

INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport serii PREPRINTY Nr 150/80

ZAGADNIENIA OPTIMALIZACJI
MINIMALNOKOSZTOWEJ Z FUNKCJĄ
KARY W SYSTEMACH TRANSPORTOWYCH
/praca doktorska/

Ewa Skubalska

Promotor: doc. dr hab. inż. Józef Grabowski

Słowa kluczowe: system transportowy,
optymalizacja,
algorytm

Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 1980

Spis treści

Wstęp

1. Zagadnienia ustalania tras. Zapis symboliczny
 - 1.1. Ogólne przedstawienie zagadnień ustalania tras
 - 1.2. Symbolika zagadnień ustalania tras
 - 1.3. Wykaz zagadnień ustalania tras. Sformułowanie zagadnień pracy
 2. Zagadnienie ustalania trasy pojazdu
 - 2.1. Model matematyczny zagadnienia
 - 2.2. Wyznaczanie dolnych oszacowań
 - 2.3. Wyznaczanie optymalnych terminów obsługi punktów odbioru przy ustalonej trasie pojazdu
 - 2.4. Subgradientowa metoda wyznaczania dolnego oszacowania
 - 2.5. Algorytm rozwiązywania zagadnienia
 - 2.6. Problem ustalania trasy pojazdu w przypadku istnienia wielu magazynów
 3. Zagadnienie wyznaczania tras wielu pojazdów
 - 3.1. Model matematyczny
 - 3.2. Wyznaczanie dolnych oszacowań
 - 3.3. Algorytm rozwiązywania zagadnienia
 - 3.4. Uogólnienie problemu z jednym pojazdem
 4. Zagadnienie wyznaczania tras wielu pojazdów.
Uogólnienie
 - 4.1. Model matematyczny
 - 4.2. Własności zagadnienia
 - 4.3. Algorytm
 5. Algorytmy heurystyczne
 6. Zagadnienie ustalania tras pojazdów przy funkcji celu uwzględniającej kary za użycie pojazdów
 7. Eksperymenty obliczeniowe
 - 7.1. Przykłady testujące
 - 7.2. Wyniki obliczeniowe
 8. Zastosowania
 - 8.1. Optymalizacja procesu transportu wewnątrzzakładowego
 - 8.2. Zagadnienie dowozu pracowników do miejsc pracy
- Zakończenie
- Literatura

The minimum cost optimization problems with penalty function in transportation systems

Abstract

We are considered routing problems, where penalties occur for delivery points that either arrival time to a delivery point is less than earliest delivery time or a service of a delivery point is completed after its due date. In these routing problems it is required to find a route or a set of routes so that certain constraints are satisfied and the total cost of the routes is minimized. Constraints are imposed upon: vehicle capacities, demand requirements of delivery points and the routing structure.

The total cost of routes is composed of: the total travel cost /the total distance covered by the entire fleet/, the acquisition costs and the total cost arising from earliness and tardiness of the service of the individual delivery points.

Various assumptions in forming the vehicle routes are considered:

- (a) each delivery point is to be visited at most once, i.e. when a delivery point is serviced its requirements are satisfied;
- (b) each delivery point can be visited several times, by different vehicles;
- (c) each vehicle can be used in only one tour;
- (d) each vehicle can be used in more than one tour.

Three new routing problems and their extensions are shown.

All these problems are NP-complete.

Various mathematical models of the problems are formulated which are extensions of the Traveling Salesman Problem. Valid relaxations are discussed for these models. In each case several lower bounds are derived.

A general methodology for computing lower bounds is Lagrangian relaxation. Subgradient optimization is used as a method of maximizing the resulting lower bounds for imbedding into tree search algorithms.

Three heuristic algorithms are proposed for the design of efficient vehicle routes.

A branch and bound scheme with stopped fathoming is used to find optimal and suboptimal routes. The methods introduced in the dissertation combine branch and bound scheme with heuristic algorithms. Finally computational results are presented and discussed.

W pracy rozważane są problemy ustalania tras pojazdów przy kryterium optymalizacji uwzględniającym kary za przekroczenie normatywnych terminów obsługi. Problemy te polegają na wyznaczaniu zbioru tras spełniających zadane ograniczenia i takich, że całkowity koszt realizacji tych tras jest minimalny. Uwzględniane w pracy ograniczenia są wprowadzane przez: pojemności pojazdów, wielkości zapotrzebowań punktów odbioru i przez dopuszczalną strukturę tras. Rozważane są trzy podstawowe problemy ustalania tras i ich uogólnienia. Wszystkie te problemy są NP-zupełne. Sformułowano algorytmy prowadzące do konstrukcji efektywnych tras pojazdów. Algorytmy łączą schemat podziału i ograniczeń z podejściem heurystycznym. Przedstawiono i przedyskutowano otrzymane wyniki obliczeniowe.

Wstęp

W wielu dziedzinach gospodarki występują problemy optymalnego wykorzystania istniejących środków transportu /mogą to być samochody, pociągi, samoloty, statki, taśmociągi itp./ poprzez odpowiedni wybór tras. Przykładem zagadnień tego typu może być ustalanie tras pojazdów rozwożących różnego typu towary, np. gazety, nabiał [13], pieczywo; tras autobusów szkolnych lub dowożących pracowników do zakładów pracy; oczyszczanie miast: zbiórka śmieci, polewanie ulic; ustalanie tras dla pojazdów w transporcie wewnątrzzakładowym [25], itd.

Ogólnie rzecz biorąc, w systemie transportowym można wydzielić następujące istotne elementy:

- (i) magazyny /liczba magazynów, lokalizacja, posiadane zasoby transportowanego materiału/
- (ii) środki transportu /typy środków transportu, ich liczba, zdolności przewozowe/
- (iii) punkty odbioru /zapotrzebowanie na materiał, ograniczenie dotyczące obsługi: wymagany czas obsługi, ograniczenia terminów obsługi, ograniczenie związane z porządkiem i sposobem obsługi/
- (iv) struktura tras /ograniczenie maksymalnej długości trasy lub czasu trwania przejazdu trasy/
- (v) bazy środków transportu /lokalizacja baz, liczba środków transportu przydzielonych do baz/

Uwzględnienie tych wszystkich ograniczeń w jednym problemie optymalizacyjnym jest praktycznie niemożliwe /a w każdym razie byłoby zadaniem ogromnie złożonym/, nie jest także konieczne z punktu widzenia zastosowań, gdyż w problemach wziętych z praktyki, ograniczenia te na szczęście nie występują wszystkie równocześnie. Trzeba jednak stwierdzić, że znane algorytmy rozwiązujące zagadnienia tego typu

uwzględniają tylko niektóre spośród ograniczeń zasygnalizowanych w punktach (i) - (v). Krótki przegląd tych zagadnień znajduje się w rozdziale 1. Szczególnie wiele prac poświęconych jest zagadnieniu komiwojażera /lub wielu komiwojażerów/, które prowadzi do skonstruowania trasy /tras/ o minimalnym koszcie /minimalnej długości/, w której każdy punkt odbioru uwzględniony jest dokładnie raz /w jednej z tras komiwojażerów/. Kryterium minimalizacji sumarycznego kosztu realizacji tras /długości, czasu trwania tras/ jest podstawowym kryterium występującym w zagadnieniach ustalania tras. Niekiedy kryterium to jest modyfikowane i uwzględnia także /w przypadku zagadnień z wieloma pojazdami/ koszt użycia pojazdów. W przypadku, gdy dodatkowe opłaty związane z faktem użycia pojazdu są znacznie większe niż koszty związane bezpośrednio z realizacją tras, otrzymujemy problemy z kryterium minimalizacji liczby użytych pojazdów [46, 47].

W niniejszej pracy zakłada się istnienie jednej bazy pojazdów. Uwzględnienie tego faktu nie powoduje specjalnych komplikacji w proponowanych w pracy algorytmach. Istnienie odrębnych magazynów i baz uwzględniane jest także w modelach zagadnień ustalania tras w pracach [2, 36, 42].

Celem niniejszej pracy jest opracowanie algorytmów rozwiązywania zagadnień ustalania tras, w których uwzględnione są w funkcji celu kary za przekroczenie żądanych terminów obsługi punktów odbioru /oraz terminów obsługi pojazdu przez magazyn i bazę/. Analogiczne funkcje celu są formułowane w odniesieniu do zagadnień optymalizacji kolejności operacji [37].

Cechą charakterystyczną problemów będących przedmiotem badań w pracy jest:

- rozróżnienie bazy i magazynów, które nie muszą być usytuowane w tym samym miejscu;
- uwzględnianie czasu obsługi punktów odbioru i magazynów /czas wyładunku i załadunku towaru/;
- istnienie jednego typu towaru.

Problem ustalania tras, w którym występują ograniczenia na terminy obsługi punktów odbioru został sformułowany w pracy [36], w której nie przedstawiono jednak żadnego algorytmu rozwiązania tego problemu. Podobnym uogólnieniem w odniesieniu do zagadnienia komiwojażera zajmuje się praca [16].

W wielu sytuacjach praktycznych uwzględnienie żądanych terminów obsługi punktów odbioru ma bardzo istotne znaczenie, np. ma istotny wpływ na ciągłość produkcji w przypadku transportu surowców.

W przypadku dostawy w terminie zbyt późnym w stosunku do wymaganego najpóźniejszego terminu obsługi powstają przestoje w produkcji, które powodują określone straty. Natomiast w przypadku zbyt wczesnej dostawy mogą powstać kłopoty związane ze zmagazynowaniem zbyt dużej ilości towaru, i w konsekwencji, straty związane z niewłaściwym przechowywaniem materiałów.

Ogólnie rzecz biorąc, w przypadku istnienia normatywnych terminów obsługi można zastosować dwa odrębne podejścia. A mianowicie - albo można uwzględniać żądane terminy obsługi w ograniczeniach modelu matematycznego [36], albo też można dopuścić możliwość przekroczenia tych terminów, natomiast wprowadzić do funkcji celu kary za ich przekroczenie. Drugie rozwiązanie jest równoważne pierwszemu, jeśli kary za przekroczenie terminów obsługi są dostatecznie duże. Jest to jednak podejście bardziej elastyczne, pozwala bowiem skonstruować rozwiązanie dopuszczalne nawet wtedy, gdy ograniczenia na terminy obsługi są sprzeczne.

Przedstawione w pracy algorytmy były formułowane głównie z myślą o konieczności uwzględnienia kar za przekroczenie terminów obsługi.

W znanych zagadnieniach ustalania tras przyjmuje się zazwyczaj, że każdy punkt odbioru jest obsługiwany jednorazowo, przez jeden pojazd.

W niniejszej pracy zostały zbadane własności rozwiązań problemu ustalania tras, w przypadku, gdy dopuszcza się możliwość obsługi jednego punktu odbioru przez kilka pojazdów, co pozwala często na ustalenie tras o sumarycznych kosztach mniejszych niż w przypadku poprzedniego założenia [36].

Praca zawiera: sformułowanie modeli matematycznych rozważanych zagadnień ustalania tras; określenie i dowody własności zagadnień; opracowanie algorytmów rozwiązania.

W rozdziale 1 przedstawiono przegląd znanych zagadnień ustalania tras. W rozdziale 2 przedstawiono zagadnienie ustalania trasy jednego pojazdu. W rozdziale 3 rozważany jest problem z wieloma pojazdami /przy założeniu, że każdy punkt odbioru jest zaopatrywany jednorazowo/ oraz uogólnienie zagadnienia z jednym pojazdem, w przypadku gdy pojemność pojazdu jest mniejsza niż suma zapotrzebowań punktów odbioru. Rozdział 4 zajmuje się zagadnieniem ustalania tras wielu pojazdów, w przypadku gdy punkty odbioru mogą być zaopatrywane przez więcej niż jeden pojazd. We wszystkich wymienionych zagadnieniach funkcja celu jest sumą czasów /kosztów/ przejazdu tras i kar za przekroczenie terminów obsługi. W rozdziale 6 przedstawiona jest możliwość

uogólnienia tych zagadnień na przypadek, gdy w funkcji celu uwzględniony jest dodatkowo człon określający opłaty za użycie pojazdów.

W rozdziale 5 przedstawiono algorytmy heurystyczne rozwiązywanie zagadnień rozważanych w rozdziałach 2, 3 i 4.

W rozdziale 7 zaprezentowano wyniki przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych na maszynie cyfrowej.

1. Zagadnienia ustalania tras pojazdów. Zapis symboliczny

1.1. Ogólne przedstawienie zagadnień ustalania tras.

Zagadnienia ustalania tras pojazdów można w opisowy sposób przedstawić następująco.

Założmy, że jest dana mapa regionu, w którym znajdują się baza, magazyny i punkty odbioru. Mapa ta może być przedstawiona w postaci grafu $G = \langle N, A \rangle$, ze zbiorem węzłów N i zbiorem łuków $A = N \times N$. Zbiór węzłów jest postaci:

$$N = X \cup M \cup \{x_{n+1}\},$$

gdzie:

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - jest zbiorem punktów odbioru pewnego materiału o zapotrzebowaniach opisanych przez funkcję $q: X \rightarrow \mathcal{R}_+$ /dalej zapotrzebowanie punktu $x_i \in X$ będzie oznaczone przez q_i /;

$M = \{x_{p1}, \dots, x_{pm}\}$ - jest zbiorem magazynów o zapasach transportowanego towaru odpowiednio równych $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$;

x_{n+1} - wyróżniony w zbiorze węzłów N wierzchołek x_{n+1} odpowiada bazie pojazdów.

Dalej, określona jest funkcja $a: A \rightarrow \mathcal{R}_+ \cup \{0\}$, gdzie $a(x_i, x_k) = a_{ik}$ oznacza czas przejazdu /koszt, odległość/ pojazdów z punktu x_i do punktu x_k .

Materiał zgromadzony w magazynach należy przewieźć do punktów odbioru /tak, by zaspokoić zapotrzebowania odbiorów/ przy użyciu pojazdów /środków transportu/ ze zbioru $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_p\}$. Każdy pojazd charakteryzuje się określoną pojemnością /maksymalną ilością towaru, którą może przewozić jednorazowo/, oznaczoną przez liczbę c_j ,

$R_j \in \mathcal{R}$. Problemy ustalania tras pojazdów sprowadzają się do wyznaczenia dróg w grafie $G = \langle N, A \rangle$, przy czym każda droga /odpowiadająca trasie pewnego pojazdu/ zaczyna się i kończy w wyróżnionym wierzchołku x_{n+1} , który reprezentuje bazę.

Mogą przy tym wystąpić różne dodatkowe ograniczenia na trasy pojazdów, na przykład ograniczenia na maksymalną długość /czas przejazdu/ każdej z tras.

Wprowadźmy następujące definicje:

Definicja 1. Turą pojazdu będzie nazywana droga prosta w grafie $G = \langle N, A \rangle$ postaci $(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_z})$, spełniająca warunki:

$$x_{\alpha_1} \in M,$$

$$x_{\alpha_i} \in X, \quad i=1, \dots, z \quad (z \geq 2) \quad .\blacksquare$$

Turą jest więc pewien fragment trasy, w którym węzłem początkowym jest magazyn, a następne węzły to punkty odbioru. Żaden z punktów odbioru nie może wystąpić w danej turze więcej niż jeden raz.

Definicja 2. Trasą pojazdu będzie nazywany kontur /niekoniecznie prosty/ w grafie $G = \langle N, A \rangle$ postaci $\pi = (x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_\omega})$ spełniający warunki:

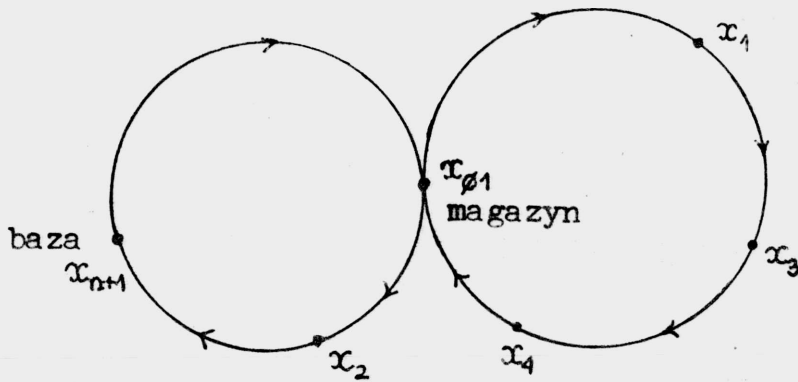
$$(i) \quad x_{\beta_1} = x_{\beta_\omega} = x_{n+1},$$

$$(ii) \quad x_{\beta_{\gamma_1}}, \dots, x_{\beta_{\gamma_t}} \in M, \quad \text{gdzie}$$

$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t)$ jest pewnym podciągiem ciągu wskaźników $(2, 3, \dots, \omega - 1)$, takim że: $\gamma_1 = 2$ oraz $\gamma_i \leq \gamma_{i+1} - 1$,
 $i=1, \dots, t-1$, przy czym $t \geq 1$.

$$(iii) \quad \text{każda droga } (x_{\beta_{\gamma_i}}, x_{\beta_{\gamma_{i+1}}}, \dots, x_{\beta_{\gamma_{i+1}-1}}), \quad i=1, \dots, t, \quad \text{/gdzie } \gamma_{t+1} = \omega \quad \text{/ jest turą.} \blacksquare$$

Warunek (i) oznacza, że trasa pojazdu zaczyna się w bazie /wierzchołek x_{n+1} /. Z warunków (i), (ii) wynika, że każda trasa składa się co najmniej z jednej tury. Na przykład, niech trasa pojazdu będzie postaci $\pi = (x_{n+1}, x_{\beta_1}, x_1, x_3, x_4, x_{\beta_1}, x_2, x_{n+1})$. Trasa ta składa się z dwu tur: $(x_{\beta_1}, x_1, x_3, x_4)$ oraz (x_{β_1}, x_2) /rys. 1.1/.



Rys. 1.1 Trasa pojazdu złożona z dwu tur.

Definicja trasy przedstawiona tutaj nie jest najogólniejszą definicją jaką można rozważać. Dotyczy ona sytuacji, gdy zapasy towaru w magazynach są znacznie większe niż pojemności pojazdów. W przypadku, gdy wartości μ_{0i} ($i=1, \dots, m$) są mniej więcej tego samego rzędu co wartości q_k ($k=1, \dots, n$), każda tura w trasie pojazdu musiałaby mieć ogólniejszą postać, to znaczy: $(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_v}, \dots, x_{\alpha_z})$, gdzie $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_v} \in M$, natomiast $x_{\alpha_{v+1}}, \dots, x_{\alpha_z} \in X$. Tego typu tury nie będą w pracy rozważane.

Oprócz zagadnień, w których rozważa się odbiory zlokalizowane w pewnym punkcie, występują także problemy wymagające ustalenia w grafie G dróg zawierających pewne wyróżnione krawędzie z tego grafu /odbiory typu łukowego/. Najprostszymi zagadnieniami tego typu są problemy:

chińskiego listonosza /CPP/, wiejskiego listonosza /RPP/ i ogólny problem ustalania tras pojazdów /MGRP/ sformułowany w pracach [57], [58].

Do tej pory nie były rozważane żadne relacje czasowe występujące w trasie.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- τ_i^0 - oznacza czas obsługi pojazdu w punkcie x_i /załadunku, jeśli $x_i \in M$ jest magazynem, wyładunku, jeśli $x_i \in X$ jest punktem odbioru/,
- r_i - oznacza najwcześniejszy żądany termin przyjazdu pojazdu do punktu x_i /jeśli $x_i = x_{n+1}$, to r_{n+1} oznacza żądany najwcześniejszy termin wyjazdu z bazy/,
- d_i - oznacza najpóźniejszy żądany termin wyjazdu z punktu x_i /jeśli $x_i = x_{n+1}$, to d_{n+1} oznacza najpóźniejszy żądany termin powrotu pojazdu do bazy/,

$s_i^l(j)$ - oznacza termin wyjazdu pojazdu o numerze j -tym z punktu x_i w l -tej turze trasy ($s_{n+1}^l(j)$ oznacza termin powrotu do bazy). Terminy $s_i^l(j)$ wyznaczane są tylko dla tych punktów, które wchodzi w skład l -tej tury trasy j -tego pojazdu. Jeżeli w trasie punkt x_i poprzedza bezpośrednio punkt x_k , to musi być spełniona następująca nierówność:

$$s_i^l(j) + a_{ik} + \tau_k^0 \leq s_k^{l+1}(j) .$$

Nierówność ta dopuszcza występowania w trasie przerw, w czasie których pojazd nie porusza się. Natomiast terminy r_i i d_i mogą być uwzględniane, albo w postaci ograniczeń, i wtedy mamy spełnione ograniczenia :

$$r_i \leq s_i^l(j) - \tau_i^0 ,$$

$$s_i^l(j) \leq d_i ,$$

/jeżeli punkt x_i wchodzi w skład l -tej tury trasy j -tego pojazdu/, albo też mogą być uwzględniane poprzez wprowadzenie dodatkowych kar za przekroczenie tych terminów.

Dalej, niech:

$T_i(s)$ - oznacza spóźnienie terminu zakończenia obsługi s punktu x_i względem normatywnego terminu d_i ,

$$T_i(s) \triangleq \max \{ 0, s - d_i \} .$$

Wartość $T_i(s)$ może być większa od zera tylko wtedy, gdy dopuszcza się możliwość przekraczania normatywnego terminu d_i . Podobnie, niech:

$E_i(s)$ - oznacza wyprzedzenie rozpoczęcia obsługi punktu x_i /którego obsługa została zakończona w terminie s / względem normatywnego terminu r_i ,

$$E_i(s) \triangleq \max \{ 0, r_i + \tau_i^0 - s \} .$$

Wartość $E_i(s)$ może być większa od zera, tylko wtedy, gdy dopuszcza się możliwość przekraczania terminu r_i .

Niech w_i i v_i oznaczają odpowiednio kary za przekroczenie normatywnych terminów r_i i d_i .

W zagadnieniach ustalania tras pojazdów można rozważać następujące postaci funkcji kryterialnych, które należy minima-

$\sum a$ - lizować:
 - oznacza sumaryczny czas przejazdu /koszt przejazdu/wszystkich tras. Jeżeli przez $\pi_j = (\pi_j(1) \dots, \pi_j(\omega_j))$ oznaczmy trasę pojazdu o numerze j-tym, to mamy:

$$\sum a \triangleq \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{\omega_j-1} a_{\pi_j(i) \pi_j(i+1)} = \sum_{j=1}^p g_j ,$$

gdzie g_j oznacza czas przejazdu trasy j-tego pojazdu.

$\max s_{n+1}$ - oznacza czas zakończenia realizacji tras

$$\max s_{n+1} \triangleq \max_{1 \leq j \leq p} s_{n+1}(j)$$

$\sum vT$ - oznacza sumaryczny koszt opłat za przekroczenie terminów d_i , przy czym wartość $\sum vT$ jest równa:

$$\sum vT \triangleq \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^t \sum_{i=2}^{\omega_j} v_{\pi_j(i)} \cdot T_{\pi_j(i)} s_{\pi_j(i)}^1(j)$$

$\sum wE$ - oznacza sumaryczny koszt opłat za wyprzedzenie terminów normatywnych r_i . Wartość $\sum wE$ jest równa

$$\sum wE \triangleq \sum_{i=1}^p \sum_{i=1}^t \sum_{i=1}^{\omega_j-1} w_{\pi_j(i)} \cdot E_{\pi_j(i)} (s_{\pi_j(i)}^1(j)),$$

gdzie $E_{n+1}(s_{n+1}(j)) \triangleq \max \{ 0, r_{n+1} + a_{n+1, \pi_j(2)} + \tau_{\pi_j(2)}^0 - s_{\pi_j(2)}^1(j) \}$.

Niech $k_u(j)$ oznacza koszt użycia /zakupu, wydzierżawienia/ pojazdu R_j .

$\sum k_u$ - oznacza sumaryczny koszt użycia pojazdów. Niech $Y \subset \mathcal{R}$ oznacza zbiór pojazdów, którym przydzielono jakąś trasę, wtedy mamy

$$\sum k_u \triangleq \sum_{R_j \in Y} k_u(j) .$$

W sytuacji gdy, dla każdego $j=1, \dots, p$, wartość $k_u(j) = 1$, co inaczej możemy zapisać w postaci:

$$D_j = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } R_j \in Y \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

otrzymujemy funkcję celu postaci:

$$\sum D \triangleq \sum_{j=1}^p D_j,$$

gdzie:

$\sum D$ - oznacza liczbę użytych pojazdów. Funkcja celu $\sum D$ prowadzi, więc do kryterium minimalizacji liczby użytych pojazdów. Najbardziej ogólną funkcją celu rozważaną w pracy będzie funkcja celu postaci:

$$\sum a + \sum wE + \sum vT + \sum k_u.$$

1.2. Symbolika zagadnień ustalania tras

W niniejszej pracy przedstawiony zostanie symboliczny zapis zagadnień typu ustalania trasy wzorowany na notacji stosowanej w odniesieniu do zagadnień sekwencyjnych [37, 48].

Zapis ten ma postać:

$$p \mid m, n \mid \Omega, \alpha \mid \Gamma$$

gdzie: p - liczba pojazdów,

m - liczba magazynów,

n - liczba punktów odbioru,

Ω - typ tras,

α - informacja określająca istnienie dodatkowych ograniczeń i założeń,

Γ - postać funkcji celu

Typy tras (Ω) są oznaczane następująco:

- PP - Każdy z pojazdów wykonuje co najwyżej jedną turę, to znaczy odwiedza dokładnie raz magazyn, w którym następuje załadunek towaru, a następnie zaopatruje jeden lub kilka punktów odbioru i wraca do bazy. Każdy punkt odbioru jest zaopatrywany przez jeden pojazd.
- WP - Każdy z pojazdów wykonuje co najwyżej jedną turę. Każdy punkt odbioru może być zaopatrywany przez kilka pojazdów.

PW - Każdy pojazd może wykonać więcej niż jedną turę, /to znaczy, że załadunek towaru na pojazd może odbywać się kilkakrotnie/. Każdy punkt odbioru zaopatrywany jest przez jeden pojazd, jednorazowo.

WW - Każdy pojazd może wykonać więcej niż jedną turę. Każdy punkt odbioru może być zaopatrywany przez kilka pojazdów lub przez jeden pojazd kilkakrotnie.

Dodatkowa informacja α jest oznaczana następująco:

μ_i - pojemności magazynów są ograniczone /należy je uwzględnić/
 $\tau^i_0 \geq 0$ - czas obsługi pojazdu w punktach odbioru i magazynach jest większy od zera,

$s^1_i(j) \leq d_i$ - obsługa każdego z punktów musi zostać zakończona przed żądanym terminem zakończenia obsługi,

$c_j \geq \sum q_i$ - pojemność każdego pojazdu jest większa niż suma zapotrzebowań wszystkich punktów odbioru,

$g_j \leq \bar{g}$ - maksymalna długość /czas przejazdu/ trasy nie może być większa niż ustalona wartość $\bar{g}$,

wt - występuje więcej niż jeden typ towaru

$b_i = wb$ - występuje więcej niż jedna baza; każdy pojazd należy przydzielić do jednej z baz,

$|b_i| = 1$ - występuje więcej niż jedna baza; każdy pojazd jest przydzielony do jednej z baz,

$\langle$ - występują wymagania określające porządek obsługi punktów odbioru,

"droga" - ustalona jest kolejność obsługi wszystkich punktów odbioru,

L - występują odbiory typu łukowego

WL - występują zarówno odbiory typu łukowego jak i punkty odbioru.

Brak odpowiednich symboli w oznaczeniu zagadnienia należy interpretować jako informację dopełnieniową. Na przykład brak symbolu wt oznacza, że rozważany jest problem jednotowarowy. Przedstawiony zestaw oznaczeń można dowolnie rozszerzać w zależności od potrzeb.

1.3. Wykaz zagadnień ustalania tras. Sformułowanie zagadnień pracy

Przedstawiony zostanie obecnie wykaz zagadnień typu ustalania tras rozważanych dotychczas w literaturze, a na ich tle zapre-

zentowane zostaną zagadnienia będące przedmiotem niniejszej pracy. Sporządzając wykaz /tablica 1.1/ posłużono się zapisem symbolicznym przedstawionym w poprzednim punkcie pracy. Wszystkie wymienione zagadnienia są NP-zupełne.

TABLICA 1.1 Wykaz zagadnień ustalania tras.

Zagadnienie	Literatura zawierająca:		
	algorytmy heurystyczne	algorytmy dokładne	tylko model matematyczny
$1 1, n PP \sum a$ zagadnienie komiwojażera (TSP)	[21], [35], [50] [51], [54], [56]	[5], [8], [14], [15], [6], [16], [20], [22], [29] [40], [41], [52] [57], [60]	
$p 1, n PP, c_j \geq \sum q_i \sum a$ zagadnienie wielu komiwojażerów M-TSP	[58], [59], [53] [70]	[64], [7]	
$p p, n PW, c_j \geq \sum q_i,$ $ b_i = 1 \sum a$		[45]	
$1 1, n WW, W\bar{L}, c_j \geq \sum q_i$ a Zagadnienie RPP		[57]	
$p 1, n WP, W\bar{L}, b_i = wb,$ $g_j \leq \bar{g} \sum a$	[10]	[44]	
$p 1, n PP, c_j \geq \sum q_i $ $\sum a + \sum k_u$ zagadnienie wielu komiwojażerów	[49]		
$p 1, n PP, g_j \geq \bar{g} \sum a$ zagadnienie VRP	[9], [11], [17], [19] [29], [34], [36], [43], [55], [63], [67], [68], [69]	[18]	
$p 1, n PP, \tau^0 \geq 0,$ $g_j \leq \bar{g} \sum a$	[24]		
$p 1, n PP, g_j \leq \bar{g} $ $\sum a + \sum k_u$			[36]

$p 1,n WP, \quad \sum a$			[3], [32]
$p 1,n PP, \quad \tau^0 \geq 0,$ $r_i \leq s_i \leq d_i, \quad g_j \leq \bar{g} \quad \sum a$			[36]
$p m,n PP, \quad b_i = w_i \quad \sum a^{1/}$ zagadnienie M-VRP	[9], [12], [36], [66], [68]		

zagadnienia rozważane w pracy:

$$\begin{aligned}
 &1|1,n|PP, \quad \tau^0 \geq 0 \quad | \sum a + \sum wE + \sum vT \\
 &1|m,n|PP, \quad \tau^0 \geq 0 \quad | \sum a + \sum wE + \sum vT \\
 &1|1,n|PW, \quad \tau^0 \geq 0 \quad | \sum a + \sum wE + \sum vT \\
 &p|1,n|PP, \quad \tau^0 \geq 0 \quad | \sum a + \sum wE + \sum vT \\
 &p|1,n|WP, \quad \tau^0 \geq 0 \quad | \sum a + \sum wE + \sum vT
 \end{aligned}$$

Uogólnienie powyższych zagadnień
w przypadku funkcji celu postaci:

$$\sum a + \sum wE + \sum vT + \sum k_u.$$

1/ W zagadnieniu tym przyjmuje się, że każda baza jest jednocześnie magazynem.

Wymienione w tablicy 1.1 zagadnienia obejmują jedynie problemy ustalania tras w przypadku istnienia jednego typu towaru. Pewne problemy wielotowarowe były rozważane w pracach [1, 2, 44].

Zagadnienia ustalania tras mają charakter kombinatoryczny. Dla każdego zagadnienia ustalania tras można skonstruować algorytm rozwiązania oparty na metodach podziału: metodzie podziału i ograniczeń lub programowaniu dynamicznym [31]. W rozwiązywaniu zagadnień kombinatorycznych szczególnie często stosowana jest metoda podziału i ograniczeń.

W stosunku do zagadnień ustalania tras szczególnie silnie rozwinięte są metody heurystyczne, pozwalające na otrzymanie dobrych rozwiązań dopuszczalnych problemów. Przegląd różnych metod rozwiązywania zagadnień ustalania tras znajduje się w szczególności w pracach [9, 36, 46, 55, 57].

Przedstawione w niniejszej pracy algorytmy zostały oparte o metodę podziału i ograniczeń. Bardzo istotną rolę odgrywają w tych algorytmach rozwiązania otrzymane przy użyciu metod heurystycznych.

W przypadku zagadnień o większych rozmiarach uwzględniono możliwość otrzymywania rozwiązań α -optymalnych. W tego rodzaju sytuacjach algorytmy te mogą być traktowane jako przybliżone.

2. Zagadnienie ustalania trasy pojazdu.

W rozdziale niniejszym rozważany będzie problem $1|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$. Problem $1|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ polega na tym, że mamy zbiór punktów odbioru $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, magazyn x_0 oraz bazę pojazdu x_{n+1} . Macierz a_{ij} przedstawia koszt przejazdu pojazdu z punktu x_i do x_j /interpretowany dalej jako czas przejazdu pojazdu z x_i do x_j , co nie zmniejsza ogólności rozważań/. Dla każdego punktu x_i ($i=0,1, \dots, n+1$) określone są terminy dostępności r_i i d_i ($r_i \leq d_i$), kary w_i i v_i za przekroczenie terminów dostępności /odpowiednio kara w_i za wyprzedzenie terminu r_i o jedną jednostkę czasu i v_i - za spóźnienie w stosunku do terminu d_i o jedną jednostkę czasu/ oraz czas obsługi punktów odbioru i pojazdu w magazynie - τ_i^0 ($i=0,1, \dots, n+1$).

Zagadnienie optymalizacji polega na takim wyborze kolejności obsługi punktów odbioru i odpowiednio: terminów wyjazdu s_i , $i=0, \dots, \dots, n+1$, pojazdu z magazynu, z punktów odbioru oraz terminu powrotu do bazy, aby przyjęta funkcja celu osiągnęła minimalną wartość.

2.1. Model matematyczny zagadnienia

Niech x_{ij} będzie binarną zmienną decyzyjną przyjmującą wartości:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy pojazd przejeżdża bezpośrednio z punktu} \\ & \text{o numerze } i \text{ do punktu o numerze } j, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Model matematyczny zagadnienia można przedstawić następująco:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} \cdot a_{ij} + a_{n+1,0} + \sum_{i=0}^{n+1} (w_i E_i + v_i T_i) \rightarrow \min \quad (2.1)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n+1, \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = 1, \quad i=0, 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in \bar{V}} x_{ij} \geq 1, \text{ dla każdego właściwego, niepustego } V \subset \{0, 1, \dots, n\}, \text{ gdzie } \bar{V} = \{1, 2, \dots, n+1\} - V \quad (2.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i=0, 1, \dots, n; \quad j=1, 2, \dots, n+1 \quad (2.5)$$

$$s_0 \geq a_{n+1,0} + \tau_0^0 \quad (2.6)$$

$$s_j \geq \sum_{i=0}^n x_{ij} \cdot (s_i + a_{ij}) + \tau_j^0, \quad j=1, \dots, n+1, \\ \text{przy czym } \tau_{n+1}^0 = 0, \quad (2.7)$$

gdzie E_i i T_i są określone następująco:

$$\begin{aligned} E_i &= \max \{ 0, r_i + \tau_i^0 - s_i \}, \quad i=0, 1, \dots, n, \\ T_i &= \max \{ 0, s_i - d_i \}, \quad i=0, 1, \dots, n, \\ E_{n+1} &= \max \{ 0, r_{n+1} - s_0 - a_{n+1,0} - \tau_0^0 \}, \\ T_{n+1} &= \max \{ 0, s_{n+1} - d_{n+1} \}. \end{aligned}$$

Zakłada się, że $a_{ii} = \infty$ ($i=0, 1, \dots, n+1$).

W przedstawionym problemie nie ma ograniczeń na czas trwania przejazdu trasy, można je natomiast wprowadzić w sposób pośredni przyjmując, że $r_{n+1} = 0$ oraz d_{n+1} jest równe maksymalnemu czasowi trwania przejazdu trasy. Wtedy przy dostatecznie dużej wartości kary v_{n+1} otrzymamy w wyniku optymalizacji wartość $s_{n+1} \leq d_{n+1}$. W przypadku, gdy kary za przekroczenie terminów dostępności punktów odbioru, magazynu i bazy są równe zeru ($w_i, v_i = 0$), przedstawiony problem staje się zagadnieniem znalezienia najkrótszej drogi między punktami x_0 /magazyn/ a x_{n+1} /baza/ przechodzącej przez wszystkie punkty odbioru. Jest to problem równoważny zagadnieniu komiwojażera [15].

Problem komiwojażera jest więc szczególnym przypadkiem rozważanego zagadnienia, a zatem problem $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ jest problemem NP-zupełnym [48, 63], należy więc do jego rozwiązania stosować metody używane w rozwiązywaniu zagadnień należących do klasy zagadnień NP-zupełnych.

2.2. Wyznaczanie dolnych oszacowań

Problem $1|1, n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$ można zdekomponować na dwa zagadnienia, oznaczmy je A i B.

Zagadnienie A jest to problem (2.2) - (2.7) z funkcją celu postaci

$\sum a$ /czyli we wprowadzonej notacji jest to problem $1|1, n|PP$,

$\tau^0 \geq 0 \mid \sum a$ /. Zagadnienie A jest równoważne zagadnieniu komiwojażera. Wynika to z faktu, że ograniczenia (2.6), (2.7) są zawsze niesprzeczne, niezależnie od wartości zmiennych x_{ij} , a wartości zmiennych s_i nie mają wpływu na wartość funkcji celu.

Zagadnienie B to problem $1|1, n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum wE + \sum vT$. W funkcji celu zagadnienia B uwzględnione są tylko kary za przyspieszenie i opóźnienie terminów obsługi w stosunku do ustalonych terminów r_i i d_i . Do problemu B jest redukowalny problem sekwencyjny $n|1| - \mid \sum vT$, który jest NP-zupełny [37, 48]. Aby tego dowieść wystarczy przyjąć, że $a_{ij} = p_j$ ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, n$) $w_i=0$, ($i=1, \dots, n$), natomiast kary v_i nie ulegają zmianie /gdzie p_j , $j=1, \dots, n$ są parametrami zagadnienia $n|1| - \mid \sum vT$ /.

Z rozważania tego wynika, że problem B jest NP-zupełny.

W celu wyznaczenia dolnego oszacowania dla zagadnienia A można zastosować następujące relaksacje tego problemu, przy których istnieją algorytmy wielomianowe rozwiązania:

- zagadnienie przydziału następnika (APN) [15, 48, 57]
- zagadnienie ważonego 2-skojarzenia (w-2-MP) [16, 30, 31, 46, 48, 57]
- zagadnienie minimalnego drzewa rozpinającego (SST) [5, 14, 15, 16, 40, 46, 48, 57]
- zagadnienie przydziału pozycji (APP) [48, 60]
- zagadnienie najkrótszej drogi (SP) [16, 60]
- zagadnienie redukcji macierzy a_{ij} stosowane w algorytmie Little'a [52, 70]

W celu wyznaczenia dolnego oszacowania wartości optymalnego rozwiązania problemu B można rozważać następujące problemy otrzymane poprzez relaksację zagadnienia B:

- zagadnienie przydziału następnika (APN),
- zagadnienie przydziału pozycji (APP),
- zagadnienie najkrótszej drogi (SP).

Dalej zostaną przedstawione dokładniej metody konstrukcji oszacowań dla zagadnień A i B wykorzystujące wymienione problemy wielomianowe. Należy przy tym wspomnieć, że zagadnienia APN i APP są zagadnieniami przydziału, które różnią się między sobą interpretacją zmiennych decyzyjnych i wartościami parametrów.

2.2.1. Zagadnienie przydziału następnika APN

Dolne oszacowanie problemu B możemy uzyskać poprzez jego relaksację. Usuając ograniczenia (2.4), (2.6), (2.7) otrzymamy zagadnienie APN /np. [15], [31]/ w następującej postaci:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = 1, \quad j=1, \dots, n+1, \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = 1, \quad i=0, 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i=0, \dots, n, \quad j=1, \dots, n+1 \quad (2.5)$$

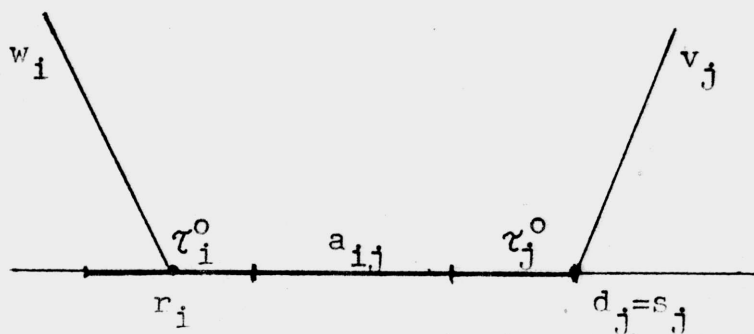
gdzie

$$\begin{cases} c_{ij} = \min(w_i, v_j) \max\{0, \tau_i^0 + \tau_j^0 + a_{ij} + r_i - d_j\}, \\ \quad \text{dla } i \neq j, \quad i=0, 1, \dots, n; \quad j=1, \dots, n+1 \\ c_{ii} = \infty, \quad i=0, 1, \dots, n+1, \end{cases} \quad (2.8)$$

Pokażemy dalej, że tak sformułowany problem APN stanowi relaksację zagadnienia 1|1, n|PP, $\tau^0 \geq 0 | \sum wE + \sum vT$.

Należy stwierdzić, że wartości c_{ij} określone w (2.8) są wyznaczone poprzez rozwiązanie problemu /rys. 2.1./:

$$c_{ij} = \min_{s_j} (w_i \cdot \max\{0, r_i - (s_j - \tau_j^0 - a_{ij} - \tau_i^0)\} + v_j \cdot \max\{0, s_j - d_j\}). \quad (2.9)$$



Rys. 2.1 Kary za przekroczenie terminów obsługi

Jeżeli bowiem $d_j - r_j \geq a_{ij} + \tau_i^0 + \tau_j^0$, to $c_{ij} = 0$ jest optymalną wartością wyrażenia $w_i \cdot \max \{0, r_i - (s_j - a_{ij} - \tau_j^0 - \tau_i^0)\} + v_j \cdot \max \{0, d_j - s_j\}$, natomiast jeśli $d_j - r_j < a_{ij} + \tau_i^0 + \tau_j^0$, to optymalną wartością c_{ij} jest $\min \{w_i, v_j\} \cdot (a_{ij} + \tau_i^0 + \tau_j^0 - d_j + r_i)$ i ostatecznie otrzymujemy wzór (2.9).

Twierdzenie 2.1. Wartość optymalnego rozwiązania problemu APN jest dolnym oszacowaniem wartości rozwiązania optymalnego problemu $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 \mid \sum wE + \sum vT$.

Dowód

Dla dowolnego rozwiązania (x_{ij}) problemu APN mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} \cdot c_{ij} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} \cdot \min_{s_j} (w_i \cdot \max \{0, r_i - s_j + \\ &+ a_{ij} + \tau_i^0 + \tau_j^0\} + v_j \cdot \max \{0, s_j - d_j\}) \leq \min_{s_0, s_1, \dots, s_{n+1}} \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} \cdot \right. \\ &\left. (w_i \cdot \max \{0, r_i - s_j + a_{ij} + \tau_i^0 + \tau_j^0\} + v_j \cdot \max \{0, s_j - d_j\}) \right]. \end{aligned}$$

I dalej, przy uwzględnieniu ograniczeń (2.6), (2.7), z których wynika, że $s_j \geq x_{ij} \cdot (s_i + a_{ij}) + \tau_j^0$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} \cdot c_{ij} &\leq \min_{s_0, \dots, s_{n+1}} \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} \cdot (w_i \cdot \max \{0, r_i + \right. \\ &+ \tau_i^0 - s_i\} + v_j \cdot \max \{0, s_j - d_j\}) \Big] = \min_{s_0, \dots, s_{n+1}} \left[\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} \right) \cdot w_i E_i + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=0}^n x_{ij} \right) \cdot v_j T_j \Big] = \min_{s_0, \dots, s_{n+1}} \left(\sum_{i=0}^n w_i E_i + \sum_{j=1}^{n+1} v_j T_j \right) = \\ &= \min_{s_0, \dots, s_{n+1}} \left(\sum_{i=0}^n w_i E_i + \sum_{i=1}^{n+1} v_j T_j \right). \end{aligned}$$

Ponieważ problem

$$\sum_{i=0}^n w_i \cdot E_i + \sum_{i=1}^{n+1} v_i \cdot T_i \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach (2.2), (2.3), (2.5) oraz ograniczeniach

$$s_j \geq x_{ij} (s_i + a_{ij}) + \tau_j^0, \quad j=1, \dots, n+1, \quad i=0, \dots, n,$$

stanowi relaksację problemu B zarówno ze względu na ograniczenia jak i na postać funkcji celu, tak więc wartość optymalnego rozwiązania problemu APN jest dolnym oszacowaniem wartości optymalnego rozwiązania zagadnienia B. ■

Również optymalne rozwiązanie zagadnienia A można oszacować przy pomocy zagadnienia przydziału następnika. Zamiast rozwiązywać dwa problemy przydziału oddzielnie, wystarczy rozwiązać jeden problem przydziału następnika z macierzą kosztów $[c'_{ij}]$, taką, że

$$c'_{ij} = c_{ij} + a_{ij} \quad (i=0, 1, \dots, n; \quad j=1, \dots, n+1).$$

Takie oszacowanie będzie silniejsze /nie gorsze/ od sumy oszacowań dokonywanych odrębnie dla zagadnień A i B.

Złożoność obliczeniowa zagadnienia przydziału jest $O(n^3)$.

Innym ze sposobów otrzymania dolnego oszacowania dla zagadnienia 1|1,n|PP, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$ jest dokonanie takiej jego relaksacji, która prowadzi do zagadnienia SST. Złożoność obliczeniowa problemu SST jest $O(n^2)$ [15].

Także zagadnienie w-2-MP można wykorzystać do wyznaczenia dolnego oszacowania optymalnej wartości rozwiązania rozważanego problemu. Zagadnienie skojarzenia można zastosować jednak tylko wtedy, gdy macierz kosztów jest macierzą symetryczną. Macierz taką otrzymamy w przypadku, gdy macierz $[a_{ij}]$ jest macierzą symetryczną oraz dla każdego $i=1, \dots, n$ odpowiednie wartości r_i , d_i , w_i oraz d_i są takie same. Zastosowanie problemu n-2-MP jest więc bardzo ograniczone. Złożoność obliczeniowa zagadnienia w-2-MP jest rzędu $O(n^3)$ [30, 46].

