Instytut Metrologii Elektrycznej
Politechniki Wrocławskiej

Grzegorz Smołalski

Stochastyczna komparacja pomiarowa

Praca doktorska
wykonana pod kierunkiem
Prof. dr. inż.
Andrzeja Jellonka

Wrocław 1983

Grzegorz Smołalski

Stochastyczna komparacja pomiarowa. Autoreferat

(praca doktorska napisana pod kierunkiem Prof. dr. inż. Andrzeja Jellonka)

1. Geneza pracy i krótkie omówienie jej treści

W czasie studiów zetknąłem się w laboratorium miernictwa elektrycznego z modelem układu,który umożliwiał pomiar napięcia w sposób niekonwencjonalny. Wykonywał on mianowicie szereg porównań napięcia mierzonego z losowo wybranymi napięciami wzorcowymi. Już wtedy odniosłem wrażenie, że sposób uzyskiwania wyniku pomiaru za pomocą tego układu różni się np. od zwykłego ważenia na wadze dwuszalkowej nie tylko tym, że wzorzec jest tu rozwijany losowo, ale czymś jeszcze- wtedy nie wiedziałem czym.

Kilka lat później zetknąłem się z różnymi wersjami teorii pomiaru. Ich celem jest zwykle opis modelowy procesu pomiaru ze szczególnym uwzględnieniem elementów wspólnych wszystkim pomiarom. Nabrałem wtedy przekonania, że skoro układ powyższy umożliwia pomiar wartości napięcia, to mimo nietypowości zastosowanego w nim sposobu uzyskiwania wyniku, praca jego musi być pod jakimś względem podobna do działania innych przyrządów pomiarowych.

Powyższe spostrzeżenia spowodowały sformułowanie przypuszczenia, że we wszystkich procesach pomiaru występuje procedura warunkująca uzyskanie wyniku liczbowego , polegająca na porównywaniu realizacji mierzonych z wzorcowymi. Ze względu na domniemany jej charakter- zespół porównań, a także ze względów tradycyjnych, nazwałem ją komparacją pomiarową. Przypuszczałem, że odmienność sposobu uzyskiwania wyniku w woltomierzu losującym realizacje wzorcowe oraz np. w typowym ważeniu na wadze dwuszalkowej jest jedynie konsekwencją zastosowania w obu tych pomiarach r ó ż n y c h f o r m komparacji.

W związku z powyższym, interesujące wydawało się zrealizowanie dwóch, powiązanych ze sobą celów:

Po pierwsze, należało ściśle zdefiniować procedurę komparacji pomiarowej i wskazać jakie formy może ona przybierać. Ten etap pracy powinien unaocznić, że sposób

losowego rozwijania wzorca- tak różny od klasycznego, deterministycznego- jest jednym z możliwych, a także wskazać sposoby wykorzystania procedur z losowym rozwijaniem wzorca do formowania wyniku pomiaru. Wydawało się również, że powyższe prace definicyjne i klasyfikacyjne należy traktować jako niezbędny wstęp do badania stochastycznych procedur komparacyjnych.
Po drugie, należało zbadać właściwości metrologiczne procedur komparacyjnych, w których realizacje wzorcowe dobiera się losowo, a więc ich dokładność, precyzję, czas trwania.

Rozprawa niniejsza jest wynikiem pracy związanej z realizacją powyższych celów. Jej rozdział I poświęciłem kwestiom definicyjnym i klasyfikacyjnym. Rozdział ten dotyczy realizacji pierwszego z wymienionych celów. Mimo, że objętościowo stanowi on niewielką część rozprawy (występuje przed sformułowaniem właściwej tezy pracy), jego opracowanie zajęło ponad rok. Długi czas poświęcony kwestiom definicyjnym i klasyfikacyjnym jest nie tylko konsekwencją ich znaczenia dla dalszej części rozprawy, ale także konsekwencją niewielkiej liczby wykonanych dotychczas opracowań dotyczących ogólnych zasad komparacji pomiarowej. W tym samym rozdziale zdefiniowałem również co rozumiem pod pojęciem "stochastyczna komparacja pomiarowa" - stanowiącym tytuł rozprawy.

Pozostałe rozdziały dotyczą badań szczegółowych, czyli realizacji drugiego z wyżej wymienionych celów. Ze względu na wielość problemów, które należało by zbadać teza pracy oraz służące jej dowodowi analizy szczegółowe dotyczą już tylko w y b r a n e j f o r m y komparacji stochastycznej, tj. stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy". Rozdziały II i III poświęciłem analizom teoretycznym właściwości tej komparacji losowej. Rozdział IV zawiera analizy i wnioski co do obszarów możliwych jej zastosowań. Rozdział V stanowi sprawozdanie z wyrywkowej weryfikacji doświadczalnej wyników analiz teoretycznych zreferowanych w rozdziałach II i III. Podsumowanie wyników pracy i wnioski zamieściłem w rozdziale VI.

2. Streszczenie wyników pracy

Wprowadzenie pojęcia "komparacja pomiarowa" [zob. podrozdział I/1] *:

Definicje pomiaru występujące w literaturze, choć różnią się pod wieloma względami, mają jednak wspólną tę zasadniczą cechę, że ich autorzy formułują jako cel pomiaru przypisywanie liczb realizacjom wielkości fizycznych. Tak więc pomiar polega na przypisaniu liczby zbiorowi $\tilde{\tilde{X}}$ realizacji mierzonych wielkości fizycznej $\tilde{X}$ **:

$$\tilde{\tilde{X}} = \{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_N\} \quad . \qquad (1)$$

Aby jednak takie przypisanie liczb było użyteczne, musi ono gwarantować, by uzyskane wyniki opisywały realizacje wielkości, którym odpowiadają. Oznacza to, że relacje między liczbami- wynikami pomiarów powinny odzwierciedlać relacje zachodzące między realizacjami wielkości. Spełnienie tego warunku wymaga, by liczba $\gamma(\tilde{\tilde{X}})$ przypisywana zbiorowi $\tilde{\tilde{X}}$ była ściśle powiązana ze skalą pomiarową S_X wielkości $\tilde{X}$. Np. może to być wartość średnia czy średniokwadratowa liczb należnych poszczególnym realizacjom zbioru $\tilde{\tilde{X}}$ według skali S_X. Zbiór $\tilde{\tilde{X}}$ może być także jednoelementowy: $\tilde{\tilde{X}} = \{\tilde{X}_1\}$, a pomiar może polegać na określeniu wartości X_1 należnej tej realizacji $\tilde{X}_1$.

W procesie pomiaru zbiór $\tilde{\tilde{X}}$ jest na ogół przetwarzany (przetworniki pomiarowe) w równoliczny z nim zbiór $\tilde{\tilde{V}}$ realizacji mierzonych wielkości fizycznej $\tilde{V}$ tego samego rodzaju co wielkość odtwarzana przez stosowany wzorzec (rys. 1).

Przypisanie liczby $\gamma(\tilde{\tilde{X}})$ zbiorowi realizacji mierzonych $\tilde{\tilde{X}}$ - będące istotą pomiaru - wymaga wykonania szeregu porównań realizacji wielkości fizycznej $\tilde{V}$

---

* Nawias kwadratowy [ ] oznacza odwołanie do tekstu głównego rozprawy. Liczba rzymska oznacza numer rozdziału, liczba arabska - numer podrozdziału, zaś ew. litera - punkt w podrozdziale.

** Przyjęto następujące oznaczenia:
$\tilde{X}$ - wielkość fizyczna,
$\tilde{X}_1$ (lub z innym indeksem) - konkretna realizacja wielkości $\tilde{X}$,
X_1 - wartość należna realizacji $\tilde{X}_1$ według skali S_X wielkości $\tilde{X}$,
$\tilde{\tilde{X}}$ - zbiór realizacji wielkości fizycznej $\tilde{X}$.

Zbiór $\tilde{\tilde{V}}$ realizacji mierzonych wielkości fizycznej $\tilde{V}$:

$$\tilde{\tilde{V}} = \{\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \ldots, \tilde{V}_i, \ldots, \tilde{V}_N\}$$

Zbiór $\tilde{\tilde{V}}_w$ realizacji odtwarzanych przez wzorzec:

$$\tilde{\tilde{V}}_w = \{\tilde{V}_{w1}, \tilde{V}_{w2}, \ldots, \tilde{V}_{wi}, \ldots, \tilde{V}_{wn}\}$$

(Powyższy zapis dotyczy tylko przypadków, gdy zbiór $\tilde{\tilde{V}}_w$ jest przeliczalny.)

Zbiór $\tilde{\tilde{V}}_p$ realizacji porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach procedury komparacyjnej :

$$\tilde{\tilde{V}}_p = \{\tilde{V}^1, \tilde{V}^2, \ldots, \tilde{V}^j, \ldots, \tilde{V}^L\}$$

Zbiór $\tilde{\tilde{V}}_{wp}$ realizacji wzorcowych porównywanych z realizacjami ze zbioru $\tilde{\tilde{V}}_p$ w kolejnych taktach procedury :

$$\tilde{\tilde{V}}_{wp} = \{\tilde{V}^1_w, \tilde{V}^2_w, \ldots, \tilde{V}^j_w, \ldots, \tilde{V}^L_w\}$$

Sekwencja porównań :

czy: $\tilde{V}^j \prec \tilde{V}^j_w$?

$j = 1, 2, \ldots, L$

Komparacja pomiarowa

Wynik komparacji pomiarowej - wektor $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K} = \left\{ \begin{pmatrix} V^1_w \\ k^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V^2_w \\ k^2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} V^j_w \\ k^j \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} V^L_w \\ k^L \end{pmatrix} \right\} ,$$

gdzie k^j - wynik porównania w j-tym takcie procedury:

$$k^j = \begin{cases} 1 , & \tilde{V}^j_w \prec \tilde{V}^j \\ 0 , & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Wynik pomiaru R

Rys. 1 . Zestaw pojęć związanych z komparacją pomiarową, używany w pracy.

z realizacjami tej wielkości odtwarzanymi przez wzorzec. Porównania te składają się na procedurę komparacji pomiarowej będącą - zdaniem autora - podstawowym elementem każdego pomiaru, warunkującym uzyskanie wyniku liczbowego:

K o m p a r a c j ą p o m i a r o w ą nazywa się w pracy element procesu pomiarowego składający się z jednego lub szeregu, zorganizowanych w sposób celowy, porównań dwóch realizacji tej samej wielkości fizycznej, z których jedna jest odtwarzana przez wzorzec.

Porównaniem dwóch realizacji $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$ wielkości fizycznej $\tilde{V}$ nazwano empiryczne sprawdzenie, czy zachodzi relacja: $\tilde{V}_1 \prec \tilde{V}_2$ (symbol: $\prec$ oznacza relację porządku empirycznego) .

Elementami niezbędnymi do wykonania komparacji są więc: detektor relacji porządku $\prec$ oraz wzorzec.

Z definicji procedury komparacji pomiarowej wynika, że jej p r z e d m i o t e m jest następujący zbiór realizacji wielkości fizycznej $\tilde{V}$ (rys. 1) :

$$\tilde{\tilde{V}}_p = \left\{ \tilde{V}^1, \tilde{V}^2, \ldots, \tilde{V}^L \right\} \quad , \qquad (2)$$

gdzie: $\tilde{V}^j$ $(j=1,2,\ldots,L)$ - realizacja wielkości $\tilde{V}$ porównywana z wzorcową w j-tym takcie procedury komparacyjnej.

Realizacje $\tilde{V}^j$ ze zbioru $\tilde{\tilde{V}}_p$ realizacji porównywanych z wzorcowymi są oczywiście ściśle powiązane z realizacjami $\tilde{V}_i$ ze zbioru $\tilde{\tilde{V}}$ realizacji mierzonych.

Przez analogię do zbiorów $\tilde{\tilde{V}}$ i $\tilde{\tilde{V}}_p$ w pracy wprowadzono też odpowiednie zbiory realizacji wzorcowych (rys. 1) :

- zbiór $\tilde{\tilde{V}}_w$ realizacji, które mogą być odtwarzane przez wzorzec,
- zbiór $\tilde{\tilde{V}}_{wp}$ realizacji wzorcowych porównywanych w kolejnych taktach komparacji z realizacjami ze zbioru $\tilde{\tilde{V}}_p$.

W y n i k i e m procedury komparacji pomiarowej jest - jak to wynika z jej definicji - zbiór rezultatów poszczególnych porównań z wzorcem. Formalnie, wynik całej procedury komparacyjnej można więc zapisać w postaci wektora $\mathbb{K}$ (rys. 1) . Na podstawie wektora $\mathbb{K}$ formuje się wynik pomiaru R (rys. 1) .

Dalsze rozważania wykonano przy założeniu, że wielkość fizyczna $\tilde{V}$ jest napię-

ciem elektrycznym. Chodziło o uzyskanie spójności z wykonanym eksperymentem, którym był właśnie pomiar napięcia. Uzyskane w pracy wyniki pozostają jednak prawdziwe także w przypadku dowolnej innej wielkości addytywnej. W związku z przyjętym założeniem, zbiory: $\tilde{\tilde{V}}$, $\tilde{\tilde{V}}_p$, $\tilde{\tilde{V}}_w$, $\tilde{\tilde{V}}_{wp}$ (rys. 1) są od teraz oznaczane odpowiednio : $\tilde{\tilde{U}}$, $\tilde{\tilde{U}}_p$, $\tilde{\tilde{U}}_w$, $\tilde{\tilde{U}}_{wp}$.

W podrozdziale I/2 pracy przedstawiono podziały procedur komparacji pomiarowej według różnych kryteriów. Dzięki jednemu z podziałów - według sposobu regulacji wzorca - wyodrębniono stochastyczną komparację pomiarową :

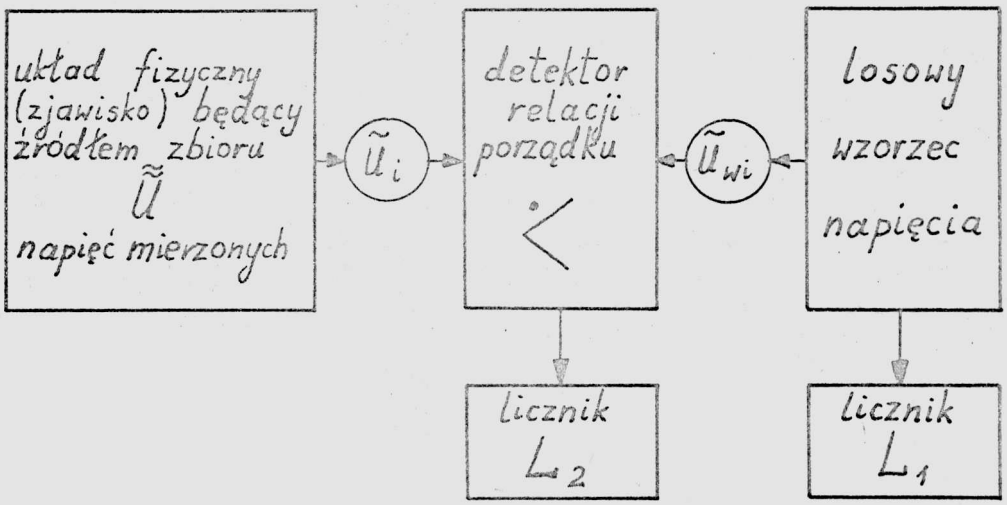
Stochastyczna komparacja pomiarowa jest to taka forma komparacji, w przypadku której przed wykonaniem procedury nie można przewidzieć sekwencji napięć wzorcowych :

$$\tilde{\tilde{U}}_{wp} = \left\{ \tilde{U}_w^1 , \tilde{U}_w^2 , \ldots , \tilde{U}_w^L \right\} \qquad (3)$$

porównywanych z kolejnymi napięciami ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ i to nawet wtedy, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ zawiera napięcia znane.

W pracy stwierdzono [podrozdział I/3] , że stochastyczna komparacja pomiarowa może występować w dwóch postaciach : jako komparacja typu przeglądowego lub poszukiwawczego.

Chcąc uzyskać konkretne wnioski praktyczne, trzeba było zawęzić zakres dalszych badań. W kolejnych częściach pracy zajmowano się już tylko wybraną formą stochastycznej komparacji pomiarowej - formą, którą autor nazwał komparacją przeglądową typu "większy - mniejszy" . Wyboru dokonano m.in. ze względu na spodziewane zalety tej komparacji. Procedurę tę realizuje się w układzie przedstawionym na rys. 2 .



Rys. 2 . Układ realizujący procedurę stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" będącą przedmiotem dalszych badań
○ - realizacja fizyczna napięcia wyszczególniona w kółku,
▭ - układ fizyczny wyszczególniony wewnątrz prostokąta.

Zakłada się, że losowy wzorzec napięcia ma następujące właściwości:

- może odtwarzać wszystkie realizacje napięcia spełniające nierówności:

$$\tilde{0} \lesssim \tilde{U}_{wi} \lesssim \tilde{U}_{w\,max} \quad , \qquad (4)$$

- napięcia losowe $\tilde{U}_w^j$ $(j = 1,2,\ldots,L)$ wytwarzane przez wzorzec w kolejnych taktach procedury są niezależne, a ich rozkład prawdopodobieństwa opisuje funkcja gęstości $\gamma(U_w)$ o postaci znanej mierzącemu,
- znana jest wartość $U_{w\,max}$ odpowiadająca największemu napięciu odtwarzanemu przez wzorzec: $\tilde{U}_{w\,max}$.

Przebieg procedury jest następujący: w kolejnych jej taktach: $j = 1,2,\ldots,L$ następuje wylosowanie jednego napięcia wzorcowego $\tilde{U}_w^j$ i porównanie go z napięciem $\tilde{U}^j$ ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$. Stan licznika L_1 jest zwiększany o jeden przy każdym porównaniu. Stan licznika L_2 natomiast, jest zwiększany o jeden wtedy, gdy w danym takcie spełniona jest zależność:

$$\tilde{U}_w^j \lesssim \tilde{U}^j \quad . \qquad (5)$$

Celem procedury jest wykonanie założonej liczby L porównań - po jej zakończeniu

stan licznika L_1 wynosi L. Liczba porównań, w których spełniona była zależność (5) jest pamiętana w liczniku L_2. Wynik pomiaru R oblicza się według wzoru o postaci ogólnej:

$$R = f\left(L_1, L_2, U_{w\,max}\right) , \qquad (6)$$

np.: $$R = \frac{L_2}{L_1} U_{w\,max} . \qquad (7)$$

Powyższą formą komparacji zajmowano się już zarówno w kraju, jak i za granicą [podrozdział I/4] . Z reguły jednak traktowano ją jako: przetwarzanie analogowo - - stochastyczne, przetwarzanie stochastyczno - ergodyczne, kodowanie stochastyczne, nie akcentując, że jest to tylko pewna forma szczególna zjawiska komparacji pomiarowej. Ponadto piszącemu nie udało się znaleźć w literaturze odpowiedzi na szereg pytań szczegółowych dotyczących omawianej formy stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy". Sformułowano więc t e z ę pracy :

Istnieje możliwość określenia na drodze teoretycznej właściwości metrologicznych stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" oraz wskazania na tej podstawie obszarów zastosowań, w których ten rodzaj komparacji jest korzystny.

Dowód tezy pracy przeprowadzono rozważając teoretycznie :

- zagadnienia związane z podstawowymi właściwościami metrologicznymi komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" [rozdział II] ,
- zagadnienia związane z wpływem właściwości bloków układu realizującego komparację "większy - mniejszy" na jej właściwości metrologiczne [rozdział III] ,
- zagadnienia związane z możliwością zastosowań omawianej komparacji w praktyce [rozdział IV] .

W przypadku zastosowania wzorca losowego dostarczającego napięcia o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa, komparacja stochastyczna typu "większy - mniejszy" umożliwia pomiar wartości pojedynczej realizacji napięcia. Podstawowe jej właściwości

metrologiczne można scharakteryzować [podrozdział II/1] za pomocą pojęć: precyzji, błędu komparacji (Δ_k) i czasu jej trwania (T_k). Wynik pomiaru R uzyskany dzięki komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" jest zmienną losową i to nawet wtedy, gdy elementy użyte do jej realizacji są idealne. W języku metrologii oznacza to, że wynik R nie jest precyzyjny. Nieprecyzyjność tę można scharakteryzować za pomocą składowej losowej Δ_1 błędu komparacji. Składową tę zdefiniowano następująco :

$$\Delta_1 \overset{df.}{=\!=} 3\sqrt{D^2(R)} \quad , \qquad (8)$$

gdzie wariancja wyniku pomiaru :

$$D^2(R) = \frac{(U_{w\,max} - U_1)\cdot U_1}{L} \quad , \qquad (9)$$

przy czym : U_1 - wartość należna mierzonemu napięciu $\tilde{U}_1$ według wcześniej przyjętej skali pomiarowej S_U .

Błąd losowy Δ_1 jest więc odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z liczby L porównań wykonanych w ramach procedury .

Różnicę :

$$\Delta_s = E(R) - U_1 \quad , \qquad (10)$$

gdzie $E(R)$ - wartość oczekiwana wyniku pomiaru, zinterpretowano jako składową systematyczną błędu komparacji. Jeżeli podczas pomiaru wartości pojedynczej realizacji napięcia użyje się wzorca wytwarzającego ciągi napięć o rozkładzie idealnie równomiernym oraz zastosuje się bezhisterezowy i pozbawiony progu nieczułości układ porównania napięć, to składowa systematyczna błędu komparacji ma wartość zerową.

W przypadku , gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych składa się z wielu realizacji napięcia :

$$\tilde{\tilde{U}} = \{ \tilde{U}_1 , \tilde{U}_2 , \ldots , \tilde{U}_N \} \quad , \qquad (11)$$

omawiana procedura komparacyjna może być wykorzystana do pomiaru wartości kolejnych

momentów tego zbioru, a tym samym może być zastosowana do pomiaru wartości momentów sygnałów napięciowych $\tilde{U}(t)$ [punkt III/1b] . Trzeba jedynie dobrać odpowiednio rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych. W sytuacji, gdy przedmiotem pomiaru jest wartość $\nu_n(\tilde{\tilde{U}})$ momentu rzędu n zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych, funkcja gęstości prawdopodobieństwa napięć wzorcowych powinna mieć postać:

$$\gamma(U_w) = \begin{cases} \dfrac{n}{U_{w\,max}^{n}}\, U_w^{n-1} & , \quad U_w \in [0,\, U_{w\,max}] \\ 0 & , \quad \text{poza tym} \end{cases} , \tag{12}$$

a ponadto musi być spełniony warunek :

$$\nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p) = \nu_n(\tilde{\tilde{U}}) \quad . \tag{13}$$

Pomiar wartości momentów zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ odbywa się bez określania wartości poszczególnych napięć tego zbioru. Wynik R pomiaru momentów jest zmienną losową podobnie jak w przypadku, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ jest jednoelementowy. Oznacza to, że wynik R nie jest precyzyjny. Brak precyzji wyniku scharakteryzowano [punkt II/2b] za pomocą składowej losowej błędu komparacji :

$$\Delta_1 = f\left[\frac{1}{\sqrt{L}},\ \nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p),\ \nu_{2n}(\tilde{\tilde{U}}_p)\right] . \tag{14}$$

Jak widać, błąd Δ_1 zależy nie tylko od liczby L porównań wykonanych w ramach komparacji i wartości $\nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$ mierzonego momentu, ale także od wartości $\nu_{2n}(\tilde{\tilde{U}}_p)$ momentu rzędu $2n$. Oznacza to, że zbiory $\tilde{\tilde{U}}_p$ charakteryzujące się jednakową wartością momentu $\nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$ nie muszą być ekwiwalentne pod względem wartości błędów losowych. Najmniej korzystne są zbiory $\tilde{\tilde{U}}_p$ zawierające napięcia jednakowe :

$$\tilde{\tilde{U}}_p = \{\tilde{U}_1,\ \tilde{U}_1,\ \ldots,\ \tilde{U}_1\} \quad . \tag{15}$$

Odchylanie się rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od rozkładu najbardziej pożądanego podczas pomiaru momentu określonego rzędu jest jednym z możliwych źródeł powstawania składowej systematycznej błędu komparacji (Δ_s^w). Zagadnienie to omówiono szczegółowo w punkcie III/1c rozprawy, w którym sformułowano też kryteria (parametry), pod względem których można oceniać i porównywać losowe wzorce napięcia. Jednym z ważniejszych jest wartość graniczna $\Delta_{s\,max}^{w}$ błędu systematycznego, z którym należy liczyć się stosując dany wzorzec losowy .

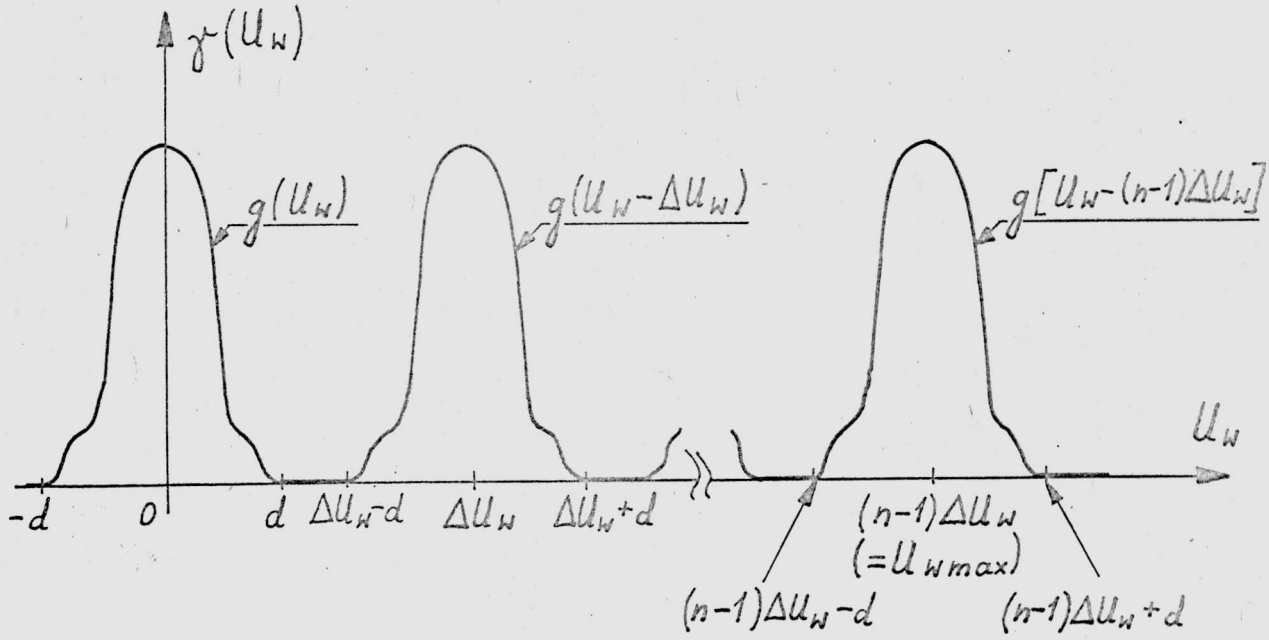
W przypadku, gdy wzorzec wytwarza napięcia charakteryzujące się np. dyskretnym, równomiernym rozkładem prawdopodobieństwa, zamiast rozkładem równomiernym ciągłym, wartość graniczna błędu wywołanego tym faktem wynosi :

$$\Delta_{s\,max}^{w} = \frac{U_{w\,max}}{n} \qquad (16)$$

gdzie: $U_{w\,max}$ - wartość odpowiadająca największej realizacji wzorcowej,

n - liczba stanów napięcia odtwarzanych przez wzorzec.

W przypadku, gdy wzorzec losowy wytwarza ciągi napięć charakteryzujące się funkcją gęstości przedstawioną na rys. 3 (rozkład dyskretny rozmyty), to - przy spełnieniu warunków wymienionych w punkcie III/1c - wartość graniczna błędu $\Delta_{s\,max}^{w}$ może być mniejsza niż wtedy, gdy stosuje się wzorzec wytwarzający napięcia ze zbioru dyskretnego.



Rys. 3 . Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu dyskretnego rozmytego.

Zastosowanie wzorca wybierającego kolejne napięcia według schematu losowania warstwowego proporcjonalnego [punkt III/1d] umożliwia - przy odpowiednim podziale zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ napięć odtwarzanych przez wzorzec na warstwy - zmniejszenie wartości składowej losowej Δ_1 błędu komparacji $\frac{1}{s}$ razy w stosunku do schematu losowania nieograniczonego (s - liczba warstw) .

Histereza detektora relacji porządku powoduje [podrozdział III/2] zawężenie zakresu napięć, które mogą być zmierzone za pomocą układu realizującego komparację stochastyczną typu "większy - mniejszy", a także wywołuje dodatkową składową błędu komparacji o charakterze systematycznym Δ_s^h . Błąd ten ma, w całym zakresie mierzonych napięć, wartość mniejszą niż: $\max\{|\underline{h}|, |\bar{h}|\}$, gdzie: $\underline{h}$ i $\bar{h}$ - dolny i górny próg przełączania układu porównania napięć. Histereza ma znikomy wpływ na wartość składowej losowej Δ_1 błędu komparacji.

Stosowanie w praktyce stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - - mniejszy" do pomiaru wartości pojedynczych realizacji napięcia jest w pełni możliwe, choć mało efektywne pod względem czasowym [podrozdział IV/2] . Czas T_k trwania omawianej komparacji zależy od :

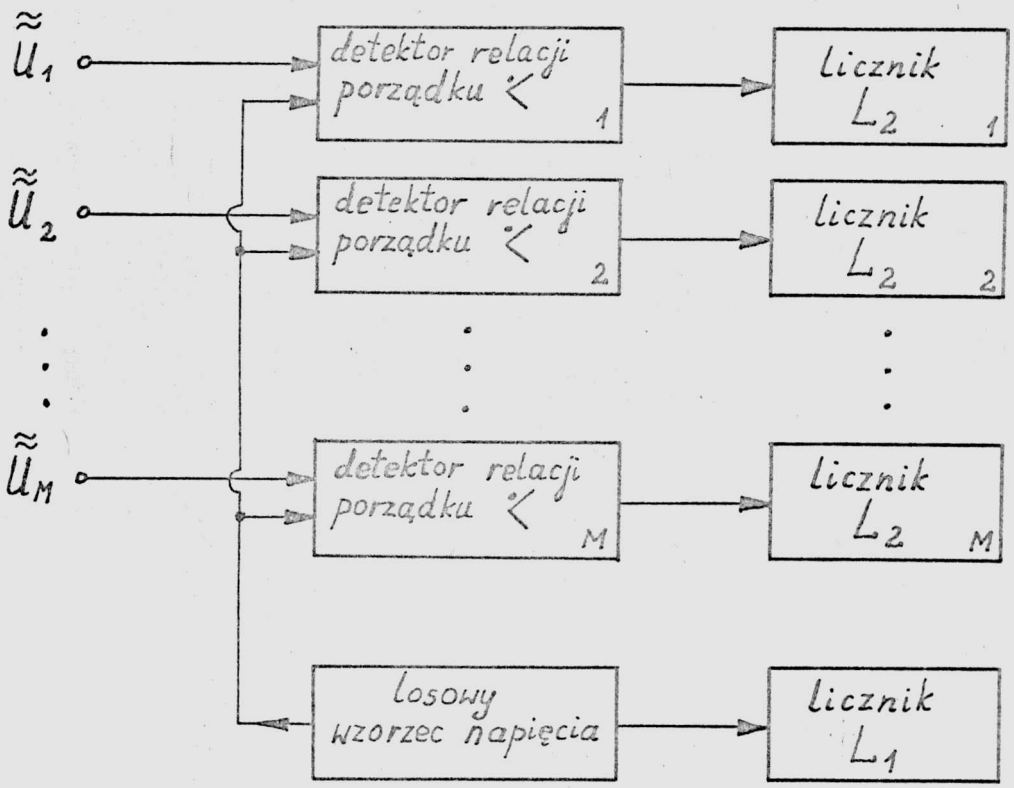
- dopuszczalnej wartości błędu losowego (wyznacza on konieczną liczbę porównań),
- czasu T_t trwania pojedynczego taktu komparacji .

Tak np. przy dopuszczalnej wartości unormowanego granicznego błędu losowego: $\delta_{1\,max} = 10^{-3}$, konieczny czas komparowania wynosi dziś (T_t = 50 ns) ok. 0,1 s , zaś przy $\delta_{1\,max} = 10^{-2}$, omawiana komparacja może być zakończona już po ok. 1ms.

Stochastyczna komparacja przeglądowa typu "większy - mniejszy" wyjątkowo dobrze nadaje się do pomiaru wartości momentów w zbiorach $\approx{U}$ napięć mierzonych o dużej liczności - rzędu 10^6 i więcej [podrozdział IV/3] . Z sytuacją powyższą ma się do czynienia np. podczas pomiaru momentów sygnałów napięciowych o takich właściwościach widmowych, że wymagają częstego próbkowania, a jednocześnie - uśredniania w stosunkowo długim czasie. Omawianą formę komparacji porównano [podrozdział IV/ 3] z metodą uśredniania w dziedzinie liczb w wersji "on line", pod względem dopuszczalnej maksymalnej częstotliwości f_{max} w widmie uśrednianego sygnału. Stwierdzono, że podczas pomiaru wartości średniej obie metody mają zbliżone właściwości. Przy pomiarze momentów wyższych rzędów komparacja stochastyczna typu "większy - mniejszy" jest szybsza, pozwala więc na analizowanie sygnałów o wyższych częstotliwościach granicznych.

Stochastyczna komparacja przeglądowa typu "większy - mniejszy" bardzo dobrze nadaje się również do jednoczesnego pomiaru momentów zbiorów napięć w wielu kanałach (rys. 4) ponieważ umożliwia "uwspólnienie" losowego wzorca napięcia - najdroższego elementu w układzie realizującym tę komparację. "Uwspólnienie" to nie wiąże się z pracą wzorca w systemie podziału czasu. Właściwości dynamiczne poszczególnych torów są więc takie same, jak gdyby pozostałe tory nie istniały. Odstęp próbkowania T_s każdego kanału nie zależy od liczby M kanałów.

Biblioteka Pol. Wrocł.



Rys. 4 . Pomiar momentów w M kanałach za pomocą stochastycznej komparacji pomiarowej.

Powyższe wnioski cząstkowe potwierdzają prawdziwość tezy pracy przewidującej, że można określić na drodze t e o r e t y c z n e j właściwości metrologiczne stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" oraz wskazać na tej podstawie obszary zastosowań, w których ten rodzaj komparacji jest korzystny. Sprawdzeniem słuszności tezy pracy jest również wyrywkowa weryfikacja doświadczalna wyników uzyskanych na drodze teoretycznej [rozdział V, dodatek 9] . Eksperymenty potwierdziły przydatność omawianej formy komparacji do pomiaru wartości pojedynczych realizacji napięcia [podrozdział V/1] . Podobnie wzór (9) na wariancję wyniku pomiaru okazał się prawdziwy. Pomiary oraz eksperymenty symulacyjne wykazały również słuszność wniosku (14) uzyskanego teoretycznie, że podczas pomiaru wartości średniej $\nu_1(\tilde{\tilde{U}})$ wariancja wyniku pomiaru zależy nie tylko od momentu pierwszego rzędu, ale także od wartości momentu drugiego rzędu. Stwierdzono też, iż największą wartość wariancji wyniku dają te spośród zbiorów $\tilde{\tilde{U}}$ charakteryzujących się określoną wartością średnią, które zawierają napięcia jednakowe.

Przy sposobności wykonywania powyższych doświadczeń uzyskano też informacje o właściwościach źródeł napięć pseudolosowych [podrozdział V/2, dodatek 9]. Stwierdzono, że ciągi liczb losowych uzyskiwane z rejestrów przesuwnych z liniowym, optymalnym sprzężeniem zwrotnym w kolejnych taktach ich pracy, są skorelowane. Uniemożliwiło to bezpośrednie wykorzystanie takich rejestrów do weryfikacji doświadczalnej matematycznych modeli komparacji, które uzyskano w rozdziałach II i III przy założeniu, że kolejne napięcia $\tilde{U}_w^j$ $(j = 1,2,\ldots,L)$ są niezależne. Pobieranie co K-tej liczby losowej - zgodnie z propozycją A.R. Pratta - znacznie zmniejsza wspomniane skorelowanie pozwalając ostatecznie na doświadczalne sprawdzenie modeli komparacji uzyskanych teoretycznie.

3. Wnioski

a) Z pracy wynika, że stosowanie komparacji z realizacjami wzorcowymi dostarczanymi przez źródła stochastyczne j e s t d z i ś m o ż l i w e dzięki istnieniu szybkodziałających elementów elektronicznych umożliwiających wykonanie takiej komparacji w stosunkowo krótkim czasie.

b) Komparacja stochastyczna pozwala na mierzenie w jednej procedurze kolejnych m o m e n t ó w w zbiorach realizacji wielkości addytywnych.
Wykorzystanie tej możliwości do pomiaru momentów wielkości zmiennych w czasie wymaga jednak dodatkowego uwzględnienia warunków reprezentatywności zbioru realizacji dla badanego sygnału. Szczególne znaczenie ma to w przypadku wielkości zmieniających się w sposób losowy. Wydaje się jednak, że rozważana forma komparacji - - komparacja stochastyczna - może być wykorzystywana do pomiarów wszystkich rodzajów wielkości zmiennych : tak deterministycznych jak i stochastycznych.

c) Stochastyczna komparacja przeglądowa typu "większy - mniejszy" m a w y r a ź n e z a l e t y w stosunku do komparacji deterministycznej w przypadku pomiaru momentów w zbiorach napięć o dużej liczności, których poszczególne realizacje pojawiają się w krótkich odstępach czasu, a także w przypadku pomiaru momentów w wielu zbiorach napięć (pomiary wielokanałowe).

d) Warunkiem praktycznej stosowalności omawianej formy komparacji jest rozwiązanie - - równocześnie z opracowywaniem teorii komparacji stochastycznej - zagadnienia odpowiedniej a p a r a t u r y . Przede wszystkim chodzi tu o skonstruowanie l o s o w y c h ź r ó d e ł n a p i ę ć o odpowiednich właściwościach probabilistycznych.

e) Problemy związane ze stochastyczną komparacją pomiarową, choć podejmowane już niejednokrotnie, w y m a g a j ą d a l s z y c h b a d a ń. Analizowana w tej pracy forma komparacji stochastycznej nie jest jedyną możliwą. Należy podejmować podobne badania innych form komparacji stochastycznej. Zdaniem autora, szczególnie interesujące mogłyby być wyniki badań stochastycznej komparacji poszukiwawczej uzależnionej wynikiem detekcji. Oprócz badań szczegółowych istotnym wydaje się też dokonywanie uogólnień właściwości komparacji stochastycznej, opracowanie jej całościowego modelu formalnego, a także globalne porównanie - - na podstawie wyników badań szczegółowych - właściwości komparacji stochastycznej i deterministycznej.

Politechnika Wrocł... Biblioteka Gł...

Instytut Metrologii Elektrycznej
Politechniki Wrocławskiej

Grzegorz Smołalski

Stochastyczna komparacja pomiarowa

(rozdziały: I,II,III, s.1-259).

Praca doktorska
wykonana pod kierunkiem
Prof. dr. inż.
Andrzeja Jellonka

Wrocław 1983

Spis treści

Wstęp 11

Rozdział I

Komparacja pomiarowa, jej istota, znaczenie w pomiarach i systematyka 15

1. Komparacja pomiarowa jako istotny element pomiaru. . . 15

2. Klasyfikacja procedur komparacji pomiarowej. 37

a) Podział według celu procedury komparacyjnej 37

b) Podziały według sposobu regulacji wzorca. 46

3. Stochastyczna komparacja pomiarowa - formy i przykłady. Komparacja typu "większy - mniejszy" 51

4. Aktualny stan badań nad stochastyczną komparacją pomiarową. Określenie zakresu pracy i dalszych badań. Teza pracy 61

Przypisy 70

Rozdział II

Podstawowe właściwości metrologiczne stochastycznej, przeglądowej komparacji pomiarowej typu "większy - mniejszy" 81

1. Właściwości procedury w przypadku, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest jednoelementowy 82

a) Model probabilistyczny 84

b) Model metrologiczny. 92

2. Właściwości procedury w przypadku, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest wieloelementowy 105

a) Model probabilistyczny 105

b) Model metrologiczny 110

3. Zależność właściwości metrologicznych procedury od cech zbioru $\tilde{U}$ napięć mierzonych. 116

a) Znaczenie liczności zbioru $\tilde{U}$. 116

b) Znaczenie wartości napięć w zbiorze $\tilde{U}$ 119

Przypisy 124

Rozdział III

Wpływ bloków układu realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" na jej właściwości metrologiczne 127

1. Wpływ cech wzorca 127

a) Cechy losowego wzorca napięcia w porównaniu z klasycznym pojęciem wzorca 127

b) Rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych . . . 131

c) Odchylenia rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od rozkładu założonego . . . 161

d) Schematy losowań napięć wzorcowych. 209

2. Wpływ właściwości układu porównania napięć 228

Przypisy 256

Rozdział IV

Wnioski praktyczne z rozważań teoretycznych i przykłady możliwych zastosowań stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" 260

1. Główne właściwości omawianej procedury wpływające na możliwość jej potencjalnych zastosowań. Celowość łączenia procedur komparacyjnych różnych typów. 260

2. Pomiar wartości pojedynczej realizacji napięcia . . . 267

3. Pomiar wartości uśrednionych w pojedynczym zbiorze napięć 281

4. Pomiar wartości uśrednionych w wielu zbiorach napięć . 304
Przypisy 327

Rozdział V

Weryfikacja doświadczalna wybranych wyników rozważań teoretycznych 333

1. Porównanie wskazań woltomierza realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" ze wskazaniami dotychczas używanych przyrządów. 333

2. Zbadanie wpływu wartości U_1 napięcia mierzonego z jednoelementowego zbioru $\tilde{U}$ oraz liczby L porównań wykonanych w ramach komparacji, na wariancję $D^2(R)$ wyniku pomiaru 341

3. Zbadanie wpływu wartości napięć mierzonych w wieloelementowym zbiorze $\tilde{U}$ na wariancję $D^2(R)$ wyniku pomiaru . 370
Przypisy 379

Rozdział VI

Podsumowanie 380
1. Streszczenie wyników pracy. 380
2. Wnioski. 389

Literatura cytowana w pracy 392

Aneks
Dodatek 1 404
Dodatek 2 411
Dodatek 3 422
Dodatek 4 441

Dodatek 5 451
Dodatek 6 461
Dodatek 7 466
Dodatek 8 486
Dodatek 9 499

Spis ważniejszych oznaczeń

b - długość (w bitach) rejestru przesuwnego używanego jako generator liczb losowych

j - numer taktu procedury komparacyjnej $j=1,2,\ldots,L$

$\mathbb{K}$ - wektor opisujący wynik procedury komparacyjnej

l - długość (w bitach) liczb losowych

L - liczba porównań wykonanych w ramach procedury komparacyjnej

L_1 - zależnie od kontekstu oznacza: nazwę licznika, stan końcowy licznika L_1 albo liczbę naturalną odpowiadającą stanowi końcowemu licznika L_1

L_2 - zależnie od kontekstu oznacza: nazwę licznika, stan końcowy licznika L_2, zmienną losową, liczbę naturalną odpowiadającą stanowi końcowemu licznika L_2

$\bar{L}_2$ - średnia arytmetyczna z próby stanów końcowych licznika L_2

m - liczba powtórzeń procedury komparacyjnej wykonanych w celu określenia właściwości statystycznych wyniku pomiaru

M - liczba kanałów

n - liczność zbioru realizacji odtwarzanych przez wzorzec (o ile jest on skończony); rząd mierzonego momentu

N - liczność zbioru realizacji mierzonych

$\mathcal{N}(\cdot,\cdot)$ - symbol normalnego rozkładu prawdopodobieństwa; w nawiasie umieszcza się kolejno: wartość

średnią rozkładu i jego dyspersję (pierwiastek z wariancji)

r - liczba porównań każdej realizacji mierzonej z napięciami wzorcowymi

R - wynik pomiaru; zmienna losowa wyniku pomiaru

$\bar{R}$ - średnia arytmetyczna z próby wyników pomiaru

S_x - skala pomiarowa wielkości fizycznej $\tilde{X}$

T_k - czas trwania procedury komparacyjnej

T_p - czas trwania porównania dwóch napięć

T_s - odstęp próbkowania (przy próbkowaniu w równych odstępach czasu)

T_t - czas trwania jednego taktu procedury komparacyjnej

T_w - czas potrzebny na wygenerowanie w dowolnym takcie komparacji losowego napięcia wzorcowego

$\tilde{U}$ - napięcie elektryczne

$[\tilde{U}_1, \tilde{U}_2]$ - przedział realizacji napięcia

$\tilde{V}$ - wielkość fizyczna porównywana z wzorcem

$\approx{\tilde{V}}$ - zbiór realizacji mierzonych wielkości fizycznej $\tilde{V}$

$\tilde{V}_i$ - realizacja mierzona wielkości fizycznej $\tilde{V}$; $\tilde{V}_i \in \approx{\tilde{V}}$, $i = 1, 2, \ldots, N$

$\approx{\tilde{V}}_p$ - zbiór realizacji porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach komparacji

$\tilde{V}^j$ - realizacja porównywana z wzorcową w j-tym takcie komparacji; $\tilde{V}^j \in \approx{\tilde{V}}_p$, $j = 1, 2, \ldots, L$

$\approx{\tilde{V}}_w$ - zbiór realizacji odtwarzanych przez wzorzec

$\tilde{V}_{wk}$ - realizacja wzorcowa wielkości fizycznej $\tilde{V}$; $\tilde{V}_{wk} \in \approx{\tilde{V}}_w$

$\tilde{\tilde{V}}_{wp}$ - zbiór realizacji wzorcowych wykorzystywanych w kolejnych taktach komparacji

$\tilde{V}_w^j$ - realizacja wzorcowa wybrana do porównania w j-tym takcie komparacji; $\tilde{V}_w^j \in \tilde{\tilde{V}}_{wp}$, $j=1,2,\ldots,L$

$\tilde{X}$ - wielkość fizyczna - określona cecha rzeczy lub zjawisk

$\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ - konkretne realizacje wielkości fizycznej $\tilde{X}$

X_1, X_2 - wartości odpowiadające realizacjom $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$ według przyjętej skali pomiarowej S_x tej wielkości

$\tilde{\tilde{X}}$ - zbiór realizacji wielkości fizycznej $\tilde{X}$

$\tilde{X}(t)$ - realizacja wielkości fizycznej $\tilde{X}$ zmieniająca się w czasie

γ_u - poziom ufności (liczba)

$\gamma(U_w)$ - funkcja gęstości prawdopodobieństwa wartości napięć odtwarzanych przez wzorzec

δ - błąd względny (zasady oznaczania identyczne jak w przypadku błędów bezwzględnych: Δ)

Δ_k - błąd komparacji

Δ_l - składowa losowa błędu komparacji

$\Delta_{l\,max}$ - wartość graniczna błędu Δ_l

Δ_p - błąd pomiaru

Δ_s - składowa systematyczna błędu komparacji

Δ_s^h - składowa systematyczna błędu komparacji spowodowana histerezą układu porównania napięć

$\Delta_{s\,max}^h$ - wartość graniczna błędu Δ_s^h

Δ_s^w - składowa systematyczna błędu komparacji spowodowana rozbieżnością między rzeczywistą i zało-

żoną postacią rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych

$\Delta^{w}_{s\,max}$ - wartość graniczna błędu Δ^{w}_{s}

Δ^{z}_{s} - składowa systematyczna błędu komparacji spowodowana niedokładnością określenia wartości największej realizacji odtwarzanej przez wzorzec

$\tilde{\Delta U}_w$, ΔU_w - ziarno wzorca napięcia (realizacja fizyczna) oraz jej wartość (odpowiednio)

$\gamma_0(\cdot)$ - wartość parametru charakterystycznego typu określonego u dołu litery "ni", należna - według wcześniej przyjętej skali - zbiorowi realizacji wyszczególnionemu w nawiasie

$\gamma_n(\cdot)$ - wartość momentu n-tego rzędu należna - według wcześniej przyjętej skali - zbiorowi wyszczególnionemu w nawiasie

$\sim$ - wartości występujące po obu stronach tego symbolu są tego samego rzędu wielkości

$\approx$ - równość w przybliżeniu

$\gg$ - znacznie większe

$\cup$ - suma zbiorów rozłącznych

$\in$ - zawieranie się w zbiorze

$\wedge$ - iloczyn logiczny

$\triangleq$ - arbitralne przyporządkowanie liczby realizacji wielkości fizycznej - definiowanie skali pomiarowej

$X_1 = S_x(\tilde{X}_1)$ - przypisanie liczby realizacji $\tilde{X}_1$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$ według wcześniej przyjętej skali pomiarowej

$=, <, \leqslant, +, -$ - symbole relacji: równoważności, porządku (ostra i nieostra), sumy i różnicy w dziedzinie liczb

$\doteq, \dot{<}, \dot{\leqslant}, \oplus, \ominus$ - symbole relacji jak wyżej w dziedzinie realizacji wielkości fizycznych

$\dot{\in}$ - empiryczne należenie do przedziału realizacji: zapis: $\tilde{x}_1 \dot{\in} [\tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ jest równoważny zapisowi:

$$\tilde{x}_2 \dot{\leqslant} \tilde{x}_1 \dot{<} \tilde{x}_3$$

Wstęp

Jeszcze w czasie studiów zetknąłem się w laboratorium miernictwa elektrycznego z modelem układu, który umożliwiał pomiar napięcia w sposób niekonwencjonalny. Wykonywał on mianowicie szereg porównań napięcia mierzonego z losowo wybranymi napięciami wzorcowymi. Już wtedy odniosłem wrażenie, że sposób uzyskiwania wyniku pomiaru za pomocą tego układu różni się np. od zwykłego ważenia na wadze dwuszalkowej nie tylko tym, że wzorzec jest tu rozwijany losowo, ale czymś jeszcze - wtedy nie wiedziałem czym.

Kilka lat później zetknąłem się z różnymi wersjami teorii pomiaru. Ich celem jest zwykle opis modelowy procesu pomiaru ze szczególnym uwzględnieniem elementów wspólnych wszystkim pomiarom. Nabrałem wtedy przekonania, że skoro układ powyższy umożliwia pomiar wartości napięcia, to mimo nietypowości zastosowanego w nim sposobu uzyskiwania wyniku, praca jego musi być pod jakimś względem podobna do działania innych przyrządów pomiarowych.

Powyższe spostrzeżenia spowodowały sformułowanie przypuszczenia, że we wszystkich procesach pomiaru występuje procedura warunkująca uzyskanie wyniku liczbowego, polegająca na porównywaniu realizacji mierzonych z wzorcowymi. Ze względu na domniemany jej charakter - zespół porównań, a także ze względów tradycyjnych, nazwałem ją komparacją pomiarową. Przypuszczałem, że odmienność sposobu uzyskiwania wyniku w woltomierzu losującym realizacje wzorcowe oraz np. w typowym ważeniu na wadze dwuszalkowej, jest jedynie konsekwencją zastosowania w obu tych pomiarach r ó ż n y c h f o r m komparacji.

W związku z powyższym przypuszczeniem, interesujące wyda-

wało się zrealizowanie dwóch, powiązanych ze sobą celów:
Po pierwsze, należało ściśle zdefiniować procedurę komparacji pomiarowej, i wskazać jakie formy może ona przybierać. Ten etap pracy powinien unaocznić, że sposób losowego rozwiązania wzorca - - tak różny od klasycznego, deterministycznego - jest jednym z możliwych; a także wskazać sposoby wykorzystania procedur z losowym rozwijaniem wzorca do formowania wyniku pomiaru. Wydawało się również, że powyższe prace definicyjne i klasyfikacyjne należy traktować jako niezbędny wstęp do badania stochastycznych procedur komparacyjnych.
Po drugie, należało zbadać szczegółowo właściwości metrologiczne procedur komparacyjnych, w których realizacje wzorcowe dobiera się losowo, a więc ich dokładność, precyzję, czas trwania.

Rozprawa niniejsza jest wynikiem pracy związanej z realizacją powyższych celów. Jej rozdział I poświęciłem kwestiom definicyjnym i klasyfikacyjnym. Rozdział ten dotyczy realizacji pierwszego z wymienionych celów. Mimo, że objętościowo stanowi on niewielką część rozprawy (występuje przed sformułowaniem właściwej tezy pracy), jego opracowanie zajęło ponad rok. Długi czas poświęcony kwestiom definicyjnym i klasyfikacyjnym jest nie tylko konsekwencją ich znaczenia dla dalszej części rozprawy, ale także konsekwencją niewielkiej liczby opracowań dotyczących ogólnych zasad komparacji pomiarowej. W tym samym rozdziale zdefiniowałem również co rozumiem pod pojęciem "stochastyczna komparacja pomiarowa" - stanowiącym tytuł rozprawy.

Pozostałe rozdziały dotyczą badań szczegółowych, czyli realizacji drugiego z wyżej wymienionych celów. Ze względu na wielość problemów, które należało by zbadać, teza pracy oraz służące jej

dowodowi analizy szczegółowe dotyczą już t y l k o w y b r a n e j f o r m y k o m p a r a c j i s t o c h a s t y c z n e j , tj. stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy". Rozdziały II i III poświęciłem analizom teoretycznym właściwości tej komparacji losowej. Rozdział IV zawiera analizy i wnioski co do obszarów możliwych jej zastosowań. Rozdział V stanowi sprawozdanie z wyrywkowej weryfikacji doświadczalnej wyników analiz teoretycznych zreferowanych w rozdziałach II i III. Podsumowanie wyników pracy i wnioski zamieściłem w rozdziale VI.

Wykonanie tej pracy nie byłoby w pełni możliwe bez pomocy wielu osób:

Promotorowi-

Panu Profesorowi dr. inż. Andrzejowi Jellonkowi jestem wdzięczny za pomoc okazywaną mi w trakcie wielogodzinnych konsultacji we wszystkich etapach powstawania rozprawy: od prac związanych z wyborem jej tematu, aż po redakcję tekstu. Znaczenie i skuteczność tej pomocy wynika także i stąd, że była mi okazywana w każdej chwili, gdy tylko jej potrzebowałem.

W trakcie rozwiązywania problemów związanych z niniejszą rozprawą uczestniczyłem w pracach zespołu badawczego dr. inż. Romana Rymaszewskiego. Zespół ten zajmuje się m.in. teorią pomiaru oraz badaniem właściwości procedur pomiarowych. Praca moja należy do badań tego właśnie typu. Doświadczenia członków zespołu przekazywane mi w ramach seminariów czy rozmów indywidualnych miały znaczący wpływ na kształtowanie się moich poglądów

Biblioteka Pol. Wrocł.

nt. komparacji pomiarowej. Szczególnie dużo zawdzięczam tu rozmowom z dr. inż. Romanem Rymaszewskim oraz mgr. inż. Januszem Pękalą.

Panu dr. inż. Janowi Juszkiewiczowi dziękuję za życzliwą pomoc okazywaną mi w trakcie wykonywania eksperymentów.

Pomiary będące przedmiotem rozdziału V wykonałem m.in. w Laboratorium Miernictwa Elektrycznego korzystając z życzliwości i gościnności: dr inż. Ireny Frankiewicz oraz dr inż. Jadwigi Muciek.

Dziękuję również wielu innym osobom, które zabierając głos w dyskusjach seminaryjnych nad fragmentami tej pracy przyczyniły się do jej udoskonalenia.

Rozdział I. Komparacja pomiarowa, jej istota, znaczenie w pomiarach i systematyka.

1. Komparacja pomiarowa jako istotny element pomiaru.

Definicje pomiaru występujące w literaturze, choć różnią się pod wieloma względami, mają jednak wspólną tę zasadniczą cechę, że ich autorzy formułują jako cel pomiaru przypisywanie liczb realizacjom wielkości fizycznych [1].

W i e l k o ś c i ą f i z y c z n ą (oznaczenie: $\tilde{X}$) nazywa się taką wyabstrahowaną cechę rzeczy lub zjawisk, w przypadku której zdefiniowana jest empirycznie sprawdzalna relacja porządku $\prec$ [2].
Wyodrębnienie cechy przedmiotów (zjawisk) odbywa się za pomocą relacji równoważności $\doteq$.

Jeżeli zbiór wszystkich przedmiotów (zjawisk) charakteryzujących się wielkością $\tilde{X}$ podzieli się na podzbiory przedmiotów równoważnych pod względem relacji $\doteq$ definiującej tę wielkość, to każdy taki podzbiór charakteryzuje określony stan wielkości $\tilde{X}$. Stan ten, będący pojęciem abstrakcyjnym, nazwano tu n a t ę ż e n i e m w i e l k o ś c i f i z y c z n e j $\tilde{X}$.
Ponieważ pojęcie to będzie w tej pracy używane rzadko, nie wprowadza się specjalnego na nie oznaczenia.
Pojęcie: wielkość fizyczna oraz jej natężenie są typowe w literaturze metodologicznej i metrologicznej, choć to ostatnie określa się tam zwykle inaczej [2].

W pracy używa się także sformułowania: r e a l i z a c j a w i e l k o ś c i f i z y c z n e j. Jest to uproszczenie myślowe bowiem wielkość fizyczna jako cecha rzeczy lub zjawisk nie istnieje w sposób samodzielny. Pojęcie: realizacja wielkości /oznaczenie $\tilde{X}_1$ lub z innym indeksem/ używane jest tu wtedy, gdy chodzi o cechę k o n k r e t n e g o przedmiotu lub zjawiska.

Aby jednak przypisanie liczb będące celem pomiaru było użyteczne, musi ono być wykonane w taki sposób, by uzyskane wyniki opisywały realizacje fizyczne wielkości, którym odpowiadają [3], tzn. by relacje między liczbami - wynikami pomiarów odpowiadały relacjom zachodzącym między realizacjami wielkości.

W sytuacji najprostszej, gdy celem pomiaru jest ustalenie wartości X_1 (porównaj indeks oznaczeń) pojedynczej realizacji $\tilde{X}_1$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$, a w przypadku tej wielkości określone są relacje empiryczne: równoważności $\doteq$, porządkująca $\prec$ i addytywna $\oplus$, żąda się na ogół by spełnione były warunki wyszczególnione w tabeli 1.1. Jeżeli relacja addytywna nie jest określona w przypadku rozważanej wielkości $\tilde{X}$, warunek wymieniony w tab. 1.1 lp. 3 nie jest oczywiście brany pod uwagę.

Tabela 1.1. Wymagania, które muszą być spełnione, by wyniki pomiarów realizacji $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$, $\tilde{X}_3$ wielkości addtywnej $\tilde{X}$ opisywały te realizacje:

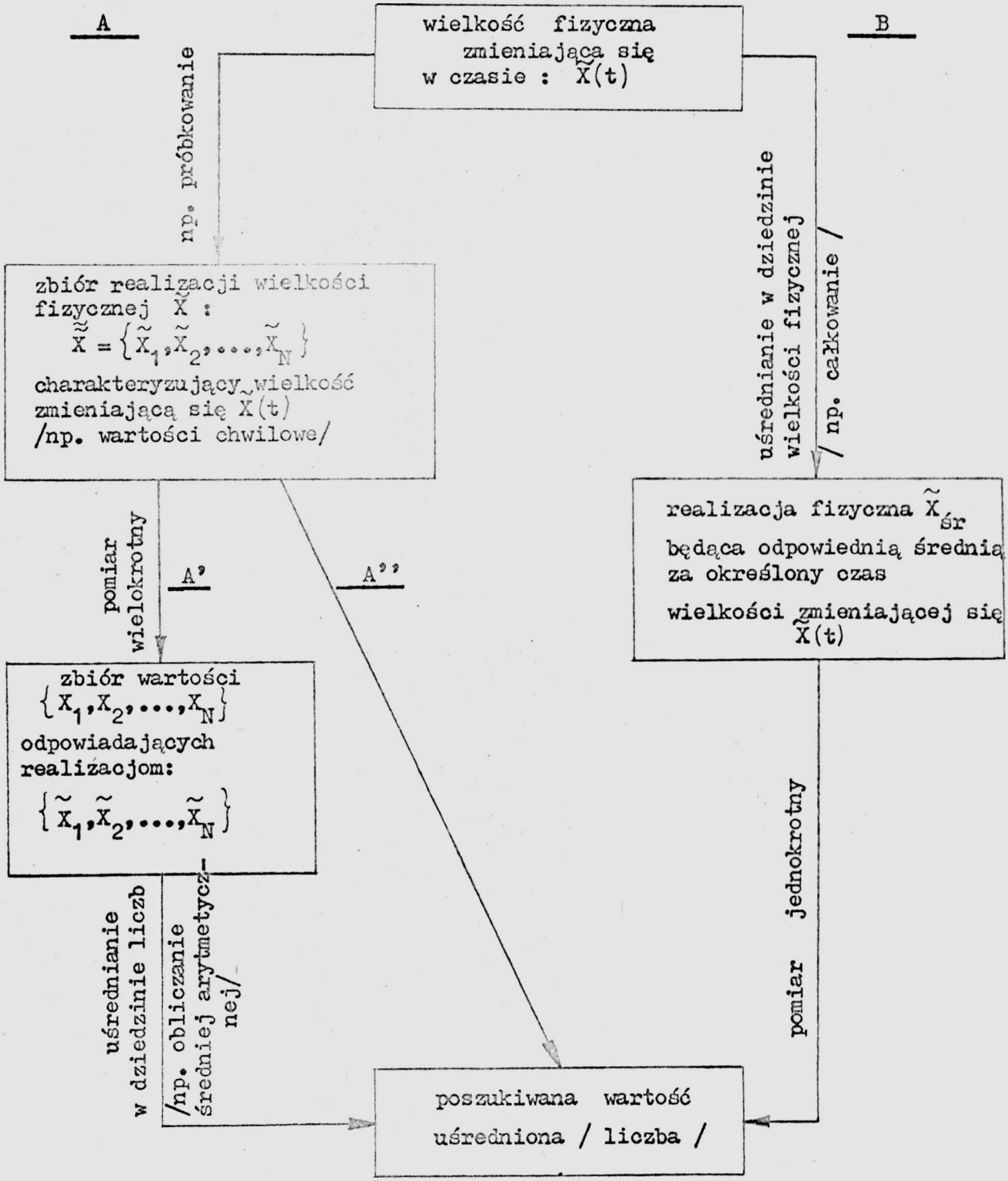
Lp.	nazwa relacji empirycznej i wymagania związane z tą relacją	przykładowe zastosowanie
1	relacja równoważności: $\tilde{X}_1 \doteq \tilde{X}_2 \Leftrightarrow X_1 = X_2$	Przenoszenie wartości przypisanej jednej realizacji wielkości $\tilde{X}$ na inną realizację równoważną jej empirycznie.
2	relacja porządkująca: $\tilde{X}_1 \prec \tilde{X}_2 \Leftrightarrow X_1 < X_2$	Porównywanie realizacji fizycznych w dziedzinie liczb.

3	relacja addytywna: $\tilde{X}_1 \oplus \tilde{X}_2 = \tilde{X}_3 \Leftrightarrow X_1 + X_2 = X_3$	Ustalanie wartości realizacji $\tilde{X}_3$ uzyskanej przez empiryczne sumowanie dwóch innych realizacji $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ o znanych wartościach.
4	Jeżeli za pomocą jakiegoś narzędzia pomiarowego realizacji $\tilde{X}_1$ zostanie przypisana liczba X_1', to liczba X_1'' przypisana tej realizacji w tym samym układzie jednostek ale za pomocą jakiegoś innego narzędzia pomiarowego nie może różnić się od X_1' o więcej niż wynika to z niedokładności użytych narzędzi.	Możliwość porównywania dwóch różnych realizacji $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ wielkości $\tilde{X}$ w dziedzinie liczb nawet wtedy, gdy każda z nich została zmierzona za pomocą innego narzędzia pomiarowego.

W przypadku klasycznym celem pomiaru jest ustalenie wartości X_1 należnej pojedynczej realizacji $\tilde{X}_1$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$ [4]. Pomiar musi być poprzedzony określeniem skali pomiarowej wielkości $\tilde{X}$: S_x [5]. Wymieniony wyżej przypadek nie obejmuje jednak wszystkich znanych dziś form realizacji pomiaru.

Przedmiotem zainteresowania eksperymentatora są niekiedy różne wartości uśrednione charakteryzujące wielkość zmieniającą się w czasie: $\tilde{X}(t)$. Dwie podstawowe drogi (A, B) uzyskiwania tego typu informacji przedstawiono na rysunku 1.1.

Sposób A przedstawiony na tym rysunku wynika ze znanego faktu, że przy spełnieniu określonych warunków, wielkość zmieniająca się $\tilde{X}(t)$ może być scharakteryzowana za pomocą zbioru



Rys. 1.1. Różne sposoby pomiaru wartości uśrednionych charakteryzujących wielkość zmieniającą się w czasie $\tilde{X}(t)$.

realizacji $\tilde{\tilde{X}} = \{ \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_N \}$ tej wielkości $\tilde{X}$. Warunki jakie muszą być spełnione, by powyższy zbiór był reprezentatywny dla wielkości zmieniającej się w czasie $\tilde{X}(t)$, np. problem sprawdzania stacjonarności i ergodyczności sygnału $\tilde{X}(t)$, wpływ skończonego czasu obserwacji - ważne w przypadku sygnałów losowych, wpływ częstotliwości próbkowania i in., nie są przedmiotem obecnych rozważań. Jeżeli jednak przyjmie się, że zbiór $\tilde{\tilde{X}}$ realizacji wielkości fizycznej $\tilde{X}$ jest reprezentatywny dla sygnału $\tilde{X}(t)$, to poszukiwana wartość uśredniona może być uzyskana, jak widać z rys. 1.1., dwiema drogami (A´ i A´´).

Sposób A´ polega na niezależnym pomiarze wartości każdej z realizacji $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_N$ zbioru $\tilde{\tilde{X}}$. Przedmiotem indywidualnych pomiarów jest więc wtedy zawsze określona realizacja $\tilde{X}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$. Jest to zatem zwielokrotniony przypadek omówionej wcześniej, klasycznej sytuacji pomiarowej.

Inaczej jest w przypadku oznaczonym na rys. 1.1 symbolem A´´. Istnieją mianowicie sposoby bezpośredniego pomiaru wartości uśrednionych odpowiadających zbiorowi $\tilde{\tilde{X}}$, b e z u p r z e d n i e g o o k r e ś l a n i a i n d y w i d u a l n y c h w a r t o ś c i: $X_1, X_2, \ldots, X_N$ poszczególnych realizacji: $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_N$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$ należących do tego zbioru. Przykład takiego sposobu organizacji pomiaru będzie przedmiotem dalszej części tej pracy.

Sposób B (rys. 1.1) polega na uśrednieniu wielkości zmieniającej się $\tilde{X}(t)$ w dziedzinie wielkości fizycznej. Wymaga to zastosowania odpowiednich układów, w których wielkość zmieniająca się $\tilde{X}(t)$ podlega odpowiedniej obróbce funkcyjnej (np. kwadra-

towanie, mnożenie analogowe, ...) oraz uśrednieniu (np. całkowanie, filtrowanie, ...). Na wyjściu tych bloków uzyskuje się realizację $\tilde{X}_{śr}$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$, będącą odpowiednią średnią za określony czas wielkości zmieniającej się $\tilde{X}(t)$. Jednokrotny pomiar realizacji $\tilde{X}_{śr}$ umożliwia uzyskanie poszukiwanej wartości uśrednionej.

Jak wynika z rys. 1.1, pomiar może polegać nie tylko na przypisaniu wartości pojedynczej realizacji wielkości fizycznej $\tilde{X}$ (drogi A' i B), ale także może polegać na przypisaniu wartości zbiorowi realizacji wielkości (droga A'').

Zbiór realizacji:

$$\tilde{\tilde{X}} = \{ \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_N \},$$

któremu w procesie pomiaru przypisuje się liczbę, nazwano w tej pracy z b i o r e m r e a l i z a c j i m i e r z o n y c h w i e l k o ś c i f i z y c z n e j $\tilde{X}$.

Przypadek pomiaru pojedynczej realizacji ($\tilde{X}_1$ czy $\tilde{X}_{śr}$) wielkości $\tilde{X}$ może być interpretowany jako sytuacja, gdy zbiór $\tilde{\tilde{X}}$ jest jednoelementowy.

Liczba przypisywana w wyniku pomiaru zbiorowi realizacji $\tilde{\tilde{X}}$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$ musi być ściśle powiązana ze skalą pomiarową tej wielkości. Wymaganie to wynika z podstawowego postulatu metrologii, by wyniki pomiarów opisywały realizacje, którym są przypisane.

Definicja parametru charakterystycznego zbioru $\tilde{\tilde{X}}$:
Niech S_X będzie skalą pomiarową wielkości fizycznej $\tilde{X}$ [6].
Niech będzie dany zbiór realizacji tej wielkości:

$$\tilde{\tilde{X}} = \{ \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_N \}.$$

Parametrem charakterystycznym zbioru $\tilde{\tilde{X}}$ wg skali S_x (w skrócie: parametrem charakterystycznym zbioru $\tilde{\tilde{X}}$) nazywa się każdą liczbę $\nu(\tilde{\tilde{X}})$ spełniającą równania:

$$\nu(\tilde{\tilde{X}}) = f(X_1, X_2, \ldots, X_N), \tag{1.1}$$

gdzie: $X_i = S_x(\tilde{X}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Funkcja f określa typ parametru charakterystycznego.

Przykład 1.1. Możliwe postaci parametru charakterystycznego:

a) Wartość średnia w zbiorze realizacji:

$$\nu_1(\tilde{\tilde{X}}) = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i . \tag{1.2}$$

Oczywiście gdy N=1, $\nu_1(\tilde{\tilde{X}}) = X_1$ czyli pojęcie parametru charakterystycznego obejmuje też przypadek typowy, gdy pomiar dotyczy jednej realizacji $\tilde{X}_1$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$, a jego celem jest ustalenie wartości należnej tej realizacji wg skali S_x.

b) Wartość średniokwadratowa w zbiorze realizacji:

$$\nu_2(\tilde{\tilde{X}}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 . \tag{1.3}$$

c) K-ty moment zwykły w zbiorze realizacji:

$$\nu_k(\tilde{\tilde{X}}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i)^k \quad , k= 1, 2, 3, \ldots \tag{1.4}$$

Gdy k = 1, 2 moment zwykły ma odpowiednio postać wartości średniej lub średniokwadratowej (porównaj wzory(1.2) i (1.3)).

d)

$$\gamma_{korel}(\tilde{\tilde{X}}) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} X_i \cdot X_{i+k} \quad , \quad k < N \, . \qquad (1.5)$$

Gdy realizacje $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$, ..., $\tilde{X}_N$ są stanami w kolejnych, równoodległych chwilach czsowych pewnej ergodycznie zmieniającej się wielkości $\tilde{X}(t)$ o zerowej wartości średniej, to parametr charakterystyczny określony za pomocą powyższego wzoru może być używany jako estymator funkcji autokorelacji sygnału $\tilde{X}(t)$ [7].

e) Kombinacja liniowa wartości realizacji w zbiorze:

$$\gamma_{lin}(\tilde{\tilde{X}}) = \frac{c}{N} \sum_{i=1}^{N} a_i X_i \qquad (1.6)$$

gdzie: c, a_i (i = 1, 2, ..., N) - określone współczynniki.
W szczególności gdy: $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$, ..., $\tilde{X}_N$ są realizacjami sygnału $\tilde{X}(t)$ w równoodległych chwilach czasowych spełniających względem widma sygnału $\tilde{X}(t)$ warunki twierdzenia o próbkowaniu [8], to parametry charakterystyczne:

$$\gamma_{F\text{-}cos}(\tilde{\tilde{X}}) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot i}{N}\right) \qquad (1.7\ a)$$

oraz:

$$\gamma_{F\text{-}sin}(\tilde{\tilde{X}}) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot i}{N}\right) \quad , \qquad (1.7\ b)$$

$$k = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2}$$

stanowią współczynniki w dyskretnym przekształceniu Fouriera

sygnału $\tilde{X}(t)$ [9].

Na podstawie powyższych rozważań można stwierdzić, że istotą pomiaru jest przypisanie zbiorowi realizacji $\tilde{\tilde{X}}$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$, liczby będącej parametrem charakterystycznym tego zbioru wg wcześniej przyjętej skali pomiarowej S_x.

Można zadać pytanie, jakich należy użyć środków proceduralnych, aby przypisanie takie było możliwe. Najczęściej akcentowaną czynnością uważaną za podstawowy środek realizacji pomiaru jest p o r ó w n a n i e z w z o r c e m [10]. Sformułowanie to jest, zdaniem autora, pewnym skrótem myślowym. Dalsze rozważania stanowią prezentację jednego z możliwych sposobów jego rozumienia.

P o r ó w n a n i e m dwóch przedmiotów pod względem wielkości fizycznej $\tilde{X}$ nazywa się empiryczne sprawdzenie czy jeden z tych przedmiotów jest pod względem wielkości $\tilde{X}$ mniejszy od drugiego.

W pracy niniejszej stosowane jest na ogół sformułowanie uproszczone:

P o r ó w n a n i e d w ó c h r e a l i z a c j i $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$. Chodzi wtedy o empiryczne sprawdzenie czy ma miejsce relacja:

$$\tilde{X}_1 < \tilde{X}_2 \quad [11].$$

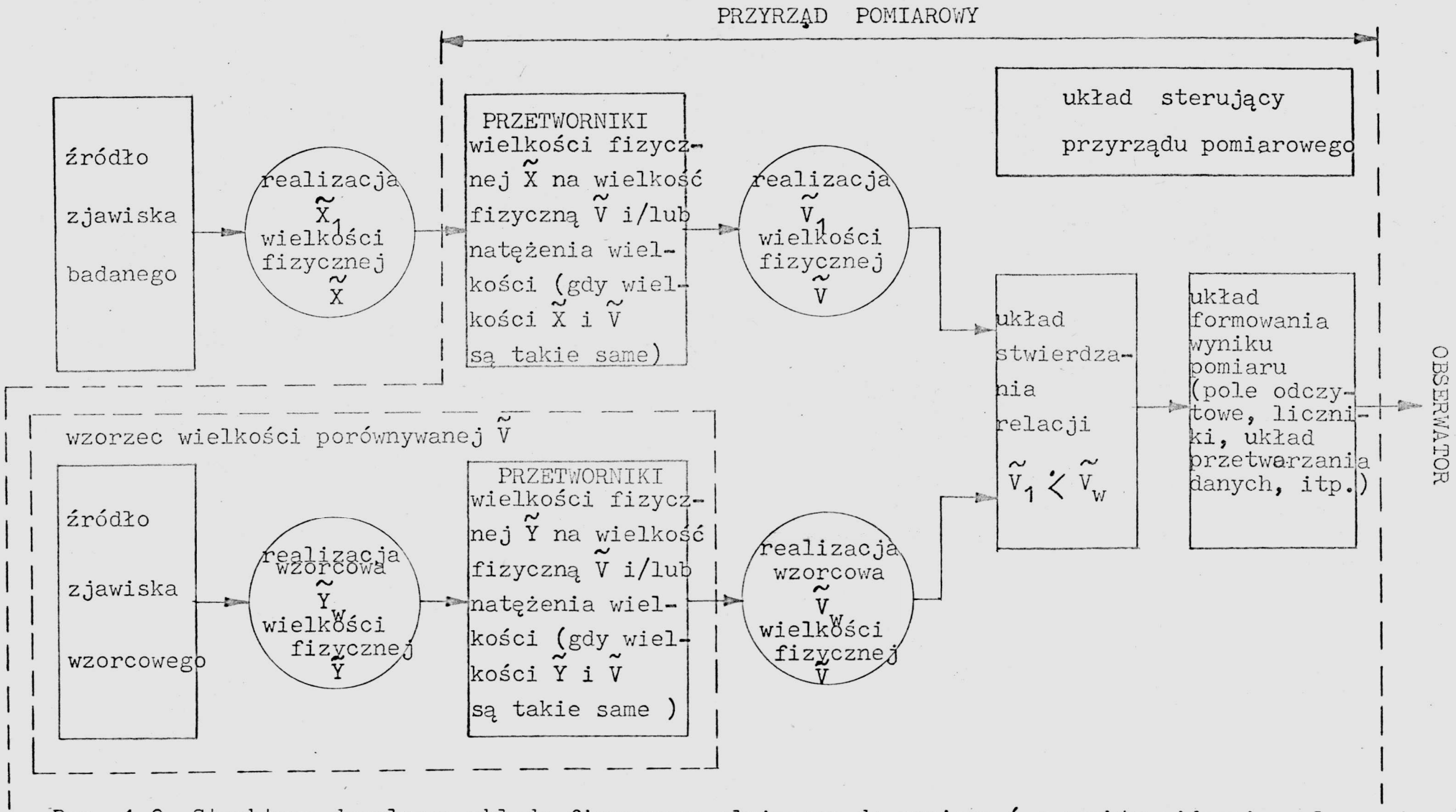
Istota tego uproszczenia polega na tym, że realizacje wielkości fizycznej nie są kategoriami samodzielnymi. W dziedzinie realiów porównywać pod względem wybranej wielkości można więc jedynie

przedmioty (zjawiska) [12].

Empiryczna sprawdzalność relacji porządkującej $\dot{<}$ w przypadku wielkości $\tilde{X}$ wynika z przyjętej definicji pojęcia "wielkość fizyczna". Praktyczne wykonanie porównania możliwe jest tylko wtedy, gdy realizacje $\tilde{X}_1$ i $\tilde{X}_2$ są w czasie jego realizowania praktycznie niezmienne.

Jeżeli jedna z porównywanych realizacji $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ wielkości $\tilde{X}$ (np. $\tilde{X}_2$) jest odtwarzana przez wzorzec [13], to operacja taka nazywana jest porównaniem realizacji $\tilde{X}_1$ z wzorcową.

Do osiągnięcia celu pomiaru, tj. przypisania liczby realizacjom wielkości, konieczne jest na ogół wykonanie szeregu tak rozumianych porównań. Wynika stąd, że takie elementy materialne jak: wzorzec oraz układ sprawdzania relacji porządku empirycznego są niezbędne do zrealizowania tego celu. Schemat zatem struktury układu służącego do wykonania dowolnego pomiaru ma postać jak na rysunku 1.2.



Rys. 1.2. Struktura dowolnego układu fizycznego służącego do pomiaru (z punktu widzenia celu pomiaru)

symbol: ○ oznacza realizację wielkości fizycznej wyspecyfikowaną wewnątrz kółka,

symbol: ▭ oznacza układ materialny wyspecyfikowany wewnątrz prostokąta .

Przedstawiony rysunek wymaga komentarza:

1) Przetworniki stanowią często znaczną część urządzenia pomiarowego. Na rys. 1.2. zaznaczono je lapidarnie - w postaci dwóch bloków. Chodziło tu bowiem o uwypuklenie tej części struktury układu pomiarowego, w której realizuje się cel pomiaru.

2) Niektóre układy pomiarowe zawierają nie blok sprawdzania relacji porządku empirycznego $\dot{<}$ lecz blok sprawdzania empirycznego zawierania się w przedziale realizacji fizycznych: $\dot{\in}$ (porównaj indeks oznaczeń). Rzeczywisty detektor relacji równoważności empirycznej $\dot{=}$, która fizycznie zawsze jest sprawdzalna ze skończoną czułością, można również traktować właśnie jako detektor relacji $\dot{\in}$. Jest jednak oczywiste, że detektor taki można wymodelować przy użyciu dwóch detektorów relacji porządku: $\dot{<}$. Stąd też na rys. 1.2 zamieszczono tylko blok detektora tej ostatniej relacji.

3) Niekiedy układ pomiarowy może zawierać szereg bloków stwierdzania relacji porządku $\dot{<}$. Robi się to w celu zrównoleglenia porównań realizacji $\tilde{V}_1$ z różnymi $\tilde{V}_w$, co umożliwia ich przyspieszenie.

4) Blok regulowanego wzorca wielkości porównywalnej $\tilde{V}$ przedstawiony na rys. 1.2 miewa niekiedy złożoną strukturę wewnętrzną. Ponadto w niektórych układach pomiarowych podlega regulacji nie realizacja $\tilde{V}_w$, ale $\tilde{V}_1$. Dokonuje się tego przez jej podział (powielenie) w znanym stosunku. Dzięki temu możliwe staje się stosowanie wzorca odtwarzającego tylko jedną realizację wielkości wzorcowej. Bywa również i tak, że w celu zwiększenia zakresu realizacji wielkości $\tilde{V}$, w którym można dokonywać

porównań z wzorcem, stosuje się zarówno regulację realizacji $\tilde{V}_w$ jak i wstępną regulację realizacji $\tilde{V}_1$. Dobrze widać to na przykładzie wielozakresowych woltomierzy kompensacyjnych: wejściowe dzielniki napięcia realizują wstępną (ręczną lub automatyczną) regulację napięcia mierzonego. Niezależnie od tego w trakcie cyklu pomiarowego następuje regulacja napięcia wzorcowego.

Na podstawie omawianego tu rysunku 1.2 można poczynić dwa spostrzeżenia:

- Na proces pomiaru składają się również takie czynności, które nie służą bezpośrednio realizacji jego celu (np. przetwarzanie wielkości mierzonej $\tilde{X}$ na tę, która będzie porównywana z wzorcem: $\tilde{V}$).
- Wielkość mierzona $\tilde{X}$ nie zawsze musi być tego samego rodzaju co wielkość porównywana z wzorcem $\tilde{V}$.

Z ostatniego spostrzeżenia wynika, że zbiorowi realizacji mierzonych $\tilde{\tilde{X}} = \{ \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_N \}$ wielkości fizycznej $\tilde{X}$ może odpowiadać w mierniku zbiór realizacji mierzonych: $\tilde{\tilde{V}} = \{ \tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \ldots, \tilde{V}_N \}$ wielkości fizycznej $\tilde{V}$, mającej ten sam charakter fizyczny co wielkość odtwarzana przez wzorzec. (W rozumieniu wcześniej podanej definicji, porównanie może dotyczyć wyłącznie realizacji tej samej wielkości fizycznej). Zakłada się tu, że przetworniki pomiarowe przekształcają zbiór $\tilde{\tilde{X}}$ w sposób jednoznaczny w zbiór $\tilde{\tilde{V}}$ (tzn. jednej realizacji wielkości fizycznej $\tilde{X}$ przyporządkowują dokładnie jedną realizację wielkości fizycznej $\tilde{V}$). Wynika stąd, że zbiory $\tilde{\tilde{X}}$ i $\tilde{\tilde{V}}$ są równoliczne. W przypadku gdy wielkość mierzona $\tilde{X}$ nie podlega przetworzeniom w układzie pomiarowym, zbiory $\tilde{\tilde{X}}$ oraz $\tilde{\tilde{V}}$ są oczy-

wiście identyczne.

Przypisanie zbiorowi realizacji mierzonych $\approx{X}$ określonego parametru charakterystycznego (liczba) - będące istotą pomiaru - wymaga wykonania szeregu porównań realizacji wielkości fizycznej $\sim{V}$ z realizacjami tej wielkości, odtwarzanymi przez wzorzec. Celowym wydaje się więc zdefiniowanie procedury nazwanej tu komparacją pomiarową.

K o m p a r a c j ą p o m i a r o w ą[14] nazywa się w tej pracy element procesu pomiarowego składający się z jednego lub szeregu, zorganizowanych w sposób celowy, porównań dwóch realizacji tej samej wielkości fizycznej, z których jedna jest odtwarzana przez wzorzec.

Jak widać pojęcie "komparacja pomiarowa" odnosi się do pewnej formy czynności eksperymentalnych. Jego związek z pomiarem wyraża się w konieczności zastosowania wzorca.

Z definicji procedury komparacji pomiarowej wynika, że tym co ona "widzi" - p r z e d m i o t e m komparacji pomiarowej jest następujący zbiór realizacji wielkości fizycznej $\sim{V}$:

$$\approx{V}_p = \left\{ \sim{V}^1, \sim{V}^2, \ldots, \sim{V}^L \right\} ,$$

gdzie: $\sim{V}^j$, (j = 1, 2, ..., L) oznacza realizację wielkości fizycznej $\sim{V}$ porównywaną z wzorcową w j-tym takcie procedury komparacyjnej. Zbiór $\approx{V}_p$ nazwano z b i o r e m r e a l i z a c j i p o r ó w n y w a n y c h z w z o r c e m.

Typowe związki między przedmiotem komparacji pomiarowej - zbiorem $\approx{V}_p$, a zbiorem $\approx{V}$ realizacji mierzonych wielkości fizycz-

nej $\tilde{V}$, obrazuje następujący przykład.

Przykład 1.2.

Założono, że w procesie pomiaru wielkość mierzona nie podlega przetworzeniu. Wielkość fizyczna porównywana z wzorcem $\tilde{V}$ jest więc tego samego rodzaju co wielkość mierzona.

a) Zbiór realizacji mierzonych jest jednoelementowy: $\tilde{\tilde{V}} = \{\tilde{V}_1\}$. Celem pomiaru jest ustalenie wartości V_1 realizacji $\tilde{V}_1$. Aby powyższy cel osiągnąć wykonuje się komparację pomiarową polegającą na L-krotnym porównaniu realizacji $\tilde{V}_1$ z realizacjami wielkość $\tilde{V}$ odtwarzanymi przez wzorzec. Zbiór $\tilde{\tilde{V}}_p$ ma postać:

$$\tilde{\tilde{V}}_p = \{\underbrace{\tilde{V}_1, \tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_1}_{\text{L razy}}\}$$

b) Zbiór realizacji mierzonych ma postać:

$$\tilde{\tilde{V}} = \{\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \ldots, \tilde{V}_N\}.$$

Celem pomiaru jest ustalenie wartości jakiegoś parametru charakterystycznego zbioru $\tilde{\tilde{V}}$, np. wartość średniej: $\nu_1(\tilde{\tilde{V}}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V_i$. Aby cel ten osiągnąć wykonuje się procedurę komparacyjną składającą się np. z N porównań; każdą z realizacji ze zbioru $\tilde{\tilde{V}}$ porównuje się jednokrotnie z realizacją wzorcową. Zbiór $\tilde{\tilde{V}}_p$ ma w takim przypadku postać identyczną jak zbiór $\tilde{\tilde{V}}$:

$$\tilde{\tilde{V}}_p = \{\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \ldots, \tilde{V}_N\}.$$

Określenie wartości średniej zbioru $\tilde{\tilde{V}}$ może niekiedy wymagać

r-krotnego porównania każdej realizacji ze zbioru $\tilde{\tilde{V}}$ z realizacjami odtwarzanymi przez wzorzec. Zbiór $\tilde{\tilde{V}}_p$ ma rówczas postać:

$$\tilde{\tilde{V}}_p = \{ \underbrace{\tilde{V}_1, \tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_1}_{r \text{ razy}}, \underbrace{\tilde{V}_2, \tilde{V}_2, \ldots, \tilde{V}_2}_{r \text{ razy}}, \ldots, \underbrace{\tilde{V}_N, \tilde{V}_N, \ldots, \tilde{V}_N}_{r \text{ razy}} \}$$

Inny, mniej typowy przykład związku między zbiorami $\tilde{\tilde{V}}$ oraz $\tilde{\tilde{V}}_p$ będzie omówiony w podrozdziale II/3 oraz w Dodatku 2.

Ustalenie, że przedmiotem komparacji pomiarowej jest zbiór realizacji $\tilde{\tilde{V}}_p$, ma w tej pracy znaczenie nie tylko poznawcze, ale także metodologiczne. Zbiór ten stanowi bowiem punkt wyjścia wszystkich dalszych rozważań dotyczących wpływu procedury komparacji pomiarowej na wynik pomiaru. Podejście takie ma tę zaletę, że pozwala analizować zależność wyniku pomiaru od właściwości procedury komparacji pomiarowej i elementów ją realizujących w oderwaniu od innych możliwych czynników wpływających. Czyni to analizę bardziej przejrzystą.

Z drugiej jednak strony, przyjęcie zbioru $\tilde{\tilde{V}}_p$ ($\tilde{\tilde{V}}$) za punkt wyjścia analizy oznacza nieuwzględnienie w niej wpływu na wynik tych elementów (rzeczowych i proceduralnych), które występują w procesie pomiaru przed komparacją pomiarową. Powoduje to, że analiza ma charakter wycinkowy.

Jeżeli np. zbiór $\tilde{\tilde{V}}$ zawiera wartości chwilowe wielkości fizycznej $\tilde{V}(t)$ zmieniającej się w sposób losowy, to rozpoczęcie analizy od zbioru $\tilde{\tilde{V}}$ (czy $\tilde{\tilde{V}}_p$) oznacza pominięcie całego kręgu problemów związanych z jego reprezentatywnością dla sygnału $\tilde{V}(t)$.

Poza zakresem zainteresowań pozostają wtedy m.in. zagadnienia:
- badanie stacjonarności i ergodyczności sygnału $\tilde{V}(t)$;
- wpływ na wynik pomiaru parametrów uśrednionych sygnału $\tilde{V}(t)$ takich czynników jak: skończony czas obserwacji sygnału, próbkowanie, cechy probabilistyczne sygnału $\tilde{V}(t)$ (np. funkcja rozkładu prawdopodobieństwa, funkcja autokorelacji).

Mimo to jednak, możliwa do uzyskania przejrzystość analizy zdecydowała, że w pracy tej zastosowano metodę analizy wpływu komparacji pomiarowej na wynik pomiaru przyjmującą za punkt wyjścia zbiory $\tilde{\tilde{V}}$, $\tilde{\tilde{V}}_p$.

Przez analogię do zbiorów: $\tilde{\tilde{V}}$ - realizacji mierzonych wielkości fizycznej $\tilde{V}$ oraz $\tilde{\tilde{V}}_p$ - realizacji porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach (j=1,2,...,L) procedury komparacyjnej, wygodnie jest wprowadzić nazwy zbiorów realizacji wzorcowych.

$\tilde{\tilde{V}}_w$ oznacza zbiór realizacji ostwarzanych przez wzorzec. Zbiór ten może być przeliczalny lub nie. Poszczególne realizacje wzorcowe ze zbioru $\tilde{\tilde{V}}_w$ będą w tej pracy odróżniane za pomocą indeksu u dołu symbolu realizacji, np. $\tilde{V}_{wi}$ (ponumerowanie wszystkich elementów zbioru $\tilde{\tilde{V}}_w$ jest możliwe tylko wtedy, gdy zbiór ten jest przeliczalny).

Wykonanie komparacji polega na wybieraniu realizacji ze zbioru $\tilde{\tilde{V}}_w$ i porównywaniu ich z kolejnymi realizacjami ze zbioru $\tilde{\tilde{V}}_p$. Zbiór realizacji wzorcowych porównywanych, w kolejnych taktach procedury komparacyjnej (j=1,2,...,L), z realizacjami ze zbioru $\tilde{\tilde{V}}_p$ oznaczono tu $\tilde{\tilde{V}}_{wp}$:

$$\tilde{\tilde{V}}_{wp} = \left\{ \tilde{V}_w^1, \tilde{V}_w^2, \ldots, \tilde{V}_w^j, \ldots, \tilde{V}_w^L \right\},$$

gdzie: $\tilde{V}_w^j$ (j=1,2,...,L) - realizacja wzorcowa porównywana z realizacją $\tilde{V}^j$ ze zbioru $\approx{V}_p$ w j-tym takcie procedury.
Elementy zbioru $\approx{V}_{wp}$, tzn. realizacje $\tilde{V}_w^j$ są także elementami zbioru $\approx{V}_w$. Ściśle biorąc należałoby więc indeksować je podwójnie: u góry i u dołu. W konkretnych przypadkach jednak, z reguły ważna jest tylko jedna z informacji: albo fakt że dana realizacja jest określonym elementem zbioru $\approx{V}_w$ - stosuje się wtedy oznaczenie $\tilde{V}_{wi}$, albo też ważny jest numer porównania, w którym ta realizacja wzorcowa uczestniczy - oznaczenie $\tilde{V}_w^j$. Konwencja ta pozwoliła uniknąć podwójnego indeksowania.

W y n i k i e m procedury komparacji pomiarowej jest - jak to wynika z definicji - zbiór rezultatów poszczególnych porównań z wzorcem. Opis słowny tego wyniku jest zbiorem informacji typu: "W pierwszym takcie realizacja ze zbioru $\approx{V}_p$ była porównana z realizacją wzorcową o wartości V_w^1 (porównaj indeks oznaczeń). Wynikiem porównania było ... . W drugim takcie ... itd.".

Formalnie wynik całej procedury komparacyjnej można więc zapisać w postaci wektora:

$$\mathbb{K} = \left[\begin{pmatrix} V_w^1 \\ k^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_w^2 \\ k^2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} V_w^L \\ k^L \end{pmatrix} \right], \qquad (1.8)$$

gdzie: V_w^j (j = 1, 2, ..., L) - wartość realizacji wzorcowej $\tilde{V}_w^j$, z którą porównywano realizację ze zbioru $\approx{V}_p$ w j-tym takcie procedury,

k^j $(j = 1, 2, \ldots, L)$ - wynik porównania w j-tym takcie procedury:

$$k^j = \begin{cases} 1 \ , & \tilde{v}_w^j \lesssim \tilde{v}^j \\ 0 \ , & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \quad , \ j = 1, 2, \ldots, L.$$

Wektor $\mathbb{K}$ jest podstawą do formowania wyniku pomiaru. Zagadnienie to będzie przedmiotem dalszych rozważań.

Na rysunku 1.3 zebrano wszystkie pojęcia związane z komparacją pomiarową, wprowadzone w tej pracy.

Użycie słowa "komparacja" w zdefiniowanym właśnie pojęciu "komparacja pomiarowa" ma charakter terminologiczny [15]. Z drugiej strony w zbiorze stosowanych aktualnie pojęć metrologicznych funkcjonuje szereg innych haseł zawierających to słowo. Wypada więc prześledzić, jak zakres znaczeniowy zdefiniowanego właśnie pojęcia ma się względem zakresów znaczeniowych innych używanych w metrologii terminów zawierających słowo "komparacja".

Wydaje się, że dla wyrazu: "komparator", "komparacja" mamy dziś cztery charakterystyczne sposoby użycia:

1. "Komparator" jako detektor relacji empirycznej (równoważności, porządku, ...) określonej wielkości fizycznej, zaś "komparacja" jako nazwa czynności polegającej na eksperymentalnym sprawdzeniu czy relacja ta ma miejsce [16].
2. "Komparacja" jako element procesu pomiarowego będący czymś więcej niż tylko pojedynczym aktem sprawdzania zachodzenia relacji empirycznej [17]. W tym nurcie znaczeniowym znajduje się także zaproponowana wyżej definicja pojęcia "komparacja pomiarowa".
3. W nazwie "komparacyjna metoda pomiarowa". Użycie słowa

Zbiór $\tilde{\tilde{V}}$ realizacji mierzonych wielkości fizycznej $\tilde{V}$:

$$\tilde{\tilde{V}} = \{\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \ldots, \tilde{V}_i, \ldots, \tilde{V}_N\}$$

Zbiór $\tilde{\tilde{V}}_w$ realizacji odtwarzanych przez wzorzec:

$$\tilde{\tilde{V}}_w = \{\tilde{V}_{w1}, \tilde{V}_{w2}, \ldots, \tilde{V}_{wi}, \ldots, \tilde{V}_{wn}\}$$

(Powyższy zapis dotyczy tylko przypadków gdy zbiór $\tilde{\tilde{V}}_w$ jest przeliczalny)

Zbiór $\tilde{\tilde{V}}_p$ realizacji porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach procedury komparacyjnej

$$\tilde{\tilde{V}}_p = \{\tilde{V}^1, \tilde{V}^2, \ldots, \tilde{V}^j, \ldots, \tilde{V}^L\}$$

Zbiór $\tilde{\tilde{V}}_{wp}$ realizacji wzorcowych porównywanych ze zbioru z realizacjami $\tilde{\tilde{V}}_p$ w kolejnych taktach procedury:

$$\tilde{\tilde{V}}_{wp} = \{\tilde{V}_w^1, \tilde{V}_w^2, \ldots, \tilde{V}_w^j, \ldots, \tilde{V}_w^L\}$$

Sekwencja porównań:

czy: $\tilde{V}^j \lesssim \tilde{V}_w^j$?

$j = 1, 2, \ldots, L$

Komparacja pomiarowa

Wynik komparacji pomiarowej - wektor $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K} = \left[\begin{pmatrix} V_w^1 \\ k^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_w^2 \\ k^2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} V_w^j \\ k^j \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} V_w^L \\ k^L \end{pmatrix} \right]$$

Wynik pomiaru R

Rys. 1.3. Zestaw pojęć związanych z komparacją pomiarową, używany w tej pracy.

"komparacyjna" jest tu odmienne niż w dwóch poprzednich wątkach znaczeniowych. Chodzi tu bowiem nie o fragment procesu pomiarowego ale z reguły o metodę pośredniego porównania jakiejś cechy prądu przemiennego z odpowiadającą jej cechą prądu stałego [18]. Nie jest to jednak jedyne spotykane rozumienie pojęcia "komparacyjna metoda pomiarowa" [19].

4. W sformułowaniu: "skomparować dwie realizacje określonej wielkości fizycznej" ma się zwykle na myśli czynność regulowania jednej lub obu tych realizacji w celu ich zrównania.

Wnioski z porównania zastosowań słów: "komparator" i "komparacja" w terminologii metrologicznej są następujące:

- wymienione słowa są przez różnych autorów rozumiane odmiennie,
- zaproponowane wyżej znaczenie hasła "komparacja pomiarowa" mieści się w jednym z typowych nurtów stosowanego w metrologii rozumienia słowa "komparacja".

Jednym z ogniw łańcucha pomiarowego jest obserwator (porównaj rys. 1.2). Jego udział w podstawowych procesach poznawczych tj. w obserwacji, pomiarze i eksperymencie jest zróżnicowany [20]. Szczególnie interesująca jest odmienność funkcji umysłu obserwatora w obserwacji i w pomiarze. Różnica ta pozostaje w ścisłym związku z obecnością w każdym pomiarze komparacji pomiarowej.

Obserwacja będąca czynnością poznawczą mniej doskonałą niż pomiar, różni się od tego ostatniego tym, że podmiot obserwujący wypowiada sądy o rzeczywistości na podstawie porównywania wrażeń zmysłowych wywołanych w jego świadomości [21]. Tak jest np. w przypadku oceny długości "na oko", kiedy to wrażenie związane z obserwacją konkretnego przedmiotu zostaje porównane w umyśle obserwatora z wrażeniem związanym z oglądaniem np. listwy miernicze o znanej długości (tzw. wzorzec myślowy) [22] i na tej podstawie oszacowuje się przybliżoną długość przedmiotu. Podsta-

wowa wada oceny "na oko" polega na jej subiektywności. Przyczyną są zniekształcenia wrażeń w kanale zmysłowo-wrażeniowym obserwatora i w jego pamięci, a także nieznane algorytmy porównywania wrażeń w mózgach poszczególnych obserwatorów.

Jedną z głównych zalet pomiaru w stosunku do oceny "na oko" jest fakt przeniesienia porównań niezbędnych do uzyskania wyniku liczbowego ze sfery wrażeniowej do empiryczno-doświadczalnej (komparacja pomiarowa). Umożliwia to nie tylko przypisywanie liczb realizacjom wielkości niedostępnych bezpośrednio zmysłom, ale także zwalnia umysł od konieczności pamiętania wrażeń wzorcowych.

Wydaje się, że w przypadku gdy odbiorcą wyniku pomiaru jest człowiek, jego kanał zmysłowo-wrażeniowy i umysł odgrywają niebagatelną rolę t a k ż e w procesie pomiaru. Wynik pomiaru może stać się użyteczny dopiero w momencie d o t a r c i a d o ś w i a d o m o ś c i o b s e r w a t o r a. To zaś polega prawdopodobnie na porównywaniu wrażeń związanych z kodem aktualnie obserwowanego wyniku pomiaru z wrażeniami kodów wzorcowych utrwalonymi w mózgu obserwatora. Myślowy wzorzec kodów składa się np. z wrażeń związanych z wyglądem symboli cyfr i zasad zapisu liczb w systemie pozycyjnym. Operacje myślowe prowadzące do rozpoznania liczby wyniku, polegające prawdopodobnie także na wykonaniu szeregu porównań (patrz definicja komparacji pomiarowej), można by nazwać k o m p a r a c j ą p s y c h o l o g i c z n ą.

2. Klasyfikacja procedur komparacji pomiarowej

a) Podział według celu procedury komparacyjnej.

Zgodnie z definicją przedstawioną w poprzednim podrozdziale, istotą procedury komparacji pomiarowej jest wykonanie szeregu porównań. Wynik komparacji stanowi natomiast wektor $|K$ (1.8) rezultatów tych porównań.

Celem pomiaru jest jednak uzyskanie wyniku liczbowego. Realizacja tego celu możliwa jest właśnie dzięki procedurze komparacji pomiarowej. Interesujący jest więc problem, w jaki sposób rezultaty porównań uzyskane w trakcie wykonywania procedury komparacyjnej mogą być wykorzystane do formowania wyniku pomiaru. Zdaniem autora zależy to od celu procedury komparacyjnej.

Na podstawie analizy konkretnych przykładów procedur komparacyjnych można stwierdzić, że w praktyce pomiarowej występują komparacje realizujące jeden z dwóch różnych celów (będzie o nich mowa niżej). Obydwom formom procedur komparacyjnych odpowiadają inne sposoby uzyskiwania na ich podstawie wyników pomiaru.

Celem bliższego wyjaśnienia istoty zasygnalizowanego podziału procedur komparacji pomiarowej, zostaną tu przedstawione dwa przykłady.

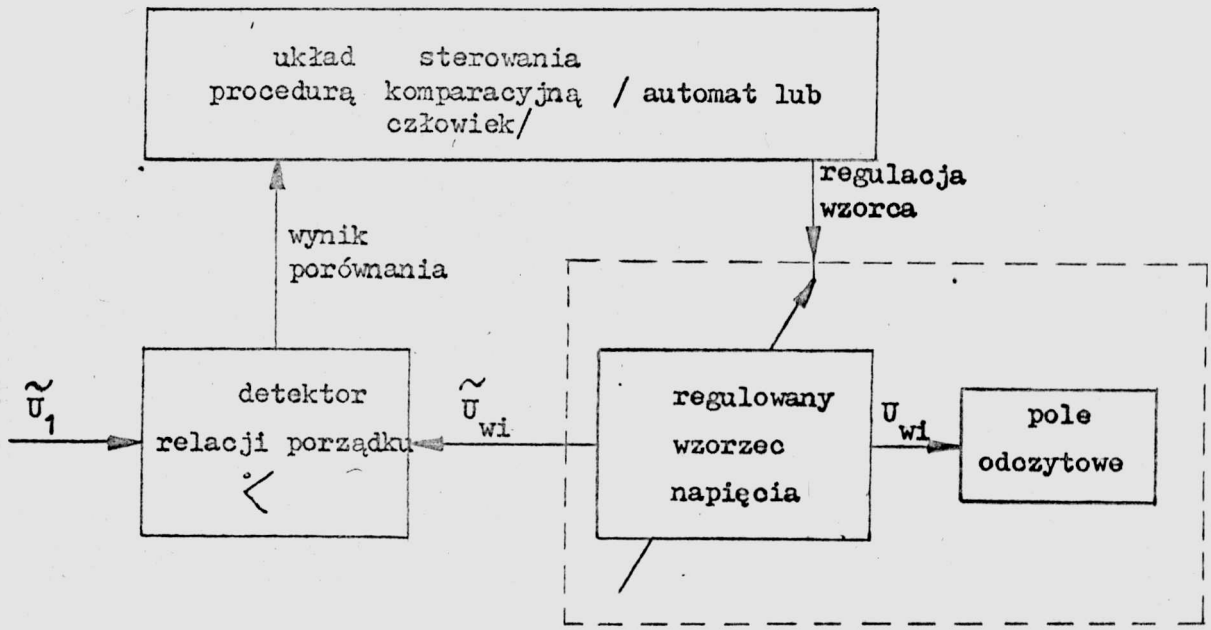
W przykładach tych, a także we wszystkich dalszych rozważaniach zakłada się, że wielkość fizyczna $\tilde{V}$, której realizacje

są porównywane z wzorcem jest n a p i ę c i e m e l e k t r y c z n y m ($\tilde{U}$). Jest to wielkość addytywna. Założenie powyższe zrobiono w celu skonkretyzowania rozważań, a także dążąc do wskazania ważnego obszaru zastosowań tej formy procedury komparacyjnej, która jest przedmiotem kolejnych rozdziałów pracy.

Zbiory $\tilde{\tilde{V}}$, $\tilde{\tilde{V}}_p$, $\tilde{\tilde{V}}_w$, $\tilde{\tilde{V}}_{wp}$ zdefiniowane w poprzednim podrozdziale (rys. 1.3) będą od teraz oznaczane odpowiednio: $\tilde{\tilde{U}}$, $\tilde{\tilde{U}}_p$, $\tilde{\tilde{U}}_w$, $\tilde{\tilde{U}}_{wp}$.

Założono ponadto, że wszystkie bloki występujące w dwóch najbliższych przykładach są idealne, a w szczególności, że:
- detektor relacji porządku $<$ jest pozbawiony: progu czułości, histerezy, bezwładności i nie pobiera energii,
- wzorzec napięcia jest całkowicie stabilny i dokładny.

Przykład 1.3. Pomiaru napięcia można dokonać w układzie wg rysunku 1.4.



Rys. 1.4. Przykład układu do pomiaru napięcia.

Założono, że w trakcie wykonywania procedury komparacyjnej realizacja $\tilde{U}_1$ napięcia mierzonego jest praktycznie niezmienna. Zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest tu więc jednoelementowy:

$$\tilde{\tilde{U}} = \{\tilde{U}_1\} .$$

Celem pomiaru jest ustalenie wartości realizacji $\tilde{U}_1$ (jest to również pewna zdegenerowana postać wartości charakterystycznej zbioru).

Zakłada się, że układ przedstawiony na rys. 1.4 działa następująco:

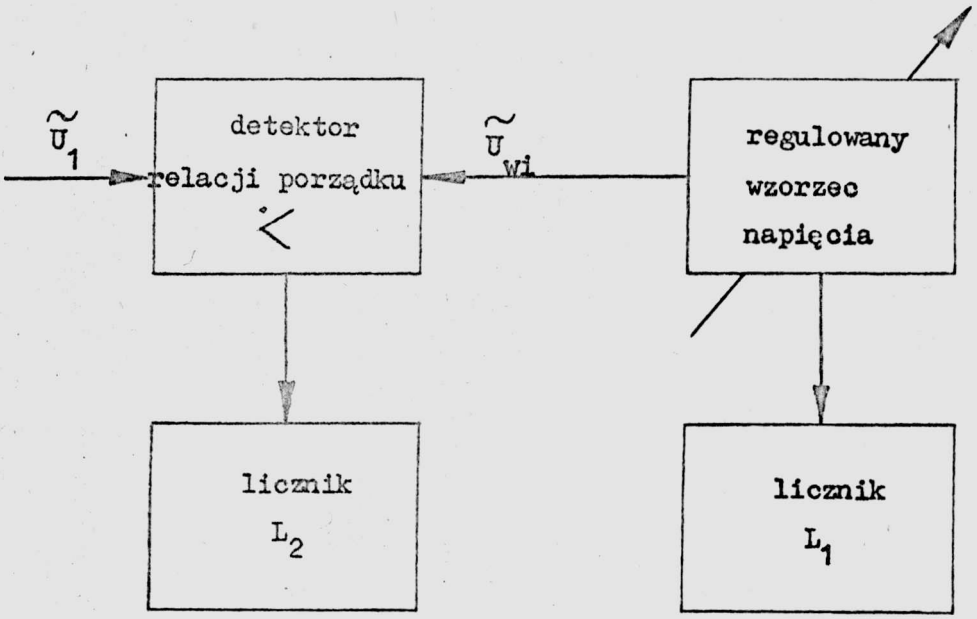
Wzorzec wytwarza na swych zaciskach różne napięcia wzorcowe $\tilde{U}_{wi}$ według przyjętego z góry algorytmu (np. dekadami, a w

ramach dekady wg sekwencji 8-4-2-1 lub podobnej). Ma on jednak tę właściwość, że ilekroć na jego zaciskach pojawi się napięcie $\tilde{U}_{wi}$, tylekroć wartość U_{wi} odpowiadająca temu napięciu jest eksponowana na polu odczytowym..

Podobną właściwość mają wzorce masy w postaci odważników: ilekroć w trakcie ważenia używamy odważnika jako wzorca masy, z symboli na nim umieszczonych możemy odczytać wartość należną tej wzorcowej realizacji masy.

Działania detektora relacji porządku $<$ oraz bloku sterowania są tak zorganizowane by umożliwiały z n a l e z i e n i e w zbiorze $\tilde{\tilde{U}}_w$ realizacji, które może odtwarzać wzorzec takiej realizacji wzorcowej $\tilde{U}_{wk}$, którą uważa się za najbliższą $\tilde{U}_1$. Procedura kończy się, gdy na zaciskach wzorca występuje takie właśnie napięcie wzorcowe (np. $\tilde{U}_{wk}$ jest największym z napięć wzorcowych mniejszych od $\tilde{U}_1$). W tym samym czasie jednak na polu odczytowym wzorca eksponowana jest wartość U_{wk} należna napięciu $\tilde{U}_{wk}$. Wynik pomiaru odczytuje się więc z wzorca i przypisuje się go realizacji napięcia $\tilde{U}_1$.

Przykład 1.4: Pomiar wartości napięcia $\tilde{U}_1$ można też wykonać w sposób odmienny (zobacz rys. 1.5) od przedstawionego na rys. 1.4.



Rys. 1.5. Przykład innego niż na rys. 1.4 układu do pomiaru napięcia.

Opis układu:

Wzorzec może odtwarzać realizacje napięcia z następującego zbioru:

$$\tilde{\tilde{U}}_w = \left\{ \tilde{\Delta U}_w, 2 \cdot \tilde{\Delta U}_w, \ldots, n \cdot \tilde{\Delta U}_w \right. , \qquad (1.9)$$

gdzie: $\tilde{\Delta U}_w$ - ziarno wzorca - realizacja fizyczna, zaś symbol: $k \cdot \tilde{\Delta U}_w$ (k - liczba naturalna) oznacza k-krotność realizacji napięcia $\tilde{\Delta U}_w$ zdefiniowaną następująco:

$$1 \cdot \tilde{\Delta U}_w \doteq \tilde{\Delta U}_w , \qquad (1.10)$$

a przy $k = 2, 3, 4, \ldots$: $k \cdot \tilde{\Delta U}_w \doteq (k-1) \cdot \tilde{\Delta U}_w \oplus \tilde{\Delta U}_w$ [23].

Wartość należna realizacji największej: $n \cdot \widetilde{\Delta} U_w$ jest znana i wynosi $U_{w\,max}$.

Stan licznika L_1 jest zwiększany o jeden zawsze i tylko wtedy, gdy następuje podanie jakiegoś napięcia wzorcowego do porównania z napięciem $\widetilde{U}_1$. Detektor relacji porządku $\prec$ powoduje zwiększanie stanu licznika L_2 o jeden zawsze i tylko wtedy, gdy aktualnie podane do porównania z $\widetilde{U}_1$ napięcie wzorcowe jest od niego mniejsze, tzn. gdy:

$$\widetilde{U}_w^j \prec \widetilde{U}_1 .$$

Opis procedury komparacyjnej:

Do porównania z napięciem $\widetilde{U}_1$ podaje się kolejno wszystkie odtwarzane przez wzorzec realizacje (każdą po razie):

$$\widetilde{U}_w^1 \doteq \widetilde{\Delta U}_w , \quad \widetilde{U}_w^2 \doteq 2 \cdot \widetilde{\Delta} U_w , \quad \ldots , \quad \widetilde{U}_w^n \doteq n \cdot \widetilde{\Delta U}_w . \tag{1.11}$$

Po $L = n$ taktach procedura jest zakończona. W jej wyniku nie zostało co prawda znalezione napięcie $\widetilde{U}_{wk}$, które jest najlepszym (ze wszystkich napięć odtwarzanych przez wzorzec) reprezentantem realizacji $\widetilde{U}_1$, ale rezultaty poszczególnych porównań mogą być wykorzystane do uformowania wyniku pomiaru. Robi się to budując funkcję jednoznacznie odwzorowującą końcowe stany liczników L_1 i L_2 w zbiór liczb:

$$\frac{L_2}{L_1} \cdot U_{w\,max} , \tag{1.12}$$

przy czym symbole L_1 i L_2 oznaczają we wzorze (1.12) stany koń-

cowe odpowiednich liczników.

Uwaga: liczniki będące układami fizycznymi oraz ich stany, przyjęto w tej pracy oznaczać jednakowo. Kontekst wskazuje na ogół, o które ze znaczeń chodzi w danym przypadku.

Liczbę uzyskaną wg (1.12) traktuje się jako wynik pomiaru. Można udowodnić, że liczba ta jest wartością należną (wg wcześniej przyjętej skali pomiarowej) realizacji wzorcowej $\tilde{U}_{wk}$ - największej z realizacji wzorcowych mniejszych od $\tilde{U}_1$.

W powyższych przykładach mają miejsce procedury komparacyjne realizujące odmienne cele. Z punktu widzenia realizowanego celu, procedury komparacji pomiarowej można podzielić na dwie grupy.

P r o c e d u r y k o m p a r a c j i p o m i a r o w e j t y p u p o s z u k i w a w c z e g o.

Przy organizacji tego typu procedur z reguły zakłada się, że zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest jednoelementowy:

$$\tilde{\tilde{U}} = \{\tilde{U}_1\} .$$

Oznacza to, że w kolejnych taktach procedury komparacyjnej do porównania z realizacjami wzorcowymi $\tilde{U}_w^j$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$ podawana jest ta sama realizacja napięcia $\tilde{U}_1$:

$$\tilde{\tilde{U}}_p = \{\tilde{U}_1, \tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_1\} .$$

C e l e m tego typu procedur jest z n a l e z i e n i e

w zbiorze $\approx{U}_w$ realizacji odtwarzanych przez wzorzec takiej realizacji $\sim{U}_{wk}$, która jest empirycznie najbliższa (lub dostatecznie bliska) realizacji mierzonej $\sim{U}_1$. Procedura kończy się w momencie, gdy wzorzec odtwarza taką właśnie realizację $\sim{U}_{wk}$ [24].

W przypadku, gdy zbiór $\approx{U}$ jest wieloelementowy i w kolejnych taktach procedury komparacyjnej porównaniu z realizacjami wzorcowymi podlegają różne realizacje napięcia, np.:

$$\approx{U}_p = \left\{ \sim{U}_1, \sim{U}_2, \ldots, \sim{U}_N \right\} ,$$

w zależności od sposobu rozwijania wzorca może mieć miejsce jeden z dwóch przypadków:

- Realizacja celu procedury (który można by określić jako "doregulowanie" wzorca do jednej realizacji mierzonej) nie jest możliwa, z powodu niejednakowości napięć podawanych do porównania z wzorcowymi w poszczególnych taktach procedury.
  Po zakończeniu procedury wzorzec odtwarza przypadkową realizację.
- Procedura kończy się w momencie, gdy wzorzec odtwarza realizację napięcia najbliższą (lub wystarczająco bliską) jednej z realizacji ze zbioru $\approx{U}_p$. Przykład tego typu procedury, typu poszukiwawczego będzie podany w kolejnym podrozdziale.

Ogólnie procedury komparacyjne typu poszukiwawczego wymagają posługiwania się wzorcem, który ma tę właściwość, że odtwarzanym przez niego realizacjom napięcia przypisane są w sposób fizyczny, wartości [25]. Jest to następstwem sposobu uzyskiwania wyniku liczbowego właściwego tego typu procedurom. Polega on na odczytaniu z wzorca liczby U_{wk} należnej realizacji $\sim{U}_{wk}$ uznanej

za najlepszą reprezentantkę realizacji mierzonej $\tilde{U}_1$ i na myślowym przeniesieniu tej wartości na napięcie $\tilde{U}_1$ (bezpośrednie przeniesienie wartości). Wzorce, które mają omawianą tu właściwość mogą odtwarzać co najwyżej skończoną liczbę realizacji. Są więc zawsze ziarniste.

P r o c e d u r y k o m p a r a c j i p o m i a r o w e j t y p u p r z e g l ą d o w e g o .

Wykorzystuje się tu wzorzec mogący odtwarzać pewien zbiór realizacji wzorcowych. Zbiór ten nie musi być skończony, ani przeliczalny. Posiada on jednak z założenia pewne charakterystyczne właściwości.

C e l e m tego typu procedur jest p r z e j r z e n i e zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ realizacji wzorcowych pod względem spełniania przez jego elementy relacji porządku empirycznego z realizacjami ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ ($\tilde{\tilde{U}}_p$ - zbiór napięć porównywanych z wzorcowymi). Wyniki wszystkich wykonanych porównań są pamiętane. Niekiedy polega to jedynie na liczeniu ilości tych porównań, w których realizacja wzorcowa okazała się mniejsza niż porównywana z nią realizacja ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$, kiedy indziej zapamiętuje się nie tylko wynik porównania, ale także wartość U_w^j realizacji wzorcowej, z którą taki wynik otrzymano (porównaj (1.8)) [26].

Formowanie wyniku pomiaru na podstawie rezultatów porównań odbywa się różnie w różnych procedurach tego typu. Zawsze jednak wynik pomiaru uzyskuje się w sposób pośredni - budując pewną funkcję, która rezultatom wykonanych porównań przypisuje w sposób jednoznaczny liczbę. Osobną sprawą jest dowiedzenie, że

liczba tak przypisana zbiorowi $\tilde{\tilde{U}}$ realizacji mierzonych jest poszukiwaną wartością charakterystyczną $\gamma(\tilde{\tilde{U}})$ należną mu wg wcześniej przyjętej skali pomiarowej S_U.

b) Podziały według sposobu regulacji wzorca

Rozważa się tutaj te właściwości wzorca, które są związane z faktem podawania do porównania z napięciami ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ pewnej sekwencji napięć wzorcowych. Kryteria podziałów związane z zadeklarowaną wyżej cechą wzorca zostaną przedstawione w postaci pytań:

Kryterium I: Czy można a priori przewidzieć sekwencję napięć wzorcowych $\tilde{U}_w^j$ w kolejnych taktach procedury $(j = 1, 2, \ldots, L)$, tzn. zbiór $\tilde{\tilde{U}}_{wp}$, w przypadku gdy realizacje $\tilde{U}^j$ porównywane z wzorcowymi, tzn. zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$, są znane?

TAK	NIE
↓	↓
PROCEDURY DETERMINISTYCZNE	PROCEDURY STOCHASTYCZNE (LOSOWE)

Procedury stochastyczne można dzielić dalej np. wg:

- tego czy rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych jest typu ciągłego czy dyskretnego,
- postaci funkcyjnych tego rozkładu prawdopodobieństwa,

- faktu, czy rozkład prawdopodobieństwa zmienia się w trakcie trwania procedury komparacyjnej (rozkłady modyfikowane) czy nie.

Podział procedur komparacyjnych na deterministyczne i losowe wydaje się dość zasadniczy. Ma on jednak tę wadę, że jest jeszcze bardzo ogólny. Oznacza to, że do każdej generowanej przez niego kategorii procedur komparacyjnych należą komparacje o silnie zróżnicowanych właściwościach. Dlatego też warto wprowadzić kolejne podziały:

Kryterium II: Czy napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^{j+1}$ w (j+1)-szym takcie komparacji zależy od napięcia wzorcowego $\tilde{U}_w^j$ w takcie j-tym (lub wcześniejszych) lub od wyników porównania $\tilde{U}_w^j$ z napięciem $\tilde{U}^j$ (ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$) w takcie j-tym (lub poprzednich)?

TAK	NIE
PROCEDURY KOMPARACYJNE Z REGULACJĄ ZALEŻNĄ Np. - dekadowe rozwijanie wzorca, a w ramach dekady wg sekwencji 5-2-2-1 lub podobnych - losowanie bez zwracania	PROCEDURY KOMPARACYJNE Z REGULACJĄ NIEZALEŻNĄ Np. - losowanie ze zwracaniem

Procedury komparacyjne z regulacją zależną podzielmy dalej według sposobu tego uzależnienia.

