć tutaj stosowana przy małych przyrostach obciążenia, może być wykorzystana także w przypadku jednorazowego określenia przemieszczeń dla całkowitego wektora obciążenia, pod warunkiem jednak, że obciążenie to nie przekroczy obciążenia krytycznego.

Drugi algorytm, który podobnie jak pierwszy wykorzystuje stały układ odniesienia, stosowany jest w przedkrytycznych jak i w pokrytycznych obszarach pracy konstrukcji. Opiera się on na równaniu przyrostowym /3.37/, a znany jest pod nazwą procedury Newtona-Raphsona [63]. Opis jednej iteracji tej procedury zapisać można w punktach:

- 1/ Pod obciążeniem $\Delta\{F\}$ /przy $\{R\} = \{0\}$ / wykorzystując równanie /3.37/ znajduje się przybliżenie poszukiwanego rozwiązania $\Delta\{Q\}_\alpha$.
- 2/ Przyrost $\Delta\{Q\}_{\alpha+1}$, który wektor $\Delta\{Q\}_\alpha$ zbliża do poprawnego, uzyskuje się z równania przyrostowego, w którym uaktualniono sztywność styczną. Prawą stronę tego równania stanowi wektor będący odzwierciedleniem nierównowagi węzłów konstrukcji przy jej aktualnej geometrii i obciążeniu.

Podobnie, jak w przypadku pierwszego z algorytmów, operacje opisane w punktach 1/ i 2/ powtarza się aż do momentu uzyskania zadawalającej dokładności w przemieszczeniach, co prowadzi do zerowania się wektora obciążeń niezrównoważonych $\{R\}$.

Trzeci algorytm, oparty na równaniu przyrostowym /3.37/ oraz postaci stycznej macierzy sztywności przytoczonej w punkcie 3.2.4, wykorzystuje uaktualniony układ Lagrange'a. Operacje w nim wykonywane są niemal identyczne z tymi, które opisano w algorytmie drugim, z tym jednak, że ten przypadek wymaga generowania nowych /w każdym cyklu iteracji/ macierzy transformacji, a także wyznaczania i kumulowania przyrostów naprężeń w prętach.

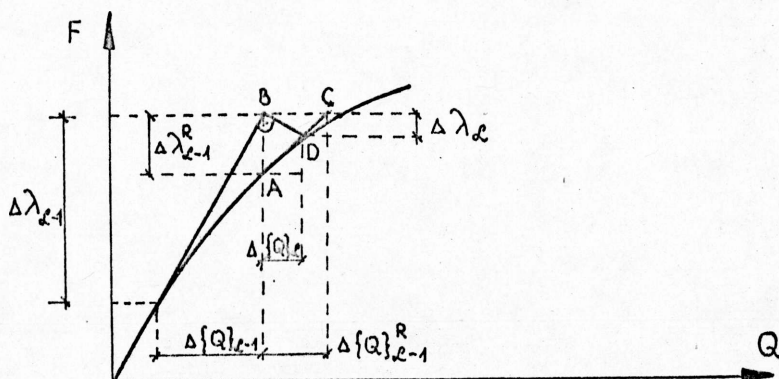
Każdy z powyższych algorytmów poprzez sumowanie przyrostów przemieszczeń spowodowanych przyrostami obciążeń konstrukcji pozwala na wyznaczenie jej aktualnej konfiguracji, co stwarza możliwość określenia wyteżenia każdego z jej elementów.

Wyjaśnienia wymaga warunek, który pozwala zakończyć cykl iteracji w jednym kroku obciążenia. Ze względu na to, że rozpatruje się zadania silnie geometrycznie nieliniowe /małe zmiany obciążenia powodują znaczne przyrosty przemieszczeń/, kryterium zbieżności procesu iteracyjnego przyjmuje się w postaci przemieszczeniowej [23,43]. Najczęściej stosowane kryteria przemieszczeniowe zapisać można w postaci

$$\max_i \left| \frac{\Delta\{Q\}_i}{\{Q\}_{\text{por}}} \right| < \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad /3.39/$$

gdzie $\Delta\{Q\}_i$ jest maksymalnym przyrostem przemieszczenia /wzdłuż osi układu globalnego/ ze zbioru przyrostów przemieszczeń wszystkich "n" węzłów. $\{Q\}_{\text{por}}$ oznacza największą - ze zbioru wszystkich przemieszczeń - wartość istniejącą na początku cyklu iteracji w danym kroku obciążenia; ϵ jest wielkością niemianowaną rzędu 10^{-5} . Ze względu na zmienny poziom odniesienia $\{Q\}_{\text{por}}$ kryterium to może - w zależności od miejsca na krzywoliniowej ścieżce równowagi - w różnym stopniu dokładności spełniać warunki równowagi. Prowadzić to może do konieczności dodatkowego ich sprawdzania dla poszczególnych węzłów konstrukcji. Aby uniknąć tej niedogodności za poziom odniesienia przyjęto stałą wartość przemieszczenia, która jest wartością maksymalnego przemieszczenia ze zbioru przemieszczeń węzłów z liniowego zakresu pracy konstrukcji. Przyjęto, że jest nią wartość określana w pierwszym kroku obciążenia. Choć jest to przyczyną różnej ilości iteracji w zależności od stopnia odchylenia konstrukcji od liniowego charakteru jej pracy, to jednak daje zawsze stałą dokładność rozwiązania.

Powyższe procedury - jak już wspomniano - nie mogą być stosowane w tych obszarach pracy konstrukcji, dla których macierz sztywności stycznej może być osobliwa, bądź "prawie osobliwa". W tych obszarach wykorzystuje się modyfikację metody Newtona-Raphsona zaproponowaną przez Riksa. Koryguje ona wielkości i kierunek parametru $\Delta\lambda$, który steruje obciążeniem. Przybliżenie $\Delta\lambda_e$ oblicza się w płaszczyźnie ortogonalnej do rozwiązania określonego przez $\Delta\{Q\}_{e-1}$ i $\Delta\lambda_{e-1}$ w przestrzeni obciążeniowo-przemieszczeniowej /rys. 3.2/.



Rys. 3.2

Warunek ten w postaci

$$\Delta \{Q\}_{\ell-1} \cdot \Delta \{Q\}_{\ell} + \Delta \lambda_{\ell-1} \Delta \lambda_{\ell} = 0, \quad /3.40/$$

przy wykorzystaniu wyrażenia na $\Delta \{Q\}_{\ell}$ /wynikającego z podobieństwa trójkątów ABC i ADE/

$$\Delta \{Q\}_{\ell} = \frac{\Delta \{Q\}_{\ell-1}^R (\Delta \lambda_{\ell-1}^R + \Delta \lambda_{\ell})}{\Delta \lambda_{\ell-1}^R}, \quad /3.41/$$

pozwała na wyznaczenie korygującego obciążenie parametru jako

$$\Delta \lambda_{\ell} = - \frac{\Delta \{Q\}_{\ell-1} \Delta \{Q\}_{\ell-1}^R}{\frac{1}{\Delta \lambda_{\ell-1}^R} \Delta \{Q\}_{\ell-1} \Delta \{Q\}_{\ell-1}^R + \Delta \lambda_{\ell-1}}. \quad /3.42/$$

Stosowany indeks R przy przyrostach przemieszczeń i przyrostach parametru obciążenia oznacza, że pochodzą one od sił nie-zrównoważonych /rys. 3.2/.

Badanie wyznacznika stycznej macierzy sztywności pozwala na korygowanie kierunku obciążenia - po stwierdzeniu zmiany znaku wyznacznika obliczenia powtarzane są w ramach tego samego przyrostu obciążenia dla nowego jego kierunku. Ze względu na możliwy przypadek zerowej wartości wyznacznika sztywności stycznej algorytmy przewidują możliwość restartu dla zmienionego przyrostu obciążenia. Opisane wyżej postępowanie pozwoliło na stosowanie parametru obciążenia jako jedynej zmiennej sterującej procesem obliczeń. Należy dodać, że opisane algorytmy automatycznie przełączają się na procedurę, która umożliwia przejście punktu granicznego. Możliwe jest to dzięki ekstrapolacyjnemu określaniu wyznacznika, bazującemu na jego wartościach dla tych punktów ścieżki równowagi, które bezpośrednio poprzedzają krytyczny obszar pracy konstrukcji.

3.4. Krótki opis programu na EMC. Przykłady zastosowań

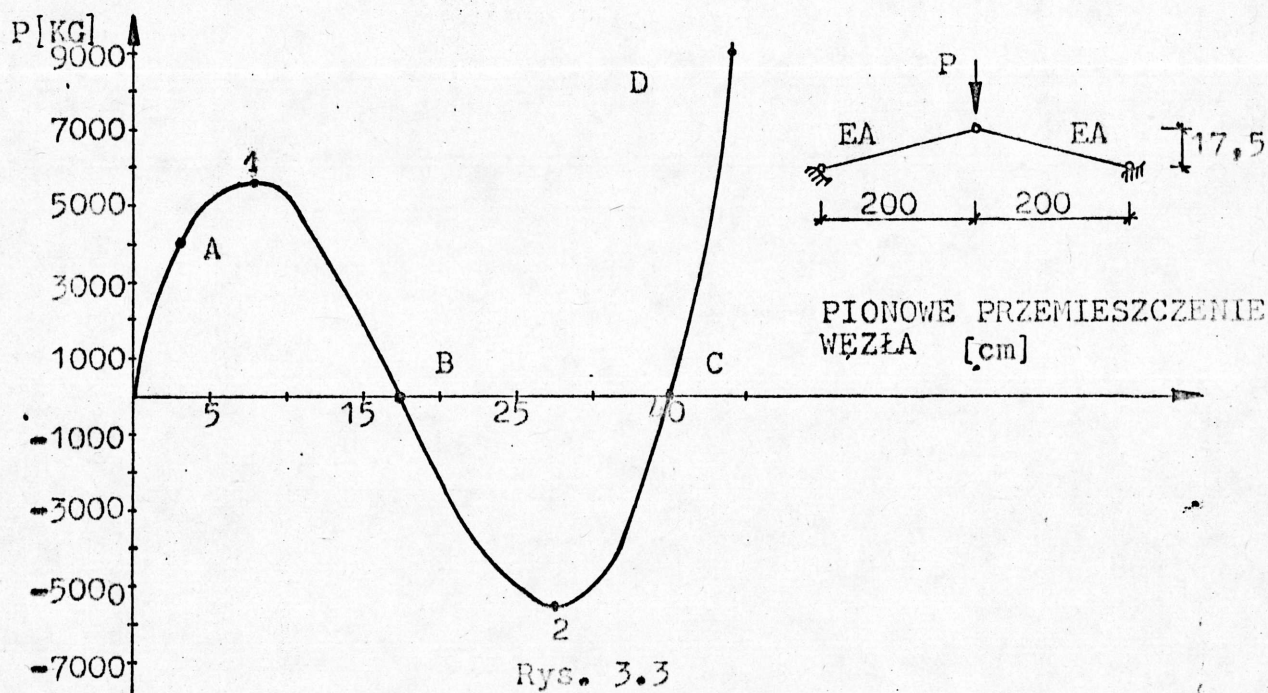
Przedstawione algorytmy były podstawą do opracowania programu w języku algorytmicznym FORTRAN na EMC ODRA 1305. Zbudowany program realizuje - w zależności od parametrów określających wybrany algorytm - obliczenia dla dowolnego - pod względem konfiguracji, warunków brzegowych, cech sprężystych elementów jak i obciążenia - przestrzennego układu kratowego. Parametry zadania, do których zalicza się między innymi numer wybranego do realizacji algorytmu, krok obciążenia, dokładność iteracji oraz maksymalną wartość obciążenia, w sposób jednoznaczny określają - jedną z wielu możliwych - ścieżkę realizacji programu. Dowolność narzuconych na konstrukcję warunków brzegowych uzyskano poprzez ich aproksymację więziami elementarnymi reprezentowanymi przez pręty przegubowo-przegubowe o odpowiedniej /do żądanych cech/ długości i sztywności.

Generowany układ równań liniowych metody elementów skończonych rozwiązywany jest przy użyciu standardowej procedury rozkładającej macierz sztywności na macierze górno i dolno trójkątną. Przebieg procesu iteracyjnego w programie jest w pełni zautomatyzowany, a na wyjściu otrzymuje się aktualną konfigurację konstrukcji, siły w prętach, aktualny wektor obciążenia oraz informacje dotyczące wykonanych iteracji /ilość, dokładność/. Pozwala to, przy jednorazowym uruchomieniu programu, na uzyskanie ścieżki równowagi konstrukcji w przestrzeni obciążeniowo-przemieszczeniowej tak w obszarach przedkrytycznych, krytycznych, jak i pokrytycznych.

Pominięto schemat blokowy programu, który oprócz pewnych elementów wejścia i wyjścia nie poszerzałby informacji zawartych w punkcie 3.3, a byłby tylko ich kompleksowym i skrótowym przedstawieniem.

Program /bez wymaganych obszarów pamięci do realizacji konkretnego zadania/ zajmuje 11,2 K /kilosłów/ pamięci; orientacyjne informacje o czasie obliczeń wraz z liczbą iteracji wykonanych w zadaniu podane są przy okazji prezentacji wyników realizowanych przykładowych zadań.

Zadaniem testowym dla zbudowanych algorytmów była kratownica Misesa /rys. 3.3/. Ze względu na konfigurację zaliczyć ją można do najprostszych - o znanym rozwiązaniu analitycznym - konstrukcji kratowych skłonnych do przeskoku. Na rys. 3.3 przedstawiono ścieżkę równowagi kratownicy skonstruowaną w przestrzeni obciążeniowo-przemieszczeniowej, a otrzymaną metodami przyrostowymi.

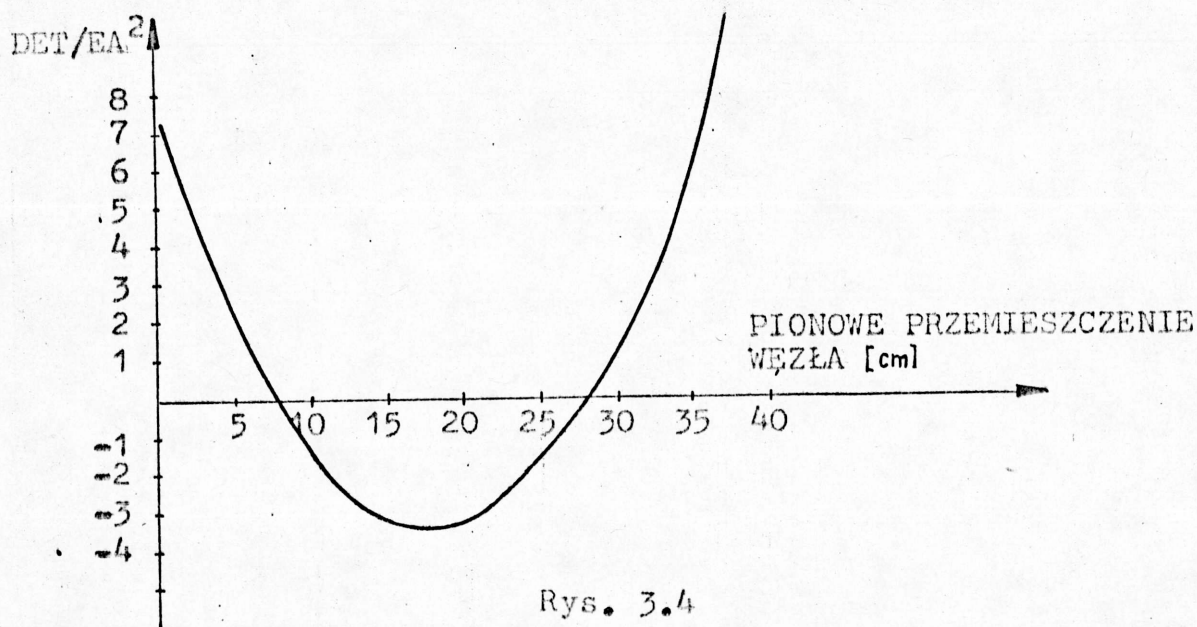


Rys. 3.3

Tak w przypadku algorytmu przyrostowego /opartego o styczną macierz sztywności/ wykorzystującego stały, jak i uaktualniany układ odniesienia otrzymano zbieżność rozwiązań, którą można uznać za idealną. O ich poprawności świadczą szczególnie punkty przecięcia się ścieżki równowagi z osią odciętych, na której odłożono pionowe przemieszczenia węzła, a także pełna zgodność w określeniu wartości obciążenia granicznego /w sposób analityczny [70], jak i numeryczny/. Otrzymane rozwiązanie było testowane tak ze względu na wielkość kroku obciążenia, jak i na żądaną dokładność iteracji. Prezentowany wykres /rys. 3.3/ otrzymano przy kroku obciążenia, który stanowił 1/25 wartości obciążenia granicznego konstrukcji i zadanej 0.0001 wartości współczynnika określającego dokładność rozwiązania /pkt 3.3.2./. Zadana dokładność

powodowała, że przyrost przemieszczenia węzła w kolejnym, kończącym iterację kroku nie był większy od 0.00002 cm.

Na rys. 3.4 przedstawiono wykres zmienności wartości wyznacznika stycznej macierzy sztywności w zależności od miejsca położenia na ścieżce równowagi.



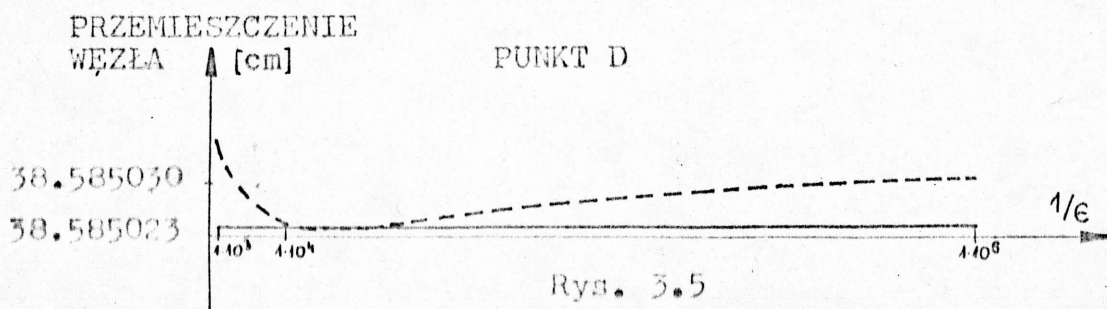
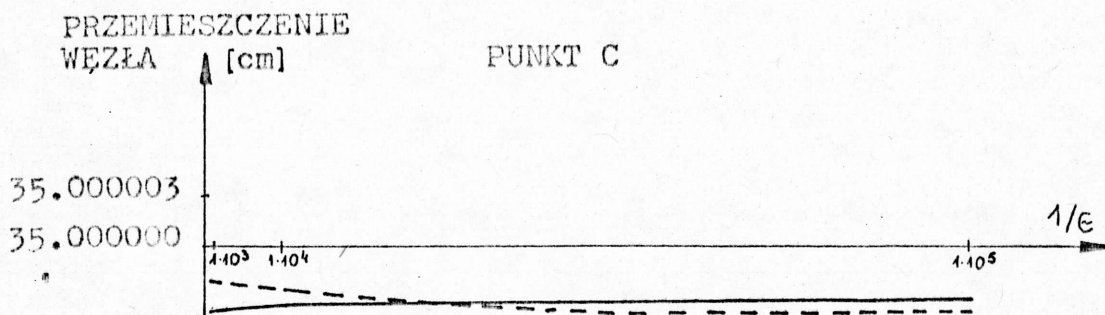
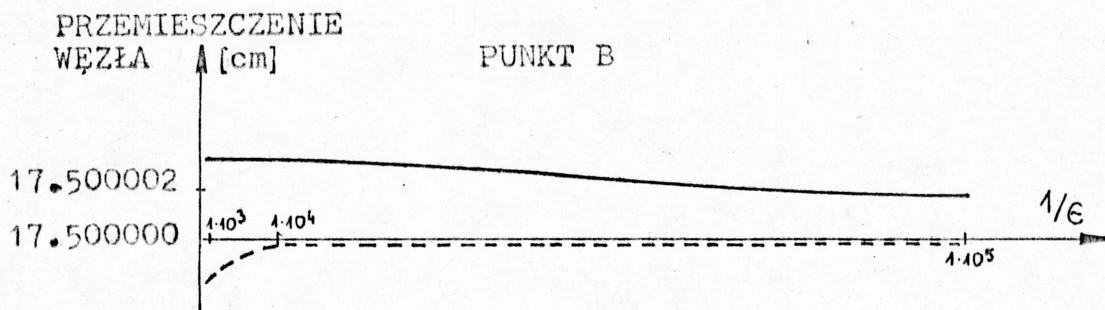
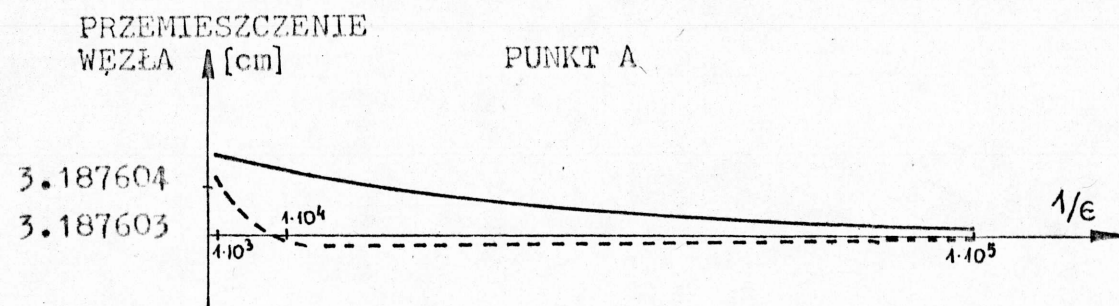
Rys. 3.4

W dalszej analizie otrzymane rozwiązanie przyrostowe przyjęto za poziom odniesienia dla rozwiązań tego zadania innymi algorytmami.