Wspólną cechą wszystkich wymienionych podejść jest konieczność wyznaczania kosztów c_{ij} w funkcjach celu problemów SST, w-2-MP, APN. Koszty te są dolnym oszacowaniem kosztów wynikających z faktu, że w trasie pojazdu punkt o numerze i -tym występuje bezpośrednio przed j -tym. Koszty c_{ij} nie zależą od przedziału czasowego, w którym odbywa się przejazd z x_i do x_j .

Wady tej pozbawione są przedstawione dalej podejścia wykorzystujące problem przydziału pozycji i zagadnienie najkrótszej drogi.

2.2.2. Zagadnienie przydziału pozycji

Wprowadźmy zmienną binarną

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } i\text{-ty punkt odbioru jest obsługiwany} \\ & \text{jako } j\text{-ty w kolejności,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Problem $1|1,n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ możemy przedstawić wtedy w postaci:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ik} \cdot y_{jk+1} \cdot a_{ij} + a_{n+1,0} + \sum_{i=1}^n (y_{i,1} \cdot a_{01} + \\ & + y_{i,n} \cdot a_{i,n+1}) + \sum_{i=0}^{n+1} (w_i E_i + v_i T_i) \rightarrow \min \end{aligned} \quad (2.10)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=1}^n y_{ik} = 1, \quad k=1, \dots, n, \quad (2.11)$$

$$\sum_{k=1}^n y_{ik} = 1, \quad k=1, \dots, n, \quad (2.12)$$

$$s_0 \geq a_{n+1,0} + \tau_0^0, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} s_j \geq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n y_{i,k} \cdot y_{j,k+1} \cdot (s_i + a_{ij}) + \tau_j^0 + y_{j1} (s_0 + a_{0j}), \\ j=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$s_{n+1} \geq \sum_{i=1}^n y_{i,n} \cdot (s_i + a_{i,n+1}), \quad (2.15)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i=1, \dots, n; \quad k=1, \dots, n,$$

2.16

gdzie E_i i T_i określone są jak w modelu (2.1) - (2.7).

Problem (2.10) - (2.16) można, jak poprzednio, podzielić na dwa podproblemy A' i B' /równoważne zagadnieniom A i B /.

Zagadnienie A'

$$a_{n+1,0} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ik} \cdot y_{jk+1} \cdot a_{ij} + \sum_{i=1}^n (y_{i1} \cdot a_{0i} +$$

$+ y_{i,n} \cdot a_{i,n+1}) \rightarrow \min$, przy ograniczeniach (2.11) - (2.16).

Zagadnienie A' jest szczególnym przypadkiem kwadratowego zagadnienia przydziału AQP, które jest zagadnieniem NP-zupełnym. Wartość dolnego oszacowania problemu AQP można wyznaczyć rozwiązując liniowe problemy przydziału sformułowane w pracy [60]. A mianowicie:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} \cdot y_{ik} \rightarrow \min,$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^n y_{ik} = 1, \quad k=1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ik} = 1, \quad i=1, \dots, n,$$

$$y_{ik} \geq 0, \quad i=1, \dots, n; \quad l=1, \dots, n,$$

w którym $b_{ik} = U_{ik}$; $i, k=2, \dots, n-1$ oraz $b_{i1} = a_{0i} + U_{i1}$ i $b_{i,n} = a_{i,n+1} + U_{i,n}$. Natomiast U_{jk} są równe wartości rozwiązania optymalnego zagadnienia:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n a_{ij} \cdot u_{jr} \rightarrow \min$$

$$\sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n u_{jr} = 1, \quad i=1, \dots, n, \quad i \neq j,$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n u_{ir} = 1, \quad r=1, \dots, n; \quad r \neq k,$$

$$u_{ir} \geq 0, \quad i=1, \dots, n; \quad i \neq j; \quad k=1, \dots, n, \quad r \neq k.$$

Zagadnienie B'

$$\sum_{i=0}^{n+1} (w_i E_i + v_i T_i) \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach (2.11) - (2.16) .

Zagadnienie B' można zrelaksować do następującego problemu przydziału:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{c}_{ik} \cdot y_{ik} \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach (2.11) , (2.12) , (2.16) , gdzie

$$\bar{c}_{ik} = \min_{s_i \geq t_i^k} (w_i \cdot \max \{0, r_i + \tau_i^0 - s_i\} + v_i \cdot \max \{0, s_i - d_i\}) . \quad (2.17)$$

Przy czym t_i^k ($i, k=1, \dots, n$) stanowi dolne oszacowanie najwcześniejszego możliwego terminu wyjazdu z punktu o numerze i -tym, który jest obsługiwany jako k -ty w kolejności w trasie pojazdu. Wartość t_i^k wyznacza następujący wzór:

$$t_i^k = a_{n+1,0} + \min_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_{0j} + P_i^k + \min_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_{ji}, \quad k \geq 2,$$

oraz

$$t_i^1 = a_{n+1,0} + a_{0i},$$

gdzie

$$P_i^k = \sum_{j=1}^{k-2} a_{\alpha_j \beta_j} \quad (a_{\alpha_j \beta_j} \leq a_{\alpha_{j+1} \beta_{j+1}}; \quad \alpha_j, \beta_j \neq i; j=1, \dots$$

..., $(n-1)^2$). Wartość P_i^k jest równa sumie $k-2$ najmniejszych wartości $a_{1,j}$ ($1, j \neq i$) w macierzy kosztów $[a_{ij}]$.

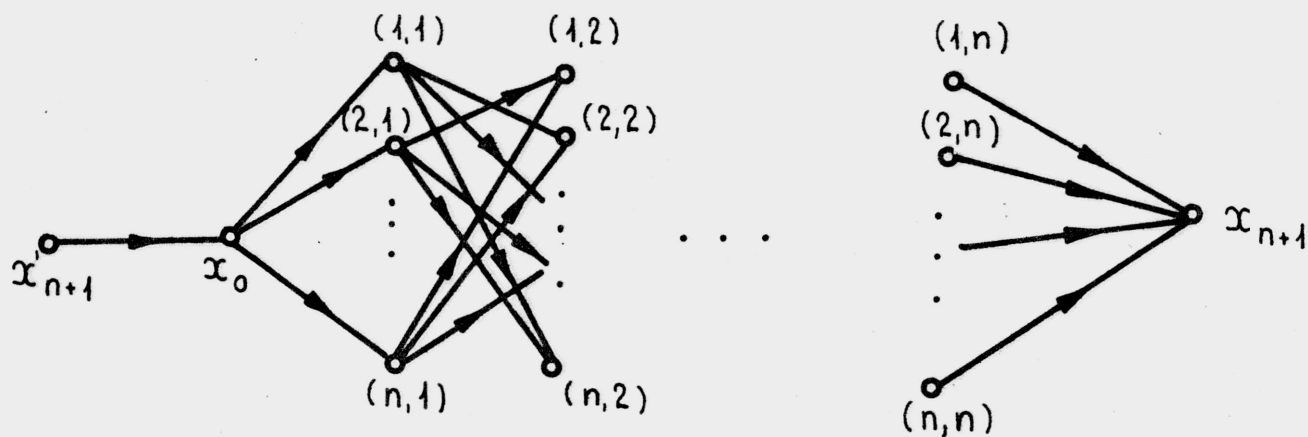
Dolne oszacowanie najwcześniejszego możliwego terminu przybycia do punktu x_i /jako k -tego w trasie pojazdu/ można też wyznaczyć poprzez znalezienie najkrótszej drogi w pewnym grafie $\hat{G} = \langle \hat{N}, \hat{A} \rangle$ /rys. 2.2/, gdzie zbiór węzłów

$$\hat{N} = \{(j, k) \mid j, k=1, \dots, n\} \cup \{x'_{n+1}, x_0, x_{n+1}\}$$

a zbiór łuków

$$\hat{A} = \{ \langle x'_{n+1}, x_0 \rangle \} \cup \bigcup_{j=1}^n \{ \langle x_0, (j, 1) \rangle, \langle (j, n), x_{n+1} \rangle \} \cup$$

$$\cup \bigcup_{k=1}^{n-1} [\left(\bigcup_{j=1}^n \{ (j, k) \} \right) \times \left(\bigcup_{j=1}^n \{ (j, k+1) \} \right)].$$



Rys. 2.2 Graf $\hat{G} = \langle \hat{N}, \hat{A} \rangle$

Obciążenia łuków ze zbioru $\hat{A}$ są określone przez odpowiednie wartości z macierzy $[a_{ij}]$. Każdy węzeł (j, k) odpowiada umieszczeniu punktu x_j na miejscu k -tym w trasie pojazdu. Ponieważ czas przejazdu /koszt przejazdu/ z x_i do x_j nie zależy od tego, ile punktów zostało

uprzednio odwiedzonych przez pojazd, stąd obciążenie łuku:

$$\begin{aligned} \langle (i,k), (j,k+1) \rangle & \text{ jest równe } a_{ij} \text{ /dla } k=1, \dots, n/, \\ \langle x'_{n+1}, x_0 \rangle & \text{ jest równe } a_{n+1,0}, \\ \langle x_0, (j,1) \rangle & \text{ jest równe } a_{0j} \quad (j=1, \dots, n), \\ \langle (j,n), x_{n+1} \rangle & \text{ jest równe } a_{j,n+1} \quad (j=1, \dots, n). \end{aligned}$$

Natomiast obciążenie węzła:

$$\begin{aligned} (j,k) & \text{ jest równe } \tau_j^0 \quad (k=1, \dots, n), \\ x_0 & \text{ jest równe } \tau_0^0, \\ x'_{n+1}, x_{n+1} & \text{ jest równe zero.} \end{aligned}$$

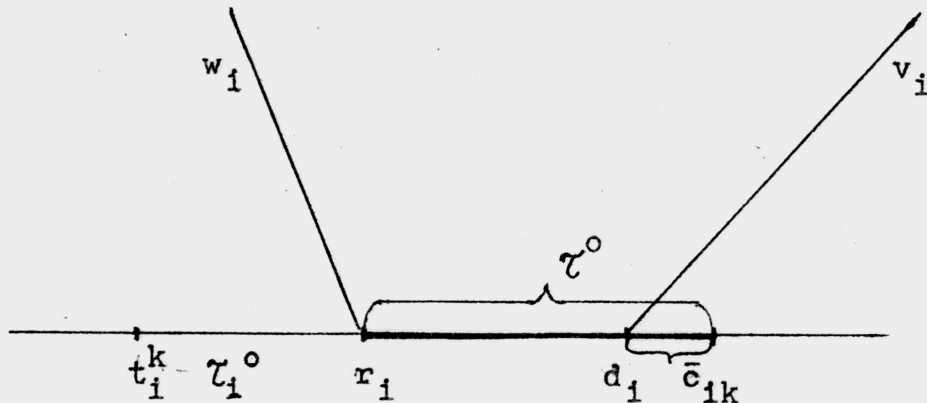
Wartość najkrótszej drogi między x'_{n+1} i (j,k) w grafie $\hat{G}$ jest nie większa niż najwcześniejszy możliwy termin przybycia do x_j /jako k-tego w trasie pojazdu/ [60].

Wracając do wyrażenia (2.17), wartość $\bar{c}_{ik}$ można dalej przedstawić w postaci /rys. 2.3/:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ik} = \min \{w_i, v_i\} \cdot \max \{0, d_i - r_i - \tau_i^0\} + \max \{0, v_i - w_i\} \cdot \\ \cdot \max \{0, t_i^k - d_i\}, \text{ dla } t_i^k < r_i + \tau_i^0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\bar{c}_{ik} = v_i \cdot \max \{0, t_i^k - d_i\}, \quad t_i^k \geq r_i + \tau_i^0$$

Powyższe wyrażenia otrzymane w wyniku rozwiązania problemu (2.17) poprzez wyznaczenie kolejnych szczególnych przypadków.



Rys. 2.3 Wyznaczanie wartości $\bar{c}_{ik}$.

2.2.3. Zagadnienie najkrótszej drogi /przydziału pozycji i następnika/

Wprowadźmy binarną zmienną decyzyjną:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli punkt } x_j \text{ występuje w trasie na } k\text{-tym} \\ & \text{miejscu bezpośrednio przed punktem } x_i, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

oraz zmienne decyzyjne s_j^k oznaczające termin przybycia pojazdu do punktu o numerze j -tym w k -tym etapie trasy /punkt x_j jest obsługiwany jako k -ty w kolejności/.

Problem 1|1,n|PP, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ można wtedy sformułować następująco:

$$\begin{aligned} a_{n+1,0} + \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^k \cdot a_{ij} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^k a_{j,n+1} + \right. \\ \left. + x_{0i}^1 a_{0i} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^n (w_i \cdot E_i^k + v_i \cdot T_i^k) \cdot x_{ji}^k + \\ + \sum_{i=1}^n (w_i \cdot E_i^1 + v_i \cdot T_i^1) \cdot x_{0i}^1 + w_0 \cdot E_0 + v_0 \cdot T_0 + w_{n+1} \cdot E_{n+1} + \\ + v_{n+1} \cdot T_{n+1} \longrightarrow \min \end{aligned}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^k = 1, \quad k=2, \dots, n, \quad (2.20)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0j}^1 = 1, \quad (2.21)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^k = \sum_{i=1}^n x_{ji}^{k+1}, \quad j=1, \dots, n; \quad k=2, \dots, n-1, \quad (2.22)$$

$$x_{0j}^1 = \sum_{i=1}^n x_{ji}^2, \quad j=1, \dots, n, \quad (2.23)$$

$$\sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^n x_{ij}^k + x_{0j}^1 = 1, \quad j=1, \dots, n, \quad (2.24)$$

$$s_0 \geq a_{n+1,0} + \tau_0^0, \quad (2.25)$$

$$s_j^{k+1} \geq \sum_{i=1}^n x_{ij}^{k+1} \cdot (s_i^k + a_{ij}) + \tau_j^0, \quad j=1, \dots, n; \quad (2.26)$$

$$k=1, \dots, n-1,$$

$$s_j^1 \geq x_{0j}^1 \cdot (s_0 + a_{0j}) + \tau_j^0, \quad j=1, \dots, n, \quad (2.27)$$

$$s_{n+1} \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^n (s_j^n + a_{j,n+1}), \quad (2.28)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad i=0,1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n, \quad k=1,2, \dots, n \quad (2.29)$$

gdzie $E_0, T_0, E_{n+1}, T_{n+1}$ są określone jak w modelu (2.1) - (2.7), natomiast

$$E_i^k = \max \{0, r_i + \tau_i^0 - s_i^k\},$$

$$T_i^k = \max \{0, d_i - s_i^k\}, \quad i=1, \dots, n; \quad k=1, \dots, n.$$

Problem (2.20) - (2.24), (2.29) z funkcją celu postaci $\sum a$ /inne sformułowanie zagadnienia A/ jest szczególnym przypadkiem zagadnienia czasowo-zależnego komiwojażera [60].

Przedstawiony powyżej model matematyczny problemu $1|1,n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ jest związany z grafem $\hat{G} = \langle \hat{N}, \hat{A} \rangle$ /rys. 2.2/. Jeżeli przyjmiemy, że w grafie $\hat{G}$ zmienna $x_{ij}^k = 1$, $(i,j=1, \dots, n; k=2, \dots, n-1)$ odpowiada łukowi $\langle (i,k-1), (j,k) \rangle$

zmienna $x_{0j}^1 = 1$ ($j=1, \dots, n$) odpowiada łukowi $\langle x_0, (j,1) \rangle$,

zmienna $x_{ij}^n = 1$ ($i,j=1, \dots, n$) odpowiada łukom :

$$\langle (i,n-1), (j,n) \rangle \quad i \quad \langle (j,n), x_{n+1} \rangle,$$

to wtedy zmienne x_{ij}^k spełniające ograniczenia (2.20) - (2.24), (2.29) wyznaczają drogę między x_0 i x_{n+1} w $\hat{G} = \langle \hat{N}, \hat{A} \rangle$, w której dla każdego $j=1, \dots, n$, występuje dokładnie jeden wierzchołek ze zbioru $\bigcup_k \{(j,k)\}$. Dalej taką drogę będziemy nazywać drogą sekwencyjną.

Problem $1|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$ można więc sformułować w następujący sposób:

Znaleźć w grafie $\hat{G} = \langle \hat{N}, \hat{A} \rangle$ drogę sekwencyjną oraz wyznaczyć liczby s_j^k odpowiadające węzłom (j,k) w tej drodze /a także liczby s_0 i s_{n+1} odpowiadające węzłom x_0 i x_{n+1} / spełniające ograniczenia (2.25) - (2.28) /z uwzględnieniem wartości x_{ij}^k wyznaczonych przez drogę π /, tak aby minimalizować funkcję celu (2.19).

Naturalnie takie sformułowanie nie upraszcza badanego zagadnienia. Jeśli jednak pominie się warunek (2.24), to ograniczeniom (2.20) - (2.23), (2.29) będzie odpowiadała w grafie $\hat{G}$ dowolna droga /niekoniecznie sekwencyjna/ między wierzchołkami x_0 i x_{n+1} . Problem znalezienia w $\hat{G}$ drogi, która minimalizuje funkcję celu (2.19) jest nadal problemem NP-zupełnym. Zatem, aby uzyskać problem o złożoności wielomianowej, należy dokonać dalszej relaksacji.

Jeżeli problem (2.19) - (2.23), (2.25) - (2.29) poddamy takiej relaksacji, że funkcja celu będzie miała postać:

$$\sum_k \sum_i \sum_j x_{ij}^k \cdot c_{ij}^k,$$

to otrzymamy zagadnienie wyznaczania najkrótszej drogi [15,31, 46] /w grafie $\hat{G}$ / o złożoności obliczeniowej $O(n^3)$.

Podobne podejście zastosowane zostało w pracy [60] w odniesieniu do pewnego problemu sekwencyjnego z funkcją celu postaci $\sum vT$.

W odniesieniu do problemu $1|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$, współczynniki c_{ij}^k można wyznaczyć posługując się wyrażeniem (2.17) lub (2.9), prowadzi to jednak do bardzo silnej relaksacji funkcji celu. Konieczne są więc dalsze badania własności zagadnienia $1|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Niech $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ będzie pewną drogą w grafie $\hat{G} = \langle \hat{N}, \hat{A} \rangle$. Liczba wszystkich dróg w $\hat{G}$ /między x_0 i x_{n+1} , a więc także między x'_{n+1} a x_{n+1} / wynosi $n(n-1)^{n-1}$. Oznaczmy zbiór tych dróg przez Π . Wśród $n \cdot (n-1)^{n-1}$ dróg istnieje dokładnie $n!$ dróg sekwencyjnych, z których każda odpowiada pewnemu dopuszczalnemu rozwiązaniu problemu $1|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$ /ze względu na ograniczenia (2.20) - (2.24), (2.29)/. Zbiór dróg sekwencyjnych oznaczmy przez Π .

Dalej, niech $S(\pi)$ oznacza zbiór wszystkich dopuszczalnych rozwiązań badanego problemu ze względu na pewne zmienne ciągłe s_i^k , dla których zmienne x_{ij}^k spełniające ograniczenia (2.20) - (2.23), (2.29) wyznaczają drogę π ($\pi(k) = i$, $k=1, \dots, n$) w grafie $\hat{G}$, czyli

$S(\pi) = \{(s_0, s^1_{\pi(1)}, \dots, s^n_{\pi(n)}, s_{n+1}) \mid \text{spełnione są ograniczenia (2.25) - (2.28)}\}$.

Pozostałe zmienne s^k_i można pominąć, gdyż nie mają wpływu na wartość funkcji celu (2.19).

W ten sposób problem $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$ można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \min_{\pi \in \hat{\Pi}} \min_{(s_0, \dots, s_{n+1}) \in S(\pi)} & \sum_{i=1}^{n-1} a_{\pi(i)\pi(i+1)} + a_{n+1,0} + \\ & + a_0 \pi(1) + a_{\pi(n)n+1} + \sum_{i=1}^n w_{\pi(i)} \cdot E^i_{\pi(i)} + v_{\pi(i)} \cdot T^i_{\pi(i)} + \\ & + w_0 E_0 + v_0 T_0 + w_{n+1} E_{n+1} + v_{n+1} T_{n+1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} E^i_{\pi(i)} &= \max \{0, r_{\pi(i)} + \tau^0_{\pi(i)} - s^i_{\pi(i)}\}, \\ T^i_{\pi(i)} &= \max \{0, s^i_{\pi(i)} - d_{\pi(i)}\}, \end{aligned}$$

co w skrócony sposób można przedstawić następująco:

$$\min_{\pi \in \hat{\Pi}} \min_{\bar{s} \in S(\pi)} \mathcal{F}(\pi, \bar{s})$$

gdzie $\bar{s}$ oznacza wektor zmiennych $(s_0, s^1_{\pi(1)}, \dots, s^n_{\pi(n)}, s_{n+1})$, a $\mathcal{F}(\pi, \bar{s})$ postać funkcji celu przy ustalonej drodze π .

Ponieważ zbiór dróg sekwencyjnych $\hat{\Pi}$ jest podzbiorem Π , stąd

$$\min_{\pi \in \hat{\Pi}} \min_{\bar{s} \in S(\pi)} \mathcal{F}(\pi, \bar{s}) \geq \min_{\pi \in \Pi} \min_{\bar{s} \in S(\pi)} \mathcal{F}(\pi, \bar{s}) = \hat{F}$$

Rozważmy następujący problem, który dalej będzie nazywany problemem PO.

Problem PO /rys. 2.4/

Znaleźć takie θ i θ_c , które minimalizują wyrażenie:

$$\delta_0 \cdot \max \{\bar{t}_0 - \theta_0, 0\} + w \cdot \max \{r + \tau^0 - \theta\} + v \cdot \max \{0, \theta - d\} \quad (2.31)$$

przy ograniczeniach

$$\begin{cases} \theta_0 \geq t_0, \\ \theta \geq \theta_0 + a + \gamma^0, \end{cases}$$

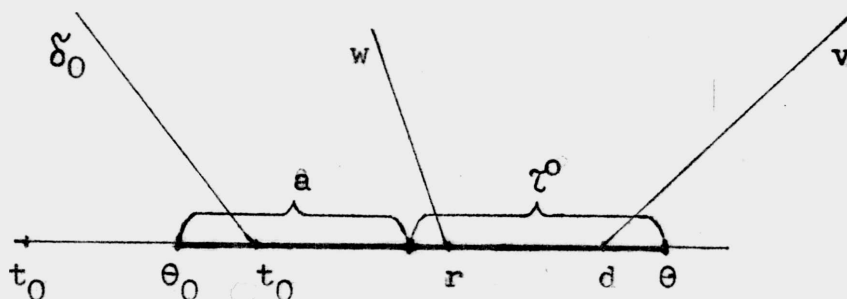
oraz wyznaczyć największą wartość δ , dla której

$$\delta \cdot \max \{0, \theta - \hat{\theta}\} \leq \delta_0 \cdot \max \{0, \bar{t}_0 - \hat{\theta}_0\} + w \cdot \max \{0, r + \gamma^0 - \hat{\theta}\} + v \cdot \max \{0, \theta - d\},$$

przy czym θ jest wartością optymalną wyrażenia (2.31), a $\hat{\theta}_0$ i $\hat{\theta}$ są dowolnymi wartościami spełniającymi ograniczenia $\hat{\theta}_0 \geq t_0$ i $\hat{\theta} \geq a + \gamma^0 + \hat{\theta}_0$,

Warto zauważyć, że problem (2.17) jest szczególnym przypadkiem problemu PO.

Rozwiązanie problemu PO można otrzymać rozważając kolejne szczególne przypadki zależne od wartości parametrów a , δ_0 , t_0 , $\bar{t}_0$, γ^0 , r , d . Rozważane będą tylko te przypadki, dla których $\bar{t}_0 \geq t_0$.



Rys. 2.4

Przypadek 1

$$v \leq \delta_0, r < t_0 + a, a + \gamma^0 + \bar{t}_0 > d_1$$

W rozwiązaniu optymalnym problemu PO otrzymujemy: $\theta_0 = \bar{t}_0$, $\theta = \bar{t}_0 + a + \gamma^0$ oraz $\delta = \delta_0 - v$ dla $\bar{t}_0 > t_0$ i $\delta = \infty$ dla $\bar{t}_0 = t_0$.

Przypadek 2

$$v \leq \delta_0 + w, r = \bar{t}_0 + a, a + \gamma^0 + \bar{t}_0 > d_1$$

W rozwiązaniu optymalnym PO: $\theta_0 = t_0$, $\theta = t_0 + a + \gamma^0$ oraz $\delta = \delta_0 + w - v$.

Przypadek 3

$$\bar{t}_0 > t_0, a + \gamma^0 + \bar{t}_0 > d, r = \bar{t}_0 + a, v > \delta_0 + w$$

W rozwiązaniu optymalnym PO: $\theta_0 = \bar{t}_0 - \min\{\bar{t}_0 - t_0, \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d\}$, $\theta = d + \max\{0, \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d\}$ oraz $\delta = \delta_0 + w$ dla $t_0 + a + \gamma^0 - d < \bar{t}_0 - t_0$ i $\delta = \infty$ dla $\bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d \geq \bar{t}_0 - t_0$

Przypadek 4

$$\bar{t}_0 > t_0, v > \delta_0, r < \bar{t}_0 + a, \bar{t}_0 + a + \gamma^0 > d, \bar{t}_0 + a - r > \min \{ \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d, \bar{t}_0 - t_0 \}$$

W rozwiązaniu optymalnym PO: $\theta_0 = \bar{t}_0 - \min \{ \bar{t}_0 - t_0, \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d \}$,
 $\theta = d + \max \{ 0, \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d \}$ oraz $\delta = \delta_0$ dla $\bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d < \bar{t}_0 - t_0$
i $\delta = \infty$ dla $\bar{t}_0 - t_0 \leq \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d$.

Przypadek 5

$$v > \delta_0, \delta_0 + w \geq v, \bar{t}_0 > t_0, \bar{t}_0 + a + \gamma^0 > d, r < \bar{t}_0 + a, \\ \bar{t}_0 + a - r \leq \min \{ \bar{t}_0 - t_0, \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d \}$$

W rozwiązaniu optymalnym PO: $\theta_0 = r - a$, $\theta = r + \gamma^0$ oraz

$$\delta = \begin{cases} \delta_0 + w & \text{dla } \bar{t}_0 - t_0 > \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d, \\ \infty & \text{, w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Przypadek 6

$$r \leq a + \bar{t}_0, \bar{t}_0 + a + \gamma^0 < d$$

W rozwiązaniu optymalnym PO: $\theta_0 = \bar{t}_0$, $\theta = \bar{t}_0 + a + \gamma^0$ oraz

$$\delta = \begin{cases} \delta_0, & \text{dla } r < a + t_0, \\ \delta_0 + w, & \text{dla } r = a + t_0. \end{cases}$$

Przypadek 7

$$\delta_0 + w < v, v > \delta_0, \bar{t}_0 > t_0, \bar{t}_0 + a + \gamma^0 > d, r < \bar{t}_0 + a, \bar{t}_0 + a - r \leq \\ \leq \min \{ \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d, \bar{t}_0 - t_0 \}.$$

W rozwiązaniu optymalnym PO: $\theta_0 = \bar{t}_0 - \min \{ \bar{t}_0 - t_0, \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d \}$,
 $\theta = d + \max \{ 0, \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d \}$ oraz $\delta = \delta_0 + w$ dla $\bar{t}_0 - t_0 > \bar{t}_0 + a + \gamma^0 - d$
i $\delta = \infty$ w przeciwnym przypadku.

Przypadek 8

$$w < v, \delta_0 + w \geq v, \bar{t}_0 + a < r, t_0 + a + \gamma^0 > d$$

W rozwiązaniu optymalnym PO: $\theta_0 = \bar{t}_0$, $\theta = \bar{t}_0 + a + \gamma^0$ oraz $\delta = \delta_0 + w - v$.

Przypadek 9

$$\delta_0 + w < v, r > \bar{t}_0 + a, \bar{t}_0 + a + \tau^0 > d,$$

W rozwiązaniu optymalnym PO: $\theta_0 = \bar{t}_0 - \min \{\bar{t}_0 - t_0, \bar{t}_0 + a + \tau^0 - d\}$,
 $\theta = d + \max \{0, \bar{t}_0 + a + \tau^0 - d\}$ oraz $\delta = \delta_0 + w$ dla $\bar{t}_0 - t_0 > \bar{t}_0 + a + \tau^0 - d$
i $\delta = \infty$ w przeciwnym przypadku.

Przypadek 10

$$w < v, r > \bar{t}_0 + a, \bar{t}_0 + a + \tau^0 \leq d, \tau^0 > d - r$$

W rozwiązaniu optymalnym PO: $\theta_0 = d - \tau^0 - a$, $\theta = d$ oraz $\delta = w$.

Przypadek 11

$$r > \bar{t}_0 + a, \bar{t}_0 + a + \tau^0 \leq d, (w > v \wedge \tau^0 > d - r) \vee (\tau^0 \leq d - r)$$

W rozwiązaniu optymalnym PO: $\theta_0 = r - a$, $\theta = r + \tau^0$ oraz

$$\delta = \begin{cases} w & \text{dla } \tau^0 \leq d - r, \bar{t}_0 > t_0 \\ w - v & \text{dla } \tau^0 < d - r, \bar{t}_0 > t_0 \\ \infty & \text{dla } t_0 = \bar{t}_0 \end{cases}$$

Należy zauważyć, że przedstawione w przypadkach 1 - 11 rozwiązania optymalne nie są zazwyczaj jedynymi rozwiązaniami optymalnymi. Na przykład w przypadku 7 optymalne wartości zmiennej θ_0 leżą w przedziale $[t_0, d - \tau^0 - a]$. Z rozważanych przypadków 1 - 11 wynika, następująca własność problemu PO:

Własność 2.1

Istnieje rozwiązanie optymalne problemu PO, w którym $\theta_0 = \theta - \tau^0 - a$.

2.2.4. Algorytm ALB wyznaczania wartości dolnego oszacowania

Algorytm ALB polega na wyznaczeniu najtańszej drogi $\pi \in \Pi$ w grafie $\hat{G} = \langle \hat{N}, \hat{A} \rangle$, w którym obciążenia łuków są dolnymi oszacowaniami kosztów uwzględnianych w funkcji celu problemu 1|1,n|PP, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Niech $\mathcal{T}_{ij}^k$ oznacza obciążenie łuku $\langle (i, k-1), (j, k) \rangle$ i odpowiednio wartości $\mathcal{T}_{0i}^1$ oznaczają obciążenia łuków $\langle x_0, (i, 1) \rangle$ oraz $\mathcal{T}_{i, n+1}^{n+1}$ - obciążenia łuków $\langle (n, i), x_{n+1} \rangle$.

Niech $J = \{1, \dots, n\}$ oznacza zbiór wskaźników punktów odbioru.

Przedstawiony dalej algorytm ALB wyznacza wartość F , która jest dolnym oszacowaniem wartości rozwiązania optymalnego problemu 1|1,n|PP, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$. Na każdym etapie algorytmu wyznaczenie

obciążenia łuku $\mathcal{T}_{ij}^k$ wymaga rozwiązania pewnego problemu PO.

Algorytm ALB

Krok 0. Wyznaczyć wartość

$$F_0^0 = a_{n+1,0} + \min_{\theta_0, \theta} (w_0 \cdot \max \{0, r_0 + \tau_0^0 - \theta\} + v_0 \cdot \max \{0, \theta - d_0\} + w_{n+1} \max \{0, r_{n+1} - \theta_0\}), \quad \theta_0 \geq 0, \theta \geq a_{n+1} + \tau_0^0 + \theta_0$$

Dokonać podstawień:

$$\delta_0^0 := \delta, \quad \bar{t}_0^0 = \theta \quad \text{oraz} \quad t_0^0 := a_{n+1} + \tau_0^0.$$

Dla każdego $i \in J$ wykonać krok 1.

Krok 1. Wyznaczyć wartość: $F_i^1 = F_0^0 + \mathcal{T}_{0i}^1 = \min_{\theta_0, \theta} \{ \delta_0^0 \cdot \max \{0, \bar{t}_0^0 - \theta\} + w_i \cdot \max \{0, r_i + \tau_i^0 - \theta\} + v_i \cdot \max \{0, \theta - d_i\} \} + F_0^0 + a_{0i}$

przy ograniczeniach $\theta_0 \geq t_0^0$ oraz $\theta \geq \theta_0 + a_{0i} + \tau_i^0$.

Dokonać podstawień:

$$\delta_i^1 := \delta, \quad \bar{t}_i^1 := \theta, \quad t_i^1 := t_0^0 + a_{0i} + \tau_i^0.$$

Przejsć do kroku 2.

Dla $k=2, \dots, n$ wykonać krok 2.

Krok 2. Dla każdego $i, j \in J$ $i \neq j$ wykonać krok 2A.

Krok 2A.

Wyznaczyć wartość:

$$F_{ji}^k = F_j^{k-1} + \mathcal{T}_{ji}^k = \min_{\theta_0, \theta} (\delta_j^{k-1} \cdot \max \{0, \bar{t}_j^{k-1} - \theta\} + w_i \cdot \max \{0, r_i + \tau_i^0 - \theta\} + v_i \cdot \max \{0, \theta - d_i\}) + F_j^{k-1} + a_{ji}$$

przy ograniczeniach $\theta_0 \geq t_j^{k-1}$ i $\theta \geq \theta_0 + a_{ji} + \tau_i^0$

Dokonać podstawień:

$$t_{ji}^k := t_j^{k-1} + a_{ji} + \tau_i^0, \quad \bar{t}_{ji}^k = \theta, \quad \delta_{ji}^k = \delta.$$

Koniec kroku 2A.

Dla każdego $i \in J$ wykonać krok 2B.

Krok 2B.

Dokonać podstawień

$$\delta_i^k := \min_{j \in J - \{i\}} \delta_{ji}^k,$$

$$t_i^k := \min_{j \in J - \{i\}} t_{ji}^k,$$

$$\bar{t}_i^k := \min_{j \in J - \{i\}} \bar{t}_{ji}^k,$$

$$F_i^k := \min_{j \in J - \{i\}} F_{ji}^k,$$

Koniec kroku 2B i kroku 2. Przejść do kroku 3.

Dla każdego $i \in J$ wykonać krok 3.

Krok 3.

Wyznaczyć wartość:

$$F_{j,n+1}^{n+1} = F_j^n + \tau_{j,n+1}^{n+1} = \min_{\theta_0, \theta} (\delta_j^n \max \{0, \bar{t}_j^n - \theta_0\} + \\ + v_{n+1} \max \{0, \theta - d_{n-1}\}) + F_j^n + a_{j,n+1}$$

przy ograniczeniach $\theta_0 \geq t_j^n$ i $\theta \geq \theta_0 + a_{j,n+1}$.

Koniec kroku 3. Przejść do kroku 4.

Krok 4. Wyznaczyć wartość

$$F = \min_{j \in J} F_{j,n+1}^{n+1} \quad \blacksquare$$

Korzystając z własności problemu PO łatwo jest pokazać, że wartość F_0^0 jest dolnym oszacowaniem kosztu /ze względu na funkcję celu (2.19)/ najtańszej drogi między węzłami x'_{n+1} i x_0 w $\hat{G} = \langle \hat{N}, \hat{A} \rangle$.

Dalej zostanie pokazane, że wartość F_j^k jest dolnym oszacowaniem kosztu /ze względu na funkcję celu (2.19) / najtańszej drogi między x'_{n+1} a (j,k) w grafie $\hat{G}$.

Oznaczmy przez $\pi_j^k = (\pi_j^k(1), \dots, \pi_j^k(k-1), \pi_j^k(k) = j)$ ciąg punktów odbioru ($\pi_j^k(1) \in J, 1=1,2, \dots, k-1$ odpowiadający dowolnej drodze w grafie G /rys. 2.2/ między wierzchołkiem x_0 oraz (j,k)). Niech π_j^k oznacza zbiór wszystkich takich dróg.

Dalej, niech

$$F_j^k \triangleq \min_{\pi_j^k \in \prod_j^k} \min_{(s_0, s_{\pi_j^k(1)}, \dots, s_j^k) \in S(\pi_j^k)} \left[\sum_{i=1}^{k-1} a_{\pi_j^k(i)\pi_j^k(i+1)} + \right. \\ \left. + a_{n+1,0} + a_{0,\pi_j^k(1)} + \sum_{i=1}^{k-1} (w_{\pi_j^k(i)} \cdot E_{\pi_j^k(i)}^i + v_{\pi_j^k(i)} \cdot T_{\pi_j^k(i)}^i) + \right. \\ \left. + w_0 E_0 + v_0 T_0 + w_{n+1} E_{n+1} + w_j E_j^k + v_j T_j^k \right],$$

gdzie $S(\pi_j^k) = \{(s_0, s_{\pi_j^k(1)}, \dots, s_j^k) \mid \text{spełnione są ograniczenia. (2.25) - (2.28)}\}$.

Wartość $\hat{F}_j^k$ jest kosztem najtańszej drogi między x'_{n+1} a (j,k) w grafie $G = \langle \hat{N}, \hat{A} \rangle$

Zdefiniujmy funkcję $\hat{F}_j^k(s_j^k)$ w następujący sposób:

$$\hat{F}_j^k(s_j^k) \triangleq \min_{i \in J - \{j\}} \left(\min_{\pi_i^{k-1} \in \prod_i^{k-1}} \left(\min_{(s_0, \dots, s_i^{k-1}) \in S(\pi_i^{k-1})} \right. \right. \\ \left. \left. s_i^{k-1} \leq s_j^k - a_{ij} - \tau_j^0 \right) \right)$$

$$\left(\sum_{l=1}^{k-2} a_{\pi_i^{k-1}(l)\pi_i^{k-1}(l+1)} + a_{n+1,0} + a_{0,\pi_i^{k-1}(1)} + \sum_{l=1}^{k-2} (w_{\pi_i^{k-1}(l)} \cdot E_{\pi_i^{k-1}(l)}^l + v_{\pi_i^{k-1}(l)} \cdot T_{\pi_i^{k-1}(l)}^l) + w_0 E_0 + v_0 T_0 + w_{n+1} E_{n+1} + \right. \\ \left. + a_{ij} + w_i \cdot E_i^{k-1} + v_i \cdot T_i^{k-1} \right) + w_j \cdot E_j^k + v_j \cdot T_j^k.$$

Wartość $\hat{F}_j^k(s)$ oznacza koszt najtańszej drogi między x'_{n+1} a (j,k) pod warunkiem, że termin wyjazdu przyporządkowany wierzchołkowi (j,k) jest równy pewnej wartości s .

Łatwo zauważyć, że spełnione są następujące równości:

$$\hat{F}_j^k \geq \min_{i \in J - \{j\}} \left[\min_{\substack{s_j^k \geq s_i^{k-1} + a_{ij} + \tau_j^0 \\ s_i^{k-1} \geq t_i^{k-1}}} \hat{F}_i^{k-1} (s_i^{k-1}) + a_{ij} \right] + w_j E_j^k + v_j T_j^k,$$

oraz

$$\hat{F}_j^k (s_j^k) \geq \min_{i \in J - \{j\}} \left[\min_{t_i^{k-1} \leq s_i^{k-1} \leq s_j^k - a_{ij} - \tau_j^0} \hat{F}_i^{k-1} (s_i^{k-1}) + a_{ij} \right] + w_j E_j^k + v_j T_j^k.$$

Dalej pokażemy, że jeśli dla każdego $j \in J$ oraz dla pewnego $k \in \{1, \dots, n-1\}$ spełnione są warunki:

$$(a) \quad F_j^k \leq \hat{F}_j^k,$$

$$(b) \quad \hat{F}_j^k (s_j^k) \geq F_j^k + \delta_j^k \cdot \max \{0, \bar{t}_j^k - s_j^k\},$$

to spełnione są one także dla $k+1$, dla każdego $j \in J$ /łatwo sprawdzić, że warunki (a) i (b) są spełnione dla wierzchołka x_0 .

A mianowicie:

$$\begin{aligned} \hat{F}_j^{k+1} \geq \min_{i \in J - \{j\}} \left[\min_{\substack{s_j^{k+1} \geq s_i^k + a_{ij} + \tau_j^0 \\ s_i^k \geq t_i^k}} \left(\hat{F}_i^k (s_i^k) + a_{ij} + w_j E_j^k + v_j T_j^k \right) \right] \geq \min_{i \in J - \{j\}} \left[\min_{\substack{s_j^{k+1} \geq s_i^k + a_{ij} + \tau_j^0 \\ s_i^k \geq t_i^k}} \left(F_i^k + \delta_i^k \cdot \max \{0, \bar{t}_i^k - s_i^k\} + a_{ij} + w_j E_j^k + v_j T_j^k \right) \right] \\ = F_j^k + \tau_{ij}^{k+1}. \end{aligned}$$

Z rozwiązania problemu PO /w kroku 2 algorytmu/ wynika dalej, że

$$\hat{F}_j^{k+1} \geq \min_{i \in J - \{j\}} F_{ij}^{k+1} = F_j^{k+1}, \text{ co dowodzi spe\l nienia}$$

warunku (a) .

Natomiast spe\l nienie warunku (b) mo\l zna pokaza\c w nast\epuj\cy spos\cb:

$$\hat{F}_j^{k+1}(s_j^{k+1}) \geq \min_{i \in J - \{j\}} \left[\min_{t_i^k \leq s_i^k \leq s_j^{k+1} - a_{ij} - \tau_j^0} \right]$$

$$\hat{F}_i^k(s_i^k + a_{ij}) + w_j \cdot E_j^{k+1} + v_j \cdot T_j^{k+1} \geq \min_{i \in J - \{j\}} \left[\right]$$

$$\min_{t_i^k \leq s_i^k \leq s_j^{k+1} - a_{ij} - \tau_j^0} (F_i^k + \delta_i^k \cdot \max\{0, \bar{t}_i^k - s_i^k\} + a_{ij} +$$

$$+ w_j E_j^{k+1} + v_j T_j^{k+1}) = \min_{i \in J - \{j\}} (F_i^k + \tau_{ij}^{k+1}).$$

Z w\l asno\ci rozwi\azania problemu PO wynika, \l e

$$\hat{F}_j^{k+1}(s_j^{k+1}) \geq \min_{i \in J - \{j\}} F_{ij}^{k+1} + \delta_{ij}^{k+1} \cdot \max\{0, \bar{t}_{ij}^{k+1} - s_j^{k+1}\} \geq$$

$$\geq \min_{i \in J - \{j\}} F_{ij}^{k+1} + \min_{i \in J - \{j\}} (\delta_{ij}^{k+1} \cdot \max\{0, \bar{t}_{ij}^{k+1} - s_j^{k+1}\}) \geq$$

$$\geq F_j^{k+1} + \left(\min_{i \in J - \{j\}} \delta_{ij}^{k+1} \right) \cdot \max\{0, \min_{i \in J - \{j\}} \bar{t}_{ij}^{k+1} - s_j^{k+1}\} =$$

$$= F_j^{k+1} + \delta_j^{k+1} \cdot \max\{0, \bar{t}_j^{k+1} - s_j^{k+1}\},$$

co dowodzi spe\l nienia warunku (b).

Przeprowadzaj\ac analogiczne rozumowanie mo\l zna sprawdzi\c, \l e warto\c\

$$\hat{F}_{n+1}^{n+1} = \min_{\pi \in \Pi} \min_{\bar{s} \in S(\pi)} \mathcal{F}(\pi, \bar{s}) \geq F.$$

Poniewa\l warto\c\ $\hat{F}_{n+1}^{n+1}$ jest dolnym oszacowaniem warto\ci rozwi\azania optymalnego problemu 1|1,n|PP, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$, czyli

wartości $\min_{\pi \in \hat{\Pi}} \min_{\bar{s} \in S(\pi)} F(\pi, \bar{s})$, stąd wyznaczana przez algorytm ALB wartość F jest dolnym oszacowaniem wartości rozwiązania optymalnego problemu $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$.

2.3. Wyznaczanie optymalnych terminów obsługi punktów odbioru przy ustalonej trasie pojazdu

Oznaczmy przez $F(\hat{\pi})$, najmniejszy koszt realizacji trasy opisanej przez drogę sekwencyjną $\hat{\pi}$ w grafie $\hat{G}$ /między wierzchołkami x_0 i x_{n+1} /. Tak więc:

$$\begin{aligned} F(\hat{\pi}) &= \min_{\bar{s} \in S(\hat{\pi})} F(\hat{\pi}, \bar{s}) = \min_{\bar{s} \in S(\hat{\pi})} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_{\hat{\pi}(i), \hat{\pi}(i+1)} + \right. \\ &+ a_{\hat{\pi}(n), n+1} + a_{n+1, 0} + a_0 \hat{\pi}(1) + \left. \sum_{i=0}^{n+1} (w_i E_i + v_i T_i) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_{\hat{\pi}(i), \hat{\pi}(i+1)} + a_{\hat{\pi}(n), n+1} + a_{n+1, 0} + a_0 \hat{\pi}(1) + \\ &+ \min_{\bar{s} \in S(\hat{\pi})} \sum_{i=0}^{n+1} [w_i E_i + v_i T_i], \end{aligned} \quad (2.33)$$

gdzie $\bar{s} = (s_0, s_{\hat{\pi}(1)}, \dots, s_{\hat{\pi}(n)}, s_{n+1})$ jest wektorem terminów wyjazdu z kolejnych punktów odbioru w trasie pojazdu. Ponieważ rozważane są tylko drogi sekwencyjne $\hat{\pi} \in \hat{\Pi}$, nie ma potrzeby używania do opisu problemu zmiennych s_i^k z modelu (2.19) - (2.29), gdyż każdy punkt odbioru jest uwzględniany w drodze $\hat{\pi}$ dokładnie raz.

