

INSTYTUT TECHNOLOGII BUDOWY MASZYN
POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Na prawach rozprawy

Raporty Instytutu Technologii Budowy Maszyn
Serii: PREPRINTY NR 53 /83

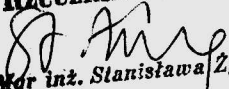
P R A C A D O K T O R S K A

Tomasz Koch

ANALIZA DYNAMIKI
MODYFIKOWANYCH UKŁADÓW SPRĘŻYSTYCH
NA PRZYKŁADZIE KORPUSÓW OBRABIAREK

Słowa kluczowe: obrabiarka, korpus,
dynamika, obliczanie,
metoda modyfikacji

Publikacja nie zawiera nowego
rozwiązania inżynierskiego technicznego
mającego się do opatentowania
Rzecznik Patentowy


mgr inż. Stanisława Żybowska

16 STYCZ 1984

P r o m o t o r

Doc.dr hab.inż. Maciej Bossak

W r o c ł a w 1983

mgr inż. Tomasz Koch
Instytut
Technologii Budowy Maszyn
Politechniki Wrocławskiej
ul. Łukasiewicza 3/5
50-371 Wrocław

SPIS TREŚCI

=====

str.:

1.	Wstęp	1
2.	Belkowa metoda sztywności	8
2.1.	Zasady budowy modelu obliczeniowego	8
2.2.	Metoda obliczeń dynamicznych	12
2.3.	Zasady budowy modelu matematycznego	18
2.3.1.	Macierz sztywności modelu belkowego	18
2.3.2.	Macierz bezwładności modelu belkowego	24
2.3.3.	Macierz tłumienia modelu belkowego	29
2.4.	Algorytm obliczeń dynamicznych belkową metodą sztywności	29
3.	Metoda modyfikacji do obliczeń dynamicznych	36
3.1.	Opis ruchu modelu belkowego we współrzędnych głównych	36
3.2.	Współrzędne quasi-główne	36
3.3.	Metoda obliczeń dynamicznych wykorzystująca współrzędne quasi-główne	40
3.4.	Algorytm obliczeń dynamicznych metodą modyfikacji	43
3.5.	Zalety metody modyfikacji	49
4.	Przykłady zastosowania metody modyfikacji do obliczeń dynamicznych	53
4.1.	Przykład 1 - belka obustronnie utwierdzona	53
4.2.	Przykład 2 - belka jednostronnie utwierdzona	56
4.3.	Przykład 3 - korpus stojaka frezarki bramowej	57
4.4.	Przykład 4 - pozioma frezarka wspornikowa	63
5.	Podsumowanie i wnioski	75
	Spis literatury	78

1. WSTĘP

=====

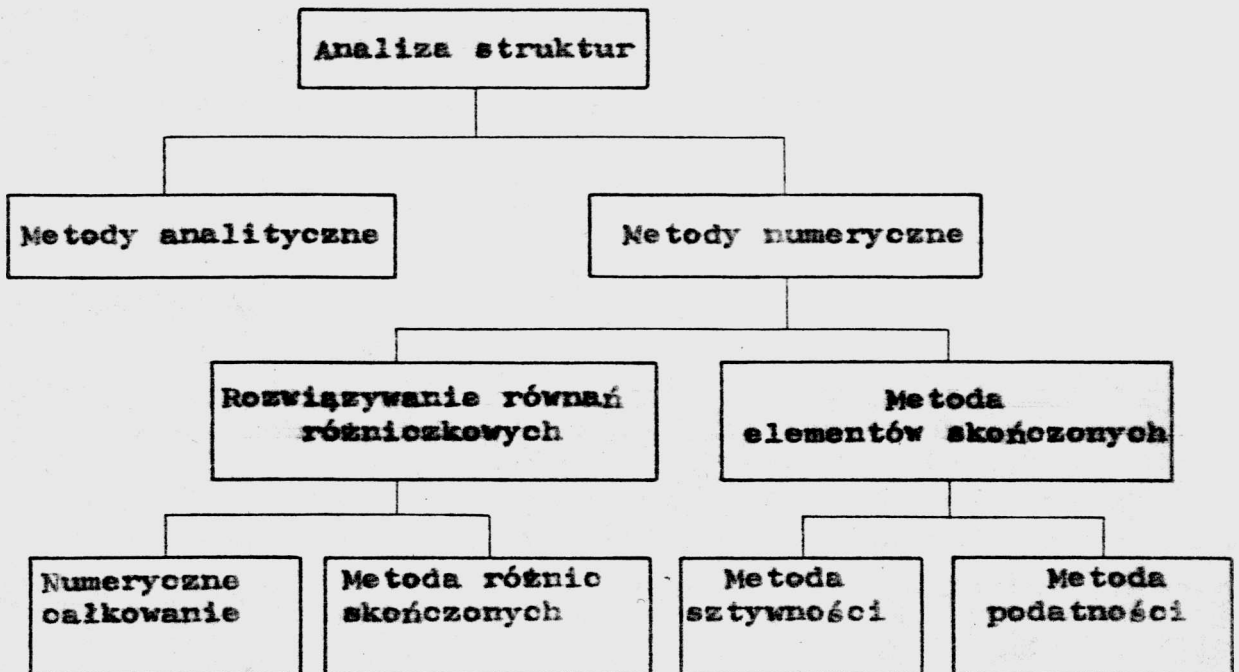
Korpusy łącząc najważniejsze zespoły obrabiarek zapewniają ściśle określone wzajemne położenie narzędzia i przedmiotu obrabianego, przenoszą obciążenia statyczne i dynamiczne powstające w czasie pracy obrabiarki, siły ciężkości i inne. Z powodu spełniania tych także ważnych funkcji korpusy tworzące układ nośny, decydują w istotny sposób o własnościach całej obrabiarki. Dlatego też projektowanym układom nośnym stawia się szereg wymagań, od których spełnienia zależy jakość obrabiarek. Do najistotniejszych z nich należą wymagania dotyczące własności statycznych i dynamicznych, które stanowią o zachowaniu się obrabiarki pod wpływem obciążeń występujących podczas jej pracy.

Projektowanie korpusów układów nośnych, opierające się tylko na intuicji i doświadczeniu konstruktora oraz na analogii z wypróbowanymi w praktyce rozwiązaniami, nie zapewnia już obecnie stworzenia rozwiązania lepszego od istniejących. Niezbędnym staje się więc na etapie konstruowania ustalenie własności projektowanych układów nośnych, co umożliwia przeanalizowanie wielu wariantów, bez konieczności badań eksperymentalnych i wybranie rozwiązania, które spełnia narzucone wymagania. Obecnie celem określenia własności statycznych i dynamicznych stosuje się w procesie projektowania następujące metody:

- budowa prototypów, ich badanie i wprowadzanie ewentualnych zmian,

- badania modelowe,
- analiza obliczeniowa.

Pierwsze dwa sposoby stwarzają wiele trudności, są kosztowne, niedokładne [1], a ponadto niezbyt uniwersalne. Ich zastosowanie wiąże się również z długim czasem oczekiwania na wyniki. Dopiero metody obliczeniowe /rys.1.1/, a wśród nich zwłaszcza metody numeryczne pozwoliły pokonać wiele trudności, na które natrafiono w innych sposobach analizy układów nośnych.



Rys.1.1 Metody obliczeniowe służące do analizy statycznych i dynamicznych własności struktur sprężystych.

Wśród metod pokazanych na rys.1.1 wyróżnia się zdecydowanie, dzięki największym możliwościom, metoda elementów skończonych [2]. Metoda ta odznacza się szeregiem cech, które stawiają ją na czele metod służących do analizy własności ukła-

dów nośnych w czasie ich projektowania, a wśród nich:

- prostota modelu matematycznego,
- poglądowość i zgodność z intuicją inżynierską modelu obliczeniowego,
- łatwość zamodelowania niejednorodności i obciążeń skupionych,
- dostateczna dla celów praktycznych dokładność,
- uniwersalność programów obliczeń.

W oparciu o metodę elementów skończonych powstały uniwersalne systemy programów, takie jak np. ASKA, NASTRAN, ICES, SAP, SAEE. Użycie tych systemów jest jednakże utrudnione - przede wszystkim z uwagi na dużą pracochłonność modelowania i zadawania danych oraz konieczność przeprowadzania obliczeń na maszynach cyfrowych o dużej pamięci operacyjnej. Prócz tego koszt tak przeprowadzanych analiz jest znaczny. Przy projektowaniu korpusów układów nośnych, w którym główną rolę odgrywa analiza wariantowa, problemy te rosną jeszcze bardziej, gdyż każdy zaprojektowany wariant wymaga ponownego modelowania i zadawania danych oraz dostępu do dużych maszyn cyfrowych. Przyczyny te skłaniają do budowy uproszczonych metod. Taką uproszczoną metodą jest metoda belkowa, używająca do modelowania układu rzeczywistego tylko elementu skończonego typu belka [3]. Metody belkowe w pełni nadają się do prowadzenia analiz układu nosnego obrabiarki, zwłaszcza gdy w skład tego układu wchodzi korpusy typu: stojaków, łóż, ramion, belek itp. Jak wykazują badania [4] posługując się tymi metodami można nawet wykonywać obliczenia sprawdzające.

Inną drogę uproszczeń metod elementów skończonych prezentują tzw. metody modyfikacji, które specjalnie nadają się do

obliczeń towarzyszących projektowaniu nowej konstrukcji. Wykorzystują one fakt, że w powstawaniu nowej struktury można wyróżnić dwie fazy. Wynikiem pierwszej jest pewna pierwotna wersja, która w drugiej fazie przechodzi szereg zmian, mających na celu polepszenie jej własności mechanicznych, ekonomicznych, użytkowych i innych. Celowość wprowadzenia każdej zmiany musi być zweryfikowana obliczeniami, które dadzą odpowiedź na pytanie, czy konstrukcja z tak wprowadzoną zmianą jest z punktu widzenia przyjętych kryteriów lepsza. Zwykle polega to na ponownym obliczeniu całej konstrukcji po każdorazowym wprowadzeniu zmian. Metody modyfikacji natomiast pozwalają na wykorzystanie wyników obliczeń wersji pierwotnej do obliczeń następnych wariantów, przez co obliczenia tych następnych wariantów /modyfikacji wersji pierwotnej/ są w znacznym stopniu ułatwione i uproszczone. Metody te stosuje się już z powodzeniem w statycznych obliczeniach konstrukcji sprężystych [5,6]. Zmniejszają one wydatnie czas obliczeń kolejnych wariantów konstrukcji, jak również zapotrzebowanie na pamięć operacyjną maszyny cyfrowej. Zalety te umożliwiają zastosowanie do obliczeń małych systemów cyfrowych /minikomputerów, mikrokomputerów/, których bardzo szybki rozwój notuje się ostatnio na całym świecie. Nie ma jednak podobnie efektywnych metod do obliczeń dynamicznych. Stąd też celem niniejszej pracy jest opracowanie metody modyfikacji dla obliczeń dynamicznych. Metoda ta powinna umożliwiać znacznie szybsze i łatwiejsze niż dotychczas analizowanie dynamicznych własności projektowanych konstrukcji sprężystych, przy posługiwaniu się małym systemem cyfrowym i mogłaby dzięki temu sta-

nowić narzędzie bezpośredniej pracy konstruktora układów nośnych obrabiarek i innych podobnych struktur.

Analiza dynamiki konstrukcji sprężystych, a w tym również układów nośnych obrabiarek, metodą elementów skończonych obejmuje zwykle obliczenie /na podstawie sformułowanego układu równań różniczkowych/ częstotliwości i postaci drgań własnych oraz charakterystyk amplitudowych i fazowych podatności dynamicznej wybranych punktów struktury w zadanym paśmie częstotliwości. Zwykle jest to pasmo częstotliwości w którym na podatność dynamiczną wpływają tylko kilka lub kilkanaście najniższych częstotliwości i odpowiadających im postaci drgań własnych. Dlatego też często stosuje się przejście od dużej ilości współrzędnych uogólnionych, opisujących bezpośrednio odkształcenia struktury podczas jej ruchu, do kilku lub kilkunastu tzw. współrzędnych głównych, związanych z tymi postaciami drgań własnych, które odpowiadają najniższym częstotliwościom drgań własnych. Dzięki temu przejściu ruch struktury zostaje opisany za pomocą kilku lub kilkunastu równań. Mimo tak radykalnego uproszczenia interesujące własności dynamiczne nie zostają w tym opisie zagubione. Wymienione cechy opisu ruchu we współrzędnych głównych wskazują, że nadaje się on doskonale do wykorzystania w metodzie modyfikacji. Najniższe częstotliwości i odpowiadające im postacie drgań własnych obliczone dla wersji pierwotnej konstrukcji mogą stanowić podstawę do obliczeń własności kolejnych jej wariantów.

Do opisu ruchu struktury sprężystej stosuje się również tzw. współrzędne quasi-główne, stanowiące kombinację współrzędnych głównych i uogólnionych. Opis ruchu we współrzęd-

ných quasi-głównych posiada wymienione cechy opisu we współrzędnych głównych, przy czym umożliwia prócz tego w układzie równań ruchu całości opisanie pewnego wydzielonego fragmentu struktury za pomocą współrzędnych uogólnionych. Z racji tych własności, opis ruchu we współrzędnych quasi-głównych można wykorzystać następująco: całość wersji pierwotnej struktury, z wyjątkiem fragmentu, który będzie podlegał w następnych wariantach modyfikacjom, można opisać we współrzędnych głównych /ta część opisu będzie więc taka sama dla wszystkich wariantów/, natomiast fragment podlegający modyfikacjom można opisać bezpośrednio we współrzędnych uogólnionych /ta część opisu będzie się odpowiednio zmieniała dla kolejnych wariantów/. Dzięki temu obliczenia kolejnych wariantów konstrukcji znacznie się upraszczają. Wystarczy bowiem dla danego wariantu ułożyć równanie ruchu /we współrzędnych uogólnionych/ jedynie dla zmodyfikowanego fragmentu, a potem tylko odpowiednio dołączyć je do, stale tych samych dla wszystkich wariantów, kilku lub kilkunastu równań /ułożonych na podstawie wersji pierwotnej/, opisujących /we współrzędnych głównych/ ruch pozostałej części struktury, aby otrzymać w wyniku układ równań ruchu /we współrzędnych quasi-głównych/ całej konstrukcji z zaprojektowaną modyfikacją.

Można się spodziewać, że obliczenia metodą, wykorzystującą współrzędne quasi-główne, będą trwały znacznie krócej, a to z dwóch powodów: po pierwsze nie trzeba układać równań ruchu dla całej struktury, po drugie opis ruchu we współrzędnych quasi-głównych to układ równań składający się z niewielkiej liczby /w porównaniu do opisu bezpośrednio we współrzęd-

nych uogólnionych/, a zatem da się go szybko rozwiązać. Fakt, że opis ruchu we współrzędnych quasi-głównych składa się z niewielkiej liczby równań, może pozwolić na przeprowadzenie obliczeń na małym systemie cyfrowym.

Powyższe rozważania skłaniają do postawienia następującej tezy: metoda modyfikacji wykorzystująca do opisu ruchu modelu fizycznego struktury sprężystej współrzędne quasi-główne umożliwia podczas projektowania układów nośnych-obrabiarek dokonanie wstępnej oceny dynamicznych własności analizowanych wariantów konstrukcyjnych, przy czym posługując się tą metodą można oceny tej dokonać wielokrotnie szybciej niż przy użyciu ogólnie stosowanych metod elementów skończonych i daje się ona w prosty sposób przystosować na mały system cyfrowy.

Dla wykazania słuszności tak postawionej tezy niezbędnym było: - opracowanie metody modyfikacji dla obliczeń dynamicznych w oparciu o którąś z metod elementów skończonych. Wybór padł na rozwijaną w ITBM Politechniki Wrocławskiej metodę belkową. Z tej racji należało - opracować algorytm i program na EMC, służący do obliczeń dynamicznych własności struktur sprężystych belkową metodą sztywności, a potem - opracować algorytm i program na EMC dla metody modyfikacji opartej na belkowej metodzie sztywności. W oparciu o te programy zamierzano następnie - dokonać sprawdzenia efektywności i dokładności metody modyfikacji na wybranych przykładach oraz wskazać możliwości jej zastosowania.

2. BELKOWA METODA SZTYWNOŚCI

=====

2.1. Zasady budowy modelu obliczeniowego

Zasady budowy modelu obliczeniowego można znaleźć w kilku pracach [5,7,8,9]. Ograniczymy się tu więc do podania tylko kilku podstawowych z nich.

a/ Rzeczywistą strukturę /układ nosny/ zastępuje się układem belek /patrz rys.2.1/. Element układu nośnego można zastąpić belkami wówczas, gdy jeden jego wymiar góruje nad pozostałymi dwoma.

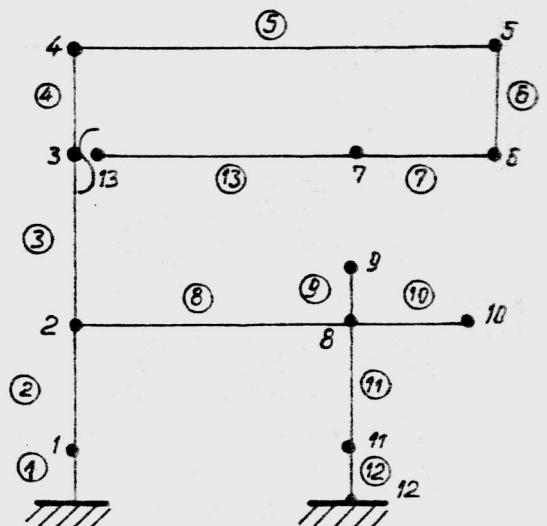
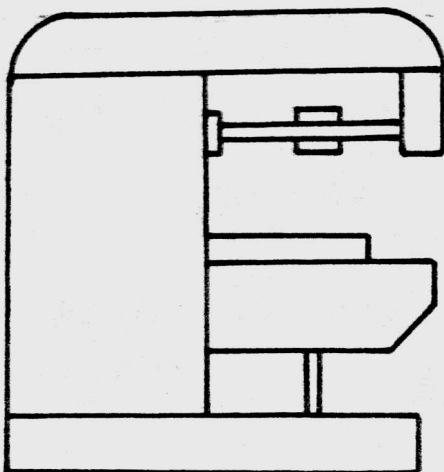
Belkę, która zastępuje element struktury rzeczywistej, umieszcza się w osi podłużnej tego elementu wyznaczonej przez środek ciężkości jego przekroju poprzecznego. Osie te wyznaczają więc model obliczeniowy.

b/ We wszystkich końcach belek umieszcza się węzły modelu, którym przyporządkowuje się odpowiednie numery. Każda belka ma swój początek i koniec. Podczas numeracji węzłów modelu - przyjmuje się, że:

- węzeł początkowy danego elementu belkowego może być węzłem końcowym tylko jednego elementu belkowego, a końcowy może być węzłem początkowym wielu elementów belkowych,
- numer węzła początkowego belki jest zawsze niższy od numeru węzła końcowego,
- numer węzła końcowego elementu belkowego jest zarazem symbolem tego elementu,
- przy układach statycznie wyznaczalnych, a także po przekształceniu struktury statycznie niewyznaczalnej w równoważ-

ny układ statycznie wyznaczalny, obowiązuje następująca reguła:

Numer 1 otrzymuje węzeł końcowy elementu utwierdzonego oraz sam element. Pozostałe elementy otrzymują kolejne wyższe numery. Przy systemach rozgałęzionych, jeżeli rozgałęzienie kończy się węzłem dodatkowym /usuwającym statyczną niewyznaczalność/, to początkowo nie przypisuje się mu żadnego numeru. Dopiero kiedy wszystkie węzły, z wyjątkiem dodatkowych otrzymają swoje oznaczenie, nadaje się je także węzłom dodatkowym. Najpierw numeruje się miejsca dodatkowych utwierdzeń, po czym węzły usuwające wewnętrzną statyczną niewyznaczalność /patrz rys.2.1/.



Rys.2.1 Struktura nośna i jej model belkowy z naniesioną numeracją węzłów i elementów belkowych /oznaczenia elementów belkowych znajdują się w kółkach/.

c/ Obliczany model umieszcza się w prostokątnym prawoskrętnym układzie współrzędnych XYZ. W układzie tym podaje się współrzędne węzłów. Każdy element "1" struktury otrzymuje

własny /lokalny/ układ współrzędnych $X^1 Y^1 Z^1$. Oś X^1 układu lokalnego przebiega wzdłuż osi elementu, a osie Y^1 i Z^1 są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego tego elementu. Prócz tego z każdym elementem belkowym związane są węzłowe układy lokalne $X_i^1 Y_i^1 Z_i^1$, których początki znajdują się w jego węzłach początkowym i końcowym /"i" - numer węzła/, a osie są skierowane zgodnie z osiami układu lokalnego $X^1 Y^1 Z^1$ tego elementu. Z każdym węzłem "i" związane są ponadto tzw. węzłowe układy globalne $X_i Y_i Z_i$. Początki tych układów znajdują się w węzłach, a osie są skierowane zgodnie z osiami układu globalnego XYZ. W węzłowych układach globalnych zadaje się obciążenie, jak również oblicza się przemieszczenia struktury belkowej.

d/ Modelowi obliczeniowemu przypisuje się sprężyste, tłumiące oraz masowe własności struktury rzeczywistej:

- własności sprężyste elementów wyznacza się w odniesieniu do ich osi podłużnych i przypisuje się je belkom leżącym w tych osiach. Własności te określa się względem układów lokalnych,
- własności tłumiące przypisuje się albo poszczególnym elementom /tłumienie lokalne/, jako tłumienie materiałowe lub konstrukcyjne /zachodzące w połączeniach/ - wtedy wyznacza się je analogicznie jak własności sprężyste, albo całemu modelowi przypisuje się współczynniki odpowiadające danej postaci drgań /tłumienie postaciowe, inaczej modalne/,
- masy i masowe momenty bezwładności skupia się wyłącznie w węzłach modelu belkowego.

e/ Wszelkie obliczenia dokonywane są w stosunku do osi elementów struktury rzeczywistej. Przemieszczenia obliczane

są tylko w punktach węzłowych. Każdy węzeł "i" ma 6 stopni swobody - 3 przemieszczenia translacyjne wzdłuż osi X_i Y_i Z_i oraz 3 rotacyjne wokół tych osi. Podobnie tylko węzły mogą być punktami przyłożenia obciążeń. Na każdy węzeł mogą działać siły w trzech kierunkach zgodnych z osiami X_i Y_i Z_i oraz 3 momenty względem tych osi.

f/ Model belkowy może składać się z trzech podstawowych typów elementów:

- elementu podatnego, którego własności sprężyste zostają oszacowane na podstawie geometrii /długość, kształt przekroju poprzecznego/ oraz stałych materiałowych elementu rzeczywistego, lub na podstawie pomiarów sztywności tego elementu jako oddzielnego korpusu,
- elementu sztywnego, który służy do łączenia sąsiadujących ze sobą elementów belkowych, gdy osie odpowiadających im elementów struktury rzeczywistej są względem siebie przesunięte, lub do modelowania takich fragmentów struktury rzeczywistej, które są wielokrotnie sztywniejsze od innych pozostałych elementów /np. korpusy typu skrzynka/,
- elementu o długości zero modelującego połączenie; przy czym własności tego elementu można np. obliczyć przy użyciu metody i programu do obliczeń sztywności stałych połączeń śrubowych, opracowanego w ITBM, mogą to być również wyniki uzyskane z pomiarów.

