

Milda Maria Burzała

Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

MODELE WYBORU DYSKRETNEGO Z HETEROSKEDASTYCZNYM SKŁADNIKIEM LOSOWYM PRZY USTALANIU AKCJI NIEZDOMINOWANYCH PRZEZ RYNEK NA GPW W WARSZAWIE

1. Wstęp

Modele wyboru dyskretnego umożliwiają analizę procesu podejmowania decyzji na gruncie teorii użyteczności. Obecnie przyjmuje się, że najbardziej elastyczną klasą modeli wyboru dyskretnego, pozwalającą modelować najbardziej zróżnicowane warunki podejmowania decyzji, są mieszane modele logitowe (tzw. *mixed logit model*).

Racjonalny inwestor działa tak, aby maksymalizować swoją użyteczność. Podstawowymi czynnikami determinującymi zachowanie inwestora na rynku są stopa zwrotu z inwestycji oraz ryzyko.

Bardzo często analizę zależności między ryzykiem i dochodem przeprowadza się na bazie wykresu korelacyjnego. Umożliwia on poszukiwanie spółek o największej dochodowości przy relatywnie najniższym ryzyku. Najkorzystniejsze dla inwestora są tzw. akcje niezdominowane przez rynek, czyli takie, „które mają stopę zwrotu wyższą niż indeks giełdowy (na przykład WIG), a ryzyko niższe niż ryzyko dla indeksu giełdowego”¹.

Celem artykułu jest określenie prawdopodobieństwa, że dana akcja ze zbioru analizowanych walorów będzie akcją niezdominowaną. Przedmiotem porównania będą wyniki uzyskane dla wielomianowego modelu logitowego oraz jednej z możliwych specyfikacji mieszanego modelu logitowego.

W artykule przyjęto następujący schemat. Punkty 2 oraz 3 poświęcone są krótkiemu przedstawieniu dwóch alternatywnych modeli wielomianowych. Punkt 4

¹ Określenie spółek niezdominowanych wg profesora W. Tarczyńskiego [6].

omawia przeprowadzone badania empiryczne, przy czym w punkcie 4.1 określono przyjęte w pracy mierniki stopy wzrostu i ryzyka oraz sposób ich wykorzystania do określenia spółek niezdominowanych. Specyfikację modeli przedstawiono w punkcie 4.2, materiał statystyczny zaś w punkcie 4.3. Punkt 5 omawia wyniki oszacowań modeli oraz ocenę trafności prognoz *ex post*.

2. Wielomianowe modele logitowe

Założmy, że w momencie czasu t ($t = 1, \dots, T$) rozpatrywany jest portfel złożony z J akcji, ($j = 1, \dots, J$). Użyteczność j -tej akcji (u_{ij}) można zdekomponować na część deterministyczną v_{ij} oraz na część stochastyczną wskaźników nieobserwowanych reprezentowaną przez ε_{ij} , tzn.

$$u_{ij} = v_{ij} + \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

W dalszych rozważaniach przyjęto, że moment czasu t jest ustalony, dlatego dla uproszczenia

i przejrzystości rozważań – jeśli to możliwe - pomijano indeks t .

W wielomianowym modelu logitowym zakłada się, że zmienne losowe ε_j ($j = 1, \dots, J$) są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wartości ekstremalnych. Funkcja gęstości wielowymiarowej zmiennej losowej $\varepsilon = [\varepsilon_j]_{j=1, \dots, J}$ przybiera wtedy postać:

$$f(\varepsilon) = \mu e^{-\mu(\varepsilon - \alpha)} \exp(-e^{-\mu(\varepsilon - \alpha)}), \quad \mu > 0, \quad (2)$$

a dystrybuenta:

$$F(\varepsilon) = \exp(-e^{-\mu(\varepsilon - \alpha)}), \quad (3)$$

gdzie α jest tzw. parametrem pozycji, μ zaś jest dodatnim parametrem skali.

