

Katarzyna Posacka

LINIOWA INTERPOLACJA PROCESU WIENERA. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ WZORU ITO

1. Wstęp

Celem pracy jest pokazanie przykładów zastosowania wzoru Ito, m.in. do wyznaczania rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych. Przedstawimy przykładowe trajektorie procesu Wienera, wygenerowane za pomocą pakietu MATHEMATICA 4.0. W programie dokonano interpolacji liniowej procesu Wienera.

Proces Wienera ma powszechne zastosowanie w teorii stochastycznych równań różniczkowych. Jako proces, którego przyrosty są niezależnymi zmiennymi losowymi, jest on procesem Markowa z ciągłym parametrem $t \in [0; T]$ na ciągłej przestrzeni stanów. Prawie wszystkie realizacje procesu Wienera są ciągłe oraz nieróżniczkowalne dla każdego $t \in [0; +\infty]$ [1]. Jedną z konsekwencji nieróżniczkowalności jest to, że nie można w sposób precyzyjny, za pomocą procesu Wienera, w żadnej chwili dobrze określić prędkości cząstki Browna. Natomiast położenie cząstki Browna jest możliwe do wyznaczenia po scałkowaniu procesu Ornsteina–Uhlenbecka (przykład 2). To właśnie L.S. Ornstein i E.G. Uhlenbeck stworzyli model ruchu Browna uwzględniający prędkość cząstki [7].

W modelowaniu matematycznym stochastyczne równania różniczkowe stanowią podstawowe narzędzie opisu zjawisk zależnych od czasu. Warto wspomnieć chociażby o zastosowaniu procesu Bessela w zagadnieniach związanych z modelowaniem ryzyka w matematyce ubezpieczeniowej czy o zastosowaniu równań Sagirowa w astronomii do opisu zagadnienia stabilizacji satelity na orbicie [2]. W technice i fizyce za pomocą stochastycznych równań różniczkowych opisywane są reakcje konstrukcji na wymuszenia turbulentne, sejsmiczne czy wywołane falami morskimi, a także reakcje pojazdów na losowe nierówności drogi [7]. Niestety, tylko nieliczne metody analityczne dają dokładne rozwiązanie stochastycznych równań różniczkowych.

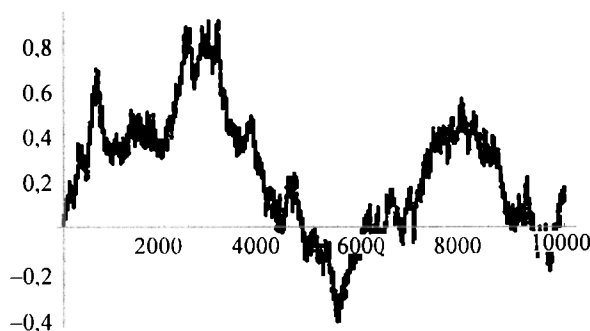
2. Liniowa interpolacja procesu Wienera

Rozważmy przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω , z określoną na niej miarą probabilistyczną P oraz σ -algebrą F oraz stochastyczny proces Wienera $W(t)$ ($W: \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow R$).

W celu wygenerowania oraz sporządzenia wykresu procesu Wienera zastosowano interpolację liniową [3]. Efekt przedstawiony poniżej otrzymano dzięki zastosowaniu pakietu MATHEMATICA 4.0. Dla rozważań przyjęto, że proces Wienera dany jest na przedziale $[0, 1]$ w ściśle określonych chwilach czasowych $t_i = 1/2^9$, gdzie $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2^9\}$. W rozważaniach wykorzystano w szczególności następujące warunki definiujące proces Wienera:

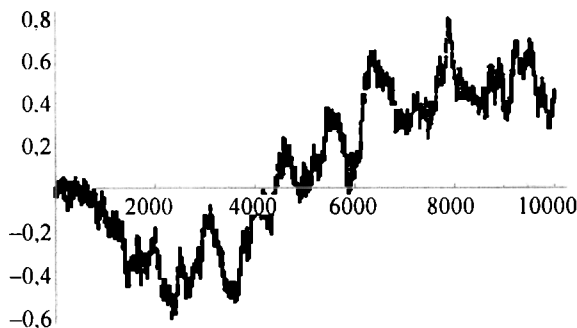
- przyrosty $W(t) - W(s)$, $W(u) - W(t)$, są niezależne dla $0 < s < t < u$;
- przyrosty $W(t+h) - W(t)$ mają rozkład normalny o średniej 0 i wariancji h .

Przykładowe wyniki przedstawione zostały na rys. 1a i 1b.



Rys. 1a. Przykładowa trajektoria procesu Wienera

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 1b. Przykładowa trajektoria procesu Wienera

Źródło: opracowanie własne.

