

Na prawach rękopisu

INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport serii PRE nr 1/86

DYNAMIKA KONSTRUKCJI PODDANYCH
DZIAŁANIU LOSOWEJ SERII
OBCIĄŻEŃ KRÓTKOTRWAŁYCH

Małgorzata Gładysz

Praca doktorska

Promotor: Doc. dr hab. inż. Paweł Śniady

Słowa kluczowe: układy dyskretne,
układy ciągłe, obciążenie losowe,
seria sił, drgania losowe, chara-
kterystryki probabilistyczne

Wrocław 1986

Panu Docentowi Pawłowi Śniademu
składam serdeczne podziękowania
za cenne wskazówki
oraz wszechstronną pomoc
okazaną mi w trakcie realizacji
pracy doktorskiej

SPIS RZECZY	Str.
1. WSTĘP	4
2. CEL I UKŁAD PRACY	7
3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU	9
3.1. Opis procesu obciążenia	9
3.2. Drgania układu dyskretnego	12
3.3. Drgania układu ciągłego	14
4. CHARAKTERYSTYKI PROBABILISTYCZNE FUNKCJI OBCIĄŻENIA $f(t)$	16
4.1. Wprowadzenie	16
4.2. Charakterystyki probabilistyczne funkcji $f(t)$ przy deterministycznym czasie działania sił	16
4.3. Charakterystyki probabilistyczne funkcji $f(t)$ przy losowo zmiennym czasie działania sił	29
5. UKŁAD OBCIĄŻONY SERIĄ SIŁ O DETERMINISTYCZNYM CZASIE DZIAŁANIA	35
5.1. Drgania układu dyskretnego - rozwiązanie ogólne	35
5.2. Drgania układu ciągłego - rozwiązanie ogólne	40
5.3. Wybrane przypadki szczególne	41
5.3.1. Założenia podstawowe	41
5.3.2. Seria sił o deterministycznym przebiegu w czasie	41
5.3.3. Seria sił o losowym przebiegu w czasie	51
6. UKŁAD OBCIĄŻONY SERIĄ SIŁ O LOSOWO ZMIENNYM CZASIE DZIAŁANIA	60
6.1. Rozwiązanie ogólne	60
6.2. Przypadek szczególny	66
7. FUNKCJA GĘSTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA PRZEMIESZCZENIA. PROBLEM PIERWSZEGO PRZEJŚCIA	69
7.1. Wprowadzenie	69
7.2. Oszacowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa	69
7.3. Problem pierwszego przejścia	72
8. ANALIZA NUMERYCZNA WYBRANYCH PRZYPADKÓW SZCZEGÓLNYCH	74
8.1. Wprowadzenie	74
8.2. Wyniki przeprowadzonych obliczeń	74
9. PODSUMOWANIE	100
DODATEK	103
LITERATURA	105

1. WSTĘP

W zdecydowanej większości problemów dynamicznych pojawiających się w różnych gałęziach techniki nie jest możliwe wykorzystywanie tradycyjnej analizy drgań, opierającej się na deterministycznym modelu matematycznym zjawiska. Występowanie w otaczającej nas rzeczywistości wielu przypadkowych czynników powoduje, że wręcz niewykonalne jest ściśle opisanie ropatrywanych oddziaływań, a model taki staje się niewystarczający. Aby wyznaczyć odpowiedź układu na losowo zmieniające się obciążenie, konieczne jest wprowadzenie nowych pojęć i metod, które umożliwią realizację tego celu. W tych sytuacjach z pomocą przychodzi teoria procesów stochastycznych, a szczególnie ta jej część, która ma zastosowanie w analizie konstrukcji inżynierskich zwana teorią drgań stochastycznych lub dynamiką statystyczną. Jej zadaniem jako działu mechaniki budowli jest stworzenie wystarczająco użytecznego stochastycznego modelu obciążenia oraz analiza probabilistycznych charakterystyk odpowiedzi układu.

Jedną z pierwszych publikacji z dziedziny drgań stochastycznych, podsumowującą aktualny stan przedmiotu w latach powojennych, a więc w okresie nasilającego się zainteresowania tą problematyką jest praca S.H.Crandalla [13], stanowiąca opracowanie cyklu wykładów wygłoszonych w 1957 r. oraz jej uaktualnienie z 1962 r. Inne ważne prace z omawianej dziedziny, szeroko przedstawiające jej rozwój, metody oraz pojęcia i często nawiązujące do możliwości zastosowania to [1, 3, 6, 12, 16, 25, 29, 33, 35, 42, 43, 44, 45, 46].

Zainteresowanie problematyką drgań stochastycznych wiąże się z rozwojem środków szybkiej komunikacji, a więc z zagadnieniami dynamiki pojazdów oraz techniki rakietowej i nowoczesnego lotnictwa, gdzie działanie silników odrzutowych jest źródłem losowych wymuszeń. Także w dynamice konstrukcji inżynierskich istnieje cała klasa problemów, w których obciążenie ma charakter losowy. W określonych sytuacjach drgania układu mogą być spowodowane krótkotrwałymi, powtarzającymi się oddziaływaniami, których wielkości, przebieg w czasie, chwile pojawiania się i czas trwania są przypadkowe. Z typowym przykładem takiego zagadnienia mamy do czynienia w dynamice konstrukcji mostowych, drogowych i innych, obciążonych ruchem pojazdów [10, 11, 15,

49,50,51,52]. Wymieniony problem pojawia się także w analizie dynamicznej stropów i konstrukcji wsporczych pod maszyny o uderowym charakterze pracy [8,9,18,20,31], a także samych maszyn tego typu [53], budowli narażonych na działanie wiatru [56], pulsacji ciśnienia akustycznego podczas powtarzających się naziemnych wybuchów [38] lub obciążonych wstrząsami o charakterze sejsmicznym i parasejsmicznym [17, 23,54,55].

Najprostszym modelem obciążenia stosowanym w wymienionych przypadkach jest deterministyczna seria impulsów typu δ -Diraca. Analizę drgań układu o jednym stopniu swobody poddanego działaniu takiej serii przedstawiono m.in. w [26,31]. Innym wariantem tego modelu jest deterministyczna seria impulsów dowolnego kształtu o skończonym czasie trwania [4,20,24,36], przy czym rozpatrywano tu przypadki impulsów prostokątnych, trójkątnych i sinusoidalnych.

Ze względu na przypadkowość cech wymienionych wcześniej rodzajów obciążenia podejście deterministyczne nie wyczerpuje w pełni problemu. Działanie powtarzalnych krótkotrwałych wstrząsów ma często w pełni charakter losowy i bardziej adekwatnym modelem wymuszenia wydaje się być seria przypadkowo pojawiających się impulsów o losowych amplitudach. Problematyka drgań konstrukcji wywołanych losową serią impulsów typu δ -Diraca była przedmiotem szeregu prac, np. [21,28, 40,41], w których rozpatrywano przypadki, gdy odstępy czasowe między kolejnymi chwilami zgłoszeń sił tworzą zbiór niezależnych zmiennych losowych [39,40,41], lub gdy są one skorelowane [22,28,47,48]. Model ten nie uwzględnia kształtu przebiegu pojedynczego impulsu w czasie, co ma szczególne znaczenie w zagadnieniach, gdzie okres oddziaływania sił na konstrukcję nie dąży do zera i nie może zostać pominięty. W niektórych pracach z teorii uderzeń [20], dotyczących propagacji szczeliny [30], czy zajmujących się wyznaczeniem ekstremalnego obciążenia konstrukcji [2] przyjmowano proste deterministyczne funkcje aproksymujące kształt wymuszenia o przypadkowych: amplitudach i chwilach pojawiania się, np. [32]. W problemach dynamicznych nie stosowano dotąd modelu uwzględniającego losowy charakter wszystkich cech obciążenia, jak jego wielkości, przebieg w czasie, chwile rozpoczęcia oddziaływania i okres trwania.

Propozycję pewnego typu takiego modelu zawiera niniejsza praca. Dokładną charakterystykę losowego obciążenia przedstawiono w rozdziałach trzecim i czwartym, tu ograniczono się tylko do podania naj-

ważniejszych jego cech. Założono, że w losowych chwilach rozpoczynają swe działanie na układ siły o przypadkowych wielkościach, przy czym przebieg pojedynczej siły w czasie może być deterministyczny lub ma charakter procesu stochastycznego. Odstępy czasowe pomiędzy chwilami zgłoszeń kolejnych sił mogą być skorelowane. W rozważaniach uwzględniony został czas oddziaływania sił na konstrukcję, będący w ogólnym przypadku zmienną losową.

2. CEL I UKŁAD PRACY

Zasadniczym celem pracy jest wyznaczenie charakterystyk probabilistycznych, jak wartość oczekiwana i funkcja korelacyjna przedmieszczeń konstrukcji, poddanej działaniu losowej serii sił. Przyjęto ogólniejszy, aniżeli znany z literatury, model wymuszenia, odpowiadający szerokiej grupie obciążeń występujących w praktyce inżynierskiej. W modelu tym chwile pojawiania się kolejnych sił opisane są punktowym procesem stochastycznym, którego szczególnym przypadkiem jest proces Poissona, zaś same siły, tzn. ich wielkości, okresy oddziaływania na układ oraz przebiegi w czasie charakteryzuje się za pomocą zmiennych losowych lub ciągłych procesów stochastycznych.

W pracy wyprowadzono wyrażenia analityczne określające charakterystyki probabilistyczne wymuszenia i odpowiedzi konstrukcji oraz przedstawiono metodę oceny funkcji gęstości prawdopodobieństwa tych wielkości. Dla zilustrowania podanych związków ogólnych rozpatrzono pewne wybrane przypadki funkcji opisującej przebieg czasowy sił tworzących serię działającą na układ. Wykonano analizę numeryczną wpływu określonych parametrów /w tym także losowych/ obciążenia na wartości rozważanych charakterystyk probabilistycznych.

Zaproponowany model uwzględnia szereg elementów występujących w rzeczywistych procesach obciążeń. Posługiwanie się nim - pomimo jego rozbudowanej postaci oraz nałożenia na zawarte w nim wielkości założeń, podkreślających ich losowy charakter - nie stwarza trudności. W szczególnych przypadkach, wynikających ze znajomości niektórych cech wymuszenia pozwala na dokładną analizę poszukiwanych charakterystyk probabilistycznych odpowiedzi konstrukcji obciążonej losową serią sił.

Praca składa się z dziesięciu rozdziałów, z których pierwszy zawiera krótkie omówienie problematyki teorii drgań stochastycznych i jej zastosowań, a drugi prezentuje zagadnienie, jakiemu niniejsza praca jest poświęcona.

W rozdziale trzecim sformułowano problem, to znaczy przedstawiono opis procesu obciążenia przy wprowadzeniu wykorzystywanej dalej symboliki oraz pokazano sposób postępowania w przypadku drgań układu dyskretnego i ciągłego.

Rozdział czwarty poświęcony jest w całości charakterystyce funkcji obciążenia, zdefiniowanej w rozdziale trzecim, poprzez podanie wyrażeń analitycznych określających wartość oczekiwaną, funkcję korelacji i gęstość widmową wymuszenia w przypadku deterministycznego oraz losowo zmiennego czasu jego oddziaływania na układ.

W rozdziale piątym przedstawiono rozważania dotyczące drgań konstrukcji wywołanych serią losowych sił o deterministycznym czasie działania. Podano tu postać ogólną wartości oczekiwanej i funkcji korelacji przemieszczeń układu dyskretnego oraz sposób postępowania przy wyznaczaniu tych charakterystyk probabilistycznych dla układu ciągłego. Rozdział zawiera podpunkty poświęcone wybranym szczególnym przypadkom obciążenia.

Problem drgań konstrukcji wywołanych stochastyczną serią sił o losowym czasie działania jest tematem rozdziału szóstego. Przedstawiono w nim rozwiązanie ogólne dla układu dyskretnego przy założeniu, że przedział zmienności czasu trwania obciążenia jest znany. Podano postać poszukiwanych charakterystyk, jaką przyjmą one wówczas, gdy czas oddziaływania sił zmienia się nieograniczenie.

Rozdział siódmy poświęcony jest oszacowaniu funkcji gęstości prawdopodobieństwa obciążenia i przemieszczenia układu oraz wskazuje możliwość wykorzystania znajomości funkcji gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia i prędkości przemieszczenia w problemie "pierwszego przekroczenia".

W rozdziale ósmym podano wyniki analizy numerycznej związków opisujących wartość oczekiwaną i wariancję przemieszczenia, dotyczących wybranych szczególnych przypadków obciążenia zaproponowanych w rozdziale piątym. Zbadano m.in. wpływ tłumienia, czasu oddziaływania sił, kształtu ich przebiegu czasowego na wymienione charakterystyki, a wyniki przedstawiono na wykresach.

W Dodatku zamieszczono wyrażenia analityczne określające całki wprowadzone w rozdziale piątym.

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

3.1. Opis procesu obciążenia

W pracy rozpatruje się drgania układu wywołane losową serią sił o amplitudach A_k , rozpoczynających oddziaływanie w chwilach t_k i obciążających konstrukcję przez okres T_k . Drgania te, w przypadku układu dyskretnego o macierzy bezwładności B , macierzy dysypacji C i macierzy sztywności K określone są równaniem macierzowym

$$B \ddot{\bar{q}}(t) + C \dot{\bar{q}}(t) + K \bar{q}(t) = \bar{F} f(t), \quad /3.1/$$

w którym $\bar{q}(t)$ jest wektorem współrzędnych uogólnionych, $\bar{F}$ - wektorem opisującym przestrzenny rozkład obciążenia, a funkcja $f(t)$ przedstawia zmianę wymuszenia w czasie. Równania /3.1/ określają drgania konstrukcji o skończonej liczbie stopni swobody /np. blok fundamentowy/ bądź układu ciągłego poddanego dyskretyzacji matematycznej przy zastosowaniu metody Ritza, Galerkina lub metody elementów skończonych [27]. Drgania układu ciągłego opisane są równaniem

$$L[w(\tilde{x}, t)] + c\dot{w}(\tilde{x}, t) + mw(\tilde{x}, t) = p(\tilde{x}) f(t) \quad /3.1'/$$

omówionym w dalszej części rozdziału. Sposób rozwiązywania zagadnienia drgań układu dyskretnego i ciągłego zawierają punkty odpowiednio: 3.2 i 3.3. Związki /3.1/ i /3.1'/ podane są tu jedynie w celu wprowadzenia funkcji obciążenia $f(t)$, będącej przedmiotem rozważań w niniejszym podrozdziale.

Zakłada się, że rozpatrywany układ podlega działaniu serii sił, których wielkości amplitud A_k , chwile rozpoczęcia obciążenia t_k oraz czasy trwania T_k są w ogólnym przypadku zmiennymi losowymi. Funkcję $f(t)$ można zapisać w postaci następującej sumy

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N(0, t)} A_k S(t, t_k, T_k). \quad /3.2/$$

Przyjęto, że amplitudy A_k są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym znane są wartości ich charakterystyk probabilistycznych: $E[A_k] = E[A(t_k)]$ i $E[A_k^2] = E[A^2(t_k)]$.

Symbole $P\{\cdot\}$ i $E[\cdot]$ oznaczają w dalszej części pracy prawdopodobieństwo i wartość oczekiwaną wielkości w nawiasach. Funkcja

$S(t, t_k, T_k)$ przedstawia kształt k -tej siły w przedziale czasowym $(t_k, t_k + T_k)$. Rozpatruje się dwa typy tej funkcji. Może więc być to funkcja kształtu o charakterze deterministycznym, bądź rodzina procesów stochastycznych. Występujący nad znakiem sumy symbol $N(0, t)$ oznacza punktowy proces stochastyczny [28, 47, 48], określający ilość sił, które pojawiły się w przedziale $(0, t)$. Nazwa tego procesu wynika z przedstawienia go na osi czasu w postaci zbioru punktów.

Niech $N(t_i, t_j)$ i $dN(t)$ oznaczają ilość sił, które rozpoczęły obciążanie układu odpowiednio w okresach (t_i, t_j) i $(t, t+dt)$. Zakłada się, że prawdopodobieństwo pojawienia się pojedynczej siły w infinitezymalnym przedziale czasu $(t, t+dt)$ jest proporcjonalne do jego długości dt , a prawdopodobieństwo pojawienia się w tym przedziale więcej niż jednej siły jest wielkością pomijalnie małą wyższego rzędu, co zapisuje się następująco

$$\begin{aligned} P \{ dN(t) = 1 \} &= \lambda(t) dt + o(dt), \\ P \{ dN(t) > 1 \} &= o(dt), \\ P \{ dN(t) = 0 \} &= 1 - \lambda(t)dt + o(dt), \end{aligned} \quad /3.3/$$

gdzie $\lambda(t)$ jest intensywnością pojawiania się sił. Własność opisana związkami /3.3/ oznacza pojedynczość zgłoszeń sił [1, 25]. Ze wzorów /3.3/ wynikają zależności dotyczące wartości oczekiwanej procesu $dN(t)$

$$\begin{aligned} E [dN(t)] &= \lambda(t) dt, \\ E [dN^2(t)] &= \lambda(t) dt + o(dt), \end{aligned} \quad /3.4/$$

oraz ogólnie

$$E [dN^n(t)] = \lambda(t) dt + o(dt).$$

Korelację między zgłoszeniami sił w dwóch różnych chwilach t_1 i t_2 , $t_1 \neq t_2$, opisuje funkcja gęstości produktowej drugiego stopnia $\mathcal{G}(t_1, t_2)$ [29] określona związkiem

$$E [dN(t_1) dN(t_2)] = \mathcal{G}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad t_1 \neq t_2, \quad /3.5/$$

której odpowiada funkcja korelacyjna

$$\tilde{\mathcal{G}}(t_1, t_2) = \mathcal{G}(t_1, t_2) - \lambda(t_1) \lambda(t_2). \quad /3.6/$$

Zależności /3.4/₂ i /3.5/ połączyć można wspólnym wzorem

$$E[dN(t_1)dN(t_2)] = \mathcal{G}(t_1, t_2)dt_1dt_2 + \lambda(t_1)\delta(t_1 - t_2)dt_1dt_2, \quad /3.7/$$

gdzie $\delta(t)$ jest dystrybucją delta Diraca.

W przypadku zgłoszeń niezależnych /nieskorelowanych/ rozważany proces punktowy jest niestacjonarnym procesem Poissona [34] i wówczas

$\tilde{\mathcal{G}}(t_1, t_2) = 0$ oraz $\mathcal{G}(t_1, t_2) = \lambda(t_1)\lambda(t_2)$, a prawdopodobieństwo pojawienia się "n" sił w przedziale czasowym (t_i, t_j) określa wzór

$$P\{N(t_i, t_j) = n\} = \frac{\Lambda^n(t_i, t_j)}{n!} \exp[-\Lambda(t_i, t_j)], \quad n = 0, 1, 2, \dots, /3.8/$$

gdzie $\Lambda(t_i, t_j) = \int_{t_i}^{t_j} \lambda(\tau) d\tau,$

$\Lambda(t_i, t_j)$ - średnia ilość zgłoszeń sił w przedziale (t_i, t_j) . Funkcja $f(t)$ staje się wówczas "filtrującym procesem Poissona" [35]. Odstępy czasowe między chwilami pojawienia się kolejnych sił są w tym przypadku niezależnymi zmiennymi losowymi o niejednorodnym rozkładzie wykładniczym.

We wzorze /3.2/ wyjaśnienia wymaga jeszcze określenie czasu działania sił - T_k . W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że czasy trwania obciążenia są deterministyczne oraz jednakowe dla wszystkich sił i wynoszą $T_k = T = \text{const.}$, bądź że są one zmiennymi losowymi o znanych jednakowych rozkładach jedno- i dwuwymiarowych $g_1(T)$ i $g_2(T_1, T_2)$. W drugim przypadku do opisu czasu trwania siły wprowadza się jednopunktowy proces stochastyczny $Z_{t_k}(T)$, którego konkretną realizację określa wzór

$$Z_{t_k}(T) = \begin{cases} 0 & \text{dla } T < T_k \\ 1 & \text{dla } T \geq T_k \end{cases}. \quad /3.9/$$

Proces ten ma następujące własności

$$\begin{aligned} P\{dZ_{t_k}(T) = 1\} &= g_1(T) dT, \\ P\{dZ_{t_k}(T) = 0\} &= 1 - g_1(T) dT, \end{aligned} \quad /3.10/$$

oraz

$$\begin{aligned}
 E[dz_{t_k}(T)] &= \varepsilon_1(T) dT, \\
 E[dz_{t_k}^2(T)] &= \varepsilon_1(T) dT, \\
 E[dz_{t_k}(T_1) dz_{t_k}(T_2)] &= 0, \quad \text{dla } T_1 \neq T_2 \\
 E[dz_{t_k}(T_{t_k}) dz_{t_1}(T_{t_1})] &= \varepsilon_2(T_{t_k}, T_{t_1}, t_k, t_1) dT_{t_k} dT_{t_1}, \\
 &\quad \text{dla } t_k \neq t_1.
 \end{aligned}
 \tag{3.11/}$$

Funkcja $\varepsilon_2(T_{t_k}, T_{t_1}, t_k, t_1)$ jest dwuwymiarową funkcją gęstości prawdopodobieństwa określającą łącznie gęstość prawdopodobieństwa czasów trwania T_{t_k}, T_{t_1} sił, które pojawiły się w dwóch różnych chwilach t_k i t_1 . Jeśli czasy działania sił są niezależnymi zmiennymi losowymi, to zachodzi

$$\varepsilon_2(T_{t_k}, T_{t_1}, t_k, t_1) = \varepsilon_1(T_{t_k}) \varepsilon_1(T_{t_1}). \tag{3.12/}$$

3.2. Drgania układu dyskretnego

W celu rozwiązania układu równań /3.1/ zastosowano metodę rozwinięcia w skończony szereg funkcji własnych. Macierz własną układu i wektor współrzędnych głównych oznaczono odpowiednio: W i $\bar{y}(t)$. Wykorzystując transformację własną, np [7, 27]

$$\bar{q}(t) = W \bar{y}(t) \tag{3.13/}$$

oraz ortogonalne własności macierzy W można przekształcić /3.1/ w zbiór separowanych równań różniczkowych o postaci

$$\ddot{\bar{y}}(t) + 2\{\alpha_n\} \dot{\bar{y}}(t) + \{\omega_n^2\} \bar{y}(t) = \{m_n^{-1}\} \bar{Q} f(t), \tag{3.14/}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \{m_n\} &= W^T B W, & \bar{Q} &= W^T \bar{F}, \\
 \{k_n\} &= W^T K W, & 2\{\alpha_n\} &= \{c_n m_n^{-1}\}, \\
 \{c_n\} &= W^T C W, & \{\omega_n^2\} &= \{k_n m_n^{-1}\}.
 \end{aligned}$$

Symbole $\{\cdot\}$ i $\cdot^T$ określają kolejno: macierz diagonalną i transponowaną.

Założono ortogonalność formy kwadratowej $W^T C W$, co ma miejsce, gdy macierz dysypacji C jest liniową kombinacją macierzy: bezwładności

B i sztywności K. W szczególnym przypadku macierz C może być proporcjonalna do jednej z wymienionych macierzy.

Zarówno wektor współrzędnych głównych $\bar{y}(t)$, jak i współrzędnych uogólnionych $\bar{q}(t)$, jest superpozycją odpowiedzi układu dyskretnego na działanie każdej siły oddzielnie, przy czym jeśli chwila zgłoszenia t_k należy do przedziału $(t-T_k, t)$, to k-ta siła obciąża konstrukcję w chwili obserwacji t , natomiast gdy t_k zawiera się w przedziale $(0, t-T_k)$ układ wykonuje drgania swobodne zainicjowane siłą, która już zakończyła swe oddziaływanie [19]. Odpowiedź układu na działanie siły $S(t, t_k, T_k)$, która w chwili obserwacji t obciąża konstrukcję oznaczono przez $\bar{Y}_1(t, t_k, T_k)$ i $\bar{R}_1(t, t_k, T_k)$ /drgania wymuszone/, a na siłę, która w chwili t już nań nie działa - przez $\bar{Y}_2(t, t_k, T_k)$ i $\bar{R}_2(t, t_k, T_k)$ /drgania swobodne/, przy czym

$$\begin{aligned}\bar{R}_1(t, t_k, T_k) &= W \bar{Y}_1(t, t_k, T_k) \\ \bar{R}_2(t, t_k, T_k) &= W \bar{Y}_2(t, t_k, T_k)\end{aligned}\quad /3.15/$$

Wektory $\bar{Y}_1(t, t_k, T_k)$ i $\bar{Y}_2(t, t_k, T_k)$ spełniają równania

$$\ddot{\bar{Y}}_1(t, t_k, T_k) + 2\{\alpha_n\}\dot{\bar{Y}}_1(t, t_k, T_k) + \{\omega_n^2\}\bar{Y}_1(t, t_k, T_k) = \{m_n^{-1}\}\bar{Q}S(t, t_k, T_k)$$

$$\text{dla } t \geq t_k$$

$$\ddot{\bar{Y}}_2(t, t_k, T_k) + 2\{\alpha_n\}\dot{\bar{Y}}_2(t, t_k, T_k) + \{\omega_n^2\}\bar{Y}_2(t, t_k, T_k) = 0 \quad /3.16/$$

$$\text{dla } t \geq t_k + T_k$$

oraz warunki początkowe odpowiednio dla $t = t_k$ i $t = t_k + T_k$

$$\begin{aligned}\bar{Y}_1(t_k, t_k, T_k) &= 0, & \bar{Y}_2(t_k + T_k, t_k, T_k) &= \bar{Y}_1(t_k + T_k, t_k, T_k), \\ \dot{\bar{Y}}_1(t_k, t_k, T_k) &= 0, & \dot{\bar{Y}}_2(t_k + T_k, t_k, T_k) &= \dot{\bar{Y}}_1(t_k + T_k, t_k, T_k).\end{aligned}\quad /3.17/$$

Wektory $\bar{Y}_1(t, t_k, T_k)$ i $\bar{Y}_2(t, t_k, T_k)$ spełniające równania /3.16/ i warunki początkowe /3.17/ można wyznaczyć z następujących związków

$$\begin{aligned}\bar{Y}_1(t, t_k, T_k) &= \int_{t_k}^t \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} \bar{Q} S(\xi, t_k, T_k) d\xi, \\ \bar{Y}_2(t, t_k, T_k) &= \int_{t_k}^{t_k + T_k} \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} \bar{Q} S(\xi, t_k, T_k) d\xi,\end{aligned}\quad /3.18/$$

gdzie symbolem $h_n(t-\xi)$ oznaczono impulsową funkcję przejścia o postaci

$$h_n(t-\xi) = \Omega_n^{-1} \exp[-\alpha_n(t-\xi)] \sin \Omega_n(t-\xi) \quad /3.19/$$

przy czym: $\Omega_n^2 = \omega_n^2 - \alpha_n^2$.

Podstawiając wektory $\bar{Y}_1(t, t_k, T_k)$ i $\bar{Y}_2(t, t_k, T_k)$ wyrażone związkami /3.18/ do zależności /3.15/ otrzymuje się

$$\begin{aligned} \bar{R}_1(t, t_k, T_k) &= W \bar{Y}_1(t, t_k, T_k) = \int_0^t H(t-\xi) \bar{F} S(\xi, t_k, T_k) d\xi, \\ \bar{R}_2(t, t_k, T_k) &= W \bar{Y}_2(t, t_k, T_k) = \int_{t_k}^{t_k+T_k} H(t-\xi) \bar{F} S(\xi, t_k, T_k) d\xi, \end{aligned} \quad /3.20/$$

gdzie symbolem $H(t-\xi) = W \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} W^T$ oznaczono macierz charakterystyk impulsowych. Przy pomocy zdefiniowanych w niniejszym punkcie wektorów $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{R}_1, \bar{R}_2$ określone będą w dalszych rozdziałach pracy szukane charakterystyki probabilistyczne dla wyróżnionych przypadków szczególnych.

3.3. Drgania układu ciągłego

Drgania układu ciągłego obciążonego w sposób zaproponowany w punkcie 3.1 opisuje równanie

$$L[w(\tilde{x}, t)] + c\dot{w}(\tilde{x}, t) + mw(\tilde{x}, t) = p(\tilde{x})f(t), \quad /3.21/$$

gdzie:

$L[]$ - różniczkowy operator liniowy względem zmiennych geometrycznych $\tilde{x}$,

$w(\tilde{x}, t)$ - przemieszczenie rozważanego dźwigara,

c, m - odpowiednio: współczynnik tłumienia i masa jednostkowa,

$p(\tilde{x})$ - funkcja określająca przestrzenny rozkład obciążenia /odpowiednik wektora $\bar{F}$ w zagadnieniu drgań układu dyskretnego/

$f(t)$ - funkcja opisująca przebieg wymuszenia w czasie dana wzorem /3.2/.

Różniczkowy operator liniowy $L[]$ względem zmiennych przestrzennych $\tilde{x}$ przyjmuje różne postaci w zależności od typu rozpatrywanego dźwigara, a więc np. dla belki ($\tilde{x} \rightsquigarrow x$) $L[w(x, t)] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right],$

gdzie $0 \leq x \leq 1$ /1 - długość belki/, a dla płyty cienkiej o stałej grubości ($\tilde{x} \rightsquigarrow x, y$) $L[w(x, y, t)] = D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$, przy czym $EJ(x)$, D oznaczają sztywność odpowiednio belki i płyty.

Rozwijając funkcję przemieszczeń $w(\tilde{x}, t)$ w szereg funkcji własnych

$$w(\tilde{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) W_n(\tilde{x}) = \bar{y}^T(t) \bar{W}(\tilde{x}) = \bar{W}^T(\tilde{x}) \bar{y}(t) \quad /3.22/$$

otrzymuje się nieskończony ciąg równań separowanych typu /3.14/, gdzie $\alpha_n = \alpha = \frac{c}{2m}$, $Q_n = m_n^{-1} \int p(\tilde{x}) W_n(\tilde{x}) d\tilde{x}$, $m_n = \int m(\tilde{x}) W_n^2(\tilde{x}) d\tilde{x}$, ω_n - n-ta częstość własna układu B nietłumionego, a B dziedzina zmiennej $\tilde{x}$ /długość czy powierzchnia/. Analogicznie, jak dla zagadnienia drgań układu dyskretnego wprowadza się funkcje $Y_{n1}(t, t_k, T_k)$ i $Y_{n2}(t, t_k, T_k)$ oraz odpowiedniki wektorów $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, a mianowicie funkcje

$$H_1(\tilde{x}, t, t_k, T_k) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n1}(t, t_k, T_k) W_n(\tilde{x}) = \bar{Y}_1^T(t, t_k, T_k) \bar{W}(\tilde{x}), \quad /3.23/$$

$$H_2(\tilde{x}, t, t_k, T_k) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n2}(t, t_k, T_k) W_n(\tilde{x}) = \bar{Y}_2^T(t, t_k, T_k) \bar{W}(\tilde{x}).$$

Również i w tym przypadku przemieszczenie w dowolnej chwili obserwacji t jest superpozycją przemieszczeń wywołanych każdą siłą oddzielnie. Drgania układu można przedstawić jako sumę drgań swobodnych wywołanych siłami, które w chwili t już nie obciążają konstrukcji oraz drgań wymuszonych pochodzących od sił w dalszym ciągu nań działających.

W rozdziałach piątym i szóstym wyznaczono charakterystyki probabilistyczne, jak wartość oczekiwana i funkcje korelacyjne przemieszczeń konstrukcji wywołanych losową serią sił /3.2/.

4. CHARAKTERYSTYKI PROBABILISTYCZNE FUNKCJI OBCIĄŻENIA $f(t)$

4.1. Wprowadzenie

Rozdział ten poświęcony jest analizie wyprowadzonych dla pełniejszego opisu procesu obciążenia charakterystyk probabilistycznych, jak wartość oczekiwana, funkcja korelacyjna i gęstość widmowa funkcji $f(t)$ określonej związkami /3.2/. Całość rozważań została podzielona na dwie części. W pierwszej przyjęto, że czasy działania sił T_k są deterministyczne, a więc $T_k = T = \text{const.}$, natomiast w drugiej są one zmiennymi losowymi. Także funkcja $S(t, t_k, T_k)$, która opisuje przebieg siły w czasie może mieć charakter deterministyczny i przyjmować znane postaci np. funkcji stałej, sinusoidalnej czy wykładniczo malejącej [19] lub może być procesem stochastycznym o znanych charakterystykach /rys. 1/.

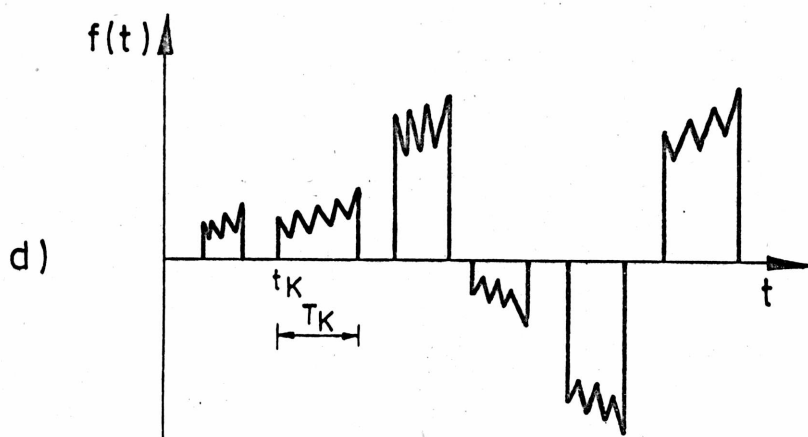
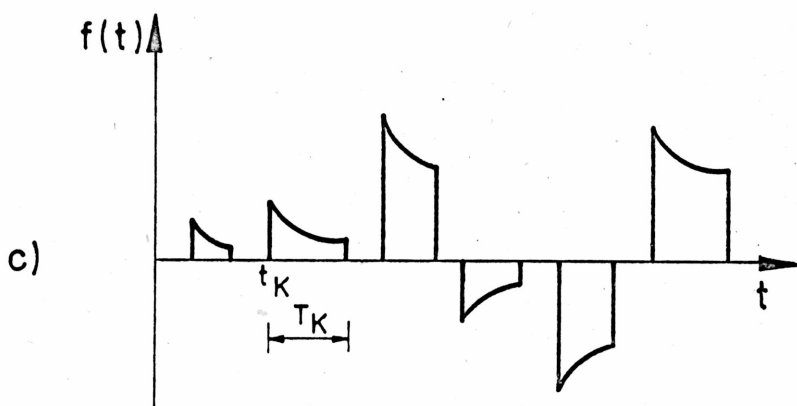
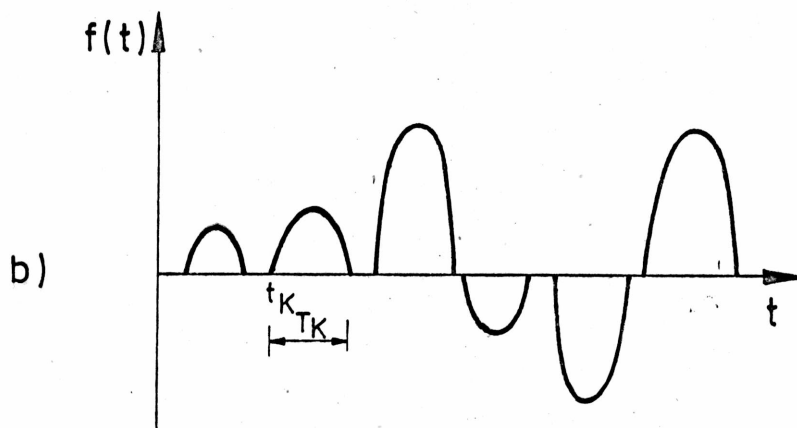
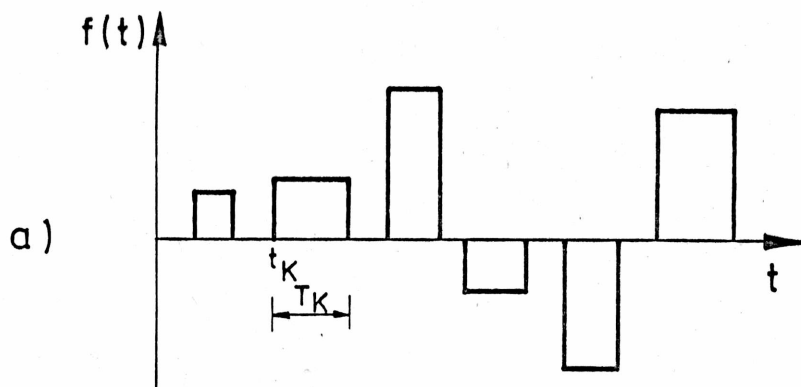
4.2. Charakterystyki probabilistyczne funkcji $f(t)$ przy deterministycznym czasie działania sił

Przyjęto, że czasy trwania wszystkich sił są deterministyczne i jednakowe ($T_k = T = \text{const.}$) oraz kształt pojedynczej siły nie zależy od chwili, w której rozpoczęła ona swe działanie, a jedynie od odległości czasowej między obserwacją zjawiska a k -tym zgłoszeniem się. Funkcję $S(t, t_k, T_k)$ zapisuje się więc następująco

$$S(t, t_k, T_k) = \begin{cases} S(t-t_k) & \text{dla } t_k < t < t_k + T, \\ 0 & \text{dla } t < t_k \text{ lub } t > t_k + T \end{cases} \quad /4.1/$$

Funkcja $f(t)$ jest sumą sił pojawiających się w chwilach t_k należących do przedziału $(t-T, t)$, tzn. takich, które w chwili obserwacji t obciążają konstrukcję. Mając na uwadze fakt, że proces $dN(t_k)$, którego własności są określone związkami /3.3/, jest stochastycznym procesem skokowym, wzór /3.2/ można przy użyciu całki Stieltjesa [14,16] przekształcić do postaci

$$f(t) = \int_{t-T}^t A(\tau) S(t-\tau) dN(\tau) . \quad /4.2/$$



Rys. 1.

Gdy czas działania sił T dąży do nieskończoności, lub gdy $t-T < 0$, wówczas dolna granica całki we wzorze /4.2/ równa jest zero. Relacja /4.2/ jest wzorem wyjściowym do wyznaczania poszukiwanych charakterystyk probabilistycznych obciążenia.

Dokonując na związku /4.2/ operacji wartości oczekiwanej i wykorzystując wzór /3.4/₁ otrzymuje się wartość oczekiwaną funkcji $f(t)$ opisaną zależnością

$$E[f(t)] = \int_{t-T}^t E[A(\tau)] E[S(t-\tau)] \lambda(\tau) d\tau. \quad /4.3/$$

Oparto się tu, jak i przy innych operacjach, na fakcie, że wielkości amplitud, funkcja $S(t-t_k)$ opisująca kształt siły oraz punktowy proces $dN(t_k)$ są wzajemnie niezależne.

Funkcję korelacyjną $K_{ff}(t_1, t_2)$ wyznacza się ze znanego wzoru, np. [6, 34]

$$K_{ff}(t_1, t_2) = E[f(t_1) f(t_2)] - E[f(t_1)] E[f(t_2)]. \quad /4.4/$$

Po uwzględnieniu związków /3.4/₂, /3.5/ i /3.6//lub /3.7//, /4.1/ oraz /4.2/ otrzymano

$$\begin{aligned} K_{ff}(t_1, t_2) = & \int_{\min(t_1, t_2)}^{\max(t_1, t_2)-T} E[A^2(\tau)] E[S(t_1-\tau) S(t_2-\tau)] \lambda(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_1-T}^{t_1} \int_{t_2-T}^{t_2} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] E[S(t_1-\tau_1) S(t_2-\tau_2)] \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \\ & - E[f(t_1)] E[f(t_2)]. \end{aligned} \quad /4.5/$$

Należy podkreślić, że obok całek podwójnych, jak dla klasycznych procesów ciągłych, występuje w powyższym wzorze całka pojedyncza. Jest ona równa zero dla $[\max(t_1, t_2) - T] > \min(t_1, t_2)$. Całki podwójne wyrażają wpływ wzajemnej korelacji między różnymi siłami na wartość $K_{ff}(t_1, t_2)$, natomiast całka pojedyncza odzwierciedla wpływ każdej siły oddzielnie.

Jeśli funkcja $S(t, t_k)$ ma charakter deterministyczny, to ogólną zależność /4.5/ można zapisać następująco

$$K_{ff}(t_1, t_2) = \int_{\max(t_1, t_2) - T}^{\min(t_1, t_2)} E[A^2(\tau)] S(t_1 - \tau) S(t_2 - \tau) \lambda(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_1 - T}^{t_1} \int_{t_2 - T}^{t_2} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] S(t_1 - \tau_1) S(t_2 - \tau_2) \tilde{Q}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 ,$$

/4.6/

gdzie $\tilde{Q}(t_1, t_2)$ - funkcja korelacyjna dana wzorem /3.6/.

