

**INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ**

Raport serii: PREPRINTY nr 27/96

Modele i algorytmy sterowania manipulatorów z osobliwościami kinematycznymi*

(rozprawa doktorska)

Robert MUSZYŃSKI

PROMOTOR:

prof. dr hab. inż. Krzysztof Tchoń

Słowa kluczowe:

- manipulator
- kinematyka
- konfiguracja osobliwa
- zadanie odwrotne
- zadanie śledzenia
- metoda postaci normalnych

WROCŁAW 1996

* Wyniki przedstawione w rozprawie zostały uzyskane w ramach realizacji projektów badawczych KBN "Roboty osobliwe i nieholonomiczne: modele i algorytmy sterowania" oraz "Roboty osobliwe i nieholonomiczne: modele, sterowanie i planowanie trajektorii".

Biblioteka Główna i OIM
Politechniki Wrocławskiej



001338506



292555L/1

ok 118310/86

*Moim Rodzicom
poświęcam*

Spis rzeczy

Spis oznaczeń	7
1 Wprowadzenie	9
1.1 Stan wiedzy	9
1.2 Cel i zakres pracy	11
1.3 Tezy	12
1.4 Podstawowe pojęcia	12
I Modele kinematyk osobliwych	21
2 Podstawy teoretyczne	23
3 Modele wybranych kinematyk osobliwych	29
3.1 Manipulatory o 2 stopniach swobody	29
3.1.1 Postacie normalne kinematyki typu RR	29
3.2 Manipulatory o 3 stopniach swobody	32
3.2.1 Postacie normalne kinematyki typu PPP	34
3.2.2 Postacie normalne kinematyki typu PPR	34
3.2.3 Postacie normalne kinematyki typu PRP	35
3.2.4 Postacie normalne kinematyki typu PRR	37
3.2.5 Postacie normalne kinematyki typu RPP	39
3.2.6 Postacie normalne kinematyki typu RPR	40
3.2.7 Postacie normalne kinematyki typu RRP	47
3.2.8 Postacie normalne kinematyki typu RRR	50
3.2.9 Zestawienie postaci normalnych kinematyk manipulatorów o trzech stopniach swobody	64
3.3 Manipulatory typu <i>Puma</i>	64
II Algorytmy sterowania kinematyk osobliwych	75
4 Podstawy teoretyczne	77
5 Sterowanie wybranymi kinematykami osobliwymi	81
5.1 Manipulatory o 2 stopniach swobody	81
5.1.1 Rozwiązanie zadania śledzenia trajektorii	83
5.1.2 Realizacja trajektorii	91

5.1.3	Przykład śledzenia trajektorii	93
5.2	Manipulatory o 3 stopniach swobody	95
5.2.1	Rozwiązanie zadania śledzenia trajektorii	96
5.3	Badania eksperymentalne	98
6	Analiza porównawcza	103
6.1	Metoda „Singularity–Robust Inverse”	103
6.2	Metoda śledzenia ścieżki	106
7	Podsumowanie	111
	Dodatki	113
A	Pakiet oprogramowania symbolicznego do analizy osobliwości kinematycznych	115
A.1	Struktura i uruchomienie pakietu	115
A.2	Składnia procedur pakietu	116
A.2.1	Procedura PlotSkeleton	117
A.2.2	Procedura PlotPaths	118
A.2.3	Procedura AnimateSkeleton	119
A.2.4	Procedura ComputeKinematics	121
A.2.5	Procedura ComputeJacobian	122
A.2.6	Procedura pomocnicza CalculateJacobian	122
A.3	Przykładowe zastosowanie procedur	123
B	Pakiet oprogramowania symbolicznego do syntezy algorytmów sterowania kinematyk osobliwych	127
B.1	Struktura i uruchomienie pakietu	127
B.2	Składnia procedur pakietu	128
B.2.1	Procedura FindDiffeo	128
B.2.2	Procedura InverseDiffeo	129
B.2.3	Procedura pomocnicza ExpandedSeries	129
B.2.4	Procedura pomocnicza SkipPowers	130
B.3	Przykładowe zastosowanie procedur	130
C	Podstawowe pojęcia z teorii osobliwości	135
	Podziękowania	139
	Literatura	141
	Indeks	145

Spis oznaczeń

$(\cdot)^T$	– operacja transponowania
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	– iloczyn skalarny
$ \cdot $	– norma euklidesowa
$\binom{a}{b}$	– symbol Newtona, $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$, $a, b \in \mathbb{N}$
$\cap$	– iloczyn mnogościowy
$\cup$	– suma mnogościowa
$\wedge$	– operator logiczny 'i'
$\vee$	– operator logiczny 'lub'
$\setminus$	– różnica mnogościowa
$\sqrt{\cdot}$	– pierwiastek algebraiczny
$A_i(x_i)$	– macierz transformacji układów współrzędnych
a_i	– parametr Denavita–Hartenberga – przesunięcie wzdłuż osi x układu współrzędnych związanego z i -tym przegubem manipulatora
α_i	– parametr Denavita–Hartenberga – kąt wzajemnego skręcenia osi $(i-1)$ -ego i i -tego przegubu manipulatora
c_i	– $\cos x_i$
c_{ij}	– $\cos (x_i + x_j)$
$\text{codim } \mathbf{A}$	– kowymiar przestrzeni $\mathbf{A}$
$\text{corank } A$	– korząd macierzy A
$\text{corank } x$	– korząd konfiguracji x
D	– operator różniczkowy $D = \frac{\partial}{\partial x}$
d	– stopień różniczkowy kinematyki, (Definicja 1)
$\det A$	– wyznacznik macierzy A
d_i	– parametr Denavita–Hartenberga – przesunięcie wzdłuż osi z układu współrzędnych związanego z i -tym przegubem manipulatora
$\dim \mathbf{A}$	– wymiar przestrzeni $\mathbf{A}$
E	– macierz jednostkowa o rozmiarze wynikającym z kontekstu
$\mathbb{E}^n$	– n -wymiarowa przestrzeń euklidesowa
$J(x)$	– jacobian manipulatora
$\ker A$	– jądro macierzy A

$k(x)$	– kinematyka manipulatora
L_X	– pochodna Liego względem pola wektorowego X
$\mathbb{N}$	– zbiór liczb naturalnych
$o^n(x)$	– mała rzędu n -tego, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o^n(x)}{x^{n-1}} = 0$
$\text{rank } A$	– rząd macierzy A
$\mathbb{R}^n$	– n -wymiarowa przestrzeń rzeczywista (kartezjańska)
$\text{Rot}(a, \alpha)$	– elementarna rotacja wokół osi a o kąt α
$R(x)$	– macierz rotacji w macierzowej reprezentacji kinematyki manipulatora w konfiguracji x
S	– zbiór konfiguracji osobliwych manipulatora
$\mathbb{S}^1$	– jednowymiarowy okrąg jednostkowy
$SE(3)$	– specjalna grupa euklidesowa
S_i	– zbiór konfiguracji osobliwych korzędu i manipulatora
s_i	– $\sin x_i$
s_{ij}	– $\sin (x_i + x_j)$
$SO(3)$	– specjalna grupa obrotów
SRI	– Singularity–Robust Inverse
θ_i	– parametr Denavita–Hartenberga – kąt obrotu w i -tym przegubie manipulatora
$\mathbb{T}^n$	– n -wymiarowy torus
$\text{Trans}(a, b)$	– elementarna translacja wzdłuż osi a o wektor o długości b
$T(x)$	– wektor położenia efektora manipulatora w konfiguracji x
v	– wektor prędkości liniowych efektora manipulatora
v_i	– i -ty wektor spełniający równania (2.12)
v_i^j	– j -ta składowa i -tego wektora spełniającego równania (2.12)
ω	– wektor prędkości kątowych efektora manipulatora
$\mathbb{X}$	– rozmaitość wewnętrzna kinematyki manipulatora
$\mathbb{Y}$	– rozmaitość zewnętrzna (robocza) kinematyki manipulatora

Rozdział 1

Wprowadzenie

Zadanie sterowania robotem należy do podstawowych problemów robotyki, [MK94]. Najczęściej zadanie to sprowadza się do żądania, aby robot osiągnął określone położenie w przestrzeni (sterowanie typu od punktu do punktu) lub poruszał się wzdłuż zadanej ścieżki albo trajektorii (śledzenie ścieżki/trajektorii). W niniejszej rozprawie będziemy się zajmować analizą pewnej klasy zadań śledzenia trajektorii dla *szttywnych manipulatorów robotycznych* (nazywanych po prostu *robotami* lub *manipulatorami*) o nieruchomej podstawie (bazie), złożonych z następujących po sobie sztywnych ogniw (ramion) połączonych sztywnymi przegubami o jednym stopniu swobody.

Zadania śledzenia trajektorii dla manipulatora robotycznego można podzielić na dwie zasadniczo różne klasy: klasę zadań śledzenia trajektorii zadanej w przestrzeni wewnętrznej manipulatora i klasę zadań śledzenia trajektorii końca ostatniego ogniwa manipulatora zwanego *efektorem*, zadanej w przestrzeni roboczej. Podstawowa odmiennność wymienionych dwóch klas zadań śledzenia ma swoje źródło w istnieniu osobliwości kinematycznych manipulatorów, na które po raz pierwszy zwrócono uwagę w pracy [Whi72]. Przyczyną takiego stanu rzeczy jest fakt, że w przypadku zadania śledzenia trajektorii zadanej w przestrzeni roboczej niezbędne jest rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki, podczas gdy dla trajektorii zadanej w przestrzeni wewnętrznej nie jest to konieczne. Z formalnego punktu widzenia zadania śledzenia trajektorii w przestrzeni wewnętrznej i roboczej manipulatora pozostają równoważne tak długo, dopóki manipulator nie znajdzie się w pobliżu konfiguracji osobliwej, gdzie zadanie śledzenia trajektorii zadanej w przestrzeni roboczej komplikuje się znacznie. Dotychczas opracowano wiele algorytmów pozwalających na rozwiązanie zadania śledzenia trajektorii, zadanej zarówno w przestrzeni wewnętrznej, jak i roboczej. Jednakże niewiele z nich aspiruje do rozwiązania zadania śledzenia trajektorii zadanej w przestrzeni roboczej, w pobliżu konfiguracji osobliwych.

W niniejszym rozdziale dokonamy krótkiego przeglądu literatury z zakresu sterowania manipulatorów z osobliwościami kinematycznymi, przedstawimy cel i zakres rozprawy oraz sformułujemy jej tezy.

1.1 Stan wiedzy

Zanim przejdziemy do przeglądu algorytmów, które pozwalają na rozwiązanie w pobliżu konfiguracji osobliwych zadania śledzenia trajektorii zadanej w przestrzeni roboczej zauważmy, że trudności związane z rozwiązaniem tego zadania mają charakter zasadniczy, ponieważ jak pokazano w [Got86], w przestrzeni wewnętrznej dowolnego manipulatora

wyposażonego w przynajmniej trzy przeguby obrotowe, którego przestrzeń robocza zawiera specjalną grupę obrotów $SO(3)$, istnieją konfiguracje osobliwe. Dotyczy to zarówno manipulatorów nieredundantnych, jak i redundantnych.

Istnieją cztery sposoby podejścia do zadania śledzenia ścieżki/trajektorii zadanej w przestrzeni roboczej, w pobliżu konfiguracji osobliwych. Pierwszy z nich polega na próbie unikania konfiguracji osobliwych na etapie planowania ruchu. Jeśli manipulator posiada redundancję, często jest to możliwe, [B⁺84, Sha90, LP92, TM95a]. Dlatego, w celu uniknięcia pewnych problemów związanych z istnieniem osobliwości kinematycznych, niektórzy autorzy, [MW88, LP92, LMP93], proponują zwiększenie liczby stopni swobody manipulatora, czyniąc go tym samym redundantnym. Jednakże, jeśli mamy do czynienia z manipulatorem nieredundantnym o ustalonej strukturze, lub manipulatorem redundantnym w pobliżu konfiguracji osobliwych niemożliwych do uniknięcia, jedynym rozwiązaniem jest znalezienie algorytmów sterowania skutecznych w pobliżu osobliwości. Standardowym źródłem takich algorytmów jest metoda najmniejszych kwadratów, [Wam86, NH86, CSE94], reprezentująca drugi sposób podejścia do zadania śledzenia trajektorii w pobliżu osobliwości. Najpopularniejszym algorytmem uzyskanym metodą najmniejszych kwadratów jest „Singularity–Robust Inverse” zaproponowany w [NH86, Nak91]. Generalną wadą algorytmów tego rodzaju jest wkomponowana w ich działanie zamienność dokładności i płynności ruchu w pobliżu osobliwości (wzrost dokładności śledzenia prowadzi do szarpnięć w przegubach). Trzeci sposób podejścia odnosi się do opracowanej w ostatnich latach grupy algorytmów śledzenia ścieżki zadanej w przestrzeni roboczej, wykorzystujących nieliniową aproksymację ścieżki, [Kie92, Kie94]. Nieco uproszczonym wariantem podejścia Kieffera jest zaproponowany w [Nen95] algorytm śledzenia ścieżki polegający na rozszerzeniu przestrzeni wewnętrznej manipulatora o wymiar związany z reparametryzacją ścieżki i wykorzystaniu własności rozmaitości ruchu jałowego.

Czwarty typ podejścia do zadania śledzenia trajektorii w pobliżu osobliwości jest przykładem zastosowania metody równoważności. Idea metody równoważności polega na dokonaniu klasyfikacji manipulatorów i zaproponowaniu algorytmów sterowania „dostrojonych” do tzw. postaci normalnych modeli manipulatorów. Metoda równoważności systemów znalazła zastosowanie przy badaniu równoważności systemów ze względu na sprzężenie zwrotne, syntezy algorytmów sterowania układów nieliniowych oraz linearyzacji układów sterowania przez sprzężenie zwrotne, [Isi89, Jak90, NS90]. Stosownie do tej metody, przy danym zadaniu sterowania sformułowanym dla układu U , najpierw przekształcamy to zadanie do zadania dla układu U' równoważnego układowi U , następnie rozwiązujemy zadanie dla układu U' i, w końcu, przekształcamy uzyskane rozwiązanie z powrotem do układu wyjściowego U . Układ U' , nazywany zazwyczaj postacią normalną układu U , powinien zostać wybrany w taki sposób, aby było możliwe znalezienie rozwiązania przekształconego zadania*. Do nurtu związanego z metodą równoważności w robotyce można zaliczyć prace [Bed91, Bur91, TA92, PL92, Kie94, Kie95]. Najbardziej konsekwentne zastosowanie metody równoważności znalazło wyraz w pracach [Tch91, Tch93, Tch95a, Tch95b, TM97], w których klasyfikację modeli manipulatorów sprowadzono do klasyfikacji osobliwości kinematycznych. Jak pokazano w [Tch93], równoważność modeli manipulatorów robotycznych sprowadza się do tak zwanej RL–równoważności odpowiadających im kinematyk. Systematyczne wykorzystanie teorii osobliwości odwzorowań doprowadziło do określenia postaci normalnych kinematyk osobliwych, zarówno dla

*jeśli takie rozwiązanie istnieje

manipulatorów planarnych jak i przestrzennych, [Tch91, TU92, Tch93, TM97, Tch95a, MT95]. Postacie normalne są prostymi modelami matematycznymi kinematyk osobliwych, które dostarczają pełnej klasyfikacji osobliwości kinematycznych, pozwalając tym samym na zrozumienie zachowania manipulatorów w pobliżu konfiguracji osobliwych, jak również na zaproponowanie algorytmów sterowania skutecznych w osobliwościach kinematycznych. Końcowym efektem zastosowania teorii osobliwości do analizy zachowań manipulatorów w pobliżu konfiguracji osobliwych jest opracowanie metody tworzenia algorytmów sterowania manipulatora zwanej *metodą postaci normalnych*, [TM95b]. Metoda postaci normalnych pozwala na efektywne rozwiązanie osobliwego zadania śledzenia z wykorzystaniem postaci normalnych kinematyki w otoczeniu konfiguracji osobliwych.

1.2 Cel i zakres pracy

Uzyskane dotąd wyniki w zakresie zastosowania teorii osobliwości do klasyfikacji kinematyk osobliwych i syntezy algorytmów sterowania kinematyk osobliwych wskazują, że można tą drogą uzyskać algorytmy śledzenia trajektorii charakteryzujące się dobrymi własnościami dynamicznymi, pozwalające przeprowadzić manipulator przez konfigurację osobliwą zadaną prędkością.

Powyższa konstatacja stanowiła punkt wyjścia do napisania niniejszej rozprawy. Ogólnym celem rozprawy jest *opracowanie narzędzi pozwalających na efektywne określenie postaci normalnej zadanej kinematyki w otoczeniu konfiguracji osobliwych* oraz próba *zastosowania metody postaci normalnych do sterowania manipulatorami*. W rozprawie podano postacie normalne wybranych kinematyk nieredundantnych i objaśniono szczegółowo sposób ich wyznaczania. Przedstawiono przykłady wykorzystania postaci normalnych do rozwiązania zadania śledzenia trajektorii zadanej w przestrzeni roboczej w obecności osobliwości kinematycznych. Jedno z rozwiązań zaimplementowano na manipulatorze przemysłowym *AdeptOne*.

Zawartość rozprawy jest następująca. W pozostałej części bieżącego rozdziału sformułowano tezy rozprawy oraz omówiono kilka podstawowych własności kinematyki i dynamiki manipulatora, osobliwości kinematycznych, odwrotnego zadania kinematyki oraz zadania śledzenia trajektorii, wykorzystywanych w dalszej części pracy. Rozprawa jest podzielona na dwie części. Część I dotyczy modeli manipulatorów osobliwych, część II algorytmów sterowania manipulatorów z osobliwościami kinematycznymi. W rozdziałach 2 i 3, stanowiących pierwszą część pracy, wprowadzono narzędzia teoretyczne pozwalające na wyznaczenie postaci normalnych kinematyki nieredundantnej w otoczeniu konfiguracji osobliwych, a także wyznaczono postacie normalne wybranych kinematyk osobliwych. Wśród nich znalazły się postacie normalne kinematyki manipulatora typu „podwójne wahadło”, postacie normalne kinematyk położeniowych o 3 stopniach swobody i dowolnych konstrukcjach poczynając od PPP kończąc na RRR, i jako ostatnie, postacie normalne manipulatorów typu *PUMA*. W rozdziale 4, otwierającym drugą część pracy, wprowadzono metodę postaci normalnych. Rozdział 5 jest poświęcony ilustracji zastosowania metody postaci normalnych do wybranych kinematyk osobliwych. Jako pierwsze przedstawiono zastosowanie metody postaci normalnych do sterowania manipulatorem typu „podwójne wahadło”. Następnie pokazano przykład użycia metody postaci normalnych do sterowania kinematyką położeniową typu RRR, a na końcu jej zastosowanie do sterowania manipulatorem przemysłowym *AdeptOne*. Porównanie własności rozwiązań otrzymanych metodą

postaci normalnych z własnościami rozwiązań uzyskiwanych innymi metodami przedstawiono w rozdziale 6. Rozdział 7 podsumowuje rozprawę. Rozprawę zamykają trzy dodatki. Dodatek A zawiera opis pakietu oprogramowania służącego do analizy osobliwości kinematycznych, dodatek B zawiera opis pakietu oprogramowania do syntezy algorytmów sterowania kinematyk osobliwych. Podstawowe pojęcia teorii osobliwości przedstawia dodatek C.

1.3 Tezy

Tezy rozprawy można sformułować następująco:

1. Zadanie śledzenia trajektorii z osobliwościami wymaga algorytmów sterowania dostrojonych do postaci normalnej kinematyki manipulatora;
2. Zastosowanie teorii osobliwości do analizy osobliwości kinematycznych manipulatorów pozwala na opracowanie nowej metody rozwiązania osobliwego zadania śledzenia, zwanej metodą postaci normalnych;
3. Metoda postaci normalnych pozwala na opracowanie algorytmów rozwiązania osobliwego zadania śledzenia przewyższających znane algorytmy i stosowalnych w praktyce.

1.4 Podstawowe pojęcia

W niniejszej rozprawie będziemy rozpatrywać *kinematykę sztywnych manipulatorów robotycznych*, wyposażonych w przeguby rotacyjne i translacyjne o nieograniczonym zakresie ruchu. Kinematyka takich manipulatorów może być utożsamiona z analitycznym odwzorowaniem

$$k : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y} \quad (1.1)$$

z *rozmaitości wewnętrznej* $\mathbb{X}$ w *rozmaitość zewnętrzną (roboczą)* $\mathbb{Y}$. W dalszej części rozprawy będziemy używać pojęcia *rozmaitości kinematycznych*, mając na myśli zarówno rozmaitość zewnętrzną jak i rozmaitość wewnętrzną. W związku z założeniem o nieograniczoności przegubów, dziedziną zmiennych ruchu dla przegubów rotacyjnych jest okrąg jednostkowy $\mathbb{S}^1$, a dla przegubów translacyjnych zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}^1$. Tak więc, dla manipulatora o n przegubach (n stopniach swobody), wśród których jest r przegubów rotacyjnych i $n - r$ przegubów translacyjnych, rozmaitość wewnętrzna jest zdefiniowana jako

$$\mathbb{X} \cong \mathbb{T}^r \times \mathbb{R}^{n-r}, \quad (1.2)$$

gdzie $\mathbb{T}^r$ jest r -wymiarowym torusem ($\mathbb{T}^r = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{r \text{ razy}}$). Rozmaitość zewnętrzna kinematyki manipulatora jest zazwyczaj utożsamiana ze specjalną grupą euklidesową $SE(3)$ składającą się z przesunięć ($\mathbb{R}^3$) i obrotów ($SO(3)$) ciała sztywnego w trójwymiarowej

przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^3$, $SE(3) \cong \mathbb{R}^3 \times SO(3)$, albo też z pewnymi podgrupami specjalnej grupy euklidesowej $SE(3)$, jak na przykład: $SO(3)$ – specjalną grupą obrotów w $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{R}^3$ – grupą przesunięć w $\mathbb{E}^3$, $SE(2) \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ – grupą ruchów ciała sztywnego w $\mathbb{E}^2$ czy też $\mathbb{R}^2$ – grupą przesunięć w $\mathbb{E}^2$. Z definicji, rozmaitości $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ są analityczne w rozumieniu geometrii różniczkowej, [War83]. W dalszej części przyjmujemy, że $\dim \mathbb{X} = n$, $\dim \mathbb{Y} = m$.

Poza szczególnymi przypadkami (jak np. dla manipulatora wyposażonego tylko w przeguby translacyjne), rozmaitości kinematyczne manipulatora nie mogą być reprezentowane globalnie przez jakiekolwiek rzeczywiste przestrzenie wektorowe, tzn. nie można w nich wprowadzić globalnych układów współrzędnych. Jednakże taka reprezentacja istnieje lokalnie. Prowadzi ona do pojęcia *przestrzeni wewnętrznej* $\mathbb{R}^n$ i *przestrzeni zewnętrznej* (roboczej) $\mathbb{R}^m$. Przestrzeń wewnętrzna przegubów obrotowych jest wynikiem parametryzacji każdego z okręgów jednostkowych $\mathbb{S}^1$, wchodzących w skład torusa $\mathbb{T}^r$, przez kąt obrotu w przegubie manipulatora (zobacz np. [Bur89, MLS94]). Elementy przestrzeni wewnętrznej będą nazywane *konfiguracjami* (wektorami konfiguracji) manipulatora (kinematyki) lub krócej *konfiguracjami*. Przestrzeń zewnętrzna zasadniczo może zostać zdefiniowana na wiele sposobów, w zależności od tego jaki układ współrzędnych zostanie wykorzystany. Najczęściej używane układy współrzędnych to współrzędne kartezjańskie w przestrzeni położeń $\mathbb{R}^3$ wraz ze współrzędnymi oś/kąt, kątami Eulera czy też kątami roll–pitch–yaw w podgrupie obrotów $SO(3)$, a także współrzędne wykładnicze zastosowane dla całej grupy $SE(3)$, [MLS94, SV89, TD94]. W dalszej części niniejszej rozprawy często będziemy przyjmować, że kinematyka (1.1) jest reprezentowana względem odpowiednich układów współrzędnych jako odwzorowanie

$$k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.3)$$

przy czym z kontekstu będzie jasno wynikało która kinematyka, (1.1) czy (1.3), jest rozpatrywana.

Jednym ze sposobów opisu kinematyki manipulatora jest metoda Denavita–Hartenberga, [DH55, SV89]. Pozwala ona, po przypisaniu układów współrzędnych do bazy manipulatora, do jego przegubów oraz do jego efektora, na opisanie w sposób jednoznaczny geometrii *i*-tego członu[†] manipulatora przy użyciu 4 parametrów[‡]:

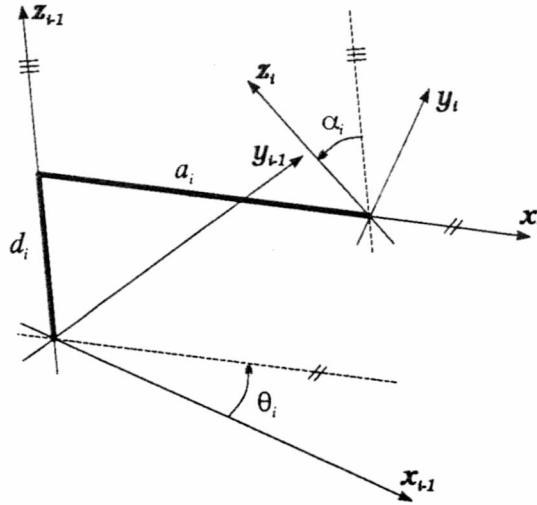
- θ_i – kąta obrotu w przegubie,
- d_i – przesunięcia wzdłuż osi z układu współrzędnych związanego z przegubem *i*-tym[§],
- a_i – przesunięcia wzdłuż osi *x* tegoż układu współrzędnych oraz
- α_i – kątu wzajemnego skręcenia osi kolejnych przegubów.

Dwa pierwsze z wymienionych parametrów charakteryzują *i*-ty przegub manipulatora, dwa pozostałe jego *i*-te ramię. Na rysunku 1.1 przedstawiono geometryczną interpretację parametrów Denavita–Hartenberga używanych w niniejszej rozprawie. Jak widać, metoda Denavita–Hartenberga wymaga, aby kolejne układy współrzędnych były przypisane tak, by oś *x* układu następującego (oś x_i na rysunku 1.1) była prostopadła do osi *z* układu poprzedzającego (osi z_{i-1} na rysunku 1.1) oraz by osie te przecinały się.

[†]jako człon manipulatora rozumiemy tutaj parę składającą się z przegubu i następującego po nim ramienia

[‡]a co za tym idzie, geometrii całego manipulatora przy użyciu $4n$ parametrów

[§]należy zwrócić uwagę, że w przyjętej konwencji z przegubem *i*-tym związany jest (*i* – 1)-wszy układ współrzędnych



Rysunek 1.1: Geometryczna interpretacja parametrów Denavita–Hartenberga.

Zdefiniujmy macierze transformacji pomiędzy poszczególnymi układami współrzędnych w postaci

$$A_i(x_i) = Rot(z_{i-1}, \theta_i) Trans(z_{i-1}, d_i) Trans(x_{i-1}, a_i) Rot(x_{i-1}, \alpha_i) \quad (1.4)$$

dla $i = 1, \dots, n$, gdzie Rot i $Trans$ oznacza odpowiednio elementarną rotację i translację wokół/wzdłuż osi wskazanej jako pierwszy argument operatora o wartość będącą jego drugim argumentem, a x_i jest zmienną ruchu (położenia) i -tego przegubu manipulatora równą θ_i dla przegubu rotacyjnego lub d_i dla przegubu translacyjnego. Przy oznaczeniach (1.4) kinematykę manipulatora określamy jako

$$k(x) = \prod_{i=1}^n A_i(x_i) = \begin{bmatrix} R(x) & T(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

W powyższym wyrażeniu $R(x)$ oznacza *macierz rotacji* określającą orientację efektora manipulatora w bazowym układzie współrzędnych, natomiast $T(x)$ jest *wektorem położenia efektora* w tymże układzie. Zarówno składowe macierzy $R(x)$ jak i wektora $T(x)$ zależą analitycznie od wektora położenia w przegubach x . Oczywiście, wektory położenia w przegubach są elementami przestrzeni wewnętrznej manipulatora, czyli jego konfiguracjami.

Powyższe rozważania pozwoliły na ustalenie zależności między położeniem i orientacją efektora manipulatora a jego konfiguracją. Ponieważ, w trakcie ruchu manipulatora, zarówno jego konfiguracja jak i położenie i orientacja efektora są funkcjami czasu, interesującą z praktycznego punktu widzenia jest zależność pomiędzy prędkościami efektora manipulatora a prędkościami $\dot{x}$ w jego przegubach. W celu określenia tej zależności zde-

finiujemy *wektor prędkości kątowych* efektora[¶] $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ jako, [SV89, MLS94],

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \dot{R}R^T(x), \quad (1.6)$$

oraz *wektor prędkości liniowych* efektora $v = (v_1, v_2, v_3)$ jako

$$v = \dot{T}(x). \quad (1.7)$$

Przedmiotem naszych zainteresowań jest zależność typu

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = J(x)\dot{x}, \quad (1.8)$$

gdzie $J(x)$ jest macierzą $6 \times n$. Macierz $J(x)$ nazywana jest *jacobianem manipulatora*. Niestety, tak zdefiniowany jacobian, mimo istnienia efektywnych metod jego wyliczania, [SV89], ma pewien defekt, a mianowicie zależność (1.8) nie definiuje macierzy Jacobiego kinematyki $k(x)$ tzn. nie istnieją układy współrzędnych w $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$, takie że $J(x)$ byłby macierzą Jacobiego kinematyki $k(x)$ wyrażonej w tych układach współrzędnych. Co za tym idzie, elementy jacobianu $J(x)$ nie są pochodnymi cząstkowymi kinematyki $k(x)$, [Lat93]. Macierz Jacobiego kinematyki manipulatora może zostać wyliczona po wprowadzeniu układów współrzędnych w rozmaitościach kinematycznych. Oznaczmy współrzędne wybrane w $\mathbb{X}$ przez $x = (x_1, \dots, x_n)$, natomiast współrzędne wybrane w $\mathbb{Y}$ przez $y = (y_1, y_2, y_3, \alpha, \beta, \gamma)$. We współrzędnych (x, y) *macierz Jacobiego* kinematyki $k(x)$ jest zdefiniowana jako

$$\dot{y} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})^T = \frac{\partial k}{\partial x}(x)\dot{x}. \quad (1.9)$$

Wadą tak zdefiniowanej macierzy Jacobiego jest to, że jest ona określona jedynie lokalnie^{||}. Obliczeniowo, macierze występujące w (1.8), (1.9) są sobie równoważne w tym sensie, że znajomość macierzy Jacobiego kinematyki pozwala na wyliczenie jacobianu manipulatora i vice versa. Przy założeniu, że współrzędne położenia i orientacji są niezależne, i że jako współrzędne położenia efektora przyjęto współrzędne kartezjańskie, macierze (1.8), (1.9) łączą zależność**

$$J(x) = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & M(y) \end{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial x}(x), \quad (1.10)$$

z E oznaczającym macierz jednostkową wymiaru 3×3 i $M(y) = [m_1(y), m_2(y), m_3(y)]$, gdzie $m_i(y)$, $i = 1, 2, 3$ są odpowiednio wektorami jednostkowymi osi obrotów wokół których mierzone są kąty α , β i γ , [Nak91].

[¶]Milcząco przyjęliśmy, że rozmaitość zewnętrzna manipulatora została utożsamiona ze specjalną grupą euklidesową $SE(3)$; każdy z pozostałych przypadków może zostać uzyskany przez odpowiednie ograniczenie przypadku rozpatrzonego tutaj.

^{||}bezpośrednia konsekwencja nieistnienia globalnych układów współrzędnych w $SE(3)$ i $\mathbb{T}^r$

**dla inaczej wybranych współrzędnych również można wyprowadzić zależność pomiędzy macierzą Jacobiego a jacobianem

W tym miejscu przyjmujemy założenie, że rozpatrywane kinematyki są *nieredundantne* tzn., że $m = n$. Dla kinematyki $k(x)$ istnieją dwa rodzaje konfiguracji. Przyjmując, że $k(x)$ oznacza kinematykę nieredundantną, konfiguracja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ jest *konfiguracją regularną* jeżeli

$$\text{rank } J(x_0) = n. \quad (1.11)$$

W przeciwnym przypadku konfiguracja x_0 nazywana jest *konfiguracją osobliwą*. Kinematykę przyjmującą konfiguracje osobliwe nazywać będziemy *kinematyką osobliwą*. Konfiguracje manipulatora mogą zostać sklasyfikowane z uwagi na *korząd* jakobianu manipulatora, nazywany *korzędem konfiguracji*, zdefiniowany jako

$$\text{corank } x = \text{corank } J(x) = n - \text{rank } J(x). \quad (1.12)$$

Oczywiście, dla konfiguracji regularnych x_0 $\text{corank } J(x_0) = 0$. Konfiguracje osobliwe o różnych korzędach tworzą zbiór

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \det J(x) = 0\} = \bigcup_{i=1}^n S_i, \quad (1.13)$$

składający się z n podzbiorów *konfiguracji osobliwych korzędu i* , $S_1, \dots, S_n$, gdzie

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{corank } x = i\}.$$

Ponieważ kinematyka $k(x)$ jest analityczna, z (1.13) wynika, że zbiór konfiguracji osobliwych S jest domkniętym, nigdzie gęstym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, a więc, topologicznie, podzbiorem „bardzo małym”. Jego największa część, S_1 , składa się z konfiguracji osobliwych spełniających tylko jedno równanie analityczne. Można więc ją traktować jako hiperpowierzchnię w $\mathbb{R}^n$ ($\text{codim } S_1 = 1$). Pozostałe elementy składowe zbioru S są określone przez przynajmniej jedno dodatkowe równanie i, co za tym idzie, ich kowymiary są większe od 1. Jeśli, dla przykładu, $n = 3$ wówczas S_1 można sobie wyobrazić jako powierzchnię w $\mathbb{R}^3$, S_2 jako krzywą w $\mathbb{R}^3$ a S_3 jako zbiór pojedynczych punktów w $\mathbb{R}^3$. W ogólności, w przypadku, gdy równania definiujące S_i są niezależne $\text{codim } S_i = i^2$, a więc wymiar zbiorów S_i szybko maleje ze wzrostem ich indeksu. Jasne jest więc, że, z punktu widzenia zadania planowania trajektorii w przestrzeni roboczej manipulatora jak i zadania śledzenia trajektorii, składowa S_1 zbioru konfiguracji osobliwych jest składową najważniejszą, wymagającą poświęcenia znacznie większej uwagi niż składowe pozostałe. S_1 może rozgraniczać przestrzeń wewnętrzną manipulatora na rozłączne obszary konfiguracji regularnych w taki sposób, że przejście z jednego takiego obszaru do innego będzie wymagało wejścia w konfigurację osobliwą z S_1 , [Bur89]. Pozostałe podrozmaitości konfiguracji osobliwych można łatwo ominąć przy planowaniu trajektorii.

Dla manipulatora o kinematyce $k(x)$ definiuje się *odwrotne zadanie kinematyki*, polegające na wyznaczeniu trajektorii manipulatora w przestrzeni wewnętrznej odpowiadającej pożądaney trajektorii zadanej w przestrzeni roboczej. Formalnie, odwrotne zadanie kinematyki formułuje się jako

Dany jest układ (1.3) i trajektoria $y_d(t)$ w przestrzeni roboczej. Znaleźć trajektorię $x_d(t)$ określoną w przestrzeni wewnętrznej, dla której

$$y_d(t) = k(x_d(t)).$$

Oczywiście, odwrotne zadanie kinematyki powinno zostać rozwiązane w taki sposób, aby gładkim trajektoriom^{††} zadany w przestrzeni roboczej odpowiadały gładkie trajektorie w przestrzeni wewnętrznej. Jednakże znalezienie takiego rozwiązania nie zawsze jest możliwe. W niniejszej rozprawie trajektorie w przestrzeni wewnętrznej będące rozwiązaniem odwrotnego zadania kinematyki będziemy uważać za akceptowalne, jeśli ich drugie pochodne względem czasu są ciągłe.

Jak wiadomo, wśród wielu metod rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki, istnieje *metoda jacobianowa* sprowadzająca odwrotne zadanie kinematyki do rozwiązania następującego układu niestacjonarnych równań różniczkowych

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial k}{\partial x}(x) \right)^{-1} \dot{y}_d(t), \quad (1.14)$$

z warunkiem początkowym $x(0)$ spełniającym równanie $k(x(0)) = y_d(0)$. Problem wyznaczenia warunku początkowego $x(0)$ można rozwiązać przy użyciu algorytmu Newtona opisanego równaniem

$$\dot{z} = \alpha \left(\frac{\partial k}{\partial z}(z) \right)^{-1} (y_d(0) - k(z)), \quad (1.15)$$

gdzie $z(0) \in \mathbb{R}^n$ jest dowolnym warunkiem początkowym, a $\alpha > 0$ współczynnikiem zbieżności algorytmu. Jak widać, kluczowym elementem składowym metody jacobianowej jest znalezienie macierzy odwrotnej do macierzy Jacobiego $\frac{\partial k}{\partial x}(x)$. Zadanie to jest łatwo wykonalne dopóty, dopóki manipulator nie znajdzie się w pobliżu konfiguracji osobliwej. Odwrotne zadania kinematyki, które wymagają wejścia w konfiguracje osobliwe określamy mianem *osobliwych zadań odwrotnych*.

Dla nieredundantnego manipulatora o kinematyce (1.3) wprowadzimy pojęcie *dynamiki* wyrażonej w odpowiednich układach współrzędnych, co w rezultacie daje układ sterowania opisany równaniami, [Cra81, SV89],

$$\left. \begin{aligned} A(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q}) &= u \\ y &= k(q) \end{aligned} \right\}. \quad (1.16)$$

W powyższym modelu $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ oznacza odpowiednio wektor położeń, prędkości i przyspieszeń ruchu przegubów, $u \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem sił/momentów sterujących, $y \in \mathbb{R}^n$ oznacza położenie i orientację efektora rozważanego manipulatora. Macierz $A(q)$ jest macierzą inercji, $B(q, \dot{q})$ reprezentuje siły odśrodkowe, Coriolisa i grawitacji. Typowe zadanie sterowania manipulatorem (1.16) polega na znalezieniu sterowań zapewniających poruszanie się efektora wzdłuż zadanej trajektorii w przestrzeni roboczej. Takie zadanie nazywa się *zadaniem śledzenia trajektorii* i formułuje formalnie w następujący sposób.

Dany jest układ (1.16) i trajektoria $y_d(t)$ w przestrzeni roboczej. Znaleźć sterowanie $u(t)$, przy którym wyjście układu $y(t)$ dąży asymptotycznie do trajektorii zadanej,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_d(t).$$

^{††}jako gładką rozumiemy trajektorię, której wszystkie pochodne względem czasu są ciągłe

Dla potrzeb syntezy algorytmów sterowania model (1.16) często zapisuje się w postaci afinicznego układu sterowania z wyjściem

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \theta \\ F(x, \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G(x) \end{pmatrix} u \\ y &= k(x) \end{aligned} \right\}, \quad (1.17)$$

przy oznaczeniach $x = q$, $\theta = \dot{q}$, $G(x) = A^{-1}(x)$, $F(x, \theta) = -A^{-1}(x)B(x, \theta)$. Oczywiście, zadanie śledzenia trajektorii dla (1.17) sprowadza się do znalezienia sterowania $u(t)$ przy którym wyjście układu $y(t)$ dąży asymptotycznie do trajektorii zadanej $y_d(t)$.

Zasadniczo istnieją dwa podejścia do rozwiązywania zadania śledzenia trajektorii w przestrzeni zewnętrznej: podejście pośrednie i podejście bezpośrednie. W podejściu pośrednim zasadnicza trudność polega na znalezieniu trajektorii ($q_d(t)$ w (1.16) czy też $x_d(t)$ w (1.17)) w przestrzeni wewnętrznej manipulatora odpowiadającej trajektorii pożądanej $y_d(t)$ zadanej w przestrzeni roboczej, co wymaga rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki dla $y_d(t)$. Trajektorja znaleziona w przestrzeni wewnętrznej może następnie zostać zrealizowana przy użyciu jednego z wielu dostępnych algorytmów, [WB88], jak np. metody obliczanego momentu dla trajektorii zadanej w przestrzeni wewnętrznej, [MLS94]. Algorytm sterowania oparty na wspomnianej metodzie dla modelu (1.17) jest dany układem równań,

$$\left. \begin{aligned} u &= G^{-1}(x)(v - F(x, \theta)) \\ v &= \ddot{x}_d - K_d(\dot{x} - \dot{x}_d) - K_p(x - x_d) \end{aligned} \right\}, \quad (1.18)$$

gdzie

K_p, K_d – dodatnio określone, diagonalne macierze wzmocnień.

W podejściu bezpośrednim sterowania wyznaczane są bezpośrednio na podstawie pożądanej trajektorii efektora $y_d(t)$. Podejście to prowadzi, dla układu (1.17), do algorytmu sterowania opisanego układem równań, [Fre82],

$$\left. \begin{aligned} u &= D^{-1}(x)(v - \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x)\theta^2) \\ v &= \ddot{y}_d - K_d(\dot{y} - \dot{y}_d) - K_p(y - y_d) \\ y &= k(x) \end{aligned} \right\}, \quad (1.19)$$

gdzie $D(x) = \frac{\partial k}{\partial x}(x)G(x)$ i, jak poprzednio, K_p i K_d oznaczają dodatnio określone, diagonalne macierze wzmocnień.

Podobnie jak w przypadku odwrotnego zadania kinematyki, zasadniczym zadaniem zarówno w podejściu pośrednim jak i bezpośrednim do zadania śledzenia trajektorii jest znalezienie macierzy odwrotnej do macierzy Jacobiego $\frac{\partial k}{\partial x}(x)$. Jak poprzednio, ze względu na problemy z jej określeniem w pobliżu konfiguracji osobliwych, spośród zadań śledzenia trajektorii wyodrębnimy te, które wymagają wejścia w konfiguracje osobliwe i określimy mianem *osobliwych zadań śledzenia trajektorii*. Pojawia się pytanie o to, na czym polega różnica pomiędzy kinematyką w konfiguracji regularnej a kinematyką przyjmującą konfiguracje osobliwe, że w przypadku tej drugiej pojawiają się problemy z rozwiązaniem odwrotnego zadania kinematyki i zadania śledzenia trajektorii.

Załóżmy na moment, że $k(x)$ oznacza kinematykę w pewnym otoczeniu konfiguracji regularnej $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ponieważ w takiej konfiguracji $\det \frac{\partial k}{\partial x}(x_0) \neq 0$, zgodnie z twierdzeniem o funkcji odwrotnej, [AR88], odwzorowanie $\varphi(x)$, zdefiniowane w pewnym otoczeniu konfiguracji x_0 jako

$$\xi = \varphi(x) = k(x) - k(x_0), \quad (1.20)$$

jest lokalnym dyfeomorfizmem przekształcającym pewne otoczenie konfiguracji x_0 na pewne otoczenie $0 \in \mathbb{R}^n$. Jak łatwo zauważyć, dyfeomorfizm (1.20) wraz z przesunięciem

$$\eta = \psi(y) = y - k(x_0) \quad (1.21)$$

przekształca kinematykę $k(x)$ do postaci

$$\eta = k_0(\xi) = \psi \circ k \circ \varphi^{-1}(\xi) = \xi. \quad (1.22)$$

Jak widzimy, przy użyciu dyfeomorfizmów (1.20), (1.21) jesteśmy w stanie sprowadzić kinematykę do bardzo prostej postaci (w rozumieniu teorii osobliwości kinematyka $k(x)$ jest lokalnie RL-równoważna postaci (1.22); w dalszej części niniejszej rozprawy będziemy mówić, że kinematyka jest *lokalnie równoważna pewnej postaci normalnej* lub, że można ją *przekształcić do pewnej postaci normalnej*, mając na myśli RL-równoważność zdefiniowaną w Definicji 2 dodatku C). Takie proste modele matematyczne kinematyki nazywać będziemy *postaciami normalnymi* kinematyki. Ponieważ powyższa obserwacja jest istotna z punktu widzenia odwrotnego zadania kinematyki i zadania śledzenia trajektorii, sformułujemy ją formalnie.

Wniosek 1 *Załóżmy, że x_0 jest konfiguracją regularną nieredundantnej kinematyki $k(x)$ o n stopniach swobody. Wówczas kinematyka ta jest lokalnie równoważna liniowej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n). \quad (1.23)$$

Można więc stwierdzić, że algorytm (1.14), (1.15) rozwiązywania odwrotnego zadania kinematyki jak i podejścia pośrednie (1.18) z (1.14), (1.15) i bezpośrednie (1.19) do rozwiązywania zadania śledzenia trajektorii są stosowalne tylko do manipulatorów o kinematyce równoważnej liniowej postaci normalnej.

Część I

Modele kinematyk osobliwych

Rozdział 2

Podstawy teoretyczne

Ponieważ, zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w rozdziale 1.4, konfiguracje ze zbioru S_1 są najpowszechniej występującymi konfiguracjami osobliwymi, często niemożliwymi do uniknięcia podczas planowania i śledzenia trajektorii, w pierwszej części niniejszej rozprawy zajmujemy się analizą kinematyki manipulatorów w otoczeniu konfiguracji $x \in S_1$. Naszym celem będzie podanie warunków, które pozwolą na znalezienie prostych modeli matematycznych kinematyki w otoczeniu konfiguracji osobliwych korzędu 1. Modele takie będziemy nazywać *postaciami normalnymi* kinematyki osobliwej. Podstawowym narzędziem służącym określeniu postaci normalnych jest teoria osobliwości [AVGZ85, Arn93, GG73, Mar82], której niezbędne fragmenty przytoczono w dodatku C.

Rozpatrzmy nieredundantną kinematykę (1.1) wyrażoną w pewnych lokalnych układach współrzędnych jako odwzorowanie analityczne

$$k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Oznaczmy jako $x_0 \in S_1$ konfigurację osobliwą korzędu 1 kinematyki (2.1). Dla x_0 mamy

$$\text{rank} \frac{\partial k}{\partial x}(x_0) = n - 1. \quad (2.2)$$

Kinematykę (2.1) rozpatrywaną w otoczeniu konfiguracji x_0 będziemy nazywać *kinematyką osobliwą korzędu 1*.

Zauważmy, że dla kinematyki osobliwej $y = k(x)$ korzędu 1 i konfiguracji osobliwej $x_0 \in S_1$, po zastosowaniu odpowiedniej permutacji współrzędnych $(x_1, \dots, x_n)$ i $(y_1, \dots, y_n)$, warunkowi (2.2) można nadać postać

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial k_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial k_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial k_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial k_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x_0) = n - 1. \quad (2.3)$$

Dzięki powyższej obserwacji, możemy wymagać, bez utraty ogólności, aby rozpatrywana kinematyka była zdefiniowana tak, że warunek (2.3) jest spełniony. Przy tym warunku, bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 30 (dodatek C) jest następujący wniosek.

Lemat 1 Niech $k(x)$ będzie kinematyką osobliwą korzędu 1. Wówczas, w pewnym otoczeniu konfiguracji $x_0 \in S_1$ istnieje analityczny układ współrzędnych $\xi = \varphi(x)$, taki że $k(x)$ jest równoważna postaci pre-normalnej

$$k_0(\xi) = k \circ \varphi^{-1}(\xi) = (r(\xi), \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (2.4)$$

gdzie r jest pewną funkcją analityczną spełniającą warunek $k_1(x) = r \circ \varphi(x)$.

Dowód: Wystarczy zaobserwować, że na mocy (2.3) $\varphi(x)$ może zostać zdefiniowane jako

$$\varphi(x) = (x_1, k_2(x), \dots, k_n(x)). \quad (2.5)$$

□

Postać pre-normalna $k_0(\xi)$ jest określona lokalnie, w pewnym otoczeniu konfiguracji $\xi_0 = \varphi(x_0)$ i zawiera funkcję $r(\xi)$, której zachowanie wokół konfiguracji ξ_0 decyduje o transformowalności kinematyki $k(x)$ do postaci normalnej pre-Morina (C.2, C.4) czy też postaci normalnej Morina (C.2, C.6). Jak wynika z (C.3), aby określić postać normalną równoważną danej kinematyce, musimy obliczyć kolejne pochodne cząstkowe funkcji $r(\xi)$ ze względu na ξ_1 w punkcie ξ_0 . Jednakże funkcja $r(\xi)$ nie jest dana jawnie lecz jest określona poprzez lokalny dyfeomorfizm $\varphi(x)$ zależnością $k_1(x) = r \circ \varphi(x)$, co utrudnia obliczanie odpowiednich pochodnych.

Jak wynika z Twierdzenia 31 (dodatek C), występująca w warunku (C.3) liczba naturalna oznaczająca najwyższy rząd pochodnej funkcji $r(\xi)$ ze względu na ξ_1 znikającej w konfiguracji osobliwej odgrywa szczególną rolę w poszukiwaniach postaci normalnych kinematyk osobliwych. Z tego względu wprowadzimy następującą formalną definicję.

Definicja 1 *Rozpatrzmy kinematykę osobliwą korzędu 1 w postaci pre-normalnej (2.4) w pewnym otoczeniu konfiguracji osobliwej $\xi_0 = \varphi(x_0)$. Wówczas, najmniejszą liczbę $d \in \mathbb{N}$, taką że*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^i r}{\partial \xi_1^i}(\xi_0) &= 0 \text{ dla } i = 1, 2, \dots, d-1, \\ \frac{\partial^d r}{\partial \xi_1^d}(\xi_0) &\neq 0 \end{aligned} \right\}$$

nazywamy stopniem różniczkowym kinematyki w ξ_0 . Jeśli nie istnieje taka liczba (tzn. $\forall i \frac{\partial^i r}{\partial \xi_1^i}(\xi_0) = 0$), przyjmujemy, że kinematyka ma w ξ_0 stopień różniczkowy równy ∞ .

Z definicji d jest większe od 1. W najprostszym przypadku kinematyki o stopniu różniczkowym równym 2, z Definicji 1, na podstawie warunku (C.3) z Twierdzenia 32 wynika

Wniosek 2 *W otoczeniu konfiguracji osobliwej $x_0 \in S_1$ korzędu 1 kinematykę osobliwą $k(x)$ o stopniu różniczkowym równym 2 można przekształcić do kwadratowej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2, x_2, \dots, x_n). \quad (2.6)$$

Traktując rzecz ogólniej, jeśli w konfiguracji osobliwej korzędu 1 stopień różniczkowy kinematyki jest skończony, na podstawie Definicji 1 i Twierdzenia 31, warunek (C.3) możemy stwierdzić co następuje.

Wniosek 3 *Załóżmy, że w konfiguracji osobliwej $x_0 \in S_1$ kinematyka $k(x)$ ma stopień różniczkowy $d < \infty$. Wówczas $k(x)$ można przekształcić w otoczeniu punktu x_0 do wielomianowej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1^d + u_1(\bar{x})x_1^{d-2} + \dots + u_{d-2}(\bar{x})x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.7)$$

gdzie $u_1, \dots, u_{d-2}$ oznaczają pewne analityczne funkcje zależne od $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$ i znikające w $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Założmy teraz, że $k(x)$ oznacza kinematykę osobliwą o stopniu różniczkowym równym ∞ . Oznacza to, z definicji, że wszystkie pochodne $\frac{\partial^m r}{\partial \xi_1^m}(\xi_0) = 0$, $m \geq 1$. Wykorzystując tę własność i fakt, że kinematyka jest funkcją analityczną można udowodnić następujący rezultat, [TM97].

Twierdzenie 1 *Niech $x_0 \in S_1$ będzie konfiguracją osobliwą kinematyki $k(x)$. Załóżmy, że stopień różniczkowy kinematyki $k(x)$ w konfiguracji x_0 jest równy ∞ . Wówczas $k(x)$ można przekształcić wokół punktu x_0 do tzw. pre-hiperbolicznej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1 u(x), x_2, \dots, x_n), \quad (2.8)$$

zawierającej nieznaną analityczną funkcję u , taką że $u(0) = 0$. Jeśli, dodatkowo, dla pewnego $i \neq 1$

$$D(\det \frac{\partial k}{\partial x})(x_0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0) \right)^{-1}_{i\text{-ta kolumna}} \neq 0, \quad (2.9)$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza dyfeomorfizm transformujący kinematykę $k(x)$ do postaci pre-normalnej (2.4), wówczas (2.8) może zostać zredukowane do tzw. hiperbolicznej postaci normalnej

$$k_0(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1 x_2 + \sum_{i=3}^n x_1 x_i u_i(x), x_2, \dots, x_n \right), \quad (2.10)$$

gdzie $u_3, \dots, u_n$ są pewnymi funkcjami analitycznymi znikającymi w $0 \in \mathbb{R}^n$.

