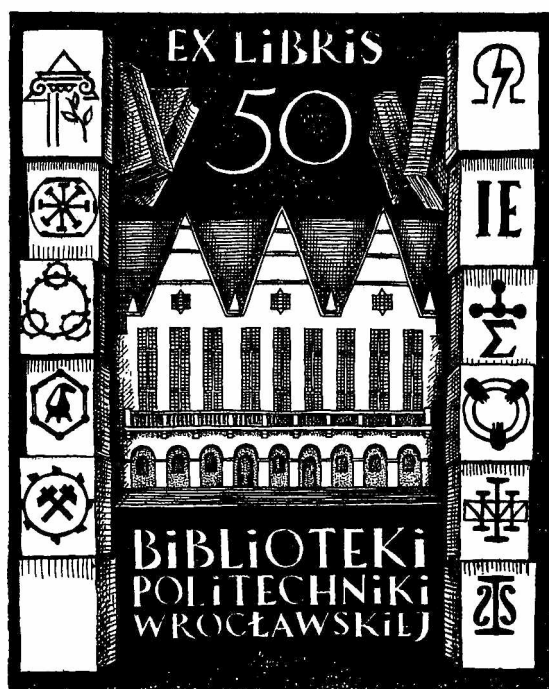


Wojciech Glabisz

**Siły niekonserwatywne
w mechanice
ustrojów prętowych**





Wojciech Glabisz

Siły niekonserwatywne w mechanice ustrojów prętowych



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 1998

Recenzenci
Roman BOGACZ
Gustaw RAKOWSKI

Opracowanie redakcyjne
Aleksandra WAWRZYŃKOWSKA

Biblioteka Główna i OIiNT
Politechniki Wrocławskiej



001187875

29 9725 L/1

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1998

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-339-0

Nakład 100+50 egz. Ark. wyd. 10,75. Ark. druk 97/8. Papier offset. kl. III, 80 g, B1.
Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 300/98.

Al. 1345.22

Spis rzeczy

1. WSTĘP	5
2. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W ANALIZIE UKŁADÓW Z SIŁAMI NIEKONSERWATYWNYMI	8
2.1. Wprowadzenie	8
2.2. Przyrostowe sformułowanie metody elementów skończonych	9
2.3. Macierze korekcyjne prostego elementu belkowego	12
2.4. Procedury symbolicznego generowania macierzy korekcyjnych	15
2.5. Algorytm rozwiązania i przykłady numeryczne	17
2.6. Podsumowanie	26
3. STATECZNOŚĆ PRĘTÓW POD OBCIĄŻENIEM NIEKONSERWATYWNYM	28
3.1. Wprowadzenie	28
3.2. Analiza prętów o ciągłej zmianie parametrów	30
3.3. Analiza pręta o skokowej zmianie parametrów	37
3.4. Przykłady numeryczne	44
3.5. Podsumowanie	58
4. PRAWO I ZASADA HAMILTONA W ANALIZIE UKŁADÓW NIEKONSERWATYWNYCH	60
4.1. Wprowadzenie	60
4.2. Interpretacja wyników prac Hamiltona	61
4.3. Siły niekonserwatywne w sformułowaniach zasady i prawa Hamiltona	64
4.4. Przykłady numeryczne	67
4.5. Podsumowanie	82
5. STATECZNOŚĆ UKŁADÓW DYSKRETNÝCH POD DZIAŁANIEM DYNAMICZNYCH SIŁ NIEKONSERWATYWNYCH	83
5.1. Wprowadzenie	83
5.2. Układ o jednym stopniu swobody	86
5.3. Analiza numeryczna układu o jednym stopniu swobody	90
5.4. Nieliniowy model o dwóch stopniach swobody	101
5.5. Analiza numeryczna układu o dwóch stopniach swobody	106
5.6. Podsumowanie	114
6. ZASTOSOWANIE PAKIETU MATHEMATICA DO FORMUŁOWANIA ZASAD WARIACYJNYCH PROBLEMÓW MECHANIKI Z SIŁAMI NIEKONSERWATYWNYMI	116
6.1. Wprowadzenie	116
6.2. Metody budowania funkcjonałów w zagadnieniach niekonserwatywnych	117
6.3. Krótki opis metody dodawania operatora sprzężonego	123
6.4. Procedury symboliczne w języku pakietu Mathematica	125
6.5. Przykłady funkcjonowania procedur symbolicznych	127
6.6. Podsumowanie	130
ZAŁĄCZNIK A	131
ZAŁĄCZNIK B	137
LITERATURA	141

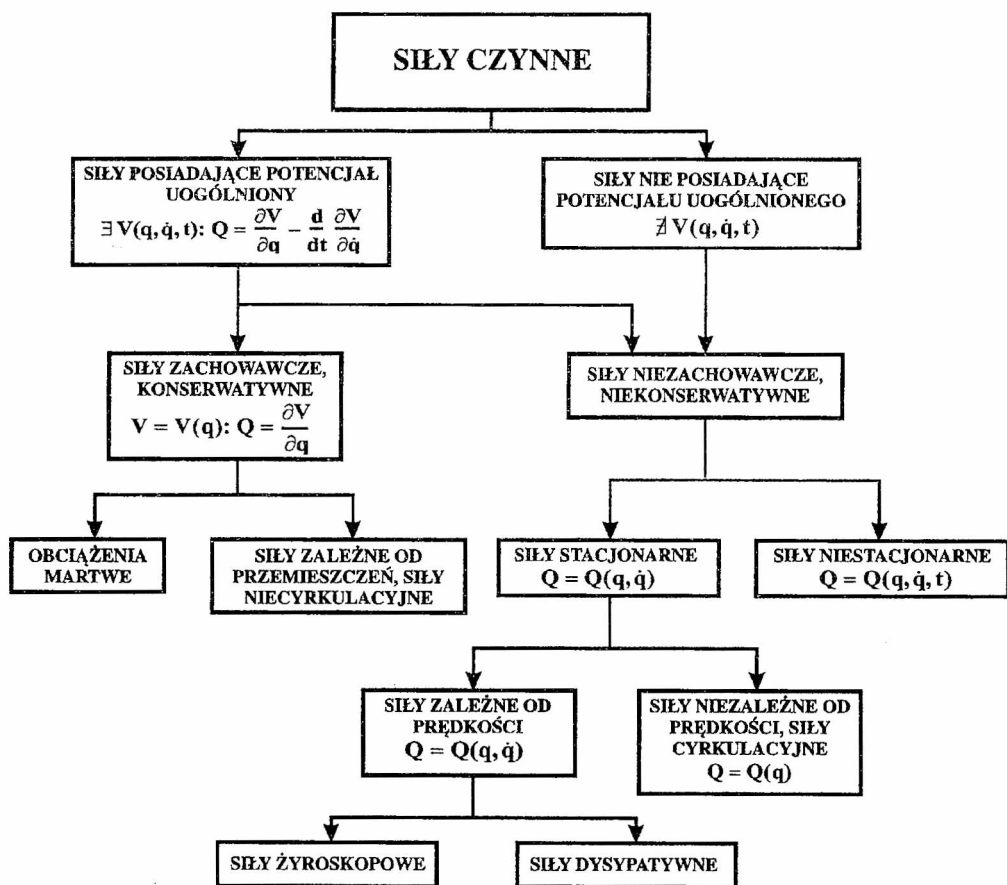
1. WSTĘP

W zadaniach klasycznej mechaniki zwykle zakłada się, że działające obciążenia są potencjalne, a więc są gradientami możliwych do określenia potencjałów $V(\mathbf{q}, t)$ zależnych od położenia określanego współrzędnymi $\mathbf{q}$ zadania i czasu t . Ten typ obciążenia jest jednym z wielu możliwych rodzajów sił czynnych, które mogą oddziaływać na konstrukcję. Siły czynne dzielimy ogólnie na monogeniczne i poligeniczne. Siły monogeniczne mają potencjał uogólniony $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, który może być funkcją współrzędnych $\mathbf{q}$, ich prędkości $\dot{\mathbf{q}}$ i czasu t . Siły poligeniczne potencjału nie mają. Siły monogeniczne, w zależności od tego, czy ich potencjał jest czy nie jest jawnie zależny od prędkości i czasu, dzielimy na niezachowawcze (niekonserwatywne) i zachowawcze. Siły poligeniczne nie mające potencjału zaliczamy do sił niezachowawczych. Siły zachowawcze dzielimy z kolei na siły niezależne od przemieszczeń, tak zwane siły martwe, i siły zależne od przemieszczeń, tak zwane siły niecyrkulacyjne (np. odśrodkowe). Siły martwe są najczęściej przyjmowanym modelem oddziaływań statycznych w analizie większości konstrukcji. Siły niekonserwatywne – siły poligeniczne i te siły monogeniczne, których potencjał jawnie zależy od prędkości przemieszczeń i czasu – dzielimy na siły $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ jawnie niezależne od czasu, zwane stacjonarnymi i siły $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ od czasu jawnie zależne, określane jako siły niestacjonarne. Siły stacjonarne możemy podzielić na siły zależne od prędkości i siły od prędkości niezależne, zwane siłami cyrkulacyjnymi. Siły zależne od prędkości, w zależności od tego, czy w układzie nie wykonują pracy, czy ich praca jest ujemna, dzielimy na tak zwane siły żyroskopowe i dysypatywne. Na rysunku 1.1 przedstawiono schemat przyjętego podziału sił czynnych.

Jak już wspomniano, najczęściej spotykanym modelem sił czynnych przyjmowanym w analizie konstrukcji są zachowawcze siły niezależne od przemieszczeń, wcześniej nazwane siłami martwymi. Ten model sił oczywiście nie jest odpowiedni do opisu sił często występujących we wzajemnych oddziaływaniach ośrodków, gdzie wartość tego oddziaływania może się zmieniać wraz ze zmianą konfiguracji układu obciążanego. Siły niekonserwatywne (niezachowawcze) pojawiają się między innymi w wyniku oddziaływania na konstrukcję różnego rodzaju ośrodków. Powstają one na skutek parcia wiatru, parcia ośrodków sypkich, oddziaływania opływającego konstrukcję płynu, przepływu cieczy przez podatne rurociągi. Siły niekonserwatywne występują także w zagadnieniach robotyki, aerodynamiki, mechaniki maszyn, a także w proble-

mach kontroli układów i ich sterowania. Wymienione przykładowe oddziaływania niekonserwatywne są siłami powierzchniowymi; przykładem niekonserwatywnych oddziaływań objętościowych mogą być siły działające na ciała przemieszczające się w polach magnetycznych. Znaczenie obciążeń cyrkulacyjnych, śledzących jest podstawowe w zagadnieniach stateczności i szczególnie istotne wtedy, kiedy w układach poddanych ich działaniu powstają duże przemieszczenia.

Do pierwszych prac dotyczących zagadnień z siłami niekonserwatywnymi należą prace Nicolai [1.1, 1.2] i Zieglera [1.3, 1.4]. Gwałtowny wzrost zainteresowania układami z siłami niekonserwatywnymi nastąpił po opublikowaniu w 1961 roku przez Bolotina monografii [1.5] w całości poświęconej analizie tego typu układów. Pojawiło się wiele prac dotyczących szerokiego spektrum problemów związanych z analizą, głównie liniową, układów niekonserwatywnych. Do ważniejszych należy zaliczyć prace, których autorami są: Leipholz [1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11], Herrmann i Jong [1.12],



Rys. 1.1. Klasyfikacja sił zewnętrznych

Fig. 1.1. Classification of external forces

Dowell [1.13], Levinson [1.14], Herrmann [1.15], Roorda i Nemat-Naser [1.16], Barsoum [1.17], Plaut [1.18], Gajewski i Życzkowski [1.19], Gajewski [1.20], Kikuchi [1.21], Hauger [1.22], Życzkowski [1.23], Husein i Plaut [1.24], Argyris i Symeonidis [1.25], Kounadis [1.26] oraz Bogacz i Mahrenholtz [1.27, 1.28]. Obszerny, krytyczny przegląd literatury można znaleźć w pracy Bogacza i Janiszewskiego [1.29]. Z uwagi na olbrzymią liczbę prac dotyczących omawianej tematyki ograniczono się w niniejszej pracy jedynie do przedstawienia wybranych pozycji literatury, które dały podstawy do dalszej analizy układów z siłami niekonserwatywnymi. Dalej, we wprowadzeniach do kolejnych rozdziałów przedstawiono szczegółowo te pozycje, które ściśle dotyczą poruszanej tam tematyki. Należy wspomnieć, że ostatnio niektórzy autorzy wyrażają wątpliwość co do sensu analizy układów z cyrkulacyjnymi, śledzącymi obciążeniami bez ich wcześniejszej eksperymentalnej weryfikacji (Elishakoff [1.30], Koiter [1.31]). Podstawę tych wątpliwości stanowi praca Willemsa [1.32], w której rezultaty analizy teoretycznej uzyskane przez Becka [1.33] zostały błędnie eksperymentalnie zweryfikowane. Fakt ten wykazał Huang, Nachbar i Nemat-Nasser [1.34]. Autorzy podający w wątpliwość sens analizy układów z siłami niekonserwatywnymi nie cytują niestety innych prac z zakresu eksperymentalnego potwierdzania rezultatów uzyskiwanych teoretycznie. Przykładem jest ostatnio opublikowana praca Xionga, Wanga i Tabarroka [1.35], w której eksperymentalnie potwierdzono rozwiązanie zadania Becka. Inne prace z zakresu eksperymentów z siłami śledzącymi zacytowano we wspomnianej już przeglądowej pracy Bogacza i Janiszewskiego [1.29].

Celem pracy jest przedstawienie zagadnień mechaniki, które mają fundamentalne znaczenie w analizie stateczności ustrojów prętowych ze stacjonarnymi siłami niekonserwatywnymi typu cyrkulacyjnego i z niekonserwatywnymi siłami niestacjonarnymi.

W rozdziale drugim omówiono zagadnienia związane ze sformułowaniem metody elementów skończonych odnoszącej się do układów z siłami niekonserwatywnymi i badaniem możliwości stabilizacji układów przez ich obciążanie siłami cyrkulacyjnymi. Rozdział trzeci poświęcono analizie stateczności przyrzmatycznych i nieprzyrzmatycznych prętów o dowolnych warunkach brzegowych i dowolnie obciążanych siłami zachowawczymi i siłami niekonserwatywnymi. Prawo i zasadę Hamiltona w zagadnieniach z siłami niekonserwatywnymi przedstawiono w rozdziale czwartym. W rozdziale piątym omówiono zagadnienia związane ze statecznością układów dyskretnych poddanych działaniu statycznemu i dynamicznemu obciążeniom niekonserwatywnym ze zmiennymi w czasie parametrami śledzenia. Tematem ostatniego, szóstego rozdziału są problemy formułowania funkcjonałów w zagadnieniach z siłami niekonserwatywnymi.

Rozdziały, poczynając od wstępu, są numerowane cyframi arabskimi; dotyczy to również podpunktów występujących w rozdziałach. Pozycje literatury, wzory i rysunki oznaczono numerem rozdziału i liczbą oznaczającą kolejną pozycję literatury czy kolejny wzór lub rysunek, pojawiające się w ramach rozdziału.

2. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W ANALIZIE UKŁADÓW Z SIŁAMI NIEKONSERWATYWNYMI

2.1. Wprowadzenie

Zwykle stosowaną, a często jedyną metodą prowadzącą do rozwiązań w analizie układów nieliniowych jest metoda elementów skończonych w jej przyrostowym sformułowaniu (Bathe, Ramm, Wilson [2.1], Horrigmoe, Bergan [2.2], Kleiber [2.3], Kleiber, Woźniak [2.4]). W liniowych zagadnieniach niekonserwatywnych podstawy metody elementów skończonych sformułował Leipholz [1.6]. Levinson [1.14] podał zasadę Hamiltona, którą pod warunkiem zerowania się wariacji z sił niekonserwatywnych można stosować do analizy układów niezachowawczych. Barsoum, wykorzystując wyniki pracy Levinsona i stosując metodę Ritza, sformułował metodę elementów skończonych do analizy liniowych układów niekonserwatywnych z siłami cyrkulacyjnymi będącymi liniowymi funkcjami przemieszczeń [1.17]. Kikuchi, stosując metodę Galerkina, sformułował metodę elementów skończonych i zastosował ją do rozwiązania zadania Becka [1.21]. Argyris i Symeonidis, wykorzystując podejście naturalne zbudowali algorytm metody elementów skończonych w ujęciu przyrostowym do nieliniowych zagadnień statyki z siłami niekonserwatywnymi [1.25, 2.5]. Metodę elementów skończonych do nieliniowej analizy konstrukcji sprężystych pod działaniem dynamicznych obciążeń niekonserwatywnych sformułowali Argyris, Straub i Symeonidis [2.6].

Z reguły punktem wyjścia do formułowania równań metody elementów skończonych w jej przyrostowym lub nieprzyrostowym ujęciu są zasady wariacyjne bądź zasada prac przygotowanych (Washizu [2.7], Kleiber [2.3]). W przypadku analizy układów niekonserwatywnych, których opis prowadzi do niesamosprężonych zagadnień brzegowo-początkowych, ogólne sformułowania wariacyjne przedstawiono jedynie w stosunkowo nielicznych pracach. Problem budowania zasad wariacyjnych do analizy układów niekonserwatywnych będzie szczegółowo omówiony w rozdziale szóstym.

Jak już wspomniano, podstawą ogólnych sformułowań metody elementów skończonych stosowanej w analizie układów niekonserwatywnych może być zasada prac przygotowanych, modyfikowana o człony wynikające z pracy obciążeń niepotencjalnych,

będących funkcjami stanu odpowiedzi konstrukcji na odpowiednich polach przemieszczeń wirtualnych. Zasada prac przygotowanych stanowi także punkt wyjścia do rozważań prowadzonych w tym rozdziale.

Celem rozdziału jest:

- uzupełnienie algorytmu metody elementów skończonych bazującego na uogólnionym, przyrostowym sformułowaniu zasady prac przygotowanych o elementy wynikające z zależności obciążeń od powstających w konstrukcji przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń,
- wyprowadzenie przy użyciu narzędzi przekształceń symbolicznych ścisłych formuł określających tak zwane korekcyjne macierze obciążeń, korekcyjne macierze prędkości obciążeń i korekcyjne macierze przyspieszeń dowolnie obciążonego elementu belkowego,
- zaadaptowanie algorytmu geometrycznie nieliniowej analizy statyki układów prętowych do analizy statyki i stateczności układów poddanych działaniu wieloparametrowych, węzłowych obciążeń potencjalnych i niepotencjalnych,
- określenie warunków, w jakich możliwa jest stabilizacja układów potencjalnych poprzez działanie dodatkowych sił niepotencjalnych.

W punkcie drugim tego rozdziału pokazano konsekwencje uwzględnienia istnienia sił niekonserwatywnych w przyrostowym sformułowaniu metody elementów skończonych. W punkcie trzecim zademonstrowano przykładowe postacie macierzy korekcyjnych obciążeń, które wygenerowano za pomocą symbolicznych procedur opisanych w punkcie czwartym. W punkcie piątym krótko omówiono algorytm metody elementów skończonych z uwzględnieniem sił niepotencjalnych oraz podano przykłady jego stosowania głównie w zakresie analizy stateczności układów ramowych.

2.2. Przyrostowe sformułowanie metody elementów skończonych

Równanie metody elementów skończonych uogólnione na zagadnienia z siłami niepotencjalnymi otrzymujemy korzystając z zasady prac wirtualnych do przyrostowego opisu zagadnień dużych deformacji. Po infinitezymalnym przyroście przemieszczeń Δu_k , odkształceń ΔE_{kl} oraz naprężeń ΔT^{kl} , przyrostowe sformułowanie zasady prac wirtualnych do zagadnień dynamicznych przyjmie postać (Kleiber [2.3]):

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \rho \Delta \ddot{u}_i \delta(\Delta u_i) d\Omega + \int_{\Omega} [\mu C_{ijkl} \Delta \dot{E}_{ij} \delta(\Delta E_{kl}) + \beta \rho \Delta \dot{u}_i \delta(\Delta u_i)] \\
 & + \int_{\Omega} [C_{klmn} \Delta E_{kl} \delta(\Delta E_{mn}) + \tilde{T}_{kl} \Delta u_{i,k} \delta(u_{i,l})] \\
 & = \int_{\Omega} \rho \Delta f_k \delta(\Delta u_k) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Delta t_k \delta(\Delta u_k) d(\partial\Omega) + \sum_i \Delta F_i \delta(\Delta u_i)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Założono, że na początku przyrostu ściśle spełnione były wszystkie równania, a przyrost był rozpatrywany w dowolnym, ustalonym w danym kroku układzie odniesienia. W równaniu (2.1) przez ρ oznaczono gęstość ośrodka, $\delta(\Delta u_i)$ jest wariacją i -tej składowej przyrostu przemieszczenia Δu , μ i β są współczynnikami charakteryzującymi odpowiednio tłumienie masowe i tłumienie lepkie, $\mathbf{C}_{ijkl}$ jest macierzą własności materiałowych, ΔE_{kl} jest przyrostem pełnego tensora odkształceń Lagrange'a, $\tilde{T}_{kl}$ jest drugim tensorem naprężeń Pioli–Kirchoffa, a Δf_k , Δt_k i ΔF_i są odpowiednio przyrostami składowych sił objętościowych, powierzchniowych oraz sił skupionych. Z uwagi na to, że sformułowanie metody elementów skończonych na bazie równania (2.1) jest dobrze znane i w szczegółach prezentowane na przykład w książce Kleibera [2.3], dalsze rozważania zostaną ograniczone wyłącznie do tych jego elementów, które wynikają z istnienia sił niepotencjalnych.

Siły niepotencjalne mogą być związane zarówno z objętością materiału ($\mathbf{f}^{nc}$), jak i z oddziaływaniem powierzchniowym rozłożonym i skupionym ($\mathbf{t}^{nc}, \mathbf{F}^{nc}$). Obciążenia występujące w równaniu przyrostowej zasady prac przygotowanych można przedstawić w postaci sumy obciążeń konserwatywnych, niezależnych od stanu konstrukcji ($\mathbf{f}^c, \mathbf{t}^c, \mathbf{F}^c$) i obciążeń niekonserwatywnych ($\mathbf{f}^{nc}, \mathbf{t}^{nc}, \mathbf{F}^{nc}$) będących, z założenia, funkcjami przemieszczeń ($\mathbf{u}$) oraz prędkości ($\dot{\mathbf{u}}$) i przyspieszeń ($\ddot{\mathbf{u}}$)

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \mathbf{f}^c(\lambda_f^c) + \mathbf{f}^{nc}(\lambda_f^{nc}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{t} &= \mathbf{t}^c(\lambda_t^c) + \mathbf{t}^{nc}(\lambda_t^{nc}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}^c(\lambda_F^c) + \mathbf{F}^{nc}(\lambda_F^{nc}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}})\end{aligned}\quad (2.2)$$

Przez λ z odpowiednimi wskaźnikami oznaczono wektory parametrów charakteryzujących zmianę konserwatywnych ($\lambda_f^c, \lambda_t^c, \lambda_F^c$) i niekonserwatywnych ($\lambda_f^{nc}, \lambda_t^{nc}, \lambda_F^{nc}$) poziomów obciążeń. Przyrosty, a precyzyjniej ich części liniowe, niekonserwatywnych składowych obciążeń ($\Delta \mathbf{f}^{nc}, \Delta \mathbf{t}^{nc}, \Delta \mathbf{F}^{nc}$) można przedstawić jako:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{f}^{nc} &= \frac{\partial \mathbf{f}^{nc}}{\partial \lambda_f^{nc}} \Delta \lambda_f^{nc} + \frac{\partial \mathbf{f}^{nc}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{f}^{nc}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Delta \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{f}^{nc}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \\ \Delta \mathbf{t}^{nc} &= \frac{\partial \mathbf{t}^{nc}}{\partial \lambda_t^{nc}} \Delta \lambda_t^{nc} + \frac{\partial \mathbf{t}^{nc}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{t}^{nc}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Delta \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{t}^{nc}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \\ \Delta \mathbf{F}^{nc} &= \frac{\partial \mathbf{F}^{nc}}{\partial \lambda_F^{nc}} \Delta \lambda_F^{nc} + \frac{\partial \mathbf{F}^{nc}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{F}^{nc}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Delta \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{F}^{nc}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Delta \ddot{\mathbf{u}}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Pierwsze składniki każdej z prawych stron równań (2.3) wynikają ze zmiany poziomu obciążenia niekonserwatywnego między sąsiednimi konfiguracjami, a pozostałe składniki wyrażają zależność obciążeń od przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń. Stosu-

jąc zwykłą procedurę metody elementów skończonych zakłada się, że aproksymację przyrostów przemieszczeń wewnątrz elementu wyraża relacja

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{u}^e \quad (2.4)$$

w której $\Delta \mathbf{u}^e$ jest wektorem przyrostów przemieszczeń węzłowych, a $\mathbf{N}$ jest macierzą funkcji kształtu. Zmianę $\Delta \lambda^{nc}(\mathbf{u})$ wektora charakteryzującego przyrosty poziomu każdej ze składowych obciążenia – spowodowane założoną zależnością wielkości obciążenia od stanu przemieszczenia – można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_f^{nc} &= \mathbf{N}_{\lambda_f} \Delta \mathbf{u}^e \\ \Delta \lambda_t^{nc} &= \mathbf{N}_{\lambda_t} \Delta \mathbf{u}^e \\ \Delta \lambda_F^{nc} &= \mathbf{N}_{\lambda_F} \Delta \mathbf{u}^e \end{aligned} \quad (2.5)$$

Symbolami $\mathbf{N}_{\lambda_f}$, $\mathbf{N}_{\lambda_t}$ i $\mathbf{N}_{\lambda_F}$ oznaczono z założenia znane macierze charakteryzujące funkcyjną zależność wzrostu poziomu obciążenia od przyrostów przemieszczeń węzłów. Macierze te w szczególnym przypadku mogą być, z dokładnością do współczynników wymiarowych, równe macierzom funkcji kształtu. Jeśli w relacji (2.1) uwzględnimy związki (2.3) oraz (2.4) i (2.5) i weźmiemy pod uwagę jedynie człony liniowe, to otrzymamy przyrostowe równanie ruchu elementu

$$(\mathbf{m} - \mathbf{m}^{nc}) \Delta \ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{c} - \mathbf{c}^{nc}) \Delta \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{k} - \mathbf{k}^{nc}) \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{p}(\mathbf{u}, t) \quad (2.6)$$

Przez $\mathbf{m}$, $\mathbf{c}$ i $\mathbf{k}$ oznaczono odpowiednio zwykłe (Kleiber [2.3]) macierze bezwładności, tłumienia i styczne macierze sztywności elementów w ich lokalnych układach odniesienia, a $\Delta \mathbf{p}(\mathbf{u}, t)$ jest przyrostem wektora obciążenia. Korekcyjne macierze obciążeń ($\mathbf{k}^{nc}$), korekcyjne macierze prędkości zmian obciążeń ($\mathbf{c}^{nc}$) oraz korekcyjne macierze przyspieszeń obciążeń ($\mathbf{m}^{nc}$) wynikają z założonej niekonserwatywności obciążeń – ich zależności odpowiednio od przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń. Formuły określające te macierze są następujące:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{nc} &= \mathbf{k}_{\lambda_f}^{nc} + \mathbf{k}_{\lambda_t}^{nc} + \mathbf{k}_{\lambda_F}^{nc} + \mathbf{k}_f^{nc} + \mathbf{k}_t^{nc} + \mathbf{k}_F^{nc} \\ &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_{\lambda_f}^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}^{nc}}{\partial \lambda_f^{nc}} \right)^T \mathbf{N} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}_{\lambda_t}^T \left(\frac{\partial \mathbf{t}^{nc}}{\partial \lambda_t^{nc}} \right)^T \mathbf{N} d(\partial\Omega) + \sum_i \mathbf{N}_{\lambda_F}^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^{nc}}{\partial \lambda_F^{nc}} \right)^T \mathbf{N} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}^{nc}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{N} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{t}^{nc}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{N} d(\partial\Omega) + \sum_i \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^{nc}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{N} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^{nc} &= \mathbf{c}_f^{nc} + \mathbf{c}_t^{nc} + \mathbf{c}_F^{nc} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}^{nc}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right)^T \mathbf{N} d\Omega \\
&+ \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{t}^{nc}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right)^T \mathbf{N} d(\partial\Omega) + \sum_i \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^{nc}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right)^T \mathbf{N} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \\
\mathbf{m}^{nc} &= \mathbf{m}_f^{nc} + \mathbf{m}_t^{nc} + \mathbf{m}_F^{nc} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}^{nc}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \right)^T \mathbf{N} d\Omega \\
&+ \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{t}^{nc}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \right)^T \mathbf{N} d(\partial\Omega) + \sum_i \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^{nc}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \right)^T \mathbf{N} \bigg|_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Przez ξ_i , η_i oraz ζ_i oznaczono współrzędne punktów działania niekonserwatywnych obciążeń skupionych. Jeżeli obciążenia elementu sprowadzimy do jego węzłów, to formuły określające macierze korekcyjne dane relacjami (2.7) w istotny sposób się upraszczają, a podczas ich generowania nie wymagane jest czasochłonne całkowanie. Taki sposób postępowania w przypadku obciążeń niekonserwatywnych może jednak prowadzić do istotnych różnic w wynikach i dlatego nie powinien być stosowany. Dalsza procedura konstruowania równań ruchu w ujęciu metody elementów skończonych, polegająca na transformacji macierzy elementów do układu globalnego i agregacji globalnych macierzy sztywności, tłumienia i bezwładności, przebiega w zwykły w metodzie elementów skończonych sposób (Przemieniecki [2.8], Bathe, Wilson [2.9], Kleiber [2.3], Kleiber, Woźniak [2.4]).

2.3. Macierze korekcyjne prostego elementu belkowego

W punkcie tym na przykładzie prostego elementu belkowego przedstawiono procedurę budowania korekcyjnych macierzy obciążeń. Procedura ta może być wykorzystana podczas wyznaczania korekcyjnych macierzy obciążeń elementów innego typu.

Macierz funkcji kształtu $\mathbf{N}$ prostego, pryzmatycznego elementu belkowego zwykle przyjmuje się w postaci (Przemieniecki [2.8]):

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & -N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & -N_7 & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & -N_7 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & N_7 & 0 & 0 & 0 & N_9 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

gdzie:

$$N_1 = 1 - \xi; N_2 = \xi; N_3 = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1; N_4 = l\xi(\xi^2 - 2\xi + 1); N_5 = \xi^2(-2\xi + 3);$$

$$N_6 = l\xi^2(\xi - 1); N_7 = -6\xi/l(\xi - 1); N_8 = 3\xi^2 - 4\xi + 1; N_9 = \xi(3\xi - 2),$$

a $\xi = x/l$ jest współrzędną bezwymiarową określającą, w lokalnym układzie odniesienia pręta, położenie przekroju poprzecznego o głównych, centralnych osiach bezwładności (*oyz*). Przez l oznaczono długość elementu prętowego. Postacie macierzy korekcyjnych zostaną pokazane na przykładzie korekcyjnych macierzy obciążeń wybranych, prostych schematów obciążeń elementu. Dalej używane będzie pojęcie parametru śledzenia α , który jest miarą zmiany kierunku działającego obciążenia niekonserwatywnego. Jeśli $\alpha = 0$, to będziemy mieli do czynienia z obciążeniem martwym, ustalonym przestrzennie, a gdy $\alpha = 1$, wtedy obciążenie będzie ściśle śledzące, ustalone materialnie. Na przykład przy stałym, równomiernie rozłożonym na długości pręta, działającym w płaszczyźnie x - y ściśle śledzącym ($\alpha(x) = 1$) obciążeniu o intensywności q_z , wektor przyrostów obciążenia $\Delta \mathbf{t}^{nc}$ w przekroju o współrzędnej ξ ma postać

$$\Delta \mathbf{t}^{nc} = [q_z \phi_y \quad -q_z \phi_x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (2.9)$$

gdzie przez ϕ_x i ϕ_y oznaczono kąty obrotu przekroju poprzecznego określonego współrzędną ξ odpowiednio względem osi x i y lokalnego układu odniesienia elementu. Na podstawie zależności (2.7), (2.8) i (2.9) można przedstawić korekcyjną macierz obciążeń

$$\mathbf{k}_t^{nc} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{t1}^{nc} & \mathbf{k}_{t2}^{nc} \\ \mathbf{k}_{t3}^{nc} & \mathbf{k}_{t4}^{nc} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Jawną postać poszczególnych elementów macierzy pokazano w załączniku A.

Korekcyjna macierz obciążeń (2.10) jest niesymetryczna, co implikuje brak symetrii globalnej macierzy sztywności i tym samym istotnie wpływa na zwiększenie całkowitych nakładów obliczeniowych w rozwiązywaniu zadania. Próby, z reguły prostej symetryzacji (Mang [2.10], Argyris i Symeonidis [1.25]) korekcyjnych macierzy obciążeń w sposób istotny upraszczają proces obliczeń, ale mogą być akceptowane jedynie

w ograniczonym, zwykle na początku obliczeń nieznanym, zakresie pracy konstrukcji. Stosowanie jakiegokolwiek algorytmu symetryzacji korekcyjnych macierzy obciążeń w analizie problemów stateczności konstrukcji pod obciążeniem niekonserwatywnym jest na ogół nie do przyjęcia. Symetryzacja prowadzi do zagadnienia własnego z macierzą symetryczną, uniemożliwiając znalezienie tych stanów krytycznych, w których konstrukcja traci stateczność przez flutter.

W załączniku A przedstawiono także przykładowe, jawne postacie elementów macierzy korekcyjnych przy stałym (q_z) i liniowo zmiennym ($q_z(x) = q_1x + q_2$) obciążeniu rozłożonym o odpowiednio funkcyjnym ($\alpha(x) = e_1x + e_2$) i stałym ($\alpha(x) = 1$) parametrze śledzenia. Korekcyjne macierze, które wynikają z zależności poziomów obciążeń od przemieszczeń i są wyznaczane przez pierwsze składniki prawych stron relacji (2.7) w jawny sposób zależą od przyjętej postaci macierzy funkcji sterujących procesem zmian poziomów obciążeń N_λ . Dalej zakłada się, że macierz funkcji sterujących w sposób liniowy wiąże poziomy parametrów obciążenia z przemieszczeniami węzłów, a wzrosty obciążeń w kierunkach osi głównych przekrojów poprzecznych są między sobą sprzężone przez dane pary bezwymiarowych parametrów ($\lambda_{yz}^q, \lambda_{zy}^q$) i ($\lambda_{yz}^m, \lambda_{zy}^m$) odpowiednio przy obciążeniach rozłożonych i rozłożonych obciążeniach momentowych. Jeśli przyjmiemy takie założenia, to macierz funkcji sterujących procesem wzrostu obciążeń można zapisać

$$N_\lambda = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & N_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_9 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{10} & N_1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

gdzie:

$$N_1 = (1 - \xi)/l; \quad N_2 = \xi/l; \quad N_3 = \lambda_{yz}^q(1 - \xi)/l; \quad N_4 = \lambda_{yz}^q\xi/l; \quad N_5 = \lambda_{zy}^q(1 - \xi)/l; \\ N_6 = \lambda_{zy}^q\xi/l; \quad N_7 = \lambda_{yz}^m\xi; \quad N_8 = \lambda_{yz}^m(1 - \xi); \quad N_9 = \lambda_{zy}^m\xi; \quad N_{10} = \lambda_{zy}^m(1 - \xi).$$

W przypadku jednego z najprostszych typów obciążeń, którego wektor można przedstawić w postaci

$$\Delta t_\lambda^{nc} = [0 \quad 0 \quad q_z \lambda_z \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (2.12)$$

przyjęto, że q_z jest stałe na długości elementu, a λ_z jest funkcją opisującą zależność poziomu obciążenia od przemieszczeń na kierunku osi z lokalnego układu odniesienia. Macierz korekcyjna tak zdefiniowanego wektora przyrostu obciążeń ma postać

$$\mathbf{k}_{\lambda i}^{nc} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\lambda i 1}^{nc} & \mathbf{k}_{\lambda i 2}^{nc} \\ \mathbf{k}_{\lambda i 3}^{nc} & \mathbf{k}_{\lambda i 4}^{nc} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Jawne postacie elementów macierzy $\mathbf{k}_{\lambda i 1}^{nc}$, $\mathbf{k}_{\lambda i 2}^{nc}$, $\mathbf{k}_{\lambda i 3}^{nc}$ i $\mathbf{k}_{\lambda i 4}^{nc}$ przedstawiono w załączniku A.

Czynnikiem, który w istotny sposób może przyspieszać zbieżność procesu iteracji jest pewien efekt rzędu drugiego, powstający na skutek zależności poziomów dodatkowych obciążeń, występujących w wyniku na przykład śledzenia, od stanu przemieszczeń. Na przykład, jeżeli przyjąć, że jedynym obciążeniem pręta jest stałe na długości, ściśle śledzące obciążenie rozłożone q_z , to, jak wiadomo, obciążenie pojawiające się w trakcie przemieszczeń wyraża się związkiem (2.9). Tym samym wielkością, która będzie modyfikowana przez funkcyjne parametry wzrostu λ_x i λ_y będzie wektor

$$\Delta \mathbf{t}^{nc} = [q_z \phi_y \lambda_x \quad -q_z \phi_x \lambda_y \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (2.14)$$

Przyjmując zależność wektora parametrów obciążenia od przemieszczeń węzłowych (2.5), uwzględniając zależność (2.11) i znane – wynikające z pierwszej iteracji w analizowanym kroku obciążeń – przemieszczenia brzegowe elementu $i - j$ $[u_{x_i} \ u_{y_i} \ u_{z_i} \ \phi_{x_i} \ \phi_{y_i} \ \phi_{z_i} \ u_{x_j} \ u_{y_j} \ u_{z_j} \ \phi_{x_j} \ \phi_{y_j} \ \phi_{z_j}]^T$ składowe dodatkowej korekcyjnej macierzy obciążeń – zgodnie z układem danym relacją (2.13) – możemy wyznaczyć przez wielkości $\tilde{\mathbf{k}}_{\lambda i 1}^{nc}$, $\tilde{\mathbf{k}}_{\lambda i 2}^{nc}$, $\tilde{\mathbf{k}}_{\lambda i 3}^{nc}$ i $\tilde{\mathbf{k}}_{\lambda i 4}^{nc}$. Postać jawną tych macierzy przedstawiono w załączniku A.

Przytoczone ściśle formuły określające elementy korekcyjnych macierzy obciążeń można bezpośrednio wykorzystać w algorytmach analizy metodą elementów skończonych nieliniowych układów prętowych pod obciążeniem niepotencjalnym. Korekcyjne macierze prędkości zmian obciążeń i przyspieszeń obciążeń można formułować przez proste analogie. Pokazano tutaj jedynie korekcyjne macierze obciążeń najprostszych przypadków obciążeń i ich prostych zależności od stanu przemieszczeń konstrukcji. W innych przypadkach formuły tych macierzy komplikują się znacznie, choć w sposób elementarny mogą być wyprowadzone przy użyciu narzędzi przekształceń symbolicznych.

2.4. Procedury symbolicznego generowania macierzy korekcyjnych

Liczne pakiety programów przekształceń symbolicznych, do których należą takie programy jak Derive, Macsyma, Reduce, Maple i Mathematica, w sposób zasadniczy upraszczają proces generowania skomplikowanych formuł algebraicznych na macierze korekcyjne. Przykładami wykorzystania rachunków symbolicznych do – między innymi – generowania macierzy sztywności w analizie konstrukcji metodą elementów skończonych są prace Luffa, Roesseta i Connora [2.11], Cecchiego i Lami [2.12], Korncoffa i Fenvesa [2.13], Kikuchiego [2.14], Nagabhushanama, Srinivasa i Gaonkara [2.15]

i wiele innych. Niżej przytoczono dwie proste procedury generacji korekcyjnych macierzy obciążeń, na przykładzie elementu belkowego, napisane w języku pakietu Mathematica (Wolfram [2.16], Maeder [2.17]). Procedury te można bezpośrednio wykorzystać do generacji korekcyjnych macierzy obciążeń przy ciągłym, dowolnie zależnym od przemieszczeń obciążeniu elementu belkowego. Nic nie stoi na przeszkodzie, aby, po modyfikacjach, procedury te uogólnić na dowolny element skończony. Procedury napisano tak, by były czytelne dla znających składnię jednego z języków wysokiego poziomu; język programu Mathematica umożliwia przedstawienie tych procedur w bardzo zwartej, często trudno czytelnej postaci.

Procedura **fzq** służy do generacji korekcyjnych macierzy obciążeń przy obciążeniach ciągłych o dowolnych, funkcyjnych opisach zależności obciążeń od stanu przemieszczeń.

```
fzq[a_,df0_,dqx_,dqy_,dqz_,dmx_,dmy_,dmz_] :=
Block[
  {p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8},
  p1 = D[df0,x]; p2 = D[df0,y]; p3 = D[df0,z]; p4 = D[df0,fx];
  p5 = D[df0,fy]; p6 = D[df0,fz]; p7 = {p1,p2,p3,p4,p5,p6};
  qx = dqx; qy = dqy; qz = dqz; mx = dmx; my = dmy; mz = dmz;
  p8 = Simplify[Integrate[(l*Transpose[a].Transpose[p7].a),{x,0,l}]];
  qx = .; qy = .; qz = .; mx = .; my = .; mz = .; p8//MatrixForm
]
```

Parametrami tej procedury są:

a – macierz funkcji kształtu dana relacją (2.8),

df0 – wektor obciążeń przykładowo dany relacją (2.9) ($\phi_x \equiv fx, \phi_y \equiv fy$),

dqx, **dqy**, **dqz**, **dmx**, **dmy**, **dmz** – funkcje zależne od współrzędnej bezwymiarowej x ($x = \xi$) dane w postaci iloczynu funkcji opisujących intensywność obciążeń i funkcji śledzenia odpowiednio przy obciążeniach rozłożonych q_x, q_y i q_z w kierunkach osi lokalnego układu elementu oraz rozłożonych obciążeniach momentowych m_x, m_y i m_z . Na przykład elementy macierzy korekcyjnej dla $q_z = q_1x + q_2$ i $\alpha(x) = 1$ można otrzymać, gdy **dqz** = $(q_1*x+q_2)*l$ i jeśli pozostałe parametry charakteryzujące działające obciążenie są zerowe.

Procedura **fqlk** generuje dodatkowe korekcyjne macierze obciążeń

```
fqlk[a_,n_,df0_] :=
Block[
  {p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,p9},
  p1 = D[df0,lx]; p2 = D[df0,ly]; p3 = D[df0,lz]; p4 = D[df0,lfx];
  p5 = D[df0,lfy]; p6 = D[df0,l fz]; p7 = {p1,p2,p3,p4,p5,p6};
  p8 = a.{uxi,uyi,uzi,fxi,fyi,fzi,uxj,uyj,uzj,fxj,fyj,fzj};
  ux = p8[[1]]; uy = p8[[2]]; uz = p8[[3]]; fx = p8[[4]]; fy = p8[[5]]; fz = p8[[6]];
  p9 = Simplify[Integrate[(l*Transpose[n].Transpose[p7].a),{x,0,l}]];
  ux = .; uy = .; uz = .; fx = .; fy = .; fz = .; p9//MatrixForm
]
```

Parametrami tej procedury są:

$\underline{a}$ – macierz funkcji kształtu dana relacją (2.8),

$\underline{n}$ – macierz funkcji sterujących procesem wzrostu obciążeń dana na przykład relacją (2.11),

$d\mathbf{f}\mathbf{0}$ – wektor obciążeń dany na przykład relacją (2.14) ($\phi_x \equiv fx, \phi_y \equiv fy, \lambda_x \equiv lx, \lambda_y \equiv ly$).

Za pomocą procedury *fqlk* można łatwo wyznaczyć na przykład prezentowane w załączniku A postacie macierzy $\tilde{\mathbf{k}}_{\lambda 1}^{nc}, \tilde{\mathbf{k}}_{\lambda 2}^{nc}, \tilde{\mathbf{k}}_{\lambda 3}^{nc}$ i $\tilde{\mathbf{k}}_{\lambda 4}^{nc}$. Czas generowania macierzy korekcyjnych w przypadkach skomplikowanych funkcyjnych zależności obciążeń od stanu odpowiedzi konstrukcji jest pomijalny, gdy korzystamy ze współczesnego sprzętu komputerowego.

2.5. Algorytm rozwiązania i przykłady numeryczne

Zakładając, że materiał konstrukcji jest liniowo sprężysty, a powstające w nim odkształcenia są małe, sformułowano styczną macierz sztywności prostego, krępego elementu prętowego. W elemencie tym naprężenia normalne σ^0 (dodatnie przy rozciąganiu) są w równowadze z początkową siłą osiową P^0 i początkowymi momentami zginającymi M_Y^0 i M_Z^0 względem głównych, centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego. Symbolicznie składowe stycznej macierzy sztywności elementu można przedstawić jako

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + P^0 \mathbf{k}_1 + M_Y^0 \mathbf{k}_2 + M_Z^0 \mathbf{k}_3 \quad (2.15)$$

gdzie $\mathbf{k}_0$ jest sprężystą macierzą sztywności elementu, a pozostałe macierze oznaczone literami $\mathbf{k}_i$ z indeksami porządkowymi stanowią macierz sztywności geometrycznej. Taki sposób formułowania stycznej macierzy sztywności w analizie statyki i stateczności prętowych układów cienkościennych z powodzeniem stosowali między innymi Bażant, El Nimeiri [2.18] i Głabisz [2.19].

Jeżeli przyjąć oznaczenia:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^* &= \mathbf{m} - \mathbf{m}^{nc} \\ \mathbf{c}^* &= \mathbf{c} - \mathbf{c}^{nc} \\ \mathbf{k}^* &= \mathbf{k} - \mathbf{k}^{nc} \end{aligned} \quad (2.16)$$

to przyrostowe równanie metody elementów skończonych całej konstrukcji można zapisać jako (Kleiber [2.3])

$$\mathbf{M}^* \Delta \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}^* \Delta \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^* \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{P} + \mathbf{R} \quad (2.17)$$

Macierze $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{C}^*$ i $\mathbf{K}^*$ są odpowiednio macierzami bezwładności, tłumienia i sztywności stycznej konstrukcji, powstałymi przez akumulacje transformowanych do układu globalnego odpowiednich macierzy elementów. Przez $\Delta \ddot{\mathbf{U}}$, $\Delta \dot{\mathbf{U}}$ i $\Delta \mathbf{U}$ oznaczono od-

powiednio przyrosty przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń węzłów w układzie globalnym, a przez $\Delta \mathbf{P}$ i $\mathbf{R}$ oznaczono wektor przyrostów obciążeń i węzłowych sił nie-zrównoważonych. W tak sformułowanym zagadnieniu sterowanie składowymi obciążeniami niekonserwatywnych odbywa się na poziomie elementu. Sposób ten może być szczególnie przydatny, a nawet jedyny, na przykład w analizie układów kratowych, w których za zmianę konfiguracji obciążenia węzłowego może być odpowiedzialny jeden wybrany, łączący się z tym węzłem element. Gdy sterowanie obciążeniem nie odbywa się z poziomu elementu, a wyraża się prostymi funkcjami globalnych przemieszczeń węzła, globalną styczną macierz sztywności można przedstawić w postaci

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} - \mathbf{K}_W^{nc} \quad (2.18)$$

Przez $\mathbf{K}_W^{nc}$ oznaczono korekcyjną macierz sztywności powstałą z akumulacji macierzy korekcyjnych ($\mathbf{k}_W^{nc}$) wynikających z zależności niekonserwatywnych obciążeń węzłowych od przemieszczeń węzłów w układzie globalnym. W przypadku węzła układu prętowego o sześciu stopniach swobody macierz $\mathbf{k}_W^{nc}$, przy węzłowym obciążeniu niekonserwatywnym sterowanym przez parametr śledzenia α , ma postać

$$\mathbf{k}_W^{nc} = \alpha \begin{matrix} U_X & U_Y & U_Z & \Phi_X & \Phi_Y & \Phi_Z \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & F_Z & -F_Y \\ 0 & 0 & 0 & -F_Z & 0 & F_X \\ 0 & 0 & 0 & F_Y & -F_X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_Z & -M_Y \\ 0 & 0 & 0 & -M_Z & 0 & M_X \\ 0 & 0 & 0 & M_Y & -M_X & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.19)$$

gdzie wielkości U_i, Φ_i, F_i, M_i ($i = X, Y, Z$) wyrażają węzłowe przemieszczenia, obroty, siły i momenty wyrażone w globalnym układzie odniesienia konstrukcji. Sterowanie obciążeniem z poziomu węzła – o ile jest możliwe – jest wygodniejsze ze względu na obliczenia i prowadzi do globalnie mniejszej liczby transformacji między układami lokalnymi elementów a globalnym układem odniesienia konstrukcji, w porównaniu z przypadkiem sterowania obciążeniem z poziomu elementu.

Przyrostowe sformułowanie metody elementów skończonych opisane zależnością (2.17) może być podstawą analizy statyki i dynamiki układów obciążanych siłami potencjalnymi i niepotencjalnymi w ich przedkrytycznym etapie pracy. Określenie wartości obciążeń krytycznych jest możliwe – przy przyjętym dynamicznym kryterium stateczności (Życzkowski [1.23]) – na podstawie śledzenia zachowania się częstości drgań własnych układu. Częstości drgań własnych układów niezachowawczych można wyznaczyć stosując standardową procedurę (Kleiber [2.3]) w postaci

$$(\mathbf{K}^* - \omega^2 \mathbf{M}^*) \mathbf{U} = 0 \quad (2.20)$$

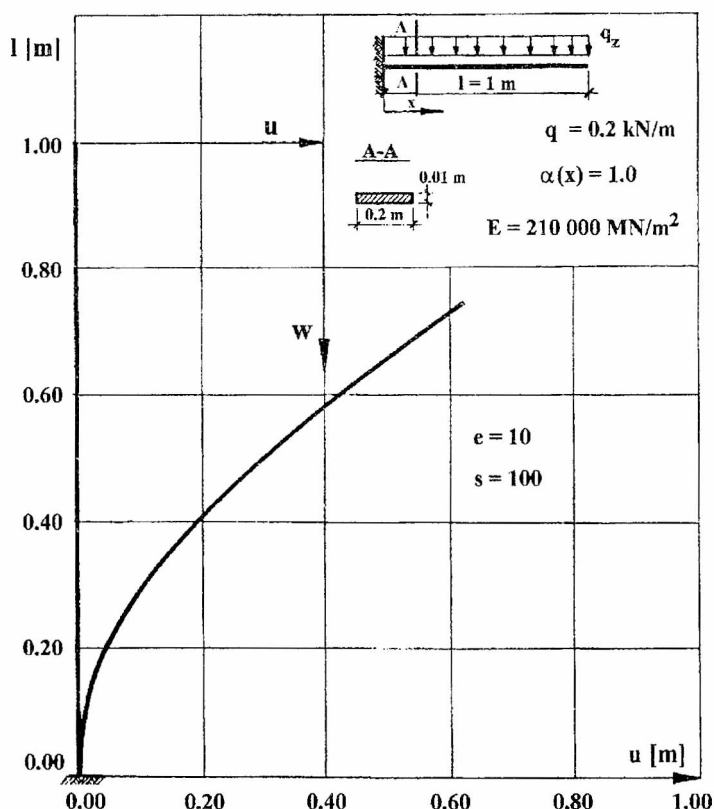
gdzie ω jest częstością drgań własnych, a $\mathbf{M}^*$ macierzą bezwładności badanego układu. Analiza częstości drgań własnych układu umożliwia ustalenie poziomu pierwotnego obciążenia krytycznego jak i charakteru utraty stateczności (Bolotin [1.5]). Jeżeli wszystkie części urojone częstości ω są większe od zera, to ruch jest asymptotycznie stabilny. Jeżeli części urojone wraz ze wzrostem poziomu obciążenia zerują się, to mamy do czynienia bądź ze stanem krytycznym – dywergencją, jeżeli w częstości ω zarówno część rzeczywista jak i urojona są równe zero, bądź flutterem, jeżeli część urojona jest równa zero a część rzeczywista ω jest różna od zera. Gdy części urojone ω są tożsamościowo równe zero, a wraz ze wzrostem obciążenia następuje zrównanie się części rzeczywistych, wtedy mamy do czynienia ze stanem krytycznym, w którym konstrukcja traci stateczność przez flutter. Konsekwentne stosowanie procedury (2.20) na wyższych poziomach obciążenia umożliwia wyznaczanie wtórnych poziomów obciążeń krytycznych.

Sformułowane ogólnie równanie przyrostowe (2.17) wykorzystano następnie do analizy układów ze statycznymi siłami niekonserwatywnymi. W algorytmie posługiwano się uaktualnianymi układami Lagrange’a i zastosowano, standardową w analizie układów geometrycznie nieliniowych, procedurę Newtona–Raphsona (Kleiber [2.3]). Generowanie w każdej iteracji – sterowanego parametrami obciążeń procesu obliczeń – nowej (zmodyfikowanej) macierzy sztywności oraz wyznaczanie i odpowiednie kumulowanie (Kleiber [2.3]) przyrostów naprężeń w elementach wraz ze stosowną transformacją niepotencjalnych składowych obciążenia umożliwia śledzenie nieliniowych ścieżek równowagi układów niezachowawczych. Początkowe siły wewnętrzne w elementach wyznacza się jako średnie z aktualnie istniejących sił na ich końcach (Bažant, El Nimeiri [2.18]). Procedurę iteracji na danym kroku obciążenia prowadzi się do momentu spełnienia narzuconego na początku rozwiązania warunku, który dotyczy powstających przyrostów przemieszczeń węzłów. Obliczanie, w każdej iteracji kroku obciążenia, wektora sił niezerównoważonych modyfikującego prawą stronę równania przyrostowego umożliwia pełną – na miarę przyjętej dokładności – kontrolę spełnienia warunków równowagi konstrukcji. Badanie – po zakończeniu cyklu iteracji na wybranym lub każdym kroku obciążenia – widma wartości częstości drgań własnych konstrukcji służy do określenia poziomów obciążeń krytycznych oraz charakteru utraty stateczności.

Budowa algorytmu rozwiązania jest typowa w analizie zagadnień nieliniowych geometrycznie, dlatego też w opisie ograniczono się tylko do zasygnalizowania jego wybranych elementów. Poprawność funkcjonowania algorytmu testowano na wielu zadaniach z siłami konserwatywnymi – mających ściśle rozwiązania (Timoshenko, Gere [2.20]) oraz z siłami niekonserwatywnymi o znanych rozwiązaniach (np. Saje, Srprčić [2.21]). Z reguły uzyskiwano w pełni zadowalającą zgodność, a odchylenia które się pojawiały wynikały ze stosowanego w algorytmie sposobu aproksymacji (przyjęcie stałych, średnich) wartości początkowych sił wewnętrznych w elementach. Należy podkreślić, że analiza geometrycznie nieliniowa zagadnień niekonserwatywnych w stosunku do analogicznych zagadnień konserwatywnych prowadzi do zwiększenia liczby iteracji – przy tym samym poziomie dokładności – średnio od 10% do 30% w zależności od wielkości powstających obrotów. Badanie stateczności pręta Becka (Bolotin [1.5])

przy dowolnym parametrze śledzenia już przy podziale pręta na trzy elementy dawało rozwiązanie, którego błąd – zarówno w przypadku bifurkacji jak i flutteru – w porównaniu do znanych, ścisłych rozwiązań nie przekraczał 0,1%.