2.2. Metoda obliczeń dynamicznych

Przyjmując liniowość układu, równanie ruchu modelu belkowego umieszczonego w prostokątnym, prawoskrętnym układzie współrzędnych XYZ ma postać:

$$[M]\{\ddot{F}\} + [D]\{\dot{F}\} + [K]\{F\} = \{R\} , \quad (2.1)$$

gdzie: $[M]$, $[D]$, $[K]$ - odpowiednio: macierze bezwładności, tłumienia i sztywności,

$\{F\}$ - zależny od czasu wektor współrzędnych uogólnionych, opisujących w węzłowych układach globalnych przemieszczenia translacyjne punktów węzłowych modelu belkowego w kierunkach osi X_i , Y_i , Z_i oraz rotacyjne wokół tych osi,
 $\{R\}$ - zależny od czasu wektor sił uogólnionych opisujący w węzłowych układach globalnych siły działające na punkty węzłowe wzdłuż osi X_i , Y_i , Z_i oraz momenty względem tych osi.

W analizie drgań układów o wielu stopniach swobody stosuje się metodę polegającą na wyznaczeniu nieznanego wektora współrzędnych uogólnionych, jako superpozycji pewnej stosunkowo małej liczby postaci drgań własnych, określanych na podstawie rozwiązania równania:

$$[M]\{\ddot{F}\} + [K]\{F\} = \{0\} , \quad (2.2)$$

które opisuje ruch układu zachowawczego /bez tłumienia/.

Rozwiązanie układu (2.2) sprowadza się do wyznaczenia wartości i wektorów własnych z równania:

$$([K] - \omega_{0i}^2 [M]) \{F_0^i\} = \{0\} , \quad (2.3)$$

gdzie: $\{F_0^i\}$ - wektor amplitud przemieszczeń punktów węzłowych opisujący i-tą postać drgań własnych,

ω_{0i} - i-ta prędkość kątowna /częstota/ drgań własnych.

W metodzie superpozycji postaci drgań własnych, po rozwiązaniu zagadnienia własnego /2.3/, wektor współrzędnych uogólnionych wyraża się jako kombinację liniową wektorów własnych:

$$\{F\} = [P] \{q\} , \quad (2.4)$$

gdzie: $[P] = [\{F_0^1\}, \{F_0^2\}, \dots, \{F_0^N\}]$,

$\{q\}$ - zależny od czasu wektor tzw. współrzędnych głównych.

Podstawiając (2.4) do (2.1) i mnożąc następnie (2.1) przez $[P]^T$ otrzymamy:

$$[P]^T [M] [P] \{\ddot{q}\} + [P]^T [D] [P] \{\dot{q}\} + [P]^T [K] [P] \{q\} = [P]^T \{R\} \quad (2.5)$$

lub wprowadzając nowe oznaczenia:

$$[M_p] \{\ddot{q}\} + [D_p] \{\dot{q}\} + [K_p] \{q\} = \{R_p\} . \quad (2.6)$$

Przekształcenie kongruentne dokonane w (2.5) na macierzach mas i sztywności prowadzi do ich diagonalizacji, zatem macierze $[M_p]$ i $[K_p]$ są diagonalne. W obliczeniach dynamicznych posługujemy się zazwyczaj tłumieniem modalnym /postaciowym/, dla którego macierz $[D_p]$ również jest diagonalna.

Normalizując wektory własne tak, aby:

$$[M_p] = [P]^T [M] [P] = [I] \quad ; \quad [K_p] = [P]^T [K] [P] = [\Omega^2] , \quad (2.7)$$

gdzie: $[I]$ - macierz mająca na przekątnej jedynki, a poza przekątną zera,

$[\Omega^2]$ - macierz mająca na przekątnej kwadraty częstości własnej $\omega_{01}^2, \dots, \omega_{0N}^2$, poza przekątną zera,

oraz przedstawiając macierz tłumień $[D_p]$ w postaci iloczynu:

$$[D_p] = 2[Z][\Omega], \quad (2.8)$$

gdzie: $[Z]$ - macierz mająca na przekątnej tzw. względne współczynniki tłumienia $\xi_1, \dots, \xi_N$, poza przekątną zera, można równanie (2.6) zapisać w postaci:

$$[I]\{\ddot{q}\} + 2[Z][\Omega]\{\dot{q}\} + [\Omega^2]\{q\} = \{R_p\}. \quad (2.9)$$

Równanie (2.9) jest zbiorem rozprzęgniętych równań ruchu

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_{0i}\dot{q}_i + \omega_{0i}^2 q_i = f_i, \quad i=1, \dots, N. \quad (2.10)$$

Mając rozwiązania q_i i korzystając z zależności (2.4) można otrzymać rozwiązanie układu równań (2.1) tzn.:

$$\{F\} = \sum_{i=1}^N \{F_o^i\} q_i. \quad (2.11)$$

Pod wpływem działającego obciążenia, z którym mamy do czynienia w konstrukcjach sprężystych, analizowana struktura zachowuje się z reguły tak, że wartości większości składników powyższej sumy są małe. O wartości przemieszczeń w analizowanym pasmie częstotliwości decydują zwykle tylko składniki odpowiadające kilku lub kilkunastu najniższym częstościom organów własnych. A zatem zależność (2.11) można uprościć do postaci:

$$\{F\} = \sum_{i=1}^M \{F_o^i\} q_i, \quad (2.12)$$

gdzie: $M \ll N$.

Wystarczy więc rozwiązać M równań (2.10) i podstawić rozwiązania do (2.12), aby otrzymać wektor współrzędnych uogólnionych - rozwiązanie równania (2.1).

Rozwiązanie każdego z równań (2.10) jest sumą dwóch składników. Pierwszą stanowi rozwiązanie ogólne równania jednorodnego /tzn. gdy prawa strona jest równa zero/, drugi natomiast stanowi rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego /dla niezerowej prawej strony/. Pierwszy składnik można w rozwiązaniu pominąć, gdyż wraz z czasem maleje on do zera, składnik ten odpowiada zanikającym drganiom swobodnym o częstotliwości własnej ω_{oi} /dla i -tego równania (2.10)/. Przyjmując, że wymuszenie jest typu harmonicznego i że wszystkie składowe tego wymuszenia są w tej samej fazie, tzn. że wektor sił uogólnionych z równania (2.1) jest postaci:

$$\{R\} = \{R_a\} e^{j\omega t},$$

gdzie: $\{R_a\}$ - wektor amplitud,

prawą stronę równania (2.10) można przedstawić następująco:

$$f_i = \{F_o^i\}^T \{R\} = \{F_o^i\}^T \{R_a\} e^{j\omega t} = f_{ai} e^{j\omega t}.$$

Rozwiązanie szczególne równania (2.10) dla tak określonej prawej strony jest następujące:

$$q_i = \frac{1}{\omega_{oi}^2 - \omega^2 + 2\xi_i \omega_{oi} \omega j} f_{ai} e^{j\omega t}. \quad (2.13)$$

Stosując zapis skrócony można rozwiązanie (2.13) przepisać w nowej formie:

$$q_i = G_i(j\omega) f_i, \quad (2.14)$$

gdzie:

$$G_i(j\omega) = \frac{1}{\omega_{oi}^2 - \omega^2 + 2\xi_i \omega_{oi} \omega j}$$

Dla uzyskania rozwiązania równania (2.1) trzeba jeszcze podstawić (2.14) do (2.12):

$$\{F\} = \sum_{i=1}^M \{F_o^i\} \{F_o^i\}^T G_i(j\omega) \{R_a\} e^{j\omega t}. \quad (2.15)$$

Aby wyznaczyć amplitudę i fazę każdej składowej wektora współrzędnych uogólnionych należy wyrazić składowe te w następujący sposób:

$$F_k = F_{ak} e^{j(\omega t + \varphi_k)},$$

gdzie: $F_{ak} = \sqrt{(\operatorname{Re} F_k)^2 + (\operatorname{Im} F_k)^2}$ - amplituda k-tej składowej wektora współrzędnych uogólnionych,

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} F_k}{\operatorname{Re} F_k} - \omega t$$

- faza k-tej składowej wektora współrzędnych uogólnionych.

Przy analizie własności dynamicznych układów nosnych obrabiarzek najbardziej istotnym źródłem wymuszeń jest proces skrawania, podczas którego zmienne siły powodują wzajemne przemieszczenia narzędzia i przedmiotu obrabianego. Przemieszczenia te decydują z kolei o dokładności obróbki. Z tego powodu, podczas analizowania własności dynamicznych, bardzo interesujące jest obliczenie podatności dynamicznej, określającej względne przemieszczenie punktów węzłowych /"p" modelującego miejsce obrabiane na przedmiocie i "n" modelującego zakończenie narzędzia, które styka się z obrabianym przedmiotem/, zachodzące pod wpływem działających na te węzły składowych zmiennego obciążenia o jednostkowej amplitudzie. Przyjmując, że wymuszenia będą tylko siłami /pomijając wymuszenia momentami/ oraz że interesować nas będą tylko przemieszczenia translacyjne, podatność

dynamiczną między węzłami "n" i "p" wyznacza się w następujący sposób. Na podstawie równania (2.15) należy obliczyć wektory współrzędnych uogólnionych $\{F\}_x$, $\{F\}_y$ i $\{F\}_z$ dla kolejnych trzech wektorów amplitud sił uogólnionych:

$$\{R_a\}_x = \left\{ 0, \dots, 0, \overbrace{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}^{\text{węzeł } n}, \dots, 0, \overbrace{-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}^{\text{węzeł } p}, \dots, 0 \right\}^T,$$

$$\{R_a\}_y = \left\{ 0, \dots, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0 \right\}^T,$$

$$\{R_a\}_z = \left\{ 0, \dots, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0 \right\}^T.$$

Następnie, aby obliczyć względne przemieszczenie węzłów "n" i "p" należy odjąć te składowe otrzymanych wektorów współrzędnych uogólnionych, które stanowią przemieszczenia translacyjne węzła "p" od składowych stanowiących przemieszczenia translacyjne węzła "n". W ten sposób otrzyma się trzy wektory /wymiaru trzy/ względnych przemieszczeń węzłów "n" i "p" odpowiadających kolejnym wymuszeniom w kierunkach X, Y, Z. Składowe tych wektorów po pominięciu w nich czynnika $e^{j\omega t}$ tworzą współczynniki macierzy podatności. Przedstawioną powyżej procedurę obliczania macierzy podatności można ująć w formę jednego wzoru:

$$[\Delta(j\omega)]_{np} = \sum_{i=1}^M \left\{ \left\{ F_o^i \right\}_n - \left\{ F_o^i \right\}_p \right\} \left\{ \left\{ F_o^i \right\}_n - \left\{ F_o^i \right\}_p \right\}^T \frac{1}{\omega_{oi}^2 - \omega^2 + 2\xi_i \omega_{oi} \omega_j}, \quad (2.16)$$

gdzie: $[\Delta(j\omega)]_{np}$ - symetryczna macierz /3x3/ zespolonych współczynników podatności dynamicznej między punktami węzłowymi n i p przy częstotliwości kołowej ω ,

$\left\{ F_o^i \right\}_k$ - składowe i-tego wektora własnego, opisujące przemieszczenia translacyjne punktu węzłowego k.

Każdy ze współczynników $\delta_{lm}(j\omega)$ ($l, m = 1, 2, 3$ oznaczają kierunki odpowiednio: X, Y i Z) macierzy podatności $[\Delta(j\omega)]_{np}$ przedstawia charakterystykę amplitudowo-fazową względnego przemieszczenia węzłów "n" i "p" w kierunku l, przy wymuszeniu działającym na węzły "n" i "p" w kierunku m /przy czym siła działająca na węzeł "n" ma przeciwny zwrot w stosunku do siły działającej na węzeł "p"/.

Charakterystyki te naniesione na wykresy przedstawiają w sposób obrazowy najistotniejsze własności dynamiczne analizowanej struktury.

2.3. Zasady budowy modelu matematycznego

Jak już wspomniano w rozdziale 2.1 pkt. d/ modelowi fizycznemu struktury rzeczywistej przypisuje się własności sprężyste, tłumiące oraz masowe. Zapisanie tych własności w zbiorach współczynników ujętych w formy macierzy umożliwia w prosty sposób opisanie ruchu struktury modelowej (równanie (2.1)). Poniżej omówiono budowę tych macierzy oraz metody obliczania ich współczynników.

2.3.1. Macierz sztywności modelu belkowego

a/ Określenie sztywności elementu belkowego

Własności sprężyste elementu belkowego określa się na podstawie wielkości charakteryzujących element struktury rzeczywistej. Są to: jego długość L, pole przekroju poprzecznego A, główne centralne momenty bezwładności J_y i J_z , wskaźnik J_t charakteryzujący sztywność skrętną, współczynniki kształtu przekroju $\mathcal{H}_y$ i $\mathcal{H}_z$ oraz stałe materiałowe - moduł

sprężystości wzdłużnej E i poprzecznej G . Metody obliczania tych wielkości można znaleźć np. w pracy [3].

Oznaczając w i -tym węzłowym układzie lokalnym /związany z 1-tą belką/ przemieszczenia translacyjne przez $f_{x_i}^l, f_{y_i}^l, f_{z_i}^l$ oraz rotacyjne przez $\varphi_{x_i}^l, \varphi_{y_i}^l, \varphi_{z_i}^l$, siły przez $P_{x_i}^l, P_{y_i}^l, P_{z_i}^l$ oraz momenty przez $m_{x_i}^l, m_{y_i}^l, m_{z_i}^l$ można w postaci macierzowej przedstawić obciążenie końca 1-tej belki, jednostronnie utwierdzonej w swoim początku /rys.2.2/ w funkcji jego przemieszczenia w sposób podany we wzorze (2.17).

(2.17)

$$\begin{Bmatrix} P_{x_i}^l \\ P_{y_i}^l \\ P_{z_i}^l \\ m_{x_i}^l \\ m_{y_i}^l \\ m_{z_i}^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} \\ 0 & \frac{1+\chi_y}{GAL^2} \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\chi_y}{GAL^2} \frac{6EJ_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\chi_z}{GAL^2} \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{1+\chi_z}{GAL^2} \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{EJ_y}{L} \left(1 + \frac{3}{1+\chi_z} \frac{12EJ_y}{GAL^2} \right) & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EJ_z}{L} \left(1 + \frac{3}{1+\chi_y} \frac{12EJ_z}{GAL^2} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{x_i}^l \\ f_{y_i}^l \\ f_{z_i}^l \\ \varphi_{x_i}^l \\ \varphi_{y_i}^l \\ \varphi_{z_i}^l \end{Bmatrix}$$



rys.2.2

Stosując zapis skrócony można tą zależność przedstawić następująco:

$$\{P\}_i^l = [S]_i \{f\}_i^l .$$

Aby wyrazić tą zależność w i-tym węzłowym układzie ogólnym oznaczmy dużymi literami przemieszczenia i obciążenia końca i-tej belki w tym układzie, odpowiednio przez $\{F\}_i$ i $\{P\}_i$ oraz przez $[T]_i^{-1}$ macierz transformacji z i-tego węzłowego układu globalnego do lokalnego /związanego z i-tą belką/.

Macierz $[T]_i^{-1}$ ma następującą postać:

$$[T]_i^l = \begin{bmatrix} \cos X_i^l X_i & \cos X_i^l Y_i & \cos X_i^l Z_i & 0 & 0 & 0 \\ \cos Y_i^l X_i & \cos Y_i^l Y_i & \cos Y_i^l Z_i & 0 & 0 & 0 \\ \cos Z_i^l X_i & \cos Z_i^l Y_i & \cos Z_i^l Z_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos X_i^l X_i & \cos X_i^l Y_i & \cos X_i^l Z_i \\ 0 & 0 & 0 & \cos Y_i^l X_i & \cos Y_i^l Y_i & \cos Y_i^l Z_i \\ 0 & 0 & 0 & \cos Z_i^l X_i & \cos Z_i^l Y_i & \cos Z_i^l Z_i \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Wyrazami tej macierzy są kosinusy kątów pomiędzy osiami węzłowego układu lokalnego i globalnego.

Ponieważ $[T]_i^{l-1} = [T]_i^{lT}$ oraz

$$\{P\}_i^l = [T]_i^l \{P\}_i \quad i \quad \{f\}_i^l = [T]_i^l \{F\}_i, \quad (2.19)$$

to:

$$\{P\}_i = [T]_i^{lT} [S]_i [T]_i^l \{F\}_i. \quad (2.20)$$

Stosując zapis skrócony można tę zależność wyrazić następująco:

$$\{P\}_i = [C]_i \{F\}_i. \quad (2.21)$$

b/ Macierz sztywności modelu belkowego

Rozważmy energię sprężystości belki o numerze l , której początek stanowi węzeł p , a koniec węzeł k ($p < k$). Stan energetyczny /energia sprężystości/ tej belki zależy od jej sztywności określonej przez macierz $[S]_l$ oraz od względnego przemieszczenia jej obu końców. Określenie przemieszczenia względnego końców belki wymaga przeniesienia przemieszczenia początku belki do jej końca. W tym celu buduje się macierz przeniesienia, za pomocą której można prosto wyrazić przeniesione przemieszczenie początku belki:

$$\{F\}_{kp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_k - z_p & -(y_k - y_p) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_k - z_p) & 0 & x_k - x_p \\ 0 & 0 & 1 & y_k - y_p & -(x_k - x_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{F\}_p, \quad (2.22)$$

gdzie: x_1, y_1, z_1 - współrzędne węzła "1" w globalnym układzie współrzędnych,

$\{F\}_{kp}$ - przeniesione przemieszczenie początku belki znajdującego się w węźle p-tym do jej końca znajdującego się w węźle k-tym.

Stosując zapis skrócony można tą zależność przedstawić następująco:

$$\{F\}_{kp} = [V]_{kp} \{F\}_p, \quad (2.23)$$

gdzie: $[V]_{kp}$ - macierz przenoszenia.

Jesli przemieszczenie węzła końcowego belki $\{F\}_k$ pomniejszy-
my o przeniesione do tego węzła przemieszczenie węzła począt-
kowego $\{F\}_p$ to otrzymamy względne przemieszczenie końcowych
węzłów belki, które determinuje stan jej naprężenia. Mamy więc

$$\{w\}_l = \{F\}_k - \{F\}_{kp}, \quad (2.24)$$

gdzie: $\{w\}_l$ - względne przemieszczenie końców l-tej belki.

Można zatem określić teraz energię potencjalną odkształconego
elementu belkowego, która wyraża się za pomocą formy kwadra-
towej:

$$U_l = \frac{1}{2} \{w\}_l^T [C]_l \{w\}_l, \quad (2.25)$$

gdzie: U_l - energia sprężystości l-tego elementu belkowego.

Podstawiając do (2.25) poprzednie dwa równania (2.23) i (2.24)
otrzymujemy:

$$U_l = \frac{1}{2} \left(\{F\}_k^T - \{F\}_p^T [V]_{kp}^T \right) [C]_l \left(\{F\}_k - [V]_{kp} \{F\}_p \right), \quad (2.26)$$

co daje się zapisać macierzowo używając wektora, współrzęd-

nych uogólnionych wyrażającego przemieszczenia całej struktury belkowej w sposób podany poniżej:

(2.27)

$$U_l = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & V_{kp}^T C_L V_{kp} & 0 \dots 0 & V_{kp}^T C_L & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & C_L V_{kp} & 0 \dots 0 & C_L & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ F_p \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ F_k \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{węzeł } p} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{węzeł } k}$

Stosując zapis skrócony można to równanie przedstawić następująco:

$$U_l = \frac{1}{2} \{F\}^T [K]_l \{F\} . \quad (2.28)$$

Energia sprężystości całej struktury belkowej jest równa sumie energii pochodzących od poszczególnych belek, co można zapisać za pomocą następującego równania:

$$U = \sum_l U_l = \frac{1}{2} \{F\}^T \sum_l [K]_l \{F\} = \frac{1}{2} \{F\}^T [K] \{F\} , \quad (2.29)$$

gdzie: U - energia sprężystości całej struktury belkowej,

$$[K] = \sum_l [K]_l .$$

Wektor sił uogólnionych otrzymuje się na podstawie znanej energii wyznaczając pochodną cząstkową tej energii względem wektora współrzędnych uogólnionych:

$$\{P\} = \frac{\partial U}{\partial F} = [K]\{F\} . \quad (2.30)$$

W ten sposób macierz $[k] = \sum_i [K]_i$ została zidentyfikowana jako macierz sztywności struktury belkowej.

2.3.2. Macierz bezwładności modelu belkowego

Budowa macierzy bezwładności oparta została na tzw. modelu Rayleigha [10]. W modelu tym rozłożone w sposób ciągły wzdłuż elementów struktury rzeczywistej masę i masowe momenty bezwładności skupia się w początku i końcu elementu belkowego. Masę elementu "i" struktury rzeczywistej można obliczyć ze wzoru:

$$m_{ei} = \rho_i \int_0^{L_i} A_i(l) dl , \quad (2.31)$$

gdzie: m_{ei} - masa elementu "i",

ρ_i - gęstość masy elementu "i",

$A_i(l)$ - pole przekroju elementu i-tego w odległości l od jego początku,

L_i - długość i-tego elementu.

Rozkład masy elementu do jego końców dokonuje się tak, aby całkowita masa tego elementu oraz położenie środka ciężkości nie uległo zmianie:

$$m_{ei} = m_{pi} + m_{ki} , \quad (2.32)$$

gdzie: m_{pi} - masa przypisana początkowi i-tego elementu,

m_{ki} - masa przypisana końcowi i-tego elementu.

Dla elementów o przekroju stałym jest przy tym:

$$m_{pi} = m_{ki} = \frac{1}{2} m_{ei} . \quad (2.33)$$

Jeśli element ma przekrój zmienny to:

$$m_{pi} = \frac{m_{ei} l_{pi}}{L_i} \quad i \quad m_{ki} = \frac{m_{ei} l_{ki}}{L_i} ,$$

gdzie: l_{pi} - odległość od początku elementu do jego środka ciężkości,

l_{ki} - odległość od końca elementu do jego środka ciężkości.

Masowe momenty bezwładności, które przypisuje się początkowi i końcowi elementu, określa się w węzłowych układach lokalnych mających swe początki odpowiednio w węźle początkowym i końcowym. Dla węzła początkowego i -tego elementu o stałym przekroju masowe momenty bezwładności są równe:

$$\begin{aligned} \theta_{x_p^i} &= \frac{1}{2} \frac{m_{ei}}{A_i} (J_{yi} + J_{zi}) , \\ \theta_{y_p^i} &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_{ei}}{A_i} J_{yi} + m_{ei} \frac{L_i^2}{12} \right) , \\ \theta_{z_p^i} &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_{ei}}{A_i} J_{zi} + m_{ei} \frac{L_i^2}{12} \right) . \end{aligned} \quad (2.34)$$

W wypadku elementu o zmiennym przekroju:

$$\theta_{x_p^i} = \rho_i \int_0^{l_{pi}} J_{yi}(l) + J_{zi}(l) dl ,$$

$$\theta_{y_p^i} = \rho_i \int_0^{l_{pi}} J_{yi}(l) + A_i(l) l^2 dl ,$$

$$\theta_{z_p^i} = \rho_i \int_0^{l_{pi}} J_{zi}(l) + A_i(l) l^2 dl .$$

Analogicznie wyznacza się masowe momenty bezwładności dla końca elementu. W wypadku belki o stałym przekroju:

$$\theta_{x_k^i} = \theta_{x_p^i} , \theta_{y_k^i} = \theta_{y_p^i} \quad i \quad \theta_{z_k^i} = \theta_{z_p^i} . \quad (2.35)$$

W ten sposób dla i-tego elementu otrzymuje się dwie diagonalne macierze bezwładności - przypisane jego końcowi i początkowi:

$$[m]_p^i = \begin{bmatrix} m_{pi} & & & & \\ & m_{pi} & & & \\ & & m_{pi} & & \\ & & & \theta_{x_p^i} & \\ & & & & \theta_{y_p^i} \\ & & & & & \theta_{z_p^i} \end{bmatrix} , \quad (2.36)$$

$$[m]_k^i = \begin{bmatrix} m_{ki} & & & & \\ & m_{ki} & & & \\ & & m_{ki} & & \\ & & & \theta_{x_k^i} & \\ & & & & \theta_{y_k^i} \\ & & & & & \theta_{z_k^i} \end{bmatrix} ,$$

zawierające współczynniki bezwładności wyrażone w węzłowych układach lokalnych. Macierze te muszą być jeszcze poddane transformacji do węzłowych układów globalnych. Transformacja ta wyraża się podobnym wzorem jak transformacja macierzy sztywności:

$$\begin{aligned} [M]_p^i &= [T]_p^{iT} [m]_p^i [T]_p^i, \\ [M]_k^i &= [T]_k^{iT} [m]_k^i [T]_k^i, \end{aligned} \quad (2.37)$$

gdzie: $[T]_n^m$ - macierz transformacji ze wzoru (2.18).