W ten sposób określiliśmy wszystkie możliwe postacie normalne kinematyk w otoczeniu konfiguracji osobliwych korzędu 1. Należy jednak zauważyć, że przytoczone postacie normalne, za wyjątkiem postaci kwadratowej, zawierają pewne nieznanne funkcje. Wyznaczenie postaci tych funkcji powinno być przedmiotem dalszych badań, gdyż ich nieznanność utrudnia w znacznym stopniu wykorzystanie postaci normalnych przy rozwiązywaniu osobliwego zadania odwrotnego.

Aby dopełnić nasze rozważania, podamy teraz obliczalne warunki pozwalające na określenie stopnia różniczkowego kinematyki osobliwej, co wobec Wniosków 2, 3 i Twierdzenia 1 jest równoznaczne z wyznaczeniem postaci normalnych kinematyki osobliwej. Wymagane warunki są zawarte w poniższym twierdzeniu, [TM97].

Twierdzenie 2 *Założmy, że $k(x)$ jest kinematyką osobliwą w postaci pre-normalnej (2.4). Niech $x_0 \in S_1$ oznacza konfigurację osobliwą kinematyki $k(x)$. Wówczas kinematyka $k(x)$ ma w x_0 stopień różniczkowy równy d wtedy i tylko wtedy, gdy d jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której*

$$\begin{aligned} & D \left(\det \frac{\partial k}{\partial x} \right) (x_0) v_{d-1} + D^2 \left(\det \frac{\partial k}{\partial x} \right) (x_0) \sum_{r_1=1}^{d-2} A_{r_1}^{d-1} 2^{d-1} v_{d-1-r_1} v_{r_1} + \dots \\ & + D^i \left(\det \frac{\partial k}{\partial x} \right) (x_0) \sum_{r_1=1}^{d-2} \dots \sum_{r_{i-1}=1}^{r_{i-2}-1} A_{r_1 \dots r_{i-1}}^{d-1} 2^{d-1} v_{d-1-r_1} \dots v_{r_{i-1}} + \dots \\ & + D^{d-1} \left(\det \frac{\partial k}{\partial x} \right) (x_0) \underbrace{v_1 \dots v_1}_{d-1 \text{ razy}} \neq 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wektory $v_1, \dots, v_{d-1}$ występujące w (2.11) są rozwiązaniem następującego układu równań:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial x}(x_0)v_1 &= 0, \\ \frac{\partial k}{\partial x}(x_0)v_2 + \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x_0)v_1v_1 &= 0, \\ \dots \\ \frac{\partial k}{\partial x}(x_0)v_{d-1} + \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x_0) \sum_{q=1}^{d-2} \binom{d-2}{q} v_q v_{d-1-q} + \dots \\ + \frac{\partial^{i+1} k}{\partial x^{i+1}}(x_0) \sum_{q=i}^{d-2} \sum_{r_1=1}^{q-1} \dots \sum_{r_{i-1}=1}^{r_{i-2}-1} A_{r_1 \dots r_{i-1}}^{d-2-i, q} v_{q-r_1} v_{r_1-r_2} \dots v_{r_{i-1}} v_{d-1-q} + \dots \\ + \frac{\partial^{d-1} k}{\partial x^{d-1}}(x_0) \underbrace{v_1 \dots v_1}_{d-1 \text{ razy}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Dla zwięzłości zapisu w powyższych wyrażeniach przyjęto oznaczenia $A_{r_1 \dots r_{p-1}}^{mpq} = \binom{m}{q} \binom{q-1}{r_1} \binom{r_1-1}{r_2} \dots \binom{r_{p-2}-1}{r_{p-1}}$ gdzie $m \geq q > r_1 > r_2 > \dots > r_{p-1}$ oraz $D = \frac{\partial}{\partial x}$ wraz z $D^k f(x)v_1 \dots v_k$ zdefiniowanym indukcyjnie jako, [AR88],

$$\begin{aligned} Df(x)v &= dfv = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)v_i, \\ D^{k+1}f(x)v_1 \dots v_{k+1} &= D(D^k f(x)v_1 \dots v_k)v_{k+1}, \end{aligned}$$

dla gładkiej funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i wektorów $v_1, \dots, v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$. Dla funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i wektorów $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ wyrażenie $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x)v_1 \dots v_k$ definiujemy jako

$$\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x)v_1 \dots v_k \right)_i = D^k f_i(x)v_1 \dots v_k.$$

Składowe wektorów v_i występujących w powyższych wyrażeniach oznaczać będziemy przy użyciu indeksów górnych, tak więc v_i^j oznacza j -tą składową wektora v_i .

Spostrzeżenie 1 *Nietrudno zauważyć, że macierz Jacobiego $\frac{\partial k}{\partial x}(x)$ występująca w warunku (2.11) może być zastąpiona jacobianem manipulatora $J(x)$, zdefiniowanym przez (1.8). Podstawienie takie nie jest możliwe w równaniach (2.12), pozwalających na wyliczenie wektorów $v_1, \dots, v_{d-1}$, ponieważ jacobian manipulatora nie pozwala na obliczenie pochodnych wyższego rzędu $\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x)$, itp. Do wyznaczenia wektorów $v_1, \dots, v_{d-1}$ można wykorzystać, zamiast równań (2.12), bezpośrednio definicję tych wektorów, [TM97], jednak równania (2.12) wydają się prostsze obliczeniowo.*

Twierdzenie 2 dostarcza nam weryfikowalnych warunków pozwalających określić stopień różniczkowy kinematyki osobiwej i tym samym wyznaczyć postać normalną badanej kinematyki.

Ponieważ, jak się okaże, najczęściej spotykamy się z problemem określenia czy stopień różniczkowy d kinematyki jest równy 2, 3 czy 4, poniżej przedstawimy explicite postać wyrażen (2.11), (2.12) dla wymienionych wartości d .

Aby pokazać, że stopień różniczkowy kinematyki $k(x)$ w konfiguracji osobiwej $x_0 \in S_1$ jest równy 2, wystarczy stwierdzić, że spełniony jest warunek

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial k}{\partial x} \right) (x_0)v_1 \neq 0, \quad (2.13)$$

z wektorem v_1 spełniającym równanie

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x_0)v_1 = 0. \quad (2.14)$$

Analogicznie, kinematyka $k(x)$ ma w konfiguracji osobliwej $x_0 \in S_1$ stopień różniczkowy równy 3 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial k}{\partial x} \right) (x_0)v_2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\det \frac{\partial k}{\partial x} \right) (x_0)v_1v_1 \neq 0, \quad (2.15)$$

oraz $\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial k}{\partial x} \right) (x_0)v_1 = 0$, gdzie wektory v_1, v_2 stanowią rozwiązanie układu równań

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial x}(x_0)v_1 &= 0 \\ \frac{\partial k}{\partial x}(x_0)v_2 + \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x_0)v_1v_1 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.16)$$

W końcu, stopień różniczkowy kinematyki $k(x)$ w konfiguracji osobliwej $x_0 \in S_1$ jest równy 4 wtedy i tylko wtedy, gdy lewe strony nierówności (2.13) i (2.15) równe są zeru i równocześnie jest spełniony warunek

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial k}{\partial x} \right) (x_0)v_3 + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\det \frac{\partial k}{\partial x} \right) v_1v_2 + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\det \frac{\partial k}{\partial x} \right) (x_0)v_1v_1v_1 \neq 0, \quad (2.17)$$

dla wektorów v_1, v_2, v_3 będących rozwiązaniem następującego układu równań:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial x}(x_0)v_1 &= 0 \\ \frac{\partial k}{\partial x}(x_0)v_2 + \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x_0)v_1v_1 &= 0 \\ \frac{\partial k}{\partial x}(x_0)v_3 + 3 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x_0)v_1v_2 + \frac{\partial^3 k}{\partial x^3}(x_0)v_1v_1v_1 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.18)$$

Zauważmy, że zgodnie ze Spostrzeżeniem 1, macierz Jacobiego $\frac{\partial k}{\partial x}(x)$ występująca w wyrażeniach (2.13), (2.14), (2.15), (2.17) może zostać zastąpiona jacobianem $J(x)$.

Rozdział 3

Modele wybranych kinematyk osobliwych

Bieżący rozdział niniejszej rozprawy poświęcimy określeniu postaci normalnych wybranych kinematyk manipulatorów. Rozważania rozpoczniemy od znalezienia postaci normalnych kinematyki prostego manipulatora planarnego o 2 stopniach swobody. Przypadek ten posłuży szczegółowemu zilustrowaniu sposobu określania postaci normalnych kinematyki manipulatora. Następnie przystąpimy do wyznaczenia postaci normalnych pewnych kinematyk manipulatorów o strukturze ważnej z praktycznego punktu widzenia. Jako pierwsze przeanalizujemy kinematyki położeniowe manipulatorów przestrzennych o 3 stopniach swobody. Rozdział zakończymy wyznaczeniem postaci normalnych kinematyki manipulatora typu *PUMA*. Analiza każdego z pokazanych przypadków została wykonana z dużym udziałem komputerowych obliczeń symbolicznych w systemie MATHEMATICA, [Wol88]), z wykorzystaniem pakietu oprogramowania do analizy postaci osobliwości kinematycznych opisanego w dodatku A.

3.1 Manipulatory o 2 stopniach swobody

Aczkolwiek wśród manipulatorów o 2 stopniach swobody kilka typów przyjmuje konfiguracje osobliwe, manipulatory te nie mają większego znaczenia praktycznego. Jedynym, godnym analizy przypadkiem, i to zarówno ze względów ilustracyjnych, porównawczych jak i po części praktycznych* jest manipulator planarny o kinematyce typu RR. Poniżej przedstawimy szczegółową analizę wspomnianego przypadku, który posłuży do ilustracji sposobu określania postaci normalnych kinematyk.

3.1.1 Postacie normalne kinematyki typu RR

Kinematyka RR charakteryzuje manipulatory wyposażone w dwa przeguby rotacyjne. Parametry Denavita–Hartenberga planarnego manipulatora typu RR podane są w tabeli 3.1. Przyjmując jako współrzędne robocze manipulatora współrzędne kartezjańskie położenia efektora otrzymujemy kinematykę postaci

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = k(x) = \begin{pmatrix} a_1 \cos x_1 + a_2 \cos(x_1 + x_2) \\ a_1 \sin x_1 + a_2 \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

*wymieniona kinematyka opisuje dwa pierwsze człony manipulatorów typu *SCARA*

przegub	θ_i	α_i	d_i	a_i
1	x_1	0	0	a_1
2	x_2	0	0	a_2

Tabela 3.1: Parametry Denavita-Hartenberga planarnego manipulatora typu RR.

gdzie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Jakobian rozpatrywanego manipulatora jest dany równaniem

$$J(x) = \begin{bmatrix} -a_1 \sin x_1 - a_2 \sin(x_1 + x_2) & -a_2 \sin(x_1 + x_2) \\ a_1 \cos x_1 + a_2 \cos(x_1 + x_2) & a_2 \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Należy zauważyć, że w rozpatrywanym przypadku jakobian (3.2) jest macierzą Jacobiego kinematyki manipulatora. Wyznacznik macierzy (3.2) przyjmuje postać

$$\det J(x) = a_1 a_2 \sin x_2. \quad (3.3)$$

Dla nietrywialnej kinematyki z parametrami $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ zbiór konfiguracji osobliwych dany jest jako

$$S = \{x \in \mathbb{T}^2 \mid \sin x_2 = 0\}. \quad (3.4)$$

Widać stąd, że manipulator przyjmuje konfigurację osobliwą, gdy jego drugie ramie jest w pełni wyprostowane ($x_2 = 0$) lub całkowicie złożone ($x_2 = \pm\pi$). Na podstawie analizy jakobianu manipulatora łatwo zauważyć, że wszystkie konfiguracje osobliwe kinematyki są korzędu 1. Prowadzi to do konkluzji, że rozpatrywana kinematyka może zostać przekształcona do postaci pre-normalnej (2.4).

Obecnie przystąpimy do określenia stopnia różniczkowego badanej kinematyki korzystając z wyników przedstawionych w rozdziale 2. Pochodna wyznacznika jakobianu dla $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in S$ ma postać

$$\frac{\partial}{\partial x} (\det J)(x_0) = \begin{cases} (0, a_1 a_2) & \text{dla } x_{02} = 0, \\ (0, -a_1 a_2) & \text{dla } x_{02} = \pm\pi. \end{cases} \quad (3.5)$$

Wektor $v_1 \in \ker \frac{\partial k}{\partial x}(x_0) = \ker J(x_0)$, spełniający równanie (2.14), można wybrać postaci

$$v_1 = \begin{cases} (-a_2, a_1 + a_2)^T & \text{dla } x_{02} = 0, \\ (-a_2, a_1 - a_2)^T & \text{dla } x_{02} = \pm\pi. \end{cases}$$

Stąd, lewa strona nierówności (2.13) sprowadza się do wyrażenia

$$\begin{cases} a_1 a_2 (a_1 + a_2) & \text{dla } x_{02} = 0, \\ a_1 a_2 (a_2 - a_1) & \text{dla } x_{02} = \pm\pi, \end{cases}$$

co jest niezerowe dla kinematyki nietrywialnej, wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \neq -a_2$ dla $x_{02} = 0$ i $a_1 \neq a_2$ dla $x_{02} = \pm\pi$. Prowadzi to do wniosku, że rozpatrywana kinematyka

ma w konfiguracji osobliwej $x_0 \in S$ stopień różniczkowy $d = 2$, jeżeli $a_1 \neq -a_2$ dla $x_{02} = 0$ i $a_1 \neq a_2$ dla $x_{02} = \pm\pi$. Widać więc, że jedyną konfiguracją osobliwą o stopniu różniczkowym różnym od 2 jest konfiguracja manipulatora o równych długościach ramion a_1, a_2 , dla której efektor manipulatora pokrywa się z jego bazą. Spróbujmy określić stopień różniczkowy dla takiego manipulatora. Rozpocznijmy naszą analizę od określenia postaci wektorów v_i występujących w równaniach (2.12) dla $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in S$ przy $a_1 + a_2 = 0$ dla $x_{02} = 0$ i $a_1 - a_2 = 0$ dla $x_{02} = \pm\pi$. Z pierwszego równania na liście (2.12) wynika natychmiast, że w rozpatrywanym przypadku $v_1 \in \ker \frac{\partial k}{\partial x}(x_0)$ można wybrać jako

$$v_1 = (v_1^1, v_1^2) = (1, 0)^T. \quad (3.6)$$

Ostatni składnik w pozostałych równaniach listy (2.12) ma postać

$$\frac{\partial^m k_i}{\partial x^m}(x_0) \underbrace{v_1 \dots v_1}_{m \text{ razy}} = \sum_{j_1+j_2=m} \frac{m!}{j_1!j_2!} \frac{\partial^m k_i}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}}(x_0) (v_1^1)^{j_1} (v_1^2)^{j_2},$$

$i = 1, 2, m \geq 2$. Dzięki temu, że $v_1^2 = 0$, powyższe wyrażenie redukuje się do

$$\frac{\partial^m k_i}{\partial x^m}(x_0) \underbrace{v_1 \dots v_1}_{m \text{ razy}} = \frac{\partial^m k_i}{\partial x_1^m}(x_0) (v_1^1)^m.$$

Krótką analizą postaci kinematyki w rozpatrywanym przypadku prowadzi do wniosku, że $\frac{\partial^m k_i}{\partial x^m}(x_0) = 0$ i, co za tym idzie, że $\frac{\partial^m k_i}{\partial x^m}(x_0) \underbrace{v_1 \dots v_1}_{m \text{ razy}} = 0$. Prowadzi to do konkluzji, że

wszystkie wektory $v_i, i \geq 2$ występujące w (2.12) są współliniowe z wektorem v_1 . Po tym spostrzeżeniu przystąpmy do analizy warunku (2.11). Ponieważ wyznacznik jacobianu manipulatora nie zależy od x_1 , ostatni składnik wspomnianego warunku ma postać

$$D^m(\det \frac{\partial k}{\partial x})(x_0) \underbrace{v_1 \dots v_1}_{m \text{ razy}} = \frac{\partial^m}{\partial x_2^m}(\det \frac{\partial k}{\partial x})(x_0) (v_1^2)^m,$$

co oczywiście jest równe zero ze względu na $v_1^2 = 0$. Ponieważ każdy wektor $v_i, i \geq 2$ w warunku (2.11) jest współliniowy z wektorem v_1 , następstwem powyższej własności jest to, że stopień różniczkowy kinematyki planarnego manipulatora typu RR w $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in S$ przy $a_1 + a_2 = 0$ dla $x_{02} = 0$ i $a_1 - a_2 = 0$ dla $x_{02} = \pm\pi$ jest nieskończony. Pozwala nam to zastosować Twierdzenie 1 do rozstrzygnięcia czy badana kinematyka jest równoważna pre-hiperbolicznej postaci normalnej. Przed sformułowaniem ostatecznego twierdzenia określającego postacie normalne kinematyki manipulatora planarnego typu RR sprawdźmy, czy używając drugiej części Twierdzenia 1 jesteśmy w stanie dokładnie wyznaczyć postać normalną kinematyki w badanym przypadku. Postać jacobianu manipulatora pozwala nam stwierdzić, że dyfeomorfizm przekształcający rozpatrywaną kinematykę do postaci pre-normalnej wyrażony jest przez

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x_1, k_2(x)) & \text{dla } \cos x_1 \neq 0, \\ (x_1, k_1(x)) & \text{dla } \cos x_1 = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Macierz Jacobiego dyfeomorfizmu $\varphi(x)$ dla $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in S$ dana jest jako

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (a_1 \pm a_2) \cos x_{01} & \pm a_2 \cos x_{01} \end{bmatrix} & \text{dla } \cos x_{01} \neq 0, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mp(a_1 + a_2) & \mp a_2 \end{bmatrix} & \text{dla } \cos x_{01} = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Analiza wyrażenia (2.9) z wykorzystaniem macierzy określonej powyżej, przy pochodnej wyznacznika danej przez (3.5), pokazuje, że lewa strona wyrażenia (2.9) jest różna od zera. Reasumując stwierdzamy co następuje.

Twierdzenie 3 *Rozpatrzmy planarną kinematykę $k(x)$ typu RR . Wówczas, w pewnym otoczeniu dowolnej konfiguracji osobliwej $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in S$, rozpatrywana kinematyka jest równoważna jednej z poniższych postaci normalnych, [Tch93]:*

- dla $x_{02} = 0$ przy $a_1 \neq -a_2$ i dla $x_{02} = \pm\pi$ przy $a_1 \neq a_2$, kwadratowej postaci normalnej

$$k_0(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2);$$

- dla $x_{02} = 0$ przy $a_1 + a_2 = 0$ i dla $x_{02} = \pm\pi$ przy $a_1 - a_2 = 0$, hiperbolicznej postaci normalnej

$$k_0(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_2).$$

Należy zauważyć, że do rozpoznania postaci normalnych kinematyki nie jest wymagana znajomość jej postaci pre-normalnej a także, w większości przypadków, znajomość poszczególnych dyfeomorfizmów przekształcających[†].

3.2 Manipulatory o 3 stopniach swobody

Po przeanalizowaniu prostego przypadku manipulatora o dwóch stopniach swobody przystąpimy do znalezienia postaci normalnych kinematyk o trzech stopniach swobody. Problem potraktujemy tutaj systematycznie, starając się uzyskać w miarę kompletną listę postaci normalnych dla wszystkich typów kinematyk nieredundantnych o trzech stopniach swobody. Postępując w ten sposób, wyznaczmy zestaw postaci normalnych większości kinematyk realizujących makroruchy w typowych manipulatorach przemysłowych. Ponieważ interesują nas jedynie kinematyki nieredundantne, jako współrzędne robocze manipulatorów przyjmujemy współrzędne kartezjańskie położenia efektora. Należy zauważyć, że przyjęte współrzędne są globalne, zatem wśród rozważanych konfiguracji osobliwych nie pojawiają się konfiguracje, których osobliwość jest rezultatem przyjętego sposobu reprezentacji kinematyki. Jak poprzednio założymy, że nie ma ograniczeń na położenie w przegubach manipulatorów. Dodatkowo przyjmujemy, że wszystkie rozpatrywane kinematyki są przestrzenne. Przedstawione tu rezultaty zawiera raport [MT95].

Po przypisaniu w standardowy sposób układów współrzędnych do bazy manipulatora, do jego przegubów oraz do jego efektora, opiszemy kinematykę manipulatora używając parametrów Denavita–Hartenberga zebranych w tabeli 3.2.

Zmienną ruchu i -tego przegubu jest przesunięcie d_i dla przegubów translacyjnych i kąt θ_i dla przegubów rotacyjnych. W poniższych rozważaniach ograniczymy się jedynie do współrzędnych położenia $T(x)$ kinematyk manipulatorów. Zgodnie z wyrażeniami (1.4) i (1.5), wektor współrzędnych położenia $T(x)$ kinematyki o trzech stopniach swobody jest określony wyrażeniem

$$T(x) = \begin{bmatrix} t_1 \cos \theta_1 + t_2 \sin \theta_1 \\ t_1 \sin \theta_1 - t_2 \cos \theta_1 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

[†]Jedynie w przypadku hiperbolicznej postaci normalnej musimy znać dyfeomorfizm przekształcający kinematykę do postaci pre-normalnej

przegub	θ_i	α_i	d_i	a_i
1	θ_1	α_1	d_1	a_1
2	θ_2	α_2	d_2	a_2
3	θ_3	α_3	d_3	a_3

Tabela 3.2: Parametry Denavita–Hartenberga dla manipulatorów o trzech stopniach swobody.

gdzie

$$\begin{aligned}
 t_1 &= a_1 + b_1 \cos \theta_2 - b_2 \sin \theta_2, \\
 t_2 &= b_3 \sin \alpha_1 - b_1 \cos \alpha_1 \sin \theta_2 - b_2 \cos \alpha_1 \cos \theta_2, \\
 t_3 &= d_1 + b_3 \cos \alpha_1 + b_1 \sin \alpha_1 \sin \theta_2 + b_2 \sin \alpha_1 \cos \theta_2, \\
 b_1 &= a_2 + a_3 \cos \theta_3, \\
 b_2 &= a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 - d_3 \sin \alpha_2, \\
 b_3 &= d_2 + d_3 \cos \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_2 \sin \theta_3.
 \end{aligned}$$

W dalszym ciągu bieżącego podrozdziału będziemy utożsamiać kinematykę manipulatora z analitycznym odwzorowaniem (3.9). Należy zauważyć, że równania kinematyki (3.9) opisują całą klasę manipulatorów o trzech stopniach swobody. Jedyną rzeczą wymagającą dodatkowego określenia dla danego typu kinematyki są jej zmienne ruchu którymi są obroty dla przegubów rotacyjnych i przesunięcia dla przegubów translacyjnych.

Przed przystąpieniem do analizy poszczególnych typów kinematyk zauważmy, że zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w rozdziale 1.4, dowolna kinematyka nieredundantna poza konfiguracjami osobliwymi jest równoważna liniowej postaci normalnej (1.23). Z kolei zajmujemy się wyznaczeniem postaci normalnych kinematyki dla konfiguracji osobliwych korzędu 1, które, jak pokazaliśmy w rozdziale 1.4, są najczęściej spotykanymi konfiguracjami osobliwymi kinematyki manipulatorów. W celu systematycznego ujęcia problemu, w każdym z rozpatrywanych przypadków będziemy wyraźnie zaznaczać zmienne ruchu manipulatora. Również, ze względu na założenie o przestrzenności kinematyk, przytoczymy warunki, które musi spełniać rozważana kinematyka, aby pozostawać przestrzenną. Dodatkowo, po każdorazowym zdefiniowaniu zbioru konfiguracji osobliwych, podamy przejrzyste interpretacje geometryczne tych konfiguracji. W kilku przypadkach zilustrujemy je na rysunkach. Zaproponowane interpretacje, które z pewnością nie są jedynymi możliwymi, zostały uzyskane przez analizę wyrażeń na wyznaczniki macierzy Jacobiego kinematyk manipulatorów wspartą animacjami komputerowymi. Animacje te wykonano przy użyciu pakietu oprogramowania służącego do analizy osobliwości kinematycznych opisanego w dodatku A. Główną część każdego z rozpatrywanych przypadków zajmuje przedstawienie warunków na korząd kinematyki i wyznaczenie jej postaci normalnych. Będziemy zakładać, że rozpatrywane kinematyki są przestrzenne.

3.2.1 Postacie normalne kinematyki typu PPP

Kinematyka PPP jest realizowana przez manipulator o trzech przegubach translacyjnych. Zmienne ruchu manipulatora są w tym przypadku dane jako $x_1 = d_1$, $x_2 = d_2$ i $x_3 = d_3$. Przykładem manipulatora przemysłowego o takiej konstrukcji jest robot portalowy Cincinnati Milacron *T³ 886*, robot Olivetti *Sigma* oraz robot Renault *P80*. Dla kinematyki PPP macierz Jacobiego

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha_1 \sin \theta_1 & j_1 \cos \theta_1 + j_2 \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 \cos \theta_1 & j_1 \sin \theta_1 - j_2 \cos \theta_1 \\ 1 & \cos \alpha_1 & j_3 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

gdzie

$$\begin{aligned} j_1 &= \sin \alpha_2 \sin \theta_2, \\ j_2 &= \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2, \\ j_3 &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy Jacobiego (3.10) jest równy

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_2. \quad (3.11)$$

Łatwo zauważyć, że rozpatrywana kinematyka albo jest zawsze osobliwa (w przypadku gdy $\sin \alpha_1 = 0 \vee \sin \alpha_2 = 0 \vee \sin \theta_2 = 0$), albo nie posiada w ogóle konfiguracji osobliwych (w przeciwnym przypadku). Ponieważ osobliwa kinematyka PPP nie jest kinematyką przestrzenną, stwierdzamy, że każda kinematyka przestrzenna PPP posiada liniową postać normalną podaną w Twierdzeniu 1.

3.2.2 Postacie normalne kinematyki typu PPR

Kinematyka PPR odpowiada manipulatorowi wyposażonemu w dwa przeguby translacyjne, po których następuje przegub rotacyjny. Zmiennymi ruchu manipulatora są $x_1 = d_1$, $x_2 = d_2$ i $x_3 = \theta_3$. Obliczając macierz Jacobiego kinematyki $T(x)$ otrzymujemy

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha_1 \sin \theta_1 & j_1 \cos \theta_1 + j_2 \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 \cos \theta_1 & j_1 \sin \theta_1 - j_2 \cos \theta_1 \\ 1 & \cos \alpha_1 & j_3 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

gdzie

$$\begin{aligned} j_1 &= -a_3 \cos \theta_2 s_3 - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_2 c_3, \\ j_2 &= a_3 \cos \alpha_1 \sin \theta_2 s_3 - a_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_2 c_3 + a_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 c_3, \\ j_3 &= a_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_2 c_3 - a_3 \sin \alpha_1 \sin \theta_2 s_3 + a_3 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 c_3. \end{aligned}$$

Wyrażenie na wyznacznik macierzy Jacobiego (3.12) można uprościć do postaci

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = -a_3 \sin \alpha_1 (\cos \theta_2 s_3 + \cos \alpha_2 \sin \theta_2 c_3). \quad (3.13)$$

Rozpatrywana kinematyka pozostaje przestrzenna pod warunkiem, że $a_3 \neq 0 \wedge \sin \alpha_1 \neq 0 \wedge (\cos \theta_2 \neq 0 \vee \cos \alpha_2 \neq 0)$. Dla kinematyk przestrzennych zbiór konfiguracji osobliwych

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \mid \cos \theta_2 \sin x_3 + \cos \alpha_2 \sin \theta_2 \cos x_3 = 0\}. \quad (3.14)$$

Gdy manipulator typu PPR znajdzie się w konfiguracji osobliwej ze zbioru (3.14), kierunek ruchu jego efektora powodowany ruchem przegubu rotacyjnego staje się równoległy do płaszczyzny zdefiniowanej przez osie przegubów translacyjnych. W szczególnych przypadkach, gdy $\alpha_2 = 0, \pi$, konfiguracja manipulatora jest osobliwa dla $\theta_2 \pm x_3 = 0, \pi$ (plus przy $\alpha_2 = 0$, minus przy $\alpha_2 = \pi$), co czyni a_3 równoległym do a_1 . Dla $\alpha_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ lub $\theta_2 = 0, \pi$, w konfiguracji osobliwej a_3 staje się równoległe do a_2 . I wreszcie, dla manipulatorów scharakteryzowanych przez $\theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$, w konfiguracji osobliwej a_3 jest prostopadłe do a_2 .

Proste obliczenia pozwalają na pokazanie następującej własności badanej kinematyki.

Twierdzenie 4 *Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu PPR każda konfiguracja osobliwa $x_0 \in S$ ma korząd równy 1.*

Po zróżniczkowaniu wyznacznika (3.13) w konfiguracji $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in S$ otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, 0, a_3 \sin \alpha_1 (\cos \alpha_2 \sin \theta_2 \sin x_{03} - \cos \theta_2 \cos x_{03})).$$

Ponieważ, zgodnie z równaniami (2.14), trzecia współrzędna wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$ może być wybrana jako równa 1, lewa strona nierówności (2.13) jest równa ostatniemu składnikowi obliczonej pochodnej. Na tej podstawie możemy stwierdzić, że rozpatrywana kinematyka ma w konfiguracjach osobliwych $x_0 \in S$ stopień różniczkowy równy 2, jeśli $a_3 \neq 0$ i $\sin \alpha_1 \neq 0$ i albo $\cos \theta_2 \neq 0$, albo $\cos \alpha_2 \neq 0$. Ponieważ dla $a_3 = 0$ lub $\sin \alpha_1 = 0$ oraz dla $\cos \theta_2 = 0$ i $\cos \alpha_2 = 0$ kinematyka PPR przestaje być przestrzenna, na podstawie Wniosku 2 otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 5 *Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu PPR. Wówczas, w pewnym otoczeniu dowolnej konfiguracji osobliwej $x_0 \in S$, rozpatrywana kinematyka jest równoważna kwadratowej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3).$$

3.2.3 Postacie normalne kinematyki typu PRP

Kinematyka PRP reprezentuje manipulator z pierwszym i ostatnim przegubem typu translacyjnego i środkowym przegubem typu rotacyjnego. Zmienne ruchu manipulatora są zdefiniowane jako $x_1 = d_1$, $x_2 = \theta_2$ i $x_3 = d_3$. Macierz Jacobiego kinematyki PRP

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 0 & j_1 \cos \theta_1 + j_2 \sin \theta_1 & j_4 \cos \theta_1 + j_5 \sin \theta_1 \\ 0 & j_1 \sin \theta_1 - j_2 \cos \theta_1 & j_4 \sin \theta_1 - j_5 \cos \theta_1 \\ 1 & j_3 & j_6 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

gdzie

$$\begin{aligned} j_1 &= -b_1 s_2 - b_2 c_2, \\ j_2 &= -b_1 \cos \alpha_1 c_2 + b_2 \cos \alpha_1 s_2, \\ j_3 &= b_1 \sin \alpha_1 c_2 - b_2 \sin \alpha_1 s_2, \\ j_4 &= \sin \alpha_2 s_2, \\ j_5 &= \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 c_2, \\ j_6 &= -\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 c_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ b_1 &= a_2 + a_3 \cos \theta_3, \\ b_2 &= a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 - x_3 \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

Wyrażenie na wyznacznik powyższej macierzy ma postać

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = (a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 - x_3 \sin \alpha_2)(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 c_2) + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 s_2(a_2 + a_3 \cos \theta_3), \quad (3.16)$$

co po odpowiednich podstawieniach z (3.15) może być zapisane jako

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = (b_1 s_2 + b_2 c_2) \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + b_2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2. \quad (3.17)$$

Na podstawie (3.17) stwierdzamy, że kinematyka PRP jest przestrzenna, jeżeli $(\cos \alpha_1 \neq 0 \vee \cos \alpha_2 \neq 0) \wedge (\sin \alpha_2 \neq 0 \vee (\sin \alpha_1 \neq 0 \wedge (a_2 \neq 0 \vee a_3 \neq 0) \wedge (\sin \theta_3 \neq 0 \vee a_2 \pm a_3 \neq 0)))$. Dla kinematyki z macierzą Jacobiego (3.15) zbiór konfiguracji osobliwych

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \mid \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 (b_1 s_2 + b_2 c_2) + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 b_2 = 0\}. \quad (3.18)$$

Dla konfiguracji osobliwych kinematyki PRP, albo kierunki ruchu efektora manipulatora powodowane ruchami jego przegubów translacyjnych są wzajemnie równoległe, albo kierunek ruchu efektora będący skutkiem obrotu przegubu rotacyjnego jest równoległy do płaszczyzny zdefiniowanej przez kierunki ruchu przegubów translacyjnych. Pierwszy z wymienionych warunków oznacza, że osie ruchu pierwszego i trzeciego przegubu manipulatora są do siebie równoległe. W szczególnym przypadku warunku drugiego, kiedy $\sin \alpha_2 = 0$ i $\sin \theta_3 = 0$, kinematyka staje się osobliwa, gdy a_2 (lub a_3) jest prostopadłe do osi pierwszego przegubu. Nietrudno udowodnić następujące

Twierdzenie 6 *Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu PRP konfiguracja osobliwa $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in S$, taka że $\sin(\alpha_1 \pm \alpha_2) = 0$, $a_2 + a_3 \cos \theta_3 = 0$, $\sin x_{02} = 0$ i $a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 - x_{03} \sin \alpha_2 = 0$, ma korząd 2. W przeciwnym przypadku x_0 ma korząd 1.*

Założmy, że x_0 ma korząd 1. Wówczas, w celu obliczenia stopnia różniczkowego kinematyki w konfiguracji $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$, po zróżniczkowaniu wyznacznika (3.16) otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 ((a_2 + a_3 \cos \theta_3) \cos x_{02} - (a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 + x_{03} \sin \alpha_2) \sin x_{02}), -\sin \alpha_2 (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos x_{02})).$$

Na podstawie równań (2.14) druga i trzecia współrzędna wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$ wynosi odpowiednio

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos x_{02}), \\ v_1^3 &= \cos \alpha_1 ((a_2 + a_3 \cos \theta_3) \cos x_{02} - (a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 - x_{03} \sin \alpha_2) \sin x_{02}). \end{aligned}$$

Na podstawie warunku na korząd można wywnioskować, że w konfiguracjach osobliwych korzędu 1 przynajmniej jedno z wyrażeń na v_1^2 , v_1^3 jest niezerowe. Wykorzystując tę obserwację otrzymujemy równość

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) v_1 = ((a_2 + a_3 \cos \theta_3) \cos x_{02} - (a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 + x_{03} \sin \alpha_2) \sin x_{02}) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (3.19)$$

Ostatecznie, korzystając z Wniosku 2, na podstawie (3.19), możemy stwierdzić co następuje.

Twierdzenie 7 *Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu PRP z $\sin(\alpha_1 \pm \alpha_2) \neq 0$ i taką, że jeżeli $\sin \alpha_2 \neq 0$, wówczas $x_{03} \neq \cot \alpha_2 (a_3 \sin \theta_3 - \frac{b_1 \sin \alpha_1}{\sqrt{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}})$. Wtedy, w pewnym otoczeniu konfiguracji osobliwej $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in S$ korzędu 1, rozpatrywana kinematyka jest równoważna kwadratowej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3).$$

Na podstawie powyższego twierdzenia można przypuszczać, że kinematyka PRP może przyjmować „niekwadratowe” konfiguracje osobliwe $x_0 \in S$ charakteryzujące się zależnością $x_{03} = \cot \alpha_2 (a_3 \sin \theta_3 - \frac{b_1 \sin \alpha_1}{\sqrt{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}})$. Wyznaczenie odpowiedniej postaci normalnej wymagać będzie osobnych badań.

3.2.4 Postacie normalne kinematyki typu PRR

Kinematyka PRR charakteryzuje manipulatory z pierwszym przegubem typu translacyjnego, po którym następują dwa przeguby rotacyjne. Zmiennymi ruchu są w tym przypadku $x_1 = d_1$, $x_2 = \theta_2$ i $x_3 = \theta_3$. Dla kinematyki PRR macierz Jacobiego

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 0 & j_1 \cos \theta_1 + j_2 \sin \theta_1 & j_4 \cos \theta_1 + j_5 \sin \theta_1 \\ 0 & j_1 \sin \theta_1 - j_2 \cos \theta_1 & j_4 \sin \theta_1 - j_5 \cos \theta_1 \\ 1 & j_3 & j_6 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

gdzie

$$\begin{aligned} j_1 &= -b_1 s_2 - b_2 c_2, \\ j_2 &= -b_1 \cos \alpha_1 c_2 + b_2 \cos \alpha_1 s_2, \\ j_3 &= b_1 \sin \alpha_1 c_2 - b_2 \sin \alpha_1 s_2, \\ j_4 &= -a_3 \cos \alpha_2 s_2 c_3 - a_3 c_2 s_3, \\ j_5 &= -a_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 c_2 c_3 + a_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 c_3 + a_3 \cos \alpha_1 s_2 s_3, \\ j_6 &= +a_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 c_2 c_3 + a_3 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 c_3 - a_3 \sin \alpha_1 s_2 s_3, \\ b_1 &= a_2 + a_3 c_3, \\ b_2 &= a_3 \cos \alpha_2 s_3 - d_3 \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy Jacobiego wynosi

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = a_3 (\cos \alpha_1 (d_3 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 c_3 + a_2 s_3 + a_3 \sin^2 \alpha_2 s_3 c_3) + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 c_3 ((a_2 + a_3 c_3) s_2 + (a_3 \cos \alpha_2 s_3 - d_3 \sin \alpha_2) c_2)). \quad (3.21)$$

Dla zachowania przestrzenności kinematyki konieczne jest, aby $a_3 \neq 0 \wedge (\sin \alpha_2 \neq 0 \vee \cos \alpha_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0)$. Poniżej rozpatrzmy dwa szczególne przypadki kinematyki PRR.

Przypadek $\alpha_1 = 0$. W tym przypadku osie dwóch pierwszych przegubów manipulatora są równoległe. Wyznacznik (3.21) upraszcza się do postaci

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = a_3 (a_2 s_3 + a_3 \sin^2 \alpha_2 s_3 c_3 + d_3 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 c_3). \quad (3.22)$$

Zbiór konfiguracji osobliwych

$$S = \{x \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^2 \mid d_3 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \cos x_3 + a_2 \sin x_3 + a_3 \sin^2 \alpha_2 \sin x_3 \cos x_3 = 0\}. \quad (3.23)$$

Dla przedstawienia interpretacji geometrycznej konfiguracji osobliwych (3.23) skoncentrujemy uwagę na dwóch przypadkach szczególnych. Gdy kinematyka spełnia warunek $\sin \alpha_2 = 0$, w konfiguracji osobliwej a_2 staje się równoległe do a_3 . Dla kinematyki spełniającej warunek $\cos \alpha_2 = 0$, wejście w konfigurację osobliwą oznacza, że albo a_2 staje się równoległe do a_3 , albo efektor manipulatora znajduje się na płaszczyźnie yOz układu współrzędnych związanego z drugim przegubem manipulatora (co jest równoważne temu, że linia prostopadła do osi drugiego przegubu przechodząca przez efektor manipulatora, jest prostopadła do a_2).

Analiza rzędu macierzy Jacobiego (3.20) prowadzi do następującego stwierdzenia.

Twierdzenie 8 *Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu PRR, takiej że $\alpha_1 = 0$ konfiguracja osobliwa $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in S$ ma korząd 1 wtedy i tylko wtedy, gdy albo $d_3 \neq 0$ albo $\cos \alpha_2 \neq 0$ albo $a_2 \pm a_3 \neq 0$ albo $\sin x_{03} \neq 0$.*

Wyznaczenie stopnia różniczkowego badanej kinematyki w otoczeniu konfiguracji osobliwej $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ korzędu 1 rozpoczniemy, jak i w poprzednich przypadkach, od zróżniczkowania wyznacznika macierzy Jacobiego. Dla (3.22) otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, 0, a_3 \cos \alpha_1 (a_2 \cos x_{03} + a_3 \sin^2 \alpha_2 \cos 2x_{03} - d_3 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \sin x_{03})).$$

Ponieważ w tym wypadku równania (2.14) nie nakładają żadnych ograniczeń na trzecią współzrędną wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$, nadamy jej arbitralnie wartość 1. Powoduje to, że iloczyn $\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) v_1$ jest równy ostatniej składowej policzonej pochodnej.

Powyższa obserwacja prowadzi nas do następującego wniosku.

Twierdzenie 9 *Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu PRR spełniającą warunek $\alpha_1 = 0$. Wówczas, w pewnym otoczeniu konfiguracji osobliwej $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in S$ korzędu 1, kinematyka jest równoważna kwadratowej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3)$$

pod warunkiem, że jeżeli $\sin \alpha_2 \neq 0$, to wówczas $\sin x_{03} \neq -\frac{\sqrt[3]{a_2^2 d_3 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}}{a_3 \sin \alpha_2^2}$.

Przypadek $\alpha_2 = 0$. Warunek $\alpha_2 = 0$ wymaga, by osie dwóch ostatnich przegubów manipulatora były do siebie równoległe. Wyznacznik (3.21) upraszcza się wówczas do postaci

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = a_2 a_3 \cos \alpha_1 s_3. \quad (3.24)$$

Jak łatwo zauważyć, konfiguracje osobliwe manipulatora należą w tym przypadku do zbioru

$$S = \{x \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^2 \mid \sin x_3 = 0\}, \quad (3.25)$$

a konfiguracja osobliwa zostaje osiągnięta, gdy a_2 jest równoległe do a_3 .

Można pokazać, że badana kinematyka ma następującą własność.

Twierdzenie 10 Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu PRR, takiej że $\alpha_2 = 0$, każda konfiguracja osobliwa $x_0 \in S$ ma korząd 1.

Wyznacznik (3.24) macierzy Jacobiego badanej kinematyki po zróżniczkowaniu daje

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, 0, a_2 a_3 \cos \alpha_1 \cos x_{03}).$$

Tak jak poprzednio równania (2.14) pozwalają na nadanie trzeciej współrzędnej wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$ wartości 1, co czyni lewą stronę nierówności (2.13) równą $a_2 a_3 \cos \alpha_1 \cos x_{03}$.

Bezpośrednim następstwem powyższego faktu i Wniosku 2 jest następujące

Twierdzenie 11 Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu PRR spełniającą warunek $\alpha_2 = 0$. Wówczas, w pewnym otoczeniu dowolnej konfiguracji osobliwej $x_0 \in S$, kinematyka jest równoważna kwadratowej postaci normalnej

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3).$$

3.2.5 Postacie normalne kinematyki typu RPP

Kinematyka RPP jest realizowana przez manipulator wyposażony w przegub rotacyjny poprzedzający dwa przeguby translacyjne. Zmiennymi ruchu w tym przypadku są $x_1 = \theta_1$, $x_2 = d_2$ i $x_3 = d_3$. Przykładem manipulatora przemysłowego posiadającą taką strukturę są roboty GMF M-100 i RNUR TH8. Macierz Jacobiego kinematyki RPP

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} b_1 c_1 + b_2 s_1 & + \sin \alpha_1 s_1 & b_3 c_1 + b_4 s_1 \\ b_1 s_1 - b_2 c_1 & - \sin \alpha_1 c_1 & b_3 s_1 - b_4 c_1 \\ 0 & \cos \alpha_1 & b_5 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_1 &= \sin \alpha_1 (x_2 + x_3 \cos \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_2 \sin \theta_3) + \\ &\quad + \cos \alpha_1 (x_3 \sin \alpha_2 \cos \theta_2 - a_2 \sin \theta_2 - a_3 \cos \alpha_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - a_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3), \\ b_2 &= -x_3 \sin \alpha_2 \sin \theta_2 - a_1 - a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - a_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3, \\ b_3 &= \sin \alpha_2 \sin \theta_2, \\ b_4 &= \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2, \\ b_5 &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy (3.26) jest równy

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2 (x_2 + x_3 \cos \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_2 \sin \theta_3) + \\ + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 (x_3 \sin \alpha_2 + a_1 \sin \theta_2 - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3). \quad (3.27)$$

Bliższa analiza powyższego wyznacznika pozwala stwierdzić, że dla $\sin \alpha_2 = 0 \vee \cos \alpha_1 = 0 \wedge \cos \theta_2 = 0$, wszystkie konfiguracje kinematyki RPP są osobliwe, zatem kinematyka przestaje być przestrzenna. Przy założeniu, że mamy do czynienia z kinematyką przestrzenną, zbiór konfiguracji osobliwych

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \mid \sin \alpha_1 \cos \theta_2 (x_2 + x_3 \cos \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_2 \sin \theta_3) + \\ + \cos \alpha_1 (x_3 \sin \alpha_2 + a_1 \sin \theta_2 - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3) = 0\}. \quad (3.28)$$

Dla konfiguracji osobliwych określonych wzorem (3.28) kierunek ruchu efektora manipulatora powodowany ruchem przegubu rotacyjnego jest równoległy do płaszczyzny zdefiniowanej przez osie przegubów translacyjnych. W szczególności, kinematyka, dla której $\sin \alpha_1 = 0$, przyjmuje konfigurację osobliwą, gdy linia prostopadła do osi pierwszego przegubu, przechodząca przez efektor manipulatora, jest równoległa do a_2 . Kinematyka, dla której $\cos \alpha_1 = 0$, przyjmuje konfigurację osobliwą, gdy linia prostopadła do osi pierwszego przegubu, przechodząca przez efektor manipulatora, jest równoległa do a_1 . Dla kinematyki spełniającej warunek $\cos \theta_2 = 0$, konfiguracja osobliwa oznacza, że linia zdefiniowana jak poprzednio jest prostopadła do a_1 .

Sprawdzenie warunków dotyczących rzędu macierzy Jacobiego w konfiguracjach osobliwych $x_0 \in S$ prowadzi do następującego wniosku.

Twierdzenie 12 *Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu RPP każda konfiguracja osobliwa $x_0 \in S$ ma rząd równy 1.*

Postępując analogicznie do poprzednich przypadków, po zróżniczkowaniu wyznacznika (3.27), otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, b_6, b_7),$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_6 &= \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2, \\ b_7 &= \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \cos \theta_2 + \cos \alpha_1 \sin^2 \alpha_2. \end{aligned}$$

Na podstawie równań (2.14) wyliczamy drugą i trzecią współrzędną wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ v_1^3 &= \cos \alpha_1. \end{aligned}$$

W efekcie, w konfiguracji $x_0 \in S$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) v_1 = \sin^2 \alpha_2 (1 - \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \theta_2).$$

Na podstawie Wniosku 2, powyższe obliczenia prowadzą do następującego stwierdzenia.

Twierdzenie 13 *Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu RPP. Wówczas, w pewnym otoczeniu dowolnej konfiguracji osobliwej $x_0 \in S$, rozpatrywana kinematyka jest równoważna kwadratowej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3).$$

3.2.6 Postacie normalne kinematyki typu RPR

Manipulator typu RPR posiada dwa przeguby rotacyjne rozdzielone przegubem translacyjnym. W tym wypadku zmiennymi ruchu są $x_1 = \theta_1$, $x_2 = d_2$ i $x_3 = \theta_3$. Poniżej rozpatrzmy dwa szczególne przypadki kinematyki typu RPR.

Przypadek $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. Przypadek ten dotyczy manipulatora, w którym oś przegubu translacyjnego jest prostopadła do osi pierwszego przegubu rotacyjnego. Macierz Jacobiego manipulatora tego typu

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} b_1 c_1 + b_2 s_1 & +s_1 & b_3 c_1 + b_4 s_1 \\ b_1 s_1 - b_2 c_1 & -c_1 & b_3 s_1 - b_4 c_1 \\ 0 & 0 & b_5 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_1 &= a_3 \sin \alpha_2 s_3 + d_3 \cos \alpha_2 + x_2, \\ b_2 &= -d_3 \sin \alpha_2 \sin \theta_2 - a_1 - a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_2 s_3 - a_3 \cos \theta_2 c_3, \\ b_3 &= -a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_2 c_3 - a_3 \cos \theta_2 s_3, \\ b_4 &= a_3 \sin \alpha_2 c_3, \\ b_5 &= a_3 \cos \alpha_2 \cos \theta_2 c_3 - a_3 \sin \theta_2 s_3. \end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy (3.29)

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = -a_3 (\cos \alpha_2 \cos \theta_2 c_3 - \sin \theta_2 s_3) (a_3 \sin \alpha_2 s_3 + d_3 \cos \alpha_2 + x_2). \quad (3.30)$$

Z postaci wyrażenia (3.30) wynika, że dla kinematyk przestrzennych musi być spełniony warunek $a_3 \neq 0 \wedge (\cos \alpha_2 \neq 0 \vee \sin \theta_2 \neq 0)$. Wówczas zbiór konfiguracji osobliwych składa się z dwóch podzbiorów,

$$S = OS1 \cup OS2, \quad (3.31)$$

gdzie

$$OS1 = \{x \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^2 \mid \cos \alpha_2 \cos \theta_2 \cos x_3 - \sin \theta_2 \sin x_3 = 0\}, \quad (3.32)$$

$$OS2 = \{x \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^2 \mid a_3 \sin \alpha_2 \sin x_3 + d_3 \cos \alpha_2 + x_2 = 0\}. \quad (3.33)$$

Przyjęcie przez manipulator konfiguracji osobliwej $x_0 \in OS1$ oznacza, że efektor manipulatora osiąga swoją najwyższą lub najniższą pozycję ze względu na oś z układu współrzędnych związanego z pierwszym przegubem, podczas gdy w konfiguracji $x_0 \in OS2$ linia prostopadła do osi ruchu pierwszego przegubu, przechodząca przez efektor manipulatora, staje się równoległa do a_1 .

Dla rozpatrywanej kinematyki można wyprowadzić następujące warunki określające korząd jej macierzy Jacobiego.

Twierdzenie 14 *Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu RPR, takiej że $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, konfiguracja osobliwa $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in S$ jest korzędu 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \notin OS2$ lub $\cos \alpha_2 \neq 0$ i $\sin x_{03} \neq 0$.*

Należy zauważyć, że jeśli $\cos \alpha_2 = 0$, wówczas oś ruchu przegubu translacyjnego jest prostopadła do osi ruchu ostatniego przegubu rotacyjnego co, dla pewnych konfiguracji, powoduje, że poruszanie dowolnym z przegubów manipulatora wywołuje ruch efektora w jednym i tym samym kierunku. Poniższa analiza konfiguracji osobliwych $x_0 \in S$ zostanie przeprowadzona przy założeniu, że warunki podane w Twierdzeniu 14 są spełnione.

Pochodna wyznacznika (3.30) dla $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS1$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, 0, -a_3(a_3 \sin \alpha_2 \sin x_{03} + d_3 \cos \alpha_2 + x_{02})(\cos \alpha_2 \cos \theta_2 \sin x_{03} + \sin \theta_2 \cos x_{03})).$$

Co więcej, przy braku ograniczeń nakładanych przez równania (2.14) na postać trzeciej współrzędnej wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$, łatwo wykazać, że lewa strona nierówności (2.13) jest niezerowa, jeśli $x_0 \in OS1 \setminus OS2$. Tym samym stopień różniczkowy kinematyki jest równy 2.

Postępując analogicznie, obliczamy pochodną wyznacznika (3.30) dla konfiguracji osobliwej $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS2$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, a_3(\cos \alpha_2 \cos \theta_2 \cos x_{03} - \sin \theta_2 \sin x_{03}), a_3^2 \sin \alpha_2 \cos x_{03}(\cos \alpha_2 \cos \theta_2 \cos x_{03} - \sin \theta_2 \sin x_{03})),$$

zauważamy, że trzecia współrzędna wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$ znika i dochodzimy do wniosku, że lewa strona nierówności (2.13) jest niezerowa jeśli $x_0 \in OS2 \setminus OS1$.

Powyższe rozważania prowadzą do następującego stwierdzenia.

Twierdzenie 15 *Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu RPR spełniającą warunek $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. Wówczas, w pewnym otoczeniu konfiguracji osobliwej $x_0 \in S \setminus (OS1 \cap OS2)$ korzędu 1, rozpatrywana kinematyka jest równoważna kwadratowej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3).$$

Należy zaznaczyć, że w rozpatrywanym przypadku istnieją konfiguracje korzędu 1, dla których kinematyka nie jest równoważna kwadratowej postaci normalnej.

