

INSTYTUT FIZYKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport serii PRE 340/84

ODWZOROWANIE W UKŁADACH
OPTYCZNYCH ZMIENIAJĄCYCH
STAN POLARYZACJI ŚWIATŁA
- OPIS MACIERZOWY

Wacław Urbańczyk
/praca doktorska/

Praca wykonana w ramach Programu Resortowego
MR I/5

Słowa kluczowe:

- odwzorowanie optyczne
- polaryzacja światła
- opis macierzowy

Wrocław 1984

Mgr inż. Wacław Urbańczyk

Instytut Fizyki

Politechniki Wrocławskiej

Wybrzeże Wyspiańskiego 27

Raport wpłynął do redakcji w lutym 1984 r.

Promotorowi

doc.dr Ireneuszowi Wilkowi

za opiekę i pomoc naukową

serdeczne podziękowania

składa autor

SPIS TREŚCI

	str.
1. WSTĘP	1
2. ZARYS APARATU MATEMATYCZNEGO	6
2.1. Podstawowe definicje	6
2.2. Podstawowe twierdzenia	9
3. POLARYZACYJNE WŁASNOŚCI ŚWIATŁA	17
3.1. Definicja macierzy koherencji dla fali płaskiej	17
3.2. Stany polaryzacji fali płaskiej	20
3.3. Związek macierzy koherencji z wektorem Stokesa	23
3.4. Spektralne własności macierzy koherencji i wektora Stokesa	25
3.5. Trójwymiarowa macierz koherencji	27
4. MACIERZOWE CHARAKTERYSTYKI UKŁADU ODWZOROWU- JĄCEGO ZMIENIAJĄCEGO STAN POLARYZACJI ŚWIATŁA	30
4.1. Macierzowa funkcja źrenicowa	31
4.2. Macierzowa funkcja aberracji	34
4.3. Macierzowa funkcja transmisji amplitudy	35
4.4. Macierzowa funkcja rozmycia amplitudy..	36
5. ROZKŁAD NATEŻENIA W DYFRAKCYJNYM OBRAZIE PUNKTU	43
6. JASNOŚĆ STREHLA	55
7. UOGÓLNIONE TWIERDZENIE O PRZESUNIĘCIU	58
8. UOGÓLNIONE PRZYBLIŻENIE MARÉCHAŁA DLA JASNOŚCI STREHLA	64

9. DOBÓR OPTYMALNEJ SFERY ODNIESIENIA	70
10. ODWZOROWANIE PRZEDMIOTÓW ROZCIĄGLYCH	82
10.1. Odwzorowanie w świetle koherentnym	82
10.2. Odwzorowanie w niekoherentnym świetle quasimonochromatycznym	86
11. ROZKŁAD NATĘŻENIA W DYFRAKCYJNYM OBRAZIE DWÓCH PUNKTÓW	100
11.1. Przypadek koherentny	100
11.2. Przypadek niekoherentny	103
12. PORÓWNANIE MACIERZOWEGO I SKALARNEGO OPISU DLA UKŁADÓW ODWZOROWUJĄCYCH NIE ZMIENIAJĄCYCH STANU POLARYZACJI ŚWIATŁA	104
13. ODWZOROWANIE PRZEDMIOTÓW DYFUZYJNYCH W ŚWIETLE KOHERENTNYM	110
13.1. Statystyczny model przedmiotu	112
13.2. Statystyczne własności amplitudy zespolo- nej w płaszczyźnie obrazowej	117
13.3. Rozkład średniego natężenia w płaszczyźnie obrazowej	122
13.4. Autokorelacja rozkładu natężenia w płaszczyźnie obrazowej	124
13.5. Wariancja natężenia w płaszczyźnie obra- zowej. Statystyczny kontrast struktury plamkowej	127
13.6. Podsumowanie	130
14. UWAGI KOŃCOWE	132
LITERATURA	134

1. WSTĘP

Większość rozważań dotyczących oceny jakości odwzorowania w układach optycznych oparta jest na skalarnej teorii dyfrakcji lub optyce geometrycznej. Stosowanie skalarnej teorii dyfrakcji uzasadnione jest tylko wtedy, gdy rozkład amplitudy w źrenicy wyjściowej układu można opisać skalarną funkcją zespoloną. W rzeczywistości zaś, amplituda w dowolnym punkcie źrenicy wyjściowej jest zazwyczaj funkcją wektorową o trzech składowych; dwóch prostopadłych i jednej równoległej do osi optycznej układu. Podejście skalarne obarczone jest więc trzema następującymi ograniczeniami:

- (1) jego dokładność maleje z kątem aperturowym, a w szczególności nie może być stosowane w układach o dużych kątach aperturowych;
- (2) nie daje żadnych informacji o wektorowych własnościach fali obrazowej, np. o stanie polaryzacji światła w płaszczyźnie obrazowej układu;
- (3) nie może być wprost stosowane do opisu klasy układów zawierających elementy zmieniające stan polaryzacji światła.

Pierwsze ograniczenie wynika z faktu, że wraz ze wzrostem kąta aperturowego układu wzrasta składowa amplitudy równoległa do osi optycznej układu (składowa z-owa) i jej pomijanie staje się coraz mniej uzasadnione. Uwzględnienie składowej z-owej amplitudy prowadzi do wniosku, że rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu dla układów o dużych

kątach aperturowych zależy w sposób istotny od stanu polaryzacji światła wchodzącego do układu. Ten interesujący efekt omówiony został w pracach Hopkinsa [1-2], Burtina [3] i Focke'a [4].

Przyczyny drugiego ograniczenia nie wymagają uzasadnień. Problem określenia wektorowych własności amplitudy w dyfrakcyjnym obrazie punktu podjęty został po raz pierwszy przez Ignatowskiego [5-6], a najbardziej wyczerpujące prace związane z tym tematem przedstawili Richards i Wolf [7-9].

Dotychczas powstało również szereg prac dotyczących pewnych typów układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła. I tak, Kubota i Inoue [10] oraz Kubota i Saito [11] przeanalizowali własności układu odwzorowującego z dwoma elementami polaryzacyjnymi: polaryzatorem i analizatorem, np. mikroskop polaryzacyjny. Wyliczyli oni rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu oraz optyczną funkcję przenoszenia w zależności od kąta pomiędzy polaryzatorem i analizatorem. Następnie ukazały się prace w których określono jak odwzorowywane są w układach tego typu przedmioty o różnych kształtach: przedmioty kołowe [12], krawędzie [13], periodyczne siatki prostokątne i trójkątne [14-16].

Komissaruk [17] podał wzory na rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu, jasność Strehla oraz optyczną funkcję przenoszenia dla układów z elementami dwójłomnymi. Wpływ dwójłomności spowodowanych resztkowymi naprężeniami termicznymi (o symetrii osiowej) na jakość odwzorowania został później szczegółowo przebadany przez Pietraszkiewicza [18-22].

Chakraborty [23], a także Gupta [24] i Urbańczyk [25] analizowali możliwość zastosowania filtrów polaryzacyjnych do rozwiązywania zagadnień apodyzacyjnych. Znane są również zastosowania układów z elementami zmieniającymi stan polaryzacji światła w koherentnym przetwarzaniu informacji, np. Ghosh [26] i Machado [27].

We wszystkich wymienionych przypadkach trudności z bezpośrednim zastosowaniem skalarnej teorii dyfrakcji ominięte zostały w taki sam sposób. Niezależnie obliczano jak transformują się przez układ obie składowe amplitudy prostopadłe do osi optycznej (składowa x-owa i y-owa), a następnie wyliczano rozkład natężenia w płaszczyźnie obrazowej układu. Zanedbywano oczywiście składową amplitudy równoległą do osi optycznej układu (składową z-ową). Podejście takie jest jednak bardzo kłopotliwe ponieważ wymaga każdorazowo żmudnych przeliczeń, a także uniemożliwia określenie zależności podstawowych miar jakości odwzorowania od stanu polaryzacji światła wchodzącego do układu.

Istnieje zatem potrzeba opracowania ogólniejszego opisu klasy układów odwzorowujących zawierających elementy zmieniające stan polaryzacji światła. W niniejszej pracy przedstawiono właśnie propozycję takiego opisu. Jego istotą jest połączenie metod używanych w skalarnej metodzie z macierzowym formalizmem Jonesa [28-31], stosowanym do opisu elementów zmieniających stan polaryzacji światła.

W tym celu w rozdziale drugim pracy zdefiniowano szereg pojęć matematycznych oraz podano wraz z dowodami twierdzenia umożliwiające stosowanie w dalszej części pracy związanej notacji macierzowej. W rozdziale trzecim przypominano sposoby

opisu stanu polaryzacji światła. Szczególną uwagę zarówno tu na wprowadzoną przez Wienera [32-33] macierz koherencji, która okazała się najbardziej przydatna do proponowanego macierzowego opisu układów zmieniających stan polaryzacji światła. W rozdziale czwartym zdefiniowano macierzowe odpowiedniki funkcji używanych w podejściu skalarnym: macierzową funkcję źrenicową, macierzową funkcję rozmycia amplitudy, macierzową funkcję aberracji, macierzową funkcję transmisji amplitudy. W następnych trzech rozdziałach podano przejrzyste macierzowe wzory na rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu, jasność Strehla oraz udowodniono uogólnione twierdzenie o przesunięciu. W rozdziałach ósmym i dziewiątym wyprowadzono uogólnione przybliżenie Maréchała dla jasności Strehla oraz rozwiązano problem doboru optymalnej sfery odniesienia dla omawianej klasy układów. Wyniki tam przedstawione uzyskano jednak przy ograniczającym założeniu, że światło wchodzące do układu da się opisać macierzą koherencji o elementach rzeczywistych.

Problemy związane z koherentnym i niekoherentnym odwzorowaniem przedmiotów rozciągłych omówione zostały w rozdziale dziesiątym. W szczególności wyprowadzono tam uogólniony macierzowy wzór na optyczną funkcję przenoszenia układu zmieniającego stan polaryzacji światła. W rozdziale jedenastym wyliczono dwupunktowe rozkłady natężenia dla źródeł światła charakteryzujących się odpowiednio pełną koherencją i jej całkowitym brakiem. Porównanie opisu macierzowego z opisem skalarnym przeprowadzono w rozdziale dwunastym.

Zagadnienia związane z koherentnym odwzorowaniem przedmiotów dyfuzyjnych w układach zmieniających stan polaryzacji światła są przedmiotem rozważań rozdziału trzynastego. Stosując podejście oparte na pojęciu procesu stochastycznego określono podstawowe wielkości statystyczne charakteryzujące rozkład amplitudy i natężenia w płaszczyźnie obrazowej układu. W szczególności wyliczono średnią i autokorelację amplitudy obrazowej, a także średnią, autokorelację i wariancję rozkładu natężenia w płaszczyźnie obrazowej. Wielkości te charakteryzują szum związany z efektem plamkowym, który zawsze powstaje w koherentnych obrazach przedmiotów dyfuzyjnych.

Zaprezentowany w pracy macierzowy opis własności układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła wypełnia więc lukę w stosowaniu skalarne go podejścia związaną z trzecim z wymienionych wcześniej ograniczeń.

Ponieważ wszystkie rozważania prowadzone są przy założeniu, iż można pominąć składową amplitudy równoległą do osi optycznej układu, to uzyskane wyniki nie mogą być stosowane dla układów o dużych kątach aperturowych.

2. ZARYS APARATU MATEMATYCZNEGO

W rozdziale tym zdefiniowano szereg pojęć matematycznych oraz podano wraz z dowodami twierdzenia^{*)} umożliwiające konsekwentne stosowanie związanej notacji macierzowej w zasadniczej części pracy. Dla uzupełnienia przedstawiono także kilka powszechnie znanych definicji i twierdzeń związanych z rachunkiem macierzowym, a zaczerpniętych z pracy [34].

2.1. Podstawowe definicje.

Def. 2.1-1. Macierz funkcji

Macierz $\hat{A}(x)$ której elementami są funkcje zmiennej rzeczywistej $A_{ij}(x)$ nazywać będziemy macierzą funkcji

$$[\hat{A}(x)]_{ij} = A_{ij}(x), \quad (2.1-1)$$

gdzie $i = 1, n; j = 1, m$.

Funkcje $A_{ij}(x)$ mogą być rzeczywiste lub zespolone.

Def. 2.1-2. Ślad macierzy [34]

Niech $\hat{A}(x)$ będzie macierzą kwadratową $n \times n$.

Śladem macierzy $\hat{A}(x)$ nazywać będziemy sumę jej elementów diagonalnych

$$\text{tr } \hat{A}(x) = \sum_{i=1}^n [\hat{A}(x)]_{ii}. \quad (2.1-2)$$

*) -----
według wiedzy autora nowe

Def.2.1-3. Macierz transponowana [34]

Macierz $\hat{A}^{TR}(x)$ nazywamy macierzą transponowaną w stosunku do macierzy $\hat{A}(x)$ jeżeli zachodzi

$$\left[\hat{A}^{TR}(x) \right]_{ij} = \left[\hat{A}(x) \right]_{ji} . \quad (2.1-3)$$

Def.2.1-4. Macierz sprzężona hermitowsko [34]

Sprzężeniem hermitowskim macierzy $\hat{A}(x)$ nazywamy macierz $\hat{A}^+(x)$ której elementy spełniają warunek

$$\left[\hat{A}^+(x) \right]_{ij} = \left[\hat{A}(x) \right]_{ji}^* . \quad (2.1-4)$$

Uwzględniając (2.1-3) macierz sprzężoną hermitowsko można przedstawić jako

$$\hat{A}^+(x) = \left(\hat{A}^{TR}(x) \right)^* . \quad (2.1-5)$$

Def.2.1-5. Macierz hermitowska [34]

Macierz spełniająca warunek

$$\hat{A}(x) = \hat{A}^+(x) \quad (2.1-6)$$

nazywana jest macierzą hermitowską.

Def.2.1-6. Całka macierzy

Całką macierzy $\hat{A}(x)$ nazwiemy macierz liczb $\hat{B}$ określoną następująco

$$\hat{B} = \int_a^b \hat{A}(x) dx \Leftrightarrow \left[\hat{B} \right]_{ij} = \int_a^b \left[\hat{A}(x) \right]_{ij} dx . \quad (2.1-7)$$

Def.2.1-7. Pochodna macierzy

Pochodną macierzy $\hat{A}(x)$ nazwiemy macierz $\hat{A}'(x)$ określoną następująco

$$\hat{A}'(x) = \frac{d \hat{A}(x)}{dx} \Longleftrightarrow [\hat{A}'(x)]_{ij} = \frac{d}{dx} [\hat{A}(x)]_{ij} \quad (2.1-8)$$

Def.2.1-8. Splot macierzy.

Niech $\hat{A}(x)$ będzie macierzą $n \times k$, a $\hat{B}(x)$ macierzą $k \times m$. Splotem macierzy $\hat{A}(x)$ z $\hat{B}(x)$ nazwiemy macierz $\hat{D}(x)$ określoną następująco

$$\begin{aligned} \hat{D}(x) &= \hat{A}(x) \otimes \hat{B}(x) \Longleftrightarrow \hat{D}(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(x') \hat{B}(x-x') dx' \quad (2.1-9) \end{aligned}$$

Macierz $\hat{D}(x)$ ma wymiar $n \times m$. Zgodnie z def.2.1-6 elementy macierzy $\hat{D}(x)$ wyznaczyć można na podstawie wzoru

$$[\hat{D}(x)]_{ij} = \sum_{l=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{A}(x')]_{il} [\hat{B}(x-x')]_{lj} dx' \quad (2.1-10)$$

Zatem element ij macierzy $\hat{D}(x)$ jest sumą splotów funkcji tworzących i -ty wiersz macierzy $\hat{A}(x)$ z odpowiednimi funkcjami tworzącymi j -tą kolumnę macierzy $\hat{B}(x)$

$$[\hat{D}(x)]_{ij} = \sum_{l=1}^k [\hat{A}(x)]_{il} \otimes [\hat{B}(x)]_{lj} \quad (2.1-11)$$

Def.2.1-9. Korelacja wzajemna macierzy

Niech $\hat{A}(x)$ będzie macierzą $n \times k$, a $\hat{B}(x)$ macierzą $m \times k$. Korelacją wzajemną macierzy $\hat{A}(x)$ z $\hat{B}(x)$ nazwiemy macierz $\hat{D}(x)$ określoną następująco

$$\begin{aligned} \hat{D}(x) &= \hat{A}(x) \odot \hat{B}(x) \Longleftrightarrow \hat{D}(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(x') \hat{B}^{\dagger}(x'-x) dx' \quad (2.1-12) \end{aligned}$$

Macierz $\hat{D}(x)$ ma wymiar $n \times m$. Zgodnie z def.2.1-4 i def. 2.1-6 elementy macierzy $\hat{D}(x)$ można przedstawić jako

$$\left[\hat{D}(x) \right]_{ij} = \sum_{l=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{A}(x') \right]_{il} \left[\hat{B}(x-x') \right]_{jl}^* dx' . \quad (2.1-13)$$

Zatem, element ij macierzy $\hat{D}(x)$ jest sumą korelacji wzajemnych funkcji tworzących i -ty wiersz macierzy $\hat{A}(x)$ z funkcjami tworzącymi j -ty wiersz macierzy $\hat{B}(x)$

$$\left[\hat{D}(x) \right]_{ij} = \sum_{l=1}^k \left[\hat{A}(x) \right]_{il} \odot \left[\hat{B}(x) \right]_{jl} . \quad (2.1-14)$$

Def.2.1-10. Transformata Fouriera macierzy

Transformatą Fouriera macierzy $\hat{A}(x)$ nazwiemy macierz $\hat{\mathcal{R}}(f)$ taką, że

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(f) &= \mathcal{F}\{\hat{A}(x)\} \Leftrightarrow \hat{\mathcal{R}}(f) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(x) \exp(-2\pi i x f) dx . \end{aligned} \quad (2.1-15)$$

Używane będzie również symboliczne oznaczenia $\hat{A}(x) \rightleftharpoons \hat{\mathcal{R}}(f)$.

2.2. Podstawowe twierdzenia.

Tw.2.2-1. O pochodnej iloczynu macierzy

$$\begin{aligned} \text{Jeżeli } \hat{D}(x) &= \hat{A}(x) \hat{B}(x) \text{ to zachodzi} \\ \frac{d \hat{D}(x)}{dx} &= \frac{d \hat{A}(x)}{dx} \hat{B}(x) + \hat{A}(x) \frac{d \hat{B}(x)}{dx} . \end{aligned} \quad (2.2-1)$$

D o w ó d :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d \hat{D}(x)}{dx} \right]_{ij} &= \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \sum_k \left[\hat{A}(x) \right]_{ik} \left[\hat{B}(x) \right]_{kj} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k \frac{d}{dx} [\hat{A}(x)]_{ik} [\hat{B}(x)]_{kj} + \sum_k [\hat{A}(x)]_{ik} \frac{d}{dx} [\hat{B}(x)]_{kj} = \\
 &= \sum_k \left[\frac{d \hat{A}(x)}{dx} \right]_{ik} [\hat{B}(x)]_{kj} + \sum_k [\hat{A}(x)]_{ik} \left[\frac{d \hat{B}(x)}{dx} \right]_{kj} = \\
 &= \left[\frac{d \hat{A}(x)}{dx} \hat{B}(x) \right]_{ij} + \left[\hat{A}(x) \frac{d \hat{B}(x)}{dx} \right]_{ij} . \quad (2.2-2)
 \end{aligned}$$

Tw.2.2-2. O związku między splotem a korelacją
wzajemną macierzy

$$\hat{A}(x) \otimes \hat{B}(x) = \hat{A}(x) \odot \hat{B}^\dagger(-x) . \quad (2.2-3)$$

D o w ó d :

$$\begin{aligned}
 [\hat{A}(x) \otimes \hat{B}(x)]_{ij} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int [\hat{A}(x')]_{il} [\hat{B}(x-x')]_{lj} dx' = \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int [\hat{A}(x')]_{il} [\hat{B}^\dagger(x-x')]_{jl}^* dx' = \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int [\hat{A}(x')]_{il} [\hat{B}^\dagger(-(x'-x))]_{jl} dx' = [\hat{A}(x) \odot \hat{B}^\dagger(-x)]_{ij} . \quad (2.2-4)
 \end{aligned}$$

Tw. 2.2-3. Operacja transponowania macierzy nie zmienia
jej śladu [34]

$$\text{tr } \hat{A}(x) = \text{tr } \hat{A}^{\text{TR}}(x) . \quad (2.2-5)$$

Tw.2.2-4. Ślad jest nieczuły na zmianę kolejności
mnożenia macierzy [34]

$$\text{tr } \hat{A}(x) \hat{B}(x) = \text{tr } \hat{B}(x) \hat{A}(x) . \quad (2.2-6)$$

Dowody ostatnich dwu twierdzeń można znaleźć w standartowych podręcznikach algebry, np [34].

Tw. 2.2-5. O pochodnej śladu macierzy

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tr} \hat{A}(x) = \operatorname{tr} \frac{d \hat{A}(x)}{dx} . \quad (2.2-7)$$

D o w ó d :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{tr} \hat{A}(x) &= \frac{d}{dx} \sum_i [\hat{A}(x)]_{ii} = \sum_i \frac{d}{dx} [\hat{A}(x)]_{ii} = \\ &= \sum_i \left[\frac{d \hat{A}(x)}{dx} \right]_{ii} = \operatorname{tr} \frac{d \hat{A}(x)}{dx} . \end{aligned} \quad (2.2-8)$$

Tw. 2.2-6. O całce śladu macierzy

$$\int_a^b \operatorname{tr} \hat{A}(x) dx = \operatorname{tr} \int_a^b \hat{A}(x) dx . \quad (2.2-9)$$

D o w ó d :

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{tr} \hat{A}(x) dx &= \int_a^b \sum_i [\hat{A}(x)]_{ii} dx = \sum_i \int_a^b [\hat{A}(x)]_{ii} dx = \\ &= \sum_i \left[\int_a^b \hat{A}(x) dx \right]_{ii} = \operatorname{tr} \int_a^b \hat{A}(x) dx . \end{aligned} \quad (2.2-10)$$

Tw. 2.2-7. Uogólnione twierdzenie o podobieństwie

Jeżeli macierz $\hat{A}(x)$ ma transformatę Fouriera równą $\hat{\mathcal{A}}(f)$, to macierz $\hat{A}(ax)$ ma transformatę Fouriera równą $|a|^{-1} \hat{\mathcal{A}}(f/a)$.

D o w ó d :

Jeżeli

$$[\hat{A}(x)]_{ij} \rightleftharpoons [\hat{\mathcal{A}}(f)]_{ij}, \quad (2.2-11)$$

to na podstawie twierdzenia o podobieństwie [35] zachodzi

$$[\hat{A}(ax)]_{ij} \rightleftharpoons |a|^{-1} [\hat{\mathcal{A}}(f/a)]_{ij}, \quad (2.2-12)$$

z czego wynika, że

$$\hat{A}(ax) \rightleftharpoons |a|^{-1} \hat{\mathcal{A}}(f/a). \quad (2.2-13)$$

Tw. 2.2-8. Uogólnione twierdzenie o przesunięciu

Jeżeli macierz $\hat{A}(x)$ ma transformatę Fouriera równą $\hat{\mathcal{A}}(f)$, to macierz $\hat{A}(x-a)$ ma transformatę Fouriera równą $\exp(-2\pi i a f) \hat{\mathcal{A}}(f)$.

D o w ó d :

Jeżeli

$$[\hat{A}(x)]_{ij} \rightleftharpoons [\hat{\mathcal{A}}(f)]_{ij}, \quad (2.2-14)$$

to na podstawie twierdzenia o przesunięciu [35] zachodzi

$$[\hat{A}(x-a)]_{ij} \rightleftharpoons \exp(-2\pi i a f) [\hat{\mathcal{A}}(f)]_{ij}. \quad (2.2-15)$$

Zatem

$$\hat{A}(x-a) \rightleftharpoons \exp(-2\pi i a f) \hat{\mathcal{A}}(f). \quad (2.2-16)$$

Tw. 2.2-9. Uogólnione twierdzenie o splocie

Jeżeli macierz $\hat{A}(x)$ ma transformatę Fouriera $\hat{\mathcal{A}}(f)$, a macierz $\hat{B}(x)$ ma transformatę Fouriera równą $\hat{\mathcal{B}}(f)$, to spłot macierzy $\hat{A}(x) \circledast \hat{B}(x)$ ma transformatę równą iloczynowi transformata wyjściowych $\hat{\mathcal{A}}(f) \hat{\mathcal{B}}(f)$.

D o w ó d :

Zgodnie z definicją spłotu macierzy (def.2.1-8) zachodzi

$$[\hat{A}(x) \circledast \hat{B}(x)]_{ij} = \sum_1 [\hat{A}(x)]_{il} \circledast [\hat{B}(x)]_{lj} \quad . \quad (2.2-17)$$

Na podstawie twierdzenia o splocie [35] łatwo można wyznaczyć transformatę Fouriera elementu ij macierzy $\hat{A}(x) \circledast \hat{B}(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{[\hat{A}(x) \circledast \hat{B}(x)]_{ij}\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_1 [\hat{A}(x)]_{il} \circledast [\hat{B}(x)]_{lj}\right\} = \\ &= \sum_1 \mathcal{F}\{[\hat{A}(x)]_{il}\} \mathcal{F}\{[\hat{B}(x)]_{lj}\} = \sum_1 [\hat{\mathcal{A}}(f)]_{il} [\hat{\mathcal{B}}(f)]_{lj} = \\ &= [\hat{\mathcal{A}}(f) \hat{\mathcal{B}}(f)]_{ij} . \end{aligned} \quad (2.2-18)$$

Tak więc wykazano, że

$$\mathcal{F}\{\hat{A}(x) \circledast \hat{B}(x)\} = \hat{\mathcal{A}}(f) \hat{\mathcal{B}}(f) \quad . \quad (2.2-19)$$

Tw.2.2-10. Uogólnione twierdzenie Rayleigha

Jeżeli macierz $\hat{A}(x)$ ma transformatę Fouriera równą $\hat{\mathcal{A}}(f)$, to zachodzi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(x) \hat{A}^{\dagger}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}(f) \hat{\mathcal{A}}^{\dagger}(f) df \quad . \quad (2.2-20)$$

D o w ó d :

Ponieważ

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\hat{A}(x) \hat{A}^{\dagger}(x)]_{ij} dx = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{A}(x)]_{il} [\hat{A}(x)]_{jl}^* dx, \quad (2.2-21)$$

to na podstawie twierdzenia o mocy [35] otrzymuje się

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{A}(x)]_{il} [\hat{A}(x)]_{jl}^* dx &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\mathcal{A}}(f)]_{il} [\hat{\mathcal{A}}(f)]_{jl}^* df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\mathcal{A}}(f) \hat{\mathcal{A}}^{\dagger}(f)]_{ij} df. \end{aligned} \quad (2.2-22)$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(x) \hat{A}^{\dagger}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}(f) \hat{\mathcal{A}}^{\dagger}(f) df. \quad (2.2-23)$$

Tw. 2.2-11. Uogólnione twierdzenie o mocy

Jeżeli macierz $\hat{A}(x)$ ma transformatę Fouriera
równą $\hat{\mathcal{A}}(f)$, a macierz $\hat{B}(x)$ ma transformatę
 $\hat{\mathcal{B}}(f)$, to zachodzi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(x) \hat{B}^{\dagger}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}(f) \hat{\mathcal{B}}^{\dagger}(f) df. \quad (2.2-24)$$

Dowód przebiega tak samo jak dla uogólnionego twierdzenia
Rayleigha, przy czym $\hat{A}^{\dagger}(x)$ zastępuje się przez $\hat{B}^{\dagger}(x)$ a
 $\hat{\mathcal{A}}^{\dagger}(f)$ przez $\hat{\mathcal{B}}^{\dagger}(f)$.

Tw. 2.2-12. Uogólnione twierdzenie o korelacji wzajemnej

Jeżeli macierz $\hat{A}(x)$ ma transformatę Fouriera
równą $\hat{\mathcal{A}}(f)$, a macierz $\hat{B}(x)$ ma transformatę
 $\hat{\mathcal{B}}(f)$, to korelacja wzajemna macierzy $\hat{A}(x)$ i
 $\hat{B}(x)$ ma transformatę Fouriera równą $\hat{\mathcal{A}}(f) \hat{\mathcal{B}}^{\dagger}(f)$.

$$\hat{A}(x) \odot \hat{B}(x) \xrightarrow{\quad} \hat{\mathcal{A}}(f) \hat{\mathcal{B}}^{\dagger}(f) \quad . \quad (2.2-25)$$

D o w ó d :

Wykorzystując twierdzenie o związku między splotem a korelacją wzajemną macierzy (tw. 2.2-2) oraz uogólnione twierdzenie o splotcie (tw. 2.2-9) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\hat{A}(x) \odot \hat{B}(x)\} &= \mathcal{F}\{\hat{A}(x) \otimes \hat{B}^{\dagger}(-x)\} = \\ &= \mathcal{F}\{\hat{A}(x)\} \mathcal{F}\{\hat{B}^{\dagger}(-x)\} = \hat{\mathcal{A}}(f) \hat{\mathcal{B}}^{\dagger}(f) . \end{aligned} \quad (2.2-26)$$

Tw. 2.2-13. Uogólnione twierdzenie o pochodnej

Jeżeli macierz $\hat{A}(x)$ ma transformatę Fouriera $\hat{\mathcal{A}}(f)$, to jej pochodna $\frac{d \hat{A}(x)}{dx}$ ma transformatę Fouriera równą $2\pi i f \hat{\mathcal{A}}(f)$.