W modelu wyboru dyskretnego rozpatruje się prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia, że użyteczność danej akcji j jest wyższa od użyteczności każdej innej akcji ze zbioru J walorów, tzn.

$$P_j = \Pr(u_j \geq u_m) = \Pr(v_j + \varepsilon_j \geq v_m + \varepsilon_m) \quad \forall m \neq j. \quad (4)$$

Deterministyczna część funkcji użyteczności v_j wymaga szerszego wyjaśnienia. W danym momencie czasu obserwowane są wszystkie wektory $\mathbf{x}_j$ ($j = 1, \dots, J$) charakterystyk poszczególnych papierów wartościowych, np. stopy zwrotu poszczególnych akcji. Taki typ obserwacji był podstawą wyróżnienia przez McFaddena tzw. wielomianowych modeli warunkowych. W tym przypadku, na podstawie różnych wektorów wartości $\mathbf{x}_j$, szacowany jest jeden wektor β , w którym liczba szacowanych parametrów jest równa liczbie zmiennych (charakterystyk) uwzględnionych w funkcji użyteczności ($v_j = \mathbf{x}_j \beta$). Pojawienie się nowych obserwacji dla poszczególnych akcji pozwala wyznaczyć praw-

dopodobieństwo wyboru każdego z rozpatrywanych walorów, a w opisywanych badaniach – prawdopodobieństwo, że dana akcja będzie akcją niezdominowaną przez rynek.

W najprostszym przypadku użyteczność j -tej akcji (u_j) reprezentuje funkcja liniowa:

$$u_j = v_j + \varepsilon_j = \mathbf{x}_j\boldsymbol{\beta} + \beta_{0j} + \varepsilon_j, \quad (5)$$

gdzie $\mathbf{x}_j$ jest $(1 \times K)$ – wymiarowym wektorem charakterystyk j -tej akcji, $\boldsymbol{\beta}$ oznacza $(K \times 1)$ wymiarowy wektor parametrów, ε_j – to składnik losowy. Przyjęto, że wyraz wolny β_{0j} reprezentuje specyficzne aspekty danej akcji (niemierzalne i trudno mierzalne).

W modelu logitowym prawdopodobieństwo L_j , że j -ta akcja ze zbioru J możliwych będzie akcją niezdominowaną przez rynek określa relacja:

$$L_j = \frac{\exp(\mathbf{x}_j\boldsymbol{\beta} + \beta_{0j})}{\sum_{i=1}^J \exp(\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta} + \beta_{0i})}. \quad (6)$$

Model ten składa się z J powiązanych ze sobą równań. Algebraiczna identyfikacja układu równań wymaga, aby na parametry nałożyć pewne warunki zerowe².

Istotne ograniczenie modeli logitowych wynika z tego, że nie można ich stosować, gdy składniki losowe funkcji użyteczności charakteryzuje niejednorodność rozkładu. Może ona wynikać zarówno z pewnych specyficznych aspektów danej alternatywy, co do których trudno przyjąć założenie, że są stałe i reprezentowane przez β_{0j} , jak i z innych charakterystyk wspólnych dla wszystkich akcji, które włączone do składnika losowego mogą być przyczyną wzajemnej korelacji.

3. Analityczne przedstawienie dekompozycji wpływu składnika losowego w modelu

Złagodzenie ograniczeń wielomianowych modeli logitowych umożliwiają mieszane modele logitowe³. Rodzina mieszanych modeli logitowych jest obecnie dość duża. Przyjmuje się w nich założenie, że składnik losowy jest sumą dwóch składowych. Pierwsza część składnika losowego ma rozkład normalny i pozwala ująć zależności między wybranymi akcjami. Druga składowa ma rozkład wartości ekstremalnych (2), (3) i pozwala wyprowadzić logitową zależność dla modelu. Analityczne przedstawienie dekompozycji wpływu składnika losowego w modelu logitowym (*the logit kernel model with factor analytic form*) można zapisać jako:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{v}, \quad (7)$$

² Najczęściej przyjmuje się, że wyraz wolny, np. pierwszej funkcji użyteczności jest równy zeru. Analizą warunków zerowych zajmowali się m.in. M. Bierlaire, T. Lotan, P. Toint. W artykule [2] autorzy uzasadniają przyjęcie warunku, aby suma wyrazów wolnych poszczególnych funkcji użyteczności była równa zeru.

