

Arkadiusz Maciuk

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

METRYKI W UCZENIU EKONOMII

1. Matematyka na ekonomicznych kierunkach studiów pełni funkcję przedmiotu podstawowego, który powinien być wykładany już na samym początku studiów. Dzięki takiemu rozwiązaniu można korzystać z metod i narzędzi matematycznych na innych przedmiotach, wykładanych na dalszych latach studiów. Razem z mikro- i makroekonomią jest swoistym fundamentem, na którym opiera się dydaktyka ekonomii.

Od ponad 150 lat zmiany materiału nauczania matematyki były w gruncie rzeczy symboliczne. Relacja, przekształcenia liniowe, rachunek różniczkowy i całkowy – tak hasłowo można określić zakres materiału z matematyki wykładanego na pierwszym roku studiów – i to zarówno obecnie, jak i prawie dwieście lat temu. Podobnie w niewielkim stopniu zmieniła się forma przekazywania materiału: wykład z użyciem tablicy oraz ćwiczenia polegające na rozwiązywaniu ze studentami zadań, głównie rachunkowych. To, że tak niewiele się przez te lata zmieniło, wyjaśnić można tym, iż matematyka jako przedmiot dydaktyczny wykładana jest już na tyle długo, by stać się dyscypliną dojrzałą i okrzepłą. Wiadomo, co daje dobre efekty! Co więcej, matematyka dla większości studentów jest przedmiotem na tyle trudnym, że wszelakiego rodzaju eksperymenty są niewskazane. Czyli, po pierwsze, tradycja zobowiązuje, a po drugie, lepiej nie ulepszać tego, co sprawdzone, gdyż efekty zazwyczaj okazują się gorsze.

2. Obecna sytuacja wymusza jednak zmiany w programie nauczania matematyki. Przez ostatnie kilkanaście lat system oświaty w Polsce poddawany jest ciągłym modyfikacjom. Trudno jest obecnie obiektywnie ocenić wpływ tych modyfikacji na jakość procesu dydaktycznego, gdyż na to potrzeba czasu. Jednak z punktu widzenia osób uczących matematyki, nie wszystkie zmiany wydają się korzystne. W szkole średniej w coraz mniejszym stopniu kształci się zdolność do rozumowania abstrakcyjnego, będącego podstawą nowoczesnej nauki. Decydenci odpowiedzialni za obecne zmiany w oświacie mówią wprost o konieczności zmiany roli

matematyki w szkołach. Według nich matematykę w szkołach trzeba zmienić tak, „[...] by szkolna matematyka stała się nie skrótem wiedzy akademickiej, ale przydatnym językiem opisu świata” (M. Sawicki (2005)). Trudno się nie zgodzić z tak postawioną tezą, niemniej nie można nie zauważyć, że obecni kandydaci na studentów mają mniejszą znajomość pojęć, takich jak wektor czy pochodna, a więc pojęć będących podstawą dotychczasowego kursu matematyki na studiach ekonomicznych.

Na to wszystko nakłada się odczuwalna na wielu uczelniach silna presja ze strony nauczycieli akademickich wykładających inne przedmioty, aby zredukować liczbę godzin z matematyki do tak zwanego „minimum programowego”, ustalonego przez Ministerstwo Oświaty. Redukcja taka, w ich mniemaniu, umożliwi przesunięcie „wygospodarowanych” w ten sposób godzin na przedmioty przez nich wykładane. W trakcie dyskusji towarzyszącej tym zmianom można usłyszeć głosy, i to ze strony szacownych profesorów, z poważnym dorobkiem naukowym, typu: „...po co wyklądać studentom matematykę? Ja sam przez te kilkadziesiąt lat bycia ekonomistą z matematyki nie korzystałem, to i oni sobie poradzą bez matematyki”. Oczywiście na tego typu „argumenty” można odpowiedzieć, iż po to, by jeśli nie dogonić naukę światową, to przynajmniej nie dać się zbyt daleko zdystansować od jej poziomu, gdyż podstawowym językiem światowej ekonomii jest matematyka. Świadczy o tym chociażby waga i liczba godzin zajęć z matematyki na czołowych uczelniach ekonomicznych świata czy też lista nagród Nobla z ekonomii, przyznanych w większości przypadków za prace w gruncie rzeczy matematyczne, i to z matematyki bardzo zaawansowanej. Niemniej nie na wszystkich polskich uczelniach ekonomicznych tego typu argumenty docierają do decydentów, czego efektem jest redukcja liczby godzin przeznaczonych na kurs matematyki.