W celu wyznaczenia gęstości widmowej mocy $G_{ff}(u_1, u_2)$ procesu $f(t)$ wykorzystano ogólny wzór [1, 14, 46]

$$G_{ff}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ff}(\eta_1, \eta_2) e^{-i(u_1 \eta_1 - u_2 \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2$$

/4.7/

Z przekształcenia odwrotnego Fouriera wynika, że funkcję korelacyjną można wyrazić przez gęstość widmową

$$K_{ff}(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(u_1, u_2) e^{i(u_1 t_1 - u_2 t_2)} du_1 du_2$$

/4.8/

Dla procesu stacjonarnego, gdy $K_{ff}(t_1, t_2) = K_{ff}(t)$, $t = t_2 - t_1$, zachodzi

$$G_{ff}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{ff}(\eta) e^{-iu\eta} d\eta ,$$

/4.9/

$$K_{ff}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ff}(u) e^{i|t|u} du .$$

/4.10/

Jeśli funkcja $f(t)$ jest procesem rzeczywistym, to jej funkcja korelacyjna jest rzeczywista i parzysta, a także parzysta jest gęstość widmowa mocy. Wówczas zależności /4.9/ i /4.10/ przyjmują postać

$$G_{ff}(u) = \int_0^{\infty} K_{ff}(\eta) \cos u\eta d\eta ,$$

/4.11/

$$K_{ff}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} G_{ff}(u) \cos u t du .$$

/4.12/

Relacje /4.3/, /4.6/ oraz /4.11/ posłużą do wyznaczenia szczególnych wyrażeń opisujących charakterystyki probabilistyczne obciążenia, jak wartość oczekiwana, funkcja korelacyjna i gęstość widmowa przy następujących założeniach. Amplitudy A_k nie zależą od chwil pojawiania się sił t_k , a więc ich charakterystyki probabilistyczne są

stałe i znane: $E[A_k] = E[A] = \text{const.}$, $E[A_k^2] = E[A^2] = \text{const.}$

O procesie zgłoszeń sił zakłada się, iż jest on stacjonarny i nieskorelowany ($\tilde{Q}(t_{k_1}, t_{k_2}) = 0$) tzn. $\lambda(t_k) = \lambda = \text{const.}$ Otrzymuje się więc związki /4.3/, /4.6/ i /4.11/ w prostej postaci

$$E[f(t)] = E[A] \lambda \int_0^T S(T-\tau) d\tau, \quad /4.13/$$

$$\begin{aligned} K_{ff}(t_1, t_2) &= K_{ff}(t) = E[A^2] \lambda \int_{\max(t_1, t_2)-T}^{\min(t_1, t_2)} S(t_1-\tau) S(t_2-\tau) d\tau = \\ &= E[A^2] \lambda \int_0^{T-|t|} S(T-|t|-\tau) S(T-\tau) d\tau, \quad \text{dla } |t| < T \end{aligned} \quad /4.14/$$

gdzie $t = t_2 - t_1$,

przy czym funkcja $K_{ff}(t)$ jest równa zero dla $|t| \geq T$, oraz

$$G_{ff}(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^T K_{ff}(\eta) \cos u\eta d\eta. \quad /4.15/$$

P r z y p a d e k 1

Układ jest obciążony serią sił stałych w czasie /rys. 1a/; funkcja $S(t-t_k)$ przyjmuje postać

$$S(t-t_k) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_k, \\ \frac{1}{r} & \text{dla } t \geq t_k, \end{cases} \quad /4.16/$$

gdzie jako wielkość r wprowadzić można

$$r = 1 \quad \text{lub} \quad r = \int_0^T |S(t)| dt.$$

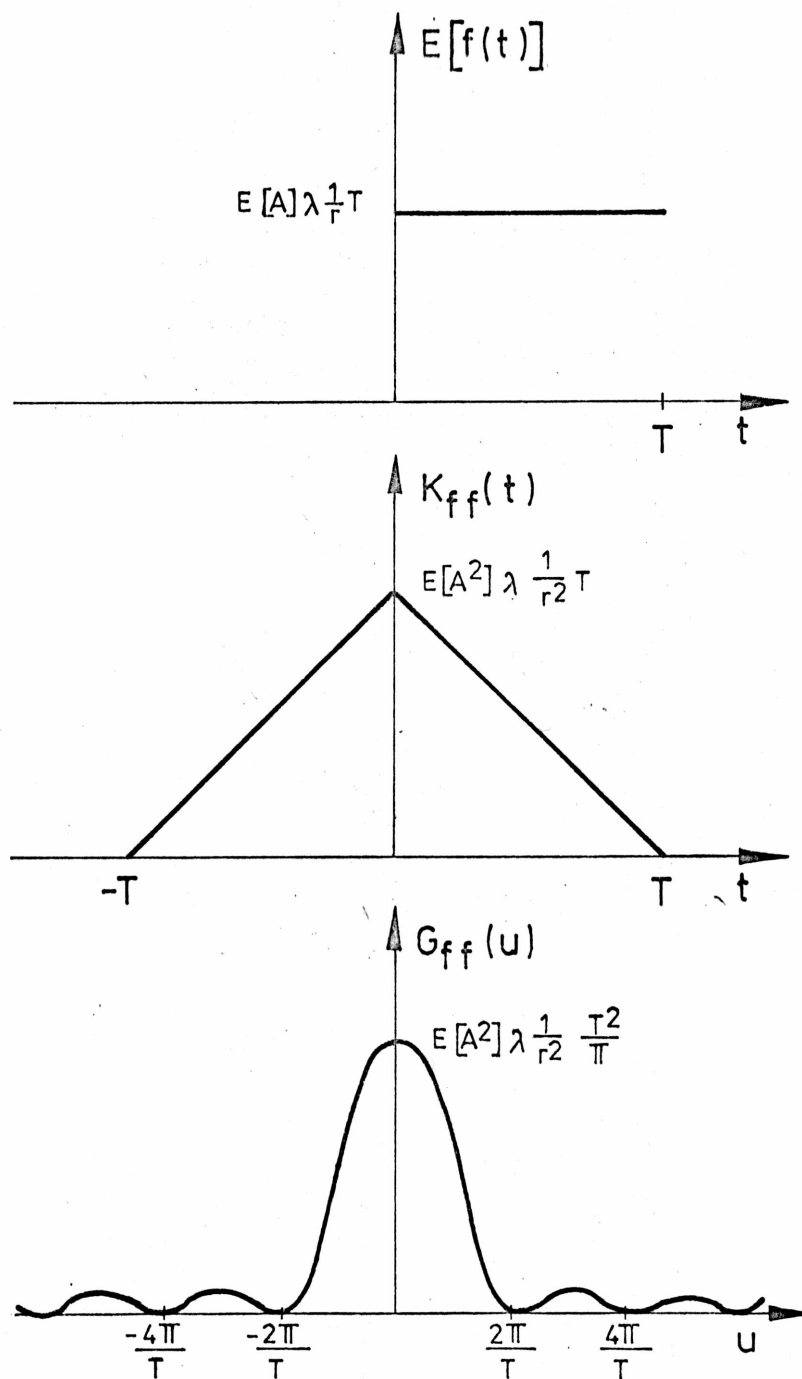
Wartość oczekiwaną, funkcję korelacyjną i gęstość widmową opisują wyrażenia

$$E[f(t)] = E[A] \lambda \frac{1}{r} T, \quad /4.17/$$

$$K_{ff}(t) = E[A^2] \lambda \frac{1}{r^2} (T - |t|), \quad /4.18/$$

$$G_{ff}(u) = E[A^2] \lambda \frac{1}{r^2} \frac{2}{\pi} \frac{1}{u^2} (1 - \cos u T), \quad /4.19/$$

przedstawione na rys. 2.



Rys. 2.

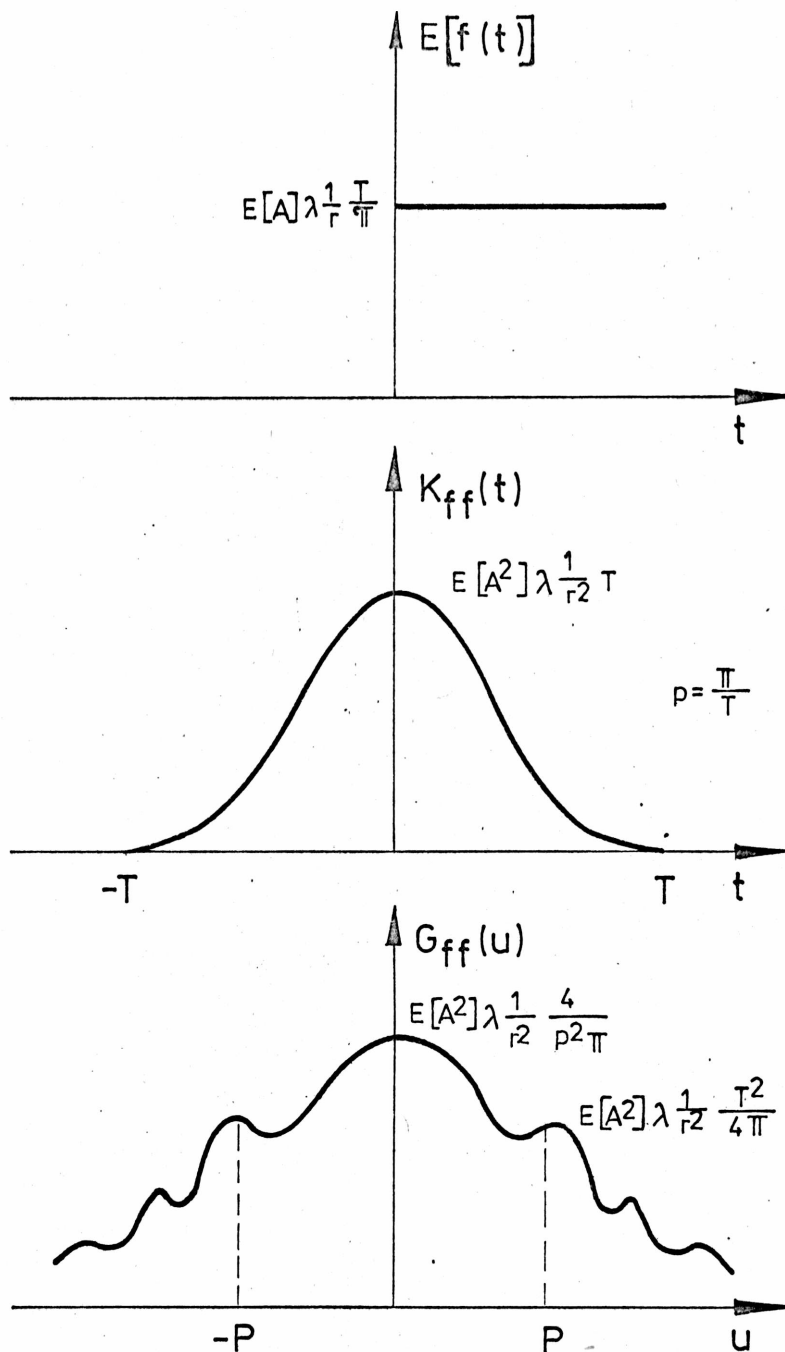
Jak widać, wartość oczekiwana obciążenia jest średnim obciążeniem przy ustalonym czasie trwania sił T . Natomiast parzysta funkcja $K_{ff}(t)$ zmienia się liniowo w przedziałach $(-T, 0)$ i $(0, T)$. Funkcja gęstości widmowej zeruje się dla punktów $u = \frac{2k\pi}{T}$, $k = 1, 2, \dots$, pomiędzy którymi wykazuje lokalne maxima o coraz mniejszej wielkości.

P r z y p a d e k 2

Układ jest obciążony serią sił harmonicznie zmiennych /rys. 1b/, których kształt opisuje związek

$$S(t-t_k) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_k, \\ \frac{1}{T} \sin p(t-t_k) & \text{dla } t \geq t_k, \end{cases} \quad /4.20/$$

gdzie p jest częstością oscylacji sił wymuszających i niech $p = \frac{\pi}{T}$ /impulsy sinusoidalne/.



Rys. 3.

W tym przypadku otrzymano

$$E[f(t)] = E[A] \lambda \frac{1}{r} \frac{T}{\pi}, \quad /4.21/$$

$$K_{ff}(t) = E[A^2] \lambda \frac{1}{2r^2} \left[\frac{1}{p} \sin p|t| + (T - |t|) \cos p|t| \right], \quad /4.22/$$

$$G_{ff}(u) = E[A^2] \lambda \frac{2}{\pi r^2} \frac{p^2}{(p-u)^2 (p+u)^2} (\cos u T + 1). \quad /4.23/$$

Charakterystyki te przedstawia rys. 3.

Funkcja korelacyjna jest ciągła w przedziale $(-T, T)$ i zdąża do zera /dla $t = T$ / z prędkością uzależnioną od parametru p . Gęstość widmowa natomiast jest funkcją osiągającą lokalne extrema w przedziałach o zmiennej długości. W punkcie $u = \pm p$ widmo mocy przyjmuje wartość: $G_{ff}(u) = E[A^2] \lambda \frac{1}{r^2} \frac{T^2}{4\pi}$.

P r z y p a d e k 3

Układ jest obciążony serią sił wykładniczo malejących /rys. 1c/

$$S(t-t_k) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_k, \\ \frac{1}{r} \exp[-\beta(t-t_k)] & \text{dla } t \geq t_k, \end{cases} \quad /4.24/$$

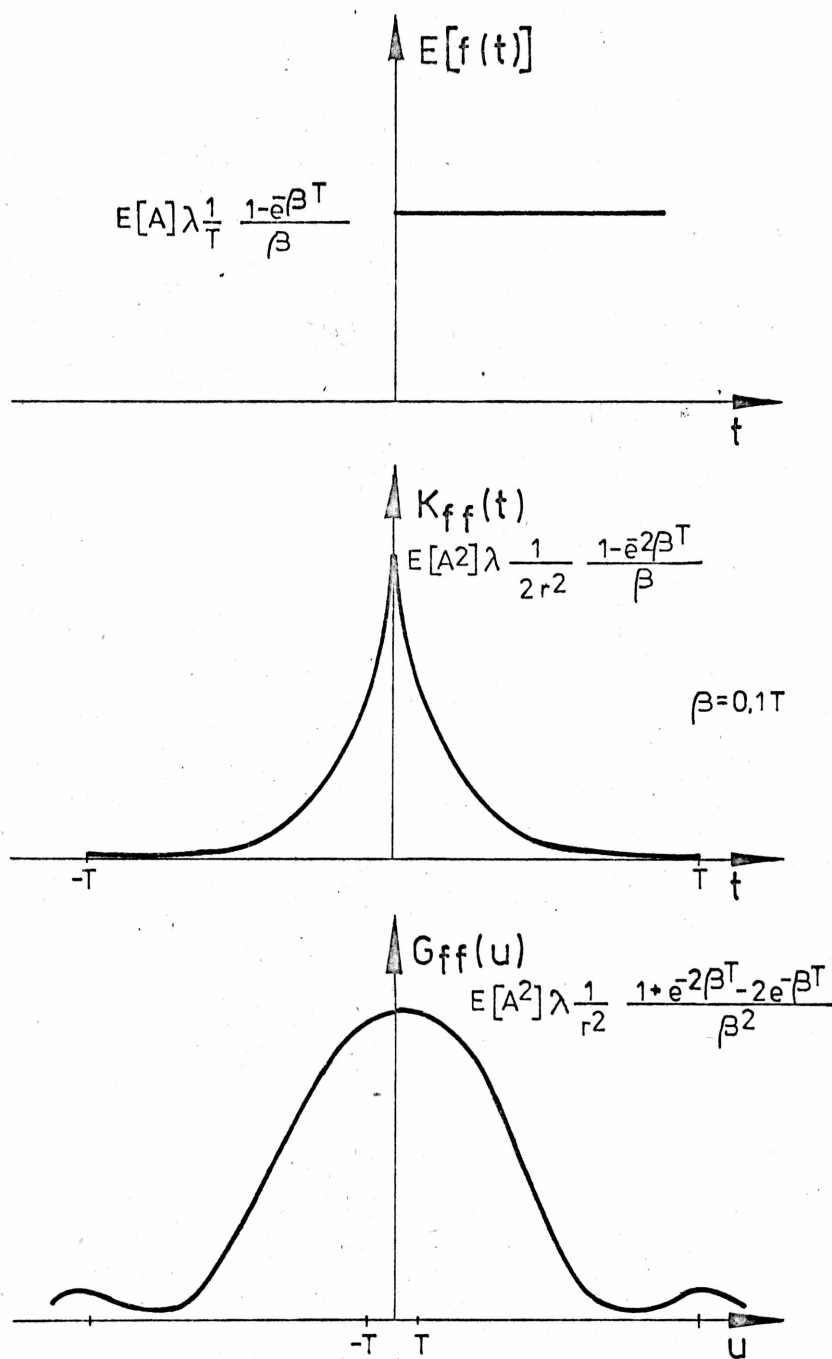
Wartość oczekiwaną, funkcję korelacyjną i gęstość widmową przedstawione na rys. 4 opisują wzory

$$E[f(t)] = E[A] \lambda \frac{1}{r} \frac{1}{\beta} [1 - \exp(-\beta T)], \quad /4.25/$$

$$K_{ff}(t) = E[A^2] \lambda \frac{1}{r^2} \frac{1}{2\beta} \left\{ \exp(-\beta|t|) - \exp[\beta(|t| - 2T)] \right\}, \quad /4.26/$$

$$G_{ff}(u) = E[A^2] \lambda \frac{1}{r^2} \frac{1}{\pi(\beta^2 + u^2)} [1 + \exp(-2\beta T) - 2\exp(-\beta T) \cos u T] \quad /4.27/$$

Wartość oczekiwana w dalszym ciągu przedstawia średnie obciążenie przy ustalonym czasie działania sił. Funkcja korelacyjna zdąża wykładniczo do zera dla $t=T$, przy czym parametrem sterującym tym przebiegiem przy danym T jest parametr wymuszenia β . Na rys. 4 przyjęto $\beta = 0.1T$. Gęstość widmowa przyjmuje lokalne extrema, zbliżając się do zera, lecz go nie osiągając.



Rys. 4.

D y g r e s j a :

Układ jest obciążony serią sił sinusoidalnie zmiennych /jak w przypadku 2/, amplitudy A_k nie zależą od chwil t_k i są znane, lecz proces zgłoszeń sił jest niestacjonarny, a jego intensywność $\lambda(t_k)$ zmienia się według funkcji $\lambda(t_k) = \lambda_0 + \lambda_1 \sin \omega_0 t_k$, $\lambda_0 \geq \lambda_1$.

Wartość oczekiwana i funkcję korelacyjną obciążenia opisują następujące związki

$$E[f(t)] = E[A] \lambda_0 \frac{1}{r} \frac{T}{\pi} + E[A] \lambda_1 \frac{1}{r} \frac{p}{p^2 - \omega_0^2} [\sin \omega_0 t + \sin \omega_0 (t-T)] , \quad /4.28/$$

$$\begin{aligned} K_{ff}(t_1, t_2) = & E[A^2] \lambda_0 \frac{1}{2r^2} \left[\frac{1}{p} \sin p |t| + (T - |t|) \cos p t \right] + \\ & + E[A^2] \lambda_1 \frac{1}{2r^2} \frac{1}{4p^2 - \omega_0^2} \left\{ 2p [\sin p |t| \sin \omega_0 t_1 + \right. \\ & + \sin p (|t| - 2T) \sin \omega_0 (t_2 - T)] - \\ & - \omega_0 [\cos p t \cos \omega_0 t_1 - \cos p (|t| - 2T) \cos \omega_0 (t_2 - T)] \left. \right\} + \\ & + E[A^2] \lambda_1 \frac{1}{2r^2} \frac{\cos p t}{\omega_0} [\cos \omega_0 (t_2 - T) - \cos \omega_0 t_1] . \end{aligned} \quad /4.29/$$

Jak widać, są to zależności /4.21/ i /4.22/ powiększone o wartość oczekiwaną i funkcję korelacyjną obciążenia o intensywności $\lambda_1 \sin \omega_0 t_k$. Gęstość widmową mocy należy teraz obliczać na podstawie wzoru /4.7/, tu jednakże nie podano wyniku ze względu na bardzo rozbudowaną jego postać i nieistotne dla pracy znaczenie.

Niech funkcja kształtu sił $S(t - t_k)$ będzie procesem stochastycznym o znanej funkcji korelacyjnej, a więc

$$E[S(t - t_k)] = 0 , \quad /4.30/$$

$$K_{ss}(t_1, t_2, t_{k_1}, t_{k_2}) = E[S(t_1 - t_{k_1}) S(t_2 - t_{k_2})] . \quad /4.31/$$

Ogólny wzór /4.5/ przy uwzględnieniu związków /4.30/ i /4.31/ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} K_{ff}(t_1, t_2) = & \int_{\max(t_1, t_2) - T}^{\min(t_1, t_2)} E[A^2(\tau)] K_{ss}(t_1, t_2, \tau, \tau) \lambda(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_1 - T}^{t_1} \int_{t_2 - T}^{t_2} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] K_{ss}(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 . \end{aligned} \quad /4.32/$$

Przyjęto, że: amplitudy A_k nie zależą od chwil pojawiania się sił t_k i są znane - $E[A_k] = E[A] = \text{const.}$, $E[A_k^2] = E[A^2] = \text{const.}$, proces zgłoszeń sił jest stacjonarny - $\lambda(t_k) = \lambda = \text{const.}$ i nieskorelowany - $\tilde{Q}(t_{k1}, t_{k2}) = 0$, a także stacjonarny jest proces $S(t-t_k)$. Przy powyższych założeniach związki /4.31/ i /4.32/ zapisuje się następująco

$$K_{ss}(t_2 - t_1 - t_{k2} + t_{k1}) = E[S(t_1 - t_{k1}) S(t_2 - t_{k2})], \quad /4.33/$$

$$K_{ff}(t) = E[A^2] \lambda \int_{\max(t_1, t_2) - T}^{\min(t_1, t_2)} K_{ss}(t_2 - t_1) d\tau + E^2[A] \lambda^2 \int_{t_1 - T}^{t_1} \int_{t_2 - T}^{t_2} K_{ss}(t_2 - t_1 - \tau_2 + \tau_1) \cdot$$

$$\cdot d\tau_1 d\tau_2 = E[A^2] \lambda K_{ss}(t) (T - |t|) + E^2[A] \lambda^2 \int_0^T \int_t^{t+T} K_{ss}(t - \tau_2 + \tau_1) d\tau_1 d\tau_2,$$

$$t = t_2 - t_1 \quad /4.34/$$

Możliwe jest również przyjęcie K_{ss} w postaci

$$K_{ss}(t_2 - t_1) = E[S(t_1) S(t_2)] \quad /4.33'/$$

W sytuacji opisywanej przez zależność /4.33/ każda siła jest realizacją tej samej części procesu stochastycznego z przedziału $(0, T)$, natomiast wzór /4.33'/ ważny jest wówczas, gdy dwie różne siły są realizacjami dwóch różnych części z przedziałów, np. $(t_{k1}, t_{k1} + T)$ i $(t_{k2}, t_{k2} + T)$, tego samego ciągłego procesu stochastycznego. Dalsze rozważania ograniczono do pierwszego przypadku.

P r z y p a d e k 4

Rozpatrywany jest proces $S(t-t_k)$, którego funkcja korelacji dana jest wzorem /"biały szum"/

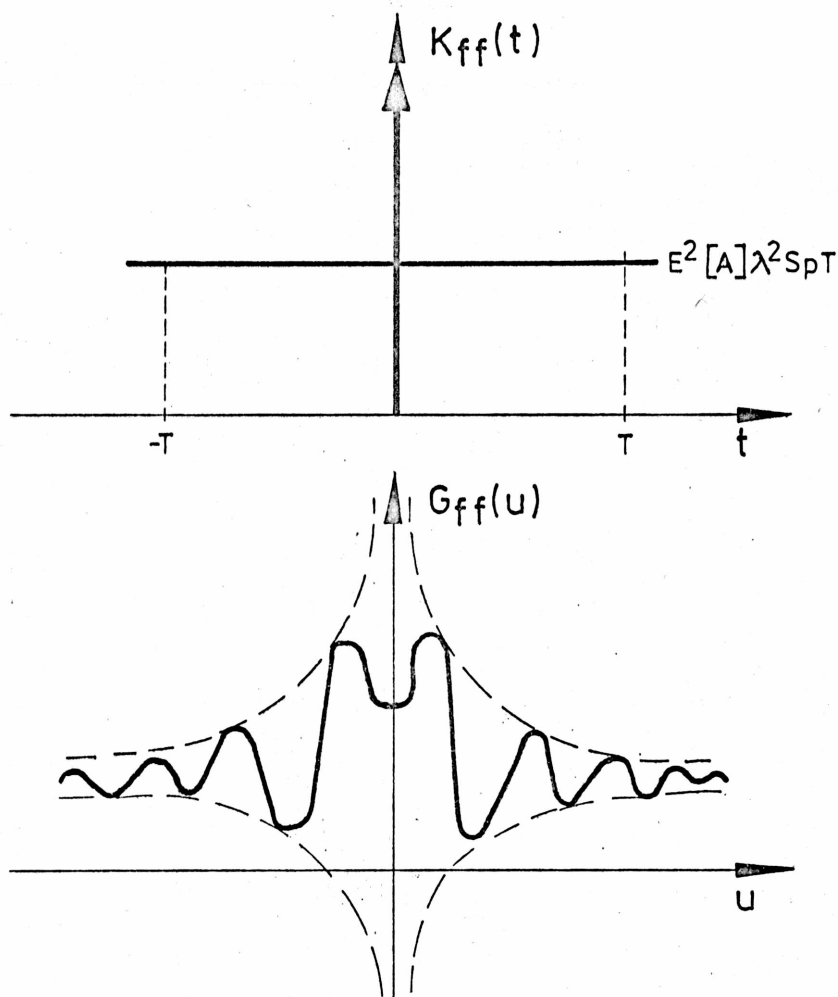
$$K_{ss}(t) = S_p \delta(t) \quad /4.35/$$

Otrzymano funkcję korelacyjną obciążenia oraz gęstość widmową mocy w następującej postaci

$$K_{ff}(t) = E[A^2] \lambda S_p \delta(t) T + E^2[A] \lambda^2 S_p T \quad , \quad /4.36/$$

$$G_{ff}(u) = E[A^2] \lambda S_p \frac{T}{\pi} - E^2[A] \lambda^2 S_p \frac{2T}{\pi} \frac{\sin u T}{u} \quad /4.37/$$

i przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5.

P r z y p a d e k 5

Niech funkcja korelacyjna procesu $S(t-t_k)$ ma postać

$$K_{SS}(t) = \sigma^2 \exp(-\beta|t|) \quad , \quad /4.38/$$

gdzie $t = t_2 - t_1$, σ^2, β - parametry wymuszenia.

Wykorzystując związki /4.33/ i /4.11/ otrzymano

$$K_{ff}(t) = E[A^2] \lambda^2 G^2(T - |t|) \exp(-\beta |t|) -$$

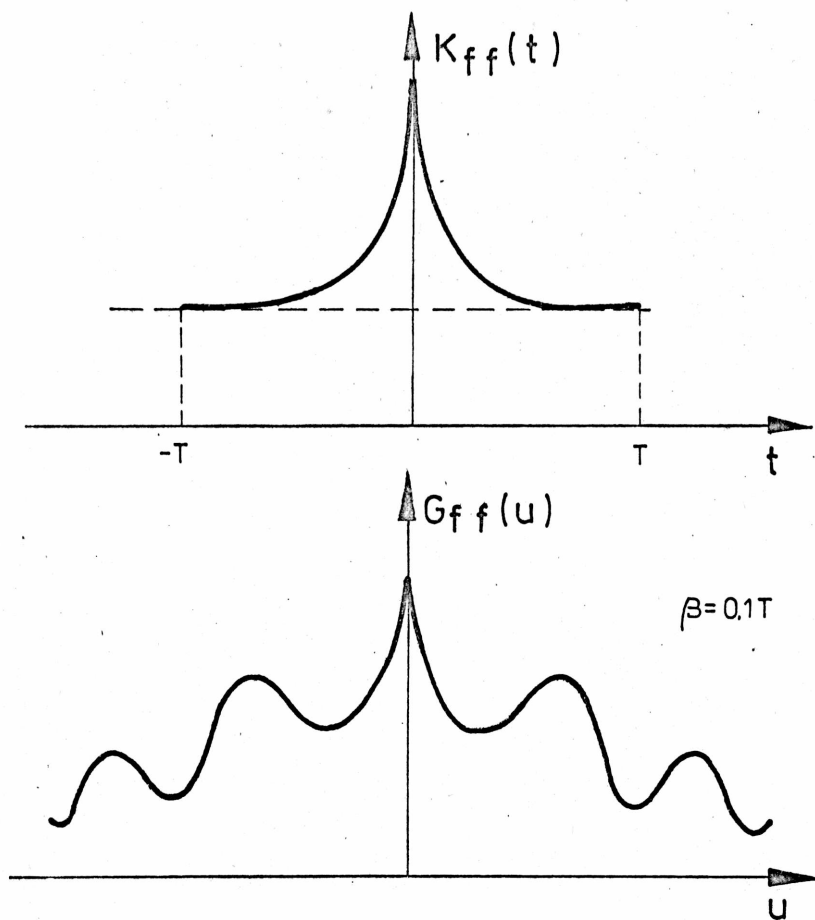
$$- E^2[A] \lambda^2 G^2 \frac{2}{\beta} \left\{ \frac{1}{\beta} [1 - \exp(-\beta T)] - T \right\}, \quad /4.39/$$

$$G_{ff}(u) = E[A^2] \lambda^2 G^2 \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta^2 + u^2} \left\{ T\beta + \frac{\exp(-\beta T)}{\beta^2 + u^2} [(\beta^2 - u^2) \cos uT - \right.$$

$$\left. - 2\beta u \sin uT \right] - \frac{\beta^2 - u^2}{\beta^2 + u^2} \left\{ -E^2[A] \lambda^2 G^2 \frac{4}{\beta\pi} \left\{ \frac{1}{\beta} [1 - \exp(-\beta T)] - T \right\} \frac{\sin uT}{u} \right.$$

/4.40/

Przebieg funkcji $K_{ff}(t)$ i $G_{ff}(u)$ przedstawia rys. 6.



Rys. 6.

4.3. Charakterystyki probabilistyczne funkcji $f(t)$ przy losowo zmiennym czasie działania sił

Niech czas trwania siły T_k będzie zmienną losową, przy czym T zmienia się w granicach $a \leq T \leq b$. Wzorem wyjściowym do wyznaczania charakterystyk probabilistycznych, jak wartość oczekiwana, funkcja korelacyjna i gęstość widmowa jest relacja

$$f(t) = \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-\tau}^b A(\tau) S(t, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) + \int_{t-a}^t \int_a^b A(\tau) S(t, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) \quad /4.41/$$

Tak zapisane obciążenie rozumiane jest jako suma wszystkich sił o czasie działania $a \leq T \leq b$, które dotrwały do chwili obserwacji t , przy czym $t > b$. Dokonując na wzorze /4.41/ operacji wartości oczekiwanej i wykorzystując związki /3.4/ oraz /3.11/ przy założeniu, że wielkości amplitud, funkcja kształtu sił, procesy $dN(t_k)$ i $dZ_{t_k}(T)$ są wzajemnie niezależne otrzymuje się wartość oczekiwaną funkcji obciążenia w następującej postaci

$$E[f(t)] = \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-\tau}^b E[A(\tau)] E[S(t, \tau, \eta)] \lambda(\tau) g_1(\eta) d\tau d\eta + \int_{t-a}^t \int_a^b E[A(\tau)] E[S(t, \tau, \eta)] \lambda(\tau) g_1(\eta) d\tau d\eta \quad /4.42/$$

Przy pomocy zależności /4.4/ wyznacza się funkcję korelacyjną $K_{ff}(t_1, t_2)$. Podano tu pełną jej postać bez zastosowania uproszczeń, jakie miałyby miejsce przy pewnych założeniach, np. dotyczących stacjonarności procesu zgłoszeń sił czy zdeteminowania funkcji kształtu:

$$K_{ff}(t_1, t_2) = \int_{t_1-b}^{t_1-a} \int_{t_2-b}^{t_2-a} \int_{t_1-\tau_1}^b \int_{t_2-\tau_2}^b E[A(\tau_1) A(\tau_2)] E[S(t_1, \tau_1, \eta_1) S(t_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \tilde{\Psi}_1(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 + \int_{t_1-b}^{t_1-a} \int_{t_2-a}^{t_2} \int_{t_1-\tau_1}^b \int_a^b E[A(\tau_1) A(\tau_2)] E[S(t_1, \tau_1, \eta_1) S(t_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \tilde{\Psi}_1(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t_1-a}^{t_1} \int_{t_2-b}^{t_2-a} \int_a^b \int_{t_2-\tau_2}^b E[A(\tau_1) A(\tau_2)] E[S(t_1, \tau_1, \eta_1) S(t_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \\
 & \quad \cdot \tilde{\Psi}_1(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 + \\
 & + \int_{t_1-a}^{t_1} \int_{t_2-a}^{t_2} \int_a^b \int_a^b E[A(\tau_1) A(\tau_2)] E[S(t_1, \tau_1, \eta_1) S(t_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \\
 & \quad \cdot \tilde{\Psi}_1(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 - \\
 & - \int_{t_1-b}^{t_1-a} \int_{t_2-b}^{t_2-a} \int_{t_1-\tau_1}^b \int_{t_2-\tau_2}^b E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] E[S(t_1, \tau_1, \eta_1)] E[S(t_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \\
 & \quad \cdot \tilde{\Psi}_2(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 - \\
 & - \int_{t_1-b}^{t_1-a} \int_{t_2-a}^{t_2} \int_{t_1-\tau_1}^b \int_a^b E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] E[S(t_1, \tau_1, \eta_1)] E[S(t_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \\
 & \quad \cdot \tilde{\Psi}_2(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 - \\
 & - \int_{t_1-a}^{t_1} \int_{t_2-b}^{t_2-a} \int_a^b \int_{t_2-\tau_2}^b E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] E[S(t_1, \tau_1, \eta_1)] E[S(t_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \\
 & \quad \cdot \tilde{\Psi}_2(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 - /4.43/ \\
 & - \int_{t_1-a}^{t_1} \int_{t_2-a}^{t_2} \int_a^b \int_a^b E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] E[S(t_1, \tau_1, \eta_1)] E[S(t_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \\
 & \quad \cdot \tilde{\Psi}_2(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 + \\
 & + \delta_1 \left\{ \int_{t_2-b}^{t_2-a} \int_{t_2-\tau}^b E[A^2(\tau)] E[S(t_1, \tau, \eta) S(t_2, \tau, \eta)] \varepsilon_1(\eta) \lambda(\tau) d\tau d\eta + \right. \\
 & + \left. \int_{t_2-a}^{t_1} \int_a^b E[A^2(\tau)] E[S(t_1, \tau, \eta) S(t_2, \tau, \eta)] \varepsilon_1(\eta) \lambda(\tau) d\tau d\eta \right\} + \\
 & + \delta_2 \int_{t_2-b}^{t_1} \int_{t_2-\tau}^b E[A^2(\tau)] E[S(t_1, \tau, \eta) S(t_2, \tau, \eta)] \varepsilon_1(\eta) \lambda(\tau) d\tau d\eta ,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\tilde{\psi}_1(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) = \varepsilon_2(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) ,$$

$$\tilde{\psi}_2(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) = \varepsilon_1(\eta_1) \varepsilon_1(\eta_2) \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) ,$$

$$\delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{dla} & 0 \leq |t_2 - t_1| \leq a \\ 0 & \text{dla} & |t_2 - t_1| > a \end{cases} ,$$

$$\delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{dla} & 0 \leq |t_2 - t_1| \leq a \\ 1 & \text{dla} & a \leq |t_2 - t_1| \leq b \end{cases} .$$

Wprowadzono następujące oznaczenie

$$K_{ff}(t_1, t_2) = \tilde{K}_{ff}(t_1, t_2) + \tilde{\tilde{K}}_{ff}(t_1, t_2) , \quad /4.44/$$

w którym $\tilde{K}_{ff}(t_1, t_2)$ jest sumą całek poczwórnych we wzorze /4.43/ i wyraża wpływ korelacji wzajemnej między siłami na wartość funkcji korelacyjnej, $\tilde{\tilde{K}}_{ff}(t_1, t_2)$ natomiast jest sumą całek podwójnych w tej zależności i opisuje wpływ każdej siły oddzielnie.

Jeśli funkcja kształtu $S(t, t_k, T)$ jest deterministyczna, a wielkości amplitud A_k nie są wzajemnie skorelowane dla różnych chwil pojawienia się obciążenia, to funkcję $\tilde{K}_{ff}(t_1, t_2)$ można zapisać w prostszej postaci

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ff}(t_1, t_2) = & \int_{t_1-b}^{t_1-a} \int_{t_2-b}^{t_2-a} \int_{t_1-\tau_1}^b \int_{t_2-\tau_2}^b E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] S(t_1, \tau_1, \eta_1) S(t_2, \tau_2, \eta_2) \\ & \cdot \tilde{\psi}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 + \\ & + \int_{t_1-b}^{t_1-a} \int_{t_2-a}^{t_2} \int_{t_1-\tau_1}^b \int_a^b E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] S(t_1, \tau_1, \eta_1) S(t_2, \tau_2, \eta_2) \\ & \cdot \tilde{\psi}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 + \\ & + \int_{t_1-a}^{t_1} \int_{t_2-b}^{t_2-a} \int_a^b \int_{t_2-\tau_2}^b E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] S(t_1, \tau_1, \eta_1) S(t_2, \tau_2, \eta_2) \\ & \cdot \tilde{\psi}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 + \end{aligned} \quad /4.45/$$

$$+ \int_{t_1=-a}^{t_1} \int_{t_2=-a}^{t_2} \int_a^b \int_a^b E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] S(t_1, \tau_1, \eta_1) S(t_2, \tau_2, \eta_2) \cdot \\ \cdot \tilde{\Psi}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 ,$$

gdzie

$$\tilde{\Psi}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) = \tilde{\Psi}_1(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) - \tilde{\Psi}_2(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) = \\ = \varepsilon_2(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) - \varepsilon_1(\eta_1) \varepsilon_1(\eta_2) \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) .$$

Jeśli proces zgłoszeń sił $dN(t_k)$ jest stacjonarny i nieskorelowany oraz T jest niezależną zmienną losową, to $\tilde{K}_{ff}(t_1, t_2) = 0$ i $K_{ff}(t_1, t_2) = \tilde{K}_{ff}(t_1, t_2)$.

