

Na prawach rękopisu
INSTYTUT INŻYNIERII CHEMICZNEJ I URZĄDZEŃ CIEPLNYCH
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport ser. PRE nr

ALGORYTM PLANOWANIA EKSPERYMENTU
W INŻYNIERII PROCESOWEJ DLA BA-
DANIA KOMPLETNOŚCI ZBIORU WYMIAROWYCH
ZMIENNYCH WEJŚCIOWYCH

Aleksander Sulkowski

Praca doktorska

Promotor

doc. dr hab. Bertold Lysik

Słowa kluczowe: planowanie eksperymentu, analiza wymiarowa,
zbiór wypukły

WROCŁAW 1983

mgr inż. Aleksander Sulkowski
Instytut Inżynierii Chemicznej
i Urządzeń Ciepłych
Politechniki Wrocławskiej
ul. Norwida 4/6
50-373 Wrocław

Raport wpłynął do Instytutu

WROCŁAW 1983

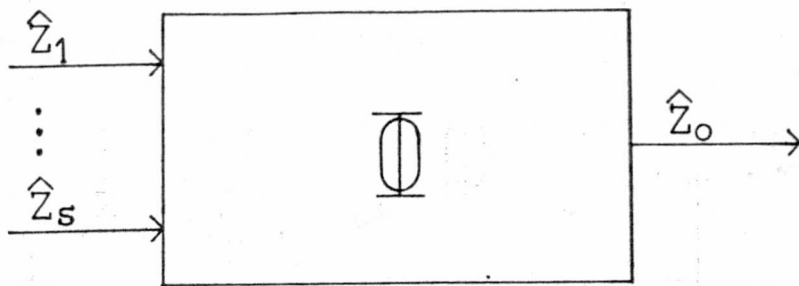
SPIS TREŚCI

	str.
1. Wprowadzenie	1
1.1. Wstęp	1
1.2. Zasady charakteryzacji procesu z wykorzystaniem analizy wymiarowej	7
1.3. Cel pracy	12
2. Dziedzina bezwymiarowych parametrów procesu. Klasy realizacji podobnych	18
2.1. Obszar zmienności parametrów bezwymiarowych	18
2.2. Konstrukcja klasy podobieństwa	34
3. Planowanie eksperymentu	54
3.1. Planowanie eksperymentu w dziedzinie bezwymia- rowych parametrów procesu	54
3.2. Planowanie eksperymentu w klasie podobieństwa	59
4. Numeryczna realizacja algorytmu	69
4.1. Schemat blokowy procedury	69
4.2. Przykład obliczeń	78
5. Uwagi końcowe	85
5.1. Podsumowanie	85
5.2. Wnioski	95
6. Dodatek	108
6.1. Elementy analizy wymiarowej	108
6.2. Pomocnicze definicje i twierdzenia	116
7. Literatura	155

1. WPROWADZENIE.

1.1. Wstęp.

Według orientacyjnych oszacowań ok. 80 - 90 % prowadzonych aktualnie prac naukowych wymaga wykonania odpowiedniego eksperymentu [34]. W naukach technicznych i przyrodniczych, tylko w nielicznych przypadkach opis rozważanego procesu, udaje się utworzyć na drodze teoretycznej, znacznie częściej natomiast występują problemy, których nie można rozwiązać przy użyciu środków matematycznych, toteż w przeważającej liczbie przypadków podstawę dla opisu procesu stanowią wyniki eksperymentu. Nawet wówczas gdy znane jest teoretyczne rozwiązanie rozważanego problemu, wskazane jest jego eksperymentalne sprawdzenie. Rozwiązanie teoretyczne powstaje zawsze w wyniku przyjęcia pewnych upraszczających założeń dotyczących przebiegu zjawiska - chociażby więc ze względu na ich weryfikację, opis teoretyczny powinien być skonfrontowany z wynikami doświadczenia. Badanie różnych zjawisk i prawidłowości /fizycznych, biologicznych, chemicznych/, służy zazwyczaj ustaleniu ich ilościowego charakteru. Wyróżnia się w tym celu pewne wielkości charakteryzujące dane zjawisko i w wyniku eksperymentu ustala się łączące je w danym procesie związki. Mówiąc o procesie fizycznym mamy zazwyczaj na myśli określony zespół zjawisk zachodzących w pewnym rzeczywistym obiekcie sterowania, schematycznie przedstawionym na rys. 1.1.1. Na obiekt oddziałują czynniki $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s$ zwane wielkościami wejściowymi a jego działanie scharakteryzowane jest przez zmienną $\hat{z}_o$ nazywaną wielkością wyjściową. Zależność pomiędzy zmiennymi charakteryzującymi rozważany proces przyjmuje najczęściej postać funkcji



Rys. 1.1.1. Schemat obiektu sterowania.

$$\hat{z}_o = \Phi(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s) \quad /1.1.1/$$

wiążącej efekty działania obiektu z czynnikami oddziałującymi na obiekt i nosi nazwę modelu matematycznego procesu zachodzącego w badanym obiekcie. Ustalenie postaci modelu matematycznego stwarza możliwość przeprowadzenia dokładnej analizy rozważanego procesu, wykorzystania jego własności jak również celowego nań oddziaływania. Znajomość modelu matematycznego rozważanego procesu jest więc niejednokrotnie konieczna a jego wyznaczenie czyli tzw. identyfikacja obiektu[6] staje się zazwyczaj głównym celem eksperymentu.

Eksperyment od dawna stanowi jedno z podstawowych narzędzi naukowego poznania. Stale też rozwija się proces doskonalenia metod badawczych. Nie znajduje już np. dzisiaj zastosowania, wykorzystywana dawniej, metoda badania wpływu pojedynczego czynnika, polegająca na analizowaniu charakteru zmian wielkości wyjściowej wywołanych przez zmianę wybranej wielkości wejściowej, przy pozostałych zmiennych wejściowych ustalonych. Okazuje się, że w przypadku doświadczeń o większej liczbie zmiennych, badanie wszystkich kombinacji danej liczby czynników jest niemożliwe ze względu na konieczność zrealizowania niezwykle dużej liczby pomiarów. Już np. w przypadku dziesięciu czyn-

ników, z których każdy zmieniałby się na dziesięciu tylko poziomach, ilość wszystkich możliwych kombinacji wynosi 10^{10} . Zrealizowanie takiego programu badań przekracza oczywiście możliwości eksperymentatora. Pojawia się więc konieczność dokonania świadomego wyboru odpowiednich konfiguracji wartości poszczególnych zmiennych wejściowych, które powinny być przebadane w trakcie doświadczenia. Powstaje więc problem odpowiedniego planowania eksperymentu. Zainteresowanie tą problematyką zrodziło się już kilkadziesiąt lat temu. Jako pierwszy, zagadnienie planowania eksperymentu, postawił w latach trzydziestych bieżącego stulecia R.A. Fisher. Wydana przez Niego w roku 1935 praca [11] zapoczątkowała rozwój analizy wariancyjnej [1]. Ważnym etapem w rozwoju teorii planowania eksperymentu było wprowadzenie przez D.J. Finney'a [10] w roku 1945 ułamkowych planów eksperymentu umożliwiających istotne zmniejszenie liczby doświadczeń w stosunku do planów całkowitych. Istotną dla rozwoju teorii okazała się opublikowana w 1951 r. praca G.E.P. Box'a i K.B. Wilsona [5] prezentująca intuicyjną metodę planowania eksperymentu, którego celem było wyznaczenie ekstremum funkcji wielu zmiennych.

Kluczowym punktem w historii rozwoju teorii eksperymentu była, przedstawiona w 1959 r. praca J. Kiefera i J. Wolfowitz'a [20] dotycząca zagadnienia planowania optymalnego opartego na pojęciu eksperymentu ciągłego. Gwałtowny rozwój teorii nastąpił w latach 50-tych i 60-tych. Powstały wtedy trzy podstawowe typy planowania eksperymentu - planowanie ortogonalne [15], kompozycyjne [28] i rotatabilne [31], jak również, rozwijane do dziś, metody analizy szeregów czasowych [4]. Tak więc eksperyment, który przez wiele lat był tylko narzędziem prac badawczych stał się również przedmiotem badań naukowych, w efekcie czego powstała

nowa dyscyplina naukowa - matematyczna teoria eksperymentu.

Obecnie metodologia badań doświadczalnych jest dziedziną w dalszym ciągu intensywnie rozwijaną. W fizyce, przyrodoznawstwie a zwłaszcza w technice istnieje stała potrzeba prowadzenia różnorodnych badań a pochodzące z nich dane eksperymentalne wymagają zawsze usystematyzowania i licznych opracowań. Stale rośnie ilość i koszt wykonywanych doświadczeń. Z tych też powodów we współcześnie prowadzonych badaniach doświadczalnych, na każdym ich etapie wykorzystywane są metody matematyczne. Dzięki ich zastosowaniu możliwe stają się - przygotowanie odpowiedniego programu doświadczenia, interpretacja, wyników badań, a w razie potrzeby także modyfikacja programu doświadczalnego na etapach pośrednich. Badanie zachowania danego obiektu przy jednoczesnej zmianie wszystkich wielkości wejściowych i statystyczna interpretacja wyników umożliwiają, nie powodując utraty informacji, skrócenie serii pomiarów podczas eksperymentu. Tak więc metodyka badań staje się jak gdyby środkiem realizacji badań doświadczalnych, w pewnym sensie narzędziem równie niezbędnym jak stosowana aparatura diagnostyczna. Aparatura ta umożliwia techniczną realizację poszczególnych pomiarów, natomiast właściwy program badań, wykorzystujący metody współczesnej teorii eksperymentu umożliwia ograniczenie ich liczby do wartości czyniących proces realizacji badań działalnością sensowną, ze względu na czas i ponoszone nakłady finansowe.

Matematyczna teoria eksperymentu i identyfikacja rozpatrują zagadnienie planowania eksperymentu i opracowania jego wyników w wielowymiarowych podzbiorach przestrzeni euklidesowej, traktując poszczególne wielkości charakteryzujące proces jako zmienne rzeczywiste. Jednakże w doświadczeniach opisywanych za

pomocą pojęć nauk przyrodniczych, badane procesy scharakteryzowane są najczęściej przez wielkości wymiarowe tzn. takie, których wartość zależy od przyjętego układu jednostek. Aby można więc było w tym przypadku bez przeszkód stosować metody planowania eksperymentu i identyfikacji, należy sprowadzić problem z wielowymiarowej przestrzeni fizycznej do przestrzeni euklidesowej. Problematyką tą zajmuje się analiza wymiarowa [8], która określa również ogólne zasady budowy modelu matematycznego procesu wymiarowego [19]. Dzięki zastosowaniu analizy wymiarowej do opisu procesu możliwe staje się dokonanie redukcji ilości zmiennych charakteryzujących dane zjawisko jak również, nie budzące interpretacyjnych zastrzeżeń, wykorzystanie sformalizowanego aparatu teorii identyfikacji i planowania eksperymentu. Zagadnienia związane z zastosowaniem analizy wymiarowej dla potrzeb identyfikacji, jak również problem projektowania eksperymentu przy jej wykorzystaniu są szeroko omawiane w pracach [17], [19], [21].

Jak wspomniano na ogół głównym celem eksperymentu jest ustalenie związku funkcyjnego pomiędzy wielkością wyjściową a zbiorem wielkości wejściowych charakteryzujących rozważany proces. Wyznaczenie tego związku, czyli modelu matematycznego procesu, wymaga w pierwszym rzędzie ustalenia zmiennych niezależnych, których funkcją będzie model. Obserwacji doświadczalnej poddaje się pewien określony zbiór wielkości i nigdy nie ma pewności czy stwierdzona zależność nie jest przypadkowa a rzeczywista przyczyna obserwowanego skutku leży poza zbiorem czynników poddanych badaniom. W pierwszym etapie należy zatem ustalić, które zmienne można w dalszych rozważaniach

pominać, a których wpływ należy bezwarunkowo uwzględnić. Etap ten nosi nazwę etapu charakteryzacji [15] i stanowi jedno z ważniejszych zagadnień związanych z identyfikacją procesu. Od ilości uwzględnianych w opisie procesu zmiennych zależy m.in. wybór metody planowania eksperymentu jak również jakość modelu matematycznego uzyskanego w wyniku identyfikacji obiektu. Ważę i złożoność problemu badania kompletności zbioru czynników podkreślają m.in. B. Kacprzyński [15], Z. Polański [34], S. Węgrzyn [43], E. Szücs [40], Z. Bubnicki [6]. Istnieją, wprowadzicie pewne koncepcje rozwiązania problemu eliminacji liczby czynników w modelu /pewne propozycje rozwiązań zawierają cytowane prace [15], [34] /, jednakże wszystkie znane dotychczas metody ustalania zbioru zmiennych istotnych dla opisu procesu powstały w toku rozwiązywania konkretnych zadań i dlatego zakres ich zastosowania ograniczony jest do pewnych przypadków szczególnych. W rzeczywistych, bardziej skomplikowanych sytuacjach ustalenie ilości czynników charakteryzujących dany proces stanowi problem złożony. Pewną propozycję ogólnego podejścia do zagadnienia charakteryzacji procesu podał M. Kokar. Wykorzystując metody analizy wymiarowej opracował On algorytmizowalną procedurę kompletowania zbioru zmiennych wejściowych istotnych dla opisu rozważanego procesu [21], [23], [24].

Niniejsza praca stanowi próbę rozszerzenia poruszanej przez M. Kokara problematyki. Proponowana tu algorytmizowalna procedura planowania eksperymentu opracowana została pod kątem możliwości zastosowania, podanej przez cytowanego autora, metody kompletowania zmiennych, której główną ideę przedstawiono w punkcie 1.2. Cel pracy określono w punkcie 1.3. Rozdział

drugi poświęcony jest problemowi badania geometrii obszaru zmienności bezwymiarowych parametrów $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ oraz zagadnieniu konstrukcji klas podobieństwa realizacji procesu. W rozdziale trzecim zaproponowano metodę planowania eksperymentu w przestrzeni bezwymiarowych parametrów procesu i przedstawiono propozycję planowania w klasach realizacji podobnych. Rozdział czwarty poświęcony jest zagadnieniu numerycznej realizacji proponowanego algorytmu. Przedstawiono w nim schemat blokowy programu oraz przykłady danych i wydruku wyników. Podsumowanie i wnioski stanowią treść rozdziału piątego. Pracę kończy rozdział szósty - dodatek, zawierający podstawowe pojęcia z zakresu analizy wymiarowej jak również wykorzystywane w pracy definicje i twierdzenia matematyczne. Bibliografia zawiera tylko te pozycje, które są bezpośrednio związane z poruszoną w pracy problematyką. Nie uwzględniono w niej wielu istotnych pozycji z dziedziny analizy wymiarowej i planowania eksperymentu, których bogaty wykaz zawierają np. prace [13], [14] [15], [17].

1.2. Zasady charakteryzacji procesu z wykorzystaniem analizy wymiarowej.

Opracowana przez M. Kokara [23], [24] metoda kompletowania zbioru zmiennych charakteryzujących dane zjawisko dotyczy przypadku procesu wymiarowego /por. Def. 6.1.9/. Ograniczenie się do procesów wymiarowych nie zawęży w sposób istotny poruszonej problematyki, gdyż zazwyczaj w większości zjawisk będących

przedmiotem badań doświadczalnych, charakteryzujące je wielkości wejściowe $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_s$ oraz wielkość wyjściowa $\hat{Z}_0$ są wielkościami wymiarowymi tzn. należą do pewnej przestrzeni wymiarowej $\square$ /Def. 6.1.1./ rozpiętej na ustalonym układzie jednostek $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$. Zgodnie z wnioskiem wynikającym z Def. 6.1.4., każda z wielkości charakteryzujących rozważany proces ma przedstawienie w bazie wymiarowej $\{E_k\}_{k=1}^n$ postaci

$$\hat{Z}_1 = Z_1 \prod_{k=1}^n \hat{E}_k^{z_{1k}}, \quad /l = 1, \dots, s/ \quad /1.2.1/$$

$$\hat{Z}_0 = Z_0 \prod_{k=1}^n \hat{E}_k^{z_k}$$

gdzie Z_1, Z_0 oznaczają miary liczbowe /por. Def. 6.1.4/, natomiast z_{1k}, z_k - współrzędne wielkości wymiarowych $\hat{Z}_1, \hat{Z}_0$ w układzie jednostek $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$. Jeżeli spośród wszystkich wielkości $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_s$ dokonamy wyboru maksymalnego układu wielkości wymiarowo niezależnych $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_m$ wówczas, traktując go jako bazę wymiarową dla całego układu $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_s$, zmienne $\hat{Z}_{m+1}, \dots, \hat{Z}_{m+r}$ / $m + r = s$ / możemy, zgodnie z Tw. 6.1.1, przedstawić w postaci

$$\hat{Z}_{m+j} = \Phi_j \prod_{i=1}^m \hat{Z}_i^{a_{ji}}, \quad /j = 1, \dots, r, \quad m + r = s/, \quad /1.2.2/$$

gdzie Φ_j / $j = 1, \dots, r$ / są wielkościami bezwymiarowymi znanymi w literaturze pod nazwą niezmienników podobieństwa, natomiast a_{ji} / $j = 1, \dots, r, i = 1, \dots, m$ / są ustalonymi wykładnikami rzeczywistymi, określającymi wymiar wielkości $\hat{Z}_{m+j}$ w bazie

$\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_m$.

Zbiór zmiennych $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s$, stanowiących układ wielkości wejściowych w rozważanym procesie, nazwiemy kompletnym jeżeli znajomość ich wartości liczbowych wystarcza do wyznaczenia wartości liczbowej zmiennej wyjściowej $\hat{z}_0$.

Jeżeli więc rozpatrywany zbiór zmiennych $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s$ jest zbiorem kompletnym, mamy prawo wnioskować, że pomiędzy $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s$ a $\hat{z}_0$ istnieje wymiarowo niezmiennicza i jednorodna /por. Def. 6.1.7, Def. 6.1.8/ zależność funkcyjna

$$\hat{z}_0 = \Phi(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s), \quad /1.2.3/$$

którą na mocy Tw. $\square$ /Tw. 6.1.1./ można sprowadzić do postaci bezwymiarowego związku wyrażonego w miarach liczbowych rozpatrywanych zmiennych

$$z_0 = f(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \prod_{i=1}^m z_i^{a_i}, \quad /1.2.4/$$

gdzie $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją liczbowo-liczbową, której argumenty φ_j , po uwzględnieniu zależności /1.2.1/ i /1.2.2/, można przedstawić w postaci

$$\varphi_j = \frac{z_{m+j}}{\prod_{i=1}^m z_i^{a_{ji}}}, \quad /j = 1, \dots, r/. \quad /1.2.5/$$

z_i / $i = 1, \dots, m$ / oznaczają tu oczywiście miary liczbowe zmiennych wymiarowo niezależnych, natomiast z_{m+j} / $j = 1, \dots, r$ / oznaczają miary liczbowe pozostałych zmiennych.

Rozpatrzmy dwie realizacje /Def. 6.1.10/ rozważanego procesu

$$R_1 = (Z_{11}, \dots, Z_{1s}) \quad /1.2.6/$$

$$R_2 = (Z_{21}, \dots, Z_{2s}).$$

Jeżeli Z_{10} , Z_{20} oznaczać będą wartości liczbowe wielkości wyjściowej $\hat{Z}_0$, odpowiadające realizacjom R_1 , R_2 , wówczas zgodnie z warunkiem /1.2.4/, zachodzić muszą związki

$$Z_{10} = f(\varphi_{11}, \dots, \varphi_{1r}) \prod_{i=1}^m Z_{1i}^{a_i}, \quad /1.2.7/$$

$$Z_{20} = f(\varphi_{21}, \dots, \varphi_{2r}) \prod_{i=1}^m Z_{2i}^{a_i},$$

gdzie argumenty φ_{1j} , φ_{2j} / $j = 1, \dots, r$ /, zgodnie ze wzorem /1.2.5/, są postaci

$$\varphi_{1j} = \frac{Z_{1,m+j}}{\prod_{i=1}^m Z_{1i}^{a_{ji}}}, \quad \varphi_{2j} = \frac{Z_{2,m+j}}{\prod_{i=1}^m Z_{2i}^{a_{ji}}}, \quad /j=1, \dots, r/ \quad /1.2.8/$$

Idea koncepcji M. Kokara opiera się na spostrzeżeniu, że w przypadku gdy realizacje R_1 , R_2 są podobne /por. Def. 6.1.12/, tzn. gdy spełniony jest warunek

$$\varphi_{1j} = \varphi_{2j}, \quad /j = 1, \dots, r/, \quad /1.2.9/$$

spełniona musi być oczywista równość

$$f(\varphi_{11}, \dots, \varphi_{1r}) = f(\varphi_{21}, \dots, \varphi_{2r}), \quad /1.2.10/$$

z której, po uwzględnieniu związków /1.2.7/, wynika wniosek

$$\frac{z_{10}}{\prod_{i=1}^m z_{1i}^{a_i}} = \frac{z_{20}}{\prod_{i=1}^m z_{2i}^{a_i}}. \quad /1.2.11/$$

Zakładając więc kompletność zbioru zmiennych $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s$, dochodzimy do wniosku, że w rozpatrywanym procesie spełniony musi być, dla realizacji podobnych, warunek /1.2.11/. Celowe jest więc sprawdzenie czy wyniki prowadzonego eksperymentu tezę tę potwierdzają. W przypadku gdy dla realizacji podobnych równość /1.2.11/ nie jest spełniona, mamy prawo wnioskować, że w zbiorze $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s$ brakuje pewnych, istotnych dla przebiegu zjawiska, wielkości.

Wykorzystując to spostrzeżenie M. Kokar opracował, opartą na pojęciu miary podobieństwa, procedurę kompletowania zbioru istotnych zmiennych wejściowych [23], [24], która została następnie udoskonalona i rozwinięta przez J. Zaleskiego [46]. Możliwość zastosowania omawianej metody uzależniona jest, jak widać, od możliwości wyodrębnienia klas podobieństwa w zbiorze przebadanych w trakcie eksperymentu, realizacji rozważanego procesu. Trudność w jej zastosowaniu polega na tym, że w przypadku eksperymentu, w którym wartości zmiennych $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s$ były przez eksperymentatora ustalone w sposób dowolny, rzadko zdarza się aby można było wskazać większą ilość klas realizacji podobnych, zwłaszcza w przypadku dużej liczby zmiennych wejściowych $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s$. Pojedyncze natomiast przykłady nielicznych grup

realizacji podobnych nie mogą stanowić podstawy dla kategori-
cznych rozstrzygnięć. Korzystne zatem, z punktu widzenia moż-
liwości zastosowania omawianej metody, byłoby zaplanowanie
eksperymentu zapewniające możliwość wyodrębnienia klas podo-
bieństwa w zbiorze realizacji wytypowanych do przebadania.

1.3. Cel pracy.

Celem niniejszej pracy jest sformułowanie zasad algory-
tmizowalnej procedury planowania eksperymentu gwarantującej
utworzenie zadanej ilości klas podobieństwa, składających się
z dowolnie ustalonej liczby realizacji. Ze względu na przeje-
rzystość prowadzonych rozważań, ściśle sformułowanie problemu
poprzedzane zostanie wprowadzeniem kilku niezbędnych pojęć
i oznaczeń pomocniczych.

Oznaczmy symbolem $\mathcal{R}$ przestrzeń eksperymentu, czyli taki
podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^S$, który tworzą wszystkie dopuszczalne
w eksperymencie realizacje $R = /Z_1, \dots, Z_S/$ /por. Def. 6.1.10/.
Zauważmy, że określając, wynikającą ze wzoru /1.2.5/, zasadę
przyporządkowania każdej realizacji $R = /Z_1, \dots, Z_S/$ ciągu
niezmienników podobieństwa

$$g = (\varphi_1, \dots, \varphi_r) \quad /1.3.1/$$

definiujemy tym samym pewne odwzorowanie $\Psi: \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^r$, które opi-
sać można wzorem

$$\Psi(z_1, \dots, z_s) = (\varphi_1, \dots, \varphi_r), \quad /1.3.2/$$

lub też krócej

$$\Psi(R) = \mathcal{G}, \quad /1.3.3/$$

dla którego związki /1.2.5/ stanowią niejako definicję jego funkcji współrzędnych [37].

Symbol Γ oznaczać będzie zbiór tych punktów $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^r$ / $\mathcal{G} = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ /, dla których istnieje realizacja $R \in \mathcal{K}$ taka, że

$$\mathcal{G} = \Psi(R) \quad /1.3.4/$$

a zatem

$$\Gamma = \{\mathcal{G} \in \mathbb{R}^r : \exists R \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^s : \mathcal{G} = \Psi(R)\}. \quad /1.3.5/$$

Z określenia /1.3.5/ wynika, że zbiory Γ i $\mathcal{K}$ łączy związek

$$\Gamma = \Psi(\mathcal{K}). \quad /1.3.6/$$

Sformułowany w Def. 6.1.12 warunek podobieństwa realizacji R_1, R_2 można, przy użyciu określonego definicyjnym wzorem /1.3.2/ odwzorowania Ψ , wyrazić w formie postulatu

$$\Psi(R_1) = \Psi(R_2). \quad /1.3.7/$$

Zauważmy, że każdy element $\mathcal{G} \in \Gamma$ reprezentuje pewną klasę podobieństwa $V \subset \mathcal{K}$, która jest zbiorem postaci

$$V = \{R \in \mathcal{K} : \Psi(R) = \mathcal{G}\}, \quad /1.3.8/$$

co można też wyrazić w formie skróconej

$$V = \Psi^{-1}(g) \quad /1.3.9/$$

Klasa podobieństwa V jest zatem zbiorem wszystkich tych realizacji $R = /Z_1, \dots, Z_s/$, $/R \in \mathcal{H}/$, którym przyporządkowany jest ten sam układ niezmienników podobieństwa $g = / \Phi_1, \dots, \Phi_r /$, $/g \in \Gamma /$.

Proponowana w niniejszej pracy zasada planowania eksperymentu stanowi algorytmizowalną procedurę takiego doboru dopuszczalnych w warunkach eksperymentu wartości poszczególnych zmiennych $Z_1, \dots, Z_s$, aby wytypowany do przebadania zbiór realizacji

$$\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_q\} \quad /1.3.10/$$

można było przedstawić w postaci sumy

$$\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^w \mathcal{R}_i \quad /1.3.11/$$

rozłącznych podzbiorów $\mathcal{R}_i$, tak aby każdy z nich zawierał t -realizacji

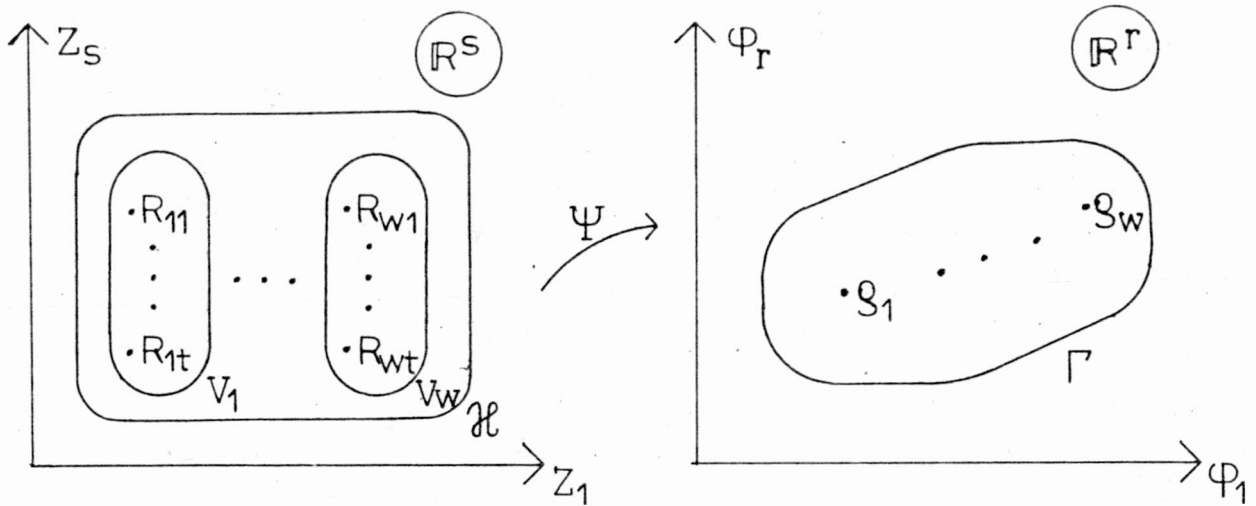
$$\mathcal{R}_i = \{R_{i1}, \dots, R_{it}\}, /i = 1, \dots, w/, \quad /1.3.12/$$

dla których spełniony byłby warunek

$$\Psi(R_{i1}) = \dots = \Psi(R_{it}), \quad /i = 1, \dots, w/, \quad /1.3.13/$$

równoważny stwierdzeniu, że zbiór $\mathcal{R}_i$ zawarty jest w pewnej klasie podobieństwa V_i postaci /1.3.8/.

Proponowaną zasadę planowania eksperymentu w sposób schematyczny ilustruje rysunek 1.3.1.



Rys. 1.3.1. Proponowany plan eksperymentu.

Realizację zamierzonego celu podzielono na dwa etapy. W etapie pierwszym /punkt 2.1/, przy ustalonej postaci zbioru $\mathcal{H}$, badana jest geometria, określonego zależnością /1.3.5/, zbioru Γ . Obszar $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^S$ jest zbiorem punktów pomiarowych - realizacji $R = /Z_1, \dots, Z_S/$, których współrzędne podlegają zazwyczaj układowi prostych ograniczeń nierównościowych stanowiących tzw. więzy słabe [34]. Zbiór $\Gamma \subset \mathbb{R}^r$ natomiast, zgodnie z określeniem /1.3.6/, jest zbiorem punktów $g = /\Phi_1, \dots, \Phi_r/$, na współrzędne których narzucone są tzw. więzy mocne [34] mające, w rozważanym przypadku, postać zależności funkcyjnych /1.2.5/. O ile więc postać zbioru $\mathcal{H}$ jest na ogół dobrze znana i praktycznie nie sprawia trudności ustalenie czy dany punkt $R \in \mathbb{R}^S$ / $R = /Z_1, \dots, Z_S/$ / do tego zbioru należy, o tyle "kształt" zbioru Γ może być trudny do przewidzenia a rozstrzygnięcie czy dany punkt $g \in \mathbb{R}^r$ / $g = /\Phi_1, \dots, \Phi_r/$ / jest jego elementem, stanowi, ze względu na niewygodną postać zależności /1.2.5/, uciążliwe rachunkowo zadanie.

Zauważmy, że rozważany zbiór Γ jest dziedziną, występującej w tezie twierdzenia II /Tw. 6.1.1/ funkcji $f / \Phi_1, \dots, \Phi_r /$. Jako, że funkcja ta stanowi główną składową modelu matematycznego rozważanego procesu - jej wyznaczenie jest podstawowym celem eksperymentu. Jakość modelu matematycznego otrzymanego w wyniku identyfikacji może w sposób istotny zależeć od sposobu rozmieszczenia punktów pomiarowych w obszarze dopuszczalnym, toteż właściwe wykorzystanie obszaru zmienności parametrów $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ stanowi jeden z podstawowych problemów planowania eksperymentu w przypadku procesu wymiarowego. W punkcie 2.1 przedstawiono propozycję metody badania cech geometrycznych zbioru Γ jak również określono zasadę wybierania punktów do niego należących. Zasada ta wykorzystana została następnie w przedstawionej w p. 3.1 metodzie planowania eksperymentu w rozważanym obszarze.

W etapie drugim /punkt 2.2/ rozpatrywane są zagadnienia związane z opisem postaci oraz wzajemnego położenia w przestrzeni eksperymentu $\mathcal{H}$, klas podobieństwa V_i odpowiadających, rozmieszczonych w obszarze Γ , punktom $g_i / i = 1, \dots, w /$. Klasy podobieństwa V_i , określone definicyjną równością /1.3.8/, stanowią rozłączne klasy abstrakcji [35], na jakie przestrzeń $\mathcal{H}$ podzielona jest przez relację równoważności [35], jaką jest relacja podobieństwa realizacji /Def. 6.1.12/. Wspomniana równość /1.3.8/ ma jednak zbyt ogólny charakter aby możliwe było bezpośrednio jej wykorzystanie dla zamierzonego celu badania własności geometrycznych klas V_i - próba jej zastosowania prowadzić może do dużych trudności rachunkowych. Znajomość postaci klas podobieństwa oraz umiejętność wybierania punktów

pomiarowych do nich należących ma jednak zasadnicze znaczenie dla możliwości określenia zasady planowania eksperymentu gwarantującej utworzenie podzbiorów realizacji podobnych. Od sposobu rozmieszczenia punktów pomiarowych w klasie podobieństwa natomiast, w istotny sposób zależy może moc statystycznego wnioskowania co do kompletności zbioru zmiennych charakteryzujących rozważany proces [46]. W punkcie 2.2. przedstawiono propozycję metody konstrukcji klas podobieństwa jak również określono zasadę wybierania punktów pomiarowych do niej należących. Zasadę tę wykorzystano następnie w przedstawionym punkcie 3.2. algorytmie planowania eksperymentu w rozważanych klasach.

2. DZIEDZINA BEZWYMIAROWYCH PARAMETRÓW PROCESU, KLASY REALIZACJI PODOBNYCH.

2.1. Obszar zmienności parametrów bezwymiarowych.

Założmy, że w warunkach laboratoryjnych miary liczbowe Z_1 zmiennych wymiarowych $\hat{Z}_1$ / $l = 1, \dots, s$ / charakteryzujących rozważany proces /por. Def. 6.1.4/ mogą być w trakcie eksperymentu zmieniane w przedziałach

$$Z_1^L \leq Z_1 \leq Z_1^P, \quad /l = 1, \dots, s/. \quad /2.1.1./$$

Założmy też, że

$$Z_1^L > 0, \quad , \quad /l = 1, \dots, s/, \quad /2.1.2/$$

co nie stanowi istotnego ograniczenia gdyż zawsze wartości zmiennych fizycznych można mierzyć w skali nieujemnej. Przy założeniach /2.1.1/ i /2.1.2/ zbiór wszystkich dopuszczalnych w warunkach eksperymentu punktów pomiarowych $R = /Z_1, \dots, Z_s/$ /por. Def. 6.1.10/, dla oznaczenia którego używano w punkcie 1.3. symbolu $\mathcal{K}$, będzie s -wymiarową kostką rzeczywistą K /Def. 6.2.15/ postaci

$$K = \bigtimes_{l=1}^s [Z_1^L, Z_1^P]. \quad /2.1.3/$$

Zgodnie z założeniem /2.1.2/, kostka /2.1.3/ jest zbiorem punktów $R = /Z_1, \dots, Z_s/$ o wszystkich współrzędnych dodatnich, co oznacza, że

$$K \subset \mathbb{R}^s, \quad /2.1.4/$$

gdzie oczywiście $\mathbb{R}^s = \{ /z_1, \dots, z_s / \mathbb{R}^s: z_1 > 0, 1 = 1, \dots, s \}$.
W tym przypadku zbiór Γ , zdefiniowany zależnością /1.3.5/,
jest zgodnie z warunkiem /1.3.6/ obrazem kostki /2.1.3/ przez
odwzorowanie $\Psi: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ określone wzorem /1.3.2/. Jest to
więc, zawarty w przestrzeni $\mathbb{R}^r$, zbiór wszystkich punktów
 $G = / \varphi_1, \dots, \varphi_r /$, których współrzędne spełniają równania

$$\varphi_j = \frac{z_{m+j}}{\prod_{i=1}^m z_i^{a_{ji}}} \quad / j = 1, \dots, r, \quad m+r = s / , \quad /2.1.5/$$

gdzie oczywiście $/z_1, \dots, z_s/ \in K$. Zauważmy, że zbiór Γ jest
również zbiorem punktów o wszystkich współrzędnych dodatnich,
co podobnie jak w przypadku kostki K oznacza, że

$$\Gamma \subset \mathbb{R}^r, \quad /2.1.6/$$

Wniosek ten jest oczywistą konsekwencją warunków /2.1.4/ i
/2.1.5/.

Ze względu na komunikatywność prowadzonych rozważań ko-
rzystnie będzie rozważyć odpowiedni przykład.

Rozpatrzmy więc pewien proces, w którym występują tylko
trzy zmienne wejściowe $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3$ należące do pewnej ustalonej
przestrzeni wymiarowej Π /Def. 6.1.1/, rozpiętej na układzie
jednostek $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ /Def. 6.1.4/. Przyjmijmy, że zmienne
 $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3$ mają w bazie wymiarowej $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ reprezentację
postaci

$$\hat{z}_1 = z_1 \hat{E}_1^1 \hat{E}_2^1 \hat{E}_3^1$$

$$\hat{z}_2 = z_2 \hat{E}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{E}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{E}_3^{-\frac{1}{2}}$$

/2.1.7/

$$\hat{z}_3 = z_3 \hat{E}_1^{-1} \hat{E}_2^{-1} \hat{E}_3^{-1}$$

Jak widać więc, każdy wymiarowo niezależny podukład układu zmiennych $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3$ jest jednoelementowy. Przyjmijmy zatem że zmienną wymiarowo niezależną będzie zmienna $\hat{z}_1$, tak więc dwie pozostałe zmienne $\hat{z}_2, \hat{z}_3$ będą od $\hat{z}_1$ wymiarowo zależne. Zależność tą, po uwzględnieniu postaci reprezentacji /2.1.7/, może być, na mocy Tw. 6.1.1, wyrażona w miarach liczbowych rozpatrywanych zmiennych w postaci

$$z_2 = \varphi_1 z_1^{-\frac{1}{2}}$$

/2.1.8/

$$z_3 = \varphi_2 z_1^{-1}.$$

Założmy, że w trakcie eksperymentu miary liczbowe z_1, z_2, z_3 zmieniają się w przedziałach

$$1,65 \leq z_1 \leq 7,39$$

$$1,65 \leq z_2 \leq 12,18$$

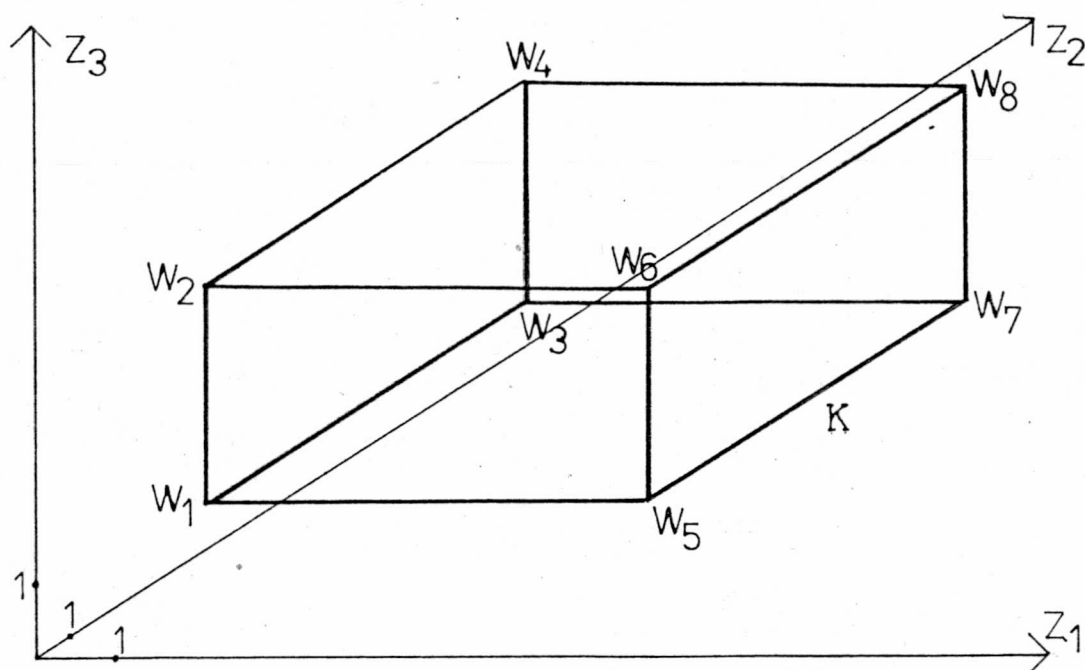
/2.1.9/

$$1,65 \leq z_3 \leq 4,48.$$

W rozważanym przykładzie wszystkie dopuszczalne punkty pomiarowe $R = /z_1, z_2, z_3/$ tworzą więc trójwymiarową kostkę rzeczywistą

$$K = [1,65, 7,39] \times [1,65, 12,18] \times [1,65, 4,48], /2.1.10/$$

której położenie w układzie współrzędnych przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przedstawia rys. 2.1.1.