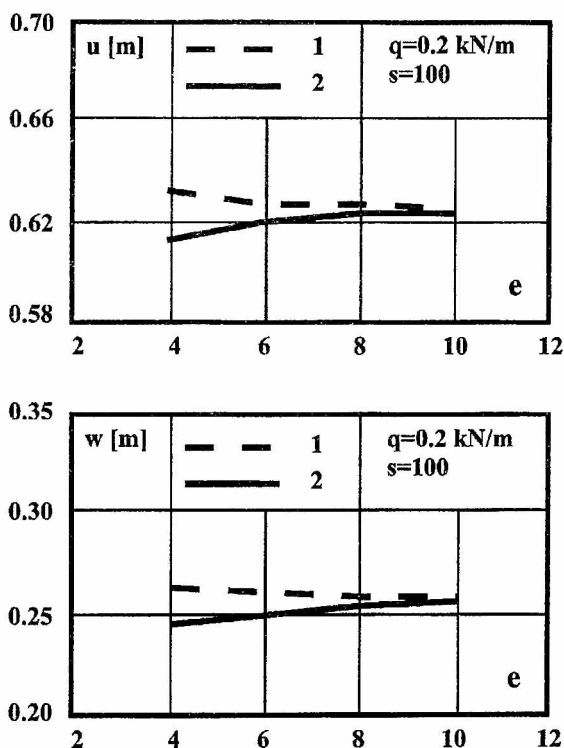
Praktyczne funkcjonowanie zaproponowanej procedury w analizie układów prętowych testowano między innymi na przykładzie wspornika obciążonego ściśle śledzącym obciążeniem równomiernie rozłożonym q_z . W algorytmie wykorzystano wyprobowane korekcyjne macierze obciążeń. Na rysunku 2.1 pokazano schemat pręta oraz jego odkształconą pod działaniem śledzącego obciążenia $q_z = 0,2 \text{ kN/m}$. Na rysunkach 2.2 i 2.3 pokazano przemieszczenia (poziome u , pionowe w) końca wspornika przy różnej liczbie elementów e i różnych liczbach s określających liczbę stosowanych kroków obciążenia. Cyfrą 1 oznaczono rozwiązania, w których za sterowanie obciążeniem niekonserwatywnym „odpowiedzialne” były jedynie przemieszczenia węzłów. Cyfrą 2 oznaczono te rozwiązania, w których wykorzystano prezentowane w pracy postacie korekcyjnych macierzy obciążeń, co w konsekwencji prowadziło do uwzględnienia, w generowanych dodatkowych obciążeniach, wpływu pól przemieszczeń wewnątrz ele-



Rys. 2.1. Schemat statyczny pręta i jego odkształcona pod działaniem śledzącego obciążenia q_z

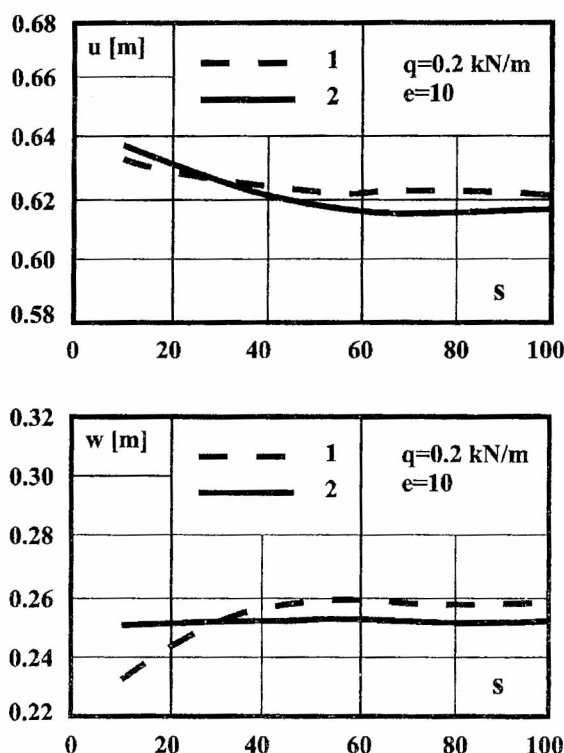
Fig. 2.1. Static scheme of a cantilever and its deflected axis under a follower load q_z

mentów. Różnice między tymi dwoma podejściami zanikają przy zwiększaniu liczby stosowanych elementów i są zgodne z tymi, które pokazano w pracy Argyrisa i Symeonidisa [1.25]. Uwzględnienie dodatkowych, wynikających z istnienia efektów rzędu drugiego, macierzy korekcyjnych obciążeń prowadzi do zmniejszenia całkowitej liczby iteracji (w stosunku do rozwiązań bez tych macierzy) średnio od 2% do 4% w zależności od poziomu obciążenia i żądanej dokładności. Na rysunku 2.4 przedstawiono wyniki analizy stateczności prostej ramy obciążonej niekonserwatywną siłą skupioną. Pokazano charakter zmian kwadratów części rzeczywistych podstawowych częstości drgań własnych układu w zależności od parametru śledzenia α i działającej siły N . Przez N_B oznaczono krytyczne obciążenia bifurkacyjne, a przez N_F obciążenia przy których konstrukcja traci stateczność przez flutter; utrata stateczności zachodziła w płaszczyźnie ramy. Jak widać, poziom krytycznego obciążenia konstrukcji poddanej działaniu sił niepotencjalnych może być wielokrotnie wyższy od wartości krytycznych obciążeń potencjalnych. Wykorzystując ten fakt można spodziewać się, że w ściśle określonych warunkach możliwe jest zwiększenie poziomu krytycznego, potencjalnego obciążenia konstrukcji – jej stabilizacja – poprzez działanie dodatkowych pól sił niepotencjalnych. Problemem stabilizacji na ogół liniowych układów potencjalnych siłami niekonserwa-



Rys. 2.2. Przeszacowania u i w końca wspornika przy różnej liczbie e elementów skończonych

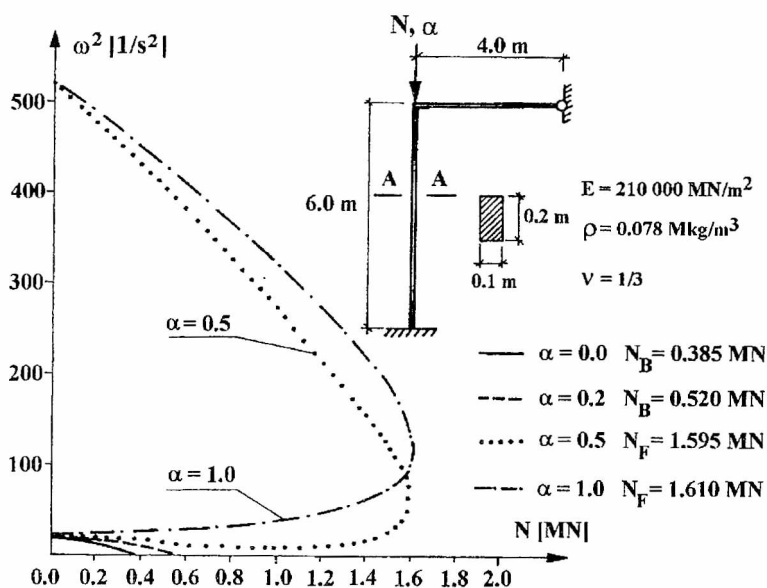
Fig. 2.2. End displacements u and w for a cantilever for various numbers e of finite elements



Rys. 2.3. Przemieszczenia u i w końca wspornika przy różnej liczbie s kroków obciążenia

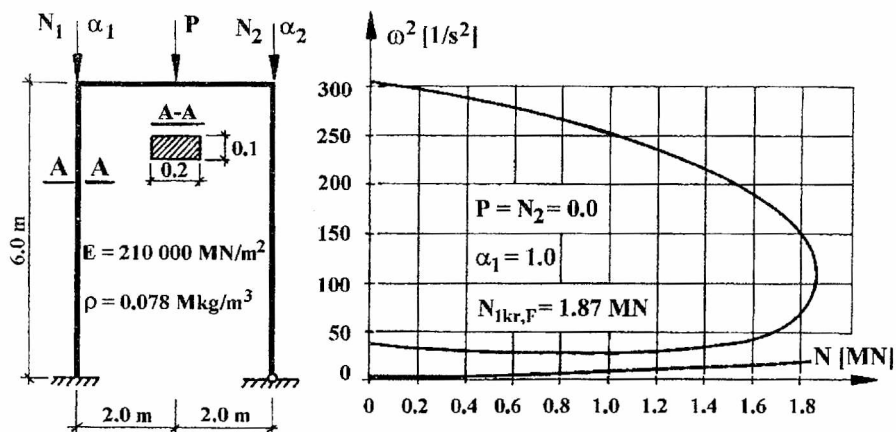
Fig. 2.3. End displacements u and w for a cantilever for various numbers s of load steps

tywnymi zajmowali się między innymi Lachadanow [2.22], Singh [2.23] i Krasinskaja [2.24], którzy sformułowali teoretyczne podstawy stabilizacji układów opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi drugiego rzędu. Przedstawiony tutaj algorytm w szczególności umożliwia wyznaczanie obszarów stateczności konstrukcji poddanych działaniu sił potencjalnych i niepotencjalnych. Na rysunku 2.5 pokazano ramę obciążoną siłą potencjalną P (stanowiącą obciążenie zasadnicze konstrukcji) i siłami niepotencjalnymi N_1 i N_2 o parametrach śledzenia α_1 i α_2 , których zadaniem jest stabilizacja układu. Przez pojęcie stabilizacji należy rozumieć stworzenie takiej sytuacji, w której możliwe jest dopuszczenie wyższych poziomów obciążenia zasadniczego P niż te, które wynikają z analizy stateczności konstrukcji pod działaniem jedynie siły potencjalnej P . Na rysunkach 2.6 i 2.7 pokazano obszary stateczności ramy w przestrzeni sił N_1 , N_2 i P . Linia ciągłą połączono punkty przestrzeni obciążeń, w których następuje utrata stateczności przez bifurkację, a linią przerywaną połączono te punkty przestrzeni obciążeń, w których układ traci stateczność przez flutter. Linia przerywana z kropkami pokazuje stany obciążeń krytycznych, w których poziom obciążeń powodujących bifurkację i flutter jest identyczny. Obszar stateczności prezentowany na rys.



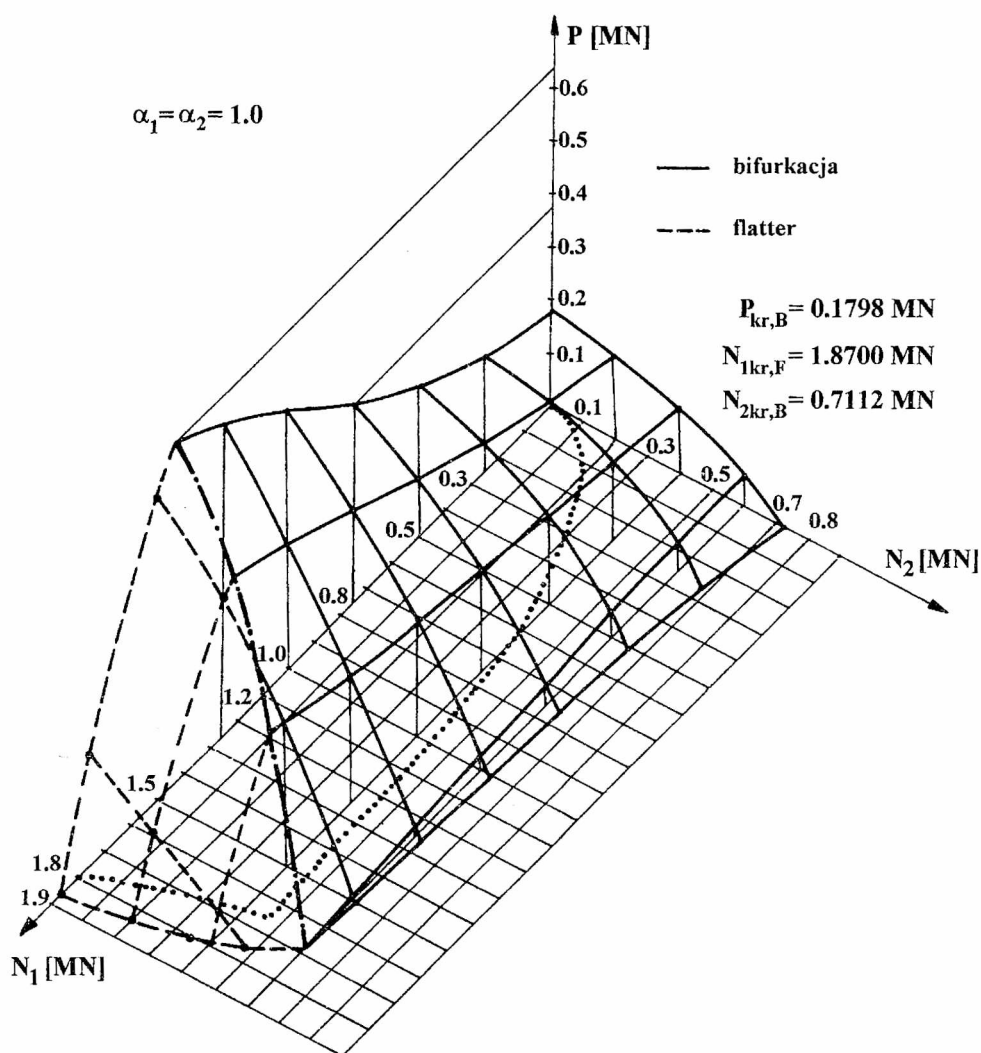
Rys. 2.4. Zależność częstości drgań własnych ramy od poziomu obciążenia niekonserwatywnego N i parametru śledzenia α

Fig. 2.4. Eigenvalues of the frame as a function of a nonconservative load level N and follower parameter α



Rys. 2.5. Schemat statyczny i wykres częstości drgań własnych ramy poddanej obciążeniu potencjalnemu P i stabilizującemu obciążeniu niepotencjalnemu N_1, N_2

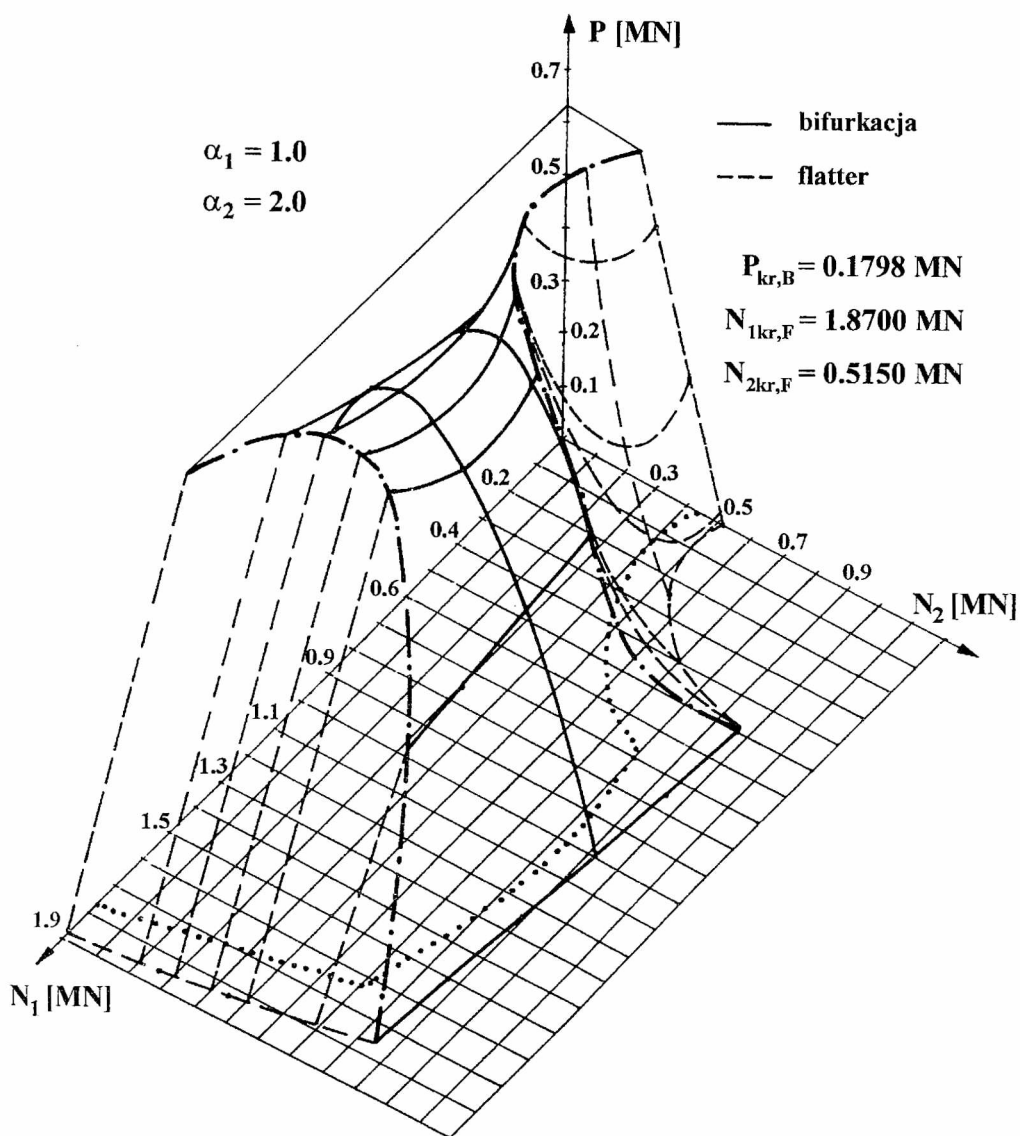
Fig. 2.5. Static scheme and eigenvalues of the frame under potential P and stabilizing nonpotential loading N_1, N_2



Rys. 2.6. Obszar stateczności ramy pod działaniem siły potencjalnej P i sił niekonserwatywnych N_1, N_2 o parametrach śledzenia $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

Fig. 2.6. Stability region of the frame under potential P and nonconservative loading N_1, N_2 with follower parameters $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

2.6 uzyskano przy parametrach śledzenia $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, a na rys. 2.7 pokazano obszar dla $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = 2$. Zmienność kwadratów części rzeczywistych podstawowych częstotliwości drgań konstrukcji obciążanej tylko siłą N_1 ($\alpha_1 = 1$) w funkcji poziomu obciążenia pokazano na rys. 2.5. Jak widać, przy tym obciążeniu o utracie stateczności konstrukcji przez flutter decyduje druga i trzecia częstota drgań układu. O utracie stateczności ramy pod działaniem jedynie siły N_2 decyduje przy $\alpha_2 = 1$ oczywiście pierwsza częstota drgań, a przy $\alpha_2 = 2$ dwie częstoty najniższe. Na rysunkach 2.6 i 2.7 –



Rys. 2.7. Obszar stateczności ramy pod działaniem siły potencjalnej P i sił niekonserwatywnych N_1, N_2 o parametrach śledzenia $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = 2$

Fig. 2.7. Stability region of the frame under potential P and nonconservative loading N_1, N_2 with follower parameters $\alpha_1 = 1$ and $\alpha_2 = 2$

w płaszczyźnie $N_1 - N_2$ – linią kropkowaną oznaczono obszary, w których uzyskuje się efekt stabilizacji układu. Prezentowane obszary uzyskano realizując obciążenia w kolejności: N_1, N_2 i P . Z uwagi na przyjęte usytuowanie przekroju poprzecznego utrata stateczności ramy zachodzi z jej płaszczyzny; zadanie rozwiązywano oczywiście jako przestrzenne.

2.6. Podsumowanie

Uwzględnienie w analizie konstrukcji obciążeń, które funkcyjnie związane są z odpowiedzią konstrukcji, wymaga pewnych modyfikacji algorytmów konstruowania rozwiązań. W rozdziale tym skoncentrowano się na metodzie elementów skończonych w jej przyrostowym ujęciu i efektach włączenia do nieliniowej analizy obciążeń niekonserwatywnych. Punkt wyjścia do sformułowania równań metody elementów skończonych stanowiła zasada prac przygotowanych z jawnie uwzględnionymi elementami, które wynikają z obecności sił funkcyjnie związanych z polami przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń powstających w konstrukcji. Konsekwencją uwzględnienia sił niekonserwatywnych jest modyfikacja wektora obciążeń, który przedstawiono jako funkcję przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń. Człony wektora obciążeń funkcyjnie związane z odpowiedzią konstrukcji wydzielono i skojarzono z macierzą sztywności, macierzą tłumienia i bezwładności. Elementy modyfikujące te macierze nazwano odpowiednio korekcyjnymi macierzami obciążeń, korekcyjnymi macierzami prędkości obciążeń i przyspieszeń obciążeń. Macierze korekcyjne są niesymetryczne, co powoduje utratę symetrii układów równań metody elementów skończonych i w rezultacie pewne niedogodności numeryczne. Uwzględniono także pewne efekty rzędu drugiego, wynikające z zależności od odpowiedzi konstrukcji tych dodatkowych obciążeń, które powstają na skutek zmian poziomów obciążenia spowodowanych stanem przemieszczenia. Wspomniane efekty rzędu drugiego wyrażają się w postaci dodatkowych korekcyjnych macierzy obciążeń. Formuły określające macierze korekcyjne lub dodatkowe macierze korekcyjne zależą w sposób istotny od charakteru obciążeń oraz funkcji wiążących obciążenie z odpowiedzią konstrukcji. W rozdziale tym podano – możliwe do natychmiastowego wykorzystania – korekcyjne macierze obciążeń prostych przypadków obciążeń elementu prętowego. Postacie macierzy korekcyjnych innych, bardziej skomplikowanych przypadków i innych elementów skończonych można łatwo wyprowadzić, bazując na pokazanych w pracy przykładach procedur przekształceń symbolicznych. Pakiety wykonujące rachunki symboliczne umożliwiają generowanie ścisłych formuł macierzy korekcyjnych dowolnie skomplikowanych obciążeń i funkcji opisujących ich zachowanie. Ścisłe wyprowadzone formuły macierzy korekcyjnych uwzględniono w zbudowanym algorytmie metody elementów skończonych, który wykorzystano w analizie statyki i stateczności układów prętowych pod statycznym obciążeniem potencjalnym i niepotencjalnym.

Zastosowanie kryterium dynamicznego w analizie stateczności pozwala wyznaczyć obciążenia krytyczne powodujące bifurkację i flatter konstrukcji, a także określić granice stosowalności statycznego kryterium stateczności. Analiza konstrukcji poddanej działaniu wieloparametrowym, niezależnym obciążeniom potencjalnym i niepotencjalnym jest podstawą określenia obszarów stateczności jako funkcji rozkładów i wartości parametrów śledzenia, a także kolejności oraz sposobu realizacji działających wektorów obciążenia. Na podstawie przeprowadzonych analiz można sformułować kilka uwag,

które mogą być istotne z punktu widzenia analizy stateczności i sposobów stabilizacji układów prętowych poddanych działaniu sił potencjalnych i niepotencjalnych:

- o utracie stateczności konstrukcji przez flutter nie zawsze decydują jej dwie najniższe częstotliwości drgań własnych (Bolotin [1.5]),
- graniczny parametr śledzenia, oddzielający obszar stosowalności statycznego kryterium stateczności od obszaru, w którym konstrukcja traci stateczność przez flutter, jest cechą indywidualną konstrukcji i konfiguracji obciążenia – w szczególności może on należeć do obszarów nadśledzenia ($\alpha > 1$) (Życzkowski [1.23]),
- obciążenia niepotencjalne (cyrkulacyjne) mogą – choć nie musi to być regułą – stabilizować układ poddany działaniu sił potencjalnych jedynie wtedy, gdy układ pod tym obciążeniem niepotencjalnym traci stateczność przez flutter,
- stabilizacja układów potencjalnych przez działanie pól sił cyrkulacyjnych (tylko tych, które indywidualnie działając na konstrukcję mogą powodować jej flutter) może prowadzić do wielokrotnego zwiększenia krytycznych poziomów obciążeń potencjalnych.

W rozdziale tym wykorzystano wyniki przedstawione w dwóch pracach autora [2.25, 2.26].

3. STATECZNOŚĆ PRĘTÓW POD OBCIĄŻENIEM NIEKONSERWATYWNYM

3.1. Wprowadzenie

Wyznaczanie częstości drgań własnych oraz poziomów obciążeń krytycznych pryzmatycznych i niepryzmatycznych belek prostych jest bardzo ważnym elementem analizy wielu współczesnych konstrukcji inżynierskich. Zwykle – przynajmniej w pierwszym przybliżeniu – zadanie to sprowadza się do analizy belek według teorii Bernoulliego–Eulera albo teorii Timoshenki, jeżeli odkształcalność postaciowa i bezwładność obrotowa są uznane za istotne. Przykładami konstrukcji inżynierskich, które można analizować wykorzystując teorię belek, są między innymi belki i kolumny punktowo lub odcinkowo sprężyste podparte, pryzmatyczne i niepryzmatyczne belki z masami, belki wstępnie sprężone, belki z rysami, rurociągi sprężyste mocowane częściowo wypełnione cieczą, pale fundamentowe, maszty antenowe, wieże wiertnicze, podatne ramiona robotów i wiele innych. Konstrukcje tego typu mogą być poddane działaniu różnego typu obciążeń, z których jednymi z istotniejszych, z punktu widzenia określenia ich częstości drgań i poziomów obciążeń krytycznych, są obciążenia konserwatywne i niekonserwatywne.

Problemowi stateczności prętów pod obciążeniem niepotencjalnym poświęcono olbrzymią liczbę prac, o czym już wspomniano we wstępie. W rozdziale tym nie przedstawia się szczegółowego przeglądu literatury w tym zakresie, ale omawia się jedynie wybrane pozycje, które mają bezpośredni związek z dalej stosowanymi sposobami analizy.

Szczególnym, analizowanym w tym rozdziale rodzajem prętów są pręty niepryzmatyczne o ciągłej bądź skokowej zmianie parametrów. Tego typu pręty są często stosowanymi elementami współczesnych konstrukcji inżynierskich, a ich stosowanie dyktowane jest zarówno względami wytrzymałościowymi, ekonomicznymi jak i architektonicznymi.

W analizie niepryzmatycznych prętów według teorii Bernoulliego–Eulera wykorzystywano wiele metod. Jedną z nich jest metoda macierzy przeniesienia, którą między innymi stosowali Chu i Pilkey [3.1], Chang i Liu [3.2] oraz Lin i Bapat [3.3]. Metodę elementów skończonych stosowali między innymi Gallagher i Lee [3.4] oraz Thambiratnam i Zhuge [3.5], metodę różnic skończonych Liable [3.6]. Metodę Rayleigha–Rit-

za stosowali Alvarez i Laura [3.7], De Rosa i Franciosi [3.8] oraz Mittendorf i Grief [3.9]. Rozwiązań dotyczących belek niepryzmatycznych szukano także wykorzystując metody analityczne bądź semi-analityczne. Do tego typu prac można między innymi zaliczyć artykuły Eisenbergera [3.10] i [3.15], Banerjee i Williamsa [3.11], Elishakoffa i Pellegriniego [3.12], Sen Yung Lee i współautorów [3.13], Eisenbergera i Reicha [3.14] oraz De Rosa i Auciello [3.16]. Aproksymacje niepryzmatycznych belek Bernoulliego–Eulera pryzmatycznymi odcinkami, w obrębie których wykorzystywano rozwiązania ściśle równania różniczkowego belki, stosowali między innymi Jang i Bert [3.17], Wang [3.18] oraz Gast i Sneek [3.19].

W zadaniach, do analizy których przyjmowano model belki Timoshenki, wykorzystywano głównie metody numeryczne i aproksymacyjne. Metodę elementów skończonych stosowali Irie, Yamada i Takahashi [3.20], To [3.21] oraz Cleghorn i Tabarrok [3.22], sposób Rayleigha–Ritza – Gutierrez oraz Laura i Rossi [3.23], a metodę Galerkiną – Chehil i Jategaonkar [3.24] oraz Jategaonkar i Chehil [3.25]. Metody analityczne w analizie niepryzmatycznych belek Timoshenki stosowali Lee i Lin [3.26] oraz Leung i Zhou [3.27]. Tong, Tabarrok i Yen aproksymowali belki niepryzmatyczne odcinkami pryzmatycznymi, do których wykorzystywali rozwiązania zamknięte [3.28]. Analizie statyki i dynamiki, a w szczególności stateczności prętów pod obciążeniem niepotencjalnym poświęcono w literaturze wiele miejsca. Stosunkowo nieliczne są prace dotyczące zachowania się prętów niepryzmatycznych pod obciążeniami nie mającymi potencjału. Massey i Meen [3.29] badali stateczność wspornika o zmiennej szerokości przekroju poprzecznego pod działaniem skupionego obciążenia śledzącego. Sankaran i Rao [3.30] stosując metodę Galerkiną analizowali poziom obciążeń krytycznych zbieżnych kolumn ze sztywno i sprężysto zamocowanymi końcami. Stateczność niepryzmatycznego pręta Leipholza badali Elishakoff i Couch [3.31] stosując rachunek symboliczny w podejściu bazującym na metodzie Galerkiną. Elishakoff i Pellegrini [3.32] wykorzystując funkcje Besla analizowali swobodnie podparty niepryzmatyczny pręt pod działaniem śledzącego obciążenia rozłożonego. Nageswara, Rao i Venkateswara uwzględniając tłumienie wyznaczali obciążenia krytyczne liniowo zbieżnych prętów wspornikowych poddanych śledzącemu obciążeniu skupionemu [3.33]. Lee i Kuo analizowali proste pręty niepryzmatyczne poddane działaniu śledzącego obciążenia rozłożonego [3.34]. Model Timoshenki wykorzystali Irie, Yamada i Takahashi w analizie niepryzmatycznej belki pod obciążeniem śledzącym [3.20]. W analizie prętów niepryzmatycznych pod obciążeniem niepotencjalnym stosowano analogiczne metody, jak w zadaniach konserwatywnych z tego typu prętami.

Celem tego rozdziału jest:

- uogólnienie otrzymanych przez Eisenbergera [3.15] formuł macierzy sztywności i bezwładności prostych prętów o dowolnie w sposób ciągły zmieniającym się przekroju poprzecznym i dowolnych, ciągłych rozkładach masy i sztywności na przypadkach prętów spoczywających na jedno- i dwuparametrowym podłożu sprężystym o ciągłym rozkładzie sztywności i poddanych dowolnemu statycznemu obciążeniu niepotencjalnemu;

- zbudowanie spójnego algorytmu do analizy częstości i stateczności dowolnie, konserwatywnie i niekonserwatywnie, statycznie obciążanych ciągłych i przegubowych prętów prostych (modeli belek Bernoulliego–Eulera i Timoshenki) o zmiennych skokowo charakterystykach przekroju poprzecznego, które mogą spoczywać na odcinkowo zmiennym dwuparametrowym podłożu sprężystym i sprężystych podporach o charakterystykach nieliniowo zależnych od obciążenia i częstości drgań.

W punkcie drugim rozdziału przedstawiono algorytm analizy prostych, niepryzmatycznych prętów, których charakterystyki rozwijano w szeregi potęgowe. W punkcie trzecim, wykorzystując ściśle rozwiązania równania różniczkowego pręta, analizowano pręty o charakterystykach skokowo zmiennych. Przykłady numeryczne ilustrujące sposoby analizy przedstawiono w punkcie czwartym, w którym bada się zagadnienia określania częstości drgań i stateczności prętów niepryzmatycznych obciążanych statycznymi siłami niepotencjalnymi.

3.2. Analiza prętów o ciągłej zmianie parametrów

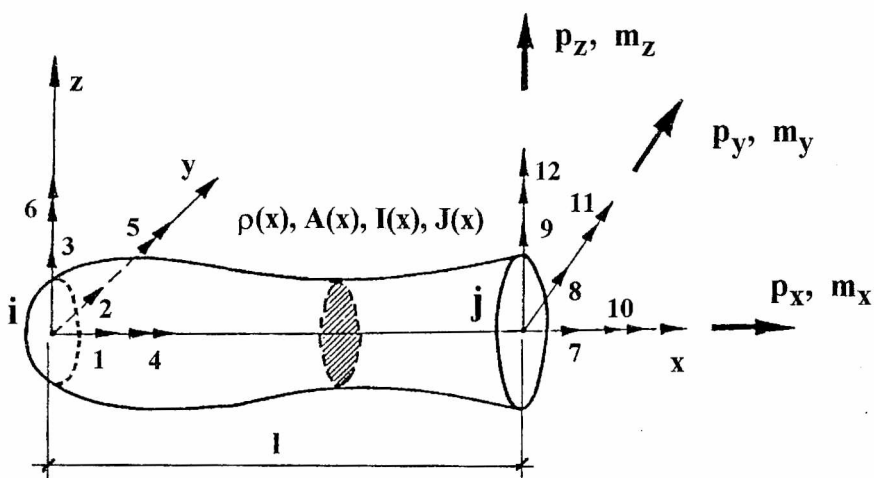
Przy klasycznych założeniach liniowej teorii belek Bernoulliego–Eulera, równania różniczkowe opisujące osiowe, skrętne i giętne drgania pręta niepryzmatycznego można otrzymać z warunków równowagi wyciętego, różniczkowo małego jego elementu. Równania opisujące drgania osiowe i skrętne pręta o długości l spoczywającego na jednoparametrowym podłożu sprężystym (rys. 3.1) mają odpowiednio postać

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + K_U(x)U(x,t) + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= n(x,t) \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_0(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + K_\Phi(x)\Phi(x,t) + \rho(x)J_0(x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= m(x,t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Przez E oznaczono moduł Younga, G jest modułem odkształcalności poprzecznej, $A(x)$ i $J_0(x)$ są odpowiednio polem przekroju poprzecznego i biegunowym momentem bezwładności przekroju poprzecznego. $K_U(x)$ i $K_\Phi(x)$ są funkcjami charakteryzującymi reakcję podłoża sprężystego odpowiednio na przemieszczenia osiowe $U(x)$ i kąt skręcenia $\Phi(x)$. Przez $\rho(x)$ oznaczono gęstość materiału pręta, a $n(x,t)$ i $m(x,t)$ są odpowiednio osiowymi i skrętnymi obciążeniami rozłożonymi na długości pręta. Zakładając (np. Ghani Razaqpur i Shah [3.35]), że reakcję dwuparametrowego podłoża sprężystego można opisać jako

$$R(x,t) = R_W W(x,t) - 2C_W(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

otrzymamy równanie drgań poprzecznych $W(x,t)$ poprzecznie ($p(x,t)$) i osiowo ($N(x)$) obciążonego pręta, mające postać



Rys. 3.1. Schemat typowego pręta niepryzmatycznego

Fig. 3.1. Diagram of a typical non-prismatic rod

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x) \frac{\partial W}{\partial x} \right] + R_W(x) W(x) \\ - 2C_W(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = p(x, t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Przez $I(x)$ oznaczono moment bezwładności przekroju poprzecznego, $N(x)$ i $p(x, t)$ są funkcjami opisującymi siłę osiową i obciążenie poprzeczne pręta. $R_W(x)$ i $C_W(x)$ są funkcjami charakteryzującymi dwuparametrowe podłoże sprężyste. Równanie drgań pręta w drugiej płaszczyźnie można otrzymać przez odpowiednią zamianę funkcji opisujących sztywność, parametry podłoża sprężystego i obciążenie poprzeczne. Założono także, że wielkości charakteryzujące pręt, podłoże i obciążenie można przedstawić w postaci szeregów potęgowych:

$$A(x) = \sum_{i=0}^z A_i x^i$$

$$K_U(x) = \sum_{i=0}^m K_{Ui} x^i$$

$$K_\Phi(x) = \sum_{i=0}^s K_{\Phi i} x^i$$

$$R_W(x) = \sum_{i=0}^p R_{Wi} x^i$$

$$C_W(x) = \sum_{i=0}^c C_{Wi} x^i \quad (3.4)$$

$$N(x) = \sum_{i=0}^n N_i x^i$$

$$EI(x) = \sum_{i=0}^r R_i x^i$$

$$J_0(x) = \sum_{i=0}^j J_{0i} x^i$$

Przyjmując współrzędną bezwymiarową $\xi = x/l$, równania swobodnych, harmoniczných drgań osiowych ($u(\xi)$), skrętnych ($\phi(\xi)$) i giętnych ($w(\xi)$) pręta można zapisać jako

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[a(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] - k_u(\xi) u(\xi) - b(\xi) u(\xi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[g(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] - k_\phi(\xi) \phi(\xi) - f(\xi) \phi(\xi) = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[r(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[n(\xi) \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] + r_w(\xi) w(\xi) - 2c_w(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - d(\xi) w(\xi) = 0$$

W równaniach tych wprowadzono następujące oznaczenia:

$$a(\xi) = \sum_{i=0}^z EA_i l^i \xi^i = \sum_{i=0}^z a_i \xi^i$$

$$b(\xi) = - \sum_{i=0}^z \rho \omega^2 A_i l^{i+2} \xi^i = \sum_{i=0}^z b_i \xi^i$$

$$k_u(\xi) = \sum_{i=0}^m K_{Ui} l^{i+2} \xi^i = \sum_{i=0}^m k_{ui} \xi^i$$

$$g(\xi) = - \sum_{i=0}^j GJ_{0i} l^i \xi^i = \sum_{i=0}^j g_i \xi^i$$

$$f(\xi) = - \sum_{i=0}^j \rho \omega^2 J_{0i} l^{i+2} \xi^i = \sum_{i=0}^j f_i \xi^i$$

$$k_\phi(\xi) = \sum_{i=0}^s K_{\phi i} l^{i+2} \xi^i = \sum_{i=0}^s k_{\phi i} \xi^i$$

$$r(\xi) = \sum_{i=0}^r R_i l^i \xi^i = \sum_{i=0}^r r_i \xi^i$$

$$n(\xi) = \sum_{i=0}^n N_i l^{i+2} \xi^i = \sum_{i=0}^n n_i \xi^i \quad (3.6)$$

$$r_w(\xi) = \sum_{i=0}^p R_{wi} l^{i+4} \xi^i = \sum_{i=0}^p r_{wi} \xi^i$$

$$c_w(\xi) = \sum_{i=0}^c C_{wi} l^{i+2} \xi^i = \sum_{i=0}^c c_{wi} \xi^i$$

$$d(\xi) = \sum_{i=0}^z \omega^2 \rho A_i l^{i+4} \xi^i = \sum_{i=0}^z d_i \xi^i$$

Przez ω oznaczono częstość drgań. Rozwiązań równań (3.5) poszukuje się w postaci nieskończonych szeregów potęgowych.

Podstawiając do pierwszego z równań (3.5) założoną postać rozwiązania

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi^i \quad (3.7)$$

po prostych przekształceniach otrzymujemy ogólną formułę współczynnika szeregu potęgowego

$$u_{i+2} = \frac{-1}{(i+1)(i+2)a_0} \left[\sum_{k=0}^{\min(i,z-1)} (k+1)(i-k)u_{i-k+1}a^{k+1} + \sum_{k=1}^{\min(i,z)} (i-k+1)(i-k+2)u_{i-k+2}a_k - \sum_{k=0}^{\min(i,z)} u_{i-k}b_k - \sum_{k=0}^{\min(i,m)} u_{i-k}k_{uk} \right] \quad (3.8)$$

Jak łatwo zauważyć, współczynniki u_i (dla $i > 1$) są liniową kombinacją u_0 i u_1 , a zatem po uwzględnieniu kinematycznych warunków brzegowych dla $\xi = 0$ i $\xi = 1$ możemy wyznaczyć u_0 i u_1 , a w konsekwencji określić wszystkie następne współczynniki poszukiwanych szeregów (Eisenberger [3.15]). Ogólna formuła określająca rozwiązanie drugiego z równań (3.5) jest analogiczna do danej równaniem (3.8) po zamianie $a(\xi)$ na $g(\xi)$, $k_u(\xi)$ na $k_\phi(\xi)$ i $b(\xi)$ na $f(\xi)$.

Poszukując rozwiązania trzeciego z równań (3.5) w postaci

$$w(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \xi^i \quad (3.9)$$

otrzymujemy wyrażenie określające współczynnik poszukiwanego szeregu

$$\begin{aligned} w_{i+4} = & \frac{1}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)r_0} \left[- \sum_{k=1}^{\min(i,r)} \frac{(i-k+4)!}{(i-k)!} r_k w_{i-k+4} \right. \\ & - \sum_{k=0}^{\min(i,r-1)} \frac{2(k+1)(i-k+3)!}{(i-k)!} r_{k+1} w_{i-k+3} + \sum_{k=0}^{\min(i,n)} (i-k+1)(i-k+2)n_k w_{i-k+2} \\ & - \sum_{k=0}^{\min(i,r-2)} \frac{(k+1)(k+2)(i-k+2)!}{(i-k)!} r_{k+2} w_{i-k+2} + \sum_{k=0}^{\min(i,c)} (i-k+1)(i-k+2)c_k w_{i-k+2} \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\min(i,n-1)} (k+1)(i-k+1)n_{k+1} w_{i-k+1} + \sum_{k=0}^{\min(i,z)} d_k w_{i-k} - \sum_{k=0}^{\min(i,p)} r_{wk} w_{i-k} \right] \quad (3.10) \end{aligned}$$

Współczynniki w_i szeregu (dla $i > 3$) są liniową kombinacją w_0 , w_1 , w_2 i w_3 , możemy więc – uwzględniając warunki brzegowe wyrażające przemieszczenia poprzeczne i kąty obrotu dla przekrojów $\xi = 0$ i $\xi = 1$ pręta – wyznaczyć w_0 , w_1 , w_2 i w_3 i w konsekwencji wszystkie następne współczynniki poszukiwanych szeregów. Współczynniki u_{i+2} jak i w_{i+4} dane relacjami (3.8) i (3.10) dążą do zera, gdy i dąży do nieskończoności.

Mając określony sposób znajdowania rozwiązań w postaci szeregów, możemy analizując poszczególne stany jednostkowych przemieszczeń łatwo określić ściśle funkcje kształtu dla dowolnego, niepryzmatycznego elementu belkowego (Bathe i Wilson [2.9]). Wektor przemieszczeń wewnątrz elementu ma postać

$$\mathbf{Q}(\xi) = \mathbf{H}^T(\xi)\mathbf{q} \quad (3.11)$$

gdzie $\mathbf{H}(\xi)$ jest macierzą funkcji kształtu, a $\mathbf{q}$ wektorem przemieszczeń brzegowych. Blok macierzy w zakresie sztywności osiowej ($\mathbf{S}_u$) można wyznaczyć z relacji

$$\mathbf{S}_u = \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{H}'_u(\xi) a(\xi) \mathbf{H}_u'^T(\xi) d\xi + \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{H}_u(\xi) k_u(\xi) \mathbf{H}_u^T(\xi) d\xi \quad (3.12)$$

gdzie $\mathbf{H}_u(\xi)$ jest macierzą funkcji kształtu, a $\mathbf{H}'_u(\xi)$ jej pierwszą pochodną po zmiennej ξ . Sztywność skrętną ($\mathbf{S}_\phi$) można wyznaczyć korzystając z relacji (3.12) po zamianie $a(\xi)$ na $g(\xi)$, $k_u(\xi)$ na $k_\phi(\xi)$ i przyjęciu macierzy funkcji kształtu $\mathbf{H}_\phi(\xi)$.

Macierz sztywności giętnej ($\mathbf{S}_w$) wyznaczamy z relacji

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_w = & \frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{H}''_w(\xi) r(\xi) \mathbf{H}''_w'^T(\xi) d\xi + \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{H}'_w(\xi) n(\xi) \mathbf{H}_w'^T(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{H}_w(\xi) r_w(\xi) \mathbf{H}_w^T(\xi) d\xi + \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{H}'_w(\xi) c_w(\xi) \mathbf{H}_w'^T(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.13)$$

gdzie przez $\mathbf{H}''_w(\xi)$ oznaczono drugą pochodną macierzy funkcji kształtu po zmiennej ξ . Macierze bezwładności wyznacza się z relacji

$$\mathbf{B} = l \int_0^1 \mathbf{H}(\xi) m^*(\xi) \mathbf{H}^T(\xi) d\xi \quad (3.14)$$

gdzie, na przykład dla stanu giętnego, $\mathbf{H}(\xi) = \mathbf{H}_w(\xi)$, a $m^*(\xi) = \rho(\xi)A(\xi)$ jest masą przypadającą na jednostkę długości pręta. Znajac macierz sztywności $\mathbf{S}$ i macierz bezwładności $\mathbf{B}$, tłumienie w układzie możemy modelować (Bathe i Wilson [2.9]) w postaci

$$\mathbf{C} = \eta \mathbf{S} + \mu \mathbf{B} \quad (3.15)$$

gdzie η i μ są wymiarowymi współczynnikami tłumienia. Wektor obciążeń węzłowych $\mathbf{F}(t)$ otrzymujemy z relacji

$$\mathbf{F}(t) = \int_0^1 \mathbf{v}(\xi, t) \mathbf{H}(\xi) d\xi \quad (3.16)$$

Przez $\mathbf{v}(\xi, t)$ oznaczono wektor obciążenia w analizowanym stanie, $\mathbf{H}(\xi)$ jest stosowną macierzą funkcji kształtu.

Znając wyrażone w układach lokalnych prętów macierze bezwładności $\mathbf{B}$, sztywności $\mathbf{S}$, tłumienia $\mathbf{C}$ i wektor obciążeń węzłowych $\mathbf{F}$, w sposób tradycyjny formułuje się równania ruchu w układzie globalnym (Przemieniecki [2.8], Bathe i Wilson [2.9]). Na podstawie tych równań można analizować statykę i dynamikę konstrukcji o elementach niepryzmatycznych. Należy podkreślić, że rozwiązania otrzymane przy podziale pręta na elementy i te, które otrzymuje się traktując pręty jak pojedyncze elementy, są identyczne. Wynika to z przyjętej, ścisłej szeregowej aproksymacji przemieszczeń wewnątrz elementów. Pokazany sposób analizy konstrukcji zbudowanych z prętów niepryzmatycznych pozwala na minimalizację rozmiarów zadania, przy jednoczesnym zachowaniu jego ścisłości na poziomie przyjętych założeń (Eisenberger [3.15]).

Analiza układów niekonserwatywnych wymaga modyfikacji w przytoczonych formułach. Zakłada się, że pręty mogą być obciążane statycznym, dowolnie zmiennym osiowym obciążeniem niekonserwatywnym bądź niepotencjalnym węzłowym obciążeniem skupionym. Istnienie niepotencjalnych obciążeń osiowych pręta powoduje – przy jego poprzecznym odkształceniu – powstawanie obciążeń poprzecznych. Wartość tego obciążenia zależy od przyjętej funkcji wiążącej stan przemieszczenia i obciążenia pręta. Tutaj zakłada się, że obciążenie to jest liniową funkcją obrotów przekrojów poprzecznych o funkcyjnym współczynniku śledzenia $\alpha(\xi)$. Zgodnie z powyższym, wartość powstającego obciążenia poprzecznego $p(\xi)$ można przedstawić w postaci

$$p(\xi) = n(\xi) l \frac{\partial w}{\partial \xi} \alpha(\xi) \quad (3.17)$$

Istnienie tego obciążenia powoduje modyfikację formuły (3.10), która po wprowadzeniu oznaczenia $n^*(\xi) = n(\xi)\alpha(\xi)$ przyjmuje postać

$$w_{i+4}^* = w_{i+4} + \frac{1}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)r_0} \sum_{k=0}^{\min(i,n)} (i-k+1) n_k^* w_{i-k+1} \quad (3.18)$$

gdzie n_k^* jest k -tym współczynnikiem szeregu potęgowego będącego iloczynem funkcji rozkładu sił osiowych $n(\xi)$ i, z założenia potęgowej, funkcji parametru śledzenia $\alpha(\xi)$. Powstanie poprzecznych obciążeń pręta implikuje istnienie obciążeń węzłowych liniowo zależnych od funkcji kątów obrotów przekrojów poprzecznych. Obciążenia te, w pokazany w rozdziale drugim sposób, można przedstawić w postaci iloczynu korekcyjnej macierzy obciążeń $\mathbf{k}^{nc}$ i wektora przemieszczeń węzłowych, a następnie skojarzyć z macierzą sztywności stanowiącą podstawę dalszej analizy. Macierz korekcyjną obciążeń otrzymujemy z zależności

$$\mathbf{k}^{nc} = \int_0^l \mathbf{H}_w(\xi) \frac{\partial n^*}{\partial q} \mathbf{H}_w^T(\xi) d\xi \quad (3.19)$$

3.3. Analiza pręta o skokowej zmianie parametrów

$$w_i^{IV}(\xi) + a_i^0 w_i^{II}(\xi) - b_i^0 w(\xi) = 0 \quad (3.20)$$

Przez sekcję belki należy rozumieć jej przyrzutowy odcinek rozpostarty między węzłami, których położenie mogą na przykład wyznaczać punkty przyłożenia obciążenia osiowego, granice dwuparametrowego podłoża sprężystego, położenia mas o pomijalnej bądź niepomijalnej bezwładności obrotowej, położenia mas resorowanych, położenia rotacyjnych bądź translacyjnych podpór sprężystych, punkty zmian sztywności lub gęstości materiału belki.

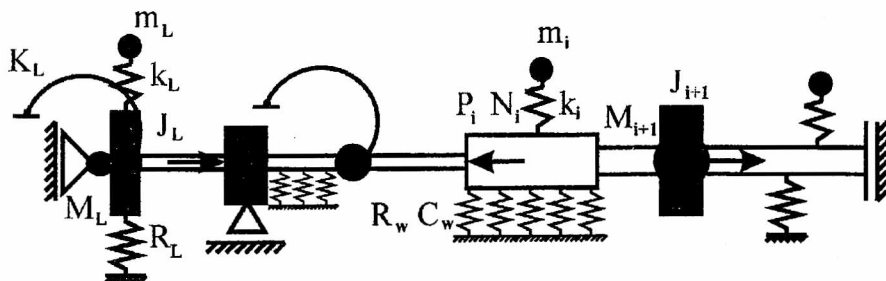


Fig. 3.2. Schematic of the beam

Współczynniki a_i^0 i b_i^0 równania (3.20) w modelu belki Eulera mają postać

$$\begin{aligned} a_i^0 &= \frac{l^2}{EI} (N - 2C_w) \\ b_i^0 &= \frac{l^4}{EI} (A\rho\omega^2 - R_w) \end{aligned} \quad (3.21)$$

a w modelu belki Timoshenki uwzględniającym odkształcalność postaciową i bezwładność obrotową współczynniki te wyrażają się następującymi formułami:

$$\begin{aligned} a_i^0 &= \frac{l^2}{EI \left(1 + \frac{2\kappa C_w}{GA}\right)} \left[\omega^2 \left(\frac{EI\kappa\rho A}{GA} + \rho J + \frac{2C_w\kappa\rho J}{GA} \right) - \left(\frac{EI\kappa R_w}{GA} - N + 2C_w \right) \right] \\ b_i^0 &= \frac{l^4}{EI \left(1 + \frac{2\kappa C_w}{GA}\right)} \left[-\omega^4 \frac{A\kappa\rho^2 J}{GA} + \omega^2 \left(\frac{R_w\kappa\rho J}{GA} + \rho A \right) - R_w \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Przez EI i GA oznaczono sztywność giętą i postaciową pręta, ρ jest gęstością materiału, A polem powierzchni przekroju poprzecznego, J masowym momentem bezwładności przekroju, κ współczynnikiem kształtu przekroju poprzecznego, N statyczną siłą osiową w pręcie, a parametry R_w i C_w określają reakcję $R(x)$ dwuparametrowego podłoża sprężystego (3.2).

Współczynniki dane relacjami (3.21) i (3.22) są w ogólności różne w równaniach każdej (i -tej) sekcji pręta; upraszczając zapis, w relacjach tych opuszczono indeksy wyróżniające charakterystyki i -tej sekcji.

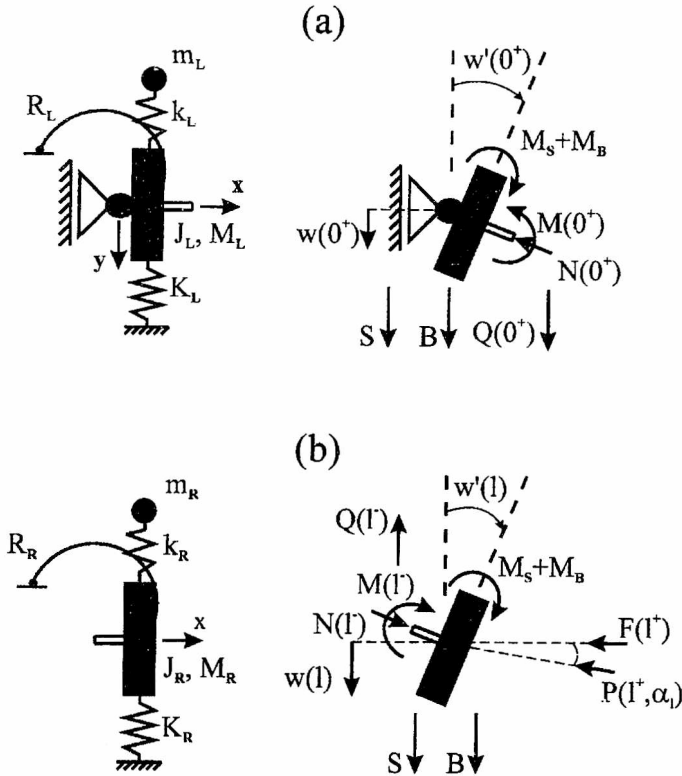
Warunki brzegowe pręta wynikają z warunków równowagi, zapisanych na jego lewym (rys. 3.3a) i prawym (rys. 3.3b) końcu. Jeżeli zdefiniujemy translacyjną reakcję sprężystą wraz z oddziaływaniem masy resorowanej (S), siłę bezwładności (B), rotacyjną reakcję sprężystą (M_S), masowy moment bezwładności obrotowej (M_B) i siłę tnącą (Q) jako

$$\begin{aligned} S(x, t) &= -K_i W(x, t) + \frac{m_i \omega^2 W(x, t)}{1 - \frac{m_i \omega^2}{k_i}} \\ B(x, t) &= -M_i \ddot{W}(x, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_S(x,t) &= -R_i W'(x,t) \\
M_B(x,t) &= -J_i \frac{\partial^3 W(x,t)}{\partial x \partial t^2} \\
Q(x,t) &= -EI_i \frac{\partial^3 W(x,t)}{\partial x^3}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

to warunki brzegowe na lewym końcu ($i = L$) przyjmą postać

$$\begin{aligned}
W''''(0,t) - C_L W(0,t) + D_L W'(0,t) &= 0 \\
W''(0,t) - E_L W'(0,t) &= 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$



Rys. 3.3. Schemat warunków brzegowych na lewym (a) i prawym (b) końcu belki
 Fig. 3.3. Schematic of boundary conditions on the left (a) and right (b) end of the beam

gdzie

$$\begin{aligned}
 C_L &= \frac{l^3}{EI} \left(M_L \omega^2 - K_L \right) + \frac{m_L \omega^2 W(0, t)}{1 - \frac{m_L \omega^2}{k_L}} \\
 D_L &= \frac{N l^2}{EI} \\
 E_L &= \frac{l}{EI} \left(R_L - J_L \omega^2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

a przez EI należy rozumieć sztywność giętną pierwszego (lewego) segmentu belki. Warunki brzegowe na prawym ($i = R$) końcu belki mają postać:

$$\begin{aligned}
 W''''(l, t) + C_R W(l, t) + D_R W'(l, t) &= 0 \\
 W''(l, t) + E_R W'(0, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

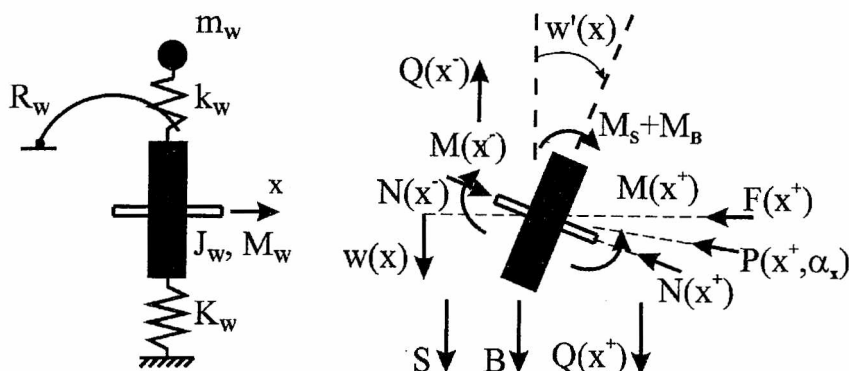
gdzie

$$\begin{aligned}
 C_R &= \frac{l^3}{EI} \left(M_R \omega^2 - K_R \right) + \frac{m_R \omega^2 W(l, t)}{1 - \frac{m_L \omega^2}{k_L}} \\
 D_R &= \frac{l^2}{EI} \left[P(l^+) (1 - \alpha_l) + F(l^+) \right] \\
 E_R &= \frac{l}{EI} \left(R_R - J_R \omega^2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

a przez EI należy rozumieć sztywność giętną ostatniego (prawego) segmentu belki.