3. Zazwyczaj pierwszą reakcją wykładowcy na konieczność redukcji liczby godzin przeznaczonych na wykład jest jego kondensacja. Tak, by w krótszym czasie wyłożyć tę samą partię materiału. Jednak zazwyczaj okazuje się, że jest to bardzo trudne, a na dłuższą metę nieopłacalne, gdyż by ten cel osiągnąć, wykładowca musi poważnie „gimnastykować” siebie i swoich słuchaczy. Już obecnie program nauczania matematyki jest tak napięty i skondensowany, że jego opanowanie przez studentów nie jest łatwe. Dalsza jego kondensacja sprawia, że każda minuta wykładu staje się bardzo cenna, a studenci muszą wkładać coraz więcej wysiłku w jego opanowanie, gdyż coraz więcej materiału są zmuszeni opanowywać samodzielnie. Narasta w nich frustracja, w efekcie czego coraz większy ich odsetek zniechęca się do korzystania z matematyki w przyszłości – co dla ekonomii jest przecież wymierną stratą.

4. Innym, stosunkowo prostym rozwiązaniem, jest redukcja materiału poprzez pominięcie pewnych jego partii. Często wtedy dochodzi do poważnych dylematów: z czego zrezygnować?

„Ofiarą” takich redukcji może być materiał poświęcony metrykom. W obecnym programie nauczania matematyki metryki odgrywają rolę wstępu do pojęcia

zbieżności i granicy, a w konsekwencji do konstrukcji pojęcia pochodnej. W gruncie rzeczy do zrozumienia pojęcia granicy wystarczy powszechnie stosowana i intuicyjnie zrozumiała metryka euklidesowa, stąd poczucie, że można bezkarnie zrezygnować z metryk, nie tracąc przy tym nic na spójności wykładu.

5. Rezygnacja z metryk może być jednak błędem, i to nie tylko z przyczyn dydaktycznych. Dla studenta narysowanie kuli w metryce miejskiej, euklidesowej czy też w metryce Czebyszewa nie jest specjalnie trudne – a efekty takiego ćwiczenia są bardzo korzystne. Jak to określiła pewna studentka: „Rysowanie tych kul jest przyjemne, bo to nie jest *abstrakcja*”. Abstrakcja – czyli, w jej rozumieniu, coś trudnego i zrozumiałego tylko dla pewnej elitarnej grupy, a w każdym razie nie dla niej. Przy trudnym i skondensowanym programie, pełnym definicji, twierdzeń i pracochłonnych zadań rachunkowych, metryki stanowią przyjemną odmianę, dostarczając studentom nie tylko satysfakcji z samodzielnego rozwiązania. Jeżeli uczymy matematyki w ten sposób, studenci wykorzystują tylko swoją pamięć i umiejętności rachunkowe, szybciej się męczą. Dlatego też warto od czasu do czasu pobudzać ich „wyobraźnię przestrzenną”, dzięki czemu przyswajanie przez nich wiedzy jest bardziej efektywne.

6. Dlaczego rezygnacja z metryk jest błędem? Czy to, że studenci lubią zadania graficzne związane z metrykami może być wystarczającym argumentem?

W czasach ograniczania programu, gdy kładzie się nacisk na zagadnienia praktyczne, paradoksalnie, metryki mogą być dobrym „przyczółkiem” umożliwiającym ćwiczenie „rozumowania abstrakcyjnego”. Podstawą nowożytnej nauki jest rozumowanie abstrakcyjne, czyli przyjmowanie pewnych założeń i wnioskowanie na ich podstawie, bez uwarunkowań, do których jesteśmy przyzwyczajeni w codziennym życiu. Rozumowanie abstrakcyjne jest więc przy tej interpretacji umiejętnością oderwania się od „przyziemnych realiów”. Niewątpliwie studenci zaliczają zadania związane z metrykami do zadań „praktycznych”. Niemniej jednak dzięki metrykom można łatwo studentom wyjaśnić, na czym polega idea myślenia abstrakcyjnego, a co więcej: z grupy studentów wyłonić tych, którzy mają naturalne predyspozycje do posługiwania się tego typu myśleniem.