Pominięcie elementów sztywności, które wynikają z uwzględnienia składnika $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2$ w tensorze odkształceń Greena, w sposób zasadniczy nie wpłynęło na rozwiązanie, nazywane dalej rozwiązaniem uproszczonym. W sposób nieznaczny wzrosły wartości tak górnego, jak i dolnego obciążenia granicznego /punkty 1 i 2 na rys. 3.3/ - różnice te wyniosły około 0,3 % rozwiązania ścisłego. Przy żądanych mniejszych dokładnościach rozwiązania pojawiały się pewne, nieznaczące różnice w otrzymywanych wykresach, które szczególnie dobrze można było obserwować w pokrywających obszarach pracy konstrukcji.

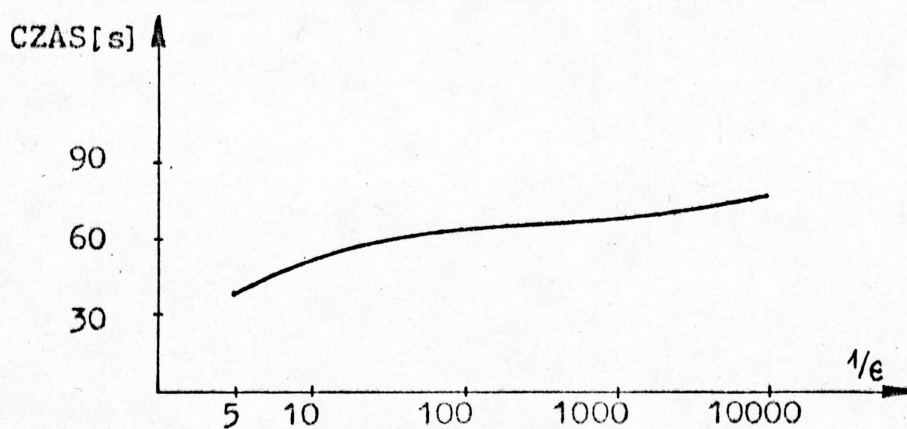
Na rys. 3.5 przedstawiono zbieżność procesu iteracyjnego w zależności od wartości współczynnika dokładności dla różnych punktów na ścieżce równowagi. Linia ciągłą oznaczono rozwiązania "pełne",

a linią przerywaną rozwiązania uproszczone.



Rys. 3.5

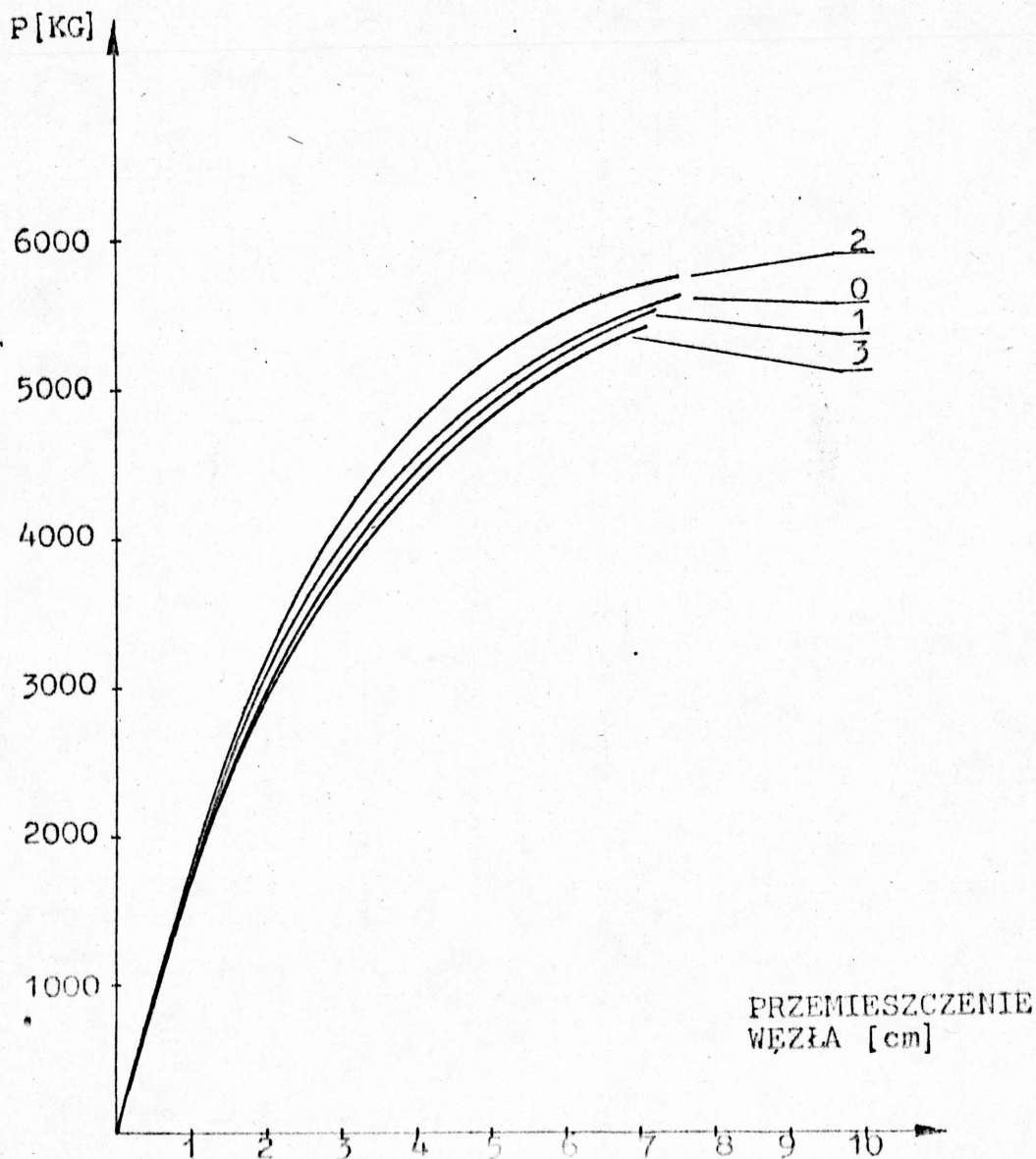
W przypadku nie uwzględniania w analizie wpływu sztywności rzędu drugiego otrzymano dalsze zawyżenie wspomnianych górnego i dolnego obciążenia granicznego /o około 0,5 %/ przy braku większych efektów w innych punktach ścieżki równowagi. Należy dodać, że w tym przypadku znacznie wzrosła ilość wykonywanych iteracji w kroku obciążenia - od trzech /czterech w obszarach krytycznych/, dla których otrzymano wykres z rys. 3.3, do sześciu i więcej. Czasy obliczeń całej ścieżki równowagi przy użyciu opisanego kroku obciążenia i różnych dokładnościach przedstawiono na rys. 3.6.



Rys. 3.6

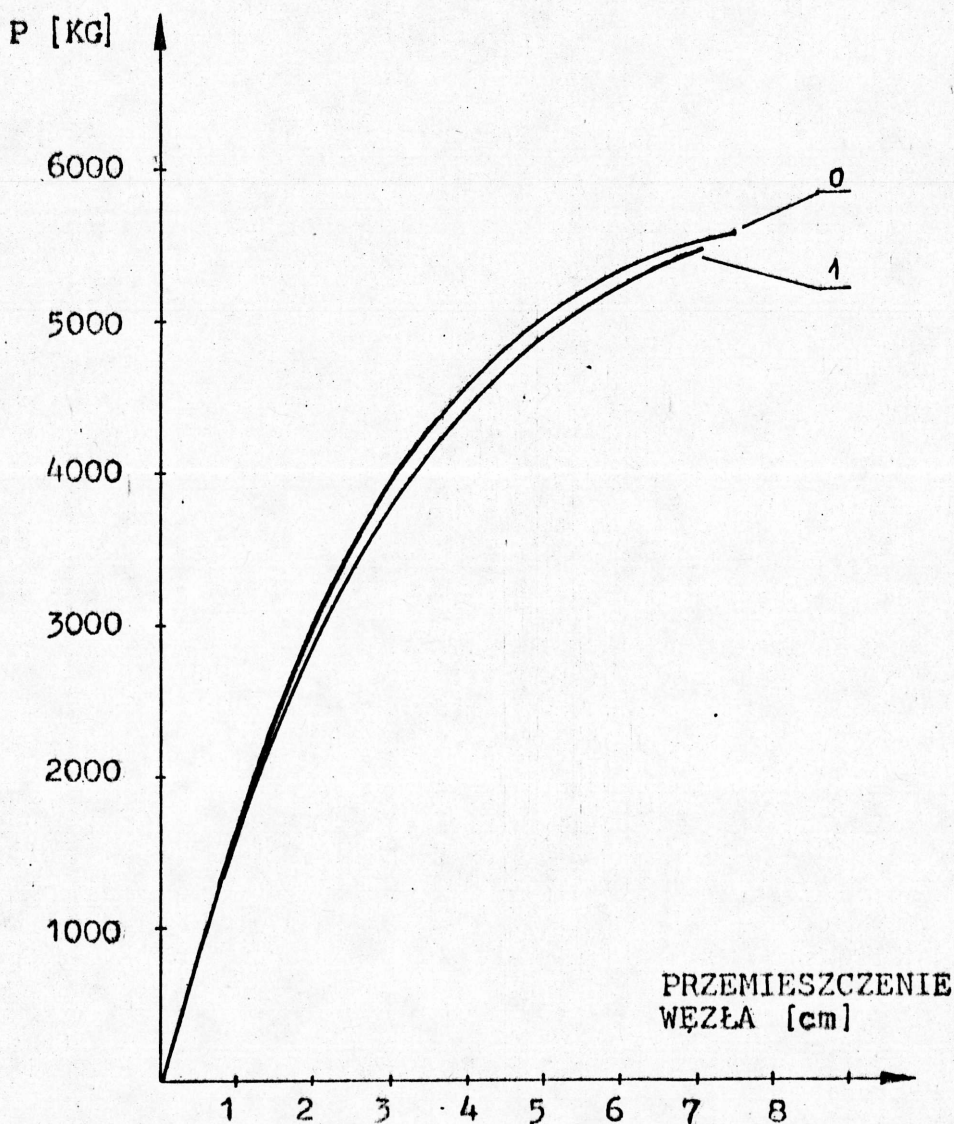
Testowanie algorytmów opartych na łącznym wykorzystaniu kierunkowej i stycznej macierzy sztywności wykazało ich szybkość i dobrą zbieżność, z tym jednak, że zaobserwowano nieco zawyżone /0,3%/ wyniki przemieszczenia węzła /krzywa 1 na rys. 3.7/ w stosunku do przyjętego poziomu odniesienia /krzywa 0 na rys. 3.7/. Przy posługiwaniu się uproszczonym rozwiązaniem otrzymano wyniki zaniżone /krzywa 2 na rys. 3.7/. Nie uwzględnianie sztywności rzędu drugiego prowadziło do znacznego zawyżenia wyników /4 %/

/krzywa 3 na rys. 3.7/. Błąd procentowy określany był na poziomie obciążenia o wartości 4000 kG. Wartość obciążenia granicznego zawyżana była w każdym z wyżej wspomnianych przypadków.



Rys. 3.7

Na rys. 3.8 przedstawiono krzywe równowagi w przedkrytycznym obszarze pracy konstrukcji, które otrzymano wykorzystując symetryczne postacie kierunkowych macierzy sztywności. Indeks 0 oznacza wykres odniesienia, a indeksem 1 krzywą otrzymaną przy uwzględnieniu postaci kierunkowej macierzy opisanej równaniami /3.16/ i /3.17/ lub /3.19/ i /3.20/, które dały identyczne rozwiązania.

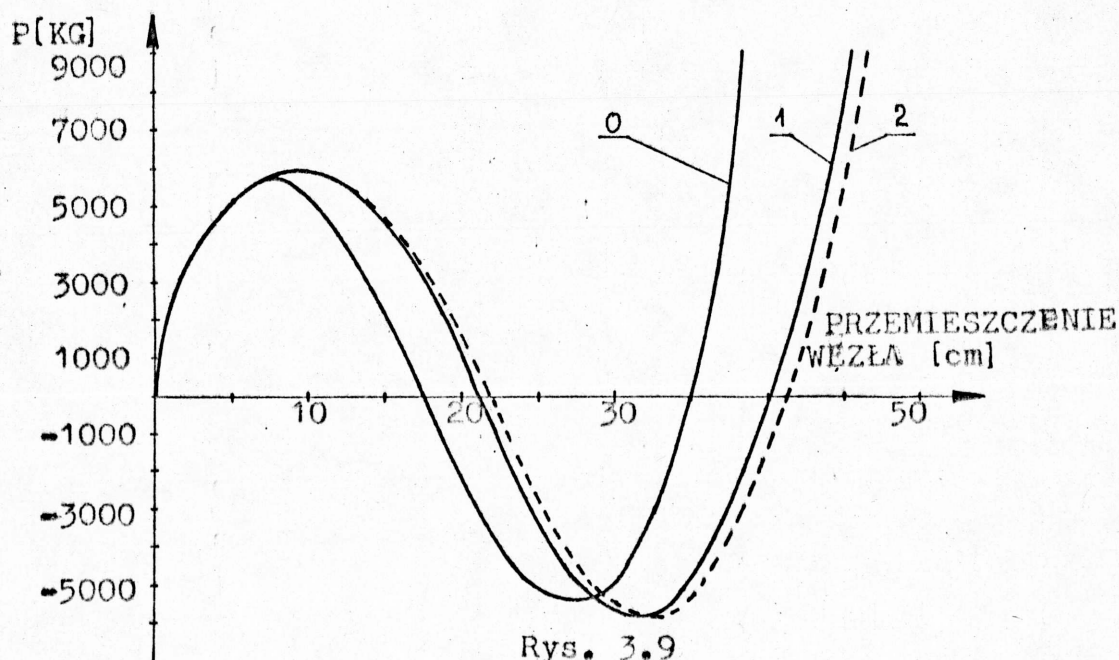


Rys. 3.8

Różnica tych rozwiązań w stosunku do rozwiązania ścisłego wyniosła - na przyjętym poziomie obciążenia - około 0,6 %.

Na rys. 3.9 przedstawiono ścieżki równowagi dla rozwiązania przyrostowego /krzywa 0 - identyczna z wykresem na rys. 3.3/ i rozwiązań opierających się - w obszarze przedkrytycznym - na łącznym wykorzystaniu kierunkowej i stycznej macierzy sztywności /krzywa

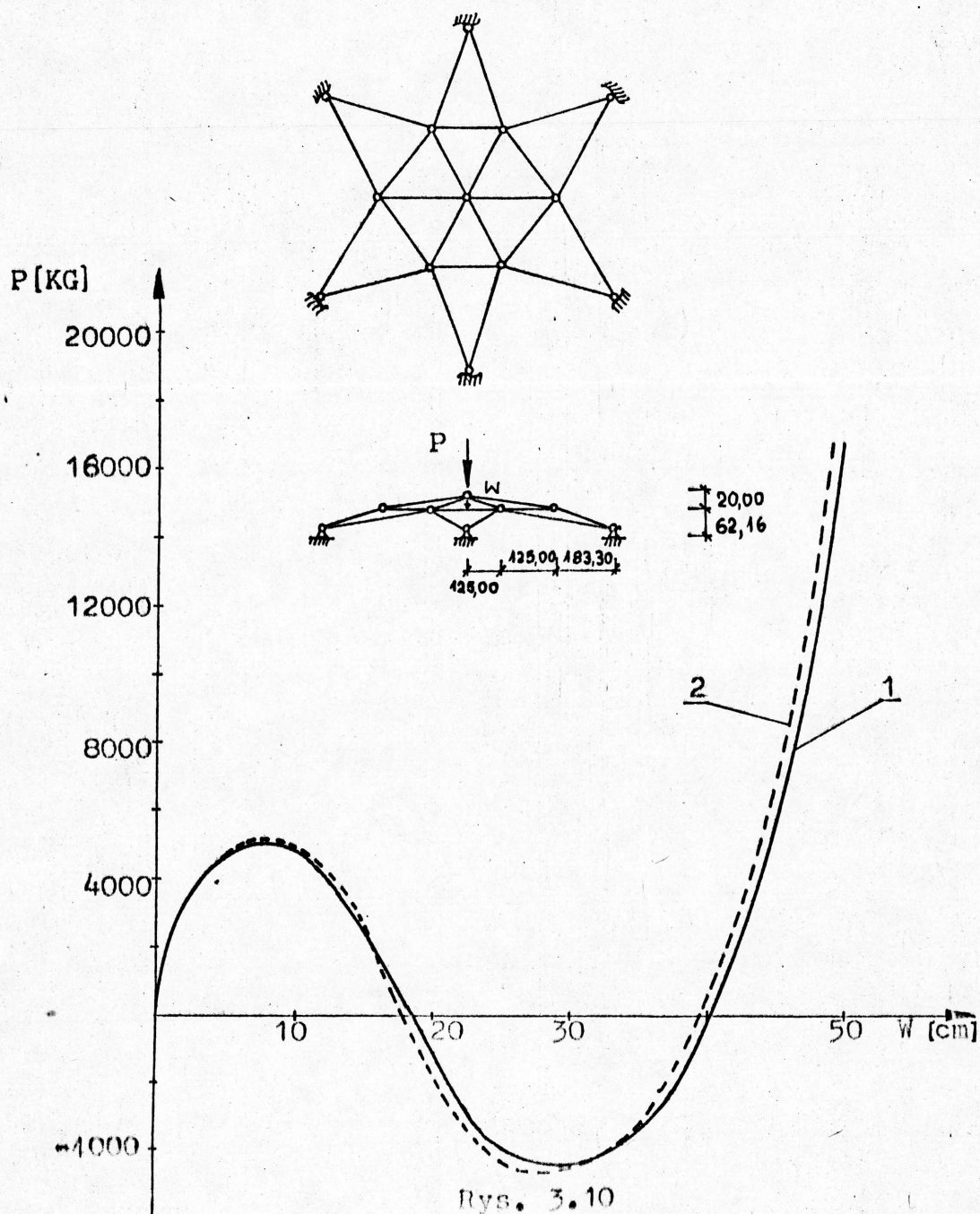
1 dla rozwiązania pełnego; krzywa 2 dla rozwiązania uproszczonego/.



Rys. 3.9

Widoczne są znaczne różnice, które w punktach przecięcia się ścieżki równowagi z osią odciętych są rzędu 23 % i 25 % - dla rozwiązania pełnego oraz 25 % i 30 % - dla rozwiązania uproszczonego. Wyznaczone ścieżki równowagi 1 i 2 - w obszarach pokrytychnych uzyskano przy wykorzystaniu algorytmu przyrostowego /przy dużej ilości iteracji w każdym z jego kroków/.

Powyższe spostrzeżenia - tak w zakresie zbieżności jak i powstających różnic - w pełni potwierdził inny przykład kratownicy; analizowano małą wyniosłą kopułę Schwedlera [43] - fragment rys. 3.10 - obciążoną siłą pionową przyłożoną w jej wierzchołku. Na rys. 3.10 pokazano wykres przemieszczeń pionowych obciążonego węzła; krzywa 1 sporządzona została dla "pełnego" rozwiązania, a krzywą 2 otrzymano dla rozwiązania uproszczonego. Obliczenia przeprowadzono wykorzystując metodę przyrostową i przy zastosowaniu uaktualnianego układu odniesienia.



3.5. Podsumowanie

Procedury przyrostowe oparte o sztywność styczną /formułowane w układzie Lagrange'a, jak i w uaktualnionym układzie Lagrange'a/ okazały się najlepszym narzędziem analizy tak przedkrytycznych, jak krytycznych i pokrytycznych stanów pracy konstrukcji. Są one mało wrażliwe - przy dużych dokładnościach - na wpływ uproszczeń polegających na nie uwzględnianiu tych elementów sztywności, które wynikają z uwzględnienia składnika $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2$ w tensorze opisującym odkształcenia. Jednak przy niezbyt dużych dokładnościach spełniania warunków równowagi, w każdym z kroków obciążenia, uproszczenia te powodują - głównie w obszarach pokrytycznych - pewne "odejście" ścieżki równowagi od jej prawidłowego kształtu, przy jednoczesnym, znacznym wzroście liczby wykonywanych - na zadanym poziomie dokładności - iteracji.

Procedury rozwiązania oparte o łączne wykorzystanie sztywności kierunkowej i stycznej - stosowane w obszarach przedkrytycznych - okazały się znacznie bardziej czułe na uproszczenia opisane powyżej. Śledzenie obszarów krytycznych, a szczególnie obszarów pokrytycznych przy wykorzystaniu tych rozwiązań może prowadzić do znacznych odchyłeń od rozwiązań poprawnych.

Przyjmowanie do analizy różnych postaci macierzy sztywności rzędu pierwszego /3.11/ i /3.12/ lub /3.16/ i /3.17/ lub /3.19/ i /3.20/ prowadziło - szczególnie w obszarach przedkrytycznych - do pomijalnie małych różnic w rozwiązaniach.

Nie uwzględnianie w rozwiązaniu - we wszystkich analizowanych algorytmach - sztywności rzędu drugiego powodowało kilkuprocentowe zawyżenie rezultatów w obszarach przedkrytycznych i krytycznych, powodując jednocześnie ich rozbieżność w obszarach pokrytycznych.