PROCEDURY KOMPARACYJNE Z REGULACJĄ ZALEŻNĄ

Czy napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^{j+1}$ w takcie (j+1)-szym zależy od tego jakie napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ podano do porównania w takcie j-tym (i/lub wcześniejszych)?

TAK	NIE

PROCEDURY KOMPARACYJNE UWARUNKOWANE WYNIKIEM REGULACJI

Np. - zwiększanie realizacji wzorcowej w kolejnych taktach o $\Delta\tilde{U}_w$ (inkrementacja)
- losowanie bez zwracania

Czy napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^{j+1}$ w takcie (j+1)-szym zależy od wyniku (wyników) porównania napięcia wzorcowego $\tilde{U}_w^j$ z napięciem $\tilde{U}^j$ w takcie j-tym (i/lub wcześniejszych)?

TAK	NIE

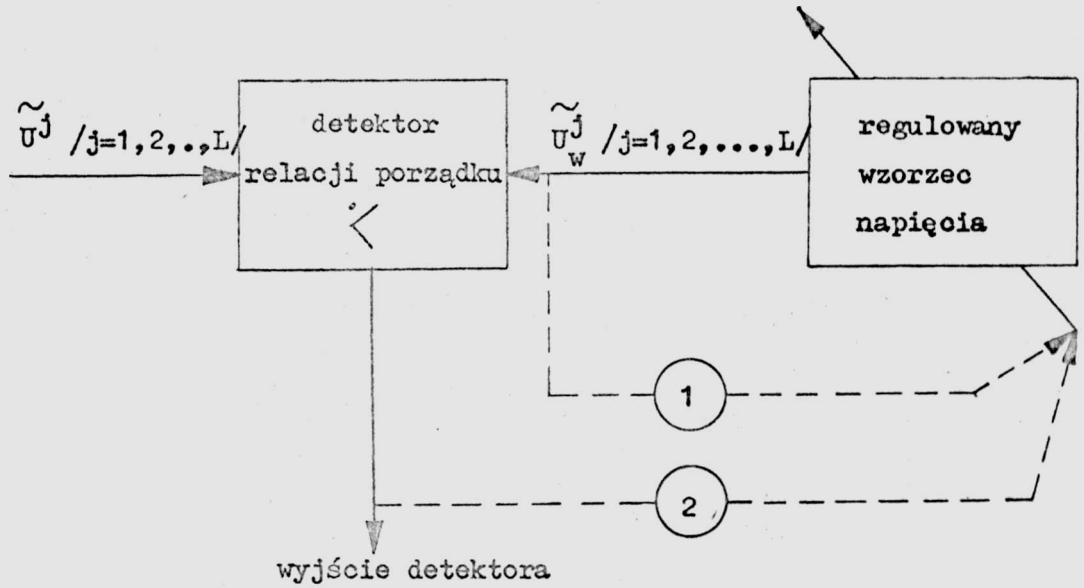
PROCEDURY KOMPARACYJNE UWARUNKOWANE WYNIKIEM DETEKCJI

Np. - rozwijanie wzorca dekadowo a w ramach dekady wg sekwencji 5-2-2-1 lub podobnych
- procedury algorytmiczne typu nadążnego

???

(inne formy uzależnień)

Wydaje się, że wymienione sposoby uzależnień regulacji wzorca mogą być uważane za skutek występowania swoistych sprzężeń między blokami układu realizującego procedurę komparacji pomiarowej:



(1) uwarunkowanie wynikiem regulacji

(2) uwarunkowanie wynikiem detekcji.

Rys. 1.6. Fragment schematu blokowego układu realizującego procedurę komparacji pomiarowej z naniesionymi możliwymi sprzężeniami wpływającymi na sekwencję generowanych napięć wzorcowych.

Nasuwa się pytanie, czy przedstawione podziały procedur komparacji pomiarowej spełniają wymaganie wyczerpalności stawiane zwykle klasyfikacjom [27]. W przypadku kryteriów przedstawionych w punkcie b) tego podrozdziału wyczerpalność jest zagwarantowana przez dychotomiczność dokonanych klasyfikacji.

W przypadku podziału przeprowadzonego w punkcie a) (komparacja typu poszukiwawczego i przeglądowego) nie można mieć pewności, że jest on wyczerpujący. Sformułowane tam typy procedur komparacyjnych są raczej sprawozdawczym opisem stanu rzeczy jaki autor zastał w metrologii (z punktu widzenia rozważanego w punkcie a) kryterium) niż próbę logicznych dociekań nt. form procedur jakich należy spodziewać się.

Zastosowane tutaj podziały procedur komparacji pomiarowej nie wyczerpują wszystkich możliwych podziałów. Nie omówiono np. klasyfikacji procedur komparacyjnych wg liczby wykorzystywanych detektorów relacji porządku $<$, a także - na pewno - wielu innych podziałów. Wynika to głównie z celu jakiemu miały służyć przedstawione w tym rozdziale klasyfikacje. Autorowi chodziło o:

- wprowadzenie pojęcia "stochastyczna komparacja pomiarowa" jako formy szczególnej komparacji pomiarowej,
- umożliwienie pokazania postaci w jakich stochastyczna komparacja pomiarowa może występować.

3. Stochastyczna komparacja pomiarowa - formy i przykłady. Komparacja typu "większy - mniejszy"

Zgodnie z podziałem dokonanym wg kryterium I w punkcie b) poprzedniego podrozdziału, przyjęto, że:

S t o c h a s t y c z n a [28] k o m p a r a c j a p o m i a r o w a jest to taka forma procedury komparacyjnej, w przypadku której nie można przewidzieć a priori - przed wykonaniem komparacji - sekwencji napięć wzorcowych $\tilde{U}_w^j$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$, które będą podane do porównania z napięciami $\tilde{U}^j$ $(U^j \in \tilde{\tilde{U}}_p)$, nawet wtedy, gdy te ostatnie są znane.

Przyjmując dwa kryteria podziałów procedur komparacji pomiarowej (kryterium celu przedstawione w punkcie a) i kryterium I przedstawione w punkcie b) poprzedniego podrozdziału) oraz zakładając ich logiczną niezależność uzyskuje się cztery podstawowe formy procedur komparacji pomiarowej:

- procedury determinstyczne typu poszukiwawczego,
- procedury deterministyczne typu przeglądowego,
- procedury stochastyczne typu poszukiwawczego,
- procedury stochastyczne typu przeglądowego.

Dwie z wymienionych wyżej form są typu deterministycznego. Ich przykłady zaprezentowano w podrozdziale I/2 (porównaj przykłady 1.3 i 1.4). Jak widać, z punktu widzenia kryterium celu procedury, stochastyczna komparacja pomiarowa może występować w dwóch podstawowych odmianach: poszukiwawczej oraz przeglądowej.

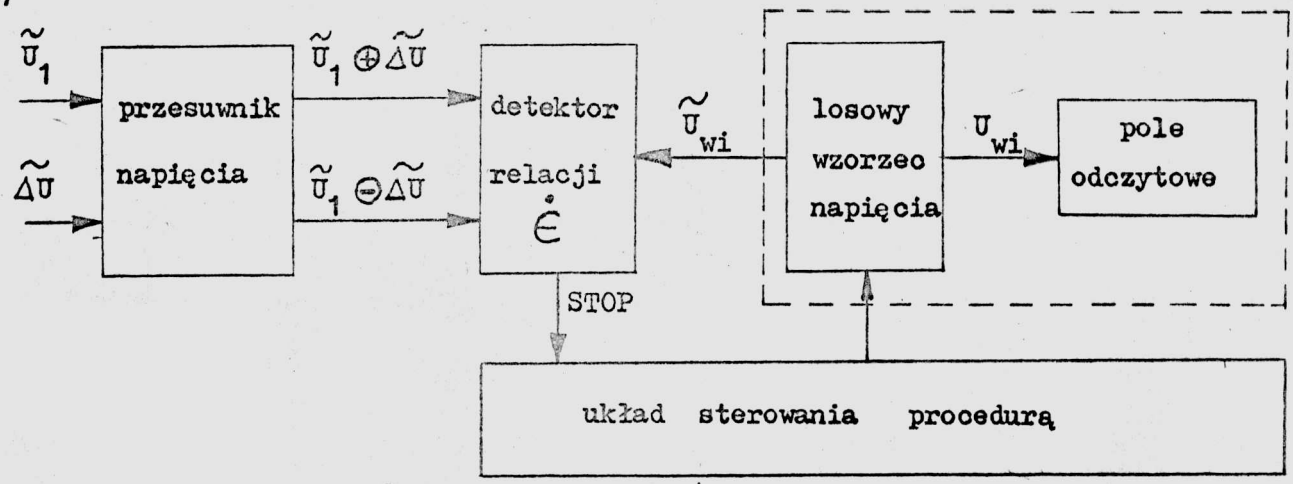
Niezależnie od tego, kryterium II podziału procedur komparacyjnych, zaprezentowane w punkcie b) poprzedniego podrozdziału, uświadamia możliwość występowania stochastycznej komparacji pomiarowej także w formach: nieuzależnionej i uzależnionej. Uzależnienie może być spowodowane wynikiem regulacji (np. losowanie warstwowe, losowanie bez zwracania) bądź wynikiem detekcji (np. modyfikowanie rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych w zależności od rezultatów poprzednich porównań).

Celowym wydaje się podanie przykładowych układów realizujących komparację stochastyczną w jej podstawowych odmianach: poszukiwawczej oraz przeglądowej.

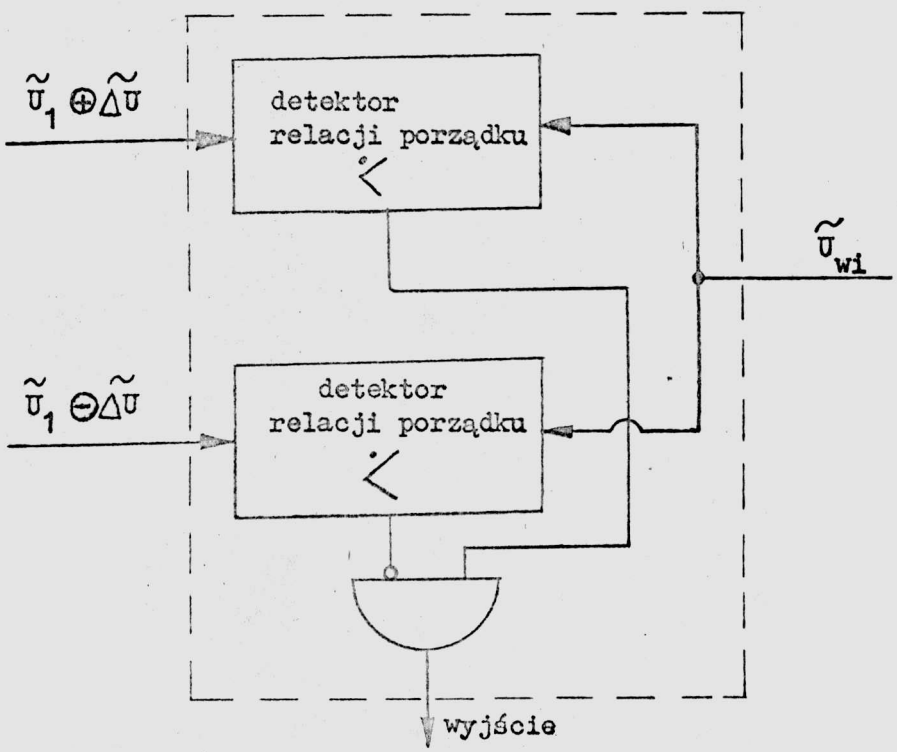
Przykład 1.5: Stochastyczna komparacja pomiarowa typu poszukiwawczego.

Pomiaru wartości napięcia można także dokonać w układzie jak na rys. 1.7.

a/



b/



Rys. 1.7. a) Układ realizujący stochastyczną komparację pomiarową typu poszukiwawczego (objaśnienia w tekście),
b) Struktura detektora relacji zawierania się w przedziale napięć: $\dot{\epsilon}$.

Opis układu:

Dla prostoty założono, że zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest jednoelementowy (założenie to nie zawsze jest potrzebne):

$$\tilde{\tilde{U}} = \{\tilde{U}_1\}.$$

Napięcie $\tilde{\Delta U}$ o znanej wartości ΔU określa dopuszczalny błąd pomiaru. Jak widać dopuszczalną niedokładność zadaje się tu w sposób nietypowy - w postaci realizacji fizycznej napięcia.

Przesuwnik napięcia dostarcza na swych wyjściach dwóch realizacji napięcia: $\tilde{U}_1 \oplus \tilde{\Delta U}$ oraz $\tilde{U}_1 \ominus \tilde{\Delta U}$ (ponieważ napięcie elektryczne jest interwałem potencjału, operacja $\ominus$ empirycznego odejmowania napięć jest sensowna [29]).

Ze względu na interpretację napięcia $\tilde{\Delta U}$, każda realizacja wzorcowa $\tilde{U}_{wk}$, która spełnia układ nierówności:

$$\tilde{U}_1 \ominus \tilde{\Delta U} \lessdot \tilde{U}_{wk} \lessdot \tilde{U}_1 \oplus \tilde{\Delta U} \qquad (1.13)$$

może być uważana za wystarczająco bliską napięciu mierzonemu $\tilde{U}_1$. Sprawdzenia faktu należenia do przedziału (1.13) dokonuje się za pomocą detektora relacji $\in$. Jest to układ na którego wyjściu pojawia się sygnał logiczny STOP, gdy aktualnie podane do porównania napięcie wzorcowe spełnia relacje (1.13). Detektor ten można zrealizować za pomocą dwóch detektorów relacji porządku $\lessdot$ i bramek logicznych (rys. 1.7b).

Losowy wzorzec napięcia ma tę właściwość, że ilekroć na jego zaciskach pojawi się napięcie wzorcowe $\tilde{U}_{wi}$, tylekroć wartość U_{wi} odpowiadająca temu napięciu jest eksponowana na

polu odczytowym. Wzorzec ten może więc odtwarzać skończoną liczbę realizacji napięcia; zbiór $\tilde{\tilde{U}}_w$ jest skończony. Założono, że są to realizacje równomiernie rozłożone w przedziale napięć: $[\tilde{0};\ \tilde{U}_{w\ max}]$.

O napięciu mierzonym $\tilde{U}_1$ założono, że:

$$\tilde{U}_1 \oplus \tilde{\Delta U} \lessdot \tilde{U}_{w\ max}$$

$$\tilde{U}_1 \ominus \tilde{\Delta U} \gtrdot \tilde{0} \quad ,$$

gdzie $\tilde{0}$ oraz $\tilde{U}_{w\ max}$ są, odpowiednio, najmniejszą i największą realizacją odtwarzaną przez wzorzec.

Zakłada się ponadto, że napięcia wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ (1 = 1, 2,..., L) podawane w kolejnych taktach procedury do porównania w detektorze relacji $\lessdot$, są losowane ze zwracaniem ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ realizacji odtwarzanych przez wzorzec.

Przebieg procedury:

W każdym j-tym takcie procedury (j = 1, 2, ..., L) losuje się ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ jedno napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^j$. Następnie sprawdza się, czy mają miejsce relacje (1.13). Jeśli nie, to losuje się kolejne napięcie wzorcowe. Jeżeli zaś tak, wówczas napięcie to uważa się za wystarczająco bliskie napięciu mierzonemu $\tilde{U}_1$ - procedura zostaje zakończona. Liczbę wyświetlaną na polu odczytowym wzorca (będącą wartością napięcia wzorcowego, które spełnia nierówności (1.13)) przypisuje się realizacji $\tilde{U}_1$ przyjmując, że wynik pomiaru ma postać:

$$U_1 = U_{wk} \pm \Delta U \quad {}^{30}, \qquad (1.14)$$

gdzie: $\tilde{U}_{wk}$ - realizacja napięcia wzorcowego, która spełniła relacje (1.13), zaś U_{wk} - jej wartość.

Ponieważ kryterium zakończenia procedury jest tu znalezienie w zbiorze $\tilde{\tilde{U}}_w$ napięcia wzorcowego $\tilde{U}_{wk}$ spełniającego (1.13), a poszukiwań dokonuje się w sposób losowy, to liczba L taktów procedury, które trzeba wykonać jest zmienną losową. Jest ona pośrednią miarą czasu trwania komparacji. Można wykazać, że wartość oczekiwana E(L) i wariancja $D^2(L)$ tej zmiennej losowej wynoszą odpowiednio:

$$E(L) = \frac{1}{p} ; \tag{1.15}$$

zaś:

$$D^2(L) = \frac{1 - p}{p^2} , \tag{1.16}$$

gdzie: p - prawdopodobieństwo wylosowania w dowolnym takcie procedury napięcia wzorcowego spełniającego nierówności (1.13):

$$p \approx \frac{2 \cdot \Delta U}{U_{w\,max}} . \tag{1.17}$$

Przybliżenie we wzorze (1.17) jest tym lepsze im ziarno wzorca (jak stwierdzono wyżej, wzorzec musi tu być ziarnisty) jest mniejsze od napięcia $\tilde{\Delta U}$.

Stosując odpowiednie algorytmy modyfikowania, w kolejnych taktach komparacji, zbioru napięć $\tilde{\tilde{U}}_w$ odtwarzanych przez wzorzec, można uzyskać znaczne zmniejszenie wartości oczekiwanej E(L)

czasu trwania procedury.

Z opisu omawianej komparacji pomiarowej wynika, że jeżeli wspomnianych algorytmów nie stosuje się, to nie ma przeszkód, by napięcia $\tilde{U}^j$ porównywane z wzorcowymi były w każdym takcie procedury ($j = 1, 2, \ldots, L$) inne. Oznacza to, że zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych nie musi być jednoelementowy. Uzyskany wynik należy wtedy jednak traktować jako wartość należną napięciu $\tilde{U}^L$ porównywanemu z wzorcowym w ostatnim takcie przed zakończeniem procedury.

Przykład 1.6: Stochastyczna komparacja pomiarowa typu przeglądowego.

Można ją zrealizować np. w układzie przedstawionym na rys. 1.5 stosując losowy wzorzec napięcia o następujących właściwościach [31]:

- Może on odtwarzać wszystkie realizacje napięcia spełniające nierówności:

$$\tilde{0} \lesssim \tilde{U}_{wi} \lesssim \tilde{U}_{w\,max} \tag{1.18}$$

  Zbiór $\tilde{\tilde{U}}_w$ napięć odtwarzanych przez wzorzec jest więc nieprzeliczalny.
- Losowania napięć wzorcowych $\tilde{U}_w^j$ w kolejnych taktach pracy układu: $j = 1, 2, \ldots, L$, są niezależne (losowania ze zwracaniem), a wylosowanie dowolnej realizacji ze zbioru określonego za pomocą nierówności (1.18) jest równoprawdopodobne.
- Znana jest wartość $U_{w\,max}$ odpowiadająca największemu z napięć odtwarzanych przez wzorzec: $\tilde{U}_{w\,max}$.

Ponadto zakłada się, że układ sprawdzania relacji $\dot{<}$ jest idealnie czuły, bezhisterezowy, bezinercyjny i niepobierający energii.

Przyjęto także, iż zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ realizacji mierzonych jest jednoelementowy:

$$\tilde{\tilde{U}} = \{\tilde{U}_1\},$$

a napięcie mierzone spełnia układ nierówności empirycznych:

$$\tilde{0} \dot{\leqslant} \tilde{U}_1 \dot{\leqslant} \tilde{U}_{w\,max}.$$

We wszystkich taktach procedury do porównania z napięciami wzorcowymi jest podawana ta sama realizacja, tzn.:

$$\tilde{\tilde{U}}_p = \{\tilde{U}_1, \tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_1\}.$$

Przebieg procedury jest teraz następujący:

W kolejnych jej taktach: j = 1, 2, 3, ..., L następuje wylosowanie jednego napięcia wzorcowego $\tilde{U}_w^j$ i porównanie go z napięciem $\tilde{U}_1$. Stan licznika L_1 jest zwiększany o jeden przy każdym porównaniu. Stan licznika L_2 natomiast jest zwiększany o jeden wtedy, gdy w danym takcie spełniona jest zależność:

$$\tilde{U}_w^j \dot{<} \tilde{U}_1. \qquad (1.19)$$

Celem procedury jest wykonanie założonej liczby L opisanych porównań napięcia $\tilde{U}_1$ z napięciami wzorcowymi wylosowanymi ze zbio-

ru $\tilde{\tilde{U}}_w$ (1.18). Po jej zakończeniu zatem stan licznika: $L_1 = L$.

Należy zauważyć, że w przeciwieństwie do procedur typu poszukiwawczego, omawiana procedura nie kończy się znalezieniem w zbiorze realizacji wzorcowych $\tilde{U}_w$ tej, która jest najbliższa (lub wystarczająco bliska) realizacji $\tilde{U}_1$.

Liczba porównań, w których spełniona była zależność (1.19) pamiętana jest w liczniku L_2. Przyjmuje się, że wynikiem pomiaru jest liczba:

$$R = \frac{L_2}{L_1} \cdot U_{w\,max} \tag{1.20}$$

Analiza właściwości wyniku R wskazuje, że:

- jest on zmienną losową,
- jego wartość oczekiwana:

$$E(R) = U_1 , \tag{1.21}$$

Liczby R (1.20) można więc używać jako estymatora wartości należnej realizacji napięcia mierzonego $\tilde{U}_1$.

Zgodnie z rozważaniami zawartymi w podrozdziale I/1, wynikiem procedury komparacyjnej jest wektor $\mathbb{K}$ (1.8). W ogólności stanowi on zbiór wyników porównań k^j ($j = 1, 2, \ldots, L$) oraz wartości U_w^j napięć wzorcowych, z którymi porównania wykonano. W omawianym właśnie przykładzie komparacji, do formowania wyniku pomiaru wykorzystuje się tylko informacje o rezultatach k^j porównań w kolejnych taktach procedury ($j = 1, 2, \ldots, L$). Wartości U_w^j napięć wzorcowych - wyłączywszy wartość $U_{w\,max}$ - nie są w tym przypadku brane pod uwagę. Wynik komparacji ma tu

więc charakter zdegenerowany - składa się wyłącznie z informacji czy napięcie $\tilde{U}^j_w$ porównywane z napięciem $\tilde{U}^j$ (patrz rys. 1.3) było od niego większe czy mniejsze. Z tego też względu opisaną procedurę autor nazwał k o m p a r a c j ą t y p u "w i ę k s z y - m n i e j s z y".

Należy podkreślić, że stochastyczna komparacja pomiarowa typu przeglądowego wcale nie musi być realizowana w mutacji "większy-mniejszy" [26]. Pełna nazwa procedury zastosowanej w tym przykładzie brzmi zatem: s t o c h a s t y c z n a k o m p a r a c j a p o m i a r o w a t y p u p r z e g l ą d o w e g o w w e r s j i "w i ę k s z y - m n i e j s z y". W dalszej części tej pracy powyższa - długa nazwa będzie często skracana do postaci:

- stochastyczna komparacja przeglądowa typu "większy-mniejszy",
- komparacja stochastyczna typu "większy-mniejszy",

czy wręcz do postaci:

- komparacja typu "większy-mniejszy".

4. Aktualny stan badań nad stochastyczną komparacją pomiarową. Określenie zakresu pracy i dalszych badań. Teza pracy.

Nasuwa się pytanie, czy komparacją pomiarową, tak zdefiniowaną jak to uczyniono w podrozdziale pierwszym tego rozdziału, w ogóle warto zajmować się? Wydaje się, że tak i to co najmniej z dwóch powodów:

- Jest ona elementem każdego procesu pomiarowego. To zaś co wspólne wszystkim pomiarom stanowi przedmiot zainteresowania ogółu metrologów.
- Zgodnie z przyjętą w tej pracy definicją, komparacja pomiarowa jest procesem złożonym, posiadającym własny cel i strukturę. Wynikają stąd np. następujące pytania: czy obecnie stosowane formy procedur komparacyjnych są jedynymi możliwymi; jakie wady i zalety mają poszczególne rodzaje procedur komparacji pomiarowej?

Zdaniem autora, badania komparacji pomiarowej powinny iść w d w ó c h k i e r u n k a c h:

1) U o g ó l n i a n i e, tj. uwzględnianie zdefiniowanego tu zjawiska komparacji pomiarowej w modelach całościowych procesu pomiarowego.
2) B a d a n i a s z c z e g ó ł o w e, czyli analiza właściwości różnych form tego zjawiska (w szczególności - form nowych)

Prace pierwszego typu podejmowano już kilkakrotnie [32]. Z reguły jednak problem komparacji podejmowany był niejako "przy okazji" opisu formalnego całego procesu pomiaru. Z tego też powodu komparację pomiarową traktowano na ogół w konwencji "wejście - wyjście" eksponując głównie fakt, że umożliwia ona uzyska-

nie wyniku pomiaru. Struktura wewnętrzna procedury komparacyjnej wykraczała już na ogół poza zakres zainteresowań autorów opisu. Z tego też powodu trudno wykorzystywać wspomniane prace w badaniach szczegółowych np. nad formami, w których komparacja pomiarowa może występować.

Badania typu drugiego - szczegółowe - były prowadzone na znacznie większą skalę. Na ogół jednak odbywało się to pod różnymi "szyldami". Dla przykładu: wiele badań właściwości deterministycznej komparacji pomiarowej typu poszukiwawczego wykonano w ramach prac nad komparacyjnymi przetwornikami analogowo-cyfrowymi (a/c) [33].

Niniejsze opracowanie należy - zdaniem autora - do grupy drugiej wymienionych kierunków badań komparacji pomiarowej.

Jeżeli przyjąć, że zjawisko komparacji pomiarowej jest w metrologii istotne, to kolejne pytanie, na które należałoby odpowiedzieć dotyczy potrzeby wyodrębnienia i zbadania właściwości stochastycznej komparacji pomiarowej.

Oceny p o t r z e b y w y o d r ę b n i e n i a pewnej podklasy zjawisk z klasy szerszej powinno chyba dokonywać się poprzez ocenę istotności kryterium na podstawie którego wyodrębnienie nastąpiło. W tym przypadku kryterium tym jest: determinizm czy losowość w sekwencji realizacji wzorcowych podawanych do porównania w poszczególnych krokach procedury komparacyjnej. Wydaje się, że wprowadzenie elementu doświadczenia losowego do procedury rozwijania wzorca jest faktem istotnym z dwóch powodów:

- Prowadzi się szereg prac nad algorytmami komparacji pomiarowej typu deterministycznego, poszukiwawczego, które byłyby odporne

na zakłócenia [24]. Wskazuje to na ogólną potrzebę badania takich procedur komparacyjnych, w których realizacje podawane w kolejnych taktach procedury do porównania z wzorcowymi nie są jednakowe. Jest to istotne zwłaszcza wtedy, gdy napięcia porównywane z wzorcowymi są np. realizacjami chwilowymi procesu losowego.

Intuicyjnie rzecz biorąc należy przypuszczać, że pomiary wartości charakterystycznych w zbiorach napięć będących reprezentantami procesu losowego, za pomocą wzorca napięcia rozwijanego także w sposób losowy (a więc w pewnym sensie podobnego do zjawiska badanego) powinno dawać pozytywne rezultaty.

- Niektóre parametry komparacji pomiarowej, jak np.: charakter wyniku otrzymywanego za jej pomocą, czas oczekiwania na zakończenie procedury, wymagają wtedy (tj. w przypadku losowego rozwijania wzorca) nowej interpretacji - stają się one zmiennymi losowymi, nawet przy założeniu idealności wszystkich elementów wchodzących w skład układu realizującego procedurę.

P o t r z e b a z b a d a n i a w ł a ś c i w o ś c i stochastycznej komparacji pomiarowej ma, jak się wydaje, dwie przyczyny: poznawczą i zastosowaniową.

Przyczyna poznawcza polega na tym, że każde nowo wyodrębnione i ściśle zdefiniowane zjawisko metrologiczne (w tym przypadku: stochastyczna komparacja pomiarowa) powinno być systematycznie zbadane po to, by możliwa była odpowiedź na pytanie: jakie właściwości ma ono w różnych warunkach. Jedynym przeciwwskazaniem do badań jakiegoś zjawiska metrologicznego może być fakt wystarczającego jego zbadania przez innych. Wydaje się,

że w przypadku stochastycznej komparacji pomiarowej sytuacja taka nie ma miejsca.

Z przyczyną poznawczą potrzeby zbadania stochastycznej komparacji pomiarowej wiąże się przyczyna zastosowaniowa. Znajomość właściwości tego typu komparacji jest warunkiem określenia zakresu jej zastosowań. Zwykle jest bowiem tak, że dopiero świadomość zalet jakiejś metody podpowiada sytuacje, w których mogą one być najpełniej wykorzystane, zaś świadomość wad - wyklucza pewne zastosowania.

W swej dalszej części praca ta dotyczy pewnej formy szczególnej stochastycznej komparacji pomiarowej: stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy". Przedstawiono ją w poprzednim podrozdziale (przykład 1.6). Wybór ten był podyktowany następującymi przesłankami:

a) Sposób postępowania upodabnia tę formę komparacji do metod Monte Carlo - znanych w dziedzinie obliczeń numerycznych. Istota tych metod polega na zstąpieniu rozwiązywanego zadania obliczeniowego (np. wyliczenie wartości całki oznaczonej) równoważnym mu (tzn. prowadzącym do identycznego wyniku) zadaniem z rachunku prawdopodobieństwa, a następnie na empirycznym oszacowaniu interesującego prawdopodobieństwa. Odmienność stochastycznej komparacji przeglądowej od metod Monte Carlo polega m.in. na tym, że w komparacji mamy do czynienia z eksperymentem fizycznym, wykonywanym na realizacjach pewnej wielkości, zaś w metodach Monte Carlo - z eksperymentem abstrakcyjnym, wykonywanym na liczbach. Mimo to jednak wydaje się, że zdolność do uśredniania, będąca ważną

właściwością metod Monte Carlo (obliczanie całek metodą Monte Carlo [35]) będzie także cechą rozważanej procedury komparacyjnej. Oznaczało by to, że rozważana procedura komparacyjna umożliwia pomiar parametrów charakterystycznych zbiorów napięć.

b) Układ realizujący procedurę stochastycznej komparacji pomiarowej typu "większy-mniejszy" (rys. 1.5) ma ponadto tę ewidentną zaletę, że charakteryzuje się dużą prostotą, zwłaszcza gdy chodzi o jego sterowanie.

c) Autor miał dostęp do działającego modelu realizującego ten typ procedury komparacyjnej.

Badania właściwości stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy" prowadziło już szereg osób, zarówno w kraju jak za granicą. Cechą charakterystyczną podejścia do tego zagadnienia w dotychczasowych opracowaniach było traktowanie stochastycznej komparacji przeglądowej jako dwóch przetworzeń: analogowo-stochastycznego i stochastyczno-cyfrowego [36].

Nazwa: przetwarzanie analogowo-stochastyczne wynika ze spostrzeżenia, że prawdopodobieństwo pojawienia się jedynki logicznej na wyjściu detektora relacji $<$ (rys. 1.5) jest, w przypadku spełnienia założeń wymienionych w przykładzie 1.6, proporcjonalne do wartości U_1 mierzonego napięcia. Nazwa: przetwarzanie stochastyczno-cyfrowe, z kolei, wiąże się z zamianą, np. dzięki zastosowaniu licznika L_2, sygnału z wyjścia detektora relacji $<$, na liczbę.

Podejście takie ma szereg zalet, z których główną jest to, że pozwala na spostrzeżenie iż, prawdopodobieństwo może być nośnikiem informacji podobnie jak amplituda sygnału, jego częstotliwość itd.

Z punktu widzenia metrologii jednak, analiza w konwencji dwóch przetworzeń ma także wady. Nie pozwala ona mienowicie na uchwycenie podobieństw między sposobem uzyskiwania wyniku liczbowego na drodze porównania z wzorcem przedstawionym w przykładzie 1.6, a innymi powszechnie znanymi sposobami porównywania z wzorcem.

Warto także zauważyć, że przetwarzanie analogowo-stochastyczne może być wykonywane także w układach asynchronicznych [37]. Wtedy jednak nie spełnia ono wymagań stawianych procedurze komparacji pomiarowej.

W literaturze poruszano następujące grupy zagadnień związanych ze stochastyczną komparacją przeglądową typu "większy--mniejszy":

1. Metody redukcji wariancji wyniku. Pomysły czerpie się tu na ogół ze sposobów zmniejszania wariancji wyniku stosowanych w metodach Monte Carlo [38]. Wyniki badań z tego zakresu zawierają m.in. prace I.Ja. Bilińskiego i A.K. Mikelsona [39]. Pewne rezultaty zaprezentowano też w pracy K. Hejna [40].
2. Możliwość wykorzystania przetwarzania analogowo-stochastycznego do realizacji różnych operacji arytmetycznych. Prace dotyczące tego zagadnienia mają swe źródło w badaniach nad komputerami stochastycznymi [41]. Aspekty metrologiczne problemu poruszają np. prace K. Hejna, K. Badźmirowskiego, R. Pilza [42].
3. Prezentację o g ó l n y c h właściwości metody oraz schematy urządzeń wykorzystujących przetwarzanie analogowo-stochastyczne zawierają np. prace W. Wehrmanna, G.Ja. Mirskiego, R. Pilza [43].

Poza tym analizowano także następujące problemy szczegółowe związane z komparacją stochastyczną typu "większy-mniejszy":

- Wpływ postaci funkcji kowariancji sygnału wychodzącego z detektora relacji porządku $<$ (rys. 1.5) na wariancję wyniku uzyskiwanego w układzie realizującym rozważaną procedurę komparacyjną [44].
- Możliwość użycia sygnału deterministycznego (trójkątnego) jako źródła napięć wzorcowych w układach realizujących przetwarzanie analogowo-stochastyczne. Sygnał trójkątny bowiem, choć deterministyczny, charakteryzuje się dobrą równomiernością funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa [45].

Generalnie, z literatury wynika, że stochastyczna komparacja przeglądowa typu "większy-mniejszy" charakteryzuje się następującymi zaletami:

- Umożliwia pomiar zarówno sygnałów deterministycznych jak i losowych [46] - sugeruje to jej uśredniające właściwości.
- Ewentualna przypadkowa zmiana binarnego rezultatu pojedynczego porównania (patrz (1.8)) ma niewielki wpływ na wynik pomiaru. Pozwala to na łatwą transmisję rezultatów komparacji na odległość [47].
- Może być stosowana w problemach wielowymiarowych [48]. Autor nie spotkał się jednak z uzasadnieniem tego stwierdzenia.

Akcentuje się natomiast, że stochastyczna komparacja przeglądowa ma, w porównaniu z innymi formami komparacji, gorsze właściwości dynamiczne. Podkreśla się konieczność wykonywania znacznej liczby porównań z wzorcem (rzędu 10^6 i więcej), w celu uzyskania niedokładności rzędu 10^{-3} [49].

Z problematyką pomiarów przy użyciu omawianej formy stochastycznej procedury komparacyjnej, pośrednio wiążą się również prace dotyczące:

- zasad pomiarów sygnałów losowych [50];
- sposobów wytwarzania napięć losowych oraz pseudolosowych ciągów zero-jedynkowych o zadanych właściwościach probabilistycznych. W tym ostatnim zakresie literatura jest szczególnie bogata (porównaj przypisy 3,4,5 w dodatku 8).

Autorowi nie udało się natomiast znaleźć w literaturze rozwiązań następujących zagadnień związanych ze stochastyczną komparacją przeglądową typu "większy-mniejszy":

1. Zgodnie z tym co powiedziano w podrozdziale pierwszym, przedmiotem komparacji pomiarowej, a zarazem punktem wyjścia analiz jej właściwości jest w tej pracy zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach procedury. Fakt ten oznacza pominięcie w rozważaniach zjawisk związanych z reprezentatywnością zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ dla sygnału mierzonego $\tilde{U}(t)$. Celowe wydaje się jednak zbadanie, jaki jest wpływ cech tego zbioru, zwłaszcza zaś jego liczności i wybranych parametrów charakterystycznych, na wynik pomiaru.
2. Jaki jest wpływ właściwości elementów użytych do realizacji omawianej procedury komparacyjnej (porównaj rys. 1.5) na jej parametry metrologiczne. W szczególności chodzi tu o znalezienie odpowiedzi na następujące pytania szczegółowe:
   a) Czy można, poprzez dobór odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych, dokonywać pomiaru wartości różnych parametrów charakterystycznych zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ napięć

mierzonych?

b) Jaki wpływ na wynik pomiaru mają odchylenia funkcji rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od jej założonej postaci?

c) Jaki jest wpływ histerezy układu porównania napięć na dokładność uzyskiwanego wyniku pomiaru?

3. Istotne byłoby także określenie głównych obszarów zastosowań komparacji stochastycznej typu "większy-mniejszy".

W związku z powyższymi zagadnieniami i pytaniami, na które autor nie znalazł odpowiedzi w literaturze przedmiotu, sformułowano tezę:

I s t n i e j e m o ż l i w o ś ć o k r e ś l e n i a n a d r o d z e t e o r e t y c z n e j w ł a ś c i w o ś c i m e t r o l o g i c z n y c h s t o c h a s t y c z n e j k o m p a r a c j i p r z e g l ą d o w e j t y p u "w i ę k s z y - m n i e j s z y" o r a z w s k a z a n i a n a t e j p o d s t a w i e o b s z a r ó w z a s t o s o w a ń, w k t ó r y c h t e n r o d z a j k o m p a r a c j i j e s t k o r z y s t n y .

Przypisy

[1] Por. np.: Bénézé G., Critique de la mesure. Actualités Sc. et Ind., 527, Paris 1937. Cytuję za:
Piwowarczyk T., Logiczna analiza deskrypcji pomiaru. Praca doktorska. Instytut Maszyn i Sterowania Układów Elektroenergetycznych AGH w Krakowie, Kraków 1977, s. 5 i 123.
Ajdukiewicz K., Logika pragmatyczna. PWN, Warszawa, 1975, s. 275.
Finkelstein L., Foundations of measurement [w:] Podstawowe problemy metrologii, Seminarium Szkoleniowe Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, Lubachów, 9-11 września 1976 (materiały powielane), s. 14.
Finkelstein L., Measurement and other forms of characterisation by symbols. [w:] Proceedings of the IMEKO Colloquium on "The Nature and Scope of Measurement Science". London, 14-16 April, 1975.
International Measurement Confederation. IMEKO Secretariat, Budapest, s. 6.1.1 .
Jellonek A., Zasady metrologii. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1981, s. 44.
Malikov M.F., Osnovy metrologii. Moskva 1949.
Cytuję za:
Piwowarczyk T., Logiczna analiza deskrypcji pomiaru. Praca doktorska. Instytut Maszyn i Sterowania Układów Elektroenergetycznych AGH w Krakowie, Kraków 1977.
Obalski J., Podstawy metrologii. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1966, s. 26.
Orzeszkowski Z., Podstawy metrologii elektrycznej. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1977, s. 5.

Encyklopedia Fizyki, PWN, Warszawa 1973, t. 2, s. 792,793.
Metrologia. Nazwy i określenia. Polska Norma PN-71/N-02050. Polski Komitet Normalizacyjny. Wyd. Normalizacyjne, Warszawa 1971, s. 7, punkt (6.1).

[2] Por. np.: Ajdukiewicz K., op. cit., s. 239, 256-258. Jaworski J., Matematyczne podstawy metrologii. WNT, Warszawa 1979, s. 14-19.

[3] Finkelstein L., Foundations of measurement. Op. cit., s. 14.

[4] Por. np.: Ajdukiewicz K., op. cit., s. 275.
Obalski J., op. cit., s. 26.
Badźmirowski K., Karkowska H., Karkowski Z., Cyfrowe systemy pomiarowe. WNT, Warszawa 1979, s. 12.
Piotrowski J., Podstawy metrologii. PWN, Warszawa 1977, s. 16.

[5] Obszerną dyskusję pojęcia "skala pomiarowa" zawiera m.in. praca:
Ellis B., Basic concepts of measurement. Cambridge at the University Press, 1966, rozdziały: II, III i IV.

[6] Wielkość $\tilde{X}$ może być w zasadzie dowolna. Pojęcie parametru charakterystycznego jest jednak najbardziej użyteczne wtedy, gdy jest to wielkość addytywna, tzn. wielkość, w przypadku której sprawdzalne są relacje empiryczne: równoważności $\hat{=}$, porządku $\hat{<}$ i addytywna $\hat{\oplus}$.

[7] Por. np.: Bendat J.S., Piersol A.G., Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. PWN, Warszawa 1976, s. 392.

[8] Por. np.: Beauchamp K.G., Przetwarzanie sygnałów metodami analogowymi i cyfrowymi. WNT, Warszawa 1978, s. 131.

[9] Tamże, s. 209.

[10] Por. np.: Jellonek A., op. cit., s. 44
Malikov M.F., op. cit.
Lebson S., Kaniewski J., Miernictwo elektryczne dla technikum. PWSZ, Warszawa 1971, s. 7.
Badźmirowski K., Karkowska H., Karkowski Z., op. cit., s. 12.
Jaworski J., Teoria narzędzi i systemów pomiarowych jako dział metrologii elektrycznej. [w:] Sympozjum Metrologia 80. Współczesne kierunki rozwoju metrologii, Warszawa, 13 - 15 listopada 1980 r., Referaty: Centrum Uczelniano-Przemysłowe Metrologii i Systemów Pomiarowych, Politechnika Warszawska, Warszawa 1981, s. 11.

[11] W badaniach modelowych procesu pomiarowego zwykle postuluje się empiryczną sprawdzalność relacji ostrej: $\prec$ (Por. np. Rymaszewski R., Modelowanie operycyjno-mnogościowe i jego zastosowanie do badań pomiarów stochastycznych. Prace Naukowe Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej. Seria: Monografie, z. 20/4, Wrocław 1982, s. 5). Ponieważ jednak zdania "$\tilde{X}_1 \prec \tilde{X}_2$" oraz "nieprawda, że $\tilde{X}_2 \prec \tilde{X}_1$" są logicznie równoważne, stosowanie symboli: $\prec$ oraz $\preceq$ jest również równoważne.

[12] Warto tu zwrócić uwagę na różnicę w potocznym i przyjętym w niniejszej pracy - terminologicznym (por. przypis 15) - użyciu słowa "porównanie". W przyjętej właśnie definicji porównania zakłada się jednorodność porównywanych cech. Według słownika języka polskiego natomiast, porównanie potoczne oznacza zestawienie ze sobą jakiś osób lub rzeczy i znajdowanie ich cech wspólnych lub cech różniących. Jak więc widać wymóg jednorodności porównywanych cech nie jest eksponowany w słowniku jako właściwość istotna porównań formułowanych w języku potocznym.

Por. np. Słownik języka polskiego. Red. M. Szymczak, PWN, Warszawa 1979, t. 2, s. 828.

[13] Współcześnie uznawane definicje wzorca przedstawiono m.in. w pozycjach:

Ajdukiewicz K., op. cit., s. 271.

Jellonek A. i in., Miernictwo elektryczne ogólne. Dla potrzeb telekomunikacji. Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1951, s. 29.

Jaworski J., Matematyczne podstawy metrologii. Op. cit., s. 197 - - 198.

Rymaszewski R., op. cit., s. 7.

Piotrowski J., op. cit., s. 75 - 76.

Metrologia. Nazwy i określenia. Polska Norma PN-71/N-02050. Op. cit., 6.1.1.

Encyklopedia Fizyki. PWN, Warszawa 1974, t. 3, s. 805.

Zagadnieniu definicji wzorca poświęcono też punkt III/1a) niniejszej rozprawy.

[14] Słowo "komparacja" ma swój źródłosłów w łacińskim czasowniku "comparo" lub rzeczowniku "comparatio". "Comparo" ma w języku polskim dwa znaczenia:

- porównać, czyli konfrontować w celu stwierdzania lub uwydatniania podobieństw bądź różnic,
- zrównać, czyli doprowadzić do stopnia równego czemuś.

Por. np.: Słownik łacińsko-polski. Red. M. Plezia, PWN, Warszawa 1959, t. 1, s. 620.

Webster's Third New International Dictionary. G. Bell and Sons Ltd., London 1961, s. 462.

Słownik języka polskiego. Red. W. Doroszewski, Wiedza Powszechna,

Warszawa 1961, t. 3, s. 876, 877.

Słownik języka polskiego. Red. M. Szymczak, PWN, Warszawa 1979, t. 2, s. 828.

Linde M.B.S., Słownik języka polskiego. Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Lwów 1855, t. 4, s. 357, 358.

[15] Termin - wyraz lub połączenie wyrazowe o ściśle ustalonym znaczeniu naukowym bądź technicznym. Por. np.:
Słownik poprawnej polszczyzny PWN. Red. W. Doroszewski, PWN, Warszawa 1981, s. 781.

[16] Piwowarczyk T., Podstawy teorii pomiaru w ujęciu mnogościowym. Zeszyty Naukowe AGH w Krakowie, nr 787, seria: Elektryfikacja i mechanizacja górnictwa i hutnictwa, z. 130, Kraków, 1981, s. 25.

Nadachowski M., Kulka Z., Analogowe układy scalone. WKiŁ, Warszawa 1979, rozdział 8.

Jaworski J., Modele matematyczne procedur i systemów pomiarowych. Praca habilitacyjna. Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Miernictwa Elektrycznego Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1976, s. 72 i następne, a także s. 124.

[17] Por. np.: Rymaszewski R., Model metrologiczny procesu pomiarowego [w:] Jellonek A. i in., Podstawy metrologii elektrycznej i elektronicznej. PWN, Warszawa 1980, s. 492 - 499.

Rymaszewski R., Deterministic and stochastic comparison in a view of the basic metrology (abstract) [w:] Proceedings of the IMEKO Colloquium on "The Nature and Scope of Measurement Science" London, 14 - 16 April 1975, International Measurement Confederation. IMEKO Secretariat, Budapest, s. 6.2.1.

Rymaszewski R., Modelowanie operacyjno-mnogościowe ..., op. cit., s. 7.

Rymaszewski R., Zagadnienie przyporządkowania modeli probabilistycznych obiektom mierzonym w aspekcie miernictwa stochastycznego [w:] Materiały z Sympozjum nt. Modele matematyczne systemów i procedur pomiarowych, Wisła - styczeń 1975. Komitet Metrologii i Danych dla Nauki i Techniki PAN, Gliwice 1974, s. 129.

Hasse L., Spiralski L., Szumy elementów i układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981, s. 332.

[18] Por. np.: Szczepaniak C., Komparatory elektryczne pomiarowe. WNT, Warszawa 1979, s. 9.

Orzeszkowski Z., op. cit., s. 167.

[19] Gotszalk R., Podstawy metrologii. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1978, s. 30.

[20] Por. np.: Jellonek A., Obserwacja, pomiar, eksperyment i ich granice [w:] Miernictwo elektroniczne w perspektywie rozwojowej. Praca zbiorowa pod kierunkiem Z. Karkowskiego. Seria: Problemy Elektroniki i Telekomunikacji nr 15, WKiŁ, Warszawa 1967, s. 8 - 39.

Jellonek A., Zasady metrologii. Op. cit., rozdział 5.

[21] Jellonek A., Zasady metrologii. Op. cit., s. 41 - 43.

[22] Tamże, s. 42.

[23] Por. np. Rymaszewski R., Modelowanie operacyjno - mnogościowe ....Op. cit., s. 22.

[24] Tę formę procedur komparacyjnych zauważył już Roman Rymaszewski. Jednakże w sformułowaniu swej definicji komparacji pomiarowej uważa on tę formę - jak się wydaje - za jedyną. Porównaj: Rymaszewski R., Model metrologiczny ....Op. cit., s. 493.

[25] Sposób realizacji powiązania emisji symbolu wartości z

realizacją wzorcową to sprawa oddzielna. Powiązanie to przybiera formy dość zróżnicowane: od zwykłego opisania odważników liczbami oznaczającymi ich masę do złożonego sprzężenia wyświetlacza segmentowego z wzorcem napięcia z pośrednictwem układów dekodujących i wzmacniających.

[26] Por. np.: Bilinskij I.Ja., Mikelson A.K., Modyfikacii modelej statističeskich ispytanij. [w:] Informacionnye i izmeritel'nye ustrojstva v radioelektronike, Zinatne, Riga 1974. Cytuję za: Gonera M., Zagadnienie pomiaru współczynnika zniekształceń nieliniowych metodą próbkowania sygnałów. Praca doktorska. Przemysłowy Instytut Elektroniki, Warszawa 1981.

[27] Por. np.: Kotarbiński T., Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk. Ossolineum, Wrocław-Warszawa-Kraków 1961, s. 356 - 359.

[28] Przymiotniki: "stochastyczny", "probabilistyczny", "losowy" będą w tej pracy używane co najmniej w trzech aspektach:

a) Mogą one oznaczać cechę wielkości polegającą na tym, że zmienność tej wielkości nie da się opisać deterministycznie, że ma charakter losowy. O taki sens chodzi np. w terminie: "miernictwo stochastyczne" rozumianym klasycznie jako miernictwo wielkości zmieniających się losowo. Por. np.: Jellonek A., Zasady metrologii. Op. cit., s. 106.

b) Znaczenie słowa "stochastyczny" w przedstawionej definicji pojęcia "stochastyczna komparacja pomiarowa" jest z metrologicznego punktu widzenia, inne niż w omówionym terminie "miernictwo stochastyczne". W tym ostatnim terminie szło bowiem o charakter wielkości mierzonej, w definicji komparacji stochastycznej natomiast - o istotę działania uwrządzenia

pomiarowego, o losowy sposób rozwijania wzorca.

c) W sformułowaniu: "charakterystyki probabilistyczne wielkości" słowo "probabilistyczne" oznacza rodzaj aparatu matematycznego użytego do charakteryzowania (modelowania) zmian pewnej wielkości fizycznej. Mowa tu o metodyce opisu, a nie o samej wielkości; w kategoriach rachunku prawdopodobieństwa można opisać także sygnał deterministyczny.

[29] Por. np.: Jaworski J., Matematyczne podstawy metrologii. Op. cit., s. 28.

[30] Warto tu zauważyć, że rozkład prawdopodobieństwa błędu nie jest w tym przypadku gaussowski, lecz równomierny.

[31] Por. Rymaszewski R., Zagadnienie przyporządkowania modeli ..., Op. cit., s. 130.

[32] Por. np. Rymaszewski R., Modelowanie operacyjno-mnogościowe ... Op. cit., s. 4 - 37.

Krajewski R.A., Zarys konstrukcji modelu pomiaru. Praca habilitacyjna. Instytut Elektrotechniki Morskiej i Przemysłowej Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1981.

Zaleski A., Pomiary ekstensywne i ich model geometryczny. Maszynopis niepublikowany [w:] Raport Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, Seria: SPR, nr 65, Wrocław 1981.

[33] Por. np.: Badźmirowski K., Problemy metrologiczne w przetwornikach analogowo-cyfrowych. "Prace Przemysłowego Instytutu Elektroniki", nr 4/1974.

Badźmirowski K., Sobczak S., Algorytmiczne metody korekcji wpływu zakłóceń impulsowych wpływających na dokładność kompensacyjnych przetworników A/C. [w:] Materiały z Sympozjum nt. Modele matematyczne systemów i procedur pomiarowych. Wisła -

styczeń 1975. Komitet Metrologii i Danych dla Nauki i Techniki PAN, Gliwice 1974, s. 157 - 167.

Libura A.L., Nadachowski M., Przetworniki analogowo-cyfrowe . WNT, Warszawa 1973.

Stachov A.P., Podchod k issledovaniju ACP s pozicij optimalnogo upravlenija. [w:] Analogo-cifrovye i cifro-analogovye pereobrazovateli. Institut Kibernetiki AN USSR, Kijev 1969.

[34] Por. np.: Badźmirowski K., Problemy metrologiczne ... Op. cit., s. 70 - 74.

Badźmirowski K., Sobczak S., Algorytmiczne metody ... Op. cit., s. 157 - 167.

[35] Por. np. Zieliński R., Metody Monte Carlo. WNT, Warszawa 1970, rozdział 2, a zwłaszcza s. 29 - 37.

[36] Wehrmann W., A new line of stochastic - ergodic measuring instruments. "NORMA Technical Information " VII/II, 1971, s. 3 - 12.

Wehrmann W., the U-FUNCTIONMETER - a stochastic multimeter for signal processing and data handling. "Technical Information", NORMA Messtechnik Gesellschaft m.b.H., TI 1/72 E, s. 11 - 18.

Wehrmann W., The PROBABILITYMETER, a Stochastic-Ergodic Measurement Analyzer. "Technical Information", NORMA Messtechnik Gesellschaft m.b.H., TI 1/72 E, s. 18 - 23.

Wehrmann W., Einführung in die stochastisch-ergodische Impulstechnik.

R. Oldenbourg Verlag, Wien - München 1973, rozdział 4.2.

Hejn K., Zastosowanie metody Monte Carlo do teorii pewnej klasy przetworników cyfrowo-analogowych. Praca doktorska. Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1975.

Badźmirowski K., Hejn K., Error analysis of an indirect DA converter using intermediate signal in the form of binary pseudo-random process.
[w:] Practical Measurement for Improving Efficiency. Acta IMEKO 1976 [...] , Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977, vol. 1, s. 193-20(
Badźmirowski K., Problemy metrologiczne ... . Op. cit., s. 75 - - 80.

[37] Wehrmann W., Einführung ... Op. cit., s. 99 ;
Wehrmann W., A new line ... Op. cit., s. 6.

[38] Por. np.: Zieliński R., op. cit., rozdział 2.

[39] Por. np.: Bilinskij I.Ja, Mikelson A.K., op. cit.

[40] Hejn K., op. cit.

[41] Por. np.: Gaines B.R., Stochastic computer thrives on noise. "Electronics", July 10, 1967, s. 72 - 79.
Halliwell J., Stochastic computers solve more problems faster. "Electronic Engineering", Octobet 1970, s. 63 - 65.
Gladkij V.S., Verojatnostny/e Wyčislitel´nye modeli. Nauka, Moskwa 1973.
Fedorov R.F., Jakovlev V.V., Dobris G.V., Stochastičeskie preobrazovateli informacii. Mašinostroenie, Leningrad 1978.

[42] Hejn K., op. cit., podrozdział 2.3.1.
Badźmirowski K., Hejn K., Wykorzystanie kodowania stochastycznego do arytmetycznej obróbki informacji. [w:] Materiały z Sympozjum nt.: Modele matematyczne systemów i procedur pomiarowych. Wisła - styczeń 1975. Komitet Metrologii i Danych dla Nauki i Techniki PAN, Gliwice 1974, s. 143 - 156.
Pilz R., Untersuchungen zur stochastisch-ergodischen Meßtechnik. "MSR: messen - steuern - regeln", Heft 1, Januar 1983, s. 24 - - 29.

[43] Wehrmann W., The U-FUNCTIONMETER ..., Op. cit.
Wehrmann W., The PROBABITYMETER ..., Op. cit.
Wehrmann W., A new line ..., Op. cit.
Pilz R., op. cit.
Mirskij G.Ja., Apparaturnoe opredelenie charakteristik slučajnych processov. Energija, Moskva 1972, s. 56 - 59.

[44] Hejn K., op. cit., podrozdział 2.4.2.

[45] Pilz R., op. cit.

[46] Por. np. Wehrmann W., A new line ... . Op. cit., s. 3.
Pilz R., op. cit., s. 24.

[47] Hejn K., op. cit., podrozdział 3.4.

[48] Tamże, s. 10 i 11, oraz podrozdział 3.4.

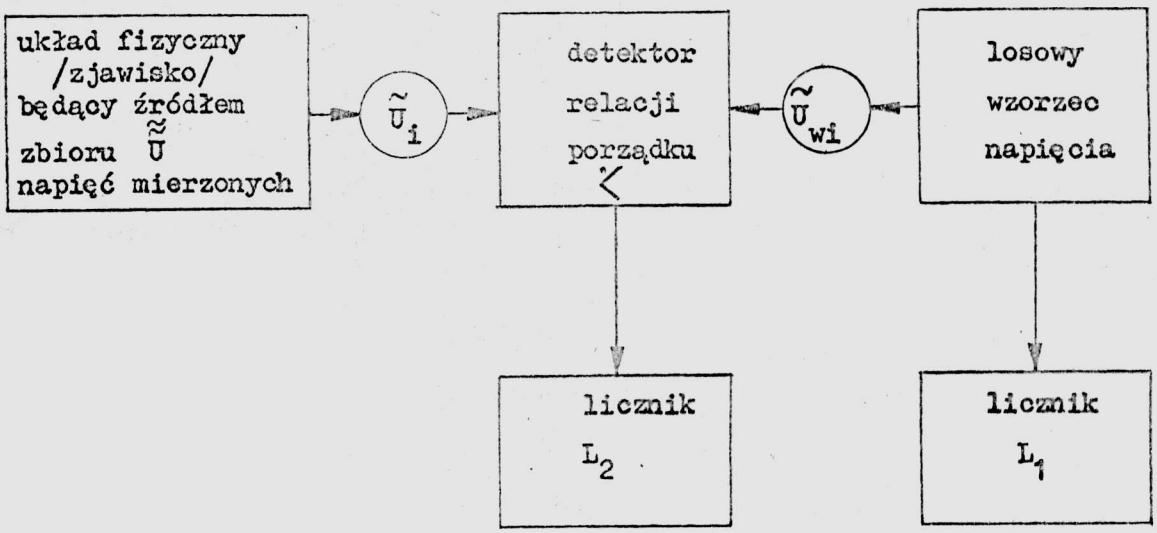
[49] Por. np. Gonera M., Zagadnienie pomiaru współczynnika zniekształceń nieliniowych metodą próbkowania sygnałów. Praca doktorska. Przemysłowy Instytut Elektroniki, Warszawa 1981.
Kałwak A., Badanie właściwości komparatora stochastycznego. Praca dyplomowa. Instytut Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1976, s. 56.

[50] Bendat J.S., Piersol A.G., op. cit.
Beauchamp K.G., op. cit.
Mirskij G.Ja., op. cit.

Rozdział II

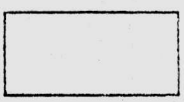
Podstawowe właściwości metrologiczne stochastycznej, przeglądowej komparacji pomiarowej typu "większy-mniejszy"

Przedmiotem rozważań w dalszej części tej pracy jest układ (rys. 2.1) realizujący stochastyczną komparację przeglądową typu "większy-mniejszy" omówioną w przykładzie 1.6 (podrozdział I/3).



Rys. 2.1. Układ realizujący procedurę stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy"


- realizacja fizyczna napięcia wyszczególniona wewnątrz symbolu kółka,


- układ fizyczny wyszczególniony wewnątrz symbolu prostokąta

Rysunek powyższy wyznacza zakres tematyczny kolejnych dwóch rozdziałów (II i III). Widać na nim, że wpływ na właściwości wyniku uzyskiwanego za pomocą rozważanej procedury komparacyjnej mogą mieć:

- właściwości zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych,
- właściwości elementów użytych do realizacji procedury, a w szczególności wzorca napięć oraz detektora relacji porządku empirycznego $\lessdot$.

Różne aspekty wpływu zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych na właściwości omawianej procedury komparacyjnej są przedmiotem niniejszego rozdziału. Wpływ właściwości losowego wzorca napięcia oraz detektora relacji $\lessdot$ omówiono w rozdziale III.
Wpływ cech liczników na wynik pomiaru nie będzie przedmiotem specjalnych analiz. O licznikach założono, że zliczają bezbłędnie. Jedyny aspekt ich *niedealności* - inercja - zostanie uwzględniony w rozdziale IV przy okazji rozważań nt. zastosowań komparacji stochastycznej typu "większy-mniejszy".

1. Właściwości procedury w przypadku, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest jednoelementowy

Celem większości analiz w tej pracy, a w szczególności celem kolejnych dwóch podrozdziałów, jest scharakteryzowanie stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy" za pomocą używanych w metrologii, typowych pojęć takich jak: precyzja, dokładność (błąd), czas oczekiwania na wynik. Pojęcia te składają się na m o d e l m e t r o l o g i c z n y procedury komparacyjnej. Omawiana forma komparacji pomiarowej ma jednak

charakter eksperymentu losowego. Z tego powodu punktem wyjścia do tworzenia jej modelu metrologicznego jest uprzedni opis w kategoriach rachunku prawdopodobieństwa - sformułowanie m o d e l u p r o b a b i l i s t y c z n e g o .

a) Model probabilistyczny

Podobnie jak w przykładzie 1.6, w rozdziale niniejszym zakłada się, że losowy wzorzec napięcia w układzie z rys. 2.1 charakteryzuje się następującymi właściwościami:

- Zbiór $\approx{U}_w$ napięć, które może on odtwarzać składa się z wszystkich realizacji $\sim{U}_{wi}$ spełniających układ nierówności:

$$\sim{0} \lesssim \sim{U}_{wi} \lesssim \sim{U}_{w\,max} \quad . \tag{2.1}$$

- Znana jest wartość $U_{w\,max}$ odpowiadająca największemu z napięć odtwarzanych przez wzorzec: $\sim{U}_{w\,max}$.
- Losowania napięć wzorcowych $\sim{U}_w^j$ w kolejnych taktach pracy układu : $j = 1, 2, \ldots, L$, są niezależne (losowania ze zwracaniem), a wylosowanie dowolnej realizacji ze zbioru $\approx{U}_w$ (2.1) jest równoprawdopodobne.

W całym rozdziale II, a także w podrozdziale III/1 zakłada się, że detektor relacji $\lesssim$ jest idealnie czuły, bezhisterezowy, bezinercyjny i niepobierający energii.

Zgodnie z tytułem niniejszego podrozdziału, założono obecnie, że zbiór $\approx{U}$ napięć mierzonych jest jednoelementowy:

$$\approx{U} = \{ \sim{U}_1 \} .$$

Przyjęto, że realizacja mierzona spełnia układ nierówności:

$$\tilde{0} \lessapprox \tilde{U}_1 \lessapprox \tilde{U}_{W\,max} . \qquad (2.2)$$

W każdym takcie procedury j = 1, 2, ..., L następuje wylosowanie jednego napięcia losowego $\tilde{U}_w^j$ ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ (2.1). Napięcie to jest porównywane z napięciem $\tilde{U}_1$. Zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ (porównaj rys. 1.3) ma zatem postać:

$$\tilde{\tilde{U}}_p = \{ \tilde{U}_1, \tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_1 \} . \qquad (2.3)$$

Stan licznika L_2 jest zwiększany o jeden tylko w tych taktach procedury, w których wylosowane napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ jest mniejsze od napięcia $\tilde{U}_1$:

$$\tilde{U}_w^j \lessapprox \tilde{U}_1 . \qquad (2.4)$$

Stan licznika L_1 jest zwiększany o jeden w każdym takcie komparacji.

Procedura kończy się po wykonaniu z góry założonej liczby L opisanych taktów.

Liczba porównań, w których spełniona była zależność (2.4) jest pamiętana w liczniku L_2. Wynik pomiaru R (R-ezultat) oblicza się wg wzoru:

$$R = \frac{L_2}{L_1} \cdot U_{w\,max} , \qquad (2.5)$$

gdzie: L_1, L_2 - stany końcowe odpowiednich liczników.

Określenie własności probabilistycznych wyniku R wymaga szczegółowej analizy całej procedury komparacyjnej, a zwłaszcza czynności losowania napięć wzorcowych.

Wynikiem L-krotnego losowania ze zwracaniem napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ jest zbiór $\tilde{\tilde{U}}_{wp}$ napięć wzorcowych porównywanych z napięciami ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ w kolejnych taktach procedury:

$$\tilde{\tilde{U}}_{wp} = \left\{ \tilde{U}_w^1, \tilde{U}_w^2, \ldots, \tilde{U}_w^L \right\} , \tag{2.6}$$

gdzie: $\tilde{U}_w^j \in \tilde{\tilde{U}}_w$, $j = 1, 2, \ldots, L$.

Zbiór powyższy, będący właściwie wektorem (z powodu obecności indeksów określających kolejność poszczególnych elementów) i mający charakter losowy, jest elementem L-krotnego iloczynu kartezjańskiego zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ przez siebie.

W wyniku porównań z napięciem $\tilde{U}_1$, zbiór wylosowanych napięć (2.6) jest dzielony na dwa rozłączne podzbiory:

$$\tilde{\tilde{U}}_{wp} = \tilde{\tilde{U}}'_{wp} \cup \tilde{\tilde{U}}''_{wp} , \tag{2.7}$$

gdzie: $\cup$ - symbol sumy zbiorów rozłącznych,

$$\tilde{\tilde{U}}'_{wp} = \left\{ \tilde{U}_w^j : \tilde{U}_w^j \in \tilde{\tilde{U}}_{wp} \text{ oraz } \tilde{U}_w^j \lesssim \tilde{U}_1 \right\} \tag{2.7a}$$

$$\tilde{\tilde{U}}''_{wp} = \left\{ \tilde{U}_w^j : \tilde{U}_w^j \in \tilde{\tilde{U}}_{wp} \text{ oraz } \tilde{U}_w^j \gtrsim \tilde{U}_1 \right\} . \tag{2.7b}$$

Stany liczników L_1 i L_2 po zakończeniu procedury wynoszą odpowiednio:

$$L_1 = L \quad \text{oraz} \quad L_2 = \operatorname{card} \tilde{\tilde{U}}_{wp}, \tag{2.8}$$

bowiem moc (oznaczenie: "card") zbioru skończonego równa jest jego liczności.

Jak wynika z opisu słownego przebiegu procedury, a także z jej jakościowego modelu formalnego, stan końcowy licznika L_2 jest zdarzeniem losowym. Aby określić wartość oczekiwaną $E(L_2)$ i wariancję $D^2(L_2)$ tego stanu końcowego, konieczne jest określenie pojęcia zdarzenia i prawdopodobieństwa w eksperymencie polegającym na losowaniu napięć wzorcowych ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$.

Zbiór $\tilde{\tilde{U}}_w$ jest z założenia gęsty [1], a więc nieskończony. Przyjęto tu postępowanie typowe w zastosowaniach rachunku prawdopodobieństwa:
Zdarzeniu polegającemu na tym, że wylosowano napięcie $\tilde{U}_{wi}$ przypisano liczbę. Jest to równoznaczne z określeniem zmiennej losowej [2]. Do określenia zmiennej losowej wygodnie jest użyć przyporządkowania jakim jest skala pomiarowa napięcia S_U [3]:

zdarzeniu polegającemu na tym, że ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ wylosowano napięcie $\tilde{U}_{wi}$ $\xrightarrow{\text{przypisuje się liczbę}}$ $U_{wi} = S_U(\tilde{U}_{wi})$. (2.9

Skala pomiarowa S_U napięcia elektrycznego (wielkość addytywna) jest jednoznacznie zdefiniowana przez nadanie wartości choćby jednej realizacji tej wielkości [4].

W rozważanym przypadku jednoznaczne określenie skali pomiarowej nastąpiło w wyniku przypisania wartości realizacji $\tilde{U}_{w\,max}$:

$$\widetilde{U}_{w\ max} \hat{=} U_{w\ max} .$$

Doświadczenie polegające na losowaniu napięć ze zbioru $\approx{U}_w$ można więc rozważać jako losowanie punktu z przedziału liczbowego $[\ 0,\ U_{w\ max}\ ]$ na prostej rzeczywistej. Zdarzeniami są obecnie elementy najmniejszego σ-ciała generowanego przez odcinki. Prawdopodobieństwo można określić posługując się pojęciem miary Lebesgue'a (długości odcinka).

Fakt, że w kolejnych taktach pracy układu wylosowanie każdej z wartości $U_{wi} \in [\ 0,\ U_{w\ max}\ ]$ jest tak samo prawdopodobne można obecnie wyrazić za pomocą stwierdzenia, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa napięć wzorcowych (ściślej - zmiennej losowej zdefiniowanej przy użyciu wzoru (2.9)) ma postać:

$$\gamma(U_w) = \begin{cases} \dfrac{1}{U_{w\ max}}, & U_w \in [\ 0,\ U_{w\ max}\ ] \\ 0, & \text{poza tym .} \end{cases} \qquad (2.10)$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami, sekwencję L porównań wykonywanych w trakcie procedury komparacyjnej można uważać za ciąg niezależnych prób Bernoulliego [5].

Rezultat porównania wykonanego w j-tym takcie ($j = 1, 2, \ldots, L$) nazwano sukcesem, gdy napięciu wzorcowemu wylosowanemu w tym takcie odpowiadała wartość spełniająca zależność:

$$U_w^j < U_1 .$$

Prawdopodobieństwo sukcesu w każdej próbie, zgodnie z (2.10), wynosi:

$$p = P(U_w^j < U_1) = \int_0^{U_1} \gamma(U_w)\, dU_w = \frac{U_1}{U_{w\,max}} . \qquad (2.11)$$

Fakt wylosowania w j-tym takcie procedury napięcia wzorcowego $\tilde{U}_w^j$ większego od realizacji mierzonej $\tilde{U}_1$ (co w języku zmiennych losowych oznacza wylosowanie liczby U_w^j większej od liczby U_1 należnej napięciu mierzonemu $\tilde{U}_1$) nazwano porażką. Jej prawdopodobieństwo:

$$q = P(U_w^j \geqslant U_1) = \frac{U_{w\,max} - U_1}{U_{w\,max}} = 1 - p . \qquad (2.12)$$

Licznik L_2 zlicza więc sukcesy w ciągu L niezależnych prób Bernoulliego, liczonych przez licznik L_1.

Przypisując stanowi końcowemu licznika L_2 liczbę równą ilości sukcesów zliczonych przez niego w trakcie trwania procedury, można ów stan końcowy traktować jako zmienną losową. Oznaczono ją tu identycznie jak licznik i jego stan końcowy - symbolem L_2. Wydaje się, że nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

Zmienna losowa L_2 ma rozkład dwumianowy [6]. Oznacza to, że prawdopodobieństwo zdarzenia, iż stan końcowy licznika L_2 wyniesie k, określa wzór:

$$P(L_2 = k) = \binom{L}{k} p^k q^{L-k} , \qquad (2.13)$$

gdzie: k = 0, 1, 2, ..., L

L - liczba porównań wykonanych w ramach komparacji,

p - prawdopodobieństwo sukcesu (2.11),

q - prawdopodobieństwo porażki (2.12).

Można obecnie przystąpić do analizy wzoru (2.5):

$$R = \frac{L_2}{L_1} \cdot U_{w\ max} \ .$$

Ze względu na losowy charakter stanu końcowego licznika L_2, wynik pomiaru R uzyskany wg powyższej zależności jest także z m i e n n ą l o s o w ą .

Czynniki "L_1" oraz "$U_{w\ max}$" we wzorze (2.5) nie mają charakteru losowego (stan końcowy licznika L_1 wynosi L). Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej R opisuje więc identyczna funkcja, jak w przypadku rozkładu zmiennej losowej L_2:

$$P\left(R = k \cdot \frac{U_{w\ max}}{L}\right) = \binom{L}{k} p^k\, q^{L-k} \ , \qquad (2.14)$$

k = 0, 1, 2, ..., L.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej R wynosi:

$$E(R) = \frac{U_{w\ max}}{L} \cdot E(L_2) \ , \qquad (2.15)$$

skąd po uwzględnieniu związku:

$$E(L_2) = L \cdot p \qquad (2.16)$$

oraz zależności (2.11) otrzymuje się:

$$E(R) = U_1 \cdot \tag{2.17}$$

Wariancję wyniku $D^2(R)$ można łatwo wyliczyć wykorzystując raz jeszcze fakt, że we wzorze (2.5) stan końcowy licznika L_1 : L a także $U_{w\ max}$ są wartościami stałymi:

$$D^2(R) = \frac{U^2_{w\ max}}{L^2} \cdot D^2(L_2) \tag{2.18}$$

Ponieważ:

$$D^2(L_2) = L \cdot p \cdot q^{\ 8}, \tag{2.19}$$

więc uwzględniając (2.11) i (2.12) otrzymuje się wzór:

$$D^2(R) = \frac{U_1(U_{w\ max} - U_1)}{L} \tag{2.20}$$

Z przeprowadzonej analizy wypływają następujące wnioski:

- Wynik R uzyskiwany dzięki opisanej procedurze komparacyjnej jest zmienną losową. Jest faktem istotnym, że losowość jest tu skutkiem specyficznego sposobu przeprowadzania procedury komparacyjnej, a nie konsekwencją nieidealności elementów użytych do jej wykonania, czy niestałości mierzonego napięcia (obliczenia powyższe zrobiono przy założeniu idealności wszystkich bloków występujących na rys. 2.1, a także przy założeniu stałości realizacji mierzonej).

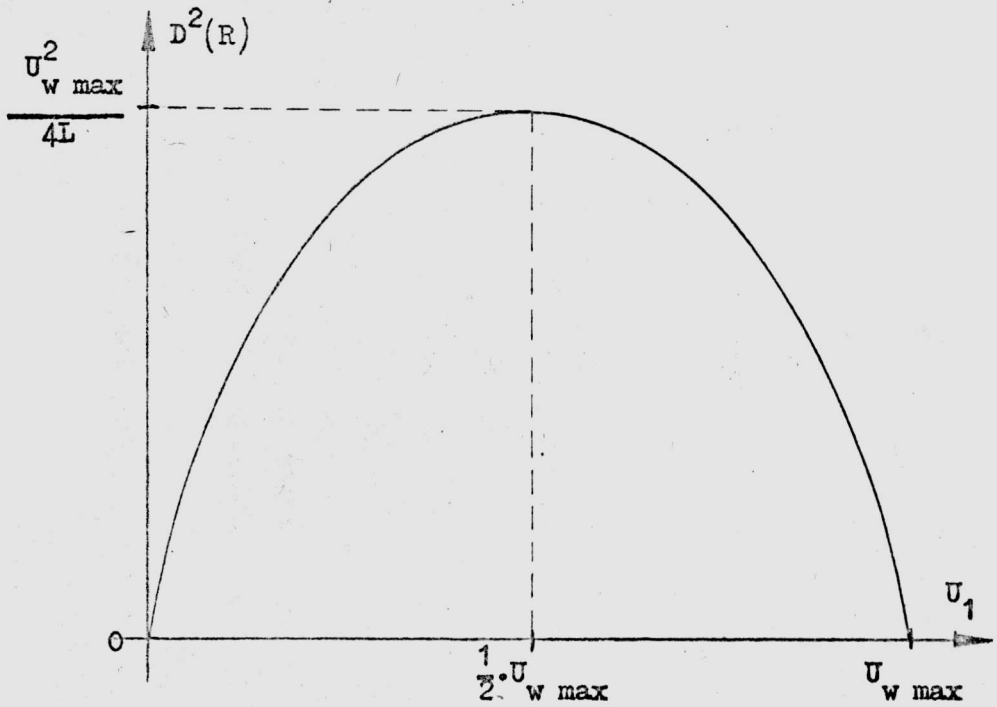
- Zmienna losowa R może przybierać wartości ze zbioru dysktetnego:

$$\frac{k}{L} \cdot U_{w\ max}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, L \tag{2.21}$$

z prawdopodobieństwami określonymi za pomocą wzoru (2.14). Jest to rozkład dwumianowy.

- Przy założeniu idealnej równomierności rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych (porównaj wzór (2.10)), wartość oczekiwana wyniku jest - zgodnie ze wzorem (2.17) - dokładnie taka sama, jak liczba należna realizacji $\tilde{U}_1$ wg skali pomiarowej S_U zdefiniowanej przez nadanie wartości realizacji $\tilde{U}_{w\ max}$. Oznacza to możliwość wykorzystywania liczby uzyskiwanej wg wzoru (2.5) do formowania wyniku pomiaru napięcia. Oznacza to tym samym możliwość wykorzystania opisanej procedury do celów pomiarowych [9].
- Ze wzoru (2.20) wynika, że przy założeniu niezależności losowań napięć wzorcowych w poszczególnych taktach procedury, wariancja $D^2(R)$ rezultatu pomiaru jest odwrotnie proporcjonalna do liczby L wykonanych porównań. Istnieje więc możliwość zmniejszania wariancji przez zwiększanie liczby porównań.

Na rysunku 2.2 przedstawiono wykres zależności: $D^2(R) = f(U_1)$ przy L = parametr. Jak widać, wykres jest odwróconą parabolą o maksimum występującym przy $U_1 = \frac{1}{2} U_{w\ max}$. Oznacza to, że przy stosowaniu analizowanej procedury komparacyjnej, pomiar napięć o wartościach leżących w pobliżu środka przedziału napięć odtwarzanych przez wzorzec, charakteryzuje się największą wariancją wyniku.



Rys. 2.2. Zależność wariancji $D^2(R)$ wyniku uzyskiwanego za pomocą układu z rys. 2.1, od wartości U_1 mierzonego napięcia.

b) Model metrologiczny

W poprzednim punkcie opisano najważniejsze właściwości stochastycznej procedury komparacyjnej typu przeglądowego, w wersji "większy-mniejszy". Opis ten sformułowano jednak w kategoriach rachunku prawdopodobieństwa. W metrologii przyjęto natomiast charakteryzować procedury i narzędzia pomiarowe za pomocą takich pojęć jak np.: precyzja, dokładność (błąd), czas oczekiwania na wynik itd. Charakteryzowanie urządzeń i procedur pomiarowych za pomocą standardowych parametrów ma dwie zalety:

- Parametry te określają podstawowe, użytkowe właściwości metrologiczne urządzenia pomiarowego.
- Współczesna technika pomiarowa wymaga wykonywania rozmaitych urządzeń pomiarowych, które często znacznie różnią się zasadą działania. Opisywanie ich wszystkich za pomocą jednolitych parametrów stwarza możliwość dokonywania porównań.

Wydaje się, że najważniejsze właściwości komparacji pomiarowej o rozważanej postaci można scharakteryzować w języku metrologii za pomocą wymienionych już pojęć: precyzji, błędu, czasu trwania procedury komparacyjnej.

Zgodnie z przyjętym założeniem, punktem wyjścia wszystkich analiz jest w tej pracy zbiór $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi lub zbiór $\approx{U}$ napięć mierzonych (porównaj podrozdział I/1). Założenie takie powoduje, że analiza jest wycinkowa - obejmuje tylko wpływ komparacji pomiarowej na wynik pomiaru, pomijając inne czynniki wpływające. Z tego powodu, wymienione wyżej pojęcia; precyzji, błędu, itd., odnoszone zwykle do całego procesu pomiarowego, będą w tej pracy dotyczyły wyłącznie procedury komparacji pomiarowej. Będzie więc mowa o: precyzji komparacji pomiarowej, błędzie komparacji, czasie trwania komparacji.

B ł ę d e m k o m p a r a c j i Δ_k nazywa się tu składową błędu pomiaru, której przyczyną są właściwości procedury komparacyjnej i/lub elementów ją realizujących.

Błąd komparacji zawiera kilka składników. Są one w tej pracy sukcesywnie omawiane.

Precyzja procedury komparacyjnej. Składowa losowa błędu komparacji

Precyzja urządzenia pomiarowego stanowi element cechy obserwowalnej pomiaru jaką jest powtarzalność jego wyników. Precyzję określa się mianowicie jako:
"(...) zdolność (narzędzia pomiarowego - G.S.) jednakowego wskazywania w razie kolejnego mierzenia tej samej wielkości, o niezmiennej wartości (...)" [10].

Uzyskiwanie wyników powtarzalnych jest skutkiem zaistnienia dwóch faktów: niezmienności realizacji mierzonej oraz zastosowania wystarczająco precyzyjnego narzędzia pomiarowego. Wynika stąd, że wnioskowanie o precyzji na podstawie powtarzalności wyników ma sens tylko wtedy, gdy pomiar dotyczy wielkości niezmieniającej się [11].

Ponieważ w pracy tej przyjęto, że przedmiotem komparacji pomiarowej jest zbiór $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi, a jej wynikiem - wektor $\mathbb{K}$ (1.8), modyfikując stosownie powyższą definicję precyzji urządzenia pomiarowego przyjmuje się, że:

Precyzją procedury komparacyjnej nazywać będzie się jej zdolność do dostarczania jednakowych wyników $\mathbb{K}$ (1.8) w razie wielokrotnego powtórzenia komparacji z użyciem tego samego zbioru $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi.

Rozważania zaprezentowane w punkcie a) tego podrozdziału upoważniają do wyciągania wniosków o precyzji analizowanej komparacji pomiarowej, ale tylko wtedy, gdy założy się dodatkowo, że tę samą realizację napięcia mierzonego $\sim{U}_1$ podaje się do porówna-

nia z napięciami wzorcowymi w kilku kolejnych procedurach komparacyjnych. Z wykonanych analiz wynika, że nawet wtedy wyniki komparacji $\mathbb{K}$ nie będą powtarzalne. Powoduje to, iż badaną procedurę należy zaliczyć do nieprecyzyjnych.

Istotne jest to, że nieprecyzyjność nie jest w tym przypadku konsekwencją niedoskonałości użytych elementów; analiza dotyczyła bowiem przypadku, gdy wszystkie bloki wyszczególnione na rys. 2.1 są idealne; nieprecyzyjność wynika z zasady działania układu.

Brak precyzji procedury stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy" nie wyklucza oczywiście możliwości wykorzystania liczb uzyskiwanych za jej pomocą do oceny wartości napięcia $\tilde{U}_1$ należnej mu wg skali S_U. Konieczna jest jednak ocena ilościowa wspomnianej nieprecyzyjności i uwzględnienie jej w obliczeniach prawdopodobnego błędu pomiaru.

Wielokrotne powtórzenie procedury komparacyjnej omawianego typu, przy niezmiennym napięciu $\tilde{U}_1$ prowadzi do uzyskania różnych liczb R (2.5). Jest tak dlatego, ponieważ wynik jest tu zmienną losową. Konkretne jej realizacje różnią się na ogół od wartości oczekiwanej E(R), równej U_1 (porównaj (2.17)). Zmienna losowa wyniku R charakteryzuje się dwumianowym rozkładem prawdopodobieństwa z parametrami:

- prawdopodobieństwo sukcesu: $p = \dfrac{U_1}{U_{w\,max}}$,

- liczba prób: L.

Ponieważ jednak liczba prób wykonywanych w trakcie pojedynczej procedury jest na ogół duża ($L \gg 30$), rozkład prawdopodobieństwa wyniku R można opisać, na mocy centralnego twierdzenia granicz-

nego, funkcją gęstości rozkładu normalnego, z wartością oczekiwaną i wariancją określonymi za pomocą wzorów (2.17) i (2.20).

Zmienna losowa R (2.5) ma zatem taki sam rozkład jaki zwykle przyjmuje się w przypadku wyników uzyskiwanych za pomocą różnych innych narzędzi pomiarowych. Sugeruje to możliwość zastosowania podobnej interpretacji. Skoro w rezultacie pojedynczego pomiaru uzyskano wynik R to, na poziomie ufności 0,997, liczba: $E(R) = U_1$ znajduje się w przedziale:

$$R \pm 3\sqrt{D^2(R)} \quad . \tag{2.22}$$

Interpretacja powyższa jest równoważna uznaniu liczby: $3\sqrt{D^2(R)}$ za wartość graniczną (na poziomie ufności 0,997) odchyleń pojedynczych wyników pomiaru od liczby U_1 należnej napięciu mierzonemu $\tilde{U}_1$ wg wcześniej przyjętej skali pomiarowej.

W praktyce, fakt braku precyzji urządzenia lub procedury pomiarowej charakteryzuje się zwykle za pomocą odpowiedniej składowej błędu pomiaru. W tym przypadku składowa ta zostanie nazwana s k ł a d o w ą l o s o w ą Δ_1 b ł ę d u k o m p a r a c j i:

$$\Delta_1 = 3\sqrt{D^2(R)} \tag{2.23}$$

Jak widać ze wzorów (2.23) i (2.20) błąd Δ_1 zależy od U_1. Choć charakter tej zmienności jest nieco inny niż miało to miejsce w przypadku zależności: $D^2(R) = f(U_1)$, to jednak, ze względu na właściwości pierwiastka kwadratowego, podstawowe cechy związku (2.23) są zupełnie podobne do tych, które ma

zależność (2.20), tzn.:

- $\Delta_1 = 0$, przy $U_1 = 0$ i $U_1 = U_{w\ max}$,
- błąd Δ_1 przybiera wartość maksymalną przy $U_1 = \frac{1}{2} \cdot U_{w\ max}$.

Wartość ta wynosi (porównaj wzory (2.20) i (2.23)):

$$\Delta_{1\ max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{U_{w\ max}}{\sqrt{L}} \tag{2.24}$$

Liczbę określoną za pomocą wzoru (2.24) można więc traktować jako w a r t o ś ć g r a n i c z n ą s k ł a d o w e j l o s o w e j b ł ę d u k o m p a r a c j i .

Interesujące jest także rozważenie wartości względnej δ_1 błędu losowego:

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{U_1} \tag{2.25}$$

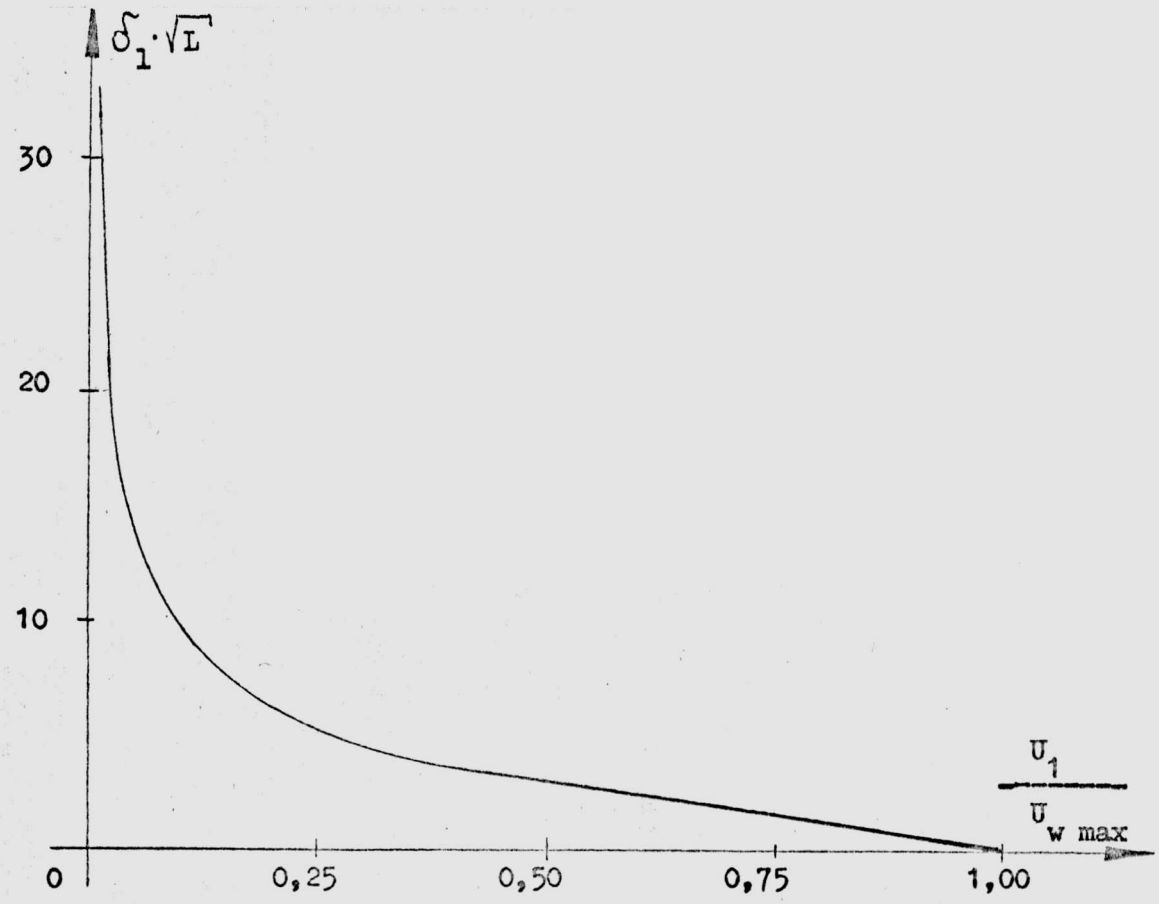
Uwzględniając we wzorze (2.25) zależności (2.20) i (2.23) otrzymuje się:

$$\delta_1 = \frac{3}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{U_{w\ max}}{U_1} - 1} \tag{2.26}$$

lub, przyjmując oznaczenie (2.11) i normując powyższy wzór:

$$\delta_1 \sqrt{L} = 3 \sqrt{\frac{1}{p} - 1} \quad . \tag{2.27}$$

Wykres zależności (2.27) przedstawiono na rys. 2.3.



Rys. 2.3. Zależność unormowanej wartości względnej błędu losowego: $\delta_1 \cdot \sqrt{L}$ od unormowanej wartości napięcia mierzonego: $p = \frac{U_1}{U_{w\,max}}$, w przypadku stosowania stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy"

Na podstawie rys. 2.2 można by sądzić, że przy małych wartościach U_1 pomiar przy użyciu rozważanej procedury komparacyjnej jest dokładny, bowiem wariancja - a więc składowa losowa błędu Δ_1 - maleje do zera. Okazuje się jednak, że malenie składowej losowej błędu Δ_1, wraz ze zmniejszaniem U_1 do zera, jest na tyle powolne, iż błąd względny δ_1 (2.25) rośnie do nieskończoności (rys. 2.3). Można więc powiedzieć, że składowa losowa błędu komparacji zachowuje się, w zakresie małych wartoś-

ci napięcia mierzonego U_1, podobnie jak błąd o charakterze addytywnym - błąd względny rośnie do nieskończoności. Z praktycznego punktu widzenia jest to oczywiście właściwość niekorzystna.

Jakość narzędzia pomiarowego, którego niedokładność ma charakter błędu addytywnego charakteryzuje się często dzieląc graniczny błąd bezwzględny przez wartość odpowiadającą końcowi zakresu pomiarowego (tak np. definiuje się klasę elektromechanicznych przyrządów wskazówkowych). Postępowanie powyższe ma uzasadnienie zwłaszcza wtedy, gdy zależność wartości błędu bezwzględnego od napięcia mierzonego U_1 nie jest znana, a jedynie wiadomo, że w całym zakresie pomiarowym błąd ten nie przekracza określonej wartości granicznej. (Cechę tę mają wspomniane przyrządy wskazówkowe, gdyż głównym źródłem ich niedokładności jest tarcie). Gdy idzie o stochastyczną komparację przeglądową typu "większy-mniejszy" sytuacja taka nie ma co prawda miejsca - zależność $\Delta_1 = f(U_1)$ określają wzory (2.23) i (2.20) - ale podzielenie wartości granicznej błędu losowego $\Delta_{1\,max}$ (2.24) przez $U_{w\,max}$ i traktowanie tak uzyskanej liczby $\delta_{1\,max}$ jako unormowanej wartości błędu granicznego także jest użyteczne:

$$\delta_{1\,max} = \frac{\Delta_{1\,max}}{U_{w\,max}} = \frac{3}{2\sqrt{L}} \quad . \tag{2.28}$$

Wzory (2.24) i (2.28) wskazują na jedną z ważniejszych wad stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy": składowa losowa błędu komparacji jest tu odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z liczby porównań wykonanych w trakcie procedury. Oznacza to, że zmniejszenie wartości błędu

$\delta_{1\,max}$ np. o jeden rząd wielkości, wymaga zwiększenia liczby porównań L o dwa rzędy [12].

Składowa systematyczna błędu komparacji

W przypadku stosowania omawianej procedury komparacyjnej, wynik pomiaru R (2.5) jest zmienną losową. Przez analogię do badań statystycznych, można traktować wynik R jako estymator wartości charakterystycznej należnej zbiorowi $\approx{U}$ napięć mierzonych wg skali pomiarowej S_U. Należy jednak liczyć się z tym, że wartość oczekiwana wyniku nie musi być równa poszukiwanej wartości charakterystycznej. Fakt taki będzie tu interpretowany jako występowanie składowej systematycznej Δ_s błędu komparacji.

W omawianym obecnie przypadku pomiaru wartości U_1 należnej pojedynczej realizacji napięcia $\sim{U}_1$, definicja błędu systematycznego procedury ma postać:

$$\Delta_s = E(R) - U_1 \quad . \tag{2.29}$$

Przy poczynionych założeniach, zwłaszcza tych dotyczących równomierności rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych, otrzymuje się, że (2.17):

$$\Delta_s = 0 \quad .$$

Jest to sytuacja bardzo korzystna. W języku statystycznej teorii

estymacji oznacza ona brak obciążenia wyniku R.

Czas trwania procedury komparacyjnej

Rozważana komparacja pomiarowa należy do grupy procedur typu przeglądowego. Celem procedur tego rodzaju jest (porównaj podrozdział I/2) przejrzenie zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ realizacji odtwarzanych przez wzorzec pod względem spełniania przez elementy tego zbioru relacji porządku empirycznego z realizacjami ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć porównywanych.

W omawianej tu wersji komparacji stochastycznej, powyższe sformułowanie celu procedury umożliwia jej zakończenie praktycznie w dowolnym takcie. Rozważania z punktu a) tego podrozdziału pouczają jednak, że od liczby L wykonanych porównań zależy wartość granicznego błędu losowego (zobacz zależność (2.24)). Jeśli więc przyjąć, że miarą czasu trwania procedury może być liczba L porównań wykonanych w jej ramach, to w przypadku gdy o całkowitym błędzie pomiaru decyduje składowa losowa Δ_1, mamy możliwość wymiany czasu trwania procedury za dokładność.

Na podstawie wzoru (2.28) można określić liczbę L_{min} niezbędnych porównań, które trzeba wykonać, aby procedura umożliwiała zmniejszenie unormowanej wartości granicznego błędu losowego $\delta_{1\,max}$ do żądanych granic. Wyniki obliczeń przy wybranych wartościach $\delta_{1\,max}$ zawarto w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Liczba L_{min} porównań koniecznych, by unormowany graniczny błąd losowy $\tilde{\delta}_{1\,max}$ komparacji stochastycznej typu "większy-mniejszy" nie przekraczał zadanej wartości

dopuszczalna wartość $\tilde{\delta}_{1\,max}$ (poziom ufności 0,997)	L_{min}
%	-
10	$2{,}25 \cdot 10^2$
1	$2{,}25 \cdot 10^4$
0,1	$2{,}25 \cdot 10^6$
0,01	$2{,}25 \cdot 10^8$

Jak wynika z tabeli, w celu uzyskania błędu losowego o wartości rzędu 0,1 %, konieczne jest wykonanie znacznej liczby $L_{min} = 2{,}25 \cdot 10^6$ porównań.

Dla zestawienia rozważmy liczbę niezbędnych porównań w przypadku komparacji deterministycznej, poszukiwawczej (porównaj przykład 1.3).

Stochastyczna komparacja przeglądowa typu "większy-mniejszy" jest procedurą nieuzależnioną wynikiem detekcji (zobacz podrozdział I/2). Aby więc porównanie dotyczyło procedur ekwiwalentnych, komparację deterministyczną, poszukiwawczą należy rozpatrzyć także w jej wersji nieuzależnionej wynikiem detekcji.

Rozważa się więc układ przedstawiony na rys. 1.4. Założono, że wzorzec może odtwarzać 2^{10} realizacji napięcia:

$$\tilde{\tilde{U}}_w = \left\{ \tilde{\Delta}U_w,\ 2 \cdot \tilde{\Delta}U_w,\ \ldots,\ 1024 \cdot \tilde{\Delta}U_w \right\}, \qquad (2.30)$$

Znaczenie symbolu: $i \cdot \tilde{\Delta}U_w$, $i = 1, 2, \ldots, 1024$ wyjaśniono za pomocą wzoru (1.10).

Ziarno wzorca: $\tilde{\Delta}U_w$ będzie tu ograniczało dokładność pomiaru.

Przyjęto, że realizacje wzorcowe podaje się do porównania z realizacją mierzoną $\tilde{U}_1$ po kolei, poczynając od najmniejszej (inkrementacja). Procedura kończy się, gdy znalezione zostaje takie napięcie wzorcowe $k \cdot \tilde{\Delta}U_w$ ($k = 1, 2, \ldots, 1024$), które jest największym z napięć wzorcowych mniejszych od $\tilde{U}_1$.

Cechą omawianej procedury poszukiwawczej jest zależność czasu jej trwania od wartości mierzonego napięcia $\tilde{U}_1$. W najgorszym jednak razie, gdy napięcie to jest równe największemu z napięć odtwarzanych przez wzorzec, komparacja skończy się po 1024 taktach.

Dokładność wyznaczenia wartości napięcia mierzonego jest tu nie lepsza niż ΔU_w. Względny błąd komparacji wynosi co najmniej 2^{-10}, tzn. ok. 0,1 %. Wynik uzyskano w tym przypadku po maksimum 1024 porównaniach. Natomiast stochastyczna komparacja przeglądowa typu "większy-mniejszy" wymagałaby wykonania co najmniej $2{,}25 \cdot 10^6$ porównań.

Komparacja deterministyczna, poszukiwawcza może się więc zakończyć w krótszym czasie niż procedura stochastyczna, przeglą-

dowa typu "większy-mniejszy". Ta ostatnia ma jednak, w stosunku do procedury deterministycznej poszukiwawczej, zaletę o której jest mowa w kolejnym podrozdziale.

2. Właściwości procedury w przypadku, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest wieloelementowy

a) Model probabilistyczny

W poprzednim rozdziale stwierdzono, że przedmiotem pomiaru może być nie tylko jedna realizacja napięcia, ale także cały ich zbiór:

$$\tilde{\tilde{U}} = \left\{ \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_N \right\}. \qquad (2.31)$$

Celem pomiaru jest wtedy ustalenie konkretnej wartości charakterystycznej należnej temu zbiorowi wg wcześniej przyjętej skali S_U.

Przedmiotem rozważań jest nadal procedura komparacji pomiarowej opisana w poprzednim podrozdziale i realizowana w układzie wg rys. 2.1 z tym jednak, że dodatkowo zakłada się tu, iż zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest wieloelementowy (2.31).

Przyjmuje się ponadto, że każde napięcie ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ będzie jednokrotnie porównywane z napięciem wzorcowym. Zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi jest więc identyczny ze zbiorem $\tilde{\tilde{U}}$. Oznacza to również, że liczba L porównań wykonanych w trakcie procedury jest równa liczności zbioru $\tilde{\tilde{U}}$: L = N.

Założenia dotyczące wzorca i pozostałych elementów układu z rys. 2.1 są takie same jak w poprzednim podrozdziale.

Procedura komparacyjna polega teraz na pobieraniu kolejnych napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ i na losowaniu w przypadku każdego z nich

po jednym napięciu wzorcowym, z którym ma ono być porównane.

Zbiór $\tilde{\tilde{U}}_{wp}$ (2.6) napięć wzorcowych wylosowanych w kolejnych taktach procedury, ma charakter losowy. W wyniku porównań napięć wzorcowych $\tilde{U}_w^j \in \tilde{\tilde{U}}_{wp}$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$ z napięciami mierzonymi $\tilde{U}^j \in \tilde{\tilde{U}}_p$ (zobacz rys. 1.3), zbiór $\tilde{\tilde{U}}_{wp}$ zostaje podzielony na dwa rozłączne podzbiory:

$$\tilde{\tilde{U}}_{wp} = \tilde{\tilde{U}}'_{wp} \dot{\cup} \tilde{\tilde{U}}''_{wp} , \tag{2,32}$$

gdzie: $\dot{\cup}$ - symbol sumy zbiorów rozłącznych,

$$\tilde{\tilde{U}}'_{wp} = \left\{ \tilde{U}_w^j : \tilde{U}_w^j \in \tilde{\tilde{U}}_{wp} \quad \text{oraz} \quad \tilde{U}_w^j \lessdot \tilde{U}^j \right\} , \tag{2.32 a}$$

$$\tilde{\tilde{U}}''_{wp} = \left\{ \tilde{U}_w^j : \tilde{U}_w^j \in \tilde{\tilde{U}}_{wp} \quad \text{oraz} \quad \tilde{U}_w^j \gtrdot \tilde{U}^j \right\} . \tag{2.32 b}$$

Stany liczników L_1 i L_2 po zakończeniu komparacji wynoszą więc odpowiednio:

$$L_1 = L , \quad L_2 = \operatorname{card} \tilde{\tilde{U}}'_{wp} .$$

Ze sposobu wykonania procedury komparacyjnej wynika, że stan końcowy licznika L_2 jest zmienną losową. Oznacza to, że wielokrotne powtórzenie komparacji nawet z tym samym zbiorem $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć podawanych w kolejnych taktach do porównania z wzorcowymi, prowadzi do uzyskania na ogół różnych stanów końcowych licznika L_2. Jeżeli więc jako wynik pomiaru R przyjąć liczbę wyznaczoną wg wzoru (2.5):

$$R = \frac{L_2}{L_1} \cdot U_{w\,max} \quad ,$$

to będzie on - podobnie jak w przypadku jednoelementowego zbioru $\approx$
U - z m i e n n ą l o s o w ą .

W dowolnym, j_tym takcie procedury komparacyjnej (j =1,2,... L) następujące wylosowanie jednej realizacji wzorcowej $\sim$ U_w^j z przedziału napięć:

$$\approx U_w = [\sim 0, \sim U_{w\,max}] \quad .$$

Zdarzenie polegające na tym, że realizacja napięcia $\sim$ U_w^j spełnia z realizacją $\sim$ U^j relację:

$$\sim U_w^j < \sim U^j$$

nazwano sukcesem.

Prawdopodobieństwa p^j sukcesów w kolejnych taktach procedury komparacyjnej, zgodnie z założeniem (2.10), określa wzór:

$$p^j = P(\sim U_w^j < \sim U^j) = \frac{U^j}{U_{w\,max}} \quad , \qquad (2.33)$$

j = 1, 2, ..., L.

Warto zwrócić uwagę na to, że mimo iż losowania poszczególnych napięć wzorcowych $\sim$ U_w^j (j = 1, 2, ..., L) są - zgodnie z założeniem - niezależne, nie mamy tu do czynienia z klasycznym schematem prób Bernoulliego, gdyż prawdopodobieństwa sukcesu

w kolejnych próbach nie są jednakowe [13]. Stan końcowy licznika L_2, który jest zmienną losową liczącą sukcesy w L taktach komparacji nie ma więc tutaj rozkładu dwumianowego.

Pomijając rozważania nt. analitycznego opisu tego rozkładu warto obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej L_2. Obliczenie jest proste jeżeli potraktuje się zmienną losową L_2 jako sumę L niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie dwupunktowym:

$$L_2 = X^1 + X^2 + \ldots + X^L , \tag{2.34}$$

gdzie: X^1, X^2, ..., X^L - zmienne losowe takie, że:

$$X^j = \begin{cases} 1, & \tilde{U}_w^j \prec \tilde{U}^j \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases} \tag{2.35}$$

$j = 1, 2, \ldots, L.$

Zgodnie z dotychczasowymi rozważaniami:

$$\begin{aligned} P(X^j = 1) &= p^j \\ P(X^j = 0) &= 1 - p^j , \quad j = 1, 2, \ldots, L. \end{aligned} \tag{2.36}$$

gdzie: p^j - prawdopodobieństwo sukcesu w j_tym takcie, określone za pomocą wzoru (2.33)

Na podstawie wzoru (2.34) otrzymuje się:

$$E(L_2) = \sum_{j=1}^{L} E(X^j) = \sum_{j=1}^{L} p^j , \tag{2.37}$$

oraz:

$$D^2(L_2) = \sum_{j=1}^{L} D^2(X^j) = \sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j) \ . \qquad (2.38)$$

Warto zauważyć, że z założenia o niezależności losowań korzysta się wyłącznie przy wyprowadzaniu wzoru (2.38). Wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych jest równa sumie wartości oczekiwanych tych zmiennych losowych zawsze, o ile tylko te ostatnie istnieją [14].

Na podstawie wzorów (2.37), (2.38) oraz (2.33) można już obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej wyniku pomiaru R (2.5):

$$E(R) = \frac{U_{w\ max}}{L} \cdot \sum_{j=1}^{L} p^j = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} U^j \qquad (2.39)$$

oraz:

$$D^2(R) = \frac{U_{w\ max}^2}{L^2} \cdot \sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j) = \frac{1}{L^2} \cdot \sum_{j=1}^{L} U^j(U_{w\ max} - U^j). \qquad (2.40)$$

Jeśli uwzględni się fakt, że w przypadku jednokrotnego porównywania każdego napięcia ze zbioru $\approx{U}$ z realizacją wzorcową zbiory $\approx{U}$ oraz $\approx{U}_p$ są identyczne, otrzymuje się:

$$E(R) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} U_i \qquad (2.39\ a)$$

oraz:

$$D^2(R) = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^{N} U_i\ (U_{w\ max} - U_i) \ . \qquad (2.40\ a)$$

Interpretacja wzoru (2.39 a) jest następująca: Wynik pomiaru R obliczany wg zależności (2.5) jest co prawda zmienną losową, ale wartość oczekiwana tej zmiennej losowej jest równa średniej arytmetycznej wartości należnych wg wcześniej przyjętej skali S_U realizacjom napięć mierzonych: $\{ \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_N \}$. Jeżeli więc przedmiotem zainteresowania pomiarowca byłaby taka wartość charakterystyczna zbioru napięć $\approx{U}$ jaką jest wartość średnia, to opisana procedura komparacyjna nadaje się do jej wyznaczania.

Godnym podkreślenia jest fakt, że pomiar wartości średniej w zbiorze $\approx{U}$ napięć mierzonych następuje tu b e z u p r z e d n i e g o o k r e ś l e n i a w a r t o ś c i p o s z c z e g ó l n y c h n a p i ę ć z t e g o z b i o r u (droga A'' na rys. 1.1).

b) Model metrologiczny

P r e c y z j a p r o c e d u r y k o m p a r a c y j n e j. S k ł a d o w a l o s o w a b ł ę d u k o m p a r a c j i

Jak stwierdzono w punkcie a) tego podrozdziału, wynik pomiaru R uzyskany na podstawie opisywanej komparacji pomiarowej jest zmienną losową. Jest to konsekwencją faktu, że wielokrotne powtórzenie tej procedury komparacyjnej z tym samym zbiorem $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi będzie prowadziło do uzyskiwania niejednakowych wektorów $\mathbb{K}$ (1.8) będących wynikami komparacji.

Zgodnie z przyjętą w poprzednim podrozdziale definicją

precyzji procedury komparacyjnej oznacza to, że - podobnie jak w przypadku, gdy zbiór $\approx{U}$ był jednoelementowy - także i obecnie badaną formę komparacji należy określić jako nieprecyzyjną. Aby więc możliwe było praktyczne wykorzystanie wyniku pomiaru R uzyskanego na podstawie pojedynczej procedury komparacyjnej, trzeba wprowadzić - podobnie jak poprzednio - pojęcie składowej losowej błędu komparacji.

Zgodnie z założeniem o niezależności losowań napięć wzorcowych $\sim U_w^j$ w kolejnych taktach procedury $j = 1, 2, \ldots, L$, zmienna losowa L_2 jest sumą (2.34) niezależnych zmiennych losowych X^j o dwupunktowych rozkładach prawdopodobieństwa (2.35), (2.36). Zmienna losowa wyniku pomiaru R jest powiązana ze zmienną losową L_2 za pośrednictwem równania (2.5). Ponieważ liczba porównań wykonywanych w ramach jednej procedury jest z reguły duża ($L \gg 30$), rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej wyniku R można opisać, na mocy centralnego twierdzenia granicznego [15], funkcją gęstości rozkładu normalnego z wartością oczekiwaną i wariancją opisanymi za pomocą wzorów (2.39) i (2.40). Przyjęto więc, że na poziomie ufności 0,997 liczba:

$$E(R) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} U_i$$

znajduje się w przedziale wartości:

$$R \pm 3\sqrt{D^2(R)}\,, \qquad (2.41)$$

gdzie: R oznacza rezultat pomiaru uzyskany na podstawie pojedynczej procedury komparacyjnej.

Podobnie jak poprzednio (porównaj wzór (2.23)) składową losową Δ_1 błędu komparacji definiuje się następująco:

$$\Delta_1 = 3\sqrt{D^2(R)} \quad . \tag{2.42}$$

Po uwzględnieniu wzoru (2.40a) w zależności (2.42) uzyskuje się:

$$\Delta_1 = 3 \cdot \frac{U_{w\,max}}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{U_i}{U_{w\,max}} \left(1 - \frac{U_i}{U_{w\,max}}\right)} \tag{2.43}$$

Na podstawie powyższej zależności można stwierdzić, że składowa losowa błędu komparacji jest dość złożoną funkcją wartości napięć mierzonych: U_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, a ściślej - ilorazów: $\frac{U_i}{U_{w\,max}}$.

Jeżeli skorzystać z założenia, że:

$$\tilde{0} \leqslant \tilde{U}_i \leqslant \tilde{U}_{w\,max}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.44}$$

to nietrudno oszacować graniczną wartość rozważanej składowej błędu (2.43).

Wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym w zależności (2.43) spełnia nierówność:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{U_i}{U_{w\,max}} \left(1 - \frac{U_i}{U_{w\,max}}\right) \leqslant \frac{N}{4} \quad . \tag{2.45}$$

Wartość graniczna składowej losowej błędu komparacji wynosi więc:

$$\Delta_{1\,max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{U_{w\,max}}{\sqrt{N}} \quad . \tag{2.46}$$

Wartość ta podzielona przez $U_{w\,max}$ daje unormowany, graniczny błąd losowy:

$$\delta_{1\,max} = \frac{3}{2\sqrt{N}} \quad . \tag{2.47}$$

Z ostatnich dwóch wzorów wynika, że wartość graniczna składowej losowej błędu komparacji zależy od liczności N zbioru $\approx{U}$. Jest to oczywiście konsekwencja wcześniejszego założenia, że każda z realizacji napięcia ze zbioru $\approx{U}$ podawana jest do porównania z realizacją wzorcową dokładnie jeden raz.

Ze względu na formalną identyczność zależności (2.47) i (2.28), tabelę 2.1 można wykorzystać do określania wymaganej liczności zbioru $\approx{U}$ napięć mierzonych, by błąd $\delta_{1\,max}$ był nie większy niż zadana wartość. Z tabeli wynika, że przy rozważanym tutaj sposobie porównywania (każda realizacja $\sim{U}_i$, i = 1,2,...,N ze zbioru $\approx{U}$ dokładnie jeden raz), w przypadku liczności zbioru $\approx{U}$: N < 225, składowa losowa błędu komparacji może mieć wartość większą niż 10 %. W sytuacji zbiorów o małej liczności N, błąd losowy Δ_1 jest więc szczególnie duży. Koniecznym wydaje się zatem wprowadzenie modyfikacji w opisanym sposobie wykonywania procedury komparacyjnej tak, aby możliwe było uniezależnienie wartości błędu $\Delta_{1\,max}$ od liczności N zbioru $\approx{U}$ napięć mierzonych. Problem ten rozważono w podrozdziale II/3.

Składowa systematyczna błędu koparacji

Jeżeli wynik pomiaru R potraktować jako estymator wartości średniej w zbiorze napięć $\approx{U}$ (wzór (2.39a) wskazuje, że do tego nadaje się on najlepiej), to składowa systematyczna błędu komparacji zdefiniowana jako:

$$\Delta_s = E(R) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i \qquad (2.48)$$

ma wartość zero.
Twierdzenie powyższe obowiązuje tylko w przypadku spełnienia założenia o równomierności rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych (2.10).

Czas trwania procedury komparacyjnej

Z założonego sposobu wykonywania porównań - każda realizacja ze zbioru $\approx{U}$ napięć mierzonych jest podawana do porównania z napięciem wzorcowym dokładnie jeden raz - wynika, że na procedurę komparacyjną musi się tu składać N taktów (N - liczność zbioru $\approx{U}$).

Czas trwania procedury jest zatem uzależniony nie tylko od właściwości układu, w którym jest ona realizowana, ale także od liczności zbioru $\approx{U}$, jak również - być może - od tego, czy kolejne napięcie $\sim{U_i}$ ze zbioru $\approx{U}$ będzie dostępne praktycznie natychmiast po zakończeniu porównania napięcia poprzedniego

$\tilde{U}_{i-1}$ z realizacją wzorcową, czy też układ realizujący procedurę komparacyjną będzie musiał czekać na nie.

A oto główne wyniki uzyskane w ostatnich dwóch podrozdziałach:

- Procedura stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy" realizowana w układzie wg rys. 2.1 i zgodnie z założeniami sformułowanymi na początku podrozdziału II/1, nadaje się do pomiaru wartości pojedynczych realizacji napięcia.
- Wynik pomiaru R jest wtedy zmienną losową o wartości oczekiwanej E(R) dokładnie równej liczbie należnej realizacji mierzonej wg wcześniej przyjętej skali pomiarowej (wzór (2.17)) i wariancji $D^2(R)$ określonej za pomocą wzoru (2.20).
- Nieprecyzyjność procedury może być uwzględniona w postaci składowej losowej błędu komparacji (2.23)(2.42).
- Procedura ma w ł a ś c i w o ś c i u ś r e d n i a j ą c e: Jeżeli zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest wieloelementowy (2.31), to porównanie każdego z jego napięć z jednym napięciem wzorcowym i obliczenie rezultatu wg wzoru (2.5) powoduje, że wynik - choć jest zmienną losową - ma wartość oczekiwaną równą średniej arytmetycznej liczb należnych realizacjom ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ wg wcześniej przyjętej skali.

3. Zależność właściwości metrologicznych procedury od cech zbioru $\approx{U}$ napięć mierzonych

a) Znaczenie liczności zbioru $\approx{U}$

Ze wzorów (2.39), (2.40) i (2.42) wynika, że:

- Wartość oczekiwana E(R) wyniku pomiaru jest równa, przy spełnieniu założeń wyszczególnionych na początku podrozdziału II/1, zwłaszcza zaś - założenia (2.10), wartości średniej $\nu_1(\approx{U}_p)$ należnej zbiorowi $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach procedury (2.39).
- Unormowana wartość graniczna składowej losowej błędu komparacji wynosi:

$$\delta_{1\,max} = \frac{\Delta_{1\,max}}{U_{w\,max}} \overset{(2.40),(2.42),(2.44)}{=} \ldots = \frac{3}{2\sqrt{L}} \qquad (2.49)$$

Jest ona zatem odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z liczby L wykonanych porównań.

W przypadku, gdy każde z napięć ze zbioru $\approx{U}$ porównuje się z napięciem wzorcowym jeden raz, zbiory napięć: mierzonych - $\approx{U}$ oraz podanych do porównania w kolejnych taktach procedury - $\approx{U}_p$ są identyczne, dzięki czemu wartość oczekiwana wyniku (2.39): $E(R) = \nu_1(\approx{U}_p)$ jest równa poszukiwanej wartości średniej $\nu_1(\approx{U})$ należnej zbiorowi $\approx{U}$ (por. wzór (2.39a)). Wtedy jednak liczba porównań L jest równa liczności N zbioru $\approx{U}$, co prowadzi do uzależnienia składowej losowej błędu komparacji od liczności N (2.46). Z metrologicznego punktu widzenia jest to właściwość

niekorzystna, gdyż wyklucza możliwość wykonania dokładnego pomiaru wartości średniej należnej mało licznym zbiorom napięć $\approx{U}$.

Wydaje się, że rozwiązania tego problemu należy szukać w takiej modyfikacji procedury komparacyjnej, w której każde z napięć $\sim{U}_i$ (i = 1, 2, ..., N) ze zbioru $\approx{U}$ jest porównywane z napięciem wzorcowym więcej niż jeden raz. Pojawia się jednak pytanie, czy wynik R uzyskany dzięki tak wykonanej procedurze komparacyjnej może być uważany za estymator jakiejś wartości charakterystycznej zbioru $\approx{U}$.

Intuicja podpowiada, że aby fakt taki miał miejsce k a ż d e z napięć $\sim{U}_i$ (i = 1, 2, ..., N) ze zbioru $\approx{U}$ powinno być porównane z wzorcowym t a k ą s a m ą l i c z b ę r a z y r, tzn.:

$$L = r \cdot N \tag{2.50}$$

Sekwencja napięć podanych do porównania z napięciami wzorcowymi będzie wtedy następująca:

$$\approx{U}_p = \Big\{ \underbrace{\sim{U}_1, \sim{U}_1, \ldots, \sim{U}_1}_{\text{r-razy}}, \underbrace{\sim{U}_2, \sim{U}_2, \ldots, \sim{U}_2}_{\text{r-razy}}, \ldots, \underbrace{\sim{U}_N, \sim{U}_N, \ldots, \sim{U}_N}_{\text{r-razy}} \Big\}, \tag{2.51}$$

gdzie: $\sim{U}_i \in \approx{U}$, i = 1, 2, ..., N.

Zmieniając odpowiednio kolejność wyrazów w powyższym ciągu, wzór (2.39) na wartość oczekiwaną wyniku można przekształcić w następujący sposób:

$$E(R) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} U^j = \frac{1}{r \cdot N}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} U_i + \ldots + \sum_{i=1}^{N} U_i\right)}_{r \text{ razy}} = \frac{r\sum_{i=1}^{N} U_i}{r \cdot N} =$$

$$= \gamma_1(\tilde{\tilde{U}}), \qquad (2.52)$$

gdzie: $\gamma_1(\tilde{\tilde{U}})$ - wartość średnia należna zbiorowi $\tilde{\tilde{U}}$ wg wcześniej przyjętej skali pomiarowej S_U.

Należy podkreślić, że w przypadku, gdyby każde z napięć $\tilde{U}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) było podawane do porównania z napięciem wzorcowym inną liczbę razy, przekształcenia (2.52) nie byłyby prawdziwe i wynik R nie mógłby być używany jako estymator wartości średniej $\gamma_1(\tilde{\tilde{U}})$ należnej zbiorowi napięć $\tilde{\tilde{U}}$.

Sposób wykonania omawianej procedury komparacyjnej mógłby być następujący: Na podstawie założenia o dopuszczalnej wartości błędu pomiaru określa się (wzór (2.49) i tabela 2.1) minimalną liczbę porównań L_{min}, która gwarantuje zmniejszenie unormowanego granicznego błędu losowego $\delta_{1\,max}$ do wartości mniejszej od wymaganej. Następnie, na podstawie znajomości liczności N zbioru $\tilde{\tilde{U}}$, można określić konieczną liczbę r porównań każdej z realizacji ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ z napięciem wzorcowym. Liczbę tę należy wybrać tak, by było:

$$r \cdot N \gg L_{min} . \qquad (2.53)$$

Postępowanie powyższe umożliwia całkowite uniezależnienie wartości składowej losowej błędu komparacji od liczności zbioru $\tilde{\tilde{U}}$:

przy ustalonej wartości maksymalnej błędu losowego zbiory $\approx{U}$ mniej liczne będą wymagały wykonania większej liczby r powtórzeń porównania każdej z realizacji $\sim{U}_i$ ze zbioru $\approx{U}$ z napięciami wzorcowymi.

b) Znaczenie wartości napięć w zbiorze $\approx{U}$

Jak widać ze wzoru (2.40) wariancja wyniku $D^2(R)$ zależy od wartości U^j napięć porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach ($j = 1, 2, \ldots, L$) procedury komparacyjnej. Wzór (2.40) można zapisać w postaci:

$$D^2(R) = \frac{U^2_{w\,max}}{L} \cdot A \,, \tag{2.54}$$

gdzie: A - współczynnik określający właściwości zbioru $\approx{U}_p$ napięć podawanych do porównania z wzorcowymi w trakcie procedury:

$$A \overset{df}{=} \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j) \,, \tag{2.55}$$

p^j ($j = 1, 2, \ldots, L$) - prawdopodobieństwa sukcesu w kolejnych taktach komparacji.

W przypadku gdy rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych ma postać (2.10), wartości prawdopodobieństw sukcesu p^j ($j = 1, 2, \ldots, L$) określa wzór (2.33). Wartość współczynnika A można wtedy obliczyć wg wzoru:

$$A = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} \frac{U^j}{U_{w\,max}} \left(1 - \frac{U^j}{U_{w\,max}} \right), \qquad (2.56)$$

gdzie: U^j - wartości napięć $\tilde{U}^j \in \tilde{\tilde{U}}_p$, $j = 1, 2, \ldots, L$.