D o w ó d :

Na podstawie twierdzenia o pochodnej [35] zachodzi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\left[\frac{d \hat{A}(x)}{dx}\right]_{ij}\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{d}{dx} [\hat{A}(x)]_{ij}\right\} = \\ &= 2\pi i f \mathcal{F}\{[\hat{A}(x)]_{ij}\} = 2\pi i f [\hat{\mathcal{A}}(f)]_{ij} . \end{aligned} \quad (2.2-27)$$

Zatem

$$\frac{d \hat{A}(x)}{dx} \xrightarrow{\quad} 2\pi i f \hat{\mathcal{A}}(f) .$$

Tw. 2.2-14. O pochodnej splotu macierzy

Pochodna splotu dwóch macierzy jest splotem jednej z nich z pochodną drugiej, czyli

$$\frac{d}{dx} \left\{ \hat{A}(x) \circledast \hat{B}(x) \right\} = \frac{d \hat{A}(x)}{dx} \circledast \hat{B}(x) = \hat{A}(x) \circledast \frac{d \hat{B}(x)}{dx} . \quad (2.2-29)$$

D o w ó d :

Powyższe związki wyprowadzić można na podstawie uogólnionego twierdzenia o pochodnej (tw. 2.2-13) oraz uogólnionego twierdzenia o splocie (tw. 2.2-9)

$$\frac{d}{dx} \left\{ \hat{A}(x) \circledast \hat{B}(x) \right\} \rightleftharpoons 2\pi i f \left\{ \hat{\mathcal{A}}(f) \hat{\mathcal{B}}(f) \right\} , \quad (2.2-30)$$

$$\frac{d \hat{A}(x)}{dx} \circledast \hat{B}(x) \rightleftharpoons \left\{ 2\pi i f \hat{\mathcal{A}}(f) \right\} \hat{\mathcal{B}}(f) , \quad (2.2-31)$$

$$\hat{A}(x) \circledast \frac{d \hat{B}(x)}{dx} \rightleftharpoons \hat{\mathcal{A}}(f) \left\{ 2\pi i f \hat{\mathcal{B}}(f) \right\} . \quad (2.2-32)$$

Powyżej przedstawiono definicje i twierdzenia związane z macierzami funkcji jednej zmiennej rzeczywistej $A_{ij}(x)$. Można łatwo wykazać, iż wszystkie omówione zależności spełnione są także dla macierzy których elementami są funkcje wielu zmiennych rzeczywistych $A_{ij}(x_1, \dots, x_n)$. Najczęściej, do opisu zagadnień optycznych przydatne są funkcje dwóch zmiennych $A_{ij}(x_1, x_2)$, a zatem w dalszej części pracy wykorzystane zostaną dwuwymiarowe odpowiedniki twierdzeń uodwodnionych w niniejszym rozdziale.

3. POLARYZACYJNE WŁASNOŚCI ŚWIATŁA

Polaryzacyjne własności światła związane są z wektorowym charakterem fal elektromagnetycznych. Istnieje kilka sposobów opisu stanu polaryzacji światła. Ich przykłady to wektor Jonesa, kula Poincarégo, wektor Stokesa oraz tzw. macierz koherencji - wprowadzona przez Wienera w latach trzydziestych [32-33]. W drugiej połowie lat pięćdziesiątych ukazało się także kilka prac poświęconych macierzy koherencji [36-37]. W niniejszym rozdziale przypomniano definicję oraz podstawowe własności macierzy koherencji, jej związek z wektorem Stokesa, a także jej własności spektralne. Będą one wykorzystywane w dalszej części pracy.

3.1. Definicja macierzy koherencji dla fali płaskiej

Niech $\hat{Z}(z,t)$ będzie poprzeczną falą płaską o dowolnym składzie spektralnym rozchodzącą się w kierunku osi z , rys.

3.1. Dla fali elektromagnetycznej przyjmuje się zazwyczaj, że $\hat{Z}(z,t)$ opisuje drgania wektora elektrycznego

$$\hat{Z}(z,t) \equiv \hat{E}(z,t) . \quad (3.1-1)$$

Macierz koherencji poprzecznej fali płaskiej definiuje się następująco [36]

$$\hat{J} = \langle \hat{Z}(z,t) \hat{Z}^+(z,t) \rangle_t , \quad (3.1-2)$$

gdzie $\hat{Z}(z,t)$ jest wektorem reprezentującym składowe kartezjańskie zaburzenia

$$\hat{Z}(z,t) = \begin{bmatrix} Z_x(z,t) \\ Z_y(z,t) \end{bmatrix} , \quad (3.1-3)$$

a $\langle \dots \rangle_t$ oznacza uśrednianie po czasie każdego elementu macierzy $\hat{Z}(z,t) \hat{Z}^\dagger(z,t)$ według wzoru

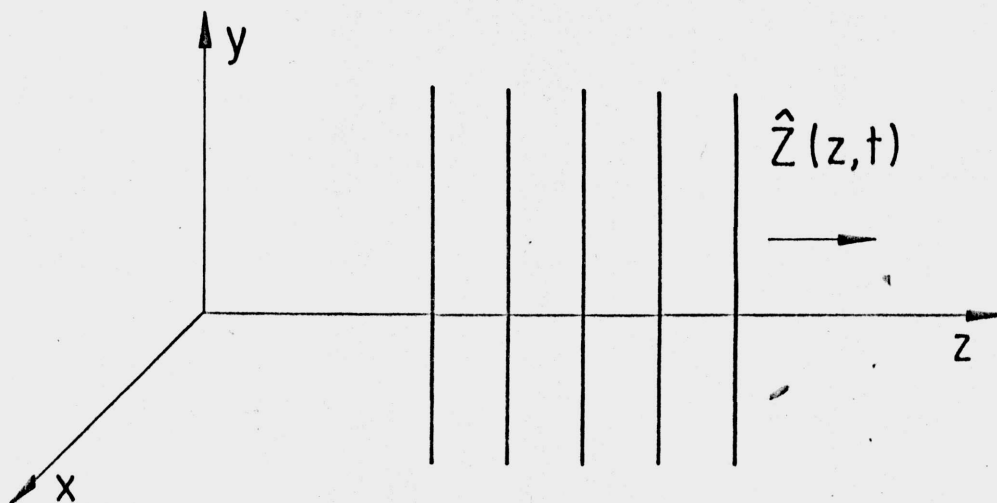
$$\langle \dots \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dots dt \quad . \quad (3.1-4)$$

Zauważmy, że rozwinięta postać macierzy koherencji dla fali płaskiej jest następująca

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} , \quad (3.1-5)$$

gdzie

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \langle Z_x(z,t) Z_x^*(z,t) \rangle_t , \\ J_{xy} &= \langle Z_x(z,t) Z_y^*(z,t) \rangle_t , \\ J_{yx} &= \langle Z_y(z,t) Z_x^*(z,t) \rangle_t , \\ J_{yy} &= \langle Z_y(z,t) Z_y^*(z,t) \rangle_t . \end{aligned} \quad (3.1-6)$$



Rys.3.1. Poprzeczna fala płaska rozchodząca się wzdłuż osi z .

Elementy diagonalne J_{xx} i J_{yy} macierzy koherencji są zawsze rzeczywiste i równe natężeniu związanemu odpowiednio ze składową $Z_x(z,t)$ i $Z_y(z,t)$ fali. Całkowite natężenie fali równe jest więc śladowi z macierzy koherencji

$$I = \text{tr } \hat{J} . \quad (3.1-7)$$

Ponieważ elementy nediagonalne macierzy koherencji są wzajemnie sprzężone $J_{xy} = J_{yx}^*$ jest ona macierzą hermitowską (def. 2.1-4)

$$\hat{J} = \hat{J}^\dagger \quad (3.1-8)$$

Miarą koherencji pomiędzy składowymi kartezjańskimi fali $Z_x(z,t)$ i $Z_y(z,t)$ jest tzw. zespolony współczynnik koherencji μ_{xy} rozumiany jako [36]

$$\mu_{xy} = |\mu_{xy}| \exp i \sigma_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx} J_{yy}}} . \quad (3.1-9)$$

Z nierówności Schwarza wynika, że $|\mu_{xy}| \leq 1$.

W przypadku, gdy $\hat{Z}(z,t)$ jest falą quasimonochromatyczną o średniej częstotliwości $\bar{\nu}$ jej składowe kartezjańskie $Z_x(z,t)$ i $Z_y(z,t)$ można przedstawić następująco [38]

$$\begin{aligned} Z_x(z,t) &= W_x(z,t) \exp - 2\pi i \bar{\nu} t , \\ Z_y(z,t) &= W_y(z,t) \exp - 2\pi i \bar{\nu} t , \end{aligned} \quad (3.1-10)$$

gdzie w porównaniu z częstotliwością $\bar{\nu}$ $W_x(z,t)$ i $W_y(z,t)$ są wolnozmiennymi zespolonymi funkcjami czasu. W krótszej notacji macierzowej otrzymuje się

$$\hat{Z}(z,t) = \hat{W}(z,t) \exp - 2\pi i \bar{\nu} t , \quad (3.1-11)$$

gdzie $\hat{W}(z,t)$ jest zespoloną amplitudą wektorową o składowych $W_x(z,t)$ i $W_y(z,t)$

$$\begin{aligned} W_x(z,t) &= a_x(t) \exp i \left[\varphi_x(t) - \frac{2\pi}{\lambda} z \right], \\ W_y(z,t) &= a_y(t) \exp i \left[\varphi_y(t) - \frac{2\pi}{\lambda} z \right]. \end{aligned} \quad (3.1-12)$$

Funkcje rzeczywiste $a_x(t)$, $a_y(t)$, $\varphi_x(t)$, $\varphi_y(t)$ nie zależą od czasu w przypadku gdy $\hat{Z}(z,t)$ jest falą ściśle monochromatyczną.

Podstawiając (3.1-11) do wzoru definiującego macierz koherencji (3.1-2) otrzymuje się

$$\hat{J} = \langle \hat{W}(z,t) \hat{W}^t(z,t) \rangle_t, \quad (3.1-13)$$

a uwzględniając dodatkowo (3.1-12) można otrzymać rozwiniętą postać macierzy koherencji dla światła quasimonochromatycznego

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} \langle a_x^2(t) \rangle_t ; \langle a_x(t) a_y(t) \exp i \delta(t) \rangle_t \\ \langle a_x(t) a_y(t) \exp - i \delta(t) \rangle_t ; \langle a_y^2(t) \rangle_t \end{bmatrix}, \quad (3.1-14)$$

gdzie

$$\delta(t) \text{ jest różnicą faz } \delta(t) = \varphi_x(t) - \varphi_y(t).$$

3.2. Stany polaryzacji fali płaskiej

Stan polaryzacji fali, związany jest ściśle ze współczynnikiem koherencji μ_{xy} . I tak, falę $\hat{Z}(z,t)$ nazywamy niepolaryzowaną, gdy spełnione są warunki

$$\mu_{xy} = 0 \quad \text{oraz} \quad J_{xx} = J_{yy} \quad . \quad (3.2-1)$$

Macierz koherencji fali niespolaryzowanej przyjmuje więc postać

$$\hat{J} = I \begin{bmatrix} 0.5 & ; & 0 \\ 0 & ; & 0.5 \end{bmatrix} , \quad (3.2-2)$$

gdzie $I = \text{tr } \hat{J}$ oznacza natężenie fali .

Falę $\hat{Z}(z,t)$ nazywamy w pełni spolaryzowaną, gdy spełniony jest warunek

$$\mu_{xy} = \exp i \sigma_{xy} , \quad (3.2-3)$$

co oznacza pełną koherencję pomiędzy składowymi kartezjańskimi $Z_x(z,t)$ i $Z_y(z,t)$. Uwzględniając (3.1-9) oraz (3.1-5) można łatwo wyznaczyć rozwiniętą postać macierzy koherencji dla fali w pełni spolaryzowanej

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & ; & \exp i \sigma_{xy} \sqrt{J_{xx} J_{yy}} \\ \exp - i \sigma_{xy} \sqrt{J_{xx} J_{yy}} & ; & J_{yy} \end{bmatrix} . \quad (3.2-4)$$

W zależności od wartości jaką przyjmuje współczynnik σ_{xy} rozróżnia się liniowy, kołowy i eliptyczny stan polaryzacji. W przypadku gdy

$$\sigma_{xy} = m\pi \quad \text{dla} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (3.2-5)$$

falę nazywamy spolaryzowaną liniowo. Macierz koherencji takiej fali można zapisać następująco

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & ; & (-1)^m \sqrt{J_{xx} J_{yy}} \\ (-1)^m \sqrt{J_{xx} J_{yy}} & ; & J_{yy} \end{bmatrix} . \quad (3.2-6)$$

Falę nazywamy spolaryzowaną kołowo gdy spełniony jest warunek

$$\sigma_{xy} = \frac{m}{2} \pi \quad \text{dla } m = \pm 1, \pm 3, \dots, \quad (3.2-7)$$

oraz dodatkowo

$$J_{xx} = J_{yy} . \quad (3.2-8)$$

Macierz koherencji fali spolaryzowanej kołowo przyjmuje więc postać

$$\hat{J} = \frac{1}{2} I \begin{bmatrix} 1 & ; & \pm i \\ \mp i & ; & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.2-9)$$

Falę nazywamy spolaryzowaną eliptycznie dla pozostałych wartości współczynnika σ_{xy} .

Oprócz pełnego niespolaryzowania i pełnego spolaryzowania fali istnieje również szereg stanów pośrednich określanych jako polaryzacja częściowa. Falę $\hat{Z}(z,t)$ nazwiemy spolaryzowaną częściowo gdy współczynnik koherencji μ_{xy} spełnia nierówność

$$0 < |\mu_{xy}| < 1 . \quad (3.2-10)$$

Macierz koherencji takiej fali można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy dwóch macierzy określonych równaniami (3.2-2) i (3.2-4). Oznacza to, że każdą falę spolaryzowaną częściowo można traktować jako jednoznaczną superpozycję dwóch niezależnych fal z których jedna jest w pełni spolaryzowana a druga niespolaryzowana

$$\hat{J} = \hat{J}_s + \hat{J}_n . \quad (3.2-11)$$

Niech $I_s = \text{tr } \hat{J}_s$ oznacza natężenie fali spolaryzowanej, a $I_n = \text{tr } \hat{J}_n$ - natężenie fali niespolaryzowanej. Parametrem charakteryzującym falę częściowo spolaryzowaną jest stopień polaryzacji P rozumiany jako

$$P = \frac{I_s}{I_s + I_n} \quad (3.2-12)$$

Zgodnie z powyższą definicją stopień polaryzacji P spełnia warunek

$$0 \leq P \leq 1 \quad (3.2-13)$$

przy czym krańcowe wartości przyjmuje dla fali niespolaryzowanej ($P = 0$) oraz dla fali w pełni spolaryzowanej ($P = 1$). Można również wykazać, że spełniona jest zależność [36]

$$P = \sqrt{1 - \frac{4 \det \hat{J}}{(\text{tr } \hat{J})^2}} \quad (3.2-14)$$

gdzie $\det \hat{J}$ oznacza wyznacznik macierzy koherencji $\hat{J}$.

3.3. Związek macierzy koherencji z wektorem Stokesa

Oprócz macierzy koherencji istnieją inne sposoby opisu stanu polaryzacji. Jednym z nich jest czterowymiarowy wektor Stokesa [38-39]

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.3-1)$$

Składowe wektora Stokesa dla płaskiej fali $\hat{Z}(z,t)$ o dowolnym składzie spektralnym oblicza się według wzorów

$$\begin{aligned} S_0 &= \langle |Z_x(z,t)|^2 \rangle_t + \langle |Z_y(z,t)|^2 \rangle_t , \\ S_1 &= \langle |Z_x(z,t)|^2 \rangle_t - \langle |Z_y(z,t)|^2 \rangle_t , \\ S_2 &= 2\text{Re}\{ \langle Z_x(z,t) Z_y^*(z,t) \rangle_t \} , \\ S_3 &= 2\text{Im}\{ \langle Z_x(z,t) Z_y^*(z,t) \rangle_t \} , \end{aligned} \quad (3.3-2)$$

gdzie $\text{Re}\{...\}$ i $\text{Im}\{...\}$ oznacza odpowiednio część rzeczywistą i urojoną.

Łatwo można wykazać, że pomiędzy elementami macierzy koherencji a składowymi wektora Stokesa istnieją następujące związki [38-39]

$$\begin{aligned} S_0 &= J_{xx} + J_{yy} , \\ S_1 &= J_{xx} - J_{yy} , \\ S_2 &= J_{xy} + J_{yx} , \\ S_3 &= i(J_{yx} - J_{xy}) , \end{aligned} \quad (3.3-3)$$

oraz relacje odwrotne

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \frac{1}{2} (S_0 + S_1) , \\ J_{yy} &= \frac{1}{2} (S_0 - S_1) , \\ J_{xy} &= \frac{1}{2} (S_2 + iS_3) , \\ J_{yx} &= \frac{1}{2} (S_2 - iS_3) . \end{aligned} \quad (3.3-4)$$

Dysponując składowymi wektora Stokesa można również wyznaczyć stopień polaryzacji fali [38-39]

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad (3.3-5)$$

Macierz koherencji $\hat{J}$ i wektor Stokesa $\hat{S}$ są więc równoważnymi sposobami opisu stanu polaryzacji.

3.4. Spektralne własności macierzy koherencji i wektora Stokesa

Wektorową falę niemonochromatyczną $\hat{Z}(z,t)$ można zawsze traktować jako superpozycję fal ściśle monochromatycznych [38]

$$Z_x(t) = \int_0^\infty a_x(\nu) \exp[i\varphi_x(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu \quad , \quad (3.4-1)$$

$$Z_y(t) = \int_0^\infty a_y(\nu) \exp[i\varphi_y(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu \quad .$$

W przypadku gdy fala $\hat{Z}(z,t)$ jest quasimonochromatyczna $a_x(\nu)$ i $a_y(\nu)$ są różne od zera tylko w wąskim przedziale spektralnym.

Używając notacji macierzowej spektralne równania (3.4-1) można zapisać jako

$$\hat{Z}(t) = \int_0^\infty \hat{U}(\nu) \exp[-2\pi i \nu t] d\nu \quad , \quad (3.4-2)$$

gdzie $\hat{U}(\nu)$ jest amplitudą zespoloną składowej ściśle monochromatycznej o częstotliwości ν

$$\hat{U}(\nu) = \begin{bmatrix} a_x(\nu) \exp i \varphi_x(\nu) \\ a_y(\nu) \exp i \varphi_y(\nu) \end{bmatrix}. \quad (3.4-3)$$

Podstawiając (3.4-2) do wzoru definiującego macierz koherencji (3.1-2) otrzymuje się

$$\hat{J} = \int_0^\infty \hat{U}(\nu) \hat{U}^\dagger(\nu) d\nu. \quad (3.4-4)$$

Zauważmy, że wyrażenie $\hat{U}(\nu) \hat{U}^\dagger(\nu)$ jest macierzą koherencji składowej ściśle monochromatycznej o częstotliwości ν

$$\hat{U}(\nu) \hat{U}^\dagger(\nu) = \begin{bmatrix} a_x^2(\nu) & ; & a_x(\nu) a_y(\nu) \exp i \tilde{\delta}(\nu) \\ a_x(\nu) a_y(\nu) \exp - i \tilde{\delta}(\nu) & ; & a_y^2(\nu) \end{bmatrix}, \quad (3.4-5)$$

gdzie $\tilde{\delta}(\nu) = \varphi_x(\nu) - \varphi_y(\nu)$. Macierz ta będzie dalej nazywana spektralną macierzą koherencji i oznaczona przez $\hat{J}_\nu$ [32-33], [40]

$$\hat{J}_\nu = \hat{U}(\nu) \hat{U}^\dagger(\nu). \quad (3.4-6)$$

Równanie (3.4-4) można zatem przedstawić w postaci

$$\hat{J} = \int_0^\infty \hat{J}_\nu d\nu. \quad (3.4-7)$$

Powyższa zależność pokazuje, że macierz koherencji fali nie-monochromatycznej równa jest sumie macierzy koherencji wszystkich składowych ściśle monochromatycznych tej fali.

Ponieważ elementy macierzy koherencji związane są ze składowymi wektora Stokesa zależnościami liniowymi (3.3-3)

i (3.3-4), to spektralne równanie (3.4-7) spełnione jest także dla wektora Stokesa [39], [41]

$$\hat{S} = \int_0^{\infty} \hat{S}_\nu d\nu, \quad (3.4-8)$$

gdzie S_ν jest spektralnym wektorem Stokesa o składowych określonych następująco [39], [41]

$$\begin{aligned} S_{0\nu} &= a_x^2(\nu) + a_y^2(\nu), \\ S_{1\nu} &= a_x^2(\nu) - a_y^2(\nu), \\ S_{2\nu} &= 2a_x(\nu)a_y(\nu)\cos\delta(\nu), \\ S_{3\nu} &= 2a_x(\nu)a_y(\nu)\sin\delta(\nu). \end{aligned} \quad (3.4-9)$$

3.5. Trójwymiarowa macierz koherencji

Dotychczas zakładano, że $\hat{Z}(z,t)$ jest poprzeczną falą płaską rozchodzącą się wzdłuż osi z

$$\hat{Z}(z,t) = \begin{bmatrix} Z_x(z,t) \\ Z_y(z,t) \end{bmatrix}. \quad (3.5-1)$$

W ogólniejszym przypadku mamy do czynienia z falami charakteryzującymi się bardziej skomplikowanym kształtem powierzchni falowych. Fale te muszą być opisywane wektorem trójwymiarowym

$$\hat{Z}(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} Z_x(x,y,z,t) \\ Z_y(x,y,z,t) \\ Z_z(x,y,z,t) \end{bmatrix}. \quad (3.5-2)$$

Jeżeli $\hat{Z}(x,y,z,t)$ jest zaburzeniem quasimonochromatycznym,

to zachodzi

$$\hat{Z}(x,y,z,t) = \hat{W}(x,y,z,t) \exp - 2\pi i \nu t \quad , \quad (3.5-3)$$

gdzie $\hat{W}(x,y,z,t)$ jest wolnozmienną w czasie zespoloną amplitudą wektorową o składowych

$$\begin{aligned} W_x(x,y,z,t) &= a_x(x,y,z,t) \exp i \varphi_x(x,y,z,t) \quad , \\ W_y(x,y,z,t) &= a_y(x,y,z,t) \exp i \varphi_y(x,y,z,t) \quad , \quad (3.5-4) \\ W_z(x,y,z,t) &= a_z(x,y,z,t) \exp i \varphi_z(x,y,z,t) \quad . \end{aligned}$$

Podstawiając (3.5-2) do wzoru definiującego macierz koherencji (3.1-2) otrzymuje się

$$\hat{J}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \langle Z_x Z_x^* \rangle_t & \langle Z_x Z_y^* \rangle_t & \langle Z_x Z_z^* \rangle_t \\ \langle Z_y Z_x^* \rangle_t & \langle Z_y Z_y^* \rangle_t & \langle Z_y Z_z^* \rangle_t \\ \langle Z_z Z_x^* \rangle_t & \langle Z_z Z_y^* \rangle_t & \langle Z_z Z_z^* \rangle_t \end{bmatrix} \quad . \quad (3.5-5)$$

Formalnie oznacza to, iż dla wektorowych zaburzeń trójwymiarowych można również wprowadzić pojęcie stanu polaryzacji. Trójwymiarowa macierz koherencji $\hat{J}(x,y,z)$ reprezentuje teraz charakter drgań wektora $\hat{Z}(x,y,z,t)$ w danym punkcie przestrzeni (x,y,z) . Stan polaryzacji fali o niepłaskich powierzchniach falowych może się więc zmieniać od punktu do punktu.

W pracy [42], w oparciu o związki składowych wektora Stokesa z elementami macierzy koherencji, wyprowadzono uogólniony dziewięcioparametrowy wektor Stokesa. Jako równoważnik trójwymiarowej macierzy koherencji może on być także stosowany do opisu punktowych stanów polaryzacji.

Zauważmy, że dla frontów falowych spełniających w każdym punkcie (x, y, z) warunek

$$\left\langle \left| Z_z(x, y, z, t) \right|^2 \right\rangle_t \approx 0 \quad (3.5-6)$$

trójwymiarowa macierz koherencji redukuje się do postaci

$$\hat{J}(x, y, z) \approx \begin{bmatrix} \langle Z_x Z_x^* \rangle_t & \langle Z_x Z_y^* \rangle_t & 0 \\ \langle Z_y Z_x^* \rangle_t & \langle Z_y Z_y^* \rangle_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5-7)$$

co oznacza, że przy spełnieniu (3.5-6) z-towa składowa zaburzenia może być pominięta

$$Z_z(x, y, z, t) \approx 0. \quad (3.5-8)$$

Zatem, dla frontów falowych spełniających warunek (3.5-6) zamiast trójwymiarowej macierzy koherencji, można używać jej dwuwymiarowego odpowiednika

$$\hat{J}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \langle Z_x Z_x^* \rangle_t & \langle Z_x Z_y^* \rangle_t \\ \langle Z_y Z_x^* \rangle_t & \langle Z_y Z_y^* \rangle_t \end{bmatrix}. \quad (3.5-9)$$

Analizując w dalszej części pracy własności układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła zakładać będziemy, że ich kąty aperturowe nie są zbyt duże, tak aby można było przyjąć, że warunek (3.5-6) jest zawsze spełniony. Umożliwi to zaniedbanie składowej z-towej zaburzenia i stosowanie dwuwymiarowej macierzy koherencji do opisu efektów polaryzacyjnych.

4. MACIERZOWE CHARAKTERYSTYKI UKŁADU ODWZOROWUJĄCEGO ZMIENIAJĄCEGO STAN POLARYZACJI ŚWIATŁA^{*)}

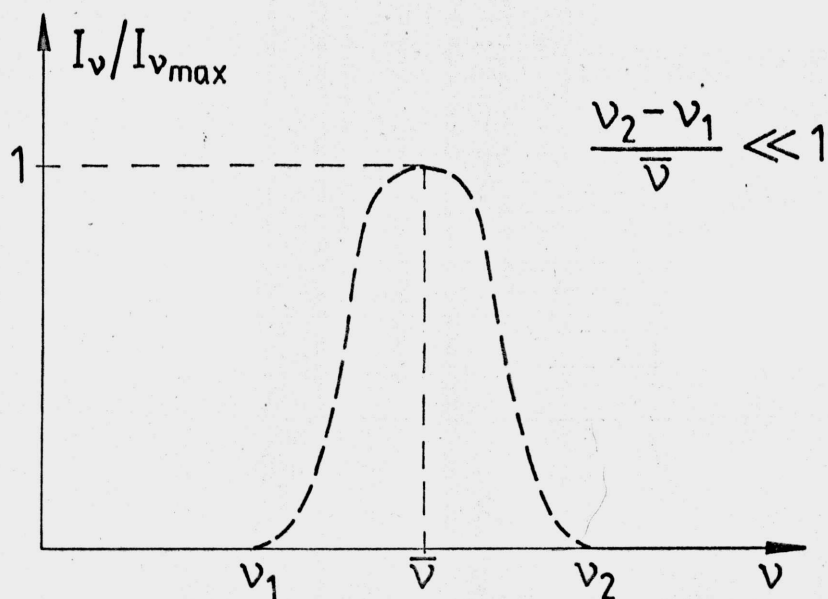
Klasyczny (nie zmieniający stan polaryzacji światła) odwzorowujący układ optyczny reprezentowany jest zazwyczaj przy pomocy przestrzennie stacjonarnej amplitudowej funkcji rozmycia $h(x_1-x_0, y_1-y_0)$ [43]. Przedstawia ona amplitudę zespoloną w punkcie (x_1, y_1) płaszczyzny obrazowej, pochodzącą od punktowego źródła o jednostkowej amplitudzie znajdującego się w punkcie (x_0, y_0) płaszczyzny przedmiotowej. Równoważnie używana jest także funkcja źrenicowa $H(\xi, \eta)$ opisująca rozkład amplitudy zespolonej w źrenicy wyjściowej układu, gdy w płaszczyźnie przedmiotowej znajduje się punktowe źródło światła o jednostkowej amplitudzie.

Do opisu układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła wprowadzone zostaną macierzowe odpowiedniki amplitudowej funkcji rozmycia oraz funkcji źrenicowej. Zdefiniowana zostanie również macierzowa funkcja aberracji i macierzowa funkcja transmisji amplitudy.

