

Na prawach rękopisu

INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport serii PRE nr 36 / 95

**DYNAMIKA ORTOGONALNYCH
CIENKOŚCIENNYCH STRUKTUR
PRĘTOWYCH JAKO MODELI KONSTRUKCJI
WSPORCZYCH POD MASZYNY OBROTOWE**

Jacek Grosel

Praca doktorska

Promotor: prof. PW dr hab. inż. Marian Klasztorny

Słowa kluczowe:

mechanika prętów cienkościennych, cienkościenny
prętowy element skończony, układy prętowo-bryłowe,
drżania przestrzenne, drżania ustalone, rezonanse
przejściowe, absorbery dynamiczne, redukcja drgań
ustalonych, program komputerowy

Praca wykonana w ramach projektu badawczego nr 7 S103 044 04, finansowanego przez Komitet
Badań Naukowych w latach 1993-95.

WROCŁAW 1995

SPIS RZECZY

	Str.
1. WSTĘP	3
2. PRZEGLĄD LITERATURY	
2.1. Charakterystyka stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe	7
2.2. Mechanika prętów cienkościennych	9
2.3. Modele i metody analizy cienkościennych układów prętowych	10
2.4. Cienkościenne prętowe elementy skończone	13
3. MODEL FIZYCZNY STALOWYCH FUNDAMENTÓW RAMOWYCH POD MASZYNY OBROTOWE	14
4. PODSTAWY MECHANIKI PRYZMATYCZNYCH PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH	
4.1. Pręt o przekroju cienkościennym otwartym	16
4.2. Pręt o przekroju cienkościennym zamkniętym jednokomorowym	41
4.3. Formuły energetyczne dla prętów cienkościennych	53
5. SFORMUŁOWANIE RÓWNAŃ RUCHU UKŁADU PRĘTOWO-BRYŁOWEGO	
5.1. Dyskretyzacja układu i metoda sformułowania równań ruchu układu	60
5.2. Przestrzenny cienkościenny prętowy element skończony	61
5.2.1. Opis elementu skończonego	61
5.2.2. Macierz sztywności i bezwładności elementu skończonego	63
5.2.3. Siły przekrojowe i naprężenia w elemencie o profilu otwartym	68
5.2.4. Siły przekrojowe i naprężenia w elemencie o profilu zamkniętym jednokomorowym	70
5.3. Bilans energetyczny bryły sztywnej, połączonej podatnie z prętową konstrukcją nośną	71
5.4. Wyznaczenie wektora obciążeń uogólnionych	74
5.5. Energia potencjalna stężeń	77
5.6. Automatyzacja agregacji układu prętowo-bryłowego	79
5.7. Sformułowanie macierzowego równania ruchu układu prętowo-bryłowego oraz opis zagadnień statycznych i dynamicznych	90

6. ZASTOSOWANIE BIERNYCH ABSORBERÓW DYNAMICZNYCH DO REDUKCJI DRGAŃ USTALONYCH UKŁADU	
6.1. Opis metody redukcji drgań	94
6.2. Projektowanie absorberów dynamicznych o optymalnych parametrach	96
6.3. Macierzowe równanie ruchu układu zmodyfikowanego	100
7. ANALIZA DYNAMICZNA WYBRANYCH KONSTRUKCJI WSPORCZYCH POD MASZYNY OBROTOWE	
7.1. Program komputerowy GROS	105
7.2. Testowanie programu GROS	105
7.3. Analiza dynamiczna stalowego fundamentu ramowego pod wentylator	127
8. PODSUMOWANIE	141
LITERATURA	144
Załącznik A: OPIS PARAMETRÓW WEJŚCIA I WYJŚCIA W PROGRAMIE GROS	147
Załącznik B: PRZYKŁADOWE PLIKI Z DANYMI DLA UKŁADU TESTOWEGO	156
Załącznik C: NAGŁÓWKI SEGMENTÓW I PROCEDUR W PROGRAMIE GROS	164
STRESZCZENIE	178
SUMMARY	180

1. WSTĘP

Jednym z typów konstrukcji wsporczych pod maszyny obrotowe są stalowe fundamenty ramowe. Pierwsze stalowe fundamenty ramowe pod turbozespoły wybudowano w USA i Niemczech w roku 1936 [23]. Konstrukcje tego typu były wówczas projektowane w formie kratownic przestrzennych. Stopniowo upraszczano schemat konstrukcyjny tych fundamentów, aż do uzyskania współczesnych rozwiązań w postaci smukłych ortogonalnych ram przestrzennych. Do roku 1959 tylko w Niemczech wybudowano ponad 200 stalowych fundamentów pod turbozespoły, często o mocy 80 MW.

Do podstawowych zalet stalowych fundamentów ramowych pod turbozespoły zalicza się [17, 22, 23, 27, 29]:

- łatwość i szybkość montażu konstrukcji wsporczej i maszyn,
- dobre własności amortyzacyjne fundamentu stalowego, sprzyjające lepszej pracy turbozespołu i redukcji drgań przekazywanych na podłoże,
- uzyskanie znacznej ilości wolnego miejsca w obrębie fundamentu na dodatkowe instalacje i urządzenia technologiczne,
- niższy poziom naprężeń termicznych w porównaniu z fundamentami żelbetowymi,
- łatwość i szybkość regulowania poziomu łożysk maszyny.

Zdaniem autora rozprawy, bardzo ważną zaletą stalowych fundamentów ramowych jest ich znacznie dłuższa trwałość w porównaniu z fundamentami żelbetowymi, związana z niezerowymi wartościami trwałej wytrzymałości zmęczeniowej stali w różnych stanach naprężenia. Możliwe jest wówczas dopuszczenie do dość dużych amplitud naprężeń dynamicznych w stalowych prętach konstrukcji. Trwała wytrzymałość zmęczeniowa betonu jest, jak wiadomo, równa zero, co jest podstawową przyczyną pękania i wykruszania się betonu w żelbetowych fundamentach ramowych.

Za główne wady stalowych fundamentów ramowych pod turbozespoły uważa się [17, 22, 23, 27, 29]:

- małe tłumienie materiałowe stali,
- konieczność dokładnej analizy rezonansów przejściowych,
- duża przewodność cieplna stali,
- większa odkształcalność termiczna stali w porównaniu z żelbetem,
- możliwość wystąpienia lokalnych nadmiernych drgań wiotkich elementów konstrukcji,
- podatność na korozję w agresywnym środowisku.

Z poglądami autorów wymienionych prac na temat wad fundamentów stalowych można polemizować. Obecnie projektant dysponuje komputerami o dużej mocy obliczeniowej, umożliwiającymi przeprowadzenie dokładnej analizy dynamicznej rezonansów przejściowych. Ze względu na małe

tłumienie materiałowe stali, możliwe jest znaczne przekroczenie naprężeń lub przemieszczeń dopuszczalnych w jednej lub kilku strefach rezonansowych, w czasie rozbiegu lub wybiegu turbozespołu. Problem ten może być rozwiązany przez zastosowanie wibroizolacji czynnej, zamiast najczęściej stosowanych bezpośrednich połączeń śrubowych maszyny z fundamentem [27]. Zbyt duże wydłużenia lub skrócenia prętów konstrukcji stalowej, wywołane nierównomiernym rozkładem temperatur, mogą wpłynąć niekorzystnie na pracę maszyny. Problem ten można rozwiązać przez zaprojektowanie odpowiedniej wentylacji w otoczeniu fundamentu. Zagrożenie korozją nie jest zbyt duże, ponieważ współczesne powłoki antykorozyjne są bardzo trwałe i odporne na agresję środowiska. Lokalne nadmierne drgania wiotkich elementów konstrukcji nie wystąpią, jeśli takich elementów nie zaprojektuje się w fundamencie.

W niniejszej rozprawie zastosowano inny sposób zabezpieczenia stalowych fundamentów ramowych przed nadmiernymi drganiami w strefach rezonansów przejściowych, polegający na wyposażeniu konstrukcji w konwencjonalne (bierne) absorbery dynamiczne [20]. Sposób ten sprzyja dobrej pracy turbozespołu, jest mniej kosztowny, łatwiejszy w realizacji i zawsze skuteczny.

Z powyższych rozważań wynika, że podnoszone w literaturze wady stalowych fundamentów ramowych są co najmniej dyskusyjne.

Z przeglądu literatury, szczegółowo przedstawionego w rozdziale 2, wynika, że problem wyboru adekwatnego do rzeczywistości modelu fizycznego stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe jest nadal aktualny. Kluczową sprawą jest uwzględnienie w modelu układu deplanacji cienkościennych przekrojów poprzecznych prętów konstrukcji wsporczej, bezwładności obrotowej maszyn oraz sprężysto-tłumiących połączeń maszyn z fundamentem, co nie zostało uwzględnione w dotychczasowych modelach układu i odpowiadających im programach komputerowych, wdrożonych do praktyki inżynierskiej [27,55]. Dyskusyjny jest również problem przenoszenia deplanacji w węzłach struktury cienkościennej.

Cele niniejszej rozprawy są następujące:

- 1) wyprowadzenie różniczkowych równań równowagi statycznej pryzmatycznych prętów cienkościennych o przekroju otwartym lub jednokomorowym zamkniętym, według teorii drugiego rzędu, w bazie przemieszczeń związanych z osią centroidalną,
- 2) opracowanie przestrzennego, cienkościennego, prętowego elementu skończonego, z uwzględnieniem odkształceń osiowych, giętnych, skrętnych i deplanacyjnych, w tym wyznaczenie formuł energetycznych w ramach teorii drugiego rzędu oraz wyznaczenie macierzy sztywności i bezwładności elementu,
- 3) opracowanie adekwatnego do rzeczywistości modelu fizycznego stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe, tzn. uwzględniającego podstawowe cechy konstrukcyjne układu,

pozwalającego na analizę podstawowych zjawisk dynamicznych występujących w układzie oraz na wyznaczenie z techniczną dokładnością stanu przemieszczenia i naprężenia fundamentu ramowego,

- 4) zastosowanie metody elementów skończonych oraz równań Lagrange'a drugiego rodzaju do sformułowania macierzowego równania ruchu ortogonalnego układu prętowo-bryłowego, modelującego stalowe fundamenty ramowe pod maszyny obrotowe, w tym opracowanie komputerowego algorytmu agregacji układu,
- 5) zastosowanie biernych absorberów dynamicznych do redukcji drgań ustalonych układu w strefach rezonansowych,
- 6) opracowanie algorytmu i programu komputerowego do analizy dynamicznej stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe, modelowanych przez układy dyskretne o dużej liczbie stopni swobody, w tym opracowanie preprocesora, procesora i postprocesora w wersji graficznej i numerycznej,
- 7) analiza dynamiczna wybranych stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe.

Główne tezy rozprawy doktorskiej są następujące:

- Opracowany cienkościenny prętowy element skończony jest przydatny do analizy statycznej i dynamicznej ortogonalnych cienkościennych struktur prętowych.
- Opracowany model fizyczny stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe uwzględnia wszystkie podstawowe cechy konstrukcyjne układu, pozwala na analizę wszystkich podstawowych zjawisk dynamicznych występujących w układzie oraz pozwala na wyznaczenie z techniczną dokładnością stanu przemieszczenia i naprężenia fundamentu ramowego.
- Bierne absorbery dynamiczne są urządzeniami skutecznie zabezpieczającymi układ przed nadmiernymi drganiami w strefach rezonansowych.
- Opracowany program komputerowy umożliwia wszechstronną analizę dynamiczną stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe, w zakresie zagadnienia własnego, charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych przemieszczeń i naprężeń oraz redukcji pików rezonansowych za pomocą absorberów dynamicznych. Program ten, po niewielkich modyfikacjach i uzupełnieniach, może być wdrożony do projektowania rozpatrywanego typu konstrukcji.

Rozprawa składa się z 8 rozdziałów. Rozdział 2 zawiera przegląd literatury w zakresie czterech podtematów związanych z rozprawą. W rozdziale 3 zawarto opis przyjętego w rozprawie modelu fizycznego stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe. W rozdziale 4 przedstawiono uporządkowaną i uściśloną w stosunku do literatury teorię przyrządniczych prętów cienkościennych o dowolnym profilu otwartym lub jednokomorowym zamkniętym. Wyprowadzono m.in. różniczkowe równania równowagi statycznej tych prętów według teorii drugiego rzędu, tj.

z uwzględnieniem wpływu statycznych sił osiowych. Równania te sformułowano w bazie przemieszczeń związanych z osią centroidalną (osią środków ciężkości przekrojów sprężystych) pręta, analogicznie jak w przypadku prętów o przekroju zwartym. Taki zapis jest niezbędny w analizie przestrzennych cienkościennych struktur prętowych. Omawiany rozdział zawiera również element syntezy teorii prętów cienkościennych, polegający na wyprowadzeniu formuł energetycznych wspólnych dla prętów o profilu otwartym i zamkniętym.

Rozdział 5 jest poświęcony sformułowaniu macierzowego równania ruchu układu prętowo-bryłowego, modelującego konstrukcje inżynierskie rozpatrywanego typu. Ortogonalną cienkościenną konstrukcję nośną dzieli się na prętowe elementy skończone. Sformułowano cienkościenny prętowy element skończony, drgający przestrzennie, z uwzględnieniem odkształceń osiowych, giętnych, skrętnych i deplanacyjnych, wpływu statycznej siły osiowej i bezwładnościowych efektów Timoshenki. Wyznaczono wzory na siły przekrojowe i naprężenia w elemencie skończonym o profilu otwartym lub jednokomorowym zamkniętym. Macierzowe równanie ruchu układu, opisujące drgania liniowe, sformułowano metodą bilansu energetycznego, z wykorzystaniem równań Lagrange'a drugiego rodzaju i techniki macierzowej [24]. W równaniu uwzględniono bezwładność liniową i obrotową brył sztywnych, sprężysto-tłumiące połączenia maszyn z konstrukcją wsporczą, kierunki obrotu i fazy początkowe sił odśrodkowych oraz stężenia. Opracowano algorytm automatycznej agregacji układu, wykorzystujący warunki ortogonalności cienkościennej konstrukcji wsporczej i maszyn.

W rozdziale 6 przedstawiono koncepcję zastosowania zbioru biernych absorberów dynamicznych do kilkukrotnej redukcji drgań ustalonych układu w rezonansach przejściowych. Przedstawiono algorytm projektowania absorberów o optymalnych parametrach, bazujący na algorytmie przedstawionym w pracach [20,51]. Sformułowano macierzowe równanie ruchu układu zmodyfikowanego, wykorzystując siatkę MES i cechy ortogonalności tego układu.

Aplikacyjną część rozprawy stanowi rozdział 7. Na podstawie sformułowanej teorii przestrzennych drgań stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe opracowano program komputerowy GROS do analizy dynamicznej konstrukcji rozpatrywanego typu. Program umożliwia: generowanie "banków" przekrojów cienkościennych otwartych i jednokomorowych zamkniętych, wyznaczenie rozkładu statycznych sił osiowych, rozwiązanie zagadnienia własnego z możliwością graficznej prezentacji form własnych, projektowanie absorberów dynamicznych, wyznaczanie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych w układzie oryginalnym lub zmodyfikowanym z możliwością graficznej prezentacji wykresów. Przedstawiono wyniki studyjnej analizy dynamicznej regularnego układu testowego oraz fundamentu ramowego pod wentylator. Rozdział 8 zawiera zestawienie elementów oryginalnych, wnioski końcowe z analizy dynamicznej wybranych konstrukcji oraz kierunki dalszych badań.

2. PRZEGLĄD LITERATURY

2.1. Charakterystyka stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe

Stalowe fundamenty ramowe pod turbozespoły mają następujące cechy konstrukcyjne [22,23]:

- Fundament składa się z prętów pionowych, zwanych słupami oraz układu prętów poziomych, tworzących płytę górną (stół).
- Słupy są zwykle o przekroju cienkościennym zamkniętym z konturem prostokątnym. Pręty stołu są zwykle o przekroju dwuteowym, z gęstym układem żeber (przepon).
- Maszyna jest zwykle połączona z płytą pośrednią za pomocą śrub. Po wyregulowaniu poziomu płyta pośrednia jest przyspawana do stołu.
- Stalowa konstrukcja wsporcza jest spawana i połączona sztywno z żelbetową płytą dolną. Płyta dolna jest o grubości min. 1 m i jest zagłębiona w podłożu gruntowym. Słupy łączy się z płytą dolną za pomocą kotew przeprowadzanych przez stalowe stopy słupów.
- Rozmieszczenie słupów w planie wynika z warunków wytrzymałościowych i wymagań technologicznych.
- Nie stosuje się stężeń.

Przy projektowaniu stalowych fundamentów ramowych pod turbozespoły bierze się pod uwagę następujące informacje i zalecenia [23]:

- Należy unikać obciążeń mimośrodowych i skręcających.
- Płyta górna powinna być dostatecznie sztywna, aby zapewnić spokojną pracę turbozespołu.
- Drgania układu są tłumione w wyniku tłumienia wewnętrznego stali, tarcia w połączeniach maszyny z fundamentem za pomocą śrub oraz przez podłoże gruntowe.
- Częstości własne układu nie powinny być równe częstości wzbudzenia, połowie częstości wzbudzenia i wielokrotności częstości wzbudzenia. Częstości własne powinny się różnić co najmniej o 20 % od częstości wzbudzenia.
- Podstawowe siły wzbudzające drgania pochodzą od niewyważenia obrotowego mas części wirujących.

W obliczeniach dynamicznych Kłós i Lipiński [23] zalecają traktować żelbetową płytę dolną jako nieodkształcalną i nieruchomą. Zamiast sprzężonych przestrzennych drgań układu rozpatrują oddzielnie drgania płyty górnej, drgania słupów oraz drgania wydzielonych ram poprzecznych i podłużnych. W obliczeniach zalecają uwzględniać zginanie i ścinanie belek, a w przypadku obciążeń mimośrodowych również skręcanie. W słupach oprócz zginania powinno się uwzględniać również rozciąganie/ściskanie.

Monografię Lipińskiego [27] można nazwać encyklopedią współczesnej wiedzy na temat konstrukcji wsporczych, zwłaszcza żelbetowych, pod maszyny nieudarowe i udarowe. Przy obliczaniu żelbetowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe Lipiński przyjął model fizyczny układu w postaci ramy płaskiej, odwzorowującej wybrany segment poprzeczny lub podłużny fundamentu. Masa układu, w tym masa maszyn, została zgranulowana w zbiorze punktów na osiach prętów. Obciążenie czynne jest w formie układu sił pionowych lub poziomych, zaczepionych w węzłach odpowiadających lokalizacji łożysk. Uwzględniono sprężyste podłoże oraz przyjęto sztywne odcinki przywężłowe, modelujące węzły o skończonych wymiarach. Autor podaje również zestaw wzorów do przybliżonych obliczeń dynamicznych ram portalowych. Podobne modele żelbetowych fundamentów ramowych przyjął Kisiel [17] oraz Major [29].

Z wykresów podanych w poradniku [52] wynika, że dopuszczalne amplitudy drgań fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe, ze względu na ludzi okresowo przebywających na fundamencie lub pomostach opartych na fundamencie, są bardzo małe. Przykładowo, dla częstotliwości wzbudzenia 10 Hz amplitudy drgań pionowych nie mogą przekraczać 0,06 mm, a amplitudy drgań poziomych - 0,07 mm. Przy częstotliwości wzbudzenia 50 Hz odpowiednie wartości wynoszą 0,01 mm oraz 0,015 mm. Poradnik [52] zawiera również wartości dopuszczalnych amplitud drgań fundamentu ze względu na właściwą pracę maszyn. Przykładowo, przy częstotliwości wzbudzenia ~ 10 Hz amplitudy drgań pionowych nie powinny przekraczać 0,12 mm, a drgań poziomych - 0,16 mm. Przy częstotliwości 50 Hz odpowiednie wartości wynoszą 0,03 mm oraz 0,05 mm. Uzasadnione jest więc traktowanie ramowych konstrukcji wsporczych jako liniowych geometrycznie i fizycznie.

Jednym z nowoczesnych, ale kosztownych rozwiązań w zakresie częściowego zabezpieczenia konstrukcji wsporczej przed nadmiernymi drganiami jest zastosowanie wibroizolacji czynnej. Wytyczne projektowania wibroizolatorów sprężynowych i sprężynowo-gumowych zawarte są w poradniku [53]. Mocowanie maszyn do fundamentów, ale tylko żelbetowych, za pomocą różnego rodzaju śrub omówiono w poradniku [54]. Przykłady obliczeń m.in. fundamentów stalowych pod maszyny obrotowe podał Lipiński w poradniku [55]. Autor przyjmuje model pręta odkształcalnego giętnie i skrętnie, o przekroju zwartym.

Zgodnie z normą [56] analiza dynamiczna stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe sprowadza się do obliczenia kilku częstości drgań własnych wydzielonych ram portalowych, wyznaczenia amplitud drgań wymuszonych oraz obliczenia sił zastępczych umożliwiających ocenę stanu wyężenia fundamentu. Żąda się, aby środek ciężkości układu leżał na jednej linii pionowej ze środkiem ciężkości żelbetowej płyty dolnej.

Podstawowe zalety i wady stalowych fundamentów ramowych pod turbozespoły, w porównaniu z fundamentami żelbetowymi, zestawiono we Wstępie.

2.2. Mechanika prętów cienkościennych

Współczesne teorie prętów cienkościennych bazują na teorii sformułowanej przez Vlasov'a, opublikowanej m.in. w monografii [42]. Vlasov przyjmuje dwa fundamentalne założenia w teorii prętów cienkościennych o dowolnym profilu otwartym: kontur poprzeczny jest nieodkształcalny oraz deformacje postaciowe powierzchni środkowej są równe zeru. Rozważania odnoszą się do przekrojów poprzecznych o stałej grubości. W końcowych równaniach równowagi pręta pomija się efekt Poissona oraz nie uwzględnia zginających obciążeń momentowych. Składowe stanu przemieszczenia Vlasov przyjmuje następująco: przemieszczenie podłużne w głównym punkcie początkowym, dwa przemieszczenia poprzeczne i kąt skręcenia w środku ścinania. W warunkach dynamicznych Vlasov ogranicza się do pręta podpartego swobodnie ze względu na zginanie i skręcanie oraz stosuje metodę Galerkina do wyznaczenia rozwiązań. W pracy [43] Vlasov przedstawił koncepcję ujęcia mechaniki prętów cienkościennych o przekrojach wielospójnych zamkniętych, bazującą na podejściu wariacyjnym, przy uwzględnieniu sił tnących.

Fundamentalną monografią w języku polskim z mechaniki prętów cienkościennych jest praca Ruteckiego [38]. Autor formułuje teorię prętów cienkościennych o profilach otwartych i zamkniętych, opartą na założeniach Vlasov'a i Umanski'ego. Rozważania odnoszą się do prętów pryzmatycznych lub krzywoliniowych. Część rozważań przeprowadzono przy założeniu $\delta \neq \text{const}$, a część dla $\delta = \text{const}$, gdzie δ jest grubością ścianki przekroju poprzecznego. W rozważaniach brakuje pełnej interpretacji formuły na odkształcenia podłużne pręta o profilu otwartym. Rutecki wielokrotnie zmienia orientację układu współrzędnych, jak również uprzywilejowane zwroty sił przekrojowych i naprężeń. Dotyczy to w szczególności sformułowania równań równowagi statycznej według teorii drugiego rzędu. Ponadto w teorii drugiego rzędu pręt jest obciążony zewnętrzną siłą ściskającą równoległą do osi pręta, a powinien być obciążony siłą osiową [24]. Występują nieścisłości przy wyprowadzaniu wzoru na naprężenia styczne przy nieswobodnym skręcaniu, związane z grubością ścianki δ . Równania równowagi formułuje się w bazie przemieszczeń związanych ze środkiem ścinania. W przypadku prętów o profilu zamkniętym jednokomorowym rozważa się tylko skręcanie skrupowane.

Teoria I i II rzędu w zakresie statyki i stateczności pryzmatycznych prętów cienkościennych o przekroju otwartym prezentowana jest również przez Gjelsvika w monografii [10] oraz przez Murray'a w pracy [31]. Równania równowagi autorzy zapisują w bazie przemieszczeń związanych ze środkiem ścinania. Skrócona wersja teorii I i II rzędu skręcanych prętów cienkościennych o przekroju otwartym zawarta jest w wielu podręcznikach, m.in. w [14,15] oraz monografiach, m.in. w [39].

Oryginalne ujęcie mechaniki pryzmatycznych prętów cienkościennych o dowolnym przekroju poprzecznym, np. wielokomorowym otwarto-zamkniętym, przedstawił Obrębski m.in. w pracach

[32, 33, 34]. Autor formułuje teorię I i II rzędu oraz I i II przybliżenia. Autor wprowadził nową definicję uogólnionej współrzędnej wycinkowej, której wartość zależy od całki ze strumienia naprężeń stycznych po części konturu. Nowe w stosunku do klasycznej teorii prętów cienkościennych założenia autora są następujące:

- Przekroje są odkształcalne.
- Materiał jest o zmiennych parametrach wzdłuż konturu przekroju poprzecznego.
- Dowolny przekrój otwarty-zamknięty można sprowadzić do przekroju otwartego przez odpowiednią liczbę przecięć podłużnych i wprowadzenie naprężeń stycznych, odwzorowujących wzajemne oddziaływania wzdłuż utworzonych krawędzi.

W sformułowanej przez autora teorii II przybliżenia odkształcenia powierzchni środkowej i deplanacja przekroju zależą od wszystkich sił przekrojowych. Bimoment traktowany jest jako wektor równoległy do osi pręta. Otrzymane przez autora równania równowagi statycznej są nieliniowe. Teoria II rzędu różni się dla układów statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych. W równaniach uwzględniono sprężysty ośrodek typu Winklera oraz parcie aero- i hydrodynamiczne. Ostatecznie autor otrzymuje złożony układ równań różniczkowych cząstkowych, zawierający kilkadziesiąt współczynników, opisujący drgania pręta pryzmatycznego o dowolnym cienkościennym przekroju poprzecznym. Zdaniem autora niniejszej rozprawy, w ogólnym przypadku nie można przyrównać sumy bimomentów przywęzłowych do zera. Bimoment, jako samorzównoważony stan naprężeń, ma charakter lokalny i nie wchodzi do równań równowagi.

Teorię zginania ze ścinaniem prętów cienkościennych o profilu otwartym lub zamkniętym przedstawili Romano i in. w pracy [37].

2.3. Modele i metody analizy cienkościennych układów ramowych

W monografii [38] do statycznego rozwiązania w zakresie skręcania cienkościennych belek ciągłych oraz szczególnego przypadku ortogonalnych ram płaskich Rutecki stosuje metodę sił, operując ścisłymi rozwiązaniami analitycznymi wyrażonymi przez funkcje przestępne oraz m.in. jednostkowym obciążeniem bimomentowym. Ramy płaskie składają się z prętów o jednakowym przekroju dwuteowym, z półkami równoległymi do płaszczyzny układu. Można wówczas w przybliżeniu przyjąć, że węzły są nieskończenie sztywne, mają zerowe wymiary oraz przenoszą deplanację w tym sensie, że zachodzi równość spateń w przekrojach przywęzłowych prętów zbiegających się w danym węźle. Suma bimomentów w przekrojach przywęzłowych jest wówczas równa zero.

Czapliński [6] podejmuje problem równowagi bimomentów w wybranym przestrzennym ortogonalnym węźle sztywnym, w którym zbiegają się 4 poziome pręty o przekroju dwuteowym i 2 pionowe pręty o przekroju krzyżowym. Konstrukcja węzła jest taka, że zapewniona jest ciągłość

konturów zbiegających się w węźle prętów. W odniesieniu do prętów cienkościennych autor przyjmuje założenia Vlasov'a. Przepony są wówczas nieodkształcalne postaciowo i pracują w stanie błonowym, natomiast półki i środniki prętów pracują w stanie zgięciowym. W rozpatrywanym węźle występuje wówczas niekonsekwencja założeń. Przykładowo półki prętów poziomych są traktowane w węźle jako przepony prętów pionowych, pracujące w stanie błonowym. Autor stawia hipotezę, że przekroje przywęzłowe ulegają deplanacji, a tzw. sprowadzony kąt spaczenia jest jednakowy dla wszystkich przekrojów przywęzłowych. Węzeł przestrzenny ma wówczas dodatkowy (siódmy) stopień swobody, określający skręcanie swobodne węzła. Podjęto próbę doświadczalnej weryfikacji tej hipotezy, na modelu ze sztywnymi prętami stalowymi i bardzo wiotkim narożem wykonanym z celuloideu. Problem przenoszenia deplanacji w węźle stalowym jest kontynuowany w pracy [7], w której sformułowano 6 równań równowagi węzła przy założeniu słuszności hipotezy postawionej w [6].

Szmidt [40] analizuje w zakresie statycznym prostą ramę płaską, złożoną z dwóch prętów o przekroju dwuteowym. Środniki prętów leżą w płaszczyźnie ramy, a naroże jest utworzone przez przedłużenia środników i półek prętów. Pominięto sztywność płytową elementów płaskich tworzących węzeł, co jest niekonsekwencją w założeniach, analogiczną jak w [6]. Autor analizował przenoszenie się spaczeń i bimomentów w rozpatrywanym węźle. Autor wykazał, że tylko dla względnie wiotkich naroży cienkościennych można przyjąć, że deplanacje przywęzłowe są różne od zera. W kolejnej pracy [41] autor rozwinął metodę analizy ram płaskich, złożonych z prętów cienkościennych o profilu otwartym. Pręty są analizowane zgodnie z teorią Vlasov'a i dzielone na prętowe elementy skończone o 14 stopniach swobody. Elementy te omówiono w punkcie 2.4. Autor omawia dyskretyzację naroża na przykładzie naroża analizowanego w pracy [40]. Prostokątne elementy skończone naroża analizowane są w wariancie tarczowym i płytowo-tarczowym. Sformułowano sprowadzoną macierz sztywności naroża w bazie przemieszczeń przywęzłowych. Zgodnie z oczekiwaniami, w węzłach względnie wiotkich efekt podatności węzła nie jest pomijalny, natomiast w węzłach o dużej sztywności przestrzennej wartości momentów przywęzłowych są niezależne od siebie.

W pracach [3,4,5] Cywiński przedstawił uogólnienie iteracyjnej metody Crossa do rozwiązywania belek ciągłych i szczególnego typu ram płaskich, poddanych działaniu obciążeń momentowych skręcających. Założenia dotyczące ram są analogiczne do przyjętych przez Ruteckiego [38] z tym, że przekrój prętów może być również ceowy z półkami równoległymi do płaszczyzny ramy. Metoda Crossa jest iteracyjną wersją metody przemieszczeń. Cywiński wyznaczył wzory na siły brzegowe w pręcie dla różnych typów obciążeń lub przemieszczeń wywołujących skręcanie. Analogiczne ujęcie metody iteracyjnego rozkładu bimomentów przedstawili Khan i Tottenham w pracy [16].

Gosowski [11] przedstawił metodę otrzymywania zamkniętych rozwiązań analitycznych dla skręcanych pryzmatycznych belek ciągłych. Równanie równowagi statycznej autor rozwiązuje za

pomocą transformacji Laplace'a, wykorzystując rachunek dystrybucyjny.

Głabisz w pracy doktorskiej [49] analizuje przestrzenne układy złożone z prętów cienkościennych o profilu otwartym, skłonne do przeskoku, w zakresie nieliniowej statyki i stateczności. Autor przyjął, że węzeł, w którym zbiegają się dwa pręty pod kątem prostym nie przenosi deplanacji (deplanacje przywęzłowe są równe zero). Do sformułowania nieliniowych równań równowagi autor stosuje MES, z elementem skończonym omówionym w punkcie 2.4.

Jankowski [50] wyróżnia trzy typy węzłów w cienkościennych strukturach prętowych o profilach otwartych. W węźle sztywnym typu pierwszego zbiegają się dwa pręty o wspólnej osi i wspólnym przekroju. Węzeł taki ma 7 stopni swobody i przenosi deplanację. W węźle sztywnym drugiego typu zbiegają się dwa pręty pod kątem prostym. O węźle takim również zakłada się, że ma 7 stopni swobody i przenosi deplanację. W węźle sztywnym trzeciego typu zbiegają się 3 lub więcej prętów. Węzeł taki ma 6 stopni swobody, a deplanacje przywęzłowe są równe zero.

Podstawy teoretyczne projektowania płaskich i przestrzennych węzłów prętowych konstrukcji stalowych przedstawili Frąckiewicz i in. w pracy [9]. Autorzy podają sposoby kształtowania węzłów i połączeń konstrukcyjnych z zachowaniem warunku równomiernej nośności granicznej i najmniejszej masy. Węzły prętowych konstrukcji stalowych są najczęściej spawane. Węzeł jest zwykle wydzielonym elementem przestrzennym, wzmocnionym blachami węzłowymi, żeberkami i przepornami. Często występują zaokrąglenia pasów prętów schodzących się w węźle, łagodzące zjawisko karbu. Oprócz węzłów spawanych i nitowanych stosuje się węzły jednolite, wykonywane jako odlewy, odkuwki lub w wyniku obróbki mechanicznej. Węzły mogą być cienkościenne lub grubościenne. W zależności od rodzaju węzła mogą wystąpić w nim efekty lokalne, takie jak: spiętrzenie naprężeń, pojawienie się naprężeń własnych, zmęczenie materiału. W przypadku węzłów zbyt wiotkich może wystąpić lokalne zginanie lub utrata stateczności węzła. Cienkościenne węzły spawane są narażone na wszystkie efekty lokalne. Węzły nitowane i jednolite są narażone na zmęczenie materiału lub naprężenia własne. Powłoki węzłów wykazują dużą sztywność i wytrzymałość tylko pod działaniem szczególnych obciążeń zewnętrznych. Nie zawsze pogrubienie ścianek powłoki węzła poprawia jego wytrzymałość. Powłoka węzła powinna być tak rozwiązana, aby w każdym elemencie płaskim płaski stan naprężenia był dominujący. Ponadto w powłoce węzła powinno być wyrównane wyteżenie. Powłoka węzła powinna pracować w zakresie statecznym, spełniać warunki wytrzymałości zmęczeniowej oraz być możliwie prosta do wykonania i montażu.

Problematyka obliczeń statycznych i projektowania węzłów prętowych konstrukcji stalowych jest również przedstawiona przez Łubińskiego i in. w monografii [28].

W analizie dowolnych, przestrzennych, cienkościennych układów prętowych Obrębski [34] przyjął, że węzły przenoszą deplanację w tym sensie, że wektorowa suma bimomentów, równoważ-

na trzech równaniach skalarowym, jest równa zeru. Autor opracował metodę równań różnicowo-macierzowych do analizy takich układów.

2.4. Cienkościenne prętowe elementy skończone

Barsoum i Gallagher [1] zastosowali MES do rozwiązania zagadnienia wyboczenia skrętnego lub giętno-skrętnego pojedynczego pryzmatycznego pręta cienkościennego o profilu otwartym. Przestrzenny element skończony ma 14 stopni swobody. Część współrzędnych (translacje) związane ze środkiem ciężkości przekroju, a część (rotacje) - ze środkiem ścinania. Przyjęto liniową aproksymację przemieszczeń podłużnych oraz sześcienną aproksymację Hermita dla przemieszczeń poprzecznych i kątów skręcenia. Nie wykorzystano możliwości podziału macierzy sztywności na powtarzalne podbloki. Pominięto efekt Poissona.

Mei [30] sformułował cienkościenny prętowy element skończony o 8 stopniach swobody, przydatny do analizy sprzężonych drgań giętno-skrętnych (zginanie w płaszczyźnie głównej). Pręt jest o przekroju monosymetrycznym otwartym. Zastosowano sześcienną aproksymację Hermita przemieszczeń poprzecznych i kątów skręcenia pręta. Macierz sztywności elementu odpowiada teorii pierwszego rzędu. Pominięto bezwładność obrotową i deplanacyjną.

Powell i Klinger [35] zaproponowali oryginalny prętowy cienkościenny element skończony o 8 stopniach swobody. Różnica w stosunku do koncepcji Mei'a [30] polega na tym, że skręcanie nie-swobodne jest aproksymowane parabolą trzeciego stopnia, a skręcanie St-Venanta - za pomocą linii prostej. Z kolei Cheung [2] zastosował metodę pasm skończonych w mechanice pojedynczych prętów cienkościennych o dowolnych przekrojach poprzecznych.

Szmidt [41] zaproponował prętowy cienkościenny element skończony o 14 stopniach swobody, w którym aproksymacja przemieszczeń osiowych i giętnych jest analogiczna jak w [1], natomiast kąty skręcenia są aproksymowane przez funkcje przestępne, wynikające ze ścisłych rozwiązań statycznych pojedynczego pręta odpowiednio obciążonego na brzegach. Rozważania są prowadzone w dowolnym układzie kartezjańskim. Nie wprowadza się głównego punktu początkowego, ani środka ścinania. Analogiczną aproksymację przemieszczeń i skręceń przyjął Obrębski [34].

Glabisz [49] formułuje prętowy cienkościenny element skończony o profilu otwartym, o 14 stopniach swobody, z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej. Przemieszczenie podłużne przyjęto w środku ciężkości, natomiast pozostałe przemieszczenia uogólnione - w środku ścinania. Aproksymacja przemieszczeń podłużnych jest liniowa, natomiast aproksymacja przemieszczeń poprzecznych i skręceń jest sześcienna (wielomiany Hermita). Wyprowadzono wzory na poszczególne elementy macierzy sztywności elementu skończonego. Analogiczny element skończony sformułował na innej drodze Jankowski w pracy [50].



3. MODEL FIZYCZNY STALOWYCH FUNDAMENTÓW RAMOWYCH POD MASZINY OBROTOWE

Z przeglądu literatury zawartego w rozdziale 2 wynika, że większość stalowych ramowych konstrukcji wsporczych pod maszyny obrotowe ma następujące cechy konstrukcyjne:

- 1) Stalowa konstrukcja nośna jest ramą przestrzenną o węzłach sztywnych, spełniającą następujące warunki ortogonalności:
 - a) oś x danego pręta jest równoległa do jednej z osi układu globalnego $x_0y_0z_0$,
 - b) pręty są pryzmatyczne, cienkościenne o monosymetrycznym profilu otwartym lub jednokomorowym zamkniętym,
 - c) główne centralne osie bezwładności y, z przekroju danego pręta są równoległe do wybranych osi układu globalnego $x_0y_0z_0$.
- 2) Stalowa konstrukcja nośna jest sztywno zamocowana w żelbetowej płycie dolnej.
- 3) Węzły konstrukcji nośnej są grubościennie i wzmocnione dodatkowymi żeberkami i przeponami.
- 4) Każda maszyna obrotowa jest pojedynczą bryłą sztywną lub układem brył sztywnych, połączonych ze stalową konstrukcją nośną za pomocą zbioru elementów sprężysto-tłumiących.
- 5) Oś obrotu części wirujących maszyny jest równoległa do jednej z osi układu globalnego $x_0y_0z_0$.
- 6) Główne centralne osie bezwładności brył sztywnych są równoległe do osi $x_0y_0z_0$.
- 7) Stalowa konstrukcja nośna może być wzmocniona wiotkimi stężeniami o dowolnej orientacji w przestrzeni.

Na podstawie przesłanek empirycznych i wyników badań teoretycznych opisanych w literaturze model fizyczny stalowego fundamentu ramowego pod maszyny obrotowe przyjęto w postaci przestrzennego układu prętowo-bryłowego, mającego w.w. cechy konstrukcyjne oraz spełniającego następujące założenia:

- 1) Pręty stalowej konstrukcji nośnej są wąskie, cienkościenne, odkształcalne osiowo, giętne (w dwóch płaszczyznach) i skrętne.
- 2) Pręty cienkościenne o profilu otwartym spełniają pierwsze i drugie założenie Vlasov'a, a pręty o profilu zamkniętym - pierwsze założenie Vlasov'a oraz założenie Umanski'ego.
- 3) Węzłami układu prętowego są węzły naturalne stalowej konstrukcji nośnej oraz węzły dodatkowe na długości prętów cienkościennych.
- 4) Węzły, w których zbiegają się co najmniej dwa pręty pod kątem prostym nie przenoszą deplanacji. Deplanacje przekrojów przywęzłowych są w takim węźle równe zeru.
- 5) Węzły dodatkowe na długości pręta pryzmatycznego przenoszą deplanację. Deplanacje przekrojów przywęzłowych w takim węźle są sobie równe.

- 6) Żelbetowa płyta fundamentowa jest nieodkształcalna i nieruchoma.
- 7) Modelem wiotkich stężeń są nieważkie pręty przegubowo-przegubowe, przenoszące tylko naprężenia normalne od rozciągania/ściskania.
- 8) Materiał prętów jest jednorodny, izotropowy, liniowo-sprężysty. Drgania układu są liniowe.
- 9) Stalowa konstrukcja nośna ma własności tłumiące zgodne z modelem Voighta.
- 10) Każdy element sprężysto-tłumiący, łączący maszynę ze stalową konstrukcją nośną, jest modelowany przez ortogonalny układ nieważkich więzi sprężystych i lepkich. Połączenie traktowane jest jako skupione i odwzorowane przez 3 liniowe translacyjne więzi sprężyste i 3 translacyjne więzi lepkie. Więzi są równoległe do osi układu globalnego $x_0y_0z_0$ oraz łączą maszynę z wybranym węzłem ortogonalnej struktury prętowej. Połączenia danej bryły z układem prętowym są jednakowe.
- 11) Drgania układu są wzbudzane bezwładnościowo wskutek niewyważenia części wirujących maszyn. Płaszczyzna wirowania siły odśrodkowej przechodzi przez środek ciężkości części wirującej i jest równoległa do wybranej płaszczyzny układu globalnego $x_0y_0z_0$.
- 12) Rozpatruje się drgania ustalone układu w reżimie pracy (w stanie eksploatacyjnym) i w rezonansach przejściowych quasi-stacjonarnych (w czasie rozbiegu lub wybiegu maszyn). Drgania są wywołane grupą sił wirujących o wspólnej częstotliwości wzbudzenia, dowolnie przesuniętych w fazie. Kierunek wirowania sił jest dowolny.
- 13) Uwzględnia się wpływ statycznych sił osiowych wywołanych siłami ciężkości.

Jeśli w układzie występują siły wirujące z różnymi prędkościami obrotowymi, to obliczenia należy wykonać oddzielnie dla podgrup sił o wspólnych częstotliwościach wzbudzenia, a wyniki zsumować algebraicznie na korzyść bezpieczeństwa konstrukcji [21].

4. PODSTAWY MECHANIKI PRYZMATYCZNYCH PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH

4.1. Pręt o przekroju cienkościennym otwartym

Celem rozważań jest: wyprowadzenie formuły na przemieszczenia podłużne włókien pręta pryzmatycznego, z pełną interpretacją elementów tej formuły, wyprowadzenie różniczkowych równań równowagi statycznej pręta w bazie przemieszczeń związanych ze środkiem sprężystości przekroju poprzecznego, zestawienie kinematycznych i kinetycznych warunków brzegowych oraz uwzględnienie w równaniach równowagi wpływu stałej siły osiowej. Rozważania obejmują komplet zagadnień tworzących podstawy mechaniki pręta o przekroju cienkościennym otwartym, w tym opis stanu naprężenia w pręcie. Całość jest rozwinięciem lub uściśleniem teorii prętów cienkościennych o przekroju otwartym, zawartej m.in. w monografiach [38,42].

Założenia

Przyjęto następujące założenia:

- 1) Pręt jest pryzmatyczny, o przekroju cienkościennym otwartym. Grubość ścianki $\delta(s)$ jest przedziałami stała.
- 2) Materiał pręta jest liniowo sprężysty, jednorodny i izotropowy, o parametrach E - moduł Younga, ν - stała Poissona.
- 3) Przemieszczenia są małe.
- 4) Po odkształceniu pręta rzut konturu przekroju poprzecznego na płaszczyznę prostopadłą do osi pręta nie ulega zmianie (pierwsze założenie Vlasov'a).
- 5) Po odkształceniu pręta tworzące pozostają prostopadłe do osi konturu przekroju poprzecznego (drugie założenie Vlasov'a).

Przy skręcaniu płaski przekrój pręta ulega deplanacji, czyli spaceniu. W szczególnym przypadku przekrój może być monosymetryczny lub bisymetryczny.

Oznaczenia

Przyjęto następujące oznaczenia, odnoszące się do dowolnej osi konturu przekroju poprzecznego, pokazanej na rys. 4.1:

x, y, z - lokalny kartezjański prawoskrętny układ współrzędnych,

y, z - główne centralne osie bezwładności przekroju poprzecznego,

x - oś pręta,

O - środek masy przekroju poprzecznego, pokrywający się ze środkiem sprężystym,

$M(y_M, z_M, 0)$ - główny punkt początkowy,

$\tilde{M}(y, z, \omega)$ - punkt bieżący,

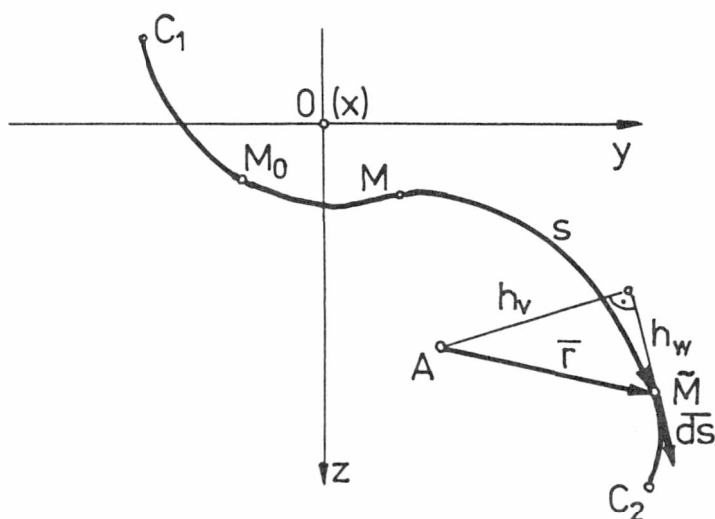
$\bar{r}$ - promień bieżący,

s - współrzędna obwodowa,

ω - główna współrzędna wycinkowa,

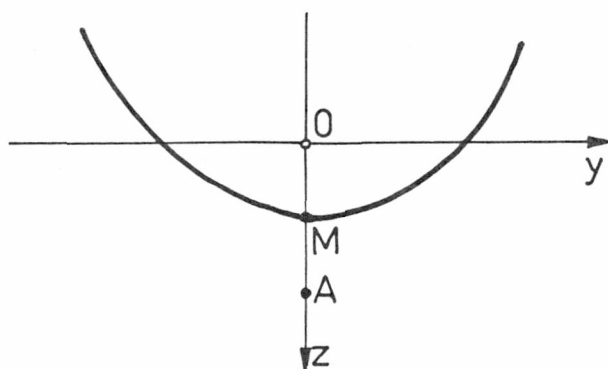
$A(y_A, z_A)$ - główny biegun wycinkowy (środek ścinania),

h_v, h_w - naturalne składowe wektora $\bar{r}$.



Rys. 4.1

W przypadku monosymetrii względem osi (z) otrzymuje się $M(0, z_M, 0)$, $A(0, z_A)$, rys. 4.2.



Rys. 4.2

Ogólna definicja głównej współrzędnej wycinkowej

Wprowadźmy wektor:

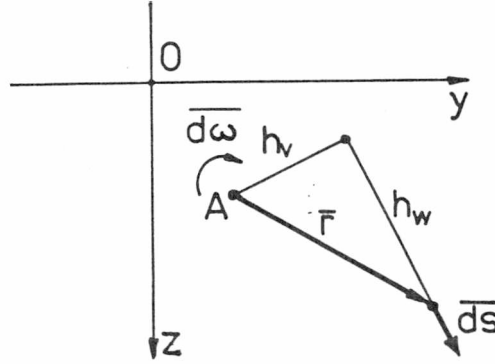
$$\bar{\omega}(s) = \int_{(M\tilde{M})} \bar{d\omega} = \omega(s) \bar{e}_x, \quad (4.1)$$

gdzie, zgodnie z rys. 4.1, 4.3,

$$\overline{d\omega} = \overline{r} \times \overline{ds} = [(y - y_A)\overline{e}_y + (z - z_A)\overline{e}_z] \times (dy\overline{e}_y + dz\overline{e}_z) = d\omega \overline{e}_x ,$$

$$d\omega = [y(s) - y_A] dz(s) - [z(s) - z_A] dy(s), \quad (4.2)$$

$$\omega(s) = \int_{(MM)} d\omega = \int_0^s d\omega \quad [\text{m}^2].$$



Rys. 4.3

W praktyce korzysta się z wzoru

$$d\omega = h_v(s) ds, \quad (4.3)$$

przy czym $ds < > 0$. Wektory $\overline{e}_x, \overline{e}_y, \overline{e}_z$ są wersorami osi x, y, z .

Charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego

Oś konturu przekroju poprzecznego jest opisana parametrycznie przez funkcje $y(s), z(s)$. Różniczkowe pole powierzchni wynosi $dF = \delta(s) ds$. Charakterystyki geometryczne przekroju cienkościennego otwartego są określone przez znane wzory:

$$\begin{aligned} F &= \int_{(s)} \delta ds, & S_y &= \int_{(s)} z\delta ds, & S_z &= \int_{(s)} y\delta ds, \\ J_y &= \int_{(s)} z^2\delta ds, & J_z &= \int_{(s)} y^2\delta ds, & D_{yz} &= \int_{(s)} yz\delta ds, \\ S_\omega &= \int_{(s)} \omega\delta ds, & J_\omega &= \int_{(s)} \omega^2\delta ds, & D_{\omega y} &= \int_{(s)} \omega z\delta ds, & D_{\omega z} &= \int_{(s)} \omega y\delta ds. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Symbolami S_y, S_z oznaczono momenty statyczne względem osi y, z ; J_y, J_z są momentami bezwładności względem osi y, z ; D_{yz} jest momentem dewiacji względem układu yz ; S_ω jest wycinkowym momentem statycznym, J_ω jest wycinkowym momentem bezwładności, $D_{\omega y}, D_{\omega z}$ są zwykle nazywane wycinkowo-liniowymi momentami statycznymi. Osie y, z są głównymi centralnymi osiami bezwładności, jeśli $S_y=0, S_z=0, D_{yz}=0$. Punkt M jest głównym punktem początko-

wym, a punkt A jest głównym biegunem wycinkowym, jeśli $S_\omega = 0$, $D_{\omega y} = 0$, $D_{\omega z} = 0$. Ostatecznie, jako niezerowe pozostają 4 charakterystyki F, J_y, J_z, J_ω , które łatwo oblicza się za pomocą całek Mohra.

Wyznaczenie punktów charakterystycznych A i M

Charakterystyki $D_{\omega y}, D_{\omega z}$ nie zależą od wyboru początkowego punktu liczenia M. Istotnie, jeśli ω_0 jest współrzędną wycinkową obliczoną względem dowolnego punktu M_0 na konturze (rys.4.1), to

$$\omega_0 = \int_{(M_0 \tilde{M})} d\omega = \int_{(M_0 M)} d\omega + \int_{(M \tilde{M})} d\omega = \Delta\omega + \omega, \quad (4.5)$$

gdzie $\Delta\omega = \text{const.}$ Stąd

$$D_{\omega_0 y} = \int_{(s)} \omega_{0z} \delta ds = \int_{(s)} (\Delta\omega + \omega) z \delta ds = \Delta\omega S_y + D_{\omega y} = D_{\omega y}. \quad (4.6)$$

Współrzędne punktu A można zatem wyznaczyć niezależnie od wyboru punktu M.

Obliczmy dodatkowo przyrost współrzędnej ω_{M_0} , dla której $\bar{r} = M_0 \tilde{M}$. Dla dowolnego punktu M_0 otrzymuje się (por. (4.2))

$$d\omega = (y - y_A) dz - (z - z_A) dy, \quad d\omega_{M_0} = (y - y_{M_0}) dz - (z - z_{M_0}) dy, \quad (4.7)$$

stąd

$$\begin{aligned} d(\omega - \omega_{M_0}) &= (y_{M_0} - y_A) dz - (z_{M_0} - z_A) dy, \\ \omega - \omega_{M_0} &= (y_{M_0} - y_A) z - (z_{M_0} - z_A) y + C, \\ \omega &= \omega_{M_0} + (y_{M_0} - y_A) z - (z_{M_0} - z_A) y + C, \end{aligned} \quad (4.8)$$

gdzie C jest stałą całkowania. Z warunku $D_{\omega y} = 0$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} \int_{(s)} \omega z \delta ds &= \int_{(s)} [\omega_{M_0} + (y_{M_0} - y_A) z - (z_{M_0} - z_A) y + C] z \delta ds = \\ &= D_{\omega_{M_0} y} + (y_{M_0} - y_A) J_y = 0 \Rightarrow y_A = y_{M_0} + D_{\omega_{M_0} y} / J_y. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Analogicznie z warunku $D_{\omega z} = 0$ otrzymuje się

$$\int_{(s)} \omega y \delta ds = \int_{(s)} [\omega_{M_o} + (y_{M_o} - y_A)z - (z_{M_o} - z_A)y + C] y \delta ds =$$

$$= D_{\omega_{M_o}z} - (z_{M_o} - z_A)J_z = 0 \quad \Rightarrow \quad z_A = z_{M_o} - D_{\omega_{M_o}z} / J_z .$$
(4.10)

Charakterystyki $D_{\omega_{M_o}y}$, $D_{\omega_{M_o}z}$ są obliczone względem dowolnie obranego punktu M_o , który jest jednocześnie biegunem i punktem początkowym.

Po wyznaczeniu współrzędnych punktu A , korzystamy z warunku $S_\omega = 0$:

$$\int_{(s)} \omega \delta ds = \int_{(s)} (\omega_0 - \Delta\omega) \delta ds = S_{\omega_0} - \Delta\omega F = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = S_{\omega_0} / F ,$$
(4.11)

gdzie S_{ω_0} jest wycinkowym momentem statycznym względem dowolnie obranego punktu M_o , przy czym $\bar{r} = \tilde{A}\tilde{M}$. Wartość $\Delta\omega$, będąca współrzędną ω_0 poszukiwanego głównego punktu początkowego M , pozwala na wyznaczenie tego punktu.

W przypadku monosymetrii względem osi (z) punkty A i M leżą na osi symetrii. Warunki $S_z = 0$, $S_\omega = 0$, $D_{\omega y} = 0$ są wówczas spełnione tożsamościowo. Należy wyznaczyć tylko z_A ze wzoru (4.10).

Skręcanie swobodne

Skręcanie swobodne (czyste, de Saint-Venanta) występuje wówczas, gdy pręt ma swobodę deplanacji i jest obciążony stałym momentem skręcającym. Długości włókien pręta nie ulegają wówczas zmianie, a przekroje poprzeczne ulegają skręceniu i spaczeniu. W przekrojach poprzecznych pojawiają się tylko naprężenia styczne, rozłożone liniowo na grubości ścianki.

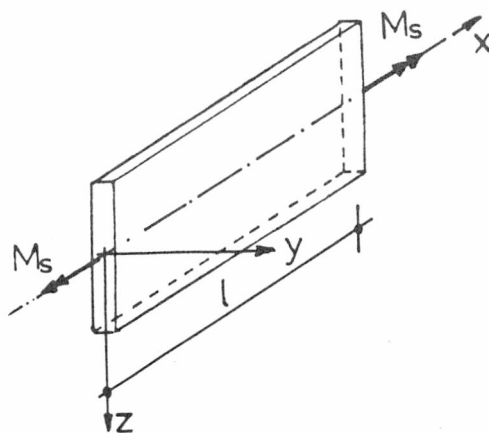
Rozważmy pręt cienkościenny, o przekroju w postaci pojedynczego wąskiego prostokąta, poddany skręcaniu swobodnemu, rys. 4.4. Kąt skręcenia pręta o długości l wynosi

$$\varphi = M_s l / (G J_s) ,$$
(4.12)

gdzie

$$J_s = b\delta^3 / 3 , \quad G = E / [2(1 + \nu)] .$$
(4.13)

Symbolem J_s oznaczono moment bezwładności przy czystym skręcaniu, a G jest modułem Kirchhoffa.



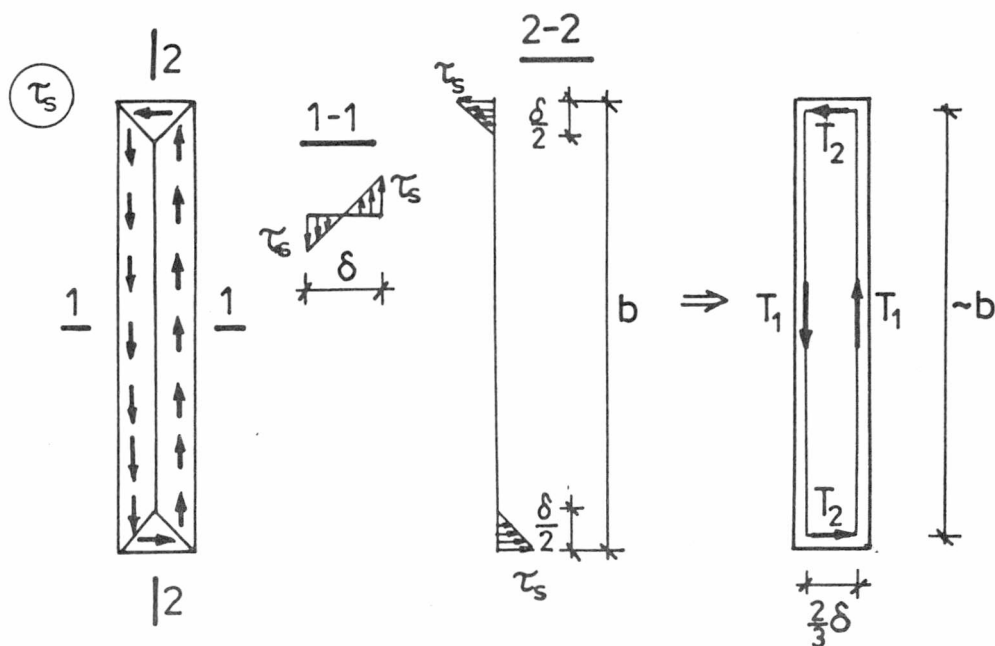
Rys. 4.4

Całka z momentów par naprężeń stycznych musi być równa momentowi skręcającemu M_s ,
rys.4.5:

$$M_s \approx T_1 \frac{2}{3} \delta + T_2 b \approx \frac{1}{4} \tau_s \delta b \frac{2}{3} \delta + \frac{1}{3} \tau_s \delta \frac{\delta}{2} b = \frac{1}{3} \tau_s \delta^2 b \quad (4.14)$$

stąd ekstremalna wartość naprężeń stycznych wynosi

$$\tau_s = \frac{3M_s}{\delta^2 b} = \frac{M_s \delta}{J_s} \quad (4.15)$$



Rys. 4.5

W praktyce, przekroje cienkościennie składają się z n_p wąskich prostokątów o wymiarach b_i , δ_i . Moment bezwładności przy czystym skręcaniu oblicza się z wzoru

$$J_s = \lambda \sum_{i=1}^{n_p} \left(b_i \delta_i^3 / 3 \right), \quad (4.16)$$

Gdzie $\lambda \geq 1$ jest współczynnikiem poprawkowym, identyfikowanym doświadczalnie. Warunek równoważności momentu skręcającego i naprężeń stycznych będzie spełniony, jeśli w i -tym prostokącie

$$\tau_{si} = \lambda \frac{M_s \delta_i}{J_s}. \quad (4.17)$$

Istotnie, w przypadku (4.17) otrzymuje się:

$$M_s = \sum_{i=1}^{n_p} M_{si} = \sum_{i=1}^{n_p} \left(\frac{1}{3} \tau_{si} \delta_i^2 b_i \right) = \frac{1}{3} \lambda \frac{M_s}{J_s} \sum_{i=1}^{n_p} \left(\delta_i \delta_i^2 b_i \right) = \frac{M_s}{J_s} \lambda \sum_{i=1}^{n_p} \left(b_i \delta_i^3 / 3 \right) = M_s. \quad (4.18)$$

W literaturze współczynnik λ we wzorze na τ_{si} nie występuje.

Jeśli pręt nie ma swobody deplanacji ze względu na warunki brzegowe, lub gdy moment skręcający nie jest stały na długości pręta, to występuje skręcanie nieswobodne (skrępowane).

Opis stanu przemieszczenia pręta

Z pierwszego założenia Vlasov'a wynika, że przestrzenny stan przemieszczenia pręta jest opisany przez cztery funkcje: $u_A(x, t)$, $v_A(x, t)$, $w_A(x, t)$, $\varphi_A(x, t)$, odniesione do środka ścinania A , lub przez $u(x, t)$, $v(x, t)$, $w(x, t)$, $\varphi(x, t)$, odniesione do środka sprężystego O , rys.4.6. Związki między składowymi przemieszczenia w układzie $x_A y_A z_A$ oraz xyz mają postać

$$u_A = u - y_A v' - z_A w', \quad v_A = v - z_A \varphi, \quad w_A = w + y_A \varphi, \quad \varphi_A = \varphi, \quad (4.19)$$

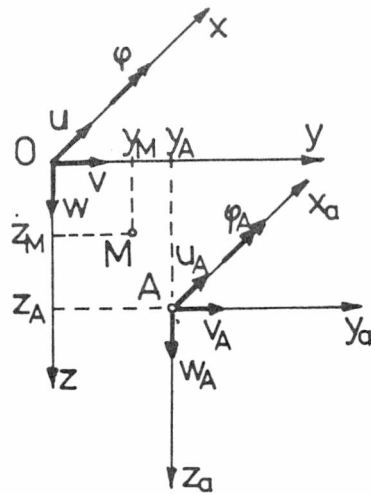
gdzie $()' = \partial / \partial x$.

Przemieszczenie punktu bieżącego $\tilde{M}$ na osi konturu przekroju poprzecznego ma trzy składowe w naturalnym lokalnym układzie współrzędnych, rys.4.7:

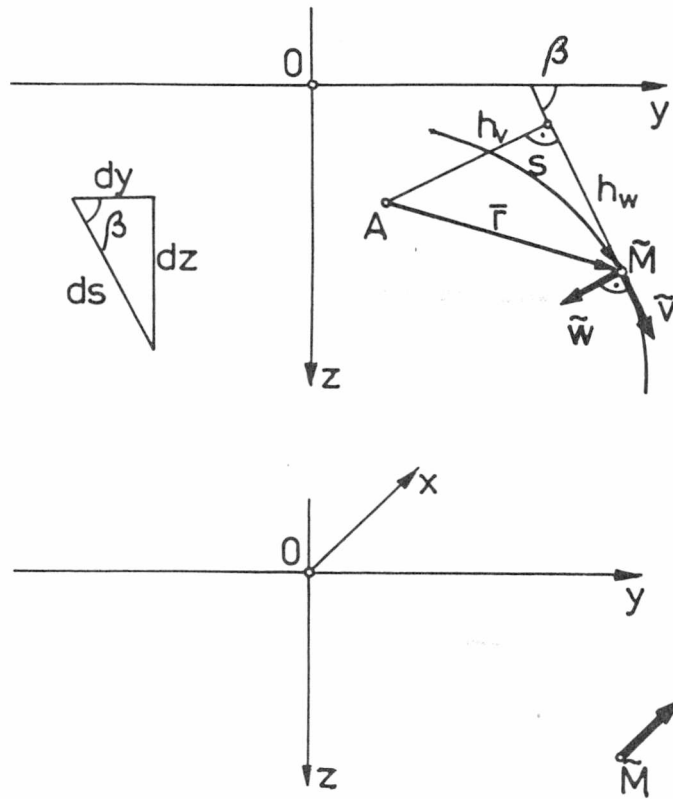
$u(x, s, t)$ - składowa równoległa do osi x ,

$\hat{v}(x, s, t)$ - składowa styczna do osi konturu,

$\tilde{w}(x, s, t)$ - składowa normalna do osi konturu.



