

Instytut Budownictwa
Politechniki Wrocławskiej
Raport serii PRE nr 1/92

ANALIZA DEFORMACJI I NAPIĘĆ
W ZARYSOWANYCH PŁYTACH
ŻELBETOWYCH

Grzegorz Dmochowski

Praca doktorska

PROMOTOR: Prof. zw. dr hab. inż. Augustyn Borecz

Słowa kluczowe: płyta żelbetowa, rysy, Metoda Elementów
Brzegowych

Wrocław, październik 1991

mgr inż. Grzegorz Dmochowski
Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej
Zakład Mechaniki Konstrukcji Betonowych
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27, bud. C-7, pok. 711, tel. 20-25-10
50-370 Wrocław

Raport opracowano pod kierunkiem prof. zw. dr hab. inż. Augustyna Borcza
Raport przygotowano w języku polskim.

Cel pracy: Rozprawa doktorska.

Symbol pracy: "P"

Raport wpłynął do Redakcji Wydawnictw Instytutu Budownictwa
Politechniki Wrocławskiej w październiku 1991 roku.

SPIS TREŚCI

Wykaz ważniejszych oznaczeń.

1. Wstęp.
2. Przegląd literatury.
3. Tezy rozprawy, zakres pracy, podstawowe założenia.
4. Funkcje wpływowe Green'a, Pośrednia Metoda Elementów Brzegowych dla płyt.
 - 4.1. Wprowadzenie.
 - 4.2. Obciążenie jednostkową siłą skupioną.
 - 4.3. Obciążenie jednostkowym momentem skupionym.
 - 4.4. Obciążenie siłą i momentem rozłożonymi wzdłuż krzywej.
 - 4.5. Obciążenie siłą i momentem rozłożonymi powierzchniowo.
 - 4.6. Założenia Pośredniej Metody Elementów Brzegowych.
5. Model rysy.
 - 5.1. Model betonu i stali zbrojeniowej.
 - 5.2. Prawo rządzące rozwieraniem się rysy.
 - 5.3. Określenie współczynnika proporcjonalności r_1 między momentem zginającym a dyslokacją kątową.
 - 5.4. Określenie kąta rozwarcia rysy zależnego od odkształceń trwałych.
 - 5.5. Porównanie szerokości rozwarcia rys obliczonych wg PN-84/B-03264 i badań doświadczalnych Nawy'ego.
6. Zastosowanie Pośredniej Metody Elementów Brzegowych do obliczania zarysowanych płyt żelbetowych.
 - 6.1. Obliczeniowy model rysy.
 - 6.2. Obliczeniowy model zbrojenia.
 - 6.3. Wyznaczenie przemieszczeń i sił wewnętrznych w płycie zarysowanej.
 - 6.4. Określenie przemieszczeń i sił wewnętrznych wywołanych w płycie przez wektor resztkowych kątów rozwarcia rysy $[r_0]$.
 - 6.5. Określenie funkcji wpływowych przemieszczeń i sił wewnętrznych wywołanych w płycie nieograniczonej przez zarysowanie o danym kącie rozwarcia.
7. Analiza numeryczna płyt żelbetowych.
 - 7.1. Algorytm programu cyfrowego.
 - 7.2. Obliczenia testujące dla płyt niezarysowanych.

- 7.3. Obliczenia testujące dla płyt zarysowanych.
- 7.4. Obliczenia testujące dokładność obliczeń w zależności od ilości rys, ich rozstawu oraz sposobu zbrojenia płyty.
- 7.5. Kierunki dalszych badań.
- 8. Nieliniowa analiza płyt przy wykorzystaniu Pośredniej Metody Elementów Brzegowych.
 - 8.1. Opis metody.
 - 8.2. Algorytm programu cyfrowego.
 - 8.3. Obliczenia testujące program cyfrowy.
- 9. Samonapężenia.
- 10. Uwagi końcowe, wnioski.
 - Spis literatury.

Wykaz ważniejszych oznaczeń stosowanych w tekście.

Alfabet łaciński

- a - grubość otuliny;
 a_f - szerokość rozwarcia rysy;
 $A_1(\bar{x}), A_2(\bar{x})$ - reakcje uogólnione w płycie;
 d_1 - średnica prętów zbrojenia bliższych krawędzi rozciąganej;
 D - sztywność płyty;
 E_a - współczynnik sprężystości dla stali zbrojeniowej;
 E_b - współczynnik sprężystości dla betonu;
 F_a - powierzchnia zbrojenia;
 $G(\bar{x}, \bar{\xi})$ - f-cja wpływowa ugięć od działania siły skupionej;
 $G_1(\bar{x}, \bar{\xi})$ - f-cja wpływowa ugięć od działania momentu skupionego;
 $G_{1B}(\bar{x}, \bar{\xi})$ - f-cja wpływowa od obciążenia dipolem momentów dla 1-tego składnika wektora $\bar{u}$;
 $G_{1k}(\bar{x}, \bar{\xi})$ - f-cja wpływowa dla "1"-tego elementu wektora $\bar{u}$ od działania obciążenia typu "k";
 h - grubość płyty;
 h_f - głębokość rysy;
 $H(x-\xi)$ - f-cja Heaviside'a;
 l_f - rozstaw rys;
 $m(S)$ - układ momentów rozłożonych wzdłuż brzegu płyty, wymuszających spełnienie warunków brzegowych;
 m_B - wartość dipola momentów rozłożonych równomiernie, modelującego linię rysy;
 $[m_{BQ}]$ - wektor dipoli momentów modelujących rysę wywołanych obciążeniem zewnętrznym;
 $[m_{BR}]$ - macierz wpływu dipoli momentów modelujących linię rysy, wywołanych jednostkowymi wartościami momentów zastępujących oddziaływanie prętów zbrojeniowych;
 $[m_R]$ - wektor momentów zginających, modelujących oddziaływanie prętów zbrojeniowych;
 $M_1(\bar{x}), M_2(\bar{x})$ - momenty zginające w płycie;
 $M_{12}(\bar{x})$ - moment skręcający w płycie;
 M_{fp} - moment rysujący;

M_n - moment zginający w rysie, o wektorze równoległym do linii rysy;
 $n = E_a/E_b$;
 N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} - napięcia poziome w płycie;
 $p(S)$ - układ sił rozłożonych wzdłuż brzegu płyty, wymuszających spełnienie warunków brzegowych;
 $Q_1(\bar{x}), Q_2(\bar{x})$ - siły tnące w płycie;
 r - odległość między rozpatrywanym punktem płyty a punktem przyłożenia obciążenia;
 r_o - kąt rozwarcia rysy zależny od odkształceń trwałych;
 r_1 - współczynnik proporcjonalności między dyslokacją kątową, a momentem zginającym w rysie;
 $[r_o]$ - wektor resztkowych kątów rozwarcia rysy;
 $[r_1]$ - wektor współczynników proporcjonalności między kątem rozwarcia rysy a momentem zginającym w rysie;
 R - promień porównawczy;
 R_{bk} - wytrzymałość charakterystyczna betonu na ściskanie;
 R_{bzk} - wytrzymałość charakterystyczna betonu na rozciąganie;
 s_1 - rozstaw prętów zbrojenia bliższych krawędzi rozciąganej;
 s_2 - rozstaw prętów zbrojenia leżących w drugim kierunku niż pręty o rozstawie s_1 ;
 S - linia brzegowa płyty;
 $\bar{u}$ - wektor przemieszczeń i sił wewnętrznych w płycie;
 u_1, u_2 lub u, v - przemieszczenia poziome punktów płyty;
 u_a - obwód pręta;
 $w(\bar{x})$ - ugięcie płyty;
 $\bar{x} = (x_1, x_2)$ - współrzędne rozpatrywanego punktu płyty;
 $\bar{x}_1 = x_1 - \xi_1$
 $\bar{x}_2 = x_2 - \xi_2$ } różnica współrzędnych między rozpatrywanym punktem, a punktem przyłożenia obciążenia;
 $\bar{x}_n = (x_{1n}, x_{2n})$ - współrzędne punktów charakteryzujących odcinki, na które został podzielony brzeg płyty;
 z_f - ramię sił wewnętrznych w przekroju zarysowanym.

Alfabet grecki

β - stosunek głębokości rysy do głębokości rysy pomniejszonej o grubość otuliny;
 δ - delta Dirac'a;

$\bar{\varepsilon}_a$ - średnie, jednostkowe wydłużenie zbrojenia;
 $\bar{\varepsilon}_b$ - średnie, jednostkowe wydłużenie betonu;
 $\bar{\varepsilon}^S$ - średnie odkształcenie sprężyste;
 $\bar{\varepsilon}^R$ - średnie odkształcenie resztkowe;
 ε^E - odkształcenia sprężyste;
 ε^R - odkształcenia resztkowe;
 ε^T - odkształcenia całkowite;
 φ - kąt rozwarcia rysy;
 $\varphi_1(\bar{x}), \varphi_2(\bar{x})$ - kąty ugięcia płyty;
 $[\varphi_0]$ - wektor kątów rozwarcia rysy wywołanych przez obciążenie zewnętrzne;
 $[\varphi_R]$ - wektor kątów rozwarcia rysy wywołanych przez obciążenie modelujące oddziaływanie prętów zbrojenia;
 ϕ - funkcja Airiego;
 $\Phi_k(F)$ - obciążenie uogólnione działające na obszarze "F";
 $\Phi_k(S)$ - obciążenie uogólnione działające wzdłuż krzywej "S";
 $\Phi_k(Q)$ - uogólnione obciążenie zewnętrzne płyty;
 κ - krzywizna płyty;
 $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ - współrzędne punktu przyłożenia obciążenia;
 μ_a - wskaźnik zbrojenia;
 ν - współczynnik Poissona;
 Ω - powierzchnia płyty;
 ψ - współczynnik uśredniający naprężenia w zbrojeniu;
 $\bar{\sigma}_a$ - średnie naprężenia w zbrojeniu;
 σ_a - naprężenia w zbrojeniu;
 σ_b - naprężenia ściskające w betonie;
 τ_p - naprężenia styczne.

1. Wstęp.

Większość konstrukcji żelbetowych, w tym także płyt, ulega w trakcie pracy zarysowaniu. Związane jest to z procesami reologicznymi zachodzącymi w betonie lub z wystąpieniem odpowiednio dużych obciążeń eksploatacyjnych. W przypadku elementów statycznie niewyznaczalnych, jakimi są z reguły płyty, zarysowanie w zasadniczy sposób może zmienić rozkład przemieszczeń i sił wewnętrznych w porównaniu do stanu sprężystego. Istotne jest również ze względów użytkowych określenie szerokości rozwarcia rys. Tymczasem w chwili obecnej płyty żelbetowe projektuje się jako jednorodne, sprężyste; uwzględniając zarysowanie dopiero przy wymiarowaniu przekroju za pomocą metody stanów granicznych. Naturalnym wobec tego wydaje się dążenie do określenia rzeczywistego rozkładu sił wewnętrznych i przemieszczeń po zarysowaniu. Dzięki bardzo szybkiemu rozwojowi maszyn cyfrowych i technik komputerowych można już się pokusić o zrealizowanie takiego zadania. Opisana niżej metoda wraz z opracowanym na jej podstawie programem cyfrowym pozwalają właśnie na analizę zmian zachodzących w płytach żelbetowych na skutek zarysowania.

2. Przegląd literatury.

Płyty są jednymi z podstawowych i najczęściej spotykanych elementów konstrukcyjnych, dlatego metodami ich obliczenia zajmowało i zajmuje się wielu autorów. Pierwsze, klasyczne rozwiązania dla płyt sprężystych, przedstawiające przemieszczenia i siły wewnętrzne za pomocą szeregów Fouriera, zaprezentowane zostały przez Naviera już w 1820 roku. Od tego czasu powstało szereg nowych, oryginalnych metod obliczania tych konstrukcji. Można tu wymienić prace A. Puchera [112], Z. Kaczkowskiego [71,72], W. Nowackiego [104], G. Nariboliego [98], A. Kacnera [67], Z. Olesiaka [107] czy H. Zorskiego [135]. Rozważania teoretyczne dla zarysowanych elementów żelbetowych zapoczątkowane zostały przez Griffith'a. W swojej pracy z 1923 roku wyznaczył on rozkład naprężeń wokół szczeliny w tarczy nieograniczonej. Analogicznym zagadnieniem zajmował się I. Sneddon [122], który opracował szereg przypadków szczególnych dla tarczy nieograniczonej z jedną lub kilkoma rysami. W Polsce E. Kossecka i H. Zorski [74,136] przedstawili teorię defektów w liniowym ośrodku sprężystym, w której defekt określono jako powierzchnię osobliwą z możliwymi nieciągłościami przemieszczeń i naprężeń. Prace te były kontynuowane między innymi przez Matczyńskiego [93]. Analogicznymi problemami zajmował się J. Mossakowski [95]. Wykorzystanie tych rozważań w obliczeniach praktycznych było jednak niezmiernie trudne. Powstało więc szereg metod, które po przyjęciu pewnych założeń upraszczających pozwalały na obliczanie zarysowanych konstrukcji żelbetowych. Jedną z pierwszych była teoria linii załomów, zapoczątkowana przez K. W. Johansena [65] a następnie rozwijana w Polsce przez W. Olszaka [108] i A. Sawczuka [116]. Pozwalała ona jednak tylko na określenie ekstremalnych sił i momentów w zawiasach plastycznych. W pracach [76,77,78,79,80] W. Kuczyński przedstawił swoją teorię kontynualnych zmian sztywności dla belek żelbetowych, w której wszystkie efekty związane z zarysowaniem uwzględnia się poprzez ciągłą zmianę sztywności przekroju. Metoda ta jest rozwijana obecnie przez Goszczyńskiego i Muchę [52,53,54], którzy zastosowali ją do obliczania płyt żelbetowych. W swoich pracach A. Borcz [22,23,24,25,26,27,28] przedstawił wyniki badań doświadczalnych oraz oryginalną metodę obliczania zarysowanych belek, płyt i tarcz żelbetowych za pomocą

rachunku dystrybucyjnego. Prace te były kontynuowane przez szereg autorów, między innymi A.Baryłę [6], M.Mincha [94], E.Sobocińską [7] czy M.Maja i A.Trochanowskiego [91]. E.Absi i M.Brandt [1] zaproponowali uproszczony sposób obliczania zarysowanych płyt żelbetowych za pomocą funkcji wpływu pomnożonych przez współczynniki doświadczalne. Odrębną szkołę uwzględniania zarysowania stworzyli badacze radzieccy. Między innymi Karpienko [68,69,70] rozpatrzył szereg schematów postaci zarysowań konstrukcji powierzchniowych, uwzględniając zarysowanie poprzez wprowadzenie odpowiednich współczynników anizotropii. Problemem wielkości sterfy naruszonej przyczepności między betonem a zbrojeniem zajmował się Muraszew [96]. Prace Karpienki rozwijali między innymi W.M.Bondarienko i S.W.Bondarienko [21] czy Procenko i Łosin [111]. Badania dotyczące rozstawu rys, ich propagacji, wielkości strefy naruszonej przyczepności oraz zależności tych zjawisk od rodzaju, kształtu i kierunku zbrojenia, a także od innych parametrów geometrycznych i materiałowych charakterystycznych dla danych konstrukcji, prowadzone były także w innych krajach. Część tych prac dotyczyła wyłącznie płyt żelbetowych. Należy tu wymienić badania Nawy'ego [99,100], który po przetestowaniu około 150 płyt, przedstawił wzory pozwalające na określenie średniego rozstawu i rozwarcia rys w tych konstrukcjach. G.Franz [48] zajmował się wpływem zbrojenia skośnego na nośność i zarysowanie płyt żelbetowych. Muspratt [97] analizował te wartości w zależności od kierunku i ilości zbrojenia. Lee i Mansur [82] zajmowali się wpływem rozstawu i średnicy zbrojenia na rozkład rys w płytach jednokierunkowych. Wielokierunkowe badania dotyczące nośności i stanu zarysowania płyt żelbetowych prowadzili także Schubert [119] czy Dhir i Munday [40]. Zastosowanie do obliczeń większości omówionych wyżej metod i badań doświadczalnych wiązało się już z wprowadzeniem pierwszych maszyn cyfrowych i rozwojem technik komputerowych, między innymi opracowaniem Metody Różnic Skończonych. Dopiero jednak wprowadzenie do obliczeń cyfrowych Metody Elementów Skończonych zapoczątkowało na początku lat siedemdziesiątych nowy etap w rozwoju teorii zarysowanych elementów żelbetowych. Powstało bowiem narzędzie pozwalające na w miarę dokładną symulację procesów zachodzących w tych konstrukcjach. Punkt ciężkości rozważań teoretycznych w związku z tym przesunął się na tworzenie coraz

dokładniejszych modeli opisujących rysy, ich propagację, pracę betonu i zbrojenia oraz adaptowanie ich do wymagań Metody Elementów Skończonych. Z opublikowanych opisów analitycznych zachowania się betonu i stali zbrojeniowej można wyróżnić cztery podstawowe:

- modele hiposprężyste;
- modele zakładające liniowe lub nieliniowe ujęcia teorii sprężystości;
- modele plastyczne;
- modele oparte na endochronicznej teorii lepkoplastyczności.

Podstawy teorii hiposprężystej dla betonu opracowali Elwi i Murray [45]. Zakłada się w niej liniowe związki pomiędzy przyrostami naprężeń i odkształceń oraz zależność współczynników proporcjonalności (współczynników materiałowych) od aktualnych wartości tensorów naprężenia i odkształcenia. Wartości współczynników ustala się na podstawie wyników doświadczalnych. Model ten, przydatny w niektórych przypadkach do opisu badań, posiada szereg ograniczeń, które sformułował między innymi Bažant [12]. Do drugiej grupy opisów zachowania się betonu i stali zbrojeniowej można zaliczyć tzw. liniowo sprężysty model z pękaniem, opracowany specjalnie dla potrzeb Metody Elementów Skończonych. Zakłada, on że przed jak i po zarysowaniu, materiał jest opisywany za pomocą współczynników sprężystości E i ν , a zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami są liniowe. Ograniczeniu ulegają jednak maksymalne wartości naprężeń lub odkształceń występujących w poszczególnych elementach. Po ich przekroczeniu następuje zarysowanie, które uwzględnia się poprzez wprowadzenie modyfikacji w macierzy sztywności. Metoda ta daje dość dobry opis zachowania się konstrukcji żelbetowych. Jej zastosowaniami zajmowali się między innymi Chen i Suzuki [34], Wu [131], Baryła i Sobocińska [6,7] czy Maj i Trochanowski [91]. Natomiast Bažant i Cedolin [14] wykazali, że w stosunku do elementów betonowych model ten nie daje dobrych rezultatów. Kolejne z omawianych, modele nieliniowo sprężyste, zakładają że współczynniki materiałowe nie są stałymi, lecz funkcjami niezmienników tensora naprężenia lub odkształcenia. Materiał pozostaje sprężysty, a stan odkształcenia odwracalny. Pewna modyfikacja tego opisu jest tzw. metoda przyrostowa, która zakłada powyższe związki między prędkościami zmian odkształceń i naprężeń.

Omawiany model nie odwzorowuje jednak dobrze zmian zachodzących przy odciażaniu elementu. Dlatego często wprowadza się zmienne funkcje współczynników sprężystości dla obciążenia początkowego, odciażenia i ponownego obciążenia materiału. Omawiane wyżej rozwiązania stosowali między innymi Kupfer i Gerstle [81] czy Cedolin, Crutzen i Dei Poli [31]. Metody te nie pozwalają jednak na analizę materiału przy pojawieniu się nieciągłości wektora przemieszczeń.

Tworzenie modeli sprężysto-plastycznych dla betonu poprzedziły doświadczenia wykazujące, że przy trójosiowym ściskaniu beton wykazuje płynięcie, poprzedzające zniszczenie. Zjawisko to opisywano początkowo za pomocą modeli sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem izotropowym, stosując stowarzyszone prawo płynięcia. Przydatność tych modeli była jednak mała, gdyż nie pasowały one do rzeczywistego opisu zachowania się betonu. Nowe podejście zaproponował Dougill [44], wprowadzając wzorowaną na funkcji płynięcia tzw. funkcję pęknięcia. Na jej podstawie wyprowadził on wzory, w których przyrosty naprężeń spowodowane pękaniem odpowiadają określonym przyrostom tensora odkształcenia. W rezultacie powstał model uwzględniający spęcznie, mikropęknięcie i tarcie wewnętrzne materiału, a także opisujący jego zachowanie przy przyrostach tensora odkształcenia skierowanych równolegle do powierzchni zniszczenia.

Inne podejście do opisu tych zjawisk zaproponował Bažant [11], który wykorzystał przyrostową teorię plastyczności i przyjął niestowarzyszone prawo płynięcia. Występujące współczynniki materiałowe uzależnił od niezmienników tensorów odkształcenia i naprężenia. Wykonane przez niego obliczenia wykazały dobrą zgodność z wynikami otrzymanymi z badań doświadczalnych dla betonu. Również Bažant razem ze swoimi współpracownikami [13,18] zaproponował zastosowanie endochronicznej teorii lepko-plastyczności Valanis w stosunku do betonu. W modelu tym opis materiału jest ciągły, tzn nie rozdziela się jego zachowania na poszczególne fazy po osiągnięciu pewnych powierzchni nieciągłości. Obliczenia przeprowadzone za pomocą tej teorii dla belki żelbetowej wykazały bardzo dobrą zgodność wyników z danymi doświadczalnymi.

Oprócz wymienionych wyżej zasadniczych opisów zachowania się betonu i stali zbrojeniowej, istnieje cały szereg innych, korzystających tylko częściowo z tych teorii, lub je dostosowujących do potrzeb

konkretnych konstrukcji. Opisy te są z reguły powiązane z modelami rys proponowanymi przez poszczególnych autorów. W swojej pracy Link, Elwi i Scanlon [88] przyjęli dla konstrukcji płaskich model rysy rozmazanej, obracającej się, uwzględniający tzw. zasadę zeszywnienia zbrojenia między rysami. Oddziaływanie zbrojenia jest przyjmowane w sposób ciągły za pomocą zastępczego współczynnika określającego jego gęstość na jednostkę długości. Wytrzymałość płyt i powłok żelbetowych badali Harmon i Zhangyuan [58]. Wprowadzili oni model rysy wielokierunkowej, uwzględniający zazębienie się jej krawędzi oraz deformację jej powierzchni. Zararis [132] opracował metodę obliczania płyt i ścian żelbetowych, w której beton i stal zbrojeniowa podzielone są na osobne elementy skończone, połączone ze sobą związkami typu przemieszczeniowego. Cervenka [32] przedstawił model konstrukcji żelbetowej, w którym własności materiałowe są redukowane w zależności od stopnia zniszczenia spowodowanego przez zarysowanie. Brebbia [30], przyjmując nieliniowe modele betonu i stali oraz uproszczone kryterium zniszczenia, zaprezentował sposoby uwzględniania zarysowania w praktyce inżynierskiej. Bažant i Lin [15] opracowali model obracającej się, rozmazanej rysy, w którym efekty z nią związane są opisywane w sposób globalny poprzez uwzględnienie osłabienia betonu związanego z maksymalnym, głównym naprężeniem rozciągającym. Model rysy rozmazanej, uwzględniający osłabienie betonu na skutek rozciągania i ścinania, a także umożliwiający obliczenia przy odciażeniu i ponownym obciążeniu konstrukcji, przedstawili Rots i Borst [115]. Torrent, Dvorkin i Alvaredo [126], posługując się teorią platyczności, zaprezentowali opis zachowania się betonu poddanego działaniu obciążeń trójosiowych. Divaker i Shah [41], a także Hsu, Meu i Chen [60] opracowali modele betonu uwzględniające przenoszenie przez rysę szorstką naprężeń ścinających. Schorn [118] zaproponował opis kratownicowy betonu, w którym materiał ten rozumiany jest jako zbiór równoodległych od siebie punktów (węzłów), połączonych ze sobą prętami, ulegającymi degradacji na skutek zarysowania. Podobne założenia przyjął także w swojej pracy Mang [92]. Osobną grupę stanowią modele przedstawiające zachowanie się elementów betonowych i żelbetowych przy pomocy mechaniki pękania. Można tu wymienić przykładowo prace Hillerborga [59], Johna, Shaha i Jenga [66],

Roelfstra i Wittmanna [113] czy Shiha i Di Tomasso [120]. W latach osiemdziesiątych powstało także szereg modeli opisujących zarysowanie się konstrukcji za pomocą metod probabilistycznych czy też stochastycznych. Np. Spencer i Tang [123] zastosowali teorię Markova do określenia losowego kierunku propagacji rysy. Tym problemem zajmowali się także Tsurui i Ishikawa [128] czy Nobile [103]. Stochastyczne podejście do analizy zarysowanego betonu zaproponowali między innymi Rossi i Richer [114] czy Lin, Wu i Yang [86].

Równocześnie z tworzeniem coraz bardziej złożonych związków opisujących zarysowanie oraz zachowanie się betonu i stali zbrojeniowej w konstrukcjach żelbetowych, udoskonalano samą Metodę Elementów Skończonych, wprowadzając warstwowe i przestrzenne elementy obliczeniowe. W swojej pracy Lewiński [83] wyróżnił następujące metody analizy płaskich konstrukcji za pomocą MES:

- metoda "klasyczna", oparta na analizie elementów płaskich z uwzględnieniem zmian sztywności pod wpływem obciążenia. Stosowali ją między innymi Jofriet i Mc Neice [64] czy Bashur i Darwin [9];
- metoda wykorzystująca elementy płaskie, podzielone na warstwy, w których zakłada się płaski stan naprężenia. Stan każdej z warstw analizuje się w sposób nieliniowy. Ten sposób opisu konstrukcji za pomocą MES zapoczątkował Fuji [49], wykorzystując założenia teorii płyt warstwowych. Tę metodę, prostą w zastosowaniu a zarazem pozwalającą na w miarę dokładne odzwierciedlenie procesu zarysowania, stosowało wielu autorów. Przy jej pomocy tarcze i płyty współpracujące z żebrami analizował Grünberg [56]. Harmon i Zhangyuan [58] stosowali ją do obliczania nośności płyt na ścinanie, a Lin i Scordelis [84,85] analizowali w ten sposób powłoki żelbetowe. Metodę tę rozwijali także Schäfer i Link [117], zajmując się między innymi płytami żelbetowymi;
- metoda oparta na zastosowaniu przestrzennych elementów skończonych. Stosowali ją między innymi Berg, Bergan i Holand [19], Cope i Rao [36] czy też Mang [92], który użył jej do analizy żelbetowych osłon reaktorów atomowych;
- metoda oparta na teorii A.Borcza, w której rysy uwzględniane są jako linie nieciągłości przemieszczeń katowych. Stosowali ją Maj i Trochanowski [91].

Wraz z powstaniem Metody Elementów Brzegowych pojawiło się nowe narzędzie do analizy zarysowanych konstrukcji żelbetowych. Pozwala ona bowiem w odróżnieniu od MES na dyskretne uwzględnianie zarysowania oraz obliczanie przemieszczeń i sił wewnętrznych w dowolnym punkcie rozpatrywanego elementu. Jednym z autorów tej metody był C.A.Brebbia. Pod jego kierunkiem ukazują się praktycznie corocznie zbiorowe wydania wszystkich ciekawszych opracowań dotyczących tego rodzaju obliczeń. W zasadzie jednak większość publikowanych prac nie dotyczy konstrukcji żelbetowych lecz zajmuje się w ogólny sposób ciałami sprężystymi, w których rysy uwzględniane są za pomocą mechaniki pękania. Problemom tym była na przykład poświęcona konferencja we Freiburgu - International Conference on Application of Fracture Mechanics to Materials, Freiberg 1984. Prace na ten temat publikowali między innymi Nishimura i Kobayashi [101] czy Smith i Mason [121], którzy przedstawili metodę określania kierunku propagacji rysy przy użyciu wskaźnika intensywności naprężeń. Model rysy eliptycznej przy zastosowaniu modelu konstytutywnego materiału uwzględniającego pełzanie opracował Banthia [5]. Cruse i Wilson [38] opisywali rysy za pomocą elementów o odpowiednich parametrach geometrycznych. Takie podejście stosowali też Luchi i Poggialini [89], Ezawa i Okamoto [46] czy Tanaka i Itoh [125]. Banerjee i Watson [4] użyli do tego celu elementów przestrzennych. Natomiast Tottenham [127] a także Niwa, Kobayashi i Fukui [102] zaproponowali uwzględnienie zarysowania przez wprowadzenie elementów brzegowych o wyższych stopniach osobliwości. Niniejsza praca pokazuje sposób zastosowania Pośredniej Metody Elementów Brzegowych do obliczania zarysowanych płyt żelbetowych przy użyciu odpowiednich funkcji wpływowych modelujących oddziaływanie rysy i prętów zbrojeniowych.

3. Tezy rozprawy, zakres pracy, podstawowe założenia.

Głównym celem niniejszej pracy jest opracowanie metody obliczania deformacji i napięć wewnętrznych w płytach żelbetowych, uwzględniającej zarysowanie spowodowane obciążeniem. Metoda ta powinna być obiektywna, tzn. weryfikowalna eksperymentalnie na przykład za pomocą pomiaru ugięć, odkształceń prętów zbrojeniowych czy szerokości rozwarcia rys. Przy jej opracowywaniu skorzystano z badań doświadczalnych przeprowadzonych przez A. Borcza [24,28] dla płyt i belek żelbetowych. Badania te pozwoliły na określenie zmian zachodzących w tych ustrojach na skutek zarysowania. Stwierdzono takie efekty jak załamanie powierzchni odkształconej, nieciągłość kąta obrotu i osobliwość krzywizny w miejscu występowania rysy. Korzystając z wyników w/w badań wprowadzono model zarysowanej płyty żelbetowej, w którym rysę traktuje się jako defekt w ośrodku materialnym, wywołujący skok pierwszej pochodnej funkcji ugięcia na linii jego występowania. Wielkość skoku jest równa gęstości kąta rozwarcia rysy. Ponieważ muszą być spełnione warunki ciągłości przy przejściu przez rysę, gęstość ta powinna być tak dobrana, aby w każdym punkcie rysy spełnione było prawo rządzące jej rozwieraniem. Pozostałe warunki ciągłości spełnione są tożsamościowo gdyż zgodnie z przyjętym modelem rysa powoduje skok tylko pierwszej pochodnej funkcji ugięcia. Wszystkie efekty wynikające z zarysowania sprowadza się do przekrojów, w których występują te defekty. Poza miejscem nieciągłości zakłada się, że ustrój spełnia wszystkie założenia klasycznej teorii cienkich płyt izotropowych (dodatkowo przyjęto że prawo płaskich przekrojów obowiązuje również w przekroju zarysowanym). Tak więc rozpatruje się płytę w zakresie obciążeń użytkowych. Założono sprężysto-plastyczne modele betonu i stali zbrojeniowej pozwalające na uwzględnienie stwierdzonych doświadczalnie odkształceń trwałych. Przyjęto, że rozmieszczenie rys jest dane lub można je wyznaczyć na podstawie kierunków naprężeń głównych i warunków wytrzymałościowych. Rozpatruje się więc konstrukcję już zarysowaną, w konkretnym stanie wyężenia. Proces obciążania można by modelować w tym przypadku choćby przyrostowo ale wykracza to poza zakres niniejszego opracowania. Nie uwzględnia się również wpływów dynamicznych. Płyta może mieć dowolny kształt, warunki podparcia

oraz obciążenia. Przy tak określonych założeniach opracowano metodę oraz związany z nią program cyfrowy do obliczania zarysowanych płyt żelbetowych przy założeniu dyskretnego modelu rysy oraz wykorzystaniu Pośredniej Metody Elementów Brzegowych (PMEB). Dla oszacowania wpływu stanu tarczowego na pracę płyt przedstawiono również metodę oraz program cyfrowy analizujący te ustroje wg teorii nieliniowej. W tym przypadku rozwiązanie zaprezentowano jedynie dla stanu sprężystego i uzyskano je także przy pomocy PMEB. W chwili obecnej trwają prace nad wprowadzeniem do tego programu członów umożliwiających obliczanie elementów zarysowanych. Dzięki temu można będzie rozpatrywać stany graniczne użytkowania płyt. Wszystkie przedstawione tutaj rozważania dotyczą płyt pracujących dwukierunkowo.

W rozdziale 4 niniejszej pracy opisano podstawowe założenia Pośredniej Metody Elementów Brzegowych oraz związane z nią funkcje wpływowe Green'a dla płyt. W rozdziale 5 zaprezentowano przyjęty model rysy wykorzystujący badania doświadczalne Nawy'ego [99,100] i prawo rządzące rozwieraniem się rys sformułowane przez Borcza [22]. W rozdziale 6 opisano sposób uwzględnienia rys w płytach za pomocą PMEB. Są one przyjmowane w sposób dyskretny i jest to w pewnym sensie przeniesienie statycznej metody sił do rozwiązywania dźwigarów powierzchniowych, gdzie niewiadomymi są wartości naprężeń w prętach zbrojeniowych w miejscu zarysowania. W rozdziale 7 przedstawiono autorski program cyfrowy wykorzystujący w/w metodę do obliczania zarysowanych płyt żelbetowych. Zaprezentowano algorytm programu i szereg obliczeń testujących. W rozdziale 8 opisano metodę obliczania płyt sprężystych za pomocą PMEB przy uwzględnieniu stanu płytowo-tarczowego. Wykonano obliczenia testujące oraz porównawcze do analiz wg teorii klasycznej. W rozdziale 9 pokazano możliwość zastosowania sprężystego modelu betonu oraz teorii samonapreżeń do obliczania płyt żelbetowych pracujących w stanach pokrytycznych. W rozdziale 10 przedstawiono wnioski i uwagi końcowe wynikające z przeprowadzonych rozważań teoretycznych i analiz numerycznych.

4. Funkcje wpływowe Green'a, Pośrednia Metoda Elementów Brzegowych dla płyt.

4.1. Wprowadzenie.

Rozpatrywana jest izotropowa, sprężysta i nieograniczona płyta, obciążona jednostkową siłą skupioną przyłożoną w punkcie o współrzędnych $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, działająca prostopadle do płaszczyzny środkowej płyty. Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia można w tym przypadku zapisać następująco [23]

$$D\Delta\Delta w(\bar{x}) = \delta(\bar{x}_1)\delta(\bar{x}_2) \quad (4.1)$$

gdzie: D - sztywność płyty;

$\bar{x} = (x_1, x_2)$ - współrzędne rozpatrywanego punktu płyty;

$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ - współrzędne punktu przyłożenia obciążenia;

$\bar{x}_1 = x_1 - \xi_1$

$\bar{x}_2 = x_2 - \xi_2$

δ - delta Dirac'a.

Równanie to w układzie współrzędnych kartezjańskich spełnia całka szczególna

$$G(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{1}{16\pi D} r^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \quad (4.2)$$

gdzie: $r^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2$

R - promień porównawczy.

W teorii sprężystości Pucher [112] zastosował ją do obliczania powierzchni wpływowych płyt. Wyraża ona ugięcie płyty nieograniczonej w odległości r od punktu przyłożenia jednostkowej siły skupionej i nazywana jest funkcją wpływową Green'a.

4.2. Obciążenie jednostkową siłą skupioną.

W układzie współrzędnych kartezjańskich wyrażenie na ugięcie płyty nieograniczonej, obciążonej jednostkową siłą skupioną, zgodnie z równaniem (4.2) przyjmie postać

$$w(\bar{x}) = \frac{1}{16\pi D} (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \ln \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{R^2} \quad (4.3)$$

Korzystając z równania (4.3) oraz relacji łączących przemieszczenia z siłami wewnętrznymi w płytach, wartości te w płycie nieograniczonej obciążonej jednostkową siłą skupioną, można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} w(\bar{x}) &= \frac{1}{16\pi D} r^2 \ln(r^2/R^2) \\ \varphi_1(\bar{x}) &= \frac{1}{8\pi D} \bar{x}_1 [1 + \ln(r^2/R^2)] \\ \varphi_2(\bar{x}) &= \frac{1}{8\pi D} \bar{x}_2 [1 + \ln(r^2/R^2)] \\ M_1(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi} \{ (1+\nu) [1 + \ln(r^2/R^2)] + 2 \frac{\bar{x}_1^2 + \nu \bar{x}_2^2}{r^2} \} \\ M_2(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi} \{ (1+\nu) [1 + \ln(r^2/R^2)] + 2 \frac{\bar{x}_2^2 + \nu \bar{x}_1^2}{r^2} \} \\ M_{12}(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi} (1-\nu) \bar{x}_1 \bar{x}_2 / r^2 \\ Q_1(\bar{x}) &= - \frac{1}{2\pi} \bar{x}_1 / r^2 \\ Q_2(\bar{x}) &= - \frac{1}{2\pi} \bar{x}_2 / r^2 \\ A_1(\bar{x}) &= - \frac{1}{4\pi} \bar{x}_1 [(3-\nu) \bar{x}_1^2 + (1+\nu) \bar{x}_2^2] / r^4 \\ A_2(\bar{x}) &= - \frac{1}{4\pi} \bar{x}_2 [(3-\nu) \bar{x}_2^2 + (1+\nu) \bar{x}_1^2] / r^4 \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdzie: φ_i - kąty ugięcia płyty;
 M_i - momenty zginające;
 Q_i - siły tnące;
 A_i - reakcje uogólnione;
 M_{12} - moment skręcający;

$$\begin{aligned} \nu & - \text{współczynnik Poissona;} \\ i & = 1, 2; \\ r^2 & = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2. \end{aligned}$$

4.3. Obciążenie jednostkowym momentem skupionym.

W przypadku obciążenia płyty nieograniczonej jednostkowym momentem skupionym działającym w kierunku α i przyłożonym w punkcie o współrzędnych $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, ugięcie płyty ma postać [23]

$$w(\bar{x}) = G_{,\alpha}(\bar{x}, \bar{\xi}) = G_1(\bar{x}, \bar{\xi}) \quad (4.5)$$

Różniczkując zależności (4.4) po zmiennych $\bar{\xi}$ w dowolnym kierunku α , można wyznaczyć przemieszczenia i siły wewnętrzne w płycie nieograniczonej od jednostkowego momentu skupionego działającego w tej płaszczyźnie. Ponieważ w programie cyfrowym obliczającym zarysowane płyty żelbetowe wprowadzono lokalne układy współrzędnych, przeto wartości przemieszczeń i sił wewnętrznych wyznaczono jedynie od momentu jednostkowego o wektorze skierowanym wzdłuż osi 2. Wyraża się one wzorami:

$$\begin{aligned} w(\bar{x}) &= \frac{\bar{x}_1}{8\pi D} [1 + \ln(r^2/R^2)] \\ \varphi_1(\bar{x}) &= \frac{1}{8\pi D} [1 + \ln(r^2/R^2) + 2\bar{x}_1^2/r^2] \\ \varphi_2(\bar{x}) &= \frac{1}{8\pi D} [1 + \ln(r^2/R^2) + 2\bar{x}_2^2/r^2] \\ M_1(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi} [\bar{x}_1(\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2) + \nu\bar{x}_1(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2)]/r^4 \\ M_2(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi} [\bar{x}_2(\bar{x}_2^2 + 3\bar{x}_1^2) + \nu\bar{x}_2(\bar{x}_2^2 - \bar{x}_1^2)]/r^4 \\ M_{12}(\bar{x}) &= - \frac{1}{4\pi} \bar{x}_2(\bar{x}_2^2 - \bar{x}_1^2)/r^4 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$Q_1(\bar{x}) = - \frac{1}{2\pi} (\bar{x}_2^2 - \bar{x}_1^2) / r^4$$

$$Q_2(\bar{x}) = - \frac{1}{2\pi} (\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2) / r^4$$

$$A_1(\bar{x}) = - \frac{1}{4\pi} [3\bar{x}_2^4 - 6\bar{x}_2^2 \bar{x}_1^2 - \bar{x}_1^4 - 2(2-\nu)(\bar{x}_2^4 - 6\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 + \bar{x}_1^4)] / r^6$$

$$A_2(\bar{x}) = - \frac{1}{4\pi} [3\bar{x}_1^4 - 6\bar{x}_2^2 \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^4 - 2(2-\nu)(\bar{x}_1^4 - 6\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 + \bar{x}_2^4)] / r^6$$

gdzie wszystkie oznaczenia jak we wzorach (4.4)

4.4. Obciążenie siłą i momentem rozłożonymi wzdłuż krzywej.

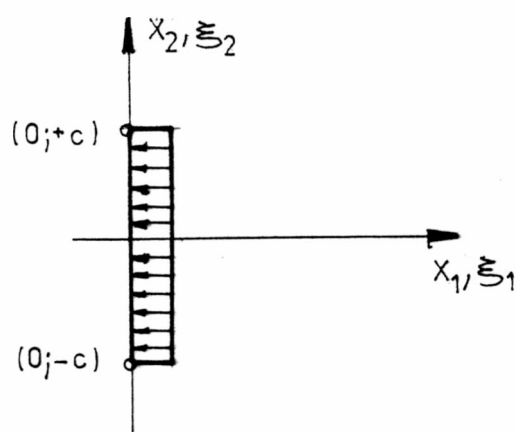
Jako $\Phi_k(S)$ (przy $k=1,2$) oznaczono obciążenie uogólnione działające wzdłuż krzywej gładkiej $S = S(\xi_1, \xi_2)$. $\Phi_1(S)$ odpowiada działaniu siły rozłożonej, $\Phi_2(S)$ momentowi rozłożonemu. Zgodnie z równaniami (4.3) i (4.5) ugięcie płyty nieograniczonej wywołane przez obciążenie siłą $\Phi_1(S)$ rozłożoną wzdłuż krzywej S wyrazi się wzorem

$$w(\bar{x}) = \int_S G(\bar{x}, \bar{\xi}) \Phi_1(S) dS \quad (4.7)$$

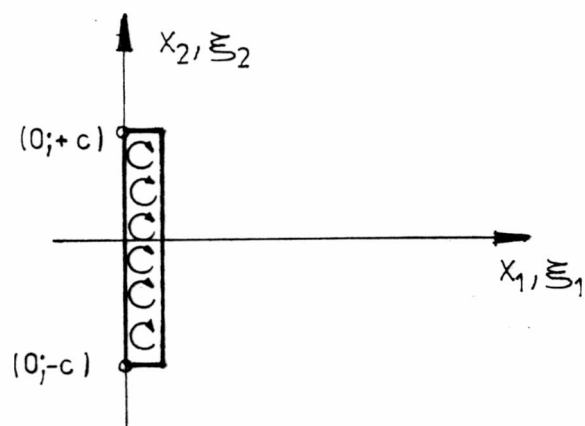
a przez moment $\Phi_2(S)$ zapisze się w postaci

$$w(\bar{x}) = \int_S G_1(\bar{x}, \bar{\xi}) \Phi_2(S) dS \quad (4.8)$$

Dla jednostkowego obciążenia uogólnionego $\Phi_k(S)$ o stałej wartości, rozłożonego na odcinku $l = [(0, -c); (0, c)]$ i zorientowanego względem lokalnego układu współrzędnych jak na rys.4.1



SIŁA ROZŁOŻONA



MOMENT ROZŁOŻONY

Rys. 4.1. Usytuowanie obciążeń rozłożonych wzdłuż odcinka względem lokalnego układu współrzędnych.

otrzymano z równań (4.7) i (4.8), po wykonaniu odpowiednich przekształceń, następujące zależności dla płyty nieograniczonej:

1) dla obciążenia siłą jednostkową, rozłożoną równomiernie na odcinku $[(0, -c); (0, c)]$

$$w(\bar{x}) = - \frac{1}{48\pi D} \left[(3\bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + \bar{x}_2^3) \ln(r^2/R^2) + 4\bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + 0.666\bar{x}_2^3 + \right. \\ \left. - \bar{x}_1^3 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-c}^{+c}$$

$$\varphi_1(\bar{x}) = - \frac{1}{48\pi D} \left[6\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ln(r^2/R^2) + 6\bar{x}_1 \bar{x}_2 - 12\bar{x}_1^2 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-c}^{+c}$$

$$\varphi_2(\bar{x}) = - \frac{1}{48\pi D} \left[(3\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2) \ln(r^2/R^2) \right]_{-c}^{+c}$$

$$M_1(\bar{x}) = \frac{1}{8\pi} \left[(1+\nu)\bar{x}_2 \ln(r^2/R^2) - (1-\nu)\bar{x}_2 + 4\bar{x}_1 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-c}^{+c}$$

$$M_2(\bar{x}) = \frac{1}{8\pi} \left[(1+\nu)\bar{x}_2 \ln(r^2/R^2) + (1-\nu)\bar{x}_2 + 4\nu\bar{x}_1 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-c}^{+c}$$

$$M_{12}(\bar{x}) = \frac{1}{8\pi} \left[(1-\nu) \bar{x}_1 [\ln(r^2/R^2) + 1] \right]_{-c}^{+c} \quad (4.9)$$

$$Q_1(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \left[\arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-c}^{+c}$$

$$Q_2(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \left[\ln(r^2/R^2) \right]_{-c}^{+c}$$

$$A_1(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \left[(1-\nu) \bar{x}_1 \bar{x}_2 / r^2 + 2 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-c}^{+c}$$

$$A_2(\bar{x}) = \frac{1}{8\pi} \left[(3-\nu) \ln(r^2/R^2) + 2(1-\nu) \bar{x}_1^2 / r^2 \right]_{-c}^{+c}$$

gdzie: $\bar{x}_1 = x_1 - \xi_1$
 $\bar{x}_2 = x_2 - \xi_2$

$$\left[\right]_{-c}^{+c} - \text{różnica wyrażeń w granicach} \left. \right\}_{\xi_2 = -c}^{\xi_2 = +c}$$

pozostałe oznaczenia jak we wzorach (4.4).