Wyprowadzono wzór określający postać funkcji korelacyjnej w tym przypadku przy następujących założeniach. Amplitudy A_k nie zależą od chwil pojawiania się sił i ich charakterystyki probabilistyczne są znane: $E[A_k] = E[A] = \text{const.}$ oraz $E[A_k^2] = E[A^2] = \text{const.}$ Układ obciążony jest serią sił prostokątnych, a więc kształt siły nie zależy od czasu jej działania i opisany jest wzorem /4.16/. Rozkład czasów trwania sił w przedziale $\langle a, b \rangle$ jest równomierny

$$\varepsilon_1(T) = \begin{cases} 0 & \text{dla } T < a , \\ \frac{1}{b-a} & \text{dla } a \leq T \leq b , \\ 0 & \text{dla } T > b . \end{cases} \quad /4.46/$$

Opierając się na zależności /4.43/ otrzymano

$$\tilde{K}_{ff}(t_1, t_2) = \begin{cases} E[A^2] \lambda \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{2}(b+a) - |t| \right] & \text{dla } 0 \leq |t| \leq a , \\ E[A^2] \lambda \frac{1}{r^2} \frac{1}{b-a} \frac{1}{2} (|t| - b)^2 & \text{dla } a \leq |t| \leq b , \\ 0 & \text{dla } |t| > b , \end{cases} \quad /4.47/$$

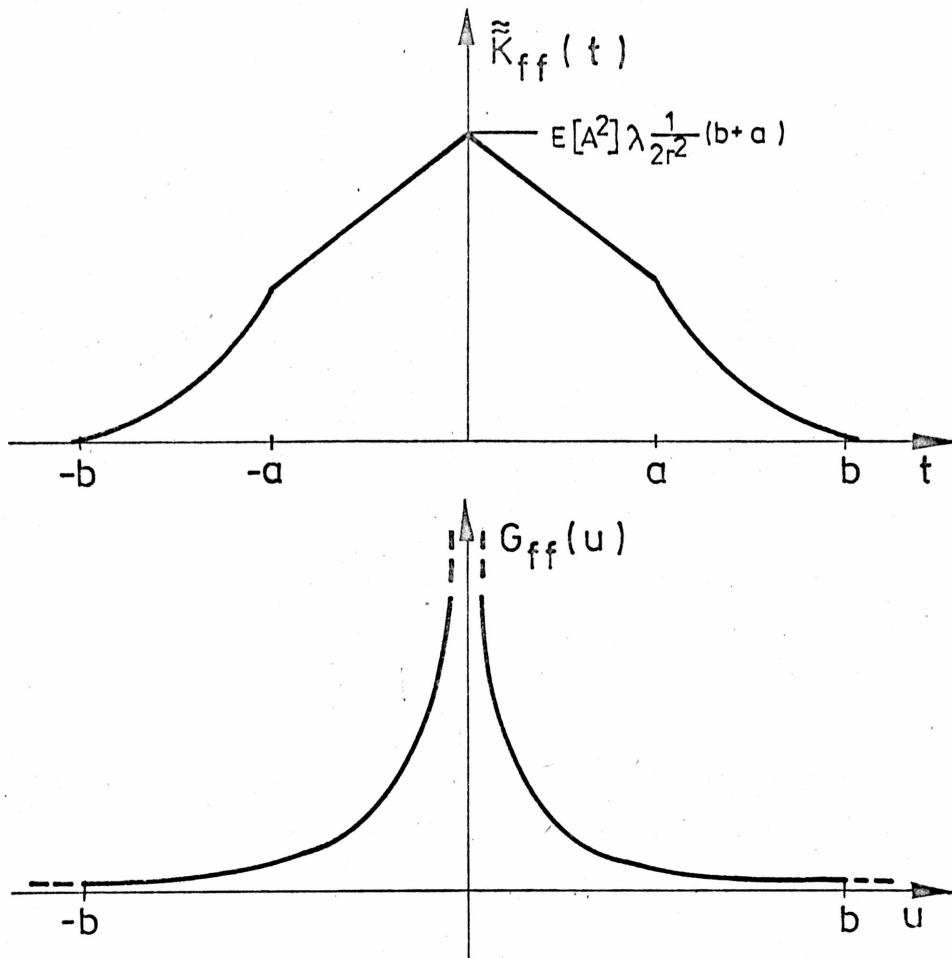
$t = t_2 - t_1 .$

Kształt funkcji $\tilde{K}_{ff}(t_1, t_2)$ przedstawia rys. 7. Jest to funkcja symetryczna i ciągła w przedziale $(-b, b)$, przy czym na odcinku $(-a, 0)$ i $(0, a)$ opisana jest prostą, a na odcinku $(-b, -a)$ i (a, b) - parabolą o maximum w punkcie $\pm b$.

Wykorzystując relację /4.15/ wyznaczono gęstość widmową mocy w następującej postaci

$$G_{ff}(u) = \frac{2E[A^2]\lambda}{\pi r^2} \left[\frac{1}{(b-a)u^3} (\sin ua - \sin ub) + \frac{1}{u^2} \right] . \quad /4.48/$$

Rys. 7 przedstawia także kształt widma mocy opisanego powyższym wzorem. Funkcja gęstości $G_{ff}(u)$ dla $u \rightarrow 0$ z obu stron zbliża się asymptotycznie do nieskończoności.



Rys. 7.

Dla często występującego przypadku zmiany czasu trwania siły w przedziale $0 \leq T \leq b$ funkcja obciążenia, jej wartość oczekiwana oraz funkcja korelacyjna przyjmują postać

$$f(t) = \int_{t-b}^t \int_{t-\tau}^b A(\tau) S(t, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) \quad , \quad /4.49/$$

$$E[f(t)] = \int_{t-b}^t E[A(\tau)] E[S(t, \tau, \eta)] \lambda(\tau) \tilde{F}(t-\tau) d\tau \quad , \quad /4.50/$$

gdzie

$$\tilde{F}(t-\tau) = 1 - F(t-\tau) = \int_{t-\tau}^b g_1(\eta) d\eta = 1 - \int_a^{t-\tau} g_1(\eta) d\eta$$

$$\begin{aligned} K_{ff}(t_1, t_2) = & \int_{t_1-b}^{t_1} \int_{t_2-b}^{t_2} \int_{t_1-\tau_1}^b \int_{t_2-\tau_2}^b E[A(\tau_1) A(\tau_2)] E[S(t_1, \tau_1, \eta_1) S(t_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \\ & \cdot g_2(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2) \phi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 - \\ & - \int_{t_1-b}^{t_1} \int_{t_2-b}^{t_2} \int_{t_1-\tau_1}^b \int_{t_2-\tau_2}^b E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] E[S(t_1, \tau_1, \eta_1)] E[S(t_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \\ & \cdot g_1(\eta_1) g_1(\eta_2) \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 + \\ & + \delta_3 \int_{t_2-b}^{t_1} \int_{t_2-\tau}^b E[A^2(\tau)] E[S(t_1, \tau, \eta) S(t_2, \tau, \eta)] g_1(\eta) \lambda(\tau) d\tau d\eta \quad , \end{aligned}$$

/4.51/

gdzie

$$\delta_3 = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad |t_2 - t_1| > b \quad , \\ 1 & \text{dla} \quad 0 \leq |t_2 - t_1| \leq b \quad . \end{cases}$$

Jeśli prawdziwe są wymienione wcześniej założenia charakteryzujące wielkości amplitud, proces zgłoszeń sił i czasy ich trwania, funkcję kształtu obciążenia oraz rozkład czasów działania sił, to $K_{ff}(t_1, t_2) = \tilde{K}_{ff}(t_1, t_2)$. Tę symetryczną i ciągłą funkcję opisuje na odcinkach $(-b, 0)$ i $(0, b)$ parabola posiadająca maximum w punkcie $\pm b$.

5. UKŁAD OBCIĄŻONY SERIĄ SIŁ O DETERMINISTYCZNYM CZASIE DZIAŁANIA

5.1. Drgania układu dyskretnego - rozwiązanie ogólne

Niech drgania układu, obciążonego w sposób omówiony w rozdziale 3, opisuje równanie macierzowe /3.1/. Wszystkie wielkości występujące w tym równaniu zostały scharakteryzowane w punktach trzecim i czwartym pracy. Założono, że czasy działania sił są deterministyczne i jednakowe, tzn. $T_k = T = \text{const.}$ W ogólnym przypadku wektor $\bar{F}$ opisujący przestrzenny rozkład obciążenia może mieć charakter losowy, przy czym przyjmuje się wówczas, że znane są wielkości: wektor $E[\bar{F}]$ i macierz $E[\bar{F}\bar{F}^T]$, a więc $K_{FF} = E[\bar{F}\bar{F}^T] - E[\bar{F}]E[\bar{F}^T]$. Funkcja $S(t, t_k, T_k)$ opisująca przebieg siły w czasie jest w tym przypadku zależna wyłącznie od chwili obserwacji i chwili pojawienia się obciążenia, w rozwiązaniach zawartych w niniejszym rozdziale można więc posługiwać się oznaczeniem $S(t, t_k)$.

W dowolnej chwili obserwacji $t > T$ stan przemieszczeń układu jest superpozycją drgań wymuszonych wywołanych siłami, które w chwili obserwacji obciążają konstrukcję oraz drgań swobodnych zainicjowanych przez siły, które w chwili t już nań nie działają. W pierwszym przypadku chwile zgłoszenia się sił - t_k należą do przedziału $(t-T, t)$, a w drugim - do przedziału $(0, t-T)$. Zarówno wektor współrzędnych głównych $\bar{y}(t)$, jak i współrzędnych uogólnionych $\bar{q}(t)$ jest superpozycją odpowiedzi układu na działanie każdej siły oddzielnie, przy czym jeśli $t_k \in (t-T, t)$, to k -ta siła obciąża konstrukcję, natomiast gdy $t_k \in (0, t-T)$, to k -ta siła już nie działa na układ, wykonujący drgania swobodne. Wektor współrzędnych głównych $\bar{y}(t)$ będący rozwiązaniem układu równań /3.14/ ma więc postać

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t) = \\ &= \sum_{k \in N(t-T, t)} A_k \int_{t_k}^t \{ m_n^{-1} h_n(t-\xi) \} \bar{q} S(\xi, \tau) d\xi + \\ &+ \sum_{k \in N(0, t-T)} A_k \int_{t_k}^{t_k+T} \{ m_n^{-1} h_n(t-\xi) \} \bar{q} S(\xi, \tau) d\xi, \end{aligned} \quad /5.1/$$

gdzie symbolem $h_n(t-\xi)$ oznaczono impulsową funkcję przejścia daną wzorem /3.19/. Używając całki Stieltjesa i odpowiedniej funkcji skoku wprowadzonej w rozdziale 3 zależność /5.1/ można przedstawić następująco

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t) = \\ &= \int_{t-T}^t \int_{\tau}^t \{ m_n^{-1} h_n(t-\xi) \} \bar{Q} A(\tau) S(\xi, \tau) dN(\tau) d\xi + \\ &+ \int_0^{t-T} \int_{\tau}^{\tau+T} \{ m_n^{-1} h_n(t-\xi) \} \bar{Q} A(\tau) S(\xi, \tau) dN(\tau) d\xi . \end{aligned} \quad /5.2/$$

Wektor współrzędnych uogólnionych $\bar{q}(t)$ otrzymuje się wykorzystując transformację własną $\bar{q}(t) = W \bar{y}(t)$ oraz macierz charakterystyk impulsowych $H(t-\xi)$ /zob. 3.2/

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) &= \bar{q}_1(t) + \bar{q}_2(t) = \\ &= \int_{t-T}^t \int_{\tau}^t H(t-\xi) \bar{F} A(\tau) S(\xi, \tau) dN(\tau) d\xi + \\ &+ \int_0^{t-T} \int_{\tau}^{\tau+T} H(t-\xi) \bar{F} A(\tau) S(\xi, \tau) dN(\tau) d\xi . \end{aligned} \quad /5.3/$$

Pierwsze całki podwójne we wzorach /5.2/ i /5.3/, odpowiadające wektorom $\bar{y}_1(t)$ i $\bar{q}_1(t)$ przedstawiają drgania wymuszone wywołane siłami, które w chwili t obciążają konstrukcję, natomiast pozostałe wyrażenia $\bar{y}_2(t)$ i $\bar{q}_2(t)$ opisują drgania swobodne zainicjowane siłami, które już zakończyły swe oddziaływanie na układ. Dzięki wprowadzonym w rozdziale trzecim wektorom $\bar{Y}_1(t, t_k)$, $\bar{Y}_2(t, t_k, T)$, $\bar{R}_1(t, t_k)$ i $\bar{R}_2(t, t_k, T)$ określonym związkami /3.18/ i /3.20/ można wzory /5.2/ i /5.3/ przedstawić w prostszej postaci

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t) = \\ &= \int_{t-T}^t A(\tau) \bar{Y}_1(t, \tau) dN(\tau) + \int_0^{t-T} A(\tau) \bar{Y}_2(t, \tau, T) dN(\tau) \end{aligned} \quad /5.4/$$

$$\begin{aligned}\bar{q}(t) &= \bar{q}_1(t) + \bar{q}_2(t) = \\ &= \int_{t-T}^t \Lambda(\tau) \bar{R}_1(t, \tau) dN(\tau) + \int_0^{t-T} \Lambda(\tau) \bar{R}_2(t, \tau, T) dN(\tau).\end{aligned}\quad /5.5/$$

Związki /5.2/ i /5.3/ posłużą do wyznaczenia charakterystyk probabilistycznych, jak wartość oczekiwana oraz funkcja korelacji między współrzędnymi o różnych indeksach. W rozdziale 4 podano wyrażenia na funkcje korelacyjne obciążenia $f(t)$ dla różnych chwil obserwacji $t_1 \neq t_2$ oraz sposób ich otrzymywania. Postępując analogicznie można wyznaczyć macierze $K_{yy}(t_1, t_2)$ oraz $K_{qq}(t_1, t_2)$, co na drodze żmudnych obliczeń prowadzi do uzyskania wzorów ogólnych o bardzo rozbudowanej postaci.

Dokonując na wymienionych wzorach operacji wartości oczekiwanej przy wykorzystaniu zależności /3.4/₁ otrzymuje się wektory wartości oczekiwanej współrzędnych głównych i uogólnionych

$$\begin{aligned}E[\bar{y}(t)] &= E[\bar{y}_1(t)] + E[\bar{y}_2(t)] = \\ &= \int_{t-T}^t \int_{\tau}^t \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} E[\bar{Q}] E[A(\tau)] E[S(\xi, \tau)] \lambda(\tau) d\tau d\xi + \\ &+ \int_0^{t-T} \int_{\tau}^{\tau+T} \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} E[\bar{Q}] E[A(\tau)] E[S(\xi, \tau)] \lambda(\tau) d\tau d\xi\end{aligned}\quad /5.6/$$

oraz

$$\begin{aligned}E[\bar{q}(t)] &= E[\bar{q}_1(t)] + E[\bar{q}_2(t)] = W E[\bar{y}(t)] = \\ &= \int_{t-T}^t \int_{\tau}^t H(t-\xi) E[\bar{F}] E[A(\tau)] E[S(\xi, \tau)] \lambda(\tau) d\tau d\xi + \\ &+ \int_0^{t-T} \int_{\tau}^{\tau+T} H(t-\xi) E[\bar{F}] E[A(\tau)] E[S(\xi, \tau)] \lambda(\tau) d\tau d\xi.\end{aligned}\quad /5.7/$$

Macierz korelacyjną współrzędnych głównych przy uwzględnieniu związków /3.4/₂, /3.5/ i /3.6/ /lub /3.7/ / wyznaczono w następujący sposób

$$\begin{aligned}
 K_{yy}(t, t) &= E[\bar{y}(t)\bar{y}^T(t)] - E[\bar{y}(t)]E[\bar{y}^T(t)] = \\
 &= \int_{t-T}^t \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t \{m_i^{-1}h_i(t-\xi_1)\} E[\bar{Q}\bar{Q}^T] \{m_j^{-1}h_j(t-\xi_2)\} E[A^2(\tau)] \cdot \\
 &\quad \cdot E[S(\xi_1, \tau)S(\xi_2, \tau)] \lambda(\tau) d\tau d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &+ \int_0^{t-T} \int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\tau}^{\tau+T} \{m_i^{-1}h_i(t-\xi_1)\} E[\bar{Q}\bar{Q}^T] \{m_j^{-1}h_j(t-\xi_2)\} E[A^2(\tau)] \cdot \\
 &\quad \cdot E[S(\xi_1, \tau)S(\xi_2, \tau)] \lambda(\tau) d\tau d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &+ \int_{t-T}^t \int_{t-T}^t \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^t \{m_i^{-1}h_i(t-\xi_1)\} M_{yy} \{m_j^{-1}h_j(t-\xi_2)\} d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + /5.8/ \\
 &+ \int_0^{t-T} \int_0^{t-T} \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \{m_i^{-1}h_i(t-\xi_1)\} M_{yy} \{m_j^{-1}h_j(t-\xi_2)\} d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &+ \int_{t-T}^t \int_0^{t-T} \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \{m_i^{-1}h_i(t-\xi_1)\} M_{yy} \{m_j^{-1}h_j(t-\xi_2)\} d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &+ \int_0^{t-T} \int_{t-T}^t \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^t \{m_i^{-1}h_i(t-\xi_1)\} M_{yy} \{m_j^{-1}h_j(t-\xi_2)\} d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2, \\
 &\hspace{20em} /5.8/
 \end{aligned}$$

gdzie macierz M_{yy} określona jest związkiem

$$\begin{aligned}
 M_{yy}(\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2) &= E[\bar{Q}\bar{Q}^T] E[A(\tau_1)A(\tau_2)] E[S(\xi_1, \tau_1)S(\xi_2, \tau_2)] \varphi(\tau_1, \tau_2) - \\
 &- E[\bar{Q}] E[\bar{Q}^T] E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] E[S(\xi_1, \tau_1)] E[S(\xi_2, \tau_2)] \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) \\
 &\hspace{20em} /5.8/
 \end{aligned}$$

Natomiast macierz korelacyjna współrzędnych uogólnionych przy wykorzystaniu związku $\bar{Q} = W^T \bar{F}$ oraz wymienionych zależności dotyczących charakterystyk probabilistycznych procesu $dN(t_k)$ opisana jest wzorem

$$K_{qq}(t, t) = W \cdot K_{yy}(t, t) \cdot W^T =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t-T}^t \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t H(t-\xi_1) E[\bar{F}\bar{F}^T] H^T(t-\xi_2) E[A^2(\tau)] E[S(\xi_1, \tau) S(\xi_2, \tau)] \lambda(\tau) d\tau d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &+ \int_0^{t-T} \int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\tau}^{\tau+T} H(t-\xi_1) E[\bar{F}\bar{F}^T] H^T(t-\xi_2) E[A^2(\tau)] E[S(\xi_1, \tau) S(\xi_2, \tau)] \cdot \\
 &\quad \cdot \lambda(\tau) d\tau d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &+ \int_{t-T}^t \int_{t-T}^t \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^t H(t-\xi_1) M_{qq} H^T(t-\xi_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &+ \int_0^{t-T} \int_0^{t-T} \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} H(t-\xi_1) M_{qq} H^T(t-\xi_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad + /5.9/ \\
 &+ \int_{t-T}^t \int_0^{t-T} \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} H(t-\xi_1) M_{qq} H^T(t-\xi_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &+ \int_0^{t-T} \int_{t-T}^t \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^t H(t-\xi_1) M_{qq} H^T(t-\xi_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 ,
 \end{aligned}$$

gdzie analogicznie do wzoru /5.8/ wprowadzono postać macierzy

$$\begin{aligned}
 M_{qq}(\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2) &= E[\bar{F}\bar{F}^T] E[A(\tau_1) A(\tau_2)] E[S(\xi_1, \tau_1) S(\xi_2, \tau_2)] Q(\tau_1, \tau_2) - \\
 &- E[\bar{F}] E[\bar{F}^T] E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] E[S(\xi_1, \tau_1)] E[S(\xi_2, \tau_2)] \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2). \quad /5.9/
 \end{aligned}$$

Nie podano tu wzorów określających wartości oczekiwane i macierze korelacji współrzędnych głównych i uogólnionych przy użyciu wektorów $\bar{Y}_1(t, t_k)$, $\bar{Y}_2(t, t_k, T)$, $\bar{R}_1(t, t_k)$ i $\bar{R}_2(t, t_k, T)$, ponieważ zastosowanie ich w rozwiązaniu ogólnym nie prowadzi do zasadniczego uproszczenia wyników. Związki opisujące charakterystyki probabilistycznie wielkości $\bar{y}(t)$ i $\bar{q}(t)$ zawierające wymienione wektory wpływu zostaną wprowadzone przy rozpatrywaniu przypadków szczególnych w punkcie 5.3 [19].

5.2. Drgania układu ciągłego - rozwiązanie ogólne

Niech drgania układu ciągłego opisuje równanie /3.21/ szczegółowo scharakteryzowane w punkcie 3.3, przy którego rozwiązywaniu posłużono się metodą rozwinięcia w szereg funkcji własnych /3.22/. Znajomość charakterystyk probabilistycznych współrzędnych głównych podanych w poprzednim podrozdziale pozwala wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję funkcji przemieszczeń układu ciągłego $w(\tilde{x}, t)$. Wykorzystuje się tu następujące związki

$$\begin{aligned} E[w(\tilde{x}, t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} E[y_n(t)] W_n(\tilde{x}) = E[\bar{y}(t)^T] \bar{W}(\tilde{x}) \\ G^2_w(\tilde{x}, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{y_i y_j}(t, t) W_i(\tilde{x}) W_j(\tilde{x}) = \bar{W}^T(\tilde{x}) K_{yy}(t, t) \bar{W}(\tilde{x}), \end{aligned} \quad /5.10/$$

gdzie:

$$\begin{aligned} E[\bar{y}(t)^T] &= [E[y_1(t)], E[y_2(t)], \dots, E[y_n(t)]]^T, \\ \bar{W}^T(\tilde{x}) &= [W_1(\tilde{x}), W_2(\tilde{x}), \dots, W_n(\tilde{x})]^T, \\ K_{yy}(t, t) &= [k_{y_i y_j}(t, t)], \\ E[\bar{Q}^T] &= [E[Q_1], E[Q_2], \dots, E[Q_n]]^T, \\ E[Q_n] &= m_n^{-1} \int_B E[p(\tilde{x})] W_n(\tilde{x}) d\tilde{x}, \\ E[\bar{Q} \bar{Q}^T] &= [E[Q_i Q_j]], \\ E[Q_i Q_j] &= m_i^{-1} m_j^{-1} \int_B \int_B k_{pp}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) W_i(\tilde{x}_1) W_j(\tilde{x}_2) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2. \end{aligned}$$

Symbolem m_n oznaczono /jak w punkcie 3.3/ wielkość:

$$m_n = \int_B m(\tilde{x}) W_n^2(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad \text{gdzie } B \text{ jest dziedziną zmiennej } \tilde{x}.$$

5.3. Wybrane przypadki szczególne

5.3.1. Założenia podstawowe

Wyrażenia opisujące wartość oczekiwaną i funkcję korelacyjną przemieszczeń konstrukcji podane w punktach 5.1 i 5.2 mają bardzo rozbudowaną postać. Wprowadzenie założeń wymienionych w niniejszym punkcie pozwala znacznie je uprościć. I tak, gdy amplitudy sił A_k są niezależnymi zmiennymi losowymi, a więc $E[A(\tau_1) A(\tau_2)] = E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)]$, to macierz $M_{yy}(\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2)$ określona jest związkiem: $M_{yy}(\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2) = E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \{ E[\bar{Q}\bar{Q}^T] E[S(\xi_1, \tau_1) S(\xi_2, \tau_2)] \varphi(\tau_1, \tau_2) - E[\bar{Q}] E[\bar{Q}^T] E[S(\xi_1, \tau_1)] E[S(\xi_2, \tau_2)] \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) \}$. A jeśli przy amplitudach A_k będących niezależnymi zmiennymi losowymi wektor $\bar{Q}$ opisujący rozkład obciążenia po geometrii układu ma charakter deterministyczny, tzn. $E[\bar{Q}] = \bar{Q}$ oraz $E[\bar{Q}\bar{Q}^T] = E[\bar{Q}] E[\bar{Q}^T] = \bar{Q}\bar{Q}^T$, to wówczas macierz M_{yy} zapisuje się następująco: $M_{yy}(\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2) = E[A(\tau_1)] \cdot E[A(\tau_2)] \bar{Q}\bar{Q}^T \{ E[S(\xi_1, \tau_1) S(\xi_2, \tau_2)] \varphi(\tau_1, \tau_2) - E[S(\xi_1, \tau_1)] E[S(\xi_2, \tau_2)] \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) \}$. Oczywiście, gdy wartość oczekiwana amplitud jest znana i stała oraz znany jest wektor $\bar{Q}$, wyrażenia: $E[A^2] \bar{Q}\bar{Q}^T$ i $E^2[A] \bar{Q}\bar{Q}^T$ pojawiają się przed odpowiednimi całkami we wzorze /5.8/.

W powyższych przypadkach analogicznie upraszcza się postać macierzy $M_{qq}(\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2)$ oraz związku /5.9/, a także wzorów /5.6/ i /5.7/.

5.3.2. Seria sił o deterministycznym przebiegu w czasie

Rozpatrywany jest następujący przypadek: ważne są wymienione w punkcie 5.3.1 założenia oraz funkcja $S(t, t_k)$ opisująca przebieg sił w czasie ma charakter deterministyczny. Śluszne są więc następujące związki

$$E[A(t_{k_1}) A(t_{k_2})] = E[A(t_{k_1})] E[A(t_{k_2})],$$

$$E[\bar{Q}] = \bar{Q}, \quad E[\bar{Q}\bar{Q}^T] = E[\bar{Q}] E[\bar{Q}^T] = \bar{Q}\bar{Q}^T,$$

$$E[S(t, t_k)] = S(t, t_k),$$

/5.11/

$$E[S(t_1, t_{k_1}) S(t_2, t_{k_2})] = E[S(t_1, t_{k_1})] E[S(t_2, t_{k_2})] = S(t_1, t_{k_1}) S(t_2, t_{k_2}).$$

Macierz $M_{yy}(\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2)$ ma teraz przy wykorzystaniu /3.6/ postać:
 $M_{yy}(\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2) = E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \bar{Q} \bar{Q}^T S(\xi_1, \tau_1) S(\xi_2, \tau_2) \tilde{\mathcal{Q}}(\tau_1, \tau_2)$.
 Wartość oczekiwaną oraz funkcję korelacyjną współrzędnych głównych opisują wzory

$$\begin{aligned}
 E[\bar{y}(t)] &= \int_{t-T}^t \int_{\tau}^t \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} \bar{Q} E[A(\tau)] S(\xi, \tau) \lambda(\tau) d\tau d\xi + \\
 &\quad + \int_0^{t-T} \int_{\tau}^{\tau+T} \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} \bar{Q} E[A(\tau)] S(\xi, \tau) \lambda(\tau) d\tau d\xi \quad /5.12/ \\
 K_{yy}(t, t) &= \int_{t-T}^t \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t \{m_i^{-1} h_i(t-\xi_1)\} \bar{Q} \bar{Q}^T \{m_j^{-1} h_j(t-\xi_2)\} E[A^2(\tau)] S(\xi_1, \tau) \cdot \\
 &\quad \cdot S(\xi_2, \tau) \lambda(\tau) d\tau d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &\quad + \int_0^{t-T} \int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\tau}^{\tau+T} \{m_i^{-1} h_i(t-\xi_1)\} \bar{Q} \bar{Q}^T \{m_j^{-1} h_j(t-\xi_2)\} E[A^2(\tau)] S(\xi_1, \tau) S(\xi_2, \tau) \cdot \\
 &\quad \cdot \lambda(\tau) d\tau d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &\quad + \int_{t-T}^t \int_{t-T}^t \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \{m_i^{-1} h_i(t-\xi_1)\} \bar{Q} \bar{Q}^T \{m_j^{-1} h_j(t-\xi_2)\} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] S(\xi_1, \tau_1) \cdot \\
 &\quad \cdot S(\xi_2, \tau_2) \tilde{\mathcal{Q}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &\quad + \int_0^{t-T} \int_0^{t-T} \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \{m_i^{-1} h_i(t-\xi_1)\} \bar{Q} \bar{Q}^T \{m_j^{-1} h_j(t-\xi_2)\} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] S(\xi_1, \tau_1) \cdot \\
 &\quad \cdot S(\xi_2, \tau_2) \tilde{\mathcal{Q}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &\quad + \int_{t-T}^t \int_0^{t-T} \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \{m_i^{-1} h_i(t-\xi_1)\} \bar{Q} \bar{Q}^T \{m_j^{-1} h_j(t-\xi_2)\} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] S(\xi_1, \tau_1) \cdot \\
 &\quad \cdot S(\xi_2, \tau_2) \tilde{\mathcal{Q}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &\quad + \int_0^{t-T} \int_{t-T}^t \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \{m_i^{-1} h_i(t-\xi_1)\} \bar{Q} \bar{Q}^T \{m_j^{-1} h_j(t-\xi_2)\} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] S(\xi_1, \tau_1) \cdot \\
 &\quad \cdot S(\xi_2, \tau_2) \tilde{\mathcal{Q}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad /5.13/
 \end{aligned}$$

Podobnie przy wykorzystaniu związku $\bar{Q} = W^T \bar{F}$ oraz macierzy

$$M_{qq}(\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2) = E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \bar{F} \bar{F}^T S(\xi_1, \tau_1) S(\xi_2, \tau_2) \tilde{\mathcal{Q}}(\tau_1, \tau_2)$$

można przedstawić wzory /5.7/ i /5.9/ dotyczące wartości oczekiwanej i macierzy korelacyjnej współrzędnych uogólnionych.

Użycie zdefiniowanych w rozdziale 3 wektorów $\bar{Y}_1(t, t_k, T_k)$ i $\bar{Y}_2(t, t_k, T_k)$ oraz $\bar{R}_1(t, t_k, T_k)$ i $\bar{R}_2(t, t_k, T_k)$ pozwala zapisać wzory /5.12/ i /5.13/ w postaci wygodnej dla obliczeń numerycznych. Należy jednak przedtem zmodyfikować wymienione wektory zgodnie z przyjętymi założeniami, a więc: $\bar{Y}_1(t, t_k, T_k) = \bar{Y}_1(t, t_k)$, $\bar{Y}_2(t, t_k, T_k) = \bar{Y}_2(t, t_k, T)$ oraz $\bar{R}_1(t, t_k, T_k) = \bar{R}_1(t, t_k)$ i $\bar{R}_2(t, t_k, T_k) = \bar{R}_2(t, t_k, T)$. Wartość oczekiwana i macierz korelacyjna kolejno: współrzędnych głównych i uogólnionych wyrażają się poprzez wektory wpływu następująco :

$$E[\bar{y}(t)] = \int_{t-T}^t E[A(\tau)] \bar{Y}_1(t, \tau) \lambda(\tau) d\tau + \int_0^{t-T} E[A(\tau)] \bar{Y}_2(t, \tau, T) \lambda(\tau) d\tau \quad /5.14/$$

$$K_{yy}(t, t) = \int_{t-T}^t E[A^2(\tau)] \bar{Y}_1(t, \tau) \bar{Y}_1^T(t, \tau) \lambda(\tau) d\tau + \int_0^{t-T} E[A^2(\tau)] \bar{Y}_2(t, \tau, T) \bar{Y}_2^T(t, \tau, T) \lambda(\tau) d\tau + \quad /5.15/$$

$$+ \int_{t-T}^t \int_{t-T}^t E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \bar{Y}_1(t, \tau_1) \bar{Y}_1^T(t, \tau_2) \tilde{\mathcal{Q}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \int_0^{t-T} \int_0^{t-T} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \bar{Y}_2(t, \tau_1, T) \bar{Y}_2^T(t, \tau_2, T) \tilde{\mathcal{Q}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \int_{t-T}^t \int_0^{t-T} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \bar{Y}_1(t, \tau_1) \bar{Y}_2^T(t, \tau_2, T) \tilde{\mathcal{Q}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ + \int_0^{t-T} \int_{t-T}^t E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \bar{Y}_2(t, \tau_1, T) \bar{Y}_1^T(t, \tau_2) \tilde{\mathcal{Q}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

oraz

$$E[\bar{q}(t)] = \int_{t-T}^t E[A(\tau)] \bar{R}_1(t, \tau) \lambda(\tau) d\tau + \int_0^{t-T} E[A(\tau)] \bar{R}_2(t, \tau, T) \lambda(\tau) d\tau \quad /5.16/$$

$$\begin{aligned}
 K_{qq}(t, t) = & \int_{t-T}^t E[A^2(\tau)] \bar{R}_1(t, \tau) \bar{R}_1^T(t, \tau) \lambda(\tau) d\tau + \\
 & + \int_0^{t-T} E[A^2(\tau)] \bar{R}_2(t, \tau, T) \bar{R}_2^T(t, \tau, T) \lambda(\tau) d\tau + \\
 & + \int_{t-T}^t \int_{t-T}^t E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \bar{R}_1(t, \tau_1) \bar{R}_1^T(t, \tau_2) \tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
 & + \int_0^{t-T} \int_0^{t-T} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \bar{R}_2(t, \tau_1, T) \bar{R}_2^T(t, \tau_2, T) \tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
 & + \int_{t-T}^t \int_0^{t-T} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \bar{R}_1(t, \tau_1) \bar{R}_2^T(t, \tau_2, T) \tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
 & + \int_0^{t-T} \int_{t-T}^t E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \bar{R}_2(t, \tau_1, T) \bar{R}_1^T(t, \tau_2) \tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned}$$

/5.17/

Jeśli proces pojawiania się obciążenia posiada własności strumienia Poissona, a więc $\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = 0$, $\varphi(t_1, t_2) = \lambda(t_1) \lambda(t_2)$, to wzór opisujący macierz korelacyjną redukuje się do dwóch całek potrójnych //5.13// lub pojedynczych //5.15/ i /5.17//. Pierwsza z tych całek odzwierciedla wpływ na korelację między różnymi współrzędnymi tych sił, które w chwili obserwacji obciążają układ, druga odpowiada siłom, które już nań nie działają.

Obecnie rozpatrzony zostanie przypadek, gdy dana jest konkretna postać deterministycznej funkcji kształtu sił obciążających konstrukcję, tzn. zgodnie z /4.1/ - funkcji $S(t-t_k)$. Założono, że amplitudy sił A_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o znanych i stałych charakterystykach probabilistycznych: $E[A(t_k)] = E[A] = \text{const.}$ i $E[A^2(t_k)] = E[A^2] = \text{const.}$, wektor rozkładu geometrycznego sił $\bar{Q}$ ma charakter deterministyczny /zob. 5.3.1/ oraz proces zgłoszeń obciążenia jest stacjonarnym strumieniem Poissona o intensywności $\lambda(t) = \lambda = \text{const.}$ W podpunktach 1, 2, 3 podane zostaną wzory określające wartość oczekiwaną i elementy macierzy korelacyjnej współrzędnych głównych, przy czym wymienione charakterystyki probabilistyczne wektora $\bar{y}_1(t)$ zależą

będą tylko od czasu trwania obciążenia T , natomiast wektora $\bar{y}_2(t)$ - także od chwili bieżącej t . Dodatkowo dla wektora $\bar{y}_2(t)$ przedstawiającego drgania swobodne układu wyznaczono rozwiązania asymptotyczne przy $t \rightarrow \infty$. W praktyce można posługiwać się tymi wyrażeniami, wówczas gdy chwila obserwacji zjawiska jest wystarczająco daleka od chwili, w której się ono rozpoczęło. Symbolami $y_{1n}(t)$, $y_{2n}(t)$ i $Y_{1n}(t-t_k)$, $Y_{2n}(t-t_k-T)$ oznaczono n -te składowe odpowiednich wektorów $\bar{y}_1(t)$, $\bar{y}_2(t)$, $\bar{Y}_1(t-t_k)$ i $\bar{Y}_2(t-t_k-T)$. Wykresy funkcji obciążenia $f(t)$ odpowiadających rozpatrywanym funkcjom kształtu $S(t-t_k)$ przedstawia rys. 1a,b,c w rozdziale 4.

P r z y p a d e k 1

Obciążenie serią sił stałych /rys. 1a/

Układ obciążony jest serią sił stałych w czasie /prostokątnych/, a więc funkcja $S(t-t_k)$ przyjmuje postać /4.16/. Ze wzorów /3.18/ otrzymano n -te składowe wektorów $\bar{Y}_1(t-t_k)$ i $\bar{Y}_2(t-t_k-T)$ w postaci

$$Y_{1n}(t-t_k) = \frac{Q_n}{r_{m_n} \omega_n^2} \left\{ 1 - \exp[-\alpha_n(t-t_k)] \left[\frac{\alpha_n}{\Omega_n} \sin \Omega_n(t-t_k) + \cos \Omega_n(t-t_k) \right] \right\} \quad /5.18/$$

dla $t \geq t_k$

$$Y_{2n}(t-t_k-T) = \frac{Q_n}{r_{m_n}} \exp[-\alpha_n(t-t_k-T)] \left[C_{1n} \sin \Omega_n(t-t_k-T) + C_{2n} \cos \Omega_n(t-t_k-T) \right] \quad /5.19/$$

dla $t \geq t_k + T$

gdzie

$$C_{1n} = \omega_n^{-2} \left[\frac{\alpha_n}{\Omega_n} + \exp(-\alpha_n T) \left(\sin \Omega_n T - \frac{\alpha_n}{\Omega_n} \cos \Omega_n T \right) \right]$$

$$C_{2n} = \omega_n^{-2} \left[1 - \exp(-\alpha_n T) \left(\frac{\alpha_n}{\Omega_n} \sin \Omega_n T + \cos \Omega_n T \right) \right] \quad /5.19/'$$

Wartości oczekiwane n -tych składowych wektorów $\bar{y}_1(t)$ i $\bar{y}_2(t)$ wynoszą odpowiednio

$$E[y_{1n}] = \frac{Q_n \lambda E[A]}{r_{m_n} \omega_n^2} \left\{ T - 2\alpha_n \omega_n^{-2} + \omega_n^{-2} \exp(-\alpha_n T) \left(\frac{\alpha_n^2 - \Omega_n^2}{\Omega_n} \sin \Omega_n T + 2\alpha_n \cos \Omega_n T \right) \right\} \quad /5.20/$$

$$E[y_{2n}(t)] = \frac{Q_n \lambda E[A]}{r m_n \omega_n^2} \left\{ (\Omega_n c_{1n} + \alpha_n c_{2n}) \left[1 - \exp[-\alpha_n(t-T)] \cos \Omega_n(t-T) \right] + \right. \\ \left. + (\Omega_n c_{2n} - \alpha_n c_{1n}) \exp[-\alpha_n(t-T)] \sin \Omega_n(t-T) \right\} \quad /5.21/$$

Rozwiązanie asymptotyczne dla $t \rightarrow \infty$ wartości oczekiwanej wektora $\bar{y}_2(t)$ przyjmuje postać

$$E[y_{2n}(\infty)] = \frac{Q_n \lambda E[A]}{r m_n \omega_n^4} \left[2\alpha_n + \exp(-\alpha_n T) \left(\frac{\Omega_n^2 - \alpha_n^2}{\Omega_n} \sin \Omega_n T - 2\alpha_n \cos \Omega_n T \right) \right] \quad /5.22/$$

Wyznaczone ze wzorów /5.13/ lub /5.15/ elementy macierzy korelacyjnej $K_{yy}(t, t) = K_{yy}^{(1)}(t, t) + K_{yy}^{(2)}(t, t)$ wyrażają się następująco

$$k_{y_i y_j}^{(1)}(t, t) = k_{y_i y_j}^{(1)} = \frac{Q_i Q_j \lambda E[A^2]}{r^2 m_i m_j \omega_i^2 \omega_j^2} \left[T - \frac{\alpha_i}{\Omega_i} J_1(\alpha_i, \Omega_i) - \frac{\alpha_j}{\Omega_j} J_1(\alpha_j, \Omega_j) - \right. \\ \left. - J_2(\alpha_i, \Omega_i) - J_2(\alpha_j, \Omega_j) + \frac{\alpha_i \alpha_j}{\Omega_i \Omega_j} J_4(\alpha_i + \alpha_j, \Omega_i, \Omega_j) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_i}{\Omega_i} J_3(\alpha_i + \alpha_j, \Omega_i, \Omega_j) + \frac{\alpha_j}{\Omega_j} J_3(\alpha_i + \alpha_j, \Omega_j, \Omega_i) + J_5(\alpha_i + \alpha_j, \Omega_i, \Omega_j) \right] \quad /5.23/$$

$$k_{y_i y_j}^{(2)}(t, t) = \frac{Q_i Q_j \lambda E[A^2]}{2r^2 m_i m_j} \left\{ \frac{c_{2i} c_{2j} - c_{1i} c_{1j}}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\Omega_i + \Omega_j)^2} \left\{ e^{-(\alpha_i + \alpha_j)(t-T)} \times \right. \right. \\ \times \left[(\Omega_i + \Omega_j) \sin(\Omega_i + \Omega_j)(t-T) - (\alpha_i + \alpha_j) \cos(\Omega_i + \Omega_j)(t-T) \right] + (\alpha_i + \alpha_j) \Big\} - \\ - \frac{c_{1i} c_{2j} + c_{1j} c_{2i}}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\Omega_i + \Omega_j)^2} \left\{ e^{-(\alpha_i + \alpha_j)(t-T)} \left[(\Omega_i + \Omega_j) \cos(\Omega_i + \Omega_j)(t-T) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\alpha_i + \alpha_j) \sin(\Omega_i + \Omega_j)(t-T) \right] - (\Omega_i + \Omega_j) \right\} + \frac{c_{1i} c_{1j} + c_{2i} c_{2j}}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\Omega_i - \Omega_j)^2} \times \\ \times \left\{ e^{-(\alpha_i + \alpha_j)(t-T)} \left[(\Omega_i - \Omega_j) \sin(\Omega_i - \Omega_j)(t-T) - (\alpha_i + \alpha_j) \cos(\Omega_i - \Omega_j)(t-T) \right] + \right. \\ \left. + (\alpha_i + \alpha_j) \right\} - \frac{c_{1i} c_{2j} - c_{1j} c_{2i}}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\Omega_i - \Omega_j)^2} \left\{ e^{-(\alpha_i + \alpha_j)(t-T)} (\Omega_i - \Omega_j) \cos(\Omega_i - \Omega_j)(t-T) + \right. \\ \left. + (\alpha_i + \alpha_j) \sin(\Omega_i - \Omega_j)(t-T) - (\Omega_i - \Omega_j) \right\} \Big\} . \quad /5.24/$$

Gdy $t \rightarrow \infty$ elementy macierzy $K_{yy}^{(2)}(t)$ przyjmują postać

$$k_{y_i y_j}^{(2)}(\infty) = \frac{Q_i Q_j \lambda E [A^2]}{2r_{m_i m_j}^2} \left\{ \frac{(\alpha_i + \alpha_j)(c_{2i} c_{2j} - c_{1i} c_{1j}) - (\Omega_i + \Omega_j)(c_{1i} c_{2j} + c_{1j} c_{2i})}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\Omega_i + \Omega_j)^2} + \frac{(\alpha_i + \alpha_j)(c_{1i} c_{1j} + c_{2i} c_{2j}) - (\Omega_i - \Omega_j)(c_{1i} c_{2j} - c_{1j} c_{2i})}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\Omega_i - \Omega_j)^2} \right\} \quad /5.25/$$

W podanych wzorach $\Omega_n^2 = \omega_n^2 - \alpha_n^2$, a symbolami $J_i(a, b)$ oznaczono całki, które określają wyrażenia zawarte w Dodatku.