Z powyższych uwag wynika, że:

- analizę stanów przedkrytycznych konstrukcji kratowych skłonnych do przeskoku można prowadzić przyjmując uproszczenia w stosowanych algorytmach bez większego wpływu na rozwiązania,

- przyjmując uproszczone algorytmy w stanach przedkrytycznych zawyżamy - w stosunku do faktycznej - wartość obciążenia granicznego,
- badanie stanów pokrytycznych wymaga dokładnych rozwiązań stanów przedkrytycznych, jak i krytycznych; niewielkie odchylenia od rozwiązań prawidłowych w tych stanach powodować mogą znaczne zaburzenia rozwiązań w analizowanych - pokrytycznych - stanach pracy konstrukcji.

4. UKŁADY PRĘTOWE O PRĘTACH CIENKOŚCIENNYCH

4.1. Wprowadzenie i podstawowe założenia

W rozdziale tym omawia się algorytm służący geometrycznie nieliniowej analizie układów prętowych zbudowanych z prętów cienkościennych.

Pierwsze próby analizy konstrukcji cienkościennych przeprowadzone były przy użyciu macierzy przeniesienia [65], a także metody sił [65]. Okazały się one jednak mniej przydatne od analizy tych konstrukcji, która wykorzystuje metodę przemieszczeń. Za pierwsze prace, w których sformułowano sztywności elementu cienkościennego uważa się prace Krahully [31] i Rentona [52]. Dalsze opracowania, które poprzez sukcesywne uwzględnianie nowych składowych sztywności bądź inne ujęcie problemu, zasługują na szczególną uwagę to: prace Krajcinovica [30], Barsouma i Gallaghiera [6], Powella i Klingera [48], Meja [41], Argyrisa i Radaja [4] oraz Bažanta [9]. W oparciu o wyprowadzone sztywności analizowano tak problemy geometrycznie liniowe [4,30,31], jak i nieliniowe [9,66].

W rozdziale niniejszym buduje się macierze sztywności elementu cienkościennego, które uwzględniają pomijany dotychczas w analizie człon tensora Greena, a także pozwalają na geometrycznie nieliniową analizę elementu przy użyciu "pełniejszych" funkcji opisujących jego przemieszczenie.

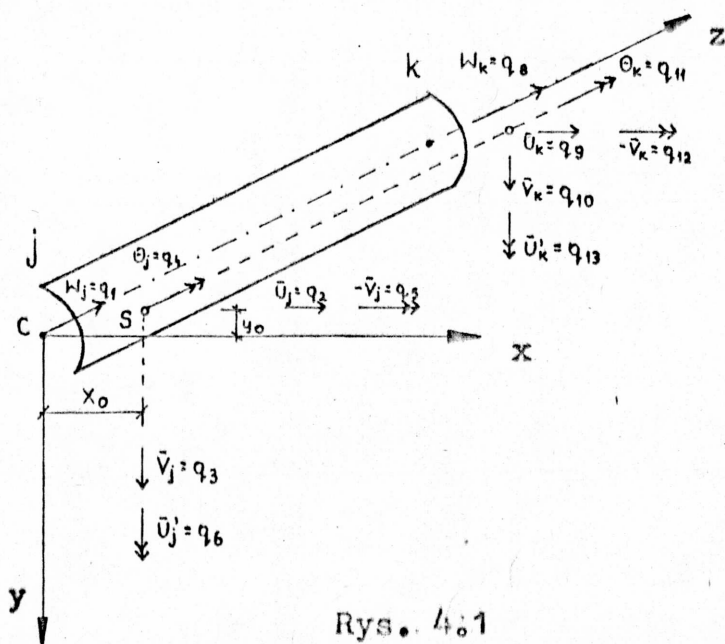
Rozwiązanie opiera się na następujących założeniach:

- węzły struktury zapewniają sztywne połączenie elementów w nich zbiegających się; sztywne połączenie dotyczy obrotów i przesuwów, przy jednocześnie możliwym sztywnym bądź swobodnym zamoco-

waniem pręta ze względu na deplanację jego końca,

- węzły, ze względu na swoją budowę, nie przekazują deplanacji [29,59,73] /deplanacja każdego ze zbiegających się w węźle prętów jest - w wypadku swobodnego zamocowania na deplanację - niezależnym od deplanacji innych prętów dodatkowym stopniem swobody węzła; niezależność ta nie dotyczy węzłów pośrednich/,
- elementami układu są prostoliniowe, pryzmatyczne, izotropowe pręty cienkościennie o dowolnym, otwartym przekroju poprzecznym,
- pręty w całym cyklu obciążenia nie osiągają nośności granicznej,
- dopuszcza się możliwość utraty pierwotnie prostoliniowej osi pręta poprzez wprowadzenie węzłów pośrednich,
- układ obciążony jest jednoparametrowym, konserwatywnym, statycznym obciążeniem węzłowym,
- materiał, z którego zbudowane są pręty jest liniowo sprężysty, a powstające w nim odkształcenia są małe,
- możliwe są duże przemieszczenia węzłów układu.

Rozpatrzmy pręt cienkościenny, o przekroju otwartym, w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej. Lokalny, prawoskrętny układ odniesienia $c-x-y-z$ dla pręta $j-k$ przyjęto tak, że oś $c-z$ pokrywa się z osią ciężkości pręta, a osie $c-x$ i $c-y$ są głównymi, centralnymi osiami jego poprzecznego przekroju /rys. 4.1/.



Rys. 4.1

W dalszych rozważaniach wielkości odnoszone do środka ścinania "s", których linia z założenia pokrywa się z osią obrotu pręta [54], oznaczane będą kreską u góry /za wyjątkiem kąta obrotu Θ /. Wektor przemieszczeń "i-tego" elementu konstrukcji w lokalnym układzie odniesienia definiuje się jako

$$\{q\}_i^T = \{W_j, \bar{U}_j, \bar{V}_j, \Theta, -\bar{V}'_j, \bar{U}'_j, \Theta'_j, W_k, \bar{U}_k, \bar{V}_k, \Theta_k, -\bar{V}'_k, \bar{U}'_k, \Theta'_k\}_i, \quad /4.1/$$

gdzie $\bar{U}, \bar{V}, W$ są funkcjami przemieszczeń elementu odpowiednio w kierunkach x, y, z lokalnego układu odniesienia, a Θ jest kątem obrotu względem osi podłużnej pręta przechodzącej przez środki ścinania przekrojów poprzecznych. Przez (...) oznaczono pochodną względem zmiennej z . Wektor sił brzegowych dla elementu - w konsekwencji przyjęcia zależności /4.1/ - definiuje się jako

$$\{f\}_i^T = \{P_j, \bar{V}_{xj}, \bar{V}_{yj}, \bar{M}_{zj}, M_{xj}, M_{yj}, \bar{B}_j, P_k, \bar{V}_{xk}, \bar{V}_{yk}, \bar{M}_{zk}, M_{xk}, M_{yk}, \bar{B}_k\}_i, \quad /4.2/$$

gdzie przez $P, \bar{V}_x, \bar{V}_y, \bar{M}_z, M_x, M_y$ oznaczone /odpowiednio/ siły i momenty skierowane wzdłuż osi $c-z, c-x, c-y$ lokalnego układu odniesienia, a przez $\bar{B}$ bimoment. Ich dodatnie zwroty dla przekroju o normalnej dodatniej określają wielkości $q_8 \div q_{14}$ z rys.4.1.

Analizę pręta prowadzić się będzie przy następujących założeniach [65]:

- przekrój poprzeczny pręta jest doskonale sztywny w swojej płaszczyźnie, lecz ma swobodę pacywania się,
- odkształcenia postaciowe powierzchni środkowej pręta są pomijalnie małe,
- wpływ sił tnących jak i momentów zginających ściankę pręta jest pomijany.

4.2. Sztywność elementu

4.2.1. Funkcje przemieszczeń i ich aproksymacja

Uwzględniając poczynione założenia funkcje przemieszczeń dla dowolnego punktu przekroju poprzecznego wyrazić można w postaci

$$U(x,y,z) = \bar{U}(z) - (y-y_0) \cdot \Theta(z) - \left[\frac{\Theta^2(z)}{2} \cdot (x-x_0) \right]_*, \quad /4.3/$$

$$V(x,y,z) = \bar{V}(z) + (x-x_0) \cdot \Theta(z) - \left[\frac{\Theta^2(z)}{2} \cdot (y-y_0) \right]_*,$$

$$W(x,y,z) = W(z) - \left\{ \bar{U}'(z) + [\bar{V}'(z) \Theta(z)] \right\}_* x - \left\{ \bar{V}'(z) - [\bar{U}'(z) \Theta(z)] \right\}_* y - \Theta'(z) \bar{\omega},$$

gdzie x_0, y_0 oznaczają współrzędne środka ścinania "s" w lokalnym układzie odniesienia pręta, a $\bar{\omega}$ jest główną współrzędną wycinową [54,65].

Postać funkcji przemieszczeń opisaną równaniami /4.3/ otrzymać można z prostych rozważań geometrycznych, bądź przez rozwinięcie w szereg Mac Laurina funkcji, które otrzymali Klüppel i Winkelmann [28]. W rozwinięciu tym pomija się człony trzeciego, czwartego i wyższych rzędów. W opisie /4.3/ funkcji przemieszczeń w nawiasy kwadratowe oznaczone gwiazdką u dołu / [...]_* / ujęto te człony funkcji, które dotychczas nie były uwzględniane przy wyprowadzaniu elementów sztywności. Pozwala to na analizę ich wpływu na rozwiązanie.

Do dalszych rozważań przyjęto paraboliczną postać funkcji $\bar{U}(z)$, $\bar{V}(z)$, $\Theta(z)$, a liniową funkcji $W(z)$. Postać funkcji przemieszczeń dla "i-tego" elementu zapisuje się jako

$$\begin{Bmatrix} W(z) \\ U(z) \\ V(z) \\ \Theta(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{q\}_i,$$

gdzie funkcje kształtu N_j /j = 1,2,...,6/ mają postać /4.4/

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & N_4 &= 1(-\xi^2 + \xi^3), & /4.5/ \\ N_2 &= 1(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), & N_5 &= 1 - \xi, \\ N_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & N_6 &= \xi; \quad \xi = \frac{z}{l}, \end{aligned}$$

a przez l oznaczono długość elementu.

Funkcja opisująca w /4.4/ zmienność kąta obrotu $\Theta(z)$ poprawna jest w przypadku, kiedy końce pręta nie mają swobody deplanacji. W przypadku kiedy koniec "k" pręta j-k ma niczym nie skrępowaną swobodę deplanacji funkcje N_1, N_2, N_3, N_4 w wyrażeniu na $\Theta(z)$ przechodzą odpowiednio na funkcje N'_1, N'_2, N'_3, N'_4 , które mają postać

$$\begin{aligned} N'_1 &= \frac{1}{2}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + 1, & N'_3 &= -\frac{1}{2}\xi^3 + \frac{3}{2}\xi^2, & /4.6/ \\ N'_2 &= 1\left(\frac{1}{2}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \xi\right), & N'_4 &= 0. \end{aligned}$$

Przyjęta paraboliczna zmienność funkcji przemieszczeń dla elementu stosowana jest w większości opracowań zajmujących się problemem sformułowania macierzy sztywności dla elementu cienkościenne-
go.

Funkcje przemieszczeń w postaci trygonometrycznej, które dokładnie spełniają statyczne równanie na skręcanie nieswobodne pręta cienkościenne [61,65] stosowane były przez Krajcinovica [30]. W pracy swojej wykazał on, że założenie funkcji o zmienności parabolicznej prowadzi do błędnych rezultatów, jeżeli tylko stosunek sztywności pręta na skręcanie do jego deplanacyjnej sztywności nie jest pomijalnie mały. Stwierdzenie to - na podstawie badań numerycznych - podważał Mei [42], który pokazał, że założenie prostej, parabolicznej postaci funkcji przemieszczeń prowadzi do wyników zgodnych z rozwiązaniami teoretycznymi.

Zgodność tych dwóch różnych podejść otrzymuje się w przypadku kiedy stosunek sztywności skrętnej do sztywności deplanacyjnej elementu dąży do zera.

W pracy zdecydowano się na przyjęcie parabolicznego wyrażenia funkcji przemieszczeń ze względu na to, że w większości konstruowanych układów prętowych przekroje poprzeczne przyjmowanych elementów są takie, że ich sztywność skrętna jest mała w stosunku do sztywności giętnej.

4.2.2. Energia sprężysta pręta cienkościennego przy uwzględnieniu naprężeń początkowych

Zgodnie z poczynionym założeniem /pkt 4.1/, w wyrażeniach na energię sprężystą pręta, pomijane będą wpływy sił tnących, jak i momentów gnących ścianki przekroju pręta. Wpływ tych wielkości uznaje się za mały w stosunku do wielkości dominujących - w węzłowo obciążanych układach prętowych - wywołujących naprężenia normalne σ /.

Ze względu na to, że algorytm służy geometrycznie nieliniowej analizie tak przedkrytycznych, jak i pokrytycznych stanów pracy konstrukcji /spodziewane są duże obroty/, w wyrażeniach na zgromadzoną w elemencie energię uwzględniono wpływ momentów skręcających.

Rozpatrzymy pręt, w którym naprężenia normalne σ^0 /dodatnie dla rozciągania/ są w równowadze z początkową siłą osiową P^0 , początkowymi momentami zginającymi M_x^0 i M_y^0 względem głównych, centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego oraz początkowym bimomentem $\bar{B}^0$ odniesionym do środka ścinania. Początkowe naprężenie normalne σ^0 wyraża się zwykle jako [61]

$$\sigma^0 = \frac{P^0}{A} + \frac{M_x^0}{I_{xx}} \cdot y - \frac{M_y^0}{I_{yy}} \cdot x - \frac{\bar{B}^0}{I_{\omega\omega}} \bar{\omega} \quad , \quad /4.7/$$

gdzie $\bar{B}^0 = - \int_A \sigma^0 \bar{\omega} dA \quad , \quad /4.8/$

a $I_{xx} = \int_A y^2 dA \quad , \quad /4.9/$

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA \quad ,$$

$$I_{\omega\omega} = \int_A \bar{\omega}^2 dA \quad .$$

I_{xx} , I_{yy} są momentami bezwładności przekroju poprzecznego pręta względem głównych centralnych osi bezwładności przekroju /odpowiednio względem osi $c-x$ i $c-y$ /;

I_{ω} jest wycinkowym momentem bezwładności przekroju poprzecznego pręta, a A jego polem.

W rozważaniach przyjęto, że współrzędna wycinkowa $\bar{\omega}$ /z biegunem w środku ścinania/ zdefiniowana [61] jest jako

$$\bar{\omega} = \int_0^s \rho \, ds, \quad /4.10/$$

gdzie: ρ jest odległością od środka ścinania s do stycznej do linii środkowej przekroju poprzecznego, s jest współrzędną liniową odmierzaną od głównego punktu wycinkowego profilu [54].

Iloczyn $\rho \, ds$ uważany jest za dodatni dla obrotu promienia ρ niezgodnego z ruchem wskazówek zegara.

Do analizy przyjęto wielkości e_z i ϵ_z , które są odpowiednio zlinearyzowaną i pełną postacią tensora odkształceń Greena, a dokładniej jego składowej opisującej odkształcenia w kierunku osi podłużnej elementu. Wielkości te zapisuje się w postaci

$$e_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad /4.11/$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right]^*.$$

Przyrost całkowitej energii potencjalnej elementu (ΔU) podczas nieskończenie małego przyrostu przemieszczeń jego węzłów wyraża się jako

$$\Delta U = \Delta U^1 + \Delta U^0 - \Delta W, \quad /4.12/$$

gdzie ΔW jest przyrostem pracy obciążenia, a przyrosty energii sprężystej mają postać

$$\Delta U^1 = \frac{1}{2} \int_V E \, e_z^2 \, dV + \int_z \frac{1}{2} G I_s \, \theta'^2 \, dz, \quad /4.13/$$

$$\Delta U^0 = \int_V G^0 \, \epsilon_z \, dV + \int_z M_s^0 \, \theta' \, dz.$$

Przez E oznaczono moduł Younga, G oznacza moduł Kirchhoffa, a I_s jest stałą skręcania [61]. Dla pręta cienkościennego o przekroju otwartym, o stałej grubości ścianki t , przyjmuje się, że stała skręcania wynosi

$$I_s = \frac{1}{3} \sum_i m_i t_i^3, \quad /4.14/$$

gdzie m_i jest długością linii środkowej elementu przekroju poprzecznego o grubości t_i - sumowanie obejmuje wszystkie elementy przekroju poprzecznego.

Przez M_s^0 we wzorze /4.13/₂ oznaczono początkowy moment swobodnego skręcania /tak zwany moment Saint-Venanta [61,65] /.

Ze względu na to, że rozpatrywane są tylko infinitesymalne przyrosty deformacji w równaniu /4.13/₁ użyto postaci /4.11/₁ składowej tensora odkształceń. W równaniu /4.13/₂ - z uwagi na to, że G^0 może być wielkością dużą [27] - wykorzystano równanie /4.11/₂.

Uwzględniając równania /4.3/, /4.7/, /4.11/₁ i /4.11/₂ w równaniach /4.13/₁ i /4.13/₂ przyrosty energii ΔU^1 i ΔU^6 wyrazić można w następujący sposób

$$\begin{aligned} \Delta U^1 = & \int_z \frac{1}{2} E \left[A W^2 + I_{yy} \bar{u}''^2 + I_{xx} \bar{v}''^2 + I_{\omega\omega} \theta''^2 \right] dz + \quad /4.15/ \\ & + \left[\int_z \frac{1}{2} E I_{yy} (\bar{v}' \theta' + \bar{v}'' \theta) (\bar{v}' \theta' + \bar{v}'' \theta + 2 \bar{u}'') dz \right]_* + \\ & + \left[\int_z \frac{1}{2} E I_{xx} (\bar{u}' \theta' + \bar{u}'' \theta) (\bar{u}' \theta' + \bar{u}'' \theta + 2 \bar{v}'') dz \right]_* + \\ & + \left[\int_z \frac{1}{2} E I_{yy} (\bar{v}^2 \theta'^2 + \bar{v}''^2 \theta^2 + 2 \bar{u}'' \bar{v}' \theta' + 2 \bar{u}'' \bar{v}'' \theta + 2 \bar{v}' \bar{v}'' \theta \theta') dz \right]_* + \\ & + \left[\int_z \frac{1}{2} E I_{xx} (\bar{u}^2 \theta'^2 + \bar{u}''^2 \theta^2 + 2 \bar{u}' \bar{v}'' \theta' + 2 \bar{u}'' \bar{v}'' \theta + 2 \bar{u}' \bar{u}'' \theta \theta') dz \right]_* + \\ & + \int_z \frac{1}{2} G I_s \theta'^2 dz, \end{aligned}$$

gdzie $(\dots)''$ oznacza drugą pochodną względem z .