2) dla obciążenia momentem jednostkowym, rozłożonym równomiernie na odcinku $[(0, -c); (0, c)]$

$$w(\bar{x}) = \left[\frac{\bar{x}_1}{8\pi D} [\bar{x}_2 \ln(r^2/R^2) - 2\bar{x}_2 + 2\bar{x}_1 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1)] \right]_{-c}^{+c}$$

$$\varphi_1(\bar{x}) = \frac{1}{8\pi D} \left[\bar{x}_2 \ln(r^2/R^2) - 2\bar{x}_2 + 4\bar{x}_1 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-c}^{+c}$$

$$\varphi_2(\bar{x}) = \frac{1}{8\pi D} \left[\bar{x}_1 \ln(r^2/R^2) \right]_{-c}^{+c}$$

$$M_1(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \left[(1-\nu) \bar{x}_1 \bar{x}_2 / r^2 - 2 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-c}^{+c}$$

$$M_2(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \left[(\nu-1) \bar{x}_1 \bar{x}_2 / r^2 - 2\nu \arctg(\bar{x}_2 / \bar{x}_1) \right]_{-c}^{+c} \quad (4.10)$$

$$M_{12}(\bar{x}) = - \frac{1}{8\pi} \left[(1-\nu) \ln(r^2/R^2) + 2(1-\nu) \bar{x}_1^2 / r^2 \right]_{-c}^{+c}$$

$$Q_1(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \left[\bar{x}_2 / r^2 \right]_{-c}^{+c}$$

$$Q_2(\bar{x}) = - \frac{1}{2\pi} \left[\bar{x}_1 / r^2 \right]_{-c}^{+c}$$

$$A_1(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \left[\bar{x}_2 [3\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \nu(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2)] / r^4 \right]_{-c}^{+c}$$

$$A_2(\bar{x}) = - \frac{1}{4\pi} \left[\bar{x}_1 [3\bar{x}_1^2 + 5\bar{x}_2^2 - \nu(\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2)] / r^4 \right]_{-c}^{+c}$$

gdzie oznaczenia jak we wzorach (4.9).

4.5. Obciążenie siłą i momentem rozłożonymi powierzchniowo.

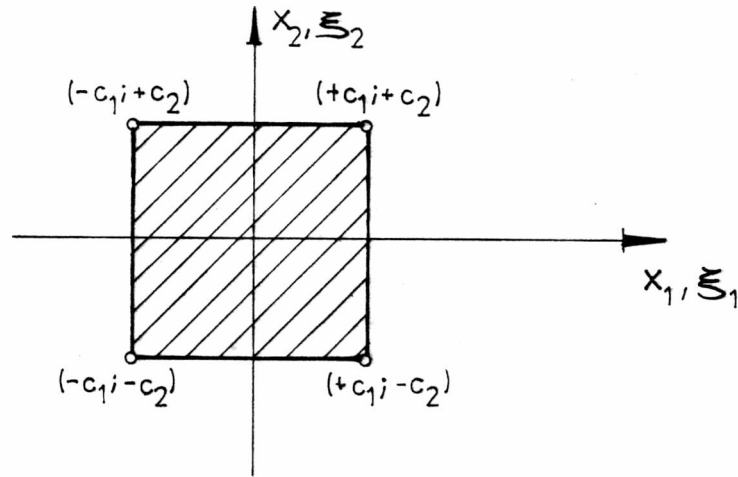
Jako $\Phi_k(F)$ (przy $k = 1, 2$) oznaczono obciążenie uogólnione działające na obszarze $F = F(\xi_1, \xi_2)$. $\Phi_1(F)$ odpowiada działaniu siły rozłożonej powierzchniowo, $\Phi_2(F)$ momentowi rozłożonemu powierzchniowo. Zgodnie z równaniami (4.3) i (4.5) ugięcie płyty nieograniczonej, wywołane przez obciążenie siłą $\Phi_1(F)$ rozłożoną na obszarze F , wyrazi się wzorem

$$w(\bar{x}) = \int_F G(\bar{x}, \bar{\xi}) \Phi_1(F) dF \quad (4.11)$$

a wywołane przez moment $\Phi_2(F)$ zapisze się w postaci

$$w(\bar{x}) = \int_F G_1(\bar{x}, \bar{\xi}) \Phi_2(F) dF \quad (4.12)$$

Dla jednostkowego obciążenia siłą rozłożoną równomiernie na obszarze $F = F(\xi_1, \xi_2)$, zorientowanego względem lokalnego układu współrzędnych jak na rys.4.2,



Rys.4.2. Usytuowanie obciążenia rozłożonego powierzchniowo względem lokalnego układu współrzędnych.

po wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymano z równania (4.11) następujące zależności dla płyty nieograniczonej:

$$w(\bar{x}) = \frac{1}{48\pi D} \left[(\bar{x}_1^3 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2^3) \ln(r^2/R^2) - \frac{5}{3} \bar{x}_1^3 \bar{x}_2 + (\bar{x}_1^4 - \bar{x}_2^4) * \right.$$

$$\left. * \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) - \frac{5}{3} \bar{x}_1 \bar{x}_2^3 \right]_{-c_1}^{+c_1} \bigg|_{-c_2}^{+c_2}$$

$$\varphi_1(\bar{x}) = \frac{1}{48\pi D} \left[(3\bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + \bar{x}_2^3) \ln(r^2/R^2) - 4\bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + 4\bar{x}_1^3 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) + \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} \bar{x}_2^3 \right]_{-c_1}^{+c_1} \bigg|_{-c_2}^{+c_2}$$

$$\varphi_2(\bar{x}) = \frac{1}{48\pi D} \left[(\bar{x}_1^3 + 3\bar{x}_1 \bar{x}_2^2) \ln(r^2/R^2) - 4\bar{x}_2^3 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) + \right.$$

$$\left. - 4\bar{x}_1 \bar{x}_2^2 - \frac{2}{3} \bar{x}_1^3 \right]_{-c_1}^{+c_1} \bigg|_{-c_2}^{+c_2}$$

$$M_1(\bar{x}) = - \frac{1}{8\pi} \left[(1+\nu) \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ln(r^2/R^2) + (2\bar{x}_1^2 - 2\nu \bar{x}_2^2) \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) + \right.$$

$$-(1+\nu)\bar{x}_1\bar{x}_2\Big|_{-c_1}^{+c_1}\Big|_{-c_2}^{+c_2} \quad (4.13)$$

$$M_2(\bar{x}) = - \frac{1}{8\pi} \left[(1+\nu)\bar{x}_1\bar{x}_2 \ln(r^2/R^2) + (2\nu\bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2^2) \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) + \right.$$

$$\left. -(1+\nu)\bar{x}_1\bar{x}_2 \right]_{-c_1}^{+c_1} \Big|_{-c_2}^{+c_2}$$

$$M_{12}(\bar{x}) = - \frac{(1-\nu)}{16\pi} \left[(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \ln(r^2/R^2) \right]_{-c_1}^{+c_1} \Big|_{-c_2}^{+c_2}$$

$$Q_1(\bar{x}) = - \frac{1}{4\pi} \left[\bar{x}_2 \ln(r^2/R^2) + 2\bar{x}_1 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-c_1}^{+c_1} \Big|_{-c_2}^{+c_2}$$

$$Q_2(\bar{x}) = - \frac{1}{4\pi} \left[\bar{x}_1 \ln(r^2/R^2) - 2\bar{x}_2 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-c_1}^{+c_1} \Big|_{-c_2}^{+c_2}$$

$$A_1(\bar{x}) = - \frac{1}{8\pi} \left[(3-\nu)\bar{x}_2 \ln(r^2/R^2) + 4\bar{x}_1 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) + \right.$$

$$\left. +(1-\nu)\bar{x}_2 \right]_{-c_1}^{+c_1} \Big|_{-c_2}^{+c_2}$$

$$A_2(\bar{x}) = - \frac{1}{8\pi} \left[(3-\nu)\bar{x}_1 \ln(r^2/R^2) - 4\bar{x}_2 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) + \right.$$

$$\left. +(1-\nu)\bar{x}_1 \right]_{-c_1}^{+c_1} \Big|_{-c_2}^{+c_2}$$

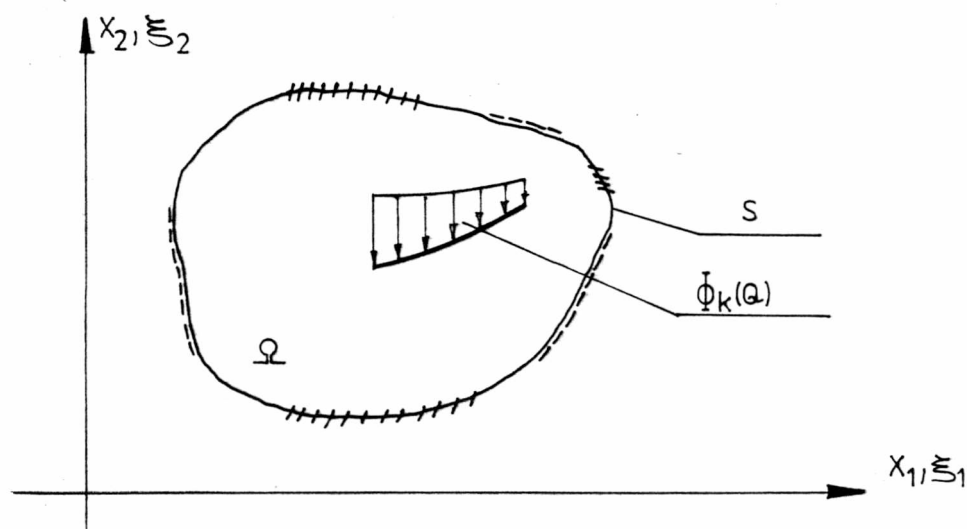
gdzie: $\bar{x}_1 = x_1 - \xi_1$
 $\bar{x}_2 = x_2 - \xi_2$

$$\left(\right)_{-c_1}^{+c_1} \Big|_{-c_2}^{+c_2} - \text{różnica całek w granicach} \left| \begin{matrix} \xi_1 = +c_1 \\ \xi_1 = -c_1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \xi_2 = +c_2 \\ \xi_2 = -c_2 \end{matrix}$$

pozostałe oznaczenia jak we wzorach (4.4)

4.6. Założenia Pośredniej Metody Elementów Brzegowych.

Na rys. 4.3 przedstawiono schemat dowolnej płyty bez rys.



Rys. 4.3. Schemat płyty niezarysowanej.

Powierzchnia płyty Ω ograniczona jest linią zamkniętą S . Na krawędziach założono dowolne, jednorodne warunki brzegowe. Wewnątrz obszaru płyty istnieje uogólnione obciążenie $\Phi_k(Q)$. Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia ma postać

$$D\Delta\Delta w(\bar{x}) = q(\bar{x}) \quad (4.14)$$

Równanie to można rozwiązać przez odpowiednią kombinację funkcji podstawowych (całki szczególnej i jej pochodnych) równania różniczkowego płyty nieograniczonej

$$D\Delta\Delta w(\bar{x}) = \delta(\bar{x}_1)\delta(\bar{x}_2) \quad (4.15)$$

gdzie: δ - delta Dirac'a.

W związku z tym płytę nieograniczoną obciążono następująco:

- wewnątrz obszaru Ω przyłożono obciążenie uogólnione $\Phi_k(Q)$;
- wzdłuż krzywej S przyłożono taki układ sił $p(S)$ i momentów $m(S)$, by wraz z obciążeniem $\Phi_k(Q)$ spełniały na tej linii dowolne, założone warunki podparcia.

Przemieszczenia i siły wewnętrzne płyty nieograniczonej wewnątrz

obszaru Ω pokrywają się w tym przypadku z przemieszczeniami i siłami wewnętrznymi płyty o dowolnym, przyjętym schemacie statycznym.

Jako $\bar{u}$ oznaczono wektor szukanych przemieszczeń i sił wewnętrznych w płycie, jako $\bar{u}_l$ (gdzie $l = 1, 10$) jeden ze składników tego wektora.

$$\bar{u} = [w, \varphi_1, \varphi_2, M_1, M_2, M_{12}, Q_1, Q_2, A_1, A_2] \quad (4.16)$$

Niech $G_{lk}(\bar{x}, \bar{\xi})$ oznacz funkcję wpływową dla l -tego elementu wektora $\bar{u}$ od działania obciążenia typu k - na przykład od siły skupionej, siły rozłożonej na powierzchni czy krzywej itd. Oznaczając jak w rozdz. 4.4 przez $\Phi_k(S)$ obciążenie uogólnione rozłożone wzdłuż krzywej S (odpowiada ono siłom $p(S)$ i momentom $m(S)$), przemieszczenia i siły wewnętrzne w płycie o zadanym schemacie statycznym wyraża się wzorem

$$\bar{u}_l(\bar{x}) = \int_{\Omega} G_{lk}(\bar{x}, \bar{\xi}) \Phi_k(Q) d\Omega + \int_S G_{lk}(\bar{x}, \bar{\xi}) \Phi_k(S) dS \quad (4.17)$$

Nieznane funkcje $p(S)$ i $m(S)$ należy wyznaczyć z równań całkowych wyrażających warunki ustalone dla brzegów płyty. Rozwiązanie analityczne takiego układu równań za pomocą całek elementarnych jest w ogólnym przypadku niemożliwe. Można jednak uzyskać rozwiązanie przybliżone za pomocą metod numerycznych. W tym celu należy dokonać podziału brzegu płyty na skończoną ilość "n" odcinków. Każdemu z nich przypisuje się obciążenia brzegowe $\Phi_{kn}(S)$ o nieznannej wartości lecz o założonym z góry przebiegu zmienności na długości odcinka. Zależnie od tego rozkładu przyjmuje się punkty $\bar{x}_n = (\bar{x}_{1n}, \bar{x}_{2n})$ charakterystyczne dla danego odcinka. Punkty te muszą być tak dobrane, aby po obliczeniu w nich wartości $\Phi_{kn}(S)$, przebieg zmienności tej funkcji na długości odcinka był jednoznacznie określony (np dla równomiernego rozkładu $\Phi_{kn}(S)$ przyjmuje się jeden punkt $\bar{x}_n$ będący środkiem danego odcinka, dla rozkładu liniowego dwa punkty na końcach odcinka itd.). W klasycznej teorii płyt cienkich dla jednoznacznego określenia rodzaju podparcia potrzebne są dwa warunki brzegowe. Żądając ich spełnienia w punktach $\bar{x}_n$ otrzymujemy układ $\bar{n} = 2*n$ równań o $\bar{n} = 2*n$ niewiadomych, który można zapisać w postaci

$$\bar{u}_1(\bar{x}_n) = \int_{\Omega} G_{1k}(\bar{x}_n, \bar{\xi}) \bar{\Phi}_k(Q) d\Omega + \sum_{\bar{n}} \int_S G_{1k}(\bar{x}_n, \bar{\xi}_n) \bar{\Phi}_k(S) dS \quad (4.18)$$

gdzie: $\bar{\xi}_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n})$ - punkty brzegu płyty określone tak jak punkty x_n .

Rozwiązaniem tego układu równań jest wektor uogólnionych sił $\bar{\Phi}_{kn}(S)$. Znajac jego wartości można korzystając ze wzoru (4.17) wyznaczyć przemieszczenia i siły wewnętrzne w każdym punkcie płyty za pomocą następującego równania

$$\bar{u}_1(\bar{x}) = \int_{\Omega} G_{1k}(\bar{x}, \bar{\xi}) \bar{\Phi}_k(Q) d\Omega + \sum_{\bar{n}} \int_S G_{1k}(\bar{x}, \bar{\xi}_n) \bar{\Phi}_{kn}(S) dS \quad (4.19)$$

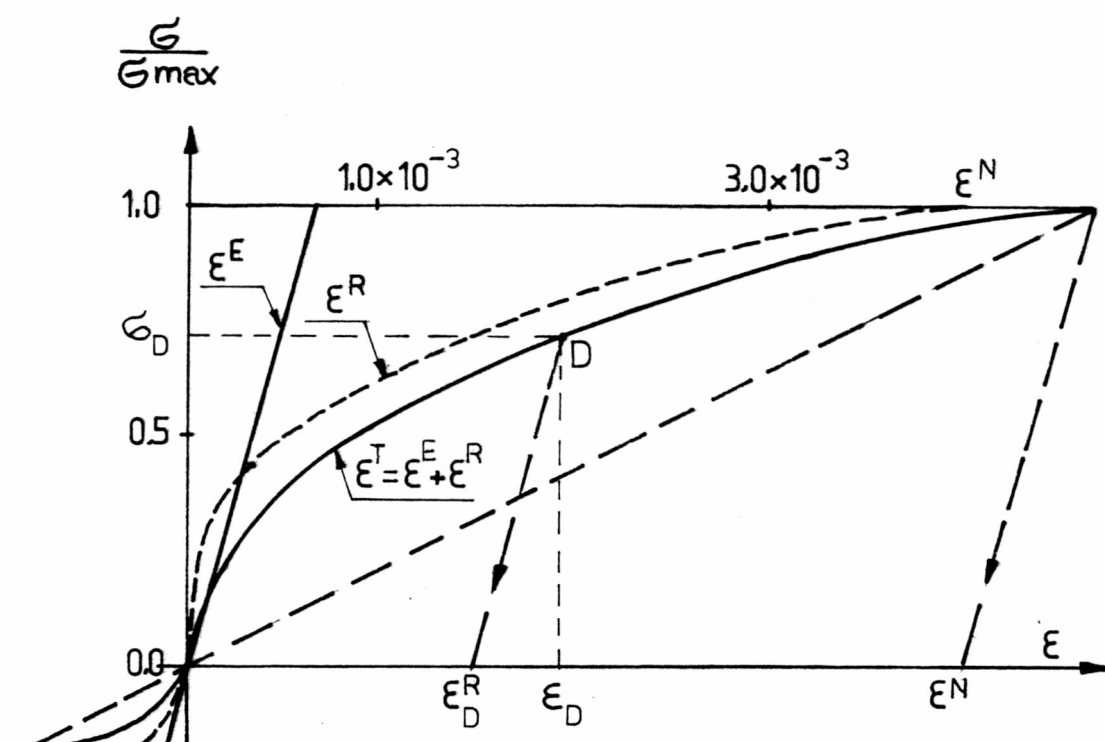
Dokładność przedstawionego rozwiązania zależy od liczby podziału brzegu na odcinki. Osiąga się już zadowalające rezultaty przy długości odcinków o rząd mniejszej od rozpiętości płyty.

Metoda Elementów Brzegowych została omówiona w sposób szczegółowy w szeregu opracowaniach, gdzie przedstawiono jej pełny opis matematyczny oraz udowodniono jednoznaczność otrzymanych rozwiązań. Należy tu wymienić publikacje Banerjee i Butterfielda [3] czy Brebbi [30], a z polskich autorów Dąbrowskiego [39]. W niniejszej pracy przedstawiono jedynie zarys tej metody, niezbędny do opisanie rozwiązań przyjętych do obliczania zarysowanych płyt żelbetowych.

5. Model rysy.

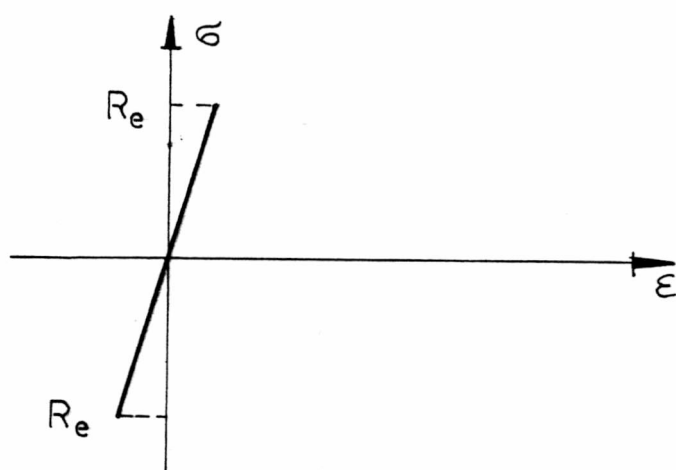
5.1. Modele betonu i stali zbrojeniowej.

W obliczeniach przyjęto sprężysty model betonu pozwalający na uwzględnienie stwierdzonych doświadczalnie odkształceń resztkowych ϵ^R . Założono w nim, że odkształcenia całkowite ϵ^T można przedstawić w postaci odkształceń sprężystych ϵ^E wraz z nałożonymi na nie odkształceniami resztkowymi ϵ^R . Model ten przedstawiono na rys.5.1, a jego uzasadnienie teoretyczne za pomocą teorii samonaprzeżeń zamieszczono w rozdziale 9.



Rys.5.1. Sprężysty model betonu.

Przyjęto także sprężysty model stali zbrojeniowej jak na rys.5.2 (założono że naprężenia w stali zbrojeniowej nie osiągają granicy plastyczności) oraz założenie o wiotkości zbrojenia.



Rys.5.2 Sprężysty model stali zbrojeniowej.

5.2. Prawo rządzące rozwieraniem się rysy.

Przed przystąpieniem do obliczania zarysowanych elementów żelbetowych, konieczne jest przyjęcie dodatkowego założenia charakteryzującego rozwieranie się rysy. W chwili obecnej nie można jeszcze dokładnie sformułować takiego prawa. Przyczyna jest złożoność parametrów, które mają wpływ na ten proces. W związku z tym przy jego opisie przyjmuje się szereg założeń upraszczających. W niniejszej pracy wykorzystano model matematyczny przedstawiony po raz pierwszy przez A.Borcza [25,26] w postaci

$$\varphi = r_0 + r_1 M_n \quad (5.1)$$

gdzie: φ - kąt rozwarcia rysy;

M_n - moment zginający w rysie o wektorze równoległym do linii rysy;

r_0 - kąt rozwarcia rysy zależny od odkształceń trwałych;

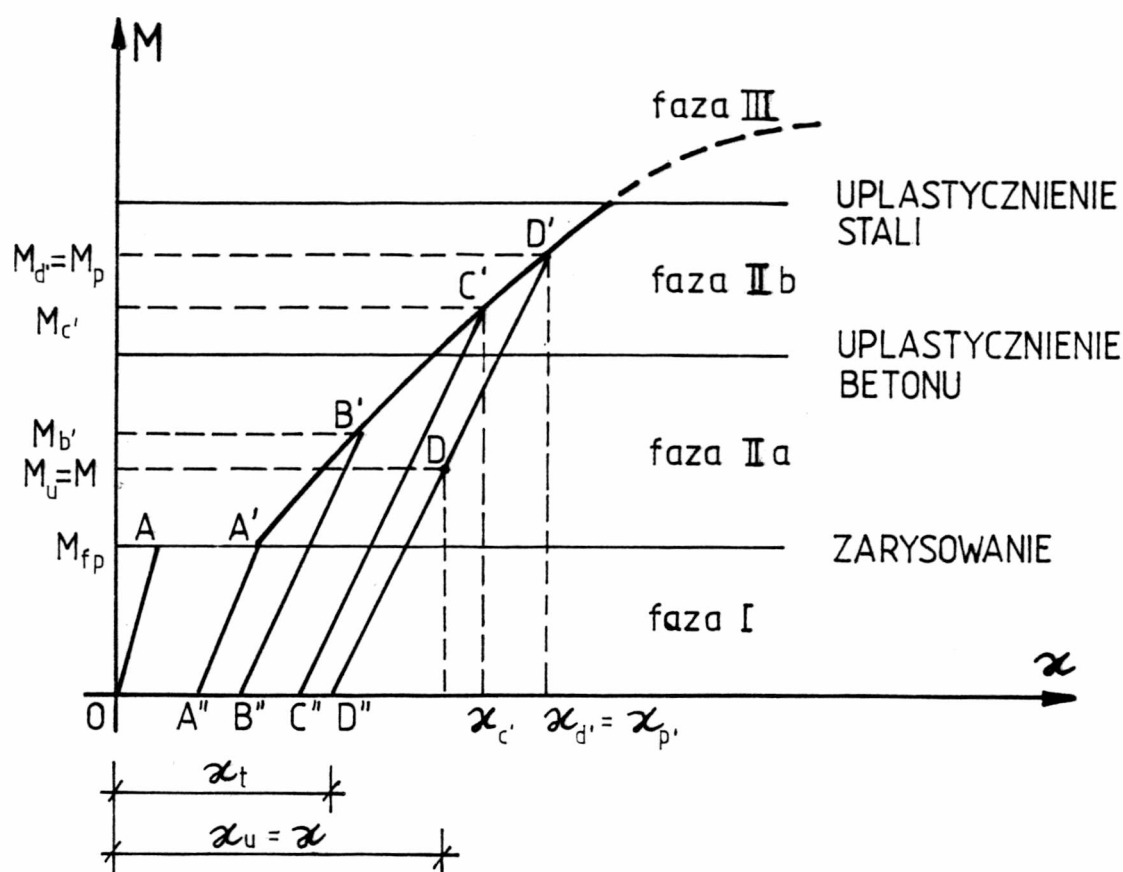
r_1 - współczynnik proporcjonalności pomiędzy dyslokacją kątową a momentem zginającym.

Model ten został przyjęty na podstawie szeregu badań doświadczalnych, prowadzonych między innymi przez A.Borcza [24,28] i R.Jankowiaka [61,62,63]. Przyjęto w nim, że nieliniową zależność dla

betonu między obciążeniem a odkształceniem można dla danego stanu obciążenia aproksymować za pomocą odkształceń sprężystych oraz nakładających się na nie odkształceń resztkowych. Można to zilustrować na rysunku 5.3 prezentowanym w pracy Baryły [6], przedstawiającym zależność między momentem zginającym a krzywizną w miejscu rysy. Po przekroczeniu momentu rysującego M_{fp} zależność $M-\kappa$ opisana jest krzywą $A'B'C'...$. Po przeciążeniu konstrukcji do maksymalnej wartości momentu M_D , krzywiznę przekroju można zapisać następująco

$$\kappa = \kappa_t + \frac{\kappa_D - \kappa_t}{M_D} M \quad (5.2)$$

Podobny opis zagadnienia przyjęto również w pracach Baryły [6,7], Mincha [94], Maja i Trochanowskiego [91] czy w pewnym zakresie u Lewińskiego [83].



Rys. 5.3. Wykres $M-\kappa$ dla zmieniającego się obciążenia w miejscu rysy.

5.3. Określenie współczynnika proporcjonalności r_1 między momentem zginającym a dyslokacją kątową.

Do wyznaczenia współczynnika proporcjonalności r_1 potrzebne jest określenie rozstawu rys l_f oraz wielkości rozwarcia rysy a_f . Obie te wartości, zarówno w polskiej normie żelbetowej jak i w większości zajmujących się tą tematyką publikacjach, określane są na podstawie badań dla belek żelbetowych. Nie są to więc wartości, które powinny być przyjmowane do obliczeń płyt żelbetowych. W związku z tym skorzystano z propozycji E.G.Nawy'ego [99,100], który prowadził badania doświadczalne dla kilkudziesięciu płyt żelbetowych, o różnych warunkach podparcia i rodzaju obciążenia. Na podstawie tych badań sformułował wzór określający rozwarcie rysy, który po przetransformowaniu współczynników do postaci bezwymiarowej można zapisać następująco

$$a_f = k_1 k_2^{\beta} \frac{\bar{\sigma}_a}{E_a} s_1 \quad (5.3)$$

gdzie: k_1 - współczynnik zależny od kształtu płyty;

$$k_2 = \sqrt{\frac{s_2 a}{s_1 d_1}}$$

s_1 - rozstaw prętów zbrojenia bliższych krawędzi rozciąganej;

s_2 - rozstaw prętów zbrojenia w drugim kierunku;

a - grubość otuliny;

d_1 - średnica prętów zbrojenia bliższych krawędzi rozciąganej;

β - stosunek głębokości rysy do głębokości rysy pomniejszonej o grubość otuliny;

$\bar{\sigma}_a$ - średnie naprężenia w zbrojeniu;

E_a - moduł Younga dla stali zbrojeniowej.

Badania były robione dla prętów zebrowanych. Wartości współczynnika

k_1 zestawiono w tab.5.1.

Tab.5.1

Rodzaj obc.	Warunki brzegowe	Stos. dł. boków płyty prostok.B/L	Współczynnik k_1
A	4 krawędzie zamocowane	0.5	0.298
A	4 krawędzie zamocowane	0.7	0.410
A	3 krawędzie zam.,1 swobod. podparta	0.7	0.428
A	2 krawędzie zam.,2 swobod. podparte	0.7	0.503
A	4 krawędzie zamocowane	1.0	0.522
A	3 krawędzie zam.,1 swobod. podparta	1.0	0.540
A	2 krawędzie zam.,2 swobod. podparte	1.0	0.782
A	4 krawędzie swobodnie podparte	0.7	0.716
A	4 krawędzie swobodnie podparte	1.0	0.834
B	4 krawędzie zamocowane	1.0	0.391
B	4 krawędzie swobodnie podparte	1.0	0.577
Rodzaje obciążeń: A - równomiernie rozłożone B - skupione			

Porównanie otrzymanych w ten sposób wartości rozwarcia rys z propozycjami polskiej normy żelbetowej PN-84/B-03264 przedstawiono w rozdz.5.5 niniejszego opracowania.

Mając wyznaczoną szerokość rozwarcia rysy a_f można wyznaczyć rozstaw rys l_f . Zgodnie bowiem z zaleceniami CEB średnia szerokość rozwarcia rys może być traktowana jako iloczyn ich średniego rozstawu l_f i różnicy pomiędzy średnim jednostkowym wydłużeniem zbrojenia $\bar{\epsilon}_a$ a średnim jednostkowym wydłużeniem betonu $\bar{\epsilon}_b$

$$a_f = (\bar{\epsilon}_a - \bar{\epsilon}_b) l_f \quad (5.4)$$

Średnie jednostkowe wydłużenie betonu jest na ogół znacznie mniejsze od wydłużenia jednostkowego stali i może być w praktyce pominięte

$$a_f = \bar{\epsilon}_a l_f \quad (5.5)$$

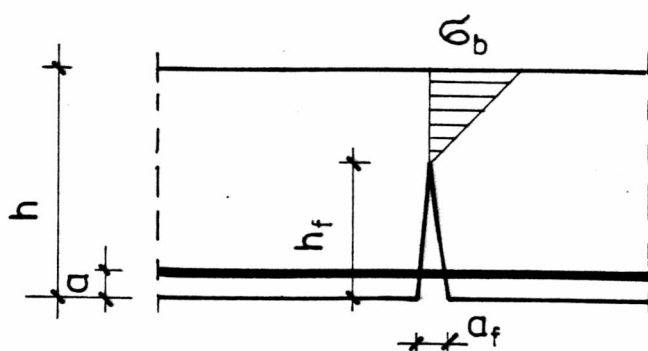
stąd

$$a_f = \frac{\bar{\sigma}_a}{E_a} l_f \quad (5.6)$$

Po porównaniu równań (5.3) i (5.6) stronami otrzymano

$$l_f = k_1 k_2 \beta s_1 \quad (5.7)$$

Rozważmy teraz przekrój zarysowany jak na rys.5.4.



Rys.5.4. Schemat przekroju zarysowanego.

Przyjęto liniowy rozkład naprężeń w betonie. Założono również, że

hipoteza płaskich przekrojów jest słuszna także dla przekrojów zarysowanych, a w miejscu rysy beton nie przenosi naprężeń rozciągających. Słuszność tych ostatnich założeń została potwierdzona między innymi w pracach [83] czy [110].

Z hipotezy płaskich przekrojów otrzymujemy

$$\frac{\sigma_b}{E_b(h-h_f)} = \frac{\sigma_a}{E_a(h_f-a)} \quad (5.8)$$

Z warunku równowagi sił w przekroju zarysowanym

$$0.5\sigma_b(h-h_f)s_1 = \sigma_a F_a \quad (5.9)$$

gdzie: s_1 - rozstaw prętów zbrojeniowych.

Po rozwiązaniu równań (5.8) i (5.9) i wyeliminowaniu wartości $h_f > h$ otrzymano

$$h_f = \frac{s_1 h + F_a n - \sqrt{2s_1(h-a)F_a n + F_a^2 n^2}}{s_1} \quad (5.10)$$

gdzie: $n = \frac{E_a}{E_b}$

Zapiszmy teraz warunek równowagi momentów w przekroju zarysowanym. Ma on postać

$$M_n = z_f \sigma_a F_a \quad (5.11)$$

gdzie: z_f - ramię sił wewnętrznych.

Z zależności geometrycznych wg rys. 5.4 otrzymano

$$z_f = h - \frac{1}{3}(h-h_f) - a = \frac{2}{3}h + \frac{1}{3}h_f - a \quad (5.12)$$

Ponieważ równocześnie wg równania (5.3)

$$a_f = k_1 k_2 \beta \frac{\bar{\sigma}_a}{E_a} s_1$$

gdzie: $\beta = \frac{h_f}{h_f - a}$

a zarazem kąt rozwarcia rysy φ zapisuje się wzorem

$$\varphi = \frac{a_f}{h_f} \quad (5.13)$$

otrzymujemy

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\varphi(h_f - a)E_a}{k_1 k_2 s_1} \quad (5.14)$$

Po przyjęciu współczynnika uśredniającego ψ

$$\bar{\sigma}_a = \psi \sigma_a \quad (5.15)$$

uzyskano

$$\sigma_a = \frac{\varphi(h_f - a)E_a}{\psi k_1 k_2 s_1} \quad (5.16)$$

Po wstawieniu równania (5.16) do wyrażenia (5.11) oraz uwzględnieniu, że szukany współczynnik proporcjonalności r_1 przy pierwszym obciążeniu określony jest wzorem

$$r_1 = \frac{\varphi}{M_h} \quad (5.17)$$

otrzymano

$$r_1 = \frac{\psi k_1 k_2 s_1}{z_f F_a (h_f - a) E_a} \quad (5.18)$$

Po wyliczeniu wysokości zarysowania h_f z równania (5.10) otrzymuje się wartość współczynnika proporcjonalności r_1 .

Wartość współczynnika ψ uśredniającego naprężenia, była określana

przez wielu autorów. Wymienić tu należy prace Muraszewa [96], Karpienki [68] czy z nowszych Bažanta i Oh'a [16] czy Floegla i Manga [47]. W niniejszym opracowaniu przyjęto koncepcję opisaną w monografii Karpienki [68], gdzie dla płyt rozpatrywanych bez udziału sił podłużnych przyjęto

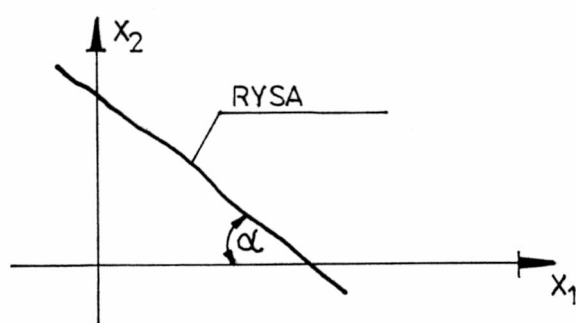
$$\psi_{ax} = 1.25 - \delta \frac{M_{fp}}{(M_x + M_{yx} \operatorname{ctg} \alpha) \lambda_x} \quad (5.19)$$

$$\psi_{ay} = 1.25 - \delta \frac{M_{fp}}{(M_y + M_{xy} \operatorname{tg} \alpha) \lambda_y} \quad (5.20)$$

gdzie: M_{fp} - moment rysujący;

λ_x, λ_y - współczynniki uwzględniające wpływ naprężeń stycznych w zbrojeniu oraz zazębianie się krawędzi rys. Akceptując założenie o wiotkości zbrojenia oraz pomijając te drugorzędne wpływy przyjęto $\lambda_x = \lambda_y = 1$;

We wzorach (5.19) i (5.20) współczynnik δ określa wpływ rodzaju zbrojenia na wartość współczynnika ψ . Dla prętów gładkich przyjęto $\delta = 1$, dla prętów żebrowanych $\delta = 1.1$. Oznaczenie kierunku rys wg rys.5.5.



Rys.5.5. Oznaczenie kierunku rys.

5.4. Określenie kąta rozwarcia rys zależnego od odkształceń trwałych.

Do obliczania zarysowanych płyt żelbetowych poddanych wielokrot-

nie procesowi obciążania i odciażania, konieczne jest określenie wielkości odkształceń resztkowych w rysie, oznaczonych we wzorze (5.1) jako r_0 . Analiza tych deformacji prowadzona była między innymi przez Ubysza [129] i Kozłowskiego [75]. Na podstawie badań doświadczalnych własnych i innych autorów stwierdzili oni, że w przedziale obciążeń użytkowych średnie odkształcenia resztkowe stali $\bar{\epsilon}_a^r$ stanowią od 12 do 15% średnich odkształceń całkowitych $\bar{\epsilon}_a$, tak jak zostało to pokazane na rys 5.6.

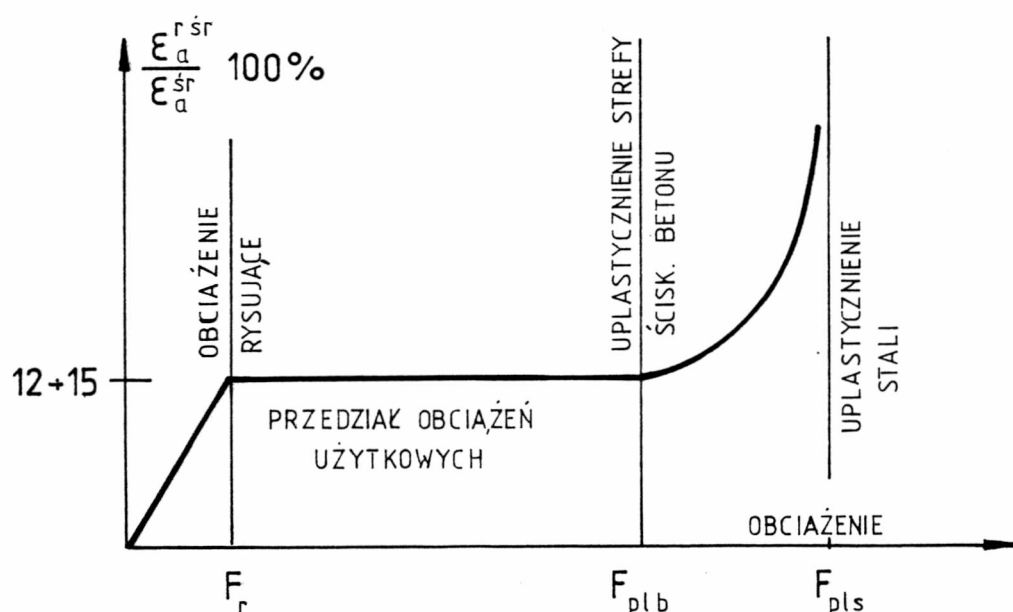
W niniejszej pracy przyjęto więc do obliczeń następujące zależności

$$\bar{\epsilon}_a^r = 0.13 \bar{\epsilon}_a \quad (5.21)$$

$$\bar{\epsilon}_a^s = 0.87 \bar{\epsilon}_a \quad (5.22)$$

gdzie: $\bar{\epsilon}_a^s$ - średnie odkształcenie sprężyste;

$\bar{\epsilon}_a^r$ - średnie odkształcenie resztkowe.



Rys. 5.6. Zależność między odkształceniem resztkowym i całkowitym wg Kozłowskiego.