Po przekształceniach (zobacz wzory (1.2) i (1.3)) zależność powyższa przybiera postać:

$$A = \frac{\gamma_1(\tilde{\tilde{U}}_p)}{U_{w\,max}} - \frac{\gamma_2(\tilde{\tilde{U}}_p)}{U^2_{w\,max}}, \qquad (2.57)$$

gdzie symbole: $\gamma_1(\tilde{\tilde{U}}_p)$, $\gamma_2(\tilde{\tilde{U}}_p)$ oznaczają odpowiednio wartości: średnią i średniokwadratową należne zbiorowi $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi.

Jak łatwo sprawdzić, przy założeniu, że:

$$0 \lesssim \tilde{U}^j \lesssim \tilde{U}_{w\,max}, \quad j = 1,2,\ldots,L, \qquad (2.58)$$

współczynnik A przybiera wartości z przedziału:

$$0 \leq A \leq 0{,}25 .$$

Wartość współczynnika A przybierana w konkretnym przypadku procedury komparacyjnej zależy od wartości napięć $\tilde{U}^j$ ($j=1,2,\ldots,L$), a ściślej - od relacji między wartościami U^j tych napięć, a wartością $U_{w\,max}$ (porównaj (2.56)). W poprzednich podrozdziałach przyjmowano, w celu oszacowania wartości składowej losowej błędu komparacji, wersję najmniej korzystną: A = 0,25, nie wnikając w to jakie właściwości ma zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ (porównaj (2.45)).

Obecnie problem ten zostanie rozważony bardziej szczegółowo [16].

Rozważa się klasę zbiorów $\tilde{\tilde{U}}_p$ o ustalonej liczności L i ustalonej wartości średniej $\nu_1(\tilde{\tilde{U}}_p)$. Ze wzoru (2.39) wynika, że w przypadku wykonania omawianej procedury komparacyjnej z dowolnym zbiorem z rozważanej klasy, wartość oczekiwana E(R) wyniku pomiaru wynosi $\nu_1(\tilde{\tilde{U}}_p)$. Można jednak zadać pytanie, czy wszystkie możliwe zbiory napięć $\tilde{\tilde{U}}_p$ o tej samej wartości średniej są także ekwiwalentne co do wartości wariancji uzyskiwanego rezultatu R. Ze wzoru (2.57) wynika, że tak nie jest, gdyż różne zbiory napięć $\tilde{\tilde{U}}_p$, których wartość średnia jest taka sama i wynosi $\nu_1(\tilde{\tilde{U}}_p)$ nie muszą mieć jednakowej wartości średniokwadratowej $\nu_2(\tilde{\tilde{U}}_p)$. Tak więc mimo ustalenia odjemnej we wzorze (2.57), odjemnik może przybierać różne wartości dając w konsekwencji różne wartości współczynnika A, zaś tą drogą - wariancji $D^2(R)$ (2.54) i składowej losowej Δ_1 błędu komparacji (2.42).

Można wykazać, że funkcja L zmiennych:

$$\nu_2(\tilde{\tilde{U}}_p) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}(U^j)^2 \qquad (2.59)$$

osiąga, przy warunku:

$$\nu_1(\tilde{\tilde{U}}_p) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} U^j = \text{const}, \qquad (2.60)$$

wartość minimalną wtedy, gdy [17]:

$$U^1 = U^2 = \ldots = U^L = \nu_1(\tilde{\tilde{U}}_p) . \qquad (2.61)$$

W przypadku takim współczynnik A (2.57), a w ślad za tym - wa-

riancja wyniku $D^2(R)$ oraz składowa losowa Δ_1 błędu komparacji, osiągają wartość maksymalną. Oznacza to, że ze wszystkich zbiorów $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi, charakteryzujących się taką samą wartością średnią $\nu_1(\approx{U}_p)$, z metrologicznego punktu widzenia najmniej korzystne są zbiory napięć jednakowych (2.61).

Ze zbiorem takiego typu mamy do czynienia m.in. wtedy, gdy zbiór $\approx{U}$ napięć mierzonych jest jednoelementowy i to samo napięcie jest podawane do porównania z wzorcowymi w kolejnych taktach procedury komparacyjnej (zobacz wzór (2.3)).

Z praktycznego punktu widzenia interesująca byłaby odpowiedź na pytanie, jaką postać musiałby mieć zbiór napięć:

$$\approx{U}_p = \left\{ \sim{U}^1, \sim{U}^2, \ldots, \sim{U}^L \right\},$$

aby przy ustalonej wartości średniej $\nu_1(\approx{U}_p)$ uzyskać najmniejszą możliwą wariancję wyniku $D^2(R)$.

Ze wzoru (2.57) wynika, że musiałby to być taki zbiór, który przy określonej wartości średniej $\nu_1(\approx{U}_p)$ charakteryzuje się maksymalną wartością średniokwadratową $\nu_2(\approx{U}_p)$. Funkcja (2.59), jako paraboloida w przestrzeni (L+1)-wymiarowej nie ma maksimów lokalnych. Wszystkie napięcia $\sim{U}^j$ (j = 1, 2, ..., L) z założenia spełniają jednak warunek (2.58). Intuicyjnie można więc ocenić, że z klasy zbiorów o ustalonej wartości średniej, najkorzystniejsze - z punktu widzenia wartości wariancji uzyskiwanego wyniku - są takie zbiory $\approx{U}_p$, które zawierają:

- pewną liczbę k napięć o wartości $U_{w\,max}$ (k = 0,1,2,...,L - zależnie od wartości średniej $\nu_1(\approx{U}_p)$),
- być może jedno napięcie o wartości:

$$0 < L \cdot \gamma_1(\tilde{\approx}U_p) - k \cdot U_{w\,max} < U_{w\,max} \qquad (2.62)$$

tak, aby wartość średnia k+1 napięć ze zbioru $\tilde{\approx}U_p$ była równa $\gamma_1(\tilde{\approx}U_p)$,

- pozostałe napięcia równe zeru.

W związku z powyższymi rozważaniami nasuwają się następujące spostrzeżenia: Skoro rozmaite zbiory napięć $\tilde{\approx}U_p$ charakteryzujące się określoną wartością średnią $\gamma_1(\tilde{\approx}U_p)$ dają wyniki różniące się wartością wariancji, celowe wydaje się d o k o n y w a n i e z a m i a n y jednych zbiorów $\tilde{\approx}U_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach komparacji na inne, równoważne im pod względem wartości średniej, ale prowadzące do wyników o mniejszej wariancji. Postępowanie takie wydaje się uzasadnione zwłaszcza wtedy, gdy zbiór $\tilde{\approx}U_p$ składa się z napięć jednakowych (sytuacja najmniej korzystna). Przykład procedury umożliwiającej "transpozycję" takiego zbioru napięć na zbiór bardziej optymalny (z punktu widzenia wartości wariancji wyniku pomiaru) zawarto w Dodatku 2.

Przypisy

[1] "O zbiorze uporządkowanym U mówimy, że jest gęsty, jeżeli między każdymi dwoma jego elementami leży co najmniej jeden element zbioru U".
Sierpiński W., O teorii mnogości. PZWS, Warszawa 1964, s. 29.

[2] Posługiwanie się pojęciem zmiennej losowej wymaga w zasadzie uprzedniego zdefiniowania σ-ciała zdarzeń i określenia prawdopodobieństwa jako miary na elementach tego σ-ciała. Z powodu nieużyteczności tych rozważań w dalszej części pracy, a także z powodu ich typowości - pominięto je.

[3] Skala pomiarowa wielkości addytywnej jest funkcją mierzalną. Warunek konieczny, aby funkcja przypisująca liczby zdarzeniom elementarnym mogła być traktowana jako zmienna losowa, jest więc spełniony.

[4] Por. np. Jaworski J., Matematyczne podstawy metrologii. WNT, Warszawa 1979, s. 24 - 27.

[5] Por. np. Feller W., Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa 1980, t. 1, s. 131.

[6] Tamże, t. 1, s. 132 - 136.

[7] Tamże, t. 1, s. 199, 200.

[8] Tamże, t. 1, s. 204 i 206.

[9] Austriacka firma NORMA produkuje przyrządy pomiarowe funkcjonujące w oparciu o zasadę podobną do tej, którą tu opisano.
Por. np. Wehrmann W., A new line of stochastic - ergodic measuring instruments.
"NORMA Technical Information", VIII/II, 1971, s. 3 - 12.

Wehrmann W., The U-FUNCTIONMETER - a stochastic multimetr for signal processing and data handling. "Technical Information", NORMA Messtechnik Gesellschaft m.b.H., TI 1/72E, s. 11 - 18.

[10] Por. np. Jellonek A., Zasady metrologii. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1981, s. 116.

[11] Warto zauważyć, że stwierdzenie stałości w czasie jakiejś realizacji konkretnej wielkości fizycznej, na podstawie wskazań przyrządu pomiarowego, może być wynikiem zaistnienia jednej z następujących sytuacji:

- Zmiany natężenia mierzonej wielkości fizycznej są tak małe, że nie mogą być stwierdzone za pomocą zastosowanej aparatury z powodu zbyt małej jej rozdzielczości.
- "Amplituda" zmian wartości wielkości jest znaczna, ale zmiany te zachodzą bardzo wolno względem czasu trwania obserwacji i z tego powodu nie mogą być wykryte.
- "Amplituda" zmian wartości wielkości jest znaczna w stosunku do czułości zastosowanej aparatury pomiarowej, ale zmiany te zachodzą bardzo szybko w porównaniu z bezwładnością tej aparatury. W konsekwencji uzyskiwane wyniki są skutkiem uśredniania zmian wielkości mierzonej za pewien czas. Jeżeli wskazywana wartość średnia sygnału nie wykazuje zmian w czasie obserwacji - odnosi się wrażenie, że wielkość mierzona jest stała.

[12] Por. np. Hejn K., Zastosowanie metody Monte Carlo do teorii pewnej klasy przetworników cyfrowo-analogowych. Praca doktorska. Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1975, s. 10.

[13] Opisany tu schemat prób losowych, z powodu jego podobieństwa do klasycznego schematu prób Bernoulliego, nazywa się

niekiedy doświadczeniami Bernoulliego o zmiennych prawdopodobieństwach. Por. np. Feller W., op. cit., t. 1, s. 196 i 206.

[14] Por. np. tamże, t. 1, s. 198.

[15] Por. np. Borowkow A.A., Rachunek prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa 1975, s. 110.
Papoulis A., Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972, s. 280 - 281.

[16] Rozważania, które teraz nastąpią są interpretacją, znanej w rachunku prawdopodobieństwa, właściwości doświadczeń Bernoulliego o zmiennych prawdopodobieństwach.
Por. np. Feller W., op. cit., t. 1, s. 196 i 206, 207.

[17] Można to wykazać np. drogą elementarnych rachunków.

Rozdział III

Wpływ bloków układu realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy-mniejszy" na jej właściwości metrologiczne

1. Wpływ cech wzorca

a) Cechy losowego wzorca napięcia w porównaniu z klasycznym pojęciem wzorca

Blok dostarczający napięć $\tilde{U}_{wi}$ (rys. 2.1) zgodnie z równomiernym rozkładem prawdopodobieństwa ich wartości (2.10) i spełniający inne wymagania sformułowane w podrozdziale II/1, w powyższej części tej pracy nazywano "losowym wzorcem napięcia" lub po prostu "wzorcem napięcia". Wydaje się, że należy sprawdzić, na ile założenia dotyczące właściwości tego bloku zgadzają się z powszechnym rozumieniem słowa "wzorzec".

Po przeanalizowaniu kilku definicji tego pojęcia występujących w literaturze metrologicznej [1] autor jest zdania, że stosunkowo pełną listę atrybutów wzorca zawiera następujący fragment pracy Janusza Jaworskiego:

"Wzorzec miary jest to narzędzie odtwarzające, praktycznie niezmienną podczas jego użycia, cechę modelowaną. (...)
Wzorce mogą być jednomiarowe, jeżeli odtwarzają jedną wartość i wielomiarowe, jeżeli odtwarzają więcej niż jedną wartość wielkości (...).

Wzorzec jednomiarowy jako układ fizyczny ma jedno wyjście rzeczowe formujące odtwarzaną wielkość, i jedno wyjście informacyjne, formujące sygnał o wartości liczbowej odtwarzanej wartości (raczej powinno być: wielkości - G.S.)" [2].

Jak widać, akcentuje się tu następujące cechy istotne wzorca:

- jest to układ fizyczny,
- odtwarza jedną lub kilka (ale skończoną ilość) realizacji wybranej wielkości fizycznej,
- odtwarzane realizacje są wystarczająco niezmienne w czasie,
- poszczególnym realizacjom wzorcowym przypisane są liczby.

Niekiedy akcentuje się również takie cechy wzorca jak:

- znajomość granic niedokładności liczb przypisanych realizacjom wzorcowym,
- czas i warunki w których w/w granice niedokładności wzorca są zachowane [3].

Blok nazywany na rys. 2.1 "losowym wzorcem napięcia" wyróżnia się od powyższej listy atrybutów tym, że:

- Odtwarza on wszystkie (nieprzeliczalną ilość) realizacje napięcia z przedziału $[\tilde{0};\ \tilde{U}_{w\ max}]$.
- W związku z powyższym, pojęcie stałości realizacji wzorcowej ma sens tylko w odniesieniu do napięć granicznych: $\tilde{0}$ i $\tilde{U}_{w\ max}$.
- Znajomość wszystkich liczb odpowiadających realizacjom odtwarzanym przez wzorzec nie jest możliwa ze względu na nieprzeliczalność zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ odtwarzanych napięć; nie dotyczy to jedynie realizacji granicznych: najmniejszej $\tilde{0}$ i największej $\tilde{U}_{w\ max}$, których wartości: 0 i $U_{w\ max}$ są znane. Nie wiadomo jednak, w

których momentach realizacje te są odtwarzane na zaciskach "losowego wzorca napięcia".

Nie ulega więc wątpliwości, że omawiany blok nie spełnia typowych wymagań stawianych wzorcowi i jeśli przyjąć dotychczas uznawane definicje, to nazwa "wzorzec" nie przysługuje mu.

Ponadto ważną cechą "losowego wzorca napięcia" jest określoność i stałość w czasie rozkładu prawdopodobieństwa odtwarzanych przez niego napięć. Istotności tej cechy wzorca nie eksponuje się w dotychczasowych jego definicjach.

Mimo tych trudności natury terminologicznej rozważania z podrozdziału II/1 przekonują, że układ wg rys. 2.1 umożliwia pomiar napięcia. Więcej: struktura układu z rys. 2.1 odpowiadałaby zupełnie strukturze dowolnego układu służącego do pomiaru (porównaj rys. 1.2) jeżeli tylko zgodzić się co do tego, że układ odtwarzający napięcia losowe jest wzorcem.

W rozdziale I układ pomiarowy rozpoznawano m.in. po tym, że w jego strukturze występował wzorzec. Skoro jednak w przypadku układu z rys. 2.1 stwierdzono, że umożliwia on pomiar, celowym wydaje się odwrócenie powyższego rozumowania. Odwrócenie takie prowadzi do wniosku, że blok z rys. 2.1 wytwarzający napięcia losowe j e s t w z o r c e m (mimo odmienności w stosunku do klasycznej definicji tego pojęcia), gdyż jest on elementem układu pomiarowego i pełni w nim analogiczną funkcję jaką w innych układach pomiarowych pełni wzorzec.

Klasyczne pojęcie wzorca wymaga więc modyfikacji. Należy chyba przyjąć, że:

w z o r c e m może być każdy układ fizyczny odtwarzający jedną lub wiele realizacji wybranej wielkości, umożliwiający nadawanie

wartości innym realizacjom tej wielkości wg wcześniej przyjętej skali. Aby to było możliwe, odtwarzanie realizacji wzorcowych musi odbywać się z zachowaniem stałości w czasie jednego lub kilku parametrów liczbowych, b e z p o ś r e d n i o l u b p o ś r e d n i o powiązanych ze skalą pomiarową odtwarzanej wielkości.

W przypadku napięcia wzorcem może więc być zarówno układ odtwarzający skończony zbiór realizacji wraz z odpowiadającymi im liczbami, ale może to być także układ odtwarzający nieprzeliczalny zbiór napięć o ściśle zdefiniowanym rozkładzie prawdopodobieństwa ich pojawiania się na zaciskach.

Sposób wykorzystania każdego z takich wzorców do uzyskiwania wyniku pomiaru musi być odmienny. Wzorce pierwszego typu wykorzystuje się w pomiarach wykonując, omawianą już, procedurę komparacyjną typu poszukiwawczego (porównaj Przykład 1.3). Wzorce drugiego typu wymagają wykonania procedury komparacyjnej typu przeglądowego. Dowód możliwości pomiaru z użyciem wzorca odtwarzającego napięcia wg ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa (2.10) omówiono w podrozdziale II/1.

Z faktu, że uzyskanie poprawnego wyniku pomiaru jest możliwe z użyciem obu w/w grup wzorców wynika, że są one równoważne (lub prawie równoważne) pod względem ilości informacji o realizacji mierzonej, które można uzyskać za ich pomocą.

b) Rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych

Zgodnie z rys. 2.1 i rozważaniami z rozdziału II wartość wyniku R pomiaru wykonanego za pomocą stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy" zależy m.in. od rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych. Zależność ta będzie przedmiotem rozważań w kolejnych dwóch podrozdziałach.

W niniejszym podrozdziale wpływ rozkładu napięć wzorcowych został rozważony w sensie "pozytywnym", tzn. wykazuje się tu, co można uzyskać modyfikując świadomie ten rozkład prawdopodobieństwa.

Podrozdział następny natomiast poświęcony jest analizie negatywnych skutków związanych z odbieganiem rzeczywistego rozkładu napięć wzorcowych od jego założonej, pożądanej postaci.

Przedmiotem rozważań jest niezmiennie procedura komparacyjna realizowana w układzie wg rys. 2.1 i opisana w podrozdziale II/1.

O wzorcu napięcia zakłada się, że w kolejnych taktach procedury losuje on realizacje napięcia $\tilde{U}_w^j$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$ z przedziału: $[\tilde{0};\ \tilde{U}_{w\,max}]$, wg znanego mierzącemu rozkładu prawdopodobieństwa:

$$\gamma(U_w)=\begin{cases}\gamma_o(U_w) & , \quad U_w \in [0,\ U_{w\,max}] \\ 0 & , \quad \text{poza tym} ,\end{cases} \tag{3.1}$$

gdzie: $\gamma_o(U_w)$ - dowolna funkcja całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $[0,\ U_{w\,max}]$ i taka, że:

$$\int_0^{U_{w\max}} \gamma(U_w)\, d\, U_w = 1 \quad . \tag{3.2}$$

Przyjęto, że losowania w kolejnych taktach procedury są niezależne oraz, że znana jest wartość $U_{w\ max}$ należna, wg przyjętej skali pomiarowej, realizacji $\tilde{U}_{w\ max}$.

Podobnie jak w podrozdziale II/2 założono, że zbiór napięć mierzonych jest wieloelementowy

$$\tilde{\tilde{U}} = \left\{ \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_N \right\}$$

i, że każde z napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ jest porównywane jeden raz z napięciem wzorcowym. Oznacza to, że zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi jest identyczny ze zbiorem $\tilde{\tilde{U}}$, a w szczególności - że zbiory te są równoliczne: L = N (L - liczność zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$).
O napięciach mierzonych zakłada się ponadto, że:

$$\tilde{0} \lesssim \tilde{U}_i \lesssim \tilde{U}_{w\ max}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.3}$$

W związku z odstąpieniem od założenia (2.10) o równomierności rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych na rzecz bardziej ogólnej postaci rozkładu (3.1), należy poddać rewizji założenie co do sposobu obliczania wyniku pomiaru R (2.5). Nie ulega wątpliwości, że rezultat R powinien być jakąś funkcją stanu końcowego licznika L_2. Kierując się zasadą, że w pierwszej kolejności należy sprawdzić możliwość wykorzystania wyników R obliczanych wg najprostszych formuł przyjęto, że:

$$R = C \cdot L_2 \tag{3.4}$$

gdzie: C - pewna stała.

Ze sposobu wykonania procedury komparacyjnej jak też z rozważań w podrozdziale II/1 wynika, że liczba R jest zmienną losową. Zbadanie podstawowych właściwości tej zmiennej losowej (zwłaszcza obliczenie $E(R)$ i $D^2(R)$) przy zastosowanych tutaj-bardzo ogólnych założeniach dotyczących rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych pozwoliłoby, jak się wydaje, odpowiedzieć na pytanie jakie formy tego rozkładu mogą być korzystne z praktycznego punktu widzenia.

Na podstawie wzoru (3.4):

$$E(R) = C \cdot E(L_2) \tag{3.5}$$

oraz

$$D^2(R) = C^2 \cdot D^2(L_2). \tag{3.6}$$

W dowolnym j-tym (j = 1, 2, ..., L) takcie procedury komparacyjnej następuje wylosowanie napięcia wzorcowego $\tilde{U}_w^j$ i jego porównanie z realizacją $\tilde{U}^j$ ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$. Zdarzenie polegające na tym, że w j-tym takcie:

$$\tilde{U}_w^j < \tilde{U}^j , \tag{3.7}$$

podobnie jak poprzednio, nazwano sukcesem. Jego prawdopodobień-

stwo (porównaj wzór (3.1)):

$$p^j = P(\tilde{U}_w^j < \tilde{U}^j) = \int_0^{U^j} \gamma(U_w)dU_w, \quad j = 1, 2, \ldots, L. \qquad (3.8)$$

Ponieważ, zgodnie z przyjętym założeniem, napięcia $\tilde{U}^j$ ($j = 1, 2, \ldots, L$) nie muszą być jednakowe, więc prawdopodobieństwa sukcesu p^j w kolejnych taktach procedury są na ogół różne. Oznacza to, że nie mamy tu do czynienia z klasycznym schematem prób Bernoulliego.

Stan końcowy licznika L_2 jest zmienną losową liczącą sukcesy (3.7) w ciągu L porównań. Zmienna losowa L_2 nie ma rozkładu dwumianowego, gdyż prawdopodobieństwa sukcesów w kolejnych taktach komparacji nie są jednakowe. Szczegółowy opis analityczny tego rozkładu prawdopodobieństwa nie jest jednak konieczny do obliczenia wartości oczekiwanej $E(R)$ wyniku pomiaru i jego wawiancji $D^2(R)$ - zobacz wzory: (3.5) i (3.6). Wystarczy w tym celu znajomość $E(L_2)$ i $D^2(L_2)$.

Jeżeli potraktować zmienną losową L_2 jako sumę (2.34) niezależnych zmiennych losowych X^j ($j = 1, 2, \ldots, L$) o rozkładach dwupunktowych (2.35), (2.36) to na podstawie przekształceń (2.37) i (2.38) wykonanych w podrozdziale II/2 można otrzymać wzory:

$$E(L_2) = \sum_{j=1}^{L} p^j \qquad (3.9)$$

$$D^2(L_2) = \sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j), \qquad (3.10)$$

gdzie prawdopodobieństwa sukcesów p^j ($j = 1, 2, \ldots, L$) określa

równanie (3.8).

Uwzględniając powyższe równania w zależnościach (3.5), (3.6) otrzymuje się:

$$E(R) = C \cdot \sum_{j=1}^{L} p^j \tag{3.11}$$

oraz

$$D^2(R) = C^2 \sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j) \, . \tag{3.12}$$

Jeżeli ponadto wziąć pod uwagę zależność (3.8), to ze wzorów (3.11) i (3.12) wynika, że wartość oczekiwana wyniku $E(R)$ oraz jego wariancja $D^2(R)$ zależą od wartości napięć $\tilde{U}^j$ podawanych do porównania z wzorcowymi $\tilde{U}_w^j$ w kolejnych taktach procedury komparacyjnej $j = 1, 2, \ldots, L$. Nasuwa się więc pytanie czy przez odpowiedni dobór funkcji gęstości prawdopodobieństwa napięć wzorcowych (3.1) i współczynnika proporcjonalności C we wzorze (3.4), nie możnaby uczynić wartości oczekiwanej wyniku $E(R)$ równej jakiemuś parametrowi charakterystycznemu zbioru $\approx{U}$ napięć mierzonych (np. równej któremuś z momentów zwykłych; porównaj wzory (1.2) ÷ (1.4)).

Łatwo sprawdzić, że jeżeli założy się równomierny rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych (3.1), tzn. funkcja gęstości $\gamma(U_w)$ ma postać taką jak to opisuje wzór (2.10), zaś współczynnik proporcjonalności C przyjmie się:

$$C = \frac{U_{w\,max}}{L} \, , \tag{3.13}$$

wówczas wzór (3.4) przybiera znaną już postać (2.5), zaś wzory (3.11) i (3.12) stają się identyczne z zależnościami: (2.39) - wartość oczekiwana E(R) równa wartości średniej napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ - oraz (2.40) - wzór na wariancję $D^2(R)$ - wyprowadzonymi w podrozdziale II/2. Jest to oczywiste, gdyż rozważania niniejsze są uogólnieniem tych z podrozdziału II/2.

Obecnie zostanie przeanalizowana możliwość zastosowania w rozważanej procedurze komparacyjnej, wytwarzającego napięcia wzorca o liniowo narastającej funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

Jeżeli napięcia losowe mają mieć rozkład określony za pomocą wzoru (porównaj (3.1)):

$$\gamma(U_w) = \begin{cases} K \cdot U_w , & U_w \in [0,\ U_{w\,max}] \\ 0 , & \text{poza tym} , \end{cases} \tag{3.14}$$

to aby spełniony był warunek (3.2), stała K musi być równa:

$$K = \frac{2}{U^2_{w\,max}} . \tag{3.15}$$

Prawdopodobieństwo sukcesu p^j w dowolnym takcie procedury komparacyjnej wynosi wtedy (zobacz wzór (3.8)):

$$p^j = \left(\frac{U^j}{U_{w\,max}}\right)^2 \qquad j = 1, 2, ..., L. \tag{3.16}$$

Wynik R (3.4) jest zmienną losową o wartości oczekiwanej (3.11):

$$E(R) = \frac{C}{U^2_{w\,max}} \sum_{j=1}^{L} (U^j)^2 \qquad (3.17)$$

Jak widać, celowym było by przyjęcie stałej C:

$$C = \frac{U^2_{w\,max}}{L} \qquad (3.18)$$

Wynik pomiaru miałby wtedy wartość oczekiwaną:

$$E(R) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} (U^j)^2 \qquad (3.19)$$

r ó w n ą w a r t o ś c i ś r e d n i o k w a d r a t o w e j zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć porównanych z wzorcowymi w kolejnych taktach procedury komparacyjnej.

Wariancja wyniku $D^2(R)$ ma wówczas wartość:

$$D^2(R) = \frac{U^4_{w\,max}}{L^2} \sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j) = \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^{L} (U^j)^2 \left[U^2_{w\,max} - (U^j)^2\right]. \qquad (3.20)$$

W rozważanym teraz przypadku, gdy każda realizacja napięcia ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ jest jednokrotnie porównywana z wzorcową, tzn. gdy $\tilde{\tilde{U}} = \tilde{\tilde{U}}_p$ oraz L = N, wzory (3.19) i (3.20) mogą być zapisane w postaci:

$$E(R) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} U_i^2 \qquad (3.19a)$$

$$D^2(R) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} U_i^2 \left[U_{w\,max}^2 - U_i^2 \right] , \qquad (3.20a)$$

gdzie: U_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ są wartościami należnymi napięciom $\tilde{U}_i$ ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$. Interpretacja dwóch ostatnich wzorów jest następująca: Jeżeli w układzie z rys. 2.1 zastosuje się wzorzec napięcia o liniowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa (3.14), (3.15), procedurę komparacyjną wykona się w ten sposób, że każde z napięć $\tilde{U}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych porówna się jednokrotnie z napięciem wzorcowym, zaś wynik pomiaru R obliczy wg wzoru (porównaj (3.4), (3.18)):

$$R = \frac{L_2}{L_1} \cdot U_{w\,max}^2 , \qquad (3.21)$$

(L_1 - stan końcowy licznika L_1 równy liczności L zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$), to:

- wynik R jest zmienną losową,
- wartość oczekiwana tej zmiennej losowej jest równa średniej kwadratowej wartości należnych wg wcześniej przyjętej skali S_U realizacjom napięć $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_N$ zbioru $\tilde{\tilde{U}}$.

Przez zmianę rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych z równomiernego (2.10) na liniowy (3.14) (3.15) i modyfikację wzoru, wg którego oblicza się wynik pomiaru z postaci (2.5) na (3.21), można układ z rys. 2.1 przekształcić z urządzenia mierzącego wartość średnią należną zbiorowi $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych, na miernik wartości średniokwadratowej należnej temu zbiorowi. Warto podkreślić, że pomiar wartości średniokwadratowej odbywa się, dzięki opisanej procedurze komparacyjnej, bez potrzeby ustalenia wartości należnych wg skali S_U poszczególnym realizacjom

$\tilde{U}_i$ ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ (zobacz rys. 1.1, droga A").

Uzyskane tu wyniki można u o g ó l n i ć . Jeżeli do realizacji stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy--mniejszy" w układzie wg rys. 2.1 użyje się wzorca losowego dostarczającego ciągów napięć o rozkładzie potęgowym:

$$\gamma(U_w) = \begin{cases} \dfrac{n}{U_{w\,max}^{n}} \cdot U_w^{n-1} & , \quad U_w \in [0,\ U_{w\,max}] \\ 0 & , \text{ poza tym} \end{cases} \qquad (3.22)$$

$n = 1, 2, \ldots$,

zaś wynik pomiaru obliczy się wg wzoru:

$$R = \frac{L_2}{L_1} \cdot U_{w\,max}^{n} , \quad n = 1, 2, \ldots , \qquad (3.23)$$

to:

- wynik R jest zmienną losową,
- jego wartość oczekiwana ma wartość:

$$E(R) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} (U^j)^n , \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (3.24)$$

zaś wariancja wynosi:

$$D^2(R) = \frac{U_{w\,max}^{2n}}{L^2} \sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j) , \qquad (3.25)$$

gdzie: p^j - prawdopodobieństwo sukcesu (3.7) w j_tym takcie

procedury komparacyjnej (j = 1, 2, ..., L).

W przypadku użycia wzorca wytwarzającego napięcia o rozkładzie (3.22):

$$p^j = \left(\frac{U^j}{U_{w\,max}} \right)^n , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.26}$$

U^j -wartość napięcia $\tilde{U}^j$ (j = 1, 2, ..., L) porównywanego z realizacją wzorcową $\tilde{U}_w^j$ w j-tym takcie komparacji; $\tilde{U}^j \in \tilde{\tilde{U}}_p$.

Ze wzoru (3.24) wynika, że dobierając rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych w postaci funkcji potęgowej odpowiedniego stopnia można, za pomocą omawianej procedury komparacyjnej, uzyskać wynik, którego wartość oczekiwana E(R) jest r ó w n a m o m e n t o w i d o w o l n e g o r z ę d u $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$ zbioru napięć porównywanych z wzorcowymi.

Jeżeli zbiór napięć $\tilde{\tilde{U}}_p$ utworzy się na podstawie zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych w taki sposób, że oba te zbiory charakteryzują się identyczną wartością mierzonego momentu, tzn.

$$\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p) = \gamma_n(\tilde{\tilde{U}}) , \tag{3.27}$$

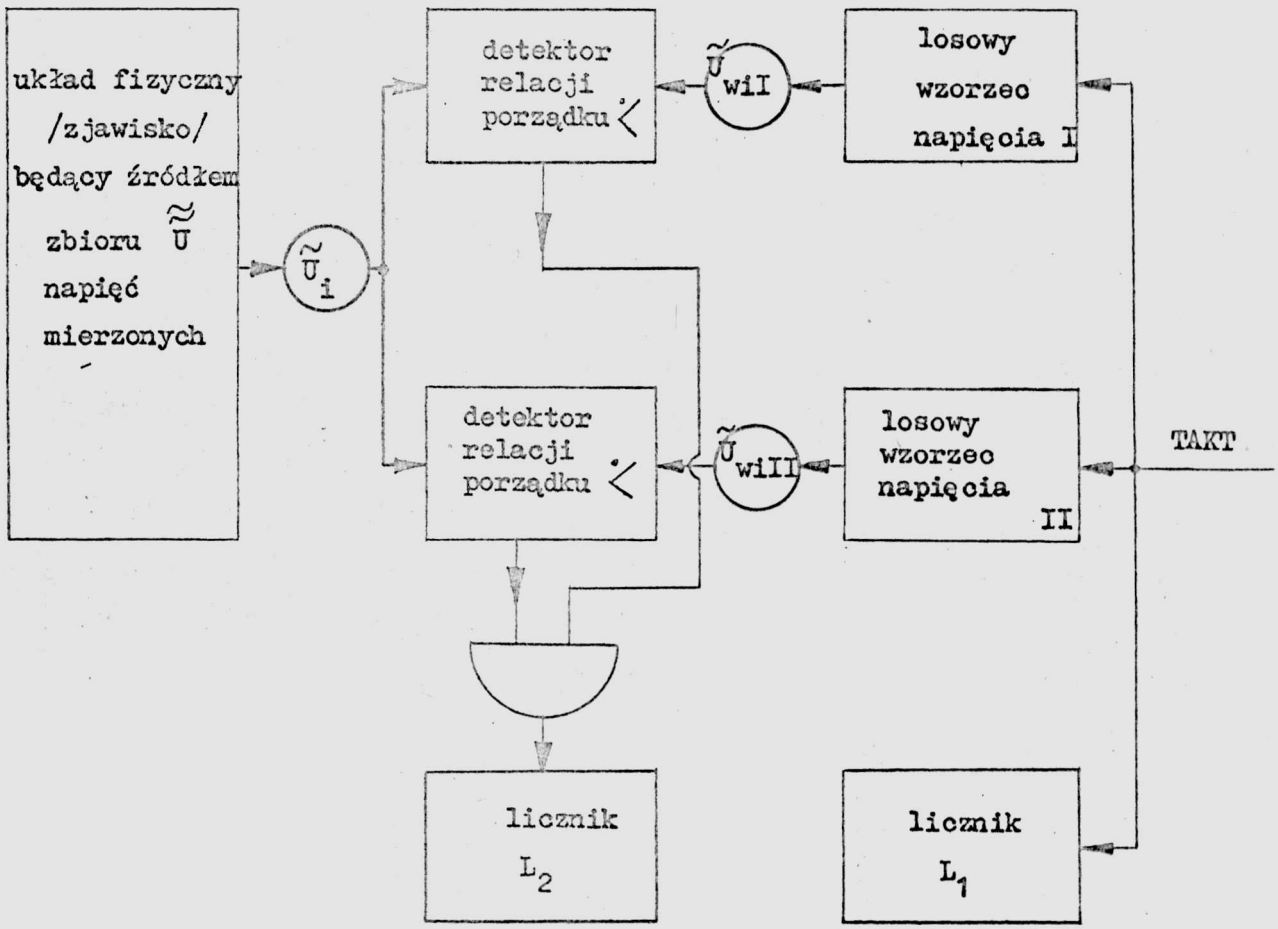
wówczas wynik pomiaru (3.23) można uważać za estymator momentu należnego zbiorowi $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych. Sytuacja taka ma np. miejsce wtedy, gdy założy się, że każda z realizacji $\tilde{U}_i$ (i = 1, 2, ..., N) zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ jest porównywana z losowo wybraną realizacją wzorcową dokładnie jeden raz, wówczas: $\tilde{\tilde{U}}_p = \tilde{\tilde{U}}$ oraz L = N, zaś wzory (3.24), (3.25) można zapisać tak:

$$E(R) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (U_i)^n = \gamma_n(\tilde{\tilde{U}}) \qquad (3.24a)$$

$$D^2(R) = \frac{U_{w\,max}^{2n}}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{U_i}{U_{w\,max}} \right)^n \left[1 - \left(\frac{U_i}{U_{w\,max}} \right)^n \right] \qquad (3.25a)$$

gdzie: n = 1, 2, ... - rząd mierzonego momentu.

W związku z uzyskanym właśnie wynikiem dotyczącym możliwości pomiaru za pomocą stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" momentu dowolnego rzędu, celowym wydaje się wskazanie podobieństw i różnic omawianej metody w stosunku do podobnych sposobów podawanych w literaturze metrologicznej. Istotą rozwiązań sygnalizowanych w doniesieniach literaturowych[4] jest zastosowanie takiej liczby wzorców losowych dostarczających napięć o rozkładzie równomiernym, jaki jest rząd mierzonego momentu. W przypadku pomiaru wartości średniokwadratowej układ ma postać jak na rys. 3.1.



Rys. 3.1. Układ do pomiaru wartości średniokwadratowej z wykorzystaniem dwóch niezależnych wzorców losowych dostarczających napięć o rozkładzie równomiernym.

O losowych wzorcach napięcia zakłada się, że dostarczają one napięć o rozkładzie prawdopodobieństwa opisanym za pomocą stałej funkcji gęstości (2.10). Działanie układu jest takie samo jak w przypadku układu z rys. 2.1 (porównaj podrozdział II/1). Wynik oblicza się wg wzoru (3.21).

Można sprawdzić, że w przypadku pomiaru wartości momentu w zbiorze napięć struktura powyższa ma właściwości zupełnie podobne do układu z rys. 2.1. Godnym wyjaśnienia wydaje się więc fakt, że pojedynczemu wzorcowi na rys. 2.1, dostarczającemu napięć o li-

niowo narastającej funkcji gęstości prawdopodobieństwa odpowiadają na rys. 3.1 dwa wzorce losowe dostarczające napięć o rozkładzie równomiernym i odpowiednio dwa detektory relacji $<$ oraz bramka iloczynowa.

Stan licznika L_2 w układzie na rys. 3.1 jest zwiększany o jeden tylko wtedy, gdy oba napięcia wzorcowe: $\tilde{U}_{wi\ I}$, $\tilde{U}_{wi\ II}$ są mniejsze od napięcia $\tilde{U}_i$. Jest to równoważne zdarzeniu, że większe z obu napięć wzorcowych jest mniejsze od napięcia $\tilde{U}_i$. Układ z rys. 3.1 jest więc, pod względem zasady działania, równoważny układowi, który - podobnie jak on - zawierałby dwa niezależne losowe wzorce napięcia, lecz w którym następowałoby porównanie napięć wzorcowych między sobą. Do porównania z napięciem $\tilde{U}_i$ wybierałoby się w każdym takcie procedury to napięcie wzorcowe, które jest większe. Można jednak sprawdzić, że te "większe" napięcia wzorcowe mają rozkład opisany liniową funkcją gęstości prawdopodobieństwa[5] Tak więc układy z rys. 2.1 i 3.1 choć różnią się nieco, są analogiczne pod względem istoty działania. Struktura z rys. 2.1 - analizowana w tej pracy - zawierająca jeden wzorzec o regulowanych parametrach wydaje się jednak bardziej ogólna; układ z rys. 3.1 jest jedną z możliwych realizacji technicznych tej struktury.

Przykład 3.1.

Elementami zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ mogą być np. realizacje napięcia równe wartościom chwilowym (ściślej - średnim za czas wystarczająco krótki) sygnału napięciowego $\tilde{U}(t)$ stacjonarnego i ergodycznego procesu losowego. Zakładamy, że zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest, z wystarczającą dokładnością, reprezentatywny dla sygnału losowego $\tilde{U}(t)$. Oznacza to, że są spełnione wymagania twierdzenia o próbkowaniu oraz, że czas obserwacji sygnału losowego $\tilde{U}(t)$ jest wystarczająco długi. Innymi słowy zakładamy, że próbki $\tilde{U}_i \in \tilde{\tilde{U}}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ pobierano wystarczająco często oraz, że pobrano ich wystarczającą liczbę.

Wartość dowolnego momentu $\nu_n(\tilde{\tilde{U}})$ należna w skali S_U zbiorowi $\tilde{\tilde{U}}$ może być wtedy uważana za estymator wartości momentu sygnału czasowego $\tilde{U}(t)$. Ponieważ rozważana procedura komparacyjna umożliwia pomiar wartości momentów należnych zbiorowi $\tilde{\tilde{U}}$, może więc ona służyć tym samym do pomiaru momentów sygnału, który zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ reprezentuje.

Wykorzystanie w praktyce tej metody pomiaru momentów wymaga jednak oszacowania granic prawdopodobnych błędów.

Podrozdział obecny - traktujący o możliwości wykorzystania stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" do pomiaru momentów dowolnego rzędu - stanowi jak widać uogólnienie treści podrozdziału II/2 dotyczącego możliwości pomiaru wartości średniej (moment pierwszego rzędu) zbioru napięć. Z tego powodu następująca teraz analiza właściwości metrologicznych omawianej procedury komparacyjnej w przypadku pomiaru momentów dowolnego rzędu, stanowi w większości uogólnienie rozważań z podrozdziałów II/2 i II/3.

P r e c y z j a p r o c e d u r y k o m p a r a c y j n e j. S k ł a d o w a l o s o w a b ł ę d u k o m p a r a c j i

Wynik pomiaru R (3.23) uzyskiwany dzięki omawianej procedurze komparacyjnej, jest zmienną losową. Nie jest on powtarzalny nawet wtedy, gdy procedurę wykona się kilkakrotnie z tym samym zbiorem napięć $\tilde{\tilde{U}}_p$. Używanie liczb R jako wyników pomiaru wymaga uwzględnienia braku precyzji w postaci składowej błędu komparacji.

Zmienna losowa L_2 (licząca sukcesy (3.7) w ciągu L porównań) jest sumą znacznej liczby ($\gg 30$) niezależnych zmiennych losowych X^j ($j = 1, 2, \ldots, L$) o rozkładzie dwupunktowym (porównaj wzory (2.34), (2.35), (2.36)). Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej L_2, a także zmiennej losowej R wyniku pomiaru, można więc opisać, na mocy centralnego twierdzenia granicznego, za pomocą funkcji gęstości rozkładu normalnego, z wartością oczekiwaną $E(R)$ i wariancją $D^2(R)$ określonymi za pośrednictwem wzorów (3.24) i (3.25). Jeżeli więc R jest wynikiem uzyskanym wg wzoru (3.23) na podstawie pojedynczej procedury komparacyjnej to - na poziomie ufności 0,997 - można przyjąć, że poszukiwana wartość mierzonego momentu $\gamma_n(\tilde{\approx}U_p)$ znajduje się w przedziale:

$$R \pm 3\sqrt{D^2(R)} \qquad (3.28)$$

Uwaga: symbol R używany jest zarówno do oznaczania zmiennej losowej wyniku pomiaru jak i jej konkretnych realizacji. Kontekst określa, o które ze znaczeń chodzi w danym przypadku.

Równanie (3.28) oznacza, że podobnie jak w podrozdziale II/2, składową losową Δ_1 błędu komparacji zdefiniowano:

$$\Delta_1 = 3\sqrt{D^2(R)} \quad . \qquad (3.29)$$

Po uwzględnieniu w powyższej zależności wzoru (3.25) otrzymuje się:

$$\Delta_1 = \frac{3 \cdot U^n_{w\,max}}{L} \sqrt{\sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j)} \quad , \qquad (3.30)$$

gdzie prawdopodobieństwa p^j sukcesu w kolejnych taktach procedury $j = 1, 2, \ldots, L$ określa wzór (3.26),

n - rząd mierzonego momentu

(n = 1 - wartość średnia,

n = 2 - wartość średniokwadratowa, itd.)

Ze wzorów (3.30) i (3.26) wynika, że wartość składowej losowej Δ_1 błędu komparacji jest dość złożoną funkcją wartości: $U^1, U^2, \ldots, U^L$ napięć podawanych do porównania z wzorcowymi w kolejnych taktach procedury komparacyjnej. Tak więc z jednej strony zaletą omawianej komparacji pomiarowej jest to, że umożliwia ona określenie wartości momentów należnych zbiorowi $\tilde{\tilde{U}}_p = \{\tilde{U}^1, \tilde{U}^2, \ldots, \tilde{U}^L\}$ napięć porównywanych z wzorcowymi bez potrzeby pomiaru wartości poszczególnych napięć z tego zbioru. Z drugiej zaś strony utrata informacji o wartościach napięć $\tilde{U}^j$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$ uniemożliwia dokładne określenie błędu pomiaru. Trzeba więc uciec się do szacowania wartości błędu Δ_1. Jak zwykle w przypadku błędów, będzie chodziło o oszacowania "z góry".

Jeżeli skorzysta się z założenia (3.3), to najprostsze, choć - niestety - najbardziej "grube" oszacowanie można uzyskać na podstawie spostrzeżenia, że wyrażenie pod pierwiastkiem we wzorze (3.30) spełnia nierówność:

$$\sum_{j=1}^{L} p^j (1 - p^j) \leqslant \frac{L}{4} \quad . \tag{3.31}$$

Wartość graniczna składowej losowej błędu komparacji wynosi więc:

$$\Delta_{1\,max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{U^n_{w\,max}}{\sqrt{L}} \quad , \tag{3.32}$$

gdzie: n = 1, 2, ... - rząd mierzonego momentu.

Jest to oszacowanie "grube", ale za to prawdziwe w przypadku wszelkich zbiorów $\approx{U}_p$ spełniających (3.3).

Liczba $U^n_{w\ max}$ występująca w (3.32) jest największą możliwą wartością, jaką może przybrać moment n-tego rzędu należny zbiorowi $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi, o ile te ostatnie spełniają zależność (3.3). Obustronne podzielenie wzoru (3.32) przez liczbę $U^n_{w\ max}$ odpowiada, stosowanemu czasem w metrologii, odniesieniu granicznego błędu bezwzględnego do wartości zakresowej ("klasa"). Wynik powyższej normalizacji błędu granicznego nazwano tutaj (porównaj podrozdział II/1) unormowanym granicznym błędem losowym $\delta_{1\ max}$:

$$\delta_{1\ max} = \frac{\Delta_{1\ max}}{U^n_{w\ max}} = \frac{3}{2\sqrt{L}} \quad . \tag{3.33}$$

W przypadku, gdy każde z napięć mierzonych: $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$, ..., $\tilde{U}_N$ jest porównywane z napięciem wzorcowym dokładnie jeden raz, tzn. zbiór $\approx{U}$ napięć mierzonych oraz zbiór $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi są tożsame, wartości momentów należnych tym zbiorom też oczywiście są równe (3.27). Fakt ten wyrażają wzory (3.24) i (3.24a). Tożsamość zbiorów $\approx{U}$ oraz $\approx{U}_p$ implikuje jednak ich równoliczność (L = N); wzory (3.32) i (3.33) przybierają postać:

$$\Delta_{1\ max} = \frac{3}{2}\cdot\frac{U^n_{w\ max}}{\sqrt{N}} \quad , \tag{3.32a}$$

oraz:

$$\delta_{1\,max} = \frac{3}{2\sqrt{N}} , \qquad (3.33a)$$

gdzie: N - liczność zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych.

Ze wzorów powyższych wynika, że - przy założeniu: $\tilde{\tilde{U}} = \tilde{\tilde{U}}_p$ - niemożliwy jest dokładny pomiar wartości momentów $\nu_n(\tilde{\tilde{U}})$ mało licznych zbiorów $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych. Jest to właściwość bardzo niekorzystna. Skalę tego zjawiska łatwo zobrazować za pomocą wzoru (3.33a) i Tabeli 2.1. Gdy np. N = 225, należy liczyć się z błędem $\delta_{1\,max}$ rzędu 10%. Aby zaś $\delta_{1\,max}$ był mniejszy niż 0,1 %, zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ musiałby zawierać $N \geqslant 2{,}25 \cdot 10^6$ napięć.

Wprowadzenie do omawianej procedury komparacyjnej modyfikacji opisanej w podrozdziale II/3a, polegającej na r-krotnym porównaniu każdego z napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ z napięciami wylosowanymi przez wzorzec, rozwiązuje rozważany problem t a k ż e w przypadku pomiaru momentu dowolnego rzędu. Istotnie, postępowanie takie powoduje, że zbiór napięć mierzonych:

$$\tilde{\tilde{U}} = \left\{ \tilde{U}_1,\ \tilde{U}_2,\ \ldots,\ \tilde{U}_N \right\}$$

generuje następujący zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć podawanych do porównania z wzorcowymi (2.51):

$$\tilde{\tilde{U}}_p = \Big\{ \underbrace{\tilde{U}_1,\ \tilde{U}_1,\ \ldots,\ \tilde{U}_1}_{r\ razy},\ \underbrace{\tilde{U}_2,\ \tilde{U}_2,\ \ldots,\ \tilde{U}_2}_{r\ razy},\ \ldots,\ \underbrace{\tilde{U}_N,\ \tilde{U}_N,\ \ldots,\ \tilde{U}_N}_{r\ razy} \Big\}.$$

Na podstawie wzoru (3.24), po zmianie kolejności sumowania, otrzymuje się wtedy, że:

$$E(R) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}(U^j)^n = \nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p) = \frac{1}{r \cdot N}\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N}(U_i)^n + \ldots + \sum_{i=1}^{N}(U_i)^n\right]}_{r \text{ razy}} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(U_i)^n = \nu_n(\tilde{\tilde{U}}) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (3.34)$$

Powyższe przekształcenia oznaczają, że mimo, iż zbiory $\tilde{\tilde{U}}$ i $\tilde{\tilde{U}}_p$ nie są nadal tożsame, wartość oczekiwana wyniku komparacji jest nadal równa interesującemu momentowi zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych.

Opisana procedura r-krotnego porównania każdego napięcia mierzonego z wzorcowymi stwarza możliwość zwiększenia liczby L porównań wykonanych w ramach komparacji w stosunku do liczności N zbioru $\tilde{\tilde{U}}$, a tym samym możliwość teoretycznie dowolnego zmniejszenia składowej losowej błędu komparacji. Zakładając bowiem dopuszczalną wartość $\Delta_{1\,max}$ tej składowej błędu, ze wzoru (3.32) można obliczyć konieczną liczbę L_{min} porównań ($U_{w\,max}$ jest znane z założenia). Dalej: na podstawie informacji o liczności N zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ można dobrać liczbę r porównań każdej z realizacji ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ z napięciami wzorcowymi, by było (2.53):

$$r \cdot N \geqslant L_{min}, \quad r - \text{całkowite}.$$

Trudność polega jedynie na tym, że w przypadku gdy realizacje napięć mierzonych: $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$, ..., $\tilde{U}_N$ są wartościami chwilowymi (próbkami) jakiegoś sygnału napięciowego, pobieranymi w równych odstępach czasowych T_s, zaś r spełniające powyższą nierówność wypadnie duże, to wykonanie w czasie T_s r porównań realizacji $\tilde{U}_i$ (i = 1, 2, ..., N) z napięciami wzorcowymi może okazać się niemożliwe.

Na czas T_t potrzebny na realizację pojedynczego taktu procedury komparacyjnej składa się nie tylko czas reakcji detektora relacji porządku empirycznego $\lessdot$, ale także czas niezbędny do wygenerowania napięcia wzorcowego, niezależnego losowo od napięcia wybranego w takcie poprzednim oraz czas potrzebny na zwiększenie o jeden stanu licznika L_1 i ew. L_2.
Czasy T_s i T_t oraz liczba r muszą spełniać nierówność:

$$r \cdot T_t \leqslant T_s \quad , \tag{3.35}$$

Zależność składowej losowej błędu komparacji od wartości napięć w zbiorze $\tilde{\tilde{U}}_p$

Subtelniejsze niż za pomocą wzoru (3.32) oszacowanie wartości składowej losowej błędu komparacji w przypadku pomiaru momentu n-tego rzędu można uzyskać w drodze następującego rozumowania.

Wzór (3.25) można zapisać w postaci:

$$D^2(R) = \frac{U_{w\,max}^{2n}}{L} \cdot A \quad , \tag{3.36}$$

gdzie: A - współczynnik określający właściwości zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć porównanych z wzorcowymi w trakcie pomiaru momentu n-tego rzędu. Zgodnie z (2.55):

$$A = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j) ,$$

p^j - prawdopodobieństwo sukcesu w j-tym takcie procedury ($j = 1, 2, \ldots, L$). Podczas pomiaru momentu n-tego rzędu, prawdopodobieństwa p^j określa wzór (3.26).

Współczynnik A analizowano już w podrozdziale II/3b. Łatwo sprawdzić, że $A \in [0; 0,25]$.

Na podstawie wzorów (2.55) i (3.26) można stwierdzić, że jeżeli ustali się numer n mierzonego momentu, to wartość współczynnika A, a tym samym wariancji wyniku oraz składowej losowej błędu komparacji, zależy od wartości napięć U^j ($j = 1, 2, \ldots, L$), a ściślej - od relacji między tymi wartościami, a liczbą $U_{w\ max}$.

Jeżeli we wzorze (2.55) uwzględni się zależność (3.26) oraz to, że:

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} (U^j)^n = \gamma_n(\tilde{U}_p) \tag{3.37}$$

oraz:

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} (U^j)^{2n} = \gamma_{2n}(\tilde{U}_p) \tag{3.38}$$

wówczas równość (2.55) przyjmie postać:

$$A = \frac{\gamma_n(\tilde{U}_p)}{U^n_{w\ max}} - \frac{\gamma_{2n}(\tilde{U}_p)}{U^{2n}_{w\ max}} . \tag{3.39}$$

Zależności (3.39) i (3.36) oznaczają, że wariancja wyniku (a więc

także składowa losowa Δ_1 błędu) podczas pomiaru momentu n-tego rzędu za pomocą stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy" zależy nie tylko od wartości mierzonego momentu $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$, ale także zależy od wartości momentu wyższego rzędu $\gamma_{2n}(\tilde{\tilde{U}}_p)$:

$$D^2(R) = f(\gamma_n, \gamma_{2n}) .$$

Ponieważ zbiory napięć $\tilde{\tilde{U}}_p$ charakteryzujące się taką samą wartością momentu n-tego rzędu mogą różnić się pod względem należnej im wartości momentu rzędu 2n, należy liczyć się z tym, że mogą one także różnić się pod względem wartości wariancji uzyskiwanego wyniku.

Zależność współczynnika A od momentu $\gamma_{2n}(\tilde{\tilde{U}}_p)$ jest niekorzystna, bowiem jego wartość nie jest na ogół znana (pomiarowi podlega moment $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$).

Celowym wydaje się więc wskazanie w klasie zbiorów $\tilde{\tilde{U}}_p$ o określonej wartości $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$ momentu n-tego rzędu takiego zbioru, w przypadku którego uzyskuje się największą wartość wariancji wyniku pomiaru (przypadek najmniej korzystny) i obliczenie wartości tej wariancji. Na tej podstawie można by obliczyć maksymalną wartość składowej losowej błędu komparacji, z którą należy liczyć się podczas pomiaru momentu o wartości $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$.

Można wykazać, na podstawie identycznego rozumowania jak przeprowadzone w punkcie II/3b), że ze wszystkich zbiorów $\tilde{\tilde{U}}_p$ charakteryzujących się określoną wartością momentu n-tego rzędu, największą wartość współczynnika A, a więc także wariancji i składowej losowej błędu komparacji uzyskuje się wtedy,

gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ zawiera napięcia jednakowe:

$$\tilde{\tilde{U}}_p = \{\underbrace{\tilde{U}_1, \tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_1}_{\text{L razy}}\} . \qquad (3.40)$$

Wynik R (3.23) jest wtedy zmienną losową o wartości oczekiwanej (porównaj (3.24)) równej n-tej potędze wartości należnej realizacji mierzonej $\tilde{U}_1$:

$$E(R) = \gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p) = (U_1)^n . \qquad (3.41)$$

W przypadku, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ zawiera napięcia jednakowe (3.40) prawdziwy jest następujący związek między należnymi mu wartościami momentów rzędu n i 2n:

$$\gamma_{2n}(\tilde{\tilde{U}}_p) = [\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)]^2 . \qquad (3.42)$$

Łatwo to sprawdzić posługując się wzorami (3.37) i (3.38). Po uwzględnieniu związku (3.42) we wzorach (3.36) i (3.39) otrzymuje się zależność do obliczania największej wartości wariancji

$$\max D^2(R)\Big|_{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)}$$

z jaką należy liczyć się podczas pomiaru momentu rzędu n o wartości $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$:

$$\max D^2(R)\Big|_{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)} = \frac{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)\left[U_{w\,max}^n - \gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)\right]}{L} \quad . \tag{3.43}$$

Na podstawie wzorów (3.29) i (3.43) można już określić zależność składowej losowej błędu komparacji od wartości mierzonego momentu:

$$\max\Delta_1\Big|_{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)} = 3\sqrt{\frac{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)\left[U_{w\,max}^n - \gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)\right]}{L}} \tag{3.44}$$

$n = 1, 2, \ldots$

gdzie symbol: $\max\Delta_1\Big|_{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)}$ oznacza maksymalną wartość bezwzględną składowej losowej błędu komparacji, z którą trzeba liczyć się podczas pomiaru momentu n-tego rzędu o wartości $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$.

Warto tu zwrócić uwagę na różnice między wyprowadzonymi wzorami (3.32) i (3.44). Wzór (3.32) służy do obliczania wartości granicznej błędu losowego popełnianego podczas pomiaru momentu n-tego rzędu wtedy, gdy wartość momentu nie jest znana. Stanowi on najgrubsze oszacowanie składowej losowej błędu komparacji. Może być użyteczny zwłaszcza w fazie planowania eksperymentu pomiarowego, gdyż umożliwia określenie liczby L_{min} niezbędnych porównań gwarantujących zmniejszenie granicznego błędu losowego $\Delta_{1\,max}$ poniżej zadanej wartości.

Wzór (3.44) stanowi subtelniejsze oszacowanie błędu losowego Δ_1. Wymaga on jednak znajomości wartości $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$ mierzonego momentu. Może on zatem okazać się przydatnym dopiero w fazie

określania niedokładności wykonanego już pomiaru, gdyż przybliżona wartość momentu podlegającego pomiarowi jest wtedy znana.

Dzieląc obie strony równania (3.44) przez wartość mierzonego momentu otrzymuje się wzór na wartość względną składowej losowej błędu komparacji:

$$\max \delta_1 \Big|_{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)} = \frac{\max \Delta_1 \Big|_{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)}}{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)} = \frac{3}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{U^n_{w\,max}}{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)} - 1} \qquad (3.45)$$

Symbol: $\max \delta_1 \Big|_{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)}$ oznacza maksymalną wartość względnego błędu losowego, z którą należy liczyć się podczas pomiaru momentu o wartości $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$.

Biorąc pod uwagę fakt, że wszystkie realizacje napięcia ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ spełniają z założenia warunek (3.3), wartość momentu n-tego rzędu spełnia następujące nierówności:

$$0 \leqslant \gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p) \leqslant U^n_{w\,max} \,, \qquad (3.46)$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Jeżeli więc oś odciętych opisze się wartościami ilorazu $\frac{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)}{U^n_{w\,max}}$, zaś oś rzędnych unormowanymi wartościami błędu względnego: $\max \delta_1 \Big|_{\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)} \cdot \sqrt{L}$, to wykres zależności (3.45) jest identyczny z krzywą wykreśloną na rys. 2.3.

Jak widać ze wzoru (3.45) i odpowiadającego mu wykresu (rys. 2.3) pomiar opisywanym sposobem wartości momentów $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$,

jest szczególnie niekorzystny przy małych wartościach stosunku $\frac{\nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p)}{U_{w\,max}^n}$.

Wariancja wyniku R maleje co prawda do zera wraz z maleniem wartości ilorazu $\frac{\nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p)}{U_{w\,max}^n}$ (porównaj wzór (3.43)). Maleje ona jednak na tyle wolno, że błąd względny (3.45) rośnie do nieskończoności przy $\nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p) \to 0$. Ta cecha składowej losowej błędu komparacji upodabnia ją do błędu o charakterze addytywnym. Jak widać z wykresu, pomiar momentów o wartościach dających iloraz $\frac{\nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p)}{U_{w\,max}^n} \to 1$ jest szczególnie korzystny, gdyż błąd losowy maleje wtedy do zera. Warto też zauważyć, że punkt: $\frac{\nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p)}{U_{w\,max}^n} = \frac{1}{2}$, któremu odpowiada maksimum wariancji wyniku (porównaj wzór (3.43) nie charakteryzuje się niczym osobliwym na wykresie błędu względnego.

Jak już stwierdzono, różne zbiory napięć $\tilde{\tilde{U}}_p$ charakteryzujące się taką samą wartością momentu n-tego rzędu, nie są równoważne pod względem wariancji wyniku (składowej losowej błędu komparacji) uzyskiwanego w ich przypadku. Fakt ten obrazuje np. równanie (3.39). Spostrzeżenie powyższe może być wyeksploatowane na dwa sposoby.

Pierwszy z nich polega na wskazaniu wśród różnych zbiorów $\tilde{\tilde{U}}_p$ o tej samej wartości odpowiadającego im momentu $\nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$ takiego zbioru, w przypadku którego wariancja wyniku (składowa losowa błędu) jest największa. Pozwala to na oszacowanie "z góry"

wartości składowej losowej błędu podczas pomiaru momentu n-tego rzędu o określonej wartości. Podejście takie zaprezentowano wyżej.

Drugi sposób praktycznego wykorzystania spostrzeżenia, o którym tu mowa polega na zamianie zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$, którego moment $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$ trzeba zmierzyć na inny zbiór napięć: $\tilde{\tilde{U}}'_p$, równoważny zbiorowi $\tilde{\tilde{U}}_p$ pod względem wartości mierzonego momentu, tzn. taki, że:

$$\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p) = \gamma_n(\tilde{\tilde{U}}'_p) , \qquad (3.47)$$

ale gwarantujący mniejszą wartość wariancji wyniku.

W szczególności interesujące jest, jaki powinien być skład zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$, charakteryzującego się określoną wartością $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$ momentu rzędu n i jednocześnie umożliwiający uzyskanie wyniku pomiaru o najmniejszej, możliwej do uzyskania wariancji. Intuicyjna analiza wzorów (3.36) i (2.55) wykonana podobnie jak to zreferowano w podrozdziale II/3b przywodzi do wniosku, że pośród zbiorów napięć $\tilde{\tilde{U}}_p$ charakteryzujących się określoną wartością $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$ momentu rzędu n najkorzystniejsze, z punktu widzenia wartości wariancji uzyskiwanego wyniku, są takie zbiory, które zawierają:

- pewną liczbę k napięć o wartości $U_{w\,max}$; k = 0, 1, 2, ..., L - zależnie od wartości momentu $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$,
- być może jedno napięcie o wartości:

$$0 \leqslant (L \cdot \gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p) - k \cdot U^n_{w\,max})^{\frac{1}{n}} \leqslant U_{w\,max}$$

tak, aby moment rzędu n należny (k + 1) realizacjom napięcia

był równy $\gamma_n(\approx{U}_p)$,

- pozostałe napięcia - równe zeru.

Dokonywanie transpozycji zbioru $\approx{U}_p$ na inny, choć równoliczny z nim, zbiór $\approx{U}'_p$ zapewniający uzyskanie wyniku o mniejszej wariancji, a więc - dokładniejszego, musi odbywać się zgodnie z zasadą (3.47), że oba zbiory mają taką samą wartość tego momentu, który podlega mierzeniu. Spełnienie tego warunku w przypadku pomiaru wartości średniej napięć w zbiorze $\approx{U}_p$ ($n = 1$) jest stosunkowo proste. Jeden z możliwych sposobów dokonywania transpozycji zbioru $\approx{U}_p$ podczas pomiaru wartości średniej opisano w Dodatku 2 .

Zasady transpozycji w przypadku pomiaru wartości średniokwadratowej ($n = 2$) muszą już być zupełnie inne. Chodzi bowiem o zachowanie w zbiorze po transpozycji $\approx{U}'_p$ niezmienionej - w stosunku do zbioru $\approx{U}_p$ - wartości średniokwadratowej. Algorytmy transpozycji zbiorów napięć zapewniające niezmienność różnych momentów (drugiego, trzeciego, ...) nie będą w tej pracy szczegółowo rozważane. Poprzestaniemy na zasygnalizowaniu takiej możliwości i przykładzie z Dodatku 2 .

Składowa systematyczna błędu komparacji

Jeżeli celem pomiaru jest wartość $\gamma_n(\approx{U}_p)$ momentu rzędu n należna wg wcześniej przyjętej skali pomiarowej zbiorowi napięć $\approx{U}_p$, zaś wynik R potraktuje się jako estymator mierzonego momentu, to składową systematyczną Δ_s błędu komparacji można zdefiniować następująco:

$$\Delta_s = E(R) - \gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p) \quad . \tag{3.48}$$

Jeżeli w układzie z rys. 2.1 zastosuje się wzorzec losowy, którego napięcia charakteryzują się potęgową funkcją gęstości prawdopodobieństwa (3.22), a liczba n we wzorze (3.22) i w równaniu (3.23), wg którego oblicza się wynik pomiaru R, będzie równa rzędowi n mierzonego momentu, to - na podstawie wzoru (3.24) - można stwierdzić, że składowa systematyczna Δ_s błędu komparacji ma wartość zerową.

Czas trwania procedury komparacyjnej

Jeżeli celem pomiaru jest określenie wartości któregoś z momentów należnej zbiorowi $\tilde{\tilde{U}} = \{\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_N\}$ napięć mierzonych to jest oczywiste, że każde z napięć tego zbioru musi być co najmniej raz porównane z napięciem wzorcowym. Oznacza to, że czas trwania procedury komparacyjnej omawianego typu, mierzony liczbą wykonanych porównań nie może być krótszy niż N porównań (gdzie N - liczność zbioru $\tilde{\tilde{U}}$).

Powyższe twierdzenie jest prawdziwe przy założeniu, że nie bierze się pod uwagę możliwości zrównoleglania porównań przez zastosowanie kilku detektorów relacji porządku empirycznego $\prec$ oraz kilku losowych wzorców napięcia. Zrównoleglenie takie w przypadku procedur komparacyjnych typu przeglądowego (których celem - przypomnijmy - jest przejrzenie zbioru realizacji wzorcowych pod względem spełniania przez nie określonej relacji empirycznej) jest możliwe.

W przypadku, gdy liczność N zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ jest na tyle mała, że wartość składowej losowej błędu komparacji jaką uzyskałoby się porównując jeden raz każde z napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ z napięciem wzorcowym jest zbyt duża w stosunku do wymagań, każde z napięć mierzonych należy porównać z r napięciami wzorcowymi. Uzyskuje się wtedy sztuczne, r-krotne zwiększenie liczności zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$. Liczba L wykonanych porównań, a tym samym - czas trwania procedury, zależy wówczas od wymaganej dokładności pomiaru.

c) Odchylenia rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od rozkładu założonego

Z poprzedniego podrozdziału wynika, że rodzaj parametru charakterystycznego, którego wartość może zostać zmierzona w wyniku wykonania stochastycznej komparacji pomiarowej typu "większy-mniejszy", ściśle zależy od rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych porównywanych z napięciami ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ w kolejnych taktach procedury. Fakt ten oznacza np. (porównaj punkt III/1b), że zmieniając rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych można zmierzyć wartość dowolnego momentu zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$. Niestety oznacza on także, że w przypadku gdy założenie dotyczące charakteru rozkładu nie będzie ściśle spełnione, wartość oczekiwana wyniku R nie musi być ściśle równa wartości mierzonego momentu $\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$. Istotnym staje się więc problem związku między odchyleniami rozkładu prawdopodobieństwa od założonej, teoretycznej postaci, a niedokładnością uzyskiwanego wyniku pomiaru R.

Istotność tego zagadnienia wynika stąd, że rozkłady prawdopodobieństwa napięć wzorcowych jakich trzeba użyć aby wartość oczekiwana wyniku E(R) była równa któremuś z momentów zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ mają charakter raczej "nienaturalny". "Nienaturalność" dotyczy tu głównie połączenia wymagania ciągłości rozkładu z wymaganiem, by funkcja gęstości prawdopodobieństwa miała postać potęgową.

Szumowe sygnały napięciowe, spotykane w przyrodzie najczęściej mają co prawda ciągłą funkcję gęstości prawdopodobieństwa, ale na ogół jest to rozkład Gaussowski. Zresztą, generatory szumów niezbyt dobrze nadają się na źródła odtwarzające napięcia

wzorcowe ze względu na zależność funkcji gęstości prawdopodobieństwa od temperatury [6].

Uzyskiwanie napięć o kontrolowanej funkcji gęstości jest możliwe, ale na ogół są to źródła algorytmiczne - dostarczają więc napięć pseudolosowych. W przypadku, gdy jest to np. wzorzec zawierający rejestr przesuwny ze sprzężeniem zwrotnym realizującym funkcję logiczną sumy modulo-2 i przetwornik c/a, zbiór odtwarzanych przez niego napięć wzorcowych jest skończony. Oznacza to, że rozkład prawdopodobieństwa ciągu napięć wytwarzanych przez taki wzorzec jest dyskretny, a nie - jak to zakładano w dotychczasowych obliczeniach - ciągły.

Niniejszy punkt poświęcono sprawie uwzględnienia w rachunku błędów popełnianych w ramach stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy", typowych upośledzeń rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych.

Zakłada się obecnie, że w celu zmierzenia wartości momentu rzędu n należnego zbiorowi napięć $\tilde{\tilde{U}}$, wykonano komparację stochastyczną typu "większy-mniejszy". Wzorzec użyty w procedurze komparacyjnej, zamiast charakteryzować się funkcją gęstości prawdopodobieństwa $\gamma(U_w)$ o odpowiedniej postaci potęgowej (wzór (3.22), miał rozkład prawdopodobieństwa określony funkcją gęstości $\gamma^*(U_w)$ różną od $\gamma(U_w)$ [7]. Oznacza to, że rzeczywiste prawdopodobieństwo sukcesu p^{j*} w dowolnym j-tym takcie procedury komparacyjnej (rozumiane jako prawdopodobieństwo zdarzenia, że $\tilde{U}_w^j < \tilde{U}^j$) miało wartość:

$$p^{j*} = \int_{-\infty}^{U^j} \gamma^*(U_w)\,dU_w , \qquad (3.49)$$

zamiast wartości pożądanej:

$$p^j = \int_{-\infty}^{U^j} \gamma(U_w)\, dU_w \,. \qquad (3.50)$$

Ponieważ wzór (3.24) na wartość oczekiwaną wyniku może być napisany w postaci:

$$E(R) = \frac{U^n_{w\,max}}{L} \sum_{j=1}^{L} p^{j*} \,, \qquad (3.51)$$

to należy liczyć się z tym, że nieodpowiedniość funkcji gęstości $\gamma^*(U_w)$ wpłynie, poprzez prawdopodobieństwa sukcesu p^{j*}, na wartość oczekiwaną wyniku R tak, że nie musi ona być równa wartości mierzonego momentu $\gamma_n(\tilde{U}_p)$.

To, że:

$$E(R) \neq \gamma_n(\tilde{U}_p)$$

prowadzi do wniosku, że składowa systematyczna Δ_s (3.48) błędu komparacji nie jest równa zeru.

Ponieważ niezerowa wartość składowej systematycznej błędu komparacji może być spowodowana kilkoma przyczynami, zachodzi potrzeba rozróżniania poszczególnych błędów systematycznych. W rozważanym właśnie przypadku błędu spowodowanego odchylaniem się rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od rozkładu założonego, użyto symbolu: Δ_s^w. Indeks "w" u góry delty wskazuje że źródłem błędu jest niedoskonałość w-zorca. W dalszych częściach tej pracy rozważono błędy systematyczne spowodowane innymi przyczynami.

Wzór na wartość momentu n-tego rzędu można zapisać w postaci:

$$\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p) \stackrel{df}{=} \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}(U^j)^n = \frac{U_{w\,max}^n}{L}\sum_{j=1}^{L}\left(\frac{U^j}{U_{w\,max}}\right)^n \quad . \qquad (3.52)$$

Gdyby funkcja gęstości prawdopodobieństwa napięć wzorcowych miała postać $\gamma(U_w)$ określoną za pomocą wzoru (3.22) (najodpowiedniejszą w przypadku pomiaru wartości momentu n-tego rzędu), wówczas składniki $\left(\frac{U^j}{U_{w\,max}}\right)^n$ byłyby równe pożądanym prawdopodobieństwom sukcesu p^j w kolejnych taktach procedury komparacyjnej (zobacz (3.26)). Wzór (3.52) można więc zapisać tak:

$$\gamma_n(\tilde{\tilde{U}}_p) = \frac{U_{w\,max}^n}{L}\sum_{j=1}^{L} p^j \quad . \qquad (3.52a)$$

Można już teraz przejść do obliczenia wartości składowej systematycznej Δ_s^w błędu komparacji. Uwzględnienie we wzorze definicyjnym (3.48) zależności (3.51) i (3.52a) daje:

$$\Delta_s^w = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} U_{w\,max}^n\,(p^{j*} - p^j) \qquad (3.53)$$

gdzie: Δ_s^w - wartość składowej systematycznej błędu komparacji podczas pomiaru momentu rzędu n zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ spowodowana odbieganiem rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od postaci założonej.

p^{j*}, p^j - rzeczywiste i pożądane (odpowiednio) prawdopodobieństwo sukcesu w j-tym takcie komparacji.

Składniki sumy występującej po prawej stronie wzoru (3.53) odpowiadają składowym systematycznym błędu komparacji związanym z porównywaniem napięcia o wartości U^j ($j = 1, 2, \ldots, L$) z napięciem wzorcowym. Interpretacja fizyczna tych składników jest następująca. Gdyby omawianą procedurę komparacyjną, z użyciem wzorca o rozważanej, "upośledzonej" funkcji gęstości prawdopodobieństwa $\gamma^*(U_w)$, wykonać ze zbiorem $\tilde{\tilde{U}}_p$ składającym się z napięć o jednakowej wartości równej U^j, to wartość oczekiwana wyniku różniłaby się od odpowiedniej n-tej potęgi wartości U^j o:

$$\Delta_s^w(U^j) = U_{w\,max}^n(p^{j*} - p^j), \qquad (3.54)$$

$$n = 1, 2, \ldots .$$

Symbol $\Delta_s^w(\cdot)$ oznacza składową systematyczną błędu komparacji, spowodowaną nieidealnością rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych, podczas pomiaru n-tej potęgi wartości napięcia wskazanej w nawiasie.

Wzór (3.53) można więc zapisać tak:

$$\Delta_s^w = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} \Delta_s^w(U^j) . \qquad (3.55)$$

Jak więc widać, błąd systematyczny podczas pomiaru momentu $\nu_n(\tilde{\tilde{U}}_p)$, spowodowany nieidealnością wzorca jest średnią arytmetyczną błędów systematycznych, które popełniło by się mierząc n-te potęgi poszczególnych napięć $\tilde{U}^j$ ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ w niezależnych procedurach komparacyjnych.

Na podstawie wzorów (3.54), (3.49) i (3.50) otrzymuje się

związek:

$$\Delta_s^w(U^j) = U_{w\,max}^n \int_{-\infty}^{u^j} \left[\gamma^*(U_w) - \gamma(U_w) \right] dU_w \,. \qquad (3.56)$$

Jak wynika z (3.56), błędy $\Delta_s^w(U^j)$ mogą przyjmować zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. W przypadku pomiaru momentu rzędu n należnego zbiorowi napięć $\approx{U}_p$ zawierającego napięcia niejednakowe, poszczególne składowe $\Delta_s^w(U^j)$ błędu systematycznego Δ_s^w spowodowanego "upośledzeniem" rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych, mogą więc wzajemnie znosić się. Jest to właściwość korzystna wtedy zwłaszcza, gdy zbiór $\approx{U}_p$ zawiera takie realizacje napięcia, którym odpowiadają różne (co do znaku i wartości) błędy $\Delta_s^w(U^j)$.

Ze wzorów (3.55) i (3.56) wynika, że obliczenie wartości składowej systematycznej błędu komparacji Δ_s^w wymaga nie tylko znajomości rzeczywistej funkcji gęstości prawdopodobieństwa napięć wzorcowych $\gamma^*(U_w)$, ale także znajomości wartości napięć U^j podawanych do porównania w kolejnych taktach procedury. Ponieważ jednak w rozważanym przypadku procedury komparacyjnej pomiar momentu zbioru odbywa się bez potrzeby pomiaru wartości poszczególnych jego napięć, efektywne skorzystanie ze wzoru (3.55) nie jest możliwe. Jedynym sposobem określenia wartości błędu Δ_s^w, z którym należy liczyć się używając wzorca o danym zaburzeniu funkcji gęstości prawdopodobieństwa, jest oszacowanie "z góry" tego błędu.

Można tu skorzystać z założenia, że:

$$\tilde{0} \lesssim \tilde{U}^j \lesssim \tilde{U}_{w\,max} \,.$$

Gdyby więc znaleźć dla danego wzorca zależność: $\Delta_s^w(U)$ (U - symbol wartości napięcia), a następnie ustalić maksymalną wartość tego błędu w przedziale napięć od 0 do $U_{w\ max}$, to prawdziwe jest następujące oszacowanie (porównaj (3.55)):

$$\Delta_s^w = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} \Delta_s^w(U^j) \leqslant \max_{U \in [0,\ U_{w\ max}]} \Delta_s^w(U) \overset{\text{ozn.}}{=\!=} \Delta_{s\ max}^w \qquad (3.57)$$

Liczba $\Delta_{s\ max}^w$ jest najbardziej pesymistycznym oszacowaniem błędu Δ_s^w. Jest ona jedną z ważniejszych cech wzorca i określa z jaką - w najgorszym przypadku - wartością składowej systematycznej Δ_s^w błędu komparacji należy liczyć się podczas pomiaru wartości momentu rzędu n za pomocą tego wzorca.

Na podstawie zależności $\Delta_s^w(U)$ można też określić inne charakterystyki liczbowe jakości wzorca. Jedną z nich może np. być wartość średnia błędu systematycznego popełnianego podczas pomiaru n-tej potęgi różnych napięć o wartościach z przedziału: $[0,\ U_{w\ max}]$:

$$(\Delta_s^w)_{śr} = \frac{1}{U_{w\ max}} \int_0^{U_{wmax}} \Delta_s^w(U)\, dU \,. \qquad (3.58)$$

Wartość średnia $(\Delta_s^w)_{śr}$ jest cechą wzorca informującą czy ma on skłonność do powodowania błędów systematycznych określonego znaku.

Innym parametrem liczbowym charakteryzującym wzorzec może być wartość średniokwadratowa błędu systematycznego popełnianego podczas pomiarów n-tej potęgi różnych napięć o wartościach z przedziału $[0,\ U_{w\ max}]$:

$$(\Delta_s^w)_{skw} = \frac{1}{U_{w\,max}} \int_0^{U_{wmax}} \left[\Delta_s^w(U)\right]^2 dU \,. \qquad (3.59)$$

Parametr $(\Delta_s^w)_{skw}$ pozwala ocenić błąd systematyczny popełniany podczas pomiarów momentu n-tego rzędu za pomocą określonego wzorca niezależnie od znaku tego błędu.

Podsumowując: najpełniejszą charakterystykę wzorca losowego pod względem składowej systematycznej błędu komparacji stanowi funkcja $\Delta_s^w(U)$. Wzorzec można też scharakteryzować za pomocą trzech cech liczbowych: $\Delta_{s\,max}^w$, $(\Delta_s^w)_{śr}$, $(\Delta_s^w)_{skw}$. Z punktu widzenia analizy błędu pomiaru momentu rzędu n za pomocą określonego wzorca najistotniejsza - bo będąca najbardziej pesymistycznym oszacowaniem błędu Δ_s^w - jest wartość liczbowa $\Delta_{s\,max}^w$. Parametry $(\Delta_s^w)_{śr}$ i $(\Delta_s^w)_{skw}$ mogą natomiast być przydatne np. do porównywania dwóch wzorców służących do pomiaru momentów tego samego rzędu.

Kolejną część tego punktu poświęcono omówieniu kilku charakterystycznych aspektów związanych z faktem, że rzeczywisty rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych jest inny niż założony.

Dla prostoty, obiektem dalszych rozważań jest wzorzec mający służyć do pomiaru wartości średniej w zbiorze napięć - moment pierwszego rzędu. Jak stwierdzono wcześniej, wzorzec taki winien dostarczać napięć o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa (2.10).

Omówione dalej zjawiska związane z faktem, że rzeczywisty rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych różni się od założonego, mogą mieć także miejsce w przypadku wzorców służących do pomiaru momentów wyższych rzędów.

Zakłada się, że użyty wzorzec wytwarza napięcia charakteryzujące się rzeczywistą funkcją gęstości $\gamma^*(U_w)$ np. taką jak to przedstawiono na rys. 3.2a). Jak widać przykładowa rzeczywista funkcja gęstości $\gamma^*(U_w)$ przybiera wartości równe założonym ($\gamma(U_w)$) zaledwie w trzech punktach: U_{w1}, U_{w2}, U_{w3}.

W przypadku użycia omawianego wzorca do pomiaru wartości pojedynczej realizacji napięcia $\tilde{U}_1$, zależność wartości oczekiwanej wyniku $E(R^*)$ od wartości U_1 mierzonego napięcia jest taka, jak to przedstawiono na rys. 3.2b). Symbol R^* oznacza zmienną losową wyniku uzyskiwanego podczas użycia wzorca dostarczającego napięć o rozkładzie $\gamma^*(U_w)$.

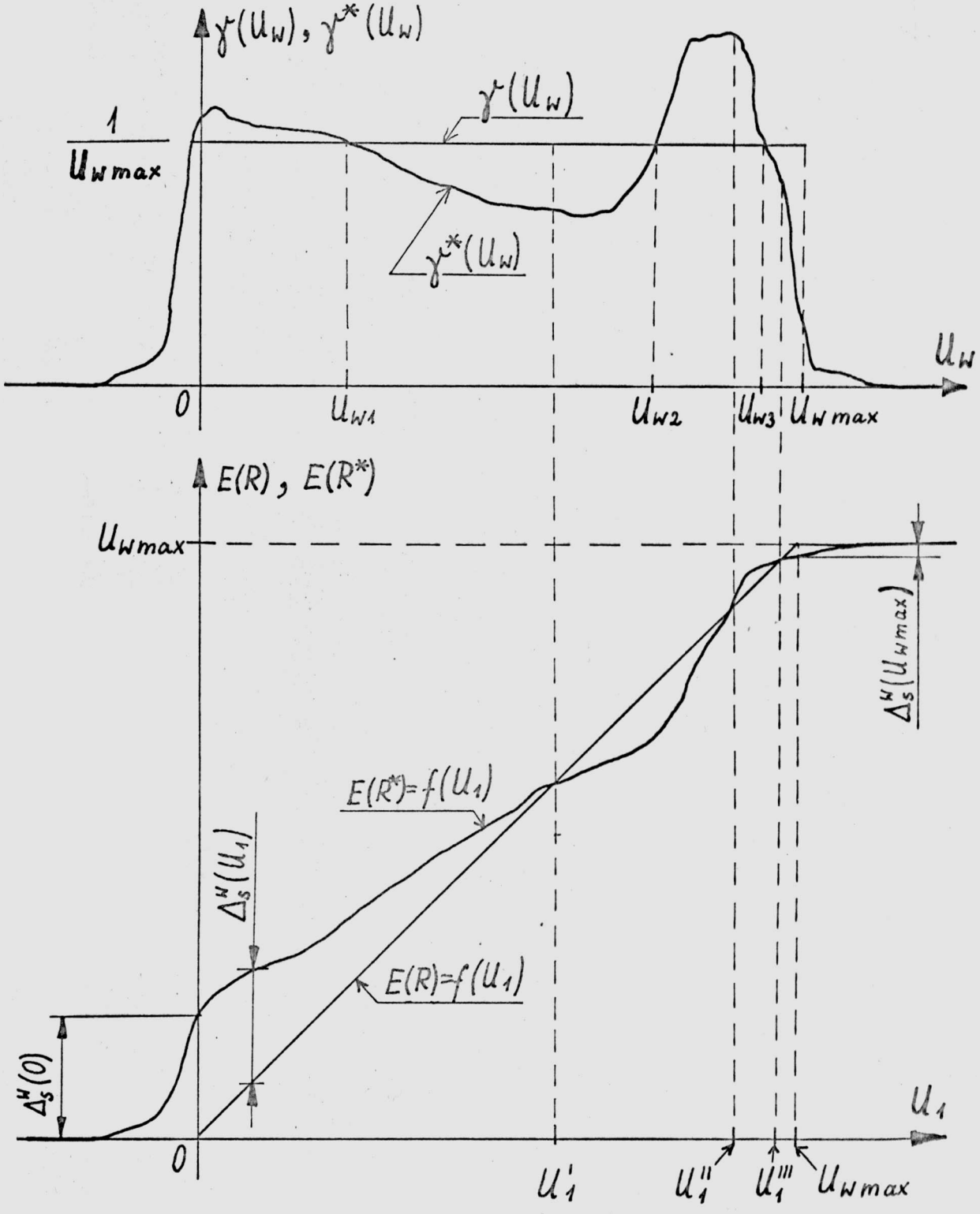
Jak widać z rysunku, tylko w przypadku pomiaru napięć: U_1', U_1'' lub U_1''' wartość oczekiwana wyniku będzie taka jaką otrzymano by gdyby procedurę komparacyjną wykonano z użyciem idealnego wzorca, dostarczającego napięć o rozkładzie $\gamma(U_w)$. Wartości napięć charakteryzujące się powyższą właściwością przyjęto tu nazywać w skrócie **punktami wskazań poprawnych wzorca.**

Punkty takie opisuje równanie:

$$\int_{-\infty}^{U_1} \gamma^*(U_w)\, dU_w = \int_{-\infty}^{U_1} \gamma(U_w)\, dU_w , \qquad (3.60)$$

gdzie: U_1 - punkt wskazań poprawnych wzorca.

Analiza wzoru (3.60), a także porównanie rysunków 3.2a i b) pouczają, że wartości napięć, w których funkcje gęstości $\gamma^*(U_w)$ i $\gamma(U_w)$ przybierają identyczne wartości nie muszą być wcale punktami wskazań poprawnych wzorca ani też na odwrót.



Rys. 3.2. a) Funkcje gęstości prawdopodobieństwa napięć wzorcowych: założona $\gamma(U_w)$ i rzeczywista $\gamma^*(U_w)$ (przykładowa).

b) Zależności wartości oczekiwanych wyniku E(R) i $E(R^*)$ od wartości U_1 mierzonego napięcia, odpowiadające funkcjom gęstości prawdopodobieństwa napięć wzorcowych: założonej $\gamma(U_w)$ oraz rzeczywistej $\gamma^*(U_w)$.

Z równania (3.60) wynika również, że gdyby rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych opisywać za pomocą dystrybuanty, a nie funkcji gęstości, to punkty wskazań poprawnych pokrywałyby się z wartościami napięć wzorcowych, w przypadku których dystrybuanty założonego i rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa przybierają wartości identyczne.

Ważną formą upośledzenia rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych jest niezerowa wartość funkcji gęstości $\gamma^{*}(U_w)$ w przypadku napięć $U_w < 0$ i $U_w > U_{w\,max}$.

Pierwsza z w/w form zaburzenia rozkładu powoduje, że składowa systematyczna błędu komparacji w przypadku pomiaru napięcia zerowego $\Delta_s^w(0)$ jest dodatnia. Błąd systematyczny może także przyjmować niezerowe wartości dodatnie w pewnym zakresie napięć: od zera do pierwszego punktu wskazań poprawnych (na rys. 3.2b: U_1'). Jest to przypadek szczególnie niekorzystny, bowiem niezerowa wartość systematycznego błędu bezwzględnego odniesiona do małych wartości napięcia mierzonego prowadzi do znacznych wartości błędu względnego.

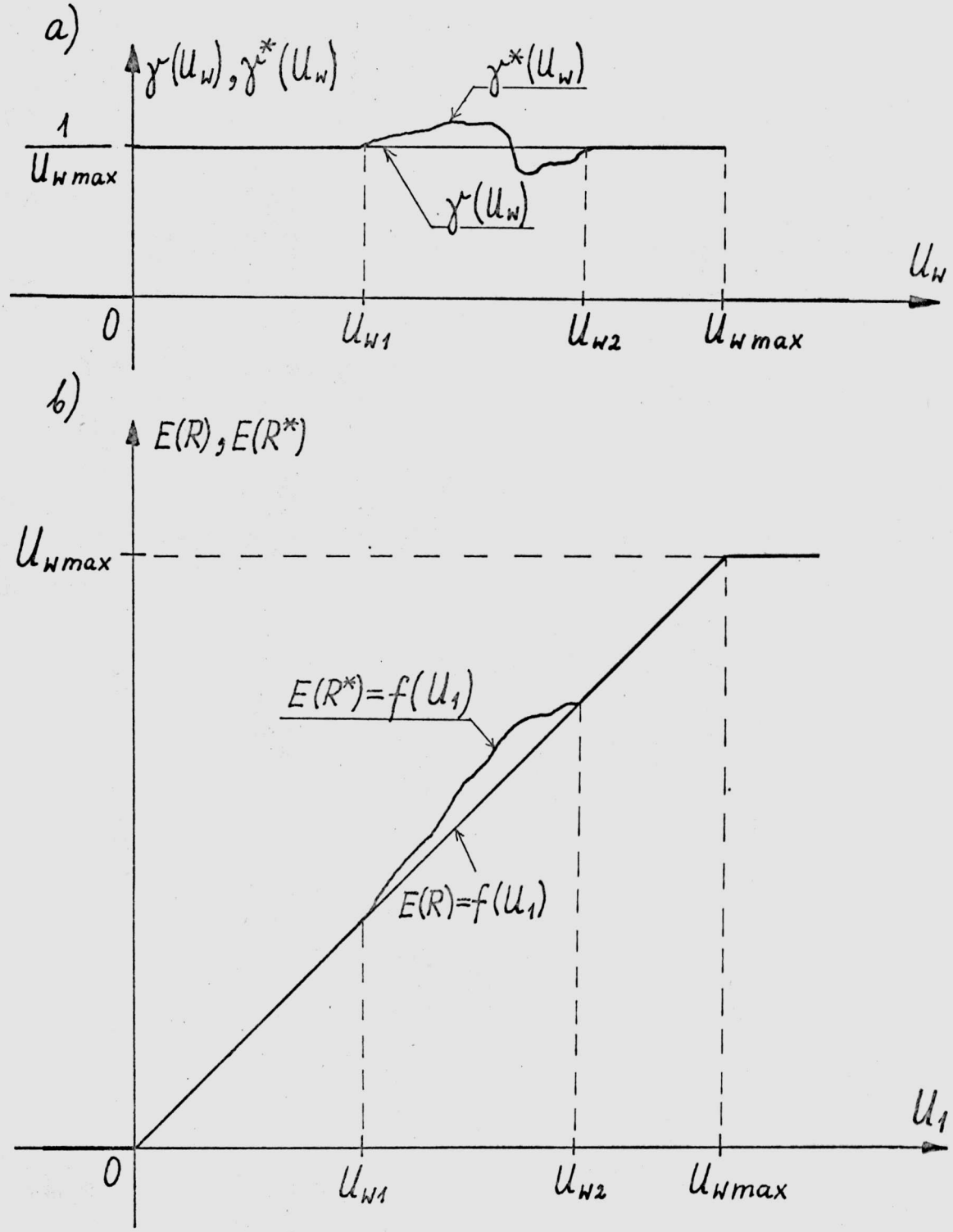
Niezerowa wartość funkcji gęstości $\gamma^*(U_w)$ gdy $U_w > U_{w\,max}$, prowadzi - w przypadku pomiaru napięcia o wartości $U_{w\,max}$ - do ujemnego błędu systematycznego.

Kolejną, interesującą właściwość zaburzeń rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych można sformułować w postaci następującego spostrzeżenia:

Zaburzenia funkcji gęstości napięć wzorcowych między punktami wskazań poprawnych m a j ą c h a r a k t e r l o k a l n y, tzn. fakt, że $\gamma^*(U_w) \neq \gamma(U_w)$ w przedziale napięć między dwoma punktami wskazań poprawnych nie ma zupełnie wpływu na dokładność komparacji w przypadku pomiaru napięć o wartościach leżących poza w/w przedziałem.

Sens tego twierdzenia zilustrowano na rys. 3.3. Jak widać fakt zaburzenia funkcji gęstości prawdopodobieństwa między punktami U_{w1} i U_{w2}, które są w tym przypadku punktami wskazań poprawnych, nie wpływa na dokładność komparacji w przypadku pomiaru napięć o wartościach leżących poza przedziałem $[U_{w1}, U_{w2}]$.

Lokalne oddziaływanie zaburzeń funkcji gęstości prawdopodobieństwa między punktami wskazań poprawnych wynika z równania (3.60) definiującego te ostatnie.



Rys. 3.3. a) Przykład zaburzenia lokalnego funkcji gęstości prawdopodobieństwa napięć wzorcowych.

b) Zależność wartości oczekiwanej $E(R^*)$ wyniku od wartości U_1 mierzonego napięcia, odpowiadająca funkcji gęstości $\gamma^*(U_w)$ z rys. a).

Przykłady oddziaływania na stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" typowych zaburzeń rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych

Wzorzec dyskretny

W dotychczasowych rozważaniach zakładano, że wzorzec może odtwarzać każdą realizację napięcia z przedziału $[\tilde{0},\ \tilde{U}_{w\,max}]$. W praktyce jednak często występują wzorce odtwarzające jedynie skończoną liczbę realizacji napięcia należących do określonego przedziału. Są to wzorce o wartościach dyskretnych, nazywane tu skrótowo wzorcami dyskretnymi. Ponadto można sobie wyobrazić, że realizacje wzorcowe nie są rozłożone równomiernie w przedziale $[\tilde{0},\ \tilde{U}_{w\,max}]$. W praktyce jednak najczęściej spotyka się takie wzorce, które mogą odtwarzać n napięć równomiernie rozłożonych w powyższym przedziale.

Zbiór $\tilde{\tilde{U}}_w$ napięć wzorcowych ma wtedy postać:

$$\tilde{\tilde{U}}_w = \left\{ \tilde{0},\ \tilde{\Delta U}_w,\ 2\cdot\tilde{\Delta U}_w,\ \ldots,\ (n-1)\cdot\tilde{\Delta U}_w \right\}, \qquad (3.61)$$

gdzie: n - liczność zbioru napięć wzorcowych.

Uwaga: symbolu "n" używa się w tej pracy także do oznaczania rzędu mierzonego momentu. Kontekst wskazuje każdorazowo, o które ze znaczeń chodzi.

Symbol $\tilde{\Delta U}_w$ oznacza ziarno wzorca, zaś jego k-krotność: $k\cdot\tilde{\Delta U}_w$ (k - liczba naturalna) definiuje zależność (1.10).

W przypadku zastosowania wzorca typu dyskretnego w stochas-

tycznej komparacji pomiarowej, realizacje porównywane z napięciami ze zbioru $\approx{U}_p$ losuje się ze zbioru $\approx{U}_w$ (3.61).

Prawdopodobieństwa wylosowania ze zbioru $\approx{U}_w$ poszczególnych realizacji określa rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych:

$$P(\sim{U}_{wi}) = p_{wi} , \qquad i = 1, 2, \ldots, n , \tag{3.62}$$

gdzie: $\sim{U}_{wi}$, $i=1,2,\ldots,n$ - realizacje napięcia, które może odtwarzać wzorzec,

p_{wi} - prawdopodobieństwo tego, że w wyniku losowania napięcia ze zbioru $\approx{U}_w$ zostanie wybrana realizacja $\sim{U}_{wi}$.

Prawdopodobieństwa p_{wi} muszą spełniać równanie:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{wi} = 1 \tag{3.63}$$

Przez odpowiedni dobór liczb p_{wi} można kreować wzorce o różnych rozkładach prawdopodobieństwa. W szczególności może to być wzorzec o jednakowych prawdopodobieństwach pojawiania się każdego z napięć:

$$p_{wi} = \frac{1}{n} , \qquad i = 1, 2, \ldots, n . \tag{3.64}$$

W przypadku, gdy wzorzec dyskretny łączy w sobie cechę równomiernego rozmieszczenia odtwarzanych przez niego realizacji napięcia (3.61) i cechę jednakowego prawdopodobieństwa wylosowania każdej z nich (3.64), to można powiedzieć, że napięcia przez niego wytwarzane mają dyskretny, równomierny rozkład prawdopodo-

bieństwa. Jest to rozkład istotnie różniący się od rozkładu równomiernego ciągłego zdefiniowanego za pomocą stałej funkcji gęstości (2.10). Można więc zadać pytanie jak zmienią się podstawowe właściwości metrologiczne stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy" w przypadku zastosowania w niej wzorca dyskretnego zamiast ciągłego.

Problem powyższy rozważono w tej pracy na przykładzie wzorca wytwarzającego napięcia o rozkładzie równomiernym. Z efektami opisanymi dalej należy liczyć się także w przypadku zastąpienia wzorca charakteryzującego się rozkładem ciągłym opisanym za pomocą potęgowej funkcji gęstości (3.22) wzorcem dyskretnym o odpowiednio "potęgowej" zależności prawdopodobieństw p_{wi} od U_{wi} (3.62).

Zakłada się, że wzorzec w układzie realizującym stochastyczną komparację pomiarową typu "większy-mniejszy" (rys. 2.1) ma następujące właściwości:

- może odtwarzać realizacje napięcia ze zbioru n-elementowego (3.61),
- znana jest wartość $U_{w\,max}$ należna realizacji największej:

$$(n-1) \cdot \tilde{\Delta} U_w \doteq \tilde{U}_{w\,max} \quad . \tag{3.65}$$

- realizacje wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$ podawane do porównania z realizacjami ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ w kolejnych taktach procedury komparacyjnej są losowane ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ wg rozkładu prawdopodobieństwa określonego za pomocą wzoru (3.64),
- losowania napięć wzorcowych w kolejnych taktach są niezależne.

Pozostałe założenia dotyczące elementów układu z rys. 2.1 oraz jego działania są bez zmian (porównaj podrozdział II/1).

Przyjęto, że w kolejnych taktach j = 1, 2, ..., L procedury komparacyjnej z napięciami wzorcowymi porównuje się tę samą realizację napięcia $\tilde{U}_1$.

Jeżeli wynik pomiaru oblicza się wg wzoru (2.5):

$$R = \frac{L_2}{L_1} \cdot U_{w\,max} ,$$

gdzie L_2 i L_1 oznaczają stany końcowe odpowiednich liczników, to wynik ten jest - podobnie jak poprzednio - zmienną losową. Wynika to z faktu, że zmienną losową jest stan końcowy licznika L_2.

Przypomnijmy, że stan licznika $\tilde{L}_2$ jest zwiększany o jeden w przypadku, gdy napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ wylosowane w j-tym takcie procedury jest mniejsze od napięcia $\tilde{U}_1$. Zdarzenie powyższe nazwano tu sukcesem. Biorąc pod uwagę to, że rozważa się obecnie wzorzec dyskretny, prawdopodobieństwo sukcesu wynosi:

$$p = \frac{k}{n} , \qquad (3.66)$$

gdzie: n - liczba stanów napięcia, które może odtwarzać wzorzec,

k - liczba naturalna spełniająca nierówności:

$$(k-1) \cdot \tilde{\Delta U}_w < \tilde{U}_1 \leq k \cdot \tilde{\Delta U}_w , \quad k = 1,2,\ldots,n-1 . \qquad (3.67)$$

Obliczenie liczby k, o której mowa w zależnościach (3.66) i (3.67) może odbyć się na podstawie wzoru:

$$k = 1 + \left[\frac{U_1}{\Delta U_w} \right] \tag{3.68}$$

gdzie: ΔU_w - wartość odpowiadająca ziarnu wzorca $\widetilde{\Delta U}_w$, a symbol: $[\cdot]$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą od tej w symbolu nawiasu [8].

Jeśli zauważy się, że (porównaj (3.65)):

$$\Delta U_w = \frac{U_{w\,max}}{n - 1} , \tag{3.69}$$

a następnie uwzględni we wzorze (3.66) związki (3.68) i (3.69), to otrzyma się zależność prawdopodobieństwa sukcesu p w dowolnym takcie procedury komparacyjnej od wartości U_1 mierzonego napięcia oraz od parametrów wzorca $U_{w\,max}$ i n:

$$p = \frac{1 + \left[\frac{U_1}{U_{w\,max}} (n-1) \right]}{n} . \tag{3.70}$$

Przy wcześniejszych założeniach, zmienna losowa stanu końcowego licznika L_2 ma rozkład Bernoulliego z parametrami p i L (L - liczba porównań wykonanych w ramach procedury). Jej wartość oczekiwana wynosi (2.16):

$$E(L_2) = L \cdot p$$

zaś wariancja (2.19):

$$D^2(L_2) = L \cdot p \cdot (1-p) .$$

Uwzględnienie wzorów (2.15), (2.16) i (3.70) w zależności (2.5) na wynik pomiaru prowadzi do związku (stan licznika L_1 po zakończeniu procedury wynosi L):

$$E(R) = U_{w\ max}\ \frac{1 + \left[\frac{U_1}{U_{w\ max}}(n-1)\right]}{n} \qquad (3.71)$$

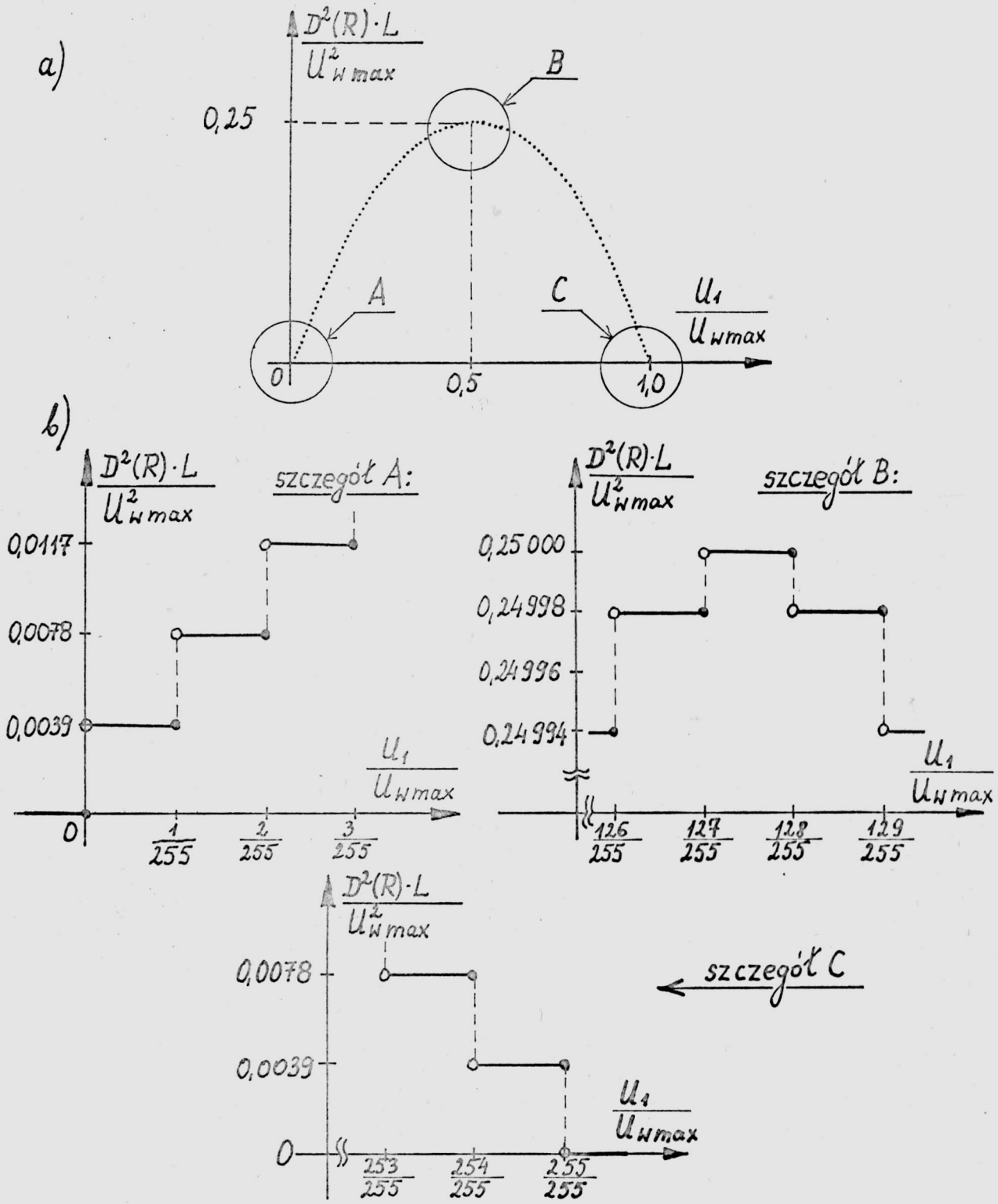
Wzór na wariancję wyniku otrzymuje się uwzględniając w (2.5) zależności: (2.18), (2.19) i (3.70):

$$D^2(R) = \frac{U^2_{w\ max}}{L} \cdot \frac{1+\left[\frac{U_1}{U_{w\ max}}(n-1)\right]}{n}\left\{1 - \frac{1+\left[\frac{U_1}{U_{w\ max}}(n-1)\right]}{n}\right\}, \qquad (3.72)$$

gdzie symbol: $[\cdot]$ ma znaczenie identyczne jak we wzorze (3.68) zaś $\{\ \}$ oraz ( ) - zwykłe nawiasy.

Związek (3.72) wyraża zależność wariancji wyniku $D^2(R)$ od wartości U_1 mierzonego napięcia. Charakter tej zależności jest raczej trudny do uchwycenia na podstawie zawiłego wzoru (3.72). Przedstawiono ją więc na rysunku 3.4.

Jak widać, przy dużych n (n - liczba stanów napięcia odtwarzanych przez wzorzec) wykres z rysunku 3.4a) ma kształt zbliżony do tego, który uzyskano w przypadku wzorca ciągłego (rys. 2.2).



Rys. 3.4. Zależność unormowanej wariancji wyniku $\frac{D^2(R)\cdot L}{U^2_{W\,max}}$ od unormowanej wartości napięcia mierzonego $\frac{U_1}{U_{W\,max}}$ w przypadku zastosowania wzorca dyskretnego o n = 256 stanach:

a) ogólny charakter zależności,

b) szczegóły.

Jedyna różnica polega tu na tym, że w przypadku zastosowania wzorca dyskretnego wariancja zmienia się w sposób skokowy (rys. 3.4b).

Warto zwrócić uwagę na to, że krzywa na rys. 3.4 jest lewostronnie ciągła w przedziale $U_1 \in [0, U_{w\,max}]$. Ta jej cecha związana jest z założeniem, że za sukces uważa się zdarzenie, gdy: $\tilde{U}_w^j \lesssim \tilde{U}_1$. Modyfikacja tego założenia polegająca na uznawaniu za sukces przypadków, gdy:

$$\tilde{U}_w^j \lessapprox \tilde{U}_1 \tag{3.73}$$

powoduje, że krzywa z rys. 3.4 staje się prawostronnie ciągła. W przypadku, gdy wzorzec dostarcza napięć o ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa taka zmiana założenia nie miałaby oczywiście znaczenia.

Uwzględnienie wzoru (3.72) w zależności (3.29) definiującej składową losową Δ_1 błędu komparacji umożliwia zbadanie funkcji $\Delta_1 = f(U_1)$. Porównując kształty krzywych z rys. 3.4 i 2.2 można jednak przewidzieć, że w przypadku stosowania wzorca dyskretnego (3.61) składowa losowa błędu komparacji zachowuje się zupełnie podobnie jak to miało miejsce w przypadku wzorca ciągłego. Wartość graniczna $\Delta_{1\,max}$ błędu losowego będzie miała taką samą wartość jak to opisuje wzór (2.24).

Podobnie charakter zależności losowego błędu względnego δ_1 od wartości U_1 mierzonego napięcia będzie podobny do przedstawionego na rys. 2.3. W przypadku wzorca dyskretnego zależność $\delta_1 \cdot \sqrt{L} = f(\frac{U_1}{U_{w\,max}})$ będzie jedynie miała przebieg nieciągły -

schodkowy.

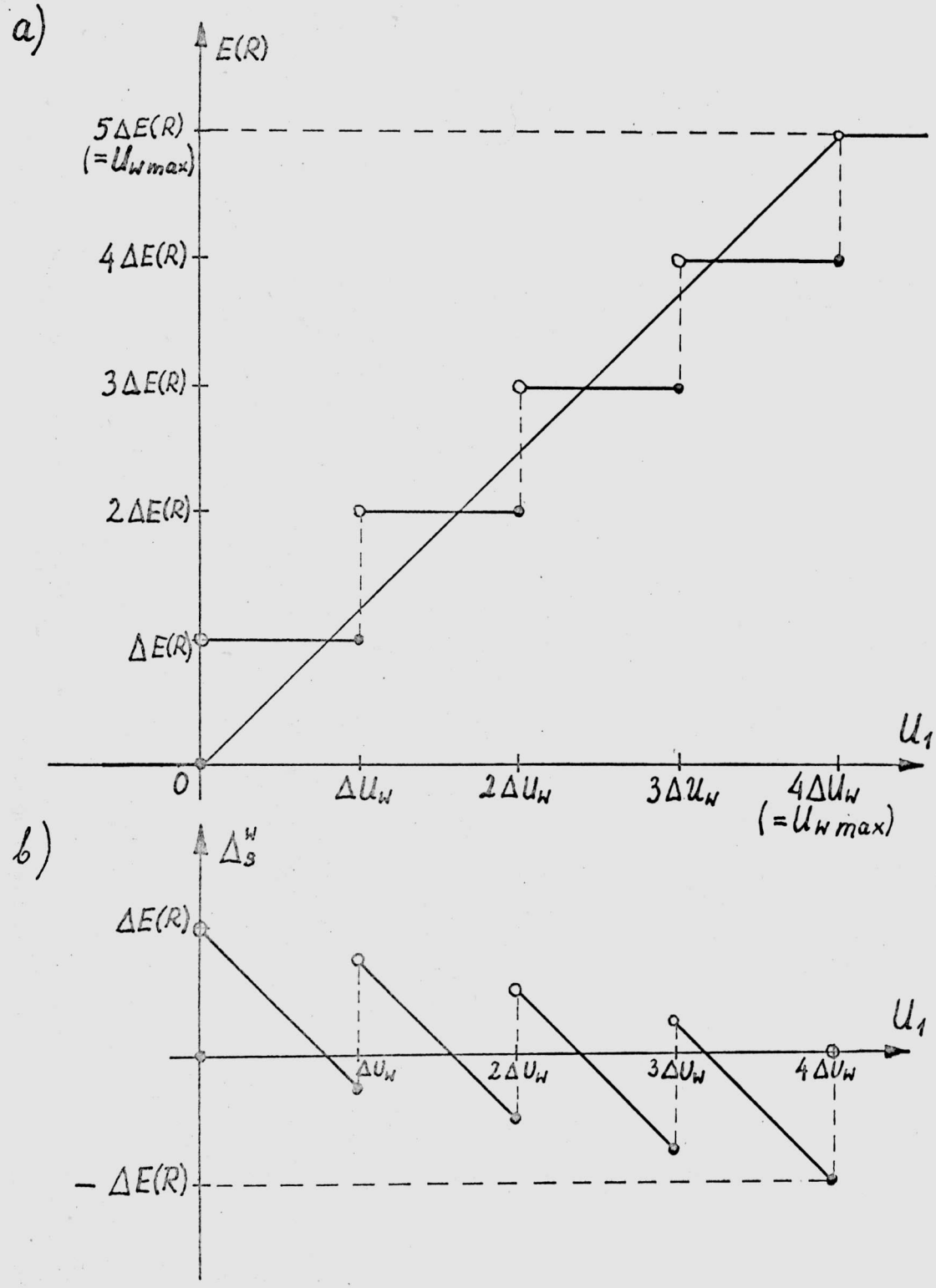
O ile dyskretność zastosowanego wzorca nie wpływa w sposób istotny na wartość składowej losowej Δ_1 błędu komparacji, o tyle wpływ na wartość składowej systematycznej Δ_s^w jest już wyraźny.

Jak stwierdzono w punkcie II/1a, zastosowanie wzorca wytwarzającego napięcia wg ciągłego i równomiernego rozkładu prawdopodobieństwa gwarantuje, że:

$$E(R) = U_1$$

(por. zależność (2.17)). Oznacza to, że wartość składowej systematycznej błędu komparacji wynosi, zgodnie ze wzorem definicyjnym (2.29), zero.

W przypadku wzorca dyskretnego, wartość oczekiwana wyniku E(R) nie jest na ogół równa wartości należnej mierzonemu napięciu (porównaj wzór (3.71)). Oznacza to, że składowa systematyczna ma w tym przypadku wartość różną od zera. W celu określenia zależności błędu Δ_s^w od wartości U_1 mierzonego napięcia, warto najpierw zbadać jak wartość oczekiwana wyniku zależy - w przypadku zastosowania wzorca dyskretnego - od wartości U_1. Analityczny opis tej zależności stanowi wzór (3.71). Rysunek 3.5a) zawiera wykres wzoru (3.71) w przypadku gdy n = 5. Założenie, że wzorzec odtwarza tylko pięć stanów napięcia poczyniono w celu zwiększenia poglądowości rysunku.



Rys. 3.5. a) Zależność wartości oczekiwanej wyniku E(R) od wartości U_1 mierzonego napięcia w przypadku posługiwania się wzorcem dyskretnym odtwarzającym pięć stanów napięcia (n = 5).

b) Odpowiadająca przypadkowi a) zależność składowej systematycznej Δ_s^W błędu komparacji od wartości mierzonego napięcia.

Jak widać na rysunku, wartość oczekiwana wyniku zmienia się skokowo ze wzrostem napięcia mierzonego. Interesującą cechą tej zależności jest to, że ziarno zmian wartości oczekiwanej wyniku $\Delta E(R)$ jest mniejsze niż ziarno wzorca ΔU_w. Istotnie, zgodnie ze wzorcem (3.71) ziarno zmian wartości oczekiwanej wyniku wynosi

$$\Delta E(R) = \frac{U_{w\,max}}{n} , \tag{3.74}$$

zaś ziarno zmian napięcia wzorcowego (porównaj (3.65)):

$$\Delta U_w = \frac{U_{w\,max}}{n - 1} . \tag{3.75}$$

Ostatnią zależność można uzasadnić następującą analogią geometryczną: n punktów umieszczonych na prostej wyznacza na niej (n-1) odcinków.

Na podstawie wzorów (3.74) i (3.75) otrzymuje się:

$$\Delta E(R) = \frac{n-1}{n} \Delta U_w , \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{3.76}$$

Różnica między $\Delta E(R)$ i ΔU_w jest istotna w przypadku gdy n jest nieduże. Gdy $n \longrightarrow \infty$, ziarna zmian wielkości wzorcowej i wartości oczekiwanej wyniku stają się równe i maleją asymptotycznie do zera. W przypadku gdy np. n = 256, różnica obu ziaren wynosi około 0,4 %.

Jeżeli odejmie się od prawej strony równości (3.71) wartość U_1 mierzonego napięcia to, uzyskana równica jest równa, zgodnie ze wzorem definicyjnym (2.29), wartości błędu systematycznego Δ_s^w.

Uzyskany tą drogą opis analityczny zależności $\Delta_s^w(U_1)$ jest jednak mało komunikatywny, a jego badanie - żmudne. Bardziej efektywnym sposobem uzyskania poglądu na charakter zmienności funkcji $\Delta_s^w(U_1)$ wydaje się wrysowanie na wykresie $E(R) = f(U_1)$ prostej $E(R) = U_1$ i wykonanie na tej podstawie wykresu poszukiwanej zależności błędu systematycznego Δ_s^w od wartości U_1 mierzonego napięcia. Wykres przedstawiony na rys. 3.5b) uzyskano właśnie w taki sposób.

Jak widać na rysunku, wartość modułu błędu systematycznego popełnianego podczas pomiaru, z użyciem wzorca dyskretnego, wartości napięcia U_1 spełnia nierówność:

$$\left|\Delta_s^w\right| \leqslant \Delta E(R) = \frac{U_{w\,max}}{n} . \qquad (3.77)$$

Wartość graniczna błędu systematycznego wynosi więc:

$$\Delta_{s\,max}^w = \frac{U_{w\,max}}{n} . \qquad (3.78)$$

Dyskretne wzorce losowe charakteryzują się tym, w stosunku do wzorców dostarczających napięć o rozkładzie ciągłym, że składowa systematyczna błędu komparacji z jaką należy liczyć się w przypadku ich użycia jest różna od zera. Wartość graniczna $\Delta_{s\,max}^w$ błędu systematycznego jest odwrotnie proporcjonalna do liczby n stanów napięcia odtwarzających przez wzorzec.

W z o r z e c d y s k r e t n y o r o z m y t y c h p r a w d o p o d o b i e ń s t w a c h p o j a w i a n i a s i ę p o s z c z e g ó l n y c h s t a n ó w

W poprzednim przykładzie rozważono wpływ wzorca idealnie dyskretnego na właściwości stochastycznej procedury komparacyjnej typu "większy - mniejszy". "Idealna dyskretność" oznacza tu, że napięcia $\tilde{U}_w^j$ pojawiające się w kolejnych taktach procedury na zaciskach wzorca są dokładnie napięciami wylosowanymi ze zbioru (3.61).

W praktyce jednak wzorce z reguły odtwarzają napięcia, które nie są dokładnie równe którejś z powyższych krotności kwantu $\tilde{\Delta U}_w$, lecz fluktuują wokół tych dyskretnych realizacji. Wzorzec, który z niezerowym prawdopodobieństwem może odtwarzać nie tylko napięcia ze zbioru dyskretnego (3.61), ale takie napięcia o wartościach pośrednich nazwano tu skrótowo **w z o r c e m d y s k r e t n y m r o z m y t y m**.

Interesująca byłaby odpowiedź na pytanie, jakie właściwości ma procedura komparacyjna typu "większy - mniejszy" w przypadku zastosowania w realizującym ją układzie wzorca dyskretnego rozmytego. Szczególnie istotna byłaby tu informacja nt. czy rozmycie wzorca dyskretnego prowadzi do zmian wartości granicznej $\Delta_{s\,max}^{w}$ błędu systematycznego w stosunku do sytuacji, gdy wzorzec jest idealnie dyskretny.

Rozwiązanie powyższego zagadnienia wymaga jednak uprzedniego sformułowania modelu wzorca dyskretnego rozmytego.

Wydaje się, że najbardziej ogólny będzie w tym przypadku opis rozkładu prawdopodobieństwa napięć losowanych przez wzorzec

za pomocą ciągłej funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Założono więc, że napięcia wzorcowe charakteryzują się funkcją gęstości prawdopodobieństwa $\gamma(U_w)$ taką, jak to przedstawiono na rys. 3.6a).

Przyjęto, że:

a) Rozmycie każdego z napięć ze zbioru (3.61) charakteryzuje się funkcją gęstości prawdopodobieństwa $g(U_w)$, która ma tę właściwość, że jest równa zeru, gdy moduł jej argumentu przekracza określoną wartość d: $g(U_w) \equiv 0$, gdy $|U_w| > d$

b) Charakter rozmycia każdej wartości dyskretnej $k \cdot \Delta U_w$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ jest taki sam, tzn. funkcja gęstości $\gamma(U_w)$ składa się z n identycznych funkcji $g(U_w - k \cdot \Delta U_w)$ opisujących rozmycie poszczególnych stanów wzorca.

c) Funkcja $g(U_w - k \cdot \Delta U_w)$ opisująca rozmycie realizacji wzorcowej $k \cdot \widetilde{\Delta U_w}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, jest symetryczna względem wartości $U_w = k \cdot \Delta U_w$. Inaczej: funkcja $g(U_w)$ jest parzysta.