Można się prosto o tym przekonać, wykonując następujący eksperyment. Wspomniane ćwiczenie, polegające na rysowaniu kul w metrykach miejskiej, euklidesowej i Czebyszewa, można kontynuować, prosząc studentów o narysowanie kuli w metryce dyskretnej. Metryka dyskretna to metryka, która przybiera tylko skończenie wiele wartości. Najprostsza z nich to funkcja $d(x, y) = 0$, gdy $x = y$ i $d(x, y) = 1$ gdy $x \neq y$. Jak wiadomo, kula o środku w punkcie p i promieniu r to zbiór punktów, których odległość od p nie przekracza r . Kulę taką łatwo narysować, dyskwalifikując po prostu te punkty, których odległość od p przekracza r . Gdy $r > 1$, kulą w takiej metryce dyskretnej jest cała przestrzeń, i to niezależnie od wyboru punktu p . Jednak studenci, nawet jeżeli są w stanie przeprowadzić to rozumowanie samodzielnie, uważają, że wniosek ten po prostu nie może być praw-

dziwy, gdyż kłóci się to z ich intuicją. Przecież taka kula jest „nieograniczona” – twierdzą – kula nie może być całą przestrzenią!

W tym momencie otwierają się przed nami nowe możliwości. A co to oznacza sformułowanie, że dana figura jest „nieograniczona”? Czy nie ma brzegu? A co to jest brzeg figury? Przyjmijmy, że figura ograniczona to figura, która zawiera się w kuli o skończonym promieniu. Czy wtedy półprosta jest figurą ograniczoną? Właśnie! To zależy w jakiej metryce. W metryce dyskretnej, tak!

Zadając takie pytania i rozpatrując odpowiedzi na różnych przykładach, łatwo i naturalnie można wciągnąć studentów w czysto matematyczne rozważania, ucząc ich przy okazji rozumowania abstrakcyjnego. Dodatkowym atutem, który warto w tym miejscu podkreślić jest fakt, że to jedno ćwiczenie i te „poboczne” rozważania nie zajmują dużo czasu: wystarczy na to dodatkowe 5-10 minut zajęć.

7. Jeżeli możemy poświęcić trochę więcej czasu, warto kontynuować spotkanie studentów z metrykami na przykładzie trochę bardziej skomplikowanej metryki dyskretnej. W telefonii stacjonarnej stosuje się różne taryfy opłat za połączenie stacjonarne, w zależności od miejsca zamieszkania rozmówców. Jeżeli telefonujemy do osoby mieszkającej w tej samej miejscowości (czy też w tym samym powiecie), płacimy mniej niż za połączenie z osobą mieszkającą poza tą miejscowością. Jeszcze więcej zapłacimy, gdy nasz rozmówca mieszka w innym województwie, w innym kraju itd. Skonstruujmy następującą metrykę, odpowiednią dla tej sytuacji.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y, \\ 1 & \text{dla } x \neq y \wedge x, y \in M, \\ 2 & \text{dla } x, y \notin M \wedge x, y \in W, \\ 3 & \text{dla } x, y \notin W \wedge x, y \in K, \\ 4 & \text{dla } x, y \notin K, \end{cases}$$

gdzie M , W , K to dowolne, niepuste zbiory, zawierające się kolejno w sobie (miejscowość, województwo i kraj), a x i y to lokalizacje rozmówców telefonicznych.

Poucającym i bardzo ciekawym dla studentów zadaniem jest narysowanie w tej metryce kuli o promieniu 1 i o środku będącym lokalizacją danego abonenta w jakiejś przykładowej miejscowości. Oczywiście będzie to zbiór wszystkich lokalizacji (adresów abonentów) z tej miejscowości (nie miejscowość!). A kulą o takim samym środku, lecz promieniu 2 – oczywiście lokalizacje abonentów z całego województwa.