Zbiór dopuszczalnych wektorów $\bar{s}$ przy ustalonej trasie $\hat{\pi}$ ma postać:

$$\begin{aligned} S(\hat{\pi}) &= \{ \bar{s} = (s_0, s_{\hat{\pi}(1)}, \dots, s_{n+1}) \mid s_0 \geq a_{n+1, 0} + \tau_0^0, \\ &s_{\hat{\pi}(1)} \geq s_0 + a_0 \hat{\pi}(1) + \tau_{\hat{\pi}(1)}^0, \dots, s_{\hat{\pi}(n)} \geq s_{\hat{\pi}(n-1)} + \\ &+ a_{\hat{\pi}(n-1), \hat{\pi}(n)} + \tau_{\hat{\pi}(n)}^0, s_{n+1} \geq s_{\hat{\pi}(n)} + a_{\hat{\pi}(n), n+1} \}. \end{aligned}$$

Niech π^k oznacza drogę częściową, drogi sekwencyjnej π , złożoną z k elementów, a dokładniej

$$\hat{\pi}^k = (\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2), \dots, \hat{\pi}(k)), k=1, 2, \dots, n.$$

Oznaczmy przez $\hat{\pi}(0) = 0$ i $\hat{\pi}(n+1) = n+1$ numery wskaźników odpowiadających magazynowi i bazie pojazdu.

Dalej sformułowany zostanie algorytm wyznaczania optymalnych terminów obsługi punktów odbioru przy ustalonej trasie pojazdu $\hat{\pi}$, nazywany dalej algorytmem ALPR. Bez straty ogólności możemy przyjąć że $\hat{\pi} = (0, \dots, n+1)$.

Algorytm ALPR polega na wyznaczeniu w każdej iteracji algorytmu optymalnych wartości terminów obsługi dla k ($k=0, 1, \dots, n+1$) kolejnych punktów odbioru. Wymaga to rozwiązania w każdej iteracji problemu:

$$\min_{(s_0, \dots, s_k) \in S(\hat{\pi}^k)} \left(w_{n+1} E_{n+1} + \sum_{i=0}^k (w_i E_i + v_i T_i) \right), \quad (2.34)$$

Przy rozwiązywaniu problemu (2.34) dla pewnego $k > 0$ wykorzystuje się wartości rozwiązania problemu (2.34) przy $k-1$.

Dla $k=n+1$ zamiast problemu (2.34) rozwiązuje się problem

$$\min_{(s_0, \dots, s_{n+1}) \in S(\hat{\pi})} \sum_{i=0}^{n+1} (w_i E_i + v_i T_i).$$

Algorytm ALPR

Krok 0. Wyznaczyć rozwiązanie optymalne problemu

$$F_0^0 = \min_{s_0 \geq a_{n+1,0} + \tau_0^0} \left(w_0 E_0 + v_0 T_0 + w_{n+1} E_{n+1} \right)$$

Niech $\hat{s}_0^{(0)}$ oznacza optymalną wartość zmiennej s_0 w tym problemie. Załóżmy, że mamy rozwiązanie $\hat{s}_0^{(k-1)}, \hat{s}_1^{(k-1)}, \dots, \hat{s}_{k-1}^{(k-1)}$ otrzymane w $k-1$ iteracji algorytmu. W k -tej iteracji algorytmu należy wykonać:

Krok 1.

Jeżeli $k \leq n$ wyznaczyć wartość $\tilde{s}_k^{(k)}$, która minimalizuje wyrażenie $w_k E_k + v_k T_k$, przy czym $\tilde{s}_k^{(k)} \geq a_{k-1,k} + \tau_k^0$. W przeciwnym przypadku wyznaczyć wartość $\tilde{s}_{n+1}^{(n+1)}$, która minimalizuje wyrażenie $v_{n+1} T_{n+1}$

i dokonać podstawienia $\tau_{n+1}^0 := 0$.

Jeśli $\tilde{s}_k^{(k)} \geq \hat{s}_{k-1}^{(k-1)} + a_{k-1,k} + \tau_k^0$, to dokonać podstawienia

$\hat{s}_k^{(k)} := \tilde{s}_k^{(k)}$, $\hat{s}_i^{(k)} = \hat{s}_i^{(k-1)}$ ($i=0, \dots, k-1$) i przejść do kroku 5 /wyznaczone zostało rozwiązanie optymalne problemu (2.34)/.
 Natomiast, jeśli $\tilde{s}_k^{(k)} < \hat{s}_{k-1}^{(k-1)} + a_{k-1,k} + \gamma_k^0$, dokonać podstawienia $\hat{s}_k^{(k-1)} = \hat{s}_{k-1}^{(k-1)} + a_{k-1,k} + \gamma_k^0$ i przejść do kroku 2.

Krok 2.

Wyznaczyć zbiór $\mathcal{J}^k = \{k, k-1, \dots, 1\}$, $1 \geq 0$, taki, że:
 $\hat{s}_i^{(k-1)} = \hat{s}_{i-1}^{(k-1)} + a_{i-1,i} + \gamma_i^0$, $i=k, k-1, \dots, 1+1$.

Jeżeli $l=0$ i $\hat{s}_0^{(k-1)} = a_{n+1,0} + \gamma_0^0$, to dokonać podstawienia $\hat{s}_i^{(k)} = \hat{s}_i^{(k-1)}$, ($i=0, 1, \dots, k$) i przejść do kroku 5.

W przeciwnym przypadku przejść do kroku 3.

Krok 3.

Niech $x_i(s_i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } s_i \leq r_i + \gamma_i^0. \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku, } i=0, \dots, n. \end{cases}$

$y_i(s_i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } s_i > d_i, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku, } i=0, \dots, n+1, \end{cases}$

oraz $x_{n+1}(s_0) = \begin{cases} 1 & \text{dla } s_0 \leq r_{n+1} + a_{n+1,0} + \gamma_0^0 \text{ i } 0 \in \mathcal{J}^k, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$

Jeżeli

$$\sum_{i \in \mathcal{J}^k} (w_i \cdot x_i(\hat{s}_i^{(k-1)}) - v_i \cdot y_i(\hat{s}_i^{(k-1)}) + w_{n+1} \cdot x_{n+1}(\hat{s}_0^{(k-1)})) \geq 0 \quad (2.35)$$

to dokonać podstawienia $\hat{s}_i^{(k)} := \hat{s}_i^{(k-1)}$, $i=0, \dots, k$ i przejść do kroku 5. W przeciwnym przypadku przejść do kroku 4.

Krok 4.

Wyznaczyć wartość:

$$\hat{\delta} = \min \left\{ \hat{s}_1^{(k-1)} - a_{1-1,1} - \gamma_1^0, \min_{i \in \{i \in \mathcal{J}^k \mid x_i(\hat{s}_i^{(k-1)}) = 0\}} \right\}$$

$$\left(\hat{s}_i^{(k-1)} - \tau_i^0 - r_i \right), \min_{i \in \{i \in \mathcal{Y}^k \mid y_i(\hat{s}_i^{(k-1)})=1\}} \left(\hat{s}_i^{(k-1)} - d_i \right) \}$$

przy czym dla $l=0$, $a_{1,0} = a_{n+1,0}$.

Dokonać podstawienia

$$\hat{s}_i^{(k-1)} := \hat{s}_i^{(k-1)} - \hat{\delta}, \quad i \in \mathcal{Y}^k.$$

Jeżeli $\hat{\delta} = \hat{s}_1^{(k-1)} - a_{1-1,1} - \tau_i^0$, to przejść do kroku 2, w przeciwnym przypadku przejść do początku kroku 3.

Krok 5.

Dokonać podstawienia $k=k+1$. Jeśli $k \leq n+1$ przejść do kroku 1. Natomiast, gdy $k > n+1$, to ostatnio wyznaczone wartości $\hat{s}_0^{(n+1)}$, $\hat{s}_1^{(n+1)}$, ..., $\hat{s}_{n+1}^{(n+1)}$ są rozwiązaniem optymalnym problemu $1|1,n|PP$, $\tau^0 > 0$, "droga" $\sum a + \sum wE + \sum vT$. ■

Zauważmy, że w każdej iteracji algorytmu, jeśli mamy, że

$$\tilde{s}_k^{(k)} \geq \hat{s}_{k-1}^{(k-1)} + a_{k-1,k} + \tau_k^0, \text{ to wektor } (\hat{s}_0^{(k-1)}, \dots, \hat{s}_{k-1}^{(k-1)},$$

$$\hat{s}_k^{(k)}) \in S(\pi^k). \text{ Stąd wynika, iż:}$$

$$\begin{aligned} (s_0, \dots, s_k) \in S(\pi^k) & \left[\sum_{i=0}^k (w_i E_i + v_i T_i) + w_{n+1} E_{n+1} \right] = \\ & = \min_{(s_0, \dots, s_{k-1}) \in S(\pi^{k-1})} \left[\sum_{i=0}^{k-1} (w_i E_i + v_i T_i) + w_{n+1} E_{n+1} \right] + \\ & + \min_{s_k \geq a_{k-1,k} + \tau_k^0} (w_k E_k + v_k T_k) \end{aligned}$$

i rozwiązanie $\hat{s}_0^{(k-1)}, \dots, \tilde{s}_k^{(k)}$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu 2.34.

$$\text{Natomiast, jeśli } \tilde{s}_k^{(k)} < \hat{s}_{k-1}^{(k-1)} + a_{k-1,k} + \tau_k^0$$

oraz

$$\sum_{i \in J^k} (w_i \cdot x_i(\hat{s}_i^{(k-1)}) - v_i \cdot y_i(\hat{s}_i^{(k-1)})) + w_{n+1} \cdot x_{n+1}(\hat{s}_0^{(k-1)}) \geq 0,$$

to, jak zostanie dalej pokazane, rozwiązanie $\hat{s}_i^{(k)} = \hat{s}_i^{(k-1)}$

$i=0, \dots, k$ wyznaczone w kroku 3 algorytmu jest również rozwiązaniem optymalnym zagadnienia (2.34). Jest oczywiste, że jeśli $\tilde{s}_k^{(k)} <$

$< s_{k-1}^{k-1} + a_{k-1,k} + \gamma_k^0$, to dla każdego $s_k > \hat{s}_k^{(k)} = \hat{s}_{k-1}^{(k)} + a_{k-1,k} + \gamma_k^0$ mamy $w_k \cdot \max\{0, r_k + \gamma_k^0 - s_k\} + v_k \cdot \max\{0, s_k - d_k\} >$

$> w_k \cdot \max\{0, r_k + \gamma_k^0 - \hat{s}_k^{(k)}\} + v_k \cdot \max\{0, \hat{s}_k^{(k)} - d_k\}$. Wartości $\hat{s}_i^{(k)}$ ($i=0, \dots, k-1$) są, zgodnie z założeniem, optymalnymi wartościami w zagadnieniu

$$(s_0, \dots, s_{k-1}) \in S(\pi^{k-1}) \left[\sum_{i=0}^{k-1} (w_i E_i + v_i T_i) + w_{n+1} E_{n+1} \right],$$

tak więc zwiększenie wartości $\hat{s}_i^{(k)}$ nie może przynieść zmniejszenia wartości funkcji celu (2.34).

Ponadto należy zauważyć, że dla każdego $\Delta \geq 0$ spełnione są warunki /rys. 2.5/:

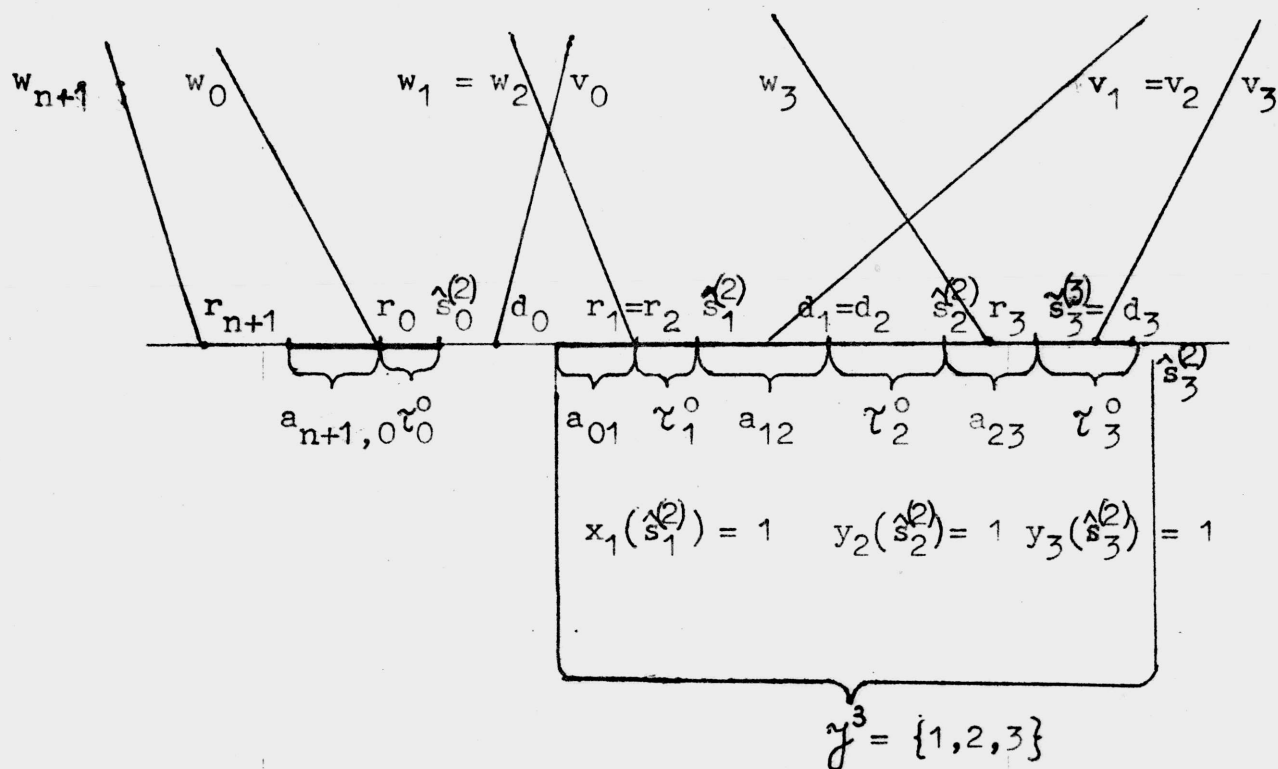
$$\begin{aligned} x_i(s_i) &\leq x_i(s_i - \Delta), \quad i=0, 1, \dots, n, \\ x_{n+1}(s_0) &\leq x_{n+1}(s_0 - \Delta), \\ y_i(s_i) &\leq y_i(s_i - \Delta). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Zawsze też $x_i(s_i) \cdot (r_i + \gamma_i^0 - s_i) \geq 0$ i $y_i(s_i) \cdot (d_i - s_i) \geq 0$.

Wykorzystując warunki (2.35), (2.36) można pokazać, że dla każdego $\Delta \geq 0$ i $l > 0$ zachodzi następujący ciąg nierówności:

$$\sum_{i=1}^k (w_i \cdot \max\{0, r_i + \gamma_i^0 - \hat{s}_i^{(k)}\} + v_i \cdot \max\{0, \hat{s}_i^{(k)} - d_i\}) =$$

$$\sum_{i=1}^k (w_i \cdot x_i(\hat{s}_i^{(k)}) \cdot (r_i + \gamma_i^0 - \hat{s}_i^{(k)}) - v_i \cdot y_i(\hat{s}_i^{(k)}) \cdot (d_i - \hat{s}_i^{(k)})) \leq$$



Rys. 2.5 Wyznaczanie zbioru γ^k .

$$\leq \sum_{i=1}^k (w_i \cdot x_i(\hat{s}_i^{(k)})(r_i + \tau_i^0 - \hat{s}_i^{(k)}) - v_i \cdot y_i(\hat{s}_i^{(k)})(d_i - \hat{s}_i^{(k)})) +$$

$$\Delta \cdot \sum_{i=1}^k (w_i \cdot x_i(\hat{s}_i^{(k)}) + v_i \cdot y_i(\hat{s}_i^{(k)}) = \sum_{i=1}^k [(w_i \cdot x_i(\hat{s}_i^{(k)})(r_i + \tau_i^0 -$$

$$- (\hat{s}_i^{(k)} - \Delta)) - v_i \cdot y_i(\hat{s}_i^{(k)})(d_i + (\hat{s}_i^{(k)} - \Delta))] \leq \sum_{i=1}^k [w_i \cdot x_i(\hat{s}_i^{(k)} - \Delta) \cdot$$

$$(r_i + \tau_i^0 - (\hat{s}_i^{(k)} - \Delta)) - v_i \cdot y_i(\hat{s}_i^{(k)} - \Delta)(d_i - (\hat{s}_i^{(k)} - \Delta))].$$

Wynika stąd, że wartości $\hat{s}_1^{(k)}, \dots, \hat{s}_k^{(k)}$ minimalizują wyrażenie

$$\min_{(s_1, \dots, s_k) \in S(\pi^k)} \sum_{i=1}^k (w_i \cdot E_i + v_i \cdot T_i).$$

Ponieważ w rozważanym przypadku zachodzi:

$$\sum_{i=0}^k [w_i \cdot \max \{0, r_i + \tau_i^0 - \hat{s}_i^{(k)}\} + v_i \cdot \max \{0, \hat{s}_i^{(k)} - d_i\}] +$$

$$w_{n+1} \cdot \max \{0, r_{n+1} + \tau_0^0 + a_{n+1,0} - \hat{s}_0^{(k)}\} = \sum_{i=1}^k [w_i \cdot \max \{0, r_i +$$

$$\tau_i^0 - \hat{s}_i^{(k-1)}\} + v_i \cdot \max \{0, \hat{s}_i^{(k-1)} - d_i\} + \min_{(s_0, \dots, s_{l-1}) \in S(\pi^{l-1})}$$

$$\left[\sum_{i=0}^{l-1} (w_i \cdot E_i + v_i \cdot T_i) + w_{n+1} \cdot E_{n+1} \right] = \min_{(s_0, \dots, s_{l-1}) \in S(\pi^{l-1})}$$

$$\left[\sum_{i=0}^{l-1} (w_i \cdot E_i + v_i \cdot T_i) + w_{n+1} \cdot E_{n+1} \right] + \min_{(s_1, \dots, s_k) \in S(\pi^k)}$$

$$\sum_{i=1}^k (w_i \cdot E_i + v_i \cdot T_i),$$

co wynika z tego, że $\hat{s}_i^{(l-1)} = \hat{s}_i^{(k)}$ ($i=0, \dots, l-1$).

Rozwiązanie $\hat{s}_0^{(k)}, \dots, \hat{s}_k^{(k)}$ jest więc rozwiązaniem optymalnym problemu (2.34).

Do tej pory rozważany był przypadek, gdy $l > 0$. Gdy $l=0$ oraz warunek (2.35) jest spełniony, to podobnie jak poprzednio mamy:

$$\sum_{i=0}^k [w_i \cdot x_i(\hat{s}_i^{(k)}) (r_i + \tau_i^0 - \hat{s}_i^{(k)}) - v_i \cdot y_i(\hat{s}_i^{(k)}) (d_i - \hat{s}_i^{(k)})] +$$

$$+ w_{n+1} \cdot x_{n+1}(\hat{s}_0^{(k)}) (r_{n+1} + \tau_0^0 + a_{n+1,0} - \hat{s}_0^{(k)}) \leq$$

$$\sum_{i=0}^k [w_i \cdot x_i(\hat{s}_i^{(k)} - \Delta) (r_i + \tau_i^0 - (\hat{s}_i^{(k)} - \Delta)) + v_i \cdot y_i(\hat{s}_i^{(k)} - \Delta)$$

$$(d_i - (\hat{s}_i^{(k)} - \Delta))] + w_{n+1} \cdot x_{n+1}(\hat{s}_0^{(k)} - \Delta) (r_{n+1} + \tau_0^0 + a_{n+1,0} -$$

$$-(\hat{s}_0^{(k)} - \Delta)).$$

Wynika stąd, że $\hat{s}_0^{(k)}, \dots, \hat{s}_k^{(k)}$ minimalizują wyrażenie (2.34).

Natomiast, jeśli $l=0$ i $\hat{s}_0^{(k)} = a_{n+1,0} + \tau_0^0$, to niezależnie od tego czy warunek (2.35) jest spełniony czy też nie, dalsze zmniejszanie wartości zmiennych s_i jest niemożliwe ze względu na ograniczenia (2.6), (2.7). Otrzymane rozwiązanie jest więc rozwiązaniem optymalnym.

W każdej iteracji /dla pewnego $k > 0$ / krok 1 algorytmu realizowany jest dokładnie raz. Natomiast krok 2 może być realizowany co najwyżej $k+1$ razy, gdyż przejście dokroku 2 z kroku 4 następuje tylko wtedy, gdy należy powiększyć zbiór $\mathcal{J}^k$.

Dla każdego ustalonego zbioru $\mathcal{J}^k$ kroki 3 i 4 mogą być realizowane co najwyżej $2 \cdot |\mathcal{J}^k| + 1$ razy, gdyż wartość δ wyznaczana jest początkowo jako minimum co najwyżej $2 \cdot |\mathcal{J}^k| + 1$ elementów i liczba ich zmniejsza się co najmniej o jeden w każdym kroku 3 algorytmu.

Tak więc kroki 3 i 4 mogą być wykonywane nie więcej niż $(k+1) \cdot (2k+2)$ razy.

Złożoność obliczeniowa każdej iteracji algorytmu ALPR jest więc rzędu $O(k^3)$.

Problem $1|1,n|PP, \tau^0 \geq 0$, "droga" $|\sum a + \sum wE + \sum vT$ jest problemem klasy P. Problem ten można rozwiązać przy użyciu algorytmu ALPR o złożoności $O(n^3)$, gdyż choć każda iteracja algorytmu jest wykonywana $n+1$ razy, to łatwo stwierdzić, iż także zbiór $\mathcal{J}^k$ może być wyznaczany nie więcej niż $n+1$ razy podczas działania algorytmu ALPR. Stąd, ponieważ dla każdego zbioru $\mathcal{J}^k$ należy wykonać co najwyżej $|\mathcal{J}^k| \leq n+2$ iteracji kroku 3 i 4, których złożoność jest rzędu $O(|\mathcal{J}^k|^2) \leq O(n^2)$, tak więc złożoność algorytmu ALPR jest rzędu $O(n^3)$.

Należy zwrócić uwagę na to, że problem PO jest szczególnym przypadkiem, rozważanego tutaj zagadnienia i wartość $\sum_{i \in \mathcal{J}^k} [w_i x_i(\hat{s}_i^{(k)}) - v_i \cdot y_i(\hat{s}_i^{(k)})] + w_{n+1} \cdot x_{n+1}(\hat{s}_0^{(k-1)})$ jest uogólnieniem wartości δ w problemie PO.

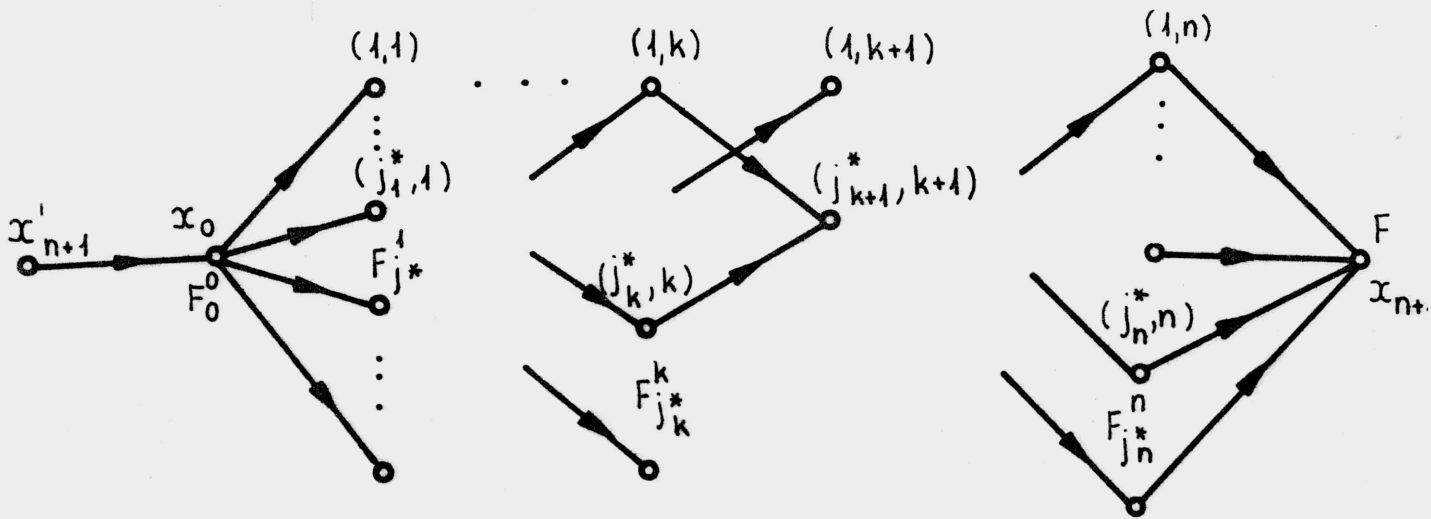
2.4. Subgradientowa metoda wyznaczania dolnego oszacowania

Przedstawiony w tym rozdziale sposób wyznaczania dolnego oszacowania wartości rozwiązania optymalnego zagadnienia $1|1,n|PP, \tau^0 \geq 0$ $|\sum a + \sum wE + \sum vT$ bazuje na metodzie konstrukcji dolnego oszacowania przedstawionej w rozdziale 2.3.3. w postaci algorytmu ALB.

Wartości F wyznaczonej w algorytmie ALB odpowiada pewna droga π_F /niekoniecznie sekwencyjna/ w grafie $\hat{G}$, taka że /rys. 2.6/.

$$\pi_F(n) = j_n^* \quad \text{dla } F_{j_n^*, n+1}^{n+1} = \min_{j \in J} F_{j, n+1}^{n+1} = F$$

$$\pi_F(k) = j_k^* \quad \text{dla } F_{j_k^*, j_{k+1}^*}^{k+1} = \min_{j \in J - j_{k+1}^*} F_{j, j_{k+1}^*}^{k+1}, \quad k=n-1, \dots, 1.$$



Rys. 2.6 Wyznaczanie najtańszej drogi w grafie $\hat{G}$

Jeżeli $\pi_F \in \hat{\Pi}$ /to znaczy, że π_F jest drogą sekwencyjną w $\hat{G}$ /, wtedy rozwiązanie odpowiadające tej drodze, a mianowicie:

$$x_{j_{k-1}^*, j_k^*}^k = 1 \quad (k=1, \dots, n, \text{ przy czym } j_0^* = 0), \text{ pozostałe } x_{ij}^k = 0, \quad (2.37)$$

spełnia ograniczenia (2.24) z modelu zagadnienia $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ postaci (2.19) - (2.29). Z rozważań przeprowadzonych w rozdziale 2.3.3. wynika, iż jest to rozwiązanie dopuszczalne rozważanego zagadnienia ze względu na zmienne x_{ij}^k .

Jeżeli ponadto zachodzi równość

$$\mathcal{F}(\pi_F, \bar{s}) = \mathcal{F}(\pi_F, \bar{s}_F) = F$$

$$\min_{\bar{s} \in S(\pi_F)}$$

to wyznaczone w ten sposób rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym problemu $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Jeżeli nawet $\mathcal{F}(\pi_F, \bar{s}_F) > F$, to należy się spodziewać, że wyznaczone w ten sposób rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym bądź bliskim rozwiązania optymalnego.

W przypadku, gdy $\pi_F = (j_1^*, j_2^*, \dots, j_n^*) \notin \hat{\Pi}$, to rozwiązanie (2.37) nie spełnia ograniczenia (2.24).

Dla problemu komiwojażera $1|1, n|PP|\sum a$ znane są różne metody wyznaczania dolnego oszacowania wartości rozwiązania optymalnego poprzez wprowadzenie do funkcji celu, kar za niespełnienie ograniczeń, które zostały pominięte w problemie zrelaksowanym [5, 15, 41, 60]. Tego rodzaju podejście ma sens tylko wtedy, gdy zagadnienie ze zmodyfikowaną w ten sposób funkcją celu można rozwiązać przy użyciu algorytmu wielomianowego.

W przypadku problemu $\min_{\pi \in \Pi} (F_0^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{J}_{\pi(k-1)\pi(k)})$ można zmodyfikować wartość funkcji celu dodając do niej dodatkowy człon:

$$\sum_{i=1}^n u_i \cdot \left(\sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^n x_{ji}^k + x_{0i}^1 - 1 \right),$$

gdzie u_i oznacza "karę" za niespełnienie i -tego ograniczenia postaci (2.24). Łatwo zauważyć, że będzie to odpowiadało zmodyfikowaniu wartości F_{ji}^k , w taki sposób, że:

$$F_{ji}^k(u) = \min_{\theta_0, \theta} \left(\delta_j^{k-1} \cdot \max \{0, \bar{t}_j^{k-1} - \theta_0\} + \right. \quad (2.38)$$

$$\left. + w_i \cdot \max \{0, r_i + \gamma_i^0 - \theta\} + v_i \cdot \max \{0, \theta - d_i\} \right) + a_{ji} + F_j^{k-1}(u) + u_i,$$

$$k=2, \dots, n; i, j=1, \dots, n, (\theta_0 \geq \bar{t}_j^{k-1}, \theta \geq \theta_0 + a_{ji} + \gamma_i^0)$$

i analogicznie

$$F_i^1(u) = F_i^1 + u_i, i=1, \dots, n. \quad (2.39)$$

Jeżeli kary u_i ($i=1, \dots, n$) będą dobierane w ten sposób, że $\sum_{i=1}^n u_i = 0$, to w sytuacji, gdy droga π_{F_u} odpowiadająca wartości

$$F(u) = \min_{j \in J} F_{j, n+1}^{n+1}(u) \text{ będzie drogą sekwencyjną, wtedy wartość}$$

$$\begin{aligned}
F(u) &= F_0^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi_{F_u}^{(k-1)}}^{k-1} \pi_{F_u}^{(k)} + \sum_{k=1}^n u \pi_{F_u}^{(k)} = \\
&= F_0^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi_{F_u}^{(k-1)}}^{k-1} \pi_{F_u}^{(k)} + \sum_{i=1}^n u_i = F_0^0 + \\
&+ \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi_{F_u}^{(k-1)}}^{k-1} \pi_{F_u}^{(k)} .
\end{aligned}$$

Niech $\pi^* \in \hat{\Pi}$ będzie drogą sekwencyjną o najmniejszym koszcie, to znaczy

$$\min_{\pi \in \hat{\Pi}} \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi^{(k-1)}}^{k-1} \pi^{(k)} = \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi^{*(k-1)}}^{k-1} \pi^{*(k)} .$$

Jak wiadomo z rozważań w rozdziale 2.3. wartość $F_0^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi^{*(k-1)}}^{k-1} \pi^{*(k)}$ jest dolnym oszacowaniem wartości rozwiązania optymalnego problemu $1|1, n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$. Stąd

$$\begin{aligned}
F(u) &= F_0^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi_{F_u}^{(k-1)}}^{k-1} \pi_{F_u}^{(k)} + \sum_{k=1}^n u \pi_{F_u}^{(k)} \leq F_0^0 + \\
&+ \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi^{*(k-1)}}^{k-1} \pi^{*(k)} + \sum_{k=1}^n u \pi^{*(k)} = F_0^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi^{*(k-1)}}^{k-1} \pi^{*(k)} .
\end{aligned}$$

Z nierówności tej wynika, że dla dowolnych kar u_i /dla których $\sum_{i=1}^n u_i = 0$ / wartość $F(u)$, wyznaczona przez algorytm ALB zmodyfikowany w przedstawiony wcześniej sposób (2.38), (2.39), jest dolnym oszacowaniem wartości rozwiązania optymalnego problemu $1|1, n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Najlepsze kary, ze względu na wartość dolnego oszacowania, można otrzymać rozwiązując problem:

$$\max_u \left\{ F(u) \mid \sum_{i=1}^n u_i = 0 \right\} ,$$

gdzie

$$F(u) = \min_{\pi \in \Pi} \left[F_0^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi^{(k-1)}}^{k-1} \pi(k) + \sum_{k=1}^n u \pi(k) \right] =$$

$$= F_0^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi_{F_u}^{(k-1)}}^{k-1} \pi_{F_u}(k) + \sum_{k=1}^n u \pi_{F_u}(k) \cdot$$

Problem 2.40 można rozwiązać przy użyciu subgradientowej metody optymalizacji [33, 42]. Bazuje ona na obserwacji, że wektor A^{π^p} , którego współrzędne tworzą wartości

$$\alpha_i^{\pi^p} = \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^n x_{ji}^k + x_{0j}^1 - 1$$

/gdzie x_{ij}^k opisują drogę $\pi \in \Pi$ /, jest projekcją zbioru $\{u \mid \sum_{i=1}^n u_i = 0\}$ w kierunku subgradientu $F(u)$ w punkcie u^p . Przy czym u^p jest pewnym wektorem kar, a π^p najtańszą drogą odpowiadającą tym karom.

Optymalizacja subgradientowa jest obecnie dobrze rozwiniętą techniką stosowaną do otrzymywania rozwiązań przybliżonych problemów typu (2.40).

Algorytm subgradientowy

Krok 1. Ustalić początkowy wektor kar u^0 /np. $u_i^0 = 0$, $i=1, \dots, n$ /.
Podstawić $l=0$.

Krok 2. Wyznaczyć $F(u^l) = \min_{\pi \in \Pi} F_0^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi^{(k-1)}}^{k-1} \pi(k) +$

$$\sum_{i=1}^n u_i^l \cdot \alpha_i^{\pi^l} = F_0^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{T}_{\pi^{l(k-1)}}^{k-1} \pi^l(k) + \sum_{i=1}^n u_i^l \cdot \alpha_i^{\pi^l}$$

Krok 3. Jeżeli $\pi^l \in \hat{\Pi}$, to $\pi^* = \pi^l$. Otrzymano rozwiązanie optymalne problemu (2.40) i koniec algorytmu.

Krok 4. Wyznaczyć nowe wartości kar u^{l+1} :

$$u^{l+1} = u^l + \lambda^l \cdot \frac{(UB - F(u^l))}{\|A \pi^l\|} A \pi^l$$

Przejsć do kroku 1.■

Symbole użyte w algorytmie mają następujące znaczenie: $\| \cdot \|$ oznacza normę euklidesową, UB - oznacza górne oszacowanie wartości rozwiązania optymalnego problemu (2.40), a $0 \leq \lambda^1 \leq 2$, λ^1 - jest arbitralnie ustalonym współczynnikiem, który ma wpływ na zbieżność algorytmu.

Jako wartość UB można przyjąć wartość $\mathcal{F}(\pi)$, dla dowolnego π , czyli wartość dowolnego rozwiązania dopuszczalnego problemu $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a_i + \sum w_i E_i + \sum v_i T_i$.

2.5. Algorytm rozwiązywania zagadnienia

Algorytm przedstawiony w tym rozdziale oparty jest na metodzie podziału i ograniczeń. Zastosowano w nim mieszaną strategię podziału [37].

Rozpoczynając od pewnej drogi sekwencyjnej $\beta_0 \in \hat{\Pi}$ w $\hat{G}$ generuje się ciąg dróg sekwencyjnych $\pi \in \hat{\Pi}$.

Dla każdej drogi sekwencyjnej z ciągu wyznaczony zostaje koszt $\mathcal{F}(\pi)$ przy użyciu algorytmu ALPR. Każdą nową drogę sekwencyjną $\pi \in \hat{\Pi}$ w ciągu otrzymuje się poprzez ustalenie nowej pozycji w drodze dla pewnego punktu odbioru, którego pozycja nie została do tej pory ustalona.

W trakcie działania algorytmu zbiór punktów odbioru $J = \{1, \dots, \dots, n\}$ będzie podzielony na dwa rozłączne podzbiory $\bar{J}$ i $J' = J - \bar{J}$.

$\bar{J}$ będzie zbiorem takich punktów odbioru, których miejsce w trasie pojazdu /w drodze sekwencyjnej $\pi \in \hat{\Pi}$ / zostało ustalone.

Przedstawione zostaną dwie wersje algorytmu. W pierwszej zbiorowi $\bar{J}$ odpowiadać będzie pewne rozwiązanie częściowe $(j_{n-1+1}, j_{n-1+2}, \dots, j_n)$, gdzie $l = |\bar{J}|$, oraz $j_i \in \bar{J}$ ($i = n-1+1, \dots, n$). W drugiej wersji algorytmu zbiorowi $\bar{J}$ odpowiadać będzie rozwiązanie częściowe $(j_1, \dots, j_l)$, $j_i \in \bar{J}$ ($i=1, \dots, l$). Przy generowaniu nowej drogi sekwencyjnej $\gamma \in \hat{\Pi}$ z drogi $\pi \in \hat{\Pi}$ pewien punkt odbioru $i \in J'$ zostanie umieszczony na $n-l$ pozycji /lub $l+1$ pozycji w wersji drugiej algorytmu/, natomiast punkty odbioru należące do zbioru $\bar{J}$ będą zajmowały te same pozycje w drodze sekwencyjnej γ co w drodze sekwencyjnej π . Pozostałym punktom odbioru zostaną przydzielone pozycje w drodze γ przy użyciu dowolnej reguły heurystycznej. Na rys. 2.7 przedstawiony został pewien sposób otrzymywania drogi sekwencyjnej γ z drogi π , który można sformułować następująco:

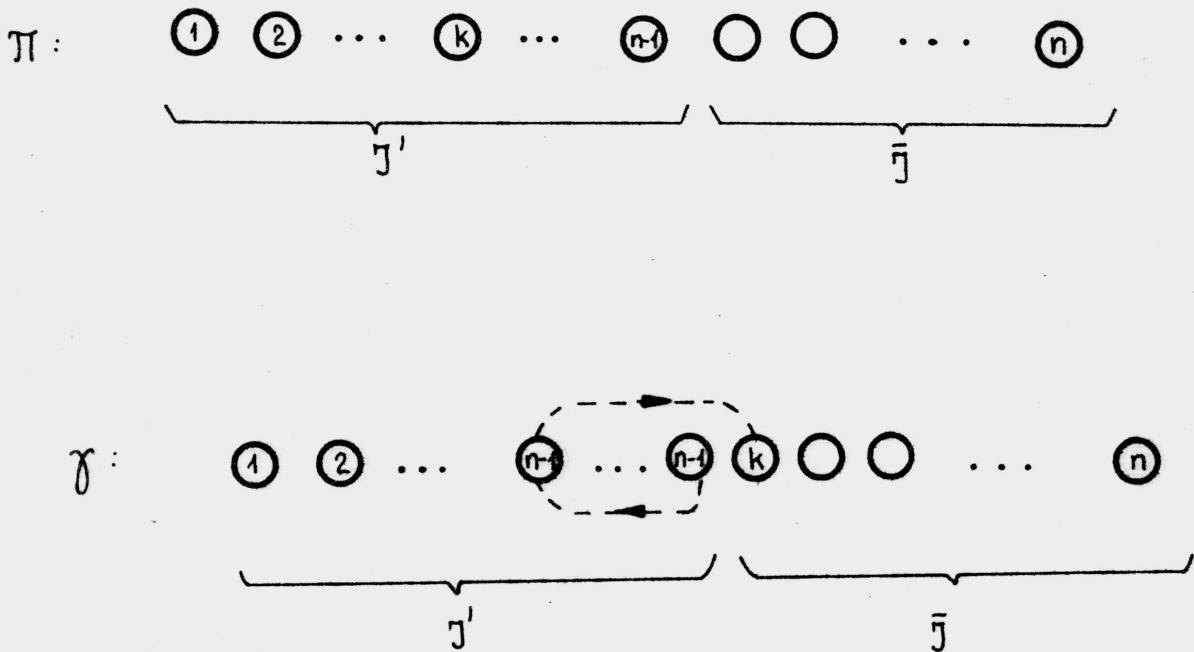
jeżeli $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n-1), j_{n-1+1}, \dots, j_n)$ jest

drogą sekwencyjną, w której punktom odbioru ze zbioru

$\bar{J} = \{j_{n-1+1}, \dots, j_n\}$ przydzielono $n-1+1, \dots, n$ pozycję (2.41)

w drodze, to $\gamma = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(k-1), \pi(n-1),$

$\pi(k+1), \dots, \pi(n-1-1), \pi(k), j_{n-1+1}, \dots, j_n)$.



Rys. 2.7 Sposób generowania następnika.

Przy generowaniu nowej drogi sekwencyjnej $\gamma \in \hat{\Pi}$ punkt odbioru $i \in J'$, którego miejsce zostaje ustalone w trasie pojazdu, należy dołączyć do zbioru $\bar{J}$, a usunąć ze zbioru J' .

Proces generowania dróg sekwencyjnych prowadzi się aż do chwili, gdy wystąpi jedna z dwu następujących sytuacji:

- można wykazać, że z danej drogi sekwencyjnej γ nie można wygenerować /bezpośrednio lub pośrednio/ drogi sekwencyjnej, która dałaby mniejszą wartość funkcji celu niż najlepsze do tej pory znalezione rozwiązanie,
- zbiór $J' = \emptyset$, tzn. gdy ustalone zostało rozwiązanie problemu $1|1, n|$ PP, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Wtedy należy odrzucić rozpatrywaną drogę sekwencyjną γ i cofnąć się do drogi sekwencyjnej π , z której γ została bezpośrednio

wygenerowana. Proces generowania dróg sekwencyjnych można przedstawić w postaci drzewa H^1 , w którym każdy wierzchołek będzie odpowiadał pewnej drodze sekwencyjnej $\pi \in \hat{\Pi}$, a łuk będzie przedstawiał parę dróg $\langle \pi, \gamma \rangle$, gdzie γ została wygenerowana bezpośrednio z π .

Oznaczmy przez $\Pi_1(j_k, j_{k+1}, \dots, j_n)$ zbiór wszystkich dróg sekwencyjnych, w których ustalony jest fragment drogi począwszy od k -tej pozycji, to znaczy:

$$\Pi_1(j_k, j_{k+1}, \dots, j_n) = \{\pi \in \hat{\Pi} \mid \pi(k) = j_k, \dots, \pi(n) = j_n\}$$

i analogicznie przez

$$\Pi_2(j_1, \dots, j_k) = \{\pi \in \hat{\Pi} \mid \pi(1) = j_1, \dots, \pi(k) = j_k\}.$$

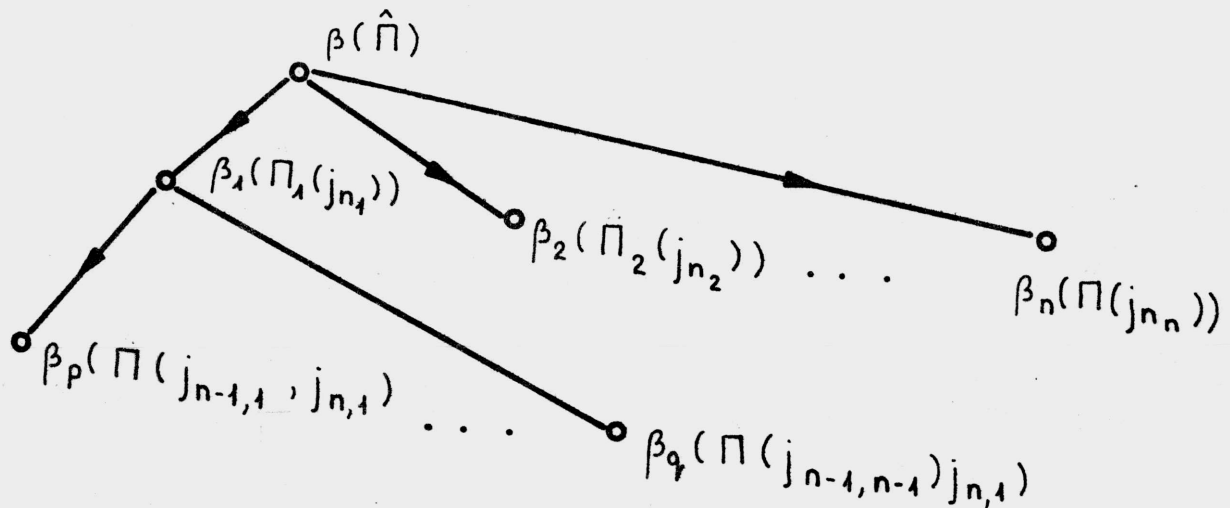
oznaczymy zbiór wszystkich takich dróg sekwencyjnych, w których ustalony jest fragment drogi od pierwszej do k -tej pozycji.

Zbiór $\Pi_1(j_k, \dots, j_n)$ jest zbiorem wszystkich dróg sekwencyjnych, które można wygenerować z pewnej drogi sekwencyjnej π , w której ustalony został fragment drogi począwszy od k -tej pozycji /w przypadku pierwszej wersji algorytmu/. I analogicznie zbiór $\Pi_2(j_1, \dots, j_k)$ jest zbiorem wszystkich dróg sekwencyjnych, które można wygenerować z pewnej drogi sekwencyjnej π , w której został ustalony fragment drogi od pierwszej do k -tej pozycji. Należy się spodziewać, że obie wersje podziału w ogólnym przypadku będą sobie równoważne.

W korzeniu drzewa H^1 , któremu odpowiada pewna droga sekwencyjna β_0 , mamy $\bar{J} = \emptyset$ oraz $\Pi_1(\emptyset) = \Pi_2(\emptyset) = \hat{\Pi}$. Podział zbioru dróg sekwencyjnych $\hat{\Pi}$ jest równoważny z podziałem zbioru rozwiązań dopuszczalnych problemu $1 \mid 1, n \mid PP, \tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Podział zbioru $\Pi_1(j_k, \dots, j_n)$, $k=1, \dots, n$, przeprowadzany jest w następujący sposób /rys. 2.8/:

$$\Pi_1(j_k, \dots, j_n) = \bigcup_{j \in J - \{j_k, \dots, j_n\}} \Pi_1(j, j_k, \dots, j_n).$$



Rys. 2.8 Podział zbioru rozwiązań

Zbiory $\Pi_1(j', j_1, \dots, j_n)$ i $\Pi_1(j'', j_k, \dots, j_n)$ są rozłączne, jeżeli tylko $j' \neq j''$. Zbiór J' będziemy nazywali zbiorem kandydatów.