Przy obliczaniu zarysowanych konstrukcji żelbetowych poddanych

procesowi obciążania i odciażania należy wobec tego zgodnie ze wzorem (5.22) skorygować wzór (5.18) do postaci

$$r_1 = \frac{0.87 \psi k_1 k_2 s_1}{z_f F_a (h_f - a) E_a} \quad (5.23)$$

5.5. Porównanie szerokości rozwarcia rys obliczonych według PN-84/B-03264 i badań doświadczalnych Nawy'ego.

Do obliczeń porównawczych przyjęto przekrój płyty żelbetowej o gr. $h = 12\text{cm}$, obciążony momentem $M = 18\text{ kNm}$, zbrojony krzyżowo prętami $\emptyset 10$ co 12 cm . Grubość otuliny $a = 2\text{ cm}$. Założono beton B15 i stal 34GS.

Charakterystyki materiałowe betonu:

- wytrzymałość charakterystyczna na ściskanie $R_{bk} = 11300\text{ kPa}$;
- wytrzymałość charakterystyczna na rozciąganie $R_{bzk} = 1130\text{ kPa}$;
- współczynnik sprężystości $E_b = 23100\text{ MPa}$.

Współczynnik sprężystości dla stali $E_a = 210000\text{ MPa}$.

Charakterystyki przekroju:

- ilość zbrojenia $F_a = (100/12) * 0.785 = 6.54\text{ cm}^2/\text{m}$;
- wskaźnik zbrojenia $\mu_a = 6.54/100 * 10 = 0.00654$;
- $n = E_a/E_b = 210000/23100 = 9.09$.

Wzór normowy określający szerokość rozwarcia rysy

$$a_f = \frac{\bar{\sigma}_a}{E_a} l_f \quad (5.24)$$

różni się od propozycji Nawy'ego jedynie sposobem określenia odległości między rysami l_f . Porównane zostaną wobec tego tylko te wartości.

Obliczenie odległości między rysami wg PN-84/B-03264.

Długość odcinka l_f dla elementów zginanych określa wzór normowy

$$l_f = k_1 n \frac{F_a}{\sum u_a} n_f \quad (5.25)$$

$$k_1 = \frac{M_{fp}}{z_f n F_a R_{bzk}} - 2 \quad (5.26)$$

gdzie: M_{fp} - moment rysujący;
 $\sum u_a$ - suma obwodów prętów zbrojenia rozciąganego;
 n_f - współczynnik równy 0.7 dla prętów żebrowanych;
 z_f - ramię działania sił w przekroju zarysowanym.

Moment rysujący M_{fp} oblicza się wg wzoru

$$M_{fp} = W_{fp} R_{bzk} \quad (5.27)$$

gdzie dla przekroju prostokątnego jednostronnie zbrojonego W_{fp} zapisuje się w postaci

$$W_{fp} = (0.292 + 1.5 \frac{n}{bh} F_a) b h^2 \quad (5.28)$$

Po podstawieniu do wzoru danych liczbowych otrzymano $M_{fp} = 4.94 \text{ kNm}$.

Dla elementów zginanych o przekroju prostokątnym ramię działania sił wewnętrznych otrzymuje się z równania

$$z_f = h_0 \left(1 - \frac{\xi_f}{2}\right) \quad (5.29)$$

gdzie:

$$\epsilon_f = \frac{1}{1.8 + \frac{1+5L}{10n\mu_a}} \quad (5.30)$$

$$L = \frac{M}{R_{bk} b h_0^2} \quad (5.31)$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:

$$L = 0.159$$

$$\xi_f = 0.207$$

$$z_f = 8.97 \text{ cm}$$

$$k_1 = 6.20$$

$$l_f = 9.8 \text{ cm}.$$

We wzorze normowym na odległość między rysami nie uwzględnia się wpływu kształtu płyty, charakteru obciążenia czy warunków podparcia.

Obliczenie odległości między rysami wg wzoru Nawy'ego.

Wg wzoru (5.10) wysokość rysy h_f wyraża się wzorem

$$h_f = \frac{s_1 h + F_a n - \sqrt{2s_1(h-a)F_a n + F_a^2 n^2}}{s_1}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano $h_f = 9.1 \text{ cm}$.

Wg wzoru (5.7) odległość między rysami l_f wynosi

$$l_f = k_1 k_2 \beta s_1$$

$$\beta = h_f / (h_f - a) = 9.1 / (9.1 - 2) = 1.28$$

$$s_1 = s_2 = 12 \text{ cm}$$

$$d_1 = 1.0 \text{ cm}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{s_2 a}{s_1 d_1}} = \sqrt{\frac{12 \times 2}{12 \times 1.0}} = 1.41$$

Założmy, że płyta jest kwadratowa, równomiernie obciążona i zamocowana na wszystkich brzegach. Wg tab.5.1 $k_1 = 0.522$.

Podstawiając do wzoru otrzymano

$$l_f = 11.3 \text{ cm}$$

Wartość ta różni się tylko ok. 12% od tej wyznaczonej wg wzoru normowego. Jeśli jednak przyjmiemy do obliczeń że ta sama płyta jest swobodnie podparta na wszystkich krawędziach, wtedy wg tab.5.1 $k_1 = 0.834$ oraz

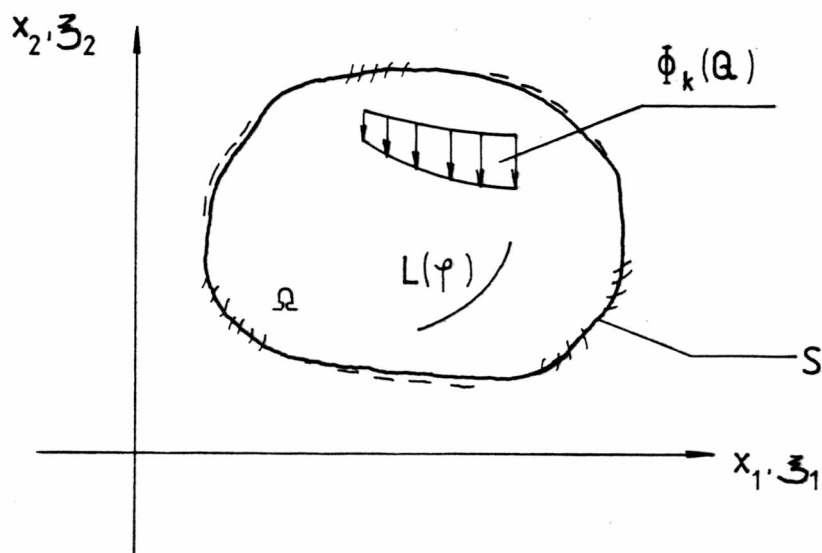
$$l_f = 18.1 \text{ cm}$$

Różnica między obliczonymi wartościami l_f uzyskanymi ze wzoru normowego i wzoru Nawy'ego wynosi więc w tym przypadku prawie 100%.

Wobec powyższych faktów wydaje się, że do polskiej normy żelbetowej powinno się jednak wprowadzić wzory określające długość strefy zarysowanej osobno dla konstrukcji powierzchniowych, uwzględniające ich kształt, sposób obciążenia, zamocowania i zbrojenia.

6. Zastosowanie Pośredniej Metody Elementów Brzegowych do obliczania zarysowanych płyt żelbetowych.

Rozważa się płytę z rysami jak na rys.6.1.

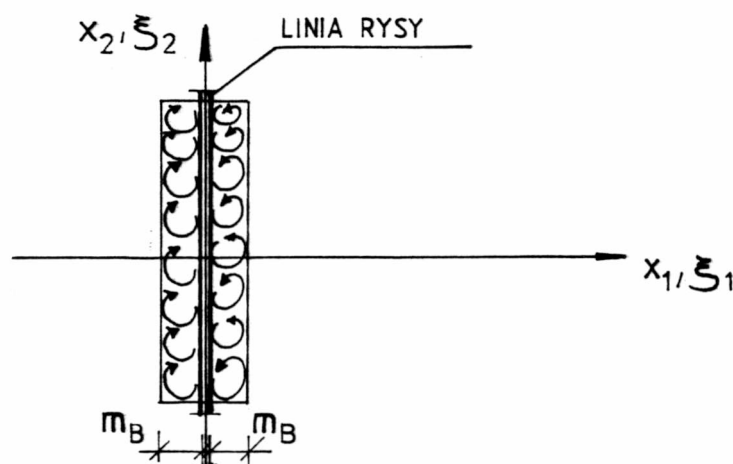


Rys.6.1. Schemat płyty z rysami.

Powierzchnia płyty Ω ograniczona jest linią zamkniętą S . Na krawędziach założono dowolne, jednorodne warunki brzegowe. Wewnątrz obszaru płyty istnieje uogólnione obciążenie $\Phi_k(Q)$. Zarysowanie nastąpiło wzdłuż krzywej $L(\varphi)$. Linia rysy traktowana jest jako brzeg podwójny-szczelina, w którym momenty o wektorze równoległym do linii rysy są równe zero (założono więc, że w miejscu rysy beton nie przenosi naprężeń rozciągających). Naprężenia rozciągające przenoszone są przez pręty zbrojeniowe spinające rysę. W obliczeniach oddziaływanie tych prętów zastąpione zostaje niewiadomymi reakcjami obciążającymi konstrukcję betonową. Jest to więc w pewnym sensie przeniesienie statycznej metody sił do rozwiązywania dźwigarów powierzchniowych. W miejscu hiperstatycznych podpór (więzi) ustawiane są obciążenia. Należy z równań przemiesczeniowych obliczyć ich wartość, czyli szukaną wielkość hiperstatyczną.

6.1. Obliczeniowy model rysy.

W przyjętej metodzie brzeg podwójny obrazujący linię rysy modelowany jest obciążeniem w postaci dipola momentów rozłożonych równomiernie wzdłuż rysy, o wektorze równoległym do linii rysy. Zostało to przedstawione w lokalnym układzie współrzędnych na rys. 6.2.



Rys. 6.2. Dipol momentów zginających modelujący brzeg rysy.

Wartości przemieszczeń i sił wewnętrznych w płycie nieograniczonej, wywołanych przez obciążenie jednostkowym momentem rozłożonym równomiernie wzdłuż odcinka, przedstawiono w rozdziale 4.4. Zgodnie z przyjętą konwencją oznaczmy te funkcje jako $G_{1m}(\bar{x}, \bar{\xi})$. Wektor $u(\bar{x})$ przemieszczeń i sił wewnętrznych w płycie nieograniczonej, wywołany przez dipol momentów o wartości m_B , rozłożonych równomiernie wzdłuż odcinka, wyrazi się wobec tego wzorem

$$u_1(\bar{x}) = m_B [G_{1m}(\bar{x}, \bar{\xi})],_{\xi_1} = m_B G_{1B}(\bar{x}, \bar{\xi}) \quad (6.1)$$

gdzie: $u_1(\bar{x})$ - 1-ty składnik wektora $\bar{u}$;

$\bar{x} = (x_1, x_2)$ - współrzędne rozpatrywanego punktu;

$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ - współrzędne obrazujące miejsce przyłożenia obciążenia;

m_B - wartość dipola momentów rozłożonych równomiernie;

$G_{1B}(\bar{x}, \bar{\xi})$ - funkcja wpływowa od obciążenia dipolem momentów dla 1-tego składnika wektora $\bar{u}$.

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń, przemieszczenia i siły wewnętrzne w płycie nieograniczonej, obciążonej jednostkowym dipolem momentów zginających, rozłożonych równomiernie wzdłuż odcinka $[(0, -d); (0, d)]$, wyraża się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 w(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi D} \left[\bar{x}_2 \ln(r^2/R^2) - 2\bar{x}_2 + 4\bar{x}_1 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-d}^{+d} \\
 \varphi_1(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi D} \left[-2\bar{x}_1 \bar{x}_2 / r^2 + 4 \arctg(\bar{x}_2/\bar{x}_1) \right]_{-d}^{+d} \\
 \varphi_2(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi D} \left[\ln(r^2/R^2) + 2\bar{x}_1^2 / r^2 \right]_{-d}^{+d} \\
 M_1(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi} \left[[2(1+\nu)\bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + (6-\nu)\bar{x}_2^3] / r^4 \right]_{-d}^{+d} \quad (6.2) \\
 M_2(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi} \left[[2(1+\nu)\bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + (6\nu-1)\bar{x}_2^3] / r^4 \right]_{-d}^{+d} \\
 M_{12}(\bar{x}) &= \frac{1}{8\pi} \left[(1-\nu)(2\bar{x}_1^3 + 6\bar{x}_1 \bar{x}_2^2) / r^4 \right]_{-d}^{+d} \\
 Q_1(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi} \left[(8\bar{x}_1^5 \bar{x}_2 + 2\bar{x}_1^3 \bar{x}_2^3 + 12\bar{x}_1 \bar{x}_2^5) / r^8 \right]_{-d}^{+d} \\
 Q_2(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi} \left[(4\bar{x}_1^6 + 7\bar{x}_1^4 \bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^4 - 5\bar{x}_2^6) / r^8 \right]_{-d}^{+d} \\
 A_1(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi} \left[[(4\nu-12)\bar{x}_1^5 \bar{x}_2 + (2-4\nu)\bar{x}_1^3 \bar{x}_2^3 - (4+8\nu)\bar{x}_1 \bar{x}_2^5] / r^8 \right]_{-d}^{+d} \\
 A_2(\bar{x}) &= - \frac{1}{8\pi} \left[[(6-2\nu)\bar{x}_1^6 + (21-14\nu)\bar{x}_1^4 \bar{x}_2^2 + (4-6\nu)\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^4 + \right. \\
 &\quad \left. - (11-6\nu)\bar{x}_2^6] / r^8 \right]_{-d}^{+d}
 \end{aligned}$$

gdzie: $\bar{x}_1 = x_1 - \xi_1$
 $\bar{x}_2 = x_2 - \xi_2$

$\left[\begin{array}{c} +d \\ -d \end{array} \right] - \text{różnica wyrażeń w granicach} \left. \vphantom{\begin{array}{c} +d \\ -d \end{array}} \right\}_{\xi_2 = +d}^{\xi_2 = -d}$
 pozostałe oznaczenia jak we wzorach (4.4).

Na rysunkach 6.3, 6.4, 6.5 przedstawiono graficznie przebieg zmienności funkcji wpływowych $w(\bar{x})$, $\varphi(\bar{x})$ i $M(\bar{x})$.

Obciążenie dipolem momentów powoduje, zgodnie z założeniami przyjętymi na początku niniejszego opracowania, skok wartości kątów ugięcia płyty na linii rysy (jest to dobrze widoczne na rys. 6.4), równy kątowi jej rozwarcia. Przy danych wartościach obciążeń modelujących m_B możliwe jest obliczenie tych dyslokacji, potrzebnych do wyznaczenia obciążeń od prętów zbrojenia. Wyraża się one wzorem

$$\Delta\varphi = \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^+} [m_B G_{\varphi B}(\bar{x}, \bar{\xi})] - \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} [m_B G_{\varphi B}(\bar{x}, \bar{\xi})] \quad (6.3)$$

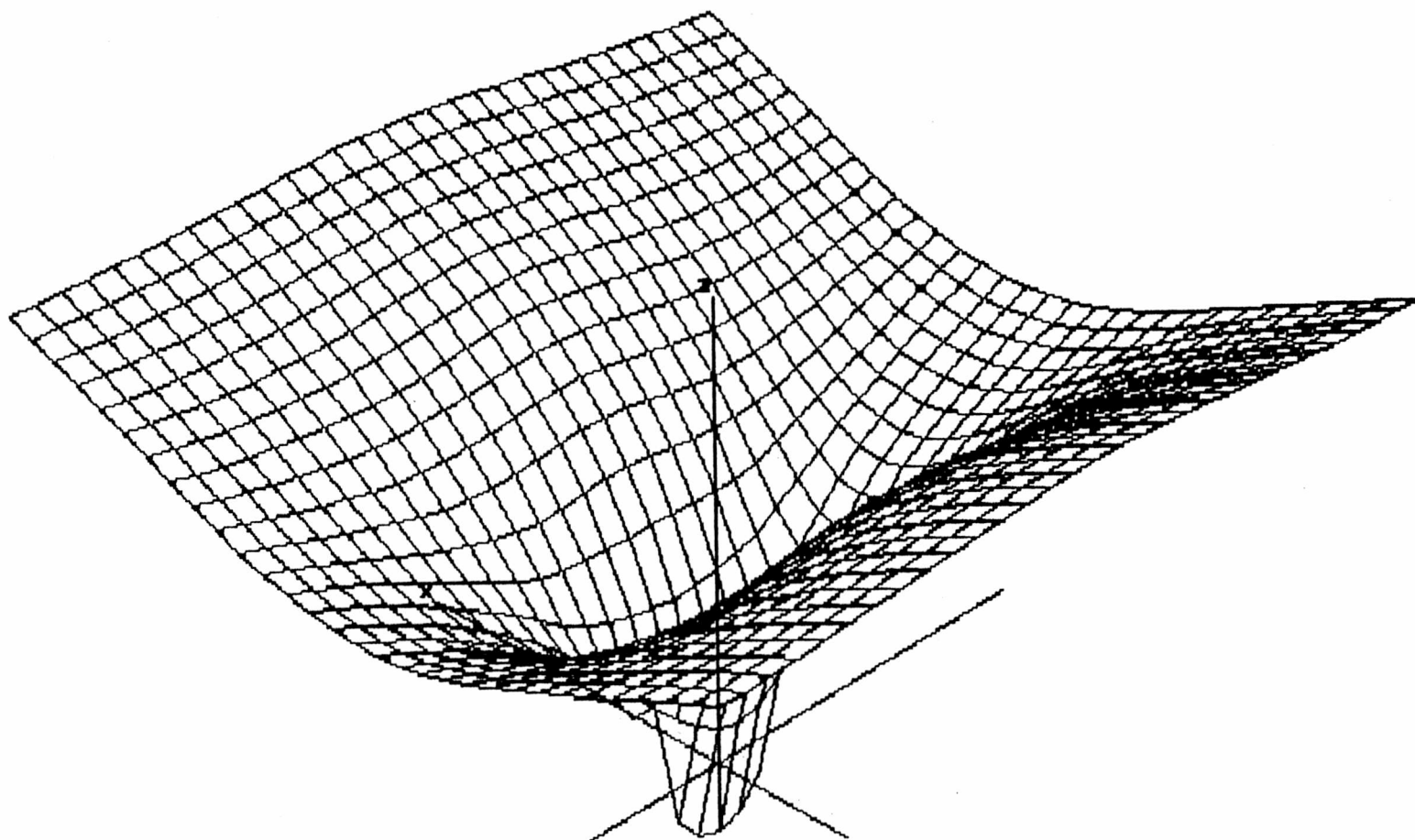
gdzie: $\Delta\varphi$ - wartość dyslokacji katowej wywołanej przez obciążenie dipolem momentów;

$G_{\varphi B}(\bar{x}, \bar{\xi})$ - funkcja wpływowa kątów ugięcia płyty od obciążenia dipolem momentów.

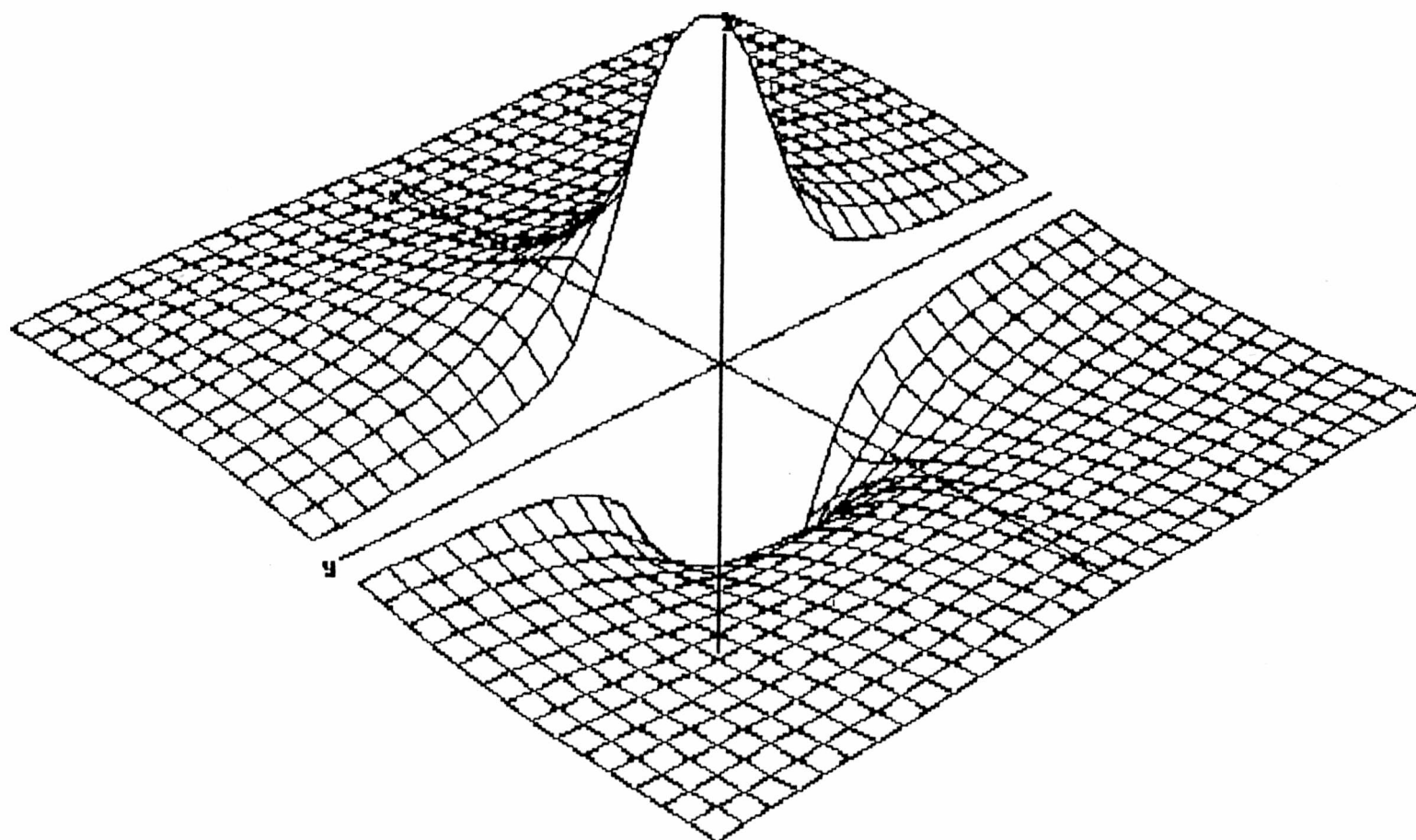
Po wyliczeniu wartości granicznych otrzymano

$$\Delta\varphi = \frac{m_B}{D} \quad (6.4)$$

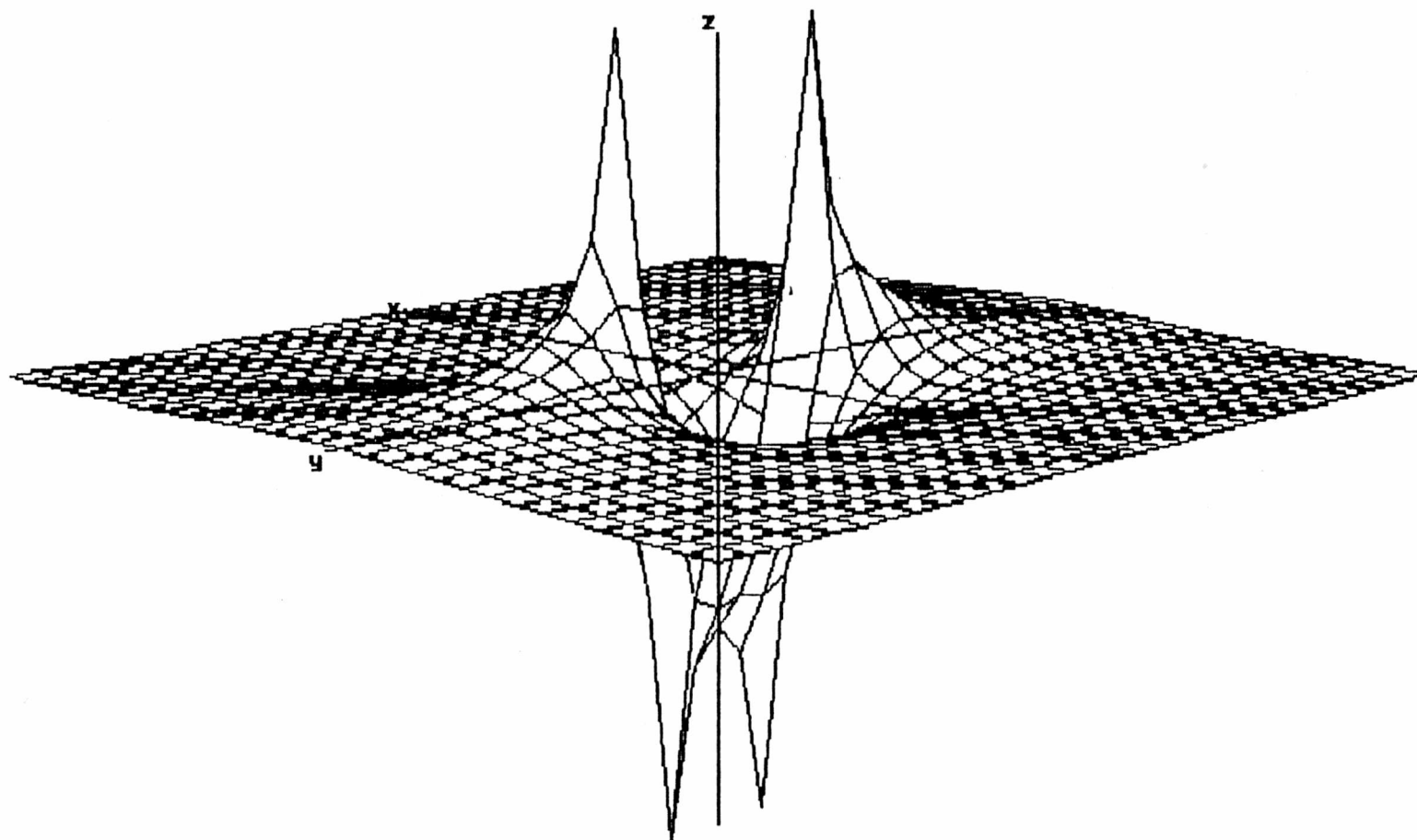
gdzie: D - sztywność płyty.



Rys.6.3. Funkcja wpływowa ugięcia $w(x)$ od działania
bimomentu modelującego linię rysy



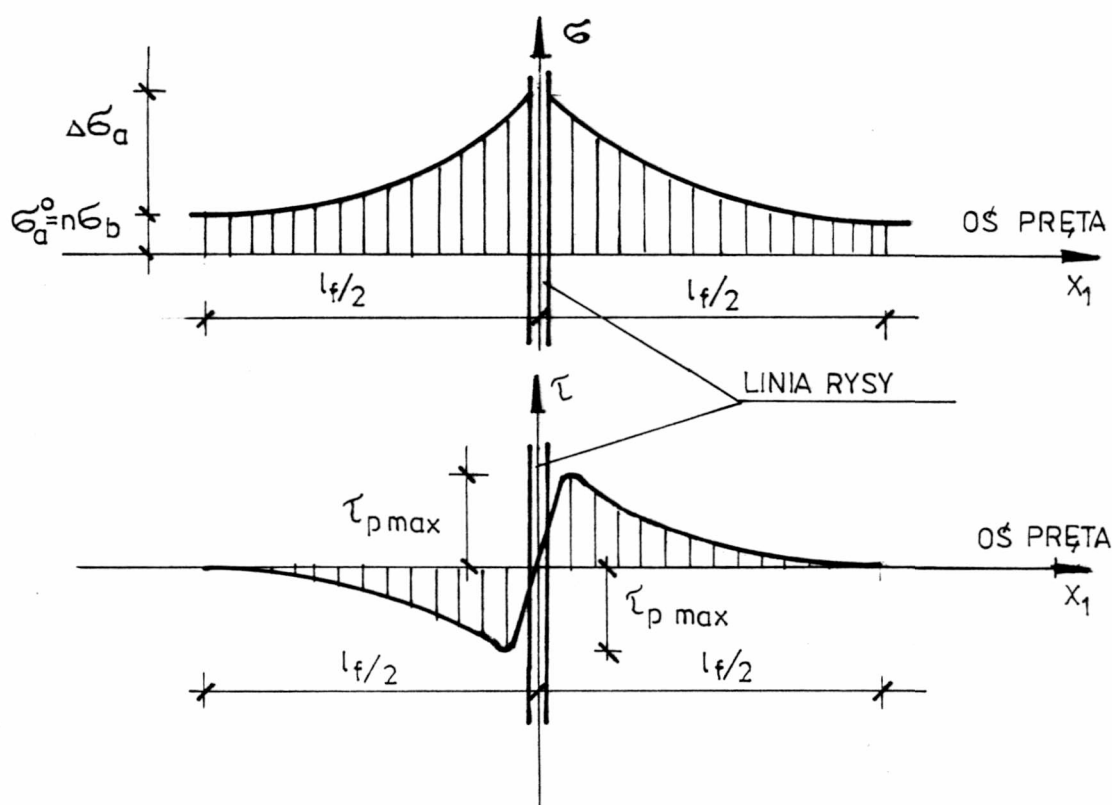
Rys.6.4. Funkcja wpływowa kąta ugięcia $\varphi(\bar{x})$ od działania
bimomentu modelującego linię rysy



Rys.6.5. Funkcja wpływowa momentu zginającego $M(\bar{x})$ od działania bimomentu modelującego linię rysy

6.2. Obliczeniowy model zbrojenia.

Naprężenia rozciągające normalne do kierunku rysy przenoszone są przez pręty zbrojeniowe. Na odcinku naruszonej przyczepności pręt zbrojeniowy współpracuje z betonem poprzez naprężenia styczne rozłożone na jego obwodzie. Przyrost naprężeń rozciągających i stycznych w miejscu zarysowania ma charakter przedstawiony na rys.6.6



Rys.6.6. Rozkład naprężeń rozciągających σ_a i stycznych τ_p wokół miejsca zarysowania.

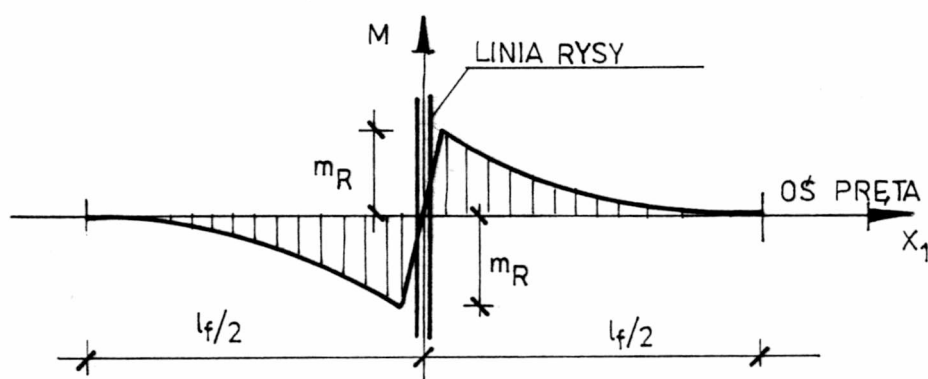
Według Godyckiego-Ćwirko [51] przebieg zmienności przyrostu naprężeń może być w przybliżeniu zaaprosymowany krzywą trzeciego stopnia

$$\Delta\sigma_a(x_1) = \Delta\sigma_a \left(1 - \frac{x_1}{0.5l_f}\right)^3 \quad (6.5)$$

Wynika stąd rozkład naprężeń stycznych w postaci krzywej drugiego stopnia

$$\tau_p(x_1) = \tau_{pmax} \left(1 - \frac{x_1}{0.5l_f}\right)^2 \quad (6.6)$$

Dla płyty wygodniej jest zamodelować siły współdziałania za pomocą momentów zginających działających wzdłuż osi pręta, o wektorze prostopadłym do jego osi, tak jak zostało to przedstawione na rys.6.7.



Rys.6.7. Rozkład momentów zginających modelujących oddziaływanie pręta zbrojeniowego.

Zależność między tymi momentami zginającymi a siłami stycznymi wyraża się wzorem

$$m_R = u_a \tau_{pmax} z_f \quad (6.7)$$

gdzie: τ_{pmax} - maksymalne naprężenie styczne wg rys.6.6 ;

u_a - obwód pręta;

z_f - ramię działania sił w przekroju zarysowanym.

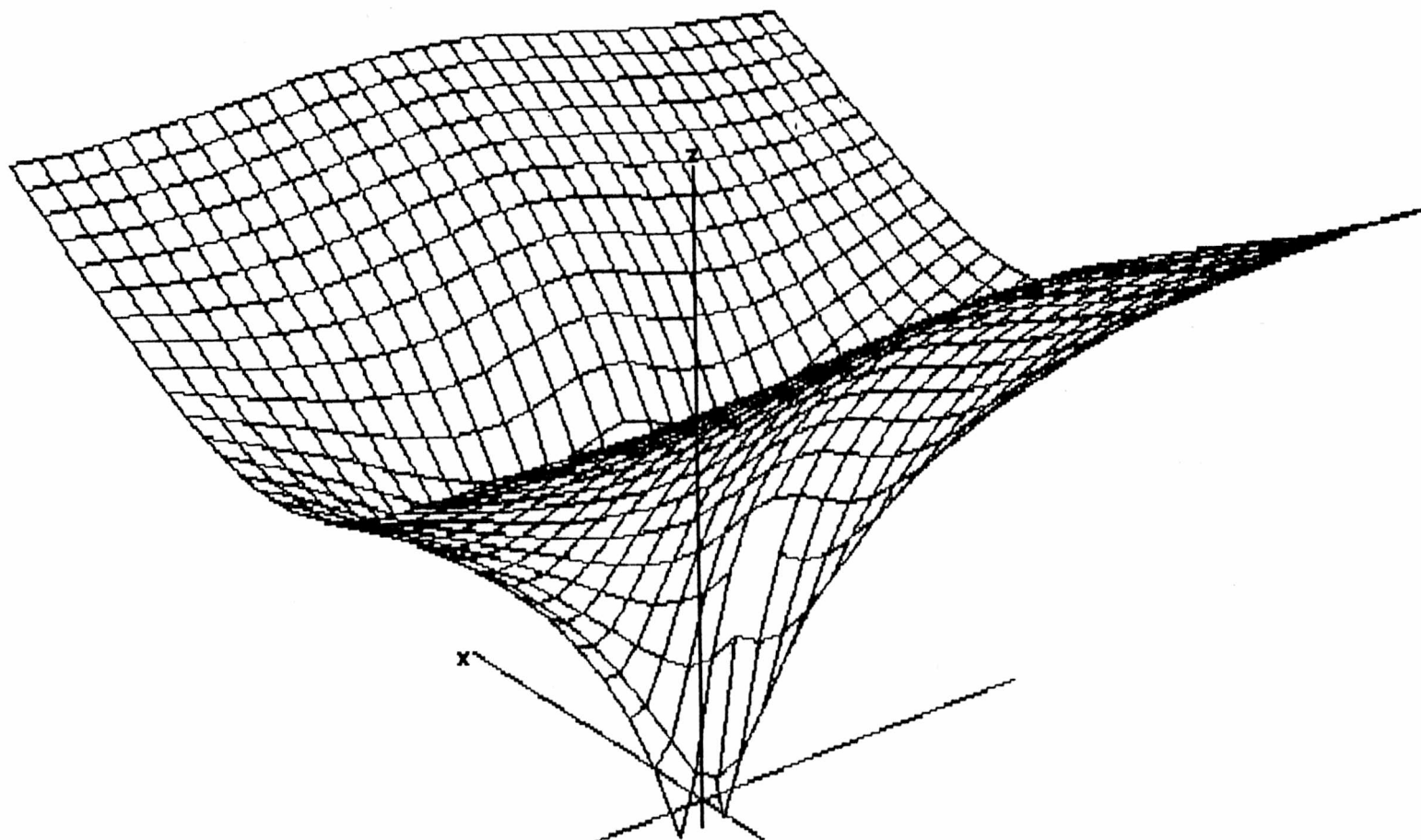
Wartości sił i przemieszczeń w płycie nieograniczonej od tego rodzaju obciążenia można wyznaczyć wg wzoru

$$u_1(\bar{x}) = \int_{-0.5l_f}^0 -G_{1M}(\bar{x}, \bar{\xi}) \left(1 + \frac{\xi_1}{0.5l_f}\right)^2 d\xi_1 +$$

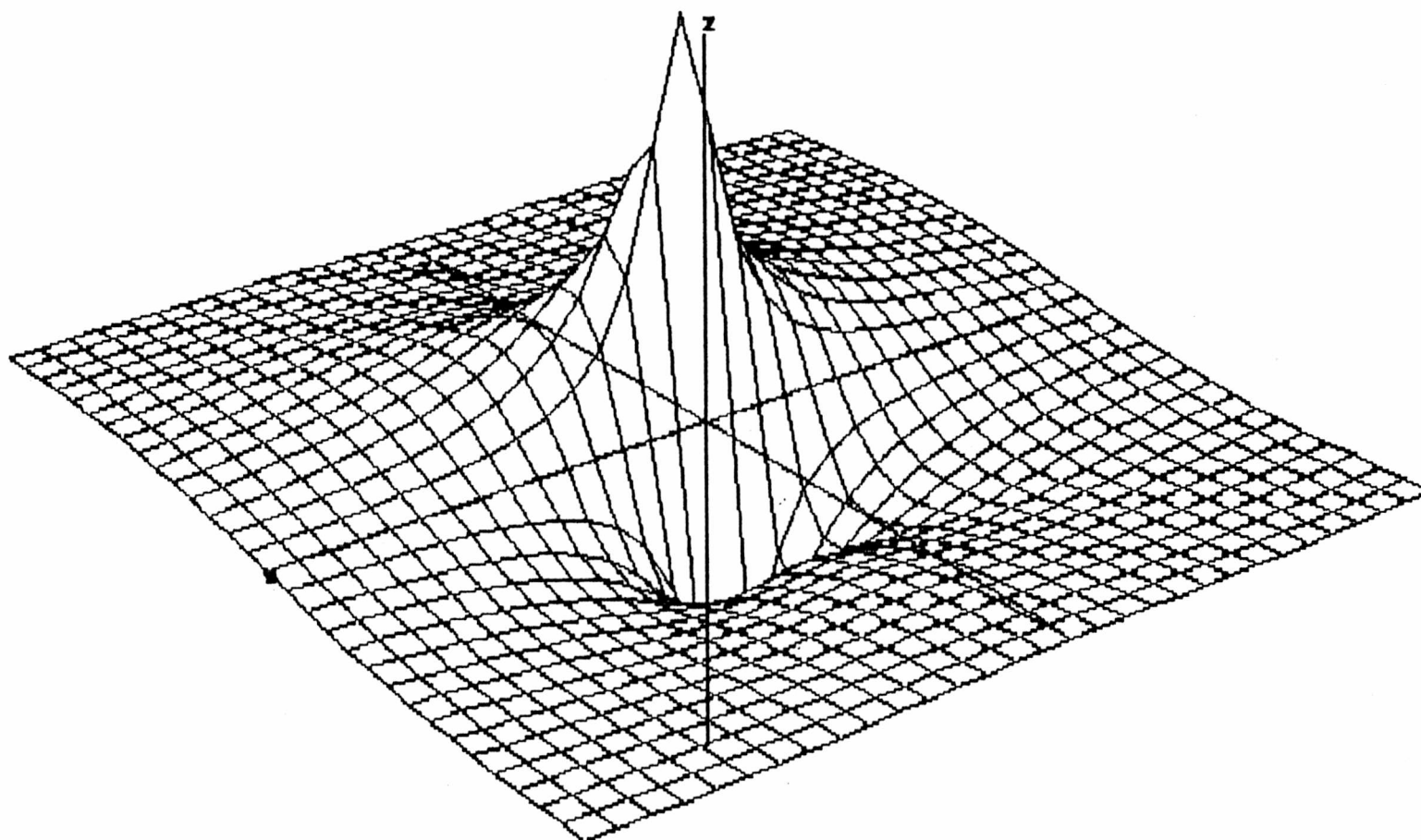
$$+ \int_0^{0.5l_f} G_{1M}(\bar{x}, \bar{\xi}) \left(1 - \frac{\xi_1}{0.5l_f}\right)^2 d\xi_1 \quad (6.8)$$

gdzie: $G_{1M}(\bar{x}, \bar{\xi})$ - funkcje wpływowe dla 1-tego składnika wektora $\bar{u}$ od działania momentu zginającego wg wzorów (4.6).

Ze względu na bardzo długie rozwinięcia tych funkcji nie zamieszczono ich w sposób jawny w niniejszym opracowaniu. Przykładowo przedstawiono natomiast na rys. 6.8, 6.9 i 6.10 w sposób graficzny przebieg zmienności tych funkcji dla ugięć- $w(\bar{x})$, kątów ugięcia- $\phi(\bar{x})$ i momentów zginających- $M(\bar{x})$.