Przypadek $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Manipulator spełniający warunek $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ma przegub translacyjny, którego oś jest prostopadła do osi trzeciego przegubu rotacyjnego. W tym wypadku macierz Jacobiego manipulatora przyjmuje postać

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} b_1 c_1 + b_2 s_1 & + \sin \alpha_1 s_1 & b_3 c_1 + b_4 s_1 \\ b_1 s_1 - b_2 c_1 & - \sin \alpha_1 c_1 & b_3 s_1 - b_4 c_1 \\ 0 & \cos \alpha_1 & b_5 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_1 &= \sin \alpha_1(x_2 + a_3 s_3) + \cos \alpha_1(d_3 \cos \theta_2 - a_2 \sin \theta_2 - a_3 \sin \theta_2 c_3), \\ b_2 &= -d_3 \sin \theta_2 - a_2 \cos \theta_2 - a_3 \cos \theta_2 c_3 - a_1, \\ b_3 &= -a_3 \cos \theta_2 s_3, \\ b_4 &= a_3 \sin \alpha_1 c_3 + a_3 \cos \alpha_1 \sin \theta_2 s_3, \\ b_5 &= a_3 \cos \alpha_1 c_3 - a_3 \sin \alpha_1 \sin \theta_2 s_3. \end{aligned}$$

W celu znalezienia zbioru konfiguracji osobliwych rozpatrywanego manipulatora, musimy wyliczyć wyznacznik jego macierzy Jacobiego

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = a_3 s_3(\sin \alpha_1 \sin \theta_2(x_2 + a_3 s_3) - \cos \alpha_1(a_1 \cos \theta_2 + a_2 + a_3 c_3)). \quad (3.35)$$

Dla manipulatorów przestrzennych konieczne jest, aby $a_3 \neq 0 \wedge (\sin \theta_2 \neq 0 \vee \cos \alpha_1 \neq 0)$. Wówczas, w skład zbioru konfiguracji osobliwych wchodzi dwa podzbiory

$$S = OS1 \cup OS2, \quad (3.36)$$

dane przez

$$OS1 = \{x \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^2 \mid \sin x_3 = 0\}, \quad (3.37)$$

$$OS2 = \{x \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^2 \mid \sin \alpha_1 \sin \theta_2 (x_2 + a_3 \sin x_3) + \\ - \cos \alpha_1 (a_1 \cos \theta_2 + a_2 + a_3 \cos x_3) = 0\}. \quad (3.38)$$

Rysunki 3.1 a)–c) podają geometryczną interpretację konfiguracji osobliwych omawianego manipulatora. Jak widać, dla kinematyki znajdującej się w konfiguracji osobliwej ze zbioru $OS1$, a_3 jest równoległe do a_2 . Równocześnie, gdy kinematyka ta osiąga konfigurację ze zbioru $OS2$, linia przechodząca przez efektor manipulatora i oś pierwszego przegubu, jest prostopadła do osi drugiego przegubu, jest równoległa do osi ruchu przegubu trzeciego.

Poniższe stwierdzenie charakteryzuje konfiguracje osobliwe kinematyki korzędu 1.

Twierdzenie 16 *Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu RPR, takiej że $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ każda konfiguracja osobliwa $x_0 \notin OS1$ jest korzędu 1. Konfiguracja osobliwa $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS1$ jest korzędu 1, jeżeli $\cos \alpha_1 \neq 0$ i $d_3 \sin \theta_2 + (a_2 \pm a_3) \cos \theta_2 + a_1 \neq 0$ lub $\sin \alpha_1 x_{02} + \cos \alpha_1 (d_3 \cos \theta_2 + (a_2 \pm a_3) \sin \theta_2) \neq 0$.*

Wyliczmy stopień różniczkowy konfiguracji $x_0 \in S$ korzędu 1. Dla $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS1$ pochodna wyznacznika macierzy Jacobiego ma postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, 0, a_3 \cos x_{03} (\sin \alpha_1 \sin \theta_2 (x_{02} + a_3 \sin x_{03}) + \\ - \cos \alpha_1 (a_1 \cos \theta_2 + a_2 + a_3 \cos x_{03}))).$$

Po przeanalizowaniu równań (2.14) dochodzimy do wniosku, że trzecia współrzędna wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$ może zostać wybrana dowolnie i w związku z tym lewa strona nierówności (2.13) sprowadza się do

$$a_3 \cos x_{03} (\sin \alpha_1 \sin \theta_2 (x_{02} + a_3 \sin x_{03}) - \cos \alpha_1 (a_1 \cos \theta_2 + a_2 + a_3 \cos x_{03})),$$

co dla kinematyk przestrzennych równa się 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in OS2$.

Dla $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS2$ pochodna wyznacznika macierzy Jacobiego

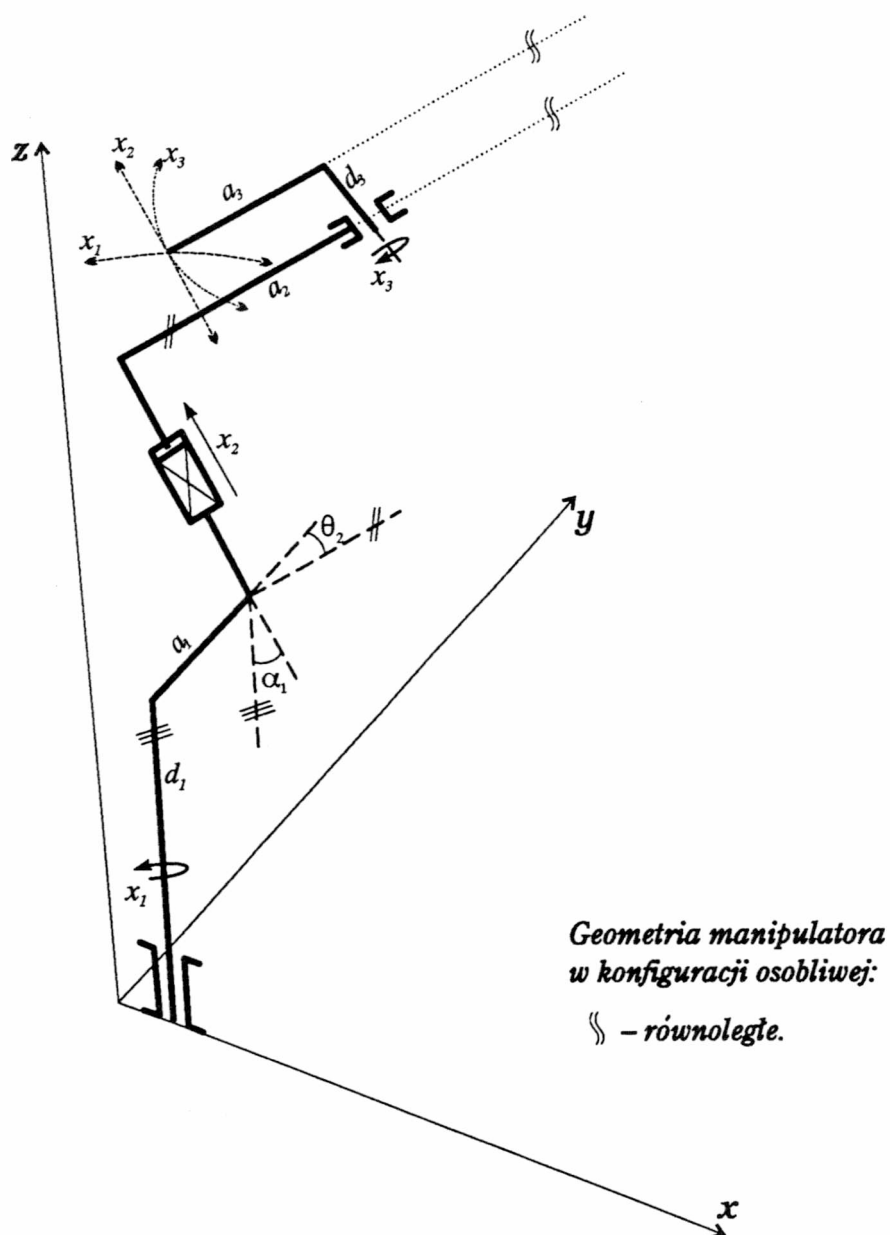
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = \\ (0, a_3 \sin \alpha_1 \sin \theta_2 \sin x_{03}, a_3^2 \sin x_{03} (\cos \alpha_1 \sin x_{03} + \sin \alpha_1 \sin \theta_2 \cos x_{03})).$$

Po rozwiązaniu układu równań (2.14) dostajemy warunek na współrzędne wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$ postaci

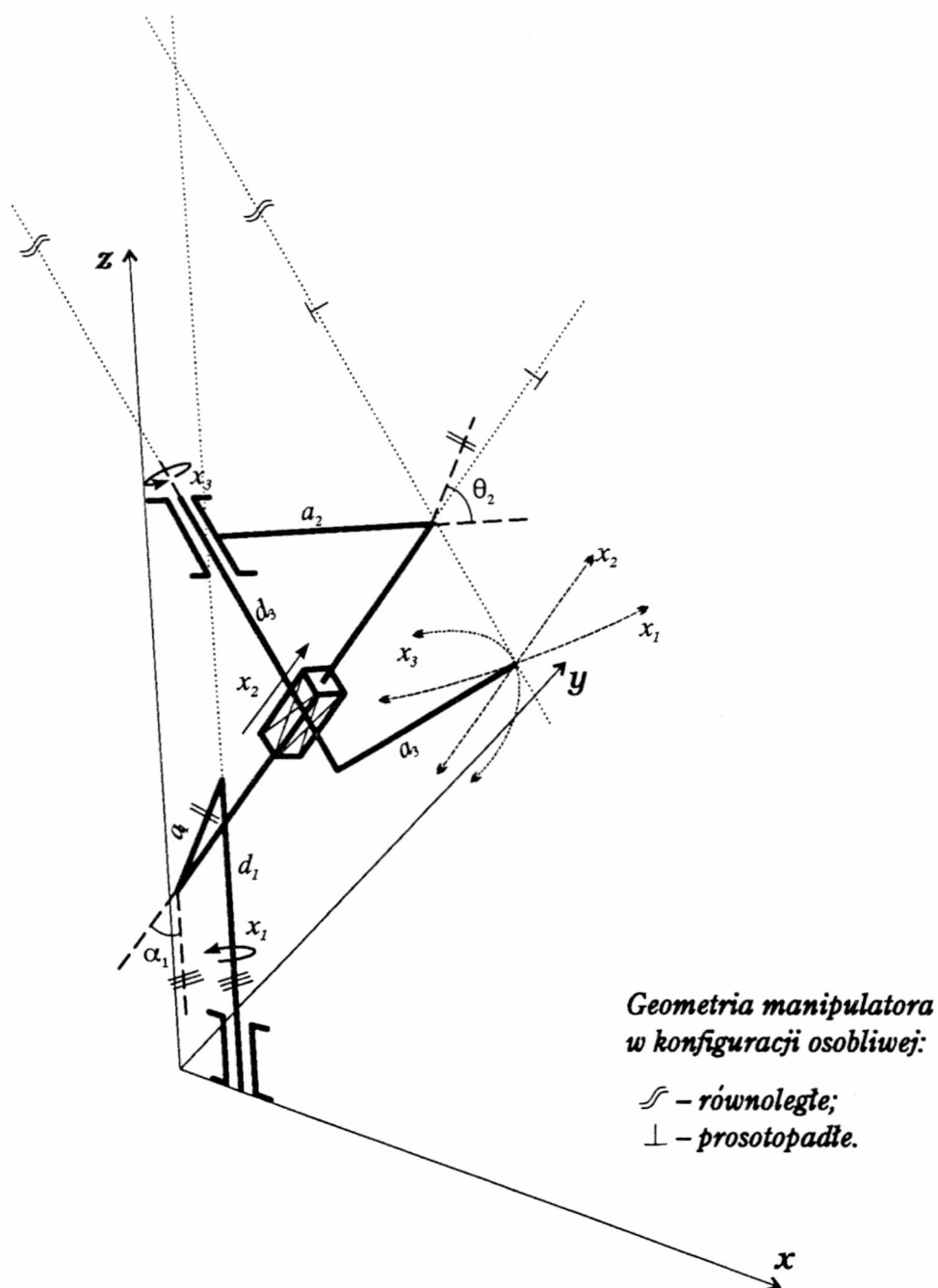
$$\cos \alpha_1 v_1^2 = a_3 (\cos \alpha_1 \cos x_{03} - \sin \alpha_1 \sin \theta_2 \sin x_{03}) v_1^3.$$

W rezultacie, lewa strona nierówności (2.13) jest równa

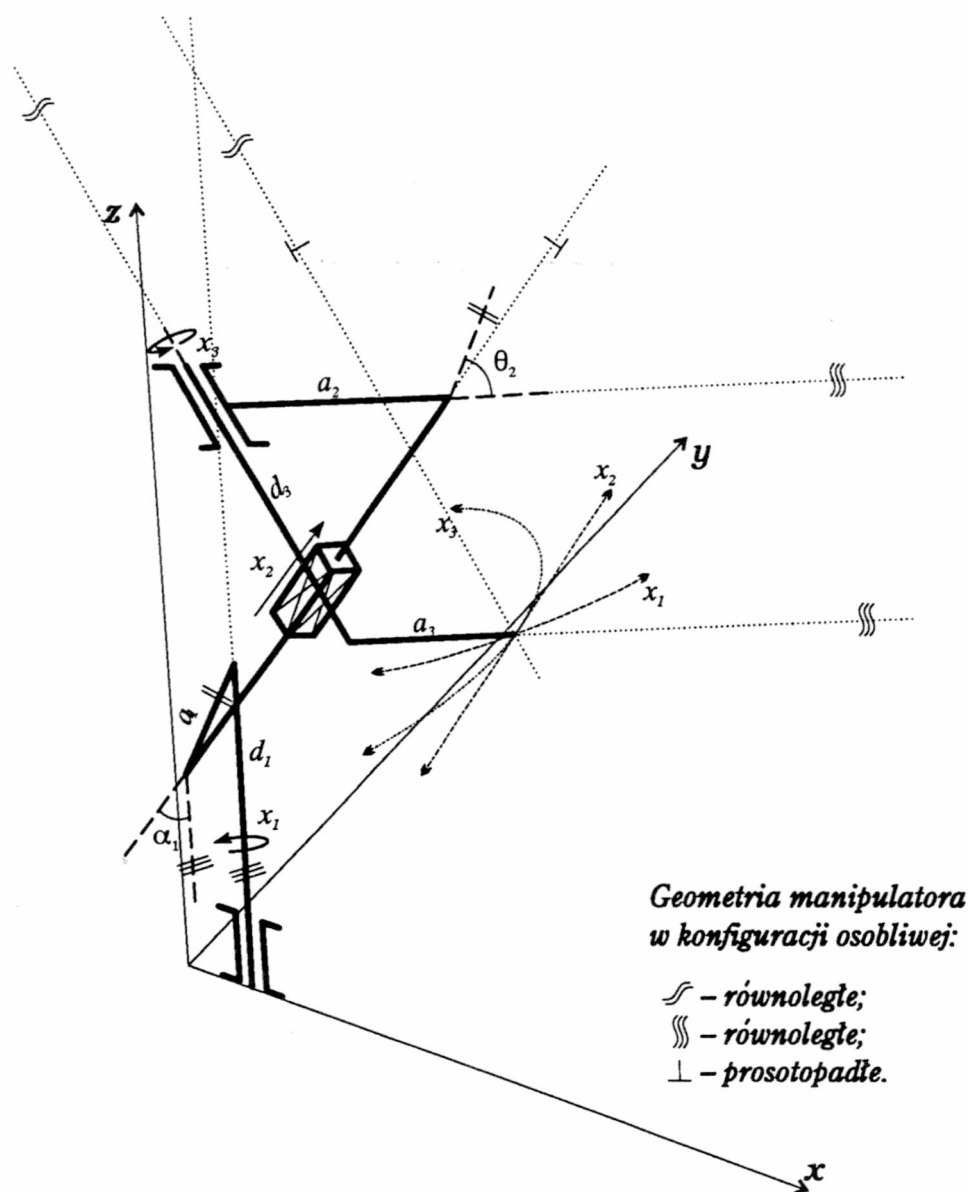
$$\begin{aligned} a_3^2 \sin x_{03}^2 \frac{\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \theta_2}{\cos \alpha_1} & \quad \text{dla} \quad \cos \alpha_1 \neq 0, \\ a_3 \sin \alpha_1 \sin \theta_2 \sin x_{03} & \quad \text{dla} \quad \cos \alpha_1 = 0. \end{aligned}$$



Rysunek 3.1: a) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS1$ manipulatora typu RPR przy $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.



Rysunek 3.1: b) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS2$ manipulatora typu RPR przy $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.



Rysunek 3.1: c) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS1 \cap OS2$ manipulatora typu RPR przy $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

Nietrudno zauważyć, że przy założeniu o przestrzenności kinematyki, powyższe wyrażenie równa się 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in OS1$.

Jak wynika z przedstawionych rozważań, jedyne konfiguracje osobliwe dla których stopień różniczkowy nie jest równy 2 leżą na przecięciu zbiorów $OS1 \cap OS2$. Dla tych konfiguracji lewa strona nierówności (2.15) przyjmuje wartość 0. Równocześnie, lewa strona nierówności (2.17)

$$3a_3^2 \frac{\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \theta_2}{\cos \alpha_1},$$

jest dobrze określona i różna od zera dla kinematyk przestrzennych pod warunkiem, że $\cos \alpha_1 \neq 0$.

Ostatecznie, analiza przypadku $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ prowadzi do wniosku sformułowanego poniżej.

Twierdzenie 17 *Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu RPR spełniającą warunek $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Wówczas, w pewnym otoczeniu dowolnej konfiguracji osobliwej rzędu 1, rozpatrywana kinematyka jest równoważna jednej z poniższych postaci normalnych:*

- dla $x_0 \in S \setminus (OS1 \cap OS2)$ kwadratowej postaci normalnej

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3);$$

- dla $x_0 \in OS1 \cap OS2$, przy $\cos \alpha_1 \neq 0$, wielomianowej postaci normalnej rzędu 4-ego ze względu na x_1

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^4 + u_1(\bar{x})x_1^2 + u_2(\bar{x})x_1, x_2, x_3)$$

z funkcjami u_1, u_2 zależnymi od $\bar{x} = (x_2, x_3)$, znikającymi dla $\bar{x} = 0$.

3.2.7 Postacie normalne kinematyki typu RRP

Kinematyka RRP odpowiada manipulatorowi z dwoma przegubami rotacyjnymi, po których następuje przegub translacyjny. Zmienne ruchu są zdefiniowane jako $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \theta_2$ i $x_3 = \theta_3$. Poniżej rozpatrzmy dwa szczególne przypadki kinematyki RRP, ważne z praktycznego punktu widzenia.

Przypadek $a_1 = 0$. Osie pierwszego i drugiego przegubu manipulatora przecinają się. Przykładami manipulatorów spełniających ten warunek są Stanford Arm, Unimation *Unimate 1000, 2000*,... i robot POLAR 6000. Dla takich manipulatorów macierz Jacobiego

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} b_1 c_1 + b_2 s_1 & b_3 c_1 + b_4 s_1 & b_5 c_1 + b_6 s_1 \\ b_1 s_1 - b_2 c_1 & b_3 s_1 - b_4 c_1 & b_5 s_1 - b_6 c_1 \\ 0 & b_7 & b_8 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_1 &= \sin \alpha_1 (+d_2 + a_3 \sin \alpha_2 \sin \theta_3 + x_3 \cos \alpha_2) + \\ &+ \cos \alpha_1 (-a_2 s_2 - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 c_2 - a_3 \cos \theta_3 s_2 + x_3 \sin \alpha_2 c_2), \\ b_2 &= -a_2 c_2 + a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 s_2 - a_3 \cos \theta_3 c_2 - x_3 \sin \alpha_2 s_2, \\ b_3 &= -a_2 s_2 - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 c_2 - a_3 \cos \theta_3 s_2 + x_3 \sin \alpha_2 c_2, \\ b_4 &= \cos \alpha_1 (-a_2 c_2 + a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 s_2 - a_3 \cos \theta_3 c_2 - x_3 \sin \alpha_2 s_2), \\ b_5 &= \sin \alpha_2 s_2, \\ b_6 &= \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 c_2, \\ b_7 &= \sin \alpha_1 (+a_2 c_2 - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 s_2 + a_3 \cos \theta_3 c_2 + x_3 \sin \alpha_2 s_2), \\ b_8 &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 c_2. \end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy występującej w powyższym równaniu można przedstawić w postaci

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = \sin \alpha_1 (d_2 \cos \alpha_2 + x_3) (a_2 c_2 + a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 s_2 + a_3 \cos \theta_3 c_2 + x_3 \sin \alpha_2 s_2). \quad (3.40)$$

W rezultacie, zbiór konfiguracji osobliwych dla kinematyk przestrzennych spełniających warunek $\sin \alpha_1 \neq 0 \wedge (\sin \alpha_2 \neq 0 \vee (a_2 \neq 0 \vee a_3 \neq 0) \wedge (\sin \theta_3 \neq 0 \vee a_2 \pm a_3 \neq 0))$ składa się z dwóch podzbiorów $OS1$, $OS2$

$$S = OS1 \cup OS2, \quad (3.41)$$

zdefiniowanych jako

$$OS1 = \{x \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^2 \mid d_2 \cos \alpha_2 + x_3 = 0\}, \quad (3.42)$$

$$OS2 = \{x \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^2 \mid a_2 \cos x_2 - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 \sin x_2 + a_3 \cos \theta_3 \cos x_2 + x_3 \sin \alpha_2 \sin x_2 = 0\}. \quad (3.43)$$

Dla kinematyki przyjmującej konfiguracje ze zbioru $OS1$, linia łącząca efektor manipulatora z jego drugim przegubem jest prostopadła do osi przegubu trzeciego. Gdy kinematyka znajduje się w konfiguracji ze zbioru $OS2$, linia prostopadła do osi pierwszego przegubu, przechodząca przez efektor leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez osie pierwszego i drugiego przegubu.

Przy zastosowaniu obliczeń symbolicznych można pokazać następującą własność rozpatrywanej kinematyki.

Twierdzenie 18 *Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu RRP, takiej że $a_1 = 0$, konfiguracja osobliwa $x_0 \in S$ jest korzędu 1, jeżeli $x_0 \notin OS2$ lub $\cos \alpha_2 \neq 0$ lub $a_2 \neq -a_3 \cos \theta_3$.*

W celu określenia stopnia różniczkowego kinematyki w konfiguracji osobliwej $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS1$ korzędu 1, zróżniczkujemy wyznacznik (3.40)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, 0, \sin \alpha_1 (a_2 \cos x_{02} - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 \sin x_{02} + a_3 \cos \theta_3 \cos x_{02} + x_{03} \sin \alpha_2 \sin x_{02})).$$

Następnie, ponieważ równania (2.14) nie wnoszą ograniczeń na postać trzeciej współrzędnej wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$, możemy przyjąć $v_1^3 = 1$. Po tym podstawieniu, lewa strona nierówności (2.13) sprowadza się do wyrażenia

$$\sin \alpha_1 (a_2 \cos x_{02} - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 \sin x_{02} + a_3 \cos \theta_3 \cos x_{02} + x_{03} \sin \alpha_2 \sin x_{02}),$$

które dla kinematyk przestrzennych równa się 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in OS2$.

Podobnie, dla $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS2$, pochodna wyznacznika (3.40) przybiera postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, \sin \alpha_1 (d_2 \cos \alpha_2 + x_{03}) (-a_2 \sin x_{02} - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 \cos x_{02} - a_3 \cos \theta_3 \sin x_{02} + x_{03} \sin \alpha_2 \cos x_{02}), \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin x_{02} (d_2 \cos \alpha_2 + x_{03})).$$

Z (2.14) otrzymujemy $v_1^3 = 0$, zatem lewa strona nierówności (2.13) jest równa drugiej składowej wyliczonej pochodnej, która przyjmuje wartość 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in OS1$.

Powyższe rozważania prowadzą bezpośrednio do następującego stwierdzenia.

Twierdzenie 19 *Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu RRP spełniającą warunek $a_1 = 0$. Wówczas, w pewnym otoczeniu konfiguracji osobliwej $x_0 \in S \setminus (OS1 \cap OS2)$ korzędu 1, rozpatrywana kinematyka jest równoważna kwadratowej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3).$$

Należy zaznaczyć, że i w tym wypadku istnieją konfiguracje osobliwe ($x_0 \in OS1 \cap OS2$) o „niekwadratowej” postaci normalnej.

Przypadek $\alpha_1 = 0$. W manipulatorze spełniającym ten warunek osie dwóch pierwszych przegubów są do siebie równoległe. Robot montażowy *Adept* wraz z innymi manipulatorami typu SCARA stanowi przykład manipulatora przemysłowego tego rodzaju. Dla takiego manipulatora macierz Jacobiego ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} b_1 c_1 + b_2 s_1 & b_1 c_1 + b_3 s_1 & b_4 c_1 + b_5 s_1 \\ b_1 s_1 - b_2 c_1 & b_1 s_1 - b_3 c_1 & b_4 s_1 - b_5 c_1 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_1 &= c_2(x_3 \sin \alpha_2 - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3) - s_2(a_2 + a_3 \cos \theta_3), \\ b_2 &= -s_2(x_3 \sin \alpha_2 - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3) - c_2(a_2 + a_3 \cos \theta_3) - a_1, \\ b_3 &= b_2 + a_1, \\ b_4 &= \sin \alpha_2 s_2, \\ b_5 &= \sin \alpha_2 c_2. \end{aligned}$$

Po obliczeniu wyznacznika otrzymujemy

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = a_1 \cos \alpha_2 (-x_3 \sin \alpha_2 c_2 + a_2 s_2 + a_3 \cos \theta_3 s_2 + a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 c_2). \quad (3.45)$$

Widać że, dla kinematyk przestrzennych, $a_1 \neq 0 \wedge \cos \alpha_2 \neq 0 \wedge (\sin \alpha_2 \neq 0 \vee (a_2 \neq 0 \vee a_3 \neq 0)) \wedge (\sin \theta_3 \neq 0 \vee a_2 \pm a_3 \neq 0)$. Zbiór konfiguracji osobliwych w tym przypadku jest zdefiniowany jako

$$S = \{x \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^2 \mid -x_3 \sin \alpha_2 \cos x_2 + a_2 \sin x_2 + a_3 \cos \theta_3 \sin x_2 + a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 \cos x_2 = 0\}. \quad (3.46)$$

Konfiguracjom osobliwym należącym do S można nadać następującą interpretację geometryczną: kinematyka przyjmuje konfigurację osobliwą, gdy linia prostopadła do osi pierwszego przegubu manipulatora, przechodząca przez jego efektor, staje się równoległa do a_1 .

Proste obliczenia prowadzą do pokazania następującej własności macierzy Jacobiego manipulatora.

Twierdzenie 20 *Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu RRP, takiej że $\alpha_1 = 0$, konfiguracja osobliwa $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in S$ jest korzędu 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2 + a_3 \cos \theta_3 \neq 0$ lub $x_{03} \sin \alpha_2 \neq a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3$.*

Po policzeniu pochodnej wyznacznika (3.45)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, a_1 \cos \alpha_2 (x_{03} \sin \alpha_2 \sin x_{02} + a_2 \cos x_{02} + a_3 \cos \theta_3 \cos x_{02} - a_3 \cos \alpha_2 \sin \theta_3 \sin x_{02}), -a_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 \cos x_{02})$$

i zauważeniu, że równania (2.14) wymagają, by $v_1^3 = 0$ ($v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$), dochodzimy do wniosku, że lewa strona nierówności (2.13) jest równa drugiej składowej pochodnej wyznacznika. W związku z tym mamy następujące

Twierdzenie 21 *Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu RRP spełniającą warunek $\alpha_1 = 0$. Wówczas, w pewnym otoczeniu konfiguracji osobliwej $x_0 \in S$ korzędu 1, rozpatrywana kinematyka jest równoważna kwadratowej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3).$$

3.2.8 Postacie normalne kinematyki typu RRR

Kinematyka RRR jest realizowana przez manipulator o trzech przegubach rotacyjnych. Konstrukcja ta jest najpopularniejsza wśród manipulatorów o trzech stopniach swobody i zarazem najtrudniejsza do analizy. Zmienne ruchu w tym przypadku są określone jako $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \theta_2$ i $x_3 = \theta_3$. Poniżej rozpatrzmy trzy szczególne przypadki kinematyk RRR, spośród których dwa mają duże znaczenie praktyczne.

Przypadek $a_1 = 0$. Manipulator spełniający warunek $a_1 = 0$ charakteryzuje się tym, że osie obrotu jego dwóch pierwszych przegubów przecinają się. Przykłady manipulatorów o takiej geometrii to Unimation PUMA, ASEA IRb6, IRb60, Cincinnati Milacron T⁸ 735, Renalut V80, Microbot TeachMover, Rhino XR-3, a także GE P50 oraz GMF S-400. Macierz Jacobiego manipulatora przyjmuje postać

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} b_1 c_1 + b_2 s_1 & b_3 c_1 + b_4 s_1 & b_5 c_1 + b_6 s_1 \\ b_1 s_1 - b_2 c_1 & b_3 s_1 - b_4 c_1 & b_5 s_1 - b_6 c_1 \\ 0 & b_7 & b_8 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_1 &= \sin \alpha_1 (+d_2 + d_3 \cos \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_2 s_3) + \cos \alpha_1 b_3, \\ b_2 &= -d_3 \sin \alpha_2 s_2 - a_2 c_2 - a_3 c_2 c_3 + a_3 \cos \alpha_2 s_2 s_3, \\ b_3 &= d_3 \sin \alpha_2 c_2 - a_2 s_2 - a_3 s_2 c_3 - a_3 \cos \alpha_2 c_2 s_3, \\ b_4 &= \cos \alpha_1 b_2, \\ b_5 &= -a_3 c_2 s_3 - a_3 \cos \alpha_2 s_2 c_3, \\ b_6 &= -a_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 c_2 c_3 + a_3 \cos \alpha_1 s_2 s_3 + a_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 c_3, \\ b_7 &= -\sin \alpha_1 b_2, \\ b_8 &= a_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 c_2 c_3 - a_3 \sin \alpha_1 s_2 s_3 + a_3 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 c_3. \end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy Jacobiego

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = a_3 \sin \alpha_1 (a_2 s_3 - d_2 \sin \alpha_2 c_3) (a_3 \cos \alpha_2 s_2 s_3 - a_3 c_2 c_3 - d_3 \sin \alpha_2 s_2 - a_2 c_2). \quad (3.48)$$

Wykorzystując fakt, że dla kinematyk przestrzennych $a_3 \neq 0 \wedge \sin \alpha_1 \neq 0 \wedge (a_2 \neq 0 \vee \sin \alpha_2 \neq 0 \wedge d_2 \neq 0)$, zbiór konfiguracji osobliwych zapiszemy jako sumę mnogościową dwóch zbiorów

$$S = OS1 \cup OS2, \quad (3.49)$$

określonych przez

$$OS1 = \{x \in \mathbb{T}^3 \mid a_2 \sin x_3 - d_2 \sin \alpha_2 \cos x_3 = 0\}, \quad (3.50)$$

$$OS2 = \{x \in \mathbb{T}^3 \mid a_3 \cos \alpha_2 \sin x_2 \sin x_3 - a_3 \cos x_2 \cos x_3 + \\ - d_3 \sin \alpha_2 \sin x_2 - a_2 \cos x_2 = 0\}. \quad (3.51)$$

Tak zdefiniowane konfiguracje osobliwe zostały zilustrowane na rysunkach 3.2 a)–c)[†]. Warunki geometryczne charakteryzujące konfiguracje osobliwe są następujące. Konfiguracja manipulatora jest osobliwa, jeżeli albo a_3 leży na płaszczyźnie zdefiniowanej przez oś obrotu pierwszego przegubu manipulatora i linię prostopadłą do tej osi, przechodzącą przez efektor (konfiguracja osobliwa ze zbioru $OS1$) albo linia prostopadła do osi pierwszego przegubu, przechodząca przez efektor manipulatora, leży na płaszczyźnie zdefiniowanej przez osie obrotu pierwszego i drugiego przegubu manipulatora (konfiguracja osobliwa należąca do $OS2$).

Łatwo pokazać, że badana kinematyka posiada następującą własność.

Twierdzenie 22 *Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu RRR, takiej że $a_1 = 0$ konfiguracja osobliwa $x_0 \in S$, dla której $\sin \alpha_2 \neq 0$ lub $a_2^2 + d_2^2 \tan^2 \alpha_2 \neq a_3^2$, jest korzędu 1.*

Podobnie jak i w poprzednich przypadkach, gdy wyznacznik macierzy Jacobiego można było sfaktoryzować, i teraz łatwo zauważyć, że wszystkie konfiguracje osobliwe $x_0 \in S \setminus (OS1 \cap OS2)$ korzędu 1 mają stopień różniczkowy równy 2. I tak, dla $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS1$, pochodna wyznacznika macierzy Jacobiego wynosi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, 0, a_3 \sin \alpha_1 (a_2 \cos x_{03} + d_2 \sin \alpha_2 \sin x_{03}) (a_3 \cos \alpha_2 \sin x_{02} \sin x_{03} + \\ - a_3 \cos x_{02} \cos x_{03} - d_3 \sin \alpha_2 \sin x_{02} - a_2 \cos x_{02})).$$

Biorąc pod uwagę postać wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$ spełniającego równania (2.14) wnioskujemy, że lewa strona nierówności (2.13) jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in OS2$.

Analogiczne rozumowanie zastosowane dla $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS2$, przy pochodnej wyznacznika (3.48)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, a_3 \sin \alpha_1 (a_2 \sin x_{03} - d_2 \sin \alpha_2 \cos x_{03}) (a_3 \cos \alpha_2 \cos x_{02} \sin x_{03} + \\ + a_3 \sin x_{02} \cos x_{03} - d_3 \sin \alpha_2 \cos x_{02} + a_2 \sin x_{02}), a_3 \sin \alpha_1 (a_2 \sin x_{03} + \\ - d_2 \sin \alpha_2 \cos x_{03}) (a_3 \cos \alpha_2 \sin x_{02} \cos x_{03} + a_3 \cos x_{02} \sin x_{03}))$$

i przy uwzględnieniu postaci wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$ wynikającej z (2.14), prowadzi do stwierdzenia, że lewa strona nierówności (2.13) jest równa drugiej składowej powyższej pochodnej. Tym samym, staje się równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in OS1$ oczywiście przy założeniu o przestrzenności kinematyki.

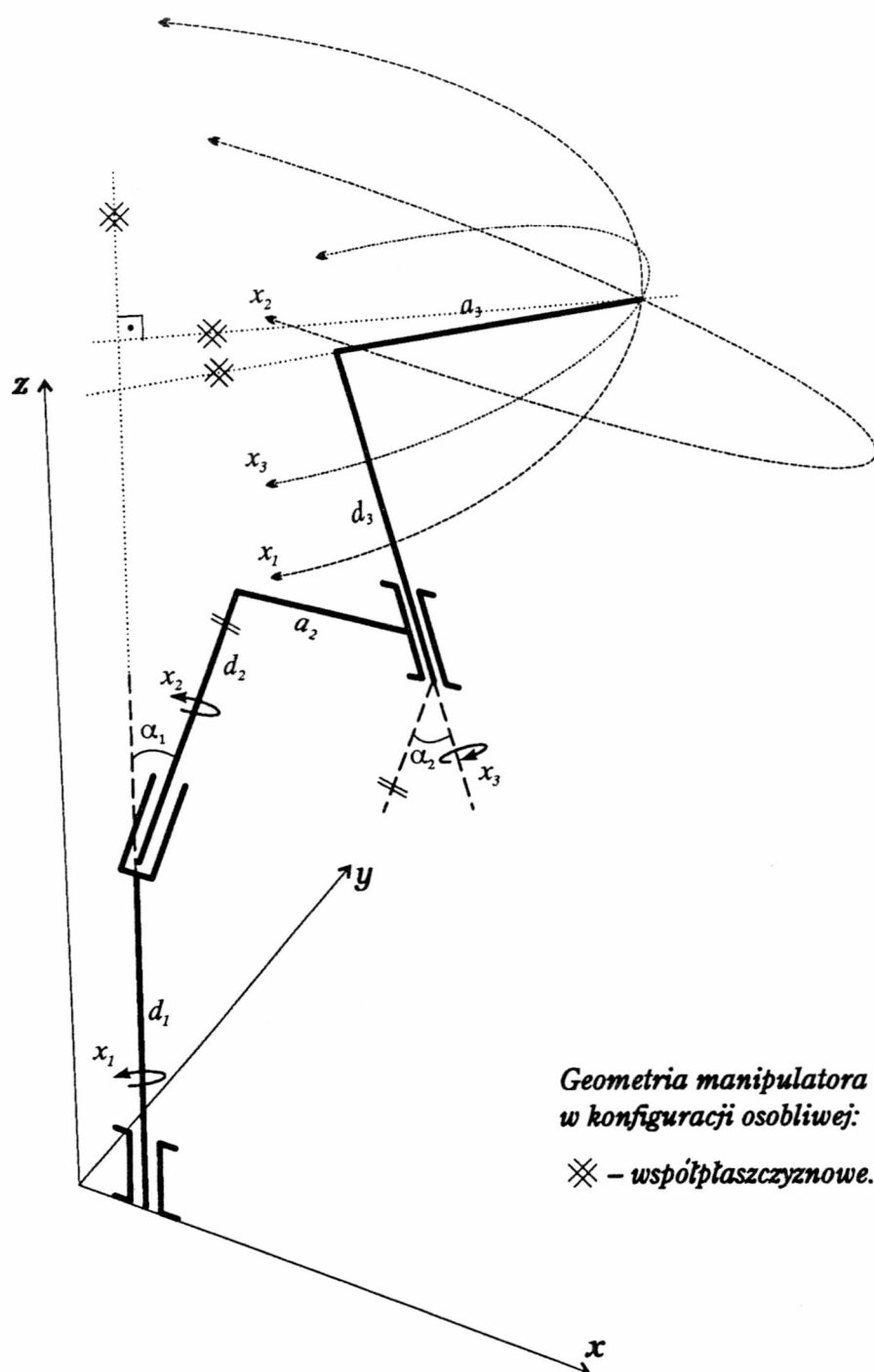
Przeprowadzone powyżej rozważania odnośnie do Wniosku 2 prowadzą do stwierdzenia

Twierdzenie 23 *Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu RRR spełniającą warunek $a_1 = 0$. Wówczas, w pewnym otoczeniu konfiguracji osobliwej $x_0 \in S \setminus (OS1 \cap OS2)$ korzędu 1, rozpatrywana kinematyka jest równoważna kwadratowej postaci normalnej*

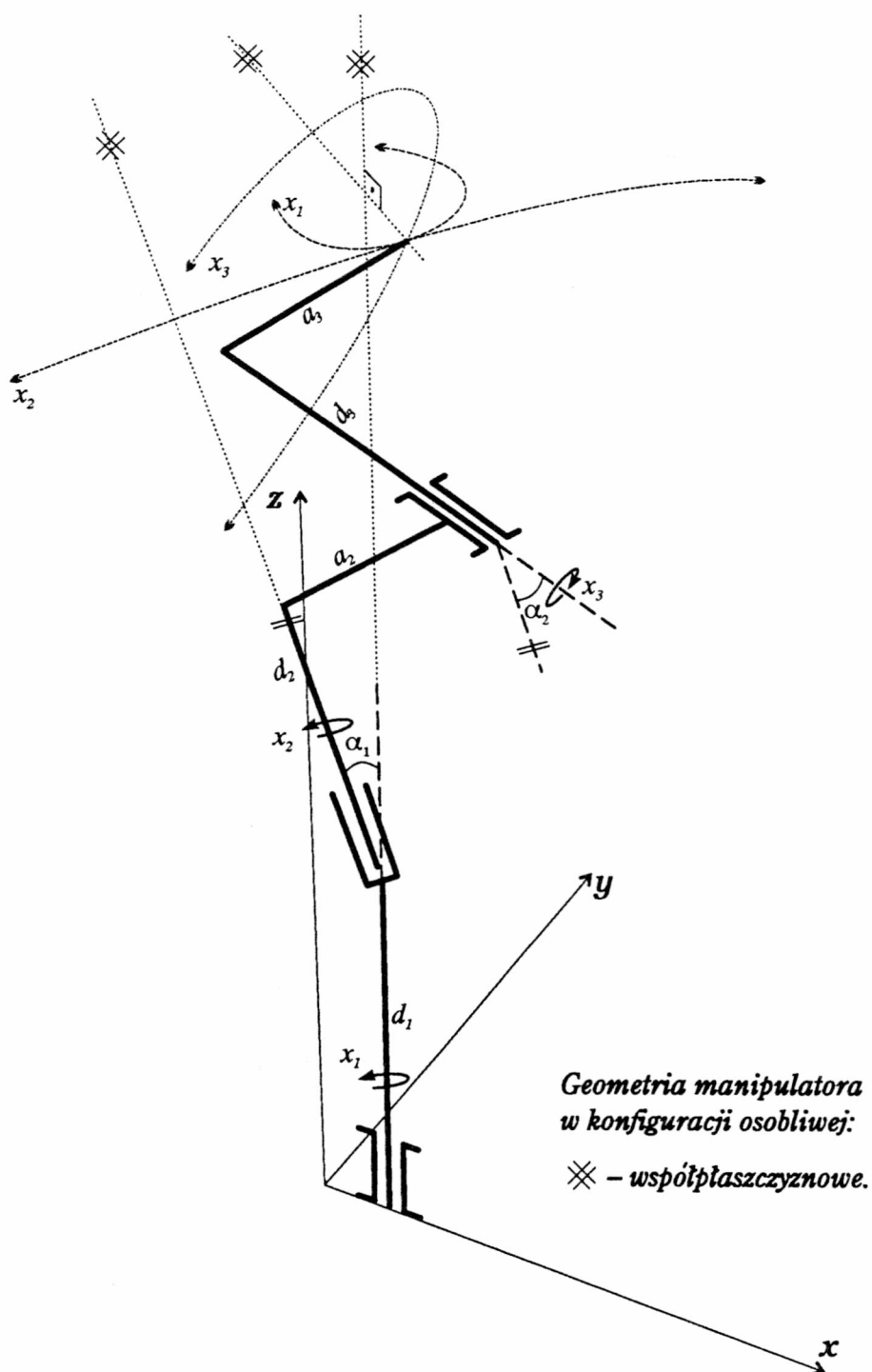
$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3).$$

Można pokazać, że istnieją konfiguracje osobliwe korzędu 1 o stopniu różniczkowym większym od 2.

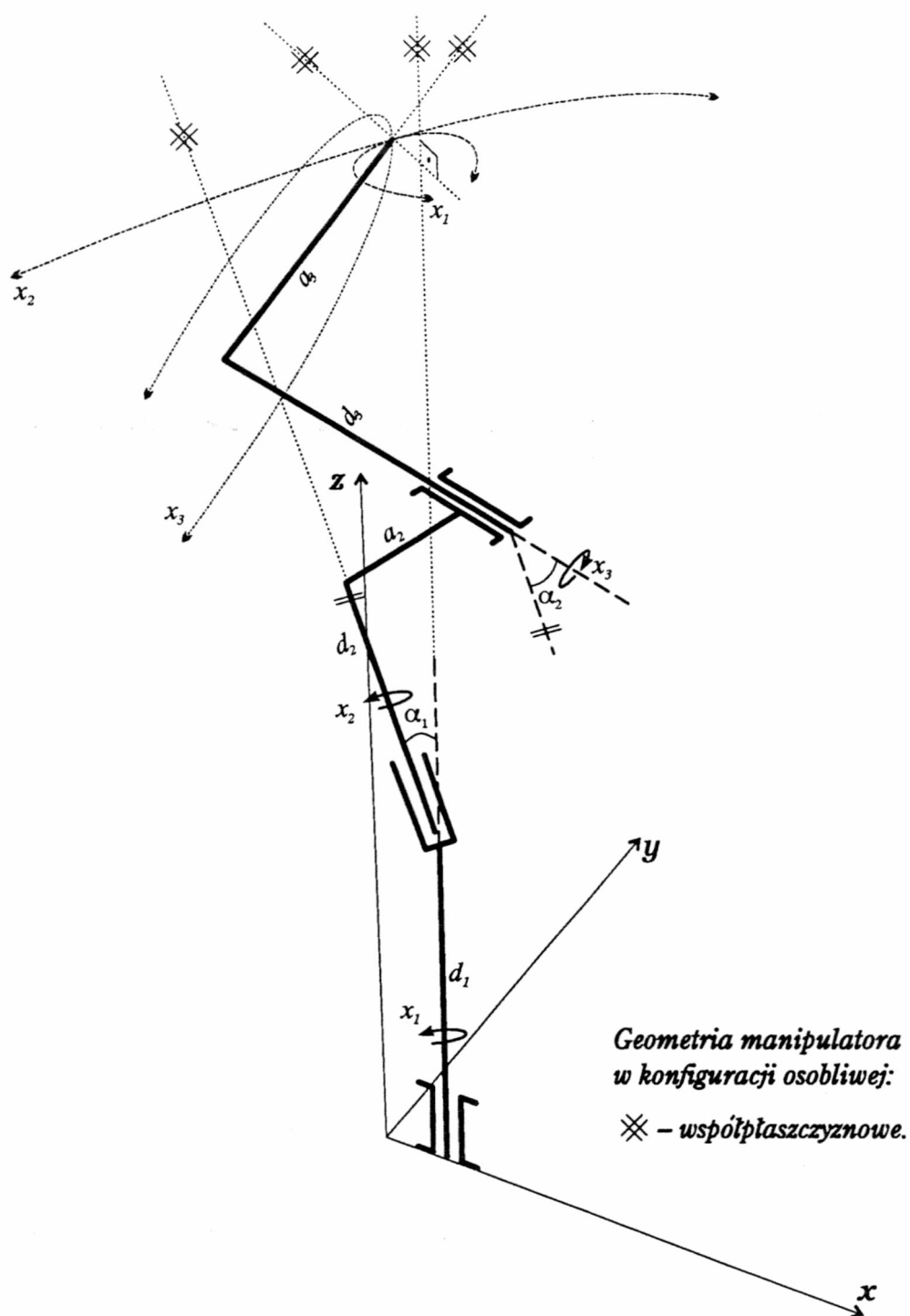
[†]w niniejszej rozprawie używamy pojęcia współpłaszczyznowe mając na myśli proste, z których przynajmniej dwie leżą na tej samej płaszczyźnie, zaś pozostałe są do tej płaszczyzny równoległe



Rysunek 3.2: a) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS1$ manipulatora typu RRR przy $a_1 = 0$.



Rysunek 3.2: b) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS2$ manipulatora typu RRR przy $a_1 = 0$.



Rysunek 3.2: c) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS1 \cap OS2$ manipulatora typu RRR przy $a_1 = 0$.

Przypadek $\alpha_1 = 0$. Przypadek ten odnosi się do manipulatora z równoległymi osiami dwóch pierwszych przegubów. Macierz Jacobiego manipulatora

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} b_1 c_1 + b_2 s_1 & b_1 c_1 + b_3 s_1 & b_4 c_1 + b_5 s_1 \\ b_1 s_1 - b_2 c_1 & b_1 s_1 - b_3 c_1 & b_4 s_1 - b_5 c_1 \\ 0 & 0 & a_3 c_3 \sin \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_1 &= c_2(d_3 \sin \alpha_2 - a_3 \cos \alpha_2 s_3) - s_2(a_2 + a_3 c_3), \\ b_2 &= -s_2(d_3 \sin \alpha_2 - a_3 \cos \alpha_2 s_3) - c_2(a_2 + a_3 c_3) - a_1, \\ b_3 &= b_2 + a_1, \\ b_4 &= -a_3 \cos \alpha_2 s_2 c_3 - a_3 c_2 s_3, \\ b_5 &= -a_3 \cos \alpha_2 c_2 c_3 + a_3 s_2 s_3. \end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy (3.52) przyjmuje postać

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = a_1 a_3 \sin \alpha_2 c_3 (-d_3 \sin \alpha_2 c_2 + a_2 s_2 + a_3 s_2 c_3 + a_3 \cos \alpha_2 c_2 s_3). \quad (3.53)$$

Dla kinematyk przestrzennych spełniających warunek $a_1 \neq 0 \wedge a_3 \neq 0 \wedge \sin \alpha_2 \neq 0$, zbiór konfiguracji osobliwych składa się z dwóch części

$$S = OS1 \cup OS2, \quad (3.54)$$

zdefiniowanych w następujący sposób:

$$OS1 = \{x \in \mathbb{T}^3 \mid \cos x_3 = 0\}, \quad (3.55)$$

$$OS2 = \{x \in \mathbb{T}^3 \mid -d_3 \sin \alpha_2 \cos x_2 + a_2 \sin x_2 + a_3 \sin x_2 \cos x_3 + a_3 \cos \alpha_2 \cos x_2 \sin x_3 = 0\}. \quad (3.56)$$

Powyższe konfiguracje są zilustrowane na rysunkach 3.3 a)–c). W konfiguracjach osobliwych ze zbioru $OS1$ efektor manipulatora osiąga swoje najwyższe lub najniższe położenie z uwagi na oś z układu współrzędnych związanego z pierwszym przegubem manipulatora (co jest równoważne temu, że oś drugiego przegubu jest równoległa do płaszczyzny zdefiniowanej przez a_3 i oś przegubu trzeciego). W konfiguracjach należących do $OS2$ linia prostopadła do osi pierwszego przegubu, przechodząca przez efektor, jest równoległa do a_1 .

Analiza rzędu macierzy Jacobiego (3.52) prowadzi do następującego wniosku.

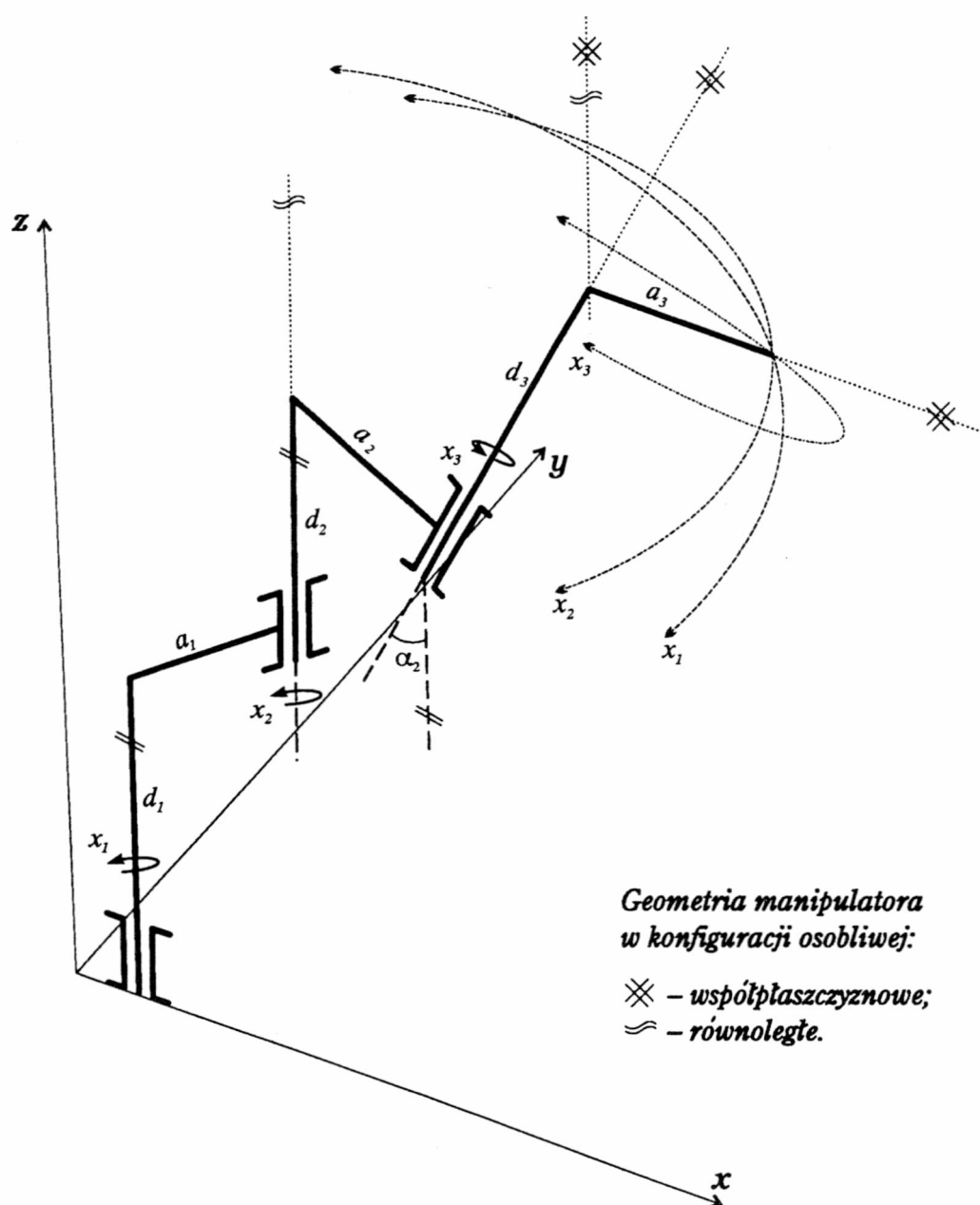
Twierdzenie 24 Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu RRR , takiej że $\alpha_1 = 0$ każda konfiguracja osobliwa $x_0 \in S$ jest korzędu 1.