Rys. 2.1.1. Przykład trójwymiarowej przestrzeni eksperymentu.

Wzory na funkcje współrzędne odwzorowania Ψ /w rozważanym przykładzie $\Psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / otrzymujemy wprost z zależności /2.1.8/. Są one postaci

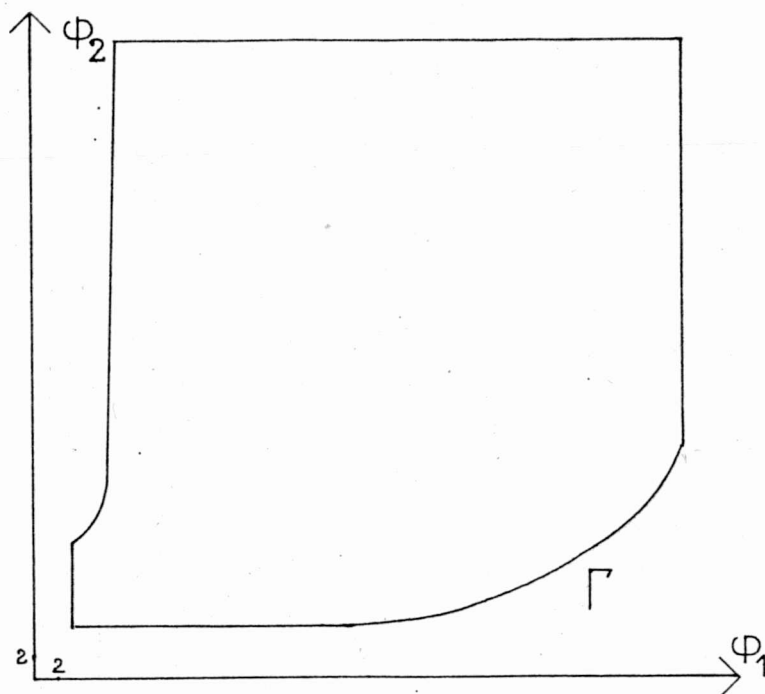
$$\varphi_1 = \frac{z_2}{z_1^{-1/2}}$$

/2.1.11/

$$\varphi_2 = \frac{z_3}{z_1^{-1}} .$$

Zbiór Γ w rozważanym przykładzie jest więc zbiorem wszystkich punktów $g = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2$, których współrzędne, przy ograniczeniach /2.1.9/, można przedstawić w postaci /2.1.11/. Rozważany przykład jest na tyle prosty, że zbiór Γ można, po roz-

wiązaniu kilku nierówności, po prostu narysować, jego postać przedstawia rysunek 2.1.2.



Rys. 2.1.2. Przykład dwuwymiarowego obszaru zmienności bezwymiarowych parametrów procesu.

Rozpoczęty przykład będzie konsekwentnie kontynuowany - jego druga część posłuży jako ilustracja dalszych rozważań teoretycznych prowadzonych w tym punkcie.

W przypadku ogólnym tzn. w przypadku procesu o większej niż w rozważanym przykładzie liczbie zmiennych, metoda wyznaczania zbioru Γ na drodze rozwiązywania układów nierówności jest nieefektywna - zachodzi więc konieczność poszukiwania innych rozwiązań.

Dokonajmy w tym celu zamiany zmiennych $Z_1, \dots, Z_s$ oraz $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ - przyjmijmy:

$$\dot{Z}_1 = \ln Z_1, \quad /l = 1, \dots, s/,$$

$$\dot{\varphi}_j = \ln \varphi_j, \quad /j = 1, \dots, r/.$$

/2.1.12/

Oczywiście operacja ta jest sensowna jedynie dla $z_1 > 0$ oraz $\varphi_j > 0$. Ponieważ jednak zarówno kostka K jak i zbiór Γ , zgodnie z warunkami /2.1.4/ i /2.1.6/ są zbiorami punktów o wszystkich współrzędnych dodatnich, zastosowanie transformacji /2.1.12/ jest operacją dozwoloną. Zauważmy, że przy pomocy określonego w Def. 6.2.18 odwzorowania $L^{(n)}$, związki /2.1.12/ można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}(\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_s) &= L^{(s)}(z_1, \dots, z_s) \\(\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_r) &= L^{(r)}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)\end{aligned}\tag{2.1.13/}$$

lub też krócej

$$\begin{aligned}\dot{R} &= L^{(s)}(R), \\ \dot{G} &= L^{(r)}(G)\end{aligned}\tag{2.1.14/}$$

gdzie oczywiście

$$\begin{aligned}R &= (z_1, \dots, z_s), \quad \dot{R} = (\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_s), \\ G &= (\varphi_1, \dots, \varphi_r), \quad \dot{G} = (\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_r).\end{aligned}\tag{2.1.15/}$$

Wprowadzona transformacja zmiennych /2.1.12/ spowoduje pewną deformację zbiorów K i Γ . Oznaczmy nowe zbiory przez $\dot{K}$ i $\dot{\Gamma}$ i zauważmy, że zgodnie z zależnościami /2.1.13/ zachodzić musi związek

$$\begin{aligned}\dot{K} &= L^{(s)}(K), \\ \dot{\Gamma} &= L^{(r)}(\Gamma).\end{aligned}\tag{2.1.16/}$$

Zgodnie z Tw. 6.2.18 zbiór $\dot{K}$ będzie s-wymiarową kostką rzeczywistą postaci

$$\dot{K} = \bigtimes_{l=1}^s [\dot{z}_1^L, \dot{z}_1^P] \quad /2.1.17/$$

gdzie

$$\dot{z}_1^L = \ln z_1^L, \quad \dot{z}_1^P = \ln z_1^P, \quad /l = 1, \dots, s/$$

a z_1^L, z_1^P oznaczają końce przedziałów /2.1.1/. Odnosząc w tym miejscu prosty, aczkolwiek istotny dla dalszych rozważań fakt - związki /2.1.14/, zgodnie z Def. 6.2.18, mają charakter zależności wzajemnie jednoznacznych. Związek pomiędzy punktami $R \in K$ i $Q \in \Gamma$, określony wzorem /2.1.5/, po transformacji /2.1.12/ przyjmie, dla punktów $\dot{R} \in \dot{K}$ i $\dot{Q} \in \dot{\Gamma}$, postać zależności liniowej

$$\dot{\phi}_1 = \dot{z}_{m+1} - a_{11}\dot{z}_1 - \dots - a_{1m}\dot{z}_m \quad /2.1.18/$$

$$\dot{\phi}_r = \dot{z}_{m+r} - a_{r1}\dot{z}_1 - \dots - a_{rm}\dot{z}_m,$$

o następującej postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\phi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ -a_{r1} & \dots & -a_{rm} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_m \\ \dot{z}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{m+r} \end{bmatrix} \quad /2.1.19/$$

Oznaczając symbolem $\mathcal{F}$ odwzorowanie liniowe, którego macierz występuje w powyższej zależności, zależność tę można wyrazić w uproszczonej formie

$$\dot{\mathcal{G}} = \mathcal{F}(\dot{\mathcal{R}}) \quad /2.1.20/$$

skąd z kolei wynika, że określone definicyjną równością /2.1.16/ zbiory $\dot{\mathcal{K}}$ i $\dot{\mathcal{I}}$ łączy związek

$$\dot{\mathcal{I}} = \mathcal{F}(\dot{\mathcal{K}}). \quad /2.1.21/$$

Biorąc pod uwagę wzory /1.3.3/ i /2.1.20/ oraz uwzględniając fakt, że związki /2.1.14/ mają charakter zależności wzajemnie jednoznacznych, dochodzimy do wniosku, że prawdziwa jest równoważność

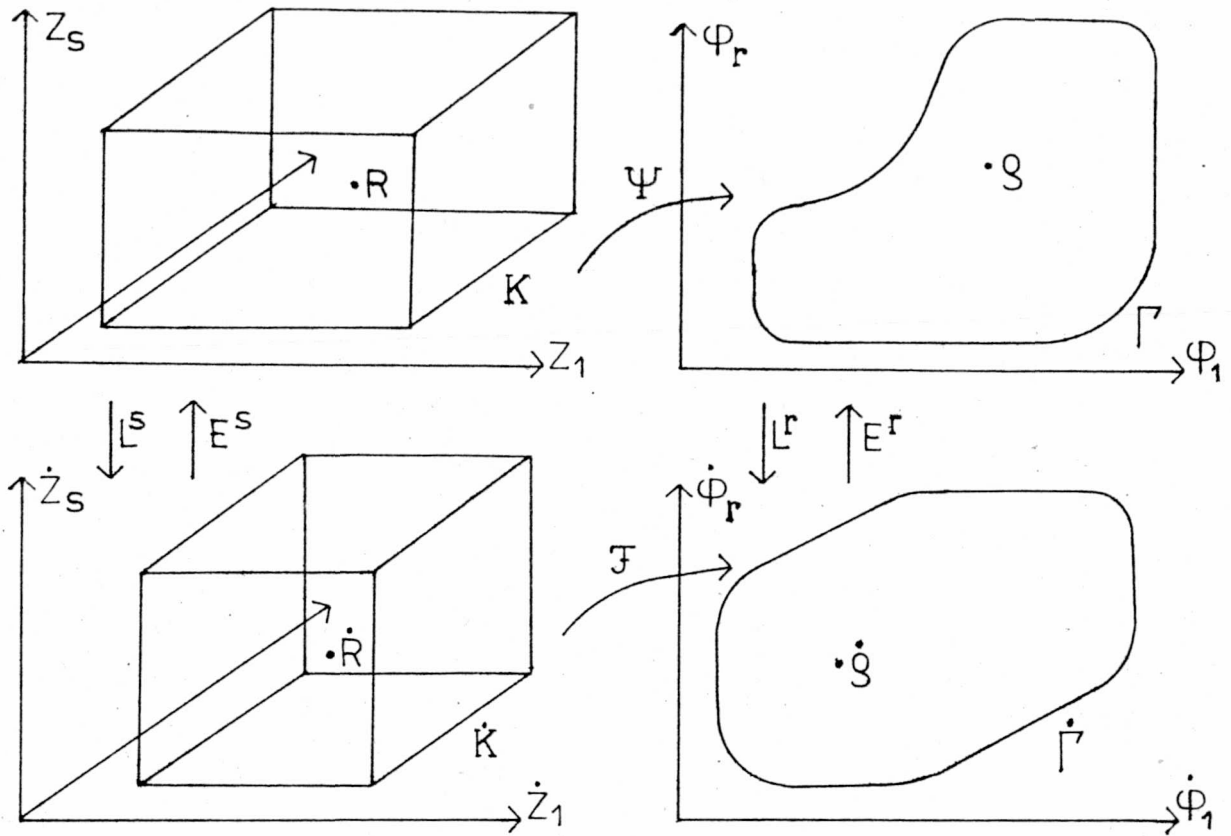
$$\mathcal{G} = \Psi(\mathcal{R}) \iff \dot{\mathcal{G}} = \mathcal{F}(\dot{\mathcal{R}}). \quad /2.1.22/$$

Wszystkie rozważane zależności ujęte w formę diagramu przedstawiono na rys. 2.1.3.

Zauważmy, że dzięki zastosowaniu transformacji $L^{(n)}$ określonej wzorem /2.1.12/, zamierzony cel planowania eksperymentu określony przez warunki /1.3.10/ - /1.3.13/ można zrealizować wykonując odpowiedni plan eksperymentu dla obszarów $\dot{\mathcal{K}}$ i $\dot{\mathcal{I}}$ i dokonując powrotu do "starych" zmiennych przy zastosowaniu, określonej w Def. 6.2.18, transformacji odwrotnej $E^{(n)}$. Załóżmy, że wybrany został zawarty w kostce $\dot{\mathcal{K}}$, zbiór "realizacji"

$$\dot{\mathcal{R}} = \{ \dot{\mathcal{R}}_1, \dots, \dot{\mathcal{R}}_q \}, \quad /2.1.23/$$

który można przedstawić w postaci sumy w-rozłącznych podzbiorów



Rys. 2.1.3. Diagram zależności pomiędzy wyjściowymi i "zlogarytmowanymi" obszarami parametrów procesu.

$$\dot{\mathcal{R}} = \bigcup_{i=1}^w \dot{\mathcal{R}}_i, \quad /2.1.24/$$

z których każdy zawiera t-realizacji

$$\dot{\mathcal{R}}_i = \{ \dot{R}_{i1}, \dots, \dot{R}_{it} \}, \quad /2.1.25/$$

dla których spełniony jest warunek

$$\Psi(\dot{R}_{i1}) = \dots = \Psi(\dot{R}_{it}) = \dot{g}_i, \quad /i = 1, \dots, w/. \quad /2.1.26/$$

Dokonując transformacji odwrotnej do transformacji /2.1.12/, czyli zgodnie z Def. 6.2.18, przyjmując

$$\begin{aligned} R_{ij} &= E^{(s)}(\dot{R}_{ij}) , \quad /j = 1, \dots, t/, \\ g_i &= E^{(r)}(\dot{g}_i) , \quad /i = 1, \dots, w/, \end{aligned} \quad /2.1.27/$$

otrzymamy, zawarty w kostce K, zbiór realizacji

$$\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_q\}, / \mathcal{R} = E^{(s)}(\dot{\mathcal{R}}), \quad R_k = E^{(s)}(\dot{R}_k), \quad /2.1.28/$$

$$k = 1, \dots, q /$$

składający się z "w" rozłącznych podzbiorów

$$\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^w \mathcal{R}_i \quad \mathcal{R}_i = E^{(s)}(\dot{\mathcal{R}}_i) \quad /2.1.29/$$

z których każdy zawiera t-realizacji

$$\mathcal{R}_i = \{R_{i1}, \dots, R_{it}\}, / R_{ij} = E^{(s)}(\dot{R}_{ij}), \quad /2.1.30/$$

$$j = 1, \dots, t /,$$

dla których, zgodnie z zależnościami /2.1.26/, /2.1.20/ i /2.1.22/, spełniony jest warunek

$$\Psi(R_{i1}) = \dots = \Psi(R_{it}) = g_i . \quad /2.1.31/$$

Zauważmy, iż zgodnie ze sformułowaną wcześniej zależnością /1.3.13/, jest to warunek podobieństwa realizacji w podzbiorach $\mathcal{R}_i$. Ze względu na przyjętą metodykę postępowania, w pierwszej kolejności konieczne staje się opracowanie metody opisu postaci zbioru $\dot{\Gamma}$. Zgodnie z warunkiem /2.1.21/ zbiór $\dot{\Gamma}$ jest obrazem kostki K przez odwzorowanie liniowe $\mathcal{F}$. Oznaczmy przez $\dot{w}_i$ /i = 1, ..., 2^S / wierzchołki kostki $\dot{K}$ /Def. 6.2.16/.

Zgodnie z Tw. 6.2.12 i Tw. 6.2.13 kostka $\dot{K}$ jest zbiorem wypukłym będącym uwypukleniem zbioru wszystkich swoich wierzchołków, co zgodnie z przyjętą w Def. 6.2.9 symboliką zapisać można w postaci

$$\dot{K} = \text{Conv} \{ \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_p \}, \quad /p = 2^S/. \quad /2.1.32/$$

Wykorzystując powyższe oznaczenie, warunek /2.1.21/ można zapisać w formie

$$\dot{\Gamma} = \mathcal{F}(\text{Conv} \{ \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_p \}). \quad /2.1.33/$$

Wykorzystując w odniesieniu do powyższej zależności Tw. 6.2.9 otrzymujemy wniosek

$$\dot{\Gamma} = \text{Conv} \{ \mathcal{F}(\dot{w}_1), \dots, \mathcal{F}(\dot{w}_p) \}, \quad /2.1.34/$$

który po przyjęciu oznaczeń

$$\dot{\omega}_i = \mathcal{F}(\dot{w}_i), \quad /i = 1, \dots, p/, \quad /2.1.35/$$

przybierze postać

$$\dot{\Gamma} = \text{Conv} \{ \dot{\omega}_1, \dots, \dot{\omega}_p \}. \quad /2.1.36/$$

Zbiór $\dot{\Gamma}$ jest zatem uwypukleniem zbioru punktów $\dot{\omega}_i$ $/i = 1, \dots, p/$, które zgodnie z oznaczeniem /2.1.35/ są obrazami wierzchołków kostki $\dot{K}$ przez odwzorowanie liniowe $\mathcal{F}$. Oznacza to, że zbiór $\dot{\Gamma}$ jest, przez zbiór punktów $\dot{\omega}_i$ $/i = 1, \dots, p/$, całkowicie wyznaczony. Zgodnie z Def. 6.2.9 każdy punkt $\dot{g} \in \dot{\Gamma}$ jest pewną wypukłą kombinacją liniową /por. Def. 6.2.8/ punktów $\dot{\omega}_i$ i odwrotnie - każda wypukła kombinacja liniowa punktów $\dot{\omega}_i$ jest pewnym

punktem zbioru $\dot{\Gamma}$. Inaczej mówiąc, jeżeli ustalimy pewien ciąg liczb rzeczywistych $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ spełniających warunki

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, /i = 1, \dots, p/, \quad /2.1.37/$$

wówczas punkt $\dot{Q}$ postaci

$$\dot{Q} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \dot{\omega}_i \quad /2.1.38/$$

będzie należał do zbioru $\dot{\Gamma}$ i odwrotnie - dla każdego punktu $\dot{Q} \in \dot{\Gamma}$ można dobrać ciąg liczb rzeczywistych $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ spełniających warunki /2.1.37/ tak, że punkt $\dot{Q}$ można będzie przedstawić w postaci wypukłej kombinacji liniowej /2.1.38/.

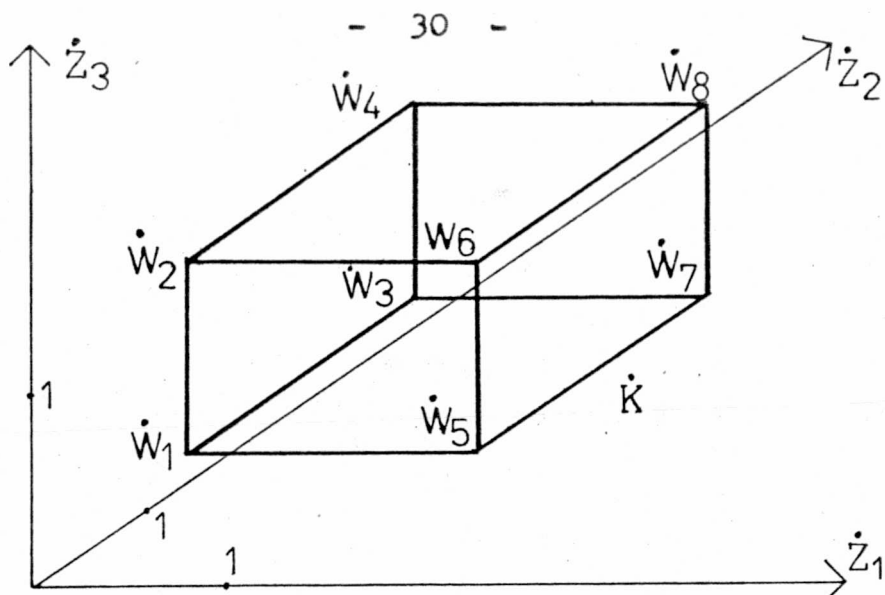
Powróćmy w tym miejscu do rozpoczętego na str. 19 przykładu. Dokonując określonej warunkiem /2.1.12/, zamiany zmiennych z_1, z_2, z_3 przebiegających przedziały /2.1.9./, otrzymamy układ zmiennych $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$, zawartych w przedziałach

$$\begin{aligned} 0,5 &\leq \dot{z}_1 \leq 2 \\ 0,5 &\leq \dot{z}_2 \leq 2,5 \\ 0,5 &\leq \dot{z}_3 \leq 1,5. \end{aligned} \quad /2.1.39/$$

Kostka $\dot{K}$, określona warunkiem /2.1.17/ będzie, w rozważanym przypadku, zbiorem postaci

$$\dot{K} = [0,5, 2] \times [0,5, 2,5] \times [0,5, 1,5]. \quad /2.1.40/$$

Jej położenie w układzie współrzędnych przedstawia rys. 2.1.4.



Rys. 2.1.4. Logarytmiczna transformacja trójwymiarowej kostki rzeczywistej z rys.2.1.1.

Zależności /2.1.11/, zgodnie z wnioskiem /2.1.18/, przyjmą postać związków liniowych

$$\varphi_1 = \dot{z}_2 + \frac{1}{2} \dot{z}_1$$

$$\varphi_2 = \dot{z}_3 + 1 \cdot \dot{z}_1,$$

/2.1.41/

które dla dalszych rozważań wygodnie będzie zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix}.$$

/2.4.42/

W rozważanym przykładzie odwzorowanie liniowe $\mathcal{F}$, ustalające zależność pomiędzy zbiorami $\dot{\Gamma}$ i $\dot{K}$ /por. warunek /2.1.21//, dane jest więc macierzą

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

/2.1.43/

Trójwymiarowa kostka $\dot{K}$ określona zależnością /2.1.40/, zgodnie z Tw. 6.2.13. jest uwypukleniem ośmiu swoich wierzchołków

$$\dot{w}_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \dot{w}_2 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ ,5 \end{bmatrix}, \dot{w}_3 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \dot{w}_4 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 2,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \dot{w}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix},$$

$$\dot{w}_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \dot{w}_7 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \dot{w}_8 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \quad /2.1.44/$$

czyli

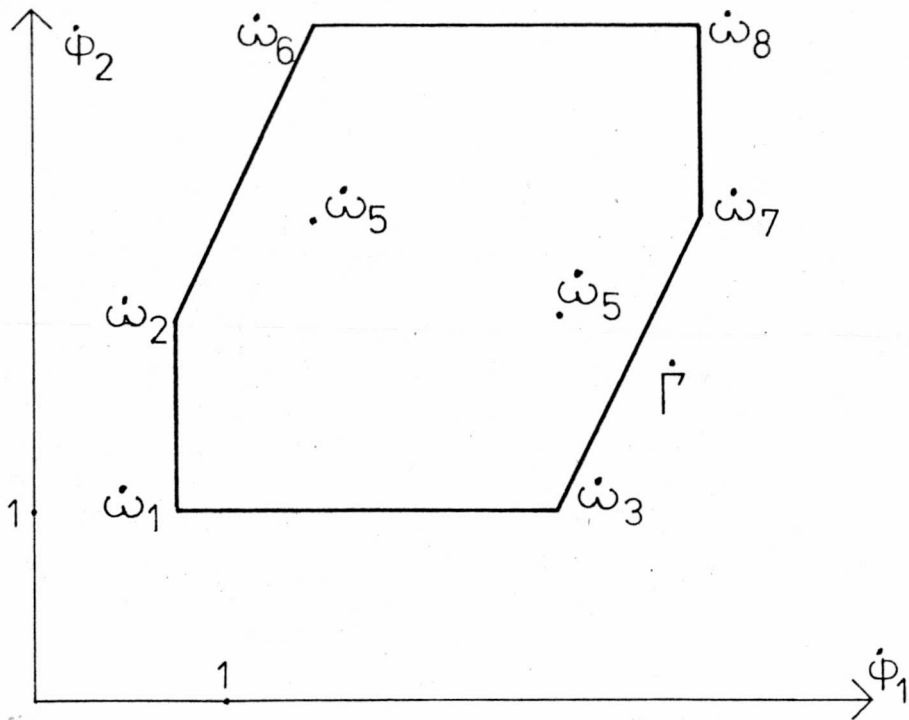
$$\dot{K} = \text{Conv} \{ \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_8 \}. \quad /2.1.45/$$

Zgodnie z warunkiem /2.1.36/ zbiór $\dot{\Gamma}$, odpowiadający rozważanej kostce $\dot{K}$, jest uwypukleniem zbioru ośmiu punktów

$$\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 1 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 2 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 2,75 \\ 1 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_4 = \begin{bmatrix} 2,75 \\ 2 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_5 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_6 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 3,5 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\omega}_7 = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_8 = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 3,5 \end{bmatrix}, \quad /2.1.46/$$

które zgodnie ze wzorem /2.1.35/ są obrazami wierzchołków /2.1.44/ przez odwzorowanie liniowe $\mathcal{F}$ dane macierzą /2.1.43/. Kształt i położenie tego zbioru w układzie współrzędnych ilustruje rys. 2.1.5.



Rys. 2.1.5. Logarytmiczna transformacja obszaru zmienności parametrów bezwymiarowych z rys.2.1.2.

Na mocy warunku /2.1.38/ każdy punkt $\dot{g} \in \dot{\Gamma}$ będzie w rozważanym przypadku, wypukłą kombinacją liniową punktów $\dot{\omega}_i$ / $i = 1, \dots, 8$ / postaci /2.1.46/. Ustalmy dla przykładu trzy ciągi liczb rzeczywistych spełniających warunki /2.1.37/.

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \dots = \lambda_{18} = \frac{1}{8}$$

$$\lambda_{21} = \frac{9}{16}, \lambda_{22} = \dots = \lambda_{28} = \frac{1}{16} \quad /2.1.47/$$

$$\lambda_{31} = \lambda_{32} = \dots = \lambda_{37} = \frac{1}{16}, \lambda_{38} = \frac{9}{16}$$

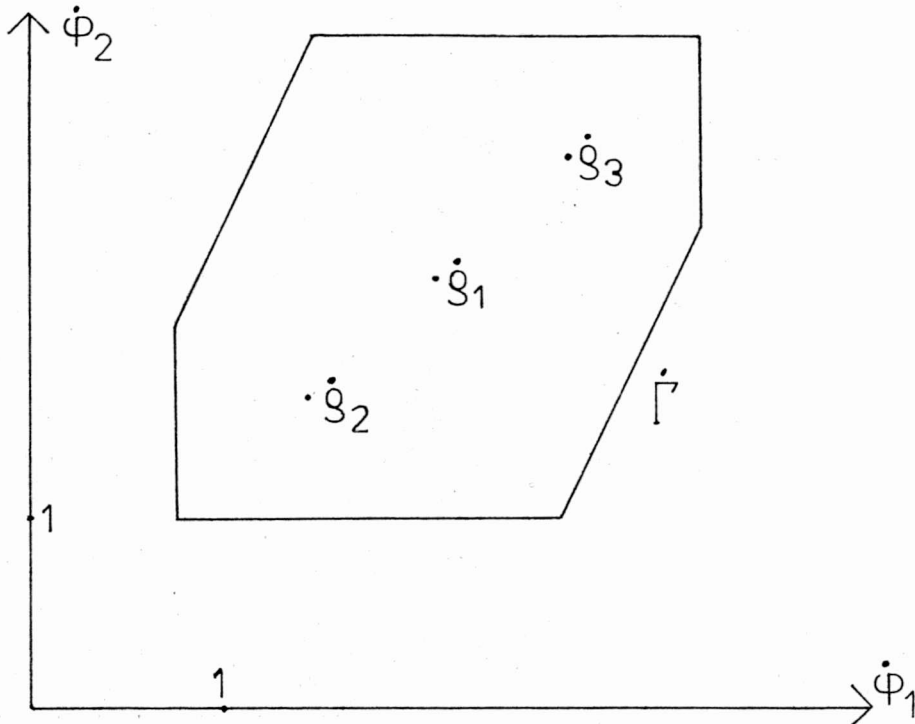
i przyjmijmy

$$\dot{g}_1 = \sum_{i=1}^8 \lambda_{1i} \dot{\omega}_i, \dot{g}_2 = \sum_{i=1}^8 \lambda_{2i} \dot{\omega}_i, \dot{g}_3 = \sum_{i=1}^8 \lambda_{3i} \dot{\omega}_i, /2.1.48/$$

Po wykonaniu rachunków otrzymujemy

$$\dot{g}_1 = \begin{bmatrix} 2,125 \\ 2,25 \end{bmatrix}, \dot{g}_2 = \begin{bmatrix} 1,4375 \\ 1,625 \end{bmatrix}, \dot{g}_3 = \begin{bmatrix} 1,8125 \\ 1,875 \end{bmatrix}. \quad /2.1.49/$$

Położenie punktów $\dot{g}_1, \dot{g}_2, \dot{g}_3$ w zbiorze $\dot{\Gamma}$ przedstawia rysunek 2.1.6.



Rys. 2.1.6. Przykładowe rozmieszczenie trzech punktów w zbiorze $\dot{\Gamma}$.

W przypadku ogólnym problem rozmieszczenia ustalonej liczby punktów $\dot{g}_i = /i = 1, \dots, w /$ w zbiorze $\dot{\Gamma}$ sprowadza się więc do ustalenia tyluż p -elementowych ciągów liczb rzeczywistych

$$\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1p}$$

/2.1.50/

$$\lambda_{w1}, \dots, \lambda_{wp},$$

spełniających oczywiście warunki

$$\sum_{j=1}^p \lambda_{ij} = 1, \lambda_{ij} \geq 0 \quad /i = 1, \dots, w, j=1, \dots, p / \quad /2.1.51/$$

gwarantujące, że punkty postaci

$$\dot{g}_i = \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} \dot{\omega}_j, \quad /i = 1, \dots, w/, \quad /2.1.52/$$

są elementami zbioru $\dot{\Gamma}$. Możliwości wyboru współczynników /2.1.50/ jest oczywiście nieskończenie wiele - decyzja należy do eksperymentatora. Proponowana w niniejszej pracy zasada ustalania rozważanych współczynników λ_{ij} gwarantuje usytuowanie punktów /2.1.52/ na odcinkach łączących środek symetrii zbioru $\dot{\Gamma}$ z jego wierzchołkami. Szczegóły dotyczące wspomnianej zasady stanowią treść punktu 3.1.

Kolejnym etapem proponowanego algorytmu planowania eksperymentu jest problem konstrukcji klasy podobieństwa $\dot{V} \subset \dot{K}$, odpowiadającej ustalonemu punktowi $\dot{g} \in \dot{\Gamma}$ postaci /2.1.38/.

2.2. Konstrukcja klasy podobieństwa

Klasa podobieństwa $\dot{V}$, odpowiadająca ustalonemu punktowi $\dot{g} \in \dot{\Gamma}$ postaci /2.1.38/, jest pewnym podzbiorem kostki $\dot{K}$, dla którego spełniony jest warunek

$$\mathcal{F}(\dot{V}) = \dot{g}. \quad /2.2.1/$$

Zgodnie z powyższą zależnością, klasa podobieństwa $\dot{V}$ jest zbiorem postaci

$$\dot{V} = \{ \dot{R} \in \mathbb{R}^{m+r} : \dot{R} \in \dot{K} \wedge \mathcal{F}(\dot{R}) = \dot{G} \}, \quad /2.2.2/$$

co oznacza, że jest ona iloczynem dwóch zbiorów

$$\dot{V} = \dot{H} \cap \dot{K}, \quad /2.2.3/$$

gdzie

$$\dot{H} = \{ \dot{R} \in \mathbb{R}^{m+r} : \mathcal{F}(\dot{R}) = \dot{G} \}. \quad /2.2.4/$$

Zauważmy, że określony powyższą zależnością zbiór $\dot{H}$ jest przeciwobrazem punktu $\dot{G} \in \dot{\Gamma}$ przez odwzorowanie liniowe $\mathcal{F}$. Zgodnie z Tw. 6.2.2., zbiór $\dot{H}$ jest więc pewną rozmaitością liniową w przestrzeni $\mathbb{R}^{m+r}$, którą można przedstawić w formie translacji jądra J odwzorowania $\mathcal{F}$ /Def. 6.2.2/, o pewien element $\dot{R}_0 \in \mathbb{R}^{m+r}$, dla którego spełniony jest warunek

$$\mathcal{F}(\dot{R}_0) = \dot{G}. \quad /2.2.5/$$

Tak więc zbiór $\dot{H}$ jest rozmaitością liniową postaci

$$\dot{H} = J + \dot{R}_0. \quad /2.2.6/$$

Podobnie jak w punkcie poprzednim prowadzone rozważania zilustrowane zostaną odpowiednim przykładem. Kontynuacja przykładu z punktu poprzedniego jest niecelowa gdyż klasy podobieństwa dla rozważanego tam przypadku są jednowymiarowe w związku z czym przykład ten stanowiłby zbyt ubogą ilustrację omawianej metody konstrukcji klas podobieństwa - wskazane jest więc dokonanie pewnej jego modyfikacji.

Rozważmy tak jak poprzednio pewien proces scharakteryzowany przez trzy zmienne wejściowe $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{Z}_3$ należące do przestrzeni wymiarowej Π , rozpiętej na układzie jednostek $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3$, w którym rozpatrywane zmienne mają przedstawienie postaci

$$\begin{aligned}\hat{Z}_1 &= z_1 \hat{E}_1^{\frac{3}{2}} \hat{E}_2^{\frac{1}{2}} \hat{E}_3^1 \\ \hat{Z}_2 &= z_2 \hat{E}_1^2 \hat{E}_2^{\frac{1}{3}} \hat{E}_3^{\frac{2}{3}} \\ \hat{Z}_3 &= z_3 \hat{E}_1^2 \hat{E}_2^{\frac{1}{2}} \hat{E}_3^1.\end{aligned}\quad /2.2.7/$$

Nietrudno sprawdzić, że każdy maksymalny wymiarowo niezależny podukład układu zmiennych $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{Z}_3$ jest dwuelementowy. Przyjmijmy więc, że bazę wymiarową rozważanego procesu stanowić będą zmienne $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2$, wówczas zmienna $\hat{Z}_3$ będzie od $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2$ wymiarowo zależna i zależność ta, wyrażona w miarach liczbowych - /por. Tw. 6.1.1/, będzie postaci

$$z_3 = \varphi_1 z_1^{\frac{2}{3}} z_2^{\frac{1}{2}}. \quad /2.2.8/$$

Załóżmy, że miary liczbowe rozpatrywanych zmiennych mogą być w trakcie eksperymentu zmieniane w przedziałach

$$\begin{aligned}4,48 &\leq z_1 \leq 20,09 \\ 1,65 &\leq z_2 \leq 12,18 \\ 1,40 &\leq z_3 \leq 3,79.\end{aligned}\quad /2.2.9/$$

Tak więc, w rozważanym przypadku wszystkie dopuszczalne punkty pomiarowe $R = [z_1, z_2, z_3]$ utworzą trójwymiarową kostkę rzeczywistą

$$K = [4,48 \ 20,09] \times [1,65 \ 12,18] \times [1,40 \ 3,79]. \quad /2.2.10/$$

Zdefiniowane zależnością /1.3.2/ odwzorowanie Ψ będzie w tym przypadku funkcją $\Psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ postaci

$$\Psi(z_1, z_2, z_3) = \Phi_1, \quad /2.2.11/$$

gdzie oczywiście, zgodnie z warunkiem /2.2.8/,

$$\Phi_1 = \frac{z_3^{\frac{2}{3}}}{z_1^{\frac{2}{3}} z_2^{\frac{1}{2}}} \quad /2.2.12/$$

Po zastosowaniu transformacji /2.1.12/, nowe zmienne $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$ / $\dot{z}_i = \ln z_i$ / przebiegać będą przedziały

$$1,5 \leq \dot{z}_1 \leq 3$$

$$0,5 \leq \dot{z}_2 \leq 2,5 \quad /2.2.13/$$

$$0,33 \leq \dot{z}_3 \leq 1,33$$

w związku z czym, zgodnie z określeniem /2.1.17/, kostka $\dot{K}$ będzie zbiorem postaci

$$\dot{K} = [1,5, 3] \times [0,5, 2,5] \times [0,33, 1,33]. \quad /2.2.14/$$

Zgodnie z wnioskiem /2.1.32/ kostka /2.2.14/ jest uwypukleniem zbioru ośmiu swoich wierzchołków

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \begin{bmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 0,33 \end{bmatrix}, \dot{w}_2 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1,33 \end{bmatrix}, \dot{w}_3 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 0,33 \end{bmatrix}, \dot{w}_4 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 0,33 \end{bmatrix}, \dot{w}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,5 \\ 0,33 \end{bmatrix}, \\ \dot{w}_6 &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0,5 \\ 1,33 \end{bmatrix}, \dot{w}_7 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 0,33 \end{bmatrix}, \dot{w}_8 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 1,33 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad /2.2.15/$$

Zależność /2.2.8/ przyjmie, po transformacji zmiennych, postać związku liniowego

$$\dot{\Phi}_1 = \dot{z}_3 - \frac{2}{3} \dot{z}_1 - \frac{1}{2} \dot{z}_2, \quad /2.2.16/$$

który dla dalszych rozważań wygodnie będzie przedstawić w formie macierzowej

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix}. \quad /2.2.17/$$

Tak więc, określone warunkiem /2.1.19/, odwzorowanie liniowe $\mathcal{F}$ będzie w rozważanym przypadku dane macierzą

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad /2.2.18/$$

Zgodnie z warunkiem /2.1.21/ i /2.1.36/ zbiór $\bar{\Gamma}$, czyli obraz kostki $\bar{K}$ przez odwzorowanie liniowe $\mathcal{F}$, będzie w tym przypadku odcinkiem $[-2,92 \quad 0,08]$ stanowiącym uwypuklenie ośmiu punktów

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -0,92, \dot{\omega}_2 = 0,08, \dot{\omega}_3 = -1,92, \dot{\omega}_4 = 0,92, \\ \dot{\omega}_5 &= -1,92, \dot{\omega}_6 = -0,92, \dot{\omega}_7 = -2,92, \dot{\omega}_8 = -1,92, \end{aligned} \quad /2.2.19/$$

z których każdy jest obrazem odpowiedniego wierzchołka /2.2.15/ przez odwzorowanie liniowe dane macierzą /2.2.18/.