Rys. 4.6



Rys. 4.7

Obowiązują następujące związki geometryczne:

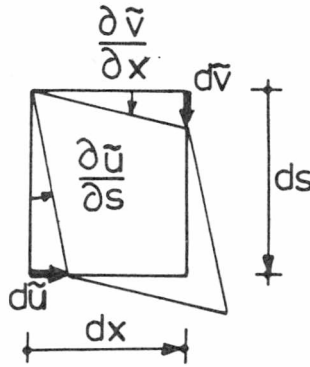
$$v = v_A \cos \beta + w_A \sin \beta + \varphi_A h_v, \quad \tilde{w} = -v_A \sin \beta + w_A \cos \beta + \varphi_A h_w. \quad (4.20)$$

Zgodnie z drugim założeniem Vlasov'a odkształcenie postaciowe elementu różniczkowego powierzchni środkowej pręta jest równe zero (rys. 4.8), tzn.

$$\gamma = \partial \tilde{u} / \partial s + \partial \tilde{v} / \partial x = 0 , \quad (4.21)$$

a więc

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial v_A}{\partial x} \cos \beta - \frac{\partial w_A}{\partial x} \sin \beta - \frac{\partial \varphi_A}{\partial x} h_v . \quad (4.22)$$



Rys. 4.8

Uwzględniając związki geometryczne, rys.4.7

$$\cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \sin \beta = \frac{dz}{ds}, \quad h_v = \frac{d\omega}{ds} , \quad (4.23)$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, s, t) &= -\int_0^s \tilde{v}' ds + \tilde{u}(x, 0, t) = -\int_{y_M}^y v'_A dy - \int_{z_M}^z w'_A dz - \int_0^\omega \varphi'_A d\omega + u_M(x, t) = \\ &= -v'_A y - w'_A z - \varphi' \omega + u(x, t) , \end{aligned} \quad (4.24)$$

ponieważ $\varphi_A = \varphi$ oraz (vide rys. 4.6)

$$\begin{aligned} u_M + v'_A y_M + w'_A z_M &= u_A + v'_A (y_A - y_M) + w'_A (z_A - z_M) + \\ &+ v'_A y_M + w'_A z_M = u_A + v'_A y_A + w'_A z_A = u . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Wzór (4.25) jest równoważny ze wzorem (4.19)₁, gdyż z (4.19) otrzymuje się

$$u = u_A + v' y_A + w' z_A = u_A + (v_A + z_A \varphi)' y_A + (w_A - y_A \varphi)' z_A = u_A + v'_A y_A + w'_A z_A. \quad (4.26)$$

Wzór (4.24) można przepisać następująco:

$$u(x, s, t) = [u(x, t) - v'_A y - w'_A z] - \varphi' \omega. \quad (4.27)$$

Trzy pierwsze składniki odwzorowują translację i obroty przekroju płaskiego, a czwarty składnik jest miarą deplanacji przekroju. Kąty obrotu przekroju płaskiego są określone przez pochodne przemieszczeń v_A , w_A . W przypadku $\varphi \equiv 0$ otrzymuje się przypadek klasyczny, zgodny z hipotezą Bernoulli'ego.

Opis stanu odkształcenia i naprężenia w pręcie

Odkształcenia włókien pręta w kierunku osi x wynoszą

$$\varepsilon(x, s, t) = \tilde{u}' = u' - v''_A y - w''_A z - \varphi'' \omega. \quad (4.28)$$

Zgodnie z prawem Hooke'a i pierwszym założeniem Vlasov'a odkształcenia elementu różniczkowego $dx ds$ w kierunkach x , s wynoszą, rys. 4.9

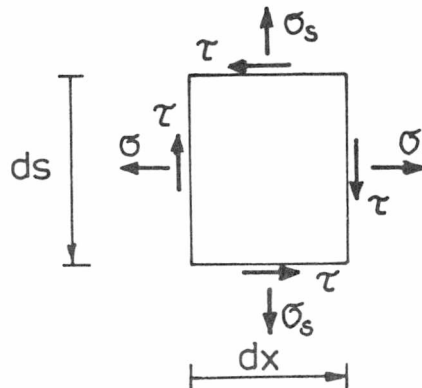
$$\varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma - \nu \sigma_s), \quad \varepsilon_s = \frac{1}{E}(\sigma_s - \nu \sigma) = 0, \quad (4.29)$$

stąd

$$\sigma_s = \nu \sigma, \quad \varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma - \nu^2 \sigma) = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma = \frac{1}{\tilde{E}} \sigma, \quad (4.30)$$

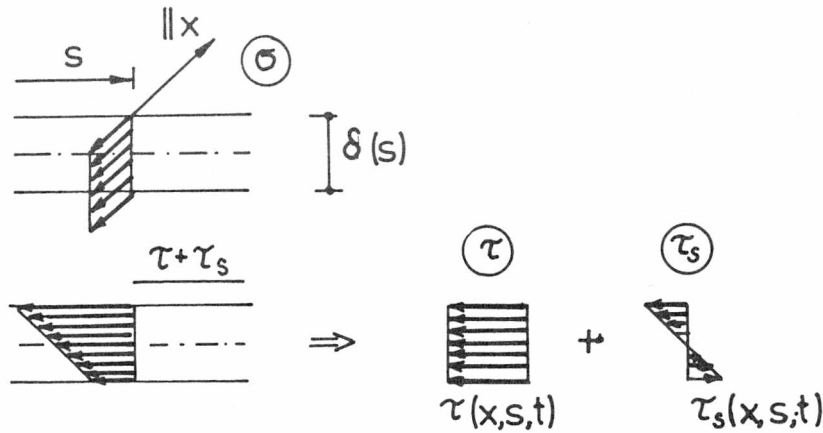
$$\sigma(x, s, t) = \tilde{E} \varepsilon(x, s, t) = \tilde{E} (u' - v''_A y - w''_A z - \varphi'' \omega),$$

gdzie $\tilde{E} = E/(1 - \nu^2)$ jest sprowadzonym (zredukowanym) modułem Younga.



Rys. 4.9

Rozkłady naprężeń normalnych i stycznych w przekroju o normalnej ujemnej pokazano na



Rys. 4.10

na rys. 4.10. Zaznaczono dodatnie zwroty naprężeń. Naprężenia styczne $\tau(x, s, t)$ są związane z nieswobodnym skręcaniem i będą wyznaczone w dalszych rozważaniach. Naprężenia τ są równomiernie rozłożone na grubości ścianki i równoległe do jej brzegów. Naprężenia styczne $\tau_s(x, s, t)$ pochodzą od skręcania swobodnego. Naprężenia normalne są stałe na grubości ścianki.

W ogólnym przypadku kąt skręcenia φ jest zmienny na długości pręta. Formułę (4.12) należy wówczas zastąpić zależnością różniczkową

$$M_s = GJ_s \varphi' , \quad (4.31)$$

natomiast z (4.17) otrzymuje się

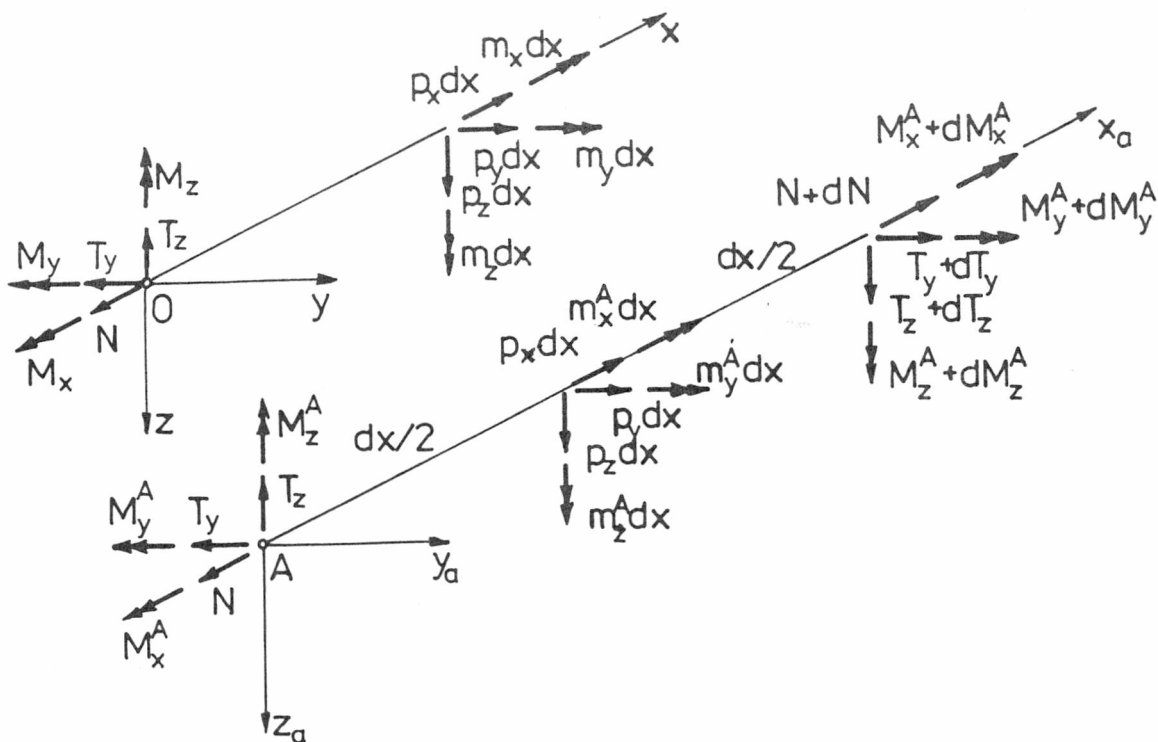
$$\tau_s(x, s, t) = \lambda G \delta(s) \varphi' . \quad (4.32)$$

Warunki równowagi elementu różniczkowego dx oraz definicje sił przekrojowych

W układzie przestrzennym $x_a y_a z_a$ (rys. 4.6), po wycięciu elementu dx pręta, przekroje $x, x+dx$ są obciążone siłą ogólną i momentem ogólnym, które są odniesione do środka ścinania A . Składowe siły ogólnej i momentu ogólnego pokazano na rys. 4.11. Zaznaczono dodatnie zwroty tych składowych oraz wypadkowych obciążeń czynnych. Różniczki sił przekrojowych w układzie $x_a y_a z_a$ wynoszą

$$dS = S' dx , \quad (4.33)$$

gdzie $S = N, T_y, T_z, M_x^A, M_y^A, M_z^A$.



Rys. 4.11

Warunki równowagi elementu dx , z pominięciem małych wyższego rzędu, mają znaną postać:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Sigma X = 0 : & dN + p_x dx = 0, \\ \Sigma Y = 0 : & dT_y + p_y dx = 0, \\ \Sigma Z = 0 : & dT_z + p_z dx = 0, \\ \Sigma M_{x_a} = 0 : & dM_x^A + m_x^A dx = 0, \\ \Sigma M_{y_a} = 0 : & dM_y^A + m_y^A dx - T_z dx = 0, \\ \Sigma M_{z_a} = 0 : & dM_z^A + m_z^A dx + T_y dx = 0. \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Po uwzględnieniu relacji (4.33) w równaniach (4.34) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
-N' &= p_x, \\
-T'_y &= p_y, \\
-T'_z &= p_z, \\
-(M_x^A)' &= m_x^A, \\
(M_y^A)' &= T_z - m_y^A, \\
(M_z^A)' &= -T_y - m_z^A.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Z równań (4.35)_{5,6} obliczamy siły tnące

$$T_y = -(M_z^A)' - m_z^A, \quad T_z = (M_y^A)' + m_y^A \tag{4.36}$$

i wstawiamy do równań (4.35)_{2,3}, otrzymując zbiór czterech równań równowagi elementu dx w układzie współrzędnych $x_a y_a z_a$:

$$\begin{aligned}
-N' &= p_x, \\
(M_z^A)'' &= p_y - (m_z^A)', \\
-(M_y^A)'' &= p_z + (m_y^A)', \\
-(M_x^A)' &= m_x^A.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Siły przekrojowe (siła osiowa, momenty zginające, bimoment) z definicji wynoszą:

$$\left\{ \begin{aligned}
N(x, t) &= \int_{(F)} \sigma(x, s, t) dF = \tilde{E} \int_{(s)} (u' - v_A'' y - w_A'' z - \varphi'' \omega) \delta ds = \tilde{E} F u', \\
M_y(x, t) &= \int_{(F)} \sigma(x, s, t) z dF = -\tilde{E} w_A'' \int_{(s)} z^2 \delta ds = -\tilde{E} J_y w_A'', \\
M_z(x, t) &= -\int_{(F)} \sigma(x, s, t) y dF = \tilde{E} v_A'' \int_{(s)} y^2 \delta ds = \tilde{E} J_z v_A'', \\
B(x, t) &= \int_{(F)} \sigma(x, s, t) \omega dF = -\tilde{E} \varphi'' \int_{(s)} \omega^2 \delta ds = -\tilde{E} J_\omega \varphi''.
\end{aligned} \right. \tag{4.38}$$

We wzorach (4.38) wykorzystano warunki zerowania się niektórych charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego.

Bimoment $B(x, t)$, mierzony w Nm·m interpretuje się jako biparę sił, tj. dwie pary sił działające w płaszczyznach równoległych, równoważne dwóm równym lecz przeciwnie skierowanym momentom []. Jest to obciążenie samorzównoważone w danym przekroju, dlatego nie wchodzi do równań równowagi elementu dx .

Momenty M_y^A , M_z^A z definicji wynoszą:

$$\begin{aligned} M_y^A(x, t) &= \int_{(F)} \sigma(x, s, t) (z - z_A) dF = M_y(x, t) - z_A N(x, t), \\ M_z^A(x, t) &= - \int_{(F)} \sigma(x, s, t) (y - y_A) dF = M_z(x, t) + y_A N(x, t), \end{aligned} \quad (4.39)$$

co jest zgodne z rys. 4.11.

Ze wzorów (4.38) otrzymuje się

$$u' = N / \bar{E} F, \quad w_A'' = -M_y / \bar{E} J_y, \quad v_A'' = M_z / \bar{E} J_z, \quad \varphi'' = -B / \bar{E} J_\omega. \quad (4.40)$$

Wstawiając (4.40) do (4.30)₂ otrzymuje się wzór na naprężenia normalne, odpowiadający założeniom Vlasov'a:

$$\sigma(x, s, t) = \left(\frac{N}{F} - \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y} \right) + \frac{B \omega}{J_\omega}, \quad (4.41)$$

gdzie $y=y(s)$, $z=z(s)$, $\omega=\omega(s)$. Trzy pierwsze składniki odpowiadają klasycznej teorii pręta o przekroju zwartym przy założeniu hipotezy Bernoulli'ego, z następującymi zmianami: we wzorach na N , M_y , M_z występuje $\bar{E}$ zamiast E , we wzorach na M_y , M_z występują funkcje v_A , w_A zamiast v , w . Czwarty składnik określa dodatkowe samorzównoważone naprężenia normalne związane z deplancją przekroju.

Wyznaczenie naprężeń stycznych przy nieswobodnym skręcaniu

Naprężenie styczne $\tau(x, s, t)$ wyznaczamy z równowagi elementu $dx ds$, rys. 4.12. Z sumy rzutów na oś x otrzymuje się

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma \delta)}{\partial x} dx ds + \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} ds dx + \frac{p_x dx}{F} \delta ds = 0, \quad \Big| : dx ds \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \delta + \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} + \frac{p_x dx}{F} \delta = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

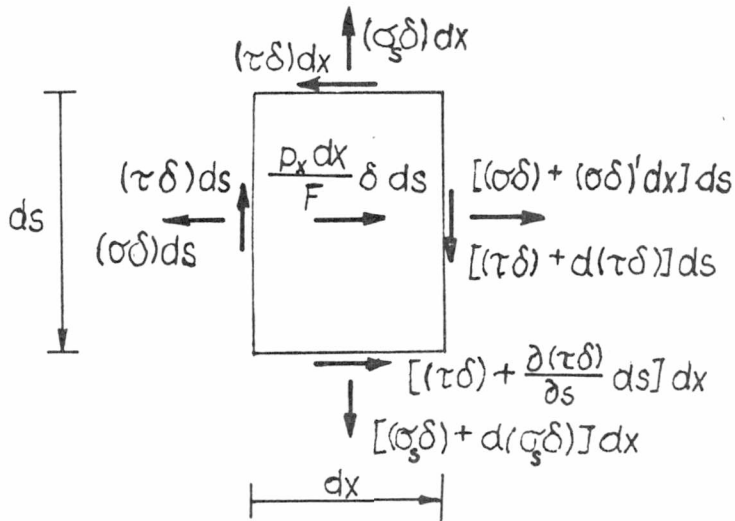
stąd, po uwzględnieniu (4.35)₁,

$$\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} = \left(\frac{1}{F} \frac{dN}{dx} - \frac{\partial\sigma}{\partial x} \right) \delta = \left(\frac{N'}{F} - \sigma' \right) \delta, \quad (4.43)$$

$$\tau\delta = \tau(x, s, t) \delta(s) = \int_{s_k}^s \left(\frac{N'}{F} - \sigma' \right) \delta ds + \tau(x, s_k, t) \delta(s_k).$$

Jeśli s_k odpowiada dowolnej swobodnej krawędzi podłużnej (punkty C_1, C_2 na rys.4.1), nieobciążonej siłami stycznymi, to $\tau(x, s_k, t) = 0$. W literaturze prowadzi się rozważania w wersji skróconej, pomijając człon $\frac{1}{F} \frac{dN}{dx}$. Funkcja podcałkowa w (4.43) wynosi (*por.* (4.41))

$$\frac{1}{F} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial\sigma}{\partial x} = \frac{\partial M_z}{\partial x} \frac{y}{J_z} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{z}{J_y} - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\omega}{J_\omega}. \quad (4.44)$$



Rys. 4.12

Wprowadzamy oznaczenia:

$$Q_y = -M'_z = -\tilde{E} J_z v_A''', \quad Q_z = M'_y = -\tilde{E} J_y w_A''', \quad M_\omega = B' = -\tilde{E} J_\omega \phi'''. \quad (4.45)$$

Moment M_ω jest zwany momentem giętno-skrętnym. W ogólnym przypadku $Q_y \neq T_y$, $Q_z \neq T_z$. Wielkości Q_y , Q_z są równe odpowiednim siłom tnącym, jeśli $m_z \equiv 0$, $m_y \equiv 0$. Uwzględniając wzory (4.44, 4.45) we wzorze (4.43), otrzymuje się

$$\begin{aligned} \tau(x, s, t) \delta(s) &= \int_{s_k}^s \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \frac{y}{J_z} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{z}{J_y} - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\omega}{J_\omega} \right) \delta ds = \\ &= - \int_{s_k}^s \left(\frac{Q_y y}{J_z} + \frac{Q_z z}{J_y} + \frac{M_\omega \omega}{J_\omega} \right) \delta ds = - \frac{Q_y \tilde{S}_z}{J_z} - \frac{Q_z \tilde{S}_y}{J_y} - \frac{M_\omega \tilde{S}_\omega}{J_\omega}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

a stąd

$$\tau(x, s, t) = -\frac{Q_y \tilde{S}_z}{J_z \delta} - \frac{Q_z \tilde{S}_y}{J_y \delta} - \frac{M_\omega \tilde{S}_\omega}{J_\omega \delta}, \quad (4.47)$$

przy czym

$$\tilde{S}_y(s) = \int_{s_k}^s z \delta ds, \quad \tilde{S}_z(s) = \int_{s_k}^s y \delta ds, \quad \tilde{S}_\omega(s) = \int_{s_k}^s \omega \delta ds. \quad (4.48)$$

Grubość δ w mianownikach we wzorze (4.47) odnosi się do miejsca, w którym obliczane są naprężenia τ , natomiast funkcja podcałkowa $\delta(s)$ we wzorach (4.48) jest przedziałami stała. Dwa pierwsze składniki we wzorach (4.47) mają budowę analogiczną do wzorów na naprężenia styczne przy zginaniu pręta o przekroju zwartym.

Obliczenie momentu skręcającego M_x^A

Moment giętno-skrętny z definicji wynosi (por. (4.42)₂):

$$\begin{aligned} M_\omega &= \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(F)} \sigma \omega dF = \int_{(F)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \omega dF = \int_{(s)} \sigma' \delta \omega ds = \\ &= \int_{(s)} \left[\frac{N'}{F} - \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} \right] \omega ds = \frac{N'}{F} S_\omega - \int_{(s)} \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} \omega ds = - \int_{(s)} \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} \omega ds = \\ &= - \int_{(s)} \omega d(\tau \delta) = -\tau \delta \omega \Big|_{C_1}^{C_2} + \int_{(s)} \tau \delta d\omega. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Naprężenia τ na nieobciążonych krawędziach podłużnych C_1, C_2 są równe zero, stąd

$$M_\omega = \int_{(s)} \tau \delta d\omega = \int_{(s)} \tau \delta h_v ds = \int_{(F)} h_v \tau dF. \quad (4.50)$$

Moment M_ω jest zatem momentem skręcającym względem osi x_a . Moment czystego skręcania M_s nie zależy od położenia bieguna redukcji, zatem ostatecznie otrzymuje się

$$M_x^A = M_\omega + M_s. \quad (4.51)$$

Różniczkowe równania równowagi statycznej pręta

Równania równowagi (4.37) elementu różniczkowego dx są wprost różniczkowymi równaniami równowagi statycznej pręta, przy czym, na podstawie (4.38, 4.39, 4.45, 4.31), otrzymuje się

$$\begin{aligned}
-N' &= -\tilde{E}F u'' , \\
(M_z^A)'' &= M_z'' + y_A N'' = \tilde{E}J_z v_A^{IV} + y_A \tilde{E}F u'''' , \\
-(M_y^A)'' &= -M_y'' + z_A N'' = \tilde{E}J_y w_A^{IV} + z_A \tilde{E}F u'''' , \\
-(M_x^A)'' &= -M_\omega' - M_s' = \tilde{E}J_\omega \varphi^{IV} - GJ_s \varphi'' .
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Wstawiając (4.52) do równań (4.37), otrzymuje się równania równowagi statycznej pręta w postaci

$$\begin{cases}
-\tilde{E}F u'' = p_x , \\
\tilde{E}J_z v_A^{IV} + y_A \tilde{E}F u'''' = p_y - (m_z^A)' , \\
\tilde{E}J_y w_A^{IV} + z_A \tilde{E}F u'''' = p_z + (m_y^A)' , \\
\tilde{E}J_\omega \varphi^{IV} - GJ_s \varphi'' = m_x^A .
\end{cases} \tag{4.53}$$

Obciążenie zewnętrzne jest zwykle zdefiniowane przez składowe w układzie xyz . Z rys.4.11 otrzymuje się zależności:

$$m_x^A = m_x + p_y z_A - p_z y_A , \quad m_y^A = m_y - p_x z_A , \quad m_z^A = m_z + p_x y_A . \tag{4.54}$$

Po wstawieniu wyrażeń (4.19), określających v_A , w_A , oraz wzorów (4.54) do równań (4.53) otrzymuje się

$$\begin{cases}
\tilde{E}F u'' = p_x , \\
\tilde{E}J_z v^{IV} - z_A \tilde{E}J_z \varphi^{IV} + y_A \tilde{E}F u'''' = p_y - m_z' - y_A p_x' , \\
\tilde{E}J_y w^{IV} + y_A \tilde{E}J_y \varphi^{IV} + z_A \tilde{E}F u'''' = p_z + m_y' - z_A p_x' , \\
\tilde{E}J_\omega \varphi^{IV} - GJ_s \varphi'' = m_x + z_A p_y - y_A p_z .
\end{cases} \tag{4.55}$$

z równania (4.55)₁ otrzymuje się

$$y_A \tilde{E}F u'''' = -y_A p_x' , \quad z_A \tilde{E}F u'''' = -z_A p_x' . \tag{4.56}$$

Wstawiając formuły (4.56) do równań (4.55), otrzymuje się ostatecznie układ równań równowagi statycznej pręta w bazie przemieszczeń u , v , w , φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tilde{E}F u'' = p_x , \\ \tilde{E}J_z v^{IV} - z_A \tilde{E}J_z \varphi^{IV} = p_y - m'_z , \\ \tilde{E}J_y w^{IV} + y_A \tilde{E}J_y \varphi^{IV} = p_z + m'_y , \\ \tilde{E}J_\omega \varphi^{IV} - GJ_s \varphi'' = m_x + z_A p_y - y_A p_z . \end{array} \right. \quad (4.57)$$

W przypadku monosymetrii względem osi (z) mamy $y_A=0$, natomiast w przypadku bisymetrii $y_A=0$, $z_A=0$.

W dalszych rozważaniach wykorzystamy równania równowagi w postaci (4.57). W celu zinterpretowania środka ścinania A przytoczymy równoważną postać tych równań w bazie przemieszczeń u, v_A, w_A, φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tilde{E}F u'' = p_x , \\ \tilde{E}J_z v_A^{IV} = p_y - m'_z , \\ \tilde{E}J_y w_A^{IV} = p_z + m'_y , \\ \tilde{E}J_\omega \varphi^{IV} - GJ_s \varphi'' = m_x^A . \end{array} \right. \quad (4.58)$$

Zgodnie ze znaną interpretacją punktu A zginanie bez skręcania występuje, jeśli $m_x^A \equiv 0$. Skręcanie bez zginania występuje, jeśli $p_y - m'_z \equiv 0$, $p_z + m'_y \equiv 0$. Problem osiowy separuje się.

Kinematyczne i kinetyczne warunki brzegowe

Zgodnie z założeniami, w węzłach cienkościennej struktury prętowej mogą występować podpory modelowane przez więzi niepodatne. Dla ogólności rozważymy wszystkie możliwe warianty podpór. W odniesieniu do rozciągania/ściskania oraz zginania wyróżniamy podparcie przegubowe lub sztywne, bez przesuwu lub z możliwością przesuwu. W odniesieniu do skręcania wyróżniamy 3 typy ograniczeń brzegowych:

- a) obroty płasko ograniczone: $\varphi=0$, $\varphi'=0$,
- b) obroty swobodnie ograniczone: $\varphi=0$, $\varphi' \neq 0$,
- c) ograniczenie deplanacji (sztywna przepona): $\varphi \neq 0$, $\varphi'=0$.

Kinematyczne (geometryczne) warunki brzegowe, dotyczą funkcji $u, v, v', w, w', \varphi, \varphi'$. Kinetyczne (siłowe) warunki brzegowe odnoszą się do 7 sił przekrojowych: $N, T_y, T_z, M_y, M_z, B, M_x^A$. Jeśli w otoczeniu przekroju podporowego nie występują obciążenia momentowe m_y, m_z , to wymienione siły przekrojowe są zdefiniowane następującymi wzorami (*por.* wzory (4.19, 4.31, 4.36, 4.38, 4.39,

4.45, 4.51):

$$N = \tilde{E} F u' ,$$

$$T_y = -(M_z^A)' - m_z^A = -M_z' - y_A N' - m_z - p_x y_A = -M_z' - m_z = -M_z' ,$$

$$T_z = (M_y^A)' + m_y^A = M_y' - z_A N' + m_y - p_x z_A = M_y' + m_y = M_y' ,$$

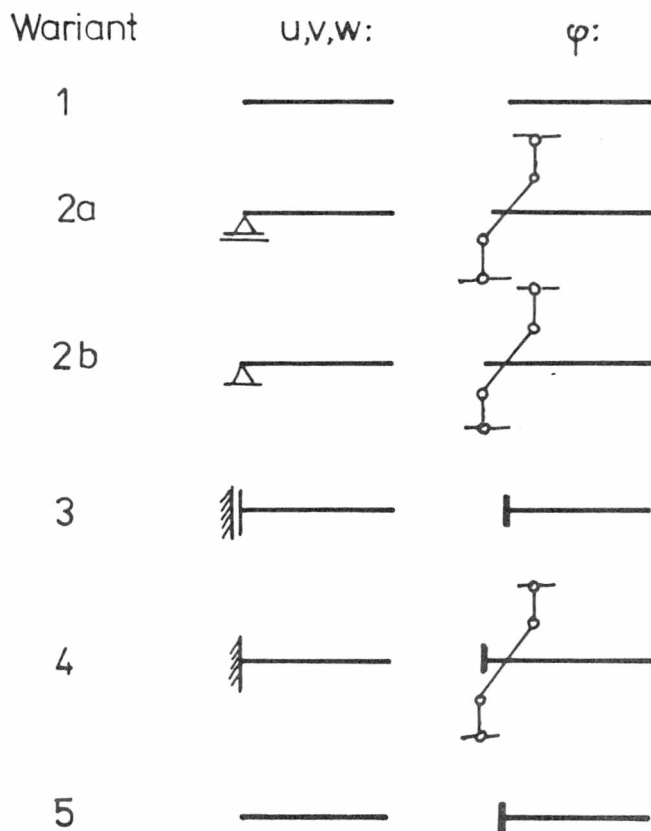
$$M_y = -\tilde{E} J_y w_A'' = -\tilde{E} J_y (w'' + y_A \varphi'') , \quad (4.59)$$

$$M_z = \tilde{E} J_z v_A'' = \tilde{E} J_z (v'' - z_A \varphi'') ,$$

$$M_x^A = -\tilde{E} J_\omega \varphi''' + G J_s \varphi' ,$$

$$B = -\tilde{E} J_\omega \varphi'' .$$

Kinetyczne warunki brzegowe odnoszą się zatem do funkcji u' , v'' , v''' , w'' , w''' , φ' , φ'' , φ''' i mają postać bardziej złożoną niż w przypadku pręta o przekroju zwartym. W metodzie Ritza wymagane jest spełnienie co najmniej kinematycznych warunków brzegowych. W metodzie Galerkina muszą być spełnione zarówno kinematyczne jak i kinetyczne warunki brzegowe, m.in. [25,26]. Podstawowe warianty warunków brzegowych pręta cienkościennego zilustrowano na rys. 4.13. Wariantom tym odpowiadają poniżej zestawione warunki geometryczne (WG) i siłowe (WS):



Rys. 4.13

wariant 1:

WG: -,

WS: $N=0, T_y=0, T_z=0, M_y=0, M_z=0, B=0, M_x^A = 0$,

wariant 2a:

WG: $v=0, w=0, \varphi=0$,

WS: $N=0, M_y=0, M_z=0, B=0$,

wariant 2b:

WG: $u=0, v=0, w=0, \varphi=0$,

(4.60)

WS: $M_y=0, M_z=0, B=0$,

wariant 3:

WG: $u=0, v'=0, w'=0, \varphi'=0$,

WS: $T_y=0, T_z=0, M_x^A = 0$,

wariant 4:

WG: $u=0, v=0, v'=0, w=0, w'=0, \varphi=0, \varphi'=0$,

WS: -,

wariant 5:

WG: $\varphi'=0$

WS: $N=0, T_y=0, T_z=0, M_y=0, M_z=0, B=0, M_x^A = 0$.

W wymienionych wariantach ograniczeń brzegowych zachodzą cztery niżej wymienione przypadki:

1) $(u=0) \cup (N=0)$,

2) $(v=0, v'=0) \cup (v=0, M_z=0) \cup (v'=0, T_y=0) \cup (M_z=0, T_y=0)$,

(4.61)

3) $(w=0, w'=0) \cup (w=0, M_y=0) \cup (w'=0, T_z=0) \cup (M_y=0, T_z=0)$,

4) $(\varphi=0, \varphi'=0) \cup (\varphi=0, B=0) \cup (\varphi'=0, M_x^A = 0) \cup (B=0, M_x^A = 0)$.

Symbolem $\cup$ oznaczono alternatywę. Przypadki (4.61) są wykorzystane w przekształceniu Galerkina, dokonywanym na różniczkowych równaniach równowagi pręta.

Sformułowanie równań równowagi według teorii drugiego rzędu

Duża statyczna siła osiowa N_0 wywołuje niepomijalne efekty zarówno w warunkach statycznych jak i dynamicznych. W pręcie nieodkształconym siła ta działa wzdłuż osi x i jest równoważna równomiernie rozłożonym naprężeniom normalnym $\sigma_0 = N_0 / F$, przenoszonym przez włókna podłużne materiału pręta. Przy zginaniu lub skręcaniu następuje pochylenie włókien podłużnych. W teorii drugiego rzędu odstępuje się częściowo od zasady zeszywnienia, zakładając, że naprężenia σ_0 działają wzdłuż pochylonych włókien. Implikuje to powstanie dodatkowych obciążeń poprzecznych p_y, p_z oraz momentów skręcających m_x^A .

Punktem wyjścia są równania równowagi (4.58), opisujące separowane stany giętne i skrętny w bazie przemieszczeń $v_A, w_A, \varphi_A = \varphi$. W teorii przemieszczeń małych stany te można rozpatrywać oddzielnie.

Rozważmy zginanie pręta w płaszczyźnie $x_a y_a$, opisane przez funkcję $v_A(x, t)$. W danym przekroju wszystkie włókna doznają takiego samego pochylenia v'_A , można zatem analizować wypadkową N_0 naprężeń σ_0 zamiast tych naprężeń (rys. 4.14a). Zmiana kierunku N_0 implikuje siłę poprzeczną i moment skręcający:

$$T_{y,0} = N_0 v'_A, \quad M_{x,0}^A = T_{y,0} z_A = N_0 z_A v'_A. \quad (4.62)$$

Są to dodatkowe obciążenia zewnętrzne na brzegu elementu dx . Odpowiadają im obciążenia drugiego rzędu na długości jednostkowej (rys. 4.14b):

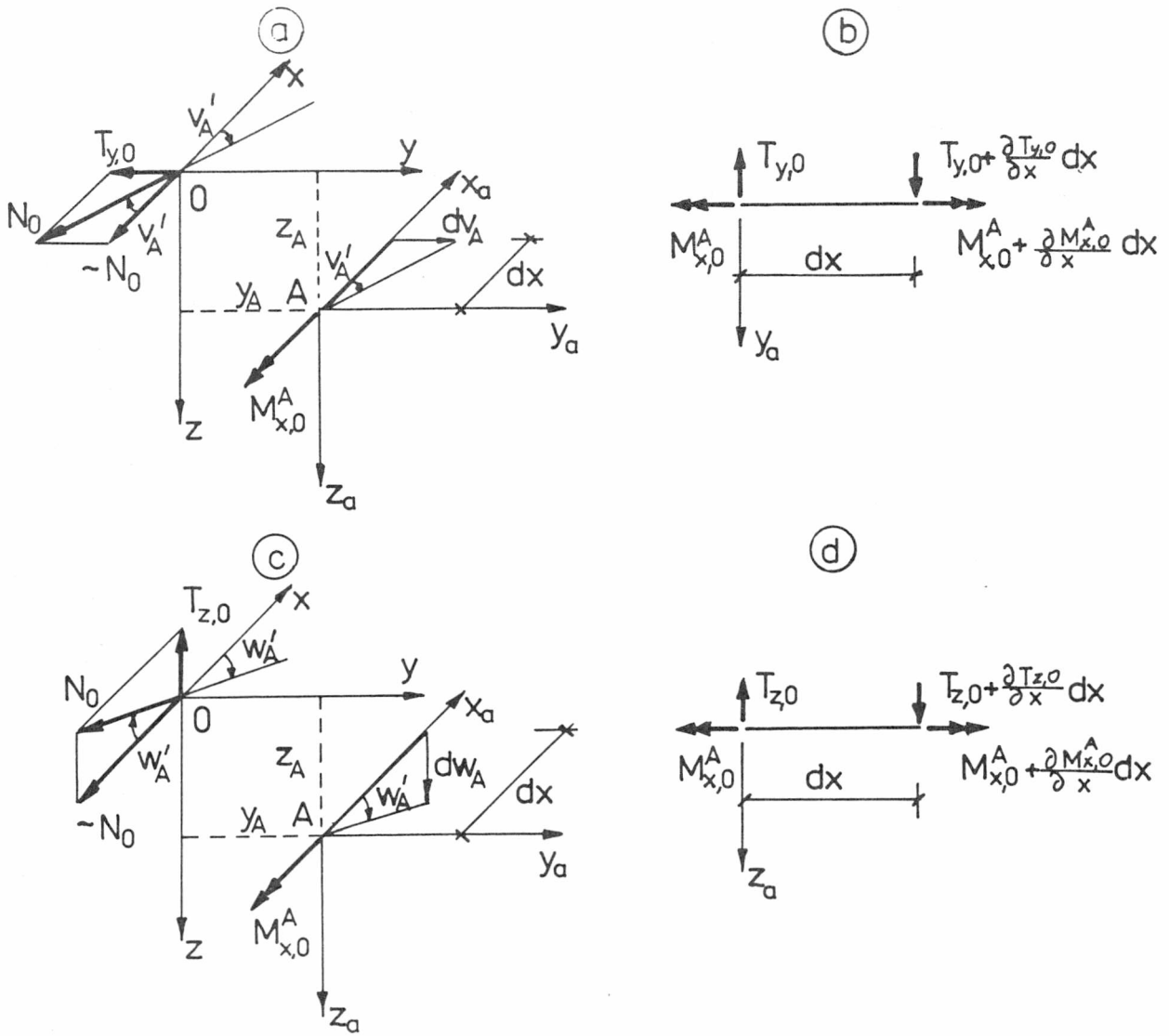
$$p_{y,0} = T'_{y,0} = N_0 v''_A, \quad m_{x,0}^A = (M_{x,0}^A)' = N_0 z_A v''_A. \quad (4.63)$$

Zginanie pręta w płaszczyźnie $x_a z_a$ jest opisane przez funkcję $w_A(x, t)$. Odpowiednia zmiana kierunku N_0 prowadzi do następujących obciążeń brzegowych elementu dx (rys. 4.14c):

$$T_{z,0} = N_0 w'_A, \quad M_{x,0}^A = -T_{z,0} y_A = -N_0 y_A w'_A, \quad (4.64)$$

a stąd obciążenie drugiego rzędu na jednostkę długości (rys. 4.14d)

$$p_{z,0} = T'_{z,0} = N_0 w''_A, \quad m_{x,0}^A = (M_{x,0}^A)' = -N_0 y_A w''_A. \quad (4.65)$$



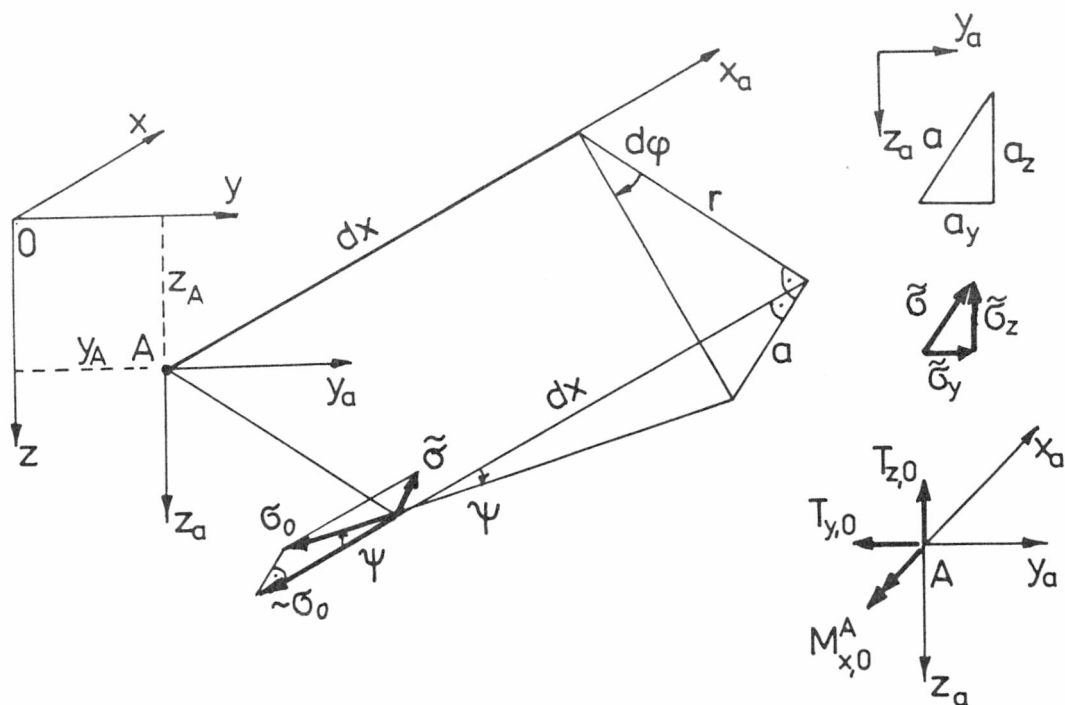
Rys. 4.14

Przy skręcaniu pręta wokół środka ścinania A następuje pochylenie włókien podłużnych prowadzące do pojawienia się składowej $\tilde{\sigma}$ naprężenia σ_0 w płaszczyźnie przekroju, rys. 4.15. Przyrost kąta skręcenia wynosi $d\varphi = \varphi' dx$, natomiast przyrost przemieszczenia punktu bieżącego $\tilde{M}$ w ramach teorii małych przemieszczeń jest równy

$$a = r d\varphi = r \varphi' dx = \psi dx. \quad (4.66)$$

Stąd $\psi = r \varphi'$. Odcinki a_y, a_z wynoszą

$$a_y = (z - z_A) d\varphi = (z - z_A) \varphi' dx, \quad a_z = (y - y_A) d\varphi = (y - y_A) \varphi' dx. \quad (4.67)$$



Rys. 4.15

Rzut naprężenia σ_0 na płaszczyznę przekroju o normalnej ujemnej wynosi

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 \psi = \sigma_0 r \varphi' , \quad (4.68)$$

a jego składowe

$$\tilde{\sigma}_y = \tilde{\sigma} \frac{a_y}{a} = \sigma_0 (z - z_A) \varphi' , \quad \tilde{\sigma}_z = \tilde{\sigma} \frac{a_z}{a} = \sigma_0 (y - y_A) \varphi' . \quad (4.69)$$

Moment skręcający równoważny naprężeniom $\tilde{\sigma}_y, \tilde{\sigma}_z$, wynosi

$$\begin{aligned} M_{x,0}^A &= \int_{(F)} \tilde{\sigma}_y (z - z_A) dF + \int_{(F)} \tilde{\sigma}_z (y - y_A) dF = \\ &= \sigma_0 \varphi' \left[\int_{(F)} (z - z_A)^2 dF + \int_{(F)} (y - y_A)^2 dF \right] = N_0 \rho_A^2 \varphi' , \end{aligned} \quad (4.70)$$

gdzie

$$\rho_A^2 = \rho_0^2 + y_A^2 + z_A^2, \quad \rho_0^2 = (J_y + J_z) / F . \quad (4.71)$$

Dodatkowe obciążenie momentowe skrętne, na długości jednostkowej określa wzór

$$m_{x,0}^A = \left(M_{x,0}^A \right)' = N_0 \rho_A^2 \varphi'' . \quad (4.72)$$

Siły poprzeczne w przekroju o normalnej ujemnej, równoważne naprężeniom $\tilde{\sigma}_y, \tilde{\sigma}_z$, wynoszą:

$$\begin{aligned} T_{y,0} &= - \int_{(F)} \tilde{\sigma}_y dF = -\sigma_0 \varphi' \int_{(F)} (z - z_A) dF = \sigma_0 \varphi' z_A F = N_0 z_A \varphi' , \\ T_{z,0} &= + \int_{(F)} \tilde{\sigma}_z dF = \sigma_0 \varphi' \int_{(F)} (y - y_A) dF = -\sigma_0 \varphi' y_A F = -N_0 y_A \varphi' , \end{aligned} \quad (4.73)$$

stąd dodatkowe obciążenia poprzeczne

$$p_{y,0} = T'_{y,0} = N_0 z_A \varphi'' , \quad p_{z,0} = T'_{z,0} = -N_0 y_A \varphi'' . \quad (4.74)$$

Na podstawie wzorów (4.63, 4.65, 4.72, 4.74) można obliczyć łączne dodatkowe obciążenia drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} p_{y,0} &= N_0 v_A'' + N_0 z_A \varphi'' = N_0 v'' , \\ p_{z,0} &= N_0 w_A'' - N_0 y_A \varphi'' = N_0 w'' , \\ m_{x,0}^A &= N_0 z_A v_A'' - N_0 y_A w_A'' + N_0 \rho_A^2 \varphi'' = \rho_0^2 N_0 \varphi'' + z_A N_0 v'' - y_A N_0 w'' . \end{aligned} \quad (4.75)$$

Uwzględnienie dodatkowych obciążeń (4.75) w równaniach (4.58) prowadzi do następującego układu równań równowagi statycznej pręta cienkościennego o przekroju otwartym, według teorii drugiego rzędu:

$$\left\{ \begin{aligned} -\tilde{E}F u'' &= p_x , \\ \tilde{E}J_z v_A^{IV} &= p_y + p_{y,0} - m_z' , \\ \tilde{E}J_y w_A^{IV} &= p_z + p_{z,0} + m_y' , \\ \tilde{E}J_\omega \varphi^{IV} - GJ_s \varphi'' &= m_x^A + m_{x,0}^A , \end{aligned} \right. \quad (4.76)$$

czyli

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tilde{E}F u'' = p_x, \\ \tilde{E}J_z v_A^{IV} - N_0 v'' = p_y - m'_z, \\ \tilde{E}J_y w_A^{IV} - N_0 w'' = p_z + m'_y, \\ \tilde{E}J_\omega \varphi^{IV} - \left(GJ_s + N_0 \rho_0^2 \right) \varphi'' - z_A N_0 v'' - y_A N_0 w'' = m'_x. \end{array} \right. \quad (4.77)$$

Po przejściu na przemieszczenia u, v, w, φ , zgodnie ze wzorami (4.19), otrzymuje się ostatecznie następujący układ równań równowagi, według teorii drugiego rzędu:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tilde{E}F u'' = p_x, \\ \tilde{E}J_z v^{IV} - z_A \tilde{E}J_z \varphi^{IV} - N_0 v'' = p_y - m'_z, \\ \tilde{E}J_y w^{IV} + y_A \tilde{E}J_y \varphi^{IV} - N_0 w'' = p_z + m'_y, \\ \tilde{E}J_\omega \varphi^{IV} - \left(GJ_s + \rho_0^2 N_0 \right) \varphi'' - z_A N_0 v'' + y_A N_0 w'' = m_x + z_A p_y - y_A p_z. \end{array} \right. \quad (4.78)$$

Wzory (4.78), po uwzględnieniu odpowiednich transformacji i uproszczeń, są zgodne z wzorami zawartymi w pracach [10,15,30], występują natomiast różnice w porównaniu z pracami [34,38].

4.2. Pręt o przekroju cienkościennym zamkniętym jednokomorowym

Zasadnicza różnica między prętami o profilu zamkniętym a prętami o profilu otwartym polega na tym, że sztywność na skręcanie swobodne pręta o profilu zamkniętym jest wielokrotnie większa od sztywności GJ_s pręta o odpowiednim profilu otwartym, otrzymanym po przecięciu profilu zamkniętego wzdłuż wybranej tworzącej. Celem rozważań jest syntetyczne wyprowadzenie wzorów opisujących stan przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia pręta pryzmatycznego o przekroju cienkościennym zamkniętym jednokomorowym oraz sformułowanie równań równowagi statycznej pręta, z uwzględnieniem stałej siły osiowej. Całość jest rozwinięciem lub uściśleniem teorii prętów cienkościennych o przekroju otwartym, zawartej w monografii [38].

Założenia

Przyjęto następujące założenia:

- 1) Pręt jest pryzmatyczny, o przekroju cienkościennym zamkniętym, jednokomorowym. Grubość ścianki $\delta(s)$ jest przedziałami stała.
- 2) Materiał pręta jest liniowo sprężysty, jednorodny i izotropowy, o parametrach E, ν .
- 3) Przemieszczenia są małe.
- 4) Po odkształceniu rzut konturu przekroju poprzecznego na płaszczyznę prostopadłą do osi pręta nie ulega zmianie (pierwsze założenie Vlasov'a).
- 5) Powierzchnia środkowa powłoki pręta ulega odkształceniu postaciowemu zgodnie z prawem Hooke'a: $\gamma = \tau / G$.
- 6) Prawo spaczenia przekroju zamkniętego przy skręcaniu swobodnym zachowuje swą postać przy skręcaniu nieswobodnym (założenie Umanski'ego).
- 7) Moment skręcający przy skręcaniu nieswobodnym $M_s(x)$ jest wolnozmienny względem x .

Oznaczenia

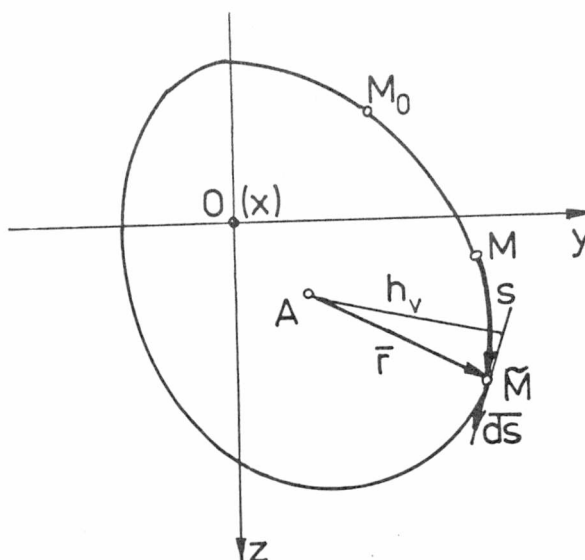
Wielkościami zdefiniowanymi analogicznie jak w przypadku przekroju o profilu otwartym są (rys. 4.16): $O, x, y, z, A, \bar{r}, s, \bar{ds}$. Ponadto w sformułowaniu problemu występują:

$\hat{\omega}$ - uogólniona współrzędna wycinkowa,

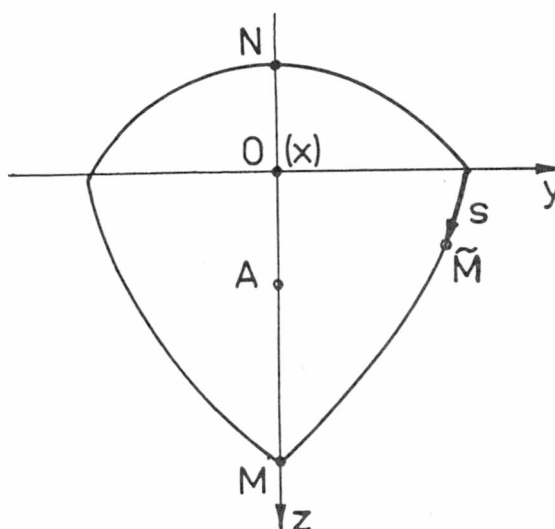
$M(y_M, z_M, 0)$ - główny punkt początkowy,

$\tilde{M}(y, z, \hat{\omega})$ - punkt bieżący na konturze zamkniętym.

W przypadku monosymetrii względem osi (z) punkty A i M leżą na osi (z) oraz $M = M(0, z_M, 0)$, rys. 4.17.



Rys. 4.16



Rys. 4.17

Definicja uogólnionej współrzędnej wycinkowej

Uogólnioną współrzędną wycinkową definiuje się następująco:

$$\hat{\omega}(s) = \omega(s) - \Omega s^*(s), \quad (4.79)$$

gdzie

$$\Omega = \oint_{(MM)} d\omega = \oint_{(s)} d\omega, \quad d\omega = h_v ds,$$

$$s^*(s) = \int_0^s \delta^{-1} ds \left(\oint_{(s)} \delta^{-1} ds \right)^{-1} = \int_0^s \delta^{-1} ds \left(\sum_{i=1}^{n_p} b_i / \delta_i \right)^{-1}. \quad (4.80)$$

We wzorach (4.80) oznaczono: Ω - podwójne pole ograniczone osią konturu poprzecznego, s^* - sprowadzona (zredukowana) współrzędna obwodowa. Wzór (4.79) wynika z analizy spaczenia przekroju o profilu zamkniętym przy czystym skręcaniu, co omówiono w dalszych rozważaniach.

Charakterystyki geometryczne przekroju cienkościennego

Oś konturu przekroju poprzecznego opisują funkcje $y(s)$, $z(s)$, a różniczkowe pole wynosi

$dF = \delta(s) ds$. Charakterystyki geometryczne przekroju cienkościennego zamkniętego opisują wzory:

$$\begin{aligned} F &= \oint_{(s)} \delta ds, & S_y &= \oint_{(s)} z \delta ds, & S_z &= \oint_{(s)} y \delta ds, \\ J_y &= \oint_{(s)} z^2 \delta ds, & J_z &= \oint_{(s)} y^2 \delta ds, & D_{yz} &= \oint_{(s)} yz \delta ds, \\ S_{\hat{\omega}} &= \oint_{(s)} \hat{\omega} \delta ds, & J_{\hat{\omega}} &= \oint_{(s)} \hat{\omega}^2 \delta ds, & D_{\hat{\omega}y} &= \oint_{(s)} \hat{\omega} z \delta ds, & D_{\hat{\omega}z} &= \oint_{(s)} \hat{\omega} y \delta ds. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Z założenia osie y , z są głównymi centralnymi osiami bezwładności, stąd $S_y = 0$, $S_z = 0$, $D_{yz} = 0$. Główny biegun wycinkowy A oraz główny punkt początkowy M wyznacza się z warunków $D_{\hat{\omega}y} = 0$, $D_{\hat{\omega}z} = 0$, $S_{\hat{\omega}} = 0$.

Wyznaczenie punktów charakterystycznych A i M

Charakterystyki $D_{\hat{\omega}y}$, $D_{\hat{\omega}z}$ nie zależą od wyboru początkowego punktu liczenia M . Obliczamy dodatkowo współrzędne wycinkowe ω_{M_o} , $\hat{\omega}_{M_o}$, odpowiadające biegunowi w punkcie M_o . Zachodzą związki (4.7) oraz

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \omega - \Omega \int_0^s \delta^{-1} ds \left(\oint_{(s)} \delta^{-1} ds \right)^{-1}, & d\hat{\omega} &= d\omega - \Omega \delta^{-1} ds \left(\oint_{(s)} \delta^{-1} ds \right)^{-1}, \\ d\hat{\omega}_{M_o} &= d\omega_{M_o} - \Omega \delta^{-1} ds \left(\oint_{(s)} \delta^{-1} ds \right)^{-1}, \\ d\hat{\omega} - d\hat{\omega}_{M_o} &= d\omega - d\omega_{M_o} = (y_M - y_A) dz - (z_M - z_A) dy = d(\hat{\omega} - \hat{\omega}_{M_o}), \\ \hat{\omega} &= \hat{\omega}_{M_o} + (y_{M_o} - y_A) z - (z_{M_o} - z_A) y + C. \end{aligned} \quad (4.82)$$

gdzie C jest stałą całkowania. Z warunków $D_{\hat{\omega}y} = 0$, $D_{\hat{\omega}z} = 0$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
D_{\hat{\omega}y} &= \oint_{(s)} \hat{\omega} z \delta ds = \oint_{(s)} [\hat{\omega}_{M_o} + (y_{M_o} - y_A)z - (z_{M_o} - z_A)y + C] z \delta ds = \\
&= D_{\hat{\omega}_{M_o}y} + (y_{M_o} - y_A)J_y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_A = y_{M_o} + D_{\hat{\omega}_{M_o}y}/J_y, \\
D_{\hat{\omega}z} &= \oint_{(s)} \hat{\omega} y \delta ds = \oint_{(s)} [\hat{\omega}_{M_o} + (y_{M_o} - y_A)z - (z_{M_o} - z_A)y + C] y \delta ds = \\
&= D_{\hat{\omega}_{M_o}y} - (z_{M_o} - z_A)J_z = 0 \quad \Rightarrow \quad z_A = z_{M_o} - D_{\hat{\omega}_{M_o}z}/J_z,
\end{aligned} \tag{4.83}$$

czyli wzory analogiczne do (4.9, 4.10). Położenie głównego punktu początkowego M wyznacza się z warunku:

$$S_{\hat{\omega}} = \oint_{(s)} \hat{\omega} \delta ds = \oint_{(s)} (\hat{\omega}_0 - \Delta\hat{\omega}) \delta ds = S_{\hat{\omega}_0} - \Delta\hat{\omega} F = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\hat{\omega} = S_{\hat{\omega}_0}/F, \tag{4.84}$$

gdzie

$$\hat{\omega}_0 = \hat{\omega} + \Delta\hat{\omega}, \quad \Delta\hat{\omega} = \int_{(M_oM)} d\omega - \Omega \int_{(M_oM)} \delta^{-1} ds \left(\oint_{(s)} \delta^{-1} ds \right)^{-1}. \tag{4.85}$$

Współrzędna $\hat{\omega}_0$ jest uogólnioną współrzędną wycinkową, odpowiadającą dowolnie obranemu początkowemu punktowi liczenia M_o (rys. 4.16). Związki (4.84, 4.85) pozwalają na wyznaczenie długości łuku M_oM , a stąd również położenie głównego punktu początkowego M .

W przypadku przekroju monosymetrycznego względem osi z (rys. 4.17) punkty A i M leżą na osi symetrii. Wartość $\hat{\omega}$ w punkcie N wynosi $\hat{\omega}(s_N) = \omega(s_N) - \Omega s^*(s_N) = -\frac{1}{2}\Omega - \Omega\frac{1}{2} = 0$. Wykres $\hat{\omega}(s)$ jest antysymetryczny względem osi z , stąd warunki $D_{\hat{\omega}y} = 0$, $S_{\hat{\omega}} = 0$ są spełnione tożsamościowo. Punkty M i N są zamienne.

W przypadku przekroju pierścieniowego lub przekroju w kształcie wielokąta foremnego i $\delta = \text{const}$ otrzymuje się $\hat{\omega} \equiv 0$ i spaczenia nie ma. Środek ścinania A pokrywa się wówczas ze środkiem sprężystości O .

Skrećanie swobodne

Skrećanie swobodne (czyste) występuje w pręcie mającym swobodę deplanacji, obciążonym stałym momentem skręcającym. Z badań doświadczalnych wynika, że pojawiają się wówczas naprężenia styczne, równomiernie rozłożone na grubości ścianki i równoległe do osi konturu (naprężenia Bredta).

Warunek równowagi elementu różniczkowego $dsdx$ ma postać, rys. 4.18:

$$\Sigma X = 0 : \quad \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} ds = 0 \quad \Rightarrow \quad d(\tau\delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau\delta = \text{const}. \tag{4.86}$$

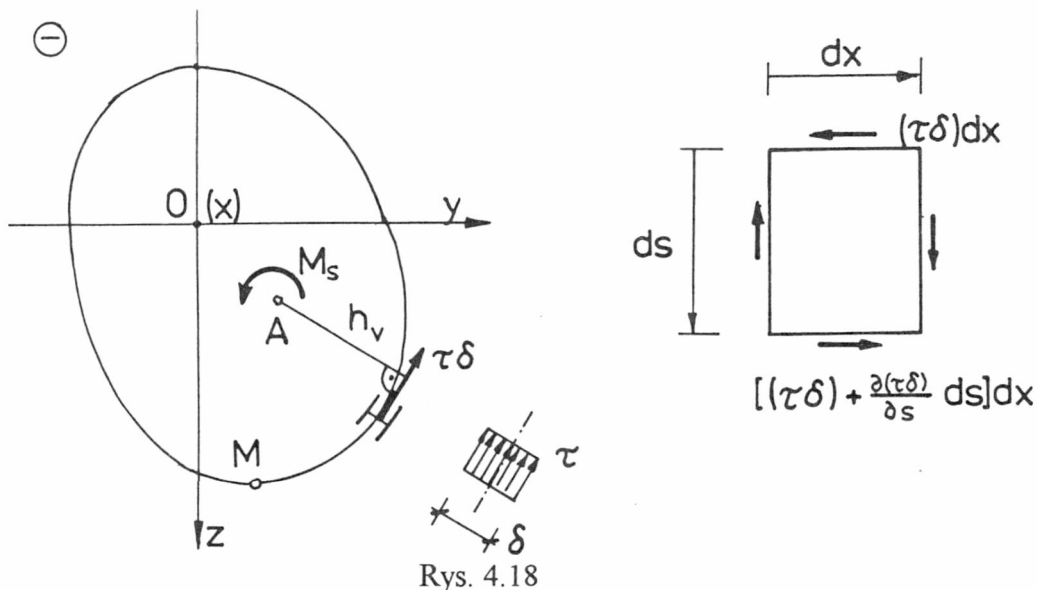
Obciążenia ścianki $\tau\delta$ nazywa się natężeniem lub strumieniem naprężeń stycznych i jest jednakowe na całym obwodzie. W przypadku profilu o grubości ścianki przedziałami stałej otrzymujemy $\tau\delta = \tau_i \delta_i = \text{const}$, $i=1,2,\dots,n_p$.

Warunek równoważności naprężeń i obciążenia ma postać

$$M_s = \oint_{(s)} (\tau\delta) h_v ds = \tau\delta \oint_{(s)} d\omega = \tau\delta \Omega, \quad (4.87)$$

stąd

$$\tau(s) = \frac{M_s}{\Omega \delta(s)}. \quad (4.88)$$



Rys. 4.18

Funkcje $u, \tilde{v}, \tilde{w}$ są rozumiane analogicznie jak w pręcie o profilu otwartym. Podczas czystego skręcania pręt o profilu zamkniętym doznaje tylko obrotu $\varphi(x, t)$ wokół osi x_a . Wówczas

$$v(x, s, t) = \varphi(x, t) h_v(s). \quad (4.89)$$

Zgodnie z założeniem 5 element różniczkowy powierzchni środkowej $dxds$ (rys. 4.8) doznaje odkształcenia postaciowego

$$\gamma = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = \frac{\tau}{G}, \quad (4.90)$$

a stąd, po uwzględnieniu (4.88, 4.89),

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} = \frac{M_s}{G\Omega\delta} - \varphi' h_v, \quad \tilde{u} = \int_0^s \left(\frac{M_s}{G\Omega\delta} - \varphi' h_v \right) ds + u_M = \frac{M_s}{G\Omega} \int_0^s \delta^{-1} ds - \varphi' \int_0^s d\omega + u_M. \quad (4.91)$$

Dla $s=s_{\max}$ otrzymuje się

$$u_M = \frac{M_s}{G\Omega} \oint_{(s)} \delta^{-1} ds - \varphi' \oint_{(s)} d\omega + u_M, \quad (4.92)$$

a stąd

$$\varphi' = \frac{M_s}{G\Omega^2} \oint_{(s)} \delta^{-1} ds = \frac{M_s}{GJ_s^*}, \quad M_s = GJ_s^* \varphi', \quad (4.93)$$

gdzie

$$J_s^* = \Omega^2 \left(\oint_{(s)} \delta^{-1} ds \right)^{-1} \quad (4.94)$$

jest sprowadzonym momentem bezwładności przy swobodnym skręcaniu. Po podstawieniu (4.93) do (4.91) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, s, t) &= \frac{GJ_s^* \varphi'}{G\Omega} \int_0^s \delta^{-1} ds - \varphi' \omega + u_M = \\ &= -\varphi' \left[\omega - \Omega \int_0^s \delta^{-1} ds \left(\oint_{(s)} \delta^{-1} ds \right)^{-1} \right] + u_M = \varphi'(x, t) \hat{\omega}(s) + u_M. \end{aligned} \quad (4.95)$$

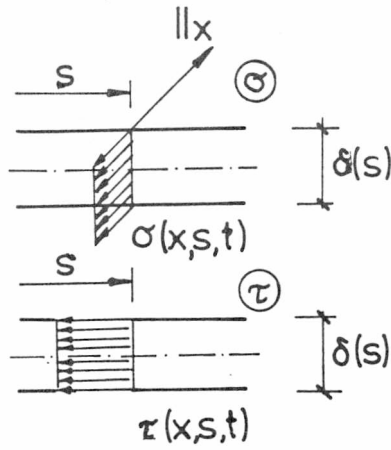
Wzór (4.95) opisuje prawo spaczenia przekroju cienkościennego o profilu zamkniętym jednokomorowym przy czystym skręcaniu.

Opis stanu przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia w pręcie

Ogólny opis stanu przemieszczenia pręta, poddanego m.in. skręcaniu nieswobodnemu, jest analogiczny jak w przypadku pręta o profilu otwartym. Stan przemieszczenia jest opisany wstępnie przez funkcje u_A, v_A, w_A, φ_A i finalnie przez u, v, w, φ . Obowiązują związki geometryczne (4.19). Zgodnie z założeniem 6 wzory (4.27, 4.28, 4.30₃) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, s, t) &= [u(x, t) - v_A' y - w_A' z] - \psi' \hat{\omega}, \\ \varepsilon(x, s, t) &= u' - v_A'' y - w_A'' z - \psi'' \hat{\omega}, \\ \sigma(x, s, t) &= \tilde{E} \varepsilon(x, s, t) = \tilde{E} (u' - v_A'' y - w_A'' z - \psi'' \hat{\omega}). \end{aligned} \quad (4.96)$$

gdzie $\psi(x, t)$ jest funkcją opisującą spaczenie przekroju przy nieswobodnym skręcaniu. Związek $\psi(x, t)$ z $\varphi(x, t)$ zostanie określony w dalszych rozważaniach. Rozkłady naprężeń w przekroju o normalnej ujemnej pokazano na rys. 4.19, gdzie $\tau(x, s, t)$ jest naprężeniem stycznym występującym przy nieswobodnym skręcaniu i zginaniu.