Wartość przeciętną i wariancję n -tej współrzędnej głównej przy $t \rightarrow \infty$, tzn. wówczas, gdy drgania układu obserwowane są po odpowiednio długim czasie od chwili rozpoczęcia się zjawiska opisują podane niżej wzory. Ich prosta postać jest bardzo przydatna w analizie wpływu wybranych parametrów na wartość wymienionych charakterystyk, co m.in. wykorzystano w rozdziale 8.

$$E[y_n] = \frac{Q_n \lambda E[A]}{r_{m_n} \omega_n^2} T \quad /5.20-22/$$

oraz

$$\sigma_{y_n}^2 = \frac{Q_n^2 \lambda E[A^2]}{r_{m_n}^2 \omega_n^4} \left[T + \frac{\Omega_n^2 - 3\alpha_n^2}{2\alpha_n \Omega_n} J_1(\alpha_n, \Omega_n) - 2J_2(\alpha_n, \Omega_n) + \frac{\alpha_n}{\Omega_n} J_1(2\alpha_n, 2\Omega_n) + J_2(2\alpha_n, 2\Omega_n) \right] \quad /5.23-25/$$

Połączenie wyrażeń /5.23/ i /5.25/ łatwo otrzymać, gdy zauważy się zależności: $c_{1n} = \Omega_n^{-1} J_2(\alpha_n, \Omega_n)$, $c_{2n} = \Omega_n^{-1} J_1(\alpha_n, \Omega_n)$.

P r z y p a d e k 2

Obciążenie siłami harmonicznymi zmiennymi /rys. 1b/

Układ jest obciążony serią sił harmonicznymi zmiennymi, których kształt opisuje związek /4.20/. Ze wzoru /3.18/₁ otrzymuje się

$$Y_{1n}(t - t_k) = \frac{Q_n}{r_{m_n} M_n} \left\{ D_{1n} \sin p(t - t_k) + D_{2n} \cos p(t - t_k) + \exp[-\alpha_n(t - t_k)] [D_{3n} \sin \Omega_n(t - t_k) - D_{2n} \cos \Omega_n(t - t_k)] \right\} \quad /5.26/$$

dla $t \geq t_k$

gdzie:

$$D_{1n} = \omega_n^2 - p^2, \quad D_{2n} = -2\alpha_n p,$$

$$D_{3n} = \frac{p}{\Omega_n} [2\alpha_n^2 - (\omega_n^2 - p^2)] \quad , \quad /5.26/'$$

$$M_n = (\omega_n^2 - p^2)^2 + 4\alpha_n^2 p^2$$

Funkcje $Y_{2n}(t-t_k-T)$ określa wzór /5.19/, przy czym jako stałe C_{1n} i C_{2n} należy przyjąć

$$C_{1n} = M_n^{-1} \left\{ \Omega_n^{-1} [(\alpha_n D_{1n} - p D_{2n}) \sin pT + (p D_{1n} + \alpha_n D_{2n}) \cos pT] + \right. \\ \left. + \exp(-\alpha_n T) (D_{2n} \sin \Omega_n T + D_{3n} \cos \Omega_n T) \right\} \quad , \quad /5.26/'$$

$$C_{2n} = M_n^{-1} [D_{1n} \sin pT + D_{2n} \cos pT + \exp(-\alpha_n T) (D_{3n} \sin \Omega_n T - D_{2n} \cos \Omega_n T)] \quad .$$

Wartość przeciętna funkcji $y_{1n}(t)$ oraz elementy macierzy korelacyjnej $K_{yy}^{(1)}(t, t)$ wyrażają się następująco

$$E[y_{1n}] = \frac{Q_n \lambda E[A]}{r_{m_n} M_n} \left\{ p^{-1} D_{1n} (1 - \cos pT) + p^{-1} D_{2n} \sin pT + \right. \\ \left. + D_{3n} J_1(\alpha_n, \Omega_n) - D_{2n} J_2(\alpha_n, \Omega_n) \right\} \quad /5.27/$$

$$K_{y_i y_j}^{(1)}(t, t) = K_{y_i y_j}^{(1)} = \frac{Q_i Q_j \lambda E[A^2]}{r_{m_i}^2 m_j M_i M_j} \left\{ \frac{1}{2} D_{1i} D_{1j} [T - (2p)^{-1} \sin pT] + \right. \\ + \frac{1}{2} D_{2i} D_{2j} [T + (2p)^{-1} \sin 2pT] + (4p)^{-1} (D_{1i} D_{1j} + D_{2i} D_{2j}) (1 - \cos 2pT) + \\ + D_{1i} D_{3j} J_4(\alpha_j, p, \Omega_j) - D_{1i} D_{2j} J_3(\alpha_j, p, \Omega_j) + \\ + D_{2i} D_{3j} J_3(\alpha_j, \Omega_j, p) - D_{2i} D_{2j} J_5(\alpha_j, p, \Omega_j) + \\ + D_{3i} D_{1j} J_4(\alpha_i, \Omega_i, p) + D_{3i} D_{2j} J_3(\alpha_i, \Omega_i, p) + \\ + D_{3i} D_{3j} J_4(\alpha_i + \alpha_j, \Omega_i, \Omega_j) - D_{3i} D_{2j} J_3(\alpha_i + \alpha_j, \Omega_i, \Omega_j) - \\ - D_{2i} D_{1j} J_3(\alpha_i, p, \Omega_j) - D_{2i} D_{2j} J_5(\alpha_i, p, \Omega_i) - \\ \left. - D_{2i} D_{3j} J_3(\alpha_i + \alpha_j, \Omega_i, \Omega_j) + D_{2i} D_{2j} J_5(\alpha_i + \alpha_j, \Omega_i, \Omega_j) \right\} \quad /5.28/$$

Wzory /5.21/ i /5.24/ określają wartość oczekiwaną funkcji $y_{2n}(t)$ i elementy macierzy korelacyjnej $K_{yy}^{(2)}(t, t)$ przy odpowiednich dla tego przypadku obciążenia stałych C_{1n} i C_{2n} . Przy $t \rightarrow \infty$ stosuje się zależność

$$E[y_{2n}(\infty)] = \frac{Q_n \lambda E[A]}{r m_n \omega_n^2} (\Omega_n C_{1n} + \alpha_n C_{2n}), \quad /5.29/$$

a elementy $k_{y_i y_j}^{(2)}(\infty)$ opisuje /5.25/.

P r z y p a d e k 3

Obciążenie siłami wykładniczo malejącymi /rys. 1c/

Układ jest obciążony serią sił wykładniczo malejących, tzn. funkcja kształtu $S(t-t_k)$ przyjmuje postać /4.24/. Postępując podobnie jak w poprzednich przypadkach otrzymuje się

$$Y_{1n}(t-t_k) = \frac{Q_n}{r m_n \Gamma_n^2} \left\{ \exp[-\beta(t-t_k)] + \right. \\ \left. + \exp[-\alpha_n(t-t_k)] \left[\frac{\beta - \alpha_n}{\Omega_n} \sin \Omega_n(t-t_k) - \cos \Omega_n(t-t_k) \right] \right\} \quad /5.30/$$

dla $t \geq t_k$

gdzie:

$$\Gamma_n^2 = (\beta - \alpha_n)^2 + \Omega_n^2 \quad /5.30/'$$

Funkcje $Y_{2n}(t-t_k-T)$ i ich charakterystyki probabilistyczne opisują wzory /5.19/, /5.21/, /5.24/ oraz /5.25/ i /5.29/, przy czym stałe C_{1n} i C_{2n} przyjmują postać

$$C_{1n} = \Omega_n^{-1} \Gamma_n^{-2} \left\{ (\alpha_n - \beta) \exp(-\beta T) + \exp(-\alpha_n T) [\Omega_n \sin \Omega_n T - (\alpha_n - \beta) \cos \Omega_n T] \right\} \\ C_{2n} = \Gamma_n^{-2} \left\{ \exp(-\beta T) - \exp(-\alpha_n T) \left[\frac{\alpha_n - \beta}{\Omega_n} \sin \Omega_n T + \cos \Omega_n T \right] \right\}. \quad /5.30''/$$

Pozostałe wielkości określają związki

$$E[y_{1n}] = \frac{Q_n \lambda E[A]}{r m_n \Gamma_n^2} \left\{ \beta^{-1} [1 - \exp(-\beta T)] + \frac{\beta - \alpha_n}{\Omega_n} J_1(\alpha_n, \Omega_n) - J_2(\alpha_n, \Omega_n) \right\}. \quad /5.31/$$

$$\begin{aligned}
 k_{y_i y_j}^{(1)}(t, t) = k_{y_i y_j}^{(1)} = \frac{Q_i Q_j \lambda E [A^2]}{r_{m_i m_j}^2 \Gamma_i^2 \Gamma_j^2} & \left\{ (2\beta)^{-1} [1 - \exp(-2\beta T)] + \right. \\
 + \frac{\beta - \alpha_j}{\Omega_j} J_1(\beta + \alpha_j, \Omega_j) - J_2(\beta + \alpha_j, \Omega_j) & + \\
 + \frac{\beta - \alpha_i}{\Omega_i} J_1(\beta + \alpha_i, \Omega_i) - J_2(\beta + \alpha_i, \Omega_i) & + \\
 + \frac{(\beta - \alpha_i)(\beta - \alpha_j)}{\Omega_i \Omega_j} J_4(\alpha_i + \alpha_j, \Omega_i, \Omega_j) & - \\
 - \frac{(\beta - \alpha_i)\Omega_j + (\beta - \alpha_j)\Omega_i}{\Omega_i \Omega_j} J_3(\alpha_i + \alpha_j, \Omega_i, \Omega_j) & + \\
 \left. + J_5(\alpha_i + \alpha_j, \Omega_i, \Omega_j) \right\}
 \end{aligned}$$

/5.32/

Wariancję współrzędnych głównych w przypadku asymptotycznym ($t \rightarrow \infty$) opisuje wzór

$$\begin{aligned}
 \sigma_{y_n}^2 = \frac{Q_n^2 \lambda E [A^2]}{r_{m_n}^2 \Gamma_n^4} & \left\{ \frac{1}{2\beta} [1 - \exp(-2\beta T)] + \frac{\Gamma_n^2}{4\alpha_n \Omega_n^2} [1 - \exp(-2\alpha_n T) \cos 2\Omega_n T] + \right. \\
 + 2 \frac{\beta - \alpha_n}{\Omega_n} J_1(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - 2J_2(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \frac{\beta - \alpha_n}{\Omega_n} J_1(2\alpha_n, 2\Omega_n) & + \\
 + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\beta - \alpha_n}{\Omega_n} \right)^2 \right] J_2(2\alpha_n, 2\Omega_n) & + \\
 + \frac{1}{2} \Gamma_n^2 \frac{\alpha_n \beta + \omega_n^2}{\alpha_n \Omega_n \omega_n^2} \exp(-2\beta T) [J_1(\alpha_n - \beta, \Omega_n) - J_1(2\alpha_n - 2\beta, 2\Omega_n)] & - \\
 - \frac{1}{2} \Gamma_n^2 \frac{\beta}{\alpha_n \omega_n^2} \exp(-2\beta T) [J_2(\alpha_n - \beta, \Omega_n) - J_2(2\alpha_n - 2\beta, 2\Omega_n)] & \left. \right\}
 \end{aligned}$$

/5.32-25/

przy czym wykorzystano tu zależności: $C_{1n} = \Omega_n^{-1} \exp(-\beta T) J_2(\alpha_n - \beta, \Omega_n)$ i $C_{2n} = \Omega_n^{-1} \exp(-\beta T) J_1(\alpha_n - \beta, \Omega_n)$. Gdy $\beta = 0$, wyrażenie /5.32-25/ staje się tożsame ze związkami /5.23-25/ opisującym wariację przemieszczenia układu obciążonego serią sił prostokątnych. Dla przypadku 2 /obciążenie siłami harmonicznie zmiennymi/ nie udało się połączyć

w prosty sposób całek $J_1(a,b)$, $J_2(a,b)$ z wyrażeniami C_{1n} , C_{2n} , a tym samym zapisać wariancję przemieszczenia w wygodnej dla analizy postaci.

Jeśli chwila obserwacji zjawiska należy do przedziału $(0,T)$, to wektory współrzędnych głównych i uogólnionych przyjmują postać jednego składnika, a więc $\bar{y}(t) = \bar{y}_1(t)$ i $\bar{q}(t) = \bar{q}_1(t)$, przy czym dolną granicę pierwszej całki we wzorach /5.2/ i /5.3/ należy przyjąć równą zero.

W wymienionych przypadkach 1 ÷ 3 wartość oczekiwaną przemieszczeń otrzymuje się ze związków /5.20/, /5.27/ i /5.31/ podstawiając t zamiast T , co wynika ze zmiany granic całkowania ($t-T \rightarrow 0$) we wzorze /5.6/ i /5.12/. Analogicznie upraszcza się postać wyrazu ogólnego macierzy korelacyjnej opisana związkami /5.8/ i /5.13/.

Analizę numeryczną wyrażeń podanych dla przypadków 1, 2, 3 i ocenę jej wyników zawiera rozdział 8.

5.3.3. Seria sił o losowym przebiegu w czasie

Punkt ten poświęcony jest przypadkowi, gdy na układ działa seria sił - procesów stochastycznych o deterministycznym czasie działania /rys. 1d/ i znane są następujące charakterystyki probabilistyczne losowej funkcji kształtu

$$\begin{aligned} E[S(t, t_k)] &= 0 \\ E[S(t_1, t_{k_1}) S(t_2, t_{k_2})] &= K_{SS}(t_1, t_2, t_{k_1}, t_{k_2}) \end{aligned} \quad /5.33/$$

Jeśli amplitudy A_k są losowymi zmiennymi niezależnymi, a wektor rozkładu geometrycznego sił obciążających - $\bar{Q}$ ma charakter deterministyczny, tzn. zachodzi /5.11/₁ i /5.11/₂, wartość oczekiwaną i macierz korelacyjną współrzędnych kolejno: głównych i uogólnionych opisują wzory

$$E[\bar{y}(t)] = 0, \quad E[\bar{q}(t)] = 0 \quad /5.34/$$

$$\begin{aligned}
 K_{yy}(t, t) = & \int_{t-T}^t \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t \left\{ m_i^{-1} h_i(t-\xi_1) \right\} \bar{Q} \bar{Q}^T \left\{ m_j^{-1} h_j(t-\xi_2) \right\} E[A^2(\tau)] \cdot \\
 & \cdot K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau, \tau) \lambda(\tau) d\tau d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_0^{t-T} \int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\tau}^{\tau+T} \left\{ m_i^{-1} h_i(t-\xi_1) \right\} \bar{Q} \bar{Q}^T \left\{ m_j^{-1} h_j(t-\xi_2) \right\} E[A^2(\tau)] K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau, \tau) \cdot \\
 & \cdot \lambda(\tau) d\tau d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_{t-T}^t \int_{t-T}^t \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \left\{ m_i^{-1} h_i(t-\xi_1) \right\} \bar{Q} \bar{Q}^T \left\{ m_j^{-1} h_j(t-\xi_2) \right\} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \cdot \\
 & \cdot K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + /5.35/ \\
 & + \int_0^{t-T} \int_0^{t-T} \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \left\{ m_i^{-1} h_i(t-\xi_1) \right\} \bar{Q} \bar{Q}^T \left\{ m_j^{-1} h_j(t-\xi_2) \right\} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \cdot \\
 & \cdot K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_{t-T}^t \int_0^{t-T} \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \left\{ m_i^{-1} h_i(t-\xi_1) \right\} \bar{Q} \bar{Q}^T \left\{ m_j^{-1} h_j(t-\xi_2) \right\} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \cdot \\
 & \cdot K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_0^{t-T} \int_{t-T}^t \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \left\{ m_i^{-1} h_i(t-\xi_1) \right\} \bar{Q} \bar{Q}^T \left\{ m_j^{-1} h_j(t-\xi_2) \right\} E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] \cdot \\
 & \cdot K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 K_{qq}(t, t) = & \int_{t-T}^t \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t H(t-\xi_1) \bar{F} \bar{F}^T H^T(t-\xi_2) E[A^2(\tau)] K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau, \tau) \cdot \\
 & \cdot \lambda(\tau) d\tau d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_0^{t-T} \int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\tau}^{\tau+T} H(t-\xi_1) \bar{F} \bar{F}^T H^T(t-\xi_2) E[A^2(\tau)] K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau, \tau) \lambda(\tau) d\tau d\xi_1 d\xi_2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t-T}^t \int_{t-T}^t \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^t H(t-\xi_1) \bar{F} \bar{F}^T H^T(t-\xi_2) E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) \cdot \\
 & \quad \cdot \mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_0^{t-T} \int_0^{t-T} \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} H(t-\xi_1) \bar{F} \bar{F}^T H^T(t-\xi_2) E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) \cdot \\
 & \quad \cdot \mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \quad /5.36/ \\
 & + \int_{t-T}^t \int_0^{t-T} \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} H(t-\xi_1) \bar{F} \bar{F}^T H^T(t-\xi_2) E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) \cdot \\
 & \quad \cdot \mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_0^{t-T} \int_{t-T}^t \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^t H(t-\xi_1) \bar{F} \bar{F}^T H^T(t-\xi_2) E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] K_{SS}(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) \cdot \\
 & \quad \cdot \mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2
 \end{aligned}$$

Przyjęto, że każda siła jest stacjonarnym procesem stochastycznym, oraz że zachodzi stacjonarność między różnymi procesami, a więc

$$\begin{aligned}
 K_{SS}(t_1, t_2, t_{k_1}, t_{k_2}) &= K_{SS}(t_2 - t_1 - t_{k_2} + t_{k_1}) \\
 K_{SS}(t_1, t_2, t_k, t_k) &= K_{SS}(t_2 - t_1) \quad /5.37/
 \end{aligned}$$

W szczególnych przypadkach 1 i 2 podano wyrażenia określające macierz korelacyjną współrzędnych głównych przy znanej postaci funkcji korelacyjnej sił - procesów stochastycznych. Założono, że charakterystyki probabilistyczne amplitud są stałe i znane tzn. $E[A(t_k)] = E[A] = \text{const.}$, $E[A^2(t_k)] = E[A^2] = \text{const.}$ oraz proces zgłoszeń obciążenia jest stacjonarnym strumieniem Poissona o intensywności $\lambda(t) = \lambda = \text{const.}$

P r z y p a d e k 1

Układ jest obciążony serią sił - procesów stochastycznych typu "biały szum". Funkcja korelacyjna procesu obciążenia dana jest wzorami

$$K_{SS}(t_2 - t_1 - t_{k_2} + t_{k_1}) = S_p \delta(t_2 - t_1 - t_{k_2} + t_{k_1})$$

$$K_{SS}(t_2 - t_1) = S_p \delta(t_2 - t_1) \quad /5.38/$$

gdzie S_p - parametr wymuszenia.

Podstawiając /5.38/ do /5.35/ otrzymano postać ogólną elementu $k_{y_n y_n}(t, t)$ macierzy $K_{yy}(t, t)$, przy czym symbolem $k_{y_n y_n}^{(i)}(t, t)$, gdzie $i = I, II, \dots, VI$, oznaczono poszczególne całki we wzorze /5.35/ z zachowaniem ich kolejności.

Przeprowadzona na związku /5.35/ operacja ma na celu pokazanie możliwości posługiwania się nim, dlatego ograniczono się tylko do wyznaczenia wyrazów na głównej przekątnej macierzy korelacji. Wyrazy poza przekątną znaleźć można w taki sam sposób, ustalając $n = i, j$, na drodze żmudnych obliczeń, a ich postać w przypadkach szczególnych jest znacznie bardziej skomplikowana. Element $k_{y_n y_n}(t, t)$ jest sumą następujących składników

$$k_{y_n y_n}^I(t, t) = k_{y_n y_n}^I = \frac{Q_n^2 \lambda E [A^2] S_p}{m_n^2 \Omega_n^2} \left\{ \left[\frac{1}{4\alpha_n^2} - \frac{1}{2} \mu_{1n}(\alpha_n, \Omega_n) \right] T - \right.$$

$$- \frac{1}{8\alpha_n^2} [1 - \exp(-2\alpha_n T)] + \frac{1}{2} \mu_{1n}(\alpha_n, \Omega_n) J_2(2\alpha_n, 2\Omega_n) -$$

$$\left. - \frac{1}{2} \mu_{2n}(\alpha_n, \Omega_n) J_1(2\alpha_n, 2\Omega_n) \right\},$$

$$k_{y_n y_n}^{II}(t, t) = \frac{Q_n^2 \lambda E [A^2] S_p}{m_n^2 \Omega_n^2} \left\{ \frac{1}{8\alpha_n^2} [1 + \exp(-2\alpha_n t) [1 - \exp(2\alpha_n T)] - \exp(-2\alpha_n T)] - \right.$$

$$- \frac{1}{2} A_{1n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) J_6(2\alpha_n, 2\Omega_n) +$$

$$\left. + \frac{1}{2} A_{2n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) J_7(2\alpha_n, 2\Omega_n) \right\}, \quad /5.39/$$

$$k_{y_n y_n}^{III}(t, t) = k_{y_n y_n}^{III} = \frac{Q_n^2 \lambda^2 E^2 [A] S_p}{m_n^2 \Omega_n^2} \left\{ \left[\left[\frac{1}{2} \mu_{1n}(\alpha_n, \Omega_n) + \frac{\Omega_n}{\alpha_n} \mu_{2n}(\alpha_n, \Omega_n) \right] A_{1n}^T \right. \right.$$

$$\left. (-\alpha_n, \Omega_n) + \frac{1}{2} \mu_{2n}(\alpha_n, \Omega_n) A_{2n}^T(-\alpha_n, \Omega_n) \right] [J_1(-\alpha_n, \Omega_n) - J_1(\alpha_n, \Omega_n)] +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} \mu_{2n}(\alpha_n, \Omega_n) A_{1n}^T(-\alpha_n, \Omega_n) - \left[\frac{1}{2} \mu_{1n}(\alpha_n, \Omega_n) + \frac{\Omega_n}{\alpha_n} \mu_{2n}(\alpha_n, \Omega_n) \right] A_{2n}^T(-\alpha_n, \Omega_n) \right] \cdot \\ \cdot [J_2(-\alpha_n, \Omega_n) - J_2(\alpha_n, \Omega_n)] \Big\} ,$$

$$k_{y_n y_n}^{IV}(t, t) = \frac{Q_n^2 \lambda^2 E^2 [A] S_p}{m_n^2 \Omega_n^2} \left\{ \left[A_{2n}^T(-2\alpha_n, 0) - A_{2n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) \right] [A_{1n}^t(-\alpha_n, \Omega_n) - \right. \\ \left. - A_{1n}^T(-\alpha_n, \Omega_n)] - A_{1n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) [A_{2n}^t(-\alpha_n, \Omega_n) - A_{2n}^T(-\alpha_n, \Omega_n)] \right\} J_6(\alpha_n, \Omega_n) + \\ + \left\{ [A_{2n}^T(-2\alpha_n, 0) + A_{2n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n)] [A_{2n}^t(-\alpha_n, \Omega_n) - A_{2n}^T(-\alpha_n, \Omega_n)] - \right. \\ \left. - A_{1n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) [A_{1n}^t(-\alpha_n, \Omega_n) - A_{1n}^T(-\alpha_n, \Omega_n)] \right\} J_7(\alpha_n, \Omega_n) \Big\} ,$$

$$k_{y_n y_n}^V(t, t) = \frac{Q_n^2 \lambda^2 E^2 [A] S_p}{m_n^2 \Omega_n^2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \mu_{1n}(\alpha_n, \Omega_n) + \frac{\Omega_n}{\alpha_n} \mu_{2n}(\alpha_n, \Omega_n) \right] [A_{1n}^t(-\alpha_n, \Omega_n) - \right. \\ \left. - A_{1n}^T(-\alpha_n, \Omega_n)] - \frac{1}{2} \mu_{2n}(\alpha_n, \Omega_n) [A_{2n}^t(-\alpha_n, \Omega_n) - A_{2n}^T(-\alpha_n, \Omega_n)] \right\} \cdot$$

$$\cdot [J_1(-\alpha_n, \Omega_n) - J_1(\alpha_n, \Omega_n)] + \left\{ \frac{1}{2} \mu_{2n}(\alpha_n, \Omega_n) [A_{1n}^t(-\alpha_n, \Omega_n) - A_{1n}^T(-\alpha_n, \Omega_n)] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{2} \mu_{1n}(\alpha_n, \Omega_n) + \frac{\Omega_n}{\alpha_n} \mu_{2n}(\alpha_n, \Omega_n) \right] [A_{2n}^t(-\alpha_n, \Omega_n) - A_{2n}^T(-\alpha_n, \Omega_n)] \right\} \cdot$$

$$\cdot [J_2(-\alpha_n, \Omega_n) - J_2(\alpha_n, \Omega_n)] \Big\} ,$$

$$k_{y_n y_n}^{VI}(t, t) = \frac{Q_n^2 \lambda^2 E^2 [A] S_p}{m_n^2 \Omega_n^2} \left\{ \left[A_{2n}^T(-2\alpha_n, 0) - A_{2n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) \right] A_{1n}^T(-\alpha_n, \Omega_n) + \right.$$

$$+ A_{1n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) A_{2n}^T(-\alpha_n, \Omega_n) \Big\} J_6(\alpha_n, \Omega_n) -$$

$$- \left\{ [A_{2n}^T(-2\alpha_n, 0) + A_{2n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n)] A_{2n}^T(-\alpha_n, \Omega_n) + \right.$$

$$+ A_{1n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) \cdot A_{1n}^T(-\alpha_n, \Omega_n) \Big\} J_7(\alpha_n, \Omega_n) \Big\} ,$$

przy czym wyrażenia $A_1^c(a,b)$, $A_2^c(a,b)$ oraz $\mu_1(a,b)$ i $\mu_2(a,b)$ mają postać

$$A_1^c(a,b) = \frac{1}{a^2+b^2} [b - (b \cos bc - a \sin bc) \exp(ac)] ,$$

$$A_2^c(a,b) = \frac{1}{a^2+b^2} [a - (b \sin bc + a \cos bc) \exp(ac)] , \quad /5.39/$$

$$\mu_1(a,b) = \frac{1}{2} \frac{a}{a^2+b^2} , \quad \mu_2(a,b) = \frac{1}{2} \frac{b}{a^2+b^2}$$

$J_i(a,b)$ - zob. Dodatek.

P r z y p a d e k 2

Układ jest obciążony serią sił - procesów stochastycznych, których funkcja korelacyjna opisana jest następująco

$$K_{SS}(t_2 - t_1 - t_{k_2} + t_{k_1}) = \zeta^2 \exp[-\beta(t_2 - t_1 - t_{k_2} + t_{k_1})]$$

$$K_{SS}(t_2 - t_1) = \zeta^2 \exp[-\beta(t_2 - t_1)] \quad /5.40/$$

gdzie: ζ^2, β - parametry wymuszenia.

Ponieważ postać ogólna elementu $k_{y_n y_n}(t, t)$ macierzy korelacji jest w tym przypadku bardzo rozbudowana, przyjęto, że proces zgłoszeń obciążenia jest nieskorelowany, a więc $\varphi(t_1, t_2) = 0$ i ograniczono się jedynie do obliczenia dwóch pierwszych całek potrójnych we wzorze /5.35/. Określają je następujące związki

$$k_{y_n y_n}^I(t, t) = k_{y_n y_n}^I = \frac{Q_n^2 \lambda E[A^2] \zeta^2}{m_n^2 \Omega_n^2} \left\{ \left[\frac{1}{\alpha_n} - \mu_{1n}(2\alpha_n, 2\Omega_n) \right] \left[\mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) \right] + \mu_{2n}(2\alpha_n, 2\Omega_n) \left[\mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \mu_{2n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) \right] + 4\mu_{2n} \cdot (\alpha_n - \beta, \Omega_n) + \mu_{2n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) \mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) \right\} T -$$

$$\begin{aligned}
 & - 8\mu_{2n}(2\alpha_n, 2\Omega_n) - \left\{ \frac{1}{\alpha_n} [\mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)] - \right. \\
 & - 4[\mu_{2n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)\mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) + \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)\mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n)] \left. \right\} A_{2n}^T(-2\alpha_n, 0) + \\
 & + \left\{ 2[\mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n)\mu_{2n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) + \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)\mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n)] - \right. \\
 & - \mu_{1n}(2\alpha_n, 2\Omega_n)[\mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)] - \\
 & - \mu_{2n}(2\alpha_n, 2\Omega_n)[\mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)] \left. \right\} J_1(2\alpha_n, 2\Omega_n) + \\
 & + \left\{ 2[\mu_{2n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)\mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)\mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n)] - \right. \\
 & - \mu_{2n}(2\alpha_n, 2\Omega_n)[\mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)] + \\
 & + \mu_{1n}(2\alpha_n, 2\Omega_n)[\mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)] \left. \right\} J_2(2\alpha_n, 2\Omega_n) - \\
 & - [\mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) J_2(\alpha_n + \beta, \Omega_n) + \mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) J_1(\alpha_n + \beta, \Omega_n)] \left. \right\} \quad /5.41/ \\
 k_{y_n y_n}^{II}(t, t) = \frac{Q_n^2 \lambda_E [A^2] \zeta^2}{m_n^2 \Omega_n^2} \left\{ \left\{ [\mu_{2n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) - \mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n)] A_{2n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) - \right. \right. \\
 & - [\mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)] A_{1n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) + \mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) A_1^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) + \\
 & + \mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) A_{2n}^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) A_1^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \\
 & - \mu_{2n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) A_{2n}^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) + A_{1n}^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) A_{2n}^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) + \\
 & + A_{1n}^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) A_{2n}^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) \left. \right\} J_6(2\alpha_n, 2\Omega_n) + \\
 & + \left\{ [\mu_{2n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) - \mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n)] A_{1n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) + [\mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \right. \\
 & - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)] A_{2n}^T(2\alpha_n, 2\Omega_n) + \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) A_{2n}^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) A_{1n}^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) - \mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) A_{2n}^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) - \\
 & - \mu_{2n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) A_{1n}^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) + A_{1n}^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) A_{1n}^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \\
 & - A_{2n}^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) A_{2n}^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) \} J_7(2\alpha_n, 2\Omega_n) + \\
 & + \frac{2}{\alpha_n} \left\{ [\mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n)] A_{2n}^T(-2\alpha_n, 0) + \mu_{2n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) A_{1n}^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) + \right. \\
 & + \mu_{1n}(\alpha_n + \beta, \Omega_n) A_{2n}^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) - \mu_{2n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) A_{1n}^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) - \\
 & - \mu_{1n}(\alpha_n - \beta, \Omega_n) A_{2n}^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) + A_{1n}^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) A_{1n}^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) + \\
 & \left. + A_{2n}^T(\alpha_n - \beta, \Omega_n) A_{2n}^T(\alpha_n + \beta, \Omega_n) \right\} [A_{2n}^T(-2\alpha_n, 0) - A_{2n}^t(-2\alpha_n, 0)] \}
 \end{aligned}$$

gdzie: $A_1^c(a, b)$, $A_2^c(a, b)$, $\mu_1(a, b)$, $\mu_2(a, b)$ - jak w przypadku 1.

Całki potrójne we wzorach /5.35/ i /5.36/ wyrażają wpływ na wartość macierzy korelacji $K_{yy}(t, t)$ lub $K_{qq}(t, t)$ każdej siły oddzielnie, natomiast całki podwójne odzwieczają wzajemną korelację między różnymi procesami obciążenia. W rozdziale ósmym analizie numerycznej poddano jedynie dwa pierwsze wyrazy k_{ynyn}^I i k_{ynyn}^{II} wzoru /5.39/ w celu porównania wyników otrzymanych dla związku /5.41/.

W punktach 5.3.2 i 5.3.3 pokazano sposób wyznaczania niektórych charakterystyk probabilistycznych przemieszczeń układu dyskretnego przy deterministycznej lub losowej funkcji kształtu sił. W przypadku, gdy funkcja $S(t, t_k)$ wyraża się związkiem

$$S(t, t_k) = \bar{S}(t, t_k) + \dot{S}(t, t_k) \quad /5.42/$$

przy czym $\bar{S}(t, t_k)$ ma charakter deterministyczny, a $\dot{S}(t, t_k)$ jest procesem stochastycznym można połączyć rozwiązania /5.12/ i /5.13/ z /5.34/ i /5.35/ dodając je do siebie. Losową funkcję $\dot{S}(t, t_k)$ należy dobrać tak, aby jej wartość oczekiwana była równa zero.

Podobnie postępuje się, jeśli wektor rozkładu obciążenia po geometrii układu jest sumą

$$\bar{F} = \overline{\bar{F}} + \overset{\circ}{\bar{F}}$$

/5.43/

gdzie: $\overline{\bar{F}}$ - deterministyczna składowa wektora $\bar{F}$,
 $\overset{\circ}{\bar{F}}$ - proces stochastyczny rozkładu sił obciążających konstrukcję, którego $E[\overset{\circ}{\bar{F}}] = 0$.

6. UKŁAD OBCIĄŻONY SERIĄ SIŁ O LOSOWO ZMIENNYM CZASIE DZIAŁANIA

6.1. Rozwiązanie ogólne

Rozważania zawarte w niniejszym rozdziale dotyczą drgań układu dyskretnego obciążonego serią przypadkowo pojawiających się sił, których amplitudy i czasy oddziaływania na konstrukcję są zmiennymi losowymi, a przebieg w czasie ma charakter procesu stochastycznego. W celu wyznaczenia wartości oczekiwanej i wariancji przemieszczeń układu ciągłego należy wykorzystać związki /5.10/.

Niech dany będzie przypadek, gdy czas działania każdej siły zawiera się w określonym przedziale, tzn. $a \leq T \leq b$. Funkcję obciążenia $f(t)$ opisuje relacja /4.41/, a jej charakterystyki podano w punkcie 4.3. Wektor $\bar{F}$ może mieć charakter deterministyczny bądź losowy przy znanych wielkościach $E[\bar{F}]$ i $E[\bar{F}\bar{F}^T]$.

Wektory: współrzędnych głównych i uogólnionych otrzymuje się sumując odpowiedzi układu na działanie pojedynczych sił, co przy użyciu całki Stieltjesa oraz wprowadzonych w rozdziale 3 funkcji skoku $dN(t)$ i $dZ_{t_k}(T)$ można zapisać następująco

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t) = \\ &= \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-\tau}^b \int_{\tau}^t \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} \bar{Q} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi + \\ &+ \int_{t-a}^t \int_a^b \int_{\tau}^t \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} \bar{Q} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi + \\ &+ \int_0^{t-b} \int_a^b \int_{\tau}^{\tau+T} \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} \bar{Q} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi + \\ &+ \int_{t-b}^{t-a} \int_a^{t-\tau} \int_{\tau}^{\tau+T} \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} \bar{Q} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi \end{aligned} \quad /6.1/$$

gdzie $h_n(t-\xi)$ - impulsowa funkcja przejścia /3.19/. Wykorzystując transformację własną /3.13/ otrzymuje się wektor współrzędnych uogólnionych w postaci

$$\begin{aligned}
 \bar{q}(t) &= \bar{q}_1(t) + \bar{q}_2(t) = \\
 &= \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-\tau}^b \int_{\tau}^t H(t-\xi) \bar{F} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi + \\
 &+ \int_{t-a}^t \int_a^b \int_{\tau}^t H(t-\xi) \bar{F} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi + \\
 &+ \int_0^{t-b} \int_a^b \int_{\tau}^{\tau+T} H(t-\xi) \bar{F} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi + \\
 &+ \int_{t-b}^{t-a} \int_a^{t-\tau} \int_{\tau}^{\tau+T} H(t-\xi) \bar{F} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi
 \end{aligned}
 \tag{6.2/}$$

gdzie $H(t-\xi)$ - macierz charakterystyk impulsowych.