Generowanie przykładowych trajektorii procesów stochastycznych możliwe jest również przez zastosowanie ekstrapolacji [2]. Należy jednak pamiętać, że ekstrapolacja jest metodą numeryczną, której rezultaty mogą być obciążone stosunkowo dużym błędem. W przeważającej części przypadków błąd ten jest większy aniżeli w przypadku zwykłej interpolacji [5]. Korzystanie z metod numerycznych, takich jak interpolacja czy ekstrapolacja, do generowania trajektorii procesu Wienera jest w pełni uzasadnione ze względu na możliwość stosowania tych procesów w zadaniach prognozowania zjawisk finansowych (jak chociażby do wyceny opcji europejskiej – wzór Blacka-Scholesa) [8].

3. Wzór Ito

Reguły różniczkowania procesów stochastycznych, ze względu na występujący w zapisie składnik będący np. funkcją nieróżniczkowalną dla każdego $t \in [0; +\infty)$ (proces Wienera), są odmienne od przyjętych w klasycznym rachunku różniczkowym. W poszukiwaniu rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych bardzo ważną rolę odgrywa twierdzenie – wzór Ito. Wzór ten stanowi regułę różniczkowania wybranych typów procesów stochastycznych.

Twierdzenie. Wzór Ito

Niech dane będą funkcje

– f różniczkowalna względem t i dwukrotnie różniczkowalna względem x ,

– a, b dowolne funkcje zależne od t .

Wtedy, jeżeli spełnione są zależności

$$\begin{aligned} dX(t) &= a(t)dt + b(t)dW(t), \\ Y(t) &= f(t, X(t)), \end{aligned} \tag{1}$$

to stochastyczną różniczkę procesu Y możemy wyznaczyć posługując się wzorem:

$$\begin{aligned} dY(t) &= f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))a(t)dt + f_x(t, X(t))b(t)dW(t) + \\ &+ \frac{1}{2} f_{xx}(t, X(t))b^2(t)dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Wzór (2) nazywamy wzorem Ito.

Powyższe twierdzenie możemy także rozszerzyć na przypadek wielowymiarowy.

Twierdzenie. Wzór Ito – wersja wielowymiarowa

Niech $W_t = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ – wielowymiarowy proces Wienera, $B = [b_{i,j}]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$

– zadana macierz współczynników, $f: [0; +\infty) \times R^m \rightarrow R$ – zadana funkcja. Wtedy, jeśli

$$dX_i = a_i dt + \sum_{j=1}^n b_{i,j} dw_j, \quad (3)$$

$$Y_t = f(t, X_t),$$

to

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^m f_{x_i}(t, X_t)a_i(t)dt + \sum_{i=1}^m f_{x_i}(t, X_t)\sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)dw_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m b_{j,i}(t)f_{x_i x_l}(t, X_t)b_{l,j}(t)dt. \quad (4)$$

O powszechnym zastosowaniu wzoru Ito, w przypadku zarówno jedno- jak i wielowymiarowym możemy przeczytać m.in. w [2-4; 7].

4. Przykłady zastosowań wzoru Ito

Aby zilustrować treści zawarte w twierdzeniu – wzorze Ito omówimy trzy przykłady:

Przykład 1.

Rozważmy stochastyczne równanie różniczkowe postaci:

$$dX(t) = \mu(t, \omega)X(t)dt + \sigma(t, \omega)X(t)dW(t), \quad (5)$$

gdzie $\mu(t, X_t)$, $\sigma(t, X_t)$ – funkcje mierzalne na $R_+ \times R$. Jego rozwiązaniem jest proces stochastyczny postaci:

$$X(t) = X(0)\exp\left\{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)\right\}, \quad (6)$$

ponieważ po zastosowaniu wzoru Ito dla procesu opisanego równaniem (6) otrzymujemy

$$dX(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X(t)dt.$$

Po zredukowaniu wyrazów podobnych otrzymamy stochastyczne równanie różniczkowe (5).

Przykład 2.

Rozważmy następujące stochastyczne równanie różniczkowe:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t, \quad (7)$$

gdzie X oznacza szukany proces stochastyczny, μ , σ – zadane funkcje. Naszym celem jest znalezienie procesu X_t , który będzie spełniał równanie (7).

Rozważmy funkcję dwóch zmiennych, różniczkowalną względem t , oraz dwukrotnie różniczkowalną względem x , postaci:

$$f(t, x) = e^{-\mu t} x.$$

Na mocy lematu mówiącego, że $d(XY) = XdY + YdX + b_1b_2dt$ dla $dX_t = a_1(t)dt + b_1(t)dW_t$ oraz $dY_t = a_2(t)dt + b_2(t)dW_t$, obliczamy:

$$d(e^{-\mu t} X_t) = -\mu e^{-\mu t} X_t dt + e^{-\mu t} \mu X_t dt + e^{-\mu t} \sigma dW_t + 0 = e^{-\mu t} \sigma dW_t.$$

Przechodząc do postaci całkowej, otrzymujemy

$$e^{-\mu t} X(t) = X_0 + \int_0^t e^{-\mu s} \sigma dW_s.$$

Po przekształceniach otrzymamy proces stochastyczny (szukane rozwiązanie stochastycznego równania różniczkowego (7)) postaci

$$X_t = X_0 e^{\mu t} + \int_0^t e^{\mu(t-s)} \sigma dW_s. \quad (8)$$

Proces (8) nosi nazwę procesu Ornsteina–Uhlenbecka. Za jego pomocą opisywany jest ruch cząsteczki Browna uwzględniający jej prędkość [7].