Powyższe macierzowe charakterystyki układu odwzorowującego zmieniającego stan polaryzacji światła, podobnie jak dla układu klasycznego, zdefiniowane zostaną dla światła ściśle monochromatycznego o częstotliwości $\bar{\nu}$. Ponieważ definiowane funkcje macierzowe nie zmieniają się istotnie w wąskim przedziale spektralnym, możliwe będzie ich stosowanie rów-

*) Wyniki przedstawione w rozdziałach 4-10 zostały częściowo opublikowane w pracach [44-45]

niez wtedy, gdy układ odwzorowujący pracuje w świetle quasimonochromatycznym, rys.4.1 ,

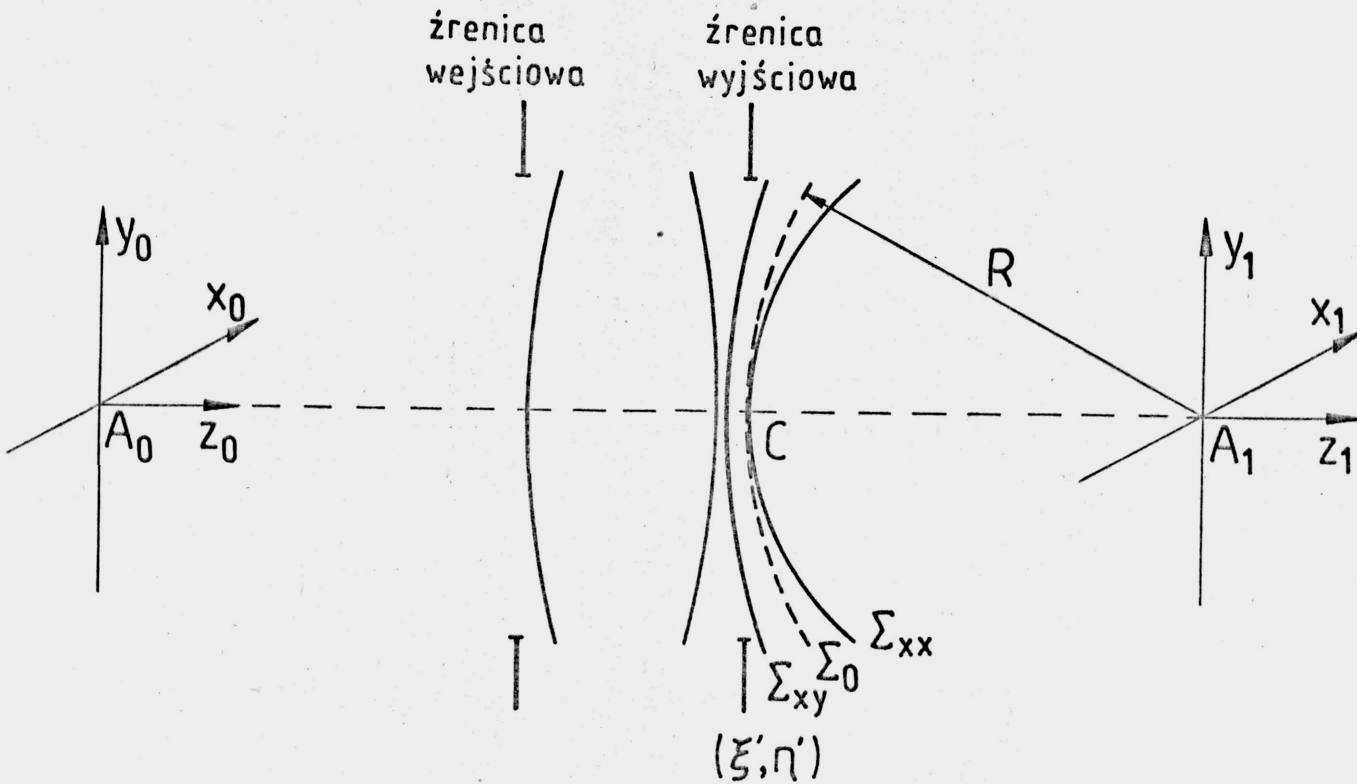


Rys.4.1. Przykładowy skład spektralny światła quasimonochromatycznego.

4.1. Macierzowa funkcja źrenicowa

Przyjmijmy , że układ z rysunku 4.2 zmienia stan polaryzacji światła. Niech A_0 będzie punktowym źródłem światła ściśle monochromatycznego o długości fali $\bar{\lambda}$. Punkt A_1 niech będzie geometrycznym obrazem A_0 . Układy odniesienia związane z płaszczyzną przedmiotową, płaszczyzną źrenicy wyjściowej

oraz płaszczyznę obrazową oznaczmy odpowiednio (x_0, y_0) , (ξ', η') , (x_1, y_1) , a osie z_0 i z_1 niech pokrywają się z osią optyczną układu.



Rys.4.2. Odwzorowujący układ optyczny zmieniający stan polaryzacji światła. Wybór układów odniesienia i oznaczeń.

Podobnie jak dla układów nie zmieniających stanu polaryzacji światła powierzchnię odniesienia stanowić będzie sfera Gaussa Σ_0 o promieniu R i środku pokrywającym się z punktem A_1 . Sfera Gaussa Σ_0 przecina oś optyczną układu w środku żrenicy wyjściowej C .

Założmy na wstępie, że punkt A_0 emituje światło spolaryzowane liniowo o azymucie polaryzacji pokrywającym się z osią x (wektor elektryczny równoległy do osi x). Przyjmijmy także, że amplituda A_x światła wchodzącego do układu, mierzona w źrenicy wejściowej, równa jest jedności. Gdy układ optyczny zmienia stan polaryzacji światła w jego źrenicy wyjściowej pojawiają się dwie powierzchnie falowe $\sum_{xx}$ i $\sum_{yx}$ reprezentujące rozkłady zaburzeń spolaryzowanych liniowo odpowiednio w kierunku osi x i y . Powierzchnie falowe $\sum_{xx}$ i $\sum_{yx}$ mogą być przesunięte względem siebie jeżeli w układzie występują dwójkomności [18].

Założmy teraz, że punkt A_0 emituje światło o jednostkowej amplitudzie A_y , spolaryzowane liniowo o azymucie polaryzacji pokrywającym się z kierunkiem osi y . W źrenicy wyjściowej układu pojawiają się dwie analogiczne powierzchnie falowe $\sum_{xy}$ i $\sum_{yy}$ (nie zaznaczone na rys. 4.2).

Niech funkcje $H_{xx}(\xi', \eta')$, $H_{xy}(\xi', \eta')$, $H_{yx}(\xi', \eta')$, $H_{yy}(\xi', \eta')$ opisują rozkłady amplitud zespolonych w źrenicy wyjściowej układu, związanych odpowiednio z powierzchniami falowymi $\sum_{xx}$, $\sum_{yx}$, $\sum_{xy}$, $\sum_{yy}$. Macierzową funkcję źrenicową układu odwzorowującego zmieniającego stan polaryzacji światła zdefiniujemy jako

$$\hat{H}(\xi', \eta') = \begin{bmatrix} H_{xx}(\xi', \eta') & ; & H_{xy}(\xi', \eta') \\ H_{yx}(\xi', \eta') & ; & H_{yy}(\xi', \eta') \end{bmatrix}. \quad (4.1-1)$$

Pierwsza kolumna macierzowej funkcji źrenicowej (kolumna x -owa) przedstawia odpowiedź układu, mierzona w jego źrenicy

wyjściowej, na punktowy sygnał o liniowym stanie polaryzacji zgodnym z kierunkiem osi x i o jednostkowej amplitudzie A_x . Kolumna y -owa reprezentuje analogiczną odpowiedź układu na punktowy sygnał o liniowym stanie polaryzacji, zgodnym z kierunkiem osi y i o jednostkowej amplitudzie A_y .

4.2. Macierzowa funkcja aberracji

Niech $\Phi_{xx}(\xi', \eta')$, $\Phi_{yx}(\xi', \eta')$, $\Phi_{xy}(\xi', \eta')$, $\Phi_{yy}(\xi', \eta')$ będą aberracjami falowymi powierzchni Σ_{xx} , Σ_{yx} , Σ_{xy} , Σ_{yy} określonymi względem Gaussowskiej sfery odniesienia Σ_o , zgodnie z regułami teorii aberracji [38].

Macierzową funkcję aberracji dla układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła zdefiniujemy jako

$$\hat{\Phi}(\xi', \eta') = \begin{bmatrix} \Phi_{xx}(\xi', \eta') & \Phi_{xy}(\xi', \eta') \\ \Phi_{yx}(\xi', \eta') & \Phi_{yy}(\xi', \eta') \end{bmatrix} \quad (4.2-1)$$

W klasycznych układach odwzorowujących, funkcję aberracji określa się zazwyczaj dla powierzchni falowej przechodzącej przez środek źrenicy wyjściowej układu (punkt C).

W omawianym przypadku nie wszystkie powierzchnie falowe Σ_{xx} , Σ_{xy} , Σ_{yy} , Σ_{yx} muszą jednocześnie przechodzić przez ten punkt. Jeżeli przykładowo powierzchnię Σ_{xx} wybrano w taki sposób, aby przechodziła przez środek źrenicy wyjściowej (rys. 4.2), to pozostałe trzy powierzchnie Σ_{xy} , Σ_{yx} , Σ_{yy} mogą być względem niego przesunięte, np. wtedy gdy w

układzie występuje dwójkomność.

4.3. Macierzowa funkcja transmisji amplitudy

Macierzową funkcję transmisji amplitudy można zdefiniować następująco

$$\hat{T}(\xi', \eta') = \begin{bmatrix} T_{xx}(\xi', \eta'); & T_{xy}(\xi', \eta') \\ T_{yx}(\xi', \eta'); & T_{yy}(\xi', \eta') \end{bmatrix}. \quad (4.3-1)$$

Jej elementy $T_{xx}(\xi', \eta')$, $T_{yx}(\xi', \eta')$, $T_{xy}(\xi', \eta')$, $T_{yy}(\xi', \eta')$ określają transmisję modułu amplitudy pomiędzy żrenicą wejściową a wyjściową, dla powierzchni falowych typu $\sum_{xx}$, $\sum_{yx}$, $\sum_{xy}$, $\sum_{yy}$, to jest

$$\begin{aligned} T_{xx}(\xi', \eta') &= \frac{|H_{xx}(\xi', \eta')|}{|A_x|}, \\ T_{yx}(\xi', \eta') &= \frac{|H_{yx}(\xi', \eta')|}{|A_x|}, \\ T_{xy}(\xi', \eta') &= \frac{|H_{xy}(\xi', \eta')|}{|A_y|}, \\ T_{yy}(\xi', \eta') &= \frac{|H_{yy}(\xi', \eta')|}{|A_y|}, \end{aligned} \quad (4.3-2)$$

gdzie A_x i A_y są amplitudami zespolonymi w żrenicy wejściowej układu.

Ponieważ wcześniej przyjęto, że $A_x = 1$ oraz $A_y = 1$, to elementy macierzowej funkcji źrenicowej układu $\hat{H}(\xi', \eta')$ można przedstawić jako

$$\begin{aligned} H_{xx}(\xi', \eta') &= T_{xx}(\xi', \eta') \exp i \bar{k} \Phi_{xx}(\xi', \eta') , \\ H_{yx}(\xi', \eta') &= T_{yx}(\xi', \eta') \exp i \bar{k} \Phi_{yx}(\xi', \eta') , \\ H_{xy}(\xi', \eta') &= T_{xy}(\xi', \eta') \exp i \bar{k} \Phi_{xy}(\xi', \eta') , \\ H_{yy}(\xi', \eta') &= T_{yy}(\xi', \eta') \exp i \bar{k} \Phi_{yy}(\xi', \eta') , \end{aligned} \quad (4.3-3)$$

gdzie $\bar{k} = 2\pi/\bar{\lambda}$.

Zgodnie z definicją (4.3-2) elementy macierzowej funkcji transmisji amplitudy spełniają warunki

$$\begin{aligned} 0 &\leq T_{xx}(\xi', \eta') \leq 1 , \\ 0 &\leq T_{yx}(\xi', \eta') \leq 1 , \\ 0 &\leq T_{xy}(\xi', \eta') \leq 1 , \\ 0 &\leq T_{yy}(\xi', \eta') \leq 1 . \end{aligned} \quad (4.3-4)$$

4.4. Macierzowa funkcja rozmycia amplitudy

Niech funkcja $h_{xx}(x_1, y_1)$ opisuje rozkład amplitudy zespolonej w płaszczyźnie obrazowej ($z_1 = 0$), amplitudy spolaryzowanej liniowo zgodnie z kierunkiem osi x , gdy punkt A_0 płaszczyzny przedmiotowej emituje światło o liniowym stanie polaryzacji zgodnym z kierunkiem osi x i o jednostkowej amplitudzie A_x . Niech funkcja $h_{yx}(x_1, y_1)$ reprezentuje odpowiedź układu, spolaryzowaną liniowo zgodnie z kierunkiem osi

y , na ten sam sygnał A_x . Podobnie, funkcje $h_{xy}(x_1, y_1)$ i $h_{yy}(x_1, y_1)$ niech opisują rozkłady amplitud w płaszczyźnie obrazowej ($z_1 = 0$), amplitud spolaryzowanych liniowo zgodnie z kierunkami osi x i y , gdy punkt A_0 płaszczyzny przedmiotowej emituje światło o liniowym stanie polaryzacji zgodnym z kierunkiem osi y i o jednostkowej amplitudzie A_y .

Macierz

$$\hat{h}(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} h_{xx}(x_1, y_1) & ; & h_{xy}(x_1, y_1) \\ h_{yx}(x_1, y_1) & ; & h_{yy}(x_1, y_1) \end{bmatrix} \quad (4.4-1)$$

będzie dalej nazywana macierzową funkcją rozmycia amplitudy.

Rozkład amplitudy typu h_{xx} w płaszczyźnie obrazowej zdeterminowany jest jedynie rozkładem amplitudy typu H_{xx} w płaszczyźnie źrenicy wyjściowej układu. Tak więc, elementy macierzowej funkcji źrenicowej i macierzowej funkcji rozmycia amplitudy związane są poprzez całkę dyfrakcji Fresnela [38]

$$h_{xx}(x_1, y_1) = \frac{-i}{\lambda R} \iint_{-\infty}^{\infty} H_{xx}(\xi', \eta') \frac{\exp i\bar{k}(Q - R)}{Q} d\xi' d\eta' ,$$

$$h_{xy}(x_1, y_1) = \frac{-i}{\lambda R} \iint_{-\infty}^{\infty} H_{xy}(\xi', \eta') \frac{\exp i\bar{k}(Q - R)}{Q} d\xi' d\eta' , \quad (4.4-2)$$

$$h_{yx}(x_1, y_1) = \frac{-i}{\lambda R} \iint_{-\infty}^{\infty} H_{yx}(\xi', \eta') \frac{\exp i\bar{k}(Q - R)}{Q} d\xi' d\eta' ,$$

$$h_{yy}(x_1, y_1) = \frac{-i}{\lambda R} \iint_{-\infty}^{\infty} H_{yy}(\xi', \eta') \frac{\exp i\bar{k}(Q - R)}{Q} d\xi' d\eta' .$$

gdzie Q oznacza odległość pomiędzy punktem (ξ', η') źrenicy wyjściowej układu a punktem (x_1, y_1) płaszczyzny obrazowej ($z_1 = 0$). Używając notacji macierzowej (def. 2.1-6) otrzymuje się

$$\hat{h}(x_1, y_1) = - \frac{1}{\bar{\lambda} R} \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(\xi', \eta') \frac{\exp i k (Q - R)}{Q} d\xi' d\eta'. \quad (4.4-3)$$

Gdy kąt aperturowy układu nie jest zbyt duży wyrażenie $\exp i k (Q - R) / Q$ można przedstawić jako, [38]

$$\frac{\exp i k (Q - R)}{Q} \approx \frac{1}{R} \exp \left[-i k (x_1 \xi' + y_1 \eta') / R \right]. \quad (4.4-4)$$

W praktyce wygodniej jest używać bezwymiarowych współrzędnych w płaszczyźnie źrenicy wyjściowej i obrazowej.

Bezwymiarowe współrzędne źrenicy wyjściowej otrzymuje się przez unormowanie ich do dowolnej długości a . Wielkością a może być np. promień kołowej źrenicy wyjściowej układu.

Wprowadzimy zatem

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\xi'}{a}, \\ \eta &= \frac{\eta'}{a}. \end{aligned} \quad (4.4-5)$$

Bezwymiarowe współrzędne płaszczyzny obrazowej dobiera się tak, by w wykładniku wyrażenia (4.4-4) pojawiło się 2π , co zachodzi gdy przyjmiemy

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{ax_1}{R\bar{\lambda}}, \\ v_1 &= \frac{ay_1}{R\bar{\lambda}}, \end{aligned} \quad (4.4-6)$$

a współrzędną z-tową normuje się następująco

$$w_1 = \frac{z_1}{\bar{\lambda}} \left(\frac{a}{R} \right)^2. \quad (4.4-7)$$

W bezwymiarowych współrzędnych zależność (4.4-3) przyjmuje prostszą postać

$$\hat{h}(u_1, v_1) = c \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(\xi, \eta) \exp - 2\pi i [u_1 \xi + v_1 \eta] d\xi d\eta, \quad (4.4-8)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności c określony jest przez geometrię układu

$$c = - \frac{ia^2}{\bar{\lambda} R^2}. \quad (4.4-9)$$

Równanie (4.4-8) pokazuje, że macierzowa funkcja rozmycia amplitudy równa jest, z dokładnością do stałej c , transformacie Fouriera macierzowej funkcji źrenicowej (def. 2.1-10).

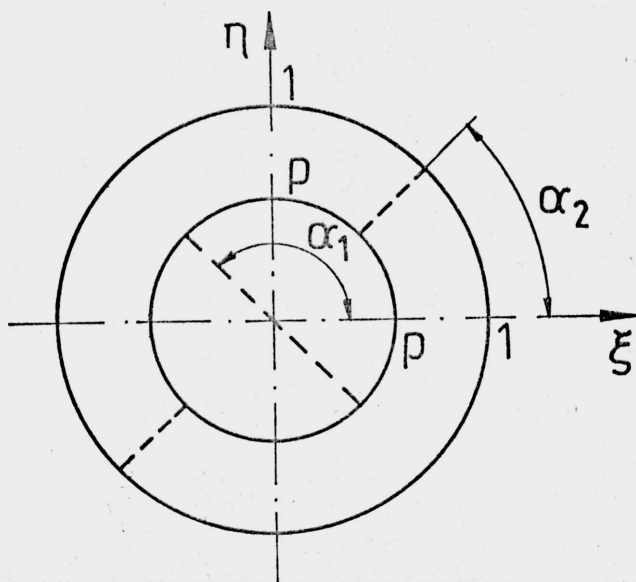
Macierzowa funkcja źrenicowa, macierzowa funkcja rozmycia amplitudy, macierzowa funkcja aberracji oraz macierzowa funkcja transmisji amplitudy są uogólnieniami na przypadek układów zmieniających stan polaryzacji światła funkcji źrenicowej, funkcji rozmycia amplitudy, funkcji aberracji oraz funkcji transmisji modułu amplitudy, wprowadzonych na gruncie skalarnej teorii dyfrakcji do opisu klasycznych układów odwzorowujących.

Funkcje macierzowe $\hat{H}(\xi, \eta)$, $\hat{h}(u, v)$, $\hat{T}(\xi, \eta)$, $\hat{\Phi}(\xi, \eta)$ zdefiniowane zostały dla światła ściśle monochromatycznego o długości fali $\bar{\lambda}$, jednakże można przyjąć, iż nie zmieniają się one istotnie w wąskim przedziale spektralnym, którym

charakteryzuje się światło quasimonochromatyczne (rys. 4.1). Będą więc one użyteczne również w przypadku, gdy układ odwzorowujący pracuje w świetle quasimonochromatycznym.

Przykład 4.1.

W celu zilustrowania pojęć wprowadzonych w niniejszym rozdziale wyznaczono elementy macierzowej funkcji źrenicowej i macierzowej funkcji rozmycia amplitudy dla bezaberracyjnego układu z dwustrefowym filtrem polaryzującym liniowo w każdej strefie i umieszczonym w źrenicy wyjściowej układu. Przez α_1, α_2 oznaczono kąty pomiędzy kierunkami przepuszczania polaryzatorów a osią ξ ; p niech oznacza stosunek podziału promienia źrenicy wyjściowej, rys.4.3.



Rys.4.3. Dwustrefowy filtr polaryzacyjny w bezwymiarowym układzie odniesienia (ξ, η) . Przez α_1, α_2 oznaczono kierunki przepuszczania polaryzatorów, p oznacza stosunek podziału promienia źrenicy wyjściowej.

Celowe będzie wprowadzenie biegunowych układów odniesienia w płaszczyźnie źrenicy wyjściowej (ρ, θ) i płaszczyźnie obrazowej (r_1, γ_1) .

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \theta, & \eta &= \rho \sin \theta, \\ u_1 &= r_1 \cos \gamma_1, & v_1 &= r_1 \sin \gamma_1. \end{aligned} \quad (4.4-10)$$

W biegunowym układzie odniesienia macierzową funkcję źrenicową można przedstawić następująco

$$\hat{H}(\rho) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & ; & \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 & ; & \sin^2 \alpha_1 \end{bmatrix} & \text{dla } \rho \leq p \\ \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_2 & ; & \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 \\ \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 & ; & \sin^2 \alpha_2 \end{bmatrix} & \text{dla } p < \rho \leq 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & ; & 0 \\ 0 & ; & 0 \end{bmatrix} & \text{dla } \rho > 1 \end{cases} \quad (4.4-11)$$

Elementy macierzowej funkcji rozmycia amplitudy można wyliczyć posługując się zależnością (4.4-8), która w biegunowych układach odniesienia przyjmuje postać

$$\begin{aligned} h_{xx}(r_1, \gamma_1) &= c \int_0^{2\pi} \int_p^1 \cos^2 \alpha_1 \exp[-2\pi i \rho r_1 \cos(\theta - \gamma_1)] \rho d\rho d\theta + \\ &+ c \int_0^{2\pi} \int_p^1 \cos^2 \alpha_2 \exp[-2\pi i \rho r_1 \cos(\theta - \gamma_1)] \rho d\rho d\theta. \end{aligned} \quad (4.4-12)$$

Po wprowadzeniu współrzędnej pomocniczej $r_2 = 2\pi r_1$ powyższa całka daje się łatwo wyliczyć

$$h_{xx}(r_2) = \pi c \left[\frac{2I_1(\pi r_2)}{r_2} p(\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2) + \frac{2I_1(r_2)}{r_2} \cos^2 \alpha_2 \right], \quad (4.4-13)$$

gdzie $I_1(r_2)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju i pierwszego rzędu. Podobnie można wyznaczyć pozostałe elementy macierzowej funkcji rozmycia amplitudy

$$h_{yy}(r_2) = \pi c \left[\frac{2I_1(\pi r_2)}{r_2} p(\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2) + \frac{2I_1(r_2)}{r_2} \sin^2 \alpha_2 \right], \quad (4.4-14)$$

$$h_{yx} r_2 = \pi c \left[\frac{I_1(\pi r_2)}{r_2} p(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) + \frac{I_1(r_2)}{r_2} \sin 2\alpha_2 \right],$$

$$h_{xy}(r_2) = h_{yx}(r_2) .$$

W omawianym przypadku macierzowa funkcja źrenicowa $\hat{H}(\vartheta)$ jak również macierzowa funkcja rozmycia amplitudy $\hat{h}(r_2)$ są macierzami symetrycznymi, $\hat{H}(\vartheta) = \hat{H}^{TR}(\vartheta)$ oraz $\hat{h}(r_2) = \hat{h}^{TR}(r_2)$.

5. ROZKŁAD NATĘŻENIA W DYFRAKCYJNYM OBRAZIE PUNKTU

Podstawowe wielkości charakteryzujące optyczny układ odwzorowujący (np. zdolność rozdzielcza, jasność Strehla, optyczna funkcja przenoszenia) mogą być wyznaczone na podstawie rozkładu natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu. Jego znajomość ma więc duże znaczenie praktyczne. Dla klasycznych układów odwzorowujących rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu równy jest kwadratowi modułu z amplitudowej funkcji rozmycia. Dla układów zmieniających stan polaryzacji światła wyraża się on bardziej skomplikowaną zależnością.

Wykażemy, iż rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu dla tego typu układów zależy od elementów macierzowej funkcji rozmycia amplitudy $\hat{h}(u_1, v_1)$, a także od stanu polaryzacji światła wchodzącego do układu.

Niech punkt A_0 z rysunku 4.2 będzie źródłem dowolnie spolaryzowanego światła quasimonochromatycznego, którego skład spektralny opisuje wektor $\hat{U}(\nu)$; porównaj (3.4-3)

$$\hat{U}(\nu) = \begin{bmatrix} U_x(\nu) \\ U_y(\nu) \end{bmatrix} . \quad (5-1)$$

Aby wyznaczyć rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu zbadajmy najpierw jak transformuje się przez układ spektralna macierz koherencji $\hat{J}_\nu$.

Dysponując macierzową funkcją rozmycia amplitudy można łatwo określić rozkład amplitudy zespolonej $\hat{U}'(\nu, u_1, v_1)$ w płaszczyźnie obrazowej, pochodzący od składowej spektralnej

$\hat{U}(\nu)$ światła quasimonochromatycznego

$$U'_x(\nu, u_1, v_1) = h_{xx}(u_1, v_1) U_x(\nu) + h_{xy}(u_1, v_1) U_y(\nu) , \quad (5-2)$$

$$U'_y(\nu, u_1, v_1) = h_{yx}(u_1, v_1) U_x(\nu) + h_{yy}(u_1, v_1) U_y(\nu) .$$

W prostszej notacji macierzowej powyższy układ równań przyjmuje postać

$$\hat{U}'(\nu, u_1, v_1) = \hat{h}(u_1, v_1) \hat{U}(\nu) . \quad (5-3)$$

Znając rozkład amplitudy $\hat{U}'(\nu, u_1, v_1)$ składowej spektralnej o częstotliwości ν wyznaczyć można rozkład spektralnej macierzy koherencji w płaszczyźnie obrazowej $\hat{J}'_\nu(u_1, v_1)$; porównaj (3.4-6)

$$\hat{J}'_\nu(u_1, v_1) = \hat{U}'(\nu, u_1, v_1) \hat{U}'^\dagger(\nu, u_1, v_1) , \quad (5-4)$$

a po uwzględnieniu (5-3) otrzymuje się

$$\hat{J}'_\nu(u_1, v_1) = \hat{h}(u_1, v_1) \hat{U}(\nu) \hat{U}^\dagger(\nu) \hat{h}^\dagger(u_1, v_1) . \quad (5-5)$$

Zauważmy, że

$$\hat{J}_\nu = \hat{U}(\nu) \hat{U}^\dagger(\nu) \quad (5-6)$$

jest spektralną macierzą koherencji światła emitowanego przez punkt A_0 , tak więc równanie (5-5) przyjmuje postać

$$\hat{J}'_\nu(u_1, v_1) = \hat{h}(u_1, v_1) \hat{J}_\nu \hat{h}^\dagger(u_1, v_1) . \quad (5-7)$$

Aby wyznaczyć rozkład macierzy koherencji światła quasimonochromatycznego w płaszczyźnie obrazowej wykorzystamy spektralne równanie (3.4-7)

$$\hat{J}'(u_1, v_1) = \int_0^\infty \hat{J}'_\nu(u_1, v_1) d\nu . \quad (5-8)$$

Zazwyczaj można przyjąć, że macierzowa funkcja rozmycia amplitudy $\hat{h}(u_1, v_1)$ bardzo słabo zależy od v w wąskim przedziale spektralnym, którym charakteryzuje się światło quasimonochromatyczne. Zachodzi zatem

$$\hat{J}'(u_1, v_1) = \hat{h}(u_1, v_1) \left[\int_0^{\infty} \hat{J}_v dv \right] \hat{h}^+(u_1, v_1), \quad (5-9)$$

a po scałkowaniu otrzymuje się

$$\hat{J}'(u_1, v_1) = \hat{h}(u_1, v_1) \hat{J} \hat{h}^+(u_1, v_1), \quad (5-10)$$

gdzie $\hat{J}$ jest macierzą koherencji światła emitowanego przez punkt A_0 .

Natężenie równe jest zawsze śladowi z macierzy koherencji, tak więc rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu wyraża się wzorem

$$K'(u_1, v_1) = \text{tr } \hat{J}'(u_1, v_1), \quad (5-11)$$

czyli

$$K'(u_1, v_1) = \text{tr} \left[\hat{h}(u_1, v_1) \hat{J} \hat{h}^+(u_1, v_1) \right]. \quad (5-12)$$

Unormowany rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu nazywany bywa natężeniową funkcją rozmycia układu [43]

$$K(u_1, v_1) = \frac{K'(u_1, v_1)}{I}, \quad (5-13)$$

gdzie $I = \text{tr } \hat{J}$ jest natężeniem światła wchodzącego do układu.

Łącząc wzory (5-12) i (5-13) otrzymuje się

$$K(u_1, v_1) = \text{tr} \left[\hat{h}(u_1, v_1) \hat{J}_0 \hat{h}^+(u_1, v_1) \right], \quad (5-14)$$

gdzie $\hat{J}_0 = \hat{J} / \text{tr } \hat{J}$ jest macierzą koherencji ze śladem unormowanym do jedności.