Przyrost energii ΔU^0 zapisać można następująco

$$\begin{aligned} \Delta U^0 = & \Delta U_{P^0}^0 + \Delta U_{[P^0]_*}^0 + \Delta U_{[P^0]^*}^0 + \Delta U_{M_x^0}^0 + \Delta U_{[M_x^0]_*}^0 + \Delta U_{[M_x^0]^*}^0 \quad /4.16/ \\ & + \Delta U_{M_y^0}^0 + \Delta U_{[M_y^0]_*}^0 + \Delta U_{[M_y^0]^*}^0 + \Delta U_{\bar{B}^0}^0 + \Delta U_{[\bar{B}^0]_*}^0 + \Delta U_{[\bar{B}^0]^*}^0 \\ & + \Delta U_{M_s^0}^0 . \end{aligned}$$

Poszczególne elementy prawej strony wzoru /4.16/ mają postać

$$U_{P^0}^0 = P^0 \int_z \left(W' + \frac{1}{2} \bar{U}^2 + \frac{1}{2} \bar{V}^2 + \bar{U}' \Theta' y_0 - \bar{V}' \Theta' x_0 + \alpha_1 \Theta^2 \right) dz, \quad /4.17/$$

$$U_{[P^0]_*}^0 = P^0 \int_z \left(\bar{U}' \Theta \Theta' x_0 + \bar{V}' \Theta \Theta' y_0 + \alpha_1 \Theta^2 \Theta^2 \right) dz ,$$

$$U_{[P^0]^*}^0 = \frac{P^0}{2\Lambda} \int_z \left(W^2 + \bar{U}''^2 I_{yy} + \bar{V}''^2 I_{xx} + \Theta''^2 I_{\omega\omega} \right) dz ,$$

$$U_{M_x^0}^0 = M_x^0 \int_z \left(-\bar{V}'' - \bar{U}' \Theta' + \beta_1 \Theta^2 \right) dz ,$$

$$U_{[M_x^0]_*}^0 = M_x^0 \int_z \left(\bar{U}' \Theta' + \bar{U}'' \Theta - \bar{V}' \Theta \Theta' + \beta_1 \Theta^2 \Theta^2 \right) dz ,$$

$$\begin{aligned} U_{[M_x^0]^*}^0 = & M_x^0 \int_z \left(\frac{1}{2} \bar{U}''^2 \frac{I_{xyy}}{I_{xx}} + \frac{1}{2} \bar{V}''^2 \frac{I_{xxx}}{I_{xx}} + \frac{1}{2} \Theta''^2 \frac{I_{x\omega\omega}}{I_{xx}} - W' \bar{V}'' + \right. \\ & \left. + \bar{U}'' \bar{V}'' \frac{I_{xyy}}{I_{xx}} + \bar{U}'' \Theta \frac{I_{xy\omega}}{I_{xx}} + \bar{V}'' \Theta \frac{I_{xx\omega}}{I_{xx}} \right) dz , \end{aligned}$$

$$U_{[M_y^0]^*}^0 = - M_y^0 \int_z \left(-\bar{U}'' + \bar{V}' \Theta' + \mu_1 \Theta^2 \right) dz ,$$

$$U_{[M_y]_*}^0 = -M_y^0 \int_z \left(-\bar{v}' \theta' - \bar{v}'' \theta - \bar{u}' \theta \theta' + \mu_1 \theta^2 \theta' \right) dz, \quad /cd.4.17/$$

$$U_{[M_y]_*}^0 = M_y^0 \int_z \left(-\frac{1}{2} \bar{u}''^2 \frac{I_{yyy}}{I_{yy}} - \frac{1}{2} \bar{v}''^2 \frac{I_{xxy}}{I_{yy}} - \frac{1}{2} \theta''^2 \frac{I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{yy}} + W' \bar{u}'' - \right. \\ \left. - \bar{u}'' \bar{v}'' \frac{I_{xyy}}{I_{yy}} - \bar{u}'' \theta'' \frac{I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{yy}} - \bar{v}'' \theta'' \frac{I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{yy}} \right) dz, \quad ,$$

$$U_{\bar{B}^0}^0 = \bar{B}^0 \int_z \left(\theta'' - \delta_1 \theta^2 \right) dz, \quad ,$$

$$U_{[\bar{B}^0]_*}^0 = -\bar{B}^0 \int_z \delta_1 \theta^2 \theta' dz, \quad ,$$

$$U_{[\bar{B}^0]_*}^0 = \bar{B}^0 \int_z \left(-\frac{1}{2} \bar{u}''^2 \frac{I_{yy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - \frac{1}{2} \bar{v}''^2 \frac{I_{xx\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - \frac{1}{2} \theta''^2 \frac{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} + W' \theta'' - \right. \\ \left. - \bar{u}'' \bar{v}'' \frac{I_{xy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - \bar{u}'' \theta'' \frac{I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - \bar{v}'' \theta'' \frac{I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} \right) dz, \quad ,$$

$$U_{M_s^0}^0 = M_s^0 \int_z \theta' dz, \quad ,$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(x_0^2 + y_0^2 + \frac{I_{xx} + I_{yy}}{A} \right), \quad \mu_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{yyy} + I_{xxy}}{I_{yy}} - 2x_0 \right), \quad /4.18/$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{xxx} + I_{xyy}}{I_{xx}} - 2y_0 \right), \quad \delta_1 = \frac{1}{2} \frac{I_{xx\bar{\omega}} + I_{yy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}.$$

Charakterystyki przekrojowe zdefiniowano w następujący sposób

$$\begin{aligned} I_{xxx} &= \int_A y^3 dA, & I_{yy\bar{\omega}} &= \int_A x^2 \bar{\omega} dA, & /4.19/ \\ I_{xyy} &= \int_A yx^2 dA, & I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}} &= \int_A y\bar{\omega}^2 dA, \\ I_{yyy} &= \int_A x^3 dA, & I_{xy\bar{\omega}} &= \int_A yx\bar{\omega} dA, \\ I_{xxy} &= \int_A y^2x dA, & I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}} &= \int_A x\bar{\omega}^2 dA, \\ I_{xx\bar{\omega}} &= \int_A y^2\bar{\omega} dA, & I_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\omega}} &= \int_A \bar{\omega}^3 dA. \end{aligned}$$

W równaniu /4.16/ pominięto składniki energii, które pochodzą z jednoczesnego uwzględnienia dodatkowych członów w wyrażeniu na przemieszczenia /4.3/ i członu $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2$ w wyrażeniu /4.11/₂. Uzasadnienie tego uproszczenia znaleźć można poniżej /w punkcie 4.2.3/.

4.2.3. Sztywność styczna elementu

Uwzględniając w równaniach opisujących przyrost energii sprężystej w pręcie /4.13/ równania wyrażające założoną postać funkcji przemieszczeń /4.3 - 4.6/, elementy k_{ij}^s stycznej macierzy sztywności otrzymujemy poprzez dwukrotne jej różniczkowanie względem składowych wektora przemieszczeń brzegowych elementu $\{q\}$ /4.1/.

Ze względu na to, że algorytm - oparty o otrzymaną styczną macierz sztywności - uaktualnia geometrię zadania na początku każdego kroku iteracyjnego, elementy sztywności zależne od przemieszczeń, bądź ich kwadratów, zerują się na początku każdego z nich. Gdyby przyjąć - co odpowiadałoby zmodyfikowanej metodzie Newtona-Raphsona - stałą postać stycznej macierzy sztywności w kolejnych iteracjach danego kroku obciążenia nie byłoby możliwe odrzucenie zależnych od przemieszczeń wyrazów macierzy sztywności, co w konsekwencji spowodowałoby - jak stwierdzono - znaczną komplikację realizowanego postępowania. Powyższa uwaga wyjaśnia przyczynę odrzucenia na etapie obliczania przyrostu energii sprężystej pręta tych jej wyrazów, które powstały w wyniku uwzględnienia dodatkowych członów w wyrażeniach na przemieszczenia i członu $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2$ tensora odkształceń Greena. Wyrazy te są iloczynami co najmniej trzech występujących w kwadracie funkcji przemieszczeń bądź ich pochodnych, a więc po dwukrotnym różniczkowaniu wszystkie powstające elementy są funkcjami przemieszczeń.

Ostateczną postać stycznej macierzy sztywności elementu cienkościennego zapisać można jako

$$[k]^s = [k_0] + P^0([k_1] + [k_1]^*) + M_x^0([k_2] + [k_2]^* + [k_2]_*) + M_y^0([k_3] + [k_3]^* + [k_3]_*) + \\ + B^0([k_4] + [k_4]^*) ,$$

/4.20/

gdzie $[k_0]$ jest sprężystą macierzą sztywności elementu, a pozostałe macierze oznaczone literą $[k]$ z odpowiednimi indeksami porządkowymi stanowią macierz sztywności geometrycznej.

Ze względu na przejrzystość zapisu i łatwość analizy, elementy stycznej macierzy sztywności rozbito na cztery grupy:

- do pierwszej zalicza się elementy macierzy $[k_0]$, w ramach której wyodrębniono elementy powstałe w wyniku uwzględnienia swobodnego i nieswobodnego skręcania,
 - do grupy drugiej zalicza się elementy macierzy: $P^0[k_1]$, $M_x^0[k_2]$, $M_y^0[k_3]$, $\bar{B}^0[k_4]$,
 - do trzeciej grupy zalicza się elementy macierzy: $P^0[k_1]^*$, $M_x^0[k_2]^*$, $M_y^0[k_3]^*$, $\bar{B}^0[k_4]^*$,
 - czwartą grupę stanowią elementy macierzy $M_x^0[k_2]^*$ i $M_y^0[k_3]^*$.
- W każdej z tych grup podano alternatywną postać elementów sztywności, które zmieniają się w wyniku przyjęcia takiej funkcji $\theta(z)$, która umożliwia swobodę deplanacji jednego z końców pręta. Dla uproszczenia zapisu pomija się indeksy przy poszczególnych elementach macierzy.

Elementy pierwszej grupy ($[k_0]$):

$$k(1,1) = -k(1,8) = k(8,8) = \frac{EA}{l}, \quad /4.21/$$

$$k(2,2) = -k(2,9) = k(9,9) = \frac{12EI_{yy}}{l^3},$$

$$k(2,6) = k(2,13) = -k(6,9) = -k(9,13) = \frac{6EI_{yy}}{l^2},$$

$$k(6,6) = k(13,13) = \frac{4EI_{yy}}{l},$$

$$k(6,13) = \frac{2EI_{yy}}{l},$$

$$k(3,3) = -k(3,10) = k(10,10) = \frac{12EI_{xx}}{l^3},$$

$$k(3,5) = k(3,12) = -k(5,10) = -k(10,12) = -\frac{6EI_{xx}}{l^2},$$

$$k(5,5) = k(12,12) = \frac{4EI_{xx}}{l},$$

$$k(5,12) = \frac{2EI_{xx}}{l}.$$

Elementy powstałe w wyniku uwzględnienia nieswobodnego skręcania mają postać:

$$k(4,4) = -k(4,11) = k(11,11) = \frac{12EI_{\omega\omega}}{l^3}, \quad /4.22/$$

$$k(4,7) = k(4,14) = -k(7,11) = -k(11,14) = \frac{6EI_{\omega\omega}}{l^2},$$

$$k(7,7) = k(14,14) = \frac{4EI_{\omega\omega}}{l},$$

$$k(7,14) = \frac{2EI_{\omega\omega}}{l}.$$

Uwzględnienie swobodnego skręcania prowadzi do powstania elementów:

$$k(4,4) = -k(4,11) = k(11,11) = \frac{6GI_s}{5l}, \quad /4.23/$$

$$k(4,7) = k(4,14) = -k(7,11) = -k(11,14) = \frac{1}{10} GI_s,$$

$$k(7,7) = k(14,14) = \frac{2}{15} GI_s l,$$

$$k(7,14) = -\frac{1}{30} GI_s l.$$

Dla możliwej swobodnej deplanacji końca pręta elementy opisane wzorami /4.22/ i /4.23/ przechodzą na elementy, które odpowiednio opisują wzory /4.24/ i /4.25/.

Elementy powstałe w wyniku uwzględnienia nieswobodnego skręcania:

$$k(4,4) = -k(4,11) = k(11,11) = \frac{3EI_{\omega\omega}}{l^3}, \quad /4.24/$$

$$k(4,7) = -k(7,11) = \frac{3EI_{\omega\omega}}{l^2},$$

$$k(7,7) = \frac{3EI_{\omega\omega}}{l}.$$

Elementy powstałe w wyniku uwzględnienia swobodnego skręcania:

$$k(4,4) = -k(4,11) = k(11,11) = \frac{6GI_s}{5l} , \quad /4.25/$$

$$k(4,7) = -k(7,11) = -\frac{1}{5} GI_s ,$$

$$k(7,7) = \frac{1}{10} GI_s l .$$

Elementy grupy drugiej / $P^0[k_1]$, $M_x^0[k_2]$, $M_y^0[k_3]$, $\bar{B}^0[k_4]$ /:

$$k(2,2) = -k(2,9) = k(9,9) = \frac{6P^0}{5l} , \quad /4.26/$$

$$k(2,4) = -k(2,11) = -k(4,9) = k(9,11) = \frac{6P^0 y_0}{5l} - \frac{6M_x^0}{5l} ,$$

$$k(2,6) = k(2,13) = -k(6,9) = -k(9,13) = \frac{1}{10} P^0 ,$$

$$k(2,7) = k(2,14) = -k(7,9) = -k(9,14) = \frac{1}{10} P^0 - \frac{1}{10} M_x^0 ,$$

$$k(3,3) = -k(3,10) = k(10,10) = \frac{6P^0}{5l} ,$$

$$k(3,4) = -k(3,11) = -k(4,10) = k(10,11) = -\frac{6P^0 x_0}{5l} - \frac{6M_y^0}{5l} ,$$

$$k(3,5) = k(3,12) = -k(5,10) = -k(10,12) = -\frac{1}{10} P^0 ,$$

$$k(3,7) = k(3,14) = -k(7,10) = -k(10,14) = -\frac{1}{10} P^0 x_0 - \frac{1}{10} M_y^0 ,$$

$$k(4,4) = -k(4,11) = k(11,11) = \frac{12P^0 \alpha_1}{5l} + \frac{12M_x^0 \beta_1}{5l} - \frac{12M_y^0 \mu_1}{5l} - \frac{12\bar{B}^0 \delta_1}{5l} ,$$

$$k(4,5) = k(4,12) = -k(5,11) = -k(11,12) = \frac{1}{10} P^0 x_0 + \frac{1}{10} M_y^0 ,$$

$$k(4,6) = k(4,13) = -k(6,11) = -k(11,13) = \frac{1}{10} P^0 y_0 - \frac{1}{10} M_x^0 ,$$

$$k(4,7) = k(4,14) = -k(7,11) = -k(11,14) = \frac{2}{10} P^0 \alpha_1 + \frac{2}{10} M_x^0 \beta_1 - \\ - \frac{2}{10} M_y^0 \mu_1 - \frac{2}{10} \bar{B}^0 \delta_1 ,$$

$$k(5,5) = k(12,12) = \frac{2}{15} P^0 l ,$$

$$k(5,7) = k(12,14) = \frac{2}{15} P^0 x_0 l + \frac{2}{15} M_y^0 l \quad , \quad /cd.4.26/$$

$$k(5,12) = -\frac{1}{30} P^0 l \quad ,$$

$$k(5,14) = k(7,12) = -\frac{1}{30} P^0 x_0 l - \frac{1}{30} M_y^0 l \quad ,$$

$$k(6,6) = k(13,13) = \frac{2}{15} P^0 l \quad ,$$

$$k(6,7) = k(13,14) = \frac{2}{15} P^0 y_0 l - \frac{2}{15} M_x^0 l \quad ,$$

$$k(6,13) = -\frac{1}{30} P^0 l \quad ,$$

$$k(6,14) = k(7,13) = -\frac{1}{30} P^0 y_0 l + \frac{1}{30} M_x^0 l \quad ,$$

$$k(7,7) = k(14,14) = \frac{4}{15} P^0 \alpha_1 l + \frac{4}{15} M_x^0 \beta_1 l - \frac{4}{15} M_y^0 \mu_1 l - \frac{4}{15} \bar{B}^0 \delta_1 l \quad ,$$

$$k(7,14) = -\frac{1}{15} P^0 \alpha_1 l - \frac{1}{15} M_x^0 \beta_1 l + \frac{1}{15} M_y^0 \mu_1 l + \frac{1}{15} \bar{B}^0 \delta_1 l \quad .$$

Dla możliwej swobodnej deplanacji końca pręta elementy opisane wzorem /4.26/ przechodzą na elementy ze wzoru /4.27/:

$$k(2,2) = -k(2,9) = k(9,9) = \frac{6P^0}{5l} \quad , \quad /4.27/$$

$$k(2,4) = -k(2,11) = -k(4,9) = k(9,11) = \frac{21P^0 y_0}{20l} - \frac{21M_x^0}{20l} \quad ,$$

$$k(2,6) = k(2,13) = -k(6,9) = -k(9,13) = \frac{1}{10} P^0 \quad ,$$

$$k(2,7) = -k(7,9) = -\frac{1}{20} P^0 y_0 + \frac{1}{20} M_x^0 \quad ,$$

$$k(3,3) = -k(3,10) = k(10,10) = \frac{6P^0}{5l} \quad ,$$

$$k(3,4) = -k(3,11) = -k(4,10) = k(10,11) = -\frac{21P^0 x_0}{20l} - \frac{21M_y^0}{20l} \quad ,$$

$$k(3,5) = k(3,12) = -k(5,10) = -k(10,12) = -\frac{1}{10} P^0 \quad ,$$

$$k(3,7) = -k(7,10) = \frac{1}{20} P^0 x_0 + \frac{1}{20} M_y^0 \quad ,$$

$$k(4,4) = -k(4,11) = k(11,11) = \frac{12P^0_1}{51} + \frac{12M^0_x\beta_1}{51} - \frac{12M^0_y\mu_1}{51} - \frac{12\bar{B}^0\delta_1}{51} \quad /cd.4.27/$$

$$k(4,5) = -k(5,11) = \frac{3}{20} P^0_{x_0} + \frac{3}{20} M^0_y \quad ,$$

$$k(4,12) = -k(11,12) = -\frac{1}{10} P^0_{x_0} - \frac{1}{10} M^0_y \quad ,$$

$$k(4,6) = -k(6,11) = \frac{3}{20} P^0_{y_0} - \frac{3}{20} M^0_x \quad ,$$

$$k(4,13) = -k(11,13) = -\frac{1}{10} P^0_{y_0} + \frac{1}{10} M^0_x \quad ,$$

$$k(4,7) = -k(7,11) = -\frac{2}{5} P^0_1 - \frac{2}{5} M^0_x\beta_1 + \frac{2}{5} M^0_y\mu_1 + \frac{2}{5} \bar{B}^0\delta_1 \quad ,$$

$$k(5,5) = k(12,12) = \frac{2}{15} P^0_1 \quad ,$$

$$k(5,7) = \frac{3}{20} P^0_{x_0}1 + \frac{3}{20} M^0_y1 \quad ,$$

$$k(5,12) = -\frac{1}{30} P^0_1 \quad ,$$

$$k(7,12) = -\frac{1}{10} P^0_{x_0}1 - \frac{1}{10} M^0_y1 \quad ,$$

$$k(6,6) = k(13,13) = \frac{2}{15} P^0_1 \quad ,$$

$$k(6,7) = \frac{3}{20} P^0_{y_0}1 - \frac{3}{20} M^0_x1 \quad ,$$

$$k(6,13) = -\frac{1}{30} P^0_1 \quad ,$$

$$k(7,13) = -\frac{1}{10} P^0_{y_0}1 + \frac{1}{10} M^0_x1 \quad ,$$

$$k(7,7) = \frac{1}{5} P^0_1 + \frac{1}{5} M^0_x\beta_1 - \frac{1}{5} M^0_y\mu_1 - \frac{1}{5} \bar{B}^0\delta_1 \quad .$$

Elementy grupy trzeciej / $P^0[k_1]^*$, $M^0_x[k_2]^*$, $M^0_y[k]^*$, $\bar{B}^0[k_4]^*$ / :

$$k(1,1) = -k(1,8) = k(8,8) = \frac{P^0}{l} \quad , \quad /4.28/$$

$$k(1,5) = -k(1,12) = -k(5,8) = k(8,12) = \frac{M_x^0}{l} \quad ,$$

$$k(1,6) = -k(1,3) = -k(6,8) = k(8,13) = \frac{M_y^0}{l} \quad ,$$

$$k(1,7) = -k(1,14) = -k(7,8) = k(8,14) = \frac{\bar{B}^0}{l} \quad ,$$

$$k(2,2) = -k(2,9) = k(9,9) = P^0 \frac{12I_{yy}}{Al^3} + M_x^0 \frac{12I_{xy}}{I_{xx}l^3} -$$

$$- M_y^0 \frac{12I_{yy}}{I_{yy}l^3} - \bar{B}^0 \frac{12I_{y\omega\omega}}{I_{\omega\omega}l^3} \quad ,$$

$$k(2,3) = -k(2,10) = -k(3,9) = k(9,10) = M_x^0 \frac{12I_{xxy}}{I_{xx}l^3} -$$

$$- M_y^0 \frac{12I_{xyy}}{I_{yy}l^3} - \bar{B}^0 \frac{12I_{xy\omega}}{I_{\omega\omega}l^3} \quad ,$$

$$k(2,4) = -k(2,11) = -k(4,9) = k(9,11) = M_x^0 \frac{12I_{xy\omega}}{I_{xx}l^3} -$$

$$- M_y^0 \frac{12I_{yy\omega}}{I_{yy}l^3} - \bar{B}^0 \frac{12I_{y\omega\omega}}{I_{\omega\omega}l^3} \quad ,$$

$$k(2,5) = k(2,12) = -k(5,9) = -k(9,12) = -M_x^0 \frac{6I_{xxy}}{I_{xx}l^2} +$$

$$+ M_y^0 \frac{6I_{xyy}}{I_{yy}l^2} + \bar{B}^0 \frac{6I_{xy\omega}}{I_{\omega\omega}l^2} \quad ,$$

$$k(2,6) = k(2,13) = -k(6,9) = -k(9,13) = P^0 \frac{6I_{yy}}{Al^2} + M_x^0 \frac{6I_{xy}}{I_{xx}l^2} -$$

$$- M_y^0 \frac{6I_{yy}}{I_{yy}l^2} - \bar{B}^0 \frac{6I_{yy\omega}}{I_{\omega\omega}l^2} \quad ,$$

$$k(2,7) = k(2,14) = k(4,6) = k(4,13) = -k(6,11) = -k(7,9) = -k(9,14) =$$

$$= -k(11,13) = M_x^0 \frac{6I_{xy\omega}}{I_{xx}l^2} - M_y^0 \frac{6I_{yy\omega}}{I_{yy}l^2} - \bar{B}^0 \frac{6I_{y\omega\omega}}{I_{\omega\omega}l^2} \quad ,$$

$$k(3,3) = -k(3,10) = k(10,10) = P^0 \frac{12I_{xx}}{Al^3} + M_x^0 \frac{12I_{xxx}}{I_{xx} l^3} - \quad /cd.4.28/$$

$$- M_y^0 \frac{12I_{xxy}}{I_{yy} l^3} - \bar{B}^0 \frac{12I_{xx\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l^3} ,$$

$$k(3,4) = -k(3,11) = -k(4,10) = k(10,11) = M_x^0 \frac{12I_{xx\bar{\omega}}}{I_{xx} l^3} -$$

$$- M_y^0 \frac{12I_{xy\bar{\omega}}}{I_{yy} l^3} - \bar{B}^0 \frac{12I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l^3} ,$$

$$k(3,5) = k(3,12) = -k(5,10) = -k(10,12) = -P^0 \frac{6I_{xx}}{Al^2} -$$

$$- M_x^0 \frac{6I_{xxx}}{I_{xx} l^2} + M_y^0 \frac{6I_{xxy}}{I_{yy} l^2} + \bar{B}^0 \frac{6I_{xx\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l^2} ,$$

$$k(3,6) = k(3,13) = -k(6,10) = -k(10,13) = M_x^0 \frac{6I_{xxy}}{I_{xx} l^2} -$$