Analogicznie przeprowadza się podział zbioru $\Pi_2(j_1, \dots, j_k)$ w przypadku stosowania drugiej wersji algorytmu.

W każdym kroku algorytmu, dla każdej nowo wygenerowanej drogi sekwencyjnej $\gamma \in \hat{\Pi}$ wyznacza się dolne oszacowanie wartości rozwiązania optymalnego w zbiorze $\Pi_1(j_k, \dots, j_n)$ /lub $\Pi_2(j_1, \dots, j_k)$ /rozwiązań, które można wygenerować z γ .

Sposób wyznaczania wartości dolnych oszacowań dla zbiorów

$\Pi_1(j_k, \dots, j_n)$ i $\Pi_2(j_1, \dots, j_k)$ przedstawiają twierdzenia 2.4 i 2.5.

Twierdzenie 2.4

Dolnym oszacowaniem wartości rozwiązania optymalnego problemu

$$\min_{\pi \in \Pi_1(j_k, \dots, j_n)} \min_{\bar{s} \in S(\pi)} \mathcal{F}(\pi, \bar{s}) \quad \text{jest wyrażenie}$$

$$LB_1(j_k, \dots, j_n) = \min_{(s_{j_k}, \dots, s_{j_n}, s_{n+1}) \in S(j_k, \dots, j_n)}$$

$$\{v_{n+1} \cdot \max\{0, s_{n+1} - d_{n+1}\} + \delta_{j_k}^k \cdot \max\{0, \bar{t}_{j_k}^k - s_{j_k}\} +$$

$$+ a_{j_n, n+1} \sum_{i=k+1}^n w_{j_i} \cdot \max\{0, r_{j_i} + \tau_{j_i}^o - s_{j_i}\} +$$

$$+ v_{j_i} \cdot \max \{0, s_{j_i} - d_{j_i}\} + a_{j_{i-1}, j_i} + F_{j_k}^k(u, J'). \quad (2.41)$$

gdzie $S(j_k, \dots, j_n) = \{(s_{j_k}, \dots, s_{n+1}) \mid s_{j_k} \geq t_{j_k}^k, \dots, s_{n+1} \geq s_{j_n} + a_{j_n, n+1}\}$

oraz $F_{j_k}^k(u, J')$ jest wartością wyznaczoną przez algorytm ALB dla zbioru $J' = J - \{j_k, \dots, j_n\}$, przy dowolnym wektorze kar u .

Dowód

Wartość $\min_{\pi \in \Pi_1(j_k, \dots, j_n)} \min_{\bar{s} \in S(\pi)} \mathcal{F}(\pi, \bar{s})$ można inaczej zapisać w następującej postaci:

$$\min_{\pi \in \Pi_1(j_k, \dots, j_n)} \min_{\bar{s} \in S(\pi)} \mathcal{F}(\pi, \bar{s}) = \min_{s_0 \geq a_{n+1,0} + \tau_0^0} \left[\min_{j_1 \in J'} s_1^{\min}, s_{j_1}^{\min} \geq t_{j_1}^1 \right]$$

$$\min_{j_{k-1} \in J' - \{j_1, \dots, j_{k-2}\}} \left[\min_{s_{j_{k-1}}^{k-1} \geq s_{j_{k-2}}^{k-2} + \tau_{j_{k-1}}^0 + a_{j_{k-2}, j_{k-1}}} \right]$$

$$\left[\min_{s_{j_k} \geq s_{j_{k-1}}^{k-1} + \tau_{j_k}^0 + a_{j_{k-1}, j_k}} \min_{s_{j_{k+1}} \geq s_{j_k} + \tau_{j_{k+1}}^0 + a_{j_k}} \right]$$

$$\left[\min_{s_{n+1} \geq s_{j_i} + a_{j_n, n+1}} \left[\sum_{i=k}^n (w_{j_i} \cdot \max \{0, r_{j_i} + \tau_{j_i}^0 - s_{j_i}\}) + \right. \right]$$

$$+ v_{j_i} \max \{0, s_{j_i} - d_{j_i}\} + \sum_{i=k}^{n+1} a_{j_i, j_{i+1}} + a_{j_n, n+1} + v_{n+1} \cdot$$

$$\cdot \max \{0, s_{n+1} - d_{n+1}\} + \sum_{i=1}^{k-1} (w_{j_i} \cdot \max \{0, r_{j_i} + \tau_{j_i}^0 - s_{j_i}^i\} +$$

$$+ v_{j_i} \cdot \max \{0, s_{j_i}^i - d_{j_i}\} + a_{j_i, j_{i+1}}) + a_{n+1,0} + w_{n+1} \cdot \max \{0,$$

$$r_{n+1} + \tau_0^0 + a_{n+1,0} - s_0\} + w_0 \cdot \max \{0, r_0 + \tau_0^0 - s_0\} +$$

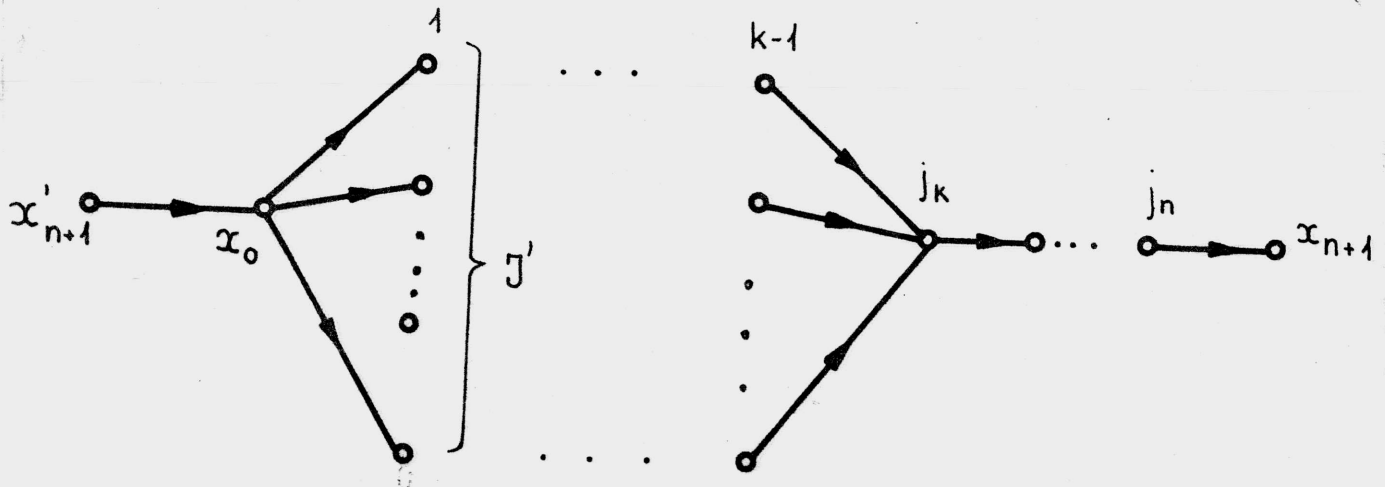
$$+ v_0 \cdot \max \{0, s_0 - d_0\}] \dots] \geq$$

$$\begin{aligned}
s_{j_k} &\geq s_{j_{k-1}} + \min_{j_k} \tau_{j_k}^0 + a_{j_{k-1}j_k} \left\{ s_{j_{k+1}} \geq s_{j_k} + \min_{j_{k+1}} \tau_{j_{k+1}}^0 + a_{j_k j_{k+1}} \right. \dots [\\
\min_{s_{n+1}} &\geq s_{j_n} + a_{j_n, n+1} \left[\sum_{i=k}^n (w_{j_i} \cdot \max \{0, r_{j_i} + \tau_{j_i}^0 - s_{j_i}\} + \right. \\
&+ v_{j_i} \cdot \max \{0, s_{j_i} - d_{j_i}\}) + \sum_{i=k}^{n-1} a_{j_i j_{i+1}} + a_{j_n, n+1} + \\
&+ v_{n+1} \cdot \max \{0, s_{n+1} - d_{n+1}\} \dots] + a_{n+1, 0} + \min_{s_0} \tau_{s_0}^0 \geq a_{n+1, 0} + \tau_0^0 \\
&\left[\min_{j_1 \in J'} \min_{s_{j_1}^1} \geq t_{i_1}^1 \dots \min_{j_{k-1} \in J'} \min_{s_{j_{k-1}}^{k-1}} \geq s_{j_{k-2}}^{k-2} + \tau_{j_{k-1}}^0 + \right. \\
&+ a_{j_{k-2} j_{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} (w_{j_i} \cdot \max \{0, r_{j_i} + \tau_{j_i}^0 - s_{j_i}^i\} + \\
&+ v_{j_i} \cdot \max \{0, s_{j_i}^i - d_{j_i}\} + a_{j_i j_{i+1}}) + w_{n+1} \cdot \max \{0, r_{n+1} + \\
&+ \tau_0^0 + a_{n+1, 0} - s_0\} + w_0 \cdot \max \{0, r_0 + \tau_0^0 - s_0\} + v_0 \cdot \max \{0, \\
&s_0 - d_0\} \dots] \geq \min_{s_{j_k} \geq t_{j_k}^k} \left\{ \min_{j_{k+1}} \tau_{j_{k+1}}^0 + a_{j_k j_{k+1}} \right. \dots [\\
&\left[\min_{s_{n+1}} \geq s_{j_n} + a_{j_n, n+1} \left[\sum_{i=k}^n (w_{j_i} \cdot \max \{0, r_{j_i} + \tau_{j_i}^0 - s_{j_i}\} + \right. \right. \\
&+ v_{j_i} \cdot \max \{0, s_{j_i} - d_{j_i}\}) \dots] + \sum_{i=k}^{n-1} a_{j_i j_{i+1}} + a_{j_n, n+1} + \\
&\left. F_{j_k}^k(u, J') + \tau_{j_k}^k \max \{0, t_{j_k}^k - s_{j_k}\} \right\}.
\end{aligned}$$

To ostatnie wyrażenie jest równoważne wyrażeniu (2.41) co kończy dowód.

Należy zauważyć, że problem minimalizacyjny występujący w wyrażeniu (2.42) można rozwiązać stosując algorytm ALPR. Rysunek 2.9 przedstawia graf odpowiadający problemowi

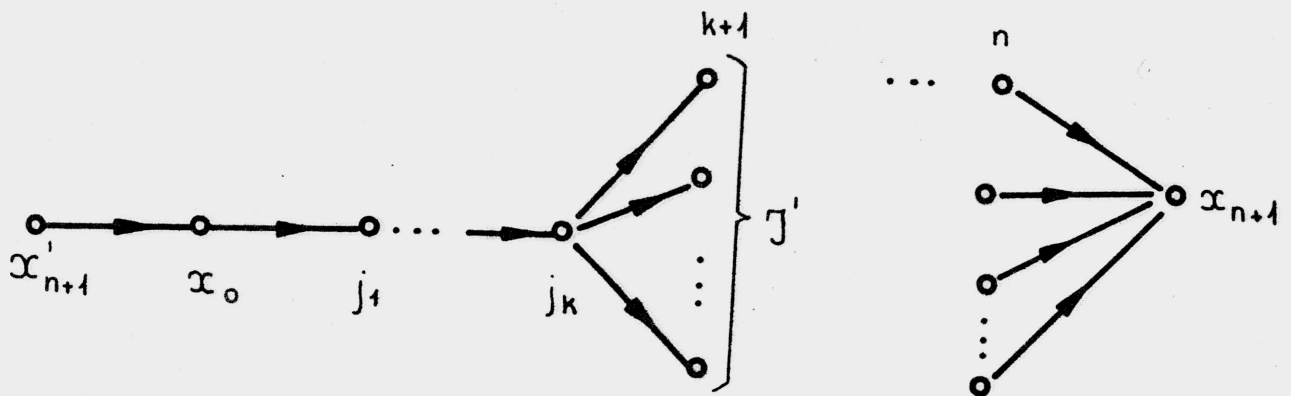
$$\min_{\pi \in \Pi_1(j_k, \dots, j_n)} \min_{\bar{s} \in S(\pi)} \mathcal{F}(\pi, \bar{s}).$$



Rys. 2.9 Ustalanie drogi "od końca"

Natomiast rys. 2.10 przedstawia graf odpowiadający problemowi

$$\min_{\pi \in \Pi_2(j_1, \dots, j_k)} \min_{\bar{s} \in S(\pi)} \mathcal{F}(\pi, \bar{s}).$$



Rys. 2.10 Ustalanie drogi "od początku"

Oznaczmy przez $\hat{\delta} = \sum_{i=1}^k [w_{j_i} \cdot x_{j_i}(s_{j_i}) - v_{j_i} \cdot y(s_{j_i})] + w_{n+1} x_{n+1}(s_0) + w_0 x_0(s_0) + v_0 y_0(s_0) .$

$$\begin{aligned}
& \min_{j_n \in J'} - \{j_{k+1}, \dots, j_{n-1}\} \dots \left[\min_{s_{n+1}} \left[\sum_{i=1}^k (w_{j_i} \cdot \max \{0, \right. \right. \\
& \left. \left. r_{j_i} + \tau_{j_i}^0 - s_{j_i}\} + v_{j_i} \cdot \max \{0, s_{j_i} - d_{j_i}\}) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{j_i j_{i+1}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + a_{n+1,0} + a_{0j_1} + w_{n+1} \cdot \max \{0, r_{n+1} + \tau_0^0 + a_{n+1,0} - s_0\} + \right. \right. \\
& \left. \left. + w_0 \cdot \max \{0, r_0 + \tau_0^0 - s_0\} + v_0 \cdot \max \{0, s_0 - d_0\} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{i=k+1}^n (w_{j_i} \cdot \max \{0, r_{j_i} + \tau_{j_i}^0 - s_{j_i}^i\} + v_{j_i} \cdot \max \{0, s_{j_i}^i - d_{j_i}\}) + \right. \right. \\
& \left. \left. \sum_{i=k+1}^n a_{j_{i-1} j_i} + a_{j_n, n+1} + v_{n+1} \cdot \max \{0, s_{n+1} - d_{n+1}\} \right] \dots \right] \geq
\end{aligned}$$

$$\min_{s_{j_k} \geq t_{j_k}} \left[\min_{j_{k+1} \in J'} \left[\min_{s_{j_{k+1}}^{k+1}} s_{j_k} + a_{j_k j_{k+1}} + \tau_{j_{k+1}}^0 \dots \left[\min_{j_n \in J'} \right. \right. \right.$$

$$\left[\min_{s_{j_n}^n} s_{j_n}^n \geq s_{j_{n-1}}^{n-1} + a_{j_{n-1} j_n} + \tau_{j_n}^0 \quad \left[\min_{s_{n+1}} s_{n+1} \geq s_{j_n}^n + a_{j_n, n+1} \right. \right.$$

$$\left\{ \min_{s_0 \geq a_{n+1,0} + \tau_0^0} \dots \left[\min_{s_{j_{k-1}}} s_{j_{k-1}} \geq s_{j_{k-2}} + a_{j_{k-2} j_{k-1}} + \tau_{j_{k-1}}^0 \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{i=1}^k (w_{j_i} \max \{0, r_{j_i} + \tau_{j_i}^0 - s_{j_i}\} + v_{j_i} \cdot \max \{0, s_{j_i} - d_{j_i}\}) + \right. \\
& \left. + w_{n+1} \cdot \max \{0, r_{n+1} + \tau_0^0 + a_{n+1,0} - s_0\} + w_0 \cdot \max \{0, r_0 + \tau_0^0 - \right. \\
& \left. - s_0\} + v_0 \cdot \max \{0, s_0 - d_0\} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{j_i j_{i+1}} + a_{n+1,0} + a_{j_n, n+1} + \right.
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=k+1}^n (w_{j_i} \cdot \max \{0, r_{j_i} + \tau_{j_i}^0 - s_{j_i}^i\} + v_{j_i} \cdot \max \{0, s_{j_i}^i - d_{j_i}\}) +$$

$$v_{n+1} \cdot \max \{0, s_{n+1} - d_{n+1}\} \} \dots] \geq \min_{s_{j_k} \geq t_{j_k}} \left[\min_{j_{k+1} \in J} \dots \right.$$

$$\dots \min_{s_{n+1} \geq s_{j_n}^n + a_{j_n, n+1}} \{ \mathcal{F}(j_1, \dots, j_k) + \hat{\delta} \cdot \max \{0, \hat{s}_{j_k}^{(k)} -$$

$$- s_{j_k} \} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{j_i j_{i+1}} + a_{n+1,0} + a_{0j_1} + a_{j_n, n+1} + \sum_{i=k+1}^n (w_{j_i} \cdot$$

$$\cdot \max \{0, r_{j_i} + \tau_{j_i}^0 - s_{j_i}^i\} + v_{j_i} \cdot \max \{0, s_{j_i}^i - d_{j_i}\}) + v_{n+1} \cdot \max$$

$$\{0, s_{n+1} - d_{n+1}\} \quad .$$

Co kończy dowód. ■

Problem optymalizacyjny występujący w wyrażeniu (2.43) można rozwiązać stosując algorytm ALB /z modyfikacją uwzględniającą kary za niespełnienie ograniczeń (2.24)/.

Pełne drzewo rozwiązań H^1 składa się z $(e-1)n!$ węzłów [48]. Maksymalna głębokość drzewa /największa liczba łuków tworzących drogę skierowaną w H^1 / jest równa n .

Obliczanie wartości rozwiązania w każdym węźle drzewa H^1 pozwala na połączenie metody podziału i ograniczeń z dowolną metodą /lub metodami/ heurystycznymi. Algorytm heurystyczny, który można zastosować do rozwiązania problemu $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, a tym samym do wyznaczania rozwiązania częściowego uzupełniającego ustalony fragment drogi sekwencyjnej, został przedstawiony w rozdziale 5 pracy.

Należy zwrócić uwagę, że jeśli rozwiązanie początkowe odpowiadające drodze sekwencyjnej β_0 jest rozwiązaniem optymalnym rozważanego problemu oraz wyznaczona wartość dolnego oszacowania jest równa wartości tego rozwiązania, wtedy wygenerowane drzewo H^1 składa się tylko z jednego wierzchołka β_0 .

Algorytm rozwiązywania problemu $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$

można sformułować następująco /sformułowanie uwzględnia pierwszą wersję podziału zbioru rozwiązań opartą o ustalanie trasy pojazdu "od końca"/:

Niech korzeniem drzewa H^1 będzie droga sekwencyjna β_0 oraz niech $\bar{J} = 0$, $k^* = \infty$, gdzie k^* oznacza wartość najlepszego znanego do tej pory rozwiązania.

Niech β_r i $\bar{J}_r = \{j_k, \dots, j_n\}$ będą drogą sekwencyjną i zbiorem punktów odbioru o ustalonej pozycji w drodze w r -tej iteracji algorytmu.

Krok 1. wyznaczyć dolne oszacowanie $LB_1(j_k, \dots, j_n)$. Jeżeli $LB_1(j_k, \dots, j_n) \geq k^*$ to przejść do kroku 5. W przeciwnym przypadku przejść do kroku 2.

Krok 2. Obliczyć wartość rozwiązania $\min_{\bar{s} \in S(\beta_r)} \mathcal{F}(\beta_r, \bar{s}) = \mathcal{F}(\beta_r)$

Jeżeli $\mathcal{F}(\beta_r) < k^*$, to przyjmując $k^* := \mathcal{F}(\beta_r)$. Przejść do kroku 3.

Krok 3. Wyznaczyć zbiór $J'_r = J - \bar{J}_r$. Dla każdego $j \in J'_r$ wyznaczyć wartość $LB_1(j, j_k, \dots, j_n)$. Przejść do kroku 4.

Krok 4. Jeżeli $J'_r = \emptyset$ przejść do kroku 5. W przeciwnym wypadku znaleźć takie $j^* \in J'_r$, że:

$$LB_1(j^*, j_k, \dots, j_n) = \min_{j \in J'_r} LB_1(j, j_k, \dots, j_n).$$

Wygenerować nową drogę sekwencyjną β_p według reguły 2.41/, to znaczy ustalić:

$$\beta_p(k-1) := j^*$$

$$\beta_p(x) := \beta_r(k-1), \text{ gdzie } \beta_r(x) = j^*$$

$$\beta_p(i) := \beta_r(i), \quad i=1, \dots, n, \quad i \neq k-1, \quad i \neq x.$$

Dokonać podstawienia:

$$J'_r := J'_r - \{j^*\}$$

$$\bar{J}_p := \bar{J}_r \cup \{j^*\}$$

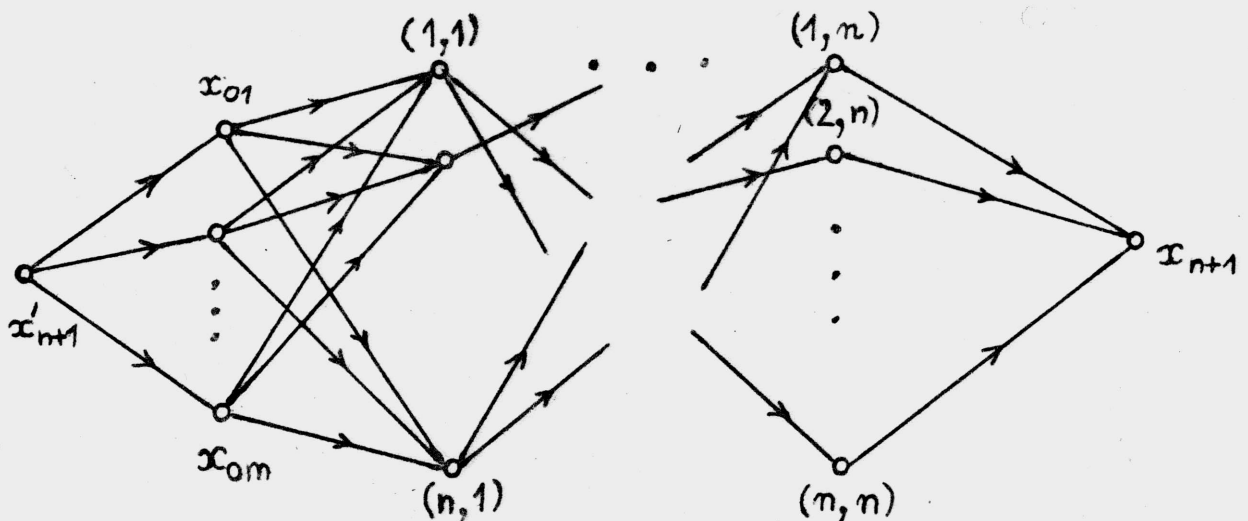
Utworzyć w drzewie H^1 nowy węzeł β_p oraz nowy łuk $\langle \beta_r, \beta_p \rangle$.
przejść do kroku 1.

Krok 5. Cofnąć się do bezpośredniego poprzednika β_r to znaczy β_q , któremu odpowiadają zbiory J'_q i $\bar{J}_q$. Przejść do kroku 4. Jeżeli należy się cofnąć od korzenia drzewa H^1 , to algorytm kończy się, a droga sekwencyjna β^* związana z aktualną wartością k^* jest drogą optymalną, to znaczy $\min_{\pi \in \Pi} F(\pi) = F(\beta^*) = k^*$.

2.6. Problem ustalania trasy pojazdu w przypadku istnienia wielu magazynów

Rozważane zagadnienie, które można zanotować w postaci $1|m,n|PP$, $\gamma^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, jest uogólnieniem problemu $1|1,n|PP$, $\gamma^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$. Zakłada się w nim, że istnieje zbiór magazynów $\{x_{01}, \dots, x_{0m}\}$, których zapasy są praktycznie nieograniczone, tak że nie ma potrzeby ich uwzględniania.

Problemowi $1|m,n|PP$, $\gamma^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ można przyporządkować graf $\hat{G}_m$, który jest uogólnieniem grafu G w zagadnieniu z jednym magazynem /rys. 2.11/. Uogólnienie to polega na zastąpieniu wierzchołka x_0 /odpowiadającego magazynowi/ zbiorem wierzchołków $\{x_{0i} | i=1, \dots, m\}$ oraz na wprowadzeniu łuków $\langle x'_{n+1}, x_{0i} \rangle$ $\langle x_{0i}, (k,1) \rangle$ ($i=1, \dots, m; k=1, \dots, n$) zamiast łuków $\langle x'_{n+1}, x_0 \rangle$ i $\langle x_0, (k,1) \rangle$, ($k=1, \dots, n$).



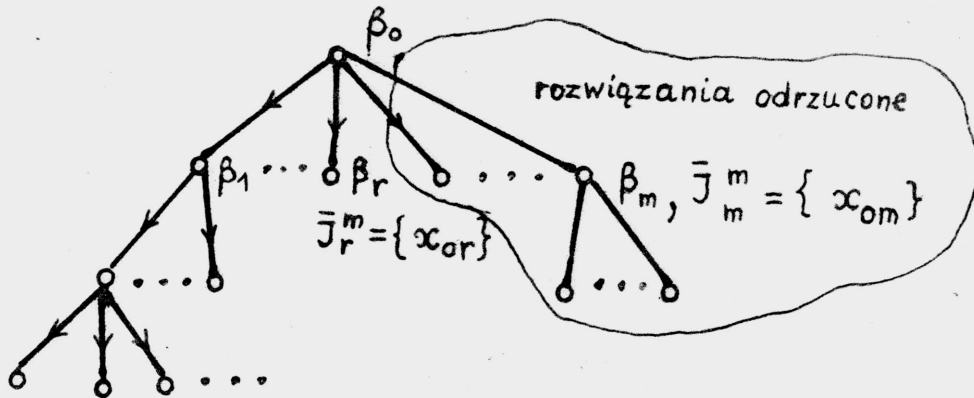
Rys. 2.11 Graf odpowiadający problemowi z wieloma magazynami.

Analogicznie do pojęcia drogi sekwencyjnej w $\hat{G}$ można wprowadzić pojęcie drogi sekwencyjnej w $\hat{G}_m$ i uogólnić algorytm skonstruowany dla

rozwiązywania problemu $1|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$, tak by wyznaczał drogę sekwencyjną w $\hat{G}_m$, która minimalizuje funkcję celu postaci $\sum a + \sum wE + \sum vT$.

W przypadku, gdy przyjmiemy strategię podziału opartą o ustalanie trasy począwszy od magazynu /wersja oparta o $\prod_2^m (\mu, j_1, \dots, j_k)$, gdzie μ jest numerem magazynu, który ustalono w trasie/ podział zbioru rozwiązań w korzeniu drzewa $H_{m,2}^1$ odpowiadać będzie dekompozycji problemu $1|m,n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$ na m problemów $1|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Naturalnie "włączenie" tej dekompozycji w schemat metody podziału i ograniczeń da lepsze wyniki niż podział problemu z m magazynami na m problemów z jednym magazynem i rozwiązywanie każdego z nich z osobna, gdyż stwarza to możliwość odrzucenia /nie rozwiązywania/ niektórych problemów z jednym magazynem. Jeżeli bowiem rozwiązanie wygenerowane w r -tej gałęzi drzewa $H_{m,2}^1$ /odpowiadającej wyborowi magazynu x_{Or} / jest równe wartości dolnego oszacowania w korzeniu drzewa $H_{m,2}^1$, to nie ma potrzeby rozważania problemów $1|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$ dla magazynów $x_{Or+1}, \dots, x_{Om}$. /rys. 2.12/.



Rys. 2.12 Drzewo rozwiązań $H_{m,2}^1$

Drzewo rozwiązań $H_{m,2}^1$ posiada $m(e-1)n! + 1$ wierzchołków.

Natomiast w przypadku, gdy przyjmie się strategię podziału zbioru rozwiązań opartą o ustalanie trasy "od końca" /wersja wykorzystująca $\prod_1 (j_k, \dots, j_n)$, problem wyboru magazynu pojawia się dopiero na samym dole drzewa rozwiązań $H_{m,1}^1$. Łatwo zauważyć, że pełne drzewo $H_{m,1}^1$ posiada $(e-1+m)n!$ wierzchołków.

Ponieważ dla $m \geq 3$ zachodzi $(e-1+m)n! < m(e-1)n! + 1$, tak więc

z punktu widzenia liczby wierzchołków w pełnym drzewie strategię korzystniejsza jest strategia oparta o ustalanie trasy od końca.

3. Zagadnienie wyznaczania tras wielu pojazdów.

W zagadnieniu $p|1,n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ zakłada się istnienie p pojazdów. Każdy pojazd charakteryzuje się określoną pojemnością c_j /gdzie j jest numerem pojazdu/. Natomiast każdy z punktów odbioru o numerach $i=1, \dots, n$ posiada określone zapotrzebowanie na transportowany towar równe q_i ($i=1, \dots, n$). Zakłada się, że trasy pojazdów są typu PP, to znaczy, że każdy pojazd wykonuje co najwyżej jedną turę i powraca do bazy, natomiast każdy punkt odbioru musi być zaopatrywany jednorazowo. Podobnie jak w problemie $1|1,n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ istnieją pożądane terminy obsługi punktów odbioru /oraz magazynu i bazy/ r_i oraz d_i ($i=0,1, \dots, n+1$). Należy ustalić takie trasy pojazdów, aby móc zaspokoić zapotrzebowanie wszystkich punktów odbioru bez przekraczania pojemności pojazdów przy równoczesnej minimalizacji sumarycznych kosztów przejazdu tras ($\sum a$) oraz kosztów kar za przekroczenie terminów obsługi punktów odbioru /oraz magazynu i bazy/. Szczególnym przypadkiem rozważanego problemu jest zagadnienie $1|1,n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, jeżeli pojemność pojazdu c jest nie mniejsza niż suma zapotrzebowań wszystkich punktów odbioru, to znaczy $\sum q_i \leq c$. Problem $p|1,n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ jest znacznie ogólniejszy niż zagadnienia tego rodzaju rozważane do tej pory w literaturze. Dotychczas rozpatrywano zagadnienie ustalania tras wielu pojazdów bez uwzględniania czasów obsługi punktów odbioru i z funkcją celu postaci $\sum a$, lub też przy kryterium minimalizacji liczby użytych pojazdów $\sum D$ [9, 10, 11, 17, 18, 19, 24, 29, 34, 36, 43, 63, 66, 67, 68, 69]. W zasadzie wszystkie z tych prac poza pracami W. Christofidesa [18] bazują na podejściu heurystycznym przy rozwiązywaniu rozważanych problemów.

3.1. Model matematyczny

Niech

$$x_{ik}^1(j) = \begin{cases} 1, & \text{gdy pojazd o numerze } j\text{-tym w } l\text{-tym etapie trasy} \\ & \text{przejeżdża z punktu } x_i \text{ do punktu } x_k, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

będzie binarną zmienną decyzyjną opisującą trasy pojazdów oraz

niech $\tilde{r}_j$ oznacza liczbę punktów odbioru obsługiwanych przez pojazd

o numerze j -tym. Oznaczmy przez $s_i^1(j)$ termin wyjazdu pojazdu j -tego z punktu odbioru x_i w l -tym etapie trasy. Model matematyczny zagadnienia można przedstawić następująco:
minimalizować

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \mathcal{F}_j(\bar{x}, \bar{s}) = & \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} x_{ik}^1(j) \cdot a_{ik} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n [x_{0k}^1(j) \cdot \\ & (a_{n+1,0} + a_{0k}) + \sum_{i=1}^n x_{ik}^{\tilde{r}_j}(j) \cdot a_{k,n+1}] + \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ki}^1(j) \cdot \\ & [w_i^1 E_i^1(j) + v_i^1 T_i^1(j)] + \sum_{j=1}^p [w_0^1 E_0^1(j) + v_0^1 T_0^1(j) + w_{n+1}^1 E_{n+1}^1(j) + \\ & + v_{n+1}^1 T_{n+1}^1(j)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{j=1}^p \left[\sum_{i=1}^n \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} x_{ik}^1(j) + x_{0k}^1(j) \right] = 1, \quad k=1, \dots, n; \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}^1(j) = 1, \quad \text{dla } \tilde{r}_j > 0; \quad l=2, \dots, \tilde{r}_j; \quad j=1, \dots, p; \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik}^1(j) = \sum_{i=1}^n x_{ki}^{l+1}(j), \quad l=1, \dots, \tilde{r}_j-1; \quad (3.4)$$

$$j=1, \dots, p; \quad k=1, \dots, n;$$

$$\sum_{k=1}^n x_{0k}^1(j) = \begin{cases} 1, & \text{dla } \tilde{r}_j > 0, \quad j=1, \dots, p \\ 0, & \text{dla } \tilde{r}_j = 0, \quad j=1, \dots, p \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}^1(j) \cdot q_k + \sum_{k=1}^n x_{0k}^1(j) \cdot q_k \leq c_j; \quad j=1, \dots, p; \quad (3.6)$$

$$s_i^1(j) \geq \sum_{k=1}^n x_{ki}^1(j) [s_k^{l-1}(j) + a_{ki} + \tau_i^0], \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n; \\ l=2, \dots, \tilde{r}_j; \\ j=1, \dots, p; \end{matrix} \quad (3.7)$$

$$s_i^1(j) \geq x_{0i}^1(j) \cdot [s_0(j) + a_{0i} + \tau_i^0], \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n; \\ j=1, \dots, p; \end{matrix} \quad (3.8)$$

$$s_0(j) \geq \sum_{i=1}^n x_{0i}^1(j) \cdot [a_{n+1,0} + \tau_i^0], \quad j=1, \dots, p; \quad (3.9)$$

$$s_{n+1}(j) \geq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ik}^{\tilde{r}_j}(j) [s_k^{\tilde{r}_j}(j) + a_{k,n+1}], \quad j=1, \dots, p; \quad (3.10)$$

gdzie wartości $E_i^1(j)$ i $T_i^1(j)$ są określone analogicznie jak w modelu (2.1) - (2.29), to znaczy:

$$E_i^1(j) = \max \{0, r_i + \tau_i^0 - s_i^1(j)\} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n, \\ j=1, \dots, p, \end{matrix} \quad l=1, \dots, \tilde{r}_j,$$

$$\left. \begin{aligned} T_i^1(j) &= \max \{0, s_i^1(j) - d_i\} \\ E_0(j) &= \max \{0, r_0 + \tau_0^0 - s_0(j)\} \\ T_0(j) &= \max \{0, s_0(j) - d_0\} \end{aligned} \right\} \quad j=1, \dots, p;$$

$$\left. \begin{aligned} E_{n+1}(j) &= \max \{0, r_{n+1} + \tau_0^0 + a_{n+1,0} - s_0(j)\}, \\ T_{n+1}(j) &= \max \{0, s_{n+1}(j) - d_{n+1}\}, \end{aligned} \right\} \quad j=1, \dots, p;$$

natomiast

$$\bar{x} = (x_{ik}^1(j))_{\substack{j=1, \dots, p; \\ i,k,l=1, \dots, n,}} \quad \bar{s} = (s_0(j), s_i^1(j), s_{n+1}(j))_{\substack{j=1 \dots p \\ i,l=1 \dots n}}$$

Ponadto zmienne $x_{ik}^1(j)$ oraz $\tilde{r}_j$ muszą spełniać ograniczenia:

$$x_{ik}^1(j) \in \{0, 1\}, \quad i=0, \dots, n; \quad j=1, \dots, n; \quad l=1, \dots, \tilde{r}_j; \quad (3.11)$$

$$j=1, \dots, p;$$

$$\tilde{r}_j \in \mathbb{C} \cup \{0\}, \quad j=1, \dots, p. \quad (3.12)$$

Zmienne $s_i^1(j)$ zostały wprowadzone do modelu zamiast zmiennych s_i ze względu na łatwość przeprowadzenia dalszych relaksacji zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ przy wyznaczaniu dolnych oszacowań wartości rozwiązania optymalnego problemu.

W rozwiązaniu dopuszczalnym dokładnie jedna ze zmiennych $s_i^1(j)$ ($l=1, \dots, \tilde{r}_j; j=1, \dots, p$) ma interpretację terminu zakończenia obsługi punktu x_i i tylko one są uwzględniane przy obliczaniu wartości funkcji celu. Podobnie zmienne $s_0(j)$, $s_{n+1}(j)$, oznaczające termin wyjazdu z magazynu i termin powrotu do bazy, są uwzględniane w funkcji celu jedynie wtedy, gdy zostanie użyty pojazd o numerze j -tym.

Ograniczenie (3.2) oznacza, że każdy punkt odbioru jest odwiedzany dokładnie raz, ograniczenie (3.3), że każdy użyty pojazd przybywa w kolejnych etapach trasy do dokładnie jednego punktu. Ograniczenie (3.4) mówi, że jeśli pojazd przyjechał do danego punktu w l -tym etapie trasy, to w następnym etapie musi z niego wyjechać. Ograniczenie (3.5) oznacza, że jeśli pojazd zostaje użyty, to przyjeżdża do magazynu w pierwszym etapie trasy; natomiast ograniczenie (3.6) oznacza, że zapotrzebowania punktów odbioru obsługiwanych przez pojazd j -ty nie może być większe niż pojemność pojazdu c_j . Ograniczenia (3.7) - (3.10) opisują zależności między terminami obsługi punktów przy trasach wyznaczonych przez zmienne $x_{ik}^1(j)$.

Ograniczenia (3.2), (3.6), (3.11) odpowiadają podziałowi zbioru punktów odbioru $J = \{1, \dots, n\}$ na p podzbiorów I_j ($j=1, \dots, p$) takich, że:

$$\bigcup_{j=1}^p I_j = J, \quad I_j \cap I_{j'} = \emptyset, \quad j \neq j', \quad j, j' = 1, \dots, p;$$

$$\sum_{i \in I_j} a_i \leq c_j, \quad j=1, \dots, p$$

Nazwijmy powyższy problem zagadnieniem p -podziału.

Jak łatwo zauważyć powyższy problem jest uogólnieniem problemu podziału [48], który można sformułować następująco:

Problem podziału

Dane są liczby $q_1, \dots, q_n$. Czy istnieje taki podzbiór

$$I \subset J = \{1, \dots, n\}, \text{ że } \sum_{i \in I} q_i = \sum_{i \in J-I} q_i ? \blacksquare$$

Problem podziału jest zagadnieniem NP-zupełnym.

Jeżeli przyjmiemy $p=2$ oraz $c_1 = c_2 = \sum_{i=1}^n q_i/2$, to problem p-podziału

zostanie sprowadzony do problemu podziału. Stąd wynika, że problem p-podziału jest zagadnieniem NP-zupełnym.

Tak więc, rozstrzygnięcie problemu czy istnieje rozwiązanie dopuszczalne spełniające ograniczenia (3.2) - (3.12) jest równie trudne jak rozwiązanie problemu optymalizacyjnego (3.1) - (3.12).

Z praktycznego punktu widzenia problem istnienia rozwiązania dopuszczalnego zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ jest często łatwy do rozstrzygnięcia. Wystarczy bowiem znaleźć rozwiązanie dopuszczalne problemu p-podziału stosując jeden ze znanych algorytmów rozwiązania problemu pakowania [65]. Sytuacja komplikuje się, gdy ograniczenia (3.2), (3.6), (3.11) są na tyle "ciasne" /przy czym określenie "ciasne" trudno formalnie zdefiniować/, że rozwiązanie odpowiedniego problemu pakowania otrzymane przy użyciu znanych algorytmów nie jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemie p-podziału. W takim przypadku rozwiązanie zagadnienia p-podziału wymaga zastosowania jednej z metod rozwiązywania problemów kombinacyjnych, a mianowicie metody opartej o schemat podziału i ograniczeń, schemat programowania dynamicznego bądź programowania całkowitoliczbowego lub ich kombinacje.

Przedstawiony dalej algorytm rozwiązywania zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ jest ukierunkowany przede wszystkim w stronę rozwiązania problemu optymalizacyjnego, to znaczy zakłada się, że istnieje wiele rozwiązań dopuszczalnych problemu, których znalezienie nie przedstawia większych trudności. Nie oznacza to naturalnie, że algorytm ten nie będzie funkcjonował poprawnie w przypadku, gdy ograniczenia (3.2), (3.6), (3.11) są "ciasne". Jednak nie będą wtedy aktywnie wykorzystane wszystkie własności zagadnienia, które użyto przy konstrukcji algorytmu.

Każde rozwiązanie dopuszczalne problemu p-podziału prowadzi do dekompozycji zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ na p-problemów typu $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, którego rozwią-

zanie zostało przedstawione w rozdziale 2.

3.2. Wyznaczanie dolnych oszacowań

3.2.1. Dolne oszacowanie problemu wykorzystujące szczególny przypadek problemu załadunku

Pomińmy w problemie (3.1) - (3.12) ograniczenie (3.2) i zamiast niego wprowadźmy ograniczenia

$$\sum_{j=1}^p \tilde{r}_j = n, \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} x_{ik}^1(j) + x_{0k}^1(j) \leq 1, \quad j=1, \dots, p; \quad (3.13)$$

$$k=1, \dots, n.$$

Dla dowolnego rozwiązania dopuszczalnego zagadnienia (3.2) - (3.12) z warunków (3.3), (3.5) wynika spełnienie ograniczenia będącego relaksacją (3.3), (3.5) :

$$\sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}^1(j) + \sum_{k=1}^n x_{0k}^1(j) = \tilde{r}_j, \quad \text{dla } \tilde{r}_j > 0, \quad j=1, \dots, p,$$

a w konsekwencji, spełnienie ograniczenia:

$$\sum_{j=1}^p \left[\sum_{l=1}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}^1(j) + \sum_{k=1}^n x_{0k}^1(j) \right] = \sum_{j=1}^p \tilde{r}_j.$$

Równocześnie z ograniczenia (3.2) wynika, że

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p \left[\sum_{i=1}^n \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} x_{ik}^1(j) + x_{0k}^1(j) \right] = \sum_{j=1}^p \left[\sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n x_{ik}^1(j) + x_{0k}^1(j) \right] = n.$$

Stąd otrzymujemy, że ograniczenie postaci $\sum_{j=1}^p \tilde{r}_j = n$ wraz z ogra-

niczeniami (3.3) - (3.12) jest relaksacja problemu (3.2) - (3.12). Tak więc rozwiązanie optymalne problemu (3.1), (3.3) - (3.14) może służyć do wyznaczenia dolnego oszacowania rozwiązania optymalnego problemu $p|1,n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Jest to jednak nadal problem NP-zupełny.

Dla każdego $j=1, \dots, p$ można wyznaczyć dolne i górne oszacowanie wartości $\tilde{r}_j$ w rozwiązaniu dopuszczalnym problemu (3.1), (3.3) - (3.14)

$$\text{Oznaczmy przez } \hat{Q} = \sum_{i=1}^n q_i \text{ oraz } \hat{C} = \sum_{j=1}^p c_j .$$

Dla każdego pojazdu j ($j=1, \dots, p$) można wyznaczyć minimalne obciążenie $c_j^{\min}$, które wystąpi w rozwiązaniu dopuszczalnym, w sytuacji gdy pojemność pozostałych pojazdów zostanie wykorzystana całkowicie, czyli

$$c_j^{\min} = \hat{Q} - \hat{C} + c_j, \quad j=1, \dots, p .$$

Jeżeli $c_j^{\min} \leq 0$, to nie można wykluczyć, że w rozwiązaniu optymalnym problemu (3.1) - (3.12) /lub (3.1), (3.3) - (3.14) /wartość $\tilde{r}_j$ będzie równa zero /czyli pojazd o numerze j -tym nie zostanie wykorzystany/. Natomiast, jeśli $c_j^{\min} > 0$, to j -ty pojazd musi zostać użyty. Oznaczmy minimalną liczbę punktów odbioru, które musi obsługiwać j -ty pojazd, przez $\tilde{r}_j^{\min}$. Jeżeli przyjmiemy, że punkty odbioru zostały ponumerowane w taki sposób, że $q_i \geq q_{i+1}$, $i=1, \dots, n-1$, to

$$\tilde{r}_j^{\min} = \min \left(z \in \{1, \dots, n\} \mid \sum_{i=1}^z q_i \geq c_j^{\min}, \quad z \leq n \right)$$

Natomiast górne oszacowanie $\tilde{r}_j^{\max}$ wartości $\tilde{r}_j$, wynikające z ograniczenia (3.6), można wyznaczyć w następujący sposób:

$$\tilde{r}_j^{\max} = \max \left(z \in \{1, \dots, n\} \mid \sum_{i=1}^{n-z+1} q_i \leq c_j, \quad z \leq n \right)$$

Zamiast ograniczenia (3.6), (3.2) można wprowadzić ograniczenie

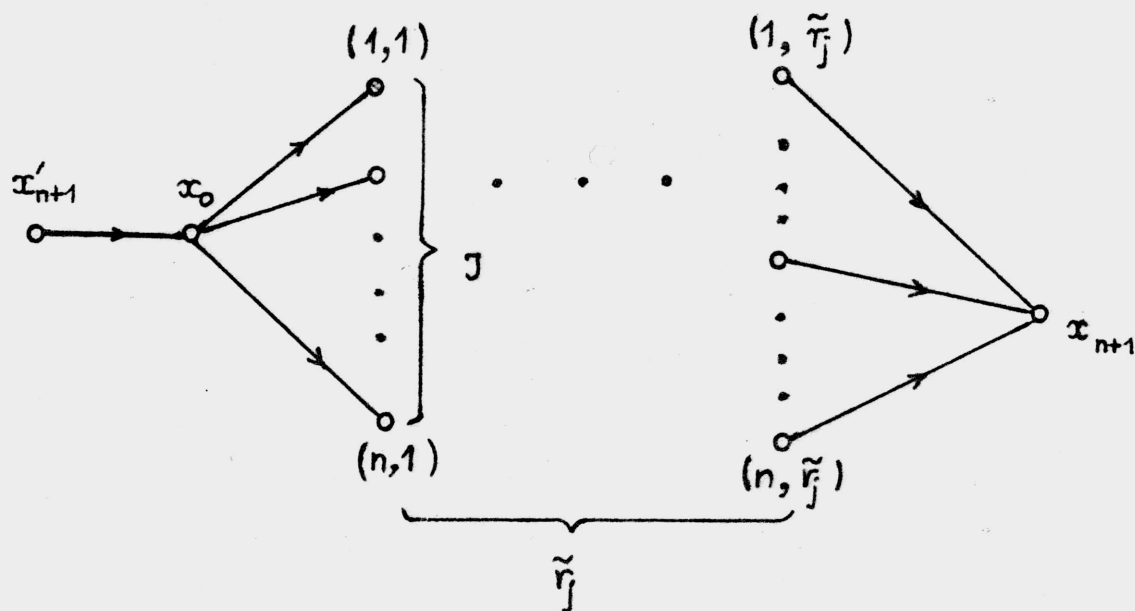
$$\tilde{r}_j^{\min} \leq \tilde{r}_j \leq \tilde{r}_j^{\max}, \quad j=1, \dots, p. \quad (3.15)$$

Problem (3.1), (3.3) - (3.5), (3.7) - (3.15) jest więc relaksacją zagadnienia $p|1,n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Dla każdego ciągu $\tilde{r}_j$, $j=1, \dots, p$ spełniającego ograniczenia (3.13), (3.15) problem optymalizacyjny z funkcją celu postaci (3.1) można zdekomponować na co najwyżej p problemów /dla których $\tilde{r}_j > 0/$ z funkcją celu:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j(\tilde{r}_j) = & \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}^l(j) \cdot a_{ik} + \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n x_{ik}^{\tilde{r}_i}(j) \cdot a_{k,n+1} + \right. \\ & \left. + x_{0k}^1(j) \cdot a_{0,k} \right] + a_{n+1,0} + w_0 \cdot E_0(j) + v_0 \cdot T_0(j) + w_{n+1} \cdot E_{n+1}(j) + \\ & + v_{n+1} \cdot T_{n+1}(j) + \sum_{l=1}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ki}^l(j) \left[w_i \cdot E_i^l(j) + v_i \cdot T_i^l(j) \right]. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Problemowi z funkcją celu postaci (3.16) i ograniczeniami (3.3) - (3.5), (3.7) - (3.11) /dalej oznaczanemu przez $PF(\tilde{r}_j)$ można przyporządkować graf $\hat{G}(\tilde{r}_j)$ przedstawiony na rysunku 3.1.