Kule te są bardzo dobrym przykładem umożliwiającym studentom zrozumienie tak trudnych i „abstrakcyjnych” pojęć, jak zbiór otwarty i zbiór domknięty. Przyjmijmy następujące definicje. Punkt wewnętrzny figury to punkt, dla którego istnieje koło o środku w tym punkcie, którego wszystkie punkty są punktami z tej figury. Punkt brzegowy figury to punkt, dla którego każde koło o środku w tym punkcie zawierać będzie punkty należące zarówno do tej figury, jak i punkty do

niej nie należące. Zbiór otwarty to zbiór składający się tylko z punktów wewnętrznych, a zbiór domknięty to zbiór, którego dopełnienie jest zbiorem otwartym (R. Antoniewicz, A. Misztal (1997)).

Oczywiście opanowanie tych definicji przez studentów wymaga czasu. Niemniej po przećwiczeniu kilku prostych przykładów (kula, okrąg, prosta, kwadrat z brzegiem i bez brzegu itd.) warto ze studentami przeanalizować kwestię otwartości i domkniętości kul w tej metryce „telefonicznej”. Można im przy tym pomóc, zadając pomocnicze pytania. Rozważmy lokalizację położoną przy samej (na) granicy województwa. Czy lokalizacja taka jest punktem brzegowym województwa w tej metryce? Jak wygląda kula o takim środku i o promieniu mniejszym od 1? A kula o promieniu równym 1, 2 i tak dalej? Po krótkiej analizie studenci samodzielnie potrafią dojść do wniosku, że każdy punkt tych kul jest punktem wewnętrznym – czyli kule te są zbiorami otwartymi. Dalsza krótka analiza (jak wygląda dopełnienie wszystkich lokalizacji z danego województwa? czy jest to zbiór otwarty?) doprowadza do wniosku, że są to zbiory otwarte i domknięte razem – co dla studentów jest wielce intrygujące.

Dodatkową zaletą tego ćwiczenia jest uzmysłowienie studentom faktu, iż pojęcie „odległości” może być utożsamione z kosztami pokonania odległości.

8. Najważniejszym argumentem przemawiającym za tym, by nie tylko nie rezygnować z metryk w programie nauczania, ale wręcz przeciwnie, program ten poszerzyć, jest to, że współczesna teoria ekonomii praktycznie nie uwzględnia przestrzeni – i to zarówno na poziomie mikro- jak i na poziomie makroekonomii. W klasycznej teorii konsumenta na wybory dokonywane przez dany podmiot nie ma wpływu ani lokalizacja tych dóbr, ani miejsce lokalizacji podmiotu – co sprzeczne jest z rzeczywistością, którą ta teoria opisuje. Podobnie jest w teorii cen, w której zakłada się, że podaż i popyt spotykają się na rynkach nie mających ani określonej formy, ani określonego zasięgu, ani położenia w przestrzeni. Właściwie panuje milcząco przyjęte uproszczenie, że wszystkie podmioty i wszystkie dobra są zgromadzone w jednym miejscu.

Nawet w klasycznej teorii handlu międzynarodowego – a więc w teorii, która powinna uwzględniać czynnik przestrzeni jako jeden z czynników podstawowych – poszczególne kraje traktowane są jako punkty; nie mają formy, zróżnicowanej powierzchni, nie uwzględnia się też wzajemnego położenia krajów względem siebie – a nawet (z rzadkimi wyjątkami) odległości pomiędzy nimi.

Dlaczego taki stan rzeczy ma miejsce? Bez wątpienia jedną z ważniejszych przyczyn jest wygoda i prostota takiego postępowania. Uwzględnienie przestrzeni może mocno skomplikować rozważany problem. A im mniej danych, tym prostsze rachunki i tym prościej o czytelne rozwiązanie. Oczywiście, większość badaczy zagadniętych o to przyznaje, że wprowadzenie przestrzeni wniosłoby do rozważań pewne subtelności, niemniej niejawnie zakłada, iż te subtelności nie podważają otrzymanych rezultatów – „zapominając” przy tym, iż im więcej takich „nieweryfikowalnych” założeń się przyjmuje, tym mniej wiarygodny jest rezultat ich badań.