W relacji (3.27) i dalej przez $P(l^+)$ oznaczono statyczną osiową siłę niekonserwatywną przyłożoną na prawym końcu belki, której kierunek działania określa dowolny parametr śledzenia α_l . Przez $F(l^+)$ oznaczono statyczną, zachowawczą siłę działającą wzdłuż osi belki, przyłożoną na jej prawym końcu.

Cztery warunki ciągłości w miejscu styku segmentów „ $i - 1$ ” oraz „ i ” (rys. 3.4) przyjmują postać:



Rys. 3.4. Schemat warunków ciągłości w miejscu styku segmentów
Fig. 3.4. Schematic of continuity conditions at the contact between segments

$$\begin{aligned}
 W(x^-, t) &= W(x^+, t) \\
 W'(x^-, t) &= W'(x^+, t) \\
 W''''(-) - C_x W''''(+) + D_x W''(-) + E_x W'(-) &= 0 \\
 W''(-) - C_x W''(+) + H_x W'(-) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 C_x &= \frac{EI^{(+)}}{EI^{(-)}} \\
 D_x &= \frac{l^2}{EI^{(-)}} \left[P(x^+) (1 - \alpha_x) + F(x^+) \right] \\
 E_x &= \frac{l^3}{EI^{(-)}} \left(M_x \omega^2 - K_x + \frac{m_x \omega^2}{1 - \frac{m_x \omega^2}{k_x}} \right) \\
 H_x &= \frac{l}{EI^{(-)}} (R_x - J_x \omega^2)
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Indeksem $(-)$ oznaczono charakterystyki „ $i - 1$ ” segmentu, a indeksem $(+)$ charakterystyki „ i ” segmentu belki.

W równaniach (3.24), (3.26) i (3.28) przez $W(x,t)$ należy rozumieć ściśle rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego opisującego drgania poprzeczne belki. Równanie to – po podstawieniu $W(x,t) = w(x) \cdot e^{i\omega t}$ i przejściu na współrzędną bezwymiarową ξ – ma postać równania (3.20), którego rozwiązanie jest funkcją wzajemnych relacji jego parametrów. Poniżej przedstawiono postacie tego rozwiązania.

Jeżeli wprowadzi się oznaczenia

$$p1 = \frac{-a_i^0 + \sqrt{a_i^{02} + 4b_i^0}}{2}, \quad p2 = \frac{-a_i^0 - \sqrt{a_i^{02} + 4b_i^0}}{2}, \quad p3 = \sqrt{|a_i^{02} + 4b_i^0|},$$

to rozwiązania można przedstawić w następującej postaci:

dla $(a_i^{02} < -4b_i^0)$

$$w(\xi) = e^{c1 \cdot \xi} [C[1] \sin(c2 \cdot \xi) + C[2] \cos(c2 \cdot \xi)] + e^{-c1 \cdot \xi} [C[3] \sin(c2 \cdot \xi) + C[4] \cos(c2 \cdot \xi)] \quad (3.30)$$

gdzie

$$c1 = \sqrt{\frac{-\frac{a_i^0}{2} + \sqrt{\frac{a_i^{02}}{4} + \frac{p3}{4}}}{2}}$$

$$c2 = \sqrt{\frac{\frac{a_i^0}{2} + \sqrt{\frac{a_i^{02}}{4} + \frac{p3}{4}}}{2}}, \quad p3 = \sqrt{|a_i^{02} + 4b_i^0|}$$

dla $\left(a_i^{02} \geq -4b_i^0, a_i^0 \geq 0 \text{ i } \sqrt{a_i^{02} + 4b_i^0} > a_i^0 \right)$ lub

$\left(a_i^{02} \geq -4b_i^0, a_i^0 < 0 \text{ i } \sqrt{a_i^{02} + 4b_i^0} > -a_i^0 \right)$

$$w(\xi) = C[1] \sinh(c1 \cdot \xi) + C[2] \cosh(c1 \cdot \xi) + C[3] \sin(c2 \cdot \xi) + C[4] \cos(c2 \cdot \xi) \quad (3.31)$$

gdzie

$$c1 = \sqrt{p1}, \quad c2 = \sqrt{|p2|}$$

dla $\left(a_i^{02} \geq -4b_i^0, a_i^0 \geq 0 \text{ i } \sqrt{a_i^{02} + 4b_i^0} = a_i^0 \right)$

$$w(\xi) = C[1] + C[2] * \xi + C[3]\sin(c1 * \xi) + C[4]\cos(c1 * \xi) \quad (3.32)$$

gdzie

$$c1 = \sqrt{|p2|}$$

$$\text{dla } \left(a_i^{02} \geq -4b_i^0, a_i^0 \geq 0 \text{ i } \sqrt{a_i^{02} + 4b_i^0} < a_i^0 \right)$$

$$w(\xi) = C[1]\sin(c1 * \xi) + C[2]\cos(c1 * \xi) + C[3]\sin(c2 * \xi) + C[4]\cos(c2 * \xi) \quad (3.33)$$

gdzie

$$c1 = \sqrt{|p1|}, c2 = \sqrt{|p2|}$$

$$\text{dla } \left(a_i^{02} \geq -4b_i^0, a_i^0 < 0 \text{ i } \sqrt{a_i^{02} + 4b_i^0} < -a_i^0 \right)$$

$$w(\xi) = C[1]\sinh(c1 * \xi) + C[2]\cosh(c1 * \xi) + C[3]\sinh(c2 * \xi) + C[4]\cosh(c2 * \xi) \quad (3.34)$$

gdzie

$$c1 = \sqrt{p1}, c2 = \sqrt{p2}$$

$$\text{dla } \left(a_i^{02} \geq -4b_i^0, a_i^0 < 0 \text{ i } \sqrt{a_i^{02} + 4b_i^0} = -a_i^0 \right)$$

$$w(\xi) = C[1]\sinh(c1 * \xi) + C[2]\cosh(c1 * \xi) + C[3] + C[4] * \xi \quad (3.35)$$

gdzie

$$c1 = \sqrt{|p1|}.$$

W rozwiązaniach od (3.30) do (3.35) przez $C[i]$ oznaczono stałe całkowania.

W relacjach (3.21), (3.22), (3.25), (3.27) i (3.29) wielkości charakteryzujące punktowe bądź rozłożone sprężyste podparcie mogą być dowolnymi, w ogólności nieliniowymi, funkcjami poziomu obciążenia i częstości drgań, np.: $K_L = K_L(N, \omega)$, $R_w = R_w(N, \omega)$.

Wykorzystując relacje (3.24) i (3.26) i taką liczbę relacji typu (3.28), jaka wynika z liczby miejsc łączonych segmentów, otrzymujemy jednorodny, liniowy układ równań algebraicznych określający stałe całkowania $C[i]$. Warunek istnienia nietrywialnego rozwiązania tego układu równań w postaci zerowania się wyznacznika macierzy jego współczynników umożliwia wyznaczenie częstości drgań własnych układu i tym samym, przy wykorzystaniu dynamicznego kryterium stateczności, pozwala określić poziomy obciążen krytycznych. Praktycznie realizacja tego warunku polega na dys-

kretniej analizie wyznacznika macierzy współczynników w badanym obszarze zmienności obciążeń i częstości przy zastosowaniu regularnej siatki podziału tych wielkości. Następnie, korzystając z pakietu Mathematica, konstruuje się zerową warstwicę mapy zmienności wyznacznika, która wyznacza krzywe częstości badanego układu. Należy podkreślić, że krzywe te dają ściśle – na miarę przyjętej numerycznej precyzji przy wyznaczaniu miejsc zerowych wyznacznika równań – wartości wszystkich możliwych częstości z analizowanych obszarów ich zmienności. Wynika to z zastosowania ścisłych wzorów rozwiązania równań różniczkowych (3.30) – (3.35) dla każdego z segmentów analizowanej belki.

Przedstawione podejście umożliwia łączenie segmentów belki, modelowanych według teorii belki Bernoulliego–Eulera i teorii Timoshenki, co może być przydatne, jeżeli na przykład część belki jest krępa i w jej rozwiązaniu istotne są odkształcenia postaciowe.

3.4. Przykłady numeryczne

W pierwszej części tego punktu, bazując na formułach pokazanych w punkcie 3.2, przedstawiono przykłady zastosowania szeregów potęgowych w analizie niepryzmatycznych prostych prętów pod obciążeniem niekonserwatywnym. W części drugiej, wykorzystując ściśle rozwiązania pryzmatycznych segmentów belki opisane w punkcie 3.3, wykazano skuteczność takiego podejścia w analizie niekonserwatywnie obciążanych belek o skokowo zmiennych parametrach.

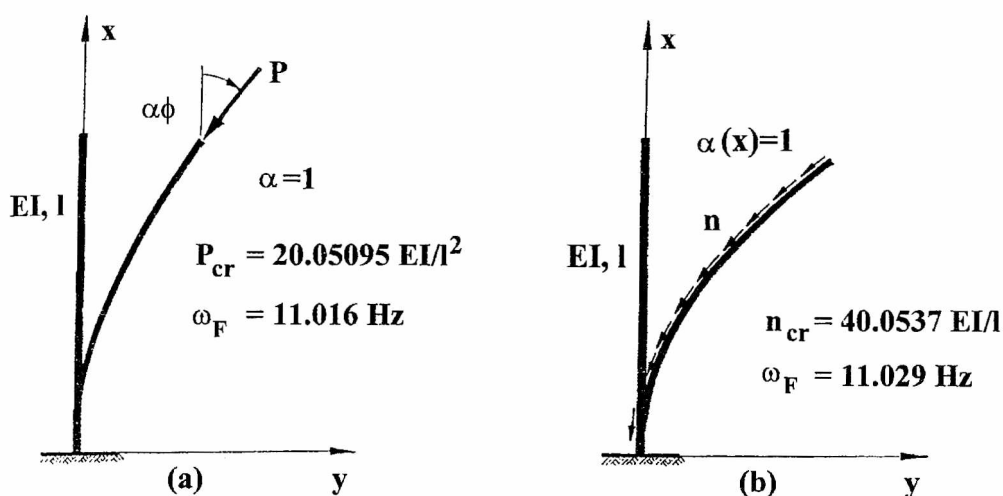
Przedstawiony w punkcie 3.2 ogólny algorytm analizy statyki, dynamiki i stateczności układów zbudowanych z prętów niepryzmatycznych testowano na przykładach dotyczących analizy stateczności prętów pod obciążeniem niepotencjalnym. Przeprowadzone testy w zakresie określania częstości drgań własnych prętów w problemach drgań osiowych i giętnych wykazały idealną zgodność zarówno z powszechnie znanymi rozwiązaniami, jak i z większością tych, które przytacza Eisenberger [3.15] na podstawie badań własnych i cytowanej literatury. Przykładowo trzy pierwsze częstości drgań pryzmatycznego wspornika wynoszą:

$$\omega_1 = 1,57079673298716 \sqrt{EI / (ml^4)},$$

$$\omega_2 = 4,7123891850833 \sqrt{EI / (ml^4)},$$

$$\omega_3 = 7,85398176011776 \sqrt{EI / (ml^4)}.$$

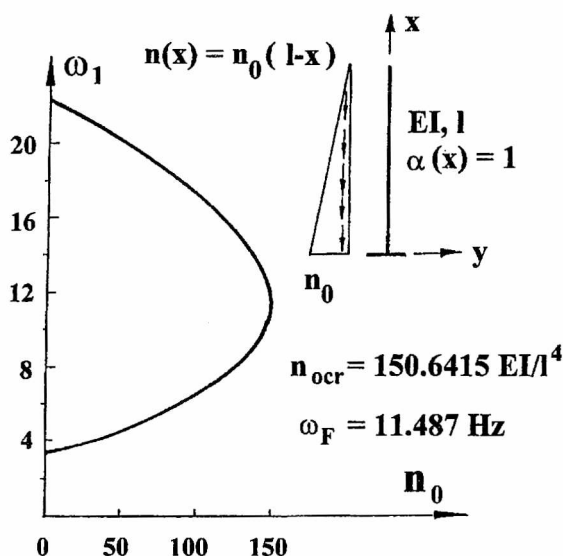
W badaniu stateczności pryzmatycznych prętów pod skupionym i rozłożonym równomiernie potencjalnymi obciążeniami osiowymi testowano pręty o różnych warun-



Rys. 3.5. Kolumny Becka (a) i Leipholza (b)

Fig. 3.5. Beck (a) and Leipholz (b) columns

kach brzegowych. Otrzymane rezultaty – przy przyjęciu szeregu aproksymującego złożonego z 25 wyrazów – w zakresie możliwych do uzyskania szesnastu miejsc znaczących wykazały idealną zgodność z rozwiązaniami teoretycznymi (Leipholz [1.11]). Problem stateczności prętów pod obciążeniem niepotencjalnym testowano na przykładzie kolumny Becka i Leipholza (Leipholz [1.10]). Na rysunku 3.5 pokazano schematy tych prętów, wartości otrzymanych obciążeń krytycznych i częstości, przy których następuje flatter. Wartości obciążeń krytycznych są w pełni zgodne ze znanymi rozwiązaniami zadania Becka i Leipholza; np. dla drugiego z tych zadań Leipholz i Madan [3.36] szukając rozwiązania w postaci funkcji Bessela, otrzymali $n_{cr} = 40,05 EI/l^3$. Na rysunkach 3.6 i 3.7 pokazano przykładowe zmienności częstości drgań prętów wspornikowego i sztywno-przegubowego obciążonych odpowiednio rozłożonym obciążeniem śledzącym o intensywności $n(\xi) = n_0(1 - \xi)$ i $n(\xi) = n$; $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{EI/(\rho A l^4)}$. Wyniki są zgodne z przedstawionymi w pracy Hauera [3.37], gdzie metodą Galerkiną otrzymano $n_{cr} = 158,2 EI/l^3$. W przypadku pręta sztywno-przegubowego otrzymane wyniki, zarówno dla pierwszego ($n_{cr,1}$) jak i wtórnego ($n_{cr,2}$) obciążenia krytycznego, są idealnie zgodne z wynikami otrzymanymi przez Elishakoffa i Pellegriniego [3.38], którzy rozwiązując ściśle to zadanie stosowali funkcje Bessela i Lommela. Na rysunku 3.8 pokazano wpływ podłoża sprężystego na stateczność pryzmatycznej kolumny Becka. Parametry podłoża r_w i c_w dobrano tak, żeby dla każdego z tych parametrów z osobna pierwsza częstość drgań swobodnych pręta wzrastała dwukrotnie ($r_w = 37,09$, $c_w = 9,446$). Rozwiązanie dla podłoża Winklera ($c_w = 0$), o stałym na długości pręta parametrze sprężystości podłoża, potwierdziło fakt niezależności poziomu krytycznego obciążenia ściśle śledzącego od stałej podłoża (Smith i Herrmann [3.39]) wtedy, kiedy pominiemy

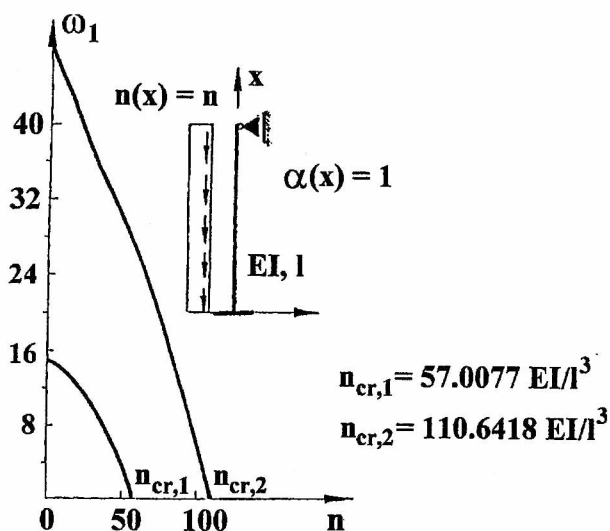


Rys. 3.6. Zależność częstości drgań swobodnych wspornika od poziomu obciążenia śledzącego $n(x)=n_0(l-x)$

Fig. 3.6. Dependence of the cantilever free vibration frequency on the level of follower load $n(x)=n_0(l-x)$

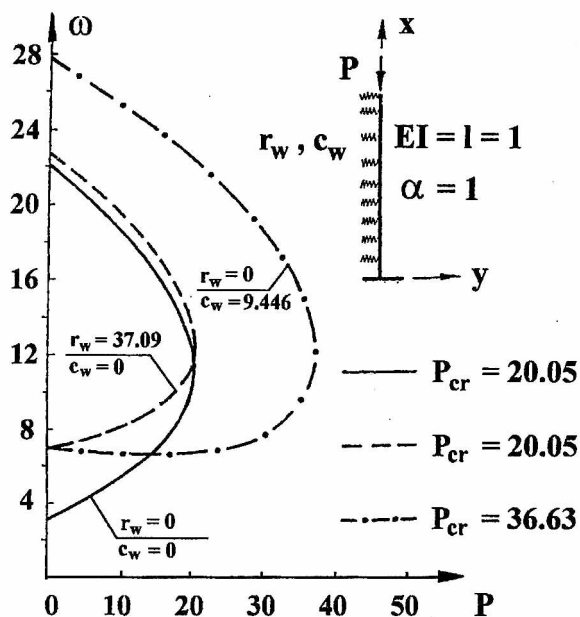
tłumienie. Na rysunku 3.9 pokazano wartości obciążeń krytycznych kolumny Becka dla liniowo zmiennych rozkładów parametru podłoża Winklera. W tym przypadku wartości obciążeń krytycznych zależą od funkcji opisujących rozkład parametru podłoża. Na rysunkach 3.10 i 3.11 pokazano rozwiązania problemu stateczności prętów o zmiennym przekroju poprzecznym ($b(\xi) = h(\xi) = 2 - \xi^2$). Wyniki analizy stateczności pręta wspornikowego o zmiennym przekroju kwadratowym ($b(\xi) = h(\xi) = (\xi - 0,5)^2 + 1,75$) przedstawiono na rys. 3.12, a wpływ wartości parametru śledzenia α na poziom krytycznego obciążenia wspornika na rys. 3.13. Przykładowe rezultaty wpływu rozkładu masy pręta na jego obciążenie krytyczne pokazano na rys. 3.14. Wyniki przedstawionych testów uzyskano przyjmując 70-elementowy szereg opisujący stan przemieszczeń poprzecznych prętów; zwiększenie tej liczby nie wpływało – przy założonej dokładności prezentowanych wyników – na otrzymywane rezultaty. Należy podkreślić, że podejście wykorzystujące aproksymacje stanów przemieszczeń szeregami potęgowymi nie zawsze jest skuteczne. W przypadku prętów w kształcie stożka pojawiają się na przykład kłopoty ze zbieżnością, a stosowanie większej liczby elementów szeregów aproksymujących powoduje istotny wzrost czasu obliczeń i kumulowanie się błędów numerycznych, jeżeli w obliczeniach stosuje się procedury zapisane w tradycyjnych językach programowania wysokiego poziomu o ograniczonej liczbie miejsc znaczących.

Następnie na wybranych przykładach zaprezentowano skuteczność przedstawionego w punkcie 3.3 algorytmu, wykorzystywanego do analizy szerokiej klasy zagadnień



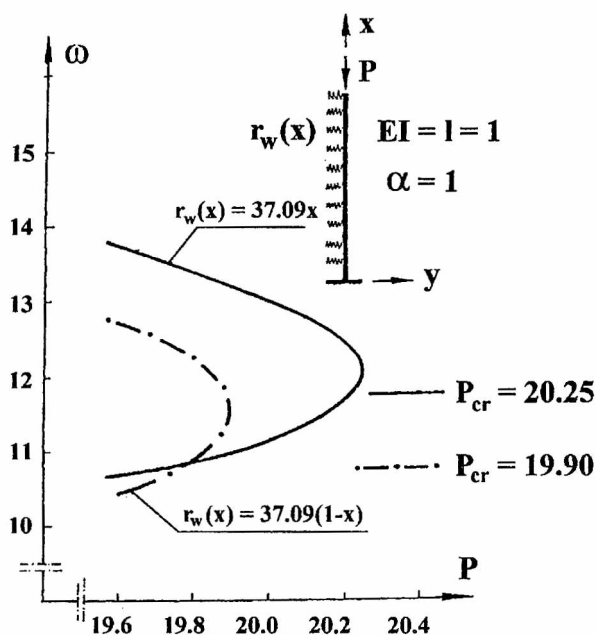
Rys. 3.7. Zależność częstości drgań swobodnych pręta sztywno-przegubowego od poziomu obciążenia śledzącego $n(x)=n$

Fig. 3.7. Relationship between the free vibration frequency of a clamped-simple supported rod and the level of follower load $n(x)=n$



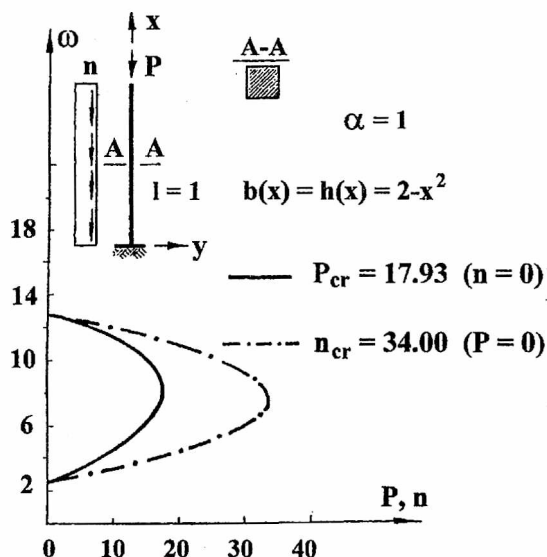
Rys. 3.8. Zależność częstości drgań swobodnych kolumny Becka od poziomu obciążenia śledzącego P przy różnych wartościach parametrów podłoża sprężystego

Fig. 3.8. Dependence of the free vibration frequency of the Beck column on the level of loading P for different elastic foundation parameters



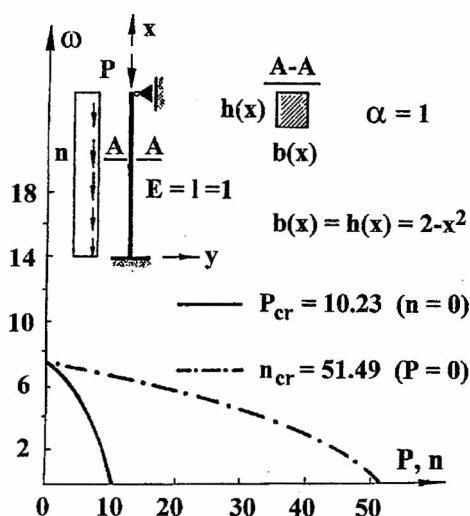
Rys. 3.9. Wpływ rozkładu parametru podłoża sprężystego typu Winklera na wartość obciążenia krytycznego

Fig. 3.9. Influence of the Winkler foundation parameter distribution function on the critical load level



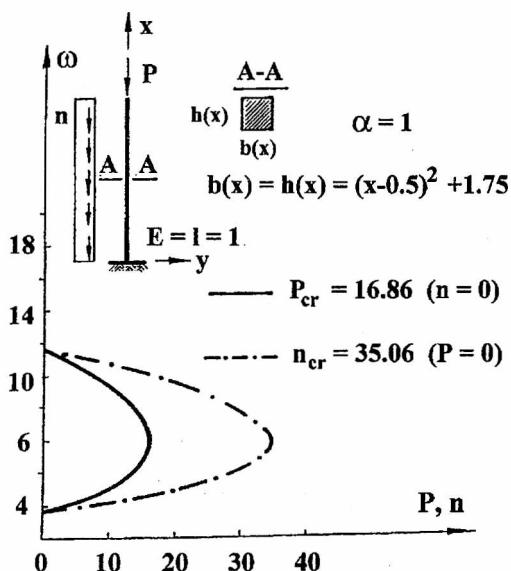
Rys. 3.10. Zależność częstości drgań swobodnych wspornika o zmiennym przekroju poprzecznym $b(x)=h(x)=2-x^2$ od poziomu skupionego P i rozłożonego n obciążenia śledzącego

Fig. 3.10. Relationship between the free vibration frequency of a cantilever with varying cross-section $b(x)=h(x)=2-x^2$ and the level of tip-concentrated P and distributed n follower loading



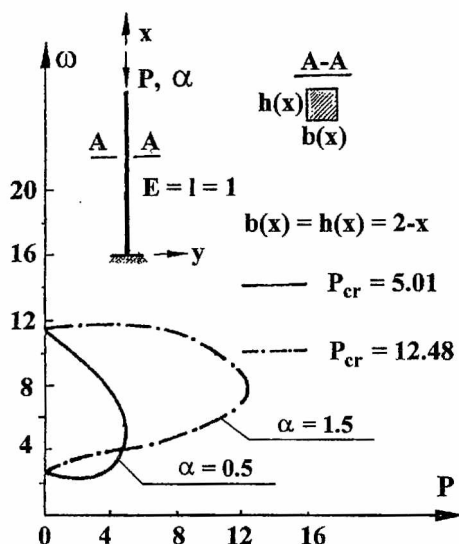
Rys. 3.11. Zależność częstości drgań swobodnych pręta sztywno-przegubowego ze zmiennym przekrojem poprzecznym $b(x)=h(x)=2-x^2$ od skupionego P i rozłożonego n obciążenia śledzącego

Fig. 3.11. Dependence of the free vibration frequency of a clamped-simply supported rod with varying cross-section $b(x)=h(x)=2-x^2$ on the level of tip-concentrated P and distributed n follower load



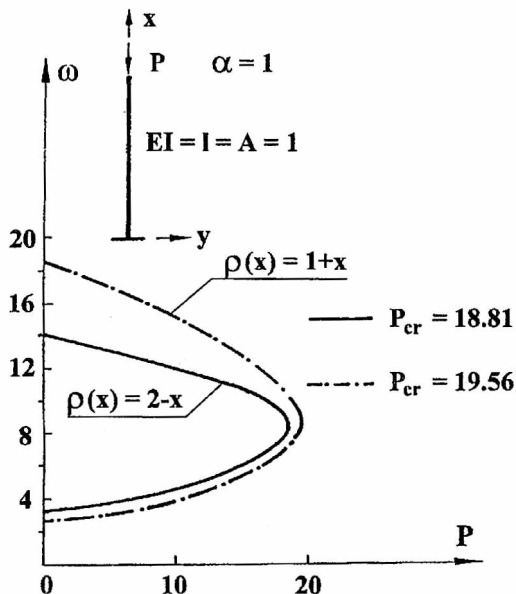
Rys. 3.12. Zależność częstości drgań swobodnych wspornika o zmiennym przekroju poprzecznym $b(x)=h(x)=(x-0,5)^2+1,75$ od poziomu skupionego P i rozłożonego n obciążenia śledzącego

Fig. 3.12. Relationship between the free vibration frequency of a cantilever with varying cross-section $b(x)=h(x)=(x-0.5)^2+1.75$ and the level of tip-concentrated P and distributed n follower loading



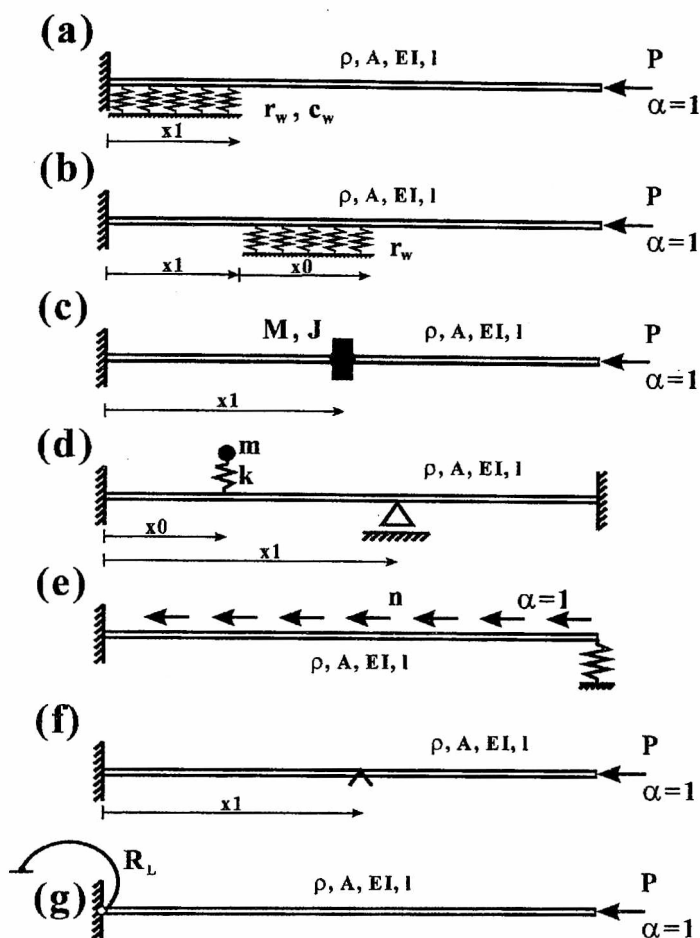
Rys. 3.13. Wpływ parametru śledzenia na obciążenie krytyczne kolumny Becka ze zmiennym przekrojem poprzecznym $b(x) = h(x) = 2 - x$

Fig. 3.13. Influence of the follower parameter on the critical load level of the Beck column with variable cross-section $b(x) = h(x) = 2 - x$



Rys. 3.14. Wpływ liniowych rozkładów masy na obciążenie krytyczne kolumny Becka

Fig. 3.14. Influence of linear mass distributions on the critical load of the Beck column

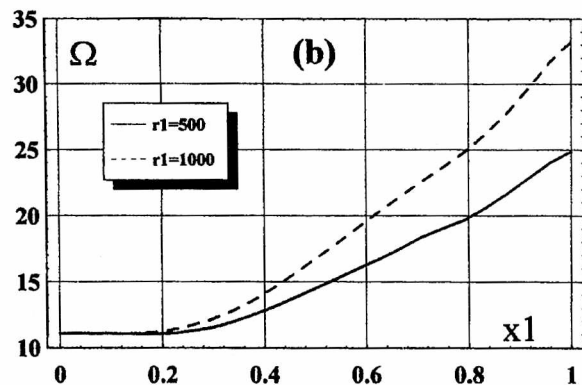
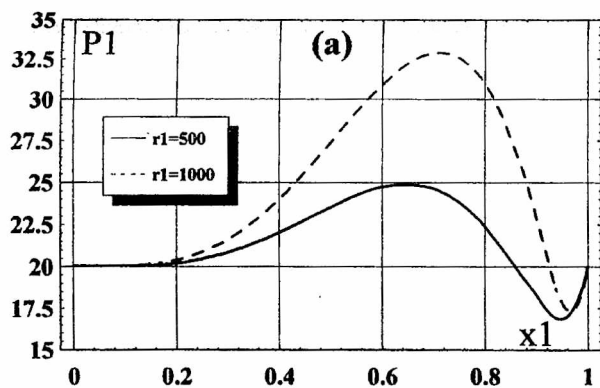


Rys. 3.15. Schematy analizowanych przykładów
Fig. 3.15. Schematics of the analyzed examples

związanych głównie ze statecznością belek pod dowolnym obciążeniem konserwatywnym i niekonserwatywnym.

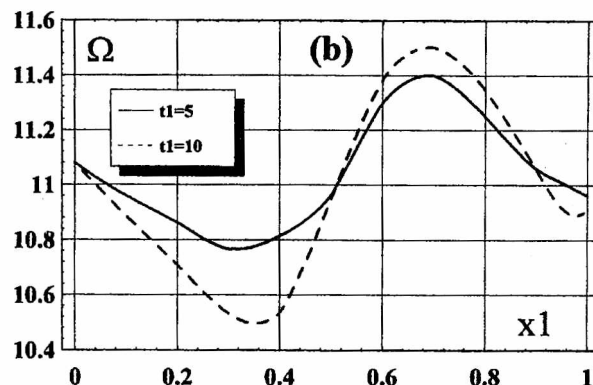
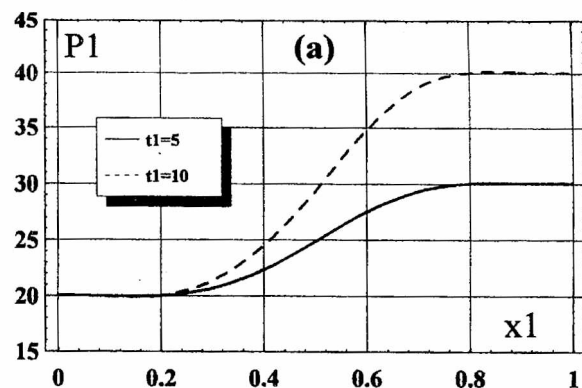
Na rysunku 3.16a pokazano wyniki analizy poziomego ściśle śledzącego ($\alpha = 1$) obciążenia krytycznego ($P_1 = P \cdot l^2 / 2EI$) belki częściowo wspartej na jednoparametrowym podłożu sprężystym Winklera ($c_w = 0$, $r_w \neq 0$) o stałej $r_1 = r_w \cdot l^4 / EI$, którego bezwymiarowy zasięg oznaczono przez x_1 ($x_1 = x/l$) (rys. 3.15a). Jest to tak zwany uogólniony problem Smitha–Herrmanna, którego rozwiązanie bazujące na metodzie Galerkiina pokazano w pracy Elishakoffa i Wanga [3.40]. Podejście wykorzystujące metodę Galerkiina nie daje jakościowo zadowalających rezultatów, a w szczególności nie pokazuje obszaru, w którym podłoże sprężyste istotnie obniża wartości obciążenia kry-

tycznego. Na rysunku 3.16b pokazano wartości częstości $\Omega = \omega^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$, przy których badany pręt traci stateczność przez flutter. Na rysunku 3.17 pokazano poziomy obciążenia krytycznego $P1$ i częstości, przy których następuje utrata stateczności przez flutter w zadaniu o schemacie jak na rys. 3.15a, z tym jednak, że w tym przypadku stała $r1 = 0$, a stała podłoża $t1 \neq 0$ ($t1 = c_w^* l^2 / EI$). Poziomy obciążenia krytycznych pręta o schemacie jak na rys. 3.15b z ruchomą warstwą sprężystą typu Winklera, której zasięg i położenie oznaczono bezwymiarowymi wielkościami $x0$ ($x0 = x/l$) i $x1$, pokazano na rys. 3.18. Linia ciągłą oznaczono wartości obciążeń krytycznych typu flutter, a linią przerywaną wartości krytyczne obciążenia, przy których pręt traci stateczność przez dywergencję. W zadaniach tych analizowano wpływ podłoża nieinercyjnego, choć nic nie stoi na przeszkodzie uwzględnienia inercji drgającego podłoża przez stosowną zmianę masy belki w obrębie podłoża. Podobnie jak w dalej analizowanej belce o schemacie danym na rys. 3.15g, i tutaj można w prosty sposób uzależnić wielkość drgającego podłoża od częstości drgań belki. Przykładową analizę poziomu obciążenia krytycznego $P1$ i wartości częstości Ω belki o schemacie jak na rys. 3.15c dla różnych położań masy skupionej $m1 = M/(\rho A l)$ o pomijalnej i niepomijalnej bezwładności obrotowej $j1 = J/(\rho A l^3)$ pokazano na rys. 3.19. Wpływ wielkości masy resorowanej $m1 = m/(\rho A l)$ na wartość pierwszej częstości drgań własnych Ω belki o schemacie jak na rys. 3.15d przy różnych stałych resorowania $k1 = k^* l^3 / EI$ pokazano na rys. 3.20. Na przykładzie tego zadania łatwo sprawdzić przydatność prezentowanego tutaj podejścia. Analiza tego zadania oparta na procedurze Rayleigha–Schmidta, podejściu Rayleigha–Ritza czy rozwiązaniach bazujących na analizie modalnej, przy założeniu, że drgania masy resorowanej nie są tłumione, nie pokazuje częstości, która wynika z pojawiania się w układzie teoretycznie nieskończonych sił w granicach rezonansu oscylatora (Ercoli i Laura [3.41]). Częstość ta nie zależy od poziomu obciążenia i tym samym nie decyduje o poziomie obciążeń krytycznych. Na rysunku 3.21 przedstawiono wyniki analizy wpływu sztywności sprężyny $k1 = K_R l^3 / EI$ na poziom obciążenia krytycznego $n1 = n l^3 / EI$ zadania Leipholza (rys. 3.15e). Obciążenia krytyczne typu flutter oznaczono linią ciągłą, a obciążenia przy których pręt traci stateczność przez dywergencję – linią przerywaną. Wyniki analizy zadania Leipholza przy różnych wartościach parametru śledzenia α pokazano na rys. 3.22; w tym przypadku sztywność sprężyny na prawym końcu belki była równa zero. Obciążenia krytyczne typu flutter oznaczono linią ciągłą, a obciążenia przy których pręt traci stateczność przez dywergencję – linią przerywaną. Wpływ położenia rysy na obciążenie krytyczne w zadaniu Becka (rys. 3.15f) pokazano na rys. 3.23. Rysę modelowano tutaj jako nieskończenie krótki segment belki o sztywności istotnie mniejszej od sztywności belki niezarysowanej. Pokazane wyniki odpowiadają sytuacji, w której symetryczna rysa powoduje 100-krotne zmniejszenie sztywności belki, a jej zasięg przyjęto jako 1/1000 długości całej belki. Przyjęcie nieskończenie małych sztywności nieskończenie krótkiego segmentu belki umożliwia modelowanie dowolnie usytuowanego przegubu. Na rysunku 3.24 przed-



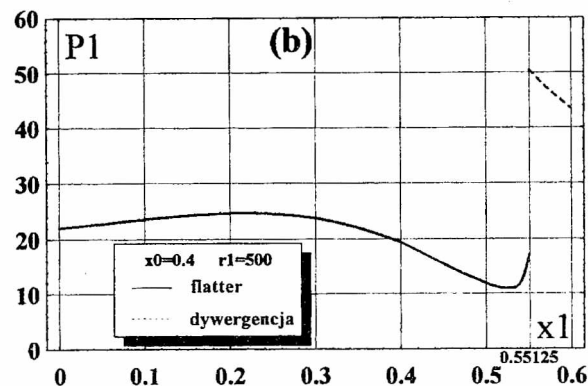
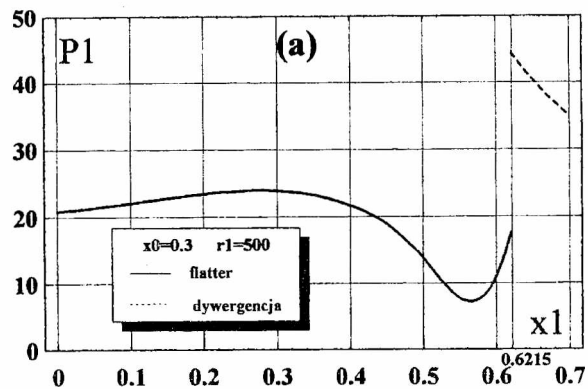
Rys. 3.16. Obciążenia krytyczne (a) i częstotliwości krytyczne (b) belki (rys. 3.15a) częściowo (x_1) spoczywającej na podłożu sprężystym Winklera ($r_1 \neq 0, t_1 = 0$)

Fig. 3.16. Critical loads (a) and critical frequencies (b) for the beam

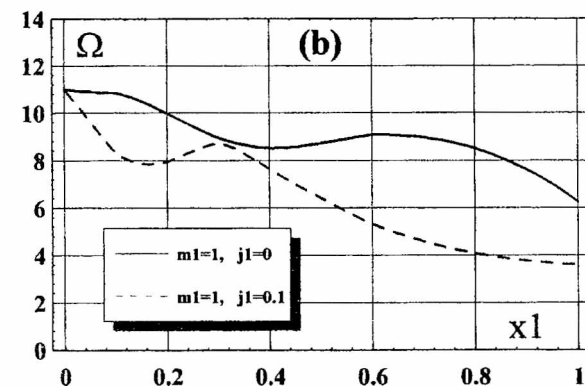
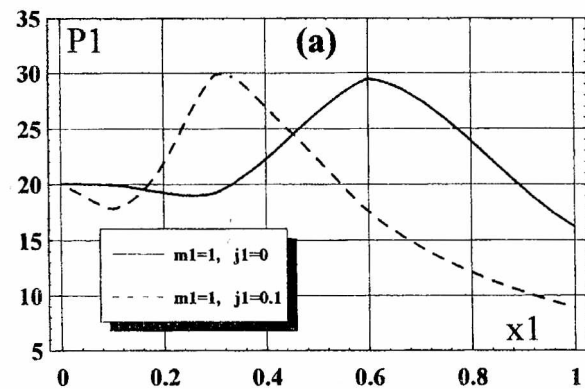


Rys. 3.17. Obciążenia krytyczne (a) i częstotliwości krytyczne (b) belki (rys. 3.15a) częściowo (x_1) spoczywającej na podłożu sprężystym ($r_1 = 0, t_1 \neq 0$)

Fig. 3.17. Critical loads (a) and critical frequencies (b) for the beam (Fig. 3.15a) partially (x_1) resting on an elastic foundation ($r_1 = 0, t_1 \neq 0$)

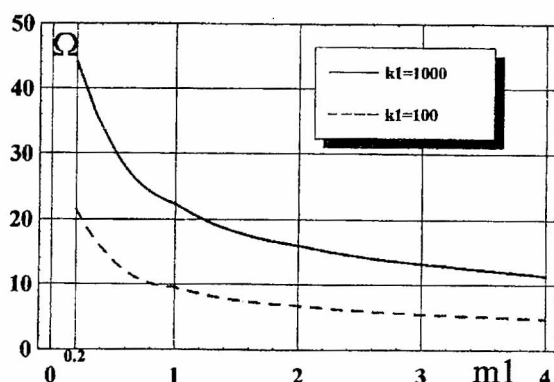


Rys. 3.18. Obciążenia krytyczne belki (rys. 3.15b) przy różnych zasięgach ($x0$) ruchomej warstwy sprężystej typu Winklera; $x0=0.3$ (a), $x0=0.4$ (b)
 Fig. 3.18. The critical load of the beam (Fig. 3.15b) for different ranges ($x0$) of a Winkler-type movable elastic layer; $x0=0.3$ (a), $x0=0.4$ (b)



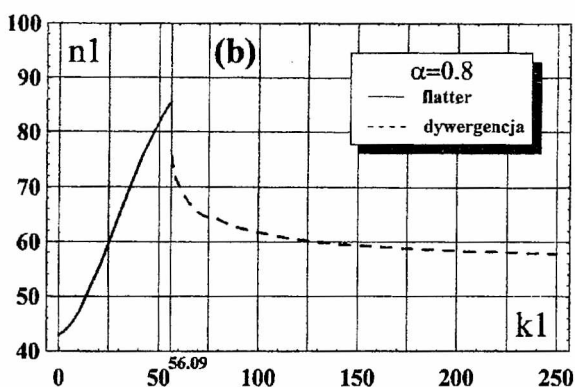
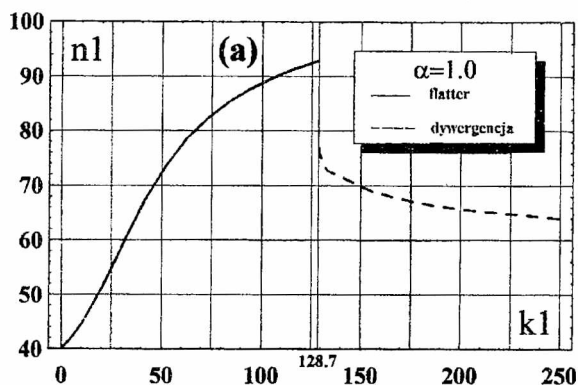
Rys. 3.19. Obciążenia krytyczne (a) i częstotliwości krytyczne (b) belki (rys. 3.15c) przy różnych położeniach ($x1$) masy skupionej o pomijalnej i niepomijalnej bezwładności obrotowej

Fig. 3.19. Critical loads (a) and critical frequencies (b) of the beam (Fig. 3.15c) for different positions ($x1$) of a concentrated mass characterized by negligible and non-negligible rotational inertia



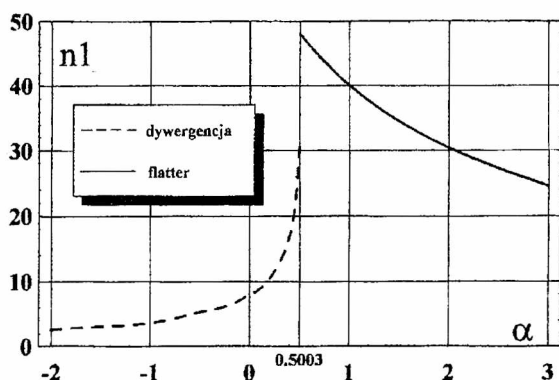
Rys. 3.20. Pierwsza częstość drgań własnych belki (rys. 3.15d) przy różnych wielkościach masy resorowanej ($m1$) i różnych stałych resorowania ($k1$)

Fig. 3.20. The first frequency of the beam's free vibration (Fig. 3.15d) for different sizes of sprung mass ($m1$) and various springing constants ($k1$)



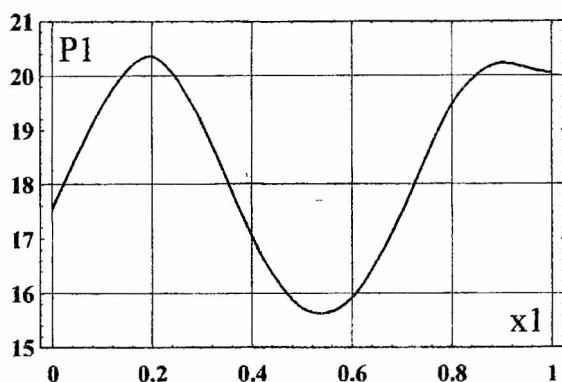
Rys. 3.21. Poziomy obciążen krytycznych belki Leipholza (rys. 3.15e) przy różnych sztywnościach ($k1$) sprężystego podparcia i różnych parametrach śledzenia; $\alpha=1,0$ (a), $\alpha=0,8$ (b)

Fig. 3.21. Critical load levels of the Leipholz beam (Fig. 3.15e) for different rigidities ($k1$) of an elastic foundation and various follower parameters; $\alpha=1.0$ (a), $\alpha=0.8$ (b)



Rys. 3.22. Obciążenie krytyczne belki Leipholza (rys. 3.15e) przy różnych wartościach parametrów śledzenia α i przy $k_1=0$

Fig. 3.22. Critical load of the Leipholz beam (Fig. 3.15e) for different values of follower parameters α at $k_1=0$

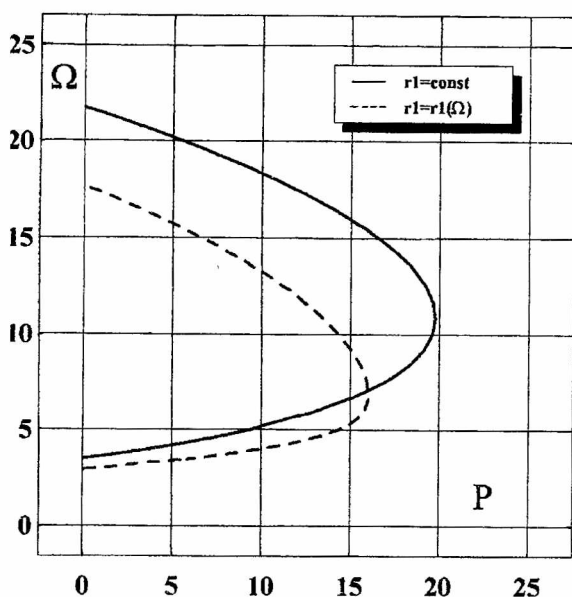


Rys. 3.23. Obciążenie krytyczne belki Becka (rys. 3.15f) przy różnych położeniach (x_1) rysy

Fig. 3.23. Critical load of the Beck beam (Fig. 3.15f) for different positions (x_1) of the crack

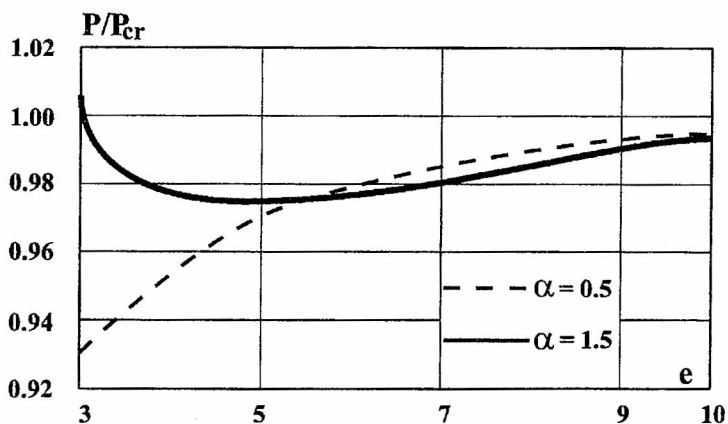
stawiono zmienność dwóch pierwszych częstości sprężystości mocowanego na obrót pręta Becka (rys. 3.15g). Linia ciągłą oznaczono rozwiązanie dla $r_1 = R_L l / EI = e^5$, a linią przerywaną rozwiązanie dla nieliniowej zależności stałej R_L od częstości w postaci $r_1 = e^{(-\Omega+5)+\Omega/5}$. Na rysunku 3.25 pokazano względne wartości obciążenia krytycznego niepryzmatycznej belki z rys. 3.13 w funkcji ilości (e) pryzmatycznych elementów o tej samej długości aproksymujących zmienny przekrój poprzeczny belki. Jako poziom odniesienia przyjęto wartości obciążeń krytycznych pokazanych na rys. 3.13.

Analizowano także wiele innych, tutaj nie prezentowanych zadań, wykorzystujących teorię belki Timoshenki oraz teorię Bernoulliego–Eulera i Timoshenki jednocześnie do belek pryzmatycznych i niepryzmatycznych. Algorytm testowano także w za-



Rys. 3.24. Zmienność dwóch podstawowych częstości uogólnionego zadania Becka (rys. 3.15g) przy liniowej i nieliniowej charakterystyce sprężystego mocowania

Fig. 3.24. Variation of the two basic frequencies of the generalized Beck problem (Fig. 3.15g) for a linear and nonlinear characteristic of the elastic fixing



Rys. 3.25. Względne wartości obciążeń krytycznych niepryzmatycznej belki (rys. 3.13) w funkcji liczby e elementów pryzmatycznych przy różnych parametrach śledzenia

Fig. 3.25. Relative critical load level for non-prismatic rod (Fig. 3.13) as a function of the number e of prismatic elements for different follower parameters

daniach z nieliniowymi charakterystykami podłoża sprężystego przy obciążeniach wieloparametrowych. W każdym z tych zadań zastosowany algorytm okazał się skuteczny.

3.5. Podsumowanie

Przedstawiony w punkcie 3.2 algorytm stanowi uogólnienie rozwiązań podanych przez Eisenbergera [3.15]. Algorytm ten zastosowano do badania stateczności niepryzmatycznych prętów poddanych działaniu statycznych obciążeń niepotencjalnych sterowanych dowolną funkcją śledzenia. W rozwiązaniach uwzględniono możliwość istnienia jedno- i dwuparametrowego podłoża sprężystego. Zastosowanie dynamicznego kryterium stateczności umożliwia znajdowanie zarówno obciążeń krytycznych typu flatter, jak i krytycznych obciążeń bifurkacyjnych prętów o różnych, z reguły prostych, warunkach brzegowych.

Pokazany sposób ścisłego rozwiązywania zagadnień statyki, dynamiki i stateczności ustrojów prętowych o elementach niepryzmatycznych pozwala zminimalizować rozmiar zadania; przykładowo analiza stateczności wsporników sprowadza się do analizy wyznacznika macierzy o wymiarach 2×2 . Rozwiązane przykłady i porównanie wyników ze znanymi z literatury pokazują na ogół dobrą skuteczność i zadowalającą efektywność zastosowanego podejścia. Zaprezentowany sposób analizy może być podstawą tworzenia rozwiązań testowych innych algorytmów analizy zachowania się prętów niepryzmatycznych lub konstrukcji złożonych z takich prętów, choć z uwagi na wspomniane już możliwe problemy ze zbieżnością numeryczną nie stanowi rozwiązania uniwersalnego.

W punkcie 3.3 przedstawiono spójny algorytm ścisłego wyznaczania częstości drgań własnych liniowych układów belkowych oraz określania poziomów obciążeń krytycznych zarówno pod statycznym obciążeniem konserwatywnym, jak i niekonserwatywnym. Pokazane podejście jest skuteczne w analizie pryzmatycznych i niepryzmatycznych belek jedno- i wieloprzęsłowych o dowolnych warunkach brzegowych i ze sprężystymi podporami, których charakterystyki mogą być dowolnymi, w ogólności nieliniowymi, funkcjami poziomu obciążenia i częstości. Zaproponowany algorytm umożliwia analizę belek spoczywających na jedno- i dwuparametrowym, inercyjnym i nieinercyjnym podłożu sprężystym o dowolnym zasięgu i położeniu. Możliwa jest także analiza belek z masami o pomijalnej i niepomijalnej bezwładności obrotowej oraz punktowymi masami resorowanymi. W tym zakresie algorytm ten jest bardziej uniwersalny od przedstawionego w punkcie 3.2 podejścia wykorzystującego aproksymację szeregami potęgowymi.

Wprowadzany podział belek na segmenty, w obrębie których znajdowane jest rozwiązanie ścisłe, w prosty sposób umożliwia wykorzystywanie teorii belki Bernoulliego–Eulera lub Timoshenki bądź jednocześnie stosowanie tych dwóch teorii w jednym zadaniu. Skupione obciążenia przykładane na granicy segmentów umożliwiają mode-

lowanie dowolnych, osiowych statycznych obciążeń konserwatywnych i dowolnych statycznych obciążeń niekonserwatywnych o zmiennej intensywności i dowolnej wielkości charakteryzujących te obciążenia parametrów śledzenia. Tak przygotowany algorytm można wykorzystać do analizy zadań z obciążeniami wieloparametrowymi i jest bardziej ogólny i skuteczniejszy w praktycznym stosowaniu od algorytmu pokazanego w punkcie 3.3. Otrzymywane wyniki w przypadku belek niepryzmatycznych o istotnie zmiennych parametrach już przy niewielkiej liczbie elementów były zadowalające, choć ich analiza wraz ze wzrostem żądanej dokładności śledzenia zmian częstości stawała się żmudna.

W rozdziale tym wykorzystano wyniki przedstawione w pracy autora [3.42].