Obliczając pochodną wyznacznika macierzy Jacobiego dla $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS1$ otrzymujemy

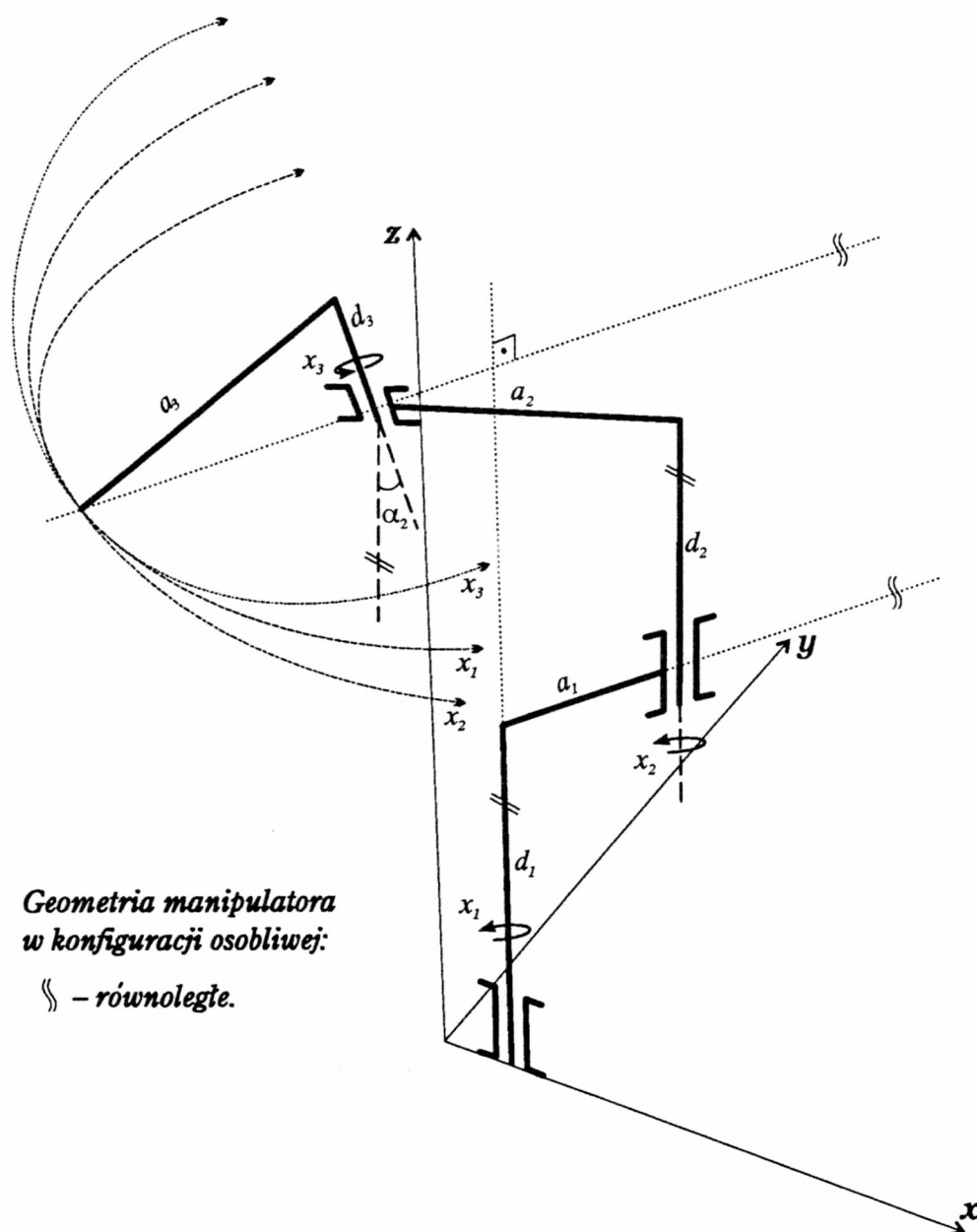
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, 0, -a_1 \sin \alpha_2 \sin x_{03} (-d_3 \sin \alpha_2 \cos x_{02} + a_2 \sin x_{02} + a_3 \sin x_{02} \cos x_{03} + a_3 \cos \alpha_2 \cos x_{02} \sin x_{03})).$$

Na podstawie równań (2.14) dochodzimy do wniosku, że lewa strona nierówności (2.13) w rozpatrywanym przypadku sprowadza się do

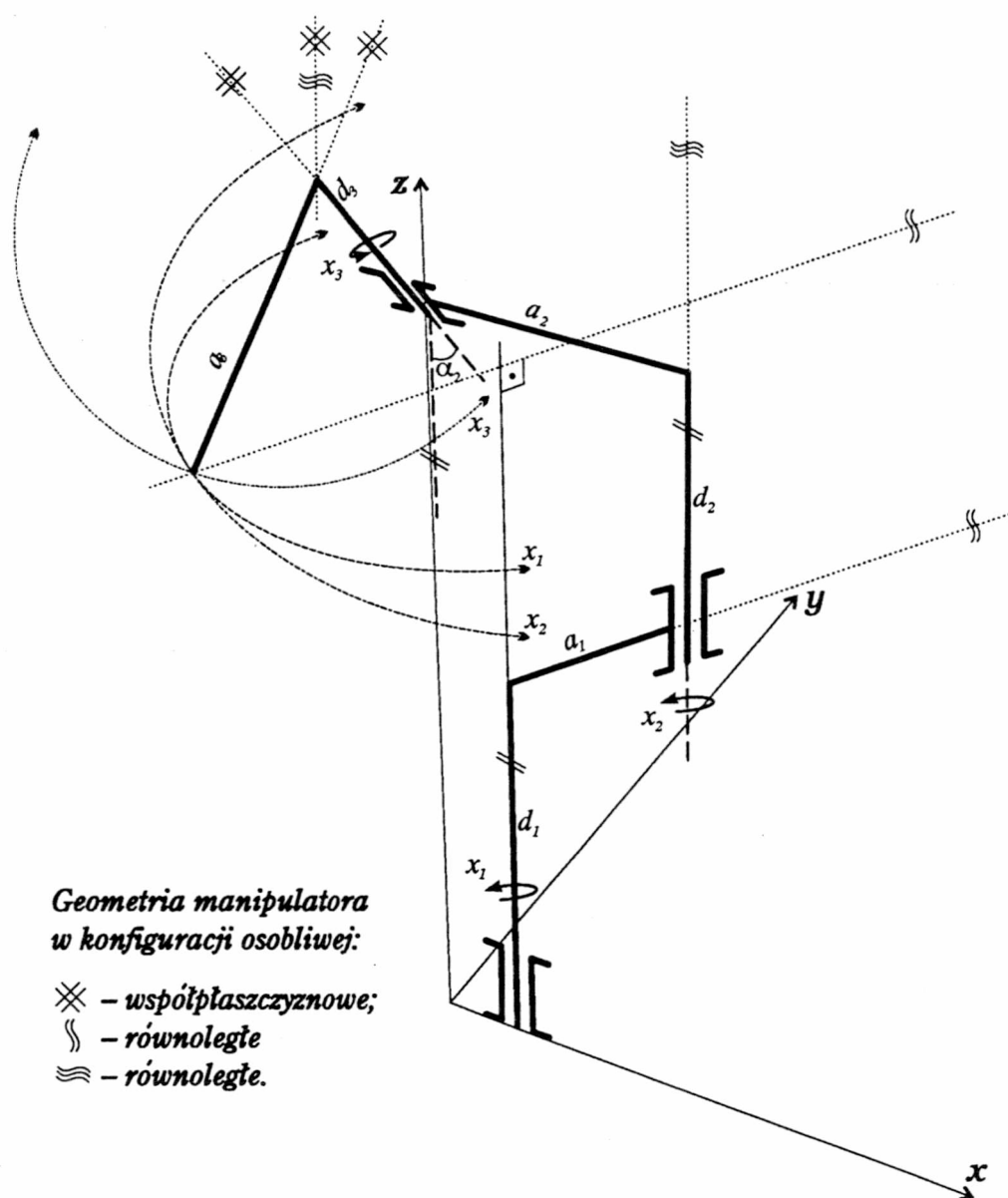
$$-a_1 \sin \alpha_2 \sin x_{03} (-d_3 \sin \alpha_2 \cos x_{02} + a_2 \sin x_{02} + a_3 \sin x_{02} \cos x_{03} + a_3 \cos \alpha_2 \cos x_{02} \sin x_{03}),$$



Rysunek 3.3: a) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS1$ manipulatora typu RRR przy $\alpha_1 = 0$.



Rysunek 3.3: b) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS2$ manipulatora typu RRR przy $\alpha_1 = 0$.



Rysunek 3.3: c) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS1 \cap OS2$ manipulatora typu RRR przy $\alpha_1 = 0$.

co dla manipulatorów przestrzennych równa się zero wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in OS2$.

Po obliczeniu pochodnej wyznacznika (3.53) w punkcie $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS2$ równej

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = & (0, a_1 \sin \alpha_2 \cos x_{03} (d_3 \sin \alpha_2 \sin x_{02} + \\ & + a_2 \cos x_{02} + a_3 \cos x_{02} \cos x_{03} - a_3 \cos \alpha_2 \sin x_{02} \sin x_{03}), \\ & a_1 \sin \alpha_2 \cos x_{03} (-a_3 \sin x_{02} \sin x_{03} + a_3 \cos \alpha_2 \cos x_{02} \cos x_{03})). \end{aligned}$$

i wyciągnięciu na podstawie równań (2.14) wniosku, że $v_1^3 = 0$, rozumowanie analogiczne do przeprowadzonego poprzednio wskazuje, że w rozpatrywanym przypadku lewa strona nierówności (2.13),

$$a_1 \sin \alpha_2 \cos x_{03} (d_3 \sin \alpha_2 \sin x_{02} + a_2 \cos x_{02} + a_3 \cos x_{02} \cos x_{03} - a_3 \cos \alpha_2 \sin x_{02} \sin x_{03}),$$

dla manipulatorów przestrzennych jest równa zero, gdy $x_0 \in OS1$.

Przeprowadzone rozważania pozwalają na sformułowanie następującego stwierdzenia.

Twierdzenie 25 *Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu RRR spełniającą warunek $\alpha_1 = 0$. Wówczas, w pewnym otoczeniu dowolnej konfiguracji osobliwej $x_0 \in S \setminus (OS1 \cap OS2)$, rozpatrywana kinematyka jest równoważna kwadratowej postaci normalnej*

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3).$$

Przypadek $\alpha_2 = 0$. W tym przypadku osie dwóch ostatnich przegubów manipulatora są równoległe. Podobnie jak w przypadku, gdy $a_1 = 0$, kinematykę tego typu posiadają manipulatory przemysłowe Unimation PUMA, ASEA IRb6, IRb60, Cincinnati Milacron T³ 735, Microbot TeachMover, Rhino XR-3, GE P50 oraz GMF S400. Wyznaczenie macierzy Jacobiego manipulatora daje macierz

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} b_5 c_1 + b_6 s_1 & b_3 c_1 + b_4 s_1 & b_1 c_1 + b_2 s_1 \\ b_5 s_1 - b_6 c_1 & b_3 s_1 - b_4 c_1 & b_1 s_1 - b_2 c_1 \\ 0 & b_8 & b_7 \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_1 &= -a_3 s_{23}, & b_2 &= -a_3 \cos \alpha_1 c_{23}, \\ b_3 &= -a_2 s_2 + b_1, & b_4 &= -a_2 \cos \alpha_1 c_2 + b_2, \\ b_5 &= (d_2 + d_3) \sin \alpha_1 - (a_2 s_2 + a_3 s_{23}) \cos \alpha_1, & b_6 &= -a_1 - a_2 c_2 - a_3 c_{23}, \\ b_7 &= a_3 \sin \alpha_1 c_{23}, & b_8 &= a_2 \sin \alpha_1 c_2 + b_7. \end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy Jacobiego jest równy

$$\det \frac{\partial T}{\partial x}(x) = -a_2 a_3 \sin \alpha_1 s_3 (a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23}). \quad (3.58)$$

Łatwo widzieć, że dla kinematyk przestrzennych zachodzi warunek $a_2 \neq 0 \wedge a_3 \neq 0 \wedge \sin \alpha_1 \neq 0$. Na podstawie (3.58) wnioskujemy, że w badanym przypadku istnieją dwa zbiory konfiguracji osobliwych

$$S = OS1 \cup OS2, \quad (3.59)$$

zdefiniowane jako

$$OS1 = \{x \in \mathbb{T}^3 \mid \sin x_3 = 0\}, \quad (3.60)$$

$$OS2 = \{x \in \mathbb{T}^3 \mid a_1 + a_2 \cos x_2 + a_3 \cos(x_2 + x_3) = 0\}. \quad (3.61)$$

Geometryczna interpretacja konfiguracji osobliwych $OS1$, $OS2$ jest przedstawiona na rysunkach 3.4 a)–c). Wprowadzenie kinematyki w osobliwość ze zbioru $OS1$ powoduje, że a_2 staje się równoległe do a_3 . Dla konfiguracji ze zbioru $OS2$, linia prostopadła do osi pierwszego przegubu manipulatora, przechodząca przez jego efektor, leży na płaszczyźnie zdefiniowanej przez osie pierwszego i drugiego przegubu manipulatora (tzn. jest prostopadła do a_1).

Weryfikacja warunków na korząd macierzy Jacobiego w konfiguracjach osobliwych prowadzi nas do następującego wniosku.

Twierdzenie 26 *Dla przestrzennej kinematyki (3.9) typu RRR, takiej że $\alpha_2 = 0$ konfiguracja osobliwa $x_0 \in S$ jest korzędu 1, o ile $d_2 + d_3 \neq 0$ lub $\cos \alpha_1 \neq 0$.*

W dalszym ciągu analizy założymy, że warunki przedstawione w Twierdzeniu 26 są spełnione.

Zajmijmy się teraz znalezieniem konfiguracji manipulatora dla których stopień różniczkowy jest równy 2. W punkcie $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS1$ pochodna wyznacznika macierzy Jacobiego jest dana przez

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, 0, a_2 a_3 \sin \alpha_1 \cos x_{03} (a_1 + a_2 \cos x_{02} + a_3 \cos(x_{02} + x_{03}))).$$

Łatwo zauważyć, że w bieżącym przypadku równania (2.14) pozwalają na przyjęcie trzeciej współrzędnej wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$ równej 1. Dlatego, lewa strona nierówności (2.13) sprowadza się do wyrażenia

$$a_2 a_3 \sin \alpha_1 \cos x_{03} (a_1 + a_2 \cos x_{02} + a_3 \cos(x_{02} + x_{03})),$$

które dla manipulatorów przestrzennych równa się 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in OS2$.

Dla $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in OS2$ pochodna wyznacznika macierzy Jacobiego ma postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\det \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x_0) = (0, a_2 a_3 \sin \alpha_1 \sin x_{03} (a_2 \sin x_{02} + a_3 \sin(x_{02} + x_{03})), \\ a_2 a_3^2 \sin \alpha_1 \sin x_{03} \sin(x_{02} + x_{03})).$$

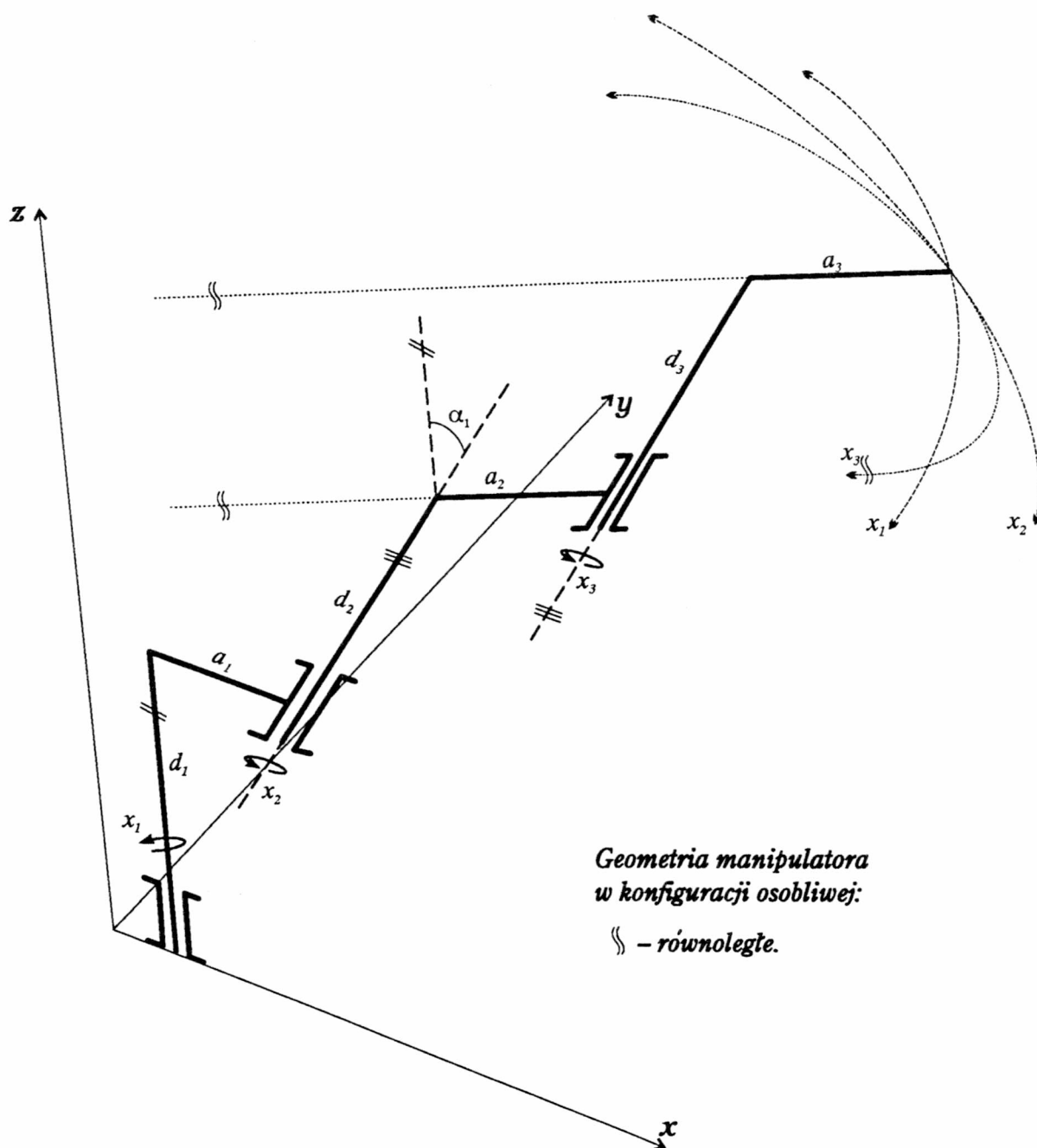
Z równań (2.14) otrzymujemy warunek na współrzędne wektora $v_1 \in \ker \frac{\partial T}{\partial x}(x_0)$:

$$a_1 v_1^2 = a_3 \cos(x_{02} + x_{03}) v_1^3,$$

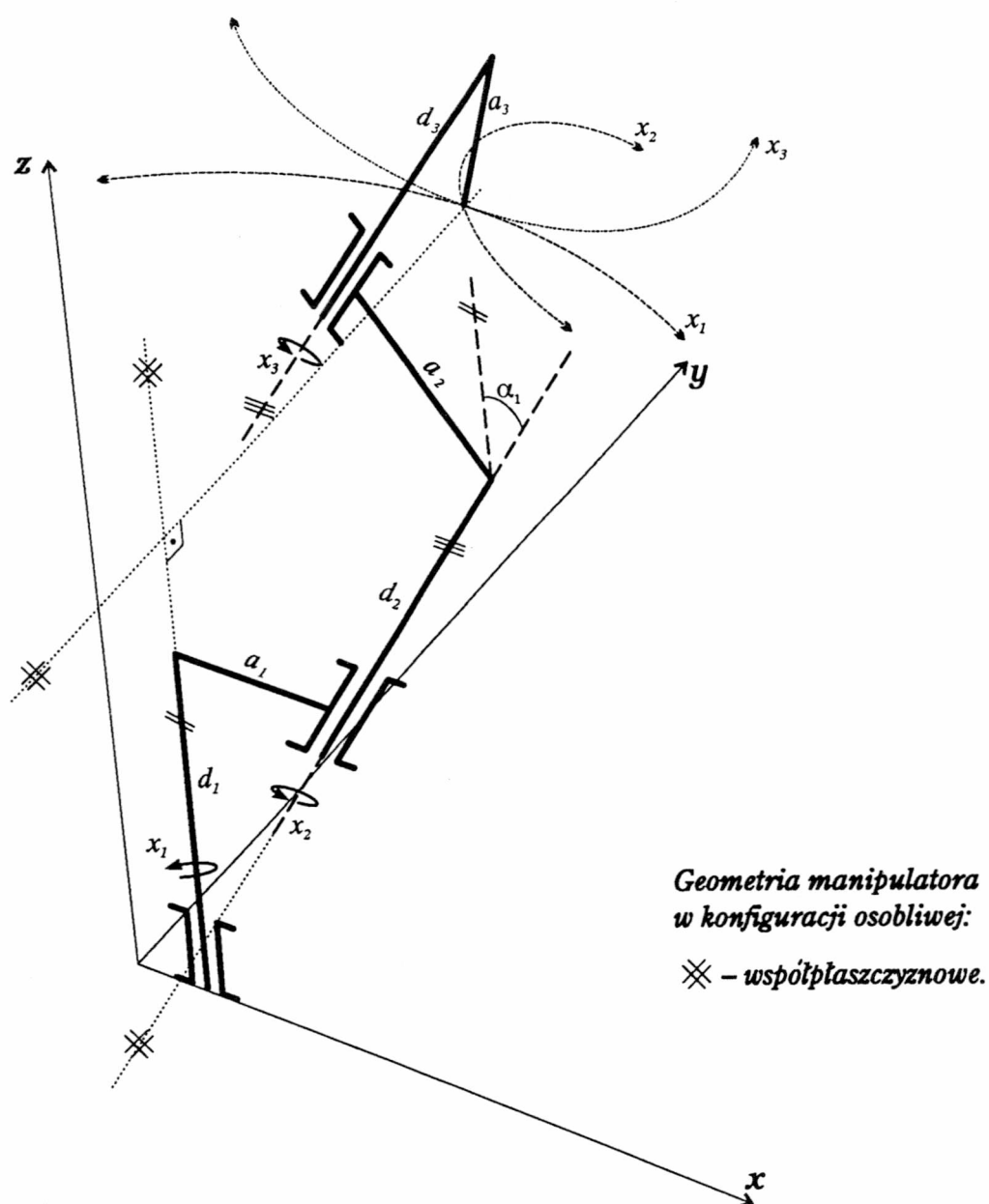
co nadaje lewej stronie nierówności (2.13) postać: $a_2^2 a_3^2 \sin \alpha_1 \sin x_{03}^2$. Jasne jest, że dla kinematyk przestrzennych ostatnie wyrażenie pozostaje niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \notin OS1$.

Jak wynika z powyższych rozważań, jedyne konfiguracje badanej kinematyki, dla których stopień różniczkowy jest większy od 2 należą do zbioru $OS1 \cap OS2$. Łatwo pokazać, że dla tych konfiguracji lewa strona nierówności (2.15) jest również stale równa zero, podczas gdy lewa strona nierówności (2.17) jest równa $\frac{a_2^2 a_3^2 \sin \alpha_1}{a_1}$ i dla kinematyk przestrzennych jest niezerowa i dobrze określona, o ile $a_1 \neq 0$.

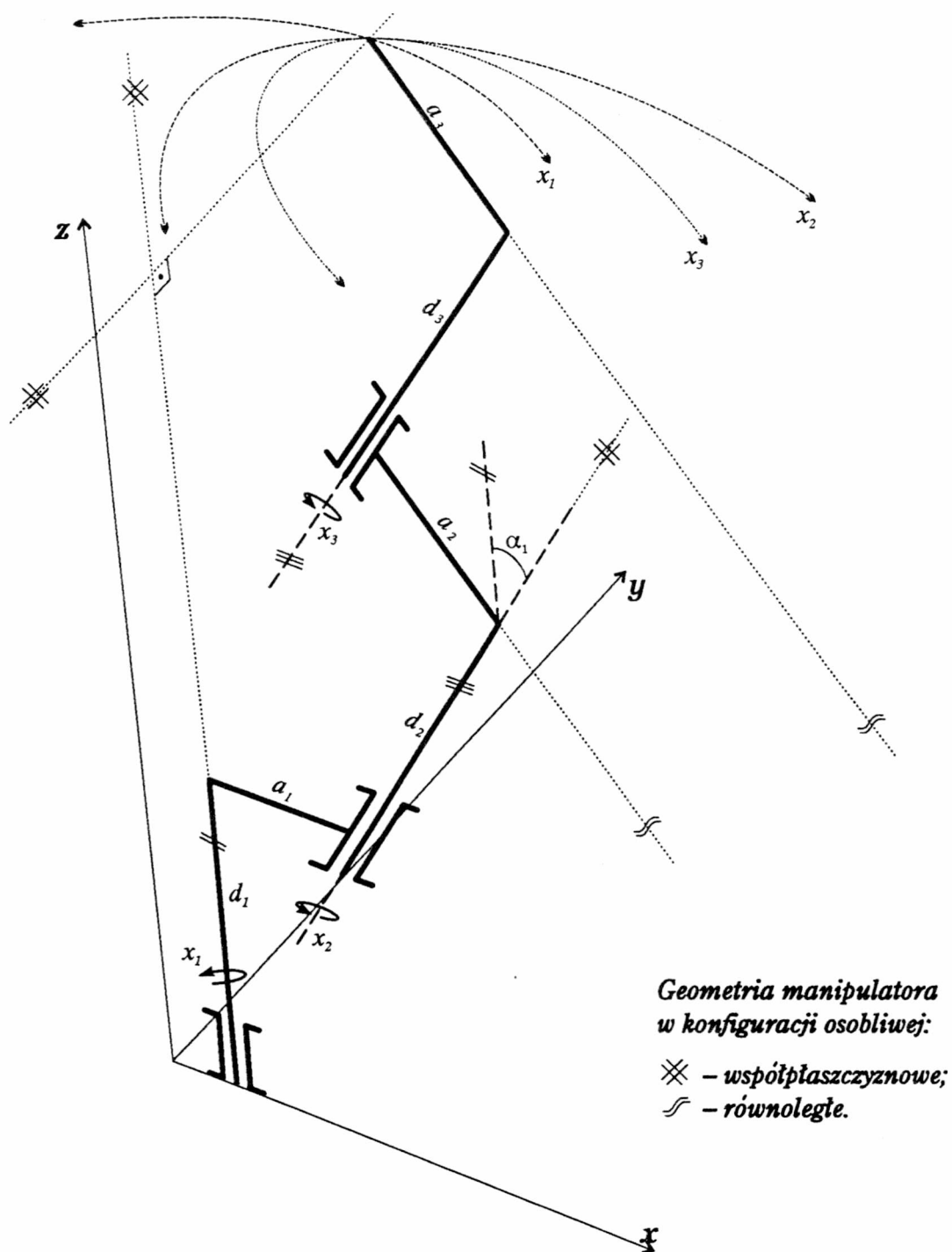
Analizę postaci normalnych kinematyk nieredundantnych o trzech stopniach swobody zakończymy następującym wynikiem (cf. [Tch95b]).



Rysunek 3.4: a) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS1$ manipulatora typu RRR przy $\alpha_2 = 0$.



Rysunek 3.4: b) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS2$ manipulatora typu RRR przy $\alpha_2 = 0$.



Rysunek 3.4: c) Konfiguracja osobliwa $x_0 \in OS1 \cap OS2$ manipulatora typu RRR przy $\alpha_2 = 0$.

Twierdzenie 27 *Rozpatrzmy przestrzenną kinematykę (3.9) typu RRR spełniającą warunek $\alpha_2 = 0$. Wówczas, w pewnym otoczeniu dowolnej konfiguracji osobliwej rzędu 1, rozpatrywana kinematyka jest równoważna jednej z poniższych postaci normalnych:*

- dla $x_0 \in S \setminus (OS1 \cap OS2)$ kwadratowej postaci normalnej

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3);$$

- dla $x_0 \in OS1 \cap OS2$, przy $a_1 \neq 0$, wielomianowej postaci normalnej rzędu 4-ego ze względu na x_1

$$k_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1^4 + u_1(\bar{x})x_1^2 + u_2(\bar{x})x_1, x_2, x_3)$$

z funkcjami u_1, u_2 zależnymi od $\bar{x} = (x_2, x_3)$ znikającymi dla $\bar{x} = 0$.

3.2.9 Zestawienie postaci normalnych kinematyk manipulatorów o trzech stopniach swobody

Po wyznaczeniu postaci normalnych większości przestrzennych kinematyk położeniowych o trzech stopniach swobody, przedstawimy zestawienie otrzymanych postaci normalnych. Zestawienie to zawarte jest w tabeli 3.3. Pierwsza kolumna tabeli określa typ kinematyki manipulatora, dla którego podana jest postać normalna. Kolumna druga zawiera warunki, jakie spełniać musi kinematyka, aby mogła być równoważna danej postaci normalnej. Kolumny trzecia i czwarta określają odpowiednio korząd i stopień różniczkowy kinematyki dla konfiguracji osobliwych. Ostatnia kolumna przedstawia właściwe postacie normalne.

3.3 Manipulatory typu *Puma*

Na zakończenie bieżącego rozdziału wyznaczmy postacie normalne kinematyki manipulatora przemysłowego Unimation *PUMA*. Większość przedstawionych tu rezultatów uzyskano w pracy [TM97]. W odróżnieniu od poprzednich podrozdziałów uwzględnimy tu zarówno położenie efektora manipulatora, jak i jego orientację. *PUMA* jest manipulatorem o 6-ciu przegubach obrotowych. Przy założeniu, że przeguby manipulatora są nieograniczone, kinematyka *PUMA* jest opisana odwzorowaniem

$$k : \mathbb{T}^6 \rightarrow SE(3), \quad (3.62)$$

którego postać można uzyskać na podstawie parametrów Denavita–Hartenberga zebranych w tabeli 3.4, [BGA84]. Ponieważ wartości liczbowe przesunięć d_i i a_i podanych w tabeli zależą od modelu manipulatora *PUMA*, w dalszym ciągu rozważań będziemy się do nich odnosić używając odpowiednich oznaczeń symbolicznych. Schemat kinematyczny manipulatora *PUMA* wynikający z notacji Denavita–Hartenberga został przedstawiony na rysunku 3.5.

Kinematykę manipulatora *PUMA* można wyrazić w formie macierzy 4×4

$$k(x) = \begin{bmatrix} R(x) & T(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

kinematyka	warunki	korząd	stopień różniczkowy	postać normalna $k_0(x_1, x_2, x_3)$
PPP	brak	0	-	(x_1, x_2, x_3)
PPR	brak (Twierdzenie 5)	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
PRP	Twierdzenie 7	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
PRR	$\alpha_1 = 0$ & Twierdzenie 9	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
	$\alpha_2 = 0$ & Twierdzenie 11	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
RPP	brak (Twierdzenie 13)	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
RPR	$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ & Twierdzenie 15	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
	$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ & Twierdzenie 17	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
	$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ & Twierdzenie 17	1	4	$(x_1^4 + u_1(\bar{x})x_1^2 + u_2(\bar{x})x_1, x_2, x_3)$
RRP	$a_1 = 0$ & Twierdzenie 19	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
	$\alpha_1 = 0$ & Twierdzenie 21	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
RRR	$a_1 = 0$ & Twierdzenie 23	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
	$\alpha_1 = 0$ & Twierdzenie 25	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
	$\alpha_2 = 0$ & Twierdzenie 27	1	2	(x_1^2, x_2, x_3)
	$\alpha_2 = 0$ & Twierdzenie 27	1	4	$(x_1^4 + u_1(\bar{x})x_1^2 + u_2(\bar{x})x_1, x_2, x_3)$

Tabela 3.3: Zestawienie postaci normalnych kinematyk manipulatorów o trzech stopniach swobody.

gdzie $x = (x_1, \dots, x_6)$ oznacza wektor położeń w przegubach (konfigurację wewnętrzną manipulatora) określony w tym przypadku kątami obrotu przegubów manipulatora. Wykorzystując obliczenia symboliczne wyznaczamy macierz $R(x)$

$$R(x) = \begin{bmatrix} b_1c_1 - b_4s_1 & b_2c_1 + b_5s_1 & b_3c_1 - b_6s_1 \\ b_1s_1 + b_4c_1 & b_2s_1 - b_5c_1 & b_3s_1 + b_6c_1 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

przy oznaczeniach

$$\begin{aligned} b_1 &= c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6, & b_2 &= -c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6, \\ b_3 &= c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5, & b_4 &= c_4s_6 + s_4c_5c_6, \\ b_5 &= -c_4c_6 + s_4c_5s_6, & b_6 &= s_4s_5, \\ b_7 &= -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6, & b_8 &= s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_{23}s_5s_6, \\ b_9 &= -s_{23}c_4s_5 + c_{23}c_5 \end{aligned}$$

oraz wektor

$$T(x) = \begin{pmatrix} (c_{23}b_{10} + s_{23}b_{11} + a_2c_2)c_1 - b_{12}s_1 \\ (c_{23}b_{10} + s_{23}b_{11} + a_2c_2)s_1 + b_{12}c_1 \\ (-s_{23}b_{10} + c_{23}b_{11} - a_2s_2) \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

przegub	α_i [°]	d_i [dm]	a_i [dm]
1	$-\frac{\pi}{2}$	0	0
2	0	0	4.318
3	$\frac{\pi}{2}$	1.491	-0.201
4	$-\frac{\pi}{2}$	4.318	0
5	$\frac{\pi}{2}$	0	0
6	0	0.564	0

Tabela 3.4: Parametry Denavita–Hartenberga manipulatora *PUMA 600*.

gdzie

$$b_{10} = d_6 c_4 s_5 + a_3, \quad b_{11} = d_6 c_5 + d_4, \quad b_{12} = d_6 s_4 s_5 + d_3.$$

W celu określenia zbioru konfiguracji osobliwych manipulatora *PUMA*, wyznaczymy jakobian manipulatora wyrażający zależność między liniową i kątową prędkością efektora manipulatora $(v, \omega)^T$ a prędkością w przegubach $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_6)^T$ w danej konfiguracji x ,

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = J(x) \dot{x}. \quad (3.66)$$

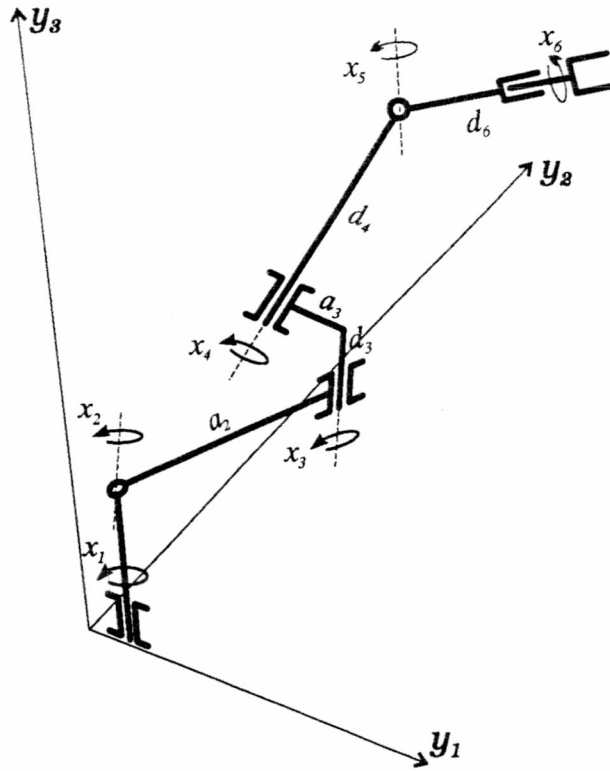
Dla *PUMY* jakobian $J(x)$ ma postać

$$J(x) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & 0 \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} & 0 \\ 0 & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} & 0 \\ 0 & -s_1 & -s_1 & c_1 s_{23} & j_{45} & j_{46} \\ 0 & c_1 & c_1 & s_1 s_{23} & j_{55} & j_{56} \\ 1 & 0 & 0 & c_{23} & s_{23} s_4 & j_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

gdzie

$$\begin{aligned} j_{11} &= -(c_{23} b_{10} + s_{23} b_{11}) s_1 - b_{12} c_1, & j_{21} &= (c_{23} b_{10} + s_{23} b_{11}) c_1 - b_{12} s_1, \\ j_{12} &= (-s_{23} b_{10} + c_{23} b_{11} - a_2 s_2) c_1, & j_{22} &= (-s_{23} b_{10} + c_{23} b_{11} - a_2 s_2) s_1, \\ j_{32} &= -c_{23} b_{10} - s_{23} b_{11} - a_2 c_2, & j_{13} &= (-s_{23} b_{10} + c_{23} b_{11}) c_1, \\ j_{23} &= (-s_{23} b_{10} + c_{23} b_{11}) s_1, & j_{33} &= -c_{23} b_{10} - s_{23} b_{11}, \\ j_{14} &= -d_6 s_5 (c_{23} s_4 c_1 + c_4 s_1), & j_{24} &= -d_6 s_5 (c_{23} s_4 s_1 - c_4 c_1), \\ j_{34} &= d_6 s_{23} s_4 s_5, & j_{15} &= d_6 ((c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5) c_1 - s_4 c_5 s_1), \\ j_{25} &= d_6 ((c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5) s_1 - s_4 c_5 c_1), & j_{35} &= -d_6 (s_{23} c_4 c_5 + c_{23} s_5), \\ j_{45} &= -c_4 s_1 - c_{23} s_4 c_1, & j_{55} &= c_4 c_1 - c_{23} s_4 s_1, \\ j_{46} &= -b_6 s_1 + b_3 c_1, & j_{56} &= b_6 c_1 + b_3 s_1, \\ j_{66} &= -c_{23} c_5 - s_{23} c_4 s_5, \end{aligned}$$

a $b_3 \div b_{11}$ są zdefiniowane w (3.64) i (3.65). Jak wspomniano we wprowadzeniu do niniejszej rozprawy, zależność (3.66) nie definiuje macierzy Jacobiego kinematyki (3.62). Co

Rysunek 3.5: Schemat kinematyczny manipulatora *PUMA*.

za tym idzie, elementy macierzy $J(x)$ nie są pochodnymi cząstkowymi kinematyki (3.62) w jakichkolwiek układach współrzędnych w $\mathbb{T}^6$ i $SE(3)$. Macierz Jacobiego kinematyki manipulatora może zostać wyliczona po wprowadzeniu układów współrzędnych na rozmaitościach $\mathbb{T}^6$ i $SE(3)$. Naturalnym wyborem dla $\mathbb{T}^6$ jest układ współrzędnych zdefiniowany przez kąty w przegubach $x = (x_1, \dots, x_6)$, $x_i \in [-\pi, \pi)$, $i = 1, \dots, 6$. Dla specjalnej grupy euklidesowej $SE(3)$, spośród możliwych układów współrzędnych wybierzemy współrzędne kartezjańskie dla części położeniowej i kąty Eulera[§] dla części obrotowej kinematyki (3.63). Oznaczmy tak wybrane współrzędne przez $y = (p_1, p_2, p_3, \varphi, \theta, \psi)$. We współrzędnych x, y macierz Jacobiego kinematyki (3.62) jest zdefiniowana wyrażeniem

$$\dot{y} = (\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T = \frac{\partial k}{\partial x}(x) \dot{x}. \quad (3.68)$$

Jak wspomniano w rozdziale 1.4, macierze w (3.66), (3.68) są sobie równoważne. Przy wyborze jako układu współrzędnych w $SE(3)$ współrzędnych kartezjańskich i kątów Eulera otrzymujemy zależność

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & M_E(y) \end{bmatrix} J(x), \quad (3.69)$$

[§]Ponieważ niektórzy autorzy wyróżniają kilka rodzajów kątów Eulera, dla ścisłości dodajmy, że użyliśmy tutaj kątów Eulera typu $Z - Y - Z$, [SV89, Nak91].

gdzie macierz

$$M_E(y) = \begin{bmatrix} -\cos \varphi \cot \theta & -\sin \varphi \cot \theta & 1 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} & \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

jest dobrze określona dla $0 < \theta < \pi$, [Lat93, SV89]. W rezultacie, macierz Jacobiego kinematyki *PUMY* ma postać

$$\frac{\partial k(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \\ 1 & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ 0 & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ 0 & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

gdzie

$$\begin{aligned} J_{42} &= J_{43} = \sin(x_1 - \varphi) \cot \theta, \\ J_{44} &= c_{23} - s_{23} \cos(x_1 - \varphi) \cot \theta, \\ J_{45} &= s_4 s_{23} + c_4 \sin(x_1 - \varphi) \cot \theta + s_4 c_{23} \cos(x_1 - \varphi) \cot \theta, \\ J_{46} &= c_{23} c_5 - s_{23} c_4 s_5 + b_6 \sin(x_1 - \varphi) \cot \theta - b_3 \cos(x_1 - \varphi) \cot \theta, \\ J_{52} &= J_{53} = \cos(x_1 - \varphi), & J_{54} &= s_{23} \sin(x_1 - \varphi), \\ J_{55} &= c_4 \cos(x_1 - \varphi) + c_{23} s_4 \sin(x_1 - \varphi), & J_{56} &= b_6 \cos(x_1 - \varphi) + b_3 \sin(x_1 - \varphi), \\ J_{62} &= J_{63} = \frac{\sin(x_1 - \varphi)}{\sin \theta}, & J_{64} &= s_{23} \frac{\cos(x_1 - \varphi)}{\sin \theta}, \\ J_{65} &= -c_4 \frac{\sin(x_1 - \varphi)}{\sin \theta} - c_{23} s_4 \frac{\cos(x_1 - \varphi)}{\sin \theta}, & J_{66} &= -b_6 \frac{\sin(x_1 - \varphi)}{\sin \theta} + b_3 \frac{\cos(x_1 - \varphi)}{\sin \theta}, \end{aligned}$$

a $J_{ij}(x)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, 6$ oznaczają elementy części położeniowej jacobianu manipulatora (3.67). Określmy teraz zbiór konfiguracji osobliwych rozpatrywanego manipulatora. Wyznacznik macierzy (3.67) ma postać

$$\det J(x) = a_2 s_5 (a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_4 s_{23}) (d_4 c_3 - a_3 s_3). \quad (3.72)$$

Jak widać, zbiór konfiguracji osobliwych jest dany przez

$$S = OS1 \cup OS2 \cup OS3, \quad (3.73)$$

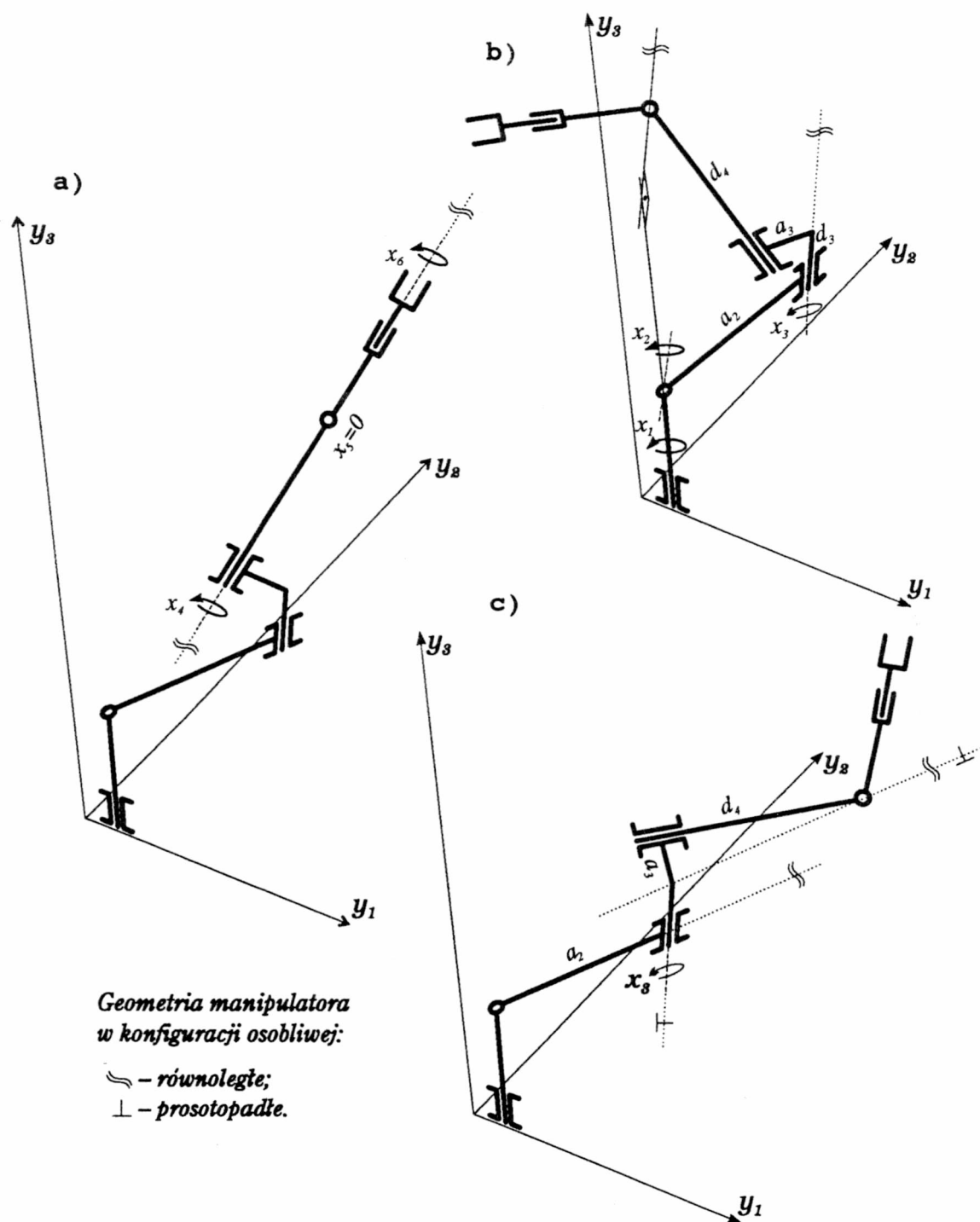
gdzie

$$OS1 = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid \sin x_5 = 0\}, \quad (3.74)$$

$$OS2 = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid a_2 \cos x_2 + a_3 \cos(x_2 + x_3) + d_4 \sin(x_2 + x_3) = 0\}, \quad (3.75)$$

$$OS3 = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid d_4 \cos x_3 - a_3 \sin x_3 = 0\}. \quad (3.76)$$

Osobliwości ze zbiorów *OS1*, *OS2*, *OS3* będziemy nazywać odpowiednio osobliwościami nadgarstka, ramienia i przedramienia, [CSE94]. Interpretacja geometryczna osobliwości kinematycznych *PUMY* jest przedstawiona na rysunku 3.6. W osobliwości nadgarstka oś przegubu czwartego jest równoległa do osi przegubu szóstego. Gdy manipulator przyjmuje konfigurację osobliwą ze zbioru *OS2* (osobliwość ramienia), linia prostopadła do osi pierwszego przegubu manipulatora, przechodząca przez jego piąty przegub jest równoległa do d_3 . I w końcu, w osobliwości przedramienia linia przechodząca przez przegub piąty manipulatora, przecinająca oś przegubu trzeciego i prostopadła do tej osi jest równoległa do a_2 . Dla kinematyki rozpatrywanego manipulatora weryfikacja warunków na korząd jacobianu w konfiguracjach osobliwych prowadzi do następującego wniosku.



Rysunek 3.6: Konfiguracja osobliwa a) nadgarstka (OS1), b) ramienia (OS2), c) przedramienia (OS3) manipulatora PUMA.

Twierdzenie 28 Dla kinematyki manipulatora PUMA (3.63)–(3.65) każda konfiguracja osobliwa $x_0 \in S^* = OS1^* \cup OS2^* \cup OS3^*$, gdzie $OS1^* = OS1 \setminus (OS2 \cup OS3)$, $OS2^* = OS2 \setminus (OS1 \cup OS3)$, $OS3^* = OS3 \setminus (OS1 \cup OS2)$ jest korzędu 1.

Po wyznaczeniu zbioru konfiguracji osobliwych manipulatora PUMA przystąpimy do znalezienia postaci normalnych jego kinematyki. Jest oczywiste, że w otoczeniu konfiguracji regularnych kinematyka PUMY jest równoważna liniowej postaci normalnej podanej w Twierdzeniu 1. Poniżej przedstawimy rozważania prowadzące do określenia postaci normalnych kinematyki PUMY w otoczeniu konfiguracji osobliwych $x_0 \in S^*$. Ponieważ zadanie to jest prostsze dla konfiguracji ze zbiorów $OS2^*$, $OS3^*$ niż dla konfiguracji ze zbioru $OS1^*$, nasze rozważania rozpoczniemy od przeanalizowania konfiguracji należących do $OS2^*$ i $OS3^*$.

Zgodnie ze Spostrzeżeniem 1, jeśli stopień różniczkowy kinematyki jest równy 2, warunki (2.13)–(2.14) mogą być sprawdzone z wykorzystaniem jakobianu manipulatora (3.67) w miejsce macierzy Jacobiego (3.71), co uczynimy w bieżącym przypadku. Stwierdzamy zatem, że stopień różniczkowy kinematyki PUMY w otoczeniu konfiguracji osobliwej $x_0 \in S^*$ jest równy 2 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\partial}{\partial x} (\det J)(x_0) v_1 \neq 0, \quad (3.77')$$

$$J(x_0) v_1 = 0. \quad (3.77'')$$

Dla $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{06}) \in OS2$ pochodna wyznacznika jakobianu (3.72) dana jest przez

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\det J)(x_0) = & (0, a_2 \sin x_{05} (d_4 \cos(x_{02} + x_{03}) - a_2 \sin x_{02} + \\ & - a_3 \sin(x_{02} + x_{03})) (d_4 \cos x_{03} - a_3 \sin x_{03}), a_2 \sin x_{05} (d_4 \cos(x_{02} + x_{03}) + \\ & - a_3 \sin(x_{02} + x_{03})) (d_4 \cos x_{03} - a_3 \sin x_{03}), 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Z równania (3.77'') dostajemy zależność na współrzędne wektora $v_1 \in \ker J(x_0)$ postaci

$$v_1 = \gamma \left(-1, d_3 \frac{a_3 \cos(x_{02} + x_{03}) + d_4 \sin(x_{02} + x_{03})}{a_2(a_3 \sin x_{03} - d_4 \cos x_{03})}, 0, *, *, * \right)^T$$

z $\gamma \in \mathbb{R}$ wybranym dowolnie. Symbol „*” użyty w powyższym wyrażeniu oznacza elementy niezerowe, ale nieistotne dla przeprowadzanych rozważań. W efekcie, lewa strona nierówności (3.77') sprowadza się do wyrażenia

$$\gamma a_2 d_3 \sin x_{05} (d_4 \cos x_{03} + - a_3 \sin x_{03}) \frac{(a_3 \cos(x_{02} + x_{03}) + d_4 \sin(x_{02} + x_{03})) (d_4 \cos(x_{02} + x_{03}) - a_2 \sin x_{02} - a_3 \sin(x_{02} + x_{03}))}{a_2(a_3 \sin x_{03} - d_4 \cos x_{03})},$$

które jest niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in OS2^*$.

W konfiguracji $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{06}) \in OS3$ obliczamy pochodną wyznacznika (3.72)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\det J)(x_0) = & (0, 0, -a_2 \sin x_{05} (a_2 \cos x_{02} + \\ & + a_3 \cos(x_{02} + x_{03}) + d_4 \sin(x_{02} + x_{03})) (d_4 \sin x_{03} + a_3 \cos x_{03}), 0, 0, 0), \end{aligned}$$

następnie składowe wektora $v_1 \in \ker J(x_0)$

$$v = \gamma \left(0, 1, -\frac{d_4 + a_2 \sin x_{03}}{d_4}, *, *, * \right)^T, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

i dochodzimy do wniosku, że lewa strona nierówności (3.77') da się wyrazić jako

$$\gamma a_2 \sin x_{05} (a_2 \cos x_{02} + a_3 \cos(x_{02} + x_{03}) + d_4 \sin(x_{02} + x_{03})) \frac{(d_4 + a_2 \sin x_{03})(d_4 \sin x_{03} + a_3 \cos x_{03})}{d_4}.$$

Łatwo widzieć, że powyższe wyrażenie jest niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in OS3^*$.