Związki /6.1/ i /6.2/ zapisane przy pomocy wektorów $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$ i $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ wprowadzonych w rozdziale 3 przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 \bar{y}(t) &= \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t) = \\
 &= \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-\tau}^b A(\tau) \bar{Y}_1(t, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) + \int_{t-a}^t \int_a^b A(\tau) \bar{Y}_1(t, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) + \\
 &+ \int_0^{t-b} \int_a^b A(\tau) \bar{Y}_2(t, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) + \int_{t-b}^{t-a} \int_a^{t-\tau} A(\tau) \bar{Y}_2(t, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta)
 \end{aligned}
 \tag{6.3/}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{q}(t) &= \bar{q}_1(t) + \bar{q}_2(t) = \\
 &= \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-\tau}^b A(\tau) \bar{R}_1(t, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) + \int_{t-a}^t \int_a^b A(\tau) \bar{R}_1(t, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) + \\
 &+ \int_0^{t-b} \int_a^b A(\tau) \bar{R}_2(t, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) + \int_{t-b}^{t-a} \int_a^{t-\tau} A(\tau) \bar{R}_2(t, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta)
 \end{aligned}
 \tag{6.4/}$$

Dokonując na wzorach /6.1/ i /6.2/ operacji wartości oczekiwanej przy wykorzystaniu własności /3.4/ oraz /3.11/ otrzymano wartość

przeciętną wektorów współrzędnych głównych i uogólnionych

$$\begin{aligned}
 E[\bar{y}(t)] &= E[\bar{y}_1(t)] + E[\bar{y}_2(t)] = \\
 &= \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-\tau}^b \int_{\tau}^t \bar{E}_y(\tau, \eta, \xi) d\tau d\eta d\xi + \int_{t-a}^t \int_a^b \int_{\tau}^t \bar{E}_y(\tau, \eta, \xi) d\tau d\eta d\xi + \\
 &+ \int_0^{t-b} \int_a^b \int_{\tau}^{\tau+T} \bar{E}_y(\tau, \eta, \xi) d\tau d\eta d\xi + \int_{t-b}^{t-a} \int_a^{t-\tau} \int_{\tau}^{\tau+T} \bar{E}_y(\tau, \eta, \xi) d\tau d\eta d\xi
 \end{aligned} \quad /6.5/$$

oraz

$$\begin{aligned}
 E[\bar{q}(t)] &= W E[\bar{y}(t)] = E[\bar{q}_1(t)] + E[\bar{q}_2(t)] = \\
 &= \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-\tau}^b \int_{\tau}^t \bar{E}_q(\tau, \eta, \xi) d\tau d\eta d\xi + \int_{t-a}^t \int_a^b \int_{\tau}^t \bar{E}_q(\tau, \eta, \xi) d\tau d\eta d\xi + \\
 &+ \int_0^{t-b} \int_a^b \int_{\tau}^{\tau+T} \bar{E}_q(\tau, \eta, \xi) d\tau d\eta d\xi + \int_{t-b}^{t-a} \int_a^{t-\tau} \int_{\tau}^{\tau+T} \bar{E}_q(\tau, \eta, \xi) d\tau d\eta d\xi
 \end{aligned} \quad /6.6/$$

przy czym dla skrócenia zapisu wprowadzono wektory

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_y(\tau, \eta, \xi) &= \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} E[\bar{Q}] E[A(\tau)] E[S(\xi, \tau, \eta)] \lambda(\tau) g_1(\eta) \\
 \bar{E}_q(\tau, \eta, \xi) &= H(t-\xi) E[\bar{F}] E[A(\tau)] E[S(\xi, \tau, \eta)] \lambda(\tau) g_1(\eta)
 \end{aligned} \quad /6.7/$$

Po wykonaniu stosownych operacji na wzorze /6.1/ przy uwzględnieniu /3.4/₂ i /3.5/ lub /3.7/ oraz /3.11/ otrzymano macierz korelacyjną współrzędnych głównych w postaci następującej sumy czterech całek czterokrotnych i szesnastu całek sześciokrotnych

$$\begin{aligned}
 K_{yy}(t, t) &= E[\bar{y}(t) \bar{y}^T(t)] - E[\bar{y}(t)] E[\bar{y}^T(t)] = \\
 &= \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-\tau}^b \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t \mathcal{H}_{yy}(\tau, \eta, \xi_1, \xi_2) d\tau d\eta d\xi_1 d\xi_2 + \int_{t-a}^t \int_a^b \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t \mathcal{H}_{yy}(\tau, \eta, \xi_1, \xi_2) d\tau d\eta d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &+ \int_0^{t-b} \int_a^b \int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\tau}^{\tau+T} \mathcal{H}_{yy}(\tau, \eta, \xi_1, \xi_2) d\tau d\eta d\xi_1 d\xi_2 + \int_{t-b}^{t-a} \int_a^{t-\tau} \int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\tau}^{\tau+T} \mathcal{H}_{yy}(\tau, \eta, \xi_1, \xi_2) \\
 &\quad d\tau d\eta d\xi_1 d\xi_2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-b}^{t-a} \left\{ \int_{t-\tau_1}^b \int_{t-\tau_2}^b \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^t + \int_{t-\tau_1}^b \int_a^{t-\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2+T} \int_{\tau_2}^{t-\tau_1} \int_a^b \int_{t-\tau_2}^{\tau_1+T} \int_{\tau_1}^t \right. \\
 & \quad \left. + \int_a^{t-\tau_1} \int_a^{t-\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \right\} \mathcal{H}_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-a}^t \left\{ \int_{t-\tau_1}^b \int_a^b \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^t + \int_a^b \int_{t-\tau_2}^b \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^t + \int_a^{t-\tau_2} \int_a^{\tau_2+T} \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^{\tau_1+T} \int_a^b \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^t \right\} \\
 & \quad \mathcal{H}_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_{t-b}^{t-a} \int_0^{t-b} \left\{ \int_{t-\tau_1}^b \int_a^b \int_{\tau_1}^{\tau_2+T} \int_{\tau_2}^b + \int_a^b \int_{t-\tau_2}^{\tau_1+T} \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^b + \int_a^{t-\tau_2} \int_a^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \right. \\
 & \quad \left. + \int_a^{t-\tau_1} \int_a^b \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \right\} \mathcal{H}_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_{t-a}^t \int_0^{t-b} \left\{ \int_a^b \int_a^b \int_{\tau_1}^{\tau_2+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} + \int_a^b \int_a^b \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^t \right\} \mathcal{H}_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) \\
 & \quad d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_{t-a}^t \int_{t-a}^t \int_a^b \int_a^b \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^t \mathcal{H}_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \int_0^{t-b} \int_0^{t-b} \int_a^b \int_a^b \int_{\tau_1}^{\tau_1+T} \int_{\tau_2}^{\tau_2+T} \mathcal{H}_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta_1 d\eta_2 d\xi_1 d\xi_2
 \end{aligned}$$

/6.8/

gdzie suma całek w nawiasie klamrowym jest formą operatora całkowego na wyrażeniu $\mathcal{H}_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2)$, wprowadzoną dla uproszczenia zapisu, zmienną pod pierwszą całką jest τ_1 , pod drugą - τ_2 , pod trzecią - η_1 , itd., a symbolami $\mathcal{H}_{yy}(\tau, \eta, \xi_1, \xi_2)$ oraz $\mathcal{H}_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2)$ oznaczono macierze

$$\mathcal{H}_{yy}(\tau, \eta, \xi_1, \xi_2) = \{m_1^{-1} h_1(t - \xi_1)\} E[\bar{Q}\bar{Q}^T] \{m_j^{-1} h_j(t - \xi_2)\} E[A^2(\tau)] \cdot \\ \cdot E[S(\xi_1, \tau, \eta) S(\xi_2, \tau, \eta)] \lambda(\tau) \varepsilon_1(\eta)$$

$$\mathcal{H}_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) = \{m_1^{-1} h_1(t - \xi_1)\} M_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) \cdot \\ \{m_j^{-1} h_j(t - \xi_2)\} \quad /6.9/$$

$$M_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) = E[\bar{Q}\bar{Q}^T] E[A(\tau_1) A(\tau_2)] E[S(\xi_1, \tau_1, \eta_1) S(\xi_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \\ \cdot \varphi(\tau_1, \tau_2) \varepsilon_2(\eta_1, \eta_2, \tau_1, \tau_2) - \\ - E[\bar{Q}] E[\bar{Q}^T] E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] E[S(\xi_1, \tau_1, \eta_1)] \cdot \\ \cdot E[S(\xi_2, \tau_2, \eta_2)] \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) \varepsilon_1(\eta_1) \varepsilon_1(\eta_2)$$

Wykorzystując transformację własną /3.13/ uzyskuje się macierz korelacji współrzędnych uogólnionych w postaci analogicznej do /6.8/ tzn. sumy całek o takich samych granicach jak w /6.8/, przy czym podcałkowe wyrażenia macierzowe określają związki

$$\mathcal{H}_{qq}(\tau, \eta, \xi_1, \xi_2) = H(t - \xi_1) E[\bar{F}\bar{F}^T] H^T(t - \xi_2) E[A^2(\tau)] \cdot \\ \cdot E[S(\xi_1, \tau, \eta) S(\xi_2, \tau, \eta)] \lambda(\tau) \varepsilon_1(\eta)$$

$$\mathcal{H}_{qq}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) = H(t - \xi_1) M_{qq}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) H^T(t - \xi_2) \quad /6.10/$$

$$M_{qq}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) = E[\bar{F}\bar{F}^T] E[A(\tau_1) A(\tau_2)] E[S(\xi_1, \tau_1, \eta_1) S(\xi_2, \tau_2, \eta_2)] \cdot \\ \cdot \varphi(\tau_1, \tau_2) \varepsilon_2(\eta_1, \eta_2, \tau_1, \tau_2) - \\ - E[\bar{F}] E[\bar{F}^T] E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] E[S(\xi_1, \tau_1, \eta_1)] \cdot \\ \cdot E[S(\xi_2, \tau_2, \eta_2)] \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) \varepsilon_1(\eta_1) \varepsilon_1(\eta_2)$$

Podobnie jak w punkcie 5.1 nie podano tu wzorów dotyczących wartości oczekiwanej i macierzy korelacji współrzędnych głównych i uogólnionych zawierających wektory wpływu $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{R}_1, \bar{R}_2$, które wygodnie jest wprowadzać w analizie pewnych przypadków szczególnych, np. przy znanej funkcji kształtu sił. Poszukiwane charakterystyki probabilistyczne drgań układu ciągłego wyznacza się w oparciu o wzory /6.5/ - /6.10/ oraz związki /5.10/.

Jeśli czas oddziaływania obciążenia na konstrukcję zmienia się nieograniczenie, tzn. $0 \leq T < \infty$, postać wektora współrzędnych głównych można ustalić zmieniając odpowiednio granice całek w /6.1/, a więc podstawiając $a = 0$ i $b = \infty$. Otrzymuje się wówczas

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t) = \\ &= \int_0^t \int_{t-\tau}^{\infty} \int_{\tau}^t \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} \bar{Q} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi + \quad /6.11/ \\ &+ \int_0^t \int_0^{t-\tau} \int_{\tau}^{\tau+T} \{m_n^{-1} h_n(t-\xi)\} \bar{Q} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) &= \bar{q}_1(t) + \bar{q}_2(t) = \\ &= \int_0^t \int_{t-\tau}^{\infty} \int_{\tau}^t H(t-\xi) \bar{F} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi + \quad /6.12/ \\ &+ \int_0^t \int_0^{t-\tau} \int_{\tau}^{\tau+T} H(t-\xi) \bar{F} A(\tau) S(\xi, \tau, \eta) dN(\tau) dZ_{\tau}(\eta) d\xi \end{aligned}$$

W sytuacji opisanej wzorami /6.11/ i /6.12/ znacznemu uproszczeniu ulega postać związków określających wartość przeciętną i macierz korelacji współrzędnych głównych i uogólnionych.

6.2. Przypadek szczególny

Niech słuszne będą założenia opisane związkami /5.11/, a więc: amplitudy sił są niezależnymi zmiennymi losowymi, wektor $\bar{F}$ /oraz $\bar{Q}$ / ma charakter deterministyczny, a postać funkcji kształtu obciążenia nie zależy od czasu jego trwania. Wówczas wartość oczekiwaną oraz macierz korelacji opisują wzory /6.5/ - /6.10/, przy czym wyrażenia macierzowe /6.7/, /6.9/ i /6.10/ przyjmują postać

$$\bar{E}_y(\tau, \eta, \xi) = \{m_n^{-1} h_n(t - \xi)\} \bar{Q} E[A(\tau)] S(\xi, \tau) \lambda(\tau) \varepsilon_1(\eta)$$

$$\bar{E}_q(\tau, \eta, \xi) = H(t - \xi) \bar{F} E[A(\tau)] S(\xi, \tau) \lambda(\tau) \varepsilon_1(\eta)$$

$$\mathcal{M}_{yy}(\tau, \eta, \xi_1, \xi_2) = \{m_i^{-1} h_i(t - \xi_1)\} \bar{Q} \bar{Q}^T \{m_j^{-1} h_j(t - \xi_2)\} E[A^2(\tau)] \cdot$$

$$\cdot S(\xi_1, \tau) S(\xi_2, \tau) \lambda(\tau) \varepsilon_1(\eta)$$

$$\mathcal{M}_{yy}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) = \bar{Q} \bar{Q}^T E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] S(\xi_1, \tau_1) S(\xi_2, \tau_2) \cdot \quad /6.13/$$

$$[\varphi(\tau_1, \tau_2) \varepsilon_2(\eta_1, \eta_2, \tau_1, \tau_2) - \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) \varepsilon_1(\eta_1) \varepsilon_1(\eta_2)]$$

$$\mathcal{M}_{qq}(\tau, \eta, \xi_1, \xi_2) = H(t - \xi_1) \bar{F} \bar{F}^T H^T(t - \xi_2) E[A^2(\tau)] S(\xi_1, \tau) S(\xi_2, \tau) \lambda(\tau) \varepsilon_1(\eta)$$

$$\mathcal{M}_{qq}(\tau_1, \tau_2, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2) = \bar{F} \bar{F}^T E[A(\tau_1)] E[A(\tau_2)] S(\xi_1, \tau_1) S(\xi_2, \tau_2) \cdot$$

$$[\varphi(\tau_1, \tau_2) \varepsilon_2(\eta_1, \eta_2, \tau_1, \tau_2) - \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) \varepsilon_1(\eta_1) \varepsilon_1(\eta_2)]$$

Jeśli proces zgłoszeń obciążenia jest niestacjonarnym procesem Poissona /zgłoszenia nieskorelowane/, czasy oddziaływania sił na konstrukcję są zmiennymi niezależnymi, a więc $\tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2) = 0$, i zachodzi /3.12/ oraz funkcja kształtu obciążenia nie zależy od czasu jego oddziaływania, to macierze $\mathcal{M}_{yy}$ i $\mathcal{M}_{qq}$ są równe zeru, a szukanne charakterystyki probabilistyczne przy wykorzystaniu wektorów wpływu przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 E[\bar{y}(t)] &= E[\bar{y}_1(t)] + E[\bar{y}_2(t)] = \\
 &= \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-\tau}^b E[A(\tau)] \bar{Y}_1(t, \tau) \lambda(\tau) g_1(\eta) d\tau d\eta + \\
 &+ \int_{t-a}^t E[A(\tau)] \bar{Y}_1(t, \tau) \lambda(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^{t-b} \int_a^b E[A(\tau)] \bar{Y}_2(t, \tau, \eta) \lambda(\tau) g_1(\eta) d\tau d\eta + \\
 &+ \int_{t-b}^{t-a} \int_a^{t-\tau} E[A(\tau)] \bar{Y}_2(t, \tau, \eta) \lambda(\tau) g_1(\eta) d\tau d\eta
 \end{aligned}
 \tag{6.14}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 K_{yy}(t, t) &= \int_{t-b}^{t-a} \int_{t-\tau}^b E[A^2(\tau)] \bar{Y}_1(t, \tau) \bar{Y}_1^T(t, \tau) \lambda(\tau) g_1(\eta) d\tau d\eta + \\
 &+ \int_{t-a}^t E[A^2(\tau)] \bar{Y}_1(t, \tau) \bar{Y}_1^T(t, \tau) \lambda(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^{t-b} \int_a^b E[A^2(\tau)] \bar{Y}_2(t, \tau, \eta) \bar{Y}_2^T(t, \tau, \eta) \lambda(\tau) g_1(\eta) d\tau d\eta + \\
 &+ \int_{t-b}^{t-a} \int_a^{t-\tau} E[A^2(\tau)] \bar{Y}_2(t, \tau, \eta) \bar{Y}_2^T(t, \tau, \eta) \lambda(\tau) g_1(\eta) d\tau d\eta
 \end{aligned}
 \tag{6.15}$$

Pojawienie się całek pojedynczych w /6.14/ i /6.15/ wynika z uwzględnienia zależności $\int_a^b g_1(\eta) d\eta = 1$.

Pierwsza całka we wzorze /6.14/ przedstawia tę część wartości oczekiwanej wektora współrzędnych głównych, która wynika z działania sił zgłoszonych w przedziale czasu $(t-b, t-a)$ i w chwili $t > b$ nadal obciążających układ. Druga całka odpowiada siłom, które pojawiają się w przedziale $(t-a, t)$ i z prawdopodobieństwem równym jeden działają na konstrukcję, natomiast trzecia całka ze wzoru /6.14/ przedstawia wpływ na wartość przeciętną wektora $\bar{y}(t)$ tych sił, które

rozpoczęły swe działanie w przedziale $(0, t-b)$ i nie obciążają już układu z prawdopodobieństwem równym jeden. Ostatnie wyrażenie wyniku z oddziaływania sił zgłoszonych w czasie $(t-b, t-a)$, już wyłączonych z procesu obciążania konstrukcji. Podobnie można interpretować poszczególne całki we wzorze /6.15/. Jeśli $a = b = T_0$, a więc gdy $\varepsilon_1(T) = \delta(T-T_0)$, gdzie $\delta(T)$ jest deltą Diraca, otrzymuje się rozwiązanie dla losowej serii sił o deterministycznym czasie działania.

7. FUNKCJA GĘSTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA PRZEMIESZCZENIA. PROBLEM PIERWSZEGO PRZEJŚCIA

7.1. Wprowadzenie

Przedmiotem rozważań zawartych w niniejszym rozdziale są drgania układu ciągłego określone równaniem /3.21/, w którym $w(\tilde{x}, t)$ jest zmienną losową opisującą przemieszczenie rozpatrywanego dźwięka. Zmienna geometryczna $\tilde{x}$ odpowiada x w przypadku belki, lub $\tilde{x} \rightsquigarrow x, y$ - dla płyty o stałej grubości. Przyjęto, że odstępy czasowe pomiędzy kolejnymi chwilami zgłoszeń t_k obciążenia tworzą zbiór zmiennych niezależnych /nieskorelowanych/, a więc $\tilde{Q}(t_1, t_2) = 0$ i prawdopodobieństwo pojawienia się "n" sił w przedziale (t_i, t_j) określa wzór /3.8/. Czasy oddziaływania obciążenia na układ są deterministyczne i jednakowe dla wszystkich sił. Deterministyczna jest także postać funkcji $S(t-t_k)$. W tym przypadku przemieszczenie układu ciągłego jest sumą niezależnych zmiennych losowych i można je zapisać w następującej postaci

$$w(\tilde{x}, t) = \int_{t-T}^t A(\tau) H_1(\tilde{x}, t-\tau) dN(\tau) + \int_0^{t-T} A(\tau) H_2(\tilde{x}, t-\tau-T) dN(\tau) \quad /7.1/$$

We wzorze /7.1/ wykorzystano funkcje wpływu $H_1(\tilde{x}, t, t_k)$ i $H_2(\tilde{x}, t, t_k, T_k)$ wprowadzone w rozdziale 3.

Poszukuje się odpowiedzi na pytanie, do jakiego typu rozkładu i przy spełnieniu jakich warunków dąży funkcja gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia układu $w(\tilde{x}, t)$.

7.2. Oszacowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa

Niech $p(w, \tilde{x}, t)$ oznacza funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $w(\tilde{x}, t)$, a $\psi(u, \tilde{x}, t)$ - jej funkcję charakterystyczną. Wielkości te związane są zależnościami [14]

$$p(w, \tilde{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i u w(\tilde{x}, t)] \psi(u, \tilde{x}, t) du \quad /7.2/$$

$$\psi(u, \tilde{x}, t) = E \left[\exp \left\{ i u w(\tilde{x}, t) \right\} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i u w(\tilde{x}, t) \right] p(w) dw \quad /7.3/$$

Wykorzystując wzór /7.1/ można przedstawić funkcję charakterystyczną w postaci

$$\begin{aligned} \psi(u, x, t) = E \left[\exp \left\{ i u \left(\int_{t-T}^t A(\tau) H_1(\tilde{x}, t-\tau) dN(\tau) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \int_0^{t-T} A(\tau) H_2(\tilde{x}, t-\tau-T) dN(\tau) \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad /7.4/$$

Jak wspomniano wcześniej, przemieszczenie układu jest sumą niezależnych zmiennych losowych, a więc funkcję charakterystyczną tej sumy można zastąpić iloczynem funkcji charakterystycznych kolejnych zmiennych, np. [43]. Zamieniając sumę na całkę o odpowiednich granicach można logarytm naturalny funkcji charakterystycznej zapisać następująco

$$\begin{aligned} \ln \psi(u, \tilde{x}, t) = \int_{t-T}^t \ln E \left[\exp \left\{ i u A(\tau) H_1(\tilde{x}, t-\tau) dN(\tau) \right\} \right] + \\ + \int_0^{t-T} \ln E \left[\exp \left\{ i u A(\tau) H_2(\tilde{x}, t-\tau-T) dN(\tau) \right\} \right] \end{aligned} \quad /7.5/$$

Po ponownej zamianie całki na sumę oraz po rozwinięciu funkcji wykładniczej w szereg potęgowy i wykonaniu operacji wartości oczekiwanej na jego kolejnych wyrazach otrzymuje się szereg, którego wyraz ogólny jest postaci $\ln(1+X)$, gdzie $X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (iu)^n E[A^n(t_k)]$

$H^n(\tilde{x}, t-t_k) \lambda(t_k) \Delta(t_k)$. Jeśli dokona się rozwinięcia wyrażenia $\ln(1+X)$ w szereg potęgowy, a następnie pominie wyrazy małego rzędu względem $\Delta(t_k)$, to możliwe staje się zastosowanie metody półniezmienników [14], według której

$$\ln \psi(u, \tilde{x}, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x_s(\tilde{x}, t)}{s!} (iu)^s \quad /7.6/$$

Otrzymuje się wówczas współczynniki szeregu /7.6/ - półniezmienniki - w następującej formie [40, 41]

$$\begin{aligned} x_s(\tilde{x}, t) = & \int_{t-T}^t E[A^s(\tau)] H_1^s(\tilde{x}, t-\tau) \lambda(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^{t-T} E[A^s(\tau)] H_2^s(\tilde{x}, t-\tau-T) \lambda(\tau) d\tau \end{aligned} \quad /7.7/$$

Po podstawieniu /7.7/ do /7.6/ i uwzględnieniu znanej zależności: $E[A^s] = \int A^s \xi(A) dA$, gdzie $\xi(A)$ - funkcja gęstości prawdopodobieństwa amplitudy, oraz po wykorzystaniu rozwinięcia funkcji wykładniczej w szereg Taylora otrzymuje się funkcję charakterystyczną przemieszczenia w postaci zamkniętej

$$\begin{aligned} \psi(u, \tilde{x}, t) = & \exp \left\{ \int_{t-T}^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuA(\tau) H_1(\tilde{x}, t-\tau)} \xi(A) \lambda(\tau) dA d\tau + \right. \\ & \left. + \int_0^{t-T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuA(\tau) H_2(\tilde{x}, t-\tau-T)} \xi(A) \lambda(\tau) dA d\tau - \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad /7.8/$$

Funkcję gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia można wyznaczyć wstawiając /7.8/ do /7.2/. W celach praktycznych stosuje się inną metodę, [41], pozwalającą na oszacowanie wymienionej charakterystyki. Łącząc związki /7.2/ i /7.6/ można przedstawić funkcję gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia w postaci szeregu Grama-Charliera

$$\begin{aligned} p(w, \tilde{x}, t) = & G_w^{-1}(\tilde{x}, t) \Theta^{(0)} - \frac{x_3(\tilde{x}, t) G_w^{-4}(\tilde{x}, t) \Theta^{(3)}}{3!} + \\ & + \frac{x_4(\tilde{x}, t) G_w^{-5}(\tilde{x}, t) \Theta^{(4)}}{4!} + \dots \end{aligned} \quad /7.9/$$

gdzie:

$$\Theta^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{dz^n} \left[\exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) \right],$$

$$z = \frac{w(\tilde{x}, t) - x_1(\tilde{x}, t)}{G_w(\tilde{x}, t)},$$

$$G_w^2(\tilde{x}, t) = x_2(\tilde{x}, t), \quad E[w(\tilde{x}, t)] = x_1(\tilde{x}, t).$$

Pierwszy wyraz szeregu /7.9/ odpowiada funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego. Jeśli intensywność procesu zgłoszeń obciążenia $\lambda(t)$ dąży do nieskończoności w taki sposób, że iloczyn $\lambda(t)E[A^s(t)]$ przyjmują wartości skończone dla wszystkich s , to półniezmienniki $\mathfrak{X}_s(\tilde{x}, t)$ dążą do zera dla $s = 3, 4, 5, \dots$. Znikają wówczas wszystkie z wyjątkiem pierwszego wyrazu szeregu /7.9/. Tak więc, dla nieskończonej gęstej serii obciążeń o nieskończonej małych amplitudach funkcja gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia rozpatrywanego układu dąży do funkcji gęstości rozkładu normalnego.

W analogiczny sposób można oszacować funkcję gęstości prawdopodobieństwa prędkości zmiany przemieszczenia, przy czym współczynniki rozwinięcia w szereg typu /7.6/ /półniezmienniki/ otrzymuje się w postaci zbliżonej do /7.7/. Także w przypadku oceny funkcji gęstości prawdopodobieństwa obciążenia przyjmuje się, iż dąży ona do funkcji gęstości rozkładu normalnego, a półniezmienniki $\mathfrak{X}_s$ opisuje związek

$$\mathfrak{X}_s(t) = \int_{t-T}^t A^s(\tau) S^s(t-\tau) \lambda(\tau) d\tau \quad /7.10/$$

7.3. Problem pierwszego przejścia

Znajomość funkcji gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia i prędkości przemieszczenia pozwala ocenić niezawodność konstrukcji poprzez określenie prawdopodobieństwa nieprzekroczenia przez rozpatrywaną wielkość $w(\tilde{x}, t)$ dopuszczalnego poziomu a . W tym celu należy obliczyć średnią liczbę przewyższeń poziomu dopuszczalnego w jednostce czasu - $\bar{n}_a$ - zgodnie ze wzorem [3, 13]

$$\bar{n}_a = \int_0^{\infty} v f(a, v) dv \quad /7.11/$$

Dla normalnych funkcji losowych wyrażenie /7.11/ przyjmuje postać

$$\bar{n}_a = \frac{\dot{\sigma}_w}{2\pi\sigma_w} \exp \left[- \frac{(a - E[w(\tilde{x}, t)])^2}{2\sigma_w^2} \right] \quad /7.12/$$

Następnie - przy założeniu, iż proces $R(t_i, t_j)$, opisujący kolejne przekroczenia przez przemieszczenie wartości a , jest stacjonarnym

procesem Poissona o intensywności $\bar{n}_a$ - wyznacza się prawdopodobieństwo zdarzenia, że w przedziale czasu (t_i, t_j) nie nastąpi ani jedno przewyższenie

$$P \{ R(t_i, t_j) = 0 \} = e^{-\bar{N}_a}$$

/7.13/

gdzie $\bar{N}_a = \int_{t_i}^{t_j} \bar{n}_a d\tau$.

W konkretnych przypadkach, gdy znana jest funkcja $S(t-t_k)$ można wykorzystać wzory podane w rozdziale 5, określające wartość oczekiwaną i wariancję przemieszczenia dla stanu ustalonego, a wariancję prędkości zmiany przemieszczenia oblicza się na podstawie znajomości wyrażeń opisujących n-te składowe wektorów $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2$.

8. ANALIZA NUMERYCZNA WYBRANYCH PRZYPADKÓW SZCZEGÓLNYCH

8.1. Wprowadzenie

Rozdział ten zawiera wyniki analizy numerycznej związków wprowadzonych w rozdziale 5, określających wartość oczekiwaną i funkcję korelacyjną przemieszczenia układu obciążonego serią sił o deterministycznym czasie działania. Rozpatrzono szczególne przypadki funkcji kształtu sił opisane w punktach 1, 2, 3 podrozdziału 5.3.2 /funkcja $S(t, t_k)$ - deterministyczna/ oraz w punktach 1, 2 podrozdziału 5.3.3 / $S(t, t_k)$ - proces stochastyczny/. Przeprowadzone obliczenia mają na celu wyznaczenie wpływu pewnych parametrów jak np. współczynnika tłumienia α oraz czasu oddziaływania obciążenia T na wartości wymienionych charakterystyk probabilistycznych.

8.2. Wyniki przeprowadzonych obliczeń

W rozważaniach przyjęto, że tłumienie układu opisuje parametr $\alpha = 0,5 \gamma \omega [s^{-1}]$, przy czym γ jest bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia przebiegającym wartości $0,01 \div 0,1$ [27] w zależności od materiału konstrukcji. Na wykresach 8, 9, 10 przedstawiono wpływ tłumienia na wartość oczekiwaną przemieszczenia. Czas oddziaływania obciążenia na układ jest stały $/T = 5 \text{ s}/$, także częstość drgań własnych ω przyjmuje w każdym przebiegu ustaloną wartość z przedziału $10 \div 30 \text{ s}^{-1}$. Rozpatrzono przypadki obciążenia w postaci serii sił stałych w czasie, harmonicznie zmiennych oraz wykładniczo malejących, przy czym dla wartości oczekiwanej i wariancji odpowiadających drganiom swobodnym posłużono się związkami wyprowadzonymi dla stanu ustalonego. Jak się okazuje, tłumienie nie ma żadnego wpływu na tę część wartości oczekiwanej przemieszczenia, która opisuje drgania wymuszone, co wynika z postaci analizowanej funkcji. Przy danym czasie działania sił i określonej częstości ω wielkość $E[y_1]$ jest stała oraz nie zależy od kształtu obciążenia. Wyraźnym wahaniom ulega natomiast wartość oczekiwana $E[y_2]$ odpowiadająca drganiom swobodnym układu. Zmiany te są szczególnie widoczne dla serii sił prostokątnych /linia ciągła na rys. 8, 9, 10/. Dla harmonicznie

zmiennej i wykładniczo malejącej funkcji kształtu obciążenia /linia odpowiednio: przerywana i przerywana kropkami/ wpływ tłumienia staje się coraz mniej widoczny wraz ze wzrostem przyjętej wielkości ω . Należy zaznaczyć, że wartości przyjmowane przez $E[y_2]$ są rzędu dwukrotnie mniejszego niż wartości $E[y_1]$ i różnica ta zwiększa się wraz ze wzrostem ω . Suma $E[y_1] + E[y_2]$ pozostaje stała, zależna od wartości częstości drgań własnych. W przypadku 1 dobór odpowiedniego dla materiału konstrukcji współczynnika tłumienia jest szczególnie istotny przy obliczaniu $E[y_2]$. W celu porównania otrzymanych wartości dla różnych postaci deterministycznej funkcji kształtu obciążenia wprowadzono wielkość r , zgodnie z /4.16/, jako $r = \int_0^T |S(t)| dt$. Tym samym pole zakreślone osią rzędnych i odpowiednią funkcją obciążenia jest jednakowe w każdym przypadku, dzięki czemu możliwe jest jakościowe porównanie otrzymanych wyników. Podobnie sporządzono wykresy 11, 12, 13. Przedstawiają one wpływ tłumienia na wartość funkcji korelacyjnej $K_{y_n y_n}(t, t) = \zeta_{y_n}^2$. W każdym z rozważanych przypadków obciążenia korelacja maleje wraz ze wzrostem wielkości parametru α , a istotne znaczenie ma na ogół część $K_{y_n y_n}^{(1)}$ funkcji korelacyjnej. W przypadku 1 - obciążenie układu serią sił stałych - wartości funkcji $K_{y_n y_n}^{(2)}$ są o rząd mniejsze od wartości $K_{y_n y_n}^{(1)}$, a dla przypadków 2 i 3 - obciążenie w postaci serii sił harmonicznym zmiennych i wykładniczo malejących - można pominąć funkcję $K_{y_n y_n}^{(2)}$ dla $\gamma > 0,04$ /konstrukcje drewniane, murowe, żelbetowe/. Funkcja ta przybiera znaczące wartości tylko dla małych wielkości charakterystycznych dla konstrukcji stalowych.

Parametrem sterującym prędkością zbliżania się wartości funkcji $K_{y_n y_n} = K_{y_n y_n}^{(1)} + K_{y_n y_n}^{(2)} = \zeta_{y_n}^2$ do zera jest częstość ω . Na rysunkach 11, 12, 13 cienką linią ciągłą oznaczono funkcję $K_{y_n y_n}^{(1)}$, grubą linią ciągłą - $K_{y_n y_n}^{(2)}$, a linią przerywaną - ich sumę $K_{y_n y_n} = \zeta_{y_n}^2$. W przypadku 2 funkcja $K_{y_n y_n}^{(1)}$ przyjmuje niemal stałą wartość niezależną od współczynnika α (i γ), nieznacznie także różniącą się dla różnych wartości częstości ω , rys. 12 przedstawia więc tylko zmianę funkcji $K_{y_n y_n}^{(2)}$ dla $\omega = 10, 20, 30 \text{ s}^{-1}$. Jak widać, zależnie do typu przyjętej funkcji kształtu obciążenia zmienia się udział wielkości $K_{y_n y_n}^{(1)}$ i $K_{y_n y_n}^{(2)}$ w tworzeniu funkcji korelacyjnej.

Wykresy 14, 15 ilustrują zmianę tej części wariancji $K_{y_n y_n}$ przemieszczenia układu w przypadkach 1 i 2, punkt 5.3.3 /losowa funkcja kształtu obciążenia/, która odpowiada dwóm pierwszym całkom potrójnym we wzorze /5.35/. Ze względu na brak możliwości porównania wyników z przypadkami 1, 2, 3 z podrozdziału 5.3.2 rysunki te mają charakter poglądowy. Pierwsza całka potrójna w/5.35/ odzwierciedla wpływ na funkcję korelacyjną sił obciążających układ w chwili obserwacji, druga - odpowiada siłom, pod których działaniem konstrukcja wykonuje drgania swobodne. Przy wartościach współczynnika tłumienia γ większych od 0,04 udział drugiej całki w tworzeniu wyrazów na głównej przekątnej macierzy korelacji jest niewielki, tym mniejszy, im większa jest wartość częstości drgań własnych. W przypadku 2, punkt 5.3.3, całka $k_{y_n y_n}^{II}$ jest ujemna dla małych współczynników tłumienia i jej wartości w tym zakresie parametru γ mają znaczący wpływ na sumę $k_{y_n y_n}^I + k_{y_n y_n}^{II}$. W obliczeniach przyjęto $\beta = 0,1 T_w$.

Rys. 16 ÷ 20 przedstawiają zmianę wartości oczekiwanej przemieszczenia $E[y]$ w zależności od czasu działania obciążenia, przy czym zmienna T przyjmuje wartości z przedziału $/0; 10 T_w/$, $T_w = 2\pi \omega_1^{-1}$ - czas własny. Jak widać, dla $T > 1 T_w$ $E[y_1]$ osiąga szybko 1, a $E[y_2] = 0$. Przy T bliskim zera $E[y_1]$ dąży do zera, a $E[y_2]$ dąży do jedności, co jest równoważne z rozwiązaniem problemu drgań układu obciążonego serią impulsów typu δ Diraca. W każdym z rozpatrywanych przypadków funkcji kształtu sił istotne zmiany wielkości $E[y_1]$ i $E[y_2]$ można zaobserwować tylko dla $0 < T < 1 T_w$, przy czym charakter tych zmian zależy od przyjętej wartości częstości drgań własnych i jest typowy dla danej funkcji. Np. dla przypadku obciążenia układu serią sił harmonicznie zmiennych w przedziale $0 \div 1 T_w$ następuje wyraźny skok od dużej /w porównaniu z pozostałymi/ wartości dodatniej $E[y_2]$ do dużej ujemnej, a czas T , przy którym pojawia się ta gwałtowna zmiana znaku, zmniejsza się wraz ze wzrostem ω . Suma $E[y] = E[y_1] + E[y_2]$ pozostaje stała. Wielkości $E[y_1]$ i $E[y_2]$ przy danej wartości ω w nieznacznym stopniu zależą od przyjętego współczynnika tłumienia γ ; na rysunkach 16 ÷ 20 pokazano przebiegi wykonane dla $\gamma = 0,02$ i $\gamma = 0,08$. W przypadku obciążenia układu serią sił wykładniczo malejących wartości oczekiwane przemieszczenia $E[y_1]$ i $E[y_2]$ osiągają odpowiednio 1 i 0 znacznie wolniej - dla $T > 3 T_w$.

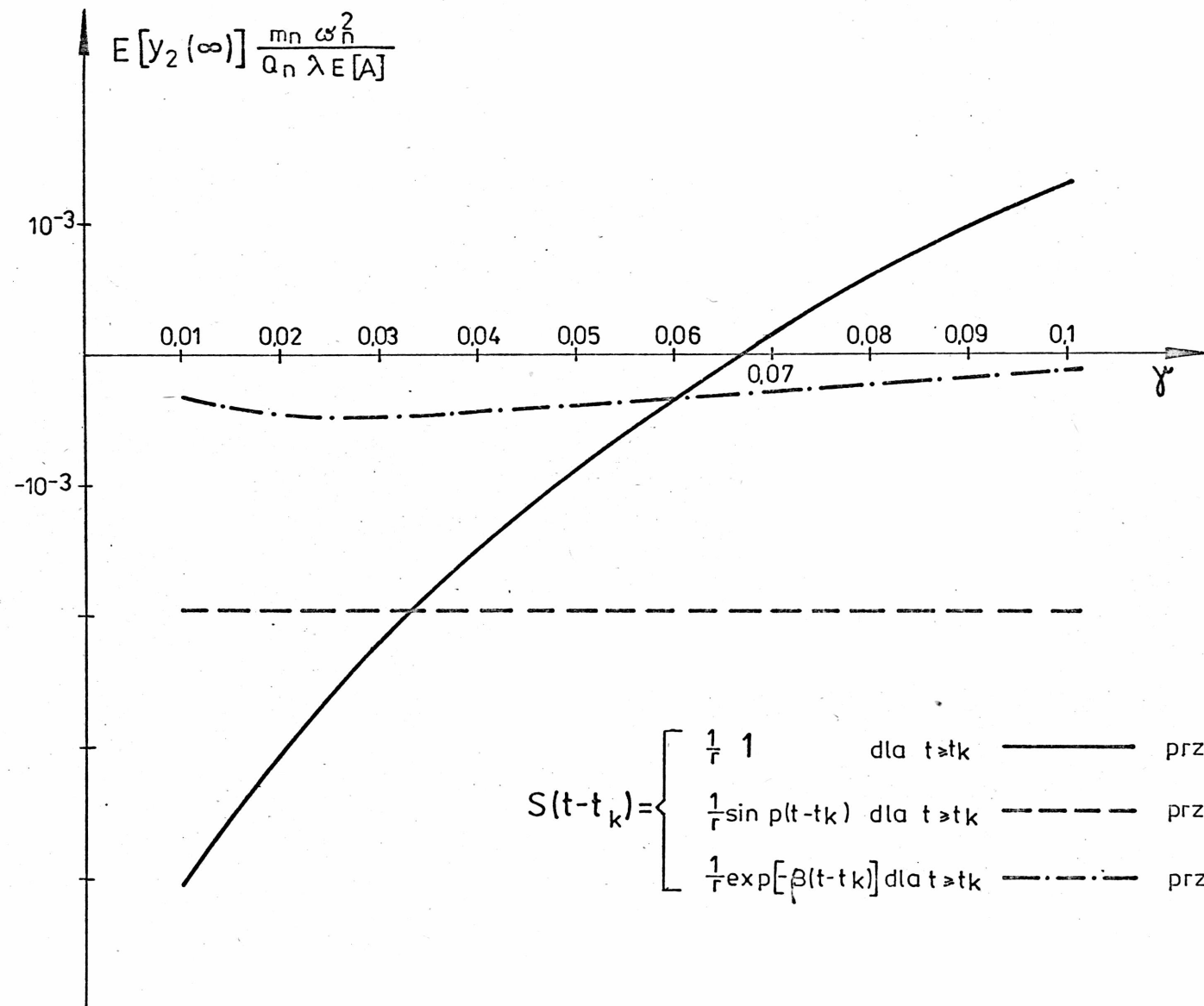
Rysunki 21 ÷ 24 przedstawiają zmianę wariancji $K_{ynyn}^{(2)} = \zeta_{yn}^{(2)2}$ przemieszczenia w zależności od czasu działania obciążenia na układ w trzech opisanych w punkcie 5.3.2 przypadkach funkcji kształtu sił. Ponieważ i tu istotne zmiany występują w przedziale $0 < T < 1T_w$ /z wyjątkiem przypadku 3, gdzie zmiany te pojawiają się do $2 \div 3 T_w$ /, oś czasu sięga tylko do $2 T_w$. Wartości $K_{ynyn}^{(2)}$ są znacznie większe niż wartości $K_{ynyn}^{(1)}$ i to one mają decydujące znaczenie w budowaniu sumy $K_{ynyn} = K_{ynyn}^{(1)} + K_{ynyn}^{(2)}$. Wpływ tłumienia przy danej wielkości ω jest wyraźnie widoczny. Na rysunkach 21 ÷ 24 pokazano wykresy wariancji $K_{ynyn}^{(2)}$ przy $\omega = 10 s^{-1}$ i $\omega = 30 s^{-1}$ oraz $\gamma = 0,02$ i $\gamma = 0,08$. Dla $T = 0$ wielkość ta osiąga wartość zależną od ω i γ , równą wartości otrzymanej dla przypadku obciążenia układu serią impulsów typu δ Diraca.

Rysunek 25 przedstawia zmianę wariancji $K_{ynyn}^{(1)}$ przy $\omega = 20 s^{-1}$ i $\gamma = 0,02$ oraz zmianę sumy $K_{ynyn}^{(1)} + K_{ynyn}^{(2)}$ przy tych samych danych. Udział wielkości $K_{ynyn}^{(1)}$ w wartościach wariancji $K_{ynyn} = \zeta_{yn}^2$ jest niewielki. Jak wspomniano wcześniej, w obliczeniach numerycznych posłużono się wielkością $r = \int_0^T |S(t)| dt$ normującą "pole" obciążenia.

W przypadkach 1 i 2 punktu 5.3.3 /rys. 26, 27/ zbadano zmianę sumy dwóch pierwszych całek k^I i k^{II} tworzących wyraz ogólny macierzy K_{ynyn} /nie uwzględniono korelacji pomiędzy różnymi siłami/. Wartości osiągane przez k^I i k^{II} są tego samego rzędu.

Wykresy 28, 29, 30 przedstawiają zmianę wariancji przemieszczenia w zależności od czasu działania obciążenia na układ dla przypadków 1, 2, 3 rozdz. 5.3.2. Przebiegi te zostały wykonane dla $\omega = 10 s^{-1}$ i $\gamma = 0,02$ oraz dla $\omega = 30 s^{-1}$ i $\gamma = 0,08$. Funkcje przedstawione na rys. 28 ÷ 30 są rosnące i mają quasi-harmoniczny charakter, przy czym oscylacje wartości wariancji maleją tym szybciej, im większa jest częstość drgań własnych i współczynnik tłumienia. Tylko w przypadku 2 /seria sił harmonicznie zmiennych/ wahania te zanikają dopiero przy dużych wartościach T / $T \approx 200 T_w$ przy $\omega = 30 s^{-1}$ i $\gamma = 0,08$ /, kiedy nieprawdziwe staje się sformułowanie "obciążenia krótkotrwałe". Wariancja ζ_y^2 przyjmuje maksymalne wartości dla $T = (n - 0,5)T_w$, a minimalne - dla $T = n T_w$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Wykresy 28 ÷ 30 zostały sporządzone dla sił o różnym kształcie w czasie, lecz wielkości jednakowej i równej 1 dla wszystkich trzech przypadków.

Gdy siły obciążające układ przyjmują jedną z rozpatrywanych funkcji kształtu, a mają inną wielkość należy uwzględnić parametr r zgodnie z /4.16/.