W wyniku tej transformacji otrzymujemy np. dla węzła początkowego macierz bezwładności, która jest postaci:

$$[M]_p^i = \begin{bmatrix} m_{pi} & & & & \\ & m_{pi} & & & \\ & & m_{pi} & & \\ & & & \theta_{x_i x_i}^p & \theta_{x_i y_i}^p & \theta_{x_i z_i}^p \\ & & & \theta_{y_i x_i}^p & \theta_{y_i y_i}^p & \theta_{y_i z_i}^p \\ & 0 & & \theta_{z_i x_i}^p & \theta_{z_i y_i}^p & \theta_{z_i z_i}^p \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

W prawej dolnej części tej macierzy występują na przekątnej masowe momenty bezwładności, poza przekątną - masowe momenty dewiacji. Jak wykazano w [3] pominięcie masowych momentów dewiacji nie wpływa w znaczący sposób na dokładność obliczeń najniższych częstości i postaci drgań własnych. Pominięcie tych współczynników przywraca przekątną postać macierzy bezwładności.

2.3.3. Macierz tłumienia modelu belkowego

W praktyce można założyć, że sprzężenie postaci drgań poprzez tłumienie jest pomijalnie małe i układ równań opisujących ruch struktury rzeczywistej można rozprzęgnąć. Dzięki temu obliczenia dynamiczne można przeprowadzić metodą modalną /superpozycji postaci/, wyznaczając dla każdej postaci drgań współczynnik tłumienia dla całej konstrukcji. Badania wykazują, że układy nosne obrabiarek należą do struktur słabo tłumionych i wartości względnych współczynników tłumienia postaciowego wynoszą dla nich od 0,02 do 0,06 [3,11].

2.4. Algorytm obliczeń dynamicznych belkową metodą sztywności

Poniżej zamieszczono schemat blokowy algorytmu obliczeń dynamicznych. Najistotniejsze jego fragmenty to budowa macierzy sztywności oraz rozwiązanie problemu własnego. Przy odpowiedniej numeracji węzłów /tzn. gdy belki łączą węzły o niezbyt odległych od siebie numerach/ niezerowe współczynniki macierzy sztywności skupione są tylko wokół przekątnej, tworząc wokół niej wąskie pasmo /rys.2.3/. Umożliwia to zapamiętanie macierzy sztywności w niedużej tablicy jednowymiarowej w następujący sposób: korzystając z symetryczności zapamiętuje się kolejne kolumny, począwszy od wyrazu na przekątnej a skończywszy na ostatnim niezerowym wyrazie tej kolumny.

a_{11}		a_{13}					
	a_{22}						
a_{31}		a_{33}	a_{34}		a_{36}		
		a_{43}	a_{44}				
				a_{55}	a_{56}		
		a_{63}		a_{65}	a_{66}	a_{67}	
					a_{76}	a_{77}	a_{78}
						a_{87}	a_{88}

rys.2.3

Do zdekodowania tego zapisu wystarczy jednowymiarowa tablica typu INTEGER, gdzie przechowywane są numery współczynników znajdujących się na przekątnej /rys.2.4/.

$A(1)$		$A(5)$					
	$A(2)$	$A(4)$					
		$A(3)$	$A(7)$		$A(12)$		
			$A(6)$		$A(11)$		
				$A(8)$	$A(10)$		
					$A(9)$	$A(14)$	
						$A(13)$	$A(16)$
							$A(15)$

1
2
3
6
8
9
13
15
17

Rys.2.4

Ten sposób zapisu zapewnia bardzo dużą oszczędność pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej i umożliwia obliczenie przypadków o dużej liczbie stopni swobody.

Do rozwiązania problemu własnego wykorzystano metodę iteracji w podprzestrzeniach. Program obliczający wartości i wektory własne dla niestandardowego problemu własnego

$$([K] - \lambda [M]) \{y\} = \{0\} ,$$

oparty na metodzie iteracji w podprzestrzeniach, zbudowano na podstawie programów zamieszczonych w pracy [12].

Dzięki zastosowaniu metody iteracji w podprzestrzeniach do rozwiązania problemu własnego obliczenia dynamicznych własności struktury o około 200 stopniach swobody trwają ponad trzykrotnie krócej niż przy zastosowaniu metod tradycyjnych proponowanych przez autorów w [3, 10, 13, 14 czy 15].

START

CZYTAJ DANE

Segment MASA

PĘTLA PO LICZBIE ELEMENTÓW

$L = 1, LEL$

OBLICZ MACIERZE BEZWŁADNOŚCI

$$[M]_P^L = [T]_P^{LT} [m]_P^L [T]_P^L$$

$$[M]_k^L = [T]_k^{LT} [m]_k^L [T]_k^L$$

KONIEC PĘTLI

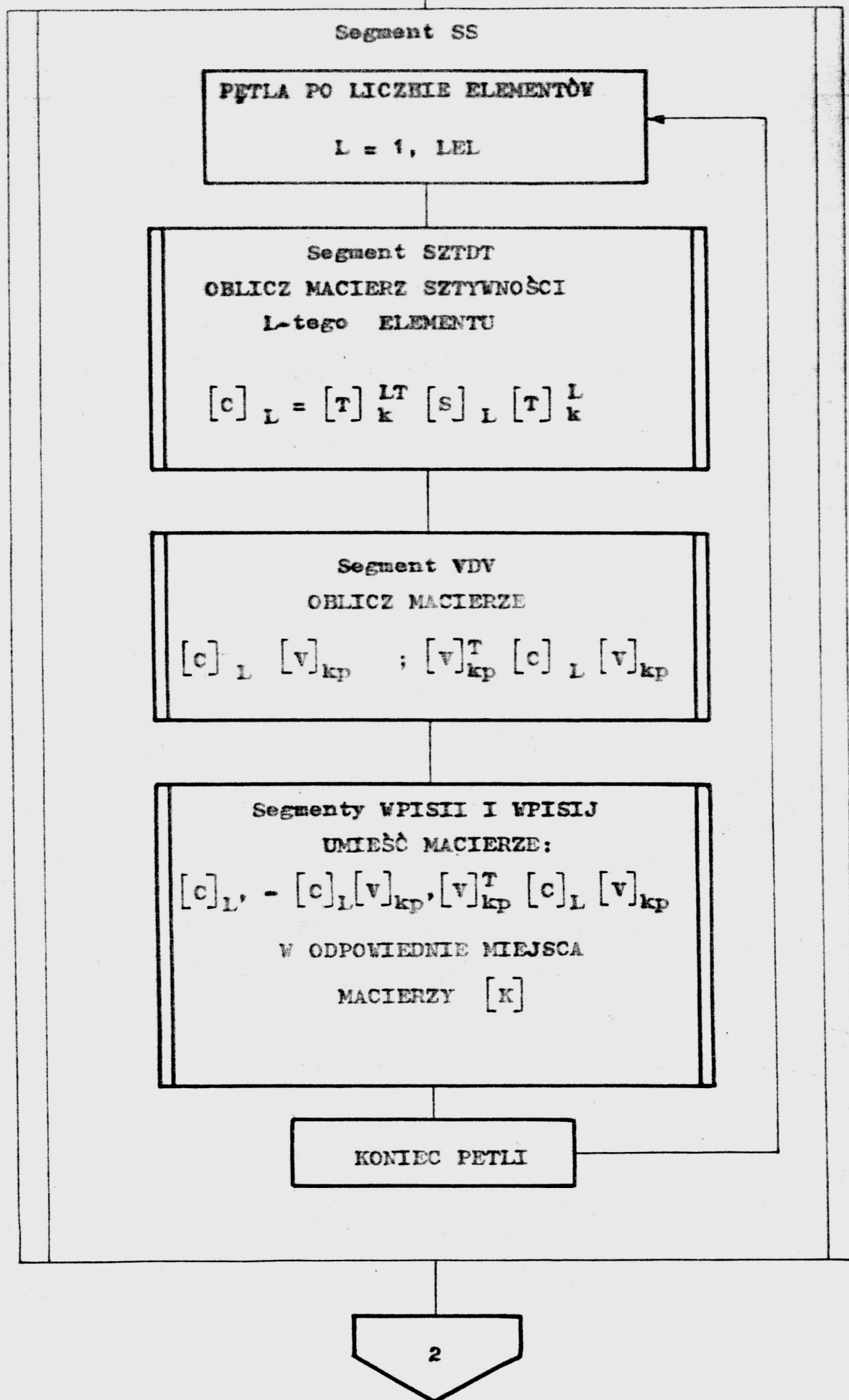
BUDUJ Z MACIERZY

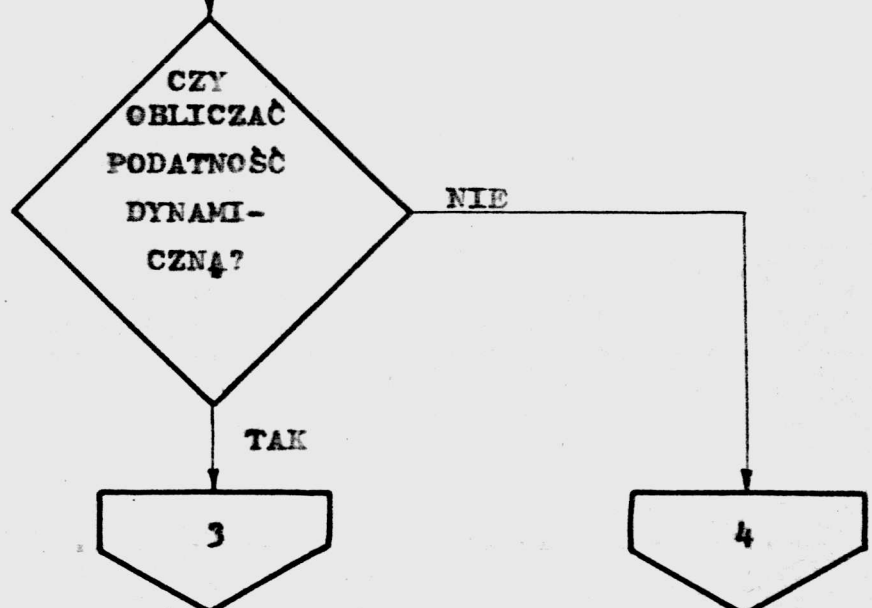
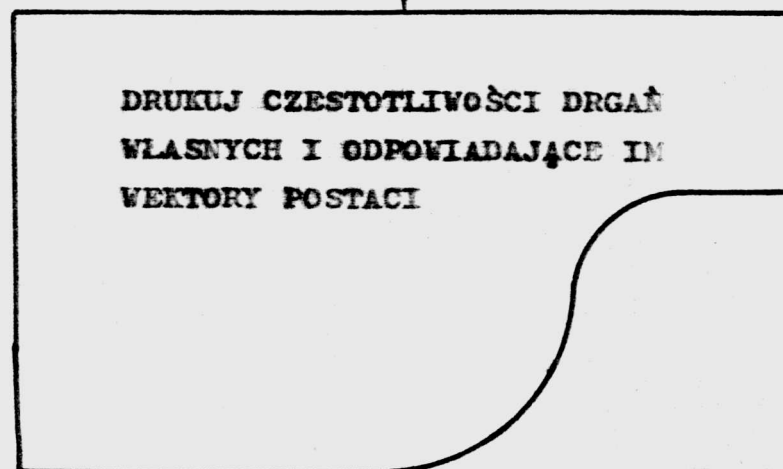
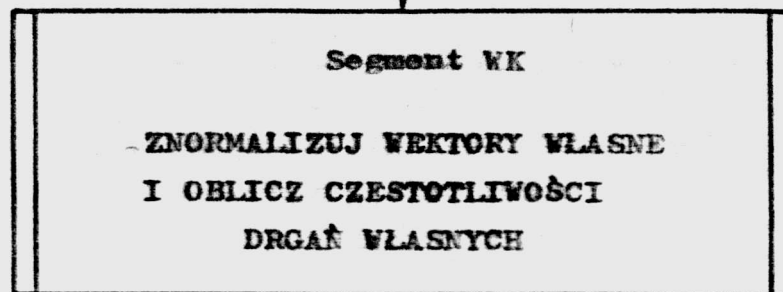
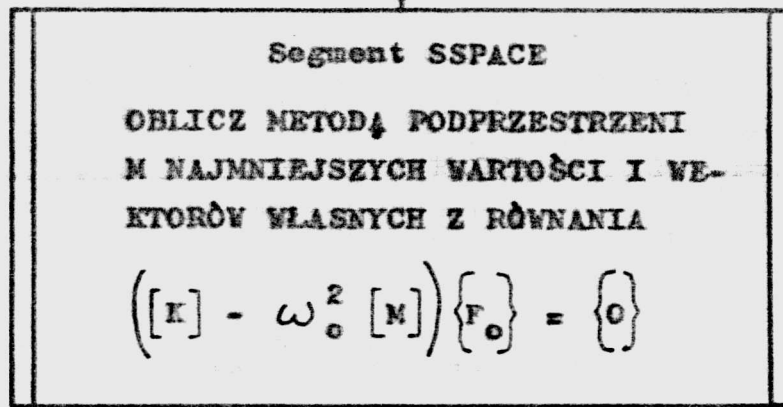
$$[M]_P^L \text{ i } [M]_k^L \quad L = 1, \dots, LEL$$

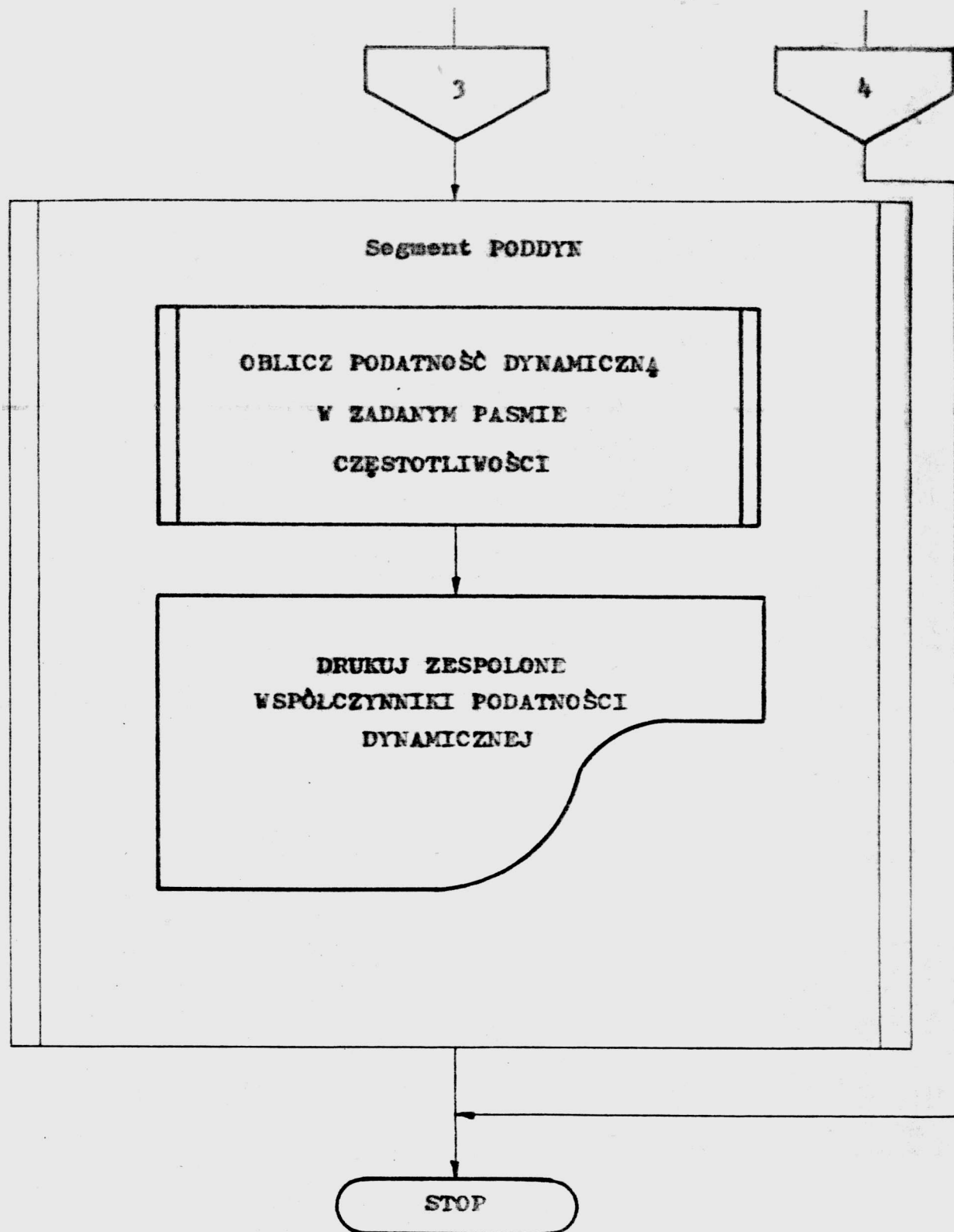
MACIERZ BEZWŁADNOŚCI

$[M]$

1







Rys. 2.5 Schemat blokowy algorytmu obliczeń dynamicznych belkową metodą sztywności

3. METODA MODYFIKACJI DO OBLICZEŃ DYNAMICZNYCH =====

3.1. Opis ruchu modelu belkowego we współrzędnych głównych

Jak wspomniano w podrozdziale 2.2 przemieszczenia węzłów modelu belkowego są w wystarczający sposób przybliżone przez superpozycję tylko kilku lub kilkunastu postaci drgań, związanych z najniższymi częstotliwościami drgań własnych /patrz (2.12)/:

$$\{F\} = \sum_{i=1}^M \{F_0^i\} q_i \quad (3.1)$$

Równanie powyższe może stanowić jednocześnie transformację, która sprowadza N współrzędnych uogólnionych do niewielkiej liczby M współrzędnych głównych. Jeśli zamiast transformacji (2.4) /zastosowanej w rozdziale 2.2/ podstawimy do równania (2.1) transformację (3.1) otrzymamy układ równań:

$$[M_p'] \{\ddot{q}\} + [D_p'] \{\dot{q}\} + [K_p'] \{q\} = \{R_p'\} \quad (3.2)$$

który pomimo tego, że składa się z dużo mniejszej ilości równań niż układ (2.6) to jednak opisuje ruch modelu belkowego dla celów praktycznych dostatecznie dokładnie. Fakt ten wykorzystano do opisu ruchu modelu belkowego w tzw. współrzędnych quasi-głównych.

3.2. Współrzędne quasi-główne

Spośród współrzędnych uogólnionych można wydzielić pewną grupę związaną z interesującym nas fragmentem struktury i nie transformować ich do współrzędnych głównych. Będziemy mieli wtedy do czynienia z transformacją, którą symbolicznie można

zapisać:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_k \\ F_{k+1} \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_M \\ F_{k+1} \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} = \{Y\}, \quad (3.3)$$

gdzie: $F_1, \dots, F_k$ - współrzędne uogólnione podlegające transformacji na M współrzędnych głównych $q_1, \dots, q_M$ obliczanych dla całej struktury,

$F_{k+1}, \dots, F_N$ - współrzędne nie podlegające przekształceniu,

$\{Y\}$ - wektor tzw. współrzędnych quasi-głównych.

Próby wykorzystania podobnej kombinacji współrzędnych, lecz dokonywane w oparciu o dodatkowe równania więzów, co w praktyce okazywało się mało efektywne, były już podejmowane do innych celów [16,17]. Współrzędne quasi-główne wykorzystywano również do opisu ruchu struktur dyskretno-ciągłych [18]. Transformację (3.3) można zapisać macierzowo:

$$\{F\} = \begin{bmatrix} & P_Q & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & I & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_M \\ F_{k+1} \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} = [Q]\{Y\}, \quad (3.4)$$

gdzie: $[P_Q]$ - macierz, której kolumnami jest M - wektorów własnych, w których pominięto $/N-k/$ współrzędnych, $M \ll N$.

Podstawiając (3.4) do (2.1) i mnożąc lewostronnie przez $[Q]^T$ otrzymamy:

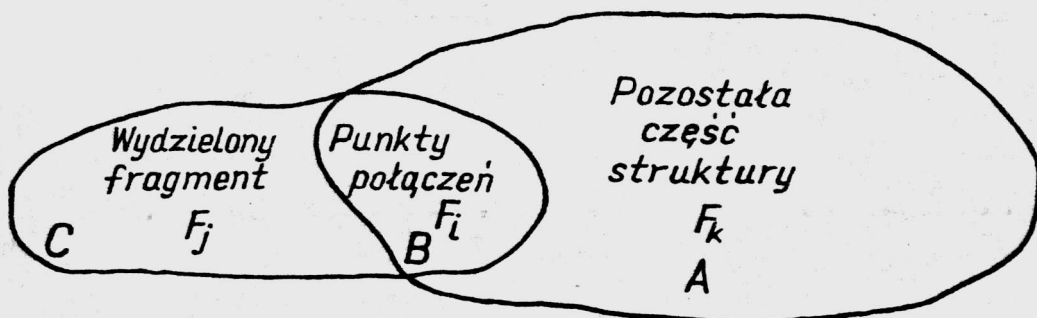
$$[Q]^T[M][Q] \{\ddot{y}\} + [Q]^T[D][Q] \{\dot{y}\} + [Q]^T[K][Q] \{y\} = [Q]^T\{R\} \quad (3.5)$$

lub po wprowadzeniu nowych oznaczeń

$$[M_Q] \{\ddot{y}\} + [D_Q] \{\dot{y}\} + [K_Q] \{y\} = \{R_Q\}.$$

Budowa występujących w tym układzie równań macierzy bezwładności, tłumienia i sztywności jest dość prosta i dla celów interpretacji fizycznej oraz praktycznych zastosowań zostanie poniżej przeanalizowana.

Ponieważ wszystkie macierze podlegają temu samemu przekształceniu wystarczy przeanalizować budowę jednej z nich np. macierzy sztywności. W tym celu podzielimy współrzędne uogólnione na trzy grupy: związane z punktami węzłowymi należącymi wyłącznie do wspomnianego wydzielonego fragmentu struktury - F_j , do połączeń tego fragmentu z pozostałą częścią struktury - F_i , oraz do tej pozostałej części struktury - F_k (rys.3.1).



