

Beata Stolorz

Uniwersytet Szczeciński

WYKORZYSTANIE WŁASNOŚCI FUNKCJI LINIOWEJ DO BADANIA STRATEGII OPCYJNYCH

1. Wstęp

W celu ograniczenia ryzyka poniesienia straty wynikającej ze zmienności ceny instrumentu bazowego stosuje się różnorodne strategie opcyjne. Mechanizm osiągnięcia zysku z inwestycji w opcje pozwala na konstruowanie strategii o różnych funkcjach dochodu końcowego (J. Hull (1999)). Zapis w postaci funkcji umożliwia ich matematyczną analizę. Utworzenie modelu matematycznego w znaczny sposób ułatwia wybranie strategii, która pozwoli na zminimalizowanie straty i zmniejszenie prawdopodobieństwa jej poniesienia, a także spowoduje maksymalizację zysku i zwiększenie prawdopodobieństwa jego osiągnięcia.

2. Przedstawienie strategii opcyjnej w postaci funkcji dochodu końcowego

Strategie proste

Każda strategia złożona powstaje w wyniku równoczesnego zastosowania pewnej określonej liczby strategii prostych. Punktem wyjścia do dalszych rozważań jest więc przedstawienie dochodu końcowego, wynikającego z zastosowania strategii prostych w postaci funkcji, w których zmienna x jest ceną końcową instrumentu bazowego (np. akcji).

1. Nabycie opcji kupna (*long call*):

$$k(x) = \begin{cases} -c_1 & \text{dla } x \in \langle 0, x_1 \rangle \\ x - x_1 - c_1 & \text{dla } x \in \langle x_1, \infty \rangle \end{cases}, \quad (1)$$

gdzie: c_1 – cena zakupu opcji kupna, x_1 – cena wykonania opcji.

Nabycie opcji sprzedaży (*long put*):

$$s(x) = \begin{cases} -x + x_2 - c_2 & \text{dla } x \in \langle 0, x_2 \rangle \\ -c_2 & \text{dla } x \in \langle x_2, \infty \rangle \end{cases}, \quad (2)$$

gdzie: c_2 – cena zakupu opcji sprzedaży, x_2 – cena wykonania opcji.

Sprzedaż opcji kupna (*short call*):

$$l(x) = \begin{cases} c_3 & \text{dla } x \in \langle 0, x_3 \rangle \\ -x + x_3 + c_3 & \text{dla } x \in \langle x_3, \infty \rangle \end{cases}, \quad (3)$$

gdzie: c_3 – cena sprzedaży opcji kupna, x_3 – cena wykonania opcji.

Sprzedaż opcji sprzedaży (*short put*):

$$t(x) = \begin{cases} x - x_4 + c_4 & \text{dla } x \in \langle 0, x_4 \rangle \\ c_4 & \text{dla } x \in \langle x_4, \infty \rangle \end{cases}, \quad (4)$$

gdzie: c_4 – cena sprzedaży opcji sprzedaży, x_4 – cena wykonania opcji.

Strategie złożone

Funkcja f dochodu końcowego strategii złożonej jest sumą pewnej określonej ilości funkcji dochodu końcowego strategii prostych. Można ją określić jako kombinację liniową strategii prostych o współczynnikach całkowitych nieujemnych. Przedstawia ją wzór:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i k_i(x) + \sum_{i=1}^n \beta_i s_i(x) + \sum_{i=1}^p \chi_i l_i(x) + \sum_{i=1}^r \delta_i t_i(x), \quad (5)$$

dla $i, n, m, p, r \in N$ oraz $\alpha_i, \beta_i, \chi_i, \delta_i \in N_0$,

gdzie: k_i, s_i, l_i, t_i – odpowiednio strategię *long call*, *long put*, *short call*, *short put*; $\alpha_i, \beta_i, \chi_i, \delta_i$ – odpowiednio liczba jednakowych strategii *long call*, *long put*, *short call*, *short put*; m, n, p, r – odpowiednio liczba różnych strategii *long call*, *long put*, *short call*, *short put*.

W zależności od wielkości wymienionych wyżej współczynników można otrzymać różne strategie złożone.