Przyjmując, że

$$\hat{J}_o = \begin{bmatrix} J_{xx}^o & ; & J_{xy}^o \\ J_{yx}^o & ; & J_{yy}^o \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

otrzymuje się rozwiniętą postać wzoru na natężeniową funkcję rozmycia układu

$$\begin{aligned} K(u_1, v_1) = & J_{xx}^o \left[|h_{xx}(u_1, v_1)|^2 + |h_{yx}(u_1, v_1)|^2 \right] + \\ & + J_{yx}^o \left[h_{xx}(u_1, v_1) h_{xy}^*(u_1, v_1) + h_{yx}(u_1, v_1) h_{yy}^*(u_1, v_1) \right] + \\ & + J_{xy}^o \left[h_{xx}^*(u_1, v_1) h_{xy}(u_1, v_1) + h_{yx}^*(u_1, v_1) h_{yy}(u_1, v_1) \right] + \\ & + J_{yy}^o \left[|h_{xy}(u_1, v_1)|^2 + |h_{yy}(u_1, v_1)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (5-16)$$

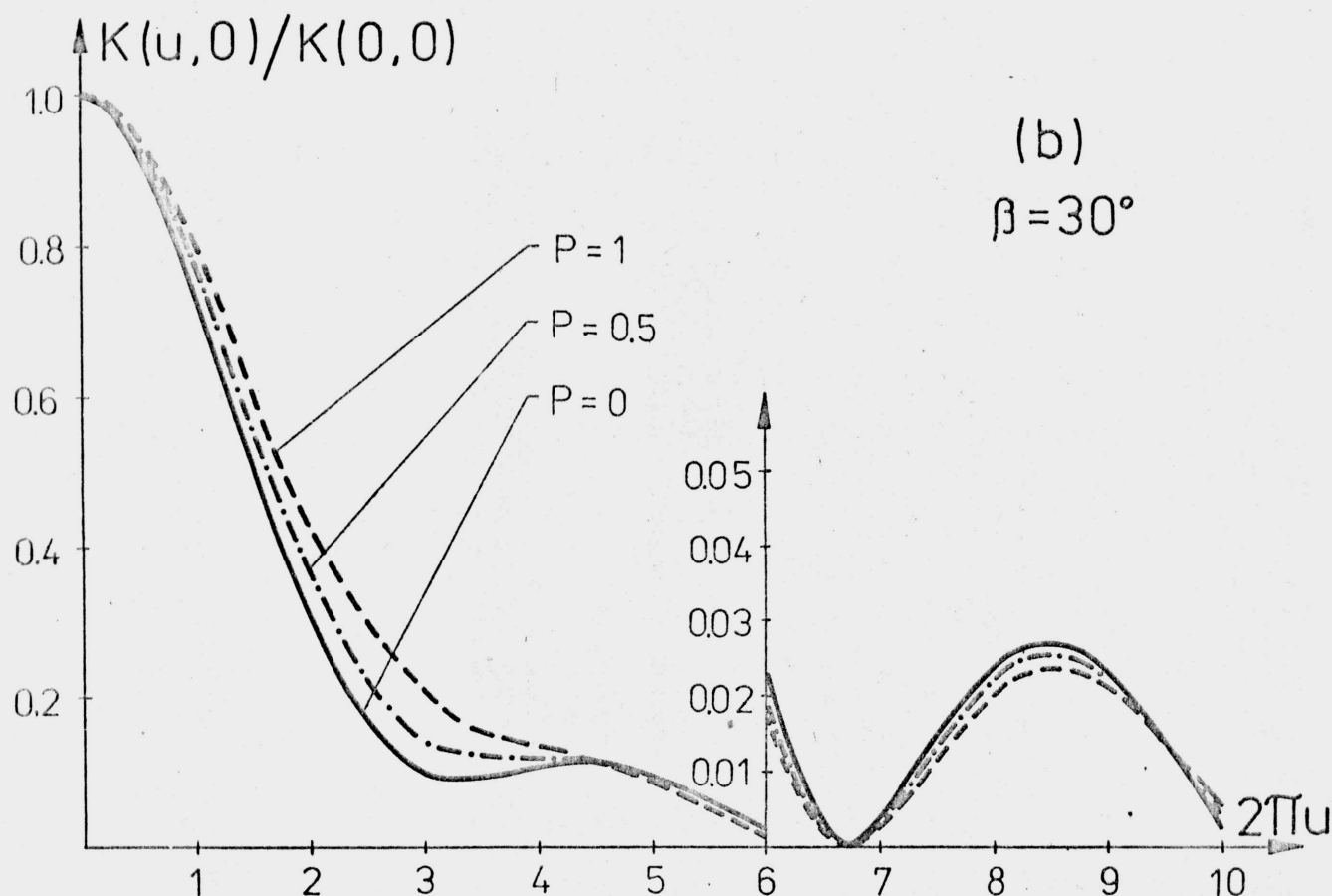
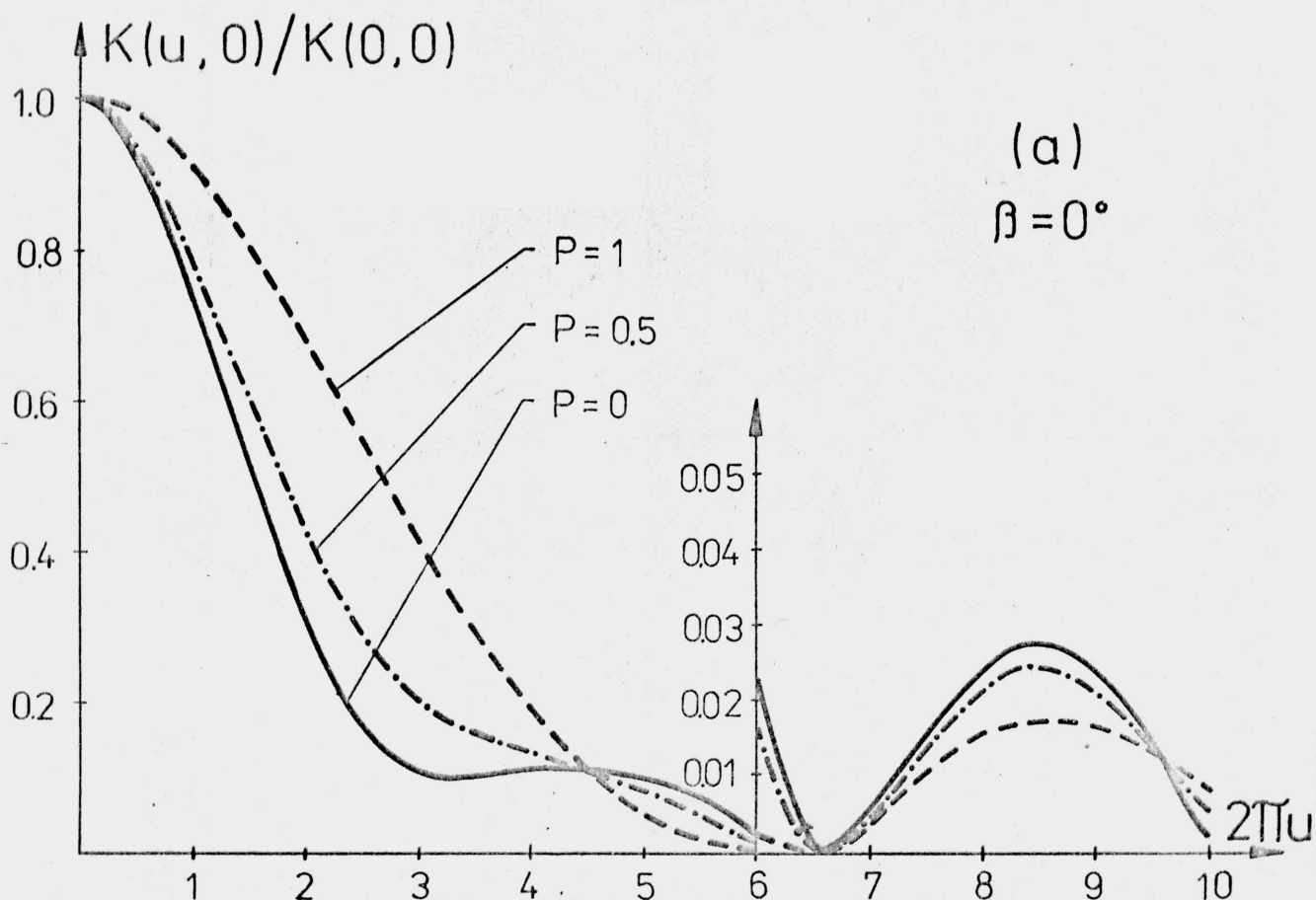
W powyższym wzorze występują kwadraty modułów oraz niektóre iloczyny wzajemne elementów macierzowej funkcji rozmycia amplitudy, ważone współczynnikami określającymi stan polaryzacji światła wchodzącego do układu (elementami macierzy koherencji). Dla układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła pojawia się zatem możliwość zmiany rozkładu natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu jedynie przez zmianę stanu polaryzacji światła emitowanego przez ten punkt.

Przykład 5.1

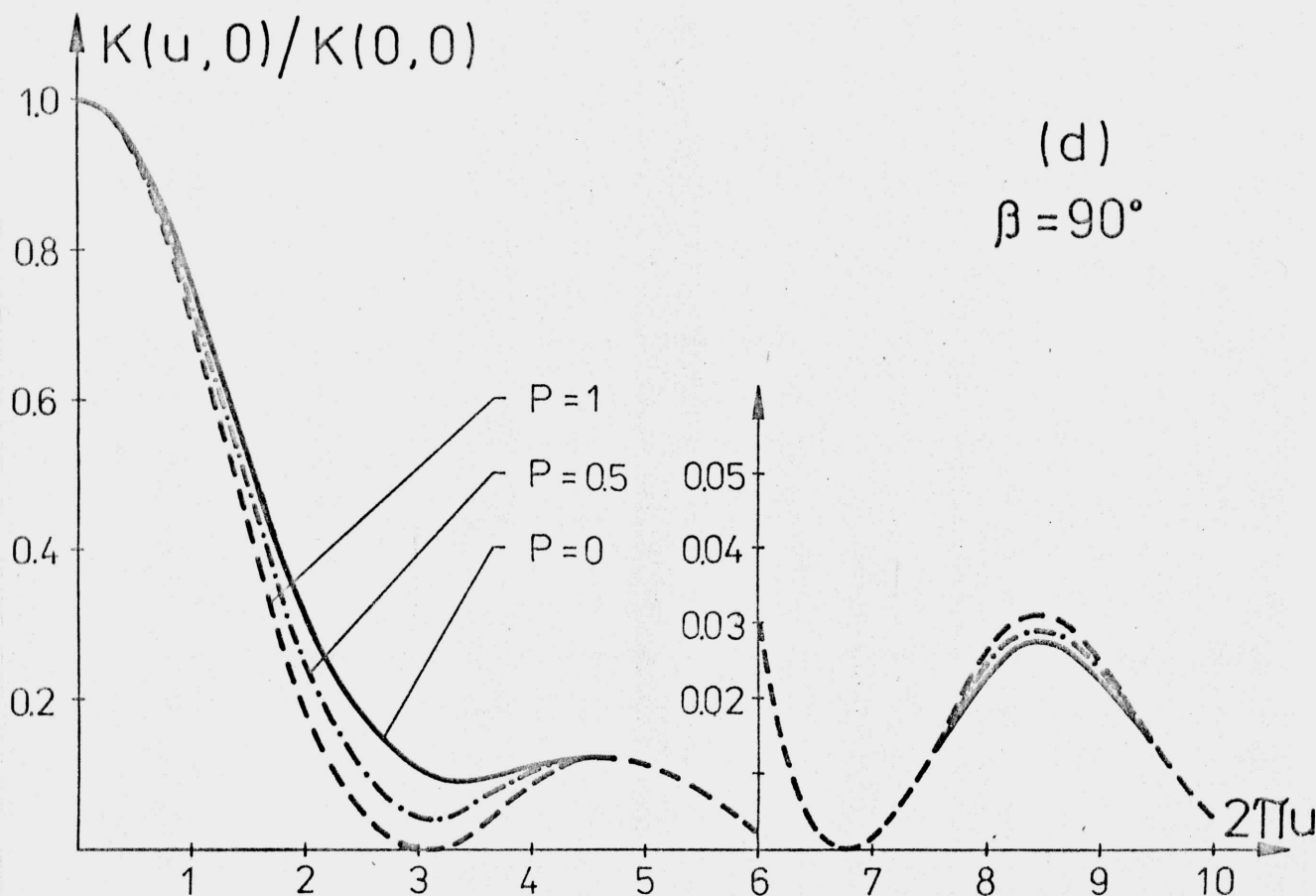
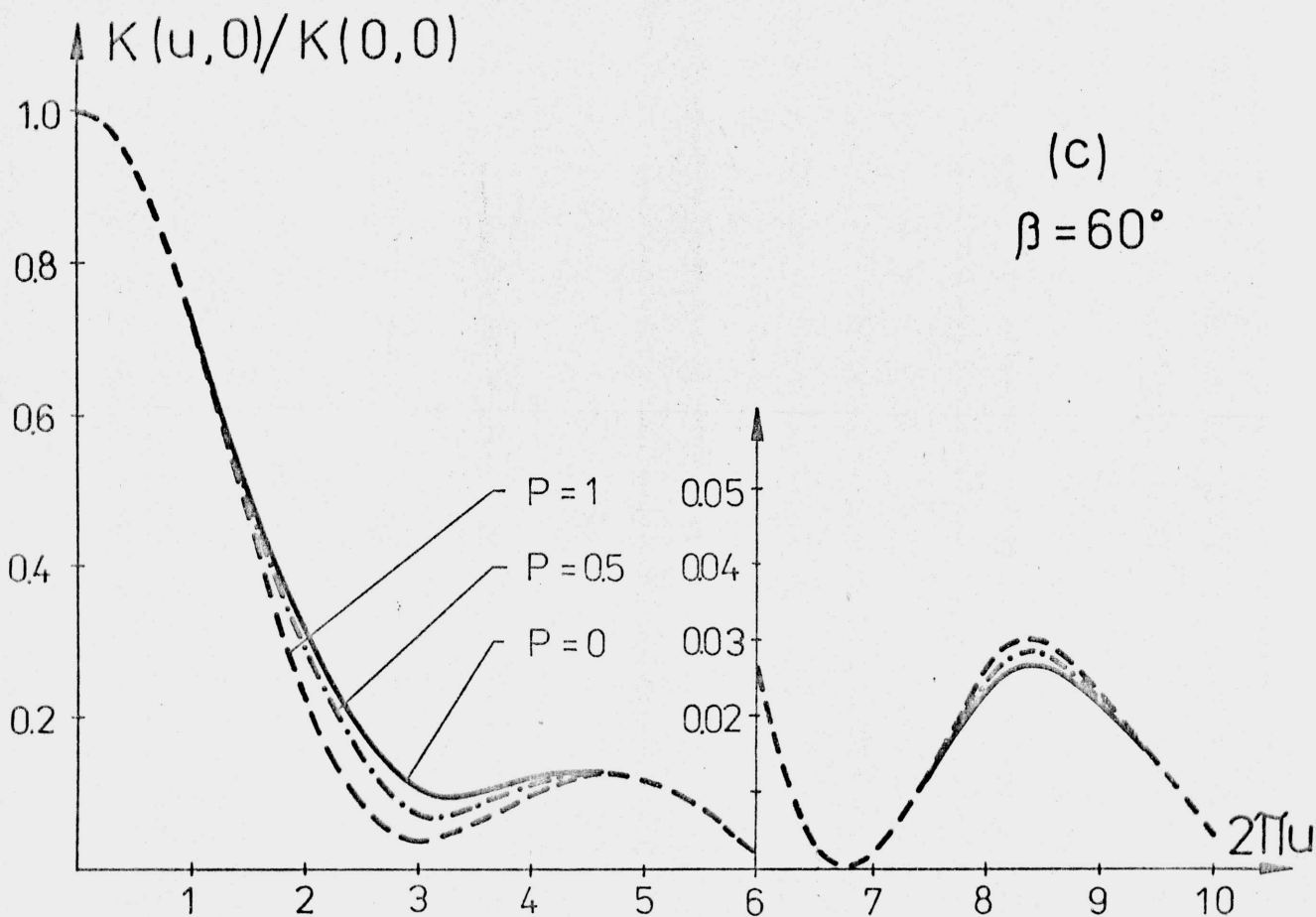
W oparciu o ogólny wzór (5-14) przeprowadzono numeryczne obliczenia rozkładu natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu dla bezaberracyjnego układu z dwustrefowym filtrem polaryzacyjnym w żrenicy wyjściowej, rys.4.3. Elementy macierzy funkcji rozmycia amplitudy dla takiego układu określone zostały w przykładzie 4.1. Rozkłady natężenia przedstawione na rysunkach 5.1 a-f wykreślono dla filtra o parametrach $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $p = 0.6$. Przypomnijmy, że α_1 i α_2 oznaczają odpowiednio kierunki przepuszczania polaryzatorów w pierścieniu wewnętrznym i zewnętrznym, a p oznacza stosunek podziału promienia żrenicy wyjściowej.

Różnice w rozkładach natężenia z rysunków 5.1 a-f związane są jedynie ze stanem polaryzacji światła wchodzącego do układu. Na każdym z rysunków przedstawione są trzy krzywe. Pierwsza z nich wykreślona została dla światła spolaryzowanego liniowo w stopniu $P=1$ i o azymucie polaryzacji β równym odpowiednio: 0° (a), 30° (b), 60° (c), 90° (d), 120° (e), 150° (f). Drugą wykreślono dla mieszaniny światła spolaryzowanego liniowo o takich samych azymutach polaryzacji β i światła niespolaryzowanego. Mieszanina ta charakteryzuje się stopniem polaryzacji $P=0.5$. Dla porównania na każdym rysunku przedstawiono także rozkład natężenia dla światła niespolaryzowanego $P = 0$, krzywa trzecia.

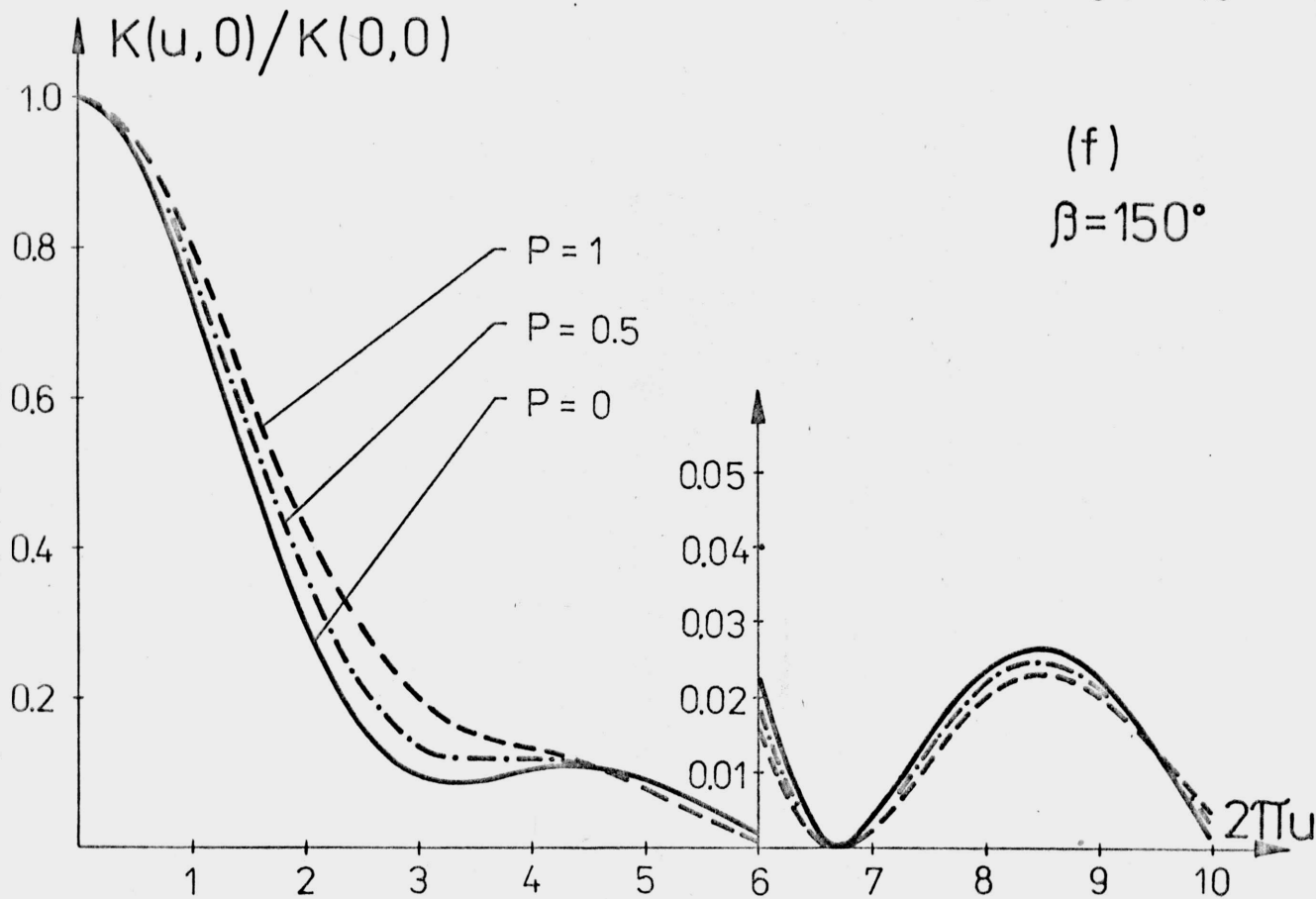
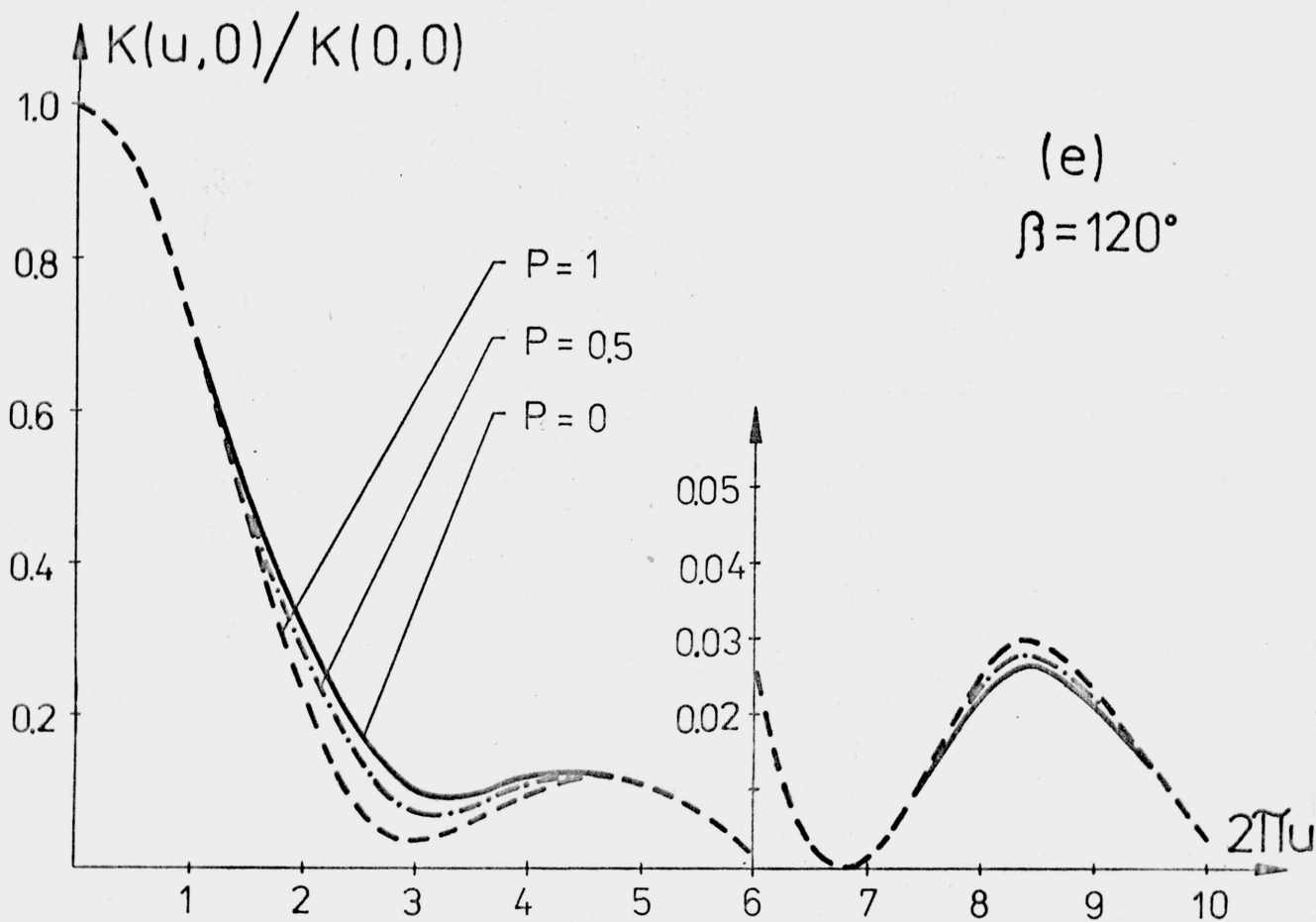
Rozkłady natężenia z rysunków 5.2 a-f wykreślono dla filtra o parametrach $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$, $p = 0.6$. Stany polaryzacji światła wchodzącego do układu pozostały takie same jak na odpowiednich wykresach z rys. 5.1 a-f.



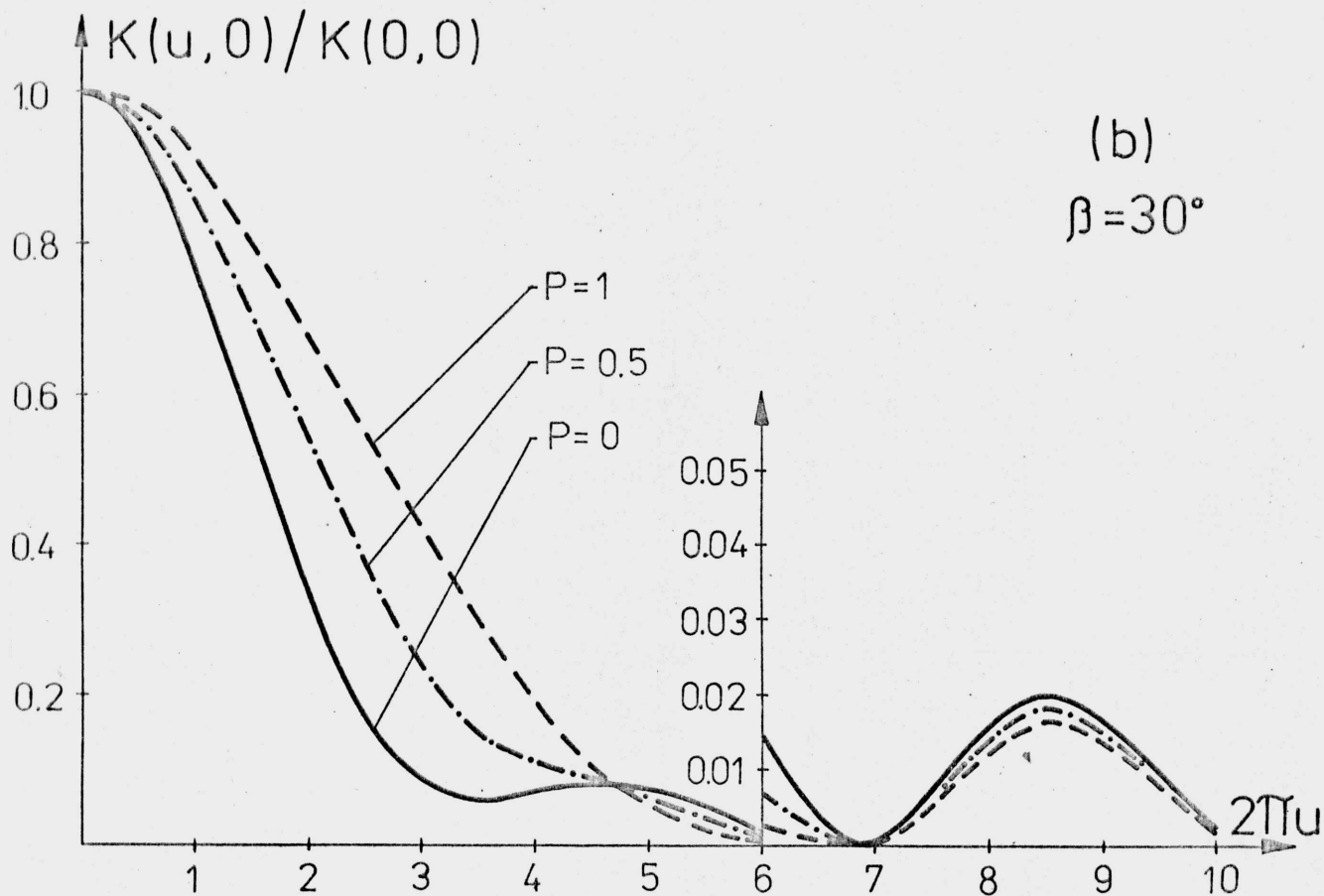
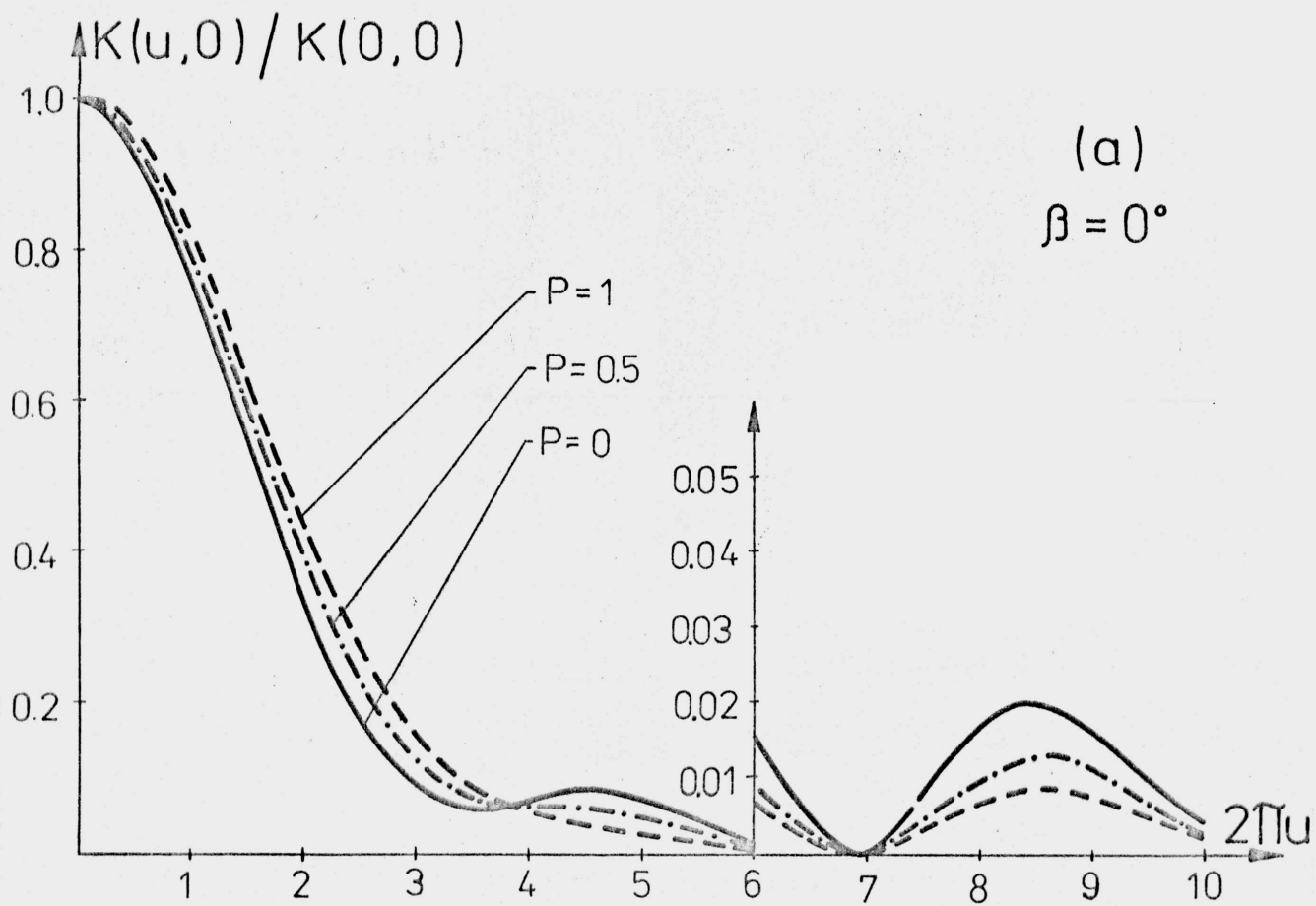
Rys.5.1. Rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu dla filtru polaryzacyjnego o parametrach $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $p = 0.6$. Jedną z krzywych przedstawia rozkład natężenia dla światła spolaryzowanego li-