4. PRAWO I ZASADA HAMILTONA W ANALIZIE UKŁADÓW NIEKONSERWATYWNYCH

4.1. Wprowadzenie

Jedną z podstawowych zasad całkowych fizyki jest tak zwana zasada Hamiltona. Odgrywa ona zasadniczą rolę nie tylko w mechanice, ale także w innych działach fizyki, do których należy zaliczyć między innymi elektrodynamikę, hydrodynamikę, optykę i akustykę. Sformułowania, które zwykło nazywać się zasadą Hamiltona w jednych pracach, prawem Hamiltona w innych, w oryginalnych pracach Hamiltona są nazywane prawem zmiennej akcji (*law of varying action*) [4.1, 4.2]. Dalej, do momentu szczegółowego wyjaśnienia, używać się będzie określenia tak zwana zasada Hamiltona, które jest pewną wypadkową trzech przytoczonych określeń.

Odmienne określanie rezultatów prac Hamiltona nie dotyczy jedynie różnic w nazewnictwie. W wielu klasycznych pozycjach literatury, a także w licznych artykułach można spotkać zasadnicze różnice w interpretacji prac Hamiltona. Dotyczą one między innymi dopuszczalnych czasowych granic całkowania (warunku dostatecznego istnienia ekstremum), obowiązywania tak zwanych warunków stacjonarności, jak i odpowiedzi na pytanie: czy i kiedy tak zwana zasada Hamiltona jest zasadą wariacyjną. Niektórzy autorzy formułują, w ich mniemaniu, bardziej precyzyjną bądź uogólnioną tak zwaną zasadę Hamiltona. Wiele kontrowersji budzi także możliwość stosowania tak zwanej zasady Hamiltona w analizie układów z siłami niekonserwatywnymi.

Zasadniczym celem tego rozdziału jest:

- przedstawienie różnych sformułowań i różnego rozumienia tak zwanej zasady Hamiltona oraz warunków jej stosowalności,
- odpowiedź na pytanie: czy tak zwana zasada Hamiltona może być podstawą stosowania metod bezpośrednich w analizie układów z siłami niekonserwatywnymi i tym samym stanowić alternatywą – do metod numerycznego całkowania równań ruchu – drogę rozwiązywania tego typu problemów mechaniki,
- przykładowa, numeryczna realizacja metody bezpośredniej bazującej na wynikach prac Hamiltona w analizie konserwatywnych i niekonserwatywnych, liniowych i nieliniowych układów dyskretnych i wykorzystanie jej do określenia typu utraty sta-

teczności tych układów pod działaniem statycznych i dynamicznych sił nie mających potencjału.

W drugim punkcie rozdziału przypomniano wyniki prac Hamiltona, a w punkcie trzecim w sposób jawny pokazano rolę sił niekonserwatywnych w sformułowaniach zasady i prawa Hamiltona. Przykłady realizacji numerycznych bazujących na zasadzie i prawie Hamiltona przedstawiono w punkcie czwartym rozdziału.

4.2. Interpretacja wyników prac Hamiltona

W wielu klasycznych, podstawowych pozycjach literatury z zakresu mechaniki teoretycznej (Lapunow [4.3], Susłow [4.4], Banach [4.5], Huber [4.6], Rubinowicz i Królikowski [4.7]) zasada Hamiltona jest przedstawiana jako relacja postulująca znikanie wariacji δ (bez wariacji czasu) z całki działania L

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0 \quad (4.1)$$

Przez $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ i t oznaczono odpowiednio wektory uogólnionych przemieszczeń, prędkości $\left(\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)$ i czas. Powyższą zasadę łatwo jest wyprowadzić, na przykład wychodząc z zasady d'Alamberta, przy dodatkowych założeniach stacjonarności $(\delta \mathbf{q}|_{t_0} = \delta \mathbf{q}|_{t_1} = \mathbf{0})$ i istnieniu potencjału dla działających sił. Przez $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ oznaczono tutaj $L = T - V$, gdzie T jest energią kinetyczną, a V energią potencjalną układu. Jeżeli nie przyjmiemy warunku znikania wariacji przemieszczeń na końcach rozpatrywanego przedziału czasowego, to relacja którą w prosty sposób można otrzymać z zasady d'Alamberta dla układów potencjalnych przyjmie postać

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (4.2)$$

Relację tę, w odróżnieniu od relacji (4.1), część autorów zwykło nazywać prawem Hamiltona (Yourgrau i Mandelstam [4.8], Bailey [4.9]). Jak łatwo pokazać, zarówno korzystając z zasady jak i prawa Hamiltona można bez trudu otrzymać równania ruchu Lagrange'a. Prawo Hamiltona – o czym już wspomniano – nie wprowadza założenia o znikaniu wariacji przemieszczeń na końcach przedziału czasowego – tak zwanych warunków stacjonarności. Przyjęcie warunków stacjonarności wymaga z góry wiedzy o odpowiedzi układu; na przykład dla czasu t_1 warunek $\delta \mathbf{q}|_{t_1} = \mathbf{0}$ oznacza, że główna liniowa część przyrostu przemieszczenia (wariacja) od przecięż nieznanego (szukanego) poziomu przemieszczeń ma być równa zero. Postulowane warunki stacjonarności są jedną z przyczyn, dla których zasadę Hamiltona stosuje się w celu wyprowadzania równań ruchu Lagrange'a, równań, które można zawsze otrzymać bez tej zasady, i które

były sformułowane znacznie wcześniej – przed opublikowaniem prac Hamiltona. Gutowski i Swietlicki stwierdzają: „Zaletą zasady Hamiltona jest jej niezmienniczość względem wyboru układu współrzędnych $q_1, \dots, q_n$. Z tego względu zasada Hamiltona jest szczególnie dogodna do formułowania praw ruchu, nie związanych z określonym układem współrzędnych” [4.10, s. 30–31]. Sam Hamilton pisząc o konsekwencjach przyjęcia warunków stacjonarności stwierdza: „But when this well known law of least, or as it might be better called, of stationary action, is applied to the determination of the actual motion of a system, it serves only to form, by the rules of the calculus of variations, the differential equations of motion of the second order, which can always be otherwise found” [5.1, s. 252]. Oczywiście prawo Hamiltona jest bardziej ogólne od zasady Hamiltona. Nie przedstawia ono jednak wariacyjnego sformułowania zagadnienia w tym sensie jak zasada Hamiltona. W przypadku równania (4.2) nie istnieje funkcjonał I , który pozwalałby zapisać tę relację w postaci $\delta I = 0$. Dlatego też na przykład Simkins proponuje tego typu relacje nazywać sformułowaniami wariacyjnymi, a nie wariacyjnymi zasadami [4.11]. W swojej pracy Hamilton [4.1, s. 251] sformułował równanie

$$\delta V = \sum m(x_i \delta x + y_i \delta y + z_i \delta z) - \sum m(a_i \delta a + b_i \delta b + c_i \delta c) + t \delta H \quad (4.3)$$

gdzie

$$V = \int \sum m(x_i dx + y_i dy + z_i dz) = \int_0^t 2T dt \quad (4.4)$$

stwierdzając, że: „We have, therefore, at least reduced that general problem to the search and differentiation of a single function: V , which we shall call on this account the CHARACTERISTIC FUNCTION of motion of a system; and the equation (4.3) expressing the fundamental law of its variation, we shall call the equation of the characteristic function, or the LAW OF VARYING ACTION”. W równaniach (4.3) i (4.4) zachowano oryginalne oznaczenia: x_i, y_i, z_i oraz x'_i, y'_i, z'_i są odpowiednio współrzędnymi i prędkościami n punktów materialnych o masie m_i , a wielkości a_i, b_i, c_i oraz a'_i, b'_i, c'_i opisują warunki początkowe, odpowiednio początkowe położenia i początkowe prędkości. Jak stwierdza Hamilton: „The quantity H is independent of the time t , and does not alter in the passage of the points of the system from one set of positions to another” [4.1, s.250]. Zależność (4.3) jest podstawą dalszego rozumowania, które Hamilton opisuje następująco: „If then, we consider (as it easy to see that we may) the action V as a function of the initial and final coordinates, and of the quantity H , we shall have, by (4.3) the following groups of equations ...”, po czym przytacza trzy grupy równań, które wynikają z różniczkowania (4.3) kolejno: po współrzędnych x_i, y_i, z_i , po stałych początkowych a_i, b_i, c_i oraz po wielkości H [4.1, s. 251]. Te trzy grupy równań przy założeniu, że funkcja V jest znana, stanowią podstawę do znalezienia „... the $3n$ sought relations between the $3n$ varying coordinates and the time, involving also

the masses and the 6n initial data above mentioned; the discovery of which relations would be (as we have said) the general solution of the general problem of dynamics” (Hamilton [4.1, s. 251–252]). Wymaga to założenia, które np. Huber [4.6, s. 546] ujmuje słowami: „Dajmy na to, że dane zagadnienie kinetyczne dla układu o n stopniach swobody zostało rozwiązane”. Jak widać, przy założeniu, że energia kinetyczna układu jest jednorodną, kwadratową funkcją prędkości $\dot{q}_i$, przyjęciu, że $H = 0$ oraz odpowiedniej zamianie oznaczeń, z prawa zmiennej akcji danego równaniem (4.3) otrzymujemy równanie nazywane prawem Hamiltona (4.2). Jak z powyższego widać, Hamilton nie sformułował zasady wariacyjnej w postaci (4.1), którą zwykło się mu przypisywać, ale wykazał słuszność prawa, które można przedstawić związkiem (4.3) lub po pewnych uproszczeniach relacją (4.2). Należy podkreślić, że te dwie ostatnie relacje nie przedstawiają zasad wariacyjnych. Szczegółową dyskusję fundamentalnego znaczenia wyników prac Hamiltona dla dalszego rozwoju mechaniki przedstawił w swojej przeglądowej monografii Goldstein [4.12].

Wielu autorów omawiając zasadę Hamiltona zwraca uwagę na warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcjonału, który – przy założeniu ciągłości odpowiedniego rzędu funkcji współrzędnych uogólnionych – nakłada ograniczenia na wielkość przedziału całkowania (t_0, t_1) (Susłow [4.4], Gutowski i Świetlicki [4.10], Gutowski [4.13], Białkowski [4.14], Gelfand i Fomin [4.15]). Warunek ten wyraża postulat braku istnienia punktów sprzężonych na ekstremali w analizowanych przedziałach czasowych (t_0, t_1) i sprowadza się do stwierdzenia, że zasada Hamiltona osiąga minimum jedynie dla krótkich przedziałów czasowych. Gelfand i Fomin [4.15] określają czasowe granice stosowalności prawa Hamiltona jako $0 \leq t \leq t_1 < \pi/\omega$, a Smith i Smith [4.16] jako $(t_1 - t_0) < \pi/\omega$, tak więc w opinii tych ostatnich: „It can be said that the time interval must be less than one-half of the minimum period of free vibration”. Sens wyżej cytowanych, praktycznych ograniczeń na rozpatrywany przedział czasowy, w którym zasada Hamiltona realizuje minimum, zakwestionował Bailey [4.17] – co nie jest niczym nowym, a jedynie konsekwentnym stosowaniem wyników prac Hamiltona. Na przykładzie oscylatora harmonicznego, którego rozwiązania poszukiwał w postaci prostego szeregu potęgowego Bailey pokazał, że zarówno dla czasów mniejszych jak i większych od połowy okresu drgań własnych oscylatora można uzyskać rozwiązania poprawne bądź nie. W konkluzji Bailey pisze: „These collective results for the linear oscillator demonstrate that Hamilton’s principle, instead of being a minimum principle for small time intervals, is in fact a minimum principle for those time intervals for which $\partial T / \partial \dot{q}_i|_{t_1=t} = 0$ ” [4.17, s. 285]. Ilustrację numeryczną tego faktu przedstawiono w punkcie czwartym rozdziału. Należy dodać, że wyżej zasygnalizowany problem warunku dostatecznego istnienia minimum funkcjonału odnosi się do zasady Hamiltona (4.1), a nie do prawa Hamiltona (4.2), które nie przedstawia wariacyjnego sformułowania zagadnienia w tym sensie jak zasada Hamiltona. Niektórzy autorzy, między innymi Huber [4.6], zakładają zupełną dowolność wielkości przedziału (t_0, t_1) . W swoich pracach [4.1, 4.2] Hamilton nie wprowadził żadnego ograniczenia wielkości analizowanego przedziału czasowego.

4.3. Siły niekonserwatywne w sformułowaniach zasady i prawa Hamiltona

Zasada i prawo Hamiltona w postaci danej wzorami (4.1) i (4.2) są słuszne przy założeniu, że działające siły mają potencjał. Hamilton wyprowadzając prawo zmiennej akcji zakładał, że istnieje tak zwana funkcja sił U ($-U = V$). Jeżeli założymy, że w układzie oprócz sił potencjalnych istnieją siły niepotencjalne, to odpowiednikiem zasady danej relacją (4.1) będzie relacja

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' W) dt = 0 \quad (4.5)$$

gdzie $W = \sum Q_i q_i$, $\delta' W = \sum Q_i \delta q_i$, a przez Q_i oznaczono siły uogólnione odpowiadające współrzędnym uogólnionym q_i . Przez W oznaczono pracę sił potencjalnych i niepotencjalnych. Trzeba zwrócić uwagę na to, że działanie operatora δ' na pracę W , zdefiniowane wyżej, jest różne od klasycznej wariacji, bez wariacji czasu, pracy W , która przy istnieniu sił niekonserwatywnych $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ma postać $\delta W = \sum_i \delta Q_i q_i + \sum_i Q_i \delta q_i$. Goldstein [4.18] zapisał zasadę Hamiltona do układów z siłami potencjalnymi i niepotencjalnymi w postaci

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + W) dt = 0 \quad (4.6)$$

gdzie W zostało zdefiniowane jak wyżej. Ponieważ zapis ten budzi wiele nieporozumień, wymaga on krótkiego wyjaśnienia. Relację (4.6) po wydzieleniu pracy sił niekonserwatywnych ($\overline{W}$) można zapisać jako

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V + \overline{W}) dt = 0 \quad (4.7)$$

gdzie V jest energią potencjalną układu (uwzględniającą te siły, przy których istnieje potencjał), $\overline{W} = \sum \overline{Q}_i q_i$ a przez $\overline{Q}_i$ oznaczono siły niekonserwatywne odpowiadające współrzędnym uogólnionym q_i . Na podstawie tego, że zasadę Hamiltona można sformułować wykorzystując zasadę d'Alamberta postulującą niezależność sił od przemieszczeń wirtualnych ($\delta \overline{Q}_i = 0$), możemy zapisać

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \bar{W} dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \bar{Q}_i q_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \bar{Q}_i \delta q_i dt \quad (4.8)$$

Korzystając z (4.8) związek (4.6) zapisujemy jako

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \bar{Q}_i \delta q_i dt = 0 \quad (4.9)$$

Wzór ten w sposób jawny przedstawia zasadę Hamiltona układów niekonserwatywnych. Jak widać, przedstawiona zasada nie stanowi wariacyjnego sformułowania zagadnienia. Można ją oczywiście zapisać w postaci wariacji (bez wariacji czasu) pewnego funkcyjału z dodatkowo narzuconymi więzami

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(T - V + \sum_i \bar{Q}_i q_i \right) dt = 0, \quad \delta \bar{Q}_i = 0 \quad (4.10)$$

Sformułowania zasady Hamiltona odnoszące się do układów niekonserwatywnych wyrażone związkami (4.5), (4.6), (4.9) czy (4.10) są identyczne. Na bazie równania (4.10) Barsoum sformułował równania ruchu, które następnie wykorzystał – stosując metodę elementów skończonych – do analizy stateczności układów niekonserwatywnych [1.17]. Analogicznie do zasady Hamiltona, którą alternatywnie przedstawiono w postaci relacji (4.5), (4.6), (4.9) czy (4.10), odpowiadające tym związkom sformułowania prawa Hamiltona (nie postulujące warunków stacjonarności) mają postać:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' W) dt - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (4.11)$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + W) dt - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (4.12)$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \bar{Q}_i \delta q_i dt - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (4.13)$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(T - V + \sum_i \bar{Q}_i q_i \right) dt - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} = 0, \quad \delta \bar{Q}_i = 0 \quad (4.14)$$

Oczywiście, związki wyrażające prawo Hamiltona układów niekonserwatywnych nie przedstawiają sformułowań wariacyjnych zagadnienia. W świetle tego, relacja (4.14) zbudowana przez analogię do relacji (4.10) także nie stanowi sformułowania wariacyjnego.

W rozdziale tym zdecydowano się na szersze przedstawienie zasady i prawa Hamiltona układów niekonserwatywnych z uwagi na wspomniane już w tym zakresie nieporozumienia. Przykładami innego sposobu rozumienia prawa Hamiltona i wynikających na tym tle nieporozumień mogą być prace Baileya [4.19] i Brysona [4.20], Baileya [4.21] i Smitha [4.22], Baileya [4.23] i Smitha [4.24] oraz Simkinsa [4.25] i Baileya [4.26, 4.27]. Głównym punktem nieporozumień jest zapis prawa Hamiltona w postaci relacji (4.12) i problem jego obowiązywania dla układów niekonserwatywnych. Wydaje się, że wcześniejsza praca Levinsona [1.14], która dała podstawy do skutecznego stosowania metod Galerkina i Ritza w analizie układów niekonserwatywnych, w sposób jasny wyjaśnia te nieporozumienia. Według Baileya [4.9], źródłem tych nieporozumień jest różne rozumienie działania operatora wariacji $\delta(\cdot)$. Potwierdza to stwierdzenie Vujanovic [4.28], który rozpatrując wariację bez wariacji czasu, po przekształceniach doszedł do wniosku, że w układach niekonserwatywnych wariacja prędkości przemieszczenia nie jest równa pochodnej czasowej wariacji przemieszczenia, $\delta\dot{q}_i \neq d/dt(\delta q_i)$, a różnicę tę traktował jako pewną miarę „niekonserwatywności” układu. Taki rezultat jest efektem nieformalnych przekształceń, u podstaw których leży właśnie sposób działania operatora wariacji. Jak wiadomo (Gutowski [4.13]), wariacja prędkości przemieszczenia nie jest równa pochodnej czasowej wariacji przemieszczenia wtedy, gdy rozpatrujemy wariację z wariacją czasu. Dla wariacji bez wariacji czasu wielkości te są sobie zawsze równe, niezależnie od rodzaju sił występujących w analizowanym układzie.

Zarówno zasada jak i prawo Hamiltona mogą stanowić podstawę stosowania metod bezpośrednich szeroko wykorzystywanych w mechanice budowli. Zasada Hamiltona może być podstawą formułowania równań ruchu, które możemy rozwiązywać na przykład metodą Galerkina, o ile założone funkcje spełniają wszystkie warunki brzegowe. Prawo Hamiltona przy zastosowaniu metody Ritza daje przybliżone rozwiązanie przy znacznie mniej rygorystycznych – w porównaniu z metodą Galerkina – warunkach narzucanych na stosowane funkcje (Bailey [4.29, 4.30]). Użycie tutaj określenia „metoda Ritza” w stosunku do zastosowanego sposobu rozwiązania może budzić wątpliwości w świetle podstawowych założeń metody Ritza (Mikhlin [4.31]). Określenia „Hamilton–Ritz formulation” (Bailey [4.29]) albo „Ritz-like equation” (Leipholtz [4.32]) są bardziej stosowne, choć wydaje się, że określenie „metoda bezpośrednia” najlepiej opisuje stosowany sposób rozwiązania. Jak praktycznie wykazał Bailey [4.9, 4.17, 4.21, 4.23, 4.30] oraz Bailey i Haines [4.33], prawo Hamiltona jako baza metod bezpośrednich daje w pełni poprawne rezultaty w analizie układów konserwatywnych i niekonserwatywnych (w sensie zachowania energii), stacjonarnych i niestacjonarnych, liniowych i nieliniowych, dyskretnych i ciągłych. Podsumowując możliwości stosowania

metod bezpośrednich bazujących na zasadzie i prawie Hamiltona, Bailey [4.29, s.64] stwierdza, że: „Equation (4.12) is an exact equation from which the differential equations of the system may be obtained, or from which the differential equations of the system may be obtained if such equations are desired. It has been recognized for generations (Bisplinghoff i Ashley [4.34], Smith [4.24]), that direct analytical solutions cannot be obtained from eq. (4.6), Hamilton’s principle”. W następnym punkcie tego rozdziału na bazie prawa Hamiltona pokazano przydatność metody bezpośredniej między innymi w określaniu poziomu obciążenia krytycznego i charakteru utraty stateczności podwójnego, liniowego wahadła, oraz w analizie odpowiedzi tego układu w przypadku uwzględnienia nieliniowości. Zadania te stanowią przykład olbrzymich możliwości stosowania metod bezpośrednich bazujących na prawie Hamiltona. Należy też podkreślić, że jedyną bazą rozwiązań prezentowanych we wszystkich cytowanych pracach Bailey’a, a także przykładów pokazanych w następnym punkcie tego rozdziału, jest prawo sformułowane przez Hamiltona. Mija się z prawdą Leipholz, który stwierdza [4.35, s. 1386]: „Recently Leipholz [4.36, 4.37], and Bailey [4.17] have proposed to extend Hamilton’s principle to make it easily applicable to initial value problems”, po czym przytacza sformułowane ponad 160 lat temu prawo Hamiltona.

4.4. Przykłady numeryczne

Jako elementarny przykład funkcjonowania zasady i prawa Hamiltona, stanowiących podstawę metod bezpośrednich, wybrano analizę niethumionych drgań swobodnych oscylatora harmonicznego. Przykład ten stanowi ilustrację przedstawionej wcześniej dyskusji o zakresie czasu (t_0, t_1) w sformułowaniach zasady i prawa Hamiltona. Przez m oznaczono masę oscylatora, k jest stałą charakteryzującą reakcję sprężystą, a $q(t)$ współrzędną uogólnioną zadania. Definiując w klasyczny sposób energię potencjalną $T = 1/2 m \dot{q}^2$ i energię potencjalną $V = 1/2 k q^2$ oscylatora i wprowadzając bezwymiarowy czas $\tau = t/t_1$, zasadę i prawo Hamiltona możemy odpowiednio zapisać w postaci

$$\int_0^1 \left[\frac{m}{t_1^2} \frac{dq}{d\tau} \delta \left(\frac{dq}{d\tau} \right) - kq \delta q \right] d\tau = 0 \quad (4.15)$$

$$\int_0^1 \left[\frac{m}{t_1^2} \frac{dq}{d\tau} \delta \left(\frac{dq}{d\tau} \right) - kq \delta q \right] d\tau - \frac{m}{t_1^2} \frac{dq}{d\tau} \delta q \Big|_0^1 = 0 \quad (4.16)$$

Założono, co nie ogranicza ogólności rozumowania, że ruch jest poszukiwany w przedziale czasu $(0, t_1)$. Rozwiązania $q(\tau)$ poszukuje się w postaci prostego szeregu potęgowego

$$q(\tau) = q_0 + \dot{q}_0 t_1 \tau + \sum_{i=2}^N A_i \tau^i \quad (4.17)$$

gdzie q_0 i $\dot{q}_0$ oznaczają odpowiednio wychylenie i prędkość początkową, A_i są szukanymi stałymi. Korzystając ze wzoru (4.17) wariację przemieszczenia $dq(\tau)$ możemy przedstawić jako

$$\delta q(\tau) = \sum_{j=2}^N \delta A_j \tau^j \quad (4.18)$$

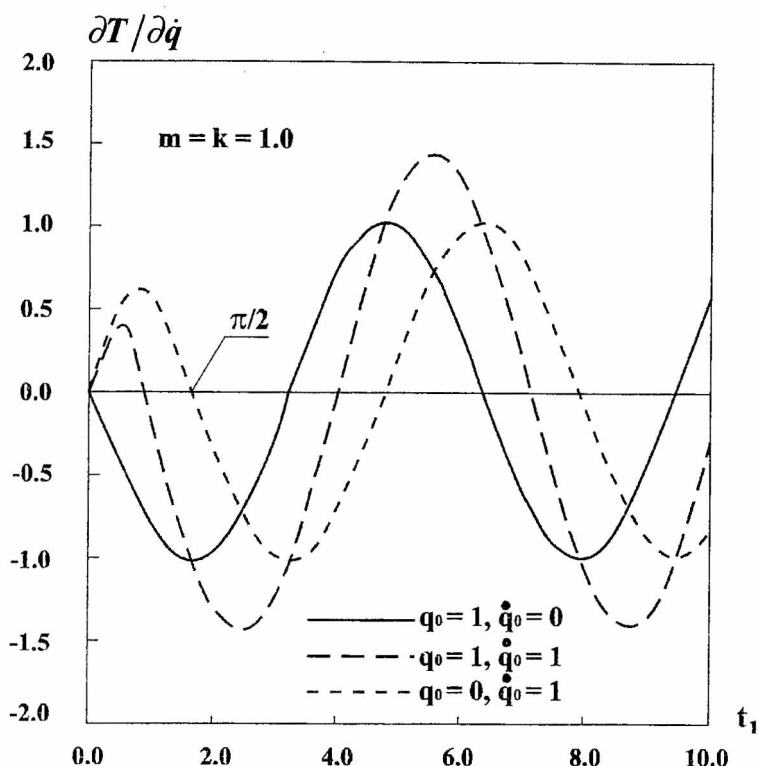
Uwzględniając związki (4.17) i (4.18) w relacjach (4.15) i (4.16) przy założeniu, że wariacje δA_i są dowolne, otrzymamy układ równań algebraicznych na $N-1$ stałych A_i . Odpowiednio j -te równania dla zasady i prawa Hamiltona mają postać

$$\sum_{i=2}^N \left(\frac{ij}{i+j-1} - \frac{kt_1^2}{m} \frac{1}{i+j-1} \right) A_i = -\dot{q}_0 t_1 + \frac{kt_1^2}{m} q_0 \frac{1}{j+1} + \frac{kt_1^3}{m} \dot{q}_0 \frac{1}{j+2} \quad (4.19)$$

$$\sum_{i=2}^N \left(\frac{ij}{i+j-1} - i - \frac{kt_1^2}{m} \frac{1}{i+j-1} \right) A_i = \frac{kt_1^2}{m} q_0 \frac{1}{j+1} + \frac{kt_1^3}{m} \dot{q}_0 \frac{1}{j+2} \quad (4.20)$$

Na rysunku 4.1 pokazano zmienność wielkości $\partial T / \partial \dot{q}$, przy różnych warunkach początkowych, w funkcji czasu t_1 trwania obserwacji drgań. Na rysunku 4.2 pokazano rozwiązanie bazujące na zasadzie Hamiltona w czasie $t_1 = \pi/2$ – przy którym $\partial T / \partial \dot{q} = 0$ i przy warunkach początkowych $q_0 = 0$ i $\dot{q}_0 = 1$ – i czasach niewiele różniących się od $\pi/2$. Rozwiązanie ściśle dokładnie pokrywa się z rozwiązaniem otrzymanym w czasie $t_1 = \pi/2$. Zastosowano tutaj aproksymację rozwiązania szeregiem 12-elementowym, która w czasie np. $t_1 = 2\bar{T}$, gdzie $\bar{T}$ jest okresem drgań własnych, daje błąd w stosunku do rozwiązania ściślego rzędu $3 \cdot 10^{-6} \%$. Obserwacja czasów znacznie większych jest możliwa przez podział czasu t_1 na kroki, w których rozwiązania końcowe kroku poprzedniego stanowią warunki początkowe następnych kroków. Śledzenie odpowiedzi układu przy dowolnych czasach t_1 bazujące na prawie Hamiltona daje rezultaty w pełni zgodne z rozwiązaniem ścisłym. Wyniki numeryczne potwierdzają uwagi zawarte w poprzednim punkcie: prawo Hamiltona jako bazę metod bezpośrednich można stosować przy dowolnych czasach obserwacji ruchu t_1 , a warunki stacjonarności nie są warunkami koniecznymi w tego typu rozwiązaniach. Zasada Hamiltona daje rozwiązania poprawne jedynie przy szczególnych punktach czasowych, punktach których położenia zależą oczywiście od warunków początkowych ruchu i są znane dopiero po rozwiązaniu zadania.

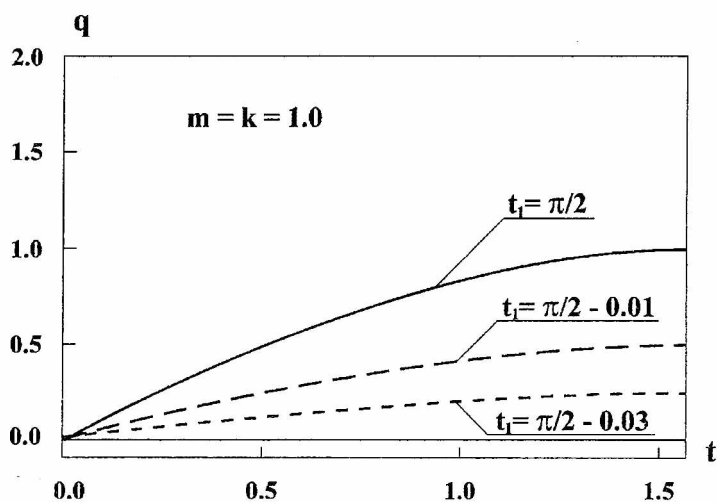
Przykładem funkcjonowania metody bezpośredniej bazującej na prawie Hamiltona w analizie układów niekonserwatywnych są liniowe i nieliniowe rozwiązania podwójnego wahadła (rys. 4.3), poddanego działaniu statycznej bądź dynamicznej sile śledzącej.



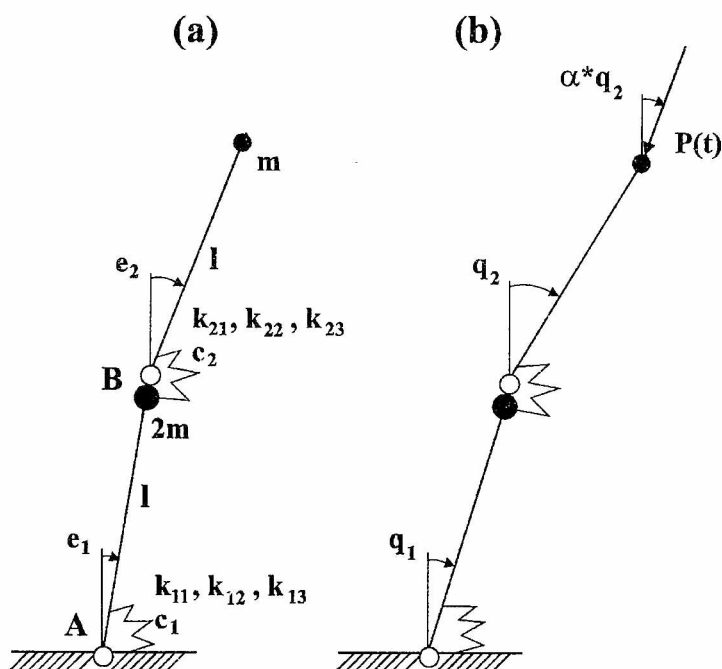
Rys. 4.1. Zależność $\partial T / \partial \dot{q}$ od czasu t_1 i warunków początkowych ruchu

Fig. 4.1. Dependence of $\partial T / \partial \dot{q}$ on time t_1 and the initial conditions of motion

Analiza zachowania podwójnego wahadła poddanego działaniu siły niekonserwatywnej (tak zwanego modelu Zieglera) – z uwagi na możliwość obserwacji w tym zadaniu wielu aspektów zjawiska utraty stateczności – była tematem wielu prac. Ziegler [1.3], Bolotin [1.5], Gajewski i Życzkowski [1.19] badali destabilizujący wpływ tłumienia na poziom obciążenia krytycznego. Szczegółową analizę efektów tłumienia w modelu Zieglera przedstawiono w pracy Bogacza i Janiszewskiego [1.29]. Herrmann i Bungay [4.38] wyznaczyli obszary utraty stateczności liniowego modelu Zieglera przyjmując różne wartości parametrów śledzenia. Herrmann i Jong [1.12] analizowali to zadanie z uwzględnieniem wiskotycznego tłumienia. Jin i Matsuzaki [4.39] badali zachowanie się tego układu w otoczeniu punktów krytycznych. Kounadis [4.40, 4.41, 4.42 i 4.43] w analizie stanów krytycznych podwójnego wahadła uwzględnił materiałową i geometryczną nieliniowość wraz z możliwością wystąpienia imperfekcji układu. Jin i Matsuzaki [4.44] analizowali taką sytuację układu, w której miał on zerowe częstotliwości bądź częstotliwości czysto urojone. W pracach, które dotyczyły analizy układów nieliniowych, rozwiązania otrzymywano na drodze numerycznego całkowania równań ruchu.



Rys. 4.2. Wykresy przemieszczeń oscylatora harmonicznego przy różnych czasach t_l
 Fig. 4.2. Diagrams of the displacements of harmonic oscillator for different times t_l



Rys. 4.3. Stan bezwytężeniowy (a) i stan wytężenia podwójnego wahadła obciążonego siłą niepotencjalną (b)

Fig. 4.3. Unstressed (a) and stressed (b) state of a double pendulum under nonconservative load

Rozpatrzmy podwójne wahadło pokazane na rys. 4.3, zbudowane z dwóch nieskończenie sztywnych, bezmasowych prętów o tej samej długości l z dwoma punktowymi masami $m_1 = 2m$ i $m_2 = m$. Zakłada się, że w układzie mogą wystąpić małe imperfekcje e_1 i e_2 , które definiują bezwytężeniową konfigurację pierwotną. Współrzędne uogólnione zadania q_1 i q_2 określające obroty prętów przyjęto jak na rys. 4.3. Obciążenie stanowi skupiona, statyczna lub dynamiczna siła niekonserwatywna $P(t)$, której kierunek działania określa współrzędna q_2 i parametr śledzenia α . Założono, że występujące w węzłach A i B liniowe tłumienie wiskotyczne jest opisane parametrami c_1 i c_2 , a nieliniowe sztywności sprężyn powodują powstawanie momentów:

$$\begin{aligned} M_A &= k_{11}(q_1 - e_1) + k_{12}(q_1 - e_1)^2 + k_{13}(q_1 - e_1)^3 \\ M_B &= k_{21}(q_2 - e_2 - q_1 + e_1) + k_{22}(q_2 - e_2 - q_1 + e_1)^2 + k_{23}(q_2 - e_2 - q_1 + e_1)^3 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Parametry k_{ij} charakteryzujące rotacyjne więzi sprężyste umożliwiają kształtowanie w szerokim zakresie nieliniowości materiałowej. Biorąc pod uwagę możliwość wystąpienia dużych przemieszczeń (obrotów) oraz uwzględniając efekt grawitacji charakteryzowany stałą przyspieszenia ziemskiego g , formuły określające energię kinetyczną, potencjalną i przyrost pracy obciążeń zewnętrznych można zapisać odpowiednio:

$$\begin{aligned} E &= \frac{ml^2}{2} (3\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + ml^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \\ V &= \frac{1}{2} k_{11}(q_1 - e_1)^2 + \frac{1}{3} k_{12}(q_1 - e_1)^3 + \frac{1}{4} k_{13}(q_1 - e_1)^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} k_{21}(q_2 - e_2 - q_1 + e_1)^2 + \frac{1}{3} k_{22}(q_2 - e_2 - q_1 + e_1)^3 \\ &\quad + \frac{1}{4} k_{23}(q_2 - e_2 - q_1 + e_1)^4 - mgl(3\cos(q_1) + \cos(q_2)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{Q}_i \delta q_i &= P(t)l[\sin(q_1)\cos(\alpha q_2) - \sin(\alpha q_2)\cos(q_1)]\delta q_1 \\ &\quad + P(t)l[\sin(q_2)\cos(\alpha q_2) - \sin(\alpha q_2)\cos(q_2)]\delta q_2 \\ &\quad - c_1 \dot{q}_1 \delta q_1 - c_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)(\delta q_2 - \delta q_1) \end{aligned}$$

Przy założeniu początku obserwacji $t_0 = 0$ i wprowadzeniu bezwymiarowego czasu τ , rozwiązania poszukuje się w postaci

$$\begin{aligned}
q_1(\tau) &= q_{10} + \dot{q}_{10}t_1\tau + \sum_{j=2}^{N_1} A_j^{(1)}\tau^j \\
q_2(\tau) &= q_{20} + \dot{q}_{20}t_1\tau + \sum_{k=2}^{N_2} A_k^{(2)}\tau^k
\end{aligned} \tag{4.23}$$

gdzie $q_{10}, q_{20}, \dot{q}_{10}$ i $\dot{q}_{20}$ są danymi warunkami początkowymi ruchu, odpowiednio na przemieszczenia początkowe i prędkości początkowe. Przez A_j i A_k oznaczono szukane stałe szeregów potęgowych o liczbie N_1 w przypadku współrzędnej q_1 i N_2 w przypadku współrzędnej q_2 . Wariacje współrzędnych uogólnionych wyrażają związki

$$\begin{aligned}
\delta q_1 &= \sum_{i=2}^{N_1} \delta A_i^{(1)} \tau^i \\
\delta q_2 &= \sum_{s=2}^{N_2} \delta A_s^{(2)} \tau^s
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Podstawiając związki (4.22) – przy uwzględnieniu założonej postaci szukanych rozwiązań (4.23) i ich wariacji (4.24) – do relacji (3.13) wyrażającej prawo Hamiltona i założeniu dowolności wariacji δA_i i δA_s otrzymujemy niejednorodny, liniowy układ równań algebraicznych określających szukane wektory stałych A_j i A_k

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ik} \\ \mathbf{K}_{sj} & \mathbf{K}_{sk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_j^{(1)} \\ \mathbf{A}_k^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{i0} \\ \mathbf{K}_{s0} \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Elementy macierzy $\mathbf{K}_{ij}, \mathbf{K}_{ik}, \mathbf{K}_{sj}$ i $\mathbf{K}_{sk}$ otrzymanego układu równań mają postać:
elementy bloku $\mathbf{K}_{ij}$

$$\bar{k}_{ij} = 3h \left(\sum_{j=2}^{N_1} \frac{ij}{i+j-1} - \sum_{j=2}^{N_1} j \right) - (k_{11} + k_{21}) \sum_{j=2}^{N_1} \frac{1}{i+j+1} - \frac{1}{t_1} (c_1 - c_2) \sum_{j=2}^{N_1} \frac{j}{i+j} \tag{4.26}$$

elementy bloku $\mathbf{K}_{ik}$

$$\bar{k}_{ik} = k_{21} \sum_{k=2}^{N_2} \frac{1}{i+k+1} + \frac{c_2}{t_1} \sum_{k=2}^{N_2} \frac{k}{i+k} \tag{4.27}$$

elementy bloku $\mathbf{K}_{sj}$

$$\bar{k}_{sj} = k_{21} \sum_{j=2}^{N_1} \frac{1}{j+s+1} + \frac{c_2}{t_1} \sum_{j=2}^{N_1} \frac{j}{j+s} \tag{4.28}$$

elementy bloku $\mathbf{K}_{sk}$

$$\bar{k}_{sk} = h \left(\sum_{k=2}^{N_2} \frac{ks}{k+s-1} - \sum_{k=2}^{N_2} k \right) - k_{21} \sum_{k=2}^{N_2} \frac{1}{k+s+1} - \frac{c_2}{t_1} \sum_{k=2}^{N_2} \frac{k}{k+s} \quad (4.29)$$

gdzie $h = ml^2/t_1^2$.

Elementy wyrazów wolnych $\mathbf{K}_{i0}$ i $\mathbf{K}_{s0}$ przyjmują postać:

elementy wektora $\mathbf{K}_{i0}$

$$\begin{aligned} \bar{k}_{i0} = & k_{11} \left[\frac{1}{i+1} (q_{10} - e_1) + \frac{1}{i+2} \dot{q}_{10} t_1 \right] \\ & - k_{21} \left[\frac{1}{i+1} (q_{20} - q_{10} - e_2 + e_1) + \frac{1}{i+2} (\dot{q}_{20} - \dot{q}_{10}) t_1 \right] \\ & + \frac{1}{i+2} [c_1 \dot{q}_{10} - c_2 (\dot{q}_{20} - \dot{q}_{10})] \\ & + h \left[\int_0^1 \tau^i \dot{q}_1 \dot{q}_2 t_1^2 \sin(q_1 - q_2) d\tau - \int_0^1 i \tau^{i-1} \dot{q}_2 t_1 \cos(q_1 - q_2) d\tau \right] \\ & + \int_0^1 (S_1 - P_1) \tau^i d\tau + h \dot{q}_2 t_1 \cos(q_1 - q_2) \Big|_{\tau=1} \end{aligned} \quad (4.30)$$

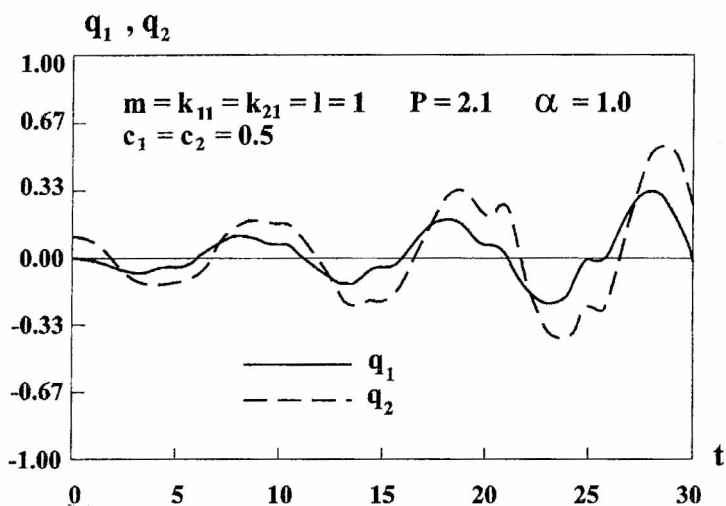
elementy wektora $\mathbf{K}_{s0}$

$$\begin{aligned} \bar{k}_{s0} = & k_{21} \left[\frac{1}{s+1} (q_{20} - q_{10} - e_2 + e_1) + \frac{1}{s+2} (\dot{q}_{20} - \dot{q}_{10}) t_1 \right] - \frac{1}{s+1} c_2 (\dot{q}_{20} - \dot{q}_{10}) \\ & - h \left[\int_0^1 \tau^s \dot{q}_1 \dot{q}_2 t_1^2 \sin(q_1 - q_2) d\tau + \int_0^1 s \tau^{s-1} \dot{q}_1 t_1 \cos(q_1 - q_2) d\tau \right] \\ & + \int_0^1 (S_2 - P_2) \tau^s d\tau + h \dot{q}_1 t_1 \cos(q_1 - q_2) \Big|_{\tau=1} \end{aligned} \quad (4.31)$$

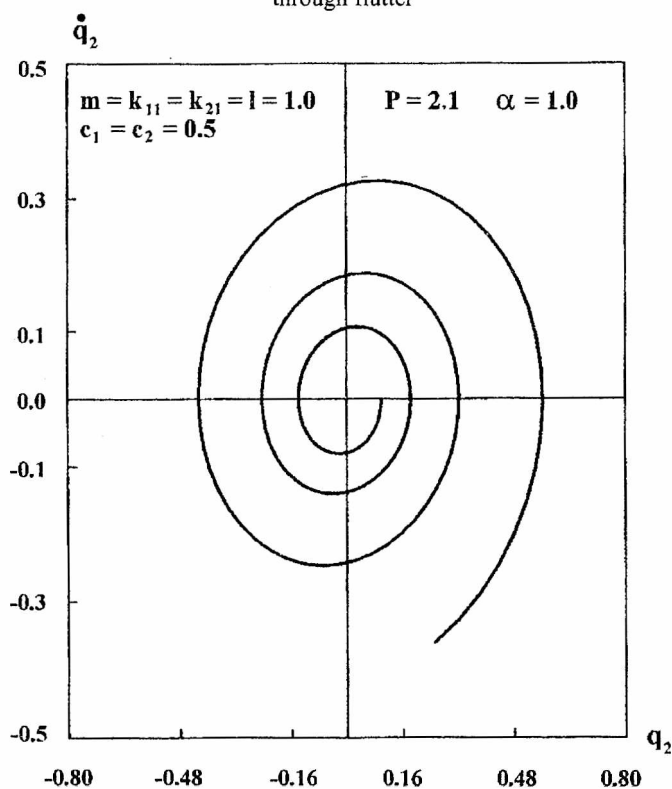
gdzie przez P_I , P_2 , S_I i S_2 oznaczono odpowiednio:

$$P_1 = P(t) l [\sin(q_1) \cos(\alpha q_2) - \sin(\alpha q_2) \cos(q_1)]$$

$$P_2 = P(t) l [\sin(q_2) \cos(\alpha q_2) - \sin(\alpha q_2) \cos(q_2)]$$

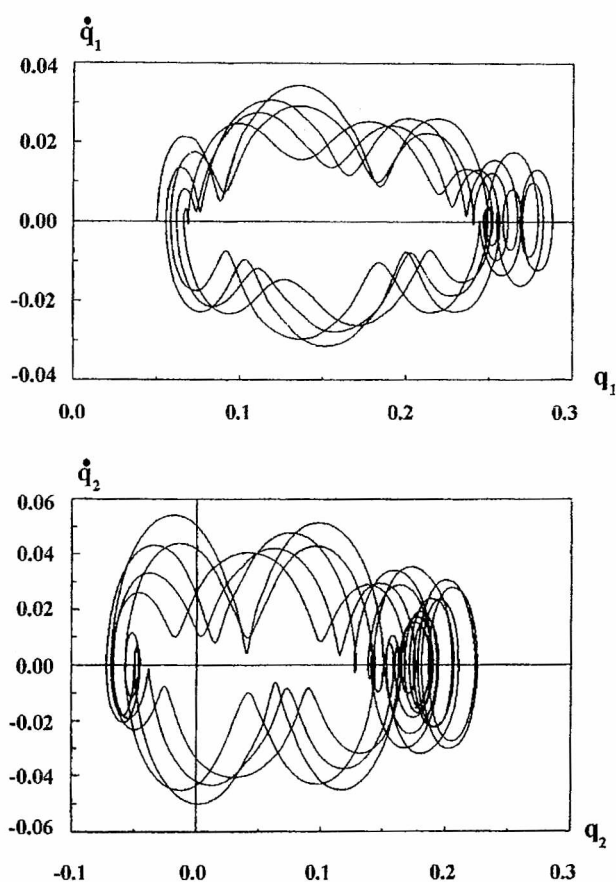


Rys. 4.6. Drgania tłumione podwójnego wahadła w obszarze utraty stateczności przez flatter
 Fig. 4.6. Damped vibration of the double pendulum in the area of the loss of stability through flutter



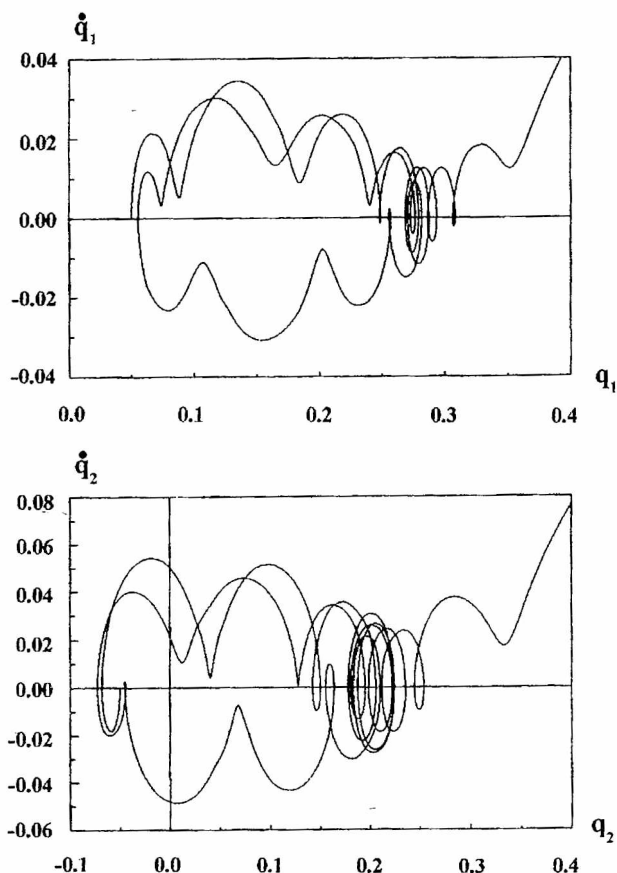
Rys. 4.7. Portret fazowy współrzędnej q_2 w obszarze utraty stateczności przez flatter
 Fig. 4.7. Phase portrait of coordinate q_2 in the area of the loss of stability through flutter

W układach nieliniowych każdorazowo winna być przeprowadzona analiza zbieżności, co w prezentowanym podejściu bezpośrednim odpowiada zbieżności w zakresie przyjętej długości odcinka czasowego jak i liczby elementów szeregów aproksymujących. Na następnych rysunkach pokazano rezultaty nieliniowej analizy wahadła, w której przyjęto trzy elementowe szeregi aproksymujące zmienność współrzędnych uogólnionych i 25-sekundowy, podstawowy odcinek czasu. Przyjęcie takich parametrów prowadzi z reguły od dwóch do ośmiu iteracji w każdym odcinku czasu. Wybór ten jest optymalnym w tym zadaniu kompromisem między czasem trwania obliczeń i uzyskiwaną dokładnością. Jak pokazano dalej, przy tak przyjętych parametrach zadania uzyskano pełną zgodność wyników z tymi, które można znaleźć w opublikowanych pracach. Na rysunkach 4.8 i 4.9 pokazano portrety fazowe odpowiednio przedkrytycznych



Rys. 4.8. Portret fazowy ruchu wahadła z imperfekcjami ($e_1 = -e_2 = 0.05$) przy obciążeniu niższym od krytycznego $P = 0.60065$ i przy $\alpha = 0.8$, $k_{12} = -2.5$, $k_{22} = -0.75$

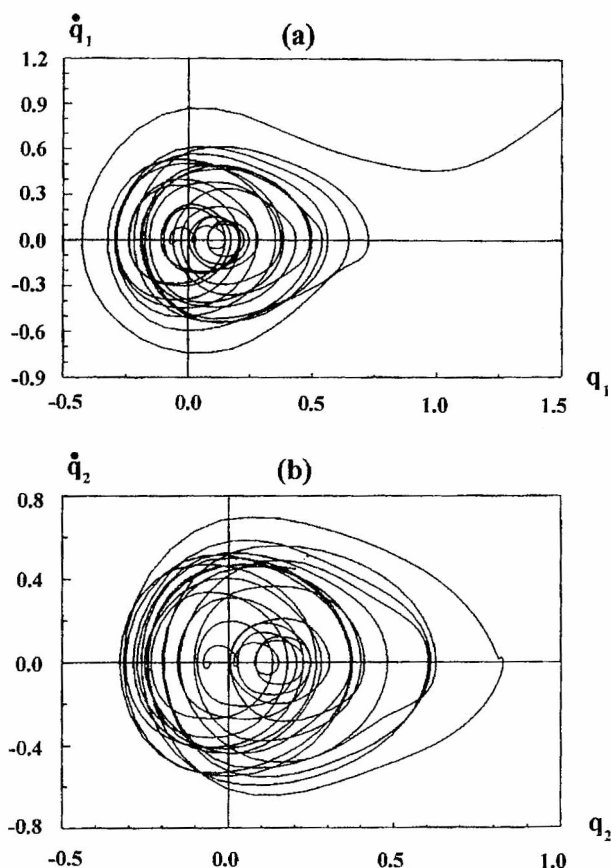
Fig. 4.8. Phase portrait of the motion of a pendulum with imperfections ($e_1 = -e_2 = 0.05$) for $P = 0.60065$, which is less than a critical load and for $\alpha = 0.8$, $k_{12} = -2.5$, $k_{22} = -0.75$



Rys. 4.9. Portret fazowy ruchu wahadła z imperfekcjami ($e_1 = -e_2 = 0,05$) przy obciążeniu wyższym od krytycznego $P=0,6007$ i przy $\alpha=0,8$, $k_{12} = -2,5$, $k_{22} = -0,75$

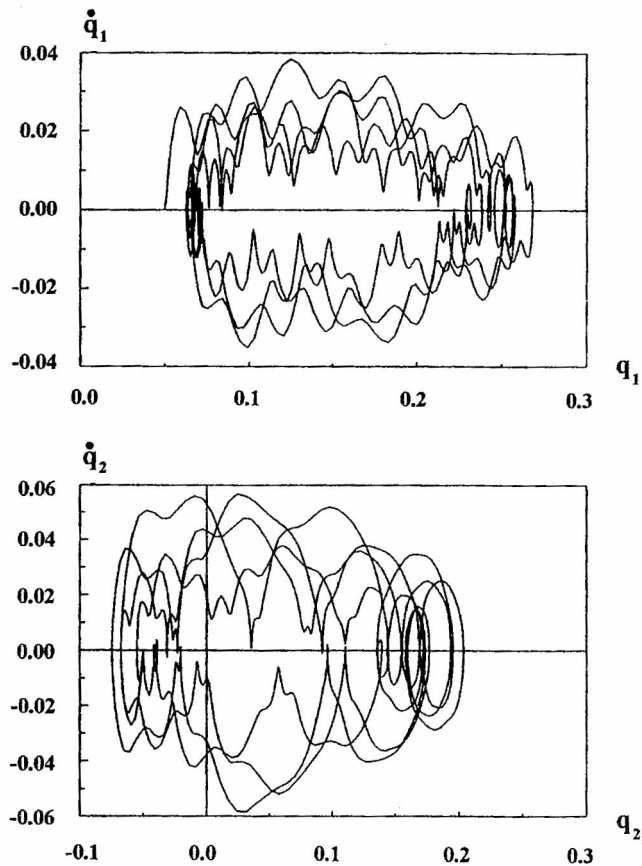
Fig. 4.9. Phase portrait of the motion of a pendulum with imperfections ($e_1 = -e_2 = 0.05$) for $P=0.6007$, which is greater than a critical load and for $\alpha=0.8$, $k_{12} = -2.5$, $k_{22} = -0.75$

i pokrytycznych rozwiązań układu pod działaniem niezależnej od czasu siły niekonserwatywnej. Rozwiązania te otrzymano analizując układ z imperfekcjami i z założoną, kwadratową zmiennością charakterystyk materiału sprężyn. Przez obciążenie krytyczne należy rozumieć tu taki stan obciążenia, przy którym ruch staje się nieograniczony. Jest to jedna z wielu możliwych definicji stanu krytycznego, która każdorazowo winna być precyzyjnie sformułowana, w szczególności gdy analizujemy układy nieliniowe (Leipholtz [1.11]). Różnica między otrzymanym poziomem obciążenia krytycznego (0,600675) i tym, które wyznaczył Kounadis [4.41] (0,5999) nie przekracza wartości 0,1% tego ostatniego obciążenia. Charakter uzyskanej odpowiedzi układu i rozwiązania pokazanego w pracy Kounadisa [4.41] są identyczne. Wyniki analizy stateczności podwójnego wahadła pod działaniem dynamicznej, harmonicznie zmiennej siły niekonserwatywnej, przy uwzględnieniu nieliniowości sprężyn i ustalonych imperfekcjach,



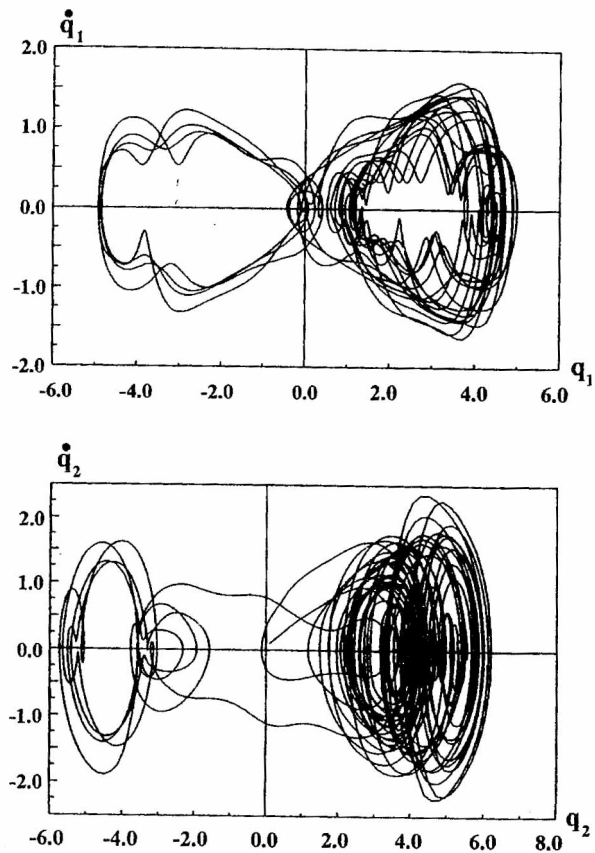
Rys. 4.10. Portret fazowy ruchu wahadła z imperfekcjami ($e_1 = -e_2 = 0,05$) przy:
 (a) $P = 0,6 - 0,6\sin(0,9975\pi t)$; (b) $P = 0,6 - 0,6\sin(1,0\pi t)$ i przy $\alpha = 0,8$, $k_{12} = -2,5$, $k_{22} = -0,75$
 Fig. 4.10. Phase portrait of the motion of a pendulum with imperfections ($e_1 = -e_2 = 0.05$) for:
 (a) $P = 0.6 - 0.6\sin(0.9975\pi t)$; (b) $P = 0.6 - 0.6\sin(1.0\pi t)$ and for $\alpha = 0.8$, $k_{12} = -2.5$, $k_{22} = -0.75$

pokazano na rys. 4.10 i 4.11. Na rysunkach tych przedstawiono rozwiązania na granicach tych częstości siły $P(t)$, przy których następuje utrata stateczności. W wyniku systematycznego przeszukiwania można określić obszary stabilności i niestabilności ruchu pod dowolnym, zadany dynamicznym obciążeniem niekonserwatywnym. Na przykład na podstawie pokazanych wyników można stwierdzić, że badany nieliniowy układ z imperfekcjami i obciążeniem niekonserwatywnym w postaci $P(t) = 0,6 - \sin(\omega t)$ jest niestabilny przy $\omega \in (0, 0,5018\pi)$ lub $\omega \in (0,8475\pi, 0,9975\pi)$. Jednym z trudniejszych zadań w analizie układów nieliniowych jest określenie obszarów rozwiązań chaotycznych (Moon [4.45], Dowell [4.46]). W analizowanym zadaniu rozwiązania, które zaliczono do rozwiązań chaotycznych pokazał Kounadis [4.40]. Tutaj przykładowe rozwiązania w tym zakresie w układach z liniowymi i nieliniowymi charakterystykami



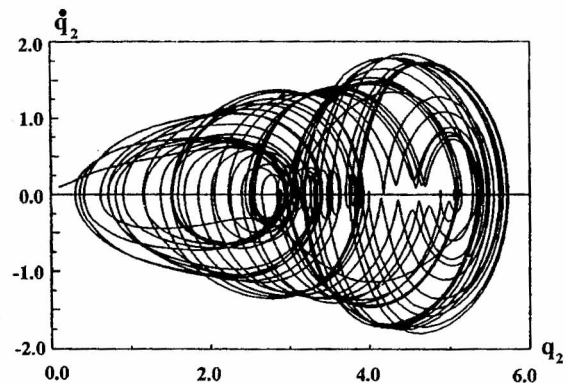
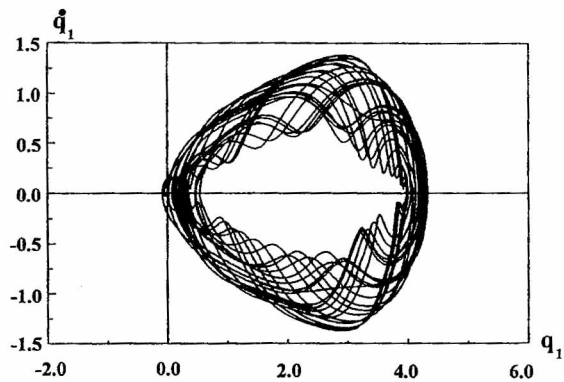
Rys. 4.11. Portret fazowy ruchu wahadła z imperfekcjami ($e_1 = -e_2 = 0,05$) przy $P=0,6-0,6\sin(2,0\pi t)$ i przy $\alpha=0,8$, $k_{12}=-2,5$, $k_{22}=-0,75$

Fig.4.11. Phase portrait of the motion of a pendulum with imperfections ($e_1 = -e_2 = 0.05$) for $P=0.6-0.6\sin(2.0\pi t)$ and for $\alpha=0.8$, $k_{12}=-2.5$, $k_{22}=-0.75$



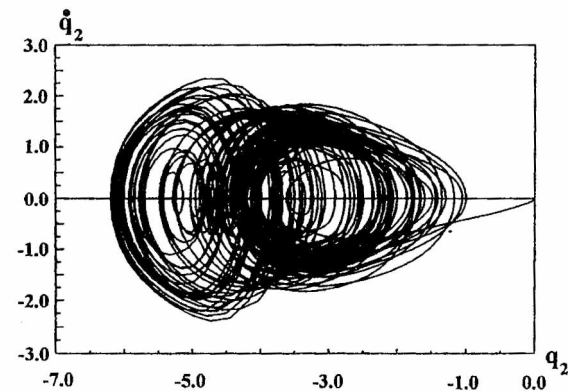
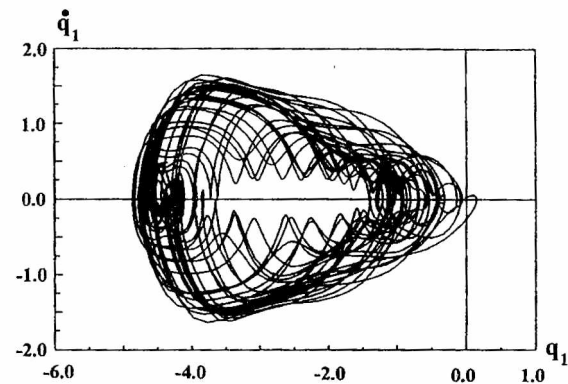
Rys. 4.12. Ograniczony ruch chaotyczny na płaszczyźnie fazowej przy $P=2,3$, $\alpha=0,4$ i $q_{20}=\dot{q}_{20}=0,1$

Fig. 4.12. Bounded chaotic motion in the phase plane for $P=2.3$, $\alpha=0.4$ and $q_{20}=\dot{q}_{20}=0.1$



Rys. 4.13. Ruch quasi-chaotyczny na płaszczyźnie fazowej przy $P=2,3$, $\alpha=0,4$, $q_{20}=\dot{q}_{20}=0,1$ i $k_{12}=k_{22}=0,1$

Fig. 4.13. Quasi-chaotic motion in the phase plane for $P=2,3$, $\alpha=0.4$, $q_{20}=\dot{q}_{20}=0.1$ and $k_{12}=k_{22}=0.1$



Rys. 4.14. Ruch quasi-chaotyczny na płaszczyźnie fazowej przy $P=2,3$, $\alpha=0,4$ i $q_{10}=\dot{q}_{10}=-0,01$, $q_{20}=\dot{q}_{20}=0,01$

Fig. 4.14. Quasi-chaotic motion in the phase plane for $P=2,3$, $\alpha=0.4$ and $q_{10}=\dot{q}_{10}=-0.01$, $q_{20}=\dot{q}_{20}=0.01$

sprężyn pokazano na rys. 4.12, 4.13 i 4.14. Otrzymane portrety fazowe w pełni odpowiadają wynikom pokazanym w pracy Kounadisa [4.40]. Należy podkreślić, że postać portretów fazowych ostatecznie nie rozstrzyga problemu wystąpienia rozwiązań chaotycznych.