Rys. 4.19

Warunki równowagi elementu różniczkowego dx oraz definicje sił przekrojowych

Całość rozważań na ten temat, zawartych w punkcie 4.1, zachowuje ważność z tym, że bimoment odpowiadający profilowi zamkniętemu jest określony wzorem

$$\hat{B}(x, t) = \oint_{(F)} \sigma(x, s, t) \hat{\omega} dF = -\tilde{E} J_{\hat{\omega}} \psi'' , \quad (4.97)$$

natomiast wzór (4.41) przybiera postać

$$\sigma(x, s, t) = \left(\frac{N}{F} - \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y} \right) + \frac{\hat{B} \hat{\omega}}{J_{\hat{\omega}}} . \quad (4.98)$$

Wyznaczenie naprężeń stycznych przy nieswobodnym skręcaniu

Pomijamy zrównoważone obciążenia osiowe, tj. składnik N/F w $\sigma(x, s, t)$ i obciążenie $p_x(x, t)$, nie biorące udziału w kształtowaniu $\tau(x, s, t)$. Równowagę elementu $dx ds$ rozpatrujemy dla strumieni naprężeń normalnych i stycznych. Warunek równowagi elementu $dx ds$, rys.4.20, ma postać:

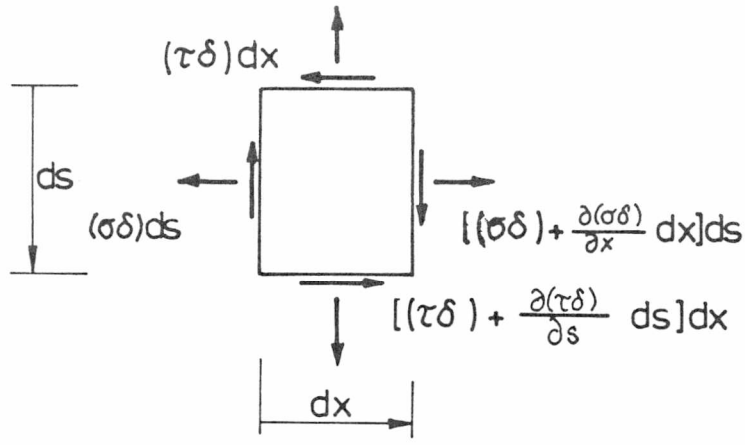
$$\Sigma X = 0 : \quad \frac{\partial(\sigma \delta)}{\partial x} dx ds + \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} ds dx = 0 , \quad (4.99)$$

czyli

$$\frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} = -\frac{\partial(\sigma \delta)}{\partial x} = \frac{\partial M_z}{\partial x} \frac{y \delta}{J_z} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{z \delta}{J_y} - \frac{\partial \hat{B}}{\partial x} \frac{\hat{\omega} \delta}{J_{\hat{\omega}}} = -\left(\frac{Q_y y \delta}{J_z} + \frac{Q_z z \delta}{J_y} + \frac{M_{\hat{\omega}} \hat{\omega} \delta}{J_{\hat{\omega}}} \right), \quad (4.100)$$

przy czym

$$M_{\hat{\omega}} = \hat{B}' = -\tilde{E} J_{\hat{\omega}} \psi''' . \quad (4.101)$$



Rys. 4.20

Całkując równanie (4.100), otrzymuje się:

$$\tau(x, s, t) \delta(s) = \int_0^s \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} ds + C = - \left(\frac{Q_y \tilde{S}_z}{J_z} + \frac{Q_z \tilde{S}_y}{J_y} + \frac{M_{\dot{\omega}} \tilde{S}_{\dot{\omega}}}{J_{\dot{\omega}}} \right) + C, \quad (4.102)$$

gdzie

$$\tilde{S}_y(s) = \int_0^s z \delta ds, \quad \tilde{S}_z(s) = \int_0^s y \delta ds, \quad \tilde{S}_{\dot{\omega}}(s) = \int_0^s \hat{\omega} \delta ds \quad (4.103)$$

są momentami statycznymi części przekroju. Stałą C obliczamy z warunku równoważności obciążenia i naprężeń:

$$M_s = \oint_{(s)} \tau \delta h_v ds = - \left(\frac{Q_y}{J_z} \oint_{(s)} \tilde{S}_z h_v ds + \frac{Q_z}{J_y} \oint_{(s)} \tilde{S}_y h_v ds + \frac{M_{\dot{\omega}}}{J_{\dot{\omega}}} \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}} h_v ds \right) + C \Omega, \quad (4.104)$$

$$C = \frac{M_s}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \left(\frac{Q_y}{J_z} \oint_{(s)} \tilde{S}_z h_v ds + \frac{Q_z}{J_y} \oint_{(s)} \tilde{S}_y h_v ds + \frac{M_{\dot{\omega}}}{J_{\dot{\omega}}} \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}} h_v ds \right).$$

Po podstawieniu (4.104)₂ do (4.102) i podzieleniu przez $\delta(s)$ (grubość ścianki w miejscu obliczanych naprężeń stycznych), otrzymuje się

$$\tau(x, s, t) = \frac{M_s}{\Omega \delta} - \left(\frac{Q_y \tilde{S}_z^*}{J_z \delta} + \frac{Q_z \tilde{S}_y^*}{J_y \delta} + \frac{M_{\dot{\omega}} \tilde{S}_{\dot{\omega}}^*}{J_{\dot{\omega}} \delta} \right), \quad (4.105)$$

gdzie

$$\tilde{S}_y^*(s) = \tilde{S}_y(s) - \frac{1}{\Omega} \oint_{(s)} \tilde{S}_y h_v ds ,$$

$$\tilde{S}_z^*(s) = \tilde{S}_z(s) - \frac{1}{\Omega} \oint_{(s)} \tilde{S}_z h_v ds , \quad (4.106)$$

$$\tilde{S}_{\dot{\omega}}^*(s) = \tilde{S}_{\dot{\omega}}(s) - \frac{1}{\Omega} \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}} h_v ds$$

są zredukowanymi momentami statycznymi. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}}^* h_v ds &= \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}} h_v ds - \frac{1}{\Omega} \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}} h_v ds \oint_{(s)} h_v ds \equiv 0 , \\ \oint_{(s)} \frac{M_{\dot{\omega}} \tilde{S}_{\dot{\omega}}^*}{J_{\dot{\omega}}} h_v ds &= \frac{M_{\dot{\omega}}}{J_{\dot{\omega}}} \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}}^* h_v ds = 0 , \end{aligned} \quad (4.107)$$

a więc $M_{\dot{\omega}}$ nie jest momentem skręcającym (w profilach otwartych $M_{\dot{\omega}}$ jest momentem skręcającym). Momentowi $M_{\dot{\omega}}$ odpowiada samozrównoważony układ naprężeń stycznych. Moment skręcający przy skręcaniu nieswobodnym jest w całości przeniesiony przez naprężenia styczne od czystego skręcania $M_s/\Omega\delta$.

Obliczenie momentu skręcającego $M_x^A = M_s$

Przy nieswobodnym skręcaniu wokół osi x_a , przechodzącej przez środek ścinania A , pojawiają się naprężenia styczne, które zgodnie z (4.101, 4.105) wynoszą:

$$\tau(x, s, t) = \frac{M_s}{\Omega\delta} - \frac{M_{\dot{\omega}} \tilde{S}_{\dot{\omega}}^*}{J_{\dot{\omega}}\delta} = \frac{M_s}{\Omega\delta} - \frac{\tilde{E}}{\delta} \psi''' \tilde{S}_{\dot{\omega}}^* . \quad (4.108)$$

Zgodnie z założeniem 5 jest

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = \frac{\tau}{G} , \quad (4.109)$$

gdzie

$$v = \varphi h_v , \quad \tilde{v}' = \varphi' h_v . \quad (4.110)$$

Po podstawieniu wzorów (4.108, 4.110) do relacji (4.109) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} &= \frac{M_s}{G\Omega\delta} + \frac{\tilde{E}}{G} \psi''' \frac{\tilde{S}_{\dot{\omega}}^*}{\delta} - \varphi' h_v , \\ \tilde{u}(x, s, t) &= \int_0^s \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} ds + u_0 = \frac{M_s}{G\Omega} \int_0^s \delta^{-1} ds + \frac{\tilde{E}}{G} \psi''' \int_0^s \delta^{-1} \tilde{S}_{\dot{\omega}}^* ds - \varphi' \int_0^s h_v ds + u_0 . \end{aligned} \quad (4.111)$$

Dla $s=s_{\max}$ otrzymuje się:

$$u_0 = \frac{M_s}{G\Omega} \oint_{(s)} \delta^{-1} ds + \frac{\tilde{E}}{G} \psi''' \oint_{(s)} \delta^{-1} \tilde{S}_{\dot{\omega}}^* ds - \varphi' \oint_{(s)} h_v ds + u_0 , \quad (4.112)$$

a stąd

$$M_s = -\tilde{E} \psi''' \Omega \oint_{(s)} \delta^{-1} \tilde{S}_{\dot{\omega}}^* ds \left(\oint_{(s)} \delta^{-1} ds \right)^{-1} + G \varphi' \Omega^2 \left(\oint_{(s)} \delta^{-1} ds \right)^{-1} . \quad (4.113)$$

Obliczmy całkę

$$U = \oint_{(s)} \delta^{-1} \tilde{S}_{\dot{\omega}}^* ds , \quad (4.114)$$

przy uwzględnieniu zależności równoważnej definicji (4.80):

$$\hat{\omega} = \omega - \Omega \tilde{S}/s_0 , \quad \tilde{S} = \int_0^s \delta^{-1} ds , \quad s_0 = \oint_{(s)} \delta^{-1} ds . \quad (4.115)$$

Całkując (4.111) przez części, otrzymuje się

$$\begin{aligned} U &= \oint_{(s)} \left(\tilde{S}_{\dot{\omega}} - \frac{1}{\Omega} \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}} d\omega \right) \frac{1}{\delta} ds = \oint_{(s)} \int_0^s \hat{\omega} dF \frac{1}{\delta} ds - \frac{1}{\Omega} \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}} d\omega \oint_{(s)} \frac{1}{\delta} ds = \\ &= \int_0^s \hat{\omega} dF \int_0^s \frac{1}{\delta} ds \Big|_0^{s_{\max}} - \oint_{(s)} \int_0^s \frac{1}{\delta} ds \hat{\omega} dF - \frac{s_0}{\Omega} \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}} d\omega = \\ &= - \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}} \hat{\omega} dF - \frac{s_0}{\Omega} \left(\tilde{S}_{\dot{\omega}} \omega \Big|_0^{s_{\max}} - \oint_{(s)} \omega d\tilde{S}_{\dot{\omega}} \right) = - \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}} \hat{\omega} dF + \frac{s_0}{\Omega} \oint_{(s)} \omega \hat{\omega} dF = \\ &= - \oint_{(s)} \tilde{S}_{\dot{\omega}} \hat{\omega} dF + \frac{s_0}{\Omega} \oint_{(s)} (\hat{\omega} + \Omega \frac{\tilde{S}}{s_0}) \hat{\omega} dF = \frac{s_0}{\Omega} \oint_{(s)} \hat{\omega}^2 dF = \frac{s_0}{\Omega} J_{\hat{\omega}} . \end{aligned} \quad (4.116)$$

Po podstawieniu (4.116) do (4.113), otrzymuje się

$$M_s = -\tilde{E} J_{\hat{\omega}} \psi''' + G J_s^* \varphi' = M_s^A . \quad (4.117)$$

Związek między funkcjami φ , ψ wyznacza się z warunku równoważności obciążenia i naprężeń

$$M_s = \oint_{(s)} \tau \delta h_v ds = \oint_{(s)} \tau h_v dF , \quad (4.118)$$

przy uwzględnieniu zależności (4.79, 4.110, 4.115) oraz

$$\tau = G \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right), \quad \tilde{u} = u_o - \psi' \hat{\omega}, \quad (4.119)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} = -\psi' \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial s} = -\psi' \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} - \Omega \frac{\partial s^*}{\partial s} \right) = -\psi' \left(h_v - \Omega \frac{\delta^{-1}}{s_0} \right) = \frac{\Omega}{s_0} \psi' \delta^{-1} - h_v \psi'.$$

Wstawiając (4.110, 4.119) do (4.118), otrzymuje się ($dF = \delta ds$)

$$M_s = G \int_{(s)} \left(\frac{\Omega}{s_0} \psi' \delta^{-1} - h_v \psi' + h_v \phi' \right) h_v dF =$$

$$= G \check{J}_s (\phi' - \psi') + G \left(\frac{\Omega}{s_0} \int_{(s)} h_v ds \right) \psi' = G \check{J}_s (\phi' - \psi') + G J_s^* \psi', \quad (4.120)$$

gdzie

$$\check{J}_s = \int_{(s)} h_v^2 dF. \quad (4.121)$$

Wzór (4.120) można przekształcić do postaci

$$\phi' - \eta \psi' = \frac{M_s}{G \check{J}_s}, \quad (4.122)$$

przy czym

$$\eta = 1 - J_s^* / \check{J}_s \quad (4.123)$$

jest tzw. współczynnikiem spaczenia. Jeśli funkcja $M_s(x, t)$ jest wolnozmienna względem x , to

$$\psi'' \approx \eta^{-1} \phi'', \quad \psi''' \approx \eta^{-1} \phi''' . \quad (4.124)$$

Podstawiając przybliżone wzory (4.124) do wzorów (4.97) i (4.117), otrzymuje się

$$\hat{B}(x, t) \approx -\eta^{-1} \tilde{E} J_{\hat{\omega}} \phi'', \quad M_x^A \approx -\eta^{-1} \tilde{E} J_{\hat{\omega}} \phi''' + G J_s^* \phi'. \quad (4.125)$$

Różniczkowe równania równowagi statycznej pręta

Równania równowagi statycznej pręta cienkościennego o profilu zamkniętym jednokomorowym mają postać analogiczną do równań (4.57). Trzy równania są identyczne, natomiast w równaniu (4.57)₄ zmianie ulegają współczynniki opisujące skręcanie:

$$\eta^{-1} \tilde{E} J_{\hat{\omega}} \phi^{IV} - G J_s^* \phi'' = m_x + z_A p_y - y_A p_z. \quad (4.126)$$

Wpływ siły osiowej $N_0 = \text{const}$

Obciążenia drugiego rzędu $p_{y,0}$, $p_{z,0}$, $m_{x,0}^A$, wyprowadzone dla pręta o profilu otwartym, zachowują ważność dla pręta o profilu zamkniętym. Zauważmy, że wzory (4.72) nie zależą od tego, czy przekrój pręta jest otwarty, czy zamknięty. Wynika stąd, że wzory (4.75)_{1,3} nie ulegają zmianie, natomiast ostatnie równanie z tej grupy przyjmuje następującą postać dla pręta o profilu zamkniętym jednokomorowym:

$$\left(\tilde{E}J_{\omega}/\eta\right)\psi^{IV} - \left(GJ_s^* + \rho_0^2 N_0\right)\varphi'' - z_A N_0 v'' + y_A N_0 w'' = m_x + z_A p_y - y_A p_z. \quad (4.127)$$

Odmienny pogląd jest prezentowany w monografii [38]. Rutecki wychodzi z zależności (4.119), ale odstępkuje od założenia $M_s' \approx 0$, przyjmowanego w teorii pierwszego rzędu. W teorii drugiego rzędu uwzględnia jeden ze składników $M_{x,0}^A$, pisząc

$$M_s = \rho_0^2 N_0 \varphi', \quad (4.128)$$

pomija natomiast moment pierwszego rzędu, określony wzorem (4.117). Wówczas

$$\psi^{IV} = \left(\varphi^{IV} - \frac{M_s'''}{GJ_s}\right)/\eta, \quad M_s''' = \rho_0^2 N_0 \varphi^{IV}, \quad (4.129)$$

co przekształca równanie równowagi pręta

$$\tilde{E}J_{\omega}\psi^{IV} - GJ_s^*\varphi'' = m_x + m_{x,0}^A + z_A p_y - y_A p_z, \quad (4.130)$$

do postaci podanej przez Ruteckiego [38]

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{E}J_{\omega}/\eta - \kappa_s \rho_0^2 N_0\right)\varphi^{IV} - \left(GJ_s^* + N_0 \rho_0^2\right)\varphi'' - z_A N_0 v'' + y_A N_0 w'' = \\ &= m_x + z_A p_y - y_A p_z, \end{aligned} \quad (4.131)$$

gdzie

$$\kappa_s = \tilde{E}J_{\omega}/\left(\eta GJ_s^*\right). \quad (4.131)$$

Składnik zawierający κ_s nie ma interpretacji fizycznej w świetle założenia 7. Składnik ten uniemożliwia wykonanie na równaniu (4.131) przekształcenia Galerkina. Zdaniem autora rozprawy poprawne jest równanie (4.127).

4.3. Formuły energetyczne dla prętów cienkościennych

Formułę całkową na energię potencjalną sprężystego odkształcenia pręta cienkościennego w przestrzeni wyprowadzimy metodą Galerkina, w sposób analogiczny do pokazanego w pracach [25, 26].

Rozpatrujemy pryzmatyczny pręt cienkościenny o długości $l=l_e$, stałych sprężystości E , ν oraz charakterystykach geometrycznych wymienionych w punktach 4.1, 4.2. W przekroju brzegowym mogą występować podpory modelowane przez więzi niepodatne (reakcje nie wykonują pracy). Przekrój brzegowy może również wynikać z myślowego przecięcia układu prętowego w wybranym miejscu. Wówczas łączna praca ujawnionych sił przekrojowych w sąsiednich przekrojach jest równa zeru, co dla wybranych sił przekrojowych zilustrowano na rys. 4.21. Spełnione są zatem warunki równoważności metod Ritza i Galerkina [26].

Różniczkowe równania równowagi statycznej prętów cienkościennych o profilu otwartym lub zamkniętym jednokomorowym wyprowadzono w punktach 4.1, 4.2, z uwzględnieniem wpływu stałych sił osiowych (teoria drugiego rzędu). Równania te można przepisać łącznie w postaci:

$$\begin{cases} r_x = p_x, \\ r_y = p_y - m'_z, \\ r_z = p_z + m'_y, \\ r_\varphi = m_x + z_A p_y - y_A p_z, \end{cases} \quad (4.133)$$

gdzie

$$\begin{aligned} r_x &= -\tilde{E}F u'', \\ r_y &= \tilde{E}J_z (v^{IV} - z_A \varphi^{IV}) - N_0 v'', \\ r_z &= \tilde{E}J_y (w^{IV} + y_A \varphi^{IV}) - N_0 w'', \\ r_\varphi &= H_\omega \varphi^{IV} - \left(H_s + \rho_0^2 N_0 \right) \varphi'' - z_A N_0 v'' + y_A N_0 w'', \end{aligned} \quad (4.134)$$

przy czym:

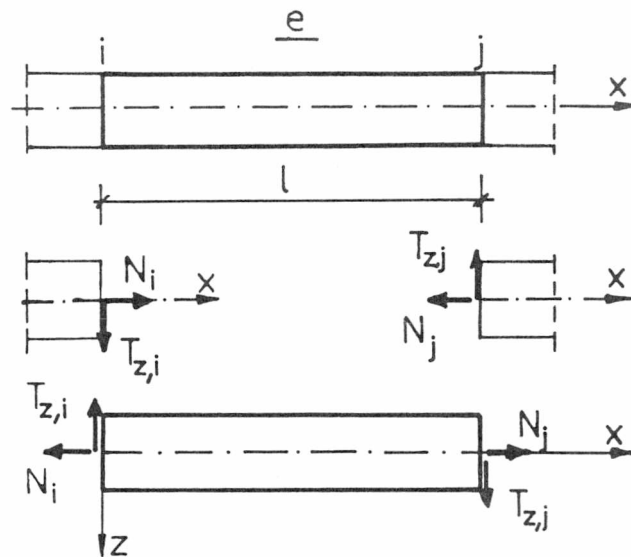
a) profil otwarty:

$$H_\omega = \tilde{E}J_\omega, \quad H_s = GJ_s, \quad (4.135)$$

b) profil zamknięty jednokomorowy:

$$H_\omega = \tilde{E}J_\omega / \eta, \quad H_s = GJ_s^*. \quad (4.136)$$

Wielkości r_x, r_y, r_z, r_φ są uogólnionymi reakcjami sprężystymi pręta.



Rys. 4.21

We wzorach (4.135, 4.136) występują wielkości zdefiniowane następującymi wzorami:

$$\tilde{E} = E/(1 - \nu^2), \quad J_\omega = \int_{(s)} \omega^2 \delta ds, \quad J_s = \lambda \sum_{i=1}^{n_p} b_i \delta_i^3 / 3, \quad J_{\hat{\omega}} = \oint_{(s)} \hat{\omega}^2 \delta ds,$$

$$\hat{\omega} = \omega - \Omega \tilde{s}/s_0, \quad \omega = \int_0^s d\omega, \quad \Omega = \oint_{(s)} d\omega, \quad \tilde{s} = \int_0^s \delta^{-1} ds, \quad s_0 = \oint_{(s)} \delta^{-1} ds = \sum_{i=1}^{n_p} b_i / \delta_i, \quad (4.137)$$

$$\eta = 1 - J_s^* / \check{J}_s, \quad J_s^* = \Omega^2 / s_0, \quad \check{J}_s = \oint_0^s h_v^2 \delta ds, \quad h_v = \frac{d\omega}{ds}.$$

Siły przekrojowe N, T_y, T_z, M_y, M_z są zdefiniowane wzorami (4.59) zarówno dla prętów o profilu otwartym, jak i zamkniętym, natomiast

$$M_x^A = -H_\omega \varphi''' + H_s \varphi', \quad B = -H_\omega \varphi''. \quad (4.138)$$

Siły przekrojowe drugiego rzędu wynoszą (por. wzory (4.72)):

$$T_{y,0} = N_0 \nu', \quad T_{z,0} = N_0 w', \quad M_{x,0}^A = \rho_0^2 N_0 \varphi' + z_A N_0 \nu' - y_A N_0 w'. \quad (4.139)$$

Energia potencjalna pręta jest równa pracy uogólnionych reakcji sprężystych:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l (r_x u + r_y v + r_z w + r_\varphi \varphi) dx. \quad (4.140)$$

Stosując całkowanie przez części względem kolejnych całek we wzorze (4.139), otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^l r_x u \, dx = -\tilde{E}F \int_0^l u'' u \, dx = -\tilde{E}F \left(u' u \Big|_0^l - \int_0^l u'^2 \, dx \right) = \\
&= -Nu \Big|_0^l + \tilde{E}F \int_0^l u'^2 \, dx = \tilde{E}F \int_0^l u'^2 \, dx, \\
I_2 &= \int_0^l r_y v \, dx = \tilde{E}J_z \int_0^l (v^{IV} - z_A \varphi^{IV}) v \, dx - N_0 \int_0^l v'' v \, dx = \\
&= \tilde{E}J_z \left[(v''' - z_A \varphi''') v \Big|_0^l - \int_0^l (v''' - z_A \varphi''') v' \, dx \right] - N_0 \left(v' v \Big|_0^l - \int_0^l v'^2 \, dx \right) = \\
&= -T_y v \Big|_0^l - \tilde{E}J_z \left[(v'' - z_A \varphi'') v' \Big|_0^l - \int_0^l (v'' - z_A \varphi'') v'' \, dx \right] - T_{y,0} v \Big|_0^l + N_0 \int_0^l v'^2 \, dx = \\
&= -M_z v' \Big|_0^l + \tilde{E}J_z \int_0^l (v''^2 - z_A \varphi'' v'') \, dx + N_0 \int_0^l v'^2 \, dx = \\
&= \tilde{E}J_z \int_0^l v''^2 \, dx - z_A \tilde{E}J_z \int_0^l \varphi'' v'' \, dx + N_0 \int_0^l v'^2 \, dx, \\
&\hspace{25em} (4.141) \\
I_3 &= \int_0^l r_z w \, dx = \tilde{E}J_y \int_0^l (w^{IV} + y_A \varphi^{IV}) w \, dx - N_0 \int_0^l w'' w \, dx = \\
&= \tilde{E}J_y \left[(w''' + y_A \varphi''') w \Big|_0^l - \int_0^l (w''' + y_A \varphi''') w' \, dx \right] - N_0 \left(w' w \Big|_0^l - \int_0^l w'^2 \, dx \right) = \\
&= -T_z w \Big|_0^l - \tilde{E}J_y \left[(w'' + y_A \varphi'') w' \Big|_0^l - \int_0^l (w'' + y_A \varphi'') w'' \, dx \right] - T_{z,0} w \Big|_0^l + N_0 \int_0^l w'^2 \, dx = \\
&= M_y w' \Big|_0^l + \tilde{E}J_y \int_0^l (w''^2 + y_A \varphi'' w'') \, dx + N_0 \int_0^l w'^2 \, dx = \\
&= \tilde{E}J_y \int_0^l w''^2 \, dx + y_A \tilde{E}J_y \int_0^l \varphi'' w'' \, dx + N_0 \int_0^l w'^2 \, dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^l r_\varphi \varphi \, dx = H_\omega \int_0^l \varphi^{IV} \varphi \, dx - H_s \int_0^l \varphi'' \varphi \, dx - N_0 \int_0^l \left(\rho_0^2 \varphi'' + z_A v'' - y_A w'' \right) \varphi \, dx = \\
&= H_\omega \left(\varphi''' \varphi |_0^l - \int_0^l \varphi''' \varphi' \, dx \right) - H_s \left(\varphi' \varphi |_0^l - \int_0^l \varphi'^2 \, dx \right) + \\
&- N_0 \left[\left(\rho_0^2 \varphi' + z_A v' - y_A w' \right) \varphi |_0^l - \int_0^l \left(\rho_0^2 \varphi' + z_A v' - y_A w' \right) \varphi' \, dx \right] = \\
&= -M_{x,0}^A \varphi |_0^l - H_\omega \left(\varphi'' \varphi' |_0^l - \int_0^l \varphi''^2 \, dx \right) + H_s \int_0^l \varphi'^2 \, dx - M_{x,0}^A \varphi |_0^l + \\
&+ N_0 \int_0^l \left(\rho_0^2 \varphi'^2 + z_A v' \varphi' - y_A w' \varphi' \right) \, dx = B \varphi' |_0^l + H_\omega \int_0^l \varphi''^2 \, dx + \\
&+ H_s \int_0^l \varphi'^2 \, dx + \rho_0^2 N_0 \int_0^l \varphi'^2 \, dx + z_A N_0 \int_0^l v' \varphi' \, dx - y_A N_0 \int_0^l w' \varphi' \, dx = \\
&= H_\omega \int_0^l \varphi''^2 \, dx + \left(H_s + \rho_0^2 N_0 \right) \int_0^l \varphi'^2 \, dx + z_A N_0 \int_0^l v' \varphi' \, dx - y_A N_0 \int_0^l w' \varphi' \, dx .
\end{aligned} \tag{4.141}$$

Po wstawieniu wzorów (4.141) do formuły (4.140), otrzymuje się następujący wzór:

$$\begin{aligned}
E_p &= \frac{1}{2} \left[\tilde{E} F \int_0^l u'^2 \, dx + \tilde{E} J_z \int_0^l v''^2 \, dx - \frac{1}{2} z_A \tilde{E} J_z \left(\int_0^l v'' \varphi'' \, dx + \int_0^l \varphi'' v'' \, dx \right) + \right. \\
&+ \tilde{E} J_y \int_0^l w''^2 \, dx + \frac{1}{2} y_A \tilde{E} J_y \left(\int_0^l w'' \varphi'' \, dx + \int_0^l \varphi'' w'' \, dx \right) + H_\omega \int_0^l \varphi''^2 \, dx + \\
&+ H_s \int_0^l \varphi'^2 \, dx \left. \right] + \frac{1}{2} N_0 \left[\int_0^l v'^2 \, dx + \int_0^l w'^2 \, dx + \rho_0^2 \int_0^l \varphi'^2 \, dx + \right. \\
&+ \frac{1}{2} z_A \int_0^l (v' \varphi' + \varphi' v') \, dx - \frac{1}{2} y_A \int_0^l (w' \varphi' + \varphi' w') \, dx \left. \right] .
\end{aligned} \tag{4.142}$$

We wzorze (4.142) dokonano symetryzacji formy kwadratowej definiującej E_p . Kolejne składniki odwzorowują energię potencjalną wynikającą z: rozciągania/ściskania, zginania w dwóch płaszczyznach, skręcania z uwzględnieniem deplanacji oraz wpływu statycznej siły osiowej.

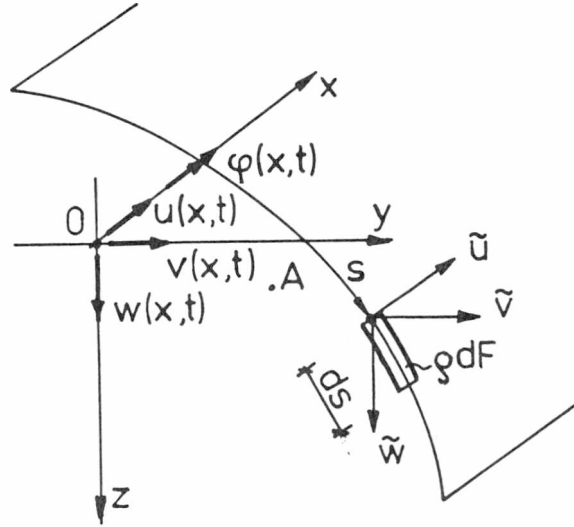
Stan przemieszczenia różniczkowego elementu masowego

$$dm = \rho \, dF \, dx = \rho \, \delta \, ds \, dx \tag{4.143}$$

pręta cienkościennego o profilu otwartym opisują funkcje (rys. 4.22)

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x, s, t) &= u - v'_A y - w'_A z - \phi' \omega = u - (v' - z_A \phi') y - (w' + y_A \phi') z - \phi' \omega = \\
&= u - v' y - w' z - \phi' \omega + z_A \phi' y - y_A \phi' z, \\
\tilde{v}(x, s, t) &= v - \phi z, \\
\tilde{w}(x, s, t) &= w + \phi y.
\end{aligned}
\tag{4.144}$$

Symbolem ρ oznaczono gęstość rozkładu masy pręta.



Rys. 4.22

Energia kinetyczna pręta jest z definicji równa $\left(\left(\dot{}\right) = d/dt\right)$

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(s)} \left(\dot{\tilde{u}}^2 + \dot{\tilde{v}}^2 + \dot{\tilde{w}}^2 \right) dm = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(s)} \left[(\dot{u} - \dot{v}' y - \dot{w}' z - \phi' \omega + z_A \phi' y - y_A \phi' z)^2 + \right. \\
&\quad \left. + (\dot{v} - \phi z)^2 + (\dot{w} + \phi y)^2 \right] \rho \delta ds dx = \\
&= \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left\{ \int_{(s)} \left[(\dot{u}^2 + \dot{v}'^2 y^2 + \dot{w}'^2 z^2 + \phi'^2 \omega^2 + z_A^2 \phi'^2 y^2 + y_A^2 \phi'^2 z^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. + \dot{v}^2 + \phi^2 z^2 + \dot{w}^2 + \phi^2 y^2) - 2z_A \dot{v}' \phi' y^2 + 2y_A \dot{w}' \phi' z^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2(-\dot{u} \dot{v}' + \dot{w} \phi + z_A \dot{u} \phi') y + 2(-\dot{v} \phi - \dot{u} \dot{w}' - y_A \dot{u} \phi') z + \right. \\
&\quad \left. + 2(\dot{v}' \dot{w}' - z_A \dot{w}' \phi' + y_A \dot{v}' \phi' - y_A z_A \phi'^2) y z - 2\dot{u} \phi' \omega + \right. \\
&\quad \left. + 2(\dot{v}' \phi' - z_A \phi'^2) \omega y + 2(\dot{w}' \phi' + y_A \phi'^2) \omega z \right] \delta ds \} dx =
\end{aligned}
\tag{4.145}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\rho \int_0^l \left(\dot{u}^2 F + \dot{v}'^2 J_z + \dot{w}'^2 J_y + \dot{\varphi}'^2 J_\omega + z_A^2 \dot{\varphi}'^2 J_z + y_A^2 \dot{\varphi}'^2 J_y + \right. \\
&\quad \left. + \dot{v}^2 F + \dot{\varphi}^2 J_y + \dot{w}^2 F + \dot{\varphi}^2 J_z - 2 z_A \dot{v}' \dot{\varphi}' J_z + 2 y_A \dot{w}' \dot{\varphi}' J_y \right) dx = \\
&= \frac{1}{2}\rho \left[F \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + J_z \int_0^l \dot{v}'^2 dx + J_y \int_0^l \dot{w}'^2 dx + (J_y + J_z) \int_0^l \dot{\varphi}^2 dx + \right. \\
&\quad \left. + (J_\omega + y_A^2 J_y + z_A^2 J_z) \int_0^l \dot{\varphi}'^2 dx - z_A J_z \int_0^l (\dot{v}' \dot{\varphi}' + \dot{\varphi}' \dot{v}') dx + \right. \\
&\quad \left. + y_A J_y \int_0^l (\dot{w}' \dot{\varphi}' + \dot{\varphi}' \dot{w}') dx \right].
\end{aligned}$$

cd. (4.145)

Wykorzystano zerowanie się charakterystyk geometrycznych $S_y, S_z, D_{yz}, S_\omega, D_{\omega y}, D_{\omega z}$. W wyniku końcowym dokonano symetryzacji formy kwadratowej definiującej E_k . Kolejne składniki odwzorowują: energię kinetyczną związaną z: siłami bezwładności liniowej, siłami bezwładności obrotowej przy obrocie wokół osi y, z , siłami bezwładności deplanacyjnej oraz sprzężeniem między przemieszczeniami v, w i obrotem φ .

W teorii pręta cienkościennego o profilu zamkniętym wyprowadzono następujące formuły (vide punkt 4.2):

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x, s, t) &= u - v'_A y - w'_A z - \psi' \hat{\omega}, \\
\varphi' - \eta \psi' &= M_s / G \check{J}_s, \\
M_s &= -(E_p J_{\hat{\omega}} / \eta) \varphi''' + G J_s^* \varphi'.
\end{aligned} \tag{4.146}$$

Z wzorów (4.146)_{2,3} otrzymuje się:

$$\psi' = \frac{1}{\eta} \left(\varphi' - M_s / G \check{J}_s \right) = \varphi' + \kappa \varphi''', \tag{4.147}$$

gdzie

$$\kappa = E_p J_{\hat{\omega}} / \left(\eta^2 G \check{J}_s \right) = 2 J_{\hat{\omega}} / \left[\eta^2 (1 - \nu) \check{J}_s \right]. \tag{4.148}$$

Podstawiając (4.147) do (4.146)₁ z uwzględnieniem (4.19), otrzymuje się

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x, s, t) &= u - (v' - z_A \varphi') y - (w' + y_A \varphi') z - (\varphi' + \kappa \varphi''') \hat{\omega} = \\
&= u - v' y - w' z - \varphi' \hat{\omega} + z_A \varphi' y - y_A \varphi' z - \kappa \varphi''' \hat{\omega}.
\end{aligned} \tag{4.149}$$

Wzory (4.144)_{2,3} zachowują ważność dla profilu zamkniętego.

Energię kinetyczną pręta o profilu zamkniętym obliczamy w sposób analogiczny do (4.145).

Wynik ma postać:

$$\begin{aligned}
 E_k = \frac{1}{2}\rho & \left[F \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + J_z \int_0^l \dot{v}'^2 dx + J_y \int_0^l \dot{w}'^2 dx + \right. \\
 & + (J_y + J_z) \int_0^l \dot{\phi}^2 dx + (J_{\dot{\omega}} + y_A^2 J_y + z_A^2 J_z) \int_0^l \dot{\phi}'^2 dx + \\
 & - z_A J_z \int_0^l (\dot{v}' \dot{\phi}' + \dot{\phi}' \dot{v}') dx + y_A J_y \int_0^l (\dot{w}' \dot{\phi}' + \dot{\phi}' \dot{w}') dx + \\
 & \left. + \kappa^2 J_{\dot{\omega}} \int_0^l \dot{\phi}'''^2 dx - 2\kappa J_{\dot{\omega}} \int_0^l \dot{\phi}''^2 dx \right]. \quad (4.150)
 \end{aligned}$$

We wzorze (4.150) wykorzystano całkowanie przez części

$$2\kappa J_{\dot{\omega}} \int_0^l \dot{\phi}''' \dot{\phi}' dx = 2\kappa J_{\dot{\omega}} \left(\dot{\phi}'' \dot{\phi}' \Big|_0^l - \int_0^l \dot{\phi}''^2 dx \right) = -2\kappa J_{\dot{\omega}} \int_0^l \dot{\phi}''^2 dx. \quad (4.151)$$

Wzory na energię kinetyczną (4.145, 4.150), obejmujące pręty cienkościenne o profilach otwartych i jednokomorowych zamkniętych, można zapisać łącznie w postaci:

$$\begin{aligned}
 E_k = \frac{1}{2}\rho & \left[F \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + J_z \int_0^l \dot{v}'^2 dx + J_y \int_0^l \dot{w}'^2 dx + \right. \\
 & + (J_y + J_z) \int_0^l \dot{\phi}^2 dx + U_1 \int_0^l \dot{\phi}'^2 dx - z_A J_z \int_0^l (\dot{v}' \dot{\phi}' + \dot{\phi}' \dot{v}') dx + \\
 & \left. + y_A J_y \int_0^l (\dot{w}' \dot{\phi}' + \dot{\phi}' \dot{w}') dx - U_2 \int_0^l \dot{\phi}''^2 dx + U_3 \int_0^l \dot{\phi}'''^2 dx \right], \quad (4.152)
 \end{aligned}$$

gdzie:

a) profil otwarty

$$U_1 = J_{\dot{\omega}} + y_A^2 J_y + z_A^2 J_z, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad (4.153)$$

b) profil zamknięty

$$U_1 = J_{\dot{\omega}} + y_A^2 J_y + z_A^2 J_z, \quad U_2 = 2\kappa J_{\dot{\omega}}, \quad U_3 = \kappa^2 J_{\dot{\omega}}. \quad (4.154)$$

5. SFORMUŁOWANIE RÓWNAŃ RUCHU UKŁADU PRĘTOWO-BRYŁOWEGO

5.1. Dyskretyzacja układu i metoda sformułowania równań ruchu układu

Modelem dynamicznym stalowego fundamentu ramowego pod maszyny obrotowe jest linio-
wy układ dyskretny z tłumieniem nieproporcjonalnym, obciążony harmonicznym. Dyskretyzacja cien-
kościennego układu prętowego polega na podziale stalowej konstrukcji nośnej na cienkościenne prę-
towe elementy skończone. W punkcie 5.2 opracowano przestrzenny, cienkościenny, prętowy ele-
ment skończony o 14 stopniach swobody. Każdy węzeł swobodny układu prętowego, w którym
zbiegają się co najmniej dwa pręty pod kątem prostym, jest traktowany jako węzeł z blokadą depla-
nacji, mający 6 stopni swobody (trzy przesunięcia i trzy obroty), mierzonych w układzie lokalnym
węzła, równoległym do układu globalnego $x_o y_o z_o$. Każdy węzeł dodatkowy na długości pręta przy-
matycznego jest traktowany jako węzeł z możliwością deplanacji, mający 7 stopni swobody (trzy
przesunięcia, trzy obroty i jedna deplanacja w kierunku osi prętów łączących się w węźle). Węzły
podporowe są nieruchome, a więc pozbawione stopni swobody. Każda maszyna obrotowa, trakto-
wana jako bryła sztywna połączona podatnie z konstrukcją wsporczą, ma 6 stopni swobody w przes-
trzeni. Są to trzy przesunięcia i trzy obroty mierzone w układzie lokalnym bryły, przyjętym w środku
masy bryły. Układ ten jest równoległy do układu globalnego $x_o y_o z_o$. Liczba dynamicznych stopni
swobody układu jest zatem określona przez liczbę węzłów struktury prętowej oraz liczbę brył sztyw-
nych, zgodnie z wzorem:

$$n = 7 n_{wd} + 6 n_{wb} + 0 n_{wp} + 6 n_b, \quad (5.1)$$

gdzie:

$n_w = n_{wd} + n_{wb} + n_{wp}$ - liczba węzłów ortogonalnej struktury prętowej,

n_{wd} - liczba węzłów struktury z możliwością deplanacji,

n_{wb} - liczba węzłów struktury z blokadą deplanacji,

n_{wp} - liczba węzłów podporowych,

n_b - liczba brył sztywnych.

Do sformułowania równań równowagi dynamicznej (równań ruchu) układu prętowo-bryło-
wego, modelującego stalowy fundament ramowy pod maszyny obrotowe, zastosujemy metodę bilan-
su energii i równania Lagrange'a drugiego rodzaju [24]. W równaniach Lagrange'a występują cztery
pola skalarowe w odpowiednich przestrzeniach wektorowych: E_k - energia kinetyczna, E_p - energia
potencjalna, Φ - moc tłumienia (funkcja dysypacji), L - praca przygotowana zewnętrznymi siłami czyn-
nymi. Energia kinetyczna jest związana z ruchomym polem masowym układu, a więc jest związana z
prętami cienkościennymi oraz bryłami sztywnymi modelującymi maszynę. Energia potencjalna jest
związana z własnościami sprężystymi układu, a więc wynika z odkształcenia prętów cienkościennych.

nych, stężeń oraz elementów sprężystych w połączeniach maszyn z konstrukcją wsporczą. Moc tłumienia jest związana z własnościami reologicznymi stali, jako materiału prętów cienkościennych oraz z własnościami tłumiącymi połączeń maszyn z układem prętowym. Praca przygotowana odnosi się do sił ciężkości w warunkach statycznych oraz do sił wirujących (sił odśrodkowych przy niewyważeniu obrotowym) w warunkach dynamicznych.

W bilansie energii układu wykorzystano cechy ortogonalności cienkościennej struktury prętowej oraz maszyn obrotowych. Opracowano dwuetapowy algorytm szybkiej agregacji cienkościenego układu prętowego. W etapie pierwszym wykorzystuje się "zero-jedynkową" transformację podzbioru ≤ 14 współrzędnych uogólnionych na 14 współrzędnych lokalnych prętowego elementu skończonego, a w etapie drugim wykonuje się bezpośrednią dekompozycję macierzy o rozmiarach 14×14 . Podobną procedurę opracowano dla stężeń, występujących opcjonalnie w układzie. Stężenia są traktowane jako elementy nieważkie, rozciągane/ściskane osiowo, dowolnie usytuowane w przestrzeni. W macierzy transformacji współrzędnych występują wówczas cosinusy kierunkowe, ale pręt ma tylko dwie współrzędne lokalne. Energia potencjalna i moc tłumienia każdego elementu sprężysto-tłumiącego, łączącego maszynę z fundamentem, są określone przez podzbiór ≤ 13 współrzędnych uogólnionych, w tym 6 współrzędnych związanych z maszyną i 6 lub 7 współrzędnych związanych z odpowiednim węzłem (naturalnym lub dodatkowym) struktury prętowej. Każda siła wirująca jest rozkładana na dwie siły działające wzdłuż linii równoległych do osi układu globalnego. Uwzględniono trzy możliwe położenia osi obrotu maszyny, kierunek obrotu i fazę początkową. W punkcie 5.6 opracowano szybki algorytm automatycznej dyskretyzacji i agregacji układu prętowo-bryłowego, będący podstawą programu komputerowego GROS. Całość rozważań przeprowadzona jest w notacji macierzowej.

5.2. Przestrzenny cienkościenny prętowy element skończony

5.2.1. Opis elementu skończonego

Rozpatrujemy pryzmatyczny prętowy element skończony, o przekroju cienkościennym otwartym lub jednokomorowym zamkniętym, o długości l i następujących charakterystykach:

- $\tilde{E}F$ - zastępcza sztywność na rozciąganie/ściskanie,
- $\tilde{E}J_y$ - zastępcza sztywność na zginanie w płaszczyźnie xz ,
- $\tilde{E}J_z$ - zastępcza sztywność na zginanie w płaszczyźnie xy ,
- H_ω - zastępcza sztywność na deplanację,
- H_s - sztywność na skręcanie swobodne,
- ρ - gęstość stali,
- ρF - masa na jednostkę długości,
- ρJ_y - masowy moment bezwładności przy obrocie przekroju wokół osi z ,

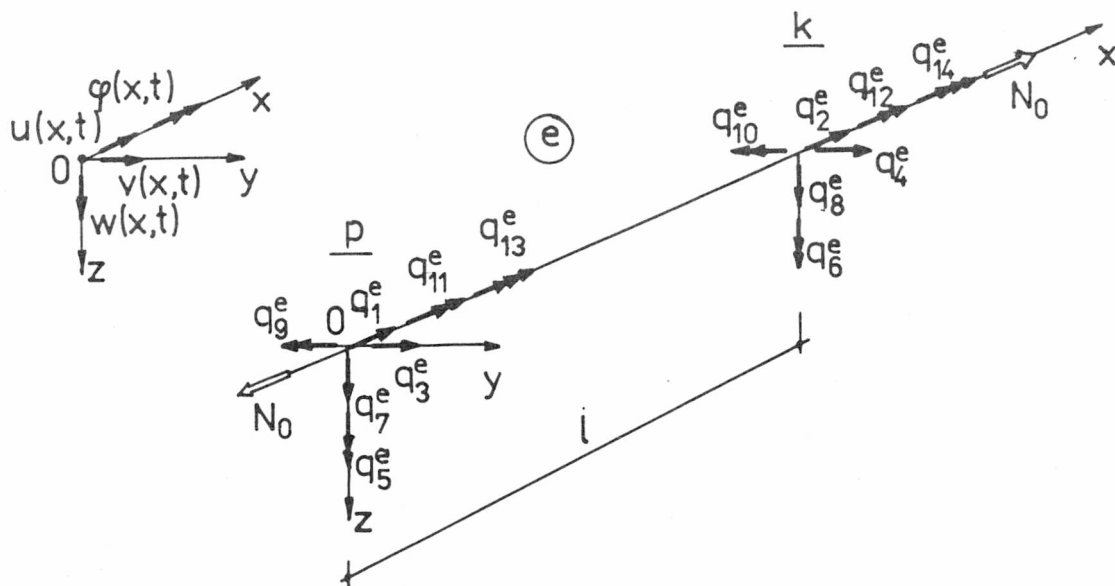
- ρJ_z - masowy moment bezwładności przy obrocie przekroju wokół osi y ,
 ρJ_0 - masowy moment bezwładności przy obrocie przekroju wokół osi x ($J_0 = J_y + J_z$),
 ρJ_ω , ρJ_ω - masowy moment bezwładności deplanacyjnej przekroju o profilu
 otwartym/zamkniętym,
 ρU_1 - zredukowany moment bezwładności deplanacyjnej,
 ρU_2 , ρU_3 - dodatkowe charakterystyki masowe związane z deplanacją przekroju o profilu
 zamkniętym.

Z definicji sił przekrojowych (4.59, 4.138) w płęcie cienkościennym wynika, że minimalny stopień wielomianowej aproksymacji przestrzennego stanu przemieszczenia wynosi 1 dla przemieszczeń $u(x,t)$ oraz 3 dla przemieszczeń $v(x,t)$, $w(x,t)$ i kątów $\varphi(x,t)$. Przyjęto liniową aproksymację przemieszczeń $u(x,t)$ oraz sześcienną aproksymację wielomianami Hermitea funkcji $v(x,t)$, $w(x,t)$, $\varphi(x,t)$ elementu skończonego nr e :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \mathbf{s}_u^T(\xi) \mathbf{q}_u^e(t), \\
 v(x, t) &= \mathbf{s}^T(\xi) \mathbf{q}_v^e(t), \\
 w(x, t) &= \mathbf{s}^T(\xi) \mathbf{q}_w^e(t), \\
 \varphi(x, t) &= \mathbf{s}^T(\xi) \mathbf{q}_\varphi^e(t),
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

gdzie $x = x / l \in [0, 1]$ oraz (*vide* rys. 5.1)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_u(\xi) &= \text{col}(s_{u1}, s_{u2}), \quad s_{u1}(\xi) = 1 - \xi, \quad s_{u2}(\xi) = \xi, \\
 \mathbf{s}(\xi) &= \text{col}(s_1, s_2, s_3, s_4), \\
 s_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad s_2(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \\
 s_3(\xi) &= l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \quad s_4(\xi) = l(-\xi^2 + \xi^3), \\
 \mathbf{q}_u^e &= \text{col}(q_1^e, q_2^e), \quad \mathbf{q}_v^e = \text{col}(q_3^e, q_4^e, q_5^e, q_6^e), \\
 \mathbf{q}_w^e &= \text{col}(q_7^e, q_8^e, q_9^e, q_{10}^e), \quad \mathbf{q}_\varphi^e = \text{col}(q_{11}^e, q_{12}^e, q_{13}^e, q_{14}^e).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$



Rys. 5.1

Rozpatrywany element skończony ma zatem 14 stopni swobody, po 7 na każdym końcu w tym 3 translacje, 3 rotacje i 1 deplanacja. Elementowi nr e jest przyporządkowany wektor współrzędnych lokalnych

$$\mathbf{q}_e = \text{col} \left(\mathbf{q}_u^e, \mathbf{q}_v^e, \mathbf{q}_w^e, \mathbf{q}_\phi^e \right). \quad (5.4)$$

Takie uporządkowanie współrzędnych pozwala na szybkie wyznaczenie macierzy sztywności $\mathbf{K}_e$ i bezwładności $\mathbf{B}_e$ elementu skończonego, w przejrzystym zapisie blokowym.

Liniowa aproksymacja przemieszczeń podłużnych oraz sześcienna aproksymacja przemieszczeń poprzecznych daje ścisłe rozwiązania dla pręta o przekroju bisymetrycznym, obciążonego statycznie tylko na brzegach $x = 0$, $x = l$. Sześcienna aproksymacja skręcania jest zawsze przybliżona.

5.2.2. Macierz sztywności i bezwładności elementu skończonego

Formuły całkowe, określające energię potencjalną i kinetyczną pręta cienkościennego w przestrzeni, wyprowadzono w punkcie 4.3. W niniejszym punkcie symbol $()'$ oznacza różniczkowanie cząstkowe podług zmiennej x , przy czym

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{l} ()'. \quad (5.5)$$

Formuły (4.142, 4.152) przepiszemy w postaci:

$$E_p^e = E_p^I + E_p^{II},$$

$$\begin{aligned}
E_p^I = & \frac{1}{2} \left[\tilde{E} F_l \frac{1}{l} \int_0^1 u'^2 d\xi + \tilde{E} J_z \frac{1}{l^3} \int_0^1 v''^2 d\xi + \tilde{E} J_y \frac{1}{l^3} \int_0^1 w''^2 d\xi + \right. \\
& H_s \frac{1}{l} \int_0^1 \phi'^2 d\xi + H_\omega \frac{1}{l^3} \int_0^1 \phi''^2 d\xi - \frac{1}{2} z_A \tilde{E} J_z \frac{1}{l^3} \int_0^1 (v'' \phi'' + \phi'' v'') d\xi + \\
& \left. + \frac{1}{2} y_A \tilde{E} J_y \frac{1}{l^3} \int_0^1 (w'' \phi'' + \phi'' w'') d\xi \right], \\
E_p^{II} = & \frac{1}{2} N_0 \left[\frac{1}{l} \int_0^1 v'^2 d\xi + \frac{1}{l} \int_0^1 w'^2 d\xi + \rho_0^2 \frac{1}{l} \int_0^1 \phi'^2 d\xi + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} z_A \frac{1}{l} \int_0^1 (v' \phi' + \phi' v') d\xi - \frac{1}{2} y_A \frac{1}{l} \int_0^1 (w' \phi' + \phi' w') d\xi \right], \\
E_k^e = & \frac{1}{2} \rho \left[F l \int_0^1 (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) d\xi + J_z \frac{1}{l} \int_0^1 \dot{v}'^2 d\xi + J_y \frac{1}{l} \int_0^1 \dot{w}'^2 d\xi + \right. \\
& + J_0 l \int_0^1 \dot{\phi}^2 d\xi + U_1 \frac{1}{l} \int_0^1 \dot{\phi}'^2 d\xi - U_2 \frac{1}{l^3} \int_0^1 \dot{\phi}''^2 d\xi + U_3 \frac{1}{l^5} \int_0^1 \dot{\phi}'''^2 d\xi + \\
& \left. - z_A J_z \frac{1}{l} \int_0^1 (\dot{v}' \dot{\phi}' + \dot{\phi}' \dot{v}') d\xi + y_A J_y \frac{1}{l} \int_0^1 (\dot{w}' \dot{\phi}' + \dot{\phi}' \dot{w}') d\xi \right].
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Część energii potencjalnej E_p^I jest związana z wpływami według teorii pierwszego rzędu, natomiast E_p^{II} odpowiada wpływom związanym z teorią drugiego rzędu.

Pochodne wektorów $\mathbf{s}_u, \mathbf{s}$ podług $\mathbf{x}$ wynoszą:

$$\begin{aligned}
s'_{u1} &= -1, \quad s'_{u2} = 1, \\
s'_1 &= -6\xi + 6\xi^2, \quad s''_1 = -6 + 12\xi, \quad s'''_1 = 12, \\
s'_2 &= 6\xi - 6\xi^2, \quad s''_2 = 6 - 12\xi, \quad s'''_2 = -12, \\
s'_3 &= l(1 - 4\xi + 3\xi^2), \quad s''_3 = l(-4 + 6\xi), \quad s'''_3 = 6l, \\
s'_4 &= l(-2\xi + 3\xi^2), \quad s''_4 = l(-2 + 6\xi), \quad s'''_4 = 6l.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Całki występujące w formułach energetycznych (5.6) wynoszą:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l} \int_0^1 u'^2 d\xi &= \frac{1}{l} \int_0^1 u' u' d\xi = \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{q}_u^{eT} \mathbf{s}'_u \mathbf{s}'_u{}^T \mathbf{q}_u^e d\xi = \mathbf{q}_u^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}'_u \mathbf{s}'_u{}^T d\xi \right) \mathbf{q}_u^e, \\
\frac{1}{l} \int_0^1 v'^2 d\xi &= \mathbf{q}_v^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \mathbf{q}_v^e, \quad \frac{1}{l} \int_0^1 w'^2 d\xi = \mathbf{q}_w^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \mathbf{q}_w^e, \\
\frac{1}{l} \int_0^1 \varphi'^2 d\xi &= \mathbf{q}_\varphi^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \mathbf{q}_\varphi^e, \quad \frac{1}{l^3} \int_0^1 v''^2 d\xi = \mathbf{q}_v^{eT} \left(\frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{s}'' \mathbf{s}''^T d\xi \right) \mathbf{q}_v^e, \\
\frac{1}{l^3} \int_0^1 w''^2 d\xi &= \mathbf{q}_w^{eT} \left(\frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{s}'' \mathbf{s}''^T d\xi \right) \mathbf{q}_w^e, \quad \frac{1}{l^3} \int_0^1 \varphi''^2 d\xi = \mathbf{q}_\varphi^{eT} \left(\frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{s}'' \mathbf{s}''^T d\xi \right) \mathbf{q}_\varphi^e, \\
\frac{1}{l} \int_0^1 (v' \varphi' + \varphi' v') d\xi &= \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{q}_v^{eT} \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T \mathbf{q}_\varphi^e d\xi + \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{q}_\varphi^{eT} \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T \mathbf{q}_v^e d\xi = \\
&= \mathbf{q}_v^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \mathbf{q}_\varphi^e + \mathbf{q}_\varphi^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \mathbf{q}_v^e, \\
\frac{1}{l} \int_0^1 (w' \varphi' + \varphi' w') d\xi &= \mathbf{q}_w^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \mathbf{q}_\varphi^e + \mathbf{q}_\varphi^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \mathbf{q}_w^e, \\
\frac{1}{l^3} \int_0^1 (v'' \varphi'' + \varphi'' v'') d\xi &= \mathbf{q}_v^{eT} \left(\frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{s}'' \mathbf{s}''^T d\xi \right) \mathbf{q}_\varphi^e + \mathbf{q}_\varphi^{eT} \left(\frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{s}'' \mathbf{s}''^T d\xi \right) \mathbf{q}_v^e,
\end{aligned}$$

(5.8)

$$\begin{aligned}
l \int_0^1 \dot{u}^2 d\xi &= l \int_0^1 \dot{u} \dot{u} d\xi = l \int_0^1 \dot{\mathbf{q}}_u^{eT} \mathbf{s}_u \mathbf{s}_u^T \dot{\mathbf{q}}_u^e d\xi = \dot{\mathbf{q}}_u^{eT} \left(l \int_0^1 \mathbf{s}_u \mathbf{s}_u^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_u^e, \\
l \int_0^1 \dot{v}^2 d\xi &= \dot{\mathbf{q}}_v^{eT} \left(l \int_0^1 \mathbf{s} \mathbf{s}^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_v^e, \\
l \int_0^1 \dot{w}^2 d\xi &= \dot{\mathbf{q}}_w^{eT} \left(l \int_0^1 \mathbf{s} \mathbf{s}^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_w^e, \\
l \int_0^1 \dot{\varphi}^2 d\xi &= \dot{\mathbf{q}}_\varphi^{eT} \left(l \int_0^1 \mathbf{s} \mathbf{s}^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_\varphi^e,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{l} \int_0^1 \dot{v}'^2 d\xi = \dot{\mathbf{q}}_v^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_v^e,$$

$$\frac{1}{l} \int_0^1 \dot{w}'^2 d\xi = \dot{\mathbf{q}}_w^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_w^e,$$

$$\frac{1}{l} \int_0^1 \dot{\phi}'^2 d\xi = \dot{\mathbf{q}}_\phi^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_\phi^e,$$

$$\frac{1}{l^3} \int_0^1 \dot{\phi}''^2 d\xi = \dot{\mathbf{q}}_\phi^{eT} \left(\frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{s}'' \mathbf{s}''^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_\phi^e,$$

$$\frac{1}{l^5} \int_0^1 \dot{\phi}'''^2 d\xi = \dot{\mathbf{q}}_\phi^{eT} \left(\frac{1}{l^5} \int_0^1 \mathbf{s}''' \mathbf{s}'''^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_\phi^e,$$

c.d. (5.8)

$$\frac{1}{l} \int_0^1 (\dot{v}' \dot{\phi}' + \dot{\phi}' \dot{v}') d\xi = \dot{\mathbf{q}}_v^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_\phi^e + \dot{\mathbf{q}}_\phi^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_v^e,$$

$$\frac{1}{l} \int_0^1 (\dot{w}' \dot{\phi}' + \dot{\phi}' \dot{w}') d\xi = \dot{\mathbf{q}}_w^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_\phi^e + \dot{\mathbf{q}}_\phi^{eT} \left(\frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi \right) \dot{\mathbf{q}}_w^e,$$

gdzie

$$\mathbf{K}_1 = \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}'_u \mathbf{s}'_u{}^T d\xi = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi = \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 36 & -36 & 3l & 3l \\ & 36 & -3l & -3l \\ & & 4l^2 & -l^2 \\ \text{sym.} & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{K}_3 = \frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{s}'' \mathbf{s}''^T d\xi = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & 6l & 6l \\ & 12 & -6l & -6l \\ & & 4l^2 & 2l^2 \\ \text{sym.} & & & 4l^2 \end{bmatrix},$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= l \int_0^1 \mathbf{s}_u \mathbf{s}_u^T d\xi = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}_2 &= l \int_0^1 \mathbf{s} \mathbf{s}^T d\xi = \frac{l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22l & -13l \\ & 156 & 13l & -22l \\ & & 4l^2 & -3l^2 \\ \text{sym.} & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}_3 &= \frac{1}{l} \int_0^1 \mathbf{s}' \mathbf{s}'^T d\xi = \mathbf{K}_2, \\
\mathbf{B}_4 &= \frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{s}'' \mathbf{s}''^T d\xi = \mathbf{K}_3, \\
\mathbf{B}_5 &= \frac{1}{l^5} \int_0^1 \mathbf{s}''' \mathbf{s}'''^T d\xi = \frac{36}{l^5} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2l & 2l \\ & 4 & -2l & -2l \\ & & l^2 & l^2 \\ \text{sym.} & & & l^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Po wstawieniu wzorów (5.8-5.10) do formuł (5.6), otrzymuje się:

$$E_p^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e, \quad E_k^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{B}_e \dot{\mathbf{q}}_e, \tag{5.11}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_e &= \mathbf{K}_e^I + \mathbf{K}_e^{II}, \\
\mathbf{K}_e^I &= \begin{bmatrix} \tilde{E}F\mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \tilde{E}J_z\mathbf{K}_3 & \mathbf{0} & -\frac{1}{2}z_A\tilde{E}J_z\mathbf{K}_3 \\ & & \tilde{E}J_y\mathbf{K}_3 & \frac{1}{2}y_A\tilde{E}J_y\mathbf{K}_3 \\ \text{sym.} & & & H_s\mathbf{K}_2 + H_\omega\mathbf{K}_3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_e^{II} &= N_0 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} & \frac{1}{2}z_A\mathbf{K}_2 \\ & & \mathbf{K}_2 & -\frac{1}{2}y_A\mathbf{K}_2 \\ \text{sym.} & & & \rho_0^2\mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_e &= \rho \begin{bmatrix} F\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & F\mathbf{B}_2 + J_z\mathbf{B}_3 & \mathbf{0} & -z_AJ_z\mathbf{B}_3 \\ & & F\mathbf{B}_2 + J_y\mathbf{B}_3 & y_AJ_y\mathbf{B}_3 \\ \text{sym.} & & & J_0\mathbf{B}_2 + U_1\mathbf{B}_3 - U_2\mathbf{B}_4 + U_3\mathbf{B}_5 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

5.2.3. Siły przekrojowe i naprężenia w elemencie o profilu otwartym

W dowolnym przekroju poprzecznym pręta cienkościennego o profilu otwartym powstają następujące siły przekrojowe pierwszego rzędu: N , T_y , M_z , T_z , M_y , M_ω , M_s , B , określone wzorami (4.31, 4.45, 4.49). We wzorach tych występują następujące pochodne składowych stanu przemieszczenia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{l} \mathbf{s}'^T \mathbf{q}_u^e, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{1}{l^2} \mathbf{s}''^T \mathbf{q}_v^e, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{1}{l^3} \mathbf{s}'''^T \mathbf{q}_v^e, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{1}{l^2} \mathbf{s}''^T \mathbf{q}_w^e, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{1}{l^3} \mathbf{s}'''^T \mathbf{q}_w^e, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{l} \mathbf{s}'^T \mathbf{q}_\varphi^e, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{l^2} \mathbf{s}''^T \mathbf{q}_\varphi^e, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = \frac{1}{l^3} \mathbf{s}'''^T \mathbf{q}_\varphi^e,\end{aligned}\tag{5.13}$$

przy czym $(\)' = \partial / \partial \xi$. Po wstawieniu pochodnych (5.13) do wzorów na siły przekrojowe, otrzymamy:

$$\begin{aligned}N(\xi, t) &= \tilde{E}F \frac{1}{l} \mathbf{s}'^T \mathbf{q}_u^e, \\ T_y(\xi, t) &= -\tilde{E}J_z \frac{1}{l^3} \mathbf{s}'''^T \left(\mathbf{q}_v^e - z_A \mathbf{q}_\varphi^e \right), \\ M_z(\xi, t) &= \tilde{E}J_z \frac{1}{l^2} \mathbf{s}''^T \left(\mathbf{q}_v^e - z_A \mathbf{q}_\varphi^e \right), \\ T_z(\xi, t) &= -\tilde{E}J_y \frac{1}{l^3} \mathbf{s}'''^T \left(\mathbf{q}_w^e + y_A \mathbf{q}_\varphi^e \right), \\ M_y(\xi, t) &= -\tilde{E}J_y \frac{1}{l^2} \mathbf{s}''^T \left(\mathbf{q}_w^e + y_A \mathbf{q}_\varphi^e \right), \\ M_\omega(\xi, t) &= -\tilde{E}J_\omega \frac{1}{l^3} \mathbf{s}'''^T \mathbf{q}_\varphi^e, \\ M_s(\xi, t) &= GJ_s \frac{1}{l} \mathbf{s}'^T \mathbf{q}_\varphi^e, \\ B(\xi, t) &= -\tilde{E}J_\omega \frac{1}{l^2} \mathbf{s}''^T \mathbf{q}_\varphi^e.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Zgodnie z ideą MES podział na elementy skończone jest na tyle gęsty, że można pominąć wpływ m_y , m_z na siły tnące oraz ograniczyć analizę stanu naprężenia do przekrojów brzegowych elementu. Wartości pochodnych wektorów $\mathbf{s}_u(x)$, $\mathbf{s}(x)$ w przekrojach brzegowych wynoszą:

$$\begin{aligned}
s'_{up} &= s'_u(0) = \text{col}(-1, 1), \quad s'_{uk} = s'_u(1) = \text{col}(-1, 1), \\
s'_p &= s'(0) = \text{col}(0, 0, l, 0), \\
s'_k &= s'(1) = \text{col}(0, 0, 0, l), \\
s''_p &= s''(0) = \text{col}(-6, 6, -4l, -2l), \\
s''_k &= s''(1) = \text{col}(6, -6, 2l, 4l), \\
s'''_p &= s'''(0) = \text{col}(12, -12, 6l, 6l), \\
s'''_k &= s'''(1) = \text{col}(12, -12, 6l, 6l).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Wartości sił przekrojowych w przekroju początkowym, $N_p, T_{yp}, M_{zp}, T_{zp}, M_{yp}, M_{\omega p}, M_{sp}, B_p$, otrzymamy, wstawiając $s'_{up}, s'_p, s''_p, s'''_p$ do wzorów (5.14). Podobnie siły przekrojowe w przekroju końcowym, $N_k, T_{yk}, M_{zk}, T_{zk}, M_{yk}, M_{\omega k}, M_{sk}, B_k$, określają wzory (5.14) po podstawieniu $s'_u = s'_{uk}, s' = s'_k, s'' = s''_k, s''' = s'''_k$.