Rys. 3.1 Graf $G(\tilde{r}_j)$

Jeśli $\tilde{r}_j = n$, to otrzymamy graf $\hat{G}$.

W ten sposób zagadnienia (3.15), (3.3) - (3.5), (3.7) - (3.11) odpowiada problem znalezienia drogi sekwencyjnej w grafie $\hat{G}(\tilde{r}_j)$, która minimalizuje funkcję celu postaci (3.16). Jeżeli $\tilde{r}_j = n$, to otrzymujemy znany problem $\min_{\pi \in \hat{\Pi}} \mathcal{F}(\pi)$ rozważany w rozdziale 2 /zagadnie-

nie $1|1,n|PP$, $\gamma^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$.

Dolnym oszacowaniem wartości rozwiązania optymalnego problemu (3.15), (3.3) - (3.5), (3.7) - (3.11) jest wartość

$$F(\tilde{r}_j) = F_{n+1}^{\tilde{r}_j+1} = \min_{j \in J} F_{j,n+1}^{\tilde{r}_j+1}$$

gdzie $F_{j,n+1}^{\tilde{r}_j+1}$ jest zdefiniowane analogicznie jak $F_{j,n+1}^{n+1}$ w algorytmie ALB.

Analogicznie jak poprzednio wartość $F(\tilde{r}_j)$ można wzmocnić wprowadzając kary za przekroczenie ograniczenia (3.14) i rozwiązując odpowiedni problem dualny przy użyciu metody subgradientowej opisanej w rozdziale 2.

Oznaczmy przez $\beta(z)$ wartość rozwiązania problemu $\max_{u \in U} F(u, \tilde{r}_j)$, gdzie $U = \{u = (u_1, \dots, u_n) \mid u_i \geq 0, i=1, \dots, n\}$, oraz wprowadźmy zmienną binarną:

$$y_{zj} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \tilde{r}_j = z \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Problem (3.1), (3.3) - (3.15) możemy zastąpić zagadnieniem zrelaksowanym /ze względu na postać funkcji celu oraz ograniczenia (3.14)/ postaci:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{z=1}^n y_{zj} \cdot \beta(z) \longrightarrow \min \quad (3.17)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{z=\tilde{r}_j^{\min}}^{\tilde{r}_j^{\max}} y_{zj} = 1, \quad j=1, \dots, p \quad (3.18)$$

$$\sum_{j=1}^p \sum_{z=\tilde{r}_j^{\min}}^{\tilde{r}_j^{\max}} z \cdot y_{zj} = n, \quad (3.19)$$

$$y_{zj} \in \{0,1\} \quad , \quad z = \tilde{r}_j^{\min} , \dots , \tilde{r}_j^{\max} ; \quad j=1, \dots , p . \quad (3.20)$$

Problem ten nadal jest problemem NP-zupełnym, gdyż jest to problem załadunku [31] z dodatkowym ograniczeniem

$$\sum_{z=\tilde{r}_j^{\min}}^{\tilde{r}_j^{\max}} y_{zj} = 1, \quad j=1, \dots , p .$$

Niech $\hat{\beta}(z) = \frac{\beta(z)}{z}$ oraz $Y_{zj} = z \cdot y_{zj} .$

Wtedy problem (3.17) - (3.20) można zastąpić problemem:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{z=\tilde{r}_j^{\min}}^{\tilde{r}_j^{\max}} Y_{zj} \cdot \hat{\beta}(z) \longrightarrow \min \quad (3.21)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{z=\tilde{r}_j^{\min}}^{\tilde{r}_j^{\max}} Y_{zj} = n, \quad (3.22)$$

$$0 \leq Y_{zj} \leq z, \quad z = \tilde{r}_j^{\min}, \dots, \tilde{r}_j^{\max}, \quad j=1, \dots, p, \quad (3.23)$$

w którym ograniczenie $0 \leq Y_{zj} \leq z$ zastąpiło ograniczenie $Y_{zj} \in \{0, z\}$ /równoważne ograniczeniu (3.20)/, a ograniczenie (3.18) zostało pominięte. Problem powyższy jest szczególnym przypadkiem zagadnienia załadunku, dla którego rozwiązania istnieje algorytm efektywny [31], tzw. algorytm "chciwości" /"greedy" algorithm/, który polega na ustalaniu maksymalnych wartości tych zmiennych Y_{zj} , które odpowiadają najmniejszym wartościom $\hat{\beta}(z)$, aż nie zostanie spełnione ograniczenie (3.19).

Wartości $\hat{\beta}(z)$ można interpretować jako średni koszt obsługi punktu odbioru, jeżeli znajdzie się on w trasie obejmującej liczbę z punktów odbioru.

Wartość rozwiązania optymalnego problemu (3.21) - (3.23) jest dolnym oszacowaniem wartości rozwiązania optymalnego problemu $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Wartość ta będzie dalej oznaczana przez $LB_p^I(J)$.

3.2.2. Wyznaczanie dolnego oszacowania problemu 1|1,n|PP, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ przy wykorzystaniu problemu dualnego.

Rozważmy problem (3.1) - (3.12) z dodatkowymi ograniczeniami

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} x_{ik}^1(j) + x_{0k}^1(j) + b_{kj} = 1 \quad (3.24)$$

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n b_{kj} = (p-1)n \quad (3.25)$$

$$b_{kj} \in \{0,1\}, \quad k=1, \dots, n; j=1, \dots, p. \quad (3.26)$$

Łatwo zauważyć, że dla każdego rozwiązania dopuszczalnego problemu (3.1) - (3.12) istnieją takie wartości zmiennych b_{kj} ($k=1, \dots, n$; $j=1, \dots, p$), że spełnione są ograniczenia (3.24) - (3.26).

A mianowicie, jeżeli w rozwiązaniu mamy $\sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n x_{ik}^1(j) + x_{0k}^1(j) = 1$, to należy przyjąć $b_{kj} = 0$.

Oznacza to, że punkt odbioru x_k jest zaopatrywany przez pojazd j -ty. Natomiast jeśli punkt x_k nie jest zaopatrywany przez j -ty pojazd, czyli dla

$$\sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n x_{ik}^1(j) + x_{0k}^1(j) = 0 \quad \text{należy przyjąć } b_{kj} = 1.$$

Stąd po zsumowaniu po j otrzymujemy:

$$\sum_{j=1}^p \left[\sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n x_{ik}^1(j) + x_{0k}^1(j) + b_{kj} \right] = p, \quad k=1, \dots, n.$$

Równocześnie, że spełnienia ograniczenia (3.2) z problemu (3.1) - (3.12) wynika, że musi być:

$$\sum_{j=1}^p b_{kj} + 1 = p, \quad k=1, \dots, n,$$

Skąd, sumując po wszystkich k , otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p b_{kj} + n = n \cdot p,$$

co jest równoważne ograniczeniu (3.25).

Z powyższych rozważań wynika, że wprowadzenie dodatkowych ograniczeń (3.24) - (3.26) nie wpływa na zbiór rozwiązań dopuszczalnych problemu $p|1, n|PP$, $\zeta^0 \geq 0$ $\sum a + \sum wE + \sum vT$. / (3.1) - (3.12) /.

Wprowadźmy kary u_k $k=1, \dots, n$ za przekroczenie ograniczeń (3.2) oraz kary v_{jk} za przekroczenie ograniczeń (3.24) ($j=1, \dots, p; k=1, \dots, n$).

Można wtedy sformułować problem dualny do zagadnienia (3.1) - (3.12), (3.24) - (3.26) w następującej formie:

wyznaczyć wartości u_k ($k=1, \dots, n$), v_{jk} ($k=1, \dots, n; j=1, \dots, p$), które maksymalizują

$$\begin{aligned} \min_{\bar{x}, \bar{s}} \quad & \sum_{j=1}^p \mathcal{F}_j(\bar{x}, \bar{s}) + \sum_{k=1}^n u_k \cdot \left[\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} x_{ik}^1(j) + x_{ok}^1(j) - 1 \right] + \\ & + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n v_{jk} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} x_{ik}^1(j) + x_{ok}^1(j) + b_{kj} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

przy ograniczeniach (3.3) - (3.12), (3.25), (3.26).

Twierdzenie 3.1

Dla dowolnych wartości u_k ($k=1, \dots, n$), $v_{j,k}$ ($j=1, \dots, p; k=1, \dots, n$) rozwiązanie optymalne problemu (3.27), (3.3) - (3.12), (3.25), (3.26) jest dolnym oszacowaniem rozwiązania optymalnego problemu (3.1) - (3.12).

Dowód

Ponieważ w rozwiązaniu optymalnym problemu (3.1) - (3.12) spełnione są ograniczenia (3.2) i (3.24), mamy więc następującą równość:

$$\min_{\bar{x}, \bar{s}} \sum_{j=1}^p \mathcal{F}_j(\bar{x}, \bar{s}) = \sum_{j=1}^p \mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{s}) = \sum_{j=1}^p \mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{s}) + \sum_{k=1}^n u_k \cdot$$

$$\left[\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \tilde{x}_{ik}^1(j) + \tilde{x}_{0k}^1(j) - 1 \right] + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n v_{jk} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \tilde{x}_{ik}^1(j) + \tilde{x}_{0k}^1(j) + \tilde{b}_{kj} - 1 \right].$$

Ponieważ wartości zmiennych $\tilde{x} = (\tilde{x}_{ik}^1(j))_{\substack{j=1, \dots, p \\ i;k;l=1, \dots, n}}$

$\tilde{b} = (\tilde{b}_{kj})_{\substack{j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, n}}$ oraz $\tilde{s} = (\tilde{s}_0(j), \tilde{s}_i^1(j), \tilde{s}_{n+1}^1(j))_{\substack{j=1, \dots, p \\ i,l=1, \dots, n}}$

są pewnym rozwiązaniem problemu (3.27), (3.3) - (3.12), (3.25), (3.26), a wyrażenie po prawej stronie równości ma postać funkcji celu w (3.27), tak więc rozwiązanie optymalne problemu (3.27), (3.3) - (3.12), (3.25), (3.26) jest dolnym oszacowaniem wartości

$$\sum_{j=1}^p F_j(\bar{x}, \bar{s}), \text{ co kończy dowód twierdzenia. } \blacksquare$$

Funkcję celu (3.27) można zapisać w postaci:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ik}^1(j) [a_{ik} + u_k + v_{jk}] + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n$$

$$x_{0k}^1(j) [a_{n+1,0} + a_{0k} + v_{jk} + u_k] + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n v_{jk} b_{jk} +$$

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ik}^{\tilde{r}_j}(j) \cdot a_{k,n+1} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^{\tilde{r}_j} [w_i \cdot E_i^1(j) +$$

$$+ v_i \cdot T_i^1(j)] + \sum_{j=1}^p [w_0 \cdot E_0(j) + v_0 \cdot T_0(j) + w_{n+1} \cdot E_{n+1}(j) +$$

$$+ v_{n+1} \cdot T_{n+1}(j)] - \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n v_{jk}.$$

Jeżeli ograniczenie (3.6) zostanie zastąpione przez ograniczenie (3.15), czyli przez $\tilde{r}_j^{\min} \leq \tilde{r}_j \leq \tilde{r}_j^{\max}$, $j=1, \dots, p$, to zagadnienie z funkcją celu postaci (3.27) przy ograniczeniach (3.3) - (3.12), (3.15) można zdekomponować na p problemów optymalizacyjnych PR_j ($j=1, \dots, p$) oraz problem B_v następującej postaci:

Problem PR_j :

$$PR_j(u, v) = \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}^l(j) [a_{ik} + u_k + v_{jk}] + \sum_{k=1}^n [x_{0k}^1(j) \cdot (a_{n+1,0} + a_{0k}) + \sum_{i=1}^n x_{ik}^{\tilde{r}_j}(j) \cdot a_{k,n+1}] + \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n [w_i \cdot E_i^l(j) + v_i \cdot T_i^l(j)] + w_0 \cdot E_0(j) + v_0 \cdot T_0(j) + w_{n+1} \cdot E_{n+1}(j) + v_{n+1} \cdot T_{n+1}(j) \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{k=1}^n x_{0k}^1(j) = \begin{cases} 1, & \text{dla } \tilde{r}_j > 0, \\ 0, & \text{dla } \tilde{r}_j = 0. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}^1(j) = 1, \text{ dla } \tilde{r}_j > 0, l=2, \dots, \tilde{r}_j.$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik}^1(j) = \sum_{i=1}^n x_{ki}^{l+1}(j), \quad l=1, \dots, \tilde{r}_j-1; k=1, \dots, n,$$

$$\tilde{r}_j^{\min} \leq \tilde{r}_j \leq \tilde{r}_j^{\max},$$

$$\tilde{r}_j \in c_4 \cup \{0\},$$

$$x_{ik}^l(j) \in \{0, 1\}, \quad i=0, 1, \dots, n; k=1, \dots, n; l=1, \dots, \tilde{r}_j.$$

oraz ograniczeniach (3.7) - (3.10); ■

Problem B_v :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n b_{jk} \cdot v_{jk} \longrightarrow \min \quad (3.28)$$

przy ograniczeniach (3.25), (3.26). ■

Optymalną wartość funkcji celu $PR_j(u, v)$ można wyznaczyć rozwiązując /dla każdego ustalonego $\tilde{r}_j$ spełniającego ograniczenie $\tilde{r}_j^{\min} \leq \tilde{r}_j \leq \tilde{r}_j^{\max}$ / problem $PF(\tilde{r}_j)$ z uwzględnieniem kar u, v i wybierając $\min_{\tilde{r}_j^{\min} \leq \tilde{r}_j \leq \tilde{r}_j^{\max}} \mathcal{F}^*(u, v, \tilde{r}_j)$, gdzie $\mathcal{F}^*(u, v, \tilde{r}_j)$

jest wartością rozwiązania optymalnego odpowiedniego problemu $PF(\tilde{r}_j)$. Wartość $\mathcal{F}^*(u, v, \tilde{r}_j)$ można oszacować od dołu wyznaczając /jak poprzednio w rozdziale 3.2.1/ wartość $F_{n+1}^{\tilde{r}_j+1} = F(u, v, \tilde{r}_j)$.

Natomiast rozwiązanie optymalne B_v^* problemu B_v można otrzymać przyjmując:

$$b_{\alpha_i \beta_i} = 1 \quad \text{dla } i=1, \dots, (n-1) \cdot p ;$$

$$b_{\alpha_i \beta_i} = 0 \quad \text{dla } i=(n-1) \cdot p + 1, \dots, np;$$

przy czym pary wskaźników α_i, β_i są uporządkowane w taki sposób, że:

$$v_{\alpha_i, \beta_i} \leq v_{\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}} \quad (i=1, \dots, np-1)$$

W ten sposób dla każdego u_k ($k=1, \dots, n$) i v_{jk} ($j=1, \dots, p, k=1, \dots, n$) otrzymujemy dolne oszacowanie wartości rozwiązania optymalnego problemu (3.27), (3.3) - (3.12), (3.25), (3.26) w postaci:

$$Z(u, v) = \sum_{j=1}^p \min_{\tilde{r}_j^{\min} \leq \tilde{r}_j \leq \tilde{r}_j^{\max}} \mathcal{F}^*(u, v, \tilde{r}_j) + B_v^* - \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{j=1}^p v_{jk}$$

Ponieważ zależy nam na otrzymaniu jak największej wartości dolnego oszacowania rozwiązania optymalnego problemu $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, należy wybrać takie wartości kar $\tilde{u}_k$ ($k=1, \dots, n$), $\tilde{v}_{jk}$ ($j=1, \dots, p ; k=1, \dots, n$), by maksymalizować wartość $Z(u, v)$.

Należy więc rozwiązać problem

$$\max_{u, v} Z(u, v) .$$

Jak poprzednio do otrzymania rozwiązania tego zagadnienia zostanie zastosowana procedura subgradientowa opisana w rozdziale 2.

Niech u^i , v^i oznaczają wektory kar u , v wyznaczone w i -tej iteracji procedury subgradientowej. Jako wektory u^0 , v^0 przyjmuje się wektory zerowe.

Nowe wartości u^{i+1} , v^{i+1} wyznaczane są w następujący sposób:

$$v_{jk}^{i+1} = v_{jk}^i + \lambda^i \cdot \frac{(UB - Z(u^i, v^i))}{\xi_j} \cdot \left[\sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{s=1}^n x_{sk}^1(j) + x_{0k}^1(j) + b_{kj}^{-1} \right]; k=1, \dots, n; j=1, \dots, p, \quad \xi_j > 0.$$

gdzie UB oznacza dowolne rozwiązanie dopuszczalne problemu $p|1, n|PP$, $v^0 \geq 0$, $\sum a + \sum wE + \sum vT$, natomiast wartość ξ_j jest równa:

$$\xi_j = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{s=1}^n x_{sk}^1(j) + x_{0k}^1(j) + b_{kj}^{-1} \right)^2} .$$

Jeżeli $\xi_j = 0$, to wartości kar v_{jk} nie ulegają zmianie, oznacza to bowiem że w trasie przydzielonej j -temu pojazdowi, każdy przydzielony punkt odbioru występuje dokładnie raz /spełnione jest ograniczenie (3.14)/.

Wartości kar u_k^{i+1} ($k=1, \dots, n$) wyznaczane są według analogicznego wzoru, czyli:

$$u_k^{i+1} = u_k^i + \lambda^i \cdot \frac{(UB - Z(u^i, v^i))}{\psi} \left[\sum_{j=1}^p \left(\sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{s=1}^n x_{sk}^1(j) + x_{0k}^1(j) \right) - 1 \right],$$

$$k=1, \dots, n, \quad \psi > 0$$

gdzie

$$v = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^p \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{s=1}^n x_{sk}^1(j) + x_{0k}^1(j) - 1 \right]^2}$$

Jeżeli $v = 0$ /oraz $\xi_j = 0 \quad j=1, \dots, p$ /, to otrzymane zostało rozwiązanie optymalne problemu $\max_{u,v} Z(u, v)$.

Rozwiązanie to spełnia ograniczenie (3.14) oraz (3.2), nie musi być jednak rozwiązaniem optymalnym problemu $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, gdyż przy wyznaczaniu wartości $Z(u, v)$ zamiast wartości optymalnej $F^*(u, v, \tilde{r}_j)$ użyto dolnego oszacowania tej wartości w postaci $F(u, v, \tilde{r}_j)$.

Analiza sposobu wyznaczania kar u_k^i ($k=1, \dots, n$) pokazuje przyczyny wprowadzania do modelu zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ ograniczeń (3.14). Łatwo zauważyć, że wprowadzenie kar tylko za przekroczenie ograniczeń (3.2) powoduje, że w przypadku, gdy $c_j = c$ ($j=1, \dots, p$), wszystkie problemy PR_j są identyczne, niezależne od wartości kar u_k ($k=1, \dots, n$). W konsekwencji wartości $x_{ik}^1(j)$ odpowiadające wartości $\min_{\tilde{r}_j^{\min} \leq \tilde{r}_j \leq \tilde{r}_j^{\max}} F_{n+1}^{j+1}$ będą takie same dla każdego

$j=1, \dots, p$ /czyli wszystkim pojazdom zostaną przyporządkowane te same trasy/ i ograniczenie (3.2) nigdy nie będzie spełnione.

Uwzględnienie ograniczeń (3.14) i związanych z nimi kar v_{jk} powoduje, że nawet w sytuacji, gdy pojemności wszystkich pojazdów są takie same, w każdym z problemów PR_j ($j=1, \dots, p$) występują inne wartości parametrów /w konsekwencji następuje rozdział punktów odbioru między poszczególne pojazdy/.

Istnieje także inna możliwość uniknięcia identyczności problemów PR_j ($j=1, \dots, p$). A mianowicie, zamiast rozważać p problemów PR_j , należałoby w każdym grafie $\hat{G}(\tilde{r}_j)$ ($\tilde{r}_j^{\min} \leq \tilde{r}_j \leq \tilde{r}_j^{\max}$) wyznaczać p -najkrótszych /w sensie wartości

$$F_0^0 + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_j} \tau_{\pi(i)\pi(i+1)} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_j} u_{\pi(i)} + v_j \pi(i) \quad / \text{ dróg [46].}$$

Efektywne algorytmy istnieją jednak tylko dla przypadku wyznaczania p -najkrótszych dróg różnych, lecz niekoniecznie rozłącznych, stąd wyznaczone drogi najczęściej różniłyby się między sobą jednym lub dwoma punktami odbioru.

Jak wynika z powyższych rozważań nie można stwierdzić w sposób arbitralny, że jedno z proponowanych podejść jest lepsze od drugiego. Wydaje się, że większe nadzieje należy wiązać z podejściem wykorzystującym kary v_{jk} za przekroczenie ograniczeń (3.14), które jest prostsze do realizacji na maszynie cyfrowej.

Wartość rozwiązania problemu $\max_{u,v} Z(u,v)$, które jest dolnym oszacowaniem wartości rozwiązania optymalnego problemu $p|1,n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, będzie dalej oznaczana przez $LB_p^{II}(J)$.

Istnieje możliwość wzmocnienia oszacowań $LB_p^I(J)$ i $LB_p^{II}(J)$. Można tego dokonać modyfikując graf $\hat{G}(r_j)$, który odgrywa zasadnicze znaczenie przy konstrukcji tych oszacowań.

W tym celu, korzystając z ograniczenia (3.6), należy usunąć z grafu $\hat{G}(r_j)$ łuki $\langle (x_i, l), (x_k, l+1) \rangle$, które spełniają warunek

$$\sum_{i'=1}^{l-1} q_{i'} + q_i + q_k > c_j \quad (3.29)$$

/gdzie $q_{i'} \leq q_{i'+1}$, $i=1, \dots, n-1$ /.

Jeśli bowiem warunek (3.29) jest spełniony, to dla dowolnej drogi sekwencyjnej π w $\hat{G}(r_j)$, w której $\pi(1) = i$ oraz $\pi(l+1) = k$, nie może być spełnione ograniczenie (3.6).

3.2.3. Zagadnienie minimalnego drzewa rozpinającego (SST)

Wprowadźmy nową zmienną binarną

$$x_{ik}(j) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli punkt } x_i \text{ występuje bezpośrednio przed} \\ & \text{punktem } x_k \text{ w trasie } j\text{-tego pojazdu,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Model matematyczny zagadnienia $p|1,n|PP, \tau^0 > 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ można wtedy sformułować następująco:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}(j) \cdot a_{ik} + \sum_{j=1}^p \left[\sum_{k=1}^n x_{0k}(j) \cdot (a_{n+1,0} + a_{0k}) \right. \\ & \left. + x_{k,n+1}(j) \cdot a_{k,n+1} \right] + \sum_{j=1}^p \left\{ \sum_{i=1}^n [(w_i E_i(j) + v_i T_i(j)) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} x_{ik}(j)] + \right. \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$+ \sum_{k=1}^n x_{0k}(j) \cdot [w_0 E_0(j) + v_0 T_0(j) + w_{n+1} E_{n+1}(j) + v_{n+1} T_{n+1}(j)] \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^n x_{ik}(j) = 1, \quad k=1, \dots, n; \quad (3.31)$$

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{n+1} x_{ik}(j) = 1, \quad i=1, \dots, n; \quad (3.32)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ik}(j) = \sum_{i=1}^{n+1} x_{ki}(j), \quad k=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, p; \quad (3.33)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{0i}(j) = \sum_{i=1}^n x_{i,n+1}(j), \quad j=1, \dots, p; \quad (3.34)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{0i}(j) \leq 1, \quad j=1, \dots, p; \quad (3.35)$$

$$\sum_{k=1}^n x_{0k}(j) \geq \sum_{k=1}^{n+1} x_{ik}(j), \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, p; \quad (3.36)$$

$$s_k(j) \geq \sum_{i=0}^{n+1} x_{ik}(j) \cdot (s_i(j) + a_{ik} + \tau_k^0), \quad k=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, p; \quad (3.37)$$

$$s_0(j) \geq \sum_{i=1}^n x_{0i}(j) \cdot (a_{n+1,0} + \tau_0^0), \quad j=1, \dots, p; \quad (3.38)$$

$$s_{n+1}(j) \geq \sum_{k=1}^n x_{k,n+1}(j) \cdot (a_{k,n+1} + s_k(j)), \quad j=1, \dots, p; \quad (3.39)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}(j) \cdot q_i \leq c_j, \quad j=1, \dots, p, \quad (3.40)$$

$$\sum_{(i,k) \in \mathcal{X}_t(j)} x_{ik}(j) + x_{ki}(j) \geq 1, \quad \forall \mathcal{X}_t(j) = v_t(j) \times \bar{v}_t(j), \quad (3.41)$$

$$v_t(j) \subset I_j = \left\{ i \in J \mid \sum_{k=1}^{n+1} x_{ik}(j) \geq 1 \quad \text{lub} \quad \sum_{k=0}^n x_{ki}(j) \geq 1 \right\},$$

$$\bar{v}_t(j) = I_j - v_t(j), \quad j=1, \dots, p$$

$$x_{ik}(j) \in \{0, 1\}, \quad i=0, \dots, n; \quad k=1, \dots, n+1; \quad j=1, \dots, p; \quad (3.42)$$

gdzie:

$$E_i(j) = \max \{0, r_j + \tau_j^0 - s_i(j)\}, \quad i=0, \dots, n; \quad j=1, \dots, p,$$

$$T_i(j) = \max \{0, s_i(j) - d_i\}, \quad i=0, \dots, n+1; \quad j=1, \dots, p,$$

$$E_{n+1}(j) = \max \{0, r_{n+1} + \tau_0^0 + a_{n+1,0} - s_0(j)\}, \quad j=1, \dots, p.$$

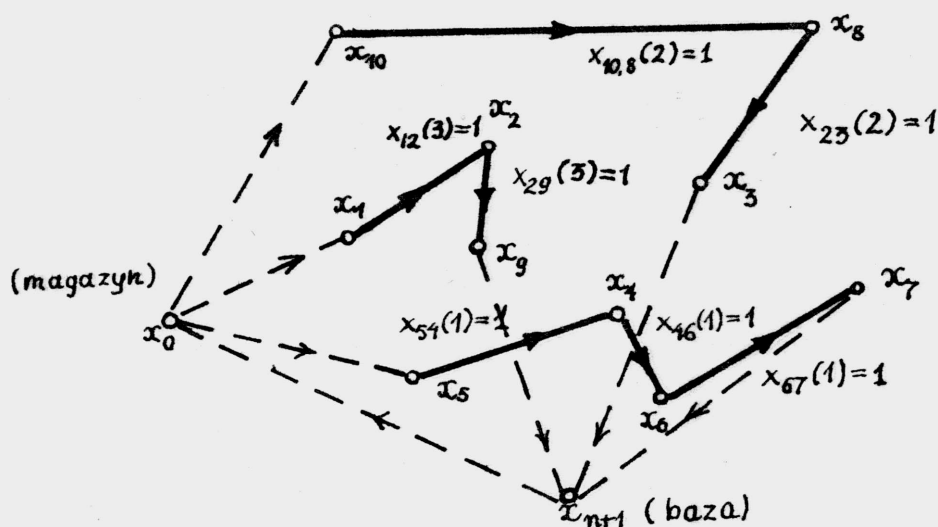
Ograniczenie (3.31) oznacza, że do każdego punktu odbioru przyjeżdża dokładnie jeden raz jeden pojazd, a analogicznie, ograniczenie (3.32) oznacza, że z każdego punktu odbioru wyjeżdża dokładnie jeden raz jeden pojazd. Ograniczenie (3.33) odpowiada temu, że jeśli dany pojazd przyjeżdża do pewnego punktu odbioru $\mathcal{X}_k$, to ten sam pojazd musi z punktu $\mathcal{X}_k$ wyjeżdżać. Ograniczenie (3.34) oznacza, że każdy pojazd wyjeżdża z magazynu /i bazy/ tyle samo razy, ile razy przyjeżdża z powrotem do bazy. Ograniczenie (3.35) oznacza, że każdy pojazd wyjeżdża z magazynu co najwyżej raz /lub nie zostaje użytyw ogóle/. Ograniczenie (3.36) oznacza, że jeśli dany pojazd odwiedza pewien punkt odbioru, to musi on także wyjeżdżać z magazynu. Ograniczenia (3.37) - (3.39) opisują warunki, które muszą spełniać terminy wyjazdu pojazdów z punktów odbioru. Ograniczenie (3.40) oznacza, że suma zapotrzebowań punktów odbioru, do których przyjeżdża pojazd o numerze j-tym, nie może być większa niż pojemność tego pojazdu.

Natomiast ograniczenie (3.41) oznacza, że trasa każdego pojazdu jest spójna. Ograniczenie to powoduje eliminację z trasy pojazdu podkon-turów postaci $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_z}, x_{i_1})$, $i_1, \dots, i_z \in \{1, \dots, n\}$.

Ograniczenie (3.41) jest uogólnieniem ograniczenia występującego w modelu matematycznym zagadnienia komiwojażera opartym na problemie drzewa rozpinającego [16].

Ograniczenia (3.41) są takiej postaci, że zmienne $x_{ik}(j)$ tworzą rozpinający las p drzew w grafie pełnym bez pętli zbudowanym na zbiorze wierzchołków x_i ($i=1, \dots, n$). Jeżeli dla pewnego $j=1, \dots, p$, mamy $I_j = \emptyset$, to j -te drzewo, spośród p drzew, jest zbiorem pustym.

Przy spełnieniu pozostałych ograniczeń, każde z drzew ma postać drogi, która odpowiada sekwencji punktów odbioru w trasie pewnego pojazdu. Na rysunku 3.2 zostały przedstawione trasy trzech pojazdów. Pogrubionymi liniami zaznaczono las 3 drzew rozpinających, dla którego spełnione są ograniczenia (3.31) - (3.42).



Rys. 3.2

Zagadnienie $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ można zrelaksować usuwając z modelu matematycznego (3.30) - (3.42) ograniczenia (3.31), (3.32), (3.33), (3.36) - (3.40) oraz zastępując w funkcji celu człon $\sum wE + \sum vT$ przez wyrażenie:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=0}^n \bar{c}_{ik} \cdot x_{ik}(j),$$

gdzie wartości $\bar{c}_{ik}$ są określone przez wyrażenie (2.8).

Zamiast usuniętych ograniczeń można wprowadzić osłabione ograniczenia w postaci:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n x_{0i}(j) \geq p_{\min}, \quad (3.43)$$

gdzie

$$p_{\min} = \min \left\{ 1 \leq \hat{i} \leq p \mid \sum_{j=1}^{\hat{i}} c_{\alpha_j} \geq \sum_{i=1}^n q_i, c_{\alpha_j} \geq c_{\alpha_{j+1}}, \right. \\ \left. j=1, \dots, p-1 \right\}$$

oraz

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}(j) = n - \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n x_{0i}(j) \quad (3.44)$$

Wartość $p_{\min}$ w (3.43) jest dolnym oszacowaniem liczby pojazdów, które muszą być użyte w rozwiązaniu dopuszczalnym zagadnienia $p|1, n|PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Tak zdefiniowany problem będzie dalej nazywany problemem PTR. Założmy, że w rozwiązaniu zagadnienia PTR spełniony jest warunek:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n x_{0i}(j) = p^*, \quad p \geq p^* \geq p_{\min}, \quad (3.45)$$

Dla każdego ustalonego p^* zagadnienie zrelaksowane ((3.34), (3.35), (3.41), (3.42), (3.44), (3.45)) można zdekomponować na trzy niezależne problemy: PT, PP1 i PP2.

Zagadnienie PT

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}(j) \cdot (a_{ik} + \bar{c}_{ik}) \longrightarrow \min$$

przy ograniczeniach (3.35), (3.41), (3.42), (3.44) oraz (3.45) .■

W zagadnieniu PT ograniczenie (3.44) przyjmie postać

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}(j) = n - p^*$$

Zagadnienie PP1

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n x_{0k}(j) \cdot (a_{n+1,0} + a_{0k} + \bar{c}_{n+1,0} + \bar{c}_{0k}) \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach (3.42), (3.45), (3.35). ■

Zagadnienie PP2

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n x_{k,n+1}(j) \cdot (a_{k,n+1} + \bar{c}_{k,n+1}) \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach (3.34), (3.42), (3.45), (3.35). ■

Rozwiązanie zagadnień PP1 i PP2 nie przedstawia żadnych trudności. W tym celu wystarczy znaleźć p^* najmniejszych wartości $a_{n+1,0} + a_{0k} + \bar{c}_{0k}$ /oraz odpowiednio $a_{k,n+1} + \bar{c}_{k,n+1}$ / i dla wybranych w ten sposób wskaźników $k_1, \dots, k_p$ przyjąć $x_{0k_i}(i) = 1, i=1, \dots, p^*$ /lub odpowiednio $x_{k_i,n+1}(i) = 1, i=1, \dots, p^*$ /. Pozostałym zmiennym $x_{0k}(j)$ ($x_{k,n+1}(j)$) należy nadać wartość równą zeru.

Natomiast zagadnienie PT jest równoważne zagadnieniu wyznaczenia rozpinającego lasu p^* drzew o minimalnym koszcie w grafie pełnym, bez pętli, zbudowanym na zbiorze wierzchołków x_i ($i=1, \dots, n$). Rozwiązanie tego zagadnienia polega na wyznaczeniu minimalnego drzewa rozpinającego, a następnie na usunięciu z tego drzewa $p^* - 1$ łuków o największych obciążeniach $a_{ik} + \bar{c}_{ik}$.

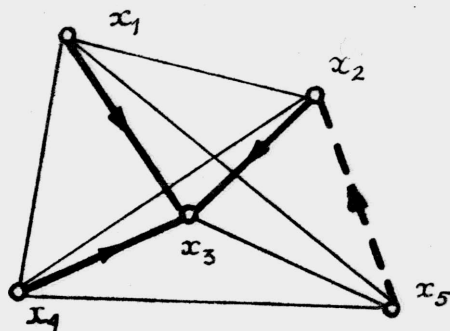
Wynika to z następującego rozumowania.

Założmy, że $p^* = 2$. Usunięcie z minimalnego drzewa rozpinającego łuku o największym koszcie /oznaczymy go przez Δ^* / spowoduje, że otrzymamy dwa drzewa T_R^1 i T_R^2 o kosztach odpowiednio $\bar{K}_1$ i $\bar{K}_2$. Koszt minimalnego drzewa rozpinającego jest więc równy $\bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \Delta^*$. Przypuśćmy, że istnieje las rozpinający dwu drzew o koszcie mniejszym niż $\bar{K}_1 + \bar{K}_2$. Oznaczymy drzewa odpowiadające temu lasowi przez T_R^3 i T_R^4 ,

a ich koszt przez odpowiednio $\bar{K}_3$ i $\bar{K}_4$. W takiej sytuacji $\bar{K}_3 + \bar{K}_4 < \bar{K}_1 + \bar{K}_2$.

Niech $\bar{\Delta}$ oznacza koszt najtańszego łuku łączącego drzewo T_R^3 z drzewem T_R^4 /to znaczy łuku o węźle początkowym należącym do jednego drzewa i o węźle końcowym należącym do drugiego drzewa/. Dołączenie tego łuku do zbioru łuków tworzących drzewa T_R^3 i T_R^4 powoduje powstanie drzewa rozpinającego o koszcie $\bar{K}_3 + \bar{K}_4 + \bar{\Delta}$. Ponieważ $\bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \Delta^*$ jest kosztem minimalnego drzewa rozpinającego, stąd otrzymujemy: $\bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \Delta^* \leq \bar{K}_3 + \bar{K}_4 + \bar{\Delta}$. Z warunku spójności drzewa wynika, że istnieje w minimalnym drzewie rozpinającym co najmniej jeden łuk łączący zbiór wierzchołków wchodzących w skład drzewa T_R^3 ze zbiorem wierzchołków wchodzących w skład drzewa T_R^4 . Koszt tego łuku jest więc nie mniejszy niż $\bar{\Delta}$. Stąd otrzymujemy, że $\bar{\Delta} \leq \Delta^*$, a w konsekwencji $\bar{K}_3 + \bar{K}_4 \geq \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \Delta^* - \bar{\Delta} \geq \bar{K}_1 + \bar{K}_2$, co jest sprzeczne z przypuszczeniem, że istnieje las rozpinający dwu drzew o koszcie mniejszym niż $\bar{K}_1 + \bar{K}_2$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla $p^* > 2$.

Rysunek 3.3 przedstawia rozpinający las 2 drzew w pewnym grafie zbudowanym na zbiorze wierzchołków $\{x_1, x_2, \dots, x_5\}$. Grubymi liniami zostało zaznaczone rozwiązanie problemu PT. Linia przerywaną oznaczono odrzucony łuk o największym obciążeniu.



Rys. 3.3 Rozpinający las 2 drzew

Oznaczmy wartość rozwiązania problemu (3.34), (3.35), (3.41), (3.42), (3.44), (3.45) ze zmodyfikowaną funkcją celu /przy ustalonej wartości p^* / przez $TR(p^*)$. Rozwiązaniem optymalnym problemu PTR jest wartość $TR(p^{**})$, dla której zachodzi

$$TR(p^{**}) = \min_{p_{\min} \leq p \leq p^*} TR(p^*) .$$

Zastosowanie zagadnienia minimalnego drzewa rozpinającego (SST) do wyznaczenia dolnego oszacowania problemu $p|1, n|PP, \gamma^0 \geq 0| \sum a + \sum wE + \sum vT$ wymaga silnej relaksacji problemu.

Zaletą tego podejścia jest natomiast mniejsza złożoność obliczeniowa zagadnienia SST /rzędu $O(n^2)$ /, w stosunku do złożoności obliczeniowej metod wyznaczania dolnego oszacowania problemu przedstawionych w rozdziałach 3.2.1, i 3.2.2. /rzędu $O(n^3)$ /.

Podobnie jak przy poprzednich relaksacjach zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ także w przypadku zagadnienia PTR można pewne ograniczenia usunięte z podstawowego problemu uwzględnić poprzez wprowadzenie do funkcji celu zagadnienia PTR kar za przekroczenie tych ograniczeń. Ograniczeniami takimi są warunki (3.31), (3.32), których włączenie do funkcji celu zagadnienia PTR nie zmienia charakteru tego problemu.

W zagadnieniu PTR istnieje niewielka możliwość uwzględnienia kar za przekroczenie terminów obsługi punktów odbioru /tylko w postaci kosztów $\bar{c}_{ik}$ / oraz ograniczeń związanych z pojemnością pojazdów. Znacznie lepsze są pod tym względem dolne oszacowania $LB_p^I(j)$ i $LB_p^{II}(J)$. Z kolei problem PTR w większym stopniu uwzględnia koszty związane z sumaryczną długością tras pojazdów ($\sum a$). Dolne oszacowanie otrzymane w wyniku rozwiązania problemu PTR będzie oznaczane $LB_p^{III}(J)$.

3.3. Algorytm rozwiązywania zagadnienia

Algorytm rozwiązywania zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ oparty został o metodę podziału i ograniczeń ze strategią podziału z kolejnego węzła.

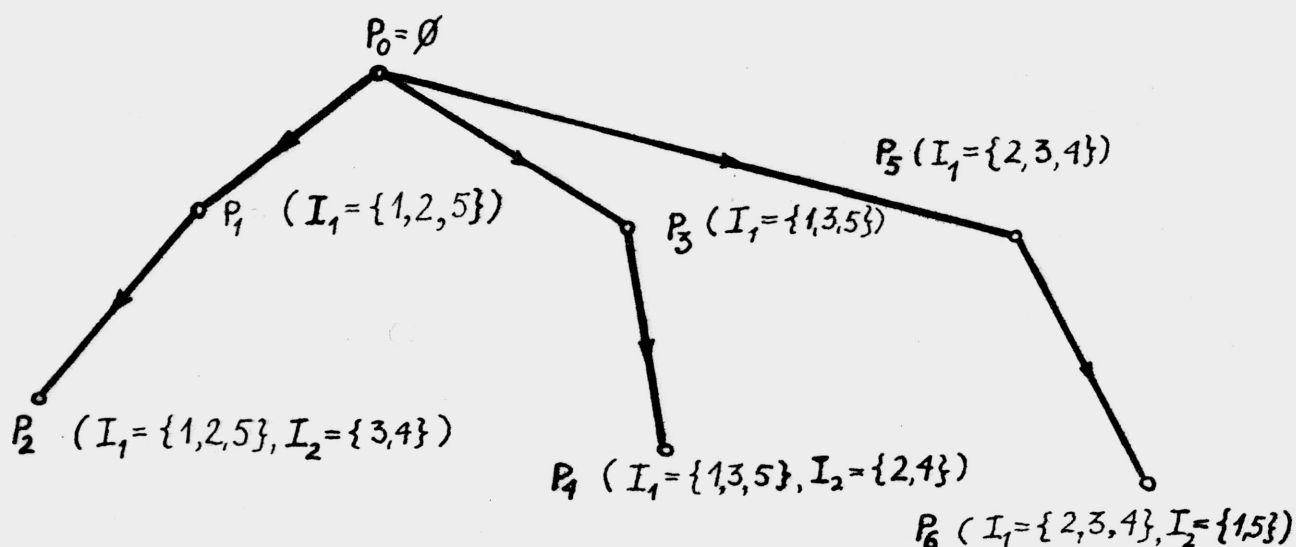
Jak wiadomo, jeżeli znany jest zbiór punktów odbioru I_j przydzielonych do trasy j -tego pojazdu ($j=1, \dots, p$), to problem wielopojazdowy w sposób naturalny dekomponuje się na p problemów postaci $1|1, I_j|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, których wymiar I_j jest zazwyczaj niewielki. Algorytm rozwiązywania zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ polega na generowaniu dopuszczalnych podziałów zbioru punktów odbioru J na podzbiory I_j ($j=1, \dots, p$) i rozwiązywaniu odpowiadających im problemów jednopojazdowych. W trakcie działania algorytmu wykorzystywane są wartości rozwiązań dopuszczalnych problemu $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ otrzymane przy użyciu algorytmów heurystycznych. Metody heurystyczne rozwiązywania zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ zostaną przedstawione dokładnie w rozdziale 5 pracy. Oznaczmy wartość rozwiązania heurystycznego przez $HR(p, J)$.

Funkcjonowanie algorytmu można przedstawić w postaci drzewa przydziałów H_p , w którym każdy węzeł $P_k = \{I_1, I_2, \dots, I_j, j \leq p\}$ odpowiada pewnemu częściowemu przydziałowi punktów odbioru do tras pojazdów, natomiast zbiór łuków jest postaci $\langle P_k, P_r \rangle$. Jeżeli

Jeżeli węzeł $P_k = \{I_1, \dots, I_j\}$ zawiera przydział punktów odbioru do tras wszystkich pojazdów o numerach od 1 do j , to jego następnik $P_r = \{I_1, \dots, I_j, I_{j+1}\}$ zawiera dodatkowo przydział punktów odbioru do trasy $j+1$ pojazdu. W korzeniu drzewa H_p zbiór przydziałów P_0 jest zbiorem pustym. W bezpośrednich następnikach P_0 zostają ustalone wszystkie dopuszczalne przydziały punktów odbioru do trasy pojazdu o numerze $j=1$.

Maksymalna głębokość drzewa H_p równa się liczbie pojazdów p . Wiszącym węzłom drzewa H_p odpowiadają przydziały punktów odbioru do tras wszystkich pojazdów, to znaczy, jeśli P_s jest węzłem wiszącym w drzewie H_p , to $P_s = \{I_1, I_2, \dots, I_p\}$.

Na rysunku 3.4 przedstawione zostało drzewo przydziałów H_p odpowiadające zagadnieniu $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, w którym $p=2, n=5, c_1=15, c_2=10, q_1=9, q_2=q_3=q_4=5, q_5=1$.