3. Wykorzystanie własności funkcji liniowej do badania skuteczności wybranych strategii typu *spread*¹

Strategie typu rozpiętości (*spread*) definiuje się jako jednoczesne kupno i sprzedaż opcji tej samej klasy (*call* lub *put*), opiewających na ten sam instrument bazowy (D. Ford (1997)). Są one najpopularniejszym rodzajem kontraktu mieszanego (S. Soroczyński, J. Stachowicz (1994)).

¹ Rozważania na temat wybranych strategii typu *combination* można znaleźć w pracy (B. Stolorz (2001)).

I. Funkcja dochodu końcowego (rys. 1) strategii złożonej z *long call*, wyrażonej wzorem (1), i *short call*, wyrażonej wzorem (3), o tych samych terminach wygaśnięcia przybiera postać:

$$f(x) = k_1(x) + l_1(x), \quad (6)$$

gdzie: k_1 – funkcja dochodu końcowego *long call*, l_1 – funkcja dochodu końcowego *short call*.

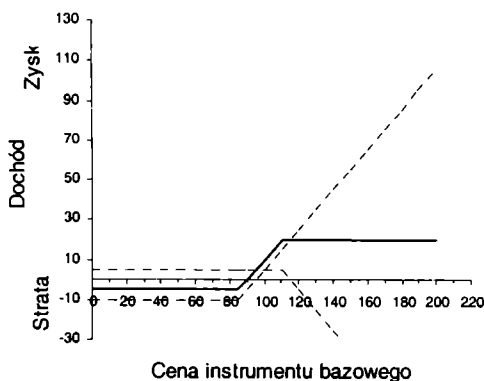
Niech c_1, c_3 oznaczają premie, a x_1, x_3 będą cenami wykonania odpowiednio strategii *long call* i *short call*.

1. Niech $x_1 < x_3$. Wówczas funkcja (6) przybiera postać:

$$f(x) = \begin{cases} c_3 - c_1 & \text{dla } x \in \langle 0, x_1 \rangle \\ x - x_1 - c_1 + c_3 & \text{dla } x \in \langle x_1, x_3 \rangle, \\ x_3 - x_1 + c_3 - c_1 & \text{dla } x \in \langle x_3, \infty \rangle \end{cases} \quad (7)$$

gdzie c_1, c_3, x_1, x_3 mają takie samo znaczenie jak we wzorach (1) i (3).

W ten sposób powstała strategia *vertical bull call spread* (Y.K. Kwok (1998)), która ma zastosowanie w przypadku, gdy inwestor oczekuje wzrostu ceny akcji w dniu wygaśnięcia opcji w stosunku do cen wykonania nabytej i wystawionej opcji. Zarówno dochód, jak i strata w przedstawionej strategii są ograniczone i zależą od premii płaconych za opcje oraz od ich ceny wykonania.



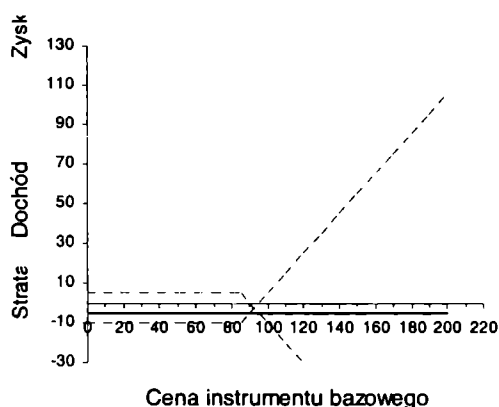
Rys. 1. Strategia *vertical bull call spread* dla $c_1 = 10$, $c_3 = 5$, $x_1 = 85$, $x_3 = 110$

Źródło: opracowanie własne.

2. Jeżeli $x_1 = x_3$, to dochód końcowy otrzymanej strategii (rys. 2) przybiera postać:

$$f(x) = c_3 - c_1 \quad \text{dla } x \in R_+ \cup \{0\}, \quad (8)$$

gdzie c_1, c_3 mają takie samo znaczenie jak we wzorach (1) i (3).



Rys. 2. Strategia opisana wzorem (8) dla $c_1 = 10$, $c_3 = 5$, $x_1 = x_3 = 85$

Źródło: opracowanie własne.