Zgodnie z założeniami przekrój cienkościenny składa się z n_p wąskich prostokątów. Analizę naprężeń ograniczymy do zbioru wybranych punktów na konturze profilu o współrzędnych y_j, z_j, ω_j, s_j i parametrach:

$$\delta_j = \delta(s_j), \quad \tilde{S}_{yj} = \tilde{S}_y(s_j), \quad \tilde{S}_{zj} = \tilde{S}_z(s_j), \quad \tilde{S}_{\omega j} = \tilde{S}_\omega(s_j),$$

przy czym $j=1,2,\dots,n_e$. Z teorii przedstawionej w punkcie 4.1 wynika, że ekstremalne wartości naprężeń normalnych i stycznych, odpowiadające wybranym punktom przekroju początkowego, określają wzory:

$$\begin{aligned}
\sigma_{pj}(t) &= \sigma(0, s_j, t) = \frac{N_p}{F} - \frac{M_{zp} y_j}{J_z} + \frac{M_{yp} z_j}{J_y} + \frac{B_p \omega_j}{J_\omega}, \\
\tau_{pj}(t) &= \tau(0, s_j, t) = -\frac{1}{\delta_j} \left(\frac{T_{yp} \tilde{S}_{zj}}{J_z} + \frac{T_{zp} \tilde{S}_{yj}}{J_y} + \frac{M_{\omega p} \tilde{S}_{\omega j}}{J_\omega} \right), \\
\tau_{spj}(t) &= \tau_s(0, s_j, t) = \frac{\lambda M_{sp} \delta_j}{J_s}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Wartości naprężeń w przekroju końcowym, $\sigma_{kj}, \tau_{kj}, \tau_{skj}$, są określone analogicznymi wzorami; we wzorach (5.16) wystarczy zamienić indeks p na k .

W przypadku drgań ustalonych wymuszonych harmonicznymi z częstością $\bar{\omega}$ otrzymuje się:

$$\mathbf{q}_e(t) = \mathbf{q}_{es} \sin \bar{\omega}t + \mathbf{q}_{ec} \cos \bar{\omega}t ,$$

$$N_p(t) = N_{ps} \sin \bar{\omega}t + N_{pc} \cos \bar{\omega}t , \quad (5.17)$$

$$T_{yp}(t) = T_{yps} \sin \bar{\omega}t + T_{ypc} \cos \bar{\omega}t$$

itd. Harmoniczne przebiegi sił przekrojowych prowadzą do harmoniczných przebiegów naprężeń, tzn. w przekroju początkowym

$$\sigma_{pj}(t) = \sigma_{pjs} \sin \bar{\omega}t + \sigma_{pjc} \cos \bar{\omega}t ,$$

$$\tau_{pj}(t) = \tau_{pjs} \sin \bar{\omega}t + \tau_{pjc} \cos \bar{\omega}t , \quad (5.18)$$

$$\tau_{spj}(t) = \tau_{spjs} \sin \bar{\omega}t + \tau_{spjc} \cos \bar{\omega}t .$$

Amplitudy naprężeń normalnych i stycznych w przekroju początkowym określają wzory:

$$\hat{\sigma}_{pj} = \sqrt{\sigma_{pjs}^2 + \sigma_{pjc}^2} , \quad (5.19)$$

$$\hat{\tau}_{pj} = \max \left[\sqrt{(\tau_{pjs} + \tau_{spjs})^2 + (\tau_{pjc} + \tau_{spjc})^2} , \sqrt{(\tau_{pjs} - \tau_{spjs})^2 + (\tau_{pjc} - \tau_{spjc})^2} \right] .$$

Odpowiednie wzory na amplitudy naprężeń w przekroju końcowym, $\hat{\sigma}_{kj}$, $\hat{\tau}_{kj}$, otrzymamy, zmieniając indeks p na k we wzorach (5.17-5.19).

5.2.4. Siły przekrojowe i naprężenia w elemencie o profilu zamkniętym jednokomorowym

Siły przekrojowe pierwszego rzędu w pręcie cienkościennym o profilu zamkniętym są następujące: N , T_y , M_z , T_z , M_y , $M_{\hat{\omega}}$, M_s , $\hat{B}$. Wzory (5.14) określające N , T_y , M_z , T_z , M_y zachowują ważność. Pozostałe siły przekrojowe są określone wzorami (4.94, 4.98, 4.114, 4.121). Po wstawieniu pochodnych (5.13) do powyższych wzorów, otrzymamy:

$$M_{\hat{\omega}}(\xi, t) = -\frac{1}{\eta} \tilde{E} J_{\hat{\omega}} \frac{1}{l^3} \mathbf{s}'''^T \mathbf{q}_{\Phi}^e ,$$

$$M_s(\xi, t) = -\frac{1}{\eta} \tilde{E} J_{\hat{\omega}} \frac{1}{l^3} \mathbf{s}'''^T \mathbf{q}_{\Phi}^e + G J_s^* \frac{1}{l} \mathbf{s}'^T \mathbf{q}_{\Phi}^e , \quad (5.20)$$

$$\hat{B}(\xi, t) = -\frac{1}{\eta} \tilde{E} J_{\hat{\omega}} \frac{1}{l^2} \mathbf{s}''^T \mathbf{q}_{\Phi}^e .$$

Podobnie jak w punkcie 5.2.3 wyznaczmy wartości sił przekrojowych w przekrojach skrajnych, m.in. $M_{\dot{\omega}p}, M_{\dot{\omega}k}, M_{sp}, M_{sk}, \hat{B}_p, \hat{B}_k$. Wybrany punkt na konturze profilu zamkniętego odpowiada współrzędne $y_j, z_j, \hat{\omega}_j, s_j$ i parametry:

$$\delta_j = \delta_j(s_j), \quad \tilde{S}_{yj}^* = \tilde{S}_y^*(s_j), \quad \tilde{S}_{zj}^* = \tilde{S}_z^*(s_j), \quad \tilde{S}_{\dot{\omega}j}^* = \tilde{S}_{\dot{\omega}}^*(s_j).$$

Zgodnie z teorią przedstawioną w punkcie 4.2 wartości naprężeń normalnych i stycznych w wybranych punktach przekroju początkowego wynoszą:

$$\begin{aligned} \sigma_{pj}(t) &= \sigma(0, s_j, t) = \frac{N_p}{F} - \frac{M_{zp} y_j}{J_z} + \frac{M_{yp} z_j}{J_y} + \frac{\hat{B}_p \dot{\omega}_j}{J_{\dot{\omega}}}, \\ \tau_{pj}(t) &= \tau(0, s_j, t) = \frac{M_{sp}}{\Omega \delta_j} - \frac{1}{\delta_j} \left(\frac{T_{yp} \tilde{S}_{zj}^*}{J_z} + \frac{T_{zp} \tilde{S}_{yj}^*}{J_y} + \frac{M_{\dot{\omega}p} \tilde{S}_{\dot{\omega}j}^*}{J_{\dot{\omega}}} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Zmieniając indeks p na k , otrzymamy - na podstawie (5.21) - wzory określające $\sigma_{kj}(t), \tau_{kj}(t)$.

Wzory (5.17, 5.18₁, 5.18₂, 5.19₁) zachowują ważność w przypadku drgań ustalonych pręta o profilu zamkniętym. Amplitudy naprężeń stycznych określają wzory:

$$\hat{\tau}_{pj} = \sqrt{\tau_{pjs}^2 + \tau_{pjz}^2}, \quad \hat{\tau}_{kj} = \sqrt{\tau_{kjs}^2 + \tau_{kjc}^2}. \quad (5.22)$$

5.3. Bilans energetyczny bryły sztywnej, połączonej podatnie z prętową konstrukcją nośną

Zgodnie z założeniami w układzie mogą występować bryły sztywne, połączone ze stalową konstrukcją nośną za pomocą elementów sprężysto-tłumiących w sposób geometrycznie niezmienny. Główne centralne osie bezwładności bryły (x, y, z) są równoległe do osi układu globalnego (x_0, y_0, z_0) , rys. 5.2.

Drgania r -tej bryły są opisane przez 6 współrzędnych uogólnionych, związanych ze środkiem masy bryły O_r , które tworzą wektor

$$\mathbf{q}_r = \text{col}(q_1^r, q_2^r, q_3^r, q_4^r, q_5^r, q_6^r).$$

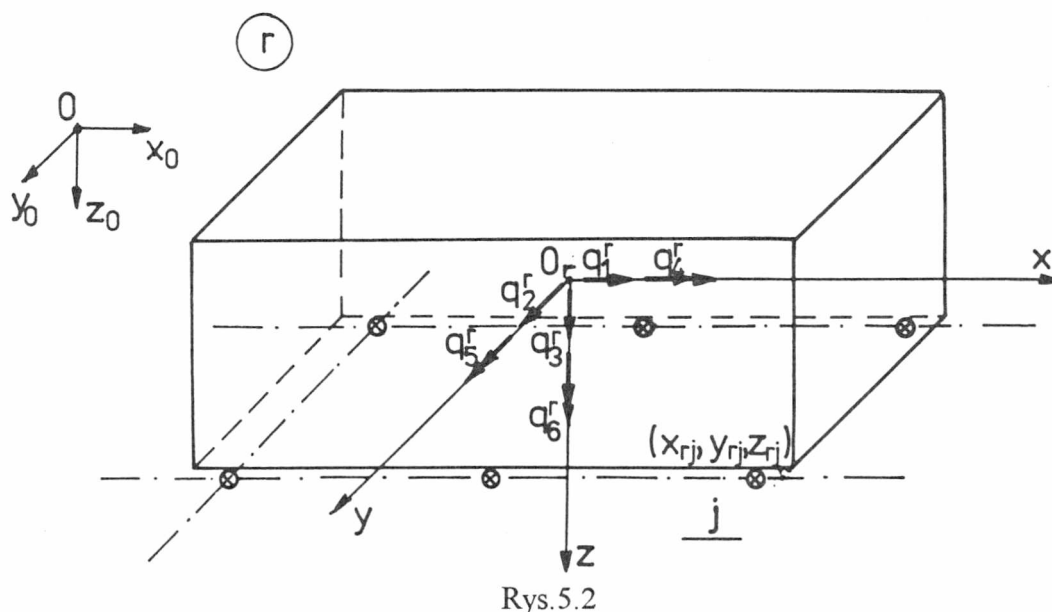
Trzy pierwsze współrzędne wektora $\mathbf{q}_r$ są przesunięciami, a pozostałe - obrotami względem osi x, y, z . Energia kinetyczna r -tej bryły sztywnej wynosi (*por.* [21]):

$$E_k^r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_r^T \mathbf{B}_r \dot{\mathbf{q}}_r, \quad (5.23)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_r = \text{diag} \left(M_r, M_r, M_r, J_x^r, J_y^r, J_z^r \right). \quad (5.24)$$

Wprowadzono oznaczenia: M_r - masa bryły, J_x^r, J_y^r, J_z^r - osiowe masowe momenty bezwładności bryły względem osi głównych centralnych x, y, z [kgm²].

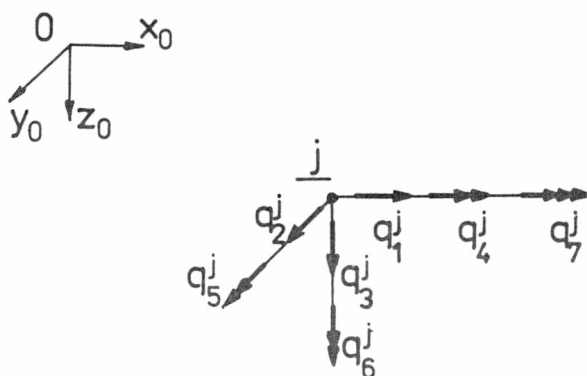


Rys.5.2

W ramie przestrzennej, stanowiącej konstrukcję wsporczą pod maszyny, wyróżniamy nieruchome węzły podporowe oraz węzły ruchome bez lub z możliwością deplanacji w kierunku osi x_0 , y_0 lub z_0 . Każdemu węzłowi ruchomemu przyporządkowany jest 7-elementowy wektor współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{q}_j = \text{col} \left(q_1^j, q_2^j, q_3^j, q_4^j, q_5^j, q_6^j, q_7^j \right).$$

Na rys. 5.3 zilustrowano przypadek węzła z możliwością deplanacji w kierunku osi x_0 .



Rys.5.3

Każdy element sprężysto-tłumiący, łączący bryłę sztywną ze strukturą prętową, traktowany jest jako połączenie skupione i modelowany przez układ trzech ortogonalnych par więzi podatnych. Każda para więzi jest układem równoległym więzi sprężystej i lepkiej. Więzi łączą bryłę z wybranym węzłem struktury prętowej.

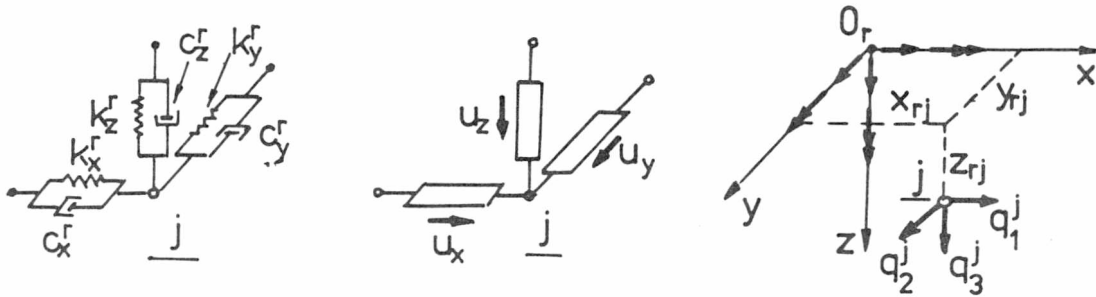
Rozważmy połączenie (r,j) r -tej bryły sztywnej z j -tym węzłem struktury prętowej, rys. 5.4. Odształcenia więzi wynikają z ruchów j -tego węzła z jednej strony i z ruchów r -tej bryły z drugiej strony. Łatwo pokazać, że przy oznaczeniach wprowadzonych na rys. 5.2, 5.3, 5.4 odształcenia te wynoszą:

$$\mathbf{u} = \text{col}(u_x, u_y, u_z) = \mathbf{A} \mathbf{q}_j - \mathbf{D}_{rj} \mathbf{q}_r, \quad (5.25)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{rj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{rj} & -y_{rj} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{rj} & 0 & x_{rj} \\ 0 & 0 & 1 & y_{rj} & -x_{rj} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Symbolami x_{rj} , y_{rj} , z_{rj} oznaczono współrzędne połączenia (r,j) w układzie O_rxyz .



Rys.5.4

Połączenie (r,j) gromadzi energię potencjalną i rozprasza energię układu. Energia potencjalna sprężystego odształcenia więzi w połączeniu (r,j) wynosi

$$\begin{aligned} E_p^{rj} &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \{\mathbf{k}\}_r \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \mathbf{q}_j - \mathbf{D}_{rj} \mathbf{q}_r)^T \{\mathbf{k}\}_r (\mathbf{A} \mathbf{q}_j - \mathbf{D}_{rj} \mathbf{q}_r) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{q}_j^T \mathbf{A}^T \{\mathbf{k}\}_r \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T \mathbf{A}^T \{\mathbf{k}\}_r \mathbf{D}_{rj} \mathbf{q}_r + \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{q}_r^T \mathbf{D}_{rj}^T \{\mathbf{k}\}_r \mathbf{A} \mathbf{q}_j + \mathbf{q}_r^T \mathbf{D}_{rj}^T \{\mathbf{k}\}_r \mathbf{D}_{rj} \mathbf{q}_r \right] = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jr} \\ \mathbf{K}_{rj} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_r \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\{\mathbf{k}\}_r &= \text{diag} \left(k_x^r, k_y^r, k_z^r \right), \\ \mathbf{K}_{jj} &= \mathbf{A}^T \{\mathbf{k}\}_r \mathbf{A}, \quad \mathbf{K}_{jr} = -\mathbf{A}^T \{\mathbf{k}\}_r \mathbf{D}_{rj}, \\ \mathbf{K}_{rj} &= -\mathbf{D}_{rj}^T \{\mathbf{k}\}_r \mathbf{A}, \quad \mathbf{K}_{rr} = \mathbf{D}_{rj}^T \{\mathbf{k}\}_r \mathbf{D}_{rj}.\end{aligned}\tag{5.28}$$

Podobnie otrzymuje się wzór na moc tłumienia więzi lepkich w połączeniu (r,j) :

$$\Phi^{rj} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \{\mathbf{c}\}_r \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_j \\ \dot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{jj} & \mathbf{C}_{jr} \\ \mathbf{C}_{rj} & \mathbf{C}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_j \\ \dot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix},\tag{5.29}$$

przy czym

$$\begin{aligned}\{\mathbf{c}\}_r &= \text{diag} \left(c_x^r, c_y^r, c_z^r \right), \\ \mathbf{C}_{jj} &= \mathbf{A}^T \{\mathbf{c}\}_r \mathbf{A}, \quad \mathbf{C}_{jr} = -\mathbf{A}^T \{\mathbf{c}\}_r \mathbf{D}_{rj}, \\ \mathbf{C}_{rj} &= -\mathbf{D}_{rj}^T \{\mathbf{c}\}_r \mathbf{A}, \quad \mathbf{C}_{rr} = \mathbf{D}_{rj}^T \{\mathbf{c}\}_r \mathbf{D}_{rj}.\end{aligned}\tag{5.30}$$

Jądra form kwadratowych (5.27, 5.29) są symetryczne. Zgodnie z założeniami wszystkie połączenia podatne danej bryły ze strukturą prętową są takie same. Rozważono przypadek ogólny, w którym połączenia jest opisane przez 3 stałe sprężyste (k_x^r, k_y^r, k_z^r) oraz 3 stałe lepkie (c_x^r, c_y^r, c_z^r) .

5.4. Wyznaczenie wektora obciążeń uogólnionych

Zgodnie z założeniami w układzie występują maszyny obrotowe o wspólnej częstości wzbudzenia w rozruchu, stanie eksploatacyjnym lub wybiegu maszyn. Osie wirników są równoległe do osi układu globalnego x_o, y_o, z_o . Siły odśrodkowe powstają w wyniku niewyrównoważenia mas wirujących.

Rozważmy i -tą siłę wirującą, przyporządkowaną r -tej bryle sztywnej, z centrum wirowania O_f na osi obrotu, o współrzędnych x_{ir}, y_{ir}, z_{ir} w układzie $O_i x y z$. Możliwe są trzy przypadki pokazane na rys. 5.5, w których składowe kartezjańskie siły wirującej wynoszą:

a) oś obrotu równoległa do osi x :

$$P_x^{ir} = 0,$$

$$P_y^{ir} = P_0^{ir} \cos \varphi(t), \quad (5.31)$$

$$P_z^{ir} = P_0^{ir} \sin \varphi(t),$$

b) oś obrotu równoległa do osi y :

$$P_x^{ir} = P_0^{ir} \sin \varphi(t),$$

$$P_y^{ir} = 0, \quad (5.32)$$

$$P_z^{ir} = P_0^{ir} \cos \varphi(t),$$

c) oś obrotu równoległa do osi z :

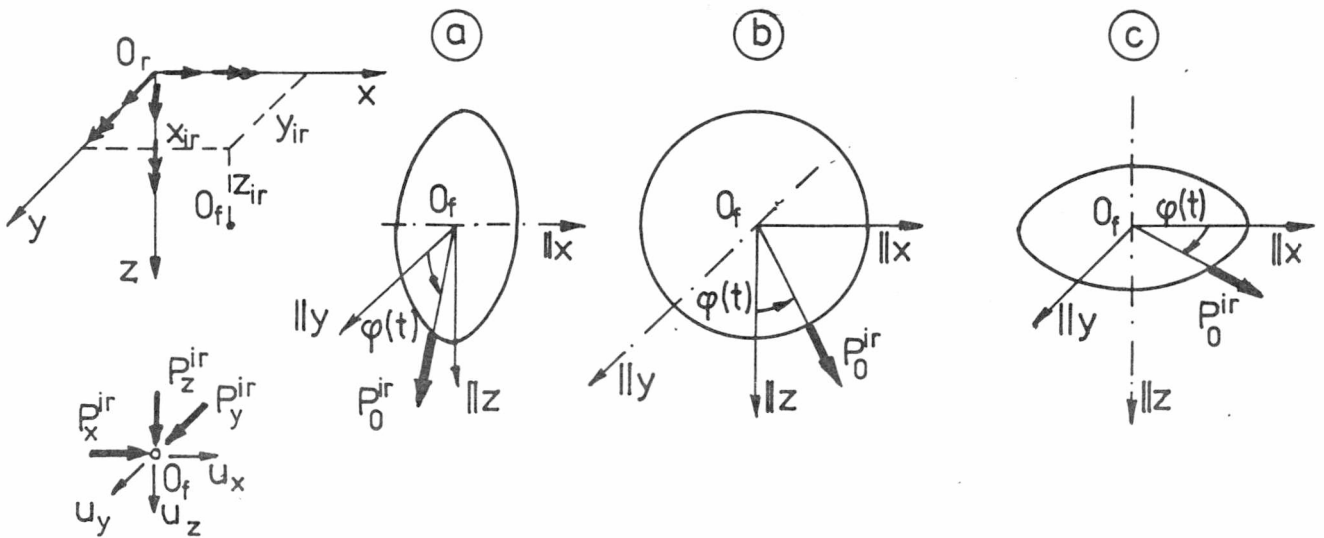
$$P_x^{ir} = P_0^{ir} \cos \varphi(t),$$

$$P_y^{ir} = P_0^{ir} \sin \varphi(t), \quad (5.33)$$

$$P_z^{ir} = 0,$$

przy czym

$$P_0^{ir} = M_0^{ir} \bar{\omega}^2, \quad \varphi(t) = \rho_r \bar{\omega} t + \Theta_{ir}. \quad (5.34)$$



Rys.5.5

Wprowadzono następujące oznaczenia:

M_0^{ir} - masowy moment niewyważenia obrotowego i -tego źródła wzbudzenia w r -tej bryle sztywnej [kgm],

$\bar{\omega}$ - częstość wzbudzenia [rad/s],

Θ_{ir} - faza początkowa i -tej siły wirującej w r -tej bryle sztywnej [rad],

ρ_r - wyróżnik kierunku obrotu części wirujących w r -tej bryle sztywnej.

W przypadku obrotu w prawo $\rho_r=1$, natomiast obrotowi w lewo odpowiada $\rho_r=-1$.

Po uwzględnieniu rozwinięć

$$\begin{aligned}\sin \varphi(t) &= \sin (\rho_r \bar{\omega} t + \Theta_{ir}) = (\rho_r \cos \Theta_{ir}) \sin \bar{\omega} t + (\sin \Theta_{ir}) \cos \bar{\omega} t, \\ \cos \varphi(t) &= \cos (\rho_r \bar{\omega} t + \Theta_{ir}) = (-\rho_r \sin \Theta_{ir}) \sin \bar{\omega} t + (\cos \Theta_{ir}) \cos \bar{\omega} t,\end{aligned}\tag{5.35}$$

otrzymuje się ostatecznie wektor sił wzbudzających w bazie współrzędnych lokalnych w postaci:

$$\mathbf{P}^{ir}(t) = \text{col} \left(P_x^{ir}, P_y^{ir}, P_z^{ir} \right) = \mathbf{P}_s^{ir} \sin \bar{\omega} t + \mathbf{P}_c^{ir} \cos \bar{\omega} t,\tag{5.36}$$

przy czym

a) oś obrotu równoległa do osi x :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_s^{ir}(t) &= \text{col} \left(0, -\rho_r P_0^{ir} \sin \Theta_{ir}, \rho_r P_0^{ir} \cos \Theta_{ir} \right), \\ \mathbf{P}_c^{ir}(t) &= \text{col} \left(0, P_0^{ir} \cos \Theta_{ir}, P_0^{ir} \sin \Theta_{ir} \right),\end{aligned}\tag{5.37}$$

b) oś obrotu równoległa do osi y :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_s^{ir}(t) &= \text{col} \left(\rho_r P_0^{ir} \cos \Theta_{ir}, 0, -\rho_r P_0^{ir} \sin \Theta_{ir} \right), \\ \mathbf{P}_c^{ir}(t) &= \text{col} \left(P_0^{ir} \sin \Theta_{ir}, 0, P_0^{ir} \cos \Theta_{ir} \right),\end{aligned}\tag{5.38}$$

c) oś obrotu równoległa do osi z :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_s^{ir}(t) &= \text{col} \left(-\rho_r P_0^{ir} \sin \Theta_{ir}, \rho_r P_0^{ir} \cos \Theta_{ir}, 0 \right), \\ \mathbf{P}_c^{ir}(t) &= \text{col} \left(P_0^{ir} \cos \Theta_{ir}, P_0^{ir} \sin \Theta_{ir}, 0 \right),\end{aligned}\tag{5.39}$$

Transformacja współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}_r$ na lokalne $\mathbf{u}$ odpowiadające siłom $\mathbf{P}^{ir}(t)$ ma postać (vide rys. 5.5):

$$\mathbf{u} = \text{col}(u_x, u_y, u_z) = \mathbf{D}_{ir} \mathbf{q}_r, \quad (5.40)$$

gdzie

$$\mathbf{D}_{ir} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{ir} & -y_{ir} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{ir} & 0 & x_{ir} \\ 0 & 0 & 1 & y_{ir} & -x_{ir} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Wektor obciążeń uogólnionych w bazie $\mathbf{q}_r$ odwzorowujący działanie siły wirującej P_0^i , wyznacza się z pracy wirtualnej tej siły:

$$L^{ir} = \mathbf{u}^T \mathbf{P}^{ir} = \mathbf{q}_r^T \mathbf{D}_{ir}^T \mathbf{P}^{ir} = \mathbf{q}_r^T \mathbf{F}_{ir},$$

$$\mathbf{F}_{ir}(t) = \mathbf{D}_{ir}^T \mathbf{P}^{ir}(t) = \mathbf{F}_s^{ir} \sin \bar{\omega} t + \mathbf{F}_c^{ir} \cos \bar{\omega} t, \quad (5.42)$$

$$\mathbf{F}_s^{ir} = \mathbf{D}_{ir}^T \mathbf{P}_s^{ir}, \quad \mathbf{F}_c^{ir} = \mathbf{D}_{ir}^T \mathbf{P}_c^{ir}.$$

5.5. Energia potencjalna stężeń

Pręty stężające, występujące w niektórych typach konstrukcji wsporczych, są traktowane analogicznie jak pręty kratownicy przestrzennej o węzłach przegubowych. Zgodnie z założeniami pręt stężający łączy ze sobą dwa dowolne węzły stalowej konstrukcji nośnej.

Rozważmy i -ty pręt stężający o sztywności EF_i , łączący węzły j, k odpowiednio o współrzędnych $(x_j, y_j, z_j), (x_k, y_k, z_k)$ w układzie globalnym $x_0 y_0 z_0$, rys.5.6. Wydłużenie pręta wynosi

$$u_i = \mathbf{d}_i^T (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k), \quad (5.43)$$

gdzie $\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_k$ są wektorami współrzędnych uogólnionych w węzłach j, k struktury prętowej oraz

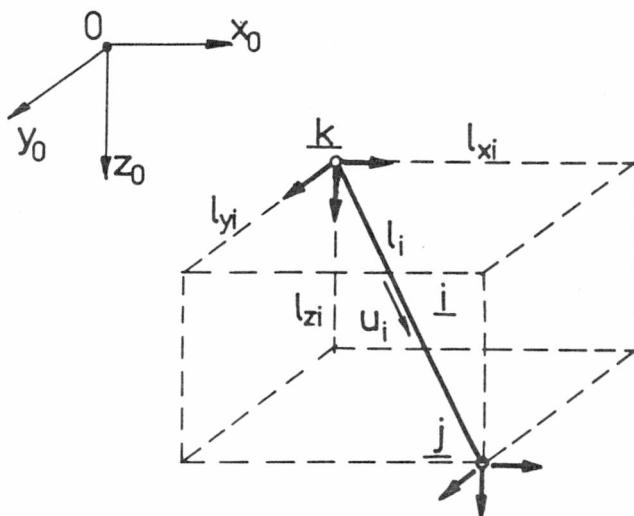
$$\mathbf{d}_i = \text{col} (\cos \alpha_{xi}, \cos \alpha_{yi}, \cos \alpha_{zi}, 0, 0, 0, 0),$$

$$\cos \alpha_{xi} = l_{xi} / l_i, \quad \cos \alpha_{yi} = l_{yi} / l_i, \quad \cos \alpha_{zi} = l_{zi} / l_i,$$

$$l_{xi} = x_j - x_k, \quad l_{yi} = y_j - y_k, \quad l_{zi} = z_j - z_k,$$

$$l_i = \sqrt{l_{xi}^2 + l_{yi}^2 + l_{zi}^2}.$$

(5.44)



Rys.5.6

Energia potencjalna pręta odkształcalnego osiowo z definicji wynosi:

$$E_p^i = \frac{1}{2} k_i u_i^2 = \frac{1}{2} u_i^T k_i u_i = \frac{1}{2} (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k)^T \mathbf{d}_i k_i \mathbf{d}_i^T (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k) =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i & -\mathbf{K}_i \\ -\mathbf{K}_i & \mathbf{K}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix},$$

(5.45)

gdzie

$$k_i = EF_i / l_i, \quad \mathbf{K}_i = \mathbf{d}_i k_i \mathbf{d}_i^T.$$

(5.46)

5.6. Automatyzacja agregacji układu prętowo-bryłowego

Poniżej zestawiono oznaczenia, częściowo wprowadzone w punktach 5.1-5.5, wykorzystane przy agregacji układu prętowo-bryłowego, modelującego stalowe fundamenty ramowe pod maszyny obrotowe:

a) indeksy:

- e - numer prętowego cienkościennego elementu skończonego,
- i - numer stężenia,
- i - numer źródła wzbudzenia obrotowego w r -tej bryle sztywnej,
- j - numer węzła struktury prętowej,
- k - numer węzła struktury prętowej,
- r - numer bryły sztywnej.

b) liczebność zbiorów i podzbiorów:

- n_p - liczba prętów głównych, tj. prętowych cienkościennych elementów skończonych, tworzących ustrój nośny,
- n_s - liczba prętów drugorzędnych, tj. liczba stężeń,
- n_b - liczba brył sztywnych,
- n_{er} - liczba elementów sprężysto-tłumiących, łączących r -tą bryłę sztywną z ustrojem nośnym,
- n_{or} - liczba źródeł wzbudzenia obrotowego (liczba sił wirujących) w r -tej bryle sztywnej,
- n - liczba dynamicznych współrzędnych uogólnionych Lagrange'a w układzie,
- n_u - liczba współrzędnych uogólnionych przyporządkowanych ustrojowi nośnemu,
- n_m - liczba współrzędnych uogólnionych przyporządkowanych maszynom,
- n_w - liczba węzłów struktury prętowej po dyskretyzacji,
- n_{wp} - liczba węzłów podporowych,
- n_{wd} - liczba węzłów z możliwością deplanacji w kierunku osi x_0 , y_0 lub z_0 ,
- n_{wb} - liczba węzłów z blokadą deplanacji,

c) zbiory i podzbiory współrzędnych uogólnionych i lokalnych:

- $\mathbf{q} = \text{col}(q_1, q_2, \dots, q_n) = \text{col}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_m)$ - zbiór współrzędnych uogólnionych Lagrange'a układu prętowo-bryłowego,
- $\mathbf{q}_u = \text{col}(q_1, q_2, \dots, q_{n_u})$ - podzbiór współrzędnych $\mathbf{q}$ odpowiadający układowi prętowemu,
- $\mathbf{q}_m = \text{col}(q_{n_u+1}, q_{n_u+2}, \dots, q_n)$ - podzbiór współrzędnych $\mathbf{q}$ odpowiadający zbiorowi brył sztywnych, modelujących maszyny ($\dim \mathbf{q}_m = n_m$),
- $\mathbf{q}_j = \text{col}(q_1^j, q_2^j, \dots, q_7^j)$ - podzbiór współrzędnych $\mathbf{q}_u$ w węźle nr j ,
- $\mathbf{q}_k = \text{col}(q_1^k, q_2^k, \dots, q_7^k)$ - podzbiór współrzędnych $\mathbf{q}_u$ w węźle nr k ,
- $\mathbf{q}_r = \text{col}(q_1^r, q_2^r, \dots, q_6^r)$ - podzbiór współrzędnych $\mathbf{q}_m$ odpowiadający bryle sztywnej nr r ,

$\mathbf{q}_e = \text{col}(q_1^e, q_2^e, \dots, q_{14}^e)$ - zbiór współrzędnych lokalnych prętowego cienkościennego elementu skończonego.

d) oznaczenia inne:

ϑ - czas opóźnienia sprężystego stali [s],

$\check{\mathbf{q}}$ - podzbiór współrzędnych uogólnionych.

Zachodzą związki (*por.* wzór (5.1)):

$$n_u = 6 n_{wb} + 7 n_{wd}, \quad n_m = 6 n_b. \quad (5.47)$$

W punktach 5.2-5.5 wyprowadzono wzory (5.11, 5.23, 5.27, 5.29, 5.42, 5.45), określające energię potencjalną i kinetyczną elementów układu oraz pracę wirtualną zewnętrznych sił czynnych. Do elementów tych należą: pręty główne, pręty drugorzędne, bryły sztywne, elementy sprężysto-tłumiące.

Łączna energia potencjalna układu wynosi (*por.* wzory (5.11, 5.27, 5.45)):

$$\begin{aligned} E_p &= \sum_{e=1}^{n_p} E_p^e + \sum_{i=1}^{n_s} E_p^i + \sum_{r=1}^{n_b} \sum_{j'=1}^{n_{er}} E_p^{rj'} = \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{q}_e^T (\mathbf{K}_e^I + \mathbf{K}_e^{II}) \mathbf{q}_e + \sum_{i=1}^{n_s} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i & -\mathbf{K}_i \\ -\mathbf{K}_i & \mathbf{K}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=1}^{n_b} \sum_{j'=1}^{n_{er}} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jr} \\ \mathbf{K}_{rj} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_r \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

gdzie $j=j(j')$, natomiast

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^I + \mathbf{K}^{II}, \quad (5.49)$$

jest poszukiwaną macierzą sztywności układu. Macierz $\mathbf{K}^I$ jest macierzą sztywności układu według teorii I rzędu. Macierz $\mathbf{K}^{II}$ jest dodatkową macierzą sztywności układu według teorii II rzędu, określoną przez macierze $\mathbf{K}_e^I$, $e=1,2,\dots,n_p$.

Łączna energia kinetyczna układu wynosi (*por.* wzory (5.11, 5.23)):

$$E_k = \sum_{e=1}^{n_p} E_k^e + \sum_{r=1}^{n_b} E_k^r = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{e=1}^{n_p} \dot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{B}_e \dot{\mathbf{q}}_e + \sum_{r=1}^{n_b} \dot{\mathbf{q}}_r^T \mathbf{B}_r \dot{\mathbf{q}}_r \right\} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}, \quad (5.50)$$

gdzie $\mathbf{B}$ jest poszukiwaną macierzą bezwładności układu.

Zgodnie z założeniami stalowa konstrukcja nośna ma właściwości tłumiące zgodne z modelem Voigta. Moc tłumienia drgań w układzie prętowo-bryłowym, ze sprężysto-tłumiącym zawieszeniem brył, wyraża się zatem wzorem (*por.* wzory (5.11, 5.29)):

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{e=1}^{n_p} \mathfrak{G} \dot{E}_p^e(\mathbf{K}_e^I) + \sum_{r=1}^{n_b} \sum_{j'=1}^{n_{er}} \Phi^{rj} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{e=1}^{n_p} \dot{\mathbf{q}}_e^T (\mathfrak{G} \mathbf{K}_e^I) \dot{\mathbf{q}}_e + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^{n_b} \sum_{j'=1}^{n_{er}} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_j \\ \dot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{jj} & \mathbf{C}_{jr} \\ \mathbf{C}_{rj} & \mathbf{C}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_j \\ \dot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

gdzie $\mathbf{C}$ jest poszukiwaną macierzą tłumienia układu, a $j=j^*$.

Praca wirtualna zewnętrznych sił wzbudzających drgania wynosi (*por.* wzory (5.12)):

$$L = \sum_{r=1}^{n_b} \sum_{i=1}^{n_{or}} L^{ir} = \sum_{r=1}^{n_b} \sum_{i=1}^{n_{or}} \mathbf{q}_r^T \mathbf{F}_{ir} = \sum_{r=1}^{n_b} \sum_{i=1}^{n_{or}} \mathbf{q}_r^T (\mathbf{F}_s^{ir} \sin \bar{\omega} t + \mathbf{F}_c^{ir} \cos \bar{\omega} t) = \mathbf{q}^T \mathbf{F}, \quad (5.52)$$

gdzie

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_s \sin \bar{\omega} t + \mathbf{F}_c \cos \bar{\omega} t \quad (5.53)$$

jest poszukiwanym wektorem uogólnionych obciążeń układu.

Wyznaczenie macierzy $\mathbf{K}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ oraz wektora $\mathbf{F}(t)$ nazywa się agregacją układu. W literaturze agregację w zakresie prętowego ustroju nośnego wykonuje się dwoma sposobami. W sposobie pierwszym występują następujące etapy:

1) transformacja zbioru współrzędnych $\mathbf{q}$ na współrzędne lokalne $\mathbf{q}_e$:

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{q}, \quad \dim \mathbf{A}_e = 14 * n, \quad (5.54)$$

2) wprowadzenie transformacji (5.54) do odpowiedniej sumy, np.:

$$\sum \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{q}^T (\sum \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e) \mathbf{q}, \quad (5.55)$$

3) sumowanie macierzy o rozmiarze $n * n$ we wzorze (5.55) i in.

W sposobie drugim występują następujące etapy:

1) transformacja podzbioru współrzędnych uogólnionych $\check{\mathbf{q}}$, obejmującego dwa węzły struktury, na współrzędne lokalne $\mathbf{q}_e$:

$$\mathbf{q}_e = \check{\mathbf{A}}_e \check{\mathbf{q}}, \quad \dim \check{\mathbf{A}}_e = 14 * 14 \quad (5.56)$$

2) wprowadzenie transformacji (5.56) do odpowiedniej sumy, np.:

$$\sum \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \sum \check{\mathbf{q}}^T \left(\check{\mathbf{A}}_e^T \mathbf{K}_e \check{\mathbf{A}}_e \right) \check{\mathbf{q}} = \sum \check{\mathbf{q}}^T \check{\mathbf{K}}_e \check{\mathbf{q}}, \quad (5.57)$$

$$\check{\mathbf{K}}_e = \check{\mathbf{A}}_e^T \mathbf{K}_e \check{\mathbf{A}}_e, \quad \dim \check{\mathbf{K}}_e = 14 * 14,$$

3) dekompozycja macierzy $\check{\mathbf{K}}_e$ z uwzględnieniem numerów współrzędnych uogólnionych występujących w wektorze $\check{\mathbf{q}}$.

Sposób drugi jest wielokrotnie szybszy i wykorzystuje mniej pamięci operacyjnej komputera.

W niniejszej rozprawie zastosowano sposób drugi. Poniżej sformułowano algorytm automatycznej agregacji układu prętowo-bryłowego, z wykorzystaniem warunków ortogonalności układu.

Jako dane wejściowe do programu wprowadza się m.in. n_{wp} , n_{wd} , n_{wb} , n_b . Preprocesor liczy m.in. wartości n_u , n_m , n , z uwzględnieniem wzorów (5.47). Węzły układu prętowego są ponumerowane w następującej kolejności:

- 1) węzły podporowe,
- 2) węzły z blokadą deplanacji,
- 3) węzły z możliwością deplanacji w kierunku osi x_0 , y_0 lub z_0 .

Przy zagęszczaniu podziału układu na elementy skończone zmienia się tylko liczba węzłów z możliwością deplanacji. Preprocesor tworzy macierz NQU numerów współrzędnych uogólnionych przyporządkowanych układowi prętowemu. Przypadek $n_{wp}=2$, $n_{wb}=3$, $n_{wd}=4$ zilustrowano w tabeli 5.1.

Tabela 5.1

Nr lokalny ($\mathbf{q}^j$ lub $\mathbf{q}^k$)	Nr węzła (j lub k)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	7	13	19	26	33	40
2	0	0	2	8	14	20	27	34	41
3	0	0	3	9	15	21	28	35	42
4	0	0	4	10	16	22	29	36	43
5	0	0	5	11	17	23	31	37	44
6	0	0	6	12	18	24	31	38	45
7	0	0	0	0	0	25	32	39	46

Algorytm generowania numerów współrzędnych q_i w węzłach układu prętowego w języku PASCAL ma postać:

```
{generowanie wektora qu}
k:=0;
for j:= 1 to nwp do for i:= 1 to 7 do NQU[i,j]:=0;
for j:=nwp+1 to nwpb do for i:=1 to 7 do
```

if $i < 7$ then begin $k := k + 1$; $NQU[i, j] := k$; end

else $NQU[i, j] := 0$;

for $j := nwpb + 1$ to $nwpbd$ do for $i := 1$ to 7 do

begin $k := k + 1$; $NQU[i, j] := k$; end;

przy czym wprowadzono oznaczenia:

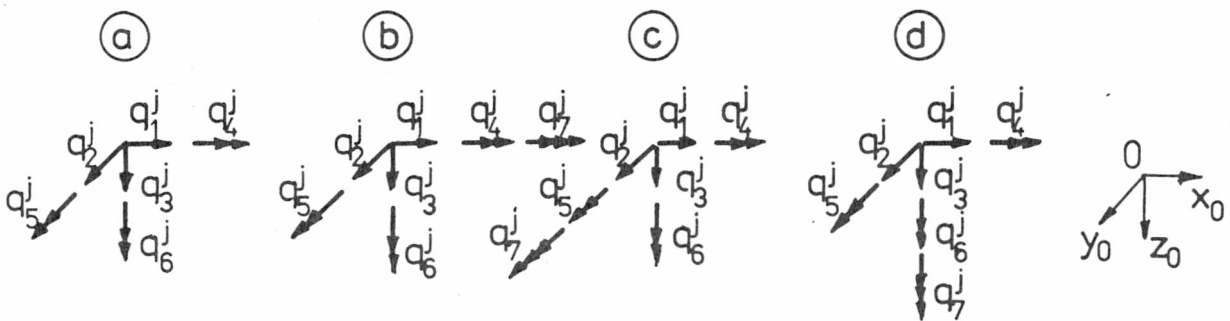
$nwp = n_{wp}$, $nwb = n_{wb}$, $nwd = n_{wd}$, $nwpb = nwp + nwb$, $nwpbd = nwp + nwb + nwd$.

Numer współrzędnej równy 0 oznacza brak współrzędnej, wynikający z ograniczeń geometrycznych.

Podzbiory współrzędnych uogólnionych w poszczególnych węzłach są przyjęte zgodnie z rys. 5.7.

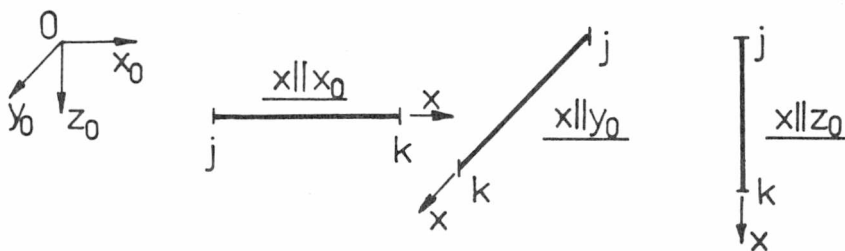
Przypadek "a" odpowiada węzłowi z blokadą deplanacji, natomiast przypadki "b,c,d" odpowiadają

węzłom z deplanacją odpowiednio w kierunku osi x_0 , y_0 , z_0 .



Rys.5.7

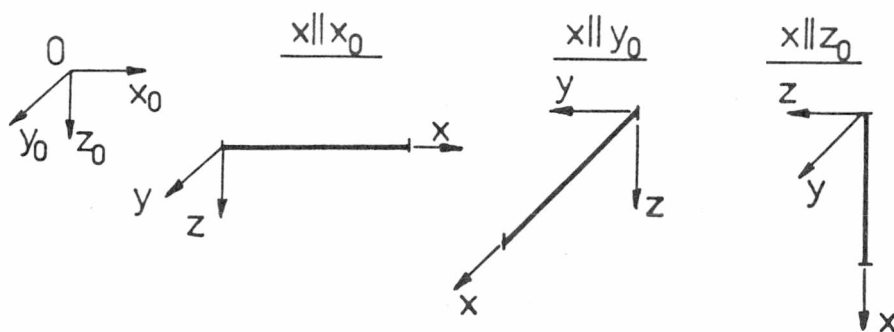
Jako dane wejściowe do programu wprowadza się również numery węzłów j , k , deklarujące położenie i orientację prętów głównych. Węzeł j odpowiada przekrojowi początkowemu pręta, a węzeł k - przekrojowi końcowemu. Przyporządkowanie numerów j , k poszczególnym prętom jest takie, że orientacja prętów jest zawsze zgodna ze zwrotem osi x_0 , y_0 lub z_0 , co zilustrowano na rys. 5.8. Kolejność prętów głównych jest dowolna.



Rys.5.8

W każdym z wariantów pokazanych na rys. 5.8 możliwe są cztery warianty lokalizacji osi głównych centralnych y , z przekroju poprzecznego pręta układu nośnego. W celu zmniejszenia

liczby wariantów wybrano położenia osi y, z pokazane na rys. 5.9. W wariancie $x \parallel x_0$ możliwa jest deplanacja w kierunku osi x_0 . Podobnie w wariancie $x \parallel y_0$ możliwa jest deplanacja w kierunku osi y_0 , a w wariancie $x \parallel z_0$ - deplanacja w kierunku osi z_0 .



Rys.5.9

Podzbiór współrzędnych $\check{q}$, występujących w transformacji (5.56) jest określony wzorem:

$$\check{q} = \text{col} (q_j, q_k) \quad (5.58)$$

przy czym wektory q_j, q_k są generowane z uwzględnieniem macierzy NQU. Algorytm generowania wektora $\check{q}$ oraz wektora NQH, zawierającego numery współrzędnych występujących w $\check{q}$, jest następujący:

{generowanie wektorów q_h i NQH - część pierwsza agregacji}

for i:=1 to 7 do if NQU[i,j]>0 then

begin $q_h[i]:=q[NQU[i,j]]$; $NQH[i]:=NQU[i,j]$; end

else begin $q_h[i]:=0$; $NQH[i]:=0$; end;

for i:=1 to 7 do if NQU[i,k]>0 then

begin $q_h[7+i]:=q[NQU[i,k]]$; $NQH[7+i]:=NQU[i,k]$; end

else begin $q_h[7+i]:=0$; $NQH[7+i]:=0$; end;

przy czym oznaczono $q_h=\check{q}$. W powyższym algorytmie numery j, k odpowiadają elementowi skończonemu nr e .

W przyjętych wariantach lokalizacji osi lokalnych x, y, z macierz transformacji współrzędnych $\check{q}$ na q_e ma postać (vide rys. 5.1, 5.7, 5.9):


```

B[i1,j1] :=B[i1,j1] + BE[i,j];
C[i1,j1] :=C[i1,j1] + CE[i,j];
end;

```

```

end;

```

Dane wejściowe do programu stanowią również numery j, k węzłów układu prętowego, deklarujące położenie stężeń. Algorytm generowania wektora NQH, zawierającego numery współrzędnych występujących w węzłach j, k , jest analogiczny jak w przypadku pierwszej części agregacji. Część druga agregacji, obejmująca stężenia, ma zatem postać:

```

{algorytm agregacji - część druga}
for i:=1 to ns do
begin
    {odczyt numerów j, k przyporządkowanych i-temu stężeniu}
    ...
    {wyznaczenia macierzy  $KS = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i & -\mathbf{K}_i \\ -\mathbf{K}_i & \mathbf{K}_i \end{bmatrix}$ }
    ...
    {generowanie wektora NQH - część druga agregacji}
    ...
    for j:=1 to 14 do for k:=1 to 14 do
    if NQH[j]>0 and NQH[k]>0 then
    begin
        j1:=NQH[j]; k1:=NQH[k];
        K1[j1,k1]:=K1[j1,k1]+KS[j,k];
    end;
    end;
end;

```

Kolejne dane wejściowe do programu stanowią parametry $n_b, n_e, r = 1, 2, \dots, n_b$ oraz numery węzłów j , w których występują połączenia sprężysto-tłumiące kolejnych brył sztywnych z prętową konstrukcją nośną. Preprocesor tworzy macierz NQM numerów współrzędnych uogólnionych przyporządkowanych zbiorowi brył sztywnych. Przypadek $n_u=46, n_m=6n_b=6*3=18$ zilustrowano w tabeli 5.2.

Tabela 5.2

Nr lokalny q_i	Nr bryły sztywnej r		
	1	2	3
1	47	53	59
2	48	54	60
3	49	55	61
4	50	56	62
5	51	57	63
6	52	58	64

Algorytm generowania współrzędnych q_i tworzących wektor q_m ma postać:

{generowanie wektora q_m }

k:=nu;

for j:=1 to nb do for i:=1 to 6 do begin k:=k+1; NQM[i,j]:=k; end;

przy czym $nu=n_u$, $nb=n_b$. Podzbiory współrzędnych uogólnionych przyporządkowane kolejnym bryłom są rozumiane zgodnie z rys. 5.2.

Mając wygenerowane macierze NQU, NQM, można określić wektor NQH zawierający numery współrzędnych występujących w wektorze $\check{q} = \text{col}(q_j, q_r)$. Odpowiedni algorytm dla danych numerów j, r ma postać:

{generowanie wektora NQH - trzecia część agregacji}

for i:=1 to 7 do

if NQU[i,j]>0 then NQH[i]:=NQU[i,j] else NQH[i]:=0;

for i:=1 to 6 do NQH[7+i]:=NQM[i,r];

Część trzecia agregacji układu, obejmująca maszyny łącznie z elementami sprężysto-tłumiącymi, może być zapisana w postaci:

{algorytm agregacji - część trzecia}

for i:=1 to nb do

begin

for i:=1 to 6 do begin i1:= NQM[i,r]; B[i1,i1]:=Br[i]; end;

for jp:=1 to ner[r] do

begin

{odczyt $j=j(p)$ }

{generowanie wektora NQH - część trzecia agregacji}

...

{wyznaczenie macierzy $K_{st} = \begin{bmatrix} K_{jj} & K_{jr} \\ K_{rj} & K_{rr} \end{bmatrix}$, $C_{st} = \begin{bmatrix} C_{jj} & C_{jr} \\ C_{rj} & C_{rr} \end{bmatrix}$, }

```

for i:=1 to 13 do for j:=1 to 13 do
if NQH[i]>0 and NQH[j]>0 then
begin
    i1:=NQH[i]; j1:=NQH[j];
    K1[i1,j1]:=K1[i1,j1]+Kst[i,j];
    C[i1,j1] := C[i1,j1]+Cst[i,j];
end;
end;
end;

```

przy czym: $nb=n_b$, $Br=B_r$, $ner=n_{er}$, $jp=j'$.

Ostatnia część agregacji układu obejmuje wyznaczenie wektorów F_s , F_c . Algorytm komputerowy odpowiadający tej części ma postać:

```

{algorytm agregacji - część czwarta}
for i:=1 to n do begin Fs[i]:=0; Fc[i]:=0; end;
for r:=1 to nb do
if nor[r]>0 then for i:=1 to nor[r] do
begin
    {generowanie wektorów Fsir = Fsir, Fcir = Fcir }
    ...
    for j:=1 to 6 do
    begin
        j1:=NQM[j,r];
        Fs[j1]:= Fs[j1] + Fsir[j];
        Fc[j1]:= Fc[j1] + Fcir[j];
    end;
end;
end;

```

przy czym: $nb=n_b$, $nor=n_{or}$, $Fs=F_s$, $Fc=F_c$.

Przedstawione w niniejszym punkcie rozprawy elementy oprogramowania mają charakter ideowy. W programie komputerowym GROS dokonano m.in. optymalizacji operacji oraz rozwiązano problem dużej liczby stopni swobody układów przestrzennych rozpatrywanego typu.

5.7. Sformułowanie macierzowego równania ruchu układu prętowo-bryłowego oraz opis zagadnień statycznych i dynamicznych

Podstawę sformułowania równań równowagi dynamicznej układu prętowo-bryłowego stanowią równania Lagrange'a drugiego rodzaju, które w zapisie macierzowym mają postać [24]:

$$[\text{grad } E_k(\dot{\mathbf{q}})]^* + \text{grad } \Phi(\dot{\mathbf{q}}) + \text{grad } E_p(\mathbf{q}) = \text{grad } L(\mathbf{q}). \quad (5.62)$$

Po wstawieniu form kwadratowych (5.48, 5.50, 5.51) oraz formy liniowej (5.52) do równań (5.62), otrzymuje się macierzowe równanie ruchu układu prętowo-bryłowego w znanej postaci:

$$\mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}(t), \quad (5.63)$$

gdzie

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^I + \mathbf{K}^{II}, \quad \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_s(\bar{\omega}^2) \sin \bar{\omega} t + \mathbf{F}_c(\bar{\omega}^2) \cos \bar{\omega} t. \quad (5.64)$$

Cechą charakterystyczną układów rozpatrywanego typu jest tzw. tłumienie nieproporcjonalne, przy którym transformacja własna nie rozprzega równań ruchu.

Macierz sztywności $\mathbf{K}^{II}$ może być sformułowana po wyznaczeniu rozkładu statycznych sił osiowych $N_{0,e}$, $e=1,2,\dots,n_p$, w cienkościennych prętach ustroju nośnego. Siły te są wywołane ciężarem własnym fundamentu ramowego i maszyn; można je wyznaczyć według teorii I rzędu. W układzie rzeczywistym siły ciężkości są rozłożone w sposób ciągły. Jeśli podział na elementy skończone jest dostatecznie gęsty, to rozłożony ciężar pręta można zastąpić dwiema siłami skupionymi w węzle początkowym j i końcowym k , przy czym (*vide* rys. 5.10)

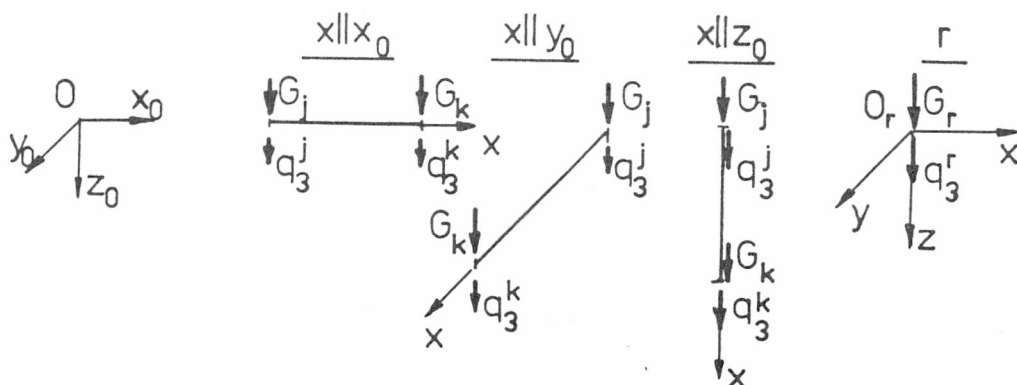
$$G_j = G_k = \frac{1}{2} g \rho F_e l_e, \quad e = 1, 2, \dots, n_p, \quad (5.65)$$

gdzie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ jest przyspieszeniem ziemskim. Ponadto w środkach masy brył sztywnych działają siły ciężkości o wartościach (*vide* rys. 5.10)

$$G_r = M_r g, \quad r = 1, 2, \dots, n_b. \quad (5.66)$$

Praca wirtualna sił ciężkości wynosi

$$L = \sum_{e=1}^{n_p} L^e + \sum_{r=1}^{n_b} L^r = \sum_{e=1}^{n_p} (G_j q_3^j + G_k q_3^k) + \sum_{r=1}^{n_b} G_r q_3^r = \mathbf{q}^T \mathbf{F}_G. \quad (5.67)$$



Rys.5.10

Algorytm generowania wektora $\mathbf{F}_G$ w języku PASCAL ma postać:

```
{generowanie wektora FG}
for i:=1 to n do FG[i]:=0;
for e:=1 to np do
begin
    {generowanie wektora NQH - część pierwsza agregacji}
    ...
    G:=0.5*gz*ro*F[e]*l[e];
    if NQH[3]>0 then FG[NQH[3]]:=FG[NQH[3]]+G;
    if NQH[10]>0 then FG[NQH[10]]:=FG[NQH[10]]+G;
end;
for r:=1 to nb do FG[NQM[3,r]]:=Mr[r]*gz;
```

przy czym $np=n_p$, $nb=n_b$, $gz=g$, $ro=\rho$, $FG=\mathbf{F}_G$, $Mr=M_r$.

Macierzowe równanie równowagi statycznej układu obciążonego siłami ciężkości według teorii I rzędu ma znaną postać:

$$\mathbf{K}^I \mathbf{q} = \mathbf{F}_G \quad (5.68)$$

a stąd

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_G = (\mathbf{K}^I)^{-1} \mathbf{F}_G. \quad (5.69)$$

Wektor współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}_G$ pozwala na wyznaczenie statycznych sił osiowych w prętach głównych, zgodnie ze wzorami (5.14, 5.56, 5.58):

$$\mathbf{q}_G, NQU \Rightarrow \check{\mathbf{q}} = \text{col}(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_k),$$

$$\mathbf{q}_e = \check{\mathbf{A}}_e \check{\mathbf{q}} \Rightarrow q_1^e, q_2^e, \quad (5.70)$$

$$N_{0,e} = \left(\tilde{E}F_e / l_e \right) (q_2^e - q_1^e), \quad e = 1, 2, \dots, n_p \Rightarrow \mathbf{K}^{\text{II}},$$

przy czym $F=F_e, l=l_e$ są parametrami e -tego pręta głównego.

W warunkach dynamicznych poziomem odniesienia jest stan równowagi statycznej ; warunki początkowe odpowiadające równaniu (5.63) mają wówczas postać $\mathbf{q}(0)=\mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}(0)=\mathbf{0}$. W praktyce w fundamentach ramowych pod maszyny obrotowe analizę dynamiczną ogranicza się do zagadnienia własnego i drgań ustalonych wymuszonych harmonicznie.

Zagadnienie własne układu definiuje równanie algebraiczne

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{B})\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (5.71)$$

którego rozwiązaniem jest widmo częstości własnych $\{\omega\}$ i macierz własna $\mathbf{R}$:

$$\{\omega\} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \quad \{\mathbf{f}\} = \{\omega / 2\pi\} = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_n), \quad (5.72)$$

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n].$$

Symbolem $\{\mathbf{f}\}$ oznaczono widmo częstotliwości własnych, mierzonych w Hz. Każdemu wektorowi własnemu odpowiada forma drgań własnych, którą można wyznaczyć na podstawie wzorów (5.2, 5.3, 5.4, 5.56, 5.58). Formie własnej nr i układu nośnego odpowiada układ wzorów:

$$\mathbf{q} = \mathbf{r}_i, \quad NQU \Rightarrow \check{\mathbf{q}} = \text{col}(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_k), \quad (5.73)$$

$$\mathbf{q}_e = \check{\mathbf{A}}_e \check{\mathbf{q}} \Rightarrow u(\xi_i), v(\xi_i), w(\xi_i), \phi(\xi_i), \quad \xi_i = i / \tilde{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \tilde{n}, \quad e = 1, 2, \dots, n_p.$$

Główne współczynniki tłumienia, $\gamma_i, \quad i=1,2,\dots,n$ ($\gamma_{i,cr}=1$) w układzie z tłumieniem nieproporcjonalnym wyznaczamy z wzorów [20]:

$$\{\mathbf{b}_0\} = \mathbf{R}^T \mathbf{B} \mathbf{R}, \quad \{\mathbf{k}_0\} = \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R}, \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{R}^T \mathbf{C} \mathbf{R},$$

$$\{\mathbf{c}_0\} = \text{diag}(c_{0,1}, c_{0,2}, \dots, c_{0,n}), \quad c_{0,i} = [\mathbf{C}_0]_{ii}, \quad (5.74)$$

$$\{\gamma\} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \{\mathbf{c}_0 / 2 \sqrt{\mathbf{k}_0 \mathbf{b}_0}\}.$$

W czasie rozbiegu (rozruchu) maszyn wspólna częstość wzbudzenia zmienia się w przedziale $\bar{\omega} \in [0, \bar{\omega}_e]$, gdzie $\bar{\omega}_e$ jest prędkością obrotową w stanie eksploatacyjnym (reżimie pracy). W czasie wybiegu maszyn $\bar{\omega} \in [\bar{\omega}_e, 0]$. W czasie rozbiegu lub wybiegu maszyn układ może przechodzić przez wiele stref rezonansowych. W układzie rzeczywistym przyspieszenie fazy jest różne od zera, jednak ze względów bezpieczeństwa wpływ przyspieszenia fazy pomija się. Rezonanse przejściowe są wówczas traktowane jako rezonanse quasi-stacjonarne.

Odpowiedź ustalona układu dynamicznego opisanego równaniem (5.63) jest określona przez znane wzory, m.in. [24]:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_s(\bar{\omega}) \sin \bar{\omega}t + \mathbf{q}_c(\bar{\omega}) \cos \bar{\omega}t, \quad (5.75)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_s(\bar{\omega}) \\ \mathbf{q}_c(\bar{\omega}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K} - \bar{\omega}^2 \mathbf{B}) & -\bar{\omega} \mathbf{C} \\ \bar{\omega} \mathbf{C} & (\mathbf{K} - \bar{\omega}^2 \mathbf{B}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s(\bar{\omega}) \\ \mathbf{F}_c(\bar{\omega}) \end{bmatrix}.$$

Współrzędne uogólnione $\mathbf{q}(t)$ mogą być przekształcone na dowolne wielkości wynikowe $U_i(t)$, $i=1,2,\dots,n_u$, w tym na przemieszczenia, naprężenia normalne i styczne w prętach głównych, przy czym

$$U_i(t) = U_{is}(\bar{\omega}) \sin \bar{\omega}t + U_{ic}(\bar{\omega}) \cos \bar{\omega}t, \quad (5.76)$$

W analizie drgań ustalonych układu wykorzystuje się charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe

$$A_{U_i}(\bar{f}) = \sqrt{U_{is}^2(\bar{\omega}) + U_{ic}^2(\bar{\omega})}, \quad (5.77)$$

gdzie $\bar{f} = \bar{\omega} / 2\pi \in [\bar{f}_d, \bar{f}_e]$ jest częstością wzbudzenia. Wartość $\bar{f}_d \ll f_1$ jest dolną wartością częstości $\bar{f}$, od której rozpoczyna się analizę drgań ustalonych, natomiast $\bar{f}_e = \bar{\omega}_e / 2\pi$.

6. ZASTOSOWANIE BIERNYCH ABSORBERÓW DYNAMICZNYCH DO REDUKCJI DRGAŃ USTALONYCH UKŁADU

6.1. Opis metody redukcji drgań

Stalowe fundamenty ramowe pod maszyny obrotowe są złożonymi, ciągłymi układami przestrzennymi. Technicznie dokładną odpowiedź dynamiczną takiego układu na wymuszenie harmoniczne można uzyskać, przyjmując dostatecznie gęsty podział układu na elementy skończone. W czasie rozbiegu lub wybiegu maszyn układ może przechodzić przez szereg stref rezonansowych. Ze względu na małe tłumienie drgań w konstrukcjach stalowych niektóre piki rezonansowe mogą osiągnąć znaczne wartości i powodować niespełnienie warunku nośności lub użytkowania.

Możliwości redukcji rezonansowych drgań ustalonych układu za pomocą wibroizolacji czynnej są znacznie ograniczone. Wibroizolacja czynna pozwala na zmniejszenie drgań ustalonych tylko w otoczeniu jednego piku rezonansowego. Wibroizolacja nie może być zbyt miękka ze względu na warunek nośności lub użytkowania. Ponadto występują trudności techniczne w wymianie elementów wibroizolacji.

Jedną z nowoczesnych i bardzo skutecznych metod eliminacji nadmiernych drgań w złożonych układach dyskretnych jest zastosowanie konwencjonalnych (biernych) absorberów dynamicznych. Każdy absorber składa się z niewielkiej masy drgającej m_a , układu sprężyn o sztywności k_a i tłumika wiskotycznego o charakterystyce c_a . Modelem fizycznym absorbera jest układ o jednym dynamicznym stopniu swobody. Różne ujęcia metody redukcji drgań układów dyskretnych za pomocą biernych absorberów dynamicznych są prezentowane m.in. w pracach [12,13,18,19,20,36,45,46]. Niektóre koncepcje sprowadzają się do zastąpienia układu dyskretnego układem o jednym stopniu swobody m.in.[12,13,36,45,46], inne zaś sprowadzają się do optymalizacji globalnej w układzie zmodyfikowanym m.in.[18,19]. Częściowo nowe i bardzo ogólne sformułowanie metody podał Klasztorny w pracy [20], będącej rozwinięciem pracy doktorskiej Bagalaty'ego [48]. Metoda redukcji drgań ustalonych w wersji podanej w pracy [20] została zastosowana w niniejszej rozprawie.