4.5. Podsumowanie

W rozdziale tym pokazano, że różne określenia rezultatów prac Hamiltona nie dotyczą jedynie stosowanego nazewnictwa. Zarówno zasada, jak i prawo Hamiltona są pewnymi uproszczeniami oryginalnego prawa, które Hamilton nazwał prawem zmiennej akcji. Zasada Hamiltona, w wyniku żądania spełnienia warunków stacjonarności, jest najdalej idącym ograniczeniem prawa zmiennej akcji, choć w przeciwieństwie do prawa Hamiltona jest zasadą wariacyjną. Zarówno prawo, jak i zasada Hamiltona mogą być oczywiście podstawą do wyprowadzenia równań ruchu. Zasadę Hamiltona stosuje się do wyprowadzenia równań ruchu, równań które zawsze można otrzymać w inny sposób. Zasadę i prawo Hamiltona można bez trudu zapisać dla układów z siłami niekonserwatywnymi, choć jedynie prawo Hamiltona – nie postulujące warunków stacjonarności – może być podstawą skutecznego stosowania bezpośrednich metod analitycznych. Analiza bezpośrednia, wymagająca jedynie określenia energii kinetycznej i potencjalnej układu oraz przyrostu pracy obciążenia zewnętrznego, stanowi skuteczną i prostą drogę analizy układów z siłami niekonserwatywnymi. W ogólnym, nieliniowym przypadku polega ona na wykonaniu ciągu iteracyjnych rozwiązań niejednorodnych układów równań algebraicznych na szukane współczynniki szeregów aproksymujących. Tak sformułowane podejście bezpośrednie stanowi alternatywę numerycznego całkowania równań ruchu Lagrange’a, szczególnie wtedy, kiedy i tak – z uwagi na charakter zadania – skazani jesteśmy na analizę numeryczną. Wykorzystując podejście bezpośrednie bazujące na prawie Hamiltona, można skutecznie rozwiązywać zagadnienia liniowe i nieliniowe, problemy stateczności jak i zadania, których rozwiązania można uznać za chaotyczne.

W rozdziale tym wykorzystano wyniki przedstawione w pracach autora [4.47, 4.48].

5. STATECZNOŚĆ UKŁADÓW DYSKRETNÝCH POD DZIAŁANIEM DYNAMICZNYCH SIŁ NIEKONSERWATYWNYCH

5.1. Wprowadzenie

Zdecydowana większość prac z zakresu analizy układów niekonserwatywnych dotyczy problemów związanych ze statyką, dynamiką i statecznością, których matematyczny opis sprowadza się na ogół do równań bądź układów równań algebraicznych lub różniczkowych o stałych, niezależnych od czasu współczynnikach. Projektując niektóre układy dynamiczne często stajemy przed problemem analizy stateczności tych układów, w których matematycznym opisie występują współczynniki zależne – z reguły periodycznie – od czasu. W rozdziale tym przedstawiono rezultaty analizy układów, których obciążenia stanowią statyczne bądź periodyczne obciążenia niekonserwatywne o kierunku działania określonym przez dynamicznie zmienne, periodyczne parametry śledzenia. Przyjęto dwa sposoby analizy: pierwszy z nich, oparty na klasycznej teorii Floqueta, zastosowano do analizy układów liniowych, a w analizie układów nieliniowych wykorzystano metodę bezpośrednią zbudowaną na bazie prawa Hamiltona. Drugi sposób polega na wykorzystaniu dyskretyzacji przestrzeni fazowej i numerycznego całkowania równań ruchu i prowadzi do oceny, dalej zdefiniowanej, stateczności globalnej układów nieliniowych.

Matematyczne podstawy analizy stabilności liniowych równań różniczkowych o periodycznie zmiennych współczynnikach sformułowali: Mathieu w 1862, Hill w 1877 i Floquet w 1883 r. Jak łatwo pokazać, uwzględnienie w zadaniu periodycznego obciążenia niekonserwatywnego może prowadzić do modeli matematycznych o współczynnikach periodycznych, których ściśle, ogólne rozwiązania można uzyskać jedynie w niektórych zadaniach liniowych. Do przykładowych pozycji literatury z zakresu różnych podejść do rozwiązywania problemów, w których opisie występują zmienne w czasie współczynniki, należy zaliczyć prace napisane przez takich autorów jak Lindh i Likins [5.1], Hsu [5.2], Hsu i Cheng [5.3], Friedmann, Hammond i Woo [5.4], Lau, Cheung i Woo [5.5], Huang i Hung [5.6], Lee i Tsay [5.7], Sleeman i Smith [5.8], Kondou, Tamura i Sueoka [5.9], Hassan [5.10], Sinha i Wu [5.11] oraz Meijaard [5.12].

Nieliczne są prace, w których podejmowano problem analizy układów z dynamicznie zmiennymi obciążeniami niekonserwatywnymi. Dżygałło i Solarz [5.13] analizowali wymuszone, parametryczno-samowzbudne i wymuszone parametrycznie drgania układu z dynamiczną siłą śledzącą na przykładzie giętych drgań lepko-sprężystego pręta wspornikowego, na który działała okresowo zmienna siła śledząca oraz harmoniczne obciążenie poprzeczne. Kotera [5.14] analizował obszary niestabilności drgań kolumn poddanych działaniu periodycznie zmiennego, osiowego obciążenia śledzącego, aproksymując równanie charakterystyczne opisu nieskończonym wyznacznikiem. Kar i Sujata [5.15] wykorzystując uogólnioną metodę Galerkina analizowali obszary dynamicznej stabilności sprężystie zamocowanej belki wspornikowej poddanej działaniu pulsującej, osiowej siły śledzącej. Badając proste i kombinowane rezonanse Kar i Sujata [5.16] wyznaczali obszary dynamicznej stabilności obracającej się belki wspornikowej z masą punktową pod działaniem poprzecznej, pulsującej siły śledzącej. Z reguły w pracach tych wyznaczano obszary dynamicznej stabilności w przestrzeni wielkości obciążenia dynamicznego i stosunku częstości drgań własnych układu i częstości siły wymuszającej. Obszary te wyznaczano w układach liniowych bądź – w dogodnych do analizy – aproksymacjach układów nieliniowych. W analizie układów nieliniowych, a szczególnie w badaniu ich stanów krytycznych, każde z zastosowanych uproszczeń może prowadzić do diametralnie różnych wyników od tych, które otrzymujemy analizując układy wyjściowe bez założeń upraszczających.

W analizie stabilności układów nieliniowych zwykle rozwiązuje się trzy typy zadań. Pierwsze z nich polega na znalezieniu wszystkich możliwych stanów równowagi i rozwiązań okresowych badanego układu. Drugie zadanie polega na określeniu stabilności tych rozwiązań, a w trzecim wyznacza się obszary stabilności – obszary przyciągania – w przestrzeniach fazowych asymptotycznie stabilnych punktów równowagi i rozwiązań okresowych. Ostatnie z wymienionych zadań z uwagi na duży stopień komplikacji zarówno w podejściu analitycznym, jak i numerycznym doczekało się relatywnie (do dwóch pierwszych zadań) mniejszej liczby publikacji. Analiza stateczności globalnej polegająca na wyznaczaniu obszarów przyciągania jest istotnym zadaniem w wielu dziedzinach współczesnej inżynierii. W zasadzie jedynie dwie metody bądź ich odmiany, są praktycznie stosowane w literaturze do globalnej oceny stabilności układów nieliniowych, gdy liczba stopni swobody układu jest większa od dwóch. Pierwsza z tych metod wykorzystuje głównie podejście analityczne, perturbacyjne i została przedstawiona przez Wigginsa [5.17]. Druga z metod to podejście głównie numeryczne, wykorzystujące podział analizowanej przestrzeni fazowej na obszary nazywane dalej celami (*the cell-to-cell mapping technique*), zaproponowane przez Hsu [5.18] oraz Hsu i Guttalu [5.19]. Metodę tę polegającą na generowaniu trajektorii ruchu na bazie informacji o rozwiązaniach w zbiorze charakterystycznych punktów dyskretyzowanej przestrzeni fazowej (*point-to-point mapping method*) wykorzystano w tym rozdziale. Najistotniejszymi odmianami metody odwzorowywania między celami jest uogólniona metoda odwzorowywania między celami (*generalized cell-to-cell mapping method*), którą zaproponowali Hsu [5.20, 5.22], Hsu, Guttalu i Zhu [5.21], oraz interpolacyjna

metoda odwzorowywania między celami (*interpolated cell-to-cell mapping method*), którą stosowali Tongue [5.23], Tongue i Gu [5.24] oraz Tongue i Smith [5.25]. Pełne podsumowanie rozwoju metody odwzorowywania między celami wraz z dużą liczbą przykładów i przeglądem literatury w tym zakresie można znaleźć w książce Hsu [5.26].

Przy użyciu metody odwzorowywania między celami lub jej odmian rozwiązywano między innymi zadania sprowadzające się do równania Duffinga, problemy dynamicznego rozwoju populacji, a także problemy globalnej stabilności ruchu z reguły prostych układów dyskretnych. Na przykład Flashner i Hsu [5.27] zaprezentowali metodę otrzymywania rozwiązań aproksymujących zachowanie się wielowymiarowych periodycznych systemów, której skuteczność pokazali na przykładzie wahadła z ruchomą podporą oraz podwójnego wahadła obciążonego periodycznie zmienną siłą. Guttalu i Hsu [5.28] analizowali sztywny pręt, którego ruch wzbudzany był periodycznymi zmianami położenia podpory. Jianxue Xu, Guttalu i Hsu [5.29] oraz Flashner i Guttalu [5.30] rozpatrywali sprzężone oscylatory van der Pola, które mają dwa asymptotycznie stabilne cykle graniczne. Guttalu i Flashner [5.31] wykorzystując metodę odwzorowania między celami dla wielowymiarowych, nieliniowych problemów autonomicznych analizowali dwa słabo sprzężone oscylatory van der Pola. Korzystając z pewnej modyfikacji metody odwzorowania między celami, Guttalu i Flashner [5.32] analizowali cykle graniczne oscylatora i oscylatorów sprzężonych van der Pola. Levitas i Weller [5.33] analizowali pokrytyczne zachowanie się osiowo obciążonej belki. Wprowadzając przestrzenne przekroje Poincare, Levitas, Weller i Singer [5.34] analizowali sprzężone oscylatory van der Pola. Stosując metodę wariacji parametrów van der Spek, De Hoon, De Kraker i van Campen [5.35] rozwiązywali modyfikowane równanie Duffinga, wyznaczając zmiany obszarów przyciągania w funkcji zmian parametru systemu. Wykorzystując reprezentację Chapmana–Kolmogorova Belhadj i Aldemir [5.36] zaprezentowali nowe odmiany metody odwzorowywania między celami i ich efektywność pokazali na przykładzie oscylatora Duffinga wzbudzanego siłą harmoniczną.

Celem rozdziału jest:

- wyznaczenie, za pomocą metod symbolicznych, obszarów dynamicznej stabilności liniowego układu o jednym stopniu swobody obciążonego siłą niekonserwatywną o dynamicznie zmiennym, periodycznym parametrze śledzenia,
- przykładowa analiza granic obszarów dynamicznej stabilności nieliniowych układów niekonserwatywnych o jednym i dwóch stopniach swobody metodą bezpośrednią bazującą na prawie Hamiltona,
- analiza stabilności globalnej nieliniowych, niekonserwatywnych układów dyskretnych metodą odwzorowywania między celami.

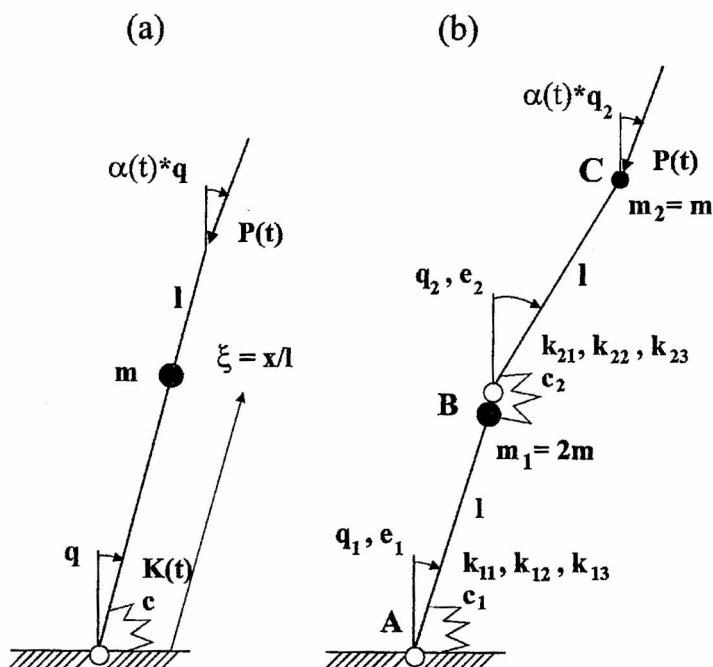
W rozdziale tym przedstawiono modele matematyczne o niewielkiej liczbie zmiennych. W przypadku modeli obliczeniowych uwzględniających między innymi chaotyczny charakter układu, błędy zaokrąglania lub obcięcia mogą spowodować, że cała informacja zanika znacznie szybciej niż wynikałoby to z własności dynamicznych samego układu. W takich sytuacjach tworzenie większych i bardziej złożonych modeli może

jeszcze pogarszać uzyskiwane wyniki. Rozpoczynając modelowanie, zawsze warto najpierw poszukać prostego, rozwiązywalnego układu, który może wyjaśnić istotne zjawiska zachodzące w układach rzeczywistych.

W punkcie drugim rozdziału przedstawiono sposoby analizy układu o jednym stopniu swobody, które praktycznie wykorzystano w analizie numerycznej opisanej w punkcie trzecim. Analogicznie jak w przypadku układu o jednym stopniu swobody, w punktach czwartym i piątym rozdziału dokonano analizy układu o dwóch stopniach swobody.

5.2. Układ o jednym stopniu swobody

Rozpatrzmy układ o jednym stopniu swobody (rys. 5.1a), w którym nieodkształcalny i nieważki pręt o długości l jest na dolnym końcu sprężystie zamocowany. Sztywność sprężyny przyjęto w postaci $K = k_0 + k(P)$, gdzie k_0 jest stałą, niezależną od czasu składową sztywności, a $k(P)$ jest tą składową sztywności, która może być dowolną funkcją działającego obciążenia P . Położenie punktowej masy m jest określone bezwymiarowym parametrem $\xi = x/l$, gdzie x jest odległością masy od przegubu. Pręt jest obciążony skupioną, niekonserwatywną, statyczną bądź dynamiczną, okresowo zmienną siłą $P(t)$, której możliwe odchylenie od kierunku pionowego opisano parametrem śledze-



Rys. 5.1. Schematy analizowanych modeli

Fig. 5.1. Diagrams of the analyzed models

nia $\alpha(t)$. Zakłada się, że parametr śledzenia $\alpha(t)$ jest periodyczną funkcją czasu t . Jako współrzędną uogólnioną q przyjęto kąt, który jest miarą wychylenia pręta z pionowego położenia równowagi. Rozpatrując warunek równowagi dynamicznej, przy założeniu, że wychylenia masy są małe, a $\xi = 1$, otrzymamy równanie ruchu tego układu w postaci równania Hilla

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 [1 - F(t)] q(t) = 0 \quad (5.1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= k_0 / (ml^2) \\ F(t) &= [1 - \alpha(t)] \frac{P(t)l}{k_0} - \frac{k(P)}{k_0} \end{aligned} \quad (5.2)$$

a różniczkowanie po czasie oznaczono kropką.

Dla najbardziej prostego – dalej rozpatrywanego – przypadku zależności sztywności od działającego obciążenia w postaci $k(P) = \gamma P$, gdzie γ jest stałą, funkcja $F(t)$ przyjmuje postać

$$F(t) = [\eta(t)l - \gamma] \frac{P(t)}{k_0} \quad (5.3)$$

gdzie $\eta(t) = 1 - \alpha(t)$.

Uwzględnienie w układzie tłumienia proporcjonalnego do prędkości wychylenia i charakteryzowanego stałym współczynnikiem c powoduje, że równanie (5.1) przyjmuje postać

$$\ddot{q}(t) + 2h\dot{q}(t) + \omega_0^2 [1 - F(t)] q(t) = 0 \quad (5.4)$$

gdzie $h = c/(2ml^2)$.

Równanie to, po zamianie zmiennych typu $q(t) = e^{-ht}f(t)$, daje się sprowadzić do postaci

$$\ddot{\phi}(t) + \omega^2 [1 - F_1(t)] \phi(t) = 0 \quad (5.5)$$

gdzie $\omega^2 = \omega_0^2 - h^2$, a $F_1(t) = (\omega_0/\omega)^2 F(t)$.

Dalej analizowane jest równanie (5.1) ((5.5)) przy okresowo zmiennej funkcji $F(t)$ ($F_1(t)$) z okresem T lub $T/2$. Funkcja $F(t)$ ($F_1(t)$) jest iloczynem funkcji parametru śledzenia $\alpha(t)$ i obciążenia $P(t)$ i z założenia jest funkcją odcinkowo stałą. Przy takim założeniu – upraszczającym zasadniczo obliczenia i pozwalającym zachować równocześnie jakościowy charakter zjawiska – stosunkowo łatwo (w zależności od ilości odcinków opisujących funkcję $F(t)$ ($F_1(t)$) w okresie T ($T/2$)) otrzymać można formuły

pozwalające wyznaczać obszary rezonansów parametrycznych zagadnień opisanych równaniami (5.1) bądź (5.5).

Jak wynika z teorii równań o okresowo zmiennych współczynnikach (teoria Floqueta), rozwiązania szczególne równania (5.1) mają postać (Kaliski [5.37])

$$q(t) = e^{\lambda t} u(t) \quad (5.6)$$

gdzie $u(t)$ jest funkcją okresową o okresie T równym okresowi funkcji $F(t)$, a stała λ nazywana jest charakterystycznym wykładnikiem równania (5.1). Z zależności (5.6) wynika, że w okresie T funkcja $q(t)$ zmienia się o stałą wartość

$$q(t+T) = e^{\lambda T} q(t) = \beta q(t) \quad (5.7)$$

Oczywiście, gdy $|\beta| > 1$, drgania będą rosły nieograniczenie z czasem i wystąpi rezonans parametryczny. Zakładając, że zmienność funkcji $F(t)$ ($F_1(t)$) w okresie T można opisać czterema parametrami μ_i ($i = 1, 2, \dots, 4$), $|\mu_i| < 1$, oraz przyjmując, że długość odcinków zmienności funkcji jest taka sama i wynosi $T/4$, rozwiązanie równania (5.1) możemy przedstawić w postaci

$$q(t) = \begin{cases} q_1 = A_1 \cos(\omega_i t) + B_1 \sin(\omega_i t), & 0 \leq t < T/4 \\ q_2 = A_2 \cos(\omega_i t) + B_2 \sin(\omega_i t), & T/4 \leq t < T/2 \\ q_3 = A_3 \cos(\omega_i t) + B_3 \sin(\omega_i t), & T/2 \leq t < 3/4 T \\ q_4 = A_4 \cos(\omega_i t) + B_4 \sin(\omega_i t), & 3/4 T \leq t < T \end{cases} \quad (5.8)$$

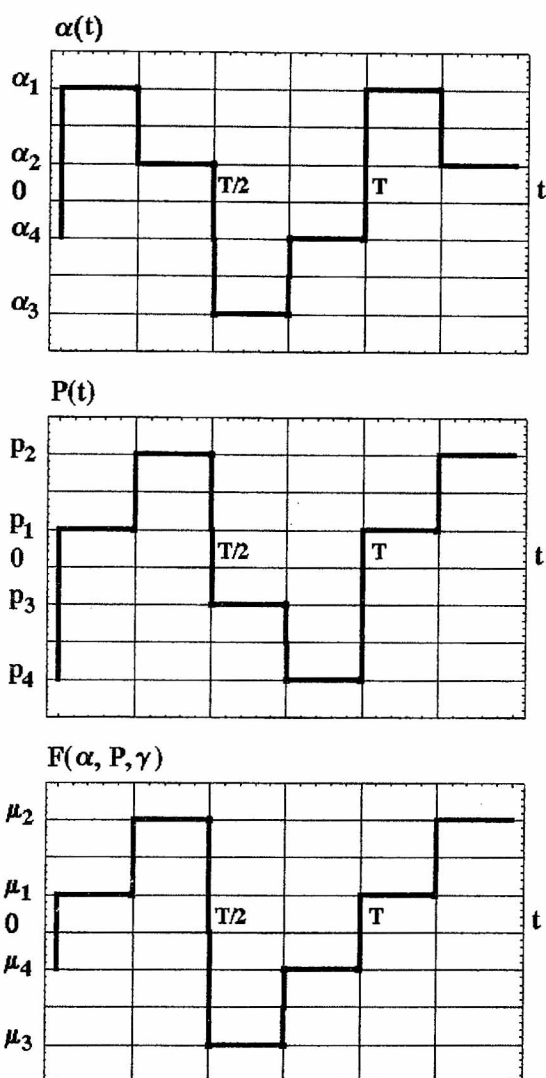
gdzie $\omega_i = \omega_0 \sqrt{1 - \mu_i}$, ($i = 1, 2, \dots, 4$).

Na rysunku 5.2 pokazano przykładową postać funkcji $F(t)$ przy wybranych funkcjach parametru śledzenia $\alpha(t)$ i obciążenia $P(t)$ o okresie T , zakładając $\gamma = 0$. Oczywiście, funkcje $F(t)$ i $F_1(t)$ mogą przyjmować inne postacie w zależności od amplitud i okresów funkcji $\alpha(t)$ i $P(t)$ oraz parametru γ . Przy przyjętym podziale czasu obserwacji T na cztery równe części, funkcje $\alpha(t)$ i $P(t)$ mogą być stałe bądź mogą być funkcjami okresowymi o okresie $T/2$ lub T .

Rozwiązanie (5.8) musi spełniać warunki ciągłości w postaci

$$\begin{aligned} q_j \left(j \frac{T}{4} \right) &= q_{j+1} \left(j \frac{T}{4} \right) \\ \dot{q}_j \left(j \frac{T}{4} \right) &= \dot{q}_{j+1} \left(j \frac{T}{4} \right), \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.9)$$

oraz równania wynikające z relacji (5.7)



Rys. 5.2. Postacie funkcji parametru śledzenia $\alpha(t)$, obciążenia $P(t)$ i funkcji $F(\alpha, P, \gamma)$

Fig. 5.2. Forms of the functions of follower parameter $\alpha(t)$, load $P(t)$ and function $F(\alpha, P, \gamma)$

$$\begin{aligned}\beta q_1(0) &= q_4(T) \\ \beta \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_4(T)\end{aligned}\tag{5.10}$$

Po podstawieniu do warunków (5.9) i (5.10) rozwiązania (5.8) otrzymujemy jednorodny układ równań algebraicznych ze względu na stałe A_i , B_i ($i = 1, 2, \dots, 4$), którego warunek nietrywialnego rozwiązania sprowadza się do zerowania wyznacznika układu. Warunek ten można przedstawić w postaci

$$\beta^2 - 2N\beta + 1 = 0 \quad (5.11)$$

gdzie przez N oznaczono skomplikowane algebraicznie wyrażenie $N = N(\omega_p, \mu_p, T)$. Nie przytacza się tutaj jawnej postaci N z uwagi na jego skomplikowaną postać; wyrażenie to otrzymano wykorzystując pakiet przekształceń symbolicznych Mathematica [2.16].

Granice obszarów rezonansu parametrycznego układu wyznaczone są w zagadnieniu bez tłumienia (5.1) relacją

$$|N| = 1 \quad (5.12)$$

a w zagadnieniu uwzględniającym tłumienie (5.5) relacją

$$|N| > \frac{1}{2} (e^{-hT} + e^{hT}) > 1 \quad (5.13)$$

Wyrażenia (5.12) i (5.13) są podstawą analizy, jaką przeprowadzono w następnym punkcie rozdziału.

Korzystając z możliwości pakietu Mathematica wyprowadzono analogiczne relacje przy odcinkowo liniowo zmiennych funkcji $F(t)$ i $F_1(t)$ oraz funkcji odcinkowo stałych z podziałem okresu T na 6 równych części. W obu wspomnianych wyżej przypadkach formuły określające granice obszarów niestabilności w sposób bardzo istotny skomplikowały się, co wielokrotnie wydłużyło czas analizy. Jednocześnie otrzymywane rozwiązania nie odbiegały jakościowo od tych, które uzyskiwano wykorzystując formuły (5.12) i (5.13).

Jeżeli w analizowanym przykładzie uwzględnimy możliwość wystąpienia dużych przemieszczeń (obrotów), to rozpatrując warunek równowagi dynamicznej w postaci sumy momentów wszystkich sił względem przegubu, otrzymamy następujący nieliniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego:

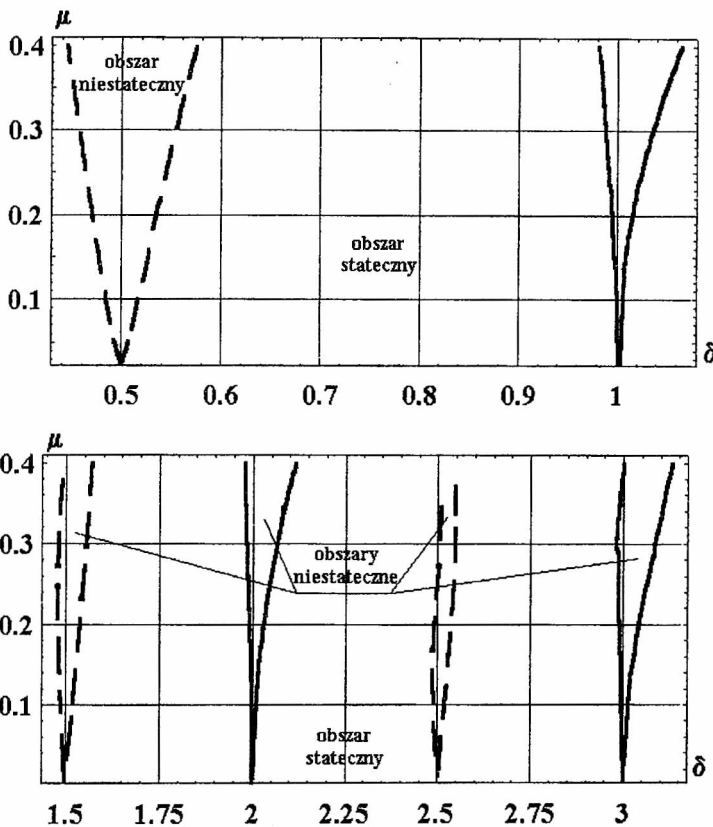
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{m(l\xi)^2} \left\{ -P(t)l \left[\sin(x_1(t) - \alpha(t)x_1(t)) \right] - cx_2(t) - K(P)x_1(t) \right\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

gdzie $x_1(t) = q(t)$ a $x_2(t) = \dot{q}(t)$. Jeżeli przyjąć, że przemieszczenia są nieskończenie małe, to z równań (5.14) otrzymujemy równania (5.4).

5.3. Analiza numeryczna układu o jednym stopniu swobody

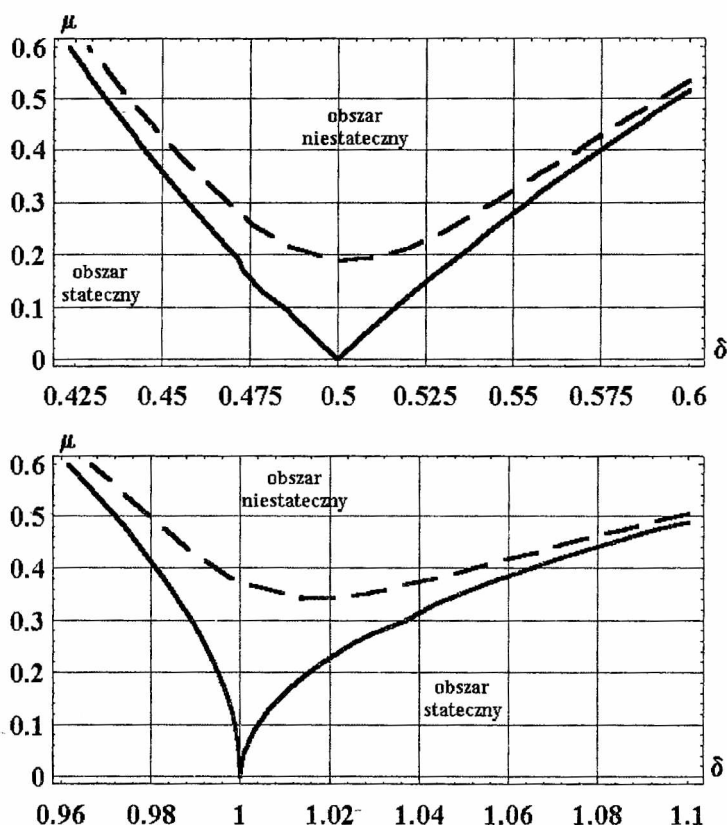
W punkcie tym omówiono wybrane wyniki liniowej i nieliniowej analizy zachowania się układu o jednym stopniu swobody o schemacie jak na rys. 5.1a. Na rysunku 5.2 pokazano charakter zmienności funkcji opisujących zachowanie się parametru śledzenia $\alpha(t)$, działającego na układ obciążenia $P(t)$ i funkcji $F(\alpha, \gamma, P)$, która zależy od

$\alpha(t)$, $P(t)$ i funkcji opisującej zależność sztywności układu od działającego obciążenia – tą ostatnią zależność symbolicznie zaznaczono parametrem γ . Każda z tych funkcji jest okresowa (o okresie T bądź $T/2$) i jest opisana zestawem czterech parametrów α_i , p_i , μ_i , $i = 1, 2, \dots, 4$. Symbolicznie wygenerowane, ogólne relacje wyznaczające granice obszarów rezonansu parametrycznego ((5.12), (5.13)) testowano na szczególnym przypadku obciążenia opisanego parametrami $\mu_1 = \mu_2 = -\mu_3 = -\mu_4 = \mu$, przy $\alpha_i = 0$ i $T = 2\pi$. Dalej przyjęto, że $k_0 = l = 1$ oraz $T = 2\pi$, co w żadnym stopniu nie ogranicza ogólności prezentowanych wyników. Jeżeli nie wspomina się o zależności stałej sprężynowania od siły $P(t)$ to znaczy, że przyjęto $\gamma = 0$. Przykładowe wyniki analizy układu bez tłumienia i z tłumieniem przedstawiono odpowiednio na rys. 5.3 i 5.4. Na rysunku 5.3



Rys. 5.3. Granice obszarów rezonansu parametrycznego układu przy $\mu_1 = \mu_2 = -\mu_3 = -\mu_4 = \mu$, $\alpha(t) = 0$, przy różnych wartościach parametru μ i $\delta = \omega_0/r$ i przy $T = 2\pi$; linia przerywana wynika z warunku $N = -1$, ciągła z warunku $N = 1$

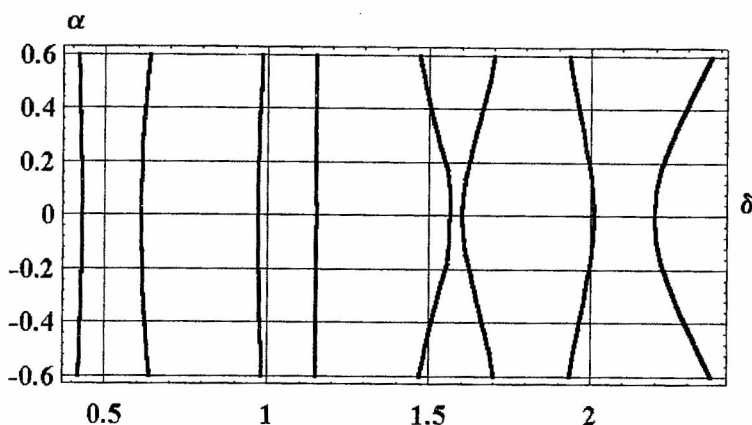
Fig. 5.3. Boundaries of the system's parametric resonance regions for $\mu_1 = \mu_2 = -\mu_3 = -\mu_4 = \mu$, $\alpha(t) = 0$, for different values of parameter μ and $\delta = \omega_0/r$ at $T = 2\pi$; the dashed line follows from condition $N = -1$, the solid line – from condition $N = 1$



Rys. 5.4. Granice obszarów rezonansu parametrycznego układu przy $\mu_1=\mu_2=-\mu_3=-\mu_4=\mu$, $\alpha(t)=0$, przy różnych wartościach parametru μ i δ przy $T=2\pi$; linia przerywana dla układu z tłumieniem ($h=0,03$), linia ciągła dla układu bez tłumienia

Fig. 5.4. Boundaries of the system's parametric resonance regions for $\mu_1=\mu_2=-\mu_3=-\mu_4=\mu$, $\alpha(t)=0$, for different values of parameters μ and δ at $T=2\pi$; the dashed line represents the system with damping ($h = 0.03$), the solid line – the system without damping

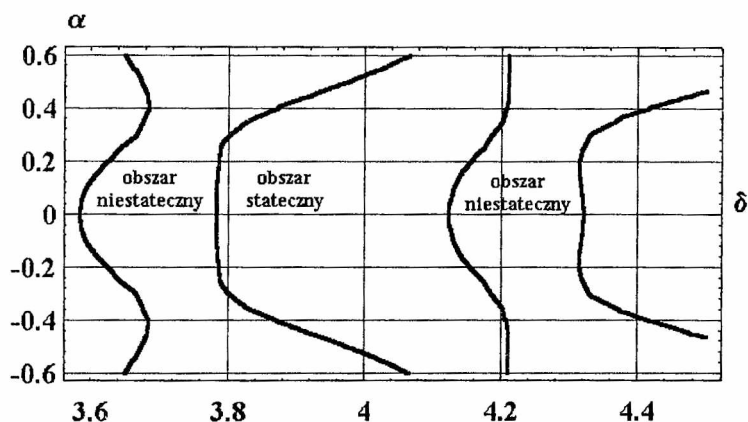
linią przerywaną oznaczono granice obszarów rezonansu, na których drgania narastają nieograniczenie ($N = -1$), a linią ciągłą zakreślono te granice, na których drgania są okresowe ($N = 1$). Wykresy sporządzono przy różnych wartościach parametru μ (różnej głębokości modulacji obciążenia) i parametru $\delta = \omega_0/r$, gdzie ω_0 i r są odpowiednio częstotliwościami kołowymi drgań własnych układu i funkcji F . Otrzymane rezultaty są w pełni zgodne z prezentowanymi w literaturze. Na rysunku 5.4 pokazano granice pierwszego i drugiego obszaru niestateczności dla układu bez tłumienia (linia ciągła) i dla układu z tłumieniem (linia przerywana). Na rysunku 5.5 przedstawiono zależność od parametru α ($\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_3 = -\alpha_4 = \alpha$) zakresu czterech podstawowych obszarów rezonansu parametrycznego przy dynamicznym obciążeniu $P(t)$ o ustalonej, przykładowej, wielkości parametru $p = 0,6$ ($p_1 = p_2 = -p_3 = -p_4 = p$). Na rysunku 5.6



Rys. 5.5. Granice podstawowych obszarów rezonansu parametrycznego układu przy obciążeniu dynamicznym $p_1=p_2=-p_3=-p_4=0,6$ i dynamicznym parametrze śledzenia $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_4=\alpha$

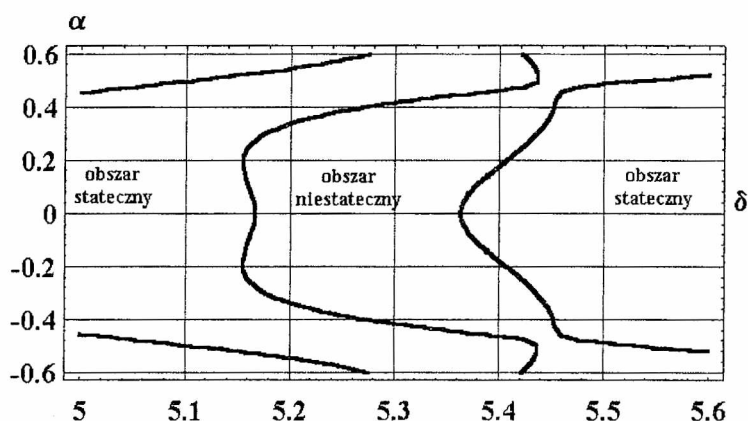
Fig. 5.5. Boundaries of the system's basic parametric resonance regions for dynamic load $p_1=p_2=-p_3=-p_4=0.6$ and dynamic follower parameter $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_4=\alpha$

pokazano wybrane wyższe obszary (siódmy i ósmy), a na rys. 5.7 dziewiąty obszar rezonansu parametrycznego. Przyjęto identyczne parametry jak na rys. 5.5. Wprowadzenie dynamicznie zmiennego parametru śledzenia powoduje powiększenie zakresu niskich obszarów rezonansu parametrycznego. Wpływ na obszary wyższe zmiennego parametru śledzenia w niektórych zakresach jego zmienności może okazać się stabilizujący (rys. 5.6 i 5.7), o czym świadczą wyraźne zwężenia analizowanych obszarów. Tłumienie może powodować nawet wielokrotne przerwanie ciągłości granic obszarów



Rys. 5.6. Granice siódmego i ósмого obszaru rezonansu parametrycznego układu przy obciążeniu dynamicznym $p_1=p_2=-p_3=-p_4=0,6$ i dynamicznym parametrze śledzenia $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_4=\alpha$

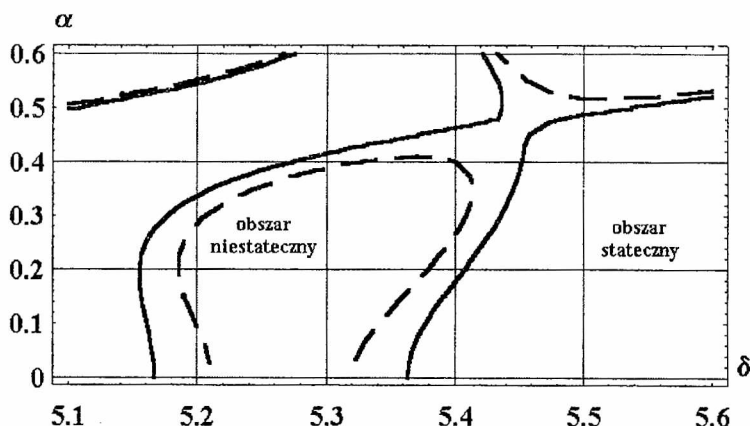
Fig. 5.6. Boundaries of the system's seventh and eighth parametric resonance regions for dynamic load $p_1=p_2=-p_3=-p_4=0.6$ and dynamic follower parameter $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_4=\alpha$



Rys. 5.7. Granice dziewiątego obszaru rezonansu parametrycznego układu przy obciążeniu dynamicznym $p_1=p_2=-p_3=-p_4=0,6$ i dynamicznym parametrze śledzenia $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_4=\alpha$

Fig. 5.7. Boundaries of the system's ninth parametric resonance region for dynamic load $p_1=p_2=-p_3=-p_4=0.6$ and dynamic follower parameter $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_4=\alpha$

rezonansu parametrycznego, a tym samym ich zanik w pewnych zakresach wartości amplitud parametru śledzenia. Na rysunku 5.8 pokazano tę sytuację na przykładzie granic obszaru dziesiątego. Jeżeli uwzględnimy w analizie zależność sztywności od działającego obciążenia ($\gamma \neq 0$), to przy różnych parametrach γ może wystąpić powiększenie bądź zmniejszenie zakresów obszarów rezonansu parametrycznego. Sytuację tę pokazano na rys. 5.9 na przykładzie pierwszego (linia ciągła) z analizowanych obszarów,

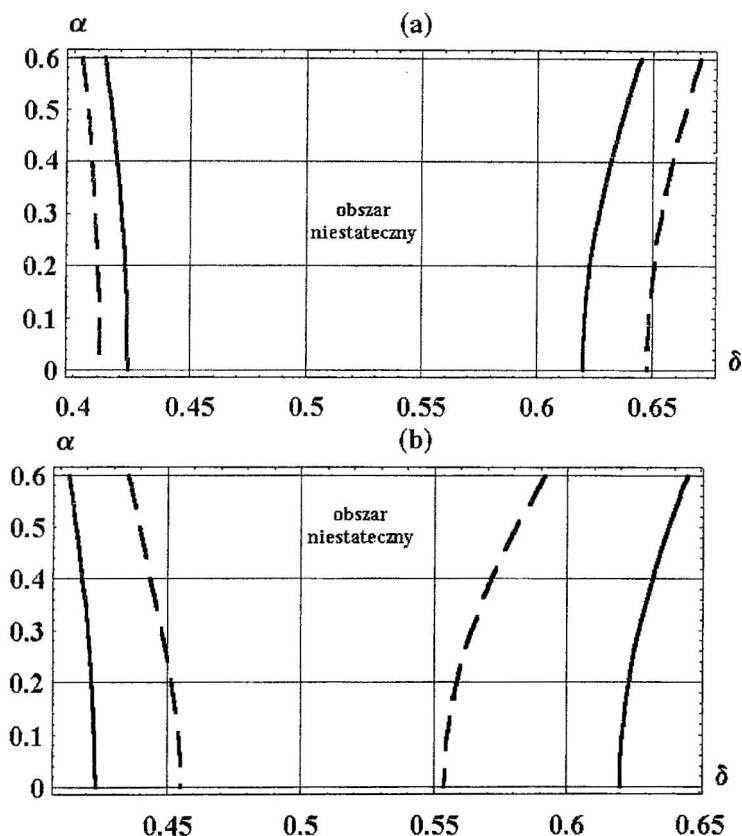


Rys. 5.8. Granice dziesiątego obszaru rezonansu parametrycznego układu przy obciążeniu $p_1=p_2=-p_3=-p_4=0,6$ i parametrze śledzenia $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_4=\alpha$; układ bez tłumienia – linia ciągła przy $h=0$, linia przerywana przy tłumieniu $h=0,08$

Fig. 5.8. The boundaries of the system's tenth parametric resonance region for load $p_1=p_2=-p_3=-p_4=0.6$ follower parameter $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_4=\alpha$; the solid line represents the system without damping, the dashed – line for damping $h=0.08$

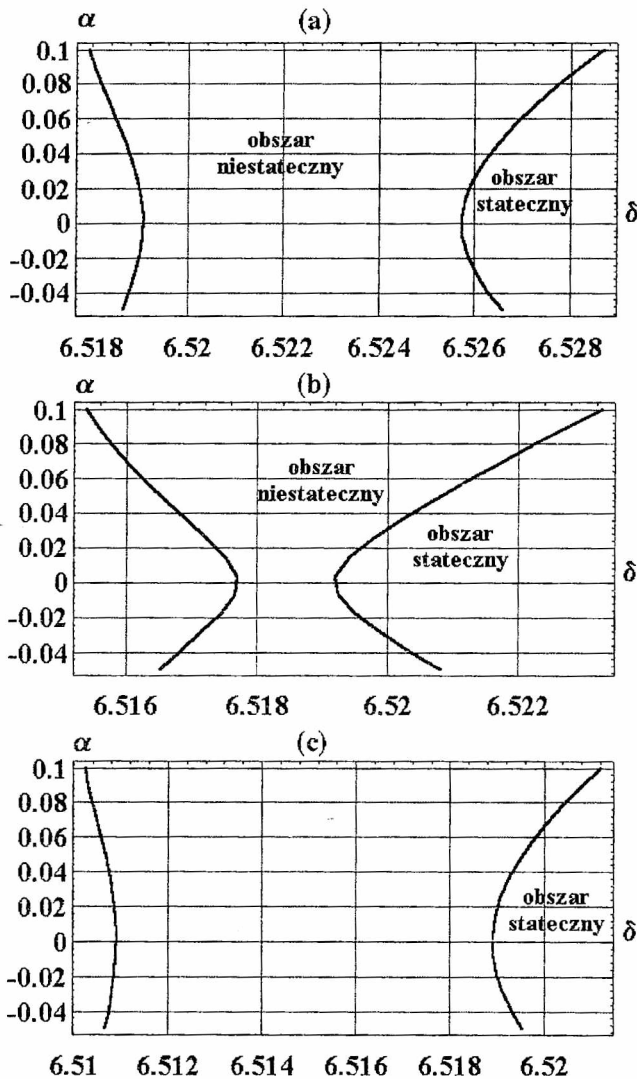
odpowiednio, gdy $\gamma = -0,2$ (a) i drugiego (linia przerywana) $\gamma = 0,5$ (b). Na rysunku 5.10 przedstawiono granice jednego z wyższych obszarów rezonansu parametrycznego w funkcji wartości dynamicznego parametru śledzenia, przyjmując różne wartości współczynnika γ ($\gamma = 0,45$, $\gamma = 0,50$, $\gamma = 0,55$).

Analizując układy nieliniowe nie otrzymujemy nieskończonych przemieszczeń, a charakter tych przemieszczeń może istotnie zależeć od czasu obserwacji i warunków początkowych ruchu. Następnie, korzystając z metody odwzorowywania między celami, przedstawiono wyniki analiz, które można wykorzystać w ocenie globalnej stateczności badanego układu. Skupiono się głównie na wyznaczaniu obszarów przyciągania, których wielkość i charakter są funkcjami parametrów opisujących zachowanie się obciążenia. W celu optymalizacji czasu obliczeń przeprowadzono testy przy różnych wiel-



Rys. 5.9. Wpływ wielkości współczynnika γ na zakres pierwszego obszaru rezonansu parametrycznego przy obciążeniu i parametrze śledzenia jak na rysunku poprzednim; linia ciągła przy $\gamma = 0$, linia przerywana przy $\gamma = -0,2$ (a) i $\gamma = 0,5$ (b)

Fig. 5.9. Influence of the magnitude of coefficient γ on the range of the first parametric resonance region for the load and the follower parameter as in the previous figure; the solid line – for $\gamma = 0$, the dashed line – for $\gamma = -0.2$ (a) and $\gamma = 0.5$ (b)



Rys. 5.10. Granice jednego z wyższych obszarów rezonansu parametrycznego przy obciążeniu $p_1=p_2=-p_3=-p_4=0,3$, parametrze śledzenia $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_4=\alpha$ przy $\gamma=0,45$ (a), $\gamma=0,5$ (b) i $\gamma=0,55$ (c)

Fig. 5.10. Boundaries of one of the higher parametric resonance regions for load $p_1=p_2=-p_3=-p_4=0,3$ and follower parameter $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_4=\alpha$ for $\gamma=0.45$ (a), $\gamma=0.5$ (b) and $\gamma=0.55$ (c)

kościach cel (różnej gęstości podziału przestrzeni fazowej) i przy różnych czasach numerycznego całkowania nieliniowego układu równań różniczkowych.

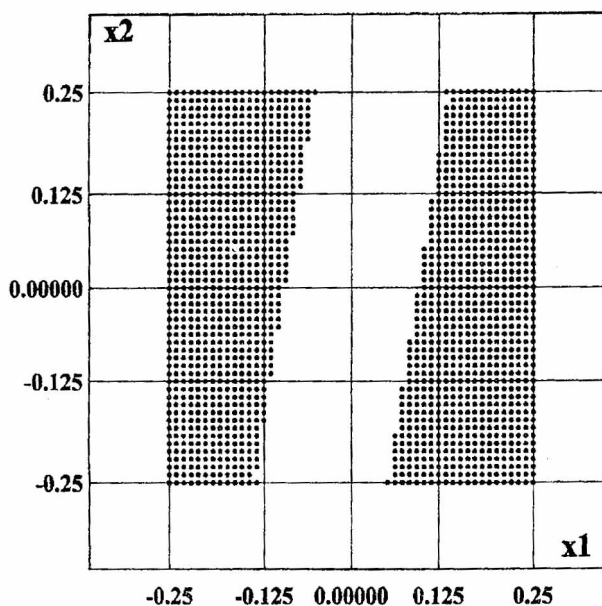
Na kolejnych rysunkach obszary przyciągania są przedstawione jak obszary niekropkowane. W przypadku demonstrowania poszczególnych grup punktów w obszarach przyciągania (Hsu [5.18]) przedstawiono je w postaci zbiorów punktów. Za sta-

teczne uznaje się takie obszary na płaszczyźnie fazowej, których punkty traktowane jako warunki początkowe analizowanego zadania w trakcie teoretycznie nieskończonego czasu zapewniają, że trajektoria ruchu pozostaje w analizowanym, zadanym obszarze przestrzeni fazowej.