Strategia ta przynosi stały dochód. W zależności od wzajemnej relacji między premiami c_1 i c_3 może to być zysk (dla $c_1 < c_3$), strata (dla $c_1 > c_3$) lub dochód zerowy (dla $c_1 = c_3$).

3. Jeżeli $x_1 > x_3$, to powstaje strategia *vertical bear call spread* (K. Jajuga, T. Jajuga (1998)) stosowana w przypadku, kiedy inwestor oczekuje spadku ceny instrumentu bazowego w dniu wygaśnięcia opcji w stosunku do cen realizacji nabytej i wystawionej opcji. Funkcja f przybiera następującą postać:

$$f(x) = \begin{cases} c_3 - c_1 & \text{dla } x \in \langle 0, x_3 \rangle \\ -x + x_3 + c_3 - c_1 & \text{dla } x \in \langle x_3, x_1 \rangle, \\ x_3 - x_1 + c_2 - c_1 & \text{dla } x \in \langle x_1, \infty \rangle \end{cases} \quad (9)$$

gdzie c_1 , c_3 , x_1 , x_3 mają takie samo znaczenie jak we wzorach (1) i (3).

Inwestor osiąga najwyższy dochód, gdy cena instrumentu bazowego w dniu wygaśnięcia opcji spadnie poniżej ceny realizacji x_3 wystawionej przez inwestora opcji kupna. W przedstawionej strategii zarówno dochód, jak i strata są ograniczone różnicą pomiędzy ponoszonymi kosztami i uzyskiwanymi dochodami z opcji (rys. 3).

II. Funkcja dochodu końcowego f (rys. 4) strategii opcyjnej typu *spread* polegającej na kupnie jednej opcji kupna o cenie wykonania równej x_1 i premii równej c_1 oraz sprzedaży χ opcji kupna o cenach wykonania równych x_3 i premiach równych c_3 o jednakowych terminach wygaśnięcia i przy założeniu, że $x_1 < x_3$ przybierze postać:

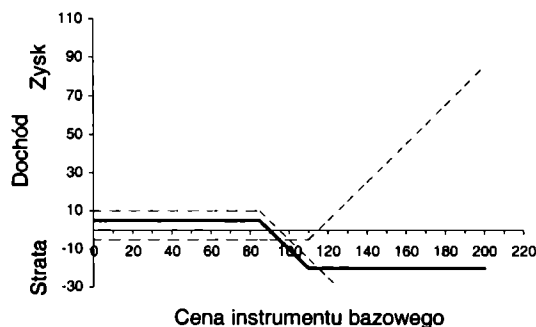
$$f(x) = k_1(x) + \chi l_1(x), \quad (10)$$

gdzie: k_1 , l_1 – mają takie samo znaczenie jak we wzorze (5), χ – liczba sprzedanych opcji kupna.

Po podstawieniu do wzoru (10) wzorów (1) i (3) otrzymujemy:

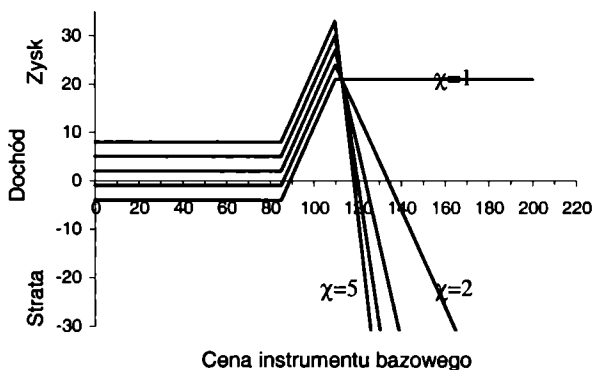
$$f(x) = \begin{cases} -c_1 + \chi c_3 & \text{dla } x \in \langle 0, x_1 \rangle \\ x - x_1 - c_1 + \chi c_3 & \text{dla } x \in \langle x_1, x_3 \rangle, \\ (1 - \chi)x - x_1 + \chi x_3 - c_1 + \chi c_3 & \text{dla } x \in \langle x_3, \infty \rangle \end{cases} \quad (11)$$

gdzie: c_1, c_3, x_1, x_3 mają takie samo znaczenie jak we wzorach (1) i (3), χ ma takie samo znaczenie jak we wzorze (10).