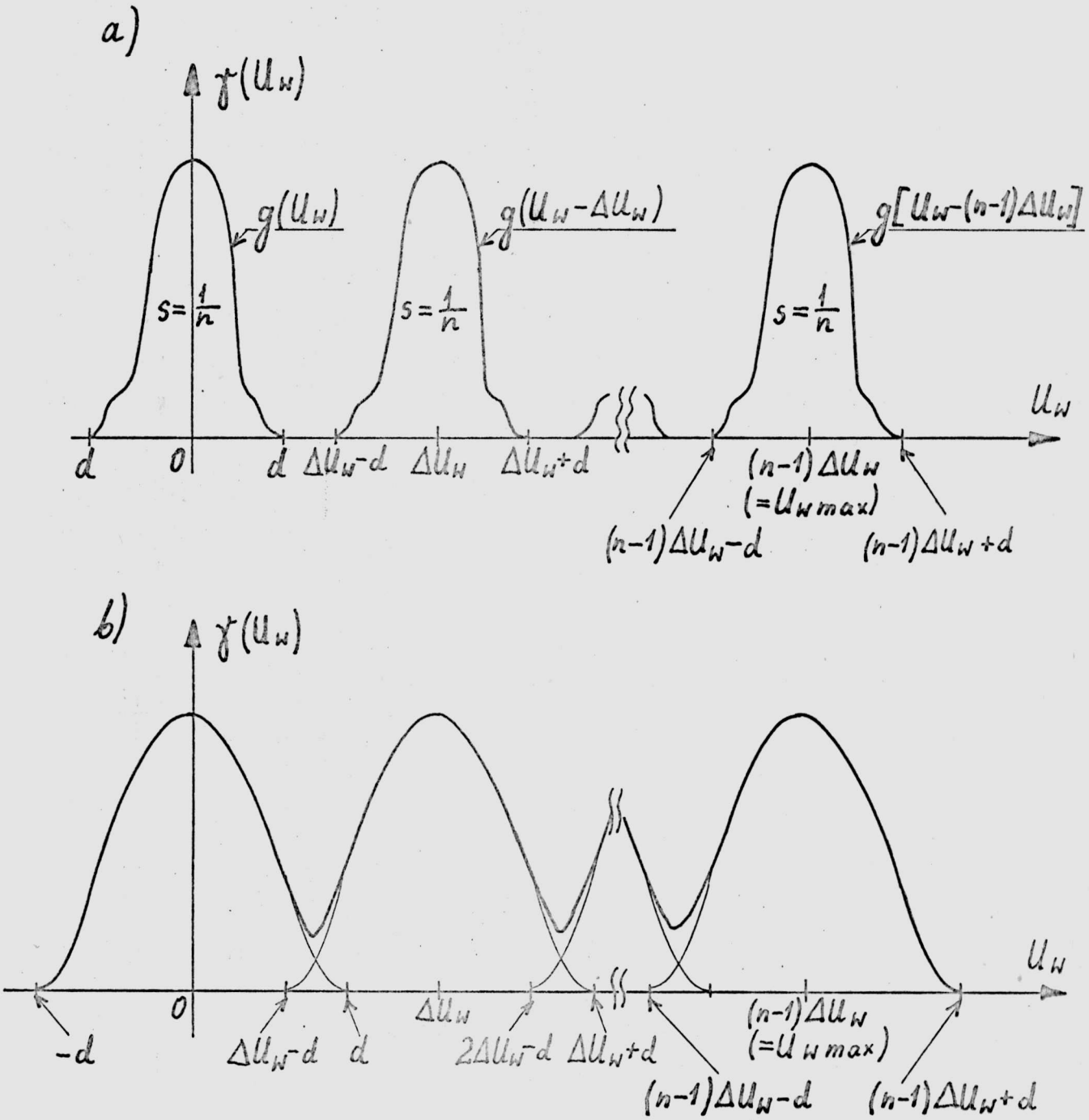
Kształt "funkcji rozmycia" $g(U_w)$ może być dowolny. Ważne jest jednak by była ona całkowalna w sensie Riemanna. Przy powyższych założeniach, z wymagania by:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(U_w)\, dU_w = 1$$

wynika, że:

$$\int_{-d}^{+d} g(U_w)\, dU_w = \frac{1}{n} \qquad (3.79)$$

d) Podobnie jak wcześniej założono również, że losowania napięć



Rys. 3.6. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa napięć wzorcowych wytwarzanych przez wzorzec dyskretny rozmyty:

a) przypadek gdy $0 < d \leqslant \frac{\Delta U_w}{2}$,

b) przypadek gdy $\frac{\Delta U_w}{2} < d \leqslant \Delta U_w$.

wzorcowych w kolejnych taktach procedury komparacyjnej wg opisanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa $\gamma(U_w)$ są niezależne.

Znaczenie ostatniego założenia jest następujące: Wytwarzanie napięć o funkcji gęstości $\gamma(U_w)$ takiej jak na rys. 3.6 można traktować jako wynik wykonania dwóch doświadczeń:

- wylosowania napięcia $k \cdot \Delta U_w$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) ze zbioru dyskretnego (3.61),
- nałożenie na wylosowane napięcie o wartości $k \cdot \Delta U_w$, fluktuacji wylosowanej z przedziału $[-d, d]$ wg funkcji gęstości prawdopodobieństwa $n \cdot g(U_w)$ (współczynnik n wynika stąd, że całka z funkcji gęstości musi być równa jeden).

W doświadczeniach powyższych niezależne muszą być zarówno losowania pierwszej i drugiej grupy wykonywane w kolejnych taktach komparacji, jak i wynik losowania pierwszej grupy nie może wpływać na losowanie wartości fluktuacji.

Przyjęty tutaj model rozmycia wzorca dyskretnego charakteryzuje się dwiema ważnymi właściwościami.

Po pierwsze: Fakt, że "masa prawdopodobieństwa" nie jest skupiona tylko w punktach określonych wartościami ze zbioru (3.61), ale rozłożona także w otoczeniach tych punktów powoduje, że funkcja gęstości $\gamma(U_w)$ jest, wewnątrz przedziału wartości $[0, U_{w\,max}]$, bardziej zbliżona do funkcji stałej o wartości $\frac{1}{U_{w\,max}}$ (porównaj wzór (2.10)) niż miało to miejsce w przypadku, gdy wzorzec był idealnie dyskretny. Jest to cecha pozytywna rozmycia i wydaje się, że może ona wpływać na zmniejszenie wartości granicznej $\Delta^w_{s\,max}$ błędu systematycznego komparacji.

Po drugie: Z rozmyciem prawdopodobieństwa wylosowania realizacji wzorcowych: $\tilde{0}$ i $\tilde{U}_{w\ max}$ wiąże się fakt wypadania części "masy prawdopodobieństwa" poza przedział wartości $[0,\ U_{w\ max}]$. Ten efekt związany z rozmyciem należy zaliczyć do niekorzystnych, gdyż zapewne wpływa on na zwiększanie $\Delta^{w}_{s\ max}$.

W przypadku gdy $0 < d \leqslant \Delta U_w$ prawdopodobieństwa wylosowania napięć wzorcowych o wartościach mniejszych od 0 oraz większych od $U_{w\ max}$ są równe i wynoszą po $\frac{1}{2n}$ (porównaj rys. 3.6a). Gdy zaś $d > \Delta U_w$, "masa prawdopodobieństwa" leżąca poza przedziałem $[0,\ U_{w\ max}]$ jest większa od $\frac{1}{n}$, a ponadto zależy od wartości d.

Powyższe spostrzeżenie pozwala przypuszczać, że jeżeli analizowane rozmycie rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych może dać efekt pozytywny w postaci zmniejszenia $\Delta^{w}_{s\ max}$ (w stosunku do wzorca charakteryzującego się rozkładem idealnie dyskretnym), to najsilniej widoczni się to w przypadku, gdy $0 < d \leqslant \Delta U_w$. Dalsze rozważania zostaną więc ograniczone do tego przedziału zmienności wartości d.

W przypadku, gdy $0 < d \leqslant \frac{\Delta U_w}{2}$, funkcja gęstości napięć wzorcowych ma postać taką jak to przedstawiono na rys. 3.6a). Gdy natomiast $\frac{\Delta U_w}{2} < d \leqslant \Delta U_w$, sytuacja jest taka jak na rys. 3.6b). Napięcia z przedziałów:

$$\left[(k+1)\Delta U_w - d;\ k\Delta U_w + d\right], \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-2) \tag{3.80}$$

mogą być wylosowane na dwa sposoby:

- w wyniku wylosowania napięcia o wartości $k \cdot \Delta U_w$ i nałożenia na nie odpowiednio dużej fluktuacji dodatniej,
- w wyniku wylosowania napięcia o wartości $(k+1) \cdot \Delta U_w$ i nało-

żenia na nie odpowiednio dużej fluktuacji ujemnej (rys. 3.6b). Ponieważ powyższe zdarzenia wzajemnie się wykluczają, prawdopodobieństwo ich sumy równe jest sumie prawdopodobieństw. Oznacza to, że w celu uzyskania wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa $g(U_w)$ w przedziałach (3.80), wystarczy dodać tam wartości funkcji $g(U_w - k \cdot \Delta U_w)$ oraz $g\left[U_w - (k+1) \cdot \Delta U_w\right]$, tak jak to uczyniono na rys. 3.6b.

W celu oszacowania wartości granicznej $\Delta^w_{s\,max}$ błędu systematycznego w przypadku zastosowania opisywanego wzorca w układzie realizującym komparację stochastyczną typu "większy - mniejszy", warianty:

$$0 < d \leq \frac{\Delta U_w}{2} \qquad \text{i} \qquad \frac{\Delta U_w}{2} < d \leq \Delta U_w$$

zostaną rozważone oddzielnie.

Przypadek, gdy: $0 < d \leqslant \frac{\Delta U_w}{2}$:

Jeżeli procedurę komparacyjną typu "większy - mniejszy" wykona się tak jak to dotychczas zakładano, tj. w każdym jej takcie porówna się wylosowane napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ $(j=1,2,\ldots,L)$ z napięciem mierzonym $\tilde{U}_1$, a wynik pomiaru R obliczy wg wzoru (2.5), to jego wartość oczekiwana wynosi (porównaj(2.15) i (2.16)

$$E(R) = U_{w\,max} \cdot p \,, \tag{3.81}$$

gdzie: p - prawdopodobieństwo sukcesu czyli zdarzenia, gdy:

$$\tilde{U}_w^j < \tilde{U}_1 \,.$$

Przy poczynionych założeniach prawdopodobieństwo sukcesu p wyraża się wzorem (patrz rys. 3.6a):

$$p = \begin{cases} \frac{k}{n} + \int\limits_{k\cdot\Delta U_w - d}^{U_1} g(U_w - k\cdot\Delta U_w)\,dU_w, & k\Delta U_w - d < U_1 \leqslant k\Delta U_w + d \\ & k = 0,1,2,\ldots,n-1 \\ \frac{k}{n}, & (k-1)\Delta U_w + d < U_1 \leqslant k\cdot\Delta U_w - d, \quad k = 1,2,\ldots,n-1 \end{cases} \tag{3.82}$$

Uwzględniając tę zależność we wzorze (3.81) i pamiętając, że (3.74):

$$\frac{U_{w\,max}}{n} = \Delta E(R) \,,$$

można narysować przybliżony kształt zależności $E(R) = f(U_1)$ w przypadku posługiwania się wzorcem dyskretnym rozmytym (rys. 3.7).

Dokładne określenie przebiegu tej krzywej możliwe jest tylko wtedy, gdy znany jest opis analityczny funkcji $\gamma(U_w)$ (tzn. $g(U_w)$). Niektóre fragmenty wykresu są jednak niezależne od konkretnej postaci funkcji $g(U_w)$ (porównaj wzór (3.82)). Rysunek 3.7 wykonano, dla przejrzystości, przy założeniu, że $n = 5$.

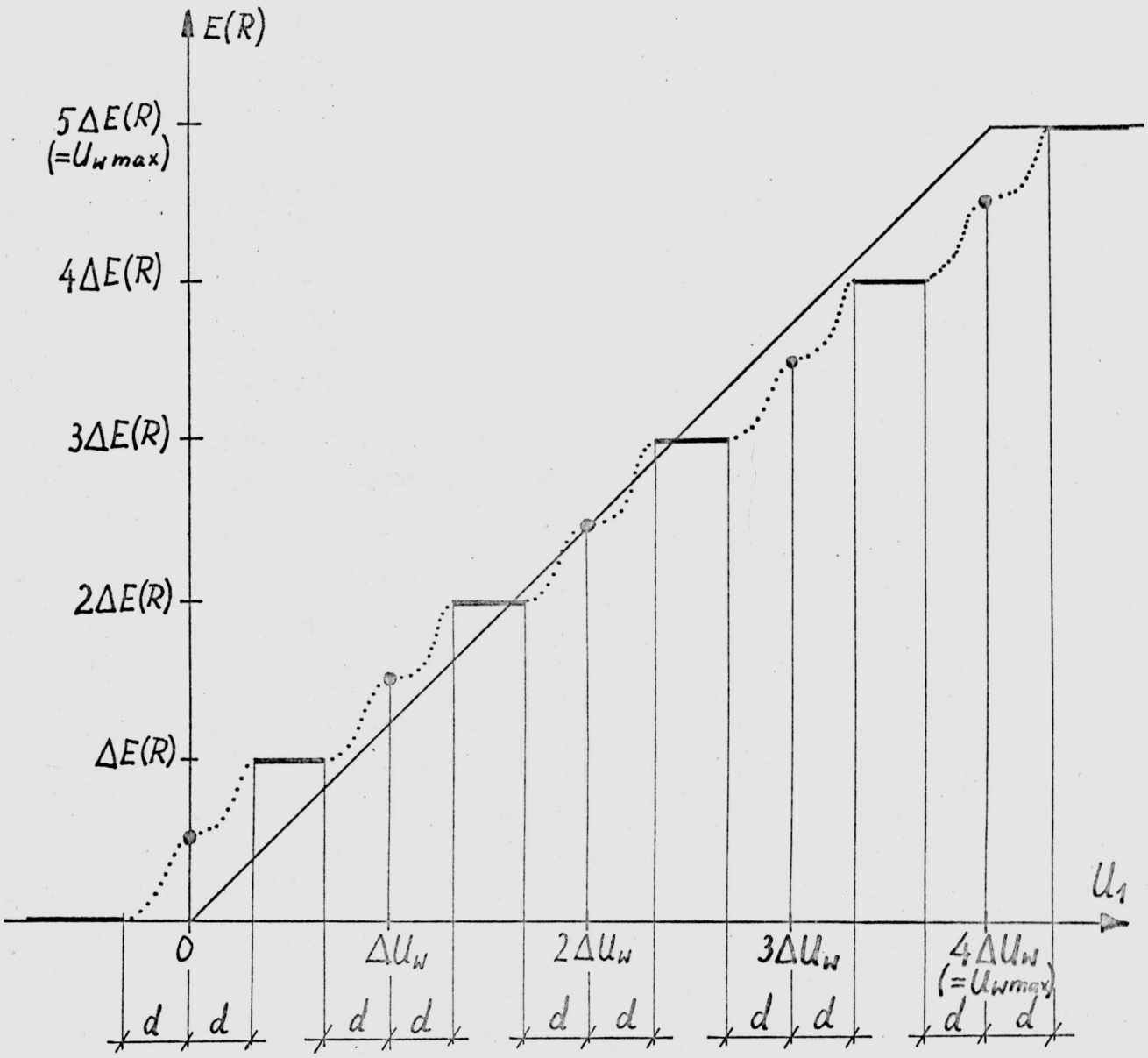
Jeżeli na rysunku wkreśli się dodatkowo prostą $E(R) = U_1$, to mimo przybliżonego charakteru można na jego podstawie stwierdzić, że błąd systematyczny Δ^w_s przybiera wartość największą dodatnią w przedziale $U_1 \in [0,\ \Delta U_w]$, zaś największą ujemną w przedziale $U_1 \in [3\Delta U_w,\ 4\Delta U_w]$. Z rysunku wynika także, iż moduły wartości maksymalnej dodatniej i maksymalnej ujemnej błędu systematycznego Δ^w_s są równe. Oznacza to, że poszukiwania wartości maksymalnej $\Delta^w_{s\,max}$ błędu Δ^w_s w zakresie zmian wartości U_1 napięcia mierzonego od 0 do $U_{w\,max}$ można ograniczyć do przedziału $[0,\ \Delta U_w]$.

Na podstawie wzorów (2.29) oraz (3.81), (3.82), (3.74) można napisać zastępujące zależności do obliczania wartości błędu systematycznego Δ^w_s w poszczególnych podprzedziałach przedziału $U_1 \in [0,\ \Delta U_w]$:

a) $U_1 \in [0,\ d]$:

$$\Delta^w_s(U_1) = \left(U_{w\,max} \int_{-d}^{U_1} g(U_w)\, dU_w\right) - U_1 \qquad (3.83a)$$

zaś uwzględniając, że:



Rys. 3.7. Zależność wartości oczekiwanej E(R) wyniku od wartości U_1 mierzonego napięcia w przypadku posługiwania się wzorcem dyskretnym rozmytym.
Odcinki ciągłe krzywej i punkty pogrubione oznaczają fragmenty wykresu niezależne od charakteru funkcji $g(U_w)$. Linia kropkowana oznacza fragmenty wykresu, których przebieg zależy od postaci funkcji $g(U_w)$.

$$U_{w\,max} \int_{-d}^{0} g(U_w)\, dU_w = \frac{U_{w\,max}}{2n} = \frac{\Delta E(R)}{2} ,$$

uzyskuje się, że

$$\Delta_s^w(U_1) = \frac{\Delta E(R)}{2} + U_{w\,max} \int_{0}^{U_1} g(U_w)\, dU_w - U_1 . \qquad (3.83b)$$

b) $U_1 \in (d;\ \Delta U_w - d]$:

$$\Delta_s^w(U_1) = \Delta E(R) - U_1 . \qquad (3.84)$$

c) $U_1 \in (\Delta U_w - d;\ \Delta U_w]$:

$$\Delta_s^w(U_1) = U_{w\,max}\left[\frac{1}{n} + \int_{\Delta U_w - d}^{U_1} g(U_w)\, d(U_w) \right] - U_1 =$$

$$= \Delta E(R) + U_{w\,max} \int_{\Delta U_w - d}^{U_1} g(U_w)\, dU_w - U_1 . \qquad (3.85)$$

Jak już wspomniano, dokładne określenie zależności błędu systematycznego Δ_s^w od wartości U_1 napięcia mierzonego w poszczególnych przedziałach a, b, c) nie jest możliwe bez znajomości postaci funkcji $g(U_w)$. Mimo to, możliwe są następujące oszacowania:

a)

$$\max_{U_1 \in [0;\ d]} \Delta_s^w(U_1) < \Delta E(R) , \qquad (3.86)$$

bowiem składnik: $U_{w\,max} \int_{0}^{U_1} g(U_w)\, dU_w$ we wzorze (3.83b) ma, zgodnie z zależnościami (3.79) i (3.74), wartość nie większą

niż $\frac{\Delta E(R)}{2}$.

b) $$\max \Delta^{w}_{s}(U_1) < \Delta E(R) - d < \Delta E(R) \quad . \tag{3.87}$$
$$U_1 \in (d; \Delta U_w - d]$$

c) $$\max \Delta^{w}_{s}(U_1) < \Delta E(R) \quad , \tag{3.88}$$
$$U_1 \in (\Delta U_w - d; \Delta U_w]$$

bowiem na podstawie wzoru (3.85) można napisać, że gdy $U_1 \in (\Delta U_w - d; \Delta U_w]$, to:

$$\Delta^{w}_{s}(U_1) < \Delta E(R) + \frac{\Delta E(R)}{2} - U_1 = \frac{3}{2}\Delta E(R) - U_1 \quad . \tag{3.89}$$

Korzystając z faktu, że $d < \frac{\Delta U_w}{2}$ oraz z zależności (3.76) o wartości U_1 w rozpatrywanym przedziale można orzec, że:

$$U_1 > \Delta U_w - d > \frac{\Delta U_w}{2} > \frac{\Delta E(R)}{2} \quad . \tag{3.90}$$

Uwzględnienie ostatniej nierówności we wzorze (3.89) prowadzi właśnie do oszacowania (3.88).

Z uwag wcześniejszych oraz z nierówności (3.86), (3.87), (3.88) wynika, że graniczny błąd systematyczny $\Delta^{w}_{s\,max}$ komparacji w przypadku posługiwania się wzorcem o dyskretnym, rozmytym rozkładzie prawdopodobieństwa i takim, że $d \leqslant \frac{\Delta U_w}{2}$ (patrz rys. 3.6a) ma wartość mniejszą niż $\Delta E(R)$. Ponieważ wniosek ten jest prawdziwy niezależnie od postaci funkcji $g(U_w)$ określającej charakter rozmycia prawdopodobieństwa (byleby tylko

spełnione były założenia a) - d) wyszczególnione we fragmencie poświęconym modelowi wzorca dyskretnego rozmytego) oznacza on - porównaj (3.78) - że stosowanie w rozważanej procedurze komparacyjnej wzorców dyskretnych rozmytych jest korzystniejsze niż stosowanie wzorców ściśle dyskretnych.

Należy teraz sprawdzić, czy powyższy wniosek jest słuszny także wtedy, gdy parametr $d \in (\frac{\Delta U_w}{2}; \Delta U_w]$.

Przypadek, gdy: $\frac{\Delta U_w}{2} < d \leqslant \Delta U_w$

Kształt funkcji gęstości prawdopodobieństwa napięć wzorcowych przy tym założeniu przedstawiono na rys. 3.6b). To, że jest ona jakościowo inna niż w przypadku poprzednim (wszystkie napięcia z przedziału $[0, U_{w\,max}]$ mogą teraz pojawiać się na zaciskach wzorca z niezerowym prawdopodobieństwem) nie zmienia faktu, że model probabilistyczny procedury komparacyjnej nie ulega zmianie.

Jeżeli w każdym jej takcie porównaniu z wylosowanym napięciem wzorcowym $\tilde{U}_w^j$ podlega ta sama realizacja $\tilde{U}_1$ napięcia mierzonego, to ma tu miejsce (założenie o niezależności losowań napięć wzorcowych!) ciąg doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu (porównaj rys. 3.6b):

$$p = \begin{cases} \frac{k}{n} + \int_{k\Delta U_w - d}^{U_1} g(U_w - k\Delta U_w)\,dU_w; & U_1 \in \left[(k-1)\Delta U_w + d;\ (k+1)\Delta U_w - d\right] \\ & k = 0,1,2,\ldots,n-1 \\ \frac{k}{n} + \int_{k\Delta U_w - d}^{U_1} g(U_w - k\cdot\Delta U_w)\,dU_w + \int_{(k+1)\Delta U_w - d}^{U_1} g\left[U_w - (k+1)\Delta U_w\right]\,dU_w; & \\ & U_1 \in \left((k+1)\Delta U_w - d;\ k\Delta U_w + d\right] \\ & k = 0,1,2,\ldots,n-2. \end{cases} \tag{3.91}$$

Na podstawie wzorów (3.81) i (3.91) można by już sformułować związek wartości oczekiwanej wyniku E(R) z wartością U_1 mierzonego napięcia. Wykres tej zależności byłby podobny do przedstawionego na rys. 3.7. Podobnie jak w tamtym przypadku przechodziłby on przez punkty o współrzędnych:

$$U_1 = k \cdot \Delta U_w, \quad E(R) = (k + \frac{1}{2})\,\Delta E(R), \tag{3.92}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

oraz przez punkty:

$$U_1 = (k + \frac{1}{2})\,\Delta U_w, \quad E(R) = (k + 1)\,\Delta E(R) \tag{3.93}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$.

Charakter zmienności wykresu między tymi punktami zależy od konkretnej postaci funkcji $g(U_w)$.

Podobnie jak poprzednio, wrysowując w układ współrzędnych U_1, $E(R)$ prostą: $E(R) = U_1$, można by wyrobić sobie pogląd na charakter zależności $\Delta_s^w(U_1)$. Okazało by się mianowicie, że - podobnie jak poprzednio - maksimum błędu systematycznego Δ_s^w w zakresie zmienności U_1 od 0 do $U_{w\,max}$ należy szukać w przedziale $U_1 \in [0, \Delta U_w]$. Błąd systematyczny Δ_s^w zależy tam od wartości U_1 mierzonego napięcia w następujący sposób (porównaj wzory: (2.29), (3.81), (3.91)):

a) Gdy $U_1 \in [0;\ \Delta U_w - d]$:

$$\Delta_s^w(U_1) = U_{w\,max} \int_{-d}^{u_1} g(U_w)\, dU_w - U_1 = \ldots =$$

$$= \frac{\Delta E(R)}{2} + U_{w\,max} \int_{0}^{u_1} g(U_w)\, dU_w - U_1 , \qquad (3.94)$$

gdzie w przekształceniach oznaczonych symbolem = ... = skorzystano z faktu, że:

$$\int_{-d}^{u_1} = \int_{-d}^{0} + \int_{0}^{u_1}$$

oraz ze wzorów (3.79), (3.74) i z założenia parzystości funkcji $g(U_w)$.

b) Gdy $U_1 \in (\Delta U_w - d;\ d]$:

$$\Delta_s^w(U_1) = U_{w\,max}\left[\int_{-d}^{u_1} g(U_w)dU_w + \int_{\Delta U_w - d}^{u_1} g(U_w - \Delta U_w)dU_w\right] - U_1 =$$

$$= \ldots = \frac{\Delta E(R)}{2} + U_{w\,max}\left[\int_{0}^{u_1} g(U_w)dU_w + \int_{\Delta U_w - d}^{u_1} g(U_w - \Delta U_w)dU_w\right] - U_1 . \qquad (3.95$$

c) Gdy $U_1 \in (d;\ \Delta U_w]$:

$$\Delta_s^w(U_1) = U_w \max\left[\frac{1}{n} + \int_{\Delta U_w - d}^{U_1} g(U_w - \Delta U_w)\, dU_w\right] - U_1 = \ldots =$$

$$= \Delta E(R) + U_w \max \int_{\Delta U_w - d}^{U_1} g(U_w - \Delta U_w)\, dU_w - U_1 . \qquad (3.96)$$

Dokładne określenie charakteru powyższych zależności $\Delta_s^w(U_1)$ możliwe jest tylko pod warunkiem, że znana jest postać funkcji $g(U_w)$. Jeżeli jednak funkcja $g(U_w)$ spełnia wymagania wyszczególnione wcześniej, to bez względu na jej konkretny kształt prawdziwe są następujące oszacowania:

a) $$\max_{U_1 \in [0;\ \Delta U_w - d]} \Delta_s^w(U_1) < \Delta E(R) , \qquad (3.97)$$

bowiem we wzorze (3.94):

$$U_w \max \int_0^{U_1} g(U_w)\, dU_w \leqslant \frac{\Delta E(R)}{2} , \text{ gdy } U_1 \in [0;\ \Delta U_w - d] .$$

b) $$\max_{U_1 \in (\Delta U_w - d;\ d]} \Delta_s^w(U_1) < \Delta E(R) \qquad (3.98)$$

Uzasadnienie powyższej nierówności odbywa się na podstawie wzoru (3.95) w dwóch etapach:

- gdy $U_1 \in (\Delta U_w - d;\ \frac{\Delta U_w}{2}]$ wówczas (porównaj rys. 3.6b):

$$U_w \max\left[\int_0^{U_1} g(U_w)\,dU_w + \int_{\Delta U_w - d}^{U_1} g(U_w - \Delta U_w)\,dU_w\right] \leqslant \frac{\Delta E(R)}{2} ,$$

co w powiązaniu z faktem, że $U_1 > 0$ daje (3.98).

- gdy $U_1 \in \left(\frac{\Delta U_w}{2}; d\right]$, wtedy co prawda:

$$U_w \max\left[\int_0^{U_1} g(U_w)\,dU_w + \int_{\Delta U_w - d}^{U_1} g(U_w - \Delta U_w)\,dU_w\right] < E(R) ,$$

ale za to wartość napięcia U_1 spełnia nierówności (porównaj (3.76)):

$$U_1 > \frac{\Delta U_w}{2} > \frac{\Delta E(R)}{2} .$$

Ostatecznie więc oszacowanie (3.98) prawej strony wzoru (3.95) znowu jest prawdziwe.

c) $$\max \Delta_s^w(U_1) < \Delta E(R) , \qquad (3.99)$$

$U_1 \in (d; \Delta U_w]$

gdyż analiza wzoru (3.96) prowadzi do wniosku, że:

$$U_w \max \int_{\Delta U_w - d}^{U_1} g(U_w - \Delta U_w)\,dU_w \leqslant \frac{\Delta E(R)}{2} ,$$

ale w tym podprzedziale zmian U_1 odjemnik we wzorze (3.96) jest już duży:

$$U_1 > d > \frac{\Delta U_w}{2} > \frac{\Delta E(R)}{2} ,$$

więc oszacowanie (3.99) jest prawdziwe.

Podsumowując:

Rozważono, jaki jest wpływ rozmycia rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych na wartość składowej systematycznej błędu popełnianego w stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy". Stwierdzono, że jeżeli charakter rozmycia prawdopodobieństwa jest taki jak przyjęto (patrz rys. 3.6a,b), przy czym wartość parametru d charakteryzującego to rozmycie jest nie większa niż ziarno wzorca ΔU_w, to wartość graniczna $\Delta^w_{s\,max}$ błędu systematycznego wynosi:

$$\Delta^w_{s\,max} < \Delta E(R) = \frac{U_{w\,max}}{n} \qquad (3.100)$$

Przypomnijmy, że zastosowanie w rozważanej procedurze komparacyjnej wzorca idealnie dyskretnego (3.61) prowadzi do granicznego błędu systematycznego o wartości (3.78):

$$\Delta^w_{s\,max} = \frac{U_{w\,max}}{n} \quad .$$

Rozmycie rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych o opisanym charakterze może więc być korzystne w przypadku stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy-mniejszy", a na pewno nie jest szkodliwe.

W celu wycinkowego zweryfikowania sformułowanych tu wniosków rozważono najprostszy chyba przypadek szczególny rozmycia

prawdopodobieństwa napięć wzorcowych - rozmycie równomierne (rys. 3.8a). Funkcja $g(U_w)$ ma obecnie postać:

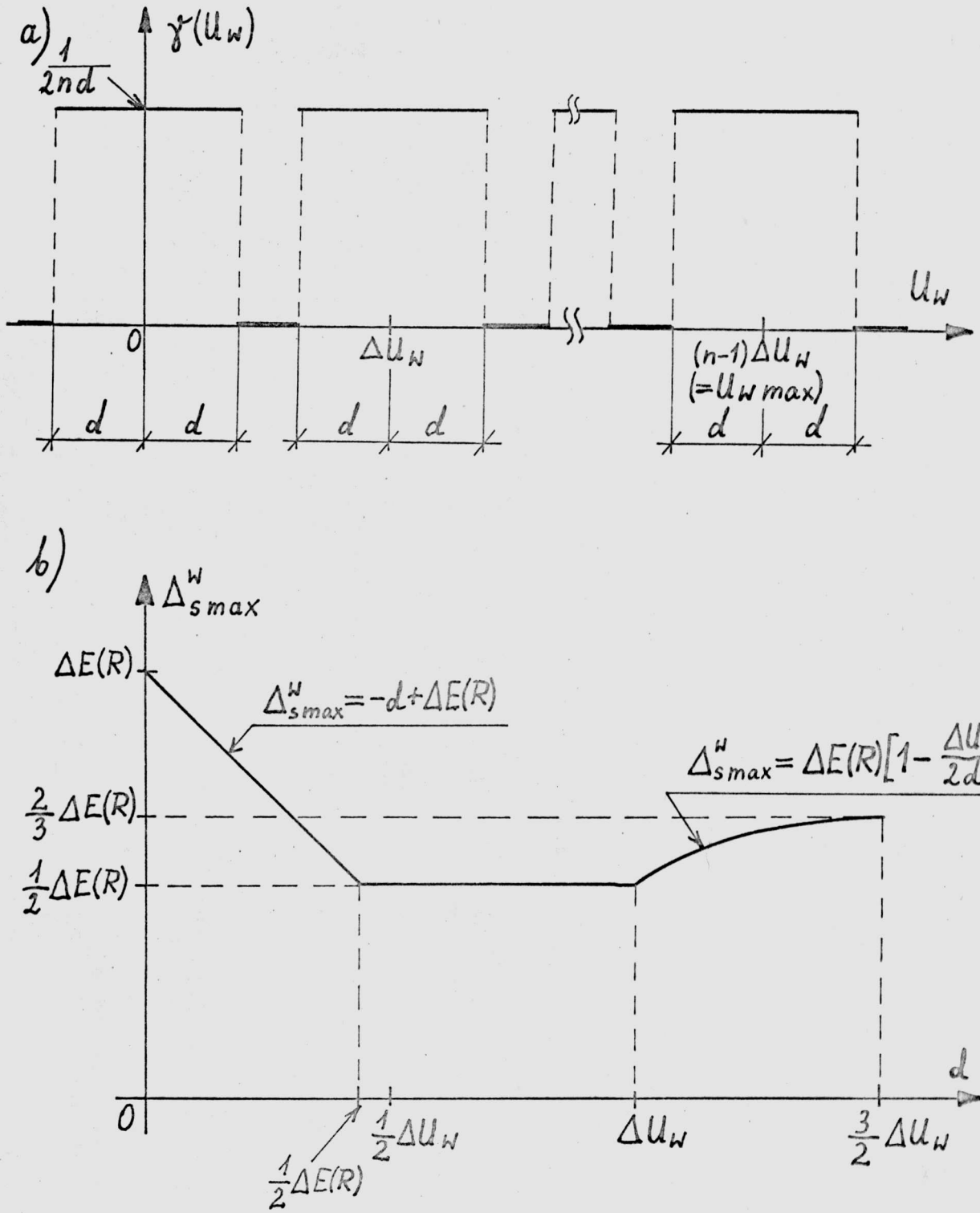
$$g(U_w) = \begin{cases} \dfrac{1}{2nd}, & U_w \in [-d, d] \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases} \qquad (3.101)$$

Funkcję gęstości $\gamma(U_w)$, dla przejrzystości, przedstawiono na rys. 3.8a) w przypadku gdy $d < \dfrac{\Delta U_w}{2}$.
Analizę wpływu rozmycia na błąd graniczny $\Delta^w_{s\,max}$ wykonano jednak przy założeniu, że $d \in (0; \frac{3}{2}\Delta U_w]$.

Wynikiem analiz jest wykres przedstawiony na rys. 3.8b). Potwierdza on uzyskane dotąd wnioski:

- W przypadku, gdy $d \in (0; \Delta U_w]$, $\Delta^w_{s\,max}$ istotnie jest mniejsze od $\Delta E(R)$ i jeśli d jest odpowiednie, błąd graniczny może być zredukowany do wartości $\dfrac{\Delta E(R)}{2}$.
- Zgodnie z przypuszczeniem sformułowanym wcześniej, pozytywny wpływ rozmycia prawdopodobieństwa napięć wzorcowych najsilniej uwidacznia się wtedy, gdy parametr $d \in (0; \Delta U_w]$. Ze wzrostem d powyżej wartości ΔU_w coraz większa "masa prawdopodobieństwa" wypada poza przedział napięć wzorcowych $[0, U_{w\,max}]$ (trzeba to sobie wyobrazić patrząc na rys. 3.8a) i to zapewne powoduje wzrost wartości granicznej błędu systematycznego w zakresie $d \in [\Delta U_w; \frac{3}{2}\Delta U_w]$ na rys. 3.8b).

Wykres z rys. 3.8b) zawiera jeszcze jedną informację, która wynika z konkretnej postaci funkcji $g(U_w)$ i z tego powodu nie uzyskano jej na podstawie rozważań ogólnych przytoczonych na poprzednich stronach. W przypadku rozmycia równomiernego (rys. 3.8a),



Rys. 3.8. a) Funkcja gęstości prawdopodobieństwa napięć wzorcowych charakteryzująca się rozmyciem równomiernym.
b) Zależność wartości granicznej $\Delta^W_{s\,max}$ błędu systematycznego, z którym należy liczyć się stosując w komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" wzorzec wytwarzający napięcia wg funkcji gęstości przedstawionej na rys. a), od wartości parametru d.

wzrost parametru d w zakresie $(0; \frac{\Delta E(R)}{2})$ powoduje, że wartość $\Delta^{w}_{s\,max}$ maleje proporcjonalnie do d.

Błąd komparacji Δ_k, zdefiniowany na początku punktu II/1b), jest składnikiem błędu pomiaru związanym z właściwościami procedury komparacyjnej i/lub elementów ją realizujących. W dotychczasowych rozważaniach omówiono dwa składniki tego błędu, mające różne źródła i odmienny charakter.
Jeden z nich (Δ_1), związany z tym, że procedura komparacyjna rozważanego typu jest eksperymentem probabilistycznym, ma charakter losowy. Drugi (Δ^{w}_{s}) - związany z faktem, że wzorzec wytwarza napięcia wg rozkładu prawdopodobieństwa różniącego się od tego, który w danym przypadku byłby najbardziej wskazany, ma charakter systematyczny.
Błędy powyższe nie wyczerpują oczywiście listy składowych błędu komparacji i to nawet wtedy, gdy założy się, że błędy grube nie występują.

Kolejnym składnikiem błędu Δ_k w procedurze komparacyjnej omawianego typu jest niedokładność określenia wartości, największej realizacji odtwarzanej przez wzorzec: $\tilde{U}_{w\,max}$. Zgodnie z przyjętą skalą pomiarową S_U, napięciu $\tilde{U}_{w\,max}$ odpowiada określona liczba $U_{w\,max}$. Przypisanie wartości realizacji $\tilde{U}_{w\,max}$ następuje jednak w drodze eksperymentu pomiarowego (skalowanie) odbywa się to z określonym błędem. Ponieważ wspomniana wartość występuje we wzorze na R (patrz (2.5) i (3.23)), więc błąd jej określenia ma wpływ na dokładność pomiarów wykonywanych z użyciem rozpatrywanego wzorca losowego. Niedokładność pomiaru

napięcia $\tilde{U}_{w\,max}$ jest mianowicie źródłem składowej błędu komparacji o charakterze systematycznym. Celem odróżnienia jej od składowej systematycznej Δ_s^w spowodowanej odchylaniem się rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od rozkładu założonego, oznaczono ją tu symbolem Δ_s^z. Indeks "s" u dołu delty wskazuje na systematyczny charakter błędu, indeks "z" u góry delty - na jego źródło: niedokładność określenia wartości z-akresowej.

Z punktu widzenia przyczyn powstawania, opisane błędy: Δ_1, Δ_s^w i Δ_s^z są niezależne. Obliczając błąd komparacji Δ_k przyjmuje się więc, zgodnie ze zwyczajem, że występuje przypadek najmniej korzystny, kiedy poszczególne składowe mają jednakowe znaki:

$$\Delta_k = \Delta_1 + \Delta_s^w + \Delta_s^z \,. \tag{3.102}$$

Z roważań zawartych w podrozdziałach II/1,2 wynika, że składowa losowa Δ_1 błędu komparacji może być w zasadzie dowolnie zmniejszona przez zwiększenie liczby L porównań wykonywanych w ramach procedury komparacyjnej. Jeżeli jednak pozostałe składowe we wzorze (3.102) są różne od zera, to nieograniczone zmniejszanie błędu Δ_1 nie wydaje się celowe. Błąd komparacji Δ_k i tak nie będzie mniejszy niż wartość sumy tych pozostałych składowych.

Przykład 3.2. Jeżeli wzorzec będzie odtwarzał z jednakowym prawdopodobieństwem napięcia z następującego zbioru:

$$\tilde{\tilde{U}}_w = \left\{ \tilde{0},\ \tilde{\Delta U}_w,\ 2\,\tilde{\Delta U}_w,\ \ldots,\ (n-1)\,\tilde{\Delta U}_w \right\},$$

to wartość graniczna błędu systematycznego Δ_s^w spowodowanego jego ziarnistym charakterem wynosi (porównaj wzór (3.78)):

$$\Delta^w_{s\,max} = \frac{U_{w\,max}}{n} ,$$

n - liczba stanów napięcia odtwarzanych przez wzorzec.

Jeżeli za pomocą takiego wzorca dokonuje się pomiaru wartości jednej realizacji napięcia $\tilde{U}_1$, to wartość graniczna błędu losowego wynosi (2.24):

$$\Delta_{1\,max} = \frac{3}{2} \frac{U_{w\,max}}{\sqrt{L}} ,$$

gdzie: L - liczba porównań wykonanych w ramach procedury komparacyjnej.

W przykładzie założono, że błąd Δ_s^z we wzorze (3.102) ma wartość zero.

Jeżeli się przyjmie, że maksymalną liczbą L_{max} porównań jaką warto jeszcze wykonywać w ramach procedury komparacyjnej jest taka ich ilość, przy której składowa losowa $\Delta_{1\,max}$ zrównuje się z błędem $\Delta^w_{s\,max}$, to:

$$L_{max} = \frac{9}{4} n^2 \qquad (3.103)$$

W przypadku, gdy wzorzec odtwarza n = 256 stanów (2^8) $L_{max} \approx$ $\approx$150 000, zaś przy n = 1024 stany (2^{10}) $L_{max} \approx 2{,}4 \cdot 10^6$.

Ostatnie rozważania nie dotyczą przypadków, gdy przedmiotem pomiaru jest zbiór napięć $\approx{U}$ o liczności większej niż L_{max}. Skoro bowiem wartość oczekiwana wyniku pomiaru R ma być równa np.

któremuś z momentów zbioru $\tilde{\tilde{U}}$, to liczba porównań L musi być co najmniej równa liczności zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ i to, że będzie to więcej niż L_{max} nie ma nic do rzeczy.

* * *

Drugą, poza rozkładem prawdopodobieństwa, ważną cechą ciągu $\tilde{U}_w^j$ (j = 1, 2, ..., L) napięć wzorcowych, są jego właściwości korelacyjne. Charakteryzuje się je zwykle za pomocą funkcji autokorelacji lub kowariancji. Niektóre zagadnienia związane ze stosowaniem w omawianej procedurze komparacyjnej wzorca dostarczającego skorelowanych ciągów napięć $\tilde{U}_w^j$ omówiono w pracy K. Hejna [9]. Wybrane, bardzo ogólne zależności można też znaleźć w pracy G.Ja. Mirskiego [10]. W niniejszym opracowaniu zakłada się, że losowania napięć wzorcowych w kolejnych taktach komparacji są niezależne. W trakcie wykonywania eksperymentu, zjawisko skorelowania napięć wzorcowych $\tilde{U}_w^j$ (j = 1, 2, ..., L) okazało się jednak istotne. Jest o tym mowa w rozdziale V.

d) Schematy losowań napięć wzorcowych

Właściwości wzorca napięć losowych można charakteryzować w jeden z dwóch podstawowych sposobów. Pierwszy z nich polega na opisie właściwości ciągów napięć wytwarzanych przez ten wzorzec. Opis tego typu formułuje się zwykle używając takich pojęć jak rozkład prawdopodobieństwa, właściwości korelacyjne. Bywa jednakże tak, że znane są pewne ogólne prawidłowości, w oparciu o które wzorzec losowy funkcjonuje. Nazywa się je zwykle schematem losowania i stanowią one drugi z możliwych sposobów charakteryzowania losowego wzorca napięcia.

Jak się wydaje, informacje o schemacie losowania danego wzorca oraz o właściwościach ciągów napięć przez niego wytwarzanych bywają niekiedy wymienne. Oznacza to, że na podstawie schematu losowania można określić rozkład prawdopodobieństwa w ciągach wylosowanych napięć i ich cechy korelacyjne. Wnioskowanie w drugą stronę, jak się wydaje, także powinno być możliwe. Ustalanie rozkładu prawdopodobieństwa czy korelacji ciągu napięć na podstawie informacji o zasadzie działania wzorca możliwe jest zwłaszcza w przypadku wzorców pseudolosowych - algorytmicznych[11].

W sytuacji, gdy żadne informacje o sposobie działania wzorca nie są znane, jedynym sposobem scharakteryzowania jego właściwości jest empiryczne badanie rozkładu prawdopodobieństwa i autokorelacji w ciągu wytwarzanych przez niego napięć. Tak postępuje się zwykle w przypadku prawdziwie losowych wzorców "fizycznych" (tzn. takich, których losowość wynika z faktu wykorzystania w nich zjawisk o przebiegu losowym jak szumy, zjawisko promieniotwórczości, itp.).

Jak powiedziano, rozkład prawdopodobieństwa i właściwości korelacyjne stanowią kompletny zbiór cech losowego ciągu napięć wzorcowych. Można więc zadać pytanie, czy analizowanie wpływu schematów losowania (będących jedynie innym sposobem opisu wzorca losowego) na właściwości procedury komparacyjnej jest w ogóle celowe. Wydaje się, że jest celowe i to co najmniej z dwóch powodów:

- Znajomość schematu losowania pozwala niekiedy wnioskować o właściwościach omawianej procedury bezpośrednio - bez potrzeby posługiwania się pojęciami pośrednimi jak rozkład prawdopodobieństwa i autokorelacja.
- Określenie schematu losowania jest równoznaczne z podaniem pewnych wskazówek co do sposobu działania wzorca, a więc i jego konstrukcji. Bezpośrednie powiązanie cech konstrukcyjnych wzorca z właściwościami procedury komparacyjnej jest bardzo wygodne, szczególnie z inżynierskiego punktu widzenia.

Zagadnienie schematów losowania mające duże znaczenie w badaniach statystycznych metodą reprezentacyjną jest już stosunkowo szczegółowo opracowane. Np. w książce Marka Fisza [12] zagadnieniom tym poświęcono cały rozdział, a ponadto dołączono do niego bogaty spis prac oryginalnych z tego zakresu. I tak, z literatury przedmiotu wynika np., że losowanie ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ napięć odtwarzanych przez wzorzec może być: zależne lub niezależne, nieograniczone lub warstwowe [13], jedno - lub wielo-stopniowe, grupowe [14]. Powyższe pojęcia określają - jak się wydaje - jedynie podstawowe formy schematów losowania. W praktyce można dokonywać rozmaitych kombinacji schematów podstawowych: np. realizując schemat losowa-

nia warstwowego można, w ramach poszczególnych warstw, losować w sposób zależny lub niezależny, itd.

Biorąc więc pod uwagę rozmaitość możliwości, jak i stan opracowania ich w literaturze, postanowiono nie analizować tu zagadnienia wpływu różnych schematów losowania na właściwości komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" w sposób całościowy. Postanowiono jednak rozpatrzyć przykład schematu losowania warstwowego.

Losowanie warstwowe odbywa się w ten sposób, że przed przystąpieniem do niego dzieli się zbiór $\tilde{\tilde{U}}_w$ (tzw. populacja generalna) na podzbiory i losowanie z każdego tak uzyskanego podzbioru odbywa się osobno.

Losowanie warstwowe jest przeciwieństwem tzw. schematu losowania nieograniczonego, który rozważano do tej pory, a który polega na wybieraniu napięć wzorcowych każdorazowo z całego zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ [13].

Przedmiotem rozważań jest stochastyczna procedura komparacyjna typu "większy-mniejszy" realizowana z użyciem wzorca mogącego odtwarzać każdą realizację napięcia z przedziału $[\tilde{0}, \tilde{U}_{w\,max}]$. Zbiór $\tilde{\tilde{U}}_w$ jest więc nieprzeliczalny.
Zakłada się, że przedmiotem pomiaru jest wartość napięcia $\tilde{U}_1$. Oznacza to, że w kolejnych taktach procedury komparacyjnej napięcia wzorcowe będą porównywane z tą samą realizacją napięcia $\tilde{U}_1$ lub - innymi słowy - że:

$$\tilde{\tilde{U}}_p = \{\tilde{U}_1, \tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_1\} .$$

Dalsze rozważania, dla prostoty, będą dotyczyły losowania dwu-

warstwowego. Schematy losowania o większej liczbie warstw analizuje się podobnie, a wyniki nie różnią się jakościowo od otrzymywanych przy założeniu, że losowanie jest dwuwarstwowe.

Punktem wyjścia do realizacji losowania dwuwarstwowego jest podział zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$ na dwa rozłączne podzbiory:

$$\tilde{\tilde{U}}_w = \tilde{\tilde{U}}'_w \cup \tilde{\tilde{U}}''_w . \tag{3.104}$$

Dalsze rozważania dotyczą przypadku, gdy warstwy $\tilde{\tilde{U}}'_w$ i $\tilde{\tilde{U}}''_w$ są r ó w n e . Gdyby zbiór $\tilde{\tilde{U}}_w$ napięć odtwarzanych przez wzorzec był skończony, równość warstw oznaczałaby po prostu równoliczność powyższych podzbiorów. Wobec założenia, że zbiór $\tilde{\tilde{U}}_w$ jest nieprzeliczalny, równość warstw $\tilde{\tilde{U}}'_w$ i $\tilde{\tilde{U}}''_w$ rozumie się tu jako równość miar Lebesgue'a zbiorów wartości odpowiadających napięciom należącym do powyższych warstw (zakłada się, że skala pomiarowa została wcześniej zdefiniowana).

Istota różnicy losowania dwuwarstwowego, w stosunku do wcześniej omawianego - nieograniczonego zasadza się na tym, że jeżeli losowanie ma polegać na wyborze, ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_w$, L napięć wzorcowych, to w losowaniu dwuwarstwowym przed przystąpieniem do eksperymentu przyjmuje się, że L' losowań będzie z warstwy $\tilde{\tilde{U}}'_w$ i L'' - z warstwy $\tilde{\tilde{U}}''_w$ (L = L' + L'').

Liczby L' i L'' w ogólności nie muszą być równe. Kryteria ich doboru mogą być rozmaite [15]. Dalsze rozważania będą prowadzone przy założeniu, że:

$$\frac{L'}{L} = \frac{m(\tilde{\tilde{U}}'_w)}{m(\tilde{\tilde{U}}_w)} \quad \text{oraz} \quad \frac{L''}{L} = \frac{m(\tilde{\tilde{U}}''_w)}{m(\tilde{\tilde{U}}_w)} , \tag{3.105}$$

gdzie: $m(\approx U_w')$, $m(\approx U_w'')$, $m(\approx U_w)$ - miary Lebesgue'a zbiorów wartości odpowiadających napięciom należącym do zbiorów $\approx U_w'$, $\approx U_w''$, $\approx U_w$ (odpowiednio).

Wzór (3.105) wyraża myśl, że liczby losowań: L' i L'' dokonanych z poszczególnych warstw: $\approx U_w'$ i $\approx U_w''$ są proporcjonalne do wielkości tych warstw (mierzonych miarą Lebesgue'a).

Losowanie warstwowe spełniające powyższe wymaganie nazywa się losowaniem warstwowym proporcjonalnym [16]. Wobec przyjętego wcześniej założenia, że warstwy, na które podzielono zbiór napięć odtwarzanych przez wzorzec są równe, warunek proporcjonalności losowania (3.105) prowadzi do wymagania, by:

$$L' = L'' = \frac{L}{2} . \qquad (3.106)$$

(L musi więc być parzyste).

Ponadto założono, że podczas losowania z dowolnej warstwy, prawdopodobieństwo wybrania każdej realizacji napięcia do niej należącej jest takie samo i nie ulega zmianie w trakcie losowania. Przyjęto wreszcie, że zarówno losowania napięć z tej samej warstwy jak i losowania z różnych warstw są niezależne.

Mimo mnogości poczynionych założeń, nadal nierozstrzygnięty pozostaje problem, w jaki sposób ustala się, z której warstwy losować napięcie wzorcowe w określonym takcie procedury komparacyjnej. Możliwości jest tu wiele. Można np. losować na przemian: raz z jednej, raz z drugiej warstwy, albo najpierw wylosować $\frac{L}{2}$ napięć wzorcowych z pierwszej warstwy, a potem tyleż napięć z drugiej warstwy. Można też postąpić zupełnie inaczej: w każdym takcie poprzedzić losowanie napięcia wzorcowego losowaniem bez-

zwrotnym jednej liczby ze zbioru liczb naturalnych od 1 do L. Gdy wypadnie liczba parzysta, wówczas w danym takcie procedury napięcie wzorcowe będzie losowane z pierwszej warstwy, gdy nieparzysta - z drugiej.

Zauważmy, iż wobec założenia, że w każdym takcie procedury napięcie wzorcowe jest porównywane z tą samą realizacją mierzoną $\tilde{U}_1$ oraz, że losowania z poszczególnych warstw są niezależne, kolejność w jakiej wykona się po $\frac{L}{2}$ losowań z każdej warstwy jest bez znaczenia.

W przypadku gdyby zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ nie składał się z napięć jednakowych problem ten byłby istotny. Nie będzie on szczegółowo rozważany w tej pracy. Wydaje się jednak, że najlepiej by było, gdyby wybór warstwy z której należy losować napięcie wzorcowe w dowolnym takcie procedury komparacyjnej też był losowy, a ponadto gwarantujący odpowiednią wartość liczb L', L''.

Podobnie jak poprzednio, wynik pomiaru będzie obliczany wg wzoru (2.5):

$$R = \frac{L_2}{L_1} \cdot U_{w\ max},$$

gdzie: L_2, L_1 - stany odpowiednich liczników (rys. 2.1) po zakończeniu procedury komparacyjnej,

$U_{w\ max}$ - wartość odpowiadająca największemu z napięć odtwarzanych przez wzorzec.

Tak obliczony wynik jest zmienną losową. Jej wartość oczekiwaną $E(R)$ i wariancję $D^2(R)$ opisują wzory (2.15) i (2.18):

$$E(R) = \frac{U_{w\ max}}{L} \cdot E(L_2) \qquad (2.15)$$

$$D^2(R) = \frac{U_{w\,max}^2}{L^2} \cdot D^2(L_2) \qquad (2.18)$$

Zgodnie z zasadami działania układu z rys. 2.1, licznik L_2 zlicza te takty, w których napięcie losowe $\tilde{U}_w^j$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$ wybrane do porównania z napięciem mierzonym $\tilde{U}_1$ było od niego mniejsze (sukcesy).

Warto zauważyć, że w obecnie rozważanym modelu losowania dwuwarstwowego, liczba sukcesów L_2 w trakcie całej procedury komparacyjnej może być uważana jako suma liczb:

$$L_2 = L_2' + L_2'' , \qquad (3.107)$$

Gdzie: L_2' - liczba sukcesów uzyskanych wtedy, gdy napięcie wzorcowe losowano z pierwszej warstwy $\tilde{\tilde{U}}_w'$,

L_2'' - liczba sukcesów uzyskanych wtedy, gdy napięcie wzorcowe losowano z drugiej warstwy $\tilde{\tilde{U}}_w''$.

Na podstawie powyższej zależności można napisać, że:

$$E(L_2) = E(L_2') + E(L_2'') \qquad (3.108)$$

oraz, biorąc pod uwagę, że losowania z obu warstw są niezależne:

$$D^2(L_2) = D^2(L_2') + D^2(L_2'') \qquad (3.109)$$

Zmienne losowe L_2' i L_2'' charakteryzują się rozkładem dwumianowym. Ich wartości oczekiwane i wariancje wynoszą więc odpowiednio:

$$E(L_2') = \frac{L}{2} \cdot p' , \quad E(L_2'') = \frac{L}{2} \cdot p'' \tag{3.110}$$

$$D^2(L_2') = \frac{L}{2} \cdot p'(1 - p'), \quad D^2(L_2'') = \frac{L}{2} p''(1 - p'') \tag{3.111}$$

gdzie: p', p'' - prawdopodobieństwa sukcesu w przypadku, gdy napięcie wzorcowe losuje się z pierwszej lub drugiej warstwy (odpowiednio).

Wartości prawdopodobieństw sukcesu p' i p'' podczas pomiaru wartości napięcia $\tilde{U}_1$, zależą nie tylko od wartości U_1 tego napięcia, ale także od sposobu podziału przedziału napięć $[\tilde{0}, \tilde{U}_{w\,max}]$ stanowiącego wbiór $\tilde{\approx}U_w$ na warstwy: $\tilde{\approx}U_w'$, $\tilde{\approx}U_w''$.

Ze względu na wielość możliwości dokonania tego podziału, warto poświęcić nieco uwagi związkowi między sposobem podziału zbioru $[\tilde{0}, \tilde{U}_{w\,max}]$ na dwie równe (w omawianym wcześniej sensie) warstwy, a charakterem zależności wartości oczekiwanej i wariancji stanu końcowego licznika L_2 od wartości U_1 mierzonego napięcia.

Przyjęte założenia: równości warstw $\tilde{\approx}U_w'$ i $\tilde{\approx}U_w''$, proporcjonalności losowania warstwowego (3.105) oraz równego i niezmiennego w trakcie trwania procedury prawdopodobieństwa wylosowania każdego z napięć należącego do danej warstwy oznaczają, że - posługując się terminologią opisu właściwości ciągów napięć - wzorzec losuje wg równomiernego rozkładu prawdopodobieństwa (2.10). To z kolei oznacza, że bez względu na sposób podziału zbioru $[\tilde{0}, \tilde{U}_{w\,max}]$ na warstwy (byle były one równe), wartość oczekiwana stanu końcowego licznika L_2 wyniesie tyle samo ile w przypadku założenia równomiernego rozkładu prawdopodobieństwa ciągu napięć losowych (porównaj wzory (2.11) i (2.16):

$$E(L_2) = \frac{U_1}{U_{w\,max}} \cdot L \,. \qquad (3.112)$$

Uwzględnienie tej zależności we wzorze (2.15) daje, że: $E(R) = U_1$ bez względu na sposób podziału zbioru $[\tilde{0},\ \tilde{U}_{w\,max}]$ na równe warstwy.

W przypadku wariancji zmiennej losowej L_2 sposób wyboru warstw nie jest już obojętny. Uwzględniając wzory (3.111) w zależności (3.109) otrzymuje się:

$$D^2(L_2) = \frac{L}{2}\left[p'(1 - p') + p''(1 - p'')\right] . \qquad (3.113)$$

Podstawienie ostatniej zależności do wzoru (2.18) i unormowanie tak otrzymanego równania daje:

$$\frac{D^2(R) : L}{U^2_{w\,max}} = \frac{1}{2}\left[p'(1 - p') + p''(1 - p'')\right] , \qquad (3.114)$$

gdzie wyrażenie $\frac{D^2(R) : L}{U^2_{w\,max}}$ stanowi unormowaną wartość wariancji wyniku.

Trzeba podkreślić, że prawdopodobieństwa p', p'' sukcesu w przypadku losowania z pierwszej (p') i drugiej (p'') warstwy zależą od wartości mierzonego napięcia U_1. Z punktu widzenia analizy metrologicznej (wariancja wyniku wpływa bezpośrednio na wartość składowej losowej Δ_1 błędu komparacji) istotna byłaby odpowiedź na pytanie, jaki jest wpływ sposobu podziału na warstwy

zbioru napięć $[\tilde{0};\ \tilde{U}_{w\ max}]$ na wartość maksymalną-w przedziale $\tilde{U}_1 \in [\tilde{0},\ \tilde{U}_{w\ max}]$-unormowanej wariancji wyniku (3.114).

Ponieważ prawa strona równania (3.114) zawiera sumę dwóch nieujemnych składników:

$$p'(1 - p') \quad \text{oraz} \quad p''(1 - P'') ,$$

z których każdy wraz ze zmianami wartości napięcia U_1 zmienia się w granicach $[0;\ 0{,}25]$, to:

$$\max_{U_1 \in [0,\ U_{w\ max}]} \left\{ \frac{D^2(R) \cdot L}{U^2_{w\ max}} \right\} \in [0{,}125;\ 0{,}25] \qquad (3.115)$$

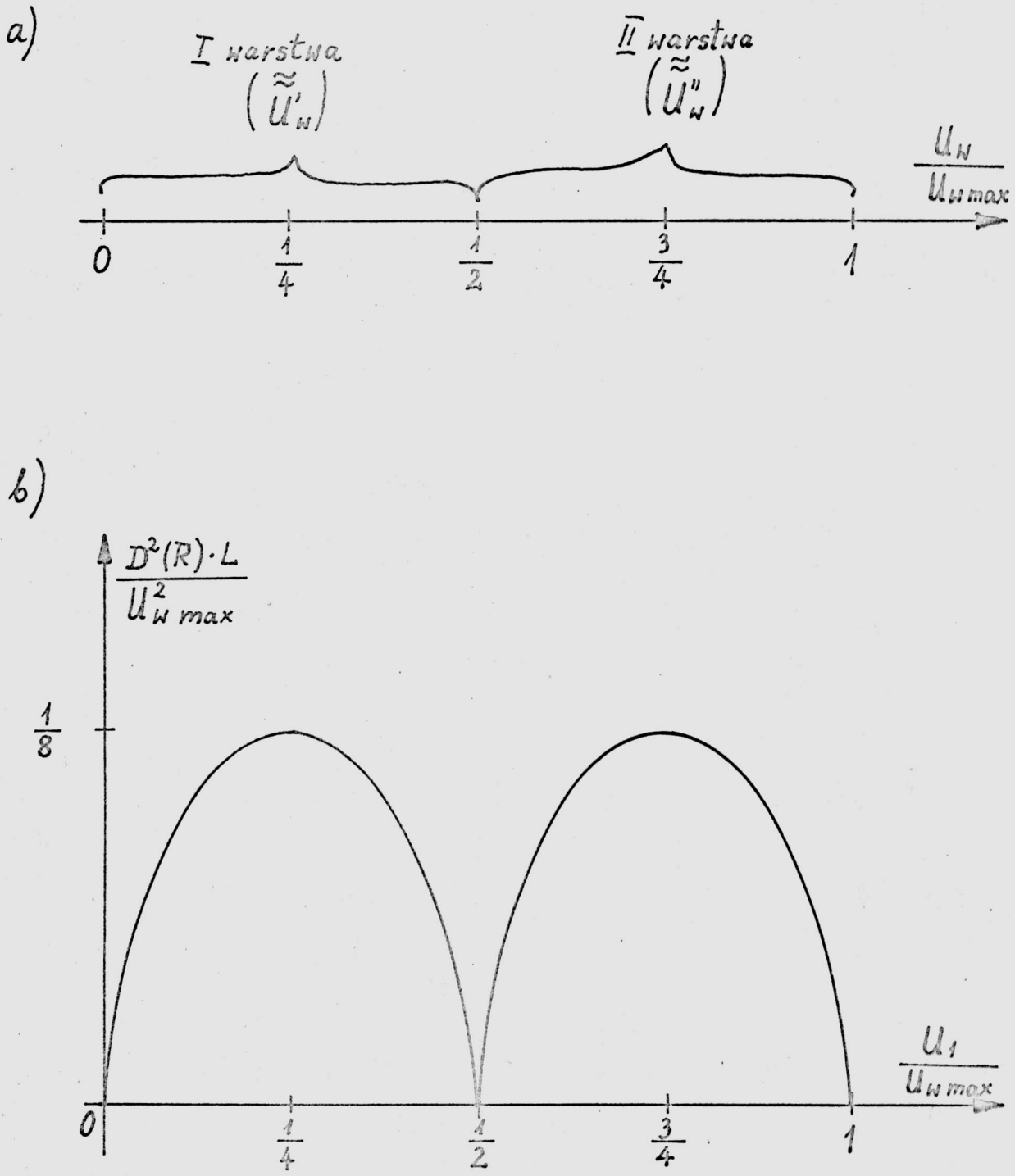
Sytuacja najbardziej korzystna:

$$\max_{U_1 \in [0,\ U_{w\ max}]} \left\{ \frac{D^2(R) \cdot L}{U^2_{w\ max}} \right\} = 0{,}125 \qquad (3.116)$$

ma miejsce np. wtedy, gdy podział na warstwy jest taki, jak to przedstawiono na rys. 3.9a).

Prawdopodobieństwa sukcesu w przypadku losowania napięcia wzorcowego z każdej z warstw zależą teraz od wartości mierzonego napięcia w następujący sposób:

$$p' = \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{U_1}{U_{w\ max}} , & U_1 \in \left[0,\ \dfrac{U_{w\ max}}{2}\right] \\ 1 , & U_1 \in \left(\dfrac{U_{w\ max}}{2},\ U_{w\ max}\right] \end{cases} \qquad (3.117a)$$



Rys. 3.9 a) Podział zbioru $[\tilde{0}, \tilde{U}_{w\,max}]$ na dwie równe warstwy gwarantujący najmniejsze zróżnicowanie napięć wzorcowych w każdej warstwie.

b) Zależność unormowanej wariancji wyniku $\frac{D^2(R)\cdot L}{U^2_{w\,max}}$ od unormowanej wartości mierzonego napięcia $\frac{U_1}{U_{w\,max}}$ w przypadku, gdy podział na warstwy zbioru napięć odtwarzanych przez wzorzec jest taki jak na rys. a).

$$p'' = \begin{cases} 0 & , \quad U_1 \in \left[0, \dfrac{U_{w\,max}}{2}\right] \\ 2 \cdot \dfrac{U_1}{U_{w\,max}} - 1 & , \quad U_1 \in \left(\dfrac{U_{w\,max}}{2}, U_{w\,max}\right] . \end{cases} \tag{3.117b}$$

Uwzględnienie powyższych zależności we wzorach (3.110), a tych ostatnich kolejno w zależnościach (3.108) i (2.15) prowadzi do związku $E(R) = U_1$. Jest to wyrywkowe potwierdzenie wniosku wyprowadzonego poprzednio w sposób raczej intuicyjny, że przyjęte założenia co do sposobu losowania dwuwarstwowego gwarantują równomierność rozkładu prawdopodobieństwa w ciągu napięć wzorcowych i tą drogą prowadzą do braku obciążenia wyniku. Wyrażając powyższą myśl w kategoriach metrologicznych, można powiedzieć, że (porównaj wzór (2.29)) składowa systematyczna Δ_s błędu komparacji jest równa zeru.

Uwzględnienie zależności (3.117a,b) we wzorze (3.114) prowadzi do następującego związku:

$$\frac{D^2(R)\cdot L}{U_{w\,max}^2} = \begin{cases} -2\,\dfrac{U_1}{U_{w\,max}}\left(\dfrac{U_1}{U_{w\,max}} - \dfrac{1}{2}\right); & U_1 \in \left[0;\ \dfrac{U_{w\,max}}{2}\right] \\ -2\left(\dfrac{U_1}{U_{w\,max}} - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{U_1}{U_{w\,max}} - 1\right); & U_1 \in \left(\dfrac{U_{w\,max}}{2};\ U_{w\,max}\right] \end{cases} \qquad (3.118)$$

Zależność powyższą zobrazowano na rys. 3.9b). Jak widać wartość maksymalną $= \frac{1}{8}$ przybiera ona w dwóch punktach: $\frac{U_1}{U_{w\,max}} = \frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$. Ważne jest także to, że losowanie dwuwarstwowe spowodowało, przy rozważanym wyborze warstw - rys. 3.9a), pojawienie się dodatkowego punktu: $\frac{U_1}{U_{w\,max}} = \frac{1}{2}$, w którym wariancja wyniku wynosi zero.

Można sprawdzić, że przedstawiony na rys. 3.9a) sposób tworzenia warstw nie jest jedynym gwarantującym, że maksimum unormowanej wariancji wyniku wynosi 0,125 (porównaj (3.116)). Żaden jednak ze sposobów inny niż przedstawiony na rys. 3.9a) nie prowadzi już do zależności wariancji wyniku od wartości mierzonego napięcia charakteryzującej się miejscem zerowym wewnątrz przedziału $U_1 \in (0,\ U_{w\,max})$.

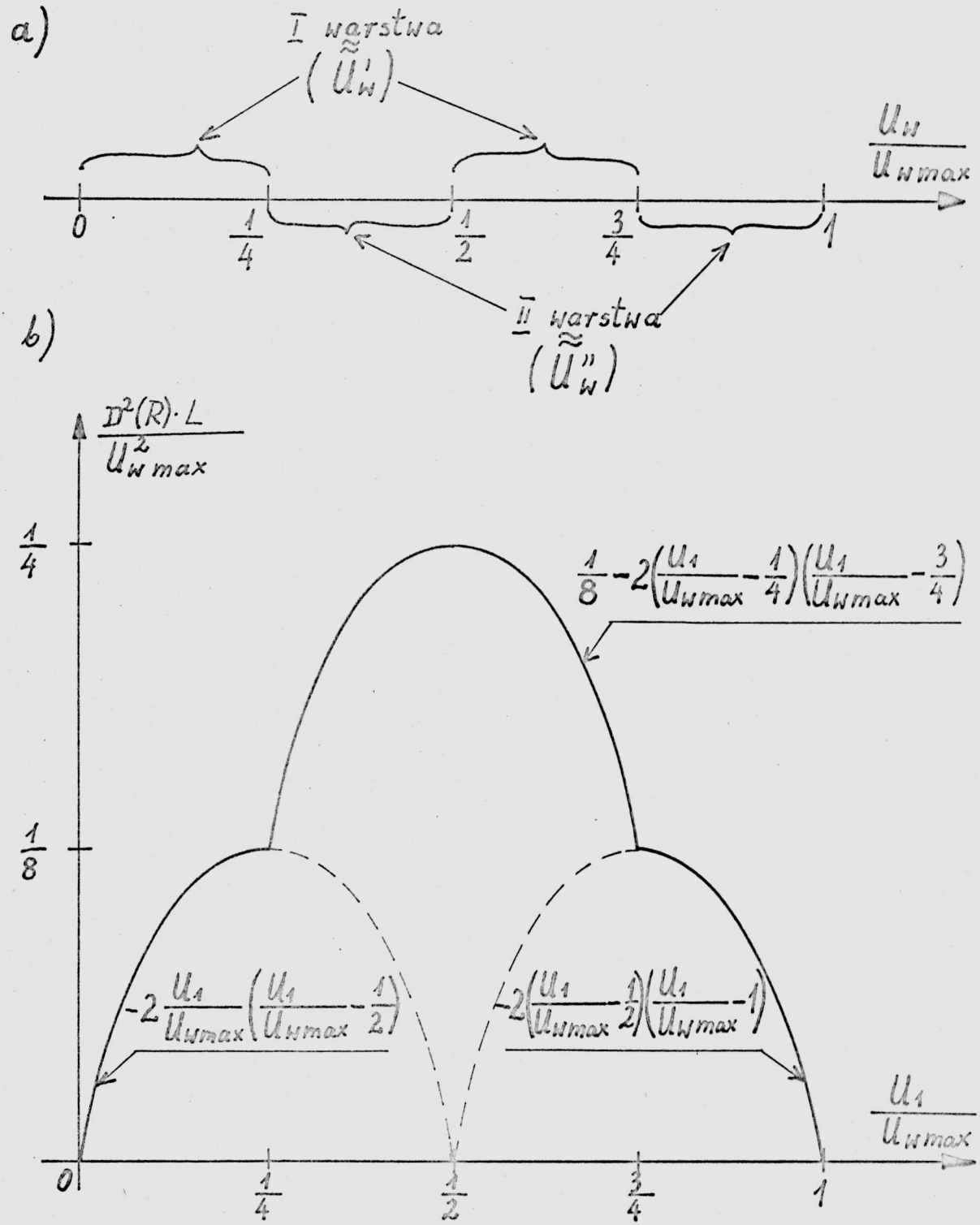
Z zależności (3.115) wynika, że unormowana wartość maksymalna wariancji może przyjąć, w przypadku losowania dwuwarstwowego, także wartość 0,25. Tyle jednak wynosi ona, gdy losowanie jest nieograniczone (porównaj rys. 2.2). Oznacza to, że jeśli dokonać podziału na warstwy zbioru napięć odtwarzanych przez wzorzec $[\tilde{0},\ \tilde{U}_{w\,max}]$ w sposób nieumiejętny, to losowanie dwuwarstwowe

może nie dać, w stosunku do losowania nieograniczonego, żadnych korzyści w postaci zmniejszenia maksymalnej wartości wariancji wyniku (a zatem granicznej wartości $\Delta_{1\,max}$ składowej losowej błędu komparacji).

Aby to unaocznić, rozważono przypadek utworzenia warstw taki jak na rys. 3.10a). Można sprawdzić, że także i w tym przypadku wartość oczekiwana wyniku równa jest wartości mierzonego napięcia. Zależność unormowanej wariancji wyniku $\frac{D^2(R) \cdot L}{U^2_{w\,max}}$ od unormowanej wartości mierzonego napięcia $\frac{U_1}{U_{w\,max}}$ przedstawia rys. 3.10b).

Charakter powyższej zależności jest co prawda inny niż uzyskany w przypadku losowania nieograniczonego (rys. 2.2). Obie krzywe charakteryzują się jednak identycznymi wartościami maksymalnymi, równymi 0,25. Tak więc stosowanie losowania dwuwarstwowego przy takim sposobie tworzenia warstw jak na rys. 3.10a), nie daje efektu zmniejszenia wartości granicznej $\Delta_{1\,max}$ składowej losowej błędu komparacji, w stosunku do schematu losowania nieograniczonego.

Opisane właśnie przykłady wpływu dwóch sposobów podziału na warstwy zbioru napięć odtwarzanych przez wzorzec (rys. 3.9 i 3.10), na zachowanie się wartości maksymalnej wariancji wyniku pomiaru, stanowią ilustrację znanej w teorii badań statystycznych zasady, że schemat losowania warstwowego daje tym lepsze efekty, "(...) im bardziej jednorodne wewnętrznie są poszczególne warstwy, a różnice między warstwami duże" [17].
W przypadku zilustrowanym na rys. 3.9a) warstwy nawet "na oko"

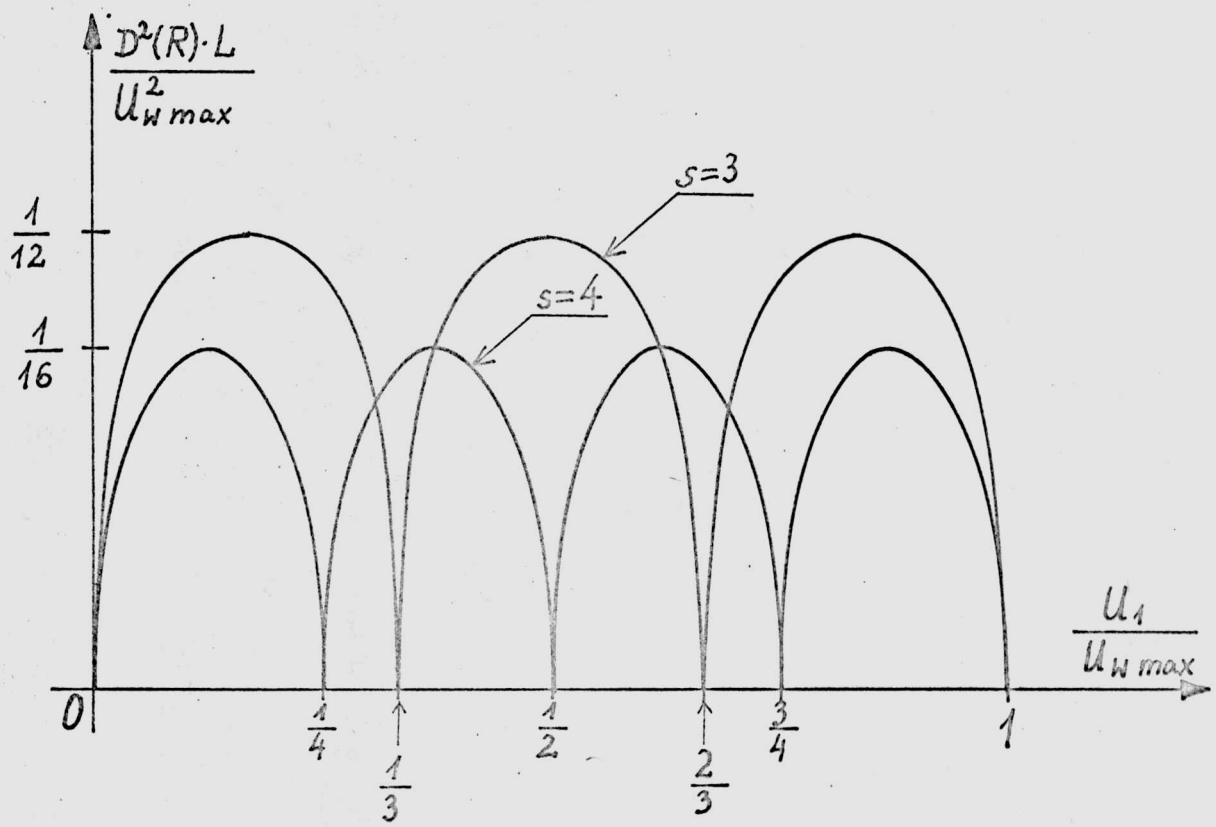


Rys. 3.10. a) Przykład nieoptymalnego podziału zbioru $[\tilde{0},\ \tilde{U}_{w\ max}]$ na dwie równe warstwy.

b) Zależność unormowanej wariancji wyniku $\frac{D^2(R)\cdot L}{U^2_{w\ max}}$ od unormowanej wartości mierzonego napięcia $\frac{U_1}{U_{w\ max}}$ w przypadku, gdy podział na warstwy zbioru napięć odtwarzanych przez wzorzec jest taki jak na rys. a).

są bardziej jednorodne niż w przypadku z rys. 3.10a), bo zawierają napięcia mniej różniące się pod względem wartości. Z tego też powodu maksimum wariancji wynika odpowiadające podziałowi z rys. 3.9a) jest o połowę mniejsze od maksimum wariancji odpowiadającego podziałowi na warstwy dokonanemu wg rys. 3.10a).

Uogólnienie powyższych rozważań na przypadek losowania s-warstwowego (s = 2, 3, ...) jest następujące:
Jeżeli warstwy są równe, a losowanie - proporcjonalne (w rozumieniu wzoru (3.105)) to - z punktu widzenia wariancji wyniku $D^2(R)$ - najlepiej jest, gdy podział na s-warstw zbioru napięć odtwarzanych przez wzorzec jest taki, że poszczególne warstwy nawzajem się nie przenikają (porównaj rys. 3.9a). Wykresy zależności: $\frac{D^2(R) \cdot L}{U^2_{w\,max}} = f\left(\frac{U_1}{U_{w\,max}}\right)$ są wtedy takie, jak to przedstawiono na rys. 3.11.



Rys. 3.11. Zależność unormowanej wariancji wyniku $\frac{D^2(R)\cdot L}{U^2_{W\,max}}$ od unormowanej wartości napięcia mierzonego $\frac{U_1}{U_{W\,max}}$ w przypadku losowania trój- i cztero-warstwowego (s - liczba warstw)

Porównanie rysunków: 3.9b), 3.10b) i 3.11 prowadzi do wniosku, że losowanie warstwowe wykonane zgodnie z poczynionymi założeniami, powoduje zmniejszenie wartości maksymalnej wariancji:

$$\max\left\{\frac{D^2(R)\cdot L}{U^2_{W\,max}}\right\}$$

$$U_1 \in [0,\ U_{W\,max}]$$

w stosunku $\frac{1}{s}$, gdzie s-liczba warstw, na które podzielono zbiór

napięć odtwarzanych przez wzorzec.

Warto zauważyć, że podział na równe warstwy zbioru napięć odtwarzanych przez wzorzec $[\tilde{0}, \tilde{U}_{w\,max}]$ w taki sposób, by nie przenikały się one wzajemnie, stwarza jeszcze jedną - pośrednią - możliwość redukcji wariancji wyniku pomiaru.
Otóż, jak to wynika z rys. 3.9a), a także ze wzorów (3.117a,b) i (3.110), w przypadku losowania dwuwarstwowego, gdy np. $\tilde{U}_1 \in [\tilde{0}, \frac{\tilde{U}_{w\,max}}{2}]$, wyniki porównań tego napięcia z napięciami wzorcowymi wylosowanymi z II warstwy będą zawsze porażką, bo w drugiej warstwie nie ma napięć mniejszych od $\tilde{U}_1$. Wynika stąd, że liczba sukcesów L_2'' uzyskana podczas losowania napięć z drugiej warstwy będzie w tym przypadku zerem. Zupełnie podobnie będzie, gdy $\tilde{U}_1 \in (\frac{\tilde{U}_{w\,max}}{2}; \tilde{U}_{w\,max}]$. Wtedy bowiem każde losowanie napięcia wzorcowego z pierwszej warstwy zakończy się sukcesem i : $L_2' = \frac{L}{2}$. Powyższe spostrzeżenie sugeruje, by nie wykonywać losowań napięć wzorcowych z tych warstw, w przypadku których wynik porównania można z góry przewidzieć. Wymaga to oczywiście wzbogacenia układu z rys. 2.1 o dodatkowe elementy umożliwiające stwierdzenie, w której warstwie napięć wzorcowych leży napięcie mierzone. Informacja taka pozwalałaby na zmniejszenie liczby porównań L wykonywanych w ramach procedury komparacyjnej w stosunku $\frac{1}{s}$, gdzie s-liczba warstw. Gdyby natomiast wykonać wszystkie L porównań, to oczywiście warto to robić tylko z napięciami wzorcowymi z tej warstwy, w zakresie której leży napięcie mierzone. Spowoduje to pozorne, s-krotne zwiększenie liczby wykonanych porównań i zmniejszenie wariancji wyniku pomiaru w tym samym stosunku.

Ostatecznie więc losowanie wg schematu s-warstwowego umożliwia s^2-krotne zmniejszenie wartości maksymalnej wariancji wyniku pomiaru, w stosunku do schematu losowania nieograniczonego [18] (s razy - dzięki losowaniu warstwowemu i s razy - w razie nie wykonywania porównań z napięciami wzorcowymi z tych warstw, w przypadku których wyniki porównań można przewidzieć z góry). Oznacza to, że wartość graniczna $\Delta_{1\,max}$ błędu losowego, proporcjonalna (2.23) do pierwiastka kwadratowego z maksymalnej wartości wariancji wyniku, może być w schemacie losowania s-warstwowego zmniejszona s razy w stosunku do losowania nieograniczonego.

2. Wpływ właściwości układu porównania napięć

Założono, że pomiarowi podlega wartość jednej realizacji napięcia $\tilde{U}_1$ czyli, że zbiory $\tilde{\tilde{U}}$ i $\tilde{\tilde{U}}_p$ mają postać:

$$\tilde{\tilde{U}} = \{\tilde{U}_1\} \quad , \quad \tilde{\tilde{U}}_p = \{\underbrace{\tilde{U}_1, \tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_1}_{L \text{ razy}}\} \quad .$$

Ponadto przyjęto, że wzorzec napięcia może odtwarzać wszystkie realizacje z przedziału $[\tilde{0}, \tilde{U}_{w\,max}]$ zgodnie z równomierną funkcją gęstości prawdopodobieństwa (2.10). Założono też, że losowania napięć wzorcowych w poszczególnych taktach procedury komparacyjnej są niezależne i że losowanie odbywa się wg schematu losowania nieograniczonego.

W dotychczasowych rozważaniach zakładano, że blok detektora relacji porządku $\lessdot$, występujący w układzie realizującym stochastyczną komparację przeglądową typu "większy-mniejszy" (rys. 2.1) jest idealnie czuły, bezhisterezowy, bezinercyjny, niepobierający energii ze źródeł porównywanych napięć. Rzeczywiste detektory relacji porządku na ogół nie spełniają w pełni powyższych założeń.

Nieidealność polegająca na pobieraniu energii z obwodów porównywanych napięć może już być dzisiaj znacznie zredukowana. Np. zastosowanie przed każdym z wejść detektora relacji porządku wzmacniacza operacyjnego w układzie wtórnika napięciowego z tranzystorami polowymi na wejściu umożliwia uzyskanie oporności wejściowych rzędu $10^8 - 10^{11}$ [19]. Pozwala to na porównywanie napięć, których źródła mają znaczne oporności wyjściowe. Jest

oczywiste, że zastosowanie omówionych wtórników - separatorów powoduje zawsze określoną zmianę porównywanych napięć (nieliniowość, wzmocnienie różne od jedności). Fakt ten musi być uwzględniany podczas analizy błędu układu, w którym je zastosowano.

Inercja detektora relacji porządku $<$ polega na tym, że stan jego wyjścia ustala się z pewnym opóźnieniem w stosunku do momentu ustalenia napięć na wejściach. Ta cecha bloku porównania napięć ma wpływ na maksymalną szybkość pracy układu, w którym go zastosowano. Jest ona uwzględniona o oszacowaniach minimalnych czasów trwania omawianej procedury komparacyjnej (rozdział IV).

Kolejna właściwość rzeczywistych układów do porównywania napięć - ograniczona czułość - polega na tym, że układ taki reaguje zmianą stanu swego wyjścia tylko wówczas, gdy różnica napięć wejściowych ma określoną, różną od zera wartość. Ograniczona czułość detektora relacji porządku występuje bardzo często łącznie ze zjawiskiem h i s t e r e z y . Polega ono na tym, że zmiana stanu z 1 na 0 logiczne zachodzi na wyjściu cyfrowym detektora przy innej wartości różnicy napięć wejściowych niż zmiana stanu z 0 na 1 logiczną. Histereza detektora relacji $<$ może być skutkiem zasady jego pracy [20] lub niedoskonałości działania, albo też może być wprowadzona celowo - aby zabezpieczyć detektor przed wzbudzeniem się drgań [21].

Podrozdział ten poświęcono wpływowi histerezy układu porównania napięć na właściwości stochastycznej procedury komparacyjnej typu "większy - mniejszy". Analiza taka wydaje się celowa co najmniej z dwóch powodów:

Po pierwsze: charakter wpływu histerezy układu porównania napięć

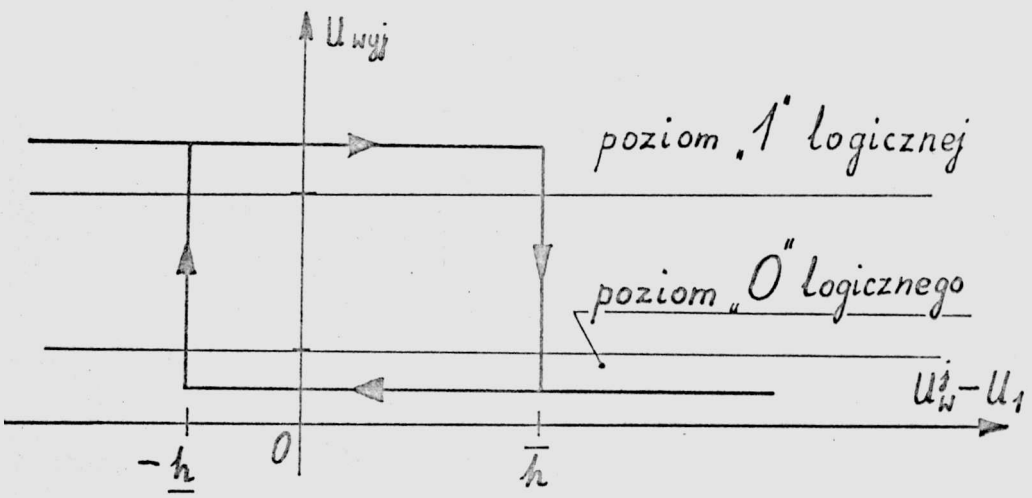
na wartość oczekiwaną i wariancję wyniku pomiaru jest interesujący z poznawczego punktu widzenia.

Po drugie: w przypadku procedur komparacyjnych typu poszukiwawczego, realizowanych w większości współczesnych urządzeń pomiarowych, wzorzec może odtwarzać co najwyżej skończoną liczbę stanów ("ziarn"). Musi on zatem być dyskretny. Ziarno wzorca jest głównym czynnikiem ograniczającym doskonałość pomiarów z użyciem procedur komparacyjnych typu poszukiwawczego. Nieczułość lub histereza układu porównania napięć powoduje błąd, który - przy dzisiejszym stanie techniki - może być na ogół uczyniony pomijalnym względem błędu spowodowanego ziarnistością wzorca [22].

W przypadku zastosowania stochastycznej procedury komparacyjnej typu "większy - mniejszy", istnieje możliwość użycia wzorca wytwarzającego napięcia o ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa. Błąd związany z ziarnistą strukturą wzorca nie występuje wtedy. Na jego miejsce pojawia się błąd związany z losowam charakterem wyniku pomiaru. Błąd ten nazywano w tej pracy składową losową Δ_l błędu komparacji. Najistotniejszą cechą, odróżniającą go od błędu spowodowanego ziarnistością wzorca jest to, że składowa losowa Δ_l błędu komparacji może być bez trudu dowolnie zmniejszona przez odpowiednie zwiększenie liczby L porównań wykonanych w ramach procedury komparacyjnej. Oznacza to, że składowe błędów, nieistotne w przypadku posługiwania się wzorem ziarnistym, mogą stać się dominujące w razie posługiwania się wzorcem wytwarzającym napięcia o ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa. Z tego też powodu, mimo iż autor nie wyobraża sobie dziś jeszcze, w oparciu

o jaką zasadę mógłby działać taki wzorzec, celowe wydaje się badanie wpływu histerezy układu porównania napięć na właściwości wyniku pomiaru.

Do dalszych rozważań przyjęto uproszczony model histerezy układu porównania napięć przedstawiony na rys. 3.12 za pomocą charakterystyki wejściowo-wyjściowej tego układu.



Rys. 3.12. Charakterystyka wejściowo-wyjściowa układu porównania napięć, przyjęta do dalszych rozważań

Jak widać na rysunku, w dowolnym j-tym (j = 1, 2, ..., L) takcie procedury komparacyjnej stan wyjścia układu porównania napięć zmienia się zgodnie z następującymi równaniami (w celu uproszczenia zapisów posłużono się notacją dotyczącą wartości, a więc - bez falki u góry poszczególnych symboli):

$$0 \longrightarrow 1 : \quad U_w^j - U_1 < -\underline{h}$$

$$1 \longrightarrow 0 : \quad U_w^j - U_1 > \bar{h} , \tag{3.119}$$

gdzie: $\underline{h}$, $\bar{h}$ oznaczają odpowiednio dolny i górny próg przełączania detektora relacji $\lessdot$. W przypadku układu do porównywania napięć mają one sens napięcia elektrycznego i mierzy się je w woltach.

Należy podkreślić, że dla różnych układów porównania napięć zmiany stanu wyjsciowego z 0 na 1 i na odwrót mogą mieć miejsce zarówno przy dodatnich jak i przy ujemnych wartościach różnicy $U_w^j - U_1$. Przyjęto k o n w e n c j ę , że progi dolny $\underline{h}$ i górny $\bar{h}$ mają wartość dodatnią, gdy są one położone na osi $U_w^j - U_1$ tak, jak na rys. 3.12 (przełączenie $0 \longrightarrow 1$ przy ujemnej wartości różnicy $U_w^j - U_1$, przełączenie $1 \longrightarrow 0$ - przy dodatniej).

Założono, że wartości progów przełączania $\underline{h}$ i $\bar{h}$ nie zależą od wartości porównywanych napięć U_1 i U_w^j. Założenie to upraszcza znacznie dalsze rozważania. Wydaje się jednak, że w praktyce może ono często nie być spełnione.

Zastosowanie bloku porównania napięć wykazującego histerezę w układzie realizującym stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" (rys. 2.1) powoduje, że mimo założenia niezależności losowań napięć wzorcowych w poszczególnych taktach procedury, wynik sprawdzenia warunku: "czy $\tilde{U}_w^j \lessdot \tilde{U}_1$?", jest uzależniony nie tylko od wartości napięć: mierzonego U_1 i wzorcowego U_w^j wylosowanego w j-tym takcie, ale także zależy od wyniku porównania w poprzednim, (j-1)-szym takcie procedury. Stosownie do tego, jaką wartość ma napięcie mierzone U_1, może tu wystąpić pięć przypadków.

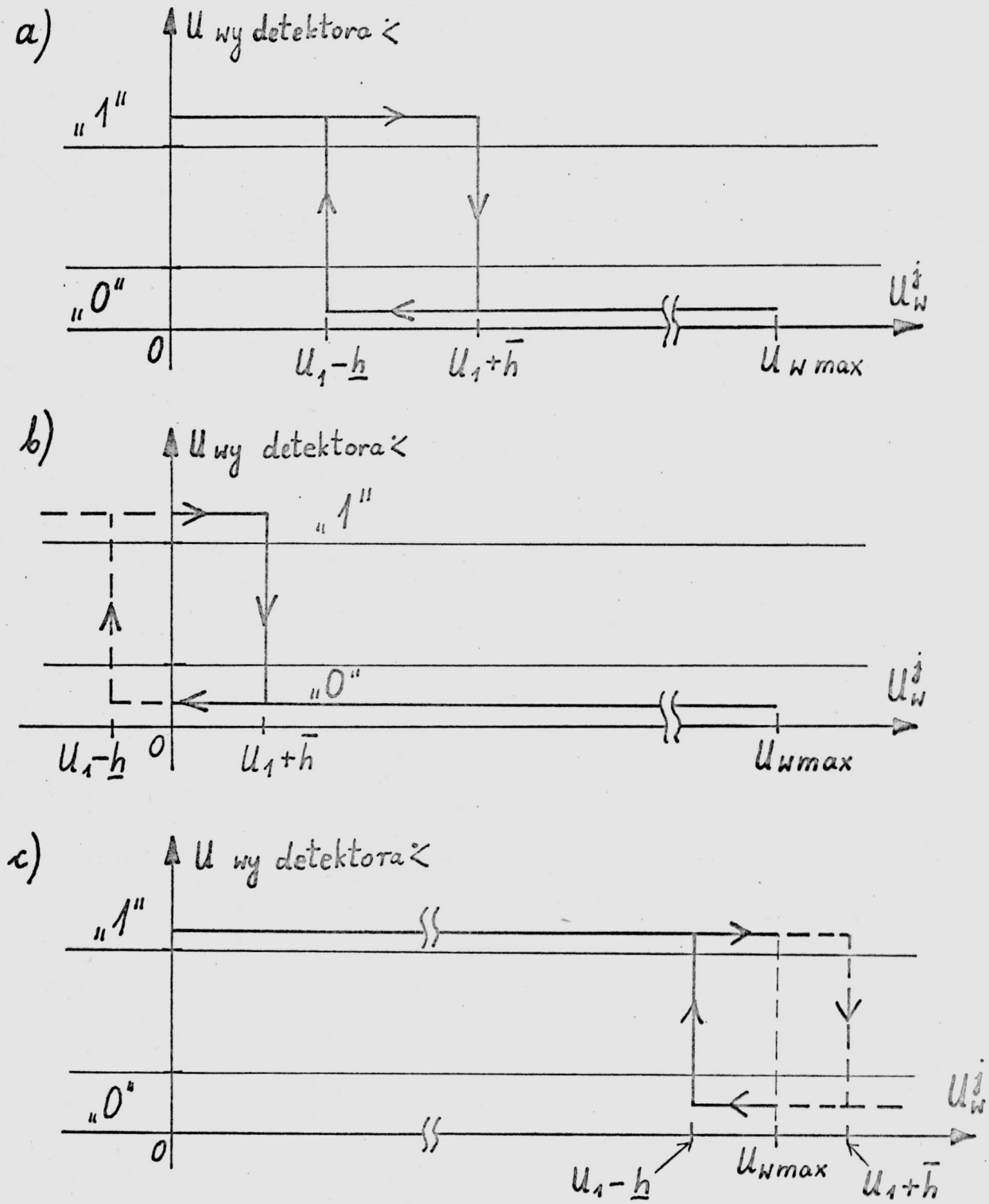
Przypadek I: $\underline{h} < U_1 \leqslant U_{w\ max} - \bar{h}$.

Zależność poziomu logicznego wyjścia układu porównania napięć po j-tym (j = 1, 2, ..., L) takcie procedury komparacyjnej od wartości napięcia wzorcowego U_w^j, z którym porównano napięcie mierzone w tym takcie, przedstawia rys. 3.13a). Jak wynika z rysunku, zastosowanie w układzie na rys. 2.1 detektora relacji porządku charakteryzującego się histerezą spowodowało, że zbiór napięć odtwarzanych przez wzorzec: $[\tilde{0},\ \tilde{U}_{w\ max}]$ można podzielić na trzy podzbiory:

- Napięcia wzorcowe o wartościach z przedziału $[0,\ U_1 - \underline{h})$: Charakteryzują się one tym, że wylosowanie dowolnego z nich powoduje, iż po j-tym takcie procedury wyjście układu porównania napięć znajduje się w stanie jedynki logicznej.
- Napięcia wzorcowe o wartościach z przedziału $[U_1 - \underline{h};\ U_1 + \bar{h})$: wylosowanie w dowolnym takcie procedury komparacyjnej któregoś z tych napięć spowoduje, że stan wyjścia detektora relacji porządku pozostanie niezmieniony.
- Napięcia wzorcowe o wartościach z przedziału: $[U_1 + \bar{h};\ U_{w\ max}]$: wylosowanie dowolnego z nich spowoduje, że po j-tym takcie procedury, na wyjściu układu porównania napięć wystąpi zero logiczne.

Przypadek II: $-\bar{h} < U_1 \leqslant \underline{h}$.

Jak widać na rysunku 3.13b), w zbiorze napięć, które może odtwarzać wzorzec: $[\tilde{0},\ \tilde{U}_{w\ max}]$ nie ma takich, które mogłyby spowodować zmianę stanu wyjścia układu porównania napięć z zera na jedynkę. Zbiór napięć wzorcowych składa się teraz z napięć



Rys. 3.13. Zależność stanu wyjściowego układu porównania napięć po j-tym takcie procedury komparacyjnej od wartości U_w^j napięcia wzorcowego wylosowanego w tym takcie w przypadku, gdy napięcie mierzone ma wartość:

a) $\underline{h} < U_1 \leqslant U_{w\,max} - \bar{h}$

b) $-\bar{h} < U_1 \leqslant \underline{h}$

c) $U_{w\,max} - \bar{h} < U_1 \leqslant U_{w\,max} + \underline{h}$

dwóch rodzajów. Są to:

- Napięcia o wartościach z przedziału $[0, U_1 + \bar{h})$. Mają one tę właściwość, że wylosowanie w dowolnym takcie procedury komparacyjnej któregoś z nich powoduje, że stan wyjścia układu porównania napięć nie ulegnie zmianie.
- Napięcia wzorcowe z przedziału $[U_1 + \bar{h}, U_{w\ max}]$. Wylosowanie dowolnego z nich powoduje, że stan wyjścia układu porównania napięć zostaje ustawiony na zero logiczne.

Wynika stąd, że jeżeli wyjście detektora relacji $\lessdot$ przed rozpoczęciem procedury było w stanie zera logicznego, to pozostanie ono w tym stanie przez cały czas trwania procedury i końcowa zawartość licznika L_2 będzie równa zero.

Procedura komparacyjna może zakończyć się niezerowym wskazaniem licznika L_2, ale tylko wtedy, gdy przed przystąpieniem do niej wyjście układu porównania napięć znajduje się w stanie jedynki logicznej. Pozostanie ono w tym stanie dopóty, dopóki nie zostanie wylosowane napięcie wzorcowe z przedziału $[U_1 + \bar{h}; U_{w\ max}]$. Wtedy bowiem nastąpi nieodwracalne przełączenie wyjścia układu porównania napięć z jedynki na zero. Fakt taki może oczywiście mieć miejsce już w pierwszym takcie procedury i z tego powodu stan licznika L_2 po zakończeniu komparacji może być zerem także w przypadku, gdy przed jej rozpoczęciem detektor relacji porządku był w stanie jedynki logicznej.

Przypadek III: $U_1 \leqslant -\bar{h}$

W przypadku tym (nie uwidocznionym na rysunku) wszystkie napięcia odtwarzane przez wzorzec mają tę właściwość, że ich porównanie z napięciem mierzonym spowoduje ustawienie wyjścia

detektora z histerezą w stan zera logicznego. Oznacza to, że bez względu na stan początkowy układu porównania, procedura komparacyjna wykonana w przypadku napięcia $\tilde{U}_1$ o rozpatrywanej tu wartości, zakończy się zawsze zerowym stanem licznika L_2.

Przypadek IV: $U_{w\,max} - \bar{h} < U_1 \leqslant U_{w\,max} + \underline{h}$.

Jak wynika z rysunku 3.13c), napięcia odtwarzane przez wzorzec można teraz podzielić na dwie grupy. Są to:

- Napięcia wzorcowe o wartościach z przedziału $[0,\ U_1 - \underline{h})$ o tej właściwości, że wylosowanie dowolnego z nich i podanie do porównania w którymś z taktów procedury komparacyjnej, powoduje ustawienie wyjścia detektora relacji porządku w stan jedynki logicznej.
- Napięcia wzorcowe z przedziału $[U_1 - \underline{h};\ U_{w\,max}]$ charakteryzujące się tym, że w przypadku wylosowania któregoś z nich, stan wyjścia układu detektora relacji porządku nie ulega zmianie.

Żadne z napięć odtwarzanych przez wzorzec nie może zmienić stanu wyjścia układu porównania z jedynki na zero. Jeżeli więc wyjście tego układu jest, przed rozpoczęciem procedury, w stanie jedynki, to pozostanie w nim przez cały czas jej trwania i wskazanie końcowe licznika L_2 będzie równe L (L - liczba porównań wykonanych w ramach komparacji).

Jeśli natomiast wyjście układu porównania napięć jest, przed rozpoczęciem procedury komparacyjnej, w stanie zerowym, to może w nim pozostawać tak długo jak długo wylosowywane napięcia wzorcowe będą miały wartości z przedziału $[U_1 - \underline{h};\ U_{w\,max}]$. W takcie, w którym zostanie wylosowane napięcie wzorcowe z przedziału $[0,\ U_1 - \underline{h})$, nastąpi nieodwracalna zmiana stanu

wyjścia układu porównania na jedynkę. Układ pozostanie już w tym stanie do końca procedury. Wskazanie końcowe licznika L_2 w przypadku, gdy przed rozpoczęciem komparacji układ porównania napięć był w stanie zera logicznego, może więc być miejsze niż L.

Przypadek V: $U_1 > U_{w\ max} + \underline{h}$

Przypadku tego nie uwidoczniono na rysunku. Można go sobie łatwo wyobrazić przesuwając wykres histerezy z rys. 3.13c) względem układu współrzędnych odpowiednio daleko w prawo. Wszystkie napięcia odtwarzane przez wzorzec mają w tym przypadku tę właściwość, że w wyniku ich porównania z napięciem mierzonym, wyjście detektora relacji porządku zostaje ustawione w stan jedynki logicznej. Tak więc bez względu na to jaki jest stan wyjścia tego układu przed rozpoczęciem procedury komparacyjnej, wskazanie końcowe licznika L_2 będzie zawsze równe L.

Podstawą analizy właściwości metrologicznych badanego układu jest sformułowanie modelu probabilistycznego i wyprowadzenie na jego podstawie wzorów na wartość oczekiwaną E(R) i wariancję $D^2(R)$ wyniku pomiaru. Jak widać z wykonanego właśnie opisu, zachowanie się układu z rys. 2.1 wyposażonego w detektor relacji $\lessgtr$ z histerezą jest, we wszystkich pięciu omówionych zakresach zmian napięcia mierzonego, nieco inne i wymaga oddzielnego wyprowadzenia poszukiwanych zależności na E(R) i $D^2(R)$.

Warto jednak zauważyć, że z wymienionych pięciu zakresów zmian napięcia U_1, praktyczne znaczenie ma jedynie pierwszy:

$$\underline{h} < U_1 \leq U_{w\ max} - \bar{h} .$$

Ponieważ progi przełączania $\underline{h}$ oraz $\overline{h}$ mają wartości znacznie mniejsze niż $U_{w\ max}$, pokrywa on niemal cały przedział napięć mierzonych:

$$0 \leqslant U_1 \leqslant U_{w\ max} .$$

Z tego też powodu, w podrozdziale niniejszym zamieszczono wyprowadzenie wzorów na $E(R)$ i $D^2(R)$ obowiązujące właśnie we wspomnianym - pierwszym przedziale zmian U_1. Wyprowadzenia dotyczące pozostałych czterech zakresów, jako uzupełniające, a wymagające dość żmudnych obliczeń, zamieszczono w Dodatku 3. Gotowe wyniki rozważań tam zawartych wykorzystano w dalszej części niniejszego podrozdziału.

W celu określenia wartości oczekiwanej $E(R)$ i wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru w przypadku zastosowania w układzie realizującym stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" detektora relacji $\lessdot$ z histerezą, niezbędna jest znajomość wartości oczekiwanej i wariancji stanu końcowego licznika L_2. Ten stan końcowy jest, jak to już stwierdzano, zmienną losową. Zmienną tę można przedstawić w postaci sumy:

$$L_2 = X^1 + X^2 + \ldots + X^L \qquad (3.120)$$

gdzie: X^j $(j = 1, 2, \ldots, L)$ - zmienne losowe o rozkładzie dwupunktowym:

$$X^j = \begin{cases} 1, & \text{gdy wyjście układu porównania napięć, po zakończeniu} \\ & j\text{-tego taktu procedury, jest w stanie jedynki logicz-} \\ & \text{nej,} \qquad (3.121) \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \ldots, L.$$

Prawdopodobieństwa zdarzeń występujących po prawej stronie równania (3.121) zależą od wyniku poprzedniego porównania (tzn. od X^{j-1}). Przyczyną tego uzależnienia jest histereza układu porównania napięć (porównaj rys. 3.13a). Niezależność zmiennej losowej X^j od zmiennych X^{j-2}, X^{j-3}, ... wynika z założenia niezależności losowań napięć wzorcowych w poszczególnych taktach procedury komparacyjnej. Ciąg zmiennych losowych X^1, X^2, ..., X^L tworzy więc łańcuch Markowa [23].

Zgodnie z rys. 3.13a), prawdopodobieństwa przejść w jednym takcie procedury wynoszą odpowiednio:

$$p_{01} \overset{df.}{=\!=} P(X^j = 1 \mid X^{j-1} = 0) = \frac{U_1 - \underline{h}}{U_{w\,max}} \qquad (3.122)$$

$$p_{11} \overset{df.}{=\!=} P(X^j = 1 \mid X^{j-1} = 1) = \frac{U_1 + \overline{h}}{U_{w\,max}}, \quad j = 1, 2, \ldots, L$$

gdzie symbol X^o oznacza stan wyjścia układu porównania napięć przed rozpoczęciem procedury komparacyjnej.

$$P(X^o = 1) \overset{ozn.}{=\!=\!=} p \,. \qquad (3.123)$$

Oszacowanie wartości oczekiwanej zmiennej losowej L_2 staje się łatwe jeżeli założy się, że liczba L porównań wykonanych w ramach procedury komparacyjnej jest duża (ściślej $L \to \infty$). Można wtedy skorzystać z twierdzenia, że zmienna losowa L_2 ma rozkład asymptotycznie normalny z parametrami [24]:

$$E(L_2) = L \cdot \frac{p_{01}}{1-p_{11}+p_{01}} \tag{3.124a}$$

$$D^2(L_2) = L \cdot p_{01} \cdot (1-p_{11}) \cdot \frac{1+p_{11}-p_{01}}{(1-p_{11}+p_{01})^3} \tag{3.124b}$$

Uwzględnienie zależności (3.122) we wzorach (3.124a i b), tych ostatnich zaś w równaniach (2.15) i (2.18) prowadzi - po przekształceniach - do poszukiwanych związków:

przy $U_1 \in (\underline{h};\ U_{w\ max} - \bar{h}]$

$$E(R) = U_{w\ max} \frac{U_1 - \underline{h}}{U_{w\ max} - (\bar{h} + \underline{h})}\ , \tag{3.125}$$

$$D^2(R) = \frac{1}{L}\left[U_1 - \underline{h}\right]\left[U_1 - (U_{w\ max} - \bar{h})\right] \cdot \mathcal{H}\ , \tag{3.126}$$

gdzie:

$$\mathcal{H} = \frac{1 + \frac{\bar{h} + \underline{h}}{U_{w\ max}}}{\left[1 - \frac{\bar{h} + \underline{h}}{U_{w\ max}}\right]^3} \tag{3.127}$$

Prawe strony wzorów (3.125) (3.126) umieszczono też w tabeli 3.1. Tabela ta zawiera poza tym wyrażenia do obliczania wartości oczekiwanej $E(R)$ i wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru w pozostałych czterech zakresach zmian napięcia mierzonego. Wzory te - jak powiedziano - pochodzą z Dodatku 3. Znaczenie symboli użytych w tabeli 3.1 jest następujące:

$\underline{h}$, $\bar{h}$ - progi przełączania układu do porównywania napięć (porównaj rys. 3.12),

p - prawdopodobieństwo (3.123) tego, że stan wyjścia układu do porównywania napięć przed rozpoczęciem procedury komparacyjnej odpowiada jedynce logicznej,

$U_{w\,max}$ - wartość największego z napięć odtwarzanych przez wzorzec,

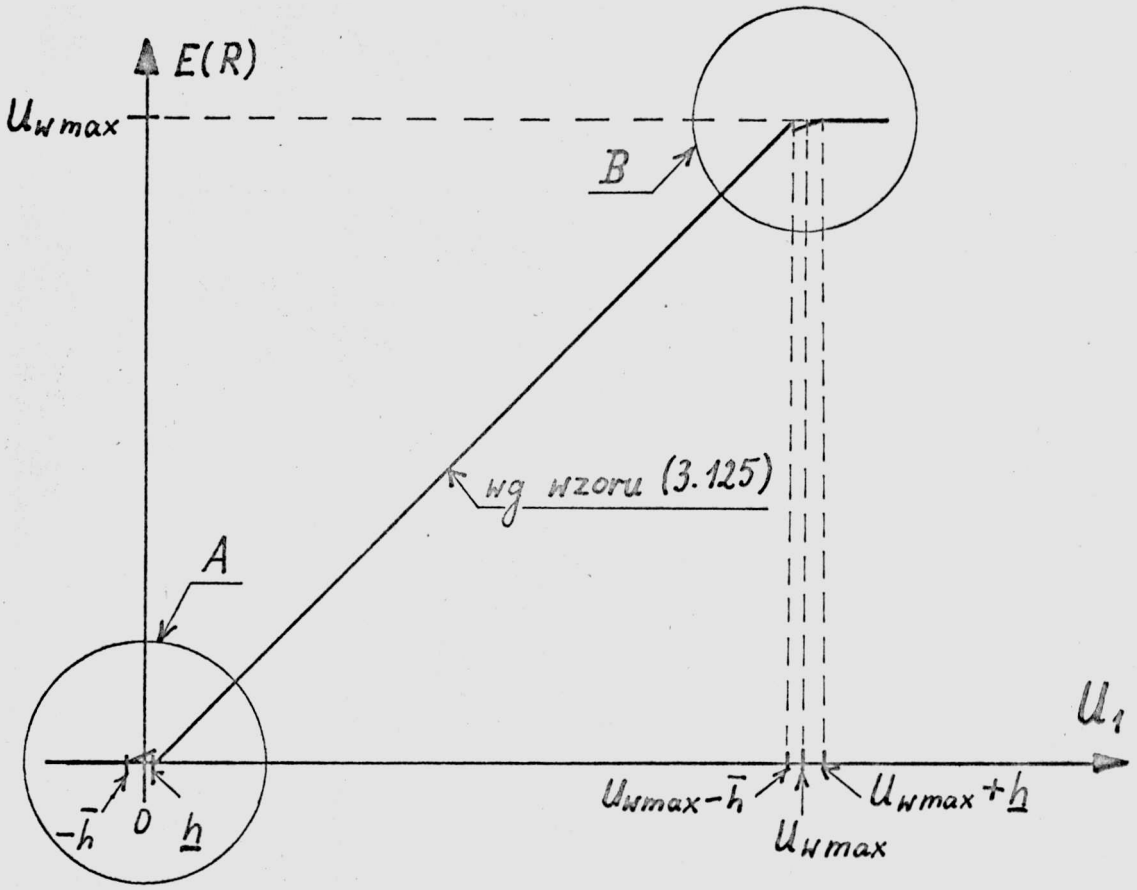
U_1 - wartość napięcia mierzonego,

L - liczba porównań wykonanych w ramach procedury komparacyjnej.

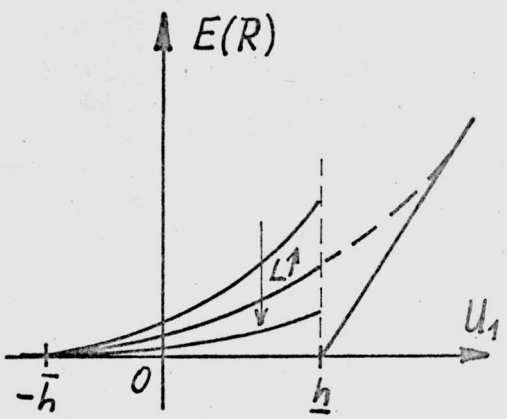
Na podstawie tabeli 3.1 można złożyć poszukiwane związki wartości oczekiwanej $E(R)$ i unormowanej wariancji $\frac{D^2(R) \cdot L}{U^2_{w\,max}}$ wyniku pomiaru, od wartości U_1 napięcia mierzonego w całym zakresie jego możliwych zmian. Zależności te przedstawiono na rysunkach 3.14 i 3.15.

bela 3.1. Wyrażenia do obliczania wartości oczekiwanej E(R) i wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru uzyskiwanego w układzie realizującym stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" w przypadku, gdy detektor relacji $\lessdot$ charakteryzuje się histerezą

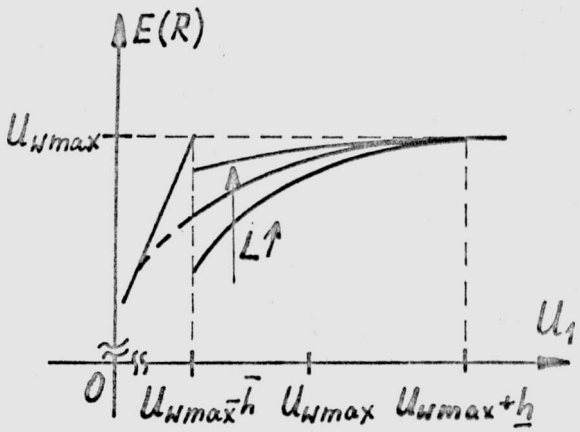
p.	Przedział wartości U_1 mierzonego napięcia	Wyrażenie na wartość oczekiwaną E(R) wyniku pomiaru	Wyrażenie na wariancję $D^2(R)$ wyniku pomiaru
1	$(\underline{h};\ U_{w\ max} - \bar{h}\ ]$	$U_{w\ max} \cdot \dfrac{U_1 - \underline{h}}{U_{w\ max} - (\bar{h} + \underline{h})}$	$\dfrac{1}{L}\left[U_1 - \underline{h}\right]\left[U_1 - (U_{w\ max} - \bar{h})\right] \cdot \mathcal{H}$ $\mathcal{H} = \dfrac{1 + \dfrac{\underline{h} + \bar{h}}{U_{w\ max}}}{\left[1 - \dfrac{\underline{h} + \bar{h}}{U_{w\ max}}\right]^3}$
2	$(-\bar{h};\ \underline{h}\ ]$	$p \cdot \dfrac{1}{L}(U_1 + \bar{h}) \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{U_1 + \bar{h}}{U_{w\ max}}}$	$\dfrac{U_{w\ max}}{L^2} \cdot p \cdot (U_1 + \bar{h})$
3	$(-\infty\ ;\ -\bar{h}\ ]$	0	0
4	$(U_{w\ max} - \bar{h};\ U_{w\ max} + \underline{h}]$	$U_{w\ max}\left[1 - \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{U_{w\ max}}{U_1 - \underline{h}} - 1\right)(1 - p)\right]$	$\dfrac{U_{w\ max}}{L^2} \cdot (1 - p)(U_{w\ max} + \underline{h} - U_1)$
5	$(U_{w\ max} + \underline{h};\ \infty\ )$	$U_{w\ max}$	0



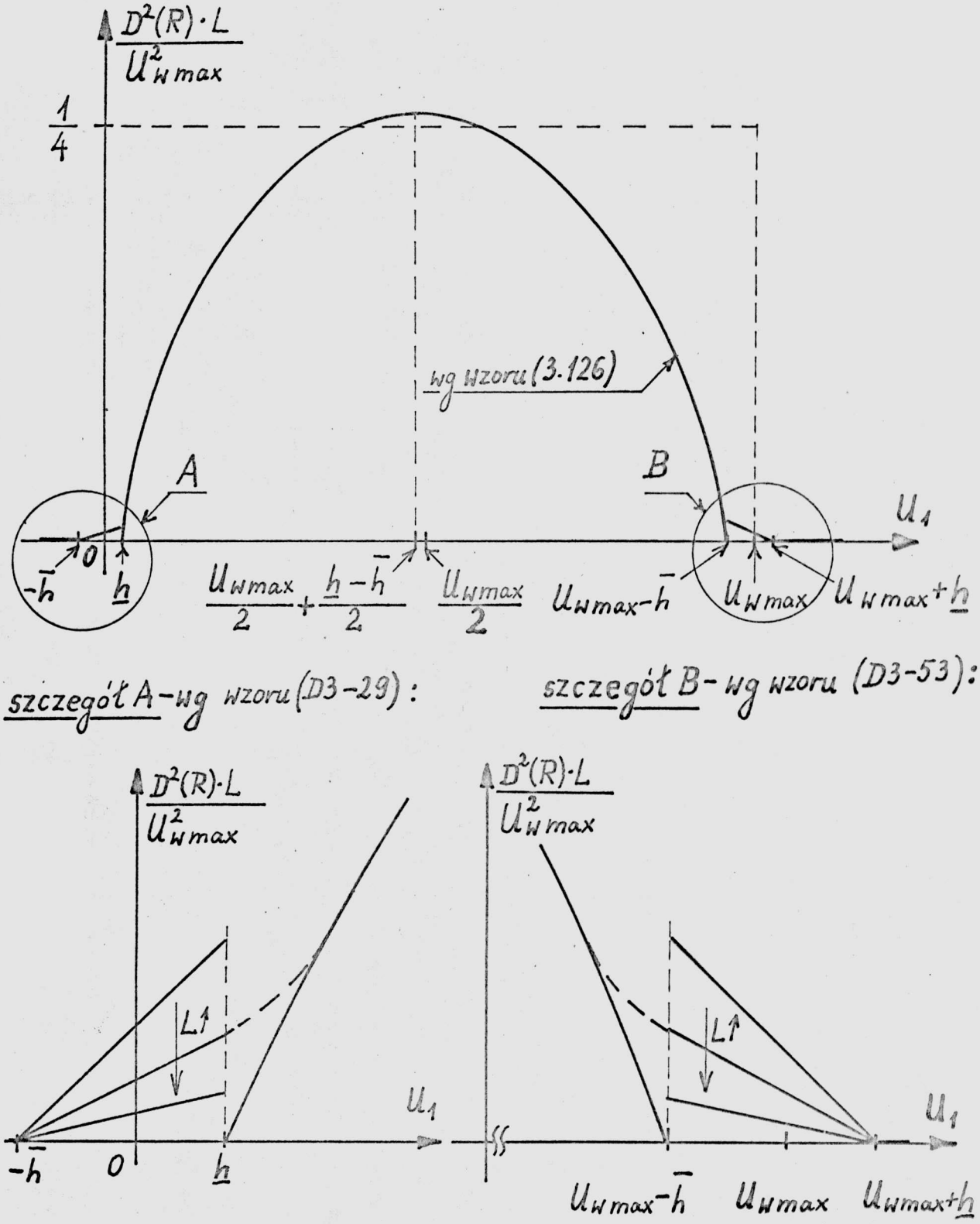
szczegół A – wg wzoru (D3-20):



szczegół B – wg wzoru (D3-48):



Rys. 3.14. Zależność wartości oczekiwanej E(R) wyniku pomiaru od wartości U_1 mierzonego napięcia w przypadku, gdy w układzie realizującym procedurę stochastycznej komparacji pomiarowej typu "większy - mniejszy" zastosuje się układ porównania napięć z histerezą.



Rys. 3.15. Zależność unormowanej wariancji $\frac{D^2(R)\cdot L}{U^2_{W\,max}}$ wyniku pomiaru od wartości U_1 mierzonego napięcia w przypadku, gdy w układzie realizującym procedurę stochastycznej komparacji pomiarowej typu "większy - mniejszy" zastosuje się układ porównania napięć z histerezą.

Przed przystąpieniem do analizy metrologicznej uzyskanego modelu probabilistycznego należy dokonać pobieżnej choćby oceny jego wiarygodności.

Podstawowym wymaganiem, które powinien spełniać ten model jest to, że w granicy: $\underline{h} \longrightarrow 0$, $\bar{h} \longrightarrow 0$, uzyskane krzywe powinny dążyć do krzywych otrzymanych przy założeniu, że detektor relacji $<$ jest bezhisterezowy. Łatwo sprawdzić (porównaj wzory (2.17), (2.20) i rys. 2.2), że uzyskane krzywe spełniają to wymaganie.