Zgodnie z warunkiem /2.1.38/, każdy punkt rozważanego zbioru $\bar{\Gamma}$ /odcinka $[-2,92 \quad 0,08]$ / można przedstawić w postaci wypukłej kombinacji liniowej ośmiu punktów /2.2.19/. Ustalmy np. ciąg współczynników

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_8 = \frac{1}{8} \quad /2.2.20/$$

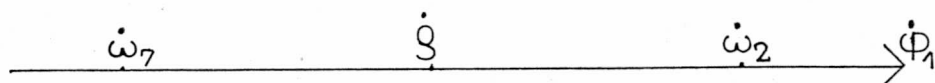
i rozważmy punkt $\dot{G}$ postaci

$$\dot{G} = \frac{1}{8}\dot{\omega}_1 + \dots + \frac{1}{8}\dot{\omega}_8. \quad /2.2.21/$$

Po wykonaniu rachunków otrzymamy

$$\dot{G} = -1,42. \quad /2.2.22/$$

Położenie punktu $\dot{G}$ w rozważanym zbiorze $\dot{\Gamma}$ przedstawia rys. 2.2.1.



Rys. 2.2.1. Przykładowe położenie punktu w jednowymiarowym zbiorze $\dot{\Gamma}$.

Kontynuacja rozpoczętego przykładu nastąpi po pewnych rozważaniach ogólnych dotyczących postaci klas podobieństwa.

Zgodnie z zależnością /2.2.3/ wyznaczenie klasy podobieństwa $\dot{V}$ sprowadza się do wyznaczenia części wspólnej rozmaitości liniowej $\dot{H}$ i kostki $\dot{K}$. Rozmaitość liniowa $\dot{H}$, na mocy warunku /2.2.6/, jest całkowicie wyznaczona przez jądro J oraz wektor $\dot{R}_0 \in \mathbb{R}^{m+r}$, dla którego spełniony jest warunek /2.2.5/. Jądro J , zgodnie z Def. 6.2.2., jest pewną podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^{m+r}$ w związku z czym wyznaczone jest przez wektory swojej bazy. Zatem znajomość wektorów bazy jądra J oraz wektora $\dot{R}_0$ wystarcza dla przedstawienia dowolnego elementu rozmaitości liniowej $\dot{H}$. Rozważmy zatem możliwość wyznaczenia wektorów wspomnianej bazy. Odwzorowanie liniowe

$\mathcal{F}: \mathbb{R}^{m+r} \rightarrow \mathbb{R}^r$, zgodnie z wnioskiem /2.1.19/, dane jest macierzą

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1m} & 10 & \dots & 0 \\ -a_{r1} & \dots & -a_{rm} & 00 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad /2.2.23/$$

Ostatnie r -kolumn tej macierzy /kolumny o numerach $m+1 - m+r$ / tworzy kwadratową podmacierz jednostkową skąd wynika, że wymiar przestrzeni obrazu odwzorowania $\mathcal{F}$ jest równy r , tzn.

$$\dim(\mathcal{F}(\mathbb{R}^{m+r})) = r. \quad /2.2.24/$$

Dla uzasadnienia tego faktu wystarczy wskazać r -liniowo niezależnych wektorów $C_1, \dots, C_r$ / $C_j \in \mathbb{R}^{m+r}$, $j = 1, \dots, r$ /, których obrazy przez odwzorowanie $\mathcal{F}$ tzn. wektory $\xi_1, \dots, \xi_r$ / $\xi_j = \mathcal{F}(C_j)$, $\xi_j \in \mathbb{R}^r$, $j = 1, \dots, r$ / są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{R}^r$.

Rozważmy w tym celu następujący układ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^{m+r}$

$$\begin{aligned} C_1 &= (\overbrace{0 \dots 0}^m \overbrace{1 0 \dots 0}^r) \\ C_2 &= (0 \dots 0 0 1 \dots 0) \\ C_r &= (0 \dots 0 0 0 \dots 1). \end{aligned} \quad /2.2.25/$$

Wektory te są oczywiście liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{R}^{m+r}$, a ich obrazy przez odwzorowanie $\mathcal{F}$ dane macierzą /2.2.23/ tworzą układ wektorów postaci

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (1 0 \dots 0) \\ \xi_2 &= (0 1 \dots 0) \\ \xi_r &= (0 0 \dots 1). \end{aligned} \quad /2.2.26/$$

Liniowa niezależność powyższego układu wektorów jest faktem oczywistym - tym samym równość /2.2.24/ może być uznana za udowodnioną. Zgodnie z Tw. 6.2.1. wymiar dziedziny odwzorowania liniowego jest równy sumie wymiaru jego jądra i wymiaru przestrzeni obrazu, co w przypadku rozważanego odwzorowania oznacza, że

$$\dim(\mathbb{R}^{m+r}) = \dim(\mathcal{F}(\mathbb{R}^{m+r})) + \dim(\mathcal{J}), \quad /2.2.27/$$

a to po uwzględnieniu równości /2.2.24/ prowadzi do wniosku

$$m + r = r + \dim(\mathcal{J}) \quad /2.2.28/$$

skąd ostatecznie wynika, że

$$\dim(\mathcal{J}) = m. \quad /2.2.29/$$

Oznacza to, że jądro $\mathcal{J}$ jest pewną m -wymiarową podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^{m+r}$. Wyznaczenie jego bazy sprowadza się więc do wyznaczenia m -liniowo niezależnych wektorów $b_1, \dots, b_m$ $/b_i \in \mathbb{R}^{m+r}, i = 1, \dots, m/$ takich, że

$$\mathcal{F}(b_i) = 0, \quad /i = 1, \dots, m/. \quad /2.2.30/$$

Rozważmy następujący układ wektorów

$$\begin{aligned} b_1 &= (1 \ 0 \ \dots \ 0 \quad a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{r1}) \\ b_2 &= (0 \ 1 \ \dots \ 0 \quad a_{12} \ a_{22} \ \dots \ a_{r2}) \\ &\vdots \\ b_m &= (\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 1}_m \quad a_{1m} \ a_{2m} \ \dots \ a_{rm}). \end{aligned} \quad /2.2.31/$$

Współrzędne o numerach $m+1 \div m+r$ wektora b_i $/i = 1, \dots, m/$ tzn. liczby $a_{1j}, \dots, a_{rj}$ są wyrazami j -tej kolumny macierzy /2.2.23/ wziętymi z przeciwnym znakiem. Nietrudno zauważyć, że wektory b_i są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{R}^{m+r}$ oraz, że spełniony jest dla nich warunek /2.2.30/. Zauważmy bowiem, że

$$\mathcal{F}(b_i) = \begin{bmatrix} -a_{11} \dots -a_{1i} \dots -a_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} \dots -a_{2i} \dots -a_{2m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{r1} \dots -a_{ri} \dots -a_{rm} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow "i" \\ \vdots \\ 0 \\ a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} + a_{1i} & 0 \\ -a_{2i} + a_{2i} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ -a_{ri} + a_{ri} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad /2.2.32/$$

co oznacza, iż układ wektorów /2.2.31/ stanowi bazę jądra J odwzorowania $\mathcal{F}$.

Tak więc dla określenia rozmaitości liniowej $\dot{H}$ postaci /2.2.6/, odpowiadającej ustalonemu punktowi $\dot{g} \in \dot{\Gamma}$, który zgodnie z warunkiem /2.1.38/ dany jest jako wypukła kombinacja liniowa

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^P \lambda_i \dot{\omega}_i, \quad \sum_{i=1}^P \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0, \quad /2.2.33/$$

konieczne jest jeszcze wyznaczenie pewnego elementu $\dot{R}_0 \in \mathbb{R}^{m+r}$, dla którego spełniony jest warunek

$$\mathcal{F}(\dot{R}_0) = \dot{g}. \quad /2.2.34/$$

Rozważmy punkt $\dot{R}_0 \in \mathbb{R}^{m+r}$ postaci

$$\dot{R}_0 = \sum_{i=1}^P \lambda_i \dot{w}_i, \quad /2.2.35/$$

gdzie $\dot{w}_i$ oznaczają wierzchołki kostki $\dot{K}$ postaci /2.1.17/, natomiast współczynniki λ_i wzięte są z kombinacji liniowej /2.2.33/. Nietrudno sprawdzić, że dla tak określonego elementu $\dot{R}_0$ spełniony jest warunek /2.2.34/. Jak nietrudno bowiem zauważyć

$$\mathcal{F}(\dot{R}_0) = \mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^P \lambda_i \dot{w}_i\right) = \sum_{i=1}^P \lambda_i \mathcal{F}(\dot{w}_i) = \sum_{i=1}^P \lambda_i \dot{\omega}_i = \dot{g}. \quad /2.2.36/$$

Zauważmy ponadto, że punkt $\dot{R}_0$ należy do kostki $\dot{K}$ jako że jest wypukłą kombinacją liniową jej wierzchołków $\dot{w}_i$ / $i = 1, \dots, p$ /. W przypadku gdy wszystkie współczynniki λ_j są większe od zera czyli gdy, zgodnie z Def. 6.2.8, punkt $\dot{R}_0$ jest ściśle wypukłą kombinacją liniową wierzchołków $\dot{w}_i$ wówczas, na mocy Tw. 6.2.17, punkt ten należy do wnętrza kostki $\dot{K}$, tzn.

$$\dot{R}_0 \in \text{Int}(\dot{K}), \text{ gdy } \lambda_i > 0, /i = 1, \dots, p/. \quad /2.2.37/$$

Powróćmy w tym miejscu do rozpoczętego na str.36 przykładu. Wyznaczenie klasy podobieństwa odpowiadającej ustalonemu punktowi $\dot{g}$ postaci /2.2.21/ wymaga w pierwszej kolejności wyznaczenia bazy jądra odwzorowania liniowego $\mathcal{F}$, które w rozważanym przypadku dane jest macierzą

$$\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 1 \right]. \quad /2.2.38/$$

Postępując zgodnie z określoną warunkiem /2.2.31/ zasadą, otrzymujemy dwa wektory

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

/2.2.39/

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

Rozpinające dwuwymiarowe jądro rozpatrywanego odwzorowania $\mathcal{F}$. Punkt $\dot{R}_0 \in \mathbb{R}^3$, zgodnie ze wzorem /2.2.35/, będzie postaci

$$\dot{R}_0 = \frac{1}{8} (\dot{w}_1 + \dots + \dot{w}_8), \quad /2.2.40/$$

co po uwzględnieniu postaci wierzchołków /2.2.15/ daje

$$\dot{R}_0 = [2,25, 1,5, 0,833]. \quad /2.2.41/$$

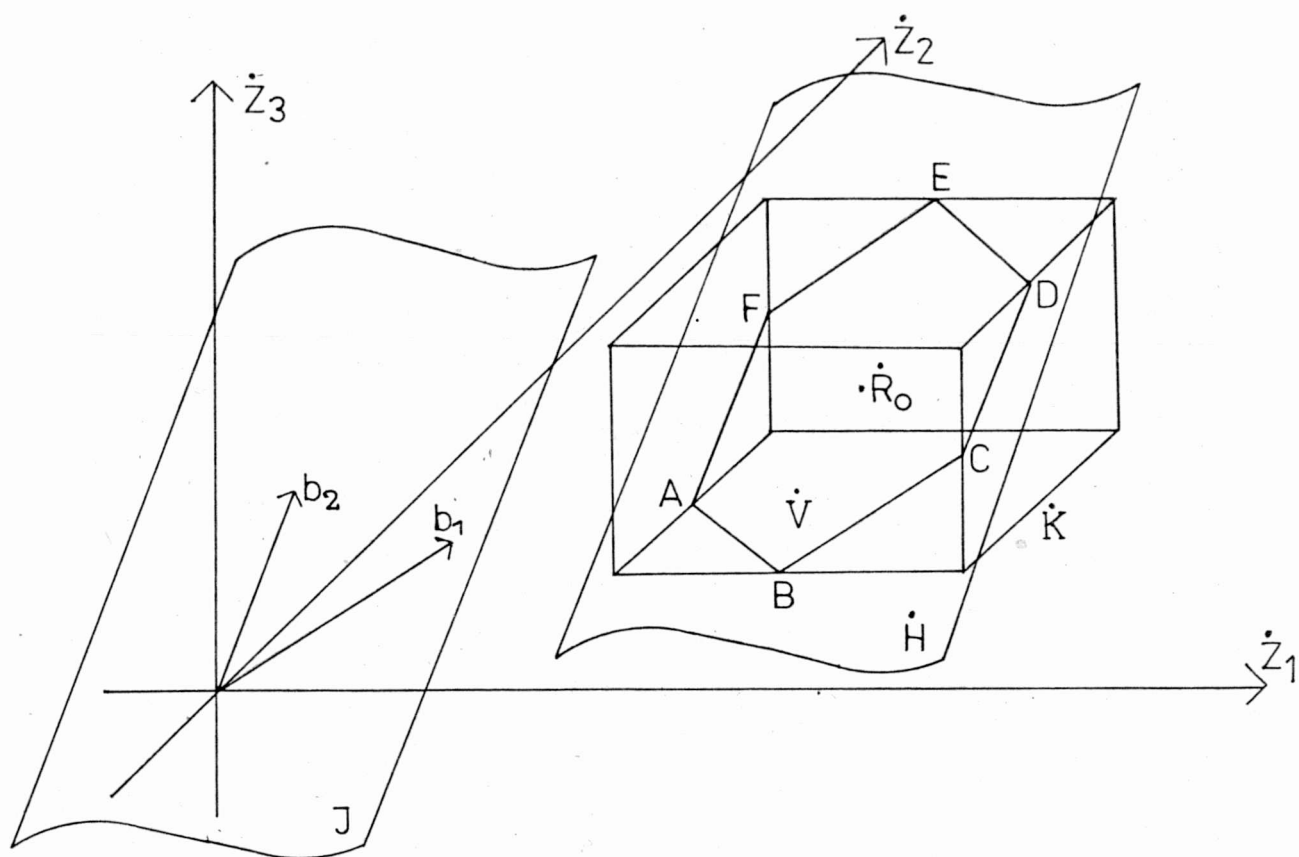
Tak więc w rozpatrywanym przykładzie rozmaitość liniowa $\dot{H}$ odpowiadająca punktowi /2.2.21/ będzie translacją jądra $\mathcal{J}$, rozpiętego na wektorach /2.2.39/, o element $\dot{R}_0$ postaci /2.2.41/ tzn.

$$\dot{H} = \text{lin} \{ b_1, b_2 \} + \dot{R}_0. \quad /2.2.42/$$

Szukaną klasą podobieństwa $\dot{V}$ jest, przedstawiony na rys. 2.2.2., wielokąt ABCDEF będący, zgodnie z warunkiem /2.2.3/, przekrojem dwuwymiarowej rozmaitości liniowej $\dot{H}$ i kostki $\dot{K}$.

Rozważany przykład będzie jeszcze kilkakrotnie wykorzystany jako ilustracja prowadzonych w tym punkcie pracy rozważań teoretycznych.

W przypadku ogólnym klasa podobieństwa $\dot{V}$ jest pewnym wielościannem wypukłym [3], jako że można ją przedstawić w postaci iloczynu skończonej ilości półprzestrzeni [3]. Oznacza to, iż jest ona uwypukleniem pewnego skończonego zbioru punktów /w rozważanym przykładzie są to punkty A, B, C, D, E, F. Jednakże



Rys. 2.2.2. Przykładowe położenie klasy podobieństwa $\dot{V}$ w trójwymiarowej kostce rzeczywistej $\dot{K}$.

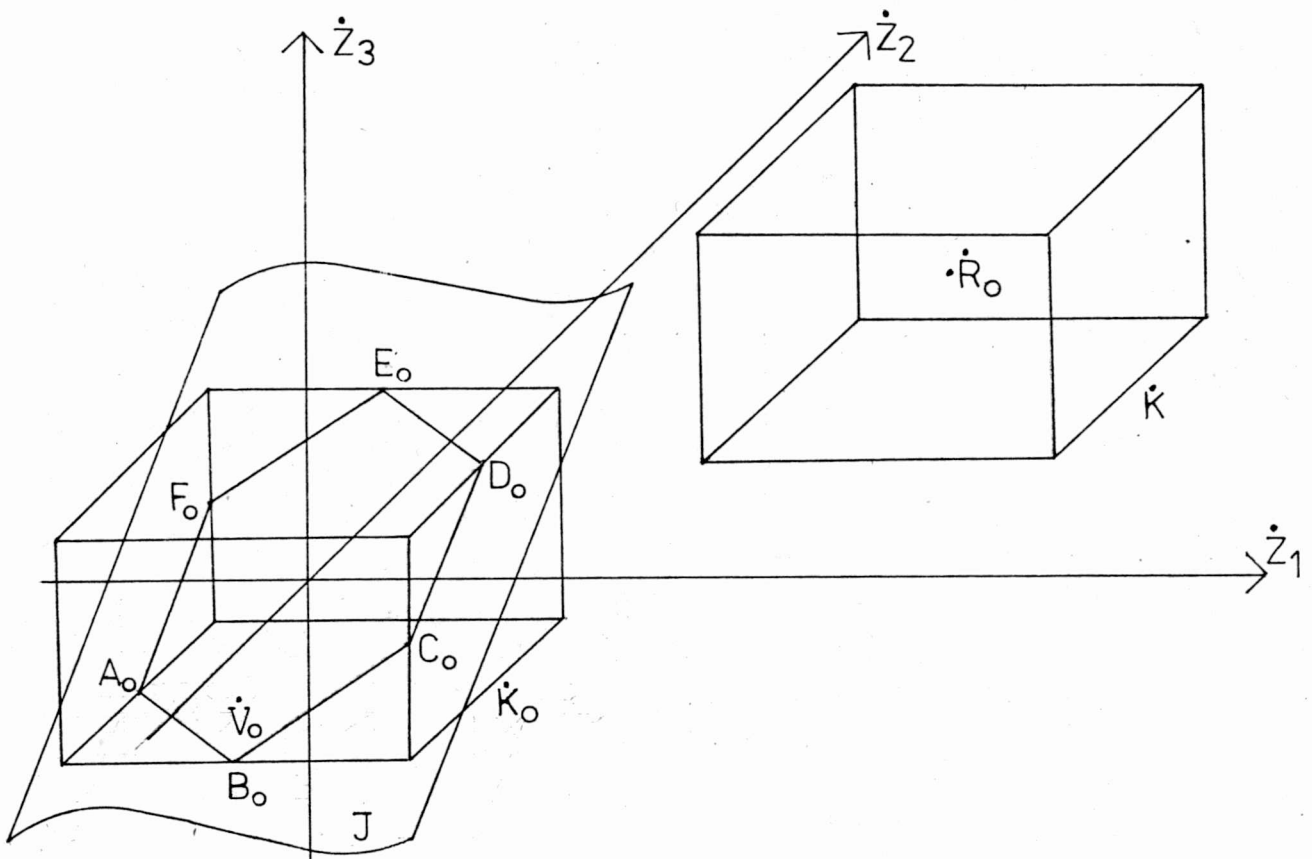
ze względu na fakt, że w przypadku ogólnym wyznaczenie punktów, których uwypukleniem jest klasa $\dot{V}$, stanowi uciążliwe rachunkowo zadanie, podana zostanie metoda wyznaczania pewnego podzbioru $\dot{U}$ rozważanej klasy podobieństwa $\dot{V}$. Z warunków /2.2.3/ i /2.2.6/ wynika, iż aby skonstruować klasę $\dot{V}$, należy przesunąć jądro J o wektor $\dot{R}_0$, a następnie wyznaczyć część wspólną powstałej w ten sposób rozmaitości liniowej $\dot{H}$ i kostki $\dot{K}$. Zauważmy, że ten sam efekt uzyskać można przesuwając najpierw kostkę $\dot{K}$ o wektor $-\dot{R}_0$, znajdując część wspólną $\dot{V}_0$ przesuniętej kostki $\dot{K}_0$ i jądra J i dokonując następnie translacji zbioru $\dot{V}_0$ o wektor $\dot{R}_0$. Tak więc

$$\dot{V} = \dot{K} \cap \dot{H} = [\dot{K}_0 \cap J] + \dot{R}_0, \quad /2.2.43/$$

gdzie $\dot{K}_0$ jest kostką $\dot{K}$ przesuniętą o wektor $-\dot{R}_0$ tzn.

$$\dot{K}_0 = \dot{K} - \dot{R}_0 \quad /2.2.44/$$

Opisaną powyżej operację ilustruje rys. 2.2.3.



Rys.2.2.3. Translacja kostki $\dot{K}$ o wektor $-\dot{R}_0$.

Tak więc kolejnym etapem algorytmu staje się wyznaczenie pewnego zbioru $\dot{U}_0$ stanowiącego podzbiór przesuniętej o wektor $-\dot{R}_0$ klasy podobieństwa

$$\dot{V}_0 = \dot{K}_0 \cap J. \quad /2.2.45/$$

Zgodnie z warunkami /2.2.33/ i /2.2.37/, punkt $\dot{R}_0$ jako ściśle wypukła kombinacja liniowa wierzchołków kostki $\dot{K}$ jest jej punktem wewnętrznym. Oznacza to, że 0 /początek układu współrzędnych przestrzeni $\mathbb{R}^{m+r}$ / będzie punktem wewnętrznym kostki $\dot{K}_0$, tzn.

$$0 \in \text{Int}(\dot{K}_0). \quad /2.2.46/$$

Oznaczmy przez J_i jednowymiarową podprzestrzeń generowaną przez i -ty wektor bazy jądra J postaci /2.2.31/, tzn.

$$J_i = \text{lin} \{b_i\}, \quad /i = 1, \dots, m/. \quad /2.2.47/$$

Na mocy warunku /2.2.46/ każda z podprzestrzeni J_i $/i = 1, \dots, m/$, zgodnie z Tw. 6.2.19, ma dwa punkty wspólne z brzegiem kostki $\dot{K}_0$ postaci

$$P_i^L = \tau_i^L b_i, \quad \tau_i^L < 0, \quad /i = 1, \dots, m/, \quad /2.2.48/$$

$$P_i^P = \tau_i^P b_i, \quad \tau_i^P > 0,$$

gdzie współczynniki liczbowe τ_i^L, τ_i^P $/i = 1, \dots, m/$ określone są przez wzory /6/, /40/ w Tw. 6.2.19. Wyznaczając dla każdej z podprzestrzeni J_i $/i = 1, \dots, m/$ punkty P_i^L, P_i^P otrzymamy $2m$ -elementowy zbiór punktów

$$\{P_1^L, P_1^P, \dots, P_m^L, P_m^P\}. \quad /2.2.49/$$

Rozważmy zbiór $\dot{U}_0^I$ będący ich uwypukleniem tzn.

$$\dot{U}_0^I = \text{Conv} \{ P_1^L, P_1^P, \dots, P_m^L, P_m^P \}. \quad /2.2.50/$$

Nietrudno uzasadnić, że zbiór $\dot{U}_0^I$ jest podzbiorem zdefiniowanego zależnością /2.2.45/ zbioru $\dot{V}_0$. Zauważmy bowiem, że każdy z punktów P_i^L, P_i^P / $i = 1, \dots, m$ / należy do jądra J /jest elementem jednowymiarowej podprzestrzeni J_1 zdefiniowanej zależnością /2.2.47//, oraz do kostki $\dot{K}_0$ /jest jej punktem brzegowym/. Oznacza to, że punkty P_i^L, P_i^P należą również do zbioru $\dot{V}_0$ stanowiącego część wspólną jądra J i kostki $\dot{K}_0$ tzn.

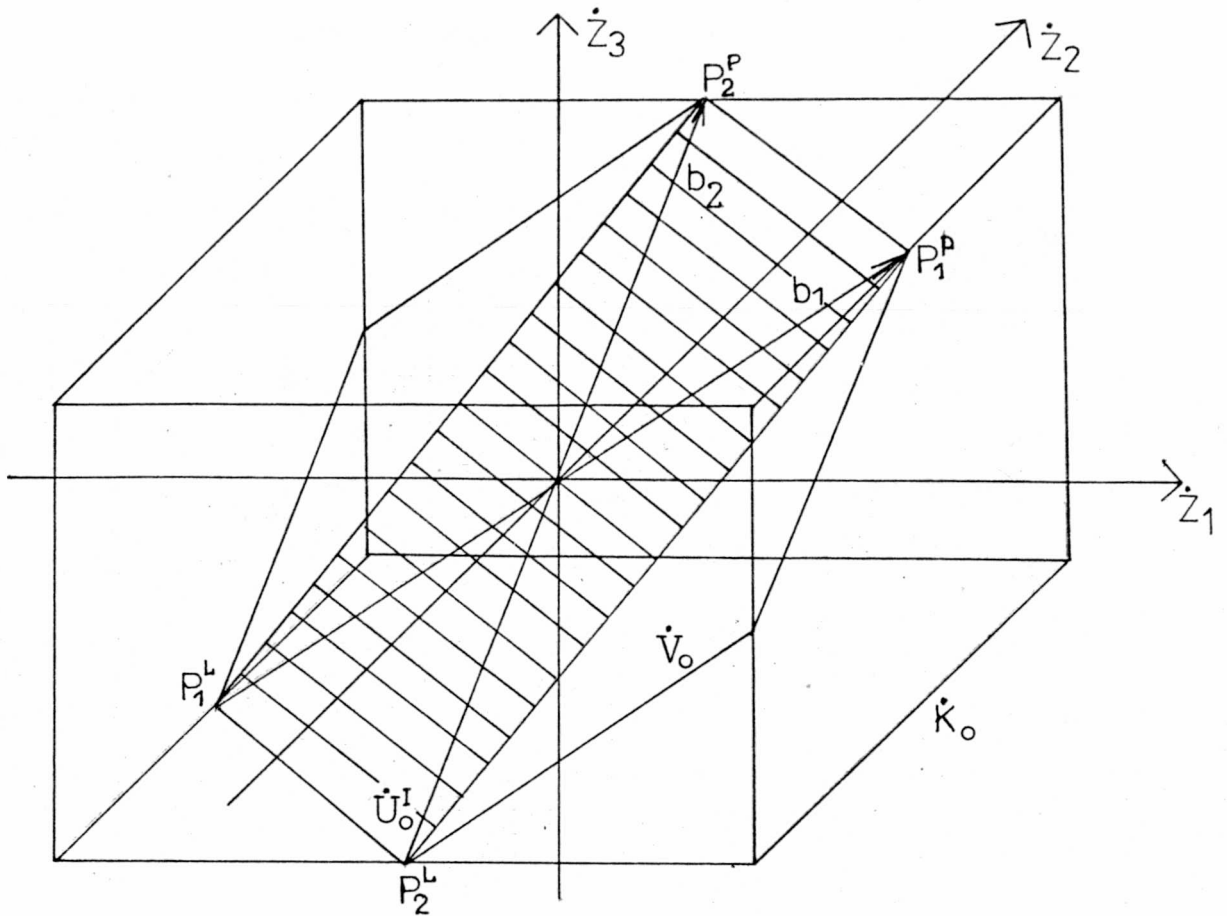
$$P_i^L, P_i^P \in \dot{V}_0 = \dot{K}_0 \cap J. \quad /2.2.51/$$

Zgodnie z Tw. 6.2.6. zbiór $\dot{V}_0$ jako przekrój dwóch zbiorów wypukłych /por. warunek /2.2.45// jest również zbiorem wypukłym, zatem zgodnie z Tw. 6.2.5 zawiera uwypuklenie każdego swojego podzbioru, co ostatecznie dowodzi, że

$$\dot{U}_0^I \subset \dot{V}_0. \quad /2.2.52/$$

W rozważanym przypadku kształt i położenie skonstruowanego według zaproponowanej metody zbioru $\dot{U}_0^I$ przedstawia rys. 2.2.4.

Jak widać więc, zbiór $\dot{U}_0^I$ stanowić może niekiedy jedynie niewielką część całej klasy $\dot{V}_0$. W celu uzyskania zbioru, który stanowiłby lepsze jej "przybliżenie" stosuje się w proponowanej metodzie dodatkową operację polegającą na powtórnym wyznaczeniu punktów /2.2.49/ dla nowej bazy jądra $b'_1, \dots, b'_m$. W przypadku gdy $\dim(J) = 1$, tzn. gdy jądro J generowane jest przez jeden tylko wektor b , klasa $\dot{V}_0$ jest również jednowymia-



Rys. 2.2.4. Wzajemne położenie zbioru $\dot{U}_0^I$ i klasy podobieństwa $\dot{V}_0$ w kostce $\dot{K}_0$.

rowa i jak łatwo zauważyć zachodzi równość $\dot{U}^I = \dot{V}_0$. Natomiast gdy $\dim(\mathcal{J}) > 1$, wówczas nową bazę jądra $b'_1, \dots, b'_m$ tworzymy według zasady

$$b'_1 = b_1 + b_m \quad /2.2.53/$$

$$b'_2 = b_2 + b_m$$

$$b'_{m-1} = b_{m-1} + b_m$$

$$b'_m = b_m - b_1 - b_2 - \dots - b_{m-1}.$$

Wyznaczając punkty /2.2.49/ dla obu baz $b_1, \dots, b_m$ oraz $b'_1, \dots, b'_m$ otrzymamy zbiór złożony z $4m$ - punktów

$$\{P_1^L, P_1^P, \dots, P_m^L, P_m^P, P_1'^L, P_1'^P, \dots, P_m'^L, P_m'^P\}, \quad /2.2.54/$$

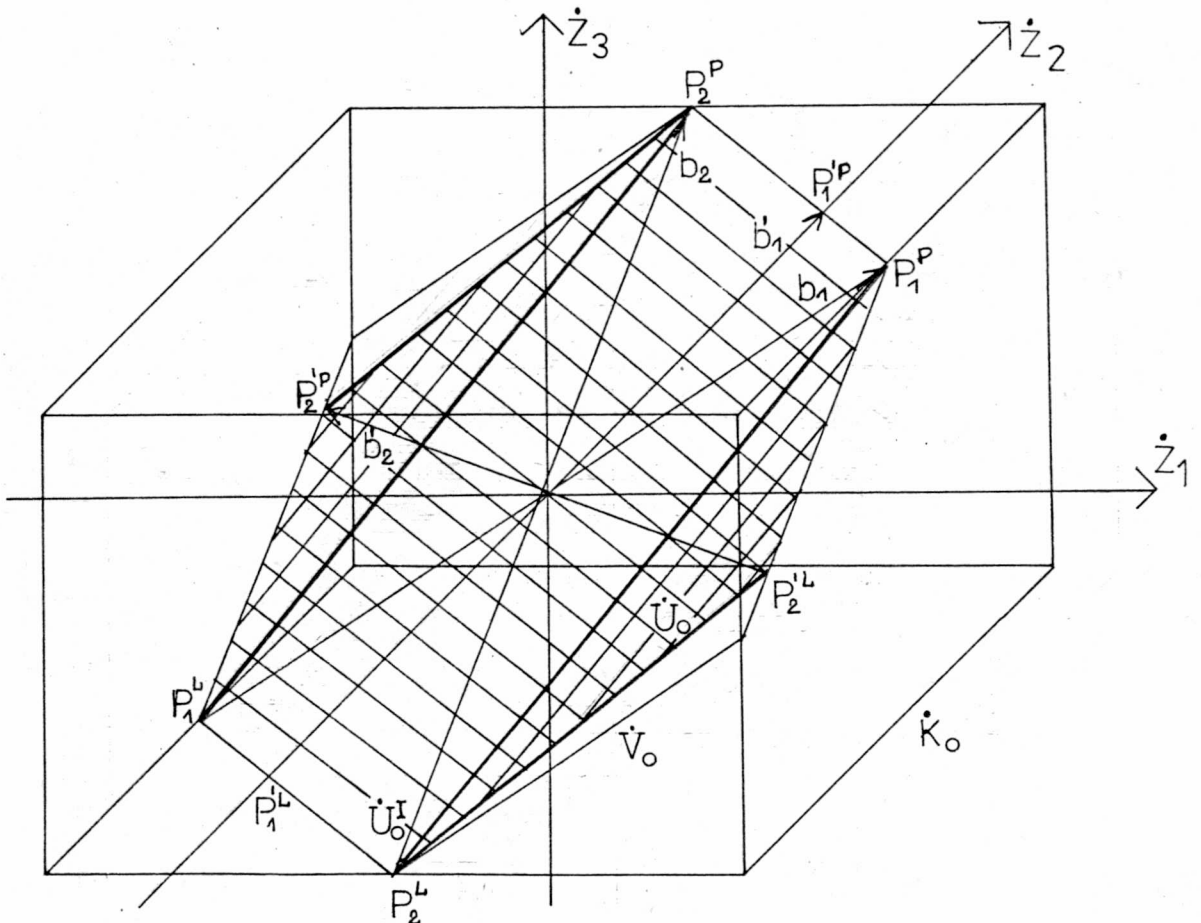
którego uwypuklenie

$$\dot{U}_0 = \text{Conv} \{P_1^L, P_1^P, \dots, P_m^L, P_m^P, P_1'^L, P_1'^P, \dots, P_m'^L, P_m'^P\} \quad /2.2.55/$$

stanowi nadzbiór zbioru $\dot{U}_0^I$ i jest oczywiście podzbiorem klasy $\dot{V}_0$, co oznacza, że spełniona jest inkluzja

$$\dot{U}_0^I \subset \dot{U}_0 \subset \dot{V}_0. \quad /2.2.56/$$

Wzajemne położenie zbiorów $\dot{U}_0^I, \dot{U}_0, \dot{V}_0$ w rozważanym przykładzie ilustruje rys. 2.2.5.



Rys. 2.2.5. Wzajemne położenie zbioru $\dot{U}_0^I$, $\dot{U}_0$ i klasy podobieństwa $\dot{V}_0$ w zbiorze K_0 .

Zgodnie z warunkiem /2.2.43/ i /2.2.45/ zbiór $\dot{U}$ postaci

$$\dot{U} = \dot{U}_0 + \dot{R}_0 \quad /2.2.57/$$

będzie, zgodnie z Tw. 6.2.3, szukanym podzbiorem rozważanej klasy podobieństwa $\dot{V}$ - spełniona więc będzie inkluzja

$$\dot{U} \subset \dot{V} \subset \dot{K}. \quad /2.2.58/$$

Tak więc, w celu wyznaczenia właściwego położenia zbioru $\dot{U}$, należy, zgodnie z warunkiem /2.2.58/, dokonać translacji zbioru $\dot{U}_0$ o wektor $\dot{R}_0$. Uwzględniając zależności /2.2.56/ i /2.2.58/ zbiór $\dot{U}$ można, zgodnie z Tw. 6.2.10, przedstawić w formie uwypuklenia zbioru 4 m punktów

$$\dot{U} = \text{Conv} \{ S_1^L, S_1^P, \dots, S_m^L, S_m^P, S_1'^L, S_1'^P, \dots, S_m'^L, S_m'^P \}, \quad /2.2.59/$$

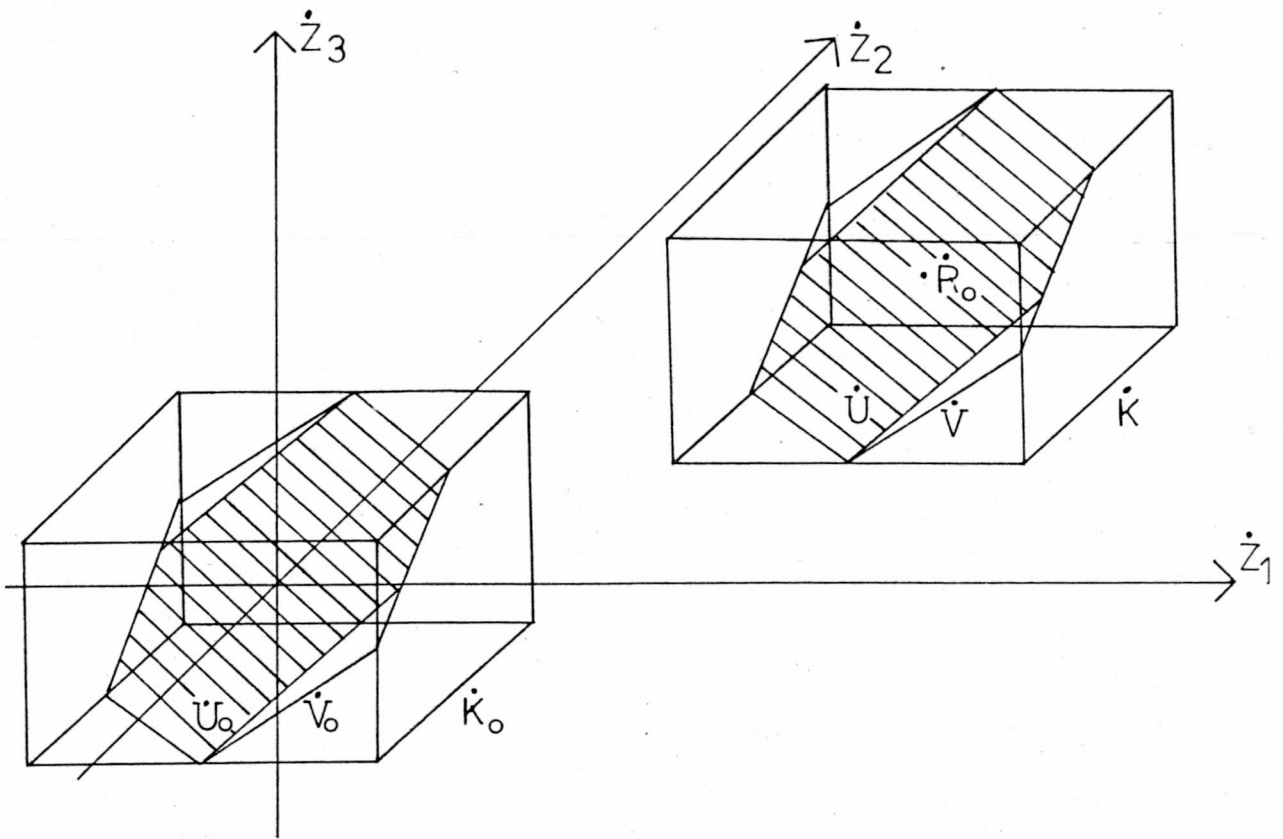
które można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} S_i^L &= P_i^L + \dot{R}_0 & S_i^P &= P_i^P + \dot{R}_0 \\ S_i'^L &= P_i'^L + \dot{R}_0 & S_i'^P &= P_i'^P + \dot{R}_0 \end{aligned} \quad /2.2.60/$$

Zbiór $\dot{U}$ będący translacją zbioru $\dot{U}_0$ o wektor $\dot{R}_0$ jest więc uwypukleniem, przesuniętych o wektor $\dot{R}_0$, punktów /2.2.54/. Omawianą operację przedstawia rys. 2.2.6.