Powyższe rozważania pozwalają sformułować następujący

Lemat 2 *Załóżmy, że x_0 jest konfiguracją osobliwą kinematyki PUMY należącą do zbioru $OS2^* \cup OS3^*$. Wówczas, stopień różniczkowy badanej kinematyki w konfiguracji x_0 jest równy 2.*

Przystąpmy teraz do określenia postaci normalnych kinematyki dla konfiguracji $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{06}) \in OS1^*$. Ponieważ, jak się okaże, stopień różniczkowy kinematyki PUMY jest w tym przypadku większy niż 2, ponownie musimy rozpatrywać kinematykę wyrażoną we współrzędnych x = kąty obrotu w przegubach, y = położenie efektora w przestrzeni kartezjańskiej + kąty Eulera. Oczywiście, tak przyjętej reprezentacji odpowiada macierz Jacobiego (3.68) dana jawnie wyrażeniami (3.71). Ze względu na fakt, że macierz Jacobiego (3.71) jest dobrze określona dla $0 < \theta < \pi$, a w konfiguracjach $x_0 \in OS1$ kąt $\theta = x_{02} + x_{03}$, założymy dodatkowo, że konfiguracje osobliwe spełniają warunek $0 < x_{02} + x_{03} < \pi$. Rozpatrzmy kinematykę manipulatora PUMA wyrażoną we współrzędnych

$$y = (p_1, p_2, p_3, \varphi, \theta, \psi)^T = k(x). \quad (3.78)$$

Analiza rzędu macierzy Jacobiego (3.71) pozwala stwierdzić, że jeżeli $0 < x_{04} < \pi$ i $\tan x_{03} \neq (d_4 \pm d_6)/a_3$ dla $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{06}) \in OS1^*$, wówczas podmacierz macierzy (3.71) utworzona przez usunięcie piątego wiersza i szóstej kolumny jest nieosobliwa z wyznacznikiem równym

$$\pm \frac{a_2 \sin x_{04} ((d_4 \pm d_6) \cos x_{03} - a_3 \sin x_{03}) (a_2 \cos x_{02} + a_3 \cos(x_{02} + x_{03}) + d_4 \sin(x_{02} + x_{03}))}{\sin(x_{02} + x_{03})}.$$

Dzięki temu, po zamianie miejscami współrzędnych p_1 z θ oraz x_1 z x_6 , otrzymujemy nową kinematykę, której macierz Jacobiego spełnia warunek (2.3). W efekcie, jesteśmy w stanie zdefiniować przekształcenie (2.5) transformujące kinematykę PUMY do postaci pre-normalnej (2.4). Dla ścisłości i kompletności prezentacji poniżej przedstawimy jawnie przekształcenie kinematyki PUMY do postaci pre-normalnej. Zdefiniujemy zmianę współrzędnych kinematyki (3.78) w postaci

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha(x), \\ \bar{y} &= \beta(y) \end{aligned}$$

zgodnie z zależnościami (przenumerowanie współrzędnych)

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_6, \bar{x}_i = x_i, i = 2, \dots, 5, \bar{x}_6 = x_1; \\ \bar{y}_1 &= y_5, \bar{y}_i = y_i, i = 2, 3, 4, \bar{y}_5 = y_1, \bar{y}_6 = y_6. \end{aligned}$$

Otrzymujemy wówczas reprezentację

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \bar{k}(\bar{x}) = \beta \circ k \circ \alpha^{-1}(\bar{x}) = \\ & (k_5(\bar{x}_6, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_5, \bar{x}_1), k_2(\bar{x}_6, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_5, \bar{x}_1), k_3(\bar{x}_6, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_5, \bar{x}_1), \\ & k_4(\bar{x}_6, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_1), k_1(\bar{x}_6, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_1), k_6(\bar{x}_6, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_1)), \end{aligned} \quad (3.79)$$

taką że dla $\bar{x}_0 = (x_{06}, x_{02}, \dots, x_{05}, x_{01})$, gdzie $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{06}) \in OS1^*$, $0 < x_{02} + x_{03} < \pi$, $0 < x_{04} < \pi$,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{k}_2}{\partial \bar{x}_2} & \dots & \frac{\partial \bar{k}_2}{\partial \bar{x}_6} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{k}_6}{\partial \bar{x}_2} & \dots & \frac{\partial \bar{k}_6}{\partial \bar{x}_6} \end{bmatrix} (\bar{x}_0) = 5.$$

Tak więc, po zastosowaniu do kinematyki (3.79) lokalnego dyfeomorfizmu $\xi = \varphi(\bar{x})$ zdefiniowanego jako

$$\varphi(\bar{x}) = (\bar{x}_1, \bar{k}_2(\bar{x}), \dots, \bar{k}_6(\bar{x})), \quad (3.80)$$

otrzymujemy postać pre-normalną (2.4) kinematyki manipulatora PUMA

$$\bar{k} \circ \varphi^{-1}(\xi) = (r(\xi), \xi_2, \dots, \xi_6). \quad (3.81)$$

Powyższe rozważania pokazują, że wszystkie pochodne cząstkowe funkcji $r(\xi)$ występującej w (3.81) mogą zostać znalezione z wykorzystaniem macierzy Jacobiego (3.71). Dzięki temu możemy dowieść następujący rezultat.

Lemat 3 *Rozpatrzmy kinematykę PUMY w pewnym otoczeniu konfiguracji osobliwej $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{06}) \in OS1^*$. Załóżmy, że $0 < x_{02} + x_{03} < \pi$, $0 < x_{04} < \pi$, $x_{05} = 0$. Wówczas stopień różniczkowy kinematyki w konfiguracji x_0 jest równy ∞ .*

Dowód: Dowód zasadza się na obserwacji, że wektory v_i spełniające układ równań (2.12) są współliniowe z wektorem $v_1 \in \ker J(x_0)$. Ponieważ corank $x_0 = 1$ wystarczy dowieść, że dla $i = 1, 2, \dots, 6$ i dowolnego $m \geq 2$ różniczki

$$\frac{\partial^m k_i(x_0)}{\partial x^m} \underbrace{v_1 \dots v_1}_{m \text{ razy}} = 0.$$

Ostatecznie lematu dowiedzimy wykorzystując postać wektora v_1 i wyznacznika macierzy Jacobiego $\det \frac{\partial k}{\partial x}(x_0)$.

Zgodnie ze strategią nakreśloną powyżej, w pierwszej kolejności musimy znaleźć wyrażenie opisujące wektor v_1 . Jak wiadomo, wektor ten jest rozwiązaniem układu równań $\frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_0)v_1 = 0$ z $\bar{k}(\bar{x})$ danym przez (3.79). Jednakże łatwo zauważyć, że możemy go znaleźć wykorzystując fakt, że $\ker J(x_0) = \ker \frac{\partial k}{\partial x}(x_0)$. Ponieważ równanie

$$J(x_0)w_1 = 0$$

ma rozwiązanie $w_1 = \gamma(0, 0, 0, -1, 0, 1)^T$, $\gamma \in \mathbb{R}$, więc wektor $v_1 = \gamma(1, 0, 0, -1, 0, 0)^T$. Dla $i = 1, 2, \dots, 6$, $m \geq 2$, różniczka

$$\frac{\partial^m k_i}{\partial \bar{x}^m}(\bar{x}_0) \underbrace{v_1 \dots v_1}_{m \text{ razy}} = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_6 = m} \frac{m!}{j_1! j_2! \dots j_6!} \frac{\partial^m k_i}{\partial \bar{x}_1^{j_1} \dots \partial \bar{x}_6^{j_6}}(\bar{x}_0) (v_1^1)^{j_1} \dots (v_1^6)^{j_6}.$$

Po podstawieniu współrzędnych wektora v_1 , otrzymujemy

$$\frac{\partial^m k_i}{\partial \bar{x}^m}(\bar{x}_0) \underbrace{v_1 \dots v_1}_{m \text{ razy}} = \gamma^m \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{\partial^m k_i}{\partial \bar{x}_1^j \partial \bar{x}_4^{m-j}}(\bar{x}_0) (-1)^{m-j}. \quad (3.82)$$

Analiza postaci macierzy Jacobiego (3.71) w konfiguracjach osobliwych x_0 spełniających założenia dowodzonego lematu pozwala zauważyć, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, 6$ i $m \geq 2$, $j = 0, 1, \dots, m$ mamy

$$\frac{\partial^m k_i}{\partial x_6^j \partial x_4^{m-j}}(x_0) = 0,$$

co jest równoważne

$$\frac{\partial^m \bar{k}_i}{\partial \bar{x}_1^j \partial \bar{x}_4^{m-j}}(\bar{x}_0) = 0. \quad (3.83)$$

Podstawiając (3.83) do (3.82) stwierdzamy ostatecznie, że

$$\frac{\partial^m \bar{k}_i}{\partial \bar{x}^m}(\bar{x}_0) \underbrace{v_1 \dots v_1}_{m \text{ razy}} = 0. \quad (3.84)$$

Następstwem zależności (3.84) i (2.12) jest fakt, że każdy wektor v_i , $i > 1$ pojawiający się w (2.12) ma postać

$$v_i = \gamma_i v_1, \quad (3.85)$$

dla pewnych $\gamma_i \in \mathbb{R}$.

Jesteśmy teraz gotowi do analizy warunku (2.11). Zgodnie ze Spostrzeżeniem 1, warunek (2.11) nie ulegnie zmianie, jeśli występująca w nim macierz Jacobiego zostanie zastąpiona jakobianem manipulatora, którego wyznacznik jest dany wyrażeniem (3.72). Łatwo zauważyć, że wyznacznik ten nie zależy od x_4 i x_6 . We współrzędnych wprowadzonych przez (3.79) oznacza to, że dla każdego $m \geq 2$ różniczka

$$D^m(\det \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{x}})(\bar{x}_0) \underbrace{v_1 \dots v_1}_{m \text{ razy}} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{\partial^m}{\partial \bar{x}_1^j \partial \bar{x}_4^{m-j}} (\det \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{x}})(\bar{x}_0) (v_1^1)^j (v_1^4)^{m-j} = 0. \quad (3.86)$$

Ponieważ każdy wektor v_i w warunku (2.11) ma postać (3.85), następstwem własności (3.86) jest fakt, że stopień różniczkowy kinematyki *PUMY* w x_0 jest nieskończony $\square$

Dotychczas wykorzystaliśmy jedynie część Twierdzenia 1 pozwalającą stwierdzić, kiedy kinematyka *PUMY* jest równoważna pre-hiperbolicznej postaci normalnej. Jak wynika z dalszej części Twierdzenia 1, postać ta może zostać uściślona, jeżeli kinematyka (3.79) z dyfeomorfizmem $\varphi(\bar{x})$ danym przez (3.80) spełnia warunek (2.9). Do sprawdzenia tego warunku ponownie możemy użyć jakobianu $J(x)$ zamiast macierzy Jacobiego $\frac{\partial k}{\partial x}(x)$. Dla $x_0 \in OS1^*$ pochodna $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\det J)(x_0) = (0, 0, 0, 0, *, 0)$ gdzie $*$ oznacza pewien element niezerowy. Dla macierzy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial k_2}{\partial x_6} & \frac{\partial k_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial k_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial k_3}{\partial x_6} & \frac{\partial k_3}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial k_3}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial k_1}{\partial x_6} & \frac{\partial k_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial k_6}{\partial x_6} & \frac{\partial k_6}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial k_6}{\partial x_1} \end{bmatrix} (\bar{x}_0),$$

można pokazać, że piąty wiersz macierzy $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_0)\right)^{-1}$ również zawiera elementy niezerowe pod warunkiem, że $0 < x_{02} < \pi$, $x_{03} \neq \arctan \frac{d_4 + d_6}{a_3}$, $x_{05} = 0$. Stwierdzamy, że warunek (2.9) Twierdzenia 1 jest spełniony.

Na podstawie Twierdzenia 28, Lematu 2 wraz z Twierdzeniem 32 i Wnioskiem 2, Lematu 3 wraz z Twierdzeniem 1 oraz powyższych rozważań jesteśmy w stanie wykazać następujące

Twierdzenie 29 *Rozpatrzmy kinematykę manipulatora PUMA (3.63)–(3.65). Wówczas, w pewnym otoczeniu dowolnej konfiguracji osobliwej rzędu 1, rozpatrywana kinematyka jest równoważna jednej z poniższych postaci normalnych:*

- dla $x_0 \in OS2^* \cup OS3^*$ kwadratowej postaci normalnej

$$k_0(x_1, \dots, x_6) = (x_1^2, x_2, \dots, x_6);$$

- dla $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{06}) \in OS1^*$ z $0 < x_{02} + x_{03} < \pi$, $0 < x_{04} < \pi$, $x_{05} = 0$ pre-hiperbolicznej postaci normalnej

$$k_0(x_1, \dots, x_6) = (x_1 u(x), x_2, \dots, x_6),$$

z pewną analityczną funkcją $u(x)$ znikającą w zerze; jeśli dodatkowo spełnione są warunki $0 < x_{02} < \pi$, $x_{03} \neq \arctan \frac{d_4 + d_6}{a_3}$ – hiperbolicznej postaci normalnej

$$k_0(x_1, \dots, x_6) = \left(x_1 x_2 + \sum_{k=3}^6 x_1 x_k u_k(x), x_2, \dots, x_6 \right),$$

gdzie $u_k(x)$ są pewnymi funkcjami analitycznymi.

Część powyższego twierdzenia dotycząca kwadratowej postaci normalnej została udowodniona w pracy [KTM93]. Porównanie otrzymanych wyników z przypadkiem kinematyki przestrzennej typu RRR przy $\alpha_2 = 0$ (podrozdział 3.2.8) pozwala oczekiwać, że na przecięciu osobliwości $OS2$ i $OS3$ kinematyka *PUMY* będzie równoważna wielomianowej postaci normalnej rzędu 4-tego.

Część II

Algorytmy sterowania kinematyk osobliwych

Rozdział 4

Podstawy teoretyczne

Bieżący rozdział niniejszej rozprawy poświęcimy przedstawieniu nowego algorytmu śledzenia trajektorii osobliwych dla manipulatorów nieredundantnych opartego na wykorzystaniu postaci normalnych kinematyki. Algorytm ten może być uważany za rozszerzenie podejścia pośredniego do rozwiązania zadania śledzenia dla manipulatorów nieredundantnych. Główna idea leżąca u podstaw algorytmu polega na przekształceniu zadania śledzenia dla kinematyki wyjściowej do zadania śledzenia dla reprezentującej ją postaci normalnej, rozwiązaniu zadania śledzenia dla tej postaci normalnej i przekształceniu uzyskanego wyniku z powrotem do oryginalnych współrzędnych kinematyki wyjściowej.

Poddajmy układ (1.17) działaniu następujących przekształceń:

$$\left. \begin{aligned} &\bullet \text{ zmianie współrzędnych w przestrzeni wewnętrznej, } x \mapsto \varphi(x), \\ &\bullet \text{ zmianie współrzędnych w przestrzeni roboczej, } y \mapsto \psi(y), \\ &\bullet \text{ statycznemu sprzężeniu zwrotnemu } u \mapsto \alpha(x, \theta) + \beta(x, \theta)u. \end{aligned} \right\}, \quad (4.1)$$

gdzie $\varphi(x)$, $\psi(y)$ są (lokalnymi) dyfeomorfizmami, $\alpha(x, \theta)$, $\beta(x, \theta)$ są odwzorowaniami gładkimi (analitycznymi), $\beta(x, \theta)$ jest macierzą odwracalną. Należy zauważyć, że dyfeomorfizm $\varphi(x)$ zdefiniowany w przestrzeni wewnętrznej manipulatora indukuje w naturalny sposób dyfeomorfizm przestrzeni stanu układu (1.17)

$$(x, \theta) \mapsto (\varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\theta) = (\xi, \zeta). \quad (4.2)$$

Poddając układ sterowania (1.17) działaniu arbitralnie wybranych dyfeomorfizmów $\varphi(x)$, $\psi(y)$ otrzymujemy nowy układ opisany równaniami

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \theta \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \theta^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dot{\theta} \end{pmatrix} \\ \eta &= \psi \circ k \circ \varphi^{-1}(\xi) \end{aligned} \right\}, \quad (4.3)$$

gdzie $\dot{\theta}$ jest zdefiniowane w (1.17) a $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \theta^2\right)_i = \theta^T \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \theta$. Nietrudno pokazać, że przez dobór sprzężenia zwrotnego

$$u \mapsto \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \theta^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} F(x, \theta) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} G(x)u, \quad (4.4)$$

możemy przekształcić układ (1.17) do postaci

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \theta \\ \dot{\theta} &= u \\ y &= \psi \circ k \circ \varphi^{-1}(x) \end{aligned} \right\}. \quad (4.5)$$

Jak wynika z powyższych rozważań, poddając model manipulatora działaniu przekształceń (4.1), jesteśmy w stanie, przynajmniej lokalnie, nadać mu postać złożoną z liniowej dynamiki rzędu 2 i kinematyki wynikającej z działania pary lokalnych dyfeomorfizmów $\varphi(x)$, $\psi(y)$ na kinematykę wyjściową $k(x)$. Jak wiemy ze wstępu i rozdziału 2, odpowiedni dobór dyfeomorfizmów pozwala zazwyczaj na przekształcenie kinematyki do jednej z postaci normalnych. W najprostszym przypadku, kinematykę nieredundantną znajdującą się w konfiguracji regularnej można przekształcić do postaci liniowej (1.23) (zobacz podrozdział 1.4). Możemy więc stwierdzić, że algorytmy śledzenia trajektorii dane zależnościami (1.18), (1.19) są stosowalne tylko dla manipulatorów o kinematyce równoważnej postaci liniowej (1.23). W tym momencie pojawia się pytanie o sposób śledzenia trajektorii, gdy kinematyka staje się nieliniowa, tzn. gdy przyjmuje ona konfiguracje osobliwe. Okazuje się, że z pomocą przychodzą nam postacie normalne kinematyki osobliwej, których określeniu została poświęcona pierwsza część niniejszej rozprawy. Podejście wykorzystujące postacie normalne kinematyki osobliwej nazywać będziemy *metodą postaci normalnych*. Metoda postaci normalnych powinna dostarczyć algorytmów dostrojonych do matematycznego charakteru odwzorowania kinematycznego. Jej główna idea, oparta na podejściu pośrednim do rozwiązywania zadania śledzenia trajektorii, sprowadza rozwiązanie zadania śledzenia do rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki dla postaci normalnej. Rozwijając tę ideę, dyrektywy wynikające z metody postaci normalnych można sformułować w postaci następującej procedury.

Dla trajektorii odniesienia $y_d(t)$ zadanej w przestrzeni roboczej manipulatora:

1. rozwiązać, o ile jest to możliwe, odwrotne zadanie kinematyki stosownie do algorytmu (1.14), (1.15). Jeśli układ (1.14) staje się źle uwarunkowany oznacza to, że trajektoria $x_d(t)$ znalazła się w pobliżu pewnej konfiguracji osobliwej x_0 ;
2. używając Wniosków 2, 3 i Twierdzeń 1, 2 wyznaczyć postać normalną $k_0(\xi)$ kinematyki $k(x)$ w otoczeniu konfiguracji osobliwej x_0 , a następnie znaleźć lokalne dyfeomorfizmy $\xi = \varphi(x)$, $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$, wokół $x_0 \in U$, i $\eta = \psi(y)$, $\psi : V \rightarrow \psi(V)$, wokół $k(x_0) \in V$, takie że

$$k_0(\xi) = \psi \circ k \circ \varphi^{-1}(\xi);$$

3. rozwiązać zadanie odwrotne kinematyki dla $k_0(\xi)$, tj. znaleźć odcinek trajektorii $\xi_d(t) \in \varphi(U)$, taki że

$$\psi(y_d(t)) = k_0(\xi_d(t));$$

4. przetransformować $\xi_d(t)$ do oryginalnych współrzędnych uzyskując odcinek trajektorii osobliwej

$$x_d(t) = \varphi^{-1}(\xi_d(t));$$

5. skleić rozwiązanie otrzymane w otoczeniu U z rozwiązaniem otrzymanym w punkcie 1;
6. powtarzać kroki 1–5 aż do znalezienia całej trajektorii $x_d(t)$ w przestrzeni wewnętrznej;
7. zastosować wybrany algorytm śledzenia trajektorii w przestrzeni wewnętrznej.

Spostrzeżenie 2 *Nietrudno zauważyć, że najtrudniejsze do realizacji są kroki 2 i 3 niniejszej procedury. W kroku 2 musimy znaleźć postacie dyfeomorfizmów transformujących kinematykę do postaci normalnej. Jednakże twierdzenia pozwalające na określenie postaci normalnej kinematyki osobliwej korzędu 1 nie dają żadnych wskazówek co do sposobu określenia postaci tych dyfeomorfizmów. Istnieje wprawdzie ogólna metoda wyznaczania dyfeomorfizmów tego typu, znana jako metoda homotopii (omówiona w dodatku C), ale jej użyteczność w praktycznych zastosowaniach wydaje się ograniczona. Praktyczny sposób znalezienia dyfeomorfizmów został przedstawiony w następnym rozdziale niniejszej rozprawy, ilustrującym zastosowania metody postaci normalnych*.*

Następnym krokiem procedury mogącym przysporzyć kłopotów jest krok 3. Postać normalna kinematyki musi być wystarczająco prosta, aby było dla niej możliwe rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki. Z pewnością jest to spełnione dla kwadratowej postaci normalnej, która jest najczęściej spotykaną postacią normalną kinematyki nieredundantnej w konfiguracjach osobliwych.

Pewnych trudności przysporzyć może krok 5 procedury. Zasadniczo, przy arbitralnie wybranej dokładności określania dyfeomorfizmów φ i ψ , polega on na wyborze chwili czasu, w której dokonamy przetłoczenia z trajektorii nieosobliwej na osobliwą i vice versa. Chwila ta powinna być wybrana w taki sposób, aby uzyskana trajektoria wynikowa była tak gładka, jak tylko to jest możliwe.

Spostrzeżenie 3 *Można przyjąć, że zaproponowana metoda postaci normalnych jest bezpośrednim rozszerzeniem podejścia pośredniego do rozwiązania zadania śledzenia dla manipulatorów nieredundantnych, albowiem w przypadku trajektorii nie wymagających wchodzenia w konfiguracje osobliwe metoda postaci normalnych redukuje się do algorytmu (1.14). Istotną zaletą metody polega na tym, że oferuje ona sposób rozwiązania zadania śledzenia dla konfiguracyj osobliwych, kiedy algorytm (1.14) nie może być zastosowany.*

*Pokrótce, wykorzystuje on fakt, że dyfeomorfizmy φ , ψ są analityczne, mogą więc być reprezentowane przez ich rozwinięcia w szereg Taylora. Jesteśmy w ten sposób w stanie wyznaczyć ich postacie z dowolnie przyjętą dokładnością.

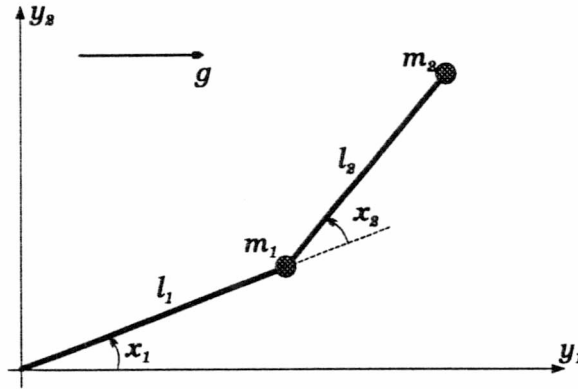
Rozdział 5

Sterowanie wybranymi kinematykami osobliwymi

Bieżący rozdział poświęcimy na zilustrowanie działania metody postaci normalnych opisanej w rozdziale 4 przez zastosowanie jej do kilku modelowych przypadków. W pierwszym podrozdziale zostanie przedstawione zastosowanie metody do planarnego manipulatora o dwóch rotacyjnych stopniach swobody. Celem tej prezentacji będzie ukazanie wszystkich szczegółów związanych ze stosowaniem metody na maksymalnie prostym przykładzie. Znajdzie się tu, obok wyprowadzenia wyrażeń na przekształcenia wykorzystywane podczas rozwiązywania problemu, szczegółowy opis roli, jaką te przekształcenia odgrywają w rozwiązaniu. Dodatkowo, zostaną przytoczone rezultaty przeprowadzonych symulacji komputerowych, polegających na realizacji otrzymanej trajektorii przy użyciu typowego algorytmu sterowania opartego na metodzie obliczanego momentu. Następnie, w podrozdziale 5.2, zostanie opisane zastosowanie metody postaci normalnych do prostych manipulatorów przestrzennych o trzech stopniach swobody. W tym przypadku jako cel postawiono nie tyle zilustrowanie problemów towarzyszących stosowaniu metody, co jej własności. Na zakończenie, w podrozdziale 5.3, przedstawiono próbę zastosowania metody postaci normalnych do przemysłowego manipulatora montażowego typu *AdeptOne* i porównano jej własności z własnościami algorytmu wbudowanego w sterownik manipulatora. Należy dodać, że wszystkich obliczeń, niezbędnych do wykonania przy zastosowaniu metody postaci normalnych, dokonano z wykorzystaniem systemu obliczeń symbolicznych MATHEMATICA, [Wol88], w oparciu o pakiet oprogramowania przeznaczony do syntezy algorytmów sterowania kinematyk osobliwych, opisany w dodatku B.

5.1 Manipulatory o 2 stopniach swobody

Rozpatrzmy zadanie śledzenia trajektorii dla prostego manipulatora planarnego o dwóch stopniach swobody, przedstawionego na rysunku 5.1. Masy ramion manipulatora, $m_1 = 1$ i $m_2 = 1$, są reprezentowane przez masy punktowe skupione w końcach ramion. Długości ramion wynoszą odpowiednio $l_1 = 6$ i $l_2 = 3$. Przy założeniu, że kąty obrotu przegubów manipulatora mogą przyjmować dowolne wartości pomiędzy $-\pi$ a π , zbiór konfiguracji wewnętrznych manipulatora tworzy dwuwymiarowy torus $\mathbb{T}^2$.



Rysunek 5.1: Manipulator planarny typu RR.

przegub	θ_i	α_i	d_i	a_i	m_i
1	x_1	0	0	6	1
2	x_2	0	0	3	1

Tabela 5.1: Parametry Denavita-Hartenberga i masy ramion manipulatora planarnego typu RR.

Kinematyka i jacobian manipulatora

Liczbowe wartości parametrów Denavita-Hartenberga rozpatrywanego manipulatora zostały zebrane w tabeli 5.1. Ponieważ interesują nas manipulatory, dla których wymiar przestrzeni roboczej jest równy liczbie stopni swobody, poniżej ograniczymy się jedynie do współrzędnych położenia kinematyki manipulatora. W takiej sytuacji kinematyka manipulatora ma postać

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = k(x) = \begin{pmatrix} 6 \cos x_1 + 3 \cos(x_1 + x_2) \\ 6 \sin x_1 + 3 \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

gdzie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, a jego jacobian

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} -6 \sin x_1 - 3 \sin(x_1 + x_2) & -3 \sin(x_1 + x_2) \\ 6 \cos x_1 + 3 \cos(x_1 + x_2) & 3 \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Obliczenie wyznacznika jacobianu manipulatora pozwala stwierdzić, że zbiór konfiguracji osobliwych manipulatora jest dany wzorem (3.4).

Dynamika manipulatora

Przyjmijmy, że manipulator znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym ze stałą grawitacji $g = 10$ skierowaną wzdłuż osi y_1 bazowego układu współrzędnych (zobacz rysunek 5.1). Wszystkie parametry manipulatora, niezbędne do wyprowadzenia jego dynamiki, są przedstawione w tabeli 5.1.

Na podstawie obliczeń przeprowadzonych w [Pau81], równania dynamiki (1.16) manipulatora planarnego RR przyjmują postać

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 81 + 36 \cos q_2 & 9 + 18 \cos q_2 \\ 9 + 18 \cos q_2 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -18 \sin q_2 & -36 \sin q_2 \\ 18 \sin q_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 120 \sin q_1 + 30 \sin(q_1 + q_2) \\ 30 \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (5.3) \end{aligned}$$

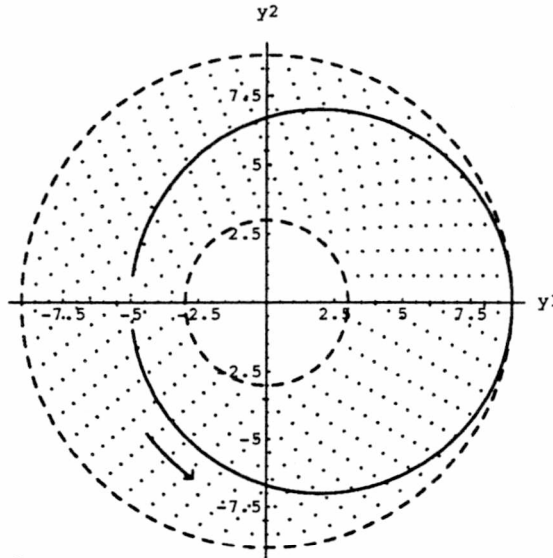
Powyższe równania zostaną wykorzystane w ostatniej części niniejszego podrozdziału opisującej wykonanie zaplanowanej trajektorii przez układ sterowania.

5.1.1 Rozwiązanie zadania śledzenia trajektorii

Założmy, że efektor manipulatora ma podążać wzdłuż trajektorii odniesienia w przestrzeni roboczej, zadanej przez funkcję

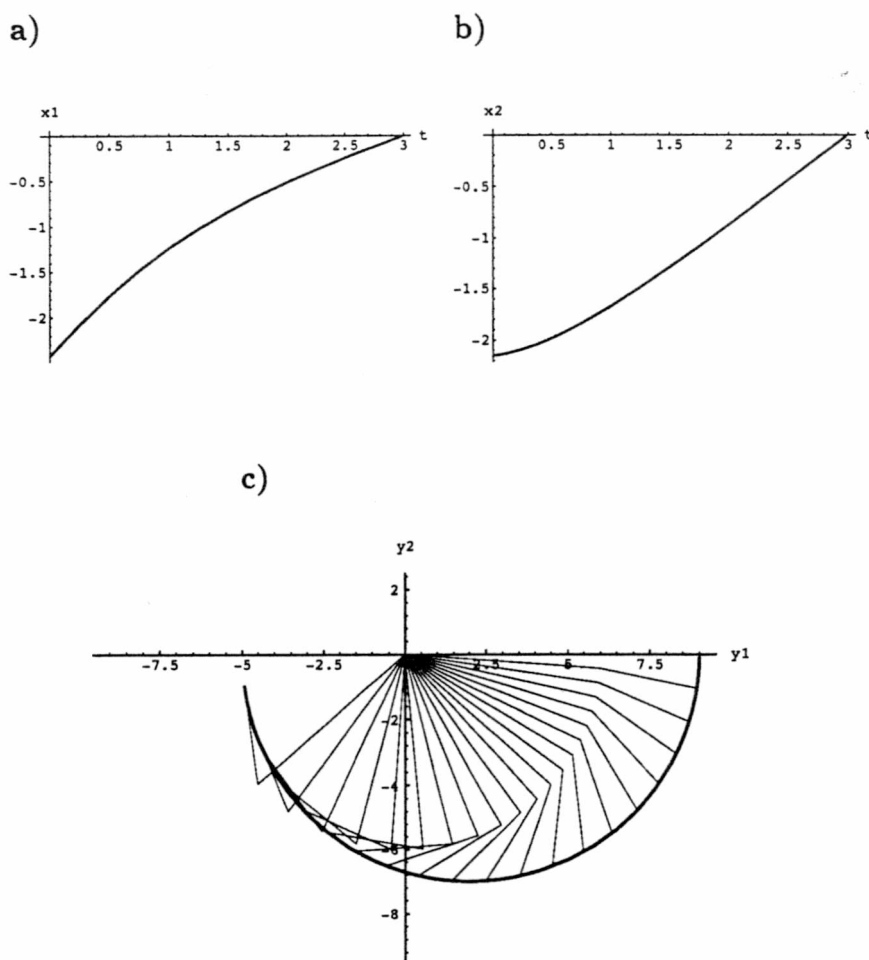
$$y_d(t) = \begin{pmatrix} 2 + 7 \cos(t - 3) \\ 7 \sin(t - 3) \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

zdefiniowaną dla czasu $t \in [0, 6]$. Rysunek 5.2 przedstawia ścieżkę w przestrzeni roboczej odpowiadającą zadanej trajektorii. Dodatkowo, na rysunku została pokazana przestrzeń robocza, której brzeg zaznaczono linią przerywaną. Strzałka pokazuje kierunek upływu czasu wzdłuż ścieżki.



Rysunek 5.2: Ścieżka zadana w przestrzeni roboczej manipulatora.

Rozwiązując równania (1.14), (1.15) dla kinematyki (5.1) i zadanej trajektorii $y_d(t)$ przy użyciu jednej ze znanych metod jacobianowych (w tym przypadku metodą Runge-Kutty zaimplementowanej w pakiecie programów MATHEMATICA 2.2, [Wol88]), otrzymujemy pożądaną trajektorię $x_d(t)$ w przestrzeni wewnętrznej manipulatora, jak pokazano



Rysunek 5.3: Nieosobliwe odwrotne zadanie kinematyki:

- a), b) nieosobliwy odcinek pożądanej trajektorii w przestrzeni wewnętrznej;
- c) odpowiadająca jej ścieżka w przestrzeni roboczej.

na rysunku 5.3 a), b). Ścieżkę w przestrzeni roboczej odpowiadającą przedstawionej trajektorii przedstawia wykres c) na tym rysunku. Wykres c) pokazuje również ciąg konfiguracji manipulatora wzdłuż realizowanej ścieżki. Jak widać z zamieszczonych wykresów, zastosowanie typowej metody jacobianowej nie daje kompletnego rozwiązania, lecz tylko jego część odpowiadającą przedziałowi czasu $[0, 2.98]$. Jest to spowodowane tym, że manipulator w trakcie realizacji zadania wchodzi w otoczenie konfiguracji osobliwej, gdzie nie można znaleźć macierzy odwrotnej do jacobianu manipulatora. Ponieważ, jak pokazano w podrozdziale 3.1.1 (Twierdzenie 3), wszystkie konfiguracje osobliwe rozpatrywanego manipulatora mają kwadratową postać normalną, do rozwiązania zadania możemy zastosować metodę postaci normalnych opisaną w rozdziale 4. Pozostała część bieżącego podrozdziału zostanie poświęcona szczegółowej prezentacji niezbędnych obliczeń związanych z zastosowaniem metody postaci normalnych. Założono, że wszystkie przedstawione zmiany układów współrzędnych są zdefiniowane lokalnie wokół konfiguracji osobliwej $x_0 = (0, 0)$ i jej odpowiednich obrazów.

Przekształcenie kinematyki do postaci pre-normalnej

Pierwszym krokiem metody postaci normalnych jest przekształcenie równań kinematyki manipulatora do postaci pre-normalnej (2.4). Po dokonaniu zmiany układu współrzędnych danej zależnościami

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \bar{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 6 \sin x_1 + 3 \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}, \quad (5.5')$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \bar{\psi}(y) = \begin{pmatrix} y_1 - 9 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (5.5'')$$

$\bar{\varphi}(x_0) = \bar{x}_0 = (0, 0)$, $\bar{\psi}(k(x_0)) = (0, 0)$, kinematyka (5.1) przyjmuje postać pre-normalną

$$\bar{y} = \bar{k}(\bar{x}) = \bar{\psi} \circ k \circ \bar{\varphi}^{-1}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 6 \cos \bar{x}_1 + \sqrt{9 - (\bar{x}_2 - 6 \sin \bar{x}_1)^2} - 9 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Nietrudno zauważyć, że dyfeomorfizm $\bar{\varphi}^{-1}$ występujący w powyższym złożeniu funkcji, jest dany przez

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{\varphi}^{-1}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \arcsin \frac{\bar{x}_2 - 6 \sin \bar{x}_1}{3} - \bar{x}_1 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

W przypadku, gdy nie jesteśmy w stanie określić dokładnej postaci dyfeomorfizmów przekształcających kinematykę do postaci pre-normalnej możemy szukać ich przybliżeń w postaci rozwinięć w szereg Taylora (tak jak to zrobiono w przykładzie zamieszczonym w dodatku B).

Przekształcenie kinematyki do postaci kwadratowej

Ponieważ zazwyczaj nie jesteśmy w stanie wyznaczyć dokładnej postaci dyfeomorfizmów przekształcających kinematykę do kwadratowej postaci normalnej, wiedząc że są one analityczne, będziemy szukać ich rozwinięć w szereg Taylora. Poniżej, dla zwięzłości wykładu, zostanie przedstawiony przypadek, w którym rozwinięcia będą dokonywane z dokładnością do wyrazów rzędu trzeciego (włącznie). Pierwszym krokiem do znalezienia rozwinięć poszukiwanych dyfeomorfizmów jest rozwinięcie w szereg Taylora kinematyki (5.6) wokół konfiguracji osobliwej $\bar{x}_0 = (0, 0)$. Dla rozpatrywanej kinematyki otrzymujemy szereg postaci

$$\bar{y} = \bar{k}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -9\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_1\bar{x}_2 - \frac{\bar{x}_2^2}{6} + o^4(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Bedziemy teraz szukać pary dyfeomorfizmów $\eta = \psi(\bar{y}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\bar{y}) \\ \psi_2(\bar{y}) \end{pmatrix}$ i $\xi = \varphi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ \varphi_2(\bar{x}) \end{pmatrix}$ spełniających następujące równanie

$$\psi \circ \bar{k}(\bar{x}) = k_0 \circ \varphi(\bar{x}), \quad (5.9)$$

gdzie $\eta = k_0(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \end{pmatrix}$ jest kwadratową postacią normalną rozpatrywanej kinematyki. Zaczniemy od obserwacji, że dla drugich współrzędnych poszukiwanych dyfeomorfizmów

mamy $\eta_2 = \psi_2(\bar{y}) = \bar{y}_2$, $\xi_2 = \varphi_2(\bar{x}) = \bar{x}_2$. Aby znaleźć $\varphi_1(\bar{x})$ i $\psi_1(\bar{y})$ założymy, że rozwinięcie w szereg Taylora dyfeomorfizmu φ ma postać

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \varphi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

gdzie $\varphi_1(\bar{x}) = a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + a_3\bar{x}_1^2 + a_4\bar{x}_1\bar{x}_2 + a_5\bar{x}_2^2 + o^3(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $a_1 \div a_5$ – nieznane współczynniki liczbowe. Wówczas, złożenie kinematyki k_0 z dyfeomorfizmem φ prowadzi do wyrażenia

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = k_0 \circ \varphi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\bar{x})^2 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

gdzie $\varphi_1(\bar{x})^2 = a_1^2\bar{x}_1^2 + 2a_1a_2\bar{x}_1\bar{x}_2 + a_2^2\bar{x}_2^2 + 2a_1a_3\bar{x}_1^3 + 2(a_2a_3 + a_1a_4)\bar{x}_1^2\bar{x}_2 + 2(a_2a_4 + a_1a_5)\bar{x}_1\bar{x}_2^2 + 2a_2a_5\bar{x}_2^3 + o^4(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Z drugiej strony, rozwinięcie w szereg Taylora dyfeomorfizmu ψ postaci

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \psi(\bar{y}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\bar{y}) \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

gdzie $\psi_1(\bar{y}) = b_1\bar{y}_1 + b_2\bar{y}_2 + b_3\bar{y}_2^2 + b_4\bar{y}_2^3 + o^4(\bar{y}_2)$ z $b_1 = \pm 1$ i z nieznanymi współczynnikami $b_2 \div b_4$, po złożeniu z $\bar{k}$ daje

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \psi \circ \bar{k}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\bar{k}(\bar{x})) \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

gdzie $\psi_1(\bar{k}(\bar{x})) = b_2\bar{x}_2 - 9b_1\bar{x}_1^2 + 2b_1\bar{x}_1\bar{x}_2 + (b_3 - \frac{b_1}{6})\bar{x}_2^2 + b_4\bar{x}_2^3 + o^4(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Szczególna postać rozwinięcia dyfeomorfizmu ψ w szereg Taylora (brak niektórych wyrazów) wynika z wykorzystania dodatkowych informacji o jego formie, [TM95b]. Porównanie współczynników przy odpowiednich potęgach w (5.11) i (5.13) pozwala stwierdzić, że dyfeomorfizm rozmaitości wewnętrznej

$$\xi = \varphi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 3\bar{x}_1 - \frac{1}{3}\bar{x}_2 + o^3(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

wraz z dyfeomorfizmem rozmaitości zewnętrznej

$$\eta = \psi(\bar{y}) = \begin{pmatrix} -\bar{y}_1 - \frac{1}{18}\bar{y}_2^2 + o^4(\bar{y}_2) \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

przekształcają kinematykę (5.8) do kwadratowej postaci normalnej (z dokładnością do wyrazów rzędu trzeciego), a co za tym idzie, dyfeomorfizmy te złożone z dyfeomorfizmami (5.5) dokonują analogicznego przekształcenia dla kinematyki (5.1).

Jak wynika z kroku 4 procedury opisaney na stronie 78, oprócz znalezionych dotychczas przekształceń, do rozwiązania zadania będzie potrzebny dyfeomorfizm odwrotny φ^{-1} . Pomimo, że w rozpatrywanym przykładzie znalezienie tego dyfeomorfizmu jest niezwykle proste, poniżej przedstawimy pełne wyprowadzenie dla zilustrowania metody wyznaczania rozwinięcia Taylora dyfeomorfizmu odwrotnego do danego.

Ponownie założymy, że szukamy rozwinięcia w szereg Taylora danego przez

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \varphi^{-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{-1}(\xi) \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

gdzie $\varphi_1^{-1}(\xi) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_1^2 + a_4\xi_1\xi_2 + a_5\xi_2^2 + o^3(\xi_1\xi_2)$, $a_1 \div a_5$ – nieznane współczynniki. Wykorzystując identyczność

$$\xi = \varphi \circ \varphi^{-1}(\xi) \quad (5.17)$$

dla dyfeomorfizmu (5.14) dostajemy wyrażenie

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_1^2 + a_4\xi_1\xi_2 + a_5\xi_2^2) - \frac{1}{3}\xi_2 + o^3(\xi_1, \xi_2) \\ \xi_2 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Porównując współczynniki po obu stronach powyższej równości otrzymujemy dyfeomorfizm φ_1^{-1} postaci

$$\bar{x} = \varphi^{-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{1}{9}\xi_2 + o^3(\xi_1, \xi_2) \\ \xi_2 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Znalezione w dotychczasowych rozważaniach wyrażenia pozwalają na wyznaczenie odcinka trajektorii w przestrzeni wewnętrznej manipulatora będącego rozwiązaniem odwrotnego zadania kinematyki w otoczeniu konfiguracji osobliwej.

Rozwiązanie zadania śledzenia trajektorii w otoczeniu osobliwości

Trajektorii (5.4) zadanej w przestrzeni roboczej dla wyjściowej kinematyki (5.1) w otoczeniu punktu osobliwego x_0 odpowiada trajektoria w przestrzeni roboczej kwadratowego modelu kinematyki

$$\eta_d(t) = \begin{pmatrix} \frac{7}{9}(t-3)^2 + o^4(t-3) \\ 7 \sin(t-3) \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

uzyskana poprzez zastosowanie dyfeomorfizmów (5.5'') i (5.15) do trajektorii (5.4). Wykorzystując fakt, że dla kwadratowej postaci normalnej kinematyka odwrotna wyraża się zależnością $\xi = k_0^{-1}(\eta) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\eta_1} \\ \eta_2 \end{pmatrix}$, z łatwością znajdujemy dla tej postaci trajektorię w przestrzeni wewnętrznej opisaną funkcją

$$\xi_d(t) = \begin{pmatrix} \pm\frac{\sqrt{7}}{3}(t-3) + o^3(t-3) \\ 7 \sin(t-3) \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

która zapewnia realizację trajektorii (5.20). Jak łatwo zauważyć, otrzymaliśmy dwa rozwiązania różniące się między sobą znakiem. Ostatnim krokiem prowadzącym do znalezienia rozwiązania zadania osobliwego jest przekształcenie powyższej trajektorii do oryginalnego układu współrzędnych. Pozwalają na to dyfeomorfizmy $\varphi^{-1}(\xi)$, $\bar{\varphi}^{-1}(\bar{x})$ zdefiniowane odpowiednio przez (5.19) i (5.7). Stosując pierwszy z wymienionych dyfeomorfizmów do wyrażenia (5.21) otrzymujemy

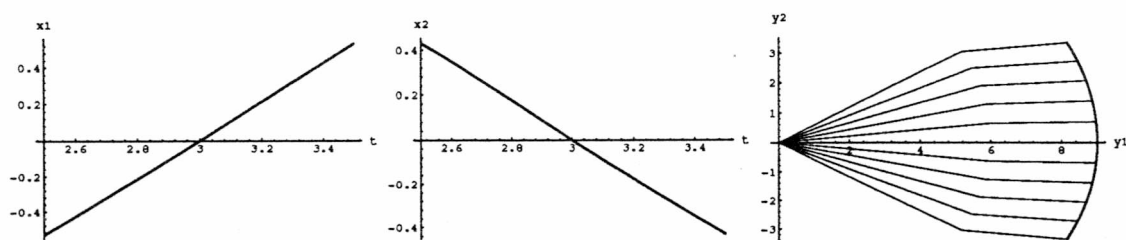
$$\bar{x}_d(t) = \begin{pmatrix} \frac{7\pm\sqrt{7}}{9}(t-3) + o^3(t-3) \\ 7 \sin(t-3) \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

a po zastosowaniu drugiego ze wspomnianych dyfeomorfizmów (5.22) przekształca się w trajektorię

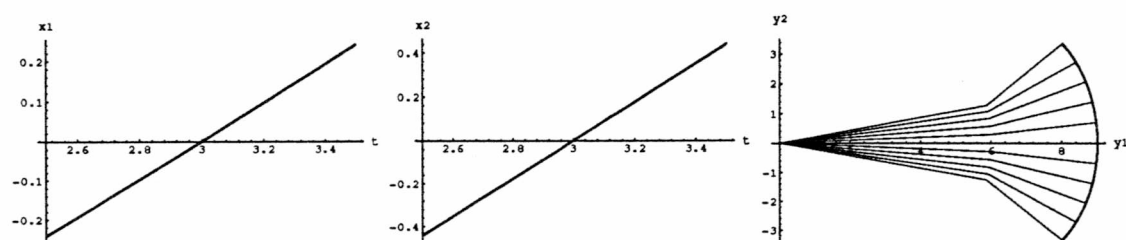
$$x_d(t) = \begin{pmatrix} \frac{7\pm\sqrt{7}}{9}(t-3) + o^3(t-3) \\ \frac{7\pm\sqrt{7}}{3}(t-3) + o^3(t-3) \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Uzyskana trajektoria jest zdefiniowana we współrzędnych wewnętrznych rozpatrywanego manipulatora i pozwala na rozwiązanie zadania śledzenia w otoczeniu konfiguracji osobliwej $x_0 = (0, 0)$. Rysunek 5.4 przedstawia obydwa rozwiązania opisane wyrażeniami (5.23) wraz z odpowiadającymi im ścieżkami w przestrzeni roboczej i ciągiem konfiguracji manipulatora. Jak łatwo zauważyć, z postulatu ciągłości ruchu wynika, że w rozważanym przez

a)



b)



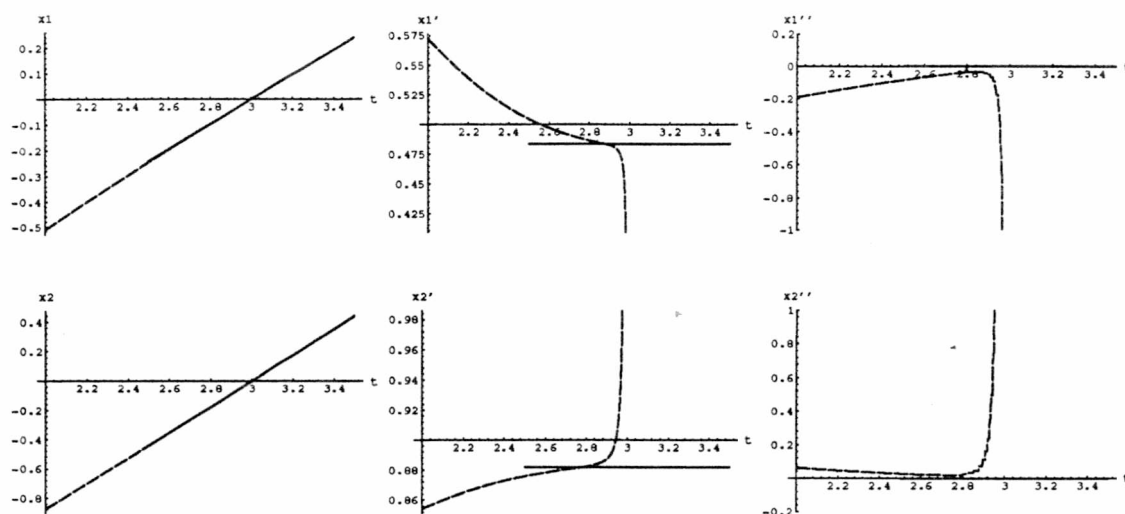
Rysunek 5.4: Pożądane trajektorie w przestrzeni wewnętrznej otrzymane metodą postaci normalnych i odpowiadające im ścieżki w przestrzeni roboczej.

nas przypadku, aby przeprowadzić manipulator przez osobliwość wzdłuż zadanej trajektorii, powinno zostać użyte rozwiązanie przedstawione na rysunku 5.4 b). O wyborze decydują wartości kątów w przegubach, z jakimi manipulator znalazł się w otoczeniu osobliwości. W ogólnym przypadku o wyborze rozwiązania można zdecydować również na podstawie znaku wyznacznika jacobianu manipulatora obliczonego w punkcie, w którym manipulator wszedł w otoczenie osobliwości.