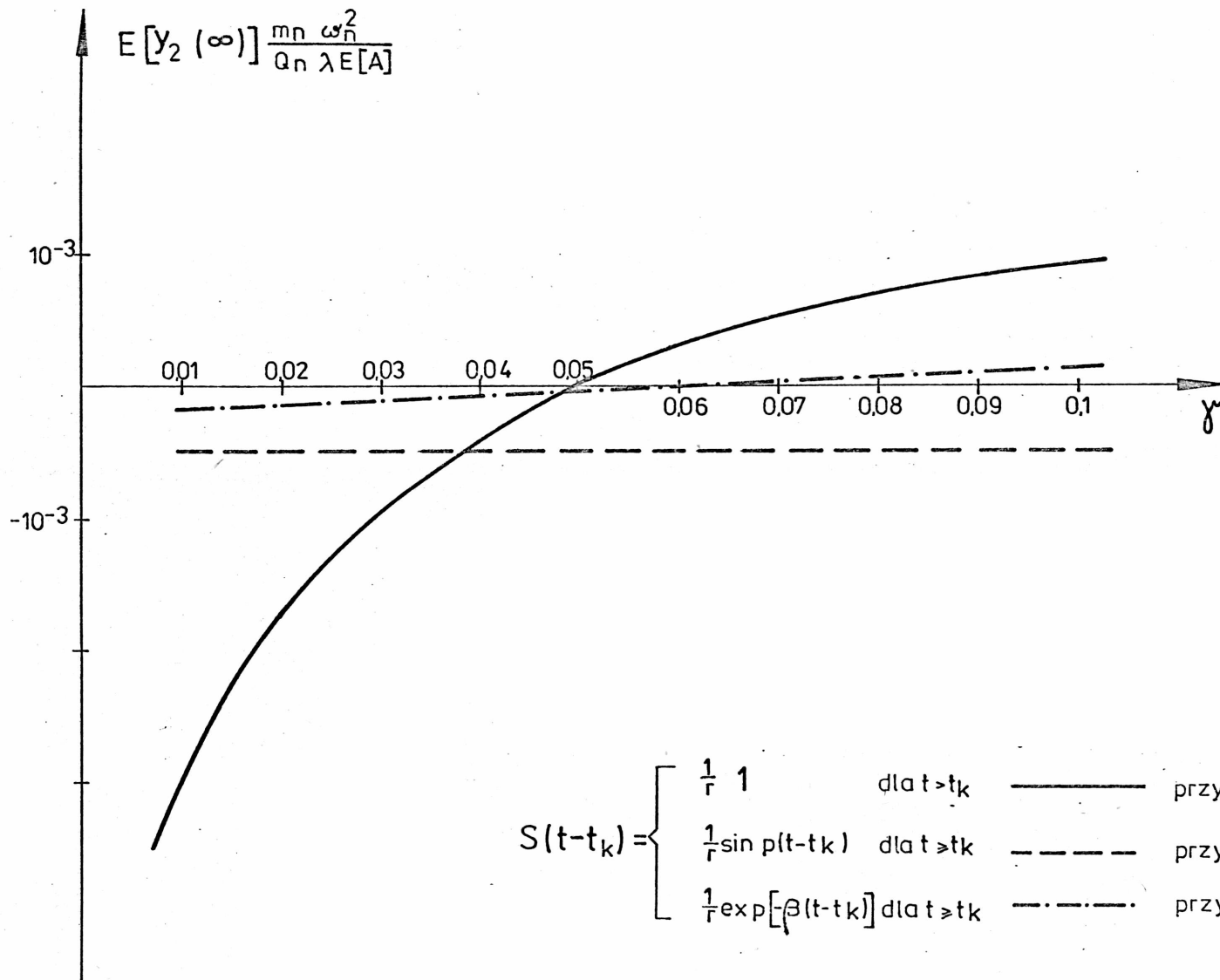


$$T=5s$$

$$\omega=10s^{-1}$$

$$\alpha=0,5\gamma\omega$$

Rys. 8.



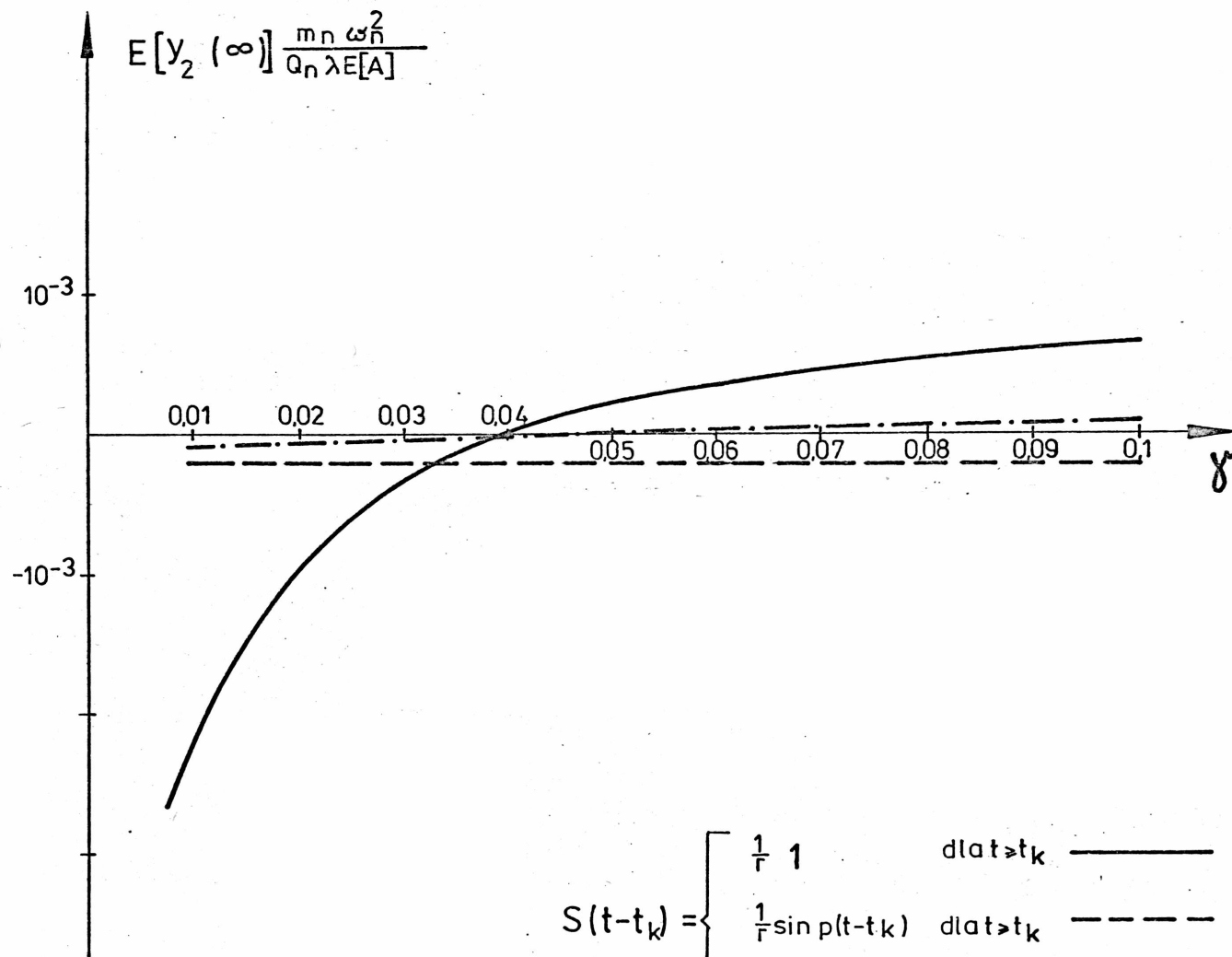
$$T=5s$$

$$\omega=20s^{-1}$$

$$\alpha=0,5\gamma\omega$$

$$S(t-t_k) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{r} \cdot 1 & \text{dla } t > t_k \quad \text{———} \quad \text{przypadek 1} \\ \frac{1}{r} \sin p(t-t_k) & \text{dla } t \geq t_k \quad \text{-----} \quad \text{przypadek 2} \\ \frac{1}{r} \exp[-\beta(t-t_k)] & \text{dla } t \geq t_k \quad \text{-.-.-.-} \quad \text{przypadek 3} \end{array} \right\} \quad \text{rozdział 5.3.2}$$

Rys. 9.



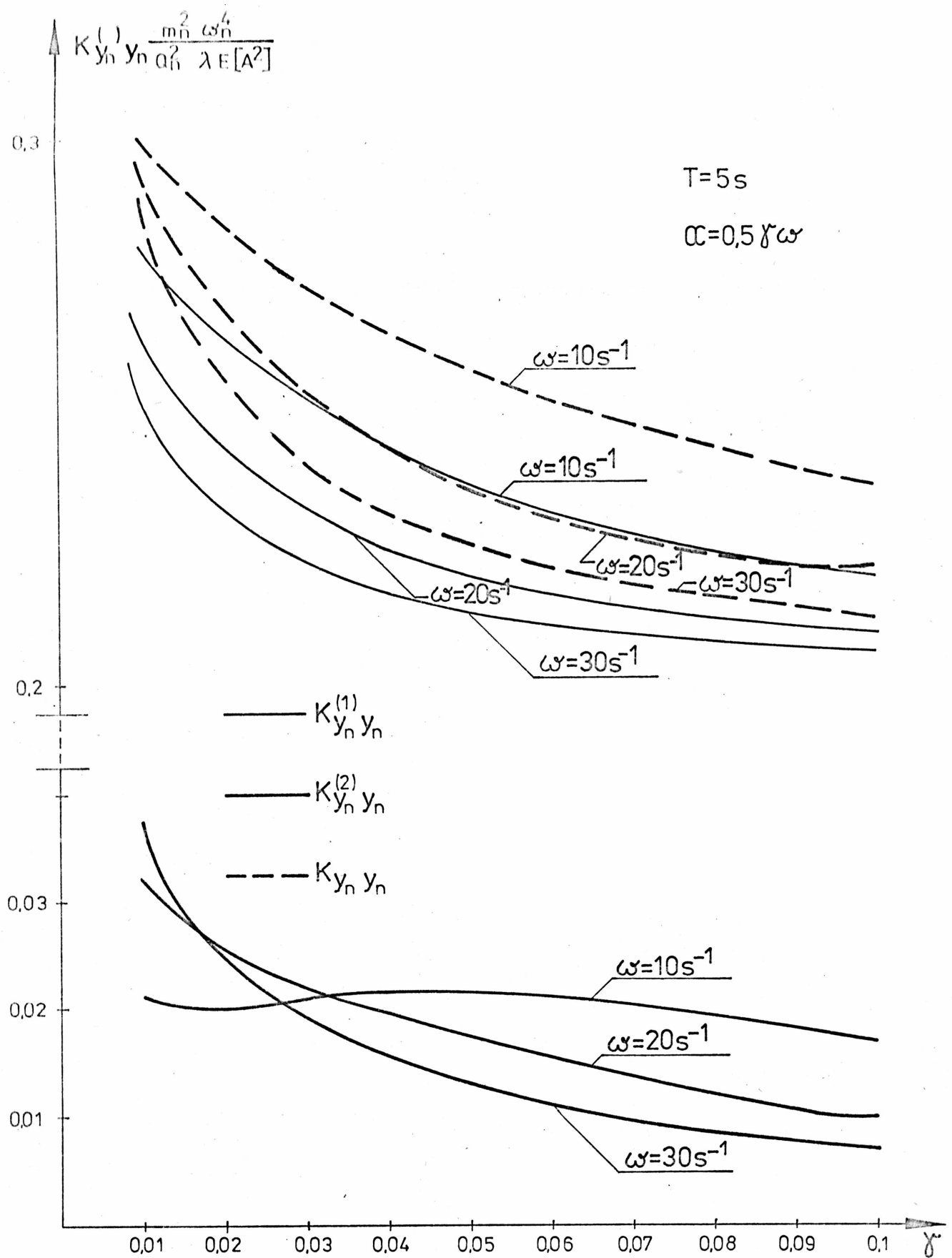
$$T=5s$$

$$\omega=30s^{-1}$$

$$\alpha=0,5\gamma\omega$$

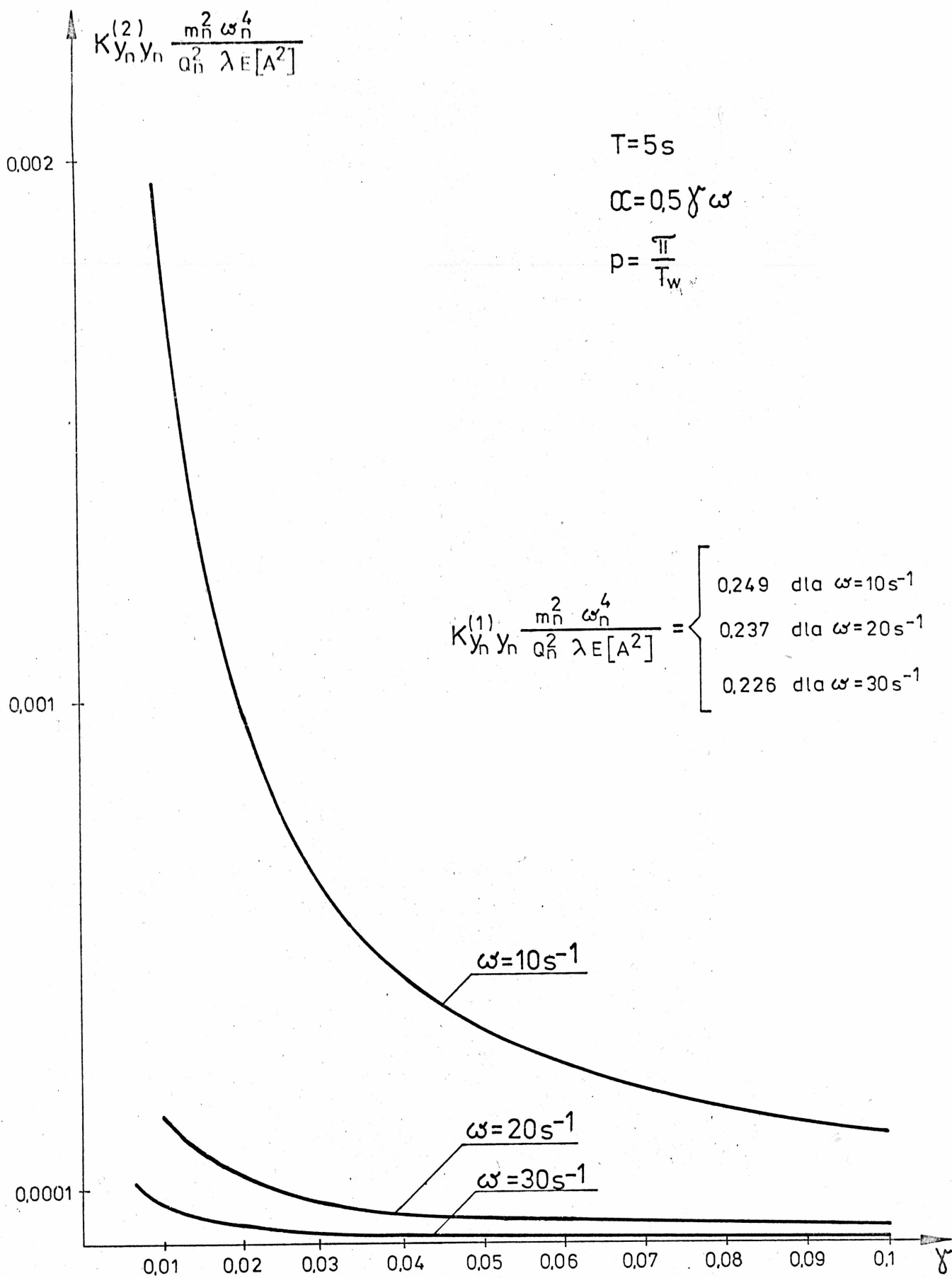
$$S(t-t_k) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{T} \cdot 1 & \text{dla } t \geq t_k \text{ ———— przypadek 1} \\ \frac{1}{T} \sin p(t-t_k) & \text{dla } t \geq t_k \text{ - - - - - przypadek 2} \\ \frac{1}{T} \exp[-\beta(t-t_k)] & \text{dla } t \geq t_k \text{ - \cdot - \cdot - \cdot przypadek 3} \end{array} \right\} \text{ rozdział 5.3.2}$$

Rys. 10.



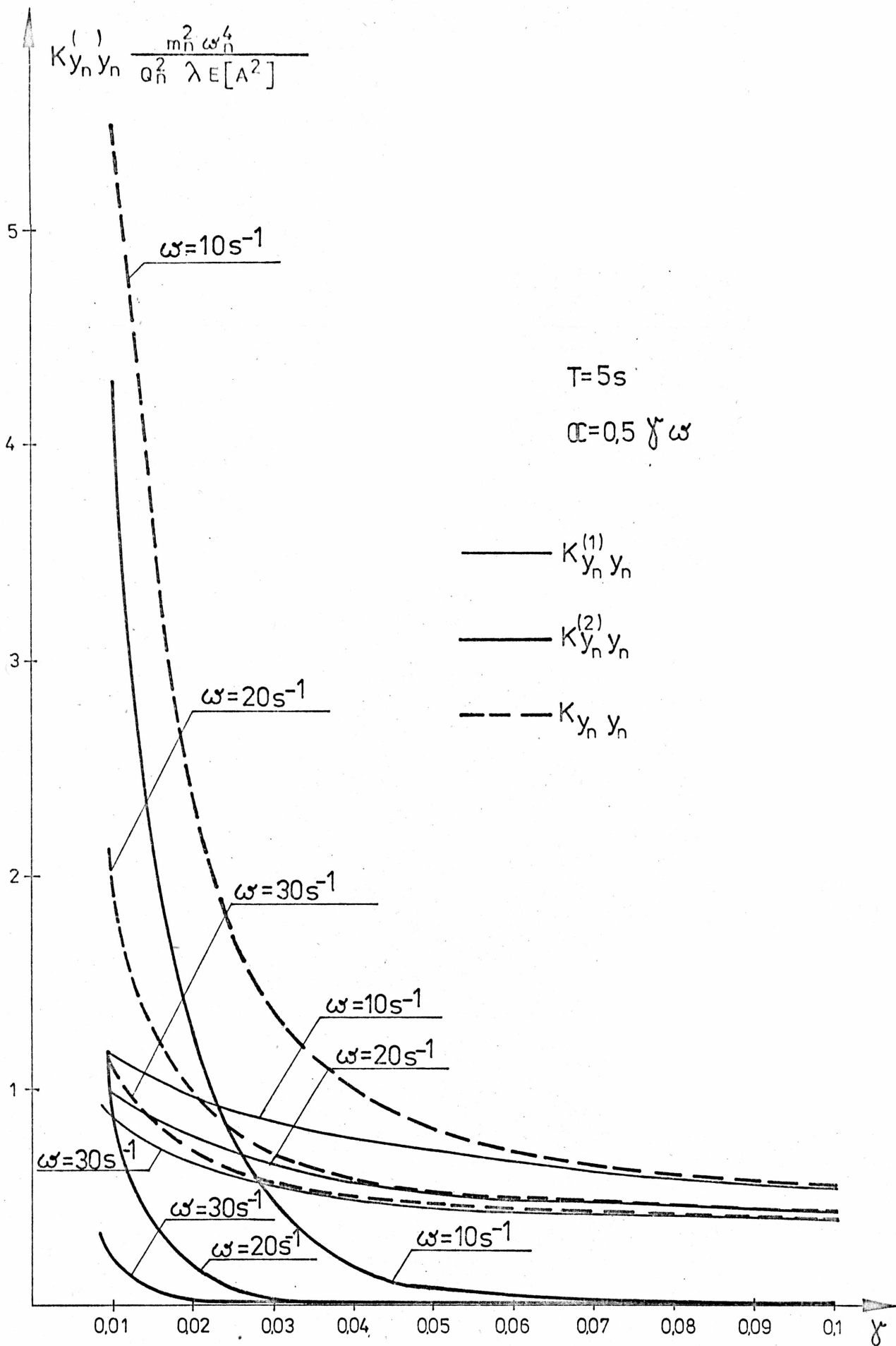
przypadek 1 rozdział 5.3.2

Rys. 11.



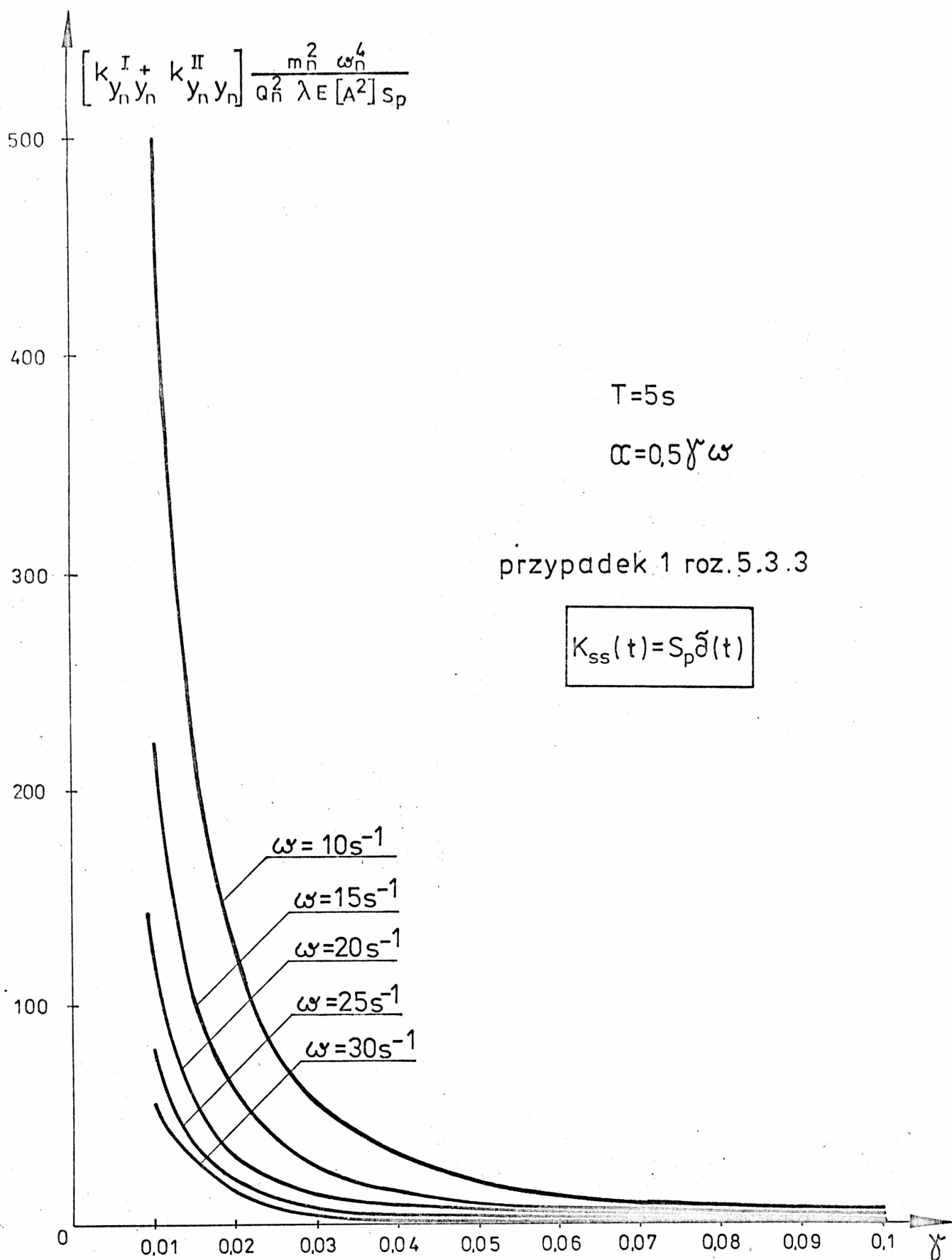
przypadek 2 rozdział 5.3.2.

Rys. 12.

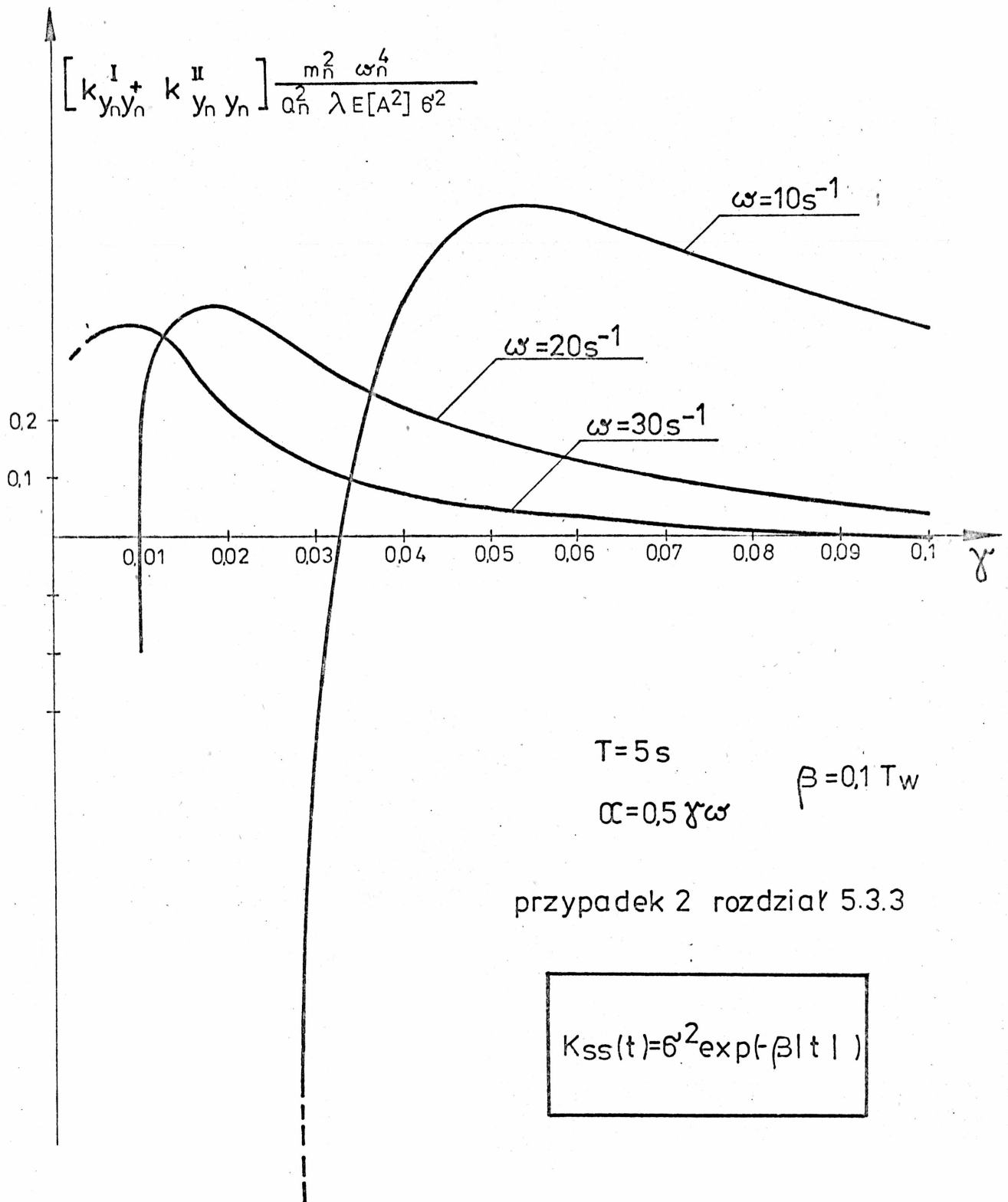


przypadek 3 rozdział.5.3.2

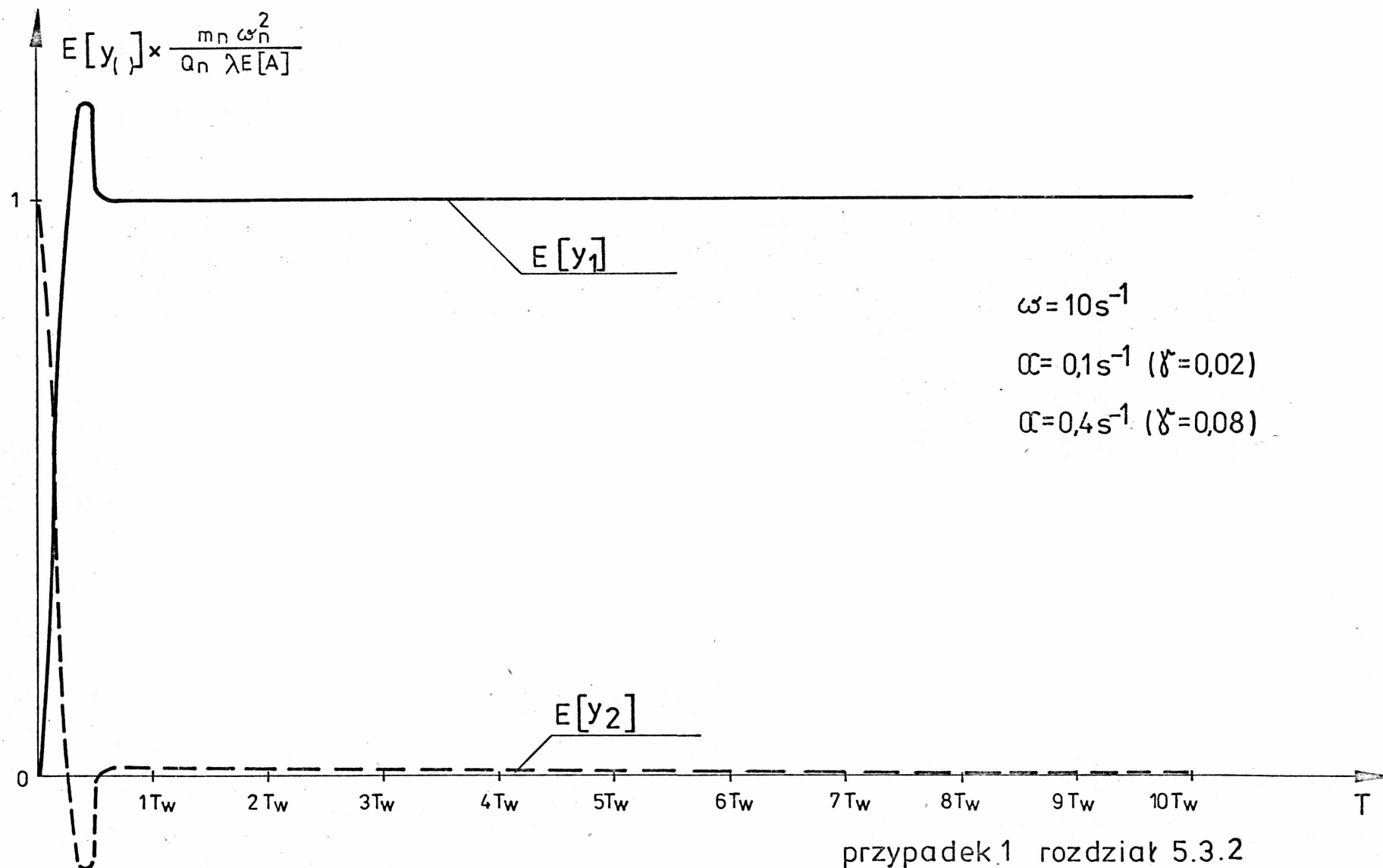
Rys. 13.



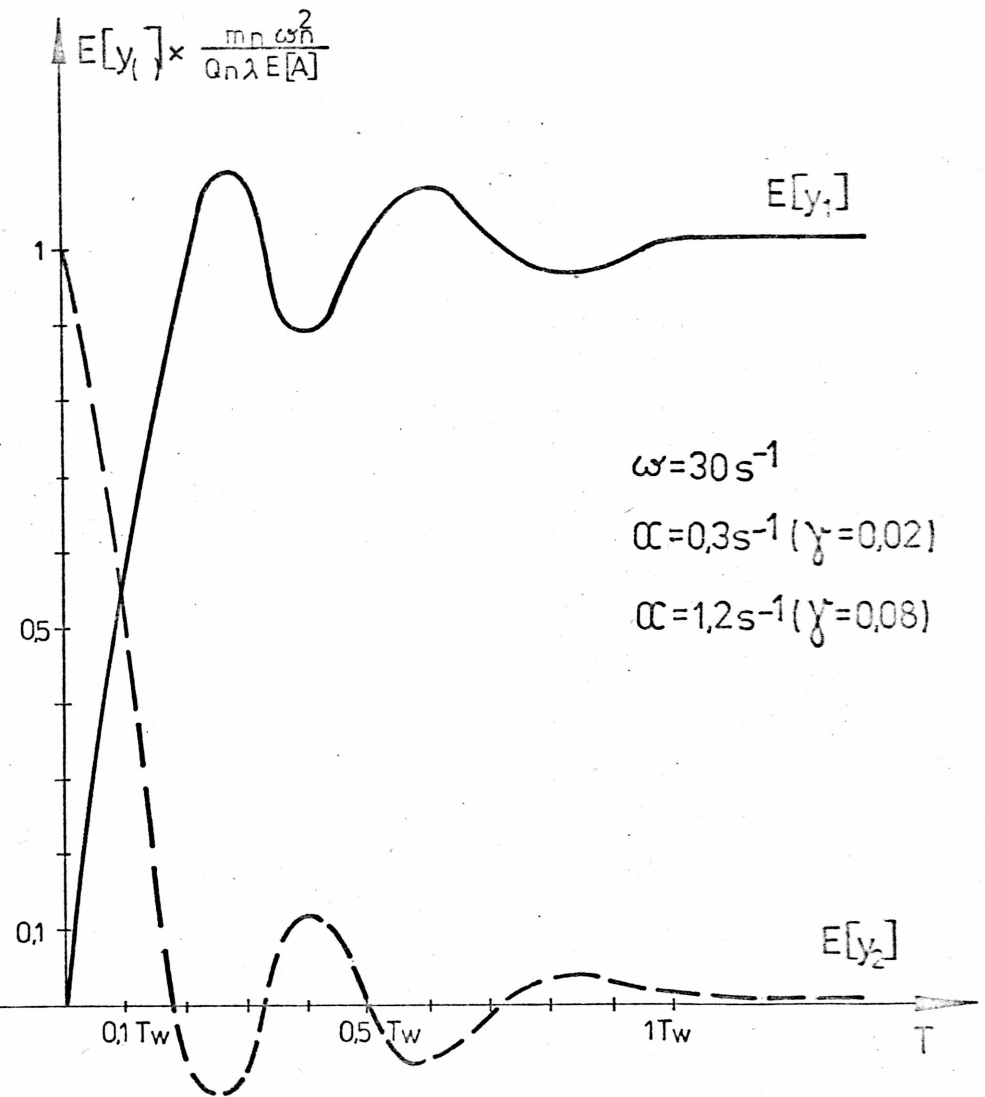
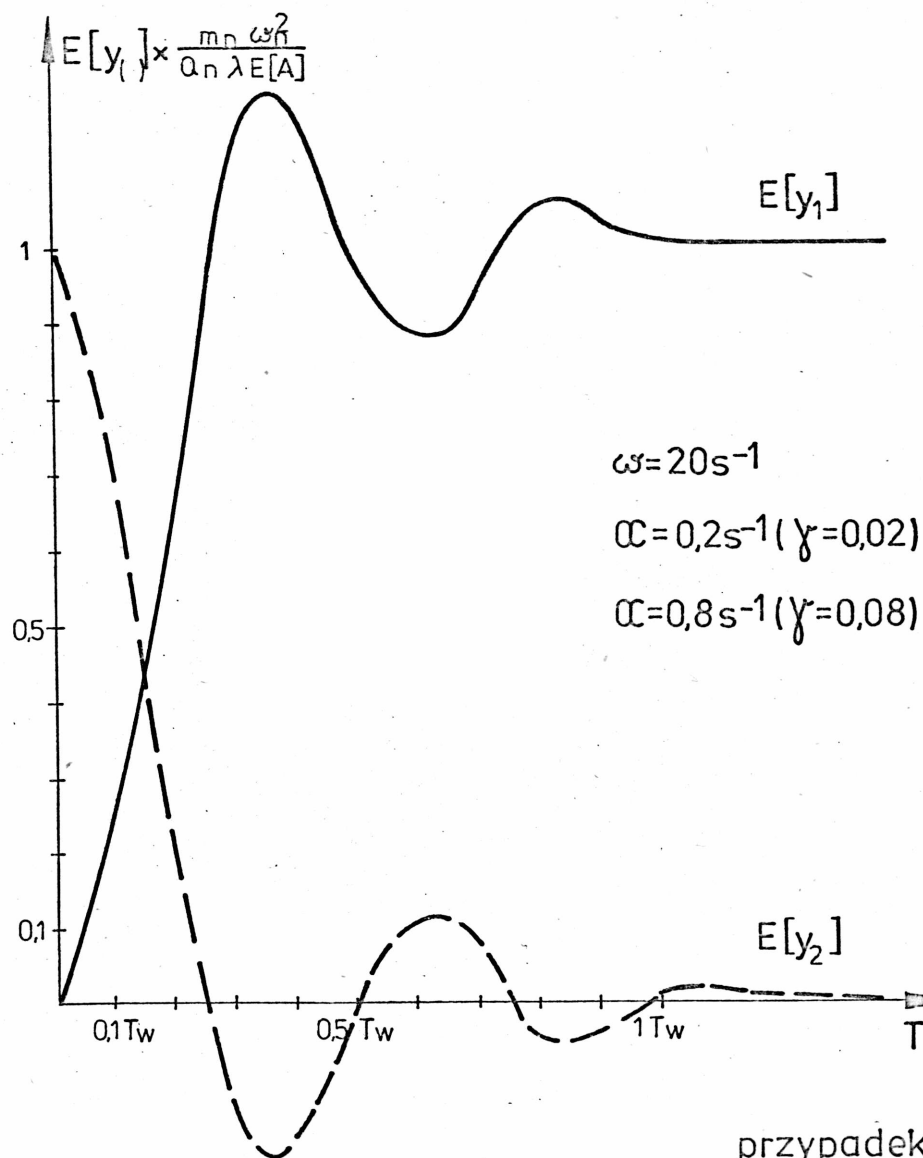
Rys. 14.



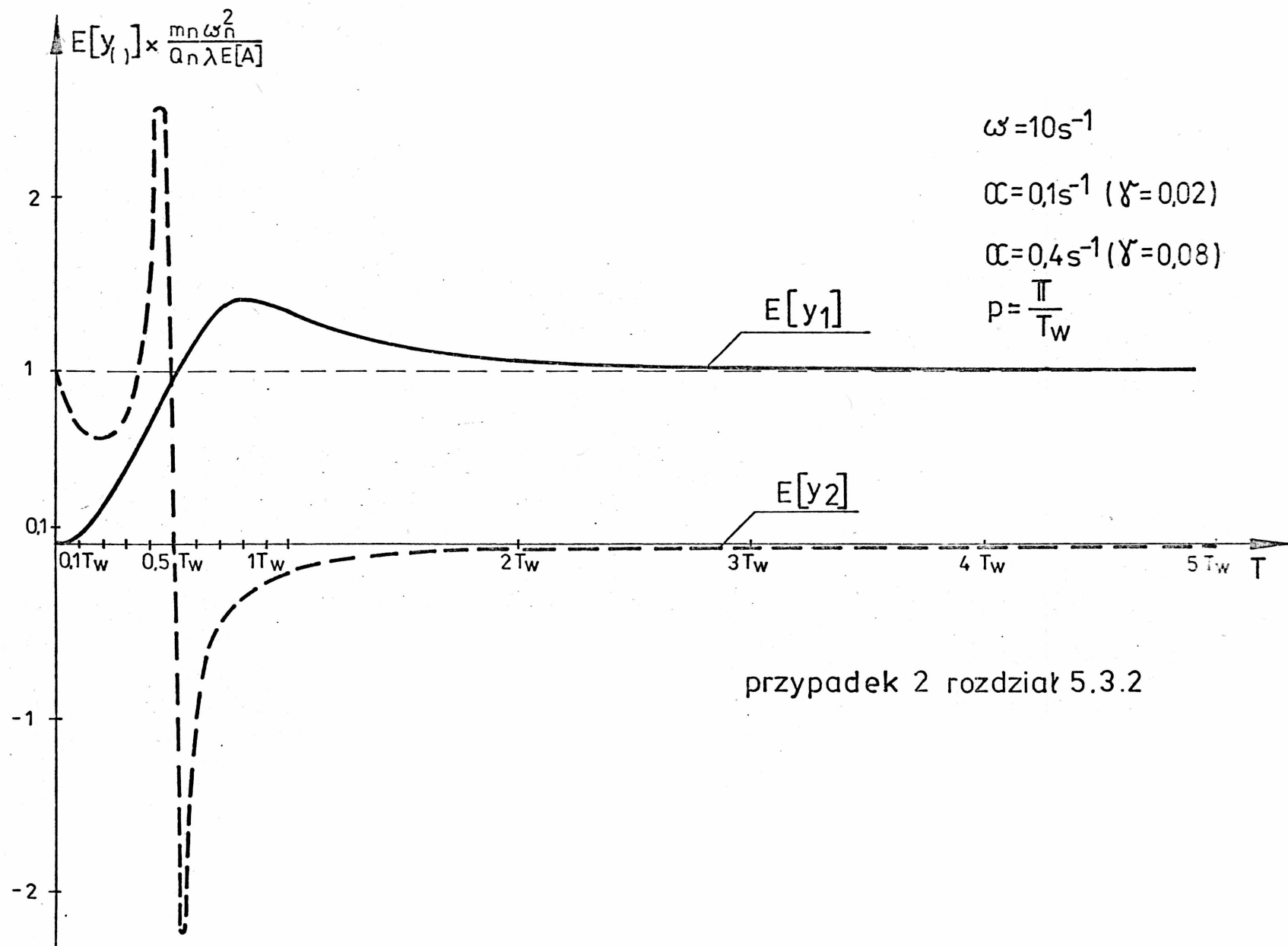
Rys. 15.