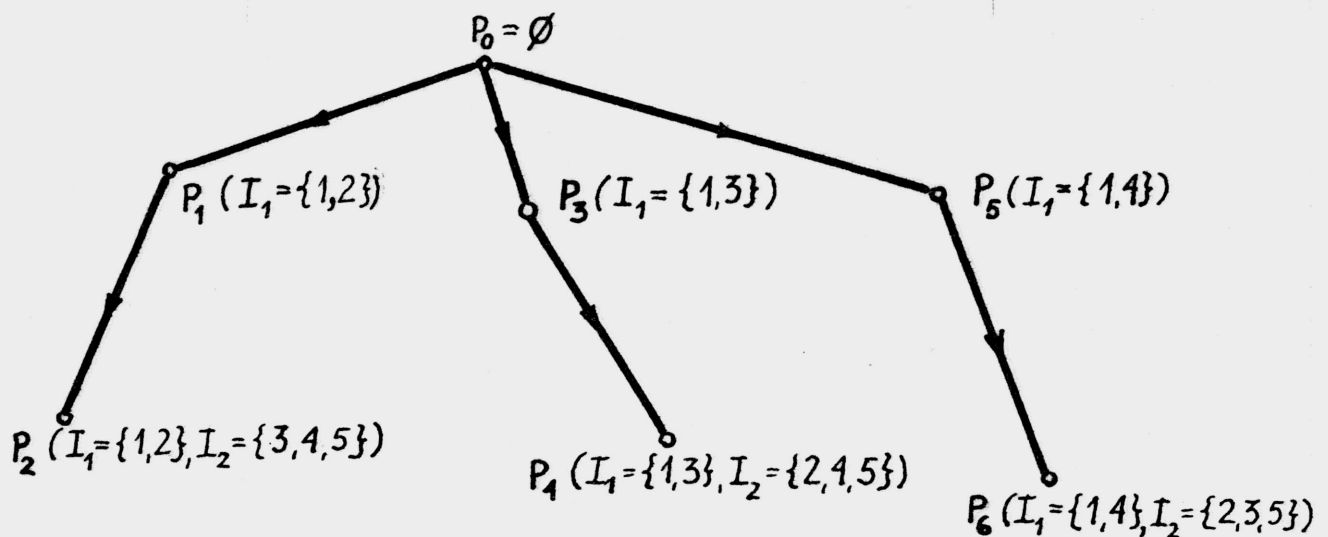
Rys. 3.4 Drzewo przydziałów H_p

Z każdym węzłem $P_k = \{I_1, \dots, I_j\}$ w drzewie przydziałów H_p wiąże się problem $1|1, |I_j||PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$. Rozwiązaniu tego problemu odpowiada wygenerowanie drzewa rozwiązań $H^1(I_j)$ /lub $H^2(I_j)$ /, w którym dokonuje się bezpośredniego lub pośredniego przeglądu wszystkich sekwencji punktów odbioru należących do zbioru I_j . Oznaczmy wartość rozwiązania optymalnego problemu $1|1, |I_j||PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ przez $B(I_j)$.

Wszystkich dopuszczalnych rozwiązań problemu $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a +$

+ $\sum wE + \sum vT$ jest co najwyżej $(p+n-1)!$. Natomiast liczba wszystkich dopuszczalnych p -podziałów zbioru J /węzłów wiszących w drzewie przydziałów H_p / równa się co najwyżej p^n . Jeżeli spełniony jest warunek $c_j = c$ ($j=1, \dots, p$), to liczbę rozważanych p -podziałów można zmniejszyć. Zauważmy bowiem, że w tym przypadku każdemu p -podziałowi $\{\hat{I}_1, \hat{I}_2, \dots, \hat{I}_p\}$ odpowiada $p!$ równoważnych p -podziałów $\{\hat{I}_{\alpha_1}, \hat{I}_{\alpha_2}, \dots, \hat{I}_{\alpha_p}\}$ /gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ jest dowolną permutacją wskaźników $1, 2, \dots, p$ /. W tej sytuacji wystarczy więc rozważać co najwyżej $p^{n-p} \cdot p!$ p -podziałów. W konsekwencji, przy generowaniu dopuszczalnych p -podziałów można wtedy przydzielić arbitralnie pewien punkt odbioru do trasy dowolnego pojazdu /na przykład dla $j=1$ /, a następnie po ustaleniu zbioru I_1 postępowanie to powtórzyć w odniesieniu do następnych pojazdów.

Jeżeli w rozpatrywanym uprzednio przykładzie przyjmiemy, że $c_1 = c_2 = 14$, to drzewo przydziałów H_p^S będzie miało postać przedstawioną na rysunku 3.5.



Rys. 3.5 Drzewo przydziałów H_p^S

Proces generowania w drzewie H_p częściowych rozwiązań $P_k = \{I_1, \dots, I_j\}$ problemu p -podziału prowadzi się aż do chwili, gdy zajdzie jedna z trzech następujących sytuacji:

- (a) - można wykazać, że rozwiązanie częściowe $\{I_1, \dots, I_j\}$ nie prowadzi do otrzymania rozwiązania dopuszczalnego problemu p -podziału.
- (b) - dolne oszacowanie wartości rozwiązania optymalnego proble-

mu $p|1, n|PP$, $\gamma^0 \geq 0$ $|\sum a + \sum wE + \sum vT$ /przy ustalonych zbiorach $I_1, I_2, \dots, I_j$ / jest mniejsza, co najwyżej równa, wartości najlepszego do tej pory znalezionego rozwiązania.

(c) - ustalone zostało rozwiązanie dopuszczalne problemu p-podziału /wygenerowany został wierzchołek wiszący w H_p /.

Wtedy należy odrzucić rozpatrywany węzeł $P_k = \{I_1, \dots, I_j\}$ i cofnąć się do jego poprzednika $P_r = \{I_1, I_2, \dots, I_{j-1}\}$, w drzewie H_p .

Niech $J'_k \subset J$ będzie zbiorem punktów odbioru, które nie zostały jeszcze przydzielone do trasy żadnego pojazdu w węźle $P_k = \{I_1, I_2, \dots, I_j\}$. Sytuacja opisana w punkcie (a) zachodzi, gdy

$$\hat{Q}_k = \sum_{i \in J'_k} q_i > \hat{C}_k = \sum_{i=j+1}^p c_i$$

Przy generowaniu kolejnego węzła $P_r = \{I_1, I_2, \dots, I_{j+1}\}$ z pewnego węzła $P_k = \{I_1, \dots, I_j\}$, a więc przy wyznaczeniu zbioru I_{j+1} , określany jest zbiór $K_k \subset J'_k$. K_k zawiera wszystkie punkty odbioru należące do J'_k , które mogą być przydzielone do trasy $j+1$ pojazdu. Jeżeli z P_k nie był generowany do tej pory żaden węzeł, to zbiór K_k ma postać $K_k = \{i \in J'_k \mid q_i \leq c_{j+1}\}$. Natomiast jeśli z węzła P_k były już wygenerowane węzły postaci $P_s = \{I_1, \dots, I_j, I'_{j+1} = \{i_{s_1}, \dots, i_{s_2}\}\}$, to do zbioru K_k nie należą punkty odbioru i_{s_1} .

Przydział kolejnych punktów do trasy pojazdu $j+1$ odbywa się aż do chwili, gdy ze względu na pojemność pojazdu, nie można już żadnego punktu odbioru przydzielić.

Algorytm

Niech k^* oznacza wartość najlepszego znalezionego rozwiązania. Na początku działania algorytmu przyjmijmy, że

$$k^* = \infty, \quad J' = \{1, \dots, n\} \quad \text{oraz}$$

$$\hat{C} = \sum_{i=1}^p c_i, \quad \hat{Q} = \sum_{i=1}^n q_i, \quad j = 0.$$

Niech r -tej iteracji algorytmu odpowiada częściowe rozwiązanie problemu p-podziału postaci $P_r = \{I_1, I_2, \dots, I_j\}$.

Krok 1. Wyznaczanie dolnego oszacowania LB.

Wyznaczyć wartość $B(I_j)$ poprzez rozwiązanie problemu $1|1, |I_j||PP$,
 $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Wyznaczyć wartość dolnego oszacowania $LB_{p-j}(J'_r)$ problemu $p-j|1, |J'_r||PP$,
 $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Dokonać podstawienia $LB := \sum_{i=1}^j B(I_i) + LB_{p-j}(J'_r)$.

Jeżeli $LB \geq k^*$ to należy przejść do kroku 6.

W przeciwnym przypadku przejść do kroku 2.

Krok 2. Wyznaczanie górnego oszacowania.

Wyznaczyć wartość $HR_{p-j}(J'_r)$ rozwiązania heurystycznego problemu
 $p-j|1, |J'_r||PP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$. Dokonać podstawienia:

$$k := \sum_{i=1}^j B(I_i) + HR_{p-j}(J'_r).$$

Jeżeli $k < k^*$, to dokonać podstawienia $k^* := k$ i zapamiętać rozwiązanie odpowiadające wartości k /jako najlepsze do tej pory znalezione rozwiązanie/. Następnie przejść do kroku 3.

Krok 3. Sprawdzenie dopuszczalności rozwiązania.

Dokonać podstawienia:

$$j := j+1$$

$$\hat{C} = \sum_{i=j+1}^p c_i,$$

$$I_j = \emptyset,$$

$$J'_r = J - \bigcup_{i=1}^j I_i.$$

Jeżeli spełniony jest warunek

$$\sum_{i \in J'_r} q_i < \hat{Q} - \hat{C}$$

przejść do kroku 6. W przeciwnym przypadku przejść do kroku 4.

Krok 4.

Wyznaczyć zbiór $K_r = \{i \in J'_r \mid q_i \leq c_j - \sum_{k \in I_j} q_k\}$.

Jeżeli $K_r = \emptyset$ i $\sum_{i \in I_j} q_i < \hat{Q} - \hat{C}$, to przejść do kroku 6.

Jeżeli $K_r = \emptyset$ i $\sum_{i \in I_j} q_i \geq \hat{Q} - \hat{C}$, to utworzyć w drzewie H_p

nowy węzeł $P_s = \{I_1, \dots, I_j\}$ i nowy łuk $\langle P_r, P_s \rangle$. Następnie przejść do kroku 1.

W przeciwnym przypadku sprawdzić warunek:

$$\sum_{i \in I_j} q_i + \sum_{i \in K_r} q_i \geq \hat{Q} - \hat{C}$$

Jeżeli warunek ten jest spełniony, to przejść do kroku 6, w przeciwnym przypadku przejść do kroku 5.

Krok 5. Uzupełnianie przydziału punktów odbioru do trasy j-tego pojazdu.

Wybrać $i^* \in K_r$, takie, że $q_{i^*} = \max_{i \in K_r} q_i$.

Dokonać podstawień:

$$I_j := I_j \cup \{i^*\},$$

$$Q := Q - q_{i^*},$$

$$J'_r := J'_r - \{i^*\}.$$

Przejść do kroku 4.

Krok 6. Cofanie

Jeżeli $I_j = \emptyset$ oraz $j=1$ czyli należy się cofnąć od korzenia drzewa H_p , to koniec algorytmu. Znalezione do tej pory najlepsze rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym problemu $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$ o wartości k^* .

W przeciwnym przypadku, jeśli $I_j = \emptyset$ i $j > 1$, to podstawić $j := j-1$ i cofnąć się do poprzednika $P_s = \{I_1, \dots, I_j\}$. Przejść do kroku 6. Jeśli natomiast $I_j \neq \emptyset$, należy dokonać podstawienia:

$$I_j := I_j - \{\hat{i}\},$$

$$\hat{Q} := \hat{Q} + q_{\hat{i}},$$

$$K_r := K_r - \{\hat{i}\},$$

gdzie $\hat{i}$ jest punktem odbioru przydzielonym ostatnio do zbioru I_j .
Przejsć do kroku 4. ■

W przypadku, gdy $c_j = c$ ($j=1, \dots, p$) można wyeliminować przy generowaniu drzewa przydziałów H_p powtarzanie równoważnych przydziałów poprzez zastąpienie w kroku 6 algorytmu warunku $I_j = 0$ przez warunek $|I_j| = 1$.

3.4. Uogólnienie problemu z jednym pojazdem

W rozdziale tym rozważany będzie problem ustalania tras typu PW. Zagadnienie $1|1, n|PW, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ jest uogólnieniem problemu $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$. W zagadnieniu z trasą typu PP zakłada się, że pojazd wykonuje dokładnie jedną turę, po czym powraca do bazy. W sytuacji, gdy sumaryczne zapotrzebowania punktów odbioru q_i ($i \in J$) są większe niż pojemność pojazdu c , konieczne jest wykonanie większej liczby tur. Taką właśnie sytuację uwzględnia problem $1|1, n|PW, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$.

W przypadku, gdy baza oraz magazyn są zlokalizowane w tym samym miejscu oraz gdy funkcja celu jest postaci $\sum a$, to problem $1|1, n|PW, \tau^0 \geq 0 | \sum a$ jest równoważny problemowi $\hat{p}|1, n|PP, c_j = c, \tau^0 \geq 0 | \sum a$ /np. [9], [19], [36]/, gdzie $\hat{p}$ jest górnym oszacowaniem liczby tur, które należy wykonać.

3.4.1. Model matematyczny

Wprowadźmy następujące zmienne decyzyjne:

$$x_{ik}^l(j) = \begin{cases} 1, & \text{gdy w } j\text{-tej turze trasy pojazdu, jako } l\text{-ty} \\ & \text{występuje punkt } x_k, \text{ a bezpośrednio poprze-} \\ & \text{dza go punkt } x_i, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$p \in \mathbb{N}$, oznaczającą liczbę tur realizowanych
przez pojazd,

$\tilde{r}_j \in \mathbb{N}$, $j=1, \dots, p$, oznaczające liczbę punktów odbioru obsługiwanych w j -tej turze trasy pojazdu;

$s_i^1(j) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ - określające termin wyjazdu z punktu i obsługiwanego jako l -ty w kolejności w j -tej turze trasy pojazdu;

$s_0(j) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ - określające termin wyjazdu z magazynu w j -tej turze trasy;
oraz zmienną

$s_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ - określającą termin powrotu pojazdu do bazy.

Wtedy model matematyczny zagadnienia $1|1, n|PW$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ można sformułować w następujący sposób:

minimalizować:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p \left[\sum_{l=1}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}^1(j) \cdot a_{ik} + \sum_{i=1}^n x_{0i}^1(j) \cdot a_{0i} \right] + a_{n+1,0} + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}^{\tilde{r}_p}(p) \cdot a_{k,n+1} + \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}^{\tilde{r}_j}(j) \cdot a_{k,0} + \\ & + w_{n+1} E_{n+1} + v_{n+1} T_{n+1} + \sum_{j=1}^p \left[\sum_{i=1}^n x_{0i}^1(j) \right] \cdot [w_0 \cdot E_0(j) + w_0 \cdot T_0(j)] + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^{\tilde{r}_j} \sum_{k=0}^n x_{ki}^1(j) \right] \cdot [w_i \cdot E_i^1(j) + v_i \cdot T_i^1(j)], \quad (3.46) \end{aligned}$$

przy ograniczeniach (3.2) - (3.12).

oraz ograniczeniach

$$\sum_{k=1}^n x_{0k}^1(j) \geq \sum_{k=1}^n x_{0k}^1(j+1), \quad j=1, \dots, p-1$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} x_{ik}^1(j) \cdot q_k + \sum_{k=1}^n x_{0k}^1(j) \cdot q_k \leq c, \quad j=1, \dots, p \quad (3.47)$$

$$s_0(1) \geq a_{n+1,0} + \tau_0^0,$$

$$s_0(j) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{r}_{ik}^{j-1}(j-1) \cdot [s_k^{j-1}(j-1) + a_{k,0} + \tau_0^0],$$

$$j=2, \dots, p$$

$$s_{n+1} \geq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{r}_{ik}^p(p) \cdot [s_k^p(p) + a_{k,n+1}],$$

$$\text{gdzie } E_{n+1} = \max \{0, r_{n+1} + \tau_0^0 + a_{n+1} - s_0(1)\},$$

$$T_{n+1} = \max \{0, d_{n+1} - s_{n+1}\},$$

natomiast pozostałe wartości $E_0(j)$, $T_0(j)$, $E_i^1(j)$, $T_i^1(j)$ są określane jak w modelu (3.1) - (3.12).

Łatwo zauważyć, że zmienna p musi spełniać ograniczenie $n \geq p \geq p_{\min}$ /gdzie $p_{\min}$ jest określone według wzoru (3.43), przy założeniu, że $c_j = c$ dla $j = 1, \dots, n$ /.

Jeżeli $p_{\min} = 1$, to musi być spełniony warunek $\sum_{i=1}^n q_i \leq c$

i optymalne rozwiązanie problemu $1|1, n|PW, \tau^0 \geq 0 | \sum a \sum wE + \sum vT$.

Natomiast w przypadku, gdy $p_{\min} \geq 2$, to zagadnieniu $1|1, n|PW, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ można przyporządkować graf $\hat{G}_w = \langle \hat{N}_w, \hat{A}_w \rangle$,

który jest uogólnieniem grafu $\hat{G} = \langle \hat{N}, \hat{A} \rangle$. Graf $\hat{G}_w$ można otrzymać w następujący sposób:

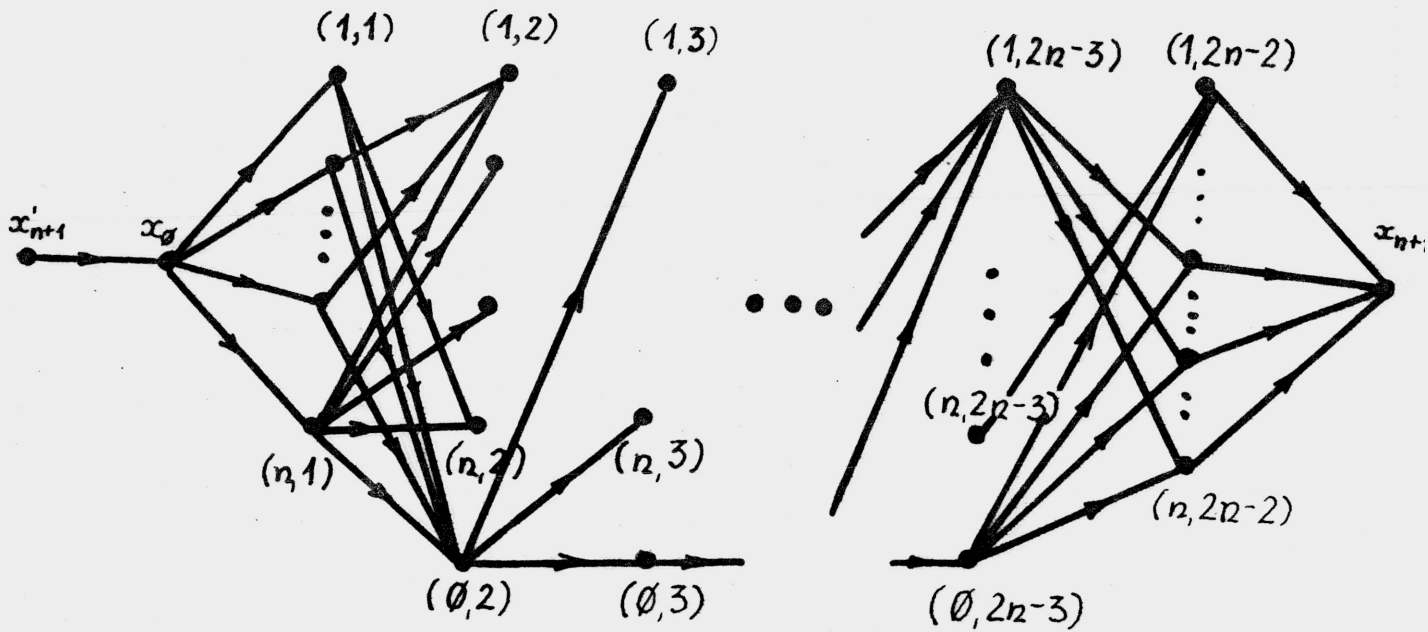
$$\hat{N}_w = \{x'_{n+1}, x_0, x_{n+1}\} \cup \bigcup_{l=1}^{2n-2} \bigcup_{k=1}^n \{(k, l)\} \cup \bigcup_{l=2}^{2n-3} \{(0, l)\}$$

$$\hat{A}_w = \{ \langle x'_{n+1}, x_0 \rangle \} \cup \bigcup_{k=1}^n \{ \langle x_0, (k, 1) \rangle \} \cup \bigcup_{k=1}^n \{ \langle (k, 2n-2), x_{n+1} \rangle \}$$

$$\bigcup_{k=1}^n \bigcup_{l=2}^{2n-3} \{ \langle (0, l), (k, l+1) \rangle \} \cup \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{l=1}^{2n-4} \{ \langle (k, l), (0, l+1) \rangle \}$$

$$\bigcup_{l=2}^{2n-4} \{ \langle (0, l), (0, l+1) \rangle \} \cup \bigcup_{l=1}^{2n-3} \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \{ (i, l), (k, l+1) \}$$

Graf $\hat{G}_w$ przedstawiony został na rysunku 3.6.



Rys. 3.6 Graf $\hat{G}_w$

Trasie pojazdu odpowiada droga sekwencyjna w $\hat{G}_w$, która zawiera dokładnie jeden wierzchołek z każdego zbioru

$$\bigcup_{l=1}^{2n-2} \{(k, l)\} \quad , \quad k=1, \dots, n \text{ oraz zawiera co najmniej } p_{\min}^{-1}$$

wierzchołków ze zbioru $\bigcup_{l=2}^{2n-3} \{(0, l)\}.$

Koszt najtańszej drogi w grafie $\hat{G}_w$ jest dolnym oszacowaniem problemu $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, przy czym obciążenia łuków w grafie $\hat{G}_w$ są analogiczne jak obciążenia odpowiednich łuków w grafie $\hat{G}$, a obciążenia łuków $\langle (0, l), (0, l+1) \rangle$, $l=2, \dots, 2n-4$ są równe zero.

Gdyby w problemie $1|1, n|PW, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ nie występował warunek (3.47), to do jego rozwiązania można by zastosować uogólniony algorytm rozwiązywania zagadnienia $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$. Algorytm ten prowadziłby do wyznaczania drogi sekwencyjnej w $\hat{G}_w$ o minimalnej wartości funkcji celu (3.46). W związku z ograniczoną pojemnością pojazdu nie każda droga sekwencyjna w $\hat{G}_w$ między

wierzchołkami x'_{n+1}, x_{n+1} odpowiada rozwiązaniu dopuszczalnemu problemu $1|1, n|PW, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$. W przypadku zagadnienia $1|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, w trakcie działania algorytmu można było ustalać jako kolejny punkt w trasie /w drodze w $\hat{G}$ / dowolny punkt odbioru, który nie został jeszcze ustalony w trasie. Natomiast w przypadku zagadnienia z trasą typu PW jako kolejny punkt w trasie można przyjmować:

- taki punkt odbioru, którego przydzielenie do aktualnie rozważanej tury nie spowoduje przekroczenia pojemności pojazdu /i który nie został do tej pory ustalony w trasie/,
- punkt x_0 /któremu w $\hat{G}_w$ odpowiadają wierzchołki $(0,1), 1=2, \dots, 2n-3$, przy czym każdej turze odpowiada w drodze sekwencyjnej fragment drogi między dwoma wierzchołkami ze zbioru $\{(0,1)\}_{1=2, \dots, 2n-3}$ /lub między x_0 i $(0,1)$ oraz $(0,1)$ i x_{n+1} /.

Każdemu łukowi $\langle (0,1), (0,1+1) \rangle$ ustalonemu w drodze sekwencyjnej odpowiada tura pusta. Liczba tur w drodze sekwencyjnej w grafie $\hat{G}_w$ jest równa n . Jeżeli od liczby n odejmiemy liczbę tur pustych, to otrzymamy wartość zmiennej p określającą rzeczywistą liczbę tur realizowanych przez pojazd. Przy ustalaniu dopuszczalnej drogi sekwencyjnej w $\hat{G}_w$ można wykorzystać warunki dopuszczalności określone w algorytmie rozwiązywania zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$. Zbiory $I_j, j=1, \dots, p$ występujące w tych warunkach należy interpretować jako zbiory punktów odbioru przydzielonych do j -tej tury w trasie pojazdu. Warunkiem istnienia rozwiązania dopuszczalnego problemu $1|1, n|PW, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ jest spełnienie nierówności $q_i \leq c, i=1, \dots, n$.

4. Zagadnienie wyznaczania tras wielu pojazdów. Uogólnienie.

Rozważane w niniejszym rozdziale zagadnienie $p|1, n|WP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ jest uogólnieniem zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ ze względu na typ tras. W przypadku tras typu WP dopuszczalne jest zaopatrywanie jednego punktu odbioru przez kilka pojazdów. W wielu sytuacjach pozwala to na zmniejszenie kosztów realizacji tras /poprzez zmniejszenie sumarycznej długości drogi, którą muszą przebyć pojazdy/, a często pozwala również na zmniejszenie liczby użytych pojazdów.

Jak to zostało pokazane w rozdziale 3, problem stwierdzenia, czy istnieje rozwiązanie dopuszczalne zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, jest problemem NP-zupełnym. W przypadku zagadnienia

z trasą typu WP, rozwiązanie dopuszczalne istnieje zawsze, gdy tylko spełniony jest warunek

$$\sum_{i=1}^n q_i \leq \sum_{j=1}^p c_j.$$

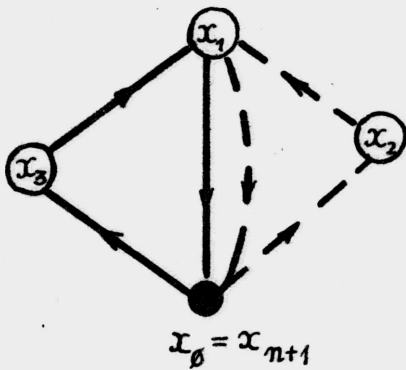
Warunek ten jest tylko warunkiem koniecznym, lecz nie wystarczającym, istnienia rozwiązania dopuszczalnego dla zagadnienia $p|1,n|PP$,

$$\gamma^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT.$$

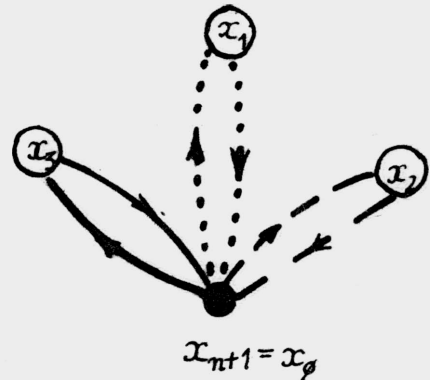
Rozpatrzmy prosty przykład zaczerpnięty z pracy [36].

Przykład /rys. 4.1, 4.2/

Dane są trzy punkty odbioru o zapotrzebowaniach $q_1 = q_2 = q_3 = 2$ oraz trzy pojazdy o pojemnościach $c_1 = c_2 = c_3 = 3$. Rysunek 4.1 przedstawia trasy pojazdów typu WP, a rysunek 4.2 trasy pojazdów typu PP.



Rys. 4.1 Trasy typu WP



Rys. 4.2 Trasy typu PP

Łatwo zauważyć, że w przypadku tras typu WP wystarczy użyć tylko dwu pojazdów, natomiast trasy typu PP wymagają użycia trzech pojazdów, których pojemność nie jest w pełni wykorzystana. Ponadto w przypadku, gdy odległości między x_1 i x_2 oraz x_1 i x_3 są odpowiednio mniejsze od odległości między x_0 i x_2 oraz x_0 i x_3 , to sumaryczna długość tras typu WP jest mniejsza niż sumaryczna długość tras typu PP.

Nie istnieją do tej pory żadne algorytmy dokładne rozwiązywania zagadnień z trasami typu WP. We wspomnianej wcześniej pracy [36] została przedstawiona jedynie propozycja, aby w przypadku, gdy istnieje potrzeba zaopatrywania jednego punktu odbioru przez kilka pojazdów, dzielić zapotrzebowanie q_i między pojazdy w sposób losowy.

Problem $p|1, n|WP, \tau^0 \geq 0|\Gamma$ można naturalnie sprowadzić do zagadnienia

$$p|1, \left| \sum_{i=1}^n q_i \right| |PP, \tau^0 \geq 0|\Gamma, \quad ,$$

traktując każdy punkt odbioru o zapotrzebowaniu q_i jako q_i punktów odbioru o zapotrzebowaniu jednostkowym. Ma to jednak sens praktyczny tylko wtedy, gdy wartości q_i są niewielkie, w przeciwnym przypadku rozmiar zagadnienia z trasami typu PP, który trzeba rozwiązać, rośnie w sposób drastyczny.

4.1. Model matematyczny

Model matematyczny zagadnienia $p|1, n|WP, \tau^0 \geq 0| \sum a + \sum wE + \sum vT$ różni się od modelu matematycznego (3.1) - (3.12) /zagadnienie $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0| \sum a + \sum wE + \sum vT/$ tylko ograniczeniami (3.2) i (3.6).

Wprowadźmy dodatkową zmienną decyzyjną $f_j(i)$, która oznacza ilość towaru jaką przywozi pojazd j -ty do punktu odbioru α_i . Zamiast ograniczeń (3.2), (3.6) należy wprowadzić ograniczenia:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n x_{ik}^1(j) \cdot f_j(k) + x_{ok}^1(j) \cdot f_j(k) = q_k, \quad k=1, \dots, n, \quad (4.1)$$

$$\sum_{l=2}^{\tilde{r}_j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}^1(j) \cdot f_j(k) + \sum_{k=1}^n x_{ok}^1(j) \cdot f_j(k) \leq c_j, \quad j=1, \dots, p \quad (4.2)$$

$$f_j(k) \geq 0, \quad k=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, p. \quad (4.3)$$

Ograniczenie (4.1) oznacza, że ilość towaru przywiezionego przez wszystkie pojazdy do danego punktu odbioru α_k musi być równa zapotrzebowaniu tego punktu q_k . Ograniczenie (4.2) oznacza, że ilość towaru transportowana przez dany pojazd jest nie większa niż pojemność tego pojazdu.

4.2. Własności zagadnienia

W rozdziale tym zostaną omówione pewne własności problemu $p|1, n|WP, \tau^0 \geq 0| \sum a + \sum wE + \sum vT$, które pozwalają na wykorzystanie schematu algorytmu rozwiązania zagadnienia z trasami typu PP do

konstrukcji algorytmu rozwiązywania zagadnienia z trasami typu WP.

Niech I_j oznacza, jak poprzednio, zbiór punktów odbioru, które są obsługiwane /częściowo lub w całości/ przez pojazd o numerze j -tym.

Twierdzenie 4.1

Istnieje rozwiązanie optymalne problemu $p|1,n|WP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$, w którym spełniony jest warunek:

$$|I_i \cap I_j| \leq 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, p. \quad (4.4)$$

Dowód /rys. 4.3/

Założmy, że mamy rozwiązanie optymalne problemu $p|1,n|WP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$, w którym istnieje para i, j ($i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, p\}$) dla której zachodzi

$$|I_i \cap I_j| = k, \quad k > 1.$$

Wyberzmy z tras pojazdów o numerach i oraz j dwa takie punkty odbioru, które równocześnie są obsługiwane przez oba pojazdy. Oznaczmy je przez k_1 i k_2 .

Niech $\tilde{f} = \min \{f_i(k_1), f_j(k_1), f_i(k_2), f_j(k_2)\}$. Bez straty ogólności można przyjąć, że $\tilde{f} = f_i(k_1)$.

Wprowadźmy nowe wartości

$$f'_i(k_1) = f_i(k_1) - \tilde{f} = 0,$$

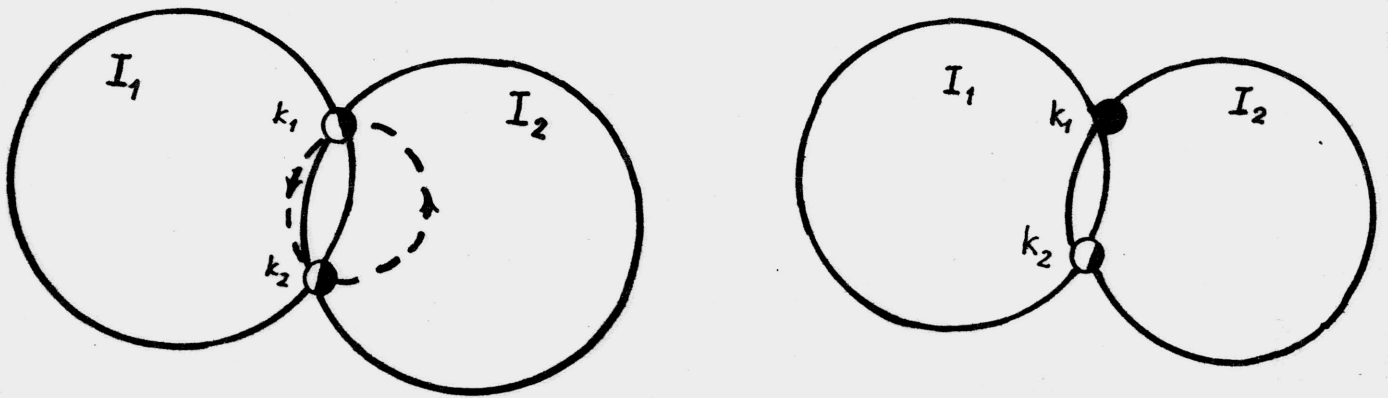
$$f'_i(k_2) = f_i(k_2) + \tilde{f},$$

$$f'_j(k_1) = f_j(k_1) + \tilde{f},$$

$$f'_j(k_2) = f_j(k_2) - \tilde{f},$$

Jeżeli wartości $f_i(k_1) \dots f_j(k_2)$ spełniają ograniczenia (4.1) - (4.3) to także wartości $f'_i(k_1) = 0, \dots, f'_j(k_2)$ spełniają te ograniczenia, gdyż sumaryczna ilość towaru przewożona przez oba pojazdy nie ulegnie zmianie. Nie zmieni się również sumaryczna ilość towaru dostarczana przez te pojazdy do punktów odbioru k_1 i k_2 . Istnieje więc rozwiązanie dopuszczalne problemu $p|1,n|WP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ spełniające warunek $|I_i - \{k_1\} \cap I_j| = k-1$ nie gorsze niż rozwiązanie optymalne. Wynika to z faktu, że punkt k_1 /ze względu na $f_i(k_1) = 0$ można usunąć z trasy i -tego pojazdu, natomiast trasa j -tego pojazdu nie ulegnie zmianie. Rozumowanie to można powtórzyć jeszcze $k-2$ razy dla kolejnych par punktów odbioru występujących w trasach obu pojazdów.

Otrzymamy wtedy, że $|I'_i \cap I'_j| = 1$, gdzie I'_i i I'_j oznaczają nowe zbiory punktów odbioru obsługiwanych przez pojazd i -ty oraz j -ty. Postępowanie to można powtórzyć dla każdej pary i, j , która nie spełnia warunku (4.4). W wyniku tego postępowania otrzymamy rozwiązanie dopuszczalne, spełniające warunek (4.4), w którym wartość funkcji celu nie jest większa niż w rozwiązaniu optymalnym problemu. Musi więc być to także rozwiązanie optymalne, co kończy dowód twierdzenia. ■



Rys. 4.3 Przekształcenie tras 2 pojazdów obsługujących wspólnie 2 punkty odbioru

Niech rozwiązanie optymalne problemu $p|1, n|WP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ składa się z z niespójnych komponentów $\mathcal{X}_i$, $i=1, \dots, z$, z takich, że

$$\mathcal{X}_i \subset \{1, \dots, p\}, \quad i=1, \dots, \hat{z},$$

przy czym spełnione są następujące warunki:

$$\forall_{i=1, \dots, \hat{z}} |\mathcal{X}_i| > 1 \Rightarrow \forall_{j \in \mathcal{X}_i} \exists j' \in \mathcal{X}_i: |I_j \cap I_{j'}| \neq 0 \quad (a)$$

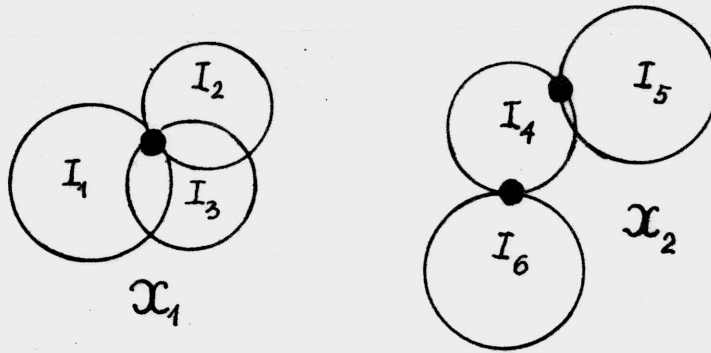
$$\bigcup_{i=1}^{\hat{z}} \mathcal{X}_i = \{1, \dots, p\} \quad (b)$$

$$\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_{i'} = \emptyset, \quad i \neq i', \quad i, i' = 1, \dots, \hat{z}, \quad (c)$$

$$\bigcup_{j=1}^p I_j = \{1, \dots, n\}. \quad (d)$$

Każdy komponent $\mathcal{X}_i$ ($i=1, \dots, \hat{z}$) jest zbiorem tras, które obsługują wspólnie pewne punkty odbioru.

Podział zbioru tras pojazdów na niespójne komponenty został przedstawiony schematycznie na rys. 4.4, gdzie okręgi odpowiadają poszczególnym trasom pojazdów, a pogrubione punkty przedstawiają te punkty odbioru, które są zaopatrywane przez więcej niż jeden pojazd.



Rys. 4.4 Podział zbioru tras na niespójne komponenty

Lemat 4.1. Istnieje rozwiązanie optymalne problemu $p|1,n|WP$, $z^0 \geq 0$ $\sum a + \sum wE + \sum vT$ spełniające warunek (4.4), dla którego

$$\sum_{j \in \mathcal{X}_i} |I_j| = \left| \bigcup_{j \in \mathcal{X}_i} I_j \right| + |\mathcal{X}_i| - 1, \quad j=1, \dots, \hat{z}.$$

gdzie $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{\hat{z}}$ są niespójnymi komponentami składającymi się na to rozwiązanie.

Dowód /indukcyjny/

Niech $\mathcal{X}_i = \{j_1, \dots, j_\omega\}$. Rozważmy kolejne podzbiory $\hat{\mathcal{X}}_\nu \subset \mathcal{X}_i$, $\nu=1, \dots, \omega$, takie że dla każdego $\hat{\mathcal{X}}_\nu$ spełniony jest warunek (a). Jeżeli $\hat{\mathcal{X}}_1 = \{j_1\}$, to otrzymujemy natychmiast, że $|I_{j_1}| = |I_{j_1}| + 1 - 1$.

Załóżmy, że dla $\hat{\mathcal{X}}_\nu = \{j_1, j_2, \dots, j_\nu\}$ spełniony jest warunek

$$\sum_{j \in \hat{\mathcal{X}}_\nu} |I_j| = \left| \bigcup_{j \in \hat{\mathcal{X}}_\nu} I_j \right| + \nu - 1. \text{ Pokażemy, że ze spełnienia tego warunku dla } \nu \text{ wynika, że musi on być spełniony także dla } \nu + 1.$$

$\hat{\mathcal{X}}_{\nu+1} = \{j_1, \dots, j_{\nu+1}\} = \hat{\mathcal{X}}_\nu \cup \{j_{\nu+1}\}$. Z definicji komponentu /z warunku (a) / wynika, że istnieje co najmniej jeden element

$\hat{j} \in \hat{\mathcal{X}}_\nu$, taki że $|I_{\hat{j}} \cap I_{j_{\nu+1}}| \neq \emptyset$, a z warunku (4.4) wynika, iż $|I_{\hat{j}} \cap I_{j_{\nu+1}}| = 1$.

Stąd, jeżeli istnieje dokładnie jeden element $\hat{j}$, taki że $|I_{\hat{j}} \cap I_{j_{\nu+1}}| = 1$, to

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \hat{\mathcal{X}}_{\nu+1}} |I_j| &= \sum_{j \in \hat{\mathcal{X}}_\nu} |I_j| + |I_{j_{\nu+1}}| = \left| \bigcup_{j \in \hat{\mathcal{X}}_\nu} I_j \right| + \nu - 1 + |I_{j_{\nu+1}}| \\ &= \left| \bigcup_{j \in \mathcal{X}_{\nu+1}} I_j \right| + (\nu + 1) - 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Założmy, że istnieje ponadto $j' \neq \hat{j}$, taki że $j' \in \hat{\mathcal{X}}_\nu$ oraz $|I_{j'} \cap I_{j_{\nu+1}}| = 1$. Wtedy mamy z warunku (4.4), że:

$$\text{albo } |I_{j'} \cap I_{\hat{j}} \cap I_{j_{\nu+1}}| = 1 \quad \text{/rys. 4.5/,}$$

$$\text{albo } I_{j'} \cap I_{\hat{j}} \cap I_{j_{\nu+1}} = \emptyset \quad \text{/rys. 4.6/.}$$

W pierwszym przypadku równość (4.5) jest nadal spełniona.

Natomiast w drugim przypadku, ponieważ $\hat{\mathcal{X}}_\nu$ spełnia warunek (a) musi istnieć taki ciąg $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \hat{\mathcal{X}}_\nu$, że $I_{j'} \cap I_{j_{\alpha_1}} = k_1$,

$$I_{j_{\alpha_1}} \cap I_{j_{\alpha_2}} = k_2, \dots, I_{j_{\alpha_s}} \cap I_{\hat{j}} = k_s.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak w dowodzie twierdzenia 1, można pokazać, że istnieje takie rozwiązanie dopuszczalne problemu $p|1, n|WP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$, nie gorsze od rozważanego rozwiązania optymalnego, w którym dla pewnej pary $\langle j_{\beta_1}, j_{\beta_2} \rangle \in \{ \langle j_{\nu+1}, j' \rangle, \langle j', j_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle j_{\alpha_s}, \hat{j} \rangle, \langle \hat{j}, j_{\nu+1} \rangle \}$

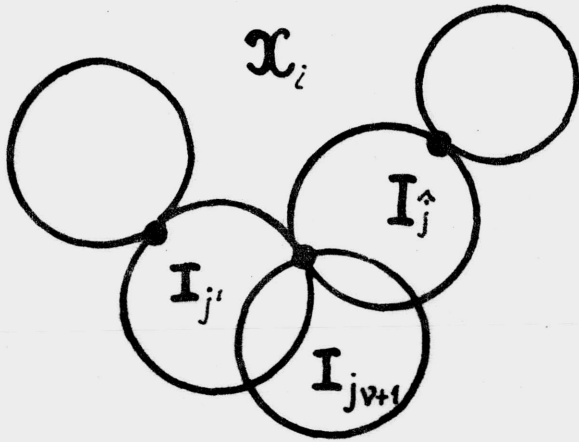
$$\text{zachodzi } I_{j_{\beta_1}} \cap I_{j_{\beta_2}} = \emptyset.$$

Stąd możemy wyciągnąć wniosek, że istnieje takie rozwiązanie optymalne problemu $p|1, n|WP$, $\tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$, w którym spełniony jest warunek (4.5) dla $\hat{\mathcal{X}}_{\nu+1}$.

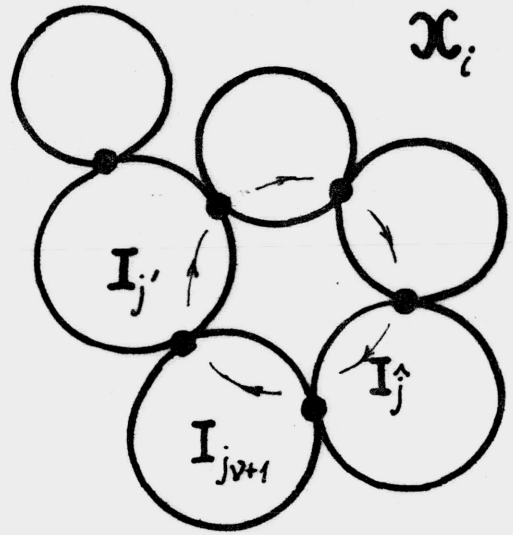
Ponieważ $\hat{\mathcal{X}}_\omega = \mathcal{X}_i$, więc otrzymujemy

$$\sum_{j \in \mathcal{X}_i} |I_j| = \sum_{j \in \mathcal{X}_i} |I_j| + \omega - 1 = \sum_{j \in \mathcal{X}_i} |I_j| + \mathcal{X}_i - 1,$$

co kończy dowód lematu. ■



Rys. 4.5



Rys. 4.6

Korzystając z powyższego lematu można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.2

Istnieje rozwiązanie optymalne problemu $p|1,n|WP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, dla którego spełniony jest warunek

$$\sum_{j=1}^p |I_j| \leq p+n-1.$$

Dowód. załóżmy, że rozwiązanie optymalne problemu składa się z $\hat{z}$ komponentów $\mathcal{X}_i$ ($i=1, \dots, \hat{z}$), gdzie $1 \leq \hat{z} \leq p$.

Z lematu 4.1 wynika, że istnieje takie rozwiązanie optymalne problemu, w którym

$$\sum_{j=1}^p |I_j| = \sum_{i=1}^{\hat{z}} \sum_{j \in \mathcal{X}_i} |I_j| = \sum_{i=1}^{\hat{z}} \left| \bigcup_{j \in \mathcal{X}_i} I_j \right| + |\mathcal{X}_i| - 1$$

Z definicji $\mathcal{X}_i$, z warunków (b) i (c), wynika, że $\sum_{i=1}^{\hat{z}} |\mathcal{X}_i| = p$.

Natomiast z warunków (b), (c), (d) wynika, że

$$\left| \bigcup_{j=1}^p I_j \right| = \sum_{i=1}^{\hat{z}} \left| \bigcup_{j \in \mathcal{X}_i} I_j \right| = n.$$

Stąd otrzymujemy, że $\sum_{j=1}^p |I_j| = n + p - \hat{z}$. Ponieważ $1 \leq \hat{z} \leq p$, tak więc spełniona jest nierówność

$$\sum_{j=1}^p |I_j| \leq n + p - 1,$$

co kończy dowód twierdzenia. ■

Z twierdzenia 4.2 wynika, że szukając rozwiązania optymalnego problemu $p|1, n|WP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ wystarczy ograniczyć się do przeglądu takiego zbioru rozwiązań, w których co najwyżej $p-1$ różnych punktów odbioru obsługiwanych jest przez więcej niż jeden pojazd, natomiast jeśli jeden punkt odbioru jest zaopatrywany przez wszystkie pojazdy, to pozostałe punkty odbioru są zaopatrywane jednorazowo /każdy przez jeden pojazd/.