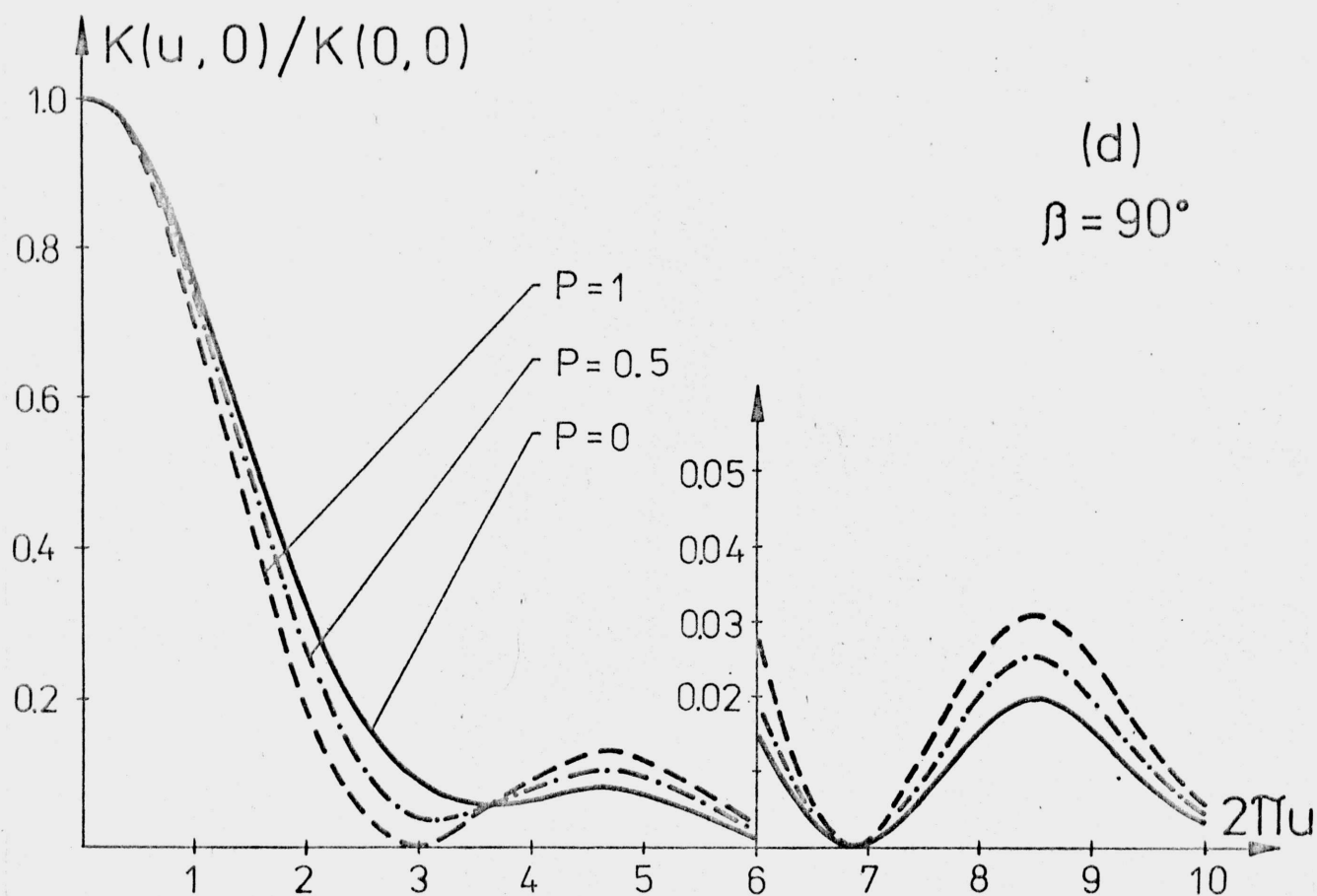
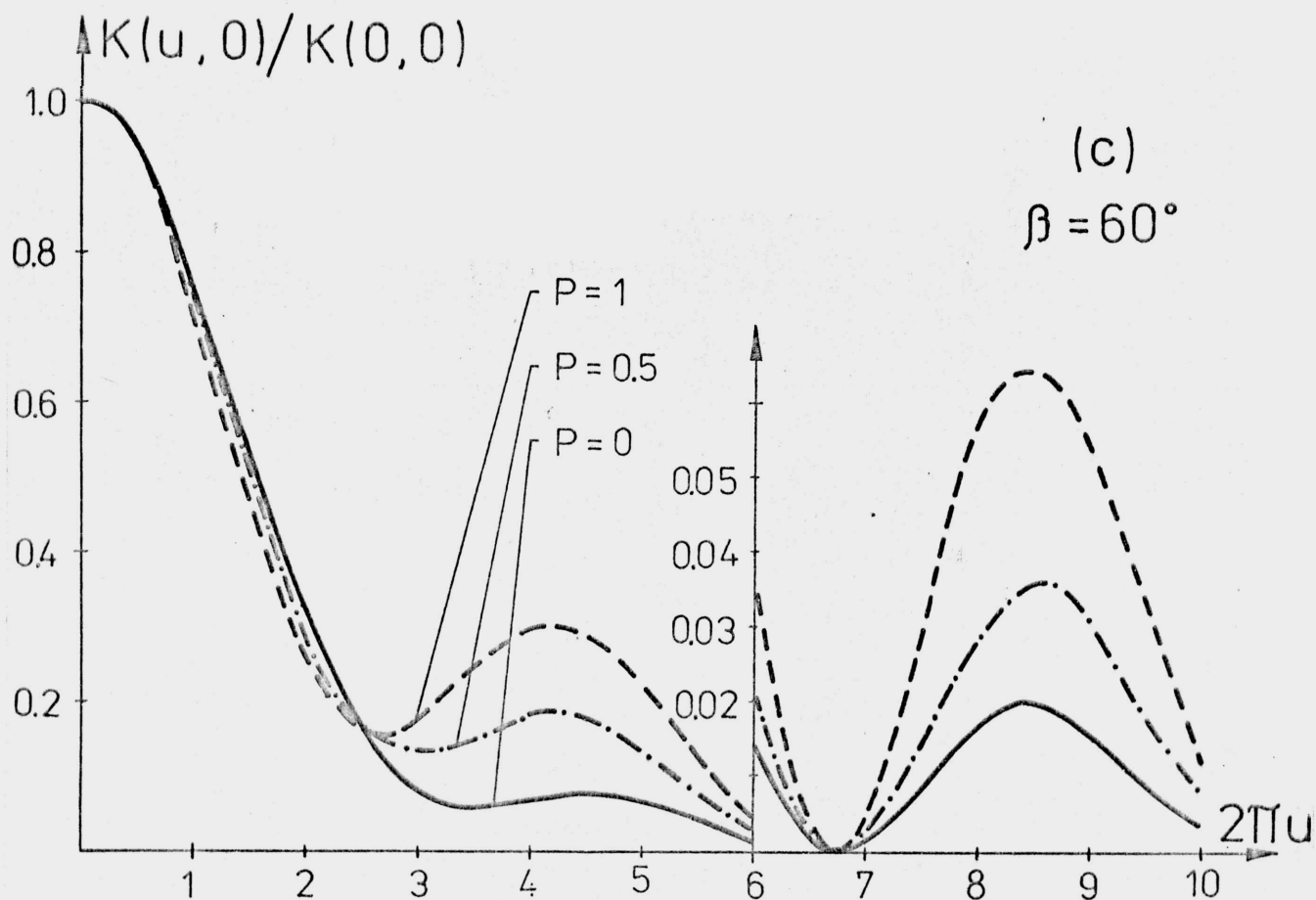
niowo w stopniu $P=1$ i o azymucie polaryzacji β równym odpowiednio 0° (a), 30° (b), 60° (c), 90° (d), 120° (e), 150° (f). Drugą wykreślono dla takich samych azymutów polaryzacji β lecz dla



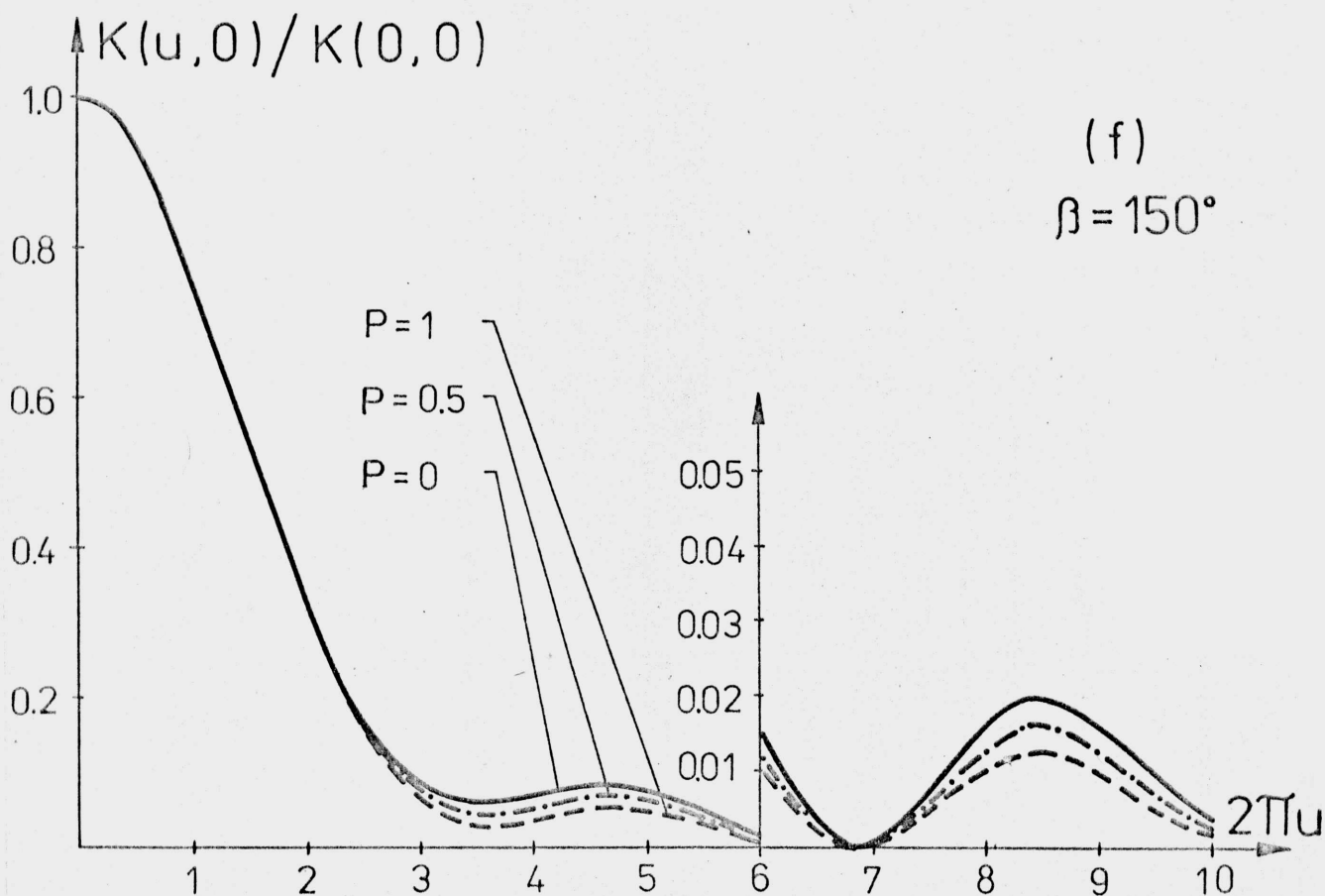
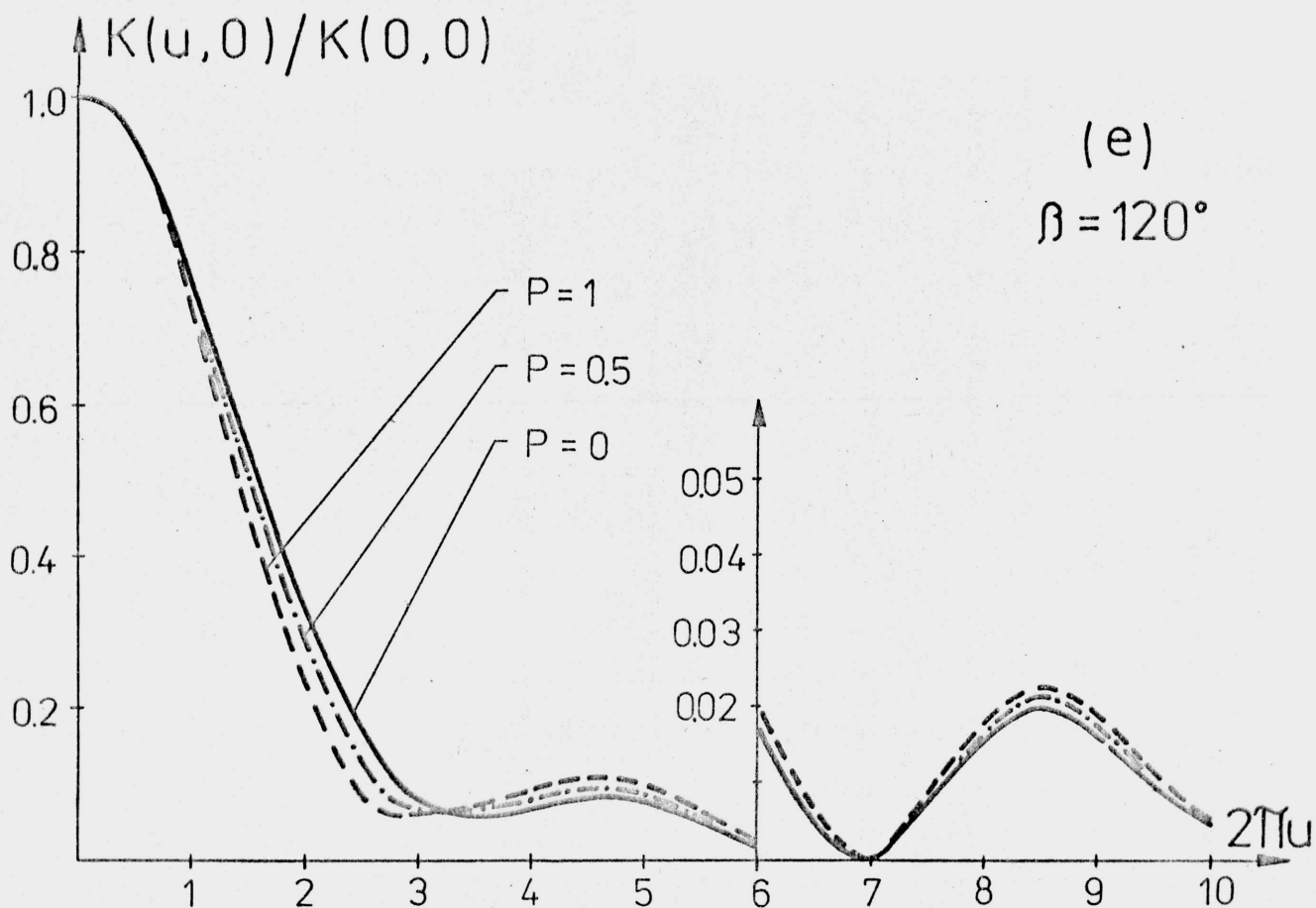
światła spolaryzowanego liniowo w stopniu $P=0.5$. Na każdym z rysunków przedstawiono także rozkład natężenia dla światła niespolaryzowanego $P = 0$.



Rys.5.2. Rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu dla filtru polaryzacyjnego o parametrach $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$, $p=0.6$. Jedną z krzywych przedstawia rozkład natężenia dla światła spolaryzowanego liniowo w stopniu



$P=1$ i o azymucie polaryzacji β równym odpowiednio 0° (a), 30° (b), 60° (c), 90° (d), 120° (e), 150° (f). Drugą wykresiono dla takich samych azymutów polaryzacji β lecz dla światła spolaryzowanego liniowo w stopniu $P=0.5$.



Na każdym z rysunków przedstawiono także rozkład natężenia dla światła niespolaryzowanego $P = 0$.

Zwraca uwagę silna zależność rozkładu natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu od stanu polaryzacji światła wchodzącego do układu.

6. JASNOŚĆ STREHLA

Ważnym wskaźnikiem jakości odwzorowania optycznego jest jasność Strehla (liczba Strehla, iloraz Strehla, jasność definicyjna) rozumiana jako stosunek natężenia $K'(0,0)$ w ośrodku aberracyjnego obrazu punktu do natężenia $K'_1(0,0)$ w środku idealnego obrazu punktu

$$SR = \frac{K'(0,0)}{K'_1(0,0)} \quad (6-1)$$

W niniejszym rozdziale wyprowadzony zostanie wzór na jasność Strehla dla klasy układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła.

Jest dobrze znanym fakt, że natężenie w środku idealnego obrazu punktu wyraża się wzorem [38]

$$K'_1(0,0) = I |c|^2 s^2, \quad (6-2)$$

gdzie I jest natężeniem światła wchodzącego do układu, s oznacza powierzchnię źrenicy wyjściowej układu, c jest zespolonym współczynnikiem proporcjonalności (4.4-9). Łącząc (5-13) i (6-2) jasność Strehla układu zmieniającego stan polaryzacji światła można przedstawić następująco

$$SR = \frac{1}{I |c|^2 s^2} \text{tr} [\hat{h}(0,0) \hat{J} \hat{h}^t(0,0)], \quad (6-3)$$

a po wprowadzeniu unormowanej macierzy koherencji (5-16) otrzymuje się

$$SR = \frac{1}{|c|^2 s^2} \text{tr} [\hat{h}(0,0) \hat{J}_0 \hat{h}^t(0,0)] \quad (6-4)$$

Na podstawie związku pomiędzy macierzową funkcją źreni-
cową a macierzową funkcją rozmycia amplitudy (4.4-8) wyzna-
czyć można elementy macierzy $\hat{h}(0,0)/cs$

$$\begin{aligned}\frac{1}{cs} h_{xx}(0,0) &= \frac{1}{s} \iint_{-\infty}^{\infty} H_{xx}(\xi, \eta) d\xi d\eta , \\ \frac{1}{cs} h_{xy}(0,0) &= \frac{1}{s} \iint_{-\infty}^{\infty} H_{xy}(\xi, \eta) d\xi d\eta , \\ \frac{1}{cs} h_{yx}(0,0) &= \frac{1}{s} \iint_{-\infty}^{\infty} H_{yx}(\xi, \eta) d\xi d\eta , \\ \frac{1}{cs} h_{yy}(0,0) &= \frac{1}{s} \iint_{-\infty}^{\infty} H_{yy}(\xi, \eta) d\xi d\eta .\end{aligned}\tag{6-5}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$\langle f \rangle = \frac{1}{s} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{6-6}$$

zależności (6-5) przyjmują postać

$$\begin{aligned}\frac{1}{cs} h_{xx}(0,0) &= \langle H_{xx} \rangle , \\ \frac{1}{cs} h_{xy}(0,0) &= \langle H_{xy} \rangle , \\ \frac{1}{cs} h_{yx}(0,0) &= \langle H_{yx} \rangle , \\ \frac{1}{cs} h_{yy}(0,0) &= \langle H_{yy} \rangle ,\end{aligned}\tag{6-7}$$

lub w prostszej notacji macierzowej

$$\frac{1}{cs} \hat{h}(0,0) = \langle \hat{H} \rangle, \quad (6-8)$$

$$\frac{1}{c^*s} \hat{h}^\dagger(0,0) = \langle \hat{H}^\dagger \rangle,$$

gdzie $\langle \hat{H} \rangle$ oznacza uśrednianie każdego elementu macierzy $\hat{H}(\xi, \eta)$ zgodnie ze wzorem (6-6).

Podstawiając (6-8) do (6-4) otrzymuje się ostateczną postać wzoru na jasność Strehla układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła

$$SR = \text{tr} [\langle \hat{H} \rangle \hat{J}_0 \langle \hat{H} \rangle^\dagger] \quad (6-9)$$

którego rozwinięta wersja jest następująca

$$\begin{aligned} SR = & J_{xx}^0 [|\langle H_{xx} \rangle|^2 + |\langle H_{yx} \rangle|^2] + \\ & + J_{yx}^0 [\langle H_{xx} \rangle \langle H_{xy} \rangle^* + \langle H_{yx} \rangle \langle H_{yy} \rangle^*] + \\ & + J_{xy}^0 [\langle H_{xx} \rangle^* \langle H_{xy} \rangle + \langle H_{yx} \rangle^* \langle H_{yy} \rangle] + \\ & + J_{yy}^0 [|\langle H_{xy} \rangle|^2 + |\langle H_{yy} \rangle|^2]. \end{aligned} \quad (6-10)$$

Jasność Strehla układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła określona jest przez średnią z macierzowej funkcji źrenicowej $\langle \hat{H} \rangle$ oraz przez unormowaną macierz koherencji $\hat{J}_0$. Wpływ na jasność Strehla mają więc zarówno parametry układu jak i stan polaryzacji światła użytego do odwzorowania.

7. UOGÓLNIONE TWIERDZENIE O PRZESUNIĘCIU

Ważną rolę w rozważaniach dotyczących jakości odwzorowania dla klasycznych układów optycznych odgrywa tzw. twierdzenie o przesunięciu [38]. Mówi ono, że dodanie do funkcji aberracji pewnego wyrażenia równoważne jest jedynie ze zmianą sfery odniesienia względem której określana jest funkcja aberracji.

W rozdziale tym udowodniona zostanie uogólniona wersja twierdzenia o przesunięciu, która będzie mogła być stosowana do klasy układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła.

Niech $\hat{\Phi}(\vartheta, \theta)$ reprezentuje macierzową funkcję aberracji układu zmieniającego stan polaryzacji światła. Dodanie do macierzy $\hat{\Phi}(\vartheta, \theta)$ wyrażenia

$$\hat{\Phi}'(\vartheta, \theta) = \hat{\Phi}(\vartheta, \theta) + \hat{N}(q_1\vartheta^2 + q_2\vartheta\sin\theta + q_3\vartheta\cos\theta + q_4), \quad (7-1)$$

gdzie

$\hat{N}$ - macierz jedynekowa: $[\hat{N}]_{ij} = 1$ dla $i, j = 1, 2$;

ϑ, θ - współrzędne biegunowe w płaszczyźnie źrenicy wyjściowej;

q_1, q_2, q_3, q_4 - stałe rzędu $\bar{\lambda}$;

powoduje jedynie przesunięcie przestrzennego rozkładu natężenia jako całości zgodnie z następującymi równaniami

$$w_1' = w_1 + \frac{2q_1}{\bar{\lambda}},$$

$$r_1' \sin \gamma_1' = r_1 \sin \gamma_1 + \frac{q_2}{\lambda} \quad , \quad (7-2)$$

$$r_1' \cos \gamma_1' = r_1 \cos \gamma_1 + \frac{q_3}{\lambda} \quad ,$$

gdzie r_1, γ_1 są bezwymiarowymi biegunowymi współrzędnymi w płaszczyźnie obrazowej (4.4-10), a w_1 jest bezwymiarową współrzędną pokrywającą się z osią z_1 (4.4-7).

Równania (7-2) w wymiarowym układzie odniesienia (rys. 4.2) przyjmują postać

$$z_1' = z_1 + 2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 q_1 \quad ,$$

$$x_1' = x_1 + \left(\frac{R}{a} \right) q_2 \quad , \quad (7-3)$$

$$y_1' = y_1 + \left(\frac{R}{a} \right) q_3 \quad ,$$

gdzie R jest promieniem sfery odniesienia, a a jest promieniem źrenicy wyjściowej układu.

Dowód powyższego twierdzenia przebiega analogicznie jak w przypadku klasycznych układów odwzorowujących [38].

W oparciu o zależności (4.4-2) określić można przestrzenne rozkłady amplitud typu $h_{xx}, h_{xy}, h_{yx}, h_{yy}$ w pobliżu punktu A_1 , rys. 4.2

$$h_{xx}(x_1, y_1, z_1) = - \frac{i}{\lambda R} \iint_{-\infty}^{\infty} H_{xx}(\xi', \eta') \frac{\exp i k(Q - R)}{Q} d\xi' d\eta' \quad , \quad (7-4)$$

gdzie Q oznacza w tym przypadku odległość pomiędzy punktami

o współrzędnych (ξ', η') i (x_1, y_1, z_1) . Przechodząc do biegunowych współrzędnych bezwymiarowych otrzymuje się [38]

$$h_{xx}(r_1, w_1, \gamma_1) = c' \int_0^1 \int_0^{2\pi} T_{xx}(\rho, \theta) \exp i [\bar{k} \Phi_{xx}(\rho, \theta) - 2\pi \rho r_1 \cos(\theta - \gamma_1) - \pi w_1 \rho^2] \rho d\rho d\theta, \quad (7-5)$$

gdzie $c' = c \exp \left[2\pi i \left(\frac{R}{a} \right)^2 w_1 \right]$. Celowe będzie wprowadzenie funkcji

$$f_{xx}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta) = \bar{k} \Phi_{xx}(\rho, \theta) - 2\pi \rho r_1 \cos(\theta - \gamma_1) - \pi w_1 \rho^2, \quad (7-6)$$

$$f'_{xx}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta) = \bar{k} \Phi'_{xx}(\rho, \theta) - 2\pi \rho r_1 \cos(\theta - \gamma_1) - \pi w_1 \rho^2,$$

co umożliwi zapisanie w prostszy sposób całek typu (7-5)

$$h_{xx}(r_1, w_1, \gamma_1) = c' \int_0^1 \int_0^{2\pi} T_{xx}(\rho, \theta) \exp [i f_{xx}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta)] \cdot \rho d\rho d\theta, \quad (7-7)$$

$$h_{xy}(r_1, w_1, \gamma_1) = c' \int_0^1 \int_0^{2\pi} T_{xy}(\rho, \theta) \exp [i f_{xy}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta)] \cdot \rho d\rho d\theta,$$

$$h_{yx}(r_1, w_1, \gamma_1) = c' \int_0^1 \int_0^{2\pi} T_{yx}(\rho, \theta) \exp [i f_{yx}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta)] \cdot \rho d\rho d\theta,$$

$$h_{yy}(r_1, w_1, \gamma_1) = c' \int_0^1 \int_0^{2\pi} T_{yy}(\rho, \theta) \exp [i f_{yy}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta)] \cdot \rho d\rho d\theta .$$

Przestrzenne rozkłady amplitud związane z macierzową funkcją aberracji $\Phi'(\rho, \theta)$ mogą być więc przedstawione jako

$$h'_{xx}(r_1, w_1, \gamma_1) = c' \int_0^1 \int_0^{2\pi} T_{xx}(\rho, \theta) \exp [i f'_{xx}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta)] \cdot \rho d\rho d\theta ,$$

$$h'_{xy}(r_1, w_1, \gamma_1) = c' \int_0^1 \int_0^{2\pi} T_{xy}(\rho, \theta) \exp [i f'_{xy}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta)] \cdot \rho d\rho d\theta , \quad (7-8)$$

$$h'_{yx}(r_1, w_1, \gamma_1) = c' \int_0^1 \int_0^{2\pi} T_{yx}(\rho, \theta) \exp [i f'_{yx}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta)] \cdot \rho d\rho d\theta ,$$

$$h'_{yy}(r_1, w_1, \gamma_1) = c' \int_0^1 \int_0^{2\pi} T_{yy}(\rho, \theta) \exp [i f'_{yy}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta)] \cdot \rho d\rho d\theta .$$

Ponieważ zgodnie z (7-1) zachodzi

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{xx}(\rho, \theta) = \Phi'_{xx}(\rho, \theta) - (q_1 \rho^2 + q_2 \rho \sin \theta + \\ + q_3 \rho \cos \theta + q_4) , \end{aligned} \quad (7-9)$$

to funkcje typu f_{xx} można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned}
 f_{xx}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta) &= \bar{k} [\Phi'_{xx}(\rho, \theta) - q_1 \rho^2 - q_2 \rho \sin \theta - \\
 &- q_3 \rho \cos \theta - q_4] - 2\pi \rho r_1 \cos(\theta - \gamma_1) - \pi w_1 \rho^2 = \\
 &= \bar{k} \Phi'_{xx}(\rho, \theta) - 2\pi \rho r_1' \cos(\theta - \gamma_1') - \\
 &- \pi w_1' \rho^2 - \bar{k} q_4 = f'_{xx}(r_1', w_1', \gamma_1', \rho, \theta) - \bar{k} q_4,
 \end{aligned} \tag{7-10}$$

gdzie nowe współrzędne r_1' , w_1' , γ_1' określone są równaniami (7-2). Analogiczne związki zachodzą dla pozostałych funkcji

$$\begin{aligned}
 f_{xy}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta) &= f'_{xy}(r_1', w_1', \gamma_1', \rho, \theta) - kq_4, \\
 f_{yx}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta) &= f'_{yx}(r_1', w_1', \gamma_1', \rho, \theta) - kq_4, \\
 f_{yy}(r_1, w_1, \gamma_1, \rho, \theta) &= f'_{yy}(r_1', w_1', \gamma_1', \rho, \theta) - kq_4.
 \end{aligned} \tag{7-11}$$

Podstawiając (7-11) do wzorów (7-7) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 h_{xx}(r_1, w_1, \gamma_1) &= h'_{xx}(r_1', w_1', \gamma_1') \exp - i\bar{k}q_4, \\
 h_{xy}(r_1, w_1, \gamma_1) &= h'_{xy}(r_1', w_1', \gamma_1') \exp - i\bar{k}q_4, \\
 h_{yx}(r_1, w_1, \gamma_1) &= h'_{yx}(r_1', w_1', \gamma_1') \exp - i\bar{k}q_4, \\
 h_{yy}(r_1, w_1, \gamma_1) &= h'_{yy}(r_1', w_1', \gamma_1') \exp - i\bar{k}q_4,
 \end{aligned} \tag{7-12}$$

co oznacza, że

$$\hat{h}(r_1, w_1, \gamma_1) = \exp - i\bar{k}q_4 \hat{h}'(r_1', w_1', \gamma_1'). \tag{7-13}$$

Zatem, przestrzenne rozkłady natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu odpowiadające macierzowym funkcjom aberracji $\hat{\Phi}(\rho, \theta)$ i $\hat{\Phi}'(\rho, \theta)$ są jedynie przesunięte względem siebie.