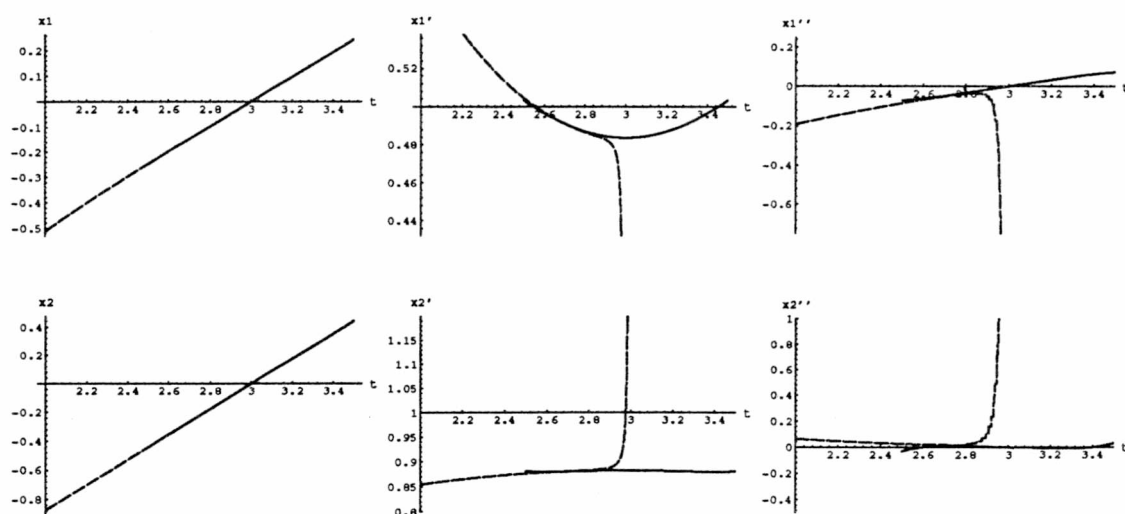
Sklejenie uzyskanych rozwiązań

Następnym etapem konstruowania kompletnego rozwiązania zadania odwrotnego jest połączenie dwóch fragmentów trajektorii określonych w przestrzeni wewnętrznej manipulatora: fragmentu uzyskanego poza konfiguracją osobliwą przez rozwiązanie równań (1.14), (1.15) i fragmentu znalezione przy użyciu metody postaci normalnych zastosowanej w otoczeniu konfiguracji osobliwej. Kluczowym punktem w połączeniu trajektorii jest wybór chwili czasu, w której dokonamy przełączenia z jednej trajektorii na drugą. Chwila ta powinna być wybrana tak, aby uzyskać trajektorie wynikową tak gładką, jak to tylko jest możliwe. Na rysunku 5.5 przedstawiono dwa rozwiązania zadania śledzenia trajektorii: pierwsze, w którym wszystkie przekształcenia rozwijane były w szereg Taylora z

a)



b)



Rysunek 5.5: Fragmenty pożąanych trajektorii (położenie, prędkość, przyspieszenie) w przestrzeni wewnętrznej uzyskanych przy pomocy metody jacobianowej (linia przerywana, odcinek nieosobliwy) i metodą postaci normalnych (linia ciągła, odcinek osobliwy):

- a) z dokładnością do rzędu trzeciego w metodzie postaci normalnych,
- b) z dokładnością do rzędu szóstego w metodzie postaci normalnych.

t [s]	Dokładność o^4				Dokładność o^7			
	$\ddot{x}_1$ $\left[\frac{1}{s^2}\right]$	$\Delta\ddot{x}_1$ $\left[\frac{1}{s^2}\right]$	$\ddot{x}_2$ $\left[\frac{1}{s^2}\right]$	$\Delta\ddot{x}_2$ $\left[\frac{1}{s^2}\right]$	$\ddot{x}_1$ $\left[\frac{1}{s^2}\right]$	$\Delta\ddot{x}_1$ $\left[\frac{1}{s^2}\right]$	$\ddot{x}_2$ $\left[\frac{1}{s^2}\right]$	$\Delta\ddot{x}_2$ $\left[\frac{1}{s^2}\right]$
0.05	-178	-62	888	-20	-178	-62	888	-20
0.10	-236	-58	862	-26	-236	-58	862	-26
0.15	-292	-56	831	-31	-292	-56	831	-31
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2.55	-76	9	24	-3	-76	9	24	-3
2.60	-68	8	22	-2	-68	8	22	-2
2.65	-59	9	20	-2	-59	9	20	-2
2.70	-51	8	20	-1	-50	9	16	-4
2.75	-43	8	19	-1	-41	9	12	-4
2.80	0	43	0	-19	-33	8	9	-3
2.85	0	0	0	0	-25	8	7	-2
2.90	0	0	0	0	-16	9	5	-2

wszystkie przyspieszenia razy 10^{-3}

Tabela 5.2: Chwilowe wartości przyspieszeń w przestrzeni wewnętrznej dla manipulatora planarnego typu RR.

dokładnością do wyrazów rzędu trzeciego i drugie, gdy dokonano tego z dokładnością do wyrazów rzędu szóstego. Zajmijmy się najpierw analizą pierwszego z wymienionych przypadków. Jak widać z wykresów przyspieszeń zamieszczonych w części a) rysunku 5.5, w analizowanym przypadku nie istnieje taka chwila czasu, dla której przyspieszenia wzdłuż trajektorii uzyskane z obu metod pokrywają się. Nie będzie więc możliwe dokonanie przełączenia w taki sposób, aby uzyskać ciągłe przyspieszenia wzdłuż wynikowej trajektorii. Ponieważ wartości prędkości uzyskanych z obu metod są jednakowe tylko w chwili $t = 2.80$, chwilę tą wybierzemy jako chwilę przełączenia z jednej trajektorii na drugą. Towarzyszące temu przełączeniu nieciągłości przyspieszenia będą miały amplitudę 0.037 i -0.023 odpowiednio dla pierwszego i drugiego przegubu manipulatora. Skoki przyspieszeń (szarpnięcia) są oczywiście zjawiskiem niepożądanym. Aby im zapobiec, należy wykorzystać rozwinięcia dyfeomorfizmów przekształcających o większej dokładności. Sytuacja, kiedy rząd rozwinięć w szereg Taylora jest równy 6 została zilustrowana na rysunku 5.5 b). Można natychmiast zauważyć, że dla czasów z przedziału (2.6, 2.8) różnica pomiędzy prędkościami wzdłuż trajektorii uzyskanych z obu metod jest bardzo mała. Jednakże i w tym wypadku prędkości przecinają się tylko w jednym punkcie dla chwili $t = 2.66$. Z tego też względu, jako chwilę przełączenia z jednej trajektorii na drugą wybierzemy $t = 2.66$. Teraz, towarzyszące temu przełączeniu amplitudy skoków przyspieszenia mają wartości 0.001 i -0.003 , odpowiednio dla pierwszego i drugiego przegubu, są więc praktycznie pomijalne.

O znaczeniu skokowych zmian przyspieszeń pojawiających się w chwili przełączenia z jednego rozwiązania na drugie najlepiej można się przekonać analizując dane zebrane w tabeli 5.2. Przedstawia ona chwilowe wartości przyspieszeń w obu rozpatrywanych

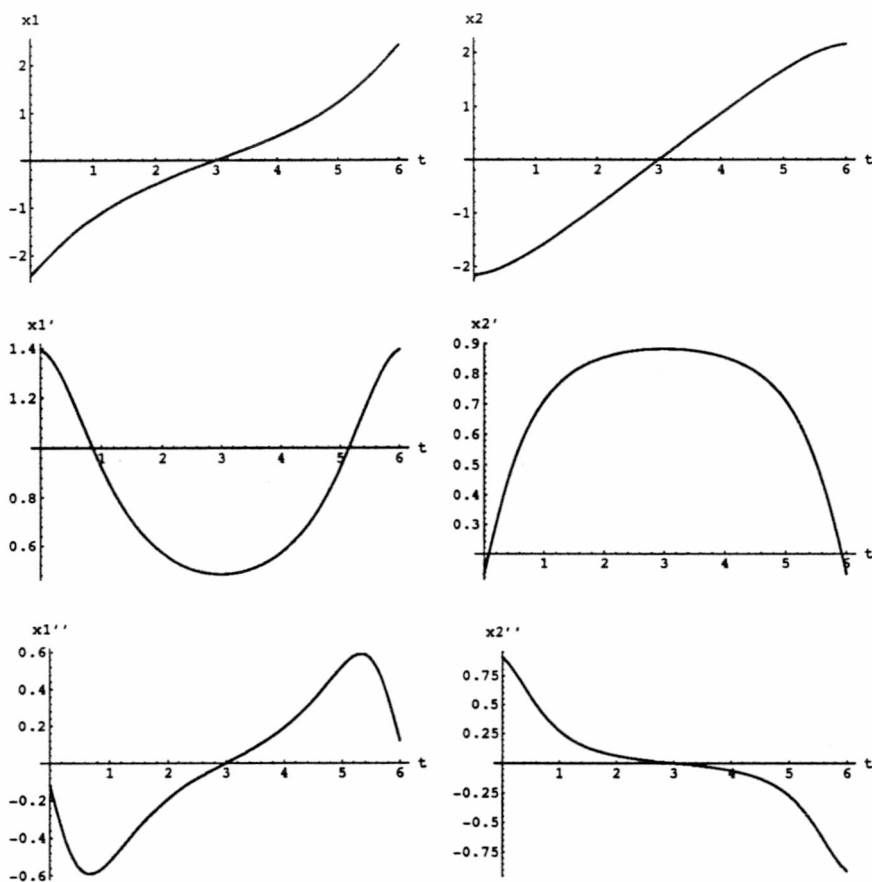
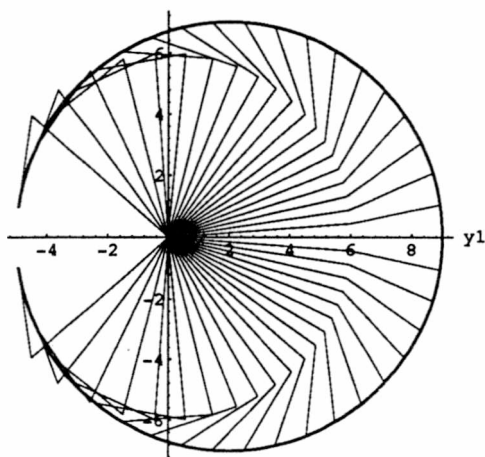
przypadkach w okolicy przełączenia z rozwiązania uzyskanego metodą jakobianową na rozwiązanie uzyskane przy pomocy metody postaci normalnych. Przyjrzyjmy się najpierw części tabeli przedstawiającej sytuację, gdy obliczenia były dokonywane z dokładnością do wyrazów rzędu trzeciego. Jak widać, różnice pomiędzy wartościami przyspieszeń w kolejnych chwilach przed przełączeniem wynosiły około $8 \cdot 10^{-3}$ i $-1 \cdot 10^{-3}$, odpowiednio dla pierwszego i drugiego przegubu manipulatora, aby w chwili przełączenia (miejsce zaznaczone w tabeli poziomą linią) wzrosnąć skokowo do wartości odpowiednio $43 \cdot 10^{-3}$ i $-19 \cdot 10^{-3}$ a następnie spaść do zera. Oprócz pojawiającego się w chwili przełączenia szarpnięcia, po przełączeniu zmienia się szybkość zmiany przyspieszeń w przegubach (po przełączeniu jest ona równa zero). Z drugiej strony, sytuacja nie wydaje się bardzo zła, jeśli porównać wielkości szarpnięć w chwili przełączenia z przyrostami przyspieszeń w 50ms odstępach czasu (dopuszczalna wartość kroku całkowania przy cyfrowej realizacji sterowników), gdy manipulator znajduje się z dala od konfiguracji osobliwej (patrz pierwsze trzy wiersze tabeli). Jak widać, różnice przyspieszeń w chwili przełączenia są wciąż mniejsze od różnic występujących na początku ruchu. Analiza części tabeli zawierającej analogiczne dane przy obliczeniach wykonywanych z dokładnością do wyrazów rzędu szóstego pozwala stwierdzić, że w tym wypadku przełączenie jest praktycznie niezauważalne.

Przeprowadzone dotychczas obliczenia pozwalają na przeprowadzenie manipulatora do i przez konfigurację osobliwą. Ostatnim krokiem jest wykorzystanie metody jakobianowej do rozwiązania równań (1.14) w celu znalezienia ostatniego segmentu trajektorii określonej w przestrzeni wewnętrznej. Po wykonaniu odpowiednich obliczeń i sklejeniu rozwiązań w sposób analogiczny do opisanego powyżej, uzyskujemy kompletne rozwiązanie przedstawione na rysunku 5.6. Wykresy zamieszczone w części a) rysunku przedstawiają pożądane położenia, prędkości i przyspieszenia dla poszczególnych przegubów manipulatora, podczas gdy wykres w części b) pokazuje odpowiadającą im ścieżkę w przestrzeni roboczej manipulatora wraz z ciągiem konfiguracji manipulatora. Jak widać, uzyskane rozwiązanie pozwala na zrealizowanie zadania opisanego funkcją (5.4). Dokładniejsza analiza błędów powstałych podczas śledzenia trajektorii przy użyciu metody postaci normalnych będzie przeprowadzona w następnym rozdziale pracy, poświęconym porównaniu tej metody z innymi metodami stosowanymi do rozwiązywania zadania śledzenia.

5.1.2 Realizacja trajektorii

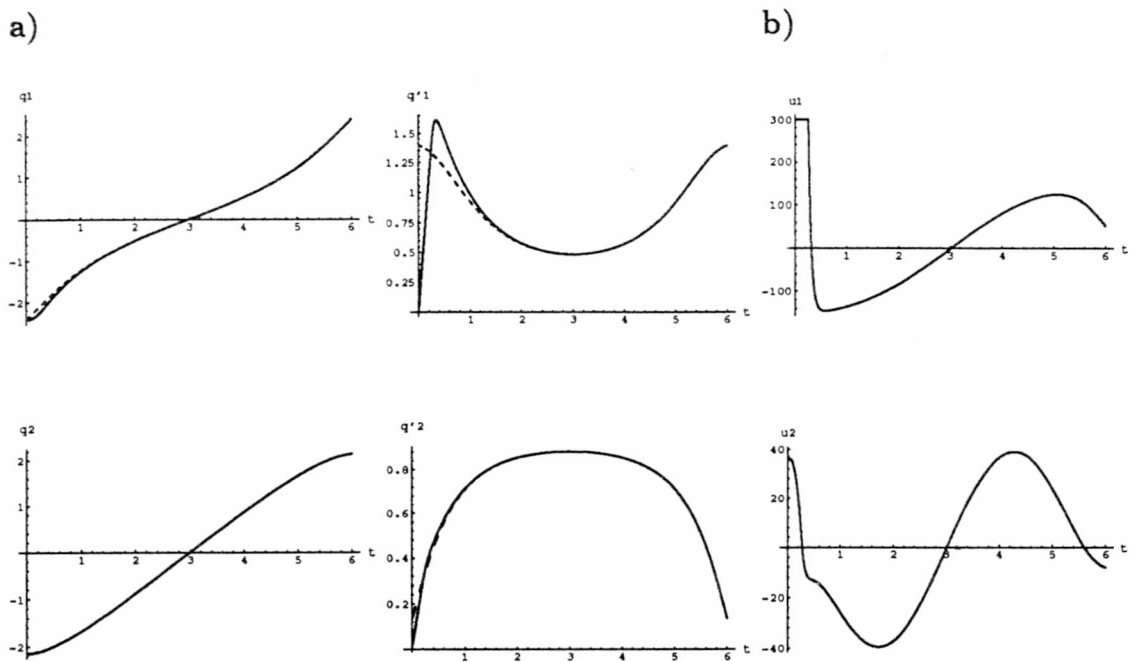
Dzięki temu, że dotychczasowe rozważania pozwoliły nam na znalezienie pożądanej trajektorii w przestrzeni wewnętrznej manipulatora, możemy teraz do jej realizacji użyć typowego algorytmu sterowania opartego na metodzie obliczanego momentu dla trajektorii zadawanych w przestrzeni wewnętrznej. Przyjęto, że na początku symulacji manipulator znajduje się w spoczynku w punkcie początkowym zadanej trajektorii. Założono, że wartości bezwzględne momentów wejściowych nie mogą przekroczyć 300 i 50 odpowiednio dla pierwszego i drugiego ramienia manipulatora. Wzmocnienia w pętli sprzężenia zwrotnego sterownika ustawiono na $50E$ dla macierzy K_p i $20E$ dla macierzy K_d , gdzie E oznacza dwuwymiarową macierz jednostkową. Wyniki symulacji zebrano na rysunku 5.7. Błędy, które pojawiły się na początku przebiegów są spowodowane różnicą pomiędzy pożądaną a zastaną konfiguracją początkową manipulatora.

a)

b) y_2 

Rysunek 5.6: Rozwiązanie uzyskane przy użyciu metody postaci normalnych:

- a) pożądane położenie, prędkość i przyspieszenie w przestrzeni wewnętrznej;
- b) odpowiadająca im ścieżka w przestrzeni roboczej.



Rysunek 5.7: Wynik zastosowania algorytmu obliczanego momentu do realizacji trajektorii uzyskanej przy pomocy metody postaci normalnych:

- a) pożądana (linia przerywana) i rzeczywista (linia ciągła) trajektoria w przestrzeni wewnętrznej;
b) sterowania w przegubach.

5.1.3 Przykład śledzenia trajektorii

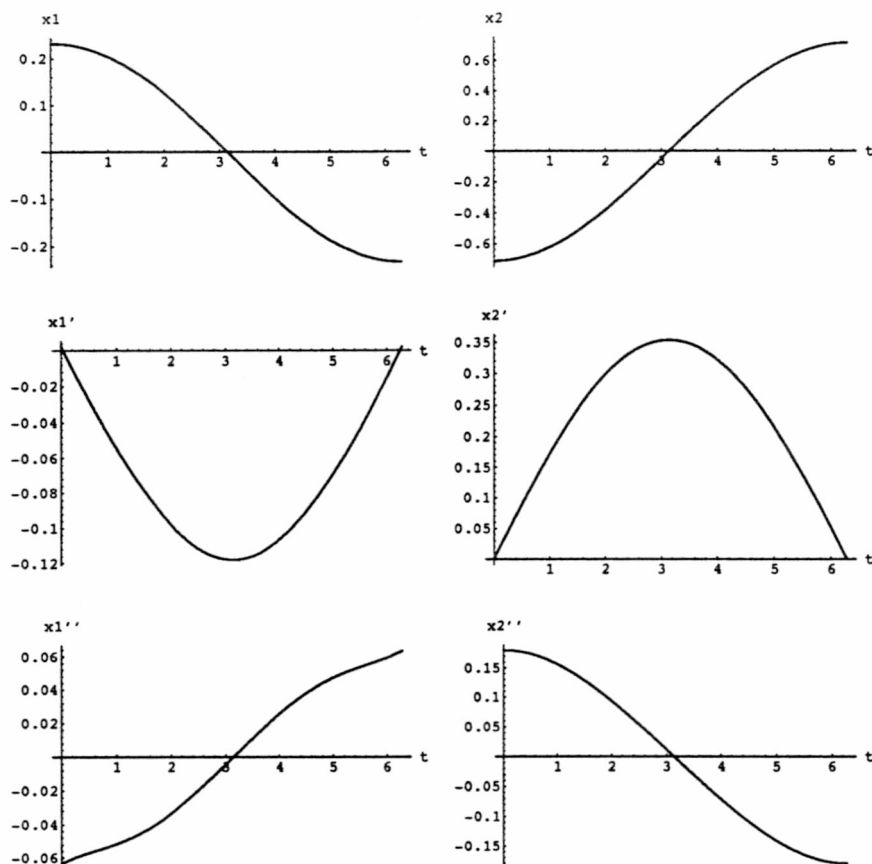
Przedstawimy teraz dodatkowy przykład śledzenia trajektorii dla rozpatrywanego manipulatora. Zadaniem manipulatora będzie podążanie wzdłuż linii prostej zadanej w przestrzeni roboczej równaniem

$$y_d(t) = \begin{pmatrix} 8.75 + 0.25 \cos(t - \pi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

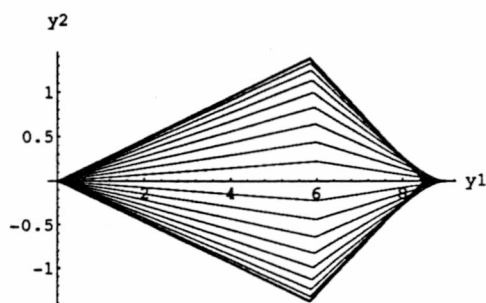
$t \in [0, 2\pi]$. Łatwo zauważyć, że w chwili $t = \pi$ manipulator wchodzi w konfigurację osobliwą. Ponieważ jest to ta sama konfiguracja co w poprzednim przykładzie, możemy tutaj do rozwiązania zadania użyć znalezionych wcześniej dyfeomorfizmów transformujących. Po ich zastosowaniu otrzymujemy rozwiązanie przedstawione na rysunku 5.8. Jeśli przeanalizujemy błąd położenia efektora* towarzyszący tak otrzymanemu rozwiązaniu (zobacz rysunek 5.9), możemy stwierdzić, że w tym przypadku, jeśli nie jest wymagana duża dokładność śledzenia trajektorii (maksymalny błąd rzędu 10^{-2}), jako rozwiązanie w całym zakresie czasu może zostać przyjęte rozwiązanie uzyskane metodą postaci normalnych.

*zdefiniowany jako norma euklidesowa różnicy pomiędzy pożądanym a rzeczywistym położeniem efektora w przestrzeni roboczej

a)

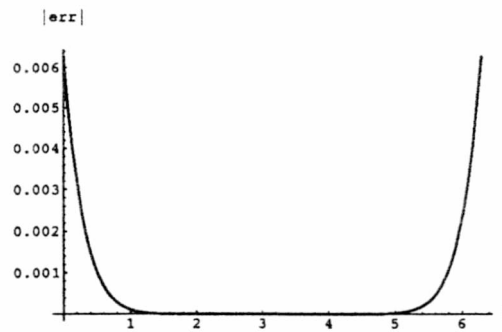


b)



Rysunek 5.8: Rozwiązanie uzyskane przy użyciu metody postaci normalnych:

- a) pożądane położenie, prędkość i przyspieszenie w przestrzeni wewnętrznej;
- b) odpowiadająca im ścieżka w przestrzeni roboczej.

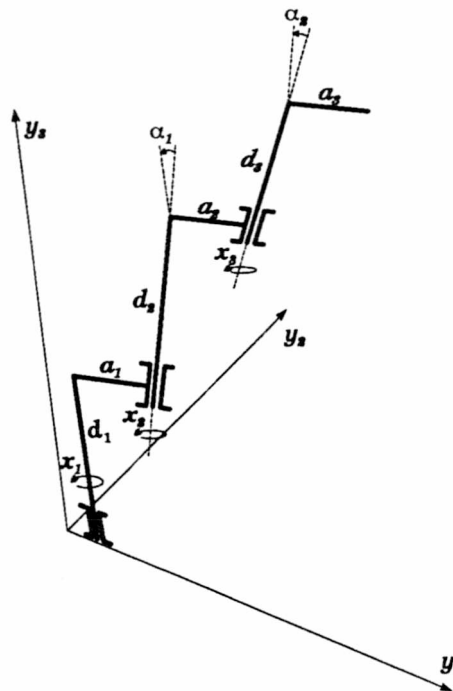


Rysunek 5.9: Błąd położenia efektora dla trajektorii prostoliniowej.

5.2 Manipulatory o 3 stopniach swobody

W poniższym przykładzie ograniczymy się jedynie do kinematycznego aspektu zadania śledzenia trajektorii dla przestrzennych manipulatorów o trzech stopniach swobody.

Założmy, że mamy do czynienia z manipulatorem o trzech stopniach swobody, wyposażonym wyłącznie w przeguby typu rotacyjnego, którego schemat kinematyczny jest pokazany na rysunku 5.10. Przy założeniu, że przeguby manipulatora są nieograniczone,



Rysunek 5.10: Manipulator przestrzenny typu RRR.

jego przestrzeń wewnętrzna tworzy trójwymiarowy torus $\mathbb{T}^3$. Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, rozpatrzmy jedynie współrzędne położenia kinematyki manipulatora.

przegub	θ_i	α_i	d_i	a_i
1	x_1	$\frac{\pi}{6}$	0.3	0.2
2	x_2	0	0.4	0.2
3	x_3	0	0.4	0.2

Tabela 5.3: Parametry Denavita–Hartenberga manipulatora typu RRR.

Kinematyka manipulatora

Wartości liczbowe parametrów Denavita–Hartenberga manipulatora przedstawia tabela 5.3. Na ich podstawie, po dokonaniu niezbędnych obliczeń, uzyskujemy równania kinematyki rozpatrywanego manipulatora w postaci

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = k(x) = \begin{pmatrix} 0.2c_1(1 + c_2 + c_{23}) + 0.1s_1(4 - \sqrt{3}s_2 - \sqrt{3}s_{23}) \\ 0.2s_1(1 + c_2 + c_{23}) - 0.1c_1(4 - \sqrt{3}s_2 - \sqrt{3}s_{23}) \\ 0.3 + 0.4\sqrt{3} + 0.1(s_2 + s_{23}) \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

gdzie, zgodnie ze standardową konwencją, $s_i = \sin x_i$, $c_i = \cos x_i$, $s_{ij} = \sin(x_i + x_j)$, $c_{ij} = \cos(x_i + x_j)$. Dla tak określonej kinematyki, wyznacznik macierzy Jacobiego kinematyki

$$\det \frac{\partial k}{\partial x}(x) = -0.004 \sin x_3 (1 + \cos x_2 + \cos(x_2 + x_3)). \quad (5.26)$$

Na podstawie wyrażenia (5.26) możemy stwierdzić, że zbiór konfiguracji osobliwych S manipulatora składa się z dwóch podzbiorów, a mianowicie

$$S = OS1 \cup OS2, \quad (5.27)$$

gdzie

$$\begin{aligned} OS1 &= \{x \in \mathbb{T}^3 \mid \sin x_3 = 0\}, \\ OS2 &= \{x \in \mathbb{T}^3 \mid 1 + \cos x_2 + \cos(x_2 + x_3) = 0\}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 26 zawarte w podrozdziale 3.2.8 orzeka, że wszystkie konfiguracje osobliwe należące do zbioru (5.27) są korzędu 1.

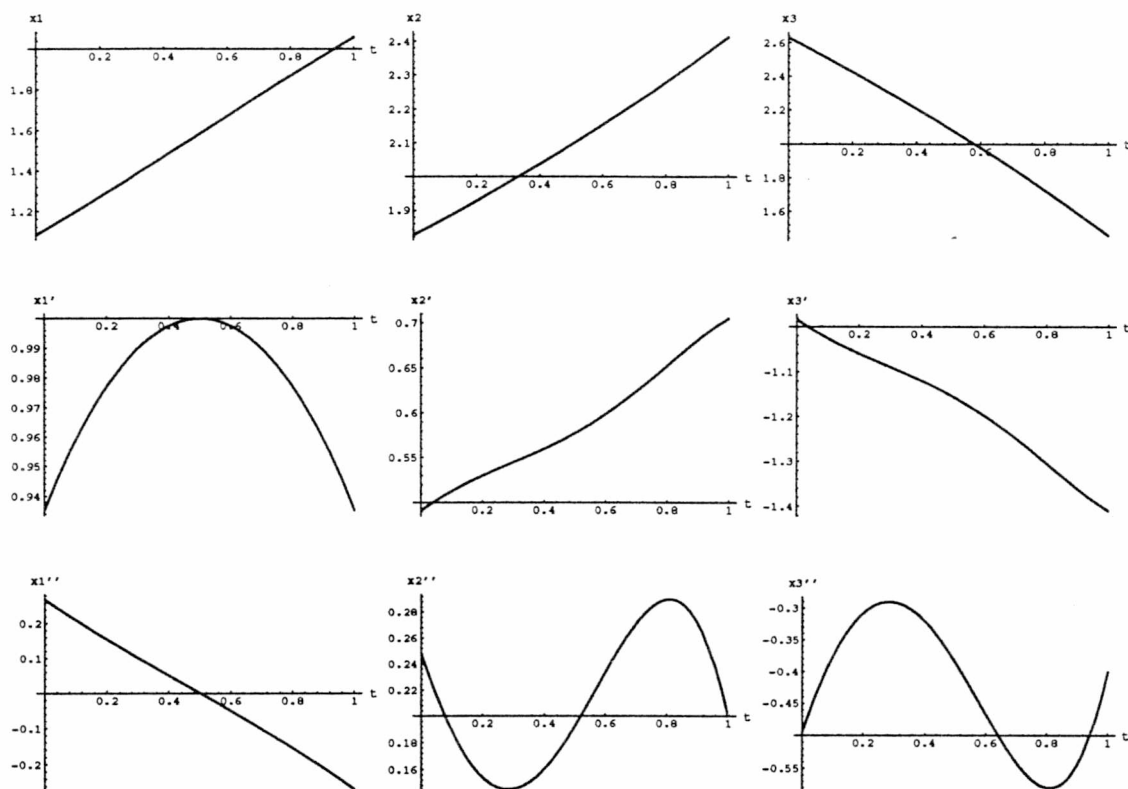
5.2.1 Rozwiązanie zadania śledzenia trajektorii

Założmy, że zadaniem manipulatora jest prowadzić efektor w przestrzeni roboczej ze stałą prędkością wzdłuż linii prostej zadanej funkcją

$$y_d(t) = \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.1 + 0.2t \\ 0.3 + 0.4\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

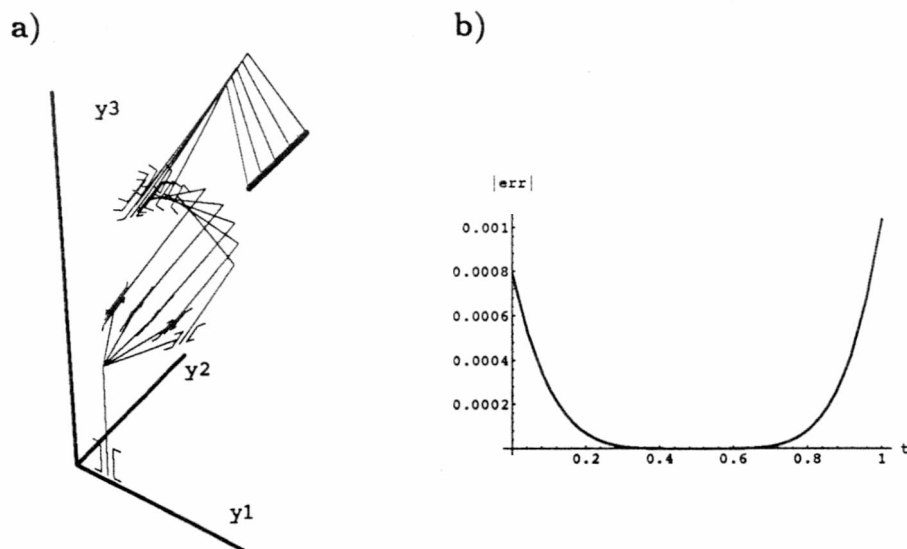
dla czasów $t \in [0, 1]$. Stosując metodę jacobianową do rozwiązania zadania odkrywamy, że w chwili $t = 0.5$ manipulator wchodzi w konfigurację osobliwą ze zbioru $OS2$. Zgodnie

z rozważaniami z podrozdziału 3.2.8, na podstawie Twierdzenia 27 możemy wyciągnąć wniosek, że w tej konfiguracji postać normalna kinematyki manipulatora jest kwadratowa. Dzięki temu, jesteśmy w stanie rozwiązać zadanie przy użyciu metody postaci normalnych. Stosując tę metodę, po znalezieniu wszystkich niezbędnych równoważności, otrzymujemy pożądaną trajektorię w przestrzeni wewnętrznej manipulatora pokazaną na rysunku 5.11. Należy zauważyć, że wszystkie obliczenia przeprowadzono z dokładnością



Rysunek 5.11: Pożądané położenie, prędkość i przyspieszenie w przestrzeni wewnętrznej otrzymane metodą postaci normalnych dla manipulatora typu RRR.

do rzędu czwartego. Rysunek 5.12 a) przedstawia ścieżkę w przestrzeni roboczej wraz ze ciągiem konfiguracji manipulatora odpowiadającą otrzymanemu rozwiązaniu. Wykres w części b) rysunku przedstawia przebieg błędu położenia efektora zdefiniowanego jako norma euklidesowa z różnicy pomiędzy pożądanym a rzeczywistym położeniem efektora w przestrzeni roboczej manipulatora. Na podstawie wykresu błędu można stwierdzić, że nawet dla czasu $t = 1$, kiedy położenie manipulatora różni się od położenia osobliwego w przybliżeniu o wektor $(\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{10}, -\frac{\pi}{6})$ (co w stopniach wynosi około $(25^\circ, 18^\circ, -30^\circ)$), błąd położenia efektora jest mniejszy niż 0.001. Dokładniejsza analiza przebiegu błędu pokazuje, że np. dla czasu $t = 0.7$, przy różnicy konfiguracji wewnętrznych danej wektorem $(\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{27}, -\frac{\pi}{15})$ (w stopniach $(10^\circ, 6.6^\circ, -12^\circ)$), błąd położenia efektora wynosi 10^{-5} , a dla konfiguracji osobliwej spada do 10^{-16} .



Rysunek 5.12: Przejsie przez konfiguracj osobiw manipulatora typu RRR:

- a) sciezka w przestrzeni roboczej;
- b) blad polozenia efektora w przestrzeni roboczej.

5.3 Badania eksperymentalne

W biezacym rozdziale przedstawimy rezultaty otrzymane w wyniku zastosowania metody postaci normalnych do rozwiazania pewnego zadania sledzenia trajektorii dla robota przemyslowego typu *AdeptOne*, [Ade86]. Dodatkowo, dla celow porownawczych, zamiescimy rozwiazanie tego samego problemu uzyskane przy uzyciu procedur wbudowanych przez producenta w sterownik robota.

AdeptOne jest robotem przemyslowym o 4 stopniach swobody (typu RRTR) przeznaczonym typowo do wykonywania czynnosci montazowych. Tutaj ograniczymy nasze zainteresowania jedynie do dwuch pierwszych stopni swobody robota, ktore tworza lancuch kinematyczny analogiczny do przedstawionego na rysunku 5.1. Dlugosci ramion robota wynosza $l_1 = 425\text{mm}$, $l_2 = 375\text{mm}$ (oznaczenia zgodnie z zamieszczonymi na rysunku 5.1). Zakres dopuszczalnych zmian wartosci polozen w przegubach robota wynosi $\pm \frac{5\pi}{6}$ i $\pm \frac{49\pi}{60}$, odpowiednio dla pierwszego i drugiego przegubu.

Niestety, sterownik w jaki zostal wyposazon opisywany robot nie pozwala na bezposrednie zadawanie sterowan w postaci momentow/sil (lub wręcz pradow w silnikach robota) poruszajacych poszczegolnymi ramionami. Nie pozwala rowniez na bezposrednie zadawanie chwilowych predkosci i przyspieszen w przegubach. Jedynym sposobem realizacji trajektorii zadanej w przestrzeni roboczej lub wewnetrznej robota jest wykorzystanie trybu pracy sterownika zwanego jako „Procedural Motion”, [Ade88]. Dzieki mozliwosci rownoczesnego wykonywania ruchow robota i obliczen przygotowujacych te ruchy, w tym trybie ruch jest komponowany z szeregu nastepujacych po sobie krótkich ruchow, ktore dzieki wlasnosciom sterownika sa automatycznie laczone w jedna, gladka trajektorie[†]. Trajektorja jest zadawana w postaci przyrostow polozen w poszczegolnych przegubach robota,

[†]jak twierdza autorzy opisu sterownika, nie definiujac w zaden sposob pojecia gladkosci

dla trajektorii określanych w przestrzeni wewnętrznej, bądź też przyrostów położenia efektora robota, dla trajektorii określanych w przestrzeni roboczej, wraz z czasem, w jakim te przyrosty powinny zostać zrealizowane.

Założmy, że robot ma do wykonania ruch zgrubny w bazowym układzie współrzędnych (zgodnym z układem y_1y_2 z rysunku 5.1) wzdłuż trajektorii zadanej funkcją

$$y_d(t) = \begin{pmatrix} (200 + 600 \cos(0.17(t - 12.5)))\text{mm} \\ 600 \sin(0.17(t - 12.5))\text{mm} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

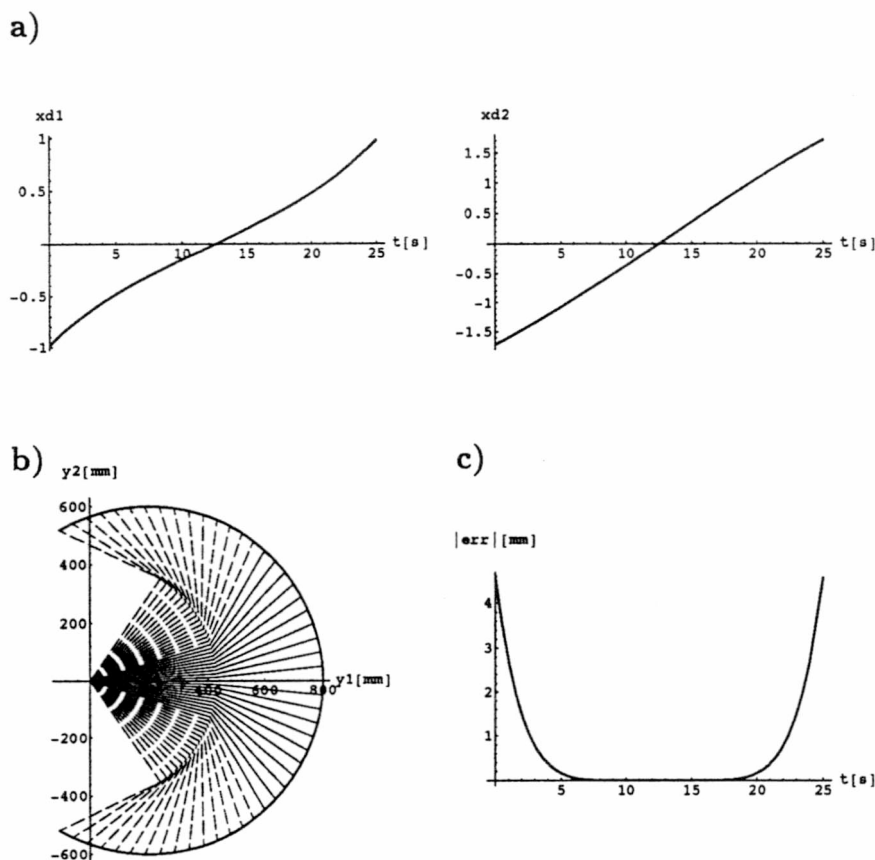
dla czasu t zawartego w przedziale $[0, 25]$ s. Tak zadana trajektoria definiuje w przestrzeni roboczej ścieżkę będącą wycinkiem okręgu o promieniu 600mm, środka w punkcie (200mm, 0mm) i kącie rozwarcia około $\frac{4\pi}{3}$, analogiczną do ścieżki pokazanej na rysunku 5.2. Łatwo obliczyć, że aby zrealizować zadaną trajektorię robot musi wejść w konfigurację osobliwą w chwili $t = 12.5$ s. Po wyznaczeniu kinematyki dla dwóch pierwszych członów robota i znalezieniu dyfeomorfizmów transformujących ją do postaci kwadratowej (obliczeń dokonano z dokładnością do wyrazów rzędu piątego), stosując metodę postaci normalnych, otrzymano w otoczeniu konfiguracji osobliwej trajektorię w przestrzeni wewnętrznej

$$x_d(t) = \begin{pmatrix} (-0.975 + 0.126t - 7.36 \cdot 10^{-3}t^2 + 3.85 \cdot 10^{-4}t^3 + \\ -1.13 \cdot 10^{-5}t^4 - 1.81 \cdot 10^{-7}t^5 + o^6(t - 12.5)) \\ (-1.71 + 0.115t + 3.27 \cdot 10^{-3}t^2 + 1.77 \cdot 10^{-4}t^3 + \\ + 5.39 \cdot 10^{-6}t^4 - 8.63 \cdot 10^{-8}t^5 + o^6(t - 12.5)) \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Rysunek 5.13 a) zawiera wykres powyższej funkcji. Łatwo stwierdzić, że jeśli przyjąć otrzymane rozwiązanie jako rozwiązanie całego zadania, maksymalny błąd położenia efektoru robota (wynikający z zastosowanej metody) nie przekroczy wartości 4.6mm (zobacz rysunek 5.13 c)). Należy przy tym zauważyć, że błąd ten spada do wartości poniżej 0.01mm (maksymalna zdolność rozdzielcza systemu pozycjonowania robota *AdeptOne*), już gdy efektor robota znajduje się w odległości mniejszej niż 490mm od punktu osobliwego (obszar na rysunku 5.13 b), w którym szkielet robota zaznaczono linią ciągłą). Można dodać, że zwiększenie dokładności obliczeń do wyrazów rzędu 7 powoduje zmniejszenie maksymalnego błędu do wartości 0.84mm i równoczesne zwiększenie odległości, w której błąd ten jest mniejszy niż 0.01mm do 760mm.

Dla tak znalezionej trajektorii obliczono jej wartości w odstępach czasu $\Delta t = 0.1$ s, otrzymując tablicę 251 kolejnych położenia przegubów gotową do zadania na wejście sterownika robota. Rysunek 5.14 przedstawia rzeczywistą trajektorię w przestrzeni wewnętrznej, po której robot się poruszał (okres monitorowania był równy 0.16s). Niestety, wykorzystywany system nie pozwalał na bezpośrednią obserwację sterowań podawanych na wejście robota.

Równocześnie, dla porównania, przeprowadzono eksperyment polegający na bezpośrednim zadaniu trajektorii (5.29) na wejście sterownika. Również tutaj, obliczono wartość funkcji opisującej trajektorię (5.29) w odstępach czasu $\Delta t = 0.1$ s, otrzymując tablicę 251 położenia efektoru robota. Trajektoria rzeczywista ruchu robota w przestrzeni wewnętrznej w tym przypadku została pokazana na rysunku 5.15. Na rysunku 5.16 zestawiono rzeczywiste tory ruchu robota w obu rozpatrywanych przypadkach wraz z pożądaną ścieżką w przestrzeni roboczej.

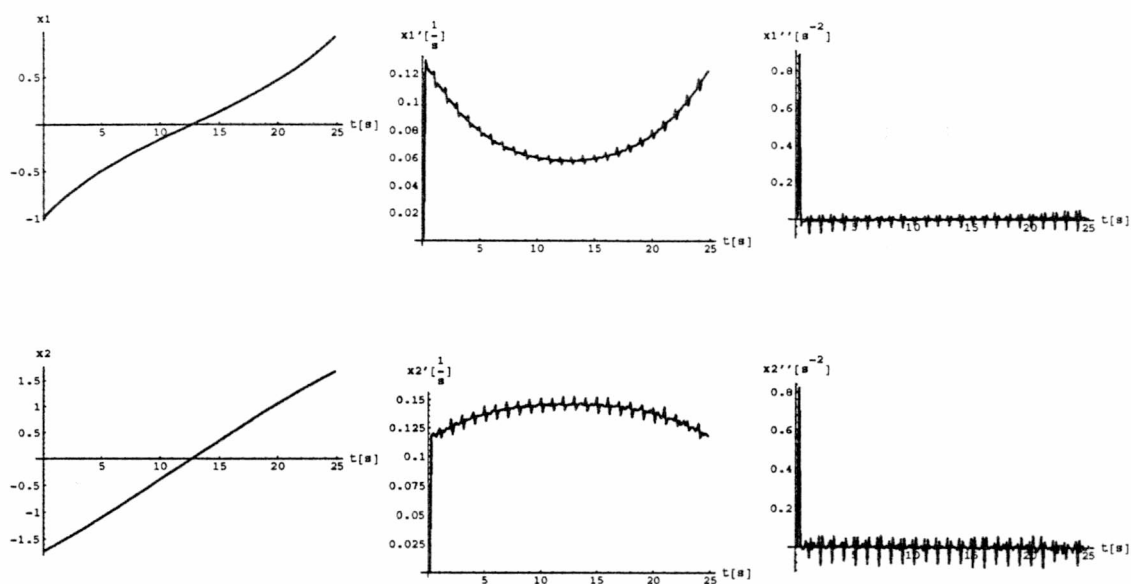


Rysunek 5.13: Rozwiązanie zadania śledzenia trajektorii dla robota *AdeptOne* metodą postaci normalnych:

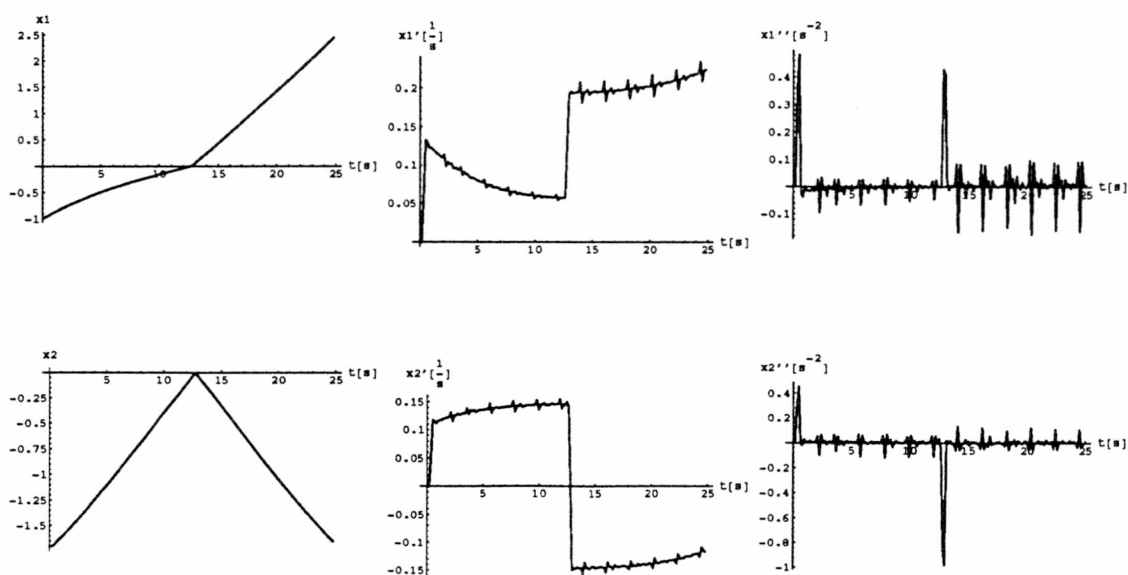
- a) pożądana trajektoria w przestrzeni wewnętrznej;
- b) odpowiadająca jej ścieżka w przestrzeni roboczej;
- c) błąd położenia efektora robota wynikający z zastosowanej metody.

Jak widać, z obu metod otrzymano jakościowo różne rozwiązania. Metoda postaci normalnych pozwala na „gładkie” przeprowadzenie robota przez konfigurację osobiwą. Jedynym źródłem zakłóceń w tym przypadku (w postaci drobnych zmian prędkości w przegubach robota z dużą częstotliwością) jest sposób realizacji trajektorii zadawanej na wejście sterownika. Sama metoda nie wnosi do rozwiązania żadnych niegładkości. Natomiast algorytm zaimplementowany w sterowniku robota, pozwalający na zadawanie trajektorii w przestrzeni roboczej[†], daje rozwiązanie, w którym, w pobliżu konfiguracji osobiwej, następuje wyraźny skok prędkości w przegubach robota, co było zauważalne (i słyszalne) podczas realizacji ruchu. Dodatkowa analiza błędów położenia efektora robota, towarzyszących każdej z metod (zobacz rysunek 5.17) pozwala stwierdzić, że w obu przypadkach dostajemy przebieg błędu o podobnym charakterze. Zarówno w jednym jak i w drugim przypadku w trakcie śledzenia trajektorii pojawia się błąd położenia efektoru rzędu pojedynczych milimetrów. Niestety, nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy obserwo-

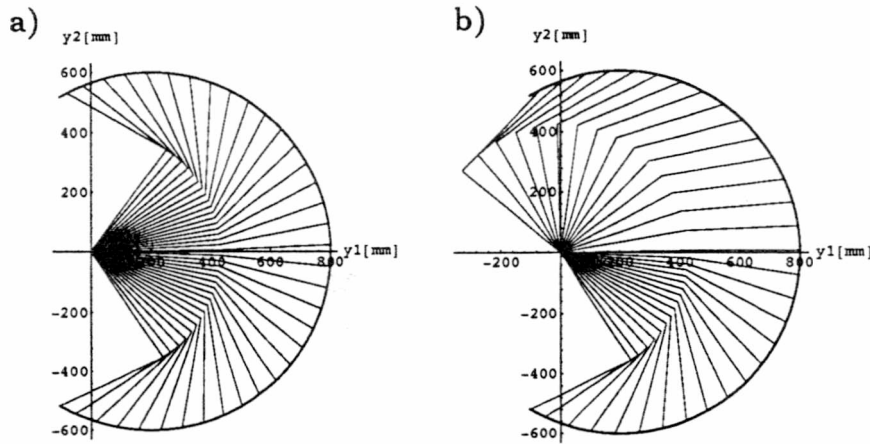
[†]Producent nie wspomina o metodzie użytej do rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki, aczkolwiek otrzymane trajektorie przypominają rozwiązania uzyskiwane przy użyciu metody „Singularity-Robust Inverse” (zobacz podrozdział 6.1).



Rysunek 5.14: Trajektoria rzeczywista ruchu robota *AdeptOne* w przestrzeni wewnętrznej otrzymana przy zastosowaniu metody postaci normalnych.



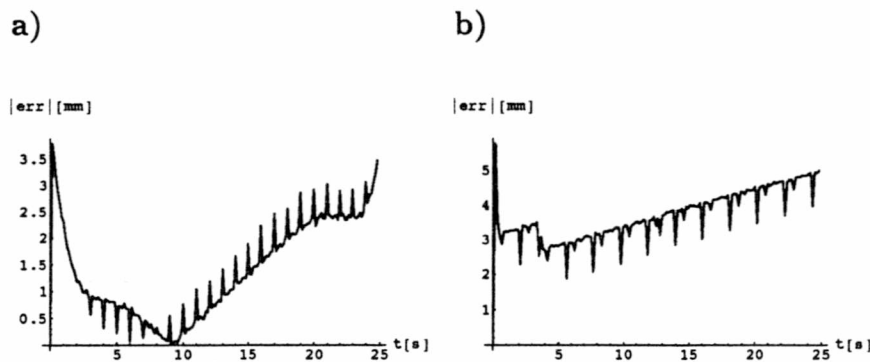
Rysunek 5.15: Trajektoria rzeczywista ruchu robota *AdeptOne* w przestrzeni wewnętrznej otrzymana przy wykorzystaniu procedur sterownika robota.



Rysunek 5.16: Ścieżka ruchu robota *AdeptOne* w przestrzeni roboczej przy zastosowaniu:

- a) metody postaci normalnych;
- b) algorytmu wbudowanego w sterownik robota.

wany błąd jest wynikiem opóźnień wprowadzanych przez układ sterowania manipulatora, czy też przez jego układ monitorowania pozycji (a więc czy obserwowane błędy pojawiają się w rzeczywistości). Jedno, co można zauważyć to to, że zastosowanie metody postaci normalnych do sterowania manipulatorem *AdeptOne* nie wnosi jakościowych zmian przebiegu obserwowanego błędu położenia efektora manipulatora. Potwierdza to rysunek 5.17.



Rysunek 5.17: Błąd położenia efektora robota *AdeptOne* przy zastosowaniu:

- a) metody postaci normalnych;
- b) algorytmu wbudowanego w sterownik robota.

Rozdział 6

Analiza porównawcza

Rozdział ten poświęcimy porównaniu metody postaci normalnych ze znanymi z literatury metodami pozwalającymi na rozwiązanie osobliwego zadania odwrotnego. Dokonamy tego przez porównanie własności rozwiązań uzyskanych przy użyciu zaproponowanej metody z własnościami rozwiązań uzyskanych metodami konkurencyjnymi. W tym konkretnym przypadku metodami wykorzystanymi do porównań są: metoda zaproponowana przez Nakamura w [NH86, Nak91] znana jako „Singularity–Robust Inverse” oraz metoda śledzenia ścieżki opracowana przez Nencheva, [Nen95], w oparciu o wcześniejsze prace Kieffera, [Kie92, Kie94]. Porównania dokonamy wykorzystując prosty manipulator o dwóch stopniach swobody, którego użyliśmy w podrozdziale 5.1 do ilustracji zastosowania metody postaci normalnych. W celu porównania przedstawimy rozwiązania zadania postawionego na początku podrozdziału 5.1.1 uzyskane przy użyciu wymienionych metod.