Upraszczając oznaczenia, rozważany zbiór $\dot{U}$ można przedstawić w postaci uwypuklenia zbioru q-punktów

$$\dot{U} = \text{Conv} \{ S_1, \dots, S_q \}, \quad /q = 4m/. \quad /2.2.61/$$



Rys. 2.2.6. Translacja kostki $\dot{K}_0$ o wektor $\dot{R}_0$.

których postać można ustalić porównując zależności /2.2.59/ i /2.2.60/.

Zgodnie z Def. 6.2.9. każdy punkt $\dot{R}$ zbioru $\dot{U}$ jest więc wypukłą kombinacją liniową wierzchołków $S_1, \dots, S_q$, tzn. jest punktem postaci

$$\dot{R} = \sum_{i=1}^q \gamma_i S_i, \quad /2.2.62/$$

gdzie

$$\sum_{i=1}^q \gamma_i = 1, \quad \gamma_i > 0, \quad /i = 1, \dots, q/. \quad /2.2.63/$$

Zatem problem wyboru t -punktów w zbiorze $\dot{U}$ sprowadzić można do problemu ustalenia t -ciągów rzeczywistych liczb nieujemnych

$$\begin{matrix} \gamma_{11}, \dots, \gamma_{1q} \\ \vdots \\ \gamma_{t1}, \dots, \gamma_{tq}, \end{matrix} \quad /2.2.64/$$

dla których spełniony jest warunek

$$\sum_{i=1}^q \gamma_{ji} = 1, \quad /j = 1, \dots, t/, \quad /2.2.65/$$

gwarantujący, że punkty postaci

$$\dot{R}_{ij} = \sum_{j=1}^q \gamma_{ij} S_j \quad /2.2.66/$$

są elementami zbioru $\dot{U}$.

Podobnie jak w przypadku zagadnienia planowania eksperymentu w zbiorze $\dot{\Gamma}$, możliwości wyboru ciągów /2.2.64/ jest nieskończenie wiele i decyzję powinien podjąć eksperymentator. Niżej przedstawiona praca zawiera pewną propozycję metody planowania eksperymentu w zbiorze $\dot{U}$. Szczegóły dotyczące proponowanej zasady stanowią treść punktu 3.2.

3. PLANOWANIE EKSPERYMENTU.

3.1. Planowanie eksperymentu w dziedzinie bezwymiarowych parametrów procesu.

Zgodnie z wnioskiem /2.1.21/ zbiór $\dot{\Gamma}$ jest obrazem, określonej warunkiem /2.1.17/, kostki $\dot{K}$ przez odwzorowanie liniowe $\mathcal{F}: \mathbb{R}^{m+r} \rightarrow \mathbb{R}^r$, którego macierz występuje w zależności /2.1.19/. Zgodnie z Tw. 6.2.11 kostka $\dot{K}$ jest zbiorem środkowosymetrycznym /Def. 6.2.5/ o środku symetrii

$$\dot{w} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \dot{w}_j, \quad /p = 2^{m+r}/. \quad /3.1.1/$$

Zatem zbiór $\dot{\Gamma}$, jako jej liniowy obraz, zgodnie z Tw. 6.2.4, jest również zbiorem środkowosymetrycznym o środku symetrii

$$\dot{\omega} = \mathcal{F}(\dot{w}). \quad /3.1.2/$$

Z powyższych dwóch zależności wynika, że

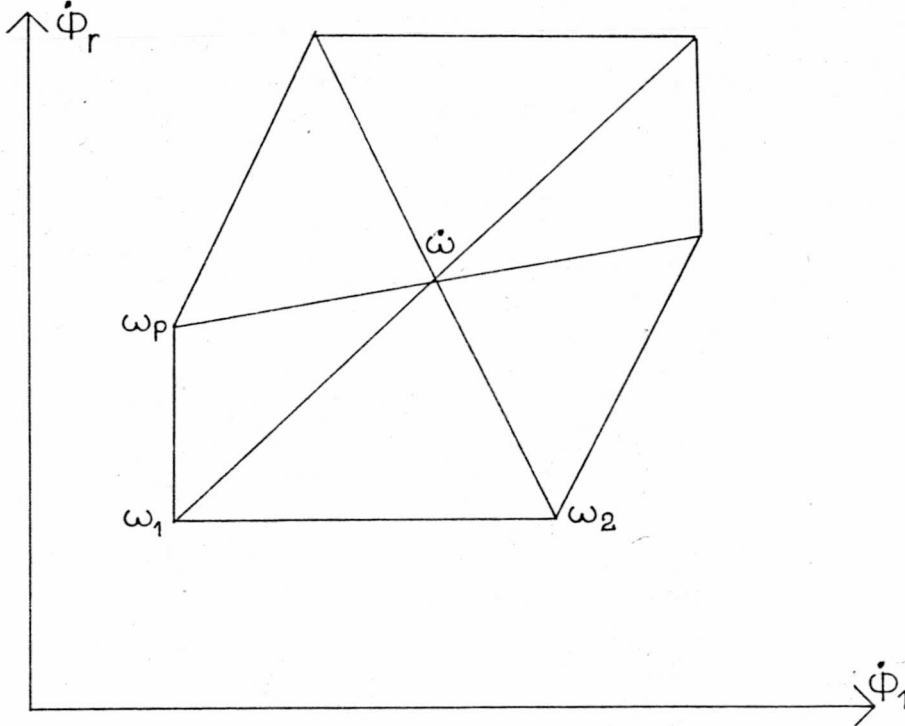
$$\dot{\omega} = \mathcal{F}(\dot{w}) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \dot{w}_j\right) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \mathcal{F}(\dot{w}_j) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \dot{\omega}_j \quad /3.1.3/$$

co oznacza, iż punkt $\dot{\omega}$, będący środkiem symetrii zbioru $\dot{\Gamma}$, jest średnią arytmetyczną

$$\dot{\omega} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \dot{\omega}_j, \quad /3.1.4/$$

określonych zależnością /2.1.35/, punktów $\dot{\omega}_j$ / $j = 1, \dots, p$ /.

Jak wspomniano w punkcie. 2.1. jedną z możliwych metod rozmieszczenia punktów w zbiorze $\dot{\Gamma}$, jest usytuowanie ich na przedstawionych na rys. 3.1.1. odcinkach /Def. 6.2.6/ łączących środek symetrii tego zbioru z jego wierzchołkami.

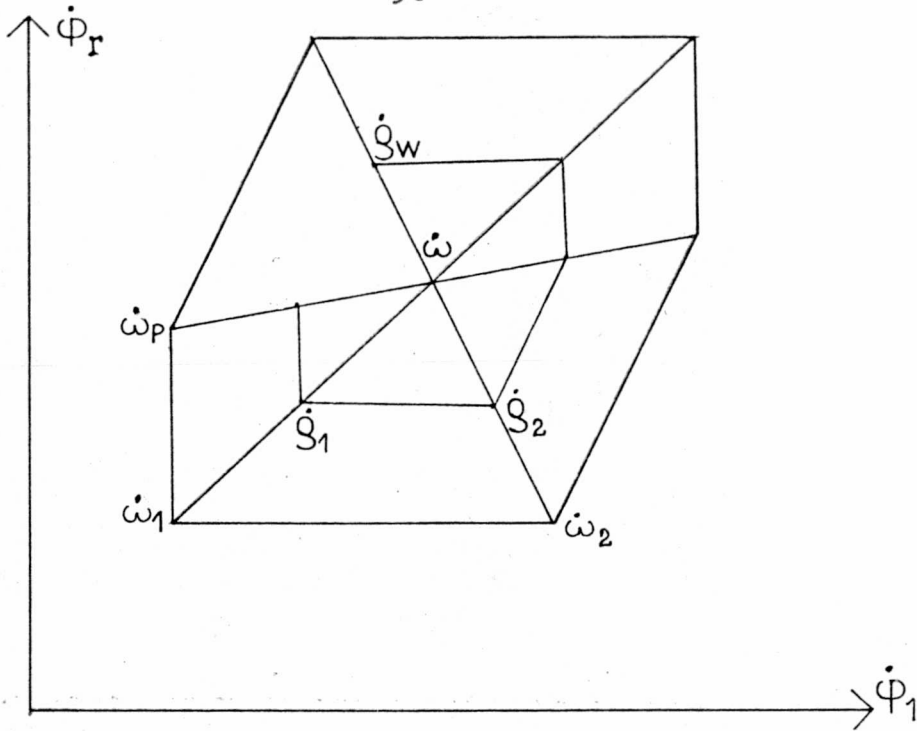


Rys. 3.1.1. Odcinki łączące środek symetrii zbioru $\dot{\Gamma}$ z jego wierzchołkami.

Do dyspozycji pozostaje p -odcinków $[\dot{\omega}, \dot{\omega}_j]$, na których należy rozmieścić punkty $\dot{g}_i$ / $i = 1, \dots, w$ /. W przypadku gdy $w \leq p$, tzn. gdy zadana ilość punktów $\dot{g}_i$ nie przekracza ilości odcinków $[\dot{\omega}, \dot{\omega}_j]$, najprościej jest usytuować punkty $\dot{g}_i$ w środkach wspomnianych odcinków, co oznacza iż punkty te będą postaci

$$\dot{g}_i = \frac{1}{2} \dot{\omega}_i + \frac{1}{2} \dot{\omega} \quad , \quad /i = 1, \dots, w/. \quad /3.1.5/$$

Proponowane rozmieszczenie przedstawia rys. 3.1.2.



Rys. 3.1.2. Przykładowy plan eksperymentu w zbiorze $\dot{\Gamma}$ w przypadku $w \leq p$.

Uwzględniając wzór /3.1.4/, zależność /3.1.5/ można przedstawić w postaci

$$\dot{g}_i = \frac{1}{2p} \dot{\omega}_i + \dots + \frac{1}{2p} \dot{\omega}_{i-1} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \dot{\omega}_i + \frac{1}{2p} \dot{\omega}_{i+1} + \dots + \frac{1}{2p} \dot{\omega}_p. \quad /3.1.6/$$

Tak więc, w przypadku $w \leq p$, współczynniki /2.1.50/, zgodnie z zależnością /3.1.6/, będą określone wzorem

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{p}\right), & i = j, \quad /i = 1, \dots, w/ \\ \frac{1}{2p}, & i \neq j, \quad /j = 1, \dots, p/. \end{cases} \quad /3.1.7/$$

Rozważmy z kolei przypadek $w > p$ /zadana ilość punktów $\dot{g}_i$ jest większa niż ilość odcinków $[\dot{\omega}, \dot{\omega}_j]$ /. W tej sytuacji liczbę "w" można przedstawić w postaci

$$w = h \cdot p + u, \quad h, u \in \mathbb{N}, \quad u < p, \quad /3.1.8/$$

tak więc w zbiorze $\dot{\Gamma}$ należy rozmieścić punkty

$$\dot{g}_1, \dots, \dot{g}_u, \dot{g}_{u+1}, \dots, \dot{g}_{u+h \cdot p}. \quad /3.1.9/$$

Dzieląc każdy z odcinków $[\dot{\omega}, \dot{\omega}_j]$ na $h+2$ równych części tzn. przyjmując, że punkty podziału będą postaci

$$D_{lj} = \frac{h+2-l}{h+2} \dot{\omega}_i + \frac{l}{h+2} \dot{\omega}, \quad /j = 1, \dots, p/, \quad /3.1.10/ \\ /l=1, \dots, h+1/,$$

otrzymamy $h \cdot p + p$ punktów - D_{lj} należących do zbioru $\dot{\Gamma}$, z czego po uwzględnieniu wartości liczby "w" określonej równością /3.1.8/, należy odrzucić $p-u$ punktów.

Przyjmijmy zatem, że

$$\dot{g}_1 = D_{11}, \quad \dot{g}_2 = D_{12}, \quad \dots, \quad \dot{g}_u = D_{1u}$$

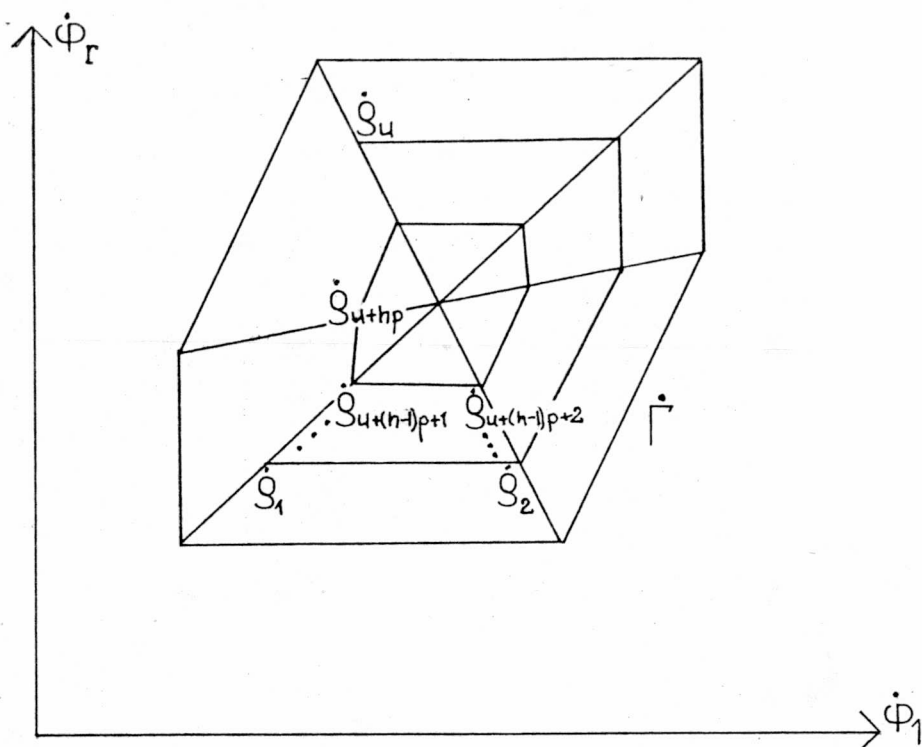
$$\dot{g}_{u+1} = D_{21}, \quad \dot{g}_{u+2} = D_{22}, \quad \dots, \quad \dot{g}_{u+p} = D_{2p} \quad /3.1.11/$$

$$\dot{g}_{u+p+1} = D_{31}, \quad \dot{g}_{u+p+2} = D_{32}, \quad \dots, \quad \dot{g}_{u+2p} = D_{3p}$$

$$\vdots$$

$$\dot{g}_{u+(h-1)p+1} = D_{h+1,1}, \quad \dot{g}_{u+(h-1)p+2} = D_{h+1,2}, \dots, \quad \dot{g}_{u+hp} = D_{h+1,p}.$$

Rozmieszczenie punktów $\dot{g}_i$ / $i = 1, \dots, w$ / w zbiorze $\dot{\Gamma}$ zgodne z powyższą regułą przedstawia rys. 3.1.3.



Rys. 3.1.3. Przykładowy plan eksperymentu w zbiorze $\dot{\Gamma}$ w przypadku $w > p$.

Ogólnie więc, w przypadku gdy liczba "w" określona jest równością /3.1.8/ współczynniki λ_{ij} / $i = 1, \dots, w$; $j = 1, \dots, p$ / obliczyć można na podstawie wzorów

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1 + \frac{1-p}{p(h+2)}, & j = i, /j = 1, \dots, p/ \\ \frac{1}{p(h+2)}, & j \neq i, /i = 1, \dots, u/, \end{cases} \quad /3.1.12/$$

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1 + \left(\left[\frac{i-u-1}{p} \right] + 2 \right) \frac{1-p}{p(h+2)}, & j = i - u - \left[\frac{i-u-1}{p} \right] p \\ \frac{\left[\frac{i-u-1}{p} \right] + 2}{p(h+2)}, & j \neq i - u - \left[\frac{i-u-1}{p} \right] p, \end{cases}$$

$$/j = 1, \dots, p, \quad i = u+1, \dots, u+hp/,$$

gdzie symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

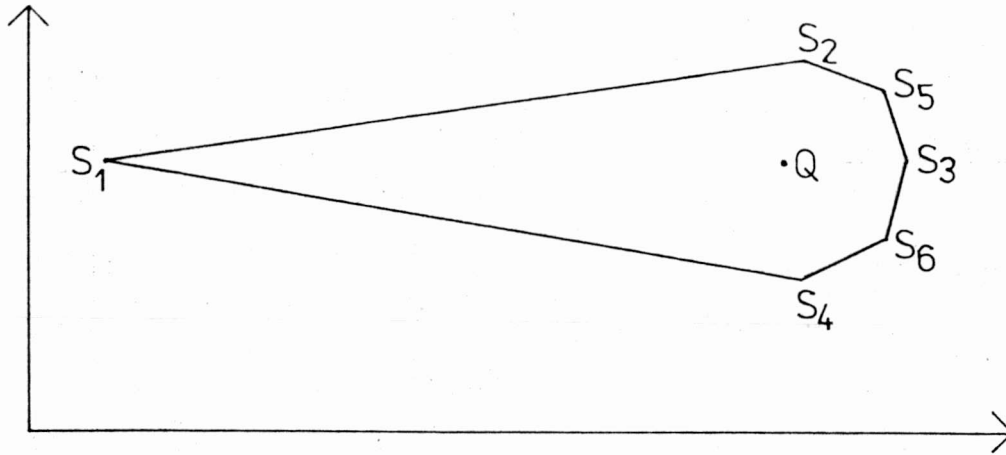
3.2. Planowanie eksperymentu w klasie podobieństwa.

Zbiór $\dot{U}$, zgodnie z definicyjną równością /2.2.61/, stanowi uwypuklenie zbioru punktów S_j / $j = 1, \dots, q$ /, tzn. może być przedstawiony w postaci

$$\dot{U} = \text{Conv} \{S_1, \dots, S_q\}. \quad /3.2.1/$$

Regułę rozmieszczenia zadanej ilości realizacji $\dot{R}_i$ / $i = 1, \dots, t$ / w zbiorze $\dot{U}$ można określić w sposób analogiczny do, opisanej w punkcie 3.1, zasady rozmieszczania punktów $\dot{Q}_i$ w zbiorze $\dot{\Gamma}$. Istotna różnica między dwoma rozważanymi przypadkami polega na tym, iż zbiór $\dot{U}$ nie musi być zbiorem środkowosymetrycznym. Aby więc punkty $\dot{R}_i$ można było rozmieszczać na odcinkach łączących wierzchołki S_j zbioru $\dot{U}$ z pewnym jego punktem wewnętrznym S , punkt ten powinien być wybrany tak aby mógł być uważany za pewien geometryczny środek rozważanego zbioru $\dot{U}$. Okazuje się, że roli tej nie może w tym przypadku spełniać średnica arytmetyczna wierzchołków S_j / $j = 1, \dots, q$ /, która w przypadku zbioru $\dot{\Gamma}$ pokrywała się z jego środkiem symetrii. Rozważmy dla ilustracji problemu, przedstawiony na rys. 3.2.1, przykład pewnego zbioru A .

Jak widać średnia arytmetyczna Q położona jest w pobliżu skupiska wierzchołków. /w rozważanym przykładzie tworzą je wierzchołki S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 . Konieczne więc jest przedstawienie punktu S w innej niż średnia arytmetyczna, postaci. Rozważmy punkt S zdefiniowany równością



Rys. 3.2.1. Położenie średniej arytmetycznej punktów ekstremalnych Q w zbiorze posiadającym skupisko wierzchołków .

$$S = \sum_{j=1}^q \left(\frac{\alpha_j}{M} \right) S_j \quad /3.2.2/$$

gdzie

$$M = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q d(S_i, S_j), \quad /3.2.3/$$

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^q d(S_j, S_i),$$

przy czym $d/\cdot, \cdot/$ jest metryką euklidesową [29] w przestrzeni $\mathbb{R}^{m+r}$. Z określeń /3.2.3/ wynika, iż spełniony jest układ warunków

$$\frac{\alpha_j}{M} \geq 0, \quad /j = 1, \dots, q/ \quad /3.2.4/$$

oraz, że zachodzi równość

$$\sum_{j=1}^q \frac{\alpha_j}{M} = \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q d(S_j, S_i)}{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q d(S_i, S_j)} = 1 \quad /3.2.5/$$

Zgodnie więc z Def. 6.2.8 punkt S , określony równością /3.2.2/ jest wypukłą kombinacją liniową punktów S_j / $j = 1, \dots, q$ /. Ponieważ M jest wartością niezależną od indeksu "j" więc wartością wyróżniającą j-ty współczynnik kombinacji /3.2.2/ jest liczba α_j , która zgodnie z określeniem /3.2.3/, jest sumą odległości wszystkich wierzchołków S_i / $i = 1, \dots, q$ / od ustalonego wierzchołka S_j . Zauważmy więc, że większe wartości wskaźnika α_j będą przyporządkowane punktom S_j leżącym "na uboczu", mniejsze zaś punktom S_j leżącym "w skupiskach". Rozważmy ponownie przykład zbioru $\mathcal{A}$ z rys. 3.2.1. Wartość M obliczona według wzoru /3.2.3/ równa jest w tym przypadku

$$M = \sum_{i,j=1}^6 d(S_i, S_j) = 13,34, \quad /3.2.6/$$

natomiast wartości poszczególnych współczynników $\frac{\alpha_j}{M}$, / $j=1, \dots, 4$ / wynoszą

$$\frac{\alpha_1}{M} = \sum_{i=1}^6 d(S_1, S_i) = 0,36, \quad \frac{\alpha_4}{M} = \sum_{i=1}^6 d(S_4, S_i) = 0,13$$

$$\frac{\alpha_2}{M} = \sum_{i=1}^6 d(S_2, S_i) = 0,13 \quad \frac{\alpha_5}{M} = \sum_{i=1}^6 d(S_5, S_i) = 0,13$$

$$\frac{\alpha_3}{M} = \sum_{i=1}^6 d(S_3, S_i) = 0,12 \quad \frac{\alpha_6}{M} = \sum_{i=1}^6 d(S_6, S_i) = 0,13$$

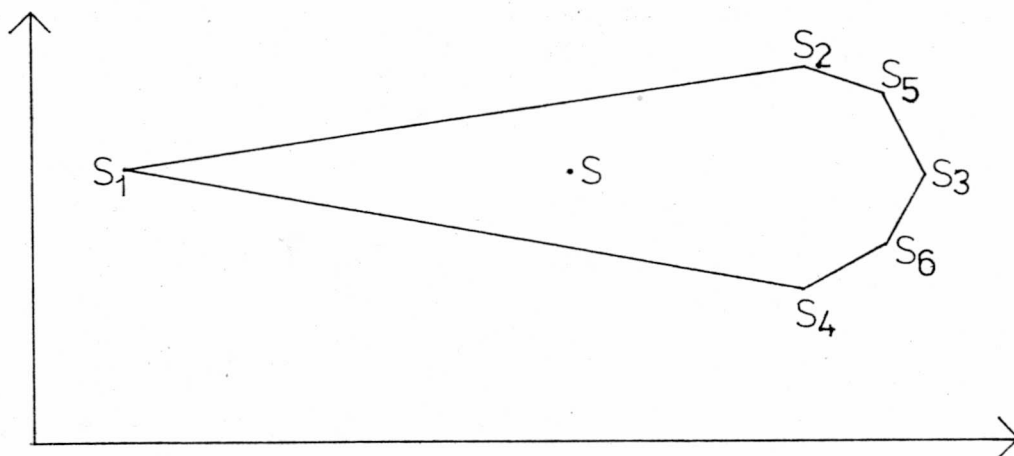
Można więc zauważyć, że waga α_1/M przyporządkowana punktowi α_1 , leżącemu "z dala" od skupiska S_2, S_3, S_4, S_5 , jest znacznie większa niż wagi $\alpha_2/M, \alpha_3/M, \alpha_4/M, \alpha_5/M$ przyporządkowane punktom skupiska to tworzącym. Ostatecznie punkt S , który zgodnie z określeniem /3.2.2/ jest w rozważanym przypadku wypukłą kombinacją liniową postaci

$$S = \sum_{i=1}^6 \frac{\alpha_i}{M} S_i, \quad /3.2.8/$$

jest punktem o współrzędnych

$$S = (0,71 \quad 0,35) \quad /3.2.9/$$

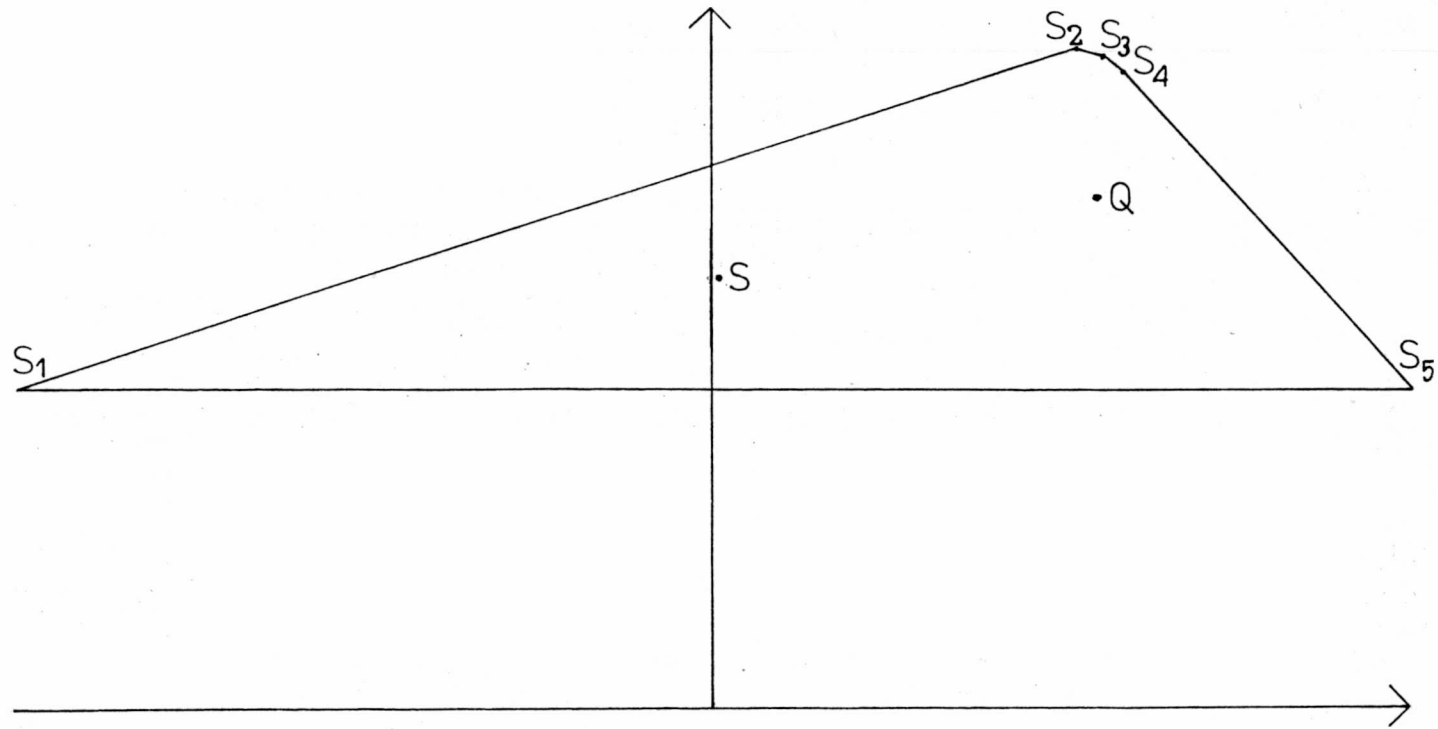
położonym w zbiorze $\mathcal{A}$ tak jak to przedstawia rys. 3.2.2.



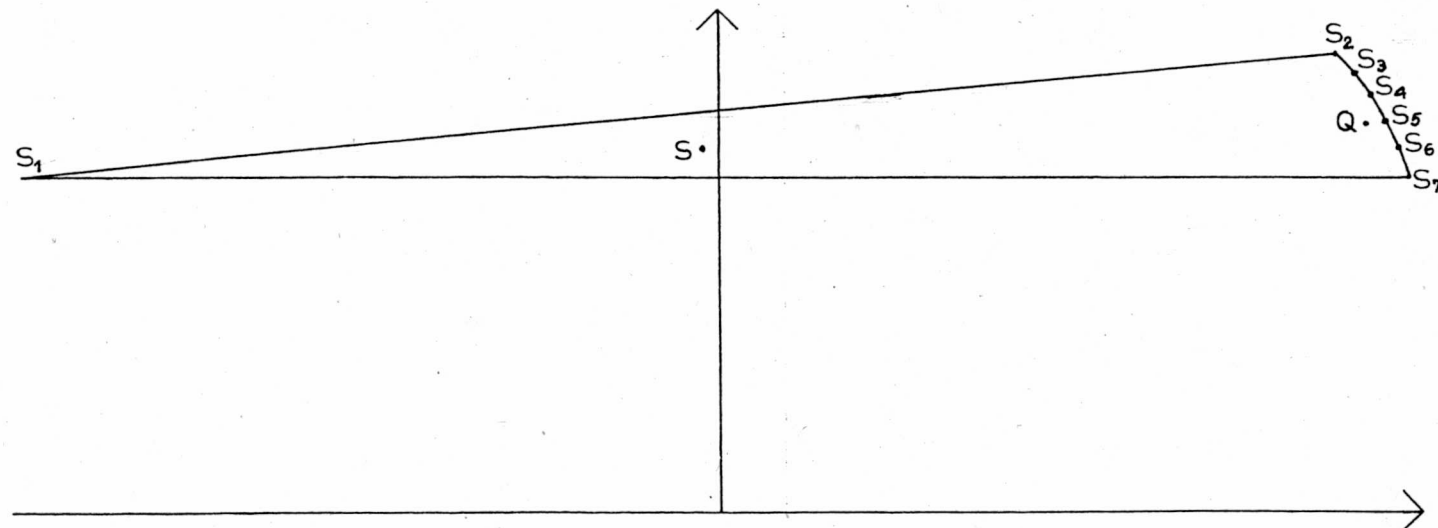
Rys. 3.2.2. Położenie średniej ważonej punktów ekstremalnych S w zbiorze z rys. 3.2.1.

Oczywiście prowadzone tu rozważania nie mogą być traktowane jako dowód na "centralne" położenie punktu S w zbiorze $\mathcal{A}$ - stanowią one jedynie pewną próbę uściślenia intuicji. Na kilku kolejnych rysunkach przedstawiono położenie średniej arytmety-

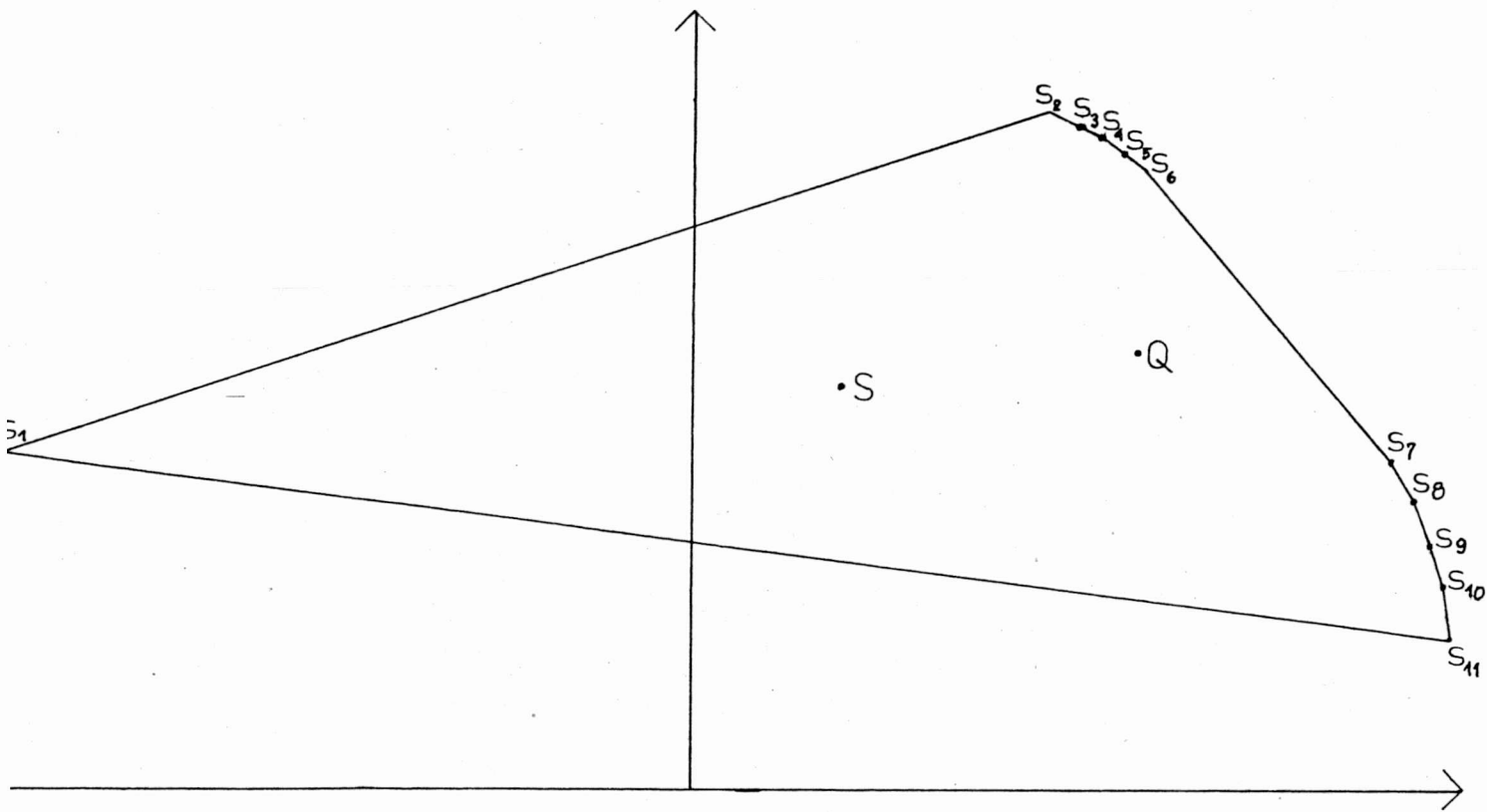
cznej $Q = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q S_i$ oraz punktu S , wyznaczonego zgodnie z zasadą /3.2.2/, dla różnych postaci zbioru A .



Rys. 3.2.3. Położenie średnich Q i S w zbiorze o pięciu punktach ekstremalnych.



Rys. 3.2.4. Położenie średnich Q i S w zbiorze o siedmiu punktach ekstremalnych.



Rys. 3.2.5. Położenie średnich Q i S w zbiorze o jedenastu punktach ekstremalnych.

Sądząc na podstawie przedstawionych przykładów stwierdzić można, iż nie ma podstaw do odrzucenia przypuszczenia o centralnym położeniu w zbiorze A punktu S , wyznaczanego według wzoru /3.2.2/.

Pozostaje do rozważenia problem rozmieszczenia punktów pomiarowych $\dot{R}_1, \dots, \dot{R}_t$ w zbiorze $\dot{U}$. Jak wspomniano punkty te korzystnie będzie rozmieścić na odcinkach łączących punkt S , z wierzchołkami S_j . Pomiędzy ilością realizacji "t" a liczbą wierzchołków "q" zachodzić musi jedna z dwóch poniższych zależności

$$t \leq q$$

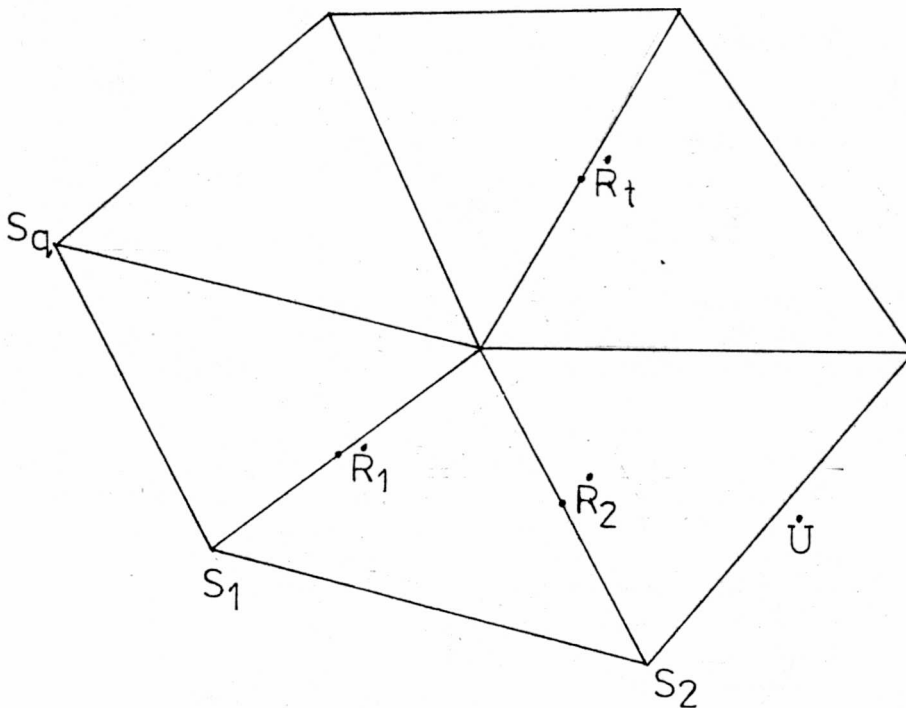
/3.2.10/

$$t > q.$$

Rozważmy przypadek pierwszy tzn. $t \leq q$. Zakładamy więc, że zadana ilość punktów pomiarowych "t" nie przekracza liczby wierzchołków "q". W tej sytuacji najprościej jest rozmieścić punkty $\dot{R}_1, \dots, \dot{R}_t$ tak aby pokrywały się one ze środkami wspomnianych odcinków $[S, S_i]$ / $i = 1, \dots, t$ / - będą one wówczas postaci

$$\dot{R}_i = \frac{1}{2} S_i + \frac{1}{2} S, \quad /i = 1, \dots, t/ \quad /3.2.11/$$

a ich rozmieszczenie w zbiorze $\dot{U}$ ilustruje rys. 3.2.6.



Rys. 3.2.6. Przykładowy plan eksperymentu w klasie podobieństwa w przypadku $t \leq q$.