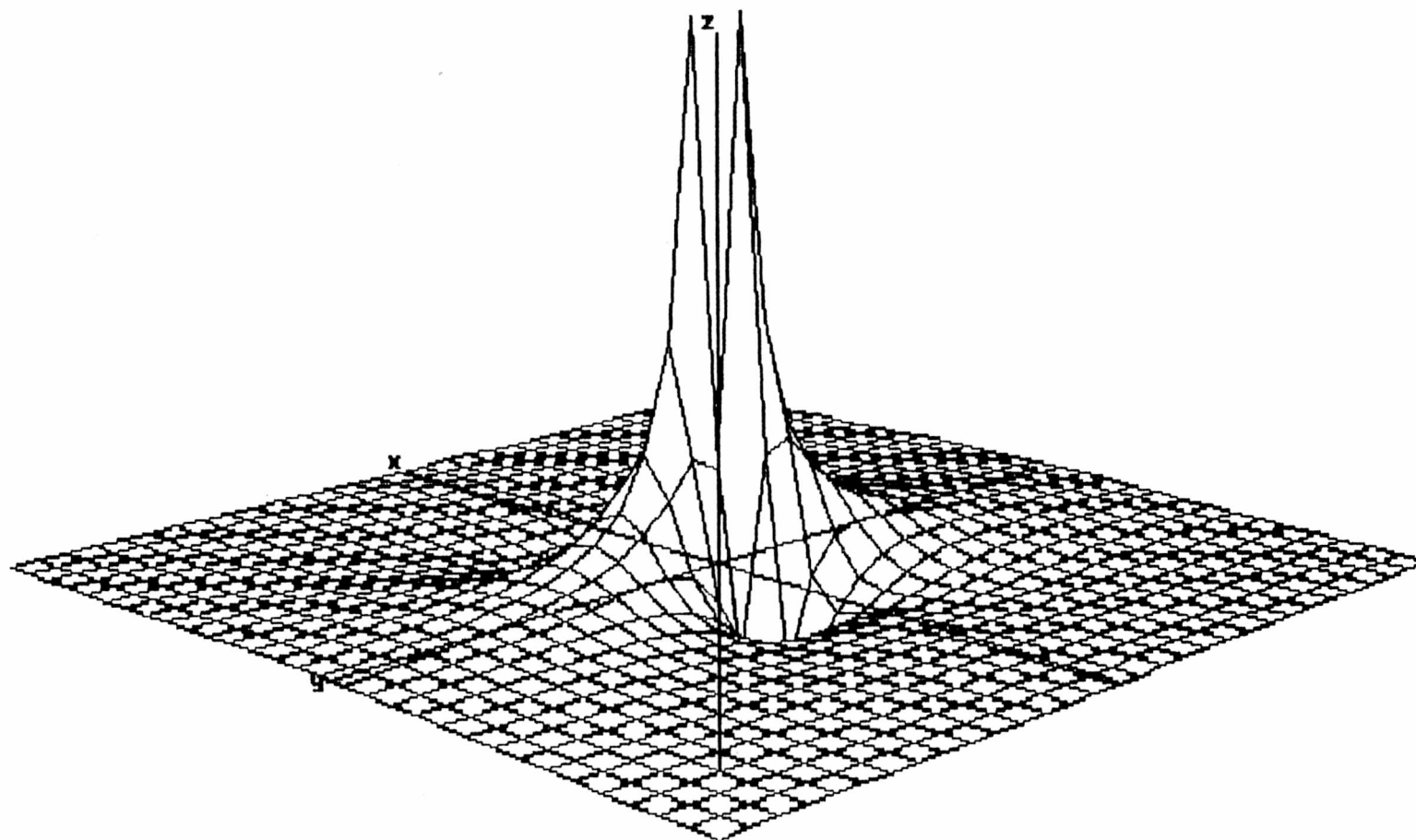


Rys. 6.8. Funkcja wpływowa ugięcia $w(\bar{x})$ od obciążenia modelującego oddziaływanie prętów zbrojeniowych.



55

Rys.6.9. Funkcja wpływowa kątów ugięcia $\varphi(\bar{x})$ od obciążenia modelującego oddziaływanie prętów zbrojeniowych.



Rys. 6.10. Funkcja wpływowa momentu zginającego $M(\bar{x})$ od obciążenia modelującego oddziaływanie prętów zbrojeniowych.

6.3. Wyznaczenie przemieszczeń i sił wewnętrznych w płycie zarysowanej.

Rozważmy płytę z rysami. Zgodnie z przyjętymi założeniami miejsce rysy zadane jest w sposób deterministyczny lub można je wyznaczyć. Linia rysy traktowana jest jako brzeg podwójny modelowany dipolem momentów wg rozdziału 6.1. Pręty zbrojeniowe spinające rysę zastąpione zostają niewiadomymi reakcjami obciążającymi konstrukcję betonową - momentami rozłożonymi krzywoliniowo wzdłuż osi pręta wg rozdziału 6.2. Należy z równań zgodności przemieszczeń wyliczyć maksymalne wartości m_R tych momentów. W tym przypadku warunek ten odnosi się do wielkości kąta rozwarcia rysy i zapisany zostanie jedynie dla części sprężystej odkształceń. Sposób uwzględniania oddziaływania odkształceń resztkowych pokazano w rozdziale 6.4. Wobec tego zgodnie z wyrażeniem (5.1), równania zgodności przemieszczeń, przy założeniu dyskretyzacji linii rysy na ilość odcinków równą liczbie przecinanych przez nią prętów zbrojenia, można zapisać w następujący sposób

$$[\varphi_0] + [\varphi_R] = [r_1] [1] [m_R] \quad (6.9)$$

gdzie: $[\varphi_0]$ - wektor kątów rozwarcia rysy wywołanych przez obciążenie zewnętrzne $\Phi_k(Q)$ w punktach przecięcia prętów zbrojenia z linią rysy;

$[\varphi_R]$ - wektor kątów rozwarcia rysy wywołanych przez obciążenie modelujące oddziaływanie prętów zbrojenia w punktach ich przecięcia z linią rysy;

$[r_1]$ - wektor współczynników proporcjonalności między kątem rozwarcia rysy a momentem zginającym w rysie;

$[m_R]$ - wektor momentów zginających modelujących oddziaływanie prętów zbrojeniowych;

$[1]$ - macierz jednostkowa.

Wektor $[\varphi_0]$ kątów rozwarcia rysy wywołanych przez obciążenie zewnętrzne można wyznaczyć wg równania (6.4) ze wzoru

$$[\varphi_0] = \frac{1}{D} [m_{BQ}] \quad (6.10)$$

gdzie: D - sztywność płyty;

$[m_{BQ}]$ - wektor dipoli momentów modelujących rysę wywołanych obciążeniem zewnętrznym $\Phi_k(Q)$.

Wektor $[m_{BQ}]$ uzyskuje się rozwiązując płytę z zamodelowanymi szczelinami (brzegiem podwójnym) od obciążenia zewnętrznego.

Wektor $[\varphi_R]$ kątów rozwarcia rysy wywołanych przez obciążenie modelujące oddziaływanie prętów zbrojenia, otrzymuje się również korzystając z równania (6.4) wg wzoru

$$[\varphi_R] = \frac{1}{D} [m_{BR}] [m_R] \quad (6.11)$$

gdzie: $[m_{BR}]$ - macierz wpływu dipoli momentów modelujących linię rysy wywołanych jednostkowymi wartościami momentów zastępujących oddziaływanie prętów zbrojenia.

Macierz $[m_{BR}]$ uzyskuje się rozwiązując płytę z zamodelowanymi szczelinami (brzegiem podwójnym) kolejno od wszystkich jednostkowych sił modelujących oddziaływanie prętów zbrojeniowych.

Wstawiając zależności (6.10) i (6.11) do równania (6.9) otrzymano

$$\frac{1}{D} [m_{BQ}] + \frac{1}{D} [m_{BR}] [m_R] = [r_1] [1] [m_R] \quad (6.12)$$

stad

$$[m_R] = \left\{ [r_1] [1] - \frac{1}{D} [m_{BR}] \right\}^{-1} * \frac{1}{D} [m_{BQ}] \quad (6.13)$$

Wartości wektora $[m_{BQ}]$ oraz macierzy wpływu $[m_{BR}]$ wyznacza się za pomocą Pośredniej Metody Elementów Brzegowych i funkcji wpływu Green'a przedstawionych w rozdziałach 6.1 i 6.2, przy schemacie płyty z brzegiem podwójnym (szczeliną), modelującym linię rysy. Wektor współczynników proporcjonalności $[r_1]$ oblicza się wg rozdziału 5.3 uwzględniając sposób rozłożenia momentu M_n oraz kąt przecięcia prętów zbrojenia z rysą. Po otrzymaniu tych wartości, z równania (6.13) wyznacza się wektor $[m_R]$ modelujący oddziaływanie prętów zbrojeniowych w miejscu rysy. Mając obliczone wartości wektora $[m_R]$ i traktując je jako pewnego rodzaju obciążenie

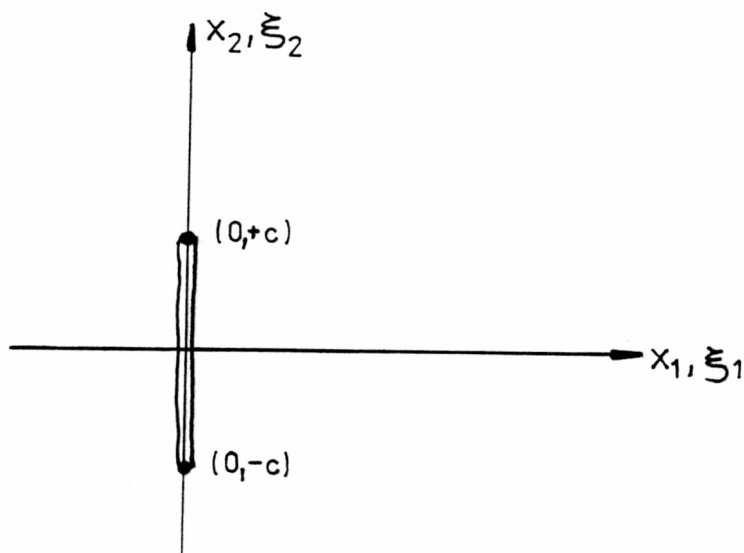
zewewnętrzne, można już wyliczyć, korzystając z zależności (4.18) i (4.19), przemieszczenia, siły wewnętrzne, naprężenia w prętach zbrojeniowych oraz kąty rozwarcia rys w zarysowanej płycie żelbetowej o dowolnym schemacie statycznym. Dla otrzymania pełnego opisu stanu wyężenia rozpatrywanego elementu, należy - zgodnie z założeniami przyjętymi w rozdziale 5.2, uwzględnić wpływ odkształceń resztkowych, sumując wywołane przez nie przemieszczenia i siły wewnętrzne z tymi obliczonymi powyżej. Sposób obliczania przemieszczeń i sił wewnętrznych w płytach żelbetowych od resztkowych kątów rozwarcia rys $[r_0]$ przedstawiono w rozdziale 6.4.

6.4. Określenie przemieszczeń i sił wewnętrznych wywołanych w płycie przez wektor resztkowych kątów rozwarcia rysy $[r_0]$.

Dla otrzymania przemieszczeń i sił wewnętrznych wywołanych w płycie żelbetowej przez wektor resztkowych kątów rozwarcia rys $[r_0]$, posłużono się rachunkiem dystrybucyjnym. W tym celu przyjęto dystrybucje δ - Dirac'a i Heaviside'a o następujących własnościach:

$$\begin{aligned} \delta(x-\xi) &= 0 \text{ dla } x \neq \xi \\ &= \infty \text{ dla } x = \xi \\ HC(x-\xi) &= 0 \text{ dla } x \leq \xi \\ &= 1 \text{ dla } x > \xi \end{aligned} \tag{6.14}$$

Przyjęto kartezjański układ współrzędnych, w którym osie x_1 i x_2 wyznaczają powierzchnię środkową płyty, a oś x_3 kierunek ugięcia. Pod wpływem obciążenia dowolny punkt płyty doznaje przemieszczenia o składowych u_1 , u_2 , w. Rozważa się rysę prostoliniową, usytuowaną w początku układu współrzędnych, jak pokazano na rys. 6.11.



Rrs.6.11. Usytuowanie rysy względem układu współrzędnych.

Niech gęstość kąta rozwarcia rysy będzie określona przez funkcję $\varphi(x_2)$. Wielkość skoku kąta ugięcia płyty na linii rysy można zapisać w postaci

$$d\varphi = \varphi(x_2) H(x_1) [H(x_2+c) - H(x_2-c)] \quad (6.15)$$

Przyjmując dla prostoty zapisu $H(x_2+c) - H(x_2-c) = \hat{H}(x_2)$ otrzymano

$$d\varphi = \varphi(x_2) H(x_1) \hat{H}(x_2) \quad (6.16)$$

Przemieszczenia u_1 i u_2 dla dowolnego punktu płyty wyraża się wobec tego wzorami

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_3 \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} + \varphi(x_2) H(x_1) \hat{H}(x_2) \right] \\ u_2 &= -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Odkształcenia zapiszą się odpowiednio

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_3 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \varphi H,_{x_1} \hat{H} \right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -x_3 \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \varphi, x_2^H \hat{H} + \right. \\ \left. + \varphi^H \hat{H}, x_2 \right) \end{aligned}$$

Korzystając z zależności między odkształceniami a naprężeniami otrzymano

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) = - \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \varphi^H, x_1^H \hat{H} \right) \quad (6.19)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) = - \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \varphi^H, x_1^H \hat{H} \right)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12} = - \frac{Ex_3}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 0.5 \varphi, x_2^H \hat{H} + 0.5 \varphi^H \hat{H}, x_2 \right)$$

Momenty zginające w płycie wyraża się wzorami

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{11} x_3 dx_3 \\ M_{22} &= \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{22} x_3 dx_3 \\ M_{12} &= \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{12} x_3 dx_3 \end{aligned} \quad (6.20)$$

gdzie: h - stała na całym obszarze grubość płyty.

Podstawiając do tych wyrażeń wzory na naprężenia otrzymano

$$M_{11} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \varphi H, x_1 \hat{H} \right)$$

$$M_{22} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \varphi H, x_1 \hat{H} \right) \quad (6.21)$$

$$M_{12} = -D (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 0.5 \varphi, x_2 H \hat{H} + 0.5 \varphi H \hat{H}, x_2 \right)$$

gdzie: D - sztywność płyty;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Wykorzystując równania równowagi dla płyty uzyskano wyrażenia określające siły tnące i związki pomiędzy nimi w postaci

$$Q_1 = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}$$

$$Q_2 = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + p = 0$$

gdzie: p - obciążenie zewnętrzne.

Po wstawieniu do 2 pierwszych równań (6.22) wyrażeń (6.21), wzory na siły tnące przyjmą postać

$$Q_1 = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \varphi H, x_1 x_1 \hat{H} + 0.5(1-\nu) \varphi, x_2 x_2 H \hat{H} + \right.$$

$$\left. + (1-\nu) \varphi, x_2 H \hat{H}, x_2 + 0.5(1-\nu) \varphi H \hat{H}, x_2 x_2 \right] \quad (6.23)$$

$$Q_2 = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial x_1^2} + 0.5(1+\nu) \varphi_{,x_2} H_{,x_1} \hat{H} + 0.5(1+\nu) \varphi H_{,x_1} \hat{H}_{,x_2} \right]$$

Wstawiając do ostatniego z równań (6.22) wzory (6.23) oraz dokonując odpowiednich przekształceń, otrzymano równanie różniczkowe płyty zarysowanej w postaci

$$\Delta \Delta w + \Delta \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi H \hat{H}) \right] = \frac{P}{D} \quad (6.24)$$

gdzie: Δ - operator różniczkowy;

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$$

6.5. Określenie funkcji wpływowych przemieszczeń i sił wewnętrznych wywołanych w płycie nieograniczonej przez zarysowanie o danym kącie rozwarcia.

Przy założeniu, że obciążenie zewnętrzne jest równe zeru, równanie (6.24) zapisze się jako

$$\Delta \Delta w + \Delta \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi H \hat{H}) \right] = 0 \quad (6.25)$$

Dokonując odpowiednich przekształceń i oznaczając

$$\hat{\delta}(x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} [\hat{H}(x_2)] = \delta(x_2+c) - \delta(x_2-c)$$

otrzymano

$$\Delta \Delta w = p^* \quad (6.26)$$

$$\text{gdzie: } p^* = -(\varphi \delta_{,x_1 x_1} \hat{H} + 2\varphi_{,x_2} \delta \hat{H} + \varphi_{,x_2 x_2} \delta \hat{H} + \varphi \delta \delta_{,x_2})$$

Prawą stronę równania (6.26) można traktować jako pewnego rodzaju obciążenie zewnętrzne. Oznaczając położenie rysy współzrzednymi (ξ_1, ξ_2) , wyrażenie p^* zapisze się w postaci

$$\begin{aligned}
p^*(\xi_1, \xi_2) = & - [\varphi(\xi_2) \delta_{,\xi_1} \xi_1^{(\xi_1)} \hat{H}(\xi_2) + 2\varphi_{,\xi_2}(\xi_2) \delta(\xi_1) \hat{\delta}(\xi_2) + \\
& + \varphi_{,\xi_2} \xi_2^{(\xi_2)} \delta(\xi_1) \hat{H}(\xi_2) + \varphi(\xi_2) \delta(\xi_1) \hat{\delta}_{,\xi_2}(\xi_2)] \quad (6.27)
\end{aligned}$$

Zapisując funkcję wpływową Green'a w postaci

$$G(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{1}{16\pi} (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \ln \left(\frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{R^2} \right)$$

gdzie: $\bar{x}_1 = x_1 - \xi_1$;

$\bar{x}_2 = x_2 - \xi_2$;

$\bar{x} = (x_1, x_2)$

$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$

R - promień porównawczy;

otrzymano, przez analogię z rozważaniami przedstawionymi w rozdziale 4.1, rozwiązanie równania (6.26) w postaci

$$\begin{aligned}
w(x_1, x_2) = & - \int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{x}, \bar{\xi}) \varphi(\xi_2) \delta_{,\xi_1} \xi_1^{(\xi_1)} \hat{H}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\
& - 2 \int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{x}, \bar{\xi}) \varphi_{,\xi_2}(\xi_2) \delta(\xi_1) \hat{\delta}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{x}, \bar{\xi}) \varphi_{,\xi_2} \xi_2^{(\xi_2)} \delta(\xi_1) \hat{H}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{x}, \bar{\xi}) \varphi(\xi_2) \delta(\xi_1) \hat{\delta}_{,\xi_2}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.28)
\end{aligned}$$

Dystrybucje δ - Dirac'a i Heaviside'a posiadają następujące własności:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \delta(x-\xi) dx = K(\xi) \\
& \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \delta_{,x}(x-\xi) dx = -K_{,x}(\xi) \\
& \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \delta_{,xx}(x-\xi) dx = K_{,xx}(\xi) \\
& \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \hat{H}(x) dx = \int_{-c}^c K(x) dx
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Korzystając z tych zależności równanie (6.28) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
w(\bar{x}) = \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} & \left\{ \int_{-c}^c G_{,\xi_1 \xi_1}(\bar{x}, \bar{\xi}) \varphi(\xi_2) d\xi_2 - \int_{-c}^c G(\bar{x}, \bar{\xi}) \varphi_{,\xi_2 \xi_2}(\xi_2) d\xi_2 + \right. \\
& \left. + G(\bar{x}, \bar{\xi}) \varphi_{,\xi_2}(\xi_2) \Big|_{-c}^{+c} - G_{,\xi_2}(\bar{x}, \bar{\xi}) \varphi(\xi_2) \Big|_{-c}^{+c} \right\}
\end{aligned} \tag{6.30}$$

gdzie: $\bar{x} = (x_1, x_2)$;
 $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$;

$\Big|_{-c}^{+c}$ - różnica wyrażeń w granicach $\Big|_{\xi_2=-c}^{\xi_2=+c}$

Wyrażenie to przedstawia ugięcie płyty nieograniczonej, wywołane zarysowaniem o szerokości kąta rozwarcia rysy $\varphi(\xi_2)$. Funkcje wpływowe pozostałych przemieszczeń i sił wewnętrznych można uzyskać analogicznie jak w rozdziale 4.2, korzystając z zależności (6.30). Ze względu na bardzo długie rozwinięcia tych funkcji, nie przedstawiono ich w sposób jawny w niniejszym opracowaniu. Przykładowo pokazano

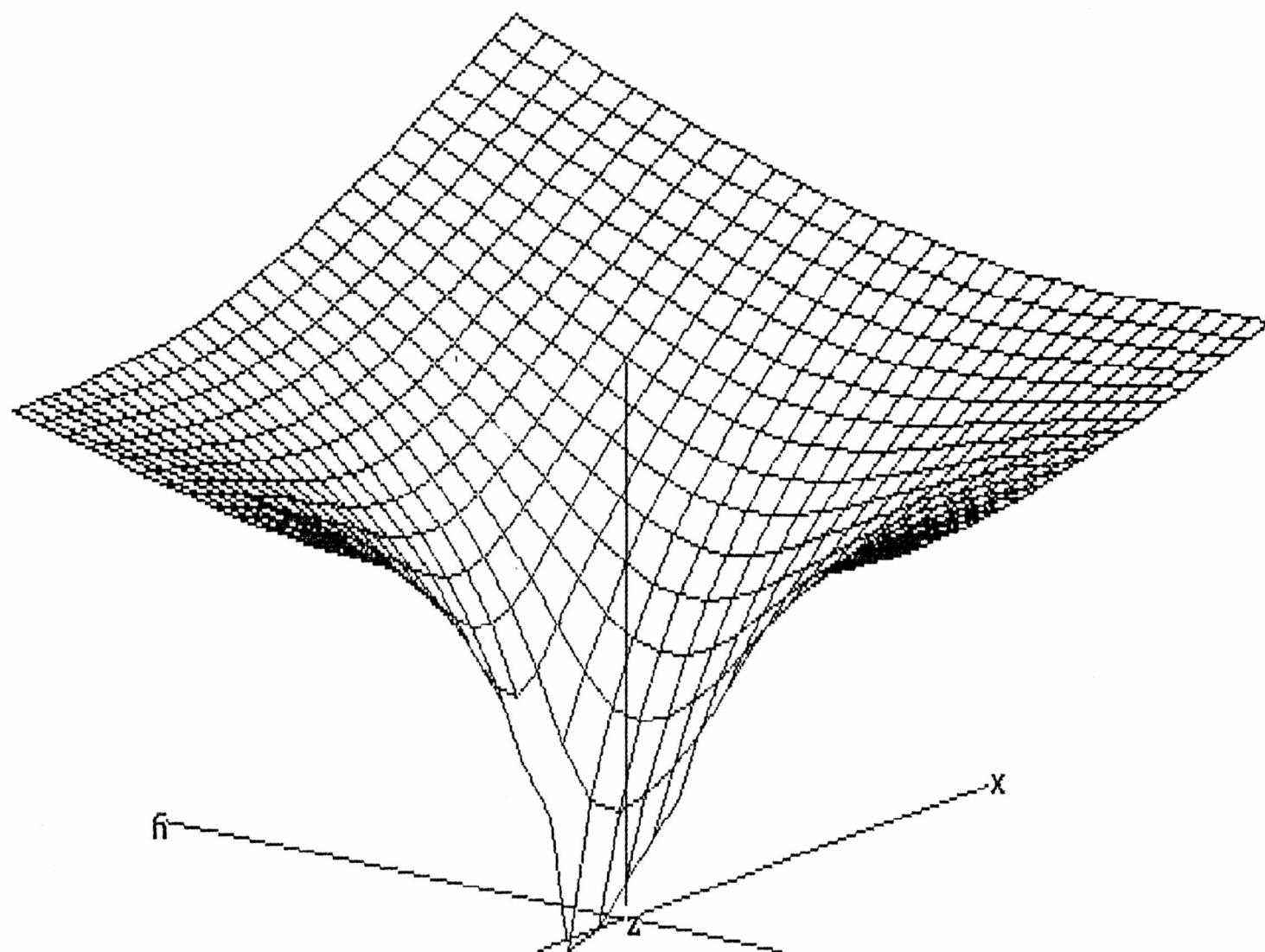
natomiast na rys. 6.12, 6.13 i 6.14 w sposób graficzny przebieg zmienności funkcji wpływowej ugięć - $w(\bar{x})$, kątów ugięcia - $\varphi(\bar{x})$ i momentów zginających - $M(\bar{x})$, przy przyjęciu funkcji kątów rozwarcia rysy $\varphi(\xi_2)$ w postaci

$$\varphi(\xi_2) = A \xi_2^2 + B \quad (6.31)$$

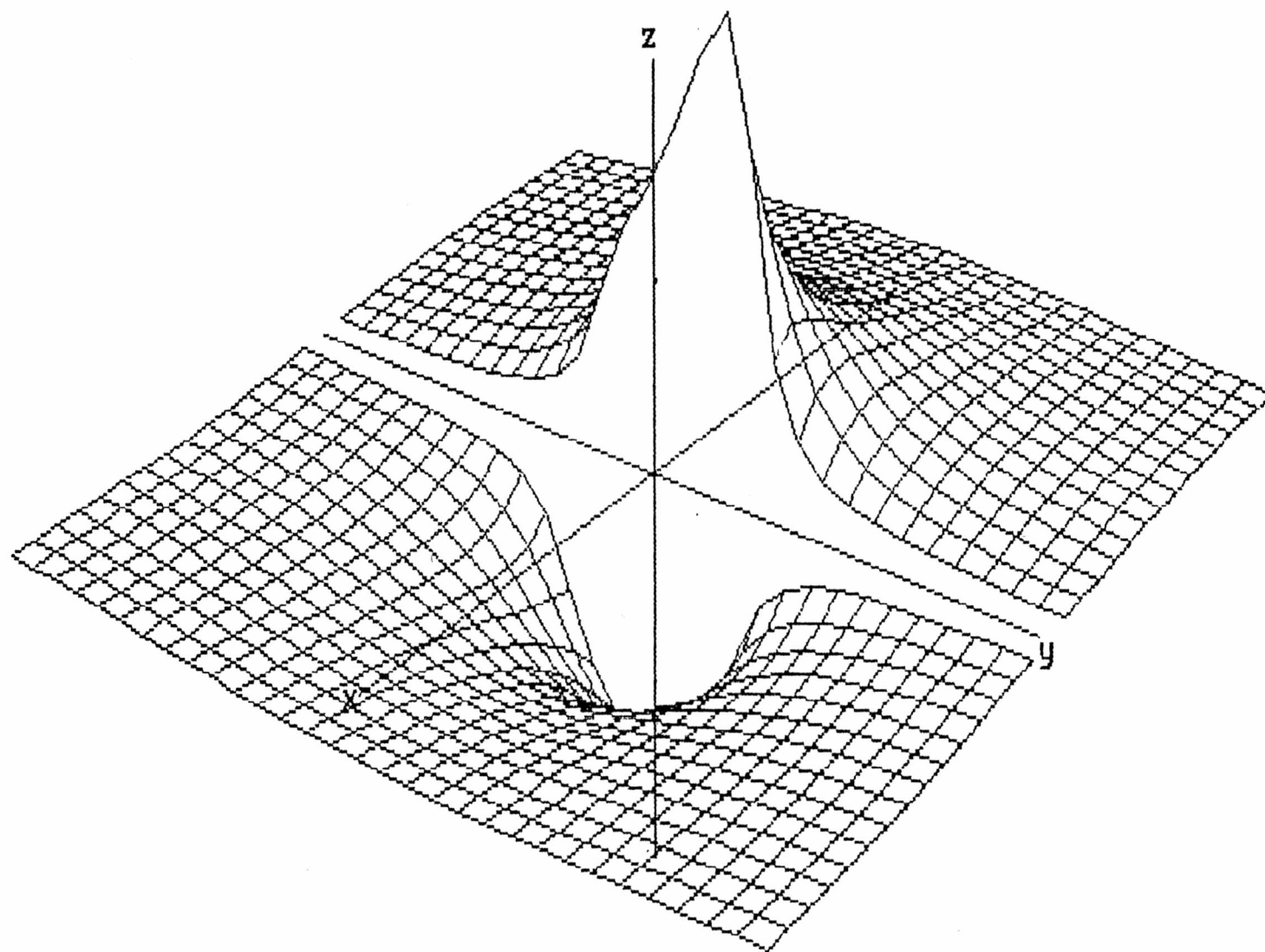
gdzie: A, B - stałe.

Na rysunku 6.13 jest dobrze pokazany, zgodnie z przyjętymi założeniami, skok kątów ugięcia płyty w miejscu zarysowania. Wyraźnie widoczne jest także podobieństwo tych wykresów do analogicznych otrzymanych od oddziaływania bimomentu modelującego rysę i przedstawionych na rys. 6.3, 6.4 i 6.5. Świadczyć to może o poprawności przeprowadzonych wyżej rozważań.

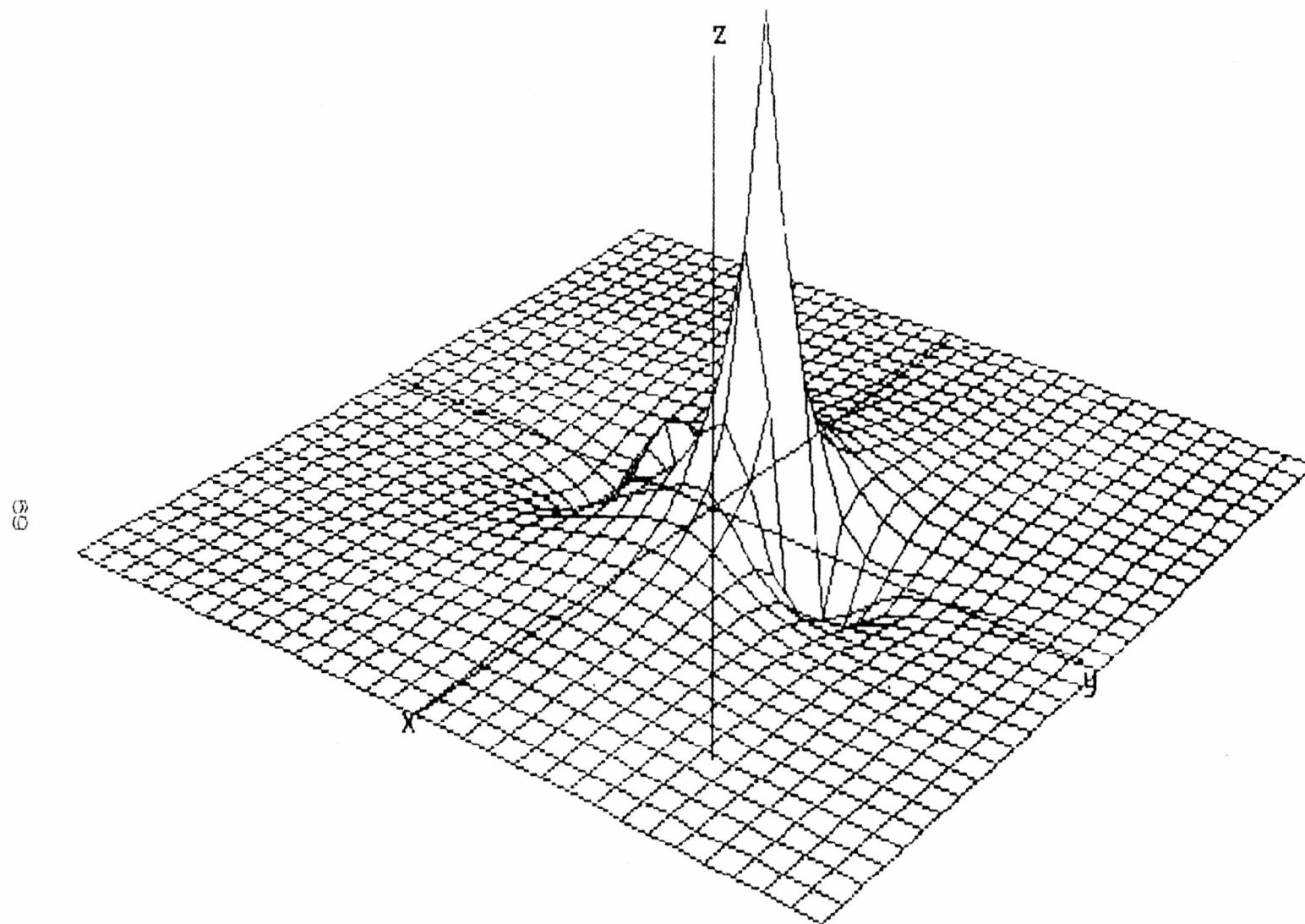
Przemieszczenia i siły wewnętrzne w płycie zarysowanej o zadanych warunkach brzegowych, wywołane przez pole odkształceń resztkowych, oblicza się w sposób pokazany w rozdziale 6.3, przyjmując w równaniu (6.12) prawą stronę równą wektorowi $[r_0]$ resztkowych kątów rozwarcia rys. Zakłada się, że wektor ten jest dany lub można go wyznaczyć wg rozdziału 5.4.



Rys.6.12. Funkcja wpływowa ugięcia $w(\bar{x})$ od oddziaływania
 rysy o określonym kącie rozwarcia.



Rys. 6.13. Funkcja wpływowa kątów ugięcia $\varphi(\bar{x})$ od oddziaływania rysy o określonym kącie rozwarcia.



Rys.6.14. Funkcja wpływowa momentu zginającego $M(x)$ od oddziaływania rysy o określonym kącie rozwarcia.

7. Analiza numeryczna płyt żelbetowych.

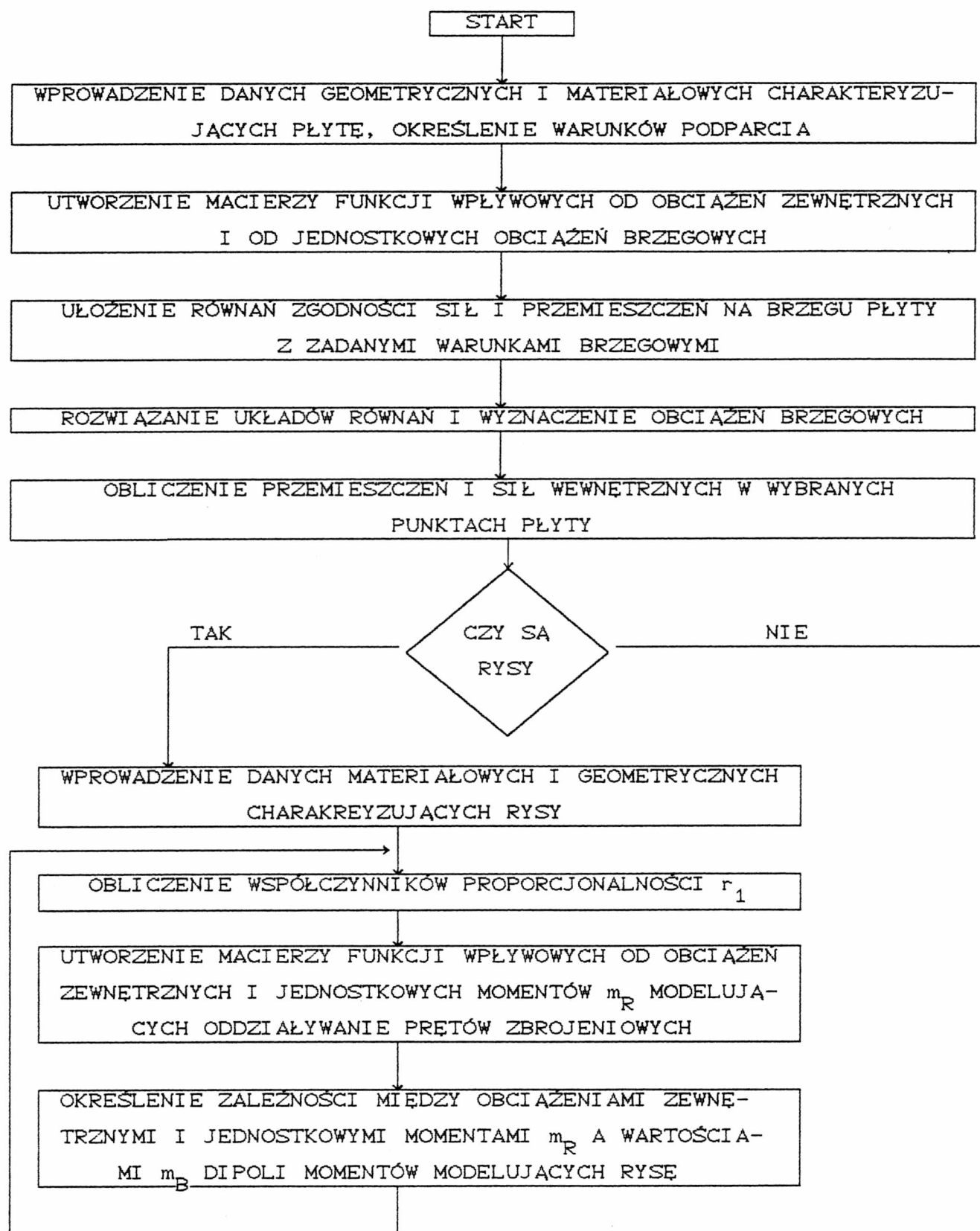
Przy wykorzystaniu metody opisanej w rozdz. 6 oraz Pośredniej Metody Elementów Brzegowych, autor niniejszego opracowania ułożył program cyfrowy, obliczający zarysowane płyty żelbetowe. Program ten napisano w języku FORTRAN i jest on przystosowany do komputerów typu PC IBM. Oblicza on zarysowane płyty żelbetowe o dowolnym schemacie statycznym. Przyjęto w nim, że rozmieszczenie rys jest dane, ponieważ rozważania dotyczące dystrybucji i propagacji rys wykraczały poza zakres tego opracowania. Dla celów inżynierskich można program po prostu uzupełnić o jeden z istniejących już podprogramów określających położenie rys w zależności np od wielkości naprężeń głównych i określonego momentu rysującego.

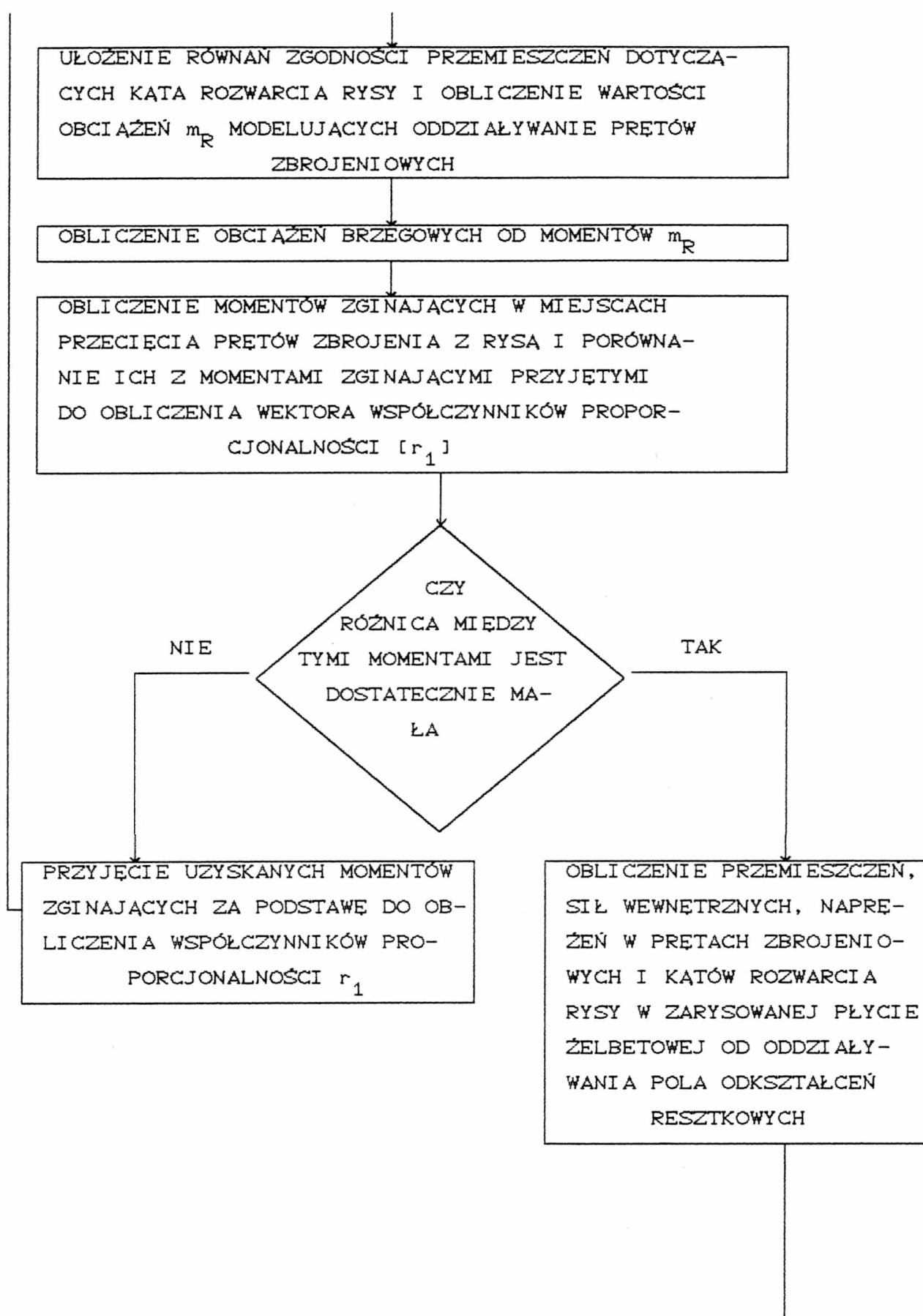
W obliczeniach dzieli się brzeg płyty na "n" odcinków, przyporządkowując każdemu z nich moment i siłę rozłożone równomiernie na jego długości. Linie rysy dzieli się na " n_R " odcinków, których liczba jest równa ilości prętów ją spinających. Każdemu z tych odcinków przyporządkowuje się dipol równomiernie rozłożonych momentów modelujących linię rysy. Oddziaływanie prętów zbrojeniowych zastąpione jest za pomocą krzywoliniowo rozłożonych wzdłuż osi pręta momentów zginających. W obliczeniach wykorzystuje się więc funkcje wpływowe podane we wzorach (4.4), (4.6), (4.9), (4.10), (4.13), (6.2) i (6.8). Określa się warunki podparcia dla poszczególnych odcinków brzegu oraz wprowadza dane obciążenia zewnętrzne. Współczynnik proporcjonalności r_1 ustala się poprzez współczynnik uśredniający ψ w sposób iteracyjny, przyjmując jako pierwsze przybliżenie stan sprężysty. W wyniku otrzymuje się przemieszczenia i siły wewnętrzne w zarysowanej płycie żelbetowej, w dowolnych punktach o zadanych z góry współrzędnych oraz kąty rozwarcia rys i naprężenia w prętach zbrojeniowych w miejscu przecięcia ich z linią rysy.

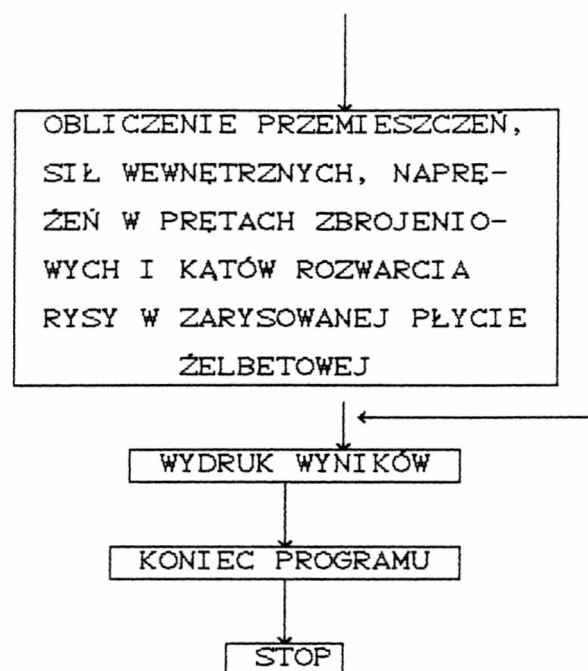
7.1. Algorytm programu cyfrowego.