Idea metody redukcji drgań ustalonych konstrukcji słabo tłumionych za pomocą biernych absorberów dynamicznych jest następująca. Układ fundament ramowy - maszyny obrotowe, zwany dalej konstrukcją podstawową, jest układem o dowolnym rozkładzie masy, sztywności i tłumienia. Modelem fizycznym konstrukcji podstawowej jest liniowy układ dyskretny. Odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne o częstotliwości wzbudzenia $\bar{f}$ zmieniającej się w przedziale $[\bar{f}_d, \bar{f}_e]$ jest określona przez zbiór wielkości wynikowych $U_j, j=1,2,...,n_U$ (przemieszczenia, naprężenia i in.). Charakterystyki amplitudowo - częstotliwościowe odpowiedzi układu, $A_{U_j}(\bar{f}), j=1,2,...,n_U$, mogą zawierać szereg ostrych pików rezonansowych. Piki te są redukowane poniżej poziomu

dopuszczalnego za pomocą zbioru biernych absorberów dynamicznych o odpowiednio dobranych parametrach i lokalizacji. W przypadku słabo tłumionej konstrukcji podstawowej wpływ i -tego układu modalnego na odpowiedź dynamiczną w i -tym rezonansie siłowym ($\bar{f} = f_i$) jest dominujący. Jeśli całkowita masa absorberów dynamicznych jest względnie mała, to modyfikacja parametrów modalnych b_{oi} , c_{oi} , k_{oi} , spowodowana przyłożeniem absorberów, jest bardzo mała. W tych okolicznościach optymalizacja globalna może być zastąpiona optymalizacją lokalną kosztem niewielkich strat w redukcji drgań. Każdy modalny absorber dynamiczny jest projektowany niezależnie od pozostałych.

Założmy, że i -ty pik rezonansowy jest redukowany za pomocą j -tego absorbera dynamicznego. Jeśli weźmiemy pod uwagę tylko sprzężenia podstawowe, tj. sprzężenia między j -tym absorberem a i -tym układem modalnym, względem którego absorber jest strojony, to projektowanie j -tego absorbera sprowadza się do układu o dwóch stopniach swobody. W kryterium jakości zakłada się minimalizację przemieszczeń i -tego układu modalnego. Optymalne wartości parametrów zawieszenia j -tego absorbera wyznacza się z tzw. krzywych standardowych, opracowanych w bazie parametrów bezwymiarowych.

Skuteczność j -tego absorbera dynamicznego w redukcji i -tego piku rezonansowego będzie największa, jeśli absorber jest usytuowany w miejscu i kierunku największych przemieszczeń kształtowanych przez i -ty układ modalny. Zwiększając masę drgającą absorbera o kilka procent, można pokryć straty w redukcji drgań, wynikające z optymalizacji lokalnej.

Na podstawie wstępnej analizy charakterystyk amplitudowo -częstotliwościowych odpowiedzi układu projektant określa, które piki rezonansowe wymagają redukcji i w jakim stopniu. Po przyjęciu masy i lokalizacji absorberów dynamicznych, można określić parametry optymalnych zawieszeń absorberów. Dany absorber dynamiczny, redukujący wybrany pik rezonansowy, redukuje również, ale słabiej, sąsiednie piki rezonansowe, zwłaszcza w przypadku zagęszczonego widma własnego konstrukcji podstawowej. Pozwala to na zmniejszenie liczby absorberów dynamicznych pokrywających całe pasmo częstotliwości wzbudzenia.

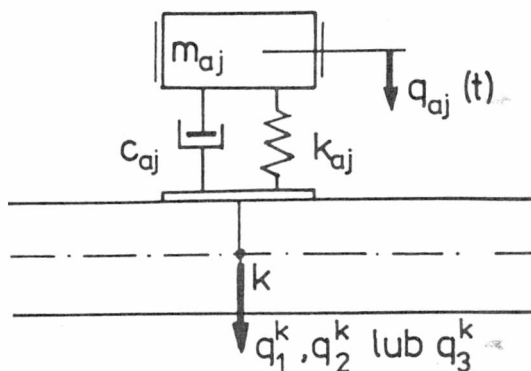
Skuteczność zbioru absorberów dynamicznych w ograniczeniu ustalonej odpowiedzi konstrukcji podstawowej jest kontrolowana w układzie zmodyfikowanym, tj. w konstrukcji podstawowej wyposażonej w absorbery dynamiczne, przy czym bierze się pod uwagę wszystkie sprzężenia pominięte na etapie projektowania absorberów.

6.2. Projektowanie absorberów dynamicznych o optymalnych parametrach

W projektowaniu absorberów dynamicznych przyjęto następujące założenia:

- 1) Charakterystyki zawieszeń absorberów są liniowe.
- 2) Absorbery są względnie lekkie. Łączna masa absorberów nie przekracza 5% masy konstrukcji podstawowej.
- 3) Wymiary i konstrukcja absorbera są takie, że można przyjąć model sztywnego zamocowania podstawy absorbera w wybranym węźle struktury prętowej.
- 4) Absorber spełnia warunek ortogonalności, tzn. masa absorbera drga w kierunku osi x_0, y_0 lub z_0 globalnego układu współrzędnych.
- 5) Modelem absorbera dynamicznego jest oscylator lepko-sprężysty, pokazany na rys. 6.1.

Teorię projektowania biernych absorberów dynamicznych o optymalnych parametrach zaczerpnięto z pracy [20], dostosowując ją do wyżej wymienionych założeń.



Rys. 6.1

Po wykonaniu transformacji własnej

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} \mathbf{q}_0 \quad (6.1)$$

na macierzowym równaniu ruchu (5.63) otrzymuje się

$$\{\mathbf{b}_0\} \ddot{\mathbf{q}}_0 + \{\mathbf{c}_0\} \dot{\mathbf{q}}_0 + \{\mathbf{k}_0\} \mathbf{q}_0 = \mathbf{F}_0(t), \quad (6.2)$$

gdzie $\mathbf{q}_0 = \text{col}(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})$ jest wektorem współrzędnych modalnych (głównych) oraz

$$\mathbf{F}_0(t) = \mathbf{R}^T \mathbf{F}(t). \quad (6.3)$$

W równaniu (6.2) pominięto drugorzędne sprzężenie dysypacyjne, określone przez niezerowe elementy pozadiagonalne w macierzy $\mathbf{C}_0$, nieistotne na etapie projektowania absorberów.

Rozważmy i -ty pik rezonansowy w charakterystykach $A_{U_l}(f)$, $l=1,2,\dots,n_U$, który ma być zredukowany za pomocą j -tego absorbera dynamicznego. Projektant, na podstawie kształtu i -tej formy własnej konstrukcji podstawowej, określa lokalizację i kierunek j -tego absorbera, tzn. określa numer węzła k struktury prętowej oraz oś układu globalnego, do której przemieszczenie q_{aj} jest równoległe.

Drgania j -tego absorbera są wymuszone kinematycznie przez ruch podstawy absorbera, równy

$$\begin{aligned} \text{a) } W_j(t) &= q_1^k = \mathbf{h}_j^T \mathbf{q} \quad \text{dla } q_{aj} \parallel x_0, \\ \text{b) } W_j(t) &= q_2^k = \mathbf{h}_j^T \mathbf{q} \quad \text{dla } q_{aj} \parallel y_0, \\ \text{c) } W_j(t) &= q_3^k = \mathbf{h}_j^T \mathbf{q} \quad \text{dla } q_{aj} \parallel z_0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

gdzie $\mathbf{h}_j = \text{col}(0,0,\dots,1,\dots)$ jest wersorem w przestrzeni n -wymiarowej. Element równy 1 jest na pozycji $\text{NQU}[1,k]$, $\text{NQU}[2,k]$, $\text{NQU}[3,k]$ odpowiednio w przypadku a, b, c. W i -tym rezonansie siłowym wpływ i -tej współrzędnej modalnej jest dominujący, a zatem

$$W_j = \mathbf{h}_j^T \mathbf{q} = \mathbf{h}_j^T \mathbf{R} \mathbf{q}_0 \approx \mathbf{h}_j^T \mathbf{r}_i q_{0i} = d_j q_{0i}, \quad (6.5)$$

gdzie

$$d_j = \mathbf{h}_j^T \mathbf{r}_i \quad (6.6)$$

jest współczynnikiem wpływu, równym odpowiedniej współrzędnej i -tego wektora własnego.

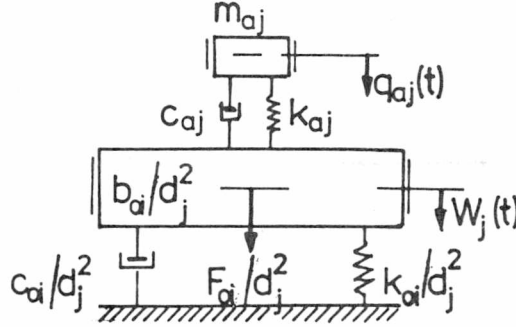
Można wykazać, że drgania układu złożonego z i -tego układu modalnego konstrukcji podstawowej i j -tego absorbera dynamicznego są opisane przez układ dwóch równań różniczkowych o postaci:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} b_{0i}/d_j^2 & 0 \\ 0 & m_{aj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{W}_j \\ \ddot{q}_{aj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_{0i}/d_j^2 + c_{aj}) & -c_{aj} \\ -c_{aj} & c_{aj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{W}_j \\ \dot{q}_{aj} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} (k_{0i}/d_j^2 + k_{aj}) & -k_{aj} \\ -k_{aj} & k_{aj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_j \\ q_{aj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{0i}/d_j \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

gdzie

$$F_{0i}(t) = F_{0i}^s \sin \bar{\omega} t + F_{0i}^c \cos \bar{\omega} t. \quad (6.8)$$

Równanie (6.7) opisuje drgania układu o dwóch stopniach swobody, pokazanego na rys. 6.2. W ten sposób projektowanie j -tego absorbera zostało sprowadzone do zadania Den Hartoga z tłumieniem [8].



Rys.6.2

W celu wyznaczenia tzw. krzywych standardowych równanie (6.7) zostaje sprowadzone do postaci bezwymiarowej, przez pomnożenie go przez czynnik d_j^2 / b_{0i} . Wynik ma postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{W}_j \\ \ddot{q}_{aj} \end{bmatrix} + 2\gamma\omega_i \begin{bmatrix} (1+\beta) & -\beta \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{W}_j \\ \dot{q}_{aj} \end{bmatrix} + \omega_i^2 \begin{bmatrix} (1+\kappa) & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_j \\ q_{aj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{0i} d_j / b_{0i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

przy czym

$$\alpha = \frac{\omega_{aj}}{\omega_i}, \quad \mu = \frac{m_{aj} d_j^2}{b_{0i}}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad \gamma_a = \frac{c_{aj}}{2\sqrt{k_{aj} m_{aj}}}, \quad (6.10)$$

$$\omega_{aj} = \sqrt{k_{aj} / m_{aj}}, \quad \beta = \alpha \mu \gamma_a / \gamma, \quad \kappa = \alpha^2 \mu.$$

Obciążenie układu pokazanego na rys. 6.2 jest zmienne harmonicznie, a zatem drgania ustalone tego układu są określone analitycznie przez znane wzory [24]. Stąd

$$W_j(t) = W_{js} \sin \bar{\omega}t + W_{jc} \cos \bar{\omega}t, \quad (6.11)$$

$$A_{W_j}(\alpha, \gamma_a, \bar{f}) = \sqrt{W_{js}^2 + W_{jc}^2}.$$

Klasyczny warunek optymalizacji lokalnej ma postać

$$\max_{\bar{f}} A_{W_j}(\alpha, \gamma_a, \bar{f}) = \hat{A}_{W_j}(\alpha, \gamma_a) = \min, \quad \bar{f} \in [0.80f_i, 1.05f_i] \quad (6.12)$$

dla danych wartości μ, γ . Miarą skuteczności j -tego absorbera w redukcji przemieszczenia $W_j(t)$ jest współczynnik redukcji drgań

$$\rho(\alpha, \gamma_a) = \hat{A}_{W_j}(\alpha, \gamma_a) / v_r, \quad v_r = 1 / (2\gamma \sqrt{1 - \gamma^2}), \quad (6.13)$$

gdzie v_r jest znanym rezonansowym współczynnikiem dynamicznym w układzie o jednym stopniu swobody [24]. Optymalnym wartościom α_{opt} , $\gamma_{a, opt}$ odpowiada $\rho_{opt} = \rho(\alpha_{opt}, \gamma_{a, opt})$. Optymalne wartości parametrów zawieszenia j -tego absorbera dynamicznego wynoszą (por. wzory (6.10))

$$k_{aj} = (\alpha_{opt} \omega_i)^2 m_{aj}, \quad c_{aj} = 2\gamma_{a, opt} \sqrt{k_{aj} m_{aj}}, \quad (6.14)$$

przy czym

$$m_{aj} = \mu b_{0i} / d_j^2. \quad (6.15)$$

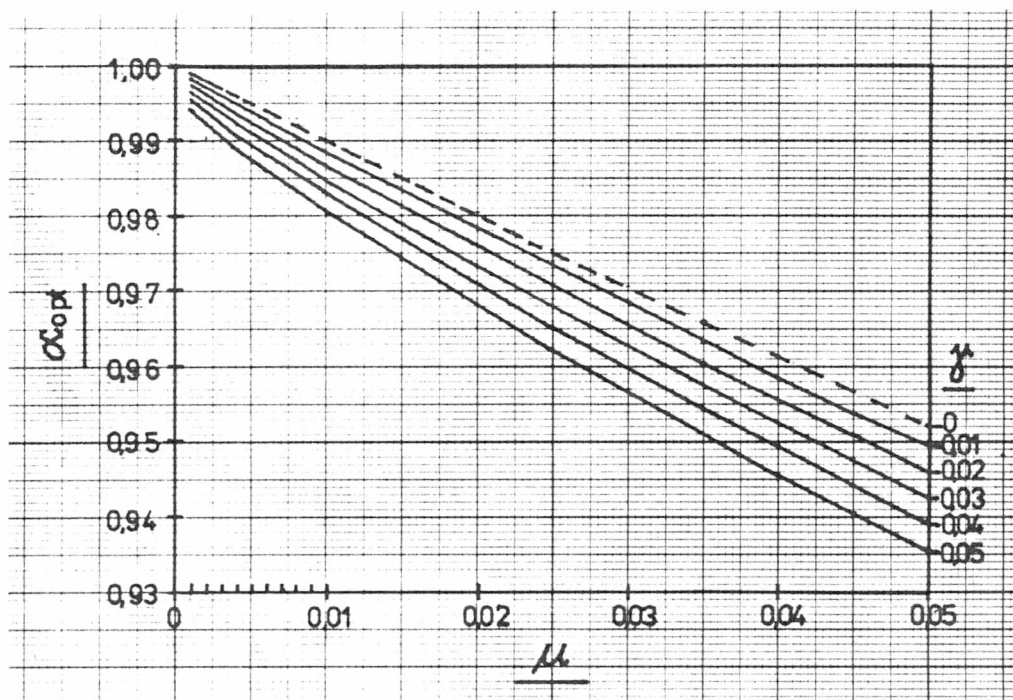
W strefie rezonansowej absorber przechwytuje energię doładowywaną do ustroju. Drgania względne absorbera ulegają wzmocnieniu. Współczynnik wzmocnienia tych drgań jest zdefiniowany wzorem

$$\varphi_{opt} = \hat{A}_{u_{aj}}(\alpha_{opt}, \gamma_{a, opt}) / v_r, \quad (6.16)$$

gdzie $u_{aj} = q_{aj} - W_j$ jest przemieszczeniem względnym j -tego absorbera o optymalnym zawieszeniu. Wielkości występujące we wzorach (6.13) i (6.16) mają analogiczną interpretację.

Wartości α_{opt} , $\gamma_{a, opt}$ można wyznaczyć numerycznie np. metodą bezgradientową. Na rys. 6.3, 6.4 przytoczono za [20] krzywe standardowe $\alpha_{opt}(\mu, \gamma)$, $\gamma_{a, opt}(\mu, \gamma)$, a na rys. 6.5 - współczynnik redukcji $\rho_{opt}(\mu, \gamma)$. Projektant, na podstawie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych

układu niezmodyfikowanego, określa wartość ρ_{opt} w i -tej strefie rezonansowej, odczytuje wartość μ z rys. 6.5 dla $\gamma=\gamma_i$, a następnie wartości α_{opt} , $\gamma_{a, opt}$ z rys. 6.3, 6.4 dla ustalonych μ , γ . Wartości parametrów zawieszenia absorbera nr j są obliczne z wzorów (6.14).



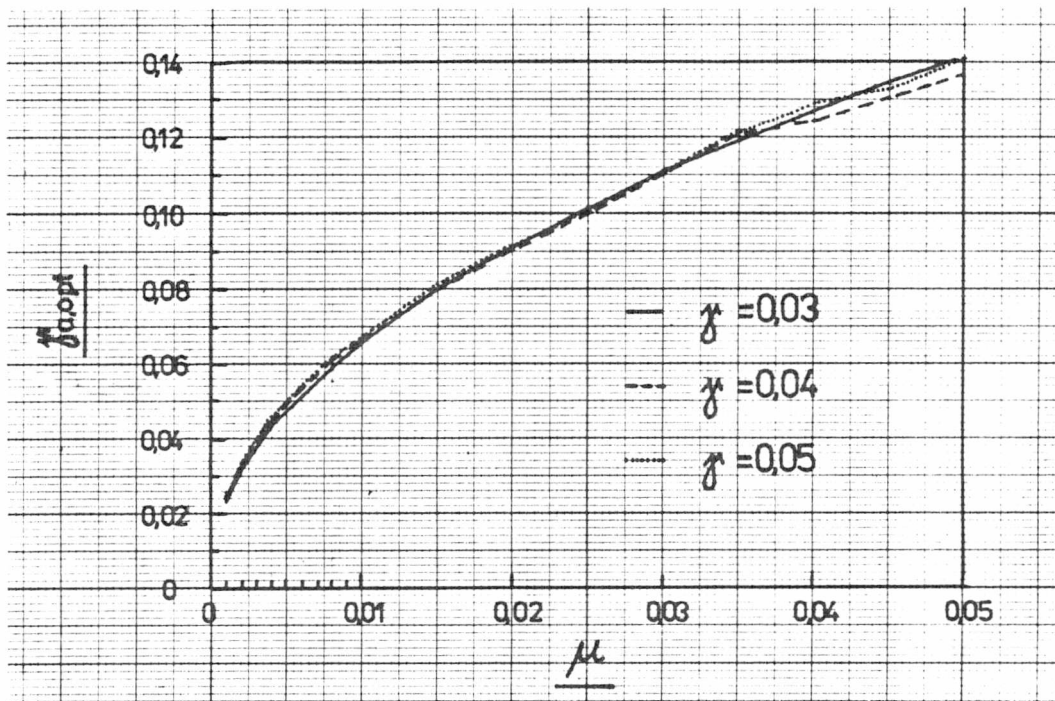
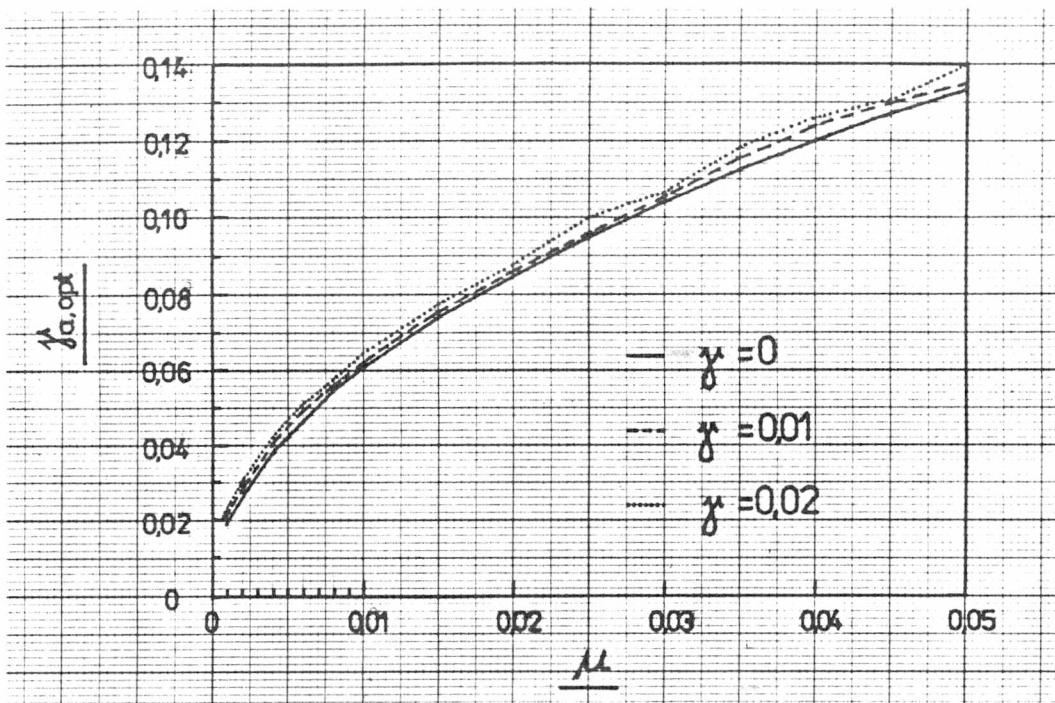
Rys. 6.3

6.3. Macierzowe równanie ruchu układu zmodyfikowanego

W wyniku wstępnej analizy dynamicznej zaprojektowano n_a modalnych absorberów dynamicznych, którym odpowiadają następujące wielkości macierzowe:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_a &= \text{col} (q_{a1}, q_{a2}, \dots, q_{ana}), \\
 \{\mathbf{m}_a\} &= \text{diag} (m_{a1}, m_{a2}, \dots, m_{ana}), \\
 \{\mathbf{k}_a\} &= \text{diag} (k_{a1}, k_{a2}, \dots, k_{ana}), \\
 \{\mathbf{c}_a\} &= \text{diag} (c_{a1}, c_{a2}, \dots, c_{ana}).
 \end{aligned}
 \tag{6.17}$$

Układ zmodyfikowany drga przestrzennie, stąd absorberom dynamicznym przyporządkowana jest dodatkowa energia kinetyczna. Uwzględnimy tylko bezwładność liniową mas m_{aj} w ramach teorii przemieszczeń małych.



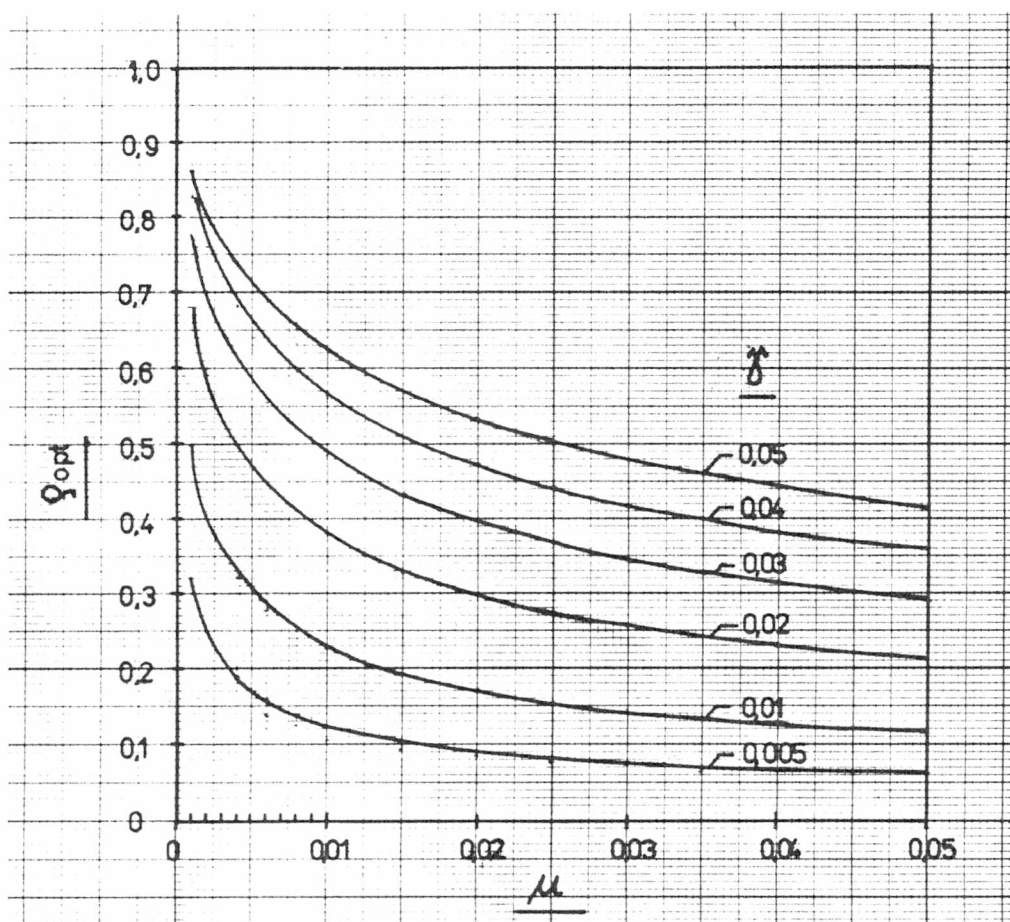
Rys.6.4

Dodatkowa energia kinetyczna wynosi

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_a} m_{aj} \left(\dot{U}_j^2 + \dot{V}_j^2 \right), \quad (6.18)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\text{a) } U_j(t) &= q_2^k, \quad V_j(t) = q_3^k \quad \text{dla } q_{aj} \parallel x_0, \\
\text{b) } U_j(t) &= q_1^k, \quad V_j(t) = q_3^k \quad \text{dla } q_{aj} \parallel y_0, \\
\text{c) } U_j(t) &= q_1^k, \quad V_j(t) = q_2^k \quad \text{dla } q_{aj} \parallel z_0.
\end{aligned}
\tag{6.19}$$



Rys.6.5

Stosując notację macierzową, wzory (6.19) można przepisać w postaci

$$U_j(t) = \mathbf{h}'_j{}^T \mathbf{q}, \quad V_j(t) = \mathbf{h}''_j{}^T \mathbf{q}, \tag{6.20}$$

gdzie $\mathbf{h}'_j$, $\mathbf{h}''_j$ są odpowiednimi wersorami w przestrzeni n -wymiarowej. W wektorze $\mathbf{h}'_j$ element równy 1 jest na pozycji $NQU[2, k]$, $NQU[1, k]$, $NQU[1, k]$, a w wektorze $\mathbf{h}''_j$ - na pozycji $NQU[3, k]$, $NQU[3, k]$, $NQU[2, k]$, odpowiednio w przypadku a, b, c. Po wstawieniu wzorów (6.20) do formuły (6.18) otrzymuje się

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_a \dot{\mathbf{q}}, \tag{6.21}$$

gdzie

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{H}' \{ \mathbf{m}_a \} \mathbf{H}'^T + \mathbf{H}'' \{ \mathbf{m}_a \} \mathbf{H}''^T, \quad (6.22)$$

$$\mathbf{H}' = [\mathbf{h}'_1, \mathbf{h}'_2, \dots, \mathbf{h}'_{n_a}], \quad \mathbf{H}'' = [\mathbf{h}''_1, \mathbf{h}''_2, \dots, \mathbf{h}''_{n_a}].$$

Macierzowe równanie ruchu układu zmodyfikowanego, tj. konstrukcji podstawowej wyposażonej w absorbery dynamiczne, zostało wyprowadzone w pracy [20]. Wynik ma postać:

$$\tilde{\mathbf{B}} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{C}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (6.23)$$

gdzie $\dim \tilde{\mathbf{q}} = n + n_a$ oraz

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{B}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \{ \mathbf{m}_a \} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}_a \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{H} \{ \mathbf{c}_a \} \mathbf{H}^T & -\mathbf{H} \{ \mathbf{c}_a \} \\ -\{ \mathbf{c}_a \} \mathbf{H}^T & \{ \mathbf{c}_a \} \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{H} \{ \mathbf{k}_a \} \mathbf{H}^T & -\mathbf{H} \{ \mathbf{k}_a \} \\ -\{ \mathbf{k}_a \} \mathbf{H}^T & \{ \mathbf{k}_a \} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{n_a}].$$

Wzory (6.23, 6.24) zawierają wszystkie sprzężenia występujące w układzie zmodyfikowanym oraz dodatkowe siły bezwładności absorberów, wynikające z przestrzennych drgań układu. Odpowiedź ustalona układu zmodyfikowanego jest określona przez wzory analogiczne do (5.75).

W praktyce kolejne absorbery dynamiczne są zlokalizowane w oddzielnych węzłach układu. Automatyczne generowanie współczynników równania (6.23) metodą dekompozycji jest wówczas bardzo proste. Odpowiedni algorytm w języku PASCAL ma postać:

```
{generowanie współczynników równania (6.23)}
{zerowanie macierzy  $Bf = \tilde{\mathbf{B}}, Cf = \tilde{\mathbf{C}}, Kf = \tilde{\mathbf{K}}$  i wektora  $Ff = \tilde{\mathbf{F}}$  }
...
{generowanie bloków  $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \{ \mathbf{m}_a \}, \{ \mathbf{c}_a \}, \{ \mathbf{k}_a \}, \mathbf{F}(t)$  }
...
for j:=1 to na do
begin
    {identyfikacja indeksu  $k=k(j)$  i kierunku drgań}
    {Kd[j]=1,2, lub 3}
    ...
```



```

case KD[j] of
1: begin      i1:=NQU[1,k]; i2:=NQU[2,k]; i3:=NQU[3,k];end;
2: begin      i1:=NQU[2,k]; i2:=NQU[1,k]; i3:=NQU[3,k]; end;
3: begin      i1:=NQU[3,k]; i2:=NQU[1,k]; i3:=NQU[2,k]; end;
end;
Bf[i2, i2] := Bf[i2,i2] + ma[j];
Bf[i3, i3] := Bf[i3,i3] + ma[j];
Cf[i1, i1] := Cf[i1,i1] + ca[j];
Cf[i1, n+j] := - ca[j];
Cf[n+j, i1] := - ca[j];
Kf[i1, i1] := Kf[i1,i1] + ka[j];
Kf[i1, n+j] := - ka[j];
Kf[n+j, i1] := - ka[j];
end;

```

przy czym wprowadzono następujące oznaczenia: $n_a = n_a$, $ma[j] = m_{aj}$, $ca[j] = c_{aj}$, $ka[j] = k_{aj}$.

7. ANALIZA DYNAMICZNA WYBRANYCH KONSTRUKCJI WSPORCZYCH POD MASZYNY OBROTOWE

7.1. Program komputerowy GROS

Opracowany w rozdziałach 5 i 6 komputerowy algorytm dyskretyzacji i szybkiej agregacji układu, wykorzystujący przyjęte warunki ortogonalności, stanowi podstawę programu komputerowego o nazwie GROS. W procesorze programu wyróżniono 6 "ścieżek" przebiegu programu:

- 1) tworzenie "banków" przekrojów cienkościennych otwartych,
- 2) tworzenie "banków" przekrojów cienkościennych zamkniętych jednokomorowych,
- 3) wyznaczanie rozkładu statycznych sił osiowych w prętach konstrukcji nośnej,
- 4) rozwiązywanie zagadnienia własnego w zakresie podzbioru częstości własnych i form własnych,
- 5) wyznaczanie charakterystyk amplitudowo–częstotliwościowych odpowiedzi układu bez absorberów dynamicznych,
- 6) projektowanie absorberów dynamicznych oraz wyznaczanie charakterystyk amplitudowo–częstotliwościowych odpowiedzi układu z absorberami dynamicznymi.

Zagadnienie własne układu w zakresie podzbioru częstości własnych i odpowiadających im form własnych rozwiązano, stosując rozkład trójkątny macierzy bezwładności i metodę iteracyjną Rayleigha [44]. Problem dużej liczby równań algebraicznych w zagadnieniu drgań ustalonych rozwiązano, stosując dynamiczne zmienne macierzowe oraz kompilując program w trybie "protected" w systemie Borland Pascal 7.0. Program napisany w języku Pascal ma kod źródłowy o długości 5550 linii. Główne wyniki obliczeń (formy własne, charakterystyki amplitudowo–częstotliwościowe) są również prezentowane w formie graficznej na ekranie monitora.

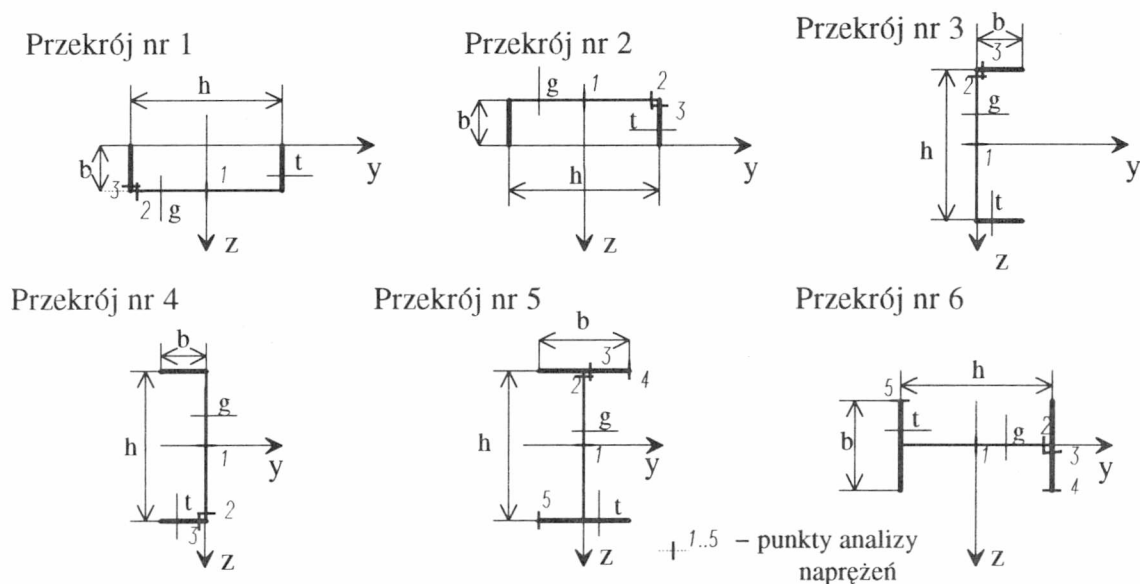
Załącznik A zawiera opisy parametrów wejścia i wyjścia w poszczególnych "ścieżkach" programu. Załącznik B zawiera przykładowe pliki z danymi dla układu testowego. Załącznik C zawiera nagłówki segmentu głównego, unitów, procedur i funkcji.

7.2. Testowanie programu GROS

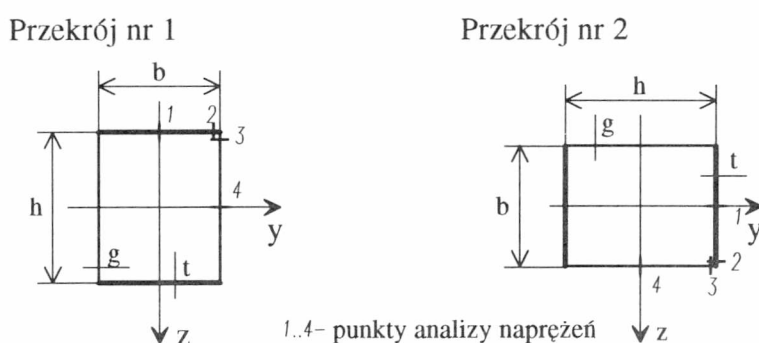
Testowanie ścieżek 1 i 2

Testując pierwszą i drugą ścieżkę przebiegu programu, obliczono charakterystyki geometryczne dla kilkunastu przekrojów cienkościennych (otwartych i zamkniętych), otrzymując pełną zgodność z wartościami z tablic, bądź z wartościami otrzymanymi ze wzorów analitycznych.

Do wykorzystania w ścieżkach 3–6 zadeklarowano i obliczono charakterystyki geometryczne przekrojów otwartych pokazanych na rysunku 7.1 (plik z danymi *d1*. i plik z wynikami *d1.wyn* w Załączniku B) oraz przekrojów zamkniętych pokazanych na rysunku 7.2 (plik z danymi *d2*. i plik z wynikami *d2.wyn* w Załączniku B). W przypadku przekrojów otwartych nr 1–4 przyjęto następujące wymiary [cm]: $b=7$, $h=20$, $g=1$, $t=1,5$; natomiast dla przekrojów nr 5, 6 przyjęto: $b=9$, $h=20$, $g=1$, $t=1,5$. Dla przekrojów zamkniętych przyjęto: $b=16$, $h=20$, $g=1$, $t=1,5$. Na rys. 7.1,7.2 zaznaczono także przyjęte punkty analizy naprężeń.



Rys. 7.1.

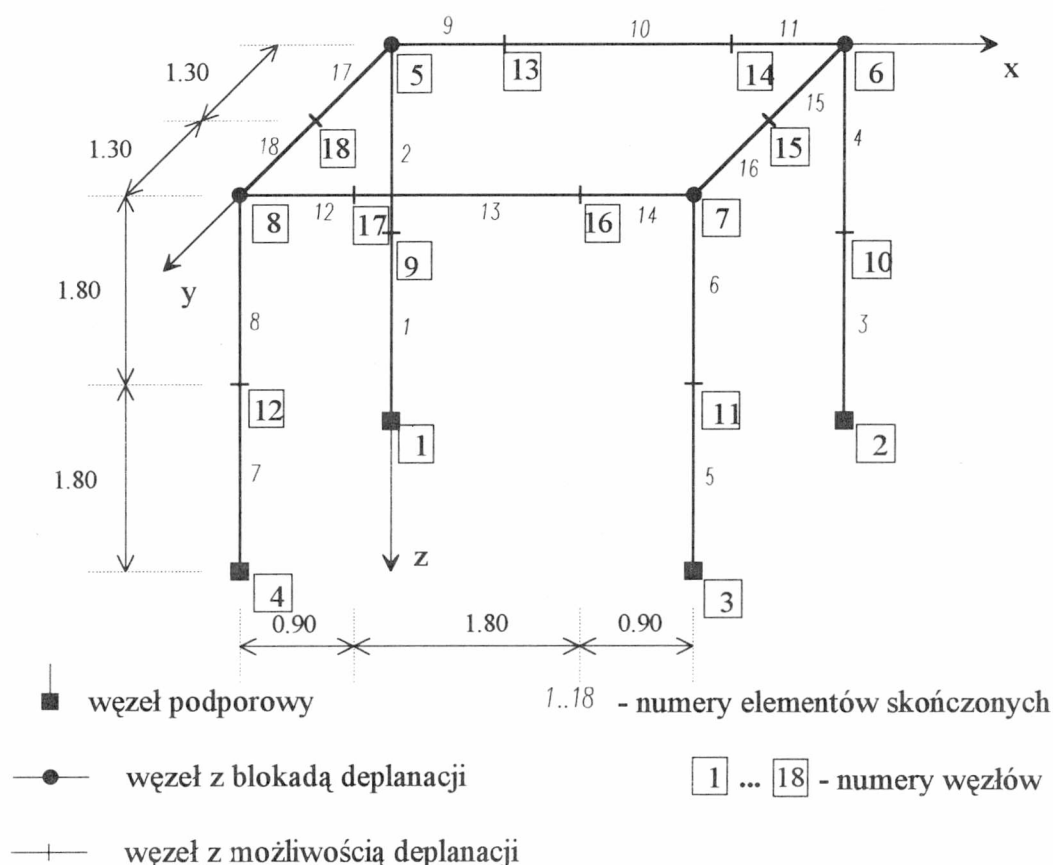


Rys. 7.2.

Przykład testowy do ścieżek 3 ÷ 6

Do testowania programu GROS przyjęto strukturę prętową pokazaną na rys. 7.3. Obliczenia wykonywano dla trzech wariantów podziału konstrukcji na elementy skończone: podział "podstawowy" –

18 elementów skończonych, 100 stopni swobody (*vide* rys.7.3), podział "średni" – 36 elementów skończonych, 226 stopni swobody (podział dwukrotnie zagęszczony w porównaniu z podziałem "podstawowym") i podział "gęsty" – 54 elementy skończone, 352 stopnie swobody (podział trzykrotnie zagęszczony w porównaniu z podziałem "podstawowym").



Rys. 7.3.

Przyjęto, że maszyna zamocowana jest w czterech węzłach konstrukcji wsporczej (13, 14, 16, 17). Środek ciężkości maszyny leży nad środkiem ciężkości konstrukcji. Układ prętowy jest układem bisymetrycznym względem płaszczyzn pionowych przechodzących przez środki rygli. Konstrukcja wsporcza łącznie z maszyną jest również takim układem. Przyjęto następujące charakterystyki maszyny:

masa: 2000kg,

masowe momenty bezwładności względem osi przechodzących przez środek ciężkości

maszyny: $J_x = J_z = 1200 \text{ kgm}^2$, $J_y = 300 \text{ kgm}^2$,

częstotliwość eksploatacyjna maszyny: $\bar{f} = 30 \text{ Hz}$,

masowy moment niewyważenia obrotowego: $M_0 = 0,025 \text{ kgm}$,

szywność połączeń $k_x = k_y = k_z = 1,77 \cdot 10^8 \text{ N/m}$,

tłumienie w połączeniach $c_x = c_y = c_z = 0$.

Test ścieżki 3

Przy zagęszczaniu podziału na elementy skończone otrzymano dobrą zbieżność wyników w ścieżce 3. Wyniki w zakresie statycznych sił osiowych w wybranych prętach podano poniżej:

```
***** Program GROS *****
***** Ścieżka 3: Wyniki obliczeń:

np=18                                np=54                                blad

słupy
No[1]  =-7.31190061070758E+0003      No[5]  =-7.00425161715461E+0003      4.4%
No[2]  =-6.66040875918615E+0003      No[2]  =-6.35275985973012E+0003      4.8%

rygle II do osi x
No[9]  =-1.00973648210359E+0003      No[26] =-1.02479392093582E+0003      -1.4%
No[10] =-8.80426222660739E+0002      No[29] =-8.9355375450609E+0002      -1.5%
No[11] =-1.00973648206172E+0003      No[32] =-1.02479394547627E+0003      -1.5%

rygle II do osi y
No[15] =-4.61558577595538E+0000      No[44] =-5.98316867603323E+0000      -22.8%
No[16] =-4.61558577600516E+0000      No[47] =-5.98316865703006E+0000      -22.8%

No-min [N] =-7.3119008E+0003          No-min [N] =-7.2214157E+0003          1.2%
No-max [N] =-4.6155858E+0000          No-max [N] =-5.9831686E+0000          -22.8%
```

Błąd względny w odniesieniu do sił osiowych o dużych wartościach nie przekracza 5% przy podziale na 18 elementów skończonych.

Test ścieżki 4

Ścieżkę 4 testowano ze względu na trzy parametry: liczbę obliczanych częstości własnych, dokładność iteracji, gęstość podziału konstrukcji na elementy skończone. Liczba obliczanych częstości własnych nie ma wpływu na ich wartości. Wniosek wydaje się oczywisty, jednak zastosowana procedura rozwiązania zagadnienia własnego jest obciążona superpozycją błędów w kolejnych częstościach własnych. Czas retardacji stali prętów cienkościennych wynosi 0,00025 s.

Test dokładności iteracji w rozwiązywaniu zagadnienia własnego został przeprowadzony dla $\varepsilon = 10^{-10}$, 10^{-15} , 10^{-18} , przy podziale "podstawowym" i prętach o przekroju dwuteowym (rys.

7.1, przekrój nr 5). Wyniki przedstawiono poniżej, grupując częstości własne po trzy, w kolejności od największego do najmniejszego ϵ .

***** Ścieżka 4: Wyniki obliczeń:

Dokładność iteracji Eps= 1.0000000E-0010
Dokładność iteracji Eps= 1.0000000E-0015
Dokładność iteracji Eps= 1.0000000E-0018

Widmo własne z estymacją błędów:

f[1]= 1.93705218072695E+0000 Hz	Error= 3.1752608E-0012
f[1]= 1.93705218072694E+0000 Hz	Error= 6.9609206E-0017
f[1]= 1.93705218072694E+0000 Hz	Error= 1.8737337E-0019
f[2]= 7.39717494488195E+0000 Hz	Error= 6.9800992E-0011
f[2]= 7.39717494464894E+0000 Hz	Error= 9.6981883E-0016
f[2]= 7.39717494464894E+0000 Hz	Error= 6.1673694E-0019
f[3]= 8.91286750620247E+0000 Hz	Error= 2.3956362E-0011
f[3]= 8.91286750647683E+0000 Hz	Error= 2.5389601E-0016
f[3]= 8.91286750647683E+0000 Hz	Error= 7.0802010E-0019
f[4]= 1.82370330557843E+0001 Hz	Error= 3.7597720E-0011
f[4]= 1.82370330556853E+0001 Hz	Error= 6.1671436E-0016
f[4]= 1.82370330556853E+0001 Hz	Error= 2.0293332E-0019
f[5]= 2.53212589809069E+0001 Hz	Error= 8.8792561E-0011
f[5]= 2.53212589750860E+0001 Hz	Error= 8.9364439E-0016
f[5]= 2.53212589750859E+0001 Hz	Error= 4.9124475E-0019
f[6]= 2.64492929125362E+0001 Hz	Error= 7.6543811E-0011
f[6]= 2.64492929160048E+0001 Hz	Error= 7.6855315E-0016
f[6]= 2.64492929160048E+0001 Hz	Error= 9.0047234E-0019
f[7]= 2.85881277399168E+0001 Hz	Error= 9.9965714E-0011
f[7]= 2.85881263510227E+0001 Hz	Error= 3.1216116E-0011
f[7]= 2.85881263510227E+0001 Hz	Error= 3.1216117E-0011
f[8]= 2.85931710068793E+0001 Hz	Error= 7.4544773E-0011
f[8]= 2.85931723980258E+0001 Hz	Error= 9.1854857E-0016
f[8]= 2.85931723980259E+0001 Hz	Error= 2.2014346E-0019
f[9]= 3.43152449181597E+0001 Hz	Error= 8.9308582E-0011
f[9]= 3.43152449145534E+0001 Hz	Error= 7.8601451E-0016
f[9]= 3.43152449145534E+0001 Hz	Error= 9.9350400E-0019
f[10]= 3.67772802087992E+0001 Hz	Error= 8.1497950E-0011
f[10]= 3.67772802100830E+0001 Hz	Error= 8.3073897E-0016
f[10]= 3.67772802100830E+0001 Hz	Error= 5.3226908E-0019

Przyjmując wartości obliczone dla $\epsilon=10^{-18}$ za dokładne, otrzymuje się błąd względny częstości własnych dla $\epsilon=10^{-10}$ od $5 \cdot 10^{-15}$ dla pierwszej częstości własnej do $3,5 \cdot 10^{-9}$ dla siódmej częstości własnej. W dalszych obliczeniach przyjęto $\epsilon=10^{-10}$.

W teście podziału konstrukcji na elementy skończone przyjęto wyniki otrzymane dla podziału "gęstego" za dokładne. Dla podziału "podstawowego" błędy względne wynoszą od $4,48 \cdot 10^{-4}$ dla pierwszej częstości do $1,49 \cdot 10^{-2}$ dla siódmej częstości. Dla podziału "średniego" błędy wynoszą od $1,03 \cdot 10^{-6}$ dla pierwszej częstości do $1,15 \cdot 10^{-3}$ dla siódmej częstości. Wartości błędów

względnych dla głównych współczynników tłumienia wynoszą odpowiednio od $6,44 \cdot 10^{-4}$ do $1,52 \cdot 10^{-2}$ dla podziału "podstawowego" i od 0 do $9,89 \cdot 10^{-4}$ dla podziału "średniego". Wyniki podano poniżej dla analizowanych podziałów.

***** Program GROS *****
 ***** Sciezka 4: Wyniki obliczen:

np=18

Widmo własne z estymacja błędów:

f[1]= 1.93705218072695E+0000 Hz	Error= 3.1752608E-0012
f[2]= 7.39717494488195E+0000 Hz	Error= 6.9800992E-0011
f[3]= 8.91286750620247E+0000 Hz	Error= 2.3956362E-0011
f[4]= 1.82370330557843E+0001 Hz	Error= 3.7597720E-0011
f[5]= 2.53212589809069E+0001 Hz	Error= 8.8792561E-0011
f[6]= 2.64492929125362E+0001 Hz	Error= 7.6543811E-0011
f[7]= 2.85881277399168E+0001 Hz	Error= 9.9965714E-0011
f[8]= 2.85931710068793E+0001 Hz	Error= 7.4544773E-0011
f[9]= 3.43152449181597E+0001 Hz	Error= 8.9308582E-0011
f[10]= 3.67772802087992E+0001 Hz	Error= 8.1497950E-0011

***** Program GROS *****
 ***** Sciezka 4: Wyniki obliczen:

np=36

Widmo własne z estymacja błędów:

f[1]= 1.93792192327828E+0000 Hz	Error= 3.3086700E-0012
f[2]= 7.39719849173460E+0000 Hz	Error= 6.0999615E-0011
f[3]= 8.90945127071374E+0000 Hz	Error= 5.2016986E-0011
f[4]= 1.81561541615292E+0001 Hz	Error= 4.6021339E-0011
f[5]= 2.51395611768030E+0001 Hz	Error= 9.7358406E-0011
f[6]= 2.64466264324837E+0001 Hz	Error= 9.7666885E-0011
f[7]= 2.81953835403092E+0001 Hz	Error= 9.9963764E-0011
f[8]= 2.82001695702760E+0001 Hz	Error= 9.2449694E-0011
f[9]= 3.39135595241781E+0001 Hz	Error= 8.4169213E-0011
f[10]= 3.64462304685508E+0001 Hz	Error= 9.8540112E-0011

***** Program GROS *****
 ***** Sciezka 4: Wyniki obliczen:

np=54

Widmo własne z estymacja błędów:

f[1]= 1.93791992668171E+0000 Hz	Error= 3.3248711E-0012
f[2]= 7.39718624281892E+0000 Hz	Error= 6.7662563E-0011
f[3]= 8.90918994705248E+0000 Hz	Error= 6.1125893E-0011
f[4]= 1.81517810612063E+0001 Hz	Error= 2.6664040E-0011
f[5]= 2.51280928100060E+0001 Hz	Error= 8.5515259E-0011
f[6]= 2.64464921935985E+0001 Hz	Error= 9.6611560E-0011
f[7]= 2.81676884302105E+0001 Hz	Error= 9.9988636E-0011
f[8]= 2.81724530363943E+0001 Hz	Error= 5.5503678E-0011
f[9]= 3.38769670129942E+0001 Hz	Error= 8.4173424E-0011
f[10]= 3.6412077532330E+0001 Hz	Error= 7.0069121E-0011

np=18

Główne współczynniki tłumienia:

Gamma[1]=	0.001553
Gamma[2]=	0.005789
Gamma[3]=	0.006840
Gamma[4]=	0.014298
Gamma[5]=	0.019656
Gamma[6]=	0.019354
Gamma[7]=	0.022578
Gamma[8]=	0.022583
Gamma[9]=	0.027077
Gamma[10]=	0.028737

```

np=36
Głowne współczynniki tłumienia:
Gamma[ 1]= 0.001552
Gamma[ 2]= 0.005789
Gamma[ 3]= 0.006836
Gamma[ 4]= 0.014236
Gamma[ 5]= 0.019520
Gamma[ 6]= 0.019352
Gamma[ 7]= 0.022261
Gamma[ 8]= 0.022265
Gamma[ 9]= 0.026755
Gamma[10]= 0.028469
np=54
Głowne współczynniki tłumienia:
Gamma[ 1]= 0.001552
Gamma[ 2]= 0.005789
Gamma[ 3]= 0.006836
Gamma[ 4]= 0.014232
Gamma[ 5]= 0.019512
Gamma[ 6]= 0.019352
Gamma[ 7]= 0.022239
Gamma[ 8]= 0.022243
Gamma[ 9]= 0.026726
Gamma[10]= 0.028442

```

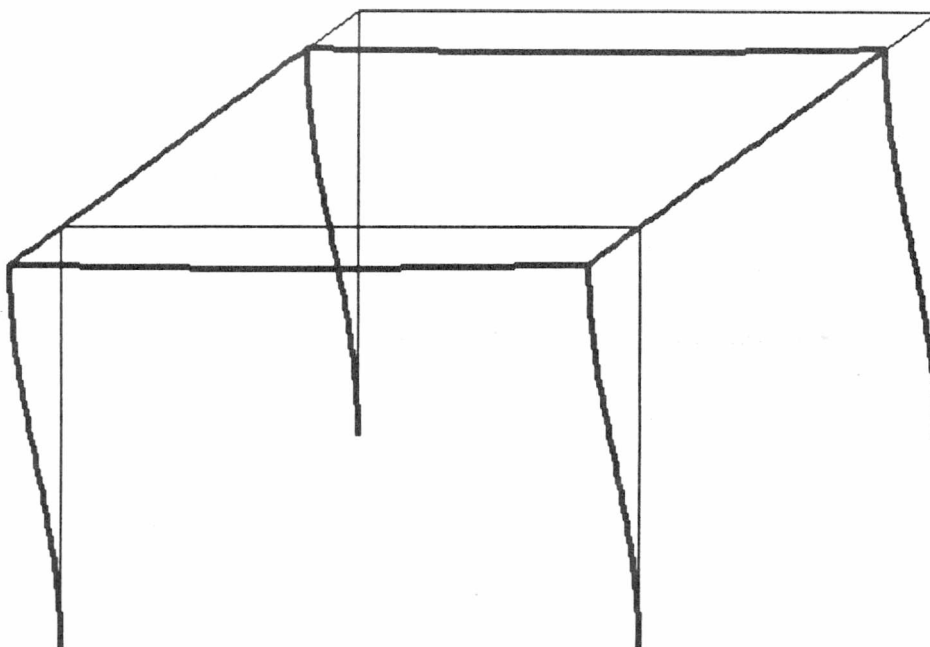
Wybrane formy własne układu testowego pokazano na rysunku 7.4.

Test ścieżki 5

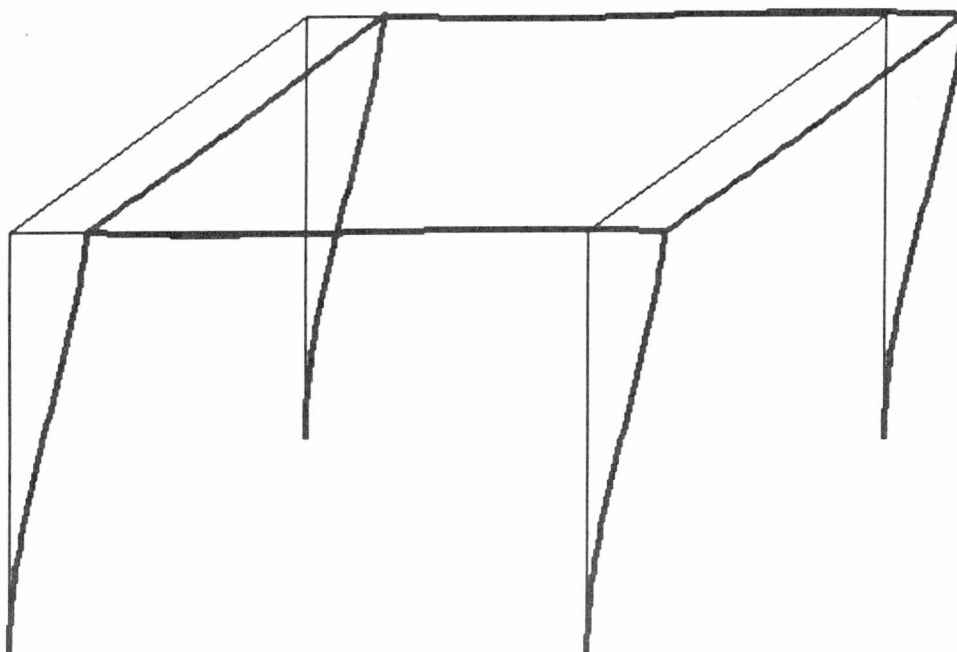
Ścieżkę 5 testowano ze względu na fazę początkową siły wirującej i kierunek obrotu tej siły. Oba te parametry nie mają wpływu na charakterystyki A_U . Przykładowe wyniki dotyczące tego testu pokazano na rys. 7.5, 7.6. Testowano także wpływ orientacji płaszczyzny wymuszenia na zbiór wzbudzanych form własnych. Jeżeli płaszczyzna wymuszenia jest równoległa do płaszczyzny Oxz a siła wirująca przyłożona jest w środku ciężkości bryły, to wzbudzeniu ulegają formy własne, które są symetryczne względem płaszczyzny wymuszenia, tj. druga forma drgań (rys. 7.7). W przypadku, w którym płaszczyzna wymuszenia jest równoległa do płaszczyzny Oyz , a siła wymuszająca przyłożona jest w środku ciężkości bryły, to wzbudzają się formy własne, które są symetryczne względem nowej płaszczyzny wymuszenia, tj. pierwsza i czwarta forma drgań (rys. 7.8).

Opierając się na wynikach testu zbieżności w zagadnieniu własnym, drgania ustalone układu testowego wyznaczono dla "podstawowego" podziału struktury prętowej na elementy skończone. Oczywiście wykonano dodatkowe testy zbieżności w zagadnieniu drgań ustalonych. Dla podziału "podstawowego" błąd względny w największych przemieszczeniach jest rzędu 1 %, w największych naprężeniach normalnych – rzędu 10 %, a w największych naprężeniach stycznych może przekraczać 30 %. Wyznaczane przemieszczenia dynamiczne można zatem uznać za technicznie dokładne, dynamiczne naprężenia normalne – za technicznie przydatne, a dynamiczne naprężenia styczne – za przydatne do analizy jakościowej.