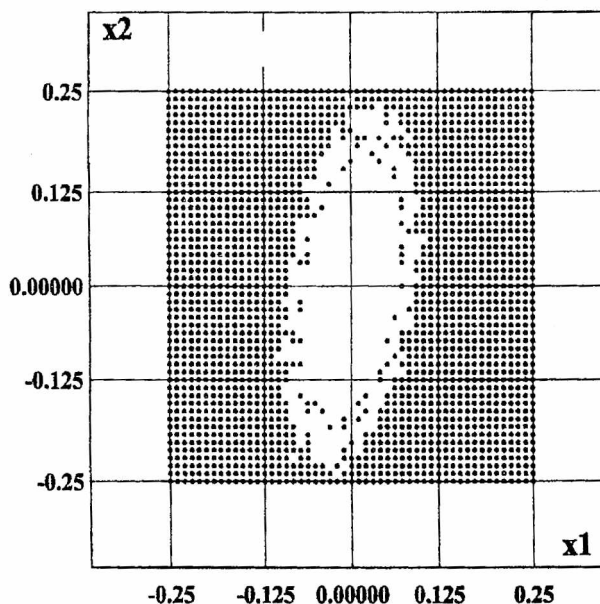
Dobór gęstości podziału analizowanego fragmentu przestrzeni fazowej i przyjmowany czas całkowania (t_i) są istotnymi parametrami poprawności otrzymywanych rezultatów w analizie układów nieliniowych metodą odwzorowywania między celami. Oczywiście jest, że lepsze rezultaty otrzymamy stosując cele o mniejszych rozmiarach i dłuższy czas całkowania, o ile metoda całkowania nie generuje zbyt dużych błędów numerycznych. W praktycznym stosowaniu tej metody konieczny jest pewien kompromis w doborze gęstości podziału i przyjmowanym czasie całkowania, a czasem generowania wyników. Przyjęto, że podział analizowanego obszaru przestrzeni fazowej będzie identyfikowany przez dwie naturalne liczby h i v . Przez h oznaczono liczbę cel w kierunku osi poziomej, na której odkładane są wielkości współrzędnej uogólnionej, a przez v liczbę cel w kierunku osi pionowej, na której odkłada się prędkości współrzędnej uogólnionej. Na przykład w analizie układu o 1 stopniu swobody wprowadzony opis gęstości podziału w postaci 51×26 oznacza, że analizowany zakres zmienności współrzędnej x_1 podzielono na 51 równych odcinków, a współrzędnej x_2 na 26 równych części.

Dalej przyjęto, że: $l = \xi = 1$, $K(P) = 1$, $m = 1/8$ i $c = 0$, co w przypadku linearyzacji równań (5.14) i przyjęciu częstości zmian funkcji $F(t)$ (5.2) równej 4 odpowiada punktowi w obszarze statecznym, między pierwszym i drugim obszarem rozwiązań niestatecznych z rys. 5.3 ($\delta = \sqrt{2}/2$). Ewentualne odstępstwa od tych założeń zawarto w opisach rysunków.

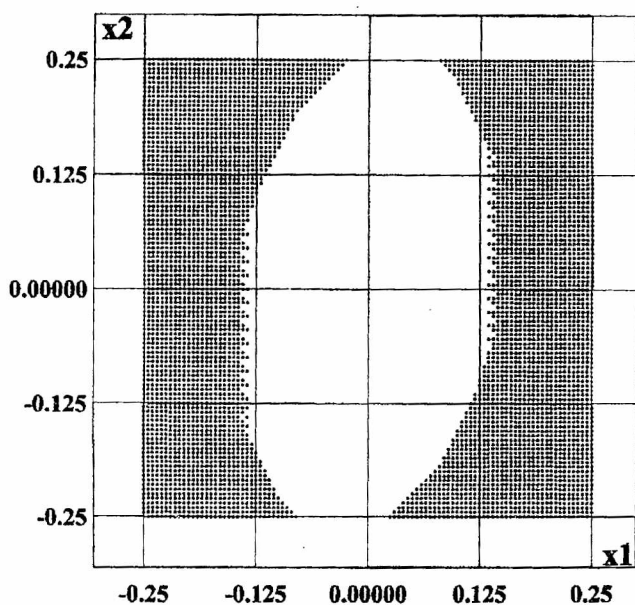
Na rysunkach 5.11 i 5.12 dla przykładowych funkcji obciążenia $P(t) = 0,5\sin(4t)$ i $\alpha(t) = 0,1 + 0,5\sin(2t)$ przedstawiono kształty obszarów przyciągania, gdy czasy całkowania są odpowiednio równe $t_i = 4\pi$ i $t_i = 7\pi$, a gęstość podziału przestrzeni fazowej wynosi 51×51 . Rysunki 5.13 i 5.14 przedstawiają obszary przyciągania przy obciążeniach i czasach całkowania jak na rys. 5.11 i 5.12, z tym jednak, że w tych przypadkach gęstość podziału była większa i wynosiła 101×101 . Należy jasno powiedzieć, że o ile analizując układy autonomiczne mamy pewną dowolność doboru czasu całkowania t_i , o tyle w analizie układów nieautonomicznych, periodycznych, czas całkowania t_i musi być tak dobrany, aby po jego upływie zmienne w czasie współczynniki układu równań były identyczne z ich wartościami na początku procesu całkowania. Jest to oczywisty warunek możliwości stosowania procedury metody odwzorowywania między celami w analizie układów nieautonomicznych. Na rysunku 5.15 pokazano obszar przyciągania przy $\alpha(t) = 0,5\sin(4t)$ i $P(t) = 0,5\sin(4t)$ w analizie nieliniowej, a na rys. 5.16 ten sam obszar wyznaczony po prostym zlinearyzowaniu układu równań (5.14). Porównanie tych dwóch rysunków wskazuje na istotny wpływ (zarówno jakościowy jak i ilościowy) linearyzacji nieliniowego układu równań na otrzymywane rezultaty. Na rysunku 5.17 przedstawiono obszar przyciągania, gdy $P(t) = 0,5\sin(4t)$ i $\alpha(t) = 0,3 + 0,5\sin(4t)$, co w porównaniu z rys. 5.12 daje pogląd na możliwy wpływ param-



Rys. 5.11. Obszar przyciągania przy $P(t)=0,5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0,1+0,5\sin(4t)$, $t_i=4\pi$ i podziale 51×51
 Fig. 5.11. Domain of attraction for $P(t)=0.5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0.1+0.5\sin(4t)$, $t_i=4\pi$ and division 51×51

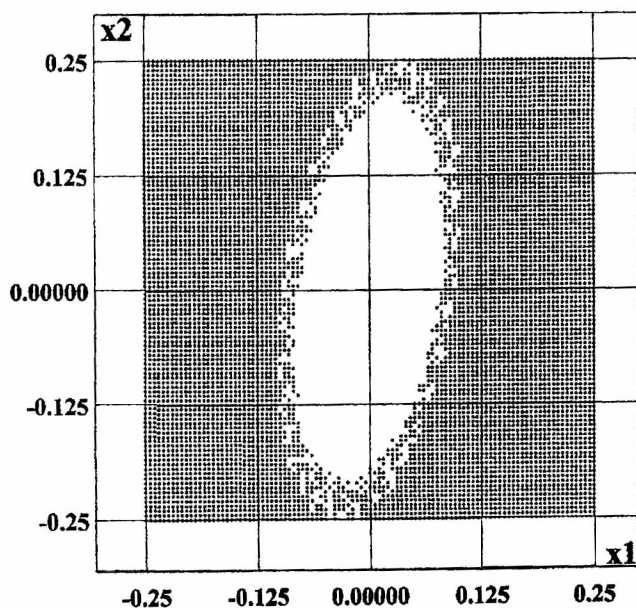


Rys. 5.12. Obszar przyciągania przy $P(t)=0,5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0,1+0,5\sin(4t)$, $t_i=7\pi$ i podziale 51×51
 Fig. 5.12. Domain of attraction for $P(t)=0.5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0.1+0.5\sin(4t)$, $t_i=7\pi$ and division 51×51



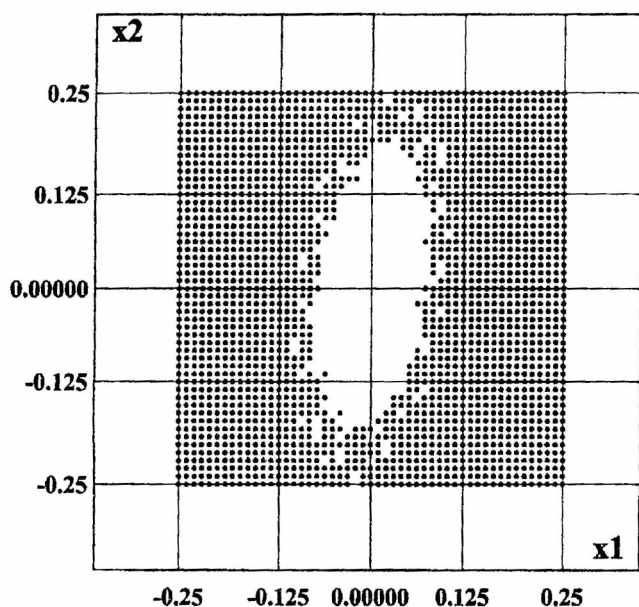
Rys. 5.13. Obszar przyciągania przy $P(t)=0,5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0,1+0,5\sin(4t)$, $t_i=4\pi$ i podziale 101×101

Fig. 5.13. Domain of attraction for $P(t)=0.5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0.1+0.5\sin(4t)$, $t_i=4\pi$ and division 101×101



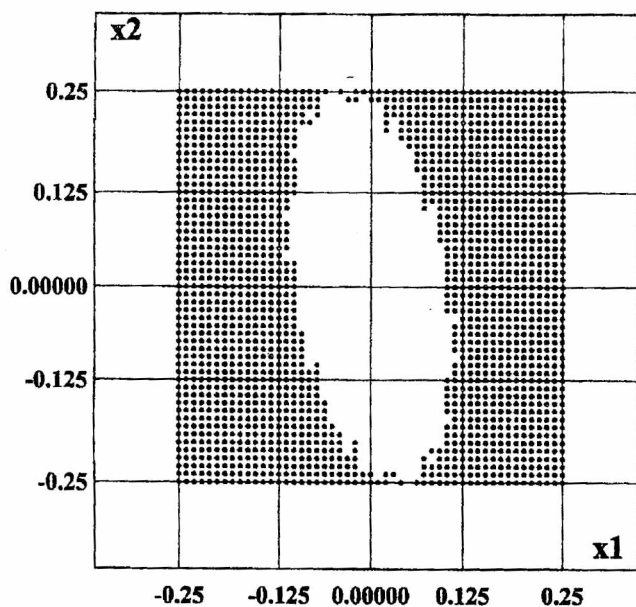
Rys. 5.14. Obszar przyciągania przy $P(t)=0,5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0,1+0,5\sin(4t)$, $t_i=7\pi$ i podziale 101×101

Fig. 5.14. Domain of attraction for $P(t)=0.5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0.1+0.5\sin(4t)$, $t_i=7\pi$ and division 101×101



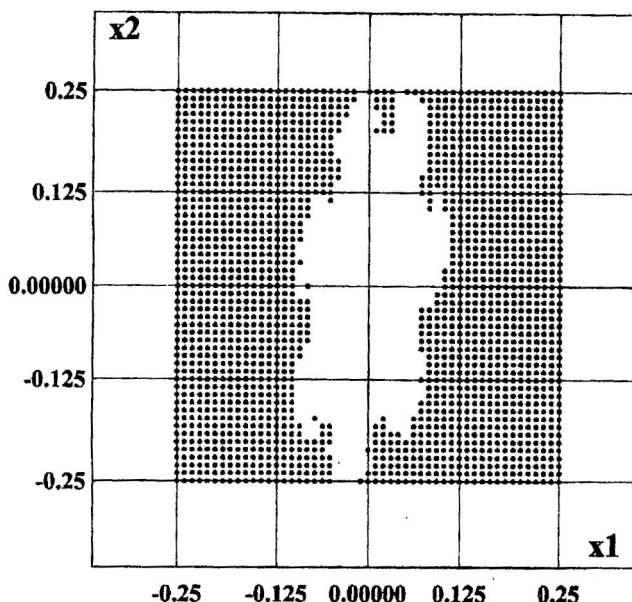
Rys. 5.15. Obszar przyciągania przy $P(t)=0,5\sin(4t)$ i $\alpha(t)=0,5\sin(4t)$ nieliniowego układu równań (5.14)

Fig. 5.15. Domain of attraction for $P(t)=0.5\sin(4t)$ and $\alpha(t)=0.5\sin(4t)$ for nonlinear system of equations (5.14)



Rys. 5.16. Obszar przyciągania przy $P(t)=0,5\sin(4t)$ i $\alpha(t)=0,5\sin(4t)$ zlinearyzowanego układu równań (5.14)

Fig. 5.16. Domain of attraction for $P(t)=0.5\sin(4t)$ and $\alpha(t)=0.5\sin(4t)$ for linearized system of equations (5.14)



Rys. 5.17. Obszar przyciągania przy $P(t)=0,5\sin(4t)$ i $\alpha(t)=0,3+0,5\sin(4t)$, $t_i=7\pi$ i podziale 51×51

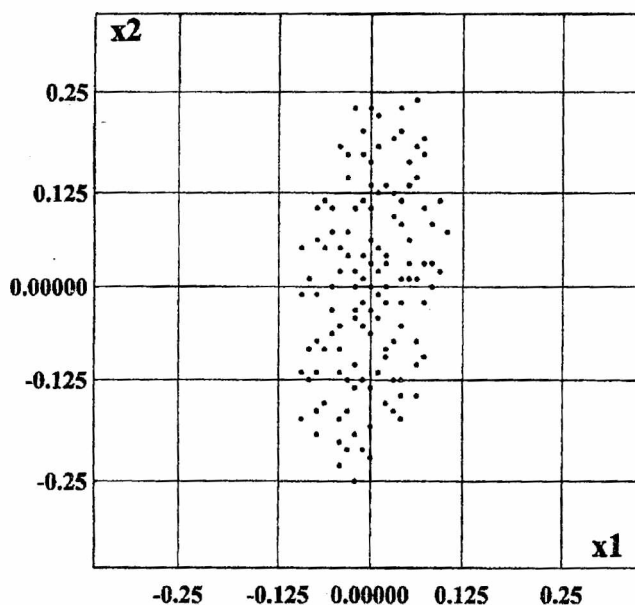
Fig. 5.17. Domain of attraction for $P(t)=0.5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0.3+0.5\sin(4t)$, $t_i=7\pi$ and division 51×51

trów opisujących dynamiczny współczynnik śledzenia na charakter zmian obszarów stabilności badanego układu.

Wszystkie cele punktów równowagi („ $P-1$ motions”) pokazano na rys. 5.18, a na rys. 5.19 r -krokowe ($r=20$) obszary przyciągania dla punktów równowagi ruchu, które należą do grupy 3 (Hsu [5.18]) przy $P(t)=0,5\sin(4t)$ i $\alpha(t)=0,3+0,5\sin(4t)$. Na rysunkach 5.20, 5.21 i 5.22 obszary przyciągania wyjątkowo przedstawiono jako miejsca zaciemnione. Pokazano charakter zmian obszarów przyciągania w funkcji zmian sztywności K ($K \in (0,1, 3,1)$) przy ściśle śledzącym obciążeniu dynamicznym $P=0,5\sin(4t)$ (rys. 5.20) oraz zmian parametru γ określającego amplitudę części dynamicznej sztywności $K=1+\gamma\sin(12t)$, $\gamma \in (-2,2)$ (rys. 5.21) i $K=1+\gamma\sin(4t)$ (rys. 5.22) przy ściśle śledzącym obciążeniu $P=\sin(4t)$.

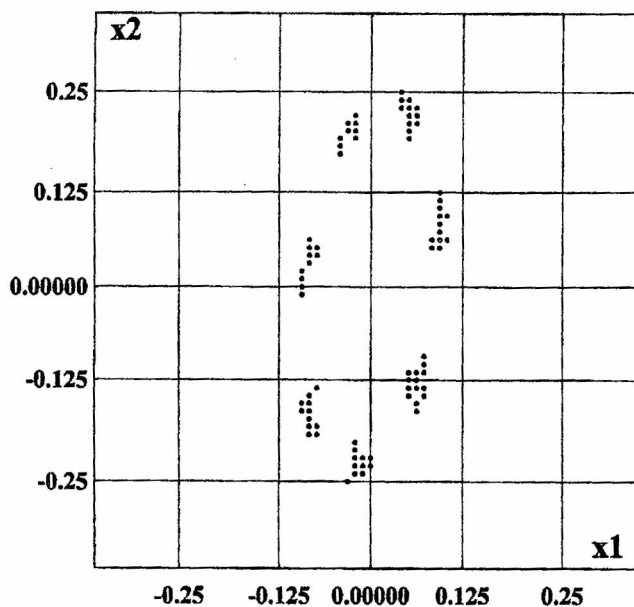
5.4. Nieliniowy model o dwóch stopniach swobody

Rozpatrzmy nieliniowy model wahadła o dwóch stopniach swobody pokazany na rys. 5.1b. W matematycznym modelu tego zadania przedstawionego w punkcie 4.4 pracy z uwagi na uwzględnienie w tym rozdziale dynamicznego charakteru parametru śledzenia, prostej modyfikacji ulega jedynie formuła wyrażająca przyrost pracy obciążenia zewnętrznego Q_i na wariacjach przemieszczeń współrzędnych uogólnionych δq_i i wyraża się jako



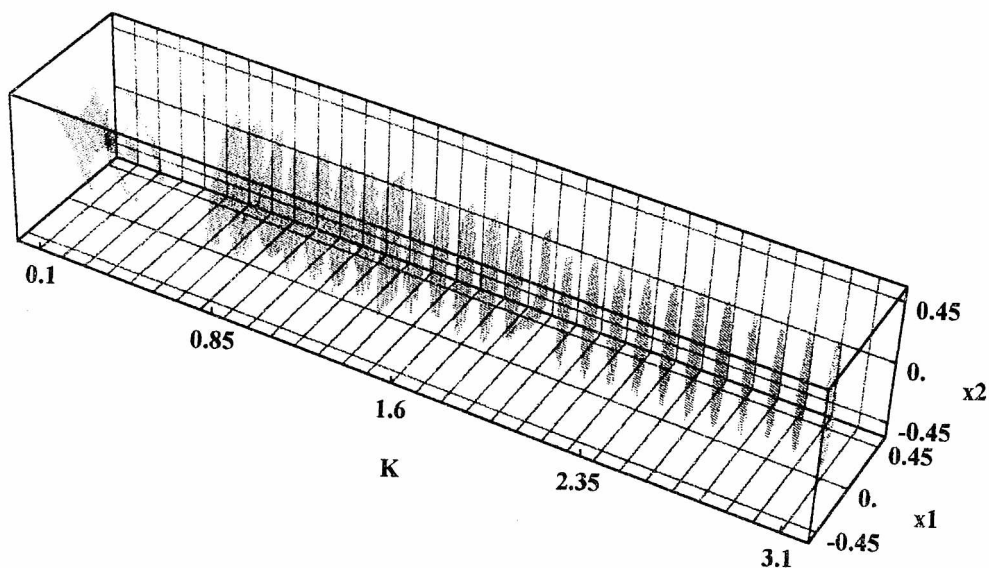
Rys. 5.18. Wszystkie cele równowagi ($P-1$) przy $P(t)=0,5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0,3+0,5\sin(4t)$, $t_i=7\pi$ i podziale 51×51

Fig. 5.18. All equilibrium cells ($P-1$) for $P(t)=0.5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0.3+0.5\sin(4t)$, $t_i=7\pi$ and division 51×51

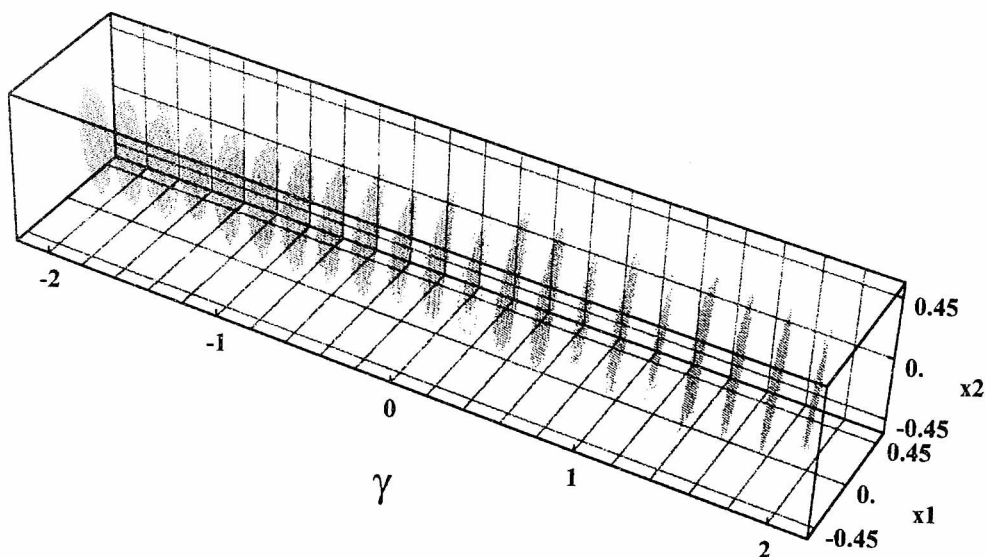


Rys. 5.19. r -krokowy obszar przyciągania ($r=20$) do $P-1$ cel, które należą do grupy 3 przy $P(t)=0,5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0,3+0,5\sin(4t)$, $t_i=7\pi$ i podziale 51×51

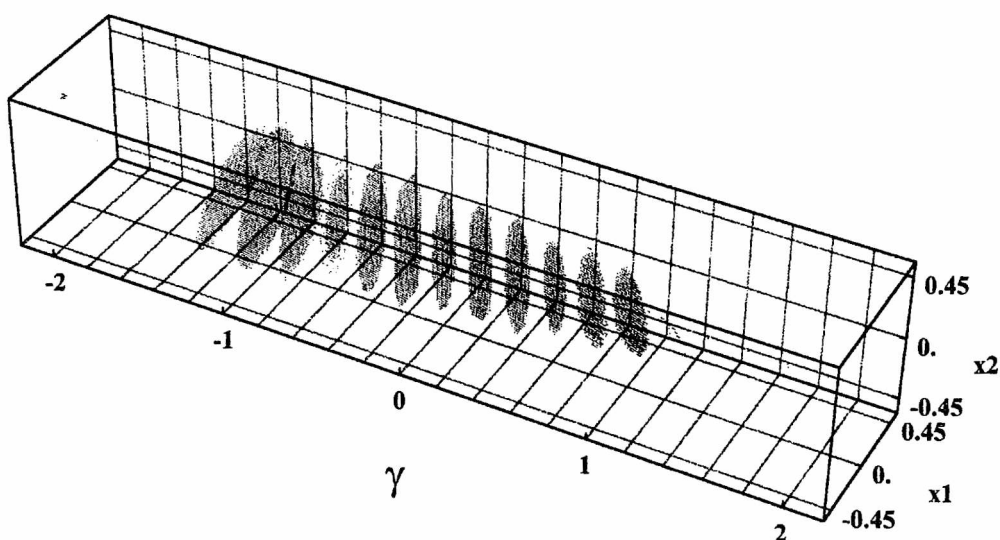
Fig. 5.19. r -step domains of attraction ($r=20$) for $P-1$ motion which belong to group 3 for $P(t)=0.5\sin(4t)$, $\alpha(t)=0.3+0.5\sin(4t)$, $t_i=7\pi$ and division 51×51



Rys. 5.20. Zależność obszarów przyciągania od parametru sztywności K przy $\alpha=1$ i $P(t)=0,5\sin(4t)$
 Fig. 5.20. Dependence of the domains of attraction on stiffness parameter K for $\alpha=1$ and $P(t)=0,5\sin(4t)$



Rys. 5.21. Zależność obszarów przyciągania od parametru $\gamma(K=1+\gamma\sin(12t))$ przy $\alpha=1$ i $P(t)=0,5\sin(4t)$
 Fig. 5.21. Dependence of the domains of attraction on parameter $\gamma(K=1+\gamma\sin(12t))$ for $\alpha=1$ and $P(t)=0,5\sin(4t)$



Rys. 5.22. Zależność obszarów przyciągania od parametru γ ($K=1+\gamma\sin(12t)$) przy $\alpha=1$ i $P=\sin(4t)$

Fig. 5.22. Dependence of the domains of attraction on parameter γ ($K=1+\gamma\sin(12t)$) for $\alpha=1$ and $P=\sin(4t)$

$$\begin{aligned}
 \sum_i Q_i \delta q_i &= P(t) l \left\{ \sin(q_1) \cos[\alpha(t)q_2] - \sin[\alpha(t)q_2] \cos(q_1) \right\} \delta q_1 \\
 &+ P(t) l \left\{ \sin(q_2) \cos[\alpha(t)q_1] - \sin[\alpha(t)q_1] \cos(q_2) \right\} \delta q_2 \quad (5.15) \\
 &- c_1 \dot{q}_1 \delta q_1 - c_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) (\delta q_2 - \delta q_1)
 \end{aligned}$$

Formuły (4.32) i (5.15) będą stanowić bazę metody bezpośredniej wykorzystującej prawo Hamiltona, która w następnym punkcie posłuży do analizy stateczności badanego układu z uwzględnieniem dynamicznego charakteru parametru śledzenia. Zakładając, że c_1 i c_2 są parametrami wiskotycznego tłumienia, oraz wprowadzając oznaczenia $\psi_C = q_1 - e_1$ i $\psi_B = (q_2 - e_2) - (q_1 - e_1)$, możemy przedstawić momentowe reakcje w punktach A i B (rys. 5.1b) w postaci

$$\begin{aligned}
 \frac{M_A}{k} &= \psi_A + \delta_1 \psi_A^2 + \gamma \psi_A^3 + c_1 \frac{\dot{q}(t)}{k} \\
 \frac{M_B}{k} &= \psi_B + \delta_2 \psi_B^2 + \gamma \psi_B^3 + c_2 \frac{\dot{q}_2(t) - \dot{q}_1(t)}{k} \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

gdzie $(k_{11} = k, k_{12} = \delta_1, k_{13} = \gamma)$ i $(k_{21} = k, k_{22} = \delta_2, k_{23} = \gamma)$ są charakterystykami więzi sprężystych.

Definiując bezwymiarowe wielkości czasu, tłumienia, poziomu obciążenia i masy odpowiednio w postaci

$$\tau = t \sqrt{\frac{k}{m_1 l^2}}, \quad \beta_i = \frac{c_i}{l \sqrt{k m_1}} \quad (i = 1, 2), \quad p = \frac{P(t) l}{k}, \quad m = \frac{m_2}{m_1} \quad (5.17)$$

korzystając z relacji (4.22) i (5.15) bądź zapisując dynamiczne warunki równowagi, otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych ruchu badanego układu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(\tau) &= x_2(\tau) \\ \dot{x}_2(\tau) &= \frac{1}{a} \left[-c - b \left(\frac{ec}{a} - f \right) / \left(d - \frac{eb}{a} \right) \right] \\ \dot{x}_3(\tau) &= x_4(\tau) \\ \dot{x}_4(\tau) &= \left(\frac{ec}{a} - f \right) / \left(d - \frac{eb}{a} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

W relacji (5.18) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} a &= 1 + m, \\ b &= \cos(x_1 - x_3), \\ c &= x_4^2 \sin(x_1 - x_3) + 2(x_1 - e_1) - (x_3 - e_2) + \delta_1(x_1 - e_1)^2 + \gamma(x_1 - e_1)^3 \\ &\quad - \delta_2(x_1 - e_1 - x_3 + e_2)^2 + \gamma(x_1 - e_1 - x_3 + e_2)^3 \\ &\quad + (\beta_1 + \beta_2)x_2 - \beta_2 x_4 - p \sin(x_1 + \alpha x_3), \\ d &= 1, \\ e &= \cos(x_1 - x_3), \\ f &= -x_2^2 \sin(x_1 - x_3) - (x_1 - e_1) + (x_3 - e_2) + \delta_2(x_1 - e_1 - x_3 + e_2)^2 \\ &\quad - \gamma(x_1 - e_1 - x_3 + e_2)^3 + \beta_2(x_4 - x_2) - p \sin[(1 - \alpha)x_3] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Równania (5.18) przedstawiono w postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu z uwagi na możliwość bezpośredniego ich wykorzystania w zapisie stosowanym w metodzie odwzorowywania między celami. Jak łatwo sprawdzić, równania

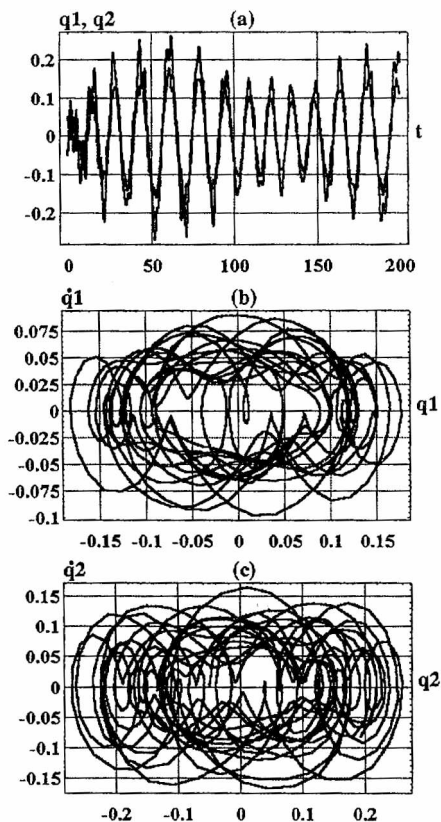
te w szczególnych przypadkach można sprowadzić do tych, które między innymi otrzymali i stosowali w swoich pracach Jin i Matsuzaki [4.39], Kounadis [4.40, 4.41 i 4.42] i Kounadis, Avraam i Mallis [4.43].

5.5. Analiza numeryczna układu o dwóch stopniach swobody

Na ogół analiza układów nieliniowych nie daje możliwości prostego wyznaczenia ich obszarów stabilności. W pierwszej części tego punktu przedstawiono trajektorie ruchu i portrety fazowe zachowania się wahadła przy zadanych parametrach i warunkach początkowych ruchu. W tym przypadku wykorzystano metodę bezpośrednią bazującą na prawie Hamiltona. W części drugiej punktu pokazano rezultaty analizy dokonanej metodą odwzorowywania między celami w wybranych obszarach przestrzeni fazowych.

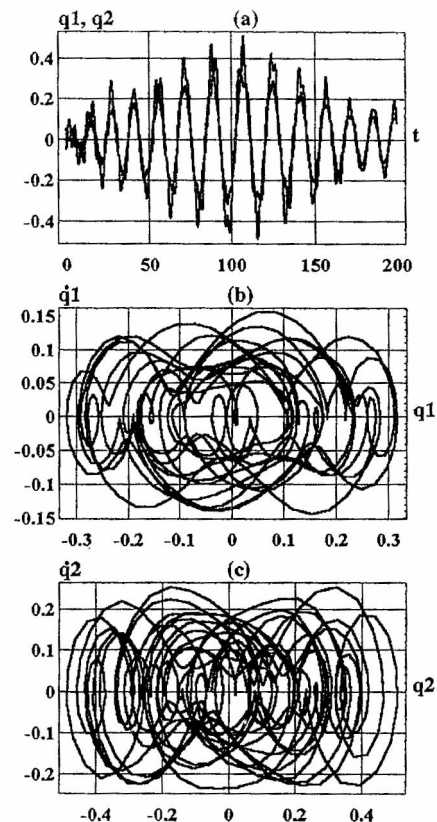
W analizie numerycznej układu o dwóch stopniach swobody bazującej na metodzie bezpośredniej skoncentrowano się głównie na szukaniu rozwiązań na granicach obszarów dynamicznej niestabilności z uwzględnieniem dynamicznego charakteru współczynnika śledzenia. Wyznaczanie w tym przypadku granic rezonansu parametrycznego jest związane z pracochłonną analizą numeryczną, a granice te zarówno jakościowo jak i ilościowo silnie zależą od małych zmian parametrów zadania. Przedstawione dalej wybrane rezultaty obrazują możliwy wpływ zmiennego parametru śledzenia na charakter otrzymywanych wyników. Konsekwentnie na wszystkich dalszych rysunkach pokazano przebiegi zmienności – w czasie t odmierzanym w sekundach – współrzędnych q_1 i q_2 mierzonych w radianach (części (a) rysunków) oraz portrety fazowe pierwszej (q_1) i drugiej (q_2) współrzędnej uogólnionej (odpowiednio części (b) i (c) rysunków). Przyjęto, że $m = l = k = 1$, $\delta_1 = -2,5$, $\delta_2 = -0,75$, $\gamma = 0$, $e_1 = -e_2 = 0,05$, $c_1 = c_2 = 0$, a warunki początkowe w postaci $q_{10} = -q_{20} = 0,05$ i $\dot{q}_{10} = -\dot{q}_{20} = 0$. Na rysunkach 5.23, 5.24, 5.25 i 5.26 przedstawiono rozwiązania przy dynamicznie zmiennej sile $P(t) = 0,5 + 0,5\cos(2,25t)$ oraz różnych wartościach jednego z parametrów (o) opisujących zmienny parametr śledzenia $\alpha(t) = 1,0 + 0,5\cos(ot)$; podano też rozwiązania odpowiednio przy parametrze $o = 2,3$, $o = 2,28$, $o = 2,27$ i $o = 2,25$. Analizując wyższe wartości parametru o ($o > 2,3$), otrzymywano rozwiązania stateczne, a gdy $o < 2,25$, rozwiązania okazywały się niestateczne. Rozwiązania niestateczne to takie, w których wzrost przemieszczeń w czasie był nieograniczony.

Należy podkreślić, że charakter odpowiedzi układu może ulec zasadniczej zmianie, jeżeli tylko zmienimy – nawet nieznacznie – warunki początkowe jego ruchu. W tym sensie sposoby wykorzystujące całkowanie równań ruchu, przy z reguły arbitralnie doboranych dyskretnych zbiorach warunków początkowych, nie dostarczają pełnej informacji o stateczności badanego układu. W przypadku tak prowadzonej analizy można mówić jedynie o tym, że odpowiedź układu jest stateczna bądź niestateczna, przy konkretnych warunkach początkowych i w skończonym czasie, w którym dokonano całkowania równań ruchu. Tych niedogodności nie ma metoda odwzorowywania mię-



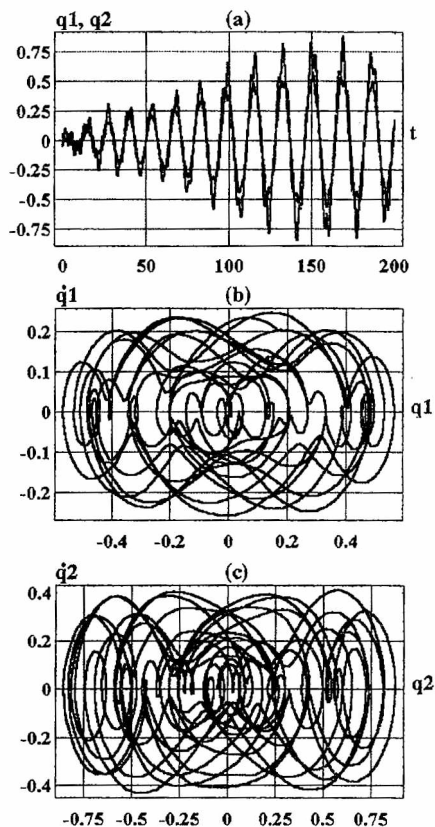
Rys. 5.23. Wykresy q_1 i q_2 (a) w funkcji czasu t oraz portrety fazowe q_1 (b) i q_2 (c) przy $P(t)=0,5 + 0,5\cos(2,25t)$ i $\alpha(t)=1 + 0,5\cos(2,3t)$

Fig. 5.23. Diagrams q_1 and q_2 (a) as a function of time t and phase portraits q_1 (b) and q_2 (c) for $P(t)=0.5 + 0,5\cos(2.25t)$ and $\alpha(t)=1 + 0.5\cos(2,3t)$



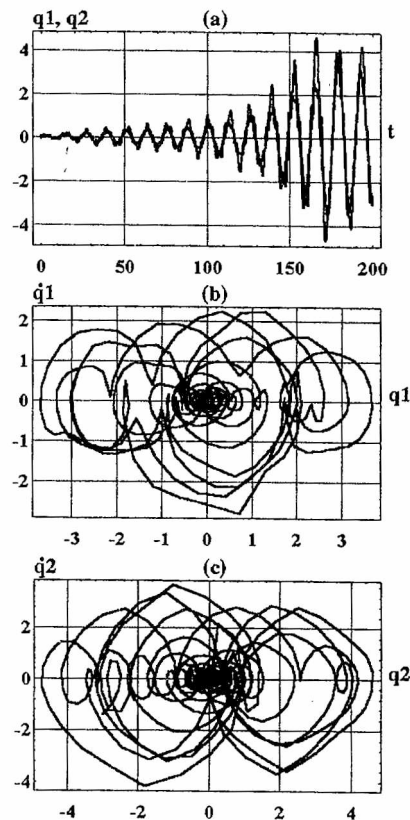
Rys. 5.24. Wykresy q_1 i q_2 (a) w funkcji czasu t oraz portrety fazowe q_1 (b) i q_2 (c) przy $P(t)=0,5 + 0,5\cos(2,25t)$ i $\alpha(t)=1 + 0,5\cos(2,28t)$

Fig. 5.24. Diagrams q_1 and q_2 (a) as a function of time t and phase portraits q_1 (b) and q_2 (c) for $P(t)=0.5 + 0,5\cos(2.25t)$ and $\alpha(t)=1 + 0.5\cos(2.28t)$



Rys. 5.25. Wykresy q_1 i q_2 (a) w funkcji czasu t oraz portrety fazowe q_1 (b) i q_2 (c) przy $P(t)=0,5 + 0,5\cos(2,25t)$ i $\alpha(t)=1 + 0,5\cos(2,27t)$

Fig. 5.25. Diagrams q_1 and q_2 (a) as a function of time t and phase portraits q_1 (b) and q_2 (c) for $P(t)=0.5 + 0.5\cos(2.25t)$ and $\alpha(t)=1 + 0.5\cos(2.27t)$



Rys. 5.26. Wykresy q_1 i q_2 (a) w funkcji czasu t oraz portrety fazowe q_1 (b) i q_2 (c) przy $P(t)=0,5 + 0,5\cos(2,25t)$ i $\alpha(t)=1 + 0,5\cos(2,25t)$

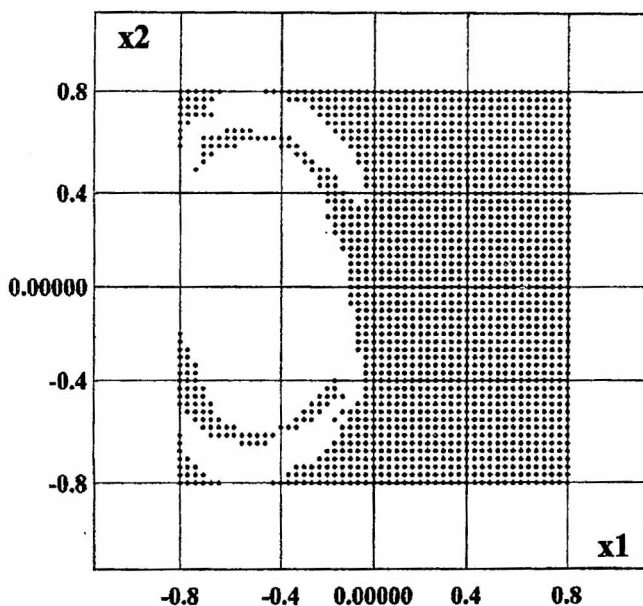
Fig. 5.26. Diagrams q_1 and q_2 (a) as a function of time t and phase portraits q_1 (b) and q_2 (c) for $P(t)=0.5 + 0.5\cos(2.25t)$ and $\alpha(t)=1 + 0.5\cos(2.25t)$

dzy celami, która daje możliwość obserwacji układu w teoretycznie nieskończonym czasie przy warunkach początkowych z zadanego obszaru.

Przedstawione dalej wyniki są dwuwymiarowymi przekrojami czterowymiarowej przestrzeni fazowej zadania. Podobnie jak w punkcie trzecim tego rozdziału, obszary przyciągania przedstawiano jako obszary niekropkowane; w przypadku demonstrowania grup punktów w obszarach przyciągania przedstawiono je w postaci zbiorów punktów.

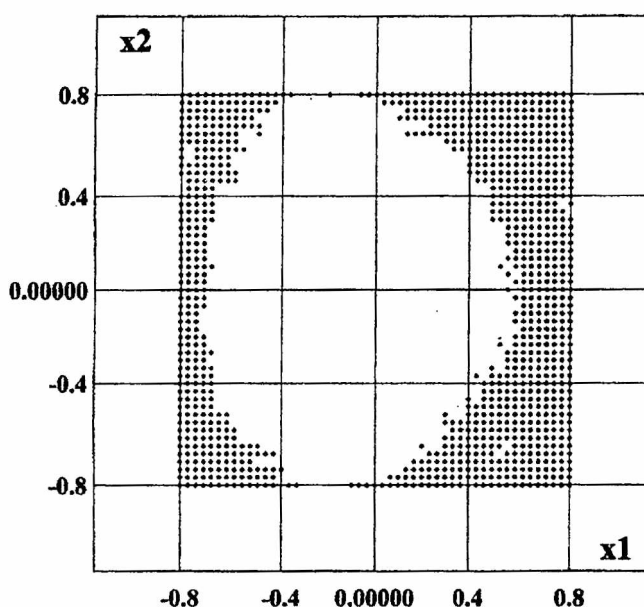
Na rysunkach 5.27, 5.28 i 5.29 pokazano obszary stabilności przy statycznym obciążeniu śledzącym $P(t) = 1$, przy różnych parametrach śledzenia odpowiednio i przy $\alpha = -15$, $\alpha = 15$, $\alpha = 25$. Na rysunkach 5.30, 5.31 i 5.32 zaprezentowano możliwy wpływ na kształt obszarów stabilności częstości zmian dynamicznego parametru śledzenia odpowiednio przy $\alpha(t) = 0,8 + 0,8\sin(4\pi t)$, $\alpha(t) = 0,8 + 0,8\sin(8\pi t)$ i $\alpha(t) = 0,8 + 0,8\sin(12\pi t)$.

Obszar przyciągania przy niezerowych wartościach wiskotycznego tłumienia ($P(t) = 1$, $\alpha(t) = 0,8$ i $c_1 = c_2 = 0,1$) przedstawiono na rys. 5.33, a rys. 5.34 i 5.35 obrazują r -krokowe obszary ($r = 20$) odpowiednio grupy 2 i 3.

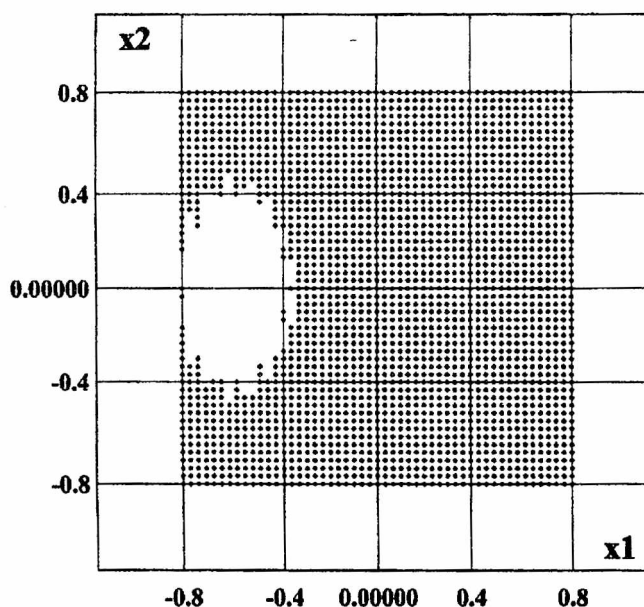


Rys. 5.27. Obszar przyciągania przy $P(t)=1$, $\alpha(t)=-15$, $x_3=-0,8$, $x_4=0$ i podziale 51×51

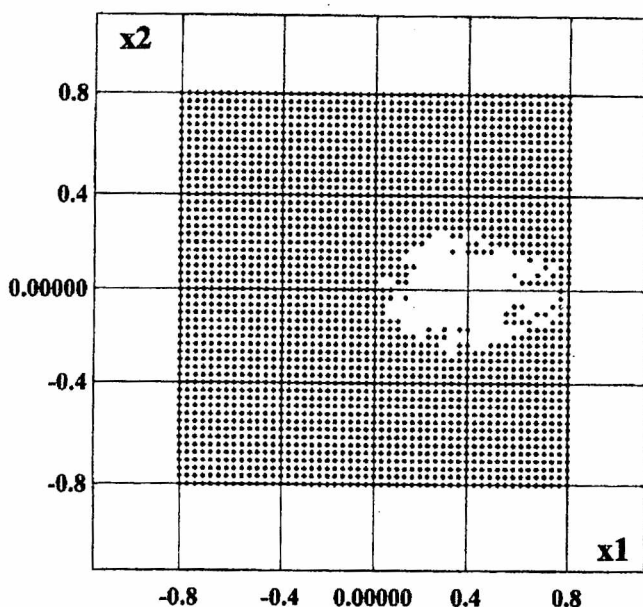
Fig. 5.27. Domain of attraction for $P(t)=1$, $\alpha(t)=-15$, $x_3=-0,8$, $x_4=0$ and division 51×51



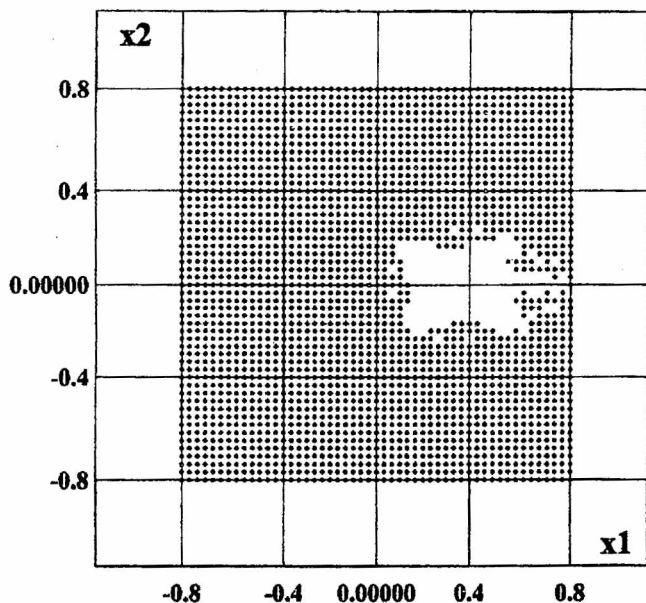
Rys. 5.28. Obszar przyciągania przy $P(t)=1$, $\alpha(t)=15$, $x_3=-0.8$, $x_4=0$ i podziale 51×51
 Fig. 5.28. Domain of attraction for $P(t)=1$, $\alpha(t)=15$, $x_3=-0.8$, $x_4=0$ and division 51×51



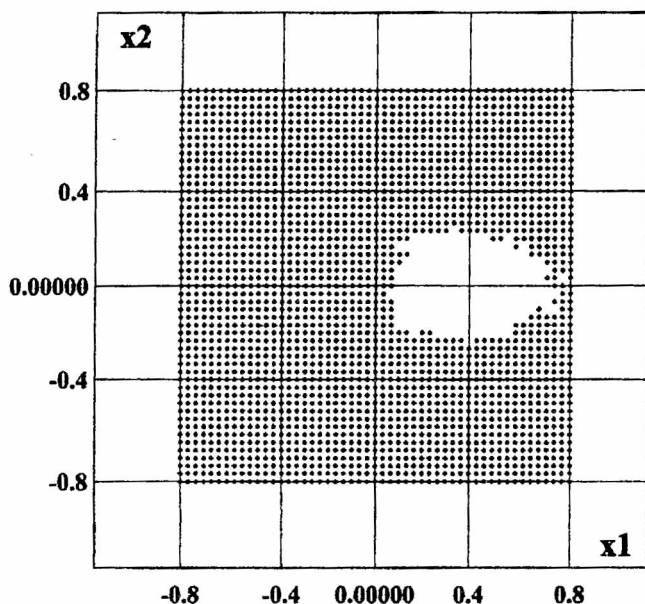
Rys. 5.29. Obszar przyciągania przy $P(t)=1$, $\alpha(t)=25$, $x_3=-0.8$, $x_4=0$ i podziale 51×51
 Fig. 5.29. Domain of attraction for $P(t)=1$, $\alpha(t)=25$, $x_3=-0.8$, $x_4=0$ and division 51×51



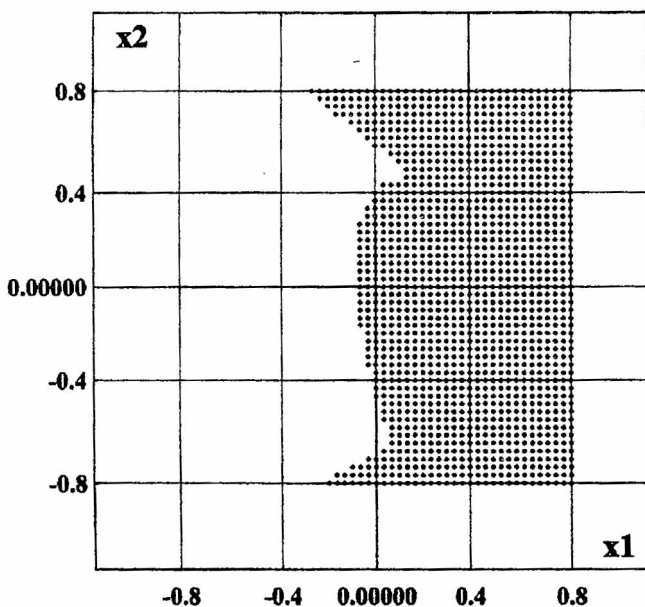
Rys. 5.30. Obszar przyciągania przy $P(t)=1$, $\alpha(t)=0,8+0,8\sin(4\pi)$, $x_3=0,1$, $x_4=0$ i podziale 51×51
 Fig. 5.30. Domain of attraction for $P(t)=1$, $\alpha(t)=0.8+0.8\sin(4\pi)$, $x_3=0.1$, $x_4=0$ and division 51×51



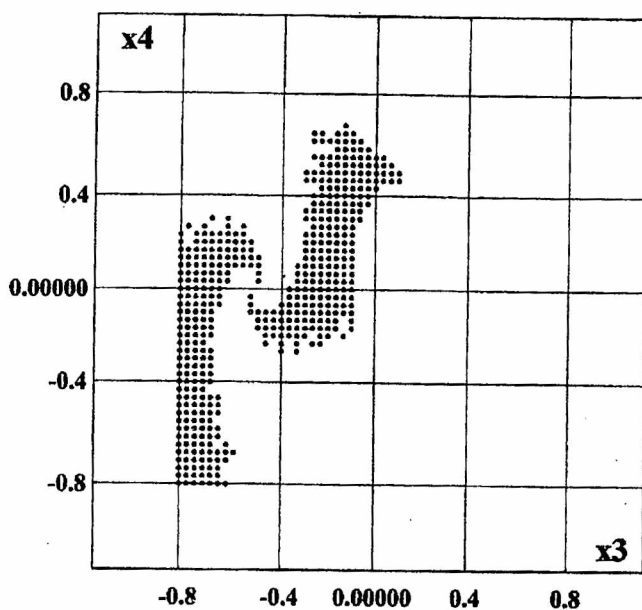
Rys. 5.31. Obszar przyciągania przy $P(t)=1$, $\alpha(t)=0,8+0,8\sin(8\pi)$, $x_3=0,1$, $x_4=0$ i podziale 51×51
 Fig. 5.31. Domain of attraction for $P(t)=1$, $\alpha(t)=0.8+0.8\sin(8\pi)$, $x_3=0.1$, $x_4=0$ and division 51×51



Rys. 5.32. Obszar przyciągania przy $P(t)=1$, $\alpha(t)=0,8+0,8\sin(12\pi)$, $x_3=0,1$, $x_4=0$ i podziale 51×51
 Fig. 5.32. Domain of attraction for $P(t)=1$, $\alpha(t)=0,8+0,8\sin(12\pi)$, $x_3=0,1$, $x_4=0$ and division 51×51

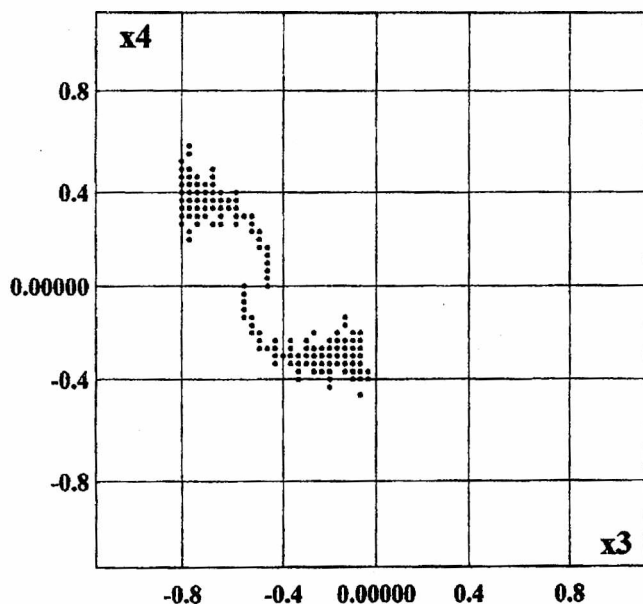


Rys. 5.33. Obszar przyciągania przy $P(t)=1$, $\alpha(t)=0,8$, $x_3=-0,8$, $x_4=0$, $c_1=c_2=0,1$ i podziale 51×51
 Fig. 5.33. Domain of attraction for $P(t)=1$, $\alpha(t)=0,8$, $x_3=-0,8$, $x_4=0$, $c_1=c_2=0,1$ and division 51×51



Rys. 5.34. r -krokowy obszar przyciągania ($r = 20$) ruchu, który należy do grupy 2 przy $P(t)=1$, $\alpha(t)=0,8$, $x_3 = -0,8$, $x_4=0$, $c_1=c_2=0,1$ i podziale 51×51

Fig. 5.34. r -step domains of attraction ($r = 20$) for motion which belong to group 2 for $P(t)=1$, $\alpha(t)=0,8$, $x_3 = -0,8$, $x_4=0$, $c_1=c_2=0,1$ and division 51×51



Rys. 5.35. r -krokowy obszar przyciągania ($r = 20$) ruchu, który należy do grupy 3 przy $P(t)=1$, $\alpha(t)=0,8$, $x_3 = -0,8$, $x_4=0$, $c_1=c_2=0,1$ i podziale 51×51

Fig. 5.35. r -step domains of attraction ($r = 20$) for motion which belong to group 3 for $P(t)=1$, $\alpha(t)=0,8$, $x_3 = -0,8$, $x_4=0$, $c_1=c_2=0,1$ and division 51×51

5.6. Podsumowanie

Przedstawiono wyniki analizy obszarów rezonansu parametrycznego oraz stabilności globalnej prostych układów dyskretnych opisywanych liniowymi bądź nieliniowymi równaniami różniczkowymi z periodycznie zmiennymi współczynnikami. Skoncentrowano się głównie na efektach wywołanych periodycznie zmiennymi parametrami śledzenia, charakteryzującymi działające na układ statyczne bądź dynamiczne obciążenie niekonserwatywne.