Niepokojące są jednak nieciągłości krzywych z rys. 3.14 i 3.15 w punktach: $U_1 = \underline{h}$ oraz $U_1 = U_{w\,max} - \bar{h}$. Zdaniem autora, są one skutkiem tego, że środkową część obu wykresów (przypadek I) uzyskano posługując się asymptotycznym rozkładem prawdopodobieństwa ($L \rightarrow \infty$) zmiennej losowej L_2. Fragmenty obu krzywych w przedziałach: $U_1 \in (-\bar{h};\ \underline{h}]$ oraz $U_1 \in (U_{w\,max} - \bar{h};\ U_{w\,max} + \underline{h}]$ uzyskano natomiast przy założeniu, że L jest skończone. Można więc spodziewać się, że gdyby przeanalizować działanie układu w zakresie $U_1 \in (\underline{h};\ U_{w\,max} - \bar{h}]$ z założeniem, że L jest skończone, to środkowe części wykresów z rys. 3.14 i 3.15 w otoczeniu punktów $U_1 = \underline{h}$ i $U_1 = U_{w\,max} - \bar{h}$ wyglądałyby tak, jak to zaznaczono na "szczegółach" linią przerywaną. O słuszności powyższej argumentacji dodatkowo przekonuje fakt, że fragmenty omawianych wykresów w obszarach: $U_1 \in (-\bar{h};\ \underline{h}]$ i $U_1 \in (U_{w\,max} - \bar{h};\ U_{w\,max} + \underline{h}]$ (uzyskane przy założeniu, że L jest skończone) mają tę właściwość, że przy $L \rightarrow \infty$ stają się one odcinkami poziomymi i łączą się w sposób ciągły ze środkowymi fragmentami wykresów, uzyskanymi z użyciem rozkładu asymptotycznego.

Ostatecznie można więc stwierdzić, że nie ma podstaw, by uzyskany

model probabilistyczny procedury, wyrażony syntetycznie na rys. 3.14 i 3.15, uznać za sprzeczny z właściwościami modelu bezhisterezowego bądź zawierający oczywiste błędy.

Warto podkreślić, że jeśli przyjmie się $\underline{h} = -\bar{h}$ (porównaj rys. 3.12), to rozpatrywany model - rys. 3.14 i 3.15 - opisuje sytuację, gdy do realizacji procedury komparacyjnej użyto detektora relacji porządku, który jest bezhisterezowy, ale ma próg nieczułości.

Składowa systematyczna błędu komparacji spowodowana histerezą układu porównania

Jak wynika z odpowiedniej kolumny tabeli 3.1, histereza układu porównania napięć powoduje, że wartość oczekiwana E(R) wyniku pomiaru różni się od wartości U_1 należnej mierzonemu napięciu. Zgodnie ze wzorem definicyjnym (2.29) oznacza to, że pomiar za pomocą komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" jest w rozpatrywanym przypadku obciążony błędem systematycznym. W celu odróżnienia go od błędów systematycznych spowodowanych innymi przyczynami, oznaczono go: Δ^{h}_{s}. Indeks "s" u dołu delty wskazuje na systematyczny charakter błędu, indeks "h" u góry - na jego źródło: h-istereza.

Wartości składowych błędu komparacji badano poprzednio w zakresie zmian napięcia mierzonego $U_1 \in [0; U_{w\,max}]$. Również i teraz bierze się pod uwagę tylko ten zakres napięć mierzonych.

Jak wynika ze wzoru, z tabeli 3.1, lp. 2, gdy napięcie mierzone leży w zakresie $U_1 \in [0, \underline{h}]$, wartość oczekiwana E(R) wyniku

pomiaru zależy od liczby L porównań wykonanych w ramach procedury komparacyjnej oraz od prawdopodobieństwa p zdarzenia, że przed rozpoczęciem komparacji wyjście układu porównania napięć znajduje się w stanie jedynki logicznej. Zupełnie podobnie jest, gdy $U_1 \in (U_{w\,max} - \bar{h};\ U_{w\,max}]$ (porównaj tab. 3.1, lp.4). Fakty te wykluczają, zdaniem autora, możliwość wykorzystania takiego wyniku do oceny wartości napięcia U_1 w tych zakresach. Podstawowym skutkiem wprowadzenia do układu realizującego procedurę komparacyjną typu "większy - mniejszy" bloku porównania napięć z histerezą jest więc zawężenie obszaru zmienności napięć mierzonych. Bez histerezy można było mierzyć $U_1 \in [0,\ U_{w\,max}]$, a teraz tylko takie, które należą do przedziału $U_1 \in [\underline{h};\ U_{w\,max} - \bar{h}]$. Stopień tego zmniejszenia zakresu pomiarowego jest w praktyce na szczęście niewielki. Jeżeli bowiem zastosuje się np. układ porównania z histerezą o szerokości $(\underline{h} + \bar{h})$ rzędu 1mV [25], to przy $U_{w\,max}$ rzędu 1V zakres napięć mierzonych ulega zmniejszeniu zaledwie o 0,1 %.

Niezależnie jednak od powyższej uwagi, składową systematyczną Δ_s^h błędu komparacji spowodowaną histerezą detektora relacji porządku, trzeba oszacować w całym zakresie zmian $U_1 \in [0;\ U_{w\,max}]$.

Gdy $U_1 \in [0;\ \underline{h}]$, to czynnik:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{U_1 + \bar{h}}{U_{w\,max}}}$$

w wyrażeniu na E(R) (patrz tabela 3.1, lp. 2) ma - przy założeniu, że $|\underline{h}| + |\bar{h}| \ll U_{w\,max}$ - wartość bliską jedności. Biorąc to pod uwagę, na podstawie wzoru (2.29) i tab. 3.1, lp.2, otrzymuje się,

że:

$$\Delta_s^h = \left(\frac{p}{L} - 1\right) \cdot U_1 + \frac{p}{L} \cdot \bar{h} \quad . \tag{3.128}$$

Ponieważ jednak liczba L porównań wykonanych w ramach procedury komparacyjnej jest na ogół większa od 10^3 (ze względu na wartość składowej losowej błędu komparacji), więc:

$$\Delta_s^h \approx -U_1 \quad . \tag{3.129}$$

W zakresie napięć mierzonych $U_1 \in [0, \underline{h}]$ błąd systematyczny spowodowany histerezą układu porównania napięć jest więc ujemny [26] i wynosi praktycznie 100 % wartości mierzonej.

W przypadku gdy $U_1 \in (\underline{h}; U_{w\,max} - \bar{h}]$, wzór na błąd systematyczny określa zależność (porównaj (2.29) i tab. 3.1, lp. 1):

$$\Delta_s^h = U_1 \cdot \frac{\bar{h} + \underline{h}}{U_{w\,max} - (\underline{h} + \bar{h})} - \frac{U_{w\,max}}{U_{w\,max} - (\underline{h} + \bar{h})} \cdot \underline{h} \quad . \tag{3.130}$$

Ponieważ jednak $\underline{h} + \bar{h} \ll U_{w\,max}$, więc:

$$\Delta_s^h \approx U_1 \cdot \frac{\bar{h} + \underline{h}}{U_{w\,max}} - \underline{h} \quad . \tag{3.131}$$

Jak widać z powyższego wzoru błąd Δ_s^h ma dwie składowe: multyplikatywną (tj. proporcjonalną do wartości mierzonego napięcia) i addytywną. Obecność składowej addytywnej jest szczególnie niekorzystna w przypadku pomiaru napięć o niewielkich wartościach: U_1 rzędu $(10 \div 100)\underline{h}$.

Byłoby więc wskazane, by składowa addytywna była równa zeru. Miałoby to miejsce, gdyby histereza układu porównania napięć charakteryzowała się zerową wartością dolnego progu przełączania (patrz rys. 3.12):

$$\underline{h} = 0.$$

Dodatkową zaletą tego faktu byłoby także i to, że spowodowane histerezą ograniczenie od dołu zakresu napięć mierzonych praktycznie nie miałoby miejsca.

Na podstawie wzorów (2.22) i tabeli 3.1, lp. 4 można napisać, że gdy $U_1 \in (U_{w\,max} - \bar{h};\ U_{w\,max}]$, to składową systematyczną Δ^h_s błędu komparacji spowodowaną histerezą układu porównania napięć opisuje zależność:

$$\Delta^h_s = U_{w\,max} - U_1 - \frac{U_{w\,max}}{L}\cdot(1 - p)\cdot\left(\frac{U_{w\,max}}{U_1 - \underline{h}} - 1\right) . \qquad (3.132)$$

Można sprawdzić, że w rozpatrywanym zakresie napięć mierzonych, przy założeniu, że $|\underline{h}|,\ |\bar{h}| \ll U_{w\,max}$ wartość wyrażenia w nawiasie wynosi:

$$\left(\frac{U_{w\,max}}{U_1 - \underline{h}} - 1\right) \in \left[\frac{\underline{h}}{U_{w\,max}};\ \frac{\underline{h} + \bar{h}}{U_{w\,max}}\right] .$$

Ostatni składnik sumy występującej po prawej stronie (3.132) jest więc rzędu:

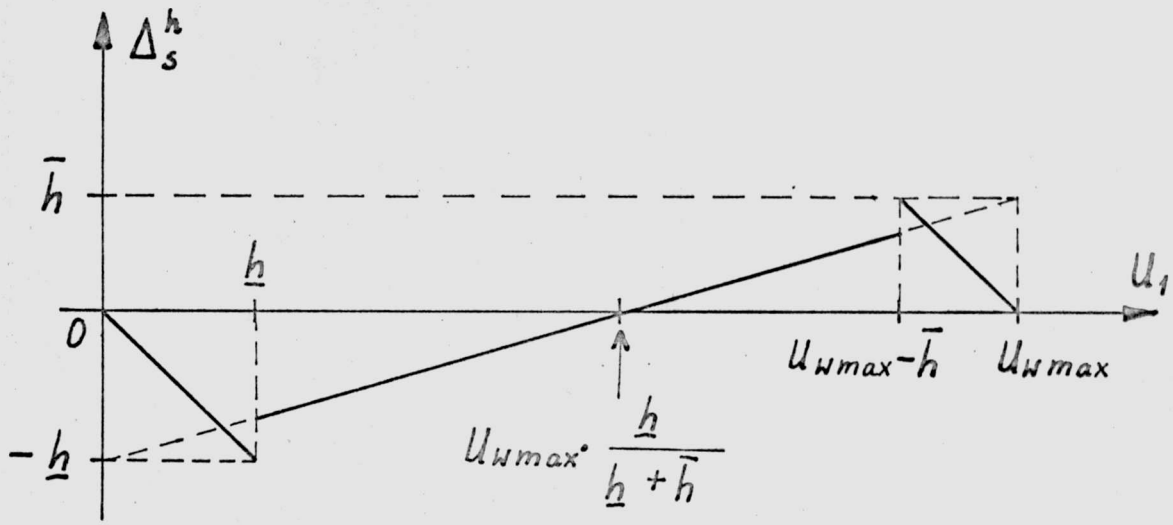
$$\frac{U_{w\,max}}{L}\cdot(1 - p)\cdot\left(\frac{U_{w\,max}}{U_1 - \underline{h}} - 1\right) \sim \frac{|\underline{h}| + |\bar{h}|}{L} .$$

Moduły zastosowano dlatego, bo progi $\underline{h}$, $\bar{h}$ mogą przybierać zarówno

wartości dodatnie jak ujemne. Biorąc pod uwagę, że $L > 10^3$ z (3.132) uzyskuje się, że gdy $U_1 \in (U_{w\,max} - \bar{h};\ U_{w\,max}]$, wówczas:

$$\Delta_s^h \approx U_{w\,max} - U_1 \,. \tag{3.133}$$

Charakter zmienności błędu systematycznego Δ_s^h w całym zakresie zmian wartości U_1 napięcia mierzonego przedstawiono na rys. 3.16.



Rys. 3.16. Zależność błędu systematycznego Δ_s^h spowodowanego histerezą układu porównania napięć, od wartości U_1 mierzonego napięcia, przy $\underline{h}$, $\bar{h}$, $U_{w\,max}$ = const.

Uwaga: W celu poprawienia czytelności rysunku, wartości $\underline{h}$ i $\bar{h}$ na osi poziomej zaznaczono nieproporcjonalnie duże.

Nieciągłości wykresu w punktach: $U_1 = \underline{h}$ i $U_1 = U_{w\,max} - \bar{h}$ są konsekwencją podobnych nieciągłości na rys. 3.14.

Jak widać na rys. 3.16, wartość graniczna $\Delta_{s\,max}^h$ składowej

systematycznej błędu komparacji spowodowanej histerezą układu porównania napięć wynosi:

$$\Delta^{h}_{s\,max} = \max\left\{|\underline{h}|, |\bar{h}|\right\} . \qquad (3.134)$$

W praktyce zatem błąd ten może być ograniczony do wartości rzędu 1 mV [25].

Z wykresu wynika również, że niemal w całym zakresie zmian napięcia mierzonego, błąd Δ^{h}_{s} jest mniejszy od wartości większego z progów przełączania histerezy. Wydaje się, że jest to skutek losowego sposobu realizacji omawianej procedury komparacyjnej. Wartość U_1, przy której błąd Δ^{h}_{s} ma wartość zero można obliczyć na podstawie wzoru (3.131). Rozwiązując równanie $\Delta^{h}_{s} = 0$ uzyskuje się:

$$U_1 = U_{w\,max} \cdot \frac{\underline{h}}{\underline{h} + \bar{h}} , \qquad (3.135)$$

porównaj rys. 3.16).

Wpływ histerezy układu porównania napięć na wartość składowej losowej błędu komparacji

Zgodnie ze wzorem definicyjnym (2.23), wartość błędu losowego zależy od wariancji wyniku $D^2(R)$:

$$\Delta_1 \overset{df.}{=} 3\sqrt{D^2(R)} .$$

Z tego też powodu przedmiotem zainteresowania jest teraz rys. 3.15 i ostatnia kolumna tabeli 3.1. Szczególnie istotne jest tu sprawdzenie, w jakim punkcie U_1 występuje maksimum wariancji wyniku (rys. 3.15) i czy maksimum to różni się w istotny sposób od największej wariancji wyniku uzyskiwanej w przypadku, gdy układ porównania napięć jest bezhisterezowy (rys. 2.2, wzór (2.20)).

Na podstawie wzoru (3.126) można sprawdzić, że parabola wariancji wyniku osiąga maksimum w punkcie:

$$U_1 = \frac{U_{w\,max}}{2} + \frac{\underline{h} - \bar{h}}{2} \quad . \tag{3.136}$$

W punkcie tym wariancja ma wartość:

$$\max \quad D^2(R) = \frac{U^2_{w\,max}}{4L} \cdot \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \tag{3.137}$$

$$U_1 \in [0;\ U_{w\,max}]$$

gdzie:
$$\alpha \underset{=}{\text{ozn.}} \frac{\underline{h} + \bar{h}}{U_{w\,max}} \quad . \tag{3.138}$$

Suma $\underline{h} + \bar{h}$ jest - wobec przyjętej konwencji (rys. 3.12) - zawsze nieujemna i to bez względu na znaki $\underline{h}$ oraz $\bar{h}$. Oznacza to więc, że:

$$\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \geqslant 1 \; .$$

Ponieważ maksymalna wartość wariancji wyniku wynosi w przypadku, gdy detektor relacji porządku jest bezhisterezowy (porównaj (2.20)):

$$\frac{U^2_{w\ max}}{4L} ,$$

ze wzoru (3.137) wynika, że histereza układu porównania napięć powoduje zwiększenie maksimum wariancji $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ razy. Oznacza to, że powiększa ona wartość graniczną $\Delta_{1\ max}$ błędu losowego w stosunku:

$$\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} .$$

Przyjmując $\underline{h} + \bar{h} \approx 1$ mV oraz $U_{w\ max} \approx 1$V otrzymuje się, że:

$$\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \approx 1{,}001 .$$

Tak niewielkiego (rzędu 0,1 %) wzrostu błędu $\Delta_{1\ max}$ w większości sytuacji praktycznych można w ogóle nie brać pod uwagę. Tak więc histereza układu porównania napięć p r a k t y c z n i e n i e w p ł y w a na wartość graniczną $\Delta_{1\ max}$ składowej losowej błędu komparacji; wzór (2.24) jest nadal aktualny.

Można jeszcze zadać pytanie, jaki jest wpływ histerezy układu porównania napięć na właściwości badanej procedury komparacyjnej wtedy, gdy wzorzec losowy ma charakter ziarnisty. Wydaje się, że przedstawiony w tym podrozdziale model probabilistyczny procedury pozostanie prawdziwy także i wtedy. Należy jednak zmienić wzory na prawdopodobieństwa przejść p_{01} i p_{11} (wzory (3.122), (D3 - 2), (D3 - 22)). Nietrudno przewidzieć, że nowe zależności $p_{01} = f(U_1)$, $p_{11} = f(U_1)$ będą miały charakter skokowy.

Skokowy charakter będą też miały wykresy odpowiadające rys. 3.14, 3.15. Wydaje się jednak, że podstawowe wnioski wynikające z analizy: co do $\Delta^h_{s\,max}$ i wpływu histerezy na $\Delta_{1\,max}$, nie ulegną zmianie.

W szczególności warto zwrócić uwagę na następujący przypadek szczególny:
Jeżeli szerokość histerezy $\underline{h} + \bar{h}$ jest mniejsza niż ziarno wzorca ΔU_w, to przy niektórych wartościach napięcia mierzonego U_1 fakt, że detektor relacji $\lessgtr$ ma histerezę nie będzie w ogóle wpływał na właściwości wyniku.

* * *

W związku z wprowadzoną w tym podrozdziale kolejną składową Δ^h_s błędu komparacji spowodowaną histerezą układu porównania napięć, wzór (3.102) na całkowity błąd komparacji Δ_k przybiera postać:

$$\Delta_k = \Delta_1 + \Delta^w_s + \Delta^z_s + \Delta^h_s \,, \qquad (3.139)$$

gdzie - przypomnijmy: Δ_1 - składowa losowa błędu komparacji (porównaj wzory (2.23) i (2.20) oraz (2.40), a także (3.30)),

Δ^w_s - składowa systematyczna błędu komparacji spowodowana odchylaniem się rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od rozkładu pożądanego (porównaj wzór (3.57)),

Δ_s^z - składowa systematyczna błędu komparacji związana z niedokładnością określenia wartości największego z napięć odtwarzanych przez wzorzec: $\tilde{U}_{w\ max}$ (porównaj punkt III/1c).

Przypisy

[1] Por. np. Ajdukiewicz K., Logika pragmatyczna. PWN, Warszawa 1975, s. 271.

Jellonek A. i in., Miernictwo elektryczne ogólne. Dla potrzeb telekomunikacji. Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1951, s. 29.

Jaworski J., Matematyczne podstawy metrologii. WNT, Warszawa 1979, s. 197 - 198.

Rymaszewski R., Modelowanie operacyjno-mnogościowe i jego zastosowanie do badań pomiarów stochastycznych. Prace Naukowe Instytutu Metrologii Politechniki Wrocławskiej. Seria: Monografie, z. 20/4, Wrocław 1982, s. 7.

Piotrowski J., Podstawy metrologii. PWN, Warszawa 1977, s. 75-76.

Metrologia. Nazwy i określenia. Polska Norma PN-71/N-02050, Polski Komitet Normalizacyjny. Wyd. Normalizacyjne, Warszawa 1971.

Encyklopedia fizyki. PWN, Warszawa 1974, t. 3, s. 805.

[2] Jaworski J., op. cit., s. 197 - 198.

[3] Por. np. Piotrowski J., op. cit., s. 75 - 76.

[4] Zobacz: Mirskij G.Ja., Apparaturnoe opredelenie charakteristik slučajnych processov. Energija, Moskva 1972, s. 223.

Rymaszewski R., Zagadnienie przyporządkowania modeli probabilistycznych obiektom mierzonym w aspekcie miernictwa stochastycznego. [w:] Materiały z Sympozjum nt. Modele matematyczne systemów i procedur pomiarowych, Wisła - styczeń 1975. Komitet Metrologii i Danych dla Nauki i Techniki PAN, Gliwice 1974, s. 129 - 134.

Rymaszewski R., Generator binarnego sygnału stochastycznego lub pseudostochastycznego o rozkładzie modulowanym iloczynowo. Zgło-

szenie patentowe nr P-174804.

Wehrmann W., THE U-FUNCTIONMETER - a stochastic multimeter for signal processing and data handling. "Technical Information", NORMA Messtechnik Gesellschaft m.b.H., TI 1/72E, s. 11 - 18.

[5] Zieliński R., Generatory liczb losowych. Programowanie i testowanie na maszynach cyfrowych. WNT, Warszawa 1979, s. 60 - 61 91.

[6] Por. np. Mirskij G.Ja., Radioélektronnye izmerenija. Énergija, Moskva 1975, s. 93 - 101.

[7] Gdy ciąg rzeczywistych napięć wzorcowych ma dyskretny rozkład prawdopodobieństwa, symbol $\int^{*}(U_w)$ należy rozumieć jako funkcję rozkładu prawdopodobieństwa, a nie jako funkcję gęstości, bo to ostatnie pojęcie nie ma sensu w przypadku rozkładów dyskretnych.

[8] Jest to modyfikacja znaczenia używanej w matematyce funkcji entier.

Por. np. Empacher A.B. i in., Mały słownik matematyczny. Wiedza Powszechna, Warszawa 1975, s. 57.

[9] Por. Hejn K., Zastosowanie metody Monte Carlo do teorii pewnej klasy przetworników cyfrowo-analogowych. Praca doktorska. Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1975, podrozdziały 2.3.1 i 2.4.2.

[10] Mirskij G.Ja., Apparaturnoe opredelenie ..., op. cit., s. 77.

[11] Przykładem tego typu rozważań mogą być prace, w których oblicza się np. funkcję autokorelacji rozmaicie konstruowanych ciągów liczb dwójkowych wytwarzanych za pomocą rejestru przesuwnego z optymalnym, sprzężeniem zwrotnym "modulo-2".

Por. np. Pratt A.R., Fast Pseudo-Random Numbers Generators for Computers. "The Radio and Electronic Engineer", vol. 40, No 2, August 1970, s. 86 - 88.

Golomb S.W., Shift register sequences. Hlden - Day, Inc., San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam 1967, część II

[12] Fisz M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1967, rozdział 14.

[13] Tamże, s. 528, 531.

[14] Por. np. Pawłowski Z., Statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1980, s. 17 - 19.

[15] Jeden z aspektów doboru liczby losowań z poszczególnych warstw poruszono w książce:

Fisz M., op. cit., s. 536 - 539.

[16] Por. np. tamże, s. 535.

[17] Pawłowski Z., op. cit., s. 18.

[18] Podobny wniosek wynika z wykresów zamieszczonych w pracy:

Hejn K., op. cit., dodatek 1.

[19] Nadachowski M., Kulka Z., Analogowe układy scalone. WKiŁ, Warszawa 1979, s. 209, 212.

[20] Np. układy służące do porównywania dwóch prądów stałych działające na zasadzie czułego wzmacniacza magnetycznego charakteryzują się histerezą, bo rdzeń ferromagnetyczny użyty do jego budowy ma charakterystykę magnesowania z histerezą.

Por. np. Szczepaniak C., Komparatory elektryczne pomiarowe. WNT, Warszawa 1979, s. 27.

Miłek M., Analiza i konstrukcja magnetycznego kompensatora przepływu prądu stałego w układzie porównania rezystancji. Praca doktroska. Politechnika Śląska, Gliwice 1976.

[21] Nadachowski M., Kulka Z., op. cit., s. 370.

[22] Por. np. Badźmirowski K., Problemy metrologiczne w przetwornikach analogowo-cyfrowych. "Prace Przemysłowego Instytutu Elektroniki", nr 4/1974, s. 19.

[23] Por. np. Feller W., Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa PWN, Warszawa 1980, t. 1, s. 315, 316.

[24] Por. Gabriel K.R., The distribution of the number of successes in a sequence of dependent trials. "Biometrika", 46/1959, s. 454 - 460.
Feller W., op. cit., t. 1, s. 279.
Należy zwrócić uwagę, że teza cytowanego tu twierdzenia jest podobna do tezy centralnego twierdzenia granicznego. Cytowane twierdzenie nie jest jednak prostą adaptacją twierdzenia granicznego, bowiem zmienne losowe X^j $(j = 1, 2, \ldots, L)$, których sumą jest zmienna losowa L_2, są z założenia wzajemnie zależne. Twierdzenia graniczne w klasycznej postaci dotyczą natomiast sum niezależnych zmiennych losowych.

[25] Uzyskiwanie tak wąskich krzywych histerezy nie jest dziś problemem.
Por. np. Nadachowski M., Kulka Z., op. cit., s. 371.

[26] Dokładniejsza analiza wzoru (3.128) prowadzi do wniosku, że w bardzo wąskim zakresie napięć mierzonych:

$$U_1 \in \left[0;\ \frac{\bar{h}}{L-1}\right] ,$$

błąd Δ_s^h jest dodatni. Gdy $L > 10^3$, zaś $\bar{h}$ jest rzędu 1mV, to wniosek ten dotyczy napięć $\tilde{U}_1$ o wartościach mniejszych niż 1 μV. Wydaje się, że przy tak małych napięciach mierzonych o błędzie decydować będą inne - nie analizowane tutaj - przyczyny (np. szumy). Wniosek powyższy byłby więc nieuzasadniony.

Politechnika Biblioteka

Rozdział IV

Wnioski praktyczne z rozważań teoretycznych i przykłady możliwych zastosowań stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy"

1. Główne właściwości omawianej procedury wpływające na możliwość jej potencjalnych zastosowań. Celowość łączenia procedur komparacyjnych różnych typów

Z rozdziałów II i III wynikają następujące wnioski praktyczne dotyczące stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy":

a) Procedura ta umożliwia pomiar wartości uśrednionych (np. momentów) w zbiorze $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych, bez potrzeby określania wartości poszczególnych napięć tego zbioru.

b) Fakt, że pomiar parametrów charakterystycznych zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ odbywa się, w przypadku stosowania omawianej procedury, bez potrzeby wyznaczania wartości poszczególnych napięć, wiąże się oczywiście z utratą pewnej części informacji o zbiorze. Niekiedy jednak taka utrata informacji nie jest istotną wadą; zrezygnowanie natomiast ze zdobywania informacji o wartościach poszczególnych napięć zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ umożliwia znaczne skrócenie czasu wykorzystywania poszczególnych napięć z tego zbioru wtedy zwłaszcza, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ jest odpowiednio liczny. W szczególności, gdy każde z napięć mierzonych $\tilde{U}_i$ jest jednokrotnie porównywane z napięciem wzorcowym, czas jego eksploatacji w trakcie pomiaru jest równy czasowi trwania pojedynczego

taktu procedury.

c) Niepowtarzalność wyników pomiaru uzyskiwanych w przypadku stosowania omawianej komparacji, daje się łatwo uwzględnić za pomocą składowej losowej Δ_1 błędu komparacji. Składowa ta jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z liczby L porównań wykonanych w ramach procedury. Oznacza to, że w sytuacjach, gdy błąd losowy Δ_1 jest dominującym składnikiem całkowitego błędu pomiaru, istnieje niekiedy możliwość wymiany czasu trwania procedury za dokładność uzyskiwanego wyniku.

   W celu zmniejszenia wartości składowej losowej Δ_1 błędu komparacji do rzędu 0,1 % trzeba wykonać znaczną liczbę ok. 10^6 porównań.

d) Bez większych trudności układowych opisywaną procedurę komparacyjną można stosować do pomiaru wartości uśrednionych w zbiorach $\tilde{U}$ napięć mierzonych o praktycznie nieograniczonej liczności. Wymaga to jedynie zastosowania liczników o odpowiednio dużej pojemności.

e) Uzyskanie małych wartości błędu komparacji możliwe jest tylko pod warunkiem, że dysponuje się losowym wzorcem napięcia o odpowiednich właściwościach. W szczególności wzorzec taki powinien charakteryzować się następującymi cechami:

   - Winien umożliwiać otrzymywanie ciągów napięć charakteryzujących się o d p o w i e d n i m r o z k ł a d e m p r a w d o p o d o b i e ń s t w a ich wartości. Dokładność aproksymacji rozkładu pożądanego musi być duża, bowiem w pojedynczej procedurze z reguły wykorzystuje się znaczną liczbę napięć wzorcowych. Z tego powodu nawet nie-

wielkie odchylenia rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od rozkładu pożądanego uwidocznią się w postaci błędu systematycznego [1].

- Często ważne jest, by w możliwie krótkich odstępach czasu wzorzec dostarczał l o s o w o n i e z a l e ż n y c h napięć wzorcowych $\tilde{U}_w^j$, j = 1, 2, ..., L.
- Właściwości probabilistyczne ciągów napięć $\tilde{U}_w^j$ dostarczanych przez wzorzec powinny być n i e z a l e ż n e o d w a r u n k ó w z e w n ę t r z n y c h (np. od temperatury).

Ze względu na ostatni warunek, a także z uwagi na to, że wymagane formy rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych są, pod względem występowania w fizyce, dość nienaturalne (funkcja gęstości prawdopodobieństwa - ucięta funkcja potęgowa) wydaje się, że szczególnie przydatne mogą się tu okazać algorytmiczne wzorce pseudolosowe.

Na podstawie powyższej listy podstawowych właściwości badanej procedury komparacyjnej można już z grubsza określić obszar możliwych jej zastosowań.

Zasada ustalania obszaru zastosowań rozwiązania technicznego, którą się tu posłużono wydaje się prosta i typowa:

- Rozwiązanie m o ż n a stosować w sytuacjach, w których spełnia ono podstawowe wymagania.
- Rozwiązanie n a l e ż y stosować tam, gdzie uwidaczniają się jego zalety, a wady jeszcze nie mają znaczenia.
- Obszar w y ł ą c z n y c h z a s t o s o w a ń danego rozwiązania (tzn. obszar zastosowań, w których jest ono jedynie możliwe) wyznaczają zwykle te jego cechy (lub ich połączenia), które mają charakter unikalny na danym etapie rozwoju techniki.

Wydaje się, że obszar m o ż l i w y c h zastosowań omawianej procedury komparacyjnej wynika z jej cechy a).
Komparacja stochastyczna typu "większy - mniejszy" może być s z c z e g ó l n i e k o r z y s t n a zwłaszcza wtedy, gdy chodzi o pomiar wartości uśrednionych w zbiorach $\approx{U}$ o dużej liczności (N rzędu 10^6 i więcej). Wtedy bowiem liczba porównań wykonanych w ramach procedury musi być i tak duża (równa liczbie N uśrednianych napięć, bądź jej całkowitej wielokrotności) - właściwość c) nie jest wówczas wadą, zaś zdolność do uśredniania jest ewidentną zaletą. Będzie to przedmiotem przykładu zamieszczonego w podrozdziale 3 tego rozdziału.
Cechą dość u n i k a l n ą jest, zdaniem autora, możliwość skrócenia czasu eksploatacji pojedynczego napięcia ze zbioru $\approx{U}$, do czasu trwania jednego taktu procedury. Właściwość ta może mieć szczególne znaczenie wtedy zwłaszcza, gdy kolejne napięcia przeznaczone do uśredniania pojawiają się w bardzo krótkich odstępach czasu, a jednocześnie liczność zbioru uśrednianego jest duża.

Powyższa analiza stanowi próbę zgrubnego określenia obszaru zastosowań badanej procedury komparacyjnej na podstawie jej głównych właściwości metrologicznych. Wydaje się, że należałoby rozważyć także możliwości rozszerzenia obszaru zastosowań opisywanej procedury stochastycznej, poprzez łączenie jej z procedurami komparacyjnymi różnych typów (porównaj rozdział I). Genezą powyższego pomysłu jest spostrzeżenie, że zasadniczą wadą komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" jest konieczność wykonywania znacznej liczby porównań także wtedy, gdy zbiór $\approx{U}$ napięć mierzonych jest mało liczny. Zastosowanie połączeń sto-

chastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" z procedurami innych rodzajów miałoby na celu stworzenie możliwości zmniejszenia składowej losowej Δ_1 błędu komparacji inaczej niż poprzez zwiększenie liczby L wykonanych porównań. O niektórych sposobach osiągnięcia tego skutku była już mowa w dodatku 2 (transpozycja zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$), a także w punkcie III/1d (losowanie warstwowe).

W ramach rozważań na temat możliwości zmniejszenia liczby niezbędnych porównań wykonywanych w ramach komparacji stochastycznej, przeglądowej typu "większy - mniejszy", warto przeanalizować następujący przykład procedury wymagającej wykonania niewielkiej liczby porównań:

Przykład 4.1. Komparacja deterministyczna, poszukiwawcza, uzależniona wynikiem detekcji

Ponieważ jest to procedura z grupy poszukiwawczych, więc jej celem jest (porównaj podrozdział I/2) znalezienie w zbiorze realizacji odtwarzanych przez wzorzec takiej, która jest najbliższa realizacji mierzonej. Uzależnienie wynikiem detekcji oznacza, że realizacja wzorcowa $\tilde{U}_w^j$ podana do porównania w j-tym takcie procedury, zależy od wyników porównań realizacji wzorcowych z realizacjami ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ w taktach poprzednich. Procedury poszukiwawcze z tego typu uzależnieniem regulacji wzorca charakteryzują się bardzo dobrą zbieżnością. Z reguły wymagają one wykonania zaledwie kilkunastu do kilkudziesięciu porównań (zależnie od liczby stanów odtwarzanych przez wzorzec i sekwencji, wg której stany te wykorzystuje się). Z tego też powodu procedury uzależnione wynikiem detekcji chętnie stosuje się w kompensacyjnych przetwornikach a/c [2]. Ważnym elementem sposobu działania

powyższych przetworników jest stałość napięcia mierzonego w trakcie komparacji. Zbiór $\tilde{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach procedury składa się więc z jednakowych realizacji napięcia.

Poszukiwanie napięcia wzorcowego najbliższego napięciu mierzonemu odbywa się w następujący sposób:
Najpierw określa się z grubsza przedział napięć wzorcowych, w którym leży poszukiwana realizacja. Robi się to z dokładnością do połowy przedziału napięć odtwarzanych przez wzorzec (przetworniki binarne) lub z dokładnością do jednej dziesiątej tego przedziału (przetworniki dekadowe). Umożliwia to eliminację znacznej liczby porównań, których wynik można przewidzieć. Dalsze poszukiwania prowadzi się już t y l k o w określonym wcześniej podprzedziale i - podobnie jak w etapie pierwszym - etapowo. Znajduje się więc kolejny podprzedział wcześniej ustalonego przedziału, zawierający poszukiwaną realizację wzorcową itd. Procedurę taką możnaby określić jako stopniowe zawężanie przedziału niepewności.
Istota szybkości omawianej formy komparacji zasadza się więc na umiejętnym wykorzystywaniu wyników poszczególnych porównań do regulacji napięć wzorcowych. Rzecz polega tu na sukcesywnej eliminacji z obszaru przeszukiwań tych podzbiorów zbioru $\tilde{U}_w$ napięć odtwarzanych przez wzorzec, co do których wiadomo - na podstawie już wykonanych porównań - że poszukiwana realizacja wzorcowa nie występuje w nich.
Istotną trudnością jest to, że realizacja mierzona musi być w trakcie trwania procedury niezmienna i to z dużą dokładnością. Jej zmiany mogą bowiem spowodować, że procedura zostanie zmylona,

a wynik pomiaru będzie przypadkowy.

W przypadku procedury stochastycznej, przeglądowej, zastosowanie opisanego wyżej uzależnienia regulacji wzorca wynikiem detekcji nie wydaje się możliwe. Jest tak dlatego, gdyż istotą tej ostatniej procedury komparacyjnej jest l o s o w e p r z e j r z e n i e zbioru $\approx{U}_w$ napięć odtwarzanych przez wzorzec pod względem jakiegoś kryterium. Przykład 5.1 podsuwa jednak pomysł, by wolnozbieżną (w sensie malenia błędu Δ_1), ale posiadającą zdolność uśredniania komparację stochastyczną, przeglądową typu "większy - mniejszy", poprzedzić procedurą wstępną innego typu (zapewne: deterministyczną, poszukiwawczą) umożliwiającą szybkie zawężenie przedziału napięć wzorcowych przeglądanych w ramach komparacji stochastycznej. Problemy związane z realizacją tego pomysłu poruszono w podrozdziałach 2 i 3 niniejszego rozdziału.

Przedstawiony właśnie pomysł jest przykładem łączenia w jednym procesie pomiaru różnych form procedur komparacyjnych. Chodziło tu o wykorzystanie zalet obu zestawionych procedur komparacyjnych: s z y b k o ś c i procedur deterministycznych, poszukiwawczych uzależnionych wynikiem detekcji oraz w ł a ś c i w o ś c i u ś r e d n i a j ą c y c h procedury stochastycznej, przeglądowej. Wydaje się, że omówione połączenie nie jest jedynym możliwym jakie można zastosować we współczesnej technice pomiarowej.

2. Pomiar wartości pojedynczej realizacji napięcia

Zakłada się, że celem pomiaru jest określenie wartości napięcia praktycznie niezmieniającego się w czasie. Używając pojęć stosowanych w tej pracy można więc powiedzieć, że zbór $\approx{\tilde{U}}$ napięć mierzonych składa się z jednej realizacji napięcia:

$$\approx{\tilde{U}} = \left\{ \tilde{U}_1 \right\} , \tag{4.1}$$

której wartość U_1 podlega pomiarowi.
Jeżeli napięcie to zostanie porównane, w kolejnych taktach procedury komparacyjnej j = 1, 2, ..., L, z losowymi napięciami wzorcowymi $\tilde{U}_w^j$, to zbiór $\approx{\tilde{U}}_p$ ma postać:

$$\approx{\tilde{U}}_p = \left\{ \tilde{U}_1, \tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_1 \right\} . \tag{4.2}$$

Z wniosków zawartych w poprzednim podrozdziale wynika, że jedną z ważniejszych zalet rozważanej procedury komparacyjnej jest jej zdolność uśredniania, główną zaś wadą - konieczność wykonywania znacznej liczby porównań potrzebnych by składowa losowa Δ_1 błędu komparacji była odpowiednio niewielka. Gdyby więc napięcie $\tilde{U}_1$ było ściśle stałe w trakcie wykonywania procedury (tzn. gdyby zbiór $\approx{\tilde{U}}_p$ miał postać (4.2)), wówczas uśrednianie wielkości mierzonej nie byłoby potrzebne i podstawowa zaleta komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" nie byłaby wykorzystana. Konieczność wykonywania znacznej liczby porównań jest w takim przypadku wadą, bo przedłuża czas trwania procedury komparacyjnej tego typu w stosunku do innych jej form. Tak więc

już na pierwszy rzut oka widać, że zastosowanie stochastycznej komparacji przeglądowej w pomiarach wartości realizacji niezmiennych jest - w porównaniu np. z komparacją deterministyczną, poszukiwawczą, uzależnioną wynikiem detekcji - mało efektywne choć - jak to już stwierdzono w podrozdziale II/1 - możliwe.

Trzeba jednak podkreślić, że losowy i przeglądowy charakter omawianej komparacji sprawia, iż uśrednia ona także niektóre błędy związane z niedoskonałością elementów użytych do jej realizacji.

Przykładem mogą tu być wnioski z analizy dotyczącej wpływu na błąd komparacji rozmycia prawdopodobieństwa napięć wzorcowych w przypadku stosowania wzorca dyskretnego (patrz wzór (3.100) w punkcie III/1c) czy też rys. 3.16 przedstawiający wpływ histerezy układu porównania napięć na systematyczny błąd komparacji. Właściwości stochastycznej komparacji przeglądowej, na które się tu powołano możnaby nazwać "uśrednianiem niedoskonałości" elementów użytych do jej realizacji. Zalety te omawiana procedura ma oczywiście także i wtedy, gdy pomiar dotyczy napięcia stałego.

W dotychczasowych rozważaniach czas trwania procedury komparacyjnej określano za pomocą liczby porównań wykonywanych w jej ramach. Wydaje się, że w niektórych sytuacjach korzystne byłoby dysponowanie bezpośrednią informacją o wymaganym czasie trwania procedury (T_k) przy założonej dopuszczalnej wartości składowej losowej Δ_1 błędu komparacji.

Zgodnie z definicją procedury komparacji pomiarowej, składa się ona z szeregu pojedynczych porównań. Jeżeli więc pominąć

czas niezbędny na przygotowanie układu do komparacji i czas związany z wykonaniem ewentualnych czynności końcowych, to czas trwania procedury komparacyjnej wynosi:

$$T_k = L \cdot T_t \quad , \tag{4.3}$$

gdzie: T_t - czas trwania jednego taktu procedury.

L - liczba porównań wykonanych w ramach komparacji (równa licznie taktów).

Należy zwrócić uwagę na to, że z punktu widzenia definicji komparacji pomiarowej istotne jest jedynie wykonanie w jej ramach pewnej liczby porównań realizacji mierzonych z wzorcowymi. W praktyce jednak konieczne jest także wykonywanie czynności związanych z wytwarzaniem kolejnych realizacji wzorcowych $\tilde{U}_w^j$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$ oraz z wykorzystaniem wyników poszczególnych porównań. Z tego też powodu wygodnie jest posługiwać się pojęciem taktu procedury komparacyjnej. Takt obejmuje wykonanie pojedynczego porównania oraz związanych z nim niezbędnych czynności pomocniczych. W przypadku procedury komparacyjnej rozważanego rodzaju, na pojedynczy, np. j-ty $(j = 1, 2, \ldots, L)$, takt składają się następujące czynności:

- wygenerowanie losowego napięcia wzorcowego $\tilde{U}_w^j$ przeznaczonego do porównania z napięciem $\tilde{U}^j \in \tilde{\tilde{U}}_p$,
- porównanie napięć $\tilde{U}^j$ oraz $\tilde{U}_w^j$, tzn. sprawdzenie, czy zachodzi relacja: $\tilde{U}_w^j \lessdot \tilde{U}^j$ (W trakcie wykonywania tej czynności oba napięcia powinny być wystarczająco niezmienne),
- zwiększenie o jeden zawartości licznika L_1, a także - być może - zwiększenie o jeden zawartości licznika L_2. Inkrementacje liczników mogą być oczywiście wykonane równolegle.

Czas T_t trwania pojedynczego taktu procedury typu "większy - - mniejszy" zawiera więc następujące składniki (rys. 4.1):

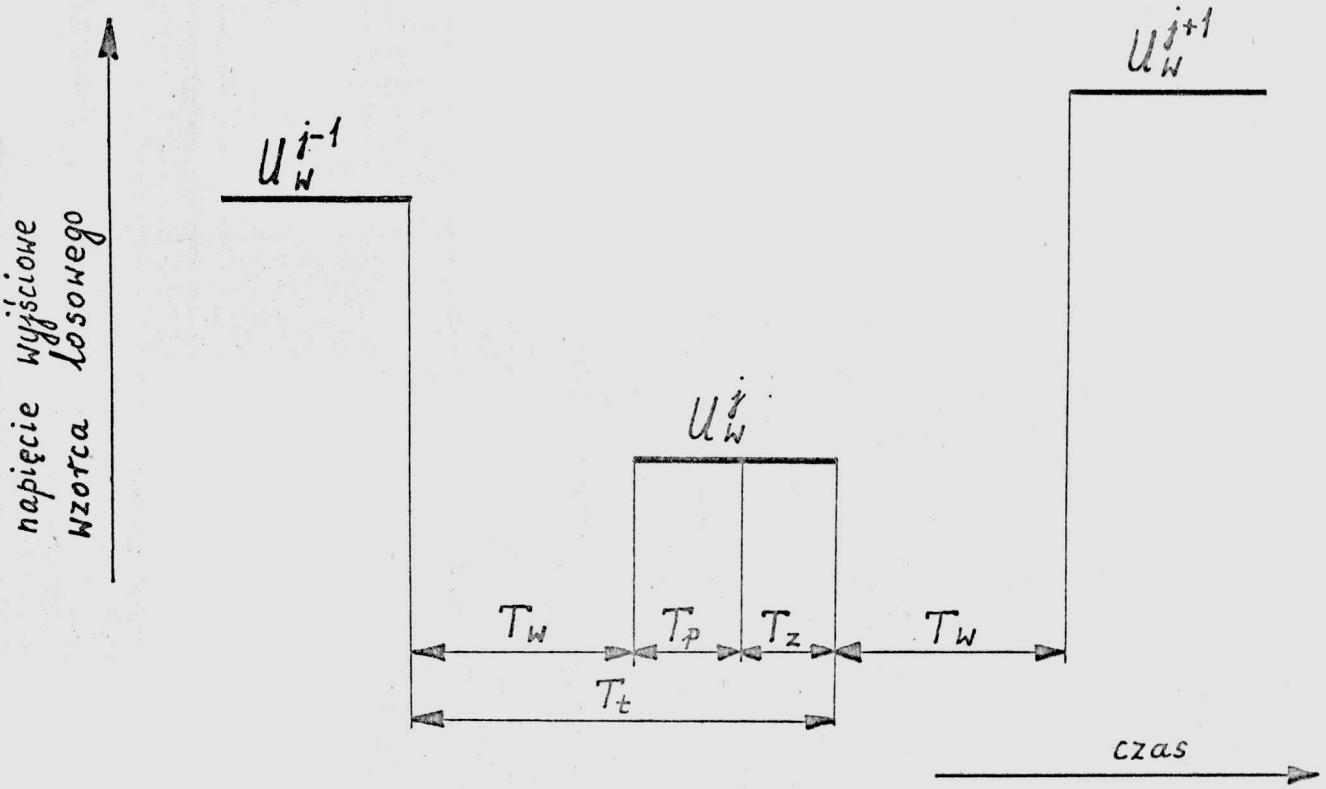
$$T_t = T_w + T_p + T_z + T_y \quad , \tag{4.4}$$

gdzie: T_w - czas niezbędny do wygenerowania napięcia losowego zgodnie z założonym rozkładem prawdopodobieństwa i losowo niezależnego od napięć poprzednich,

T_p - czas trwania porównania napięć,

T_z - czas niezbędny do zwiększenia zawartości liczników o jeden,

T_y - inne składniki czasu przynależnego do jednego taktu komparacji, np. przerwy pomiędzy wymienionymi czynnościami: generowania, porównywania i inkrementacji. W dalszych rozważaniach, a także na rys. 4.1 założono, że $T_y = 0$.



Rys. 4.1. Składniki czasu T_t trwania jednego taktu komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" (opis w tekście).

Biblioteka Pol. Wrocł.

Przyjęcie, że czas T_t trwania jednego taktu jest prostą sumą (4.4) składników: T_w, T_p, T_z, to konsekwencja założenia, że poszczególne czynności składające się na takt: generowanie napięcia wzorcowego, porównanie napięć i doliczanie jedynki do stanów liczników, odbywają się szeregowo (rys. 4.1).

Nie jest to oczywiście konieczne. Częściowe zrównoleglenie wykonywania tych czynności wymagałoby jednak zastosowania układów pamiętających: próbkująco - pamiętającego pomiędzy wzorcem, a detektorem relacji $<$ oraz przerzutnika - na

wyjściu detektora relacji $<$ (porównaj rys. 2.1). Wydaje się jednak, że wprowadzenie takiej komplikacji układowej byłoby celowe tylko wtedy, gdyby poszczególne składniki T_w, T_p, T_z sumy (4.4) były tego samego rzędu wielkości i jednocześnie znacznie większe niż opóźnienia czasowe wnoszone przez dodatkowe układy pamiętające umożliwiające wykonanie częściowego zrównoleglenia.

Określenie wartości sumy (4.4) wymaga oszacowania poszczególnych jej składników. Oszacowanie takie wydaje się użyteczne mimo, iż ma ono charakter "chwilowy" (tzn. dotyczy aktualnego stanu konstrukcji i technologii w dziedzinie wytwarzania urządzeń elektronicznych) i z czasem może ulec dezaktualizacji.

Przybliżone określenie wartości czasu T_w potrzebnego do wygenerowania napięcia losowego wymaga znajomości zasady działania wzorca napięć.

Wyboru jednej z możliwych koncepcji układowych oraz jej uzasadnienia dokonano w dodatku 8. Z rozważań zamieszczanych w cytowanym dodatku wynika, że generowanie napięć losowych o dyskretnym, równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa wygodnie jest dziś realizować w układzie składającym się z przetwornika c/a sterowanego za pomocą rejestru przesuwnego z optymalnym sprzężeniem zwrotnym lub układu sekwencyjno-kombinacyjnego symulującego jego działanie (porównaj rys. D8 - ℓ). Oszacowano (patrz dodatek 8), że w przypadku stosowania wzorca o tego typu strukturze, kolejne, losowe niezależne napięcia wzorcowe można dziś uzyskiwać w odstępach czasowych:

$$T_w \leqslant 40\text{ns}.$$

Kolejnym składnikiem czasu trwania pojedynczego taktu procedury komparacyjnej jest czas porównania napięć T_p. Napięcia porównuje się dziś z reguły przy użyciu scalonych wzmacniaczy operacyjnych o specjalnej konstrukcji, tzw. komparatorów analogowych. Za czas T_p potrzebny do porównania dwóch napięć zostanie tu przyjęty parametr komparatorów napięcia zwany czasem odpowiedzi. Ponieważ wartość tego parametru zależy od wielkości różnicy porównywanych napięć, większość firm produkujących komparatory przyjęła ściśle określony sposób jego pomiaru [3]. Typowe czasy odpowiedzi współczesnych komparatorów napięcia wynoszą $40 \div 90$ ns [4]. Najszybsze zanotowane przez autora komparatory napięć (1979 r.) zrealizowane w technice ECL charakteryzują się czasem odpowiedzi 6 ns (przy typowych wartościach napięcia niezrównoważenia $V_{io} = 2 \div 6$ mV) [5]. Przyjęto więc, że:

$$T_p = 6 \text{ ns} .$$

Oszacowanie czasu T_z niezbędnego do zwiększenia zawartości liczników o jeden wymaga sprawdzenia przy jakich częstotliwościach mogą one jeszcze bezbłędnie zliczać. Zgodnie z rozeznaniem autora, maksymalne częstotliwości bezpośredniego zliczania współcześnie produkujących liczników ECL są rzędu pojedynczych GHz [6]. Osiągnięcie czasów T_z równych $1 \div 2$ ns jest więc w pełni możliwe.

Z oszacowania czasów T_w, T_p, T_z oraz wzoru (4.4) wynika, że przy założeniu iż losowy wzorzec napięcia zawiera przetwornik c/a, głównym składnikiem czasu T_t trwania jednego taktu procedury komparacyjnej jest czas T_w niezbędny do wygenerowania napię-

cia wzorcowego. Oznacza to, iż możliwości skrócenia czasu T_k trwania komparacji należy dziś dopatrywać się głównie w skracaniu czasu T_w (stosując jeszcze szybsze przetworniki c/a przy niezmienionej strukturze wzorca, przez zmianę struktury wzorca, względnie przez zastosowanie kilku wzorców wykorzystywanych naprzemian).

Do dalszych rozważań przyjęto, że czas trwania jednego taktu komparacji wynosi:

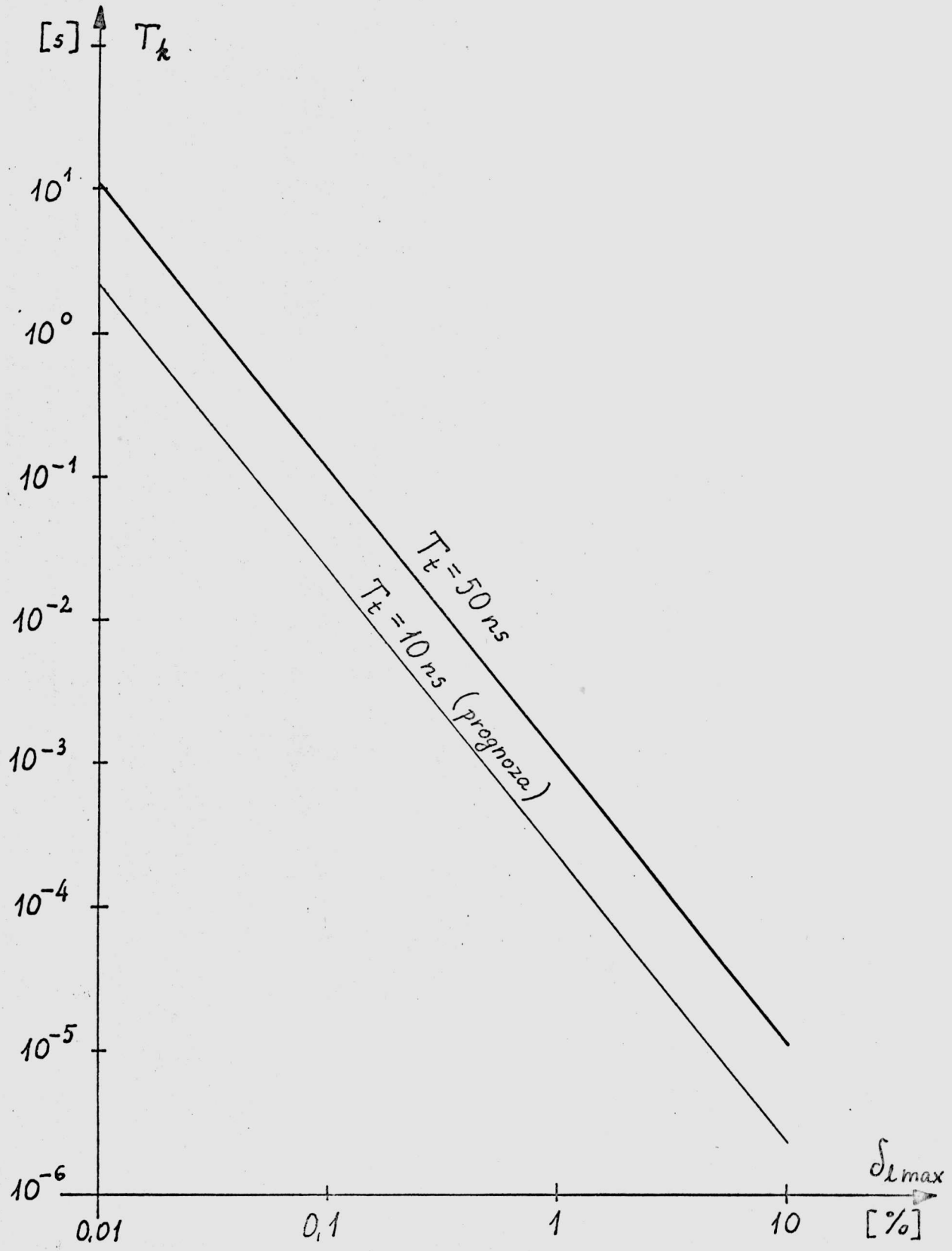
$$T_t = 50 \text{ ns} .$$

Interesujące wydaje się uzyskanie zależności czasu trwania procedury komparacyjnej T_k od dopuszczalnej wartości unormowanego błędu losowego $\delta_{1\,max}$ (porównaj wzór (2.28)). Uzyskuje się ją przez podstawienie wzoru (2.28) do zależności (4.3):

$$T_k = \frac{9}{4} \cdot \frac{T_t}{\delta^2_{1\,max}} . \qquad (4.5)$$

Wykres tej zależności przy założeniu, że T_t = 50 ns = parametr przedstawiono na rys. 4.2. Jak widać uzyskanie wartości składowej losowej błędu komparacji rzędu 0,1 % możliwe jest dziś pod warunkiem wykonywania porównań przez czas rzędu setek ms.
Na rysunku 4.2 umieszczono także wykres zależności (4.5) przy prognostycznym założeniu, że czas trwania jednego taktu procedury typu "większy - mniejszy" może zostać skrócony do 10 ns. Zgodnie ze wzorem (4.5) czasy trwania komparacji odpowiadające poszczególnym wartościom błędu $\delta_{1\,max}$ ulegają wtedy skróceniu w tej samej proporcji co T_t, tj. 5 razy.

Ważnym sposobem zmniejszania koniecznego czasu trwania stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" w przypadku pomiaru wartości pojedynczej realizacji napięcia $\tilde{U}_1$, jest zmniejszanie składowej losowej Δ_1 błędu komparacji inaczej niż przez zwiększanie liczby porównań L.



Rys. 4.2. Zależność czasu trwania komparacji T_k od dopuszczalnej wartości unormowanego błędu losowego $\delta_{1\,max}$ (porównaj wzór (2.28)), przy czasie trwania jednego taktu T_t = parametr.

Z reguły zakłada się, że napięcie mierzone spełnia relacje:

$$\tilde{U}_{w\ min} \lesssim \tilde{U}_1 \lesssim \tilde{U}_{w\ max} ,$$

gdzie: $\tilde{U}_{w\ min}$, $\tilde{U}_{w\ max}$ - najmniejsza i największa (odpowiednio) realizacja napięcia odtwarzana przez wzorzec.

Przedział niepewności co do wartości mierzonego napięcia wynosi więc przed rozpoczęciem pomiaru: $\left[U_{w\ min};\ U_{w\ max}\right]$.
W dotychczasowych rozważaniach przyjmowano, że:

$$\tilde{U}_{w\ min} \doteq \tilde{0} .$$

Założono, że przed rozpoczęciem stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" wykonuje się procedurę komparacyjną innego rodzaju (np. deterministyczną, poszukiwawczą, uzależnioną wynikiem detekcji). W wyniku realizacji takiej procedury, w stosunkowo krótkim czasie (kilka do kilkunastu taktów) można zawęzić przedział niepewności co do wartości napięcia mierzonego. Oznacza to, iż o wartości tego napięcia wiadomo już, że:

$$U_1 \in \left[U'_{w\ min};\ U'_{w\ max}\right],$$

gdzie: $U'_{w\ min} > U_{w\ min}$

$U'_{w\ max} < U_{w\ max}$.

Skoro tak, to procedurę komparacyjną typu "większy - mniejszy" można wykonać używając wzorca odtwarzającego napięcia z przedziału: $\left[U'_{w\ min};\ U'_{w\ max}\right]$. Przyjęto więc, że ciąg napięć odtwa-

rzanych przez wzorzec charakteryzuje się funkcją gęstości prawdopodobieństwa o następującej postaci:

$$\gamma(U_w) = \begin{cases} \dfrac{1}{U'_{w\,max} - U'_{w\,min}} ; & U_w \in \left[U'_{w\,min};\ U'_{w\,max}\right] \\ 0 ; & \text{poza tym} \end{cases} \qquad (4.6)$$

Prawdopodobieństwo sukcesu (tzn. zdarzenia, że $\tilde{U}_w^j < \tilde{U}_1$; $j = 1, 2, \ldots, L$) w dowolnym, j-tym takcie procedury komparacyjnej wynosi teraz:

$$p = \frac{U_1 - U'_{w\,min}}{U'_{w\,max} - U'_{w\,min}} \quad . \qquad (4.7)$$

Jeżeli po wykonaniu L porównań (zwiększanie stanów liczników L_1 i L_2 następuje w każdym takcie procedury wg poprzednich zasad) wynik pomiaru obliczy się według wzoru:

$$R = \frac{L_2}{L_1} \cdot (U'_{w\,max} - U'_{w\,min}) + U'_{w\,min} \quad , \qquad (4.8)$$

to można udowodnić, w sposób podobny jak to zrobiono w podrozdziale II/1, że:

- Wynik R jest zmienną losową o dwumianowym rozkładzie prawdopodobieństwa.
- Wartość oczekiwana wyniku wynosi:

$$E(R) = U_1 \qquad (4.9)$$

- Wariancja wyniku ma wartość:

$$D^2(R) = \frac{(U_1 - U'_{w\,min}) \cdot (U'_{w\,max} - U_1)}{L} \quad . \qquad (4.10)$$

Składowa losowa Δ_1 błędu komparacji zdefiniowana za pomocą wzoru (2.23) osiąga więc wartość maksymalną wtedy, gdy:

$$U_1 = \frac{U'_{w\ min} + U'_{w\ max}}{2} .$$

Wartość ta, traktowana jako wartość graniczna $\Delta_{1\ max}$ składowej losowej błędu komparacji wynosi obecnie:

$$\Delta_{1\ max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{U'_{w\ max} - U'_{w\ min}}{\sqrt{L}} . \qquad (4.11)$$

Błąd $\Delta_{1\ max}$ jest - jak widać - proporcjonalny do różnicy: $U'_{w\ max} - U'_{w\ min}$. Im silniej zawęzi się więc przedział niepewności co do wartości napięcia $\tilde{U}_1$ przed rozpoczęciem procedury typu "większy - mniejszy", tym mniejszą wartość błędu $\Delta_{1\ max}$ uzyska się przy ustalonej liczbie wykonanych porównań L. Gdy wartość graniczna $\Delta_{1\ max}$ składowej losowej błędu komparacji jest z góry ustalona, poprzedzenie procedury typu "większy - mniejszy" procedurą typu deterministycznego, poszukiwawczego umożliwia zmniejszenie liczby L niezbędnych porównań gwarantujących nieprzekroczenie błędu $\Delta_{1\ max}$. Rozmiary tego zjawiska można określić na podstawie wzoru (4.11).

Gdyby nie wykonano procedury zawężającej przedział niepewności, w liczniku tego wzoru widniałaby różnica

$$U_{w\ max} - U_{w\ min} .$$

W wyniku jej wykonania licznik uległ K - krotnemu zmniejszeniu, gdzie:

$$K = \frac{U_{w\,max} - U_{w\,min}}{U'_{w\,max} - U'_{w\,min}} \quad . \tag{4.12}$$

Uzyskanie takiego samego efektu K-krotnego zmniejszenia wartości $\Delta_{1\,max}$ wymagałoby zwiększenia liczby porównań K^2 razy. Mówiąc innymi słowy: K - krotne zawężenie przedziału niepewności co do wartości mierzonego napięcia $\tilde{U}_1$ przed rozpoczęciem stochastycznej procedury komparacyjnej typu "większy - mniejszy", umożliwia K^2 - krotne skrócenie czasu jej trwania przy tej samej wartości granicznej błędu losowego $\Delta_{1\,max}$.

3. Pomiar wartości uśrednionych w pojedynczym zbiorze napięć

Zakłada się, że zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych zawiera więcej niż jedną realizację napięcia:

$$\tilde{\tilde{U}} = \left\{ \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_N \right\},$$

a celem pomiaru jest określenie którejś z wartości uśrednionych tego zbioru. Z rozdziału III wynika, że procedura komparacyjna typu "większy - mniejszy" umożliwia pomiar kolejnych momentów zbioru $\tilde{\tilde{U}}$. Ważną cechą tej procedury jest zależność wartości składowej losowej Δ_1 błędu komparacji od liczby porównań wykonanych w jej ramach. Uzyskanie unormowanej wartości błędu losowego rzędu 0,1 % wymaga wykonania ok. 10^6 porównań (zobacz wzór (2.49)). Zastosowanie omawianej procedury komparacyjnej do celów uśredniania jest więc praktycznie wskazane wtedy, gdy wykonanie porównań o liczebności wynikającej z wymaganej dokładności pomiaru jest i tak niezbędne, a przynajmniej możliwe. Celowe wydaje się tu podanie przykładów takich sytuacji.

Zbiór napięć mierzonych $\tilde{\tilde{U}}$ może być np. zestawem wartości chwilowych sygnału napięciowego $\tilde{U}(t)$. Jeżeli próbkowanie odbyło się w sposób gwarantujący reprezentatywność zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ dla sygnału $\tilde{U}(t)$, to parametry charakterystyczne zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ można traktować jako odpowiednie parametry uśrednione sygnału $\tilde{U}(t)$ (zobacz rys. 1.1).

Jeżeli sygnał $\tilde{U}(t)$ ma takie właściwości widmowe, że wymaga próbkowania częstego, a jednocześnie - uśredniania w stosunkowo długim czasie (np. jest to sygnał okresowy o dużej częstotliwości

z nałożonym szumem niskoczęstotliwościowym), to reprezentatywny dla niego zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ wartości chwilowych musi być liczny. Jest to więc sytuacja, w której stosowanie omawianej procedury komparacyjnej wydaje się szczególnie uzasadnione.

Z punktu widzenia możliwości zastosowań istotne są dwie cechy komparacji: czas trwania jednego jej taktu: T_t oraz minimalny czas trwania procedury T_k zapewniający zmniejszenie błędu losowego Δ_1 do wymaganych granic.

Czas trwania jednego taktu T_t determinuje maksymalną częstość próbkowania sygnału $\tilde{U}(t)$. Jeżeli przyjąć zasadę, że próbkowanie powinno mieć miejsce nieco częściej niż dwa razy w okresie najwyższej harmonicznej f_{max} sygnału badanego, to ograniczenie na tę ostatnią ma postać:

$$f_{max} < \frac{1}{2\,T_t} \quad . \tag{4.13}$$

W przypadku, gdy czas trwania jednego taktu procedury ma wartość T_t = 50 ns (porównaj podrozdział IV/2), wówczas stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" można stosować do sygnałów o paśmie nie zawierającym składowych powyżej 10 MHz. Należy jednak pamiętać, że głównym składnikiem czasu T_t jest czas T_w potrzebny na wytworzenie kolejnego napięcia losowego. Tak więc skrócenie czasu T_w (np. przez zastosowanie kilku wzorców losowych o identycznych właściwościach, wykorzystywanych na przemian) mogłoby w istotny sposób rozszerzyć dopuszczalne pasmo badanego sygnału (np. przy T_t = 10 ns aż do ok. 50 MHz).

Drugim ważnym ograniczeniem fizycznym możliwości zastosowań omawianej procedury komparacyjnej jest dopuszczalny czas jej

trwania.

Ponieważ celem zmniejszenia granicznego błędu losowego $\Delta_{1\,max}$ poniżej określonej wartości konieczne jest wykonanie co najmniej L_{min} porównań, więc czas trwania procedury nie może być krótszy niż:

$$T_k \geqslant L_{min} \cdot T_t \quad . \tag{4.14}$$

Gdyby zatem dopuszczalny czas trwania procedury wynikający z jakiś warunków zewnętrznych był mniejszy niż wartość występująca po prawej stronie nierówności (4.14), zastosowanie analizowanej komparacji byłoby możliwe tylko przy pogorszeniu dokładności. We wszystkich jednak przypadkach, gdy czas uśredniania sygnału musi być i tak długi (dłuższy niż: $L_{min} \cdot T_t$ we wzorze (4.14)), stosowanie komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" jest nie tylko możliwe, lecz także w pełni uzasadnione.

Warunki takie występują np. wtedy, gdy sygnał $\tilde{U}(t)$ zawiera składową periodyczną o długim okresie. Czas uśredniania powinien być w takim przypadku co najmniej równy okresowi tej składowej lub jego całkowitej wielokrotności [7]. Typowymi takimi sytuacjami są precyzyjne pomiary napięć stałych. Na napięcia takie z reguły nałożone są napięcia zakłóceń. Najsilniejsze są zwykle zakłócenia napięciem o częstotliwości sieci energetycznej (50 - 60 Hz) - tętnienia. Precyzyjne pomiary napięć stałych z nałożonymi tętnieniami wymagają więc uśredniania w czasie równym całkowitej wielokrotności ich stosunkowo długiego okresu.

Ważną właściwością omawianej procedury komparacyjnej wydaje się także i to, że nie występują w jej przypadku żadne ograniczenia od góry co do czasu trwania komparacji. Oznacza to, że jeśli zachodzi potrzeba uśredniania sygnału $\tilde{U}(t)$ w czasie bardzo dłu-

gim (teoretycznie - dowolnie długim) to można to zrealizować wykorzystując stochastyczną komparację typu "większy - mniejszy". Konieczne jest jedynie stosowanie liczników o odpowiednio dużej pojemności.

W przypadku, gdy sygnał badany nie wymaga próbkowania z maksymalną możliwą częstotliwością: $\frac{1}{T_t}$, celowym może się okazać sztuczne wydłużenie czasu trwania jednego taktu przez zmianę częstotliwości pracy zegara synchronizującego.

Nierówności (4.13) i (4.14) dotyczące właściwości widmowych sygnału $\tilde{U}(t)$ oraz niezbędnego czasu trwania procedury komparacyjnej typu "większy - mniejszy" stanowią główne ograniczenia obszaru jej zastosowań. Celowym wydaje się jeszcze porównanie badanej komparacji pomiarowej z innymi sposobami pomiaru wartości uśrednionych przedstawionymi na rys. 1.1.

Cechą uśredniania w dziedzinie wielkości fizycznej (tzn. uśredniania za pomocą filtru dolnoprzepustowego lub układu całkującego - porównaj droga B na rys. 1.1) jest dopuszczalność w sygnale badanym składowych o bardzo dużych częstotliwościach. Uśrednianie sygnałów w zakresie częstotliwości 20 Hz ÷ kilku GHz jest już od dawna możliwe [8]. Trudności występują natomiast z uśrednianiem w zakresie niskich i bardzo niskich częstotliwości. Konsekwencją tego faktu są trudności w uzyskiwaniu uśrednień za długie czasy. Wynika to z kłopotów związanych z budową układów uśredniających (filtrów dolnoprzepustowych, układów całkujących) o wystarczająco dużych stałych czasowych. W przypadku gdy pomiar dotyczy nie zwykłej średniej, ale wartości średniokwadratowej lub innego, bardziej złożonego parametru uśrednionego, istotną wadą uśredniania w dziedzinie wielkości fizycznej jest

konieczność stosowania analogowych układów funkcyjnych (np. kwadratów). Układy tego typu charakteryzują się często znaczną zależnością krzywej przetwarzania od czasu i temperatury.

Drugim - obok uśredniania w dziedzinie wielkości fizycznej, typowym sposobem pomiaru wartości uśrednionych jest posługiwanie się zbiorem $\tilde{\tilde{U}}$ napięć (próbek), o których zakłada się, że są reprezentatywne dla badanego sygnału $\tilde{U}(t)$ (porównaj rys. 1.1, droga A).

Klasyczny sposób wykorzystania zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ polega na pomiarze wartości poszczególnych realizacji napięcia do niego należących. Wartości te mogą być dalej wykorzystane do obliczania różnych wartości uśrednionych. Uśredniania dokonuje się więc dopiero w dziedzinie liczb (droga A´ na rys. 1.1).

Analizowana w tej pracy procedura komparacyjna także operuje na zbiorze napięć $\tilde{\tilde{U}}$. Jej cechą istotną jest to, że umożliwia pomiar momentów zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ bez uprzedniego ustalania wartości poszczególnych napięć do niego należących (droga A´´ na rys. 1.1).

Traktując więc pomiar przy użyciu komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" jako przetwarzanie:

zbiór napięć $\tilde{\tilde{U}}$ ⟶ moment zbioru $\tilde{\tilde{U}}$

należy zauważyć, że jest to przetwarzanie typu "on - line" [9]. Najistotniejszą wadą tego typu przetworzeń jest utrata informacji związanej z wartościami poszczególnych napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$. Czasami jednak nie jest to wada istotna wtedy zwłaszcza, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ jest bardzo liczny, a interesująca jest tylko jedna, określona wartość uśredniona tego zbioru.

Spostrzeżenie, że poddanie zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ procedurze stochastycz-

nej komparacji pomiarowej typu "większy - mniejszy" ma charakter przetwarzania "on - line" ma znaczenie dlatego, że porównanie tej procedury z klasycznym sposobem uśredniania: przez pomiar wartości poszczególnych próbek i wykonanie odpowiednich obliczeń na wartościach, musi dotyczyć także wersji "on - line" tej metody. Uśrednianie w dziedzinie liczb (droga A' na rys. 1.1) może bowiem występować także w wersji "off - line" polegającej na pomiarze wartości napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$, a następnie na zapamiętaniu tych wartości napięć w pamięci. Uśrednianie może być wykonane w dowolnym czasie w wyniku realizacji odpowiedniego programu obliczeniowego operującego na zapamiętanych wartościach. Nieekwiwalentność uśredniania w dziedzinie liczb w wersji "off - line" w stosunku do komparacji typu "większy - mniejszy" polega głównie na tym, że ta ostatnia jest efektywna wtedy, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ jest bardzo liczny.

Stosowanie zaś pamięci o pojemności rzędu miliona słów leży na pograniczu możliwości współczesnej mikroelektroniki [10]. Zresztą, pamięci o tak ogromnych pojemnościach charakteryzują się na ogół długimi czasami dostępu [11].

Jeśli porównuje się więc komparację stochastyczną typu "większy - mniejszy" z metodą uśredniania w dziedzinie liczb w jej wersji "on line", to stwierdza się, że:

a) Uśrednianie w dziedzinie liczb charakteryzuje się, podobnie jak komparacja typu "większy - mniejszy", możliwością zastosowania praktycznie nieograniczonego czasu uśredniania.

b) Dokładność określenia wartości średniej w dziedzinie liczb zależy jedynie od dokładności pomiaru poszczególnych próbek napięcia i ewentualnie od zastosowanych algorytmów obliczeń.

Nie zależy ona natomiast od liczności zbioru napięć $\approx{U}$. Z tego też względu uśrednianie takie może trwać, w przypadku zbiorów $\approx{U}$ o małej liczności, krócej niż komparacja typu "większy - mniejszy". Ta ostatnia bowiem wymaga - w celu uzyskania odpowiednio małych wartości błędu losowego Δ_1 - wykonania znacznej liczby porównań i w przypadku zbiorów $\approx{U}$ napięć mierzonych o małej liczności, każdą z realizacji z tego zbioru trzeba porównywać wielokrotnie z napięciem wzorcowym (porównaj punkt II/3a).

Kolejną ważną cechą pomiaru wartości uśrednionych zbioru $\approx{U}$ jest czas eksploatacji pojedynczego napięcia z tego zbioru oznaczony tu T_{akw} (czas akwizycji). Czas ten ogranicza bowiem od góry pasmo częstotliwości sygnału, który może być jeszcze uśredniany przy użyciu danej metody.

Jak stwierdzono w poprzednim podrozdziale, czas akwizycji pojedynczego napięcia ze zbioru $\approx{U}$ może być, w przypadku komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy", stosunkowo krótki. W sytuacji gdy zbiór $\approx{U}$ jest wystarczająco liczny i uzyskanie niewielkiego błędu losowego Δ_1 jest już możliwe nawet w przypadku jednokrotnego porównania każdego z napięć z tego zbioru z napięciem wzorcowym, czas ten jest równy trwaniu pojedynczego taktu procedury:

$$T_{akw}^{stoch} = T_t ,$$

gdzie: T_{akw}^{stoch} - czas akwizycji jednego napięcia ze zbioru $\approx{U}$ w przypadku posługiwania się stochastyczną procedurą komparacyjną typu "większy - mniejszy".

Zgodnie z wykonanym oszacowaniem (porównaj podrozdział IV/2), możliwe jest dziś uzyskanie czasu:

$$T_{akw}^{stoch} = 50 \text{ ns} .$$

Celowym wydaje się oszacowanie czasu akwizycji jednego napięcia ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ w przypadku, gdy uśredniania dokonuje się w dziedzinie liczb: T_{akw}^{liczb} .

W przypadku przyjęcia takiej metody uśredniania w stosunku do każdego z napięć $\tilde{U}_i$ (i = 1, 2, ..., N) ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ muszą być wykonane następujące czynności:

- pomiar wartości U_i tego napięcia,
- przesłanie zakodowanej wartości napięcia do urządzenia obliczającego,
- wykonanie odpowiednich obliczeń.

Czas akwizycji zawiera więc w tym przypadku następujące składniki:

$$T_{akw}^{liczb} = T_{pom} + T_{przes} + T_{obl} , \qquad (4.15)$$

gdzie: T_{akw}^{liczb} - czas akwizycji pojedynczego napięcia $\tilde{U}_i$ (i = = 1, 2, ..., N) ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ w przypadku uśredniania w dziedzinie liczb,

T_{pom} - czas pomiaru wartości napięcia $\tilde{U}_i$,

T_{przes} - czas przesłania wartości napięcia z urządzenia pomiarowego do urządzenia wykonującego niezbędne operacje arytmetyczne,

T_{obl} - czas wykonania obliczeń związanych z konkretną wartością U_i .

Na czas przesłania T_{przes} składają się m.in. opóźnienia wnoszone przez ewentualne wzmacniacze linii, układy interfejsowe czy kanały wejściowo-wyjściowe urządzenia obliczającego. W przypadku gdy urządzeniem obliczającym jest mikroprocesor, rozmaitość możliwych sposobów realizacji przesłań jest szczególnie duża [12]; gdy natomiast obliczenia są wykonywane przy użyciu wyspecjalizowanych układów sumatorowych czy multyplikatorowych czasy przesłań są zapewne krótsze.
W oszacowaniu czasu przesłania T_{przes} występują duże trudności. Wydaje się jednak, iż można przyjąć, że jest on znacznie mniejszy od pozostałych składników sumy (4.15). Teoretycznie nie zawsze musi to być słuszne (współpraca z mikroprocesorem w systemie przerwaniowym może wymagać znacznych czasów oczekiwania na obsługę przerwania). Założono jednak, że w tych sytuacjach gdy chodzi o maksymalne skrócenie czasu akwizycji T_{akw}^{liczb} są stosowane odpowiednio szybkie sposoby transmisji danych i założenie o pomijalności czasu T_{przes} we wzorze (4.15) może być zrealizowane.

Oszacowanie pozostałych dwóch składników czasu akwizycji T_{akw}^{liczb} zostanie wykonane dwukrotnie: najpierw w przypadku zastosowania urządzeń standardowych - powszechnie stosowanych we współczesnej elektronice, a następnie przy założeniu, że użyto urządzeń ultraszybkich - wyznaczających granice osiągalnych dziś szybkości uśredniania "on - line" w dziedzinie liczb.

W e r s j a s t a n d a r d o w a

Urządzeniami dokonywującymi szybkiego pomiaru wartości napięcia są dzisiaj najczęściej przetworniki a/c typu kompensacyjnego wyposażone w precyzyjne źródła napięć wzorcowych. Typowe

czasy konwersji tego typu przetworników obracają się dziś w granicach od ułamków mikrosekundy do kilku jej dziesięciu [13]. Przyjęto więc, że czas $T_{pom} = 10\,\mu s$.

Urządzeniem wykonującym obliczenia - typowym w ostatnich latach - jest mikroprocesor 8-bitowy wykonany w technologii n-MOS, np. typu 8080 lub 8085 firmy Intel. Jeżeli założy się, że przedmiotem pomiaru jest wartość średnia w zbiorze napięć $\tilde{\tilde{U}}$, to jedyną operacją arytmetyczną, którą trzeba wykonać w stosunku do wartości U_i każdego napięcia $\tilde{U}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$, jest dodawanie wielobajtowe (porównaj wzór (1.2)). Przy założeniu, że dane z przetwornika a/c są liczbami 8-bitowymi oraz, że liczba uśrednianych napięć jest mniejsza niż 2^{24} $(\approx 17 \cdot 10^6)$, suma wartości uśrednianych napięć jest liczbą co najwyżej czterobajtową. Wykonanie dodawania liczb czterobajtowych wymaga, w przypadku mikroprocesora Intel 8080, ok.50 - 150 taktów zegara (zależnie od zastosowanego algorytmu dodawania) [14]. Przy średniej częstotliwości zegara równej 3 MHz [15] daje to czas wykonania dodawania wielobajtowego równy 17 - 50 μs. Można zatem przyjąć, że w tym przypadku $T_{obl} = 40\,\mu s$.

Zastosowanie więc typowego przetwornika a/c w połączeniu z mikroprocesorem wykonanym w technologii n - MOS o długości słowa nie mniejszej niż liczba bitów przetwornika a/c (tak, aby można było uniknąć operacji o podwójnej precyzji) daje czas akwizycji jednego napięcia ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$:

$$T_{akw}^{liczb} = 50\,\mu s.$$

Jest to więc czas o t r z y r z ę d y d ł u ż s z y

niż w przypadku zastosowania stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy". Oznacza to, że zastosowanie omówionych wyżej, typowych urządzeń akwizycji danych umożliwia badanie sygnałów o 1000 razy mniejszej częstotliwości maksymalnej niż w przypadku komparacji typu "większy - mniejszy".

W e r s j a u l t r a s z y b k a

Jeżeli zastosować jako urządzenie mierzące bardzo szybki, równoległy przetwornik a/c, to czas pomiaru T_{pom} może być skrócony do ok. 5 - 40 ns [16].

Znaczne skrócenie czasu wykonywania operacji arytmetycznych można uzyskać zastępując mikroprocesor wykonany w technologii n - MOS wyspecjalizowanym układem arytmetyczno-logicznym wykonanym w technice ECL. W przypadku gdy jedyną operacją arytmetyczną, którą trzeba wykonać podczas akwizycji konkretnego napięcia ze zbioru $\tilde{U}$ jest dodawanie (pomiar wartości średniej), czas ten może być skrócony do około 20 ns [17].

W przypadku więc zastosowania opisanych wyżej, bardzo szybkich urządzeń, czas związany z akwizycją pojedynczego napięcia może być skrócony do ok.

$$T_{akw}^{liczb} = 30 - 50 \text{ ns},$$

a więc do wartości tego samego rzędu co w przypadku stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy", realizowanej za pomocą również bardzo szybkich, ale produkowanych już elementów.

Z przytoczonych rozważań wynika, że podczas pomiarów wartości średniej sygnału $\tilde{U}(t)$ w drodze badania wartości średniej w zbiorze $\tilde{\tilde{U}}$ napięć chwilowych badanego sygnału, stochastyczna komparacja pomiarowa typu "większy - mniejszy" i metoda klasyczna uśredniania w dziedzinie liczb pozwalają na analizę sygnałów o zbliżonych maksymalnych częstotliwościach granicznych w widmie:

$$f_{max} < \frac{1}{2\ T_{akw}} \approx 10\ \text{MHz} \quad .$$

Warunkiem uzyskania możliwości tak szybkiego przetwarzania "on - line" w przypadku klasycznego uśredniania w dziedzinie liczb, jest zastosowanie bardzo szybkiego przetwornika a/c i wyspecjalizowanych układów arytmetyczno-logicznych, zrealizowanych w technice ECL. Przetwarzanie klasyczne przy użyciu elementów typowych daje dopuszczalną wartość f_{max} w widmie sygnału badanego o ok. 3 rzędy mniejszą, niż stochastyczna procedura komparacyjna typu "większy - mniejszy".

Interesujące wydaje się powtórzenie powyższego porównania w przypadku gdy przedmiotem pomiaru jest wartość średniokwadratowa sygnału napięciowego $\tilde{U}(t)$ i - podobnie jak wyżej - mierzy się ją ustalając wartość średniokwadratową w zbiorze $\tilde{\tilde{U}}$ napięć chwilowych.

Pomiar wartości średniokwadratowej zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ przy użyciu stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" jest możliwy, wymaga jednak zastosowania wzorca wytwarzającego napięcia charakteryzujące się liniowo narastającą funkcją rozkładu prawdopodobieństwa (porównaj punkt III/1b). Jeżeli przyjmie się, że losowy wzorzec napięcia składa się z generatora

liczb losowych i przetwornika c/a (porównaj rys. D8-1), to kształtowanie rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych może odbywać się za pomocą modyfikacji rozkładu prawdopodobieństwa liczb losowych. Zgodnie z tym co powiedziano w dodatku 8, wytwarzanie liczb losowych o liniowej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa jest możliwe przy użyciu dwóch generatorów liczb losowych o rozkładzie równomiernym (pracujących niezależnie, ale synchronicznie), uzupełnionych o układ komparatora liczb i multiplekser cyfrowy. Jeżeli powyższe układy cyfrowe będą wykonane w technice ECL, to czas T_{gll} generowania pojedynczej liczby losowej wydłuży się o nie więcej niż 10 ns [18]. Spowoduje to wydłużenie czasu T_w wytwarzania pojedynczego napięcia wzorcowego do ok. 50 ns (porównaj wzór (D8-4)). Ponieważ pozostałe składniki czasu T_t trwania pojedynczego taktu procedury nie ulegają zmianie, wydłużenie tego czasu spowodowane zmianą rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych będzie wynosiło również ok. 10 ns. Ostatecznie więc:

$$T_t < 60 \text{ ns}.$$

W przypadku, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest liczny, uzyskanie małych wartości składowej losowej błędu komparacji jest możliwe już przy jednokrotnym porównaniu każdego z napięć $\tilde{U}_i$ (i = 1, 2, ..., N) ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ z napięciem wzorcowym. Czas akwizycji jednego napięcia w przypadku pomiaru wartości średniokwadratowej zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ przy użyciu komparacji typu "większy - mniejszy" wynosi więc wtedy:

$$T_{akw}^{stoch} = 60 \text{ ns} ,$$

czyli niewiele więcej niż w przypadku pomiaru wartości średniej.

W przypadku użycia do określania wartości średniokwadratowej zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ metody uśredniania w dziedzinie liczb, każda z wartości napięcia uzyskana z przetwornika a/c musi być podniesiona do kwadratu, a następnie dodana do sumy kwadratów poprzednich wartości. Czas T_{obl} (zobacz wzór (4.15)) potrzebny do wykonania niezbędnych obliczeń ulegnie więc wydłużeniu. Szczegółową analizę tego zjawiska wykonano przy założeniu, że stosuje się najszybsze dostępne dziś na rynku urządzenia. Realizacja operacji podnoszenia do kwadratu wartości uzyskiwanych z przetwornika a/c, za pomocą specjalnych arytmetyczno-logicznych układów mnożących powoduje zwiększenie czasu T_{obl} niezbędnego do wykonania obliczeń o ok. 100 - 200 ns [19] w stosunku do jego wartości podczas obliczania średniej arytmetycznej. Łączny (wraz z sumowaniem) czas obliczeń T_{obl} wynosi więc w tym przypadku (przyjmując czas mnożenia średnio ok. 150 ns)

$$T_{obl} \approx 170 \text{ ns.}$$

Tak więc czas akwizycji jednego napięcia wynosi podczas pomiaru wartości średniokwadratowej (porównaj wzór (4.15)):

$$T_{akw}^{liczb} \approx 200 \text{ ns .}$$

Z wykonanych oszacowań wynika, że stochastyczna komparacja pomiarowa typu "większy - mniejszy" umożliwia pomiar wartości średniokwadratowej sygnałów zawierających składowe fourierowskie o częstotliwościach poniżej:

$$f_{max}^{stoch} = \frac{1}{2T_{akw}^{stoch}} \approx 8{,}5 \text{ MHz} .$$

Zastosowanie w tym samym celu uśredniania "on line" w dziedzinie liczb, ogranicza dopuszczalne pasmo sygnału badanego do około:

$$f_{max}^{liczb} = \frac{1}{2T_{akw}^{liczb}} \approx 2{,}5 \text{ MHz} .$$

W przypadku pomiaru momentów wyższych rzędów efekt dysproporcji W dopuszczalnym paśmie analizowanego sygnału $\tilde{U}(t)$ - w razie jego analizowania metodą klasyczną i za pomocą stochastycznej komparacji pomiarowej - pogłębi się jeszcze bardziej. Czas akwizycji T_{akw}^{stoch} pojedynczego napięcia podczas komparacji stochastycznej wzrasta bowiem o kilka nanosekund przy wzroście rzędu mierzonego momentu o 1. Czas akwizycji T_{akw}^{liczb} podczas uśredniania w dziedzinie liczb wzrasta natomiast - przy wzroście rzędu mierzonego momentu o 1 - o czas wykonania jednego mnożenia czyli o 100 - 200 ns.

Z punktu widzenia pasma częstotliwości sygnału uśrednianego, stochastyczna komparacja przeglądowa typu "większy - mniejszy" jest, w przypadku pomiaru wartości średniej, równie dobra jak ultraszybka wersja uśredniania w dziedzinie liczb, natomiast podczas pomiaru wartości średniokwadratowej i momentów wyższych rzędów znacznie tę ostatnią przewyższa.

Zgodnie z tym, co powiedziano w poprzednim podrozdziale, ważnym sposobem zmniejszania wartości błędu losowego Δ_1 bez

zwiększania liczby L porównań wykonanych w ramach komparacji, jest zawężanie, przed przystąpieniem do procedury typu "większy - mniejszy", przedziału napięć: $[\tilde{U}_{w\,min}, \tilde{U}_{w\,max}]$ odtwarzanych przez wzorzec (porównaj wzór (4.11)). Zastosowanie tego sposobu jest możliwe także w przypadku, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest wieloelementowy.

Szczególnie ważne staje się wtedy pytanie: co będzie, gdy część napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ nie spełnia wymagania:

$$\tilde{U}_{w\,min} \leqslant \tilde{U}_i \leqslant \tilde{U}_{w\,max}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.16}$$

Niespełnianie przez któreś z napięć $\tilde{U}_i$ (i = 1, 2, ..., N) warunku (4.16) nazywa się w tej pracy p r z e k r o c z e n i e m z a k r e s u n a p i ę ć o d t w a r z a n y c h p r z e z w z o r z e c .

Powyższy problem jest istotny także i wtedy gdy nie stosuje się, przed przystąpieniem do komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy", zawężania przedziału napięć odtwarzanych przez wzorzec napięcia. W przypadku jednak, gdy takie zawężanie ma miejsce, a napięcia ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ nie są jednakowe, nabiera on specjalnego znaczenia. Może bowiem zdarzyć się, że niespełnienie warunku (4.16) będzie spowodowane nadmiernym zawężeniem przedziału napięć odtwarzanych przez wzorzec.

Może to wystąpić zwłaszcza wtedy, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych zawiera wartości chwilowe sygnału $\tilde{U}(t)$ zmieniającego się w sposób losowy. W sytuacji takiej, zawężanie przedziału napięć odtwarzanych przez wzorzec następujące przed wykonaniem właściwej komparacji typu "większy - mniejszy" dotyczy innego zbioru wartości chwilowych niż zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ realizacji napięcia podlegających porównaniu z losowo wybranymi napię-

ciami wzorcowymi. Sygnał $\tilde{U}(t)$ może np. przyjąć, w trakcie komparacji typu "większy - mniejszy", wartość chwilową znacznie większą niż te, które przyjmuje on typowo i na podstawie których zawężono wcześniej górną granicę $\tilde{U}_{w\ max}$ napięć odtwarzanych przez wzorzec.

Analiza wpływu niespełnienia warunku (4.16) na wynik pomiaru uzyskany w drodze komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" wydaje się więc celowa. Może ona okazać się również przydatna podczas doboru algorytmu zawężania przedziału napięć odtwarzanych przez wzorzec.

Założono, że w celu pomiaru wartości średniej napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ wykonuje się stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" posługując się wzorcem wytwarzającym ciągi niezależnych losowo napięć o rozkładzie równomiernym:

$$\gamma(U_w) = \begin{cases} \dfrac{1}{U_{w\ max} - U_{w\ min}}, & U_w \in [U_{w\ min},\ U_{w\ max}] \\ 0, & \text{poza tym .} \end{cases} \qquad (4.17)$$

Założono również, że zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych zawiera oprócz napięć spełniających warunek (4.16) także napięcia mniejsze od $\tilde{U}_{w\ min}$ oraz napięcia większe od $\tilde{U}_{w\ max}$. Napięcia ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ porównano z realizacjami wzorcowymi, każde po razie, w takiej kolejności, że zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć porównywanych ma postać:

$$\tilde{\tilde{U}}_p = \{\underbrace{\tilde{U}^1, \tilde{U}^2, \ldots, \tilde{U}^k}_{k}, \underbrace{\tilde{U}^{k+1}, \ldots, \tilde{U}^q}_{s}, \underbrace{\tilde{U}^{q+1}, \ldots, \tilde{U}^L}_{t}\} \qquad (4.18)$$

gdzie:

- realizacje: $\tilde{U}^1, \ldots, \tilde{U}^k$ - spełniają zależność (4.16); jest ich k,

realizacje: $\tilde{U}^{k+1}, \ldots, \tilde{U}^{q}$ - spełniają nierówność:

$$\tilde{U}^{j} > \tilde{U}_{w\ max}\ ,\ j = k+1, \ldots, q;\ \text{jest ich } s,$$

- realizacje: $\tilde{U}^{q+1}, \ldots, \tilde{U}^{L}$ - spełniają nierówność:

$$\tilde{U}^{j} < \tilde{U}_{w\ min}\ ,\ j = q+1, \ldots, L;\ \text{jest ich } t.$$

Oczywiście:

$$k + s + t = L \tag{4.19}$$

Obliczenie wyniku pomiaru następuje wg równania (4.8):

$$R = \frac{L_2}{L_1}.(U_{w\ max} - U_{w\ min}) + U_{w\ min} \tag{4.8}$$

(primy przy symbolach $U_{w\ max}$ i $U_{w\ min}$ w równaniu (4.8) nie są teraz potrzebne). Na podstawie równania (4.8) otrzymuje się wzory na wartość oczekiwaną $E(R)$ wyniku pomiaru i jego wariancję $D^2(R)$:

$$E(R) = \frac{U_{w\ max} - U_{w\ min}}{L} \cdot E(L_2) + U_{w\ min}\ , \tag{4.20}$$

$$D^2(R) = \frac{(U_{w\ max} - U_{w\ min})^2}{L^2} \cdot D^2(L_2)\ , \tag{4.21}$$

gdzie: zgodnie z przyjętymi oznaczeniami, stan końcowy licznika L_1 wynosi L.

Stan końcowy licznika L_2 jest zmienną losową. Jest ona

sumą (2.34) niezależnych zmiennych losowych X^j (j = 1, 2, ..., L) o rozkładzie dwupunktowym (2.35):

$$L_2 = \sum_{j=1}^{L} X^j \quad , \tag{2.34}$$

gdzie:

$$X^j = \begin{cases} 1, \text{ gdy } \tilde{U}_w^j \prec \tilde{U}^j \\ \\ 0, \text{ poza tym} \end{cases} \tag{2.35}$$

Zdarzenie opisane w pierwszym wierszu wzoru (2.35) nazywa się tu sukcesem. Jego prawdopodobieństwo wynosi, zgodnie ze wzorem (4.17):

$$p^j = P(X^j = 1) = \begin{cases} 0 & , \ \tilde{U}^j \prec \tilde{U}_{w\,min} \\ \dfrac{U^j - U_{w\,min}}{U_{w\,max} - U_{w\,min}} & , \ \tilde{U}_{w\,min} \preccurlyeq \tilde{U}^j \preccurlyeq \tilde{U}_{w\,max} \\ 1 & , \ \tilde{U}^j \succ \tilde{U}_{w\,max} \end{cases} \tag{4.22}$$

j = 1, 2, ..., L.

Na podstawie wzoru (2.34) otrzymuje się, że:

$$E(L_2) = \sum_{j=1}^{L} E(X^j) \tag{4.23}$$

oraz, po uwzględnieniu niezależności losowań napięć wzorcowych $\tilde{U}_w^j$ (j = 1, 2, ..., L) i wynikających z niej niezależności zmiennych losowych X^j:

$$D^2(L_2) = \sum_{j=1}^{L} D^2(X^j) \ . \tag{4.24}$$

Z zależności (2.35) i (4.22) otrzymuje się, że:

$$E(X^j) = p^j \tag{4.25}$$

oraz:

$$D^2(X^j) = p^j(1 - p^j),\ j = 1, 2, \ldots, L\ . \tag{4.26}$$

Z postaci (4.18) zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć porównywanych wynika, że wszystkie zmienne losowe X^j o numerach $j = k+1, \ldots, q$ przyjmą wartość jeden, zaś zmienne losowe o numerach $j = q+1, \ldots, L$ - wartość zero. Wzór (4.23) można przepisać tak:

$$E(L_2) = \sum_{j=1}^{k} p^j + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{s \text{ jedynek}} + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{t \text{ zer}}\ . \tag{4.27}$$

Podobnie zależność (4.24) przyjmie postać:

$$D^2(L_2) = \sum_{j=1}^{k} p^j(1 - p^j) + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{(s+t) \text{ zer}}\ , \tag{4.28}$$

gdzie wartości p^j prawdopodobieństw sukcesu we wzorach (4.27) i (4.28) są określone za pomocą środkowego wiersza równości (4.22).

Uwzględnienie wzoru (4.27) oraz (4.22) w równaniu (4.20) prowadzi do zależności:

$$E(R) = \frac{1}{L}\left(\sum_{j=1}^{k} U^j + s \cdot U_{w\,max} + t \cdot U_{w\,min}\right)\ . \tag{4.29}$$

Jak widać fakt, że niektóre z napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ wykraczały poza zakres napięć odtwarzanych przez wzorzec spowodował, że wartość oczekiwana wyniku nie jest równa wartości średniej zbioru napięć mierzonych $\tilde{\tilde{U}}$. Warto zauważyć, że wynik (4.29) jest wartością średnią w zbiorze napięć powstałym ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ (4.18) przez zastąpienie wszystkich realizacji napięcia mniejszych od $\tilde{U}_{w\ min}$ tą właśnie realizacją oraz zastąpienie wszystkich napięć większych od $\tilde{U}_{w\ max}$ napięciem $\tilde{U}_{w\ max}$.

Wynik R jest onciążony błędem systematycznym o wartości (porównaj (2.48)):

$$\Delta_s^{pk} = E(R) - \gamma_1(\tilde{\tilde{U}}) , \qquad (4.30)$$

gdzie: Δ_s^{pk} - składowa systematyczna błędu komparacji związana z faktem przekraczania (indeks: pk) przez niektóre z napięć zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ przedziału realizacji napięcia odtwarzanych przez wzorzec.

$\gamma_1(\tilde{\tilde{U}})$ - rzeczywista wartość średnia zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych.

Ponieważ, zgodnie z założeniem, każde z napięć mierzonych porównano jednokrotnie z napięciem wzorcowym, więc:

$$\gamma_1(\tilde{\tilde{U}}) = \gamma_1(\tilde{\tilde{U}}_p) = \frac{1}{L} \cdot \sum_{j=1}^{L} U^j \quad . \qquad (4.31)$$

Uwzględniając wzory (4.29) i (4.31) w zależności (4.30) otrzymuje się po przekształceniach:

$$\Delta_s^{pk} = \frac{1}{L}\left[\left(s \cdot U_{w\ max} - \sum_{j=k+1}^{q} U^j \right) + \left(t \cdot U_{w\ min} - \sum_{j=q+1}^{L} U^j \right) \right] . \qquad (4.32)$$

Pierwszy człon w nawiasie kwadratowym jest łączną miarą przekroczeń wartości $U_{w\,max}$ przez napięcia ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$. Ma on zawsze wartość niedodatnią . Podobnie - drugi człon w nawiasie kwadratowym wzoru (4.32) stanowi łączną miarę przekroczeń, ale in misus, wartości $U_{w\,min}$ przez napięcia ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$. Człon ten ma zawsze wartość nieujemną.

Na podstawie wzoru (4.32) można wysnuć następujące wnioski o wpływie przekraczania zakresu napięć odtwarzanych przez wzorzec na wartość składowej systematycznej Δ_s^{pk} błędu komparacji:

- W przypadku, gdy łączne miary przekroczeń zakresu napięć odtwarzanych przez wzorzec in plus oraz in minus są jednakowe (porównaj wzór (4.32)), to wartość błędu Δ_s^{pk} jest równa zero bez względu na liczby sztuk s oraz t realizacji napięcia, które nie mieszczą się w zakresie napięć $\left[\tilde{U}_{w\,min};\ \tilde{U}_{w\,max}\right]$, a także bez względu na stopień tego przekroczenia.
- Sytuacja szczególnie niekorzystna ma miejsce wtedy, gdy obecności w zbiorze $\tilde{\tilde{U}}$ określonych napięć większych od $\tilde{U}_{w\,max}$ nie równoważy obecność napięć mniejszych od $\tilde{U}_{w\,min}$, lub na odwrót (jednostronne przekraczanie zakresu napięć odtwarzanych przez wzorzec).
- Przy ustalonej wartości różnicy łącznych miar przekroczeń in plus oraz in minus (nawias kwadratowy zależności (4.32)), wartość błędu Δ_s^{pk} jest tym mniejsza im większa jest liczba L wykonanych porównań.
- Błąd systematyczny Δ_s^{pk} ma charakter addytywny. Jego obecność jest szczególnie niekorzystna wtedy, gdy mierzona wartość średnia zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ jest równa lub bliska zeru.

Składowa losowa Δ_1 błędu komparacji zależy bezpośrednio od wariancji wyniku pomiaru $D^2(R)$ (porównaj wzór definicyjny (2.42)).

O wpływie omawianych przekroczeń zakresu napięć odtwarzanych przez wzorzec na wartość błędu losowego Δ_1 można więc wnioskować na podstawie zależności (4.28) i (4.21).

Jak widać, obecność w zbiorze $\tilde{\tilde{U}}_p$ realizacji mniejszych od $\tilde{U}_{w\ min}$ lub większych od $\tilde{U}_{w\ max}$ powoduje pojawienie się składników zerowych w sumie (4.28), a więc wpływa na zmniejszenie wariancji wyniku $D^2(R)$, a tą drogą błędu Δ_1. Ponieważ jednak towarzyszy temu błąd systematyczny Δ_s^{pk}, trudno traktować efekt przekraczania zakresu napięć odtwarzanych przez wzorzec jako racjonalny środek zmniejszania błędu losowego. Można by go tak traktować, ale tylko wtedy, gdyby się stosowało taką - specjalną - metodę zawężania przedziału napięć odtwarzanych przez wzorzec: $\left[\tilde{U}_{w\ min};\ \tilde{U}_{w\ max}\right]$, która gwarantowałaby, w przypadku dowolnego bioru $\tilde{\tilde{U}}$, zerową wartość błędu systematycznego Δ_s^{pk} (4.32) symetria przekroczeń zakresu).

4. Pomiar wartości uśrednionych w wielu zbiorach napięć

Podrozdział ten poświęcono omówieniu możliwości zastosowania stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" do pomiaru momentów w wielu zbiorach napięć. Zbiory te oznaczono:

$$\overset{\approx}{U}_1, \overset{\approx}{U}_2, \ldots, \overset{\approx}{U}_M . \tag{4.33}$$

Uwaga: Do tej pory rozważano przypadki, gdy zbiór napięć mierzonych był jeden. Oznaczano go symbolem $\overset{\approx}{U}$, bez indeksu. Obecnie zachodzi potrzeba ponumerowania zbiorów napięć mierzonych (4.33). Symboli powyższych - z dwiema falkami u góry - nie należy mylić z zapisem $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_N$ - jedna falka - oznaczającym poszczególne realizacje w pojedynczym zbiorze napięć mierzonych.

Przyjęto, że każdy ze zbiorów (4.33) zawiera znaczną liczbę (rzędu 10^6 lub więcej) napięć oraz, że zbiory są równoliczne. Wynikiem pomiarów mają być wartości określonego momentu poszczególnych zbiorów.

Założono także, iż pomiar ma być wykonany "on line", tzn. bez zapamiętywania wartości poszczególnych napięć. Założenie to przyjęto z dwóch powodów. Po pierwsze dlatego, że istotą komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" jest możliwość uzyskiwania wartości uśrednionej należnej zbiorowi napięć, bez potrzeby określania wartości poszczególnych napięć. Pomiar momentów zbioru uzyskuje się np. przez dobór odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych. Po drugi zaś dlatego, że pomiar "off - line" w przypadku wielu zbiorów, z których każdy

zawiera znaczną liczbę napięć angażowałby duży obszar pamięci ($M \cdot N$ komórek, gdzie N - liczność każdego ze zbiorów $\tilde{\tilde{U}}_1, \tilde{\tilde{U}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{U}}_M$, a M - liczba uśrednianych zbiorów).

Do realizacji procedury komparacyjnej typu "większy - mniejszy" w jednym kanale potrzebne są (porównaj rys. 2.1):

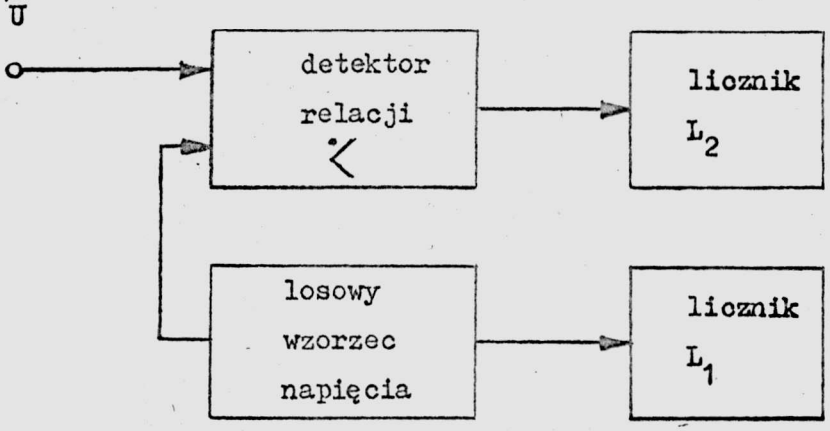
- losowy wzorzec napięcia o odpowiednich właściwościach probabilistycznych,
- detektor relacji porządku $\lessdot$,
- dwa liczniki (L_1, L_2).

Strukturę układu realizującego rozważaną procedurę komparacyjną w przypadku pojedynczego zbioru napięć mierzonych przypomniano na rys. 4.3a).

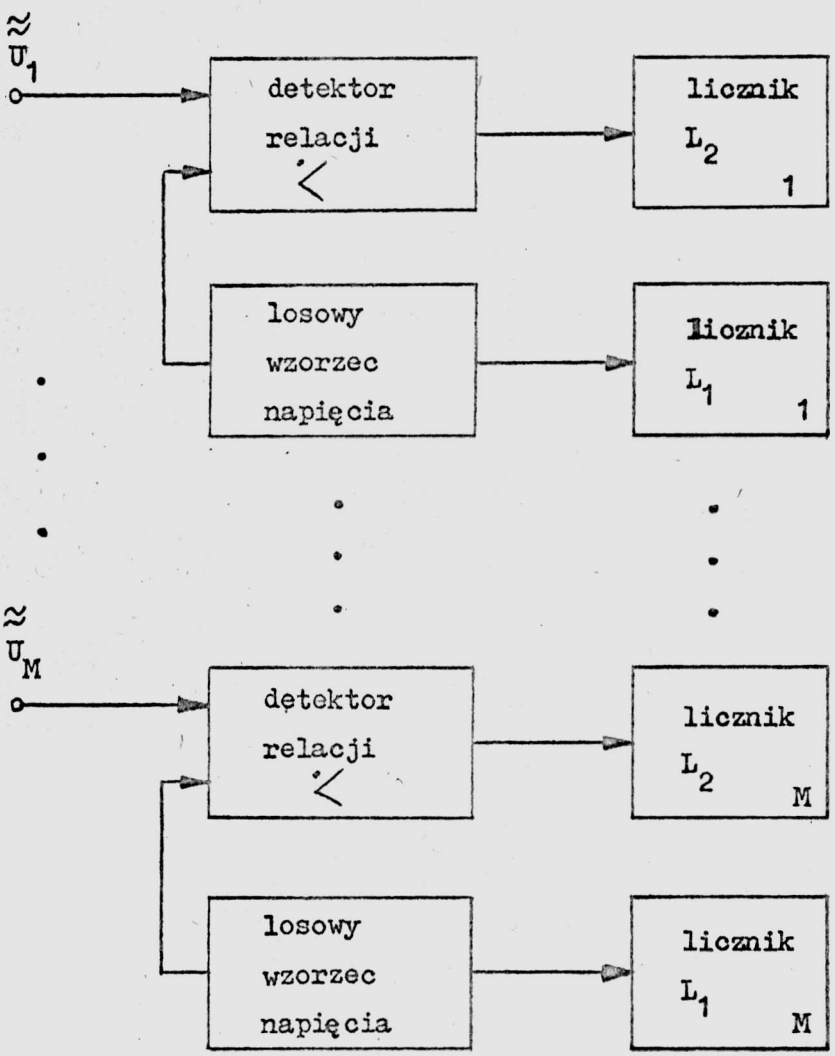
Najelementarniejszym sposobem uzyskania układu realizującego komparację stochastyczną "większy - mniejszy" w stosunku do M zbiorów napięć mierzonych: $\tilde{\tilde{U}}_1, \tilde{\tilde{U}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{U}}_M$, jest proste powielenie układu z rys. 4.3a). Strukturę taką przedstawiono na rys. 4.3b). Zaletą tego układu jest możliwość pomiaru w każdym torze pomiarowym przy użyciu wzorców dających napięcia o innych rozkładach prawdopodobieństwa, które pozwalają mierzyć różne momenty. Poza tym, dzięki całkowitemu powieleniu struktury podstawowej, liczby porównań wykonywanych w ramach procedur komparacyjnych w poszczególnych torach pomiarowych nie muszą być jednakowe. Porównania nie muszą także być wykonywane synchronicznie we wszystkich torach.

Dodatkową zaletą układu z rys. 4.3b), na którą wskazał K. Hejn[20], jest możliwość umieszczenia losowych wzorców napięcia wraz z detektorem relacji $\lessdot$ w bezpośrednim sąsiedztwie punktów pobierania uśredniamych napięć. Zmniejsza to w zasadniczy sposób wpływ

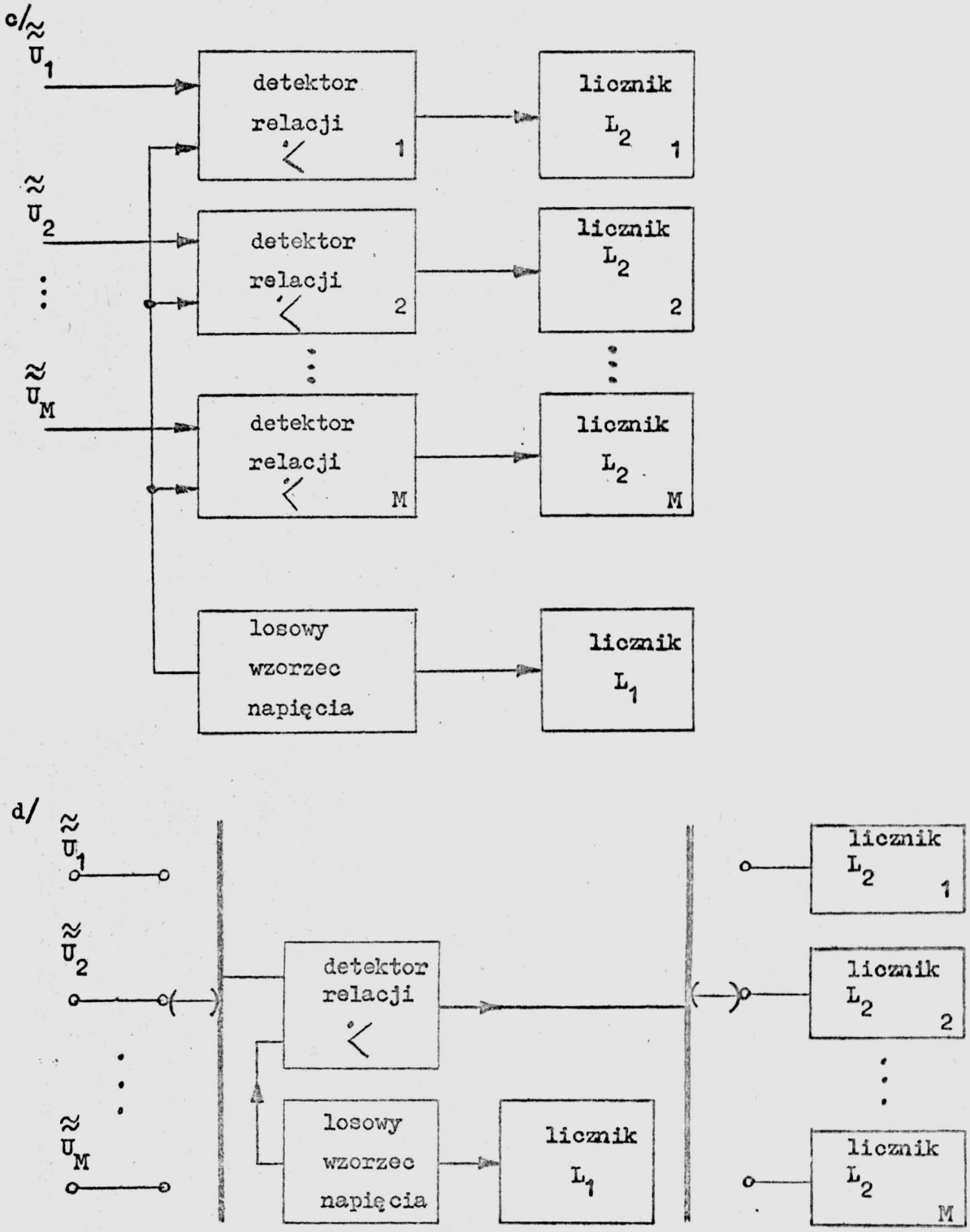
a/



b/



Ciąg dalszy rys. 4.3 - patrz strona następna.



Rys. 4.3. Pomiar momentów w M zbiorach napięć za pomocą stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy":

a) Układ jednokanałowy,

b) Układ M-kanałowy, w pełni równoległy,

c) Układ M-kanałowy z jednym wzorcem i licznikiem L_1, a mimo to w pełni równoległy,

d) Układ M-kanałowy ze wspólnym detektorem relacji porządku.

zakłóceń na wartości tych napięć. Ciągi zero - jedynkowe wychodzące z detektora relacji porządku, stanowiące wyniki porównań, można łatwo przesyłać na duże odległości bo są znacznie odporniejsze na wpływ zakłóceń niż same napięcia uśredniane. Ponadto, przypadkowa zmiana wyniku porównania (zera logicznego na jedynkę lub na odwrót) ma niewielki wpływ na wartość wyniku pomiaru, gdyż ten ostatni formuje się na podstawie rezultatów dużej liczby porównań.

Wadą układu z rys. 4.3b) jest konieczność stosowania M niezależnych, losowych wzorców napięcia, które - bez wątpienia - są elementami drogimi.

W sytuacji, gdy zbiory napięć mierzonych $\tilde{\tilde{U}}_1$, $\tilde{\tilde{U}}_2$, ..., $\tilde{\tilde{U}}_M$ są równoliczne zaś w pomiarze chodzi o ustalenie wartości tego samego momentu we wszystkich torach, można zastosować strukturę przedstawioną na rys. 4.3c). Jak widać zastosowano tu jeden wzorzec napięć losowych wspólny wszystkim kanałom. Trzeba wyraźnie podkreślić, że możliwość taka wynika z faktu, że omawiana procedura komparacyjna nie jest uzależniona wynikiem detekcji, tzn. napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ (j = 1, 2, ..., L) podawane do porównań z napięciami ze zbiorów $\tilde{\tilde{U}}_1$, $\tilde{\tilde{U}}_2$, ..., $\tilde{\tilde{U}}_M$ nie zależy od wyników porównań w poprzednich taktach procedury.

Zdaniem autora struktura z rys. 4.3 c) jest wyjątkowo korzystna gdyż:

a) Umożliwia ona "uspólnienie" najdroższego elementu w układzie realizującym stochastyczną komparację typu "większy - mniejszy" - losowego wzorca napięcia.

b) Zastosowanie wspólnego wzorca nie wiąże się z jego pracą w systemie podziału czasu. Stosowanie multiplekserów - koniecz-

nych przy takim systemie pracy - jest więc zupełnie zbędne. W sensie funkcjonalnym układ z rys. 4.3 c) jest nadal w pełni równoległy; właściwości dynamiczne poszczególnych torów są takie same jak gdyby pozostałe tory nie istniały. Oznacza to, że czas T_{akw}^{stoch} jest tu taki sam jak w przypadku pojedynczego układu (porównaj podrozdział IV/3).

Czas upływający między kolejnymi obserwacjami tego samego kanału - odstęp próbkowania T_s każdego kanału - jest w tym przypadku równy czasowi akwizycji jednego napięcia T_{akw}^{stoch} i n i e z a l e ż y o d l i c z b y M k a n a ł ó w (!):

$$T_s = T_{akw}^{stoch} \approx 50 \text{ ns}$$

(porównaj podrozdział IV/3).

c) Elementy wymagające M-krotnego powielenia (detektory relacji oraz liczniki L_2) mogą być już dziś łatwo scalane.

W przypadku, gdy punkty pobierania poszczególnych zbiorów $\tilde{\tilde{U}}_1, \tilde{\tilde{U}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{U}}_M$ realizacji napięcia przeznaczonych do uśredniania są oddalone od siebie przestrzennie, w rozważanym układzie zawiarającym jeden wzorzec nie da się uniknąć transmisji sygnałów analogowych na znaczne odległości. Czasami stanowi to wadę tego układu, wtedy zwłaszcza, gdy w środowisku przez które transmisja ma się odbywać, poziom zakłóceń elektromagnetycznych jest duży. W sytuacji takiej napięcia podawane na wejścia detektorów relacji porządku mogą w istotnym stopniu różnić się od napięć mierzonych. Obecność zakłóceń nie ma tu wprawdzie wpływu na możliwość uzyskania wyniku pomiaru, ale może zmienić jego wartość. W przypadku jednak, gdy celem pomiaru jest uzyskanie

wartości średniej w zbiorze napięć, zaś zakłócenia posiadają zerową wartość średnią, ich obecność nie ma również wpływu na wartość wyniku pomiaru.

Ze stosowaniem układu z rys. 4.3 c) wiążą się także pewne niedogodności.

W poprzednich podrozdziałach omówiono możliwość zmniejszania składowej losowej Δ_1 błędu komparacji poprzez zawężanie, przed przystąpieniem do procedury typu "większy - mniejszy", przedziału napięć odtwarzanych przez wzorzec. W przypadku pomiarów wielokanałowych ze wspólnym wzorcem (rys. 4.3 c) zawężanie takie musi jednak spełniać wymaganie, by wszystkie napięcia mierzone ze w s z y s t k i c h z b i o r ó w : $\tilde{\tilde{U}}_1, \tilde{\tilde{U}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{U}}_M$, zawierały się wewnątrz nowego przedziału napięć odtwarzanych przez wzorzec:

$$\left[\tilde{U}'_{w\,min};\ \tilde{U}'_{w\,max} \right] . \tag{4.34}$$

Wymaganie to może spowodować, że zawężanie zakresu napięć wzorcowych nie będzie mogło być dość radykalne, by było efektywnym narzędziem zmniejszania błędu losowego Δ_1.

Na przykład: przed rozpoczęciem zawężania wzorzec odtwarza napięcia losowe z przedziału $\left[\tilde{0};\ \tilde{U}_{w\,max} \right]$. Może się zdarzyć tak, że zbiór $\tilde{\tilde{U}}_1$ napięć mierzonych zawiera realizacje bliskie $\tilde{U}_{w\,max}$, zaś zbiór $\tilde{\tilde{U}}_2$ napięcia bliskie $\tilde{0}$. Ponieważ po ewentualnym zawężeniu napięć odtwarzanych przez wzorzec, realizacje ze zbiorów $\tilde{\tilde{U}}_1$ i $\tilde{\tilde{U}}_2$, choć bardzo różne, muszą mieścić się także w tym nowym przedziale (4.34), więc nowy przedział nie będzie mógł być istotnie węższy od pierwotnego: $\left[\tilde{0},\ \tilde{U}_{w\,max} \right]$.

Rozwiązaniem powyższej trudności może być rezygnacja z

"uwspólnienia" całego losowego wzorca napięcia. Gdyby np. przyjąć, że losowy wzorzec napięcia składa się z generatora l-bitowych liczb losowych oraz z przetwornika c/a z precyzyjnym źródłem napięcia odniesienia (rys. D.8- 1) wówczas cyfrowy generator liczb losowych mógłby być wspólny wszystkim kanałom, a części analogowe - decydujące o zakresie napięć odtwarzanych przez wzorzec - mogłyby być indywidualne.
Jeżeli procedura zawężania przedziału napięć wzorcowych miałaby być realizowana w każdym kanale niezależnie, to indywidualne musiałyby być także układy sterowania tym zawężaniem. Stosowanie rozważanego tu sposobu zmniejszania błędu Δ_1 w układzie wg rys. 4.3 c) może więc okazać się ekonomicznie nieopłacalne.

Z teoretycznego punktu widzenia, możliwe jest jeszcze zrealizowanie M-kanałowego układu realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" według rys. 4.3 d). Jak widać struktura ta różni się od układu z rys. 4.3 c) tym, że zastosowano w niej tylko jeden detektor relacji $<$, obsługujący wszystkie kanały po kolei. Oszczędność tę opłacono jednak koniecznością zastosowania dwóch multiplekserów: analogowego i cyfrowego (multipleksowanie cyfrowe dotyczy tylko jednego bitu). Wydaje się więc, że układ ten nie będzie wiele tańszy od poprzedniego.

Detektor relacji porządku pracujący w systemie podziału czasu powoduje jednak, że układ ten ma gorsze właściwości dynamiczne niż poprzedni. Odstęp próbkowania bowiem wynosi tutaj:

$$T_s = M \cdot T_{o\,kan} + T_w , \qquad (4.35)$$

gdzie: T_w - czas niezbędny na wytworzenie napięcia wzorcowego zgodnie z założonym rozkładem prawdopodobieństwa, niezależnego losowo od napięcia poprzedniego.