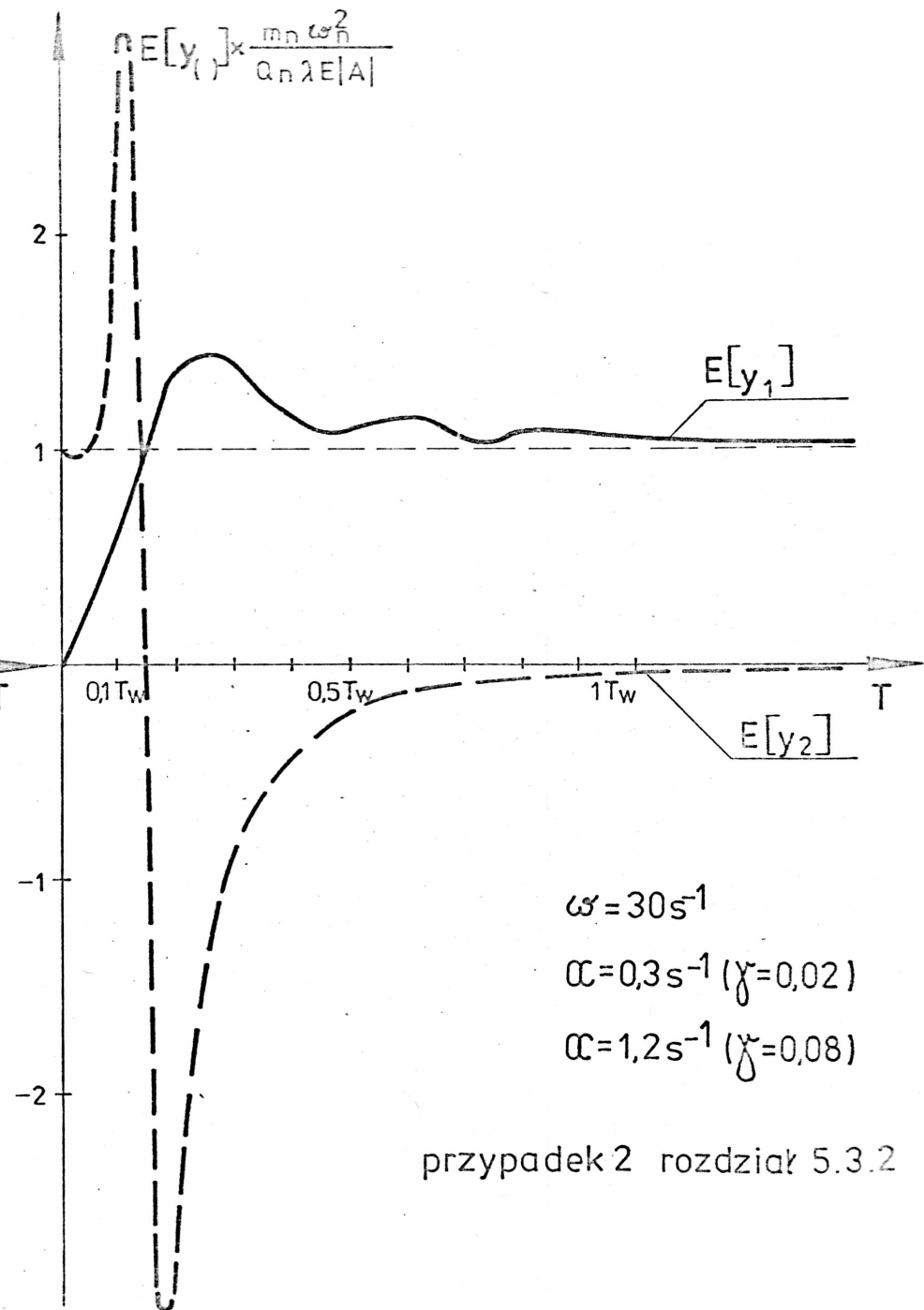
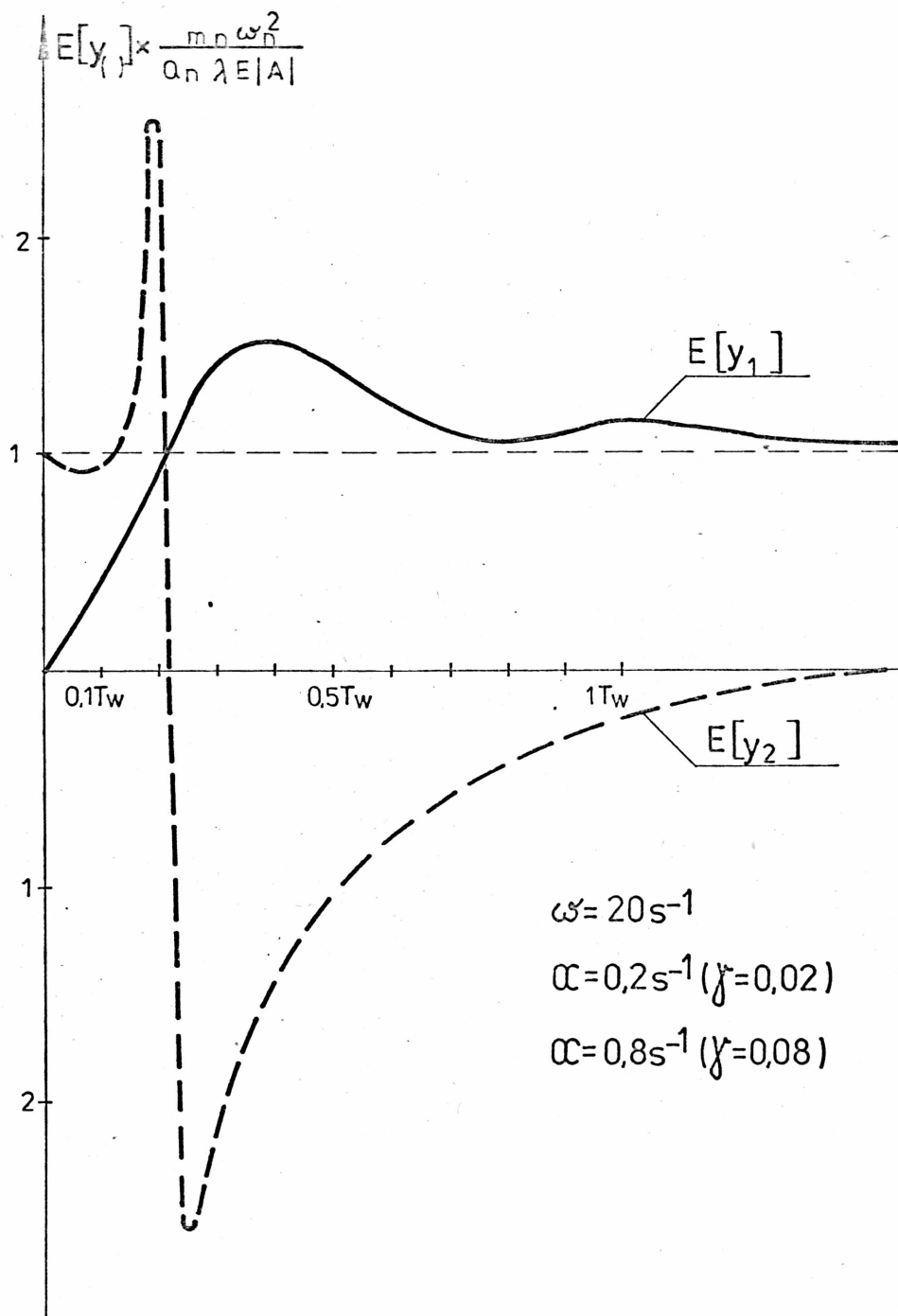
Rys. 16.



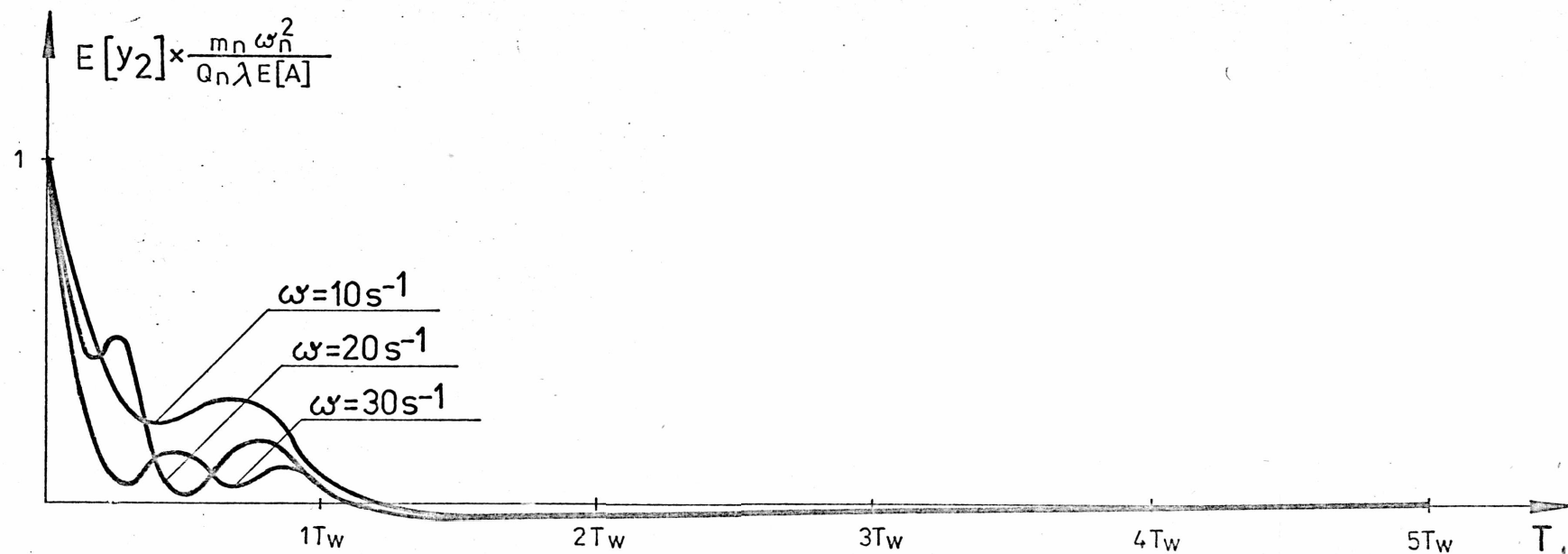
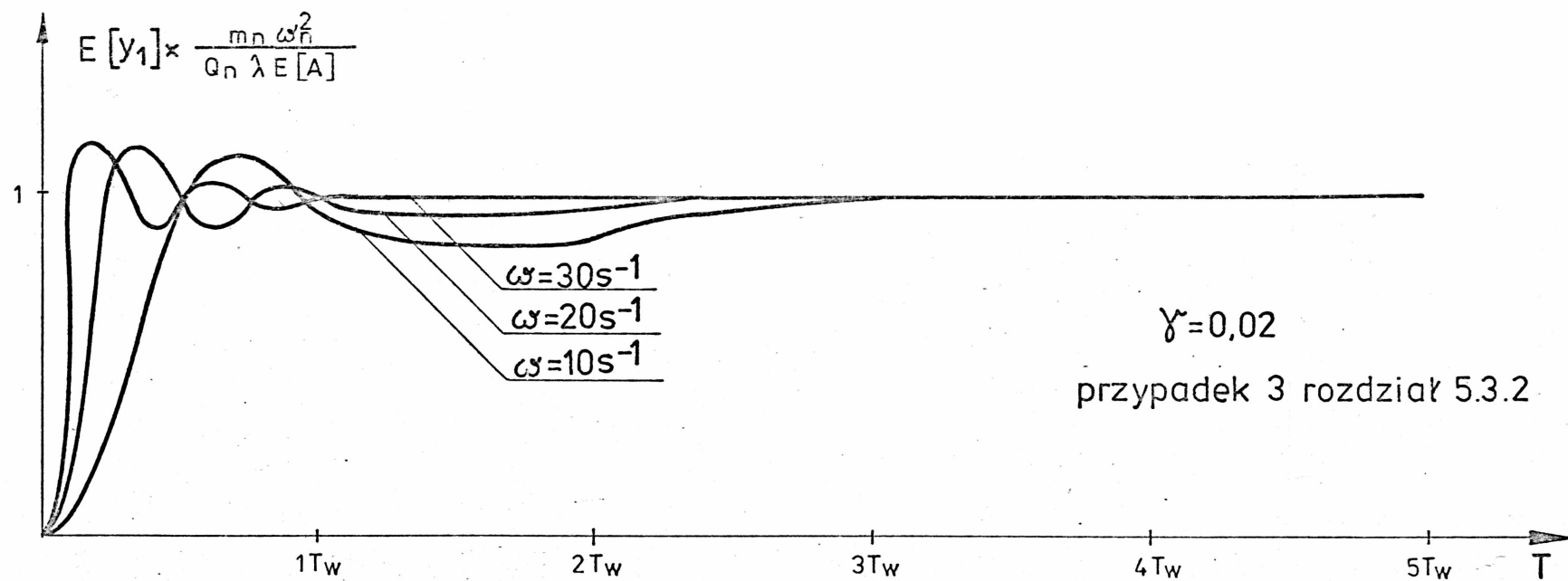
przypadek 1 rozdział 5.3.2



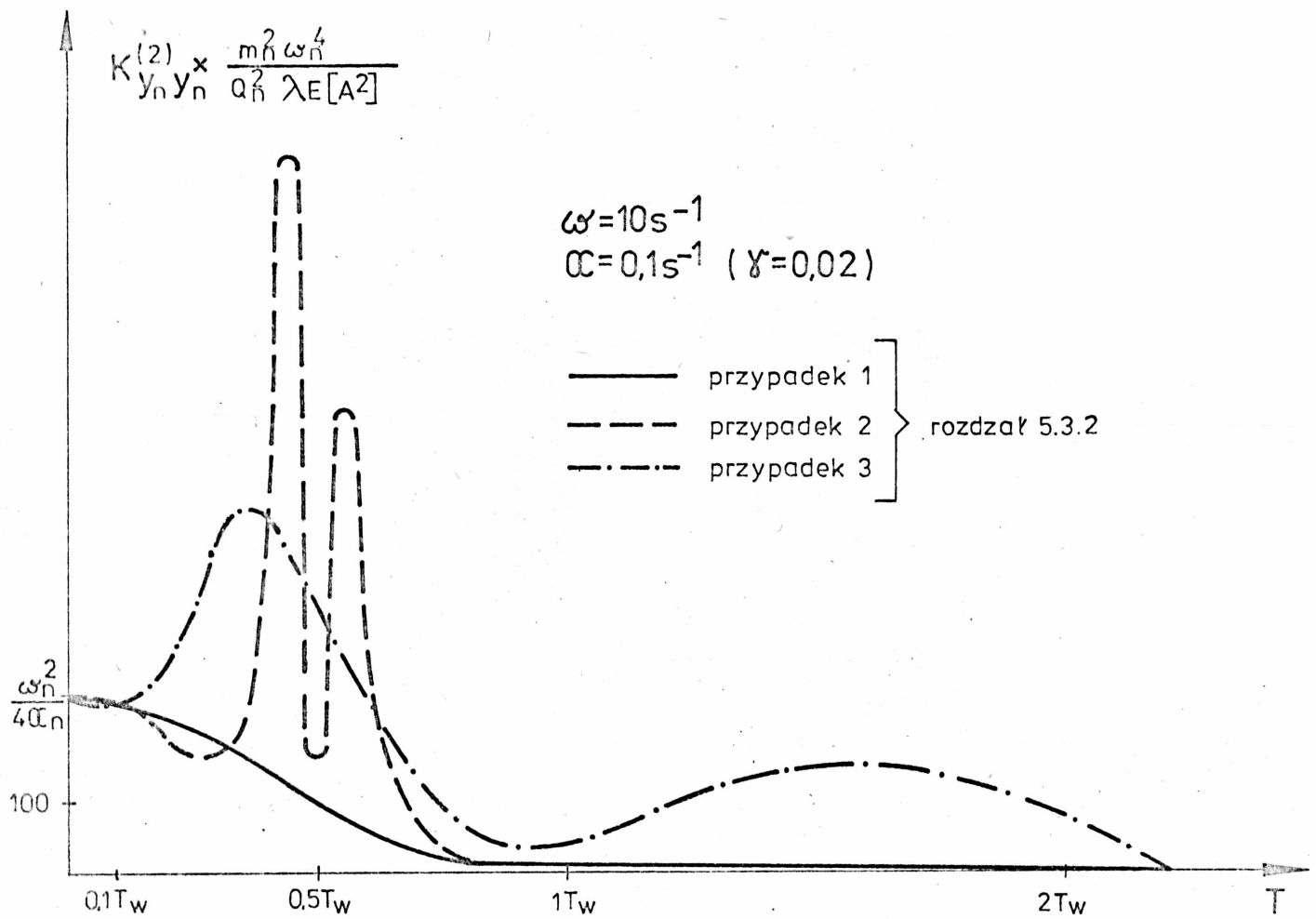
Rys. 18.



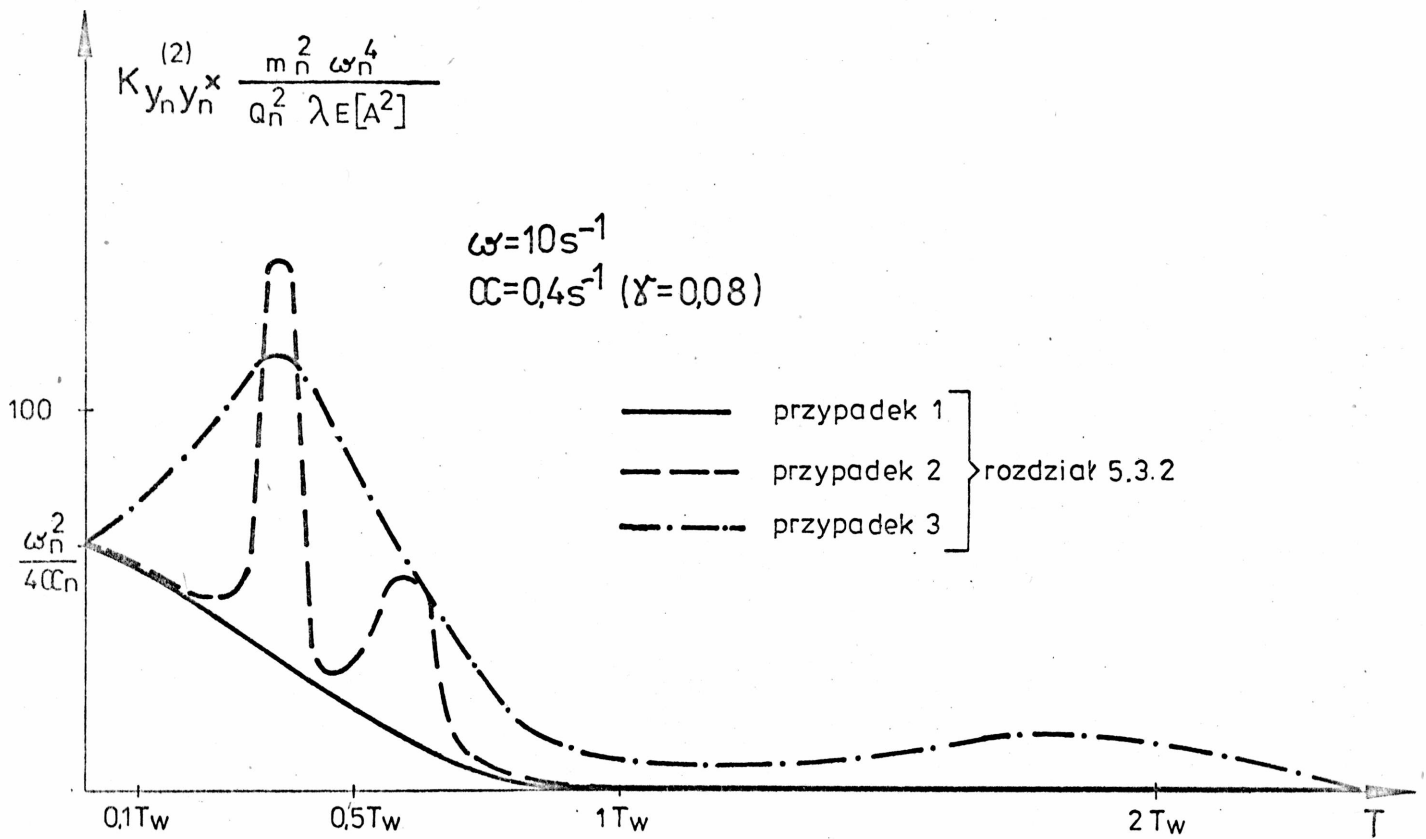
Rys. 19.



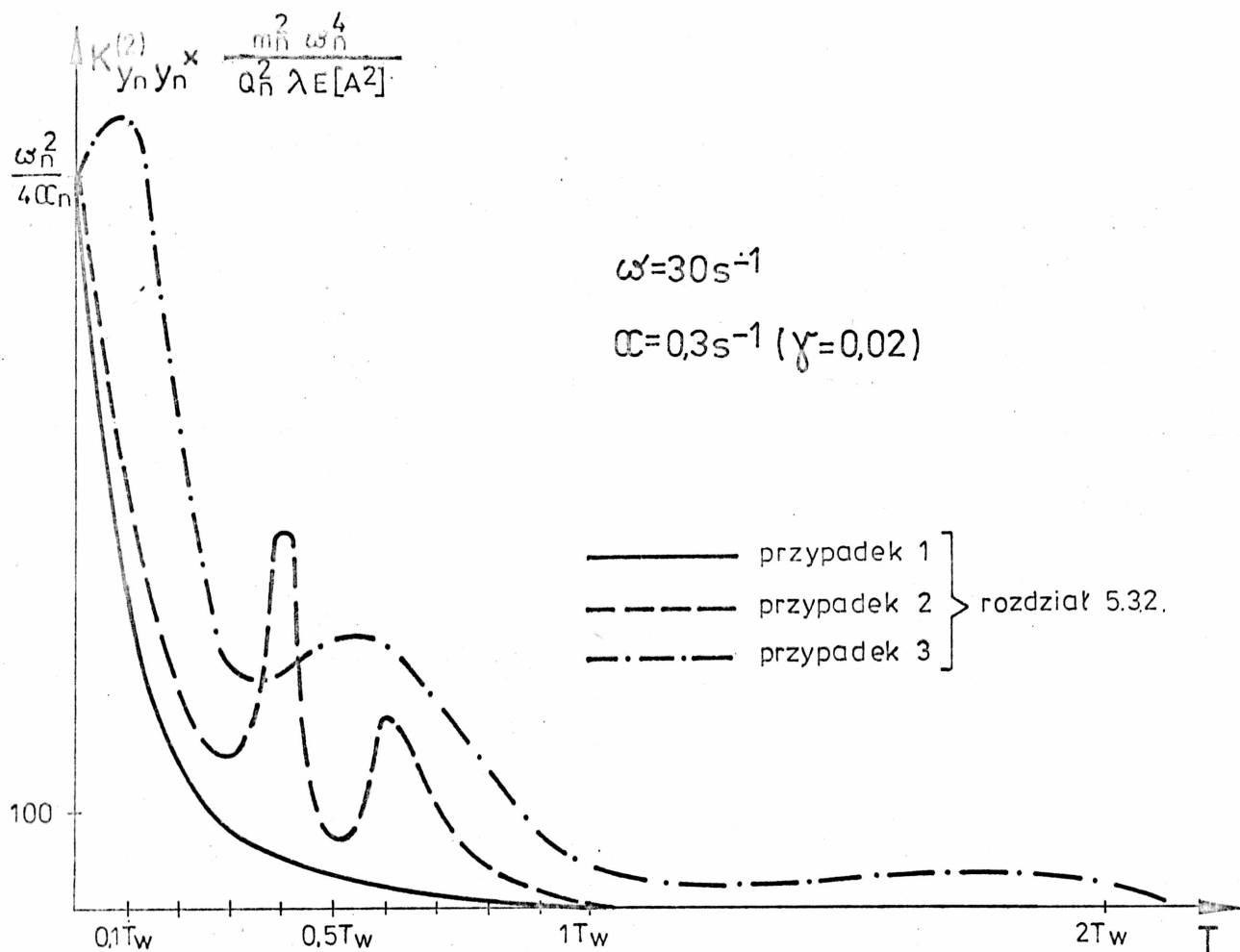
Rys. 20.



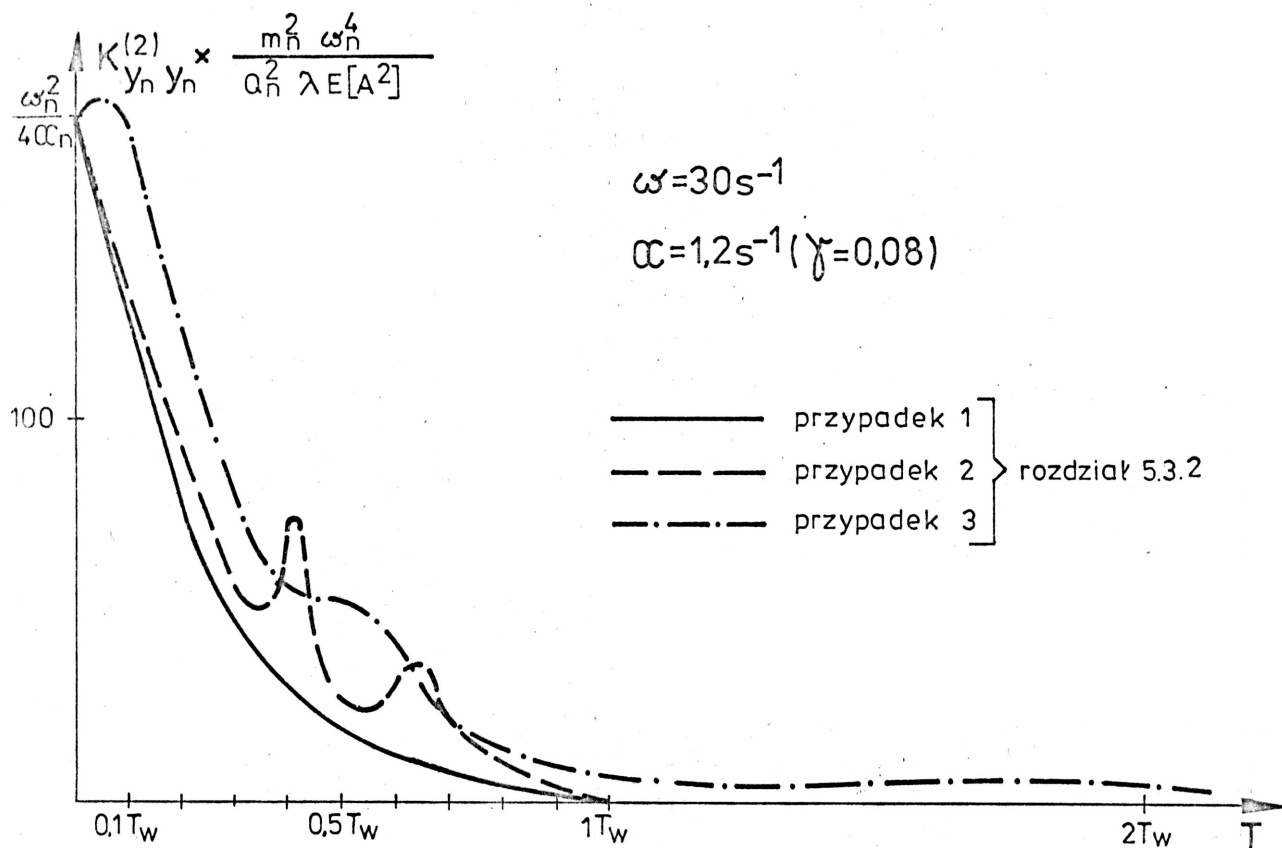
Rys. 21.



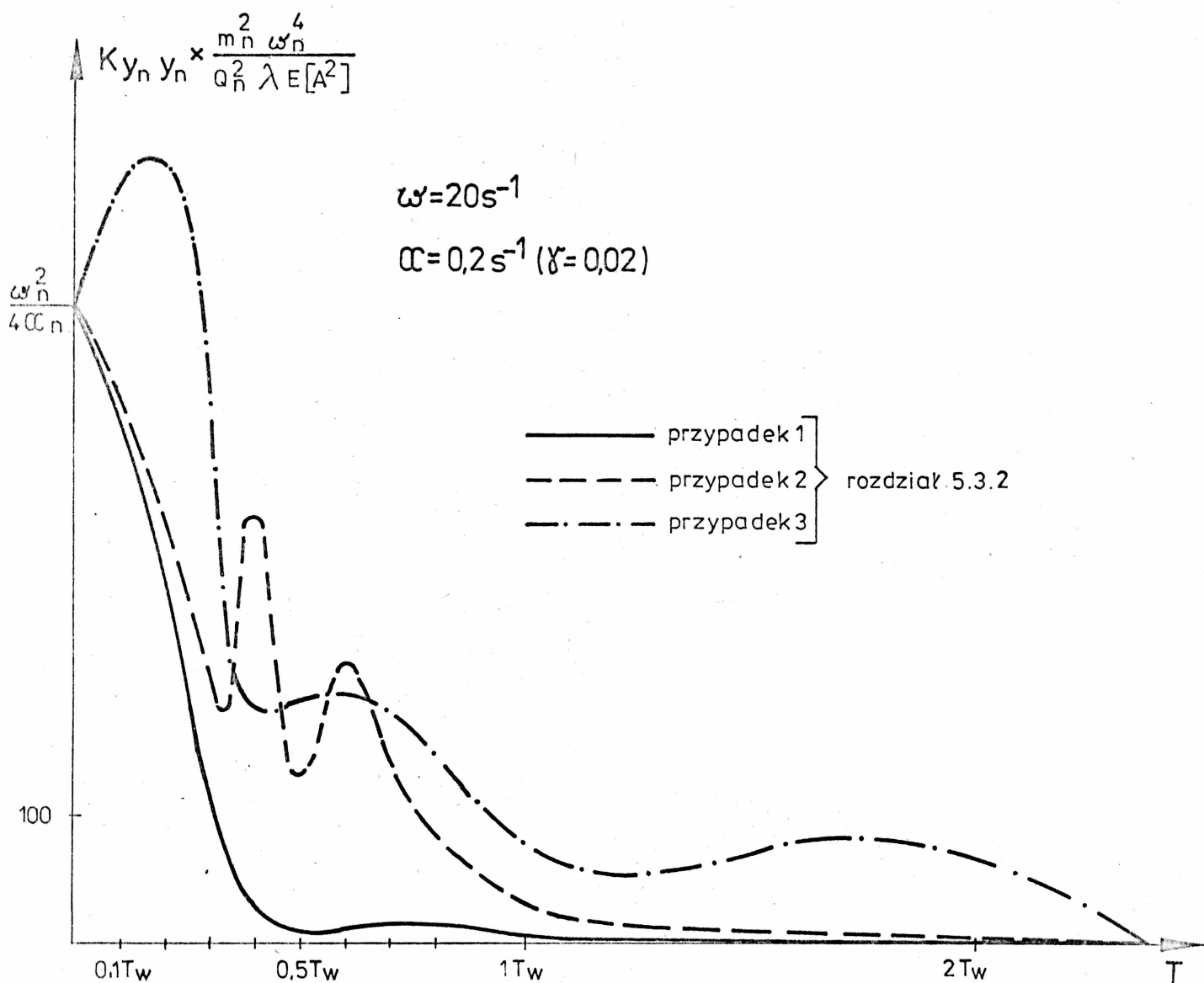
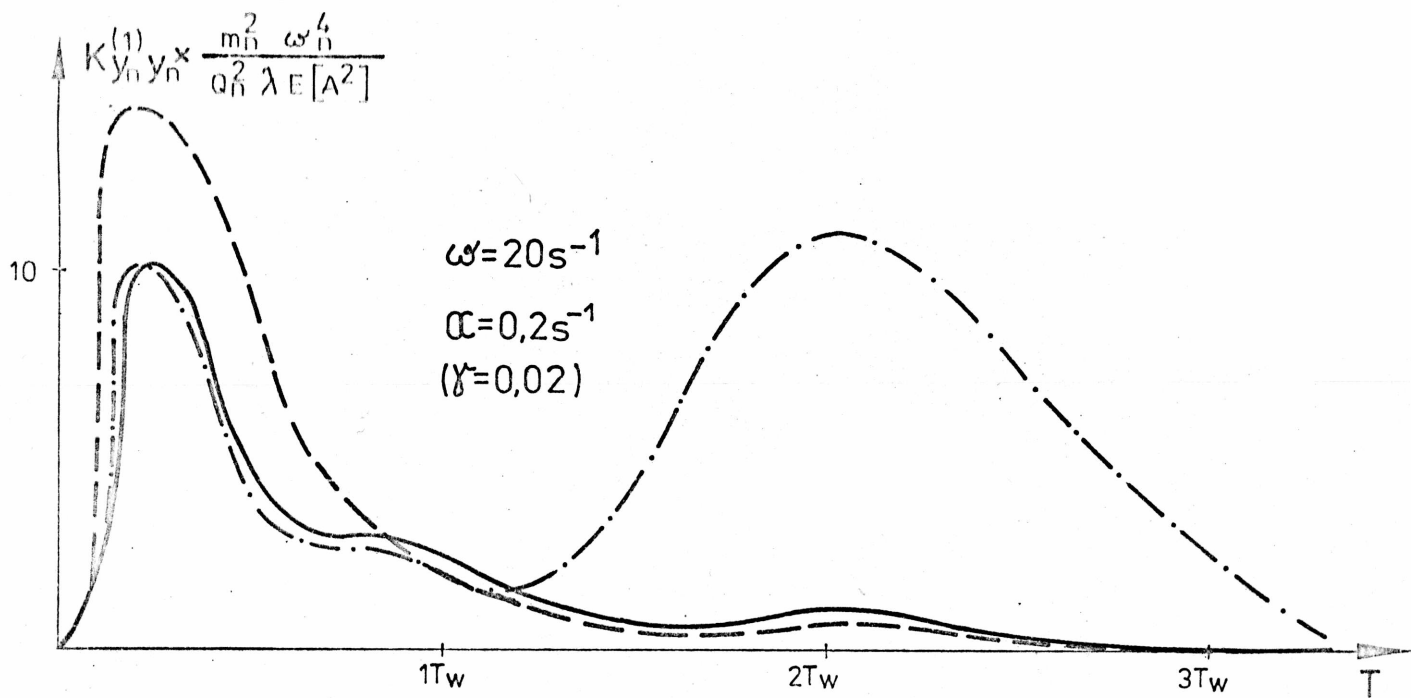
Rys. 22.



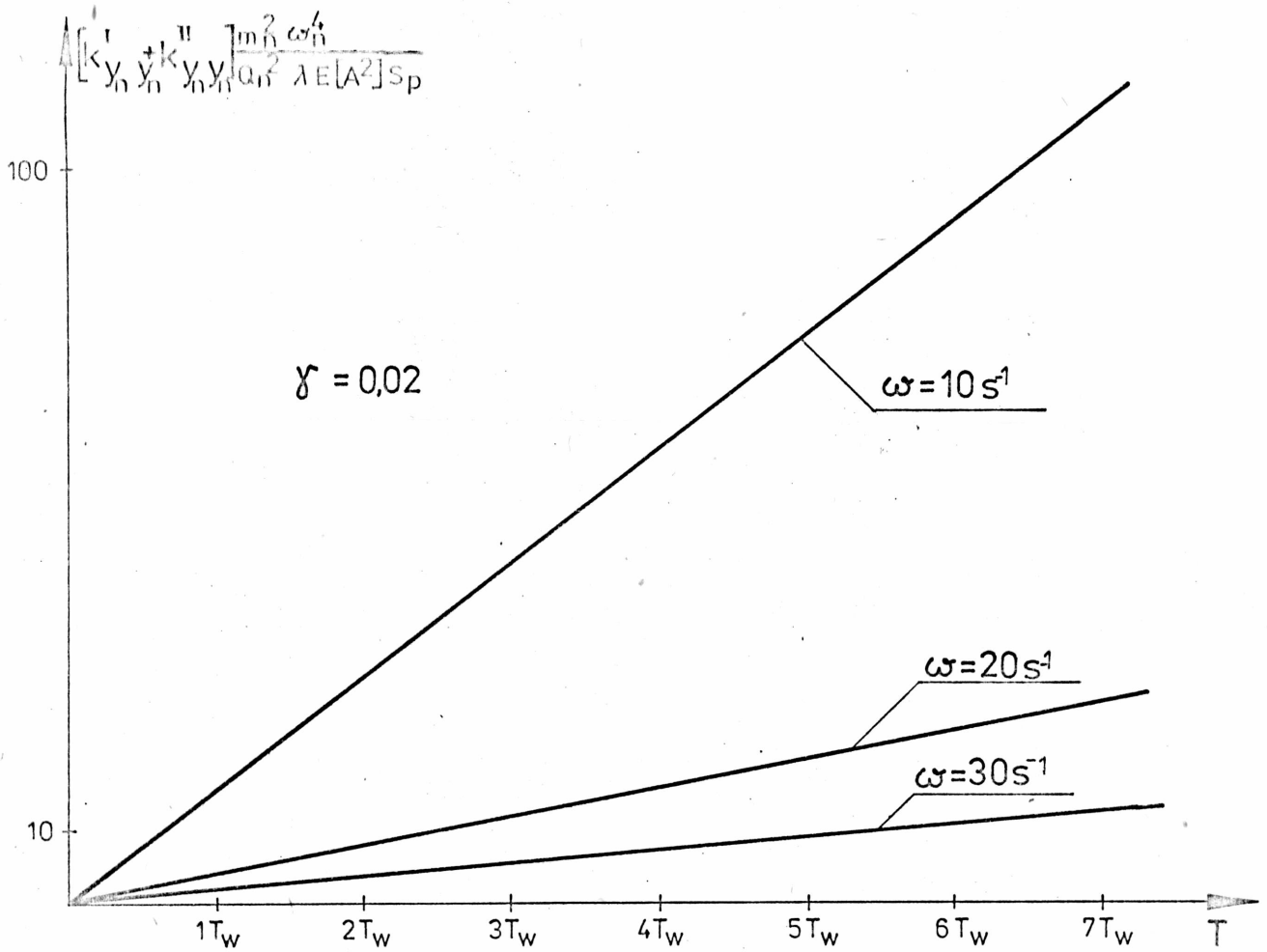
Rys. 23.