$$- M_y^0 \frac{6I_{xyy}}{I_{yy} l^2} - \bar{B}^0 \frac{6I_{xy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l^2} ,$$

$$k(3,7) = k(3,14) = -k(7,10) = -k(10,14) = M_x^0 \frac{6I_{xx\bar{\omega}}}{I_{xx} l^2} -$$

$$- M_y^0 \frac{6I_{xy\bar{\omega}}}{I_{yy} l^2} - \bar{B}^0 \frac{6I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l^2} ,$$

$$k(4,4) = -k(4,11) = k(11,11) = P^0 \frac{12I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{Al^3} + M_x^0 \frac{12I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{xx} l^3} -$$

$$- M_y^0 \frac{12I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{yy} l^3} - \bar{B}^0 \frac{12I_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l^3} ,$$

$$k(4,5) = k(4,12) = -k(5,11) = -k(11,12) = -M_x^0 \frac{6I_{xx\bar{\omega}}}{I_{xx} l^2} +$$

$$+ M_y^0 \frac{6I_{xy\bar{\omega}}}{I_{yy} l^2} + \bar{B}^0 \frac{6I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l^2} ,$$

$$k(4,7) = k(4,14) = -k(7,11) = -k(11,14) = P^0 \frac{6I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{Al^2} +$$

$$+ M_x^0 \frac{6I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{xx} l^2} - M_y^0 \frac{6I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{yy} l^2} - \bar{B}^0 \frac{6I_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l^2} ,$$

$$k(5,5) = k(12,12) = P^0 \frac{4I_{xx}}{Al} + M_x^0 \frac{4I_{xxx}}{I_{xx}} - M_y^0 \frac{4I_{xxy}}{I_{yy}} - \bar{B}^0 \frac{4I_{xx\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad , \quad /cd.4.28/$$

$$k(5,6) = k(12,13) = -M_x^0 \frac{4I_{xxy}}{I_{xx}} + M_y^0 \frac{4I_{xyy}}{I_{yy}} + \bar{B}^0 \frac{4I_{xy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad ,$$

$$k(5,7) = k(12,14) = -M_x^0 \frac{4I_{xx\bar{\omega}}}{I_{xx}} + M_y^0 \frac{4I_{xy\bar{\omega}}}{I_{yy}} + \bar{B}^0 \frac{4I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad ,$$

$$k(5,12) = P^0 \frac{2I_{xx}}{Al} + M_x^0 \frac{2I_{xxx}}{I_{xx}} - M_y^0 \frac{2I_{xxy}}{I_{yy}} + \bar{B}^0 \frac{2I_{xx}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad ,$$

$$k(5,13) = k(6,12) = -M_x^0 \frac{2I_{xxy}}{I_{xx}} + M_y^0 \frac{2I_{xyy}}{I_{yy}} + \bar{B}^0 \frac{2I_{xy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad ,$$

$$k(5,14) = k(7,12) = -M_x^0 \frac{2I_{xx\bar{\omega}}}{I_{xx}} + M_y^0 \frac{2I_{xy\bar{\omega}}}{I_{yy}} + \bar{B}^0 \frac{2I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad ,$$

$$k(6,6) = k(13,13) = P^0 \frac{4I_{yy}}{Al} + M_x^0 \frac{4I_{xyy}}{I_{xx}} - M_y^0 \frac{4I_{yyy}}{I_{yy}} - \bar{B}^0 \frac{4I_{yy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad ,$$

$$k(6,7) = k(13,14) = M_x^0 \frac{4I_{xy\bar{\omega}}}{I_{xx}} - M_y^0 \frac{4I_{yy\bar{\omega}}}{I_{yy}} - \bar{B}^0 \frac{4I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad ,$$

$$k(6,13) = P^0 \frac{2I_{yy}}{Al} + M_x^0 \frac{2I_{xyy}}{I_{xx}} - M_y^0 \frac{2I_{yyy}}{I_{yy}} - \bar{B}^0 \frac{2I_{yy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad ,$$

$$k(7,7) = k(14,14) = P^0 \frac{4I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{Al} + M_x^0 \frac{4I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{xx}} - M_y^0 \frac{4I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{yy}} - \bar{B}^0 \frac{4I_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad ,$$

$$k(7,13) = k(6,14) = M_x^0 \frac{2I_{xy\bar{\omega}}}{I_{xx}} - M_y^0 \frac{2I_{yy\bar{\omega}}}{I_{yy}} - \bar{B}^0 \frac{2I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad ,$$

$$k(7,14) = P^0 \frac{2I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{Al} + M_x^0 \frac{2I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{xx}} - M_y^0 \frac{2I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{yy}} - \bar{B}^0 \frac{2I_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l} \quad .$$

Dla możliwej swobodnej deplanacji końca pręta elementy opisane wzorem /4.28/ przechodzą na elementy ze wzoru /4.29/:

$$k(1,1) = -k(1,8) = k(8,8) = \frac{P^0}{l} \quad , \quad /4.29/$$

$$k(1,4) = -k(1,11) = -k(4,8) = k(8,11) = \frac{3}{2} \frac{\bar{B}^0}{l^2} \quad ,$$

$$k(1,5) = -k(1,12) = -k(5,8) = k(8,12) = \frac{M_x^0}{I} , \quad / \text{cd.4.29/}$$

$$k(1,6) = -k(1,13) = -k(6,8) = k(8,13) = \frac{M_y^0}{I} ,$$

$$k(1,7) = -k(7,8) = \frac{3}{2} \frac{\bar{B}^0}{I}$$

$$k(2,2) = -k(2,9) = k(9,9) = P^0 \frac{12I_{yy}}{Al^3} + M_x^0 \frac{12I_{xyy}}{I_{xx} l^3} - \\ - M_y^0 \frac{12I_{yy\bar{y}}}{I_{yy} l^3} - \bar{B}^0 \frac{12I_{y\bar{y}\bar{y}}}{I_{\bar{y}\bar{y}} l^3} ,$$

$$k(2,4) = -k(2,11) = -k(4,9) = k(9,11) = M_x^0 \frac{3I_{xy\bar{y}}}{I_{xx} l^3} - \\ - M_y^0 \frac{3I_{yy\bar{y}}}{I_{yy} l^3} - \bar{B}^0 \frac{3I_{y\bar{y}\bar{y}}}{I_{\bar{y}\bar{y}} l^3} ,$$

$$k(2,5) = k(2,12) = -k(5,9) = -k(9,12) = -M_x^0 \frac{6I_{xxy}}{I_{xx} l^2} + \\ + M_y^0 \frac{6I_{xyy}}{I_{yy} l^2} + \bar{B}^0 \frac{6I_{xy\bar{y}}}{I_{\bar{y}\bar{y}} l^2} ,$$

$$k(2,6) = k(2,13) = -k(6,9) = -k(9,13) = P^0 \frac{6I_{yy}}{Al^2} + \\ + M_x^0 \frac{6I_{xyy}}{I_{xx} l^2} - M_y^0 \frac{6I_{yy\bar{y}}}{I_{yy} l^2} - \bar{B}^0 \frac{6I_{y\bar{y}\bar{y}}}{I_{\bar{y}\bar{y}} l^2} ,$$

$$k(2,7) = k(4,6) = -k(6,11) = -k(7,9) = M_x^0 \frac{3I_{xy\bar{y}}}{I_{xx} l^2} - \\ - M_y^0 \frac{3I_{yy\bar{y}}}{I_{yy} l^2} - \bar{B}^0 \frac{3I_{y\bar{y}\bar{y}}}{I_{\bar{y}\bar{y}} l^2} ,$$

$$k(3,3) = -k(3,10) = k(10,10) = P^0 \frac{12I_{xx}}{Al^3} + M_x^0 \frac{12I_{xxx}}{I_{xx} l^3} - \\ - M_y^0 \frac{12I_{xxy}}{I_{yy} l^3} - \bar{B}^0 \frac{12I_{xx\bar{y}}}{I_{\bar{y}\bar{y}} l^3} ,$$

$$k(3,4) = -k(3,11) = -k(4,10) = k(10,11) = M_x^0 \frac{3I_{xx\bar{y}}}{I_{xx} l^3} - \\ - M_y^0 \frac{3I_{xy\bar{y}}}{I_{yy} l^3} - \bar{B}^0 \frac{3I_{x\bar{y}\bar{y}}}{I_{\bar{y}\bar{y}} l^3} ,$$

$$k(3,5) = k(3,12) = -k(5,10) = -k(10,12) = -P^0 \frac{6I_{xx}}{Al^2} - \quad /cd.4.29/$$

$$- M_x^0 \frac{6I_{xxx}}{I_{xx}l^2} + M_y^0 \frac{6I_{xxy}}{I_{yy}l^2} + \bar{B}^0 \frac{6I_{xx\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l^2} ,$$

$$k(3,6) = k(3,13) = -k(6,10) = -k(10,13) = M_x^0 \frac{6I_{xxy}}{I_{xx}l^2} -$$

$$- M_y^0 \frac{6I_{xyy}}{I_{yy}l^2} - \bar{B}^0 \frac{6I_{xy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l^2} ,$$

$$k(3,7) = -k(7,10) = M_x^0 \frac{3I_{xx\bar{\omega}}}{I_{xx}l^2} - M_y^0 \frac{3I_{xy\bar{\omega}}}{I_{yy}l^2} - \bar{B}^0 \frac{3I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l^2} ,$$

$$k(4,4) = -k(4,11) = k(11,11) = P^0 \frac{3I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{Al^3} + M_x^0 \frac{3I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{xx}l^3} -$$

$$- M_y^0 \frac{3I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{yy}l^3} - \bar{B}^0 \frac{3I_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l^3} ,$$

$$k(4,5) = -k(6,11) = -M_x^0 \frac{3I_{xx\bar{\omega}}}{I_{xx}l^2} + M_y^0 \frac{3I_{xy\bar{\omega}}}{I_{yy}l^2} + \bar{B}^0 \frac{3I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l^2} ,$$

$$k(4,7) = -k(7,11) = P^0 \frac{3I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{Al^2} + M_x^0 \frac{3I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{xx}l^2} - M_y^0 \frac{3I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{yy}l^2} - \bar{B}^0 \frac{3I_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l^2} ,$$

$$k(5,5) = k(12,12) = P^0 \frac{4I_{xx}}{Al} + M_x^0 \frac{4I_{xxx}}{I_{xx}l} - M_y^0 \frac{4I_{xxy}}{I_{yy}l} - \bar{B}^0 \frac{4I_{xx\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l} ,$$

$$k(5,6) = k(12,13) = -M_x^0 \frac{4I_{xx\bar{\omega}}}{I_{xx}l} + M_y^0 \frac{4I_{xy\bar{\omega}}}{I_{yy}l} + \bar{B}^0 \frac{4I_{xy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l} ,$$

$$k(5,7) = -M_x^0 \frac{3I_{xx\bar{\omega}}}{I_{xx}l} + M_y^0 \frac{3I_{xy\bar{\omega}}}{I_{yy}l} + \bar{B}^0 \frac{3I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l} ,$$

$$k(5,12) = P^0 \frac{2I_{xx}}{Al} + M_x^0 \frac{2I_{xxx}}{I_{xx}l} - M_y^0 \frac{2I_{xxy}}{I_{yy}l} - \bar{B}^0 \frac{2I_{xx\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l} ,$$

$$k(5,13) = k(6,12) = -M_x^0 \frac{2I_{xxy}}{I_{xx}l} + M_y^0 \frac{2I_{xyy}}{I_{yy}l} + \bar{B}^0 \frac{2I_{xy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l} ,$$

$$k(6,6) = k(13,13) = P^0 \frac{4I_{yy}}{Al} + M_x^0 \frac{4I_{xyy}}{I_{xx}l} - M_y^0 \frac{4I_{yyy}}{I_{yy}l} - \bar{B}^0 \frac{4I_{yy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}l} ,$$

$$k(6,7) = M_x^0 \frac{3I_{xy\bar{\omega}}}{I_{xx} \bar{I}} - M_y^0 \frac{3I_{yy\bar{\omega}}}{I_{yy} \bar{I}} - \bar{B}^0 \frac{3I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \bar{I}} , \quad /cd.4.29/$$

$$k(6,13) = P^0 \frac{2I_{yy}}{A\bar{I}} + M_x^0 \frac{2I_{xyy}}{I_{xx} \bar{I}} - M_y^0 \frac{2I_{yyy}}{I_{yy} \bar{I}} - \bar{B}^0 \frac{2I_{yy\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \bar{I}} ,$$

$$k(7,7) = P^0 \frac{3I_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{A\bar{I}} + M_x^0 \frac{3I_{x\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{xx} \bar{I}} - M_y^0 \frac{3I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{yy} \bar{I}} - \bar{B}^0 \frac{3I_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\omega}}}{I_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \bar{I}} .$$

Elementy grupy czwartej / $M_x^0 [k_2]_*$, $M_y^0 [k_3]_*$ / :

$$k(11,13) = -k(4,6) = M_x^0 , \quad /4.30/$$

$$k(4,5) = -k(11,12) = M_y^0 .$$

Dla możliwej swobodnej deplanacji końca pręta elementy opisane wzorem /4.30/ należy uzupełnić elementami ze wzoru /4.31/ :

$$k(2,7) = -k(7,9) = -\frac{1}{10} M_x^0 , \quad /4.31/$$

$$k(3,7) = -k(7,10) = -\frac{1}{10} M_y^0 .$$

Powyżej przytoczone elementy dla symetrycznej, stycznej macierzy sztywności elementu wyprowadzone zostały dla dowolnej konfiguracji poprzecznego, otwartego przekroju cienkościennego.

Na przykład dla przekroju monosymetrycznego /z założenia osią symetrii jest oś c-y / dochodzi do znacznych uproszczeń w stycznej macierzy sztywności. Dla tego przypadku zerują się następujące charakterystyki przekrojowe

$$I_{yyy} = I_{xxy} = I_{xx\bar{\omega}} = I_{yy\bar{\omega}} = I_{y\bar{\omega}\bar{\omega}} = I_{\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{\omega}} = x_0 = \zeta_1 = \mu_1 = 0$$

/4.32/

a stała $\mathcal{L}_1$ przyjmuje prostszą postać.

4.3. Macierze transformacji dla elementu

Transformację z układu lokalnego elementu do układu globalnego konstrukcji przeprowadza się za pomocą macierzy transformacji $[T]$ tak, że wektory $\{q\}$ lub $\{f\}$ /określone we współrzędnych lokalnych/ przechodzą na wektory $\{Q\}$ lub $\{F\}$ /w układzie globalnym/ według wzorów [13,74]

$$\{Q\} = [T]^T \{q\} \quad , \quad /4.33/$$

$$\{F\} = [T]^T \{f\} \quad .$$

Macierz $[T]$ ma postać [9] quasidiagonalną

$$[T] = \begin{bmatrix} [R] & & & \\ & [R]_1 & & \\ & & [R] & \\ & & & [R]_1 \end{bmatrix} \quad , \quad /4.34/$$

gdzie $[R]$ jest macierzą cosinusów kierunkowych wersorów osi c-x, c-y, c-z

$$[R] = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \quad , \quad /4.35/$$

$$\vec{i} = \vec{i}(a_x, a_y, a_z) \quad ,$$

$$\vec{j} = \vec{j}(b_x, b_y, b_z) \quad ,$$

$$\vec{k} = \vec{k}(c_x, c_y, c_z) \quad .$$

Jeżeli przyjąć, że oś c-x lokalnego układu pręta leży w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny wyznaczonej przez osie O-X i O-Y globalnego układu odniesienia /możliwe jest to dla przekrojów monosymetrycznych/ to macierz $[R]$ przyjmuje postać

$$[R] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \mu \\ \frac{-m\alpha\mu + \beta n}{P} & \frac{-m\beta\mu - \alpha n}{P} & m \\ \frac{\beta m + \alpha\mu n}{P} & \frac{-\alpha m + \beta\mu n}{P} & -n \end{bmatrix}, \quad /4.36/$$

gdzie α, β, μ są kosinusami kierunkowymi wektora $\vec{k}$ w globalnym układzie odniesienia, a pozostałe wielkości wyraża się jako

$$m = -\sin \Theta \sqrt{1 - \mu^2}, \quad /4.37/$$

$$n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - m^2},$$

$$P = \alpha^2 + \beta^2.$$

Przez Θ oznaczono kąt obrotu elementu względem osi c-z lokalnego układu odniesienia.

Macierz $[T]$ /4.34/ stosuje się do transformacji $\{q\}$ lub $\{f\}$ na $\{Q\}$ lub $\{F\}$ w przypadku przekrojów bisymetrycznych; tylko wtedy wszystkie składowe wektorów transformowanych odnoszone są do tego samego punktu przekroju.

W przypadku przekroju poprzecznego o dowolnej konfiguracji niezbędna jest transformacja, która sprowadza składowe transformowanych wektorów do jednego punktu przekroju. Punktem tym, z założenia, jest środek ciężkości przekroju poprzecznego.

Wektory sił bądź przemieszczeń węzłów elementu odniesione do środka jego ciężkości oznaczano indeksem "c".

Wspomniana wyżej transformacja ma postać

$$\{q\}^c = [t] \{q\}, \quad /4.38/$$

$$\{f\} = [t]^T \{f\}^c,$$

gdzie $[t]$ jest macierzą o rozmiarach 14×14 zależną od kształtu przekroju poprzecznego elementu.

W przypadku przekrojów bisymetrycznych macierz $[t]$ jest macierzą jednostkową $[I]$.

W przypadku przekrojów monosymetrycznych /z założenia osią symetrii przekroju jest oś c-y/ macierz $[t]$ otrzymać można z prostych zależności między przemieszczeniami i ich pochodnymi odniesionymi do środka ścinania "s", a odpowiadającymi im wielkościami w środku ciężkości przekroju "c".

I tak - w przypadku jednej osi symetrii przekroju poprzecznego - mamy

$$U = \bar{U} + y_0 \theta, \quad /4.39/$$

$$\bar{V} = \bar{V},$$

$$U' = \bar{U}' + y_0 \theta',$$

$$V' = \bar{V}'.$$

Macierz $[\tilde{t}]$ o rozmiarach 7×7 ma postać

$$[\tilde{t}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad /4.40/$$

Macierz transformacji $[t]$ zapisać można jako

$$[t] = \begin{bmatrix} [\tilde{t}] & [0] \\ [0] & [\tilde{t}] \end{bmatrix}. \quad /4.41/$$

Nieco bardziej skomplikowaną postać ma macierz $[t]$ dla dowolnej konfiguracji przekroju poprzecznego elementu. W tym przypadku elementy macierzy $[t]^T$ otrzymano z relacji między siłami w środku ścinania i ciężkości przekroju. Przyjmują one postać

$$\bar{P} = P \quad , \quad /4.42/$$

$$\bar{V}_x = V_x \quad ,$$

$$\bar{V}_y = V_y \quad ,$$

$$\bar{M}_z = M_z + V_x y_0 - V_y x_0 \quad ,$$

$$\bar{M}_x = M_x \quad ,$$

$$\bar{M}_y = M_y \quad ,$$

$$\bar{B} = B - M_x x_0 + M_y y_0 - a P \quad ,$$

gdzie

$$a = (y_0 x_s - x_0 y_s) \quad . \quad /4.43/$$

Przez x_s, y_s oznaczono współrzędne głównego wycinkowego punktu profilu [54]. W tym przypadku macierz $[\tilde{t}]$ zapisać można jako

$$[\tilde{t}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & y_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad /4.44/$$

Ostatecznie macierz transformacji $[T]_1$ dla przemieszczeń i sił z przyjętego lokalnego układu odniesienia do układu globalnego wyrazić można w postaci

$$[T]_1 = [t]^{-1} [T] [t] \quad , \quad /4.45/$$

a relacje między siłami i przemieszczeniami w tych układach zapisuje się jako

$$\{F\} = [T]_1^T \{f\} \quad , \quad /4.46/$$

$$\{Q\} = [T]_1^{-1} \{q\} \quad .$$

Macierz sztywności stycznej $[K]^S$ elementu w układzie globalnym ma postać

$$[K]^S = [T]_1^T [K]^S [T]_1 \quad . \quad /4.47/$$

Styczną macierz sztywności całej konstrukcji otrzymuje się poprzez odpowiednią superpozycję [74] macierzy sztywności jej elementów.

4.4. Algorytm rozwiązania

Procedura przyrostowa realizowana jest poprzez sukcesywne obciążanie konstrukcji małymi przyrostami $\Delta \{f\}_{(k)}$ / k - krok obciążenia; $k = 1, 2, \dots$ / wektora obciążenia $\{f\}$, aż do żądanej jego wielkości.

Stan konstrukcji na początku "k-tego" kroku obciążenia jest jednoznacznie określony poprzez:

- współrzędne jego węzłów $X_{r(k)}$, $Y_{r(k)}$, $Z_{r(k)}$; gdzie $r = 1, 2, \dots, N$ / N - ilość węzłów konstrukcji/,
- kąty obrotu elementów $\theta_{s(k)}$ względem ich pierwotnego położenia; gdzie $s = 1, 2, \dots, 2P$ / P - ilość prętów konstrukcji/,
- siły wewnętrzne $P_{(k)}$, $M_{x(k)}$, $M_{y(k)}$ i $\bar{B}_{(k)}$ w każdym z "s" elementów.

Zmienność wskaźnika s od 1 do $2P$ wynika z tego, że w każdym przęcie konstrukcji wprowadzony jest węzeł pośredni.