Pokazano dwa podejścia do analizy stateczności tego typu układów. W pierwszym z nich posłużono się możliwymi do uzyskania w analizie układów liniowych ścisłymi regułami – zwykle bardzo skomplikowanymi – określającymi granice obszarów rezonansu parametrycznego. Analizując układy nieliniowe zastosowano metodę bezpośrednią, będącą odpowiednikiem całkowania równań ruchu przy zadanych warunkach początkowych. Te sposoby analizy umożliwiły sformułowanie kilku ważnych spostrzeżeń:

- granice obszarów rezonansu parametrycznego w sposób istotny mogą zmieniać się, jeżeli uwzględnimy dynamiczny charakter parametru śledzenia obciążenia niekonserwatywnego,
- zmiany granic rezonansu parametrycznego mogą być różne w zależności od tego, który z obszarów rezonansu analizujemy; zmiany te są szczególnie widoczne w obszarach wyższych,
- wpływ wiskotycznego tłumienia jest podobny – powoduje między innymi zawężanie obszarów rezonansu parametrycznego – jak w przypadku układów bez zmiennych parametrów śledzenia,
- uwzględnienie dynamicznego charakteru parametrów śledzenia prowadzi do poszerzania (destabilizacji) pierwszych obszarów rezonansu parametrycznego wraz ze wzrostem parametru amplitudy,
- uwzględnienie dynamicznych parametrów śledzenia w analizie wyższych obszarów rezonansu parametrycznego w pewnych zakresach jego amplitudy może te obszary destabilizować bądź stabilizować,
- tłumienie zawsze występujące w układach rzeczywistych może powodować przerwanie (w zależności od amplitudy parametru śledzenia) ciągłości, szczególnie wyższych obszarów rezonansu parametrycznego układów z dynamicznie zmiennymi parametrami śledzenia; zjawiska tego nie obserwuje się w podstawowych (pierwszych) obszarach rezonansu,
- uwzględnienie, w układzie z dynamicznie zmiennym parametrem śledzenia obciążenia niekonserwatywnego, prostych zależności charakterystyk sztywności od poziomu działającego obciążenia może powodować – w zależności od charakteru tej zależności – zarówno destabilizację jak i stabilizację obszarów rezonansu parametrycznego, szczególnie widoczną w obszarach wyższych,

- odpowiedź układów nieliniowych jest istotnie zależna nawet od małych zmian częstotliwości parametru śledzenia, które mogą powodować stabilizację bądź destabilizację układu,
- w układach nieliniowych możliwa jest stabilizacja niestatecznego układu przez wprowadzenie dynamicznie zmiennego parametru śledzenia o ściśle określonych parametrach.

Drugie podejście wykorzystujące metodę odwzorowywania między celami jest szczególnie użyteczne w globalnej analizie stabilności układów nieliniowych. Na podstawie przeprowadzonych testów numerycznych, z których tylko część pokazano w punktach 5.3 i 5.5 tego rozdziału można sformułować następujące spostrzeżenia:

- istotniejszym – w stosunku do czasu całkowania t_i – parametrem decydującym o poprawności uzyskiwanych rezultatów w metodzie odwzorowywania między celami jest gęstość podziału przestrzeni fazowej,
 - czas całkowania równań t_i wydaje się mniej istotny, co sugerowane jest w cytowanej literaturze, ale w układach nieautonomicznych musi być każdorazowo dobierany po zmianie postaci współczynników równań jawnie zależnych od czasu,
 - kształt i charakter obszarów przyciągania układów nieliniowych i zlinearyzowanych mogą się istotnie różnić,
 - wielkość i kształt obszarów stabilności niekonserwatywnych układów nieliniowych w istotny sposób zależą od parametrów opisujących funkcję śledzenia $\alpha(t)$,
 - obszary przyciągania zależą od poziomu obciążenia i niekoniecznie muszą być obszarami jednospójnymi,
 - przestrzenne obszary przyciągania istotnie zależą od parametrów obciążenia niekonserwatywnego,
 - dynamiczny parametr śledzenia wyraźnie zmienia zakres obszarów stabilności.
- W rozdziale tym wykorzystano wyniki przedstawione w pracy autora [5.38].

6. ZASTOSOWANIE PAKIETU MATHEMATICA DO FORMUŁOWANIA ZASAD WARIACYJNYCH PROBLEMÓW MECHANIKI Z SIŁAMI NIEKONSERWATYWNYMI

6.1. Wprowadzenie

Modele matematyczne większości zagadnień współczesnej mechaniki dają się sprowadzać do układów równań różniczkowych, różniczkowo-całkowych bądź całkowych opisujących problemy brzegowo-początkowe. Równania te są najczęściej nieliniowe, co w praktyce oznacza, że w przypadkach nietrywialnych z reguły nie jest możliwe uzyskanie rozwiązań analitycznych. Alternatywnym – do poszukiwania rozwiązań analitycznych – sposobem rozwiązywania tego typu zagadnień (często jedynie możliwym) jest formułowanie funkcjonałów wariacyjnych, których warunki stacjonarności prowadzą do równań opisujących zagadnienia. W tym przypadku rozwiązanie sprowadza się do poszukiwania punktów z danej przestrzeni funkcji, w których zbudowany funkcjonał jest stacjonarny, a otrzymane – na drodze standardowych procedur rachunku wariacyjnego – równania Eulera–Lagrange’a są równaniami zagadnienia, którego rozwiązania poszukujemy. Typowym przykładem podejścia wariacyjnego jest zasada minimum energii potencjalnej bądź energii komplementarnej. Rozwiązywanie zadań mechaniki bazujących na sformułowaniach wariacyjnych ma wiele zalet. Użycie funkcjonałów wariacyjnych umożliwia skoncentrowanie w jednym wyrażeniu wszystkich skomplikowanych równań problemu, i na ogół funkcjonały te mają określony sens fizyczny. Sformułowania wariacyjne w naturalny sposób tworzą bazę rozwiązań przybliżonych, a także umożliwiają badanie ich stabilności i jednoznaczności. Problem istnienia i formułowania zasad wariacyjnych należy do tak zwanych problemów odwrotnych rachunku wariacyjnego. Należy podkreślić, że – ujmując rzecz chronologicznie – pierwotnym opisem problemów brzegowo-początkowych mechaniki są układy równań, na bazie których można budować opis zagadnienia w postaci zasady wariacyjnej.

Szczególną rolę wśród problemów mechaniki odgrywają tutaj omawiane zagadnienia z siłami niekonserwatywnymi. W zagadnieniach mechaniki z siłami niekonserwatywnymi formułowanie zasad wariacyjnych jest – z uwagi na niepotencjalność wystę-

pujących oddziaływań – szczególnie istotne i trudne, o czym świadczy fakt, że do niedawna problem ten nie miał sformułowanego ogólnego rozwiązania zarówno w zakresie istnienia odpowiednich funkcjonałów, jak i sposobów ich budowania.

Celem rozdziału jest krytyczny przegląd metod stosowanych w sformułowaniach wariacyjnych liniowych i nieliniowych zagadnień mechaniki z siłami niekonserwatywnymi oraz pokazanie – na przykładzie procedur napisanych w języku symbolicznym – skuteczności pakietu Mathematica w określaniu potencjalności operatora zagadnienia i formułowaniu funkcjonałów bazujących na metodzie dołączania, do operatora podstawowego, operatora sprzężonego do pochodnej Frecheta operatora wyjściowego.

W punkcie drugim rozdziału przeprowadzono próbę klasyfikacji rozwiązań stosowanych przy formułowaniu funkcjonałów w zadaniach mechaniki z siłami niekonserwatywnymi; w punkcie trzecim przedstawiono krótkie wprowadzenie do podstawowej wiedzy z zakresu rozwiązań bazujących na dołączaniu operatora sprzężonego; w punkcie czwartym pokazano procedury napisane w języku pakietu Mathematica, które w sposób zasadniczy pozwalają uprościć żmudne i nie zawsze proste operacje niezbędne w badaniu potencjalności operatora zagadnienia oraz budowaniu operatorów sprzężonych, a w punkcie piątym zademonstrowano – na wybranych przykładach – funkcjonowanie tych procedur.

6.2. Metody budowania funkcjonałów w zagadnieniach niekonserwatywnych

Na początku należy podkreślić, że przedstawiony w tym punkcie przegląd wybranych prac ma służyć pokazaniu podstawowych sposobów konstruowania funkcjonałów wariacyjnych jedynie w zagadnieniach z siłami niepotencjalnymi. Obszerny przegląd literatury w zakresie szeroko pojętej analizy funkcjonalnej i metod wariacyjnych można znaleźć między innymi w pracach Goldsteina [4.12], Washizu [2.7], Odena i Reddy [6.1], Masona [6.2] i Reddy [6.3]. W celu usystematyzowania omawianych prac zdecydowano się na przyjęcie podziału zasad wariacyjnych na trzy podstawowe grupy w zależności od wzajemnej relacji równań Eulera–Lagrange’a funkcjonału i równań problemu, którego zasady wariacyjnej poszukujemy. Do pierwszej grupy należy zaliczyć zasady wariacyjne (tak zwane zasady potencjalne), których warunki stacjonarności odpowiadają wprost równaniom zagadnienia. Grupę drugą tworzą takie sformułowania wariacyjne (tak zwane alternatywne zasady potencjalne), których równania Eulera–Lagrange’a są pewną transformacją równań wyjściowych problemu. Trzecią grupę zasad wariacyjnych stanowią zasady (tak zwane złożone zasady potencjalne), w których oprócz oryginalnych zmiennych problemu występują zmienne do nich sprzężone, a punkty stacjonarności funkcjonałów tej grupy dają równania problemu wyjściowego i problemu do niego sprzężonego. Propozycję takiego podziału zasad wariacyjnych można znaleźć w pracy Athertona i Homsy’ego [6.4] i – jak się wydaje – podział ten pozwala w pełni klasyfikować – między innymi – proponowane w literatu-

rze sposoby budowania funkcjonałów problemów z siłami niekonserwatywnymi. Pierwszą z wymienionych grup rozwiązań – w innej klasyfikacji – należy zaliczyć do zasad wariacyjnych w sensie ścisłym (*variational formulation in the restricted sense*), a grupę drugą i trzecią do zasad wariacyjnych w sensie rozszerzonym (*variational formulation in the extended sense*).

Do niedawna metoda prób i błędów była stosowana jako sposób poszukiwania sformułowań wariacyjnych zarówno w problemach fizyki, jak i problemach szeroko pojętej inżynierii. Tym samym formułowanie funkcjonałów różnych zagadnień było swego rodzaju sztuką. Poszukiwania te polegały głównie na dokonywaniu pewnych transformacji na równaniach wyjściowych zagadnienia i próbach budowania funkcjonałów, których równania Eulera–Lagrange’a odpowiadałyby tym przetransformowanym równaniom. Jak łatwo się domyślić, taki sposób formułowania, a raczej zgadywania funkcjonałów, w ogólności nie może być akceptowany, choć w wielu ważnych zagadnieniach doprowadził do sukcesu. Ogólne rozwiązanie problemu budowania funkcjonałów liniowych problemów brzegowych przedstawił Magri [6.5], uogólniając w tym zakresie wcześniejszą pracę Tontiego [6.6]. Zaproponowane rozwiązanie polega na takim doborze formy biliniowej rozwiązywanego zadania, względem której liniowy operator problemu – niesymetryczny względem zwykle używanych form biliniowych – staje się symetryczny. Sposób ten jest równoważny pewnej transformacji operatora wyjściowego, która powoduje, że operator ten staje się symetryczny względem danej formy biliniowej i w tym sensie może być zaliczany do drugiej grupy wcześniej przyjętej klasyfikacji sposobów formułowania zasad wariacyjnych. W szczególnym przypadku podejście to jest równoważne metodzie zaproponowanej przez Gurtina [6.7]. Magri wykazał, że każdy operator liniowy ma nieskończenie wiele form biliniowych, względem których jest symetryczny. W swych pracach Tonti [6.8, 6.9] pokazał, że dla każdego liniowego czy nieliniowego problemu, przy założeniu istnienia jednoznacznego rozwiązania, można znaleźć wiele funkcjonałów, których minimum jest rozwiązaniem problemu. Funkcjonały te można otrzymać transformując równania problemu za pomocą pewnego operatora całkowego, który różniczkowe sformułowanie problemu przeprowadza w sformułowanie całkowo-różniczkowe. Jak wynika z powyższego, ten sposób rozwiązywania należy zaliczyć do drugiej grupy rozwiązań w przyjętej klasyfikacji. W problemach mechaniki, w których występują siły niekonserwatywne – a więc w klasycznych problemach niesamosprężonych (*non-self-adjoint problems*) – nie można w ogólności znaleźć funkcjonałów, które należałyby do pierwszej grupy przyjętej klasyfikacji. Dalej cytowane prace – z uwagi na zastosowany sposób podejścia – mieszczą się zatem w drugiej lub trzeciej grupie tej klasyfikacji. Podejmowano wiele prób mniej lub bardziej ogólnego formułowania zasad wariacyjnych do analizy układów z siłami niekonserwatywnymi bądź niepotencjalnymi prawami konstytutywnymi. W dalszym ciągu pokrótce zostaną omówione wybrane, reprezentatywne prace z tego zakresu, na ogół – o ile będzie to możliwe – chronologicznie.

Prasad i Herrmann wykorzystując koncepcję operatora sprzężonego w liniowych problemach brzegowych wykazali, że wartości własne problemu wyjściowego i do niego

sprzężonego są identyczne [6.10, 6.11]. Poszukiwanie wartości własnych problemu niesamosprzężonego może być więc rozwiązywane przez formułowanie funkcyjałów, jeżeli zostanie użyta koncepcja problemu sprzężonego. Pomysł wykorzystania w analizie układów niesamosprzężonych układów do nich sprzężonych pochodzi z pracy Morse'a i Feshbacha [6.12]; między innymi Chandrasekhar był jednym z pierwszych, którzy zastosowali tę ideę do analizy problemów stabilności w hydrodynamice [6.13]. Wspomniane wyżej prace Prasada i Herrmanna wykorzystują podejście wariacyjne, które należy zaliczyć do trzeciej grupy przyjętej klasyfikacji. Finlayson jako pierwszy zaproponował uogólnienie metody dołączania operatora sprzężonego na zadania nieliniowe i niekonserwatywne [6.14]. W swych pracach Anderson, wprowadzając problem brzegowy sprzężony do problemu oryginalnego, formułuje zasadę wariacyjną, którą nazywa uogólnioną formą zasady Hamiltona [6.15, 6.16, 6.17]. Punkt stacjonarny tak przyjętej zasady wariacyjnej dostarcza równań problemu analizowanego i problemu do niego sprzężonego, co w szczególności pozwala na zastosowanie metody Ritza do szukania rozwiązań przybliżonych takiej kombinacji zadań. Podejście to Anderson wykorzystał do analizy zadań niekonserwatywnych opisanych różniczkowymi operatorami liniowymi, w których szczególną uwagę zwrócił na istotę tłumienia i występowanie problemu dualności w tego typu zadaniach. Podejście zastosowane w pracach Andersona jest typowym przykładem złożonych zasad wariacyjnych grupy trzeciej przyjętej klasyfikacji. Leipholz do prostych, liniowych równań różniczkowych cząstkowych opisujących zagadnienia utraty stateczności przez dywergencję układów poddanych działaniu sił niekonserwatywnych formułuje pojęcie układów pierwszego i drugiego rodzaju [1.8]. Rozważania są prowadzone przy założeniu stacjonarności rozwiązań oraz przy założeniu, że składowe operatory różniczkowe po zmiennej przestrzennej są samosprzężone (w przypadku układów pierwszego rodzaju) bądź są operatorem dołączonym (*adjoint to the given operator*) (w przypadku układów drugiego rodzaju) przy zadanych warunkach brzegowych. Przyjmując powyższe założenia pokazano, że w układach pierwszego rodzaju (*energy-functional*) jest zachowywana energia, a w układach drugiego rodzaju jest zachowywana inna wielkość, która w ogólności nie musi mieć interpretacji czysto fizycznej. Z uwagi na sposób definicji układów drugiego rodzaju pracę tę należy zaliczyć do jednej z pierwszych, w których podjęto próbę rozwiązania problemu istnienia funkcyjałów w układach z siłami niekonserwatywnymi i wykorzystania ich do szukania pierwszego obciążenia krytycznego. Pokazany sposób formułowania funkcyjału poprzez pewną (znaną) transformację należy zaliczyć do drugiej grupy metod budowania funkcyjałów. Funkcjonowanie takiego podejścia pokazano – między innymi – na przykładach, w których poszukiwano (przy arbitralnie zadanej transformacji) pierwszych obciążeń krytycznych pręta Pflügera i problemu Greenhilla. Szczególną rolę w analizie układów z siłami niekonserwatywnymi odgrywają prace, których podstawę stanowią zasada bądź prawo Hamiltona; zagadnienia te szczegółowo omówiono w rozdziale czwartym. Złożone wariacyjne sformułowania wyprowadzone na podstawie uogólnionej zasady prac przygotowanych są podstawą formułowania rozwiązań w pracach Wu [6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.22], w których analizowa-

no wiele problemów układów liniowych z siłami niekonserwatywnymi. Między innymi badano istotę różnych modeli tłumienia w układach niekonserwatywnych i zbieżność procesów numerycznych z uwagi na aproksymacje naturalnych warunków brzegowych. Wu wykorzystał złożone wariacyjne sformułowania jako bazy sformułowania metody elementów skończonych w zadaniach mechaniki z siłami niekonserwatywnymi. Leipholz uogólniając wyniki swych poprzednich prac formułuje pojęcie systemu konserwatywnego trzeciego rodzaju w układach opisywanych liniowymi równaniami różniczkowymi [6.23]. W systemie konserwatywnym trzeciego rodzaju uogólniony funkcjonał energii jest funkcjonałem biliniowym, co uogólnia pojęcie systemów konserwatywnych drugiego rodzaju, których funkcjonał jest funkcjonałem kwadratowym i tym samym obejmuje jedynie systemy, w których utrata stateczności następuje przez dywergencję. Uogólnienie funkcjonału energii (przez odpowiednio dobraną transformację) pozwala analizować układy, które tracą stateczność przez flutter, a także umożliwia uogólnienie zasady Hamiltona. Podejście to w pełni mieści się w drugiej grupie możliwych sposobów formułowania funkcjonałów w zagadnieniach mechaniki. W tej pracy Leipholz nie podaje sposobu konstruowania transformacji, lecz ogranicza się do stwierdzenia, że operator tej transformacji [6.23, s.260] „... must be properly chosen according to the problem under consideration”. Leipholz wprowadzając pojęcia iloczynu semi-skalarnego w miejsce klasycznego iloczynu skalarnego oraz pojęcie metaenergii formułuje – przy ostrych założeniach na wprowadzany operator transformacji – zasadę wariacyjną w układach niekonserwatywnych, zastępującą klasyczne sformułowanie zasady Hamiltona [1.9]. Bazując na tym podejściu pokazano rozwiązanie zadania Becka, choć i tu niezbędny w analizie operator transformacji został dobrany arbitralnie. Formalnie (oprócz postaci transformacji konkretnego równania różniczkowego opisującego problem Becka) jedyna propozycja drogi szukania postaci koniecznej w tym podejściu transformacji jest zawarta w zdaniu [1.9, s.612]: “In fact, it shall be shown subsequently that a non-conservative system can be made symmetric in a certain sense and may thus become „conservative in a higher sense” if subjected to certain suitable transformations”. Powołując się na swoje poprzednie prace Leipholz pokazuje dwa sposoby formułowania funkcjonałów w liniowych problemach brzegowych mechaniki z siłami śledzącymi [1.10]. Pierwszy z nich polega na pewnych uogólnieniach lagranżianu i hamiltonianu przez ich modyfikację uwzględniającą problem dołączony. To podejście należy zaliczyć do trzeciej grupy zaproponowanej klasyfikacji zasad wariacyjnych. Drugi sposób wykorzystuje pojęcie uogólnionego samosprężenia i formalnie odpowiada poszukiwaniu funkcjonałów problemu, który jest transformacją zadania wyjściowego, a więc jest klasycznym przykładem drugiej grupy przyjętej klasyfikacji. W tej pracy także nie podano ogólnego sposobu budowania operatora transformacji. Leipholz stwierdza, że układ złożony z równań problemu i równań do nich sprzężonych ma niezmienny w czasie funkcjonał i dlatego jest zachowawczy w uogólnionym sensie [6.24]. Taki funkcjonał może być podstawą stosowania metod bezpośrednich w analizie układów z siłami niekonserwatywnymi. Jest to ponownie w pracach Leipholza proponowane podejście do rozwiązywania tego typu problemów,

które należy do trzeciej z wyżej opisanych możliwych dróg budowania funkcjonałów – w tym wypadku w układach liniowych. Telega [6.25] pokazał, że podejście Magriego [6.5] (ważne tylko w przypadku operatorów liniowych) polegające na odpowiednim doborze formy biliniowej można uogólnić na niektóre operatory nieliniowe. Telega wykazał, że układ dwóch sprzężonych równań operatorowych składający się z danego, nieliniowego równania problemu wyjściowego i równania sprzężonego do pochodnej Frecheta tego równania, jest układem potencjalnym. Zastosowane w tej pracy sposoby rozwiązań należy zaliczyć do drugiej (uogólnienie prac Magriego) i trzeciej grupy sposobów budowania zasad wariacyjnych. Metodę dołączania operatora sprzężonego wykorzystał Telega do systematycznego poszukiwania zasad wariacyjnych, które można zastosować w niektórych zagadnieniach plastyczności [6.26]. W pracach Gałki i Telegi metodę dołączania operatora sprzężonego z powodzeniem zastosowano do ogólnego rozwiązywania zagadnień sprężystych z uwzględnieniem sił masowych i powierzchniowych zależnych od zmian konfiguracji [6.27, 6.28]. Podejście to, zaliczane do trzeciej grupy sformułowań wariacyjnych, pozwoliło autorom na sformułowanie odpowiedników zasad wariacyjnych Hu-Washizu i Hellingera-Reissnera oraz odpowiedników funkcjonałów energii potencjalnej i komplementarnej z uwzględnieniem obciążenia śledzącego. W pracach Papastavridisa zasadę Hamiltona przy klasycznych warunkach stacjonarności wykorzystano do badania stateczności równowagi liniowych układów cyrkulacyjnych [6.29, 6.30]. Problem stabilności układów parametrycznych na przykładzie klasycznego równania Mathieu rozwiązuje Papastavridis [6.31] metodą bezpośrednią bazującą na zasadzie Hamiltona, choć w tym przypadku należałoby mówić o zasadzie Maupertuis, a nie o zasadzie Hamiltona, w której – jak wiadomo – czas nie podlega wariacji. W pracy Alliney i Tralliego [6.32] wykorzystując tak zwane wariacyjne sformułowanie w sensie szerszym polegające na transformacji operatora wyjściowego (a więc stosując sposób z drugiej grupy metod budowania zasad wariacyjnych) pokazano rozwiązanie problemu geometrycznie nieliniowego zachowania się wiotkiego wspornika pod działaniem obciążenia śledzącego. Gałka i Telega [6.33] wykorzystując metodę dołączania operatora sprzężonego do nieliniowego problemu sprężystości wyprowadzili dwie zasady wariacyjne, w których zarówno równanie konstytutywne jak i obciążenie mogą być niepotencjalne. W pracy tej zwrócono uwagę na to, że metoda dołączania operatora sprzężonego wydaje się być najprostszą metodą budowania funkcjonałów sprężystości, przynajmniej z teoretycznego punktu widzenia. W roku 1992 Marmo de Oliveira i Boruszewski przedstawili uogólnioną zasadę wariacyjną ważną w układach nieliniowych i niekonserwatywnych [6.34]. Praca ta jest próbą pewnego uogólnienia rozwiązań proponowanych znacznie wcześniej przez cytowanych tutaj polskich autorów Telegę i Gałkę, których dorobku w tym zakresie niestety nie uwzględniono. Zaproponowano ogólny sposób budowania funkcjonałów, których punkty stacjonarne dają równania problemu wyjściowego, równania problemu sprzężonego do pochodnej Frecheta operatora wyjściowego i równania operatorowe łączące przestrzenie sprzężone. Można powiedzieć, że jest to przykład budowy funkcjonałów zagadnień z siłami niekonserwatywnymi z zakresu trzeciej grupy przyjętej na początku klasyfika-

cji. Ostatnio Guran i Plaut wykorzystali operator sprzężony do liniowego operatora opisującego drgania elastycznego rurociągu z przepływającą cieczą do znalezienia funkcjonału wariacyjnego, który oczywiście należy do klasy złożonych zasad wariacyjnych [6.35].

Z przedstawionych wybranych pozycji literatury traktujących o formułowaniu zasad wariacyjnych problemów mechaniki z uwzględnieniem obciążeń niepotencjalnych wynika, że większość autorów podejmowała próbę rozwiązywania tego typu problemów przy użyciu złożonych zasad wariacyjnych. Taki sposób formułowania zasad wariacyjnych, choć prowadzi z reguły do zadań podwójnie rozbudowanych (punkty stacjonarności funkcjonałów dostarczają jednocześnie równań problemu i równań do nich sprzężonych), to jednak zawsze – zarówno do operatorów liniowych i nieliniowych – pozwala na konsekwentne budowanie funkcjonału (Atherton i Homsy [6.4], Gałka i Telega [6.33], Marmo de Oliveira i Boruszewski [6.34]). Choć we wspominałej już pracy Tonti stwierdza [6.6, s.357]: „Then the method of adding the adjoint equation inaugurated by Morse and Feshbach has no more reason to be used”, to jednak metoda doboru formy biliniowej, względem której operator jest potencjalny, nie znalazła szerokiego, praktycznego zastosowania. Tonti podał spójną matematycznie metodę budowania funkcjonałów każdego operatora nieliniowego bazującą na doborze tzw. „operatora całkowego” przy założeniu, że operatory te mają rozwiązania i rozwiązania te są jednoznaczne [6.9]. W stosowaniu zaproponowanego przez Tontiego podejścia pojawiają się poważne trudności związane z praktycznym doбором operatora całkowego. Jak się wydaje, trudno jest mówić o tym, że istnieje generalna metoda konstruowania tego typu operatorów, o czym wspomniano we wcześniejszej pracy Tontiego [6.8] (s.1445). Na możliwe – daleko idące – konsekwencje założenia przez Tontiego jednoznaczności rozwiązania zwracają uwagę Gałka i Telega, stwierdzając, że: „The variational method proposed by Tonti (1984) requires that a solution be unique and hence is very restrictive since in the case of non-linear elasticity uniqueness is an exception and not a rule” [6.33, s. 3–13]. Założenie przez Tontiego istnienia rozwiązania choć z punktu fizycznego wydaje się oczywiste, to jednak w pewien sposób zawęża znaczenie na tej bazie skonstruowanego funkcjonału, który w ogólniejszym ujęciu może być podstawą dowodu, że dany problem brzegowy jest rozwiązywalny (Marmo de Oliveira i Boruszewski [6.34]).

W dalszej części pracy – po pewnych uwagach wstępnych – skoncentrowano się wyłącznie na pokazaniu możliwości pakietu przekształceń symbolicznych Mathematica w identyfikacji problemów niesamosprężonych i realizacji (w tego typu zagadnieniach) wybranych etapów budowy funkcjonałów bazujących na metodzie dodawania operatora sprzężonego do pochodnej Frecheta operatora wyjściowego.

6.3. Krótki opis metody dodawania operatora sprzężonego

W punkcie tym, po krótkim – wykorzystującym dostępną literaturę przedmiotu – wprowadzeniu podstawowych pojęć, przedstawiono (w ujęciu operatorowym) idee metody dołączania operatora sprzężonego w zagadnieniach nieliniowych i niepotencjalnych.

Przyjmijmy, że N jest niekoniecznie liniowym operatorem działającym na elementy u przestrzeni U ($u \in U: D(N) \rightarrow R(N)$) mającym swoje odwzorowanie w przestrzeni V ($N(u): D(N) \rightarrow R(N)$). Przez D i R oznaczono odpowiednio dziedzinę i przeciwdziedzinę operatora N . Na przestrzeniach U i V , które są rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, określona jest niezdegenerowana forma dwuliniowa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ separująca te przestrzenie (Oden i Reddy [6.1], Mason [6.2], Reddy [6.3], Tonti [6.6, 6.9], Telega [6.25]). Załóżmy, że operator N w każdym punkcie ma pochodną Frecheta (tak zwaną słabą pochodną) $N'(u): U \rightarrow V$, która jest liniowa i ciągła ze względu na h ($h \in U, u+h \in D(N)$) (Telega [6.25], Tapia [6.36], Nashed [6.37])

$$N(u+h) - N(u) = dN[u, h] + R[u, h] \quad (6.1)$$

gdzie

$$\frac{\|R[u, h]\|_V}{\|h\|_U} \rightarrow 0, \quad \text{jeżeli} \quad \|h\|_U \rightarrow 0 \quad (6.2)$$

a często spotykanym – uzasadnionym z uwagi na wspomnianą liniowość – zapisem $dN[u, h]$, która jest różniczką Frecheta operatora N w kierunku h , jest

$$dN[u, h] = N'(u)h \quad (6.3)$$

Jak zwykle, operator sprzężony do danego operatora definiujemy korzystając z przyjętej formy dwuliniowej; operator sprzężony liniowego operatora pochodnej Frecheta $N'(u)$ oznaczamy przez $[N'(u)]^*$ i definiujemy jako

$$\langle h_2, N'(u)h_1 \rangle = \langle h_1, [N'(u)]^* h_2 \rangle \quad (6.4)$$

Jednocześnie przyjmujemy, że operator N jest potencjalny względem formy dwuliniowej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle h_2, N'(u)h_1 \rangle = \langle h_1, N'(u)h_2 \rangle \quad u \in D(N), \quad h_1, h_2 \in U \quad (6.5)$$

Warunek (6.5) Nashed nazywa warunkiem symetrii Kenera [6.37]. Jak widać, to czy operator N jest potencjalny zależy od wyboru formy biliniowej, co – jak już wspomniano – Magri [6.5], a później Telega [6.25] wykorzystali do budowania funkcjonałów operatorów liniowych i niektórych nieliniowych. Jeżeli operator N jest potencjalny względem wybranej formy dwuliniowej, to funkcjonał f ma postać (Vainberg [6.38])

$$f(u) = f(u_1) + \int_0^1 \langle u - u_1, N[u_1 + s(u - u_1)] \rangle ds \quad (6.6)$$

gdzie u_1 jest ustalonym elementem $D(N)$.

Jak widać z relacji (6.4) i (6.5), operator N jest potencjalny względem przyjętej formy dwuliniowej, jeżeli $N'(u) = [N'(u)]^*$. Cytowana wyżej książka Veinberga, przetłumaczona na język angielski w 1964 r., jest podstawą większości współczesnych sformułowań metod wariacyjnych operatorów nieliniowych.

Przyjmijmy, że problem którego zasady wariacyjnej poszukujemy, jest dany równaniem operatorowym

$$N(u) = f \quad (6.7)$$

Rozpatrzmy sytuację, w której operator N nie spełnia warunku (6.5), a więc jest operatorem niepotencjalnym (niesamosprężonym) względem wyspecyfikowanej formy dwuliniowej. Z taką sytuacją mamy do czynienia zawsze wtedy, gdy w układzie uwzględniamy istnienie sił niepotencjalnych. Zbudujemy układ sprzężonych równań operatorowych (Telega [6.25])

$$\underline{N}(X) = Y \Leftrightarrow \begin{cases} [N'(u)]^* v = g \\ N(u) = f \end{cases} \quad (6.8)$$

gdzie $Y = [g, f] \in V \otimes V$ jest dane, $X = [u, v] \in D(N) \otimes U$, a g jest tak dobrane, aby zapewnić istnienie v pod warunkiem, że u jest rozwiązaniem (6.7). Okazuje się (Finlayson [6.14], Telega [6.25, 6.26], Gałka i Telega [6.27, 6.28, 6.33]), że tak skonstruowany operator $\underline{N}$ jest potencjalny, a funkcjonał, którego punkt stacjonarności generuje oba równania układu (6.8) ma postać (Telega [6.25])

$$F[u, v] = \langle v, N(u) \rangle - \langle u, g \rangle - \langle v, f \rangle \quad (6.9)$$

Operator $\underline{N}'(X)$ spełnia warunki symetrii Kenera, jeśli istnieje druga, ciągła pochodna Frecheta operatora N oraz istnieje $[N'(u)]^*$ przy $u \in D(N)$. Należy podkreślić, że w pokazanym wyżej sposobie konstruowania operatora $\underline{N}$, który umożliwia napisanie zasady wariacyjnej (6.9), dodawane równanie w postaci operatora sprzężonego do pochodnej Frecheta operatora wyjściowego na ogół nie ma interpretacji fizycznej. Jest to pewna niedogodność tego podejścia, choć w niektórych przypadkach można się pokusić o interpretację fizyczną dołączanego równania. Na niedogodność metody łączenia problemu wyjściowego i zadania do niego sprzężonego zwrócił po raz pierwszy uwagę Schechter [6.39].

W punkcie tym pokazano jedynie szkic postępowania, które w każdym przypadku daje możliwość napisania zasady wariacyjnej nieliniowego, niepotencjalnego równania operatorowego. Nie było celem autora przedstawienie rozumowania wyczerpującego z matematycznego punktu widzenia, które można znaleźć w wielu cytowanych

pracach, lecz jedynie pokazanie elementów procesu budowania funkcjonałów, które częściowo lub w całości można tworzyć przy użyciu współczesnych narzędzi przekształceń symbolicznych. Możliwości wykonania takich operacji daje między innymi wykorzystywany w tej pracy pakiet Mathematica.

6.4. Procedury symboliczne w języku pakietu Mathematica

W złożonych problemach początkowo-brzegowych mechaniki opisywanych wieloma skomplikowanymi równaniami proces stwierdzenia, czy operator jest potencjalny czy niepotencjalny, choć z czysto formalnego, matematycznego punktu widzenia prosty, w praktyce jest jednak operacją żmudną i czasochłonną z dużą potencjalną możliwością popełniania pomyłek. Funkcja prowadzenia analitycznych operacji na dowolnie skomplikowanych wyrażeniach, którą oferuje pakiet Mathematica [6.40] pozwala w sposób wręcz natychmiastowy na wykonanie identyfikacji charakteru operatora. W punkcie tym przedstawiono: dwa warianty procedur umożliwiających obliczanie pochodnej Frecheta dowolnych układów równań różniczkowych, procedurę do generowania operatora sprzężonego oraz kilka procedur pomocniczych. Procedury te odgrywają podstawową rolę w identyfikacji potencjalności operatora, którego sformułowania wariacyjnego poszukujemy. Są one także niezbędne do stwierdzania poprawności funkcjonowania zasady wariacyjnej na podstawie analizy równań określających punkt stacjonarności zasady (6.8) i porównania ich z formalnie przeprowadzonym wyprowadzeniem operatora zadania sprzężonego. Podobnie jak w rozdziale drugim procedury nie przedstawiono w zwartej formie, co umożliwia łatwą, ewentualną ingerencję w jej strukturę czytelnikom nie programującym w systemie Mathematica.

Procedura *frechet[f_,v_,dv_]* służy do obliczania pochodnej Frecheta z dowolnej listy funkcji *f* w punkcie *v* (danym przez wyspecyfikowane funkcje) na kierunku *dv* wyznaczonym przez dane funkcje. Z uwagi na specyfikę działania programu Mathematica lista *f* (w tej wersji procedury) wymaga wcześniejszego przygotowania, polegającego na zamianie występujących w niej operatorów pochodnej (*D* albo *Derivative*) przez inny operator (oznaczony przez *dd*). Taka transformacja, którą można wykonać na wszystkich (*r*) lub wybranych (*dir*) składnikach listy (*r*) zawierających pochodne (odpowiednio procedurami *defall[r_]* i *defdir[r_,dir_]*) pozwala na swobodne przeprowadzanie operacji na funkcjach poddanych różniczkowaniu. Operacje te nie są możliwe przy zachowaniu tradycyjnej (w pakiecie Mathematica) formy zapisu elementów zawierających operatory różniczkowania (Wolfram [2.16], Maeder [2.17]). Przyjęto zasadę, że funkcje występujące w liście *f* – skracając zapis – są zapisywane z pominięciem argumentów, które jawnie specyfikuje się w listach *v* i *dv*.

```
frechet[f_,v_,dv_] := Module[{hh,ff,tt},
(*Obliczanie pochodnej Frecheta z operatora- listy (f) funkcji (v) w kierunku (dv) *)
hh = Table[Head[v[[i]]]->v[[i]]+eps*dv[[i]],{i,Length[v]}];
ff = f/.hh;dd[r_,{c_}]:=D[r,c];
```



```
tt = D[ff,eps]/.eps->0;ClearAll[dd];tt]
```

```
defall[r_]:= Module[{wyn},
(* Zamiana operatora D na dd wszystkich funkcji pod operatorem D *)
Derivative[t_][f_][var_]:= dd[f,MapThread[{#1,#2}&,
Partition[{var,t},Length[{var,t}]/2]]],wyn = r;
Clear[Derivative];wyn]

defdir[r_,dir_]:= Module[{wyn},
(* Zamiana operatora D na dd funkcji ze zbioru dir pod operatorem D *)
Derivative[t_][f_][var_]:= dd[f,MapThread[{#1,#2}&,
Partition[{var,t},Length[{var,t}]/2]]]/;
MemberQ[dir,f];wyn = r;Clear[Derivative];wyn]
```

Powrotną zamianę przyjętego oznaczenia (*dd*) operacji różniczkowania (w czterowymiarowej czasoprzestrzeni) na tradycyjną umożliwia procedura **undeffr_**.

```
undeffr_:= Module[{wyn},
(* Powrotna zamiana operatora dd na operator D – patrz: defall i defdir *)
dd[u_,v_]:= Derivative[v[[1,2]]][u]
[v[[1,1]]]/;Length[v] == 1;
dd[u_,v_]:= Derivative[v[[1,2]],v[[2,2]]][u]
[v[[1,1]],v[[2,1]]]/;Length[v] == 2;
dd[u_,v_]:= Derivative[v[[1,2]],v[[2,2]],v[[3,2]]][u]
[v[[1,1]],v[[2,1]],v[[3,1]]]/;Length[v] == 3;
dd[u_,v_]:= Derivative[v[[1,2]],v[[2,2]],v[[3,2]],
v[[4,2]]][u][v[[1,1]],v[[2,1]],v[[3,1]],
v[[4,1]]]/;Length[v] == 4;
wyn = r; dd[u_,v_] = .; wyn]
```

Alternatywą procedury **frechet[f_,v_,dv_]** jest procedura **frechet1[f_,v_,dv_]**, której efektem działania jest pochodna Frecheta z listy funkcji **f** w punkcie **v** i na kierunku **dv**, pod warunkiem, że na **f** wykonano operację *HoldForm* w celu pozostawienia **f** w formie nieprzekształconej.

```
frechet1[f_,v_,dv_]:= Module[{hh,ff,eps},
(* Obliczanie pochodnej Frecheta z operatora-listy (f)//HoldForm; funkcje (v);
kierunek (dv) *)
hh = Table[Head[v[[i]]]->v[[i]]+eps*dv[[i]],{i,Length[v]}];
ff = f/.D->dd//ReleaseHold; ff = ff/.hh/.dd->D;
D[ff,eps]/.eps->0]
```

Procedura **conjug[a_.*dd[u_,v_]]** oblicza operator formalnie sprzężony do danego, po wcześniejszej (podobnie jak w przypadku procedury **frechet[...]**) zamianie formy zapisu operatora różniczkowania. Przyjęto, że funkcje sprzężone do danych są wyróżniane przez dodanie w ich nazwie zapisu [COM] ($u[x,y] \rightarrow u[COM][x,y]$).

```

conjug[a_.*dd[u_,v_]] := Module[{aa,l,uu,pp,ppp},
(* Obliczanie operatora sprzężonego ( _)[CON][...] wyrażień postaci a_.*dd[...] *)
l = Length[v];uu = u;aa = a;
pp = uu[v[[1,1]]]/;l == 1;
pp = uu[v[[1,1]],v[[2,1]]]/;l == 2;
pp = uu[v[[1,1]],v[[2,1]],v[[3,1]]]/;l == 3;
pp = uu[v[[1,1]],v[[2,1]],v[[3,1]],v[[4,1]]]/;l == 4;
ppp = pp/.uu->uu[CON];aa = aa*ppp;
Do[aa = D[aa,{v[[i,1]],v[[i,2]]}],{i,l}];
(-1)^Sum[v[[i,2]],{i,l}]*aa]

```

Należy podkreślić, że procedura **conjug[...]** generuje operator formalnie sprzężony do danego; z uwagi na możliwą dużą różnorodność warunków brzegowych, warunki brzegowe zadania sprzężonego należy wyznaczać indywidualnie. W następnym punkcie pokazano funkcjonowanie przytoczonych procedur na przykładzie problemu Bousinesqa i belki Timoshenki pod działaniem rozłożonego, osiowego obciążenia niekonserwatywnego.

6.5. Przykłady funkcjonowania procedur symbolicznych

W punkcie tym pokazano przykładowe wyniki przebiegu trzech sesji programu Mathematica. W pierwszej z nich na elementarnym, choć nie trywialnym przykładzie zademonstrowano pełny przebieg działania przytoczonych w punkcie 6.4 procedur. W drugiej sesji pokazano analizę potencjalności równania Boussinesqa w granicznym przypadku nieskończonej liczby Prandtla (Atherton i Homsy [6.4]) oraz wyznaczono operator sprzężony do pochodnej Frecheta operatora wyjściowego. W trzecim przykładzie analizowano ogólną postać operatora równania opisującego drgania poprzeczne belki Timoshenki spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym i podanej działaniu osiowego, rozłożonego obciążenia niekonserwatywnego.

Przyjmijmy, że dana jest lista *demo*, której elementy są dobrane arbitralnie i uszeregowane w zależności od stopnia ich komplikacji. Przebieg krótkiej sesji w pakiecie Mathematica, która pokazuje funkcjonowanie przedstawionych procedur, przedstawiono w załączniku B.

Równanie Boussinesqa w granicznym przypadku nieskończonej liczby Prandtla można przedstawić w postaci

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_j \partial x_j} + r u_5 - \frac{\partial u_4}{\partial x_3} &= 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 0 \\
\frac{\partial u_5}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_5}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 u_5}{\partial x_j \partial x_j} &= 0
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Równania te można przedstawić w postaci listy *bouss*, a następnie sprawdzić, czy tworzą one układ potencjalny i wyznaczyć operator sprzężony do pochodnej Frecheta. Stosowne obliczenia symboliczne przedstawiono w załączniku B.

Jak dość łatwo zauważyć na bazie Out[8] z załącznika B, operator dany równaniami (6.10) nie jest potencjalny $N'(u) \neq [N'(u)]^*$. Przedstawione w załączniku operacje mogą być ujęte w jedną procedurę, ale tutaj zdecydowano się na ich prezentację w takiej formie, która wydaje się bardziej czytelna.

Przykładem operatora opisującego zagadnienie z siłami niekonserwatywnymi niech będzie równanie liniowych drgań poprzecznych pryzmatycznej belki Timoshenki (Bannerjee i Williams [6.41], Lee i Yang [6.42], Chung, Joo i Kim [6.43]) spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym, którego reakcja $R(x, t) = R_w w(x, t) - 2C_w w''(x, t)$. Załóżmy, że belka jest obciążona jedynie dowolnie rozłożonym niekonserwatywnym obciążeniem osiowym $p(x, t)$. Obciążenie poprzeczne $(q(x, t))$ belki generowane niekonserwatywnym zachowaniem się obciążenia $p(x, t)$ w ogólnej postaci można przedstawić jako $q(x, t) = f(p(x, t), w(x, t), \alpha(x, t))$. Przyjmując prostą postać funkcji f : $q(x, t) = \alpha(x, t)p(x, t)w'(x, t)$ i rozpatrując równowagę wyodrębnionego elementu belki dx , otrzymujemy – uwzględniając odkształcalność postaciową i bezwładność obrotową – równanie cząstkowe opisujące drgania poprzeczne belki Timoshenki

$$\begin{aligned}
&a_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + a_2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + a_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\alpha(x, t) p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\
&+ a_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\alpha(x, t) p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + a_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[P \frac{\partial w}{\partial x} \right] + a_6 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
&+ \alpha(x, t) p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + a_7 w = 0
\end{aligned} \tag{6.11}$$

gdzie przez P oznaczono siłę osiową. W równaniu tym podkreślono te (dodatkowe) człony, które wynikają z uwzględnienia niekonserwatywnego charakteru obciążenia osiowego. Przez a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 7$) oznaczono odpowiednio:

$$\begin{aligned} a_0 &= E(I + 2 C_w c), \quad a_1 = -\rho c(2 C_w + E A), \quad a_2 = \rho^2 c A, \quad a_3 = -Ec \\ a_4 &= \rho c, \quad a_5 = -(EcR_w + 2C_w), \quad a_6 = \rho(cR_w + A), \quad a_7 = R_w \end{aligned} \quad (6.12)$$

gdzie $c = \frac{I \kappa}{G A}$.

W załączniku B – wykorzystując napisane procedury symboliczne – pokazano, że operator równania (6.11) nie jest operatorem potencjalnym.

Jeżeli usuniemy podkreślone człony równania (6.11), które związane są z niekonserwatywnym charakterem obciążenia, to oczywiście operator równania okaże się operatorem samosprężonym.

Wykorzystując relację (6.9) (przy założeniu, że $f = g = 0$) w sposób elementarny można zbudować funkcjonał, którego punkt stacjonarności generuje równanie wyjściowe i dodatkowe równanie ze zmienną sprzężoną. Poprawność takiego sformułowania można łatwo sprawdzić, korzystając ze standardowego pakietu programu Mathematica (*Calculus 'VariationalMethods'*), który umożliwia – między innymi – generowanie równań Eulera–Lagrange’a danego funkcjonału (zmienną sprzężoną $dw[CON](x, t)$ oznaczono przez $v(x, t)$). Przykład takiego sprawdzenia pokazano w załączniku B.

Jak widać, równanie z Out[3] trzeciej sesji przedstawionej w załączniku B jest identyczne z tym, które otrzymano generując operator sprzężony do pochodnej Frecheta operatora równania (6.11). Tym samym otrzymany układ równań ma postać układu sprzężonych równań operatorowych (6.8).

Należy podkreślić, że tutaj dyskutowano jedynie (stosownie do uwagi na temat warunków brzegowych z punktu poprzedniego rozdziału) charakter samego operatora zagadnienia. O tym, czy dany problem początkowo-brzegowy jest potencjalny decyduje analiza zagadnienia oraz warunków początkowych i brzegowych jednocześnie. Oczywiście potencjalność operatora nie oznacza, że problem brzegowy jest potencjalny (np. klasyczne zadanie Becka (Leipholz [1.11])). Nie powoduje większych trudności analiza – przy użyciu pakietu Mathematica – konkretnie danego problemu brzegowego, zarówno w zakresie identyfikacji warunków brzegowych problemu sprzężonego jak i generacji odpowiedniego funkcjonału, choć uogólnienie tego typu postępowania na dowolne zagadnienie początkowo-brzegowe wydaje się jeszcze bardzo skomplikowane. Wygenerowany funkcjonał może stanowić podstawę stosowania różnego rodzaju metod bezpośrednich, a w szczególnym przypadku może służyć do symbolicznej generacji macierzy sztywności w sformułowaniach metody elementów skończonych. Według rozeznania autora, jest to jedna z pierwszych prób stosowania rachunku symbolicznego na tym etapie formułowania problemu. Zwykle rachunek symboliczny w szeroko pojętej inżynierii (Baltzer [6.44]) wykorzystywano do generacji macierzy sztywności w metodach elementów skończonych (np. Noor i Anderson [6.45], Kikuchi [2.14], Chang, Tan, Zheng i Yuan [6.46], Yagawa, Ye i Yoshimura [6.47], Nagabhushanam, Srinivas i Gaonkar [2.15], Ioakimidis [6.48]) bądź w rozwiązywaniu konkretnych pro-

blemów mechaniki (np. Fabunmi i Chang [6.49], Choi i Namura [6.50], Ioakimidis [6.51], Ioakimidis i Anastasselou [6.52]).

6.6. Podsumowanie

Problem budowania funkcjonałów zagadnień nieliniowych i niepotencjalnych mechaniki – jak pokazano na przykładach z literatury – ma zawsze (przynajmniej teoretycznie) rozwiązanie. Istniejące dwie metody budowania funkcjonałów tego typu zagadnień – w swych ostatecznych formach – przedstawiono w pracy Tontiego [6.9] (metoda transformacji operatora wyjściowego) i pracach Telegi [6.25] oraz Gałki i Telegi [6.27, 6.28, 6.33], a później w pracy Marmo de Oliveira i Boruszewskiego [6.34] (metoda dołączania operatora sprzężonego). Mają one zalety i wady, o których wspomniano w punkcie drugim rozdziału. Metoda dołączania operatora sprzężonego, choć przez wprowadzanie dodatkowych (pomocniczych) pól niewiadomych zwiększa rozmiar zadania, to jednak wydaje się być bardziej użyteczną w rękach nie matematyków. W rozdziale – korzystając z metody dołączania operatora sprzężonego jako podstawy formułowania zasad wariacyjnych – pokazano, jak współczesne narzędzia przekształceń symbolicznych mogą automatyzować, a niejednokrotnie w ogóle umożliwić budowanie funkcjonałów skomplikowanych zagadnień mechaniki stanowiących podstawę wszelkich metod przybliżonych. W tym celu napisano kilka krótkich procedur w języku pakietu Mathematica, które testowano na problemach mechaniki opisywanych równaniami różniczkowymi. Procedury te umożliwiają stwierdzenie ewentualnej potencjalności operatora względem przyjętej formy biliniowej, a także ułatwiają realizację wybranych, często żmudnych i czasochłonnych etapów budowania funkcjonałów i sprawdzania poprawności ich sformułowań. Podanych rozwiązań nie należy traktować jako gotowych do natychmiastowego użytku w każdych warunkach, lecz jako punkt wyjścia do własnych eksperymentów. Jest to – w rozeznaniu autora – pierwsza próba zastosowania narzędzi przekształceń symbolicznych do rozwiązywania tego typu zagadnień. Jak się wydaje, ze względu na olbrzymią różnorodność występujących w mechanice zagadnień nie jest jeszcze możliwe zbudowanie jednolitego systemu symbolicznie generującego zasady wariacyjne każdego problemu. W rozdziale tym pokazano próbę częściowego rozwiązania tego zadania przy użyciu wspomnianego narzędzia, jakim jest pakiet Mathematica.

ZAŁĄCZNIK A

Elementy korekcyjnej macierzy obciążeń danej relacją (2.10)

$$\mathbf{k}_{t1}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_z / 2 & 0 & q_z l / 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7q_z l / 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_z l^2 / 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{t2}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -q_z / 2 & 0 & -q_z l / 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3q_z l / 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_z l^2 / 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{t3}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_z / 2 & 0 & -q_z l / 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3q_z l / 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_z l^2 / 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{t4}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -q_z / 2 & 0 & q_z l / 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7q_z l / 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_z l^2 / 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementy korekcyjnej macierzy obciążeń przy stałym obciążeniu q_z i liniowo zmiennym parametrze śledzenia $\alpha(x)=e_1 x + e_2$

$$\mathbf{k}_{t1}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (2e_1 + 5e_2 q_z) / 10 & 0 & (-e_1 + 5e_2) q_z l / 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(5e_1 + 21e_2) q_z l / 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(e_1 + 3e_2) q_z l^2 / 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{t2}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(2e_1 + 5e_2) q_z / 10 & 0 & -(e_1 + 5e_2) q_z l / 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(4e_1 + 9e_2) q_z l / 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(e_1 + 2e_2) q_z l^2 / 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{t3}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (3e_1 + 5e_2) q_z / 10 & 0 & -(4e_1 + 5e_2) q_z l / 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(5e_1 + 9e_2) q_z l / 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (e_1 + 2e_2) q_z l^2 / 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{t4}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(3e_1 + 5e_2)q_z / 10 & 0 & (6e_1 + 5e_2)q_z l / 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(16e_1 + 21e_2)q_z l / 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2e_1 + 3e_2)q_z l^2 / 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy korekcyjnej obciążeń przy $q_z = q_1 x + q_2$ i $\alpha(x)=1$

$$\mathbf{k}_{t1}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_1 / 5 + q_2 / 2 & 0 & -(q_1 - 5q_2)l / 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(5q_1 + 21q_2)l / 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(q_1 + 3q_2)l^2 / 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{t2}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -q_1 / 5 - q_2 / 2 & 0 & -(q_1 + 5q_2)l / 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(4q_1 + 9q_2)l / 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(q_1 + 2q_2)l^2 / 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{t3}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3q_1 / 10 + q_2 / 2 & 0 & -(4q_1 + 5q_2)l / 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(5q_1 + 9q_2)l / 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (q_1 + 2q_2)l^2 / 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{t4}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3q_1/10 - q_2/2 & 0 & (6q_1 + 5q_2)l/60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(16q_1 + 21q_2)l/60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2q_1 + 3q_2)l^2/60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementy korekcyjnej macierzy obciążeń danej relacją (2.13)

$$\mathbf{k}_{\lambda t1}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7\lambda_{zy}^q q_z/20 & 0 & -\lambda_{zy}^q q_z l/20 & 0 \\ 0 & 0 & 7q_z/20 & 0 & -q_z l/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{\lambda t2}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda_{zy}^q q_z/20 & 0 & \lambda_{zy}^q q_z l/30 & 0 \\ 0 & 0 & 3q_z/20 & 0 & q_z l/30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{\lambda t3}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda_{zy}^q q_z/20 & 0 & -\lambda_{zy}^q q_z l/30 & 0 \\ 0 & 0 & 3q_z/20 & 0 & -q_z l/30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{\lambda t 4}^{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7\lambda_{zy}^q q_z / 20 & 0 & \lambda_{zy}^q q_z l / 20 & 0 \\ 0 & 0 & 7q_z / 20 & 0 & q_z l / 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Postacie macierzy korekcyjnych $\tilde{\mathbf{k}}_{\lambda t 1}^{nc}$, $\tilde{\mathbf{k}}_{\lambda t 2}^{nc}$, $\tilde{\mathbf{k}}_{\lambda t 3}^{nc}$ i $\tilde{\mathbf{k}}_{\lambda t 4}^{nc}$

$$\tilde{\mathbf{k}}_{\lambda t 1}^{nc} = \begin{bmatrix} q_z (3\phi_{y_i} l - 2\phi_{y_j} l + 9u_{z_i} - 9u_{z_j}) / (30 * l) & 0 \\ 0 & -(16\phi_{x_i} + 5\phi_{x_j}) q_z / 60 \\ 0 & -(16\phi_{x_i} + 5\phi_{x_j}) \lambda_{yz}^q q_z / 60 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(2\phi_{x_i} + \phi_{x_j}) q_z l / 60 \\ 0 & 0 & 0 & -(2\phi_{x_i} + \phi_{x_j}) \lambda_{yz}^q q_z l / 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\lambda i 2}^{nc} = \begin{bmatrix} q_z(-\phi_{y_i} l - \phi_{y_j} l + 12u_{z_i} - 12u_{z_j}) / (60 * l) & 0 \\ 0 & -(4\phi_{x_i} + 5\phi_{x_j})q_z / 60 \\ 0 & - (4\phi_{x_i} + 5\phi_{x_j})\lambda_{yz}^q q_z / 60 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\phi_{x_i} + \phi_{x_j})q_z l / 60 \\ 0 & 0 & 0 & (\phi_{x_i} + \phi_{x_j})\lambda_{yz}^q q_z l / 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\lambda i 3}^{nc} = \begin{bmatrix} q_z(-\phi_{y_i} l - \phi_{y_j} l + 12u_{z_i} - 12u_{z_j}) / (60 * l) & 0 \\ 0 & -(5\phi_{x_i} + 4\phi_{x_j})q_z / 60 \\ 0 & - (5\phi_{x_i} + 4\phi_{x_j})\lambda_{yz}^q q_z / 60 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\phi_{x_i} + \phi_{x_j})q_z l / 60 \\ 0 & 0 & 0 & -(\phi_{x_i} + \phi_{x_j})\lambda_{yz}^q q_z l / 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\lambda t 4}^{nc} = \begin{bmatrix} q_z \left(-2\phi_{y_i} l + 3\phi_{y_j} l + 9u_{z_i} - 9u_{z_j} \right) / (30 * l) & 0 \\ 0 & -\left(5\phi_{x_i} + 16\phi_{x_j} \right) q_z / 60 \\ 0 & -\left(5\phi_{x_i} + 16\phi_{x_j} \right) \lambda_{yz}^q q_z / 60 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\phi_{x_i} + \phi_{x_j} \right) q_z l / 60 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\phi_{x_i} + \phi_{x_j} \right) \lambda_{yz}^q q_z l / 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ZAŁĄCZNIK B

Przebieg krótkiej sesji w pakiecie Mathematica, która pokazuje funkcjonowanie przedstawionych w punkcie 6.4 procedur na przykładzie listy *demo*, której elementy dobrano arbitralnie i uszeregowano w zależności od stopnia ich komplikacji.