Rys. 3. Strategia *vertical bear call spread* dla $c_1 = 5$, $c_3 = 10$, $x_1 = 110$, $x_3 = 85$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Wykres strategii określonej wzorem (11) dla $\chi \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $c_1 = 7$, $c_3 = 3$, $x_1 = 85$, $x_3 = 110$

Źródło: opracowanie własne.

Dla $\chi = 1$ jest to strategia *vertical bull call spread* przedstawiona na rys. 1 i opisana wzorem (7).

Dla $\chi \geq 2$ jest to strategia *ratio call spread* (LIFFE (2000)). Można ją stosować, jeśli cena rynkowa instrumentu bazowego jest zbliżona lub równa niższej cenie wykonania, natomiast inwestor oczekuje niewielkiego wzrostu ceny. Funkcja f może mieć w tym przypadku dwa miejsca zerowe: x_{01} i x_{02} ($x_{01} < x_{02}$), przy czym:

$$x_{02} = \frac{x_1 + c_1 - \chi(x_3 + c_3)}{1 - \chi}. \quad (12)$$

Przy wzroście ceny powyżej x_{02} występuje nieograniczona strata. Natomiast przy spadku ceny poniżej x_{01} dochód jest ograniczony z dołu przez liczbę:

$$f(x_1) = -c_1 + \chi c_3. \quad (13)$$

Maksymalny dochód jaki przynosi ta strategia jest równy:

$$f(x_3) = x_3 - x_1 + \chi c_3 - c_1. \quad (14)$$

Może zdarzyć się, że $f(x_3) < 0$, czyli inwestor poniesie stratę. Wszystko zależy od premii zapłaconych za opcje. Ponieważ $x_3 > x_1$, więc zachodzi $x_3 - x_1 > 0$. Na znak $f(x_3)$ ma wpływ tylko wielkość wyrażenia $\chi c_3 - c_1$. Przy ustalonych wartościach x_1, x_3, c_1, c_3 można poprzez odpowiedni dobór χ , czyli liczbę sprzedanych opcji kupna, spowodować, że inwestor będzie miał zysk. Wystarczy zauważyć, że:

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(x_3) = +\infty, \quad (15)$$

gdzie $f(x_3)$ dane jest wzorem (14).

Oznacza to, że wraz ze wzrostem liczby sprzedanych opcji kupna maksymalny dochód rośnie nieograniczenie do $+\infty$, czyli od pewnego χ_0 dla każdego $\chi > \chi_0$ mamy $f(x_3) > 0$. Należy tylko dla ustalonych wartości x_1, x_3, c_1, c_3 znaleźć odpowiednie χ_0 . Korzystając z warunku $f(x_3) > 0$, po wykonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymujemy:

$$\chi > \frac{x_1 - x_3 + c_1}{c_3}, \quad (16)$$

czyli

$$\chi_0 = \left\lceil \frac{x_1 - x_3 + c_1}{c_3} \right\rceil + 1. \quad (17)$$

Przy rosnącej wartości χ wraz ze wzrostem dochodu maleje długość d przedziału cen, w którym inwestor osiąga zysk. Dla każdej ceny x z tego przedziału zachodzi warunek: $f(x) > 0$. Warunkiem istnienia tego przedziału jest $f(x_3) > 0$, czyli $x_3 - x_1 + \chi c_3 - c_1 > 0$. Prawym końcem tego przedziału jest miejsce zerowe x_{02} określone wzorem (12).

Aby znaleźć x_{01} , czyli lewy koniec przedziału zysku, należy rozważyć dwa przypadki:

1. Jeżeli $-c_1 + \chi c_3 > 0$, to $x_{01} = 0$. Wówczas długość d tego przedziału wynosi:

$$d = \frac{x_1 + c_1 - \chi(x_3 + c_3)}{1 - \chi}. \quad (18)$$

2. Jeżeli $x_1 - x_3 < -c_1 + \chi c_3 < 0$, to:

$$x_{01} = x_1 + c_1 - \chi c_3, \quad (19)$$

oraz długość d przedziału zysku wynosi:

$$d = x_{02} - x_{01} = \frac{\chi(-x_3 + x_1 + c_1 - \chi c_3)}{1 - \chi}. \quad (20)$$