Zwięzły opis postępowania w "k-tym" kroku obciążenia konstrukcji ująć można w następujących punktach:

- 1/ Generowanie macierzy sztywności każdego z elementów, przy założeniu, że $P^0 = P_{(k)}$, $M_x^0 = M_{x(k)}$, $M_y^0 = M_{y(k)}$ i $\bar{B}^0 = \bar{B}_{(k)}$.
- 2/ Wyznaczenie macierzy transformacji $[T]_1$ na podstawie aktualnej konfiguracji każdego z elementów, określonej poprzez współrzędne jego końców $X_{i(k)}$, $Y_{i(k)}$, $Z_{i(k)}$, $X_{j(k)}$, $Y_{j(k)}$, $Z_{j(k)}$ / oraz kąt obrotu $\theta_{s(k)}$.
- 3/ Utworzenie globalnej macierzy sztywności konstrukcji z narzucenymi warunkami brzegowymi.

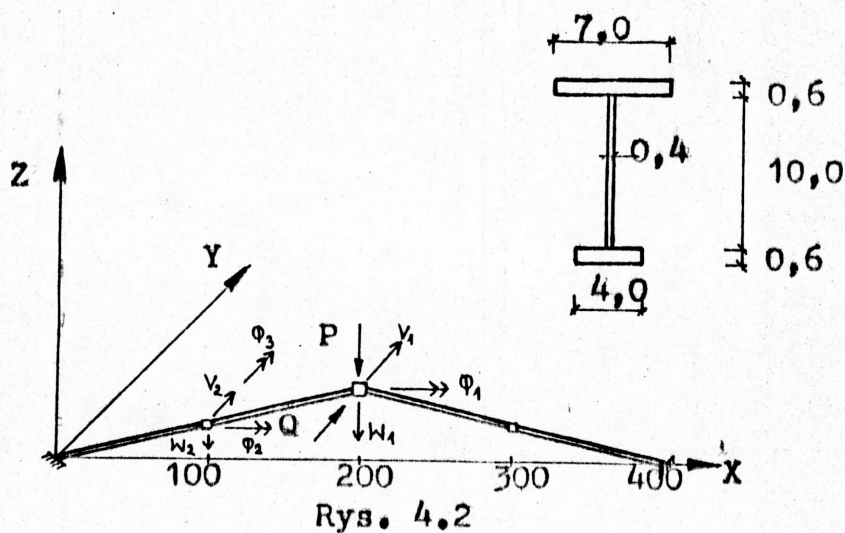
- 4/ Rozwiązanie liniowego układu przyrostowych równań metody elementów skończonych.
- 5/ Określenie nowej konfiguracji konstrukcji $/X_{r(k+1)}, Y_{r(k+1)}, Z_{r(k+1)}, \Theta_{s(k+1)} /$ na podstawie - otrzymanego z rozwiązania układu równań - przyrostu wektora uogólnionych przemieszczeń $\Delta\{q\}(k)$; $\Theta_{s(k+1)}$ jest średnią arytmetyczną z przyrostów obrotów węzłów elementów "s".
- 6/ Wyznaczenie przyrostów przemieszczeń węzłów dla każdego z "s" elementów w ich lokalnych układach odniesienia.
- 7/ Określenie przyrostów sił wewnętrznych w każdym elemencie.
- 8/ Wyznaczenie nowych wartości $P_{(k+1)}, M_{x(k+1)}, M_{y(k+1)}, \bar{B}_{(k+1)}$ na podstawie wartości $P_{(k)}, M_{x(k)}, M_{y(k)}, \bar{B}_{(k)}$ oraz średnich przyrostów sił w elemencie wyznaczonych jako połowa średnich arytmetycznych z przyrostów sił w jego węzłach.
- 9/ Wyznaczenie niezrównoważonych sił w węzłach konstrukcji na podstawie znanych sił wewnętrznych każdego z elementów zbiegających się w węzle i aktualnego wektora obciążenia $\{f\}$.
- 10/ Powtórzenie operacji opisanych w punktach 1/ - 8/, z tym jednak, że wektor wyrazów wolnych tworzonego układu równań stanowi wektor obciążenia niezrównoważonego zbudowany w punkcie 9/.

Cykl operacji opisany w punktach 1/ - 10/ powtarzany jest doteda, aż spełnione zostaną warunki narzucone na dokładność rozwiązania. Warunki te mają charakter przemieszczeniowy, to znaczy, że przyrost przemieszczeń w kolejnym "p-tym" kroku iteracyjnym wykonanym w ramach "k+1" kroku obciążenia w stosunku do pewnej normy przemieszczeń jest pomijalnie mały /patrz punkt 3.3.2/. Normy przemieszczeń określane są podobnie jak w punkcie 3.3.2., z tym jednak, że są one różne dla różnych pod względem miary przemieszczeń uogólnionych.

Opisana procedura stosowana jest w przedkrytycznym, krytycznym i pokrytycznym zakresie pracy konstrukcji. W obszarach punktów granicznych algorytm jest modyfikowany stosownie do procedury pozwalającej - przy zachowanym sterowaniu procesu obciążeniem - przejść obszar niestabilności metody /pkt 3.3.2./.

4.5. Przykłady numerycznej realizacji programu na EMC

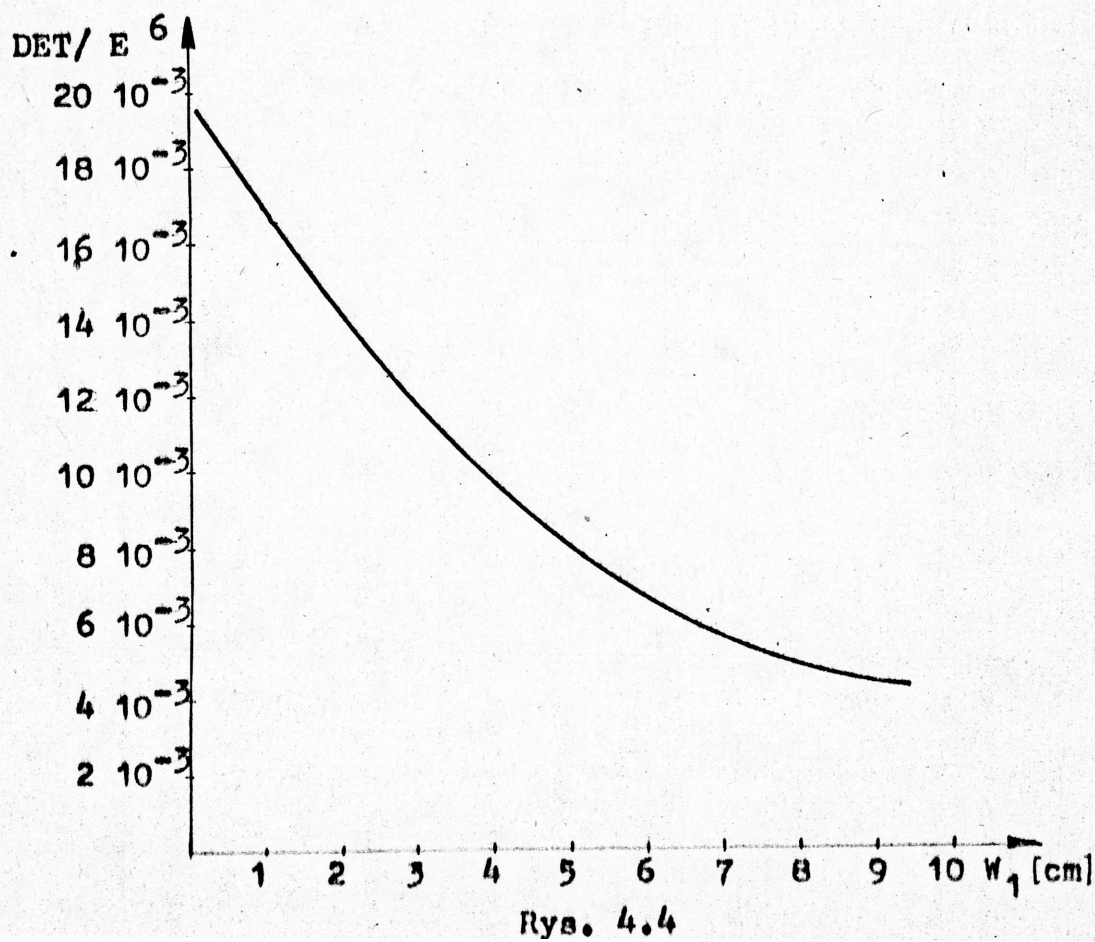
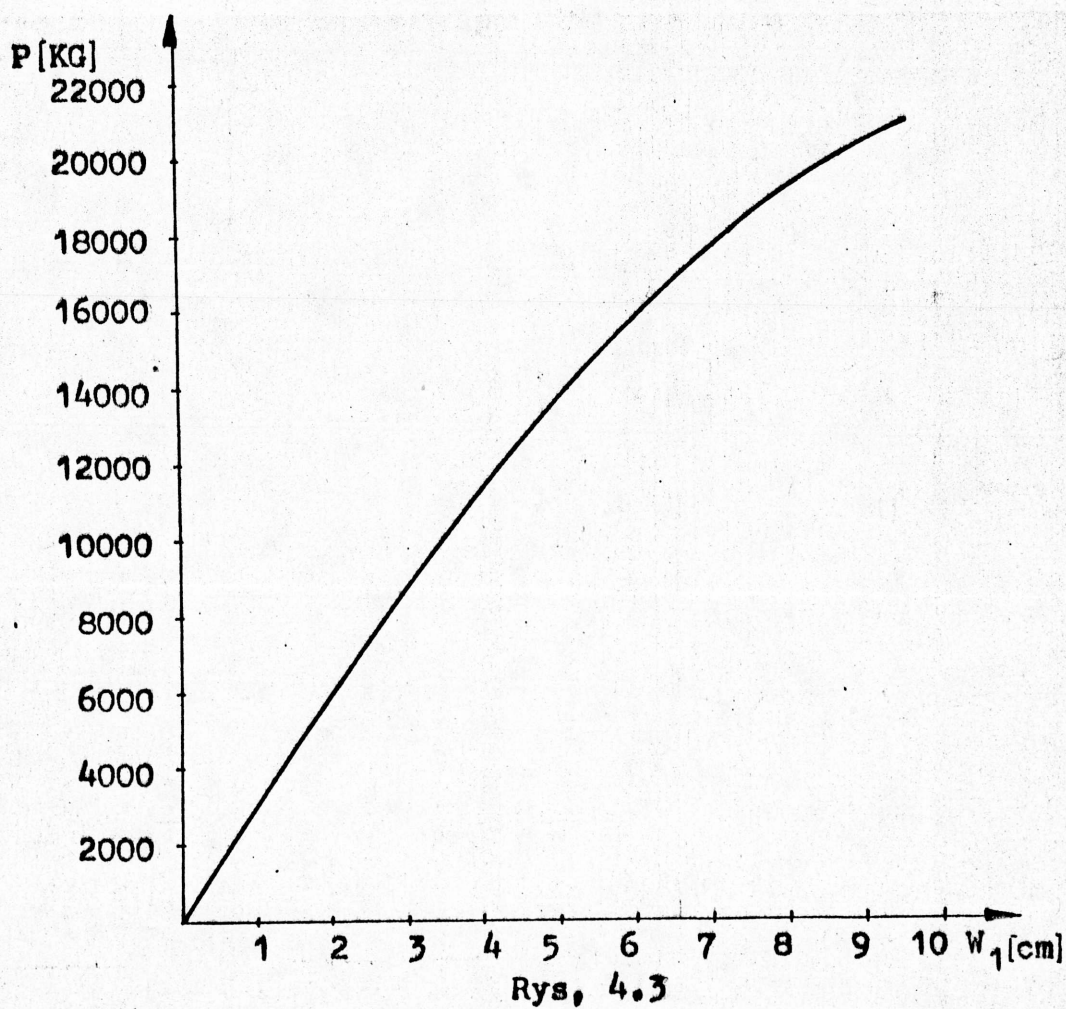
Zbudowany program napisano w języku algorytmicznym Fortran i przystosowano go do numerycznej realizacji na EMC ODRA 1305. Oprogramowany algorytm testowano - podobnie jak w punkcie 3.5 - na przykładzie kratownicy Misesa /rys.4.2/, której pręty połączone sztywno w węźle i z ostoją. Przekrój poprzeczny pręta - o jednej osi symetrii - dobrano tak, żeby jego sztywność osiowa odpowiadała sztywności osiowej przyjętej w zadaniu z punktu 3.5.

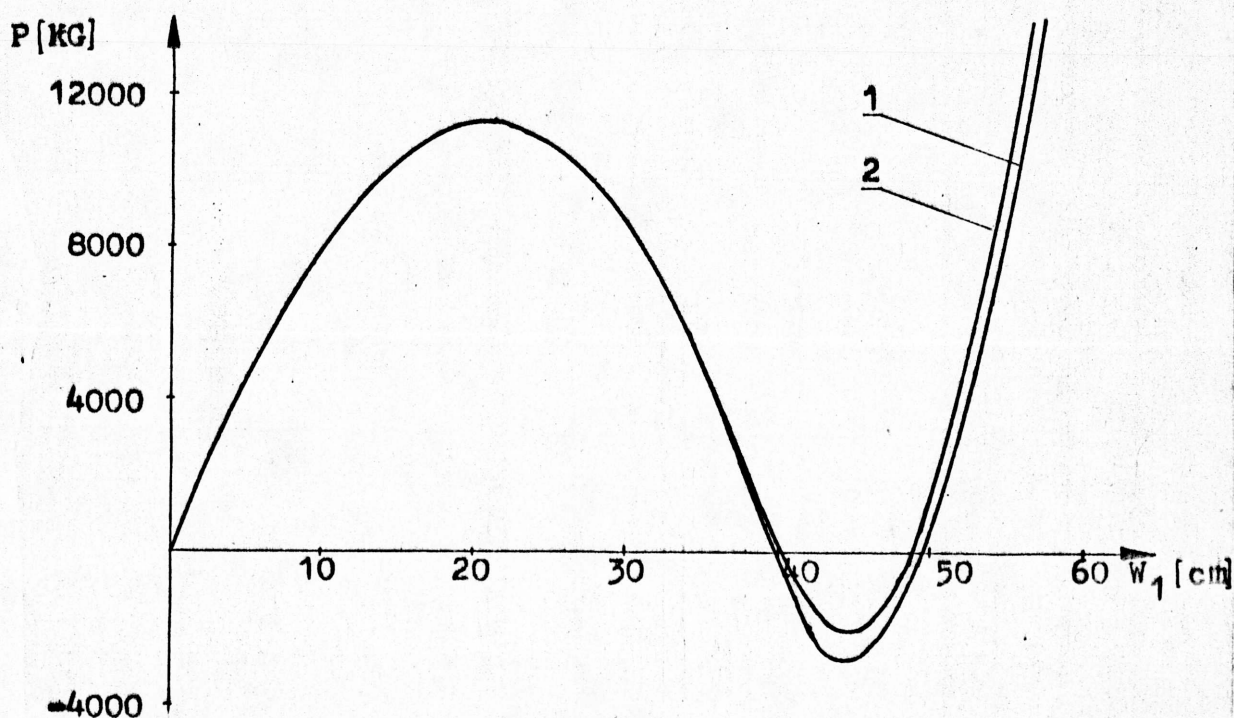


Wymuszając przemieszczenia w płaszczyźnie kratownicy uzyskano przedstawiony na rysunku 4.3 wykres zależności pionowego przemieszczenia węzła centralnego od jego obciążenia.

Na rysunku 4.4 przedstawiono zmienność wartości wyznacznika stycznej macierzy sztywności konstrukcji.

W tym przypadku nie uzyskano efektu przeskoku, co spowodowane było znaczną sztywnością giętną pręta w wymuszonej płaszczyźnie przemieszczeń kratownicy /smukłość pręta w tej płaszczyźnie wynosiła około 20/. Dla dwukrotnie dłuższych prętów - co odpowiadało smukłości 80 w płaszczyźnie przemieszczenia - uzyskany charakter wykresu zależności przemieszczenia od obciążenia uległ zmianie.





Rys. 4.5

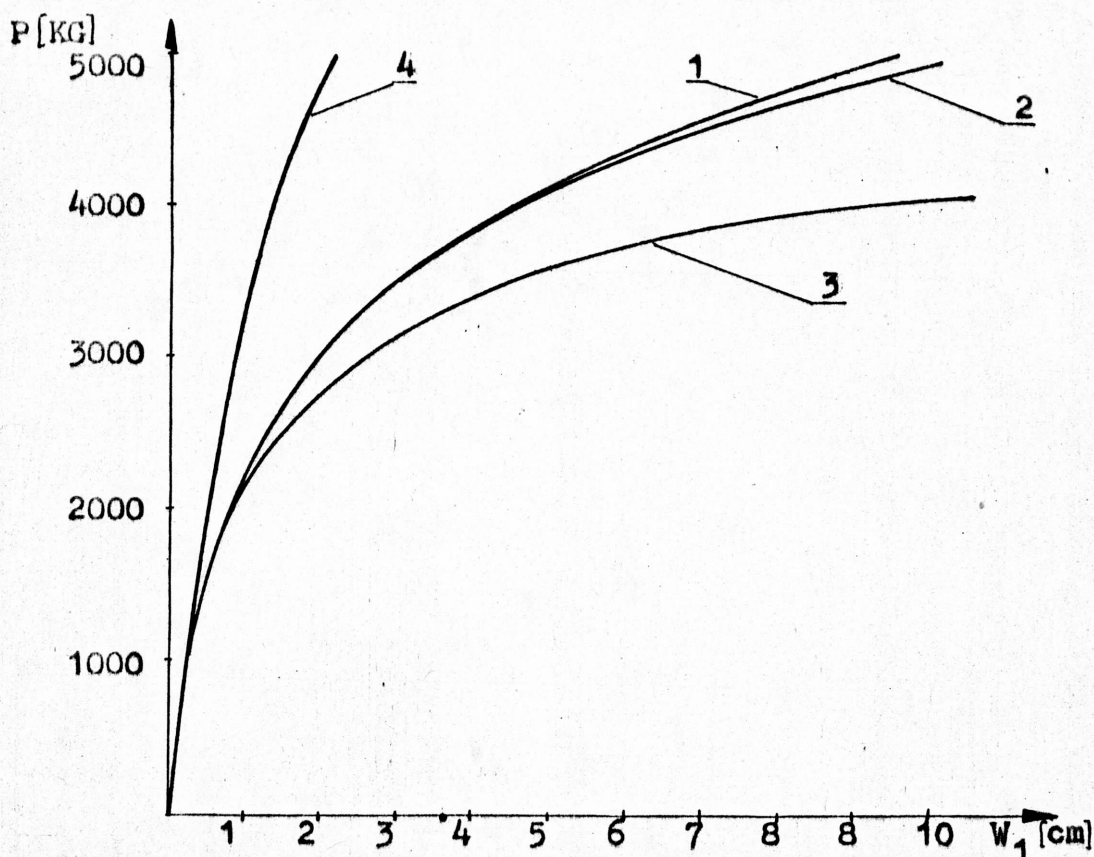
Krzywa 1 wyznacza ścieżkę równowagi zadania w przypadku nie uwzględniania ani tych elementów macierzy sztywności, które wynikają z uwzględniania składnika $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2$ w tensorze odkształcenia, ani tych, które są konsekwencją przyjęcie "pełniejszych" funkcji opisujących przemieszczenia w elemencie. Krzywą 2 otrzymano uwzględniając pierwsze z poprzednio pomijanych elementów. Gdy do analizy włączono te elementy macierzy sztywności, które prezentują wpływ "pełniejszych" funkcji przemieszczeń - w stosunku do rozwiązania pierwszego - nie zauważono różnic.

Wartość obciążenia krytycznego około dwukrotnie przewyższała obciążenie krytyczne określone za pomocą modelu z przegubami. Jest to niezgodne z badaniami doświadczalnymi, które w obu przypadkach /model z przegubami i model z węzłami sztywnymi/ dają zbliżone wartości obciążenia krytycznego [70].

Przyczyną tego okazało się wymuszenie powierzchni przemieszczeń konstrukcji. Należy dodać, że analizowany pokrytyczny stan pracy konstrukcji związany był z większym wytężeniem pręta niż to na jakie pozwalają granice plastyczności stosowanych materiałów.

Poprzez wprowadzenie obciążenia poprzecznego Q /rys.4.2/, które umożliwiało konstrukcji wychylenie się z poprzedniej płaszczyzny jej pracy uzyskano zgodność obciążeń krytycznych w obu analizowanych modelach.

Na rysunkach od 4.6 do 4.12 przedstawiono przemieszczenia i obroty węzłów zgodnie ze zwrotami podanymi na rysunku 4.2. Numerem 1 oznaczono krzywe uzyskane bez uwzględniania dodatkowych elementów w macierzy sztywności; numerem 2 krzywe uzyskane przy uwzględnieniu pełnego tensora Greena, a numerem 3 krzywe wynikające z analizy wzbogaconej o dodatkowe człony w funkcjach opisujących przemieszczenia w elemencie. Powyżej opisane wykresy otrzymano dla obciążenia Q stanowiącego $1/10$ obciążenia pionowego P .