$f[1] = 1.9371 \text{ Hz}$

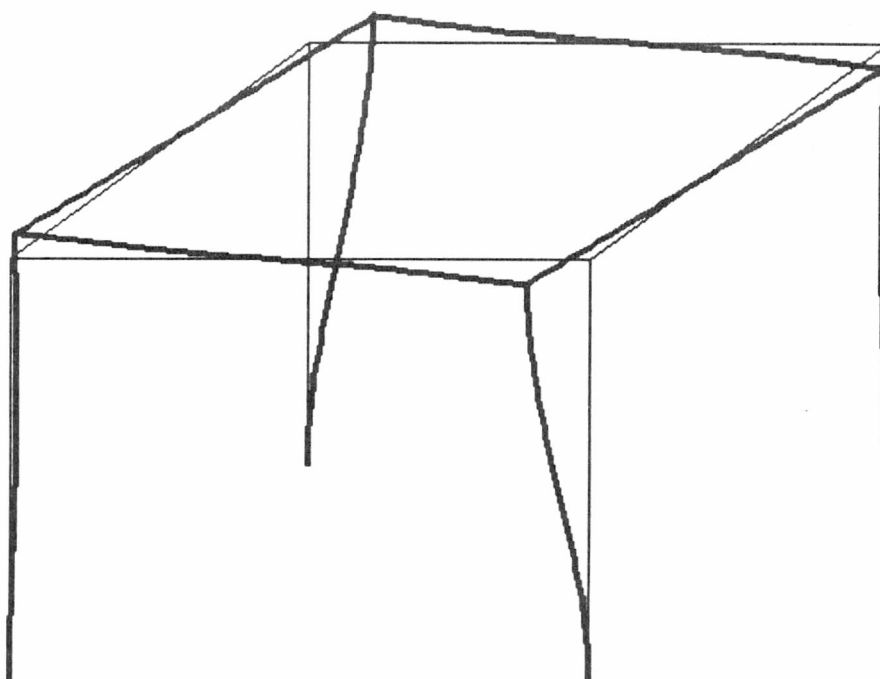


$f[2] = 7.3972 \text{ Hz}$

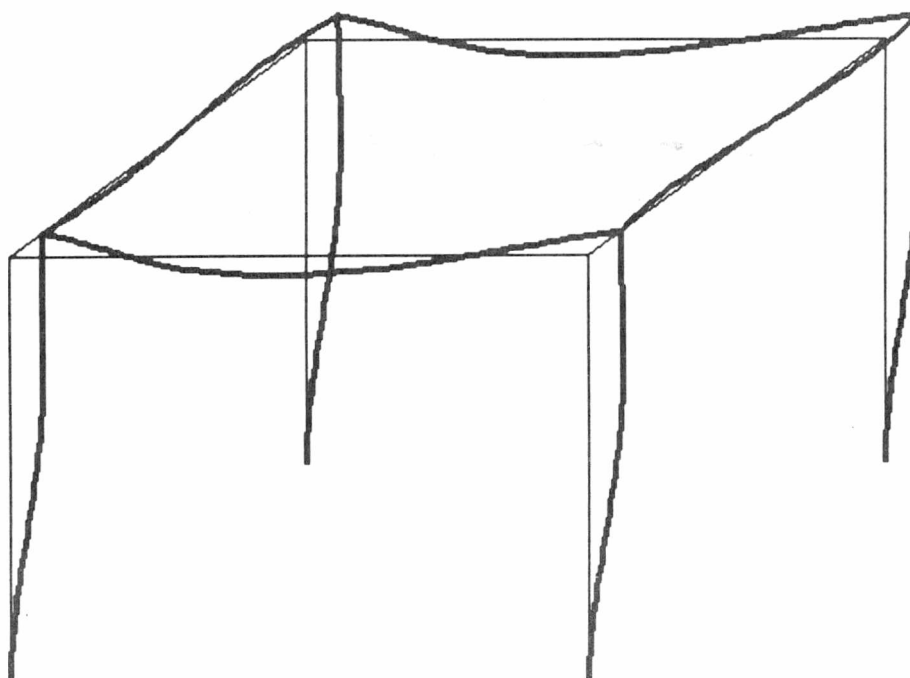


Rys.7.4.a

$f[3] = 8.9129 \text{ Hz}$

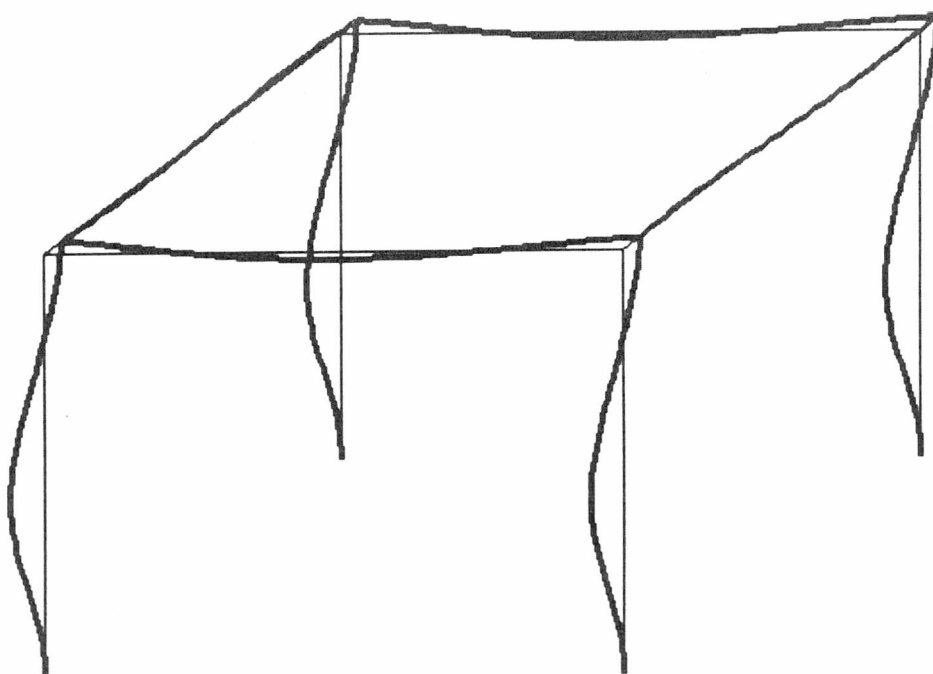


$f[4] = 18.2370 \text{ Hz}$

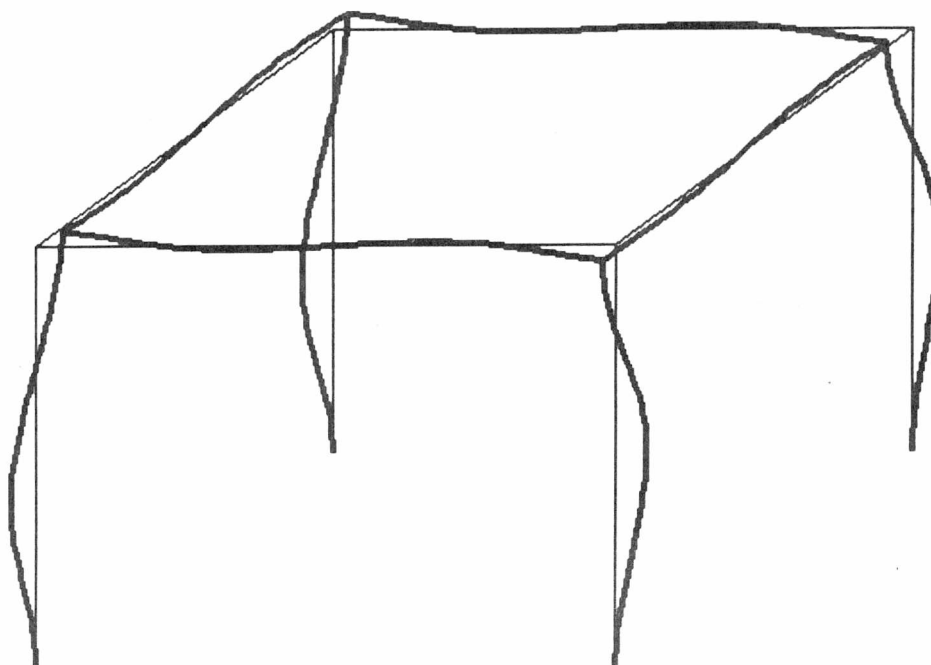


Rys.7.4.b

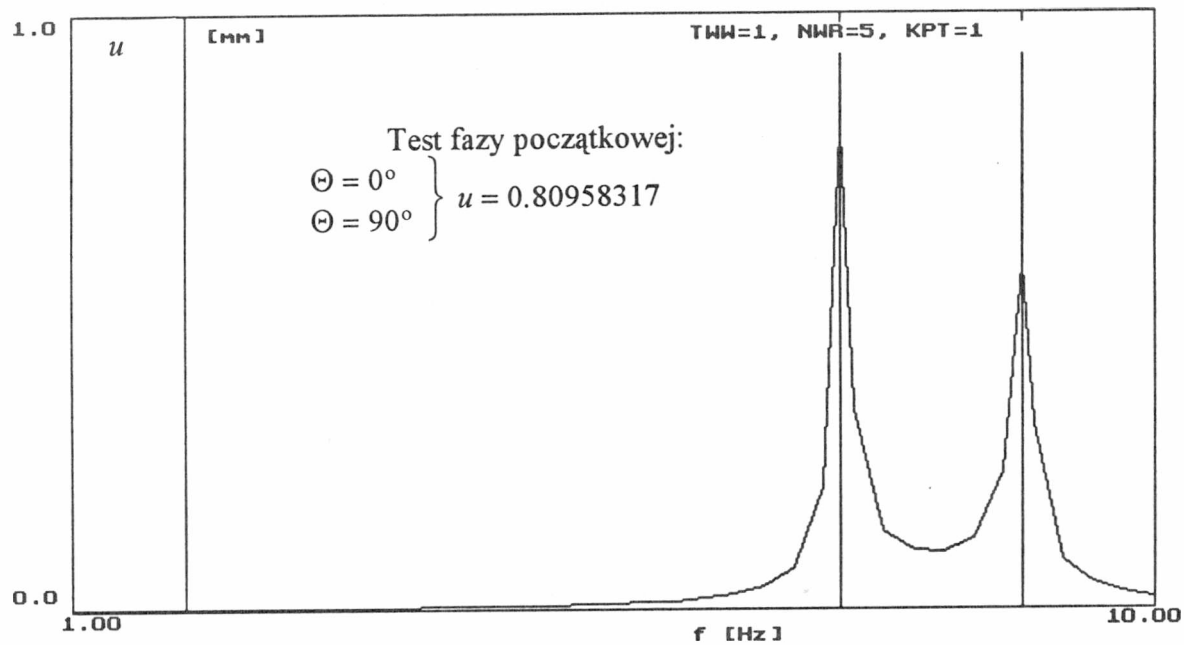
f[9]= 34.3152 Hz



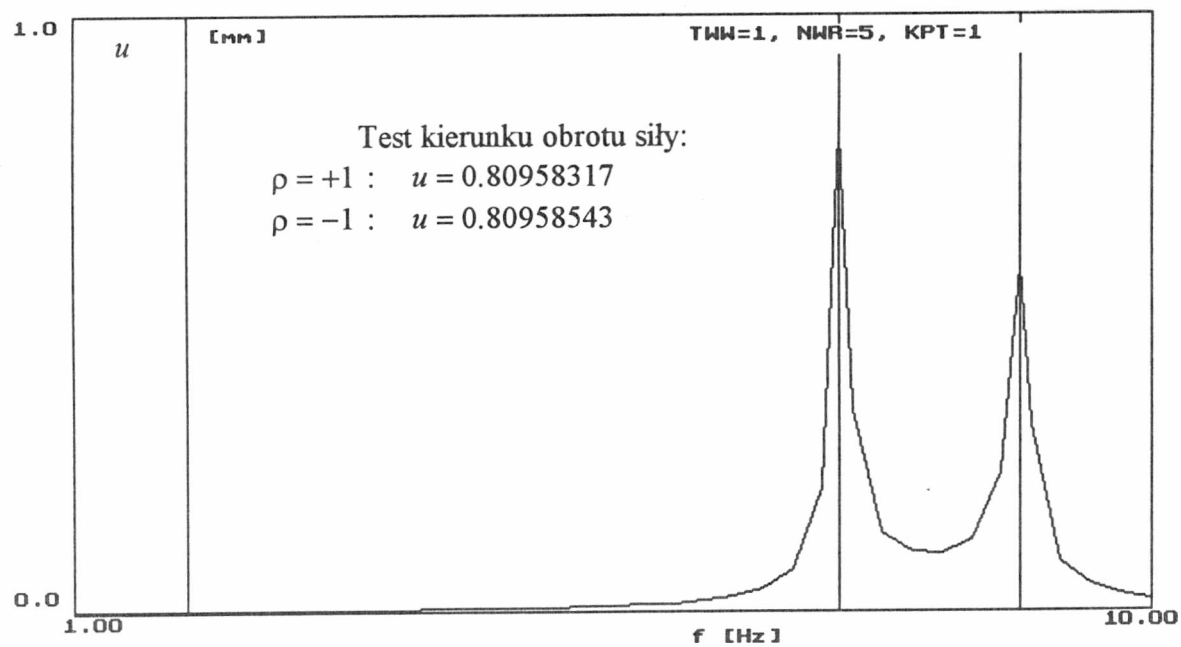
f[10]= 36.7773 Hz



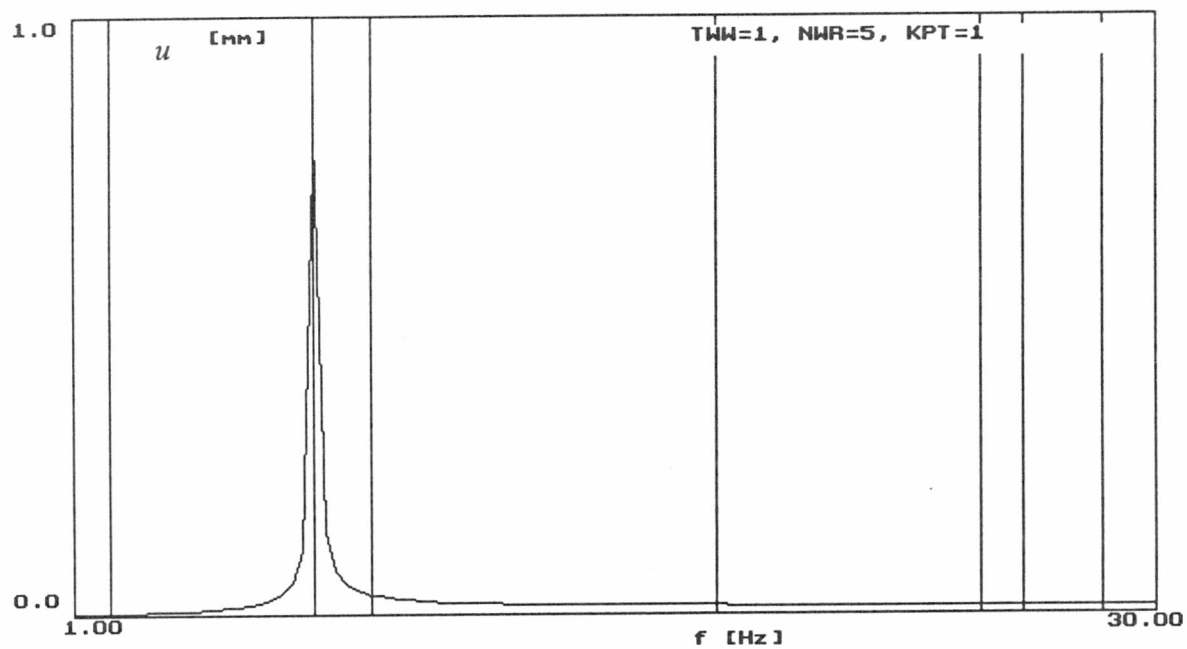
Rys.7.4.c



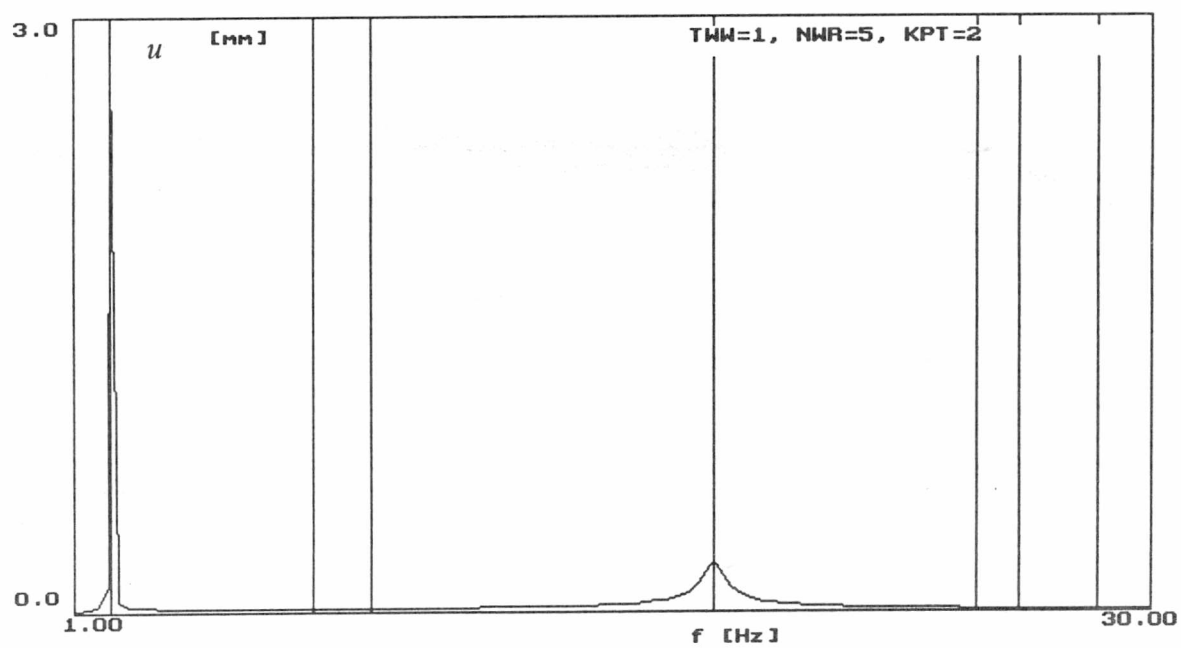
Rys.7.5



Rys.7.6

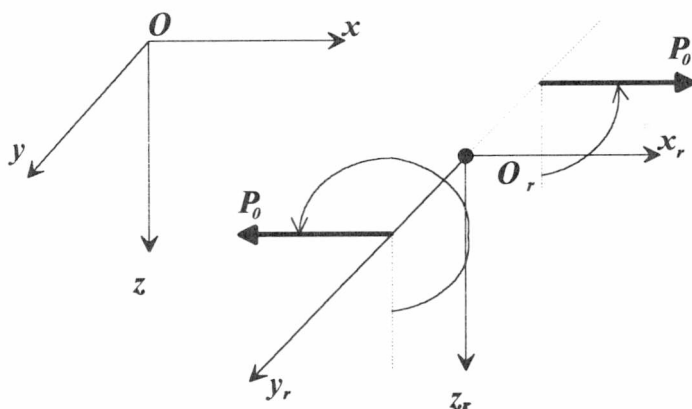


Rys.7.7

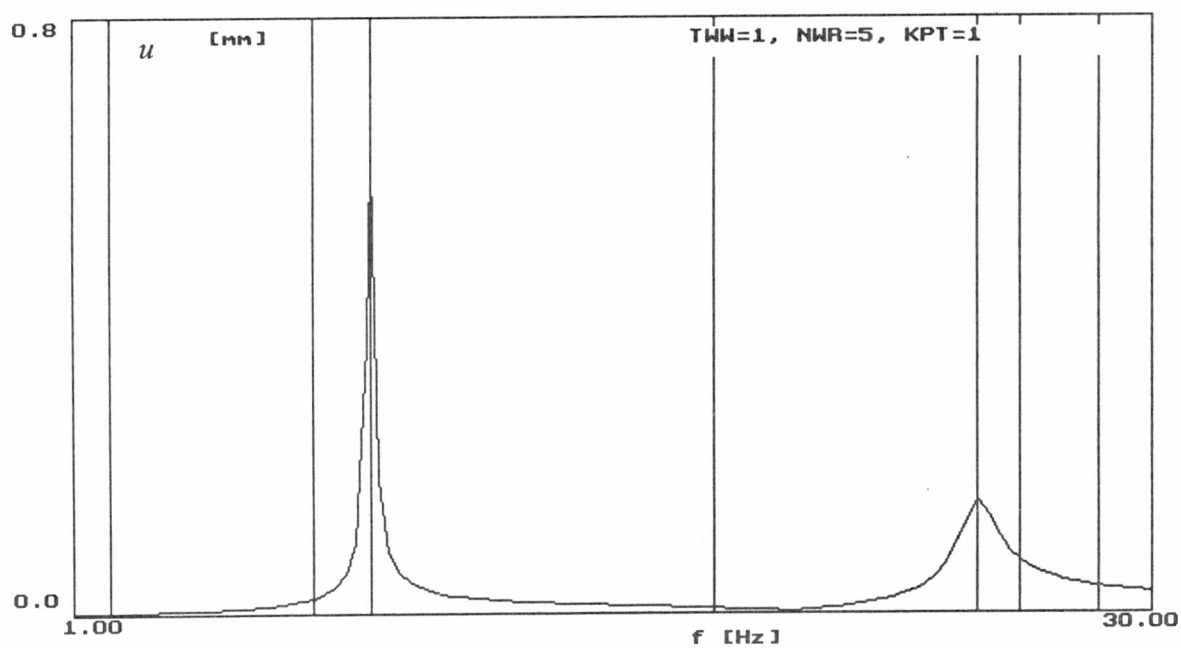


Rys.7.8

Gdy wymuszenie zostanie zadeklarowane jako para sił wirujących o takich samych wartościach, ale przeciwnych zwrotach (fazy początkowe różnią się o 180° , rys. 7.9), to wzmacnione zostają formy trzecia i piąta, co ilustruje rys. 7.10.



Rys. 7.9



Rys.7.10

Test ścieżki 6

Ścieżkę 6 testowano ze względu na masy i lokalizacje absorberów dynamicznych. Wybrane charakterystyki amplitudowo – częstotliwościowe układu testowego bez absorberów (linia cienka) i z absorberami (linia gruba) pokazano na rys. 7.11.a,b,c. Symbolem $A(i,j)$ oznaczono absorber nr i strojony względem układu modalnego nr j . Zastosowano trzy absorbery o masach 90, 40 i 20 kg, strojone względem układów modalnych nr 2, 3 i 5. Optymalne parametry zawiesznień absorberów są dobrane automatycznie przez program. Przykładowo parametry zawieszenia absorbera nr 1 wynoszą $k_1 = 0,181$ MN/m, $c_1 = 0,920$ kNs/m. Obliczenia potwierdziły dużą skuteczność względnie lekkich absorberów dynamicznych w redukcji drgań ustalonych w strefach rezonansowych.

Analiza numeryczna przykładu testowego

Po stwierdzeniu prawidłowego działania programu przystąpiono do obliczeń dla różnych wariantów danych. M.in. powtórzono obliczenia dla prętów o przekrojach cienkościennych zamkniętych (rys. 7.2, przekrój nr 1). Większa sztywność tych przekrojów spowodowała zwiększenie częstotliwości własnych ustroju. Pierwsze cztery częstotliwości własne dla układu z prętami o przekrojach zamkniętych wynoszą:

$f[1] = 7.3210$ Hz,
 $f[2] = 9.0688$ Hz,
 $f[3] = 14.8398$ Hz,
 $f[4] = 33.1824$ Hz.

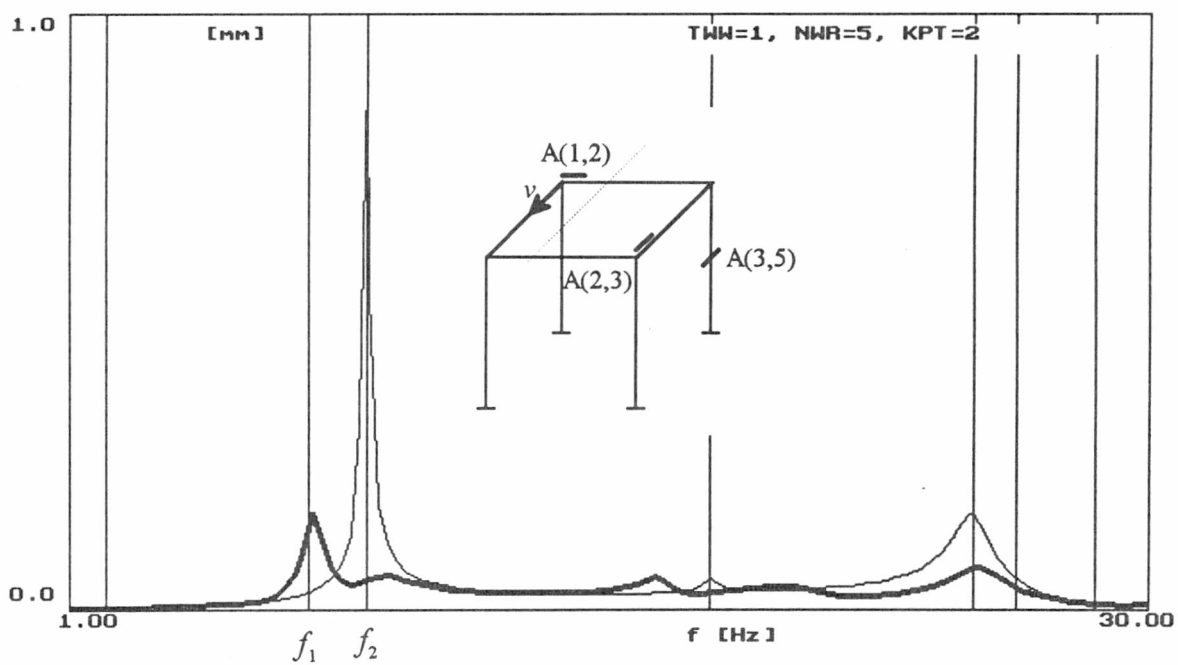
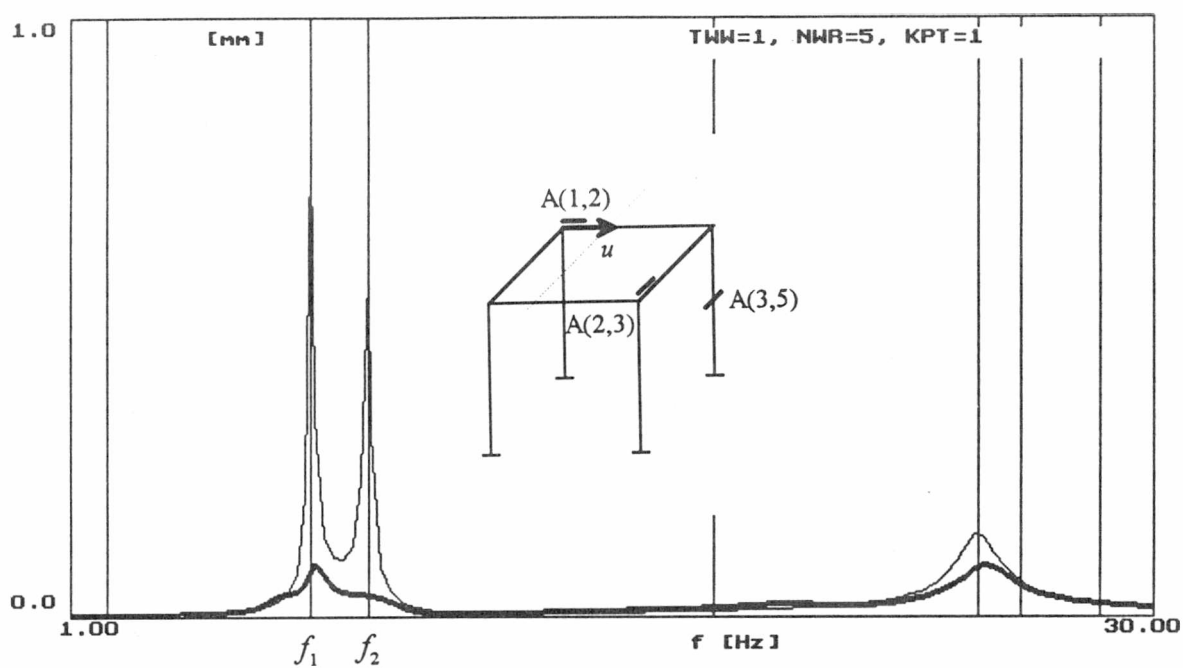
Dosztywnienie konstrukcji spowodowało również zmniejszenie pików rezonansowych (rys.7.12).

Zastąpienie przekrojów dwuteowych (rys.7.1, przekrój nr 5) przekrojami ceowymi (rys.7.1, przekroje nr 3 i 4) spowodowało obniżenie widma własnego. Dla tak zadeklarowanego ustroju przeprowadzono obliczenia w ścieżkach 4 i 5, przy uwzględnieniu deplanacji w węzłach pośrednich oraz przy blokadzie deplanacji w tych węzłach (sztywne przepony). Wyniki w zakresie widma własnego podano poniżej:

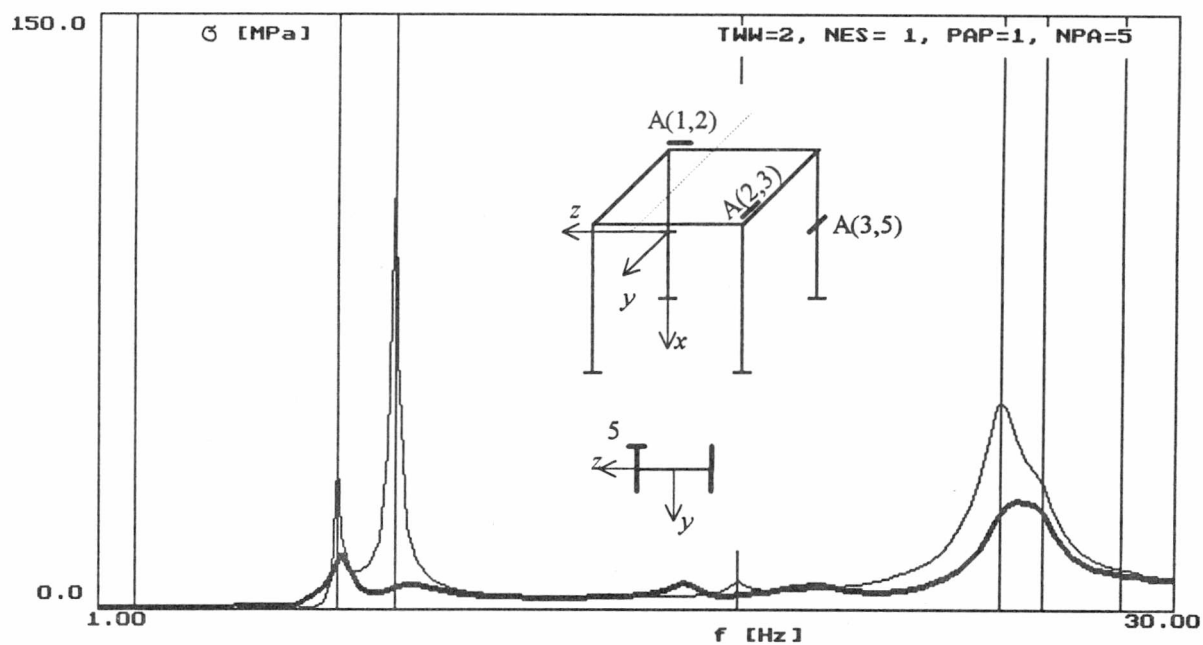
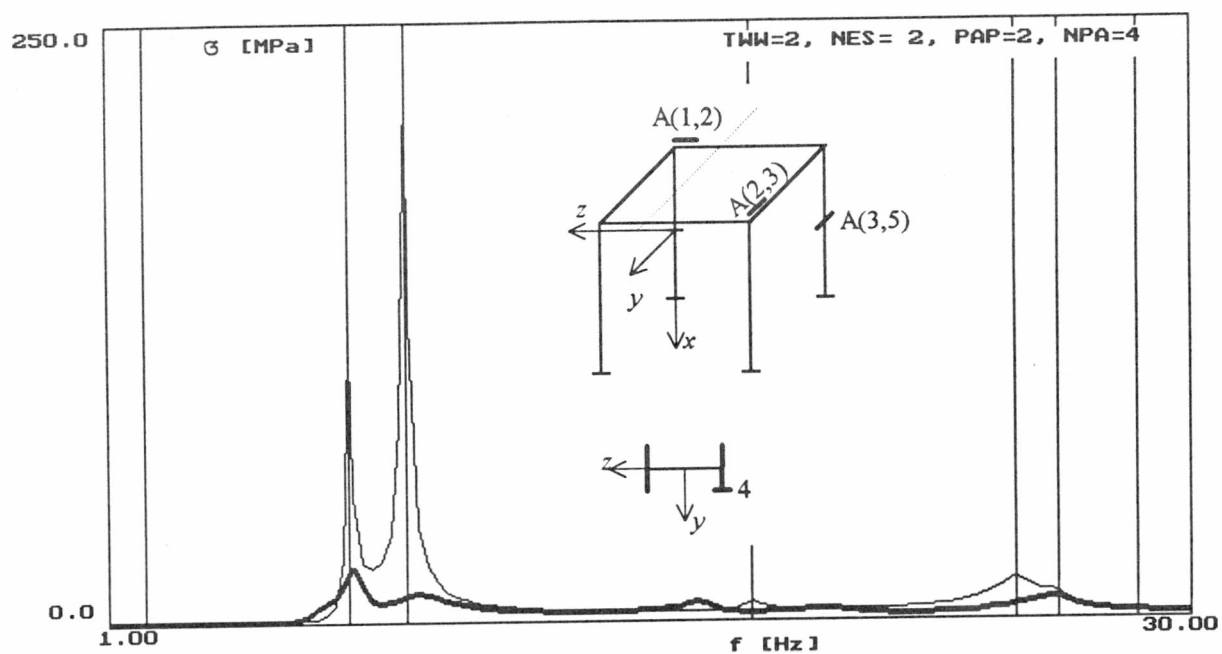
***** Ścieżka 4: Wyniki obliczeń: {deplanacja w węzłach pośrednich}

Widmo własne z estymacją błędów:

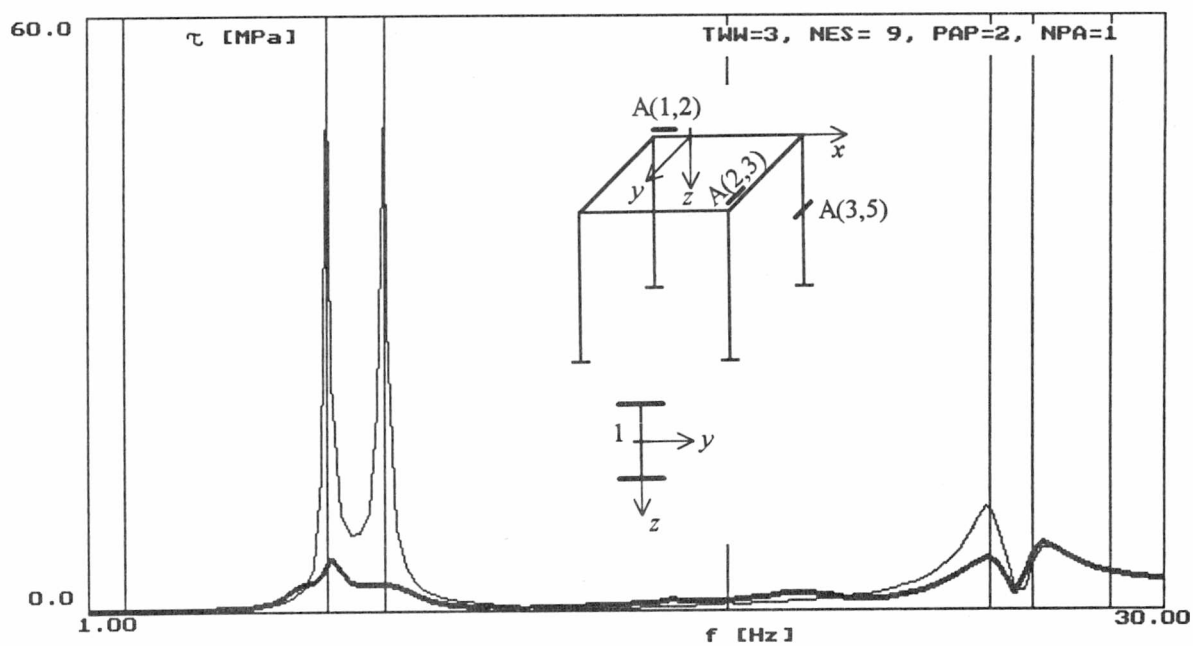
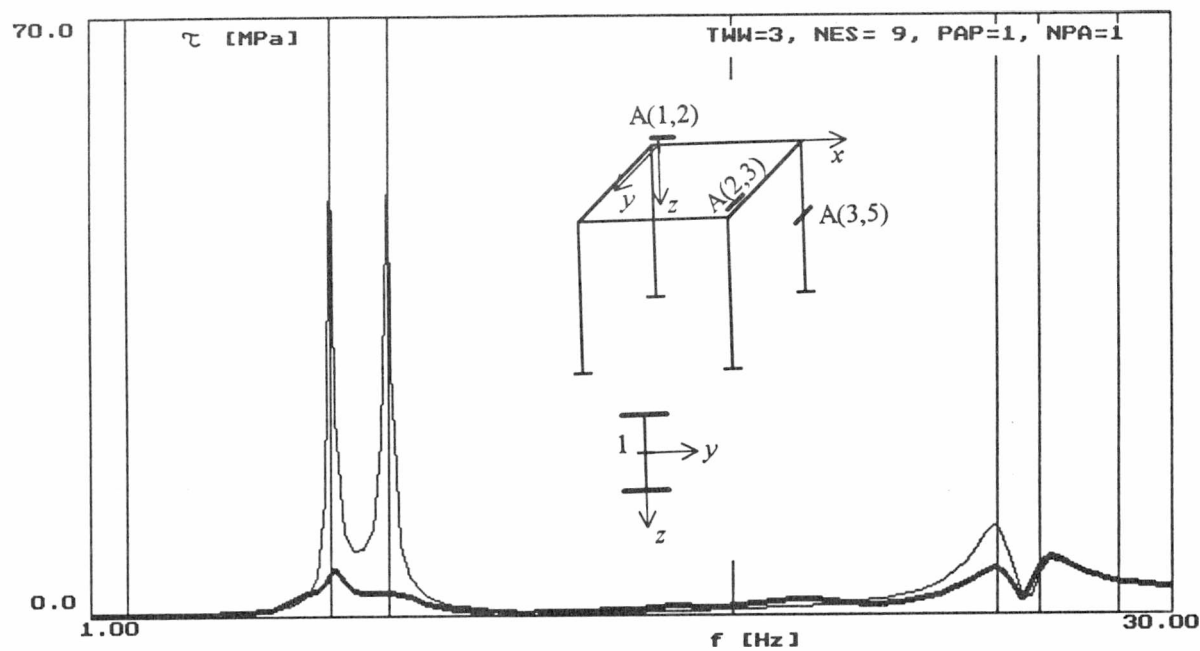
$f[1] = 2.11265975597945E+0000$ Hz	Error= 8.3128013E-0011
$f[2] = 6.81128296880684E+0000$ Hz	Error= 7.2632117E-0011
$f[3] = 8.78524994247995E+0000$ Hz	Error= 4.5709051E-0012
$f[4] = 2.08179063296513E+0001$ Hz	Error= 9.3520794E-0011
$f[5] = 2.13213067382108E+0001$ Hz	Error= 7.7361622E-0011
$f[6] = 2.83512849052602E+0001$ Hz	Error= 7.9295351E-0011
$f[7] = 3.08988113583564E+0001$ Hz	Error= 8.4315436E-0011
$f[8] = 3.24721232525817E+0001$ Hz	Error= 9.9969410E-0011
$f[9] = 3.24814360405105E+0001$ Hz	Error= 9.8884573E-0011
$f[10] = 3.93827070569683E+0001$ Hz	Error= 8.2357512E-0011



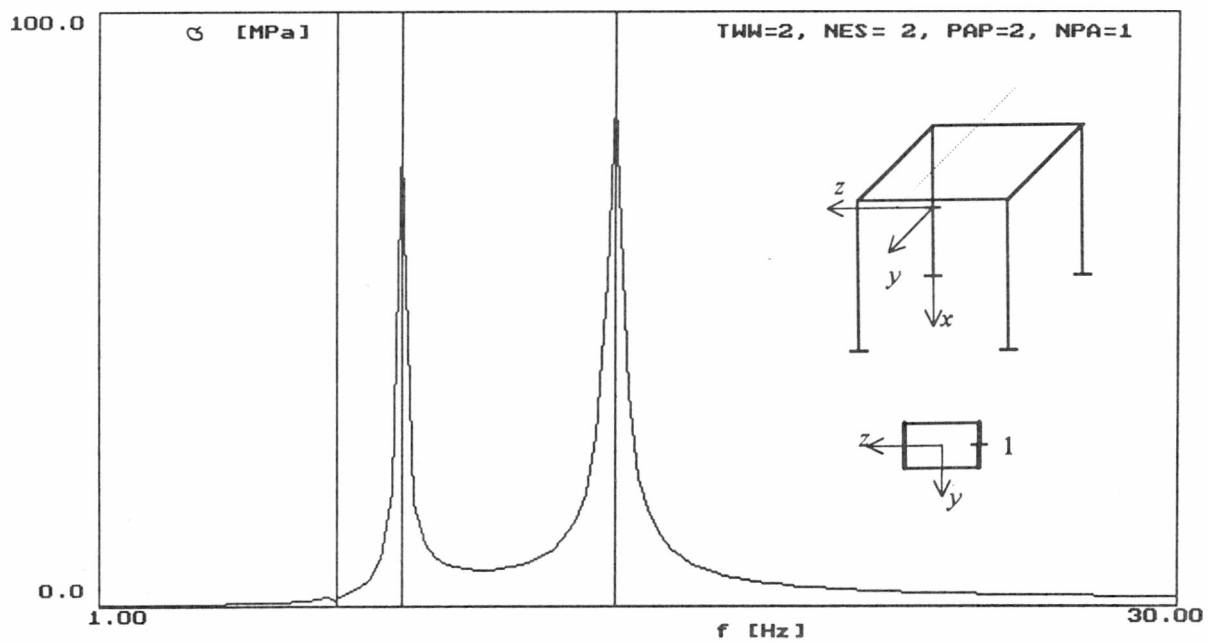
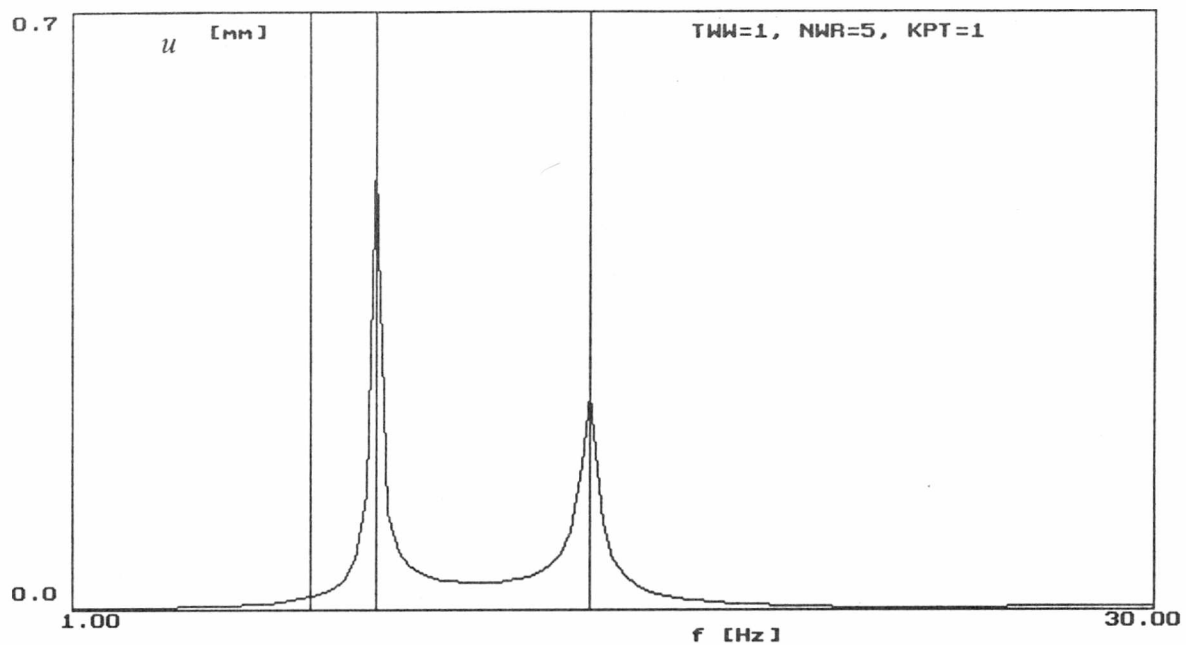
Rys.7.11.a



Rys.7.11.b



Rys.7.11.c



Rys.7.12

***** Sciezka 4: Wyniki obliczen: {blokada deplanacji w wezlach posrednich}

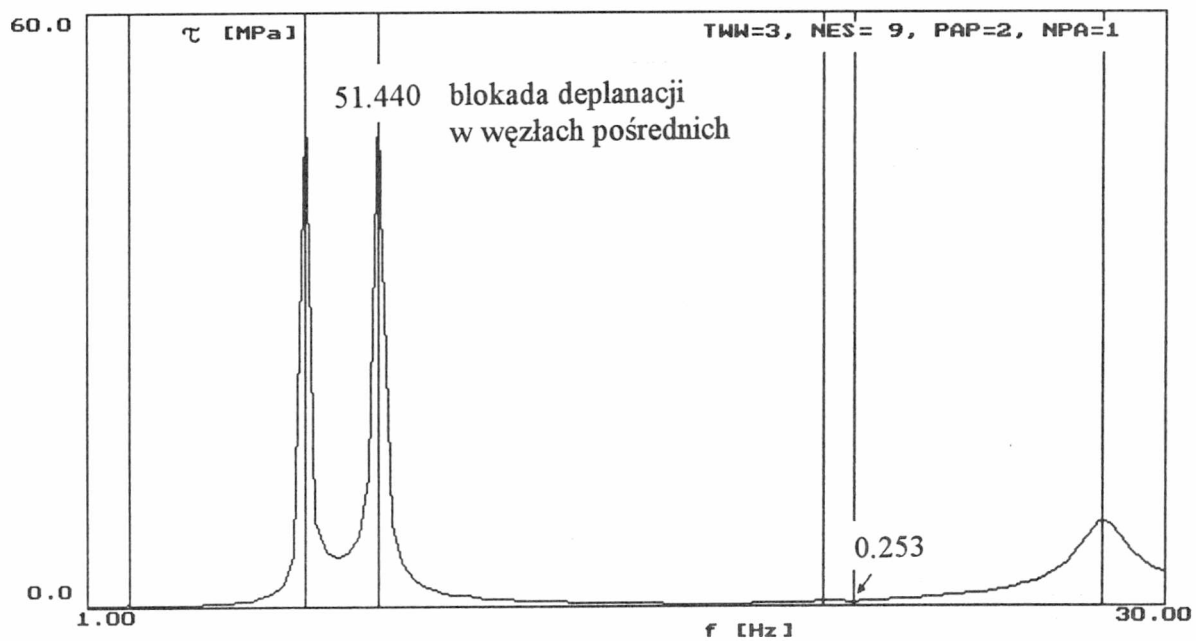
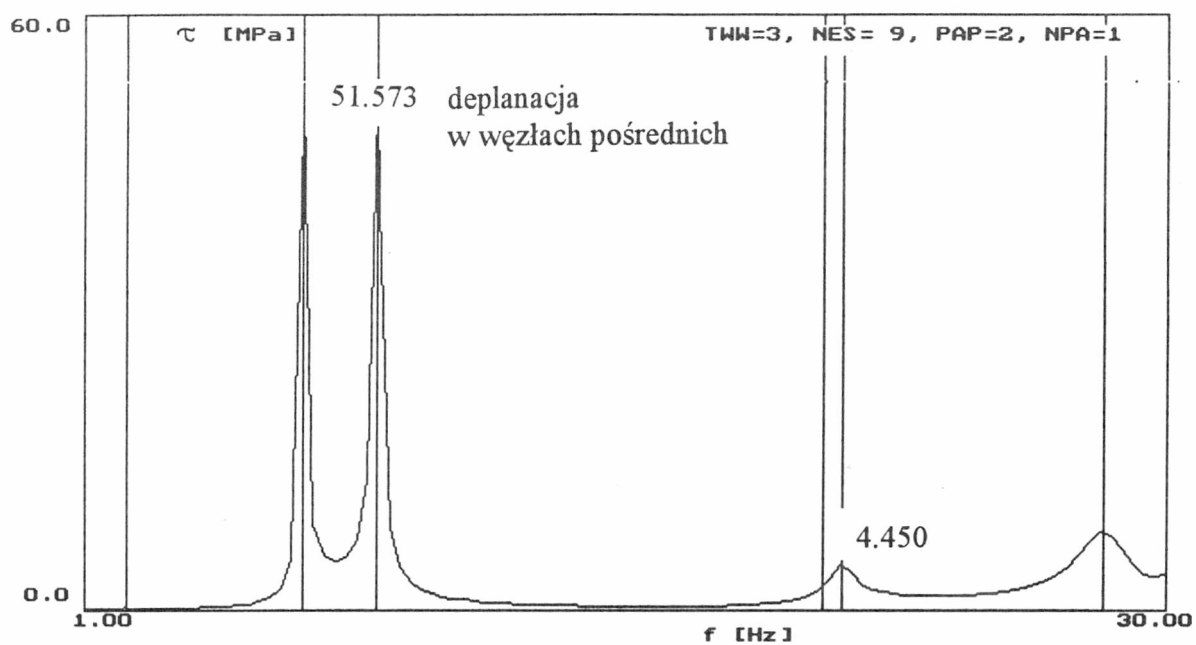
Widmo własne z estymacja błędów:

f[1]= 2.11267464321817E+0000 Hz	Error= 8.3147724E-0011
f[2]= 6.81130715356282E+0000 Hz	Error= 7.1472398E-0011
f[3]= 8.78627719291085E+0000 Hz	Error= 4.4399644E-0012
f[4]= 2.08233258129924E+0001 Hz	Error= 9.2261736E-0011
f[5]= 2.16247123833810E+0001 Hz	Error= 3.7474902E-0011
f[6]= 2.83549459337796E+0001 Hz	Error= 7.3675463E-0011
f[7]= 3.20867686664220E+0001 Hz	Error= 9.8324272E-0011
f[8]= 3.24729301582288E+0001 Hz	Error= 9.9916938E-0011
f[9]= 3.24822856262019E+0001 Hz	Error= 8.4729453E-0011
f[10]= 3.93846160337486E+0001 Hz	Error= 8.3881503E-0011

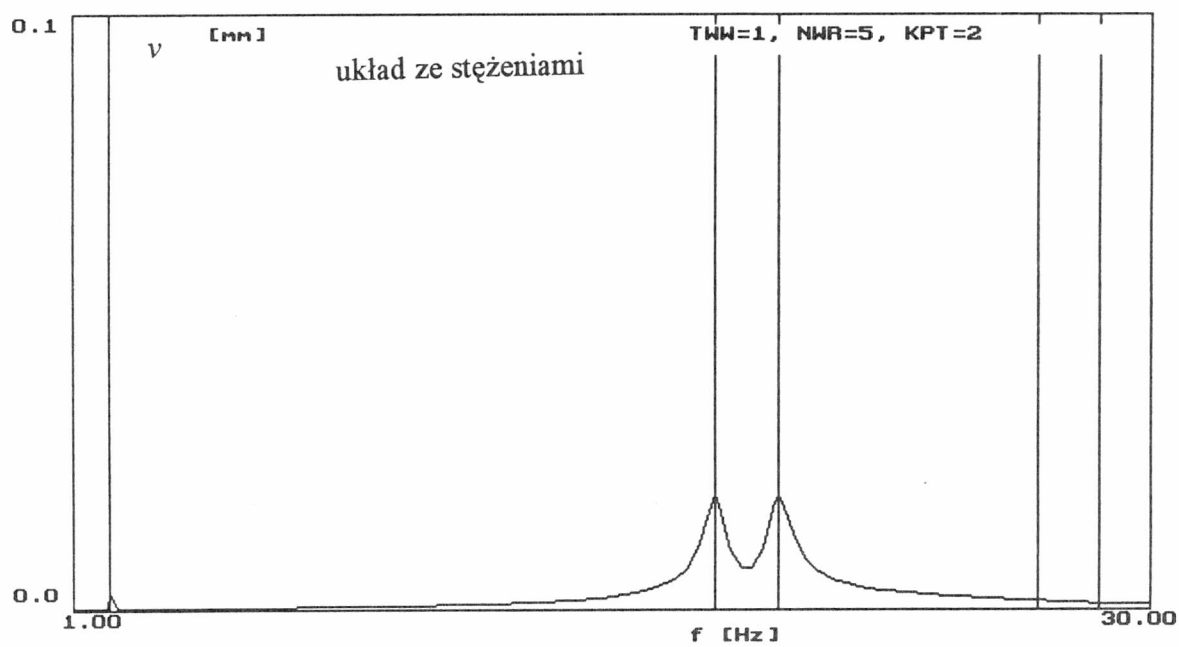
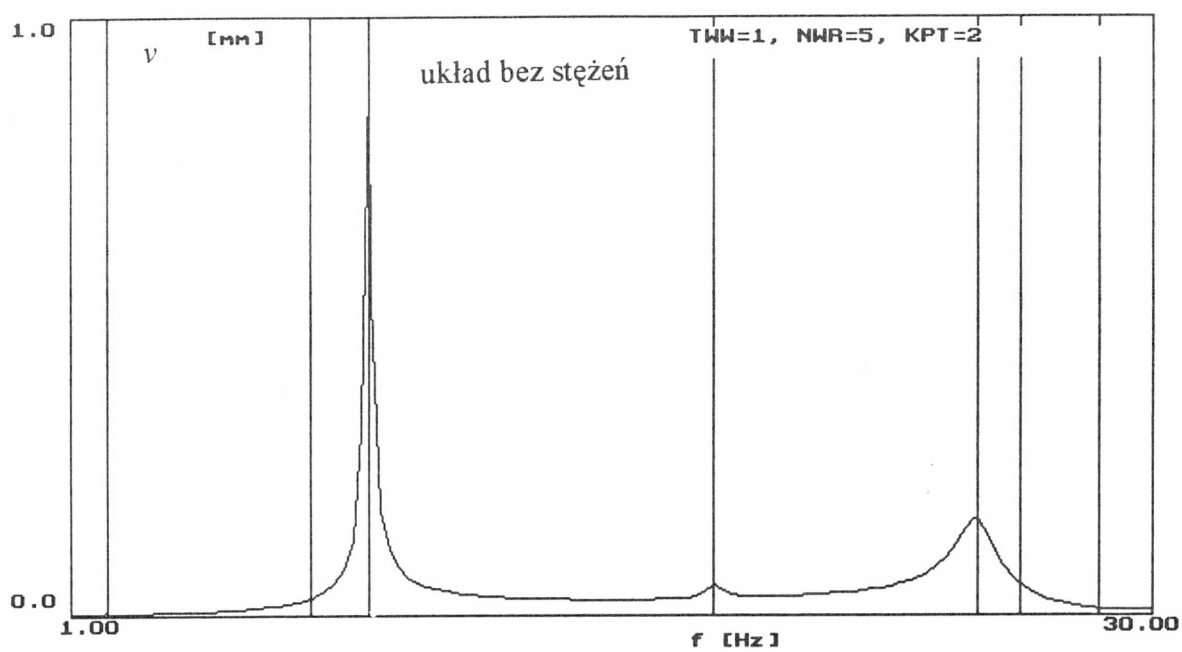
Różnice pomiędzy częstotliwościami nie są duże; np. różnica względna dla pierwszej częstotliwości wynosi $7,05 \cdot 10^{-6}$. Wyjątkiem jest siódma częstotliwość własna, gdzie różnica względna wynosi 3,8%, co jest związane z tym, że w siódmej formie własnej dominujące jest skręcanie i deplanacja przekrojów. Wpływ deplanacji nie jest duży. Wybrane charakterystyki amplitudowo–częstotliwościowe naprężeń stycznych, ilustrujące ten wpływ, pokazano na rys. 7.13.

Przy zaprojektowaniu stężeń w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny wymuszenia (stężenia typu X, przekrój stężenia $4,8 \text{ cm}^2$) następuje zwiększenie częstotliwości własnych. Jednocześnie stężenia, blokując ruch konstrukcji w płaszczyźnie wymuszenia, powodują znaczne obniżenie pików rezonansowych, co ilustruje rys. 7.14.

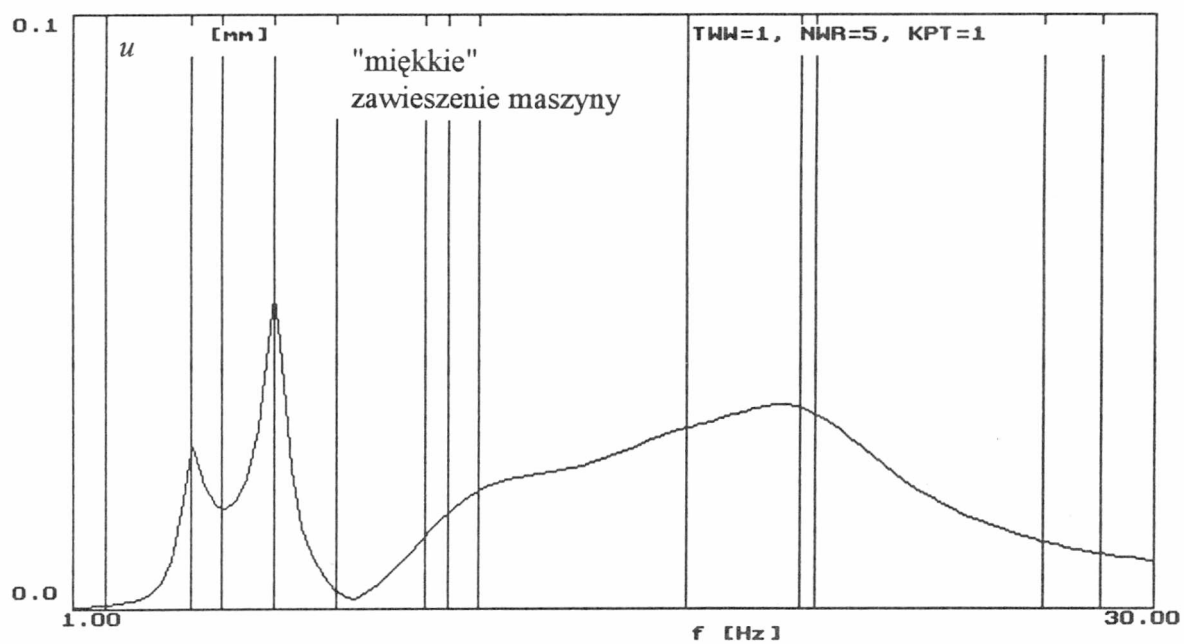
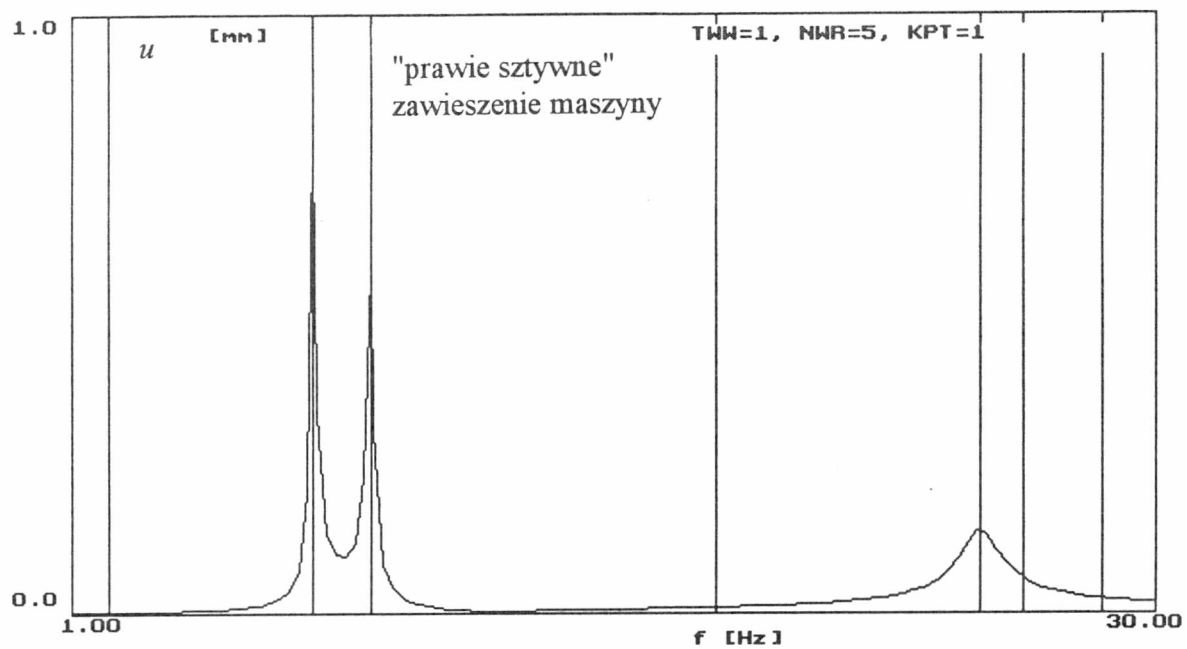
Podobny efekt zmniejszenia pików rezonansowych otrzymuje się przez zamodelowanie połączenia między maszyną a konstrukcją wsporczą jako połączenia "miękkiego" (sztywność połączenia $4,93 \cdot 10^5 \text{ N/m}$, charakterystyka tłumiąca $4,93 \cdot 10^5 \text{ Ns/m}$). Następuje wówczas zagęszczenie widma i jednocześnie zmniejszenie wartości amplitud, rys. 7.15.



Rys.7.13



Rys.7.14

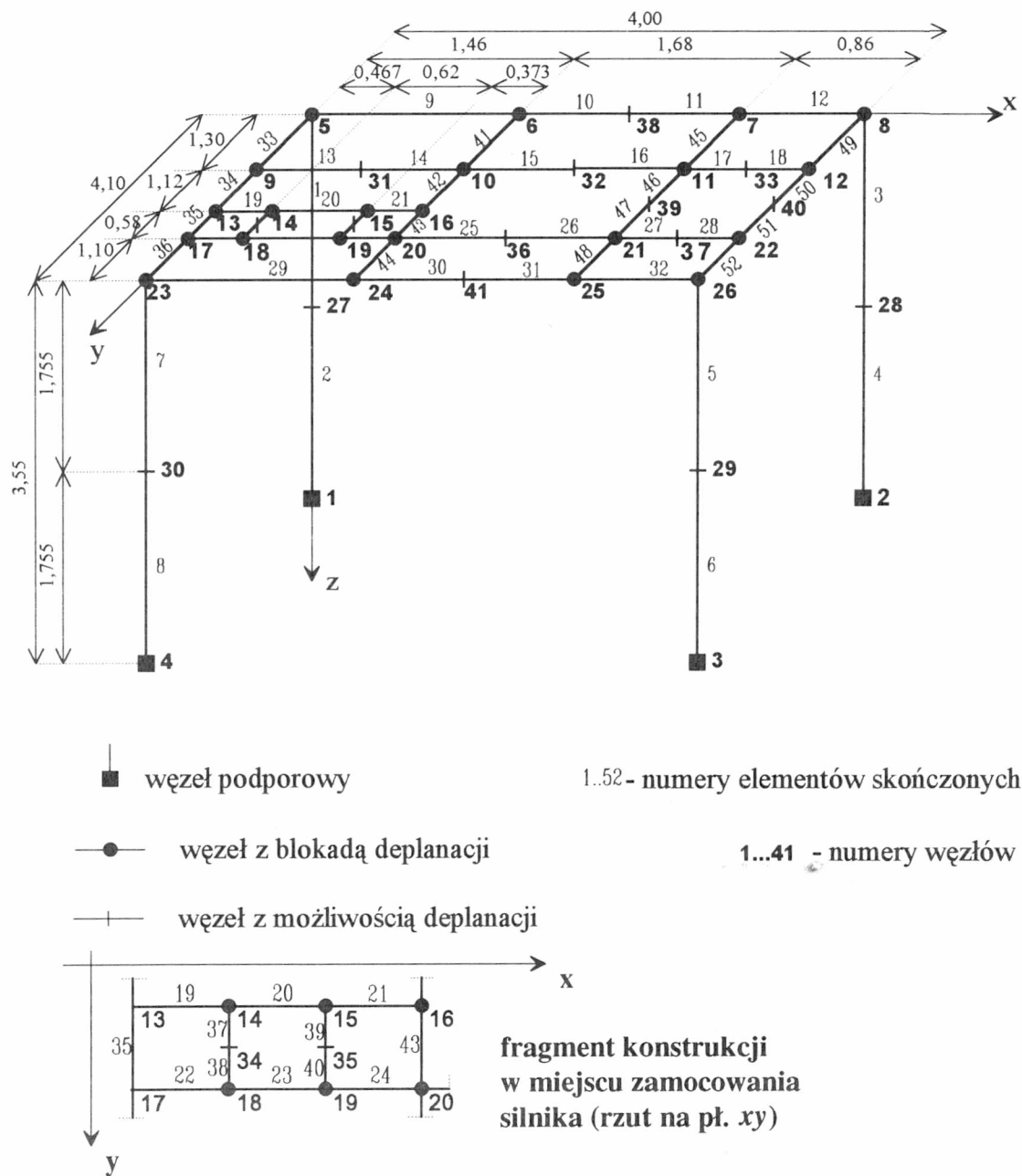


Rys.7.15

7.3. Analiza dynamiczna stalowego fundamentu ramowego pod wentylator

Opis konstrukcji

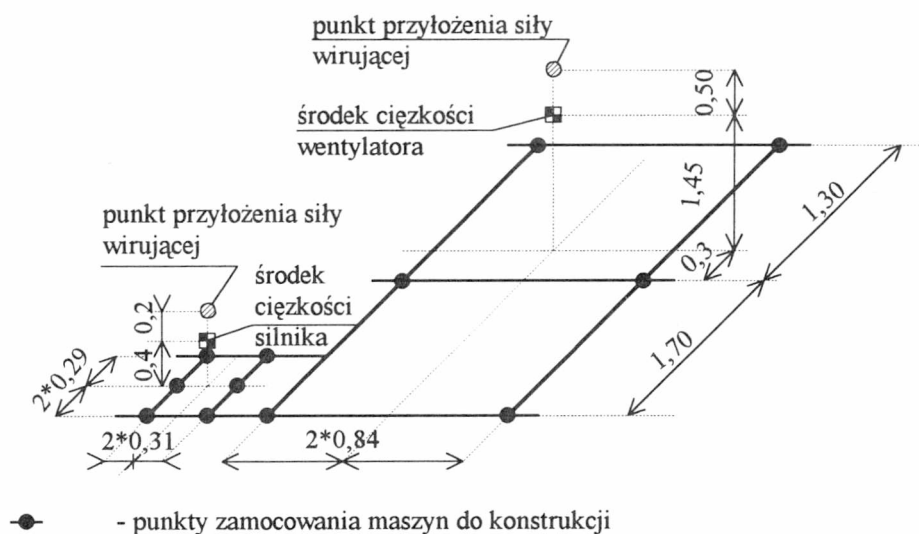
Jako przykład układu rzeczywistego wykorzystano stalową konstrukcję nośną po wentylator typu WOR-200. Projekt techniczny został wykonany przez Zakłady Badawcze i Projektowe Miedzi "CUPRUM" we Wrocławiu dla Kopalni Rudna. Wszystkie dane wykorzystane w analizie dynamicznej zaczerpnięto z projektu technicznego. Schemat ustroju konstrukcyjnego z przyjętym podziałem na elementy skończone przedstawiono na rys. 7.16.



Rys. 7.16.

Słupy, rygle równoległe do osi y oraz skrajne rygle równoległe do osi x wykonano z dwóch ceowników 300, zespawanych półkami, tworzących przekrój prostokątny. Pozostałe pręty wykonano z pojedynczego [300. Kształtowniki ustawione są w ten sposób, że słupy mają większą sztywność w płaszczyźnie xz , a pręty poziome – w płaszczyźnie pionowej. Punkty analizy naprężeń przyjęto analogicznie jak dla przekrojów wykorzystywanych w przykładzie testowym. Czas retardacji stali prętów cienkościennych wynosi 0,00025 s. Na konstrukcji wsporczej ustawione są dwie maszyny: silnik o masie 750 kg i wentylator o masie 2100 kg, pracujące przy częstotliwości technicznej 750 obr/min (12,5 Hz). Masowe momenty bezwładności silnika wynoszą po 40 kgm², natomiast momenty wentylatora wynoszą odpowiednio 1700, 260, 1700 kgm². Masowy moment niewyważenia obrotowego wynosi 0,026 kgm dla silnika oraz 0,072 kgm dla wentylatora.

Położenie środków ciężkości maszyn oraz punktów przyłożenia sił wirujących, w stosunku do punktów zamocowania maszyn, pokazano na rys. 7.17. Siły wirują w płaszczyznach równoległych do xz . Silnik jest zamocowany w węzłach konstrukcji o numerach: 14, 15, 18, 19, 34, 35, a wentylator – w węzłach 6, 7, 11, 21, 20, 10. Analizowano dwa sposoby zamocowania maszyn do fundamentu: "prawie sztywny" (modelujący połączenie na śruby) i "miękki" w kierunku pionowym (modelujący połączenie za pomocą wibroizolatorów).



Rys. 7.17

Dla "prawie sztywnego" zamocowania przyjęto, że lokalna częstość drgań pionowych maszyny jest równa 150 Hz. W przypadku połączenia "miękkiego" przyjęto lokalną sztywność 5 Hz.

Przy takich założeniach można oszacować sztywność więzi łączących maszynę z konstrukcją wsporczą:

$$\omega_{loc} = 2\pi f_{loc} = \sqrt{\frac{6k}{m}} \rightarrow k = \frac{2}{3}\pi^2 f_{loc}^2 m,$$

co daje rezultaty:

	silnik:	wentylator:
$f_{loc}=5 \text{ Hz}$	$1,23 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$3,45 \cdot 10^5 \text{ N/m}$,
$f_{loc}=150 \text{ Hz}$	$1,11 \cdot 10^8 \text{ N/m}$	$3,11 \cdot 10^8 \text{ N/m}$.

Dla wibroizolatorów, modelujących połączenie "miękkie", przyjęto lokalne tłumienie w wibroizolatorze 10%. Wynikające stąd charakterystyki tłumiące zawiesznień maszyny wynoszą:

$$c = 2\gamma \sqrt{k \frac{m}{6}} = 2\gamma \sqrt{\frac{2}{3}\pi^2 f_{loc}^2 m \frac{m}{6}} = \frac{2}{3}\gamma \pi f_{loc} m = \frac{2}{3} \cdot 0,1 \cdot \pi f_{loc} m,$$

$$c = 7,85 \cdot 10^2 \text{ Ns/m} \quad \text{dla silnika},$$

$$c = 2,20 \cdot 10^3 \text{ Ns/m} \quad \text{dla wentylatora}.$$

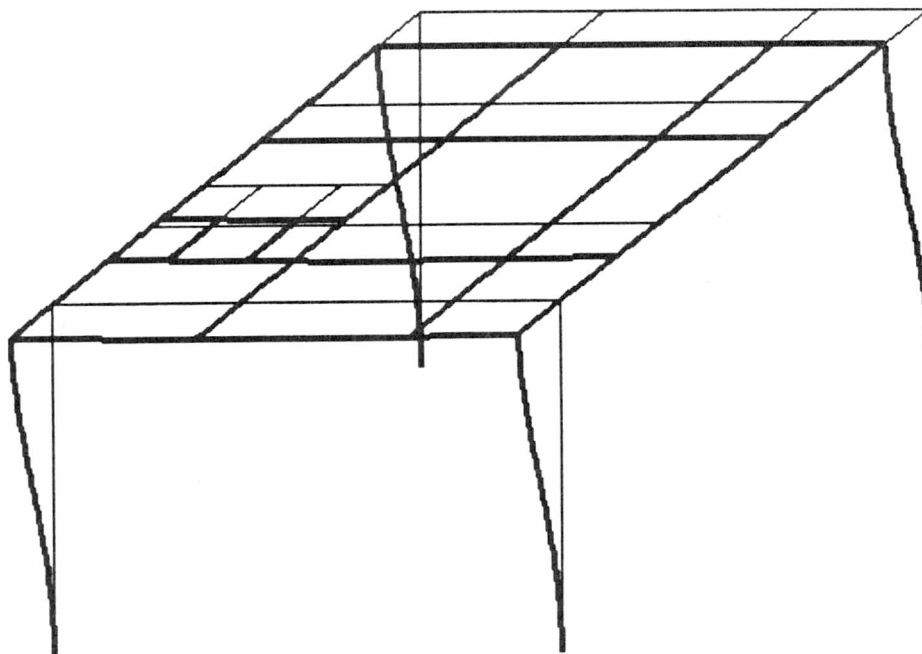
Analiza dynamiczna

W pokazanym na rys.7.16 podziale na elementy skończone są 4 węzły podporowe, 22 węzły z blokadą deplanacji i 15 węzłów z możliwością deplanacji, co łącznie z dwiema bryłami sztywnymi daje 249 dynamicznych stopni swobody.