Przyjmując dla współczynników kombinacji liniowej /3.2.2/ oznaczenie

$$\sigma_j = \frac{\alpha_j}{M}, \quad /j = 1, \dots, q/ \quad /3.2.12/$$

równość /3.2.11/ można zapisać w postaci

$$R_i = \frac{1}{2} \sigma_1 S_1 + \dots + \frac{1}{2} \sigma_{i-1} S_{i-1} + \frac{1}{2} (1 + \sigma_i) S_i + \frac{1}{2} \sigma_{i+1} S_{i+1} + \dots + \frac{1}{2} \sigma_q S_q \quad /3.2.13/$$

Zatem współczynniki /2.2.64/ będą, dla rozważanego przypadku $t \leq q$, określone przez wzory

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \sigma_i), & i=j, \quad /i = 1, \dots, t/ \\ \frac{1}{2} \sigma_i, & i \neq j, \quad /j = 1, \dots, q/ \end{cases} \quad /3.2.14/$$

Rozważmy drugą z możliwości tzn. $t > q$ - zadana ilość realizacji "t" przekracza liczbę wierzchołków "q". W tej sytuacji liczbę "t" można przedstawić w postaci

$$t = z \cdot q + e, \quad z, e \in \mathbb{N}, \quad e < q. \quad /3.2.15/$$

Tak więc w zbiorze $\dot{U}$ należy rozmieścić punkty

$$\dot{R}_1, \dots, \dot{R}_e, \dot{R}_{e+1}, \dots, \dot{R}_{e+q} \quad /3.2.16/$$

Dzieląc każdy z odcinków $[S, S_j]$ $/j = 1, \dots, q/$ na $z+2$ równych części tzn. przyjmując, że punkty podziału będą postaci

$$c_{1j} = \frac{z+2-1}{z+2} S_j + \frac{1}{z+2} S, \quad /j = 1, \dots, q/ \quad /3.2.17/$$

$/l = 1, \dots, z/$

otrzymamy $z \cdot q + q$ punktów C_{j1} należących do zbioru $\dot{U}$, z czego po uwzględnieniu określonej równością /3.2.15/ wartości liczby "t", należy odrzucić $q - e$ punktów. Przyjmijmy zatem, że

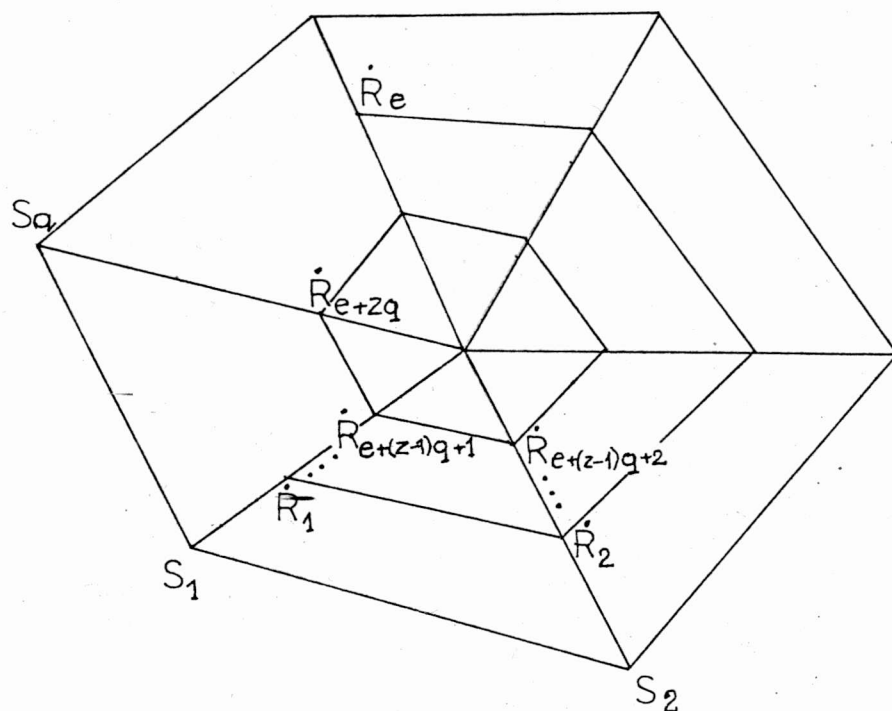
$$\dot{R}_1 = C_{11}, \quad \dot{R}_2 = C_{12}, \quad \dots, \quad \dot{R}_e = C_{1e}$$

$$\dot{R}_{e+1} = C_{21}, \quad \dot{R}_{e+2} = C_{22}, \quad \dots, \quad \dot{R}_{e+q} = C_{2q} \quad /3.2.18/$$

$$\dot{R}_{e+q+1} = C_{31}, \quad \dot{R}_{e+q+2} = C_{32}, \quad \dots, \quad \dot{R}_{e+2q} = C_{3q}$$

$$\dot{R}_{e+(z-1)q+1} = C_{z+1,1}, \quad \dot{R}_{e+(z-1)q+2} = C_{z+1,2}, \dots, \dot{R}_{e+zq} = C_{z+1,q}.$$

Rozmieszczenie punktów $\dot{R}_i$ / $i = 1, \dots, t$ / w zbiorze $\dot{U}$ zgodne z powyższą regułą przedstawia rys. 3.2.7.



Rys. 3.2.7. Przykładowy plan eksperymentu w klasie podobieństwa w przypadku $t > q$.

Można wykazać, że w tym przypadku współczynniki /2.2.64/ określone będą przez wzory

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{z+1+\delta_i}{z+2}, & j = i, \quad /j = 1, \dots, q/ \\ \frac{\delta_i}{z+2}, & j \neq i, \quad /i = 1, \dots, e/ \end{cases} \quad /3.2.19/$$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{z - \left[\frac{i-e-1}{q} \right] + \left\{ \left[\frac{i-e-1}{q} \right] + 2 \right\} \delta_j}{z+2} & j = i - e - \left[\frac{i-e-1}{q} \right] q \\ \frac{\left\{ \left[\frac{i-e-1}{q} \right] + 2 \right\} \delta_j}{z+2} & ; \quad j \neq i - e - \left[\frac{i-e-1}{q} \right] \cdot q \end{cases}$$

$$/j = 1, \dots, q, \quad i = e + 1, \dots, e + zq/,$$

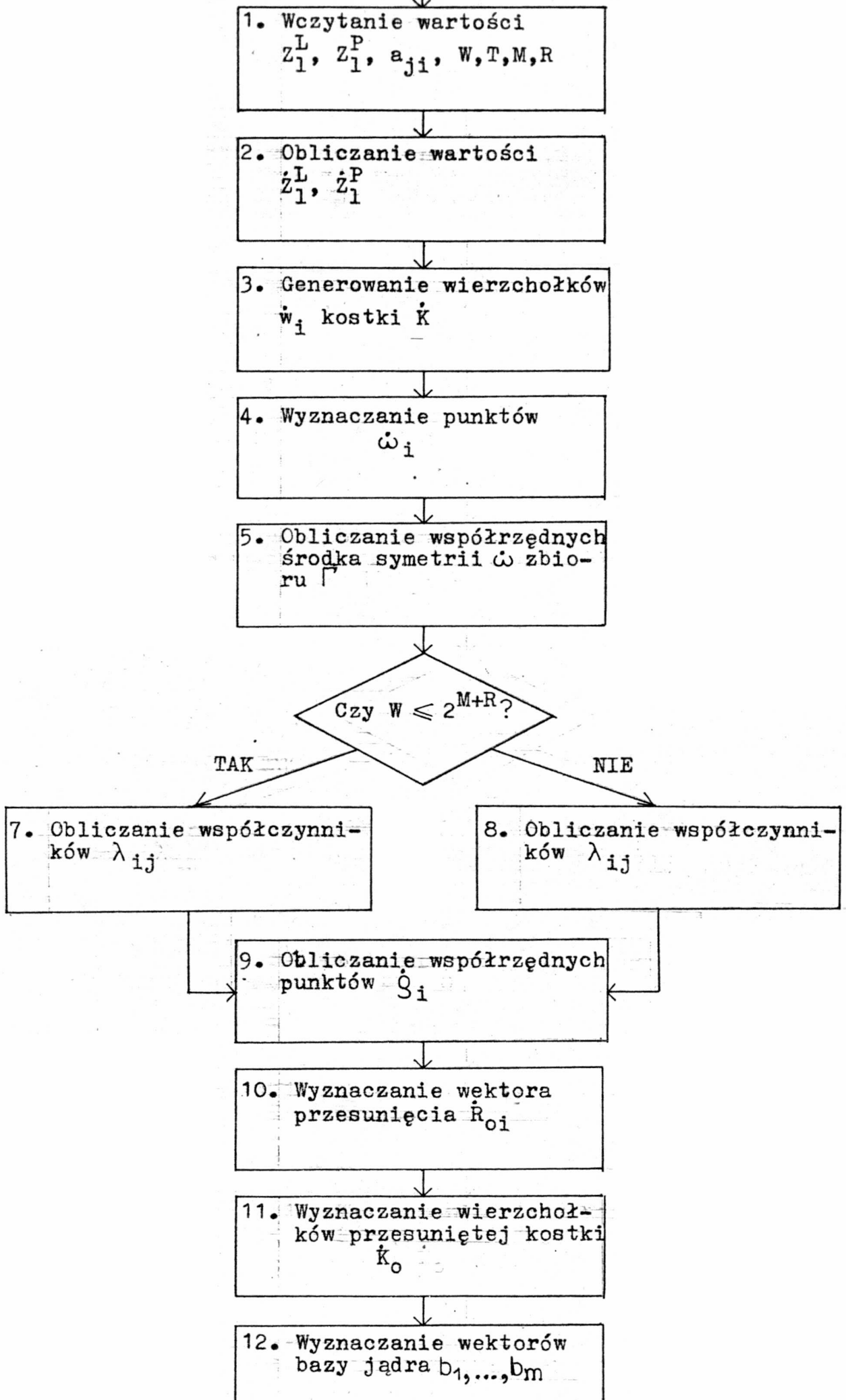
gdzie wielkości δ_j zdefiniowane są wzorem /3.2.12/, natomiast $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

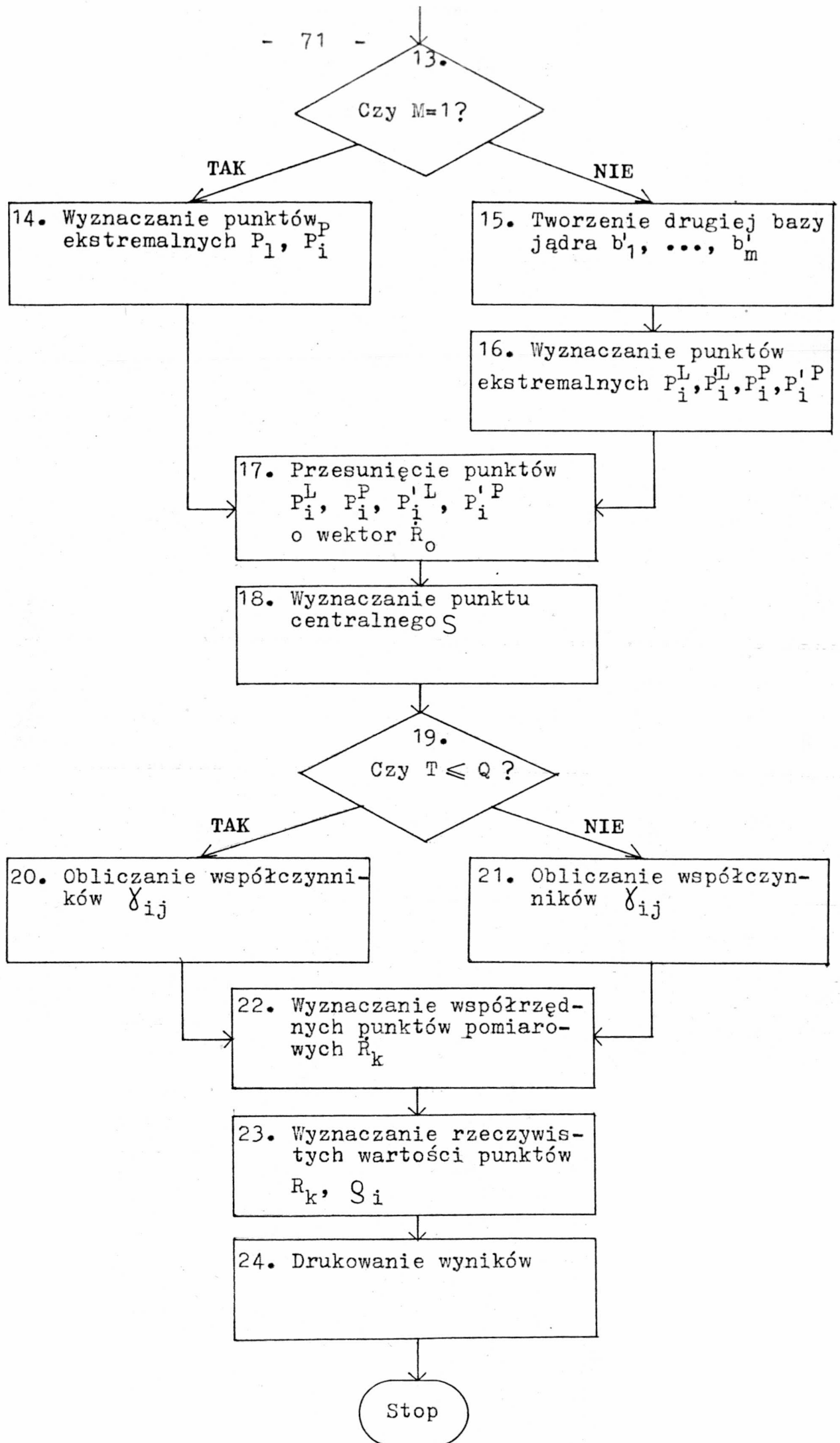
4. NUMERYCZNA REALIZACJA ALGORYTMU

4.1. Schemat blokowy programu

Jednym z zagadnień związanych z praktycznym wykorzystaniem metod analizy wymiarowej jest problem opracowania odpowiedniego algorytmu umożliwiającego przeprowadzenie koniecznych obliczeń przy pomocy maszyny cyfrowej. Wymaga to z kolei stworzenia takiego systemu przetwarzania danych, który umożliwiłby wykonywanie operacji na wielkościach wymiarowych /1 m, 3 kg, 5 s/, które jako takie nie są dla maszyny "zrozumiałe". Rozwiązanie tego problemu możliwe staje się dzięki zastosowaniu któregoś ze znanych schematów analizy wymiarowej [27],[41],[42]. Szczególnie przydatny do tego celu okazuje się być, wykorzystywany w niniejszej pracy, algebraiczny model analizy wymiarowej opracowany przez S. Drobotę [8]. Ze względu na szerokie zastosowanie analizy wymiarowej w praktyce badawczej i technicznej - opisy jej algorytmów stanowią temat licznych opracowań z zakresu teorii eksperymentu. Zagadnieniom tym poświęcone są m. in. publikacje [12],[16],[18],[21],[30],[38],[46].

W celu zapewnienia możliwości praktycznego wykorzystania proponowanego algorytmu planowania eksperymentu, opracowany został odpowiedni program, napisany w języku FORTRAN IV. Program, którego strukturę obrazuje zamieszczony w tym punkcie schemat blokowy, uruchomiony i przetestowany został na maszynie cyfrowej R-32. Jeden z przykładów jego zastosowania przedstawiony jest w punkcie 4.2.





Blok 1.

Wczytanie wartości $Z_1^L, Z_1^P / l = 1, \dots, s /$ oznaczających końce przedziałów zmienności /2.1.1/ wielkości wejściowych $Z_l / l = 1, \dots, s /$,

$a_{ij} / i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, r /$ - wartości wykładników we wzorze /2.1.5/.

$$\varphi_j = \frac{Z_{m+j}}{\prod_{i=1}^m Z_i^{a_{ji}}}.$$

Wartości tych wykładników eksperymentator powinien wyznaczyć we własnym zakresie. Można do tego celu wykorzystać gotowy program, którego opis zawarty jest w pracy [16]. W - ilość klas podobieństwa, T - ilość realizacji w klasie, M - ilość zmiennych wymiarowo niezależnych, R - ilość zmiennych wymiarowo zależnych.

Blok 2.

Obliczenie wartości $\dot{Z}_1^L = \ln Z_1^L, \dot{Z}_1^P = \ln Z_1^P, / l = 1, \dots, s /$.

Blok 3.

Generowanie wierzchołków /Def. 6.2.16/ kostki $\dot{K}$. W pierwszej kolejności generowane są wszystkie ciągi 0,1 - kowe długości $m+r$ $\{Z_{ij}\} / i = 1, \dots, m+r, j = 1, \dots, 2^{m+r} /$. Współrzędne wierzchołków wyznaczane są wg zasady

$$w_{ij} = \begin{cases} \dot{z}_j^L & \text{gdy } z_{ij} = 0 \\ \dot{z}_j^P & \text{gdy } z_{ij} = 1 \end{cases}, \quad /i = 1, \dots, 2^{m+r}/.$$

Blok 4.

Wyznaczanie obrazów wierzchołków kostki $\dot{K}$ przez odwzorowanie $\mathcal{F}$, zgodnie z warunkami /2.1.19/ i /2.1.35/.

$$\dot{\omega}_i = \mathcal{F}(\dot{w}_i) = \begin{bmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ -a_{r1} & \dots & -a_{rm} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_{i1} \\ \vdots \\ \dot{w}_{i,m+r} \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, 2^{m+r}/.$$

Blok 5.

Wyznaczenie środka symetrii $\dot{\omega}$ zbioru $\dot{\Gamma}$ zgodnie ze wzorem /3.1.4/

$$\dot{\omega} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \dot{\omega}_i, \quad /p = 2^{m+r}/.$$

Blok 6.

Blok decyzyjny - sprawdzanie czy zadana liczba klas podobieństwa nie przekracza liczby wierzchołków zbioru $\dot{\Gamma}$.

Blok 7.

Obliczanie współczynników λ_{ij} według wzoru /3.1.7/.

Blok 8.

Obliczanie współczynników λ_{ij} według wzoru /3.1.12/.

Blok 9.

Wyznaczanie punktów $\dot{Q}_i$ / $i = 1, \dots$, / zgodnie z zasadą /2.1.52/

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^P \lambda_{ij} \dot{\omega}_j, \quad /p = 2^{m+r}/.$$

Blok 10.

Wyznaczanie wektora przesunięcia $\dot{R}_{oi}$ postaci /2.2.35/

$$\dot{R}_{oi} = \sum_{j=1}^P \lambda_{ij} w_j, \quad /p = 2^{m+r}/.$$

Blok 11.

Wyznaczanie wierzchołków przesuniętej kostki $\dot{K}_0 = \dot{K} - \dot{R}_{oi}$

$$\dot{K}_0 = \bigtimes_{l=1}^S [\dot{z}_1^L - \dot{R}_{oil}, \dot{z}_1^P - \dot{R}_{oil}].$$

Blok 12.

Wyznaczanie wektorów bazy jądra odwzorowania $\mathcal{F}$ zgodnie z zasadą /2.2.31/

$$b_i = (0, \dots, 1, \dots, 0, a_{1i}, \dots, a_{ri}), /i = 1, \dots, m/.$$

Blok 13.

Blok decyzyjny - sprawdzenie czy ilość wektorów bazy jest równa 1.

Blok 14.

Wyznaczenie punktów ekstremalnych zdefiniowanych zależnością /2.2.48/

$$P_i^L = \tau_i^L b_i, \quad P_i^P = \tau_i^P b_i, \quad /i = 1, \dots, m/.$$

Współczynniki τ_i^L, τ_i^P określone są przez wzory /6/ i /40/ w Tw. 6.2.19.

Blok 15.

Utworzenie drugiej bazy zgodnie z zasadą /2.2.53/

$$b'_1 = b_1 + b_m$$

$$b'_{m-1} = b_m + b_m$$

$$b'_m = b_m - b_1 - \dots - b_{m-1}.$$

Blok 16.

Wyznaczenie punktów ekstremalnych /2.2.54/

$$\begin{aligned} P_i^L &= \tau_i^L b_i & P_i^P &= \tau_i^P b_i \\ P_i^L &= \tau_i^L b'_i & P_i^P &= \tau_i^P b'_i \end{aligned}, /i = 1, \dots, m/.$$

Współczynniki τ_i^L, τ_i^P identyczne jak w bloku 14.

Blok 17.

Przesunięcie punktów ekstremalnych o wektor $\dot{R}_0$ według zasady /2.2.60/ tzn.

$$S_i^L = P_i^L + \dot{R}_0, \quad S_i^P = P_i^P + \dot{R}_0, \quad S_i^{IL} = P_i^{IL} + \dot{R}_0, \quad S_i^{IP} = P_i^{IP} + \dot{R}_0.$$

Blok 18.

Wyznaczanie współrzędnych punktu zdefiniowanego wzorem
/3.2.2/

$$S = \sum_{j=1}^q \delta_j S_j.$$

Blok 19.

Blok decyzyjny - sprawdzenie czy zadana ilość realizacji
w klasie nie przekracza liczby punktów ekstremalnych zbioru
 $\dot{U} = \text{Conv} \{S_1, \dots, S_q\}$ - określonego zależnością /3.2.1/.

Blok 20.

Wyznaczanie współczynników γ_{ij} wg wzoru /3.2.14/.

Blok 21.

Wyznaczanie współczynników γ_{ij} wg wzoru /3.2.19/.

Blok 22.

Wyznaczanie punktów pomiarowych $\dot{R}_k$ zgodnie z zasadą
/2.2.66/

$$\dot{R}_k = \sum_{j=1}^q \gamma_{kj} S_j, \quad /k = 1, \dots, t/.$$

Blok 23.

Wyznaczanie rzeczywistych wartości współrzędnych punktów R_k, Q_i / $k = 1, \dots, t; i = 1, \dots, w$ / zgodnie z regułą /2.2.27/

$$R_k = E^{(s)}(\dot{R}_k), \quad Q_i = E^{(r)}(\dot{Q}_i).$$

Blok 24.

Drukowanie wyników - rzeczywistych współrzędnych punktów

$$R_k, /k = 1, \dots, t/, \quad Q_i, /i = 1, \dots, w/.$$

4.2. Przykład obliczeń

W celu sprawdzenia poprawności działania programu wykonano przy jego użyciu testowe planowanie eksperymentu, którego celem było ustalenie zbioru zmiennych mających wpływ na prędkość opadania kuli w naczyniu cylindrycznym wypełnionym cieczą. Przyjęto wstępnie, że dla opisu rozważanego zjawiska wystarczy uwzględnić następujący zbiór wielkości

r - promień kuli [cm] /4.2.1/

g - przyspieszenie ziemskie [cm/s^2]

Q - gęstość materiału, z którego wykonana jest kula [g/cm^3]

Q_p - gęstość cieczy [g/cm^3]

η - lepkość cieczy [g/m s].

Nie uwzględniono w pierwszym podejściu promienia cylindra R [cm], w którym opada kula. Wartość tej zmiennej była w trakcie eksperymentu stała. Przyjęto, że bazę wymiarową stanowić będą wielkości $\hat{z}_1 = r$, $\hat{z}_2 = g$, $\hat{z}_3 = g$, pozostałe dwie wielkości $\hat{z}_4 = g_p$, $\hat{z}_5 = \rho$ są w tej sytuacji wymiarowo zależne i zależność ta, wyrażona w miarach liczbowych jest postaci

$$z_4 = \varphi_1 z_1^0 z_2^0 z_3^1$$

/4.2.2/

$$z_5 = \varphi_2 z_1^{\frac{3}{2}} z_2^{\frac{1}{2}} z_3^1 .$$

Dla poszczególnych zmiennych przyjęto następujące przedziały zmienności

$$z_1 \in [0,01, 0,1]$$

/4.2.3/

$$z_2 \in [965, 995] \text{ (dopuszczalny przedział błędu pomiaru)}$$

$$z_3 \in [1, 1,8]$$

$$z_4 \in [1,5, 6]$$

$$z_5 \in [1, 4] .$$

Zadana ilość klas podobieństwa była równa $W = 9$, zadana ilość realizacji w klasie wynosiła $T = 10$. W wyniku planowania otrzymano następujący zbiór realizacji rozważanego procesu.

KLASA PODOBIENSTWA NR I = 1
WARTOSCI NIEZMIENNIKOW PODOBIENSTWA DLA KOLEJNYCH PARAMETROW NIEBAZOWYCH

NR PARAMETRU WARTOSC NIEZMIENNIKA

1	-0,605090
2	-4,131853

WYGENEROWANE REALIZACJE

NR.REALIZACJI WARTOSCI PARAMETROW WG KOLEJNOSCIZADANEJ NA POCZATKU/

1	0.0809644	2,2478065	971,1137695	1,2273607	0,0259056
2	0.0607148	2,8021154	971,1137695	1,5300274	0,0209711
3	0.0607148	2,2478065	986,0961914	1,2273607	0,0169519
4	0.0747486	2,7673702	971,1137695	1,5110569	0,0282922
5	0.0607148	2,2824860	986,0961914	1,2462959	0,0172135
6	0.0616515	2,2478065	986,0961914	1,2273607	0,0173457
7	0,0540907	2,2478065	971,1137695	1,2273607	0,0141461
8	0.0607148	2,0885744	971,1137695	1,1404152	0,0156310
9	0.0607148	2,2478065	966,1726074	1,2273607	0,0167798
10	0.0566489	2,0972767	971,1137695	1,1451674	0,0141461

Tab. 4.2.1. Zbiór realizacji R_1 .

KLASA PODOBIENSTWA NR I = 2
WARTOSCI NIEZMIENNIKOW PODOBIENSTWA DLA KOLEJNYCH PARAMETROW NIEBAZOWYCH

NR PARAMETRU WARTOSC NIEZMIENNIKA

1	-1,298237
2	-3,098063

WYGENEROWANE REALIZACJE

NR.REALIZACJI WARTOSCI PARAMETROW WG KOLEJNOSCIZADANEJ NA POCZATKU/

1	0.0276548	4,3841505	971,1064453	1,1969299	0,0283598
2	0.0195549	5,2136707	971,1064453	1,4233999	0,0200535
3	0.0195549	4,3841505	986,0888672	1,1969299	0,0169924
4	0.0232549	5,2136707	971,1064453	1,4233999	0,0260062
5	0.0195549	4,4517899	986,0888672	1,2153769	0,0172546
6	0.0198566	4,3841505	986,0888672	1,1969299	0,0173872
7	0,0174214	4,3841505	971,1064453	1,1969299	0,0141799
8	0.0195549	4,0735826	971,1064453	1,1121407	0,0156683
9	0.0195549	4,3841505	966,1652832	1,1969299	0,0168199
10	0.0182454	4,0905561	971,1064453	1,1167746	0,0141799

Tab. 4.2.2. Zbiór realizacji R_2 .

KLASA PODOBIENSTWA NR 1 = 3
WARTOSCI NIEZMIENNIKOW PODOBIENSTWA DLA KOLEJNYCH PARAMETROW NIEBAZOWYCH

NR PARAMETRU WARTOSC NIEZMIENNIKA

1 -1,298237

2 -4,825001

WYGENEROWANE REALIZACJE

NR, REALIZACJI	WARTOSCI PARAMETROW WG KOLEJNOSCIZADANEJ NA POZATKU/				
1	0,0806592	4,4065046	971,0981445	1,2030334	0,0252485
2	0,0604859	5,2402554	971,0981445	1,4306574	0,0194982
3	0,0604859	4,4065046	986,0803223	1,2030334	0,0165219
4	0,0719304	5,2402554	971,0981445	1,4306574	0,0252861
5	0,0604859	4,4744892	986,0803223	1,2215939	0,0167768
6	0,0614191	4,4065046	986,0803223	1,2030334	0,0169058
7	0,0538867	4,4065046	971,0981445	1,2030334	0,0137873
8	0,0604859	4,0943537	971,0981445	1,1178112	0,0152345
9	0,0604859	4,4065046	966,1579590	1,2030334	0,0163542
10	0,0564353	4,1114130	971,0981445	1,1224689	0,0137873

Tab. 4.2.3. Zbiór realizacji R_3 .

KLASA PODOBIENSTWA NR 1 = 4
WARTOSCI NIEZMIENNIKOW PODOBIENSTWA DLA KOLEJNYCH PARAMETROW NIEBAZOWYCH

NR PARAMETRU WARTOSC NIEZMIENNIKA

1 -0,605090

2 -2,415120

WYGENEROWANE REALIZACJE

NR, REALIZACJI	WARTOSCI PARAMETROW WG KOLEJNOSCIZADANEJ NA POZATKU/				
1	0,0276538	2,2332888	988,3691406	1,2194328	0,0288511
2	0,0195542	2,7840157	988,3691406	1,5201454	0,0213854
3	0,0195542	2,2332888	993,4274902	1,2194328	0,0171989
4	0,0240740	2,7494984	988,3691406	1,5012970	0,0288511
5	0,0195542	2,2447186	993,4274902	1,2256737	0,0172869
6	0,0196543	2,2332888	993,4274902	1,2194328	0,0173311
7	0,0174208	2,2332888	988,3691406	1,2194328	0,0144256
8	0,0195542	2,0750847	988,3691406	1,1330500	0,0159398
9	0,0195542	2,2332888	973,3566895	1,2194328	0,0170242
10	0,0182447	2,0837307	988,3691406	1,1377707	0,0144256

Tab. 4.2.4. Zbiór realizacji R_4 .

KLASA PODOBIENSTWA NR. I = 5
WARTOSCI NIEZMIENNIKOW PODOBIENSTWA DLA KOLEJNYCH PARAMETROW NIEBAZOWYCH

NR PARAMETRU WARTOSC NIEZMIENNIKA

1	-0,605090
2	-4,142058

WYGENEROWANE REALIZACJE

NR. REALIZACJI	WARTOSCI PARAMETROW WG KOLEJNOSCIZADANEJ NA POCZATKU/				
1	0.0810014	2.2479362	988,3747559	1,2274313	0,0258887
2	0.0607426	2.8022757	988,3747559	1,5301151	0,0209575
3	0.0607426	2.2479362	993,4333496	1,2274313	0,0168547
4	0.0747828	2,7675314	988,3747559	1,5111437	0,0282737
5	0.0607426	2,2594414	993,4333496	1,2337132	0,0169409
6	0.0610535	2,2479362	993,4333496	1,2274313	0,0169842
7	0.0541155	2,2479362	988,3747559	1,2274313	0,0141369
8	0.0607426	2,0286946	988,3747559	1,1404810	0,0156208
9	0.0607426	2,2479362	973,3613281	1,2274313	0,0166835
10	0.0566748	2,0973969	988,3747559	1,1452332	0,0141369

Tab. 4.2.5. Zbiór realizacji $\mathcal{R}_5$.

KLASA PODOBIENSTWA NR. I = 6
WARTOSCI NIEZMIENNIKOW PODOBIENSTWA DLA KOLEJNYCH PARAMETROW NIEBAZOWYCH

NR PARAMETRU WARTOSC NIEZMIENNIKA

1	-1,298237
2	-3,108268

WYGENEROWANE REALIZACJE

NR. REALIZACJI	WARTOSCI PARAMETROW WG KOLEJNOSCIZADANEJ NA POCZATKU/				
1	0.0276703	4,3840666	988,3869629	1,1969070	0,0283437
2	0.0195659	5,2135715	988,3869629	1,4233732	0,0200421
3	0.0195659	4,3840666	993,4455566	1,1969070	0,0168964
4	0.0232679	5,2135715	988,3869629	1,4233732	0,0259915
5	0.0195659	4,4065046	993,4455566	1,2030334	0,0169829
6	0.0196660	4,3840666	993,4455566	1,1969070	0,0170263
7	0.0174312	4,3840666	988,3869629	1,1969070	0,0141719
8	0.0195659	4,0735054	988,3869629	1,1121197	0,0156595
9	0.0195659	4,3840666	973,3742676	1,1969070	0,0167248
10	0.0182556	4,0904779	988,3869629	1,1167536	0,0141719

Tab. 4.2.6. Zbiór realizacji $\mathcal{R}_6$.

KLASA PODOBIENSTWA NR I = 7
WARTOSCI NIEZMIENNIKOW PODOBIENSTWA DLA KOLEJNYCH PARAMETROW NIEBAZOWYCH

NR PARAMETRU	WARTOSC NIEZMIENNIKA
1	-1,298237
2	-4,835206

WYGENEROWANE REALIZACJE

NR. REALIZACJI	WARTOSCI PARAMETROW WG KOLEJNOSCIZADANEJ NA POCZATKU/				
1	0,0807146	4,4069967	988,3916016	1,2031679	0,0252425
2	0,0605275	5,2408400	988,3916016	1,4308176	0,0194936
3	0,0605275	4,4069967	993,4504395	1,2031679	0,0164340
4	0,0719799	5,2408400	988,3916016	1,4308176	0,0252801
5	0,0605275	4,4295521	993,4504395	1,2093258	0,0165181
6	0,0608373	4,4069967	993,4504395	1,2031679	0,0165603
7	0,0539239	4,4069967	988,3916016	1,2031679	0,0137840
8	0,0605275	4,0948105	988,3916016	1,1179361	0,0152309
9	0,0605275	4,4069967	973,3781738	1,2031679	0,0162671
10	0,0564742	4,1118727	988,3916016	1,1225939	0,0137840

Tab. 4.2.7. Zbiór realizacji R_7 .

KLASA PODOBIENSTWA NR I = 8
WARTOSCI NIEZMIENNIKOW PODOBIENSTWA DLA KOLEJNYCH PARAMETROW NIEBAZOWYCH

NR PARAMETRU	WARTOSC NIEZMIENNIKA
1	-0,311197
2	-2,404915

WYGENEROWANE REALIZACJE

NR. REALIZACJI	WARTOSCI PARAMETROW WG KOLEJNOSCIZADANEJ NA POCZATKU/				
1	0,0278453	2,0867281	971,0971680	1,5286751	0,0272761
2	0,0196896	2,2458200	971,0971680	1,6452208	0,0174550
3	0,0196896	2,0867281	986,0793457	1,5286751	0,0163431
4	0,0211907	2,2458200	971,0971680	1,6452208	0,0194887
5	0,0196896	2,1189222	986,0793457	1,5522594	0,0165953
6	0,0199934	2,0867281	986,0793457	1,5286751	0,0167228
7	0,0175414	2,0867281	971,0971680	1,5286751	0,0136381
8	0,0196896	1,7547255	971,0971680	1,2854595	0,0136381
9	0,0196896	2,0867281	966,1569824	1,5286751	0,0161772
10	0,0183710	1,9469852	971,0971680	1,4263039	0,0136381

Tab. 4.2.8. Zbiór realizacji R_8 .

KLASA PODOBIENSTWA NR I= 9
WARTOSCI NIEZMIENNIKOW PODOBIENSTWA DLA KOLEJNYCH PARAMETROW NIEBAZOWYCH

NR PARAMETRU WARTOSC NIEZMIENNIKA

1 -0,311197

2 -4,131853

WYGENEROWANE REALIZACJE

NR. REALIZACJI WARTOSCI PARAMETROW WG KOLEJNOSCIZADANEJ NA POCZATKU/

1	0.0805006	2.0827789	971.1037598	1.5257816	0.0237976
2	0.0603670	2.2415695	971.1037598	1.6421070	0.0166320
3	0.0603670	2.0827789	986.0859375	1.5257816	0.0155725
4	0.0649694	2.2415695	971.1037598	1.6421070	0.0185698
5	0.0603670	2.1149120	986.0859375	1.5493221	0.0158128
6	0.0612984	2.0827789	986.0859375	1.5257816	0.0159343
7	0.0537809	2.0827789	971.1037598	1.5257816	0.0129950
8	0.0603670	1.7514048	971.1037598	1.2830267	0.0129950
9	0.0603670	2.0827789	966.1625977	1.5257316	0.0154144
10	0.0563244	1.9433002	971.1037598	1.4236040	0.0129950

Tab. 4.2.9. Zbiór realizacji $\mathcal{R}_g$.

Wartości wielkości wyjściowej V odpowiadające poszczególnym realizacjom obliczono na podstawie wzoru

$$V = \frac{2 r^2 g(g - g_p)}{g \eta (1 + 2,4 \frac{r}{R})} \quad /4.2.4/$$

opisującego rozważane zjawisko w przypadku $Re \ll 1$ tzn. w przypadku dostatecznie małej prędkości początkowej kuli V_0 [45].

Na podstawie przedstawionych w pracy [46] wyników testu kompletności dla rozpatrywanego zbioru zmiennych r, g, g, g_p, η , stwierdzono, iż w zbiorze tym brakuje pewnych istotnych dla przebiegu badanego zjawiska wielkości. Po powtórny zaplanowaniu ekspery-

mentu z uwzględnieniem zmiennej $\hat{Z}_6 = R$ /promień cylindra [cm]/, i przeprowadzeniu weryfikacji kompletności zbioru zmiennych r, g, g, g_p, ρ, R , stwierdzono, iż rozpatrywany układ wielkości wejściowych w zadowalający sposób charakteryzuje badany proces.

5. UWAGI KOŃCOWE

5.1. Podsumowanie

Niniejsza praca zawiera propozycję algorytmu planowania eksperymentu pod kątem kompletowania zbioru zmiennych istotnych, charakteryzujących wybrany proces wymiarowy [23], [46]. Dla tego celu przydatne okazało się opracowanie metody doboru wartości liczbowych poszczególnych zmiennych wejściowych $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s$, gwarantującej możliwość rozbitcia wytypowanego zbioru realizacji $\mathcal{R}$ na rozłączne podzbiory realizacji podobnych $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_w$.