In[1]:=

```
demo={u^2,D[v[x,y],{x,2},{y,3}],D[u[x,y],{y,1}]*Sin[u*v]};
```

In[2]:=

```
demo1=defall[demo]
```

Out[2]:=

```
{u^2, dd[v, {{x, 2}, {y, 3}}], dd[u, {{x, 0}, {y, 1}}] Sin[u v]}
```

In[3]:=

```
res1=frechet[demo1,{u[x,y],v[x,y]},{du[x,y],dv[x,y]}]
```

Out[3]:=

```
{2 du[x, y] u[x, y], dv(2,3)[x, y], Sin[u[x, y] v[x, y]] du(0,1)[x, y] +  
Cos[u[x, y] v[x, y]]*(dv[x, y] u[x, y] + du[x, y] v[x, y]) u(0,1)[x, y]}
```

In[4]:=

```
dir={du,dv};
```

In[5]:=

```
res2=defdir[res1,dir]
```

Out[5]:=

```
{2 du[x, y] u[x, y], dd[dv, {{x, 2}, {y, 3}}],  
dd[du, {{x, 0}, {y, 1}}] Sin[u[x, y] v[x, y]] + Cos[u[x, y] v[x, y]] *  
(dv[x, y] u[x, y] + du[x, y] v[x, y]) u(0,1)[x, y]}
```

In[6]:=

```
res2/.a_.*dd[u_,v_]>:conjug[a*dd[u,v]]
```

Out[6]:=

```
{2 du[x, y] u[x, y], -(dv[CON])(2,3)[x, y], Cos[u[x, y] v[x, y]] *  
(dv[x, y] u[x, y] + du[x, y] v[x, y]) u(0,1)[x, y]- Cos[u[x, y] v[x, y]] *  
du[CON][x, y] (v[x, y] u(0,1)[x, y] + u[x, y] v(0,1)[x, y])-  
Sin[u[x, y] v[x, y]] (du[CON])(0,1)[x, y]}
```

Przebieg sesji, w której analizuje się równania Boussinesqa w granicznym przypadku nieskończonej liczby Prandtla (lista *bouss*) w zakresie sprawdzenia ich potencjalności i wyznaczania operatora sprzężonego do pochodnej Frecheta.

In[1]:=

```
bouss={ {Sum[D[u[1],{x[i],2}],{i,3}]-D[u[4],x[1]]},
{Sum[D[u[2],{x[i],2}],{i,3}]-D[u[4],x[2]]},
{Sum[D[u[3],{x[i],2}],{i,3}]-D[u[4],x[3]]+r*u[5]},
{D[u[1],x[1]]+D[u[2],x[2]]+D[u[3],x[3]]},
{Sum[u[i]*D[u[5],x[i]],{i,3}]-Sum[D[u[5],{x[i],2}],{i,3}]+D[u[5],t]} }//
```

HoldForm;

In[2]:=

```
dir={du[1][x[1],x[2],x[3],t],du[2][x[1],x[2],x[3],t],du[3][x[1],x[2],x[3],t],
du[4][x[1],x[2],x[3],t],du[5][x[1],x[2],x[3],t]};
```

In[3]:=

```
dir1={du[1],du[2],du[3],du[4],du[5]};
```

In[4]:=

```
war=Table[dir[[i]]->(dir[[i]]/.Head[dir[[i]]]->Head[dir[[i]]][CON]),
{i,Length[dir]}];
```

In[5]:=

```
res1=frechet1[bouss,{u[1][x[1],x[2],x[3],t],
u[2][x[1],x[2],x[3],t],u[3][x[1],x[2],x[3],t],
u[4][x[1],x[2],x[3],t],u[5][x[1],x[2],x[3],t]},dir]
```

Out[5]:=

```
{ {(du[1])(0,0,2,0) [x[1], x[2], x[3], t] + (du[1])(0,2,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] -
(du[4])(1,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] + (du[1])(2,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t]},
{(du[2])(0,0,2,0) [x[1], x[2], x[3], t] - (du[4])(0,1,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[2])(0,2,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] + (du[2])(2,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t]},
{r du[5][x[1], x[2], x[3], t] - (du[4])(0,0,1,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[3])(0,0,2,0) [x[1], x[2], x[3], t] + (du[3])(0,2,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[3])(2,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t]}, {(du[3])(0,0,1,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[2])(0,1,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] + (du[1])(1,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t]},
{(du[5])(0,0,0,1) [x[1], x[2], x[3], t] + u[3][x[1], x[2], x[3], t] *
(du[5])(0,0,1,0) [x[1], x[2], x[3], t] + du[3][x[1], x[2], x[3], t] *
(u[5])(0,0,1,0) [x[1], x[2], x[3], t] -
(du[5])(0,0,2,0) [x[1], x[2], x[3], t] + u[2][x[1], x[2], x[3], t] *
(du[5])(0,1,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] + du[2][x[1], x[2], x[3], t] *
(u[5])(0,1,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] - (du[5])(0,2,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
u[1][x[1], x[2], x[3], t] *(du[5])(1,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
du[1][x[1], x[2], x[3], t] *(u[5])(1,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] -
(du[5])(2,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t]} }
```

In[6]:=

```
res2=defdir[res1,dir1];
```

```

In[7]:=
res3=res2/.a_.*dd[u_,v_]:>conjug[a*dd[u,v]];
In[8]:=
res3/.war
Out[8]:=
{((du[1][CON])(0,0,2,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[1][CON])(0,2,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[4][CON])(1,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[1][CON])(2,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t]},
((du[2][CON])(0,0,2,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[4][CON])(0,1,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[2][CON])(0,2,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[2][CON])(2,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t]},
((du[4][CON])(0,0,1,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[3][CON])(0,0,2,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[3][CON])(0,2,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(du[3][CON])(2,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
r du[5][CON][x[1], x[2], x[3], t], {- (du[3][CON])(0,0,1,0) [x[1], x[2], x[3], t] -
(du[2][CON])(0,1,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] -
(du[1][CON])(1,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t]},
{-(du[5][CON])(0,0,0,1) [x[1], x[2], x[3], t] - u[3][x[1], x[2], x[3], t] *
(du[5][CON])(0,0,1,0) [x[1], x[2], x[3], t] -
(du[5][CON])(0,0,2,0) [x[1], x[2], x[3], t] -
u[2][x[1], x[2], x[3], t] * (du[5][CON])(0,1,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] -
(du[5][CON])(0,2,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] - u[1][x[1], x[2], x[3], t] *
(du[5][CON])(1,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] -
(du[5][CON])(2,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] +
(u[5])(1,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] * du[1][CON][x[1], x[2], x[3], t] +
(u[5])(0,1,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] * du[2][CON][x[1], x[2], x[3], t] +
(u[5])(0,0,1,0) [x[1], x[2], x[3], t] * du[3][CON][x[1], x[2], x[3], t] -
(u[3])(0,0,1,0) [x[1], x[2], x[3], t] * du[5][CON][x[1], x[2], x[3], t] -
(u[2])(0,1,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] * du[5][CON][x[1], x[2], x[3], t] -
(u[1])(1,0,0,0) [x[1], x[2], x[3], t] * du[5][CON][x[1], x[2], x[3], t]}

```

Analiza potencjalności operatora danego równaniem 6.11 (lista *timobeam*).

```

In[1]:=
timobeam={a0*D[w,{x,4}]+a1*D[w,{x,2},{t,2}]+
a2*D[w,{t,4}]+a3*D[alf[x,t]*q[x,t]*D[w,x],{x,2}]+
a4*D[alf[x,t]*q[x,t]*D[w,x],{t,2}]+a5*D[w,{x,2}]+
D[n[x,t]*D[w,x],x]+a6*D[w,{t,2}]+
alf[x,t]*q[x,t]*D[w,x]+a7*w==0} //HoldForm;

```

```

In[2]:=
dir={dw[x,t]};

```

In[3]:=

res1=Frechet1[timobeam,{w[x,t]},{dw[x,t]}];

In[4]:=

res2=DefDir[res1,{dw}];

In[5]:=

res3=res2/.a_.*dd[u_,v_]>Conjug[a*dd[u,v]];

In[6]:=

war=Table[Dir[[i]]->(Dir[[i]]/.Head[Dir[[i]]]->
Head[Dir[[i]]][CON]),{i,Length[Dir]}];

In[7]:=

res3/.war

Out[7]:=

$$\{a7*dw[CON][x,t] + a6*(dw[CON])^{(0,2)}[x,t] + a2*(dw[CON])^{(0,4)}[x,t] -$$
$$q[x,t]*dw[CON][x,t]*alf^{(1,0)}[x,t] - alf[x,t]*dw[CON][x,t]*q^{(1,0)}[x,t] -$$
$$alf[x,t]*q[x,t]*(dw[CON])^{(1,0)}[x,t] + n^{(1,0)}[x,t]*(dw[CON])^{(1,0)}[x,t] +$$
$$a4*(-(q[x,t]*(dw[CON])^{(0,2)}[x,t]*alf^{(1,0)}[x,t]) - alf[x,t]*$$
$$(dw[CON])^{(0,2)}[x,t]*q^{(1,0)}[x,t] - alf[x,t]*q[x,t]*(dw[CON])^{(1,2)}[x,t]) +$$
$$a5*(dw[CON])^{(2,0)}[x,t] + n[x,t]*(dw[CON])^{(2,0)}[x,t] +$$
$$a1*(dw[CON])^{(2,2)}[x,t] + a3*(-(q[x,t]*alf^{(1,0)}[x,t]*(dw[CON])^{(2,0)}[x,t]) -$$
$$alf[x,t]*q^{(1,0)}[x,t]*(dw[CON])^{(2,0)}[x,t] - alf[x,t]*q[x,t]*$$
$$(dw[CON])^{(3,0)}[x,t]) + a0*(dw[CON])^{(4,0)}[x,t] == 0\}$$

Sprawdzenie poprawności generowania operatora sprzężonego przy użyciu standardowych pakietów pakietu Mathematica.

In[1]:=

<<Calculus`VariationalMethods`

In[2]:=

timeq=EulerEquations[v[x,t]*(a0*D[w[x,t],{x,4}]+a1*D[w[x,t],{x,2},{t,2}]+
a2*D[w[x,t],{t,4}]+a3*D[alf[x,t]*q[x,t]*D[w[x,t],x],{x,2}]+
a4*D[alf[x,t]*q[x,t]*D[w[x,t],x],{t,2}]+a5*D[w[x,t],{x,2}]+
D[n[x,t]*D[w[x,t],x],x]+a6*D[w[x,t],{t,2}]+
alf[x,t]*q[x,t]*D[w[x,t],x]+a7*w[x,t]),{w[x,t],v[x,t]},{x,t}];

In[3]:=

timeq[[1]]

Out[3]:=

$$a7*v[x,t] + a6*v^{(0,2)}[x,t] + a2*v^{(0,4)}[x,t] - q[x,t]*v[x,t]*alf^{(1,0)}[x,t] -$$
$$a4*q[x,t]*v^{(0,2)}[x,t]*alf^{(1,0)}[x,t] - alf[x,t]*v[x,t]*q^{(1,0)}[x,t] -$$
$$a4*alf[x,t]*v^{(0,2)}[x,t]*q^{(1,0)}[x,t] - alf[x,t]*q[x,t]*v^{(1,0)}[x,t] +$$
$$n^{(1,0)}[x,t]*v^{(1,0)}[x,t] - a4*alf[x,t]*q[x,t]*v^{(1,2)}[x,t] +$$
$$a5*v^{(2,0)}[x,t] + n[x,t]*v^{(2,0)}[x,t] - a3*q[x,t]*alf^{(1,0)}[x,t]*v^{(2,0)}[x,t] -$$
$$a3*alf[x,t]*q^{(1,0)}[x,t]*v^{(2,0)}[x,t] + a1*v^{(2,2)}[x,t] -$$
$$a3*alf[x,t]*q[x,t]*v^{(3,0)}[x,t] + a0*v^{(4,0)}[x,t] == 0$$

LITERATURA

Rozdział 1

- [1.1] NICOLAI E. I., *Ob ustojčivosti priamolinejnoj formy ravnovesia szatogo i skručennogo steržnia*, Izv. Leningrad. Politech. Instituta 31, Leningrad 1928.
- [1.2] NICOLAI E. I., *K voprosu ob ustojčivosti skručennogo steržnia*, Vesti Prikl. Matem. Mech. 1, 1929.
- [1.3] ZIEGLER H., *Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik*, Ing. Archiv, 20, 1, 49–56, 1952.
- [1.4] ZIEGLER H., *On the concept of elastic stability*, Adv. Appl. Mech., 4, 351–403, 1956.
- [1.5] BOLOTIN V.V., *Nonconservative problems in the theory of elastic stability*, New York, Pergamon Press, 1963.
- [1.6] LEIPHOLZ H. H. E., *Über die Konvergenz des Galerkinschen Verfahrens auf nichtkonservative Stabilitätsproblemen des elastischen Stabes*, Z. Angew. Math. Phys. 13, 4, 359–372, 1962.
- [1.7] LEIPHOLZ H. H. E., *Über das statische Kriterium bei nichtkonservativen Stabilitätsproblemen des Elastomechanik*, Ing. Archiv 32, 3, 214–220, 1963.
- [1.8] LEIPHOLZ H. H. E., *On conservative elastic systems of the first and second kind*, Ing. Archiv 43, 5, 255–271, 1974.
- [1.9] LEIPHOLZ H. H. E., *Variational principles for non-conservative problems*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 17/18, 609–617, 1979.
- [1.10] LEIPHOLZ H. H. E., *On time invariant functional for certain mechanical systems subject to follower forces*, Hadronic J. 3, 3, 962–1017, 1980.
- [1.11] LEIPHOLZ H. H. E., *Stability theory. An introduction to the stability of dynamic systems and rigid bodies*, Stuttgart, John Wiley and Sons, 1987.
- [1.12] HERRMANN G., JONG I.C., *On nonconservative stability problems of elastic systems with slight damping*, J. Appl. Mech. 33, 1, 125–133, 1966.
- [1.13] DOWELL E.H., *Non-linear oscillation of a fluttering plate*, AIAA J. 4, 7, 1267–1275, 1966.
- [1.14] LEVINSON M., *Application of the Galerkin and Ritz methods to non-conservative problems of elastic stability*, Z. Angew. Math. Phys. 17, 3, 431–442, 1966.
- [1.15] HERRMANN G., *Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces*, Appl. Mech. Rev. 20, 2, 103–108, 1967.
- [1.16] ROORDA J., NEMAT-NASSER S., *An energy method for stability analysis of nonlinear, non-conservative systems*, AIAA J. 5, 7, 1263–1268, 1967.
- [1.17] BARSOUM R.S., *Finite element method applied to the problem of stability of a non-conservative system*, Int. J. Num. Meths. Engng 3, 1, 63–87, 1971.
- [1.18] PLAUT R.H., *Determining the nature of instability in nonconservative problems*, AIAA J. 10, 967–968, 1972.

- [1.19] GAJEWSKI A., ŻYCZKOWSKI M., *Wpływ jednoczesnego niejednorodnego tarcia wewnętrznego i zewnętrznego na stateczność układów niekonserwatywnych*, Mech. Teor. Stos. 10, 1, 127–142, 1972.
- [1.20] GAJEWSKI A., *On the destabilizing effect in a non-conservative system with slight internal and external damping*, Proc. Vibr. Problems 13, 2, 187–198, 1972.
- [1.21] KIKUCHI F., *A finite element method for non-self-adjoint problems*, Int. J. Num. Meths. Engn. 6, 1, 39–54, 1973.
- [1.22] HAUGER W., *Stability of compressible rod subjected to nonconservative forces*, J. Appl. Mech. 42, 4, 887–888, 1975.
- [1.23] ŻYCZKOWSKI M., *Stability of elastic structures. Part III*, ed. by Leipholz H. H. E., Wien–New York, Springer-Verlag, 1978.
- [1.24] HUSEYIN K., PLAUT R.H., *The elastic stability of two-parameter nonconservative systems*, J. Appl. Mech. 40, 1, 175–180, 1979.
- [1.25] ARGYRIS J.H., SYMEONIDIS SP., *Nonlinear finite analysis of elastic systems under nonconservative loading – natural formulation. Part I. Quasistatic problems*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 26, 1, 75–123, 1981.
- [1.26] KOUNADIS A.N., *The existence of regions of divergence instability for nonconservative systems under follower forces*, Int. J. Solids Struct. 19, 8, 725–733, 1983.
- [1.27] BOGACZ R., MAHREHOLTZ O., *Multi-modal analysis of critical forces on tangentially loaded structures*, ZAMM 64, 4, T34–T36, 1984.
- [1.28] BOGACZ R., MAHREHOLTZ O., *On limiting cycles of inelastic structures under circulatory load*, ZAMM 65, 4, T32–T34, 1985.
- [1.29] BOGACZ R., JANISZEWSKI R., *Zagadnienia analizy i syntezy kolumn obciążonych siłami śledzącymi ze względu na stateczność*, Prace IPPT PAN 6, Warszawa 1986.
- [1.30] ELISHAKOFF I., *Random vibration of structures: A personal perspective*, Appl. Mech. Rev. 48, 809–825, 1995.
- [1.31] KOITER W. T., *Unrealistic follower forces*, J. Sound Vibr. 194, 4, 636, 1996.
- [1.32] WILLEMS N., *Experimental verification of the dynamic stability of a tangentially loaded cantilever column*, J. Appl. Mech. 88, 460–461, 1966.
- [1.33] BECK M., *Die Knicklast des einseitig angespannten, tangential gedrückten Stabes*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik 3, 225–228, 1952.
- [1.34] HUANG N. C., NACHBAR W. and NEMAT-NASSER S., *On Willems' experimental verification of the critical load in Beck's problem*, J. Appl. Mech. 89, 243–245, 1967.
- [1.35] XIONG Y., WANG T. K. and TABARROK B., *A dynamic method for measuring the critical load of a non-conservative composite column*, Dynamics and Stability of Systems 5, 183–190, 1990.

Rozdział 2

- [2.1] BATHE K. J., RAMM E., WILSON E. L., *Finite element formulations for large deformation dynamic analysis*, Int. J. Num. Meths. Engng 9, 353–386, 1975.
- [2.2] HORRIGMOE G., BERGAN P. G., *Incremental variational principles and finite element models for nonlinear problems*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 7, 201–217, 1976.
- [2.3] KLEIBER M., *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, Warszawa-Poznań, PWN, 1985.
- [2.4] KLEIBER M., WOŹNIAK CZ., *Nonlinear mechanics of structures*, Warszawa, PWN, 1991.
- [2.5] ARGYRIS J.H., SYMEONIDIS SP., *A sequel to: Nonlinear finite analysis of elastic systems under nonconservative loading – natural formulation. Part I. Quasistatic problems*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 26, 1, 377–383, 1981.

- [2.6] ARGYRIS J. H., STRAUB K., SYMEONIDIS SP., *Nonlinear finite analysis of elastic systems under nonconservative loading – natural formulation, Part II Dynamic problems*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 28, 241–258, 1981.
- [2.7] WASHIZU K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd. ed., Oxford, Pergamon Press, 1975.
- 2.8] PRZEMIENIECKI S., *Theory of matrix structural analysis*, New York, McGraw-Hill, 1968.
- [2.9] BATHE K. J., WILSON E. L., *Numerical methods in finite element analysis*, New Jersey, Prentice-Hall, 1976.
- [2.10] MANG H. A., *Symmetricability of pressure stiffness matrices for shells with loaded free edges*, Int. J. Num. Meths. Engng 15, 981–990, 1980.
- [2.11] LUFF R. W., ROESSET J. M., CONNOR J. J., *Automatic generation of finite element matrices*, J. Struct. Div. ASCE 97, 349–362, 1971.
- [2.12] CECCHI M. M., LAMI C., *Automatic generation of stiffness matrices for finite element analysis*, Int. J. Num. Meths. Engng 11, 369–400, 1977.
- [2.13] KORNCOFF A. R., FENVES S. J., *Symbolic generation of finite element stiffness matrices*, Comput. Struct. 10, 119–124, 1979.
- [2.14] KIKUCHI M., *Application of symbolic mathematics system to the finite element program. Evaluation of the stiffness matrix of a 4-nodes isoparametric element*, Comput. Mech. 5, 41–47, 1989.
- [2.15] NAGABHUSHANAM J., SRINIVAS C. J. and GAONKAR G. H., *Symbolic generation of elemental matrices for finite element analysis*, Comput. Struct. 42, 375–380, 1992.
- [2.16] WOLFRAM S., *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*, 2nd ed., Redwood City, Addison-Wesley, 1991.
- [2.17] MAEDER R., *Programming in Mathematica*, 2nd ed., Redwood City, Addison-Wesley, 1991.
- [2.18] BAŽANT Z., EL NIMEIRI M., *Large-deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames*, J. Eng. Mech. Div. 90, EM6, 1259–1281, 1973.
- [2.19] GLABISZ W., *The influence of second order values in the numeric analysis of bar-structures apt to snap-through*, Third Int. Conference on Space Structures, Guildford, 457–461, 1984.
- [2.20] TIMOSHENKO S. P., GERE J. M., *Teoria stateczności sprężystej*, Warszawa, Arkady, 1963.
- [2.21] SAJE M., SRPČIĆ S., *Large deformations of in-plane beam*, Int. J. Solids Struct. 21, 12, 1181–1196, 1985.
- [2.22] LACHADANOW B. M., *On stabilization of potential systems*, Prikl. Mat. and Mech. 39, 1, 53–58, 1975.
- [2.23] SINGH S. N., *On stabilization of nonlinear Hamiltonian systems and nonconservative systems in elasticity*, Proc. 20th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adoptive Processes, San Diego, Calif., USA, 1, 290–295, 1981.
- [2.24] KRASINSKAJA E. M., *On the stabilization of steady-state motions of mechanical systems*, Prikl. Mat. and Mech. 47, 2, 300–303, 1983.
- [2.25] GLABISZ W., *O stabilizującym działaniu obciążeń niepotencjalnych w analizie stateczności układów prętowych*, Arch. Inż. Łąd. 37, 2, 151–164, 1991.
- [2.26] GLABISZ W., *Formulation of the finite element method for a certain class of nonlinear problems and nonconservative loading*, Arch. Civ. Engng 39, 1, 29–49, 1993.

Rozdział 3

- [3.1] CHU F. H., PILKEY W.D., *Transient analysis of structural members by CSDT Riccati transfer matrix*, Comput. Struct. 10, 599–611, 1979.
- [3.2] CHANG J. Y., LIU W. H., *Some studies on the natural frequencies of immersed restrained column*, J. Sound Vibr. 130, 516–524, 1989.

- [3.3] LIN S. Q., BAPAT C. N., *Free and forced vibration of a beam supported at many locations*, J. Sound Vibr. 142, 343–354, 1990.
- [3.4] GALLAGHER R. H., LEE C. H., *Static dynamic and stability analysis with non-uniform elements*, Int. J. Num. Meths. Engng 2, 265–275, 1970.
- [3.5] THAMBIRATNAM D., ZHUGE Y., *Free vibration analysis of beams on elastic foundation*, Comput. Struct. 60, 971–980, 1996.
- [3.6] LIABLE J. P., *Structural analysis*, New York, CBS College Publishing, 1985.
- [3.7] ALVAREZ S., LAURA P. A. A., *Fundamental frequency of an elastically restrained beam with discontinuous moment of inertia and an intermediate support*, J. Sound Vibr. 86, 285–287, 1983.
- [3.8] De ROSA M. A., FRANCIOSI C., *The optimized Rayleigh method and Mathematica in vibrations and buckling problems*, J. Sound Vibr. 191, 795–808, 1996.
- [3.9] MITTENDORF S. C., GRIEF R., *Vibration of segmented beams by a Fourier component method*, J. Sound Vibr. 55, 431–441, 1977.
- [3.10] EISENBERGER M., *Explicit stiffness matrices for non-prismatic members*, Comput. Struct. 4, 715–720, 1985.
- [3.11] BANERJEE J. R., WILLIAMS R. W., *Exact Bernoulli-Euler dynamic stiffness matrix for a range of tapered beams*, Int. J. Num. Meths. Engng 21, 2289–2302, 1986.
- [3.12] ELISHAKOFF I., PELLEGRINI F., *Application of Bessel and Lommel functions, and the undetermined multiplier Galerkin method version, for instability of non-uniform column*, J. Sound Vibr. 115, 182–186, 1987.
- [3.13] SEN YUNG LEE, HUEI YAW KE, YEE HSIUNG KUO, *Exact static deflection of a non-uniform Bernoulli-Euler beam with general elastic end restraints*, Comput. Struct. 36, 91–97, 1990.
- [3.14] EISENBERGER M., REICH Y., *Static, vibration and stability analysis of non-uniform beams*, Comput. Struct. 31, 567–573, 1989.
- [3.15] EISENBERGER M., *Exact static and dynamic stiffness matrices for general variable cross section members*, AIAA J. 28, 1105–1109, 1990.
- [3.16] DE ROSA M. A., AUCIELLO N. M., *Free vibrations of tapered beams with flexible ends*, Comput. Struct. 60, 197–202, 1996.
- [3.17] JANG S. K., BERT C. W., *Free vibration of stepped beams: exact and numerical solutions*, J. Sound Vibr. 130, 342–346, 1989.
- [3.18] WANG J., *Vibration of stepped beams on elastic foundations*, J. Sound Vibr. 149, 315–322, 1991.
- [3.19] GAST R. G., SNECK H. J., *Modal analysis of non-prismatic beams: uniform segments method*, J. Sound Vibr. 149, 489–494, 1991.
- [3.20] IRIE T., YAMADA G., TAKAHASHI I., *Determination of the steady state response of a Timoshenko beam of varying cross-section by use of the spline interpolation techniques*, J. Sound Vibr. 63, 287–295, 1979.
- [3.21] TO C. W. S., *A linearly tapered beam finite element incorporating shear deformation and rotary inertia for vibration analysis*, J. Sound Vibr. 78, 475–484, 1981.
- [3.22] CLEGHORN W. L., TABARROK B., *Finite element formulation of a tapered Timoshenko beam for free lateral vibration analysis*, J. Sound Vibr. 152, 461–470, 1992.
- [3.23] GUTIERREZ R. H., LAURA P. A. A., ROSSI R. E., *Fundamental frequency of vibration of a Timoshenko beam of non-uniform thickness*, J. Sound Vibr. 145, 341–344, 1991.
- [3.24] CHEHIL D. S., JATEGAONKAR R., *Determination of natural frequencies of a beam with varying section properties*, J. Sound Vibr. 115, 423–436, 1987.
- [3.25] JATEGAONKAR R., CHEHIL D. S., *Natural frequencies of a beam with varying section properties*, J. Sound Vibr. 133, 303–322, 1989.
- [3.26] LEE S. Y., LIN S. M., *Exact vibration solutions for nonuniform Timoshenko beam with attachments*, AIAA J. 30, 2930–2934, 1992.

- [3.27] LEUNG A. Y. T., ZHOU W. E., *Dynamic stiffness analysis of axially loaded non-uniform Timoshenko columns*, Comput. Struct. 56, 577–588, 1995.
- [3.28] TONG X., TABARROK B., YEN K. Y., *Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section*, J. Sound Vibr. 186, 821–835, 1995.
- [3.29] MASSEY C., VAN DER MEEN A. T., *Errata on stability of non-prismatic cantilever columns under tangential loadings*, J Appl. Mech. 38, 269–271, 1971.
- [3.30] SANKARAN G. V., VENKATESWARA RAO G., *Stability of tapered cantilever columns subjected to follower forces*, Comput. Struct. 6, 217–220, 1976.
- [3.31] ELISHAKOFF I., COUCH B., *Nonuniform Leipholz's column on elastic foundation – instability study by symbolic algebra*, Solid Mech. Arch. 12, 379–389, 1987.
- [3.32] ELISHAKOFF I., PELLEGRINI F., *Exact and effective approximate solutions of some divergence-type non-conservative problems*, J. Sound Vibr. 114, 143–147, 1987.
- [3.33] NAGESWARA RAO B., VENKATESWARA RAO G., *Stability of tapered cantilever columns subjected to a tip-concentrated follower force with or without damping*, Comput. Struct. 37, 333–342, 1990.
- [3.34] LEE S. Y., KUO Y. H., *Elastic stability of non-uniform columns*, J. Sound Vibr. 148, 11–24, 1991.
- [3.35] GHANI RAZAQPUR A., SHAH K. R., *Exact analysis of beams on two-parameter elastic foundations*, Int. J. Solids Struct. 27, 435–454, 1991.
- [3.36] LEIPHOLZ H. H. E., MADAN O. P., *On the solution of the stability problem of elastic rods subjected to uniformly distributed, tangential follower forces*, Ing. Archiv 44, 347–357, 1975.
- [3.37] HAUER W., *Die knicklasten elastischer stäbe unter gleichmäßig verteilten und linear veränderlichen, tangentialen drucklasten*, Ing. Archiv 35, 221–229, 1966.
- [3.38] ELISHAKOFF I., PELLEGRINI F., *Exact solutions for buckling of some divergence-type non-conservative systems in terms of Bessel and Lommel functions*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 66, 107–119, 1988.
- [3.39] SMITH E. T., HERRMANN G., *Stability of a beam on an elastic foundation subjected to a follower force*, J. Appl. Mech. 39, 628–629, 1972.
- [3.40] ELISHAKOFF I., WANG X., *Generalization of Smith-Herrmann problem with the aid of computerized symbolic algebra*, J. Sound Vibr. 117, 537–542, 1987.
- [3.41] ERCOLI L., LAURA P. A. A., *Analytical and experimental investigation on continuous beams carrying elastically mounted masses*, J. Sound Vibr. 114, 519–533, 1987.
- [3.42] GLABISZ W., *Stability of non-prismatic rods subjected to non-conservative loads*, Comput. Struct. 46, 479–486, 1993.

Rozdział 4

- [4.1] HAMILTON W. R., *On a general method in dynamics; by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation or characteristic function*, Phil. Trans. Royal Soc. Part II, 247–308, 1834.
- [4.2] HAMILTON R. W., *Second essay on general method in dynamics*, Phil. Trans. Royal Soc. Part I, 95–144, 1835.
- [4.3] LAPUNOV A. M., *Lekcii po teoretičeskoj mechanike*, Kiev, Naukova Dumka, 1982.
- [4.4] SUSŁOW G. K., *Mechanika teoretyczna*, Warszawa, PWN, 1960.
- [4.5] BANACH S., *Mechanika*, Warszawa, PWN, 1956.
- [4.6] HUBER M. T., *Mechanika ogólna i techniczna*, Warszawa, PWN, 1956.
- [4.7] RUBINOWICZ W., KRÓLIKOWSKI W., *Mechanika teoretyczna*, Warszawa, PWN, 1980.
- [4.8] YOURGRAU W., MANDELSTAM S., *Variational principles in dynamics and quantum theory*, Philadelphia, W. B. Saunders Comp., 1968.

- [4.9] BAILEY C. D., *A new look at Hamilton's principle*, Found. of Physics, 5, 3, 433–451, 1975.
- [4.10] GUTOWSKI R., SWIETLICKI W. A., *Dynamika i drgania układów mechanicznych*, Warszawa, PWN, 1986.
- [4.11] SIMKINS T. E., *Replay by author to C. D. Bailey*, AIAA J. 15, 5, 542–543, 1979.
- [4.12] GOLDSTEIN H. H., *A History of the Calculus of Variations from the 17th Through the 19th Century*, New York, Springer Verlag, 1980.
- [4.13] GUTOWSKI R., *Mechanika analityczna*, Warszawa, PWN, 1971.
- [4.14] BIAŁKOWSKI G., *Mechanika klasyczna. Mechanika punktu materialnego i bryły sztywnej*, Warszawa, PWN, 1975.
- [4.15] GELFAND I. M., FOMIN S. V., *Rachunek wariacyjny*, Warszawa, PWN, 1975.
- [4.16] SMITH D. R., SMITH C. V., *When is "Hamilton's principle an extremum principle?"*, AIAA J. 12, 1573–1576, 1974.
- [4.17] BAILEY C. D., *On more precise statement of Hamilton's principle*, Found. of Physics, 11, 3/4, 279–296, 1981.
- [4.18] GOLDSTEIN H. H., *Classical mechanics*, Cambridge, Addison-Wesley, 1950.
- [4.19] BAILEY C. D., *Application of Hamilton's law of varying action*, AIAA J. 13, 1154–1157, 1975.
- [4.20] BRYSON A. E., *Comment on "Application of Hamilton's law of varying action"*, AIAA J. 14, 1340–1341, 1976.
- [4.21] BAILEY C. D., *Hamilton, Ritz, and elastodynamics*, J. Appl. Mech. 43, 4, 684–688, 1976.
- [4.22] SMITH C. V., *Discussion: Hamilton, Ritz, and elastodynamics*, J. Appl. Mech. 44, 4, 796, 1977.
- [4.23] BAILEY C. D., *Exact and direct analytical solutions to vibrating systems with discontinuities*, J. Sound Vibr. 44, 1, 15–25, 1976.
- [4.24] SMITH C. V., *Comment on "Exact and direct analytical solutions to vibrating systems with discontinuities"*, J. Sound Vibr. 54, 3, 454–455, 1977.
- [4.25] SIMKINS T. E., *Unconstrained variational statements for initial and boundary-value problems*, AIAA J. 16, 6, 559–563, 1978.
- [4.26] BAILEY C. D., *Comment on "Unconstrained variational statements for initial and boundary-value problems"*, AIAA J. 17, 5, 541–542, 1979.
- [4.27] BAILEY C. D., *Author's replay*, J. Sound Vibr. 54, 3, 455–459, 1977.
- [4.28] VUJANOVIC B., *A variational principle for non-conservative dynamical systems*, ZAMM 55, 321–331, 1975.
- [4.29] BAILEY C. D., *The Galerkin formulation and the Hamilton-Ritz formulation: a comparison*, Acta Mech. 36, 63–70, 1980.
- [4.30] BAILEY C. D., *The method of Ritz applied to the equation of Hamilton*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 7, 235–247, 1976.
- [4.31] MIKHLIN S. G., *Variational methods in mathematical physics*, Oxford, Pergamon Press, 1964.
- [4.32] LEIPHOLZ H. H. E., *On the application of the direct method to initial value problems*, Acta Mech. 58, 3–4, 239–249, 1986.
- [4.33] BAILEY C. D., HAINES J. L., *Vibration and stability of non-conservative follower force systems*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 26, 1–31, 1981.
- [4.34] BISPLINGHOFF R. L., ASHLEY H., *Principles of aeroplasticity*, New York, John Wiley, 1962.
- [4.35] LEIPHOLZ H. H. E., *On some developments in direct methods of the calculus of variations*, Appl. Mech. Rev. 40, 10, 1379–1392, 1987.
- [4.36] LEIPHOLZ H. H. E., *On direct methods in the calculus of variations*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 37, 57–78, 1983.
- [4.37] LEIPHOLZ H. H. E., *On extended variational principles*, Proc. of 2nd Int. Conf. on Variational Meths. in Engr. 1–21, Berlin, Springer-Verlag, 1985.

- [4.38] HERRMANN G., BUNGAY R. W., *On the stability of elastic systems subjected to nonconservative forces*, J. Appl. Mech. 31, 435–440, 1964.
- [4.39] JIN J. D., MATSUZAKI Y., *Bifurcation in a two-degree-of-freedom elastic system with follower forces*, J. Sound Vibr. 126, 265–277, 1988.
- [4.40] KOUNADIS A. N., *Some new instability aspects for nonconservative systems under follower loads*, Int. J. Mech. Sci. 33, 297–311, 1991.
- [4.41] KOUNADIS A. N., *On the reliability of postbuckling analysis for nonconservative imperfect systems*, Arch. Mech. 43, 95–105, 1991.
- [4.42] KOUNADIS A. N., *On the paradox of the destabilizing effect of damping in non-conservative systems*, Int. J. Non-Linear Mech. 27, 597–609, 1992.
- [4.43] KOUNADIS A. N., AVRAAM T., MALLIS J., *On the reliability of classical divergence instability analysis of Ziegler's nonconservative model*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 95, 317–330, 1992.
- [4.44] JIN J. D., MATSUZAKI Y., *Bifurcation analysis of double pendulum with a follower force*, J. Sound Vibr. 154, 191–204, 1992.
- [4.45] MOON F. C., *Chaotic vibrations*, New York, John Wiley, 1987.
- [4.46] DOWELL E., *Chaotic oscillations in mechanical systems*, Comput. Struct. 30, 171–184, 1988.
- [4.47] GLABISZ W., *The role of Hamilton's law and Hamilton's principle on the analysis of nonconservative systems*, Arch. Civ. Engng 39, 3, 255–273, 1993.
- [4.48] GLABISZ W., *Application of Hamilton's law to the stability analysis of a double pendulum under nonconservative loads*, Comput. Struct. 53, 1, 143–153, 1994.

Rozdział 5

- [5.1] LINDH K. G., LIKINS P. W., *Infinite determinant methods for stability analysis of periodic-coefficient differential equations*, AIAA J. 8, 680–686, 1970.
- [5.2] HSU C. S., *Impulsive parametric excitation: theory*, J. appl. Mech. 96, 551–558, 1972.
- [5.3] HSU C. S., CHENG W. H., *Steady-state response of a dynamical system under combined parametric and forcing excitations*, J. appl. Mech. 98, 371–378, 1974.
- [5.4] FRIEDMANN P., HAMMOND C. E., WOO T. H., *Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems*, Int. J. Numer. Meths. Engng 11, 1117–1136, 1977.
- [5.5] LAU S. L., CHEUNG Y. K., WOO S. Y., *A variable parameter incrementation method for dynamic instability of linear and nonlinear elastic systems*, J. Appl. Mech. 49, 849–853, 1982.
- [5.6] HUANG J. S., HUNG L. H., *Dynamic stability for a simple supported beam under periodic axial excitation*, Int. J. Non-Linear Mech. 19, 287–301, 1984.
- [5.7] LEE T. T., TSAY S. C., *Analysis of linear time-varying systems and bilinear systems via shifted Chebyshev polynomials of the second kind*, Int. J. Systems Sci. 17, 1757–1766, 1986.
- [5.8] SLEEMAN B. D., SMITH P. D., *Double periodic Floquet theory for a second order system of ordinary differential equations*, Quart. J. Math. Oxford 37, 347–356, 1986.
- [5.9] KONDAU T., TAMURA H., SUEOKA A., *On a method of higher approximation and determination of stability criterion for steady oscillations in nonlinear systems*, Bull. JSME 29, 525–532, 1986.
- [5.10] HASSAN H. S., *Floquet solutions of non-linear ordinary differential equations*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 106A, 267–275, 1987.
- [5.11] SINHA S. C., WU D. H., *An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems*, J. Sound Vibr. 151, 91–117, 1991.
- [5.12] J. P. MEIJAARD, *Direct determination of periodic solutions of the dynamical equations of flexible mechanisms and manipulators*, Int. J. Numer. Meths. Engng 32, 1691–1710, 1991.

- [5.13] DŻYGADŁO Z., SOLARZ L., *On nonautonomous vibrations of self-excited system with tangential force*, Proc. Vibr. Problem 11, 2, 1970.
- [5.14] KOTERA T., *Regions of instability of vibrations of columns subjected to periodic axial force*, Bull. JSME 28, 2056–2063, 1985.
- [5.15] KAR R. C., SUJATA T., *Parametric instability of an elastically restrained cantilever beam*, Comput. Struct. 34, 469–475, 1990.
- [5.16] KAR R. C., SUJATA T., *Stability boundaries of a rotating cantilever beam with end mass under a transverse follower excitation*, J. Sound Vibr. 154, 81–93, 1992.
- [5.17] WIGGINS S., *Global Bifurcation and Chaos: Analytical Methods*, New York, Springer-Verlag, 1991.
- [5.18] C. S. HSU, *A theory of cell-to-cell mapping dynamical systems*, J. Appl. Mech. 47, 931–939, 1980.
- [5.19] HSU C. S., GUTTALU R. S., *An unravelling algorithm for global analysis of dynamical systems: an application of cell-to-cell mappings*, J. Appl. Mech. 47, 940–948, 1980.
- [5.20] HSU C. S., *A generalised theory of cell-to-cell mapping for nonlinear dynamical systems*, J. Appl. Mech. 48, 634–642, 1981.
- [5.21] HSU C. S., GUTTALU R. S., ZHU W. H., *A method of analysing generalised cell mappings*, J. Appl. Mech. 49, 885–894, 1982.
- [5.22] HSU C. S., *A probabilistic theory of nonlinear dynamical systems based on the cell state space concept*, J. Appl. Mech. 49, 895–902, 1982.
- [5.23] TONGUE B. H., *On the global analysis of nonlinear systems through interpolated cell mapping*, Physica D 28, 401–408, 1987.
- [5.24] TONGUE B. H., GU K., *Interpolated cell mapping of dynamical systems*, J. Appl. Mech. 55, 461–466, 1988.
- [5.25] TONGUE B. H., SMITH D., *Determining Lyapunov exponents by means of interpolated mapping*, J. Appl. Mech. 56, 691–696, 1989.
- [5.26] HSU C. S., *Cell-to-cell Mapping*, New York, Springer-Verlag, 1987.
- [5.27] FLASHNER H., HSU C. S., *A study of nonlinear periodic systems via the point mapping method*, Int. J. Numer. Meths. Engng 19, 185–215, 1983.
- [5.28] GUTTALU R. S., HSU C. S., *A global analysis of a non-linear system under parametric excitation*, J. Sound Vibr. 97, 399–427, 1984.
- [5.29] JIANXUE XU, GUTTALU R. S., HSU C. S., *Domains of attraction for multiple limit cycles of coupled van der Pol equations by simple cell mapping*, Int. J. Non-Linear Mech. 20, 507–517, 1985.
- [5.30] FLASHNER H., GUTTALU R. S., *A computational approach for studying domains of attraction for non-linear systems*, Int. J. Non-Linear Mech. 23, 279–295, 1988.
- [5.31] GUTTALU R. S., FLASHNER H., *Periodic solutions of non-linear autonomous systems by approximate point mapping*, J. Sound Vibr. 129, 291–311, 1989.
- [5.32] GUTTALU R. S., FLASHNER H., *Analysis of nonlinear systems by truncated point mappings*, Appl. Mech. Rev. 42, S83–S92, 1989.
- [5.33] LEVITAS J., WELLER T., *Dynamic global postbuckling behavior of beams by cell-to-cell mapping*, Int. J. Non-Linear Mech. 28, 651–662, 1993.
- [5.34] LEVITAS J., WELLER T., SINGER J., *Poincare-like simple cell mapping for non-linear dynamical systems*, J. Sound Vibr. 176, 641–662, 1994.
- [5.35] VAN DER SPEK J. A. W., DE HOON C. A. L., DE KRAKER A., VAN CAMPEN D. H., *Parameter variation methods for cell mapping*, Nonlinear Dyn. 7, 273–284, 1995.
- [5.36] BELHADJ M., ALDEMIR T., *The cell to cell mapping technique and Chapman-Kolmogorov representation of system dynamics*, J. Sound Vibr. 181, 683–707, 1995.

- [5.37] KALISKI S. ed. with collaboration of SOLARZ L., *Vibrations*, Amsterdam, PWN, Elsevier, 1992.
- [5.38] GLABISZ W., *Stability of simple discrete systems under nonconservative loading with dynamic follower parameter*, Comput. Struct. 60, 4, 653–663, 1996.

Rozdział 6

- [6.1] ODEN J. T., REDDY J. N., *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1976.
- [6.2] MASON J., *Methods of Functional Analysis for Application in Solid Mechanics*, Studies in Applied Mechanics 9, Elsevier Science Publishers, 1985.
- [6.3] REDDY J. N., *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill Inc., 1986.
- [6.4] ATHERTON R. W., HOMSY G. M., *On the existence and formulation of variational principles for nonlinear differential equations*, Studies in Applied Mathematics LIV, 31–60, 1975.
- [6.5] MAGRI F., *Variational formulation for every linear equation*, Int. J. Engng Sci. 12, 537–549, 1974.
- [6.6] TONTI E., *On the variational formulation for linear initial value problems*, Ann. Mat. Pura Appl. 95, 331–359, 1973.
- [6.7] GURTIN M. E., *Variational principles for linear initial value problems*, Quart. Appl. Math. 22, 252–256, 1964.
- [6.8] TONTI E., *A general solution of the inverse problem of the calculus of variations*, Hadronic J. 5, 1404–1450, 1982.
- [6.9] TONTI E., *Variational formulation for every nonlinear problem*, Int. J. Engng Sci. 22, 1343–1371, 1984.
- [6.10] PRASAD S. N., HERRMANN G., *The usefulness of adjoint systems in solving nonconservative stability problems of elastic continua*, Int. J. Solids Struct. 5, 727–735, 1969.
- [6.11] PRASAD S. N., HERRMANN G., *Adjoint variational methods in nonconservative stability problems*, Int. J. Solids Struct. 8, 29–40, 1972.
- [6.12] MORSE P. M., FESHBACH H., *Methods of Theoretical Physics*, Parts I and II, McGraw-Hill, 1953.
- [6.13] CHANDRASEKHAR S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, 627–633, 1961.
- [6.14] FINLAYSON B., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, London, Academic Press, 1972.
- [6.15] ANDERSON G. L., *On the role of the adjoint problem in dissipative, nonconservative problems of elastic stability*, Meccanica 7, 165–173, 1972.
- [6.16] ANDERSON G. L., *Application of a variational method to dissipative, non-conservative problems of elastic stability*, J. Sound Vibr. 27, 279–296, 1973.
- [6.17] ANDERSON G. L., *A duality in a non-conservative system*, J. Sound Vibr. 41, 155–161, 1975.
- [6.18] WU J. J., *Column instability under nonconservative forces, with internal and external damping – finite element using adjoint variational principles*, Developments in Mechanics 7, 501–514, 1973.
- [6.19] WU J. J., *On the numerical convergence of matrix eigenvalue problems due to constraint conditions*, J. Sound Vibr. 37, 349–358, 1974.
- [6.20] WU J. J., *On adjoint operators associated with boundary value problems*, J. Sound Vibr. 39, 195–206, 1975.
- [6.21] WU J. J., *A unified finite element approach to column stability problems*, Developments in Mechanics 8, 279–294, 1975.
- [6.22] WU J. J., *Solutions to initial value problems by use of finite elements – unconstrained variational formulations*, J. Sound Vibr. 53, 341–356, 1977.

- [6.23] LEIPHOLZ H. H. E., *On an extension of Hamilton's variational principle to nonconservative systems which are conservative in a higher sense*, Ingenieur Archiv 47, 257–266, 1978.
- [6.24] LEIPHOLZ H. H. E., *Variational principles for non-conservative problems, a foundation for a finite element approach*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 17/18, 609–617, 1979.
- [6.25] TELEGA J. J., *On variational formulations for non-linear, non-potential operators*, J. Inst. Maths Applies 24, 175–195, 1979.
- [6.26] TELEGA J. J., *Variational principles for rate boundary-value problems in non-associated plasticity*, ZAMM 60, 71–82, 1980.
- [6.27] GAŁKA A., TELEGA J. J., *A variational method for finite elasticity in the case of non-potential loadings I. First Piola-Kirchhoff stress tensor*, Bull. Acad. Pol. Sci. XXX, 121–128, 1982.
- [6.28] GAŁKA A., TELEGA J. J., *A variational method for finite elasticity in the case of non-potential loadings II. Symmetric stress tensor and some comments*, Bull. Acad. Pol. Sci. XXX, 129–135, 1982.
- [6.29] PAPASTAVRIDIS J. G., *A direct variational method for non-conservative system stability*, J. Sound Vibr. 80, 447–459, 1982.
- [6.30] PAPASTAVRIDIS J. G., *On the variational theory of linear configuration-dependent systems*, J. Sound Vibr. 89, 85–94, 1983.
- [6.31] PAPASTAVRIDIS J. G., *Parametric excitation stability via Hamilton's action principle*, J. Sound Vibr. 82, 401–410, 1982.
- [6.32] ALLINEY S., TRALLI A., *Extended variational formulations and F.E. models for nonlinear beams under nonconservative loading*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 46, 177–194, 1984.
- [6.33] GAŁKA A., TELEGA J. J., *On variational principles and conservation laws in finite non-potential elasticity*, Variational Methods in Engineering, Proc. of the 2nd Int. Conf. Univ. of Southampton, Ed. C. A. Brebbia, Berlin, Springer-Verlag, (2–13)-(3–22), 1985.
- [6.34] MARMO DE OLIVEIRA A., BORUSZEWSKI W., *A generalized variational principle for potentializable operators*, Int. J. Non-Linear Mech. 27, 1015–1024, 1992.
- [6.35] GURAN A., PLAUT R. H., *An adjoint variational principle for fluid conveying pipes*, ZAMM 73, T496–T497, 1993.
- [6.36] TAPIA R. A., *The differentiation and integration of nonlinear operators*, Nonlinear Functional Analysis and Application, Ed. L. B. Rall, New York – London, Academic Press, 45–101, 1971.
- [6.37] NASHED M. Z., *Differentiability and related properties of nonlinear operators: some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis*, Nonlinear Functional Analysis and Application, Ed. L. B. Rall, New York – London, Academic Press, 103–309, 1971.
- [6.38] VAINBERG M. M., *Variational Methods for Study of Nonlinear Operators*, (po rosyjsku), Moscow, Gos. Izd. Tech.-Teor. Lit., 1956.
- [6.39] SCHECHTER R. S., *The Variational Method in Engineering*, New York, McGraw-Hill, 1967.
- [6.40] *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*, Ver. 2.2.2, Wolfram Research Inc., 1993.
- [6.41] BANERJEE J. R., WILLIAMS F. W., *Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for Timoshenko beam element*, Comput. Struct. 42, 301–310, 1992.
- [6.42] LEE S. Y., YANG C. C., *Non-conservative instability of a Timoshenko beam resting on Winkler elastic foundation*, J. Sound Vibr. 162, 177–184, 1993.
- [6.43] CHUNG J. H., JOO W. H., KIM K. C., *Vibration and dynamic sensitivity analysis of a Timoshenko beam-column with elastically restrained ends and intermediate constraints*, J. Sound Vibr. 167, 209–221, 1993.
- [6.44] BELTZER A. I., *Engineering analysis via symbolic computation – a breakthrough*, Appl. Mech. Rev. 43, 119–127, 1990.
- [6.45] NOOR A. K., ANDERSON C. M., *Computerized symbolic manipulation in nonlinear finite element analysis*, Comput. Struct. 13, 379–403, 1981.

- [6.46] CHANG T. Y., TAN H. Q., ZHENG D., YUAN M. W., *Application of symbolic method to hybrid/mixed finite elements and computer implementation*, Comput. Struct. 35, 293–299, 1990.
- [6.47] YAGAWA G., YE G. W., YOSHIMURA S., *A numerical integration scheme for finite method based on symbolic manipulation*, Int. J. Numer. Meths. Engng 29, 1539–1549, 1990.
- [6.48] IOAKIMIDIS N. I., *Application of Mathematica to the direct semi-numerical solution of finite element problems*, Comput. Struct. 45, 833–839, 1992.
- [6.49] FABUNMI J. A., CHANG P. C., *Derivation of Green's functions of complex structures using computer algebra*, AIAA J. 30, 2540–2545, 1992.
- [6.50] CHOI D. K., NAMURA S., *Application of symbolic computation to two-dimensional elasticity*, Comput. Struct. 43, 645–649, 1992.
- [6.51] IOAKIMIKIS N. I., *Elementary applications of Mathematica to the solution of elasticity problems by the finite element method*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng 102, 29–40, 1993.
- [6.52] IOAKIMIDIS N. I., ANASTASSELOU E. G., *Constructing elementary databases and using mechanics-related functions and object types in fracture machanics with Mathematica*, Comput. Struct. 47, 233–238, 1993.



Nonconservative forces in the mechanics of rod structures

Some problems of mechanics that are fundamental mainly in the analysis of stability of rod structures under stationary nonconservative loading of circular type and nonstationary nonconservative loading have been presented. In chapter 2, an algorithm of the finite element method is given, which is based on a generalized, incremental formulation of virtual work principle and completed with elements resulting from the possible dependence of loadings on displacements, velocity and acceleration. This algorithm has been used in a geometrically nonlinear analysis of statics and stability of rod systems under multiparameter, potential and nonpotential loadings. Some conditions have been determined in which it is possible to stabilize potential systems through the action of additional nonpotential forces.

Chapter 3 gives an analysis of stability of simple, nonprismatic rods with arbitrary, continuous or step distributions of mass and rigidity, which are placed on a two-parameter elastic foundation. An arbitrary, static nonconservative loadings has been considered in the two algorithms of the analysis, based on the description of displacements by means of power series and using exact solutions of differential equations.

Chapter 4 addresses the Hamilton's law and principle applied to systems under nonconservative loadings. A direct method for analysis of linear and nonlinear systems under static and dynamic nonconservative loadings has been formulated.

In chapter 5, using symbolic methods, there have been determined areas of dynamic stability of a linear system with one degree of freedom, under dynamic nonconservative load with dynamically changing, periodic follower parameter. Based on both a direct method stemming from the Hamilton's law and the method of mapping between targets, areas of dynamic stability of discrete, nonconservative nonlinear systems have been investigated.

Chapter 6 discusses variational principles of mechanics dealing with nonconservative loadings and shows how the tools of symbolic transformations make it possible to solve the problems encountered when investigating the potentiality of operators and formulating variational principles.

Translated by Halina Marciniak

S.01



W monografii przedstawiono analizę szeregu nieliniowych zagadnień mechaniki budowli ustrojów prętowych z uwzględnieniem statycznych i dynamicznych, stacjonarnych i niestacjonarnych obciążeń niekonserwatywnych.

Monografia jest przeznaczona dla grona specjalistów z zakresu mechaniki budowli.

Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w następujących księgarniach:
„Politechnika”

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
budynek A-1 PWr., tel. (0-71) 320 25 34,
„Tech”

plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. (0-71) 320 32 52

Prowadzimy sprzedaż wysyłkową

ISBN 83-7085-339-0