Rys.3.1

Odpowiednio do podziału współrzędnych uogólnionych daje się również przedstawić macierz sztywności, jako sumę macierzy pochodzących od poszczególnych fragmentów. Rozłożmy więc macierz sztywności na sumę dwóch macierzy - jednej związanej tylko z częścią A struktury oraz drugiej związanej z wydzielonym fragmentem i połączeniami obu tych części tzn. związanej z częściami B i C:

$$[K] = \left[\begin{array}{c|c} K_{kk} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} K_{ii} & K_{ij} \\ \hline K_{ji} & K_{jj} \end{array} \right] \quad (3.6)$$

W podmacierzach $[K_{ii}]$ oraz $[K_{ij}]$ niezerowe są tylko wiersze związane ze współrzędnymi opisującymi część B struktury. Przy założeniu więc, że wydzielony fragment jest niewielki, a co za tym idzie punktów połączeń jest też niewiele, można w wyniku odpowiedniego przenumrowania współrzędnych, zapisać drugi składnik powyższej sumy jako macierz o małym wymiarze. W wyniku przekształcenia kongruentnego otrzymujemy:

$$[K_q] = [Q]^T [K] [Q] = \left[\begin{array}{c|c} P_q^T K_{kk} P_q & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} P_q^T K_{ii} P_q & P_q^T K_{ij} \\ \hline K_{ji} P_q & K_{jj} \end{array} \right] \quad (3.7)$$

Pierwszy składnik związany z częścią A zawiera współczynniki odpowiadające współrzędnym głównym. Drugi składnik opisuje części B i C struktury, przy czym fragment C we współrzędnych uogólnionych.

Z uwagi na to, że do analizy dynamicznej branych jest pod uwagę tylko kilka lub kilkanaście postaci drgań własnych, a wydzielony fragment struktury jest nieduży, wymiar macierzy $[Q]^T [K][Q]$ i zarazem układu równań (3.5) jest mały.

Z rozważań powyższych wynika, że transformacja współrzędnych uogólnionych do współrzędnych quasi-głównych umożliwia:

- dostatecznie dokładne opisanie dynamicznych własności struktury za pomocą macierzy o niedużych wymiarach,
- opisanie własności interesującego nas fragmentu struktury we współrzędnych uogólnionych.

Sformułowane powyżej własności transformacji współrzędnych uogólnionych do współrzędnych quasi-głównych zostały wykorzystane do budowy metody służącej do analizy dynamiki modyfikowanych układów sprężystych /metoda modyfikacji/.

3.3. Metoda obliczeń dynamicznych wykorzystująca współrzędne quasi-główne

Przedstawiona poniżej metoda modyfikacji służy do badania wpływu zmian wprowadzanych w modelu belkowym na jego własności dynamiczne.

Metoda przyjmuje następujące dwa założenia:

1. Modyfikacjom podlegać będzie pewien nieduży w stosunku do całości fragment struktury.
2. Modyfikacje obejmować mogą zmiany sztywności elementów

/a zatem i zmiany wielkości przekrojowych/ jak również zmiany ich masy i masowych momentów bezwładności.

Traktując modyfikowaną część struktury jak wydzielony fragment z poprzedniego podrozdziału 3.2 możemy na podstawie (3.6) sztywność struktury zmodyfikowanej zapisać następująco:

$$[K] = \left[\begin{array}{c|c} K_{kk} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} K_{ii}^z & K_{ij}^z \\ \hline K_{ji}^z & K_{jj}^z \end{array} \right] \quad (3.8)$$

lub stosując nowe oznaczenia:

$$[K] = [K^0] + [K^z],$$

gdzie na oznaczenie elementów podlegających modyfikacjom użyto wskaźnika "z".

Po dokonaniu transformacji współrzędnych uogólnionych do współrzędnych quasi-głównych tak, że modyfikowana część pozostaje opisana we współrzędnych uogólnionych macierz sztywności struktury zmodyfikowanej przyjmie postać /patrz (3.7)/:

$$[K_q] = \left[\begin{array}{c|c} P_q^T K_{kk} P_q & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} P_q^T K_{ii}^z P_q & P_q^T K_{ij}^z \\ \hline K_{ji}^z P_q & K_{jj}^z \end{array} \right] \quad (3.9)$$

Stosując zapis skrócony można tą zależność wyrazić następująco:

$$[K_q] = [K_q^o] + [K_q^z] .$$

Należy zwrócić uwagę na to, że do transformacji tej użyto macierzy $[P_q]$, na którą składają się postacie drgań własnych /patrz (3.4)/ struktury wyjściowej niezmodyfikowanej, innymi słowy współrzędne uogólnione opisujące przemieszczenia węzłów pozostałej niemodyfikowanej części struktury, przechodzą na M współrzędnych głównych odpowiadających strukturze wyjściowej niezmodyfikowanej. Tak dobrana transformacja posiada pierwszorzędnej wagi zaletę polegającą na tym, że pierwszy składnik sumy (3.9) pozostaje stały i nie zmienia się podczas modyfikacji.

Stosując te same przekształcenia na macierzy bezwładności oraz na macierzy tłumień otrzymujemy równanie ruchu struktury zmodyfikowanej:

$$([M_q^o] + [M_q^z]) \{\ddot{y}\} + ([D_q^o] + [D_q^z]) \{\dot{y}\} + ([K_q^o] + [K_q^z]) \{y\} = \{R_q\} . \quad (3.10)$$

Jeśli znana jest macierz tłumień modalnych postępuje się jak w rozdziale 2.2. Najpierw formułujemy równanie ruchu układu zachowawczego:

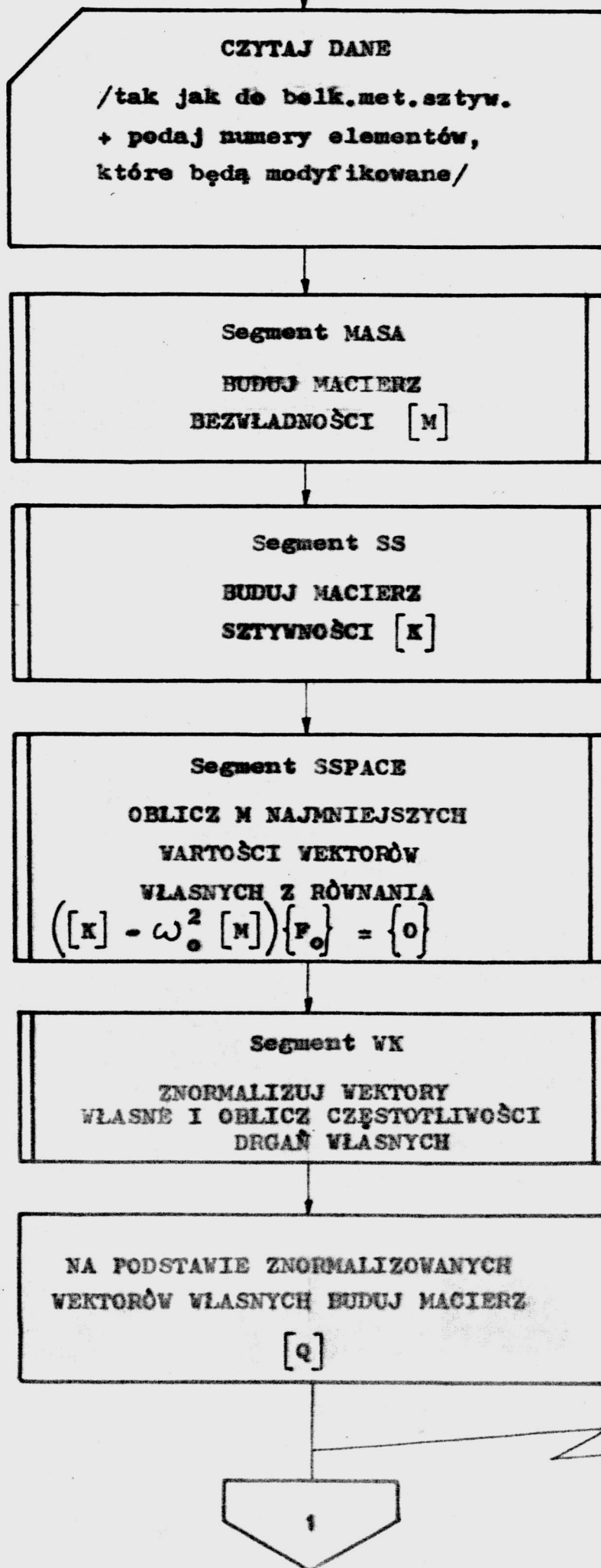
$$([M_q^o] + [M_q^z]) \{\ddot{y}\} + ([K_q^o] + [K_q^z]) \{y\} = \{0\} , \quad (3.11)$$

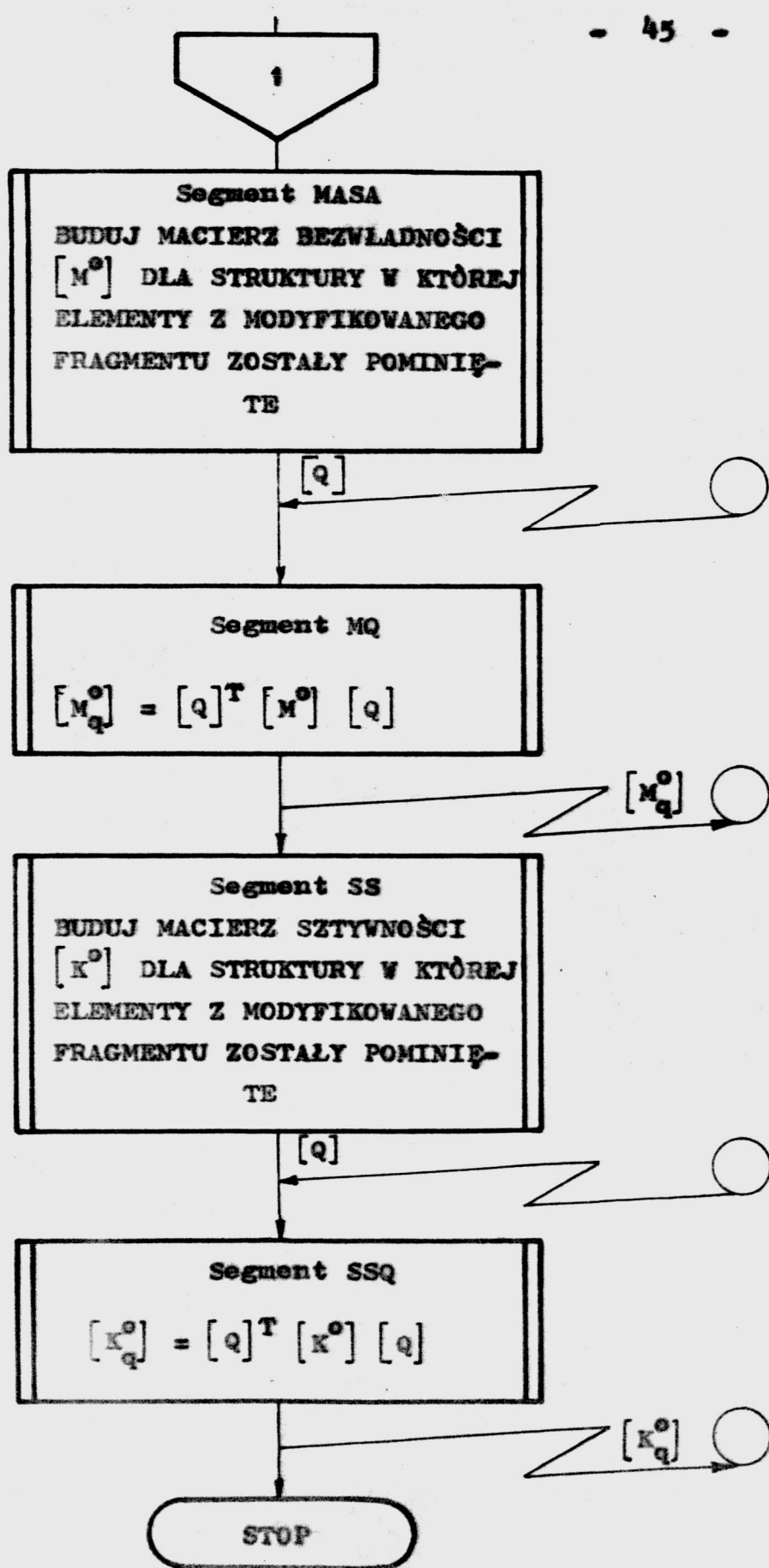
na którego podstawie obliczamy częstości oraz postacie drgań własnych /we współrzędnych quasi-głównych/. Następnie, korzystając z (3.4) transformujemy postacie drgań własnych do współrzędnych uogólnionych. Stosując dalej równania rozdziału 2.2

można obliczyć dla wybranych punktów węzłowych podatności dynamiczne struktury zmodyfikowanej.

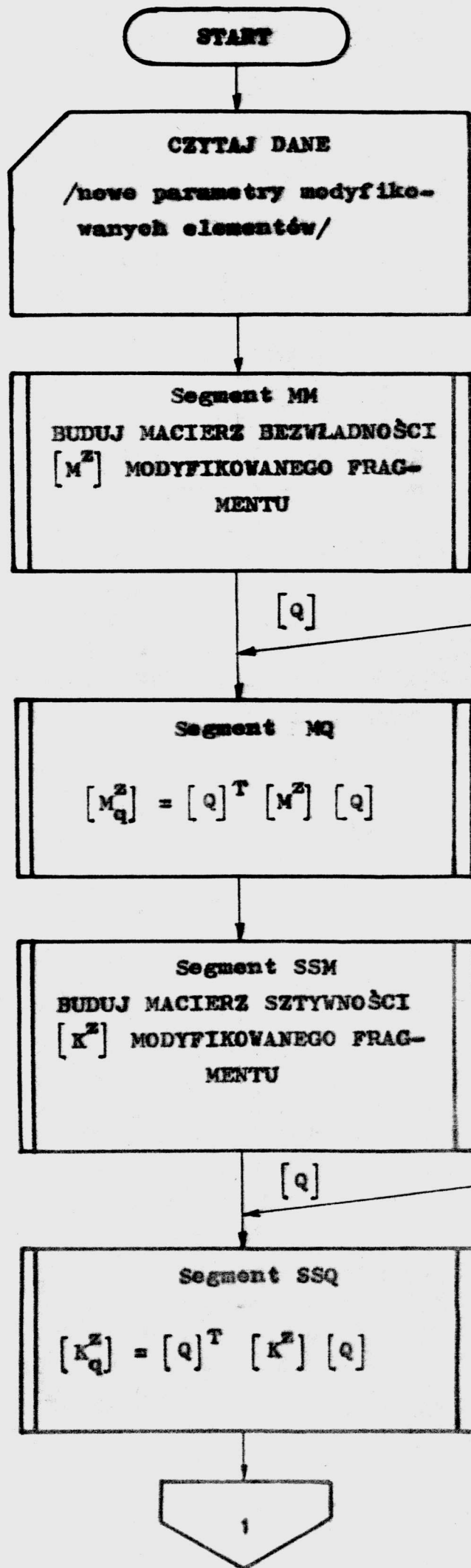
3.4. Algorytm obliczeń

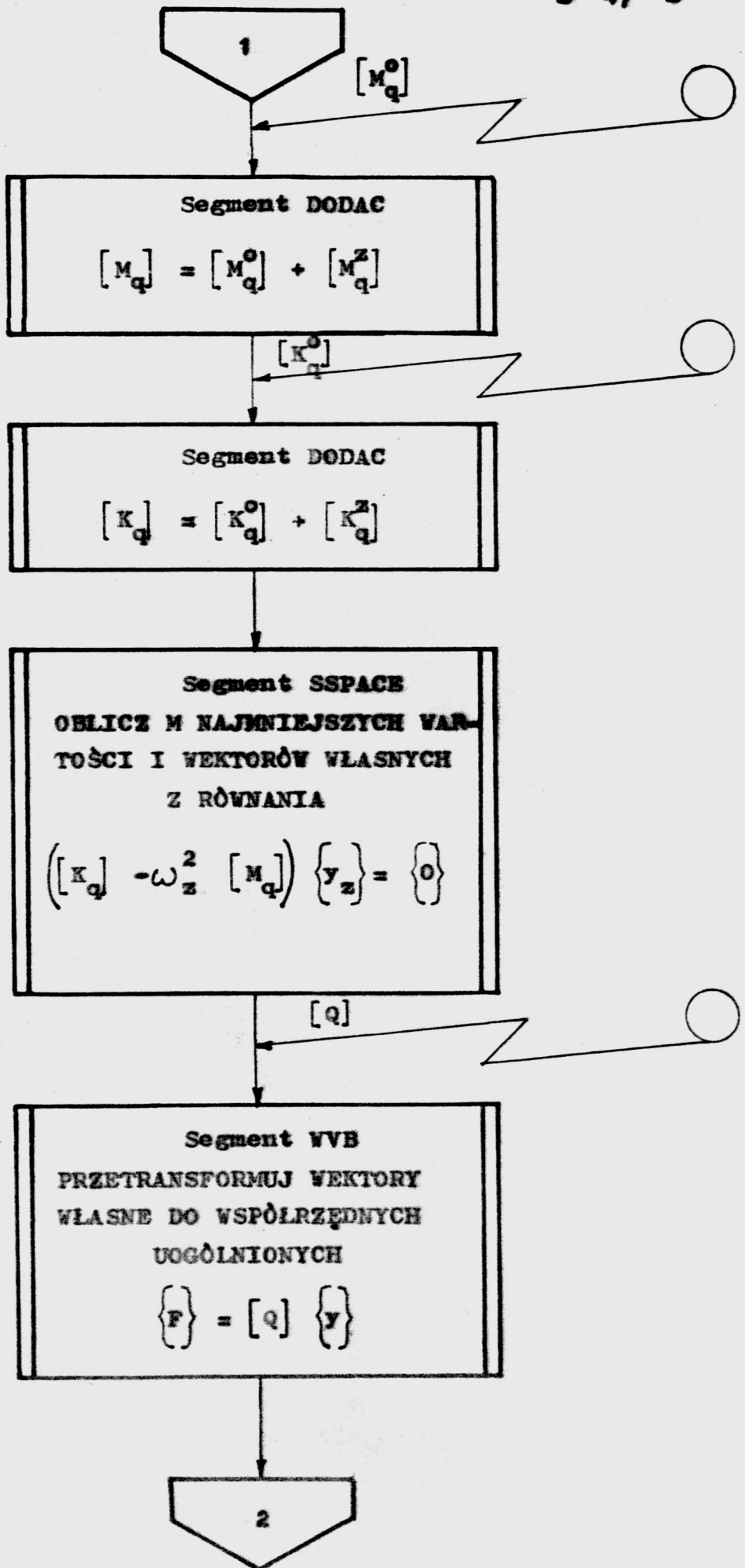
Poniżej zamieszczony jest schemat blokowy algorytmu obliczeń dynamicznych wykorzystujący quasi-główne współrzędne. Algorytm ten składa się z dwóch etapów. Etap I obliczeń, który stanowi częściowo powtórzenie algorytmu obliczeń dynamicznych belkową metodą sztywności /patrz 2.4/, wykonuje się tylko jeden raz, natomiast etap II powtarza się wielokrotnie tyle razy, ile modyfikacji parametrów zamierza się przeanalizować.

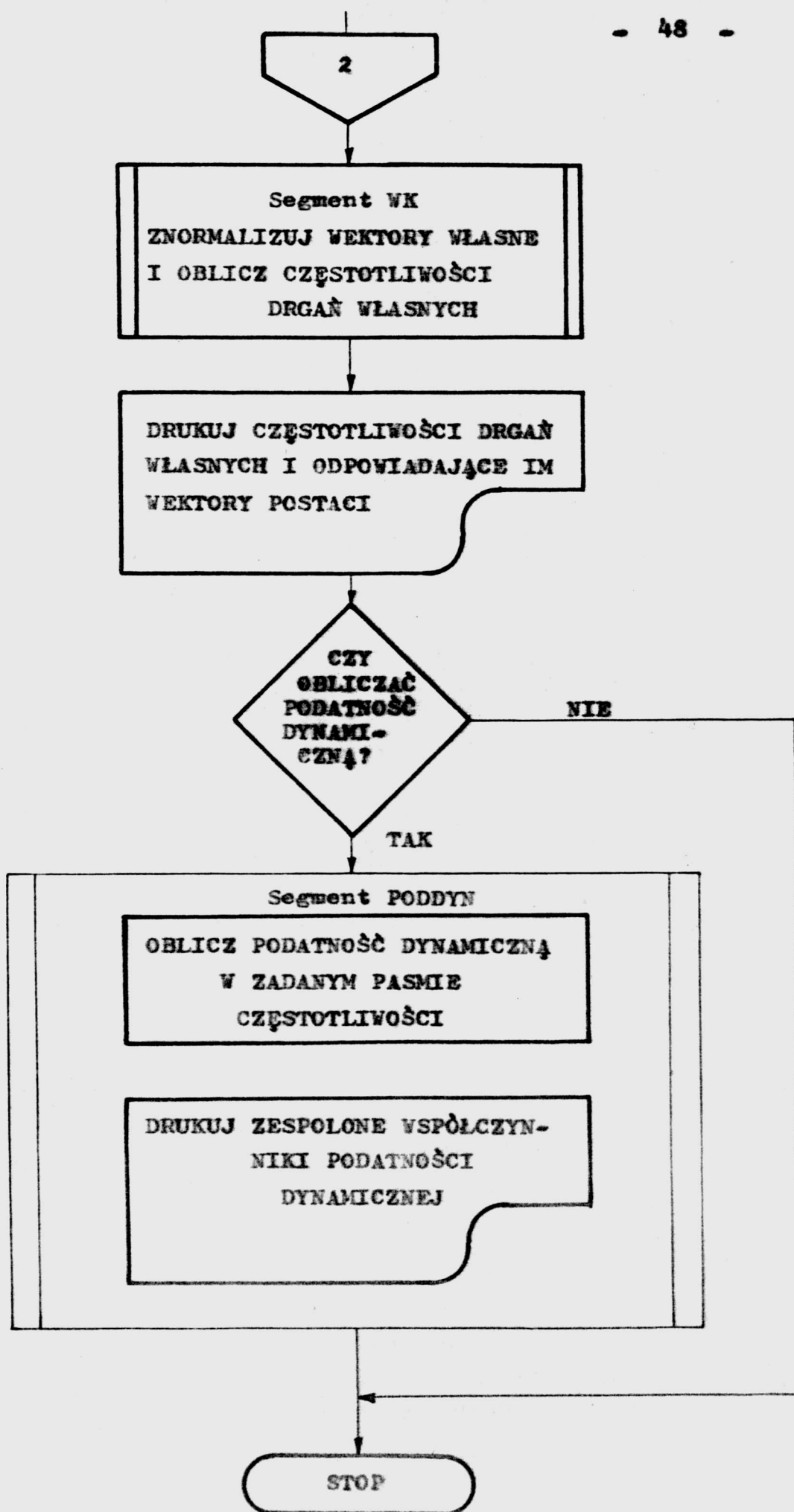




Rys. 3.2 Schemat blokowy algorytmu etapu pierwszego obliczeń dynamicznych wykorzystujący quasi-główne współrzędne







Rys. 3.3 Schemat blokowy algorytmu etapu drugiego obliczeń dynamicznych wykorzystujący quasi-główne współrzędne

3.5. Zalety metody modyfikacji

Aby ukazać zalety metody modyfikacji niezbędnym jest najpierw odpowiedzieć na pytanie: jakie wymiary mają macierze występujące w algorytmie etapu drugiego obliczeń?

Jeśli założymy, że ilość stopni swobody fragmentu modyfikowanego jest równa N_m , a części stanowiącej połączenie modyfikowanego fragmentu z pozostałą częścią struktury jest równa N_p /tak jak poprzednio ilość branych do analizy częstotliwości i postaci drgań własnych jest równa M /, to wymiary macierzy występujących w algorytmie etapu drugiego obliczeń są następujące:

$$[K^z], [M^z] \quad - \quad (N_m + N_p) \times (N_m + N_p)$$

$$\begin{aligned} & [K_q^z], [M_q^z], [K_q^o], \\ & [M_q^o], [K_q], [M_q] \quad - \quad (M + N_m) \times (M + N_m) \end{aligned}$$

- $[Q]$
- przy przekształceniu kongruentnym macierzy $[K^z]$ i $[M^z]$ wystarczy wziąć tylko część macierzy transformacji o wymiarach $- N_p \times M$,
 - przy transformacji postaci drgań własnych do współrzędnych uogólnionych można transmitować macierz $[Q]$ z pamięci zewnętrznej wierszami.