Powstaje pytanie, co dzieje się z wartością d , w przypadku, gdy liczba χ dąży do nieskończoności. Korzystając ze wzoru (12), mamy:

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} x_{02} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{x_1 + c_1 - \chi(x_3 + c_3)}{1 - \chi} = x_3 + c_3 \quad (21)$$

oraz

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (-c_1 + \chi c_3) = +\infty. \quad (22)$$

Oznacza to, że w nieskończoności prawym końcem przedziału zysku jest liczba $x_3 + c_3$, lewym zaś – liczba 0 oraz

$$d = x_3 + c_3. \quad (23)$$

Mimo że strategia *ratio call spread* jest dość popularna, rzadko jest stosowana w stosunku wyższym niż 1:3 (D. Ford (1997)).

4. Ocena zastosowanej metody do badania strategii opcyjnych

Różnorodność oraz złożoność wielu strategii opcyjnych utrudnia ich analizę. Inwestora interesuje, kiedy i jaki osiągnie zysk oraz jaką poniesie stratę w przypadku niespełnienia się jego oczekiwań. Przez odpowiedni dobór współczynników we wzorze (5) można dokonać analizy złożonych strategii opcyjnych. Jeżeli w skład strategii złożonej wchodzi wiele strategii prostych, to należy dokonać analizy dużej liczby możliwych przypadków. Te przypadki są nowymi strategiami złożonymi, które mogą dawać pożądane przez inwestora rezultaty. Niewątpliwą zaletą prezentowanej metody jest to, że:

- Pozwala na dokładne zbadanie dochodu końcowego w zależności od doboru cen wykonania opcji.
- Pozwala tworzyć i analizować nowe strategie opcyjne.
- Wykres funkcji dochodu końcowego strategii złożonej pozwala na szybkie określenie, kiedy strategia przyniesie zysk lub stratę.
- Analiza matematyczna wzorów opisujących funkcję dochodu końcowego pozwala na określenie, w jakim przedziale cen instrumentu bazowego będziemy otrzymywać zysk lub stratę.
- Metoda ta pozwala określić, w jakiej liczbie należy dobierać strategie proste, aby otrzymać z góry określony zysk.

- Nie wymaga zastosowania skomplikowanego aparatu matematycznego. Wystarczy znajomość podstawowych zagadnień z analizy matematycznej: pojęcia funkcji liniowej i jej własności oraz granicy funkcji. Może być wykorzystana w procesie nauczania.
- Może być wskazówką do klasyfikacji strategii opcyjnych według liczby strategii prostych wchodzących w ich skład oraz w zależności od ich cen wykonania.

Literatura

- D. Ford (1997). *Opcje giełdowe. Metody i strategie*. K.E. LIBER. Warszawa.
- J. Hull (1999). *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*. WIG-PRESS. Warszawa.
- K. Jajuga, T. Jajuga (1998). *Inwestycje, instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.
- Y.K. Kwok (1998). *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer-Verlag. Singapore.
- LIFFE (2000). *Options, a guide to trading strategies*.
- S. Soroczyński, J. Stachowicz (1994). *Kontrakty futures i opcje*. Kantor Wydawniczy ZAKAMYCZE. Kraków.
- B. Stolorz (2001). *Analiza strategii polegającej na zakupie jednej opcji kupna i jednej opcji sprzedaży z tą samą datą wygaśnięcia o cenach wykonania x_1 i x_2* , Przegląd Statystyczny. Tom 48 (nr 3-4). Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.

USE OF PROPERTIES OF THE LINEAR FUNCTION IN THE STUDY OF OPTION STRATEGIES

Summary

In the paper it was presented how the properties of the linear functions could be used in the study of options. An option can be represented as a function of its profit at expiry. Each complex strategy is a combination of basic strategies. Thus, the function of profit of complex option strategies is a linear combination of function of an income of basic strategies with coefficients that are integral non-negative numbers. Mathematical analysis of these functions facilitates the evaluation of the application of particular strategies and allows the modification of strategies in such a way as to arrive at the expected profit. The method was presented on the basis of spread option strategies.