Rozwiązania problemu poszukiwano przy założeniu, że miary liczbowe rozpatrywanych zmiennych wejściowych podlegają ograniczeniom

$$z_1^L \leq z_1 \leq z_1^P, \quad /l = 1, \dots, s/ \quad /5.1.1/$$

co równoważne jest warunkowi, że punkty pomiarowe /Def. 6.1.10/ $R = (z_1, \dots, z_s)$ tworzą s - wymiarową kostkę rzeczywistą /Def. 6.2.15/

$$K = \bigcap_{l=1}^s [z_1^L, z_1^P]. \quad /5.1.2/$$

Etap pierwszy /punkt 2.1/ poświęcony jest opracowaniu metody planowania eksperymentu w obszarze Γ stanowiącym zbiór wszystkich układów niezmienników podobieństwa $g = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$, których współrzędne określone są zależnością

$$\varphi_j = \frac{z_{m+j}}{\prod_{i=1}^m z_i^{a_{ji}}}, \quad /j = 1, \dots, r/, \quad /5.1.3/$$

gdzie z_i / $i = 1, \dots, m$ / oznaczają miary liczbowe zmiennych wymiarowo niezależnych $\hat{z}_i$ / $i = 1, \dots, m$ / wybranych ze zbioru w wszystkich rozpatrywanych wielkości $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_s$, natomiast z_{m+j} / $j = 1, \dots, r$ / $m + r = s$ / oznaczają miary liczbowe pozostałych zmiennych. Określenie pomocniczego odwzorowania

$$\Psi: \mathbb{R}^{m+r} \rightarrow \mathbb{R}^r$$

$$\Psi(z_1, \dots, z_s) = (\varphi_1, \dots, \varphi_r), \quad /5.1.4/$$

przyporządkowującego punktowi pomiarowemu $R = (z_1, \dots, z_s)$ odpowiadający mu ciąg niezmienników podobieństwa $\mathcal{G} = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$, których wartość określana jest na podstawie wzoru /5.1.3/, pozwoliło na ustalenie zależności, pomiędzy kostką K a zbiorem Γ postaci

$$\Gamma = \Psi(K). \quad /5.1.5/$$

Po dokonaniu transformacji zmiennych /Def. 6.2.18/

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \ln z_1, \\ \dot{\varphi}_j &= \ln \varphi_j, \end{aligned} \quad /5.1.6/$$

zbiory K i Γ przekształcone zostają w zbiory $\dot{K}$ i $\dot{\Gamma}$ związane zależnością

$$\dot{\Gamma} = \mathcal{F}(\dot{K}), \quad /5.1.7/$$

gdzie $\mathcal{F}$ jest odwzorowaniem liniowym o macierzy

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{r1} & \dots & -a_{rm} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad /5.1.8/$$

Zgodnie z Tw. 6.2.18 zbiór $\dot{K}$ stanowi s -wymiarową kostkę rzeczywistą postaci

$$\dot{K} = \bigtimes_{i=1}^s [\dot{z}_1^L, \dot{z}_1^P], \quad \dot{z}_1^L = \ln z_1^L, \quad \dot{z}_1^P = \ln z_1^P, \quad /5.1.9/$$

natomiast zbiór $\dot{\Gamma}$ jako jej liniowy obraz, zgodnie z Tw. 6.2.9, może być przedstawiony w postaci uwypuklenia

$$\dot{\Gamma} = \text{Conv} \{ \dot{\omega}_1, \dots, \dot{\omega}_p \}, \quad /5.1.10/$$

gdzie punkty $\dot{\omega}_i$ $/i = 1, \dots, p/$ wyznaczone są przez zależność

$$\dot{\omega}_i = \mathcal{F}(\dot{w}_i) \quad , \quad /i = 1, \dots, p, \quad p = 2^{m+r}/ \quad /5.1.11/$$

gdzie $\dot{w}_i$ $/i = 1, \dots, p/$ oznaczają wierzchołki kostki $\dot{K}$, których zgodnie z Tw. 6.2.13 jest ona uwypukleniem tzn.

$$\dot{K} = \text{Conv} \{ \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_p \}. \quad /5.1.12/$$

Planowanie eksperymentu w zbiorze $\dot{\Gamma}$ /punkt 3.1/ sprowadzone zostało do problemu ustalenia zadanej liczby w - ciągów współczynników

$$\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1p}$$

$$\lambda_{w1}, \dots, \lambda_{wp}$$

/5.1.13/

spełniających warunki

$$\lambda_{ik} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^p \lambda_{ik} = 1, \quad /i = 1, \dots, w/. \quad /5.1.14/$$

gwarantujące że punkty $\dot{g}_1, \dots, \dot{g}_w$ postaci

$$\dot{g}_i = \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} \dot{\omega}_j, \quad /i = 1, \dots, w/, \quad /5.1.15/$$

są punktami należącymi do zbioru $\dot{\Gamma}$ /por. Def. 6.2.9/. Określony w pracy sposób doboru współczynników /5.1.13/ zapewnia usytuowanie punktów $\dot{g}_i$ / $i = 1, \dots, w$ / na odcinkach łączących środek symetrii zbioru $\dot{\Gamma}$ /Def. 6.2.5/ z jego wierzchołkami $\dot{\omega}_k$, / $k = 1, \dots, p$ /. Współczynniki λ_{ij} określone są przez wzory

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1 + \frac{1-p}{p(h+2)}, & /j = i, \quad j = 1, \dots, p / \\ \frac{1}{p(h+2)}, & /j \neq i, \quad i = 1, \dots, u / , \end{cases} \quad /5.1.16/$$

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1 + \left(\left[\frac{i-u-1}{p} \right] + 2 \right) \frac{1-p}{p(h+2)}, & /j = i - u - \left[\frac{i-u-1}{p} \right] p / \\ \frac{\left[\frac{i-u-1}{p} \right] + 2}{p(h+2)}, & /j \neq i - u - \left[\frac{i-u-1}{p} \right] p / , \end{cases}$$

$$/j = 1, \dots, p; \quad i = \bar{u} + 1, \dots, u + hp / ,$$

przy założeniu że liczbę w /ilość klas podobieństwa/ można przedstawić w postaci

$$w = h \cdot p + u, \quad /h, u \in \mathbb{N}, u < p, p = 2^{m+r} / \quad /5.1.17/$$

Etap drugi /punkt 2.2/ poświęcony jest opracowaniu konstrukcji klasy podobieństwa $\dot{V} \subset \dot{K}$ odpowiadającej ustaleniu punktowi $\dot{g} \in \dot{\Gamma}$ postaci

$$\dot{g} = \sum_{j=1}^P \lambda_j \dot{\omega}_j, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^P \lambda_j = 1. \quad /5.1.18/$$

Wykazano, że klasę podobieństwa $\dot{V}$ można przedstawić w postaci

$$\dot{V} = \dot{H} \cap \dot{K}, \quad /5.1.19/$$

gdzie rozmaitość liniowa $\dot{H}$ /Def. 6.2.3/ stanowi translację jądra J odwzorowania liniowego $\mathcal{F}$ /Def. 6.2.2/ o wektor

$$\dot{R}_0 = \sum_{k=1}^P \lambda_k \dot{w}_k \quad /5.1.20/$$

co oznacza, że może być ona przedstawiona w postaci

$$\dot{H} = J + \dot{R}_0. \quad /5.1.21/$$

Wykazano, że w celu wyznaczenia pewnego podzbioru $\dot{U}$ rozważanej klasy podobieństwa $\dot{V}$ wystarczy dokonać translacji /Def. 6.2.4/ kostki $\dot{K}$ o wektor $-\dot{R}_0$ i dla tak otrzymanej kostki $\dot{K}_0$ wyznaczyć punkty przebiecia jej brzegu przez wektory bazy jądra $b_1, \dots, b_m$ i rozważyć zbiór będący ich uwypukleniem. Wspomniane punkty można przedstawić w postaci /Tw. 6.2.19/

$$p_i^L = \tau_i^L b_i, \quad p_i^P = \tau_i^P b_i, \quad /i = 1, \dots, m/. \quad /5.1.22/$$

gdzie liczby rzeczywiste τ_i^L, τ_i^P spełniają warunek

$$\tau_i^L < 0 < \tau_i^P, \quad /5.1.23/$$

a określone są przez wzory

$$\tau_i^L = \max \left\{ \frac{z_{j_1}^L - R_{oj_1}}{b_{ij_1}}, \dots, \frac{z_{j_k}^P - R_{oj_k}}{b_{ij_k}}, \frac{z_{j_{k+1}}^L - R_{oj_{k+1}}}{b_{ij_{k+1}}}, \dots, \frac{z_{j_{k+1}}^L - R_{oj_{k+1}}}{b_{ij_{k+1}}} \right\} \quad /5.1.24/$$

$$\tau_i^P = \min \left\{ \frac{z_{j_1}^L - R_{oj_1}}{b_{ij_1}}, \dots, \frac{z_{j_k}^L - R_{oj_k}}{b_{ij_k}}, \frac{z_{j_{k+1}}^P - R_{oj_{k+1}}}{b_{ij_{k+1}}}, \dots, \frac{z_{j_{k+1}}^P - R_{oj_{k+1}}}{b_{ij_{k+1}}} \right\}$$

/

gdzie $\{j_1, \dots, j_s\}$ jest taką permutacją zbioru liczb $\{1, \dots, s\}$, że

$$b_{ij_1}, \dots, b_{ij_k} < 0 \quad /5.1.25/$$

$$b_{ij_{k+1}}, \dots, b_{ij_{k+1}} > 0$$

$$b_{ij_{k+1}}, \dots, b_{ij_s} = 0,$$

przy czym $b_{i1}, \dots, b_{is}$ oznaczają współrzędne i -tego wektora bazy jądra J . Rozważany podzbiór $\dot{U}$ klasy podobieństwa $\dot{V}$ przedstawić można w formie translacji zbioru $\dot{U}_0$

$$\dot{U} = \dot{U}_0 + \dot{R}_0, \quad /5.1.26/$$

który stanowi uwypuklenie, określonych zależnością /5.1.22/, punktów $P_1^L, P_1^P, \dots, P_m^L, P_m^P$ tzn.

$$\dot{U}_0 = \text{Conv} \left\{ P_1^L, P_1^P, \dots, P_m^L, P_m^P \right\}. \quad /5.1.27/$$

Z zależności /5.1.26/ i /5.1.27/, na mocy Tw. 6.2.10, wynika, że zbiór $\dot{U}$ można przedstawić w postaci

$$\dot{U} = \text{Conv} \left\{ S_1^L, S_1^P, \dots, S_m^L, S_m^P \right\}, \quad /5.1.28/$$

gdzie punkty S_i^L, S_i^P wyznacza się na podstawie zależności

$$S_i^L = P_i^L + \dot{R}_0, \quad /i = 1, \dots, m/ \quad /5.1.29/$$

$$S_i^P = P_i^P + \dot{R}_0.$$

Po uproszczeniu oznaczeń zbiór $\dot{U}$ można ostatecznie przedstawić w postaci uwypuklenia zbioru q - punktów

$$\dot{U} = \text{Conv} \left\{ S_1, \dots, S_q \right\}, \quad /q = 2m/. \quad /5.1.30/$$

Problem planowania eksperymentu w klasie podobieństwa $\dot{V}$ /punkt 3.2/ sprowadzony został do problemu ustalenia t -ciągów współczynników

$$\gamma_{11}, \dots, \gamma_{1q} \quad /5.1.31/$$

$$\gamma_{t1}, \dots, \gamma_{tq}$$

spełniających warunki

$$\gamma_{ij} \geq 0 \quad \sum_{j=1}^q \gamma_{ij} = 1, \quad /i = 1, \dots, t/, \quad /5.1.32/$$

gwarantujące, że punkty postaci

$$\dot{R}_i = \sum_{j=1}^q \gamma_{ij} S_j, \quad /i = 1, \dots, t/ \quad /5.1.33/$$

są punktami wewnętrznymi klasy $\dot{V}$. Proponowany w pracy sposób doboru współczynników γ_{ij} zapewnia usytuowanie punktów $\dot{R}_i$ na odcinkach łączących wierzchołki $S_1, \dots, S_q$ zbioru $\dot{U}$ z pewnym jego punktem wewnętrznym S postaci

$$S = \sum_{j=1}^q \frac{\alpha_j}{M} S_j \quad /5.1.34/$$

gdzie wielkości α_j określone są wzorem

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^q d(S_j, S_i), \quad /j = 1, \dots, q/, \quad /5.1.35/$$

natomiast wartość M obliczana jest zgodnie z zasadą

$$M = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q d(S_i, S_j). \quad /5.1.36/$$

Wspomniane współczynniki /5.1.31/ określone są przez wzory

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{z+1 + \delta_i}{z+2}, & /j = i, \quad j = 1, \dots, q/ \\ \frac{\delta_i}{z+2}, & /j \neq i, \quad i = 1, \dots, e/, \end{cases} \quad /5.1.37/$$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{z - \left\lfloor \frac{i-e-1}{q} \right\rfloor + \left\{ \left\lfloor \frac{i-e-1}{q} \right\rfloor + 2 \right\} \delta_j}{z + 2} ; /j = i - e - \left\lfloor \frac{i-e-1}{q} \right\rfloor q / \\ \frac{\left\{ \left\lfloor \frac{i-e-1}{q} \right\rfloor + 2 \right\} \delta_j}{z + 2} ; /j \neq i - e - \left\lfloor \frac{i-e-1}{q} \right\rfloor q / \end{cases}$$

$$/j = 1, \dots, q, \quad i = e + 1, \dots, e + zq /$$

przy założeniu, że liczbę t /ilość realizacji w jednej klasie/ można przedstawić w postaci

$$t = z \cdot q + e, \quad /z, e \in \mathbb{N}, e < q /. \quad /5.1.38/$$

Zastosowanie proponowanego planu eksperymentu gwarantuje, że wytypowany zbiór realizacji

$$\dot{\mathcal{R}} = \{ \dot{\mathcal{R}}_1, \dots, \dot{\mathcal{R}}_v \}, \quad /v = w \cdot t / \quad /5.1.39/$$

można przedstawić w postaci sumy w-rozłącznych podzbiorów

$$\dot{\mathcal{R}} = \bigcup_{i=1}^w \dot{\mathcal{R}}_i, \quad /5.1.40/$$

z których każdy zawiera t -realizacji

$$\dot{\mathcal{R}}_i = \{ \dot{\mathcal{R}}_{(i-1)t+1}, \dots, \dot{\mathcal{R}}_{it} \}, /i = 1, \dots, w/, \quad /5.1.41/$$

dla których spełniona jest zależność

$$\mathcal{F}(\dot{\mathcal{R}}_{(i-1)t+1}) = \dots = \mathcal{F}(\dot{\mathcal{R}}_{it}) = \dot{\mathcal{S}}_i, \quad /i = 1, \dots, w / \quad /5.1.42/$$

równoważna warunkowi

$$\mathcal{F}(\dot{\mathcal{R}}_i) = \dot{\mathcal{S}}_i \quad , \quad /i = 1, \dots, w/ \quad /5.1.43/$$

Dokonując transformacji odwrotnej do transformacji /5.1.6/,
czyli zgodnie z Def. 6.2.18, przyjmując

$$Z_l = \exp \dot{Z}_l \quad , \quad /l = 1, \dots, s/, \quad /5.1.44/$$

$$\varphi_j = \exp \dot{\varphi}_j \quad , \quad /j = 1, \dots, r/,$$

otrzymujemy zbiór realizacji

$$\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_v\} \quad , \quad /5.1.45/$$

który można przedstawić w postaci sumy w-rozłącznych podzbiorów

$$\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^w \mathcal{R}_i \quad , \quad /5.1.46/$$

z których każdy zawiera t-realizacji podobnych

$$\mathcal{R}_i = \{R_{(i-1)t+1}, \dots, R_{it}\} \quad /5.1.47/$$

tzn. realizacji, dla których spełniony jest warunek

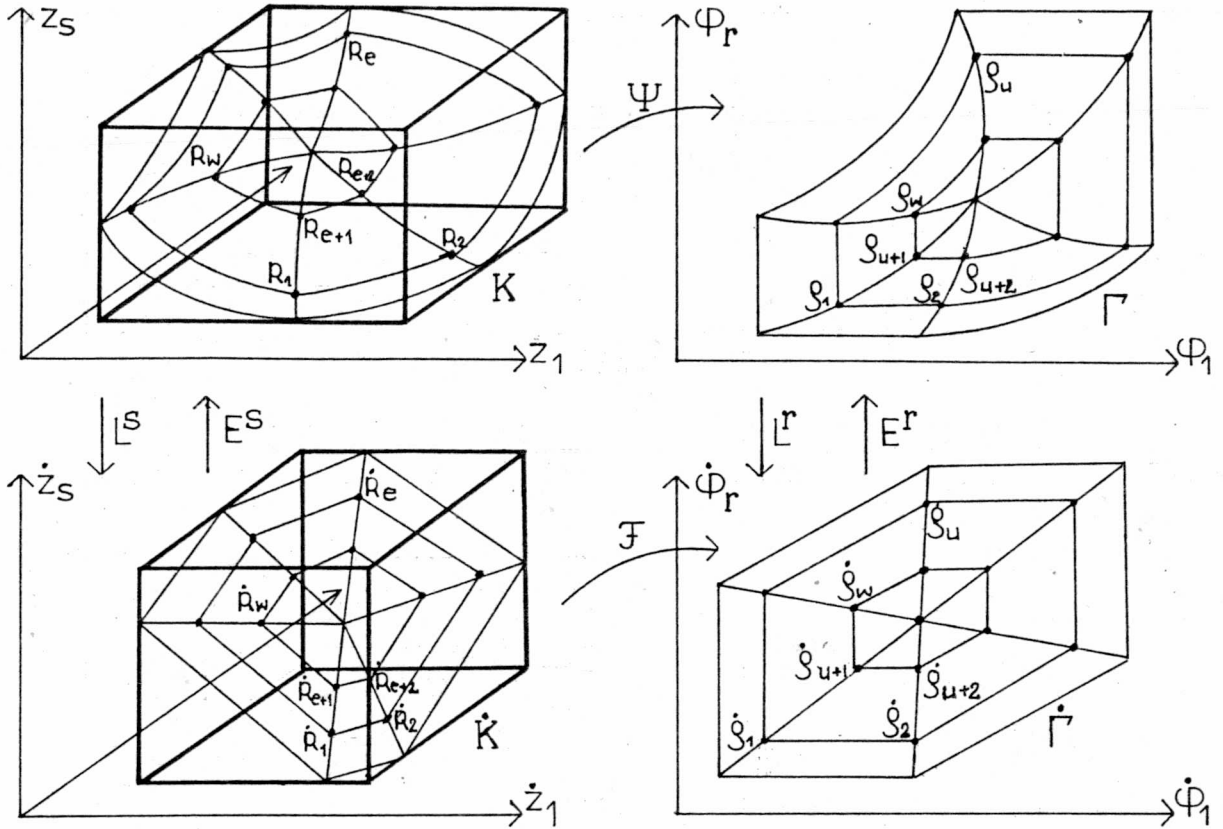
$$\Psi(R_{(i-1)t+1}) = \dots = \Psi(R_{it}) = \mathcal{S}_i \quad , \quad /i = 1, \dots, w/ \quad /5.1.48/$$

który można też wyrazić w postaci równoważnej

$$\Psi(\mathcal{R}_i) = \mathcal{S}_i \quad , /i = 1, \dots, w/, \quad /5.1.49/$$

gdzie Ψ oznacza odwzorowanie zdefiniowane wzorem /5.1.4/.

Na rys. 5.1.1. przedstawiono w uproszczony sposób zasadnicze idee proponowanego algorytmu planowania eksperymentu.



Rys. 5.1.1. Plan eksperymentu w "zlogarytmowanych" i wyjściowych obszarach zmienności parametrów procesu .

5.2. Wnioski

Materiał doświadczalny zebrany w trakcie eksperymentu przeprowadzonego według zaproponowanego w niniejszej pracy planu może być wykorzystany w etapie badania kompletności zbioru zmiennych wejściowych charakteryzujących rozważany proces wymiary. W tym celu, zgodnie z koncepcją przedstawioną w punkcie 1.2., należy sprawdzić czy dla realizacji $R_{(j-1)t+1}, \dots, R_{jt}$, wchodzących w skład określonej definicyjną równości /1.3.12/

podzbioru $\mathcal{R}_j$ / $j = 1, \dots, w$ /, spełniony jest warunek

$$\frac{Z_{ok}}{\prod_{i=1}^m Z_{ik}^{a_{ki}}} = \frac{Z_{ol}}{\prod_{i=1}^m Z_{il}^{a_{li}}} \quad , / k, l = (j-1)t+1, \dots, jt / , / 5.2.1 /$$

gdzie Z_{ok} , Z_{ol} oznaczają miary liczbowe wielkości wyjściowej $\hat{Z}_0$ odpowiadające realizacjom R_k , R_l . W przypadku gdy w poszczególnych podzbiórach $\mathcal{R}_j$ / $j = 1, \dots, w$ / równość ta nie jest spełniona - hipotezę o kompletności zbioru zmiennych $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_s$ należy odrzucić. W przypadku przeciwnym, tzn. gdy warunek /5.2.1/ jest dla wszystkich grup realizacji podobnych spełniony, stwierdzić można, iż podstaw do odrzucenia hipotezy o kompletności uwzględnianego zbioru czynników nie ma. Podkreślić jednak należy, iż rozumowanie to jest słuszne jedynie w przypadku gdy stosowane w trakcie eksperymentu metody diagnostyczne wolne są od błędów pomiarowych oraz przy założeniu całkowitej izolacji badanego obiektu od wpływu otoczenia. Praktyka badawcza dowodzi, że warunki takie są niemożliwe do osiągnięcia - na ogół pomiar obarczony jest pewnym błędem, a obiekt podlega oddziaływaniu pewnych czynników niekontrolowanych, tzw. zakłóceń. Możliwe jest więc, iż nawet gdy w badaniach uwzględnione zostały wszystkie czynniki mające istotny wpływ na przebieg procesu, warunek /5.2.1/, z uwagi na wspomniane losowe zaburzenia, nie będzie dla realizacji podobnych spełniony. Weryfikacja warunku kompletności zbioru zmiennych $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_s$ wyrażonego równością /5.2.1/, powinna być więc dokonana przy użyciu metod statystycznych, pozwalających na oddzielenie stochastycznego szumu od

właściwej informacji. Zagadnieniom tym poświęcona jest praca [46]. Opracowana przez jej autora metoda kompletowania zbioru zmiennych wejściowych, oparta na pojęciu statystycznych miar kompletności i istotności, umożliwia algorytmizację etapu charakteryzacji rozważanego procesu.

W przypadku pozytywnego rezultatu weryfikacji kompletności zbioru zmiennych $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_s$, w oparciu o istniejący materiał doświadczalny, dokonać można identyfikacji badanego obiektu. Z uwagi na tę możliwość w proponowanym w niniejszej pracy algorytmie planowania eksperymentu zwrócono szczególną uwagę na zapewnienie możliwości właściwego wykorzystania, zarówno dostępnego obszaru zmienności liczb bezwymiarowych jak i przestrzeni klas podobieństwa. W trakcie eksperymentu mogą być oczywiście przebadane nie tylko te realizacje, które zostały wytypowane w wyniku planowania ale również takie, których uwzględnienie eksperymentator uzna za celowe, a które nie zostały objęte planem.

Istotnym zagadnieniem związanym z zastosowaniem analizy wymiarowej do budowy modelu matematycznego rozważanego procesu jest zasada wyboru wielkości wymiarowo niezależnych spośród wszystkich wielkości wejściowych. Problem wpływu wyboru bazy wymiarowej procesu na jakość jego modelu matematycznego otrzymanego na drodze identyfikacji rozpatrywany był m. in. przez autorów prac [17],[22],[32],[39].

W niniejszej pracy zagadnienie to nie było dotychczas poruszane.

Wprowadzie przedstawiony algorytm planowania wymaga ustalenia pewnej bazy wymiarowej $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_m$, nie zostały jednak określone żadne ograniczenia ani wskazówki dotyczące jej wyboru. Powstaje

zatem pytanie - jakie znaczenie dla proponowanego algorytmu planowania eksperymentu może mieć zmiana bazy wymiarowej procesu? Okazuje się, że przy ustalonej przestrzeni eksperymentu, którą jest najczęściej kostka postaci /2.1.3/, z daną bazą wymiarową $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_m$ ściśle związane są położenie i proporcje geometryczne obszaru zmienności układów odpowiednich liczb bezwymiarowych czyli, określonego zależnością /1.3.5/, zbioru Γ stanowiącego dziedzinę funkcji $f(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ będącej, zgodnie z Tw. 6.1.1., główną składową modelu matematycznego rozważanego procesu. Dla ilustracji problemu rozpatrzmy, prezentowany już w niniejszej pracy, przykład procesu scharakteryzowanego przez trzy zmienne wejściowe $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{Z}_3$ należące do pewnej przestrzeni wymiarowej Π rozpiętej na układzie jednostek $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3$. Przyjmijmy tak jak poprzednio, że rozpatrywane zmienne mają w bazie przestrzeni Π reprezentację postaci

$$\begin{aligned}\hat{Z}_1 &= z_1 \hat{E}_1^1 \hat{E}_2^1 \hat{E}_3^1 \\ \hat{Z}_2 &= z_2 \hat{E}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{E}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{E}_3^{-\frac{1}{2}} \\ \hat{Z}_3 &= z_3 \hat{E}_1^{-1} \hat{E}_2^{-1} \hat{E}_3^{-1}.\end{aligned}\quad /5.2.2/$$

Założmy też, że miary liczbowe rozpatrywanych zmiennych zmieniane być mogą w trakcie eksperymentu w przedziałach

$$\begin{aligned}1,65 &\leq z_1 \leq 7,39 \\ 1,65 &\leq z_2 \leq 12,18 \\ 1,65 &\leq z_3 \leq 4,48.\end{aligned}\quad /5.2.3/$$

Z postaci reprezentacji /5.2.2/ wynika, że baza wymiarowa rozważanego procesu może być co najwyżej jednoelementowa. Przyjmijmy, że będzie nią zmienna $\hat{z}_1$. Wówczas zmienne $\hat{z}_2, \hat{z}_3$ będą od $\hat{z}_1$ wymiarowo zależne i zależność ta, wyrażona w miarach liczbowych, będzie postaci

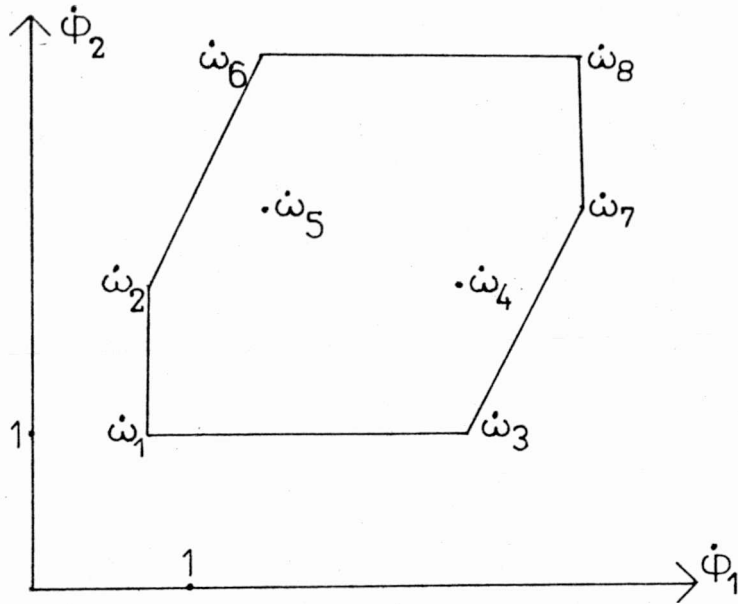
$$\begin{aligned} z_2 &= \varphi_1 z_1^{-\frac{1}{2}} \\ z_3 &= \varphi_2 z_1^{-1}. \end{aligned} \quad /5.2.4/$$

Po dokonaniu transformacji zmiennych określonej warunkiem /2.1.12/, powyższa zależność przyjmie dla zlogarytmowanych wartości miar liczbowych $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$ i zlogarytmowanych wartości niezmienników podobieństwa $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$ postać związku liniowego

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix}. \quad /5.2.5/$$

W tym przypadku, zgodnie z zależnością /2.1.21/ i /2.1.34/, zbiór $\bar{\Gamma}$ jako liniowy obraz kostki $\bar{K} = [0,5 \ 2] \times [0,5 \ 2,5] \times [0,5 \ 1,5]$ będzie, przedstawionym na rys. 5.2.1, uwypukleniem zbioru ośmiu punktów

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \begin{bmatrix} 0,75 \\ 1 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 2 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 2,75 \\ 1 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_4 = \begin{bmatrix} 2,75 \\ 2 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_5 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_6 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 3,5 \end{bmatrix}, \\ \dot{\omega}_7 &= \begin{bmatrix} 3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_8 = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 3,5 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad /5.2.6/$$



Rys. 5.2.1. Postać zbioru Γ związana z bazą wymiarową $\{\hat{z}_1\}$.

Przyjmijmy z kolei, że bazą wymiarową rozważanego procesu będzie zmienna $\hat{z}_2$. W tej sytuacji wymiarowo zależne od $\hat{z}_2$ będą zmienne $\hat{z}_1$, $\hat{z}_3$ i zależność pomiędzy ich miarami liczbowymi będzie postaci

$$z_1 = \varphi_1 z_2^{-2}$$

/5.2.7/

$$z_3 = \varphi_2 z_2^2,$$

a po dokonaniu transformacji /2.1.12/ stanie się, dla zmiennych $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$, $\dot{z}_3$ oraz $\dot{\phi}_1$, $\dot{\phi}_2$ zależnością liniową -

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix}.$$

/5.2.8/

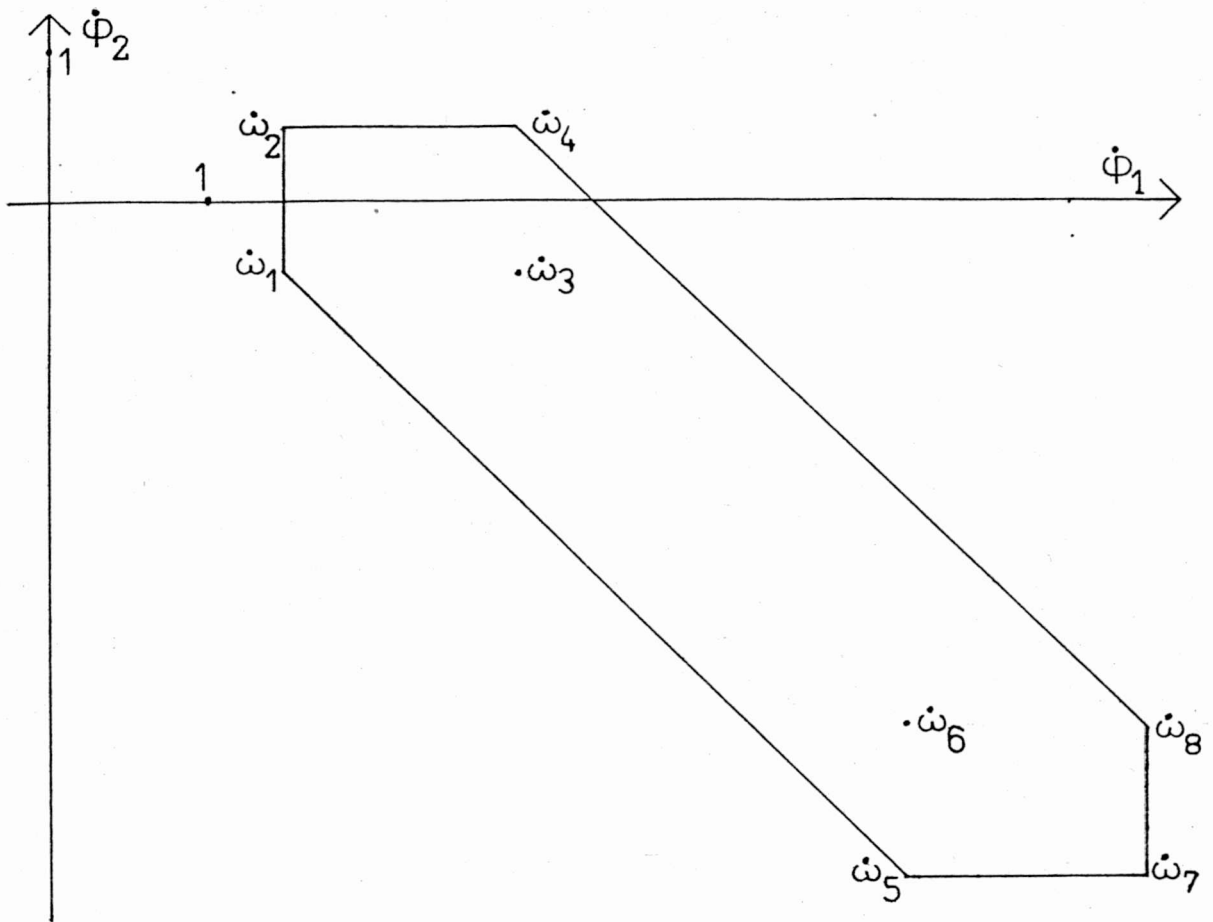
W tym przypadku zbiór Γ stanowiący liniowy obraz kostki $\hat{K} = [0,5, 2,5] \times [0,5, 2] \times [0,5, 1,5]$ będzie, zgodnie z zależnością /2.1.36/, wypukleniem ośmiu punktów

$$\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -0,5 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_5 = \begin{bmatrix} 5,5 \\ -4,5 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_6 = \begin{bmatrix} 5,5 \\ -3,5 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\omega}_7 = \begin{bmatrix} 7 \\ -4,5 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_8 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3,5 \end{bmatrix}.$$

/5.2.9/

Jego kształt i położenie przedstawia rys. 5.2.2.



Rys. 5.2.2. Postać zbioru Γ związana z bazą wymiarową $\{\hat{z}_2\}$.

Rozważmy ostatnią z trzech możliwości tzn. przyjmijmy, że bazą wymiarową procesu będzie zmienna $\hat{z}_3$. Wyrażona w miarach liczbowych zależność dwóch pozostałych, wymiarowo zależnych, zmiennych $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ będzie w tym przypadku postaci

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1 z_3^{-1} \\ z_2 &= \varphi_2 z_3^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

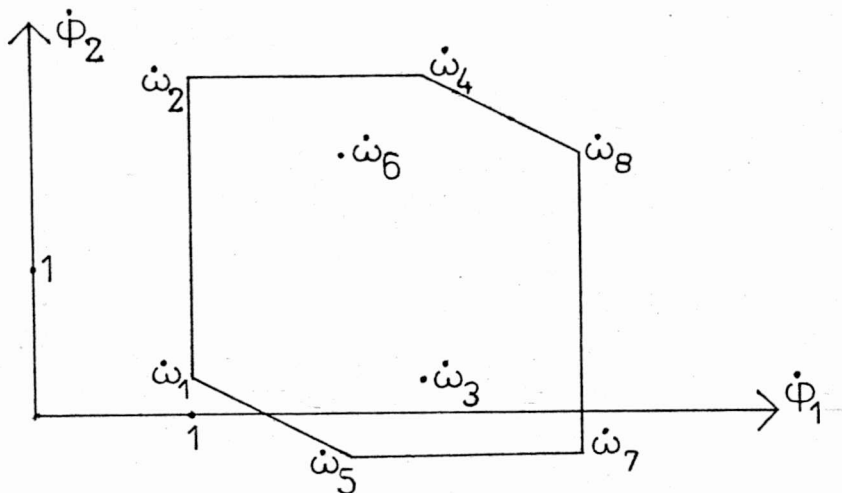
/5.2.10/

Po dokonaniu transformacji /2.1.12/ otrzymamy, dla zmiennych $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$ oraz $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$, zależność liniową

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} \quad /5.2.11/$$

W tym przypadku zbiór $\dot{\Gamma}$ jako liniowy obraz kostki $\dot{K} = [0,5 \ 1,5] \times [0,5 \ 2] \times [0,5 \ 2,5]$ będzie, przedstawionym na rys. 5.2.3, uwypukleniem ośmiu punktów

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0,25 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,25 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 0,25 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_4 = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2,25 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -0,25 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1,75 \end{bmatrix}, \\ \dot{\omega}_7 &= \begin{bmatrix} 3,5 \\ -0,25 \end{bmatrix}, \dot{\omega}_8 = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 1,75 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad /5.2.12/$$



Rys. 5.2.3. Postać zbioru $\dot{\Gamma}$ związana z bazą wymiarową $\{\hat{z}_3\}$.

Sądząc na podstawie przedstawionego przykładu stwierdzić można, iż geometria obszaru zmienności układów liczb bezwymiarowych, oznaczanego symbolem Γ , jest pewną funkcją bazy wymiarowej rozważanego procesu. Jeżeli więc wybór bazy nie jest przez żadne czynniki zdeterminowany, można dla opisu procesu wybrać tę, przy której geometryczne proporcje zbioru Γ są, z punktu widzenia planowania eksperymentu jak i identyfikacji funkcji $f(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$, najkorzystniejsze. Opracowanie takiej metody wyboru bazy uzależnione jest jednak od możliwości określenia pewnego kryterium "jakości" cech geometrycznych zbioru Γ . Jedną z wielkości, do pewnego stopnia charakteryzujących rozmiary każdego zbioru Γ , jest jego średnica D , czyli kres górny odległości par punktów należących do danego zbioru tzn.

$$D = \sup_{x, y \in \Gamma} d(x, y) . \quad /5.2.13/$$

Łatwo wykazać, że w rozważanej sytuacji, średnicę zbioru Γ można wyznaczyć na podstawie wartości maksymalnej odległości pomiędzy wierzchołkami zbioru $\dot{\Gamma}$

$$\dot{D} = \max d(\dot{\omega}_i, \dot{\omega}_j), /j, i = 1, \dots, p/, \quad /5.2.14/$$

co wynika z faktu, że zbiór Γ jest wypukleniem zbioru punktów $\dot{\omega}_1, \dots, \dot{\omega}_p$ / $\dot{\Gamma} = \text{Conv} \{ \dot{\omega}_1, \dots, \dot{\omega}_p \} /$.

Inną wielkością charakteryzującą geometryczne proporcje zbioru Γ jest, wykorzystywany np. w teorii elementów skończonych [7], wskaźnik

$$\beta = \frac{D_K}{D}$$

/5.2.15/

wyrażający stosunek średnicy kuli D_K o maksymalnym promieniu wpisanej w zbiór Γ , do średnicy tego zbioru D .

Wnioskować o rozmiarach zbioru Γ , można też na podstawie znajomości długości rzutów zbioru Γ na poszczególne osie układu

$$\mu_j = \left| P_j(\dot{\Gamma}) \right|, \quad /j = 1, \dots, r/, \quad /5.2.16/$$

które to wielkości określają jednocześnie długości przedziałów zmienności poszczególnych liczb bezwymiarowych $\varphi_j, /j = 1, \dots, r/$. Wydaje się więc, że możliwe jest zdefiniowanie pewnych wielkości, które stanowić mogą podstawę dla określenia kryterium "jakości" cech geometrycznych rozważanego zbioru Γ , a co za tym idzie możliwa jest tu prawdopodobnie pewna optymalizacja wyboru bazy wymiarowej rozważanego procesu.

Jednym z ważniejszych zagadnień związanych z praktycznym wykorzystaniem wyników badań doświadczalnych jest problem możliwości ich zastosowania dla potrzeb projektowania. Zagadnieniem tym zajmuje się teoria podobieństwa[17], która określa zasady przenoszenia skali od obiektów laboratoryjnych do przemysłowych. Aby wnioski wynikające z badań dokonanych na laboratoryjnym modelu można było wykorzystać przy projektowaniu obiektu przemysłowego, badany model powinien być do projektowanego obiektu podobny[17]. Powstaje zatem problem możliwości zrealizowania w warunkach laboratoryjnych takiego modelu. Oznaczmy przez

$$K_D = \bigotimes_{l=1}^s [Z_{Dl}^L, Z_{Dl}^P] \text{ kostkę, której każdy punkt } R_D = /Z_{D1}, \dots, Z_{Ds}/$$

reprezentuje pewien obiekt przemysłowy, natomiast przez

$K_M = \bigtimes_{l=1}^s [z_{Ml}^L, z_{Ml}^P]$ oznaczmy kostkę, której każdy punkt

$R_M = /z_{M1}, \dots, z_{Ms}/$ reprezentuje pewien model laboratoryjny.