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\hat{h}(r_1, w_1, \gamma_1) \hat{J} \hat{h}^\dagger(r_1, w_1, \gamma_1) \right] = \\ = \text{tr} \left[\hat{h}(r'_1, w'_1, \gamma'_1) \hat{J} \hat{h}^{\dagger}(r'_1, w'_1, \gamma'_1) \right] . \end{aligned} \quad (7-14)$$

Podobnie jak w klasycznym przypadku [38] dodanie do macierzowej funkcji aberracji $\hat{\Phi}(\rho, \theta)$ wyrażenia $\hat{N}(q_1 \rho^2 + \rho q_2 \sin \theta + q_3 \rho \cos \theta + q_4)$ oznacza przesunięcie środka gaussowskiej sfery odniesienia Σ_0 (rys.4.2) z początku układu odniesienia do punktu o współrzędnych $(x_\Sigma, y_\Sigma, z_\Sigma)$

$$\begin{aligned} z_\Sigma &= -2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 q_1 , \\ x_\Sigma &= - \left(\frac{R}{a} \right) q_2 , \\ y_\Sigma &= - \left(\frac{R}{a} \right) q_3 , \end{aligned} \quad (7-15)$$

oraz zmianę promienia sfery odniesienia zgodnie z równaniem

$$R' = R - q_4 . \quad (7-16)$$

Uogólniona wersja twierdzenia o przesunięciu znajdzie zastosowanie w procedurze wyznaczania optymalnej sfery odniesienia, względem której jasność Strehla osiąga wartość maksymalną. Wcześniej należy jednak uogólnić przybliżenie Maréchała dla jasności Strehla na układy odwzorowujące zmieniające stan polaryzacji światła.

8. UOGÓLNIONE PRZYBLIŻENIE MERÉCHALA DLA JASNOŚCI STREHLA

Dla małych aberracji jasność Strehla klasycznego układu odwzorowującego (nie zmieniającego stanu polaryzacji światła) można wyznaczyć na podstawie przybliżonego wzoru Maréchala [46]. Istotą przybliżenia jest wyrażenie jasności Strehla poprzez średniokwadratową deformację frontu falowego. Podobne przybliżenie jasności Strehla można uzyskać również dla układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła. Rozważania zostaną jednak ograniczone tylko do przypadku światła, którego stan polaryzacji da się opisać rzeczywistą macierzą koherencji $\hat{J}_R$. Zakładamy więc, że do odwzorowania użyta została mieszanina światła spolaryzowanego liniowo (3.2-6) i światła niespolaryzowanego (3.2-2).

Dla każdej rzeczywistej macierzy koherencji $\hat{J}_R$ istnieje układ odniesienia w którym przyjmuje ona postać diagonalną [36]

$$\hat{J}_R \rightarrow \hat{D}_0 = \begin{bmatrix} d_1 & ; & 0 \\ 0 & ; & d_2 \end{bmatrix}, \quad (8-1)$$

gdzie d_1 i d_2 są rzeczywistymi i nieujemnymi wartościami własnymi macierzy $\hat{J}_R$. W dodatku, ślad macierzy nie zmienia się po przejściu do nowego układu odniesienia

$$\text{tr} \hat{J}_R = \text{tr} \hat{D}_0 = 1. \quad (8-2)$$

Niech $\hat{H}$, $\hat{T}$, $\hat{\Phi}$ będą określone względem układu odniesienia diagonalizującego rzeczywistą macierz koherencji $\hat{J}_R$.

Zakładając małe wartości elementów macierzowej funkcji aberracji Φ_{xx} , Φ_{xy} , Φ_{yx} , Φ_{yy} wyrażenia typu $\exp i\bar{k} \Phi_{xx}$ można rozwinąć w szereg potęgowy i pominąć wyrazy o potęgach wyższych niż dwa. Średnią z macierzowej funkcji źrenicowej $\langle \hat{H} \rangle$ da się wtedy przedstawić następująco

$$\begin{aligned} \langle H_{xx} \rangle &= \langle T_{xx} \rangle + i\bar{k} \langle T_{xx} \Phi_{xx} \rangle - \frac{1}{2} \bar{k}^2 \langle T_{xx} \Phi_{xx}^2 \rangle, \\ \langle H_{xy} \rangle &= \langle T_{xy} \rangle + i\bar{k} \langle T_{xy} \Phi_{xy} \rangle - \frac{1}{2} \bar{k}^2 \langle T_{xy} \Phi_{xy}^2 \rangle, \\ \langle H_{yx} \rangle &= \langle T_{yx} \rangle + i\bar{k} \langle T_{yx} \Phi_{yx} \rangle - \frac{1}{2} \bar{k}^2 \langle T_{yx} \Phi_{yx}^2 \rangle, \\ \langle H_{yy} \rangle &= \langle T_{yy} \rangle + i\bar{k} \langle T_{yy} \Phi_{yy} \rangle - \frac{1}{2} \bar{k}^2 \langle T_{yy} \Phi_{yy}^2 \rangle, \end{aligned} \quad (8-3)$$

lub w prostszej notacji macierzowej

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \hat{T} \rangle + i\bar{k} \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle - \frac{1}{2} \bar{k}^2 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \rangle, \quad (8-4)$$

oraz

$$\langle \hat{H} \rangle^t = \langle \hat{T} \rangle^{TR} - i\bar{k} \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{TR} - \frac{1}{2} \bar{k}^2 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{TR},$$

gdzie TR oznacza transponowanie macierzy (def. 2.1-3). W powyższych wzorach pojawiła się operacja mnożenia macierzy tego samego wymiaru zdefiniowana następująco

$$\hat{C} = \hat{A} \nabla \hat{B} \iff [\hat{C}]_{ij} = [\hat{A}]_{ij} [\hat{B}]_{ij}. \quad (8-5)$$

Zauważmy, że elementem neutralnym takiego mnożenia jest macierz jedynekowa $\hat{N}$ wprowadzona w rozdziale 7.

Podstawiając (8-4) do ogólnego wzoru na jasność Strehla (6-9), wykonując mnożenie i opuszczając wyrazy zawierające potęgi wyższe niż dwa względem macierzowej funkcji aberracji $\hat{\Phi}$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} SR = & \text{tr} \left[\langle \hat{T} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{TR} \right] - \frac{1}{2} \bar{k}^2 \text{tr} \left[\langle \hat{T} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{TR} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \bar{k}^2 \text{tr} \left[\langle \hat{T} \rangle^{TR} \hat{D}_0 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \rangle \right] + i \bar{k} \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{TR} \right] - \\ & - i \bar{k} \text{tr} \left[\langle \hat{T} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{TR} \right] + \bar{k}^2 \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{TR} \right]. \end{aligned} \quad (8-6)$$

Ponieważ ślad macierzy jest nieczuły na operację transponowania (tw. 2.2-3) zachodzi zatem

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\langle \hat{T} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{TR} \right] &= \text{tr} \left[\langle \hat{T} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{TR} \right]^{TR} = \\ &= \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0^{TR} \langle \hat{T} \rangle^{TR} \right]. \end{aligned} \quad (8-7)$$

Macierz $\hat{D}_0$ jest macierzą diagonalną, a więc

$$\hat{D}_0 = \hat{D}_0^{TR}. \quad (8-8)$$

Podstawiając (8-8) do (8-7) otrzymuje się

$$\text{tr} \left[\langle \hat{T} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{TR} \right] = \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{TR} \right], \quad (8-9)$$

a także

$$\text{tr} \left[\langle \hat{T} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{TR} \right] = \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{TR} \right]. \quad (8-10)$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności przybliżony wzór na jasność Strehla dla układów zmieniających stan polaryzacji światła przyjmuje postać

$$SR = \text{tr}[\langle \hat{T} \rangle_{\hat{D}_0} \langle \hat{T} \rangle^{TR}] - \bar{k}^2 \left\{ \text{tr}[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \rangle_{\hat{D}_0} \langle \hat{T} \rangle^{TR}] - \right. \\ \left. - \text{tr}[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle_{\hat{D}_0} \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{TR}] \right\}. \quad (8-11)$$

Pierwszy wyraz reprezentuje jasność Strehla układu bezaberracyjnego

$$\Phi_{xx} = \Phi_{xy} = \Phi_{yx} = \Phi_{yy} = 0. \quad (8-12)$$

Wyraz drugi opisuje spadek jasności Strehla związany z aberracjami układu. Warto podkreślić, że w przypadku małych aberracji jasność Strehla nie zależy od ich postaci a jedynie od średnich z macierzy $\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle$ i $\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \rangle$.

Zależność jasności Strehla od stanu polaryzacji światła wchodzącego do układu wyraża się poprzez diagonalną macierz $\hat{D}_0$.

Wzór(8-11) jest więc uogólnieniem przybliżenia Maréchala dla jasności Strehla na układy odwzorowujące zmieniające stan polaryzacji światła. Przypomnijmy, że przybliżenie to może być stosowane tylko przy następujących ograniczeniach:

- (1) wszystkie elementy macierzowej funkcji aberracji $\hat{\Phi}$ przyjmują niewielkie wartości w porównaniu ze średnią długością fali $\bar{\lambda}$ światła quasimonochromatycznego użytego do odwzorowania;
- (2) światło wchodzące do układu da się opisać rzeczywistą macierzą koherencji $\hat{J}_R$.

Wydaje się, że konieczność spełnienia drugiego z wyżej wymienionych ograniczeń wymaga szerszego uzasadnienia. Dla każdej rzeczywistej macierzy koherencji istnieje układ odnie-

sienia w którym przyjmuje ona postać diagonalną. Właśnie w tym układzie odniesienia ogólny wzór na jasność Strehla (6-10) przyjmuje szczególnie prostą postać

$$SR = d_1 \left[|\langle H_{xx} \rangle|^2 + |\langle H_{yx} \rangle|^2 \right] + d_2 \left[|\langle H_{xy} \rangle|^2 + |\langle H_{yy} \rangle|^2 \right] , \quad (8-13)$$

w której występują wyłącznie kwadraty modułów średnich z elementów macierzowej funkcji źrenicowej ważone współczynnikami d_1, d_2 . Ta postać wzoru nadaje się najlepiej do przedstawienia w postaci przybliżonej, gdyż podobnie jak w klasycznym przybliżeniu Maréchała, wystarczy rozwinąć w szereg potęgowy wyrażenia typu $|\langle H_{xx} \rangle|^2$. Niestety nie można zdiagonalizować poprzez zmianę układu odniesienia macierzy koherencji o elementach zespolonych. W takim przypadku, dla znalezienia przybliżonego wzoru na jasność Strehla, należałoby rozwijać w szereg potęgowy również wyrażenia typu $\langle H_{xx} \rangle \langle H_{xy} \rangle^*$ - porównaj (6-10) - co związane jest ze znacznie większym błędem tego rozwinięcia. Dlatego też zdecydowano się na wypróbowanie uogólnionego przybliżenia Maréchała przy założeniu, że światło wchodzące do układu da się opisać rzeczywistą macierzą koherencji $\hat{J}_R$.

Udowodnimy teraz, że drugi wyraz w przybliżeniu Maréchała (8-11), będący odpowiednikiem średniokwadratowej deformacji frontu falowego, jest nieujemny.

W tym celu wygodnie jest przedstawić go w postaci rozwiniętej

$$\text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right] - \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{\text{TR}} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= d_1 \left[\langle T_{xx} \Phi_{xx}^2 \rangle \langle T_{xx} \rangle - \langle T_{xx} \Phi_{xx} \rangle^2 \right] + \\
 &+ d_1 \left[\langle T_{yx} \Phi_{yx}^2 \rangle \langle T_{yx} \rangle - \langle T_{yx} \Phi_{yx} \rangle^2 \right] + \quad (8-14) \\
 &+ d_2 \left[\langle T_{xy} \Phi_{xy}^2 \rangle \langle T_{xy} \rangle - \langle T_{xy} \Phi_{xy} \rangle^2 \right] + \\
 &+ d_2 \left[\langle T_{yy} \Phi_{yy}^2 \rangle \langle T_{yy} \rangle - \langle T_{yy} \Phi_{yy} \rangle^2 \right] .
 \end{aligned}$$

Ponieważ funkcje T_{xx} , T_{xy} , T_{yx} , T_{yy} są nieujemne (4.3-4), wyrażenia w nawiasach kwadratowych, z dokładnością do stałej, równe są średniokwadratowym deformacjom frontów falowych $\sum_{xx}$, $\sum_{yx}$, $\sum_{xy}$, $\sum_{yy}$. Spełniają więc warunek

$$\begin{aligned}
 &\langle T_{xx} \Phi_{xx}^2 \rangle \langle T_{xx} \rangle - \langle T_{xx} \Phi_{xx} \rangle^2 = \\
 &= \langle T_{xx} \rangle^2 \left[\frac{\langle T_{xx} \Phi_{xx}^2 \rangle}{\langle T_{xx} \rangle} - \frac{\langle T_{xx} \Phi_{xx} \rangle^2}{\langle T_{xx} \rangle^2} \right] \geq 0 . \quad (8-15)
 \end{aligned}$$

Ponieważ d_1 , d_2 są także nieujemne, zatem rzeczywiście zachodzi

$$\text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right] - \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{\text{TR}} \right] \geq 0 . \quad (8-16)$$

Fakt ten będzie w istotny sposób wykorzystany w rozważaniach dotyczących doboru optymalnej sfery odniesienia dla układów zmieniających stan polaryzacji światła.

9. DOBÓR OPTYMALNEJ SFERY ODNIESIENIA

Obrazem punktu w rzeczywistych układach optycznych jest zawsze trójwymiarowy rozkład natężenia o silnym centralnym maksimum i znacznie słabszych maksimach bocznych. Przyczyną tego rozmycia są zjawiska dyfrakcyjne jak również aberracje układu. Z praktycznego punktu widzenia duże znaczenie ma umiejętność wskazania tego punktu w przestrzeni obrazowej A_{MAX} (x_{MAX} , y_{MAX} , z_{MAX}), w którym natężenie przyjmuje wartość maksymalną (chodzi o bezwzględne maksimum rozkładu natężenia). Gaussowska sfera odniesienia (rys.4.1) o środku w punkcie A_{MAX} nazywana jest zazwyczaj optymalną sferą odniesienia. Problem doboru optymalnej sfery odniesienia jest więc w istocie równoważny ze znalezieniem współrzędnych (x_{MAX} , y_{MAX} , z_{MAX}) punktu A_{MAX} . Szereg zagadnień związanych z doбором optymalnej sfery odniesienia dla klasycznych układów odwzorowujących poruszono w pracach [46-53].

W niniejszym rozdziale przedstawiona zostanie procedura doboru optymalnej sfery odniesienia dla układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła.

Macierzowa funkcja aberracji $\Phi(\xi, \eta)$ określona jest względem pewnej sfery odniesienia, która nie zawsze jest optymalna. Do znalezienia optymalnej sfery odniesienia wykorzystać można uogólnione twierdzenie o przesunięciu oraz uogólnione przybliżenie Meréchała dla jasności Strehla. Rozważania będące przedmiotem tego rozdziału, podobnie jak poprzedniego, prowadzone więc będą przy założeniu, że do odwzorowania użyta została mieszanina światła spolaryzowanego liniowo i światła

niepolaryzowanego dająca się zawsze opisać rzeczywistą macierzą koherencji $\hat{J}_R$.

W celu uproszczenia notacji przyjmijmy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} a_1 &= S^2, \\ a_2 &= S \sin \Theta, \\ a_3 &= S \cos \Theta, \\ a_4 &= 1. \end{aligned} \quad (9-1)$$

Macierzową funkcję aberracji $\hat{\Phi}'(\varepsilon, \eta)$ względem zmienionej sfery odniesienia można przedstawić następująco (7-1)

$$\hat{\Phi}' = \hat{\Phi} + \hat{N} \left(\sum_{i=1}^4 a_i q_i \right). \quad (9-2)$$

Dobierzemy takie parametry q_1, q_2, q_3, q_4 dla których jasność Strehla w przybliżeniu Maréchała (8-11) osiągała będzie wartość maksymalną. Warunkiem koniecznym istnienia maksimum funkcji $SR(q_1, q_2, q_3, q_4)$ jest układ równań

$$\frac{\partial SR}{\partial q_i} = 0 \quad \text{dla } i = 1, 4, \quad (9-3)$$

który po uwzględnieniu (8-11) można przedstawić jako

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial q_i} \left\{ \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi}' \rangle_{\hat{D}_0} \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi}' \rangle^{\text{TR}} \right] - \right. \\ & \left. - \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi}' \nabla \hat{\Phi}' \rangle_{\hat{D}_0} \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (9-4)$$

dla $i = 1, 4$.

Na podstawie twierdzenia o pochodnej śladu macierzy (tw. 2.2-5) oraz twierdzenia o pochodnej iloczynu macierzy (tw.

2.2-1) otrzymuje się

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left[\left\langle \hat{T} \nabla \frac{\partial \hat{\Phi}'}{\partial q_i} \right\rangle \hat{D}_0 \left\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi}' \right\rangle^{\text{TR}} \right] + \text{tr} \left[\left\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi}' \right\rangle \hat{D}_0 \left\langle \hat{T} \nabla \frac{\partial \hat{\Phi}'}{\partial q_i} \right\rangle^{\text{TR}} \right] \\ & - \text{tr} \left[\left\langle \hat{T} \nabla \frac{\partial (\hat{\Phi}' \nabla \hat{\Phi}')}{\partial q_i} \right\rangle \hat{D}_0 \left\langle \hat{T} \right\rangle^{\text{TR}} \right] = 0 \quad \text{dla } i = 1, 4 . \end{aligned} \quad (9-5)$$

Zauważmy, że

$$\frac{\partial (\hat{\Phi}' \nabla \hat{\Phi}')}{\partial q_i} = 2 \hat{\Phi}' \nabla \frac{\partial \hat{\Phi}'}{\partial q_i} , \quad (9-6)$$

oraz

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left[\left\langle \hat{T} \nabla \frac{\partial \hat{\Phi}'}{\partial q_i} \right\rangle \hat{D}_0 \left\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi}' \right\rangle^{\text{TR}} \right] = \\ & = \text{tr} \left[\left\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi}' \right\rangle \hat{D}_0 \left\langle \hat{T} \nabla \frac{\partial \hat{\Phi}'}{\partial q_i} \right\rangle^{\text{TR}} \right] , \end{aligned} \quad (9-7)$$

co zachodzi ze względu na fakt, że ślad macierzy jest nieczuły na operacje transponowania (tw. 2.2-4). Układ równań (9-5) można więc zapisać jako

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left[\left\langle \hat{T} \nabla \frac{\partial \hat{\Phi}'}{\partial q_i} \right\rangle \hat{D}_0 \left\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi}' \right\rangle^{\text{TR}} \right] - \\ & - \text{tr} \left[\left\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi}' \right\rangle \hat{D}_0 \left\langle \hat{T} \nabla \frac{\partial \hat{\Phi}'}{\partial q_i} \right\rangle^{\text{TR}} \right] = 0 \\ & \text{dla } i = 1, 4 . \end{aligned} \quad (9-8)$$

Podstawiając za $\hat{\Phi}'$ wyrażenie (9-2) i uwzględniając, że

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial q_i} = \hat{N} a_i \quad \text{dla } i = 1, 4, \quad (9-9)$$

otrzymuje się liniowy układ równań ze względu na parametry q_1, q_2, q_3, q_4

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^4 q_j \left\{ \text{tr} \left[\langle \hat{T} a_i \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} a_j \rangle^{\text{TR}} \right] - \text{tr} \left[\langle \hat{T} a_i a_j \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right] \right\} = \\ & = \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} a_i \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right] - \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} a_i \rangle^{\text{TR}} \right] \\ & \quad \text{dla } i = 1, 4 \quad (9-10) \end{aligned}$$

Ponieważ $a_4 = 1$, zachodzi więc

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left[\langle \hat{T} a_i \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} a_j \rangle^{\text{TR}} \right] - \text{tr} \left[\langle \hat{T} a_i a_j \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right] = 0 \\ & \quad \text{dla } i = 4 \\ & \quad \text{lub dla } j = 4, \quad (9-11) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} a_i \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right] - \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} a_i \rangle^{\text{TR}} \right] = 0 \\ & \quad \text{dla } i = 4. \quad (9-12) \end{aligned}$$

Oznacza to, iż funkcja $SR(q_1, q_2, q_3, q_4)$ nie zależy od parametru q_4 . W istocie (9-10) jest więc liniowym układem równań ze względu na parametry q_1, q_2, q_3

$$\hat{B} \hat{Q} = \hat{C} \quad (9-13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} & [\hat{B}]_{ij} = \text{tr} \left[\langle \hat{T} a_i \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} a_j \rangle^{\text{TR}} \right] - \text{tr} \left[\langle \hat{T} a_i a_j \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right] \\ & \quad \text{dla } i, j = 1, 3, \end{aligned}$$

$$[\hat{C}]_i = \text{tr}[\langle \hat{T} \triangleright \hat{\Phi} a_i \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} - \text{tr}[\langle \hat{T} \triangleright \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle T a_i \rangle^{\text{TR}}]$$

$$\text{dla } i = 1, 3, \quad (9-14)$$

$$[\hat{Q}]_i = q_i \quad \text{dla } i = 1, 3$$

Powyższy układ równań pokazuje, że jasność Strehla w przybliżeniu Maréchala jest formą kwadratową ze względu na parametry q_1, q_2, q_3 . Warunek (8-16) gwarantuje, że jasność Strehla spełnia nierówność

$$SR \leq \text{tr}[\langle \hat{T} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}}], \quad (9-15)$$

co oznacza, że forma kwadratowa $SR(q_1, q_2, q_3)$ jest ograniczona z góry. Można wykazać [54], że każda forma kwadratowa ograniczona z góry posiada maksimum, tak więc układ równań (9-3) jest nie tylko warunkiem koniecznym ale również wystarczającym dla istnienia maksimum jasności Strehla. Optymalne wartości parametrów q_1, q_2, q_3 są zatem następujące

$$q_k = \frac{\det \hat{B}_k}{\det \hat{B}} \quad \text{dla } k = 1, 3, \quad (9-16)$$

q_4 - dowolne

gdzie macierz $\hat{B}_k$ otrzymuje się przez zastąpienie w macierzy $\hat{B}$ kolumny o numerze k wektorem $\hat{C}$; $\det$ oznacza wyznacznik macierzy. Podstawiając optymalne wartości parametrów q_1, q_2, q_3 do wyrażenia (9-2) otrzymuje się macierzową funkcję aberracji $\hat{\Phi}_{\text{opt}}$ określoną względem optymalnej sfery odniesienia, a na podstawie zależności (7-15) można łatwo znaleźć współrzędne środka optymalnej sfery odniesienia $(x_{\text{MAX}}, y_{\text{MAX}}, z_{\text{MAX}})$.

Podobnie jak dla układów odwzorowujących nie zmieniających stanu polaryzacji światła [48] jasność Strehla nie zależy od parametru q_4 . Jest to zresztą wynik oczekiwany, gdyż q_4 nie pojawia się we wzorach (7-2) i (7-3).

Przedstawiona procedura wyznaczania parametrów q_1 , q_2 , q_3 określających optymalną sferę odniesienia dla układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła została wyprowadzona z wykorzystaniem uogólnionego przybliżenia Maréchała dla jasności Strehla (8-11). Obowiązuje więc tylko przy spełnieniu ograniczających założeń:

- (1) wszystkie elementy macierzowej funkcji aberracji przyjmują niewielkie wartości w porównaniu ze średnią długością fali $\bar{\lambda}$ światła quasimonochromatycznego użytego do odwzorowania;
- (2) światło użyte do odwzorowania da się opisać macierzą koherencji $\hat{J}_R$ o rzeczywistych elementach.