Algorytm programu cyfrowego obliczającego zarysowane płyty żelbetowe został przedstawiony na rys. 7.1.

Rys. 7.1 Algorytm programu cyfrowego obliczającego zarysowane płyty żelbetowe.

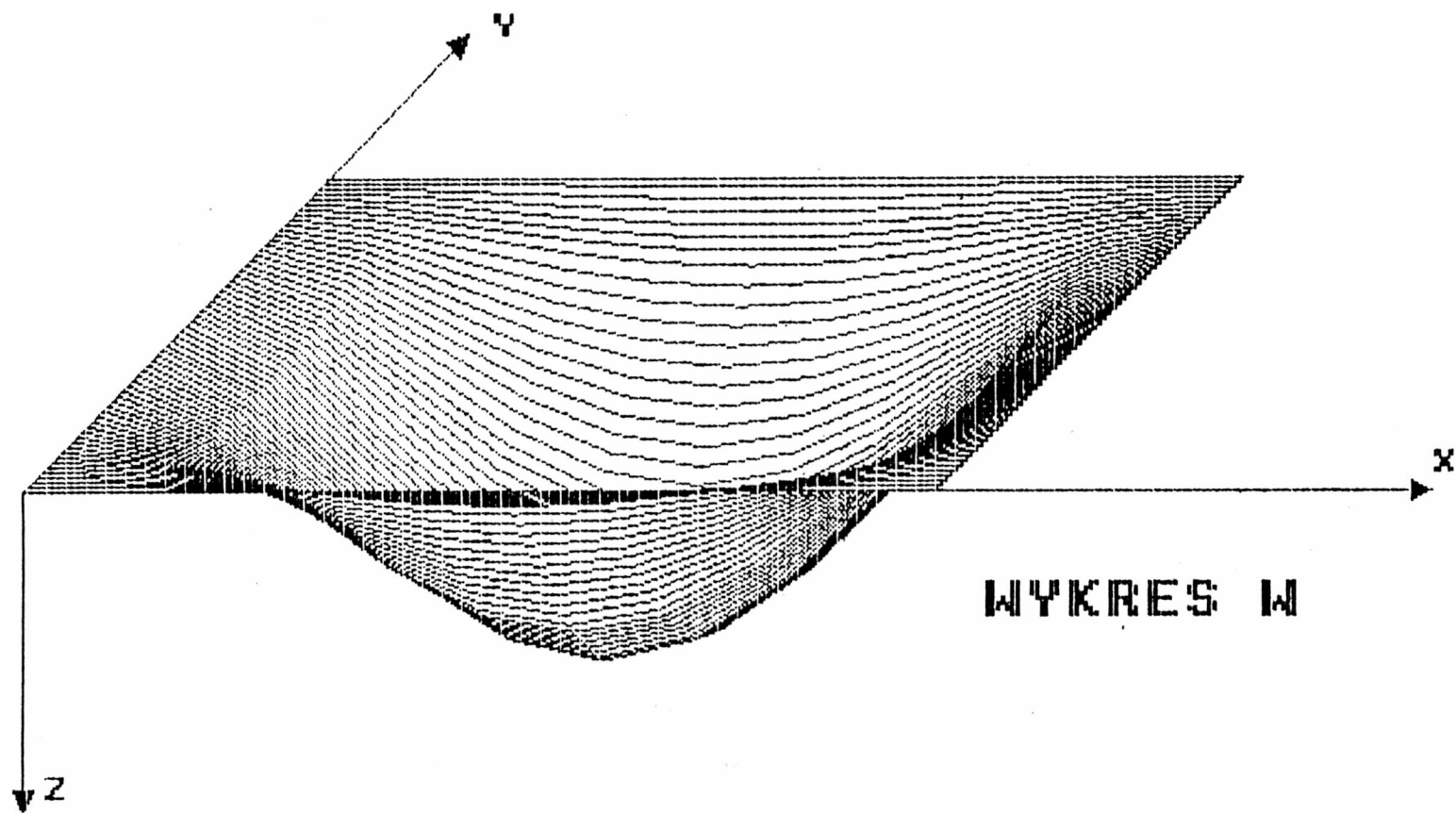




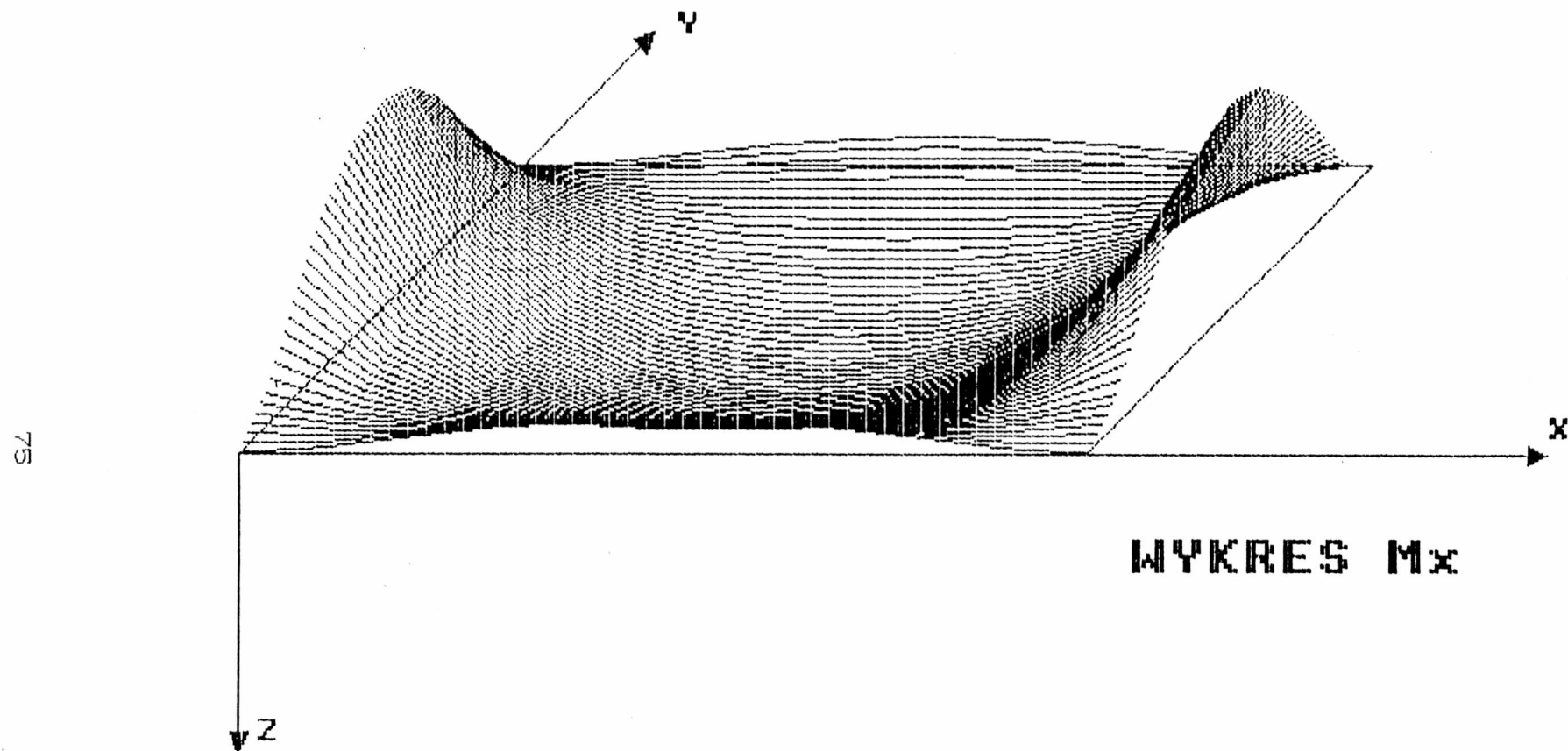


7.2. Obliczenia testujące dla płyt niezarysowanych.

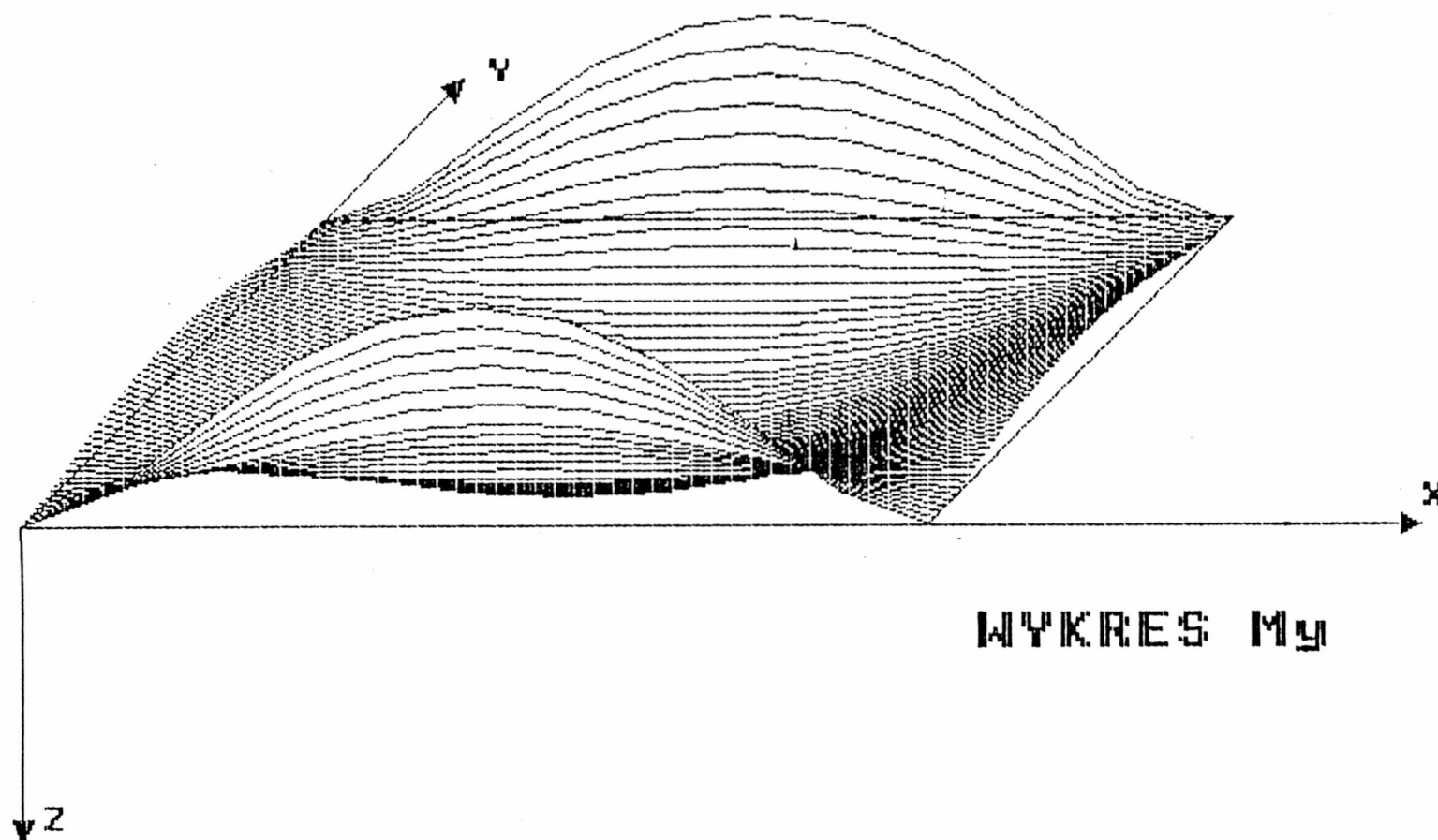
W pierwszej fazie opisany wyżej program cyfrowy został uruchomiony i przetestowany dla płyt niezarysowanych, a więc pracujących w fazie sprężystej. Można było wobec tego otrzymane wyniki porównać z wielkościami zamieszczonymi w tablicach inżynierskich dla tego typu konstrukcji. Przeprowadzone obliczenia wykazały, że nawet przy dość rzadkim podziale brzegu płyty na odcinki (brzeg dzielono na odcinki odpowiadające $\frac{1}{6} + \frac{1}{5}$ rozpiętości płyty) dokładność uzyskanych wyników wynosiła 4÷6% w stosunku do rozwiązań analitycznych. Ze względu na małą wartość poznawczą tych analiz na rys.7.2÷7.7 przedstawiono jedynie w sposób graficzny przykładowe wyniki obliczeń. Obliczenia te przeprowadzono przy bardzo gęstym podziale brzegu płyty na odcinki i gęstej siatce punktów obliczeniowych wewnątrz płyty.



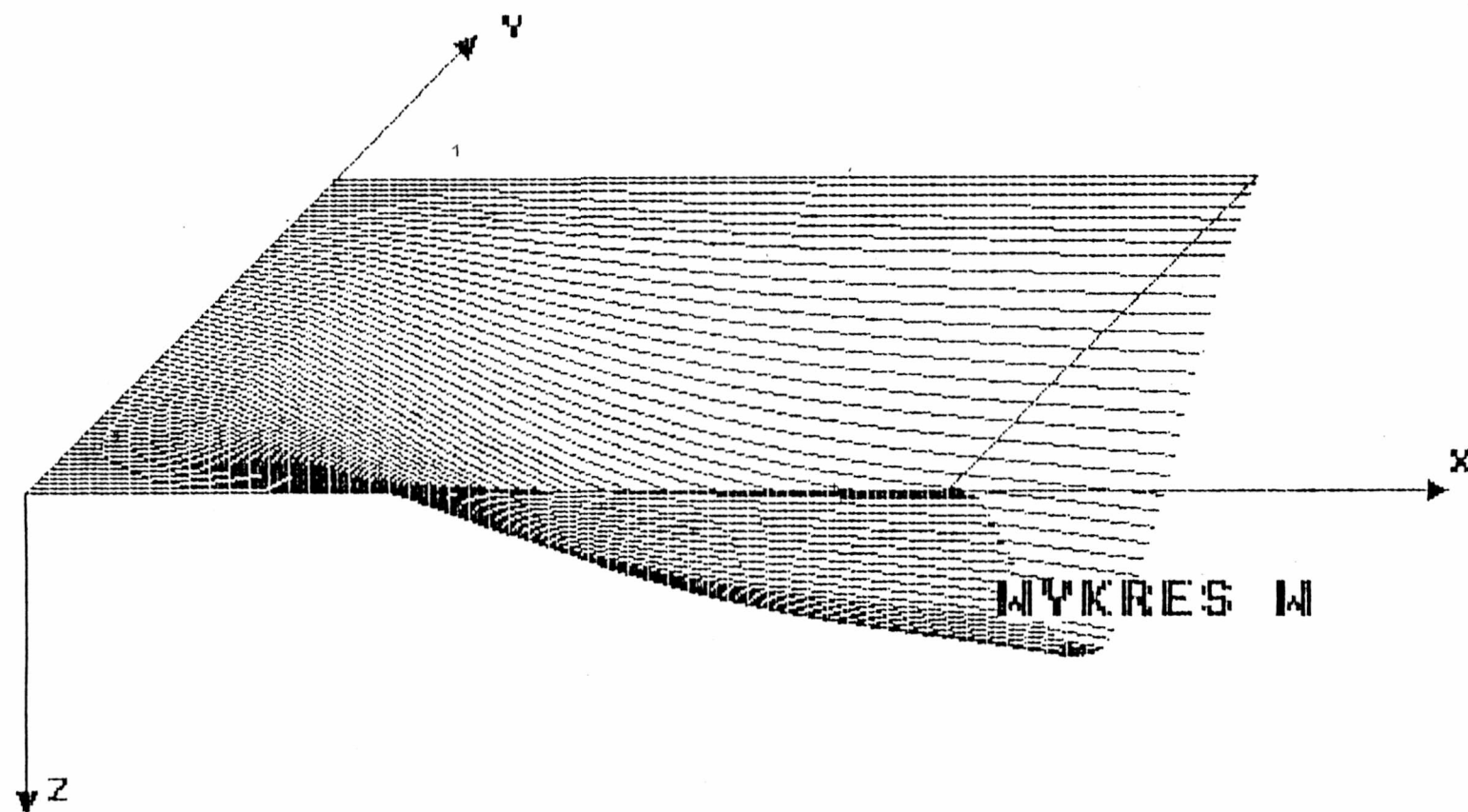
Rys.7.2. Płyta zamocowana na 4 krawędziach - wykres ugięć



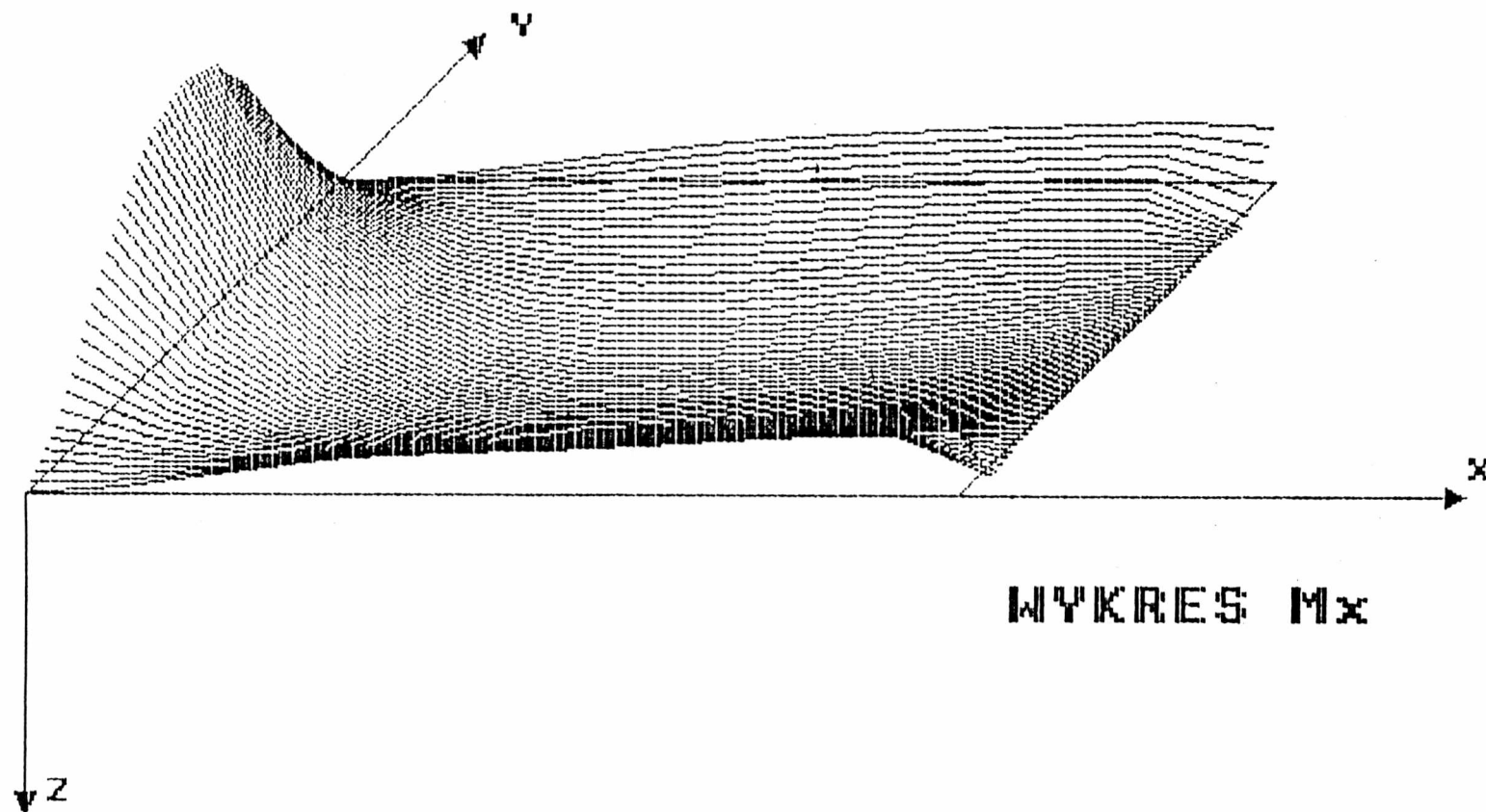
Rys.7.3. Płyta zamocowana na 4 krawędziach - wykres momentów zginających.



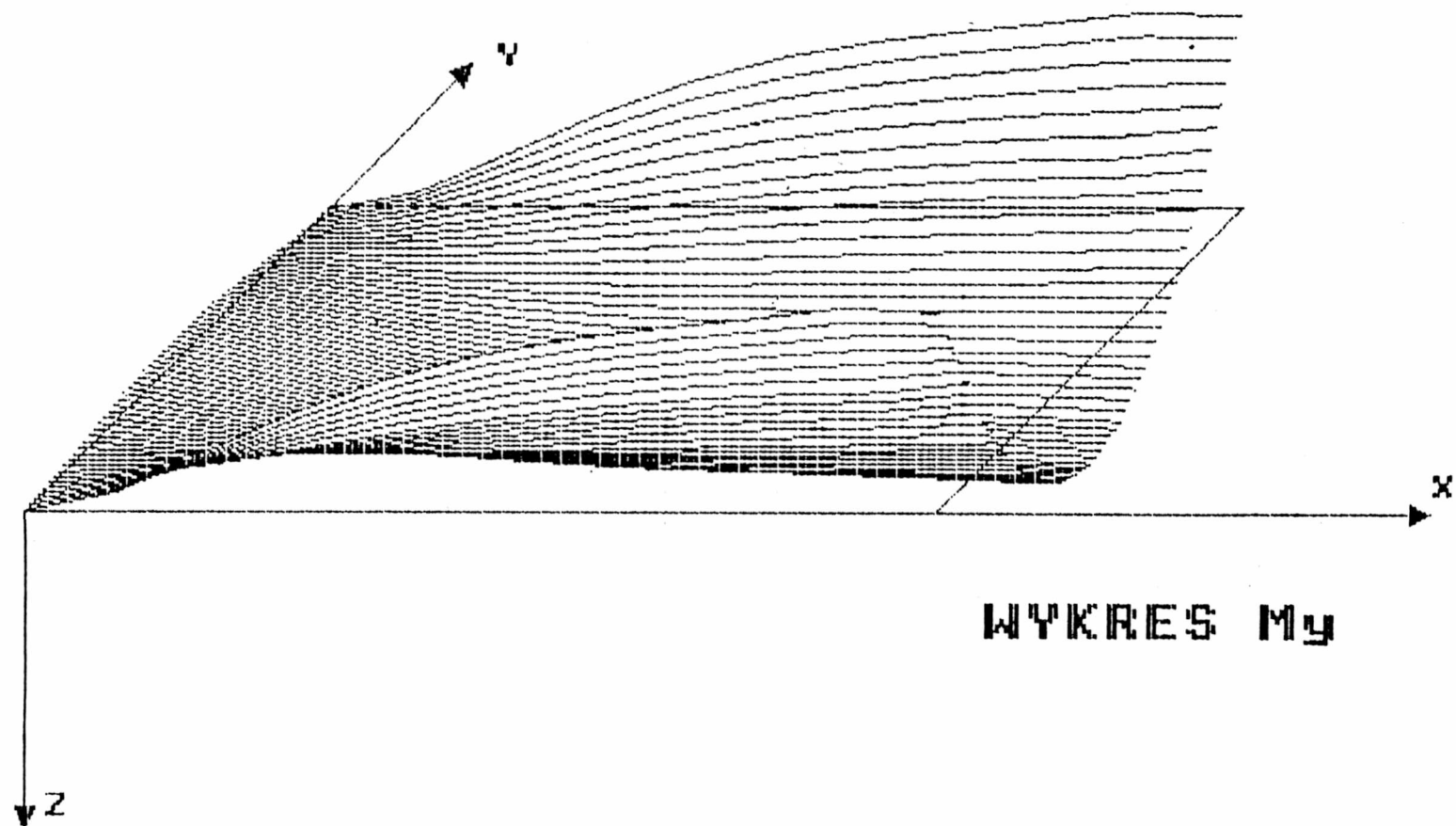
Rys.7.4. Płyta zamocowana na 4 krawędziach - wykres momentów zginających.



Rys.7.5. Płyta zamocowana na 3 krawędziach - wykres ugięć.



Rys.7.6. Płyta zamocowana na 3 krawędziach - wykres momentów zginających.



Rys.7.7. Płyta zamocowana na 3 krawędziach - wykres momentów zginających.

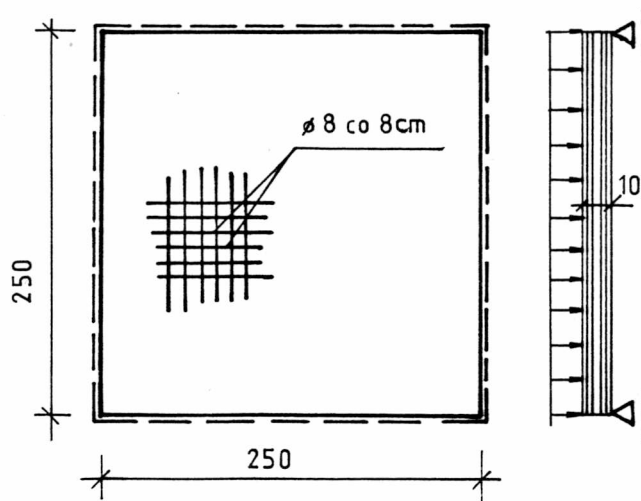
7.3. Obliczenia testujące dla płyt zarysowanych.

Przed wykonaniem przykładów zaczerpniętych z danych doświadczalnych, przeprowadzono szereg obliczeń testujących dla płyt z jedną, dwiema, trzema czy czterema rysami. Sprawdzano w nich poprawność przyjętych funkcji wpływowych modelujących rysę i zbrojenie oraz symetrię uzyskanych wyników. Dopiero po wielokrotnym sprawdzeniu programu w ten właśnie sposób przystąpiono do obliczania płyt z rzeczywistymi schematami zarysowania.

7.3.1. Przykład nr 1.

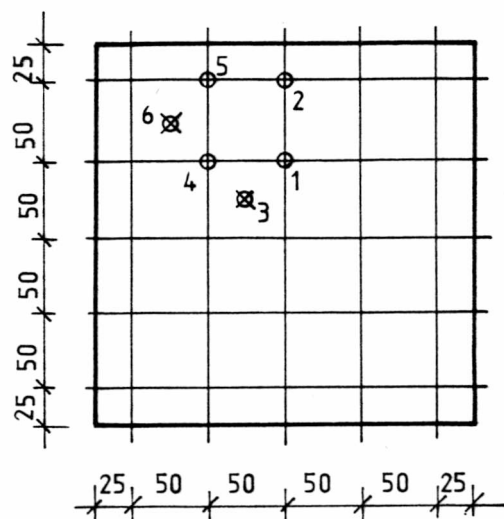
Obliczenia przeprowadzono dla płyty DA1 badanej przez E. Absiego i M. Brandta [1], przedstawionej na rys. 7.8.

Była to płyta kwadratowa, swobodnie podparta, o boku $a = 2.5\text{m}$, krzyżowo zbrojona prętami $\varnothing 8$ ze stali TENTOR, ułożonymi równoległe do brzegów. Rozstaw prętów co 8 cm. Grubość płyty 10 cm. Moduł sprężystości stali $E_a = 2.05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, betonu $E_b = 3.4 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$. Wytrzymałość betonu na ściskanie $R_b = 33500 \text{ kPa}$. Wytrzymałość stali na rozciąganie i ściskanie $R_a = 527000 \text{ kPa}$. Płyta była obciążona równomiernie za pomocą poduszki wodnej. Pomiary ugięcia płyty były prowadzone kolejno dla obciążeń o wartości 10.0, 20.0, 25.0, 27.5, 30.0, 32.5, 35.0 kN/m^2 i dalej co 2.5 kN/m^2 aż do zniszczenia płyty.



Rys. 7.8. Schemat obliczanej płyty DA1.

Układ zaobserwowanych rys odpowiadał kierunkom naprężeń głównych. Porównanie ugięć otrzymanych z obliczeń z ugięciami płyty uzyskanymi podczas doświadczenia przeprowadzono dla punktów zaznaczonych na rys.7.9.



Rys.7.9. Rozmieszczenie punktów obliczeniowych na powierzchni płyty.

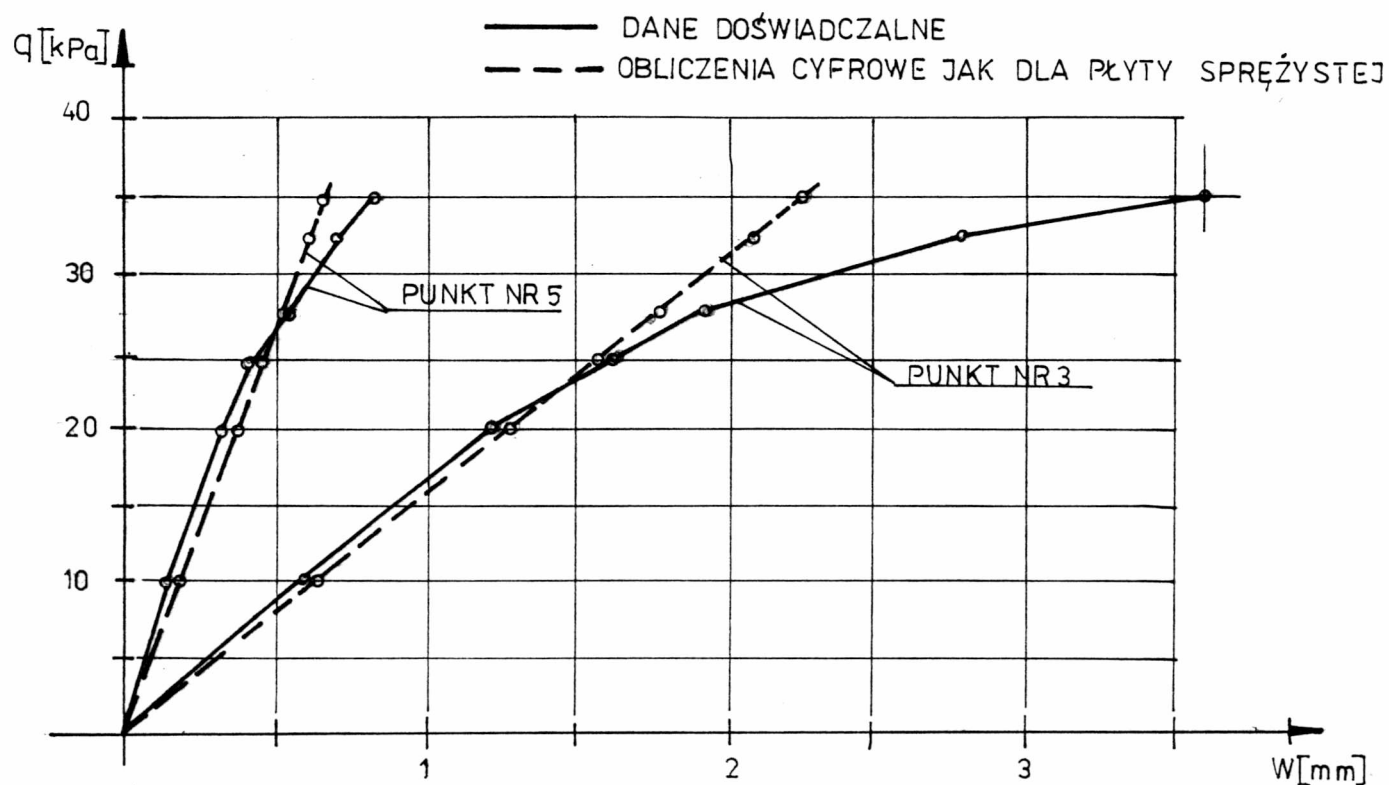
Dla punktów 1÷6 wynik uzyskany z doświadczenia jest wartością średnią z pomiarów dla punktów usytuowanych symetrycznie na płycie. Ponieważ aż do obciążenia 32.5 kN/m^2 nie zaobserwowano pojawienia się znaczących rys na powierzchni płyty, do tego momentu płytę liczone jako sprężystą. Uzyskane wyniki zestawiono w tab.1 oraz pokazano przykładowo na rys.7.10. Jako A oznaczono wyniki uzyskane z obliczeń programem cyfrowym dla płyty sprężystej, jako B dane uzyskane z doświadczenia.

Tab.7.1

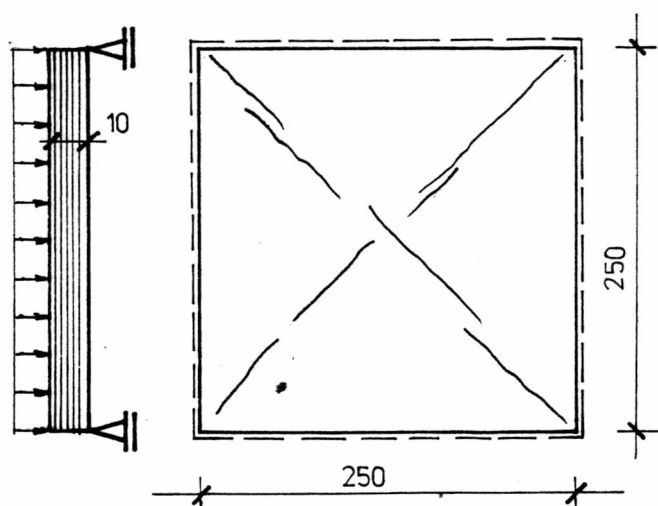
Numer punktu	Obciążenie [kN/m2]									
	10.0		20.0		25.0		27.5		32.5	
	Ugięcie [mm]									
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1	0.55	0.51	1.10	1.07	1.38	1.47	1.52	1.68	1.78	2.31
2	0.23	0.19	0.46	0.39	0.58	0.65	0.63	0.76	0.75	0.99
3	0.65	0.61	1.30	1.23	1.63	1.69	1.78	1.94	2.12	2.80
4	0.45	0.43	0.90	0.90	1.13	1.18	1.24	1.37	1.46	1.99
5	0.20	0.17	0.40	0.33	0.50	0.47	0.55	0.58	0.65	0.83
6	0.30	0.26	0.60	0.44	0.75	0.72	0.81	0.80	0.98	1.22

Numer punktu	Obc. [kN/m ²]	
	35.0	
	Ugięcie[mm]	
	A	B
1	1.93	2.97
2	0.81	1.24
3	2.28	3.57
4	1.58	2.65
5	0.70	1.00
6	1.05	1.50

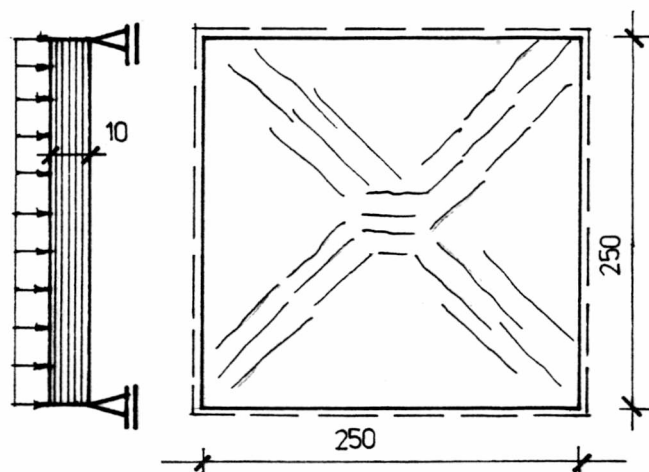
Jak widać z przytoczonych wyników, do momentu pojawienia się rys (obciążenie $q = 32.5 \text{ kN/m}^2$) dane uzyskane z obliczeń płyty sprężystej dość dobrze przybliżają rezultaty doświadczenia. Natomiast po pojawieniu się pierwszych rys, różnice między ugięciami obliczonymi dla płyty sprężystej, a uzyskanymi z pomiarów sięgnęły 23%, a przy obciążeniu $q = 35.0 \text{ kPa}$ nawet 50%. Ponieważ miejsca powstania rys dla konkretnych obciążeń były udokumentowane, wprowadzono je do programu cyfrowego zgodnie ze stanem faktycznym. Umieszczenie rys pokazano na rys.7.11 i 7.12.



Rys. 7.10. Porównanie ugięć płyty zarysowanej otrzymanych z obliczeń cyfrowych (obliczenia prowadzone jak dla płyty sprężystej) i danych doświadczalnych.



Rys. 7.11. Umieszczenie rys na powierzchni rozciąganej płyty dla obciążenia $q = 32.5 \text{ kN/m}^2$.

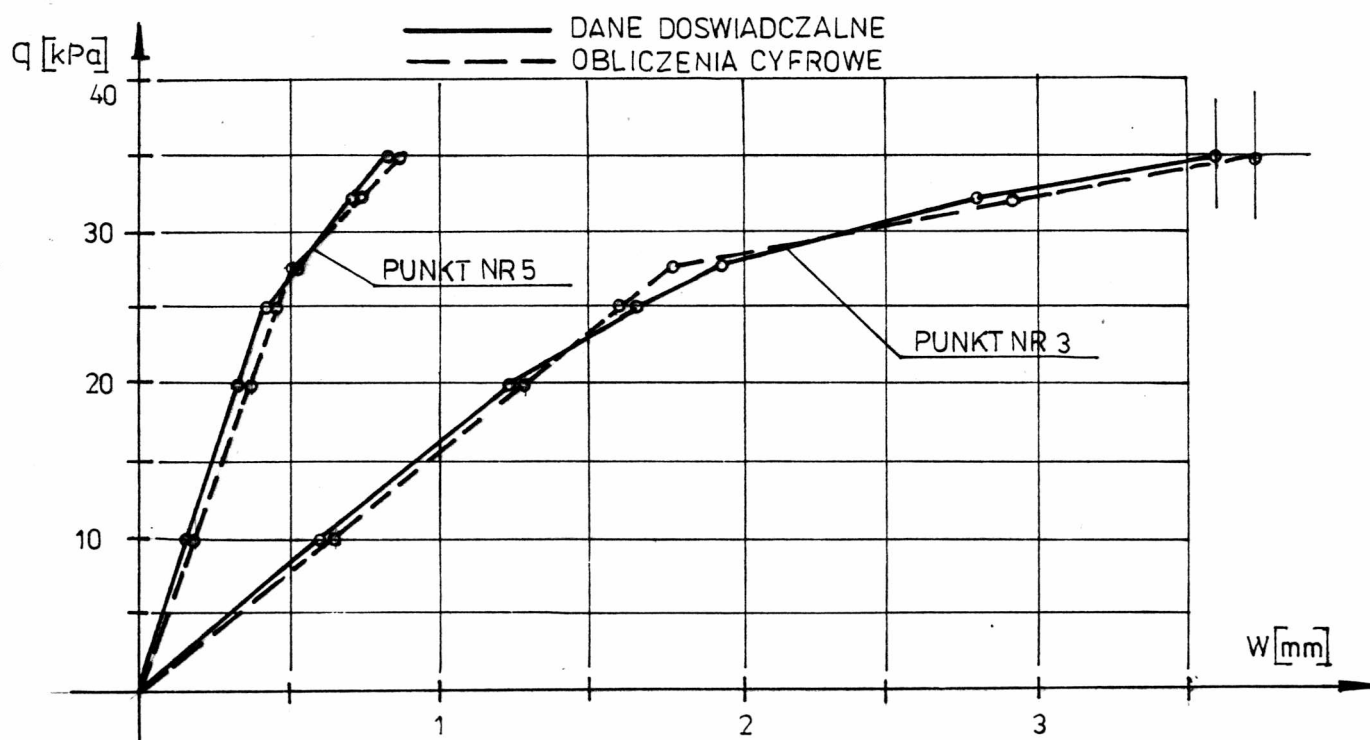


Rys.7.12. Umieszczenie rys na powierzchni rozciąganej płyty dla obciążenia $q = 35.0 \text{ kN/m}^2$.

Uzyskane wyniki zestawiono w tab.7.2 oraz pokazano przykładowo na rys.7.13. Jako C oznaczono wyniki uzyskane z obliczeń programem cyfrowym dla płyty zarysowanej.

Tab.7.2.

Numer punktu	Obciążenie [kN/m2]			
	32.5		35.0	
	Ugięcie [mm]			
	C	B	C	B
1	2.42	2.31	3.11	2.97
2	1.07	0.99	1.32	1.24
3	2.93	2.80	3.69	3.57
4	2.04	1.99	2.71	2.65
5	0.84	0.83	1.05	1.00
6	1.26	1.22	1.55	1.50



Rys.7.13. Porównanie ugięć płyty zarysowanej otrzymanych z obliczeń cyfrowych i danych doświadczalnych.

Jak wynika z porównania, dokładność przeprowadzonych obliczeń po uwzględnieniu zarysowania jest znowu zadowalająca.

Podczas doświadczenia mierzone były także naprężenia w prętach zbrojeniowych w miejscach ich przecięcia z rysami oraz rozwarcia rys. Porównanie tych wielkości z danymi eksperymentalnymi przeprowadzono w tab.7.3.

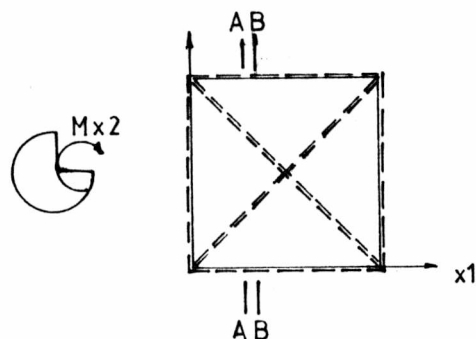
Tab.7.3.

Mierzona wartość	Obciążenie [kN/m ²]			
	32.5		35.0	
	C	B	C	B
Maksymalne rozwarcie rysy [mm]	0.06	0.05	0.065	0.05
Maksymalne naprężenia w prętach [kPa]	63000	51000	59000	69000

Również i w tym przypadku zgodność obliczeń z danymi doświadczalnymi

jest dobra.

Na rysunkach 7.14 i 7.15 pokazano redystrybucję momentów zginających w płycie spowodowaną zarysowaniem. Jak widać zmiany te mają charakter nie tylko lokalny i mogą mieć wpływ na nośność płyty.