³ Przyjęte w literaturze nazwy to: *mixed logit*, *kernel logit* lub *hybrid logit model*.

gdzie ξ jest $(M \times 1)$ wymiarowym wektorem M składowych czynnika losowego (M może być mniejsze, równe lub większe od J), F jest $(J \times M)$ wymiarową macierzą parametrów poszczególnych składowych czynnika losowego (mapą wpływów) związaną z J możliwymi akcjami (zawiera stałe lub/i nieznane parametry), v jest $(J \times 1)$ wektorem niezależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie wartości ekstremalnych. Symulacyjne metody estymacji wykorzystują tzw. dekompozycję Cholesky'ego, która jest w tym przypadku operacją algebraiczną przeprowadzaną na macierzy wariancji i kowariancji wektora ξ . Umożliwia ona przejście z macierzy kwadratowej do macierzy trójkątnej, w której wszystkie elementy poniżej lub powyżej głównej przekątnej są równe zeru⁴. W zapisie macierzowym wektor ξ można zapisać jako:

$$\xi = P \zeta, \quad (8)$$

gdzie ζ jest $(M \times 1)$ -wymiarowym wektorem niezależnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnym, natomiast $PP' = \Sigma_\xi$ jest macierzą kowariancji składnika losowego ξ .

Takim *mieszanym modelem logitowym* może być np. model⁵:

$$P(j|x, \Sigma_\xi) = \int L(j; x, \beta) \cdot f(\xi) d\xi, \quad (9)$$

gdzie $L(j; x, \beta)$ jest prawdopodobieństwem warunkowym (6) uzyskanym z wielomianowego modelu logitowego. W przypadku mieszanego modelu logitowego prawdopodobieństwo wyboru j -tej kategorii jest średnią prawdopodobieństw z formuły logitowej ważoną wagami danymi przez gęstość rozkładu ξ (tzw. mieszanina logitów).

4. Opis przeprowadzonych badań empirycznych

4.1. Zdefiniowanie akcji niezdominowanych przez rynek

Do określenia akcji nie zdominowanych wykorzystano oczekiwaną stopę zwrotu reprezentowaną przez średni tygodniowy indeks łańcuchowy cen zamknięcia (SI_{ij}) oraz ryzyko mierzone wariancją indeksu wokół jego średniej wartości (WI_{ij}), przy czym:

$$SI_{ij} = \frac{\sum_{i=t-4}^t I_{ij}}{5}, \quad I_{ij} = \frac{P_{ij}}{P_{t-1,j}} \cdot 100, \quad WI_{ij} = \frac{1}{5-1} \sum_{i=t-4}^t (I_{ij} - SI_{ij})^2. \quad (10)$$

Empirycznie akcje j -tej spółki kwalifikowano w momencie t jako akcje niezdominowane przez rynek, jeśli:

⁴ Zastosowanie takiej dekompozycji w metodach symulacyjnych znacznie zmniejsza ilość zajmowanej pamięci w trakcie przeprowadzania obliczeń.

⁵ Inna specyfikacja modelu przyjmuje założenie o losowych parametrach β .

$$SI_{ij} > SI_{t,WIG} \quad \text{oraz jednocześnie} \quad WI_{ij} < WI_{t,WIG}. \quad (11)$$

Założono, że podstawę doboru akcji do portfela może stanowić prawdopodobieństwo teoretyczne uzyskane na podstawie modeli wyboru dyskretnego. Jeśli prawdopodobieństwo wskazania j -tej akcji za niezdominowaną (P_{ij}) będzie wyższe niż prawdopodobieństwo dla indeksu WIG-u ($P_{t,WIG}$) można przyjąć, iż w momencie t będzie ona akcją niezdominowaną przez rynek i w związku z tym korzystną dla inwestora.

Zgodność uzyskanych wskazań teoretycznych z wynikami empirycznymi opartymi na relacji stopy wzrostu oraz wariancji j -tej akcji do odpowiednich charakterystyk WIG-u stanowiła podstawę oceny trafności *ex post* uzyskanych prognoz.

4.2. Specyfikacja modeli

Przyjęto, że użyteczność j -tej akcji (5) zależy od oczekiwanej stopy zwrotu reprezentowanej przez średni tygodniowy indeks łańcuchowy ceny zamknięcia (SI_j) oraz od ryzyka mierzonego wariancją indeksu wokół jego średniej wartości (WI_j):

$$u_j = v_j + \varepsilon_j = \beta_1 SI_j + \beta_2 WI_j + \beta_{0j} + \varepsilon_j. \quad (12)$$

Różnice w specyfikacji wielomianowego (6) i mieszanego modelu logitowego (9) wynikają z przyjętych założeń wobec składnika losowego $\varepsilon = [\varepsilon_j]_{j=1,\dots,J}$. W przypadku:

a) wielomianowego modelu logitowego – ε to wektor niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wartości ekstremalnych (2), (3) podanym w punkcie 1,

b) mieszanego modelu logitowego – ε to wektor zmiennych losowych spełniających założenia (7), (8) podane w punkcie 2 (w przypadku heteroskedastycznych składników losowych macierz F jest macierzą diagonalną)⁶.