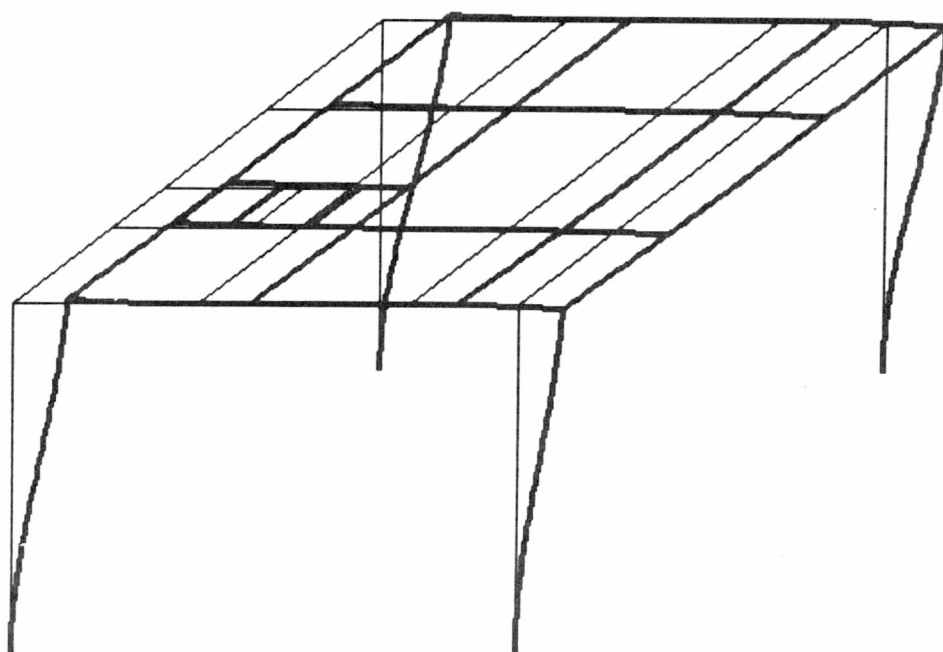
Na rys. 7.18.a,b przedstawiono cztery pierwsze formy własne cienkościennej struktury prętowej. Pierwsza forma własna jest formą giętą w kierunku osi y , natomiast druga forma jest formą giętą w kierunku osi x . Stół fundamentu jest bardzo sztywny w porównaniu z słupami. Trzecia forma własna jest formą skrętną, natomiast forma czwarta jest formą giętą stołu. W przedziale częstotliwości wzbudzenia występują dwa prążki widma własnego.

Podstawowym wariantem rozpatrywanej konstrukcji wsporczej jest układ z "prawie sztywnym" zawieszeniem maszyn, bez stężeń. Reprezentatywne charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe przemieszczeń, naprężeń normalnych i stycznych pokazano na rys. 7.19.a-d. Położenie punktów analizy naprężeń opisano w przykładzie testowym (rys.7.2). Do redukcji piku rezonansowego, odpowiadającego drugiej częstości własnej, zastosowano jeden absorber dynamiczny o masie 200 kg, zamocowany w węźle 12, w kierunku osi x . Przy uwzględnieniu redukcji piku rezonansowego amplitudy przemieszczeń węzłowych oraz naprężeń normalnych i stycznych w prętach o przekroju zamkniętym mieszczą się w granicach dopuszczalnych (rys.7.19.a-c). W prętach o

$f[1] = 7.6773 \text{ Hz}$

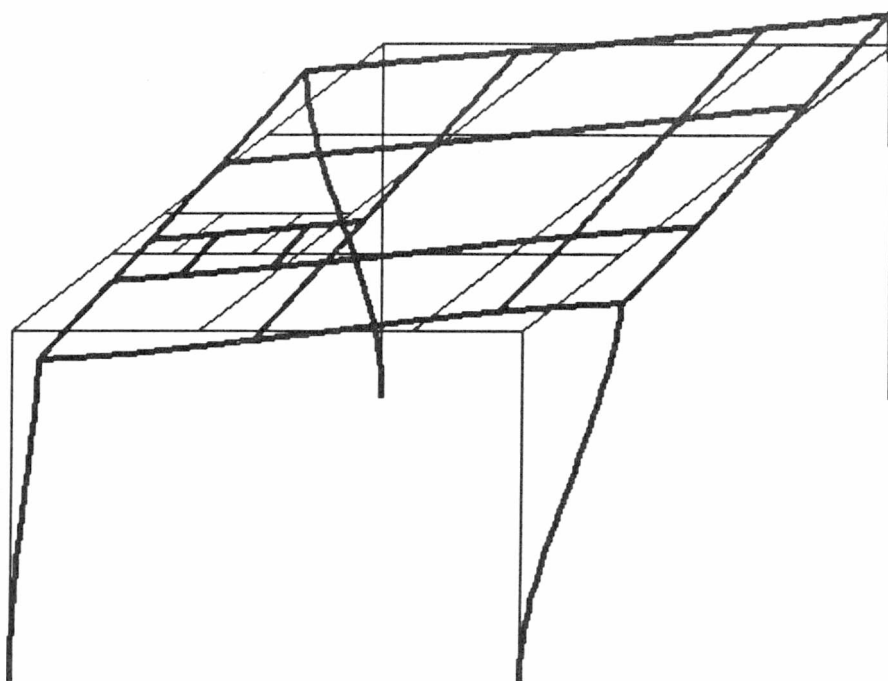


$f[2] = 10.7903 \text{ Hz}$

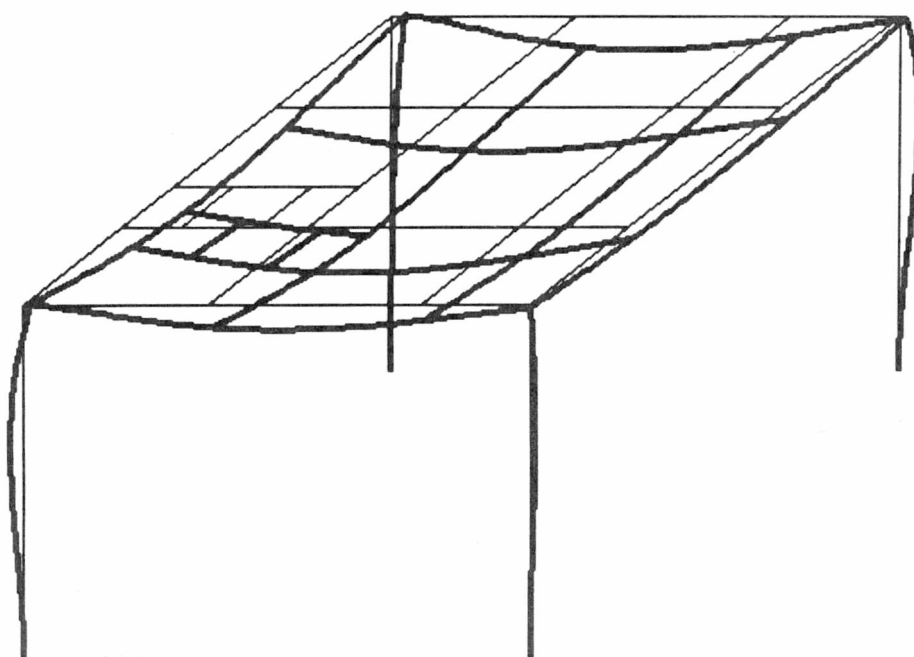


Rys.7.18.a

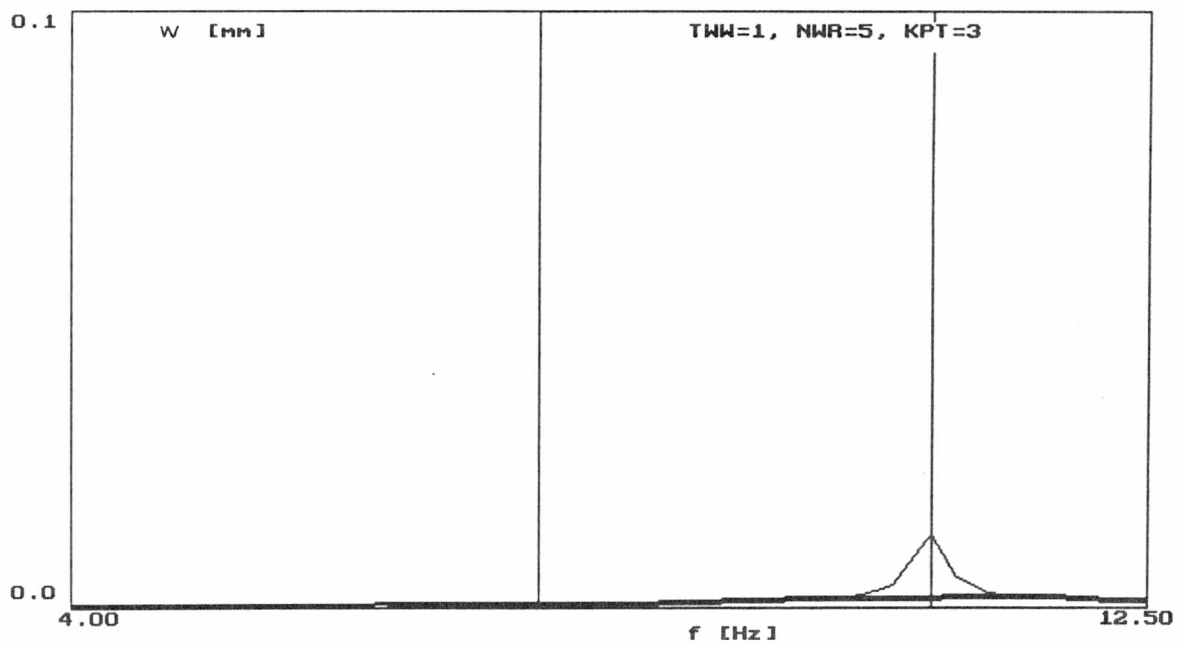
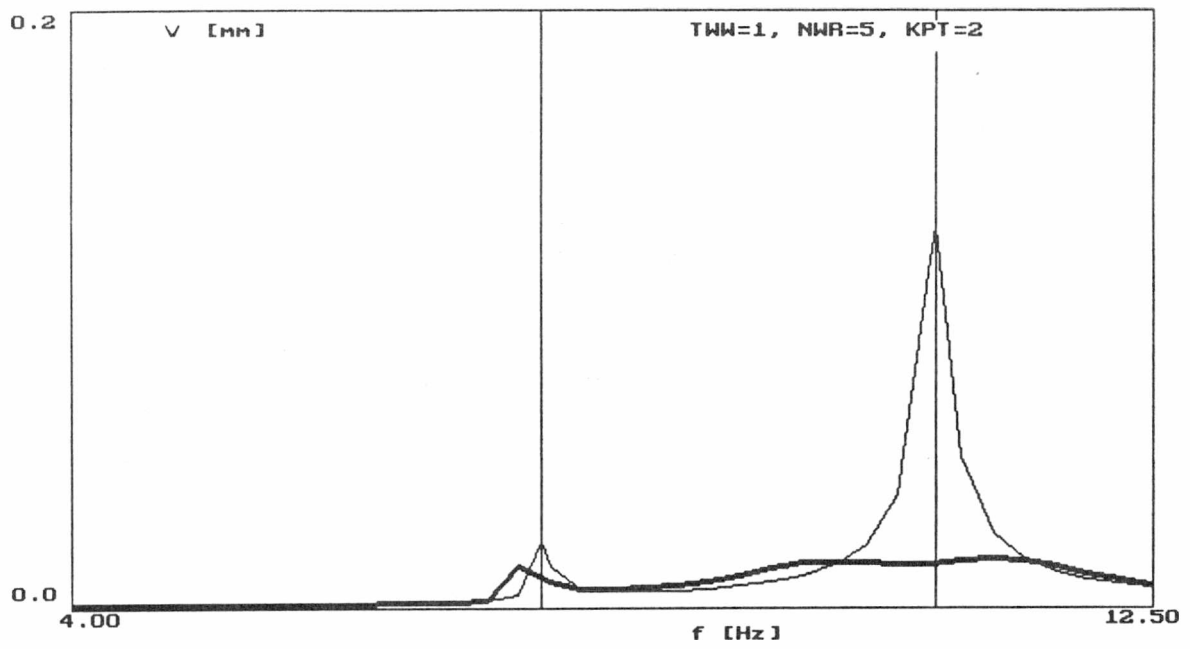
$f[3] = 15.6860 \text{ Hz}$



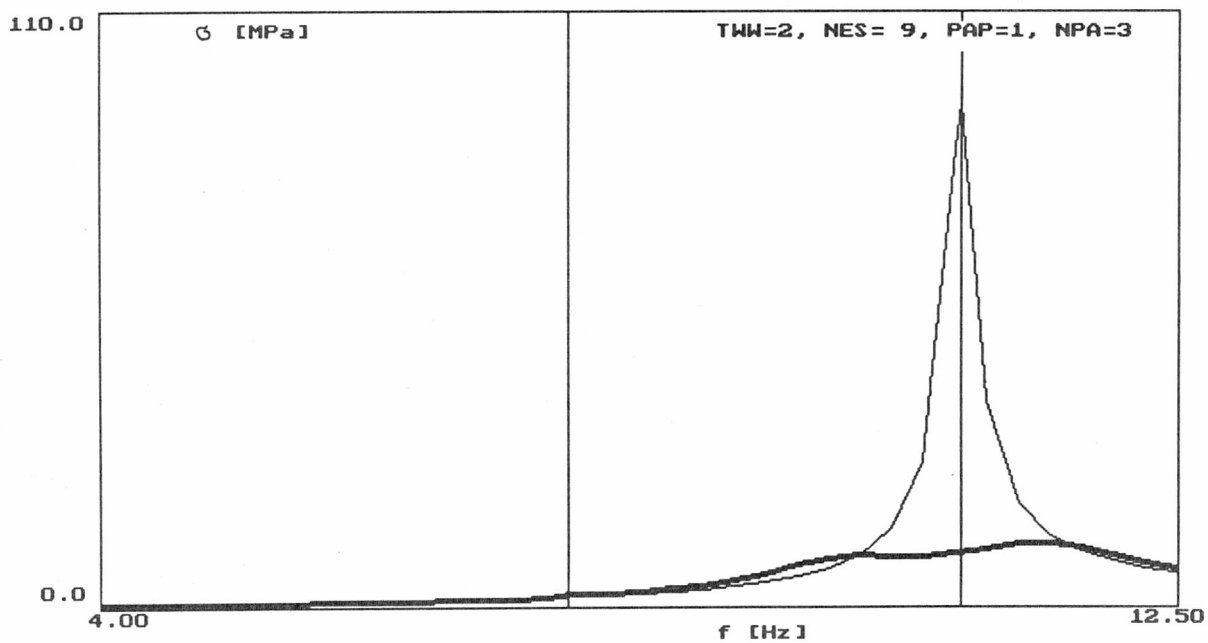
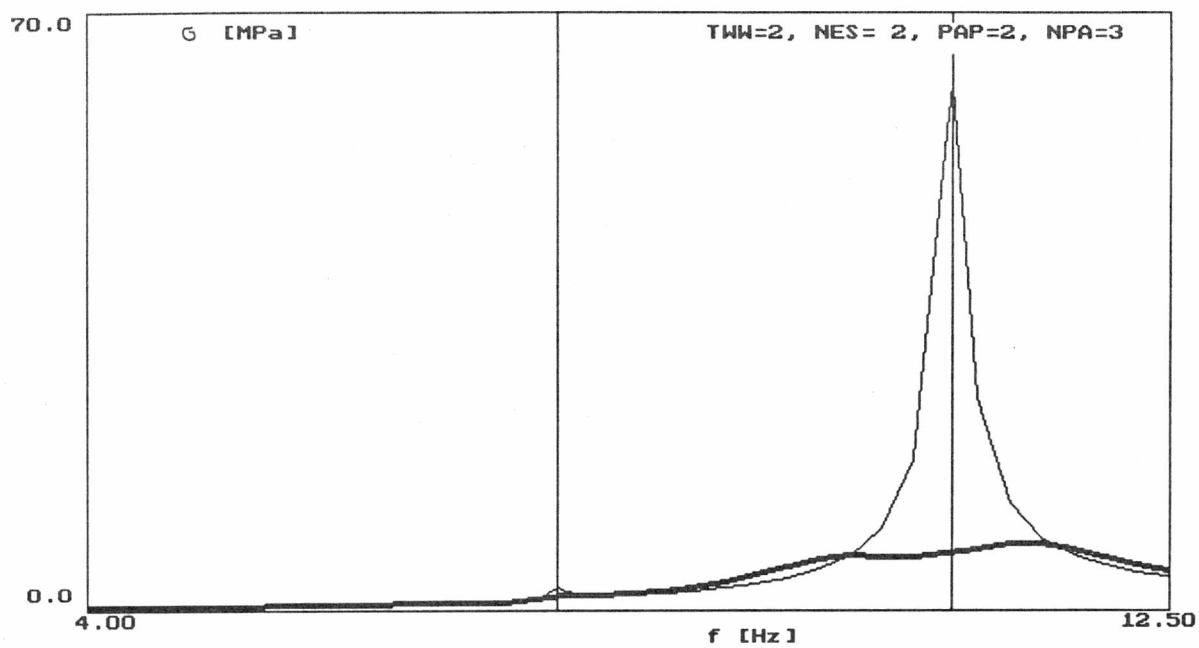
$f[4] = 29.8840 \text{ Hz}$



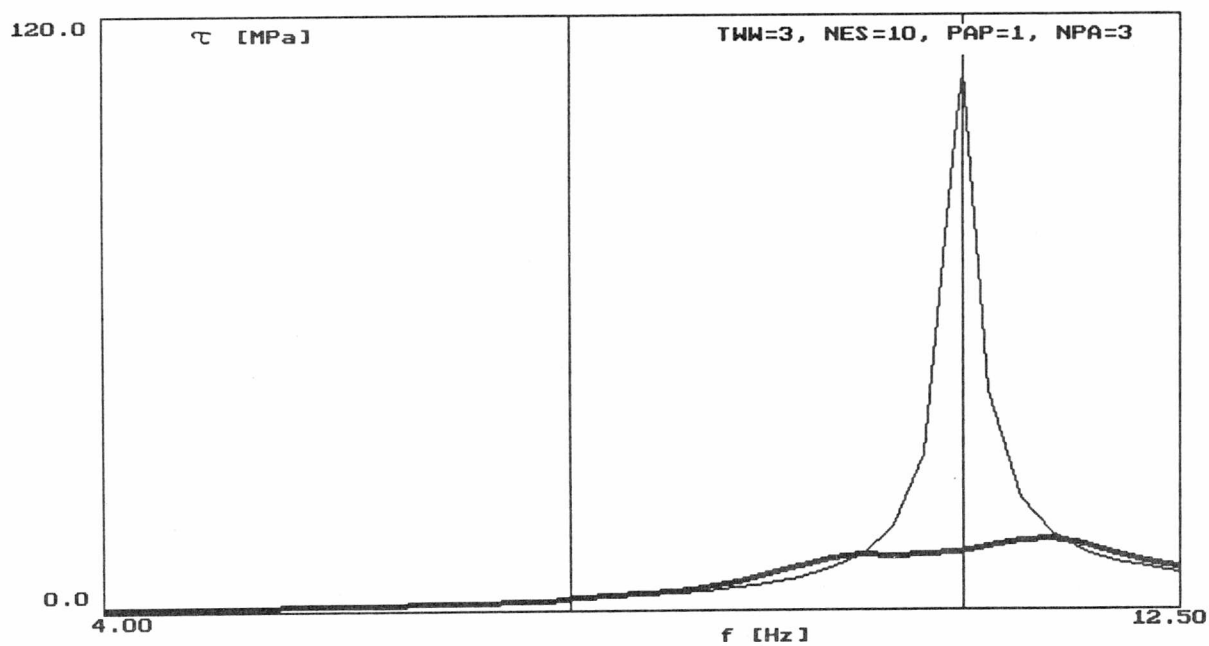
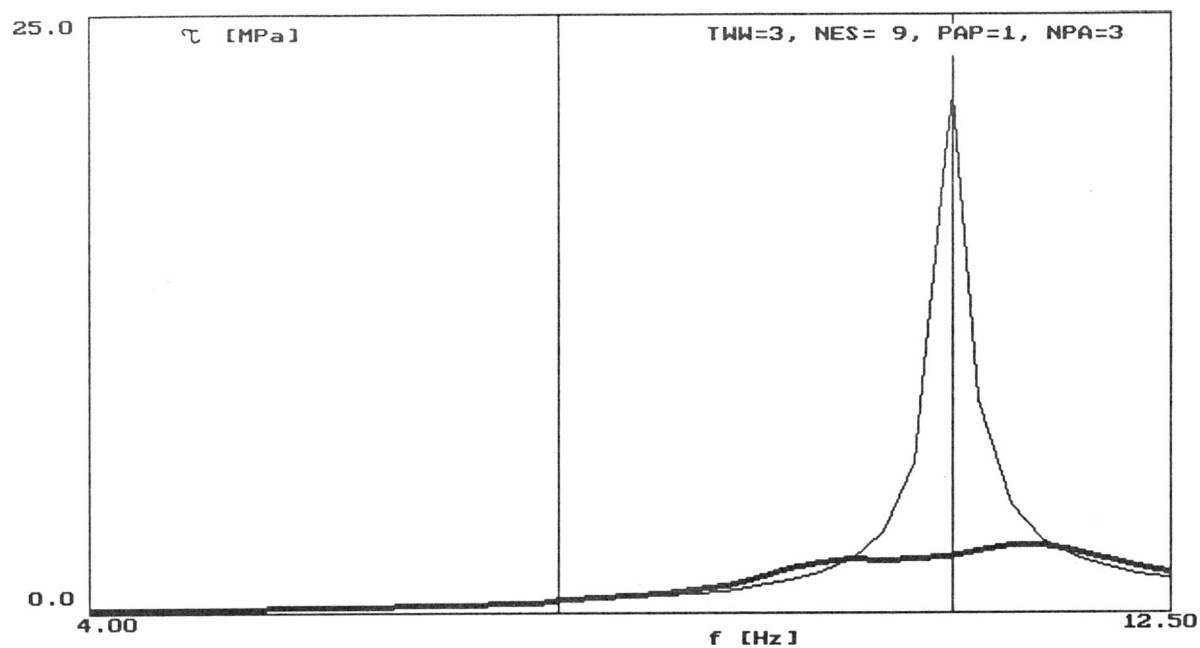
Rys.7.18.b



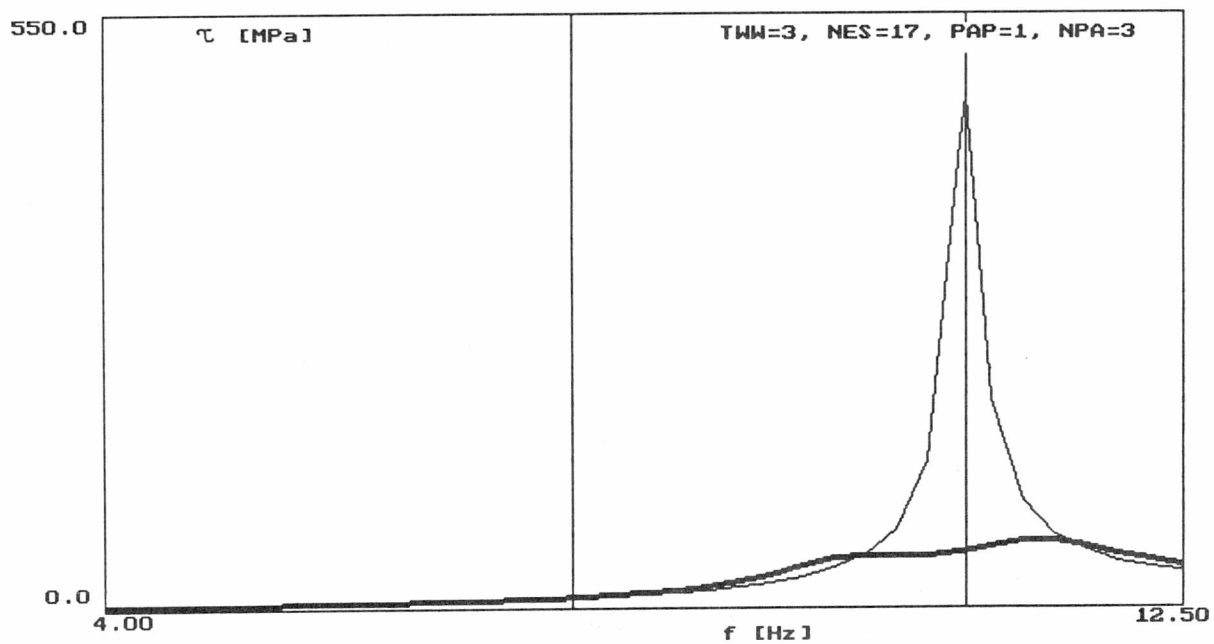
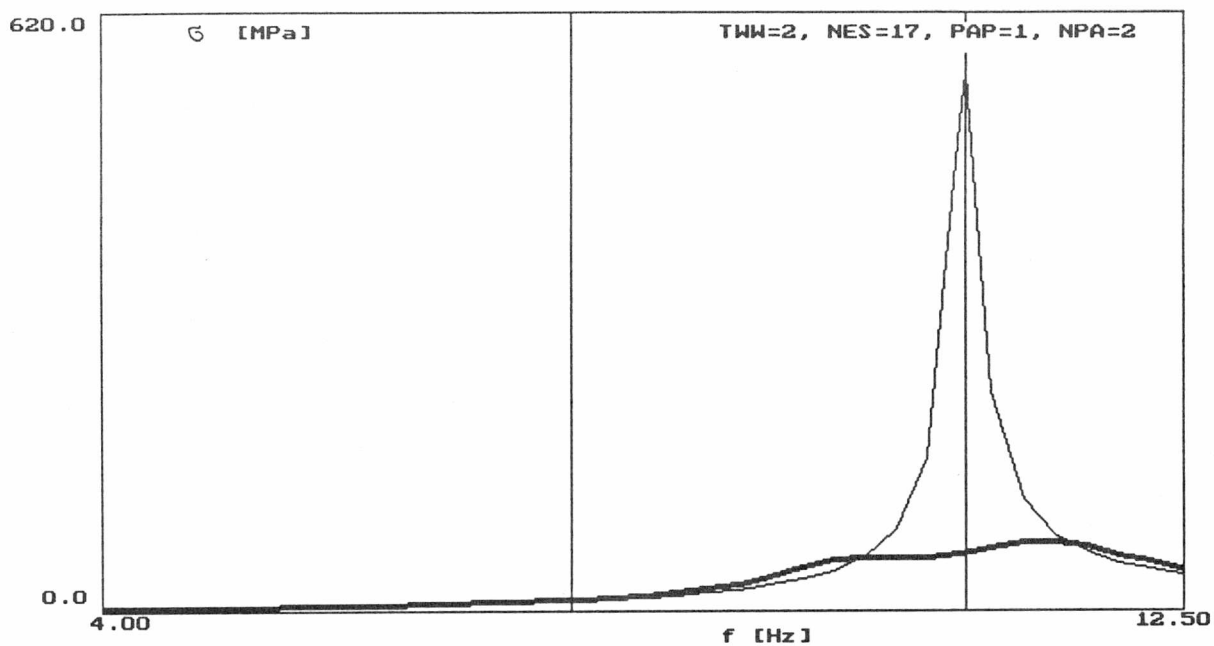
Rys.7.19.a



Rys.7.19.b



Rys.7.19.c



Rys.7.19.d

przekroju otwartym w układzie bez absorbera dynamicznego powstają rezonansowe naprężenia normalne i styczne znacznie przekraczające wartości dopuszczalne (rys.7.19.d). Absorber dynamiczny redukuje te naprężenia ośmiokrotnie, może to jednak nie wystarczyć do spełnienia warunku nośności z uwzględnieniem zmęczenia. Lepszym rozwiązaniem jest zwiększenie sztywności skrętnej zagrożonych prętów, przez ich przeprojektowanie.

W projekcie technicznym przewidziane są stężenia w "ścianach" prostopadłych do płaszczyzny wymuszenia, typu X, wykonane z [50. Tak zaprojektowane stężenia praktycznie nie mają wpływu na charakterystyki amplitudowo–częstotliwościowe odpowiedzi układu, ze względu na nie ujawnianie się układów modalnych, w których stężenia odgrywają istotną rolę. Jeżeli zaprojektuje się stężenia w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny wymuszenia, to następuje zwiększenie odpowiednich częstotliwości własnych, co powoduje znikanie ostrych pików rezonansowych w zakresie do 12,5 Hz. Zjawisko to ilustrują charakterystyki na rys.7.20. Zaprojektowanie stężeń w płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny wzbudzenia należy uznać za błąd projektanta.

Odpowiednio dobrane parametry zawieszenia maszyn, mogą znacznie zmniejszyć naprężenia w prętach konstrukcji wsporczej. Wprawdzie "miękkie" zamocowanie maszyn powoduje zwiększenie liczby częstotliwości własnych w przedziale 0–12,5 Hz, jednak elementy tłumiące w zawieszeniach maszyn powodują zwiększenie głównych współczynników tłumienia i 'zgaszenie' pików rezonansowych poniżej poziomu dopuszczalnego, rys.7.21a,b. Poniżej zestawiono początkowe częstotliwości własne i odpowiadające im główne współczynniki tłumienia dla rozpatrywanego układu z "miękkim" zawieszeniem pionowym:

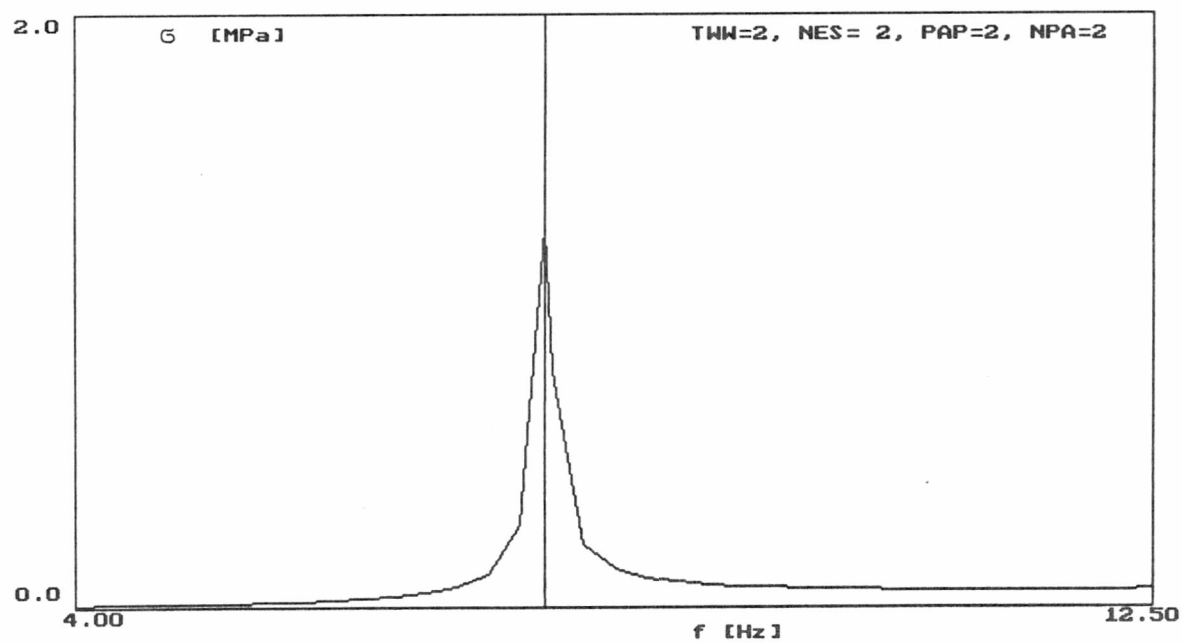
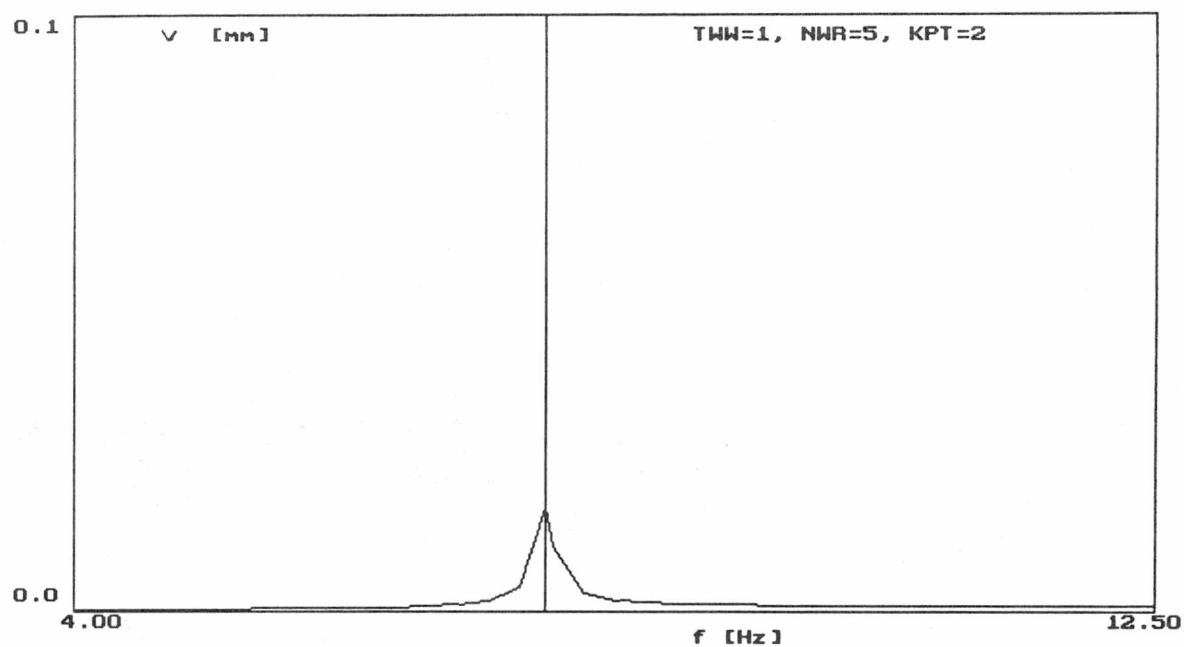
***** Sciezka 4: Wyniki obliczen:

Widmo własne z estymacja błędów:

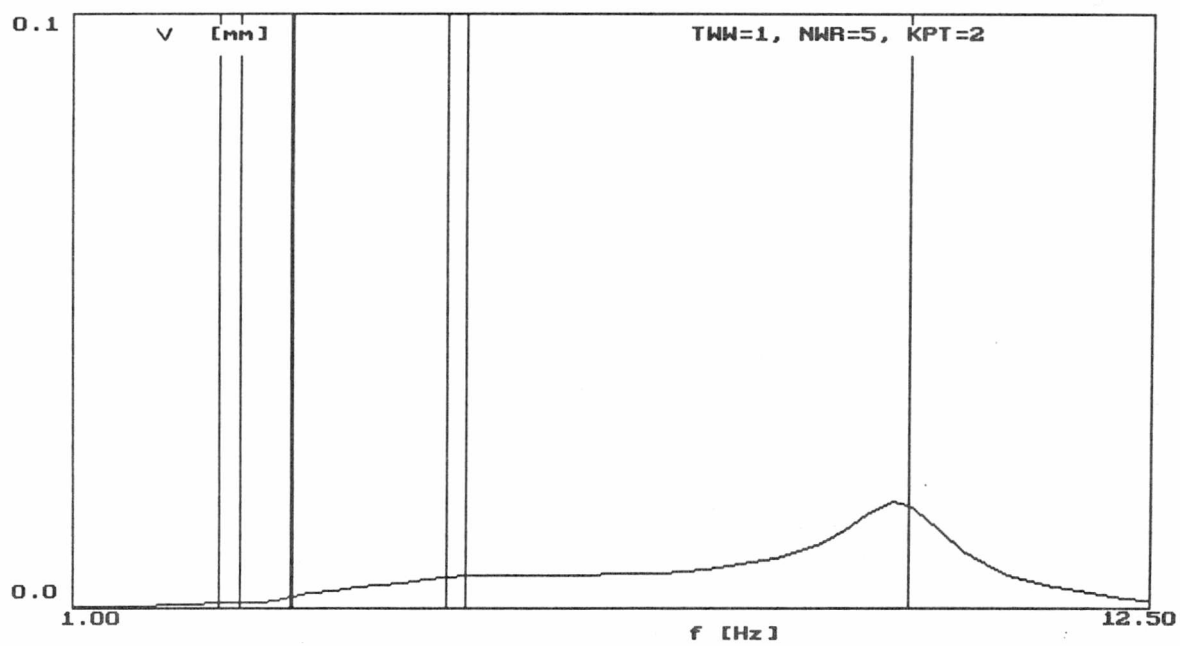
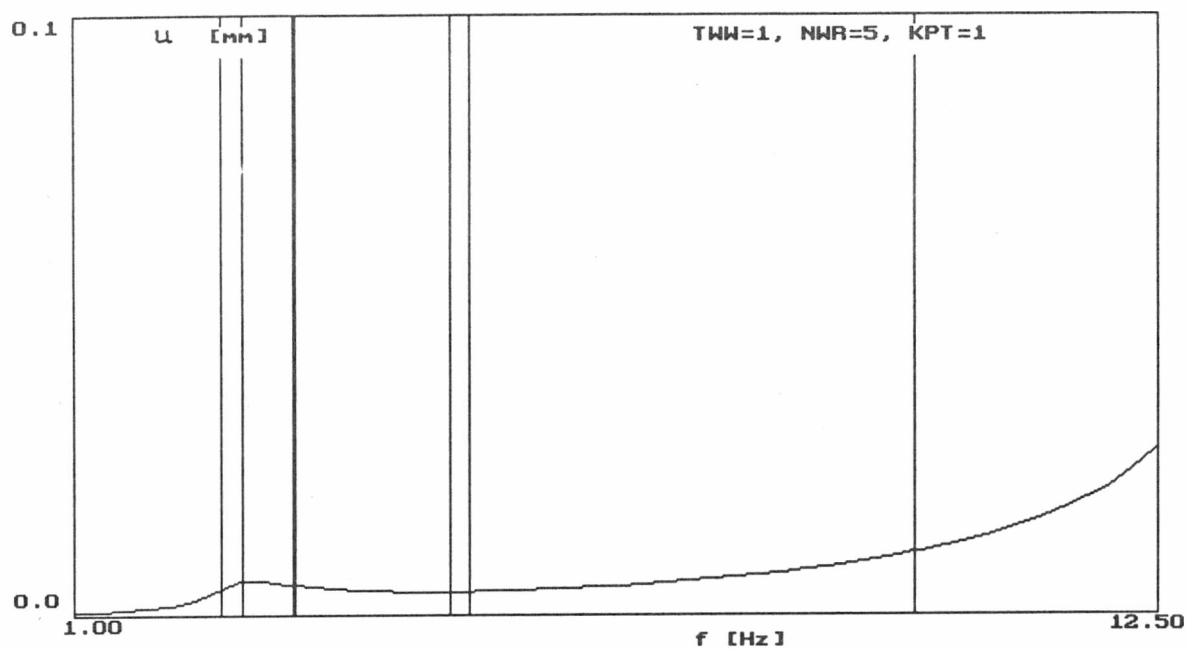
f[1]=	2.54211 Hz	Error= 7.3107661E-0011
f[2]=	2.77426 Hz	Error= 7.5896471E-0011
f[3]=	3.31368 Hz	Error= 9.9597099E-0011
f[4]=	3.33123 Hz	Error= 3.0505054E-0011
f[5]=	4.96854 Hz	Error= 8.7095090E-0011
f[6]=	5.18272 Hz	Error= 1.8638325E-0011
f[7]=	9.93532 Hz	Error= 7.7182942E-0011
f[8]=	14.41290 Hz	Error= 6.9359505E-0011
f[9]=	16.97195 Hz	Error= 1.0387607E-0011

Główne współczynniki tłumienia:

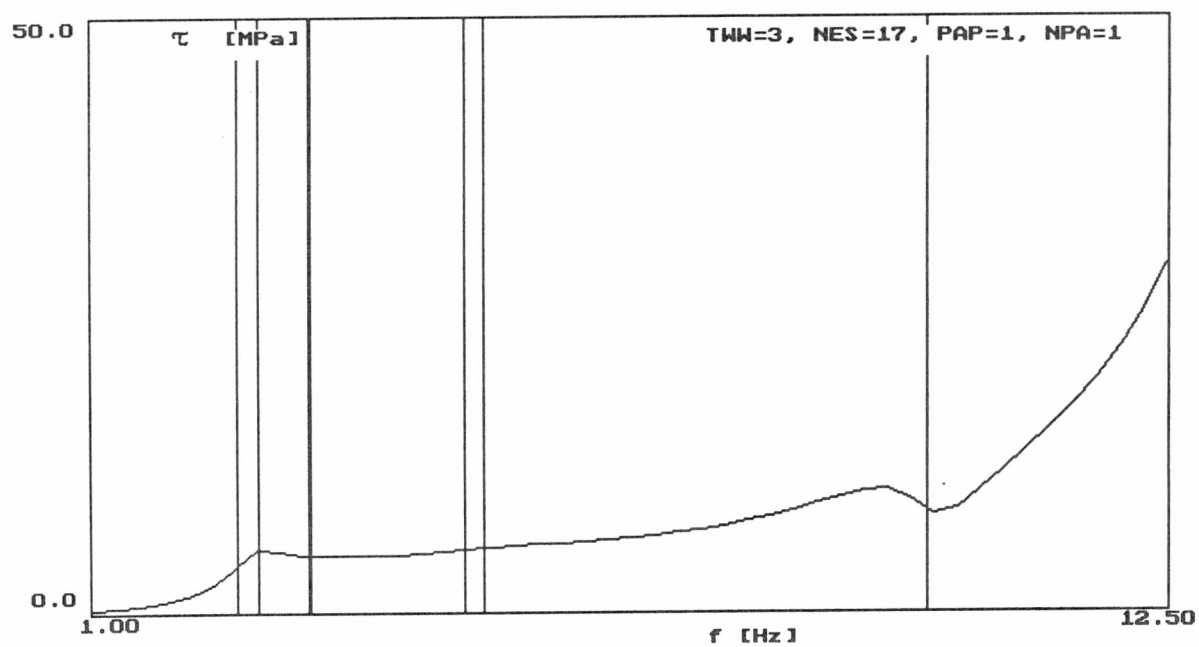
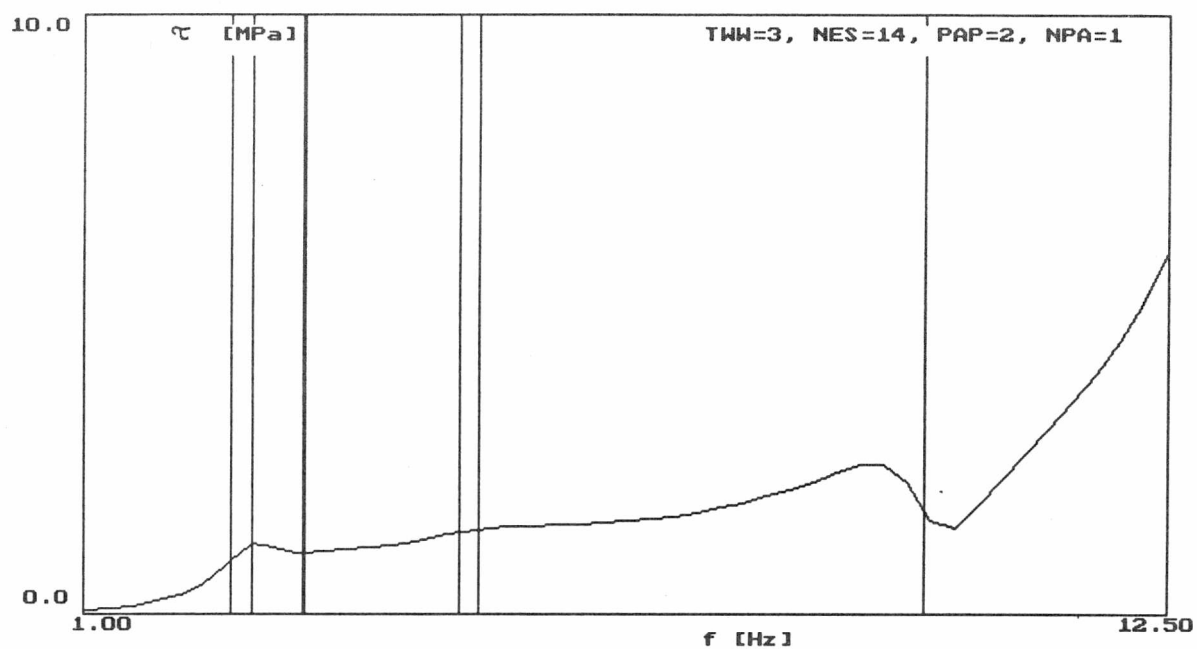
Gamma[1]=	0.122805
Gamma[2]=	0.132328
Gamma[3]=	0.153938
Gamma[4]=	0.161476
Gamma[5]=	0.241169
Gamma[6]=	0.242969
Gamma[7]=	0.053012
Gamma[8]=	0.032617
Gamma[9]=	0.018794



Rys.7.20



Rys.7.21.a



Rys.7.21.b

Na podstawie przeprowadzonej analizy dynamicznej fundamentu ramowego pod wentylator można sformułować następujące wnioski przydatne w projektowaniu stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe:

- Należy unikać projektowania układów, w których występują połączenia prętów cienkościennych o sztywności na skręcanie różniące się o kilka rzędów (np. połączenie pręta o profilu zamkniętym z prętem o profilu otwartym).
- Należy unikać zastosowania stężeń, które są narażone na bardzo duże naprężenia i wyboczenie oraz są niekorzystne ze względów technologicznych.
- Preferowanym rozwiązaniem konstrukcyjnym w fundamentach pod ciężkie maszyny powinno być "prawie sztywne" zawieszenie maszyn oraz zabezpieczenie układu za pomocą absorbera dynamicznego lub absorberów dynamicznych.

Wnioski przydatne w projektowaniu biernych absorberów dynamicznych są następujące:

- Łączna masa modalnych absorberów dynamicznych powinna wynosić 1–4 % masy konstrukcji zabezpieczanej przed nadmiernymi drganiami rezonansowymi.
- Absorbery powinny być zlokalizowane w łatwo dostępnych węzłach układu, najlepiej na stole fundamentu.
- Optymalne parametry zawieszenia absorberów mogą być dobrane z lokalnego kryterium jakości, odniesionego do wybranego układu modalnego i absorbera strojonego względem tego układu.
- Elementy zawieszenia absorbera mogą być zaprojektowane w formie układu sprężyn śrubowych i tłumika hydraulicznego.

8. PODSUMOWANIE

Rozprawa jest poświęcona dynamice stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe. Opracowano adekwatny do rzeczywistości model fizyczny wymienionego typu konstrukcji. Konstrukcja nośna fundamentu jest ramą przestrzenną, złożoną z prętów cienkościennych o przekrojach otwartych lub jednokomorowych zamkniętych, spełniającą pewne warunki ortogonalności. Rama jest sztywno zamocowana w nieodkształcalnej i nieruchomej żelbetowej płycie dolnej. Węzły naturalne struktury prętowej są sztywne i tak skonstruowane, że nie przenoszą deplanacji (deplanacja przekrojów przywęzłowych jest równa zero). Maszyny obrotowe są traktowane jako bryły sztywne, połączone z konstrukcją wsporczą za pomocą dyskretnych przestrzennych elementów sprężysto-tłumiących. Uwzględniono trzy możliwe położenia osi obrotu maszyny, dwa możliwe kierunki obrotu i dowolną fazę początkową. Maszyny obrotowe również spełniają pewne warunki ortogonalności. Uwzględniono tłumienie materiałowe w prętach konstrukcji nośnej. W układzie mogą występować wiotkie stężenia o dowolnej lokalizacji. Model konstrukcji rozpatrywanego typu jest liniowy geometrycznie i fizycznie.

Opracowano podstawy mechaniki przyrzmatycznych prętów cienkościennych o przekroju otwartym lub jednokomorowym zamkniętym. W przypadku prętów o profilu otwartym przyjęto pierwsze i drugie założenie Vlasov'a, a w przypadku prętów o profilu zamkniętym - pierwsze założenie Vlasov'a i założenie Umanski'ego. W porównaniu z dotychczasowymi ujęciami proponowane ujęcie zagadnienia zawiera następujące nowe elementy:

- uwzględnienie skokowo zmiennej grubości ścianki profilu cienkościennego,
- uwzględnienie efektu Poissona w analizie sił przekrojowych i naprężeń,
- uwzględnienie rozłożonych obciążeń momentowych zginających i skręcających,
- sformułowanie różniczkowych równań równowagi statycznej pręta cienkościennego w bazie przemieszczeń związanych z osią centroidalną, według teorii pierwszego i drugiego rzędu,
- wyznaczenie wzorów na siły przekrojowe pręta cienkościennego w bazie przemieszczeń związanych z osią centroidalną,
- analiza warunków brzegowych w prętach cienkościennych,
- uwzględnienie współczynnika poprawkowego w formule na naprężenia St-Venanta w prętach o profilu otwartym.

Operowanie bazą przemieszczeń związanych z osią centroidalną jest niezbędne w analizie ortogonalnych cienkościennych struktur prętowych.

Modelem dynamicznym konstrukcji rozpatrywanego typu jest liniowy układ dyskretny z tłumieniem nieproporcjonalnym, obciążony harmonicznym. Stalową cienkościenną konstrukcję

wsporczą podzielono na prętowe elementy skończone. Ruchome węzły naturalne konstrukcji wsporczej mają po 6 stopni swobody, natomiast węzły dodatkowe na długości prętów - po 7 stopni swobody, w tym jedną deplanację w kierunku osi pręta. Każda maszyna obrotowa wprowadza 6 stopni swobody do układu.

Opracowano przestrzenny, cienkościenny, prętowy element skończony o 14 stopniach swobody, z uwzględnieniem odkształcalności osiowej, giętnej, skrętnej i deplanacyjnej. Przyjęto liniową aproksymację przemieszczeń podłużnych oraz sześcienną aproksymację Hermita przemieszczeń poprzecznych i kątów skręcenia. W porównaniu z dotychczas opracowanymi cienkościennymi elementami prętowymi proponowane ujęcie jest nowe w następującym zakresie:

- przyjęcie bazy przemieszczeń związanej z osią centroidalną,
- wyprowadzenie formuły na energię potencjalną elementu o profilu otwartym i jednokomorowym zamkniętym, według teorii drugiego rzędu,
- wyprowadzenie formuły na energię kinetyczną elementu o profilu otwartym i jednokomorowym zamkniętym, z uwzględnieniem bezwładności obrotowej i deplanacyjnej,
- przyjęcie kolejności i zwrotów współrzędnych lokalnych elementu, prowadzących do macierzy sztywności i bezwładności elementu mających powtarzalną strukturę blokową.

Cechą charakterystyczną stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe, z połączeniami śrubowymi maszyn z konstrukcją wsporczą, jest mała moc tłumienia drgań. Może to być przyczyną nadmiernych drgań układu w wybranych strefach rezonansowych. Do zabezpieczenia konstrukcji wsporczej przed nadmiernymi drganiami zastosowano bierne absorbery dynamiczne, strojone względem wybranych układów modalnych konstrukcji podstawowej.

Do sformułowania macierzowego równania ruchu modelu dynamicznego konstrukcji rozpatrywanego typu, wyposażonych w absorbery dynamiczne, zastosowano metodę bilansu energii i równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Rozkład statycznych sił osiowych, wywołanych ciężarem własnym maszyn i konstrukcji wsporczej, wyznaczono według teorii pierwszego rzędu. Początkową grupę częstości i form własnych wyznaczono iteracyjną metodą Rayleigha. Drgania wymuszone układu są wzbudzane bezwładnościowo, wskutek niewyważenia części wirujących maszyn. Ze względów bezpieczeństwa pomija się wpływ przyspieszenia fazy w czasie rozbiegu lub wybiegu maszyn. W analizie drgań wymuszonych harmonicznymi, w czasie rozbiegu, wybiegu lub stanu eksploatacyjnego maszyn, wykorzystano charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe wielkości wynikowych, tj. przemieszczeń węzłowych oraz naprężeń normalnych i stycznych w przekrojach przywęzłowych.

Opracowano komputerowy algorytm dyskretyzacji i szybkiej agregacji układu, wykorzystujący warunki ortogonalności w układzie. Opracowano półprofesjonalny program komputerowy GROS do analizy dynamicznej konstrukcji rozpatrywanego typu. W procesorze programu wyróżniono sześć ścieżek przebiegu programu:

- 1) tworzenie "banków" przekrojów cienkościennych otwartych,
- 2) tworzenie "banków" przekrojów cienkościennych zamkniętych jednokomorowych,
- 3) wyznaczanie rozkładu statycznych sił osiowych,
- 4) rozwiązywanie zagadnienia własnego,
- 5) wyznaczanie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych odpowiedzi układu bez absorberów dynamicznych,
- 6) projektowanie absorberów dynamicznych i wyznaczanie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych odpowiedzi układu z absorberami dynamicznymi.

Główne wyniki obliczeń (formy własne, charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe) są prezentowane również w formie graficznej. Problem dużej liczby stopni swobody rozwiązano, stosując dynamiczne zmienne macierzowe i kompilując program w trybie "protected" w systemie Borland Pascal 7.0.

Przeprowadzono obszerną analizę dynamiczną dwóch stalowych konstrukcji wsporczych pod maszyny obrotowe. Pierwsza konstrukcja ma charakter testowy, a druga odwzorowuje rzeczywisty fundament pod wentylator. Sformułowano wnioski przydatne w projektowaniu stalowych fundamentów ramowych i absorberów dynamicznych. Uzyskane rozwiązania statyczne i dynamiczne, szczególnie omówione w rozdziale 7, pozwalają na stwierdzenie, że główne tezy rozprawy doktorskiej, wymienione we Wstępie, zostały udowodnione.

Zdaniem autora możliwe i celowe są następujące kierunki dalszych badań związanych z tematem rozprawy:

- wpływ podatności i skończonych wymiarów ruchomych węzłów naturalnych cienkościennej struktury prętowej,
- modelowanie ciągłych połączeń maszyny z konstrukcją wsporczą,
- wpływ podatności postaciowej prętów cienkościennych,
- wpływ podatności i tłumienia podłoża,
- modelowanie innych typów prętów cienkościennych, np. prętów z przewiązkami, prętów o przekrojach otwarto-zamkniętych i in.

Autor składa Panu Profesorowi Marianowi Klasztornemu serdeczne podziękowanie za sfinansowanie prac badawczych objętych rozprawą w ramach grantu KBN, za przekazaną wiedzę w dziedzinie dynamiki konstrukcji, metod numerycznych i programowania w języku Pascal oraz za cenne wskazówki, które pomogły autorowi rozwiązać szereg zagadnień szczegółowych w rozprawie. Autor dziękuje serdecznie także Doktorowi Kazimierzowi Myśleckiemu za pomoc w opracowaniu pakietu procedur obiektowych algebry liniowej.

LITERATURA

Monografie, artykuły:

1. Barsoum R. S., Gallagher R. H., Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems, *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, **2**, 1970, pp. 335-352.
2. Cheung Y. K., *Finite strip method in structural analysis*, Pergamon Press, Oxford 1976.
3. Cywiński Z., Metoda iteracyjna Crossa w zastosowaniu do rozwiązywania skręcania płaskich cienkościennych układów ramowych o przekrojach otwartych, *Z. N. PGd.*, Nr 32, Bud. Łąd. V, 1962, s. 89-107.
4. Cywiński Z., Bimoment Distribution Method for Thin-Walled Beams, Part 1, *Der Stahlbau*, 4/1978, pp. 106-113.
5. Cywiński Z., Bimoment Distribution Method for Thin-Walled Beams, Part 2, *Der Stahlbau*, 5/1978, pp. 152-157.
6. Czapliński K., Kąt spaczenia i równowaga bimomentów w węźle sztywnym pewnego typu, *Arch. Inż. Łąd.*, **16**, 2/1970, s. 301-313.
7. Czapliński K., Dąbrowski W., O równowadze węzłów w cienkościennych konstrukcjach przestrzennych, *ZN PGd*, Nr 187, Bud. Łąd. XXIII, 1972, s. 163-179.
8. Den Hartog J. P., *Mechanical Vibrations*, Mc Graw-Hill Book Comp., 1956.
9. Frąckiewicz H. i in., *Węzły i połączenia konstrukcyjne. Projektowanie metodą nośności granicznej*, WNT, Warszawa, 1985.
10. Gjelsvik A., *The theory of thin walled bars*, John Wiley & Sons, New York 1981.
11. Gosowski B., Rozwiązania zagadnień skręcania prętów cienkościennych w postaci dystrybucyjnej, *Arch. Inż. Łąd.*, **25**, 2/1979, s. 231-243.
12. Ioi T., Ikeda K., On the dynamic vibration damped absorber of the vibration system, *Bull. JSME*, **21**, 1978, pp. 64-71.
13. Jacquot R. S., Optimal Dynamic Absorbers for General Beam Systems, *J. Sound Vib.*, **60**, 1978, pp. 535-542.
14. Jakubowicz A., Orłoś Z., *Wytrzymałość materiałów*, Warszawa 1970.
15. Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W., *Wytrzymałość materiałów*, T. 2, Arkady, Warszawa 1986.
16. Khan A. H., Tottenham H., The method of bimoment distribution for the analysis of continuous thin-walled structures subject to torsion, *Proc. Instn Civ. Engrs, Part 2*, **63**, 1977, pp. 843-863.
17. Kisiel I., *Dynamika fundamentów pod maszyny*, PWN, Warszawa, 1957.

18. Kitis L. et al., Vibration reduction over a frequency range, *J. Sound Vib.*, **89**, 1983, pp. 559-569.
19. Kitis L. et al., Optimal frequency response shaping by appendant structures, *J. Sound Vib.*, **95**, 1984, pp. 161-175.
20. Klasztorny M., Reduction of Steady-State Forced Vibrations of Structures with Dynamic Absorbers, *Earthquake Eng. & Struct. Dynam.*, **24**, 1995, pp. 1155-1172.
21. Klasztorny M., Langer J., Mironowicz W., Analiza dynamiczna fundamentów blokowych pod maszyny nieudarowe, PN IIL PWr, Nr 23, s.: Monografie Nr 6, Wrocław 1978.
22. Kłóś Cz., Fundamenty pod maszyny, TEiM, Warszawa 1949.
23. Kłóś Cz., Lipiński J., Fundamenty pod maszyny, Arkady, Warszawa 1959.
24. Langer J., Dynamika budowli, Wyd. PWr, Wrocław 1980.
25. Langer J., Bryja D., Przestrzenne drgania własne mostu wiszącego, *Arch. Inż. Łąd.*, **24**, 3, 1978, s. 303-316.
26. Langer J., Paszke W., Uwagi o zastosowaniu metod wariacyjnych w zagadnieniach brzegowych mechaniki budowli, **12** Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1966.
27. Lipiński J., Fundamenty pod maszyny, Arkady, Warszawa 1985.
28. Łubiński M. i in., Konstrukcje metalowe, Część I: Podstawy projektowania, Arkady, Warszawa 1986.
29. Major A., Dynamics in Civil Engineering, Vol. 3, Akad. Kiadó, Budapest & Collet's Holdings Ltd., London, Budapest 1980.
30. Mei Ch., Coupled vibrations of thin-walled beams of an open section using the finite element method, *Int. J. Mech. Sci.*, **12**, 1970, pp. 883-891.
31. Murray N. W., Introduction to the theory of thin walled structures, Eng. Sci. Ser., Oxford 1984.
32. Obrębski J. B., Second order theory in statics and dynamics of thin-walled straight bars, **24** Pol. Konf. "Mech. Ciała Stałego", PAN, Jachranka 1983.
33. Obrębski J. B., Second order and second approximation theory in statics and dynamics of thin-walled straight bars, *Thin-Walled Structures*, **8**, 1985, pp. 81-97.
34. Obrębski J. B., Cienkościenne sprężyste pręty proste, skrypt PW, Wyd. PW, Warszawa 1991.
35. Powell G., Klinger R., Elastic Lateral Buckling of Steel Beams, *ASCE J. of Struct. Div.*, **96**, ST9, 1970, pp. 1919-1932.
36. Randal S. E. et al., Optimum Vibration Absorbers for Linear Damped Systems, *ASME J. Mech. Design*, **103**, 1981, pp. 908-913.
37. Romano G., Rosati L., Ferro G., Shear deformability of thin-walled beams with arbitrary cross sections, *Int. J. Numer. Meth. in Eng.*, **35**, 1992, pp. 283-306.

38. Rutecki J., Cienkościenne konstrukcje nośne. Obliczenia wytrzymałościowe, PWN, Warszawa, 1966.
39. Solecki R., Szymkiewicz J., Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne, Arkady, Warszawa, 1964.
40. Szmidt J. K., O równowadze sił momentowych w narożu cienkościennej ramy, Rozpr. Inż., **23**, 2, 1975, s. 317-324.
41. Szmidt J. K., Analiza ram z elementów cienkościennych, Rozpr. Inż., **23**, 3, 1975, s. 447-472.
42. Vlasov W. Z., Tonkostennyye uprugie sterżni, Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskva 1959.
43. Vlasov W. Z., Izbrannyje trudy, T. 2: Tonkostennyye uprugie sterżni. Principy postroenia obščej mehaničeskoj teorii oboloček, Izd. Akademia Nauk SSSR, Moskva 1963.
44. Wanat K., Wybór metod numerycznych, Wyd. DIR, Gliwice 1993.
45. Warburton G. B., Ayorinde E. O., Optimum Absorber Parameters for Simple Systems, Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **8**, 1980, pp. 197-217.
46. Warburton G. B., Optimum Absorber Parameters for Various Combinations of Response and Excitation Parameters, Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **10**, 1982, pp. 381-401.

Normy, poradniki, raporty:

47. Chrobok R., Mironowicz W., Analiza metod obliczeń dynamicznych prętowo-bryłowych konstrukcji wsporczych pod maszyny, Raport nr 51 Inst. Inż. Łąd. Pol. Wrocł., Wrocław, 1977.
48. El-Bagalaty S., Reduction of Forced Vibrations of Structures Using Dynamic Absorbers (praca doktorska), Raport IIL PWr seri PRE nr 17/91, Wrocław 1991.
49. Glabisz W., Wpływ wielkości rzędu drugiego w analizie numerycznej układów prętowych skłonnych do przeskoku (praca doktorska), Raport IIL PWr seri PRE nr 13/82, Wrocław 1982.
50. Jankowski B., Nieliniowa geometrycznie dynamika prętów cienkościennych (praca doktorska), Raport IIL PWr seri PRE nr 55/83, Wrocław 1983.
51. Klasztorny M., Redukcja drgań ustalonych konstrukcji za pomocą absorberów dynamicznych, Raport Inst. Inż. Łąd. PWr seri SPR nr 38/93, Wrocław 1983.
52. Lipiński J., Fundamenty pod maszyny, PPP Nr 7, BISTYP, Warszawa 1969.
53. Lipiński J., Wibroizolacja fundamentów pod maszyny, PPP Nr 19, BISTYP, Warszawa 1971.
54. Lipiński J., Mocowanie maszyn do fundamentów, PPP Nr 63, BISTYP, Warszawa 1969.
55. Lipiński J., Przykłady obliczeń fundamentów pod maszyny, PPP Nr 97, BISTYP, Warszawa 1969.
56. PN-80/B-03040, Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny - obliczenia i projektowanie, WN "Alfa", Warszawa 1984.

ZAŁĄCZNIK A

Opisy parametrów wejścia i wyjścia w programie GROS

Program GROS został napisany w języku Pascal, z kompilacją w systemie Borland Pascal 7.0, z wykorzystaniem techniki programowania obiektowego. Na program składa się 9 unitów i moduł główny, łącznie około 5550 linii programu. Podstawowe informacje o poszczególnych częściach programu są następujące:

GR_GROS - moduł główny programu, liczący 430 linii. W module tym znajdują się wywołania procedur w poszczególnych ścieżkach programu.

GR_DECL - unit deklaracyjny, liczący 140 linii. W tym module zadeklarowano większość typów i zmiennych globalnych występujących w programie. Zdefiniowano 32 typy zmiennych, 28 stałych i 174 zmienne.

GR_MATH - unit matematyczny, liczący 560 linii. W tym module zadeklarowano zmienne obiektowe typu *matrix* i *matri* oraz procedury i funkcje przyporządkowane tym obiektom.