Obciążenie $q=35.0 \text{ kPa}$

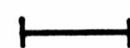
S - Stan sprężysty

Z - Stan po zarysowaniu

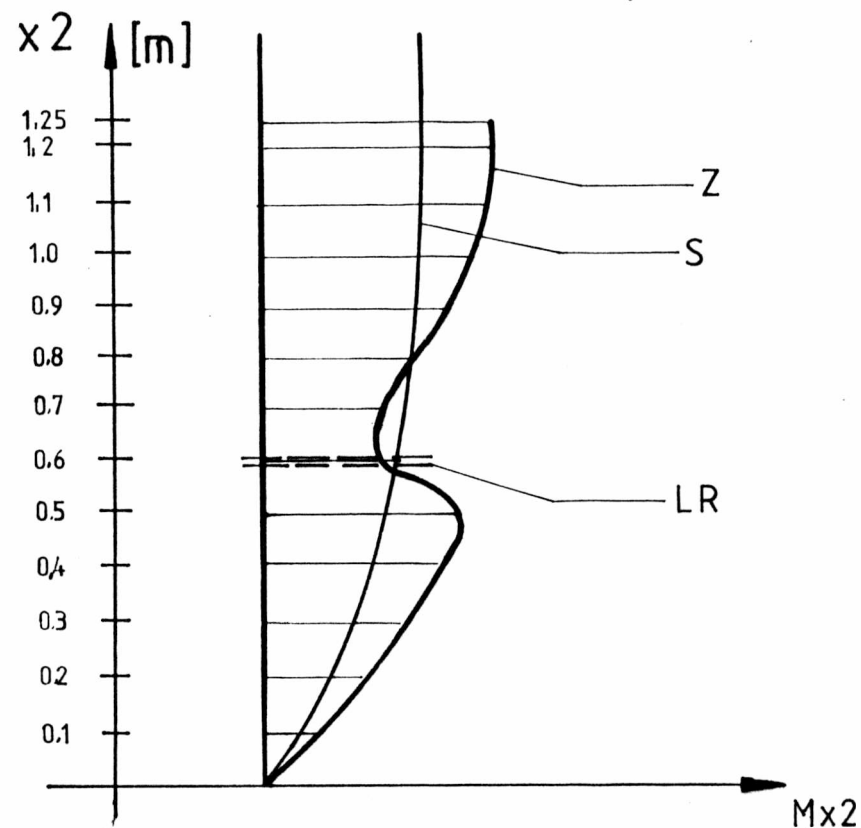
LR - Linia rysy

Momenty M_{x2}

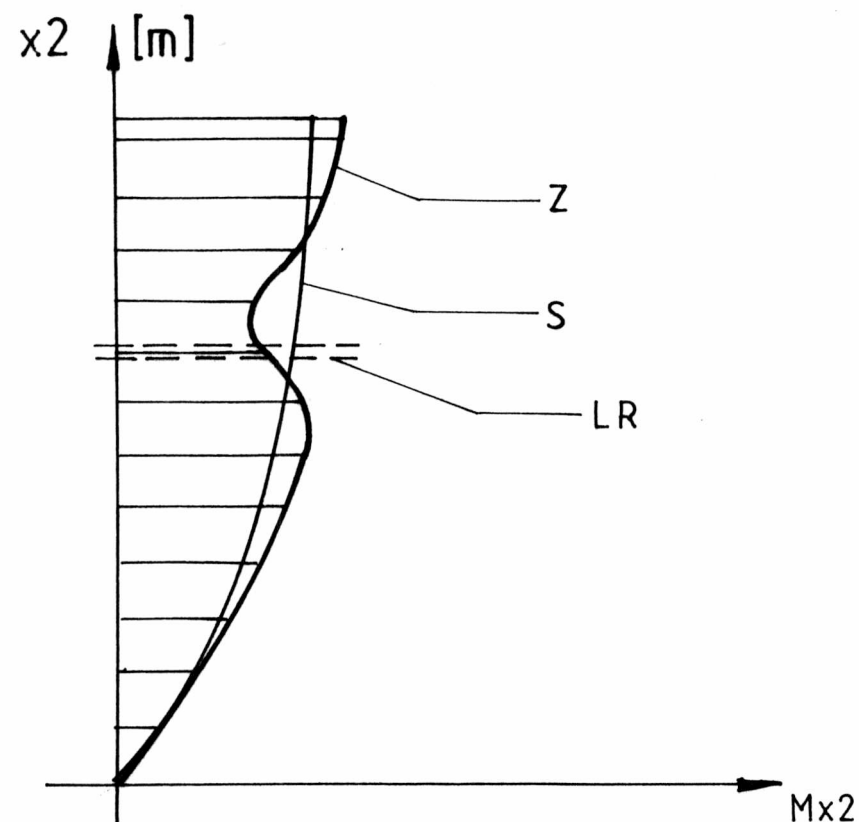
5 kNm



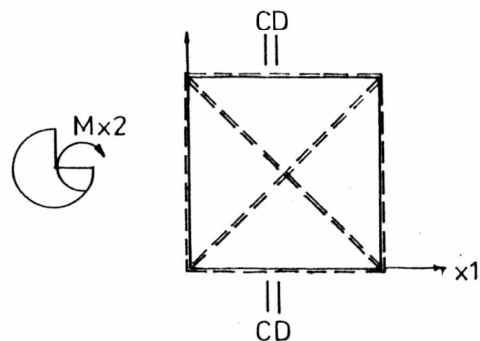
PRZEKRÓJ A-A $x_1=0.6\text{m}$



PRZEKRÓJ B-B $x_1=0.8\text{m}$



Rys. 7.14 Redystrybucja momentów M_{x2} w płycie DA1 po zarysowaniu



Obciążenie $q = 35 \text{ kPa}$

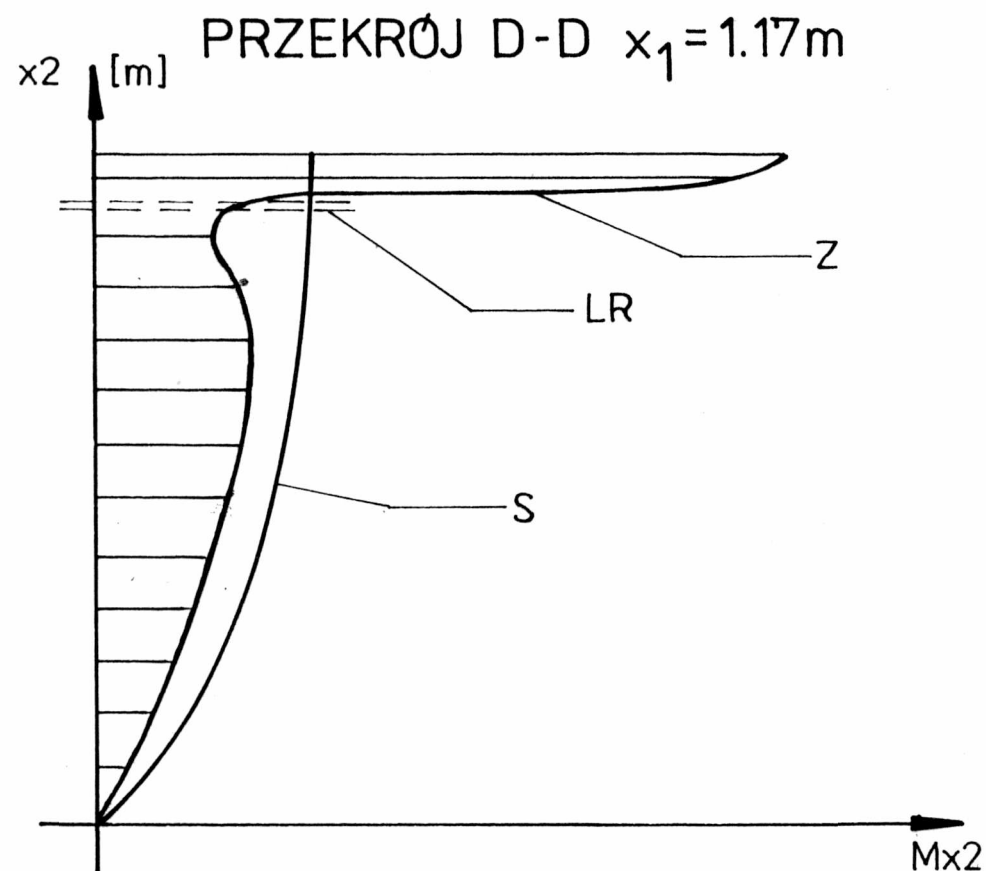
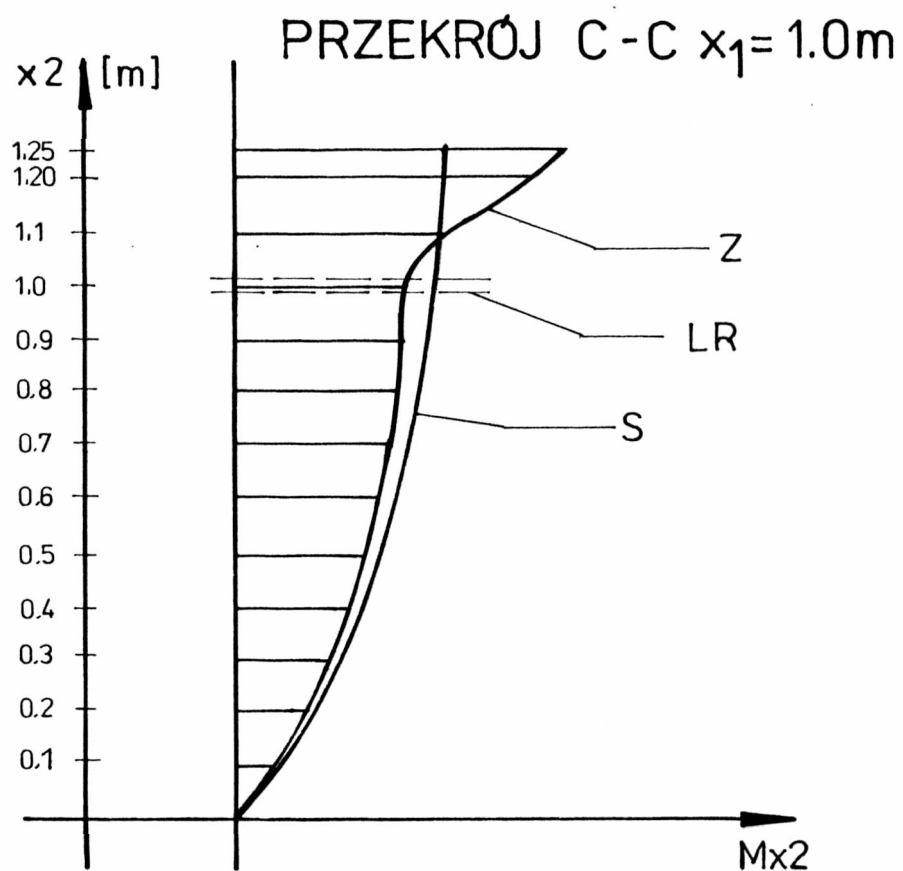
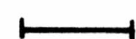
S - Stan sprężysty

Z - Stan po zarysowaniu

LR - Linia rysy

Momenty M_{x2}

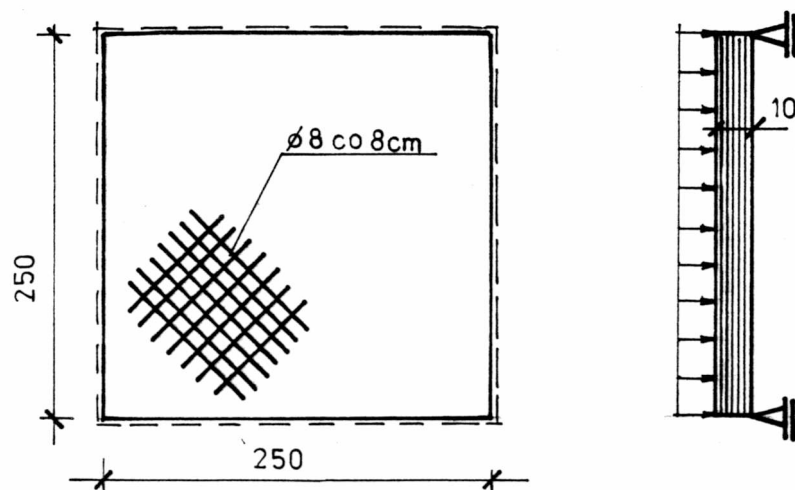
5 kNm



Rys. 7.15 Redystrybucja momentów M_{x2} w płycie DA1 po zarysowaniu

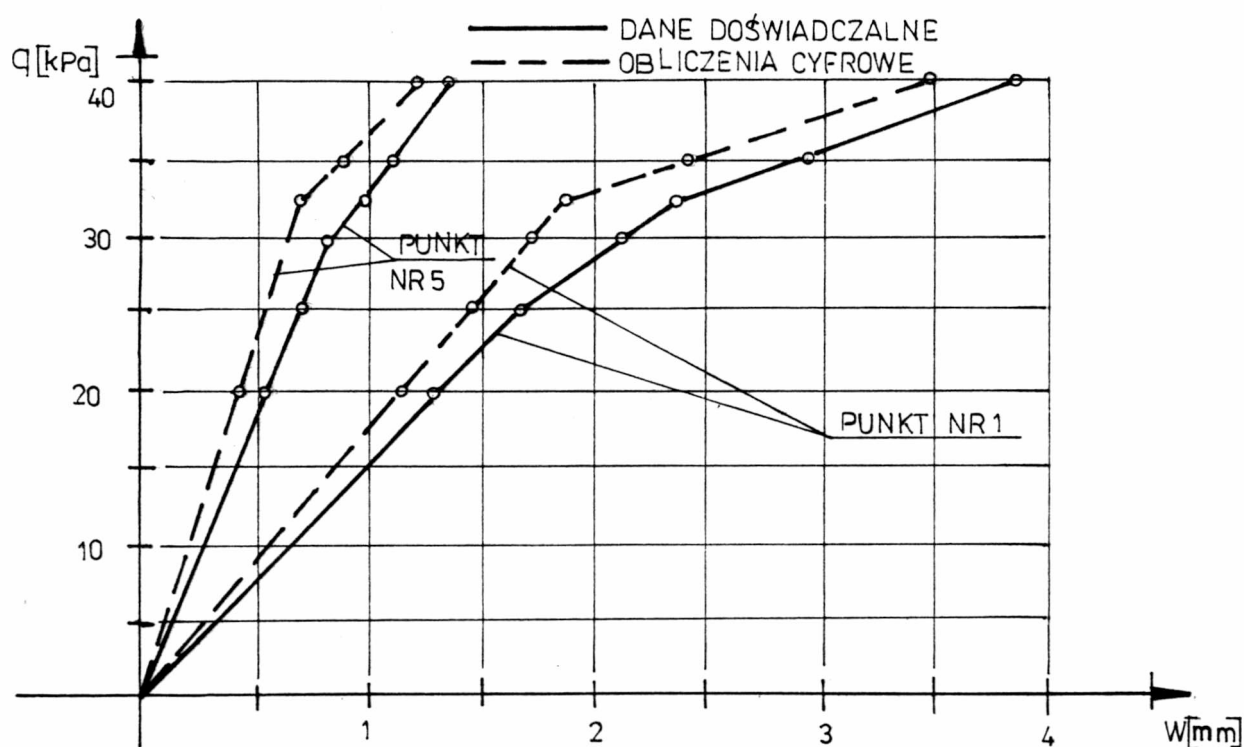
7.3.2. Przykład nr 2.

Obliczenia przeprowadzono dla płyty DA2 badanej przez E. Absiego i M. Brandta [11], przedstawionej na rys. 7.16.



Rys. 7.16. Schemat obliczanej płyty DA2.

Płyta ta różniła się od opisanej w rozdz. 7.3.1 jedynie zastosowaniem zbrojenia równoległego do przekątnych i w niewielkim zakresie stałymi materiałowymi. Pierwsze znaczące rysy pojawiły się dla płyty DA2 pod obciążeniem $q = 35.0 \text{ kN/m}^2$, a schematy zarysowania wg rys. 7.11 i 7.12 przyjęto odpowiednio dla obciążeń 35.0 kN/m^2 i 40.0 kN/m^2 . W rezultacie przeprowadzonych obliczeń uzyskano dobrą zgodność z danymi doświadczalnymi, aczkolwiek różnice w otrzymanych wynikach były większe niż w rozdziale poprzednim. Przykładowe wyniki analiz przedstawiono na rys. 7.17.

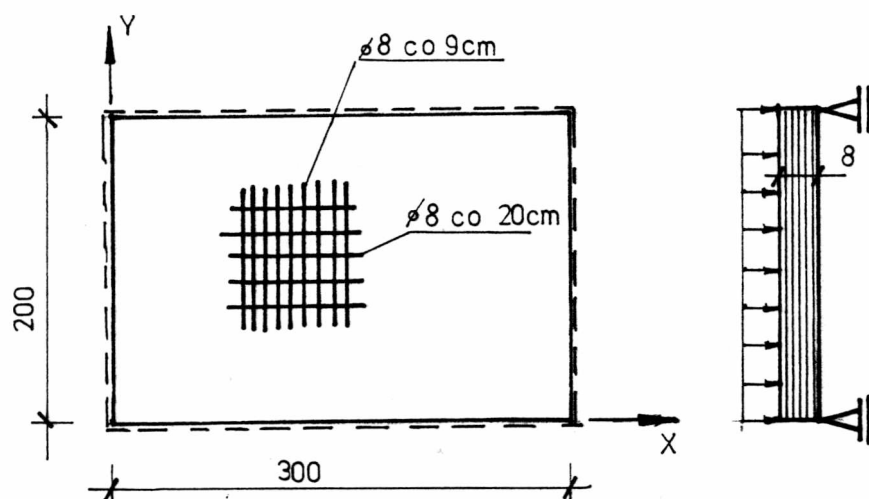


Rys.7.17. Porównanie ugięć zarysowanej płyty DA2 wg danych doświadczalnych i obliczeń cyfrowych.

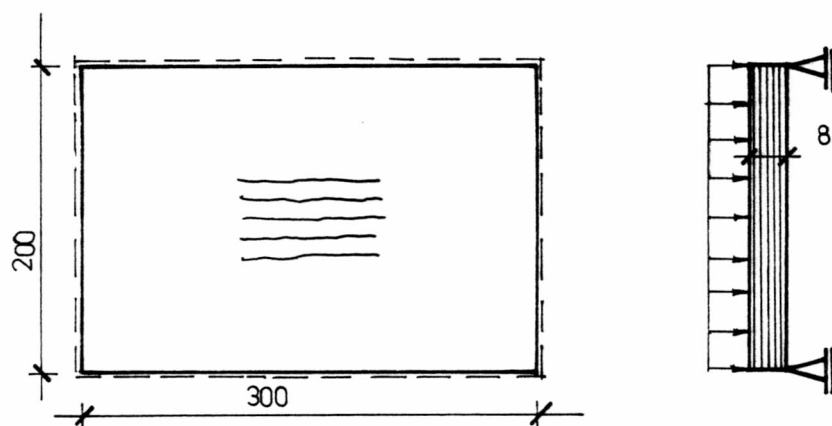
7.3.3. Przykład nr 3.

Obliczenia testujące przeprowadzono dla płyty prostokątnej badanej przez G.Franza, a przedstawionej w pracy Linka [87]. Płyta o wymiarach 2.0x3.0 m, grubości 0.08 m, podparta na obwodzie w sposób przegubowo-przesuwny. Obciążenie równomiernie rozłożone. Zbrojenie dołem siatką $\emptyset 8$ co 9cm w kierunku osi Y i co 20cm w kierunku osi X. Otulina 10 mm. Stal żebrowana o $R_e = 420$ MPa. Beton o wytrzymałości na ściskanie przy zginaniu $R_b = 33.2$ MPa, na rozciąganie $R_{bz} = 3.6$ MPa. Schemat płyty pokazano na rys.7.18.

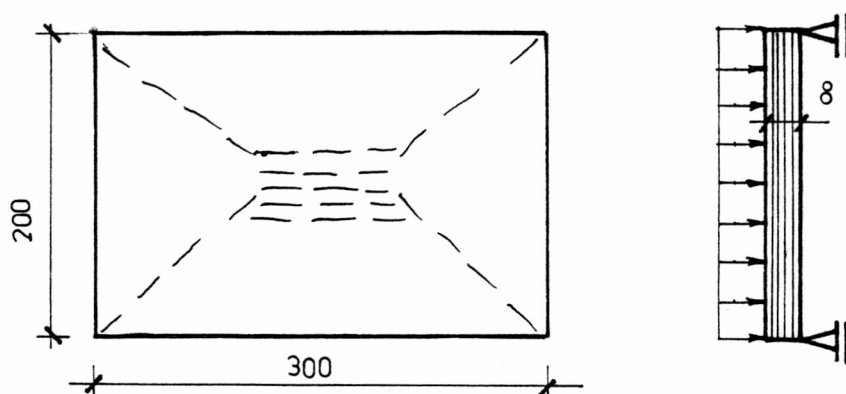
Porównanie obliczeń wykonanych programem cyfrowym z danymi z badań zostało przeprowadzone dla wartości ugięcia płyty mierzonego w punktach o współrzędnych NR1 = (x/2; y/2) oraz NR2 = (x/2; y/4). Przyjęte schematy zarysowań jak na rys.7.19, 7.20, 7.21.



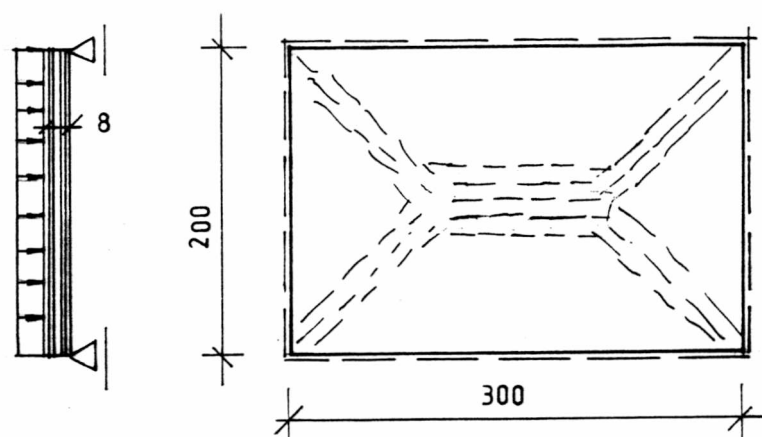
Rys.7.18. Schemat obliczanej płyty Franza.



Rys.7.19. Przyjęty układ rys w obliczeniach cyfrowych dla obciążenia $q = 15 \text{ kN/m}^2$.

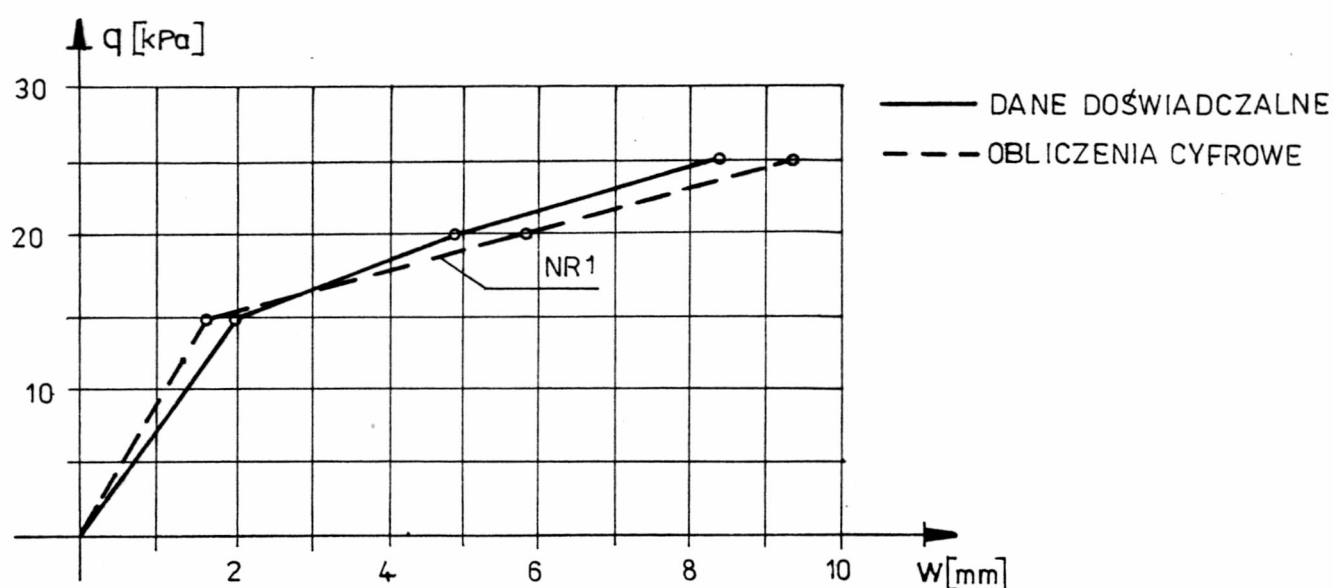


Rys.7.20. Przyjęty układ rys w obliczeniach cyfrowych dla obciążenia $q = 20 \text{ kN/m}^2$.



Rys.7.21. Przyjęty układ rys w obliczeniach cyfrowych dla obciążenia $q = 25 \text{ kN/m}^2$.

Wyniki obliczeń pokazano na rys.7.22. Do poziomu obciążenia $q = 15.0 \text{ kN/m}^2$ płyta była obliczana jako sprężysta.



Rys.7.22. Porównanie ugięć płyty zarysowanej wg danych doświadczalnych i obliczeń cyfrowych.

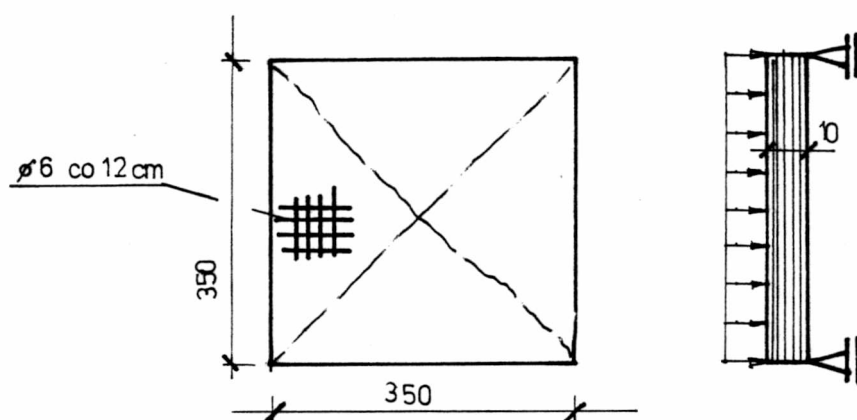
Różnice między wynikami uzyskanymi z doświadczeń a obliczeniami cyfrowymi wynoszą w tym przypadku ok. 14÷15%. Na dokładność przeprowadzonych analiz miał tu niewątpliwie wpływ fakt braku

dokładnych danych dotyczących korelacji między poziomem obciążenia a dystrybucją rys (dane takie były dostępne w przykładach nr 1 i nr 2).

7.4. Obliczenia testujące dokładność obliczeń w zależności od ilości rys, ich rozstawu oraz sposobu zbrojenia.

7.4.1. Przykład nr 4.

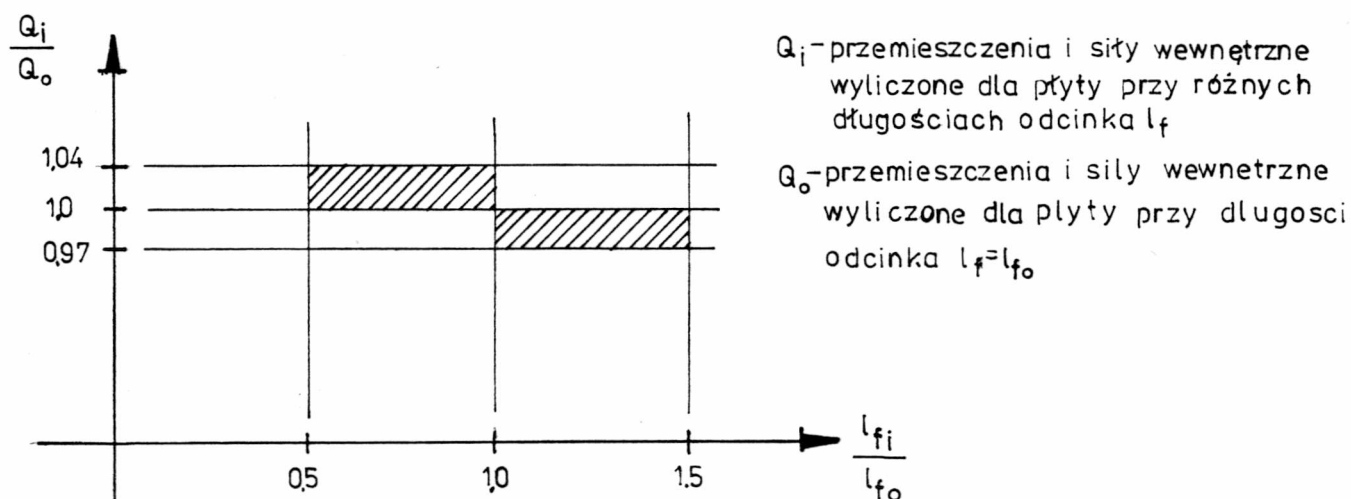
Obliczenia testujące przeprowadzono dla płyty kwadratowej, swobodnie podpartej, o rozpiętości 3.5m, gr. 10cm. Zbrojenie krzyżowe prętami $\varnothing 6$ co 12cm, stal 34GS. Otulina 1cm. Beton B15. Schemat zarysowania wg rys.7.23. Obciążenia równomiernie rozłożone o wartościach $q = 15.0, 20.0, 25.0 \text{ kN/m}^2$.



Rys.7.23. Schemat zarysowania płyty żelbetowej przyjęty do obliczeń cyfrowych.

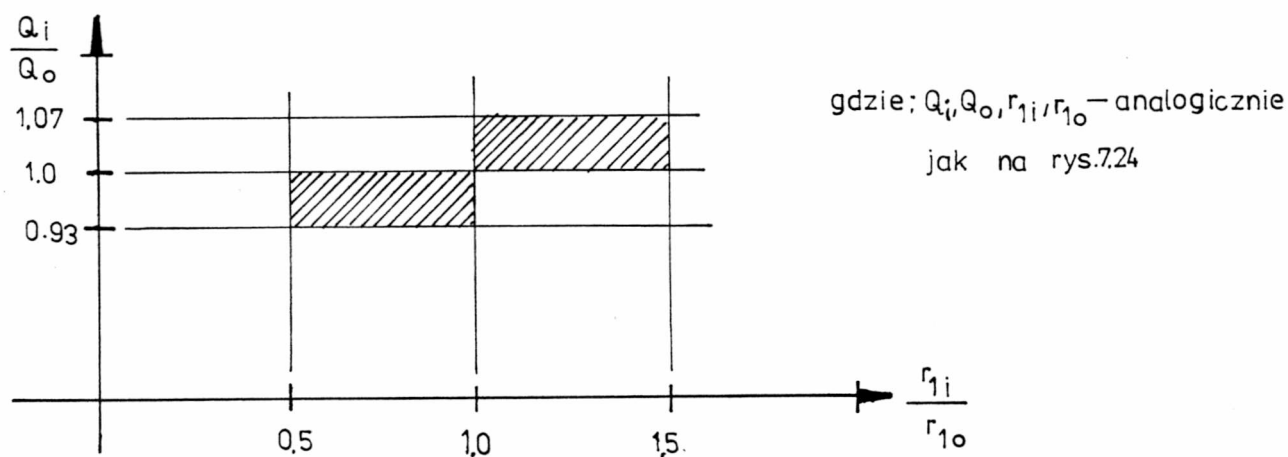
Dla danego stanu zarysowania i każdego schematu obciążenia przeprowadzono obliczenia cyfrowe przy przyjęciu następujących długości odcinka naruszonej przyczepności:

$l_{f1} = 0.5l_{f0}$, $l_{f2} = 0.75l_{f0}$, $l_{f3} = l_{f0}$, $l_{f4} = 1.25l_{f0}$, $l_{f5} = 1.5l_{f0}$
gdzie l_{f0} - długość odcinka wyliczona dla danej płyty wg rozdz.5 niniejszego opracowania. Nie zmieniano przy tym wartości współczynnika proporcjonalności r_1 oraz rozstawu prętów zbrojeniowych. Uzyskane wyniki obrazuje rys.7.24



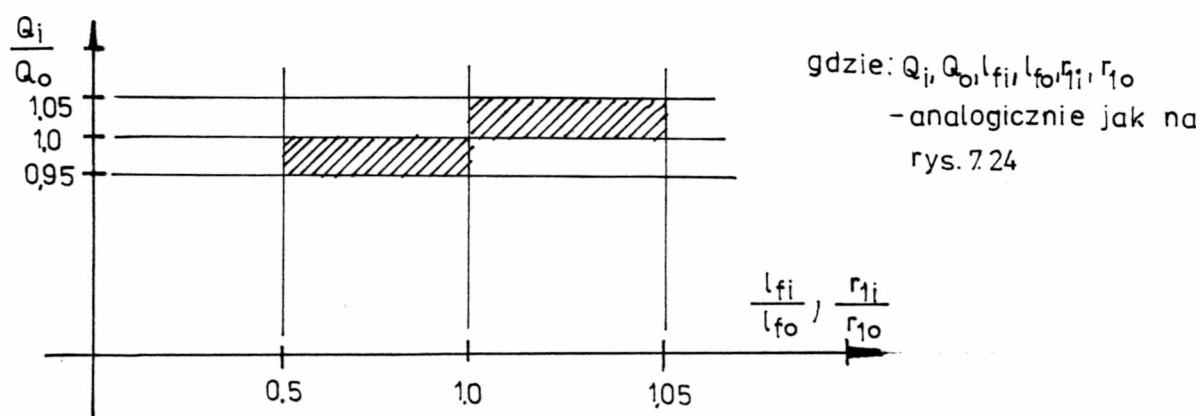
Rys. 7.24. Zależność między długością odcinka naruszonej przyczepności l_f przyjętą do obliczeń a otrzymanymi przemieszczeniami i siłami wewnętrznymi w płycie zarysowanej.

Analogiczne obliczenia wykonano uzmienniając współczynnik podatności r_1 przy zachowaniu stałej długości odcinka naruszonej przyczepności l_f oraz stałego rozstawu zbrojenia. Wyniki pokazano na rys. 7.25.



Rys. 7.25. Zależność między wartością współczynnika proporcjonalności r_1 przyjętą do obliczeń, a otrzymanymi przemieszczeniami i siłami wewnętrznymi w płycie zarysowanej.

Wg wzorów (5.18) i (5.7) współczynnik proporcjonalności r_1 zależy od długości odcinka l_f . Wobec tego następne obliczenia wykonano uzmienniając długość tego odcinka i stosownie do niej obliczając wartość r_1 . Uzyskane wyniki obrazuje rys. 7.26.

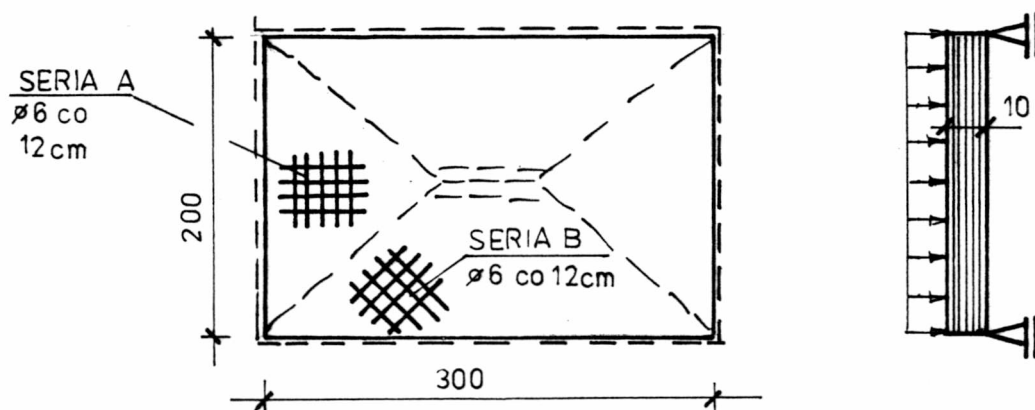


Rys. 7.26. Zależność między wartościami r_1 i l_f przyjętymi do obliczeń a otrzymanymi przemieszczeniami i siłami wewnętrznymi w płycie zarysowanej.

Stwierdzono, że nawet duże zmiany długości odcinka naruszonej przyczepności l_f oraz współczynnika proporcjonalności r_1 przy stałym rozstawie prętów zbrojeniowych, nie powodują istotnych zmian w przemieszczeniach i siłach wewnętrznych w płycie żelbetowej (na przykład zmiana długości odcinka l_f o 100% powoduje ok. 10% zmianę w przemieszczeniach i siłach wewnętrznych w płycie). Należy tutaj jednak zwrócić uwagę na fakt, że wg wzoru (5.7) długość odcinka l_f zależy od rozstawu prętów zbrojeniowych. Polska norma żelbetowa PN-84/B-03264 uzależnia szerokość rozwarcia rys bezpośrednio od wartości l_f . Jeśli więc przyjmiemy, że długość tego odcinka jest pochodną rozstawu prętów zbrojeniowych (a rozstaw tych prętów niewątpliwie wpływa na wartości sił i przemieszczeń w płycie zarysowanej), to w sensie rozumienia tej normy wartość l_f ma wpływ na szerokość rozwarcia rys, a tym samym na redystrybucję przemieszczeń i sił wewnętrznych w płycie zarysowanej. Wobec tego powinna ona być wyznaczana w sposób dokładny, przy uwzględnieniu specyfiki konstrukcji powierzchniowych.

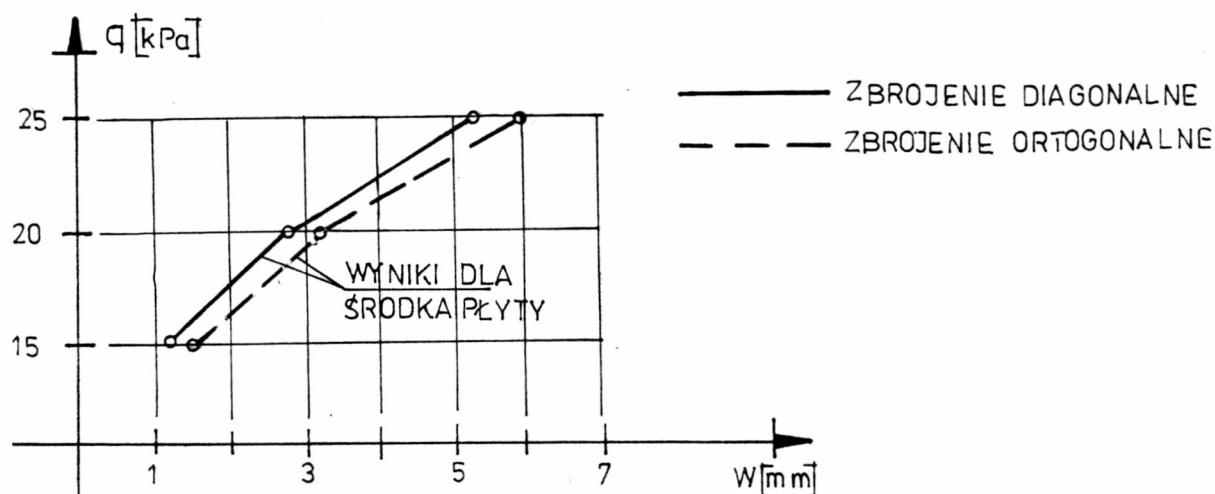
7.4.2. Przykład nr 5.

Obliczenia wykonano dla płyty prostokątnej, swobodnie podpartej, o wymiarze 2.0x3.0 m, gr.10 cm. Zbrojenie krzyżowe prętami $\varnothing 6$ co 12cm, stal 34GS. Otulina 1 cm. BETON B15. Schemat zarysowania wg rys.7.27. Obciążenie równomiernie rozłożone o wartościach $q = 15.0, 20.0, 25.0 \text{ kN/m}^2$.



Rys.7.27. Schemat zarysowania przyjęty do obliczania płyty.

Obliczenia przeprowadzono dla układu zbrojenia równoległego do boków płyty - seria A oraz zbrojenia ułożonego pod kątem 45° do boków płyty-seria B. Przykładowe wyniki obliczeń przedstawiono na rys.7.28.

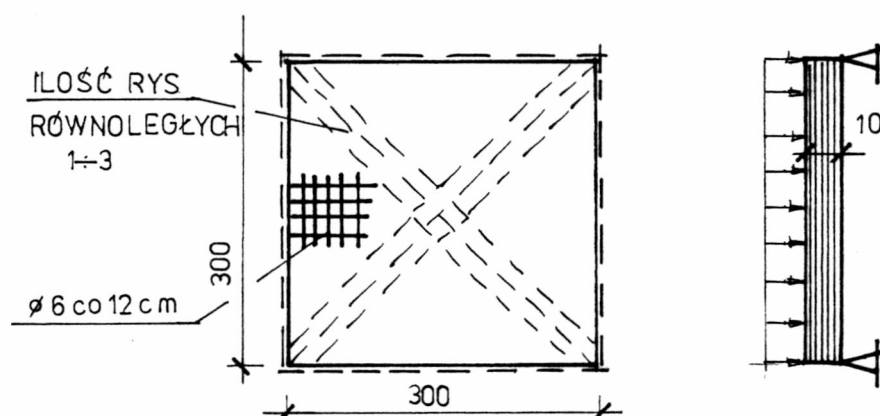


Rys.7.28. Porównanie ugięć płyty prostokątnej ze zbrojeniem ortogonalnym i diagonalnym.

Badania doświadczalne Absiego i Brandta [1], Muspratt'a [97] czy Franza [48] wykazały, że zbrojenie diagonalne opóźnia pojawienie się rys a także powoduje, że przy danym poziomie obciążenia przemieszczenia i siły wewnętrzne są w takiej płycie mniejsze niż przy zbrojeniu ortogonalnym. Przeprowadzone obliczenia cyfrowe miały za zadanie określenie wielkości tej różnicy. W analizowanych przypadkach wynosiła ona od 9÷11%.