9. Jednak ważniejszą przyczyną tej sytuacji jest brak odpowiednich umiejętności i odpowiedniego przygotowania ekonomistów. Ktoś, kto nie umie korzystać z danego narzędzia, nie będzie z niego korzystał – nawet jeśli dzięki takiemu narzędziu mógłby bardziej efektywnie wykonywać swoją pracę. Żeby uwzględnić w swojej pracy przestrzeń, przede wszystkim trzeba umieć radzić sobie z pojęciem przestrzeni metrycznej – w szczególności umieć dobrać lub skonstruować odpowiednią metrykę do danego zagadnienia.

Świadczą o tym wyniki małego eksperymentu przeprowadzonego przeze mnie wśród studentów pierwszego roku studiów. Czasami, aby odpowiednio zmobilizować studentów do pracy własnej, zadaję studentom nieobowiązkowe zadania problemowe do samodzielnego rozwiązania w domu. Potencjalną nagrodą dla osób, które poprawnie rozwiążą taki problem, są dodatkowe punkty – co oznacza istotne zwiększenie szans otrzymania korzystniejszej oceny semestralnej. I pomimo to, iż często są to zadania trudne i pracochłonne, taka forma pracy cieszy się sporą popularnością wśród studentów. Jedno z takich zadań sformułowane było następująco: Istnieje pewna bariera (rzeka, granica) dzieląca dany zbiór na dwie rozłączne części A i B . Przekroczyć ją można tylko w jednym określonym punkcie c (most, przejście graniczne). Takiej sytuacji odpowiada metryka zadana wzorem:

$$d_c(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{dla } x, y \in A \vee x, y \in B, \\ d(x, c) + d(c, y) & \text{dla } (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A), \end{cases}$$

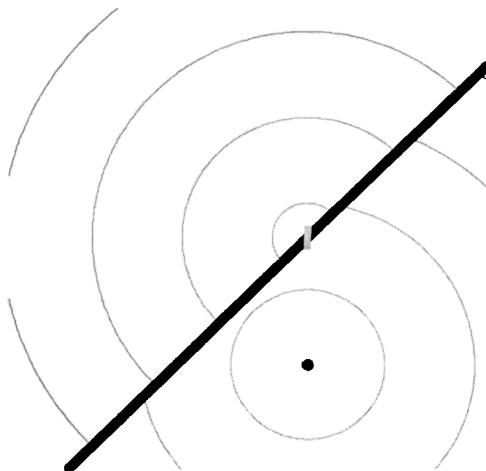
gdzie $A \cap B = \emptyset$.

Dla uproszczenia, formułując zadanie, jako granicę podałem prostą $y = x - 1$, a jako punkt graniczny $c = (1, 0)$. Zadanie dla studentów składało się z dwóch części. Po pierwsze, mieli wykazać, że funkcja d_c spełnia kryteria metryki, a po drugie – narysować różne kule w tej metryce.

O ile pierwsza część zadania została prawidłowo rozwiązana przez kilku studentów (co może oznaczać, że zadanie nie jest ani zbyt proste, ani zbyt trudne dla nich), o tyle z drugą częścią zadania – a więc z tą praktyczną – potrafiła sobie poradzić tylko jedna osoba! Jest to dosyć zaskakujący rezultat, gdyż do rozwiązania tego zadania właściwie wystarczy tylko niewielka doza umiejętności plastycznych i trochę „przestrzennej wyobraźni”. Wystarczy tylko narysować „granicę” i „przejście”, wybrać środek i zaznaczać te punkty, których odległość od środka nie przekracza zadanego promienia (rys. 1).

Na podstawie rezultatów tego eksperymentu i kilku innych, podobnych mogę stwierdzić, że pomimo dużych chęci z ich strony jest to dla studentów, przyszłych ekonomistów, zbyt trudne! Oczywiście przyczyna tego stanu rzeczy nie tkwi w tym, że to przekracza ich możliwości. Po prostu: „wyobraźnię przestrzenną” trzeba ćwiczyć. A do tego oczywiście potrzeba czasu – i to co najmniej jednej pełnej godziny lekcyjnej.