Niech Γ_D i Γ_M oznaczają odpowiadające kostkom K_D i K_M obszary zmienności odpowiednich układów liczb bezwymiarowych

$\mathcal{Q}_D = / \varphi_{D1}, \dots, \varphi_{Dr} /$ i $\mathcal{Q}_M = / \varphi_{M1}, \dots, \varphi_{Mr} /$. Problem możliwości

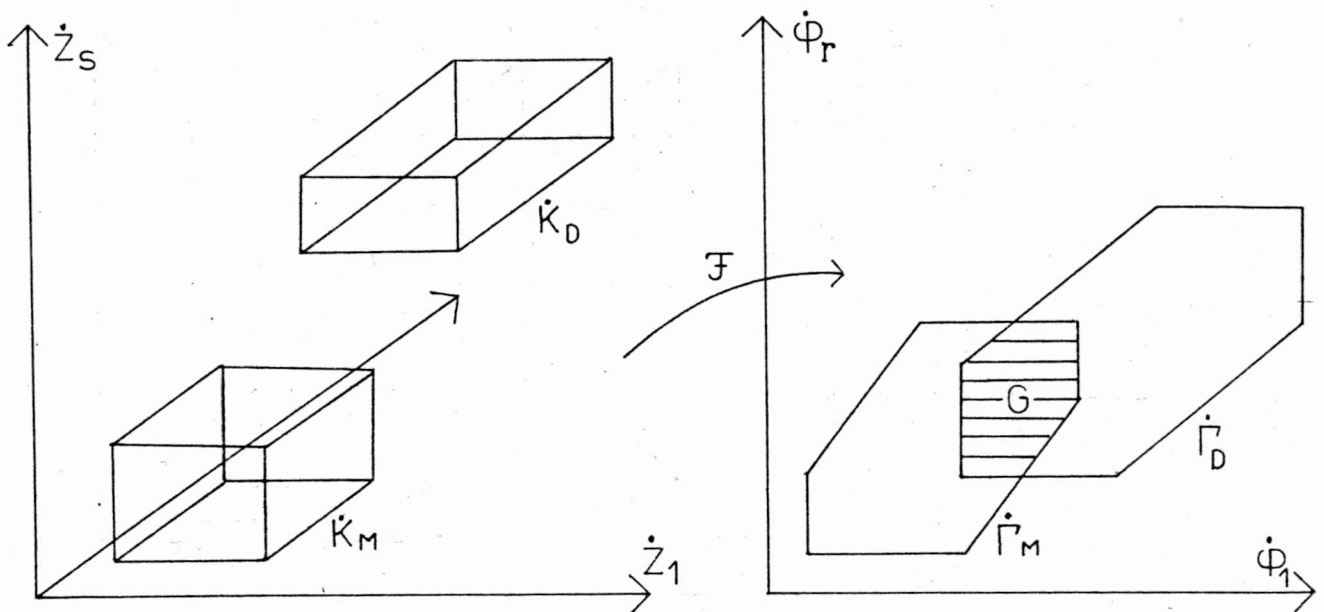
znalezienia w kostce K_M modeli podobnych do obiektów pochodzących z kostki K_D można, wykorzystując prezentowane w niniejszej

pracy metody, sprowadzić do problemu badania istnienia

części wspólnej G dwóch wielościanów wypukłych $\dot{\Gamma}_D$ i $\dot{\Gamma}_M$ odpowiadających, zgodnie z zależnością /2.1.21/, kostkom $\dot{K}_D$ i $\dot{K}_M$

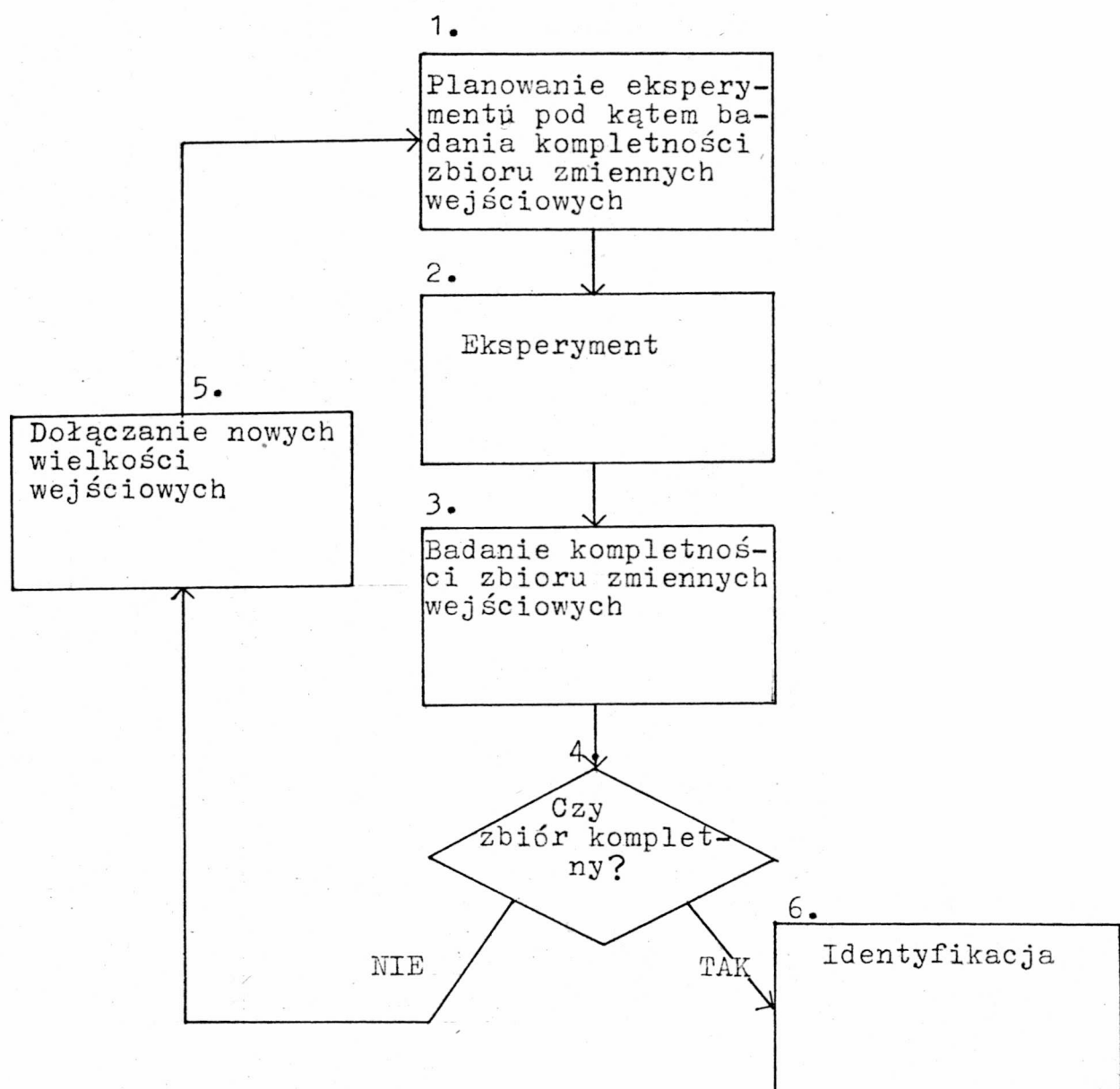
związanym z kostkami K_D i K_M poprzez transformację /2.1.12/.

Omawiany problem w sposób schematyczny przedstawiony został na rys. 5.2.4.



Rys. 5.2.4. Część wspólna "oryginalnego" i "modelowego" obszaru zmienności liczb bezwymiarowych.

Wszystkie przedstawione w pracy konstrukcje i rozwiązania opracowane zostały pod kątem możliwości praktycznego ich wykorzystania i dlatego też całość ma charakter algorytmu, który stanowić może podstawę dla konstrukcji jednego z bloków, przedstawionej na rys. 5.2.5, procedury ustalania postaci modelu matematycznego rozważanego procesu wymiarowego.



Rys. 5.2.5. Schemat procedury ustalania postaci modelu matematycznego procesu wymiarowego.

Przedstawiony schemat blokowy ujmuje zagadnienie identyfikacji procesu w sposób bardzo uproszczony. Szczegółowy opis niektórych jego etapów można znaleźć w pracy [17],[46].

Jako, że proponowany algorytm planowania eksperymentu wymaga jeszcze pewnych udoskonaleń, celowe wydaje się kontynuowanie pracy w tym zakresie. Z pewnością poszerzyłby się zakres zastosowania przedstawionego planu gdyby możliwe stało się zrezygnowanie z założenia niezależności zmian wartości poszczególnych wielkości wejściowych Z_1 / $l = 1, \dots, s$ /. Pewnego dopracowania wymaga sposób doboru współczynników /3.1.12/ i /3.2.19/, który powinien uwzględniać deformację obszarów K i Γ spowodowaną zastosowaniem transformacji zmiennych /2.1.12/. Warte przeanalizowania wydaje się być problem możliwości zmniejszenia ilości poziomów proponowanego planu. Wskazane z pewnością byłoby też zbadanie możliwości powiązania przedstawionej techniki planowania eksperymentu z innymi znanymi dotychczas metodami [14],[15],[28],[31].

6. DODATEK

6.1. Elementy analizy wymiarowej

W niniejszej pracy wykorzystano algebraiczny schemat analizy wymiarowej sformułowany przez S. Droboć w pracy [8], a rozwijany później m. in. w pracach [17], [18], [21], [27].

Def. 6.1.1. [8]

Przestrzenią wymiarową Π nazywamy zbiór elementów $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, \dots$, w którym określone są dwa działania - wewnętrzne $(\hat{X} \cdot \hat{Y} \in \Pi)$ zwane mnożeniem elementów oraz zewnętrzne $(\hat{X}^a \in \Pi, a \in \mathbb{R})$ zwane podnoszeniem elementu $\hat{X}$ do potęgi rzeczywistej "a", dla których spełniony jest układ aksjomatów:

$$1. \hat{X} \cdot \hat{Y} = \hat{Y} \cdot \hat{X}$$

$$2. (\hat{X} \cdot \hat{Y}) \cdot \hat{Z} = \hat{X} \cdot (\hat{Y} \cdot \hat{Z})$$

$$3. \forall \hat{X}, \hat{Y} \in \Pi \exists \hat{Z} \in \Pi : \hat{X} \cdot \hat{Z} = \hat{Y}$$

$$4. \hat{X}^{a+b} = \hat{X}^a \cdot \hat{X}^b$$

$$5. (\hat{X} \cdot \hat{Y})^a = \hat{X}^a \cdot \hat{Y}^a$$

$$6. (\hat{X}^a)^b = \hat{X}^{ab}$$

$$7. \hat{X}^1 = \hat{X}$$

$$8. \mathbb{R}^+ \subset \Pi.$$

Ostatni aksjomat oznacza, że wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie należą do przestrzeni wymiarowej Π . Działania $\hat{X} \cdot \hat{Y}$, $\hat{X}^a$, obcięte do podzbioru $\mathbb{R}^+$ należy rozumieć jako zwykłe mnożenie

i potęgowanie liczb rzeczywistych. Nietrudno udowodnić, że $\mathbb{R}^+$ jest podprzestrzenią wymiarową przestrzeni Π [8]. Dla oznaczenia podprzestrzeni $\mathbb{R}^+$ używa się symbolu Π_0 .

Uwaga :

Niepusty podzbiór Π' przestrzeni wymiarowej Π nazywamy podprzestrzenią wymiarową przestrzeni Π jeżeli dla dowolnych $\hat{x}, \hat{y} \in \Pi$ i dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzą implikacje:

1. $\hat{x}, \hat{y} \in \Pi' \implies \hat{x} \cdot \hat{y} \in \Pi'$
2. $\hat{x} \in \Pi', a \in \mathbb{R} \implies \hat{x}^a \in \Pi'$

Def. 6.1.2. [8]

Mówimy, że elementy $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n \in \Pi$ są wymiarowo niezależne jeżeli konsekwencją równości

$$\hat{x}_1^{a_1} \dots \hat{x}_n^{a_n} = u, \quad u \in \mathbb{R}^+, a_i \in \mathbb{R}, /i = 1, \dots, n/$$

jest warunek

$$a_1 = \dots = a_n = 0 \quad \text{i} \quad u = 1.$$

Przyjmujemy przy tym, że elementy $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k \in \Pi$ są wymiarowo zależne jeżeli nie są wymiarowo niezależne.

Def. 6.1.3. [8]

Mówimy, że przestrzeń wymiarowa Π jest rzędu "n" jeżeli istnieje w niej układ n-elementów wymiarowo niezależnych oraz każdy układ n+1-elementów jest wymiarowo zależny. Dla oznaczenia rzędu

przestrzeni używa się symbolu $\Pi_{(n)}$.

Def. 6.1.4. [8]

Każdy układ $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$ wielkości wymiarowo niezależnych w przestrzeni wymiarowej Π rzędu "n" nazywamy bazą wymiarową tej przestrzeni. Bazę wymiarową $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$ nazywa się też układem jednostek danej przestrzeni.

Wniosek:

Z definicji tej /przy uwzględnieniu Def. 6.1.3/ wynika, że każdy element $\hat{X} \in \Pi$ ma jednoznaczne przedstawienie w bazie $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$ postaci:

$$\hat{X} = X \hat{E}_1^{e_1} \dots \hat{E}_n^{e_n} \quad X \in \mathbb{R}^+, e_i \in \mathbb{R}, /i = 1, \dots, n/.$$

Wielkość X występującą w powyższym wzorze nazywamy miarą liczbową wielkości $\hat{X}$ względem bazy $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$, natomiast współczynniki e_i / $i = 1, \dots, n$ / współrzędnymi $\hat{X}$ w tej bazie.

Def. 6.1.5. [8]

Funkcję $\Phi: \Pi^s \rightarrow \Pi$, której argumenty $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_s$ oraz wartość $\hat{X}_0$ są elementami ustalonej przestrzeni wymiarowej Π , nazywamy funkcją wymiarową i oznaczamy symbolem

$$\hat{X}_0 = \Phi(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_s).$$

Def. 6.1.6. [8]

Przekształceniem wymiarowym nazywamy odwzorowanie $\Theta: \Pi \rightarrow \Pi$ o własnościach

1. Θ jest wzajemnie jednoznaczne
2. $\Theta(\hat{X} \cdot \hat{Y}) = \Theta(\hat{X}) \cdot \Theta(\hat{Y})$
3. $\Theta(\hat{X}^a) = (\Theta \hat{X})^a$
4. $\Theta(u) = u \quad \forall u \in \mathbb{R}^+.$

Def. 6.1.7. [8]

Funkcję wymiarową $\mathbb{D}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_s)$ nazywamy wymiarowo niezmienniczą jeżeli dla każdego przekształcenia wymiarowego Θ

$$\mathbb{D}(\Theta(\hat{X}_1), \dots, \Theta(\hat{X}_s)) = \Theta(\mathbb{D}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_s)).$$

Def. 6.1.8. [8]

Funkcję wymiarową $\mathbb{D}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_s)$ nazywamy wymiarowo jednorodną jeżeli dla każdego układu liczb $u_1, \dots, u_s \in \mathbb{R}^+$ istnieje wartość $u \in \mathbb{R}^+$ taka, że dla każdego układu argumentów $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_s$ spełniony jest warunek

$$\mathbb{D}(u_1, \hat{X}_1, \dots, u_s, \hat{X}_s) = u \mathbb{D}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_s)$$

Tw. 6.1.1. /Buckingham/ [17]

Niech

$$\hat{X}_0 = \mathbb{D}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m, \hat{X}_{m+1}, \dots, \hat{X}_{m+r}) \quad //$$

będzie funkcją wymiarową, której argumenty $\hat{X}_l$, $l = 1, \dots, m+r$ oraz wartość $\hat{X}_0$ są elementami ustalonej przestrzeni wymiarowej

rozpiętej na układzie jednostek $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$. Zgodnie z Def. 6.1.4. każdą z wielkości $\hat{X}_l$ / $l = 1, \dots, m+r$ / oraz $\hat{X}_0$ można przedstawić w bazie $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$ w postaci

$$\hat{X}_l = X_l \prod_{k=1}^n \hat{E}_k^{x_{lk}}, \quad /l = 1, \dots, m+r/ \quad /2/$$

$$\hat{X}_0 = X_0 \prod_{k=1}^n \hat{E}_k^{X_k}.$$

X_0, X_l / $l = 1, \dots, m+r$ / oznaczają miary liczbowe, zaś X_k, x_{lk} współrzędne wielkości $\hat{X}_0, \hat{X}_l$ w bazie $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$. Przyjmijmy, że $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m$ to wielkości wymiarowo niezależne wybrane spośród wszystkich argumentów $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_{m+r}$ funkcji Φ . Układ wielkości $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m$ możemy więc potraktować jako bazę wymiarową do zbioru wielkości $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_{m+r}$, w związku z czym pozostałe argumenty tzn. zmienne $\hat{X}_{m+1}, \dots, \hat{X}_{m+r}$ można przedstawić w postaci

$$\hat{X}_{m+j} = \varphi_j \prod_{i=1}^m \hat{X}_i^{a_{ji}}, \quad /j = 1, \dots, r/, \quad /3/$$

gdzie φ_j są wielkościami bezwymiarowymi natomiast a_{ji} to ustalone wykładniki rzeczywiste. Jeżeli ponadto funkcja Φ występująca w zależności /1/ jest funkcją wymiarowo niezmienniczą i jednorodną wówczas zależność tę można wyrazić w postaci

$$\hat{X}_0 = f(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \prod_{i=1}^m \hat{X}_i^{a_i} \quad /4/$$

gdzie $f(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ jest pewną funkcją liczbowo-liczbową $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$, której argumenty $\varphi_j, /j = 1, \dots, r/$ wyznacza się na podstawie zależności /3/, natomiast $a_i /i = 1, \dots, m/$ są ustalonymi wykładnikami rzeczywistymi.

Wykorzystując tzw. parametryczny zapis funkcji wymiarowej [17] można tezę twierdzenia /warunek /4//, przy tych samych założeniach o funkcji Φ i jej argumentach, przedstawić w formie bezwymiarowego związku

$$X_0 = f(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \prod_{i=1}^m X_i^{a_i} \quad /5/$$

wyrażonego w miarach liczbowych X_0, X_1 określonych zależnością /2/, gdzie wielkości φ_j dane są wzorem

$$\varphi_j = \frac{X_{m+j}}{\prod_{i=1}^m X_i^{a_{ji}}} \quad , \quad /j = 1, \dots, r/ \quad /6/$$

natomiast wykładniki a_i, a_{ji} otrzymujemy rozwiązując układy równań

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} X_{ik} = X_{m+j,k} \quad , /j = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, n/ \quad /7/$$

$$\sum_{i=1}^m a_i X_{ik} = X_k \quad .$$

Def. 6.1.9.

Proces fizyczny nazywamy wymiarowym, jeżeli charakteryzujące go wielkości wejściowe $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_s$ oraz wielkość wyjściowa $\hat{Z}_0$ są elementami ustalonej przestrzeni wymiarowej Π rozpiętej na pewnym układzie jednostek $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$ i jeżeli ponadto opisująca go zależność

$$\hat{Z}_0 = \mathcal{D}(\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_s)$$

jest funkcją wymiarową, wymiarowo-niezmienniczą i jednorodną.

Def. 6.1.10.

Rozważmy proces wymiarowy scharakteryzowany przez zbiór wielkości wejściowych $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_s \in \Pi$. Każdą z wielkości $\hat{Z}_l$ / $l = 1, \dots, s$ / można przedstawić w bazie $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n$ rozpatrywanej przestrzeni wymiarowej Π , w postaci

$$\hat{Z}_l = Z_l \prod_{k=1}^n E_k^{z_{lk}}, \quad /l = 1, \dots, s/$$

Ustalony ciąg miar liczbowych Z_l / $l = 1, \dots, s$ / nazywamy realizacją rozważanego procesu i oznaczamy symbolem

$$R = (Z_1, \dots, Z_s).$$

Realizację R nazywa się też niekiedy punktem pomiarowym.

Def. 6.1.11. [17]

Każdej realizacji $R = /Z_1, \dots, Z_m, Z_{m+1}, \dots, Z_{m+r}/, /Z_1, \dots, Z_m$ oznaczają tu miary liczbowe wielkości wymiarowo niezależnych $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_m$, wybranych ze zbioru $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_s$ $/s = m+r/$, natomiast $Z_{m+1}, \dots, Z_{m+r}$ to miary liczbowe wielkości pozostałych/, rozważanego procesu można, zgodnie z Tw. 6.1.1. /wzór /6//, przyporządkować ciąg r - wielkości bezwymiarowych

$$g = (\varphi_1, \dots, \varphi_r) .$$

Wielkości te nazywamy niezmiennikami podobieństwa procesu.

Def. 6.1.12. [17]

Dwie realizacje rozważanego procesu

$$R_1 = (Z_{11}, \dots, Z_{1m}, Z_{1,m+1}, \dots, Z_{1,m+r}),$$

$$R_2 = (Z_{21}, \dots, Z_{2m}, Z_{2,m+1}, \dots, Z_{2,m+r}),$$

którym odpowiadają ciągi niezmienników podobieństwa

$$g_1 = (\varphi_{11}, \dots, \varphi_{1r}),$$

$$g_2 = (\varphi_{21}, \dots, \varphi_{2r}),$$

nazywamy podobnymi jeżeli spełniony jest warunek

$$\varphi_{1j} = \varphi_{2j} \quad , \quad /j = 1, \dots, r/.$$

6.2. Pomocnicze definicje i twierdzenia

Def. 6.2.1.[44]

Niech X, Y będą dwiema przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{C}$ [2].
Odwzorowaniem liniowym przestrzeni X w przestrzeni Y nazywamy przekształcenie $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$ spełniające warunki

$$1/ \mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$2/ \mathcal{F}(\alpha x) = \alpha \mathcal{F}(x) \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Def. 6.2.2.[33]

Niech $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem liniowym przestrzeni liniowej X w przestrzeń Y . Jądrem odwzorowania $\mathcal{F}$, dla oznaczenia którego stosuje się symbol $\text{Ker}(\mathcal{F})$, nazywamy zbiór wszystkich elementów x przestrzeni X , dla których $\mathcal{F}(x) = 0$, zatem

$$\text{Ker}(\mathcal{F}) = \{ x \in X : \mathcal{F}(x) = 0 \}.$$

Nietrudno udowodnić, że $\text{Ker}(\mathcal{F})$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni X [33].

Tw. 6.2.1.[33]

Niech X, Y będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{C}$. Załóżmy, że wymiar przestrzeni X jest równy n / $\dim X = n$ / [33]. Jeżeli $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem liniowym przestrzeni X w przestrzeń Y , wówczas zachodzi związek

$$\dim(\mathcal{F}(X)) + \dim(\text{Ker}(\mathcal{F})) = \dim(X)$$

co oznacza, że wymiar przestrzeni X jest równy sumie wymiaru obrazu przestrzeni X przez odwzorowanie $\mathcal{F}$ [33] i wymiaru jądra odwzorowania $\mathcal{F}$.

Def. 6.2.3. [44]

Niech X będzie pewną przestrzenią liniową. Rozmaitością liniową w przestrzeni X nazywamy zbiór V postaci

$$V = \{v \in X : v = u + v_0, \quad u \in U, \quad v_0 \in X\},$$

gdzie U jest pewną podprzestrzenią liniową przestrzeni X , natomiast v_0 jest ustalonym elementem przestrzeni X .

Tw. 6.2.2.

Niech X, Y będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{C}$, zaś

$\mathcal{F}: X \rightarrow Y$ odwzorowaniem liniowym. Niech y_0 będzie pewnym elementem przestrzeni Y , natomiast x_0 takim elementem przestrzeni X , że $\mathcal{F}(x_0) = y_0$. Wykażemy, że przeciwobraz punktu y_0 przez odwzorowanie $\mathcal{F}$ jest rozmaitością liniową X_0 w przestrzeni X , będącą translacją jądra $\text{Ker}(\mathcal{F})$ o element x_0 , czyli

$$\mathcal{F}^{-1}(y_0) = \{x \in X : x = u + x_0, \quad u \in \text{Ker}(\mathcal{F}), \quad x_0 \in X, \mathcal{F}(x_0) = y_0\}.$$

Dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że zachodzą dwie inkluzje

$$1/ \mathcal{F}^{-1}(y_0) \subset X_0$$

$$2/ X_0 \subset \mathcal{F}^{-1}(y_0).$$

Rozważmy pierwszą z nich. Załóżmy, że

$$x \in \mathcal{F}^{-1}(y_0),$$

wykażemy, że $x \in X_0$. Skoro $x \in \mathcal{F}^{-1}(y_0)$ to musi być spełniony warunek

$$\mathcal{F}(x) = y_0.$$

Aby wykazać, że $x \in X_0$ należy uzasadnić, że x można przedstawić w postaci

$$x = u + x_0,$$

gdzie $u \in \text{Ker}(\mathcal{F})$. Zauważmy, że

$$x = (x - x_0) + x_0$$

Wykażemy, że $u = (x - x_0) \in \text{Ker}(\mathcal{F})$ czyli, że $\mathcal{F}(u) = 0$.

Zauważmy, że

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(x - x_0) = \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(x_0) = y_0 - y_0 = 0.$$

Z powyższego ciągu równości wynika, że $\mathcal{F}(u) = 0$ co oznacza, że spełniona jest pierwsza z inkluzji. Rozważmy z kolei drugą z nich. Załóżmy, że

$$x \in X_0,$$

wykażemy, że $x \in \mathcal{F}^{-1}(y_0)$. W tym celu wystarczy udowodnić, że

$$\mathcal{F}(x) = y_0.$$

Skoro $x \in X_0$ więc x musi być postaci

$$x = u + x_0$$

gdzie $u \in \text{Ker}(\mathcal{F})$. Wobec tego

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(u + x_0) = \mathcal{F}(u) + \mathcal{F}(x_0) = 0 + y_0 = y_0,$$

tak więc druga z inkluzji została uzasadniona co kończy jednocześnie dowód całego twierdzenia.

Def. 6.2.4.[44]

Niech X będzie przestrzenią liniową a $C \subset X$ dowolnym jej podzbiorem. Translacją zbioru C o pewien element $x_0 \in X$ nazywamy zbiór C_0 postaci

$$C_0 = \{y \in X : \exists x \in C, y = x + x_0\}.$$

Dla oznaczenia translacji używa się symbolu $C + x_0$.

Tw. 6.2.3.

Niech X będzie przestrzenią liniową a $x_0 \in X$ dowolnym jej elementem. Jeżeli dla dwóch podzbiorów A, B przestrzeni X spełniony jest warunek

$$A \subset B,$$

to prawdziwa jest również inkluzja

$$A + x_0 \subset B + x_0 .$$

Dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że prawdziwa jest implikacja

$$y \in A + x_0 \implies y \in B + x_0 .$$

Zauważmy, że

$$y \in A + x_0 \implies y = x + x_0$$

gdzie $x \in A$, a ponieważ $A \subset B$ więc również $x \in B$, co oznacza że

$$y = (x + x_0) \in B + x_0 ,$$

a to kończy dowód twierdzenia.

Def. 6.2.5.

Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Mówimy, że zbiór $C \subset X$ posiada środek symetrii $x_0 \in X$ jeżeli

$$\forall x \in C \quad \exists x' \in C : \quad \frac{\bar{x} + x}{2} = x_0$$

Zbiory posiadające środek symetrii nazywamy środkowosymetrycznymi.

Tw. 6.2.4.

Niech X, Y będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{R}$. Jeżeli $C \subset X$ jest środkowosymetrycznym podzbiorem przestrzeni X o środ-

ku symetrii $x_0 \in X$, a $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$ odwzorowaniem liniowym, wówczas $\mathcal{F}(C)$ jest zbiorem środkosymetrycznym w przestrzeni Y o środku symetrii $y_0 = \mathcal{F}(x_0)$.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że

$$\forall y \in C: \exists y' \in \mathcal{F}(C) : \frac{y + y'}{2} = y_0.$$

Przyjmijmy oznaczenie $D = \mathcal{F}(C)$ i zauważmy, że jeżeli $y \in D$ to musi istnieć takie $x \in C$, że $y = \mathcal{F}(x)$. Ponieważ C posiada środek symetrii x_0 więc istnieje takie $x' \in C$, że $\frac{1}{2}(x' + x) = x_0$. Przyjmując $y' = \mathcal{F}(x')$ otrzymujemy

$$\frac{y + y'}{2} = \frac{\mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(x')}{2} = \mathcal{F}\left(\frac{x + x'}{2}\right) = \mathcal{F}(x_0) = y_0$$

co kończy dowód twierdzenia.

Def. 6.2.6.[44]

Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Odcinkiem łączącym punkty $[x_1, x_2] \subset X$ nazywamy zbiór $[x_1, x_2] \subset X$ postaci

$$[x_1, x_2] = \{ x \in X : x = t x_1 + (1-t) x_2, \quad t \in [0, 1] \}.$$

Def. 6.2.7.[44]

Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Podzbiór D przestrzeni X nazywamy wypukłym jeżeli wraz z każdą parą swych punktów $x_1, x_2 \in D$ zawiera również łączący je odcinek, czyli

$$(D \subset X - \text{wypukły}) : \Leftrightarrow (x_1, x_2 \in D \Rightarrow [x_1, x_2] \subset D).$$

Def. 6.2.8. [44]

Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Wypukłą kombinacją liniową elementów $x_1, \dots, x_n \in X$ nazywamy element $x \in X$ postaci

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

gdzie $\lambda_i \geq 0$ oraz $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Jeżeli $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$ kombinację liniową nazywamy ściśle wypukłą.

Tw. 6.2.5. [44]

Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Każdy wypukły podzbiór $D \subset X$ jest zbiorem wszystkich wypukłych kombinacji liniowych swoich elementów czyli

$$(D \text{ - wypukły}) \iff (\forall x_1, \dots, x_n \in D, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in D),$$

gdzie $\lambda_i > 0$ oraz $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Tw. 6.2.6. [44]

Niech X będzie przestrzenią liniową. Przekrój dowolnej ilości wypukłych podzbiorów $D_\lambda \subset X$ jest wypukły, czyli

$$(\forall \lambda \in \Lambda \text{ } D_\lambda \text{ - wypukły}) \implies (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda \text{ - wypukły})$$

Def. 6.2.9.[44]

Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Uwypukleniem zbioru $C \subset X$ nazywamy zbiór wszystkich wypukłych kombinacji liniowych elementów zbioru C i oznaczamy symbolem $\text{Conv}(C)$.
Zatem

$$\text{Conv}(C) = \left\{ x \in X : \exists x_1, \dots, x_n \in C, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \right. \\ \left. \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Def. 6.2.10.[36]

Niech $C \subset X$ będzie dowolnym wypukłym podzbiorem przestrzeni liniowej X . Punkt $x_0 \in C$ nazywamy punktem ekstremalnym zbioru C jeżeli nie jest on punktem wewnętrznym żadnego odcinka, którego końce należą do C . Inaczej mówiąc jeżeli

$$x, y \in C \quad \text{ i } \quad 0 < t < 1$$

to zawsze spełniona być musi implikacja

$$(x_0 = tx + (1-t)y) \Rightarrow (x = y = x_0)$$

Tw. 6.2.7. /Krein - Millman/. [36]

Niech X będzie przestrzenią liniową. Jeżeli X^* rozdziela punkty w X to dowolny wypukły i zwarty podzbiór D przestrzeni X jest uwypukleniem zbioru swoich punktów ekstremalnych.

Tw. 6.2.8.[44]

Niech X, Y będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{R}$, a $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$ odwzorowaniem liniowym. Jeżeli $D \subset X$ jest wypukłym podzbiorem przestrzeni X wówczas $\mathcal{F}(D)$ jest zbiorem wypukłym w przestrzeni Y .

Tw. 6.2.9.

Niech X, Y będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{R}$ a $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$ odwzorowaniem liniowym. Dla każdego zbioru punktów $x_1, \dots, x_n \in X$ spełniony jest warunek

$$\mathcal{F}(\text{Conv} \{x_1, \dots, x_n\}) = \text{Conv} \{\mathcal{F}(x_1), \dots, \mathcal{F}(x_n)\},$$

co oznacza, że liniowy obraz zbioru będącego uwypukleniem skończonej liczby punktów jest uwypukleniem zbioru obrazów tych punktów.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że zachodzą dwie inkluzje

$$1. D_1 \subset D_2$$

$$2. D_2 \subset D_1$$

gdzie $D_1 := \mathcal{F}(\text{Conv} \{x_1, \dots, x_n\})$, $D_2 := \text{Conv} \{\mathcal{F}(x_1), \dots, \mathcal{F}(x_n)\}$.

Rozważmy pierwszą z inkluzji, przyjmijmy przy tym oznaczenie $y_i = \mathcal{F}(x_i)$ / $i = 1, \dots, n$ /. Załóżmy, że $y \in D_1$, wykażemy że y jest wypukłą kombinacją liniową punktów $y_1, \dots, y_n$ co oznaczać będzie, że $y \in D_2$. Zauważmy, że prawdziwa jest implikacja

$$(y \in D_1) \implies (\exists x \in \text{Conv} \{x_1, \dots, x_n\} : y = \mathcal{F}(x))$$

Punkt x musi być oczywiście postaci

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

a co za tym idzie

$$y = \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{F}(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$$

Wykazaliśmy więc, że $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ gdzie $\lambda_i \geq 0$ i $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, co oznacza że $y \in D_2$, a to uzasadnia prawdziwość rozważanej pierwszej inkluzji.

Rozważmy z kolei inkluzję drugą. Zauważmy, że $\mathcal{F}(x_1), \dots, \mathcal{F}(x_n) \in D_1$. Zgodnie z Tw. 6.2.8. zbiór D_1 jest zbiorem wypukłym a zatem wraz z punktami $\mathcal{F}(x_1), \dots, \mathcal{F}(x_n)$ musi zawierać również zbiór $D_2 = \text{Conv}\{\mathcal{F}(x_1), \dots, \mathcal{F}(x_n)\}$, co wynika bezpośrednio z Tw. 6.2.5. Oznacza to, że spełniona jest druga inkluzja co kończy jednocześnie dowód twierdzenia.

Tw. 6.2.10.

Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Jeżeli $C = \text{Conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ gdzie $x_1, \dots, x_n \in X$ to dla każdego $x_0 \in X$ spełniony jest warunek

$$C + x_0 = \text{Conv}\{x_1 + x_0, \dots, x_n + x_0\}.$$

Dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że zachodzą dwie inkluzje

$$1. C + x_0 \subseteq \text{Conv} \{x_1 + x_0, \dots, x_n + x_0\}$$

$$2. \text{Conv} \{x_1 + x_0, \dots, x_n + x_0\} \subseteq C + x_0$$

Rozważmy inkluzję pierwszą. Jeżeli $y \in C + x_0$ wówczas y musi być postaci

$$y = x + x_0$$

gdzie $x \in C$, a co za tym idzie istnieje układ liczb $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, gdzie $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, takich, że

$$y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + x_0.$$

Zauważmy, że

$$x_0 = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) x_0,$$

wobec czego poprzednią równość można zapisać w postaci

$$x_0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) x_0.$$

Jak łatwo więc zauważyć

$$y = \lambda_1 (x_1 + x_0) + \dots + \lambda_n (x_n + x_0)$$

co oznacza, że $y \in \text{Conv} \{x_1 + x_0, \dots, x_n + x_0\}$ - a to kończy dowód pierwszej inkluzji.

Rozważmy z kolei inkluzję drugą. Załóżmy, że

$y \in \text{Conv} \{x_1 + x_0, \dots, x_n + x_0\}$. Oznacza to, że y musi być postaci

$$y = \lambda_1 (x_1 + x_0) + \dots + \lambda_n (x_n + x_0)$$

skąd natychmiast wynika, że

$$y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + x_0$$

co można zapisać w formie

$$y = x + x_0,$$

gdzie $x \in C$, co zgodnie z Def. 6.2.4. oznacza, że $y \in C + x_0$.
Świadczy to o tym, że spełniona jest druga inkluzja co kończy
jednocześnie dowód twierdzenia.

Def. 6.2.11. [29]

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną [25]. Kulą $\mathcal{K}(x_0, \varepsilon)$
o środku $x_0 \in X$ i promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy zbiór postaci

$$\mathcal{K}(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}.$$

Def. 6.2.12. [26]

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Punkt $x_0 \in X$ nazywa-
my punktem wewnętrznym zbioru $D \subset X$ jeżeli istnieje liczba
 $\varepsilon > 0$ taka, że

$$\mathcal{K}(x_0, \varepsilon) \subset D.$$

Def. 6.2.13.[26]

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem brzegowym zbioru $D \subset X$ jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją punkty $x_1, x_2 \in \mathcal{K}(x_0, \varepsilon)$ takie, że $x_1 \in D, x_2 \notin D$.

Def. 6.2.14.[26]

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem zewnętrznym zbioru D jeżeli istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że

$$\mathcal{K}(x_0, \varepsilon) \cap D = \emptyset.$$

Def. 6.2.15.[9]

Kostką rzeczywistą n -wymiarową nazywamy zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ postaci

$$K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad /i = 1, \dots, n/\}$$

gdzie $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i \quad /i = 1, \dots, n/$. Dla oznaczenia kostki używa się też symbolu $K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$.

Tw. 6.2.11.

n -wymiarowa kostka rzeczywista $K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ jest zbiorem środkowosymetrycznym o środku symetrii $S = (s_1, \dots, s_n)$ gdzie $s_i = \frac{1}{2} [a_i + b_i], \quad /i = 1, \dots, n/$.

Zgodnie z Def. 6.2.5. dla dowodu twierdzenia należy wykazać, że

$$\forall x \in K \quad \exists x' \in K : \quad \frac{1}{2} (x + x') = S$$

Założmy więc, że $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$. Zgodnie z Def. 6.2.15. spełniony musi być układ warunków

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad /i = 1, \dots, n/. \quad /1/$$

Rozważmy punkt $x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$, gdzie

$$x'_i = a_i + b_i - x_i. \quad /2/$$

Wykażemy, że punkt x' należy do kostki K . Z nierówności /1/ wynika, że

$$0 \leq b_i - x_i, \quad /i = 1, \dots, n/ \quad /3/$$

co z kolei prowadzi do wniosku

$$a_i \leq b_i + a_i - x_i = x'_i, \quad /i = 1, \dots, n/. \quad /4/$$

Na mocy nierówności /1/ otrzymujemy też

$$a_i - x_i \leq 0, \quad /i = 1, \dots, n/, \quad /5/$$

a stąd

$$x'_i = a_i + b_i - x_i \leq 0, \quad /i = 1, \dots, n/ \quad /6/$$

Z nierówności /4/ oraz /6/ wynika, że

$$a_i \leq x'_i \leq b_i, \quad /i = 1, \dots, n/ \quad /7/$$

co oznacza, że punkt $x' = x'_1, \dots, x'_n$ jest elementem kostki K .