Jak już wspomniano w punkcie 1, identyfikacja każdego modelu wyboru dyskretnego wymaga nałożenia na parametry pewnych warunków zerowych. W badaniach przyjęto, że wyraz wolny funkcji użyteczności WIG-u jest równy zeru, tzn. $\beta_{0,10} = 0$. Konsekwencją takiego warunku jest rozpatrywanie specyficznych aspektów j -tej akcji w odniesieniu do specyficznych aspektów WIG-u.

4.3. Materiał empiryczny

W badaniach wykorzystano dane dotyczące akcji 9 wybranych (przykładowych) spółek notowanych na GPW w Warszawie:

Elektrim SA⁷ – ELE (1), Telekomunikacja Polska SA – TPS (2), Bank Millennium SA – MIL (3), Bank Polska Kasa Opieki SA – PEO (4), Agora SA – AGO (5),

⁶ W przeprowadzonych badaniach zadeklarowana macierz wpływów F nie uwzględniała korelacji składników losowych. Wstępne oszacowania dotyczące np. korelacji składników losowych funkcji użyteczności akcji z sektora bankowego nie dały na tym etapie badań zadowalających wyników.

Netia SA – NET (6), NKT CABLES SA – KBL (7), Optimus SA – OPT (8), Grupa Żywiec SA – ZWC (9) oraz indeks giełdowy WIG – WIG (10).

Dane pierwotne obejmowały 1000 notowań dziennych (ceny zamknięcia) z okresu od 25 lipca 2001 r. do 18 lipca 2005 r.

5. Opis wyników eksperymentu

Szacowanie parametrów modelu klasycznego, wielomianowego modelu logitowego (6) oraz mieszanego modelu logitowego (9) przeprowadzono symulacyjną metodą największej wiarygodności przy wykorzystaniu programu Biogeme⁸. Ze względów programowych przyjęto, że zmienna y_t przyjmuje wartość j , $j \in \{1, \dots, 9\}$, jeśli w momencie t j -ta spółka spełniała warunki stawiane spółkom niezdominowanym⁹. Jeśli żadna z 9 akcji nie spełniała warunków dla akcji niezdominowanej, zmiennej y_t przypisywano wartość 10, co oznacza, że w tym momencie stopa zwrotu WIG-u była wyższa, a ryzyko niższe od odpowiednich charakterystyk każdej akcji z badanego zbioru.

Porównanie wyników otrzymanych z dwóch modeli logitowych przeprowadzono w celu odpowiedzi na pytanie, czy założenie o heteroskedastyczności składnika losowego umożliwia wskazanie akcji charakteryzujących się istotnym wpływem wahań specyficznych aspektów danej akcji na wartość prawdopodobieństwa oraz czy uwzględnienie tych wahań zwiększa trafność prognoz. Odpowiedź twierdząca może stanowić punkt wyjścia do dalszych analiz.

W tabeli 1 podano wyniki oszacowań parametrów obu modeli logitowych. Obydwa modele potwierdzają przypuszczenie o dodatnim wpływie rosnącej stopy zwrotu (parametr β_1) oraz ujemnym wpływie rosnącego ryzyka (parametr β_2) na prawdopodobieństwo uznania akcji za niezdominowaną. Oszacowania parametrów β_{0j} stanowią miarę wpływu stałych specyficznych aspektów danej akcji. Wartości p_{ij} są podstawą oszacowania macierzy kowariancji $\Sigma_\xi = PP'$ (8). Mieszany model logitowy wskazuje na istotne znaczenie dla wartości prawdopodobieństwa wahań specyficznych aspektów akcji Elektrimu (1), Banku Millennium (3), NKT CABLES (7), Optimusa (8) oraz Żywca (9). Tym samym uzasadnione okazało się założenie o heteroskedastyczności składnika losowego.