Ponieważ $N \gg N_m \gg N_p$ oraz $N \gg M$, zatem wynika z tego, że w etapie drugim obliczeń dokonuje się operacji na macierzach o znacznie mniejszych wymiarach niż na układ wyjściowy (2.1).

Daje to następujące korzyści:

- kolejne warianty można obliczać znacznie szybciej,

- obliczenia etapu drugiego w odróżnieniu od obliczeń etapu pierwszego nie wymagają dużej pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej i mogą być przeprowadzone na małym systemie cyfrowym.

Zalety metody modyfikacji wykorzystującej współrzędne quasi-główne uwidaczniają się również w przypadku przeprowadzania obliczeń podatności dynamicznej bez korzystania z założenia, że tłumienie nie sprzęga postaci drgań. W takim przypadku rozwiązuje się układ równań różniczkowych:

$$[M] \{\ddot{F}\} + [D] \{\dot{F}\} + [K] \{F\} = \{R_a\} , \quad (3.12)$$

gdzie: $[D]$ - macierz tłumień lokalnych.

Podstawienie do (3.12) przewidywanego rozwiązania w postaci:

$$\{F\} = \{F_a^c\} e^{j\omega t} , \quad (3.13)$$

gdzie: $\{F_a^c\}$ - wektor zespolonych amplitud,

sprowadza rozwiązanie układu równań różniczkowych (3.12) do rozwiązania układu zespolonych równań liniowych:

$$(-\omega^2 [M] + j\omega [D] + [K]) \{F_a^c\} = \{R_a\} . \quad (3.14)$$

Po rozwiązaniu układu (3.14) możemy znaleźć poszukiwane amplitudę i fazę poszczególnych składowych wektora współrzędnych uogólnionych odpowiadające zadanej częstotliwości wymuszenia ω . Obliczenia podatności dynamicznej, bez korzystania z założenia że tłumienie nie sprzęga postaci drgań, przy zastosowaniu metody modyfikacji wykorzystującej współrzędne quasi-główne, polegają na rozwiązaniu układu równań różniczkowych:

$$([M_q^0] + [M_q^z]) \{\ddot{y}\} + ([D_q^0] \quad [D_q^z]) \{\dot{y}\} + ([K_q^0] + [K_q^z]) \{y\} = \{R_{qa}\} e^{j\omega t}, \quad (3.15)$$

(patrz (3.10)) opisującego również jak układ (3.12) ruch, który wykonuje struktura pod wpływem wymuszenia harmonicznego, lecz we współrzędnych quasi-głównych. Rozwiązanie układu równań różniczkowych (3.15) podobnie jak układu (3.12) sprowadzić można do rozwiązywania układu zespolonych równań liniowych:

$$[-\omega^2([M_q^0] \quad [M_q^z]) + j\omega([D_q^0] \quad [D_q^z]) + ([K_q^0] \quad [K_q^z])]\{y_a^c\} = \{R_{qa}\}. \quad (3.16)$$

Ponieważ układ (3.14) składa się z N równań, a układ (3.16) z $M+N_m$ równań, gdzie $M+N_m \ll N$, rozwiązania układu (3.16) można dokonać znacznie szybciej niż układu (3.14) i przy mniejszym zapotrzebowaniu na pamięć operacyjną maszyny cyfrowej. Zwykle interesują nas przemieszczenia tylko kilku węzłów struktury modelowej. W takim przypadku celowe jest dobrać tak wektora współrzędnych quasi-głównych $\{y\}$, aby przemieszczenia tych węzłów były wyrażone w nim bezpośrednio za pomocą współrzędnych uogólnionych. Dzięki temu po rozwiązaniu układu (3.16) otrzymujemy od razu przemieszczenia interesujących nas węzłów bez dokonywania transformacji współrzędnych quasi-głównych do współrzędnych uogólnionych.

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę jeszcze na dodatkową zaletę metody modyfikacji zastosowanej w obliczeniach podatności dynamicznej, nie korzystających z założenia, że tłumienie nie sprzęga postaci drgań. Umożliwia ona mianowicie, jak widać z równań (3.15) i (3.16), modyfikację nie tylko własności masowych i sprężystych analizowanej struktury ale również

tłumienia.

Jak widać z powyższych rozważań metoda modyfikacji w obliczeniach dynamicznych własności konstrukcji sprężystych posiada istotne zalety. Dzięki tym zaletom proces obliczeń towarzyszący projektowaniu nowej konstrukcji można znacznie skrócić i usprawnić. Proces tych obliczeń może np. wyglądać następująco:

- 1/ przeliczenie pierwotnej koncepcji konstrukcji na dużym komputerze, przy czym w danych muszą być zaznaczone elementy, w których będą wprowadzane modyfikacje,
- 2/ przesłanie z dużego komputera pośrednich wyników, tzn. $[Q]$, $[K_q^0]$, $[M_q^0]$ /w przypadku modyfikacji tłumienia jeszcze $[D_q^0]$ / za pośrednictwem pamięci zewnętrznej na mały system cyfrowy,
- 3/ ustalanie modyfikacji,
- 4/ przeliczanie kolejnych wariantów konstrukcji na małym systemie cyfrowym.

4. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA METODY MODYFIKACJI DO OBLICZEŃ =====

DYNAMICZNYCH

=====

W oparciu o opisane w podrozdziale 3.4 algorytmy obliczeń dynamicznych metodą modyfikacji napisane zostały w języku FORTRAN dwa programy na maszynę cyfrową ODRA:

- program DYNK realizujący etap I, oraz
- program QUASI realizujący etap II.

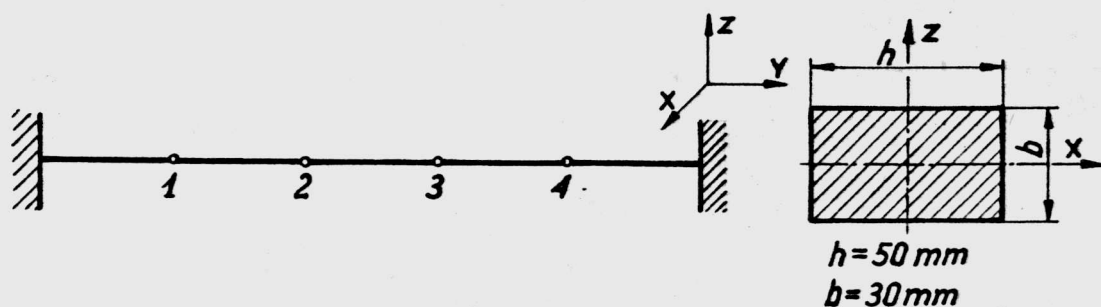
Obliczenia wyżej wymienionymi programami wykonywano na maszynie ODRA 1305 (64 K).

Program DYNK umożliwia wykonanie obliczeń dynamicznych struktur belkowych o 50 węzłach tj. o 300 stopniach swobody zawierających maksymalnie 60 elementów belkowych. Oba programy umożliwiają obliczenie 15 najniższych częstotliwości i odpowiadających im postaci drgań własnych. Ponadto oba programy zostały wyposażone w podprogramy graficzne, które za pomocą drukarki wierszowej rysują charakterystyki amplitudowo-fazowe i amplitudowo-częstotliwościowe podatności dynamicznej między wybranymi punktami węzłowymi modelu belkowego w kierunku X,Y,Z, w zadanym paśmie częstotliwości. Zestaw programów DYNK i QUASI umożliwia dokonywanie modyfikacji własności masowych i sprężystych, jednocześnie w pięciu, dowolnie wybranych z analizowanego modelu, elementach belkowych.

4.1. Przykład 1 - belka obustronnie utwierdzona

Obliczeniom poddano model belkowy stalowej belki /rys.4.1/ obustronnie utwierdzonej o długości 500 mm i przekroju poprzecz-

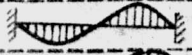
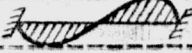
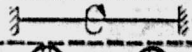
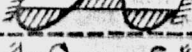
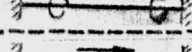
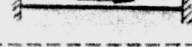
nym w kształcie prostokąta o wymiarach 30 mm x 50 mm. Model składał się z pięciu elementów belkowych.



Rys.4.1 Model belkowy stalowej belki obustronnie utwierdzonej i jej przekrój poprzeczny

Modyfikacje tego modelu polegały na zmianie własności sprężystych i masowych środkowego elementu belkowego położonego pomiędzy węzłami 2 i 3. Zmiany te uzyskiwano zwiększając wymiar b przekroju, co pociągało za sobą oczywiście zmianę prawie wszystkich parametrów przekrojowych oraz masy i masowych momentów bezwładności tego elementu. Wyniki zamieszczono w tabeli 4.1. W pierwszej kolumnie tej tabeli zestawiono w górnej jej części parametry charakteryzujące element belkowy przed modyfikacjami /wszystkie pięć elementów modelu wyjściowego były identyczne/, a w dolnej jej części obliczone częstotliwości drgań własnych modelu wyjściowego przyporządkowane kolejnym dziesięciu postaciom drgań.

W następnych kolumnach, w górnej części tabeli, zamieszczone zostały parametry modyfikowanego elementu belkowego, po kolejnych modyfikacjach tzn., gdy wymiar b , przekroju poprzecznego tego elementu, przyjmował kolejno wartości: 35, 40, 45 i 50 mm. W dolnej części tabeli zestawiono obliczone częstotli-

		Modyfikacja I		Modyfikacja II		Modyfikacja III		Modyfikacja IV		
m_e		1,17 kg	1,37 kg	1,56 kg	1,76 kg	1,95 kg				
b		3 cm	3,5 cm	4 cm	4,5 cm	5 cm				
J_x		11 cm ⁴	18 cm ⁴	27 cm ⁴	38 cm ⁴	52 cm ⁴				
J_z		31 cm ⁴	36 cm ⁴	42 cm ⁴	47 cm ⁴	52 cm ⁴				
J_t		27 cm ⁴	40 cm ⁴	56 cm ⁴	74 cm ⁴	94 cm ⁴				
A		15 cm ²	17,5 cm ²	20 cm ²	22,5 cm ²	25 cm ²				
Postacie drgań		Częstotliwości drgań własnych								
		1	1	2	1	2	1	2	1	2
		f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]
1		598,21	611,48	611,48	616,23	616,23	615,06	615,06	610,14	610,14
2		960,18	946,35	946,69	931,66	932,81	916,64	918,84	901,66	905,02
3		1523,11	1513,52	1513,52	1497,02	1497,02	1477,05	1477,05	1455,24	1455,24
4		2356,22	2330,05	2330,34	2302,18	2303,15	2273,53	2275,42	2244,68	2247,61
5		2510,83	2392,66	2392,66	2270,87	2270,87	2147,92	2147,92	2025,79	2025,79
6		2677,98	2813,43	2813,43	2925,61	2925,61	3009,75	3009,75	3069,22	3069,22
7		3823,75	3872,04	3872,04	3869,73	3869,73	3845,91	3845,91	3813,10	3813,10
8		3991,07	4022,22	4023,29	4048,31	4052,11	4070,32	4077,98	4089,26	4101,55
9		4775,89	5051,20	5051,20	5240,94	5240,94	5361,64	5361,64	5442,26	5442,26
10		4980,81	4836,60	4837,02	4703,41	4704,88	4580,02	4582,95	4465,36	4469,99

1 - częstotliwości drgań własnych obliczone programem DYNK
2 - Częstotliwości drgań własnych obliczone programem QUASI

Tabela 4.1

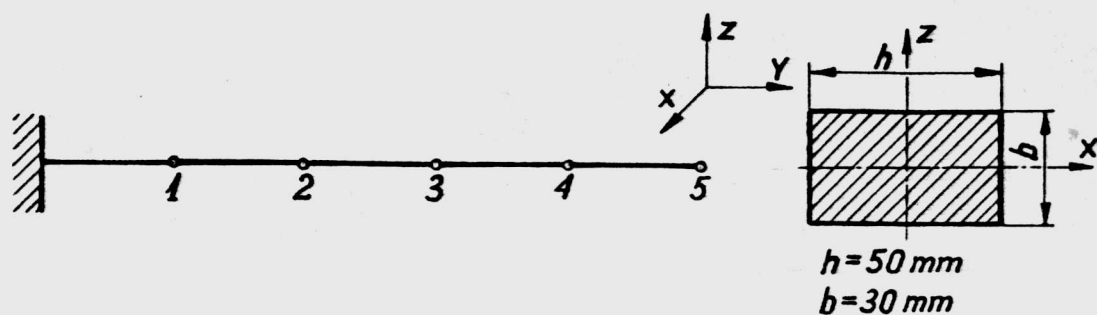
wości drgań własnych modelu, po jego kolejnych czterech modyfikacjach.

Dla porównania obliczenia wykonano nie tylko metodą modyfikacji ale również pełną belkową metodą sztywności - stąd też pod każdym zestawem parametrów znajdują się dwie kolumny - lewa - przedstawiająca częstotliwości drgań własnych obliczone programem DYNK, prawa - częstotliwości drgań własnych obliczone programem QUASI.

Modyfikacje modelu powodowały również zmiany postaci drgań. Zmiany te były jednak nieduże i charakter postaci pozostawał ten sam. Jak widać z tabeli 4.1 niektóre zmodyfikowane parametry ulegały dość znacznym zmianom np. geometryczny moment bezwładności J_x został zwiększony aż ponad czterokrotnie. Spowodowało to dość duże przesunięcia częstotliwości drgań własnych, a nawet zmianę kolejności występowania postaci drgań, i tak: dziewiąta postać stała się dziesiątą, a dziesiąta postać stała się dziewiątą, dla II, III i IV modyfikacji, podobnie czwarta i piąta postać zmieniły się kolejnością występowania. Z tabeli wynika, że metoda modyfikacji nawet przy tak istotnych zmianach modyfikowanych parametrów daje wyniki z bardzo dużą dokładnością.

4.2. Przykład 2 - belka jednostronnie utwierdzona

Obliczeniom poddano model belkowy, podobnej jak w przykładzie pierwszym, stalowej belki ale jednostronnie utwierdzonej /rys.4.2/.



Rys.4.2 Model belkowy stalowej belki jednostronnie utwierdzonej i jej przekrój poprzeczny

Model składał się z pięciu elementów belkowych. Przeprowadzono jedną modyfikację tego modelu, polegającą na zwiększeniu o $0,5 \text{ kg}$ masy i o $1,2 \text{ kg cm}^2$ masowych momentów bezwładności przypisanych punktowi węzłowemu o numerze 5. Wyniki przedstawiono w tabeli 4.2, której układ jest analogiczny do układu tabeli 4.1. Jak wynika z tabeli wszystkie częstotliwości drgań własnych obniżyły się pod wpływem modyfikacji, a przy tym dziewiąta postać drgań zamieniła się kolejnością występowania z ósmą. Podobnie jak w poprzednim przykładzie widać, że wyniki otrzymane metodą modyfikacji nie różnią się w istotny sposób od wyników otrzymanych pełną belkową metodą sztywności.

4.3. Przykład 3 - Korpus stojaka frezarki bramowej

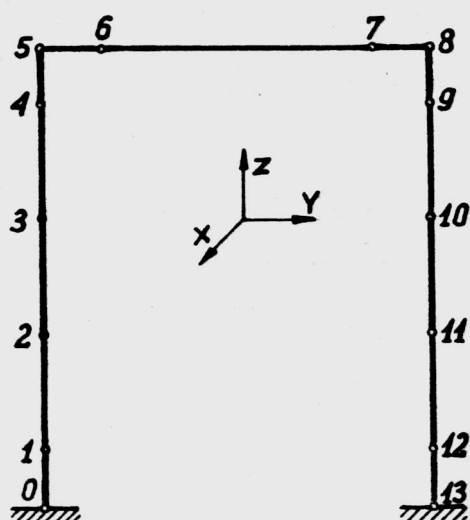
Obliczano model belkowy korpusu stojaka frezarki bramowej /rys.4.3/.

Model składał się z 13 elementów belkowych i posiadał 72 stopnie swobody.

		Modyfikacja		
m_{k5}		0,585 kg	1,085 kg	
$\theta_{x_k}^5$		5,3 kg cm ²	6,5 kg cm ²	
$\theta_{y_k}^5$		1,7 kg cm ²	2,9 kg cm ²	
$\theta_{z_k}^5$		6,1 kg cm ²	7,3 kg cm ²	
		Częstotliwości drgań		
Postacie drgań		1	1	2
		f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]
1		95,42	82,79	82,79
2		158,18	137,32	137,32
3		544,30	500,40	500,40
4		882,16	812,72	812,72
5		1173,83	1094,84	1094,84
6		1381,13	1323,78	1323,78
7		2180,21	2092,11	2092,11
8		2434,16	2388,56	2388,56
9		2521,45	2324,02	2326,01
10		3406,59	3185,75	3185,99
11		3575,78	3540,54	3540,55
12		3719,53	3654,15	3654,16

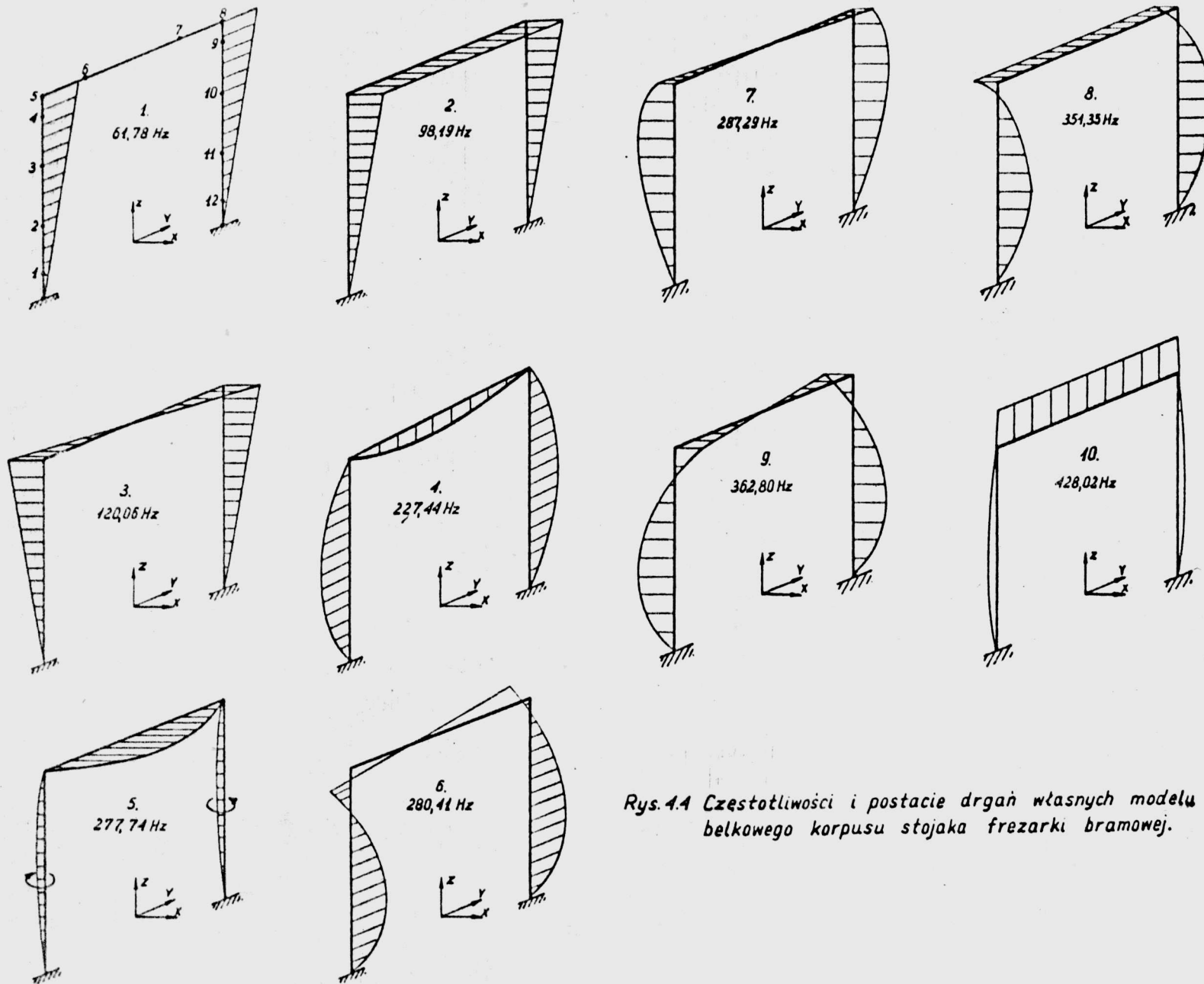
- 1 - Częstotliwości drgań własnych obliczone programem DYNK
2 - Częstotliwości drgań własnych obliczone programem QUASI

Tabela 4.2



Rys.4.3 Model belkowy korpusu stojaka frezarki bramowej

Dziesięć częstotliwości i postaci drgań własnych struktury wyjściowej, obliczone belkową metodą sztywności, przedstawia rys.4.4. Modyfikacje tego modelu polegały na zmianie własności sprężystych czterech elementów belkowych o identycznych przekrojach, leżących pomiędzy węzłami 0-1, 1-2, 11-12 oraz 12-13. Zmiany te uzyskano przez identyczne modyfikacje we wszystkich czterech elementach jednocześnie, dwóch wielkości przekrojowych: geometrycznego momentu bezwładności J_x oraz wskaźnika charakteryzującego sztywność skrętną J_t . Wyniki zamieszczono w tabeli 4.3, której układ jest analogiczny do układu tabel 4.2 i 4.3. Podobnie jak w poprzednich tabelach pierwsza kolumna tabeli 4.3 zawiera: w górnej jej części parametry charakteryzujące przekrój, który posiadały wymienione cztery elementy jeszcze przed modyfikacją, a w dolnej jej części obliczone częstotliwości drgań własnych struktury wyjściowej, przyporządkowane kolejnym numerom postaci drgań z rys.4.4. Dalsze kolumny tabeli przedstawiają obliczone



Rys. 4.4 Częstotliwości i postacie drgań własnych modelu belkowego korpusu stojaka frezarki bramowej.

		I	II	III			
		Modyfikacja	Modyfikacja	Modyfikacja			
J_x	282 cm ⁴	400 cm ⁴	500 cm ⁴	600 cm ⁴			
J_t	576 cm ⁴	576 cm ⁴	990 cm ⁴	300 cm ⁴			
Nr pos- taci dr- gań	częstotliwości drgań własnych						
	1	1	2	1	2	1	2
	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]
1	61,78	67,65	67,65	71,70	71,09	75,15	75,70
2	98,19	98,19	98,19	98,21	98,19	98,19	98,19
3	120,06	120,06	120,06	129,53	129,52	106,50	106,50
4	227,44	237,16	237,16	243,36	243,37	248,52	248,54
5	277,74	277,73	277,74	320,13	320,13	238,19	238,19
6	280,41	289,74	289,79	295,16	295,24	299,41	299,49
7	287,29	287,29	287,29	313,53	313,53	260,00	260,00
8	351,35	351,35	351,35	351,36	351,36	351,35	351,35
9	362,80	362,80	362,80	374,74	374,74	356,56	356,56
10	428,02	428,20	428,20	428,28	428,29	428,33	428,35

- 1 - Częstotliwości drgań własnych obliczone programem DYNK
2 - Częstotliwości drgań własnych obliczone programem QUASI

Tabela 4.3

częstotliwości drgań własnych dla kolejnych trzech modyfikacji. Pierwsza modyfikacja polegała na zwiększeniu tylko jednego parametru - geometrycznego momentu bezwładności J_x . Mogło to zatem wpłynąć tylko na podwyższenie częstotliwości drgań własnych w kierunku Y, a więc związanych z postaciami 1, 4 i 6. Te przypuszczenia potwierdziły obliczenia, zarówno pełną belkową metodą sztywności jak i metodą modyfikacji. Druga modyfikacja polegała na około 70% wzroście obu modyfikowanych parametrów, co spowodowało podwyższenie prawie wszystkich częstotliwości drgań własnych. Nie uległy podwyższeniu te, w których nie występują drgania w kierunku Y lub drgania skrętne, a są to postacie 2, 8 i 10.