Oznaczmy przez $\hat{I}_j \subset I_j$, zbiór takich punktów odbioru, które są zaopatrywane tylko i wyłącznie przez pojazd j -ty /to znaczy $f_j(i) = q_i$ dla $i \in \hat{I}_j$ /.

Niech $\tilde{I}_j = I_j - \hat{I}_j$ oznacza zbiór tych punktów odbioru, dla których $0 \leq f_j(i) \leq q_i$, $i \in \tilde{I}_j$.

Własność 4.1

W rozwiązaniu dopuszczalnym problemu $p|1, n|WP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ musi być spełniony warunek

$$\sum_{i \in \hat{I}_j} q_i + |\tilde{I}_j| \leq c_j, \quad j = 1, \dots, p. \blacksquare$$

Niech wartość

$$\tilde{f}_j(i) = \begin{cases} q_i, & i \in \hat{I}_j, \\ \min \{q_i - 1, c_j - |\tilde{I}_j - \{i\}|\} - \sum_{i \in \hat{I}_j} q_i, & i \in \tilde{I}_j, \\ 0, & \text{dla } i \notin I_j, \end{cases}$$

oznacza maksymalną ilość towaru, jaką pojazd j -ty może przywieźć do punktu odbioru $\mathcal{X}_i$, przy założeniu, że do innych punktów odbioru,

zaopatrywanych częściowo przez ten pojazd ($f_j(i) < q_i$), przywozi on jedną jednostkę towaru.

Własność 4.2

W rozwiązaniu dopuszczalnym problemu $p|1,n|WP$, $\gamma^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ musi być spełniony warunek:

$$\sum_{i \in \hat{I}_j} q_i + \sum_{i \in \tilde{I}_j} \tilde{f}_j(i) \geq \sum_{i=1}^n q_i - \sum_{k=1}^p c_k + c_j, \quad j=1, \dots, p. \blacksquare$$

Zdefiniujmy zbiór

$$\tilde{J}_j \triangleq \left\{ i \in J \mid \sum_{k=1}^{j-1} \tilde{f}_k(i) + \tilde{f}_j(i) < q_i \right\}.$$

gdzie $\tilde{J}_j$ jest zbiorem takich punktów odbioru, które nie zostały w całości obsłużone przez pojazdy o numerach $1, 2, \dots, j$ i muszą być uwzględnione także w trasach pozostałych pojazdów.

Własność 4.3

Dolnym oszacowaniem liczby $\sum_{j=1}^p |I_j|$ jest wyrażenie

$$l_{\min}(j) = \sum_{k=1}^{j-1} |I_k| + |I_j| + |\tilde{J}_j|, \quad j=1, \dots, p. \blacksquare$$

Korzystając z własności 4.3 oraz twierdzenia 4.2 można sformułować następującą własność.

Własność 4.4

Istnieje rozwiązanie optymalne problemu $p|1,n|WP$, $\gamma^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$, w którym

$$l_{\min}(j) \leq n + p - 1, \quad j=1, \dots, p.$$

W przypadku wyznaczenia pewnego przydziału punktów odbioru do tras poszczególnych pojazdów, to znaczy ustalenia zbiorów $I_1, I_2, \dots, I_p$, które spełniają warunki z twierdzeń 4.1 i 4.2, należy spro-
wadzić, czy istnieje dla tych przydziałów rozwiązanie dopuszczalne problemu $p|1,n|WP$, $\gamma^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ ze względu na zmienne

$f_j(i)$ ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, p$).

W przypadku ustalenia zbiorów $I_1, \dots, I_p$, ograniczenia (4.1) - (4.3) przyjmują postać:

Zagadnienie P

$$\sum_{i \in I_j} f_j(i) \leq c_j, \quad j=1, \dots, p;$$

$$\sum_{j=1}^p f_j(k) = q_k, \quad k=1, \dots, n;$$

$$f_j(k) = 0, \quad k \notin I_j, \quad j=1, \dots, p;$$

$$0 \leq f_j(k) \leq q_k, \quad k \in I_j, \quad j=1, \dots, p. \blacksquare$$

Problem P jest zagadnieniem znalezienia przepływu o maksymalnej wartości [26] w sieci $\mathcal{D} = \langle N, A \rangle$, w której zbiór wierzchołków ma postać:

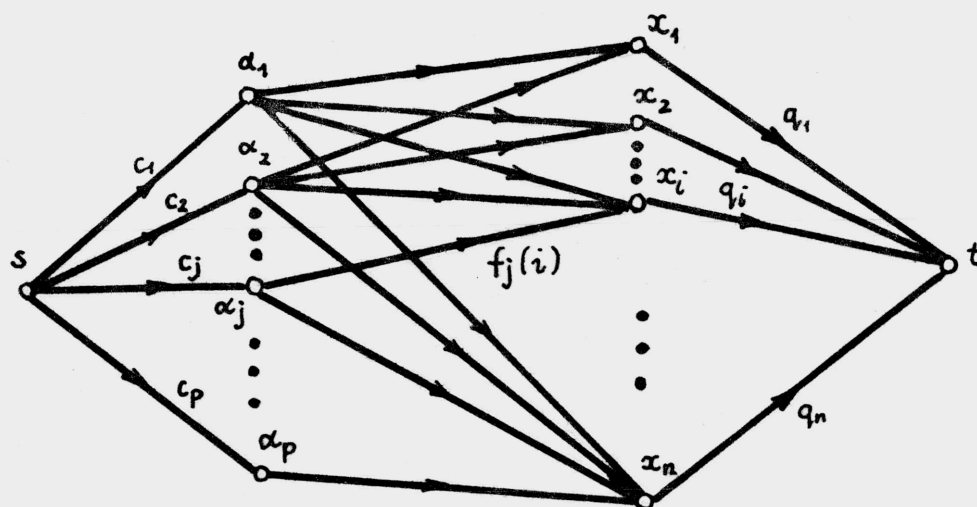
$$N = \{s\} \cup \{t\} \cup \bigcup_{j=1}^p \{\alpha_j\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{x_i\},$$

natomiast zbiór łuków jest następujący:

$$A = \bigcup_{j=1}^p \{ \langle s, \alpha_j \rangle \} \cup \bigcup_{i=1}^n \{ \langle x_i, t \rangle \} \cup \left[\bigcup_{j=1}^p \{\alpha_j\} \times \bigcup_{i=1}^n \{x_i\} \right].$$

Wierzchołki s i t są odpowiednio źródłem i odpływem w sieci, natomiast wierzchołki α_j ($j=1, \dots, p$) odpowiadają poszczególnym pojazdom, a wierzchołki x_i ($i=1, \dots, n$) poszczególnym punktom odbioru. Przepustowości łuków $\langle s, \alpha_j \rangle$ są równe c_j ($j=1, \dots, p$), przepustowości łuków $\langle x_i, t \rangle$ są równe q_i ($i=1, \dots, n$), natomiast przepustowości pozostałych łuków są nieograniczone. Jeżeli maksymalny przepływ w $\mathcal{D} = \langle N, A \rangle$ nasyca wszystkie łuki $\langle x_i, t \rangle$, $i=1, \dots, n$, to wartości przepływu w łukach $\langle \alpha_j, x_i \rangle$ odpowiadają wartościom zmiennych $f_j(i)$, które są rozwiązaniem dopuszczalnym problemu P. W takiej sytuacji ustalone przydziały $I_1, \dots, I_p$ odpowia-

dają rozwiązaniu dopuszczalnemu problemowi $p|1,n|WP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$. Strukturę sieci $\mathcal{D} = \langle N, A \rangle$ przedstawia rysunek 4.7.



Rys. 4.7 Sieć odpowiadająca problemowi P.

Dolne oszacowania dla zagadnienia $p|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ przedstawione w rozdziale 3 pracy można wykorzystać jako dolne oszacowania dla zagadnienia $p|1,n|WP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$. Możliwość ta wynika z tego, że relaksacje problemu $p|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ stanowiące jego dolne oszacowania, są równocześnie relaksacjami problemu $p|1,n|WP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ /bez uwzględniania modyfikacji grafów $\hat{G}(\tilde{r}_j)$ poprzez usuwanie łuków z $\hat{G}(\tilde{r}_j)$ /.

4.3 Algorytm

Algorytm rozwiązywania zagadnienia $p|1,n|WP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$, jest modyfikacją algorytmu rozwiązywania zagadnienia $p|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$.

W algorytmie wykorzystane zostały własności problemu przedstawione w rozdziale 4.2.

W trakcie działania algorytmu zbiór I_j ($j=1, \dots, p$) będzie podzielony na dwa rozłączne podzbiory $\hat{I}_j$ i $\tilde{I}_j$. Przy powiększaniu zbioru I_j wyznaczane będą, zamiast zbioru K , zbiory $\hat{K}$ i $\tilde{K}$, zawierające te punkty odbioru, które mogą być dołączone, odpowiednio, do $\hat{I}_j$ i $\tilde{I}_j$. Oznaczenia stosowane w poprzednim algorytmie pozostają bez zmian.

Algorytm

Na początku działania algorytmu należy przyjąć $k^* = \infty$,
 $\tilde{J}_0 = \{1, \dots, n\}$, $j=0$, $\hat{Q} = \sum_{i=1}^n q_i$.

Niech w r -tej iteracji algorytmu mamy ustalony przydział częściowy
 $P_r = \{I_1 = \hat{I}_1 \cup \tilde{I}_1, \dots, I_j = \hat{I}_j \cup \tilde{I}_j\}$.

Krok 1. Wyznaczanie dolnego oszacowania LB

Wyznaczyć wartość $B(I_j)$ rozwiązując problem $1|1, |I_j||PP, \tau^0 \geq 0|$
 $\sum a + \sum wE + \sum vT$.

Wyznaczyć wartość dolnego oszacowania $LB_{p-j}(\tilde{J}_j)$ problemu $p-1|1, |\tilde{J}_j||WP, \tau^0 \geq 0| \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Dokonać podstawienia

$$LB := \sum_{i=1}^j B(I_i) + LB_{p-j}(\tilde{J}_j)$$

Jeżeli $LB \geq k^*$ to należy przejść do kroku 7.

W przeciwnym przypadku przejść do kroku 2.

Krok 2. Wyznaczanie górnego oszacowania

Wyznaczyć wartość $HR_{p-j}(\tilde{J}_j)$ rozwiązania heurystycznego problemu
 $p-j|1, |\tilde{J}_j||WP, \tau^0 \geq 0| \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Sprawdzić, czy dla wyznaczonego w rozwiązaniu heurystycznym przydziału $I_1, \dots, I_j, I_{j+1}^H, \dots, I_p^H$ istnieje rozwiązanie dopuszczalne problemu P.

Jeżeli nie, to przejść do kroku 3.

W przeciwnym przypadku dokonać podstawienia

$$k := \sum_{i=1}^j B(I_i) + HR_{p-j}(\tilde{J}_j).$$

Jeżeli $k < k^*$ to dokonać podstawienia $k^* := k$ i zapamiętać rozwiązanie odpowiadające wartości k /jako najlepsze do tej pory znalezione rozwiązanie/.

Przejść do kroku 3.

Krok 3. Sprawdzanie dopuszczalności przydziału

Dokonać podstawienia:

$$j := j+1,$$

$$\hat{C} := \sum_{i=j+1}^p c_j,$$

$$\hat{I}_j := \emptyset,$$

$$\tilde{I}_j := \emptyset,$$

Wyznaczyć zbiór $\tilde{J}_j$.

Jeżeli spełniony jest warunek

$$\sum_{i \in \tilde{J}_j} q_i < \hat{Q} - \hat{C},$$

to przejść do kroku 7. W przeciwnym przypadku przejść do kroku 4.

Krok 4.

Wyznaczyć zbiór

$$\hat{K}_j := \left\{ k \in \tilde{J}_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} \tilde{I}_i \mid q_k \leq c_j - \sum_{i \in \hat{I}_j} q_i - |\tilde{I}_j| \right\},$$

oraz zbiór

$$\tilde{K}_j := \left\{ k \in \tilde{J}_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} \hat{I}_i \mid \tilde{I}_j \cap \tilde{I}_i \neq \emptyset \Rightarrow k \notin \tilde{I}_i, i=1, \dots, j-1 \right\}.$$

Jeżeli $\hat{K}_j = \emptyset$, $\tilde{K}_j = \emptyset$ oraz $\sum_{i \in \hat{I}_j} q_i + |\tilde{I}_j| < \hat{Q} - \hat{C}$ to przejść

do kroku 6. W przeciwnym przypadku wyznaczyć $l_{\min}(j)$.

Jeżeli $l_{\min}(j) > n + p - 1$ to przejść do kroku 7.

Jeżeli $\hat{K}_j = \emptyset$ i $\tilde{K}_j = \emptyset$ oraz $\sum_{i \in \hat{I}_j} q_i + |\tilde{I}_j| \geq \hat{Q} - \hat{C}$, to dołączyć

do drzewa przydziałów nowy węzeł $P_s = \{I_1, \dots, I_j = \hat{I}_j \cup \tilde{I}_j\}$ i łuk $\langle P_r, P_s \rangle$. Następnie przejść do kroku 1.

W przeciwnym przypadku sprawdzić warunek

$$\sum_{i \in \hat{I}_j} q_i + \sum_{i \in \hat{K}_j} q_i + |\tilde{K}_j - \hat{K}_j| + |\tilde{I}_j| < \hat{Q} - \hat{C}$$

Jeżeli jest spełniony, to przejść do kroku 6; w przeciwnym przypadku przejść do kroku 5.

Krok 5. Uzupełnianie przydziału punktów odbioru do trasy j-tego pojazdu

Jeżeli $\hat{K}_j = \emptyset$, to przejść do kroku 6. W przeciwnym przypadku wybrać takie $i^* \in K_j$, że:

$$q_{i^*} = \max_{i \in \hat{K}_j} q_i .$$

Dokonać podstawienia:

$$\hat{I}_j := \hat{I}_j \cup \{i^*\},$$

$$\hat{Q} := \hat{Q} - \{i^*\},$$

$$\tilde{J}_j := \tilde{J}_j - \{i^*\} .$$

Przejść do kroku 4.

Krok 6.

Sprawdzić warunek

$$\left| \bigcup_{i=1}^{j-1} I_j \right| > n + p - 1$$

Jeżeli jest spełniony przejść do kroku 7. W przeciwnym przypadku wybrać $i^* \in \tilde{K}_j$, taki że:

$$q_{i^*} = \max_{i \in \tilde{K}_j} q_i .$$

Dokonać podstawienia:

$$\tilde{I}_j := \tilde{I}_j \cup \{i^*\},$$

$$\hat{Q} := \hat{Q} - 1,$$

$$\tilde{J}_j := \tilde{J}_j - \{i^*\} .$$

Przejść do kroku 4.

Krok 7. Cofanie

Jeżeli $I_j = \emptyset$ oraz $j=1$, czyli należy cofnąć się od korzenia drzewa, to koniec algorytmu. Znalezione najlepsze do tej pory rozwiązanie o wartości k^* jest rozwiązaniem optymalnym problemu.

W przeciwnym przypadku, jeśli $I_j = \emptyset$ i $j > 1$ to podstawić $j := j-1$ i cofnąć się do poprzednika $P_s = \{I_1, \dots, I_j\}$ i przejść do początku kroku 7.

W przeciwnym przypadku, jeśli $I_j \neq \emptyset$, należy dokonać podstawienia

$$I_j := I_j - \{\hat{i}\},$$

gdzie $\hat{i}$ jest ostatnim elementem przydzielonym do I_j . Jeżeli $\hat{i} \in \hat{I}_j$, to dokonać podstawień:

$$\hat{I}_j := \hat{I}_j - \{\hat{i}\},$$

$$\hat{Q} := \hat{Q} + q_{\hat{i}}$$

$$\hat{K}_j = \hat{K}_j - \{\hat{i}\}.$$

W przeciwnym przypadku, gdy $\hat{i} \in \tilde{I}_j$, to dokonać podstawień

$$\tilde{I}_j := \tilde{I}_j - \{\hat{i}\},$$

$$\hat{Q} := \hat{Q} + 1,$$

$$\tilde{K}_j := \tilde{K}_j - \{\hat{i}\}.$$

Przejść do kroku 4. ■

5. Algorytmy heurystyczne

W rozdziale tym sformułowane zostaną algorytmy heurystyczne, które można zastosować do wyznaczania rozwiązań zagadnień rozważanych w pracy.

Znanych jest obecnie wiele heurystycznych metod rozwiązywania zagadnienia komiwojażera. Najbardziej znane wśród nich, to:

- metoda najbliższego sąsiada, która gwarantuje otrzymanie wartości rozwiązania nie gorszej niż $1/2 ([\log n] + 1)$ wartości rozwiązania optymalnego [61],
- metoda trasy r -optymalnej Lina [51], która dla $n \geq 8$ i $r \leq n/4$ gwarantuje, że rozwiązanie r -optymalne jest nie gorsze niż $2(1-1/n)$ rozwiązania optymalnego [61]

- metoda rozwiązania optymalnego w sensie średnim [54], która pozwala uzyskiwać, jak to wynika z eksperymentów obliczeniowych, rozwiązanie różniące się przeciętnie nie więcej niż 1 % od rozwiązania optymalnego.

W przypadku zagadnień zbliżonych do zagadnienia komiwojażera, w których występują dodatkowe ograniczenia, wraz ze wzrostem liczby ograniczeń, problem konstruowania dobrych rozwiązań przybliżonych staje się coraz trudniejszy. Istnieje wiele algorytmów heurystycznych służących do rozwiązywania zagadnień typu $p|1, n|PP \mid \sum a$. Algorytmy te nie dają już jednak tak dobrych wartości rozwiązań, jak metody heurystyczne rozwiązywania zagadnienia komiwojażera. Ponadto wymagają one zazwyczaj założenia, że liczba pojazdów jest nieograniczona /co pozwala uniknąć rozważania problemu istnienia rozwiązania/.

Przedstawione w pracy zagadnienie $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$ wymaga uwzględnienia dużej liczby ograniczeń. Poza tym, ze względu na bardziej złożoną /niż w przypadku problemu komiwojażera/ postać funkcji celu, wymaga uwzględnienia większej liczby parametrów przy konstruowaniu "dobrego" rozwiązania dopuszczalnego zagadnienia. Parametrami tymi są:

- najwcześniejsze pożądane terminy obsługi punktów - $r_i, i=0, \dots, \dots, n+1$;
- najpóźniejsze pożądane terminy obsługi punktów - $d_i, i=0, \dots, \dots, n+1$;
- kary za przekroczenie pożądanych terminów obsługi - w_i oraz $v_i, i=0, \dots, n+1$;
- czas obsługi punktów - $\tau_i^0, i=0, \dots, n$;
- macierz kosztów /czasów/ przejazdu między punktami - $[a_{ik}]$ $i, k=0, \dots, n+1$;
- zapotrzebowania punktów odbioru $q_i, i=1, \dots, n$;
- pojemności pojazdów $c_j, j=1, \dots, p$.

W pracy sformułowane zostaną trzy wersje algorytmu heurystycznego, które wykorzystano w implementacji programowej algorytmu rozwiązywania zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$. Określimy wartość $H_k(i)$

$$H_k(i) \triangleq 2 \cdot a_{ki} + r_i \cdot w_i + d_i/v_i - a_{1, n+1} - \tau_i^0,$$

$$k=1, \dots, n; \quad i \neq k, \quad i=1, \dots, n.$$

Wartość $H_k(i)$ ma oceniać, który z punktów odbioru nie przydzielony do żadnej trasy, ma być umieszczony bezpośrednio za punktem k .

Niech $\pi_j^h = (\pi_j^h(1), \dots, \pi_j^h(r_j))$, $j=1, \dots, p$ oznaczają porządek punktów odbioru w trasach poszczególnych pojazdów.

Algorytm I

Jako wartości początkowe przyjąć: $j = 0$, $\pi_j^h(0) = 0$, $j=1, \dots, p$,
 $\bar{J} = J$, $l_0 = 1$, $l_j = 0$; $j=2, \dots, p$.

Krok 1.

Znaleźć punkt odbioru i^* , który minimalizuje wyrażenie:

$$\min_{\substack{l_j \\ i \in B_j^{l_j}}} H_{\pi_j^k(l_j-1)}(i), \text{ gdzie } B_j^{l_j} = \left\{ i \in \bar{J} \mid \sum_{k=1}^{l_j-1} q_{\pi_j^h(k)} + q_i \leq c_j \right\}.$$

Dokonać podstawień:

$$\pi_j^h(l_j) := i^*,$$

$$\bar{J} = \bar{J} - \{i^*\}.$$

Przejsć do kroku 2.

Krok 2.

Jeżeli $\bar{J} = \emptyset$, to koniec algorytmu, wyznaczone zostało rozwiązanie dopuszczalne problemu $p|1, n|PP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$. Jeżeli $B_j^{l_j} = \emptyset$ /dla każdego $j=1, \dots, p$ /, to koniec algorytmu. Nie znalezione zostało rozwiązanie dopuszczalne. W przeciwnym przypadku dokonać podstawienia:

$$j := j+1,$$

Jeżeli $j \leq p$, to dokonać podstawienia $j := 1$.

Podstawić:

$$l_j := l_j + 1,$$

i przejść do kroku 1. ■

W algorytmie I przydziela się punkty odbioru równocześnie do tras wszystkich pojazdów. Algorytm kończy działanie, gdy wszystkie punkty odbioru są przydzielone do trasy jednego z pojazdów.

Może się zdarzyć, że w przypadku, gdy zbiór $\bar{J}$ nie jest zbiorem pustym, to wszystkie zbiory $B_j^{1,j}$ są zbiorami pustymi. Oznacza to, że ze względu na pojemność pojazdów, nie można już żadnego punktu odbioru przydzielić do tras pojazdów. W takiej sytuacji algorytm I nie znajduje rozwiązania dopuszczalnego problemu $p|1,n|PP, \tau^0 \geq 0|$

$$\sum a + \sum wE + \sum vT.$$

Algorytm II

Jako wartości początkowe przyjąć: $j = 0, \pi_k^h(0) = 0 \ (k=1, \dots, p), l_0 = 1, \bar{J} = J$.

Krok 1.

Znaleźć punkt i^* , który minimalizuje wyrażenie:

$$\min_{i \in B_j^{1,j}} H \pi_j^h(l_{j-1})(i), \quad B_j^{1,j} = \left\{ i \in \bar{J} \mid \sum_{k=1}^{l_{j-1}} q \pi_j^h(k) + q_i \leq c_j \right\}.$$

Dokonać podstawień:

$$\pi_j^h(l_j) := i^*,$$

$$\bar{J} = \bar{J} - \{i^*\}.$$

Przejsć do kroku 2.

Krok 2.

Jeżeli $\bar{J} = \emptyset$, to koniec algorytmu. Znaleziono rozwiązanie dopuszczalne. W przeciwnym przypadku, sprawdzić czy mamy:

$$B_j^{1,j} = \emptyset. \text{ Jeśli nie, to dokonać podstawienia } l_j = l_j + 1 \text{ i przejść}$$

do kroku 1.

W przeciwnym przypadku dokonać podstawienia:

$$j := j + 1.$$

Jeżeli $j > p$, to koniec algorytmu. Nie znaleziono rozwiązania dopuszczalnego problemu. W przeciwnym przypadku dokonać podstawienia

$l_j := 1$ i przejść do kroku 1.

W algorytmie II wyznacza się kolejno trasy dla poszczególnych pojazdów. Algorytm ten zapewnia lepsze niż algorytm I wykorzystanie pojemności pojazdów, w sytuacji gdy

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^n q_i \quad \text{jest nie wiele mniejsza niż} \quad \hat{C} = \sum_{j=1}^p c_j. \quad \text{W przypadku,}$$

gdy $p = 1$ oba algorytmy są równoważne i zawsze prowadzą do otrzymania rozwiązania dopuszczalnego problemu jeśli tylko $\hat{C} \geq \hat{Q}$.

Algorytm III

Algorytm ten polega na wykorzystaniu jednego z algorytmów pakowania zamieszczonych w pracy [65] do znalezienia rozwiązania problemu p -podziału. W algorytmie tym rozwiązanie konstruuje się dwustopniowo. Najpierw wyznacza się dopuszczalny przydział punktów odbioru do tras poszczególnych pojazdów w ten sposób, że przydziela się kolejno punkty odbioru do trasy pojazdu o możliwie najmniejszym numerze /pod warunkiem, że nie zostanie przekroczona pojemność pojazdu/. A następnie, jeśli otrzymano rozwiązanie dopuszczalne problemu p -podziału, wykorzystuje się algorytm II wyznaczenia możliwie najlepszej sekwencji punktów odbioru w trasie każdego z pojazdów.

Wszystkie przedstawione algorytmy mają złożoność $O(n^2)$. Żaden z nich nie gwarantuje otrzymania rozwiązania dopuszczalnego problemu $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Algorytmy te można zastosować bezpośrednio do wyznaczania rozwiązania dopuszczalnego problemu $p|1, n|WP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Wynika to z faktu, że rozwiązanie dopuszczalne problemu z trasami typu PP jest również rozwiązaniem dopuszczalnym problemu z trasami typu WP.

Inną z możliwości jest modyfikacja algorytmów polegająca na podziale pewnych punktów odbioru x_i na dwa punkty o sumarycznym zapotrzebowaniu równym początkowej wartości q_i . Podział taki następuje w sytuacji, gdy dołączenie punktu odbioru x_i do trasy pojazdu powoduje przekroczenie pojemności pojazdu. To znaczy, jeśli mamy

$$\sum_{k=1}^{l-1} q \pi_j^h(k) + q_i > c_j, \quad \text{to punkt odbioru zostaje podzielony na}$$

dwa punkty x_i^1 i x_i^2 o zapotrzebowaniach $q_i^1 = c_j - \sum_{k=1}^{l-1} q \pi_i^h(k)$ oraz

$q_i^2 = q_i - q_i^1$. Punkt x_i^1 zostaje dołączony do trasy pojazdu, natomiast punkt x_i^2 zostaje umieszczony w zbiorze $\bar{J}$ zamiast punktu x_i .

6. Zagadnienia ustalania tras pojazdów przy funkcji celu uwzględniającej kary za użycie pojazdów

Zagadnienie $p|1,n|PP(WP)$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT + \sum k_u$ różni się od poprzednio formułowanych problemów z trasami typu PP (lub WP), tym że w funkcji celu występuje dodatkowy człon postaci:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n x_{0i}^1(j) \cdot k_u(j),$$

gdzie $k_u(j)$ jest dodatkową opłatą za użycie pojazdu o numerze j -tym. Wartość $k_u(j)$ może być interpretowana jako koszt wydzierżawienia bądź koszt zakupu pojazdu. Uwzględnienie w funkcji celu członu $\sum k_u$ wymaga tylko niewielkiej modyfikacji algorytmów rozwiązywania zagadnień $p|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ i $p|1,n|WP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$ przedstawionych w rozdziale 3.4 pracy.

A mianowicie:

- przy wyznaczaniu wartości rozwiązania problemu z jednym pojazdem /krok 2 algorytmów/ należy przyjąć /w przypadku, gdy $I_j \neq 0$ /, że nowa wartość rozwiązania $B'(I_j)$ jest równa wartości $B(I_j) + k_u(j)$.
- przy wyznaczaniu dolnego oszacowania można do wyznaczonej wartości $LB_p(J)$ dodać wartość dolnego oszacowania kosztów użycia pojazdów LBK_p , przy czym

$$LBK_p = \sum_{j=1}^{p_{\min}} k_u(\alpha_j), \quad k_u(\alpha_j) \leq k_u(\alpha_{j+1}),$$

$$j=1, \dots, p-1,$$

gdzie $p_{\min}$ oznacza dolne oszacowanie liczby użytych pojazdów określone w rozdziale 3.2.3. pracy.

Wprowadzenie kar za użycie pojazdów pozwala na zupełnie inne niż dotychczas potraktowanie zagadnienia istnienia rozwiązania problemu $p|1,n|PP$, $\tau^0 \geq 0$ | $\sum a + \sum wE + \sum vT$. Można bowiem wprowadzić fikcyjny $p+1$ -szy pojazd o nieograniczonej pojemności i przyjąć $k_u(p+1) = \infty$. W takiej sytuacji, nawet jeśli algorytm nie znalazł rozwiązania do-

puszczalnego, to rozwiązanie, w którym został użyty fikcyjny pojazd, może zostać wykorzystane w rzeczywistym systemie transportowym. Zamiast jednego fikcyjnego pojazdu o nieograniczonej pojemności można wprowadzić dostatecznie dużo fikcyjnych pojazdów o określonej pojemności.

7. Eksperymenty obliczeniowe

Eksperymenty obliczeniowe zostały przeprowadzone dla algorytmu rozwiązywania zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$. Opracowano dwie wersje algorytmu. W jednej jako dolne oszacowanie stosowano wartość testu $LB_p^I(J)$, w drugiej testu $LB_p^{II}(J)$.

W algorytmie uwzględniono możliwość wyznaczania rozwiązania α -optymalnego. W trakcie działania algorytmu sprawdzany jest warunek $k^* - LB \leq \alpha \cdot k^*$, gdzie LB oznacza wartość dolnego oszacowania, a k jest wartością najlepszego do tej pory znalezionego rozwiązania. Jeśli warunek ten jest spełniony to następuje operacja cofania w drzewie rozwiązań. W przypadku, gdy $\alpha = 0$, po skończonym przebiegu programu otrzymywane jest rozwiązanie optymalne, natomiast, jeśli $\alpha > 0$, to po skończonym przebiegu programu wiadomo, że rozwiązanie optymalne znajduje się w przedziale $[k^* \cdot (1 - \alpha), k^*]$. Ponieważ, w trakcie realizacji algorytmu, wyznaczenie dobrego dolnego oszacowania zależy od tego, jak blisko wartości optymalnej znajduje się wartość górnego oszacowania, stąd korzystne jest kilkakrotne uruchomienie programu z coraz mniejszą wartością α i z coraz większą wartością górnego oszacowania, którą została otrzymana w poprzednim przebiegu programu jako wartość k^* . Podobne podejście /w różnych wersjach/ zastosowane zostało w pracach [4] [5]. W trakcie działania algorytmu, w przypadku ustalenia tras $p-1$ pojazdów, automatycznie otrzymywany jest przydział punktów odbioru do trasy p -tego pojazdu. W takiej sytuacji przyjęto, że nie wyznacza się dolnego oszacowania w węźle bezpośrednio poprzedzającym węzeł wiszący w drzewie H_p , tylko przechodzi się do rozwiązywania kolejnego problemu $1|1, |I_p|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$. W ten sposób, zamiast dwu węzłów $P_r = \{I_1, \dots, I_{p-1}\}$ i $P_s = \{I_1, \dots, I_{p-1}, I_p\}$, rozpatruje się tylko węzeł wiszący P_s . Jak wiadomo, każdemu węzłowi $P_k = \{I_1, \dots, I_j\}$ odpowiada rozwiązanie pewnego problemu jednopojazdowego. Jeżeli wartość dolnego oszacowania rozwiązania optymalnego tego problemu, $LB(I_j)$ spełnia warunek

$$\sum_{i=1}^{j-1} B(I_i) + LB(I_j) \geq k^*,$$

to następuje cofanie do poprzednika wężła P_k w drzewie przydziałów H_p .

Warunek ten zastosowano jako dodatkowy test sprawdzający możliwość wygenerowania lepszego rozwiązania, niż rozwiązanie odpowiadające aktualnej wartości k^* .

Dla realizacji eksperymentów obliczeniowych napisano program w języku ALGOL 1900. W programie wykorzystano możliwość dynamicznej rezerwacji pamięci operacyjnej. Uzyskano w ten sposób maksymalną pojemność pamięci celów roboczych. Pojemność tę przedstawiono w postaci stosu, co umożliwiło rozwiązywanie stosunkowo dużych przykładów na maszynie ODRA 1325. Sam program bez danych zajmuje 18 kśłów pamięci. Ponadto w programie przewidziano możliwość przerywania obliczeń w przypadku przekroczenia dopuszczalnego czasu obliczeń i odczytanie najlepszego dotychczas znalezionej rozwiązania.

Ze względu na możliwość przeprowadzania obliczeń nie tylko na maszynie ODRA 1305, ale i na maszynie ODRA 1325, przy wyznaczaniu dolnych oszacowań zastosowano rozwiązanie programowe minimalizujące zajętość pamięci operacyjnej kosztem czasu obliczeń. Rozwiązanie to polega na tym, że przy wyznaczaniu najkrótszej drogi w grafie $\hat{G}$ lub $\hat{G}(\tilde{r}_j)$ w każdej iteracji procedury subgradientowej pamiętane są tylko obciążenia $\mathcal{T}_{ij}^k$ łuków dla ostatnio rozważanej wartości k , czyli zamiast $2n+1 + n(n-1)^2$ liczb pamiętać należy tylko co najwyżej $n(n-1)$ liczb. W konsekwencji jednak w każdej kolejnej iteracji procedury subgradientowej obciążenia łuków $\mathcal{T}_{ij}^k$ należy wyznaczać od nowa, co wiąże się z rozwiązaniem ponownie $n(n-1)^2 + 2n+1$ problemów PO, a tym samym kilkakrotnym wydłużeniem czasu wykonywania iteracji.

7.1. Przykłady testujące

Eksperymenty obliczeniowe przeprowadzono na 7 przykładach testujących. Podstawowe dane przedstawiono w tablicy 7.1.

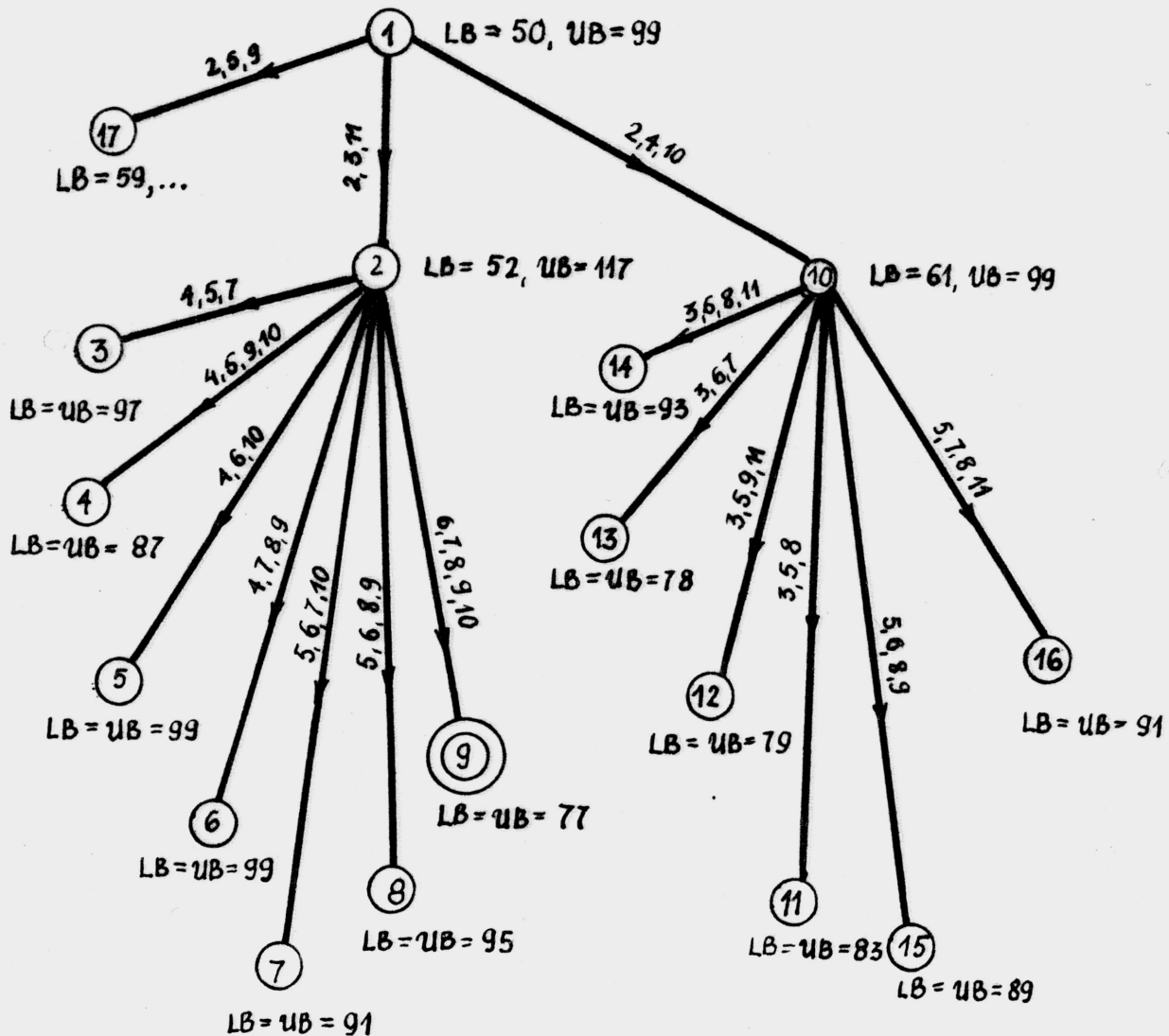
TABLICA 7.1. Przykłady testujące

numer przyk- ładu	liczba pojaz- dów p	pojemności pojazdów c_j , $j=1, \dots p$	liczba punktów odbioru n	Zapotrzebowania punktów odbioru q_i , $i=1, \dots, n$
1	1	-	6	-
2	3	20, 20, 15	7	10, 9, 8, 7, 6, 5, 5
3	3	20, 20, 15	10	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
4	3	20, 20, 20	10	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
5	10	30, 30, 30, 30, 20, 20, 20, 20, 20, 10	18	20, 18, 18, 17, 16, 12, 12, 12, 11, 11, 11, 11, 10, 9, 9, 8
6	10	30, 30, 30, 30, 20, 20, 20, 20, 20, 10	18	20, 18, 18, 18, 17, 16, 12, 12, 12, 11, 11, 11, 11, 10, 9, 9, 8, 5, 5
7	7	50, 50, 50, 50, 90, 90, 90	18	48, 42, 31, 31, 26, 26, 25, 24, 23, 23, 22, 20, 19, 18, 18, 17, 16

Wartości czasu obsługi τ^0 zostały wylosowane z rozkładu równomiernego w przedziale $[1, 10]$. Jako macierz czasów /odległości/ $[a_{ij}]$ przyjęto macierz kosztów /bądź jej fragmenty/ z przykładu zagadnienia komiwojażera umieszczonego w pracy [20]. Wartości r_i i d_i wygenerowano z przedziału $[0, 500]$, przy czym zawsze sprawdzany był warunek $r_i \leq d_i$. W każdym z przykładów testujących, poza przykładem 5, przyjęto, że kary za przekroczenie terminów obsługi w_i i v_i są równe jedności. W przykładzie 5 wartości w_i i v_i wygenerowano z przedziału $[1, 15]$.

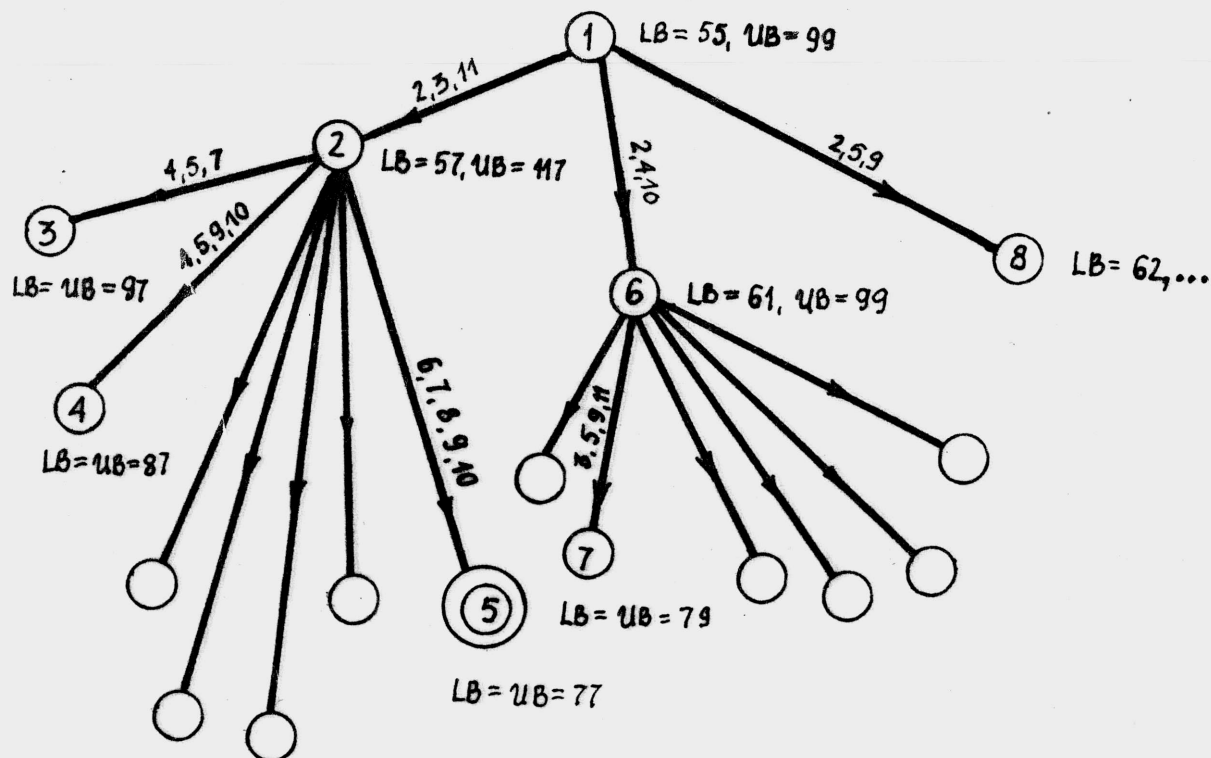
7.2. Wyniki obliczeniowe

Przeprowadzone eksperymenty obliczeniowe składają się z dwóch części: w pierwszej skoncentrowano się na badaniu zbieżności procedury subgradientowej przy wyznaczaniu dolnego oszacowania $LB_p^{II}(J)$ oraz dolnego oszacowania problemu $1|1,n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$; w drugiej badano czas obliczeń i liczbę iteracji wykonywanych przez algorytm rozwiązywania zagadnienia $p|1,n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$. Na rysunku 7.1 przedstawiony został fragment drzewa przydziałów dla przykładu 3, w przypadku, gdy zastosowano w algorytmie test $LB_p^I(J)$. Przyjęto $\alpha = 0$. Liczby obok łuków drzewa oznaczają numery punktów odbioru przydzielonych do trasy kolejnego pojazdu. Liczby obok węzłów drzewa oznaczają kolejno wartość testu oraz wartość rozwiązania dopuszczalnego. Podwójnym kółkiem został oznaczony węzeł odpowiadający najlepszemu znalezionemu rozwiązaniu.



Rys. 7.1 Fragment drzewa rozwiązań, test $LB_p^I(J)$.

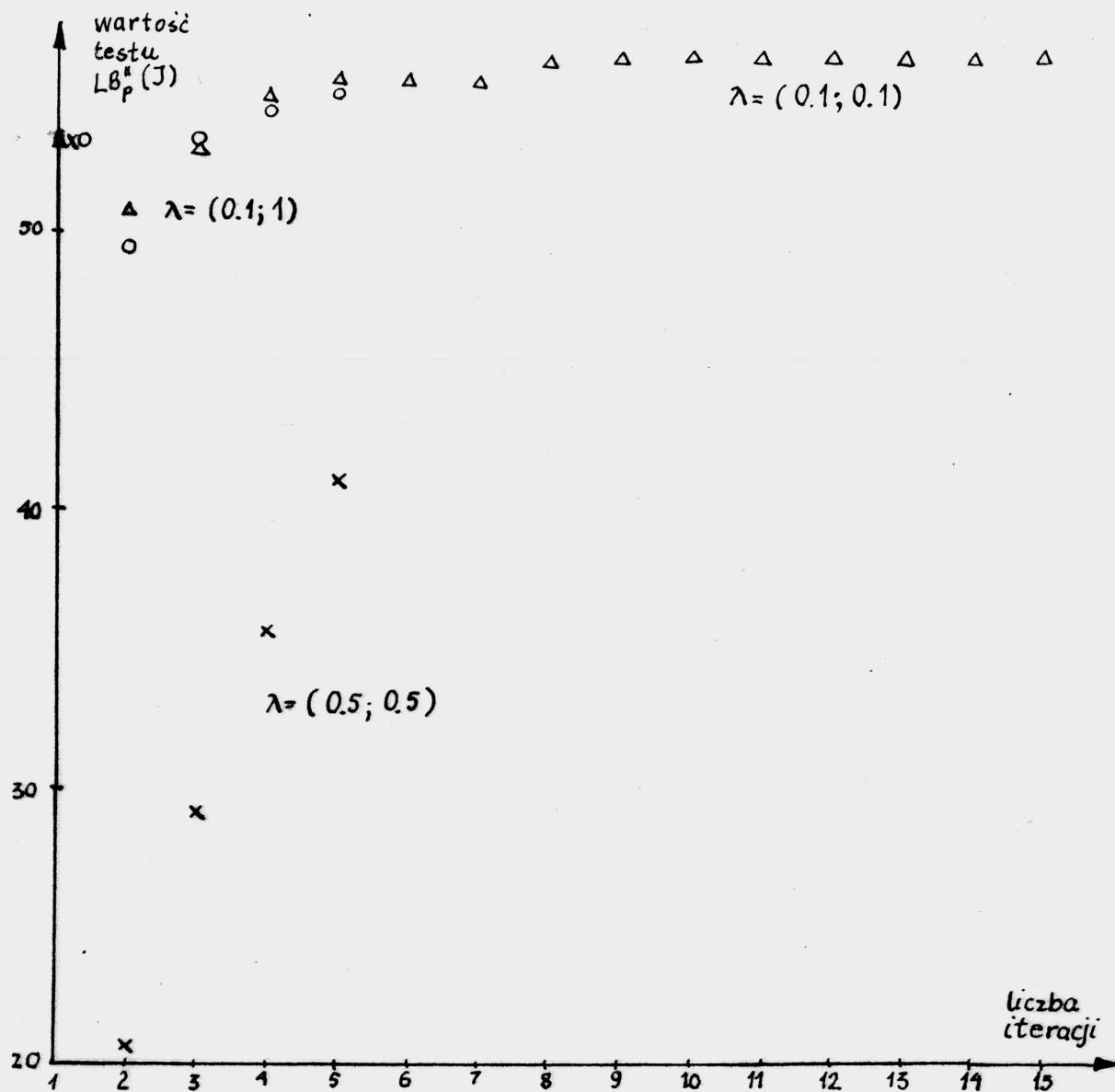
Natomiast na rysunku 7.2 przedstawiono fragment drzewa przydziałów dla przykładu 3, w przypadku, gdy zastosowano w algorytmie test $LB_p^{II}(J)$. Podobnie jak poprzednio przyjęto $\alpha = 0$. Na rysunku węzły bez numerów odpowiadają sytuacji, gdy nastąpiło cofanie do poprzedniego węzła drzewa przydziałów w trakcie działania algorytmu rozwiązującego problem $1|1, |I_3| |PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$.