Rys. 4.6

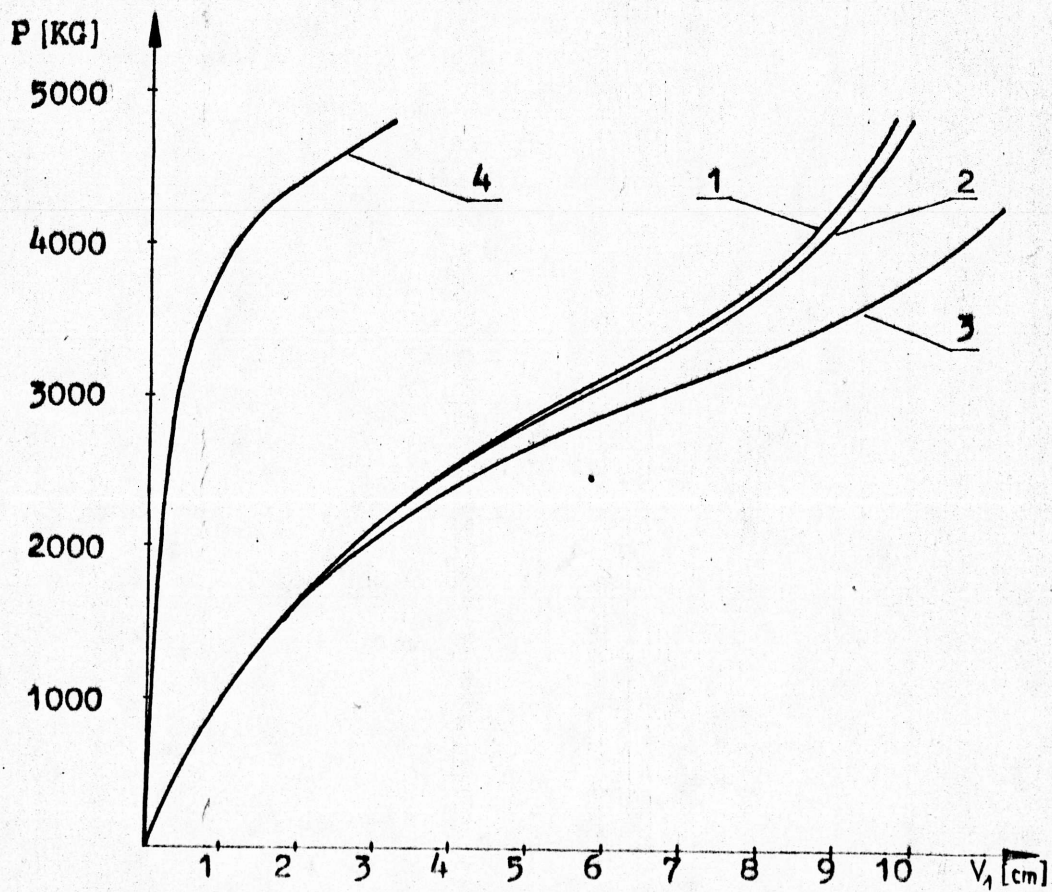


Рис. 4.7

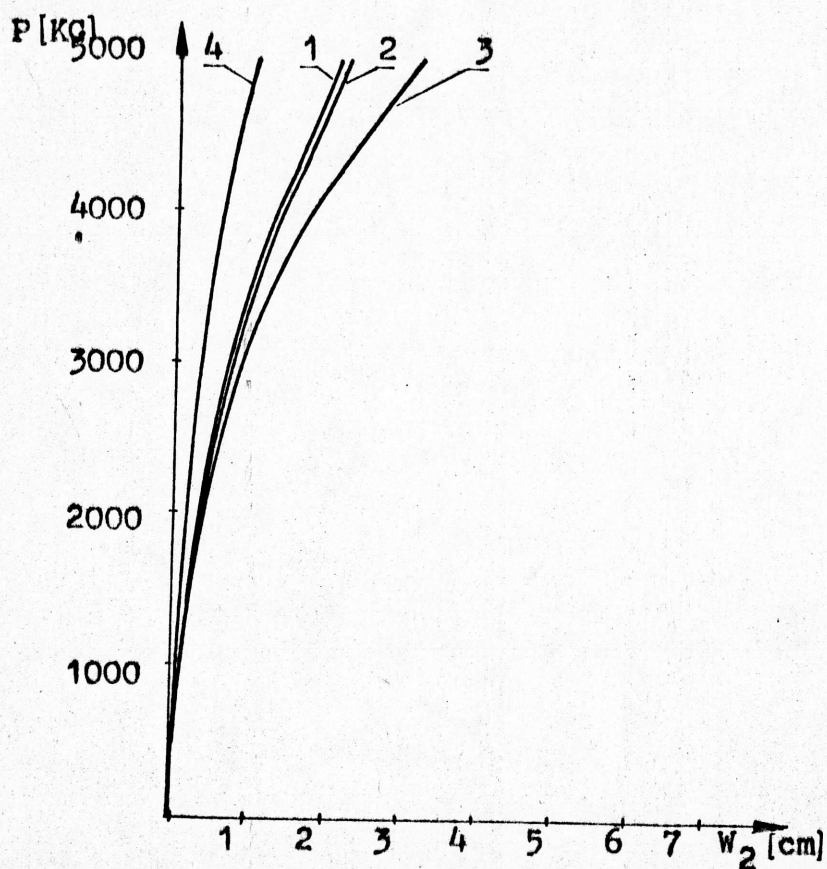
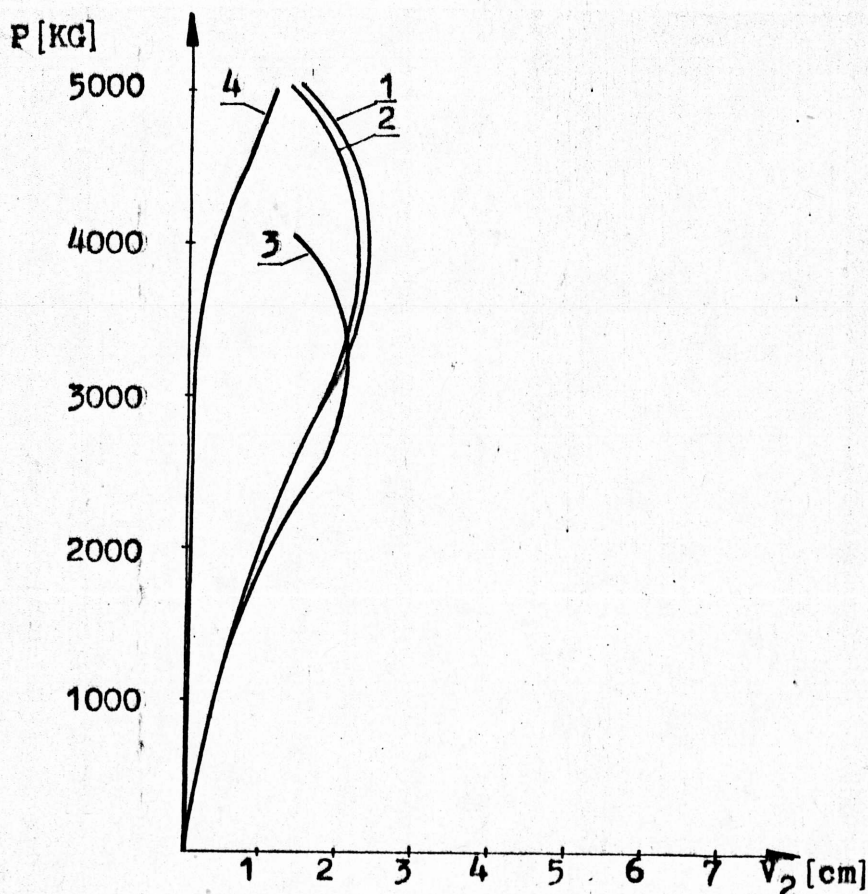
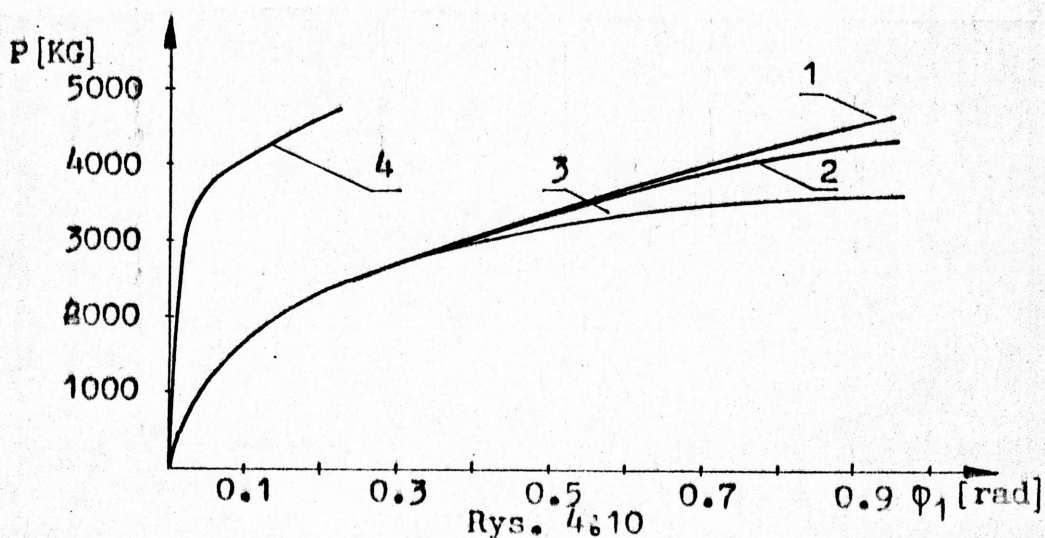


Рис. 4.8



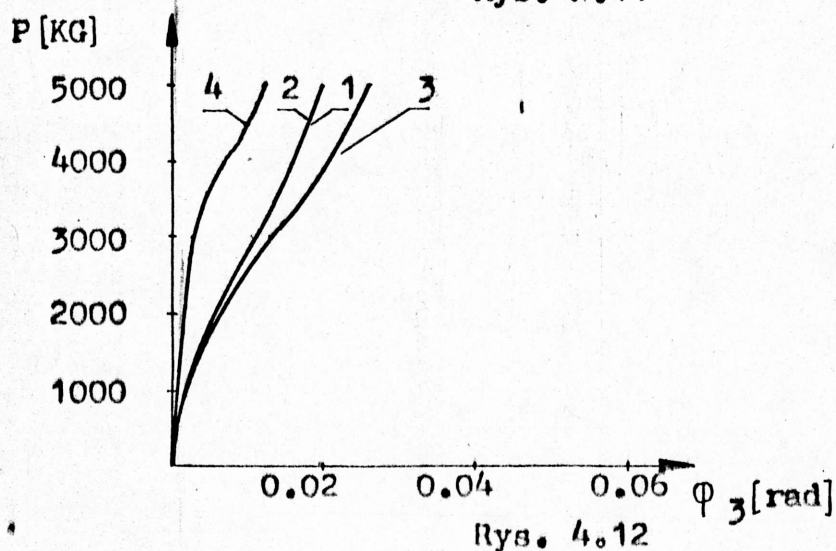
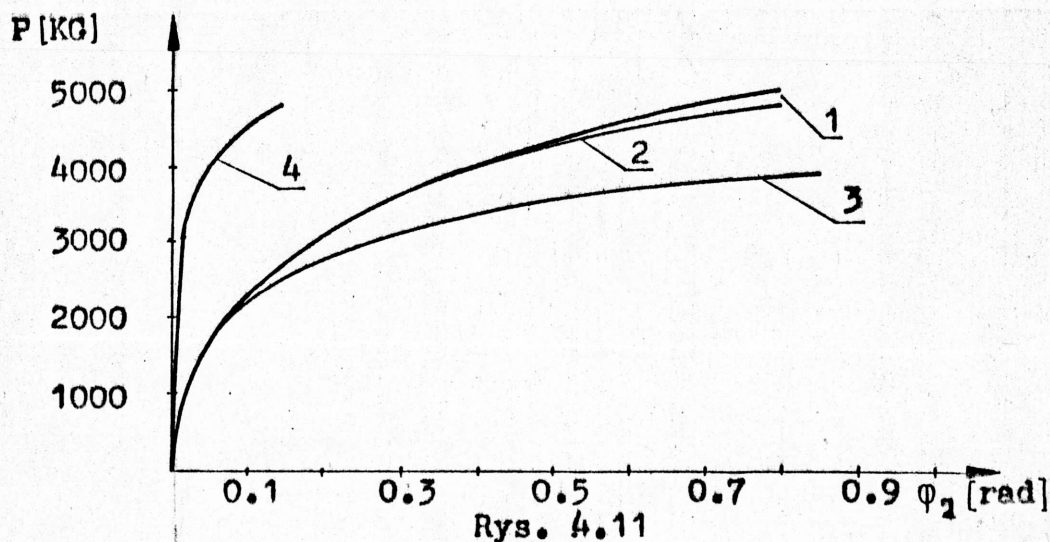
Rys. 4.9



Rys. 4.10

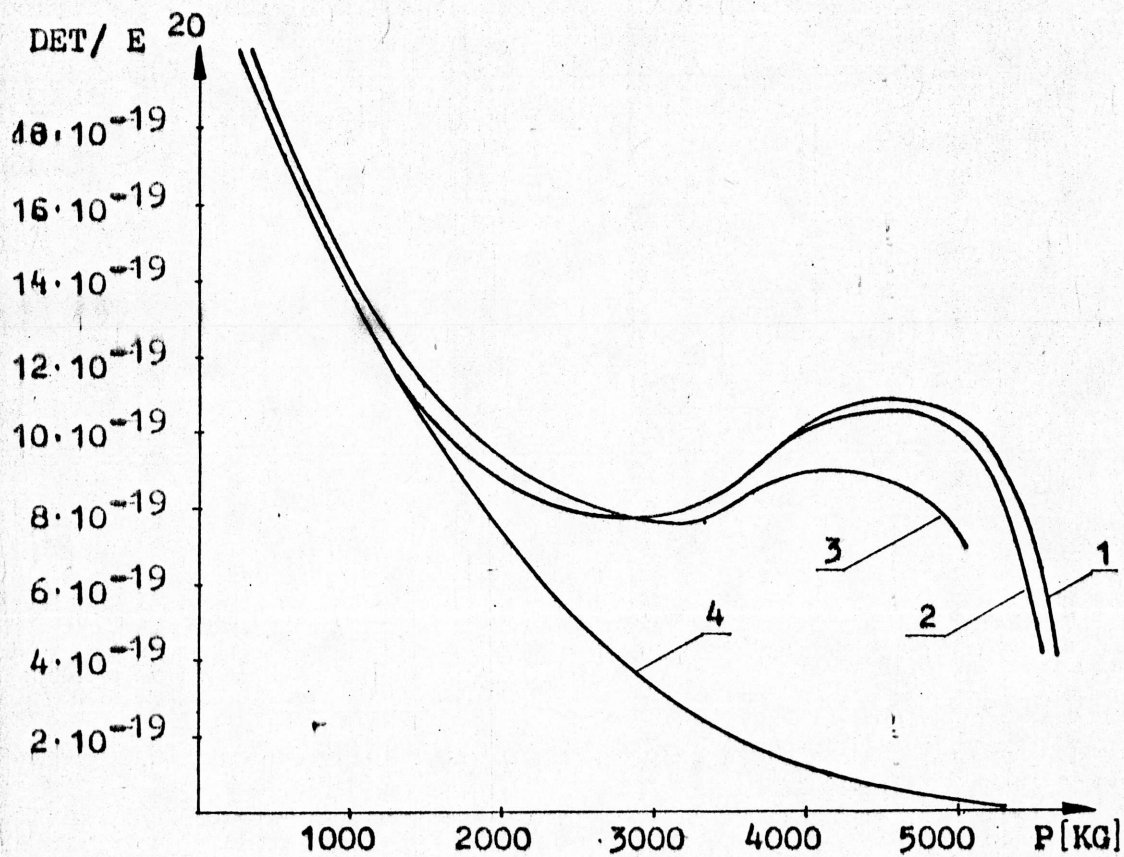
Krzywe oznaczone na tych rysunkach numerem 4 uzyskano przy obciążeniu Q będącym $1/200$ obciążenia P . Dla dwóch różnych testowanych wartości obciążenia bocznego konstrukcja traciła stateczność przy niemal tej samej wartości obciążenia pionowego. Ze względu na znaczne przekraczanie granicy plastyczności

materiału konstrukcji w obszarach pokrytycznych, ograniczono analizę do obszarów przedkrytycznych i krytycznych jej pracy.

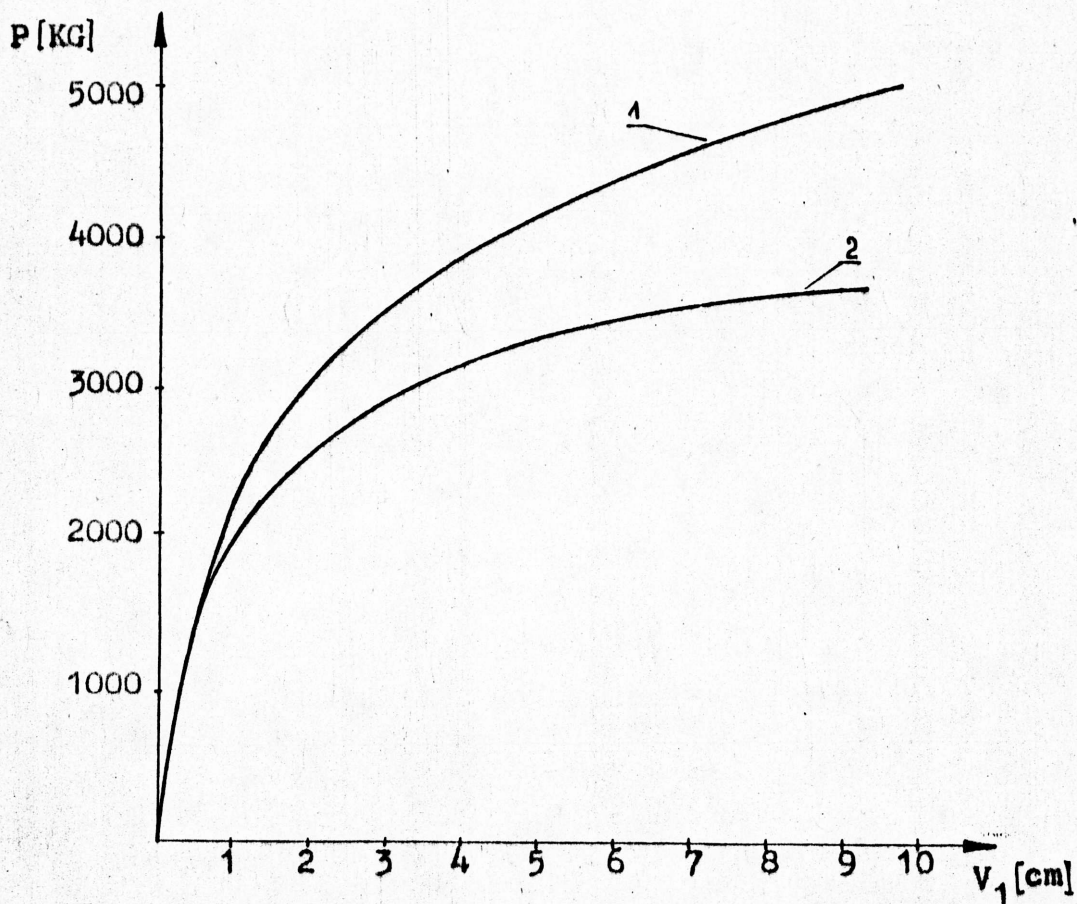


Na rys. 4.13 przedstawiono wykresy zmienności wartości wyznacznika stycznej macierzy sztywności konstrukcji w czterech analizowanych wyżej przypadkach.

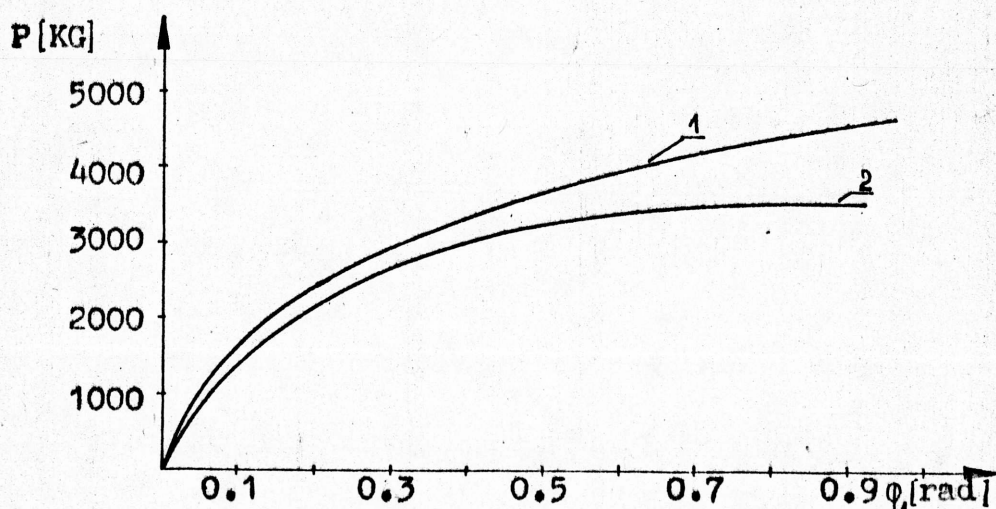
Przyjęcie swobodnej deplanacji końców zbiegających się w węzłach prętów spowodowało pewne różnice tak w ich przemieszczeniach jak i obrotach. Odpowiednie wykresy przedstawiono na rysunkach 4.14 i 4.15 i oznaczono numerem 2; wykresy te sporządzone są na tle rozwiązania, które jest identyczne z prezentowanym na rys. 4.6 i 4.10 i oznaczonym numerem 1.



Rys. 4.13



Rys. 4.14



Rys. 4.15

We wszystkich analizowanych zadaniach prowadzono testy zbieżności algorytmu tak pod względem wielkości kroku obciążenia, jak i dokładności iteracji. Wszystkie prezentowane wykresy sporządzone zostały dla kroku obciążenia, który stanowił $1/20$ obciążenia krytycznego i dokładności, która powodowała, że przyrost przemieszczenia w ostatniej iteracji kroku nie był większy od $0,75 \cdot 10^{-3}$ cm, a kąta obrotu od $0,5 \cdot 10^{-5}$ rad.