Trzecia modyfikacja polegała na ponad dwukrotnym zwiększeniu geometrycznego momentu bezwładności J_x i prawie dwukrotnym zmniejszeniu wskaźnika charakteryzującego sztywność skrętną. Podobnie jak w drugiej modyfikacji nie mogło to wpłynąć na zmianę częstotliwości drgań własnych związanych z 2, 8 i 10 postacią. Podwyższeniu uległy częstotliwości drgań własnych związanych z drganiami w kierunku Y, a więc związanych z postaciami 1, 4 i 6. Natomiast obniżyły się częstotliwości drgań własnych związanych z drganiami skrętnymi, a więc odpowiadające postaciom 3, 5, 7 i 9.

Podobnie jak w poprzednich przykładach i tu nastąpiły pod wpływem modyfikacji zmiany kolejności występowania postaci drgań. Pod wpływem pierwszej modyfikacji szósta postać stała się siódmą, a siódma zajęła miejsce szóstej. Pod wpływem drugiej modyfikacji piąta postać zajęła miejsce siódme, szósta postać zajęła miejsce piąte, a siódma postać stała się szóstą.

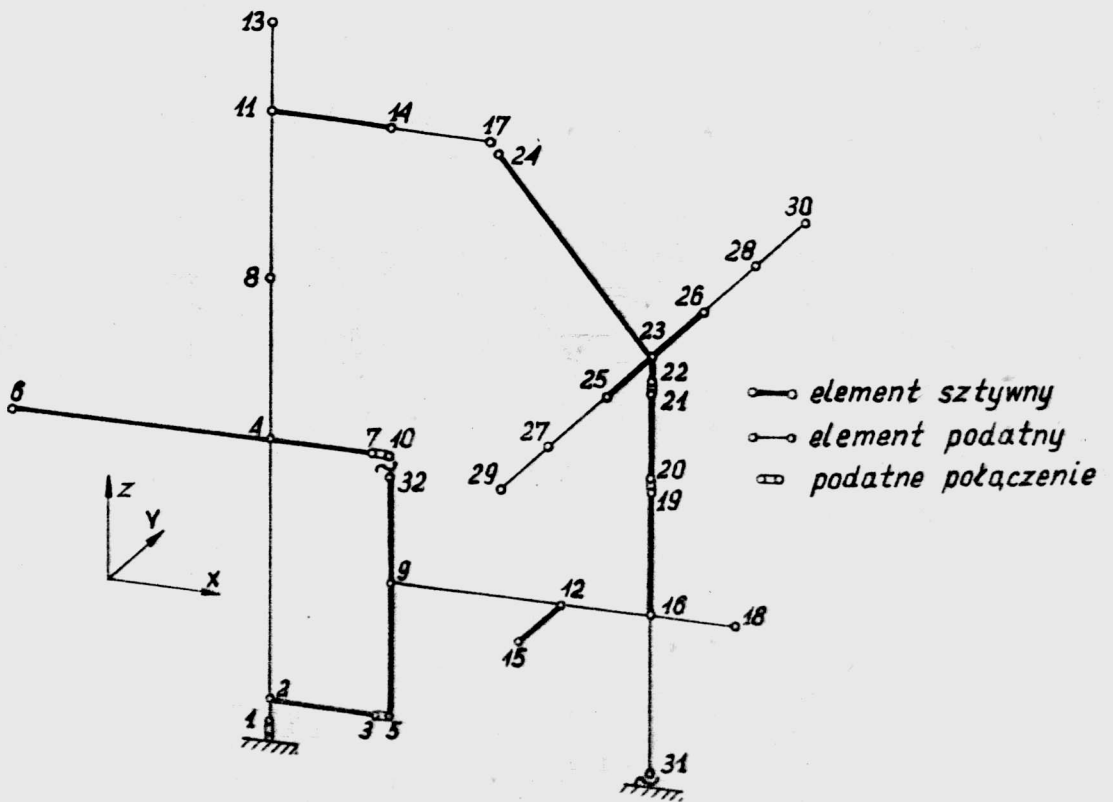
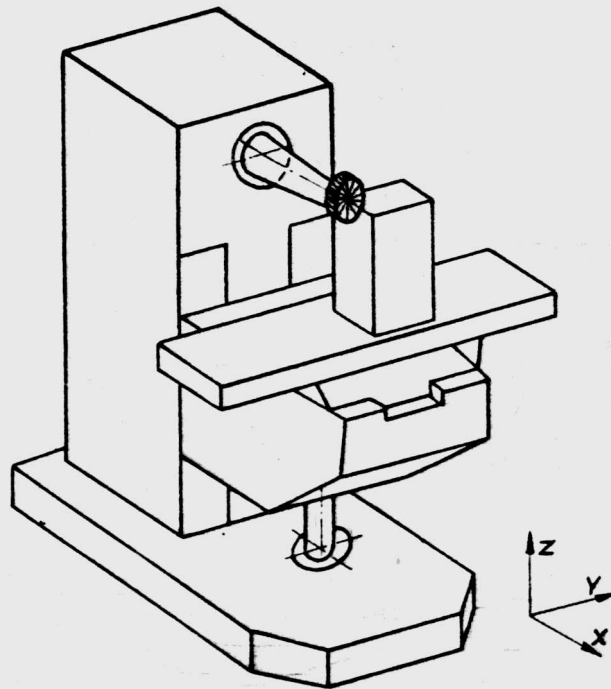
Natomiast pod wpływem trzeciej modyfikacji kolejnością występowania zamieniły się następujące postacie: czwarta z piątą oraz szósta z siódmą.

Przedstawiona powyżej analiza zmian własności dynamicznych, które dokonały się pod wpływem modyfikacji, świadczy że zmiany te były istotne, a jak wynika z tabeli 4.3 wyniki otrzymane metodą modyfikacji w sposób dokładny odzwierciedliły te zmiany.

4.4. Przykład 4 - Pozioma frezarka wspornikowa

Rys.4.5 przedstawia szkic poziomej frezarki wspornikowej oraz jej model belkowy, który poddano obliczeniom dynamicznym. Model ten składa się z 32 elementów belkowych i posiada 180 stopni swobody.

Elementy 2, 4, 8, 11 i 13 modelują stojak, którego przekrój przyjęto jako stały na całej długości. Element 1 zastępuje połączenie stojaka z podstawą i może być nim zamodelowana nie tylko sztywność samego połączenia ale i sztywność płyty podstawy. Elementy 12, 16 i 18 modelują wspornik, który jest podnoszony śrubą zamodelowaną elementem 31. Elementy 5 i 10 modelują połączenie, pomiędzy stojakiem a wspornikiem, którego własności sprężyste wynikają z podatności prowadnic. Połączenie prowadnicowe, między wspornikiem a saniami, zostało zamodelowane elementem 20. Natomiast własności połączenia san, obrotnicy i stołu przypisano elementowi 22. Elementy 25, 27, 29 i 26, 28, 30 modelują stół, a ustawiony na nim przedmiot obrabiany zostaje zastąpiony elementem 24. Element 17 zastępuje



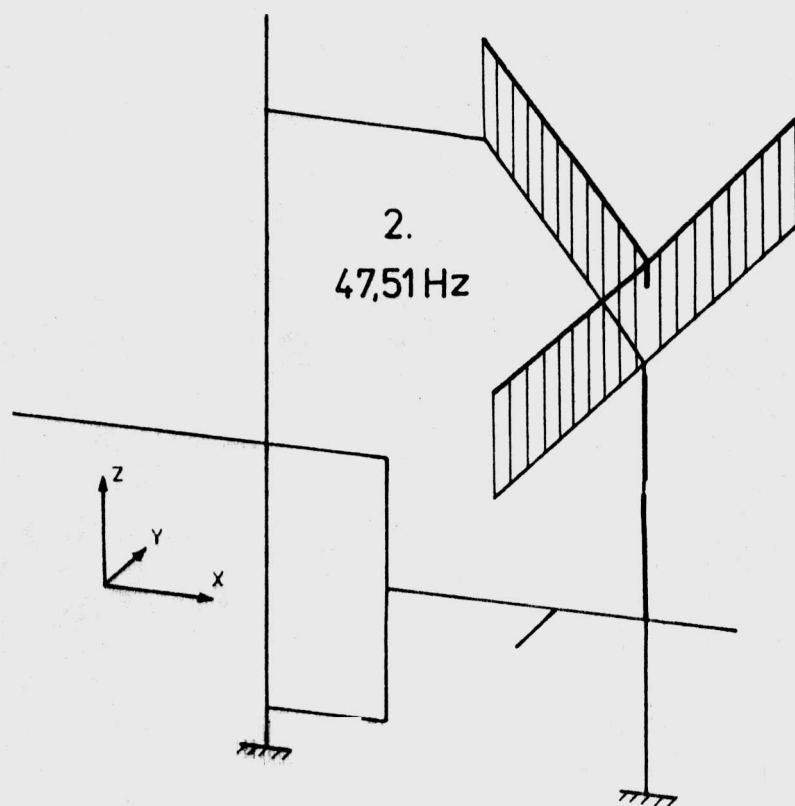
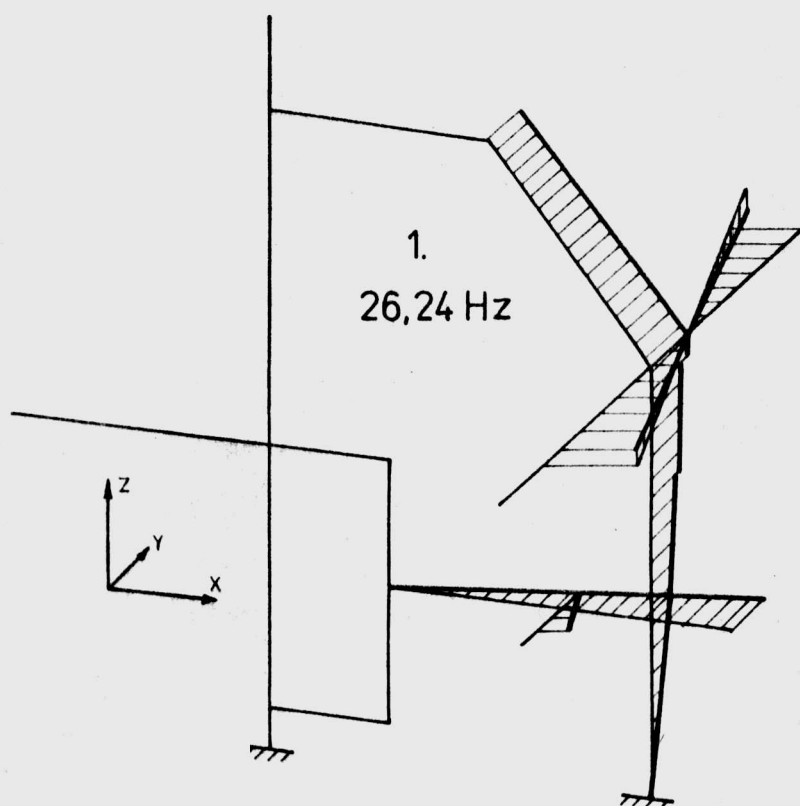
Rys. 4.5 Szkic poziomej frezarki wspornikowej oraz jej model belkowy

je wrzeczono wraz z narzędziem. Silniki napędu głównego i posuwu zamodelowano elementami 6 i 15. Współczynniki sztywności elementów zastępujących połączenia przyjęto do obliczeń na podstawie pomiarów [3] /patrz tabela 4.4/.

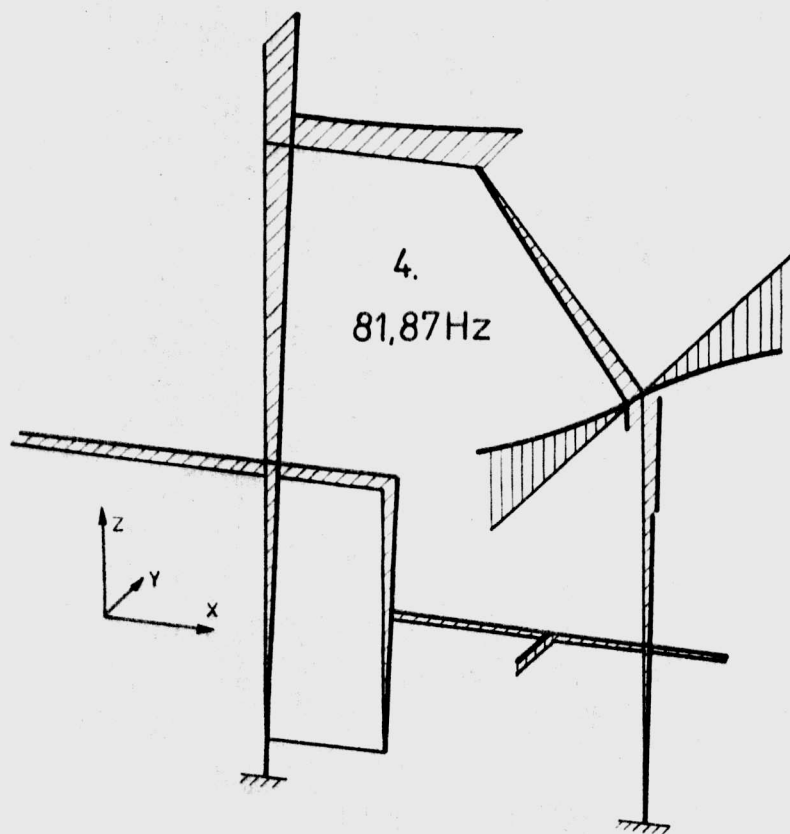
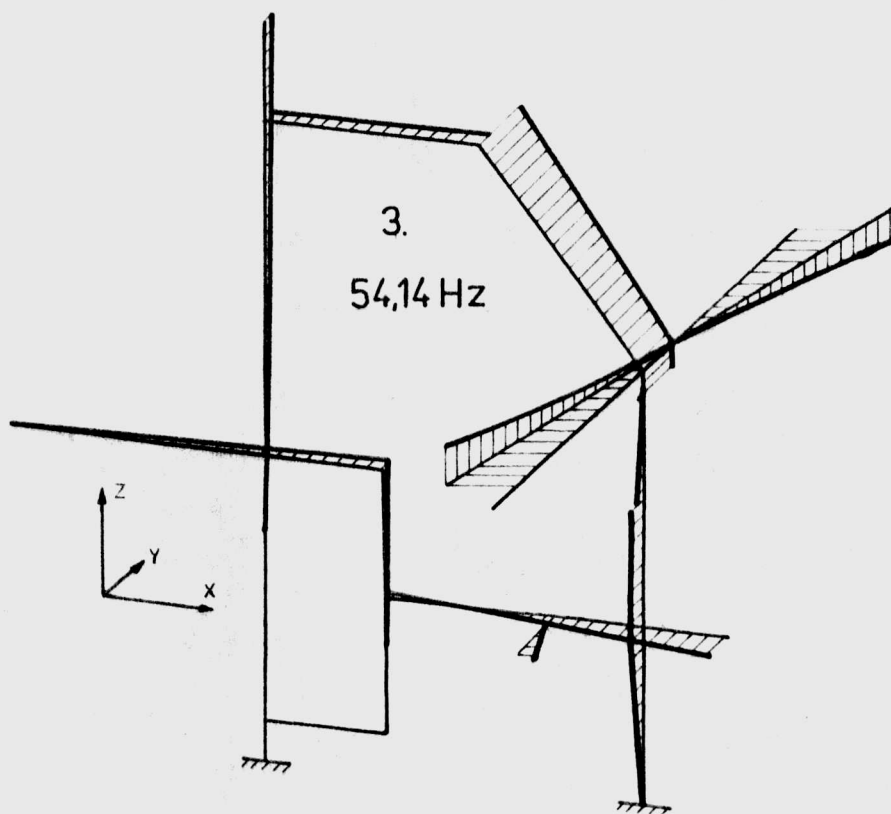
Tabela 4.4

Nr ele- men- tu	p_x/f_x	p_y/f_y	p_z/f_z	m_x/φ_x	m_y/φ_y	m_z/φ_z
	N/m	N/m	N/m	Nm/rad	Nm/rad	Nm/rad
1	$3 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^{11}$	$7,1 \cdot 10^8$	$9,5 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^{11}$
5	$4 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	$2,2 \cdot 10^5$
10	$4 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^{11}$	$5 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	$2,2 \cdot 10^5$
20	$1,6 \cdot 10^9$	$1,4 \cdot 10^8$	$3,3 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^{11}$
22	$1,6 \cdot 10^9$	$3,6 \cdot 10^7$	$3,3 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^{11}$

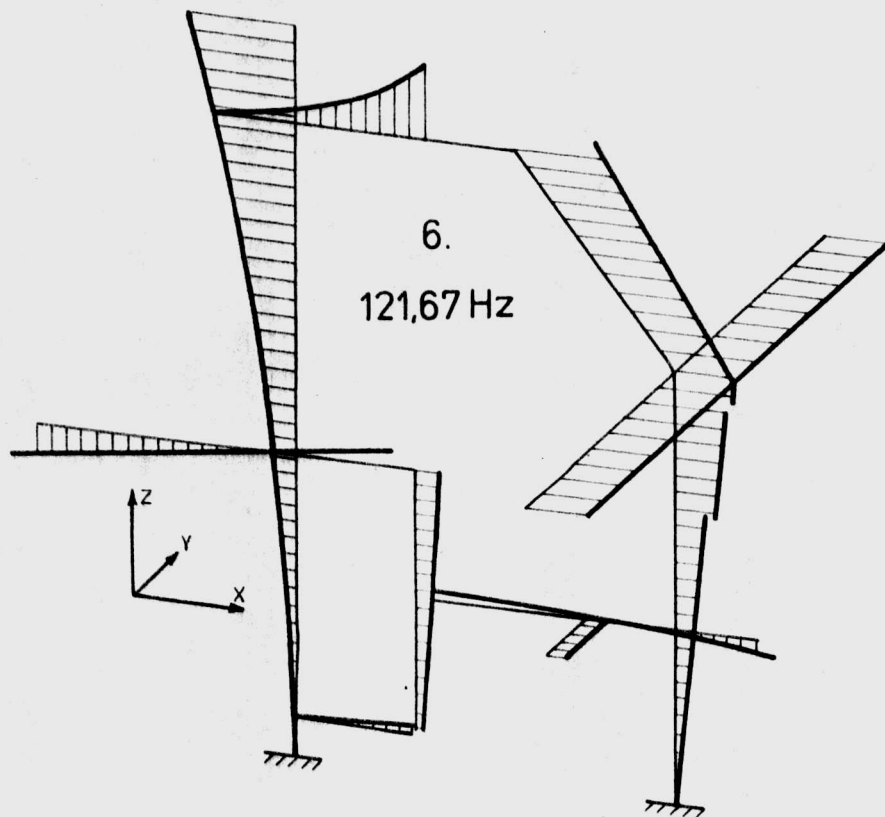
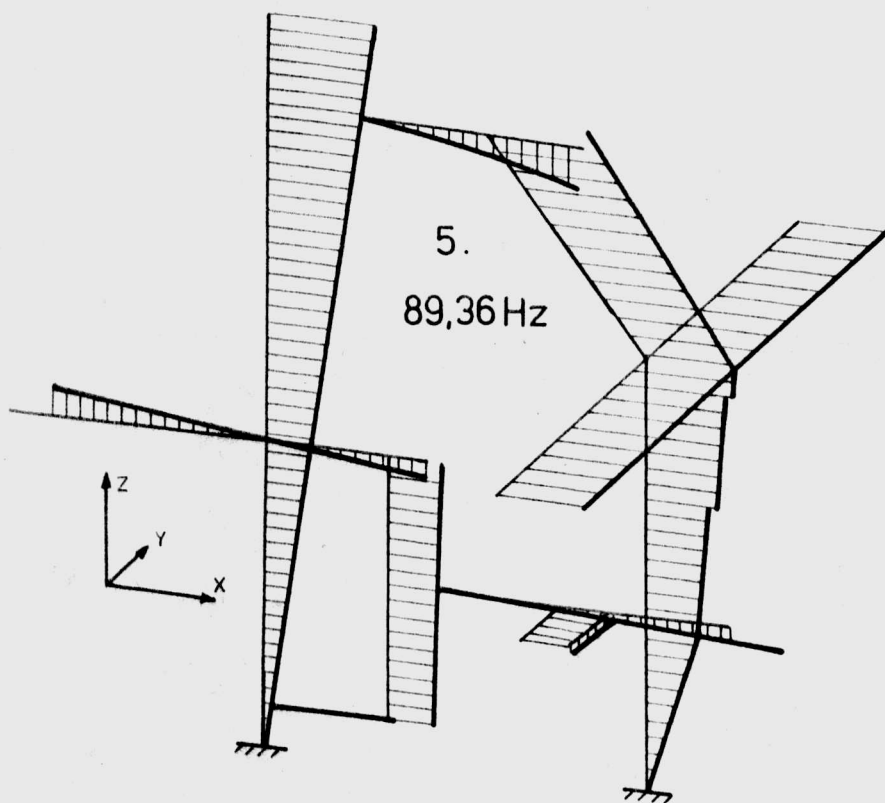
Obliczenia dynamiczne tego modelu przeprowadzono belkową metodą sztywności. Na rys.4.6 zamieszczono dziesięć najniższych obliczonych częstotliwości i postaci drgań własnych. Ponadto, na podstawie dwunastu najniższych częstotliwości i postaci drgań własnych, obliczono podatności dynamiczne między narzędziem a przedmiotem, czyli między węzłami 17 i 24, w zakresie od 1 do 220 Hz. Do obliczeń podatności przyjęto dla wszystkich postaci taki sam względny współczynnik tłumienia modalnego równy 0,04. Obliczenia wykazały, że względne przemieszczenie węzłów 17 i 24 osiąga istotne wartości tylko na kierunkach zgodnych z kierunkami wymuszenia, a największe wartości obliczana podatność osiąga na kierunkach x i z . Rys.4.7 przedstawia wy-



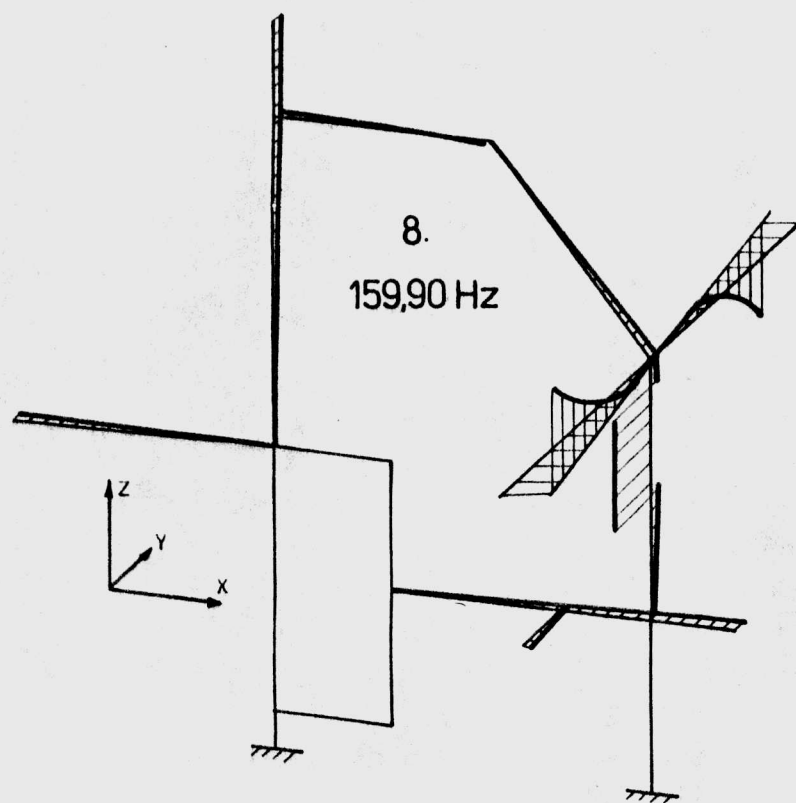
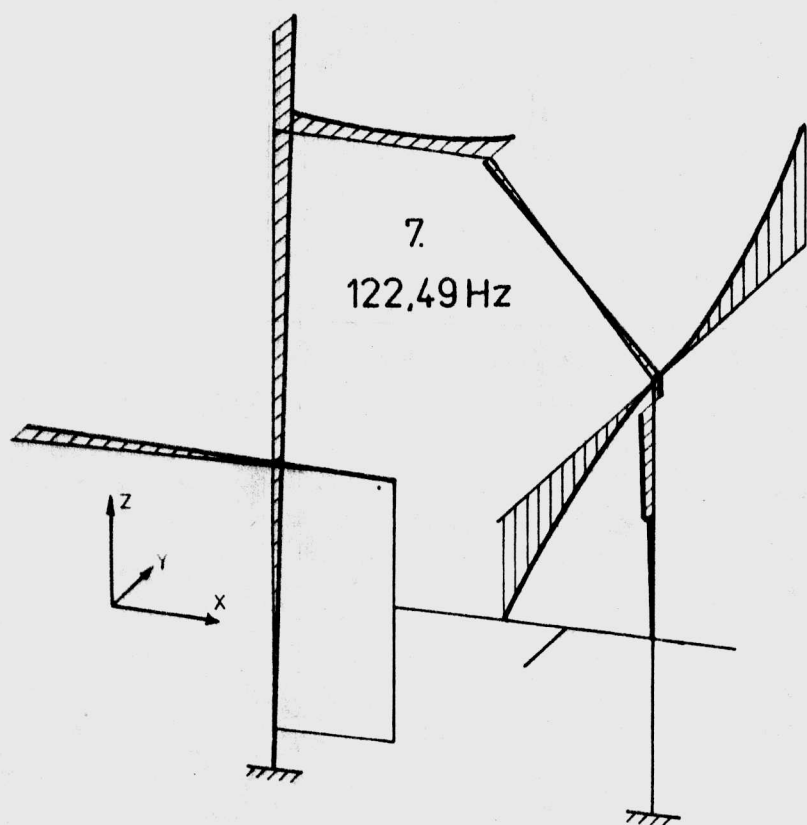
Rys. 4.6 Częstotliwości i postacie drgań własnych modelu belkowego frezarki wspornikowej.