Rozważmy punkt $y = \frac{1}{2}(x + x')$, wykażemy, że $y \in K$.

Ponieważ $y_i = \frac{1}{2}(x_i + x'_i), i = 1, \dots, n$ /8/

więc

$$y_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i - x_i + x'_i) = \frac{1}{2}(a_i + b_i) = s_i, i = 1, \dots, n$$
 /9/

co kończy dowód twierdzenia.

Tw. 6.2.12.

Rzeczywista kostka n -wymiarowa $K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ jest zbiorem wypukłym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że dla każdych dwóch punktów $x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n}), x_2 = (x_{21}, \dots, x_{2n}) \in K$ oraz dla każdego $\lambda \in [0, 1]$ punkt $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ jest elementem kostki K . Zauważmy, że każda współrzędna punktu y jest postaci

$$y_i = \lambda x_{1i} + (1 - \lambda)x_{2i}; \quad i = 1, \dots, n$$

Jako że $0 \leq \lambda \leq 1$ więc współrzędne y_i są wypukłymi kombinacjami liniowymi współrzędnych x_{1i}, x_{2i} a ponieważ spełnione są warunki

$$a_i \leq x_{1i} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$a_i \leq x_{2i} \leq b_i$$

więc również

$$a_i \leq y_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

co kończy dowód twierdzenia.

Def. 6.2.16.

Wierzchołkiem kostki $K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ nazywamy punkt $w = (w_1, \dots, w_n)$ gdzie

$$w_i = a_i \quad \text{lub} \quad w_i = b_i, \quad / i = 1, \dots, n /$$

Nietrudno zauważyć, że ilość wierzchołków kostki równa jest $p = 2^n$.

Tw. 6.2.13.

Kostka rzeczywista $K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ jest wypukleniem zbioru wszystkich swoich wierzchołków $w_1, \dots, w_p, / p = 2^n /$.

Ponieważ wierzchołki $w_j / j = 1, \dots, p /$ są jedynymi punktami ekstremalnymi kostki K /por. Def. 6.2.10/ więc na mocy Tw. 6.2.7. otrzymujemy tezę

$$K = \text{Conv} \{ w_1, \dots, w_p \}$$

Tw. 6.2.14.

Niech $K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ będzie n -wymiarową kostką rzeczywistą. Jeżeli dla punktu $y = / y_1, \dots, y_n /$ spełniony jest warunek $a_i < y_i < b_i \quad / i = 1, \dots, n /$ to y jest punktem wewnętrznym kostki K .

Zgodnie z Def. 6.2.12. dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że $K(y, \varepsilon) \subset K$. Przyjmijmy

$$\delta = \min \{ |y_1 - a_1|, |b_1 - y_1|, \dots, |y_n - a_n|, |b_n - y_n| \}$$

oraz

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

Założmy teraz a.c., że $\mathcal{K}(y, \varepsilon) \not\subset K$ tzn. że istnieje $x \in \mathbb{R}^n$ taki, że

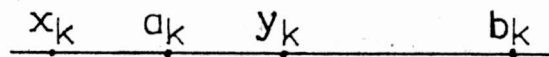
$$x \in \mathcal{K}(y, \varepsilon) \wedge x \notin K$$

Z faktu, że $x \notin K$ wynika, na mocy Def. 6.2.15, że istnieje wskaźnik $1 \leq k \leq n$, dla którego spełniony jest jeden z warunków

$$1/ \ x_k < a_k$$

$$2/ \ x_k > b_k$$

Rozważmy przypadek 1/- sytuację tę ilustruje rysunek 1.



Rys. 1 .

Ponieważ

$$d(y, x) = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq |y_k - x_k| > |x_k - a_k| \geq \delta > \varepsilon$$

otrzymujemy sprzeczność z założeniem $x \in \mathcal{K}(y, \varepsilon)$. Oznacza to, że $\mathcal{K}(y, \varepsilon) \subset K$, co kończy dowód twierdzenia w przypadku 1/. W przypadku 2/ dowód przebiega analogicznie.

Tw. 6.2.15.

Niech $K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ będzie n -wymiarową kostką rzeczywistą. Jeżeli dla punktu $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ spełniony jest jeden z warunków

$$1/ \quad y_k = a_k$$

$$2/ \quad y_k = b_k$$

dla pewnego $1 \leq k \leq n$, wówczas y jest punktem brzegowym kostki K .

Dla dowodu twierdzenia, zgodnie z Def. 6.2.13, wystarczy wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $x', x'' \in \mathcal{K}(y, \varepsilon)$ takie, że

$$x' \in K \quad \wedge \quad x'' \notin K.$$

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy że spełniony jest warunek 1/, tzn.

$y_k = a_k, (1 \leq k \leq n)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i przyjmijmy

$$\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{|b_k - a_k|}{2} \right\}$$

oraz

$$x' := (y_1, \dots, y_{k-1}, y_k + \delta, y_{k+1}, \dots, y_n)$$

$$x'' := (y_1, \dots, y_{k-1}, y_k - \delta, y_{k+1}, \dots, y_n)$$

Zauważmy, że

$$d(x', y) = d(x'', y) = \delta < \varepsilon$$

co oznacza, że oba punkty x' , x'' należą do kuli $\mathcal{K}(y, \varepsilon)$.

Wykażemy z kolei, że $x' \in K$. Należy w tym celu uzasadnić, że spełniony jest warunek

$$a_i \leq x'_i \leq b_i, \quad /i = 1, \dots, n/$$

Ponieważ

$$x'_i = y_i \quad i \neq k$$

wystarczy więc wykazać, że

$$a_k \leq x'_k \leq b_k.$$

Zgodnie z definicją punktu x' , spełniony jest warunek

$$x'_k = y_k + \delta$$

a ponieważ $y_k = a_k$, /rozważamy przypadek 1/ więc

$$a_k \leq x'_k = a_k + \delta \leq a_k + \frac{|b_k - a_k|}{2} < a_k + |b_k - a_k| = b_k$$

co oznacza, że $x' \in K$. Wykażemy z kolei, że $x'' \notin K$. Zgodnie z definicją punktu x , spełniony jest warunek

$$x''_k = a_k - \delta < a_k,$$

co na mocy definicji kostki K /Def. 6.2.15/ oznacza, że $x'' \notin K$. Kończy to dowód twierdzenia dla przypadku 1/, w przypadku 2/ dowód przebiega analogicznie.

Tw. 6.2.16.

Niech $K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ będzie n -wymiarową kostką rzeczywistą. Jeżeli dla punktu $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ spełniony jest jeden z warunków

$$1/ \quad y_k < a_k$$

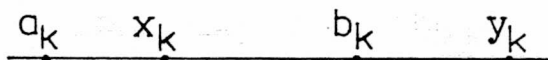
$$2/ \quad y_k > b_k$$

dla pewnego $1 \leq k \leq n$, wówczas y jest punktem zewnętrznym kostki K .

Dla dowodu twierdzenia, zgodnie z Def. 6.2.14, wystarczy wykazać, że istnieje $\varepsilon > 0$ takie że

$$\mathcal{K}(y, \varepsilon) \cap K = \emptyset.$$

Rozważmy przypadek 2/ tzn. $y_k > b_k$ - rozważaną sytuację ilustruje rysunek 1.



Rys. 1 .

Przyjmijmy

$$\varepsilon = \frac{1}{2} |y_k - b_k|$$

wykażemy, że $\mathcal{K}(y, \varepsilon) \cap K = \emptyset$. Załóżmy a.c., że tak nie jest tzn. że istnieje punkt $x \in \mathbb{R}^n$ taki, że

$$x \in \mathcal{K}(y, \varepsilon) \quad \wedge \quad x \in K.$$

Z faktu, że $x \in K$. wynika, że

$$a_k \leq x_k \leq b_k$$

co oznacza, że

$$|y_k - b_k| < |x_k - y_k|$$

Zauważmy więc, że

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} > \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_i - y_i)^2 + \varepsilon^2 \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon$$

co wbrew założeniu oznacza, że $x \in \mathcal{K}(y, \varepsilon)$. Dochodzimy w ten sposób do sprzeczności, co kończy dowód twierdzenia w przypadku 2/, w przypadku 1/ dowód przebiega analogicznie.

Def. 6.2.17. [35]

Permutacją zbioru $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ nazywamy dowolne odwzorowanie różnowartościowe

$$f : I_n \xrightarrow{1-1} I_n.$$

Tw. 6.2.17.

Niech $K = \bigotimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ będzie n -wymiarową kostką rzeczywistą o wierzchołkach $w_1, \dots, w_p$. Ścisłe wypukła kombinacja liniowa wierzchołków kostki tzn. punkt y postaci

$$y = \sum_{j=1}^p \lambda_j w_j, \quad \text{gdzie} \quad \lambda_j > 0, \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1, \quad /p = 2^n/, \quad /1/$$

jest punktem wewnętrznym kostki K.

Dla dowodu twierdzenia, zgodnie z Tw. 6.2.14, wystarczy wykazać, że dla każdego punktu $y = (y_1, \dots, y_n)$ będącego ściśle wypukłą kombinacją liniową wierzchołków w_j $/j = 1, \dots, p/$ spełniony jest warunek

$$a_i < y_i < b_i, \quad /i = 1, \dots, n/ \quad /2/$$

Rozważmy k-tą współrzędną punktu $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$y_k = \lambda_1 w_{1k} + \dots + \lambda_p w_{pk} \quad /3/$$

gdzie, zgodnie z Def. 6.2.16,

$$w_{jk} = a_k \quad \text{albo} \quad b_k, \quad (j = 1, \dots, p). \quad /4/$$

Niech $j_1, \dots, j_p$ będzie taką permutacją liczb $\{1, \dots, p\}$, że

$$w_{j_1 k} = \dots = w_{j_m k} = a_k \quad /5/$$

$$w_{j_{m+1} k} = \dots = w_{j_p k} = b_k$$

Przy takim założeniu równość /3/ można przedstawić w postaci

$$y_k = (\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_m}) a_k + (\lambda_{j_{m+1}} + \dots + \lambda_{j_p}) b_k. \quad /6/$$

Zgodnie z założeniem

$$\lambda' = \lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_m} > 0 \quad /6/$$

$$\lambda'' = \lambda_{j_{m+1}} + \dots + \lambda_{j_p} > 0$$

oraz

$$\lambda' + \lambda'' = 1, \quad /8/$$

co oznacza, że współrzędna

$$x_k = \lambda' a_k + \lambda'' b_k \quad /9/$$

jest ściśle wypukłą kombinacją liniową liczb a_k i b_k a co za tym idzie spełniony jest warunek

$$a_k < y_k < b_k, \quad /k = 1, \dots, m/ \quad /10/$$

co kończy jednocześnie dowód twierdzenia.

Def. 6.2.18.

Oznaczmy symbolem $\mathbb{R}^n_+$ "dodatnią" część przestrzeni $\mathbb{R}^n$ tzn.

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, /i = 1, \dots, n/\}$$

Definiujemy odwzorowania

$$L^{(n)}(x_1, \dots, x_n) := (\ln x_1, \dots, \ln x_n)$$

$$E^{(n)}(x_1, \dots, x_n) := (\exp x_1, \dots, \exp x_n)$$

Tak określone odwzorowania są różnowartościowe co jest prostą konsekwencją różnowartościowości odwzorowań $\ln(x)$ i $\exp(x)$. Zauważmy ponadto, że $E^{(n)}$ jest funkcją odwrotną do $L^{(n)}$.

Tw. 6.2.18.

Obrazem n -wymiarowej kostki rzeczywistej $K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ przez każde z odwzorowań $L^{(n)}$ i $E^{(n)}$ jest również pewna n -wymiarowa kostka rzeczywista $\dot{K} = \bigtimes_{i=1}^n [\dot{a}_i, \dot{b}_i]$.

Wykażemy, że własność tę posiada odwzorowanie $L^{(n)}$. Niech zatem

$$K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

będzie kostką rzeczywistą zawartą w $\mathbb{R}^{(n)}$. Wykażemy, że

$$L^{(n)}(K) = \dot{K}$$

gdzie $\dot{K}$ jest kostką rzeczywistą postaci

$$\dot{K} = [\dot{a}_1, \dot{b}_1] \times \dots \times [\dot{a}_n, \dot{b}_n]$$

przy czym

$$\dot{a}_i = \ln a_i, \dot{b}_i = \ln b_i, \quad / i = 1, \dots, n /$$

Dla uzasadnienia tezy twierdzenia wystarczy wykazać, że zachodzą dwie inkluzje

$$1/ \quad L^{(n)}(K) \subset \dot{K}$$

$$2/ \quad \dot{K} \subset L^{(n)}(K)$$

Rozważmy inkluzję 1/. Załóżmy, że $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \in L^{(n)}(K)$.
Oznacza to, że istnieje $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$ takie, że $\dot{x} = L^{(n)}(x)$
czyli

$$(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = (\ln x_1, \dots, \ln x_n)$$

gdzie, zgodnie z założeniem, współrzędne x_i podlegają ogranicze-
niom

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad / i = 1, \dots, n /$$

Z monotoniczności funkcji $\ln(x)$ wynika, że spełniony jest układ
warunków

$$\ln(a_i) \leq \ln(x_i) \leq \ln(b_i), \quad / i = 1, \dots, n /$$

czyli, że

$$\dot{a}_i \leq \dot{x}_i \leq \dot{b}_i, \quad / i = 1, \dots, n /$$

Oznacza to, że $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \in K$ co kończy pierwszą część
dowodu. Rozważmy z kolei inkluzję 2/. Załóżmy, że $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \in K$.

Aby wykazać, że $\dot{x} \in L^{(n)}(K)$ wystarczy wskazać punkt
 $X = (x_1, \dots, x_n) \in K$ taki, że

$$L^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n).$$

Założyliśmy, że $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \in K$, zatem spełniony jest układ
warunków

$$\dot{a}_i \leq \dot{x}_i \leq \dot{b}_i, \quad / i = 1, \dots, n /$$

Rozważmy punkt

$$(x_1, \dots, x_n) = (\exp \dot{x}_1, \dots, \exp \dot{x}_n)$$

Z monotoniczności funkcji $\exp(x)$ wynika, że zachodzą nierówności

$$\exp(\dot{a}_i) \leq \exp(\dot{x}_i) \leq \exp(\dot{b}_i), \quad /i = 1, \dots, n/$$

co oznacza, że

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad /i = 1, \dots, n/$$

co świadczy z kolei o tym, iż $(x_1, \dots, x_n) \in K$. Nietrudno zauważyć też, że $L^{(n)}(x) = \dot{x}$, gdzie

$$\begin{aligned} L^{(n)}(x) &= (\ln x_1, \dots, \ln x_n) = (\ln(\exp(\dot{x}_1)), \dots, \ln(\exp(\dot{x}_n))) = \\ &= (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = \dot{x} \end{aligned}$$

Oznacza to, iż spełniona jest inkluzja 2/ co kończy dowód twierdzenia. Tezę twierdzenia dla odwzorowania $E^{(n)}$ udowadnia się analogicznie.

Tw. 6.2.19.

Niech $K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ będzie n -wymiarową kostką rzeczywistą taką, że

$$a_i < 0 < b_i, \quad /i = 1, \dots, n/$$

Dla każdego niezerowego wektora $h \in \mathbb{R}^n$

$$h = (h_1, \dots, h_n) \neq 0$$

istnieją dwie liczby rzeczywiste τ^L, τ^P

$$\tau^L < 0 < \tau^P,$$

dla których spełnione są następujące warunki

- 1/ punkty $\tau^L h, \tau^P h$ są punktami brzegowymi kostki K
- 2/ $\forall \tau: \tau^L < \tau < \tau^P$ punkt τh jest punktem wewnętrznym kostki K .
- 3/ $\forall \tau < \tau^L$ punkt τh jest punktem zewnętrznym kostki K
- 4/ $\forall \tau > \tau^P$ punkt τh jest punktem zewnętrznym kostki K

Dowód twierdzenia podzielony zostanie na dwa etapy.

Etap I

Wykażemy istnienie liczby $\tau^P > 0$ takiej, że

- (I-1) $\tau^P h$ jest punktem brzegowym kostki K
- (I-2) $\forall \tau > \tau^P$ punkt τh jest punktem zewnętrznym kostki K
- (I-3) $\forall \tau: 0 \leq \tau \leq \tau^P$ punkt τh jest punktem wewnętrznym kostki K .

Przypomnijmy, że dana jest kostka

$$K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i] \quad , \quad a_i < 0 < b_i \quad , \quad / i = 1, \dots, n / \quad //1/$$

oraz niezerowy wektor $h \in \mathbb{R}^{(n)}$

$$h = (h_1, \dots, h_n) \neq 0. \quad /2/$$

Niech $\{i_1, \dots, i_n\}$ będzie taką permutacją zbioru liczb $\{1, \dots, n\}$ że

$$h_{i_1}, \dots, h_{i_k} < 0 \quad /3/$$

$$h_{i_{k+1}}, \dots, h_{i_{k+l}} > 0$$

$$h_{i_{k+l+1}}, \dots, h_{i_n} = 0.$$

Przyjmijmy

$$\alpha_1 = \frac{a_{i_1 1}}{h_{i_1}}, \dots, \alpha_k = \frac{a_{i_k k}}{h_{i_k}} \quad /4/$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{b_{i_{k+1} 1}}{h_{i_{k+1}}}, \dots, \alpha_{k+l} = \frac{b_{i_{k+l} l}}{h_{i_{k+l}}}.$$

Na mocy warunków /1/, /3/, otrzymujemy wniosek

$$\alpha_i > 0, \quad /i = 1, \dots, k + l/. \quad /5/$$

Wartość τ^P określimy jako

$$\tau^P = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l}\}. \quad /6/$$

Z warunku /5/ wynika natychmiast, że

$$\tau^P > 0. \quad /7/$$

Dowód warunku (I-1)

Należy udowodnić, że punkt $\tau^P h$ jest punktem brzegowym kostki K. Wykażemy najpierw, że $\tau^P h$ należy do kostki K. Na podstawie warunku /6/ oraz /7/ wnioskujemy, że spełnione są nierówności

$$0 < \tau^P \leq \alpha_j, \quad /j = 1, \dots, k+1/. \quad /8/$$

Z warunku /8/ oraz /3/ wynika, że

$$a_{ij} \cdot \alpha_j \cdot h_{ij} \leq \tau^P \cdot h_{ij} < 0 < b_{ij}, \quad /j = 1, \dots, k/ \quad /9/$$

czyli

$$a_{ij} \leq \tau^P \cdot h_{ij} < b_{ij}, \quad /j = 1, \dots, k/. \quad /10/$$

Koniunkcja warunków /3/, /4/ oraz /8/ prowadzi do wniosku

$$a_{ij} < 0 < \tau^P \cdot h_{ij} \leq h_{ij} \cdot \alpha_j = b_{ij}, \quad /j = k+1, \dots, k+1/ \quad /11/$$

czyli

$$a_{ij} < \tau^P \cdot h_{ij} \leq b_{ij}, \quad /j = k+1, \dots, k+1/. \quad /12/$$

Z warunku /3/ wynika, że

$$a_{ij} < \tau^P \cdot h_{ij} = 0 < b_{ij}, \quad /j = k+1+1, \dots, n/ \quad /13/$$

czyli

$$a_{ij} < \tau^P \cdot h_{ij} < b_{ij} \quad , \quad /j = k+1+1, \dots, n/. \quad /14/$$

Na podstawie warunków /10/, /12/, /14/ otrzymujemy ostateczny wniosek

$$a_{ij} \leq \tau^P \cdot h_{ij} \leq b_{ij} \quad , \quad /j = 1, \dots, n/ \quad /15/$$

co oznacza, że punkt $\tau^P \cdot h$ należy do kostki K. Wykażemy, że jest jej punktem brzegowym. Biorąc pod uwagę fakt, że zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}\}$ jest zbiorem skończonym dochodzimy na podstawie definicji wielkości τ^P /wzór /6// do wniosku, że istnieje taki wskaźnik

$$1 \leq j_0 \leq k+1 \quad , \quad /16/$$

dla którego spełniona jest równość

$$\tau^P = \alpha_{j_0} \quad . \quad /17/$$

Prowadzi to z kolei do wniosku

$$\tau^P \cdot h_{ij_0} = \alpha_{j_0} \cdot h_{ij_0} = \begin{cases} a_{ij_0} & \text{gdy} \quad 1 \leq j_0 \leq k \\ b_{ij_0} & \text{gdy} \quad k+1 \leq j_0 \leq k+1 \end{cases} \quad /18/$$

co, na mocy Tw. 6.2.15 oznacza, że punkt $\tau^P \cdot h$ jest punktem brzegowym kostki K. Kończy to dowód warunku /I-1/.

Dowód warunku (I-2)

Należy wykazać, że $\forall \tau > \tau^P$ punkt $\tau \cdot h$ jest punktem zewnętrznym kostki K . Rozważmy więc dowolne τ takie, że

$$\tau > \tau^P. \quad /19/$$

W przypadku gdy wskaźnik j_0 określony warunkiem /16/ zawarty jest w przedziale

$$1 \leq j_0 \leq k \quad /20/$$

spełniona jest równość

$$h_{ij_0} < 0 \quad /21/$$

skąd, po uwzględnieniu warunku /19/ wynika, że

$$\tau \cdot h_{ij_0} < \tau^P h_{ij_0} = \alpha_{j_0} \cdot h_{ij_0} = a_{ij_0} \quad /22/$$

czyli

$$\tau \cdot h_{ij_0} < a_{ij_0} \quad /23/$$

co zgodnie z Tw. 6.2.16. oznacza, że $\tau \cdot h$ jest punktem zewnętrznym kostki K .

W przypadku gdy wskaźnik j_0 zawarty jest w przedziale

$$k+1 \leq j_0 \leq k+1, \quad /24/$$

spełniona jest nierówność

$$h_{ij_0} > 0 \quad /25/$$

skąd, po uwzględnieniu warunku /19/ wynika, że

$$\tau h_{ij_0} > \tau^P \cdot h_{ij_0} = \alpha_{j_0} \cdot h_{ij_0} = b_{ij_0} \quad /26/$$

czyli

$$\tau h_{ij_0} > b_{ij_0}, \quad /27/$$

co zgodnie z Tw. 6.2.16. oznacza, że punkt $\tau \cdot h$ jest punktem zewnętrznym kostki K . Kończy to dowód warunku (I-2).

Dowód warunku (I-3)

Należy wykazać, że $\forall \tau: 0 \leq \tau < \tau^P$ punkt $\tau \cdot h$ jest punktem wewnętrznym kostki K . Rozważmy więc dowolne τ takie, że

$$0 \leq \tau < \tau^P. \quad /28/$$

W przypadku gdy $1 \leq j \leq k$, na mocy warunków /3/ i /26/, spełniona musi być zależność

$$a_{ij} = \alpha_j \cdot h_{ij} \leq \tau^P \cdot h_{ij} < \tau \cdot h_{ij} \leq 0 < b_{ij}, \quad /j = 1, \dots, k/ \quad /29/$$

co oznacza, że

$$a_{ij} < \tau h_{ij} < b_{ij}, \quad /j = 1, \dots, k/. \quad /30/$$

Rozważmy z kolei przypadek $k+1 \leq j \leq k+1$. Na podstawie warunków /3/ i /28/ otrzymujemy wniosek

$$a_{ij} < 0 \leq \tau \cdot h_{ij} < \tau^p \cdot h_{ij} \leq \alpha_j \cdot h_{ij} = b_{ij} \text{ , } /j = k+1, \dots, k+l/ \quad /31/$$

co oznacza, że

$$a_{ij} < \tau h_{ij} < b_{ij} \text{ , } /j = k+1, \dots, k+l/. \quad /32/$$

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek $j = k+l+1, \dots, n$.

Zgodnie z warunkiem /3/ spełniona jest zależność

$$\tau h_{ij} = 0 \text{ , } /j = k+l+1, \dots, n/ \quad /33/$$

co zgodnie z założeniem /1/ oznacza, że

$$a_{ij} < \tau h_{ij} < b_{ij} \text{ , } /j = k+l+1, \dots, n/. \quad /34/$$

Na podstawie warunków /30/, /32/, /34/ otrzymujemy ostateczny wniosek

$$a_{ij} < \tau h_{ij} < b_{ij} \text{ , } /j = 1, \dots, n/, \quad /35/$$

co zgodnie z Tw. 6.2.14 oznacza, że punkt $\tau \cdot h$ jest punktem wewnętrznym kostki K . Kończy to dowód warunku (I-3), co oznacza również zakończenie pierwszego etapu dowodu twierdzenia.

Etap II

Wykażemy istnienie liczby $\tau^L < 0$ takiej, że

(II-1) $\tau^L \cdot h$ jest punktem brzegowym kostki K .

(II-2) $\forall \tau < \tau^L$ punkt $\tau \cdot h$ jest punktem zewnętrznym kostki K

(II-3) $\forall \tau: \tau^L < \tau \leq 0$ punkt $\tau \cdot h$ jest punktem wewnętrznym kostki K

gdzie $h \in \mathbb{R}^n$, tak jak poprzednio oznacza pewien niezerowy wektor

$$h = (h_1, \dots, h_n), \quad /34/$$

a kostka K jest postaci

$$K = \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i] \quad , \quad a_i < 0 < b_i. \quad /35/$$

Niech $\{i_1, \dots, i_n\}$ oznacza, jak poprzednio, taką permutację zbioru liczb $\{1, \dots, n\}$, że

$$\begin{aligned} h_{i_1}, \dots, h_{i_k} &< 0 \\ h_{i_{k+1}}, \dots, h_{i_{k+l}} &> 0 \\ h_{i_{k+l+1}}, \dots, h_{i_n} &= 0. \end{aligned} \quad /37/$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\beta_1 = \frac{b_{i_1}}{h_{i_1}} \quad , \quad \dots, \quad \beta_k = \frac{b_{i_k}}{h_{i_k}} \quad /38/$$

$$\beta_{k+1} = \frac{a_{i_{k+1}}}{h_{i_{k+1}}} \quad , \quad \dots, \quad \beta_{k+l} = \frac{b_{i_{k+l}}}{h_{i_{k+l}}}$$

i zauważmy, że z warunków /35/, /38/ wynika, że

$$\beta_j < 0 \quad , \quad /j = 1, \dots, k+l/. \quad /39/$$

Wartość τ^L określimy jako

$$\tau^L = \max \{ \beta_1, \dots, \beta_{k+1} \} . \quad /40/$$

Z warunku /39/ wynika natychmiast, że

$$\tau^L < 0 . \quad /41/$$

Dowód warunku (II-1)

Należy wykazać, że τ^L jest punktem brzegowym kostki K. Wykażemy najpierw, że τ^L należy do kostki K. Na podstawie warunków /40/, /41/ wnioskujemy, że spełnione są nierówności

$$\beta_j \leq \tau^L < 0 , \quad /j = 1, \dots, k+1/ \quad /42/$$

skąd, po uwzględnieniu warunków /37/, /38/ wynika, że spełniona musi być zależność

$$a_{ij} < 0 \quad \tau^L h_{ij} \leq h_{ij} \beta_j = b_{ij} , \quad /j = 1, \dots, k / \quad /43/$$

czyli

$$a_{ij} < \tau^L h_{ij} \leq b_{ij} , \quad /j = 1, \dots, k / . \quad /44/$$

Koniunkcja warunków /37/, /38/, /42/ prowadzi do wniosku

$$a_{ij} = \beta_j h_{ij} \leq \tau^L h_{ij} < 0 < b_{ij} , \quad /j = k+1, \dots, k+1/ \quad /45/$$

czyli

$$a_{ij} \leq \tau^L h_{ij} \leq b_{ij} , \quad /j = k+1, \dots, k+1 / . \quad /46/$$

Z warunku /37/ wynika też, że

$$a_{ij} < \tau^L h_{ij} = 0 < b_{ij} \quad , \quad /j = k+1+1, \dots, n/ \quad /47/$$

czyli

$$a_{ij} < \tau^L h_{ij} < b_{ij} \quad , \quad /j = k+1+1, \dots, n/. \quad /48/$$

Na podstawie warunków /44/, /46/, /48/ otrzymujemy ostateczny wniosek

$$a_{ij} \leq \tau^L h_{ij} < b_{ij} \quad , \quad /j = 1, \dots, n/ \quad /49/$$

co zgodnie z Def. 6.2.15 oznacza, że punkt $\tau^L h$ należy do kostki K .

Wykażemy, że jest on jej punktem brzegowym. Z określenia wartości τ^L /wzór 40/ oraz z faktu, że zbiór $\{\beta_1, \dots, \beta_{k+1}\}$ jest zbiorem skończonym wynika, że istnieje taki wskaźnik j_0

$$1 \leq j_0 \leq k+1 \quad , \quad /50/$$

dla którego spełniony jest warunek

$$\tau^L = \beta_{j_0} \quad . \quad /51/$$

Prowadzi to do wniosku

$$\tau^L h_{ij_0} = \beta_{j_0} h_{ij_0} = \begin{cases} b_{ij_0} & \text{gdy } 1 \leq j_0 \leq k \\ a_{ij_0} & \text{gdy } k+1 \leq j_0 \leq k+1 \end{cases} \quad /52/$$

co zgodnie z Tw. 6.2.15 oznacza, że punkt $\tau \cdot h$ jest punktem brzegowym kostki K . Kończy to dowód warunku /II-1/.

Dowód warunku /II-2/

Należy wykazać, że $\forall \tau < \tau^L$ punkt $\tau \cdot h$ jest punktem zewnętrznym kostki K . Z warunków /40/, /41/ wynika, że spełniona jest nierówność

$$\beta_j \leq \tau^L < 0, \quad /j = 1, \dots, k+1/. \quad /53/$$

W przypadku gdy wskaźnik j_0 /wzór 50/ zawarty jest w przedziale

$$1 \leq j_0 \leq k \quad /54/$$

wówczas, zgodnie z warunkiem /37/, dla $\tau < \tau^L$, spełniona jest zależność

$$\tau \cdot h_{ij_0} > \tau^L \cdot h_{ij_0} = \beta_{j_0} \cdot h_{ij_0} = b_{ij_0}$$

czyli

$$\tau \cdot h_{ij_0} > b_{ij_0} \quad /55/$$

co zgodnie z Tw. 6.2.16 oznacza, że punkt $\tau \cdot h$ jest punktem zewnętrznym kostki K . W przypadku gdy indeks j_0 /wzór 50/ zawarty jest w przedziale

$$k+1 \leq j_0 \leq k+1 \quad /56/$$

wówczas zgodnie z warunkiem /37/ otrzymujemy dla $\tau < \tau^L$

$$\tau_{h_{ij_0}} \quad \tau^L \cdot h_{ij_0} = \beta_{j_0} \cdot h_{ij_0} = a_{1j_0} \quad /57/$$

czyli

$$\tau \cdot h_{ij_0} < a_{ij_0} \quad /58/$$

co zgodnie z Tw. 6.2.16 oznacza, że punkt $\tau \cdot h$ jest punktem zewnętrznym kostki K . Kończy to dowód warunku (II-2).

Dowód warunku /II-3/

Należy wykazać, że $\forall \tau: \tau^L < \tau \leq 0$ punkt $\tau \cdot h$ jest punktem wewnętrznym kostki K . Rozważmy dowolne τ takie, że

$$\tau^L < \tau \leq 0. \quad /59/$$

Na mocy warunków /37/, /53/, /59/, dla $1 \leq j \leq k$, spełniona musi być zależność

$$a_{ij} < 0 \leq \tau \cdot h_{ij} < \tau^L \cdot h_{ij} \leq \beta_j \cdot h_{ij} = b_{ij}, /j = 1, \dots, k/ /60/$$

czyli

$$a_{ij} < \tau \cdot h_{ij} < b_{ij}, \quad /j = 1, \dots, k/. \quad /61/$$

Rozważmy z kolei przypadek $k+1 \leq j \leq k+l$. W tej sytuacji zgodnie z warunkami /37/, /38/, /53/, /58/ otrzymujemy wniosek

$$a_{ij} = \beta_j \cdot h_{ij} \leq \tau^L \cdot h_{ij} < \tau \cdot h_{ij} < 0 < b_{ij}, /j=k+1, \dots, k+l/ /62/$$

czyli

$$a_{ij} < \tau_{ij} < b_{ij} \quad , \quad /j = k+1, \dots, k+l / \quad /63/$$

Pozostaje więc do rozważenia przypadek $k+l+1 \leq j \leq n$. Zgodnie z warunkiem /37/ spełniona musi być równość

$$\tau_{ij} = 0 \quad , \quad /j = k+l+1, \dots, n/ \quad /64/$$

co oznacza, że

$$a_{ij} \leq \tau_{ij} \leq b_{ij} \quad , \quad /j = k+l+1, \dots, n/ \quad /65/$$

Na podstawie warunków /61/, /63/, /65/ otrzymujemy ostateczny wniosek

$$a_{ij} \leq \tau_{ij} \leq b_{ij} \quad , \quad /j = 1, \dots, n/. \quad /66/$$

Zgodnie z Tw. 6.2.14. oznacza to, że punkt τ jest punktem wewnętrznym kostki K . Kończy to dowód warunku /II-3/ co oznacza również zakończenie drugiego - ostatniego etapu dowodu twierdzenia.

LITERATURA

1. Ahrens H., Analiza wariancji, PWN, Warszawa 1970.
2. Biurla - Białyński A., Algebra, PWN, Warszawa 1971.
3. Borsuk K., Geometria analityczna wielowymiarowa, PWN, Warszawa 1976.
4. Box G.E.P., Jenkins G.M., Time series analysis, Forecasting and control, Holden - Day, San Francisco 1970.
5. Box G.E.P., Wilson K.B., On the experimental attainment of optimum conditions, Journal of the Royal Society, Series B, 1951, No 1.
6. Bubnicki Z., Identyfikacja obiektów sterowania, PWN, Warszawa 1974.
7. Ciarlet P., The finite element method for elliptic problems, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1978.
8. Drobot S., On the foundation of dimensional analysis, Studia Mathematica, T. XIV, 1954.
9. Fichtenholz G.M., Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, Warszawa 1972.
10. Finney D.J., The fractional of factorial experiments, Annales of Eugenics, 1945, No 4.
11. Fisher R.A., The design of experiments, Oliver and Boyd, Edinburgh 1935.
12. Happ W.W., Computer - oriented procedure for dimensional analysis, Journal of Applied Physics, V.38, 1967
13. Isaacson E. de St Q., Isaacson M. de St Q., Dimensional Methods in Engineering and Physics, Edward Arnold Publishers Ltd., London 1975.

14. Johnson N.L., Leone F.C., Statistics and experimental design in engineering and physical sciences, John Willey and Sons, New York 1977.
15. Kacprzyński B., Planowanie eksperymentów, WNT Warszawa 1974.
16. Kasprzak W., Dzikiewicz J., Szata M., Programy komputerowe analizy wymiarowej na MC. J.S., cz. IV/2, Raport Instytutu Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wrocławskiej serii SPR nr 36, 1979.
17. Kasprzak W., Lysik B., Analiza wymiarowa w projektowaniu eksperymentu, Ossolineum, Wrocław 1978.
18. Kasprzak W., Lysik B., On the computer oriented procedure for dimensional analysis, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des Science Technique, V, XXII Nr 9, 1974.
19. Kasprzak W., Lysik B., Pomierski R., Zasady budowy modelu matematycznego w identyfikacji obiektów, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 2.4, T. XV, 1970.
20. Kiefer J., Wolfowitz J., Optimum design in regression problems, Annales of Mathematical Statistics, 1959, 271.
21. Kokar M., Metodologiczne podstawy stosowania teorii podobieństwa i analizy wymiarowej w projektowaniu, Komunikat Instytutu Inżynierii Chemicznej i Urządzeń Ciepłych Politechniki Wrocławskiej serii K-374, 1978.
22. Kokar M., Optymalizacja wyboru bazy w przypadku identyfikacji procesów wymiarowych, Prace naukowe Instytutu Inżynierii Chemicznej i Urządzeń Ciepłych Politechniki Wrocławskiej Nr 24, seria konferencje nr 2, Wrocław 1974.

23. Kokar M., The use of dimensional analysis for choosing parameters describing a physical phenomenon, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Science Technique, 1979 vol. 27.
24. Kokar M., Zarys procedury formułowania praw fizycznych w języku analizy wymiarowej, Inżynieria Chemiczna, T. IX, 1979.
25. Kuratowski K., Wstęp do teorii mnogości i topologii. PWN, Warszawa 1973.
26. Leja F., Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, Warszawa 1971.
27. Lysik B., Über eine algebraische Form der Dimensionalanalysis, Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Bauwesen, Leipzig, Nr 3, 1972.
28. Mańczak K., Technika planowania eksperymentu, WNT, Warszawa 1976.
29. Maurin K., Analiza, PWN, Warszawa 1973.
30. Muciek A., Szata M., A class of dimensionless functions in Π -theorem, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Science Technique, 29, 1981.
31. Nalimow W., Czernowa N.A., Statystyczne metody planowania doświadczeń ekstremalnych, WNT, Warszawa 1967.
32. Nowak Z., O pewnej modyfikacji wyboru optymalnej bazy wymiarowej, Inżynieria Chemiczna, T. V. Nr 3, 1975.
33. Opiał Z., Algebra Wyższa, PWN, Warszawa 1972.
34. Polański Z., Współczesne metody badań doświadczalnych, Wiedza Powszechna, Warszawa 1978.
35. Rasiowa H., Wstęp do matematyki współczesnej, PWN, Warszawa 1973.

36. Rudin W., Functional analysis, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1973.
37. Sikorski R., Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN Warszawa 1972.
38. Sloan A.P., Happ W.W., Computer program for dimensional analysis, Journal of Applied Physics, Vol. 38, 1967.
39. Szata M., Process description parameters change in dimensional base optimization, NATO Advanced Study Institute, Series Proceedings of the Optimization of Distributed Parameter Structures, Sijthoff and Noordhoff, Netherlands 1981, Vol. I.
40. Szücs E., Modelowanie matematyczne w fizyce i technice, WNT, Warszawa 1977.
41. Van Driest E.R., On dimensional analysis and the presentation of data in fluid - flow problems, Journal of the Applied Mechanics, Vol. 13, 1946.
42. Wai-Kai-Chen, Algebraic theory of dimensional analysis, Journal of the Franklin Institute, Vol. 292, No 6, 1971.
43. Węgrzyn S., Podstawy automatyki kompleksowej, Prace Instytutu Automatyki PAN, 1969, zesz. 81.
44. Więsław W., Algebra geometryczna, Wydawnictwa Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1974.
45. Wróblewski A.K., Zakrzewski J.A., Wstęp do fizyki, PWN Warszawa 1976.
46. Zaleski J., Metoda weryfikacji kompletności zbioru parametrów wymiarowych w zjawiskach inżynierii procesowej, Raport Instytutu Inżynierii Chemicznej i Urządzeń Ciepłych Politechniki Wrocławskiej, seria PRE Nr 49/82.