Na czas $T_{o\ kan}$ obsługi kanału składają się:

$$T_{o\ kan} = \max\left\{T_{mpxa}\ ,\ T_{mpxc}\right\} + T_p + T_z\ , \qquad (4.36)$$

gdzie: T_{mpxa}, T_{mpxc} - czasy przełączania multiplekserów analogowego i cyfrowego (odpowiednio),

symbol: $\max\left\{T_{mpxa}, T_{mpxc}\right\}$ oznacza dłuższy z czasów przełączania

T_p - czas porównania napięć w detektorze relacji porządku,

T_z - czas potrzebny na zwiększenie o jeden zawartości liczników L_1 i L_2.

Oszacowanie czasu $T_{o\ kan}$ obsługi kanału wymaga znajomości czasów przełączeń multiplekserów.

Czas T_{mpxa} przełączania multipleksera analogowego wykonanego w technologii MOS obraca się wokół wartości od kilku (D-MOS) do kilkuset (p-MOS) nanosekund [21].

Czasy przełączeń multiplekserów cyfrowych zrealizowanych w technice ECL są rzędu pojedynczych nanosekund [18].

Na podstawie dotychczasowych oszacowań można więc przyjąć, że czas obsługi kanału jest w tym przypadku równy:

$$T_{o\ kan} \approx 15 \div 20\ ns\ ;$$

jest więc niewielki.

Czas T_w występujący we wzorze (4.35) ma wartość: $T_w \approx 40$ ns (porównaj podrozdział IV/2).

Biorąc pod uwagę kwestię kosztów, właściwości dynamiczne (czas T_s) oraz prostotę sterowania można chyba uznać, że w grupie układów realizujących stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" w wersji M-kanałowej, najbardziej optymalny jest układ przedstawiony na rys. 4.3 c).

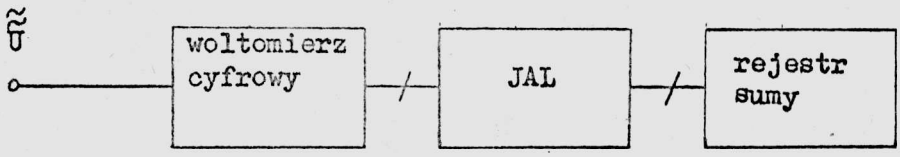
Aby uwypuklić zalety komparacji "większy - mniejszy" w pomiarach wielokanałowych, przeanalizowano także możliwości pomiaru momentów zbiorów $\tilde{\tilde{U}}_1$, $\tilde{\tilde{U}}_2$, ..., $\tilde{\tilde{U}}_M$ w sposób klasyczny, tzn. drogą indywidualnych pomiarów wartości poszczególnych napięć z powyższych zbiorów i wykonania odpowiednich uśrednień w dziedzinie liczb (porównaj rys. 1.1, droga A').

Klasyczny (w powyższym rozumieniu) sposób pomiaru wartości momentu w pojedynczym zbiorze napięć omówiono w poprzednim podrozdziale. Wymaga on zastosowania następujących przyrządów (rys. 4.4 a):

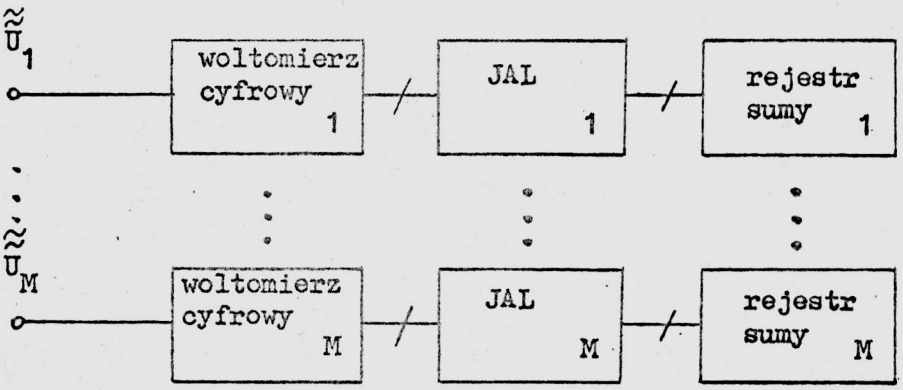
- woltomierza mierzącego wartości poszczególnych napięć uśrednianych,
- jednostki arytmetyczno - logicznej (JAL), podnoszącej uzyskany wynik liczbowy do odpowiedniej potęgi - stosownie do tego, który moment podlega pomiarowi - i dodającej go do dotychczas uzyskanej sumy potęg (w przypadku pomiaru wartości średniej trzeba wykonywać tylko sumowanie wartości),
- rejestru sumy potęg.

W przypadku gdy j e d n o c z e ś n i e trzeba mierzyć momenty kilku zbiorów napięć: $\tilde{\tilde{U}}_1$, $\tilde{\tilde{U}}_2$, ..., $\tilde{\tilde{U}}_M$, najbardziej elementarnym wydaje się rozwiązanie przedstawione na rys. 4.4 b). Polega ono na M-krotnym powtórzeniu całego toru pomiarowego z rys. 4.4 a). Tory te, choć identyczne, pracują zupełnie niezależnie i nie mają żadnych części wspólnych. Czas akwizycji jednego napięcia T_{akw}^{liczb} w każdym z torów jest dzięki temu określony wyłącznie przez właściwości użytych przyrządów. Oszacowanie czasu T_{akw}^{liczb} odpowiadające takiej sytuacji wykonano w poprzednim podrozdziale (porównaj wzór (4.15)).

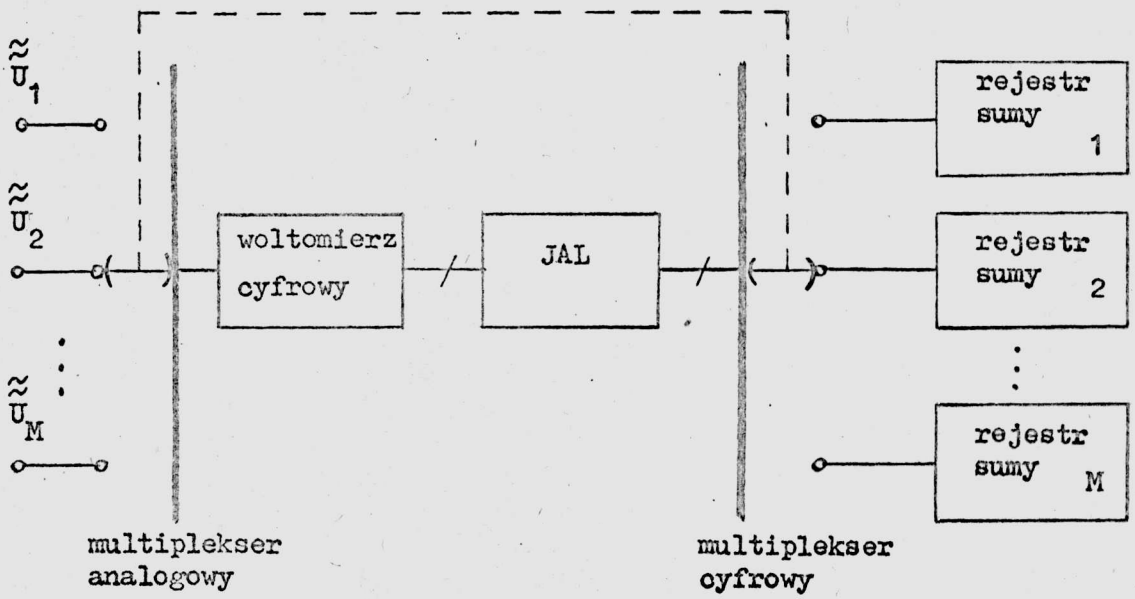
a/



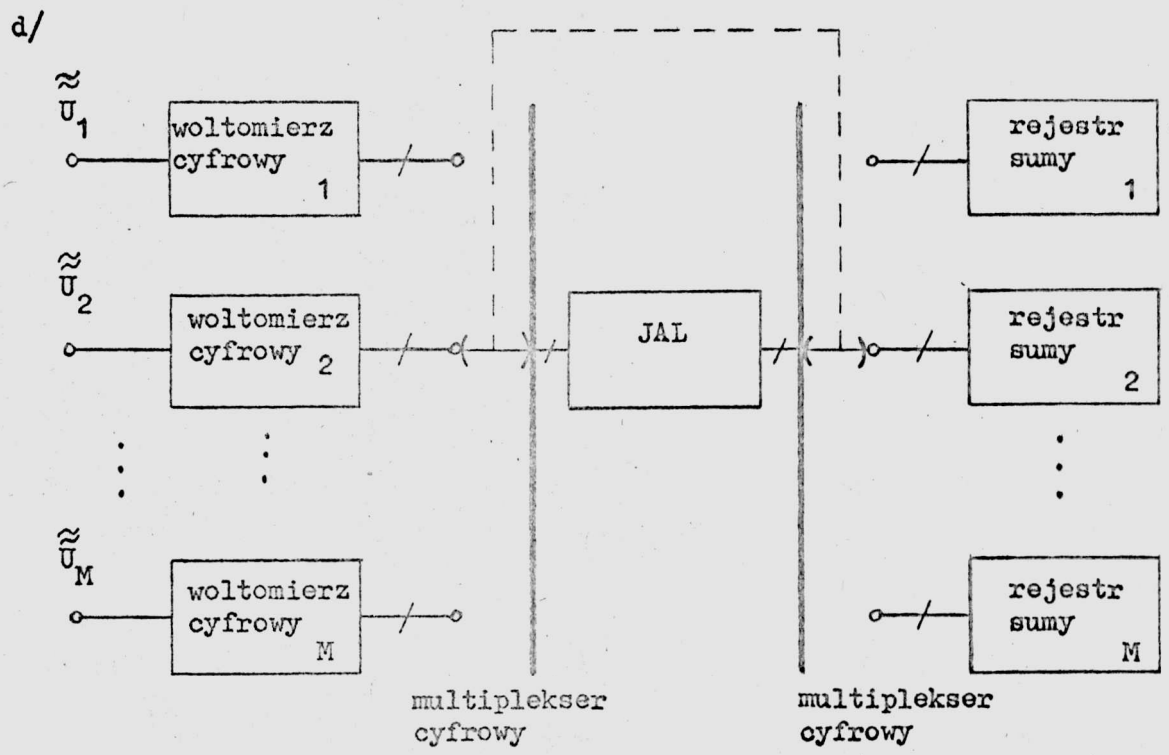
b/



c/



Ciąg dalszy rys. 4.4 - patrz strona następna .



Rys. 4.4. Pomiar klasyczny momentów wielu (M) zbiorów napięć metodą uśredniania w dziedzinie liczb:

a) struktura funkcjonalna układu do pomiaru w jednym kanale,
b) układ M-kanałowy w pełni równoległy,
c) układ ze wspólnym woltomierzem i jednostką arytmetyczno-logiczną (JAL),
d) układ z indywidualnymi woltomierzami i wspólną jednostką arytmetyczno-logiczną (JAL).

W przypadku, gdy liczba M zbiorów, których momenty są przedmiotem pomiarów jest znaczna, powyższy - w pełni równoległy - sposób rozwiązania postawionego zadania pomiarowego jest wybitnie nieekonomiczny. Zwykle więc jakąś część układu pomiarowego robi się wspólną wszystkim torom. Fragment ten ma za zadanie obsługiwać poszczególne tory po kolei. Wymaga to zastosowania odpowiednich przełączników - multiplekserów włączających wspólny fragment układu w odpowiednich momentach w kolejne tory pomiarowe. Teoretycznie można tu sobie wyobrazić następujące konfiguracje układowe:

- wspólny zarówno woltomierz jak i jednostka arytmetyczno-logiczna (rys. 4.4 c),
- indywidualne woltomierze, wspólna jednostka arytmetyczno-logiczna (rys. 4.4 d),
- wspólny woltomierz, jednostki arytmetyczno - logiczne - indywidualne.

Rejestry sum zawsze muszą być indywidualne. Wynika to z założenia, że rezultatem pomiaru ma być M wartości momentów zbiorów: $\tilde{\tilde{U}}_1, \tilde{\tilde{U}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{U}}_M$.

Struktura z rys. 4.4 c) ma tę zaletę, że zawiera tylko jeden woltomierz i jedną jednostkę arytmetyczno - logiczną. Elementy te są wspólne wszystkim torom pomiarowym. Wymaga to jednak zastosowania dwóch multiplekserów umożliwiających włączanie woltomierza i arytmometru w kolejne tory pomiarowe. Jeden z multiplekserów jest analogowy, drugi jest wielobitowym multiplekserem cyfrowym. Liczba bitów multipleksera cyfrowego zależy od dokładności woltomierza oraz od tego, do której potęgi podnosi się wynik pomiaru, tzn. od tego - który moment zbiorów

$\tilde{\tilde{U}}_1$, $\tilde{\tilde{U}}_2$, ..., $\tilde{\tilde{U}}_M$ podlega pomiarowi.

Bardzo często obliczenia arytmetyczne wykonuje się za pomocą mikrokomputera. Funkcję jednostki arytmetyczno - logicznej pełni w takim przypadku odpowiednio oprogramowany arytmometr tego mikrokomputera, a rejestrami sumy są komórki jego pamięci operacyjnej [22]. Możliwe jest wtedy programowe zrealizowanie multipleksera cyfrowego. Wystarczy wykonać w tym celu rozkazy przesłań wyników obliczeń do odpowiednich komórek pamięci operacyjnej [23]. Kolejną zaletą korzystania z arytmometru mikrokomputera jest możliwość programowego sterowania operacjami arytmetycznymi wykonywanymi na wartościach napięć pochodzących z różnych kanałów. W ten sposób można nie tylko mierzyć różne momenty w poszczególnych kanałach, ale także - na drodze programowej - łatwo zmieniać rodzaje momentów mierzonych w tych kanałach. Zalety tej nie mają układy z "zaszytą" jednostką arytmetyczną.

Wadą zastosowania mikrokomputera do celów obliczeniowych w układzie pomiarów M-kanałowych jest to, że na ogół jest on wolniejszy niż wyspecjalizowane układy arytmetyczno - logiczne, o czym była już mowa w poprzednim podrozdziale.

Istotną cechą układu z rys. 4.4 c, wynikającą z jego struktury jest to, że układy woltomierza cyfrowego i jednostki arytmetyczno - logicznej pracują w systemie podziału czasowego, tzn. obsługują poszczególne kanały po kolei. Między kolejnymi momentami rozpoczynającymi obsługę dowolnego kanału upływa więc czas równy co najmniej:

$$T_s = M \cdot T_{o\,kan} \,, \tag{4.37}$$

gdzie: T_s - czas upływający między kolejnymi obserwacjami tego samego kanału; odstęp próbkowania danego kanału,

M - liczba kanałów,

$T_{o\ kan}$ - czas potrzebny na obsługę jednego kanału.

Czas T_s determinuje maksymalną częstość próbkowania określonego kanału. Jeżeli zbiory $\tilde{\tilde{U}}_1$, $\tilde{\tilde{U}}_2$, ..., $\tilde{\tilde{U}}_M$ napięć uśrednianych zawierają realizacje chwilowe sygnałów napięciowych $\tilde{U}_1(t)$, $\tilde{U}_2(t)$, ..., $\tilde{U}_M(t)$, to czas T_s ogranicza od góry pasmo częstotliwości, przy którym zbiory napięć są jeszcze reprezentatywne dla sygnałów (twierdzenie o próbkowaniu). Jak widać ze wzoru (4.37), zastosowanie w układzie pomiarów M-kanałowych, elementów wspólnych wszystkim torom pomiarowym wiąże się, poza korzyściami ekonomicznymi, z wydłużeniem czasu między kolejnymi obserwacjami tego samego kanału. Przy ustalonej liczbie kanałów M niekorzystny efekt wydłużenia czasu T_s jest proporcjonalny do czasu obsługi jednego kanału $T_{o\ kan}$.

W rozważanym właśnie wariancie układowym (rys. 4.4 c), czas $T_{o\ kan}$ wynosi:

$$T_{o\ kan} = T_{akw}^{liczb} + T_{mpxa} \quad , \tag{4.38}$$

gdzie: T_{akw}^{liczb} - czas akwizycji pojedynczego napięcia w przypadku uśredniania w dziedzinie liczb (porównaj (4.15))

T_{mpxa} - czas przełączenia multipleksera analogowego.

Uwaga: czas przełączenia multipleksera cyfrowego jest wliczony w składnik T_{akw}^{liczb}.

Oszacowanie czasu akwizycji pojedynczego napięcia w przypadku zastosowania urządzeń typowych i ultraszybkich omówiono w poprzed

nim podrozdziale. Przypomnijmy, że gdy pomiar odbywa się przy użyciu przetwornika a/c typu kompensacyjnego wyposażonego w precyzyjny wzorzec napięcia, a obliczenia wykonuje się za pomocą mikroprocesora typu 8080 firmy Intel, to w przypadku pomiaru wartości średniej $T_{akw}^{liczb} \approx 50\,\mu s$.

W przypadku zastosowania ultraszybkiego przetwornika a/c typu równoległego i wyspecjalizowanych układów arytmetyczno - logicznych zrealizowanych w technice ECL : $T_{akw}^{liczb} \approx 30 \div 50$ ns - przy pomiarze wartości średniej oraz $T_{akw}^{liczb} \approx 200$ ns - przy pomiarze wartości średniokwadratowej.

Na podstawie wcześniejszych oszacowań [21] przyjęto, że $T_{mpxa} \approx 20$ns Zastosowanie więc w układzie wg rys. 4.4 c) nawet najszybszych dziś dostępnych elementów, prowadzi do następujących wartości czasu $T_{o\ kan}$ obsługi jednego kanału:

- $T_{o\ kan} \approx 50$ ns podczas pomiaru wartości średniej,
- $T_{o\ kan} \approx 200$ ns podczas pomiaru wartości średniokwadratowej.

Wartości te pomnożone przez liczbę M kanałów dają dopiero czas T_s będący odstępem próbkowania pojedynczego kanału (porównaj (4.37)).

Analizowany właśnie układ (rys. 4.4 c), mimo oszczędności użytych środków nie zawsze może być stosowany. Jego główną wadą - poza omówionym już zjawiskiem wydłużania się odstępu próbkowania T_s przy wzroście liczby kanałów M - jest to, że napięcia z uśrednianych zbiorów muszą być dostarczane bezpośrednio na wejścia układu multipleksera analogowego. W warunkach obecności zakłóceń o dużym poziomie jest to niezbyt korzystne wtedy zwłaszcza, gdy punkty pobierania poszczególnych zbiorów napięć są oddalone od siebie przestrzennie. Wtedy bowiem transmisja

napięć mierzonych od miejsca ich pobrania do wejścia multipleksera może być przyczyną znacznych błędów pomiaru wartości uśrednionych. Od wady tej wolny jest w znacznym stopniu układ przedstawiony na rys. 4.4 d). Ma on M indywidualnych woltomierzy cyfrowych [24].

Najistotniejszymi elementami woltomierzy (w najprostszych rozwiązaniach - elementami jedynymi) są szybkie przetworniki a/c. Zwykle są to przetworniki typu kompensacyjnego, gdyż pozwalają one uzyskać znaczne szybkości (czas konwersji rzędu setek nanosekund) i - prawdopodobnie - są one tańsze niż przetworniki równoległe. Sprawa kosztów przetwornika a/c ma w przypadku tej konfiguracji układowej znaczenie szczególne, bo przetworników jest tutaj M sztuk (rys. 4.4 d).

Umieszczenie każdego z woltomierzy cyfrowych w bezpośrednim sąsiedztwie punktów pobierania uśrednianych napięć pozwala na transmisję do jednostki arytmetyczno - logicznej (JAL) sygnałów cyfrowych - znacznie odporniejszych na wpływ zakłóceń niż analogowe. Tę niewątpliwą zaletę układów z indywidualnymi woltomierzami w każdym torze uzyskuje się dzięki znacznemu wzrostowi kosztów.

Możliwości obniżenia kosztu zespołu M przetworników a/c można by upatrywać w "uwspólnieniu" jakiegoś elementu występującego we wszystkich przetwornikach (zakłada się, że wszystkie one są tego samego typu). Jeżeli założyć, że stosuje się przetworniki typu kompensacyjnego, cenne byłoby np. zastosowanie wspólnego regulowanego wzorca napięcia występującego w każdym takim przetworniku a/c. W skład wzorca wchodzą: przetwornik cyfrowo-analogowy (c/a) wraz z układem sterującym oraz źródło napięcia

odniesienia. Przetworniki kompensacyjne zawdzięczają swą szybkość uzależnieniu napięcia wzorcowego porównywanego w kolejnych taktach komparacji z napięciem mierzonym, od wyników takich porównań wykonanych w poprzednich taktach (procedura uwarunkowana wynikiem detekcji, zobacz podrozdział I/2 b). Konsekwencją powyższego uzależnienia jest jednak ścisły związek sekwencji napięć wytwarzanych przez wzorzec w kolejnych taktach z wartością mierzonego napięcia. Fakt ten wyklucza możliwość stosowania jednego wzorca obsługującego kilka przetworników a/c, z których każdy mierzy inne napięcie. Jedynym elementem wzorca, który mógłby ewentualnie być wspólny, jest źródło napięcia odniesienia. Przetworniki c/a oraz układy sterujące muszą być indywidualne.

Podobnie jest w przypadku stosowania w układach woltomierzy cyfrowych zespołu jednakowych przetworników a/c typu równoległego. W skład każdego takiego przetwornika wchodzą: dzielnik rezystorowy wytwarzający-na podstawie napięcia odniesienia - wszystkie potrzebne napięcia wzorcowe, zespół układów porównania napięć, cyfrowy układ logiczny zawierający bufory i układy kodowania wyniku [25]. Z funkcjonalnego punktu widzenia, jedynie dzielnik rezystorowy mógłby ewentualnie obsługiwać kilka przetworników jednocześnie. Najdroższy i najbardziej kłopotliwy w produkcji fragment równoległego przetwornika a/c - zespół detektorów relacji porządku wraz z układem cyfrowym może jednocześnie obsługiwać tylko jeden przetwornik.

Ostatecznie można więc stwierdzić, że decydując się na wersję układu do pomiarów wielokanałowych z indywidualnymi woltomierzami zawierającymi typowe, szybkie przetworniki a/c, nie

ma się możliwości "uwspólnienia" takiego elementu przetworników, by koszt zwielokrotnienia woltomierzy mógł być w istotny sposób zmniejszony.

Jeżeli założy się, że czas trwania pojedynczego pomiaru napięcia za pomocą woltomierza cyfrowego jest na tyle krótki, że w momencie gdy zostanie on połączony, za pomocą multipleksera cyfrowego, z wejściem jednostki arytmetyczno - logicznej, wynik pomiaru czeka już w buforze wyjściowym woltomierza, to czas obsługi jednego kanału $T_{o\ kan}$ w układzie z rys. 4.4 d) wynosi:

$$T_{o\ kan} = T_{obl} + T_{mpxc} \quad , \tag{4.39}$$

gdzie: T_{obl} - czas wykonania obliczeń związanych z pojedynczą wartością napięcia,

T_{mpxc} - czas przełączania multipleksera cyfrowego.

Na podstawie wcześniejszych rozważań [18] przyjęto, że:

$$T_{mpxc} \approx 5 \text{ ns} .$$

Czas obliczeń T_{obl} w przypadku ich realizowania za pomocą wyspecjalizowanych układów arytmetyczno - logicznych wykonanych w technice ECL wynosi (porównaj podrozdział IV/3):

- $T_{obl} \approx 20$ ns, w przypadku pomiaru wartości średniej,
- $T_{obl} \approx 170$ ns, w przypadku pomiaru wartości średniokwadratowej.

Czas $T_{o\ kan}$ obsługi kanału w układzie z rys. 4.4 d) wynosi więc:

- $T_{o\ kan} \approx 25$ ns, gdy mierzy się wartość średnią,
- $T_{o\ kan} \approx 175$ ns, gdy mierzy się wartość średniokwadratową.

Odstęp próbkowania T_s (4.37) odpowiadający układowi z rys. 4.4 d)

oblicza się mnożąc uzyskane czasy $T_{o\ kan}$ przez liczbę M obsługiwanych kanałów.

Jeżeli założy się, że układy z rys. 4.4 c) oraz d) mają takie same liczby kanałów, to układ ostatni zapewnia nieco mniejszy odstęp próbkowania T_s, a więc umożliwia pomiar pamametrów uśrednionych w przypadku sygnałów zawierających składowe o wyższych częstotliwościach. Jest to oczywiście konsekwencja zrównoleglenia części torów pomiarowych na rys. 4.4 d).

Jak powiedziano, teoretycznie, istnieje jeszcze możliwość zbudowania układu do pomiarów M-kanałowych zawierającego wspólny woltomierz cyfrowy i indywidualne jednostki arytmetyczno - logiczne. Nie przedstawiono go na rys. 4.4. Autor nie spotkał bowiem opisu stosowania w praktyce tego typu struktury. Pewnie dlatego, że ma ona nie tylko wadę układu w pełni równoległego (rys. 4.4 b) - jest droga, ale także ma wadę układu z rys. 4.4 c) - jest wrażliwa na zakłócenia. Stosowanie układu ze wspólnym woltomierzem i zwielokrotnioną jednostką arytmetyczno - logiczną można by chyba uznać za celowe jedynie wtedy, gdyby chodziło o skrócenie odstępu próbkowania T_s w przypadku, gdy czas obliczeń T_{obl} przekracza znacznie czas pomiaru T_{pom}, a liczba kanałów M jest niezbyt duża.

Z wykonanych analiz wynika, że w przypadku budowy klasycznego (tzn. z uśrednianiem w dzidzinie liczb) systemu do pomiarów wielokanałowych, zastosowanie elementu wspólnego - obsługującego wszystkie kanały-powoduje nie tylko zmniejszenie kosztu całego układu, lecz także powoduje:

- konieczność pracy tego elementu wspólnego w systemie podziału czasu, a w związku z tym - konieczność stosowania multiplekserów,

- wydłużenie się odstępu próbkowania kanału T_s proporcjonalnie do liczby M kanałów oraz czasu $T_{o\,kan}$ obsługi jednego kanału (4.37).

Należy tu przypomnieć, że zastosowanie stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" w systemie pomiarów wielokanałowych umożliwia "uwspólnienie" wzorca bez potrzeby jego pracy z podziałem czasu (patrz rys. 4.3 c). Układ realizujący komparację stochastyczną charakteryzuje się dzięki temu niewielką wartością czasu T_s i - co ważniejsze - brakiem wzrostu tego czasu wraz z liczbą M obsługiwanych kanałów.
Jest to cecha ważna, bowiem w przypadku gdy zbiory $\tilde{\tilde{U}}_1, \tilde{\tilde{U}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{U}}_M$ napięć mierzonych składają się z realizacji chwilowych sygnałów napięciowych, odstęp próbkowania T_s określa częstotliwość maksymalną f_{max} w ich widmie. Ponadto komparacja stochastyczna typu "większy - mniejszy" pozwala uniknąć stosowania układu arytmetycznego (JAL). Można dzięki temu zaoszczędzić czas mikroprocesora - o ile stosuje się go w systemie - bądź w ogóle wyeliminować mikroprocesor.

Aby unaocznić zalety komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" przy różnych liczbach kanałów M, zestawiono (tabela 4.1) odstępy próbkowania T_s i odpowiadające im częstotliwości maksymalne f_{max} w widmie uśrednianego sygnału ($f_{max} = \frac{1}{2\,T_s}$) w przypadku układu wg rys. 4.3 c) realizującego omawianą formę komparacji oraz w przypadku układu uśredniającego w dziedzinie liczb wg rys. 4.4 d). Wszystkie dane dotyczą pomiaru wartości średniej. Założono, że zbiory $\tilde{\tilde{U}}_1, \tilde{\tilde{U}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{U}}_M$ są na tyle liczne, iż podczas komparacji typu "większy - mniejszy" wystarczy porównać każde z napięć z tych zbiorów jeden raz z napięciem wzorcowym, a składowa losowa Δ_1 błędu komparacji będzie wystarczająco niewielka.

Tabela 4.1. Porównanie odstępów próbkowania T_s oraz dopuszczalnej częstotliwości maksymalnej f_{max} w widmie sygnałów uśrednianych w przypadku pomiaru wartości średniej w M kanałach za pomocą układu realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" oraz układu uśredniającego w dziedzinie liczb

Sposób pomiaru / liczba kanałów M	pomiar z uśrednianiem w dziedzinie liczb w układzie wg rys. 4.4 d)	pomiar w układzie realizującym stochastyczną komparację przeglądową wg rys. 4.3 c)
1	$T_s = T_{akw}^{liczb} = 30 \div 50$ ns x) $f_{max} < 10$ MHz	$T_s = T_{akw}^{stoch} = T_t = 50$ ns xxx) $f_{max} < 10$ MHz
4	$T_s = 4 \cdot 25$ ns $= 100$ ns xx) $f_{max} < 5$ MHz	
16	$T_s = 16 \cdot 25$ ns $= 400$ ns $f_{max} < 1{,}25$ MHz	
64	$T_s = 64 \cdot 25$ ns $= 1{,}6$ µs $f_{max} < 312{,}5$ kHz	

x) przy jednym kanale multipleksery nie są potrzebne porównaj (4.15), podrozdział IV/3,

xx) porównaj (4.37) i (4.39) w tym podrozdziale,

xxx) porównaj (4.4), podrozdział IV/2, a także podrozdział IV/3.

Przypisy

[1] Orzekanie o rozbieżności między rozkładem założonym, a rozkładem prawdopodobieństwa w ciągu napięć wytwarzanych przez rzeczywisty wzorzec losowy, odbywa się przy użyciu aparatu statystyki matematycznej. W każdym przypadku rozbieżności między rozkładami: rzeczywistym i założonym, istnieje minimalna liczba napięć, które trzeba zbadać, by móc stwierdzić rozbieżność rozkładów. Zagadnienie to przedyskutowano obszernie w pracy:
Juszkiewicz J., Generacja sygnału losowego o zadanej jednowymiarowej gęstości prawdopodobieństwa. Praca doktorska. Instytut Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, Komunikat nr 149, Wrocław 1975, s. 47 - 48, a zwłaszcza rozdział V.

[2] Por. np. Karkowski Z., Miernictwo elektroniczne. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1981, s. 75 - 77.
Jellonek A., Karkowski Z., Miernictwo radiotechniczne. WNT, Warszawa 1972, s. 334 - 336.
Czasy konwersji współcześnie produkowanych przetworników a/c typu kompensacyjnego wynoszą od ok. 1 μs do 50 μs. Np. 8-bitowy, przetwornik kompensacyjny typu MAH 0801 firmy Analog Devices charakteryzuje się czasem konwersji 0,75 μs. Przetwornik 12-bitowy typu MAS-1202 tej samej firmy ma czas konwersji 2 μs, zaś przetwornik 16-bitowy typu ADC 1140 - 35 μs.
Por. [Katalog firmy Analog Devices:] Data-Acquisition Databook 1982, vol. I: Integrated Circuits, rozdział 11.

[3] Por. np. Nadachowski M., Kulka Z., Analogowe układy scalone. WKiŁ, Warszawa 1979, s. 342.

[4] Por. np. [Katalog firmy Harris Semiconductor Products Division:] Analog Linear and Data Acquisition Products, Volume 2, Harris Corporation, 1980, s. 2 - 91 do 2 - 107.
[Katalog firmy Thomson - CSF Division Semiconducteurs:]
Integrated Circuits - Short form catalog, 1980, s. 34, 35.
[Katalog firmy Philips:]
Data handbook: Electronic components and materials.
Series: Semiconductors and integrated circuits.
Part 5a: Professional analogue IC's, November 1976.
[Katalog:]
Spoerle Electronic, 1981/82, s. 362.
Nadachowski M., Kulka Z., op. cit., s. 346 - 348.

[5] Np. komparator typu Am 685 firmy Advanced Micro Devices charakteryzuje się czasem odpowiedzi równym 6 ns. Podobny czas odpowiedzi ma układ typu MC 1650 firmy Motorola.
Por. Nadachowski M., Kulka Z., op. cit., s. 346 - 348.
[Katalog firmy Motorola:]
The Semiconductor Data Library. Volume 4:
MECL Integrated Circuits, Series A., Motorola Semiconductor Products Inc., 1974, s. 2 - 5, 4 - 10.

[6] Wielobitowe liczniki ECL liczą - ściśle biorąc - z częstotliwościami maksymalnymi ok. 100 - 500 MHz. Uzupełnienie licznika tzw. prescalerem, czyli 1 ÷ 4 - bitowym licznikiem - dzielnikiem częstotliwości o maksymalnej częstotliwości liczenia ok. 1 GHz, umożliwia rozszerzenie zakresu częstotliwości zliczania układu aż do maksymalnej częstotliwości pracy prescalera. Por. np. układy MC 1654, MC 1678, MC 1690, MC 1696 firmy Motorola:

[Katalog firmy Motorola:] The Semiconductor Data Library ... . Op. cit., s. 2 - 5, 2 - 8, 2 - 9. Zobacz także:

[Katalog firmy Hewlett Packard:]

Measurement / Computation. Electronic Instruments and Systems, 1982, s. 315 - 347.

[Ulotka informacyjna firmy Fluke:]

1953A Programmable Universal Counter / Timer, 1975.

[Katalog firmy Marconi:]

Marconi instruments. Catalogue 1981-82, s. 167.

[Katalog:] Pro Electron Datenbuch. Integrierte Schaltungen (digital). Franzis - Verlag, München, 1978/79, s. 94 - 95.

[7] W przypadku takim konieczne jest na ogół zsynchronizowanie czasu uśredniania z okresem zmian składowej periodycznej decydującej o czasie trwania uśredniania.

[8] Por. np. Jellonek A., Karkowski Z., op. cit., s. 281. Mirskij G.Ja., Radioèlektronnye izmerenija. Énergija, Moskva 1975, s. 261.

[9] Por. np. Beauchamp K.G., Przetwarzanie sygnałów metodami analogowymi i cyfrowymi. WNT, Warszawa 1978, s. 33 - 35.

[10] Por. Pieńkos J., Turczyński J., Współczesne cyfrowe układy scalone. Kierunki rozwojowe. "Elektronizacja" 1981, z. 12, s. 17 - 25.

[11] Np. pamięć dyskowa serii XT - 2000 firmy Maxtor Corp. charakteryzuje się pojemnością 190 Mbajtów i średnim czasem dostępu 30 ms.

Por. [Doniesienie handlowe firmy Maxtor Corp. (California):] $5\frac{1}{4}$ - in. unit hold 190 megabytes. "Electronics", Vol. 56, No. 9, May 5, 1983, s. 186.

[12] Por. np. Badźmirowski K., Pieńkos J., Zagadnienia współpracy przetworników C/A i A/C z systemami mikroprocesorowymi [w:] Systemy mikroprocesorowe, z. 6, Przemysłowy Instytut Elektroniki, Warszawa 1981, s. 32, 37, 38.

[13] Przetwornik 8-bitowy typu MAH 0801 firmy Analog Devices charakteryzuje się czasem konwersji 0,75 µs. Inne przetworniki tej samej firmy mają następujące czasy konwersji:
MAH 1001 (10-bitowy) - 1 µs,
MAS 1202 (12-bitowy) - 2 µs,
ADC 1130 (14-bitowy) - 12 µs.
Por. [Katalog firmy Analog Devices:]
Data - Acquisition Databook ... . Op. cit., rozdział 11. Produkuje się także układy scalone będące systemami akwizycji danych. Ważnym elementem takiego układu jest przetwornik a/c. Przetworniki te zwykle są jednak nieco wolniejsze. Por. tamże, rozdział 16. Zobacz także: Kazuo Kato, 10-bit a-a conversion chip manages most data - acquisition tasks. "Electronics", Vol. 56, No 9, May 5, 1983, s. 130 - 133.

[14] Por. np. Mroziński Z., Elementy systemu mikrokomputerowego serii 8080. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1981, s. 28 - 66.
Souček B., Microprocessors and Microcomputers. A Wiley - interscience publication.
John Wiley and Sons, New York - London - Sydney - Toronto, (b.r) rozdział 7.

[15] Por. np. Pieńkos J., Turczyński J., Współczesne cyfrowe układy scalone ... . Op. cit., s. 28.
Badźmirowski K., Pieńkos J., Piestrzyński W., Cyfrowe układy

MOS - LSI. WKiŁ, Warszawa 1979, s. 260.

[Instrukcja obsługi:]

MCS - 85 user's manual. Intel Corporation, 1978, s. 5 - 10.

[16] Por. np. Sahner G., Wstęp do miernictwa cyfrowego. WKiŁ, Warszawa 1982, s. 133 - 134.

[Doniesienie handlowe firmy Siemens A.G:] A-d converter has 500 $\frac{mV}{ns}$ slew rate. "Electronics", Vol. 55, No 7, April 7, 1983, s. 75.

Muramatru J., Olsen R.K., 6-bit a-d chip steps up the pace of signal processing. "Electronic Design", September 16, 1982, Vol. 30, No. 19, s. 89 - 97.

[17] Czas trwania dodawania liczb 64-bitowych za pomocą sumatora scalonego typu 10 181 wykonanego w technice ECL wynosi ok. 15 ns. Por. np. Pieńkos J., Turczyński J., Współczesne cyfrowe układy scalone ... . Op. cit., s. 12. Czas trwania całej operacji dodawania jest jednak nieco dłuższy, gdyż wynik sumowania musi zostać zapamiętany w odpowiednim rejestrze.

[18] Komparator cyfrowy typu MC 10166 firmy Motorola serii MECL 10 000 charakteryzuje się czasem opóźnienia ok. 6 ns. Multiplekser typu MC 10173 tej samej firmy i tej samej serii daje opóźnienie ok. 3 ns. Zobacz:

[Katalog firmy Motorola:] The Semiconductor Data Library ... . Op. cit., s. 2 - 12, 3 - 150, 3 - 165.

[19] Np. scalony multiplekser kombinacyjny typu MPY - 16 AJ firmy TRW umożliwia pomnożenie dwóch liczb szesnastobitowych w czasie 160 ns. Por.

Pieńkos J., Turczynski J., Współczesne cyfrowe układy scalone... Op. cit., s. 13 - 17.

[20] Hejn K., Zastosowanie metody Monte Carlo do teorii pewnej klasy przetworników cyfrowo-analogowych. Praca doktorska. Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1975, rozdział 3.4.

[21] Nadachowski M., Kulka Z., op. cit., s. 535, 540, 549 - - 550.

[22] Badźmirowski K., Pieńkos J., op. cit., s. 41
Badźmirowski K., Pieńkos J., Piestrzyński W., Systemy mikroprocesorowe. WNT, Warszawa 1981, s. 290 - 296.

[23] W przypadku takiego rozwiązania, w strukturze układu pomiarowego występuje tylko multiplekser analogowy. Z tego powodu strukturę taką nazywa się czasem układem z multiplekserem analogowym. Por.
Szumielewicz B., Słomski B., Styburski W., Pomiary elektroniczne w technice. WNT, Warszawa 1982, s. 272 - 275.

[24] W przypadku użycia mikrokomputera, operacje arytmetyczne na wartościach napięć uśrednianych wykonuje się przy użyciu jednostki arytmetyczno - logicznej (JAL) mikroprocesora. Rejestrami sum są wtedy komórki pamięci operacyjnej. Multiplekser cyfrowy pomiędzy JAL, a rejestrami sum realizuje się wtedy w sposób programowy. W strukturze układu z rys. 4.4 d) występuje wtedy tylko multiplekser cyfrowy. Stąd też układ ten bywa nazywany systemem z multiplekserem cyfrowym. Por. tamże, s. 272 - - 275.

[25] Por. np. Sahner G., op. cit., s. 133 - 134.
Muramatsu J., Olsen R.K., op. cit., s. 89 - 97.

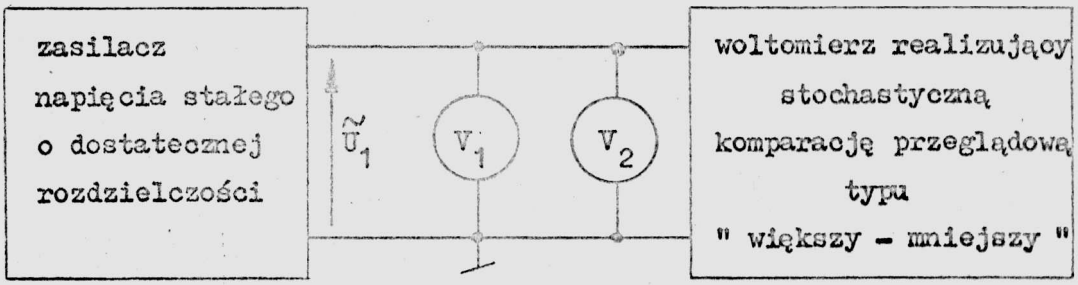
Rozdział V

Weryfikacja doświadczalna wybranych wyników rozważań teoretycznych

1. Porównanie wskazań woltomierza realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" ze wskazaniami dotychczas używanych przyrządów

Najbardziej elementarnym wynikiem rozważań zawartych w podrozdziale II/1 jest stwierdzenie możliwości wykorzystania układu realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" (rys. 2.1) do pomiaru napięcia stałego. Wniosek ten wynika ze wzoru (2.17), że wartość oczekiwana wyniku pomiaru jest równa wartości należnej mierzonemu napięciu; potwierdzającego również rozważania z rozdziału III dotyczące możliwości uwzględnienia podstawowych defektów wzorca losowego oraz układu porównania napięć w postaci składowych błędu komparacji (porównaj wzór (3.139)).

Celem eksperymentu opisanego w tym podrozdziale jest praktyczne sprawdzenie możliwości wykorzystania układu realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" do pomiaru napięcia stałego. Eksperyment polegał na porównaniu wskazań woltomierza realizującego badaną formę komparacji ze wskazaniami typowych, dotychczas używanych przyrządów: woltomierza magnetoelektrycznego i cyfrowego (rys. 5.1).



Rys. 5.1. Układ do porównywania wskazań woltomierza realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" ze wskazaniami woltomierzy: magnetoelektrycznego i cyfrowego (opis w tekście).

A oto ważniejsze parametry przyrządów z rys. 5.1:

- zasilacz napięcia stałego: rozdzielczość ustawienia napięcia lepsza od 10^{-4}, stałość napięcia ok. $5 \cdot 10^{-4}$/godzinę (zasilacz wykonano w Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej , typ ZD-2);
- V_1: woltomierz magnetoelektryczny kl. 0,2 (produkcja: Zakłady ERA, typ PM-2, nr 1107001/76), w pracy korzystano z zakresów: 0,15 V; 0,3 V; 0,75 V; 1,5 V; 3 V;
- V_2: woltomierz cyfrowy o błędzie podstawowym przy temperaturze $23 \pm 1^{\circ}C$ równym $\pm$ 0,05 % wartości mierzonej $\pm$ 0,01 % pełnej skali. Dodatkowy błąd wskazań przy zmianie temperatury otoczenia od $23^{\circ}C$ do $0^{\circ}C$ i do $50^{\circ}C$: mniejszy od błędu podstawowego na każde $10^{\circ}C$ zmiany temperatury. W pracy wykorzystano zakresy: 100 mV; 1 V; 10 V. (producent: Zjednoczone Zakłady Elektronicznej Aparatury Pomiarowej MERATRONIK, typ V 541, nr 5761/80) [1].

- Woltomierz realizujący stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy": skonstruowano go w Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, typ KS-1; bliższe dane - patrz dodatek 4.

Eksperyment polegał na tym, że napięcie ustawione na zaciskach zasilacza mierzono wielokrotnie (na ogół liczba powtórzeń pomiaru wynosiła m = 200) trzema wyżej wymienionymi woltomierzami. Wyniki uzyskiwane za pomocą woltomierzy magnetoelektrycznego PM-2 i cyfrowego V 541 były w zasadzie powtarzalne. Wyniki zaś uzyskiwane za pomocą układu KS-1 - jako realizacje zmiennej losowej - wykazywały zróżnicowanie. Chodziło o sprawdzenie, czy każdy, pojedynczy wynik uzyskany przyrządem KS-1 zaopatrzony w informację o błędzie pomiaru nie jest sprzeczny [2] z wynikami uzyskanymi za pomocą typowych i powszechnie używanych woltomierzy. Aby to stwierdzić, ze zbioru np. dwustu liczb - wyników uzyskanych za pomocą układu KS-1 wybrano największą i najmniejszą. Obie liczby zaopatrzono w informację o odpowiadającym im błędzie pomiaru. Jeżeli tak uzyskane wyniki skrajne nie były sprzeczne z wynikami uzyskanymi za pomocą woltomierzy: PM-2 i V 541 oznacza to, że niesprzeczne ze wskazaniami powyższych woltomierzy były także wszystkie pozostałe wskazania uzyskane za pomocą układu KS-1 - próbę wskazań tego układu uznawano za udaną.

Przyjęto następujący sposób określania wyników pomiaru (niedokładność charakteryzowano za pomocą błędu bezwzględnego):

a) W przypadku woltomierza magnetoelektrycznego PM-2:

$$\text{wynik} = \text{wskazanie} \pm \text{klasa} \cdot \text{zakres} . \qquad (5.1)$$

b) W przypadku najdokładniejszego z trzech użytych mierników -

woltomierza cyfrowego V 541:

wynik = wskazanie ± 2(0,05 % wartości mierzonej + 0,01%zakresu) . (5.2)

Czynnik "2" w powyższej zależności wynika z faktu, że temperatura otoczenia w trakcie pomiarów nie była znana. Mierzący może jedynie przypuszczać, że zawierała się ona w granicach: $(23 \pm 5)^{\circ}C$.

Oznacza to konieczność uwzględnienia we wskazaniach woltomierza błędu dodatkowego wynikającego z odchylenia temperatury otoczenia od $25^{\circ}C$ o więcej niż jeden stopień.[1]

c) W przypadku układu KS-1 realizującego procedurę stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy", pełny wynik pomiaru (tzn. wraz z informacją o prawdopodobnym błędzie) obliczano następująco:

$$\text{wynik} = R \pm \Delta_p \qquad (5.3)$$

gdzie: R - rezultat (wskazanie) obliczony wg wzoru (2.5) na podstawie pojedynczej procedury komparacyjnej

Δ_p - błąd popełniany podczas pomiaru przyrządem KS-1.

Na błąd Δ_p pomiaru woltomierzem KS-1 realizującym komparację stochastyczną składa się nie tylko błąd komparacji Δ_k (3.139), którego elementy obliczono w rozdziałach II i III, ale także błędy nie związane bezpośrednio z procedurą komparacyjną. Źródłem niedokładności nie uwzględnionym w błędzie komparacji są np. wejściowe napięcia niezrównoważenia, a także nieliniowość wzmacniaczy - separatorów (porównaj dodatek 4, rys. D4-1). Założono jednak, że wszystkie składowe błędu pomiaru nie uwzględnione w błędzie komparacji (3.139) są w badanym układzie pomijalnie

małe. Założono także, iż składniki Δ_s^z i Δ_s^h błędu komparacji (3.139) są do pominięcia względem składowych Δ_1 i Δ_s^w. Ostatecznie więc błąd pomiaru Δ_p obliczano wg wzoru:

$$\Delta_p = \Delta_1 + \Delta_s^w . \tag{5.4}$$

Składową losową Δ_1 określano wg równania (patrz (2.18), (2.19), (2.23)):

$$\Delta_1 = \frac{3\, U_{w\,max}}{\sqrt{L}} \sqrt{p(1-p)} , \tag{5.5}$$

gdzie: prawdopodobieństwo p sukcesu w dowolnym takcie procedury komparacyjnej obliczano wg zależności (3.70).

Składową systematyczną Δ_s^w spowodowaną w rozważanym przypadku głównie ziarnistością wzorca, obliczano wykorzystując związek (3.78). Liczba n stanów napięcia odtwarzanych przez wzorzec występująca w związku (3.78) miała wartość (patrz dodatek 4):

n = 256.

Wyniki uzyskane za pomocą woltomierza KS-1 zawiera tabela 5.1. W tabeli 5.2 wyniki te porównano ze wskazaniami przyrządów: magnetoelektrycznego i cyfrowego. Jak widać, mimo iż błąd Δ_p zaokrąglano w kierunku wartości większych pozostawiając dwa miejsca znaczące, przedziały ufności mierzonych napięć uzyskane wszystkimi trzema woltomierzami mają części wspólne. Więcej: przedziały ufności wyników otrzymanych za pomocą woltomierza KS-1 zawierają środek przedziału ufności wskazań przyrządu V 541. Ponadto odchylenia wyników R_{min} i R_{max}, uzyskanych przyrządem KS-1, in plus oraz in minus względem środków przedziałów

Tabela 5.1. Wyniki skrajne R_{min}, R_{max} otrzymane za pomocą woltomierza KS-1 realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" podczas pomiaru napięcia stałego, wraz z odpowiadającymi im błędami pomiaru.
$U_{w\ max}$ = 2,000±0,004 V

Lp.	napięcie mierzone U_1 (ustalone wg woltomierza V 541)	L	m	L_{2min}	L_{2max}	p	Δ_1	Δ_s^w	$R_{min} \pm \Delta_p$	$R_{max} \pm \Delta_p$
-	V	szt.	szt.	szt.	szt.	-	V	V	V	V
1	0,4000 ± 0,0006	1000	200	174	235	0,199	0,0758		0,348 ± 0,084 xx)	0,470 ± 0,084
2	0,8000 ± 0,0010	1000	200	364	438	0,398	0,0929		0,73 ± 0,11	0,88 ± 0,11
3	1,0000 ± 0,0012	1000	200	471	529	0,500	0,0949		0,94 ± 0,11	1,06 ± 0,11
4	1,200 ± 0,004 x)	1000	200	560	644	0,598	0,0930	0,008	1,12 ± 0,11	1,29 ± 0,11
5	1,600 ± 0,004	1000	200	775	842	0,797	0,0763		1,550 ± 0,085	1,684 ± 0,08
6	1,800 ± 0,004	1000	200	869	926	0,898	0,0573		1,738 ± 0,066	1,852 ± 0,06
7	1,0000 ± 0,0012 x)	100	500	36	65	0,500	0,300		0,72 ± 0,31	1,30 ± 0,31
8	0,900 ± 0,003 xxx)	20000	200	8879	9059	0,449	0,0211		0,888 ± 0,029	0,906 ± 0,02

x) Zmiana zakresu woltomierza.
xx) Wartość błędu Δ_p zaokrąglono w kierunku wartości większych pozostawiając dwa miejsca znaczące.
xxx) Omyłkowo użyto woltomierza na zakresie 10 V.

Tabela 5.2.
Porównanie wyników otrzymanych podczas pomiaru napięcia stałego za pomocą trzech woltomierzy: magnetoelektrycznego, cyfrowego i realizującego stochastyczną komparację pomiarową

Lp.	woltomierz magnetoelektryczny typu PM -2	woltomierz cyfrowy typu V 541	woltomierz typu KS-1 realizujący stochastyczną komparację pomiarową (patrz tabela 5.1.)	
			$R_{min} \pm \Delta_p$	$R_{max} \pm \Delta_p$
	V	V	V	V
1	0,400 ± 0,002	0,4000 ± 0,0006 x)	0,348 ± 0,084	0,470 ± 0,084
2	0,800 ± 0,003 x)	0,8000 ± 0,0010	0,73 ± 0,11	0,88 ± 0,11
3	1,000 ± 0,003	1,0000 ± 0,0012	0,94 ± 0,11	1,06 ± 0,11
4	1,200 ± 0,003	1,200 ± 0,004 x)	1,12 ± 0,11	1,29 ± 0,11
5	1,600 ± 0,006 x)	1,600 ± 0,004	1,550 ± 0,085	1,684 ± 0,085
6	1,800 ± 0,006	1,800 ± 0,004	1,738 ± 0,066	1,852 ± 0,066
7	1,000 ± 0,003 x)	1,0000 ± 0,0012 x)	0,72 ± 0,31	1,30 ± 0,31
8	0,900 ± 0,003	0,900 ± 0,003	0,888 ± 0,029	0,906 ± 0,029

x) Zmiana zakresu woltomierza.

ufności otrzymanych za pomocą woltomierza V 541, są na ogół takie same i zbliżone do wartości błędu Δ_p. Oznacza to, że obliczanie błędu pomiaru układu realizującego komparację stochastyczną (wzór (5.4)) jest poprawne, a nadto ani zbyt optymistyczne ani zbyt pesymistyczne.

Wartości błędów pomiaru uzyskane za pomocą woltomierza realizującego komparację stochastyczną są znacznie większe niż w przypadku pozostałych dwóch woltomierzy (patrz tabela 5.2). Wynika to z faktu wykonywania w pojedynczej procedurze niewielkiej - jak na tę formę komparacji - liczby L porównań (zobacz tabela 5.1). Wykonanie odpowiednio większej liczby porównań spowodowałoby zmniejszenie wartości błędu Δ_p.

2. Zbadanie wpływu wartości U_1 napięcia mierzonego z jednoelementowego zbioru $\tilde{\tilde{U}}$ oraz liczby L porównań wykonanych w ramach komparacji, na wariancję $D^2(R)$ wyniku pomiaru

Jak wynika z rozważań zawartych w poprzednich podrozdziałach, podczas pomiaru wartości U_1 pojedynczej realizacji napięcia ważnym składnikiem błędu komparacji jest jego składowa losowa Δ_1.

Wartość błędu losowego Δ_1 zależy bezpośrednio - patrz zależność definicyjna (2.23) - od wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru. Zgodnie ze wzorami (2.18), (2.19) i (2.12)

$$D^2(R) = \frac{U^2_{w\ max}}{L} \cdot p(1 - p) , \qquad (5.6)$$

gdzie: p - prawdopodobieństwo sukcesu w dowolnym takcie procedury komparacyjnej.

Obecność po prawej stronie wzoru (5.6) prawdopodobieństwa p sukcesu wyraża w istocie zależność wariancji wyniku pomiaru od wartości U_1 mierzonego napięcia (porównaj wzory (2.11), (3.70)). Jeżeli założyć, że wartość $U_{w\ max}$ największego napięcia odtwarzanego przez wzorzec jest stała i znana, to wariancja $D^2(R)$ wyniku pomiaru jest funkcją dwóch zmiennych: liczby L porównań wykonanych w ramach komparacji oraz wartości U_1 mierzonego napięcia:

$$D^2(R) = f(L, U_1) \qquad (5.7)$$

Zależność tę, analizowaną w poprzednich częściach tej pracy

wyłącznie teoretycznie, postanowiono zbadać doświadczalnie.

W eksperymencie wykorzystano woltomierz KS-1 realizujący stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy". Zbiór $\tilde{\tilde{U}}_w$ napięć odtwarzanych przez wzorzec losowy tego przyrządu jest dyskretny i ma postać (3.61) (zobacz też dodatek 4). W związku z tym, podczas obliczania prawdopodobieństwa sukcesu w każdym takcie procedury obowiązuje wzór (3.70). Tak więc zależność (5.6) przybiera postać (3.72):

$$D^2(R) = \frac{U^2_{w\,max}}{L} \cdot \frac{\left[\frac{U_1}{U_{w\,max}}(n-1)\right] + 1}{n} \left\{ 1 - \frac{\left[\frac{U_1}{U_{w\,max}}(n-1)\right] + 1}{n} \right\} \qquad (3.72)$$

gdzie: n - liczba stanów napięcia odtwarzanych przez wzorzec,
symbol $[\cdot]$ - oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą od umieszczonej w nawiasie kwadratowym,
$( ), \{ }$ - zwykłe nawiasy.

Weryfikację doświadczalną powyższej zależności traktowanej jako funkcja dwóch zmiennych (5.7) wykonano w dwóch niezależnych eksperymentach. W każdym z nich badano zależność wariancji wyniku tylko od jednej zmiennej, drugą przyjmując jako parametr.

Wzór (3.72) traktowany jako zależność $D^2(R) = f(U_1)\Big|_{L = par}$ przedstawiono na rys. 3.4. Funkcja $D^2(R) = f(L)\Big|_{U_1 = par}$, jak widać ze wzoru (3.72), postać hiperboli.

Koncepcja eksperymentu, w którym chodziło o sprawdzenie obu powyższych zależności uzyskanych na drodze teoretycznej, była następująca:

Badania wykonano w układzie jak na rys. 5.1. Wielokrotnie powta-

rzając procedurę komparacyjną przy ustalonych wartościach U_1 i L uzyskiwano różne stany końcowe licznika L_2, czyli różne wyniki (2.5). Wyniki te traktowano jako realizacje pewnej zmiennej losowej. Chodziło o oszacowanie wariancji tej zmiennej losowej. Posłużono się w tym celu metodą badań statystycznych. Wielokrotne (m-krotne) powtórzenie procedury komparacyjnej odpowiadało tu pobraniu próby m-elementowej z populacji generalnej. Założono, że badany układ KS-1 gwarantuje, iż jest to próba prosta, tzn. że wyniki (2.5): R_1, R_2, ..., R_m uzyskiwane w kolejnych procedurach są niezależne (patrz dodatek 4).

Jako estymatora wariancji użyto statystyki:

$$\hat{S}_R^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^{m} (R_k - \bar{R})^2 , \qquad (5.8)$$

gdzie: $\hat{S}_R^2$ - wariancja z próby wyników pomiaru,

R_k, $k=1,\ldots,m$ - wyniki uzyskane w kolejnych komparacjach,

$\bar{R}$ - średnia z próby wyników pomiaru:

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} R_k . \qquad (5.9)$$

Statystyka $\hat{S}_R^2$ jest nieobciążonym i zgodnym estymatorem wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru [3]. Statystyka (5.8) jest jednak także zmienną losową. Ocena punktowa (5.8) różni się więc na ogół od rzeczywistej wartości estymowanej wariancji wyniku. Przy jej użyciu nie można więc orzec czy oszacowania wartości wariancji, uzyskane na podstawie pomiarów, różnią się w sposób istotny od wartości $D^2(R)$ obliczonych na podstawie wzoru (3.72).

Konieczne tu jest dokonanie - w oparciu o pomiary - estymacji

przedziałowej parametru $D^2(R)$. Wynika stąd konieczność przyjęcia poziomu ufności γ_u oraz potrzebnej liczności próby m. Problemowi wpływu wartości liczb γ_u oraz m na szerokość przedziałów ufności przy danej ocenie punktowej $\hat{s}^2_R$ poświęcono dodatek 5.

Najpierw zmierzono zależność $\hat{s}^2_R = f(L)\Big|_{U_1 = par}$. Wartość U_1 napięcia mierzonego przyjęto (arbitralnie) równą 1 V. Ponieważ podczas omawianego eksperymentu wartość największej realizacji wzorcowej wynosiła $U_{w\,max} = 2{,}176 \pm 0{,}003$ V, stosunek $\frac{U_1}{U_{w\,max}}$ miał wartość ok. 0,460.

Uwaga: Wartość $U_{w\,max}$ zależy m.in. od relacji wzmocnień wzmacniaczy - separatorów (patrz rys. D4-1 w dodatku 4). W następnych doświadczeniach wzmocnienia ustawiono tak, by - w miarę możliwości - $U_{w\,max} = 2$ V (wartość wygodniejsza do obliczeń).

Przy każdej wartości L procedurę komparacyjną powtórzono m = 50 razy.

Ponieważ wynikiem bezpośrednich odczytów z woltomierza KS-1 były stany końcowe: L_{2k} $(k = 1, 2, \ldots, m)$ licznika L_2, estymacji punktowej wariancji wyniku pomiaru nie dokonywano bezpośrednio wg wzorów (5.8), (5.9). W praktyce łatwiej było bowiem najpierw obliczać wariancję z próby stanów końcowych licznika L_2, a następnie określić na jej podstawie poszukiwaną wariancję z próby wyników pomiaru. Uniknięto w ten sposób m-krotnego obliczania wyniku pomiaru. Korzystano z następujących wzorów:

$$\hat{s}^2_{L_2} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^{m} (L_{2k} - \bar{L}_2)^2 \quad , \tag{5.10}$$

gdzie: $\hat{S}^2_{L_2}$ - wariancja z próby stanów końcowych licznika L_2,

L_{2k}, k = 1, 2, ..., m -stany końcowe licznika L_2 uzyskane w kolejnych komparacjach,

$\bar{L}_2$ - średnia z próby stanów końcowych licznika L_2:

$$\bar{L}_2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} L_{2k} \,. \tag{5.11}$$

Związek między wariancjami z próby: stanów końcowych licznika L_2 oraz wyników pomiaru jest następujący (porównaj (5.8), (2.5), (5.10)):

$$\hat{S}^2_R = \frac{U^2_{w\ max}}{L^2} \cdot \hat{S}^2_{L_2} \,. \tag{5.12}$$

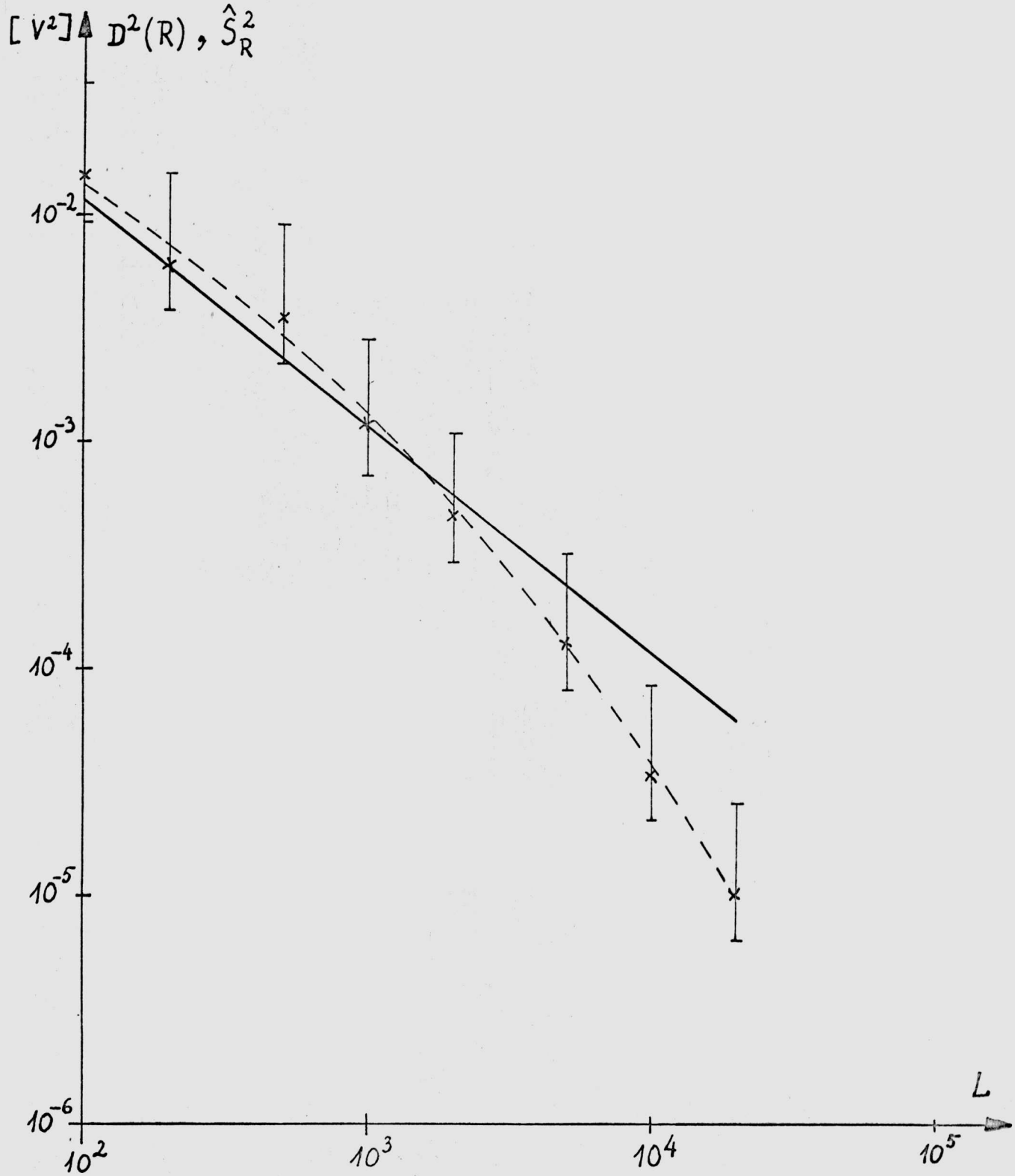
Podczas wykonywania niezbędnych, a uciążliwych obliczeń wykorzystano kalkulator TI-57 firmy Texas Instruments. Estymacji przedziałowej wariancji wyniku dokonano wykorzystując związek (D5-12) wyprowadzony w dodatku 5. Wartości $D^2(R)$ wariancji wyniku wynikające z modelu matematycznego, obliczono na podstawie wzoru (3.72). Uzyskane wyniki zebrano w tabeli 5.3. Zobrazowano je także na rys. 5.2. Ze względu na duży zakres zmian wielkości na obu osiach wykresu (4 rzędy), zastosowano skale logarytmiczne.

Jak widać na rysunku, przy stosunkowo małych wartościach L (L < 2000) występuje dobra zgodność wartości wariancji uzyskanych z modelu i z pomiarów. W zakresie dużych wartości L (rzędu 10^4) pojawiają się rozbieżności, których nie można uzasadnić niedokładnością estymacji.

Badanie zależności $\hat{S}^2_R = f(U_1)\Big|_{L = par}$ postanowiono wykonać

Tabela 5.3. Zależność wariancji wyniku pomiaru od liczby L porównań wykonanych w ramach komparacji:
$D^2(R)$ - wartości wariancji obliczone na podstawie modelu matematycznego,
$\hat{S}^2_R$ - wartości wariancji z próby estymowane na podstawie eksperymentu.
$U_{w\ max}$ = 2,176 ± 0,005 V ; U_1 = 1,000 ± 0,002 V = parametr.

p.	L	p	$D^2(R)$ wg wzoru (3.72)	estymacja statystyczna wariancji wyniku pomiaru: $\hat{S}^2_{L_2}$ wg (5.10)	ocena punktowa $\hat{S}^2_R$ wg (5.12)	ocena przedziałowa m= 50, γ_u = 0,997 wg (D5 - 12)	Uwagi
	szt.	-	V^2	-	V^2	V^2	
1	100	0,461	$1{,}18 \cdot 10^{-2}$	31,8	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$	$9{,}3 \cdot 10^{-3}$; $3{,}7 \cdot 10^{-2}$	$\bar{L}_2 = 49{,}96$
2	200		$5{,}88 \cdot 10^{-3}$	50,9	$6{,}0 \cdot 10^{-3}$	$3{,}7 \cdot 10^{-3}$; $1{,}5 \cdot 10^{-2}$	$\bar{L}_2 = 100{,}3$
3	500		$2{,}35 \cdot 10^{-3}$	188	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$	$2{,}2 \cdot 10^{-3}$; $8{,}8 \cdot 10^{-3}$	$\bar{L}_2 = 252{,}9$
4	1000		$1{,}18 \cdot 10^{-3}$	242	$1{,}2 \cdot 10^{-3}$	$7{,}0 \cdot 10^{-4}$; $2{,}8 \cdot 10^{-3}$	$\bar{L}_2 = 500{,}8$
5	2000		$5{,}88 \cdot 10^{-4}$	393	$4{,}7 \cdot 10^{-4}$	$2{,}9 \cdot 10^{-4}$; $1{,}1 \cdot 10^{-3}$	$\bar{L}_2 = 1001$
6	5000		$2{,}35 \cdot 10^{-4}$	673	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$	$7{,}8 \cdot 10^{-5}$; $3{,}1 \cdot 10^{-4}$	$\bar{L}_2 = 2506$
7	10000		$1{,}18 \cdot 10^{-4}$	722	$3{,}4 \cdot 10^{-5}$	$2{,}1 \cdot 10^{-5}$; $8{,}4 \cdot 10^{-5}$	$\bar{L}_2 = 5004$
8	20000		$5{,}88 \cdot 10^{-5}$	855	$1{,}0 \cdot 10^{-5}$	$6{,}2 \cdot 10^{-6}$; $2{,}5 \cdot 10^{-5}$	$\bar{L}_2 = 10000$



Rys. 5.2. Zależność wariancji wyniku pomiaru od liczby L porównań wykonanych w ramach komparacji:

——— - wartości wariancji $D^2/R/$ uzyskane na podstawie modelu matematycznego - tabela 5.3.

– – ✕ – ✕ – - wartości wariancji z próby $\hat{S}^2_R$ estymowane statystycznie na podstawie eksperymentu oraz odpowiadające im przedziały niepewności - tabela 5.3;

$U_{w\ max} = 2{,}176 \pm 0{,}005$ V , $U_1 = 1{,}000 \pm 0{,}002$ V = parametr.

przy dużych wartościach L. Kierowano się tu zarówno faktem, że omawiana procedura komparacyjna pozwala na zmniejszenie błędu komparacji do wartości mniejszej od 1% - wymaganej z reguły w praktyce pomiarowej - tylko przy znacznych liczbach wykonanych porównań (ze względu na wartość składowej losowej błędu komparacji; porównaj tabela 2.1), jak i spostrzeżeniem, że rozbieżności między obliczonymi i zmierzonymi wartościami wariancji wyniku występują na rys. 5.2 właśnie przy dużych (rzędu 10^4) wartościach L. Przyjęto L = 20 000. Jest to największa liczba porównań, którą woltomierz KS-1 może wykonać w pojedynczej procedurze komparacyjnej (patrz dodatek 4).

W celu uzyskania każdego z punktów pomiarowych procedurę komparacyjną powtarzano m = 200 razy. Wartości estymatorów wariancji obliczano - podobnie jak poprzednio - według wzorów (5.10), (5.11), (5.12) oraz (D5-12). Wartości $D^2(R)$ wynikające z modelu matematycznego procedury obliczano wg wzoru (3.72). Wartości napięć mierzonych $\tilde{U}_1$ (patrz rys. 5.1) ustawiano według woltomierza cyfrowego V 541. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 5.4 i na rys. 5.3. Oś poziomą wykresu opisano unormowanymi wartościami mierzonego napięcia: $\frac{U_1}{U_{w\,max}}$.

Jak widać na rysunku, wartości wariancji estymowane na podstawie pomiarów różnią się w sposób istotny od wartości uzyskanych z modelu matematycznego. Oto najważniejsze cechy rozbieżności widocznych na rys. 5.3:

- Krzywa zmierzona $\hat{S}_R^2 = f\left(\frac{U_1}{U_{w\,max}}\right)$ leży pod krzywą $D^2(R) = f\left(\frac{U_1}{U_{w\,max}}\right)$ uzyskaną z obliczeń teoretycznych: W całym niemal zakresie zmian napięcia $\tilde{U}_1$ (wyłączywszy przedziały, w których

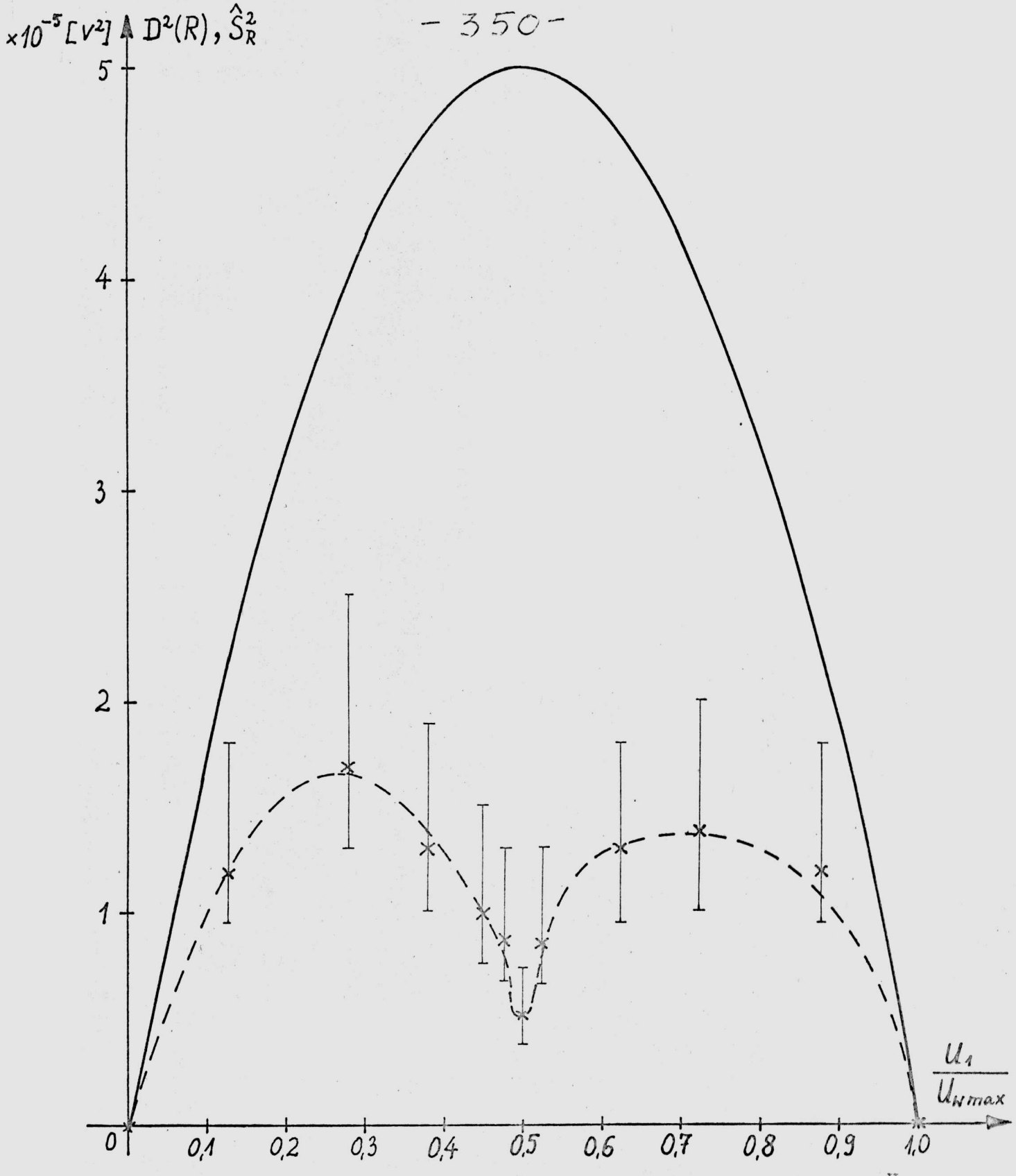
Tabela 5.4. Zależność wariancji wyniku pomiaru od unormowanej wartości $\frac{U_1}{U_{w\,max}}$ mierzonego napięcia:

$D^2(R)$ - wartości wariancji obliczone na podstawie modelu matematycznego

$\hat{S}_R^2$ - wartości wariancji z próby estymowane na podstawie eksperymentu

$U_{w\,max} = 2{,}003 \pm 0{,}004$ V; L = 20 000 = parametr

Lp.	U_1	$\frac{U_1}{U_{w\,max}}$	p	$D^2(R)$ wg wzoru (3.72)	estymacja stochastyczna wariancji wyniku pomiaru: $\hat{S}^2_{L_2}$ wg (5.10)	ocena punktowa $\hat{S}_R^2$ wg (5.12)	ocena przedziałowa m = 200, γ_u = 997 wg (D5 - 12)	Uwagi
-	V	-	-	V^2	-	V^2	V^2	
1	0	0	0	0	0	0	0 ; 0	$\bar{L}_2 = 0$
2	0,250	0,125	0,125	$2{,}19 \cdot 10^{-5}$	1230	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$	$9{,}4 \cdot 10^{-6}$; $1{,}8 \cdot 10^{-5}$	$\bar{L}_2 = 2480$
3	0,550	0,275	0,277	$4{,}02 \cdot 10^{-5}$	1710	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$	$1{,}3 \cdot 10^{-5}$; $2{,}5 \cdot 10^{-5}$	$\bar{L}_2 = 5498$
4	0,750	0,374	0,375	$4{,}70 \cdot 10^{-5}$	1290	$1{,}3 \cdot 10^{-5}$	$9{,}9 \cdot 10^{-6}$; $1{,}9 \cdot 10^{-5}$	$\bar{L}_2 = 7478$
5	0,900	0,449	0,449	$4{,}96 \cdot 10^{-5}$	979	$9{,}9 \cdot 10^{-6}$	$7{,}6 \cdot 10^{-6}$; $1{,}5 \cdot 10^{-5}$	$\bar{L}_2 = 8974$
6	0,950	0,474	0,473	$5{,}00 \cdot 10^{-5}$	875	$8{,}8 \cdot 10^{-6}$	$6{,}7 \cdot 10^{-6}$; $1{,}3 \cdot 10^{-5}$	$\bar{L}_2 = 9456$
7	1,000	0,499	0,500	$5{,}02 \cdot 10^{-5}$	504	$5{,}1 \cdot 10^{-6}$	$3{,}8 \cdot 10^{-6}$; $7{,}3 \cdot 10^{-6}$	$\bar{L}_2 = 9999$
8	1,050	0,524	0,523	$5{,}00 \cdot 10^{-5}$	866	$8{,}7 \cdot 10^{-6}$	$6{,}6 \cdot 10^{-6}$; $1{,}3 \cdot 10^{-5}$	$\bar{L}_2 = 10460$
9	1,250	0,624	0,625	$4{,}70 \cdot 10^{-5}$	1250	$1{,}3 \cdot 10^{-5}$	$9{,}6 \cdot 10^{-6}$; $1{,}8 \cdot 10^{-5}$	$\bar{L}_2 = 12480$
10	1,450	0,724	0,723	$4{,}02 \cdot 10^{-5}$	1380	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	$1{,}0 \cdot 10^{-5}$; $2{,}0 \cdot 10^{-5}$	$\bar{L}_2 = 14420$
11	1,750	0,874	0,871	$2{,}25 \cdot 10^{-5}$	1230	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$	$9{,}5 \cdot 10^{-6}$; $1{,}8 \cdot 10^{-5}$	$\bar{L}_2 = 17410$
12	2,003	1,000	0,996	$7{,}81 \cdot 10^{-7}$	0	0	0 ; 0	$\bar{L}_2 = 20000$



Rys. 5.3. Zależność wariancji wyniku pomiaru od unormowanej wartości $\frac{U_1}{U_{w\,max}}$ mierzonego napięcia :

——— - wartości wariancji $D^2/R/$ uzyskane na podstawie modelu matematycznego - tabela 5.4.,

- - -×- - - - wartości wariancji z próby $\hat{S}^2_R$ estymowane statystycznie na podstawie eksperymentu oraz odpowiadające im przedziały niepewności - tabela 5.4

$U_{w\,max} = 2{,}003 \pm 0{,}004$ V , L = 20 000 = parametr.

napięcie $\tilde{U}_1$ jest małe w stosunku do napięcia $\tilde{U}_{w\,max}$ oraz przedziały, w których jest ono niemal równe $\tilde{U}_{w\,max}$) uzyskiwane wartości $\hat{S}_R^2$ są istotnie mniejsze od wartości $D^2(R)$.

- Krzywa "teoretyczna" ma kształt odwróconej paraboli. Krzywa uzyskana z pomiarów wykazuje natomiast dwa maksima i wyraźne, ostre minimum przy $\frac{U_1}{U_{w\,max}} = \frac{1}{2}$.

Należy podkreślić, że pomiary w punkcie, w którym rozbieżności są największe, tzn. $\frac{U_1}{U_{w\,max}} = \frac{1}{2}$, wykonano wielokrotnie. Uzyskiwano dobrą powtarzalność przebiegu krzywej $\hat{S}_R^2 = f(\frac{U_1}{U_{w\,max}})$. Wyklucza to przypadkowość zaobserwowanych różnic. Przyczyną musi być działanie badanego woltomierza KS-1. Należy więc sprawdzić, czy w badanym urządzeniu są spełnione wszystkie założenia poczynione podczas teoretycznego wyprowadzania wzoru (3.72) na wariancję $D^2(R)$ wyniku pomiaru.

Ważnym spostrzeżeniem dotyczącym rozbieżności zaobserwowanych na rys. 5.2 i 5.3 jest to, że różnice między krzywymi zmierzonymi i wynikającymi z obliczeń teoretycznych uwidoczniły się przede wszystkim przy dużych wartościach liczby L porównań wykonywanych w ramach pojedynczej procedury komparacyjnej. Fakt ten może oznaczać, że założenia poczynione przy tworzeniu modelu matematycznego stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" są naruszone w badanym woltomierzu KS-1 w stopniu bardzo nieznacznym. Dopiero wielokrotne powtarzanie porównania z wzorcem (duże L) powoduje ujawnienie się tej rozbieżności w postaci zmiany właściwości statystycznych wyniku pomiaru (ściślej - jego wariancji).

Biorąc pod uwagę informacje zawarte w rozdziale III można

przypuszczać z dużym prawdopodobieństwem, że przyczyną zaobserwowanych różnic jest występowanie autokorelacji w ciągu napięć odtwarzanych przez wzorzec.

Krzywa $\hat{S}^2_R = f\left(\frac{U_1}{U_{w\ max}}\right)$ ma bowiem kształt taki, jak gdyby wzorzec losował w przybliżeniu dwuwarstwowo (porównaj podrozdział III/1d).

Trzeba jednak zaznaczyć, że chronologia faktów związanych z powstawaniem niniejszej pracy była inna, niż można by sądzić z kolejności rozdziałów. Otóż eksperyment mający na celu weryfikację doświadczalną rezultatów obliczeń teoretycznych miał miejsce zaraz po zgromadzeniu materiału zawartego w rozdziale II. Rozdział III wtedy jeszcze nie istniał. Z powodu rozbieżności między wynikami obliczeń teoretycznych, a rezultatami eksperymentów podjęto szereg prób wyjaśnienia przyczyn tych rozbieżności. Stawiano więc kolejne hipotezy i weryfikowano je. Weryfikacja miała na ogół charakter doświadczalny i teoretyczny. Opis eksperymentalnych prób wyjaśnienia niezgodności wykresów na rys. 5.3 zawiera dodatek 9, a także dalsza część niniejszego podrozdziału. Jako próby teoretyczne powstały następujące fragmenty tej rozprawy: III/1c, d, III/2, dodatek 6.

W ostatecznej redakcji tekstu pracy stały się one integralnymi częściami rozważań teoretycznych. Inspiracją do ich napisania były jednak wspomniane rozbieżności na rys. 5.3.

Uwagi powyższe mają na celu uprzedzenie ewentualnych wątpliwości, które mogą pojawić się w związku z lekturą dodatku 9 oraz dalszej części niniejszego podrozdziału: dlaczego podejrzewano, że przyczyną zaobserwowanych różnic może być np. histereza układu porównania napięć, skoro z podrozdziału III/2 wyraźnie wynika, iż histereza nie może powodować takich skutków, jakie obserwowano. Rzecz w tym,

że w momencie formułowania powyższej, przykładowej hipotezy, wpływ histerezy na właściwości stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" nie był jeszcze autorowi znany (podrozdział III/2 nie istniał jeszcze).

Na podstawie rozważań i badań opisanych w dodatku 9 stwierdzono, że poszukiwaną przyczyną rozbieżności między wynikami obliczeń i pomiarów obserwowanej na rys. 5.3 jest najprawdopodobniej niespełnienie założenia o niezależności losowań napięć wzorcowych w kolejnych taktach komparacji.

Z opisów zawartych w dodatku 4 wynika, że losowy wzorzec napięcia zastosowany w woltomierzu KS-1 generalnie składa się z dwóch części: cyfrowej i analogowej. W skład części cyfrowej wchodzi generator binarnej sekwencji pseudolosowej dostarczający 8-bitowych liczb losowych. Na część analogową wzorca składają się: przetwornik c/a oraz wzmacniacz - separator (porównaj rys. D4-1, D4-2). W części analogowej następuje zamiana liczb losowych na napięcia wzorcowe $\tilde{U}_{wi}$ porównywane z napięciem mierzonym. Przyczyną niespełnienia założenia o niezależności losowań w tak skonstruowanym wzorcu jest najprawdopodobniej jego część cyfrowa. Zupełne wykluczenie części analogowej nie jest jednak niestety możliwe.

Z tego powodu zdecydowano się zaprzestać bezpośrednich eksperymentów z woltomierzem KS-1 realizującym stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" na rzecz badań cyfrowych modeli symulacyjnych tego woltomierza. W związku z tą decyzją spodziewano się następujących korzyści:

K o r z y ś ć p i e r w s z a : Symulacja cyfrowa pozwala na całkowitą eliminację wpływu elementów analogowych na właściwości badanej procedury komparacyjnej. Umożliwia to ostateczne rozstrzygnięcie czy przyczyną rozbieżności wyników pomiaru i rezultatów obliczeń jest część cyfrowa losowego wzorca napięcia, czy też jego część analogowa. Istotnie: jeżeli wyniki symulacji

cyfrowej okażą się zgodne z obliczeniami teoretycznymi będzie to oznaczało, że przyczyną rozbieżności występujących na rys. 5.3 jest nieidealność lub uszkodzenie któregoś z wymienionych elementów analogowych wzorca. Gdyby się okazało, że rozbieżność między obliczeniami, a wynikami symulacji cyfrowej nadal występuje i jest tego samego rzędu wielkości oraz ma taki sam charakter jak w przypadku woltomierza KS-1, jedynym jej źródłem może być generator binarnej sekwencji pseudolosowej i jego badaniem należy zająć się dalej. Gdyby zaś rozbieżność, o której mowa nadal występowała, ale miała inny charakter aniżeli podczas badań urządzenia KS-1, przyczyn rozbieżności należałoby szukać zarówno we właściwościach zastosowanych rejestrów PRBS jak i w nieidealnościach części analogowej układu.

K o r z y ś ć d r u g a z zastosowania symulacji cyfrowej polega na dużej łatwości zmian konfiguracji zastosowanego generatora binarnych liczb pseudolosowych (PRBS). Zmiana jego struktury polega na napisaniu nowego programu.

Symulację wykonano za pomocą mikrokomputera SDK 80-85 firmy Intel. Jego lista rozkazów dobrze nadaje się do realizacji zadań, w których operacje wykonuje się na poszczególnych bitach danych, a z tego typu problemem ma się tu do czynienia. Wadą egzemplarza, do którego dostęp miał autor, była niewielka pojemność pamięci przeznaczonej na program użytkownika (ok. 200 bajtów).

Algorytm działania programu symulacyjnego był podobny do algorytmu funkcjonowania woltomierza KS-1 (patrz rys. D4-5): Napięcia $\tilde{U}_1'$ i $\tilde{U}_{wi}$ porównywane w układzie rzeczywistym (rys. D4-1) w programie były symulowane przez dwie ośmiobitowe liczby binarne: X oraz W_1. Zakres zmian wartości obu liczb wynosił od 0 do 255.

Liczba X jako odpowiadająca napięciu mierzonemu była zadawana z góry i przechowywana w jednej z komórek pamięci. Liczbę losową W^j ($j = 1, 2, \ldots, L$; znaczenie indeksów: dolnego - i oraz górnego - j przy symbolu W jest identyczne jak w przypadku napięć wzorcowych: $\tilde{U}_{wi}$, $\tilde{U}^j_w$; porównaj też rys. 1.3) wytwarzano według algorytmu dokładnie odwzorowującego działanie generatorów PRBS w woltomierzu KS-1. Kolejne bity komórek pamięci odpowiadały więc przerzutnikom rejestrów przesuwnych 13-bitowego i 7-bitowego (porównaj dodatek 4). Pojedynczemu taktowi pracy rejestru przesuwnego odpowiadało w programie przesuwanie zawartości bajtu w lewo. Sprzężenie zwrotne z komórek symulujących rejestry przesuwne miało identyczną strukturę jak w układzie rzeczywistym. Liczbę losową W^j ($j = 1, 2, \ldots, L$) zestawiano z wybranych bitów powyższych komórek także w taki sam sposób, jak to miało miejsce w rzeczywistym wzorcu napięcia. Pozostałe elementy układu KS-1 także miały swoje odpowiedniki w zbiorach rozkazów programu symulacyjnego. Działanie układu porównania napięć symulował rozkaz sprawdzania relacji między liczbami X oraz W^j. W przeciwieństwie do założeń dotychczasowych (porównaj wzór (2.4)), w symulacji przyjmowano jako sukces zdarzenie, gdy:

$$W^j \leqslant X , \quad j = 1, 2, \ldots, L . \tag{5.15}^{*}$$

Powyższa zmiana pociąga za sobą konieczność modyfikacji wzoru na prawdopodobieństwo sukcesu. Ma on obecnie postać:

$$p = \frac{X + 1}{n} , \tag{5.16}$$

---

* Wzory o numerach (5.13), (5.14) przeniesiono do dodatku 9, gdzie otrzymały odrębną numerację.

gdzie: n - liczba stanów odtwarzanych przez wzorzec, n = 256. Zorganizowanie pracy licznika L_2 nie sprawiało także większych problemów programowych. Funkcję układu realizującego zadaną liczbę L porównań zrealizowano typowo - w pętli programowej.

Pełny tekst opisanego tu programu symulacyjnego umieszczono w dodatku 7 w punkcie a).

"Wejście" programu stanowią dwie liczby: X - symulująca napięcie mierzone oraz L - określająca liczbę porównań, które mają być wykonane w ramach procedury. Obie liczby umieszcza się w odpowiednich komórkach pamięci. Wynikiem działania programu są - podobnie jak to miało miejsce w przypadku używania układu KS-1 - stany licznika L_2 po wykonaniu L porównań.

Eksperyment symulacyjny przebiegał analogicznie jak pomiary rzeczywistym układem KS-1 realizującym stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy". Przyjęto więc L = 20 000, a liczbę X symulującą napięcie mierzone dobierano ze zbioru liczb naturalnych od 0 do 255 uzyskując odpowiednio różne wartości stosunku $\frac{X}{W_{max}}$ z przedziału $[0, 1]$. Największa liczba odtwarzana przez wzorzec miała wartość $W_{max} = 255$.

Wynik tak symulowanej procedury komparacyjnej, przez analogię do wzoru (2.5), można obliczyć wg zależności:

$$R = \frac{L_2}{L_1} \cdot W_{max} . \qquad (5.17)$$

Empiryczne oszacowanie wariancji takiego wyniku, podobnie jak poprzednio, polegałoby na wielokrotnym powtórzeniu symulacji przy danej wartości liczby X i użyciu wariancji z próby $\hat{S}_R^2$ jako estymatora wariancji wyniku $D^2(R)$. Ponieważ jednak wartości

największych realizacji odtwarzanych przez wzorzec w eksperymencie fizycznym i symulacyjnym znacznie się różniły ($U_{w\ max} \approx 2V$, $W_{max} = 255$), wartości estymatorów $\hat{S}^2_R$ wariancji wyniku uzyskiwane w przypadku obu tych eksperymentów byłyby zupełnie nieporównywalne. Aby tę porównywalność uzyskać, wygodniej posługiwać się wartościami wariancji stanu końcowego licznika L_2. Wartości $D^2(L_2)$ wynikające z modelu matematycznego obliczano według wzoru (2.19) określając prawdopodobieństwo sukcesu p według (5.16).

Estymacja punktowa powyższej wariancji odbywała się wg wzorów (5.10) i (5.11), estymacja przedziałowa - wg nierówności (D5-13) wyprowadzonych w dodatku 5. Estymacji wariancji $D^2(L_2)$ dokonywano obecnie na podstawie m = 200 powtórzeń symulacji procedury komparacyjnej przy każdej wybranej wartości liczby X.

Wyniki uzyskane za pomocą programu zamieszczonego w dodatku 7a) zawiera tabela 5.5. Graficznie przedstawiono je na rys. 5.4. Rysunek ten zawiera także - dla porównania - krzywą uzyskaną z obliczeń oraz uzyskaną z pomiarów woltomierzem KS-1 (porównaj tabela 5.4, kolumna $\hat{S}^2_{L_2}$).

Jak widać na wykresie, krzywe uzyskane z pomiarów i symulacji nie różnią się w sposób istotny: obie leżą pod krzywą $D^2(L_2) = f\left(\frac{X}{W_{max}}\right)\Big|_{L = par}$ wynikającą z modelu matematycznego i obie wykazują wyraźne minimum w punkcie o odciętej $\frac{1}{2}$. Wniosek wynikający z tego porównania rezultatów obliczeń, pomiarów i symulacji jest jednoznaczny: główną przyczyną zaobserwowanych rozbieżności okazał się zastosowany generator 8-bitowych liczb pseudolosowych.

Minimum na krzywej uzyskanej z symulacji w punkcie

Tabela 5.5.

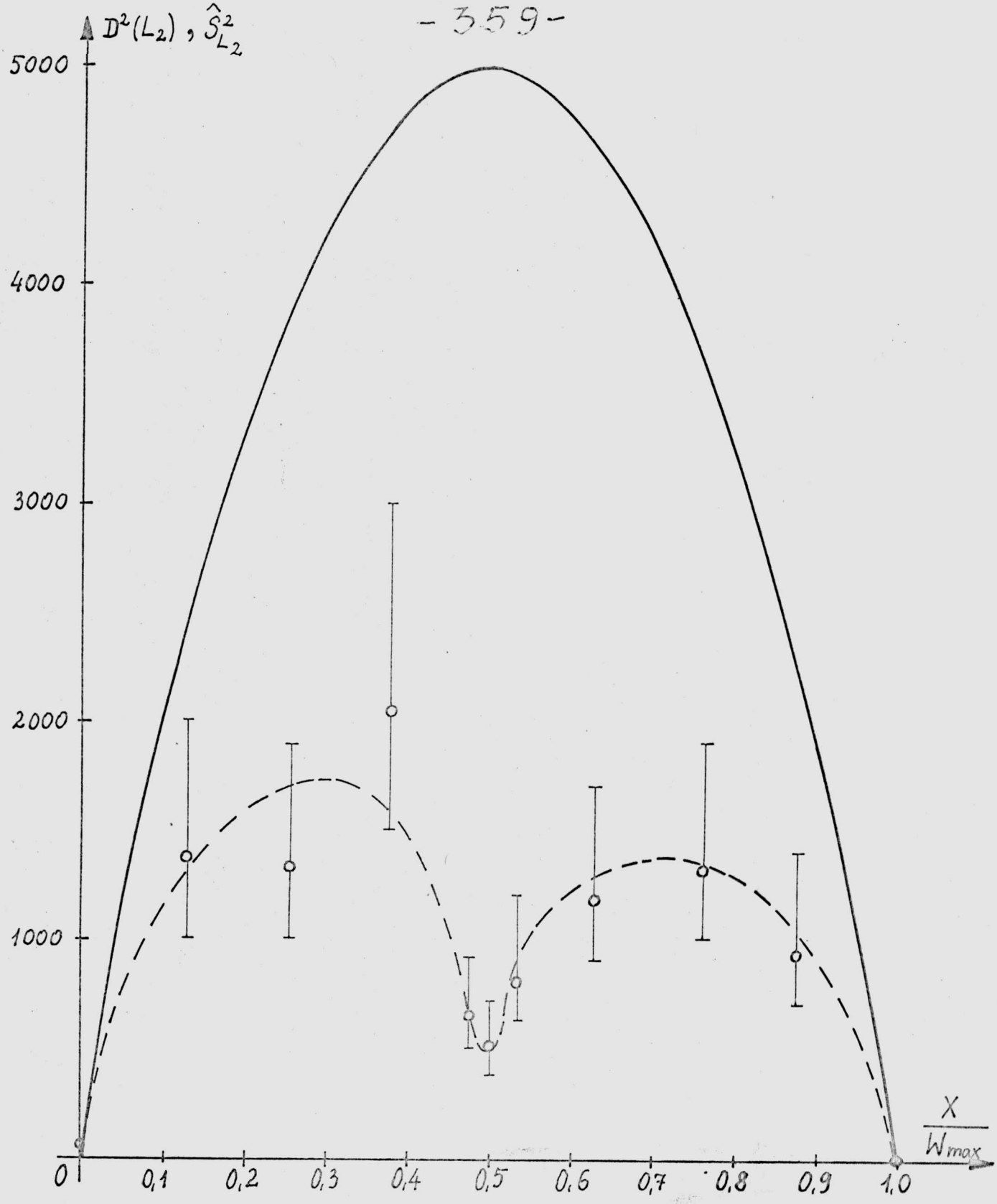
Zależność wariancji stanu końcowego licznika L_2 od unormowanej wartości $\frac{X}{W_{max}}$ liczby X :

$D^2(L_2)$ - wartości wariancji obliczone na podstawie modelu matematycznego

$\hat{S}^2_{L_2}$ - wartości wariancji z próby estymowane na podstawie eksperymentu symulacyjnego.

Generator PRBS - o strukturze dokładnie takiej jak w woltomierzu KS-1; $W_{max} = 255$; $L = 20\,000$.

Lp.	X	$\frac{X}{W_{max}}$	$D^2(L_2)$ wg wzoru /2.19/ /5.16/	estymacja wariancji na podstawie symulacji	
				estymacja punktowa $\hat{S}^2_{L_2}$ wg /5.10/ /5.11/	estymacja przedziałowa m=200, γ_u=0,997 wg /D5-13/
1	0	0	80	64,7	49 ; 93
2	32	0,125	2240	1370	1000 ; 2000
3	66	0,259	3860	1330	1000 ; 1900
4	96	0,376	4710	2040	1500 ; 3000
5	121	0,474	4990	639	490 ; 920
6	127	0,498	5000	510	390 ; 730
7	135	0,529	4980	807	620 ; 1200
8	160	0,627	4670	1180	900 ; 1700
9	194	0,761	3630	1310	1000 ; 1900
10	224	0,878	2130	931	710 ; 1400
11	255	1	0	0	0 0



Rys.5.4. Zależność wariancji stanu końcowego licznika L_2 od unormowanej wartości $\frac{X}{W_{max}}$ liczby X :

——— - wartości wariancji $D^2/L_2/$ uzyskane na podstawie modelu matematycznego- wzory /2.19/ i /5.16/, tabela 5.5 ,

⊖ - wartości wariancji z próby $\hat{S}^2_{L_2}$ estymowane na podstawie eksperymentu symulacyjnego i odpowiadające im przedziały niepewności- tabela 5.5 ,

– – – – - krzywa uzyskana w eksperymencie rzeczywistym z woltomierzem KS-1 - według tabeli 5.4 / patrz rys. 5.3 / .

$W_{max} = 255$; $L = 20\,000$.

$\frac{X}{W_{max}} = \frac{1}{2}$ wskazuje, że ilości liczb wzorcowych W^j (j = =1, 2, ..., L) mniejszych lub równych liczbie $X = \frac{1}{2} W_{max}$ są, w poszczególnych procedurach komparacyjnych, w przybliżeniu takie same. Nasunęło to przypuszczenie, iż generator liczb W^j zachowuje się tak jakby realizował sposób losowania zbliżony do dwuwarstwowego. Hipotezę tę postanowiono zweryfikować. W tym celu wykonano rozważania przedstawione w punkcie III/1 d). Z rys. 3.9 b) wynika, że hipoteza ta jest bardzo prawdopodobna. Badany generator nie dawał co prawda zerowej wariancji w punkcie $\frac{U_1}{U_{w\ max}} = \frac{1}{2}$, ale wykazywał wyraźną skłonność do wybierania w każdym ciągu 20 000 losowań podobnych ilości napięć wzorcowych z warstwy: $\left[0, \frac{U_{w\ max}}{2}\right]$.

Próby ustalenia mechanizmu opisanej skłonności, przez wykazanie związku między sposobem wykorzystania poszczególnych bitów rejestru przesuwnego 7- i 13-bitowego do sterowania przetwornikiem c/a, a obserwowanym sposobem losowania nie powiodły się (rejestr 7-bitowy steruje w przetworniku c/a bitami o wagach $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{64}$ nie zaś $\frac{1}{2}$).

Bez wykonywania szczegółowych badań właściwości korelacyjnych stosowanego generatora liczb pseudolosowych założono, że powodem jego skłonności do losowania w przybliżeniu dwuwarstwowego jest osobliwa struktura tego generatora. W woltomierzu KS-1, a także w używanym programie symulacyjnym, jako generatorów 8-bitowych liczb pseudolosowych używano dwóch, pracujących niezależnie rejestrów przesuwnych: 7- i 13-bitowego z optymalnymi sprzężeniami zwrotnymi [4] (porównaj dodatek 4 i dodatek 7a). Postanowiono zatem zmienić strukturę generatora PRBS, stosując

jeden, długi rejestr przesuwny (także z optymalnym sprzężeniem zwrotnym). Dokonanie takiej zmiany w eksperymencie symulacyjnym polegało po prostu na napisaniu nowego programu.

Liczby W^j (j = 1, 2, ..., L), symulujące napięcia wzorcowe $\sim U_w^j$, tworzono obecnie pobierając 8 kolejnych bitów z 20- lub 23-bitowego rejestru przesuwnego. Pełny tekst nowego programu symulacyjnego zawiera dodatek 7 b). Przy użyciu tego programu wykonano kolejny eksperyment symulacyjny - analogiczny jak poprzednio. Uzyskane tym razem wyniki zawierają tabele 5.6 i 5.7. Przedstawiono je także na rys. 5.5. Ze względów czasowych badania z rejestrem 20-bitowym ograniczono do okolic punktu $\frac{X}{W_{max}} = \frac{1}{2}$.

Jak widać na rysunku, wprowadzone zmiany w konfiguracji generatora PRBS spowodowały, że uzyskane z symulacji wartości $\hat{S}^2_{L_2}$ wariancji stanu końcowego licznika L_2 są na ogół większe od obliczonych teoretycznie $D^2(L_2)$. Poprzednio krzywe: zmierzona i uzyskana w wyniku symulacji leżały znacznie poniżej obliczonej. Krzywe uzyskane w wyniku ostatniej symulacji nadal miały charakterystyczne minimum w punkcie $\frac{X}{W_{max}} = \frac{1}{2}$.

Wnioski wynikające bezpośrednio z zestawienia wyników obu eksperymentów symulacyjnych są następujące (porównaj rys. 5.4 i 5.5):

- To, że zmierzona krzywa wariancji $\hat{S}^2_{L_2} = f\left(\frac{U_1}{U_{w\,max}}\right)\Big|_{L = par}$ przebiegała znacznie poniżej krzywej obliczonej $D^2(L_2) = f\left(\frac{U_1}{U_{w\,max}}\right)\Big|_{L = par}$ (rys. 5.4) było spowodowane osobliwą konfiguracją zastosowanego generatora PRBS. Losował on prawdo-

Tabela 5.6.

Zależność wariancji $\hat{S}^2_{L_2}$ stanu końcowego licznika L_2 estymowanej statystycznie na podstawie eksperymentu symulacyjnego, od unormowanej wartości $\frac{X}{W_{max}}$ liczby X.

Generator PRBS - 23 -bitowy, jednorejestrowy, ze sprzężeniem optymalnym;

Liczba W^j - osiem kolejnych bitów rejestru generatora - porównaj dodatek 7 b/; W_{max}= 255; L= 20 000.

Lp.	X	$\frac{X}{W_{max}}$	estymacja wariancji na podstawie eksperymentu symulacyjnego		Uwagi
			estymacja punktowa $\hat{S}^2_{L_2}$ wg /5.10/ /5.11/	estymacja przedziałowa m=200, γ_u= 0,997 wg / D5 - 13 /	
1	0	0	268	200 ; 390	
2	16	0,063	4240	3200 ; 6100	
3	32	0,126	4700	3600 ; 6800	
4	48	0,188	5970	4500 ; 8600	
5	66	0,259	8400	6400 ; 13000	
6	80	0,314	10400	7900 ; 15000	
7	96	0,376	9200	7000 ; 14000	
8	121	0,474	6720	5100 ; 9700	
9	127	0,498	5380	4100 ; 7700	
10	135	0,529	6420	4900 ; 9200	
11	160	0,627	9040	6900 ; 13000	
12	192	0,753	6070	4600 ; 8700	
13	224	0,878	3760	2800 ; 5400	
14	240	0,941	3030	2300 ; 4400	
15	255	1	0	0 ; 0	

Tabela 5.7.

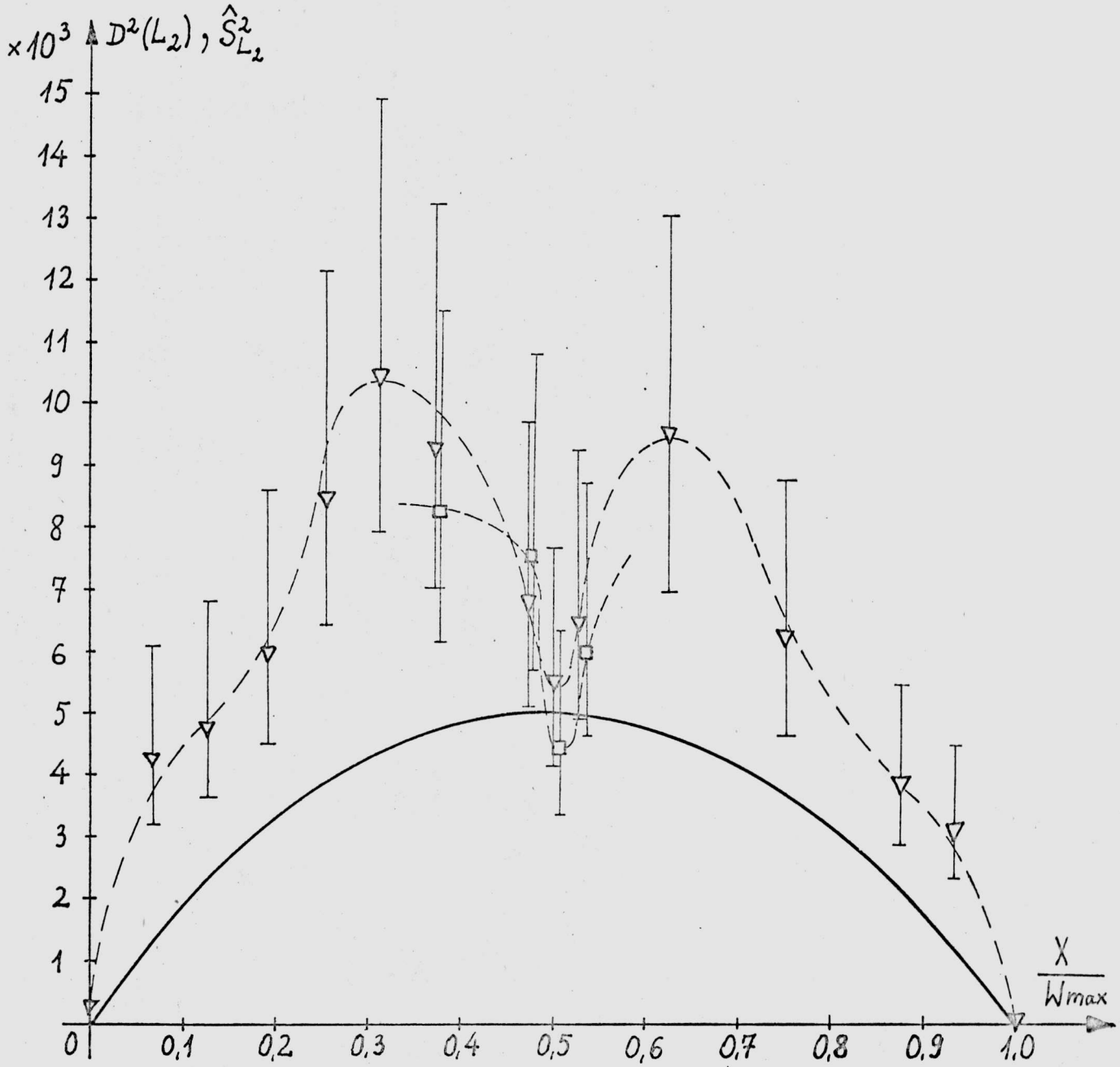
Zależność wariancji $\hat{S}^2_{L_2}$ stanu końcowego licznika L_2 estymowanej statystycznie na podstawie eksperymentu symulacyjnego, od unormowanej wartości $\frac{X}{W_{max}}$ liczby X.

Generator PRBS - 20-bitowy, jednorejestrowy, ze sprzężeniem optymalnym;

Liczba W^j - osiem kolejnych bitów rejestru generatora, porównaj dodatek 7 b/;

$W_{max} = 255$; $L = 20\,000$.

Lp.	X	$\frac{X}{W_{max}}$	estymacja wariancji na podstawie eksperymentu symulacyjnego		Uwagi
			estymacja punktowa $\hat{S}^2_{L_2}$ wg /5.10/ /5.11/	estymacja przedziałowa m = 200, γ_u = 0,997 wg / D5-13 /	
1	96	0,367	8020	6100 ; 12 000	
2	121	0,474	7530	5700 ; 11 000	
3	127	0,498	4350	3300 ; 6300	
4	135	0,529	6020	4000 ; 8700	



Rys. 5.5. Zależność wariancji stanu końcowego licznika L_2 od unormowanej wartości $\frac{X}{W_{max}}$ liczby X :

——— - wartość wariancji $D^2/L_2/$ uzyskane na podstawie modelu matematycznego - tabela 5.5 ,

- -▽- -▽- - - wartości wariancji z próby $\hat{S}^2_{L_2}$ estymowane na podstawie eksperymentu symulacyjnego i odpowiadające im przedziały niepewności w przypadku zastosowania 23-bitowego generatora PRBS - tabela 5.6 ,

- -□- -□- - - jak wyżej, w przypadku generatora 20-bitowego - tabela 5.7.

$W_{max} = 255$; $L = 20\,000$.

podobnie według schematu w przybliżeniu dwuwarstwowego dostarczając skorelowanych ciągów $\tilde{U}_w^j$ (j = 1, 2, ..., L) napięć wzorcowych.

- Typowy (tzn. składający się z jednego rejestru przesuwnego, w którym wykorzystuje się określoną liczbę kolejnych bitów) generator PRBS także nie spełnia założenia o niezależności losowań w kolejnych taktach procedury.

Uzyskane w ostatnim eksperymencie symulacyjnym krzywe wariancji, choć nieco inaczej niż poprzednio, ale mimo to w sposób istotny różnią się od obliczonej (patrz rys. 5.5).

Prawdopodobnie więc wszystkie użyte generatory liczb pseudolosowych: zarówno poprzedni - składający się z dwóch rejestrów przesuwnych 7- i 13-bitowego - jak i obecnie - zawierające jeden długi: 20- lub 23-bitowy rejestr - dostarczają skorelowanych ciągów liczb W^j (j = 1, 2, ..., L). Sposób skorelowania jest w każdym przypadku wyraźnie inny, ale zawsze istotny.

Przypuszczenie powyższe znalazło potwierdzenie w artykule A.R. Pratt'a [5]. Jego Autor nie tylko oblicza w swej pracy wartość funkcji autokorelacji ciągu liczb pochodzących z rejestrów przesuwnych ze sprzężeniem optymalnym "modulo-2", ale także podaje sposób na to, by kolejne dwie liczby pseudolosowe wykorzystywane do dalszych celów, były względnie słabo skorelowane. Rozumowanie jest tam następujące:

Dwa kolejne stany rejestru przesuwnego różnią się między sobą tylko tym, że stan następny powstaje przez przesunięcie poprzedniego o jeden bit. Z tego też powodu liczby pseudolosowe zestawiane na podstawie bitów dwóch kolejnych stanów rejestru wykazują skorelowanie. Jako sposób na jego znaczne zmniejszenie

Autor artykułu postuluje, pobieranie liczb z rejestru przesuwnego nie w każdym takcie jego pracy, ale co pewną ich liczbę. Najlepiej, by liczba K "międzyprzesunięć" (tzn. liczba taktów pracy rejestru między kolejnymi pobraniami liczby pseudolosowej) była co najmniej równa długości rejestru: b. Dowolną liczbę pseudolosową zestawia się wtedy na podstawie zawartości rejestru całkowicie wymienionej w stosunku do tej, na podstawie której zestawiono poprzednią liczbę. Ważne jest, by liczba "międzyprzesunięć" K oraz długość sekwencji jaką wytwarza dany rejestr: $2^b - 1$ (sprzężenie optymalne), były liczbami względnie pierwszymi. W przeciwnym razie niektóre stany rejestru będą zawsze omijane i rozkład prawdopodobieństwa uzyskiwanych liczb pseudolosowych nie będzie równomierny.

Sugestie zawarte w cytowanym tu artykule postanowiono wykorzystać. Napisano w tym celu nowy program symulujący działanie woltomierza KS-1. Zawierał on 23-bitowy rejestr przesuwny. Między kolejnymi pobraniami 8-bitowej liczby losowej W^j wykonywano $K = 23$ "międzyprzesunięcia". Liczby $2^{23} - 1$ oraz 23 są względnie pierwsze, gdyż liczba 23 jest pierwsza, zaś $2^{23} - 1$ nie jest jej całkowitą wielokrotnością.

Nowy program wzbogacono dodatkowo o podprogramy ułatwiające obliczanie parametru $\hat{S}^2_{L_2}$ (wariancja z próby stanów końcowych licznika L_2). Ogromnie ułatwiało to opracowywanie statystyczne wyników symulacji. Pełny tekst nowego programu zawarto w dodatku 7 c). Z użyciem tego programu wykonano nowy eksperyment symulacyjny. Jego wyniki zawiera tabela 5.8, a obrazuje rys. 5.6.

Jak widać, uzyskana obecnie krzywa wariancji

$$\hat{S}^2_{L_2} = f\left(\frac{X}{W_{max}}\right) \Big|_{L = par}$$

zupełnie dobrze "przylega" do krzywej

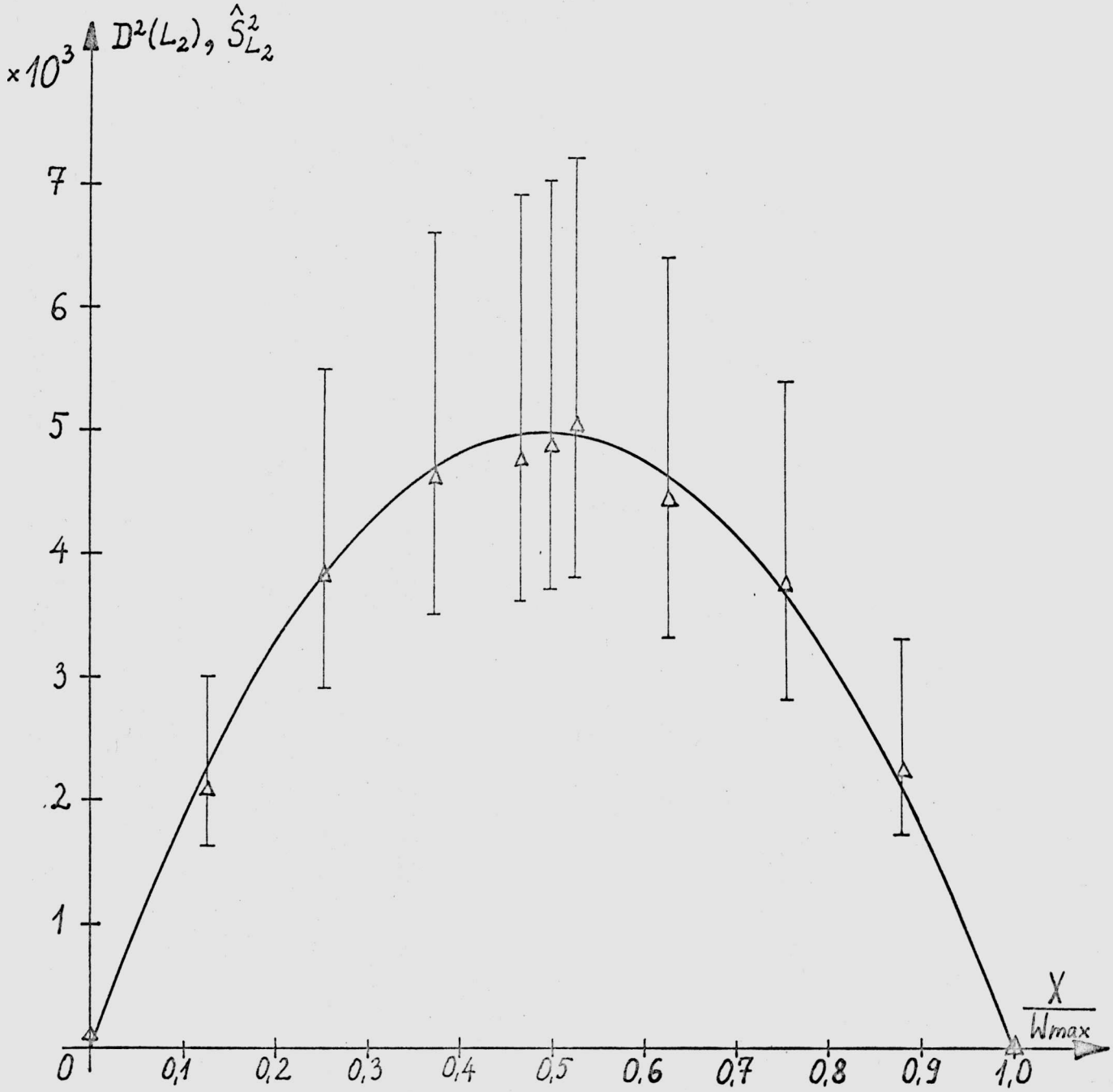
Tabela 5.8.

Zależność wariancji $\hat{S}^2_{L_2}$ stanu końcowego licznika L_2 estymowanej statystycznie na podstawie eksperymentu symulacyjnego, od unormowanej wartości $\frac{X}{W_{max}}$ liczby X;

Generator PRBS: 23-bitowy, jednorejestrowy, ze sprzężeniem optymalnym ;

Liczba W^j - osiem kolejnych bitów rejestru generatora; liczbę W^j pobiera się co K = 23 takty pracy generatora /por. dodatek 7c/; W_{max} = 255; L = 20 000.

Lp.	X	$\frac{X}{W_{max}}$	estymacja wariancji na podstawie eksperymentu symulacyjnego: estymacja punktowa $\hat{S}^2_{L_2}$ wg /5.10/, /5.11/	estymacja przedziałowa m=200; γ_u=0,997 wg /D5-13/	Uwagi
1	0	0	87,6	67 ; 130	
2	32	0,126	2080	1600 ; 3000	
3	64	0,251	3820	2900 ; 5500	
4	96	0,376	4600	3500 ; 6600	
5	118	0,463	4760	3600 ; 6900	
6	127	0,498	4855	3700 ; 7000	
7	135	0,529	5030	3800 ; 7200	
8	160	0,627	4420	3300 ; 6400	
9	192	0,753	3750	2800 ; 5400	
10	224	0,878	2240	1700 ; 3300	
11	255	1	0	0 ; 0	



Rys. 5.6. Zależność wariancji stanu końcowego licznika L_2 od unormowanej wartości $\frac{X}{W_{max}}$ liczby X :

——— - wartości wariancji D^2/L_2 / uzyskane na podstawie modelu matematycznego - tabela 5.5,

⊥△⊥ - wartości wariancji z próby $\hat{S}^2_{L_2}$ estymowane na podstawie eksperymentu symulacyjnego oraz odpowiadające im przedziały niepewności.

Generator PRBS: 23-bitowy, liczbę losową W^j pobierano co $K = 23$ takty pracy generatora - tabela 5.8.

wynikającej z obliczeń. Oznacza to, że hipoteza o wpływie korelacji w ciągu liczb pseudolosowych na uzyskiwaną krzywą wariancji, była słuszna. Oznacza to również, że zastosowane - zgodnie z sugestią A.R. Pratt'a - "międzyprzesunięcia" są skutecznym sposobem zmniejszania tej korelacji, a tym samym - sposobem ograniczania jej wpływu na wariancję uzyskiwanych wyników.

Ponieważ, jak stwierdzono wcześniej, główną przyczyną obserwowanych rozbieżności między pomiarami, a obliczeniami było skorelowanie w ciągu liczb wytwarzanych przez generator PRBS, można chyba mieć nadzieję, że gdyby przetestowany właśnie symulacyjnie generator z "międzyprzesunięciami" zrealizować fizycznie i wmontować go do woltomierza KS-1 w miejsce dotychczasowego generatora, uzyskano by zgodność mierzonych i obliczonych wartości wariancji wyniku pomiaru, nie gorszą niż podczas symulacji. Można więc stwierdzić, że w przypadku zastosowania w układzie realizującym stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - - mniejszy" (rys. 2.1) wzorca losowego wytwarzającego nieskorelowane ciągi napięć, wzór (3.72) na wariancję wyniku pomiaru znajduje pełne potwierdzenie w praktyce.