Przykład 3.

Rozważmy równanie

$$u_t(t, x) + a(t)u_x(t, x) + \frac{1}{2}b^2(t)u_{xx}(t, x) = 0. \quad (9)$$

Niech u będzie rozwiązaniem powyższego równania dla $t < T$ z warunkiem postaci:

$$u(T, x) = h(x). \quad (10)$$

Rozważmy teraz proces (w postaci całkowej)

$$X(t) = X_0(t) + \int_t^u a(s)ds + \int_t^u b(s)dW(s),$$

$$\{\Leftrightarrow dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)\}.$$

Na mocy wzoru Ito obliczamy

$$\begin{aligned}
 du(t, X(t)) &= u_t(t, X(t)) + a(t)u_x(t, X(t))dt + b(t)u_x(t, X(t))dW(t) + \\
 &+ \frac{1}{2}u_{xx}(t, X(t))b^2 dt = \left(u_t(t, X(t)) + a(t)u_x(t, X(t)) + \frac{1}{2}u_{xx}(t, X(t))b^2(t) \right) + \\
 &+ b(t)u_x(t, X(t))dW(t) = b(t)u_x(t, X(t))dW(t).
 \end{aligned}$$

W postaci całkowej

$$u(T, X(T)) = u(t, X(t)) + \int_t^T b(s)u_x(s, X(s))dW(s).$$

Obkładając obustronnie wartością oczekiwaną, otrzymujemy:

$$E[u(T, X(T))] = E\left[u(t, X(t)) + \int_t^T b(s)u_x(s, X(s))dW(s) \right].$$

Z warunku końcowego oraz z własności wartości oczekiwanej otrzymujemy:

$$E[h(X(T))] = E[u(t, X(t))] + E\left[\int_t^T b(s)u_x(s, X(s))dW(s) \right].$$

A zatem szukane rozwiązanie, spełniające warunek (10), przyjmuje postać:

$$u(t, X(t)) = E[h(X(T))]. \quad (11)$$

Równanie (11) nosi nazwę wzoru Feynmana–Kaca. Jest powszechnie stosowane w modelach wyceny opcji jako składnik opisujący ceny względne aktywów (*relative asset price*) czy też ceny typu *forward* (*forward price of the asset*) [6].

5. Wnioski

W pracy przypomniano warunki definiujące proces Wienera, a także właściwości tego procesu. Wyznaczono przykładowe trajektorie procesu Wienera, wygenerowane za pomocą pakietu MATHEMATICA 4.0. W programie dokonano interpolacji liniowej tego procesu. Obserwacja przykładowych trajektorii procesu Wienera, rozważanych nawet na tak małym przedziale $[0, 1]$, stanowi o nieróżniczkowalności tego procesu dla każdego $t \in [0; +\infty]$. Nieróżniczkowalność procesu w każdej chwili $t \in [0; +\infty]$ jest właściwością dość mało intuicyjną, zwłaszcza przy założeniu ciągłości procesu Wienera.

Pokazano ponadto przykłady zastosowań wzoru Ito. Na szczególną uwagę zasługuje proces Ornsteina–Uhlenbecka (przykład 2), za pomocą którego opisywany jest ruch cząstki Browna uwzględniający jej prędkość [7], oraz wzór Feynmana–Kaca (przykład 3) stosowany w modelach wyceny opcji [8].

Literatura

- [1] Gichman I.I., Skorokhod A.V., *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1968.
- [2] Janicki A., Izydorczyk A., *Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym*, WNT, Warszawa 2001.
- [3] Kloeden P., Platen E., Scherz H., *Numerical Solution of SDE through computer experiments*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1997.
- [4] Oksendal B., *Stochastic differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2000.
- [5] Ralston A., *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1975.
- [6] Rebonato R., *Interest-rate option models*, John Wiley & Sons, Chichester 1996.
- [7] Sobczyk K., *Stochastyczne równania różniczkowe*, WNT, Warszawa 1996.
- [8] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1998.

LINEARLY INTERPOLATED WIENER PROCESS. SOME APPLICATIONS OF THE ITO FORMULA

Summary

The main purpose of this paper is to present definition and linearly interpolated Wiener process. In part 3 one- and multi-dimensional version of the Ito formula is shown, which can be used for stochastic differential equations.

Mgr Katarzyna Posacka jest pracownikiem Katedry Matematyki na Politechnice Radomskiej.