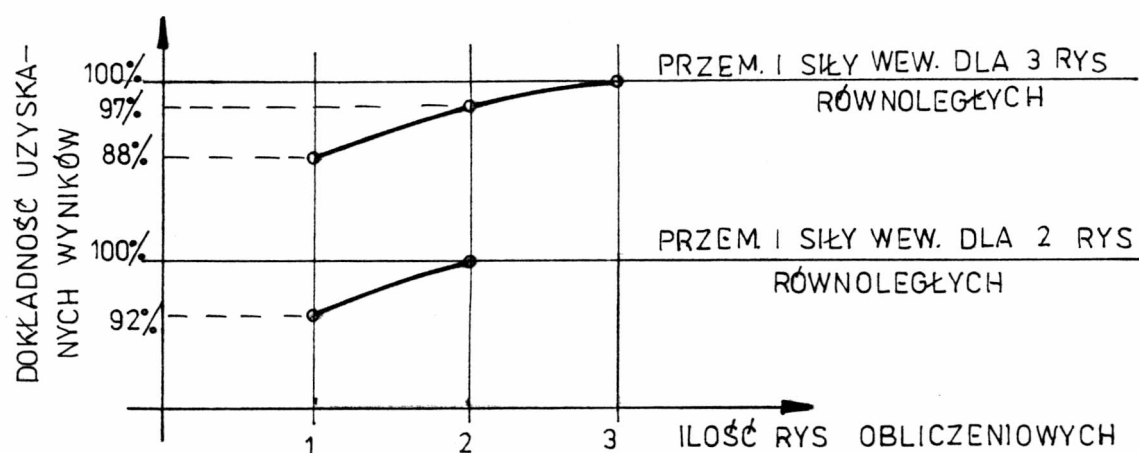
7.4.3. Przykład nr 6.

Obliczenia wykonano dla płyty kwadratowej, swobodnie podpartej, o wymiarze 3.0x3.0m, gr 10cm. Zbrojenie krzyżowe prętami $\emptyset 6$ co 12cm, stal 34GS. Otulina 1cm. Beton B15. Schemat zarysowania wg rys.7.29. Liczba rys równoległych zmieniała się od 1÷3. Odległość między rysami 12cm. Obciążenie równomiernie rozłożone o wartościach $q = 15.0, 20.0$ i 25.0 kN/m^2 .



Rys.7.29. Schematy zarysowania płyty przyjęte w obliczeniach cyfrowych.

Obliczenia wykonano kolejno dla układu z jedną, dwiema i trzema rysami. Miały one za zadanie określenie wpływu na dokładność wyników zastępowania rys równoległych rysami obliczeniowymi. Wyniki obliczeń pokazano w sposób schematyczny na rys.7.30.



Rys. 7.30 Wpływ ilości rys obliczeniowych na dokładność wyników.

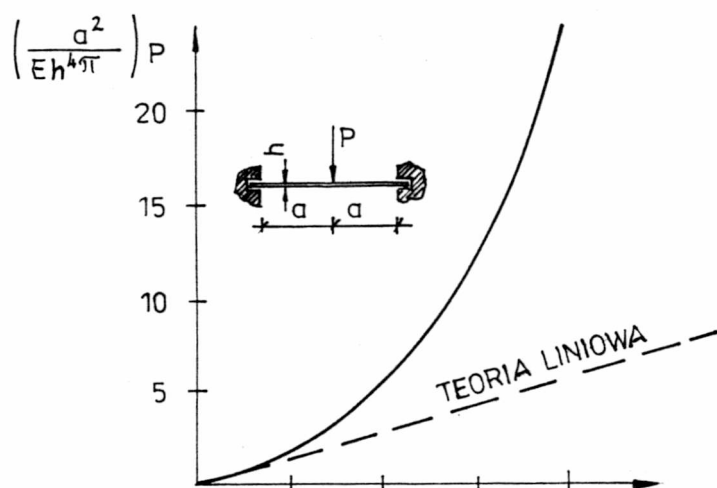
Stwierdzono, że przy zastąpieniu 3 rys równoległych jedną rysą obliczeniową różnica w wynikach wynosi ok. 12%, przy 2 rysach obliczeniowych ok. 3%. Przy zastąpieniu 2 rys równoległych 1 rysą obliczeniową różnica ta wynosi ok. 8%. Nie wykonano analiz dla większej ilości rys. Uzyskane wyniki sugerują jednak, że układ rys równoległych powinien być zastępowany co najmniej układem 2 równoległych rys obliczeniowych.

7.5. Kierunki dalszych badań.

W poprzednich rozdziałach przedstawiono sposób obliczania zarysowanych płyt żelbetowych poddanych działaniu obciążeń użytkowych. W dalszych badaniach zakłada się opracowanie metody pozwalającej na analizę tych konstrukcji także w stanach pokrytycznych. W tym celu należy uwzględnić odkształcenia trwałe także w przekrojach między rysami oraz wziąć pod uwagę stany tarczowe pojawiające się przy dużych ugięciach płyt. W rozdziale 8 niniejszej pracy zaprezentowano sposób zaadaptowania przedstawionej już metody do nieliniowej analizy płyt. Natomiast w rozdziale 9 omówiono zastosowanie teorii samonapreżeń do budowy sprężystego modelu betonu przydatnego do tego typu rozważań.

8. Nieliniowa analiza płyt żelbetowych przy wykorzystaniu Pośredniej Metody Elementów Brzegowych.

Matematyczne zasady obliczania płyt wg teorii nieliniowej sformułował w 1910 roku Karman w swojej pracy Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften. Zależność między obciążeniem a przemieszczeniem opisują w tym przypadku dwa nieliniowe, sprzężone ze sobą równania różniczkowe. Przy większych ugięciach płyty należy bowiem uwzględnić siły poziome powstające w jej płaszczyźnie środkowej. Na rys.8.1 przedstawiono wg Łukasiewicza [90] zależność pomiędzy obciążeniem a ugięciem dla płyty kołowej obciążonej w środku siłą skupioną.



Rys.8.1. Zależność pomiędzy obciążeniem a ugięciem dla płyty kołowej obciążonej w środku siłą skupioną (wg Łukasiewicza [90]).

Widać wyraźnie, że im większe obciążenie tym większa różnica pomiędzy teorią liniową i nieliniową. Zagadnienie to ma szczególne znaczenie w przemyśle lotniczym, okrętowym i maszynowym, gdzie cienkie płyty stalowe czy aluminiowe poddawane są dużym ciśnieniom. W budownictwie przyjmuje się, że w zakresie obciążeń użytkowych różnica ta jest w zasadzie do pominięcia. Jednym z zadań niniejszej pracy będzie sprawdzenie tej tezy. Ponadto opracowana metoda, w połączeniu z rozważaniami dotyczącymi zarysowania przedstawionymi w poprzedniej części opracowania, ma służyć do analizy płyt żelbetowych w granicznych stanach użytkowania a więc przy obciążeniach znacznie

przekraczających wielkości użytkowe.

Ścisłe rozwiązanie równań podanych przez Karmana jest na ogół niemożliwe i udaje się jedynie w nielicznych przypadkach osiowo-symetrycznych. Na przykład obliczenia analityczne dla płyt kołowych obciążonych w środku siłą skupioną przedstawił Łukasiewicz [90]. Boresi i Turner [29] oraz Berger [20] posługując się zasadą minimum energii potencjalnej układu oraz szeregiem Fouriera uzyskali wyniki dla płyt prostokątnych równomiernie obciążonych (obliczaniu w tych przypadku podlegało jedynie maksymalne ugięcie w środku rozpiętości). Oczywiście wraz z rozwojem technik komputerowych stało się możliwe ich zastosowanie do analizowania bardziej skomplikowanych przypadków. Wystarczy tu wymienić fundamentalną pracę Zienkiewicza [134], który przedstawił w niej między innymi zasady wykorzystania MES do tego typu obliczeń. Powstało potem szereg programów cyfrowych wykorzystujących te założenia. Również Metoda Elementów Brzegowych była używana do analizy płyt o dużych ugięciach. Chandra [33] wykorzystał do tego celu zasadę wzajemności prac Bettiego i teorię przyrostową uwzględniającą równania Lagrange'a. Zastosowanie Bezpośredniej Metody Elementów Brzegowych do analizy płyt cienkich zaprezentował Tanaka [124]. Podobne analizy przeprowadził również Costa [37]. W niniejszej pracy zaprezentowano metodę obliczania płyt sprężystych wg teorii nieliniowej za pomocą Pośredniej Metody Elementów Brzegowych.

8.1. Opis metody.

Zakładając, że zewnętrzne siły styczne do powierzchni płyty są równe zeru, podstawowe równania płyty sprężystej w stanie płytowo-tarczowym można wg Łukasiewicza [90] zapisać wzorami

$$D\Delta\Delta w + L(w, \phi) = q \quad (8.1)$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta\Delta\phi = \frac{1}{2}L(w, w) \quad (8.2)$$

gdzie: D - sztywność płyty;

h - grubość płyty;

E - moduł Younga;

ϕ - funkcja Airiego;

$$L(w, \phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$L(w, w) = 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$$

W powyższych równaniach pominięto efekty związane z poprzecznymi naprężeniami stycznymi i normalnymi.

Równania 8.1 i 8.2 zostały rozwiązane w sposób numeryczny za pomocą programu cyfrowego obliczającego płyty wg teorii liniowej, przedstawionego w poprzedniej części pracy. Jako pierwsze przybliżenie przyjmuje się wartości obliczone jak dla płyty sprężystej. Mając w ten sposób określoną powierzchnię ugięcia "w", można obliczyć operator $L(w, w)$. Traktując teraz prawą stronę równania 8.2 jako pewnego rodzaju obciążenie zewnętrzne, można je rozwiązać przy pomocy Pośredniej Metody Elementów Brzegowych przez analogię do teorii klasycznej, gdzie zależność między obciążeniem a przemieszczeniami ma postać

$$D\Delta\Delta w = q$$

Przez analogię można również przyjąć podstawową funkcję wpływowa funkcji Airiego w postaci

$$\phi^* = \frac{Eh}{16\pi} \left[(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2 \right] \cdot \ln \frac{(x-\xi)^2 (y-\zeta)^2}{R^2} \quad (8.3)$$

gdzie: x, y - współrzędne rozpatrywanego punktu;

ξ, ζ - współrzędne przyłożenia obciążenia;

R - promień porównawczy.

Wartości funkcji ϕ spowodowane przez "obciążenie" $L(w, w)$ można teraz wyrazić wzorem

$$\phi = \int_F L(w, w) \phi^* dF \quad (8.4)$$

Uwzględniając odpowiednie warunki brzegowe, równanie 8.2 może być teraz rozwiązane dla płyty o dowolnym kształcie.

Dla płyty zamocowanej na brzegu przesuwnie w kierunku poziomym, warunki brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} N_{xx} &= - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ N_{yy} &= - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

gdzie: N_{xx}, N_{yy} - napięcia poziome.

Dla płyty zamocowanej na brzegu nieprzesuwnie w kierunku poziomym, warunki te można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} h \cdot E \cdot u &= \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot dx - \nu \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + F_1(y) = 0 \\ h \cdot E \cdot v &= \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot dy - \nu \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + F_2(x) = 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

gdzie: u, v - przemieszczenia poziome płyty;

h - grubość płyty.

Dodatkowy warunek na funkcje $F_1(y)$ i $F_2(x)$ wyraża się za pomocą wzoru

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8.7)$$

Podstawiając do równania 8.7 zależności ze wzoru 8.6 otrzymano

$$\int \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \cdot dx + \int \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \cdot dy + \frac{dF_1(y)}{dy} + \frac{dF_2(x)}{dx} = -2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (8.8)$$

Po otrzymaniu funkcji Airiego ϕ , można wyliczyć operator $L(w, \phi)$. Przenosząc go na prawą stronę równania 8.1 i traktując jako pewnego rodzaju obciążenie zewnętrzne q^*

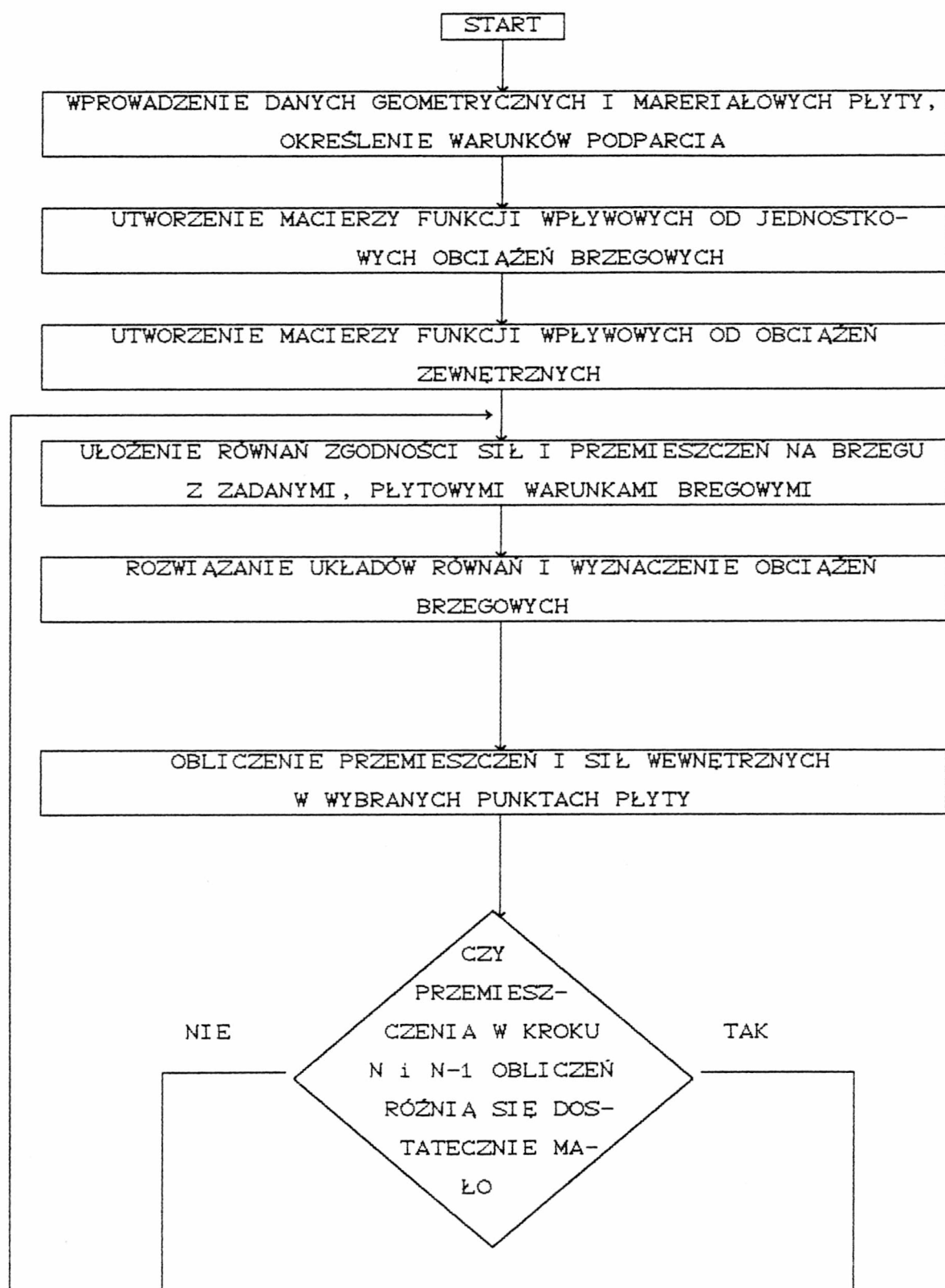
$$q^* = q - L(w, \phi) \quad (8.9)$$

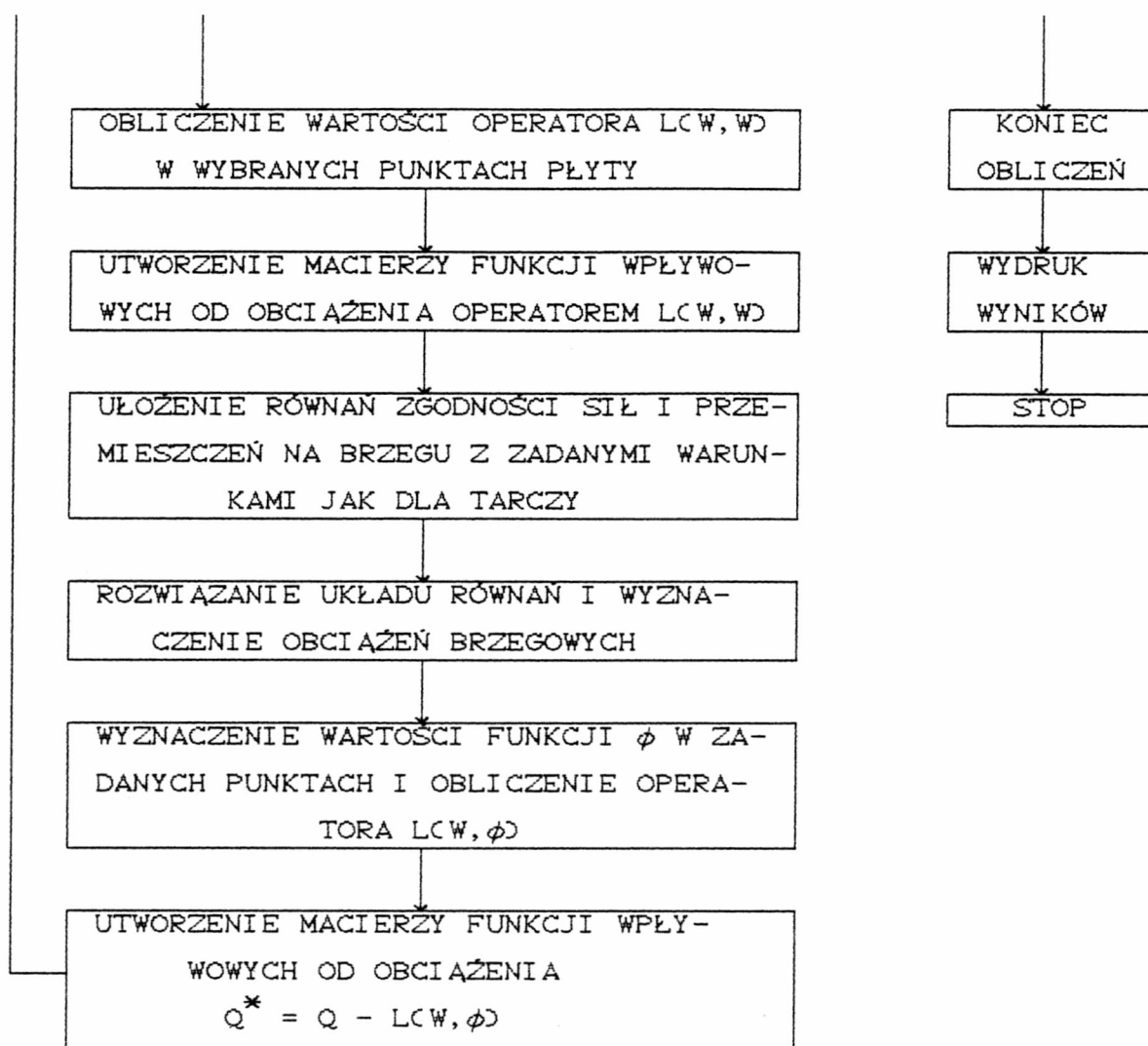
można obliczyć przemieszczenia i siły wewnętrzne w płycie o dowolnym kształcie i obciążeniu. Równania 8.1 i 8.2 są rozwiązywane na przemian aż do uzyskania żądanej, odpowiednio małej różnicy między powierzchniami ugięcia w kroku "n" i "n-1" obliczeń.

8.2. Algorytm programu cyfrowego.

Przy wykorzystaniu metody opisanej w rozdz.8.1 oraz Pośredniej Metody Elementów Brzegowych ułożony został przez autora niniejszego opracowania program cyfrowy, obliczający płyty sprężyste wg teorii nieliniowej. Program ten napisano w języku FORTRAN i jest on przystosowany do komputerów typu PC IBM. Wykorzystano w nim znaczne fragmenty programu opisanego w rozdz.7, dotyczące sprężystej pracy konstrukcji. "Obciążenia" zastępcze od operatorów $L(w, w)$ i $L(w, \phi)$ przyjmowane są jako równomiernie rozłożone na obszarze prostokątnym, zadany odpowiednią siatką podziału. W kolejnych krokach obliczeniowych porównaniu podlega maksymalne ugięcie płyty " w_0 " aż do uzyskania odpowiednio małej różnicy (w programie przyjęto $\Delta w = 0.001m$). Algorytm programu cyfrowego przedstawiono na rys.8.2. Po rozbudowaniu o podprogramy związane z zarysowaniem konstrukcji (analogicznie jak w rozdz.6) program ten ma w przyszłości służyć do obliczania płyt żelbetowych w stanach granicznych użytkowania.

Rys.8.2. Algorytm programu cyfrowego do obliczania płyt wg teorii nieliniowej.

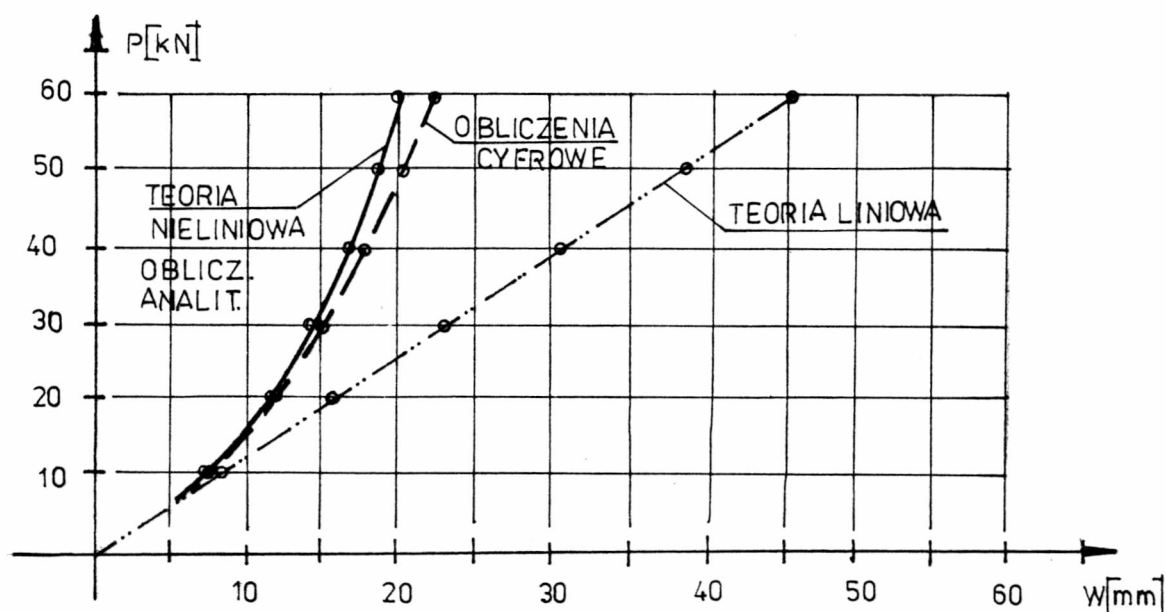




8.3. Obliczenia testujące program cyfrowy.

8.3.1. Przykład nr 1.

Obliczeń dokonano dla kołowej płyty stalowej o średnicy $D = 3.0\text{m}$, gr. 2 cm , swobodnie podpartej na brzegu bez możliwości przesuwu poziomego. Obciążenie centryczna siła skupiona. Dane materiałowe dla płyty: $\nu = 0.3$, $E_a = 2.05 \times 10^8\text{ kPa}$. Wyniki uzyskane za pomocą programu cyfrowego porównano na rys. 8.3 z danymi wg teorii liniowej i nieliniowej, otrzymanymi na podstawie rozważań analitycznych, przedstawionych w pracy Łukasiewicza [90].



Rys. 8.3. Ugięcia płyty kołowej obciążonej centrycznie siłą skupioną. Porównanie obliczeń analitycznych z wynikami uzyskanymi za pomocą programu cyfrowego.

Obliczenia wykonano aproksymując brzeg płyty linią łamaną przy gęstym podziale na odcinki. Otrzymano dobrą zgodność uzyskanych wyników z danymi z rozważań analitycznych.

8.3.2. Przykład nr 2.

Obliczeń testujących dokonano dla płyty stalowej o wymiarze 8 ft x 8 ft, grubości 0.25 in, równomiernie obciążonej obciążeniem $q = 0.100$ psi. Dane materiałowe stali $\nu = 0.3$, $E = 30 \times 10^6$ psi gdzie: ft - 1 stopa = 30.5 cm;

in - 1 cal = 25.4 mm;

psi = lb/in²;

lb - 1 funt = 0.453 kg.

Obliczeń dokonano w anglosaskim systemie miar, ponieważ przykład ten jest cytowany przez kilku autorów zajmujących się obliczaniem płyt wg stanu płytowo-tarczowego. Porównanie otrzymanych wyników było możliwe tylko co do wartości maksymalnego ugięcia w środku płyty (brak danych co do pozostałych wartości). Zestawienie uzyskanych rezultatów pokazano w tab. 8.1.

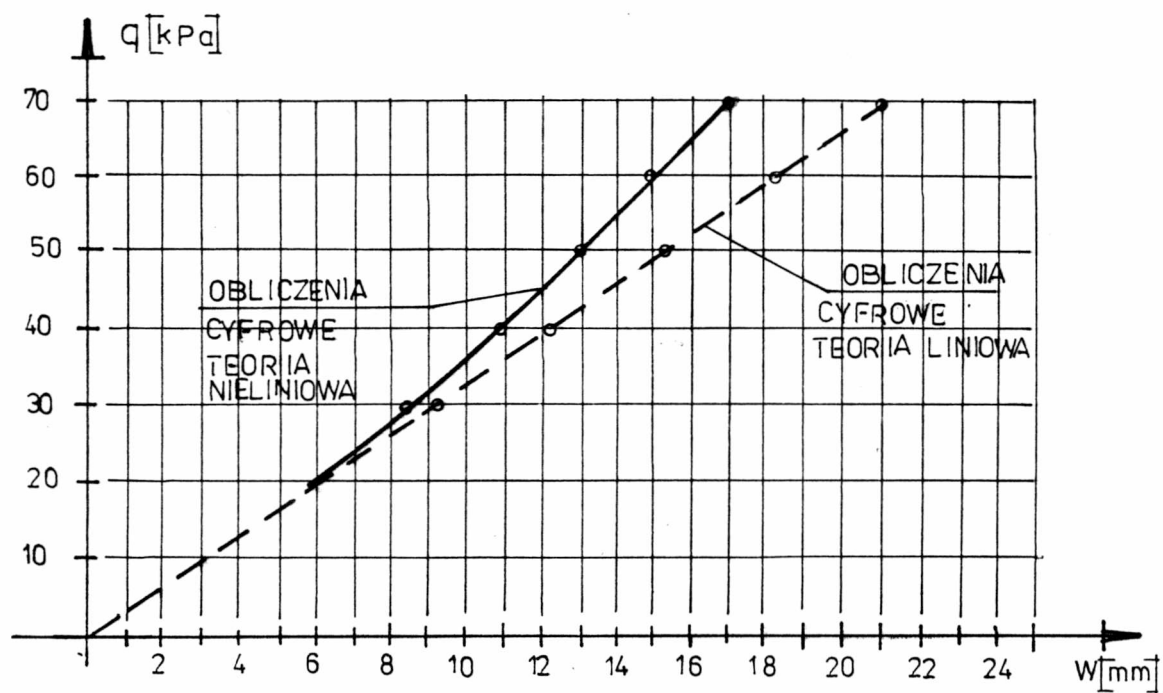
Tab. 8.1.

Warunki brzegowe	Publikowane rezultaty	Prezentowana metoda
	Ugięcie w środku rozpiętości [in]	
Z_1	0.20 [29]	0.21
Z_2	0.21 [29]	0.23
S_1	0.28 [29], 0.33 [10], 0.28 [20]	0.29
S_2	0.40 [29], 0.48 [10], 0.49 [20]	0.41
gdzie: Z - płyta zamocowana; S - płyta swobodnie podparta; 1 - bez możliwości przesuwu w kierunku poziomym; 2 - z możliwością przesuwu w kierunku poziomym.		

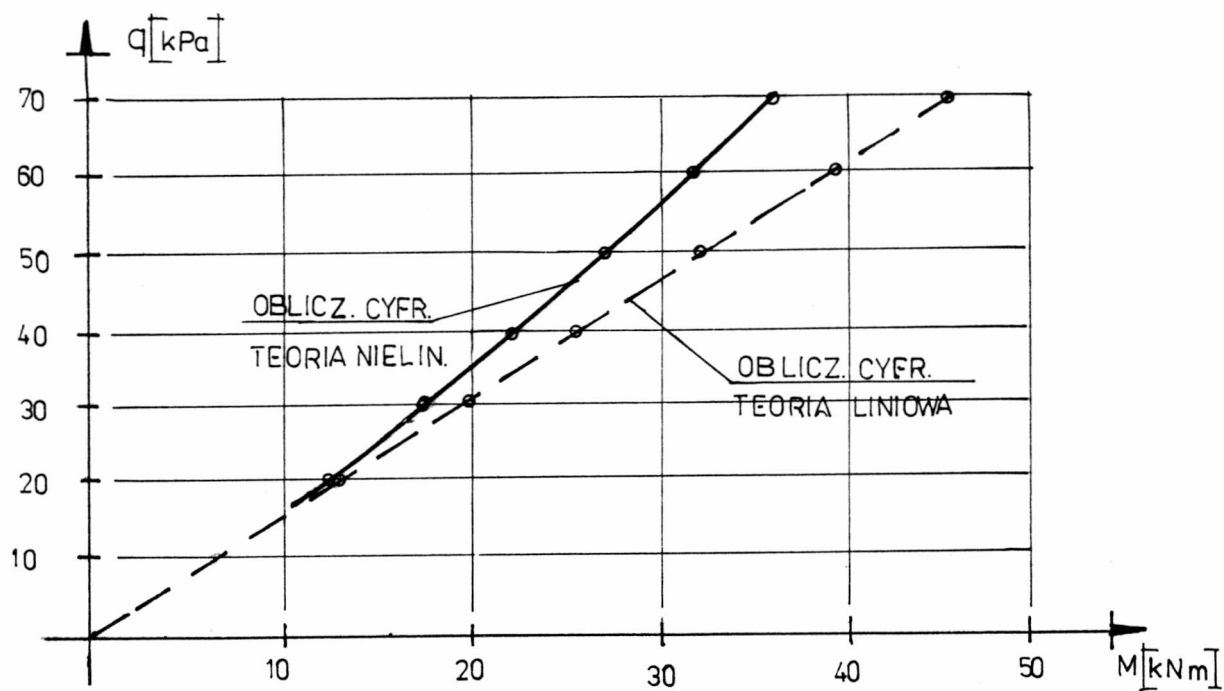
Otrzymane wyniki są zbieżne z rezultatami uzyskanymi przez innych autorów.

8.3.3. Przykład nr 3.

Obliczano płytę kwadratową o długości boków 4.0 m, gr.12 cm, swobodnie podpartą na brzegu bez możliwości przesuwu. Obciążenie równomiernie rozłożone. Dane materiałowe jak dla betonu B15 :
 $\nu = 0.166$, $E = 2.3 \times 10^7$ kPa. Wyniki pokazano na rys.8.4 i 8.5.



Rys. 8.4. Zależność obciążenie-ugięcie dla płyty wg teorii liniowej i nieliniowej.

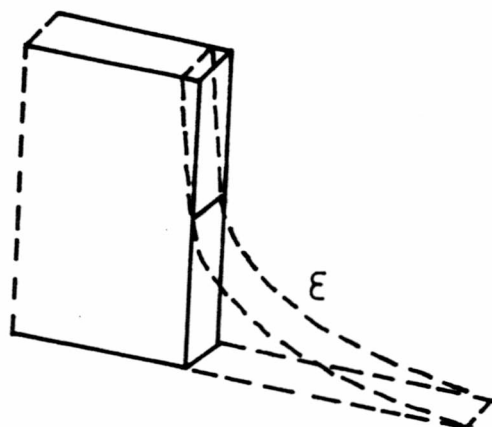


Rys. 8.5. Zależność obciążenie-moment zginający dla płyty wg teorii liniowej i nieliniowej.

Przyjmijmy za umowną granicę obciążeń użytkowych obciążenie powodujące ugięcie płyty nie większe niż $1/400$ jej rozpiętości. W zaprezentowanym przykładzie ma ono wielkość $30 \div 35 \text{ kN/m}^2$. Różnica między przemieszczeniami i siłami wewnętrznymi obliczonymi za pomocą teorii liniowej i nieliniowej wynosi w tym przypadku już ok. $10 \div 11\%$. Analogiczną różnicę w wynikach można zaobserwować w przykładzie 8.3.1 dla tak przyjętej, granicznej wartości obciążenia użytkowego, wynoszącego w tym przypadku 10 kN . Ponieważ powyższe rozważania miały ogólny charakter, można zaryzykować stwierdzenie, że obliczając płyty poddane działaniu dużych obciążeń użytkowych, za pomocą teorii nieliniowej uzyska się przemieszczenia i siły wewnętrzne o ok. 10% mniejsze niż otrzymane z analiz liniowych.

9. Samonapężenia.

Z licznych badań doświadczalnych, przeprowadzonych przez zespół prof. Borcza [23,24,26,61,62,63] na płytach i belkach żelbetowych, wynika, że elementy te zachowują się sprężysto podczas procesu wielokrotnego obciążania i odciażania konstrukcji. Taki charakter pracy elementy te wykazują nawet przy bardzo dużych obciążeniach, w stanach pokrytycznych. Zjawisko to można wytłumaczyć za pomocą teorii samonapężeń. Rozważmy mianowicie przekrój niezarysowanej belki żelbetowej. Gdyby jej poszczególne warstwy mogły wydłużać się i skracać niezależnie, utworzyłyby się odkształcenia jak na rys. 9.1.*



Rys. 9.1. Hipotetyczne odkształcenia przekroju belki przy założeniu niezależnej pracy jej poszczególnych warstw.

Odstkształcenia te muszą jednak spełniać warunek nierozdzielności

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (9.1)$$

gdzie: u, v - przemieszczenie poziome i pionowe punktu materialnego belki.

*Rysunki 9.1, 9.2, 9.3, 9.4 i 9.7 zaczerpnięto z pracy [23].

Odształcenia wyrażają się wzorami

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z} ; \quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9.2)$$

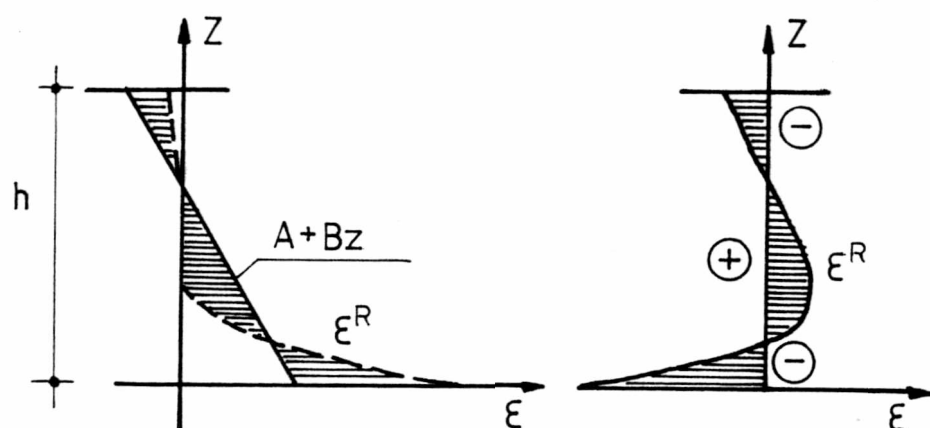
Pomijając odkształcenia ε_{xz} oraz ε_{zz} jako małe, otrzymuje się warunek nierozdzielności odkształceń w postaci

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon_{xx} = 0 \quad (9.3)$$

Z zależności tej wynika liniowy rozkład odkształceń na wysokości belki, co można zapisać w postaci

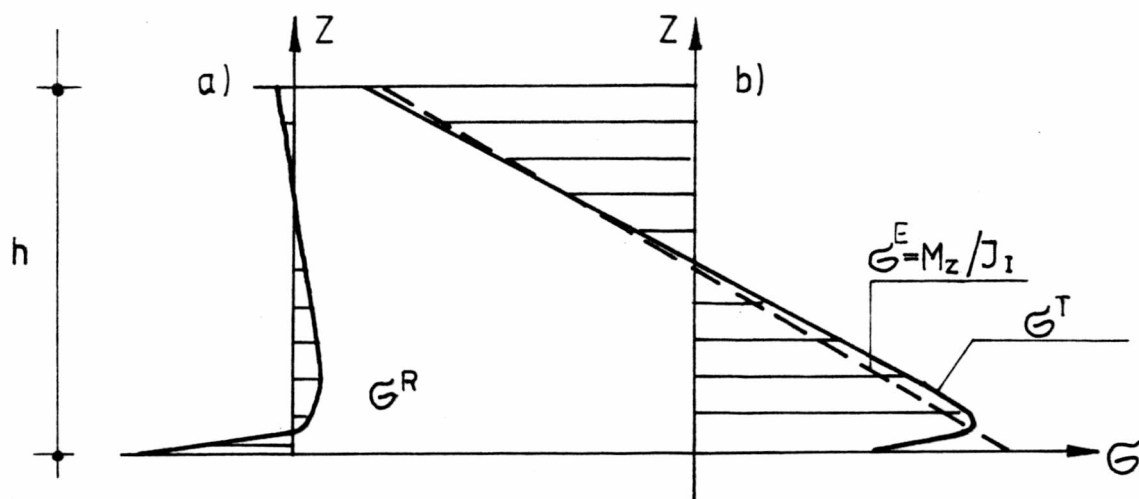
$$\varepsilon_{xx} = A + B z \quad (9.4)$$

Zależność ta nazywana jest prawem płaskich przekrojów. Aby była ona spełniona, muszą powstać naprężenia - tzw. samonaprężenia, powodujące dodatkowe, tym razem sprężyste odkształcenia ε^R betonu. Zostało to zilustrowane na rys.9.2.



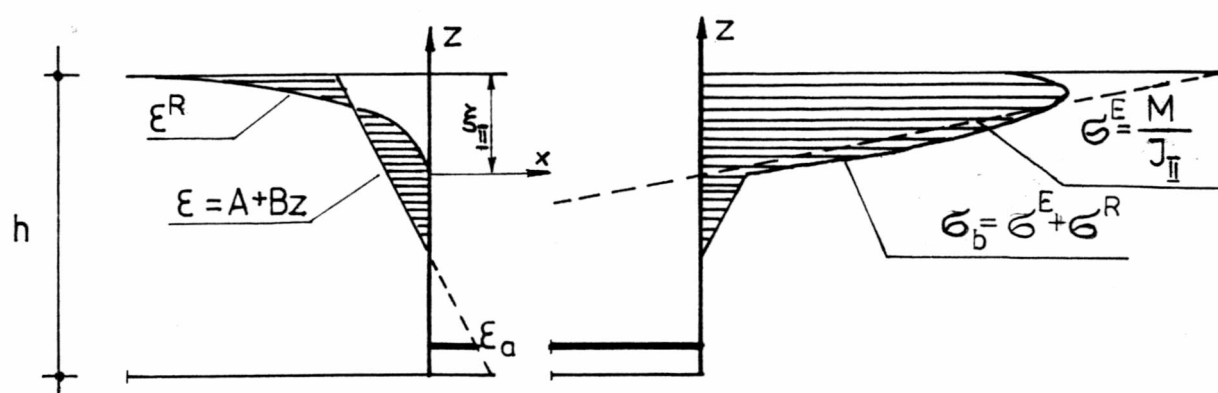
Rys.9.2. Odształcenia spowodowane samonaprężeniami.

Odształcenia te pozostają w elemencie także po zdjęciu obciążenia i stąd nazywane są też jak i towarzyszące im naprężenia - resztkowymi. Rozkład tych naprężeń ilustruje rys.9.3a, a sumaryczny wykres naprężeń w belce przed jej zarysowaniem rys.9.3b.



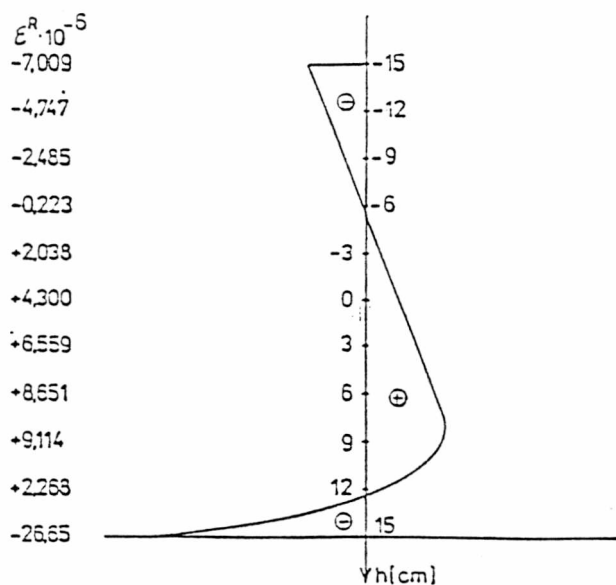
Rys.9.3. Rozkład naprężeń w belce przed jej zarysowaniem.

Naprężenia resztkowe (samonaprężenia) tworzą układ samozrównoważony (nie biorą udziału w równoważeniu obciążeń zewnętrznych). Nakładają się one na naprężenia od obciążenia zewnętrznego - tzw. naprężenia swobodne. Rozkład naprężeń przedstawiony na rys.9.3b znany jest już od dawna. Przedstawiono tutaj tylko jego inną interpretację. Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla przekroju zarysowanego. W wyniku otrzymuje się wykres jak na rys 9.4.

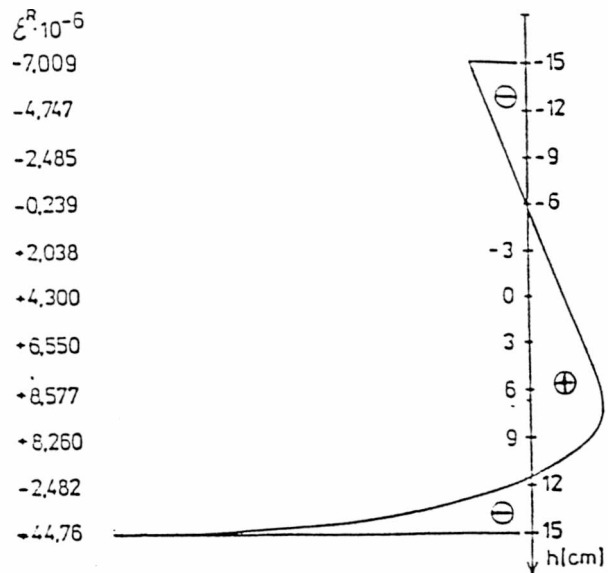


Rys.9.4. Odkształcenia resztkowe i naprężenia sumaryczne w zarysowanym przekroju belki.