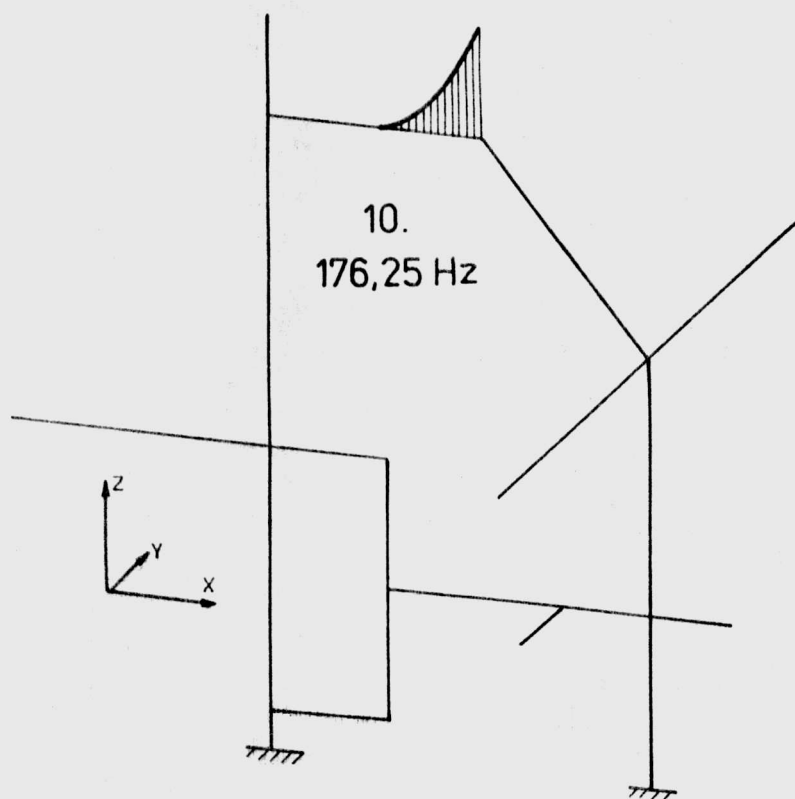
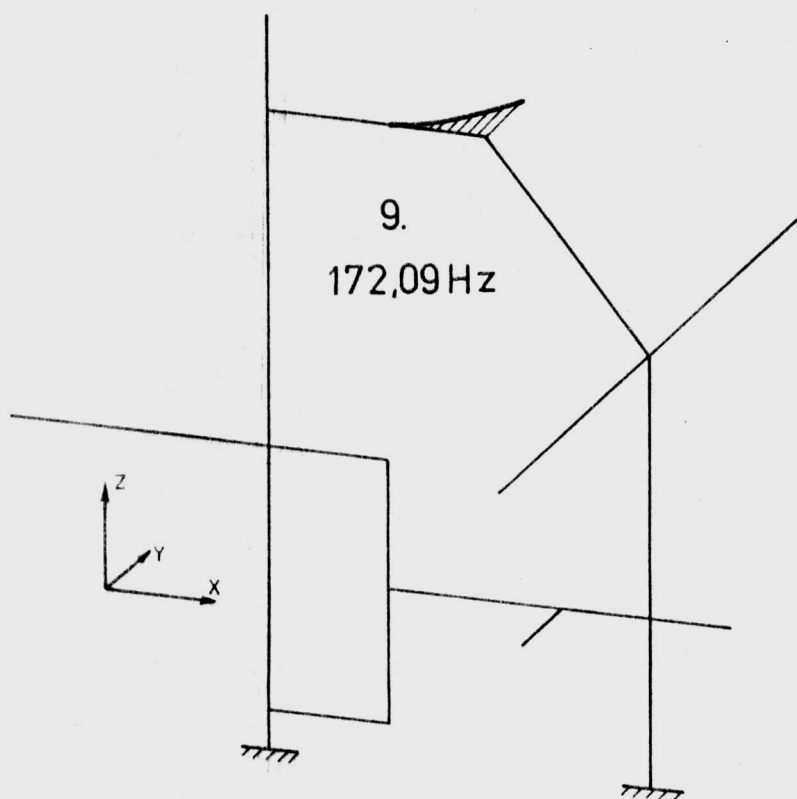
Rys. 4.6 c.d.



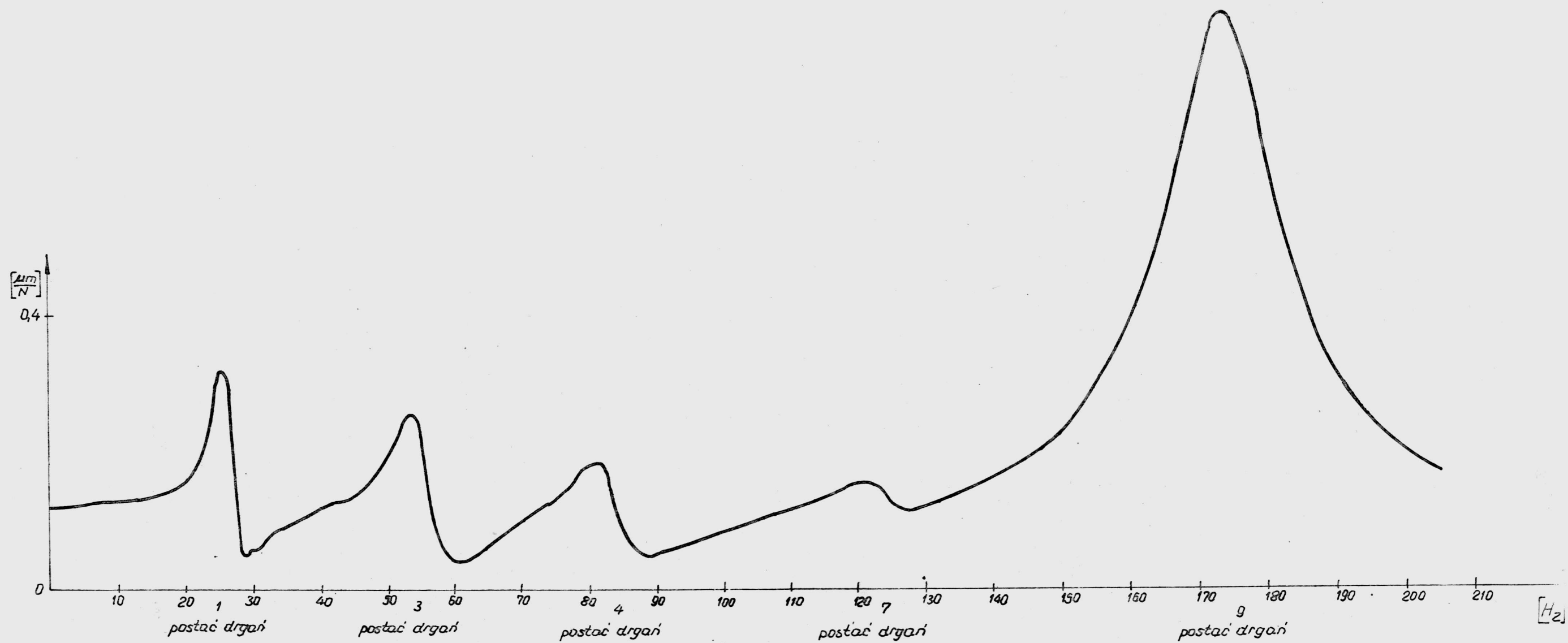
Rys. 4.6 c.d.



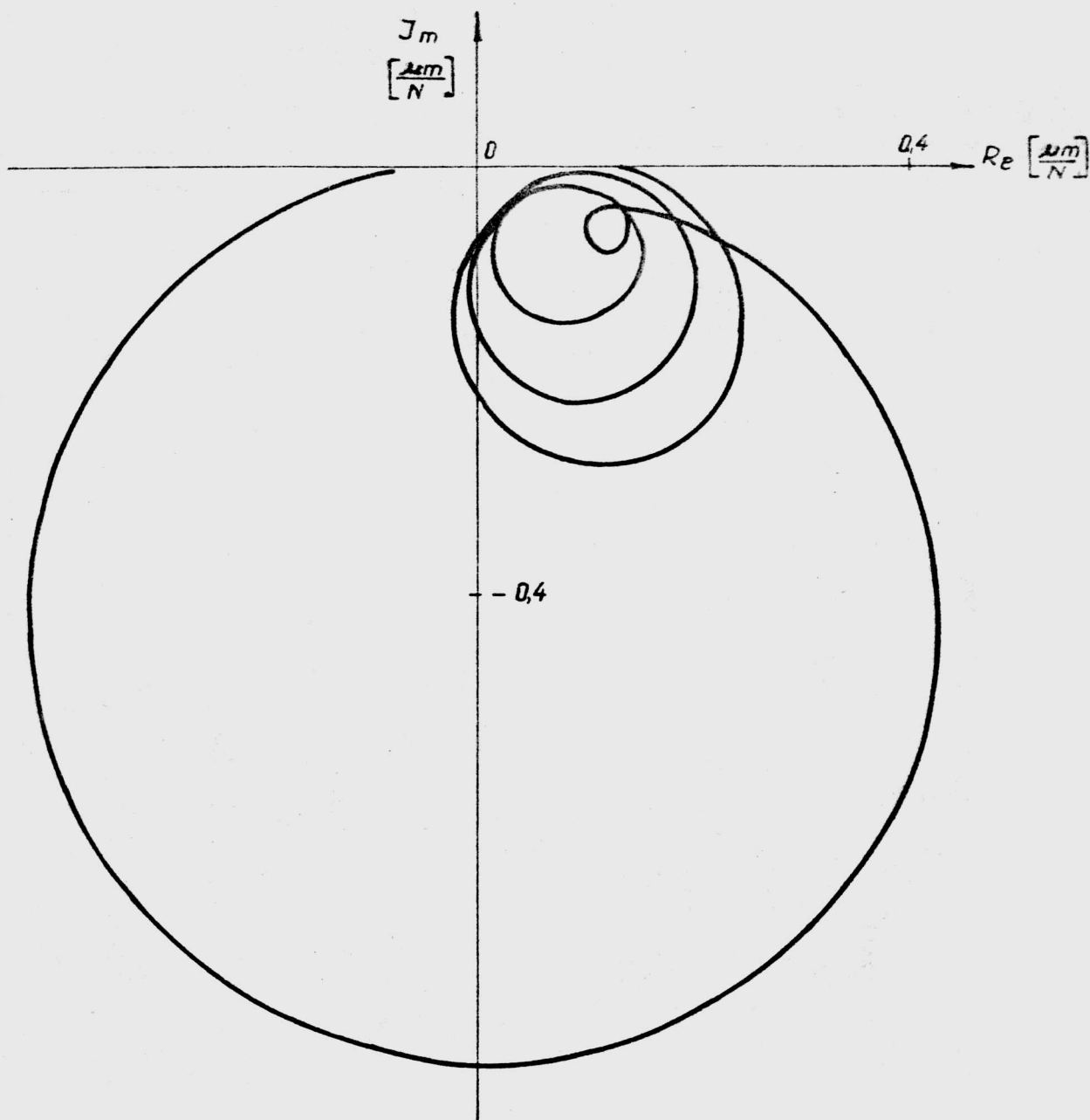
Rys. 4.6 c. d.



Rys. 4.6 c.d.



Rys.47 Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa podatności dynamicznej między narzędziem i przedmiotem wersji pierwotnej w kierunku Y.



Rys.47cd. Charakterystyka amplitudowo-fazowa podatności dynamicznej między narzędziem i przedmiotem wersji pierwotnej w kierunku Y.

kresy amplitudowo-fazowy i amplitudowo-częstotliwościowy podatności dynamicznej w kierunku Y. Jak stwierdzono na podstawie obliczeń, postaciach 11 i 12, a także następne do 15 włącznie, praktycznie nie wpływają na przedstawione charakterystyki w zakresie od 1 Hz do 200 Hz. Przeprowadzono 6 modyfikacji tego modelu. Polegały one na stopniowym wzroście sztywności elementów 5, 10, 20 i 22 modelujących połączenia. Wzrost ten odbywał się kolejno o 10, 20, 30, 40, 50 i 60 procent.

W tabeli 4.5 przedstawiono częstotliwości drgań własnych dla kolejnych modyfikacji, obliczone belkową metodą sztywności i metodą modyfikacji. Jak wynika z tabeli pod wpływem usztywnienia połączeń nastąpiło podwyższenie wszystkich częstotliwości drgań własnych. Prócz tego usztywnienie połączeń wpłynęło na zmianę postaci drgań. Wyniki obliczeń wykazały, że zmiany te były istotne tylko dla ósmej i dziewiątej postaci drgań. Pozostałe postaci, chociaż nieco się zmieniły, to jednak nawet przy największej modyfikacji zachowały swój charakter. Pod wpływem wzrastającej sztywności połączeń zmiana ósmej postaci polegała na stopniowym zaniku drgań stołu i sań /element 21/ i na pojawieniu się drgań wrzeciona w kierunku Y. Przy trzeciej modyfikacji praktycznie drgało już tylko samo wrzeciono. Tak więc ósma postać zmieniła się w dziewiątą postać wersji pierwotnej. Potwierdzeniem tego jest obliczona częstotliwość drgań własnych, która dla szóstej modyfikacji wynosi 171,99 Hz i różni się tylko o 0,1 Hz od częstotliwości drgań własnych odpowiadającej dziewiątej postaci drgań własnych wersji pierwotnej wynoszącej 172,09 Hz. Ponieważ ósma postać drgań zdążyła w kierunku znanej postaci /zakodowanej

Nr pos- ta- ci dr- gań	Wersja pier- wotna	I		II		III		IV		V		VI	
		Modyfikacja		Modyfikacja		Modyfikacja		Modyfikacja		Modyfikacja		Modyfikacja	
		Częstotliwości drgań własnych											
		1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]	f [Hz]
1	26,24	26,47	26,48	26,68	26,68	26,86	26,87	27,02	27,03	27,16	27,19	27,30	27,32
2	47,51	49,71	49,71	51,80	51,81	53,79	53,81	55,68	55,72	57,50	57,55	59,24	59,31
3	54,14	55,53	55,53	56,76	56,78	57,84	57,89	58,80	58,87	59,65	59,75	60,41	60,54
4	81,87	82,91	82,91	83,98	83,99	85,08	85,10	86,20	86,24	87,33	87,40	88,46	88,58
5	89,36	90,64	90,68	91,73	91,88	92,68	92,96	93,50	93,97	94,24	94,90	94,89	95,78
6	121,67	124,11	124,19	126,42	126,71	128,59	129,22	130,63	131,71	132,55	134,18	134,34	136,63
7	122,49	122,95	122,95	123,34	123,35	123,71	123,72	124,07	124,07	124,41	124,42	124,76	124,77
8	159,90	165,60	165,76	170,46	170,89	171,81	171,86	171,93	171,95	171,97	171,98	171,99	171,99
9	172,09	172,16	172,16	172,59	172,81	176,08	177,46	180,38	182,86	184,35	188,17	187,96	193,36
10	176,25	176,30	176,31	176,35	176,35	176,38	176,40	176,42	176,44	176,46	176,49	176,50	176,55

1 - Częstotliwości drgań własnych obliczone programem DYNK

2 - Częstotliwości drgań własnych obliczone programem QUASI

Tabela 4.5

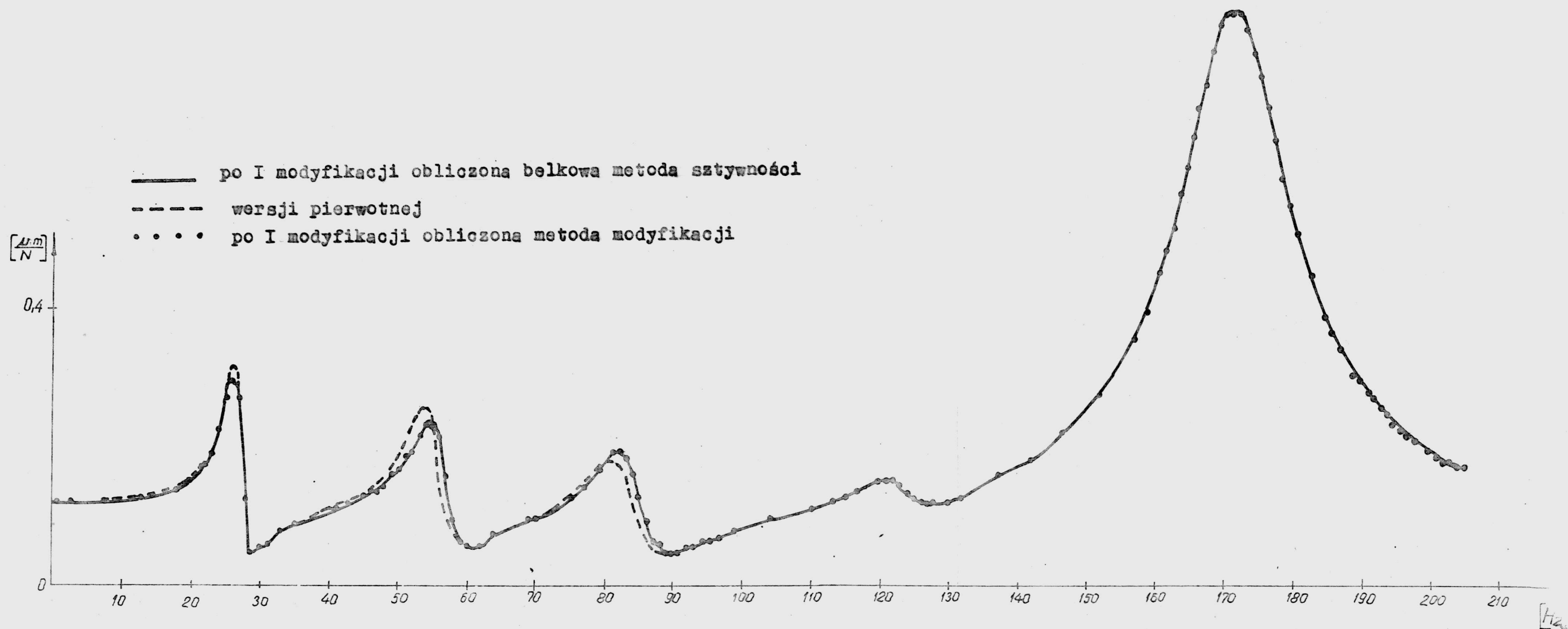
w opisie ruchu struktury we współrzędnych quasi-głównych/ wyniki otrzymane z programu QUASI są dokładne. Natomiast dziewięta postać drgań przechodziła w nową postać. Prócz drgań wrzeciona pojawiły się tu pod wpływem modyfikacji, również drgania stołu i sań. Dlatego też wyniki otrzymane z programu QUASI, dotyczące dziewiątej postaci, są mniej dokładne.

Na podstawie obliczonych częstotliwości i postaci drgań własnych zarówno programem DYNK i programem QUASI, wykonano dla wszystkich modyfikacji wykresy podatności dynamicznej, pomiędzy narzędziem a przedmiotem obrabianym. Względny współczynnik tłumienia modalnego przyjęto jak poprzednio dla wszystkich postaci i modyfikacji taki sam, równy 0,04. Na rys.4.8 zamieszczono tylko 4 wybrane zestawienia wykresów, których wykonano 36. Przedstawione na rys.4.8 wykresy, to charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe i amplitudowo-fazowe podatności dynamicznej między przedmiotem i narzędziem w kierunku Y dla dwóch modyfikacji: pierwszej i szóstej.

Z wykresów widać bardzo dobrą zgodność wyników otrzymanych metodą modyfikacji z wynikami otrzymanymi belkową metodą sztywności nawet przy tak znacznej modyfikacji, jaką było 60% zwiększenie sztywności czterech połączeń. Na wykresach amplitudowo-częstotliwościowych naniesiono charakterystykę wersji pierwotnej, aby podkreślić fakt, że modyfikacje wpłynęły w istotny sposób na zmianę własności dynamicznych analizowanego modelu.