Przykład 9.1

Wyznaczono optymalne parametry q_1 , q_2 , q_3 dla układu z dwustrefowym filtrem polaryzacyjnym z przykładu 4.1. Założono, że układ obarczony jest trzeciorzędową aberracją sferyczną

$$V(\xi, \theta) = F \xi^4 \quad (9-17)$$

Elementy macierzowej funkcji transmisji amplitudy i macierzowej funkcji aberracji takiego układu są następujące

$$T_{xx}(\varrho, \theta) = \begin{cases} \cos^2 \alpha_1 & \text{dla } 0 \leq \varrho \leq p \\ \cos^2 \alpha_2 & \text{dla } p < \varrho \leq 1 \end{cases},$$

$$T_{yy}(\varrho, \theta) = \begin{cases} \sin^2 \alpha_1 & \text{dla } 0 \leq \varrho \leq p \\ \sin^2 \alpha_2 & \text{dla } p < \varrho \leq 1 \end{cases}, \quad (9-18)$$

$$T_{xy}(\varrho, \theta) = \begin{cases} |\sin \alpha_1 \cos \alpha_1| & \text{dla } 0 \leq \varrho \leq p \\ |\sin \alpha_2 \cos \alpha_2| & \text{dla } p < \varrho \leq 1 \end{cases},$$

$$T_{yx}(\varrho, \theta) = T_{xy}(\varrho, \theta),$$

oraz

$$\Phi_{xx}(\varrho, \theta) = F \varrho^4,$$

$$\Phi_{yy}(\varrho, \theta) = F \varrho^4,$$

$$\Phi_{xy}(\varrho, \theta) = \begin{cases} F \varrho^4 + m_1 \bar{\lambda} & \text{dla } 0 \leq \varrho \leq p \\ F \varrho^4 + m_2 \bar{\lambda} & \text{dla } p < \varrho \leq 1 \end{cases}, \quad (9-19)$$

$$\Phi_{yx}(\varrho, \theta) = \Phi_{xy}(\varrho, \theta),$$

gdzie

$$m_1 = \begin{cases} 0 & \text{dla } \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \geq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 < 0 \end{cases}, \quad (9-20)$$

$$m_2 = \begin{cases} 0 & \text{dla } \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \geq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 < 0 \end{cases}.$$

Ponieważ $\Phi_{xy}(\rho, \theta)$ i $\Phi_{yx}(\rho, \theta)$ zmieniają się skokowo aż o $\bar{\lambda}/2$ korzystanie z omówionej procedury wyznaczania optymalnych parametrów q_1, q_2, q_3 staje się niecelowe, gdyż została ona prowadzona przy założeniu, iż wartości wszystkich elementów macierzowej funkcji aberracji $\hat{\Phi}(\rho, \theta)$ są niewielkie. W takim przypadku wygodnie jest interpretować skokową zmianę aberracji o $\bar{\lambda}/2$, jako zmianę znaku odpowiedniego elementu macierzowej funkcji transmisji amplitudy, wbrew (4.3-2). Otrzymuje się wtedy

$$\begin{aligned} T_{xx}(\rho, \theta) &= \begin{cases} \cos^2 \alpha_1 & \text{dla } 0 \leq \rho \leq p \\ \cos^2 \alpha_2 & \text{dla } p < \rho \leq 1 \end{cases}, \\ T_{yy}(\rho, \theta) &= \begin{cases} \sin^2 \alpha_1 & \text{dla } 0 \leq \rho \leq p \\ \sin^2 \alpha_2 & \text{dla } p < \rho \leq 1 \end{cases}, \quad (9-21) \\ T_{xy}(\rho, \theta) &= \begin{cases} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 & \text{dla } 0 \leq \rho \leq p \\ \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 & \text{dla } p < \rho \leq 1 \end{cases}, \\ T_{yx}(\rho, \theta) &= T_{xy}, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(\rho, \theta) &= F \rho^4, \\ \Phi_{yy}(\rho, \theta) &= F \rho^4, \\ \Phi_{xy}(\rho, \theta) &= F \rho^4, \\ \Phi_{yx}(\rho, \theta) &= F \rho^4. \end{aligned} \quad (9-22)$$

Dopuszczenie ujemnych wartości funkcji $T_{yx}(\rho, \theta)$ i $T_{xy}(\rho, \theta)$ sprawia jednak, iż nierówność (9-15) nie zawsze musi być spełniona. Nie da się więc udowodnić, że układ równań (9-3)

jest nie tylko warunkiem koniecznym ale również wystarczającym dla istnienia maksimum jasności Strehla. Po dopuszczeniu ujemnych wartości funkcji $T_{yx}(\rho, \theta)$ i $T_{xy}(\rho, \theta)$ parametry q_1, q_2, q_3 znalezione na podstawie rozwiązania (9-16) mogą wyznaczać także punkt przegięcia lub minimum jasności Strehla. Rozwiązanie (9-16) wyznacza maksimum jasności Strehla wtedy i tylko wtedy gdy minory główne M_i macierzy $\hat{B}$ spełniają warunek [54]

$$(-1)^k M_k > 0 \quad \text{dla } k = 1, 3 \quad (9-23)$$

Macierzowa funkcja transmisji amplitudy (9-21) i macierzowa funkcja aberracji (9-22) nie zależą od kąta θ , co oznacza, że macierz $\hat{B}$ jest diagonalna

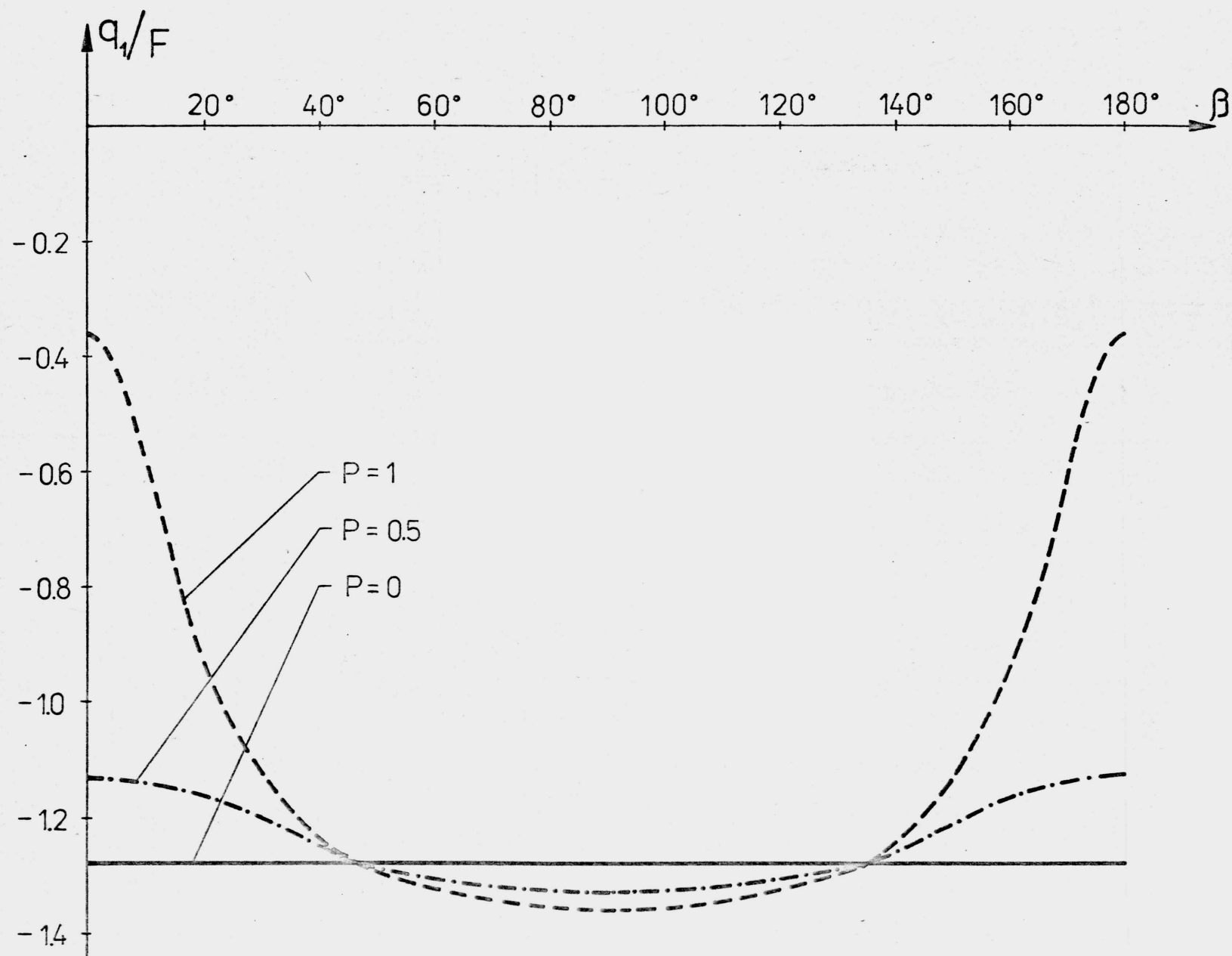
$$\begin{aligned} [\hat{B}]_{12} &= [\hat{B}]_{13} = [\hat{B}]_{21} = [\hat{B}]_{23} = [\hat{B}]_{31} = [\hat{B}]_{32} = 0, \\ [\hat{B}]_{11} &= \text{tr} \left[\langle \hat{T} a_1 \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} a_1 \rangle^{\text{TR}} \right] - \text{tr} \left[\langle \hat{T} a_1^2 \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right], \\ [\hat{B}]_{22} &= - \text{tr} \left[\langle \hat{T} a_2^2 \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right], \\ [\hat{B}]_{33} &= - \text{tr} \left[\langle \hat{T} a_3^2 \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right], \end{aligned} \quad (9-24)$$

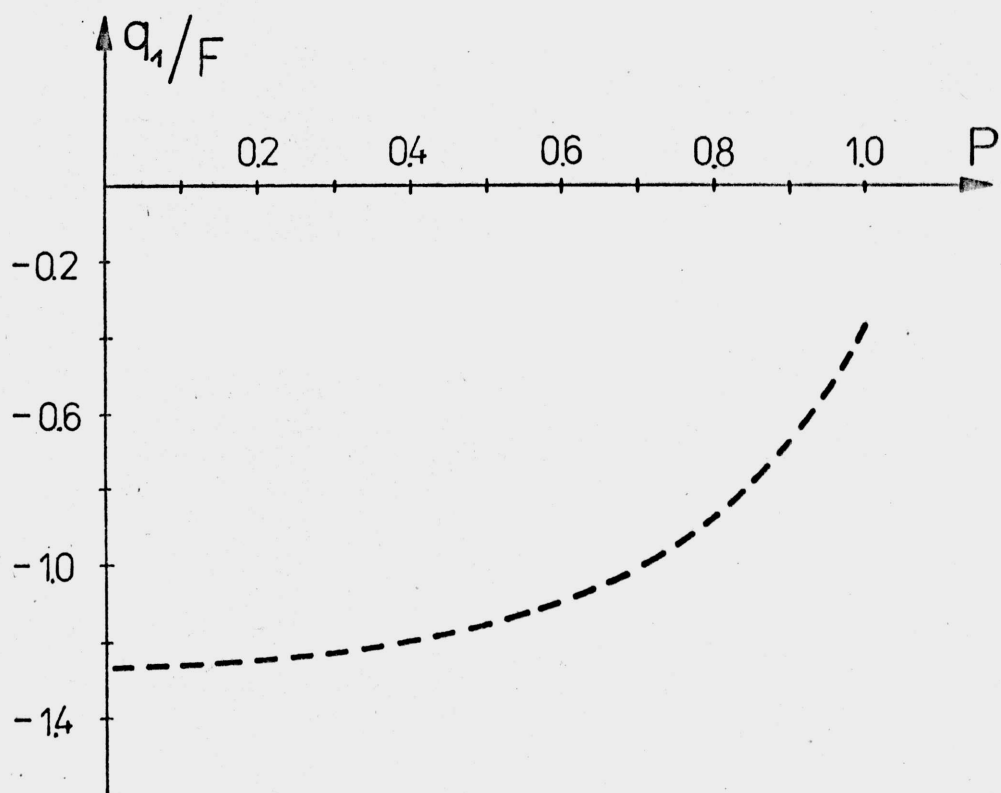
oraz

$$\begin{aligned} [\hat{C}]_1 &= \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} a_1 \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right] - \text{tr} \left[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} a_1 \rangle^{\text{TR}} \right], \\ [\hat{C}]_2 &= [\hat{C}]_3 = 0. \end{aligned} \quad (9-25)$$

Ponieważ $\hat{\Phi} = F \rho^4 \hat{N}$ rozwiązanie (9-16) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} q_1 &= F \frac{\text{tr} \left[\langle \hat{T} \rho^4 a_1 \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right] - \text{tr} \left[\langle \hat{T} \rho^4 \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} a_1 \rangle^{\text{TR}} \right]}{\text{tr} \left[\langle \hat{T} a_1 \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} a_1 \rangle^{\text{TR}} \right] - \text{tr} \left[\langle \hat{T} a_1^2 \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}} \right]}, \\ q_2 &= 0, \\ q_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9-26)$$





Rys.9.2. Optymalne wartości parametru q_1 dla światła spolaryzowanego liniowo o azymucie polaryzacji $\beta = 0^\circ$ w funkcji stopnia polaryzacji P . Układ obarczony był trzeciorzędą aberracją sferyczną $V(\varrho) = F\varrho^4$, a parametry filtra były następujące:
 $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $p = 0.6$.

Rys.9.1. Optymalne wartości parametru q_1 w funkcji azymutu polaryzacji β dla światła liniowo spolaryzowanego w stopniu $P=1$ oraz $P=0.5$. Zaznaczono także wartości parametru q_1 dla światła niespolaryzowanego $P=0$. Układ obarczony był trzeciorzędą aberracją sferyczną $V(\varrho) = F\varrho^4$, a parametry filtra były następujące: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $p = 0.6$.

Wyliczono wartości q_1 dla filtru o parametrach $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $p = 0.6$; jak na rysunku 5.1. Sprawdzono, że w omawianym przykładzie warunek (9-23) jest zawsze spełniony co oznacza, iż wyliczone wartości parametru q_1 rzeczywiście wyznaczają maksimum jasności Strehla.

Rysunek 9.1 przedstawia optymalne wartości parametru q_1 w funkcji azymutu polaryzacji β dla światła liniowo spolaryzowanego w stopniu $P = 1$ oraz $P = 0.5$. Zaznaczono także wartość parametru q_1 dla światła niespolaryzowanego $P = 0$. Rysunek 9.2. przedstawia parametr q_1 dla światła spolaryzowanego liniowo o azymucie polaryzacji $\beta = 0^\circ$ w funkcji stopnia polaryzacji P . Zwraca uwagę silna zależność optymalnej wartości parametru q_1 , od stanu polaryzacji światła użytego do odwzorowania.

10. ODWZOROWANIE PRZEDMIOTÓW ROZCIĄGŁYCH

Dotychczasowym przedmiotem rozważań były zagadnienia związane z odwzorowaniem przedmiotów punktowych. W niniejszym rozdziale zaproponowane zostaną uogólnione metody opisu odwzorowania przedmiotów rozciągłych, dające się zastosować do układów zmieniających stan polaryzacji światła. Metody te, podobnie jak dla klasycznych układów odwzorowujących, oparte zostały na przekształceniu Fouriera. W szczególności wykorzystane zostaną uogólnione twierdzenia związane z przekształceniem Fouriera macierzy funkcji, tw. 2.2-7 do 2.2-13.

W najogólniejszym przypadku macierzowa funkcja rozmycia amplitudy $\hat{h}(u_0, v_0, u_1, v_1)$ zależy nie tylko od współrzędnych płaszczyzny obrazowej, ale również od położenia (u_0, v_0) punkтового źródła światła w płaszczyźnie przedmiotowej. Tym niemniej, istnieją obszary płaszczyzny przedmiotowej, dla których z dobrym przybliżeniem można przyjąć, że macierzowa funkcja rozmycia amplitudy zależy wyłącznie od różnicy współrzędnych $\hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0)$. Będą one nazywane izoplanatycznymi obszarami układu odwzorowującego zmieniającego stan polaryzacji światła. Rozwiązania niniejszego rozdziału znajdują zastosowanie tylko do przedmiotów mniejszych niż obszar izoplanatyczny układu.

10.1. Odwzorowanie w świetle koherentnym

Pełną koherencją przestrzenną charakteryzuje się jedynie światło ściśle monochromatyczne. Niech zatem wektor $\hat{U}(u_0, v_0)$ reprezentuje rozkład amplitudy zespolonej świat-

ła ściśle monochromatycznego w płaszczyźnie przedmiotowej układu

$$\hat{U}(u_o, v_o) = \begin{bmatrix} U_x(u_o, v_o) \\ U_y(u_o, v_o) \end{bmatrix} \quad (10.1-1)$$

Dla światła ściśle monochromatycznego rozkład amplitudy zespolonej w płaszczyźnie obrazowej $d\hat{U}'(u_1, v_1)$ pochodzący od punktu (u_o, v_o) w płaszczyźnie przedmiotowej można wyznaczyć na podstawie spektralnej zależności (5-2)

$$\begin{aligned} dU'_x(u_1, v_1) &= h_{xx}(u_1 - u_o, v_1 - v_o) U_x(u_o, v_o) du_o dv_o + \\ &+ h_{xy}(u_1 - u_o, v_1 - v_o) U_y(u_o, v_o) du_o dv_o, \end{aligned} \quad (10.1-2)$$

$$\begin{aligned} dU'_y(u_1, v_1) &= h_{yx}(u_1 - u_o, v_1 - v_o) U_x(u_o, v_o) du_o dv_o + \\ &+ h_{yy}(u_1 - u_o, v_1 - v_o) U_y(u_o, v_o) du_o dv_o, \end{aligned}$$

lub w krótszej notacji macierzowej

$$d\hat{U}'(u_1, v_1) = \hat{h}(u_1 - u_o, v_1 - v_o) \hat{U}(u_o, v_o) du_o dv_o \quad (10.1-3)$$

Całkowity rozkład amplitudy w płaszczyźnie obrazowej pochodzący od wszystkich punktów płaszczyzny przedmiotowej równy jest więc

$$\begin{aligned} U'_x(u_1, v_1) &= \iint_{-\infty}^{\infty} h_{xx}(u_1 - u_o, v_1 - v_o) U_x(u_o, v_o) du_o dv_o + \\ &+ \iint_{-\infty}^{\infty} h_{xy}(u_1 - u_o, v_1 - v_o) U_y(u_o, v_o) du_o dv_o, \end{aligned} \quad (10.1-4)$$

$$U_y'(u_1, v_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_{yx}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) U_x(u_0, v_0) du_0 dv_0 + \\ + \iint_{-\infty}^{\infty} h_{yy}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) U_y(u_0, v_0) du_0 dv_0,$$

lub w notacji macierzowej

$$\hat{U}'(u_1, v_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \hat{U}(u_0, v_0) du_0 dv_0. \quad (10.1-5)$$

Na podstawie definicji (2.1-8) można stwierdzić, że rozkład amplitudy w płaszczyźnie obrazowej układu zmieniającego stan polaryzacji światła równy jest splotowi macierzowej funkcji rozmycia z rozkładem amplitudy w płaszczyźnie przedmiotowej

$$\hat{U}'(u_1, v_1) = \hat{h}(u_1, v_1) \circledast \hat{U}(u_1, v_1). \quad (10.1-6)$$

Czasami wygodnie jest przedstawić macierze $\hat{U}$, $\hat{h}$, $\hat{U}$ w postaci sumy składowych harmonicznych

$$\hat{U}'(u_1, v_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{U}}(f, g) \exp[-2\pi i(u_1 f + v_1 g)] df dg, \\ \hat{U}(u_0, v_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{U}}(f, g) \exp[-2\pi i(u_0 f + v_0 g)] df dg, \quad (10.1-7)$$

$$\hat{h}(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{h}}(f, g) \exp[-2\pi i(uf + vg)] df dg,$$

gdzie f i g są bezwymiarowymi częstościami przestrzennymi

$$f = \frac{R \bar{\lambda}}{a} f', \quad g = \frac{R \bar{\lambda}}{a} g', \quad (10.1-8)$$

a f i g są wymiarowymi częstościami przestrzennymi. Korzystając z odwrotnego przekształcenia Fouriera można wyznaczyć macierze $\hat{\mathcal{U}}'$, $\hat{\mathcal{U}}$, $\hat{h}$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}'(f,g) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{U}'(u_1, v_1) \exp [2 \pi i (u_1 f + v_1 g)] du_1 dv_1, \\ \hat{\mathcal{U}}(f,g) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{U}(u_0, v_0) \exp [2 \pi i (u_0 f + v_0 g)] du_0 dv_0, \\ \hat{h}(f,g) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u, v) \exp [2 \pi i (u f + v g)] du dv.\end{aligned}\tag{10.1-9}$$

Łącząc (10.1-6) z uogólnionym twierdzeniem o splocie (tw. 2.2-9) otrzymuje się prostą zależność iloczynową określającą rozkład składowych harmoniczných amplitudy w płaszczyźnie obrazowej

$$\hat{\mathcal{U}}'(f,g) = \hat{h}(f,g) \hat{\mathcal{U}}(f,g), \tag{10.1-10}$$

lub w postaci rozwiniętej

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}'_x(f,g) \\ \mathcal{U}'_y(f,g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{xx}(f,g) & h_{xy}(f,g) \\ h_{yx}(f,g) & h_{yy}(f,g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_x(f,g) \\ \mathcal{U}_y(f,g) \end{bmatrix}.\tag{10.1-11}$$

Z porównania zależności (10.1-6) i (4.4-8) wynika, że macierz $\hat{h}(f,g)$ równa jest, z dokładnością do stałej c , macierzowej funkcji źrenicowej układu

$$\hat{h}(f,g) = c \hat{H}(f,g).\tag{10-1-12}$$

Rozkład składowych harmoniczných amplitudy w płaszczyźnie obrazowej równy jest więc iloczynowi macierzowej funkcji

żrenicowej układu z rozkładem składowych harmonicznych w płaszczyźnie przedmiotowej. Ponieważ wszystkie elementy macierzowej funkcji żrenicowej poza obszarem żrenicy wyjściowej są równe zero

$$H_{xx}(f,g) = H_{xy}(f,g) = H_{yx}(f,g) = H_{yy}(f,g) = 0$$

$$\text{dla } f^2 + g^2 > 1, \quad (10.1-13)$$

to koherentny układ odwzorowujący zmieniający stan polaryzacji światła, podobnie jak klasyczny, nie przenosi składowy harmonicznych amplitudy o częstościach większych niż jeden.

10.2. Odwzorowanie w niekoherentnym świetle quasimonochromatycznym

Na wstępie zdefiniowane zostanie pojęcie niekoherencji przestrzennej dla zaburzenia o charakterze wektorowym. W tym celu wygodnie jest posłużyć się macierzą koherencji wzajemnej, wprowadzonej po raz pierwszy w pracach [55-56].

Niech funkcja wektorowa

$$\hat{Z}(t, u_0, v_0) = \begin{bmatrix} Z_x(t, u_0, v_0) \\ Z_y(t, u_0, v_0) \end{bmatrix} \quad (10.2-1)$$

reprezentuje quasimonochromatyczne drgania wektora elektrycznego zachodzące w płaszczyźnie przedmiotowej układu. Ponieważ każde zaburzenie niemonochromatyczne można przedstawić w postaci sumy zaburzeń ściśle monochromatycznych, to zachodzi

$$\hat{Z}(t, u_0, v_0) = \int_0^{\infty} \hat{U}(\nu, u_0, v_0) \exp(-2\pi i \nu t) d\nu, \quad (10.2-2)$$

gdzie $\hat{U}(\nu, u_0, v_0)$ reprezentuje rozkład amplitudy zespolonej składowej ściśle monochromatycznej o częstotliwości ν

$$\hat{U}(\nu, u_0, v_0) = \begin{bmatrix} U_x(\nu, u_0, v_0) \\ U_y(\nu, u_0, v_0) \end{bmatrix}. \quad (10.2-3)$$

Macierz koherencji wzajemnej definiuje się następująco [55-56]

$$\hat{J}_m(u_0, v_0, u'_0, v'_0) = \left\langle \hat{Z}(t, u_0, v_0) \hat{Z}^\dagger(t, u'_0, v'_0) \right\rangle_t, \quad (10.2-4)$$

gdzie $\langle \dots \rangle_t$ jest średnią czasową obliczaną według wzoru (3.1-4). Łatwo wykazać, że tak zdefiniowaną macierz koherencji wzajemnej obowiązuje również spektralne równanie (3.4-7)

$$\hat{J}_m(u_0, v_0, u'_0, v'_0) = \int_0^{\infty} \hat{J}_{m\nu}(u_0, v_0, u'_0, v'_0) d\nu, \quad (10.2-5)$$

gdzie

$$\hat{J}_{m\nu} = \hat{U}(\nu, u_0, v_0) \hat{U}^\dagger(\nu, u'_0, v'_0) \quad (10.2-6)$$

jest spektralną macierzą koherencji wzajemnej.

Zaburzenie wektorowe $\hat{Z}(t, u_0, v_0)$ nazywać będziemy niekoherentnym przestrzennie, gdy spełnia ono warunek

$$\hat{J}_m(u_0, v_0, u'_0, v'_0) = \hat{J}(u_0, v_0) \hat{O}(u_0 - u'_0, v_0 - v'_0), \quad (10.2-7)$$

gdzie $\hat{J}(u_0, v_0) = \left\langle \hat{Z}(t, u_0, v_0) \hat{Z}^\dagger(t, u_0, v_0) \right\rangle_t$ jest macierzą koherencji opisującą stan polaryzacji światła emito-

wanego przez punkt (u_o, v_o) płaszczyzny przedmiotowej, a δ oznacza tutaj dwuwymiarową deltę Diraca.

Aby określić rozkład natężenia w płaszczyźnie obrazowej wyznaczmy najpierw rozkład spektralnej macierzy koherencji w tej płaszczyźnie. Rozkład amplitudy zespolonej składowej spektralnej o częstotliwości ν opisuje równanie (10.1-5)

$$\hat{U}'(\nu, u_1, v_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u_1 - u_o, v_1 - v_o) \hat{U}(\nu, u_o, v_o) du_o dv_o . \quad (10.2-8)$$

Na podstawie definicji spektralnej macierzy koherencji (3.4-6) zachodzi

$$\begin{aligned} \hat{J}'_v(u_1, v_1) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u_1 - u_o, v_1 - v_o) \hat{J}_{m_v}(u_o, v_o, u'_o, v'_o) \cdot \\ &\cdot \hat{h}^\dagger(u_1 - u'_o, v_1 - v'_o) du_o dv_o du'_o dv'_o . \end{aligned} \quad (10.2-9)$$

Po scałkowaniu po spektrum powyższego równania otrzymuje się rozkład macierzy koherencji dla światła quasimonochromatycznego w płaszczyźnie obrazowej

$$\begin{aligned} \hat{J}'(u_1, v_1) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u_1 - u_o, v_1 - v_o) \hat{J}_m(u_o, v_o, u'_o, v'_o) \cdot \\ &\cdot \hat{h}^\dagger(u_1 - u'_o, v_1 - v'_o) du_o dv_o du'_o dv'_o . \end{aligned} \quad (10.2-10)$$

Ponieważ założono pełną niekoherencję przestrzenną w płaszczyźnie przedmiotowej, to po uwzględnieniu (10.2-7) rozkład macierzy koherencji w płaszczyźnie obrazowej można wyrazić znacznie prostszym wzorem

$$\begin{aligned} \hat{J}'(u_1, v_1) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u_1 - u_o, v_1 - v_o) \hat{J}(u_o, v_o) \cdot \\ &\cdot \hat{h}^\dagger(u_1 - u_o, v_1 - v_o) du_o dv_o . \end{aligned} \quad (10.2-11)$$

Natężenie równe jest zawsze śladowi macierzy koherencji $I'(u_1, v_1) = \text{tr } \hat{J}(u_1, v_1)$, tak więc rozkład natężenia w płaszczyźnie obrazowej układu dany jest wzorem

$$I'(u_1, v_1) = \text{tr} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \hat{J}(u_0, v_0) \cdot \hat{h}^\dagger(u_1 - u_0, v_1 - v_0) du_0 dv_0, \quad (10.2-12)$$

a na podstawie twierdzenia o całce śladu macierzy (tw.2.2-6) otrzymuje się

$$I'(u_1, v_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [\hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \hat{J}(u_0, v_0) \cdot \hat{h}^\dagger(u_1 - u_0, v_1 - v_0)] du_0 dv_0. \quad (10.2-13)$$

Dalsze rozważania ograniczają się tylko do przypadku, w którym macierz koherencji w dowolnym punkcie płaszczyzny przedmiotowej można przedstawić w następującej postaci

$$\hat{J}(u_0, v_0) = I(u_0, v_0) \hat{J}_0, \quad (10.2-14)$$

gdzie $I(u_0, v_0) = \text{tr} \hat{J}(u_0, v_0)$ reprezentuje rozkład natężenia w płaszczyźnie przedmiotowej układu. W istocie zakładamy więc, że wszystkie punkty płaszczyzny przedmiotowej emitują światło jednakowo spolaryzowane, różniące się tylko natężeniem. Stan polaryzacji światła emitowanego przez płaszczyzną przedmiotową opisuje unormowana macierz koherencji $\hat{J}_0$.

Po podstawieniu (10.2-14) do (10.2-13) otrzymuje się

$$I'(u_1, v_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(u_0, v_0) \text{tr} [\hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \cdot \hat{J}_0 \hat{h}^\dagger(u_1 - u_0, v_1 - v_0)] du_0 dv_0. \quad (10.2-15)$$

Zauważmy, że $\text{tr} \left[\hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \hat{J}_0^\dagger \hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \right]$ jest po prostu rozkładem natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu emitującego światło o stanie polaryzacji reprezentowanym macierzą $\hat{J}_0$ (5-14)

$$K(u_1 - u_0, v_1 - v_0) = \text{tr} \left[\hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \cdot \hat{J}_0^\dagger \hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \right]. \quad (10.2-16)$$

Zatem

$$I'(u_1, v_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} I(u_0, v_0) K(u_1 - u_0, v_1 - v_0) du_0 dv_0, \quad (10.2-17)$$

lub używając symbolicznej notacji splotu

$$I'(u_1, v_1) = I(u_1, v_1) \underset{\text{punkty}}{\circledast} K(u_1, v_1). \quad (10.2-18)$$

W przypadku, gdy wszystkie płaszczyzny przedmiotowej emitują światło jednakowo spolaryzowane, rozkład natężenia w płaszczyźnie obrazowej układu równy jest splotowi rozkładu natężenia w płaszczyźnie przedmiotowej z funkcją opisującą rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu.