Przeprowadzone testy numerycznej realizacji algorytmów wykazały, że:

- wpływ wielkości rzędu drugiego jest znikomy w obszarach przedkrytycznych pracy konstrukcji; w obszarach pokrytycznych, a szczególnie krytycznych zaobserwowano ich ilościowe znaczenie,
- wpływ zamocowania końców prętów w węzłach ze względu na możliwość ich deplanacji okazuje się istotny w przypadku znacznych skręceń elementów konstrukcji,

- należy szczególną uwagę zwrócić na zapewnienie możliwości przestrzennej pracy konstrukcji; wyłączenie pewnych stopni swobody prowadzić może do znacznych różnic w końcowych rezultatach /związane jest to z występującym w macierzy sztywności geometrycznej sprzęganiem się sztywności w różnych kierunkach/. Zbudowany algorytm w pełni potwierdził swą przydatność w geometrycznie nieliniowej analizie cienkościennych konstrukcji prętowych.

4.6. Podsumowanie

Wpływ dodatkowych członów w wyrażeniach /4.3/ na funkcje przemieszczeń zaznaczył się głównie w obszarach krytycznych /np. rys.4.6+4.12/, a więc w tych obszarach pracy konstrukcji, które charakteryzują się największym gradientem przemieszczeń. Uwzględnienie pełniejszych funkcji przemieszczeń powodowało obniżenie wartości obciążenia krytycznego /np. rys.4.6/.

Uwzględnienie składnika $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2$ w tensorze odkształceń zaznaczył się w pokrytycznych obszarach pracy konstrukcji, a więc w tych, które charakteryzowały się wyłączeniem elementów znacznie przekraczającym dopuszczalne granice dla zwykle stosowanych materiałów.

Zadawalająca zgodność wyników otrzymanych przy użyciu zbudowanego algorytmu i rezultatów znanych [61,70], potwierdziła poprawność przyjętych w analizie funkcji kształtu.

Zamocowanie pręta w węźle, które umożliwiło swobodną deplację jego końca okazało się istotne w przypadkach dużych kątów skręceń elementów. Zauważono wtedy znaczne obniżenie poziomu obciążenia krytycznego /rys.4.14/.

Procedura przyrostowa, oparta o uaktualnianą w każdym z iteracyjnych kroków sztywność styczną wyprowadzoną przy uwzględnieniu naprężeń początkowych, okazała się efektywnym narzędziem analizy numerycznej cienkościennych układów prętowych. Przeprowadzone próby zastosowania w algorytmie rozwiązania zmodyfikowanej procedury Newtona-Raphsona wykazały znaczny stopień jego komplikacji. Pojawiły się trudności natury numerycznej /wymagany

większy obszar pamięci operacyjnej, zwiększony czas obliczeń/, a także trudności w określeniu wartości niektórych członów w równaniach opisujących przyrost energii sprężystej elementu.

Każde z rozwiązywanych zadań traktować należy jako problem przestrzenny. Wprowadzane ograniczenia przez odbieranie niektórych stopni swobody konstrukcji powodować mogą istotne różnice w rozwiązaniach otrzymywanych i uznawanych za poprawne /rys.

4.3/.

Zastosowanie sposobu odpowiadającego metodzie Runge-Kuthego rzędu drugiego w określaniu początkowych sił wewnętrznych w elemencie pozwala na znaczne /o około $\frac{1}{3}$ / zmniejszenie czasu obliczeń.

Testy numeryczne - wykonane poza pracą - wykazały możliwość zastosowania sformułowanego algorytmu w analizie numerycznej konstrukcji cienkościennych innego typu.

5. ZAKOŃCZENIE I WNIOSKI

W pracy podjęto próbę określenia wpływu wielkości rzędu drugiego w analizie numerycznej układów prętowych skłonnych do przeskoku. Rozpatrywano układy prętowe poddane wyłącznie statycznemu, konserwatywnemu obciążeniu węzłowemu.

Wielkościami rzędu drugiego nazwano zwykle pomijany składnik tensora odkształceń Greena /pkt 3.4./, a także nie uwzględniane dotychczas człony funkcji określających przemieszczenia elementu /pkt 4.4./

W poszukiwaniu wpływu wielkości rzędu drugiego sformułowano sztywności elementów, które przyjęto do analizy w dwóch zastosowanych w pracy modelach konstrukcji prętowych.

Sformułowano algorytmy /pkt 3.3.2, 4.4./ opierające się na znanych metodach rozwiązywania problemów geometrycznie nieliniowych. Algorytmy te poprzez odcinkową linearyzację układu nieliniowych równań algebraicznych pozwoliły na śledzenie ścieżki równowagi układów prętowych tak w obszarach przedkrytycznych, jak krytycznych i pokrytycznych pracy konstrukcji.

Funkcjonowanie - sformułowanych ogólnie - programów numerycznych zaprezentowano jedynie na najprostszych przykładach konstrukcji prętowych skłonnych do przeskoku, co podyktowane zostało zbyt skromnymi środkami finansowymi przeznaczonymi na ten cel.

Jako rozdział "pilotowy" dla problemów, których próbę rozwiązania podjęto w rozdziale czwartym, potraktowano rozdział trzeci pracy dotyczący przegubowych układów kratowych. Służył on wyborowi możliwie prostej i efektywnej procedury rozwiązania, a także pozwolił na zdobycie koniecznego doświadczenia numerycznego w rozwiązywaniu problemów geometrycznie nieliniowych.

W rozdziale czwartym wyprowadzono macierz sztywności dla pręta cienkościennego z tymi jej elementami, które powstały w wyniku przyjęcia "pełniejszych" funkcji przemieszczeń, jak i włączenia do algorytmu pomijanego składnika składowej tensora odkształcenia. Na tej podstawie zbudowano algorytm, którego poprawność funkcjonowania sprawdzono numerycznie na wybranym, prostym przykładzie.

Należy podkreślić, że zbieżność sformułowanych w pracy algorytmów testowano tak pod względem wielkości kroku /przyrostu/ obciążenia, jak i pod względem dokładności iteracji.

Przeprowadzone testy numerycznej realizacji algorytmów stały się podstawą do sformułowania następujących wniosków:

analizowany wpływ wielkości rzędu drugiego jest pomijalnie mały w przedkrytycznych obszarach pracy konstrukcji;

obszary krytyczne charakteryzuje wyraźny wpływ dodatkowych członów w równaniach opisujących przemieszczenia, przy jednocześnie znikomym znaczeniu zwykle pomijanego składnika tensora odkształceń;

w obszarach pokrytycznych pracy konstrukcji bardziej istotnym /choć nadal niewielkim/ jest wpływ pomijanego składnika tensora odkształceń;

uwzględnianie w analizie numerycznej wielkości rzędu drugiego prowadzi do obniżenia krytycznego poziomu obciążenia konstrukcji;

szczególnie dogodną w analizie stanów przedkrytycznych, krytycznych i pokrytycznych pracy konstrukcji jest metoda przyrostowa oparta o styczną macierz sztywności wyprowadzoną przy uwzględnieniu naprężeń początkowych w elemencie. Pozwoliła ona - przy wykorzystaniu uaktualnionego układu Lagrange'a - w sposób prosty i jednolity zastosować w analizie oba przyjęte modele konstrukcji;

przyjęte do analizy modele rzeczywistych konstrukcji prętowych wyznaczają, z zadowalającą dla praktycznego zastosowania dokładnością, obszar krytycznej pracy konstrukcji. Drugi z tych modeli daje pełniejszy obraz zachowania się konstrukcji, szczególnie w obszarach pokrytycznych jej pracy, co związane jest z - na ogół w tym obszarze występującą - utratą prostoliniowej osi pręta.

Zbudowane w pracy algorytmy tworzą "narzędzie" badawcze, które może być z powodzeniem stosowane w numerycznej analizie układów prętowych. Operowanie tym "narzędziem" jest skuteczne jedynie wtedy, gdy posiadamy informacje dotyczące poziomu krytycznego obciążenia konstrukcji, wielkości kroku obciążenia, poziomu dokładności iteracji. Dane te - niezbędne dla prawidłowego funkcjonowania algorytmów - można zdobyć w wyniku przeprowadzania żmudnych prób numerycznych.

Na koniec należy podkreślić, że praca dotyczy wpływu wielkości rzędu drugiego analizowanych na podstawie prostych, "idealnych" modeli prętowych konstrukcji rzeczywistych. W modelach tych nie uwzględniano możliwych imperfekcji tak geometrii, obciążenia, jak i cech materiałowych, nie analizowano stanów granicznych, pominięto efekty dynamiczne związane z przeskokiem, przyjęto jedynie statyczne, konserwatywne, obciążenie węzłowe. Wymienione uproszczenia, jak i wiele innych, powodować powinny pewną ostrożność w przyjmowaniu rezultatów pracy i ich bezkrytycznym stosowaniu.

LITERATURA

1. Aguilar R.I., Snap - through buckling of framed triangulated domes, J.Str.Div., Proc.ASCE, Vol.93, No 512, 1967.
2. Argyris J.H., Matrix analysis of three - dimensional elastic media, small and large deflections, AIAA J., Vol.3, 1965.
3. Argyris J.H., Recent advances in matrix method of structural analysis, Pergamon Press, London, 1964.
4. Argyris J.H., Radaaj D., Steifigkeitsmatrizen dünnwandiger stäbe und stabssysteme, Ing.Archiv, Vol.40, 1971.
5. Badur J., Efektywne wyznaczanie punktów granicznych w nieliniowej mechanice konstrukcji, IV Konf.Met.Komputerowe w Mechanice Konstr., tom 2, Koszalin 1979.
6. Barsoum R., Gallagher R.H., Finite element analysis of torsional and torsional - flexural stability problems, Int. J.Numer. Meth. Eng., Vol. 2, No 3, 1970.
7. Bass L., Lamella domes in the United States, Space Structures, John Wiley and Sons Inc., New York 1967.
8. Bayley M.J., An experimental and theoretical investigation into the behaviour of a three - way aluminum grid domes, Space Structures, John Wiley and Sons, Inc., New York 1967.
9. Bažant Z.P., Mahjoub El Nimeiri, Large-deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames, J.Eng.Mech.Div., Vol.99, No EM6, 1973.
10. Bibliography on latticed structures, J.Str.Div., Vol.98, No ST7, 1972.
11. Cichoń Cz., Zastosowanie bieżącego parametru sztywności do analizy dużych przemieszczeń, IV Konf.Met.Komput. w Mechanice Konstr., tom 2, Koszalin 1979.
12. Connor I.G., Lageher R.D., Chan S., Nonlinear analysis of elastic framed structures, J.Str.Div., Vol.94, No ST6, 1968.
13. Cook R.D., Concepts and applications of finite element analysis, John Wiley and Sons, Inc., 1974.
14. Crooker J.D., Buchert K.P., Reticulated space structures, J.Str.Div., Vol.96, No ST3, 1970.

15. Dąbrowski R., Metody inżynierskie w teorii powłok, Prace Nauk.Inst.Inż.Ląd.Pol.Wrocławskiej, Wrocław 1975.
16. Forman S.E., Hutchinson J.D., Buckling of reticulated shell structures, Int.J.Solids and Structures, Vol.6, No 7, 1970.
17. Fung Y.C., Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN, Warszawa 1969.
18. Glück I., Gellert M., Buckling of lateral restrained thin-walled cantilevers of open cross section, J.Str.Div., Vol. 98, No ST9, 1972.
19. Gryboś R., Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym, PWN, Poznań 1980.
20. Gutkowski W., Regularne konstrukcje prętowe, PWN, Warszawa 1973.
21. Haisler W.E., Stricklin J.A., Development and evaluation of solution procedures for geometrically nonlinear structural analysis, AIAA J., Vol.10, No 3, 1971.
22. Hutchinson J.W., Koiter W.T., Post buckling theory, Applied Mechanics Reviews, Vol.23, 1970.
23. Jagannathan D., Epstein H.J., Christiano P., Nonlinear analysis of reticulated space trusses, J.Str.Div., Vol. 101, No ST12, 1975.
24. Kasemset Ch., Nishino F., Inelastic stability of beams under biaxial bending, J.Eng.Mech.Div., Vol.100, No EM5, 1974.
25. Kiciman O.K., Popov E.P., Post-buckling analysis of cylindrical shells, J.Eng.Mech.Div., Vol.104, No EM4, 1978.
26. Kleiber M., Numeryczne aspekty analizy ciał i konstrukcji sprężysto-plastycznych, Mechanika i Komputer, tom 3, PWN, 1980.
27. Kleiber M., Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych, Teoria i numeryczna analiza konstrukcji, Prace IPPT PAN, Warszawa 1978.
28. Klöppel K., Winkelmann E., Experimentelle und theoretische untersuchungen über die traglast von zweiachsig aussermittig gedrückten Stahlstäben, Der Stahlbau, Vol.3, No 2, 1962.
29. Kowal Z., Wybrane działy z konstrukcji metalowych, Skrypt Pol.Wrocławskiej, Wrocław 1975.

30. Krajcinovic D., A consistent discrete elements technique for thin-walled assamblages, Int.J.Solids and Structures, Vol.5, 1969.
31. Krahula J.L., Analysis of bend and twisted bars using the finite elemnts method, AIAA J. 1967.
32. Latticed Structures: state-of-the-art report, J.Str.Div., Vol.102, No ST11, 1976.
33. Lee L.H.N., Stability of nonlinear systems, J.Eng.Mech. Div., Vol.88, No EM2, 1962.
34. Lee S., Manuel F.S., Rossow E.C., Large deflections and stability of elastic frames, J.Eng.Mech.Div., Vol.94, No EM2, 1968.
35. Loo H., The design and constructions of three reticulated steel domes, space structures, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.
36. Makowski Z.S., Steel space structures, London 1965.
37. Mallet R.H., Marcal P.V., Finite element analysis of non-linear structure, J.Str.Div.,Vol.94, No ST9, 1968.
38. Marcal P.V., A comparative study of numerical methods of elastic-plastic analysis, AIAA J.Vol.6, 1968.
39. Martin H.C., Finite element formulation of geometrically nonlinear problems, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design., Univ. of Alabama Press, 1971.
40. Meek J.L., Swannell P., Stiffness matrices for beam members including warping torsion effects, J.Eng.Mech.Div., Vol.102, No EM1, 1976.
41. Mei C., Coupled vibrations of thin-walled beams of open section using the finite element method, Int.J.Mechanical Science, Vol.12, 1970.
42. Mei C., Replay to Krajcinovic's discussion, Int.J.Mechanical Science, Vol.13, 1971.
43. Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej, red. Borkowski A., Ossolineum, Wrocław 1977.
44. Noor A.K., Nonlinear analysis of space trusses, J.Str.Div., Vol.100, No ST3, 1974.

45. Nowacki W., Mechanika budowli, PWN, Warszawa 1974.
46. Nowacki W., Teoria sprężystości, PWN, Warszawa 1970.
47. Oden J.H., Finite elements of nonlinear continua, Mc Graw-Hill, Book Co., 1972.
48. Powell G., Klinger R., Elastic lateral buckling of steel beams, J.Str.Div., Vol.96, No ST9, 1970.
49. Przemieniecki J.S., Theory of matrix structural analysis, Mc Graw-Hill, Book Co., 1968.
50. Rajasekaran S., Murray D.W., Incremental finite element matrices, J.Str.Div., Vol.99, No ST12, 1973.
51. Reilly R.J., Stiffness analysis of grids including warping, J.Str.Div., Vol.98, No ST7, 1972.
52. Renton J.D., Buckling of frames composed of thinwalled members, Thinwalled Structures, John Wiley and Sons, Inc., New York 1967.
53. Riks E., An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, Int.J.Solids and Structures, Vol.15, No 7, 1979.
54. Rutecki J., Cienkościenne konstrukcje nośne. Obliczenia wytrzymałościowe, PWN, Warszawa 1966.
55. Sewell M.J., A general theory of equilibrium paths through critical points I and II, Proc.Royal Society, Series A, Mathematical and Physical Science, Vol.306, No 1485, 1968.
56. Simitzes G.J., Kounadis A.N., Buckling at imperfect rigid-jointed frames, J.Eng.Mech.Div., Vol.104, No EM3, 1978.
57. Skalmierski B., Mechanika, PWN, Warszawa 1977.
58. Stricklin J.A., Haisler W.E., Von Reisemann W.A., Geometrically nonlinear structural analysis by direct stiffness method, J.Str.Div., Vol.97, No ST9, 1971.
59. Symposium on Industrialized Spatial and Shell Structures, PAN, Kielce 1973.
60. Szmelter J., Metody komputerowe w mechanice, PWN, Warszawa 1980.
61. Timoshenko S.P., Gere J.M., Teoria stateczności sprężystej, Arkady, Warszawa 1963.
62. Turner M.J., Dill E.H., Martin H.C., Melosh R.J., Large deflections of structures subjected to heating and external loads, J.Aerospace Science, 27, 1960.

63. Waszczyszyn Z., Stosowanie metody elementów skończonych w analizie stateczności konstrukcji, V Konf. Metody Komput. w Mechanice, tom 3, Wrocław 1981.
64. Wierzbicki W., Mechanika budowli, ASW Warszawa 1949.
65. Własow W.Z., Tonkostiennyye uprugie sterzni, Moskwa 1959.
66. Woolcock S.T., Trahair N.S., Post buckling of redundant I - beams. J. Eng. Mech. Div., Vol. 102, No EM2, 1976.
67. Woźniak Cz., Siatkowe dźwigary powierzchniowe, PWN, Warszawa 1970.
68. Woźniak Cz., Kleiber M., Nieliniowa mechanika konstrukcji, IPPT PAN, Poznań 1982.
69. Wright D.T., Membrane forces and buckling in reticulated shells, J. Str. Div., Vol. 91, No ST1, 1965.
70. Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Praca zbiorowa, Ossolineum, Wrocław 1981.
71. Yang T.Y., Elastic snap-through analysis of curved plates using discrete elements, AIAA J., Vol. 10, No 4, 1972.
72. Yoo Ch.H., Matrix formulation of curved girders, J. Eng. Mech. Div., Vol. 105, No EM6, 1979.
73. Zeman J., Serie opracowanych w CSRS konstrukcji łukowych wykonanych jako przekrycia siatkowe, Konstr. Metal. 1-2/1973.
74. Zienkiewicz O.C., Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972.
75. Zorghamee M.S., Shah J.M., Stability of space frames, J. Eng. Mech. Div., Vol. 94, No EM2, 1968.

Wojciech Glabisz

WPLYW WIELKOŚCI RZĘDU DRUGIEGO
W ANALIZIE NUMERYCZNEJ UKŁADÓW
PRĘTOWYCH SKŁONNYCH DO PRZESKOKU

Streszczenie

W pracy podjęto próbę analizy numerycznej układów prętowych skłonnych do przeskoku ze szczególnym uwzględnieniem wpływu wielkości rzędu drugiego.

Wielkościami rzędu drugiego nazwano zwykle pomijany składnik tensora odkształceń Greena, a także nie uwzględniane dotychczas człony funkcji określających przemieszczenia elementu.

W poszukiwaniu wpływu wielkości rzędu drugiego sformułowano sztywności elementów, które przyjęto do analizy w dwóch zastosowanych w pracy modelach konstrukcji prętowych.

W pierwszym z analizowanych modeli przyjęto, że elementami konstrukcji są pełnościenne pręty łączące się w idealnych przegubach. W drugim założono, że elementami są cienkościenne pręty łączące się w sztywnych węzłach.

Sformułowane w pracy sztywności elementów stanowiły bazę dla prostych i efektywnych algorytmów numerycznych, które pozwoliły na śledzenie pracy konstrukcji w obszarach przedkrytycznych, krytycznych i pokrytycznych.

Przeprowadzone testy numeryczne pozwoliły wykazać, że wpływ wielkości rzędu drugiego w statycznej analizie obciążanych węzłowo układów prętowych skłonnych do przeskoków istotny jest w ich krytycznych i pokrytycznych obszarach pracy.

Wojciech Glabisz

THE INFLUENCE OF SECOND ORDER VALUES IN THE NUMERIC
ANALYSIS OF BAR-STRUCTURES APT TO SNAP-THROUGH

Summary

The thesis presents an attempt of numeric analysis of snap-through bar-structures with special regard to the influence of second order values.

Usually neglected element of Green's strain tensor and elements of function determining element dislocation are called second order values.

In order to determine the influence of second order values element stiffness was formulated, which was analysed in two models of bar-structures applied for the purpose of the studies.

It was assumed that bars joined in perfect articulated joints are the elements of construction in the first model. Thin-walled bars joined in stiff joints are assumed to be the elements in the second model.

Formulated in the thesis element stiffnesses were the basis for simple and effective numeric algorithms which allowed to observe the behaviour of the construction in the prebuckling, buckling and post-buckling range.

Numeric tests carried out for the purpose of the studies indicated that the influence of second order values in static analysis of joint-loaded bar-structures apt to snap-through is significant for their critical and postcritical ranges of work.

Mgr inż. Wojciech Glabisz
Instytut Inżynierii Lądowej
Politechniki Wrocławskiej
Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27

Raport wpłynął do R.I-14
we wrześniu 1982 roku

Lista odbiorców

Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1
Biblioteka i OINT I-14	1
Redakcja Wydawnictw I-14	1
Promotor	1
Recenzenci	2
IPPT PAN, Warszawa	1
Instytut Mechaniki Budowli Politechniki Krakowskiej	1
Autor	<u>2</u>
	10