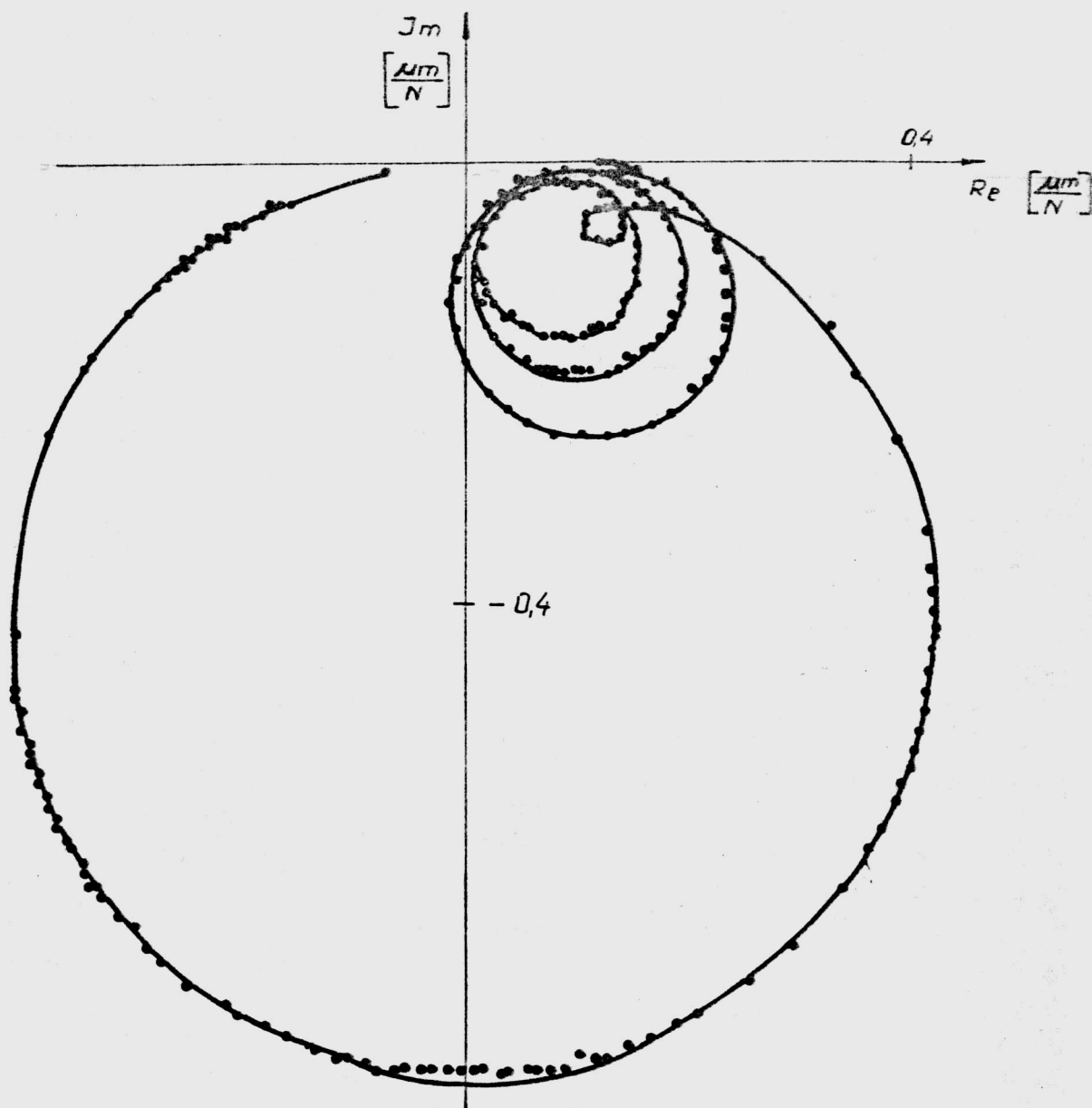
Jak widać z wykresów obliczenia metodą modyfikacji w sposób dokładny oddały te istotne zmiany.

W tym miejscu należy podkreślić, że obliczenia metodą modyfi-

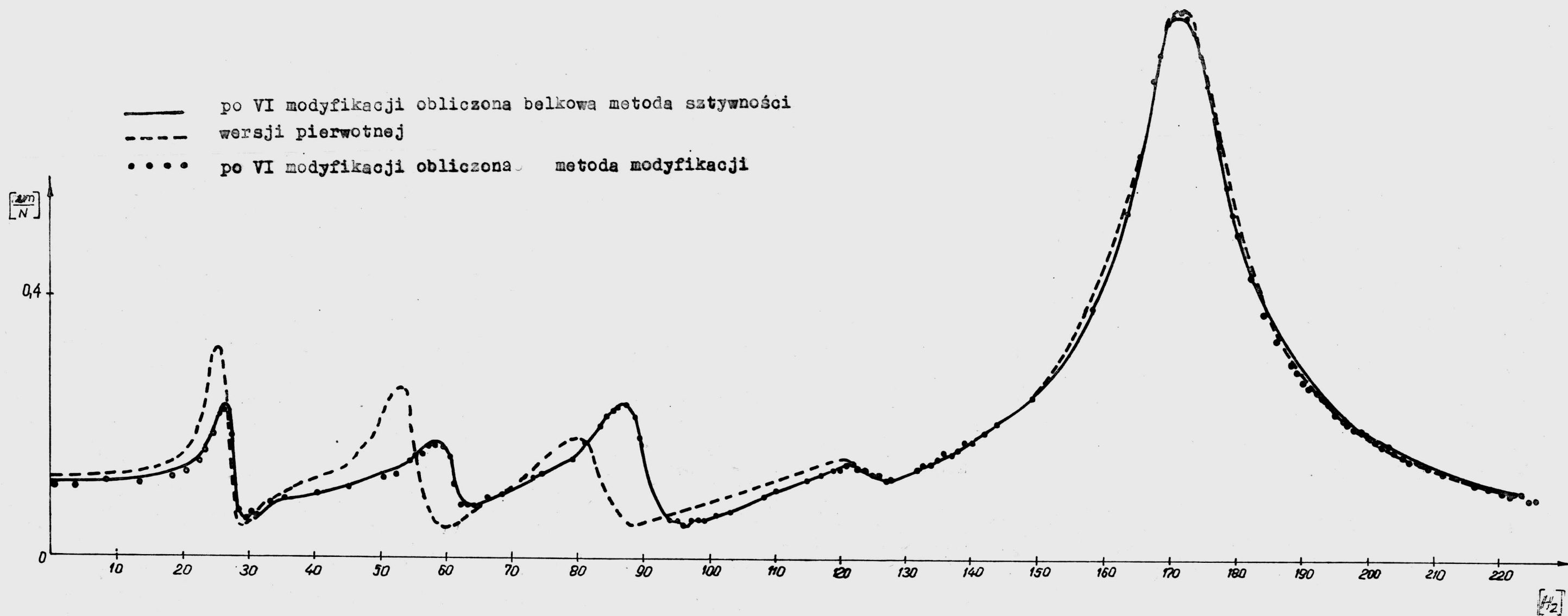


Rys.4.8 Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa podatności dynamicznej między narzędziem i przedmiotem w kierunku Y.

————— po I modyfikacji obliczona belkową metodą
 sztywności
 po I modyfikacji obliczona metodą modyfikacji

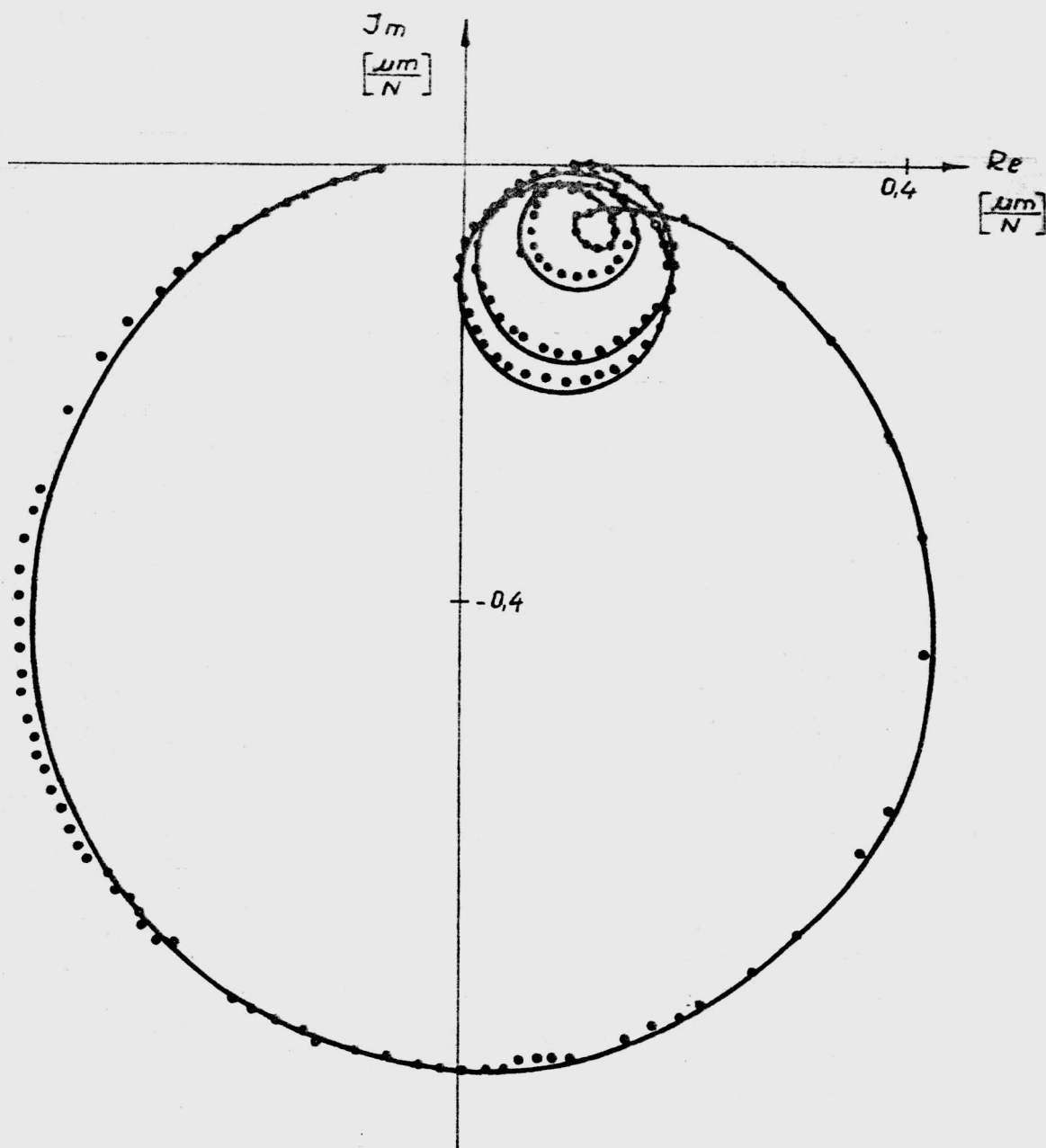


Rys.48cd Charakterystyka amplitudowo-fazowa podatności
 dynamicznej między narzędziem i przedmiotem
 w kierunku Y.



Rys.48cd Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa podatności dynamicznej
 między narzędziem i przedmiotem w kierunku Y.

— po VI modyfikacji obliczona belkową metodą
 sztywności
 po VI modyfikacji obliczona metodą modyfikacji



Rys.48c.d. Charakterystyka amplitudowo-fazowa podatności
 dynamicznej między narzędziem i przedmiotem
 w kierunku Y.

kacji trwały około pięć razy krócej niż belkową metodą sztywności. Wyniki pomiaru czasu obliczeń dwunastu częstotliwości i postaci drgań własnych modelu, frezarki wspornikowej, zamieszczono w tabeli 4.6.

	czas obliczeń	czas obliczeń wraz z czasem czytania danych i wydruku wyników
belkowa metoda sztywności	580 s	634 s
metoda modyfikacji	80 s	129 s

Tabela 4.6

Średni czas obliczeń belkową metodą sztywności i metodą modyfikacji dwunastu najniższych częstotliwości drgań własnych i odpowiadających im postaci analizowanych wariantów modelu frezarki wspornikowej o 180 stopniach swobody, przy założonym względnym błędzie przybliżenia $\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n-1}}$ równym 10^{-10} , gdzie $\lambda = (2\pi f)^2$.

5. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

=====

1. Podane przykłady wskazują, że metoda modyfikacji nadaje się do analizowania własności dynamicznych układów nośnych obrabiarek podczas ich projektowania. Analiza tą metodą może zarówno obejmować obliczanie częstotliwości i postaci drgań własnych jak i podatności dynamicznych.
2. Jak wykazały pomiary czasu obliczeń analiza metodą modyfikacji trwa wielokrotnie krócej niż belkową metodą sztywności. Wpływa to z niewielkiej ilości równań, które są potrzebne do opisu ruchu we współrzędnych quasi-głównych /tabela 5.1/. W przypadku obliczenia struktur o większej ilości stopni swobody niż w zamieszczonych przykładach, zysk na czasie obliczeń może być jeszcze większy.

	Przykład 1	Przykład 2	Przykład 3	Przykład 4
belkowa metoda sztywności	24	30	72	180
metoda modyfikacji	16	18	28	36

Tabela 5.1

Liczba równań opisujących ruch struktury z przykładów w zależności od stosowanej metody

3. Z faktu, że do opisu ruchu w metodzie modyfikacji potrzebna jest niewielka liczba równań wynika /jak to wykazano w podrozdziale 3.5/ możliwość stosowania jej na małym systemie cyfrowym.

4. Dzięki tym dwom wymienionym wyżej zaletom metoda modyfikacji może stanowić narzędzie bezpośredniej pracy konstruktorów, przyspieszając i usprawniając zarazem proces projektowania jak i dając możliwość przeanalizowania dużej ilości wariantów. Stanowi ona w ten sposób krok w kierunku efektywnego projektowania.
5. W pracy przedstawiono metodę modyfikacji do obliczeń dynamicznych zastosowaną do belkowej metody sztywności. Metodę tę w prosty sposób można przystosować także do innych typów metod elementów skończonych. Należy zwrócić tu uwagę, że muszą być to metody sztywności, a nie podatności. W opracowanej metodzie modyfikacji wykorzystującej współrzędne quasi-główne dokonuje się podziału analizowanej struktury na części i, układu równania ruchu dla poszczególnych fragmentów oddzielnie, by potem połączyć je w układ równań ruchu całości. Do przeprowadzenia tych operacji na równaniach ruchu nadają się jedynie metody sztywności.
6. Istotną wskazówkę do posługiwania się metodą modyfikacji stanowi następująca uwaga: gdy modyfikacja wersji pierwotnej struktury wpływa radykalnie na zmianę charakteru postaci drgań własnych, wyniki otrzymane metodą modyfikacji mogą być nieprecyzyjne i wariant z taką modyfikacją należy przeanalizować pełną metodą elementów skończonych.
7. Przedstawiona w niniejszej pracy metoda modyfikacji może być dalej rozwijana:

- można ją rozszerzyć o modyfikacje tłumienia /jak to wykazano w podrozdziale 3.5/,
- można ją także rozszerzyć o modyfikacje innego typu, polegające na uzupełnieniu analizowanej struktury o nowe elementy lub polegające na ujmowaniu niektórych elementów.

SPIS LITERATURY

=====

- 1 Szymkowski J.: Możliwości oceny sztywności statycznej korpusów obrabiarek na drodze modelowania. Praca doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1979.
- 2 Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa, 1978.
- 3 Chlebus E., Zatoń W.: Zastosowanie metody belkowej do obliczania statycznych i dynamicznych własności układów nośnych obrabiarek. Praca doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1978.
- 4 Augustynowicz J.: Analiza przydatności metody belkowej do statycznych obliczeń sprawdzających korpusów obrabiarek. Praca doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1980.
- 5 Świszczowski S.: Metody modyfikacji w obliczeniach konstrukcji sprężystych. Archiwum Inżynierii Łądowej, T.XX, z.3/1974.
- 6 Diekhans N.: Kleinrechnereinsatz für Berechnungsaufgaben im Konstruktionsbereich, Berechnung von Werkzeugmaschinen, Fortschr.-Ber., VDI-Z, Reihe 1 Nr 68, Düsseldorf: VDI - Verlag 1980.
- 7 Koch J. i inni: Opracowanie algorytmów, programów obliczeń i instrukcji dla konstruktorów do określania statycznych i dynamicznych własności korpusów obrabiarek przy pomocy elektronicznej maszyny cyfrowej. Raport Nr 349, ITBM PWr., Wrocław 1976.
- 8 Koch J. i inni: Opracowanie podprogramów na EMC do obliczeń statycznych i dynamicznych korpusów w razie ich konstruowania. Raport Nr 222 ITBM PWr., Wrocław, 1973.

- 9 Koch J. i inni: Rozwinięcie opracowanych w ITBM dla CBKO programów związanych z obliczeniami układów nosnych oraz ich integracja. Raport Nr 63/80 ITBM PWr., Wrocław, 1980.
- 10 Bishop R.E.D. i inni: Macierzowa analiza organ. WNT Warszawa, 1972.
- 11 Marchelek K.: Dynamika obrabiarek, WNT, Warszawa 1974.
- 12 Bathe K.-J., Wilson E.L.: Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- 13 Kruszewski J. i inni: Metoda sztywnych elementow skończonych. Arkady, Warszawa 1975.
- 14 Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa, 1975.
- 15 Kowalczyk B.: Macierze i ich zastosowania. WNT, Warszawa, 1976.
- 16 Stavriniadis C.P.: A Procedure for Coupling Dynamical Equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering v.20, nov.1979.
- 17 Klosterman A.L., McClelland W.A.: Combining Experimental and Analitical Techniques for Dynamics System Analysis. Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, University of Tokyo Press, 1973.
- 18 Opracowanie oprogramowania do symulacji układów dyskretno-ciągłych, Raport badawczy Przemysłowego Instytutu Maszyn Budowlanych 7/82, Warszawa, 1982.

Wykaz odbiorców

ilość egz.:

1. Biblioteka i Ośrodek Informacji
Instytutu Technologii Budowy Maszyn
Politechniki Wrocławskiej
2. Biblioteka Główna Politechniki
Wrocławskiej
3. Promotor
4. Recenzenci
5. Autor

1

1

1

3

2

8

S T R E S Z C Z E N I E

=====

Celem dysertacji było opracowanie metody modyfikacji stosowanej w obliczeniach dynamicznych, umożliwiającej znacznie szybsze i łatwiejsze niż dotychczas analizowanie własności dynamicznych konstruowanych układów sprężystych podczas ich projektowania, posługując się małym systemem cyfrowym. Metodę modyfikacji postanowiono zbudować w oparciu o metodę belkową. W tym celu opracowano belkową metodę sztywności, a w szczególności: zasady budowy modelu obliczeniowego, metodę obliczeń dynamicznych, zasady budowy modelu matematycznego oraz algorytm i program na EMC.

Następnie układem równań we współrzędnych głównych, związanych z najniższymi częstościami drgań własnych opisano ruch struktury sprężystej i wskazano na dostateczną dla celów praktycznych dokładność takiego opisu. W dalszej części pracy opisano ruch struktury sprężystej układem równań we współrzędnych quasi-głównych, stanowiących kombinację współrzędnych głównych i uogólnionych i wykorzystano ten sposób opisu do budowy metody modyfikacji. Opracowano algorytm i program na EMC dla metody modyfikacji opartej o belkową metodę sztywności.

Stosując zbudowane programy sprawdzono na wybranych przykładach efektywność i dokładność opracowanej metody modyfikacji. Wyniki otrzymane z obliczeń metodą modyfikacji tj. najniższe częstości drgań własnych oraz podatności dynamiczne porównano z wynikami obliczeń belkową metodą sztywności.

Stwierdzono, że:

- Metoda modyfikacji nadaje się do analizy własności dynamicznych

układów sprężystych, a w tym układów nośnych obrabiarek, podczas ich projektowania.

- Posługując się tą metodą można analizy tej dokonać wielokrotnie szybciej niż przy użyciu ogólnie stosowanych metod elementów skończonych.
- Można ją w prosty sposób przystosować do obliczeń na małym systemie cyfrowym.

DYNAMIC ANALYSIS OF THE MODIFICATED ELASTIC
SYSTEMS ON EXAMPLE OF THE MACHINE TOOL BODIES

A B S T R A C T
=====

The purpose of the dissertation was elaboration of the modification method applied in dynamic calculations. This method enables the analysis of dynamical properties of constructed elastic systems while designing. A small digital system can be used here. This analysis is much quicker and easier than the ones applied up to the present. The modification method was built on the basis of a beam method. For this purpose a stiffness beam method was worked up, and in particular the principles of the analytical model construction, dynamic calculation method, the principles of mathematical model construction as well as the algorithm and computer program.

Then a motion of the elastic system was described with the aid of equation system in the main coordinates connected with the lowest free vibration frequencies. A sufficient accuracy of such a description for practical use was underlined. Next a motion of the elastic system was described using equation system in quasi - main coordinates which are a combination of the main and generalized coordinates. This description was used for constructing the modification method. The algorithm and computer program were elaborated for the modification method which bases on the stiffness beam method.

Effectiveness and precision of the modification method was tested on examples using the constructed computer programs. The results received from a calculation with the aid of the modification method /i.e.: the lowest free vibration frequencies and dynamic flexibilities/ were compared with the results obtained

from a calculation by the stiffness beam method.

It was found that:

- the modification method is suitable for the analysis of dynamic properties of elastic systems including carrying systems of machine tools, while designing;
- with the aid of this method the analysis may be performed many times faster than while using conventional finite elements methods;
- this method may be simply adapted to calculations using small digital systems.



		1 2 3 4 5 6 7 8 9							
* N *		N.N.S.V. V.V.V. 1.2.0.61							
Kod pocz. pc		Zakodcz. pr.		Opubl. pr.		Instytut		Nr Instytutu	
0.1.8.3		1.2.8.3				1.2.4.0.2.0.4.5.7.1.6			
Nr zlecenia		Nr archiwalny							
0.1.0.2.3.6.V.V.V.V.		1.2.4.1.P.-0.5.3.1.8.3 *							
Symbol UKD									
621.9.06.001.5		obrobialarki, badania							
Opis bibliograficzny									
Koch Tomasz									
Analiza dynamiki modyfikowanych układów sprężystych na przykładzie korpusów obrabiarerek.									
Raporty Inst. Technol. Bud. Masz. PWr 1983 ser. PRE nr 53.									
77 s. 17 rys. 7 tabl. bibliogr. 18 poz. /maszyn. powiel./									
77.7									
Rozprawa doktorska									
Politechnika Wrocławska, Instytut Technologii Budowy Maszyn, Wrocław									
Promotor: doc. dr hab. inż. Maciej Bossak									
Charakter pracy: stosowana					Rozpowszechnienie -				
Materiały odpłatne									

Analiza dokumentacyjna

<D

Opracowano metodę modyfikacji, umożliwiającą znacznie szybsze i łatwiejsze niż dotychczas analizowanie własności dynamicznych konstruowanych obiektów sprężystych podczas ich projektowania, posługując się małym systemem cyfrowym. W metodzie tej wykorzystano opis ruchu w tzw. współrzędnych quasi-głównych. Opracowano program na EMC do obliczeń dynamicznych belkową metodą sztywności oraz program na EMC dla metody modyfikacji opartej o belkową metodę sztywności. W oparciu o te programy sprawdzono na przykładach efektywność i dokładność metody modyfikacji. Stwierdzono, że nadaje się ona do analizowania dynamiki układów sprężystych, w tym układów nośnych obrabiarek, podczas ich projektowania i może znacznie przyspieszyć oraz usprawnić proces konstruowania.

Imię i Nazwisko autora analizy

Tomasz Koch

Słowa kluczowe

<S

obrabiarka, korpus, dynamika, obliczanie, metoda modyfikacji.

**0480*00* _____

<A 0000000*B _____*C _____*D _____

*E _____*F _____*G _____*H _____

tytuł NPB	CINTE	APW	Podpis red.	Podpis asyst. d/s badań	Potwierdzenie przyjęcia poprawki.	Potwierdzenie przyjęcia karty w Oddziale Doku- mentacji.
	nie	nie				
Wpisać TAK lub NIE						