GR_PREP - unit programu liczący 420 linii. Moduł zawiera procedury zajmujące się wczytywaniem danych z plików tekstowych.

GR_ALGO1 - unit programu liczący 610 linii. Moduł zawiera pierwszą część procedur algorytmicznych.

GR_ALGO2 - unit programu liczący 770 linii. Moduł zawiera drugą część procedur algorytmicznych.

GR_ALGO3 - unit programu liczący 610 linii. Moduł zawiera trzecią część procedur algorytmicznych.

GR_POST - unit programu liczący 820 linii. Moduł zawiera procedury zajmujące się kontrolnym zapisem danych wejściowych do pliku wynikowego oraz zapisem wyników obliczeń do tego samego pliku.

GR_GRAF - unit programu liczący 690 linii. Moduł zawiera procedury graficzne.

GR_VIEWXY - unit programu liczący 500 linii. Moduł pomocniczy zaczerpnięty z oprogramowania dydaktycznego.

Przy pomocy programu można wykonać obliczenia w sześciu różnych ścieżkach. Przy opisie danych potrzebnych do uruchomienia programu symbole ①, ②, ... oznaczają początek kolejnego rekordu z danymi, natomiast symbole ①, ②, ... oznaczają początek kolejnego rekordu z wynikami.

Opisy ścieżek

Ścieżka 1 - obliczanie charakterystyk geometrycznych przekrojów prętów cienkościennych otwartych. Do wykonania programu wymagany jest plik tekstowy z danymi *nazwa_pliku_Ścieżka1..* Po egzekucji programu zostają utworzone dwa pliki: plik tekstowy o nazwie *nazwa_pliku_Ścieżka1.wyn*, zawierający wyniki Ścieżki 1 oraz plik binarny o nazwie *nazwa_pliku_Ścieżka1.bin*.

Struktura pliku tekstowego *nazwa_pliku_Ścieżka1.* jest następująca:

❶ *LPCO* (liczba analizowanych przekrojów cienkościennych otwartych)

Kolejno dla przekrojów o numerach od 1 do *LPCO* powtarzane są poniższe dane:

❷.❶ *WSP* (wariant symetrii przekroju):

1- symetria względem osi y

2- symetria względem osi z

3- symetria względem osi y i z

❷.❷ *LPW* (liczba punktów węzłowych)

❷.❸ *WPW* [1..*LPW*] (współrzędne punktów węzłowych y , z , w_M)

❷.❹ *LOP* (liczba odcinków prostokątnych)

❷.❺ *POP* [1..*LOP*] (położenie odcinków prostokątnych - numery punktów węzłowych j , k)

❷.❻ *GOP* [1..*LOP*] (grubości odcinków prostokątnych δ)

❷.❼ *LPN* (liczba punktów analizy naprężeń)

❷.❽ *NPW* [1..*LPN*] (numery punktów węzłowych - punktów analizy naprężeń)

❷.❾ *NOP* [1..*LPN*] (numery odcinków prostokątnych po jednej stronie punktu analizy naprężeń)

❷.❶❶ *GPN* [1..*LPN*] (grubość ścianki w punktach analizy naprężeń)

❷.❶❶❶ *LAM* (współczynnik poprawkowy λ przy skręcaniu St-Venanta)

Jednostki: cm^2 dla ω , cm dla pozostałych wartości

Ograniczenia: $LPCO \leq 20$, $LPW \leq 11$, $LOP \leq 10$, $1 \leq LPN \leq 5$

Jako wielkości wynikowe otrzymuje się plik tekstowy *nazwa_pliku_Ścieżka1.wyn* i plik binarny *nazwa_pliku_Ścieżka1.bin* o następującej strukturze:

❶ dla każdego analizowanego przekroju powtarzane są charakterystyki:

❶.❶ położenie środka ciężkości y_o' i z_o' [cm]

❶.❷ powierzchnia przekroju F [cm^2]

❶.❸ momenty bezwładności względem osi y i z : J_y i J_z [cm^4]

❶.❹ położenie środka ścinania y_A i z_A [cm]

- ①.⑤ wycinkowy moment bezwładności J_w [cm⁶]
- ①.⑥ moment bezwładności przy czystym skręcaniu J_s [cm⁴]
- ② charakterystyki geometryczne punktów analizy naprężeń:

$$y [\text{cm}], z [\text{cm}], \omega [\text{cm}^2], \delta [\text{cm}], S_y [\text{cm}^3], \tilde{S}_z [\text{cm}^3], \tilde{S}_\omega [\text{cm}^3]$$

Ponadto w pliku wynikowym powtórzone są - dla kontroli - wszystkie dane wejściowe.

Ścieżka 2 - obliczanie charakterystyk geometrycznych przekrojów prętów cienkościennych zamkniętych. Do wykonania programu wymagany jest plik tekstowy z danymi *nazwa_pliku_Ścieżka2.*. Po egzekucji programu zostają utworzone dwa pliki: plik tekstowy o nazwie *nazwa_pliku_Ścieżka2.wyn*, zawierający wyniki Ścieżki 2 oraz plik binarny o nazwie *nazwa_pliku_Ścieżka2.bin*.

Struktura pliku tekstowego *nazwa_pliku_Ścieżka2.* jest następująca:

① LPCZ (liczba analizowanych przekrojów cienkościennych zamkniętych)

Kolejno dla przekrojów o numerach od 1 do LPCZ powtarzane są poniższe dane:

②.① WSP (wariant symetrii przekroju):

- 1- symetria względem osi y
- 2- symetria względem osi z
- 3- symetria względem osi y i z

②.② LPW (liczba punktów węzłowych)

②.③ WPW [1..LPW] (współrzędne punktów węzłowych y, z, ω_M)

②.④ LOP (liczba odcinków prostokątnych)

②.⑤ POP [1..LOP] (położenie odcinków prostokątnych - numery punktów węzłowych j, k)

②.⑥ GOP [1..LOP] (grubość odcinków prostokątnych δ)

②.⑦ LPN (liczba punktów analizy naprężeń)

②.⑧ NPW [1..LPN] (numery punktów węzłowych - punktów analizy naprężeń)

②.⑨ GPN [1..LPN] (grubość ścianki w punktach analizy naprężeń)

Jednostki: cm² dla ω , cm dla pozostałych wartości

Ograniczenia: $LPCZ \leq 20$, $LPW \leq 11$, $LOP \leq 10$, $1 \leq LPN \leq 5$

Jako wielkości wynikowe otrzymuje się plik tekstowy *nazwa_pliku_Ścieżka2.wyn* i plik binarny *nazwa_pliku_Ścieżka2.bin* o następującej strukturze:

① dla każdego analizowanego przekroju powtarzane są charakterystyki:

①.① położenie środka ciężkości y_o' i z_o' [cm]

- ①.② powierzchnia przekroju F [cm²]
- ①.③ momenty bezwładności względem osi y i z : J_y i J_z [cm⁴]
- ①.④ położenie środka ścinania y_A i z_A [cm]
- ①.⑤ wycinkowy moment bezwładności J_{ω} [cm⁶]
- ①.⑥ sprowadzony moment bezwładności przy czystym skręcaniu J_s^* [cm⁴]
- ①.⑦ $\check{J}_s$ [cm⁴]
- ①.⑧ współczynnik spaczenia η [1]
- ①.⑨ podwójne pole ograniczone osią konturu poprzecznego Ω [cm²]
- ② charakterystyki geometryczne punktów analizy naprężeń:

$$y \text{ [cm]}, z \text{ [cm]}, \hat{\omega} \text{ [cm}^2], \delta \text{ [cm]}, \tilde{S}_y \text{ [cm}^3], \tilde{S}_z \text{ [cm}^3], \tilde{S}_{\omega} \text{ [cm}^4],$$

Ponadto w pliku tekstowym powtórzone są - dla kontroli - wszystkie dane wejściowe.

Ścieżka 3 - wyznaczanie sił osiowych w prętach struktury nośnej, wywołanych ciężarem własnym. Do wykonania programu wymagany jest plik tekstowy z danymi *nazwa_pliku_Ścieżka3*. oraz jeden lub dwa pliki binarne (*nazwa_pliku_Ścieżka1.bin* i/lub *nazwa_pliku_Ścieżka2.bin*). Po egzekucji programu zostają utworzone dwa pliki: plik tekstowy o nazwie *nazwa_pliku_Ścieżka3.wyn* i plik binarny o nazwie *nazwa_pliku_Ścieżka3.bin*, zawierające wyniki Ścieżki 3.

Struktura *nazwa_pliku_Ścieżka3*. jest następująca:

❶ *np, ns, nb, nw, nwp, nwd, nwb, TCSP*

przy czym:

np - liczba prętowych elementów skończonych

ns - liczba stężeń

nb - liczba brył sztywnych

nw - liczba węzłów struktury cienkościennej

nwp - liczba węzłów podporowych

nwd - liczba węzłów z możliwością deplanacji w wybranym kierunku

nwb - liczba węzłów z blokadą deplanacji

TCSP - typ cienkościennej struktury prętowej:

1- wszystkie pręty są prętami cienkościennymi otwartymi

2- wszystkie pręty są prętami cienkościennymi zamkniętymi

3- w konstrukcji występują oba rodzaje prętów cienkościennych

② *PGPO* [1..*np*] (położenie i orientacja prętów głównych)

Dla każdego pręta podaje się:

j, k, wo, tpc, bnr

przy czym:

j, k - numer węzła początkowego i końcowego

wo - wskaźnik orientacji:

1- pręt || do osi x_0

2- pręt || do osi y_0

3- pręt || do osi z_0

tpc - typ przekroju cienkościennego:

1 - pręt cienkościenny otwarty

2 - pręt cienkościenny zamknięty

bnr - numer przekroju w banku przekrojów cienkościennych otwartych lub zamkniętych

③ jeżeli $ns > 0$, to wprowadza się dane dotyczące stężeń:

③.① *SPO* [1..*ns*] (położenie i orientacja stężeń - *j, k* - numery węzłów początkowego i końcowego)

③.② *Fst* [1..*ns*] (pole przekroju *i*-tego stężenia [cm^2])

④ *WSW* [1..*nw*] (współrzędne x, y, z węzłów struktury w układzie $Ox_0y_0z_0$ [m])

⑤ *BSP* [1..*nb*] (parametry brył sztywnych - M, J_x, J_y, J_z)

M [kg] - masa bryły

J_x, J_y, J_z [kgm^2]- główne centralne masowe momenty bezwładności bryły

⑥ *Vner*[1..*nb*] (liczebność elementów sprężysto-tłumiących (EST) dla kolejnych brył sztywnych)

⑦ *kxyz*[1..*nb*] (sztywności k_x^r, k_y^r, k_z^r elementów EST *r*-tej bryły [N/m])

⑧ *Nwj*[1..*nb*] (numery węzłów struktury *j*, w których występują EST kolejnych brył sztywnych)

⑨ *ESTw*[1..*nb*] (współrzędne $x_{\eta}, y_{\eta}, z_{\eta}$ elementów EST w układzie O_{xyz} $j=1,2,\dots,Vner[r]$;
 $r=1,2,\dots,nb$) [m])

Ograniczenia:

$$1 \leq np \leq 60, \quad 0 \leq ns \leq 20, \quad 1 \leq nb \leq 10, \quad 2 \leq nw \leq 100$$

$$1 \leq nwp \leq 32, \quad 1 \leq nwd \leq 88, \quad 1 \leq nwb \leq 64, \quad 1 \leq ner \leq 10$$

W wyniku działania programu powstają dwa pliki: plik tekstowy *nazwa_pliku_Ścieżka3.wyn* i plik binarny *nazwa_pliku_Ścieżka3.bin*, zawierające:

plik tekstowy:

- ① powtórzenie danych wejściowych
- ② $No[1..np]$ (zbiór statycznych sił osiowych w prętach struktury [N])
- ③ $Nomax, Nomin$ (maksymalna i minimalna statyczna siła osiowa w prętach struktury)

plik binarny:

- ① $No[1..np]$ (zbiór statycznych sił osiowych w prętach struktury [N])

Ścieżka 4 - rozwiązanie zagadnienia własnego układu fundament - maszyny.

Do uruchomienia programu potrzebny jest plik tekstowy z danymi *nazwa_pliku_Ścieżka4*. oraz pliki binarne zawierające wyniki z poprzednich Ścieżek (*nazwa_pliku_Ścieżka3.bin*, *nazwa_pliku_Ścieżka1.bin* i/albo *nazwa_pliku_Ścieżka2.bin*). Po wykonaniu programu zostaną utworzone dwa pliki wynikowe: tekstowy o nazwie *nazwa_pliku_Ścieżka4.wyn* i binarny o nazwie *nazwa_pliku_Ścieżka4.bin*.

Struktura pliku z danymi jest identyczna tak jak dla Ścieżki 3, a ponadto należy podać następujące dane:

- ①① $cxzy[1..nb]$ (współczynniki lepkości c_x^r, c_y^r, c_z^r elementów EST r -tej bryły [Ns/m],

$$r=1,2,...,nb)$$

- ①① Ret (czas retardacji stali [s])

- ①② L_f (liczba wyznaczanych częstości własnych)

- ①③ Eps (dokładność iteracji w rozwiązywaniu zagadnienia własnego)

Ograniczenia: jak w Ścieżce 3

Wynikowy plik tekstowy zawiera:

- ① powtórzenie danych wejściowych
- ② $fHz[1..L_f], Err[1..L_f]$ (widmo własne i wektor błędów)
- ③ $DGam[1..L_f]$ (wektor głównych współczynników tłumienia γ_i)
- ④ $nr_q[1..L_f, 1..7], max_q[1..L_f, 1..7]$ (ekstremalne wartości $q_1^j, q_2^j, q_3^j, q_4^j, q_5^j, q_6^j, q_7^j$ oraz odpowiadające im numery węzłów struktury w kolejnych formach własnych)
- ⑤ $max_q[1..L_f]$ (ekstremalna wartość przemieszczenia uogólnionego dla zbioru brył, dla kolejnych częstości własnych)

Wynikowy plik binarny zawiera:

- ① L_f, nq
- ② $fHz[1..L_f]$
- ③ $DGam[1..L_f]$

④ $Ru[1..nq, 1..L_f]$ (macierz wektorów własnych)

Oprócz wyników w postaci plików, na ekranie można przeglądać formy własne konstrukcji.

Ścieżka 5 - wyznaczenie drgań ustalonych układu fundament - maszyny.

Do uruchomienia programu potrzebny jest plik tekstowy z danymi *nazwa_pliku_Ścieżka5*. oraz pliki binarne zawierające wyniki z poprzednich Ścieżek (*nazwa_pliku_Ścieżka4.bin*, *nazwa_pliku_Ścieżka3.bin*, *nazwa_pliku_Ścieżka1.bin* i/albo *nazwa_pliku_Ścieżka2.bin*). Po wykonaniu programu zostaną utworzone pliki: tekstowy o nazwie *nazwa_pliku_Ścieżka5.wyn* i binarne o nazwach *rezon* i *amplit*, wykorzystywane w Ścieżce 6.

Struktura pliku z danymi jest identyczna jak dla Ścieżki 4 dla rekordów ❶, ❶❶, a ponadto plik powinien zawierać:

❶❷ $f_min, f_max, Delf$

(częstotliwość początkowa i końcowa oraz krok częstotliwości przy wyznaczaniu charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych, [Hz]; f_max jest równe częstotliwości eksploatacyjnej)

❶❸ $Vnor[1..nb]$ (liczebność sił wirujących dla kolejnych brył sztywnych; nor - liczba sił wirujących przyporządkowana r -tej bryle)

❶❹ $ZWOwp$ (współrzędne źródeł wzbudzania obrotowego dla kolejnych brył sztywnych)

Jeżeli $Vnor[r]>0$, to podawane są, dla kolejnych sił wymuszających, $x_{ir}[r, i]$, $y_{ir}[r, i]$, $z_{ir}[r, i]$,

$M_o^{ir}[r, i]$, $\Theta_{ir}[r, i]$ dla $r=1, 2, \dots, nb$, $i=1, 2, \dots, Vnor[r]$, gdzie:

x_{ir}, y_{ir}, z_{ir} - współrzędne źródeł wzbudzania obrotowego w układzie O_rxyz , [m]

M_o^{ir} - masowy moment niewyważenia obrotowego, [kgm]

Θ_{ir} - faza początkowa, [deg]

❶❺ WKO - wyróżnik kierunku obrotu sił

Dla kolejnych brył sztywnych podaje się wyróżnik kierunku obrotu (ρ_r) i orientacji sił wirujących (woo) w r -tej bryle:

$\rho_r=1$: obrót w prawo, $\rho_r=-1$: obrót w lewo

$woo=1$: oś obrotu $\parallel x_o$; $woo=2$: oś obrotu $\parallel y_o$; $woo=3$: oś obrotu $\parallel z_o$

Ograniczenia: $f_min < f_1$, $0 \leq nor \leq 4$, $(f_max - f_min)/Delf \leq 1000$

Wynikowy plik tekstowy zawiera:

❶ powtórzenie danych wejściowych

❷ rzędne rezonansowe charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych wybranych wielkości wynikowych (przemieszczenia, naprężenia σ , τ), zadeklarowanych w trybie interaktywnym

Plik binarny zawiera:

① zapis wartości wszystkich przemieszczeń uogólnionych dla kolejnych wartości częstotliwości

$$f=f_{\min}+i*Delf, i=1,2,...,(f_{\max}-f_{\min})/Delf$$

Charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową deklaruje się w trybie interaktywnym, po zakończeniu obliczeń. W tym celu należy zadeklarować:

TWW (typ wielkości wynikowej)

TWW = 1 (przemieszczenia węzła ruchomego *q*)

NWR (numer węzła ruchomego)

KPT (kierunek przemieszczenia translacyjnego)

$$KPT = 1: q = q_1^j$$

$$KPT = 2: q = q_2^j$$

$$KPT = 3: q = q_3^j$$

TWW = 2/3 (naprężenia σ/τ w wybranym punkcie analizy naprężeń)

NES (numer cienkościennego elementu skończonego)

PAP (położenie analizowanego przekroju)

PAP=1: przekrój początkowy (przy węźle *j*)

PAP=2: przekrój końcowy (przy węźle *k*)

NPA (numer punktu analizy naprężeń w wybranym przekroju cienkościennym)

TWW = 4 (przemieszczenie uogólnione środka ciężkości bryły)

NWR (numer współrzędnej uogólnionej bryły)

Ścieżka 6 - Redukcja drgań ustalonych układu fundament- maszyna za pomocą absorberów dynamicznych.

Do uruchomienia programu potrzebny jest plik tekstowy z danymi *nazwa_pliku_Ścieżka6*. oraz pliki binarne zawierające wyniki z poprzednich Ścieżek (*amplit*, *rezon*, *nazwa_pliku_Ścieżka4.bin*, *nazwa_pliku_Ścieżka3.bin*, *nazwa_pliku_Ścieżka1.bin* i/albo *nazwa_pliku_Ścieżka2.bin*). Po wykonaniu programu zostaną utworzone pliki: tekstowy o nazwie *nazwa_pliku_Ścieżka6.wyn* i binarny o nazwie *ampl* .

Struktura pliku z danymi jest identyczna tak jak dla Ścieżki 5 dla rekordów ① , ①⑤ , ponadto plik powinien zawierać:

①⑥ *na* (liczba absorberów dynamicznych)

①⑦ *k[i]*, *KD[i]*, *NrM[i]* dla *i*=1,2,...,*na*

Dla kolejnych absorberów podawane są:

k (numer węzła struktury prętowej, w którym zamontowany jest i -ty absorber modalny)

KD (kierunek drgań i -tego absorbera modalnego):

$KD=1$: oś absorbera $\parallel x_0$; $KD=2$: oś absorbera $\parallel y_0$; $KD=3$: oś absorbera $\parallel z_0$

NrM (numer układu modalnego względem, którego i -ty absorber jest strojony)

①⑧ $m_a[i]$, $i=1,2,\dots,na$ (masa i -tego absorbera modalnego)

Ograniczenia: $na \leq 10$, pozostałe - jak w Ścieżce 5

Wynikowy plik tekstowy zawiera:

- ① powtórzenie danych wejściowych
- ② rzędne rezonansowe wybranych charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych w układzie niezmodyfikowanym (maksymalne rzędne tych charakterystyk w układzie niezmodyfikowanym i zmodyfikowanym oraz odpowiadające im wartości współczynnika redukcji drgań ρ).

Plik binarny zawiera:

- ① zapis wartości wszystkich przemieszczeń uogólnionych układu niezmodyfikowanego i zmodyfikowanego, dla kolejnych wartości częstotliwości $f=f_{min}+i*Delf$, $i=1,2,\dots,(f_{max}-f_{min})/Delf$.

Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe deklaruje się w trybie interaktywnym po zakończeniu obliczeń. Na ekranie wyświetlana jest charakterystyka amplitudowo- częstotliwościowa dla układu niezmodyfikowanego (linia cienka) i dla układu zmodyfikowanego (linia gruba). Wybór żądanej charakterystyki odbywa się tak jak w Ścieżce 5.

ZAŁĄCZNIK B

Przykładowe pliki z danymi dla układu testowego

```

{dl}
{plik z danymi do sciezki 1}

{dane dla przekroju nr 1}
6
2
5
0      7.00      0
-10.0   7.00      0
-10.0   0        70.0
10.0    7.00      0
10.0    0        -70.0
4
1      2
2      3
1      4
4      5
1.0    1.5    1.0    1.5
3
1      2      2
1      2      0      0      0      0      0      0      0
2      0      0      0      0      0      0      0      0
2      0      0      0      0      0      0      0      0
1.0    1.0    1.5
1
{dane dla przekroju nr 2}
2
5
0      -7.00      0
10.0    -7.00      0
10.0     0        70.0
-10.0    -7.00      0
-10.0     0        -70.0
4
1      2
2      3
1      4
4      5
1.0    1.5    1.0    1.5
3
1      2      2
1      2      0      0      0      0      0      0      0
2      0      0      0      0      0      0      0      0
2      0      0      0      0      0      0      0      0
1.0    1.0    1.5
1
{dane dla przekroju nr 3}
1
5
0      0      0
0     -10.0      0
7.00 -10.0      70.0
0     10.0      0

```

```

{LPCO}
{WSP}
{LPW}
{WPW[1]}
{WPW[2]}
.
.
{WPW[LPW]}
{LOP}
{POP[1]}
{POP[2]}
.
{POP[LOP]}
{GOP}
{LPN}
{NPW}
{NOP[1]}
.
{NOP[NPW]}
{GPN}
{LAM}

```

```

7.00  10.0      -70.0
4
1      2
2      3
1      4
4      5
1.0    1.5      1.0    1.5
3
1      2      2
1      2      0      0      0      0      0      0      0
2      0      0      0      0      0      0      0      0
2      0      0      0      0      0      0      0      0
1.0    1.0      1.5
1

```

{dane dla przekroju nr 4}

```

1
5
0      0      0
0      10.0     0
-7.00  10.0     70.0
0      -10.0     0
-7.00 -10.0     -70.0
4
1      2
2      3
1      4
4      5
1.0    1.5      1.0    1.5
3
1      2      2
1      2      0      0      0      0      0      0      0
2      0      0      0      0      0      0      0      0
2      0      0      0      0      0      0      0      0
1.0    1.0      1.5
1

```

{dane dla przekroju nr 5}

```

3
7
0      0      0
0      -10.0     0
-4.5    -10.0 -45.0
4.5     -10.0  45.0
0      10.0     0
-4.5    10.0    -45.0
4.5     10.0    45.0
6
1      2
2      3
2      4
1      5
5      6
5      7
1.0    1.5      1.5      1.0      1.5      1.5
5
1      2      2 4      6
1      2      3      0      0      0      0      0      0
2      3      0      0      0      0      0      0      0
2      0      0      0      0      0      0      0      0

```

```

0      0      0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0      0      0
1.0    1.0    1.5 1.5    1.5
1

```

{dane dla przekroju nr 6}

```

3
7
0      0      0
10.0  0      0
10.0  -4.5    -45.0
10.0  4.5     45.0
-10.0  0      0
-10.0 -4.5    -45.0
-10.0  4.5     45.0
6
1      2
2      3
2      4
1      5
5      6
5      7
1.0    1.5    1.5    1.0    1.5    1.5
5
1      2      2 4      6
1      2      3      0      0      0      0      0      0
2      3      0      0      0      0      0      0      0
2      0      0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0      0      0
1.0    1.0    1.5 1.5    1.5
1

```

{d2}

{plik z danymi do sciezki 2}

{dane dla przekroju nr 1}

```

2
3
7
0      -10.0  0
8.0    -10.0  80
8.0      0    160
8.0    10.0  240
-8.0    10.0  400
-8.0   -10.0  560
0      -10.0  640
6
1      2
2      3
3      4
4      5
5      6
6      7
1.5    1.0    1.0    1.5    1.0    1.5
4
1      2      2      3

```

1.5 1.5 1.0 1.0

{dane dla przekroju nr 2}

3

7

10.0	0	0
10.0	8.0	80
0	8.0	160
-10.0	8.0	240
-10.0	-8.0	400
10.0	-8.0	560
10.0	0	640

6

1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7

1.5 1.0 1.0 1.5 1.0 1.5

4

1	2	2	3
1.5	1.5	1.0	1.0

{d3}

{plik z danymi do sciezki 3}

18	0	1	18	4	10	4	1	{np, ns, nb, nw, nwp, nwd, nwb, TPCS}
9	1	3	1	5				{PGPO[1]}
5	9	3	1	5				{PGPO[2]}
10	2	3	1	5				.
6	10	3	1	5				.
11	3	3	1	5				.
7	11	3	1	5				
12	4	3	1	5				
8	12	3	1	5				
5	13	1	1	5				
13	14	1	1	5				
14	6	1	1	5				
8	17	1	1	5				
17	16	1	1	5				
16	7	1	1	5				
6	15	2	1	5				
15	7	2	1	5				
5	18	2	1	5				
18	8	2	1	5				{PGPO[np]}
0	0	3.6						{WSW[1]}
3.6	0	3.6						{WSW[2]}
3.6	2.6	3.6						.
0	2.6	3.6						.
0	0	0						.
3.6	0	0						
3.6	2.6	0						
0	2.6	0						
0	0	3.5						
3.6	0	3.5						
3.6	2.6	3.5						

0	2.6	3.5		
0.9	0	0		
2.7	0	0		
3.6	1.3	0		
2.7	2.6	0		
0.9	2.6	0		
0	1.3	0		{WSW[nw]}
2000	1200	300	1200	{BSP}
4				{Vner}
1.77e8	1.77e8	1.77e8		{kxyz}
13	14	16	17	{Nwj}
-0.90	-1.3	0.3		{ESTw[1]}
0.90	-1.3	0.3		{ESTw[2]}
0.90	1.3	0.3		.
-0.90	1.3	0.3		{ESTw[Vner]}

{d4}
{plik z danymi do sciezki 4}

18	0	1	18	4	10	4	1
9		1		3		1	5
5		9		3		1	5
10		2		3		1	5
6		10		3		1	5
11		3		3		1	5
7		11		3		1	5
12		4		3		1	5
8		12		3		1	5
5		13		1		1	5
13		14		1		1	5
14		6		1		1	5
8		17		1		1	5
17		16		1		1	5
16		7		1		1	5
6		15		2		1	5
15		7		2		1	5
5		18		2		1	5
18		8		2		1	5
0		0		3.6			
3.6		0		3.6			
3.6		2.6		3.6			
0		2.6		3.6			
0		0		0			
3.6		0		0			
3.6		2.6		0			
0		2.6		0			
0		0		1.8			
3.6		0		1.8			
3.6		2.6		1.8			
0		2.6		1.8			
0.9		0		0			
2.7		0		0			
3.6		1.3		0			
2.7		2.6		0			
0.9		2.6		0			
0		1.3		0			
2000		1200		300		1200	

```

4
1.77e8 1.77e8 1.77e8
13 14 16 17
-0.90 -1.3 0.3
0.90 -1.3 0.3
0.90 1.3 0.3
-0.90 1.3 0.3
0 0 0 {cxyz}
0.00025 {Ret}
16 {L_f}
1e-10 {Eps}

```

```

{d5}
{plik z danymi do sciezki 5}

```

```

18 0 1 18 4 10 4 1
9 1 3 1 5
5 9 3 1 5
10 2 3 1 5
6 10 3 1 5
11 3 3 1 5
7 11 3 1 5
12 4 3 1 5
8 12 3 1 5
5 13 1 1 5
13 14 1 1 5
14 6 1 1 5
8 17 1 1 5
17 16 1 1 5
16 7 1 1 5
6 15 2 1 5
15 7 2 1 5
5 18 2 1 5
18 8 2 1 5
0 0 3.6
3.6 0 3.6
3.6 2.6 3.6
0 2.6 3.6
0 0 0
3.6 0 0
3.6 2.6 0
0 2.6 0
0 0 1.8
3.6 0 1.8
3.6 2.6 1.8
0 2.6 1.8
0.9 0 0
2.7 0 0
3.6 1.3 0
2.7 2.6 0
0.9 2.6 0
0 1.3 0
2000 1200 300 1200
4
1.77e8 1.77e8 1.77e8
13 14 16 17
-0.90 -1.3 0.3

```

```

0.90   -1.3   0.3
0.90    1.3   0.3
-0.90   1.3   0.3
0 0 0
0.00025
1 30 0.29           {f_min, f_max, Delf}
1                   {Vnor[1]}
0 1 -0.3 0.025 0    {ZWOWp[1,1]}
1 2                   {WKO}

```

```

{d6}
{plik z danymi do sciezki 6}
18 0 1 18 4 10 4 1
9   1   3   1   5
5   9   3   1   5
10  2   3   1   5
6   10  3   1   5
11  3   3   1   5
7   11  3   1   5
12  4   3   1   5
8   12  3   1   5
5   13  1   1   5
13  14  1   1   5
14  6   1   1   5
8   17  1   1   5
17  16  1   1   5
16  7   1   1   5
6   15  2   1   5
15  7   2   1   5
5   18  2   1   5
18  8   2   1   5
0   0   3.6
3.6 0   3.6
3.6 2.6 3.6
0   2.6 3.6
0   0   0
3.6 0   0
3.6 2.6 0
0   2.6 0
0   0   1.8
3.6 0   1.8
3.6 2.6 1.8
0   2.6 1.8
0.9 0   0
2.7 0   0
3.6 1.3 0
2.7 2.6 0
0.9 2.6 0
0   1.3 0
2000 1200 300 1200
4
1.77e8 1.77e8 1.77e8
13 14 16 17
-0.90 -1.3 0.3
0.90 -1.3 0.3
0.90 1.3 0.3

```

```

-0.90  1.3   0.3
0 0 0
0.00025
1.0 30.0 0.25
1
0 1.0 -0.3 0.025 0
1 2
3
5 1 2
7 2 3
10 2 5
90 40 20

```

	{na}
	{k[1] KD[1] NrM[1]}
	{k[2] KD[2] NrM[2]}
	{k[na] KD[na] NrM[na]}
	{ma[1], ma[2], ma[na], }

ZAŁĄCZNIK C

Nagłówki segmentów i procedur w programie GROS

```
Program GROS;
{-----}
{ Analiza dynamiczna stalowych fundamentow ramowych pod maszyny }
{ obrotowe. }
{   Sciezki programu: }
{ 1. Obliczanie charakterystyk geometrycznych przekrojow cienkoscien- }
{   nych otwartych. }
{ 2. Obliczanie charakterystyk geometrycznych przekrojow cienkoscien- }
{   nych zamknietych. }
{ 3. Wyznaczanie rozkladu statycznych sil osiowych wywolanych cieza- }
{   ramiem. }
{ 4. Rozwiazanie zagadnienia wlasnego ukladu fundament-maszyny. }
{ 5. Drgania ustalone ukladu fundament-maszyny. }
{ 6. Redukcja drgan ustalonych ukladu fundament-maszyny za pomoca }
{   absorberow dynamicznych. }
{ Jezyk programowania: Borland Pascal 7.0 }
{ Program opracowano w ramach grantu KBN, nr 7 S103 044 04. }
{ Wroclaw, 1995 }
{-----}

uses Dos,Crt, GR_Decl, GR_Math, GR_Algo1, GR_Algo2,
      GR_Post, GR_Algo3, GR_Graf, GR_Prep;

{...}

procedure Sciezka1;
{ procedura wywolujaca procedury skladajace sie na Sciezke1 }
{...}
end; { Sciezka1 }

procedure Sciezka2;
{ procedura wywolujaca procedury skladajace sie na Sciezke2 }
{...}
end; { Sciezka2 }

procedure Sciezka3;
{ procedura wywolujaca procedury skladajace sie na Sciezke3 }
{...}
end; { Sciezka3 }

procedure Sciezka4;
{ procedura wywolujaca procedury skladajace sie na Sciezke4 }
{...}
end; { Sciezka4 }

procedure Sciezka5;
{ procedura wywolujaca procedury skladajace sie na Sciezke5 }
{...}
end; { Sciezka5 }

procedure Sciezka6;
{ procedura wywolujaca procedury skladajace sie na Sciezke6 }
{...}
end; { Sciezka6 }

begin
{...}
```

```

end. { GROS }

unit GR_Decl;
{-----}
{ Program GROS: }
{ Deklaracja stałych i zmiennych }
{-----}
{...}

begin
{...}
end. { GR_Decl }

Unit GR_Math;
{-----}
{ Program GROS: }
{ Biblioteka podprogramów realizujących operacje i wybrane zagadnienia }
{ algebry liniowej na obiektach typu macierzowego i typu wskaźnikowego. }
{ obiekt: M = matrix - dla liczb typu extended }
{ obiekt: M = matri - dla liczb typu integer }
{ ograniczenia dla M: liczba wierszy <= 300, liczba kolumn <= 300 }
{-----}

interface
uses Dos, Crt, GR_Decl;

procedure AlgAtB (var A,B,C:mac1p);
procedure AlgAB (var A,B,C:mac1p);
procedure AlgAV (var A:mac1p; var V,B: typ2);
procedure AlgAs (var A,B:mac1p; s:extended);

implementation

procedure matrix.init (w,k:integer);
{ przydzielenie obiektowi pamięci dynamicznej i wyzerowanie obiektu M }
{...}
end; { init }

procedure matrix.done;
{ zwolnienie pamięci dynamicznej przydzielonej obiektowi M }
{...}
end; { done }

function matrix.get(i,j:integer):extended;
{ odczyt elementu obiektu M }
{...}
end; { get }

procedure matrix.put(i,j:integer;w:extended);
{ nadanie wartości elementowi obiektu M }
{...}
end; { put }

procedure matrix.copy(var a:matrix);
{ kopiowanie obiektu M do obiektu A }
{...}
end; { copy }

```

```

procedure matrix.tran(var a:matrix);
{ transpozycja obiektu M: A=M(transp) /dowolne rozmiary/ }
{...}
end; { tran }

procedure matrix.add(var a,b:matrix);
{ dodawanie macierzy: B=M+A }
{...}
end; { add }

procedure matrix.sub(var a,b:matrix);
{ odejmowanie macierzy: B=M-A }
{...}
end; { sub }

procedure matrix.mul_s(var a:matrix;s:extended);
{ mnozenie macierzy przez skalar: A=s*M }
{...}
end; { mul_s }

procedure matrix.mul(var a,b:matrix);
{ mnozenie macierzy ogolnie prostokatnych: B=M*A }
{...}
end; { mul }

procedure matrix.mul_0t(var a,b:matrix);
{ mnozenie macierzy ogolnie prostkatnych: B=M*A(transp) }
{...}
end; { mul_0t }

procedure matrix.mul_t0(var a,b:matrix);
{ mnozenie macierzy ogolnie prostkatnych: B=M(transp)*A }
{...}
end; { mul_t0 }

procedure matrix.rev(var a:matrix);
{ odwracanie macierzy: A=M(odwr) }
{ procedura inicjuje i zwalnia macierz pomocnicza b(lw, 2*lw) }
{...}
end; { rev }

procedure matrix.write(n:string);
{ zapis obiektu M do pamieci masowej }
{ zbior o nazwie n jest zachowany }
{...}
end; { write }

procedure matrix.read(n:string);
{ odczyt obiektu M do pamieci masowej }
{ zbior o nazwie n jest zachowany }
{...}
end; { read }

procedure matrix.trng(var a:matrix);
{ rozklad trojkatny obiektu M - utworzenie dolnej macierzy trojkatnej w A }
{ procedura inicjuje i zwalnia macierz pomocnicza B(lw, lw) }
{...}
end; { trng }

procedure matrix.eig0(var v,w,e:matrix;m:integer;eps:extended);
{ Rozwiazanie czystego zagadnienia wlasnego M-lambda*I metoda iteracji }

```

```

{ podprzestrzeni. }
{ Procedura inicjuje i zwalnia macierze pomocnicze a(n,n), e2(n,1), d(n,1). }
{ Parametry wejścia: }
{     M - macierz układu }
{     m - liczba obliczanych wartości własnych }
{     eps - dokładność wyznaczenia wartości własnych }
{ Parametry wyjścia: }
{     v - macierz wektorów własnych dim=n*m }
{     w - zbior wartości własnych dim=m*1 }
{     e - wektor dokładności wyznaczenia wartości własnych dim=m*1 }
{...}
end; { eig0 }

```

```

procedure matrix.eig(var b,v,w,e:matrix;m:integer;eps:extended);
{ Rozwiązanie pełnego zagadnienia własnego  $K-\lambda B$  metoda iteracji }
{ podprzestrzeni, gdzie  $\lambda = \Omega^2$ . }
{ Procedura inicjuje i zwalnia macierze pomocnicze a(n,n), c(n,n), d(n,n). }
{ Parametry wejścia: }
{     K(n,n) - macierz sztywności (obiekt M) }
{     B(n,n) - macierz bezwładności }
{     m - liczba obliczanych wartości własnych }
{     eps - dokładność wyznaczenia wartości własnych }
{ Parametry wyjścia: }
{     v - macierz wektorów własnych dim=n*m }
{     w - zbior częstotliwości własnych dim=m*1 [Hz] }
{     e - wektor dokładności wyznaczenia wartości własnych dim=m*1 }
{...}
end; { eig }

```

```

procedure matrix.solv1 (var X,B: matrix; Inv: integer);
{-----}
{-  Procedura solv1: }
{-  Procedura rozwiązuje układ równań metoda Gaussa, z wyborem elementu }
{-  głównego. }
{- }
{-  PARAMETRY WEJŚCIA: }
{-  A [1..N,1..N] - macierz układu (obiekt M) }
{-  B [1..N] - wektor prawych stron }
{-  PARAMETRY WYJŚCIA: }
{-  X [1..N] - wektor rozwiązań }
{-  Inv - wskaźnik nieosobliwości macierzy A }
{-      (Inv=0 - macierz nieosobliwa, Inv=1 - macierz osobliwa) }
{- }
{-  UWAGI: }
{-  Po wykonaniu procedury wartości elementów macierzy A ulegają zmianie. }
{-----}
{...}
end; { solv1 }

```

```

procedure matri.init (w,k:integer);
{ przydzielenie obiektowi pamięci dynamicznej i wyzerowanie obiektu M }
{...}
end; { init }

```

```

procedure matri.done;
{ zwolnienie pamięci dynamicznej przydzielonej obiektowi M }
{...}
end; { done }

```

```

function matri.get(i,j:integer):integer;

```



```

{ odczyt elementu obiektu M }
{...}
end; { get }

procedure matri.put(i,j:integer;w:integer);
{nadanie wartosci elementowi obiektu M }
{...}
end; { put }

procedure AlgAtB (var A,B,C:mac1p);
{ procedura wykonuje mnozenie C = A(transp) * B }
{ rozmiary macierzy A, B, C = 14 * 14 }
{...}
end; { AlgAtB }

procedure AlgAB (var A,B,C:mac1p);
{ procedura wykonuje mnozenie C = A * B }
{ rozmiary macierzy A, B, C = 14 * 14 }
{...}
end; { AlgAB }

procedure AlgAV (var A:mac1p; var V,B: typ2);
{ procedura wykonuje mnozenie B=A*V, gdzie A - macierz, }
{ B i V - wektory, dim A = 14 * 14 }
{...}
end; { AlgAV }

procedure AlgAs (var A,B:mac1p; s:extended);
{ procedura wykonuje mnozenie B = s * A ; gdzie s - stala }
{ rozmiar macierzy B = 14 * 14 }
{...}
end; { AlgAs }

begin
end. { GR_Math }

unit GR_Algo1;
{-----}
{ Program GROS: }
{ Procedury algorytmiczne - czesc 1 }
{-----}

interface
uses Dos,Crt, GR_Decl, GR_Math;

procedure ConPar1;
procedure ConMat1;
procedure GenOK (e:integer);
procedure GenOB (e:integer);
procedure Wstaw (var A:mac1p; var Aw:mac3; s:extended; i,j:integer);
procedure GenKel (e:integer);
procedure GenKe2 (e:integer);
procedure GenBe (e:integer);
procedure GenKs (i:integer);
procedure GenKst (jp,r:integer);
procedure GenCst (jp,r:integer);
procedure GenNQU;
procedure GenNQM;
procedure GenNQH (e:integer);

```

```

procedure GenQh (e:integer);
procedure GenNQHS (i:integer);
procedure GenNQHp (r,jp:integer);
procedure Agreg1;
procedure Agreg2;
procedure Agreg3;
procedure Extrema;

implementation

procedure ConPar1;
{ procedura deklarujaca parametry stale - czesc I }
{...}
end; { ConPar1 }

procedure ConMat1;
{ procedura deklarujaca macierze stale - czesc I }
{...}
end; { ConMat1 }

procedure GenOK (e:integer);
{ Procedura inicjuje macierze "skladowe" macierzy sztywnosci }
{ elementu nr e, tzn. K1,K2,K3. }
{...}
end; { GenOK }

procedure GenOB (e:integer);
{ Procedura inicjuje macierze "skladowe" macierzy bezwladnosci }
{ elementu nr e, tzn. B1,B2,B5. }
{...}
end; { GenOB }

procedure Wstaw (var A:mac1p; var Aw:mac3; s:extended; i,j:integer);
{ Procedura wstawia macierz Aw pomnozona przez stala s w macierz A }
{ tak, ze element Aw[1,1] znajduje sie w miejscu A[i+1,j+1]. }
{ Jezeli i<>j, to Aw[1,1] znajduje sie rowniez w miejscu A[j+1,i+1]. }
{...}
end; { Wstaw }

procedure GenKel (e:integer);
{ generowanie macierzy Kel }
{...}
end; { GenKel }

procedure GenKe2 (e:integer);
{ generowanie macierzy Ke2 }
{...}
end; { GenKe2 }

procedure GenBe (e:integer);
{ generowanie macierzy Be }
{...}
end; { GenBe }

procedure GenKs (i:integer);
{ generowanie macierzy Ks dla stezenia nr i }
{...}
end; { GenKs }

procedure GenKst (jp,r:integer);
{ generowanie macierzy Kst dla polaczenia (jp,r) }

```

```

{...}
end; { GenKst }

procedure GenCst (jp,r:integer);
{ generowanie macierzy Cst dla polaczenia (jp,r) }
{...}
end; { GenCst }

procedure GenNQU;
{ generowanie numerow wspolrzecznych q w wezlach ramy }
{...}
end; { GenNQU }

procedure GenNQM;
{ generowanie numerow wspolrzecznych q dla bryl sztywnych }
{...}
end; { GenNQM }

procedure GenNQH(e:integer);
{ generowanie numerow wspolrzecznych q w wektorze qh dla preta nr e }
{...}
end; { GenNQH }

procedure GenQh (e:integer);
{ generowanie wektora qh dla preta glownego nr e }
{...}
end; { GenQh }

procedure GenNQHs (i:integer);
{ generowanie numerow wspolrzecznych q w wektorze qh dla stezenia nr i }
{...}
end; { GenNQHs }

procedure GenNQHp (r,jp:integer);
{ generowanie numerow wspolrzecznych q w wektorze qh }
{ dla EST nr jp r-tej bryly sztywnej }
{...}
end; { GenNQHp }

procedure Agreg1;
{ algorytm agregacji - czesc 1 }
{...}
end; { Agreg1 }

procedure Agreg2;
{ algorytm agregacji - czesc 2 }
{...}
end; { Agreg2 }

procedure Agreg3;
{ algorytm agregacji - czesc 3 }
{...}
end; { Agreg3 }

procedure Extrema;
{ wyznaczenie ekstremalnych przemieszczen w formach wlasnych }
{ wyznaczenie Xmax, Ymax }
{...}
end; { Extrema }

begin

```

```

end. { GR_Algo1 }

Unit GR_Algo2;
{-----}
{  Program GROS:                                }
{  Procedury algorytmiczne - czesc 2           }
{-----}

interface
uses Dos,Crt, GR_Decl, GR_Math, GR_Algo1;

function Trapez (l,y1,z1,y2,z2:extended):extended;
procedure GeoPCO;
function Simpson (l,y1,z1,ys,zs,y2,z2:extended):extended;
procedure GeoPCZ;
procedure GenFG;
procedure GenKlu;
procedure DetNo;
procedure SolvEig;
procedure EigSh (iw:integer);
procedure Damp;

implementation

function Trapez (l,y1,z1,y2,z2:extended):extended;
{ calka z iloczynu funkcji liniowych - wzor trapezow }
{...}
end; { Trapez }

procedure GeoPCO;
{ obliczenie charakterystyk geometrycznych PCO }
{...}
end; { GeoPCO }

function Simpson (l,y1,z1,ys,zs,y2,z2:extended):extended;
{ calka z iloczynu funkcji liniowej i parabolicznej - wzor Simpsona }
{...}
end; { Simpson }

procedure GeoPCZ;
{ obliczenie charakterystyk geometrycznych PCZ }
{...}
end; { GeoPCZ }

procedure GenFG;
{ generowanie wektora FG }
{...}
end; { GenFG }

procedure GenKlu;
{ generowanie macierzy KI }
{...}
end; { GenKlu }

procedure DetNo;
{ wyznaczenie rozkladu statycznych sil osiowych No }
{...}
end; { DetNo }

procedure SolvEig;

```

```

{ rozwiazanie zagadnienia wlasnego }
{...}
end; { SolvEig }

procedure EigSh (iw:integer);
{ numeryczne generowanie formy wlasnej nr iw glownej struktury pretowej; }
{ parametry wyjscia: }
{   Max - ekstremalna wartosc u,v,w, }
{   File1: u[i],v[i],w[i] dla i=1..26 przy e=1..np; }
{...}
end; { EigSh }

procedure Damp;
{ obliczenie glownych wspolczynnikiow tlumienia }
{...}
end; { Damp }

begin
end. { GR_Algo2 }

Unit GR_Algo3;
{-----}
{   Program GROS: }
{   Procedury algorytmiczne - czesc 3 }
{-----}

interface
uses Dos,Crt, GR_Decl, GR_Math, GR_Algo1, GR_Algo2, GR_Post;

procedure GenFscir (fk:extended; r,i:integer);
procedure Agreg4 (fk:extended);
procedure StSt1 (fk:extended);
procedure StSt2 (fk:extended);
procedure ConPar2;
procedure DRez;
procedure DAU;
procedure WRez;
procedure WAU;
procedure ConPar3;
procedure Design;
procedure GenBCK;
procedure DAUA;
procedure WAUA;

implementation

procedure GenFscir (fk:extended; r,i:integer);
{ wyznaczenie wektorow Fs_ir, Fc_ir }
{...}
end; { GenFscir }

procedure Agreg4 (fk:extended);
{ algorytm agregacji - czesc 4 }
{...}
end; { Agreg4 }

procedure StSt1 (fk:extended);
{ drgania ustalone ukladu bez absorberow dla czestosci wzbudzania fk; }
{ parametry wyjscia: qs, qc. }
{...}

```

```

end; { StSt1 }

procedure StSt2 (fk:extended);
{ drgania ustalone ukladu z absorberami dla czestosci wzbudzania fk; }
{ parametry wyjscia: qs, qc. }
{...}
end; { StSt2 }

procedure ConPar2;
{ procedura deklarujaca parametry stale - czesc 2 }
{...}
end; { ConPar2 }

procedure DRez;
{ wyznaczenie qs,qc dla zbioru czestosci rezonansowych }
{ zapis w zbiorze 'rezon' }
{...}
end; { DRez }

procedure DAU;
{ wyznaczenie qs,qc w punktach rozbiegu i wybiegu maszyn }
{ zapis w zbiorze 'amplit' }
{...}
end; { DAU }

procedure GenPrzem (var ww:extended); {mm}
{procedura obliczajaca amplituse przemieszczenia }
{...}
end; { GenPrzem }

procedure GenPrzemB (var ww:extended); {mm}
{ procedura obliczajaca amplitude przemieszczenia }
{ dla wspolrzednej zwiazanej z bryla }
{...}
end; { GenPrzemB }

procedure GenSigma (var ww:extended); {MPa}
{ procedura obliczajaca naprezenia normalne - sigma }
{...}
end; { GenSigma }

procedure GenTau (var ww:extended); {MPa}
{ procedura obliczajaca naprezenia normalne - sigma }
{...}
end; { GenTau }

procedure WRez;
{ obliczenie rzadnych rezonansowych ch-ki AU wskazanej wielkosci wynikowej }
{ wyznaczenie Max, zapis rzadnych w zbiorze tekstowym }
{...}
end; { WRez }

procedure WAU;
{ obliczenie rzadnych ch-ki AU wskazanej wielkosci wynikowej }
{ zapis w zbiorze 'AFF' }
{...}
end; { WAU }

procedure ConPar3;
{ procedura obliczajaca parametry stale - czesc 3 }
end; { ConPar3 }

```

```

procedure Design;
{ projektowanie modalnych absorberow dynamicznych }
{...}
end; { Design }

procedure GenBCK;
{ wyznaczenie macierzy Buf,Cuf,Kuf ukkladu zmodyfikowanego }
{...}
end; { GenBCK }

procedure DAUA;
{ wyznaczenie qs,qc w punktach rozbiegu i wybiegu maszyn }
{ zapis w zbiorze 'ampl'- ukklad z absorberami }
{...}
end; { DAUA }

procedure WAUA;
{ obliczenie rzadnych ch-ki AU wskazanej wielkosci wynikowej }
{ zapis w zbiorze 'AFF'- ukklad bez absorberow }
{ zapis w zbiorze 'AFFA'- ukklad z absorberami }
{...}
end; { WAUA }

begin
end. { GR_Algo3 }

Unit GR_Prep;
{-----}
{ Program GROS: }
{ Procedury tworzące preprocesor }
{-----}

interface
uses Dos,Crt, GR_Decl, GR_Math;

procedure CzytD1;
procedure CzytD2;
procedure CzytD3;
procedure CzytD4;
procedure CzytD5;
procedure CzytD6;

implementation

procedure CzytD1;
{ sciezka 1: czytanie danych }
{...}
end; { CzytD1 }

procedure CzytD2;
{ sciezka 2: czytanie danych }
{...}
end; { CzytD2}

procedure CzytD3;
{ sciezka 3: czytanie danych }
{...}
end; { CzytD3}

```

```

procedure CzytD4;
{ sciezka 4: czytanie danych }
{...}
end; { CzytD4}

procedure CzytD5;
{ sciezka 5: czytanie danych }
{...}
end; { CzytD5}

procedure CzytD6;
{ sciezka 6: czytanie danych }
{...}
end; { CzytD6}

begin
end. { GR_Prep}

Unit GR_Post;
{-----}
{ Program GROS: }
{ Procedury tworzące postprocesor }
{-----}

interface
uses Dos,Crt,GR_Decl,GR_Math;

procedure ZapD1;
procedure S1W1;
procedure ZapD2;
procedure S2W1;
procedure ZapD3;
procedure S3W1;
procedure ZapD4;
procedure S4W1;
procedure ZapD5;
procedure S5W1;
procedure ZapD6;
procedure S6W1;

implementation

procedure ZapD1;
{ sciezka 1: kontrolny zapis danych }
{...}
end; { ZapD1 }

procedure S1W1;
{...}
end;{ S1W1 }

procedure ZapD2;
{ sciezka 2: kontrolny zapis danych }
{...}
end; { ZapD2 }

procedure S2W1;
{ sciezka 2, wyniki 1 }
{...}
end;{ S2W1 }

```



```

procedure ZapD3;
{ sciezka 3: kontrolny zapis danych }
{...}
end; { ZapD3 }

procedure S3W1;
{ sciezka 3, wyniki 1 }
{...}
end; { S3W1 }

procedure ZapD4;
{ sciezka 4: kontrolny zapis danych }
{...}
end; { ZapD4 }

procedure S4W1;
{ sciezka 4, wyniki 1 }
{...}
end; { S4W1 }

procedure ZapD5;
{ sciezka 5: kontrolny zapis danych }
{...}
end; { ZapD5 }

procedure S5W1;
{ sciezka 5, wyniki 1 }
{...}
end; { S5W1 }

procedure ZapD6;
{ sciezka 6: kontrolny zapis danych }
{...}
end; { ZapD6 }

procedure S6W1;
{ sciezka 6, wyniki 1 }
{...}
end; { S6W1 }

begin
end. { GR_Post}

Unit GR_Graf;
{-----}
{ Program Gros: }
{ Procedury graficzne. }
{-----}

interface
uses
  Dos,Crt,Graph, ViewXY_N, GR_Decl, GR_Math;

procedure Wykres1; { formy własne }
procedure Wykres2; { AU dla układu bez absorberów }
procedure Wykres3; { AU dla układu bez absorberów i z absorberami }

implementation

```

```

procedure Menu1;
{ procedura generujaca menu dla graficznego przedstawienia wynikow }
{
{...}
end; { Menu1 }

procedure Men1;
{...}
end; { Men1 }

procedure Menu2;
{...}
end; { Menu2 }

procedure Menu3;
{...}
end; { Menu3 }

procedure Ramka;
{...}
end; { Ramka }

procedure Wyk1;
{ procedura pomocnicza procedury Wykres 1 }
{...}
end; {Wyk1}

procedure Wyk2 (il,ip: integer);
{ procedura pomocnicza procedury Wykres 2 }
{...}
end; {Wyk2}

procedure Wyk3 (il,ip: integer);
{ procedura pomocnicza procedury Wykres 3 }
{...}
end; {Wyk3}

procedure Grafika;
{ procedura pomocnicza procedur Wykres 1, Wykres 2 i Wykres 3}

{...}
end; { Grafika }

procedure Wykres1;
{ procedura obslugujaca grafike dla Sciezki 4 }
{...}
end; { Wykres1 }

procedure Wykres2;
{ procedura obslugujaca grafike dla Sciezki 5 }
{...}
end; { Wykres2 }

procedure Wykres3;
{ procedura obslugujaca grafike dla Sciezki 6 }
{...}
end; { Wykres3 }

begin
end. { GR_Graf}

```

DYNAMIKA ORTOGONALNYCH CIENKOŚCIENNYCH STRUKTUR PRĘTOWYCH JAKO MODELI KONSTRUKCJI WSPORCZYCH POD MASZyny OBROTOWE

Streszczenie

Rozprawa jest poświęcona dynamice stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe. Opracowano adekwatny do rzeczywistości model fizyczny wymienionego typu konstrukcji. Konstrukcja nośna fundamentu jest ramą przestrzenną, złożoną z prętów cienkościennych o przekrojach otwartych lub jednokomorowych zamkniętych, spełniającą pewne warunki ortogonalności. Rama jest sztywno zamocowana w nieodkształcalnej i nieruchomej żelbetowej płycie dolnej. Węzły naturalne struktury prętowej są sztywne i tak skonstruowane, że nie przenoszą deplanacji. Uwzględniono tłumienie materiałowe w prętach konstrukcji nośnej. Maszyny obrotowe są traktowane jako bryły sztywne, połączone z konstrukcją wsporczą za pomocą dyskretnych przestrzennych elementów sprężysto-tłumiących. Maszyny obrotowe również spełniają pewne warunki ortogonalności. Uwzględniono trzy możliwe położenia osi obrotu maszyny, dwa możliwe kierunki obrotu i dowolną fazę początkową. W układzie mogą występować wiotkie stężenia o dowolnej lokalizacji. Model konstrukcji rozpatrywanego typu jest liniowy geometrycznie i fizycznie.

Opracowano częściowo nowe ujęcie podstaw mechaniki pryzmatycznych prętów cienkościennych o przekroju otwartym lub jednokomorowym zamkniętym, m.in. sformułowano różniczkowe równania równowagi statycznej pręta cienkościennego w bazie przemieszczeń związanych z osią centroidalną, według teorii pierwszego i drugiego rzędu oraz wyznaczono wzory na siły przekrojowe pręta cienkościennego w bazie przemieszczeń związanych z osią centroidalną. Operowanie bazą przemieszczeń związanych z osią centroidalną jest niezbędne w analizie ortogonalnych cienkościennych struktur prętowych.

Modelem dynamicznym konstrukcji rozpatrywanego typu jest liniowy układ dyskretny z tłumieniem nieproporcjonalnym, obciążony harmonicznie. Stalową cienkościenną konstrukcję wsporczą podzielono na prętowe elementy skończone. Węzły dodatkowe na długości prętów mają po 7 stopni swobody, w tym jedna deplanacja w kierunku osi pręta. Opracowano częściowo nowy przestrzenny, cienkościenny, prętowy element skończony o 14 stopniach swobody, z uwzględnieniem odkształcalności osiowej, giętnej, skrętnej i deplanacyjnej. Przyjęto liniową aproksymację przemieszczeń podłużnych oraz sześcienną aproksymację Hermita przemieszczeń poprzecznych i kątów skręcenia. Przyjęto bazę przemieszczeń związaną z osią centroidalną, wyprowadzono formułę na energię potencjalną elementu o profilu otwartym i jednokomorowym zamkniętym, według teorii drugiego rzędu, wyprowadzono formułę na energię kinetyczną elementu z uwzględnieniem bezwładności obrotowej i deplanacyjnej

Cechą charakterystyczną stalowych fundamentów ramowych pod maszyny obrotowe, z połączeniami śrubowymi maszyn z konstrukcją wsporczą, jest mała moc tłumienia drgań. Może to być przyczyną nadmiernych drgań układu w wybranych strefach rezonansowych. Do zabezpieczenia konstrukcji wsporczej przed nadmiernymi drganiami zastosowano bierne absorbery dynamiczne, strojone względem wybranych układów modalnych konstrukcji podstawowej.

Do sformułowania macierzowego równania ruchu modelu dynamicznego konstrukcji rozpatrywanego typu, wyposażonych w absorbery dynamiczne, zastosowano metodę bilansu energii i równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Rozkład statycznych sił osiowych, wywołanych ciężarem własnym maszyn i konstrukcji wsporczej, wyznaczono według teorii pierwszego rzędu. Początkową

grupę częstości i form własnych wyznaczono iteracyjną metodą Rayleigha. Drgania wymuszone układu są wzbudzone bezwładnościowo, wskutek niewyważenia części wirujących maszyn. Ze względów bezpieczeństwa pomija się wpływ przyspieszenia fazy w czasie rozbiegu lub wybiegu maszyn. W analizie drgań wymuszonych harmonicznymi, w czasie rozbiegu, wybiegu lub stanu eksploatacyjnego maszyn, wykorzystano charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe wielkości wynikowych, tj. przemieszczeń węzłowych oraz naprężeń normalnych i stycznych w przekrojach przywęzłowych.

Opracowano komputerowy algorytm dyskretyzacji i szybkiej agregacji układu, wykorzystujący warunki ortogonalności w układzie. Opracowano półprofesjonalny program komputerowy GROS do analizy dynamicznej konstrukcji rozpatrywanego typu. W procesorze programu wyróżniono sześć ścieżek przebiegu programu: tworzenie "banków" przekrojów cienkościennych otwartych, tworzenie "banków" przekrojów cienkościennych zamkniętych jednokomorowych, wyznaczanie rozkładu statycznych sił osiowych, rozwiązywanie zagadnienia własnego, wyznaczanie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych odpowiedzi układu bez absorberów dynamicznych, projektowanie absorberów dynamicznych i wyznaczanie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych odpowiedzi układu z absorberami dynamicznymi. Główne wyniki obliczeń (formy własne, charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe) są prezentowane również w formie graficznej. Problem dużej liczby stopni swobody rozwiązano, stosując dynamiczne zmienne macierzowe i kompilując program w trybie "protected" w systemie Borland Pascal 7.0.

Przeprowadzono obszerną analizę dynamiczną dwóch stalowych konstrukcji wsporczych pod maszyny obrotowe. Pierwsza konstrukcja ma charakter testowy, a druga odwzorowuje rzeczywisty fundament pod wentylator. Sformułowano wnioski przydatne w projektowaniu stalowych fundamentów ramowych i absorberów dynamicznych.

DYNAMICS OF THE ORTHOGONAL THIN-WALLED BAR STRUCTURES AS MODELS OF STRUCTURES SUPPORTING ROTOR MACHINES

Summary

The work is devoted to dynamics of steel frame foundations supporting rotary machines. The physical model of a structure of mentioned type, adequate to the reality, has been elaborated. The main structure of the foundation is a spatial frame made of thin-walled bars with an open or one-circumferenced section, satisfying some orthogonal conditions. The frame is fixed to the undeformable and immovable lower reinforced plate. The natural joints of the bar structure are rigid and designed as joints without warping. The Voight damping in the bars has been taken into consideration. The rotary machines are treated as rigid bodies attached to the structure by means of discrete spatial elastic-damping elements. The rotary machines also fulfil some orthogonal conditions. Three possible locations of rotation axis, two possible directions of the rotation and arbitrary initial phase have been taken into account. In the system flexible bracings with optional location may appear. The model of such a structure is linear, both geometrically and physically.

A partly new approach of fundamentals of mechanics of thin-walled bars with an open or one-circumferenced section has been elaborated; among other things, differential equilibrium equations of a thin-walled bar in the displacement basis connected with the centroidal axis, according to the first and second order theory, have been formulated. Formulae for the internal forces in the mentioned basis have been derived. Using of displacement basis connected with the centroidal axis is necessary in the analysis of orthogonal thin-walled spatial bar structures.

The dynamic model of structures of the considered type is a linear, discrete one, with non-proportional damping, loaded harmonically. Steel, thin-walled, supporting structure is divided into finite bar elements. The additional nodes, along the length of the bar, have 7 DOF, including warping in the direction of the bar axis. A new, partly original, spatial, thin-walled bar finite element with an open or one-circumferenced section, with 14 DOF, has been formulated, giving consideration to axial, flexural, torsional and warpingal deformability. Linear approximation for the axial displacements and cubic Hermite approximation for transverse displacements and for torsional angle have been assumed. The displacement basis connected with the centroidal axis has been assumed. The formula for potential energy for element with an open or one-circumferenced closed section according to the second order theory has been derived. The formula for kinetic energy with torsional and warpingal inertia has been derived.

Characteristic of steel frame foundation supporting rotary machines, with screw connections between machines and the structure, is weak damping power. It can cause excessive vibrations of the system in some resonant zones. To avoid this, the passive dynamic absorbers, tuned to some modal system of the primary structure, have been used.

In order to formulate the matrix equation of motion for dynamic model of such a type of structures with dynamic absorbers, the method of energy balance and Lagrange's equations of the second type have been used. The distribution of axial forces, due to gravity, has been established according to the first order theory. The first group of eigenvalues and eigenforms has been calculated using the iterative Rayleigh method. The forced vibration of the system are excited inertly, as a result of machines' rotor unbalances. For the safety reason, the phase acceleration is neglected during the racing or coasting. In analysis of harmonically forced vibrations - during the racing, coasting or useful

state of machines - the frequency-amplitude characteristics of the system response were used (i.e. joints' displacements, normal and shear stresses in the near-the-joint sections).

The computer discretization algorithm and the algorithm for fast aggregation of the system, using orthogonal conditions, have been worked out. Semi-professional computer program GROS for dynamic analysis of structures considered has been written and compiled. In the program processor, six paths of execution have been distinguished: making data base for thin-walled bars with an open section, making data base for thin-walled bars with a one-circumferenced closed section, calculating distribution of static axis forces, evaluating eigenvalues and eigenforms, evaluating frequency - amplitude characteristic for the response of the system without dynamic absorbers, dynamic absorbers' design and evaluating frequency-amplitude characteristic for response of system with dynamic absorbers. The main output results (eigenforms, frequency-amplitude characteristic) are also presented graphically. The problem connected with great number of degrees of freedom has been solved by using dynamic matrix variables and making "protected mode" compilation in Borland Pascal 7.0.

Wide dynamic analysis of two steel structures supporting rotary machines has been carried out. The first structure was used for tests. The second one is a real frame foundation supporting a fan. Some practical conclusions, useful in design of steel frame foundations and dynamic absorbers have been formulated.



Mgr inż. Jacek Grosel

Zakład Dynamiki Budowli

Instytut Inżynierii Lądowej

Politechnika Wrocławska

Wybrzeże Wyspiańskiego 27

50-370 Wrocław

Raport wpłynął do Redakcji Wydawnictw Instytutu w listopadzie 1995 r.

Lista odbiorców:

Komitety Badań Naukowych	1
Dyrekcja Instytutu Inżynierii Lądowej	1
Kierownik Zakładu Dynamiki Budowli	1
Biblioteka Główna PWr	1
Biblioteka i OINT I-14	1
Promotor	2
Recenzenci	2
Autor	1