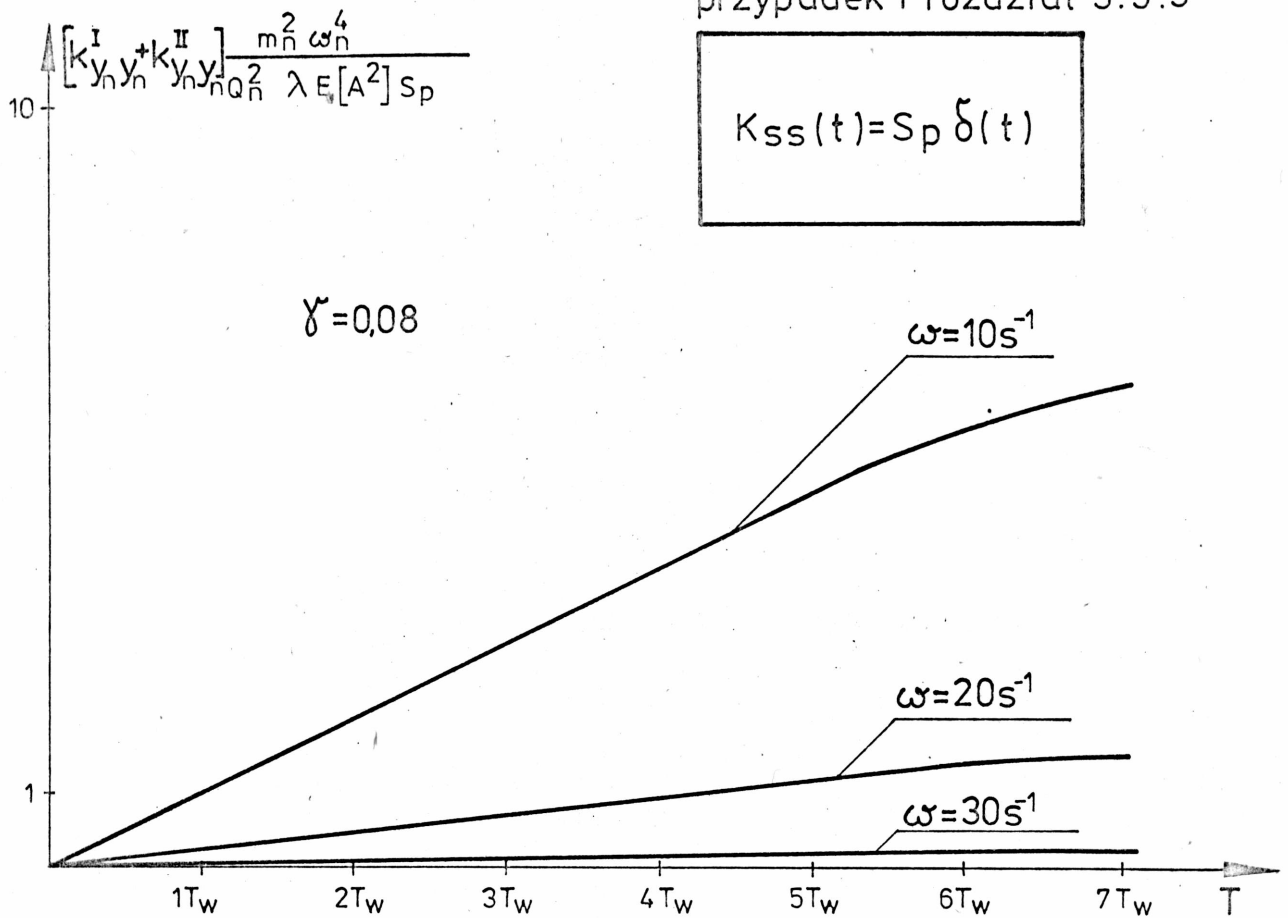
Rys. 24.



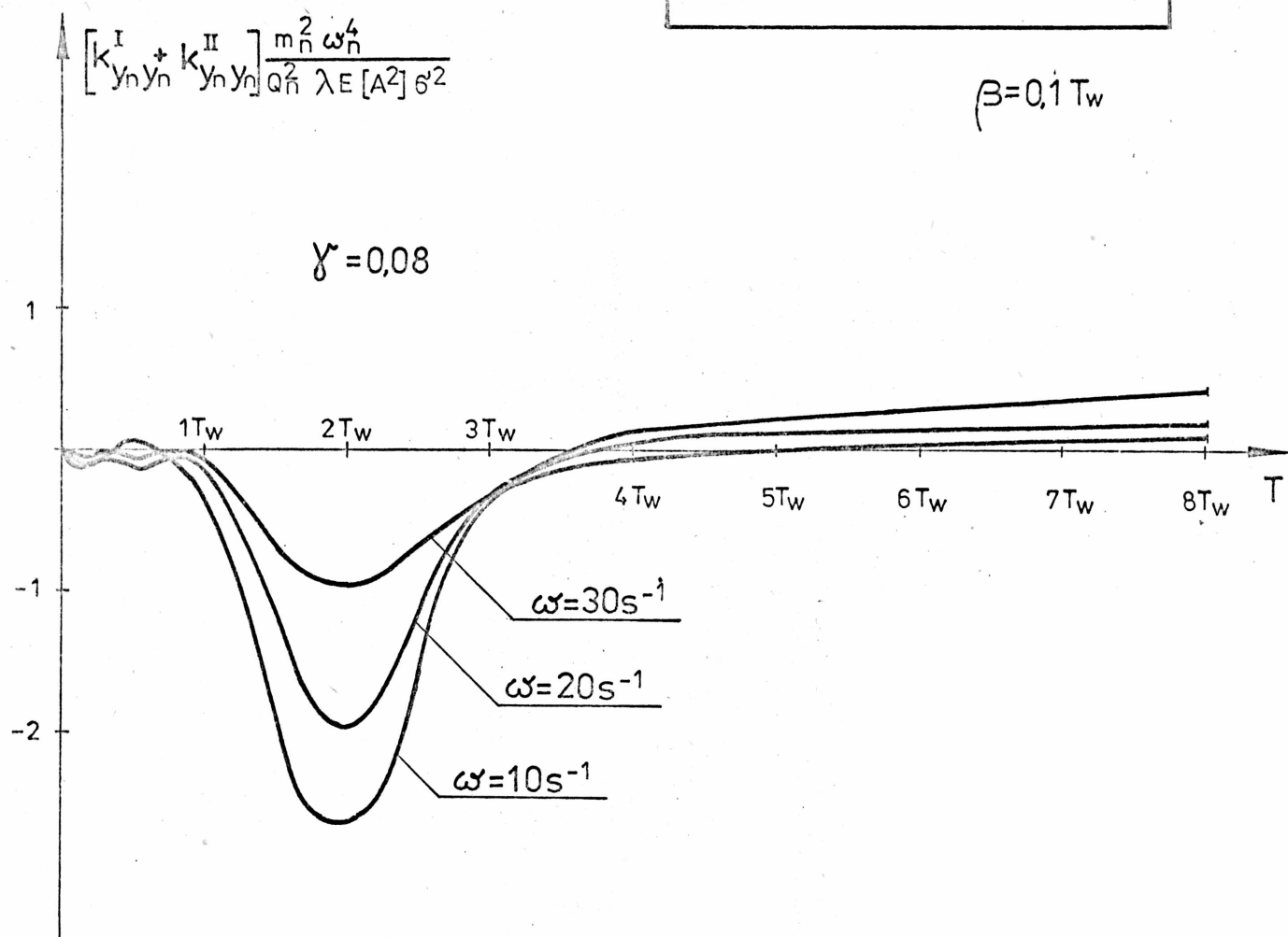
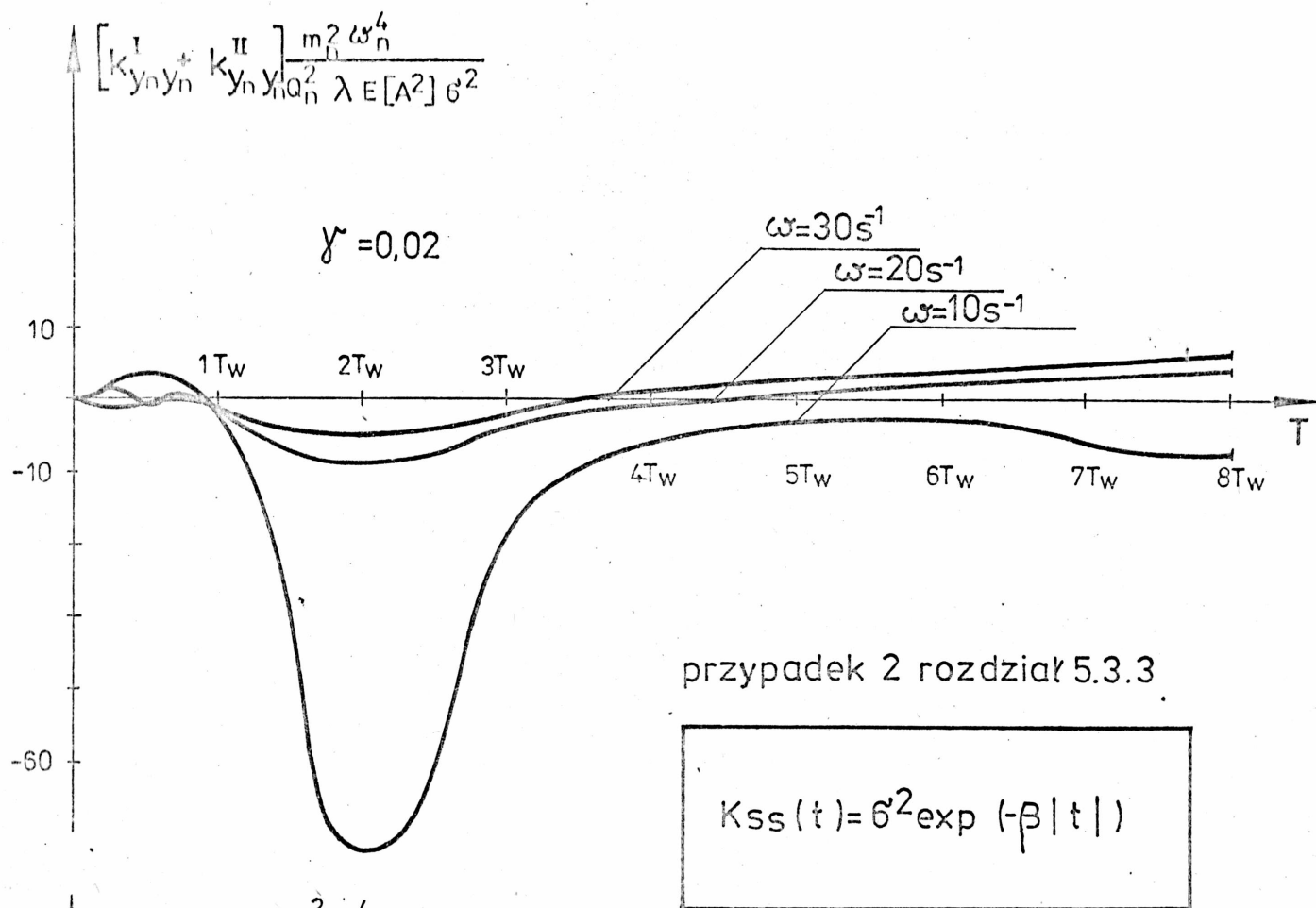
Rys. 25.



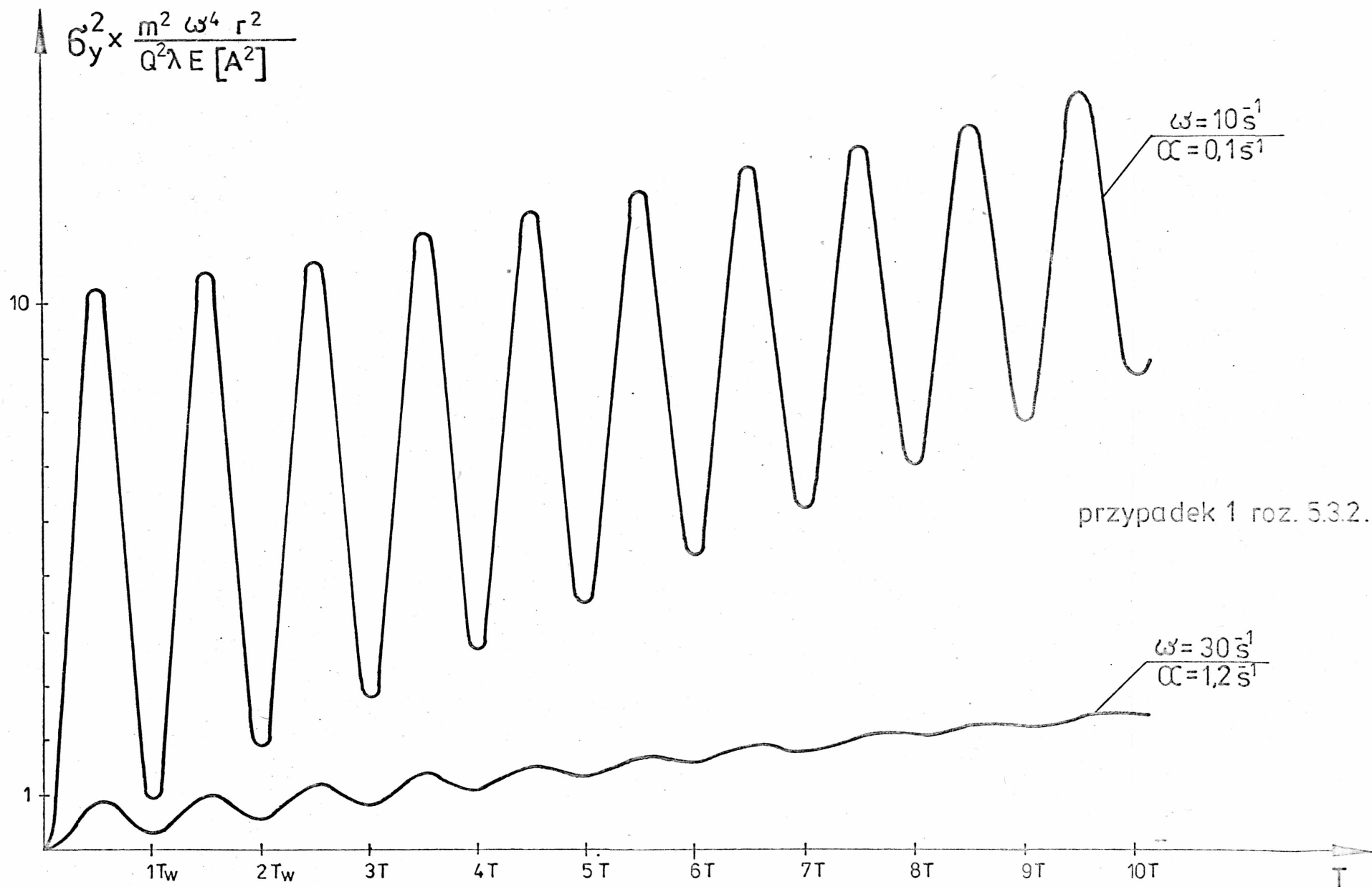
przypadek 1 rozdział 5.3.3



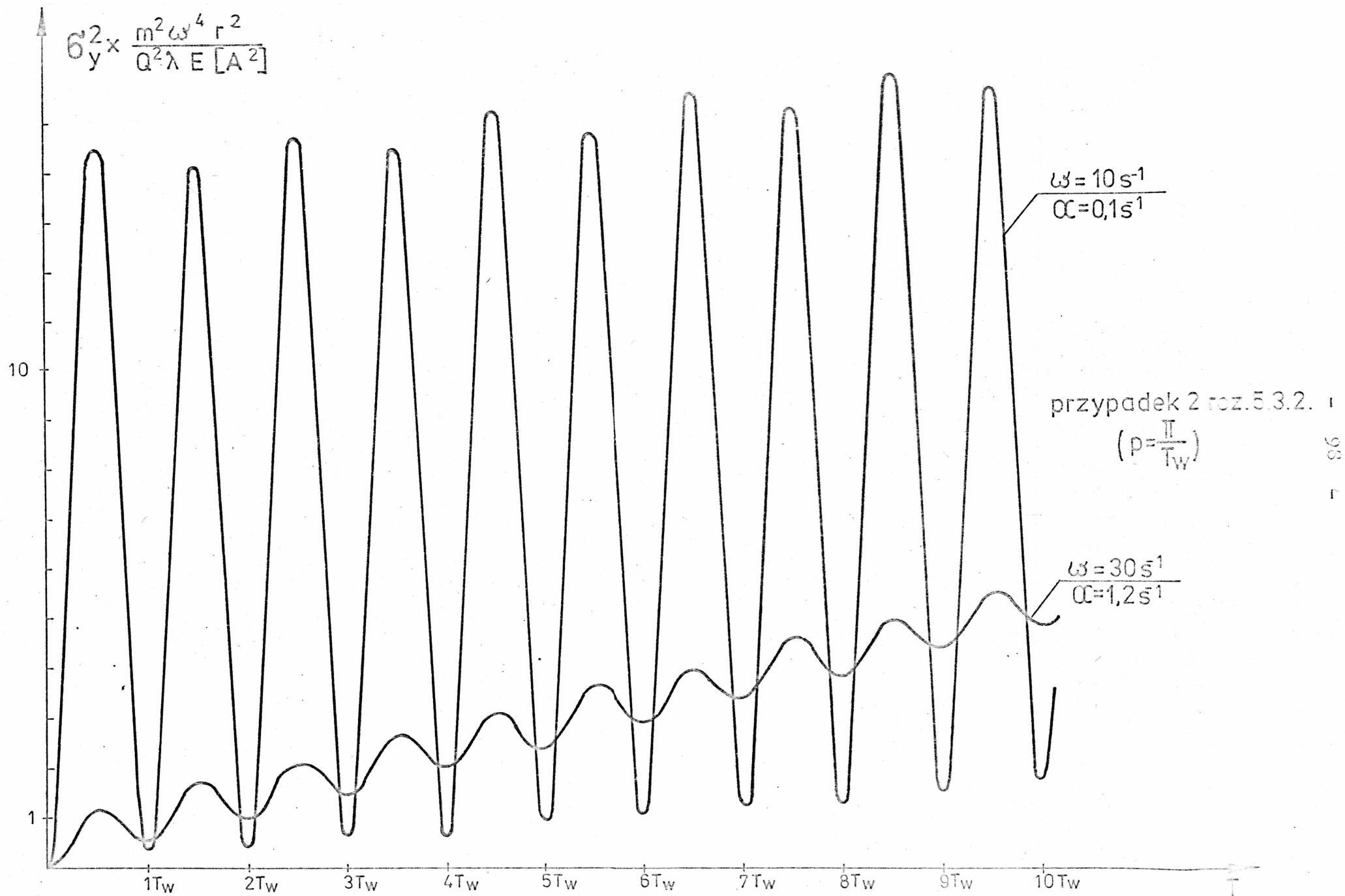
Rys. 26.



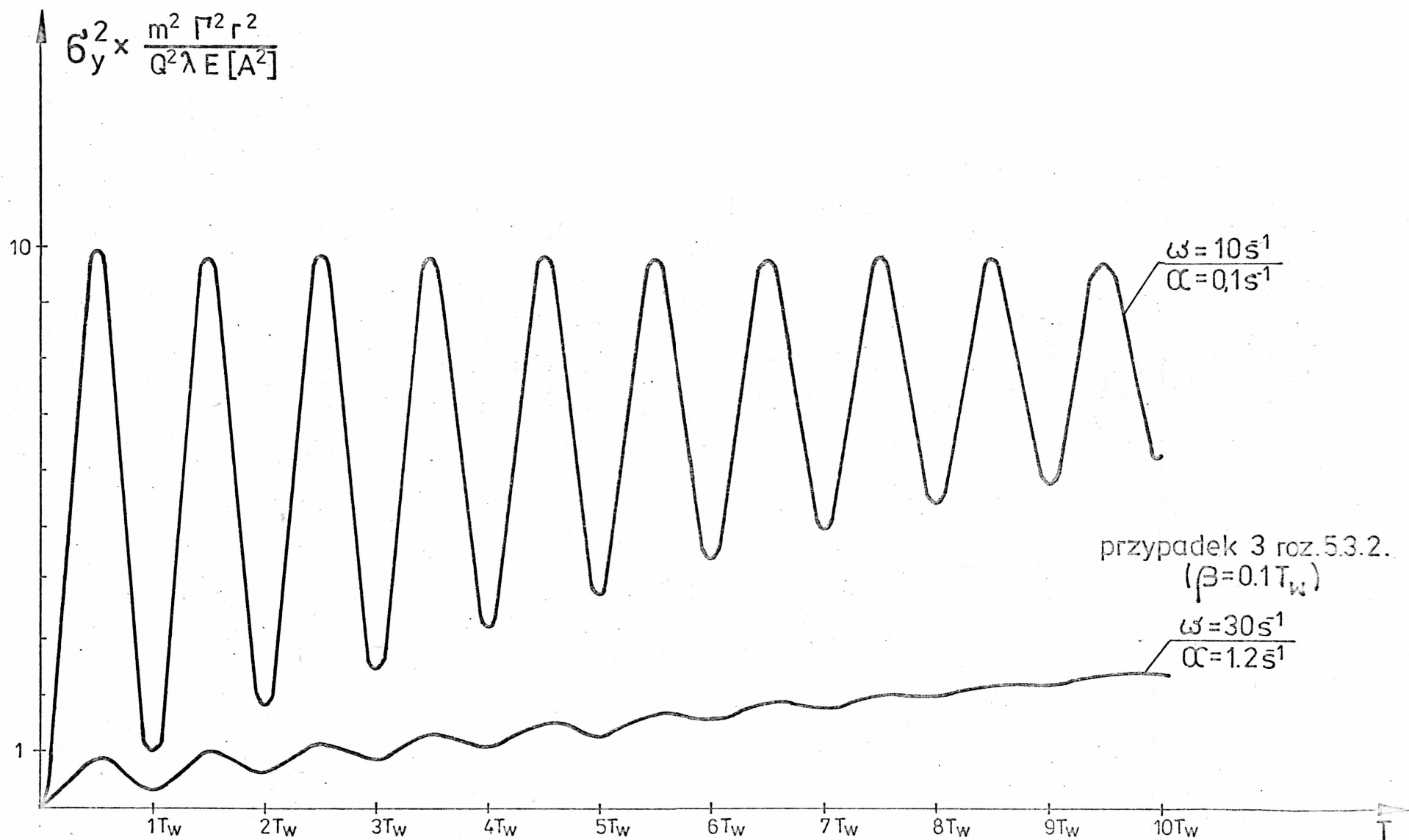
Rys. 27.



Rys. 28.



Rys. 29.



Rys. 30.

9. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono model losowego obciążenia krótkotrwałego, jakim jest seria przypadkowo pojawiających się sił o losowo zmienionych amplitudach i czasach oddziaływania na układ. Spotykane w literaturze modele losowego wymuszenia przybierają różne postaci, od najprostszej - deterministyczna seria impulsów typu δ Diraca - po bardziej skomplikowane, jak np. seria sił, których amplitudy są zmiennymi losowymi, okres trwania jest skończony i stały, a kształt w czasie opisują proste funkcje deterministyczne. Zaproponowany tu model matematyczny uwzględniający stochastyczny charakter szeregu elementów składających się na pojęcie obciążenia losowego jest ogólniejszy niż inne, znane z dotychczasowych rozwiązań. Przyjęto, że proces pojawiania się obciążenia jest niestacjonarnym procesem Poissona lub ogólnym procesem punktowym, w którym istnieje korelacja między kolejnymi zgłoszeniami sił. Czasy oddziaływania obciążenia na konstrukcję mogą mieć charakter zmiennej losowej, przy czym dla opisu tej zmiennej wprowadzono jednopunktowy proces stochastyczny /nazwa jego wynika z analogii do punkтового procesu zgłoszeń $N(t)$ /. Przyjęto, że amplitudy sił są niezależnymi zmiennymi losowymi, lecz stosunkowo prosto można uwzględnić fakt ich wzajemnego skorelowania. Kształt obciążenia w czasie jest dowolny: deterministyczny lub przyjmujący charakter ciągłego procesu stochastycznego. Tak ogólny model może znaleźć konkretne zastosowanie w dynamice konstrukcji mostowych, budowli narażonych na działanie wstrząsów sejsmicznych, maszyn udarowych, itp.

Zasadniczym celem pracy było wyznaczenie charakterystyk probabilistycznych, jak wartość oczekiwana i funkcja korelacyjna odpowiedzi układu obciążonego losową serią sił. Wprawdzie główny akcent położono na analizę problemu w zakresie teorii korelacyjnej, lecz również wskazano możliwość otrzymania momentów wyższego rzędu oraz funkcji charakterystycznej i funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Przedstawiono wzory pozwalające na obliczenie wymienionych charakterystyk w wybranych przypadkach szczególnych, tzn. wówczas, gdy możliwe jest ustalenie funkcji kształtu obciążenia oraz rodzaju zmiennej /losowej lub deterministycznej/, jaką jest czas działania każdej siły na układ. Rozpatrzono przypadki impulsów prostokątnych,

sinusoidalnych, wykładniczo malejących oraz nieregularnych o funkcji korelacyjnej typu "biały szum" i eksponencjalnej. Podane zależności mogą mieć zastosowanie np. w określaniu niezawodności konstrukcji, na co wskazano w pracy. Związki wyprowadzone dla stanu ustalonego przyjmują prostą postać i posługiwanie się nimi nie stwarza trudności. Należy podkreślić, że w wybranych przypadkach szczególnych wyznaczono poszukiwane charakterystyki probabilistyczne przy pewnych założeniach dotyczących znajomości m.in. wielkości sił, ich rozkładu po geometrii układu czy procesu zgłoszeń obciążenia. Wprowadzenie tych założeń umożliwiło posłużenie się zależnościami ogólnymi, dlatego też związki opisujące wartość oczekiwaną i funkcję korelacyjną lub wariancję przemieszczenia przedstawione w punktach 5.3.2, 5.3.3 i 6.2 można stosować tylko w określonych sytuacjach.

W odpowiedzi układu uwzględniono drgania wymuszone siłami obciążającymi konstrukcję w chwili obserwacji zjawiska oraz drgania swobodne, zainicjowane działaniem sił już wyłączonych z procesu obciążeń. Wprawdzie taka metoda postępowania prowadzi do bardzo złożonych wyrażeń analitycznych, ale pozwala na pełną analizę numeryczną problemu. Analizę tę przeprowadzono w celu zbadania wpływu wybranych parametrów na wartości charakterystyk probabilistycznych przemieszczenia i na jej podstawie można sformułować następujące wnioski:

- Przyjęty kształt obciążenia decyduje o wielkościach i tempie zmiany rozpatrywanych funkcji, wydaje się więc celowe uwzględnienie w omawianym modelu faktu, iż siły tworzące serię zmieniają w czasie swoją postać w określony sposób.
- Potwierdza się, że te części wartości oczekiwanej i wariancji, które odpowiadają drganiom swobodnym, układu mają - przy ustalonej częstotliwości drgań własnych - niewielki udział w wartościach wymienionych charakterystyk i w pewnych zakresach parametru tłumienia możliwe jest ich pominięcie, co znacznie upraszcza zagadnienie.
- Podczas analizy wpływu czasu oddziaływania obciążenia stwierdzono, że wartości wariancji odpowiadające drganiom wymuszonym są bardzo małe w porównaniu z jej drugą częścią /drgania swobodne/ wówczas, gdy czas trwania sił jest mały, tzn. porównywalny z okresem drgań własnych układu / $T \in (0; 1 T_w)$ /. W stanie ustalonym przy T dążącym do zera decydujące znaczenie ma korelacja między drganiami wymuszonymi.

- Interesujący jest fakt, że na zmianę wariancji duży wpływ ma czas działania sił w porównaniu z okresem drgań własnych układu. Wariancja przemieszczenia, niezależnie od kształtu obciążenia, przyjmuje maksymalne wartości dla $T = (n - 0,5) T_w$, a minimalne - dla $T = n T_w$, $n = 1, 2, 3, \dots$, co ma istotne znaczenie w analizie niezawodności konstrukcji.

W rozważaniach ograniczono się do problemu drgań układu liniowego. Otrzymane rezultaty mogą mieć zastosowanie w analizie układów nieliniowych wówczas, gdy istnieje możliwość dokonania linearyzacji statystycznej.

DODATEK

Poniżej podano wyrażenia określające całki używane w pracy.
Symbole a, b, c należy zastąpić odpowiednimi parametrami

$$J_1(a, b) = \int_{t-T}^t e^{-a(t-\tau)} \sin b(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[b - e^{-aT} (a \sin bT + b \cos bT) \right]$$

$$J_2(a, b) = \int_{t-T}^t e^{-a(t-\tau)} \cos b(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[a + e^{-aT} (b \sin bT - a \cos bT) \right]$$

$$J_3(a, b, c) = \int_{t-T}^t e^{-a(t-\tau)} \sin b(t-\tau) \cos c(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} J_1(a, b-c) + \frac{1}{2} J_1(a, b+c)$$

$$J_4(a, b, c) = \int_{t-T}^t e^{-a(t-\tau)} \sin b(t-\tau) \sin c(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} J_2(a, b-c) - \frac{1}{2} J_2(a, b+c)$$

$$J_5(a, b, c) = \int_{t-T}^t e^{-a(t-\tau)} \cos b(t-\tau) \cos c(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} J_2(a, b-c) + \frac{1}{2} J_2(a, b+c)$$

$$J_6(a, b) = \int_0^{t-T} e^{-a(t-\tau)} \sin b(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[e^{-aT} (a \sin bT + b \cos bT) - e^{-at} (a \sin bt + b \cos bt) \right]$$

$$\begin{aligned}
 J_7(a, b) &= \int_0^{t-T} e^{-a(t-\tau)} \cos b(t-\tau) d\tau = \\
 &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[e^{-aT} (a \cos bT - b \sin bT) - e^{-at} (a \cos bt - b \sin bt) \right]
 \end{aligned}$$

LITERATURA

1. D.BOBROWSKI, Probabilistyka w zastosowaniach technicznych, WN-T, Warszawa 1980.
2. Z.BODARSKI, J.BUGIERA, H.PASTERNAK, Wyznaczenie ekstremalnych obciążeń stochastycznych za pomocą symulacji cyfrowej, XXVI Konferencja Naukowa Komitetu ILiW PAN i Komitetu Nauki PZiTb, Krynica 1980.
3. W.W.BOLOTIN, Metody statystyczne w mechanice budowli, Arkady, Warszawa 1968.
4. C.CEMPEL, Optymalizacja układu drgającego przy okresowym wymuszeniu impulsowym, Rozpr.Inż., t. XIX, z. 4, 1971.
5. T.CHMIELEWSKI, Drgania prostego układu dynamicznego poddanego pewnemu wymuszeniu losowemu, Arch.Inż.Ląd., t. XXII, z. 2, 1970.
6. T.CHMIELEWSKI, Metody probabilistyczne w dynamice konstrukcji, Studia i Monografie, z. 1, WSI Opole 1982.
7. T.CHMIELEWSKI, J.CHROBAK, Analiza stochastyczne drgań liniowych układów dyskretnych, XXVII Konferencja Naukowa Komitetu ILiW PAN i Komitetu Nauki PZiTb, Krynica 1981.
8. R.CHROBOK, W.MIRONOWICZ, Doświadczenia z dynamicznych badań stropów obciążonych maszynami włókienniczymi, Przegląd Budowlany, 2, 1984.
9. R.CHROBOK, P.ŚNIADY, Losowe drgania konstrukcji wsporczej wywołane pracą maszyn, XXIX Konferencja Naukowa Komitetu ILiW PAN i Komitetu Nauki PZiTb, Krynica 1983.
10. R.CIESIELSKI, E.MACIĄG, Przekazywanie się na budynki drgań wzbudzonych ruchem drogowym, XXIX Konferencja Naukowa Komitetu ILiW PAN i Komitetu Nauki PZiTb, Krynica 1983.
11. R.CIESIELSKI, E.MACIĄG, M.PIERONEK, Spektra odpowiedzi drgań wywołanych ruchem drogowym, XXVI Konferencja Naukowa Komitetu ILiW PAN i Komitetu Nauki PZiTb, Krynica 1980.
12. R.W.CLOUGH, I.PENZHEN, Dynamics of structures, McGraw-Hill Book Co Inc., New York 1975.
13. S.H.CRANDALL i in., Random vibration, Technology Press, Wiley, 1958, 1963.
14. M.FISZ, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN Warszawa 1967.

15. L.FRYBA, Vibration of solids and structures under moving loads, Academia, Praga 1972.
16. J.J.GICHMAN, A.W.SKOROCHOD, Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN Warszawa 1968.
17. M.GŁADYSZ, P.ŚNIADY, Losowa seria sił jako model obciążenia sejsmicznego, II Konferencja Bezpieczeństwo Budowli Mostowych, Wrocław 1982.
18. M.GŁADYSZ, P.ŚNIADY, Drgania konstrukcji wywołane losową serią obciążeń krótkotrwałych, XXVIII Konferencja Naukowa Komitetu ILiW PAN i Komitetu Nauki PZiTb, Krynica 1982.
19. M.GŁADYSZ, P.ŚNIADY, Losowe drgania układu dyskretnego wywołane serią sił tworzących proces Poissona, Arch.Inż.Ląd., t. XXX, z. 1, 1984.
20. R.GRYBÓŚ, Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych, Biblioteka Mechaniki Stosowanej, PWN Warszawa 1969.
21. R.IWANKIEWICZ, Drgania belki przy stochastycznym wymuszeniu impulsowym, Rozpr.Inż., 30, 3-4, 1982.
22. R.IWANKIEWICZ, K.SOBCZYK, Dynamic response of linear structures to correlated random impulses, J.Sound and Vibr., Vol. 86, No. 3, 1983.
23. R.IWANKIEWICZ, Stochastic point processes in seismic analysis of structures, IV International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Firenze, 1983.
24. S.KALISKI i in., Drgania i fale w ciałach stałych, IPPT PAN, Warszawa 1966.
25. S.KARKIN, A first course in stochastic processes, Academic Press New York 1968.
26. J.LANGER, O dynamicznych efektach serii impulsów, Arch.Inż.Ląd., t. XVI, z. 2, 1970.
27. J.LANGER, Dynamika budowli, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej Wrocław 1980.
28. Y.K.LIN, Nonstationary excitation and response in linear systems treated as sequences of random pulses, J.Acoust.Society of America, Vol. 38, 1965.
29. Y.K.LIN, Probabilistic theory of structural dynamics, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York 1967.

30. Y.K.LIN, On statistical moments of fatigue crack propagation, Eng.Fract.Mech., Vol. 18, No 2, 1983.
31. J.LIPIŃSKI, Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny, Arkady, Warszawa 1969.
32. P.MAZZETTI, Correlation function and power spectrum of a train of non-independent overlapping pulses having random shape and amplitude, Nuovo Cimento, Vol. 31, No 88, 1964.
33. N.A.NIKOLAJENKO, Wierojatnostnyje metody dynamiczieskowo ras-cziota maszynostroitielnych konstrukcji, Maszynostrojenije, Moskwa 1967.
34. A.PAPOULIS, Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne, Wyd.Nauk.-Tech., Warszawa 1972.
35. E.PARZEN, Stochastic processes, Holden-Day, 1962.
36. W.PASZKE, S.ŻUKOWSKI, Dynamiczne skutki uderzenia "trójkątnego" w układzie o jednym stopniu swobody, Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej, Studia i Materiały, nr 9, Politechnika Wrocławska 1973.
37. K.PISZCZEK, Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych, Małe Monografie PWN, 1982.
38. B.RAMA BHAT, B.V.A. RAO, H.WAGNER, Structural response to random acoustic excitation, Earthquake Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 2, 1973.
39. A.RENGER, Equation for probability density of vibratory system subjected to continuous and discrete stochastic excitation. Zeitschr. für angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 59, No 1, 1979.
40. S.O.RICE, Mathematical analysis of random noise, Bull.Syst.Tech. J., Vol. 23, No 282, 1944.
41. J.B.ROBERTS, The response of linear vibratory systems to random impulses, J.Sound and Vibr., Vol.2, No. 4, 1965.
42. J.D.ROBSON, V.R.PALING i in., Wprowadzenie do drgań stochastycznych, IPPT PAN 1973.
43. J.A.ROZANOW, Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN Warszawa 1974.
44. B.SKALMIERSKI, A.TYLIKOWSKI, Procesy stochastyczne w dynamice, Małe Monografie PWN 1972.

45. K.SOBCZYK, Zarys teorii prawdopodobieństwa, Wyd.Politechniki Poznańskiej, Poznań 1970.
46. K.SOBCZYK, Metody dynamiki statystycznej, PWN Warszawa 1973.
47. S.K.SRINIVASAN, Stochastic point processes and their application, Griffin, London, 1973.
48. S.K.SRINIVASAN, R.SUBRAMANIAN, S.KUMARASWAMY, Response of linear vibratory systems to non-stationary stochastic impulses, J.Sound and Vibr., Vol. 6, No 2, 1967.
49. P.ŚNIADY, Drgania belki nieskończenie długiej wywołane losową serią sił ruchomych, Rozpr.Inż., t. 31, z. 2, 1983.
50. P.ŚNIADY, R.IWANKIEWICZ, Vibration of a bridge beam due to highway traffic, Arch.of Mech., Vol. 36, No 5-6, 1983.
51. C.C.TUNG, Random response of highway bridges to vehicle loads, J.Eng.Mech.Div., ASCE, Vol. 93, EM 5, 1967.
52. C.C. TUNG, Life expectancy of highway bridges to renewal traffic loads, J.Eng.Mech.Div.ASCE, Vol. 95, EM 1, 1969.
53. A.TYLIKOWSKI, Oscylator harmoniczny poddany ciągłowi przypadkowych zderzeń jako prosty model maszyny uderowej, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Dynamika i Stateczność Konstrukcji, z. 13, 1983.
54. D.VERNE-JONES, Stochastic models for earthquake occurrence, J. Royal Stat.Soc., B, 32, 1970.
55. J.N.YANG, Y.K.LIN, S.SAE-UNG, Tall building response to earthquake excitations, J.Eng.Mech.Div., ASCE, Vol. 106, EM 4, 1980.
56. J.A.ŻURAŃSKI, Obciążenie wiatrem budowli i konstrukcji, Arkady Warszawa 1980.

DYNAMIKA KONSTRUKCJI PODDANYCH DZIAŁANIU LOSOWEJ SERII OBCIĄŻEŃ KRÓTKOTRWAŁYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono model losowego obciążenia krótkotrwałego w postaci serii sił, których chwile pojawiania się, wielkości oraz czasy oddziaływania na układ są zmiennymi losowymi. Kształt każdej siły w czasie opisuje funkcja deterministyczna lub proces stochastyczny o znanej funkcji korelacyjnej. Uwzględniono korelację między kolejnymi chwilami zgłoszeń sił oraz między różnymi okresami trwania obciążenia. Wyznaczono charakterystyki probabilistyczne, jak wartość oczekiwana i funkcja korelacji przemieszczeń układu obciążonego w zaproponowany sposób. Przedstawiono rozwiązania ogólne dla drgań układu dyskretnego oraz metodę postępowania w przypadku drgań układu ciągłego. Praca zawiera rozwiązania w zakresie analizy korelacyjnej dla wybranych przypadków szczególnych /funkcja kształtu obciążenia jest stała, sinusoidalna, wykładniczo malejąca, lub jest to proces stochastyczny o funkcji korelacyjnej typu "biały szum" i eksponencjalnej, czas działania sił jest deterministyczny i stały, bądź jest to zmienna losowa/. Przedstawiono metodę wyznaczania funkcji charakterystycznej oraz funkcji gęstości prawdopodobieństwa obciążenia i przemieszczenia układu oraz wykorzystania otrzymanych związków w ocenie niezawodności konstrukcji. Praca zawiera analizę numeryczną wpływu pewnych parametrów na poszukiwane charakterystyki probabilistyczne w wybranych przypadkach szczególnych.

DYNAMIC RESPONSE OF STRUCTURES SUBJECTED TO RANDOM TRAINS OF SHORT-DURATION LOADS

Summary

Random short-duration loading is considered which consists of a train of forces, whose occurrence times, magnitudes and durations are random variables. Time variation of each force may be given by a deterministic function or by a stochastic process with known correlation function. The correlation of the occurrence times and that between the durations is taken into account. A method of evaluating the response expected value and correlation function is proposed. General solutions for a discrete system are given as well as the technique of solution in the case of a continuous system. Detailed solutions, within the framework of the correlation theory, are given for some special cases /constant force, forces with sinusoidal or negative exponential time variation, force with Dirac delta or negative exponential correlation function, constant deterministic or random durations/. The technique of evaluating the characteristic function and the probability density function of both the loading and the response is given and the use of these results in the reliability assessment is proposed. The effect of certain parameters on the response is analyzed in some selected cases.

Mgr inż. Małgorzata Gładysz
Zakład Statyki
Instytut Inżynierii Lądowej
Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże St. Wyspiańskiego 27
50 - 370 Wrocław

M. Gładysz

Raport wpłynął do Redakcji Wydawnictw Instytutu w grudniu 1985 roku.

Lista odbiorców:

Egz.

1. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1
2. Biblioteka i Ośrodek Informacji Naukowo-Technicznej Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej	1
3. Redakcja Wydawnictw Naukowych i Dydaktycznych Instytu- tu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej	1
4. Promotor	1
5. Recenzenci	2
6. Autorka	2
7. Ośrodki obce:	
Instytut Konstrukcji Budowlanych Politechniki Gdańskiej	1
Instytut Podstawowych Problemów Techniki w Warszawie	1
Instytut Mechaniki Budowli Politechniki Krakowskiej	1
Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Szczecińskiej	1

Razem : 12 egz.