Rys. 7.2 Fragment drzewa rozwiązań, test $LB_p^{II}(J)$

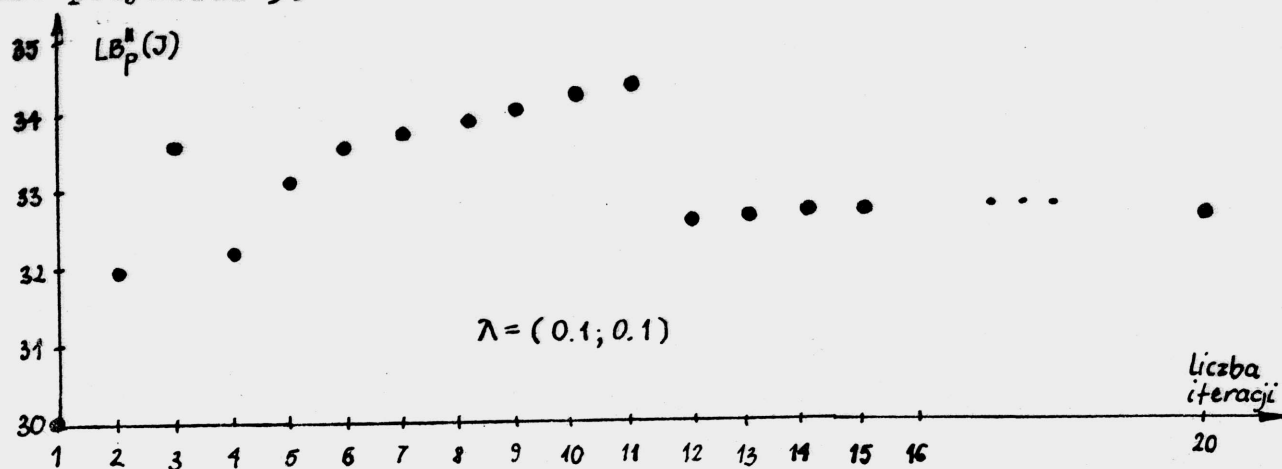
Z porównania rysunków 7.1 i 7.2 wynika, że niewielka poprawa wartości dolnego oszacowania pozwala znacznie zmniejszyć liczbę przeglądanych węzłów w drzewie H_p . W obu przypadkach wykonywano, przy wyznaczaniu wartości oszacowań, tę samą liczbę iteracji procedury subgradientowej.

Na wykresie 7.3 przedstawione zostały wartości oszacowania $LB_p^{II}(J)$ uzyskiwane w kolejnych iteracjach procedury subgradientowej. Jako wartość górnego oszacowania przyjęto wartość $UB = 180$. Obliczenie przeprowadzone zostały dla różnych wartości współczynników λ . W nawiasach obok wykresów podano wartości λ stosowane przy wyznaczaniu kar u_k oraz v_{jk} .

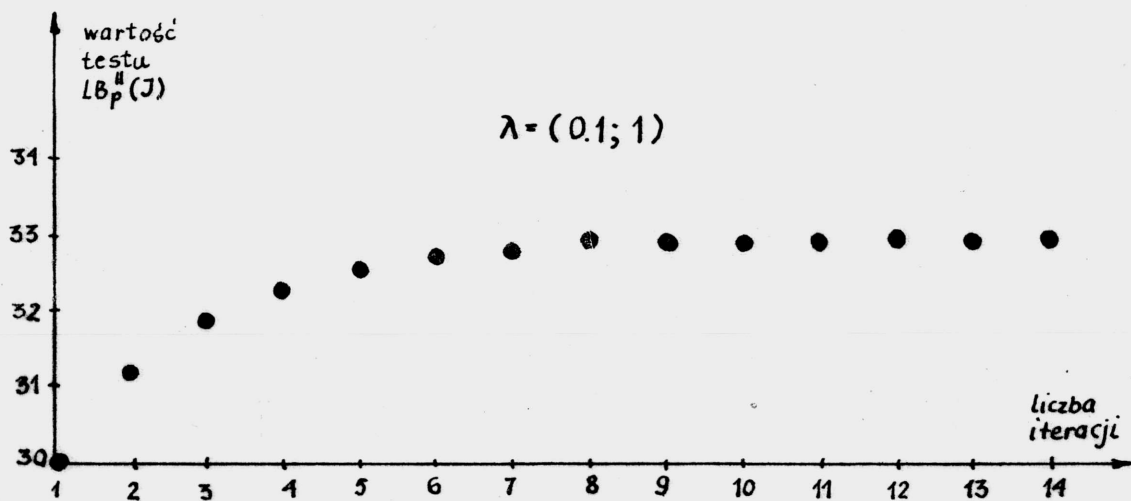


Rys. 7.3 Wykres zależności wartości testu $LB_p^{II}(J)$ od liczby iteracji dla przykładu 3.

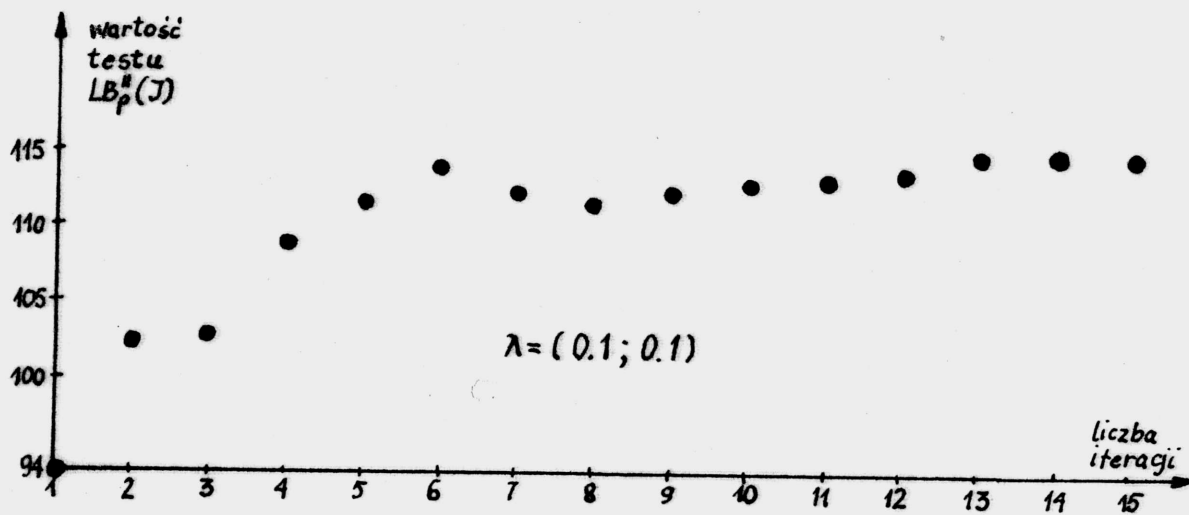
Na rys. 7.4 i 7.5 przedstawiono wykresy zależności wartości dolnego oszacowania $LB_p^{II}(J)$ od liczby iteracji procedury subgradientowej dla przykładu 3.



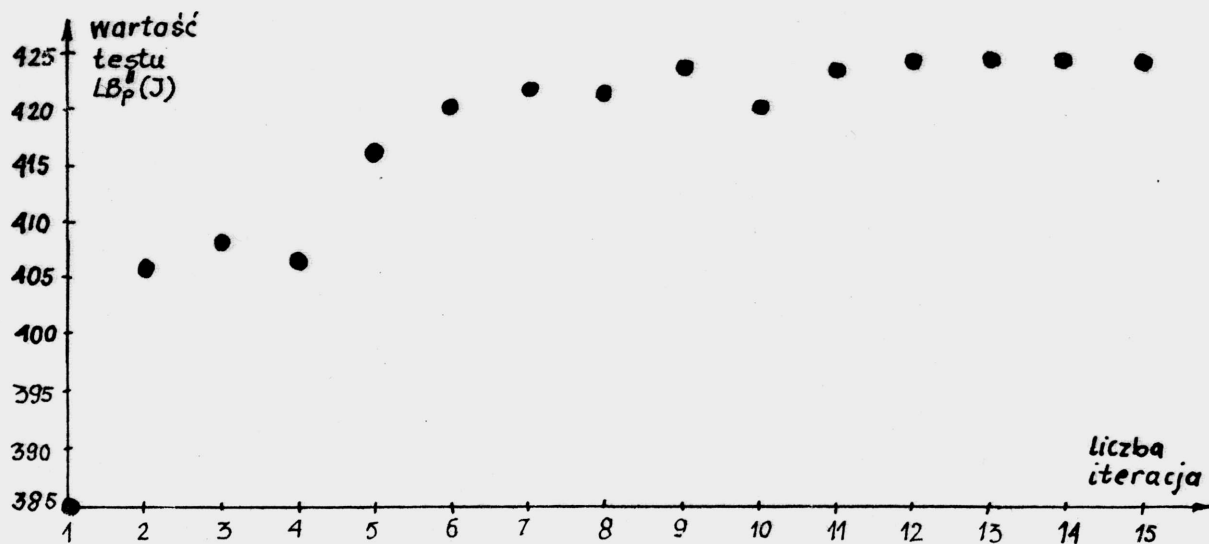
Rys. 7.4



Rys. 7.5



Rys. 7.6



Rys. 7.7

Rysunki 7.6 i 7.7 przedstawiają wykresy zależności wartości dolnego oszacowania $LB_p^{II}(J)$ w zależności od liczby iteracji procedury subgradientowej dla przykładów, w których $p=3$ i $p=5$, $n=18$. Pozostałe parametry są takie same jak w przypadku przykładu 6. W obu przykładach przyjęto, że początkowe wartości współczynnika λ są równe 0.1. W przypadku wykonania 5 niepomysłnych iteracji, wartości współczynnika była zmniejszana o połowę. W przypadku, gdy kolejna iteracja prowadziła do poprawy wartości dolnego oszacowania, współczynnik λ był zwiększany o 25 %.

Analiza wykresów przedstawionych na rys. 7.3 do 7.7 prowadzi do wniosku, że już po kilkunastu iteracjach procedury subgradientowej wartości testu $LB_p^{II}(J)$ nie ulega większej zmianie. Wynika to z faktu, że zagadnienie, którego rozwiązanie optymalne służy jako dolne oszacowanie wartości rozwiązania problemu $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$, nie uwzględnia /lub uwzględnia w bardzo małym stopniu/ wielu ograniczeń występujących w rozważanym problemie. Natomiast w przypadku zagadnienia $1|1, |I_j| |PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ /które jest rozwiązywane w każdym węźle drzewa przydziału H_p /, bardzo często, już w trzeciej lub czwartej iteracji procedury subgradientowej, otrzymywana wartość dolnego oszacowania była równa wartości rozwiązania optymalnego.

Analiza czasów realizacji poszczególnych kroków algorytmu rozwiązywania zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$ wykazała, że krok 1 algorytmu /obliczanie wartości testu/ zajmuje około 60 do 80 % czasu działania programu /przy przyjęciu jako wartość maksymalna liczby 20 iteracji procedury subgradientowej/. Dlatego też przy dalszych eksperymentach obliczeniowych zdecydowano się na znaczne ograniczenie maksymalnej liczby iteracji procedury subgradientowej. Wyniki obliczeń testujących przedstawiono w tabeli 7.2.

Należy nadmienić, że we wszystkich rozwiązywanych przykładach wartość dolnego oszacowania była nie mniejsza niż 50 % w stosunku do najlepszego rozwiązania wyznaczonego w trakcie działania algorytmu. Rozwiązanie to znajdowane było już w kilku pierwszych iteracjach algorytmu i dalej nie było już poprawiane, mimo wykonania znacznej liczby iteracji. Należy się więc spodziewać, że otrzymane rozwiązania niewiele różnią się od rozwiązania optymalnego.

Eksperymenty obliczeniowe wskazują na możliwość zastosowania przedstawionego algorytmu do rozwiązywania zagadnień średniego rozmiaru /rzędu $n=20$ /. W przypadku większej liczby punktów odbioru czas obliczeń, a szczególnie czas przeznaczony na wyznaczanie wartości dolnego osza-

TABELA 7.2 Wyniki obliczeń testujących

Nr przy- kładu	DANE		Wartości po- czątkowe		Liczba itera- cji w teście	α	k * wartość najlep- szego rozwią- -zania
	p	n	uB	λ			
1	1	6	180	0.1	20	0.0	45
2	3	7	60	0.1	2	0.0	53
3	3	10	180	0.1	2	0.3	79
3	3	10	79	0.1	2	0.3	77
4	3	10	77	0.1	2	0.3	73
4	3	10	73	0.1	2	0.3	73
5	10	18	1790	0.1	2	0.3	1276
5	10	18	1276	0.1	2	0.2	1276
6	10	18	1000	0.1	1	0.3	942
7	7	18	2000	0.1	1	0.3	1894
6	10	18	942	0.1	1	0.4	942
7	7	18	1894	0.1	1	0.4	1734

Liczba:				Czas obli- czeń ^{1/} s	Uwagi
itera- cji w teś- cie	pop- rawne roz- wiąz.	ite- racji kroku 1	ite- racji kroku 2		
-	-	-	-	650	
7	1	60	34	354	
14	2	27	9	309	rozwiązanie suboptymalne
7	1	211	108	715	rozwiązanie suboptymalne
6	1	181	93	615	rozwiązanie suboptymalne
4	0	107	56	386	
9	2	8	3	345	
11	0	10	4	378	rozwiązanie suboptymalne
11	1	198	104	364	rozwiązanie suboptymalne
69	1	67	5	366	rozwiązanie suboptymalne
24	0	23	5	361	rozwiązanie suboptymalne
132	1	128	8	360	rozwiązanie suboptymalne

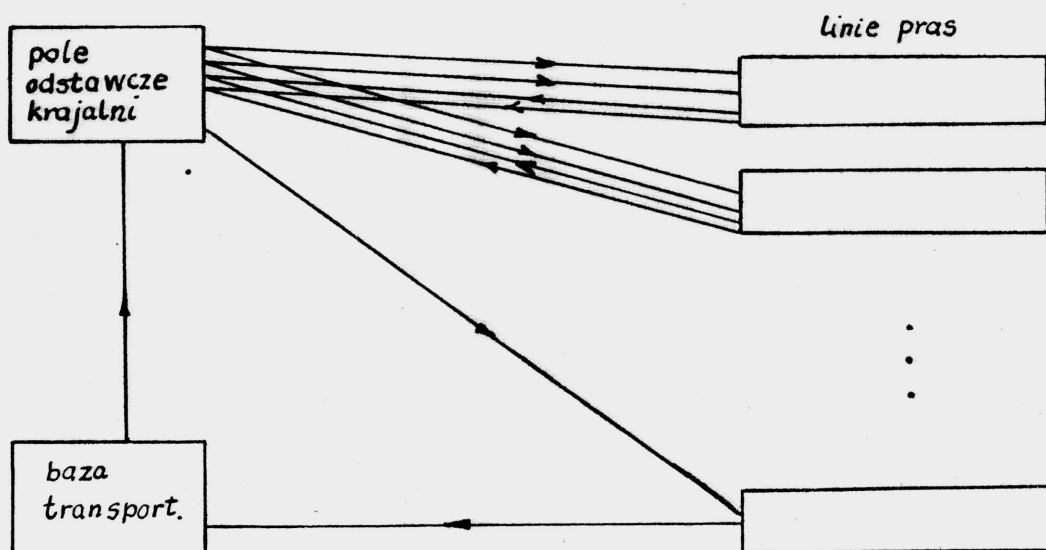
cowania silnie się zwiększa. W takim przypadku korzystniejsze byłoby wykorzystanie do wyznaczania wartości dolnego oszacowania testu LB_p^{III} (J) o złożoności $O(n^2)$.

8. Zastosowania

W rozdziale tym przedstawione zostaną dwa praktyczne przykłady zastosowania zagadnień optymalizacyjnych rozważanych w niniejszej pracy. Są to: problem optymalizacji transportu wewnątrzzakładowego w tłoczni blach karoseryjnych oraz problem ustalania tras autobusów dowożących do miejsc pracy pracowników kopalni odkrywkowych węgla brunatnego okręgu konińskiego. Pierwszy z nich dotyczy zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0, c_j \geq \sum q_i | \sum a + \sum wE + \sum vT$, natomiast drugi jest przykładem dla zagadnienia $p|1, n|WP, \tau^0 \geq 0 | \sum a + \sum wE + \sum vT$. Przedstawione przykłady mają charakter ilustracyjny.

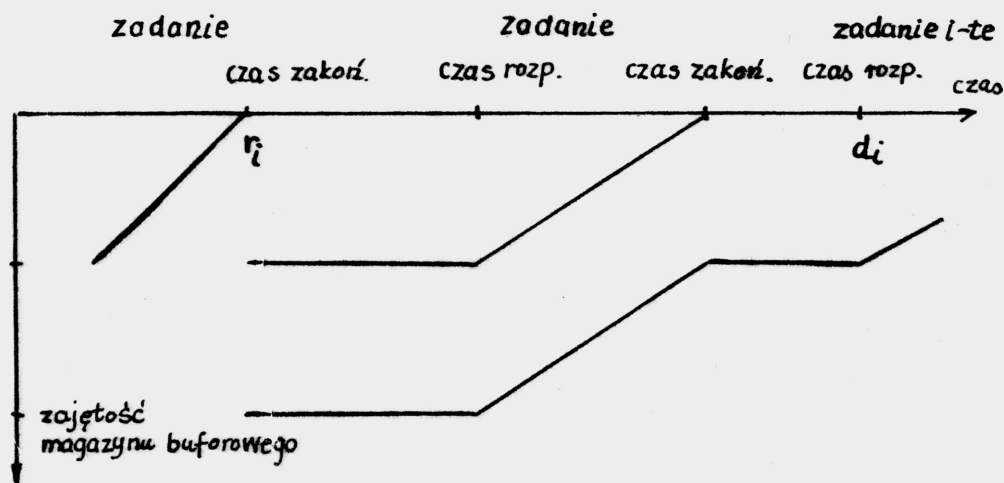
8.1. Optymalizacja procesu transportu wewnątrzzakładowego

Rozważany jest problem transportu wewnętrznego w tłoczni blach karoseryjnych FSM [25]. Zadaniem tego transportu jest dowożenie blach - przygotówek - z pola odstawczego krajalni do linii pras. Transport odbywa się w paletach przy użyciu wózków widłowych. Każdy wózek jednorazowo przewozi jedną paletę. Rysunek 8.1 przedstawia schematycznie sytuację transportu wewnętrznego w tłoczni.



Rys. 8.1 Transport wewnętrzny w tłoczni

Natomiast normatywny termin r_i określa najwcześniejszy pożądany moment rozpoczęcia wyładunku przygotówek potrzebnych do realizacji i-tego zadania tłoczenia. Termin ten jest zależny od pojemności magazynu buforowego znajdującego się przy linii pras przeznaczonych do realizacji i-tego zadania tłoczenia. W magazynie tym mogą znajdować się jednocześnie co najwyżej 2 palety przygotówek. Stąd jako wartość r_i należy przyjąć termin zakończenia realizacji k-tego zadania tłoczenia realizowanego na tej samej linii pras, drugiego poprzedzającego zadanie i-te. To znaczy, że pomiędzy zadaniem k-tym, a zadaniem i-tym na tej samej linii pras realizowane jest dokładnie jedno zadanie tłoczenia.



Rys. 8.2 Sposób wyznaczania wartości r_i

Przekroczenie terminu d_i powoduje naruszenie harmonogramu pracy tłoczni i przestój linii pras, na której ma być realizowane i-te zadanie. Natomiast wyprzedzenie terminu r_i powoduje, że dostarczone przygotówki nie mieszczą się w magazynie buforowym i nie mogą być prawidłowo składowane, co jest zjawiskiem niedopuszczalnym. Dlatego zakłada się, że terminy r_i i d_i mogą być naruszone tylko w wyjątkowych przypadkach. Wymaga to przyjęcia, że wartości kar za przekroczenie normatywnych terminów obsługi, w_i oraz v_i są bardzo duże, praktycznie równe nieskończoności. To znaczy, że $w_i = v_i = \mathcal{M}$ ($i=1, \dots, n$), gdzie $\mathcal{M}$ jest dostatecznie dużą liczbą /górnym oszacowaniem kosztu realizacji tras wszystkich wózków/.

Otrzymujemy w ten sposób problem $p|1, n| PW, c_j = 1, q_i = 1, \gamma^0 \geq 0| \sum a + \sum wE + \sum vT$, gdzie p oznacza liczbę wózków widłowych.

Jeżeli przyjmie się, że zadanie i-te i zadanie k-te obsługiwane są przez ten sam wózek, to minimalny czas a_{ik} , jaki upłynie pomiędzy zakończeniem obsługi i-tego zadania a rozpoczęciem obsługi k-tego

zadania jest równy sumie czasów:

- przejazdu wózka od linii pras realizującej i-te zadanie do pola odstawczego krajalni,
- załadunku przygotówek, które będą podlegały obróbce w k-tym zadaniu tłoczenia,
- przejazdu od pola odstawczego krajalni do linii pras realizującej k-te zadanie.

Macierz wartości a_{ik} nie musi być pamiętana w całości. Byłoby to w przypadku dużej liczby zadań tłoczenia bardzo pamięciochłonne. Poszczególne wartości $[a_{ik}]$ mogą być wyznaczane na bieżąco podczas działania algorytmu.

Każdy wózek może obsłużyć praktycznie dowolną liczbę zadań tłoczenia i nie ma potrzeby uwzględniania pojemności wózków i wielkości zapotrzebowań zadań /punktów odbioru/. W ten sposób problem z trasami typu PW, w których każda tura zawiera dokładnie jeden punkt odbioru /gdyż mamy: $c_j = 1$; $q_i = 1$ /, możemy sformułować jako zagadnienie $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0, c_j \geq \sum q_i \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$.

Jest to zagadnienie prostsze od rozważanego w pracy zagadnienia $p|1, n|PP, \tau^0 \geq 0 \mid \sum a + \sum wE + \sum vT$, ze względu na upraszczający warunek postaci: $c_j \geq \sum q_i$ ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, p$), który pozwala na pominięcie w modelu matematycznym ograniczenia na pojemność pojazdów. Problem ten można rozwiązać przy użyciu algorytmu sformułowanego w rozdziale 3 pracy z dolnym oszacowaniem $LB_p^I(J)$ /lub $LB_p^{II}(J)$ /. Ze względu na warunek $c_j \geq \sum q_i$, istnieje możliwość uproszczenia algorytmu polegającego między innymi na pominięciu tych fragmentów algorytmu, w których następuje sprawdzanie dopuszczalności ustalonych przydziałów punktów odbioru do tras pojazdów.

Przedstawiony w pracy algorytm pozwala zarówno na opracowanie planu pracy wózków w ciągu okresu czasu, dla którego ustalony został harmonogram pracy tłoczni /jedna zmiana robocza/, jak i na sterowanie transportem na bieżąco /ustalanie planu pracy wózków na krótki okres czasu/ z uwzględnianiem zmian zachodzących w harmonogramie pracy tłoczni oraz zmian liczby sprawnych wózków.

Punktem wyjścia przy ustalaniu tras wózków jest określony harmonogram pracy tłoczni. Wszystkie wózki transportowe mogą być użyte do obsługi każdego z zadań tłoczenia, niezależnie od rodzaju przygotówek, które mają podlegać tłoczeniu. Do obsługi jednego zadania tłoczenia potrzebny jest jeden wózek.

Z punktu widzenia procesu transportu, istotnymi wielkościami opisującymi poszczególne zadania tłoczenia realizowane przez linie

pras są:

- termin rozpoczęcia realizacji zadania tłoczenia,
- termin zakończenia realizacji zadania tłoczenia,
- numer linii pras, na której realizowane jest zadanie.

Ze względu na małą liczbę wózków niedostarczenie w wymaganym terminie odpowiednich przygotówek bywa często przyczyną przestojów. W okresie czasu, dla którego ustalony jest harmonogram pracy tłoczni wózki powinny obsłużyć u zadań tłoczenia. Wartość τ_i^0 oznacza czas wyładunku przygotówek przeznaczonych do obróbki w i -tym zadaniu tłoczenia. Czas ten zależy od rodzaju przygotówek.

Ze względu na: istnienie jednego magazynu /pole odstawcze kopalni/, obsługę jednego zadania tłoczenia przez jeden wózek widłowy, przystosowanie wózków do przewożenia różnego rodzaju przygotówek, możliwe jest rozważanie zagadnienia transportu różnego rodzaju przygotówek jako zagadnienia jednotowarowego.

Termin rozpoczęcia realizacji i -tego zadania tłoczenia należy przyjąć jako normatywny termin d_i zakończenia wyładunku przygotówek, które będą podlegały obróbce w i -tym zadaniu tłoczenia.

8.2. Zagadnienie dowozu pracowników do miejsca pracy

Problem dowozu pracowników kopalni odkrywkowych węgla brunatnego jest zagadnieniem specyficznym ze względu na rozległy teren kopalni i znaczne odległości pomiędzy poszczególnymi odkrywkami. Transport pracowników odbywa się przy użyciu autobusów. Poszczególne miejsca pracy o numerach $i=1, \dots, n$ traktowane będą jako punkty odbioru o zapotrzebowaniach q_i równych liczbie pracowników pracujących w danym miejscu na jednej zmianie. Baza, z której wyjeżdżają autobusy jest jednocześnie punktem, w którym wsiadają pracownicy /co odpowiada funkcji magazynu/. Dopuszczalne jest dowożenie pracowników do jednego miejsca pracy przez kilka autobusów. Ze względu na wymaganie, by czas transportu pracowników nie był zbyt długi przyjmuje się, że każdy z autobusów wykonuje jedną turę, po czym powraca do bazy. Równocześnie z dowozem pracowników odbywa się zabieranie z miejsc pracy ludzi pracujących na poprzedniej zmianie. Ponieważ liczba pracowników na wszystkich zmianach jest w przybliżeniu równa, wystarczy rozważać jedynie problem dowozu pracowników.

Do każdego miejsca pracy pracownicy powinni zostać dowiezieni przed terminem rozpoczęcia kolejnej zmiany /normatywny termin $d_i=d$ /. Przekroczenie tego terminu jest niepożądane, gdyż powoduje przeciąg-

nięcie czasu pracy poprzedniej zmiany bądź przestoje. Wartości v_i oznaczają kary za przekroczenie terminu v_i . Nie ma potrzeby określania normatywnych terminów przybycia autobusów do miejsc pracy, stąd zakłada się, że $r_i = 0$ $i=1, \dots, n$. Natomiast w przypadku bazy /magazynu/ ustalony jest normatywny termin r_0 oznaczający najwcześniejszy pożądaný termin wyjazdu autobusów z bazy. Wprowadzenie kary za wyprzedzenie tego terminu, ma na celu skrócenie czasu dojazdów pracowników do miejsc pracy, a tym samym wydłużenie efektywnego czasu pracy.

Przedstawiony problem można sformułować jako rozważane w pracy zagadnienie $p|1,n|WP$, $\gamma^0 \geq 0 | \sum a + \sum wT + \sum vT$, gdzie:

- p jest liczbą autobusów,
- wartości γ_i^0 , określają czas postoju autobusu w i -tym miejscu pracy /można przyjąć, że są one w przybliżeniu sobie równe, to znaczy $\gamma_i^0 = \gamma^0/$,
- macierz $[a_{ij}]$ jest macierzą czasów przejazdu między poszczególnymi miejscami pracy oraz bazą.

Odrębnym zagadnieniem wymagającym analizy ekonomicznej jest sposób ustalenia wartości kar v_i i w_0 , tak by odpowiadały one rzeczywistej relacji wartości strat spowodowanych przekroczeniem terminów r_0 i d_i w stosunku do wzrostu kosztów realizacji tras spowodowanych przez zwiększenie długości tras /czasu przejazdu tras/.

Zakończenie

Rozważania prowadzone w pracy koncentrowały się wokół zagadnień rozwożenia towarów. To znaczy, że zajmowano się sytuacjami, gdy pojazdy zostają załadowane w magazynie a następnie dostarczają wymagane ilości towaru do punktów odbioru. Analogiczne rozważania można przeprowadzić w odniesieniu do zagadnień odbierania towarów, w których pojazdy zabierają towar z punktów wytwarzania i przewożą go do magazynu /magazynów/. Przykładem tego typu zagadnienia może być problem oczyszczania miasta. Wszystkie przedstawione w pracy algorytmy można w prosty sposób przystosować do rozwiązywania zagadnień odbierania towarów.

Rozważane w pracy zagadnienia są znacznie ogólniejsze niż problemy ustalania tras uwzględniane do tej pory w literaturze, stąd też konstrukcja efektywnych /w sensie praktycznym/ algorytmów rozwiązywania była problemem niezmiernie trudnym.

W pracy zastosowano jednolite podejście do rozważanych zagadnień ustalania tras, wykorzystujące fakt, że w istocie każdy problem tego typu można sformułować jako zagadnienie wyznaczania najkrótszej drogi /spełniającej dodatkowe ograniczenia/ w specjalnie skonstruowanym grafie.

Algorytmy oparte na metodzie podziału i ograniczeń, które zostały sformułowane w pracy charakteryzują się następującymi właściwościami:

1. Na każdym etapie obliczeń rozwiązanie, najlepsze do tej pory znalezione, i w razie przerwania obliczeń można je uznać za rozwiązanie suboptymalne, co pozwala na zastosowanie algorytmów w systemach sterowania uwarunkowanych czasowo.
2. Mogą współpracować z dowolnymi algorytmami heurystycznymi. Rozwiązanie przybliżone otrzymane jedną z metod heurystycznych jest przyjmowane jako górne oszacowanie wartości rozwiązania optymalnego.
3. Pozwalają na wyznaczanie rozwiązań α -optymalnych. W przypadku, gdy $\alpha > 0$, to otrzymane rozwiązanie należy traktować jako rozwiązanie suboptymalne, przy czym rozwiązanie optymalne znajduje się w przedziale $[k^*(1-\alpha), k^*]$.
4. W każdym węźle drzewa rozwiązań /przedziałów/ wyznaczane jest rozwiązanie dopuszczalne problemu, co w ogólnym przypadku przyspiesza otrzymanie rozwiązania optymalnego.

Rozważane w pracy zagadnienia są NP-zupełne i do tego jeszcze o bardzo dużym stopniu komplikacji. Nie ma aktualnie możliwości skonstruowania dla nich algorytmów wielomianowych. Dlatego też uzyskane wyniki obliczeniowe trudno uznać za w pełni zadowalające.

Należy jednak zauważyć, że największy problem ustalnia tras pojazdów /VRP/, który został rozwiązany dokładnie, zawierał jedynie 23 punkty odbioru [36].^{1/}

Uzasadnione wydaje się jednak prowadzenie dalszych badań nad szczegółowymi własnościami problemów, które umożliwią zwiększenie efektywności algorytmów opartych na metodach podziału, a szczególnie nad metodami wyznaczania dolnych oszacowań.

1/ Do momentu zakończenia redagowania niniejszej pracy autorka nie miała możliwości porównania tej liczby zostatnimi wynikami obliczeniowymi uzyskanymi przez N. Christofidesa, A. Mignazzi i P. Totha przy rozwiązywaniu zagadnienia VRP /zapowiedzianymi w pracy [18] /

Na odrębne opracowanie zasługuje rozszerzenie przedstawionych w pracy podejść na przypadki zagadnień z trasami typu WW /i ogólniejszymi/ oraz na problemy z wieloma magazynami o ograniczonych zapasach towaru. Konieczne jest jednak w tym celu przeprowadzenie dalszych badań szczegółowych własności wymienionych problemów.

Ciekawe, ze względu na praktyczne potrzeby byłoby rozszerzenie prowadzonych rozważań na przypadki, gdy do transportu towaru, poza pojazdami, można użyć również sieci transportowej /np. sieci kolejowej/ o ustalonej strukturze. W takim przypadku problem optymalizacyjny polegałby na ustalaniu zarówno tras pojazdów, jak i wartości przepływów w stałej sieci transportowej. Początkiem rozważań z tej dziedziny są zagadnienia przedstawione w pracach [38], [39], w których opracowaniu autorka niniejszej pracy uczestniczyła.

Dalszym istotnym kierunkiem badań jest uogólnienie wspomnianych zagadnień na przypadek istnienia wielu typów towaru.

Rozważane w pracy zagadnienia mogą być bez większych modyfikacji zastosowane do optymalizacji przepływu informacji w sieciach teleinformatycznych. Ponadto należy zaznaczyć, że wyniki uzyskane w niniejszej pracy można wykorzystać nie tylko w odniesieniu do systemów transportowych, lecz także w zagadnieniach optymalizacji kolejności operacji w przypadku występowania przezbrojeń [37].

Serdecznie dziękuję prof. dr hab. inż. Zdzisławowi Bubnickiemu za umożliwienie powstania niniejszej pracy w Zespole Systemów Sterowania. Równie serdecznie dziękuję promotorowi, doc. dr hab. inż. Józefowi Grabowskiemu za pomoc i cenne uwagi.

mgr inż. Ewa Skubalska

Wpłyneło do redakcji XII 80.

Literatura

- [1] V.I. Agin, D.E. Cullen "An Algorithm for Transportation Routing and Vehicle Loading" Logistics /1975/ s. 1-20.
- [2] "Badania operacyjne w nowoczesnym zarządzaniu", Praca zbiorowa pod red. T. Kasprzaka, PWE, Warszawa 1974.
- [3] N. Baliński, R. Quandt, "On an Integer Program for a Delivery Problem", O.R. 12 /1966/ nr 2, s. 302 - 204.
- [4] S. Bazaraa, A.N. Elshafei, "On the Use of Fictitious Bounds in Tree Search Algorithms", MGMT, v. 23, n. 8 /1977/, s. 904 - 908.
- [5] M.S. Bazaraa, J.J. Goode, "The Traveling Salesman Problem: A Duality Approach", Mathematical Programming 13 /1977/.
- [6] R. Bellman, "Dynamic Programming Treatment of the Travelling Salesman Problem", J.A.C.M. /1962/, 61 - 63.
- [7] M. Bellmore, S. Hong, "Transformation of Multisalesman Problem to the Standart Traveling Salesman Problem", J.A.C.M, vol. 21 nr 3 /1974/, s. 500 - 504.
- [8] M. Bellmore, G.L. Nemhauser, "The Traveling Salesman Problem: A Survey", O.R. 16 /1968/, s. 538 - 558.
- [9] E.J. Beltrami, L.D. Bodin, "Networks and Vehicle Routing for Municipal Waste Collection", Networks 4 /1974/, s. 65 - 94.
- [10] L.D. Bodin, S.J. Kursh, "A Computer-Assisted System for the Routing and Scheduling of Street Sweepers", O.R. v. 26, no 4. /1978/, s. 525 - 537.
- [11] G.M. Buxley, "The Vehicle Scheduling Problem and Monte Carlo Simulation", Opl. Res. Q vol. 30 /1979/, s. 563 - 573.
- [12] P. Cassidy, H. Bennett, "TRAMP - A Multi-depot Vehicle Scheduling System" O.R.Q. 23 nr 2 /1972/, s. 151 - 163.
- [13] P. Cegiełka, J. Prokuratorowski, W. Szymanowski, "Zastosowanie procedur optymalizacyjnych w zarządzaniu procesami rozwózki w aglomeracjach", Materiały na Konferencję Matematyczną Podstawy Teorii Systemów Transportowych, Jabłonna 12 - 17 maj 1980, s. 16 - 18.
- [14] N. Christofides, "Bounds for the Travelling Salesman Problem, O.R. 20 /1972/, s. 1044 - 1056.
- [15] N. Christofides, "Graf Theory, an Algorithmic Approach", Academic Press, N. York, London, San Francisco, 1975.
- [16] N. Christofides, The Travelling Salesman Problem - A Survey, IC-O.R.-80-3, raport wewnętrzny, Department of Managament Science, Imperial College, London, /1980/.

- [17] N. Christofides, S. Eilon, "An Algorithm for the Vehicle Dispatching Problem", Opl. Res. Quart. 20 /1969/, s. 309
- [18] N. Christofides, A. Mingozzi, P. Toth, "State-Space Relaxation for the Computation of Bounds to Routing Problems", Imperial College, raport wewnętrzny /1979/.
- [19] G. Clarke, J. Wright, "Schedulling of Vehicles from a Central Depot to a Number of a Points", O.R. 12 /1964/, s. 568 - 581.
- [20] G.A. Croes, "A Method for Solving Traveling - Salesman Problems", Operations Research, vol. 6, nr 6 /1958/, s. 791 - 812.
- [21] P. van der Cruyssen, M.J. Rijckaert, "Heuristic for the Asymetric Travelling Salesman Problem", Q.R.Q, vol. 29 nr 7 /1978/, s. 697 - 701.
- [22] G. Dantzig, R. Fulkerson, S. Johnson, "Solution of Large-Scale Traveling-Salesman Problem", O.R. 2 /1954/, s. 393 - 411.
- [23] G.B. Dantzig, D.R. Fulkerson, S.M. Johnson, "On a Linear-Programming, Combinatorial Approach to the Traveling-Salesman Problem", O.R. vol. 7, nr 1 /1959/, s. 58 - 66.
- [24] G. Dantzig, J. Ramser, "The Truck Dispatching Problem", Man. Sci. 6 /1959/, s. 81 - 91.
- [25] J. Duda, "Algorytm harmonogramowania transportu wewnętrzzakładowego", Zeszyty Naukowe Pol. Śl. nr 651, Automatyka, zesz. 51 /1980/, s. 17 - 24.
- [26] J. Edmonds, R.M. Karp, "Theoretical Improvments in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems", Journal of the ACM, 19 /1972/, s. 248 - 264.
- [27] G.N. Federickson, M.S. Hecht, C.E. Kin, "Approximation Algorithms for Some Routing Problems", SIAM J. Comp., vol. 7, nr 2 /1978/, s. 178 - 193.
- [28] M.M. Flood, "The Travelin-Salesman Problem", O.R., vol. 4 /1956/, s. 61 - 75.
- [29] B.A. Foster, D.M. Ryan, "An Integer Programming Approach to the Vehicle Scheduling Problem", Opl. Res. Q., vol. 27, nr 2i, /1976/, s. 367 - 384.
- [30] H. Gabow, "An Efficient Implementation of Edmonds' Algorithm for Maximum Matching on Graph", JACM 23 /1976/ nr 2, 221 - 234.
- [31] R.S. Garnfinkel, G.L. Nemhauser, "Programowanie całkowitoliczbowe", PWN, Warszawa 1978.
- [32] W. Garvin, H. Crandall, J. John, R. Spellman, "Applications of Linear Programming in the Oil Industry", Management Sci., vol. 3, nr 4 /1957/, s. 407 - 430.

- [33] A.M. Geoffrion, "Lagrangian relaxation and its use in integer programming", Mathematical Programming Study 2 /1974/, 82 - 114.
- [34] B.E. Gillet, L.R. Miller, "A Heuristic Algorithm for the Vehicle-Dispatch Problem", O.R. v. 22 /1974/, s. 340 - 349.
- [35] B.L. Golden, "A statistical Approach to the TSP" Networks 7 /1977/, s. 209 - 225.
- [36] B.L. Golden, T.L. Magnanti, H.Q. Nguyen, "Implementing Vehicle Routing Algorithms, Network 7 /1977/, s. 113 - 148.
- [37] J. Grabowski, "Uogólnione zagadnienia optymalizacji kolejności operacji w dyskretnych systemach produkcyjnych", Prace Nauk. ICT P.Wr. Seria: Monografie 50, Wrocław 1979.
- [38] J. Grabowski, E. Skubalska, "The maximal flow problem in a network with variable structure", Zastosowania Matematyki /w druku/.
- [39] J. Grabowski, E. Skubalska, "Zagadnienia przepływu minimalno-kosztowego w sieci o zmiennej strukturze", Matematyka Stosowana /w przygotowaniu/.
- [40] M. Held, R.M. Karp, "The Traveling-Salesman Problem and Minimum Spanning Trees", O.R. r. 18 /1970/, s. 1139 - 1162.
- [41] M. Held, R.M. Karp, "The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees", Part. II, Math. Progr. 1 /1971/, s. 6-25.
- [42] M. Held, P. Wolfe, H.O. Crowder, "Validation of subgradient optimization", Mathematical Programming 6 /1974/, s. 62 - 88.
- [43] R.A. Holmes, R.G. Parker, "A vehicle scheduling procedure based upon savings and a Solution Perturbation Scheme", Q R Q, vol. 27 /1976/ 1i, s. 83 - 92.
- [44] M. Kulej, "Zagadnienie przydziału zadań w oparciu o modele dyskretne w systemie transportowym" /rozprawa doktorska/, P.Wr. 1976.
- [45] G. Laporte, Y. Norbert, H. Mercure, "The multi-depot Traveling Salesman Problem", Rapport de recherche no 80 - 23, Septembre 1980, Ecole des Hantes Etudes Commerciales, Montreal.
- [46] E.L. Lawler, "Combinatorial Optimization: Networks and Matroids" Hdt, Rinehart, and Winston, New York 1976.
- [47] J.K. Lenstra, "On general Routing Problems", Networks 6 /1976/, s. 273 - 280.
- [48] J.K. Lenstra, "Sequencing by emmerative methods", Mathematisch Centrum, Amsterdam 1977.
- [49] J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, "Some Simple Applications of the Travelling Salesman Problem", Stichting Mathematisch Centrum,

BW 38/74 /1974/.

- [50] S. Lin, "Computer solution of the Traveling-Salesman Problem", Bell. Syst. Tech. J. 44 /1965/, s. 2245 - 2269.
- [51] S. Lin, B.W. Kernighan, "An effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem", O.R. 21 /1973/, s. 498 - 516.
- [52] J. D.C. Little, K.G. Murty, D.W. Sweeney, C. Karel, "An Algorithm for the Travelling Salesman Problem", O.R. 11 /1963/, s. 972 - 989.
- [53] J.W. Male, J.C. Liebman, C.S. Orloff, "An Improvement of Orloff's General Routing Problem", Network 7 /1977/, s. 89 - 92.
- [54] R.R. Minina, V.T. Perekrest, "Aproksimacija rešenija zadataci kommivojazeru s - ciklami", Avtomatika i Telemekhanika, no 10, /1975/, s. 79 - 89.
- [55] R.H. Mole, "A Survey of Local Delivery Vehicle Routing Methodology" Opl. Res. Q, vol. 30 /1979/, p. 245 - 252.
- [56] J.P. Norback, R.F. Love, "Heuristic for the Hamiltonian Path Problem in Euclidian Two Space", J. of the Operational Research Society, vol. 30, nr 4 /1979/, s. 363 - 368.
- [57] C.S. Orloff, "A Fundamental Problem in Vehicle Routing", Networks 4 /1974/, s. 35 - 64.
- [58] C.S. Orloff, "Routing a Fleet of M Vehicles to/from a Central Facility", Networks 4 /1974/, s. 147 - 162.
- [59] C.S. Orloff, "On General Routing Problems: Comments", Networks 6 /1976/, s. 281 - 284.
- [60] C. Picard, M. Queyranne, "The Time-Dependent Traveling Salesman Problem and its Application to the Tardiness Problem in One-Machine Scheduling", O.R., vol. 26 /1978/ nr 1, s. 86 - 110,
- [61] D.J. Rosenkrantz, R.E. Stearns, P.M. Lewis II, "An analysis of several heuristics for the Traveling Salesman Problem", SIAM J. Comput., vol. 6 nr 3 /1977/, s. 563 - 581.
- [62] R.A. Russel, "An Effective Heuristics for the M-Tour Traveling Salesman Problem with some Side Conditions", O.R., vol. 25, no 3 /1977/, s. 517 - 524.
- [63] R. Russell, W. Igo, "An assignment Routing Problem", Networks 9 /1979/, s. 1 - 17.
- [64] J. Svestka, V. Huckfeldt, "Computation Experience with an M-Salesman Traveling Salesman Algorithm", Man. Sci. 19, nr 7 /1973/, s. 790 - 799.
- [65] "Teoria szeregowania zadań", pod red. E.G. Coffmana, rozdział 5.5 - Problem pakowania, WNT, Warszawa 1980.

- [66] F. Tillman, T. Cain, "An Upper Bounding Algorithm for the Single and Multiple Terminal Delivery Problem", Man. Sci. 18, nr 11 /1972/, s. 664 - 682.
- [67] Tyagi, "A practical Method for the Truck Dispatching, J. of the ORSJ, vol. 10 /1968/, s. 76 - 92.
- [68] A. Wren, A. Holliday, "Computer Scheduling of Vehicles from One or More Depots to a Number of Delivery Points", Q.R.Q. 23 /1972/, s. 333 - 344.
- [69] P. Yellow, "A computational Modification to the Savings Method of Vehicle Scheduling", Opn. Res. Q.21 /1970/, s. 281
- [70] J.A. Zak, "Algoritmy rešenija zadač "n komivožnerov", Kibernetika nr 1 /1972/, s. 99 - 106.



Niniejszy raport otrzymują:

1. OINT	1 egz.
2. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1 egz.
3. Biblioteka Instytutu I-6	1 egz.
4. Archiwum I-6	1 egz.
5. Promotor	1 egz.
6. Recenzenci	2 egz.
7. Seminarium Systemów Sterowania	1 egz.
8. Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego	1 egz.
9. IBS PAN, Warszawa	1 egz.
10. Autor	5 egz.
RAZEM:	15 egz.