⁷ Po myślniku podano skróty używane dla danej akcji oraz przypisany ze względów programowych kolejny numer akcji.

⁸ Kolejne wersje programu Biogeme (*bierlaire's optimization package for gev models estimation*) są dostępne na stronie internetowej: <http://roso.epfl.ch/biogeme>.

⁹ Jeśli warunki dla akcji niezdominowanych w tym samym momencie czasu t spełniało kilka spółek, obserwacja dotycząca stóp zwrotu oraz ryzyka dla wszystkich akcji była powtórzona dla różnych wartości y_t .

Tabela 1. Oszacowania parametrów wielomianowego oraz mieszanego modelu logitowego

Wielomianowy model logitowy				Mieszany model logitowy z heteroskedastycznym składnikiem losowym			
parametr	oszacowanie parametru	szacunkowy błąd średni	t-test	parametr	oszacowanie parametru	szacunkowy błąd średni	t-test
$\beta_{0,1}$	-2,959	0,446	-6,63	$\beta_{0,1}$	-5,645	1,666	-3,389
$\beta_{0,2}$	-1,797	0,203	-8,84	$\beta_{0,2}$	-1,813	0,227	-7,972
$\beta_{0,3}$	-1,714	0,143	-12,02	$\beta_{0,3}$	-2,884	0,352	-8,195
$\beta_{0,4}$	-1,624	0,148	-11,01	$\beta_{0,4}$	-2,022	0,192	-10,545
$\beta_{0,5}$	-1,595	0,146	-10,89	$\beta_{0,5}$	-1,966	0,190	-10,364
$\beta_{0,6}$	-1,632	0,161	-10,14	$\beta_{0,6}$	-1,862	0,194	-9,603
$\beta_{0,7}$	-1,705	0,189	-9,01	$\beta_{0,7}$	-5,040	0,756	-6,663
$\beta_{0,8}$	-1,924	0,228	-8,43	$\beta_{0,8}$	-3,941	0,707	-5,571
$\beta_{0,9}$	-1,789	0,102	-17,55	$\beta_{0,9}$	-3,880	0,351	-11,040
$\beta_{0,10}$	0,000			$\beta_{0,10}$	0,000		
β_1	1,743	0,085	20,40	β_1	2,882	0,192	15,016
β_2	-1,476	0,063	-23,44	β_2	-2,373	0,148	-16,024
				p_{11}^*	2,823	1,272	2,218
				p_{33}	1,577	0,403	3,916
				p_{77}	5,156	0,787	6,550
				p_{88}	2,771	0,589	4,705
				p_{99}	3,634	0,406	8,954
Iloraz wiarygodności LR		3687,7		Iloraz wiarygodności LR		3820,4	
Pseudo – R^2		0,5914		Pseudo – R^2		0,6127	

*tabela zawiera tylko istotne elementy macierzy **P** z głównej przekątnej.

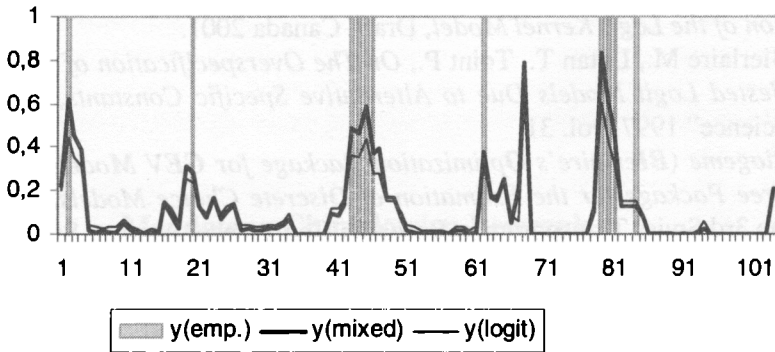
Źródło: opracowanie własne.

Dla mieszanego modelu logitowego uzyskano nieco wyższe dopasowanie do wyników obserwacji.