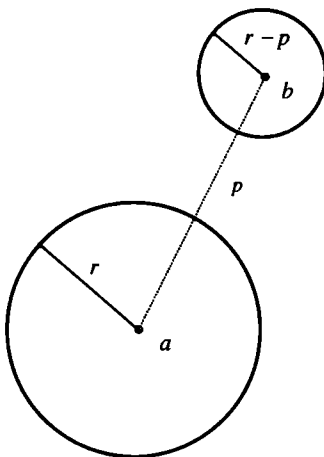
10. Metryk, na których można tę wyobraźnię ćwiczyć, nie brakuje. Metryka filozofów (metryka centrum), metryka rzeka (A. Smoluk (2002)), metryki *circum-radialne* (J. Perreur, J.B. Thisse (1974): za Ponsard i inni (1992)) – to wszystko nie



Rys. 1. Kule w metryce z granicą i z jednym przejściem

Źródło: opracowanie własne.

tylko metryki ciekawe i niebanalne, ale i mające zastosowania praktyczne. Szczególnie duże zastosowanie w ekonomii (na przykład do opisu zjawisk związanych z transportem) mają metryki wykorzystujące funkcję minimum.



Rys. 2. Kula ośrodku w punkcie a i promieniu $r > p$ w metryce d'

Źródło: A. Maciuk (2004).

Rozpatrzmy graf składający się z dwóch wierzchołków a i b oraz krawędzi łączącej te punkty o przyporządkowanej „długości” p (gdzie $p > 0$). Załóżmy, że te dwa punkty są zawarte w pewnym większym zbiorze X , na którym jest określona metryka d . Jeśli parametr p jest istotnie mniejszy od $d(a, b)$, to można określić nową metrykę d' wzorem:

$$d'(x, y) = \min\{d(x, y), d(x, a) + p + d(b, y), d(x, b) + p + d(a, y)\}. \quad (1)$$

Wzór ten ma prostą interpretację. Do dyspozycji mamy dwie formy transportu, przy czym druga, szybsza forma transportu dostępna jest tylko bezpośrednio pomiędzy punktami a i b . Pasażer może poruszać się z punktu x bezpośrednio do punktu y za pomocą pierwszego, powolniejszego środka transportu ($d(x, y)$), albo alternatywnie, za jego pomocą dotrzeć do punktu przesiadkowego ($d(x, a)$ lub $d(x, b)$). A stamtąd za pomocą szybszej, drugiej formy transportu dotrzeć do drugiego punktu przesiadkowego (p), aby dalej, ponownie za pomocą pierwszej formy transportu, dotrzeć do właściwego celu podróży ($d(b, y)$ lub $d(a, y)$). Wzór (1) odpowiada sytuacji, w której pasażer spośród tych dwóch możliwości zawsze wybiera tę, która pozwala szybciej dotrzeć do celu. W metryce tej kule mają charakterystyczną postać (zob. rys. 2).

Literatura

- R. Antoniewicz, A. Misztal (1997). *Matematyka dla studentów ekonomii*. PWN. Warszawa. Wrocław.
 A. Maciuk (2004). *Deregulacja usług lotniczych i problemy lokalizacji*. Praca doktorska. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.
 J. Perreur, J.B. Thisse (1974). *Une application de la metrique cirrcumradiale a l'etude des déplacements urbains*. Revue Economique 2. Str. 298-315.
 C. Ponsard i inni (1992). *Ekonomiczna analiza przestrzenna*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.
 M. Sawicki (2005). *Nowa matura będzie zmieniona*. Wywiad autoryzowany. Rzeczpospolita, 23 sierpnia 2005.
 A. Smoluk (2002). *Zadania ćwiczeniowe z matematyki*. W: *Podstawy metod numerycznych*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.

METRICS IN TEACHING OF ECONOMICS

Summary

Nowadays there is a strong pressure to reduce the program of maths during the first year of economy studies. The Autor lists several reasons why teaching metric space should be continued or moreover intensified.