3. Zbadanie wpływu wartości napięć mierzonych w wieloelementowym zbiorze $\approx{U}$ na wariancję $D^2(R)$ wyniku pomiaru

Jednym z ważniejszych wniosków uzyskanych w punktach II/3 b) oraz III/1 b) było stwierdzenie, że podczas pomiaru wartości momentu $\gamma_n(\approx{U}_p)$ zbioru $\approx{U}_p$, wariancja wyniku zależy nie tylko od wartości mierzonego momentu rzędu n, ale także zależy od wartości momentu rzędu 2n (porównaj wzory (3.36) (3.39)). W przypadku pomiaru wartości średniej $\gamma_1(\approx{U}_p)$ w zbiorze $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi powyższe twierdzenie oznacza, że zbiory $\approx{U}_p$ charakteryzujące się taką samą wartością średnią nie muszą być ekwiwalentne pod względem wariancji wyniku pomiaru (a więc i składowej losowej Δ_1 błędu komparacji), bo mogą charakteryzować się różnymi wartościami średniokwadratowymi $\gamma_2(\approx{U}_p)$, od których wariancja wyniku R także zależy (patrz wzory (2.54), (2.57)).

Zależność wariancji wyniku od wartości momentów $\gamma_n(\approx{U}_p)$ oraz $\gamma_{2n}(\approx{U}_p)$ można scharakteryzować w sposób globalny za pomocą współczynnika A. Uczyniono to we wzorze (3.36), który w przypadku pomiaru wartości średniej przybiera postać (2.54):

$$D^2(R) = \frac{U^2_{w\,max}}{L} \cdot A \,, \qquad (2.54)$$

gdzie: wartość współczynnika A określa wzór (2.55):

$$A \stackrel{df}{=} \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j) \,. \qquad (2.55)$$

symbol p^j $(j = 1, 2, \ldots, L)$ oznacza prawdopodobieństwo

sukcesu w j-tym takcie procedury. W przypadku pomiaru wartości średniej (porównaj wzór (2.33)):

$$p^j = \frac{U^j}{U_{w\ max}} .$$

Wzór (2.54) wyraża myśl, że wariancja wyniku pomiaru jest proporcjonalna do wartości współczynnika A. Współczynnik A jest natomiast tym mniejszy im więcej napięć $\tilde{U}^j$ w zbiorze $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi, ma wartości zbliżone do najmniejszej lub największej realizacji odtwarzanej przez wzorzec. Wtedy bowiem prawdopodobieństwa sukcesu p^j mają wartości bliskie zeru lub bliskie jedności i odpowiadające im składniki $p^j(1 - p^j)$ sumy (2.55) są niewielkie.

Prawdziwość powyższych spostrzeżeń wynikających z rozważań teoretycznych postanowiono sprawdzić eksperymentalnie.

Zdecydowano się na eksperyment symulacyjny. Wynikało to stąd, że podczas symulacji można było łatwo imitować wzorzec spełniający wymaganie niezależności losowań (porównaj poprzedni podrozdział).

Zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych był symulowany za pomocą zbioru liczb $\tilde{\tilde{X}}$. Zbiorowi $\tilde{\tilde{U}}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi odpowiadał zbiór liczbowy $\tilde{\tilde{X}}_p$. Napięcia wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ losowane w kolejnych taktach j = 1, 2, ..., L omawianej procedury komparacyjnej (były symulowane) - podobnie jak poprzednio - za pomocą ciągu liczb pseudolosowych W^j.

W eksperymencie zastosowano generator liczb pseudolosowych wypróbowany w doświadczeniu opisanym w podrozdziale V/2. Wytwarzał on ciągi liczb o rozkładzie dyskretnym równomiernym.

Dzięki zastosowanym "międzyprzesunięciem" (patrz podrozdział V/2) kolejne liczby pseudolosowe były praktycznie nieskorelowane.

C e l e m eksperymentu było sprawdzenie twierdzenia, że zbiory liczb $\approx{X}$ charakteryzujące się taką samą wartością średnią, ale różniące się pod względem parametru A (czyli pod względem wartości średniokwadratowej), prowadzą do wyników o tej samej wartości oczekiwanej, ale różnych wariancjach zależnych od A wg wzoru (2.54).

K o n c e p c j a doświadczenia była następująca: Omawianą procedurę komparacyjną postanowiono zasymulować z różnymi zbiorami $\approx{X}$ zawierającymi z n a n e liczby. Zbiory te powinny być tak dobrane, by:

- były jednakowo liczne,
- charakteryzowały się jednakową wartością średnią,
- charakteryzowały się różnymi wartościami parametru A.

W przypadku każdego z tych zbiorów należało sprawdzić, czy wartość oczekiwana E(R) wyniku symulacji (5.17) jest równa wartości średniej liczb będących elementami zbioru. Poza tym należało zbadać, czy wartość wariancji wyniku estymowana statystycznie na podstawie eksperymentu, jest powiązana z wartością parametru A w sposób opisany za pomocą wzoru (2.54).

W eksperymencie wykorzystano program symulujący komparację stochastyczną typu "większy - mniejszy", opracowany w ramach doświadczenia opisanego w podrozdziale V/2 (porównaj dodatek 7 c) (dodatek 7d). Program ten zmodyfikowano nieznacznie, gdyż zbiór $\approx{X}$ imitujący zbiór $\approx{U}$ napięć mierzonych z założenia miał być teraz więcej niż jednoelementowy. Testowe zbiory liczbowe $\approx{X}$ składały się - dla prostoty - tylko z dwóch liczb:

$$\tilde{\tilde{X}} = \{X_1, X_2\} . \qquad (5.18)$$

Porównywano je z liczbami losowymi W^j $(j = 1, 2, \ldots, L)$ na przemian. Zbiór $\tilde{\tilde{X}}_p$ miał więc postać:

$$\tilde{\tilde{X}}_p = \{\underbrace{X_1, X_2, X_1, X_2, \ldots, X_1, X_2}_{\text{L razy}}\} \qquad (5.19)$$

Dzięki zastosowanemu sposobowi wykonywania porównań, wartości momentów w obu zbiorach: $\tilde{\tilde{X}}$ oraz $\tilde{\tilde{X}}_p$ były takie same, ale liczba L porównań wykonywanych w ramach jednej procedury musiała być parzysta. Przyjęto L = 10 000.

Zmieniając zestaw liczb X_1, X_2 kreowano różne zbiory $\tilde{\tilde{X}}$. Zawsze jednak liczby dobierano tak, by średnia $\frac{X_1 + X_2}{2}$ była równa z góry ustalonej wartości. Zastosowane zestawy liczb X_1 i X_2 zawierają dwie pierwsze kolumny tabeli 5.9.

Jak widać wartość średnia obu liczb wynosi zawsze 127. Wybór ten nie był przypadkowy. Ponieważ symulacja odbywała się przy użyciu minikomputera o długości słowa równej 8 bitów (SDK - 8085, Intel), liczby X_1, X_2, W^j zapisane w systemie dziesiętnym mogły przybierać wartości naturalne od 0 do 255. Przyjęcie więc wartości średniej w zbiorze $\tilde{\tilde{X}}$ równej w przybliżeniu połowie zakresu możliwych zmian liczb X_1 oraz X_2, stwarzało możliwość regulacji wartości średniokwadratowej tego zbioru, a także wartości parametru A, w stosunkowo szerokich granicach. Istotnie: jak widać ze wzoru (2.55) współczynnik A może zmieniać się teoretycznie w zakresie od 0 do 0,25. Uzyskiwany w eksperymencie zakres jego zmian wynosił od ok. 0,0039 do 0,2500 (tabela 5.9, kolumna "A").

Tabela 5.9. Zależność wariancji stanu końcowego licznika L_2 od wartości parametru A :
$D^2(L_2)$ - wartości wariancji obliczone na podstawie modelu matematycznego
$\hat{S}^2_{L_2}$ - wartości wariancji z próby estymowane na podstawie eksperymentu symulacyjnego
L = 10 000.

Lp.	X_1	X_2	p_1	p_2	A wg (5.22)	$D^2(L_2)$ wg(5.20)	estymacja statystyczna wariancji stanu końcowego licznika L_2: ocena punktowa $\hat{S}^2_{L_2}$ wg(5.10) (5.11)	ocena przedziałowa γ_u =0,997 m=200 wg (D5-13)	Uwagi
1	127	127	0,5000	0,5000	0,2500	2500	2240	1700 ; 3300	$\bar{L}_2$ = 5000
2	96	158	0,3789	0,6211	0,2353	2350	2440	1800 ; 3500	$\bar{L}_2$ = 5005
3	80	174	0,3164	0,6836	0,2163	2160	2280	1700 ; 3300	$\bar{L}_2$ = 5000
4	64	190	0,2539	0,7461	0,1894	1890	1800	1300 ; 2600	$\bar{L}_2$ = 4996
5	48	206	0,1914	0,8086	0,1548	1550	1360	1000 ; 2000	$\bar{L}_2$ = 5005
6	32	222	0,1289	0,8711	0,1123	1120	1260	970 ; 1900	$\bar{L}_2$ = 4998
7	21	233	0,0859	0,9141	0,07855	786	752	570 ; 1100	$\bar{L}_2$ = 5001
8	12	242	0,0508	0,9492	0,04820	482	510	390 ; 730	$\bar{L}_2$ = 5000
9	0	254	0,0039	0,9961	0,003891	38,9	41,9	32 ; 60	$\bar{L}_2$ = 4999

W przypadku każdego z wymienionych w tabeli 5.9 zestawu liczb X_1, X_2, program symulacyjny powtarzał procedurę komparacyjną automatycznie m = 200 razy. Na tej podstawie estymowano właściwości statystyczne zmiennej losowej stanu końcowego licznika L_2. Obliczano mianowicie średnią z próby $\bar{L}_2$ oraz wariancję z próby $\hat{S}^2_{L_2}$ stanów końcowych tego licznika. Estymacji przedziałowej wariancji stanu końcowego licznika L_2 dokonano wg wzoru (D5-13) wyprowadzonego w dodatku 5.

Otrzymane wyniki zawierają odpowiednie kolumny tabeli 5.9.

Na podstawie wartości estymatora $\hat{S}^2_{L_2}$ można by określić wartości wariancji z próby $\hat{S}^2_R$ wyników (5.17). Wymagało by to pomnożenia otrzymanych wartości $\hat{S}^2_{L_2}$ przez współczynnik $\frac{W^2_{max}}{L^2}$ (porównaj (5.12); W_{max} - największa liczba odtwarzana przez wzorzec losowy). Prostszym wyjściem wydaje się jednak określenie związku teoretycznego między wartością parametru A, a wariancją stanu końcowego licznika L_2. Ze wzorów (2.54) i (2.18) wynika, że:

$$D^2(L_2) = L \cdot A \quad . \tag{5.20}$$

Zależność powyższa jest odpowiednikiem równania (2.54) uzyskanego z modelu matematycznego rozważanej procedury tyle, że dotyczy wariancji zmiennej losowej L_2, a nie R. Zastąpienie weryfikacji doświadczalnej związku (2.54) weryfikacją wzoru (5.20) pozwala uniknąć dwukrotnego mnożenia liczb uzyskiwanych z obliczeń i z symulacji przez ten sam współczynnik $\frac{W^2_{max}}{L^2}$.

Prawdopodobieństwa p_1, p_2 sukcesu podczas porównywania

liczb X_1 i X_2 z wzorcowymi W^j obliczano wg wzorów (porównaj (5.15), (5.16)):

$$p_1 = P(W^j \leqslant X_1) = \frac{X_1 + 1}{256}$$
$$p_2 = P(W^j \leqslant X_2) = \frac{X_2 + 1}{256}, \quad j = 1, 2, \ldots, L. \tag{5.21}$$

Obliczanie współczynnika A odbywało się zgodnie ze wzorem definicyjnym (2.55). W rozważanym przypadku, gdy zbiór $\tilde{\tilde{X}}_p$ miał postać (5.19) równanie (2.55) przybiera formę:

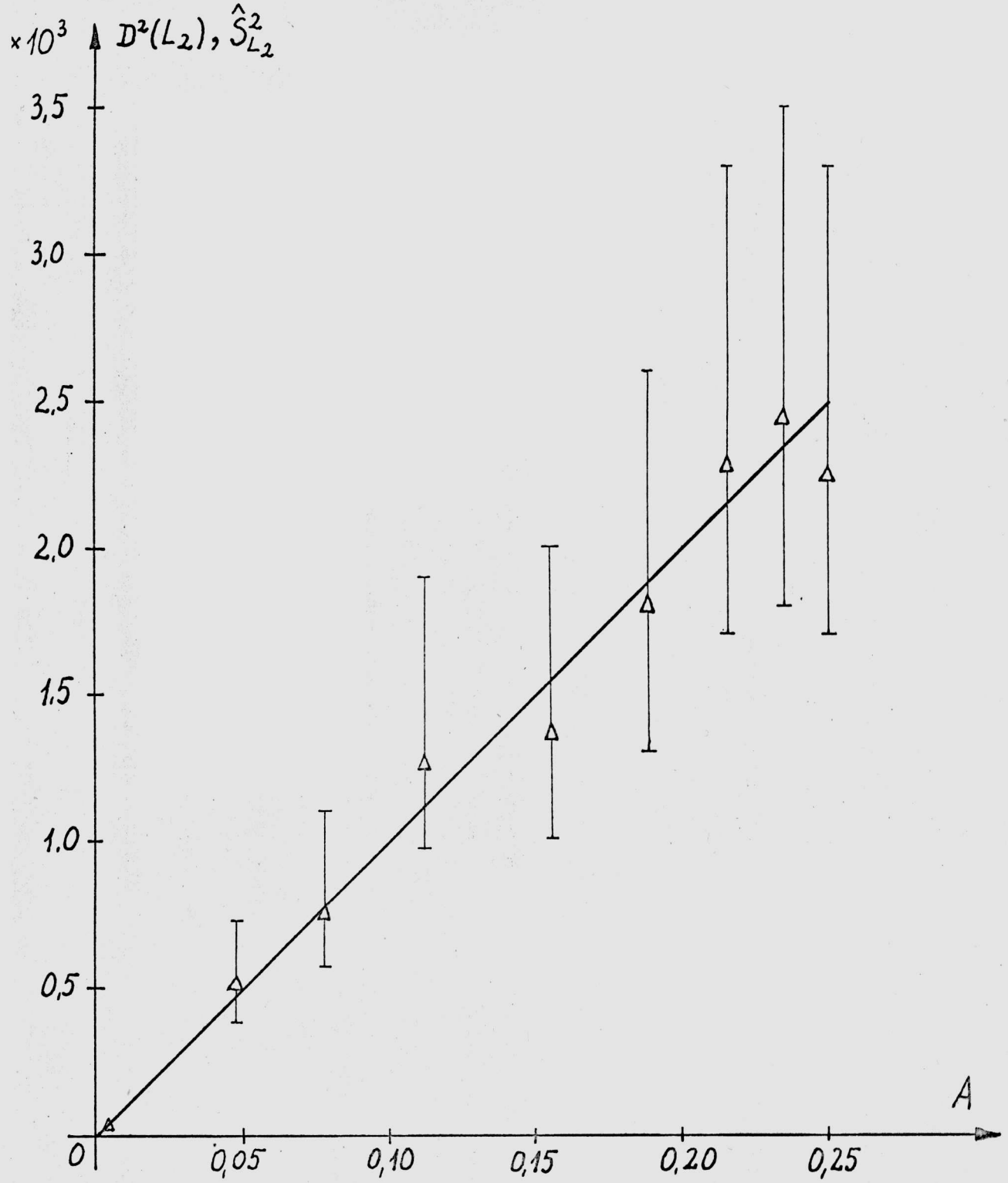
$$A = \frac{1}{10\,000}\left[5\,000\, p_1(1 - p_1) + 5\,000\, p_2(1 - p_2)\right] =$$
$$= \frac{p_1(1 - p_1) + p_2(1 - p_2)}{2} \tag{5.22}$$

Wartości wariancji stanu końcowego licznika L_2 wynikające z rozważań teoretycznych obliczono wg równania (5.20). Zawiera je kolumna "$D^2(L_2)$" tabeli 5.9.

Jak widać z zapisów w kolumnie "Uwagi" tabeli 5.9, we wszystkich przetestowanych zestawach liczb X_1 oraz X_2, wartość końcowa stanu licznika L_2 wynosiła średnio ok. 5 000. Gdyby rezultaty te podstawić do wzoru (5.17) otrzymało by się, że wynik pomiaru przybierał średnio wartości równe ok. 127 czyli tyle, ile wynosiła wartość średnia w testowych zbiorach liczbowych $\tilde{\tilde{X}}$. Choć przeprowadzone rozumowanie nie jest kompletne (należałoby posłużyć się tu estymacją przedziałową E(R)), to jednak wynika z niego, że wartość oczekiwana wyniku R symulowanej procedury komparacyjnej jest równa wartości średniej (zbioru) liczb $\tilde{\tilde{X}}_p$ porównanych

z wzorcowymi W^j w kolejnych taktach komparacji. Z porównania poszczególnych wartości zamieszczonych w kolumnie "$\hat{S}^2_{L_2}$" tabeli 5.9 wynika, że - zgodnie z rozważaniami teoretycznymi - różne zbiory liczb $\tilde{\tilde{X}}_p$ choć charakteryzują się taką samą wartością średnią, prowadzą do różnych wartości wariancji stanu końcowego licznika L_2, a więc tym samym - do różnych wartości wariancji wyniku R. Największą wartość wariancji dają te spośród zbiorów $\tilde{\tilde{X}}_p$ charakteryzujących się określoną wartością średnią, które zawierają liczby jednakowe (tabela 5.9, lp. 1).

Rezultaty pomiarów i obliczeń zamieszczone w tabeli 5.9 zobrazowano na rys. 5.7. Jak widać, przewidziana na podstawie rozważań teoretycznych zależność (5.20) znalazła potwierdzenie w praktyce: Wariancja stanu końcowego licznika L_2, a więc także wariancja wyniku pomiaru uzyskanego za pomocą komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy", są proporcjonalne do wartości współczynnika A charakteryzującego właściwości zbioru liczb (napięć) porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach procedury.



Rys. 5.7. Zależność wariancji stanu końcowego licznika L_2 od wartości parametru A :

——— - wartości wariancji $D^2/L_2/$ uzyskane na podstawie modelu matematycznego - tabela 5.9 ,

⊢△⊣ - wartości wariancji z próby $\hat{S}^2_{L_2}$ estymowane na podstawie eksperymentu symulacyjnego i odpowiadające im przedziały niepewności - tabela 5.9.

Przypisy

[1] Instrukcja obsługi. Opis techniczny woltomierza cyfrowego typ V541. Zjednoczone Zakłady Elektronicznej Aparatury Pomiarowej MERATRONIK.

[2] Jeżeli wystarczająco stałą realizację fizyczną napięcia $\tilde{U}_1$ zmierzono dwoma woltomierzami uzyskując wyniki:

$$U_1' \pm \Delta' \quad \text{oraz} \quad U_1'' \pm \Delta'' ,$$

to wyniki powyższe uważa się tu za n i e s p r z e c z n e , gdy część wspólna przedziałów:

$$(U_1' - \Delta'; U_1' + \Delta') \quad \text{oraz} \quad (U_1'' - \Delta''; U_1'' + \Delta'')$$

nie jest zbiorem pustym.

[3] Por. np. Pawłowski Z., Statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1980, s. 62, 65 i 103.

[4] Optymalnym nazywa się tu takie sprzężenie zwrotne realizujące funkcję sumy "modulo-2", które zapewnia generowanie sekwencji pseudolosowej o maksymalnej długości: $2^b - 1$, gdzie b - długość rejestru przesuwnego. Tabele sprzężeń optymalnych można znaleźć m.in. w artykułach:
MacWilliams F.J., Sloane N.J.A., Pseudo-Random Sequences and Arrays. "Proceedings of the IEEE", December 1976, s. 1715-1729.
Wustmann G., Erzeugung von Pseudo-Zufallsfolgen mit binären Schieberegistern. "Elektronik", 18, Sept. 1982, s. 79 - 82.

[5] Pratt A.R., Fast Pseudo-Random Numbers Generators for Computers.
"The Radio and Elektronic Engineer", vol. 40, No 2, August 1970, s. 83 - 88.

Rozdział VI

Podsumowanie

1. Streszczenie wyników pracy

Komparacja pomiarowa jest podstawowym elementem każdego procesu pomiarowego. I s t o t ą komparacji jest sekwencja porównań dwóch realizacji tej samej wielkości fizycznej, z których jedna jest odtwarzana przez wzorzec; p r z e d m i o t e m komparacji jest zbiór $\approx{U}_p$ realizacji porównywanych z wzorcowymi, zaś w y n i k i e m - wektor K rezultatów poszczególnych porównań.

Uwaga: wszystkie analizy wykonano przy założeniu, że wielkością mierzoną jest napięcie elektryczne $\tilde{U}$. Postąpiono w ten sposób m.in. dlatego, ponieważ doświadczalne sprawdzenie rezultatów analiz teoretycznych dotyczyło pomiarów napięć. Otrzymane wyniki pozostają jednak aktualne także w przypadku dowolnej innej wielkości addytywnej $\tilde{V}$.

Formy komparacji stosowane dotychczas najczęściej polegały na porównywaniu realizacji mierzonej z wzorcową rozwijaną w sposób uporządkowany, zdeterminowany. Możliwe jest jednak również porównywanie napięć ze zbioru $\approx{U}_p$ z losowo wybranymi realizacjami wzorcowymi. Jest to jedna z możliwych form zjawiska komparacji pomiarowej - stochastyczna komparacja pomiarowa. Komparację taką traktowano dotychczas w różny sposób: jako przetwarzanie analogowo-stochastyczne, przetwarzanie stochastyczno-ergodyczne czy jako kodowanie stochastyczne.

Klasyfikacja procedur komparacji pomiarowej wg różnych kryteriów wskazuje, że stochastyczna komparacja pomiarowa może

występować w dwóch postaciach; jako stochastyczna komparacja pomiarowa typu przeglądowego i poszukiwawczego.

W pracy zajmowano się komparacją przeglądową typu "większy - mniejszy". Sformułowano hipotezę:
Istnieje możliwość określenia na drodze teoretycznej właściwości metrologicznych stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" oraz wskazania na tej podstawie obszarów zastosowań, w których ten rodzaj komparacji jest korzystny.

Ważnym etapem dowodu tezy było przyjęcie metodyki analiz teoretycznych. Ponieważ - zgodnie ze sformułowaną definicją - przedmiotem komparacji jest zbiór $\widetilde{U}_p$ realizacji porównywanych z wzorcowymi w poszczególnych jej taktach, wszystkie analizy wpływu właściwości procedury komparacyjnej na wynik pomiaru rozpoczynano od tego właśnie zbioru. Zaletą takiego podejścia jest możliwość analizowania wpływu procedury komparacji pomiarowej i elementów ją realizujących na wynik pomiaru, w oderwaniu od innych czynników wpływających.
Dowód tezy pracy przeprowadzono rozważając teoretycznie:
- zagadnienia związane z podstawowymi właściwościami metrologicznymi komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy",
- zagadnienia związane z wpływem właściwości bloków układu realizującego komparację "większy - mniejszy" na jej właściwości metrologiczne,
- zagadnienia związane z możliwością zastosowań omawianej komparacji w praktyce.

W przypadku zastosowania wzorca losowego dostarczającego napięcia o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa, kompara-

cja stochastyczna typu "większy - mniejszy" umożliwia pomiar wartości pojedynczej realizacji napięcia. Podstawowe jej właściwości metrologiczne można scharakteryzować za pomocą pojęć: precyzji, błędu komparacji (Δ_k) i czasu jej trwania (T_k). Wynik pomiaru R uzyskany dzięki procedurze komparacji stochastycznej typu "większy - mniejszy" jest zmienną losową i to nawet wtedy, gdy elementy użyte do jej realizacji są idealne. W języku metrologii klasycznej oznacza to, że wynik R jest nieprecyzyjny. Nieprecyzyjność tę można scharakteryzować za pomocą składowej losowej Δ_1 błędu komparacji, która jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z liczby L porównań wykonanych w ramach procedury.

Różnicę wartości oczekiwanej E(R) wyniku pomiaru i wartości U_1 należnej mierzonemu napięciu $\tilde{U}_1$ wg wcześniej przyjętej skali pomiarowej S_U można interpretować jako składową systematyczną Δ_s błędu komparacji. W przypadku użycia, podczas pomiaru wartości pojedynczej realizacji napięcia, wzorca odtwarzającego ciągi napięć o rozkładzie idealnie równomiernym oraz zastosowania bezhisterezowego i pozbawionego progu nieczułości układu porównania napięć, składowa systematyczna błędu komparacji ma wartość zerową. Gdy powyższe założenia nie są spełnione, błąd systematyczny ma wartość różną od zera.

Podczas pomiaru wartości pojedynczego napięcia, czas trwania procedury komparacyjnej typu "większy - mniejszy" zależy m.in. od dopuszczalnej wartości składowej losowej błędu komparacji. Przy określonych wartościach dopuszczalnych błędu komparacji, procedura stochastyczna przeglądowa typu "większy - mniejszy" wymaga większej liczby porównań - a więc dłuższego czasu komparowania - niż odpowiadająca jej procedura deterministyczna, po-

szukiwawcza.

W przypadku, gdy zbiór $\approx{U}$ napięć mierzonych składa się z wielu realizacji napięcia, omawiana procedura komparacyjna może być wykorzystana do pomiaru wartości kolejnych momentów tego zbioru; trzeba tylko dobrać odpowiednio rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych. Pomiar wartości momentów odbywa się bez określania wartości poszczególnych napięć zbioru $\approx{U}$. Wynik R pomiaru momentów jest zmienną losową, podobnie jak w przypadku, gdy zbiór $\approx{U}$ jest jednoelementowy. Oznacza to, że wynik R jest nieprecyzyjny. Brak precyzji wyniku można scharakteryzować za pomocą składowej losowej Δ_1 błędu komparacji. Wartość błędu losowego Δ_1 jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z liczby L porównań wykonanych w ramach komparacji. Błąd Δ_1 zależy nie tylko od wartości mierzonego momentu $\gamma_n(\approx{U}_p)$ rzędu n, ale także od wartości momentu $\gamma_{2n}(\approx{U}_p)$, rzędu 2n. Oznacza to, że zbiory $\approx{U}_p$ charakteryzujące się określoną wartością momentu $\gamma_n(\approx{U}_p)$, nie muszą być ekwiwalentne pod względem wartości błędów losowych. Najmniej korzystne są zbiory $\approx{U}_p$ zawierające napięcia jednakowe:

$$\approx{U}_p = \{\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_1\} .$$

W sytuacji, gdy przedmiotem pomiaru jest wartość momentu rzędu n zbioru $\approx{U}$ napięć mierzonych, zbiór $\approx{U}_p$ napięć poddawanych komparacji nie musi być identyczny z $\approx{U}$. Wystarczy jeżeli:

$$\gamma_n(\approx{U}_p) = \gamma_n(\approx{U}) ,$$

co umożliwia dobranie takiego zbioru $\approx{U}_p$, który zapewnia odpo-

wiednio małą wartość składowej locowej Δ_1 błędu komparacji. Wniosek ten można rozszerzyć na pomiary parametrów uśrednionych sygnałów: jeżeli przedmiotem zainteresowania jest wartość określonego parametru uśrednionego sygnału $\widetilde{U}(t)$, to pomiarowi można poddać zarówno sygnał $\widetilde{U}(t)$, jak i dowolny inny sygnał równoważny jednak z sygnałem $\widetilde{U}(t)$ pod względem rozważanego parametru uśrednionego.

Odchylanie się rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od rozkładu najbardziej pożądanego podczas pomiaru momentu określonego rzędu jest jednym z możliwych źródeł składowej systematycznej błędu komparacji (Δ^w_s).
W przypadku, gdy wzorzec wytwarza napięcia charakteryzujące się dyskretnym, równomiernym rozkładem prawdopodobieństwa, zamiast rozkładem równomiernym ciągłym, wartość graniczna błędu systematycznego wywołanego tym faktem wynosi:

$$\Delta^w_{s\ max} = \frac{U_{w\ max}}{n},$$

gdzie: $U_{w\ max}$ - wartość odpowiadająca największej realizacji wzorcowej,

n - liczba stanów napięcia odtwarzanych przez wzorzec

Posługiwanie się wzorcem wytwarzającym napięcia o dyskretnym, ale rozmytym rozkładzie prawdopodobieństwa może - przy spełnieniu odpowiednich warunków - spowodować zmniejszenie wartości granicznej błędu $\Delta^w_{s\ max}$ w stosunku do sytuacji, gdy wzorzec wytwarza napięcia ze zbioru dyskretnego.

Zastosowanie wzorca wybierającego kolejne napięcia wzorcowe

według schematu losowania warstwowego, proporcjonalnego umożliwia, przy odpowiednim podziale zbioru $\approx{U}_w$ napięć odtwarzanych przez wzorzec na warstwy, zmniejszenie wartości składowej losowej Δ_1 błędu komparacji $\frac{1}{s}$ razy w stosunku do schematu losowania nieograniczonego (s - liczba warstw).

Niedokładność określenia wartości $U_{w\,max}$ i $U_{w\,min}$ należnych największej i najmniejszej realizacji odtwarzanej przez wzorzec są źródłem dodatkowej składowej błędu komparacji Δ^z_s.

Histereza detektora relacji porządku powoduje zawężenie zakresu napięć, które mogą być zmierzone za pomocą układu realizującego komparację stochastyczną typu "większy - mniejszy", a także powoduje pojawienie się dodatkowej składowej błędu komparacji o charakterze systematycznym Δ^h_s. Błąd ten ma, w całym zakresie mierzonych napięć, wartość mniejszą od:

$$\max\left\{|\underline{h}|,\ |\bar{h}|\right\},$$

gdzie: $\underline{h}$ i $\bar{h}$ - dolny i górny (odpowiednio) próg przełączania układu porównania napięć.
Histereza układu porównania ma znikomy wpływ na wartość składowej losowej Δ_1 błędu komparacji.

Stosowanie stochastycznej komparacji przeglądowej do pomiaru wartości pojedynczych realizacji napięcia jest w pełni możliwe, choć mało efektywne pod względem czasowym. Przy użyciu szybkodziałających, produkowanych już dzisiaj elementów elektronicznych czas trwania jednego taktu procedury może zostać skrócony nawet do T_t = 50 ns. Czas T_k trwania komparacji podczas pomiaru wartości pojedynczego napięcia zależy od dopuszczalnej

wartości $\delta_{1\,max}$ unormowanego granicznego błędu losowego. Zmniejszenie błędu $\delta_{1\,max}$ do wartości 10^{-3} jest dziś (T_t = 50 ns) możliwe przy czasie trwania komparacji równym ok. 0,1 s. Przy dopuszczalnej wartości $\delta_{1\,max}$ równej 10^{-2}, T_k może być skrócony do ok. 1 ms.

Stochastyczna komparacja przeglądowa typu "większy - mniejszy" wyjątkowo dobrze nadaje się do pomiaru wartości momentów w zbiorach $\approx{U}$ napięć mierzonych o dużej liczności (rzędu 10^6 i więcej). Z sytuacją taką ma się do czynienia np. podczas pomiaru momentów sygnałów napięciowych o takich właściwościach widmowych, że wymagają częstego próbkowania, a jednocześnie - uśredniania w stosunkowo długim czasie.

Ważną zaletą uśredniania przy użyciu komparacji typu "większy - mniejszy" jest krótki czas akwizycji T_{akw}^{stoch} jednego napięcia uśrednianego. W przypadku, gdy każde z napięć ze zbioru $\approx{U}$ jest jednokrotnie porównywane z napięciem wzorcowym, czas ten jest równy trwaniu T_t jednego taktu procedury i przy pomiarze wartości średniej może być dziś skrócony do ok. 50 ns. Jeżeli napięcia mierzone ze zbioru $\approx{U}$ są realizacjami chwilowymi sygnału $\sim{U}(t)$, to czas akwizycji T_{akw}^{stoch} określa maksymalną częstotliwość w widmie uśrednianego sygnału. Częstotliwość ta wynosi:

- f_{max} = 10 MHz, przy pomiarze wartości średniej,
- f_{max} = 8,5 MHz, przy pomiarze wartości średniokwadratowej.

Porównanie pod względem f_{max} omawianej formy procedury komparacyjnej z metodą uśredniania w dziedzinie liczb w wersji "on line" prowadzi do wniosku, że podczas pomiaru wartości średniej obie metody mają zbliżone właściwości. Przy pomiarze momentów wyższych rzędów komparacja stochastyczna typu "większy - mniejszy" j e s t s z y b s z a , pozwala więc na analizowanie

sygnałów o wyższych częstotliwościach granicznych.

Stochastyczna komparacja przeglądowa typu "większy - mniejszy" również bardzo dobrze nadaje się do pomiarów momentów zbiorów napięć w wielu kanałach, ponieważ umożliwia "uwspólnienie" losowego wzorca napięcia - najdroższego elementu w układzie realizującym tę komparację. "Uwspólnienie" to nie wiąże się z pracą wzorca w systemie podziału czasu. Właściwości dynamiczne poszczególnych torów są więc takie same jak gdyby pozostałe tory nie istniały. Odstęp próbkowania T_s każdego kanału jest równy czasowi akwizycji jednego napięcia T_{akw}^{stoch} i nie zależy od liczby M kanałów.

Stosując w praktyce omawianą komparację warto niekiedy poprzedzić ją procedurą komparacyjną deterministyczną, poszukiwawczą, uzależnioną wynikiem detekcji. Umożliwia to szybkie zawężenie - przed rozpoczęciem komparacji typu "większy - mniejszy" - zakresu napięć odtwarzanych przez wzorzec, a tą drogą - zmniejszenie wartości składowej losowej Δ_1 błędu komparacji inaczej niż przez zwiększanie liczby porównań L.

Powyższe wnioski cząstkowe stanowią dowód prawdziwości tezy pracy przewidującej możliwość określenia na drodze teoretycznej właściwości metrologicznych stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" oraz wskazania na tej podstawie obszarów zastosowań, w których ten rodzaj komparacji jest korzystny.

Uznano, że elementem dowodu tezy pracy powinna być również wyrywkowa choćby weryfikacja doświadczalna wyników uzyskanych na drodze teoretycznej. Wykonane eksperymenty potwierdziły przy-

datność omawianej formy komparacji do pomiaru wartości pojedynczych realizacji napięcia. Potwierdziły one również wniosek uzyskany teoretycznie, że podczas pomiaru wartości średniej $\gamma_1(\tilde{\tilde{U}})$ wariancja wyniku pomiaru zależy nie tylko od mierzonego momentu pierwszego rzędu, ale także od wartości momentu drugiego rzędu. Stwierdzono również, iż największą wartość wariancji wyniku dają te spośród zbiorów $\tilde{\tilde{U}}$ charakteryzujących się określoną wartością średnią, które zawierają napięcia jednakowe.

Przy sposobności wykonywania niniejszej pracy uzyskano też informacje o właściwościach źródeł napięć pseudolosowych. Stwierdzono, że ciągi liczb losowych uzyskiwane z rejestrów przesuwnych z liniowym, optymalnym sprzężeniem zwrotnym w kolejnych taktach ich pracy są skorelowane, co uniemożliwiło wykorzystanie takich generatorów do doświadczalnej weryfikacji modeli matematycznych komparacji, które uzyskano przy założeniu, że kolejne napięcia $\tilde{U}_w^j$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$ są niezależne. Pobieranie ∞ K-tej liczby losowej - zgodnie z propozycją A.R. Pratt'a - znacznie zmniejsza wspomniane skorelowanie.

2. Wnioski

a) Z pracy wynika, że stosowanie komparacji z realizacjami wzorcowymi dostarczanymi przez źródła stochastyczne j e s t d z i ś m o ż l i w e dzięki istnieniu szybkodziałających elementów elektronicznych umożliwiających wykonanie takiej komparacji w stosunkowo krótkim czasie.

b) Komparacja stochastyczna p o z w a l a n a m i e r z e n i e w jednej procedurze kolejnych momentów w zbiorach realizacji wielkości addytywnych.
Wykorzystanie tej możliwości do pomiaru momentów wielkości zmiennych w czasie wymaga jednak dodatkowego uwzględnienia warunków reprezentatywności zbioru realizacji dla badanego sygnału. Szczególne znaczenie ma to w przypadku wielkości zmieniających się w sposób losowy. Wydaje się jednak, że rozważana forma komparacji - kompracja stochastyczna - może być wykorzystywana do pomiarów wszystkich rodzajów wielkości zmiennych: tak deterministycznych jak i stochastycznych.

c) Stochastyczna komparacja przeglądowa typu "większy - mniejszy" m a w y r a ź n e z a l e t y w stosunku do komparacji deterministycznej (uporządkowane podawanie realizacji wzorcowych) w przypadku pomiaru momentów w licznych zbiorach napięć, których poszczególne realizacje pojawiają się w krótkich odstępach czasu, a także w przypadku pomiaru momentów w wielu zbiorach napięć (pomiary wielokanałowe).

d) Warunkiem praktycznej stosowalności omawianej formy komparacji jest rozwiązanie - równocześnie z opracowywaniem teorii komparacji stochastycznej - zagadnienia odpowiedniej a p a r a t u r y .

Przede wszystkim chodzi tu o s k o n s t r u o w a n i e l o s o w y c h ź r ó d e ł n a p i ę ć o odpowiednich właściwościach probabilistycznych takich jak: potrzebny rozkład prawdopodobieństwa, możliwość wytwarzania w krótkich odstępach czasu napięć nie wykazujących praktycznie korelacji, stałość właściwości w czasie, ich odporność na wpływ czynników zewnętrznych itp.

Możliwość zastosowania w pomiarach wzorców losowych wymaga ponadto modyfikacji ważnego w metrologii pojęcia "wzorzec", gdyż obecne jego definicje wydają się niewystarczające.

e) Problemy związane ze stochastyczną komparacją pomiarową, choć podejmowane już niejednokrotnie, wymagają - zdaniem autora - d a l s z y c h b a d a ń . Powinny one zawierać zarówno badania szczegółowe jak i uogólnienia.

W zakresie badań szczegółowych warto by chyba podjąć następujące kwestie:

- W związku ze stwierdzeniem, że zbiór $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach procedury nie musi być wcale identyczny ze zbiorem $\approx{U}$ napięć mierzonych, a ważne jest jedynie by były one ekwiwalentne pod względem mierzonego momentu, celowym wydaje się dobranie takich algorytmów transpozycji zbiorów napięć, które zachowywałyby stałą wartość momentów określonego rzędu. Przykładowe roz-

ważania na ten temat zawarte w niniejszej pracy (porównaj dodatek 2) dotyczą tylko momentu pierwszego rzędu. Zdaniem autora warto rozszerzyć je także na momenty wyższych rzędów.

- W zakresie badań zmierzających do uzyskania losowych wzorców napięcia o wymaganej jakości warto by chyba zbadać, czy nie dało by się - w przypadku stosowania wzorca losowego zawierającego przetwornik c/a (patrz dodatek 8) - skrócić czasu oczekiwania na ustalenie się napięcia na wyjściu tego przetwornika w stosunku do danych katalogowych przetworników.
- Analizowana w tej pracy forma komparacji stochastycznej nie jest jedyną możliwą. Należy podejmować podobne badania i n n y c h jej typów. Zdaniem autora, interesujące mogłyby być wyniki badań stochastycznej komparacji poszukiwawczej uzależnionej wynikiem detekcji (porównaj przykład 1.5).

Oprócz badań szczegółowych, istotnym wydaje się też dokonywanie u o g ó l n i e ń właściwości komparacji stochastycznej, opracowanie jej całościowego modelu formalnego, a także globalne porównanie - na podstawie wyników badań szczegółowych - właściwości komparacji stochastycznej i deterministycznej.

Literatura cytowana w pracy:

- Ajdukiewicz K., Logika pragmatyczna, PWN, Warszawa 1975.
- Badźmirowski K., Kompensacyjne przetworniki A/C z wykorzystaniem sygnałów przypadkowych jako sygnałów wzorcowych. "Prace Przemysłowego Instytutu Elektroniki", nr 1-2/1973.
- Badźmirowski K., Problemy metrologiczne w przetwornikach analogowo-cyfrowych. "Prace Przemysłowego Instytutu Elektroniki", nr 4/1974.
- Badźmirowski K., Hejn K., Error enalysis of an indirect DA converter using intermediate signal in the form of binary pseudo-random process. [w:] Practical Measurement for Improving Efficiency. Acta IMEKO 1976 [...], Akadémiai Kiadó, Budapest 1977, vol. 1, s. 193 - 200.
- Badźmirowski K., Hejn K., Wykorzystanie kodowania stochastycznego do arytmetycznej obróbki informacji. [w:] Materiały z Sympozjum nt. Modele matematyczne systemów i procedur pomiarowych. Wisła - styczeń 1975. Komitet Metrologii i Danych dla Nauki i Techniki PAN, Gliwice 1974, s. 143 - 156.
- Badźmirowski K., Karkowska H., Karkowski Z., Cyfrowe systemy pomiarowe. WNT, Warszawa 1979.
- Badźmirowski K., Pieńkos J., Zagadnienia współpracy przetworników C/A i A/C z systemami mikroprocesorowymi. [w:] Systemy mikroprocesorowe, Z.6, Przemysłowy Instytut Elektroniki, Warszawa 1981, s. 28 - 45.
- Badźmirowski K., Pieńkos J., Piestrzyński W., Cyfrowe układy MOS - LSI. WKiŁ, Warszawa 1979.

- Badźmirowski K., Pieńkos J., Piestrzyński W., Systemy mikroprocesorowe. WNT, Warszawa 1981.
- Badźmirowski K., Sobczak S., Algorytmiczne metody korekcji wpływu zakłóceń impulsowych wpływających na dokładność kompensacyjnych przetworników A/C. [w:] Materiały z Sympozjum nt. Modele matematyczne systemów i procedur pomiarowych, Wisła - styczeń 1975. Komitet Metrologii i Danych dla Nauki i Techniki PAN, Gliwice 1974, s. 157 - 167.
- Beauchamp K.G., Przetwarzanie sygnałów metodami analogowymi i cyfrowymi. WNT, Warszawa 1978.
- Bendat J.S., Piersol A.G., Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. PWN, Warszawa 1976.
- Bénézé G., Critique de la mesure. Actualités Sc. et Ind., 527, Paris 1937. Cytuję za: Piwowarczyk T., Logiczna analiza deskrypcji pomiaru. Praca doktorska. Instytut Maszyn i Sterowania Układów Elektroenergetycznych AGH w Krakowie, Kraków 1977, s. 5 i 123.
- Bilinskij I.Ja., Mikelson A.K., Modyfikacii modelej statističeskich ispytanij. [w:] Informacionnye i izmeritel'nye ustrojstva v radioelektronike, Zinatne, Riga 1974. Cytuję za: Gonera M., Zagadnienie pomiaru współczynnika zniekształceń nieliniowych metodą próbkowania sygnałów. Praca doktorska. Przemysłowy Instytut Elektroniki, Warszawa 1981.
- Borowkow A.A., Rachunek prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa 1975.
- Ellis B., Basic concepts of measurement. Cambridge at the University Press, 1966.
- Fedorov R.F., Jakovlev V.V., Dobris G.V., Stochastičeskie

preobrazovateli informacii. Mašinostroenie, Lenigrad 1978.

- Feller W., Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa 1980.
- Finkelstein L., Foundations of measurement. [w:] Podstawowe problemy metrologii, Seminarium Szkoleniowe Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, Lubachów, 9-11 września 1976 (materiały powielane), s. 14 - 24.
- Finkelstein L., Measurement and other forms of characterisation by symbols. [w:] Proceedings of the IMEKO Colloquium on "The Nature and Scope of Measurement Science". London, 14 - 16 April 1975. International Measurement Confederation. IMEKO Secretariat, Budapest, s. 6.1.1 - 6.1.6.
- Fisz M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1967.
- Gabriel K.R., The distribution of the number of successes in a sequence of dependent trials. "Biometrika": 46/1959, s. 454 - 460.
- Gaines B.R., Stochastic computer thrives on noise. "Electronics", July 10, 1967, s. 72 - 79.
- Gladkij V.S., Verojatnostnye vyčislitel´nye modeli. Nauka, Moskva, 1973.
- Golomb S.W., Shift register sequences. Holden - Day, Inc., San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam 1967.
- Gonera M., Zagadnienie pomiaru współczynnika zniekształceń nieliniowych metodą próbkowania sygnałów. Praca doktorska. Przemysłowy Instytut Elektroniki, Warszawa 1981.
- Gotszalk R., Podstawy metrologii. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1978.

- Halliwell J., Stochastic computers solve more problems faster. "Electronic Engineering", October 1970, s. 63 - 65.
- Hasse L., Spiralski L., Szumy elementów i układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981.
- Hejn K., Zastosowanie metody Monte Carlo do teorii pewnej klasy przetworników cyfrowo-analogowych. Praca doktorska. Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawwskiej, Warszawa 1975.
- Inglot T., Ledwina T., Ławniczak Z., Materiały do ćwiczeń z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1979.
- Jaworski J., Matematyczne podstawy metrologii. WNT, Warszawa 1979.
- Jaworski J., Modele matematyczne procedur i systemów pomiarowych. Praca habilitacyjna. Instytut Elektroniki Teoretycznej i Miernictwa Elektrycznego Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1976.
- Jaworski J.,Teoria narzędzi i systemów pomiarowych jako dział metrologii teoretycznej. [w:] Sympozjum Metrologia 80. Współczesne kierunki rozwoju metrologii. Warszawa, 13 - 15 listopada 1980 r., Referaty. Centrum Uczelniano - Przemysłowe Metrologii i Systemów Pomiarowych, Politechnika Warszawska, Warszawa 1981, s. 9 - 15.
- Jellonek A., Obserwacja, pomiar, eksperyment i ich granice. [w:] Miernictwo elektroniczne w perspektywie rozwojowej. Praca zbiorowa pod kierunkiem Z. Karkowskiego. Seria: Problemy Elektroniki i Telekomunikacji nr 15, WKiŁ, Warszawa 1967, s. 8 - 39.
- Jellonek A., Zasady metrologii. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1981.

- Jellonek A., Karkowski Z., Miernictwo radiotechniczne. WNT, Warszawa 1972.
- Jellonek A. i in., Miernictwo elektryczne ogólne. Dla potrzeb telekomunikacji. Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1951.
- Jellonek A. i in., Podstawy metrologii elektrycznej i elektronicznej. PWN, Warszawa 1980.
- Juszkiewicz J., Generacja sygnału losowego o zadanej jednowymiarowej gęstości prawdopodobieństwa. Praca doktorska. Instytut Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, Komunikat nr 149, Wrocław 1975.
- Juszkiewicz J., Komparator stochastyczny KS-1. Teczka z rysunkami stanowiącymi dokumentację konstrukcyjno-użytkową urządzenia. Materiał niepublikowany, w posiadaniu dr. J. Juszkiewicza w Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej.
- Kałwak A., Badanie właściwości komparatora stochastycznego. Praca dyplomowa. Instytut Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1976.
- Karkowski Z., Miernictwo elektroniczne. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1981.
- Kazuo Kato, 10-bit a-d conversion chip manages most data-acquisition tasks. "Electronics", Vol. 56, No. 9, May 5, 1983, s. 130 - 133.
- Kotarbiński T., Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk. Ossolineum, Wrocław-Warszawa-Kraków 1961.
- Krajewski R.A., Zarys konstrukcji modelu pomiaru. Praca habilitacyjna. Instytut Elektrotechniki Morskiej i Przemysłowej Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1981.

- Kreiner M., Weiss H., Basis for application of the Campbell - method for stochastic signals. [w:] 9-th IMEKO World Congress, 24 - 28 May 1982, Berlin (West): Technological and methodological advances in measurement, Prepint, Vol. V/IV, s. 101 - 110
- Lebson S., Kaniewski J., Miernictwo elektryczne dla technikum. PWSZ, Warszawa 1971.
- Leja F., Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1976.
- Libura A.L., Nadachowski M., Przetworniki analogowo - cyfrowe. WNT, Warszawa 1973.
- Mac Williams F.J., Sloane J.A., Pseudo-Random Sequences and Arrays. "Proceedings of the IEEE", vol. 64, No. 12, December 1976, s. 1715 - 1729.
- Malikov M.F., Osnovy metrologii. Moskva 1949. Cytuję za: Piwowarczyk T., Logiczna analiza deskrypcji pomiaru. Praca doktorska. Instytut Maszyn i Sterowania Układów Elektroenergetycznych AGH w Krakowie. Kraków 1977.
- Marsaglia G., Random variables and computers. Transactions of the third Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes. Czech. Acad. Sci., Prague 1964. Cytuję za: Zieliński R., Generatory liczb losowych. Programowanie i testowanie na maszynach cyfrowych. WNT, Warszawa 1979, s. 71, 72.
- Metrologia. Nazwy i określenia. Polska Norma PN-71/N-02050, Polski Komitet Normalizacyjny. Wyd. Normalizacyjne, Warszawa 1971.
- Miłek M., Analiza i konstrukcja magnetycznego kompensatora przepływu prądu stałego w układzie porównania rezystancji. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1976.

- Mirskij G.Ja., Apparaturnoe opredelenie charakteristik slučajnych processov. Energija, Moskva 1972.
- Mirskij G.Ja., Radioélektronnye izmerenija. Energija, Moskva 1975.
- Mroziński Z., Elementy systemu mikrokomputerowego serii 8080. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1981.
- Muramatsu J., Olsen R.K., 6-bit a-d chip steps up the pace of signal processing. "Electronic Design", September 16, 1982, Vol. 30, No. 19, s. 89-97.
- Nadachowski M., Kulka Z., Analogowe układy scalone. WKiŁ, Warszawa 1979.
- Obalski J., Podstawy metrologii. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1966.
- Orzeszkowski Z., Podstawy metrologii elektrycznej. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1977.
- Papoulis A., Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972.
- Pawłowski Z., Statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1980.
- Pieńkos J., Turczyński J., Układy scalone TTL w systemach cyfrowych. WKiŁ, Warszawa 1980.
- Pieńkos J., Turczyński J., Współczesne cyfrowe układy scalone. Kierunki Rozwojowe. "Elektronizacja", 1981, z. 12, s. 5 - 51.
- Pilz R., Untersuchungen zur stochastisch-ergodischen Meßtechnik. "MSR: messen - steuern - regeln", Heft 1, Januar 1983, s. 24 - 29.
- Piotrowski J., Podstawy metrologii. PWN, Warszawa 1977.
- Piwowarczyk T., Podstawy teorii pomiaru w ujęciu mnogościowym. Zeszyty Naukowe AGH w Krakowie, nr 787, Seria: Elektryfikacja

i mechanizacja górnictwa i hutnictwa, z. 130, Kraków 1981.

- Pratt A.R., Fast Pseudo-Random Numbers Generators for Computers. "The Radio and Electronic Engineer", vol. 40, No 2, August 1970, s. 83 - 88.
- Rymaszewski R., Deterministic and stochastic comparison in a view of the basic metrology (abstract). [w:] Proceedings of the IMEKO Colloquium on "The Nature and Scope of Measurement Science". London, 14 - 16 April, 1975, International Measurement Confederation. IMEKO Secretariat, Budapest, s. 6.2.1.
- Rymaszewski R., Generator binarnego sygnału stochastycznego lub pseudostochastycznego o rozkładzie modulowanym iloczynowo. Zgłoszenie patentowe nr P-174804.
- Rymaszewski R., Model metrologiczny procesu pomiarowego. [w:] Jellonek A. i in., Podstawy metrologii elektrycznej i elektronicznej. PWN, Warszawa 1980, s. 487 - 502.
- Rymaszewski R., Modelowanie operacyjno - mnogościowe i jego zastosowanie do badań pomiarów stochastycznych. Prace Naukowe Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej. Seria: Monografie, z. 20/4, Wrocław 1982.
- Rymaszewski R., Zagadnienie przyporządkowania modeli probabilistycznych obiektom mierzonym w aspekcie miernictwa stochastycznego. [w:] Materiały z Sympozjum nt. Modele matematyczne systemów i procedur pomiarowych, Wisła - styczeń 1975. Komitet Metrologii i Danych dla Nauki i Techniki PAN, Gliwice 1974, s. 120 - 141.
- Sahner G., Wstęp do miernictwa cyfrowego. WKiŁ, Warszawa 1982.
- Sierpiński W., O teorii mnogości. PZWS, Warszawa 1964.
- Souček B., Microprocessors and Microcomputers. A Wiley-inter-

science publication. John Wiley and Sons: New York-London-Sydney-Toronto, (b.r.).

- Stachov A.P., Podchod k issledovaniju ACP s pozicij optimalnogo upravlenija. [w:] Analogo - cifrovye i cifro - analogovye pereobrazovateli. Institut Kibernetiki AN USSR, Kijev 1969.
- Sutcliffe H., Knott K.F., Standard L.F. Noise Sources using Digital Techniques and their Application to the Measurement of Noise Spectra. "The Radio and Elektronic Engineer", Vol. 40, No. 3, September 1970, s. 132 - 136.
- Szczepaniak C., Komparatory elektryczne pomiarowe. WNT, Warszawa 1979.
- Szumielewicz B., Słomski B., Styburski W., Pomiary elektroniczne w technice. WNT, Warszawa 1982.
- Wehrmann W., A new line of stochastic - ergodic measuring instruments. "NORMA Technical Information", VIII/II, 1971, s. 3 - 12.
- Wehrmann W., THE U-FUNCTIONMETER - a stochastic multimetr for signal processing and data handling. "Technical Information", NORMA Messtechnik Gesellschaft m.b.H., TI 1/72E, s. 11 - 18.
- Wehrmann W., The PROBABILITYMETER, a Stochastic - Ergodic Measurement Analyzer. "Technical Information", NORMA Messtechnik Gesellschaft m.b.H., TI 1/72 E, s. 18 - 23.
- Wehrmann W., Einführung in die stochastisch-ergodische Impulstechnik. R. Oldenbourg Verlag, Wien-München 1973.
- Wustmann G., Erzeugung von Pseudo-Zufallsfolgen mit binären Schieberegistern. "Elektronik", 18, Sept. 1982, s. 79 - 82.
- Wytrzyszczewski M., Generatory sygnałów losowych. Maszynopis niepublikowany dostępny u dr. R. Rymaszewskiego w Instytucie

Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej.

- Zaleski A., Pomiary ekstensywne i ich model geometryczny. Maszynopis niepublikowany. [w:] Raport Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, Seria: SPR, nr 65, Wrocław 1981.
- Zieliński R., Generatory liczb losowych. Programowanie i testowanie na maszynach cyfrowych. WNT, Warszawa 1979.
- Zieliński R., Metody Monte Carlo. WNT, Warszawa 1970.

Informatory przemysłowe i handlowe (katalogi, ulotki informacyjne, doniesienia handlowe, instrukcje obsługi):

- [Doniesienie handlowe firmy Maxtor Corp. (California):] $5\frac{1}{4}$ -in. unit hold 190 megabytes. "Electronics", Vol. 56, No. 9, May 5, 1983, s. 186.
- [Doniesienie handlowe firmy Siemens A.G.:] A-d converter has $500\frac{mV}{ns}$ slew rate. "Electronics", Vol. 55, No. 7, April 7, 1983, s. 75.
- Instrukcja obsługi. Opis techniczny woltomierza cyfrowego typ V541. Zjednoczone Zakłady Elektronicznej Aparatury Pomiarowej MERATRONIK.
- [Instrukcja obsługi:] SDK-85 System Design Kit User's Manual. Manual Order Number 9800451B. Intel Corporation: Santa Clara, California, 1978.
- [Instrukcja obsługi:] MCS-85 user's manual. Intel Corporation, 1978.
- Instrukcja Techniczna: Cyfrowy panel odczytowy CPO 4507. Zakłady Wytwórcze Lamp Elektrycznych im. Róży Luksemburg w Warszawie

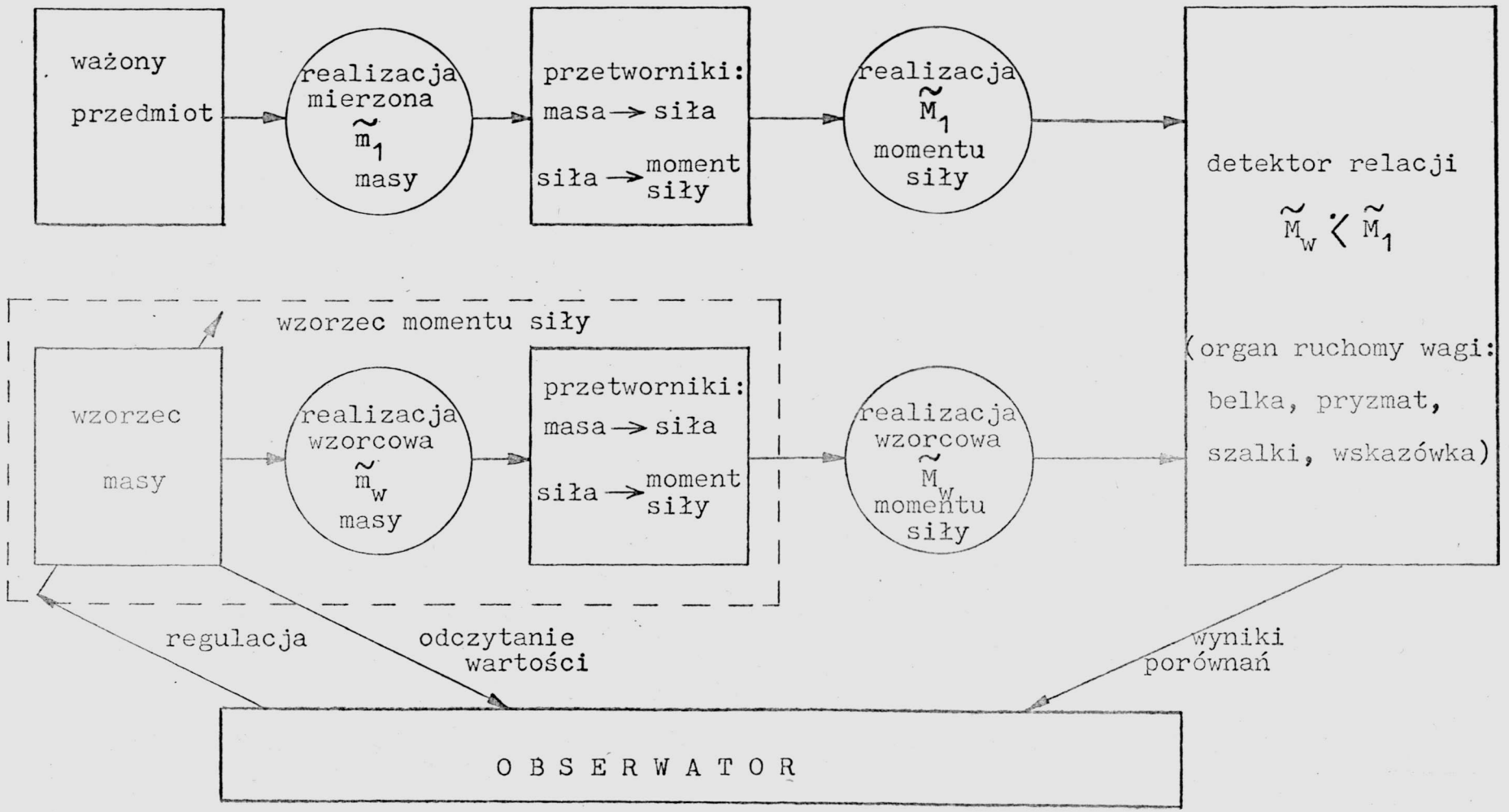
- [Katalog firmy Analog Devices:] Data-Acquisition Databook 1982, vol. I: Integrated Circuits.
- [Ulotka informacyjna firmy Fluke:] 1953 A Programmable Universal Counter/Timer 1975.
- [Katalog firmy Harris Semiconductor Products Division:] Analog Linear and Data Acquisition Products, Volume 2, Harris Corporation, 1980.
- [Katalog firmy Hewlett Packard:] Measurement/Computation. Electronic Instruments and Systems, 1982.
- [Katalog firmy Marconi:] Marconi instruments. Catalogue 1981 - 82.
- [Katalog firmy Motorola:] The Semiconductor Data Library. Volume 4: MECL Integrated Circuits, Series A. Motorola Semiconductor Products Inc., 1974.
- [Katalog firmy Philips:] Data handbook: Electronic components and materials. Series: Semiconductors and integrated circuits. Part 5a: Professional analogue IC's, November 1976.
- [Katalog firmy Thomson - CSF Division Semiconducteurs:] Integrated Circuits - Short form catalog, 1980.
- [Katalog:] Pro Elektron Datenbuch. Integrierte Schaltungen (digital). Franzis - Verlag, München, 1978/79.
- [Katalog:] Spoerle Electronic 1981/82.
- Karta katalogowa E-65: Binarne przetworniki cyfrowo-analogowe 8- i 10-bitowe. Zakład Doświadczalny Produkcji Układów Hybrydowych przy Przemysłowym Instytucie Elektroniki, Unitra-Cemi w Warszawie.

Słowniki, encyklopedie, poradniki

- Empacher A.B. i in., Mały słownik matematyczny. Wiedza Powszechna, Warszawa 1975.
- Encyklopedia Fizyki. PWN, Warszawa 1972 (t. 1), 1973 (t. 2), 1974 (t. 3).
- Linde M.B.S., Słownik języka polskiego. Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Lwów 1855.
- Poradnik matematyczny. Red. I. Dziubiński, T. Świątkowski. PWN, Warszawa 1980.
- Słownik języka polskiego. Red. W. Doroszewski, Wiedza Powszechna, Warszawa 1961.
- Słownik języka polskiego. Red. M. Szymczak, PWN, Warszawa 1979.
- Słownik łacińsko-polski. Red. M. Plezia, PWN, Warszawa 1959.
- Słownik poprawnej polszczyzny PWN. Red. W. Doroszewski, PWN, Warszawa 1981.
- Webster's Third New International Dictionary. G. Bell and Sons Ltd., London 1961.

Politechnika Wrocławska Biblioteka Główna 4

A n e k s



Rys. D1-1. Waga dwuszalkowa z odważnikami jako układ do pomiaru masy

symbol: ○ oznacza realizację wielkości fizycznej wyspecyfikowaną wewnątrz kółka,

symbol: □ oznacza układ materialny wyspecyfikowany wewnątrz prostokąta.

Dodatek 1

Przykłady procedur komparacji pomiarowej występujące w typowych pomiarach

a) Pomiar masy na wadze dwuszalkowej

Schemat ogólny układu pomiarowego (rys. 1.2) przybiera - w przypadku wagi dwuszalkowej - postać przedstawioną na rys. D1-1.

Do ważenia używa się odważników będących wzorcami masy. Każdy odważnik jest opisany liczbą odpowiadającą - według przyjętej skali pomiarowej - masie wzorcowej, którą odtwarza.

Przetworzenie: masa ⟶ siła, występujące zarówno w torze realizacji mierzonej jak i wzorcowej, ma w obu tych torach identyczny charakter, bowiem natężenie pola grawitacyjnego Ziemi jest, w miejscach umieszczenia szalek z masami $\tilde{m}_1$ i $\tilde{m}_w$, praktycznie identyczne.

Przetwożenie: siła ⟶ moment siły odbywa się często w obu torach w jednakowym stosunku (wagi równoramienne). W przypadku, gdy długości ramion wagi nie są jednakowe (np. wagi dziesiętne, wagi konikowe), proporcje długości ramion muszą być uwzględnione podczas odczytywania wyniku pomiaru.

Waga dwuszalkowa jest w istocie układem umożliwiającym porównanie dwóch momentów: $\tilde{M}_1$ - związanego z masą mierzoną, oraz $\tilde{M}_w$ - związanego z masą wzorcową. Komparacja pomiarowa polega więc w tym przypadku na wykonaniu szeregu porównań dwóch momentów siły, z których jeden jest wywoływany przez wzorzec. Wykonuje ją obserwator posługując się kolejno różnymi wzorcami masy. Celem procedury komparacyjnej jest na ogół wybranie ze zbioru mas wzorcowych będących w dyspozycji ważącego, takiego odważnika lub zestawu odważników, w przypadku którego moment $\tilde{M}_w$ jest moż-

liwie najbliższy momentowi $\tilde{M}_1$. Jest to zatem procedura komparacyjna typu poszukiwawczego.

Sztuka szybkiego ważenia polega m.in. na tym, by uzależniać masę odważnika kładzonego na szalce wagi w kolejnym kroku od wyników poprzednich porównań momentów. Można więc powiedzieć, że większość ważących realizuje procedurę komparacyjną uzależnioną wynikiem detekcji. Odpowiedź na pytanie czy jest to procedura deterministyczna czy stochastyczna nie jest łatwa, gdyż sekwencję mas wzorcowych użytych w kolejnych krokach ważenia, każdy ważący określa indywidualnie - w swym umyśle.

Wartość wyniku pomiaru odczytuje się tu bezpośrednio z wzorca masy, dodając wartości mas poszczególnych odważników i ewentualnie mnożąc uzyskany wynik przez współczynnik liczbowy wynikający z różnych długości ramion wagi.

Warto zauważyć, że określenie masy za pomocą wagi dwuszalkowej może też odbyć się przy użyciu innych form komparacji. W szczególności można sobie wyobrazić ważenie z zastosowaniem stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy" Nie wydaje się jednak, by stosowanie tej formy komparacji w przypadku pomiaru masy było celowe.

Pomiar oporności za pomocą mostka Wheatstone'a wykazuje szereg analogii w stosunku do omówionego właśnie ważenia. W strukturze mostka dokonuje się przetworzenie: oporność ⟶ napięcie elektryczne. Galwanometr, czy inny wskaźnik równowagi mostka służy do porównywania napięć. Komparacja pomiarowa polega w tym przypadku na wykonaniu szeregu porównań dwóch napięć. Można jednak również powiedzieć, że mostek jest układem fizycznym

umożliwiającym pośrednie porównywanie oporności, podobnie jak waga umożliwiała pośrednie porównywanie mas. Procedurę komparacyjną wykonuje tu - tak jak podczas ważenia - obserwator. Z reguły jest to procedura typu poszukiwawczego uzależniona wynikiem detekcji. Ponadto wydaje się, że zwykle jest to procedura deterministyczna. Nie można jednak ręczyć za to, bowiem sekwencja oporności wzorcowych wykorzystywanych w kolejnych krokach równoważenia mostka, jest określana przez umysł mierzącego.

b) Pomiar przedziału czasu

Pomiar interwału czasowego możliwy jest m.in. za pomocą:
- zegara wskazówkowego,
- zegara cyfrowego.

Zdaniem piszącego, w przypadku obu ww zegarów komparacja pomiarowa jest wykonywana w dziedzinie różnych wielkości fizycznych.

Zegar wskazówkowy:

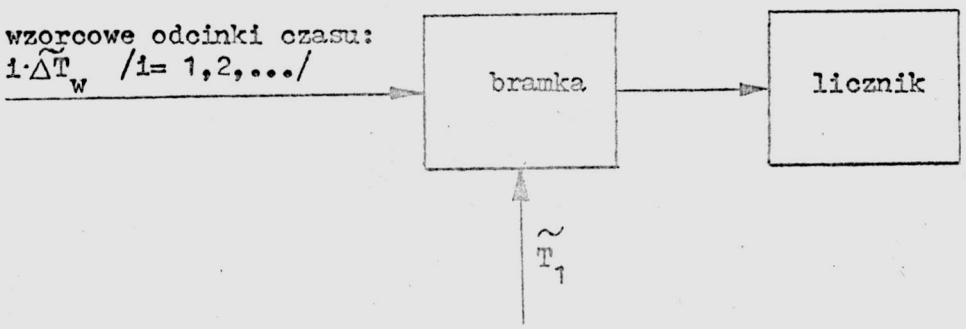
Klasyczny zegar wskazówkowy powszechnego użytku służy do pomiaru przedziału czasu jaki upłynął do chwili pomiaru od początku doby, która właśnie trwa. Pomiar odbywa się przy użyciu specjalnego mechanizmu np. sprzężynowego, który wprawia wskazówki zegara, będące jego elementem, w ruch ze stałą prędkością kątową. Dzięki temu, odcinkom czasu zostają jednoznacznie przyporządkowane łuki zataczane przez wskazówki. Mechanizm napędowy zegara wraz ze wskazówkami jest więc przetwornikiem: przedział czasu ⟶ długość łuku.

Łuki zataczane przez wskazówki porównuje się z łukami wzorcowymi, które są opisane liczbami. W zasadzie potrzebne są dwa wzorce łuków: osobny dla wskazówki małej i osobny dla dużej. W niektórych zegarach starszego typu można jeszcze znaleźć tarczę opisaną podwójnie: liczbami minut i godzin. Opis liczbowy tarcz współczesnych zegarów jest z reguły bardzo uproszczony, zapewne ze względów estetycznych. Zakłada się bowiem, że użytkownik wie, jakie liczby powinny być przypisane poszczególnym łukom wzorcowym zaznaczonym za pomocą kresek na obwodzie tarczy zegara.

Komparacja pomiarowa polega tu więc na porównywaniu łuków zatoczonych przez wskazówki z łukami wzorcowymi zaznaczonymi na obwodzie tarczy zegara. Komparację tę wykonuje obserwator za pomocą wzroku. Celem procedury komparacyjnej jest wybranie ze zbioru łuków wzorcowych takiego, który jest najbliższy łukowi zakreślonemu przez daną wskazówkę. Jest to więc bez wątpienia komparacja typu poszukiwawczego. Trudno jednak powiedzieć czy jest ona deterministyczna czy losowa, uzależniona czy niezależna, bo wykonuje ją obserwator za pośrednictwem swego zmysłu wzroku.

Zegar cyfrowy:

Układ podstawowy służący do cyfrowego pomiaru czasu przypomniano na rys. D1-2.



Rys. D1-2. Układ podstawowy służący do cyfrowego pomiaru czasu

Symbol $\widetilde{\Delta T}_w$ oznacza ziarno wzorca czasu. Z reguły jest ono znacznie mniejsze niż mierzony odcinek czasu $\widetilde{T}_1$. Wzorzec odtwarza kolejno interwały wzorcowe: $i \cdot \widetilde{\Delta T}_w$ $(i = 1, 2, \ldots)$, z których każdy następny jest dłuższy od poprzedniego o ziarno $\widetilde{\Delta T}_w$. Komparacja pomiarowa polega tu na wykonaniu szeregu po-

równań mierzonego interwału czasowego $\tilde{T}_1$ z interwałami wzorcowymi $i \cdot \tilde{\Delta T}_w$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Detektorem relacji porządku w dziedzinie odcinków czasu jest bramka. Celem komparacji jest znalezienie takiego wzorcowego przedziału czasu $k \cdot \tilde{\Delta T}_w$, który jest - możliwie najdokładniej - równodługi z interwałem mierzonym $\tilde{T}_1$. Jest to więc znowu komparacja typu poszukiwawczego. Inkrementacyjne rozwijanie wzorca oznacza, że procedura komparacyjna jest deterministyczna, uzależniona wynikiem regulacji.

Jak zwykle podczas pomiarów z zastosowaniem komparacji poszukiwawczej, wynik pomiaru odczytuje się z wzorca. W tym przypadku konieczne jest wymnożenie liczby ΔT_w - odpowiadającej interwałowi wzorcowemu $\tilde{\Delta T}_w$ - przez wskazanie licznika. Licznik jest tu właściwie elementem wzorca czasu, bo określa, ile razy odcinek czasu $k \cdot \tilde{\Delta T}_w$, uznany za równodługi z odcinkiem mierzonym $\tilde{T}_1$, jest dłuższy od $\tilde{\Delta T}_w$.

Dodatek 2

Przykład transpozycji zbioru $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi

Rozważana jest procedura komparacyjna realizowana w układzie według rys. 2.1, przy założeniach wyszczególnionych na początku podrozdziału II/1. Jeżeli przyjąć, że przedmiotem pomiaru jest pojedyncza realizacja napięcia:

$$\approx{U} = \{\tilde{U}_1\} \quad , \tag{D2-1}$$

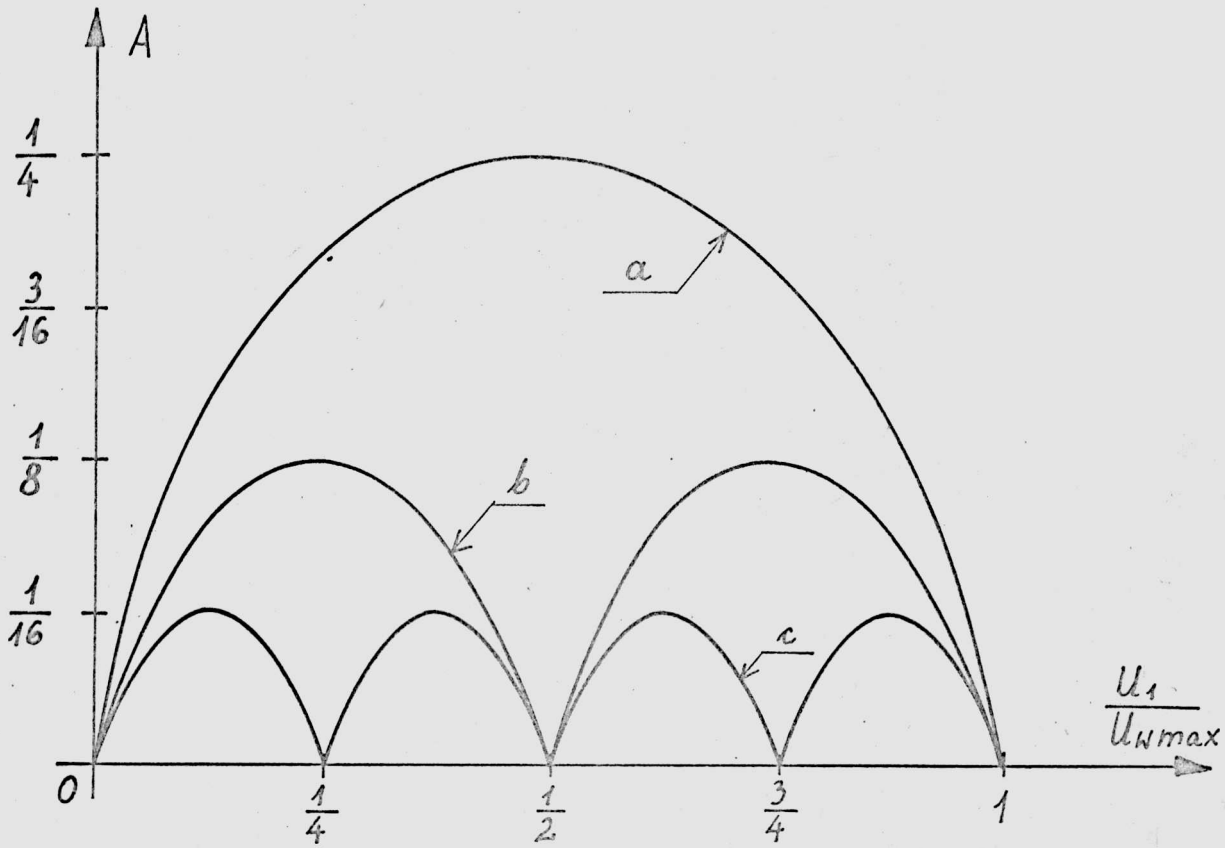
zaś jego celem - ustalenie wartości U_1 należnej tej realizacji według wcześniej przyjętej skali pomiarowej, to - zgodnie z rozważaniami z podrozdziału II/1 - wartość U_1 może być wyznaczona przez L-krotne porównanie realizacji $\tilde{U}_1$ z losowymi napięciami wzorcowymi. Zbiór $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi w kolejnych taktach ma wtedy postać:

$$\approx{U}_p = \{\underbrace{\tilde{U}_1, \tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_1}_{\text{L razy}}\} \tag{D2-2}$$

Zgodnie ze wzorem (2.54) (porównaj punkt II/3b) wariancja wyniku pomiaru zależy od wartości współczynnika A, charakteryzującego globalnie zbiór napięć $\approx{U}_p$. W przypadku zbioru $\approx{U}_p$ składającego się z realizacji jednakowych (D2-2), współczynnik A, zgodnie ze wzorem (2.56), przybiera wartość:

$$A = \frac{U_1(U_{w\,max} - U_1)}{U^2_{w\,max}} \quad . \tag{D2-3}$$

Charakter zmienności tego współczynnika w zależności od wartości U_1 obrazuje krzywa a) na rys. D2-1.



Rys. D2-1. Zależność współczynnika A od wartości ilorazu $\frac{U_1}{U_{w\,max}}$ w przypadku pomiaru wartości pojedynczej realizacji napięcia $\tilde{U}_1$:

a) w przypadku, gdy zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ ma postać (D2-2),

b) w przypadku, gdy zbiór (D2-2) przetransponowano do postaci (D2-6),

c) w przypadku, gdy zbiór (D2-2) przetransponowano do postaci (D2-9).

Jak to wykazano w podrozdziale II/3, ze wszystkich możliwych zbiorów $\tilde{\tilde{U}}_p$ charakteryzujących się wartością średnią:

$$\nu_1(\tilde{\tilde{U}}_p) = U_1 \qquad \text{(D2-4)}$$

zbiór napięć o postaci (D2-2) - składający się z realizacji jednakowych - jest najmniej korzystny z punktu widzenia wariancji wyniku. Oznacza to, że każdy zbiór napięć $\approx{U}_p$ charakteryzujący się wartością średnią (D2-4), ale zawierający napięcia niejednakowe jest, pod względem wartości wariancji, lepszy od zbioru (D2-2), bo tamten jest najgorszy. Powyższe stwierdzenie podsuwa pomysł, że korzystna byłaby każda transpozycja zbioru (D2-2) na inny zbiór napięć o takiej samej wartości średniej, ale składający się z napięć niejednakowych.

W punkcie II/3b) stwierdzono, że ze wszystkich zbiorów napięć o określonej wartości średniej najkorzystniejszy, pod względem wariancji wyniku pomiaru, jest zbiór zawierający co najwyżej jedno napięcie należące do przedziału $(\tilde{0}, \tilde{U}_{w\ max})$, a pozostałe napięcia równe $\tilde{0}$ lub $\tilde{U}_{w\ max}$. Transponując zbiór $\approx{U}_p$ o postaci (D2-2) w zbiór bardziej korzystny - z punktu widzenia wariancji wyniku - należałoby więc starać się, by nowy zbiór $\approx{U}_p'$ miał postać możliwie bliską tej, która jest najkorzystniejsza; należy dążyć do tego, by w zbiorze przetransponowanym $\approx{U}_p'$ jak największa liczba napięć była równa $\tilde{0}$ lub $\tilde{U}_{w\ max}$.

Wszystkie napięcia $\tilde{U}^j$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$ zbioru $\approx{U}_p'$ po transpozycji muszą jednak spełniać wymóg:

$$\tilde{0} \lesssim \tilde{U}^j \lesssim \tilde{U}_{w\ max} \qquad \text{(D2-5)}$$

Aby więc dokonać jakiejkolwiek transpozycji napięć ze zbioru $\approx{U}_p$ o postaci (D2-2), trzeba najpierw uzyskać jakieś informacje wstępne o wartości napięcia $\tilde{U}_1$. Im informacje te będą dokładniejsze, tym zbiór $\approx{U}_p'$ po transpozycji może zawierać więcej napięć równych $\tilde{0}$ lub $\tilde{U}_{w\ max}$, a więc może on charakteryzować się

mniejszą wartością parametru A dając tym samym mniejszą wariancję wyniku i związaną z nią - składową losową Δ_1 błędu komparacji. Zjawisko powyższe zobrazowano na przykładzie.

Przykład D2-1:

Napięcie $\tilde{U}_1$ ze zbioru (D2-2) spełnia z założenia układ nierówności (D2-5). Jeżeli p o n a d t o porównać je, przed wykonaniem komparacji, z napięciem wzorcowym: $\frac{\tilde{U}_{w\ max}}{2}$, to zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ (D2-2) można przekształcić do postaci:

$$\tilde{\tilde{U}}'_p = \{\underbrace{\tilde{0}, \tilde{0}, \ldots, \tilde{0}}_{\frac{L}{2}\text{ razy}}, \underbrace{2\tilde{U}_1, 2\tilde{U}_1, \ldots, 2\tilde{U}_1}_{\frac{L}{2}\text{ razy}}\}, \qquad \text{(D2-6a)}$$

gdy: $\tilde{0} \lessapprox \tilde{U}_1 \lessapprox \frac{\tilde{U}_{w\ max}}{2}$

lub do postaci:

$$\tilde{\tilde{U}}'_p = \{\underbrace{\tilde{U}_{w\ max}, \ldots, \tilde{U}_{w\ max}}_{\frac{L}{2}\text{ razy}}, \underbrace{2\tilde{U}_1 \ominus \tilde{U}_{w\ max}, \ldots, 2\tilde{U}_1 \ominus \tilde{U}_{w\ max}}_{\frac{L}{2}\text{ razy}}\}, \qquad \text{(D2-6b)}$$

gdy: $\frac{\tilde{U}_{w\ max}}{2} \lessapprox \tilde{U}_1 \lessapprox \tilde{U}_{w\ max}$.

Zakłada się, że liczność L zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ jest parzysta.

Znaczenie symboli: $\frac{\tilde{U}_{w\ max}}{2}$ oraz $2\tilde{U}_1$ we wzorach (D2-6a), (D2-6b) wynika z ogólnej definicji symbolu $\frac{1}{n}$ - krotności realizacji napięcia oraz definicji m - krotności realizacji napięcia.

m - krotność realizacji $\tilde{U}_1$ napięcia elektrycznego określa następujący warunek indukcyjny [1]:

Biblioteka Pol. Wrocł.

$$1 \cdot \tilde{U}_1 \doteq \tilde{U}_1 \qquad \text{(D2-7)}$$

$$m \cdot \tilde{U}_1 \doteq (m-1) \cdot \tilde{U}_1 \oplus \tilde{U}_1 , \quad m = 2, 3 \ldots .$$

Realizację napięcia, której n - krotność jest równa realizacji $\tilde{U}_1$, nazywa się $\frac{1}{n}$ - krotnością tej realizacji [1].

Łatwo zauważyć, że wartość średnia napięć w zbiorach (D2-6) po transpozycji jest taka sama jak w zbiorze (D2-2) przed transpozycją i wynosi U_1.

Interesująca jest teraz wartość współczynnika A charakteryzująca zbiór $\tilde{\tilde{U}}'_p$. (Współczynnik ten określa wartość wariancji wyniku uzyskiwanego w przypadku zbioru $\tilde{\tilde{U}}'_p$.) Na podstawie wzoru (2.56) można obliczyć, że:

$$A = \begin{cases} \dfrac{-2U_1\left(U_1 - \dfrac{U_{w\,max}}{2}\right)}{U^2_{w\,max}}, & \tilde{0} \lessapprox \tilde{U}_1 \lessapprox \dfrac{\tilde{U}_{w\,max}}{2} \\ \dfrac{-2\left(U_1 - \dfrac{U_{w\,max}}{2}\right)(U_1 - U_{w\,max})}{U^2_{w\,max}}, & \dfrac{\tilde{U}_{w\,max}}{2} \lessapprox \tilde{U}_1 \lessapprox \tilde{U}_{w\,max} \end{cases} \qquad \text{(D2-8)}$$

Charakter zależności współczynnika A od wartości U_1 przedstawiono na rys. D2-1, krzywa b).

Ze wzoru (2.54) wynika, że zależność wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru od U_1 ma kształt identyczny z analizowaną właśnie krzywą $A = f(U_1)$.

Jak widać na rys. D2-1, zastosowanie opisanej transpozycji zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ na zbiór $\tilde{\tilde{U}}'_p$ wraz z koniecznym do jej wykonania sprawdzeniem warunku: czy $\tilde{U}_1 \lessapprox \dfrac{\tilde{U}_{w\,max}}{2}$, spowodowało nie tylko zmianę

charakteru zależności współczynnika A (a więc także - wariancji wyniku) od U_1, ale również spowodowało dwukrotne zmniejszenie jego maksymalnej wartości: z $\frac{1}{4}$ na $\frac{1}{8}$. Korzyść z dokonanej transpozycji zbioru $\approx{U}_p$ jest podwójna:

- Dwukrotne zmniejszenie wartości maksymalnej wariancji wyniku, daje $\sqrt{2}$ - krotne zmniejszenie granicznego błędu losowego $\Delta_{1\ max}$ procedury przy ustalonej liczbie L wykonanych porównań.
- W $\frac{L}{2}$ taktach procedury napięcie porównywane z wzorcowymi jest równe $\tilde{0}$ lub $\tilde{U}_{w\ max}$ (patrz wzory (D2-6a)(D2-6b)). Pozwala to przewidzieć z góry wyniki tych porównań bez ich efektywnego wykonywania. Dzięki temu czas trwania procedury komparacyjnej może być o połowę krótszy, przy niezmienionej wartości składowej losowej Δ_1 błędu komparacji.

W przedstawionym przypadku, sprawdzenie warunku: czy $\tilde{U}_1 \lessapprox \frac{U_{w\ max}}{2}$, umożliwiło taką transpozycję zbioru napięć porównywanych z wzorcowymi, dzięki której zbiór $\approx{U}'_p$ po transpozycji zawierał $\frac{L}{2}$ napięć o wartości 0 lub $U_{w\ max}$.

Możliwa jest również taka transpozycja zbioru $\approx{U}_p$ o postaci (D2-2) że zbiór $\approx{U}'_p$ po jej wykonaniu będzie zawierał $\frac{3}{4}L$ napięć równych $\tilde{0}$ lub $\tilde{U}_{w\ max}$. W tym celu jednak konieczne jest dodatkowe sprawdzenie, przed rozpoczęciem właściwej komparacji typu "większy - mniejszy", aż trzech warunków:

- czy $\tilde{U}_1 \lessapprox \frac{U_{w\ max}}{4}$,
- czy $\tilde{U}_1 \lessapprox \frac{\tilde{U}_{w\ max}}{2}$,
- czy $\tilde{U}_1 \lessapprox \frac{3\tilde{U}_{w\ max}}{4}$.

Zbiór $\approx{U}'_p$ po transpozycji może mieć wtedy postać:

$$\tilde{\tilde{U}}'_p = \{\underbrace{\tilde{0}, \ldots, \tilde{0}}_{\frac{3L}{4}\text{ razy}}, \underbrace{4\tilde{U}_1, \ldots, 4\tilde{U}_1}_{\frac{L}{4}\text{ razy}}\}, \qquad \text{(D2-9a)}$$

$$\text{gdy: } \tilde{0} \lessdot \tilde{U}_1 \lessdot \frac{\tilde{U}_{w\ max}}{4},$$

$$\tilde{\tilde{U}}'_p = \{\underbrace{\tilde{0}, \ldots, \tilde{0}}_{\frac{L}{2}\text{ razy}}, \underbrace{\tilde{U}_{w\ max}, \ldots, \tilde{U}_{w\ max}}_{\frac{L}{4}\text{ razy}}, \underbrace{4\tilde{U}_1 \ominus \tilde{U}_{w\ max}, \ldots, 4\tilde{U}_1 \ominus \tilde{U}_{w\ max}}_{\frac{L}{4}\text{ razy}}\} \qquad \text{(D2-9b)}$$

$$\text{gdy: } \frac{\tilde{U}_{w\ max}}{4} \lessdot \tilde{U}_1 \lessdot \frac{\tilde{U}_{w\ max}}{2},$$

$$\tilde{\tilde{U}}'_p = \{\underbrace{\tilde{U}_{w\ max}, \ldots, \tilde{U}_{w\ max}}_{\frac{L}{2}\text{ razy}}, \underbrace{\tilde{0}, \ldots, \tilde{0}}_{\frac{L}{4}\text{ razy}}, \underbrace{4\tilde{U}_1 \ominus 2\tilde{U}_{w\ max}, \ldots, 4\tilde{U}_1 \ominus 2\tilde{U}_{w\ max}}_{\frac{L}{4}\text{ razy}}\} \qquad \text{(D2-9c)}$$

$$\text{gdy: } \frac{\tilde{U}_{w\ max}}{2} \lessdot \tilde{U}_1 \lessdot \frac{3\tilde{U}_{w\ max}}{4},$$

oraz

$$\tilde{\tilde{U}}'_p = \{\underbrace{\tilde{U}_{w\ max}, \ldots, \tilde{U}_{w\ max}}_{\frac{3L}{4}\text{ razy}}, \underbrace{4\tilde{U}_1 \ominus 3\tilde{U}_{w\ max}, \ldots, 4\tilde{U}_1 \ominus 3\tilde{U}_{w\ max}}_{\frac{L}{4}\text{ razy}}\}, \qquad \text{(D2-9d)}$$

$$\text{gdy: } \frac{3\tilde{U}_{w\ max}}{4} \lessdot \tilde{U}_1 \lessdot \tilde{U}_{w\ max}.$$

Założono, że liczba L jest podzielna przez cztery.

Nietrudno sprawdzić, że wartość średnia należna wszystkim wymienionym postaciom zbioru $\tilde{\tilde{U}}'_p$ (D2-9a) ÷ (D2-9d), wynosi U_1 - zgodnie z wymaganiem stawianym transpozycji.

Współczynnik A odpowiadający zbiorom napięć (D2-9a) ÷ (D2-9d ma wartość:

$$A=\begin{cases} \dfrac{-4U_1\left(U_1-\dfrac{U_{w\,max}}{4}\right)}{U^2_{w\,max}}, & \tilde{0} \leqslant \tilde{U}_1 \leqslant \dfrac{\tilde{U}_{w\,max}}{4} \\[2ex] \dfrac{-4\left(U_1-\dfrac{U_{w\,max}}{4}\right)\left(U_1-\dfrac{U_{w\,max}}{2}\right)}{U^2_{w\,max}}, & \dfrac{\tilde{U}_{w\,max}}{4} < \tilde{U}_1 \leqslant \dfrac{\tilde{U}_{w\,max}}{2} \\[2ex] \dfrac{-4\left(U_1-\dfrac{U_{w\,max}}{2}\right)\left(U_1-\dfrac{3U_{w\,max}}{4}\right)}{U^2_{w\,max}}, & \dfrac{\tilde{U}_{w\,max}}{2} < \tilde{U}_1 \leqslant \dfrac{3\tilde{U}_{w\,max}}{4} \\[2ex] \dfrac{-4\left(U_1-\dfrac{3U_{w\,max}}{4}\right)\left(U_1-U_{w\,max}\right)}{U^2_{w\,max}}, & \dfrac{3\tilde{U}_{w\,max}}{4} < \tilde{U}_1 \leqslant \tilde{U}_{w\,max} \end{cases} \quad \text{(D2-10}$$

Powyższą zależność współczynnika A od wartości napięcia U_1 zobrazowano na rys. D2-1, krzywa c).

Omówione tu transpozycje zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ można uogólnić: Informacje wstępne o wartości napięcia mierzonego $\tilde{U}_1$, niezbędne do wykonania transpozycji zbioru (D2-2) na zbiór bardziej korzystnej z punktu widzenia wariancji wyniku, można uzyskać np. sprawdzając, czy napięcie mierzone spełnia $2^k - 1$ warunków

postaci:

$$\tilde{U}_1 \leqslant \frac{i \cdot \tilde{U}_{w\,max}}{2^k}, \qquad \text{(D2-11)}$$

gdzie: $i = 1, 2, \ldots, 2^k - 1$,

$k = 1, 2, \ldots, \log_2 L$;

założono, że $L = 2^c$, c - liczba całkowita.

Sprawdzenia warunków (D2-11) umożliwiają przetransponowanie zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ o postaci (D2-2) w zbiór $\tilde{\tilde{U}}'_p$ równoliczny z $\tilde{\tilde{U}}_p$, lecz zawierający co najmniej $(1 - \frac{1}{2^k})L$ realizacji równych $\tilde{0}$ lub $\tilde{U}_{w\,max}$. Pozostałe $\frac{L}{2^k}$ napięcia są kombinacją liniową realizacji $\tilde{U}_1$ oraz $\tilde{U}_{w\,max}$. Można je utworzyć za pomocą operacyjnych wzmacniaczy sumujących [2].

Dzięki takiej transpozycji uzyskuje się 2^k - krotne zmniejszenie maksymalnej wartości wariancji wyniku, co oznacza zmniejszenie wartości granicznej błędu komparacji $2^{\frac{k}{2}}$ razy, w stosunku do sytuacji gdy transpozycji nie wykonuje się.
Oprócz tego uzyskuje się możliwość 2^k - krotnego zmniejszenia liczby koniecznych porównań napięć ze zbioru $\tilde{\tilde{U}}'_p$ z napięciami wzorcowymi, a więc - możliwość 2^k - krotnego skrócenia czasu trwania komparacji. Porównania napięć $\tilde{0}$ oraz $\tilde{U}_{w\,max}$ - których obecność w zbiorze $\tilde{\tilde{U}}'_p$ po transpozycji jest gwarantowana - z napięciami wzorcowymi uznano za zbędne, gdyż wynik tych porównań można przewidzieć bez ich wykonywania.

Na zakończenie warto dodać, że omawiany sposób transponowania zbioru $\tilde{\tilde{U}}_p$ można niekiedy zastosować także w przypadku pomiaru

wartości średniej w w i e l o e l e m e n t o w y m zbiorze napięć mierzonych:

$$\tilde{\tilde{U}} = \{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_N\} .$$

Jeżeli w celu zmniejszenia wartości składowej losowej błędu komparacji każde z napięć mierzonych ma być r-krotnie porównane z napięciami wzorcowymi (patrz punkt II/3a), to zbiór $\tilde{\tilde{U}}_p$ ma postać:

$$\tilde{\tilde{U}}_p = \{\underbrace{\tilde{U}_1,\ldots,\tilde{U}_1}_{r \text{ razy}}, \underbrace{\tilde{U}_2,\ldots,\tilde{U}_2}_{r \text{ razy}}, \ldots, \underbrace{\tilde{U}_N,\ldots,\tilde{U}_N}_{r \text{ razy}}\} \qquad (D2\text{-}12)$$

Opisany tu sposób transpozycji można zastosować niezależnie w stosunku do każdego z N ciągów napięć:

$$\underbrace{\tilde{U}_i, \tilde{U}_i, \ldots, \tilde{U}_i}_{r \text{ razy}} , \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

występujących w zbiorze (D2-12).

Przypisy

[1] Por. np. Rymaszewski R., Modelowanie operacyjno - mnogościowe i jego zastosowanie do badań pomiarów stochastycznych. Prace Naukowe Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej. Seria: Monografie, z. 20/4, Wrocław 1982, s. 22. Ellis B., Basic concepts of measurement. Cambridge at the University Press, 1966, s. 76, 77.

[2] Por. np. Nadachowski M., Kulka Z., Analogowe układy scalone. WKiŁ, Warszawa 1979, s. 97 - 98.

Dodatek 3

Obliczenie wartości oczekiwanej $E(R)$ i wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru w przypadku, gdy w układzie realizującym stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" zastosuje się układ do porównywania napięć z histerezą - przypadki II ÷ V (porównaj podrozdział III/2)

Przypadek II: $-\bar{h} < U_1 \leqslant \underline{h}$; porównaj rys. 3.13 b) i opis zachowania się detektora relacji porządku w tym zakresie napięć mierzonych zawarty w podrozdziale III/2.

W celu obliczenia wartości oczekiwanej $E(R)$ i wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru (2.5), trzeba najpierw znaleźć wartość oczekiwaną $E(L_2)$ i wariancję $D^2(L_2)$ stanu końcowego licznika L_2 (porównaj związki (2.15) i (2.18)).
Podobnie jak poprzednio, zmienną losową L_2 można potraktować jako sumę (2.34) zmiennych losowych o rozkładzie dwupunktowym:

$$L_2 = X^1 + X^2 + \ldots + X^L \qquad (2.34)$$

gdzie: $X^1, X^2, \ldots, X^L$ - zmienne losowe takie, że:

$$X^j = \begin{cases} 1, & \text{gdy wyjście detektora relacji porządku po j-ty takcie procedury jest jedynką logiczną} \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \qquad (D3 - 1)$$

$j = 1, 2, \ldots, L.$

Zmienne losowe X^j nie są niezależne.
W rozpatrywanym zakresie zmian wartości napięcia mierzonego są one powiązane w jednorodny i niestacjonarny łańcuch Markowa.

Jak wynika z rys. 3.13 b) oraz opisu w podrozdziale III/2, stan zera logicznego na wyjściu układu porównania napięć jest - używając terminologii teorii łańcuchów Markowa - stanem pochłaniającym [1]. Oznacza to, że jeżeli układ porównania napięć raz wejdzie w ten stan, to już z niego nie wyjdzie do końca procedury komparacyjnej.

Wzory na prawdopodobieństwa przejść mają obecnie postać (porównaj rys. 3.13 b):

$$p_{01} = P(X^j = 1 \mid X^{j-1} = 0) = 0 \qquad (D3 - 2)$$

$$p_{11} = P(X^j = 1 \mid X^{j-1} = 1) = \frac{U_1 + \bar{h}}{U_{w\,max}}, \quad j = 1, 2, \ldots, L$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wyjście układu porównania napięć jest, przed rozpoczęciem procedury komparacyjnej, w stanie jedynki logicznej oznaczono:

$$P(X^0 = 1) = p .$$

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej L_2 można wyznaczyć w następujący sposób.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że stan końcowy licznika L_2 wynosi zero, jest - zgodnie ze wzorem na prawdopodobieństwo całkowite [2] - równe (D3 - 2):

$$P(L_2=0) = P(X^0=0) \cdot P(X^1=0 \mid X^0=0) + P(X^0=1) \cdot P(X^1=0 \mid X^0=1) =$$

$$= 1 - p \cdot p_{11} . \qquad (D3 - 3)$$

Zdarzenie polegające na tym, że $L_2 = 1$ jest iloczynem dwóch

zdarzeń: $X^1 = 1$ i $X^2 = 0$. Stąd, korzystając ze wzoru definicyjnego na prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(L_2=1) = P(X^1=1 \wedge X^2=0) = P(X^2=0|X^1=1) \cdot P(X^1=1) . \qquad (D3-4)$$

Prawdopodobieństwo całkowite zdarzenia: $X^1 = 1$ wynosi (D3-2):

$$P(X^1=1) = P(X^0=0) \cdot P(X^1=1|X^0=0) + P(X^0=1) \cdot P(X^1=1|X^0=1) =$$

$$= p \cdot p_{11} \cdot \qquad (D3-5)$$

Podstawiając (D3-5) do (D3-4) otrzymuje się:

$$P(L_2 = 1) = p \cdot p_{11}(1 - p_{11}) . \qquad (D3-6)$$

Zupełnie podobnie:

$$P(L_2 = 2) = P(X^2 = 1 \wedge X^3 = 0) = P(X^3 = 0|X^2 = 1) \cdot P(X^2 = 1).$$

Ponieważ jednak:

$$P(X^2=1) = P(X^1=0) \cdot P(X^2=1|X^1=0) + P(X^1=1) \cdot P(X^2=1|X^1=1) =$$

$$= p \cdot (p_{11})^2 ,$$

więc ostatecznie:

$$P(L_2 = 2) = p \cdot (p_{11})^2(1 - p_{11}) . \qquad (D3-7)$$

Z zależności (D3-6) i (D3-7) można już wywnioskować, że:

$$P(L_2 = k) = p \cdot (p_{11})^k \cdot (1 - p_{11}); \; k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (D3-8)$$

Formalną kontrolę poprawności zdefiniowania rozkładu prawdo
podobieństwa zmiennej losowej L_2 za pomocą wzorów (D3-3), (D3-8
może stanowić sprawdzenie, że:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(L_2 = k) = 1 .$$

Mimo poprawności formalnej pojawia się tu jednak następująca trudność natury interpretacyjnej.

Zdarzenie: $L_2 = k$ oznacza, że:

- przed rozpoczęciem komparacji wyjście detektora relacji porzą
  ku znajdowało się w stanie jedynki logicznej,
  a ponadto, że
- przez k pierwszych taktów procedury wylosowano napięcia wzor-
  cowe o wartościach z przedziału $[0;\ U_1 + \bar{h}]$ (rys. 3.13 b),
  zaś w (k+1)-szym takcie wylosowano napięcie z przedziału
  $(U_1 + \bar{h};\ U_{w\ max}]$.

Fakt, że w rozkładzie prawdopodobieństwa (D3-3), (D3-8) uzyskan
niezerowe wartości prawdopodobieństw wszystkich zdarzeń:
$L_2 = k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ wynika stąd, że teoretycznie jest moż
liwe, iż przełączenie układu porównania napięć z jedynki na zer
nastąpi, być może, dopiero po dowolnie dużej liczbie taktów procedury. W praktyce jednak w ramach komparacji wykonuje się zawsze określoną liczbę L porównań. Powinno więc być:

$$\sum_{k=0}^{L} P(L_2 = k) = 1 .$$

Aby spełnić powyższy wymóg zdarzeniu: $L_2 = L$, a r b i t r a l
n i e przypisano prawdopodobieństwo odpowiadające wg wzoru

(D3-8) zdarzeniu: $L_2 \geqslant L$. Oznacza to, że przyjęto:

$$P(L_2 = L) = p(1-p_{11})\left[p_{11}^{L} + \sum_{k=L+1}^{\infty} p_{11}^{k} \right] = p \cdot p_{11}^{L} \qquad \text{(D3-9)}$$

Należy podkreślić, że powyższy zabieg ma znaczenie wyłącznie formalne i w praktyce nie zmiania w istotny sposób momentów zmiennej losowej L_2. Aby się o tym przekonać, wystarczy oszacować wartość składnika dodanego do wzoru na $P(L_2 = L)$ uzyskanego wg (D3-8): gdy np. $L = 1000$, zaś $p_{11} = 0{,}01$ (porównaj wzór (D3-2) i rys. 3.13b), to:

$$p(1 - p_{11}) \cdot \sum_{k=L+1}^{\infty} p_{11}^{k} = p \cdot p_{11}^{L+1} < 10^{-2000} \quad (!)$$

Ostatecznie więc zmienna losowa L_2 charakteryzuje się następującą funkcją rozkładu prawdopodobieństwa (porównaj wzory (D3-3), (D3-8), (D3-9)):

$$P(L_2 = k) = \begin{cases} 1 - p \cdot p_{11} & , k = 0 \\ p \cdot (1 - p_{11}) \cdot p_{11}^{k} & , k = 1, 2, \ldots, L-1 \\ p \cdot p_{11}^{L} & , k = L \\ 0 & , k > L \end{cases} \qquad \text{(D3-10)}$$

Wzór (D3-10) pozwala już na przystąpienie do obliczania wartości oczekiwanej i wariancji zmiennej losowej L_2. Rachunki można tu wykonać albo wg definicji $E(L_2)$ i $D^2(L_2)$, albo też metodą funkcji tworzących [3]. Po wykonaniu obliczeń

obydwoma metodami autor stwierdził, że w rozpatrywanym przypadku metoda funkcji tworzących jest niewiele bardziej efektywna od metody definicyjnej. Rachunek wg definicji jest natomiast bardziej poglądowy.

Dalsze rozważania wykonano więc wg tej ostatniej metody:

$$E(L_2) \stackrel{df.}{=} \sum_{k=0}^{L} k \cdot P(L_2=k) = p(1-p_{11}) \sum_{k=1}^{L-1} k \cdot p_{11}^k + L \cdot p \cdot p_{11}^L \quad \text{(D3-11)}$$

Wartość sumy występującej po prawej stronie powyższego wzoru można obliczyć tak:

$$\sum_{k=1}^{L-1} k \cdot p_{11}^k = \sum_{k=1}^{\infty} - \sum_{k=L}^{\infty} , \qquad \text{(D3-12)}$$

gdyż szereg: $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_{11}^k$ jest zbieżny w przedziale $p_{11} \in (0,1)$ [4].

Sumę powyższego szeregu potęgowego można obliczyć różniczkując obustronnie równość [5]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{11}^k = \frac{1}{1 - p_{11}} . \qquad \text{(D3-13)}$$

Uzyskuje się wtedy, że:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_{11}^k = \frac{p_{11}}{(1 - p_{11})^2} . \qquad \text{(D3-14)}$$

Wartość odjemnika różnicy (D3-12) obliczono dokonując następujących operacji:

$$\sum_{k=L}^{\infty} k \cdot p_{11}^k = \sum_{i=0}^{\infty} (L+i)\, p_{11}^{L+i} = \text{(D3-14)} =$$

$$= \frac{p_{11}^{L+1}}{(1-p_{11})^2} + \frac{L \cdot p_{11}^{L}}{1 - p_{11}} . \qquad \text{(D3-15)}$$

Ostatecznie suma (D3-12) przybiera wartość:

$$\sum_{k=1}^{L-1} k \cdot p_{11}^{k} = \frac{p_{11}}{(1 - p_{11})^2} \cdot (1 - p_{11}^{L}) - \frac{L \cdot p_{11}^{L}}{1 - p_{11}} . \qquad \text{(D3-16)}$$

Uwzględniając zależność (D3-16) we wzorze (D3-11) otrzymuje się:

$$E(L_2) = p \cdot p_{11} \frac{1 - p_{11}^{L}}{1 - p_{11}} . \qquad \text{(D3-17)}$$

Przy $L \geqslant 10^3$ i $p_{11} \leqslant 10^{-2}$, składnik p_{11}^{L} ma wartość:

$$p_{11}^{L} \leqslant 10^{-2000} \ll 1 . \qquad \text{(D3-18)}$$

Nie popełniając więc praktycznie błędu można napisać:

$$E(L_2) = p \frac{p_{11}}{1 - p_{11}} \qquad \text{(D3-19)}$$

Warto zauważyć, że wartość oczekiwana stanu końcowego licznika L_2 zależy od prawdopodobieństwa p zdarzenia polegającego na tym, że wyjście układu porównania jest, przed rozpoczęciem procedury komparacyjnej, w stanie jedynki logicznej, a nie zależy od liczby L porównań wykonanych w ramach komparacji. Oba te fakty są

konsekwencją tego, że stan zera logicznego na wyjściu układu porównania jest w rozważanym przypadku stanem pochłaniającym.

Podstawiając wzór (D3-2) do (D3-19), a następnie (D3-19) do (2.15) uzyskuje się wniosek, że w przypadku pomiaru napięcia o wartości U_1 z przedziału $(-\bar{h}; \underline{h}]$:

$$E(R) = p \cdot \frac{1}{L} \cdot (U_1 + \bar{h}) \cdot \frac{1}{1 - \frac{U_1 + \bar{h}}{U_{w\,max}}} \cdot \qquad \text{(D3-20)}$$

Wariancję zmiennej losowej L_2 można obliczyć wg następującego wzoru:

$$D^2(L_2) = \sum_{k=1}^{L} k^2 \, P(L_2 = k) - E^2(L_2) \qquad \text{(D3-21)}$$

Odjemna w powyższym wzorze jest momentem zwykłym drugiego rzędu zmiennej losowej L_2. Można go obliczyć posługując się równaniem (D3-10):

$$\sum_{k=1}^{L} k^2 \, P(L_2=k) = p(1-p_{11}) \cdot \sum_{k=1}^{L-1} k^2 p_{11}^k + L^2 p \, p_{11}^L \cdot \qquad \text{(D3-22)}$$

Sumę po prawej stronie powyższego równania obliczono - podobnie jak poprzednio - korzystając z faktu, że:

$$\sum_{k=1}^{L-1} = \sum_{k=1}^{\infty} - \sum_{k=L}^{\infty} \cdot \qquad \text{(D3-23)}$$

Powyższa zależność jest poprawna, bowiem oba szeregi występujące po jej prawej stronie są zbieżne w przedziale $p_{11} \in (0, 1)$. Sumę pierwszego z nich obliczono różniczkując obustronnie równanie

(D3-14):

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_{11}^k = \frac{p_{11}(1 + p_{11})}{(1 - p_{11})^3} . \qquad \text{(D3-24)}$$

Sumę drugiego szeregu po prawej stronie (D3-23) otrzymuje się odpowiednio przenumerowując, podobnie jak to uczyniono we wzorze (D3-15), wyrazy szeregu (D3-24). Uwzględniając wyniki powyższych obliczeń we wzorze (D3-22) otrzymuje się po przekształceniach:

$$\sum_{k=1}^{L} k^2 P(L_2 = k) =$$

$$= \frac{p \cdot p_{11}\left[(1-p_{11}^L)(1+p_{11}) - 2L\, p_{11}^L(1-p_{11})\right]}{(1 - p_{11})^2} . \qquad \text{(D3-25)}$$

Podstawienie (D3-25) i (D3-17) do wzoru (D3-21) prowadzi do związku:

$$D^2(L_2) = \qquad \text{(D3-26)}$$

$$= \frac{p \cdot p_{11}\left[(1-p_{11}^L)(1+p_{11}) - 2L\, p_{11}^L(1-p_{11}) - p\, p_{11}(1-p_{11}^L)^2\right]}{(1 - p_{11})^2} .$$

Biorąc pod uwagę, że wyrażenie: p_{11}^L ma wartość bardzo małą już przy: $L = 10^3$ i $p_{11} = 10^{-2}$ (porównaj (D3-18)), nie popełniając praktycznie błędu, zależność (D3-26) można przepisać w postaci:

$$D^2(L_2) = \frac{p \cdot p_{11}\left[1 + p_{11}(1 - p)\right]}{(1 - p_{11})^2} . \qquad \text{(D3-27)}$$

Dalsze uproszczenie wzoru (D3-27):

$$D^2(L_2) \approx p \cdot p_{11} \qquad \text{(D3-28)}$$

wiąże się już z większym błędem. Przy $p_{11} = 10^{-2}$ ma on wartość ok. 3%, a przy $p_{11} = 10^{-3}$ wartość ok. 0,3 %.

Uwzględnienie równania (D3-2) w zależności (D3-28), tej ostatniej zaś w (2.18) prowadzi do poszukiwanego związku:

$$D^2(R) = \frac{U_{w\,max}}{L^2} \cdot p(U_1 + \bar{h}),\ U_1 \in (-\bar{h};\ \underline{h}\,] \qquad \text{(D3-29)}$$

Wyprowadzone tu wzory (D3-20) i (D3-29) zamieszczono w tabeli 3.1, lp. 2.

Przypadek III: $U_1 \leqslant -\bar{h}$

Zgodnie z tym, co powiedziano w podrozdziale III/2, stan wyjścia detektora relacji porządku jest - w tym zakresie napięć mierzonych - zerem logicznym w każdym takcie procedury komparacyjnej.

Zmienna losowa stanu końcowego licznika L_2 ma więc w tym przypadku zawsze wartość zero. Wynika stąd, że gdy $U_1 \leqslant -\bar{h}$, to:

$$E(L_2) = 0;\quad D^2(L_2) = 0\ . \qquad \text{(D3-30)}$$

Podstawiając powyższe wzory do równości (2.15) i (2.18) dostaje się, że:

$$E(R) = 0;\quad D^2(R) = 0\ . \qquad \text{(D3-31)}$$

Wyniki te wykorzystano w tabeli 3.1, lp. 3.

Przypadek IV: $U_{w\,max} - \bar{h} < U_1 \leq U_{w\,max} + \underline{h}$, (porównaj rys. 3.13c)

W celu określenia właściwości probabilistycznych wyniku pomiaru, stan końcowy licznika L_2 potraktowano - podobnie jak w przypadku II - jako zmienną losową. Jest ona sumą (2.34) zmiennych losowych X^j ($j = 1, 2, \ldots, L$) o rozkładzie dwupunktowym (D3-1). W rozważanym przypadku zmienne losowe X^j są powiązane w łańcuch Markowa.

Prawdopodobieństwa przejść wynoszą obecnie:

$$p_{01} = P(X^j = 1 \mid X^{j-1} = 0) = \frac{U_1 - \underline{h}}{U_{w\,max}} \qquad \text{(D3-32)}$$

$$p_{11} = P(X^j = 1 \mid X^{j-1} = 1) = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, L.$$

Symbol: $X^0 = 1$ oznacza - podobnie jak poprzednio - zdarzenie, że wyjście układu do porównywania napięć znajdowało się przed rozpoczęciem procedury w stanie jedynki logicznej. Jego prawdopodobieństwo oznaczono:

$$P(X^0 = 1) = p.$$

W dalszych rozważaniach wygodnie będzie posługiwać się także prawdopodobieństwem:

$$p_{00} = P(X^j = 0 \mid X^{j-1} = 0) = 1 - p_{01} \qquad \text{(D3-33)}$$

Jak wynika ze wzoru (D3-32) i opisu słownego zamieszczonego w podrozdziale III/2, jedynka logiczna na wyjściu detektora relacji porządku jest stanem podchłaniającym [1]. Oznacza to, że jeżeli w którymś takcie komparacji wyjście detektora zostanie ustawione w stan jedynki, to pozostanie w nim do końca procedury. Ciąg wartości przyjmowanych przez zmienne losowe X^j $(j = 1,2,...)$ będzie miał w tym przypadku postać:

$$\overbrace{00 \ldots 0\underbrace{11 \ldots 1}_{L_2}}^{L} \qquad \text{(D3-34)}$$

Liczba zer na początku powyższego ciągu jest zdarzeniem losowym. W szczególności może zdarzyć się tak, że zera te w ogóle nie wystąpią. Zmienna losowa L_2 liczy jedynki w powyższym ciągu.

Wyprowadzenie wzorów na $E(L_2)$ i $D^2(L_2)$ staje się prostsze, jeżeli wprowadzi się pomocniczą zmienną losową L_2^* liczącą zera na początku ciągu (D3-34):

$$L_2^* = L - L_2 \ . \qquad \text{(D3-35)}$$

Można sprawdzić, że:

$$E(L_2) = L - E(L_2^*) \qquad \text{(D3-36a)}$$

$$D^2(L_2) = D^2(L_2^*) \ . \qquad \text{(D3-36b)}$$

Obliczenie wartości $E(L_2^*)$ i $D^2(L_2^*)$ wymaga wyprowadzenia wzoru opisującego rozkład zmiennej losowej L_2^*.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że ciąg (D3-34) nie zawiera zer wynosi:

$$P(L_2^*=0) = P(X^1=1) = P(X^1=1 \mid X^0=0) \cdot P(X^0=0) +$$

$$+ P(X^1=1 \mid X^0=1) \cdot P(X^0=1) = p_{01}(1-p) + p \,. \qquad \text{(D3-37)}$$

Zdarzenie polegające na tym, że $L_2^* = 1$ jest iloczynem dwóch zdarzeń: $X^1 = 0$ i $X^2 = 1$. Korzystając ze wzoru definicyjnego na prawdopodobieństwo warunkowe oraz związku (D3-37) otrzymuje się:

$$P(L_2^*=1) = P(X^1=0 \wedge X^2=1) = P(X^2=1 \mid X^1=0) \cdot P(X^1=0) =$$

$$= p_{01}\left[1 - p_{01}(1-p) - p\right] \,. \qquad \text{(D3-38)}$$

Podobnie:

$$P(L_2^*=2) = P(X^2=0 \wedge X^3=1) = P(X^3=1 \mid X^2=0) \cdot P(X^2=0) \,. \qquad \text{(D3-39)}$$

Prawdopodobieństwo całkowite zdarzenia $X^2 = 0$ wynosi:

$$P(X^2=0) = P(X^2=0 \mid X^1=0) \cdot P(X^1=0) + P(X^2=0 \mid X^1=1) \cdot P(X^1=1) =$$

$$= (1-p_{01})\left[1-p_{01}(1-p) - p\right] \,. \qquad \text{(D3-40)}$$

Podstawiając (D3-40) do (D3-39) dostaje się:

$$P(L_2^* = 2) = p_{01}(1 - p_{01})\left[1 - p_{01}(1 - p) - p\right] \,. \qquad \text{(D3-41)}$$

Podobnie oblicza się, że:

$$P(L_2^* = 3) = p_{01}(1 - p_{01})^2\left[1 - p_{01}(1 - p) - p\right] . \qquad \text{(D3-42)}$$

Z zależności (D3-37), (D3-38), (D3-41) i (D3-42) można już wywnioskować, że:

$$P(L_2^* = k) = \begin{cases} p_{01}(1 - p) + p & , k = 0 \\ p_{01}(1 - p_{01})^{k-1}\left[1 - p_{01}(1 - p) - p\right] & , k = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad \text{(D3-43a)}$$

Jeżeli skorzystać ze związku (D3-33), powyższy zapis upraszcza się:

$$P(L_2^* = k) = \begin{cases} 1 - p_{00}(1 - p) & , k = 0 \\ p_{00}^k \cdot (1 - p_{00}) \cdot (1 - p) & , k = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad \text{(D3-43b)}$$

O formalnej poprawności powyższego wzoru przekonuje fakt, że:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(L_2^* = k) = 1 .$$

Ponieważ jednak procedura komparacyjna składa się ze skończonej liczby porównań, a wzór (D3-43b) przypisuje niezerowe wartości prawdopodobieństw wszystkim zdarzeniom $L_2^* = k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, postąpiono podobnie jak w przypadku II. Zdarzeniu $L_2^* = L$ arbitralnie przypisano prawdopodobieństwo odpowiadające wg wzoru (D3-43b) zda-

rzeniu: $L_2^* \geqslant L$. Uzyskano dzięki temu, że:

$$\sum_{k=0}^{L} P(L_2^* = k) = 1 \ .$$

Rozkład zmiennej losowej L_2^* ma więc ostatecznie postać:

$$P(L_2^* = k) = \begin{cases} 1 - p_{00}(1-p) & , k = 0 \\ p_{00}^k(1-p_{00})(1-p) & , k = 1, 2, \ldots, L-1 \\ p_{00}^L(1-p) & , k = L \\ 0 & , k > L \ . \end{cases} \qquad \text{(D3-44)}$$

Wartość oczekiwaną $E(L_2^*)$ obliczono wg definicji:

$$E(L_2^*) \overset{df}{=} \sum_{k=0}^{L} k \cdot P(L_2^*=k) = (1-p_{00})(1-p) \cdot \sum_{k=1}^{L-1} k \cdot p_{00}^k + L \cdot p_{00}^L(1-p) =$$

$$= \overset{(D3-12)}{\underset{(D3-14)}{\ldots}} = p_{00}(1-p)\,\frac{1-p_{00}^L}{1-p_{00}} \qquad \text{(D3-45)}$$

Przy $p_{00} \leqslant 10^{-2}$ (porównaj rys. 3.13c), zaś $L \geqslant 10^3$, wyrażenie p_{00}^L osiąga wartość:

$$p_{00}^L \leqslant 10^{-2000} \ll 1 \ . \qquad \text{(D3-46)}$$

Nie popełniając więc praktycznie błędu można napisać:

$$E(L_2^*) = (1-p)\,\frac{p_{00}}{1-p_{00}} \qquad \text{(D3-47)}$$

lub, uwzględniając (D3-33):

$$E(L_2^*) = (1 - p)\frac{1 - p_{01}}{p_{01}} \quad . \tag{D3-47b}$$

Podstawiając kolejno: (D3-32) do (D3-47b), (D3-47b) do (D3-36a), zaś (D3-36a) do (2.15) otrzymuje się, że gdy: $U_{w\,max} - \bar{h} < U_1 \leqslant U_{w\,max} + \underline{h}$, to:

$$E(R) = U_{w\,max}\left[1 - \frac{1}{L}\left(\frac{U_{w\,max}}{U_1 - \underline{h}} - 1\right)(1 - p)\right] \quad . \tag{D3-48}$$

Wariancję zmiennej losowej L_2 oblicza się korzystając z faktu (D3-36b), wg następującego wzoru:

$$D^2(L_2) = D^2(L_2^*) = \sum_{k=0}^{L} k^2 P(L_2^* = k) - E^2(L_2^*) \quad . \tag{D3-49}$$

Suma skończona występująca po prawej stronie powyższego związku stanowi drugi moment zwykły zmiennej losowej L_2^*. Oblicza się go wykorzystując opis (D3-44) rozkładu tej zmiennej losowej, w analogiczny sposób jak to zrobiono w przypadku II - wzory (D3-22) ÷ (D3-25). Wynik przekształceń jest następujący:

$$D^2(L_2) = \tag{D3-50}$$

$$= \frac{p_{00}(1-p)\left[(1-p_{00}^L)(1+p_{00}) - 2Lp_{00}^L(1-p_{00}) - p_{00}(1-p)(1-p_{00}^L)^2\right]}{(1 - p_{00})^2} \quad .$$

Ponieważ jednak wyrażenie: p_{00}^{L} ma bardzo małą wartość już przy $L = 10^3$ i $p_{00} = 10^{-2}$ (porównaj (D3-46)), wzór (D3-50) można przepisać w postaci:

$$D^2(L_2) = \frac{p_{00}(1 - p)\left[1 + p\, p_{00}\right]}{(1 - p_{00})^2} . \qquad \text{(D3-51)}$$

Ostatnią równość można uprościć dalej:

$$D^2(L_2) \approx p_{00}(1 - p) . \qquad \text{(D3-52)}$$

Przy $p_{00} = 10^{-2}$ błąd przybliżenia wynosi ok. 3 %, przy $p_{00} = 10^{-3}$ - ok. 0,3 %.