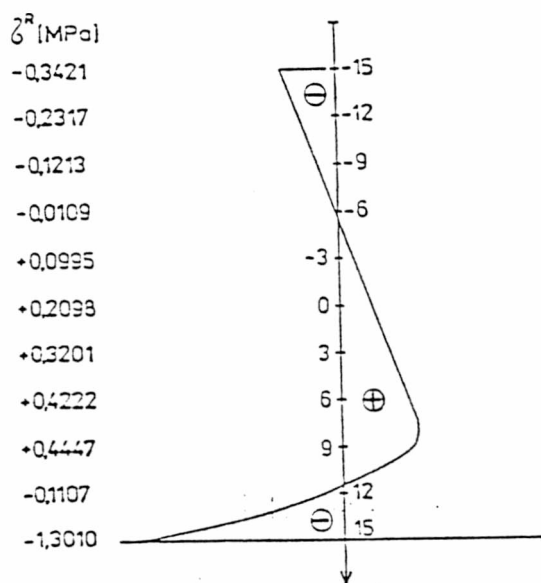
Wartości samonaprężeń można wyliczyć korzystając z danych doświadczalnych. Na rys.9.5 i 9.6 przedstawiono niepublikowane dotąd wykresy samonaprężeń i naprężeń całkowitych, uzyskane na podstawie badań doświadczalnych dla zginanej belki żelbetowej. Badania te prowadzone były przez Bassama Abou Eissa w 1991 roku w Instytucie Budownictwa PWr.



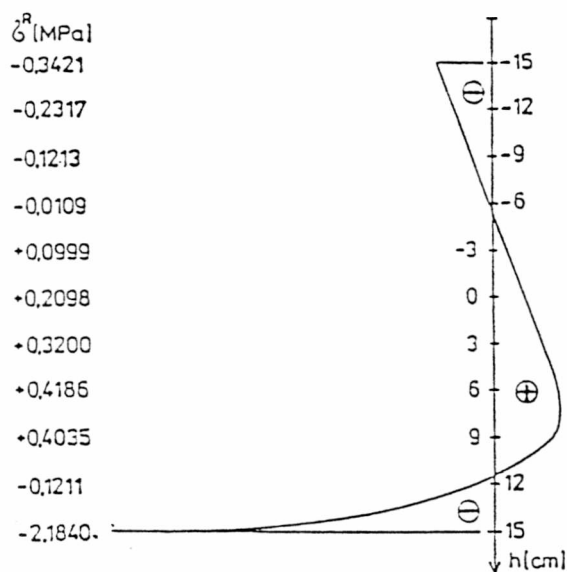
Odształcenia resztkowe ϵ^R z uwzględnieniem relaksacji betonu.



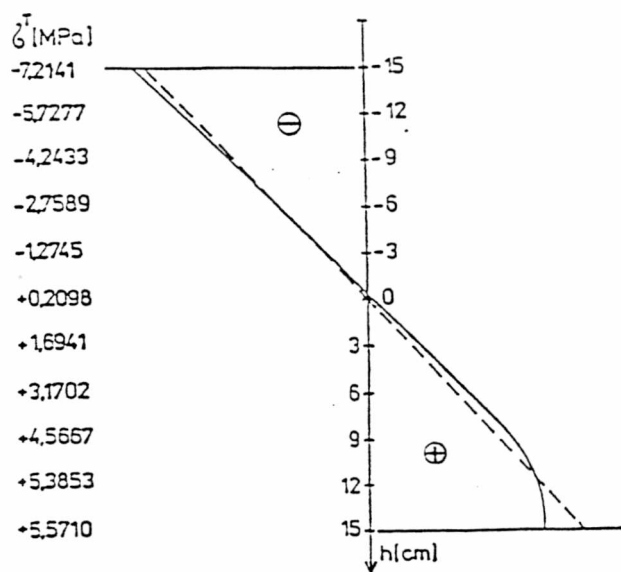
Odształcenia resztkowe ϵ^R bez uwzględnienia relaksacji betonu.



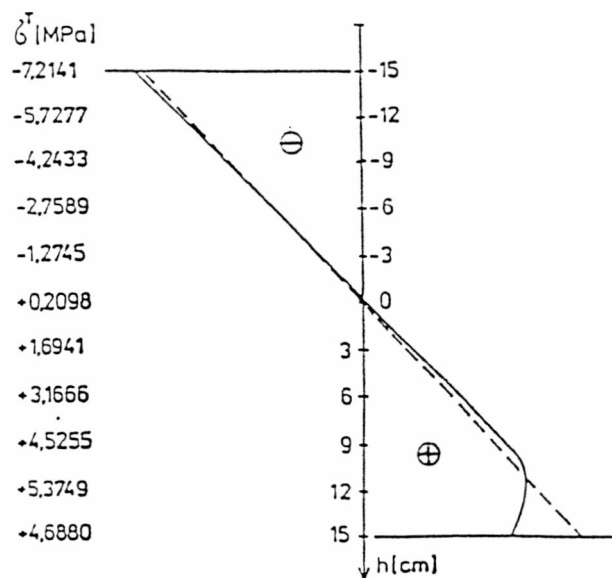
Samonapężenia δ^R z uwzględnieniem relaksacji betonu.



Samonapężenia δ^R bez uwzględnienia relaksacji betonu.

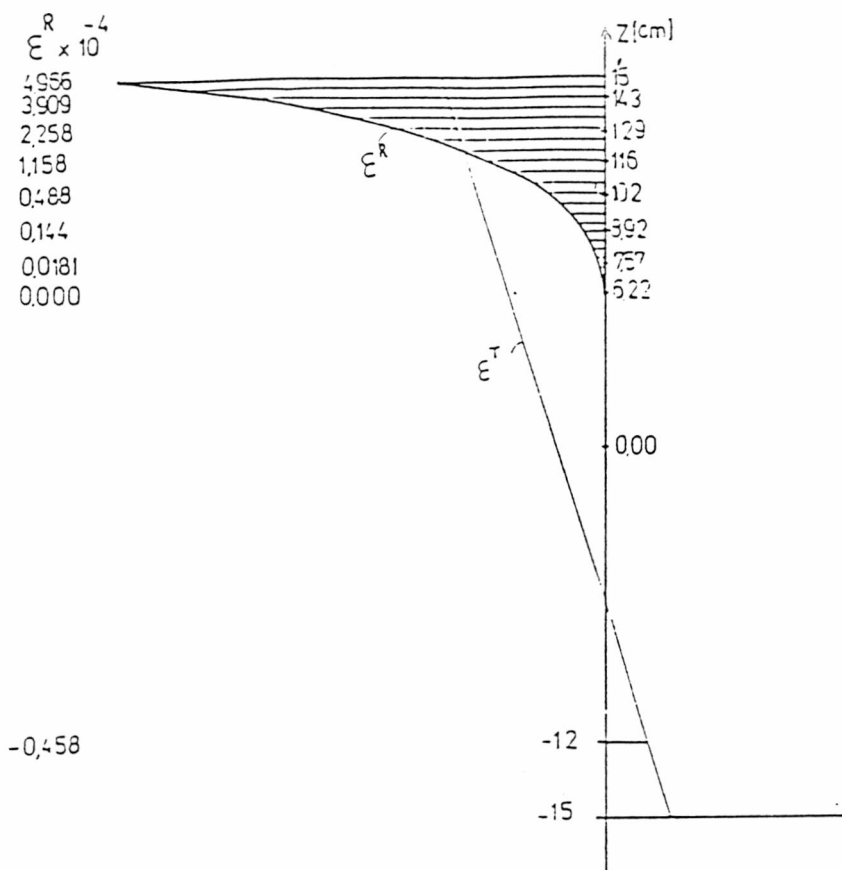


Napężenia totalne δ^T z uwzględnieniem relaksacji betonu.

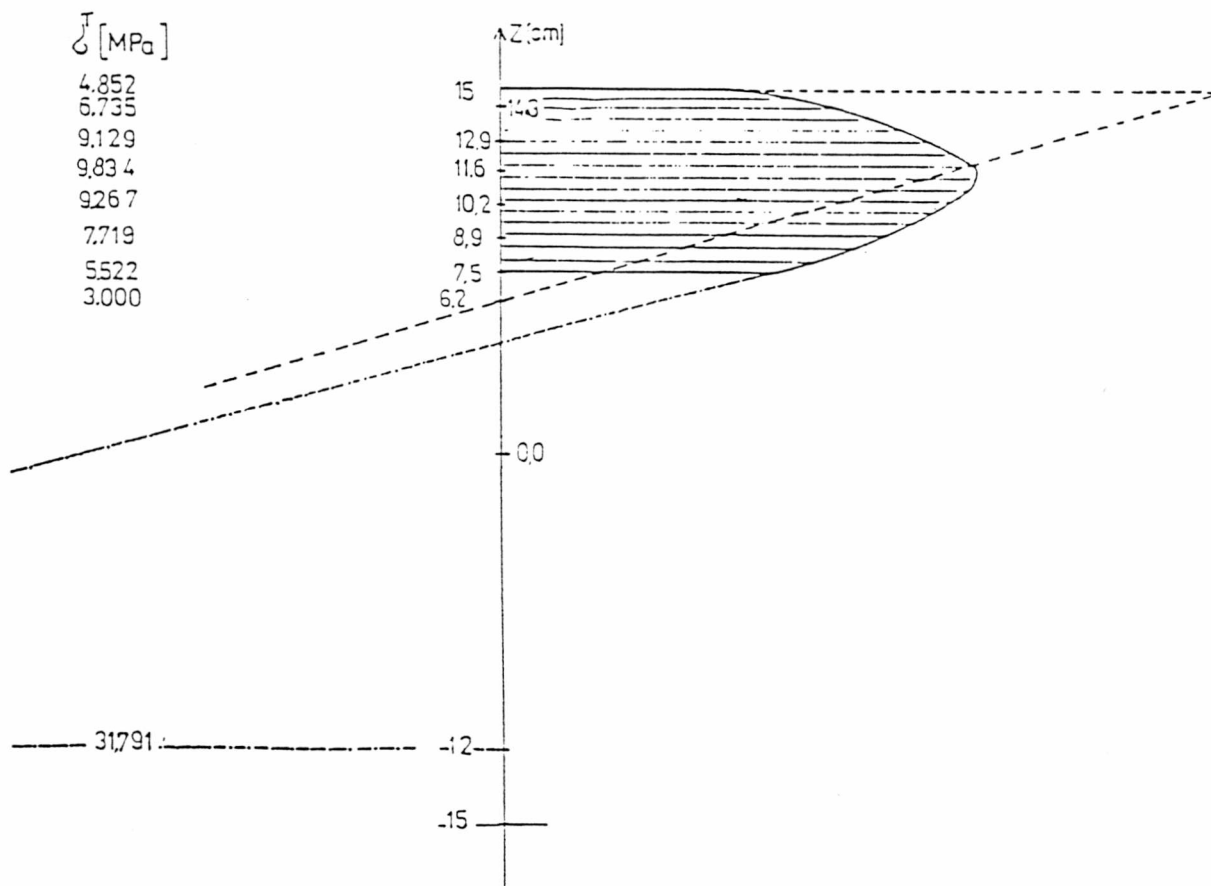


Napężenia totalne δ^T bez uwzględnienia relaksacji betonu.

Rys.9.5. Napężenia resztkowe i całkowite w belce przed jej zarysowaniem.



Odształcenia resztkowe i totalne bez uwzględnienia relaksacji betonu.



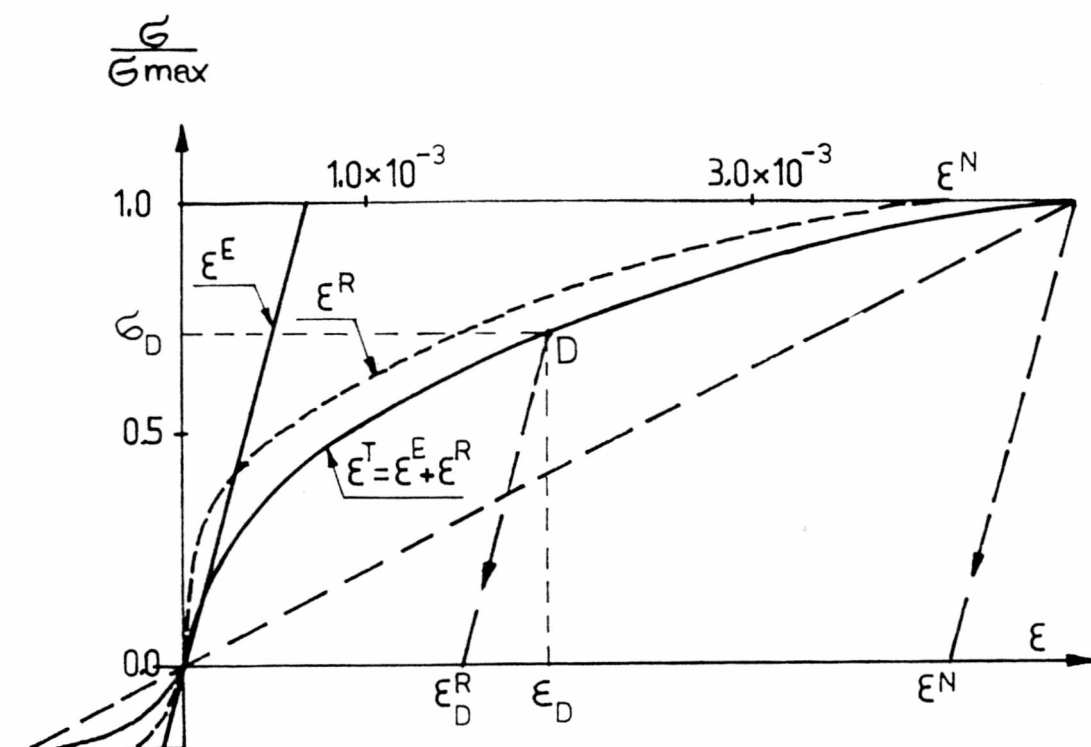
Napężenia totalne σ^T bez uwzględnienia relaksacji betonu.

Rys.9.6. Napężenia resztkowe i całkowite w zarysowanym przekroju belki żelbetowej.

Powyższe rozważania prowadzą do modelu, w którym odkształcenia całkowite ε^T można przedstawić w postaci odkształceń sprężystych ε^E wraz z nałożonymi na nie odkształceniami resztkowymi ε^R

$$\varepsilon^T = \varepsilon^E + \varepsilon^R \quad (9.5)$$

Zależność σ - ε dla tego modelu została przedstawiona na rys.9.7, a poprzednio prezentowana była w rozdz.5.1 dotyczącym modelu betonu.



Rys.9.7. Model betonu.

Znając więc rozkład odkształceń resztkowych związany z maksymalną wartością przyłożonego obciążenia, można zarysowaną płytę obliczać jako sprężystą, przyjmując zależność σ - ε w postaci

$$\varepsilon = \varepsilon_D^R + \frac{\varepsilon_D - \varepsilon_D^R}{\sigma_D} \sigma \quad (6.2)$$

gdzie: σ_D, ε_D - naprężenia i odkształcenia odpowiadające maksymalnemu obciążeniu;

ϵ_D^R - odkształcenia resztkowe odpowiadające maksymalnemu obciążeniu.

Model ten obowiązuje także w stanach pokrytycznych. Trzeba jedynie wtedy odkształcenia resztkowe uwzględnić również w przekrojach między rysami, traktując te odkształcenia jako pewnego rodzaju obciążenie zewnętrzne (dla obciążeń użytkowych odkształcenia resztkowe uwzględniano jedynie w przekrojach z rysami). Należy także w tym przypadku zmodyfikować przedstawione w rozdz. 5 prawo rządzące rozwieraniem się rysy. Pole odkształceń resztkowych można wyznaczyć na podstawie badań doświadczalnych.

10. Uwagi końcowe, wnioski.

W niniejszej pracy przedstawiono teorię obliczania zarysowanych płyt żelbetowych poddanych działaniu obciążeń użytkowych. Wykorzystano w niej dyskretny model rysy oraz Pośrednią Metodę Elementów Brzegowych. Przy zastosowaniu tej teorii ułożono program cyfrowy do obliczania tych elementów. Program napisano w języku FORTRAN 41 i jest on przystosowany do mikrokomputerów klasy PC IBM. Przy jego pomocy oblicza się przemieszczenia i siły wewnętrzne w tych konstrukcjach a także naprężenia w prętach zbrojeniowych przecinających rysy oraz szerokości rozwarcia rys. Pozwala on także na uwzględnienie w obliczeniach pola odkształceń trwałych i tym samym umożliwia analizowanie płyt po odciążeniu i ponownym obciążeniu. Dokładność programu została przetestowana na szeregu przykładach uogólnionych, a także na danych dostępnych z badań doświadczalnych. Stwierdzono dobrą zgodność obliczeń cyfrowych z wynikami eksperymentalnymi. Główny cel pracy został więc osiągnięty. Zgodnie z przyjętymi założeniami opracowano obiektywną (tzn. weryfikowalną doświadczalnie) metodę obliczania płyt żelbetowych z uwzględnieniem zarysowania. Na podstawie przeprowadzonych analiz wyciągnięto także kilka wniosków odnośnie pracy tych konstrukcji. Między innymi stwierdzono co następuje:

*¹⁾

- zarysowanie powoduje znaczne zwiększenie ugięć oraz dużą redystrybucję sił wewnętrznych w stosunku do sprężystej pracy płyty;
- w polskiej normie żelbetowej odległość między rysami l_f określana jest na podstawie wzoru, który nie uwzględnia specyfiki konstrukcji powierzchniowych, tj. ich kształtu, warunków podparcia i obciążenia oraz sposobu zbrojenia. Otrzymane wyniki mogą wobec tego znacznie różnić się od rzeczywistości. Ponieważ w rozumieniu tej normy szerokość rozwarcia rys zależy bezpośrednio od wielkości l_f , może to prowadzić do dużych błędów obliczeniowych;
- przy stałym rozstawie prętów zbrojeniowych oraz uwzględnieniu w obliczeniach rzeczywistego ich rozkładu, dobór wielkości odcinka strefy o naruszonej przyczepności l_f , ma mały wpływ na wartość uzyskanych wyników. W tym przypadku długość odcinka l_f może być

określana niezbyt precyzyjnie, np wg normy żelbetowej;

- przy modelowaniu zarysowania, rysy równoległe należy zastępować układem co najmniej 2 równoległych rys obliczeniowych. Przyjęcie tylko 1 rysy obliczeniowej powoduje błąd w uzyskanych wynikach rzędu 8÷9% ;
- zbrojenie diagonalne w stosunku do zbrojenia ortogonalnego opóźnia pojawienie się rys oraz przy danym poziomie obciążenia powoduje zmniejszenie się ugięć i sił wewnętrznych. Różnica ta jednak nie jest duża. W analizowanych przypadkach wynosiła ona 10÷11% .

Stworzone zostało więc już narzędzie do analizy zarysowanych płyt żelbetowych poddanych działaniu obciążeń użytkowych. W chwili obecnej prezentowany program umożliwia obliczanie elementów, w których znany jest rozkład rys - a więc może być pomocny przy ocenie nośności płyt już istniejących. Aby dostosować go do zadań projektowych, wystarczy wyposażyć go w typowy podprogram określający położenie rys w zależności od naprężeń głównych.

W niniejszej pracy zaprezentowano również metodę obliczania płyt wg teorii nieliniowej - tj. wg stanu płytowo - tarczowego. Na jej podstawie opracowano odpowiedni program obliczający płyty niezarysowane, a więc pracujące w fazie sprężystej. Przeprowadzone analizy wykazały, że w zakresie obciążeń użytkowych różnice między wynikami uzyskanymi wg teorii liniowej i nieliniowej są pomijalnie małe. W przypadku bardzo dużych obciążeń użytkowych (powodujących ugięcie równe ok. 1/400 rozpiętości płyty) wynoszą one ok. 10% . W chwili obecnej trwają prace nad ułożeniem programu cyfrowego wykorzystującego obie opisane wyżej metody, a więc obliczającego zarysowane płyty żelbetowe wg stanu płytowo-tarczowego. Zakłada się, że będzie on umożliwiał analizę tych konstrukcji w stanach pokrytycznych.

*¹⁾ Wszystkie uwagi i wnioski zamieszczone w niniejszej pracy dotyczą wyłącznie płyt pracujących dwukierunkowo.

SPIS LITERATURY

- [1] Absi E., Brandt M.: Analiza i badanie płyt żelbetowych w stanie zarysowania, PWN, W-wa 1974.
- [2] Banerjee B., Datta S.: A new approach to an analysis of large deflections of thin elastic plates, Int. J. Non-Linear Mech., 16/1981.
- [3] Banerjee P.K., Butterfield R.: Boundary Elements Methods in Engineering Science, McGraw-Hill Book Comp., London 1981.
- [4] Banerjee P.K., Watson J.O.: Developments in boundary element methods-4, Elsevier Appl. Science Publ., London 1986.
- [5] Banthia V.: Non linear problems of fracture mechanics - ed. by Banerjee P.K., Mukherjee S.: Developments in boundary element methods, Elsevier Appl. Science Publ., London 1984.
- [6] Baryła A.: Metoda obliczania przemieszczeń uogólnionych i sił wewnętrznych w płytach żelbetowych z rysami, praca doktorska, PWr 1978.
- [7] Baryła A., Sobocińska E.: Teoria płyt żelbetowych z rysami, PWN, W-wa 1983.
- [8] Barzegar F.: Analysis of reinforcement concrete membrane elements with anisotropic reinforcement, J. Struct. Eng., no.3, v.115/1989
- [9] Bashur F.K., Darwin D.: Nonlinear model for reinforced concrete slabs, J. of the Struct. Div., Proc. ASCE, January 1978.
- [10] Bauer H.F.: Non linear response of elastic plates to pulse excitations, J. Appl. Mech. 35/1968.
- [11] Bažant Z.P.: Advanced topics i inelasticity and failure of concrete, Cement-och-Betonginstitutet GBI, Gotab, Stockholm 1979.
- [12] Bažant Z.P.: Dyskusja pracy Elwi i Murray'a, J. Eng. Mech. Div. ASCE Proc., v.106/1980.
- [13] Bažant Z.P., Bhat P.D.: Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete, J. Eng. Mech. Div., ASCE

- [14] Bažant Z.P., Cedolin L.: Fracture mechanics of reinforced concrete, J. Eng. Mech. Div., ASCE Proc., v.105/1979.
- [15] Bažant Z.P., Lin F.B.: Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture, J. of Structural Eng., v.114, no.11/1988.
- [16] Bažant Z.P., Oh B.: Deformation of cracked net-reinforced concrete walls, J. of Struct. Eng., January 1983.
- [17] Bažant Z.P., Sang-Sik Kim: Plastic fracturing theory of concrete, J. of the Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, June 1979.
- [18] Bažant Z.P., Shieh C.L.: Endochronic model for nonlinear behaviour of concrete, Nucl. Eng. & Design, v.47/1978.
- [19] Berg S., Bergan P.G., Holand I.: Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete plates, Proc. 2nd SMIRT Conference, Berlin, September 1973.
- [20] Berger H.M.: A new approach to an analysis of large deflections of plates, J. Appl. Mech. 22/1975.
- [21] Bondarienko W.M., Bondarienko S.W.: Inżynieryjne metody nieliniowej teorii żeliezobietona, Strojizdat, Moskwa 1982.
- [22] Borcz A.: Podstawy teorii zarysowanych płyt żelbetowych, TNEB, W-wa 1963.
- [23] Borcz A.: Teoria konstrukcji żelbetowych, cz.I, PWr, Wrocław 1973, cz.II 1984.
- [24] Borcz A.: Zginanie zarysowanych, krzyżowo zbrojonych płyt żelbetowych, VII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1961.
- [25] Borcz A.: Obliczanie momentów w zarysowanych płytach żelbetowych, V Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1959.
- [26] Borcz A.: Obliczanie ugięć statycznie wyznaczalnych płyt żelbetowych, Inżynieria i Budownictwo 5/1960.
- [27] Borcz A.: Grundlagen der Distributionsmechanik von Stahlbeton-

- [28] Borcz A.: On non-homogeneous anisotropy of reinforced concrete plate, AIL V/1959.
- [29] Boresi A.P., Turner J.P.: Large deflections of rectangular plates, Int. J. Non-Linear Mech. 18/1983.
- [30] Brebbia C.A.: The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press 1978.
- [31] Cedolin L., Crutzen Y.R.J., Dei Poli S.: Triaxial stress-strain relationship for concrete, J. of the Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, June 1977.
- [32] Cervenka V.: Constitutive model for cracked reinforced concrete, J. of the ACI, no.6, v.82/1985.
- [33] Chandra A.: Boundary element formulation for strain-large deformation problems of plasticity and viscoplasticity - ed. by Banerjee P.K., Mukherjee S.: Developments in boundary element methods, Elsevier Appl. Science Publ., London 1984.
- [34] Chen W.F., Suzuki H.: Constitutive models for concrete, Computers and structures, v.12/1980.
- [35] Cope R.J.: Non-linear analysis of slab assemblages using numerical integration, IASS Symposium, Darmstad 1978, Werner-Verlag, Düsseldorf 1978.
- [36] Cope R.J., Rao P.V.: A two-stage procedure for the non-linear analysis of slab bridges, Proc. of the Inst. Civ. Eng., Part 2, December 1983.
- [37] Costa J.A.: Plate bending problem using BEM - ed. by Brebbia C.A.: Boundary elements VI, Springer Berlin/West 1984.
- [38] Cruse T.A., Wilson R.B.: Boundary-integral equation method for elastic fracture mechanics analysis, Int. J. Fracture, 22/1977.
- [39] Dąbrowski O.: Teoria dźwigarów powierzchniowych, Wydawnictwa PWr, W-w 1987.
- [40] Dhir R., Munday J.G.L.: Tests on prestressed, partially prestressed and reinforced concrete slabs, Advances in concrete slab technology, Pergamon

Press, 1980.

- [41] Divaker M.P., Shah S.P.: Constitutive model for shear transfer in cracked concrete, J. Struct. Eng., no.5, v.113/1987.
- [42] Dragon A.: On phenomenological description of rock-like material with account for kinetics of brittle fracture, AMS 28/1976.
- [43] Dragon A., Mróz Z.: A continuum model for plastic -brittle behaviour of rock and concrete, Int. J. Eng. Sci., 17/79.
- [44] Dougill J.W.: On stable progressively fracturing solids, J. Appl. Math. and Phys., 27/1976.
- [45] Elwi A.A., Murray D.W.: A 3D hypoelastic concrete constitutive relationship, J. Eng. Mech. Div., ASCE Proc., v.105/1979
- [46] Ezawa Y., Okamoto N.: Singularity modeling in two- and three-dimensional stress intensity factor computation using the boundary element method, Boundary Elements ed. by C.A. Brebbia and G. Aier, Springer-Verlag 1985.
- [47] Floegl H., Mang .A.: Tension stiffening concept based on bond slip, J. of the Struct. Div., Proc. ASCE, December 1982.
- [48] Franz G.: Nochmals - Schiefe Bewehrung, Bauingenieur, no.2, v.59/84.
- [49] Fuji F.: On the finite element crack analysis of RC-slabs under bending, Contr. IASS Symposium, Darmstad 1978, Werner-Verlag, Düsseldorf 1978.
- [50] Gerstle K.H.: Behaviour of concrete under multiaxial stress state, J. Eng. Mech. Div., ASCE Proc., EM6, December 1980.
- [51] Godycki-Ćwirko T.: Mechanika betonu, Arkady, W-wa 1982.
- [52] Goszczyński S.: Niektóre aspekty zastosowania kontynualnej teorii zginania w analizie pracy płyt żelbetowych, Prace Naukowe Instytutu Budownictwa PWr, seria Konferencje-"Mechanika konstrukcji betonowych", Karpacz 1984.

- [53] Goszczyński S., Mucha J.: Kontynualna teoria zginania w zastosowaniu do płyt obciążonych doraźnie, AIL 30/84
- [54] Goszczyński S., Mucha J.: Praca płyt żelbetowych w ujęciu kontynualnej teorii zginania, XXVII Konf. Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1981.
- [55] Grünberg J.: Berechnung von ebenen Stahlbeton-flächentragwerken im gerissen Zustand mit der Methode der Finiten Elementen, Werner-Verlag, Düsseldorf 1974.
- [56] Grünberg J.: Spannungszustände und mitwirkende Plattenbreite eines Stahlbeton-Plattenbalken-Tragwerks im gerissenen Zustand, Beton und Stahlbetonbau, 73 Jahrgang 8/1978.
- [57] Guriewicz A.L., Karpieńko N.I., Jarin L.I.: O sposobach rasczieta żeliezobietonnych plit na EWM z ucziatom procesa treszczinoobrazowanija, Stroit. miech. i rascziat sooruzienij 1/1972.
- [58] Harmon T.G., Zhangyuan N.: Shear strength of reinforced concrete plates and shells determined by finite element analysis using layered elements, J. Struc. Eng., no.5, vol.115/1989.
- [59] Hillerborg A.: The application of fracture mechanics to concrete, Contemporary European Concrete Research, Swedish Cement and Concrete Research Institute, Stockholm 1982.
- [60] Hsu T.T.C., Meu S.T., Chen B.: Theory of shear transfer strength of reinforced concrete, ACI Struct. J., no.2, v.84/1987.
- [61] Jankowiak R.: Z badań doświadczalnych zarysowanej belki żelbetowej, AIL XI/1965.
- [62] Jankowiak R.: Niektóre wyniki badań zginanej belki żelbetowej, XIV Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1968.
- [63] Jankowiak R.: Badania doświadczalne deformacji belek żelbetowych, ITB W-wa 1971.
- [64] Jofriet J.C., Mc Neice G.M.: Finite element analysis of reinforced concrete slabs, J. of the Struct. Div., Div., Proc. ASCE, March 1971.

- [65] Johansen W.: Yield-line theory, Cement and Concrete Assoc., London 1962.
- [66] John R., Shah S.P., Jeng Y.S.: A fracture mechanics model to predict the rate sensitivity of mode I fracture of concrete, Cement and concrete research, no.2, v.17/1987.
- [67] Kacner A.: A closed solution in the case of a semi-infinite plate with discontinuous boundary condition, cz.I-AMS IX/1957, cz.II-AMS X/1958.
- [68] Karpienko N.I.: Teorija deformirovanija železobetona z trieszczinami, Strojizdat, Moskwa 1976.
- [69] Karpienko N.I., Jarin L.I.: An analysis of reinforced concrete shells with consideration of material non-linear properties, IASS Symposium, Darmstad 1978, Werner-Verlag, Dusseldorf 1978.
- [70] Karpienko N.I.: Teorija deformirovanija železobetona z trieszczinami, Strojizdat, Moskwa 1976.
- [71] Kączkowski Z.: Płyty. Obliczenia statyczne, Arkady, W-wa 1968.
- [72] Kączkowski Z.: Obliczanie płyt anizotropowych metodą nakładania ugięć fałdowych, AMS V/1953.
- [73] Klisiński M.: Degradacja i odkształcenia plastyczne betonu, Prace IPPT, W-wa 1984.
- [74] Kossecka E.: Mathematical theory of defects, AMS 1974, tom 26.
- [75] Kozłowski J.: Studium współpracy betonu ze zbrojeniem w elemencie wielokrotnie osiowo rozciągany, praca doktorska PWr 1979.
- [76] Kuczyński W.: Podstawy hipotezy liniowych zmian sztywności belki żelbetowej podczas jej obciążania, AIL, tom VII/1961.
- [77] Kuczyński W.: Obliczanie przemieszczeń belek żelbetowych z uwzględnieniem uplastycznienia i zarysowania betonu, Inżynieria i Budownictwo 11/1962.
- [78] Kuczyński W.: Konstrukcje betonowe. Kontynualna teoria zginania żelbetu, PWN W-wa 1971.
- [79] Kuczyński W., Goszczyński S.: Studium nad aproksymacją funkcji przemieszczeń osi belki żelbetowej, AIL, tom VIII/1962.

- [80] Kuczyński W., Goszczyński S.: Stan graniczny belki żelbetowej jako końcowa faza kontynualnego uplastycznienia i zarysowania żelbetu. Przypadek belki obustronnie zamocowanej, AIL, tom X/1964.
- [81] Kupfer H.B., Gerstle K.H.: Behaviour of concrete under biaxial stresses, J. of the Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, August 1973.
- [82] Lee S.L., Mansur M.A.: Cracking behaviour of one-way slabs reinforced with welded wire fabric, ACI Struct. J., no.2, v.86/1989.
- [83] Lewiński P.M.: Nieliniowa analiza płyt i tarcz żelbetowych metodą elementów skończonych, PWN W-wa-Łódź 1990.
- [84] Lin C.S., Scordelis A.C.: Finite element study of a reinforced concrete cylindrical shell through elastic, cracking and ultimate ranges, ACI Journal, November 1975.
- [85] Lin C.S., Scordelis A.C.: Nonlinear analysis of RC shells of general form, J. of the Struc. Div., Proc. ASCE, March 1975.
- [86] Lin Y.K., Wu W.F., Yang J.N.: Stochastic modeling of fatigue crack propagation, Probabilistic methods in the mechanics of solids and structures ed. by S.Eggwertz and N.C.Lind, Int. Union of Theoretical and Appl. Mech., IUTAM, Bruxelles 1984.
- [87] Link J.: Eine Formulierung des zwei axialen Verformungs- und Bruchverhaltens von Beton und deren Anwendung auf die wirklichkeitsnahe Berechnung von Stahlbetonplatten, Deutscher Ausschus für Stahlbeton, H.270 1976.
- [88] Link R.A., Elwi A.E., Scanlon A.: Biaxial tension stiffening due to generally oriented reinforcing layers, J.Eng. Mech., no.8, v.115/1989.
- [89] Luchi M.L., Poggialini A.: Computation of 3-dimensional stress intensity factors using special boundary elements, Boundary Elements ed. by C.A.Brebbia, Springer-Verlag 1983.

- [90] Łukasiewicz S.: Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach, PWN, W-wa 1976.
- [91] Maj M., Trochanowski A.: Analiza stanu napięcia w zarysowanych silosach żelbetowych, prace doktorskie PWr, 1982.
- [92] Mang R.: Einfluss der Rissverzahnung auf die Tragwirkung von Scheiben und Balkenstegen aus Stahlbeton, TU Muenchen dissertations, 1983.
- [93] Matczyński M.: Matematyczny model szczelin w ośrodku sprężystym, Prace IPPT PAN 41/74, W-wa.
- [94] Minch M.: Metoda teoretycznego wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach zarysowanych, praca doktorska, PWr 1979.
- [95] Mossakowski J.: Rozwiązanie osobliwe w teorii płyt ortotropowych, AMS III/1954.
- [96] Muraszew W.I.: Treszczinoustojcziwost, žestkost i procnost železobietona, Maszstrojizdat, Moskwa 1950.
- [97] Muspratt M.A.: Destructive tests on rationally designed slabs, Mag. Concr. Res., vol.22/1970.
- [98] Nariboli G.A.: Mixed boundary value problems for rectilinear plates, cz.I-AMS IX/1957, cz.II-AMS X/1958.
- [99] Nawy E.G.: Crack Control in Reinforced Concrete Structures, J. of the ACI, October 1968.
- [100] Nawy E.G.: Crack Control Through Reinforcement Distribution in Two-Way Acting Slabs, J. of the ACI, April 1972.
- [101] Nishimura N., Kobayashi S.: Elastoplastic analysis by indirect methods - ed. by Banerjee P.K., Mukherjee S.: Developments in boundary element methods, Elsevier Appl. Science Publ., London 1984.
- [102] Niwa Y., Kobayashi S., Fukui T.: An application of the integral equation method to plate bending, Recent Advances in BEM ed. by C.A. Brebbia, Pentech Press, London 1977.
- [103] Nobile L.: A microcrack model of concrete behaviour under applied loads, Int. Conf. on Fracture Mech. of Concrete, Lausanne 1-3 Oct.1985, vol.I.
- [104] Nowacki W.: Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzego-brzegowych, cz.I-AMS III/1951, cz.II-AME V/1953.

- [105] Nowacki W.: Dźwigary powierzchniowe, PWN, W-wa 1979.
- [106] Nowacki W.: Teoria sprężystości, PWN, Warszawa 1970.
- [107] Olesiak Z.: A bent circular plate with linear supports inside the plate region, AMS IX/1957.
- [108] Olszak W.: Zagadnienie ortotropii w teorii nośności granicznej płyt, AMS V/1953.
- [109] Panasiuk W.W., Sawczuk M., Dacyszyn A.P.: Raspredieleniye naprażeń okolo treszczin w plastinach i obolocz-kach, Kijew, Iz-wo Nauk. Dumka 1976.
- [110] Pędziwiatr J.: Sposób obliczania szerokości rozwarcia rys w elementach żelbetowych z uwzględnieniem losowych własności mechanicznych betonu i stali, prace doktorskie PWr 1981.
- [111] Procenko A.M., Łosin N.A.: Rieszenije zadaczi ob izgibie żelie-zobietonnych plit, Stroit. miech. i rascziet so-orużenij 6/1979.
- [112] Pucher A.: Einflussfelder elastischer Platten, Wien, Springer-Verlag 1958.
- [113] Roelfstra P.E., Wittman F.H.: Numerical method to link strain softening with failure of concrete, Int. Conf. on Fracture Mech. of Concrete, Lausanne 1985, vol.I.
- [114] Rossi P., Richer S.: Numerical modelling of concrete cracking based on stochastic approach, Materiaux et constructions, no.119, v.20/1987.
- [115] Rots J.G., Borst R.: Analysis of mixed-mode fracture in concrete, J. Eng. Mech., no.11, v.113/1987.
- [116] Sawczuk A.: O możliwościach praktycznego korzystania z rozwią-zania teorii nośności granicznej płyt, AIL II/1956.
- [117] Schäfer H., Link J., Mehlhorn G.: Zur wirklichkeits nahen Bere-chnung von Stahlbetonplatten mit der Finite Element Methode, Beton und Stahlbetobau, 70 Jahrgang, Berlin, November 1975.
- [118] Schorn H.: Numerical simulation of composite materials as concrete, Inter. Conf. on Fracture Mech. of concrete, Lausanne, 1-3 Oct.1985, vol.I.

- [119] Schubert L.: Zum Einfluss der Bewehrungsanordnung auf die Trag und Nutzungsfähigkeit, die Ausführung und Materialökonomie von Stahlbetonplatten, Wiss. Tech. Univ. Dres., no.18/1986.
- [120] Shih G.C., Di Tomasso A.: Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete, Fracture mechanics of concrete-structural application and numerical calculation, Dordrecht, Nijhoff 1985.
- [121] Smith R.N.L., Mason J.C.: Prediction of crack growth direction using the boundary element method - ed. by Brebbia C.A., Futagami T., Tanaka M.: Boundary elements, Springer, Berlin/West 1983.
- [122] Sneddon I.: Zagadnienie szczelin w matematycznej teorii sprężystości, PAN, W-wa 1961.
- [123] Spencer B.F., Tang J.: Markov process model for fatigue crack growth, J. Eng. Mech., no.12, v.114/1988.
- [124] Tanaka M.: Large deflection analysis of thin elastic plates, Developments in boundary elements method ed. by P.K.Banerjee and S.Mukherjee, Elsevier Appl. Science Publ., London 1984.
- [125] Tanaka M., Itoh H.: Boundary Element Modeling of Crack Singularities in 3-D Elastostatics, Proc. of the Int. Conf. Beijing, October 1986, Pergamon Press.
- [126] Torrent R.J., Dvorkin E.N., Alvaredo A.M.: A model for work-hardening plasticity and failure of concrete under multiaxial stresses, Cement and concrete research, no.6, v.17/1987.
- [127] Tottenham H.: The boundary element method for plates and shells, Developments in Boundary Element Method ed. by P.K.Banerjee and R.Butterfield, ASP London 1979.
- [128] Tsurui A., Ishikawa H.: Application of the Fokker-Planck equation to a stochastic fatigue crack growth model, Structural safety, no.1, v.4/1986.
- [129] Ubysz A.: Analiza deformacji urządzeń prętowych z wykorzystaniem macierzy przeniesienia, praca doktorska PWR

1981.

- [130] Wegner R., Duddeck H.: Der gerissene ustand zweiseitig gelagerter Platten unter Einzellasten-Nichtlineare Berechnung mit finiten Elementen, Beton und Stahlbetonbau, 70 Jahrgang, November 1975.
- [131] Wu H.C.: Dual failure for plain concrete, J. Eng. Mech. Div., ASCE Proc., v.100/1974.
- [132] Zararis P.D.: State of stress in reinforced concrete plates under service conditions, J. of Struct. Eng., v.112, no.8/1986.
- [133] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych, Arkady, W-wa 1972.
- [134] Zienkiewicz O.C.: The Finite Element Method, 3rd Edition, McGraw-Hill, London 1977.
- [135] Zorski H.: Plates with discontinuous supports, AMS XVIII/1969.
- [136] Zorski H.: Theory of discrete defects, AMS XVIII/1969.



Analiza dokumentacyjna

W pracy przedstawiono metodę obliczenia rany-
sowania płyt żelbetonowych przy pomocy Me-
tody Elementów Brzegowych. Wykorzystano
funkcje wpływowe Green'a i zaproponowano
dyskretny model rysy. Wykonano obliczenia
testujące i porównano je z rezultatami
badani doświadczalnych, uzyskując dobrą
zgodność otrzymanych wyników. Na pod-
stawie przeprowadzonych obliczeń uzyskano
kilka wniosków odnośnie pracy płyt żel-
betonowych.

Imię i Nazwisko autora analizy

Gregor Dmochowski

Słowa kluczowe

Ś

płyta żelbetonowa, rysy, Metoda
Elementów Brzegowych

**0480*00*

<A_____ *B_____ *C_____ *D_____

*E_____ *F_____ *G_____ *H_____ ←

Tylko PRL	CINTE	APW	Podpis red.	Podpis asyst. d/s badań	Potwierdzenie przyjęcia poprawki	Potwierdzenie przyjęcia karty w Oddziale Doku- mentacji
Wpisać TAK lub NIE						

	* N *		1 2 3 4 5 6 7 8								9
	Rozpocz. pr.	Zakończ. pr.	Opubl. pr.		Instytut			Nr tematu.			
		02.87	01.92								
Nr zlecenia.		Nr archiwalny									
									*		
Symbol UKD.											
Opis bibliograficzny.											
str. 129, rys. 65, tab. 2											
Charakter pracy:					Rozpowszechnianie:						
Materiały odpłatne:											