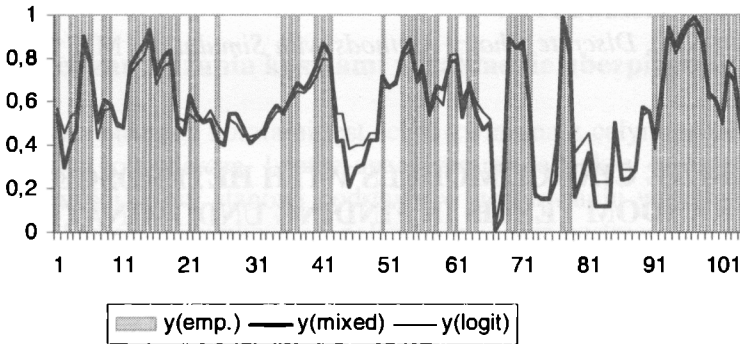
Weryfikację prognoz *ex post* (wg zasady z pkt 4.1) przeprowadzono na podstawie danych z okresu od 19 lipca do 22 listopada 2005 roku (około 100 notowań). Uzyskano 61% trafnych prognoz z wielomianowego modelu logitowego oraz 64,4% trafnych prognoz z mieszanego modelu logitowego.

Prognozy dla przykładowych akcji NETIA oraz WIG-u przedstawiono na rys. 1. Szare pola oznaczają okresy, w których akcje wybranej spółki zakwalifikowano jako akcje niezdominowane przez rynek. Linia pogrubioną zaznaczono prognozy prawdopodobieństwa uzyskane z mieszanego modelu logitowego. Można zauważyć, iż wielokrotnie mieszany model logitowy w porównaniu z klasycznym modelem wielomianowym umożliwił uzyskanie wyższych wartości prawdopodobieństwa w okresach, kiedy akcje kwalifikowano jako akcje niezdominowane, oraz niższych wartości prawdopodobieństwa dla pozostałych okresów. Takie wyniki stanowią uzasadnienie dla wyższej trafności prognoz.

NETIA



WIG



Rys. 1. Przykładowe prognozy prawdopodobieństwa w okresie od 19 lipca do 22 listopada 2005 roku
Źródło: opracowanie własne.

Prognozy przedstawione na wykresie (WIG) należy rozumieć jako prawdopodobieństwo wystąpienia w momencie t takiej sytuacji, kiedy w zbiorze nie ma akcji niezdominowanych przez rynek. W takim przypadku oszacowano prawdopodobieństwo, że użyteczność WIG-u będzie wyższa od użyteczności każdego z analizowanych walorów.

Otrzymane prawdopodobieństwa z modelu wyboru dyskretnego w każdym momencie czasu t sumują się do jedności. Dlatego najprostszym sposobem wykorzystania wyników w analizie portfelowej może być potraktowanie wartości prawdopodobieństwa jako udziałów akcji danej spółki w portfelu.

Literatura

- [1] Ben-Akiva M., Bolduc D., Walker J., *Specification, Identification and Estimation of the Logit Kernel Model*, Draft, Canada 2001.
- [2] Bierlaire M., Lotan T., Toint P., *On The Overspecification of Multinomial and Nested Logit Models Due to Alternative Specific Constants*, „Transportation Science” 1997, vol. 31.
- [3] *Biogeme (Bierlaire's Optimization Package for GEV Models Estimation): A Free Package for the Estimation of Discrete Choice Models*, Proceedings of the 3rd Swiss Transportation Research Conference, Ascona, Switzerland 2003.
- [4] Domencich T., McFadden D., *Urban Travel Demand*, North-Holland, Amsterdam 1975.
- [5] Hensher D.A., Greene W.H., *The Mixed Logit Model: The State of Practice and Warnings for the Unwary*, Department of Economics, New York University, New York 2001.
- [6] Tarczyński W., *Rynki kapitałowe. Metody ilościowe*, Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa 1997.
- [7] Train K.E., *Discrete Choice Methods with Simulation*, MIT Press, Cambridge 2003.

DISCRETE CHOICE MODELS WITH HETEROSCEDASTICITY OF RANDOM TERMS IN FINDING UNDOMINATE STOCKS BY MARKET ON GPW IN WARSAW

Summary

This paper studies the possibilities of the applications discrete choice models to find undominate stocks by the market. The return rate of these stocks is higher than the return rate of WIG index, but the risk is lower than the risk of WIG index. The most flexible model that can approximate any random terms is the mixed logit. One of specification uses a factor analytic structure. For that reason the author compares results of applications multinomial logit model and logit kernel model with factor analytic form. The analysis is based on the data from GPW in Warsaw between July 2001 and July 2005 and confirms better quality of the mixed logit model.