6.1 Metoda „Singularity–Robust Inverse”

Przypomnijmy pokrótce, że w metodzie „Singularity–Robust Inverse” (SRI), przy równaniu jacobianowym

$$\dot{y} = J(x)\dot{x}, \quad (6.1)$$

gdzie $y \in \mathbb{R}^m$ i $x \in \mathbb{R}^n$, rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki jest opisane równaniem

$$\dot{x} = J^*(x)\dot{y}, \quad (6.2)$$

gdzie $J^*(x)$ oznacza SRI macierzy Jacobiego $J(x)$ dany jednym z następujących wyrażień:

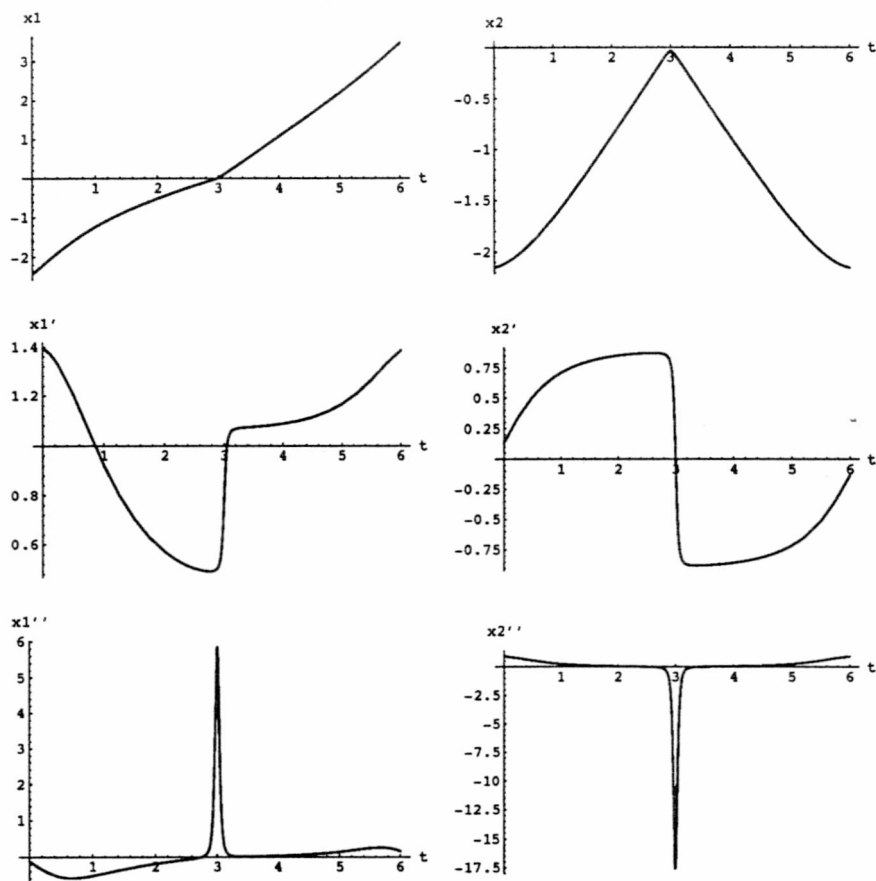
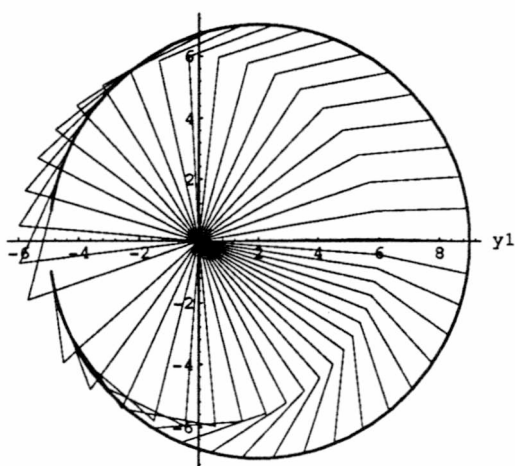
$$J^*(x) = (J^T J + \lambda E)^{-1} J^T, \quad (6.3')$$

lub

$$J^*(x) = J^T (J J^T + \lambda E)^{-1}. \quad (6.3'')$$

W powyższych wyrażeniach E oznacza macierz jednostkową odpowiedniego wymiaru, λ jest pewną dodatnią stałą. Do rozwiązywania zadania użyjemy formuły (6.3''). Przyjmując $\lambda = 0.001$, dla jacobianu danego równaniem (5.2) i zadania śledzenia trajektorii (5.4), otrzymujemy pożądaną trajektorię w przestrzeni wewnętrznej pokazaną na rysunku 6.1. Podobnie jak w przypadku metody postaci normalnych (zobacz rysunek 5.6),

a)

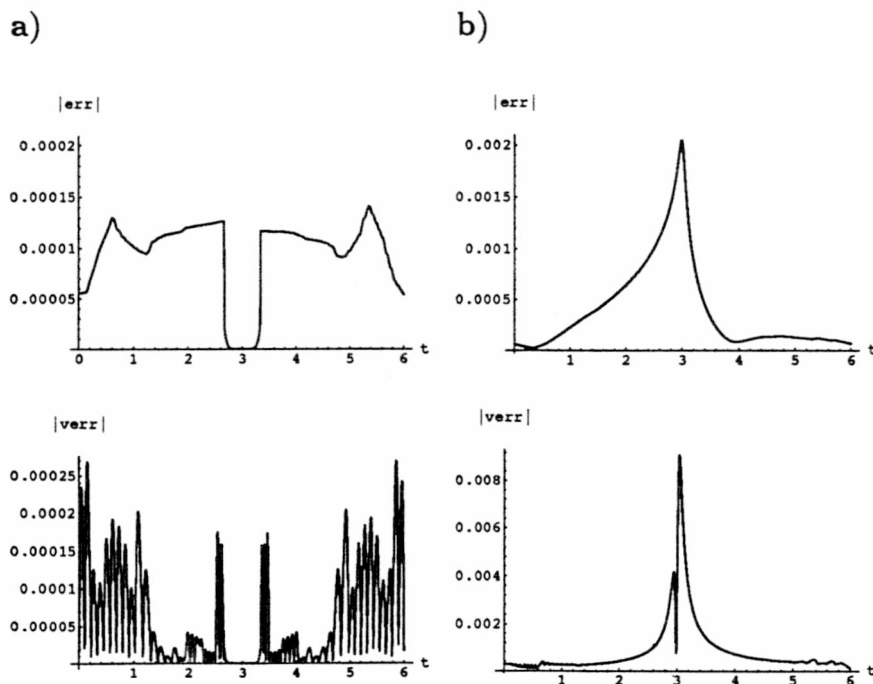
b) y_2 

Rysunek 6.1: Rozwiązanie uzyskane przy użyciu metody SRI:

- a) pożądane położenie, prędkość i przyspieszenie w przestrzeni wewnętrznej;
- b) odpowiadająca im ścieżka w przestrzeni roboczej.

rysunek 6.1 a) przedstawia pożądane położenia, prędkości i przyspieszenia przegubów manipulatora, podczas gdy rysunek 6.1 b) pokazuje odpowiadającą im ścieżkę w przestrzeni roboczej manipulatora wraz z ciągiem konfiguracji manipulatora wzdłuż ścieżki.

Pierwszą uwagą, jaka nasuwa się po porównaniu otrzymanych rezultatów, jest stwierdzenie, że w przypadku metody SRI manipulator *nie przechodzi* rzeczywiście przez osobliwość – wchodzi on jedynie w jej otoczenie, podczas gdy przy metodzie postaci normalnych osobliwość faktycznie zostaje osiągnięta. Dlatego, w pobliżu konfiguracji osobliwych, podczas zastosowania metody SRI, istnieje konieczność szybkiej zmiany kierunku ruchu drugiego przegubu manipulatora. Prowadzi to w konsekwencji do dużych wartości przyspieszeń (szarpnięć) w przegubach. W metodzie postaci normalnych omawiane zjawisko nie występuje; manipulator gładko przechodzi przez konfigurację osobliwą. Oczywiście, wielkość przyspieszeń uzyskanych przy pomocy metody SRI można zmniejszyć przez zwiększenie parametru λ , lecz spowoduje to zwiększenie błędów śledzenia trajektorii. Druga rzecz, którą należy zauważyć to to, że przy rozwiązaniu uzyskanym przy użyciu metody SRI manipulator musi się zatrzymać w pobliżu konfiguracji osobliwej (prędkość obu przegubów przechodzi przez zero praktycznie w tej samej chwili czasu). Obydwa te zjawiska prowadzą do pojawienia się błędów położenia i prędkości efektora manipulatora w pobliżu konfiguracji osobliwej. Porównajmy wymienione błędy pojawiające się w przypadku zastosowania metody SRI z błędami towarzyszącymi metodzie postaci normalnych. Na rysunku 6.2 przedstawiono wyżej wymienione przypadki. Jak poprzednio, błędy zo-



Rysunek 6.2: Błędy położenia (rzęd pierwszy) i prędkości (rzęd drugi) efektora powstałe przy zastosowaniu:

- a) metody postaci normalnych;
- b) metody SRI.

stały zdefiniowane jako norma euklidesowa różnicy pomiędzy pożądanym a rzeczywistym położeniem (prędkością) efektora w przestrzeni roboczej manipulatora. Widzimy, że w przypadku metody postaci normalnych jedynym źródłem błędów (zarówno położenia jak i prędkości) jest niedokładność metod numerycznych zastosowanych do rozwiązania układu równań (1.14). W otoczeniu konfiguracji osobliwej, gdy wykorzystujemy rozwiązanie otrzymane z wykorzystaniem kwadratowego modelu kinematyki, błędy praktycznie znikają. Przy zastosowaniu metody SRI, oprócz błędów numerycznych wprowadzanych przez metodę zastosowaną do rozwiązania układu równań (6.3''), pojawiają się błędy metody. Im bliżej konfiguracji osobliwej znajduje się manipulator, tym większe są błędy położenia i prędkości. W wykonanych symulacjach maksymalne błędy uzyskane przy stosowaniu metody SRI były ponad 10 razy (błędy położenia) i 40 razy (błędy prędkości) większe od maksymalnych błędów towarzyszących metodzie postaci normalnych.

6.2 Metoda śledzenia ścieżki

Jak sama nazwa wskazuje, metoda śledzenia ścieżki pozwala na rozwiązanie *zadania śledzenia ścieżki*, które tym różni się od zadania śledzenia trajektorii, że zamiast trajektorii zadanej w przestrzeni roboczej do realizacji przez efektor manipulatora mamy zadaną ścieżkę w tej przestrzeni $y_d(\alpha)$, gdzie α jest parametrem, innym niż czas. Istota metody śledzenia ścieżki polega na traktowaniu parametru α jako jeszcze jednej zmiennej wewnętrznej manipulatora. Po sformułowaniu zadania śledzenia ścieżki w postaci

$$y_d(\alpha) - k(x) = 0 \quad (6.4)$$

i rozszerzeniu wektora konfiguracji manipulatora o α do wektora

$$\Theta = (\alpha, x) \quad (6.5)$$

otrzymujemy dla (6.4) równanie jakobianowe

$$\tilde{J}(\Theta)\dot{\Theta} = 0 \quad (6.6)$$

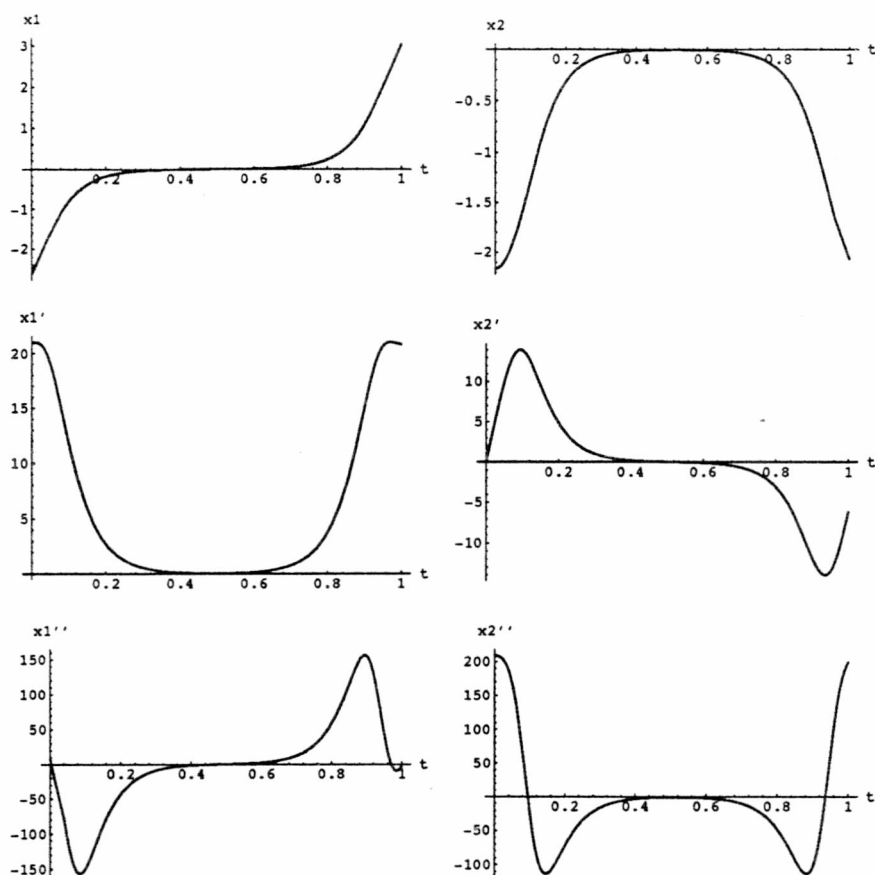
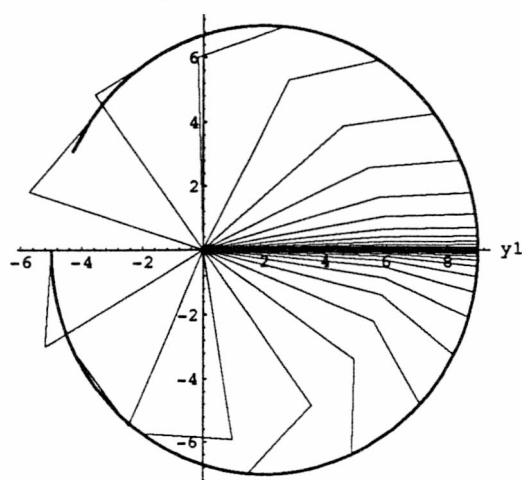
z rozszerzoną macierzą Jacobiego $\tilde{J}(\Theta) = \left[\frac{dy_d}{d\alpha}(\alpha) \quad -\frac{\partial k}{\partial x}(x) \right]$. Rozwiązanie równania (6.6) dostarcza zarówno wartości prędkości w przegubach manipulatora jak i prędkości $\dot{\alpha}$. Zaletą stosowania równania (6.6) zamiast równania (1.8) jest to, że w konfiguracjach osobliwych rzędu 1, przy odpowiedniej parametryzacji trajektorii $y_d(\alpha)$, macierz $\tilde{J}(\Theta)$ może być pełnego rzędu, podczas gdy macierz $J(x)$ traci rząd. Dzięki temu jesteśmy w stanie rozwiązać równanie (6.6) także dla konfiguracji osobliwych.

Ponieważ metoda śledzenia ścieżki zaproponowana w [Nen95] nie pozwala na znalezienie rozwiązania dla zadanej trajektorii, a jedynie dla zadanej ścieżki ruchu, przeformułujmy nasze zadanie i przyjmijmy, że efektor manipulatora ma podążać wzdłuż ścieżki zadanej w przestrzeni roboczej równaniami

$$y_d(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 + 7 \cos(\alpha - 3) \\ 7 \sin(\alpha - 3) \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

parametryzowanymi przez α , który nie jest czasem. Zadanie polega teraz na znalezieniu parametryzacji czasowej parametru α ($\alpha = \alpha(t)$), jak i takich parametryzacji czasowych

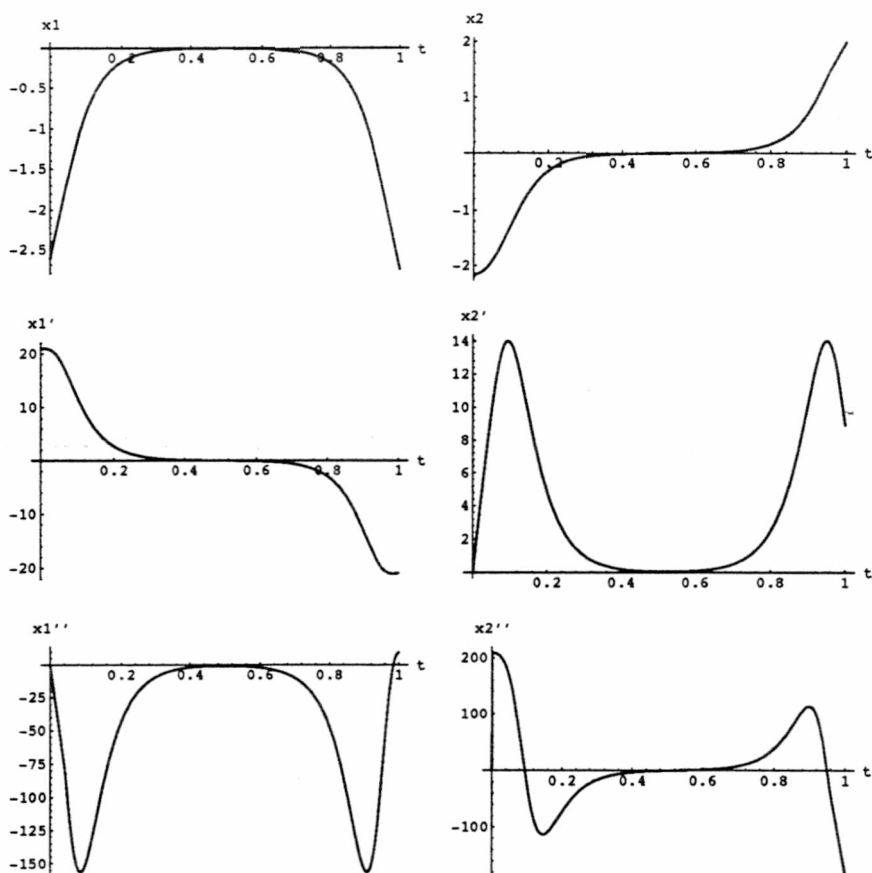
a)

b) y_2 

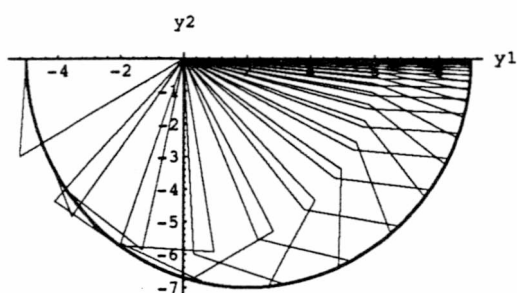
Rysunek 6.3: Rozwiązanie uzyskane przy użyciu metody śledzenia ścieżki:

- a) pożądane położenie, prędkość i przyspieszenie w przestrzeni wewnętrznej;
- b) odpowiadająca im ścieżka w przestrzeni roboczej.

a)



b)



Rysunek 6.4: Rozwiązanie uzyskane przy użyciu metody śledzenia ścieżki:

- a) pożądane położenie, prędkość i przyspieszenie w przestrzeni wewnętrznej;
- b) odpowiadająca im ścieżka w przestrzeni roboczej.

położeń przegubów manipulatora, aby przy ruchu zgodnym z nimi, efektor manipulatora poruszał się wzdłuż ścieżki (6.7). Podczas symulacji otrzymano dwa różne rozwiązania tego zadania, przedstawione na rysunkach 6.3 i 6.4. Wykresy a) na obu rysunkach przedstawiają położenia, prędkości i przyspieszenia przegubów manipulatora, wykresy b) ukazują zaś odpowiadające im ścieżki w przestrzeni roboczej manipulatora wraz z torem ruchu manipulatora.

Pierwsza, ogólna uwaga, która nasuwa się po przeanalizowaniu rozwiązań uzyskanych za pomocą metody śledzenia ścieżki dotyczy parametryzacji czasem ścieżki zadanej w przestrzeni roboczej. Nie mamy tutaj żadnego wpływu na kształt uzyskiwanej parametryzacji, a do tego metoda znajduje taką parametryzację, że manipulator porusza się ze znacznymi prędkościami, gdy jest z dala od osobliwości i zwalnia w miarę jak się do nich zbliża, aby w samych osobliwościach zatrzymać się. Nie można uzyskać tą metodą rozwiązania, w którym manipulator nie zatrzymuje się w osobliwości. Do tego, uzyskiwana parametryzacja nie musi być monotoniczna. Prowadzi to do sytuacji, w której niektóre fragmenty zadanej ścieżki są realizowane kilkukrotnie, podczas gdy inne fragmenty nie są w ogóle realizowane (zobacz rysunek 6.4). Co więcej, metoda wydaje się bardzo wrażliwa na warunki początkowe. Niewielka zmiana ich wartości może prowadzić do uzyskania zupełnie innej parametryzacji czasowej ścieżki. Rozwiązania przedstawione na rysunkach 6.3, 6.4 są wynikiem zastosowania metody śledzenia ścieżki do tego samego problemu przy minimalnie zmienionych warunkach początkowych.

Analizę porównawczą zakończymy dodatkową uwagą dotyczącą obydwu omawianych tu metod. Jak zauważyliśmy, metody te prowadzą do rozwiązań, którym towarzyszą znaczne wartości przyspieszeń w przegubach manipulatorów, co ze względu na ograniczone wartości sił/momentów napędowych rzeczywistych manipulatorów może spowodować dodatkowe błędy wynikające z nierealizowalności tak dużych przyspieszeń.

Rozdział 7

Podsumowanie

Niniejsza rozprawa została poświęcona wyznaczeniu postaci normalnych wybranych kinematyk nieredundantnych i wykorzystaniu postaci normalnych do rozwiązania osobliwego zadania śledzenia trajektorii. W pierwszej części pracy wyznaczono postaci normalne kinematyki manipulatora typu „podwójne wahadło”, położeniowych kinematyk o 3 stopniach swobody oraz kinematyki manipulatora typu *PUMA*. Naszym celem w tej części pracy było dostarczenie możliwie kompletnej listy postaci normalnych kinematyk nieredundantnych. Wynikiem przeprowadzonych badań jest stwierdzenie, że większość przeanalizowanych kinematyk w otoczeniu konfiguracji osobliwych korzędu 1 jest równoważna kwadratowej postaci normalnej. W kilku przypadkach kinematyka przestrzenna była równoważna wielomianowej postaci normalnej rzędu czwartego, a w jednym przypadku (kinematyka *PUMY* w jednej z konfiguracji osobliwych) pre-hiperbolicznej lub hiperbolicznej postaci normalnej. Oznacza to, że większość kinematyk w pobliżu konfiguracji osobliwych zachowuje się jak w pełni wyprostowane podwójne wahadło. Widać, że najczęstszy jest przypadek, kiedy liczba rozwiązań odwrotnego zadania kinematyki w otoczeniu konfiguracji osobliwej jest równa 2. W ogólności, należy się spodziewać, że liczba rozwiązań odwrotnego zadania kinematyki, jeśli jest skończona, jest równa 2^i dla pewnej liczby naturalnej i .

W drugiej części rozprawy zastosowano metodę postaci normalnych do rozwiązania osobliwego zadania śledzenia trajektorii. Jak pokazano, do zastosowania tej metody niezbędna jest pełna znajomość postaci normalnej rozpatrywanej kinematyki w otoczeniu konfiguracji osobliwej. Wynika to z faktu, że zasadnicza idea metody polega na rozwiązaniu przetransformowanego zadania śledzenia dla postaci normalnej kinematyki. Kompletne wyniki uzyskano dotąd dla kinematyk osobliwych o kwadratowej postaci normalnej. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że najtrudniejszym krokiem metody postaci normalnych jest znalezienie przekształceń transformujących kinematykę wyjściową do postaci normalnej. Pokazano, że ich wyznaczenie, z praktycznie dowolną dokładnością, jest możliwe dzięki wykorzystaniu rozwinięcia w szereg Taylora. Przeprowadzone doświadczenia, polegające na zastosowaniu metody postaci normalnych do śledzenia trajektorii przez manipulator przemysłowy *AdeptOne* pokazują, że metoda ta jest stosowalna w praktycznych przypadkach i pozwala na śledzenie trajektorii osobliwej z zadaną dokładnością. Doświadczenia te pokazały również, że przy dokładności, jaką zapewnia układ pozycjonowania manipulatora *AdeptOne* zastosowany w jego sterowniku, śledzenie ścieżki może być w pełni zrealizowane przy pomocy algorytmu uzyskanego metodą postaci normalnych*, bez

*wystarczy zastosować jedynie fragment metody dający rozwiązanie zadania z wykorzystaniem postaci normalnej kinematyki manipulatora *AdeptOne*, nie jest więc konieczne łączenie rozwiązań uzyskiwanych

pogorszenia jakości sterowania i zapewnieniu możliwości gładkiego przechodzenia przez konfiguracje osobliwe z zadaną prędkością.

Porównanie metody postaci normalnych z metodą SRI zaproponowaną przez Nakamura i metodą śledzenia ścieżki Kieffera–Nencheva wykazuje przewagę metody postaci normalnych nad pozostałymi dwiema. W szczególności, metoda postaci normalnych pozwala na przeprowadzenie manipulatora przez konfigurację osobliwą z zadaną prędkością, nie wprowadza błędów śledzenia w pobliżu osobliwości i nie wymaga nadmiernych przyspieszeń w przegubach manipulatora.

Uzyskane w rozprawie wyniki można traktować jako uzasadnienie tez sformułowanych w podrozdziale 1.3. Wyniki te obejmują:

- wyznaczenie postaci normalnych wybranych kinematyk nieredundantnych w otoczeniu konfiguracji osobliwych korzędu 1,
- zaproponowanie procedury określenia postaci normalnych kinematyki i wyznaczenia przekształceń transformujących kinematykę do postaci normalnej,
- zilustrowanie metody postaci normalnych na modelowych przykładach i przeprowadzenie badań symulacyjnych,
- przeprowadzenie eksperymentów z opracowanym algorytmem sterowania na manipulatorze przemysłowym *AdeptOne*,
- opracowanie pakietów oprogramowania symbolicznego ułatwiającego analizę osobliwości kinematycznych oraz syntezę algorytmów sterowania kinematyk osobliwych.

Należy zauważyć, że w toku dotychczasowych badań metodę postaci normalnych zastosowano do kinematyk nieredundantnych o kwadratowej postaci normalnej. W dalszych badaniach zamierzamy rozszerzyć metodę postaci normalnych do wielomianowej i hiperbolicznej postaci normalnej oraz uwzględnić przypadek kinematyk redundantnych. Z drugiej strony, dostrzegamy potrzebę kontynuacji prac nad praktycznymi implementacjami metody postaci normalnych. Miałyby one na celu m.in. określenie wyrażeń opisujących przekształcenia transformujące kinematyki w sposób parametryczny, zdefiniowany dla wszystkich konfiguracji osobliwych. Taka charakteryzacja powinna ułatwić implementację sprzętową metody postaci normalnych bezpośrednio w sterownikach manipulatorów przemysłowych, a także umożliwić zastosowanie sieci neuronowych do przyspieszenia obliczeń oraz zmniejszenia błędów przybliżania przekształceń transformujących kinematyki przy pomocy rozwinięć w szereg Taylora, dzięki uczeniu sieci [LB91, DJKM95, DJM95, DJMB95].

Dodatki

Dodatek A

Pakiet oprogramowania symbolicznego do analizy osobliwości kinematycznych

Przedstawiony pakiet `robskel`` jest przeznaczony dla systemu obliczeń symbolicznych MATHEMATICA, [Wol88] i został stworzony z myślą o ułatwieniu analizy zachowania manipulatorów robotycznych w pobliżu konfiguracji osobliwych. Umożliwia on uzyskanie na ekranie komputera graficznej reprezentacji manipulatora (jego szkieletu) w dowolnej konfiguracji na podstawie opisu kinematyki tego manipulatora zgodnie z notacją Denavita–Hartenberga, [DH55, SV89], pokrótce opisaną w podrozdziale 1.4. Dodatkowo istnieje możliwość wyświetlenia fragmentów ścieżek przechodzących przez zadaną konfigurację, a także uzyskania animacji ruchów manipulatora po tych ścieżkach. Dla każdego z analizowanych manipulatorów, procedury pakietu pozwalają na wyliczenie symbolicznych wyrażeń określających jego kinematykę oraz jacobian, a także na znalezienie wartości numerycznych składowych części translacyjnej jacobianu w dowolnej konfiguracji. Pakiet jest zawarty w zbiorze `robskel.m` na dołączonej dyskietce. Dyskietka zawiera dodatkowo przykładowe zbiory ilustrujące wykorzystanie pakietu: zbiór `demoskel.m` dla MATHEMATICI z interfejsem tekstowym oraz zbiory `demoskel.ma`, `demoskel.mb` dla MATHEMATICI z interfejsem typu notebook*.

Pakiet wymaga wcześniejszego zainstalowania pod dowolnym systemem operacyjnym systemu obliczeń symbolicznych MATHEMATICA wersja 2.0[†] wraz z jego pakietem standardowym `Animation``. Brak wspomnianego pakietu standardowego uniemożliwi wykorzystanie procedury pozwalającej na animację szkieletu manipulatora. Pakiet został przebadany z wykorzystaniem wersji 2.2 programu MATHEMATICA zainstalowanej na stacji roboczej HEWLETT PACKARD 9000 Model 715/64 pod systemem operacyjnym UNIX.

A.1 Struktura i uruchomienie pakietu

W skład pakietu wchodzi kilka procedur umożliwiających uzyskanie wymienionych wyżej funkcji. Należy do nich zaliczyć procedury: `PlotSkeleton`, `PlotPaths`, `AnimateSkeleton`, `ComputeKinematics`, `ComputeJacobian` i `CalculateJacobian`. Z punktu widzenia uży-

*wymienione zbiory są dostępne również poprzez usługę sieciową „anonymous ftp” z serwera `ftp://rab.ict.pwr.wroc.pl/pub/Mathematica/Robotics/Singular/`

[†]lub późniejsza

tkownika każda z wymienionych procedur działa niezależnie od pozostałych. Informacja o strukturze manipulatora wykorzystywana przez wymienione procedury jest przechowywana w zmiennej globalnej `DHParameters` i musi być uaktualniana przy każdorazowej zmianie struktury bądź parametrów analizowanego manipulatora.

Po wywołaniu systemu MATHEMATICA z poziomu systemu operacyjnego, należy wczytać sam pakiet do pamięci komputera. Aby to osiągnąć, należy wydać polecenie:

```
In[1]:= <<robskel.m
```

gdzie `robskel.m` jest zbiorem zawierającym procedury pakietu. Wymaga się, aby zbiór `robskel.m` znajdował się w katalogu bieżącym. W przypadku niespełnienia tego warunku nazwę zbioru należy poprzedzić ścieżką dostępu. Brak zbioru lub błędne wskazanie jego położenia na dysku spowoduje pojawienie się komunikatu:

```
Get::noopen: Cannot open robskel.m.
```

```
Out[1]= $Failed
```

Jeśli została wydana komenda zawierająca ścieżkę dostępu do zbioru `robskel.m`, ścieżka ta zostanie powtórzona w przedstawionym powyżej komunikacie.

Po wykonaniu opisanych kroków, pakiet `robskel`` jest gotowy do wykorzystania zgodnie z przedstawionymi poniżej regułami.

A.2 Składnia procedur pakietu

Jak wspomniano w poprzednim rozdziale dodatku, każda z procedur pakietu wykorzystuje dane o strukturze i parametrach manipulatora przechowywane w zmiennej globalnej `DHParameters`. W związku z tym, przy każdej zmianie struktury bądź parametrów manipulatora (w szczególności przed pierwszym wywołaniem procedur), należy przypisać zmiennej `DHParameters` wartość zgodnie z poniższą specyfikacją:

```
DHParameters={{theta1,d1,a1,alpha1},{theta2,d2,a2,alpha2},...};
```

gdzie `thetai`, `di`, `ai` i `alphai` są parametrami Denavita–Hartenberga poszczególnych ramion manipulatora. Jak widać, zmienna `DHParameters` musi mieć postać n -elementowej listy list czteroelementowych, gdzie n jest liczbą stopni swobody analizowanego manipulatora. Wiadomo, że spośród czterech parametrów opisujących poszczególne człony manipulatora w notacji Denavita–Hartenberga jeden jest współrzędną stanu manipulatora związaną z przegubem danego członu, zaś pozostałe trzy jego parametrami geometrycznymi. W zależności od typu przegubu wchodzącego w skład danego członu, współrzędną stanu jest parametr `thetai` dla przegubu rotacyjnego lub `di` dla przegubu translacyjnego. Aby umożliwić procedurom graficznym rozpoznanie typu danego członu, należy parametrom odpowiadającym współrzędnym stanu członów nadać wartości symboliczne `qi`, gdzie i jest kolejnym numerem członu manipulatora zaczynając od 1[†]. Pozostałym elementom list opisujących ramiona manipulatora należy nadać wartości liczbowe zgodnie z parametrami geometrycznymi ramion i konwencją obowiązującą w systemie MATHEMATICA, [Wol88]. Poniżej przedstawiono przykład poprawnego przypisania wartości zmiennej `DHParameters`.

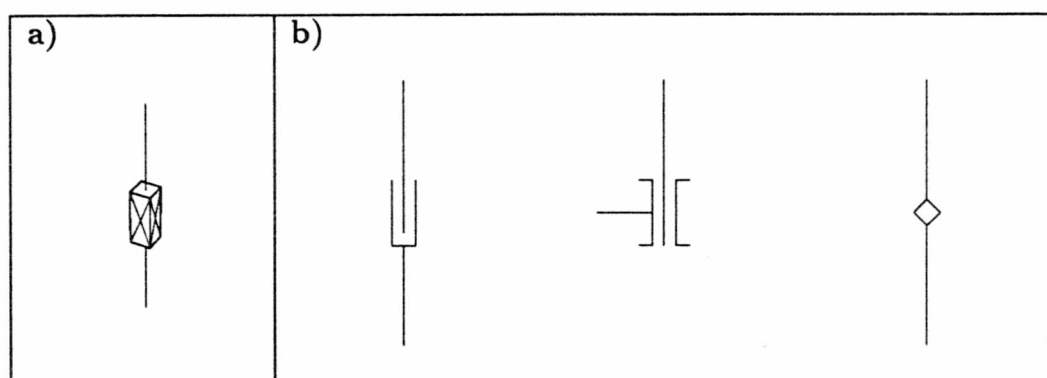
[†]dla kolejnych ramion manipulatora o n stopniach swobody będą to więc zmienne `q1`, `q2`, ..., `qn`

```
In[2] := DHPParameters = {{1,   q1,   0.1,  0},
                          {q2,  0.2,  0.1, -Pi/4},
                          {q3,  0.2,  0,   Pi/3},
                          {q4,  0.2,  0.1,  0}};
```

Jak widać, zmienna `DHPParameters` opisuje manipulator o czterech stopniach swobody z pierwszym przegubem translacyjnym (zmienna symboliczna na drugiej pozycji[§]) i pozostałymi przegubami rotacyjnymi (zmienna symboliczna na pozycji pierwszej[¶]).

A.2.1 Procedura `PlotSkeleton`

Procedura `PlotSkeleton` pozwala na uzyskanie rysunku przedstawiającego graficznie szkielek manipulatora zdefiniowanego zmienną `DHPParameters` w zadanej konfiguracji. Na rysunku A.1 przedstawiono symbole graficzne użyte do reprezentacji przegubów translacyjnych (a)) i rotacyjnych (b)) manipulatora. O wyborze symbolu przegubu rotacyj-



Rysunek A.1: Symbole graficzne przegubu: a) translacyjnego, b) rotacyjnego.

nego spośród przedstawionych decydują wartości parametrów geometrycznych ramienia bieżącego i poprzedniego.

Deklaracja nagłówka procedury `PlotSkeleton` jest następująca:

```
PlotSkeleton[q_List, tabcoor_List: {0.6, 0, 0.4}]
```

Dla manipulatora o n stopniach swobody, pierwszą współrzędną podawaną jako argument opisywanej procedury jest n -elementowa lista położeń w przegubach dla których manipulator ma być przedstawiony na rysunku. Podanie listy o większej liczbie elementów niż n spowoduje pominięcie jej elementów począwszy od elementu $n + 1$, zaś przy podaniu listy o mniejszej liczbie elementów, brakującym elementom zostanie przypisana domyślnie wartość zero. Elementem składowym rysunku przedstawiającego szkielek manipulatora jest tabela zawierająca wartości liczbowe jego parametrów Denavita–Hartenberga. Drugi z argumentów procedury `PlotSkeleton`, który jest listą zawierającą trzy liczby, podaje położenie lewego górnego rogu wspomnianej tabeli we współrzędnych rysunku. Przypisanie mu jako wartości listy o liczbie elementów innej niż trzy spowoduje niewyświetlenie

[§]odpowiadającej parametrowi `d1`

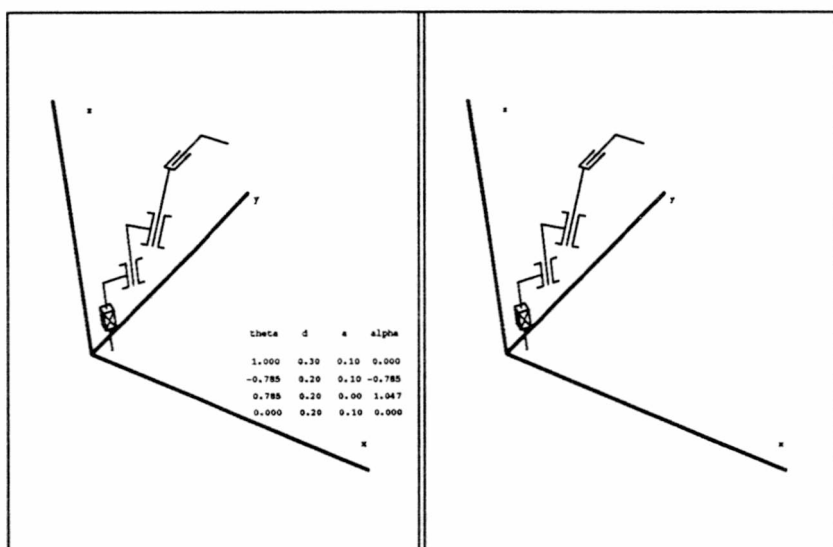
[¶]odpowiadającej parametrom `theta2, ..., theta4`

tabeli parametrów. Argument ten ma zadeklarowaną wartość domyślną więc, zgodnie z regułami systemu MATHEMATICA, może być pominięty w wywołaniu procedury. Procedura, oprócz rysunku, zwraca prymityw typu *Graphics3D*. Poniżej przedstawiono dwa przykłady wywołania procedury *PlotSkeleton* ze zmienną *DHParameters* zadeklarowaną zgodnie z podanym wcześniej przykładem.

```
In[3] := PlotSkeleton[{0.3, -Pi/4, Pi/4, 0}];
```

```
In[4] := PlotSkeleton[{0.3, -Pi/4, Pi/4, 0}, {}];
```

Obydwa wywołania procedury spowodują wyświetlenie szkieletu manipulatora w konfiguracji $q_1 = 0.3$, $q_2 = -\frac{\pi}{4}$, $q_3 = \frac{\pi}{4}$, $q_4 = 0$. Rysunek A.2 przedstawia efekty działania przytoczonych wywołań. Jedyna różnica w działaniu powyższych wywołań polega na tym,



Rysunek A.2: Przykładowe efekty działania procedury *PlotSkeleton*.

że drugie z nich nie spowoduje wyświetlenia tabeli zawierającej parametry manipulatora, podczas gdy pierwsze zrobi to.

A.2.2 Procedura *PlotPaths*

Procedura *PlotPaths* umożliwia uzyskanie rysunku przedstawiającego, wraz ze szkieletem manipulatora opisanego zmienną *DHParameters*, fragmenty ścieżek zakreslanych przez efektor manipulatora w przestrzeni roboczej, przechodzących przez konfigurację, w której został przedstawiony szkielet. Możliwe do uzyskania są jedynie te ścieżki, które powstają w wyniku poruszania tylko jednym z przegubów manipulatora. Do reprezentacji przegubów procedura używa tych samych symboli, co procedura *PlotSkeleton* (zobacz rysunek A.1).

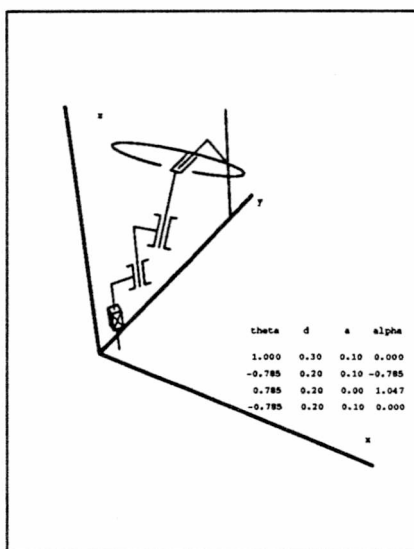
Deklaracja nagłówka procedury *PlotPaths* ma postać:

```
PlotPaths[q_List, qrange_List:{{1, -.5, .5}}, tabcoor_List:{0.6, 0, 0.4}]
```

Pierwszy argument jest listą położeń w przegubach, dla których manipulator ma być przedstawiony, i powinien spełniać wszystkie warunki opisane dla analogicznego argumentu procedury `PlotSkeleton`. Drugi argument procedury jest listą trójek liczb, z których pierwsza wskazuje przegub poruszający się, dwie pozostałe określają zaś zakres tego ruchu (odpowiednio ograniczenie dolne i górne) w stosunku do bieżącej konfiguracji manipulatora. Jako że argument ten ma przypisaną wartość domyślną, może być pominięty. Spowoduje to wyświetlenie szkieletu manipulatora wraz z jedną ścieżką powstałą w wyniku ruchu pierwszym przegubem manipulatora o ± 0.5 w stosunku do konfiguracji bieżącej. Ostatni z argumentów procedury spełnia te same zadania, co argument procedury `PlotSkeleton` o analogicznej nazwie i podlega regułom przedstawionym przy opisie procedury `PlotSkeleton`. Procedura, oprócz rysunku, zwraca prymityw typu *Graphics3D*. Przykładem poprawego wywołania procedury `PlotPaths`, przy zmiennej `DHParameters` zadeklarowanej jak dla przykładowych wywołań procedury `PlotSkeleton`, może być poniższa komenda.

```
In[5] := PlotPaths[{0.3,-Pi/4,Pi/4,-Pi/4},
                  {{1,-0.2,0.2},{3,-2 Pi/3,7 Pi/6}}];
```

Spowoduje ona wyświetlenie szkieletu zadeklarowanego manipulatora w konfiguracji $q_1 = 0.3$, $q_2 = -\frac{\pi}{4}$, $q_3 = \frac{\pi}{4}$, $q_4 = -\frac{\pi}{4}$ wraz z dwoma ścieżkami, jedną dla ruchu pierwszym przegubem manipulatora w zakresie $0.1 \div 0.5$ (± 0.2 wokół punktu 0.3) i druga, dla ruchu trzecim przegubem w zakresie $-\frac{5\pi}{12} \div \frac{17\pi}{12}$ ($-\frac{2\pi}{3}, +\frac{7\pi}{6}$ wokół punktu $\frac{\pi}{4}$). Efekt wykonania przedstawionej komendy został pokazany na rysunku A.3.



Rysunek A.3: Przykładowy efekt działania procedury `PlotPaths`.

A.2.3 Procedura `AnimateSkeleton`

Procedura `AnimateSkeleton` umożliwia animację sekwencji rysunków przedstawiających szkielet manipulatora zdefiniowanego zmienną `DHParameters` w kolejnych konfiguracjach.

Daje to wrażenie ruchu manipulatora na ekranie komputera. Do reprezentacji przegubów procedura używa tych samych symboli, co procedura `PlotSkeleton` (zobacz rysunek A.1). Procedura `AnimateSkeleton` wykorzystuje standardowy pakiet `Animation`` systemu MATHEMATICA, który jest automatycznie ładowany w chwili wywołania procedury `AnimateSkeleton`. W przypadku braku pakietu `Animation``, w wyniku wywołania procedury `AnimateSkeleton` otrzymamy komunikat:

```
Get::noopen: Cannot open Graphics/Animation.m.
```

```
Needs::nocont: Warning:Context Graphics`Animation`
was not created when Needs was evaluated.
```

Deklaracja nagłówka procedury `AnimateSkeleton` ma postać:

```
AnimateSkeleton[qrange_List,number_Integer:5,viewpoint_:{1.3,-2.4,2},
plotrange_:{{-.5,1},{-.5,1},{-.1,1.3}}]
```

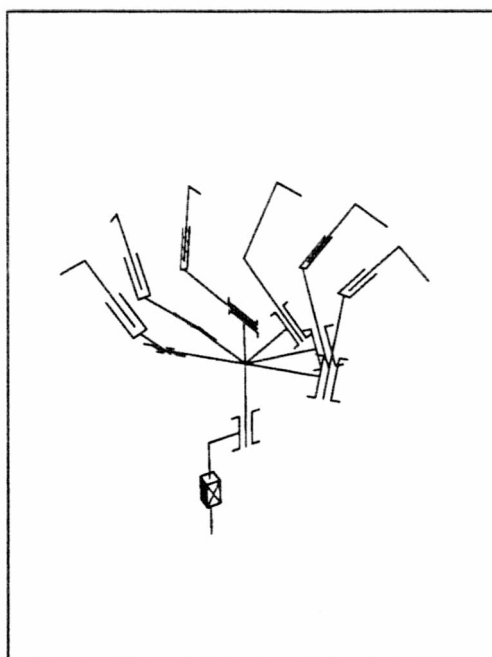
Dla manipulatora o n stopniach swobody, pierwszym argumentem procedury jest n -elementowa lista par liczb, które podają bezwzględny zakres ruchów (pierwsza liczba minimalne, druga – maksymalne położenie przegubu podczas animacji), dla każdego przegubu manipulatora. Podanie listy o większej liczbie par niż n spowoduje pominięcie par począwszy od pary $n + 1$, zaś przy podaniu listy o mniejszej liczbie par, brakującym parom zostaną przypisane domyślnie wartości zero. Animacja zostanie dokonana dla ścieżki będącej wynikiem liniowego ruchu manipulatora w przestrzeni wewnętrznej przy zmianie położenia w przegubach w podanych zakresach. Parametr `number` mówi o liczbie klatek, które będą wyświetlone w jednej, pełnej sekwencji ruchu. Pominięcie tego parametru spowoduje przyjęcie domyślniej wartości 5. Dwa ostatnie parametry decydują o punkcie widzenia i wyświetlanym fragmencie animowanego rysunku. Ich format musi być zgodny odpowiednio z formatem opcji graficznych `ViewPoint` oraz `PlotRange` systemu MATHEMATICA. Pominięcie ich w wywołaniu spowoduje pokazanie animacji w zakresie $-0.5 \div 1$ dla współrzędnych x i y oraz $-0.1 \div 1.3$ dla współrzędnej z z punktu widzenia o współrzędnych $x = 1.3$, $y = -2.4$, $z = 2$. Oprócz wygenerowania animacji szkieletu manipulatora procedura zwraca listę prymitywów graficznych typu `Graphics3D` zawierającą poszczególne klatki animacji. Przy tak zdefiniowanej procedurze, wydanie komendy

```
In[6]:= AnimateSkeleton[{{0.3,0.3},{-Pi/4,3 Pi/4},
{Pi/4,Pi/4},{-Pi/4,-Pi/4}},5];
```

przy zmiennej `DHParameters` zdefiniowanej jak dla przykładowych wywołań poprzednich procedur, spowoduje wyświetlenie sekwencji sześciu rysunków obrazujących ruch manipulatora przy obrocie wokół osi przegubu drugiego, począwszy od położenia $-\pi/4$ do położenia $3\pi/4$ ^{||}. Rysunek A.4 przedstawia wszystkie położenia szkieletu manipulatora wyświetlane podczas omawianej animacji. Warto zwrócić uwagę na możliwość zmiany parametrów animacji przy użyciu opcji *Animation Controls...* pola *View* z menu okienka graficznego zawierającego daną animację^{**}. Opcja ta wywołuje okno *Animation Control*

^{||}oczywiście, przy interfejsie użytkownika typu notebook, w celu uzyskania animacji, po zaznaczeniu sekwencji uzyskanych rysunków należy wybrać opcję *Animate Selected Graphics* z pola *Graph*

^{**}przedstawiona uwaga dotyczy MATHEMATICI z interfejsem tekstowym; przy interfejsie typu notebook pozwala na to opcja *Animation...* z pola *Options* lub *Graph* w zależności od wersji programu



Rysunek A.4: Przykładowa sekwencja położeń szkieletu manipulatora wyświetlanych przez procedurę `AnimateSkeleton`.

Panel^{††} pozwalające na zmianę szybkości oraz kierunku animacji, a także jej zatrzymanie i ręczne przeglądanie kolejnych rysunków wchodzących w jej skład.

A.2.4 Procedura `ComputeKinematics`

Kolejną procedurą zawartą w pakiecie `robskel`` jest procedura `ComputeKinematics`. Pozwala ona na uzyskanie kinematyki manipulatora opisanego zmienną `DHParameters` w postaci (1.5).