Uwzględnienie w ostatnim związku wzorów: (D3-33) i (D3-32) i podstawienie go do (2.18) daje w efekcie poszukiwaną zależność:

$$D^2(R) = \frac{U_{w\,max}}{L^2}(1 - p)\,(U_{w\,max} + \underline{h} - U_1) , \qquad \text{(D3-53)}$$

$$U_{w\,max} - \tilde{h} < U_1 \leqslant U_{w\,max} + \underline{h} .$$

Związki (D3-48) i (D3-53) wykorzystano w tabeli 3.1, lp. 4.

Przypadek V: $U_1 > U_{w\,max} + \underline{h}$.

Zgodnie z opisem zamieszczonym w podrozdziale III/2, stan wyjścia układu porównania napięć jest-w rozpatrywanym zakresie zmian U_1 - jedynką logiczną w każdym takcie procedury kompara-

cyjnej. Stan końcowy licznika L_2 wynosi więc w tym przypadku zawsze L. Oznacza to, że gdy $U_1 > U_{w\ max} + \underline{h}$, to:

$$E(L_2) = L\ ; \qquad D^2(L_2) = 0 \tag{D3-54}$$

Uwzględnienie tych wzorów w (2.15) i (2.18) daje:

$$E(R) = U_{w\ max}\ , \quad D^2(R) = 0\ . \tag{D3-55}$$

Wzory powyższe zamieszczono w tabeli 3.1, lp. 5.

Omówienie i interpretacja wyników otrzymanych w niniejszym dodatku zawarto w podrozdziale III/2 (rys. 3.14, 3.15, a także towarzyszący im tekst).

Przypisy

[1] Por. Feller W., Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa 1980, s. 325.

[2] Por. np. Papoulis A., Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972, s. 50 - 51.

[3] Por. np. Feller W., op. cit., s. 237, 238.

[4] Por. np. Poradnik matematyczny. Red. I. Dziubiński, T. Świątkowski, PWN, Warszawa 1980, s. 332 - 333.

[5] Jest to dopuszczalne, gdyż w przypadku szeregów potęgowych w obszarze ich zbieżności prawdziwe jest równanie:

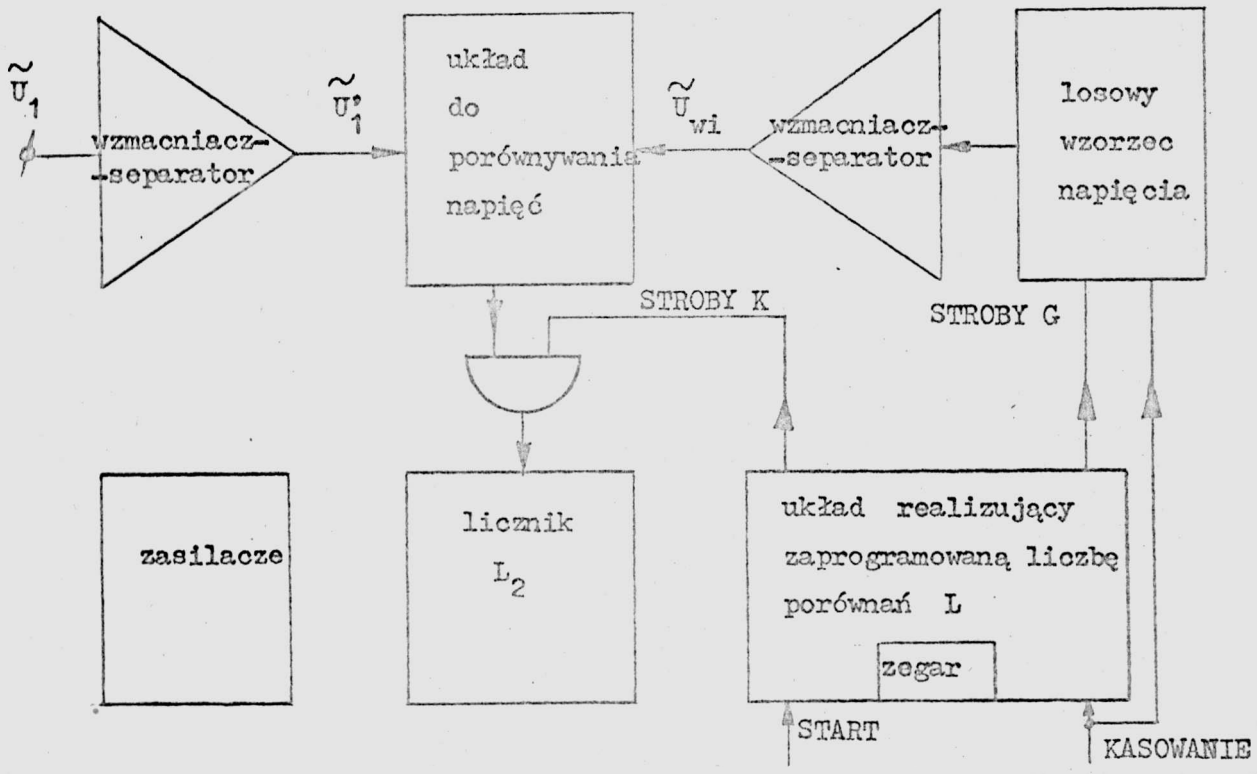
$$\frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} a_n x^n \quad .$$

Por. np. Poradnik matematyczny, op. cit., s. 332.

Dodatek 4

Ważniejsze parametry konstrukcyjno - eksploatacyjne woltomierza KS-1 skonstruowanego przez dr. Jana Juszkiewicza [1]

Strukturę układu o symbolu KS-1 przedstawiono na rysunku D4-1:



Rys. D4-1. Schemat uproszczony układu KS-1.

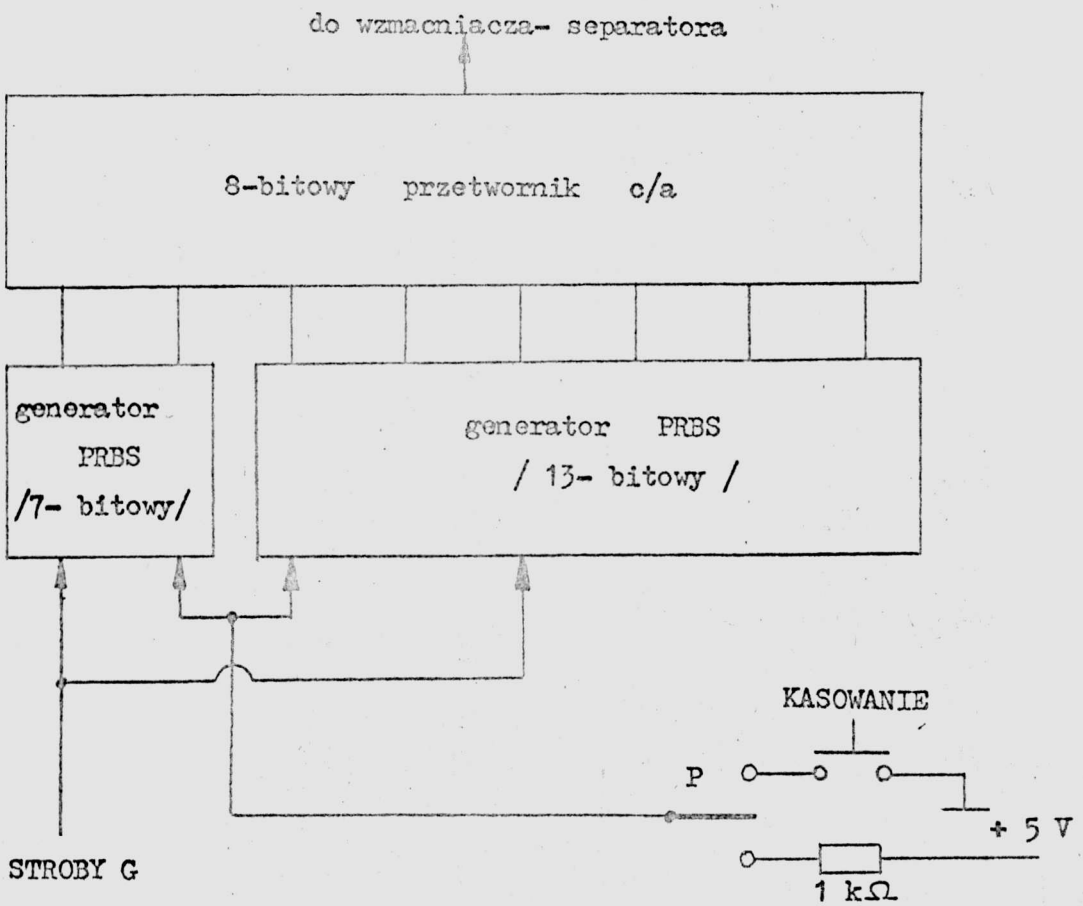
Jak widać, struktura ta odpowiada układowi realizującemu stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" przedstawionemu na rys. 2.1. Cykl pracy powyższego układu (jedna procedura komparacyjna) składa się z L-krotnego porównania napięcia mierzonego $\tilde{U}_1$ (ściślej - realizacji $\tilde{U}_1'$ będącej napięciem mierzonym po przejściu przez wzmacniacz - separator) z losowymi realizacjami wzorcowymi $\tilde{U}_w^j$ ($j = 1, 2, \ldots, L$). Liczbę L porównań

wykonywanych w ramach jednej komparacji kontroluje specjalny układ sterujący. Zawiera on oczywiście licznik, będący odpowiednikiem licznika L_1 na rys. 2.1. Licznik L_2 zlicza te porównania, w których $\tilde{U}_w^j < \tilde{U}_1'$. Wynik pomiaru określa się wg wzoru (2.5) odczytując stan końcowy licznika L_2.

A oto niektóre szczegóły dotyczące budowy kolejnych bloków z rys. D4-1:

L o s o w y w z o r z e c n a p i ę c i a

Strukturę tej części układu przedstawia rys. D4-2:



Rys. D4-2. Struktura losowego wzorca napięcia

Jak widać jest to wzorzec pseudolosowy. Zawiera on dwa generatory binarnych ciągów pseudolosowych (PRBS) zbudowane jako

rejestry przesuwne z liniowym, optymalnym [2] sprzężeniem zwrotnym. Zmiany stanów rejestrów odbywają się w rytm sygnału taktującego: STROBY G. Długości ciągów generowanych przez rejestry: 7- i 13- bitowy wynoszą odpowiednio (sprzężenie optymalne!): 2^7-1 oraz $2^{13}-1$. Ponieważ z kolei liczby 2^7-1 i $2^{13}-1$ są względnie pierwsze [3], oba generatory wytwarzają sekwencję słów dwudziestobitowych o okresie równym $(2^7-1) \cdot (2^{13}-1)$.

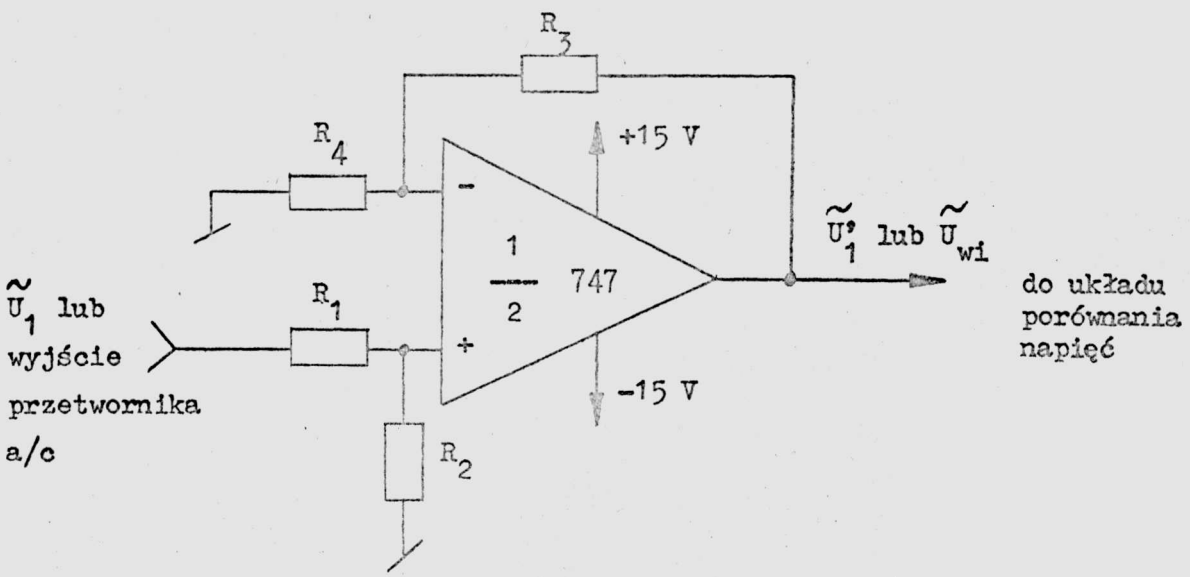
Jak wiadomo, rejestr przesuwny ze sprzężeniem liniowym nigdy nie wejdzie samorzutnie w stan zerowy (tzn. taki, że wszystkie jego przerzutniki są wyzerowane). Gdyby zaś stan ten został wymuszony zewnętrznie, układ nigdy nie wyzedłby z niego. W celu zabezpieczenia generatorów PRBS przed skutkami przypadkowego wyzerowania któregoś z rejestrów w momencie włączenia zasilania, w układzie wprowadzono asynchroniczne ustawianie jedynki na wyjściach dwóch przerzutników (po jednym z każdego rejestru). W oryginalnym wykonaniu ustawianie jedynek następowało przy każdorazowym naciśnięciu klawisza KASOWANIE na płycie czołowej urządzenia. Z powodów omówionych w Rozdziale V pracy, do układu wprowadzono przełącznik P (rys. D4-2) umożliwiający odłączenie ustawiania jedynki w dwóch przerzutnikach przy każdym użyciu przycisku KASOWANIE (po jednorazowym użyciu - bezpośrednio po włączeniu zasilania - omawiane połączenie jest już zbędne).

Zamiana cyfrowych ciągów pseudolosowych na napięcie następuje w 8-bitowym przetworniku c/a typu HRY 744 BR wykonanym przez Zakład Doświadczalny Produkcji Układów Hybrydowych przy Przemysłowym Instytucie Elektroniki, Unitra - Cemi, w Warszawie, oznaczonym symbolem DAC 44 [4]. Układ ten przetwarza informację zakodowaną cyfrowo na jego ośmiu wejściach na napięcie z prze-

działu od 0 do +5 V. Wejścia cyfrowe przetwornika dołączono do wybranych wyjść przerzutników omawianych już generatorów PRBS. Wyboru wyjść dokonano arbitralnie: dwa wejścia przetwornika c/a były sterowane z rejestru 7-bitowego, a pozostałe sześć- z rejestru 13-bitowego. Powstały w ten sposób regulowany losowo wzorzec napięcia odtwarza zatem 256 stanów tej wielkości. Do sterowania przetwornikiem c/a wykorzystano wyjścia n i e - k t ó r y c h tylko przerzutników obu rejestrów, więc:

- Na wyjściu przetwornika c/a może pojawić się napięcie zerowe.
- Realizacje napięcia pojawiające się na wyjściu przetwornika c/a mogą powtarzać się częściej niż wynika to z okresu rejestrów PRBS. Wzorzec realizuje zatem losowanie ze zwracaniem ze zbioru napięć o liczności 256.

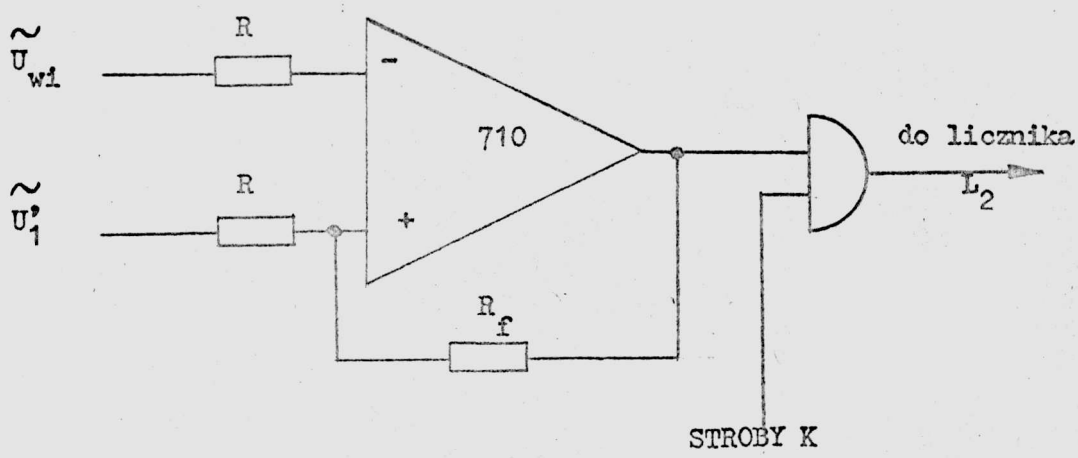
W z m a c n i a c z e - s e p a r a t o r y (rys. D4-3) wykonano z użyciem wzmacniaczy operacyjnych układu scalonego typu 747.



Rys. D4-3. Schemat uproszczony wzmacniacza - separatora.

Wzmocnienia obydwóch wzmacniaczy są różne i określają je rezystancje R_3, R_4 w pętlach ujemnego sprzężenia zwrotnego. Wzmocnienia dobrano tak, że przy napięciu mierzonym $\tilde{U}_1$ o wartości U_1 = 2 V, napięcie $\tilde{U}_1'$ podawane do detektora relacji porządku, jest równe największemu napięciu wzorcowemu $\tilde{U}_{w\ max}$. Z punktu widzenia użytkownika układ KS-1 zachowuje się więc tak, jakby jego wzorzec losował napięcia ze zbioru zawierającego 256 napięć równomiernie rozłożonych w przedziale od 0 do 2 V. Napięcia: mierzone i z wyjścia przetwornika c/a są podawane na wejścia nieodwracające wzmacniaczy operacyjnych poprzez dzielniki R_1, R_2. Dzielniki te wyznaczają więc oporności wejściowe wzmacniaczy - separatorów. W obu wzmacniaczach zastosowano identyczne dzielniki o oporności wejściowej ok. 6,5 kΩ.

S t r o b o w a n y u k ł a d d o p o r ó w n y w a n i a n a p i ę ć (rys. D4-4).



Rys. D4-4. Schemat uproszczony strobowanego układu do porównywania napięć (R = 33 Ω, R_f = 22 kΩ).

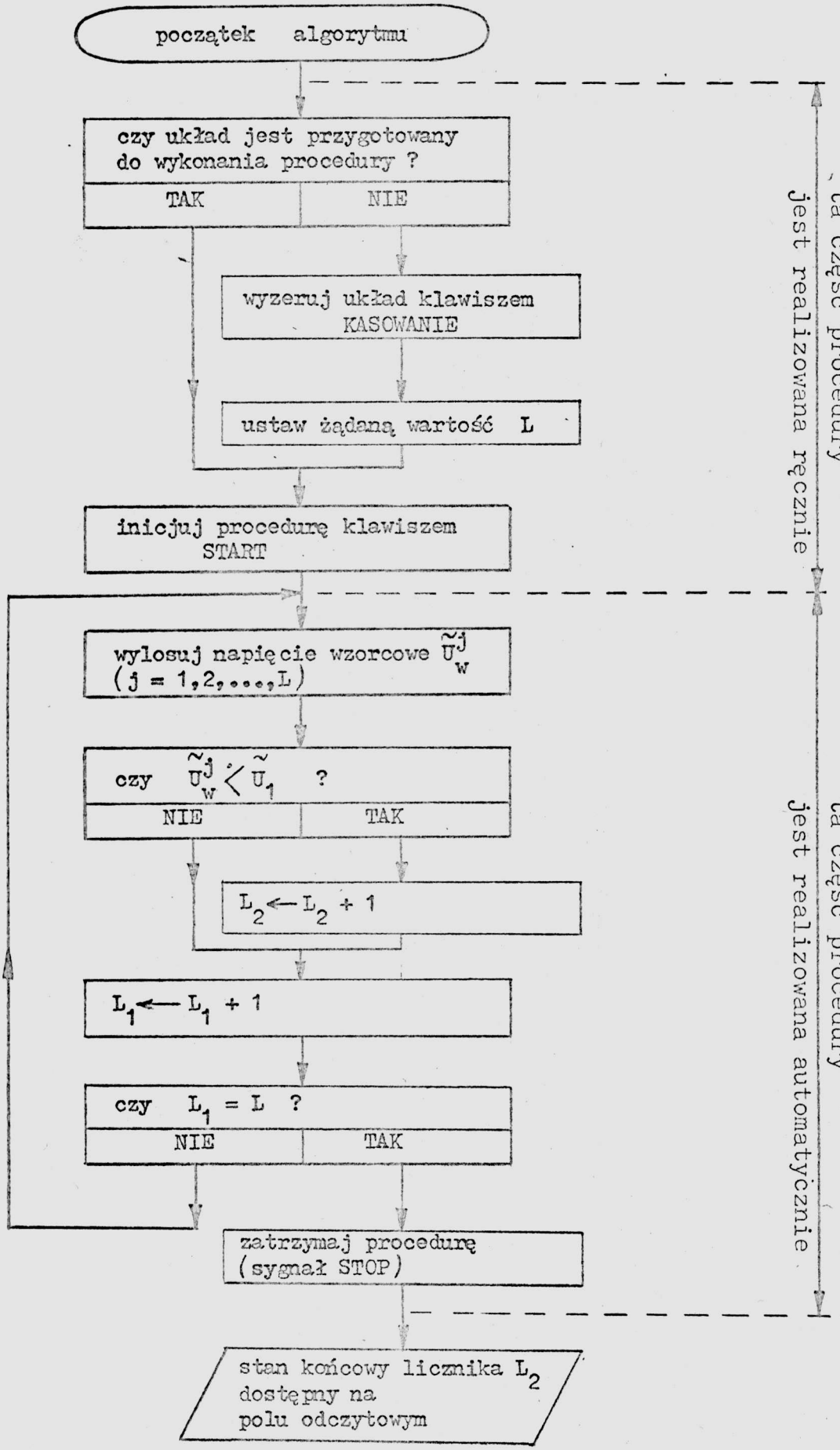
Trzon tego bloku stanowi układ scalony typu 710. W celu jego zabezpieczenia przed oscylacjami zastosowano niewielkie, dodatnie sprzężenie zwrotne (opornik R_f). Należy więc liczyć się z tym, że układ porównania napięć wykazuje histerezę [5]. Wyjście układu 710 oddzielono od licznika L_2 bramką typu AND ($\frac{1}{2}$ 7400). Umożliwia to uwrażliwianie licznika L_2 na stany wyjścia układu porównania napięć tylko w krótkich odcinkach czasu, już po ustaleniu się odpowiedzi układu 710 (STROBY K).

L i c z n i k L_2:

Ten blok funkcjonalny zrealizowano wykorzystując moduł tzw. cyfrowego panelu odczytowego typu CPO 4507 produkcji Zakładów Wytwórczych Lamp Elektrycznych im. Róży Luksemburg w Warszawie [6]. Składa się on z licznika sprzężonego z wyświetlaczem. Na wyświetlaczu pojawia się liczba dziesiętna, pięciopozycyjna odpowiadająca aktualnemu stanowi licznika. Współpraca modułu CPO z układem porównania napięć została tak zorganizowana, że stan licznika CPO jest zwiększany o jeden wtedy, gdy napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ wylosowane do porównania z napięciem mierzonym $\tilde{U}_1$ w j-tym takcie komparacji, jest od niego mniejsze.

U k ł a d r e a l i z u j ą c y z a p r o g r a m o w a n ą l i c z b ę p o r ó w n a ń:

Ze względu na liczbę pełnionych funkcji, jest to bez wątpienia najbardziej złożony blok urządzenia KS-1. Ponieważ pełni on w istocie rolę bloku sterowania i synchronizacji, więc jego funkcje wynikają bezpośrednio z algorytmu działania woltomierza KS-1 (rys. D4-5).



Rys. D4-5. Uproszczony algorytm pracy układu KS - 1 .

Tę część funkcji bloku realizującego zaprogramowaną liczbę porównań, która jest związana z wykonywanym ręcznie fragmentem procedury komparacyjnej (porównaj rys. D4-5), można omówić przez podanie przeznaczenia przycisków znajdujących się na płycie czołowej woltomierza KS-1. Są to klawisze dwóch rodzajów:

a) Przyciski wyboru wartości L. Umożliwiają one wykonanie w jednej procedurze komparacyjnej 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000, 10 000 lub 20 000 porównań.

b) Przyciski sterujące: KASOWANIE i START.

Przycisk KASOWANIE powoduje przygotowanie poszczególnych bloków układu do przeprowadzenia procedury komparacyjnej. W szczególnościpowoduje on:

- wyzerowanie licznika L_2,
- wyzerowanie licznika L_1 (będącego elementem omawianego właśnie bloku),
- takie ustawienie przerzutników określających stan układu, że jest on gotowy do zainicjowania klawiszem START nowego cyklu procedury komparacyjnej,
- ustawienie w stanie jedynki logicznej po jednym z przerzutników w każdym z rejestrów generatora PRBS losowego wzorca napięcia (zobacz także uwagi na ten temat zawarte w części dotyczącej wzorca).

Przycisk START powoduje zainicjowanie procedury komparacyjnej, o ile poprzednia procedura zakończyła się i układ został wyzerowany klawiszem KASOWANIE.

Po zainicjowaniu procedury komparacyjnej przyciskiem START dalszy jej przebieg odbywa się automatycznie (rys. D4-5). Zadania omawianego bloku realizującego zaprogramowaną liczbę porównań są obecnie następujące:

Należy spowodować wykonanie takiej liczby porównań napięć wzorcowych $\tilde{U}_w^j$ z napięciem mierzonym $\tilde{U}_1$, jaka została zadana odpowiednim klawiszem na płycie czołowej. Aby wykonać jedno porównanie omawiany blok wytwarza najpierw impuls powodujący przesunięcie zawartości obu rejestrów PRBS (STROBY G na rys. D4-1). Po czasie niezbędnym do tego aby ustaliły się kolejno: stany wyjść rejestrów PRBS, stan wyjścia przetwornika c/a oraz stan wyjścia układu porównania napięć, następuje podanie impulsu wpisującego ten ostatni do licznika L_2 (STROBY K). Każda para omówionych impulsów, powodująca wykonanie jednego porównania, jest związana z jednym taktem pracy zegara. Takty te są zliczane w liczniku L_1. Gdy liczba tak wykonanych porównań osiągnie wartość zadaną L, omawiany blok realizuje ostatnią ze swych funkcji - wysyła wewnętrzny impuls STOP. Impuls ten wstrzymuje, przez zmianę stanu odpowiedniego przerzutnika, procedurę wykonywania porównań. Liczbę porównań, w których wylosowane napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ ($j = 1, 2, \ldots, L$) było mniejsze od napięcia $\tilde{U}_1$ wyświetla pole odczytowe. Zainicjowanie nowej procedury komparacyjnej wymaga użycia przycisku KASOWANIE.

Z a s i l a c z e:

Układ KS-1 wykorzystuje następujące napięcia zasilające:

a) + 15 V, - 15 V - do zasilania: wzmacniaczy operacyjnych 747, układu porównania napięć 710, przetwornika c/a,

b) + 5 V - do zasilania układów logicznych TTL serii UCY 74 .. oraz przetwornika c/a.

Przypisy

[1] Dodatek ten opracowano na podstawie:
Juszkiewicz J., Komparator stochastyczny KS-1. Teczka z rysunkami stanowiącymi dokumentację konstrukcyjno - użytkową urządzenia. Materiał niepublikowany w posiadaniu dr. J. Juszkiewicza w Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej.

[2] Liniowość oznacza tu, że na wejście rejestru podawana jest suma "modulo-2" stanów wybranych wyjść rejestru. Optymalność sprzężenia oznacza, że uzyskiwana z rejestru sekwencja napięć jest najdłuższa z możliwych do uzyskania w tego typu układach, tj. $2^b - 1$, gdzie b - liczba przerzutników w rejestrze.

[3] Ściślej, są one liczbami pierwszymi, a przez to także - względnie pierwszymi. Można to udowodnić posługując się następującą własnością: Jeżeli liczba naturalna $n > 1$ nie jest podzielna przez żadną z liczb pierwszych nie większych od $\sqrt{n}$, to sama jest liczbą pierwszą. Por. np.
Empacher A.B. i in., Mały słownik matematyczny. Wiedza Powszechna, Warszawa 1975, s. 146.
Wyszukiwanie liczb pierwszych nie większych od $\sqrt{n}$ wygodnie jest prowadzić stosując algorytm zwany sitem Eratostenesa. Tamże, s. 263.

[4] Dane katalogowe przetwornika DAC 44 zobacz: Karta katalogowa E - 65: Binarne przetworniki cyfrowo - analogowe 8- i 10-bitowe. Zakład Doświadczalny Produkcji Układów Hybrydowych przy Przemysłowym Instytucie Elektroniki, Unitra - Cemi w Warszawie.

[5] Por. Nadachowski M., Kulka Z., Analogowe układy scalone. WKiŁ, Warszawa 1979, s. 370 i 371.

[6] Por. Instrukcja Techniczna: Cyfrowy panel odczytowy CPO 4507. Zakłady Wytwórcze Lamp Elektrycznych im. Róży Luksemburg w Warszawie.

Dodatek 5

Estymacja przedziałowa wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru oraz wariancji $D^2(L_2)$ stanu końcowego licznika L_2

Wynikiem pomiaru wykonywanego za pomocą układu realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" (rys. 2.1), jest liczba określana w sposób następujący:

$$R = \frac{L_2}{L_1} \cdot U_{w\,max} \cdot \qquad (D5\text{-}1)$$

Wynik ten jest zmienną losową i to nawet wtedy, gdy napięcie mierzone jest praktycznie niezmienne. Wariancję tej zmiennej losowej można oszacować empirycznie wielokrotnie powtarzając procedurę komparacyjną z tym samym zbiorem $\approx{U}_p$ napięć porównywanych z wzorcowymi i notując uzyskane wyniki:

$$R_1, R_2, \ldots, R_m \cdot$$

Jeżeli rezultaty te są niezależne, to mamy do czynienia z próbą prostą o liczności m. Statystyka:

$$\hat{S}^2_R = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^{m} (R_k - \bar{R})^2 \quad , \qquad (D5\text{-}2)$$

gdzie:

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} R_k \quad , \qquad (D5\text{-}3)$$

jest wtedy nieobciążonym i zgodnym estymatorem wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru (porównaj podrozdział V/2).

Przedmiotem tego dodatku jest określenie przedziałów ufności

wariancji wyniku przy założonym poziomie ufności γ_u i liczności m próby statystycznej.

W pierwszej kolejności trzeba tu zbadać jaki jest rozkład prawdopodobieństwa statystyki $\hat{S}_R^2$ używanej do estymacji punktowej parametru $D^2(R)$. Jeżeli prawdziwe jest założenie o niezależności losowań napięć wzorcowych $\tilde{U}_w^j$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$ w kolejnych taktach procedury komparacyjnej, to zmienna losowa L_2 jest sumą (2.34) niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie dwupunktowym (2.35):

$$L_2 = X^1 + X^2 + \ldots + X^L , \tag{2.34}$$

gdzie: $X^1, X^2, \ldots, X^L$ - zmienne losowe takie, że:

$$X^j = \begin{cases} 1, & \tilde{U}_w^j < \tilde{U}^j \\ 0, & \text{poza tym,} \quad j = 1, 2, \ldots, L . \end{cases} \tag{2.35}$$

Ponieważ liczba L porównań wykonanych w ramach komparacji jest na ogół duża $(L \geqslant 100)$, rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej L_2 jest w przybliżeniu normalny:

L_2 ma rozkład $\mathcal{N}\left(\sum_{j=1}^{L} p^j;\ \sqrt{\sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j)}\right)$, (D5-4)

gdzie: $\mathcal{N}(\cdot\ ;\ \cdot)$ - symbol rozkładu normalnego. W nawiasie umieszczono kolejno wartość średnią i dyspersję (pierwiastek kwadratowy z wariancji) rozkładu prawdopodobieństwa; porównaj wzory (2.37), (2.38),

p^j - prawdopodobieństwo sukcesu w j-tym takcie komparacji $(j = 1, 2, \ldots, L)$:

$$p^j = P(\tilde{U}_w^j < \tilde{U}^j) \ . \qquad \text{(D5-5)}$$

Ze stwierdzenia (D5-4) oraz ze wzoru (D5-1) wynika, że zmienna losowa R ma także rozkład normalny, tylko o innych parametrach [1]:

$$\text{R ma rozkład } \mathcal{N}\left(C \sum_{j=1}^{L} p^j;\ C\sqrt{\sum_{j=1}^{L} p^j(1 - p^j)}\ \right) , \qquad \text{(D5-6)}$$

gdzie: $C = \dfrac{U_{w\,max}}{L}$.

Zbiór uzyskanych wyników R_1, R_2, ..., R_m stanowi więc próbę prostą z populacji generalnej o rozkładzie normalnym (D5-6). Skoro tak, to statystyka:

$$\frac{m \cdot S_R^2}{D^2(R)} , \quad m \geqslant 2 , \qquad \text{(D5-7)}$$

gdzie:
$$S_R^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (R_k - \bar{R})^2 , \qquad \text{(D5-8)}$$

m - liczność próby,

$D^2(R)$ - poszukiwana wariancja zmiennej losowej R,

ma rozkład χ^2 o (m - 1) stopniach swobody [2]. Oznacza to (porównaj wzory (D5-2), (D5-8)), że statystyka:

$$\frac{(m - 1)\ \hat{S}_R^2}{D^2(R)} , \quad m \geqslant 2 \qquad \text{(D5-9)}$$

ma także rozkład χ^2 o (m - 1) stopniach swobody.

Stawiając więc problem znalezienia przedziałów ufności wariancji $D^2(R)$ w sposób typowy [3], należy znaleźć taki, możliwie wąski,

przedział liczbowy (u_1, u_2) by było:

$$P\left(u_1 < \frac{(m-1)\cdot \hat{S}_R^2}{D^2(R)} < u_2\right) = \gamma_u , \qquad \text{(D5-10)}$$

gdzie γ_u - przyjęty poziom ufności.

Jeżeli założy się, że liczność próby jest duża ($m > 30$), to można skorzystać z następującego twierdzenia granicznego: Niech Y_k, $k = 1, 2, \ldots$ oznacza ciąg zmiennych losowych o rozkładach χ^2 z k stopniami swobody (odpowiednio). Zmienne te są asymptotycznie normalne: $\mathcal{N}(k; \sqrt{2k})$ [4]. Oznacza to, że w przypadku dużego m zmienna losowa $\frac{(m-1)\hat{S}_R^2}{D^2(R)}$ ma rozkład $\mathcal{N}((m-1); \sqrt{2(m-1)})$. Tak więc zmienna losowa:

$$\frac{\frac{(m-1)\hat{S}_R^2}{D^2(R)} - (m-1)}{\sqrt{2(m-1)}} \text{ ma rozkład } \mathcal{N}(0, 1).$$

Upraszcza to znacznie znajdowanie przedziału ufności zwłaszcza, że krzywa gęstości rozkładu normalnego jest symetryczna. Zależność (D5-10) określająca granice poszukiwanego przedziału przybiera postać:

$$P\left(\left|\frac{\frac{(m-1)\hat{S}_R^2}{D^2(R)} - (m-1)}{\sqrt{2(m-1)}}\right| < u\right) = \gamma_u . \qquad \text{(D5-11)}$$

Z tablic rozkładu normalnego [5] łatwo znaleźć, że przy $\gamma_u = 0{,}997$ [6], liczba $u \approx 3$.

Z zależności (D5-11) uzyskuje się, po prostych przekształceniach, poszukiwane oszacowanie parametru $D^2(R)$:

$$\frac{m-1}{m-1+u\sqrt{2(m-1)}}\hat{S}_R^2 < D^2(R) < \frac{m-1}{m-1-u\sqrt{2(m-1)}}\cdot\hat{S}_R^2 \qquad \text{(D5-12)}$$

gdzie: $\hat{S}_R^2$ - wariancja z próby uzyskanych wyników, patrz zależność (D5-2),

zaś przy $\gamma_u = 0{,}997$ liczba $u \approx 3$.

Łatwo zauważyć, że głównym założeniem leżącym u podstaw wykonanego rozumowania jest to, iż próba prosta rezultatów pomiaru: $R_1, R_2, \ldots, R_m$ pochodzi z populacji generalnej o rozkładzie normalnym. Gdy więc chodzi o estymację wariancji $D^2(L_2)$ zmiennej losowej L_2, to - z uwagi na stwierdzenie (D5-4) - całe rozumowanie można powtórzyć dla $D^2(L_2)$. Uzyska się wtedy, zupełnie podobnie jak w przypadku nierówności (D5-12), że:

$$\frac{m-1}{m-1+u\sqrt{2(m-1)}}\hat{S}_{L_2}^2 < D^2(L_2) < \frac{m-1}{m-1-u\sqrt{2(m-1)}}\hat{S}_{L_2}^2 , \qquad \text{(D5-13)}$$

gdzie: $\hat{S}_{L_2}^2$ - wariancja z próby stanów końcowych licznika L_2:

$$\hat{S}_{L_2}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(L_{2k} - \bar{L}_2)^2 , \qquad \text{(D5-14)}$$

L_{2k}, $k = 1, 2, \ldots, m$ - próba prosta stanów końcowych (tzn. po wykonaniu procedury komparacyjnej) licznika L_2,

$\bar{L}_2$ - średnia z próby stanów końcowych licznika L_2:

$$\bar{L}_2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} L_{2k} \,. \qquad \text{(D5-15)}$$

Szerokość przedziału ufności podczas estymacji wariancji (przy ustalonym poziomie ufności γ_u) zależy od liczności m próby, na podstawie której wariancję oszacowano. Widać to dobrze w nierównościach (D5-12) i (D5-13). Z dotychczasowych rozważań wynika, że liczność m próby statystycznej powinna być większa od ok. 30. Wtedy bowiem zachodzi twierdzenie graniczne, z którego korzystano. Zwiększanie m prowadzi jednak nie tylko do zawężania przedziałów ufności (co jest skutkiem pozytywnym), ale także do zwiększenia czasochłonności eksperymentów, a zwłaszcza c z a s o c h ł o n n o ś c i o p r a c o w a n i a i c h w y n i k ó w . Wybór liczności próby m powinien być zatem kompromisowy. Aby decyzję w tej sprawie uczynić w miarę możliwości racjonalną, zależność położenia końców przedziału ufności od liczności próby m przedstawiono na wykresie. Współczynniki występujące we wzorach (D5-12) i (D5-13), a służące do ustalania granic przedziałów ufności na podstawie estymacji punktowej $\hat{S}_R^2$ lub $\hat{S}_{L_2}^2$, oznaczono odpowiednio przez a_1 i a_2:

$$a_1 = \frac{m - 1}{m - 1 + u\sqrt{2(m - 1)}} \qquad \text{(D5-16)}$$

$$a_2 = \frac{m - 1}{m - 1 - u\sqrt{2(m - 1)}} \,. \qquad \text{(D5-17)}$$

Zależności powyższe przy $u = 3$ ($\gamma_u = 0{,}997$) oraz $m > 2u^2 + 1 = 19$ (tak by mianownik we wzorze (D5-17) był dodatni)

zobrazowano na rys. D5-1.

Na podstawie rys. D5-1 oraz nierówności (D5-12) i (D5-13) można wysnuć następujące wnioski dotyczące szerokości przedziałów ufności podczas estymacji wariancji:

a) Bezwzględna szerokość tych przedziałów ma wartość:

$$(a_2 - a_1)\hat{S}_R^2 = \frac{2u\sqrt{2(m-1)}}{m - 1 - 2u^2} \cdot \hat{S}_R^2 \quad . \qquad \text{(D5-18)}$$

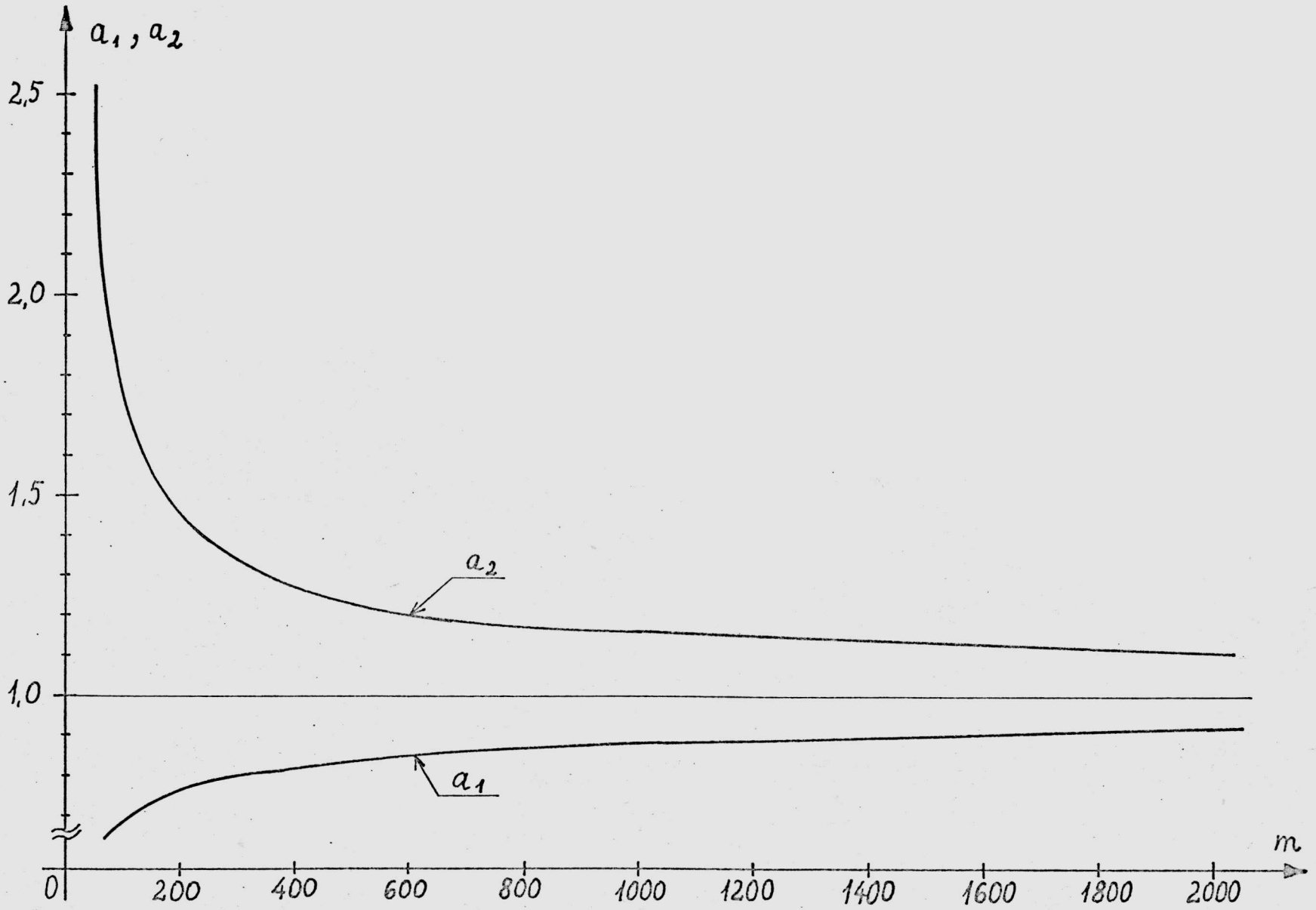
Stanowi ona - jak widać - określony procent wartości wariancji oszacowanej punktowo. Szerokość ta jest więc tym większa, im większą wartość ma estymowana wariancja.

Ponadto ze wzrostem liczności próby m szerokość (D5-18) przedziału ufności maleje.

b) Przedział ufności (D5-12) składa się - w przypadku zaznaczenia go na osi pionowej - z dwóch odcinków: górnego o szerokości $(a_2 - 1) \cdot \hat{S}_R^2$ oraz dolnego o szerokości $(1 - a_1) \cdot \hat{S}_R^2$. Można sprawdzić, że: $1 - a_1 < a_2 - 1$ czyli, że odcinek górny jest dłuższy od dolnego (porównaj też rys. D5-1).

Na podstawie wykonanych rozważań przyjęto, że jako minimalną liczność próby do badań zgrubnych należy przyjąć $m \approx 50$ (zachodzenie twierdzenia granicznego).

Liczność próby pobieranej w trakcie pomiarów zależy głównie od zastosowanego później sposobu obróbki statystycznej tych wyników. Przy ręcznym wprowadzaniu liczb do kalkulatora m rzędu kilkuset stanowi praktycznie granicę maksymalną (pracochłonność). W przypadku automatycznej transmisji wyników do maszyny cyfrowej lub w przypadku badań symulacyjnych, ograniczenie to nie jest już tak istotne. Warto jednak zauważyć, że jeżeli przyjmie się



Rys. D5-1. Zależność współczynników a_1 i a_2 określających końce przedziałów ufności przy estymacji wariancji wyniku pomiaru, od liczności m pobranej próby, przy $\gamma_u = 0{,}997$.

pochodną:

$$\frac{d(\frac{a_2}{a_1})}{dm}$$

jako miarę szybkości malenia szerokości przedziału ufności ze wzrostem m, to przy $\gamma_u = 0{,}997$ pochodna ta przybiera następujące wartości:

m	30	100	200	500
$\frac{d(\frac{a_2}{a_1})}{dm}$	$-6{,}0 \cdot 10^{-1}$	$-1{,}3 \cdot 10^{-2}$	$-3{,}1 \cdot 10^{-3}$	$-5{,}8 \cdot 10^{-4}$

Z powyższych danych wynika, że przy m = 200 szerokość przedziału ufności, mierzona wartością ilorazu: $\frac{a_2}{a_1}$, maleje ze wzrostem m ok. 200 razy wolniej niż w przypadku m = 30. Rzuca to pewne światło na opłacalność dalszego zwiększania liczności próby m.

Przypisy

[1] Por. np. Papoulis A., Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972, s. 139-141.

[2] Por. np. Pawłowski Z., Statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1980, s. 43.

[3] Por. np. Pawłowski Z., op. cit., s. 108 - 111. Fisz M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1967, s. 509 - 513.

[4] Inglot T., Ledwina T., Ławniczak Z., Materiały do ćwiczeń z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1979, s. 70.

[5] Tamże, s. 297.

[6] Przyjęcie tak wysokiego poziomu ufności można uzasadnić następująco: Błędy narzędzi pomiarowych określa się zwyczajowo przy poziomie ufności $\gamma_u = 0{,}997$. Omawiany w tym dodatku problem można określić krótko jako pomiar wariancji wyniku $D^2(R)$. Chodziło więc o to, by przedziały ufności uzyskane dla estymowanego parametru odpowiadały błędowi h i p o t e t y c z n e g o miernika służącego do pomiaru wariancji $D^2(R)$.

Dodatek 6

Podstawowe cechy zależności wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru uzyskiwanego za pomocą stochastycznej komparacji przeglądowej typu "większy - mniejszy", od unormowanej wartości $\frac{U_1}{U_{w\,max}}$ napięcia mierzonego, przy ustalonej liczbie L porównań wykonywanych w ramach komparacji i d o w o l n y m rozkładzie prawdopodobieństwa napięć wzorcowych.

Rozważa się tutaj wariancję wyniku uzyskiwanego wg wzoru (2.5) za pomocą układu, którego schemat przedstawia rys. 2.1. Przyjęto, że zbiór $\tilde{\tilde{U}}$ napięć mierzonych jest jednoelementowy: $\tilde{\tilde{U}} = \{\tilde{U}_1\}$. Założono także, iż napięcia wytwarzane przez wzorzec w kolejnych taktach komparacji są losowo niezależne, a ponadto charakteryzują się ciągłym rozkładem prawdopodobieństwa o funkcji gęstości $\gamma(U_w)$ mającej następujące cechy:

a) $\gamma(U_w) \equiv 0$, gdy $U_w \notin [0;\ U_{w\,max}]$,

b) $\gamma(U_w)$ ma w przedziale $U_w \in [0;\ U_{w\,max}]$ skończoną liczbę nieciągłości co najwyżej pierwszego rodzaju [1] (tzn. istnieją obie granice jednostronne i są skończone). Jest to warunek wystarczający na to, by funkcja $\gamma(U_w)$ była całkowalna w sensie Riemanna [2] w przedziale $U_w \in [0;\ U_{w\,max}]$.

Jeżeli spełnione jest z a ł o ż e n i e o n i e z a l e ż n o ś c i losowań napięć wzorcowych w trakcie trwania procedury komparacyjnej, to zgodnie ze wzorami (2.18), (2.19) (2.11), (2.12):

$$D^2(R) = \frac{U^2_{w\,max}}{L} \cdot p(1-p) \overset{\text{ozn.}}{=} f(p), \qquad \text{(D6-1)}$$

gdzie: p - prawdopodobieństwo tego, że napięcie wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ wylosowane do porównania z napięciem mierzonym $\tilde{U}_1$ w dowolnym j-tym takcie komparacji, będzie spełniało zależność:

$$\tilde{U}_w^j < \tilde{U}_1 , \quad j = 1, 2, \ldots, L:$$

$$p = \int_0^{U_1} \gamma(U_w)\, d\, U_w \overset{\text{ozn.}}{=\!=} g(U_1) . \qquad \text{(D6-2)}$$

Na podstawie równań (D6-1) i (D6-2) można napisać:

$$D^2(R) = f(p) = f\left[g(U_1)\right] = h(U_1) . \qquad \text{(D6-3)}$$

Wariancja wyniku jest więc złożoną funkcją zmiennej U_1. Postać analityczną funkcji f oraz g określają prawe strony wzorów (D6-1) i (D6-2).

Wartość zmiennej p jest określona jako funkcja górnej granicy całkowania (D6-2). Z punktu widzenia interpretacji probabistycznej funkcja $g(U_1)$ jest oczywiście dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych. Ze wzoru (D6-2), a także z założeń dotyczących funkcji gęstości $\gamma(U_w)$ poczynionych na początku niniejszego dodatku, wynikają następujące właściwości funkcji $g(U_1)$:

a) $\bigwedge_{U_1}$ $\quad g(U_1) \in [0, 1]$,

b) $\bigwedge_{U_1}$ $\quad g(U_1)$ jest funkcją ciągłą [3],

c) $g(U_1)$ jest funkcją niemalejącą, gdyż $\gamma(U_w)$ - jako funkcja gęstości prawdopodobieństwa - jest nieujemna.

Funkcja f(p) (D6-1) jako wielomian jest ciągła przy wszystkich p rzeczywistych, a więc - w szczególności - jest ciągła przy $p \in [0, 1]$. Funkcja f(p) jest parabolą. W zakresie zmian $p \in [0; 0,5]$ jest ona rosnąca, zaś przy $p \in (0,5; 1]$ - - malejąca. Ponadto: $f(0) = f(1) = 0$.

Z wyszczególnionych właśnie cech funkcji f oraz g zostaną teraz wyprowadzone podstawowe właściwości funkcji złożonej:

$$h = f \circ g \quad , \tag{D6-4}$$

gdzie: $\circ$ - symbol złożenia dwóch funkcji.

a) Dziedziną funkcji $h(U_1)$ jest zbiór wszystkich rzeczywistych wartości U_1, przy czym:

$$D^2(R) = h(U_1) \equiv 0 \quad , \quad \text{gdy} \quad U_1 \notin (0; U_{w\,max})$$

oraz:

$$D^2(R) \in \left[0; \frac{U^2_{w\,max}}{4L}\right] \quad , \quad \text{gdy} \quad U_1 \in [0; U_{w\,max}] \quad .$$

b) Funkcja $h(U_1)$ jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych jako złożenie dwóch funkcji ciągłych.

c) Istnieje co najmniej jeden punkt $U_1^o \in [0; U_{w\,max}]$ taki, że $h(U_1^o) = \frac{U^2_{w\,max}}{4L}$. Wynika to stąd, że funkcja $g(U_1)$ jako ciągła przybiera każdą wartość p zawartą w przedziale $[0; 1]$. W szczególności musi istnieć takie U_1^o, że:

$$p = g(U_1^o) = \int_0^{U_1^o} \gamma(U_w)\, dU_w = \frac{1}{2} \quad . \tag{D6-5}$$

Z kolei funkcja zewnętrzna f(p) przyjmuje przy $p = \frac{1}{2}$ wartość maksymalną równą $\frac{U^2_{w\,max}}{4L}$.

d) Charakter zmian funkcji $h(U_1)$:

- Przy $U_1 \in [0; U_1^o]$, gdzie U_1^o jest punktem spełniającym równanie (D6-5), funkcja $D^2(R) = h(U_1)$ jest n i e m a l e j ą c a . Istotnie: funkcja wewnętrzna $p = g(U_1)$ jest niemalejąca, zaś funkcja zewnętrzna $f(p)$ jest w tym przedziale rosnąca. Funkcja $h(U_1)$ jest tam więc niemalejąca jako złożenie funkcji niemalejącej i rosnącej.
- Przy $U_1 \in (U_1^o; U_{w\ max}]$, funkcja $D^2(R) = h(U_1)$ jest n i e r o s n ą c a jako złożenie funkcji niemalejącej $g(U_1)$ i malejącej $f(p)$.

Na podstawie powyższego twierdzenia można orzec, że o ile napięcia wzorcowe losowane są w sposób niezależny, to nie istnieje taki rozkład prawdopodobieństwa tych napięć, przy którym funkcja $D^2(R) = h(U_1)$ miałaby zagłębienie. Wymagałoby to bowiem, by była ona najpierw malejąca, a potem - ze wzrostem U_1 - stawała się rosnąca, co - jak powiedziano - nie może mieć miejsca.

Przypisy

[1] Por. np. Leja F., Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1976, s. 80.

[2] Tamże, s. 281.

[3] Tamże, s. 288 - 289.

Dodatek 7

Programy symulujące działanie układu realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" ma mikrokomputerze SDK 8085 firmy Intel

a) Program niniejszy symuluje działanie woltomierza KS-1. Zastosowany w nim generator PRBS składa się więc z dwóch rejestrów przesuwnych: 13- i 7-bitowego. Sprzężenia zwrotne i sposób wykorzystania poszczególnych bitów obu rejestrów przesuwnych do zestawiania liczby losowej W^j są identyczne jak w układzie KS-1.

Liczbę X symulującą napięcie mierzone należy umieścić przed uruchomieniem programu w komórce pamięci o adresie symbolicznym ADR4. W komórkach o adresach symbolicznych ADR8, ADR9 należy natomiast umieścić liczbę $L < 2^{16}$ określającą ile porównań liczby X z liczbami losowymi W^j ($j = 1, 2, \ldots, L$) ma być wykonanych w ramach pojedynczej procedury komparacyjnej.

Po wykonaniu programu pole odczytowe mikrokomputera emituje liczbę dziesiętną będącą stanem końcowym licznika L_2. Po zakończeniu symulacji jednej procedury komparacyjnej program odczekuje kilka sekund umożliwiając operatorowi zapisanie wyświetlanego stanu licznika L_2, po czym automatycznie przechodzi do realizacji następnej procedury.

Zakończenie cyklicznej pracy programu odbywa się przez wysłanie odpowiedniego sygnału przerwaniowego.

Program zajmuje ok. 160 bajtów pamięci RAM, a jego początek znajduje się w komórce o adresie symbolicznym ADR35.

A oto lista komórek pamięci zawierających dane wejściowe,

wyjściowe lub pomocnicze używane w programie:

adres symboliczny komórki pamięci lub nazwa rejestru	przeznaczenie	przed uruchomieniem programu, do komórki tej należy załadować następującą wartość
ADR1 ADR2	rejestr 13-bitowy generatora PRBS I	dowolna, ale zawartość jednej z komórek musi być różna od zera
ADR3	rejestr 7-bitowy generatora PRBS II	dowolna, różna od zera
ADR4	liczba X	X
ADR5 ADR6 ADR7	licznik L_2 (najmłodszy bajt / najstarszy bajt)	dowolna
ADR8 ADR9	starszy bajt liczby L młodszy bajt liczby L	L
rejestr A	pomocnicze	dowolna
rejestry B, C	licznik L_1	dowolna
rejestry D, E	pomocnicze	dowolna
rejestry H, L	pomocnicze - adresowane	dowolna
rejestr SP	wskaźnik stosu	20 $C2_H$

Treść programu wraz z komentarzami jest następująca:

Zerowanie liczników L_1 i L_2:

```
ADR35   XRA  A
        MOV  B, A
        MOV  C, A
        LXI  H, ADR5
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  M, A
```

Generowanie liczby losowej w^j:

Przesunięcie zawartości rejestru 13-bitowego:

```
ADR33   LXI  H, ADR1
        MOV  A, M
        ANI  BØH
        MOV  D, A
        INX  H
        MOV  A, M
        ANI  Ø8H
        ORA  D
        STC
        JPO  ADR3Ø
        CMC
ADR3Ø   DCX  H
        MOV  A, M
        RAR
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  A, M
        RAR
        MOV  M, A
```

Przesunięcie zawartości rejestru 7-bitowego:

```
        INX  H
```

```
                MOV  A, M
                ANI  82H
                STC
                JPO  ADR31
                CMC
ADR31           MOV  A, M
                RAR
                MOV  M, A
```

Zestawianie liczby w^j z odpowiednich bitów obu rejestrów:

```
                ANI  40H
                MOV  D, A
                MOV  A, M
                ANI  02H
                RLC
                ORA  D
                MOV  D, A
                DCX  H
                MOV  A, M
                ANI  40H
                RRC
                RRC
                RRC
                RRC
                RRC
                ORA  D
                MOV  D, A
                MOV  A, M
                ANI  08H
                ORA  D
                MOV  D, A
                DCX  H
                MOV  A, M
                ANI  90H
                ORA  D
                MOV  D, A
                MOV  A, M
                ANI  40H
```

```
        RRC
        ORA   D
        MOV   D, A
        MOV   A, M
        ANI   ø 8H
        RRC
        RRC
        RRC
        ORA   D
        MOV   D, A
```

Porównanie liczby W^j z liczbą X:

```
        LXI   H, ADR4
        MOV   A, M
        CMP   D
        JC    ADR32
```

Zwiększanie o jeden zawartości licznika L_2 jeżeli było $W^j \leqslant X$. Licznik L_2 zlicza w kodzie BCD:

```
        LXI   H, ADR5
        MOV   A, M
        ADI   ø1
        DAA
        MOV   M, A
        INX   H
        MOV   A, M
        ACI   øø
        DAA
        MOV   M, A
        INX   H
        MOV   A, M
        ACI   øø
        MOV   M, A
```

Zwiększanie o jeden zawartości licznika L_1 (licznik L_1 liczy binarnie) oraz sprawdzenie czy $L_1 = L$:

```
ADR32   INX   B
        LXI   H, ADR8
```

```
MOV  A, M
CMP  B
JNZ  ADR33
INX  H
MOV  A, M
CMP  C
JNZ  ADR33
```

Emisja zawartości licznika L_2 na polu odczytowym, jeżeli było $L_1 = L$. W tej części programu wykorzystuje się następujące podprogramy MONITORA systemu SDK 8085:

- podprogram HXDSP służący do "rozpakowywania" danych przeznaczonych do wyświetlenia na polu odczytowym [1]
- podprogram OUTPT służący do wyświetlania danych wyjściowych na odpowiednich pozycjach wyświetlacza [2]:

```
LXI  H, ADR7
MOV  D, M
DCX  H
MOV  E, M
CALL  HXDSP
XRA  A
MOV  B, A
CALL  OUTPT
LXI  H, ADR5
MOV  D, M
CALL  HXDSP
MVI  A, 01
MVI  B, 00
CALL  OUTPT
```

Opóźnienie umożliwiające operatorowi zapisanie wyświetlanego stanu licznika L_2. Wykorzystuje się tu podprogram MONITORA o nazwie DELAY[2]. Umożliwia on wytwarzanie opóźnień o programowanym czasie trwania:

```
LXI  D, FFFF_H
CALL  DELAY
```

Automatyczne zainicjowanie kolejnej procedury komparacyjnej:

```
JMP  ADR35
```

b) Drugi z kolei program wykorzystywany podczas badań symulacyjnych różni się od poprzedniego jedynie generatorem liczb pseudo-losowych W^j ($j = 1, 2, \ldots, L$). Zastosowano tu mianowicie generator jednorejestrowy: 20- lub 23-bitowy z liniowym, optymalnym sprzężeniem zwrotnym. W przypadku rejestru 20-bitowego zastosowano sprzężenia z bitów: ostatniego i czwartego od końca. W przypadku rejestru 23-bitowego sprzężenie zwrotne pobierano z bitów: ostatniego i szóstego od końca [3]. Zorganizowanie powyższych rejestrów wymagało użycia trzech bajtów pamięci RAM. Liczbę losową W^j uzyskiwano pobierając środkowy bajt rejestru przesuwnego.

Poza różnicą w sposobie generowania liczb losowych, program niniejszy jest identyczny z opisanym w punkcie a) tego dodatku. Sposób jego wykorzystywania jest także zupełnie analogiczny. Początek programu znajduje się w komórce o adresie symbolicznym ADR35. Cały program zajmuje ok. 120 bajtów.

Listę komórek pamięci zawierających dane wejściowe, wyjściowe lub pomocnicze oraz przeznaczenie poszczególnych rejestrów zawiera następująca tabela:

adres symboliczny komórki pamięci lub nazwa rejestru	przeznaczenie	przed uruchomieniem programu do komórki tej należy załadować następującą wartość
ADR1 ADR2 ADR3	rejestr generatora PRBS (liczba W^j - zawartość komórki o adresie ADR2)	dowolna, ale zawartość choć jednej z komórek musi być różna od zera
ADR4	Liczba X	X
ADR5 ADR6 ADR7	licznik L_2 (najmłodszy bajt … najstarszy bajt)	dowolna
ADR8 ADR9	starszy bajt liczby L młodszy bajt liczby L	L
rejestr A	pomocniczo	dowolna
rejestry B, C	licznik L_1	dowolna
rejestry D, E	pomocnicze	dowolna
rejestry H, L	pomocnicze-adresowanie	dowolna
rejestr SP	wskaźnik stosu	$2\emptyset C2_H$

Obecny program uzyskuje się przez zastąpienie w tekście programu poprzedniego fragmentu zaczynającego się od komentarza: "generowanie liczby losowej W^j", aż do komentarza: "Porównanie liczby W^j z liczbą X", następującą sekwencją rozkazów:

Generowanie liczby losowej W^j:

```
ADR33   LXI  H, ADR3
        MOV  A, M
        ANI  90H  - rejestr 20-bitowy. W przypadku rejestru
                    23-bitowego, do filtrowania bitów, z których
                    pobierane jest sprzężenie zwrotne, używano
                    liczby 42H.
        STC
        JPO  ADR30
        CMC
ADR30   DCX  H
        DCX  H
        MOV  A, M
        RAR
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  A, M
        RAR
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  A, M
        RAR
        MOV  M, A
        DCX  H
        MOV  D, M
```

c) Kolejny program również symuluje działanie woltomierza KS-1. W stosunku do dwóch poprzednich zawiera on jednak kilka ulepszeń, a mianowicie:

- Automatycznie realizuje zadaną z góry liczbę m procedur komparacyjnych, z których każda składa się z L porównań liczb losowych W^j z liczbą X.
- Umożliwia pobieranie liczb losowych W^j $(j = 1, 2, \ldots, L)$ nie tylko na podstawie kolejnych stanów rejestru przesuwnego lecz także dowolną liczbę K taktów pracy tego rejestru (K - liczba całkowita).
- Oblicza wartości sumy: $\sum_{k=1}^{m} L_{2k}$ oraz sumy kwadratów: $\sum_{k=1}^{m} L_{2k}^2$, stanów L_{2k} licznika L_2 po zakończeniu kolejnych: $k = 1, 2, \ldots, m$ procedur komparacyjnych.

Dzięki ostatniemu ulepszeniu, zapisywanie wartości L_{2k} uzyskiwanych w poszczególnych procedurach komparacyjnych nie jest już konieczne. Po zakończeniu pracy programu, na podstawie wyników jego obliczeń można szybko określić wartość wariancji z próby stanów końcowych licznika L_2:

$$\hat{S}^2_{L_2} = \frac{m}{m-1} S^2_{L_2} , \qquad (D7\text{-}1)$$

gdzie:

$$S^2_{L_2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} L_{2k}^2 - \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} L_{2k}\right)^2 . \qquad (D7\text{-}2)$$

Parametrami wejściowymi opisywanego programu są:

- liczba m procedur komparacyjnych, które mają być wykonane,
- liczba L porównań składających się na pojedynczą procedurę,
- liczba X symulująca napięcie mierzone,

- liczba K "międzyprzesunięć" rejestru generatora PRBS, które mają być wykonywane między kolejnymi pobraniami liczb losowych W^j.

Wynikiem działania programu są dwie sumy: $\sum_{k=1}^{m} L_{2k}$ oraz $\sum_{k=1}^{m} L_{2k}^2$, na podstawie których można łatwo obliczyć wartość wariancji z próby stanów końcowych L_{2k} (k = 1, 2, ..., m) licznika L_2. Początek programu znajduje się w komórce o adresie symbolicznym ADR36.

Poniższa tabela zawiera listę komórek pamięci w których umieszcza się dane wejściowe, wyjściowe lub pomocnicze. Określono w niej także przeznaczenie poszczególnych rejestrów:

adres symboliczny komórki pamięci lub nazwa rejestru	przeznaczenie	przed uruchomieniem programu do komórki tej należy załadować następującą wartość
ADR1 ADR2 ADR3	rejestr generatora PRBS (liczba W^j - zawartość komórki o adresie ADR2)	dowolna, ale zawartość choć jednej z komórek musi być różna od zera
ADR4	licznik pomocniczy	dowolna
ADR5	liczba X	X
ADR6 ADR7	młodszy bajt liczby L starszy bajt liczby L	L
ADR8 ADR9 ADR1Ø	najmłodszy bajt $\sum_{k=1}^{m} L_{2k}$ najstarszy bajt	Ø
ADR11 ADR12 ADR13 ADR14	najmłodszy bajt L_{2k}^2 najstarszy bajt	dowolna
ADR15 ADR16	licznik pomocniczy	dowolna
ADR17 ADR18 ADR19 ADR2Ø ADR21	najmłodszy bajt $\sum_{k=1}^{m} L_{2k}^2$ najstarszy bajt	Ø
ADR22	licznik procedur komparacyjnych	m
rejestr A	pomocnicze	dowolna
rejestry B, C	licznik L_2	dowolna
rejestry D, E	licznik L_1	dowolna
rejestry H, L	pomocnicze - adresowanie	dowolna
rejestr SP	wskaźnik stosu	2Ø $C2_H$

Treść programu zajmuje ok. 190 bajtów. Oto ona:

Zerowanie liczników L_1 i L_2:

```
ADR36   XRA  A
        MOV  B, A
        MOV  C, A
        MOV  D, A
        MOV  E, A
```

Generowanie liczby losowej W^j:

```
ADR33   LXI  H, ADR4
        MVI  M, 17H   (operand tego rozkazu stanowi liczba "międzyprzesunięć" K zakodowana w systemie szesnastkowym: 17H = 23D)
ADR31   DCX  H
        MOV  A, M
        ANI  42H
        STC
        JPO  ADR3Ø
        CMC
ADR3Ø   DCX  H
        DCX  H
        MOV  A, M
        RAR
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  A, M
        RAR
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  A, M
        RAR
        MOV  M, A
        INX  H
        DCR  M
        JNZ  ADR31
```

Porównanie liczby W^j z liczbą X:

```
        INX  H
        MOV  A, M
        LXI  H, ADR2
        CMP  M
        JC   ADR32
```

Zwiększanie stanu licznika L_2 o jeden, jeżeli było $W^j \leqslant X$:

```
        INX  B
```

Zwiększanie stanu licznika L_1 o jeden:

```
ADR32   INX  D
```

Sprawdzenie, czy $L_1 = L$:

```
        LXI  H, ADR6
        MOV  A, M
        CMP  E
        JNZ  ADR33
        INX  H
        MOV  A, M
        CMP  D
        JNZ  ADR33
```

O ile procedura komparacyjna jest zakończona ($L_1 = L$), przystępuje się do wykorzystania uzyskanego w niej stanu końcowego licznika L_2:

Obliczanie sumy $\sum_{k=1}^{m} L_{2k}$:

```
        INX  H
        MOV  A, C
        ADD  M
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  A, B
        ADC  M
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  A, M
        ACI  ,00
        MOV  M, A
```

Podnoszenie do kwadratu wartości L_{2k} uzyskanej w ostatniej procedurze. Zastosowano tu algorytm L_{2k}-krotnego sumowania wartości L_{2k}:

```
        INX  H
        XRA  A
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  M, A

ADR34   LXI  H, ADR11
        MOV  A, C
        ADD  M
        MOV  M, A
        INX  H
        MOV  A, B
        ADC  M
        MOV  M, A
        INX  H
        MVI  A, ϕϕ
        ADC  M
        MOV  M, A
        INX  H
        MVI  A, ϕϕ
        ADC  M
        MOV  M, A

        INX  H
        MVI  A, ϕ1
        ADD  M
        MOV  M, A
```

```
        INX  H
        MVI  A, ϕϕ
        ADC  M
        MOV  M, A
        MOV  A, B
        CMP  M
        JNZ  ADR34
        MOV  A, C
        DCX  H
        CMP  M
        JNZ  ADR34
```

Obliczanie sumy kwadratów $\sum_{k=1}^{m} L_{2k}^{2}$:

```
        MVI  D, ϕ4
        LXI  B, ADR17
        LXI  H, ADR11
        XRA  A
        LDAX B
        ADC  M
        STAX B
        INX  B
        INX  H
        DCR  D
        JNZ  ADR35
        LDAX B
        ACI, ϕϕ
        STAX B
```

Sprawdzenie, czy liczba wykonanych procedur komparacyjnych jest już równa m:

```
        LXI  H, ADR22
        DCR  M
        JNZ  ADR36
```

STOP, o ile wykonano już m procedur komparacyjnych:

```
        RST  1
```

d) Program niniejszy symuluje działanie układu realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy", przy czym zbiór liczb imitujących napięcia mierzone jest tu dwuelementowy (patrz podrozdział V/3):

$$\tilde{\tilde{X}} = \{ X_1, X_2 \}.$$

Liczby te są porównywane z liczbami wzorcowymi na przemian. Poza tym działanie programu oraz jego "wejścia" i "wyjścia" są identyczne jak w programie opisanym w punkcie c).

Początek programu - podobnie jak poprzednio - znajduje się w komórce o adresie symbolicznym ADR36, a cały program zajmuje ok. 200 bajtów.

Następująca tabela określa przeznaczenie poszczególnych rejestrów, a także zawiera listę komórek pamięci, w których umieszcza się dane wejściowe, wyjściowe lub pomocnicze.

adres symboliczny komórki pamięci lub nazwa rejestru	przeznaczenie	przed uruchomieniem programu do komórki tej należy załadować następującą wartość
ADR1 ADR2 ADR3 .	rejestr generatora PRBS (liczba W^j - zawartość komórki o adresie ADR2)	dowolna, ale zawartość choć jednej z komórek musi być różna od zera
ADR4	licznik pomocniczy	dowolna
ADR5 ADR6	liczba X_1 liczba X_2	X_1 X_2
ADR7 ADR8	młodszy bajt liczby L starszy bajt liczby L	L
ADR9 ADR1Ø ADR11	$\sum_{k=1}^{m} L_{2k}$ najmłodszy bajt najstarszy bajt	Ø
ADR12 ADR13 ADR14 ADR15	L_{2k}^2 najmłodszy bajt najstarszy bajt	dowolna
ADR16 ADR17	licznik pomocniczy	dowolna
ADR18 ADR19 ADR2Ø ADR21 ADR22	$\sum_{k=1}^{m} L_{2k}^2$ najmłodszy bajt najstarszy bajt	Ø
ADR23	licznik procedur komparacyjnych	m
rejestr A	pomocnicze	dowolna
rejestry B, C	licznik L_2	dowolna
rejestry D, E	licznik L_1	dowolna
rejestry H, L	pomocnicze - adresowanie	dowolna
rejestr SP	wskaźnik stosu	$2ØD1_H$

Tekst omawianego właśnie programu jest niemal identyczny z tekstem umieszczonym w punkcie c) tego dodatku. Różnice polegają na zmianie niektórych adresów symbolicznych. Należy także zastąpić fragment od słów: "Porównanie liczby W^j z liczbą X" do słów: "Zwiększanie stanu licznika L_2 o jeden, jeżeli było $W^j \leqslant X$", następującą sekwencją rozkazów:

Wybór liczby X_i (i = 1, 2) do porównania z liczbą W^j:

```
        INX  H
        MOV  A, E
        ANI, Ø1
        JZ   ADR37
        INX  H
ADR37   MOV  A, M
```

Porównanie wybranej liczby X_1 z liczbą W^j; gdy L_1 parzyste - porównuje się X_1, gdy nieparzyste - X_2:

```
        LXI  H, ADR2
        CMP  M
        JC   ADR32
```

Przypisy

[1] [Instrukcja obsługi:] SDK-85 System Design Kit User's Manual. Manual Order Number 9800451B. Intel Corporation: Santa Clara, California 1978, dodatek A pt. "Monitor Listing", s. 8.

[2] Tamże, dodatek A pt. "Monitor Listing", s. 9, s. 20 oraz 6 - 2.

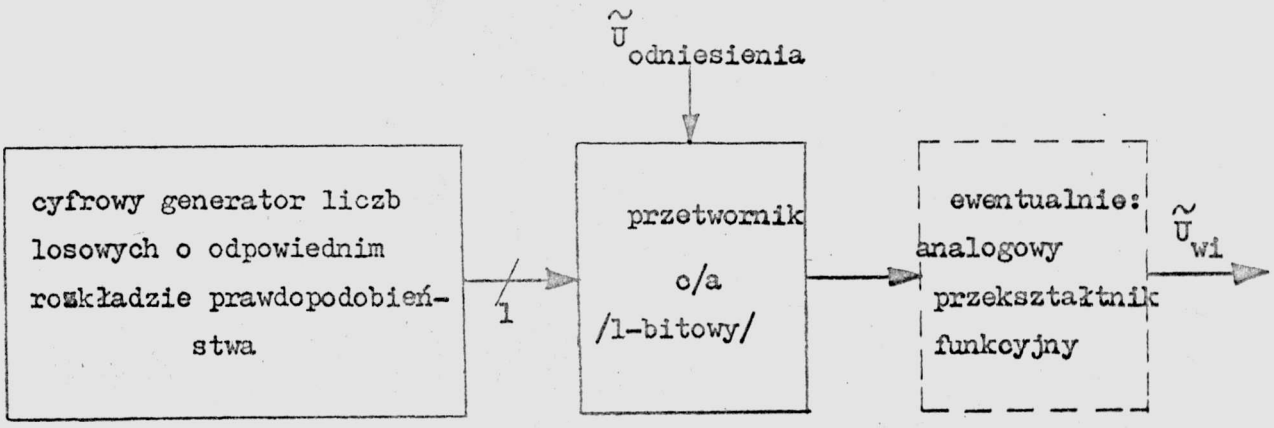
[3] Sprzężenia te są optymalne. Porównaj np. MacWilliams F.J., Sloane N.J.A., Pseudo-Random Sequences and Arrays. "Proceedings of the IEEE", vol. 64, No. 12, December 1976, s. 1715 - 1729.

Dodatek 8

Oszacowanie czasu T_w niezbędnego do wygenerowania napięcia wzorcowego według założonego rozkładu prawdopodobieństwa i losowo niezależnego od napięć poprzednich

Napięcia na zaciskach wzorca losowego nie mogą zmieniać się nieskończenie szybko. Czas T_w upływający od momentu, gdy zakończył się j-ty takt komparacji i rozpoczyna się wytwarzanie kolejnego napięcia losowego $\tilde{U}_w^{j+1}$ do momentu, gdy napięcie to pojawi się na zaciskach wzorca, jest więc różny od zera. Zależy on od zasady działania wzorca. Z tego też powodu, w celu oszacowania wartości tego czasu należy najpierw wybrać ze zbioru możliwych struktur losowego wzorca napięcia jedną z nich - spełniającą wymagania stawiane takiemu wzorcowi w razie jego stosowania w układzie realizującym stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" - a następnie oszacować czas T_w dla tej konkretnej struktury wzorca.

Nie ulega wątpliwości, że wszystkie wymagania stawiane losowemu wzorcowi napięcia (porównaj podrozdział IV/1) są trudne do jednoczesnego spełnienia. Szczegółowa analiza możliwości realizacji wzorców losowych wykracza poza zakres tej pracy [1]. Biorąc pod uwagę wymaganie stałości własności probabilistycznych wzorca z upływem czasu i w określonym zakresie zmian temperatury oraz przyjmując, że było by dobrze gdyby wzorzec taki był zbudowany z bloków dostępnych dziś w postaci układów scalonych wydaje się, że stosunkowo prostą jest struktura przedstawiona na rys. D8-1.



Rys. D8-1. Jedna z możliwych struktur wzorca losowego wytwarzającego ciągi napięć o dowolnym, dyskretnym rozkładzie prawdopodobieństwa (objaśnienia w tekście)

Jest to wzorzec dyskretny. Wynika to z zastosowania cyfrowego generatora 1-bitowych liczb losowych. Zgodnie z rozważaniami zawartymi w punktach III/1b) oraz c), było by lepiej, gdyby wzorzec wytwarzał ciągi napięć o ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa. Dyskretność wzorca jest bowiem źródłem dodatkowego błędu komparacji o charakterze systematycznym i wartości granicznej równej w przybliżeniu ziarnu wzorca (zobacz wzór (3.78)). Niedogodność tę można jednak znacznie zmniejszyć stosując przetwornik cyfrowo-analogowy o odpowiednio dużej liczbie bitów 1. Przedstawiona struktura ma natomiast tę niezaprzeczalną zaletę, że umożliwia wykorzystanie układów cyfrowych generujących sekwencje pseudolosowe słów 1-bitowych o ściśle znanych (liczalnych) i niezmiennych w czasie właściwościach probabilistycznych. Ponadto zastosowanie przetwornika c/a stwarza możliwość kreowania wzorca odtwarzającego napięcia o ściśle znanym zakresie war-

tości (nie ma problemu z odpowiednio ostrym "ucięciem" funkcji rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych).

Ewentualne zastosowanie analogowego przekształtnika funkcyjnego stwarza możliwość kształtowania rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych nie tylko po stronie cyfrowej, ale także w analogowej części układu. Wydaje się jednak, że stosowanie ostatniego bloku należałoby ograniczyć tylko do tych sytuacji gdy jest to konieczne, bowiem wykonanie precyzyjnego przekształtnika analogowego realizującego z dużą dokładnością określoną funkcję (np. metodą aproksymacji przedziałowo-liniowej) nie jest łatwe [2]. Autor nie słyszał także o monolitycznych wersjach scalonych tego typu bloków (trudności z wykonaniem w technice scalonej precyzyjnych elementów biernych).

Jeżeli zrezygnuje się z bloku analogowego przekształtnika funkcyjnego, to do wytwarzania napięć o rozkładzie potęgowym (potrzebnych podczas pomiarów momentów zbiorów napięć - porównaj punkt III/1b) konieczne są ciągi liczb 1-bitowych o takim właśnie rozkładzie prawdopodobieństwa.

W zakresie wytwarzania liczb losowych literatura jest dość bogata i dotyczy zarówno wersji układowych generatorów liczb losowych [3] jak i wersji programowych przeznaczonych do realizacji na maszynach cyfrowych [4].

Jako źródeł liczb losowych o rozkładzie równomiernym używa się dziś szczególnie chętnie rejestrów przesuwnych z liniowym, optymalnym sprzężeniem zwrotnym [5].

Główne zalety tego typu generatorów to:

- dokładna znajomość właściwości probabilistycznych wytwarzanych przez nie ciągów liczb (wynika to z algorytmicznego charakteru tych generatorów)oraz stałość tych właściwości w czasie i w

szerokim zakresie zmian temperatury,

- możliwość wykorzystania do ich budowy cyfrowych układów scalonych (i to - zależnie od potrzeb - także tych najszybszych albo o największej skali integracji).

Najczęściej stosowaną metodą generowania ciągów liczb losowych o rozkładzie innym niż równomierny jest wykonanie odpowiednich operacji na ciągu liczb o rozkładzie równomiernym [6].
Spośród metod uzyskiwania liczb losowych o odpowiednim rozkładzie potęgowym z ciągu liczb o rozkładzie równomiernym należy wymienić tu te, które łatwo można zrealizować w sposób układowy. Zdaniem autora szczególnie proste wydają się następujące dwie metody:

P i e r w s z a pochodzi od G. Marsaglia [7] i polega na zastosowaniu pamięci (ROM, PROM, EPROM) składającej się z komórek o długości równej ilości bitów l żądanych liczb losowych. Do komórek tej pamięci wpisuje się liczby o wartościach od 0 do $2^l - 1$. Istota działania generatora polega na tym, że wybór adresu komórki, której zawartość ma być odczytana jako liczba losowa odbywa się za pomocą generatora liczb losowych o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa.
Jeżeli więc wylosowanie każdej komórki pamięci jest równoprawdopodobne, to zapisując każdą z liczb od 0 do $2^l - 1$ w odpowiedniej liczbie komórek łatwo można uzyskać dowolny rozkład prawdopodobieństwa ich pojawiania się na wyjściu pamięci.
Wadą tej metody jest konieczność stosowania pamięci o znacznych pojemnościach. Wadę tę można ominąć, ale kosztem czasochłonności niezbędnych operacji [8].

S p o s ó b d r u g i jest przykładem tzw. metody eli-

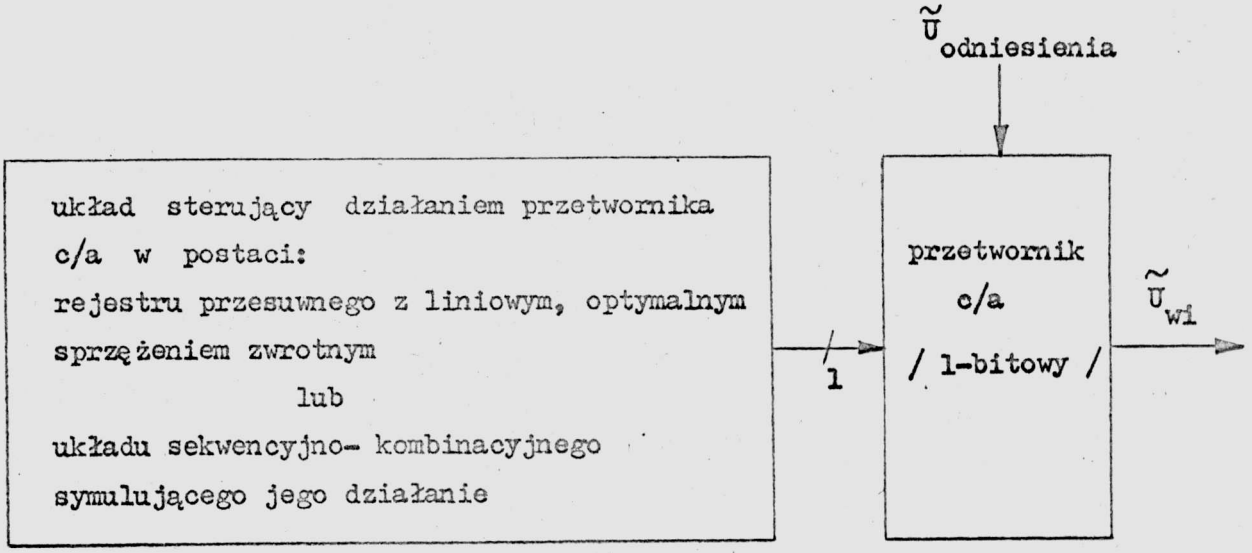
minacji [9]. W zastosowaniu do generowania liczb losowych o rozkładzie potęgowym z wykładnikiem naturalnym polega ona na zastosowaniu odpowiedniej liczby niezależnych losowo generatorów liczb o rozkładzie równomiernym [10]. Konkretnie: jeżeli liczby losowe mają charakteryzować się funkcją rozkładu prawdopodobieństwa o postaci:

$$P(\text{liczba losowa} = k) = C \cdot k^{\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2^{l} - 1, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, \quad C - \text{stała}, \qquad (D8\text{-}1)$$

to trzeba zastosować (α + 1) niezależnych generatorów liczb l-bitowych o rozkładzie równomiernym. Generatory te dostarczają w każdym takcie (α + 1) liczb losowych. Do dalszych celów wybiera się jednak tylko jedną liczbę - tę, która jest n a j w i ę k s z a . Można udowodnić, że ciąg liczb losowych uzyskiwanych w kolejnych taktach według powyższego sposobu charakteryzuje się rozkładem prawdopodobieństwa określonym za pomocą wzoru (D8-1). Zaletą tej metody jest, jak się wydaje, jej duża szybkość. W przypadku, gdy sposób ten jest realizowany w sposób układowy, czas oczekiwania na kolejną liczbę losową jest tu równy czasowi oczekiwania na wygenerowanie (α + 1) liczb według rozkładu równomiernego, powiększonemu o opóźnienia wnoszone przez układy cyfrowe porównujące te liczby i multiplekser cyfrowy przekazujący na wyjście układu największą z nich.
Pewną wadą metody jest konieczność dysponowania (α + 1) generatorami liczb losowych o rozkładzie równomiernym gwarantującymi losową niezależność tych liczb.

Z podrozdziałów II/1 i II/2 wynika, że do pomiaru wartości jednej realizacji napięcia bądź wartości średniej (pierwszy

moment) w zbiorze napięć, wystarczy posługiwać się losowym wzorcem napięcia o rozkładzie równomiernym. Wzorzec taki, zrealizowany wg koncepcji przedstawionej na rys. D8-1 z uwzględnieniem powyższych uwag może mieć strukturę przedstawioną na rys. D8-2 [11].



Rys. D8-2. Analizowana struktura pseudolosowego, dyskretnego wzorca napięć o równomiernym rozkładu prawdopodobieństwa

Jako źródła liczb 1-bitowych o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa można użyć rejestru przesuwnego z optymalnym, liniowym sprzężeniem zwrotnym, wykorzystując wyjścia 1 jego przerzutników. Jak jednak wynika z badań A.R. Pratta [12] liczby losowe uzyskiwane w ten sposób w kolejnych taktach są skorelowane. Jednym ze sposobów ominięcia tej wady jest pobieranie liczby losowej z rejestru przesuwnego nie w każdym takcie jego pracy, ale co pewną liczbę K taktów. Zdaniem cytowanego wyżej autora

było by najlepiej, gdyby liczba K "międzyprzesunięć" była równa co najmniej długości rejestru b tak, by nowa liczba losowa była zestawiana na podstawie zawartości rejestru całkowicie wymienionej w stosunku do tej, na podstawie której zestawiono poprzednią liczbę. A.R. Pratt zwraca jednak uwagę na to, że liczba "międzyprzesunięć" K nie może być dowolna. Jeżeli rejestr przesuwny składa się z b przerzutników, a sprzężenie zwrotne jest optymalne, to długość generowanej sekwencji liczb l-bitowych ($l \leqslant b$) wynosi $2^b - 1$. Stosowanie "międzyprzesunięć" oznacza pobieranie co K-tej liczby losowej. Jeżeli więc chce się uniknąć skrócenia długości sekwencji liczb pseudolosowych i związanego z tym niekontrolowanego zaburzenia równomierności ich rozkładu prawdopodobieństwa, to liczby $2^b - 1$ oraz K muszą być względnie pierwsze.

Wadą opisanej tu metody jest to, że zmniejszanie autokorelacji w ciągu liczb uzyskiwanych z rejestru przesuwnego przez stosowanie K "międzyprzesunięć" powoduje K-krotne zmniejszenie efektywnej szybkości pracy generatora liczb losowych.

W celu uniknięcia tej niedogodności A.R. Pratt zaproponował zbudowanie układu sekwencyjno-kombinacyjnego składającego się z b przerzutników i pewnej liczby dwuwejściowych bramek logicznych realizujących sumę modulo-2 (Ex-OR). Przez dobranie odpowiednich sprzężeń uzyskał on układ, którego stany w k o l e j n y c h taktach zegara są dokładnie takie jak co K-te stany klasycznego rejestru przesuwnego z optymalnym sprzężeniem liniowym. Układ ten umożliwia uzyskiwanie praktycznie niezależnych liczb losowych o rozkładzie równomiernym, w odstępach czasu równych sumie opóźnień wprowadzanych przez jeden przerzutnik i dwie bramki Ex-OR [13].

Z założenia co do struktury wzorca (rys. D8-2) wynika, że czas T_w potrzebny do zmiany jednego napięcia losowego $\tilde{U}^j$ na następne $\tilde{U}^{j+1}$, jest sumą czasów reakcji generatora liczb losowych i przetwornika c/a:

$$T_w = T_{gll} + T_{c/a} , \qquad (D8-2)$$

gdzie: T_{gll} - opóźnienie wnoszone przez generator liczb losowych
$T_{c/a}$ - opóźnienie wnoszone przez przetwornik c/a.

W przypadku, gdy generator liczb losowych ma strukturę rejestru przesuwnego bądź układu sekwencyjno-kombinacyjnego symulującego działanie takiego rejestru, to - zgodnie z tym co powiedziano wcześniej - czas T_{gll} jest nie większy niż suma opóźnień wnoszonych przez jeden przerzutnik i dwie bramki Ex - OR. Wg danych katalogowych z roku 1974 (autor nie dysponował danymi świeższymi) przerzutniki realizowane w technice ECL mogą pracować przy częstotliwościach rzędu 1 GHz [14].

Opóźnienie wnoszone przez przerzutnik równe 3 ns nie jest w tej technice specjalną osobliwością [15]. Opóźnienie wnoszone natomiast przez pojedynczą bramkę typu Ex - OR wykonaną w tej samej technice ECL wynosi ok. 1 ns [16]. Wydaje się więc, że wartość opóźnienia spowodowanego przez generator liczb losowych może dziś być:

$$T_{gll} < 5 \text{ ns} . \qquad (D8-3)$$

W przypadku gdyby chodziło o generowanie liczb losowych o rozkładzie innym niż równomierny, czas T_{gll} ulegnie oczywiście wydłużeniu o dodatkowe składniki (porównaj podrozdział IV/3).

Przyjęto, że składnik $T_{c/a}$ we wzorze (D8-2) jest równy

czasowi ustalania przetwornika cyfrowo-analogowego. Jest to czas, po którym napięcie wyjściowe przetwornika osiąga wartość końcową z określoną dokładnością, zwykle przyjmowaną $\pm\frac{1}{2}$ LSB. [17] Czas ustalania przetwornika c/a zależy od technologii wykonania, liczby bitów, założonej dokładności. Wartość typowa jest tu rzędu pojedynczych mikrosekund [18]. Bardzo szybkie przetworniki c/a charakteryzują się jednak czasem ustalania rzędu kilkunastu ÷ kilkudziesięciu nanosekund [19].

Z powyższego oszacowania wynika, że uzyskiwanie kolejnych napięć wzorcowych co około:

$$T_w \leqslant 40 \text{ ns} \qquad \text{(D8-4)}$$

jest dziś na pewno możliwe.

Istotne jest to, że głównym składnikiem czasu T_w jest czas ustalania przetwornika c/a. Z punktu widzenia szybkości działania losowego wzorca napięcia, przyjętą do analiz jego strukturę - zawierającą taki przetwornik (rys. D8-2) należy więc uznać za dość niefortunną. Ma ona jednak inne cenne zalety, które wymieniono przy okazji omawiania rys. D8-1. Możliwe, iż ze względu na to, że napięcie wyjściowe przetwornika c/a jest wykorzystywane jako napięcie l o s o w e , czas $T_{c/a}$ można by przyjąć krótszy niż czas ustalania podawany w katalogach. Wymagało by to jednak szczegółowego zbadania kwestii, jaki byłby wpływ wykorzystywania napięcia wyjściowego przetwornika c/a przed jego całkowitym ustaleniem się, na końcowy rozkład prawdopodobieństwa napięć wzorcowych.

Przypisy

[1] Por. np. Juszkiewicz J., Generacja sygnału losowego o zadanej jednowymiarowej gęstości prawdopodobieństwa. Praca doktorska. Instytut Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, Komunikat nr 149, Wrocław 1975.
Wytrzyszczewski M., Generatory sygnałów losowych. Maszynopis niepublikowany dostępny u dr. R. Rymaszewskiego w Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej.
Kreiner M., Weiss H., Basis for application of the Campbell - method for stochastic signals [w:] 9-th IMEKO World Congress, 24 - 28 May 1982, Berlin (West): Technological and methodological advances in measurement, Preprint Vol. V/IV, s. 101 - 110.
Metody ogólne generowania zmiennych losowych o zadanych rozkładach prawdopodobieństwa omówiono obszernie w książce:
Zieliński R., Generatory liczb losowych. Programowanie i testowanie na maszynach cyfrowych. WNT, Warszawa 1979, rozdziały 2 i 3.

[2] Por. np. Juszkiewicz J., op.cit., rozdział VI.

[3] Por. np. Juszkiewicz J., op.cit., cała praca, a zwłaszcza rozdziały III, VI i spis literatury.
Wytrzyszczewski M., op.cit. Porównaj także prace dotyczące rejestrów przesuwnych ze sprzężeniem optymalnym "modulo-2" (generatory PRBS), np.:
Golomb S.W., Shift register sequences.
Holden-Day, Inc., San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam, 1967, część I i II.
Mac Williams F.J., Sloane N.J.A., Pseudo-Random Sequences and

Arrays. "Proceedings of the IEEE", vol. 64, No. 12, December 1976, s. 1715 - 1729. Artykuł zawiera bogaty (ok. 80 pozycji) spis literatury.

Pratt A.R., Fast Pseudo-Random Numbers Generators for Computers. "The Radio and Electronic Engineer", vol. 40, No. 2, August 1970, s. 83 - 88.

Sutcliffe H., Knott K.F., Standard L.F. Noise Sources using Digital Techniques and their Application to the Measurement of Noise Spectra. "The Radio and Electronic Engineer", vol. 40, No. 3, September 1970, s. 132 - 136.

[4] Por. np. Zieliński R., op.cit., rozdziały 2 i 3, a także spis literatury s. 150 - 154.

[5] Por. przypis nr 2 w dodatku 4.

[6] Por. Zieliński R., op.cit., s. 15 oraz rozdział 3.

[7] Marsaglia G., Random variables and computers. Transactions of the third Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes. Czech. Acad. Sci., Prague 1964. Cytuję za: Zieliński R., Generatory liczb losowych. Programowanie i testowanie na maszynach cyfrowych. WNT, Warszawa 1979, s. 71, 72.

[8] Por. Zieliński R., op.cit., s. 72 - 74.

[9] Tamże, s. 59 - 64.

[10] Tamże, s. 91 oraz 60 - 61.

[11] Taką właśnie strukturę ma losowy wzorzec napięcia zastosowany w układzie KS-1 realizującym stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy". Konstruktorem układu KS-1 jest dr inż. J. Juszkiewicz z Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej.

Por. np. Juszkiewicz J., Komparator stochastyczny KS-1. Teczka z rysunkami stanowiącymi dokumentację konstrukcyjno-użytkową urządzenia. Materiał niepublikowany, w posiadaniu dr. J. Juszkiewicza w Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej. Zobacz też dodatek 4.

[12] Pratt A.R., op.cit., s. 84 i 86 - 88.

[13] Tamże, s. 86.

[14] Np. licznik - dzielnik częstotliwości typu MC 1696 serii MECL III firmy Motorola może pracować z taką właśnie częstotliwością maksymalną. Por. [Katalog firmy Motorola:] The Semiconductor Data Library. Volume 4: MECL Integrated Circuits, Series A. Motorola Semiconductor Products Inc., 1974, s. 2 - 5, 2 - 9.

[15] Przerzutnik D typu MC 1670 serii MECL III firmy Motorola może pracować z częstotliwością 350 MHz, zaś przerzutnik D typu MC 1690 tej samej serii i firmy - z częstotliwością 500 MHz. Por. tamże, s. 2-5 oraz 2-7, 4-52, 4-75.

[16] W cytowanym wyżej katalogu firmy Motorola z 1974 r. podaje się, że opóźnienie wnoszone przez bramkę Ex - OR typu MC 1672 (seria MECL III) wynosi 1,3 ns (tamże, s. 2-5, 4-60). Z nowszych doniesień wynika jednak, że opóźnienia wnoszone przez pojedynczą bramkę wykonaną w technice ECL osiągają już wartość 500 - 750 ps.
Por. np. Badźmirowski K., Pieńkos J., Piestrzyński W., Cyfrowe układy MOS - LSI. WKiŁ, Warszawa 1979, s. 50, tablica 1.7.
[Doniesienie handlowe firmy Fairchild:]
"Electronics", vol. 56, No. 13, June 30, 1983, s. 128, (brak tytułu).

[17] Nadachowski M., Kulka Z., Analogowe układy scalone.

WKiŁ, Warszawa 1979, s. 586.

[18] Tamże, s. 587 - 596.

[19] Przetworniki 10-bitowe typu HDD-1015 oraz HDS-1015E firmy Analog Devices charakteryzują się czasem ustalenia równym 15 ns. Por. np. [Katalog firmy Analog Devices:] Data - Acquisition Databook 1982, vol. I: Integrated Circuits, rozdział 10, s. 10 - 249, 10 - 269.

Dodatek 9

Próby wyjaśnienia rozbieżności między wynikami obliczeń i pomiarów, występujących na rysunkach 5.2 i 5.3

W dodatku niniejszym opisano pierwsze, nieudane próby wyjaśnienia rozbieżności między wartościami wariancji $D^2(R)$ wyniku pomiaru uzyskanymi z modelu matematycznego, a wartościami wariancji $\hat{S}_R^2$ uzyskanymi z pomiarów (rys. 5.2, 5.3). Celowość opisania tych eksperymentów wynika - zdaniem autora - z faktu, że większość z nich stała się później inspiracją do szczegółowych badań teoretycznych nt. wpływu elementów układu realizującego stochastyczną komparację przeglądową typu "większy - mniejszy" na jej właściwości metrologiczne (rozdział III).

Poszukiwanie przyczyn zaobserwowanych rozbieżności (rys. 5.2 i 5.3) rozpoczęto od wykluczenia uszkodzeń tych bloków układu KS-1 (patrz rys. D4-1), których działanie łatwo można sprawdzić. I tak: zasilacze skontrolowano mierząc bezpośrednio dostarczane przez nie napięcia.

Wzmacniacze - separatory sprawdzano przede wszystkim pod kątem wzajemnego doboru ich wzmocnień i w miarę dokładnej kompensacji wejściowych napięć niezrównoważenia. Szacunkowo oceniono także liniowość wzmacniaczy. Wzajemny dobór wzmocnień obu wzmacniaczy - separatorów wpływa nie tylko na wartość $U_{w\,max}$ największej realizacji odtwarzanej przez wzorzec (rys. D4-1). Ma on również wpływ na poziom napięć $\tilde{U}_1'$, $\tilde{U}_{wi}$, przy którym następowało ich porównanie. Stwierdzono, że przy U_1 = 2V napięcie $\tilde{U}_1'$ miało wartość ok. 3,5V. Napięcie to nie stanowiło więc zagrożenia uszkodzenia układu porównania napięć zbudowanego przy użyciu układu scalonego 710.

Wejściowe napięcia niezrównoważenia obu wzmacniaczy - separatorów sprawdzano i regulowano niezależnie.

Wejście nieodwracające wzmacniacza zwierano w tym celu do masy i mierzono czy napięcie wyjściowe wynosi zero woltów. W razie potrzeby niezrównoważenie korygowano odpowiednim potencjometrem (oczywiście - po ustabilizowaniu się termicznych warunków pracy badanego wzmacniacza).

Poprawność działania bloku realizującego zaprogramowaną liczbę porównań (patrz dodatek 4) sprawdzano przez obserwację oscylogramów napięć w kilku punktach układu. O sprawności tego bloku świadczyło także to, że przebieg procedury komparacyjnej (włącznie z funkcjonowaniem klawiszów: START i KASOWANIE) był dokładnie taki, jak to opisano w dodatku 4, a uzyskane wyniki pomiaru napięcia $\tilde{U}_1$ (porównaj tabela 5.2 oraz kolumna "uwagi" tabel 5.3 i 5.4) nie wskazywały na błędy polegające np. na tym, że woltomierz KS-1 wykonywał w trakcie pojedynczej procedury komparacyjnej inną liczbę porównań niż to było zadane odpowiednim klawiszem na jego płycie czołowej.
Ostatecznie więc, jeśli wykluczyć - co wydaje się uzasadnione - wadliwe działanie liczników, przyczyną zaobserwowanych rozbieżności mogły być inne, w stosunku do założonych w modelu, właściwości układu porównywania napięć bądź też losowego wzorca napięcia.

Układ porównania napięć nie spełnia z pewnością żadnego z założeń idealności wymienionych w podrozdziale II/1 (idealna czułość, bezhisterezowość, bezinercyjność, brak poboru energii). Jak się jednak wydaje, znaczenie dla wyjaśnienia zaobserwowanych rozbieżności mógłby mieć jedynie fakt, iż rzeczywisty detektor relacji porządku charakteryzuje się określonym progiem czułości, oraz histerezą (patrz dodatek 4).

W przypadku losowego wzorca napięcia sprawa nie jest już tak prosta. Ogólnie rzecz biorąc, właściwość losowego ciągu napięć wzorcowych określa się za pomocą dwóch grup cech: jedne dotyczą rozkładu prawdopodobieństwa ciągu, drugie - jego właściwości korelacyjnych. Przypomnijmy, że założenia dotyczące ciągu napięć wzorcowych, z których korzystano przy tworzeniu modelu matematycznego badanej procedury komparacyjnej, były następujące:

- losowy ciąg napięć wzorcowych charakteryzuje się dyskretnym, r ó w n o m i e r n y m rozkładem prawdopodobieństwa,
- realizacje wzorcowe $\tilde{U}_w^j$ (j = 1, 2, ..., L) wylosowywane do porównania z napięciem mierzonym $\tilde{U}_1$ w kolejnych taktach procedury są wzajemnie n i e z a l e ż n e (założenie o losowaniu ze zwracaniem).

Poszukując przyczyn rozbieżności między krzywymi wariancji obliczonymi i zmierzonymi należało sprawdzić, czy są spełnione obie powyższe grupy założeń.

Zauważmy, że "poszukiwania przyczyn rozbieżności", o których mowa należało rozumieć jako dążenie do udzielenia odpowiedzi na dwa pytania:

- Które z założeń poczynionych podczas formułowania modelu matematycznego komparacji nie jest spełnione w badanym woltomierzu KS-1?
- Który z podukładów badanego woltomierza jest materialną przyczyną zaobserwowanych różnic?

Odpowiedź na pierwsze z pytań należało traktować jako etap wstępny wyjaśniania powodów zaobserwowanych rozbieżności. Niekiedy odpowiedź ta mogła być automatycznie odpowiedzią na drugie pytanie. Byłoby tak np. w przypadku, gdyby okazało się, że przyczyna leży w histerezie układu porównania napięć. Gdyby jednak

okazało się, że powodem wyjaśnianych różnic jest nierównomierność rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych, wskazanie podukładu będącego przyczyną zaburzeń równomierności rozkładu prawdopodobieństwa nie może być automatyczne. Wzorzec zastosowany w woltomierzu KS-1 ma strukturę złożoną (rys. D4-2): najpierw wytwarza się tam pseudolosowe sekwencje binarne, a te dopiero zamienia się (w przetworniku c/a) na napięcia o odpowiedniej wartości. Przyczyną nierównomierności rozkładu prawdopodobieństwa ciągów napięć wytwarzanych w takim wzorcu może być zarówno jego część cyfrowa jak i analogowa. Utrudnia to znacznie odpowiedź na pytanie drugie tym bardziej, że niezależne badanie przetworników c/a czy generatorów PRBS nie jest wcale sprawą banalną.

Najpierw postanowiono sprawdzić podejrzenie, że rozbieżności między właściwościami modelu matematycznego, a właściwościami badanego urządzenia są spowodowane odstępstwami rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od równomierności.

W pierwszej kolejności dokonano tu modyfikacji układowej, która - jak się zdawało - mogła taką nierównomierność powodować. Jak to opisano w dodatku 4, w celu zabezpieczenia układu przed przypadkowym wyzerowaniem się, w momencie włączenia zasilania, rejestrów generatorów PRBS, wprowadzono połączenie realizujące asynchroniczne ustawianie jedynek logicznych na wyjściach dwóch przerzutników (po jednym w każdym rejestrze, patrz rys. D4-2). W wersji oryginalnej woltomierza KS-1 to ustawianie jedynek miało jednak miejsce przy każdorazowym użyciu klawisza KASOWANIE. W kategoriach koła stanów rejestrów PRBS oznacza to, że każda seria porównań realizacji mierzonej $\tilde{U}_1$ z wzorcowymi $\tilde{U}_w^j$ ($j = 1, 2, \ldots, L$) rozpoczynała się w powyższych rejestrach od

któregoś ze stanów posiadających jedynki na tych pozycjach, na których je wymuszano klawiszem KASOWANIE. Stany te są więc wyróżnione. Jak się wydawało (szczegółowej analizy sekwencji stanów nie wykonano), mogło to być przyczyną niespełnienia założenia o równym prawdopodobieństwie pojawiania się wszystkich realizacji odtwarzanych przez wzorzec (3.61).

W celu sprawdzenia przedstawionej tu hipotezy, wprowadzono modyfikację układową polegającą na możliwości odłączenia pętli asynchronicznego ustawiania jedynek (rys. D4-2). Dzięki tej modyfikacji nadal istnieje możliwość wpisania jedynek do rejestrów PRBS (np. bezpośrednio po włączeniu zasilania). Istnieje jednak również możliwość pozbycia się na czas wykonywania pomiarów wpływu klawisza KASOWANIE (pełniącego w układzie szereg innych ważnych funkcji - porównaj dodatek 4) na generatory sekwencji pseudolosowych.

Po wprowadzeniu opisanej zmiany powtórzono pomiar zależności $\hat{S}_R^2 = f\left(\frac{U_1}{U_{w\ max}}\right)$ przy L = 20 000. Niestety, żadnych istotnych różnic w stosunku do krzywej uzyskanej przed przerwaniem pętli "jedynkującej" nie zauważono. Rozbieżność między krzywą zmierzoną, a obliczoną nadal występowała i miała taki sam charakter jak na rys. 5.3. Oznacza to, że nawet jeśli hipoteza o wpływie rozważanego połączenia na równomierność rozkładu napięć wzorcowych jest prawdziwa, to zważywszy, że fakt wymuszania jedynek miał miejsce raz na 20 000 przejść stanów generatorów PRBS, jest to wpływ zbyt słaby by był zauważalny w postaci zmian cech statystycznych procedury komparacyjnej.

Ponieważ eksperymentalne zweryfikowanie wszystkich czynników, które mogłyby zaburzać równomierność rozkładu prawdopodo-

bieństwa napięć wzorcowych byłoby trudne i bardzo czasochłonne (wykonanie wykresu zamieszczonego na rys. 5.3 wymagało wykonania ok. 2 000 odczytów z woltomierza KS-1 oraz żmudnych czynności związanych z obróbką statystyczną otrzymanych wyników), postanowiono posłużyć się rozważaniami teoretycznymi. Postawiono pytanie: jaki może być wpływ odchyleń rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych od jego postaci pożądanej, na właściwości omawianej procedury komparacyjnej. Odpowiedź na powyższe pytanie zawarto w punkcie III/1 c). Głównym wnioskiem z rozważań tam zawartych jest ten, że zaburzenia rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych powodują pojawienie się składowej systematycznej Δ_s^w błędu komparacji.

Z punktu widzenia potrzeb wykonywanego eksperymentu należało jeszcze sprawdzić czy jakiekolwiek zaburzenie równomierności rozkładu napięć wzorcowych mogło powodować na krzywej wariancji wyniku takie efekty, jakie obserwowano (rys. 5.3). Analizę powyższej kwestii zawarto w dodatku 6.
Przyjęto tam, w celu uproszczenia analizy, że napięcia wzorcowe charakteryzują się funkcją gęstości prawdopodobieństwa $\gamma(U_w)$ spełniającą wymaganie całkowalności w sensie Riemanna [1] w przedziale wartości: $U_w \in [0, U_{w\,max}]$. Przyjęto ponadto, że poza powyższym przedziałem funkcja $\gamma(U_w) \equiv 0$. W dodatku 6 stwierdzono, że przy powyższym założeniu badana funkcja:

$$D^2(R) = f\left(\frac{U_1}{U_{w\,max}}\right)\Bigg|_{L = par} \qquad (D9\text{-}1)$$

ma w przedziale wartości napięć mierzonych $U_1 \in [0, U_{w\,max}]$ następujące właściwości:

a) Jest funkcją ciągłą.

b) Osiąga w co najmniej jednym punkcie powyższego przedziału wartość maksymalną równą $\frac{U_{w\,max}^2}{4L}$.

c) Jeśli oznaczyć przez U_1^o wartość napięcia przy której:

$$\int_0^{U_1^o} \gamma(U_w)\, dU_w = \frac{1}{2}, \qquad (D9\text{-}2)$$

to przy $U_1 \in [0, U_1^o]$ funkcja (D9-1) jest niemalejąca, zaś przy $U_1 \in (U_1^o, U_{w\,max}]$ funkcja (D9-1) jest nierosnąca.

Ostatni wniosek oznacza, że jeżeli spełnione jest z a ł o ż e n i e o n i e z a l e ż n o ś c i l o s o w a ń napięć wzorcowych, to n i e i s t n i e j e taki rozkład prawdopodobieństwa $\gamma(U_w)$, przy którym funkcja (D9-1) miałaby zagłębienie, bowiem musiałaby ona być najpierw malejąca a potem - ze wzrostem wartości ilorazu $\frac{U_1}{U_{w\,max}}$ - rosnąca, co - jak powiedziano - nie może mieć miejsca.

W przypadku gdy - tak jak w opisywanym eksperymencie - ciąg $\tilde{U}_w^j$ (j = 1, 2, ..., L) napięć wzorcowych losowanych w kolejnych taktach komparacji ma dyskretny rozkład prawdopodobieństwa, wnioski a) oraz b) przestają być prawdziwe (porównaj np. rys. 3.4). Jednakże konkluzja z wniosku c), że ż a d n a z form zaburzenia równomierności rozkładu napięć wzorcowych nie może prowadzić do pojawienia się minimum na krzywej wariancji, nadal pozostaje w mocy.

Powiązanie tego wyniku z faktem, że w trakcie pomiarów napięcia woltomierzem KS-1 nie stwierdzono występowania błędów systematycznych (porównaj tabele 5.2, 5.3 i 5.4), każe wykluczyć nierównomierność rozkładu prawdopodobieństwa napięć wzorcowych jako

główną przyczynę występowania minimum na krzywej

$$\hat{S}_R^2 = f\left(\frac{U_1}{U_{w\,max}}\right)\Bigg|_{L = par} \qquad \text{(rys.5.3).}$$

Kolejna hipoteza, którą postanowiono zweryfikować dotyczyła układu porównania napięć. Jak to opisano w dodatku 4, układ ten zabezpieczono przed wzbudzeniem się oscylacji przez wprowadzenie niewielkiego, dodatniego sprzężenia zwrotnego. Realizuje je opornik R_f zaznaczony na rys. D4-4. Uzyskana w ten sposób zwiększona odporność układu porównania napięć na wzbudzenie się oscylacji jest jednak opłacana pojawieniem się histerezy. Detektor relacji porządku staje się więc tzw. układem z pamięcią. Oznacza to, że w dowolnym j-tym (j = 1, 2, ..., L) takcie procedury komparacyjnej wynik porównania napięcia wzorcowego $\tilde{U}_w^j$ z napięciem mierzonym $\tilde{U}_1$ zależy już nie tylko od relacji między tymi napięciami, ale może także zależeć od wyniku porównania $\tilde{U}_1$ z $\tilde{U}_w^{j-1}$ w poprzednim takcie. Uzasadnia to chyba intuicyjne podejrzenie, że histereza układu porównania napięć może mieć wpływ na właściwości statystyczne wyniku uzyskiwanego w rozważanej procedurze komparacyjnej.

Weryfikacja powyższej hipotezy polegała nie tylko na sprawdzeniu czy histereza wpływa na wartość wariancji wyniku, lecz również na zbadaniu czy wpływ ten jest na tyle silny, by powodować tak znaczne rozbieżności między modelem matematycznym a wynikami pomiarów jak to obserwowano . Weryfikację można było wykonać dwoma sposobami: teoretycznie bądź doświadczalnie. Droga teoretyczna polegałaby na sformułowaniu, odpowiedniego modelu matematycznego i określeniu na jego podstawie charakteru

wpływu histerezy na kształt krzywej wariancji wyniku:

$$D^2(R) = f\left(\frac{U_1}{U_{w\ max}}\right) \text{ przy } L = \text{parametr.}$$

Weryfikacja doświadczalna z kolei polegałaby na pomiarze zależności $\hat{S}_R^2 = f\left(\frac{U_1}{U_{w\ max}}\right)$ przy L = parametr dla kilku znacznie różniących się szerokości histerezy układu porównania napięć. Założono, że jeżeli obecność histerezy ma istotny wpływ na wariancję wyniku, to zmiany szerokości histerezy będą powodowały zmiany w "natężeniu" tego wpływu, (Szerokość histerezy określa suma $\underline{h} + \bar{h}$ progów zadziałania układu porównania napięć; porównaj także rys. 3.12).

Sprawą pierwszoplanową w opisywanej fazie eksperymentu było ustalenie czynnika powodującego zaobserwowane rozbieżności. Mechanizm wpływu tego czynnika na wariancję wyniku pomiaru był kwestią drugoplanową. Ponieważ sposób doświadczalny wydawał się być lepiej dostosowanym do realizacji celu pierwszoplanowego, zdecydowano się na jego zastosowanie.

Porządne wykonanie weryfikacji doświadczalnej wg opisanej wyżej koncepcji wymagałoby wykonania następujących czynności:

- Ustawienia szerokości histerezy układu porównania napięć na kilku charakterystycznych, znacznie różniących się wartościach (regulacja opornikiem R_f, rys. D4-4). W szczególności należałoby każdorazowo z m i e r z y ć wartość uzyskanej szerokości histerezy.
- Powtórzenia pomiaru krzywej $\hat{S}_R^2 = f\left(\frac{U_1}{U_{w\ max}}\right)\Big|_{L = 20\ 000}$ przy każdej z ustawionych wartości szerokości histerezy.

Radykalne zmiany kształtu krzywych uzyskiwanych przy różnych szerokościach histerezy, a w szczególności - zgodność krzywej zmierzonej z obliczoną (3.72) przy szerokości równej zeru ($R_f = \infty$) oznaczałyby, że weryfikowana hipoteza jest prawdziwa. W przeciwnym razie, przyczyn zaobserwowanych rozbieżności należałoby szukać dalej.

Szerokość histerezy układu porównania napięć regulowano przez zmianę opornika R_f (rys. D4-4). Przyjęto kolejno: R_f = 1,8 kΩ ; 10 kΩ ; 22 kΩ ; ∞ .

Pomiar wartości progów przełączania $\underline{h}$ i $\bar{h}$ układu porównania napięć napotykał jednak na duże trudności. Pomiar statyczny polegający na zbadaniu krzywej $U_{wy} = f(U_{we+} - U_{we-})$ układu scalonego 710 użytego jako detektor relacji porządku okazał się zupełnie niemożliwy ze względu na indukowanie się napięć zakłócających w przewodach, za pomocą których mierzono napięcia wejściowe: U_{we+} i U_{we-}. Ponieważ zakłócenia były rzędu mierzonych napięć $\underline{h}$ oraz $\bar{h}$, więc powodowały niekontrolowane zmiany stanu na wyjściu układu 710 i pomiar napięć wejściowych, przy których układ zmienia swój stan z zera na jedynkę i na odwrót, stawał się niemożliwy. Z podobnych powodów także pomiar dynamiczny - za pomocą oscyloskopu - nie pozwalał na uzyskanie wyników odpowiednio powtarzalnych i wiarygodnych.

W pierwszej - zgrubnej weryfikacji przypuszczenia o wpływie histerezy na uzyskiwane wyniki pomiarów, postanowiono więc zupełnie zrezygnować z pomiarów szerokości histerezy. Szacunkowe jej wartości odpowiadające poszczególnym opornikom R_f uzyskano na drodze teoretycznej.

Obliczono [2], że zastosowanym w eksperymencie zmianom oporności R_f w zakresie 1,8 kΩ ÷ ∞ , odpowiadają zmiany szerokości

histerezy układu porównania napięć w zakresie od zera do ok. 60 mV. Wydaje się, że jest to przedział wystarczająco szeroki zważywszy, że napięcia wzorcowe $\tilde{U}_{wi}$ zmieniają się na zaciskach układu 710 (tj. za wzmacniaczem - separatorem, porównaj rys. D4-1) z ziarnem około 14mV oraz to, że rozbieżność, której przyczyn poszukuje się zaobserwowano pierwotnie przy szerokości histerezy ok. 5mV (R_f = 22 kΩ).

W kolejnym kroku zmierzono krzywą $\hat{S}^2_R = f\left(\frac{U_1}{U_{w\,max}}\right)\Big|_{L=20\,000}$ przy wszystkich wymienionych wyżej wartościach oporności R_f. Pomiary i interpretację wyników wykonano identycznie jak to już opisano.

Zależności uzyskane przy różnych szerokościach histerezy nie różniły się między sobą o więcej niż błąd estymacji. Rozbieżność między zmierzonymi krzywymi wariancji wyniku, a krzywą teoretyczną miała w przypadku wszystkich zastosowanych szerokości histerezy taki sam charakter jak to uwidoczniono na rys. 5.3. Pozwalało to na wyciągnięcie wniosku, że choć histereza układu porównania napięć ma - być może - wpływ na wariancję wyniku pomiaru, to jest to wpływ niewielki i na pewno nie jest on przyczyną zaobserwowanych istotnych różnic w przebiegu zmierzonej i teoretycznej krzywej wariancji.

Niezależnie od dalszego biegu eksperymentu, wykonano obliczenia teoretyczne których celem było znalezienie analitycznego opisu wpływu histerezy układu porównania napięć na właściwości omawianej procedury komparacyjnej. Wyniki analiz zamieszczono w podrozdziale III/2. Potwierdziły one w pełni wniosek, że histereza nie mogła być przyczyną zaobserwowanych różnic wykresów.

Wobec negatywnego wyniku sprawdzeń wszystkich dotychczasowych hipotez należało przyjąć, że poszukiwaną przyczyną niezgodności teorii z praktyką jest najprawdopodobniej niespełnienie założenia o niezależności losowań napięć wzorcowych w kolejnych taktach komparacji.

Przypuszczenie to okazało się trafne. Sposób jego weryfikacji i uzyskane wyniki zamieszczono w podrozdziale V/2.

Przypisy

[1] Por. np. Leja F., Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1976, s. 276 - 281.

[2] Odpowiednie wzory można znaleźć w książce: Nadachowski M., Kulka Z., Analogowe układy scalone. WKiŁ, Warszawa 1979, s. 370, 371.

Politechnika Wrocławska Biblioteka Główna