Deklaracja nagłówka omawianej procedury ma postać:

```
ComputeKinematics[NumberOfLinks_Integer:-1]
```

Parametr `NumberOfLinks` określa numer ostatniego członu manipulatora, który jest brany pod uwagę przy liczeniu kinematyki, przy użyciu tej procedury jest więc możliwe wyznaczenie kinematyki submanipulatorów manipulatora o strukturze danej zmienną `DHParameters`. Pominięcie parametru `NumberOfLinks` lub nadanie mu wartości ujemnej czy też większej od liczby stopni swobody manipulatora spowoduje obliczenie kinematyki dla całego manipulatora. I tak, dla zmiennej `DHParameters` zdefiniowanej jako

```
In[7] := DHParameters = {{q1, 0, 6, 0},
                        {q2, 0, 3, 0}};
```

po wykonaniu instrukcji

```
In[8] := ComputeKinematics[]
```

^{††} *Animation Settings* dla interfejsu typu notebook

otrzymamy kinematykę planarnego manipulatora typu RR daną jako

```
Out[8] = {{Cos[q1] Cos[q2] - Sin[q1] Sin[q2],
>      -(Cos[q2] Sin[q1]) - Cos[q1] Sin[q2], 0,
>      6 Cos[q1] + 3 (Cos[q1] Cos[q2] - Sin[q1] Sin[q2])},
>      {Cos[q2] Sin[q1] + Cos[q1] Sin[q2], Cos[q1] Cos[q2] -
>      Sin[q1] Sin[q2], 0, 6 Sin[q1] + 3 (Cos[q2] Sin[q1] +
>      Cos[q1] Sin[q2])}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

A.2.5 Procedura ComputeJacobian

Procedurą analogiczną do poprzedniej procedury, służącą obliczaniu jacobianu w postaci (1.8) manipulatora opisanego zmienną `DHParameters` jest procedura `ComputeJacobian`.

Podobnie jak poprzednio, deklaracja nagłówka omawianej procedury ma postać:

```
ComputeJacobian[NumberOfLinks_Integer:-1]
```

Parametr `NumberOfLinks` określa numer ostatniego członu manipulatora, który jest brany pod uwagę podczas obliczania jacobianu. Jest więc możliwe, przy użyciu procedury `ComputeJacobian`, wyznaczenie jacobianów submanipulatorów manipulatora o strukturze danej zmienną `DHParameters`. Pominięcie parametru `NumberOfLinks` lub nadanie mu wartości ujemnej czy też większej od liczby stopni swobody manipulatora spowoduje obliczenie jacobianu dla całego manipulatora. Dla zmiennej `DHParameters` zdefiniowanej jak w poprzednim podrozdziale, wywołanie

```
In[9] := ComputeJacobian[]
```

zwróci jako rezultat wyrażenie na jacobian planarnego manipulatora typu RR

```
Out[9] = {{-6 Sin[q1] - 3 Cos[q2] Sin[q1] - 3 Cos[q1] Sin[q2],
>      -3 Cos[q2] Sin[q1] - 3 Cos[q1] Sin[q2]},
>      {6 Cos[q1] + 3 Cos[q1] Cos[q2] - 3 Sin[q1] Sin[q2],
>      3 Cos[q1] Cos[q2] - 3 Sin[q1] Sin[q2]},
>      {0, 0}, {0, 0}, {0, 0}, {1, 1}}
```

A.2.6 Procedura pomocnicza CalculateJacobian

Dodatkową procedurą znajdującą się w pakiecie jest procedura `CalculateJacobian`. Pozwala ona na wyliczenie składowych położenia jacobianu manipulatora opisanego zmienną globalną `DHParameters`.

Deklaracja nagłówka procedury ma postać:

```
CalculateJacobian[q_List]
```

gdzie parametr `q` określa konfigurację manipulatora, dla której ma być obliczony jacobian i spełnia warunki podane przy opisie analogicznego parametru procedury `PlotSkeleton`. Przy takiej deklaracji, wydanie komendy

```
In[10] := CalculateJacobian[{0.3,-Pi/4,Pi/4,0}];
```

przy deklaracji zmiennej `DHParameters` jak dla procedur graficznych, da w odpowiedzi


```
Out[10]//TableForm= 0      -0.233939    0.0214858   -0.0529093
                     0      0.249079    0.144493    0.0767299
                     1.      0          -0.136603    0.0362372
```

Kolejne kolumny uzyskanej macierzy można interpretować jako wektory kierunków ruchu efektora manipulatora przy poruszaniu odpowiednimi przegubami.

A.3 Przykładowe zastosowanie procedur

W niniejszej części dodatku zostanie zilustrowana możliwość wykorzystania opisanego pakietu procedur jako narzędzia wspomagającego analizę zachowania manipulatorów w pobliżu konfiguracji osobliwych. Chcemy w tym miejscu zauważyć, że chociaż przedstawiony zestaw procedur został stworzony z myślą o właśnie takim zastosowaniu, nie ogranicza to w żaden sposób możliwości jego użycia przy analizie jakichkolwiek innych konfiguracji.

Procedury `PlotSkeleton` i `AnimateSkeleton` znajdują głównie zastosowanie jako narzędzie wspomagające wyobrażenie sobie konstrukcji przestrzennej manipulatora opisanego przy użyciu parametrów Denavita–Hartenberga. Możliwość łatwego uzyskania rysunku szkieletu manipulatora, a także „poruszania” tym szkieletem, może w zdecydowany sposób przyczynić się do szybszego i pełniejszego zrozumienia zależności geometrycznych pomiędzy poszczególnymi elementami składowymi analizowanego manipulatora. Wymienione procedury ułatwiają znalezienie i zobrazowanie konfiguracji charakterystycznych dla danego manipulatora. Mogą to być zarówno konfiguracje, dla których manipulator osiąga brzeg swojej przestrzeni roboczej, jak i konfiguracje osobliwe, kiedy to manipulator nie jest w stanie poruszać się w pewnych kierunkach w przestrzeni roboczej.

Procedura `PlotPaths` wraz z procedurą pomocniczą `CalculateJacobian` pozwala na łatwiejsze zrozumienie na czym polega osobliwość danej konfiguracji i wyznaczenie kierunków w przestrzeni roboczej, w których w danej konfiguracji osobliwej, manipulator nie jest w stanie się poruszać. Własności te zostaną zilustrowane przykładowym zastosowaniem omawianych procedur do analizy osobliwości konkretnego manipulatora o trzech stopniach swobody z wszystkimi przegubami rotacyjnymi. Rysunki A.5 a), b), c) przedstawiają szkielet manipulatora w jednej z jego konfiguracji osobliwych wraz ze ścieżkami powstałymi w wyniku ruchu odpowiednio pierwszym, drugim lub trzecim przegubem manipulatora. Złożenie tych trzech rysunków przedstawia rysunek A.5 d). Rysunki są efektem wykonania następującego zestawu komend:

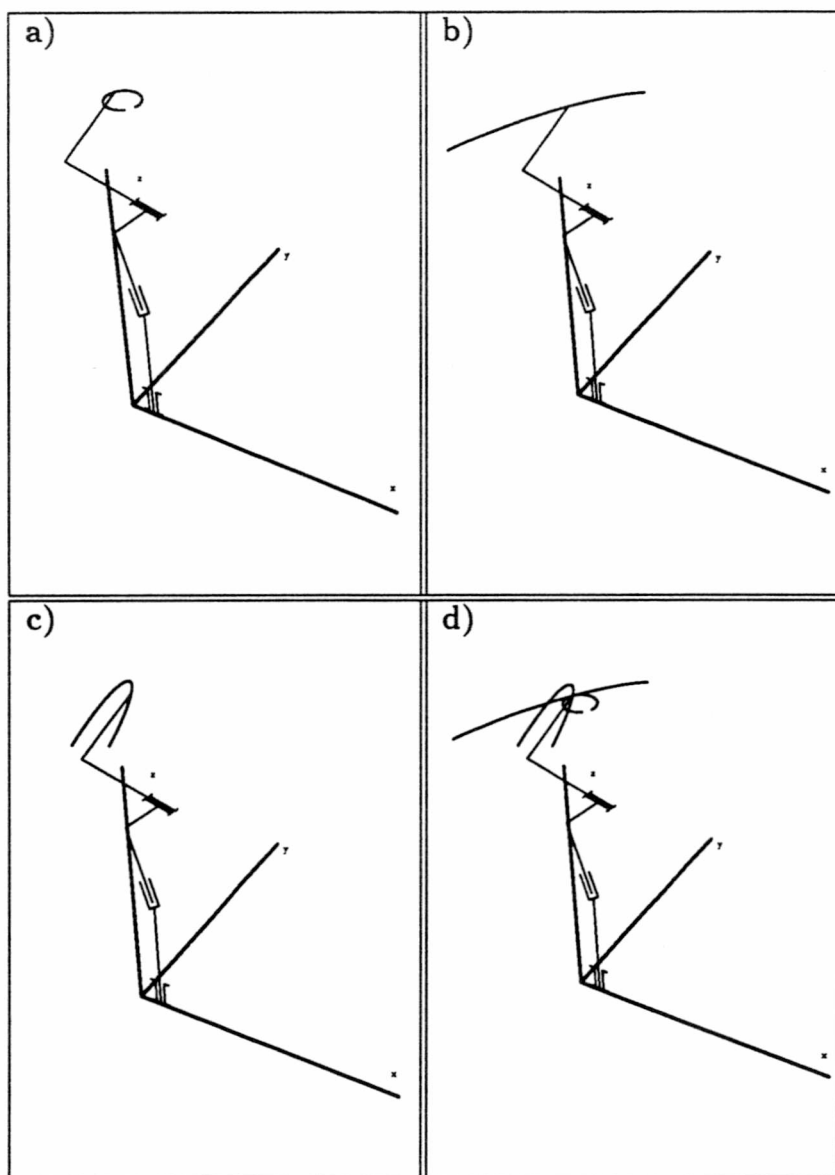
```
In[11]:= DHPParameters = {{q1, .4, 0, -Pi/4},
                           {q2, .3, .3, Pi/4},
                           {q3, .3, .3, 0}};

In[12]:= PlotPaths[{1,-1.408,.615},{1,-Pi+.3,Pi-.3}},{}];

In[13]:= PlotPaths[{1,-1.408,.615},{2,-.6,.8}},{}];

In[14]:= PlotPaths[{1,-1.408,.615},{3,-2,.8}},{}];

In[15]:= PlotPaths[{1,-1.408,.615},{1,-Pi+.3,Pi-.3},{2,-.6,.8},
                    {3,-2,.8}},{}];
```



Rysunek A.5: Rysunki szkieletu manipulatora typu 3R wraz ze ścieżkami przy poruszaniu

- a) pierwszym przegubem, b) drugim przegubem,
c) trzecim przegubem, d) złożenie rysunków a), b), c).

Jak widać, w przedstawionej konfiguracji osobliwej pruszenie pierwszym lub drugim przegubem powoduje ruch efektora manipulatora wzdłuż tego samego kierunku. Jest więc oczywiste, że przy trójwymiarowej przestrzeni roboczej, musi istnieć w badanej konfiguracji kierunek, wzdłuż którego, poruszając w dowolny sposób przegubami manipulatora, nie można uzyskać ruchu efektora manipulatora. Kierunek ten jest wyznaczony przez prostą prostopadłą do płaszczyzny rozpiętej przez wektory styczne do pokazanych ścieżek ruchu efektora w punkcie ich przecięcia. W celu dokładnego określenia wektora wyznaczającego ten kierunek posłużymy się procedurą `CalculateJacobian`. Wywołanie tej procedury dla badanej konfiguracji w postaci

```
In[16]:= CalculateJacobian[{1,-1.408,.615}]
```

daje wynik

```
Out[16]//TableForm= -0.0311566    0.297452    -0.144145
                    -0.0486805    0.464752    0.26248
                    0.            0.            -0.0180662
```

Oznacza on, że ruch pierwszym lub drugim przegubem manipulatora powoduje przemieszczanie efektora wzdłuż kierunku wyznaczonego wektorem $(-0.0311566, -0.0486805, 0)^{**}$ zaś ruch przegubem trzecim przemieszcza effektor w kierunku wektora o współrzędnych $(-0.144145, 0.26248, -0.0180662)$. Z tego wynika, że kierunek, wzdłuż którego nie można uzyskać ruchu efektora manipulatora jest opisany wektorem $(0.00879472, -0.00562881, -0.151950)$, który jest iloczynem wektorowym dwóch wyznaczonych wcześniej wektorów.

^{**}który jest współliniowy z wektorem $(0.297452, 0.464752, 0)$

Dodatek B

Pakiet oprogramowania symbolicznego do syntezy algorytmów sterowania kinematyk osobliwych

Pakiet oprogramowania `singcont`` jest przeznaczony dla systemu obliczeń symbolicznych MATHEMATICA, [Wol88]. Wspomaga on zastosowanie metody postaci normalnych do rozwiązania osobliwego zadania odwrotnego dla manipulatorów o kinematyce równoważnej kwadratowej postaci normalnej. Pakiet jest zawarty w zbiorze `singcont.m` na dołączonej dyskietce. Dyskietka zawiera dodatkowo przykładowe zbiory ilustrujące wykorzystanie pakietu: zbiór `democont.m` dla MATHEMATICI z interfejsem tekstowym oraz zbiory `democont.ma`, `democont.mb` dla MATHEMATICI z interfejsem typu notebook*.

Pakiet wymaga wcześniejszego zainstalowania pod dowolnym systemem operacyjnym systemu obliczeń symbolicznych MATHEMATICA wersja 2.0[†]. Pakiet został przebadany z wykorzystaniem wersji 2.2 programu MATHEMATICA zainstalowanej na stacji roboczej HEWLETT PACKARD 9000 Model 715/64 pod systemem operacyjnym UNIX.

B.1 Struktura i uruchomienie pakietu

W skład pakietu wchodzi procedury umożliwiające znalezienie dyfeomorfizmów transformujących kinematykę do postaci kwadratowej (procedura `FindDiffeo`), znalezienie dyfeomorfizmu odwrotnego do danego (procedura `InverseDiffeo`) oraz procedury pomocnicze pozwalające na rozwinięcie funkcji wielu zmiennych w szereg Taylora[‡] (procedura `ExpandedSeries`) i pominięcie wyrazów powyżej pewnego stopnia w rozwinięciu w szereg Taylora (procedura `SkipPowers`). Z punktu widzenia użytkownika, każda z wymienionych procedur działa niezależnie od pozostałych.

Po wywołaniu systemu MATHEMATICA z poziomu systemu operacyjnego, należy wczytać sam pakiet do pamięci komputera. Aby to osiągnąć, należy wydać polecenie:

```
In[1]:= <<singcont.m
```

*wymienione zbiory są dostępne również poprzez usługę sieciową „anonymous ftp” z serwera `ftp://rab.ict.pwr.wroc.pl/pub/Mathematica/Robotics/Singular/`

[†]lub późniejsza

[‡]istnieje wprawdzie procedura MATHEMATICI służąca temu celowi, ale zwracany przez nią wynik nie jest w pełni tym, czego potrzebujemy w naszym przypadku

gdzie `singcont.m` jest zbiorem zawierającym procedury pakietu. Wymaga się, aby zbiór `singcont.m` znajdował się w katalogu bieżącym. W przypadku niespełnienia tego warunku nazwę zbioru należy poprzedzić ścieżką dostępu. Brak zbioru lub błędne wskazanie jego położenia na dysku spowoduje pojawienie się komunikatu:

```
Get::noopen: Cannot open singcont.m.
```

```
Out[1]= $Failed
```

Jeśli została wydana komenda zawierająca ścieżkę dostępu do zbioru `singcont.m`, ścieżka ta zostanie powtórzona w przedstawionym powyżej komunikacie.

Po wykonaniu opisanych kroków, pakiet `singcont`` jest gotowy do wykorzystania zgodnie z przedstawionymi poniżej regułami.

B.2 Składnia procedur pakietu

B.2.1 Procedura FindDiffeo

Procedura `FindDiffeo` pozwala na obliczenie dyfeomorfizmów przekształcających kinematykę o kwadratowej postaci normalnej z jej postaci pre-normalnej do postaci normalnej. Szukane są rozwinięcia dyfeomorfizmów w szereg Taylora o zadanej dokładności.

Deklaracja nagłówka procedury `FindDiffeo` jest następująca:

```
FindDiffeo[kinem_, n_Integer]
```

Pierwszy argument procedury jest funkcją opisującą pierwszą składową rozpatrywanej kinematyki w postaci pre-normalnej, argument drugi określa z jaką dokładnością będą wykonywane obliczenia. Przy wartości drugiego argumentu równej n , dyfeomorfizm przestrzeni wewnętrznej $\varphi(x)$ będzie znaleziony z dokładnością do wyrazów rzędu $n - 1$, natomiast dyfeomorfizm przestrzeni roboczej $\psi(y)$ z dokładnością do wyrazów rzędu $n^{\S}$. Wymaga się, aby argumenty funkcji `kinem` były postaci x_i gdzie i jest kolejnym numerem zmiennej ruchu manipulatora zaczynając od 1[¶]. Jako wynik działania procedura zwraca dwuelementową listę, z dyfeomorfizmem przestrzeni wewnętrznej $\varphi(x)$ jako pierwszym elementem i dyfeomorfizmem przestrzeni roboczej $\psi(y)$ jako elementem drugim. Przykładem poprawnego wywołania procedury `FindDiffeo` jest komenda

```
In[2]:= FindDiffeo[6 Cos[x1]-9+Sqrt[9-(x2-6 Sin[x1])^2],3]
```

wynikiem działania której jest

```
Out[2]= {3 x1 - --, -y1 - ---}
          3          18
```

gdzie pierwszy element listy to dyfeomorfizm $\varphi(x)$ obliczony z dokładnością do wyrazów rzędu 2 (włącznie), zaś element drugi jest dyfeomorfizmem $\psi(y)$ znalezionym z dokładnością do wyrazów rzędu 3 (włącznie).

[§]dokładności dla poszczególnych dyfeomorfizmów zostały ustalone w ten sposób celowo, zgodnie z tym co jest potrzebne w trakcie wykorzystywania metody

[¶]dla manipulatora o n stopniach swobody będą to więc zmienne $x_1, x_2, \dots, x_n$

B.2.2 Procedura InverseDiffeo

Procedura `InverseDiffeo` służy znalezieniu dyfeomorfizmu odwrotnego do danego z zadaną dokładnością.

Deklaracja nagłówka procedury `FindDiffeo` ma postać

```
InverseDiffeo[kinem_List,n_Integer]
```

Pierwszy argument procedury jest dyfeomorfizmem zadanym w postaci wektora kolumnowego $\{\{fi1(x)\}, \{fi2(x)\}, \dots\}$, gdzie argumenty funkcji `fi1`, `fi2`, ... są postaci x_i z i jako kolejnym numerem zmiennej ruchu manipulatora, zaczynając od 1^{||}. Argument drugi określa z jaką dokładnością wykonywane są obliczenia. Wywołanie procedury postaci

```
In[3]:= InverseDiffeo[{{3 x1 -x2/3},{x2}},3]
```

daje w wyniku

```
Out[3]= {{--- + ---}, {xi2}}
          3      9
```

B.2.3 Procedura pomocnicza ExpandedSeries

Procedura `ExpandedSeries` pozwala na wyliczenie rozwinięcia w szereg Taylora funkcji wielu zmiennych z zadaną dokładnością.

Deklaracja nagłówka omawianej procedury ma postać:

```
ExpandedSeries[kinem_,x0_List,n_Integer]
```

Zasadniczą różnicą pomiędzy procedurą `ExpandedSeries` a standardową procedurą `MATHEMATICAL Series` jest to, że procedura `ExpandedSeries` zwraca rozwinięcie zawierające wyrazy, których suma potęg występujących przy poszczególnych zmiennych nie przekracza zadanej wartości, natomiast procedura `Series` zwraca rozwinięcie zawierające wyrazy, w których potęgi występujące przy poszczególnych zmiennych nie przekraczają zadanej wartości. Poza tym, procedura `ExpandedSeries` usuwa wyrażenia typu $0[x]^n$ ze zwracanego wyniku. Wymagane jest, aby pierwszy argument procedury był funkcją zależną od zmiennych postaci x_i , gdzie i jest kolejnym numerem zmiennej ruchu manipulatora, zaczynając od 1^{||}. Drugim argumentem procedury jest punkt, wokół którego dokonywane jest rozwinięcie, zaś argument trzeci określa rząd rozwinięcia. Przykładem wywołania funkcji może być komenda

```
In[4]:= ExpandedSeries[6 Cos[x1]-9+Sqrt[9-(x2-6 Sin[x1])^2],{0,0},3]
```

w wyniku której otrzymujemy

```
Out[4]= -9 x1^2 + 2 x1 x2 - ---
                      6
```

^{||}dla manipulatora o n stopniach swobody będą to więc zmienne $x_1, x_2, \dots, x_n$

B.2.4 Procedura pomocnicza SkipPowers

Procedura `SkipPowers` pozwala na usunięcie z rozwinięcia funkcji w szereg Taylora wyrazów, których suma potęg występujących przy poszczególnych zmiennych przekracza zadaną wartość.

Deklaracja nagłówka procedury `SkipPowers` ma postać:

```
SkipPowers[f_,n_Integer,x_String:"x"]
```

Pierwszym argumentem procedury jest wyrażenie, z którego wyrazy mają zostać usunięte. Argument drugi ustala wartość sumy potęg, począwszy od której wyrazy będą usuwane. Ponownie jak poprzednio wymaga się, aby argumenty wyrażenia `f` były postaci `xi`, gdzie `i` jest kolejnym numerem zmiennej ruchu manipulatora, zaczynając od `1**`. Jednakże w przypadku tej procedury możliwa jest zmiana nazwy argumentów przy użyciu trzeciego argumentu procedury. I tak nadanie mu wartości np. `"alpha"` spowoduje, że jako argumenty wyrażenia uważane będą zmienne postaci `alphai`. Przykładowe wywołanie procedury `SkipPowers`

```
In[5]:= SkipPowers[xi1+xi1^2+xi1 xi2^2+xi2^3,3,"xi"]
```

daje w wyniku

```
Out[5]= xi1 + xi12
```

B.3 Przykładowe zastosowanie procedur

W tej części dodatku zilustrujemy zastosowanie opisanego pakietu do rozwiązania osobliwego zadania odwrotnego dla planarnego manipulatora typu RR analizowanego w podrozdziale 5.1.

Zdefiniujemy część położeniową kinematyki rozpatrywanego manipulatora w postaci^{††}

```
In[6]:= kinem[x1_,x2_]={{6 Cos[x1]+3 Cos[x1+x2]},
                        {6 Sin[x1]+3 Sin[x1+x2]}};
```

i jego jacobian

```
In[7]:= jacob[x1_,x2_]={{D[kinem[x1,x2]][[1,1]],x1},
                        D[kinem[x1,x2]][[1,1]],x2},{D[kinem[x1,x2]][[2,1]],x1},
                        D[kinem[x1,x2]][[2,1]],x2}}
Out[7]= {{-6 Sin[x1] - 3 Sin[x1 + x2], -3 Sin[x1 + x2]},
> {6 Cos[x1] + 3 Cos[x1 + x2], 3 Cos[x1 + x2]}}
```

Żądamy, aby efektor manipulatora podążał wzdłuż trajektorii zadanej funkcją

```
In[8]:= yd[t_]={{2+7 Cos[t-3]},{7 Sin[t-3]}};
```

^{**}dla manipulatora o n stopniach swobody będą to więc zmienne $x_1, x_2, \dots, x_n$

^{††}do znalezienia kinematyki manipulatora na podstawie jego parametrów Denavita-Hartenberga można użyć procedury `ComputeKinematics` opisaną w podrozdziale A.2.4, ale ze względu na prostotę badanego przypadku nie będziemy tego tu robić

Rozwiązując zadanie metodą jacobianową znajdujemy, że w chwili $t = 3$ manipulator wchodzi w konfigurację osobliwą. Pierwszym krokiem, jaki musimy wykonać w celu zastosowania metody postaci normalnych jest określenie dyfeomorfizmów przekształcających kinematykę manipulatora do postaci pre-normalnej oraz samej postaci pre-normalnej. W szczególnych przypadkach, tak jak w tym^{††}, możliwe jest znalezienie wspomnianych dyfeomorfizmów w postaci jawnej, tutaj jednak będziemy poszukiwać ich rozwinięć w szereg Taylora. Dyfeomorfizm φ_1 ma postać

```
In[8] := fi1={{x1},{kinem[x1,x2][[2,1]]}}
Out[8] = {{x1}, {6 Sin[x1] + 3 Sin[x1 + x2]}}
```

co po rozwinięciu w szereg Taylora daje

```
In[9] := fi1exp=ExpandedSeries[fi1,{0,0},3]
Out[9] = {{x1}, {9 x1 -  $\frac{3 x1^3}{2}$  + 3 x2 -  $\frac{3 x1^2 x2}{2}$  -  $\frac{3 x1 x2^2}{2}$  -  $\frac{x2^3}{2}$ }}
```

Dyfeomorfizm φ_1^{-1} możemy znaleźć wykorzystując procedurę

```
In[10] := invfi1exp=InverseDiffeo[fi1exp,3]
Out[10] = {{xi1}, {-3 xi1 - xi1^3 +  $\frac{2 xi1^2 xi2}{3}$  +  $\frac{xi1 xi2^2}{9}$  -  $\frac{xi2^3}{162}$ }}
```

Dyfeomorfizm ψ_1 jest określony jako

```
In[11] := psi1={{y1},{y2}}-kinem[0,0]
Out[11] = {{-9 + y1}, {y2}}
```

Rozwinięcie kinematyki manipulatora w szereg Taylora

```
In[12] := kinexp=ExpandedSeries[kinem[x1,x2],{0,0},3]
Out[12] = {{9 -  $\frac{9 x1^2}{2}$  - 3 x1 x2 -  $\frac{3 x2^2}{2}$ },
> {9 x1 -  $\frac{3 x1^3}{2}$  + 3 x2 -  $\frac{3 x1^2 x2}{2}$  -  $\frac{3 x1 x2^2}{2}$  -  $\frac{x2^3}{2}$ }}
```

złożone z wyznaczonymi dyfeomorfizmami φ_1^{-1} , ψ_1 określa postać pre-normalną badanej kinematyki

^{††}zobacz podrozdział 5.1

```

In[13]:= prenormal=kinexp/.{x1->invfiexp[[1,1]],
                           x2->invfiexp[[2,1]]};//Expand;
In[14]:= prenormal=psi1/.{y1->prenormal[[1,1]],
                           y2->prenormal[[2,1]]};//Expand;
In[15]:= prenormal=SkipPowers[prenormal,4,"xi"]

```

```

Out[15]= {{-9 xi12 + 2 xi1 xi22 - ----}, {xi2}}
          6

```

W celu określenia dyfeomorfizmów φ i ψ przekształcających kinematykę w postaci pre-normalnej do postaci kwadratowej, użyjemy procedury

```

In[16]:= dyfeo=FindDiffeo[prenormal[[1,1]]/.{xi1->x1,xi2->x2},3];
In[17]:= fiexp={{dyfeo[[1]]},{x2}}
Out[17]= {{3 x1 - --}, {x2}}
          3
In[18]:= psiexp={{dyfeo[[2]]},{y2}}
Out[18]= {{-y1 - ---}, {y2}}
          18

```

Ponieważ będziemy potrzebowali dyfeomorfizmu φ^{-1} , do jego określenia zastosujemy procedurę

```

In[19]:= invfiexp=InverseDiffeo[fiexp,3]
Out[19]= {{--- + ---}, {xi2}}
          3      9

```

Podjęte dotychczas kroki pozwoliły na wyznaczenie wszystkich przekształceń niezbędnych do rozwiązania osobliwego zadania odwrotnego. Zastosowanie dyfeomorfizmów ψ_1 , ψ do rozwinięcia w szereg Taylora trajektorii zadanej y_d daje trajektorię zadaną dla kwadratowej postaci normalnej

```

In[20]:= ydexp=Series[yd[t],{t,3,accur}]
In[21]:= etad=psi1/.{y1->ydexp[[1,1]],y2->ydexp[[2,1]]};
In[22]:= etad=psiexp/.{y1->etad[[1,1]],y2->etad[[2,1]]}
Out[22]= {{----- + 0[-3+t]}, {7(-3+t) - ----- + 0[-3+t] }}
          9                                6

```

Rozwiązanie osobliwego zadania odwrotnego polega na wyciągnięciu pierwiastka algebraicznego z pierwszej składowej tak danej trajektorii

```

In[23]:= xid={{pm Sqrt[etad[[1,1]]]},{etad[[2,1]]}}

```

$$\text{Out}[23] = \left\{ \left\{ \pm \frac{\sqrt{7}(-3+t)}{3} + 0[-3+t] \right\}, \left\{ 7(-3+t) - \frac{7(-3+t)^3}{6} + 0[-3+t]^4 \right\} \right\}$$

gdzie pm oznacza $\pm$. Ostatnim krokiem jest przekształcenie otrzymanego rozwiązania do współrzędnych kinematyki wyjściowej

```
In[24] := xd=invfiexp/.{xi1->xid[[1,1]],xi2->xid[[2,1]]};
In[25] := xd=invfi1exp/.{xi1->xd[[1,1]],xi2->xd[[2,1]]} //Normal//Expand
Out[25] = {{-(-) - \frac{7}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{7t}{9} \pm \frac{\sqrt{7}t}{9}},
> { \pm \sqrt{7} - \frac{\sqrt{7}t}{3} }}
```

Otrzymane rozwiązania zostały zilustrowane na rysunku 5.4.

Dodatek C

Podstawowe pojęcia z teorii osobliwości

Na początku niniejszego dodatku przytoczymy kilka podstawowych faktów z zakresu teorii osobliwości, [AVGZ85, Arn93, GG73, Mar82]. Resztę dodatku poświęcimy na przedstawienie ogólnej metody wyznaczania dyfeomorfizmów φ, ψ znanej pod nazwą metody homotopii, [TL71]. Szczególną uwagę poświęcimy szczególnemu przypadkowi metody homotopii, zwanemu metodą przekształcenia Liego, [AR88], którą zastosujemy do udowodnienia Lematu Morse'a, [GG73].

Definicja 2 Niech f, g będą gładkimi (tj. klasy C^∞) odwzorowaniami $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$. Ustalmy $p, q \in \mathbb{R}^n$. Odwzorowania f i g są lokalnie RL-równoważne (right-left) wokół p, q , jeżeli istnieje para otwartych otoczeń $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$, takich że $p \in U, f(p) \in V$ i para lokalnych dyfeomorfizmów $\varphi : U \rightarrow \varphi(U), \psi : V \rightarrow \psi(V)$, takich że $q = \varphi(p)$ i

$$g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}. \quad (\text{C.1})$$

Klasa odwzorowań RL-równoważnych danemu odwzorowaniu f może być reprezentowana przez odpowiednio wybranego przedstawiciela tej klasy, nazywanego *postacią normalną* odwzorowania f . Zwykle wymaga się, aby postać normalna była „prosta” z pewnego punktu widzenia. W przypadku zagadnień sterowania manipulatorów postać normalna jest do przyjęcia, jeśli umożliwia (lub przynajmniej ułatwia) rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki.

Założmy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f = (f_1, \dots, f_n)$ jest odwzorowaniem gładkim, a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ oznacza punkt osobliwy korzędu 1 odwzorowania f .

Twierdzenie 30 Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\text{rank}_{\frac{\partial f}{\partial x}}(x_0) = n - 1$. Wówczas f jest lokalnie RL-równoważna (w punkcie $(x_0, 0)$) postaci pre-normalnej

$$g(\xi) = (r(\xi), \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (\text{C.2})$$

tzn. dla pewnych $\varphi, \psi, \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = g$, gdzie r jest nieznaną funkcją gładką i $\xi = \varphi(x)$. Dla analitycznych odwzorowań f , dyfeomorfizmy φ, ψ oraz funkcja r są również analityczne.

Twierdzenie 31 Niech f spełnia założenia Twierdzenia 30 i, dodatkowo, niech $m \geq 1$ oznacza najmniejszą liczbę naturalną, dla której funkcja r występująca w (C.2) spełnia warunek

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \xi_1}(0) = \frac{\partial^2 r}{\partial \xi_1^2}(0) = \dots = \frac{\partial^m r}{\partial \xi_1^m}(0) = 0, \\ \frac{\partial^{m+1} r}{\partial \xi_1^{m+1}}(0) \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.3})$$

Wówczas f jest lokalnie RL-równoważna (w punkcie $(x_0, 0)$) postaci normalnej pre-Morina, tj. postaci pre-normalnej (C.2) z funkcją

$$r(\xi) = \xi_1^{m+1} + u_1(\bar{\xi})\xi_1^{m-1} + \dots + u_{m-1}(\bar{\xi})\xi_1, \quad (\text{C.4})$$

gdzie $u_1, \dots, u_{m-1}$ są pewnymi funkcjami gładkimi zależnymi od $\bar{\xi} = (\xi_2, \dots, \xi_n)$, znikającymi w $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Twierdzenie 32 Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ spełnia założenia Twierdzenia 31 wraz z następującym warunkiem rzędu

$$\text{rank} \begin{bmatrix} d(\frac{\partial r}{\partial \xi_1}) \\ \vdots \\ d(\frac{\partial^m r}{\partial \xi_1^m}) \end{bmatrix} (0) = m, \quad (m \leq n), \quad (\text{C.5})$$

gdzie pochodna $dh = (\frac{\partial h}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial \xi_n})$. Wówczas f jest lokalnie RL-równoważna (w punkcie $(x_0, 0)$) postaci normalnej Morina, tj. postaci pre-normalnej (C.2) z funkcją

$$r(\xi) = \xi_1^{m+1} + \xi_2 \xi_1^{m-1} + \dots + \xi_m \xi_1. \quad (\text{C.6})$$

Po wprowadzeniu powyższych pojęć skupimy uwagę na sposobie określenia dyfeomorfizmów określających RL-równoważność między kinematyką k a jej postacią normalną k_0

$$\psi \circ k_0 = k \circ \varphi, \quad (\text{C.7})$$

proponowanym przez metodę homotopii. Metoda ta zasadza się na poszukiwaniu pary dyfeomorfizmów φ, ψ definiowanych przez strumienie pewnych niestacjonarnych pól wektorowych spełniających tzw. równanie homologiczne. W celu ustalenia RL-równoważności między kinematyką k a jej postacią normalną k_0 , zastąpimy k w C.7 przez 1-parametrową deformację postaci normalnej k_0 , $k_t = tk + (1-t)k_0$, $t \in [0, 1]$ (krzywa łącząca k_0 z k) i szukamy dwóch rodzin dyfeomorfizmów φ_t, ψ_t startujących w $\varphi_0 = \text{id}$, $\psi_0 = \text{id}$ (1-parametrowe deformacje odwzorowań tożsamościowych), takich że dla każdego $t \in [0, 1]$

$$\psi_t \circ k_0 = k_t \circ \varphi_t. \quad (\text{C.8})$$

Przyjmujemy, że dyfeomorfizmy φ_t, ψ_t są zdefiniowane za pośrednictwem strumieni niestacjonarnych pól wektorowych X_t, Y_t , tzn.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{t,s}(x)}{\partial t} &= X_t(\Phi_{t,s}(x)) \\ \frac{\partial \Psi_{t,s}(y)}{\partial t} &= Y_t(\Psi_{t,s}(y)) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{C.9})$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t(x) &= \Phi_{t,0}(x) \\ \psi_t(y) &= \Psi_{t,0}(y) \end{aligned} \right\}.$$

Różniczkując parametryczną RL-równoważność i dokonując odpowiednich podstawień z (C.8), (C.9), otrzymujemy następujące równie homologiczne, [AVGZ85],

$$Y_t(k_t(x)) = \frac{\partial k_t}{\partial t}(x) + \frac{\partial k_t}{\partial x}(x)X_t(x) \quad (C.10)$$

czy też, równoważnie,

$$Y_t(k_t(x)) - \frac{\partial k_t}{\partial x}(x)X_t(x) = (k - k_0)(x). \quad (C.11)$$

Jeśli teraz jesteśmy w stanie rozwiązać równanie (C.11) ze względu na pola wektorowe $X_t(x)$, $Y_t(y)$ wówczas, całkując równania różniczkowe (C.9) otrzymujemy postać dyfeomorfizmów φ_t , ψ_t dla każdego $t \in [0, 1]$. Jasne jest, że przy podstawieniu $t = 1$ uzyskujemy poszukiwane dyfeomorfizmy $\varphi = \varphi_1$, $\psi = \psi_1$.

W szczególnym przypadku, gdy zamiast RL-równoważności rozpatrywana jest R-równoważność (right), metoda homotopii sprowadza się do tzw. metody przekształcenia Liego, [AR88]. W tym przypadku chcemy ustalić równoważność (C.7) używając jedynie dyfeomorfizmu φ (tak więc $\psi = \text{id}$). Postępując analogicznie jak w przypadku RL-równoważności, otrzymujemy równanie (C.11) w postaci

$$\frac{\partial k_t(x)}{\partial x}X_t(x) + (k - k_0)(x) = L_{X_t}k_t(x) + (k - k_0)(x) = 0, \quad (C.12)$$

które należy rozwiązać względem pola $X_t(x)$. Symbol L_X w powyższym wyrażeniu oznacza pochodną Liego względem pola wektorowego X .

Aby zilustrować użyteczność metody przekształcenia Liego, udowodnimy przy jej użyciu Lemat Morse'a, [GG73], tzn. pokażemy, że tak zwana funkcja Morse'a, czyli gładka funkcja $k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, taka że $k(0) = 0$, $\frac{\partial k(0)}{\partial x} = 0$ i $\text{rank} \left(A = \frac{\partial^2 k(0)}{\partial x^2} \right) = n$ jest R-równoważna swojej części kwadratowej $k_0(x) = \frac{1}{2}x^T A x$. Równanie (C.12) można zapisać przy pomocy iloczynu skalarnego jako

$$\left\langle \frac{\partial k_t}{\partial x}, X_t \right\rangle = k_0 - k = p, \quad (C.13)$$

gdzie dla przejrzystości pominięto argument x . Z definicji

$$\frac{\partial k_t}{\partial x} = -t \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial k_0}{\partial x} = -t \frac{\partial p}{\partial x} + A x, \quad (C.14)$$

gdzie A jest macierzą formy kwadratowej $k_0(x)$. Podstawiając (C.14) do (C.13) otrzymujemy

$$\left\langle A x - t \frac{\partial p}{\partial x}, X_t \right\rangle = p. \quad (C.15)$$

Funkcja $p(x)$ w (C.13) jest gładka i taka że $p(0) = 0$, $\frac{\partial p}{\partial x}(0) = 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(0) = 0$. Wykorzystując Lemat Hadamarda, [GG73], dostajemy następujące zależności

$$p(x) = \int_0^1 \left\langle \frac{\partial p(\lambda x)}{\partial x}, x \right\rangle d\lambda \quad (C.16')$$

i

$$\left\langle \frac{\partial p(x)}{\partial x}, v \right\rangle = \left\langle \int_0^1 \frac{\partial^2 p(\tau x)}{\partial x^2} x d\tau, v \right\rangle, \quad (C.16'')$$

*dowód zrekonstruowano na podstawie [AR88]

prawdziwe dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^n$. Wprowadźmy macierz $R(x)$ zdefiniowaną jako

$$R(x) = A^{-1} \int_0^1 \frac{\partial^2 p(\tau x)}{\partial x^2} d\tau. \quad (\text{C.16})$$

Łatwo pokazać, że przy takiej definicji

$$\left\langle \frac{\partial p(x)}{\partial x}, v \right\rangle = \langle Ax, R(x)v \rangle. \quad (\text{C.17})$$

Na podstawie wyrażeń (C.16') i (C.17) wnioskujemy, że

$$p(x) = \int_0^1 \langle A(\lambda x), R(\lambda x)x \rangle d\lambda = \left\langle Ax, \int_0^1 \lambda R(\lambda x)x d\lambda \right\rangle. \quad (\text{C.18})$$

Ostatecznie, używając wyrażeń (C.17) i (C.18), możemy zapisać równanie (C.15) jako

$$\langle Ax, X_t \rangle - t \left\langle \frac{\partial p}{\partial x}, X_t \right\rangle = \langle Ax, X_t \rangle - \langle Ax, tR(x)X_t \rangle = \left\langle Ax, \int_0^1 \lambda R(\lambda x)x d\lambda \right\rangle$$

czy też, równoważnie,

$$(I_n - tR(x))X_t(x) = \int_0^1 \lambda R(\lambda x)x d\lambda. \quad (\text{C.19})$$

Z (C.16) wynika, że $R(0) = 0$ ($p(x)$ zawiera składowe rzędu ≥ 3 ze względu na x), a więc istnieje otoczenie $0 \in \mathbb{R}^n$, w którym macierz występująca przy X_t w (C.19) jest odwracalna. Prowadzi to do wniosku, że w tym otoczeniu

$$X_t(x) = (I_n - tR(x))^{-1} \int_0^1 \lambda R(\lambda x)x d\lambda \quad (\text{C.20})$$

jest dobrze określone. Całkując pole X_t otrzymujemy poszukiwany dyfeomorfizm φ , podobnie jak w metodzie homotopii.

Podziękowania

Pragnę serdecznie podziękować promotorowi, Panu Profesorowi Krzysztofowi Tchoniowi, za cały poświęcony mi czas, za inspirację prowadzonych badań oraz pomoc w realizacji niniejszej pracy.

Dziękuję również Kolegom z Zakładu Podstaw Cybernetyki i Robotyki, zwłaszcza Tomaszowi Kubikowi i Ignacemu Dulębie, za uwagi i dyskusje związane z przedstawioną tematyką.

Składam podziękowania Profesorowi Witoldowi Jacakowi z Instytutu Systemtechnik & Automation, Institut für Systemwissenschaften Uniwersytetu Keplera w Linzu, Austria, za udostępnienie laboratorium w celu przeprowadzenia badań eksperymentalnych na robocie *AdeptOne*.

Specjalne podziękowania chcę złożyć mojej rodzinie, za cierpliwość i słowa otuchy płynące z oddali, pozwalające mi przetrwać niejedną trudną chwilę.

Literatura

- [Ade86] Adept Technology, Inc., Sunnyvale, USA. *Adept Manipulator System, Installation Manual*, 1986.
- [Ade88] Adept Technology, Inc., San Jose, USA. *Adept Manipulator System, V Reference Guide, version 6.2*, 1988.
- [AR88] R. J. E. Marsden Abraham i T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [Arn93] V. I. Arnold. *Dynamical Systems VI. Singularity Theory I*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [AVGZ85] V. I. Arnold, A. N. Varchenko i S. M. Gusein-Zade. *Singularities of Differentiable Maps*. Birkhäuser, Boston, 1985.
- [B⁺84] J. Baillieul et al. Programming and control of kinematically redundant manipulators. *W Proc. 23rd IEEE Conference Decison Control*, strony 768–774, 1984.
- [Bed91] N. S. Bedrossian. Classification of singular configurations for redundant manipulators. *W Proc. IEEE Int. Conference Robotics Automat.*, vol. 1, strony 818–823, 1991.
- [BGA84] Q. Bazerghi, A. Goldenberg i J. Apkarian. An exact model of PUMA 600 manipulator. *Trans. Systems, Man Cybernet.*, 14(3):483–487, 1984.
- [Bur89] J. W. Burdick. On the inverse kinematics of redundant manipulators: Characterization of the self-motion manifolds. *W Proc. IEEE Int. Conference Robotics Automat.*, vol. 1, strony 264–270, 1989.
- [Bur91] J. W. Burdick. A classification of 3R regional manipulator singularities and geometries. *W Proc. IEEE Int. Conference Robotics Automat.*, vol. 3, strony 2670–2675, 1991.
- [Cra81] J. J. Craig. *Introduction to Robotics*. MIT Press, Cambridge, 1981.
- [CSE94] S. Chiaverini, B. Siciliano i O. Egeland. Review of the damped least-squares inverse kinematics with experiments on an industrial robot manipulator. *IEEE Trans. Control Syst. Technology*, 2(2):123–134, 1994.
- [DH55] J. Denavit i R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *ASME Transaction J. Applied Mechanics*, 77(2):215–221, 1955.
- [DJKM95] D. Dreiseitl, W. Jacak, T. Kubik i R. Muszyński. Neural processing-based robot kinematics modelling and calibration for pose control. *W Proc. 12th Int. Conference on Systems Science*, strony 288–295, Wrocław, Poland, 1995.

- [DJM95] I. Dułęba, W. Jacak i R. Muszyński. Hybrid computing approach to robot control in the presence of uncertainties. W *Proc. Int. Federation of Automatic Control Conference on Motion Control*, strony 664–671, Munich, Germany, 1995.
- [DJMB95] I. Dułęba, W. Jacak, R. Muszyński i B. Buchberger. Symbolic computation-based synthesis of neural network dynamics and controller for robots. W *Proc. IEEE Int. Conference on Neural Networks*, strony 2720–2725, Perth, Australia, 1995.
- [Fre82] E. Freund. Fast nonlinear control with arbitrary pole-placement for industrial robots and manipulators. *Int. J. Robotics Research*, 1(1):65–78, 1982.
- [GG73] M. Golubitsky i V. Guillemin. *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [Got86] D. H. Gottlieb. Robots and fibre bundles. *Bull. Soc. Math.*, 37:219–223, 1986.
- [Isi89] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [Jak90] B. Jakubczyk. Equivalence and invariants of nonlinear control systems. W: H. J. Sussmann, wydawca, *Differential Geometric Control Theory*, strony 177–218. M. Dekker, New York, 1990.
- [Kie92] J. Kieffer. Manipulator inverse kinematics for untimed end-effector trajectories with ordinary singularities. *Int. J. Robotics Research*, 11(3):225–237, 1992.
- [Kie94] J. Kieffer. Differential analysis of bifurcations and isolated singularities for robots and mechanisms. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, 10(1):1–10, 1994.
- [Kie95] J. Kieffer. Kinematics of the path tracking at singularities of the planar 2R manipulator. *Appl. Mathematics and Computer Science*, 5(2):295–303, 1995.
- [KTM93] T. Kubik, K. Tchoń i R. Muszyński. Zastosowanie algorytmu Newtona do odwracania kinematyk osobliwych. W *Materiały 4 Krajowej Konferencji Robotyki*, vol. 1, strony 264–270, Wrocław, 1993.
- [Lat93] J. C. Latombe. *Robot Motion Planning*. Kluwer, Boston, 1993.
- [LB91] S. Lee i G.A. Bekey. Application of neural networks to robotics. *Control and Dynamic Systems*, 39:1–67, 1991.
- [LMP93] G. L. Long, J. M. McCarthy i R. P. Paul. Kinematic models for singularity-free movement with three Cartesian freedoms. *Trans. ASME J. Mech. Design*, 115(1):207–213, 1993.
- [LP92] G. L. Long i R. P. Paul. Singularity avoidance and the control of an eight-revolute-joint manipulator. *Int. J. Robotics Research*, 11(6):503–515, 1992.
- [Mar82] J. Martinet. *Singularities of Smooth Functions and Maps*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [MK94] A. Morecki i J. Knapczyk (red.). *Podstawy Robotyki. Teoria i Elementy Manipulatorów*. WNT, Warszawa, 1994.
- [MLS94] R. M. Murray, Z. Li i S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.

- [MT95] R. Muszyński i K. Tchoń. Normal forms of non-redundant singular robot kinematics: 3 d.o.f. worked examples. Report PRE 17/95, Institute of Engineering Cybernetics, Wrocław Technical University, 1995.
- [MW88] R. V. Mayorga i A. K. C. Wong. A singularities avoidance approach for the optimal local path generation of redundant manipulators. W *Proc. IEEE Int. Conference Robotics Automat.*, vol. 1, strony 49–54, Washington, 1988.
- [Nak91] Y. Nakamura. *Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*. Addison-Wesley, 1991.
- [Nen95] D. N. Nenchev. Tracking manipulator trajectories with ordinary singularities: A null space-based approach. *Int. J. Robotics Research*, **14**(4):399–404, 1995.
- [NH86] Y. Nakamura i H. Hanafusa. Inverse kinematic solutions with singularity robustness for robot manipulator control. *J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, **109**(2):163–171, 1986.
- [NS90] H. Nijmeijer i A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamic Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Pau81] R. P. Paul. *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*. MIT Press, Cambridge, 1981.
- [PL92] D. K. Pai i M. C. Leu. Genericity and singularities of robot manipulators. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **8**(5):492–504, 1992.
- [Sha90] T. Shamir. The singularities of redundant robot arm. *Int. J. Robotics Research*, **9**(1):113–121, 1990.
- [SV89] M. Spong i M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. MIT Press, Cambridge, 1989.
- [TA92] V. D. Tourassis i M. H. Ang. Identification and analysis of robot manipulator singularities. *Int. J. Robotics Research*, **11**(3):248–259, 1992.
- [Tch91] K. Tchoń. Differential topology of the inverse kinematic problem for redundant robot manipulators. *Int. J. Robotics Research*, **10**(5):492–504, 1991.
- [Tch93] K. Tchoń. On singular kinematics of robot manipulators. *Arch. Control Sci.*, **2(XXXVIII)**(1–2):141–158, 1993.
- [Tch95a] K. Tchoń. A normal form of singular kinematics of robot manipulators with smallest degeneracy. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **11**(3):401–404, 1995.
- [Tch95b] K. Tchoń. Normal forms of kinematic singularities of 3R robot manipulators. *Appl. Mathematics and Computer Science*, **5**(2):391–407, 1995.
- [TD94] K. Tchoń i I. Dulęba. Definition of a kinematic metric for robot manipulators. *J. Robotic Syst.*, **11**(3):211–222, 1994.
- [TL71] R. Thom i H. I. Levine. Singularities of differentiable mappings. W: C. T. C. Wall, wydawca, *Liverpool Singularities I*, strony 1–89. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [TM95a] K. Tchoń i A. Matuszok. On avoiding singularities in redundant robot kinematics. *Robotica*, **13**:599–606, 1995.

- [TM95b] K. Tchoń i R. Muszyński. Singular tracking in robot manipulators: A normal form approach. The quadratic case. Report PRE 45/95, Institute of Engineering Cybernetics, Wrocław Technical University, 1995.
- [TM97] K. Tchoń i R. Muszyński. Singularities of non-redundant robot kinematics. *Int. J. Robotics Research*, 1997. W druku.
- [TU92] K. Tchoń i P. Urban. Classification of kinematic singularities in planar robot manipulators. *Systems Contr. Lett.*, **19**(3):293–302, 1992.
- [Wam86] C. W. Wampler II. Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least-squares methods. *IEEE Trans. Syst. Man. Cybernet.*, **16**:93–101, 1986.
- [War83] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [WB88] J. T. Wen i D. S. Bayard. New class of control laws for robotic manipulators: Part 1 – non-adaptive case. *Int. J. Control*, **47**(5):1361–1386, 1988.
- [Whi72] D. E. Whitney. The mathematics of coordinated control of prosthetic arms and manipulators. *J. Dyn, Syst. Meas. Contr.*, **94** G(4):303–309, 1972.
- [Wol88] S. Wolfram. *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley, 1988.

Indeks

Wyłuszczone numery stron oznaczają miejsca, gdzie dane pojęcie zostało wprowadzone (zdefiniowane), pozostałe, miejsca gdzie było ono użyte.

A		
algorytm		
Newtona	17	
sterowania, obliczanego momentu ...	18, 91	
D		
Denavita-Hartenberga		
metoda	13	
parametry manipulatora	13	
o 3 stopniach swobody	32	
planarnego typu RR	29, 82	
typu PUMA	64	
Denavita-Hartenberga parametry manipulatora		
typu RRR	96	
dynamika manipulatora	17	
planarnego typu RR	83	
E		
efektor manipulatora	9	
F		
funkcja Morse'a	137	
H		
hiperboliczna postać normalna kinematyki niere-		
dundantnej manipulatora	25	
planarnego typu RR	32	
typu PUMA	74	
J		
jakobian manipulatora	15	
planarnego typu RR	30, 82, 122	
typu PPP	34	
typu PPR	34	
typu PRP	35	
typu PRR	37	
typu RPP	39	
typu RPR	41, 42	
typu RRP	47, 49	
typu RRR	50, 55, 59	
typu PUMA	66	
K		
kąty		
Eulera	13, 67	
roll-pitch-yaw	13	
		kinematyka manipulatora
		nieredundantna
		o 3 stopniach swobody
		osobliwa
		korzędu 1
		planarnego typu RR
		typu RRR
		typu PUMA
		konfiguracja
		kinematyki
		manipulatora
		osobliwa manipulatora
		korzędu i
		planarnego typu RR
		typu PPP
		typu PPR
		typu PRP
		typu PRR
		typu RPP
		typu RPR
		typu RRP
		typu RRR
		typu PUMA
		regularna manipulatora
		korząd
		jakobianu manipulatora
		konfiguracji
		kwadratowa postać normalna kinematyki niere-
		dundantnej manipulatora
		planarnego typu RR
		typu PPR
		typu PRP
		typu PRR
		typu RPP
		typu RPR
		typu RRP
		typu RRR
		typu PUMA
		L
		Lemat Morse'a
		liniowa postać normalna kinematyki niere-
		dundantnej manipulatora
		M
		macierz

Jacobiego kinematyki manipulatora	15
planarnego typu RR	30
typu PPP	34
typu PPR	34
typu PRP	35
typu PRR	37
typu RPP	39
typu RPR	41, 42
typu RRP	47, 49
typu RRR	50, 55, 59
typu <i>PUMA</i>	68
rotacji kinematyki manipulatora	14
transformacji układów współrzędnych	14
manipulator	9
planarny typu RR	29, 81
typu PPP	34
typu PPR	34
typu PRP	35
typu PRR	37
typu RPP	39
typu RPR	40
typu RRP	47
typu RRR	50, 95
typu <i>PUMA</i>	64
MATHEMATICA	29, 81, 83, 115, 127
metoda	
śledzenia ścieżki	10, 106
Denavita–Hartenberga	13
homotopii	136
jakobianowa	17, 83
obliczanego momentu	18
postaci normalnych	11, 12, 78
przykłady	81
przekształcenia Liego	137
równoważności	10
Runge–Kutty	83

N

Newtona algorytm	17
normalna postać	10, 135
Morina	136
pre-Morina	136
wokół konfiguracji osobliwej kinematyki planarnej typu RR	32

O

odwrotne zadanie kinematyki	9, 16, 18
osobliwa konfiguracja manipulatora	9, 16
planarnego typu RR	30
typu PPP	34
typu PPR	34
typu PRP	36
typu PRR	37, 38
typu RPP	39
typu RPR	41
typu RRP	48, 49
typu RRR	50, 55, 59, 96

typu <i>PUMA</i>	68
osobliwe zadanie śledzenia trajektorii	11, 12, 18
osobliwe zadanie odwrotne	17, 103, 130

P

parametry Denavita–Hartenberga	13
manipulatora o 3 stopniach swobody	32
manipulatora planarnego typu RR	29, 82
manipulatora typu RRR	96
manipulatora typu <i>PUMA</i>	64
podgrupa	
obrotów	13
przesunięć	13
postać normalna	10, 135
kinematyki nieredundantnej	19
wokół konfiguracji osobliwej	23
wokół konfiguracji regularnej	19
Morina	136
pre-Morina	136
wokół konfiguracji osobliwej kinematyki	
planarnej typu RR	32
typu PPR	35
typu PRP	36
typu PRR	38, 39
typu RPP	40
typu RPR	42, 47
typu RRP	48, 50
typu RRR	51, 59, 60
typu <i>PUMA</i>	74
postać pre-normalna	135
kinematyki nieredundantnej	24
manipulatora planarnego typu RR	85
manipulatora typu <i>PUMA</i>	72
pre-hyperboliczna postać normalna kinematyki nieredundantnej manipulatora	25
typu <i>PUMA</i>	74
pre-normalna postać	135
kinematyki nieredundantnej	24
manipulatora planarnego typu RR	85
manipulatora typu <i>PUMA</i>	72
przestrzeń	
euklidesowa	13
robocza manipulatora	13
wewnętrzna manipulatora	13
zewnętrzna manipulatora	13

R

równoważność	19
RL–równoważność	10, 135
RL–równoważność	19
robot	9
<i>AdeptOne</i>	98
<i>Adept</i>	49
ASEA	
<i>IRb60</i>	50, 59
<i>IRb6</i>	50, 59
Cincinnati Milacron	

T^3 735	50, 59
T^3 886	34
GE	
P50	59
GE P50	50
GMF	
M-100	39
S-400	50
S400	59
Microbot TeachMover	50, 59
Olivetti <i>Sigma</i>	34
POLAR 6000	47
Renault	
P80	34
V80	50
Rhino	
XR-3	59
Rhino XR-3	50
RNUR TH8	39
Stanford Arm	47
typu SCARA	29
typu SCARA	49
Unimation	
PUMA	50, 59, 64
Unimate 1000, 2000,	47
rozmaitość	
robocza kinematyki manipulatora	12
wewnętrzna kinematyki manipulatora	12
zewnątrzna kinematyki manipulatora	12
rozmaitości kinematyczne manipulatora	12
Runge-Kutty metoda	83

S

Singularity-Robust Inverse	10, 100, 103
specjalna grupa	
euklidesowa	12
obrotów	12
sterownik	
robota <i>AdeptOne</i>	98
stopień różniczkowy kinematyki	24
szereg Taylora	85

T

Taylora szereg	85
torus	12
trajektoria gładka	17

W

wektor	
konfiguracji kinematyki	13
konfiguracji manipulatora	13
położenia efektora manipulatora	14
prędkości kątowych efektora manipulatora	15
prędkości liniowych efektora manipulatora	15

wielomianowa postać normalna kinematyki nie-redundantnej manipulatora	24
typu RPR	47
typu RRR	60
współpłaszczyznowość	51
współrzędne	
kartezjańskie	13
oś/kąt	13
wykładnicze	13

Z

zadanie śledzenia ścieżki	9, 106
w przestrzeni roboczej	10
zadanie śledzenia trajektorii	9
w przestrzeni roboczej	9, 10, 17, 18
w przestrzeni wewnętrznej	9
zmienna ruchu manipulatora	14

mgr inż. Robert Muszyński
Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechniki Wrocławskiej
ul Janiszewskiego 11/17
50-372 Wrocław
e-mail: mucha@ict.pwr.wroc.pl

Niniejszy raport otrzymują:

1. OINT	1 egz.
2. Biblioteka Główna PWr.	1 egz.
3. Z-ca Dyrektora Instytutu	1 egz.
4. Promotor	1 egz.
5. Recenzenci	2 egz.
6. KBN	1 egz.
7. Autor	3 egz.
Razem: 10 egz.	



Raport wpłynął do Redakcji ICT
w czerwcu 1996 r.

3,00

S. 98