Aby wyznaczyć składowe harmoniczne funkcji $I'(u_1, v_1)$, $I(u_0, v_0)$, $K(u, v)$, podobnie jak w przypadku koherentnym, można posłużyć się odwrotnym przekształceniem Fouriera

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f, g) &= \iint_{-\infty}^{\infty} I'(u_1, v_1) \exp [2 \pi i (f u_1 + g v_1)] du_1 dv_1, \\ \mathcal{I}(f, g) &= \iint_{-\infty}^{\infty} I(u_0, v_0) \exp [2 \pi i (f u_0 + g v_0)] du_0 dv_0, \end{aligned} \quad (10.2-19)$$

$$\mathcal{K}(f, g) = \iint_{-\infty}^{\infty} K(u, v) \exp [2 \pi i (f u + g v)] du dv.$$

Łącząc (10.2-19) z twierdzeniem o splocie otrzymuje się

$$\mathcal{L}'(f,g) = \mathcal{L}(f,g) \mathcal{K}(f,g) \quad (10.2-20)$$

Układ odwzorowujący zmieniający stan polaryzacji światła, podobnie jak klasyczny, działa jak filtr liniowy względem składowych harmonicznych rozkładu natężenia. Funkcja $\mathcal{K}(f,g)$ określa przepuszczalność układu optycznego dla składowej harmonicznej o częstości (f,g) i nazywana jest optyczną funkcją przenoszenia układu (OTF). Na podstawie uogólnionego twierdzenia o korelacji wzajemnej (tw. 2.2-12) oraz twierdzenia o całce śladu macierzy (tw. 2.2-6) zachodzi

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(f,g) &= \mathcal{F}^{-1} \{ K(u,v) \} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \text{tr} \left[\hat{h}(u,v) \hat{J}_0 \hat{h}^\dagger(u,v) \right] \right\} = \\ &= \text{tr} \left[\mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{h}(u,v) \hat{J}_0 \hat{h}^\dagger(u,v) \right\} \right] = \\ &= \text{tr} \left[\hat{h}(f,g) \hat{J}_0 \hat{h}(f,g) \right]. \end{aligned} \quad (10.2-21)$$

Uwzględniając (10.1-12) otrzymuje się ostateczną postać wzoru na optyczną funkcję przenoszenia układu odwzorowującego zmieniającego stan polaryzacji światła

$$\mathcal{K}(f,g) = |c|^2 \text{tr} \left[H(f,g) \hat{J}_0 \odot H(f,g) \right], \quad (10.2-22)$$

który w postaci rozwiniętej można zapisać jako

$$\begin{aligned} \frac{1}{|c|^2} \mathcal{K}(f,g) &= J_{xx}^0 \left[H_{xx}(f,g) \odot H_{xx}(f,g) + H_{yx}(f,g) \odot H_{yx}(f,g) \right] + \\ &+ J_{xy}^0 \left[H_{xx}(f,g) \odot H_{xy}(f,g) + H_{yx}(f,g) \odot H_{yy}(f,g) \right] + \\ &+ J_{yx}^0 \left[H_{xy}(f,g) \odot H_{xx}(f,g) + H_{yy}(f,g) \odot H_{yx}(f,g) \right] + \\ &+ J_{yy}^0 \left[H_{xy}(f,g) \odot H_{xy}(f,g) + H_{yy}(f,g) \odot H_{yy}(f,g) \right]. \end{aligned} \quad (10.2-23)$$

Optyczna funkcja przenoszenia układu zmieniającego stan polaryzacji światła wyraża się poprzez autokorelacje oraz niektóre korelacje wzajemne elementów macierzowej funkcji źrenicowej ze współczynnikami wagowymi określonymi stanem polaryzacji światła wchodzącego do układu. Istnieje więc możliwość zmiany optycznej funkcji przenoszenia jedynie poprzez zmianę stanu polaryzacji światła wchodzącego do układu.

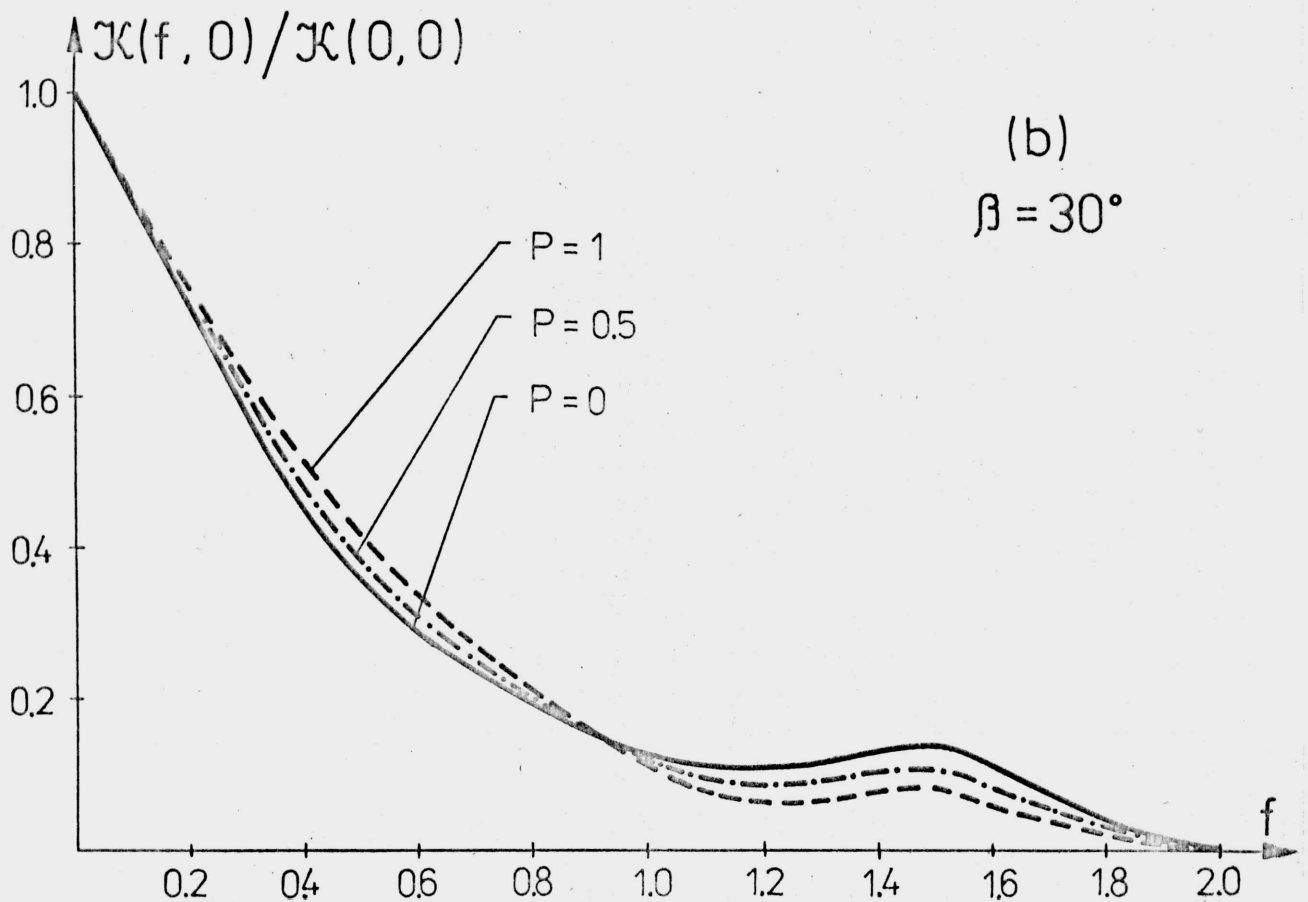
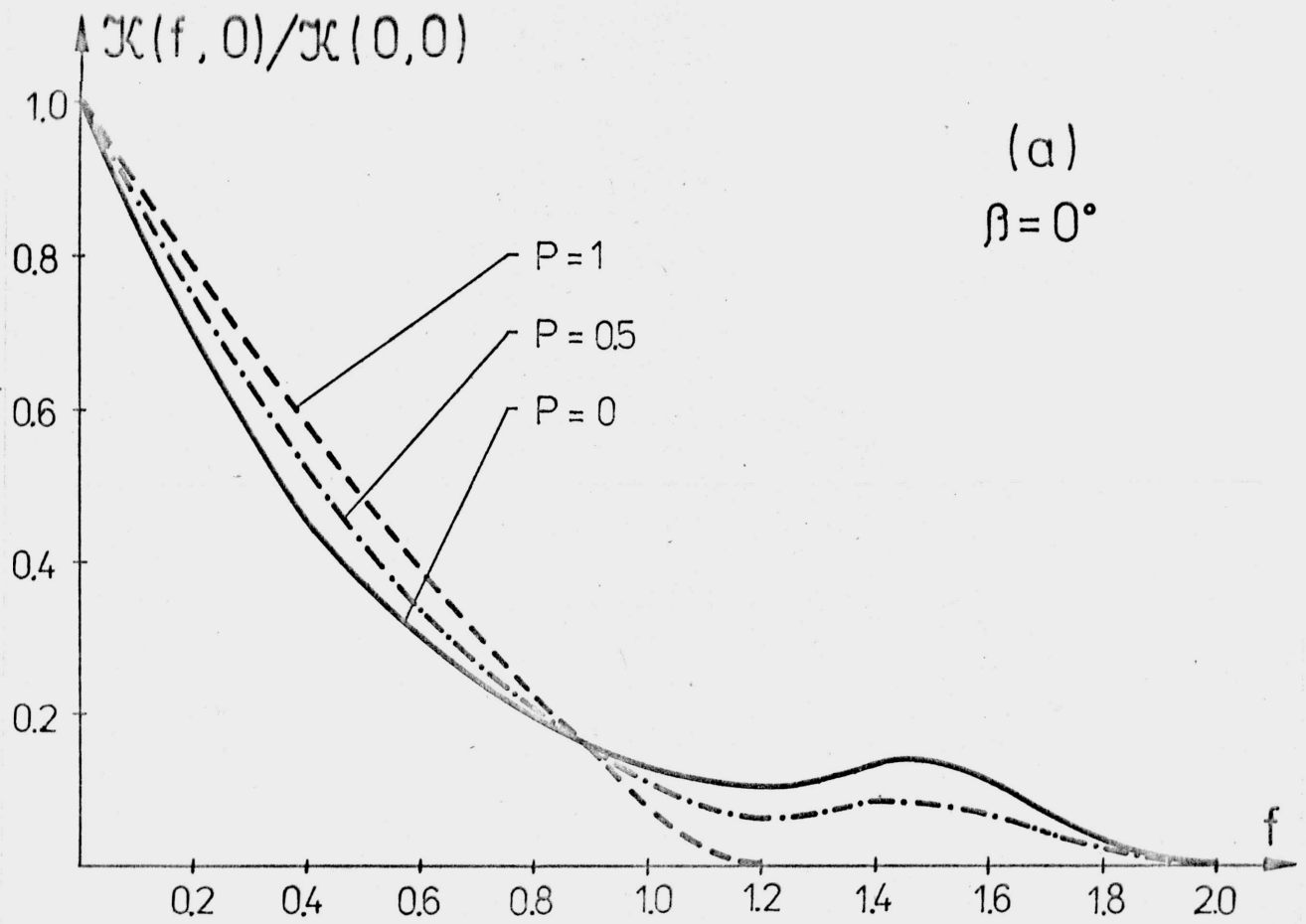
Ponieważ wszystkie elementy macierzowej funkcji źrenicowej równe są zero poza obszarem źrenicy wyjściowej (10.1-13) to niekoherentny układ odwzorowujący zmieniający stan polaryzacji światła, podobnie jak klasyczny, nie przenosi składowych harmonicznych natężenia o częstościach większych niż dwa

$$K(f,g) = 0 \quad \text{dla } f^2 + g^2 > 2 \quad . \quad (10.2-24)$$

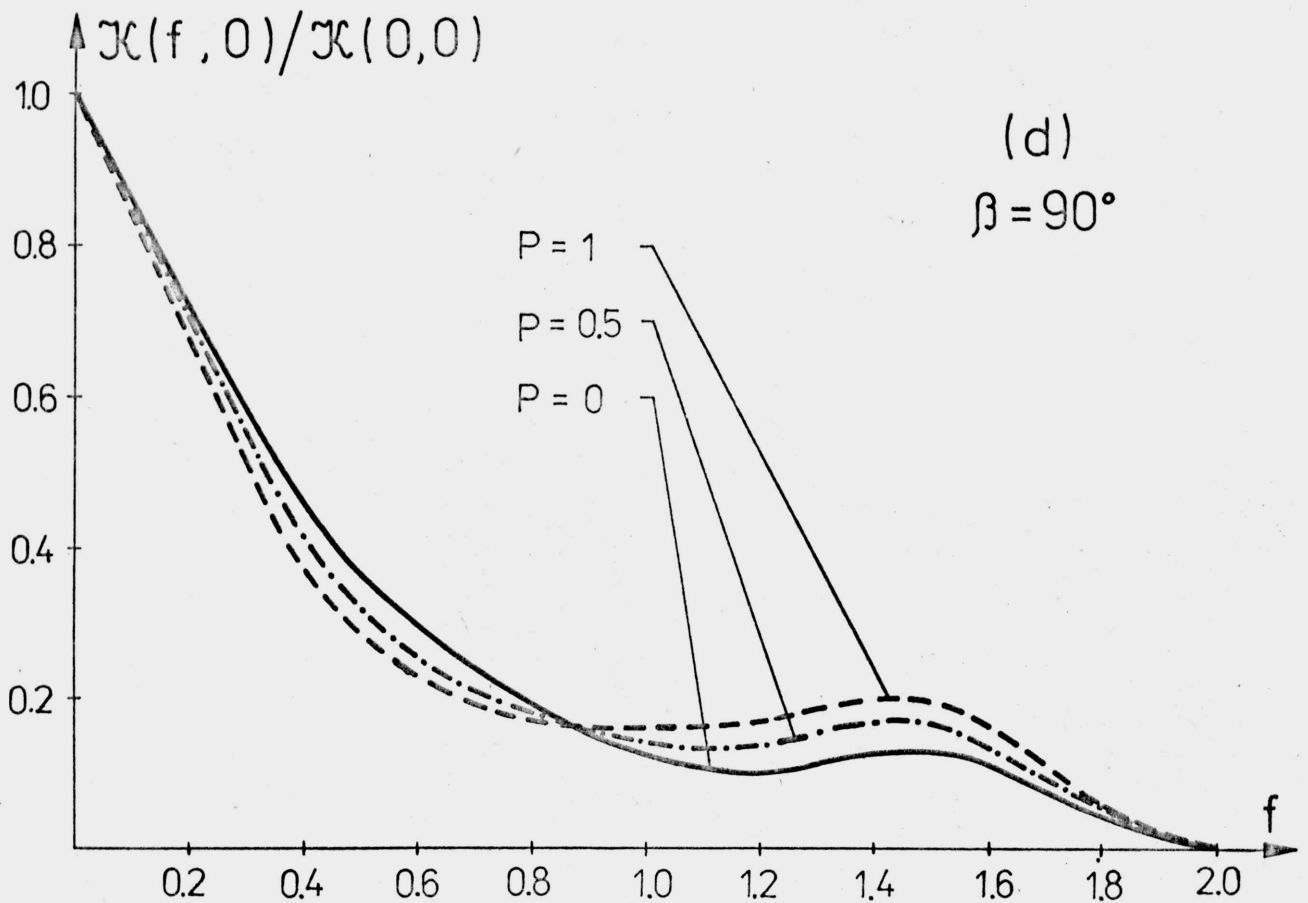
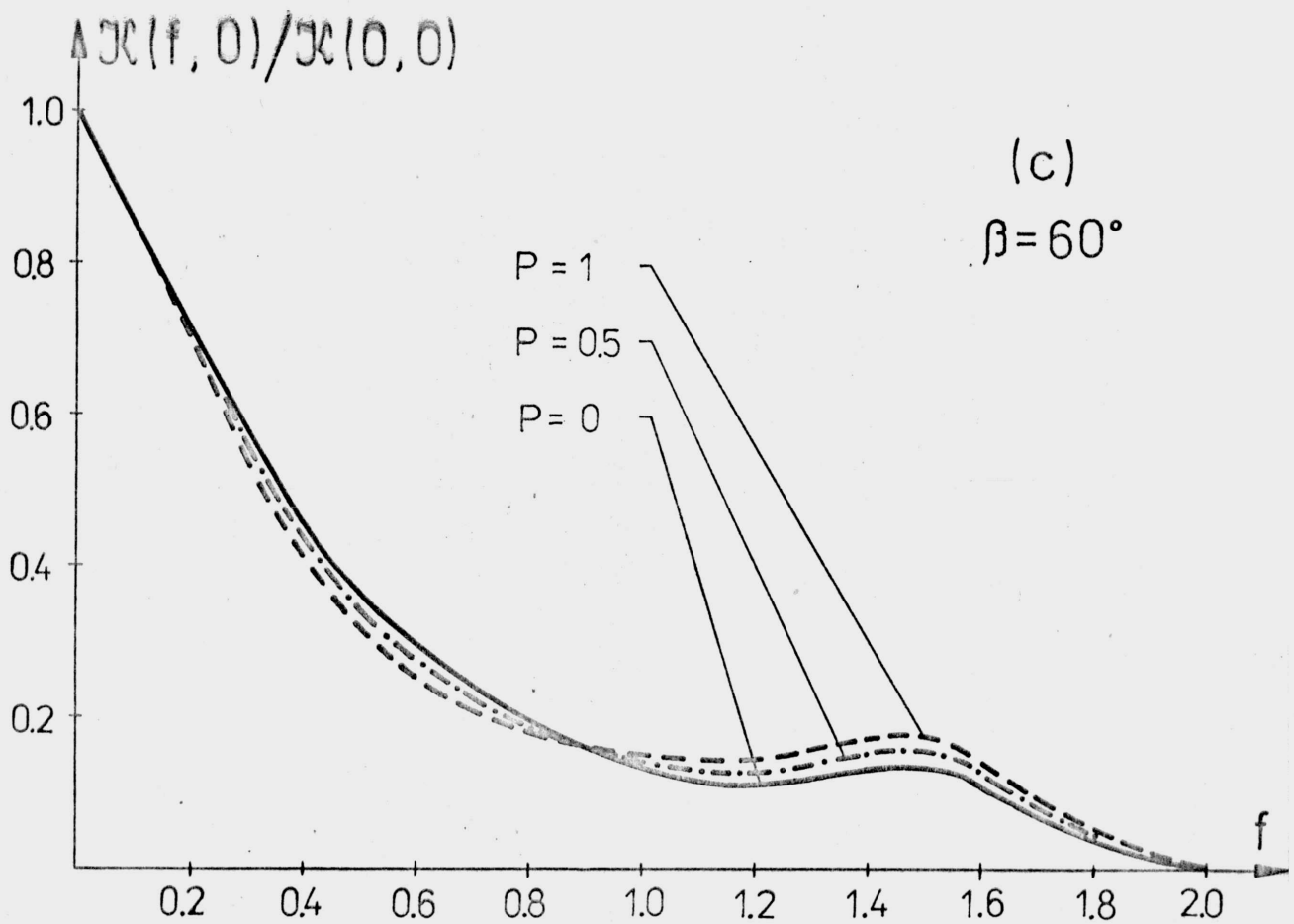
Należy podkreślić, że pojęcie optycznej funkcji przenoszenia dla układów zmieniających stan polaryzacji światła udaje się wprowadzić tylko w przypadku, gdy wszystkie punkty płaszczyzny przedmiotowej emitują światło o jednakowym stanie polaryzacji. W przypadku ogólniejszym, o mniejszym znaczeniu praktycznym, wprowadzenie optycznej funkcji przenoszenia staje się niemożliwe.

Przykład 10.1

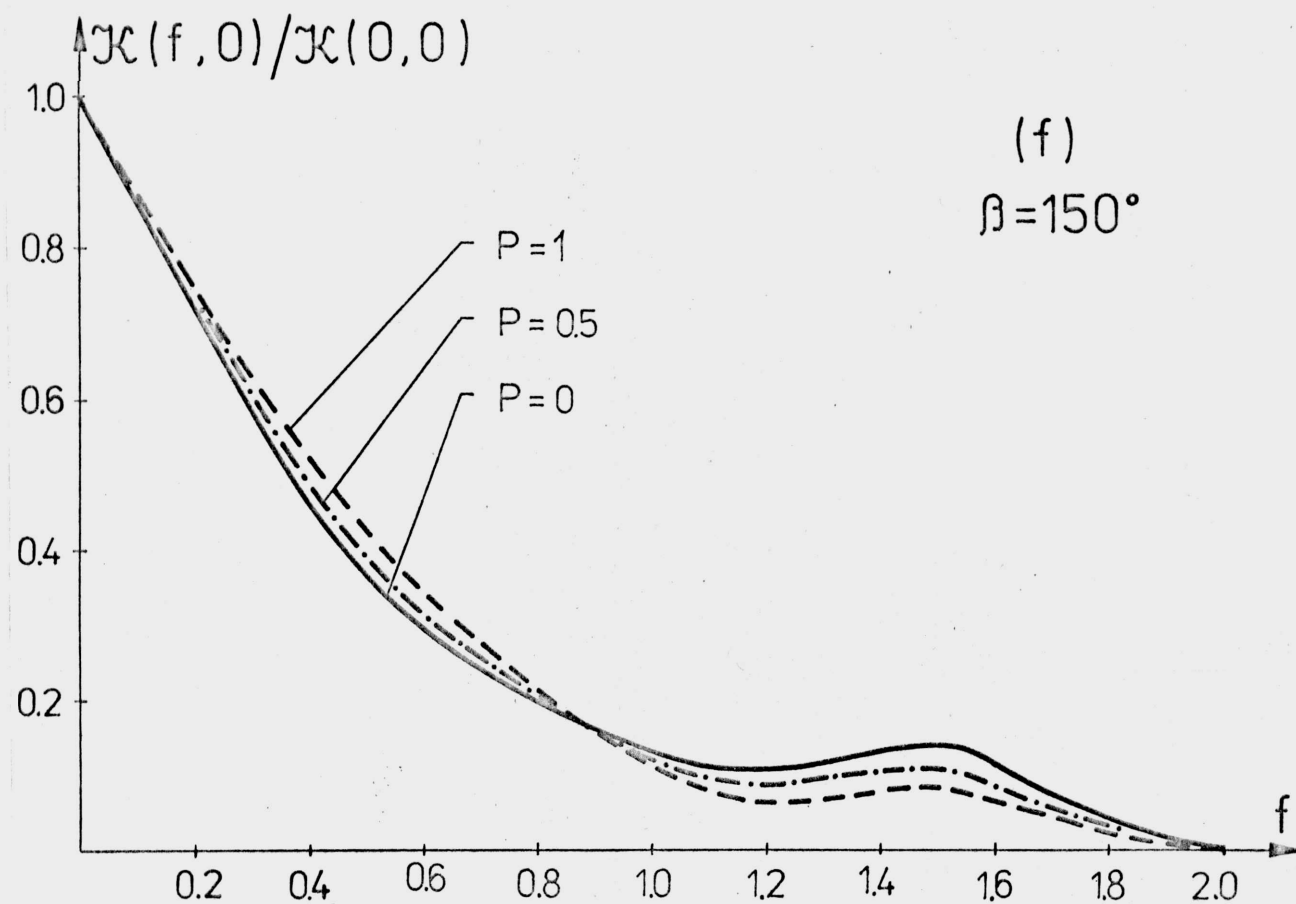
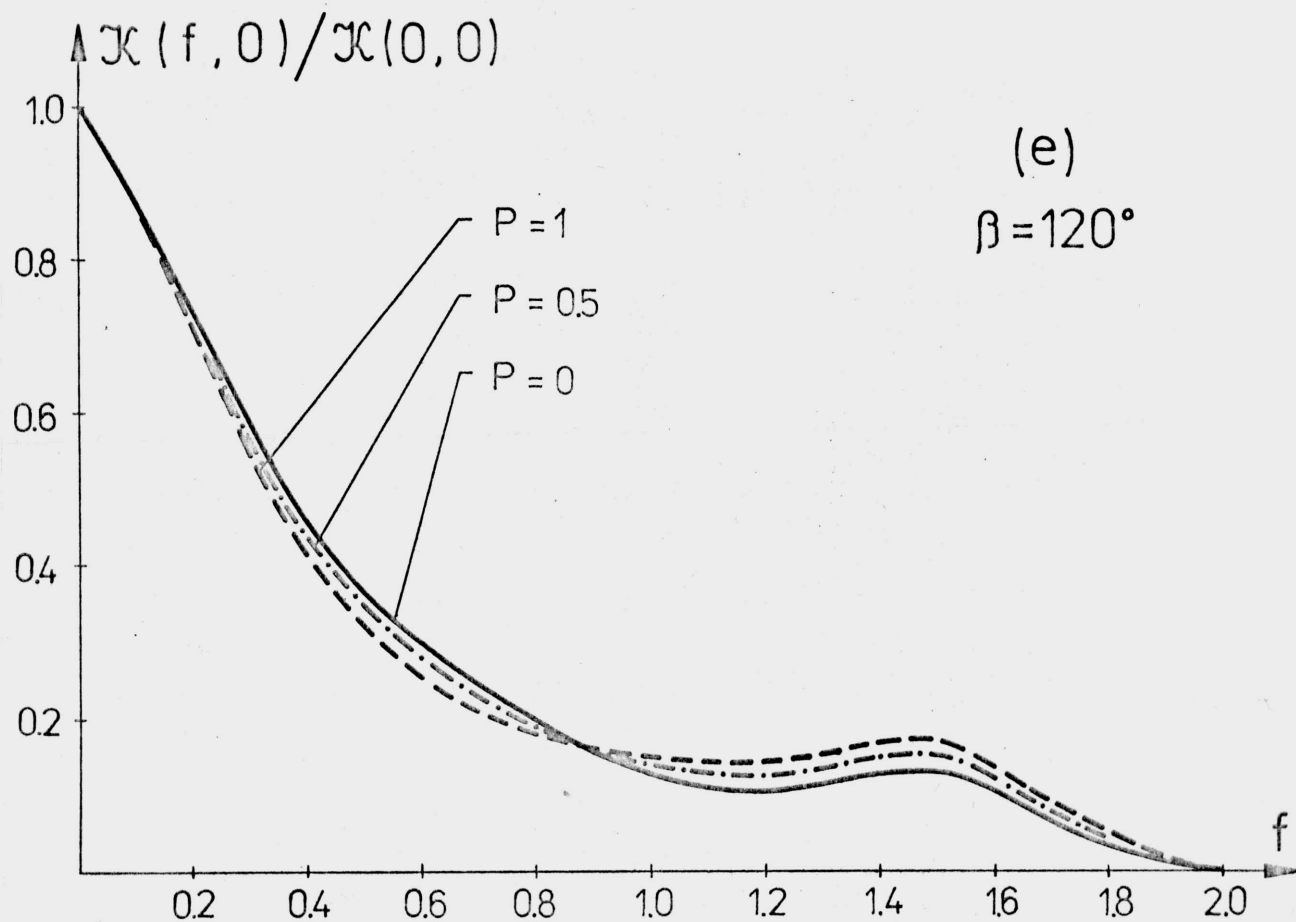
Wyliczono optyczną funkcję przenoszenia odpowiadającą rozkładowi natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu przedstawionym w przykładzie 5.1. I tak, na rysunkach 10.1a-f wykreślono optyczną funkcję przenoszenia w zależności od stanu po-



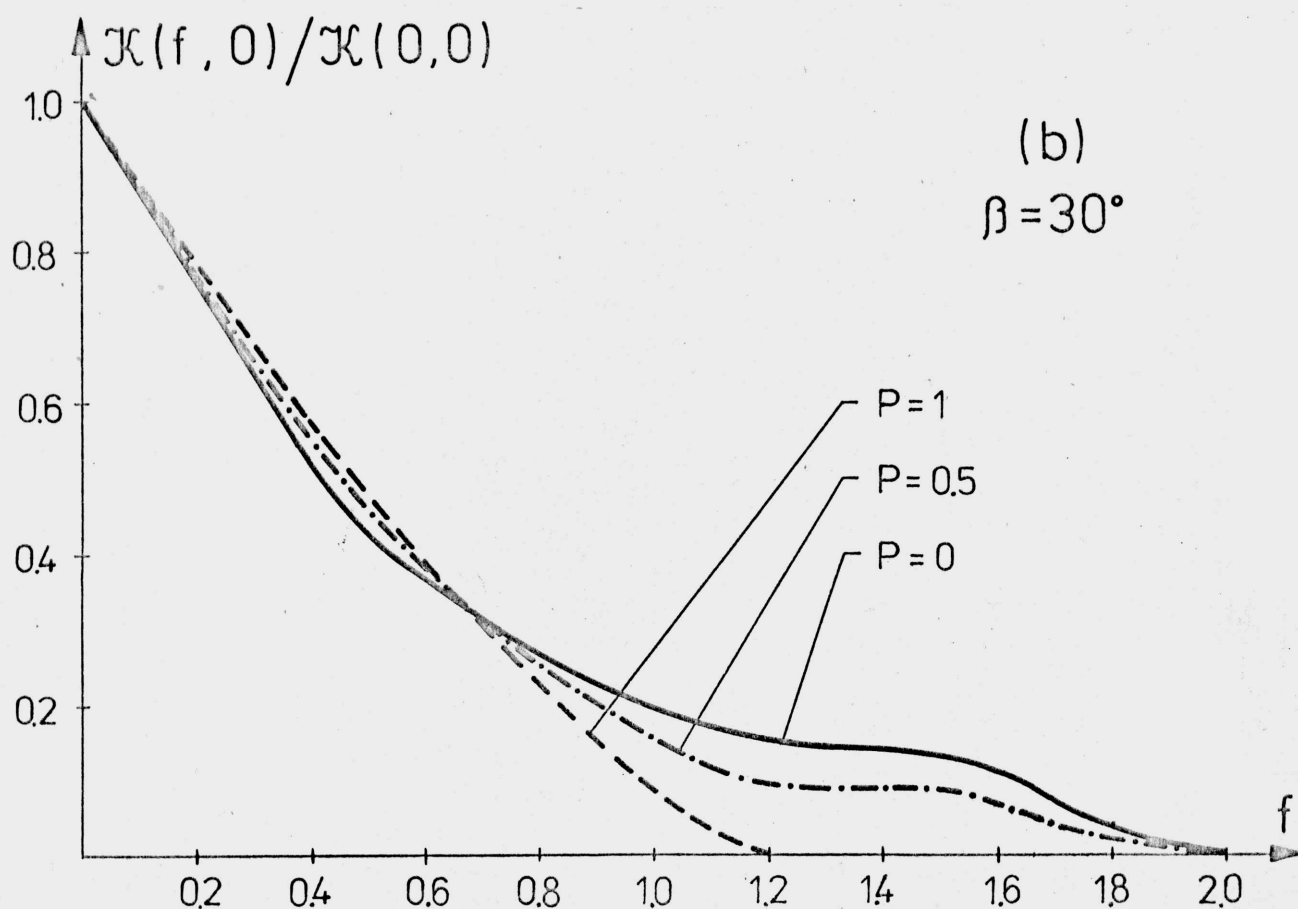
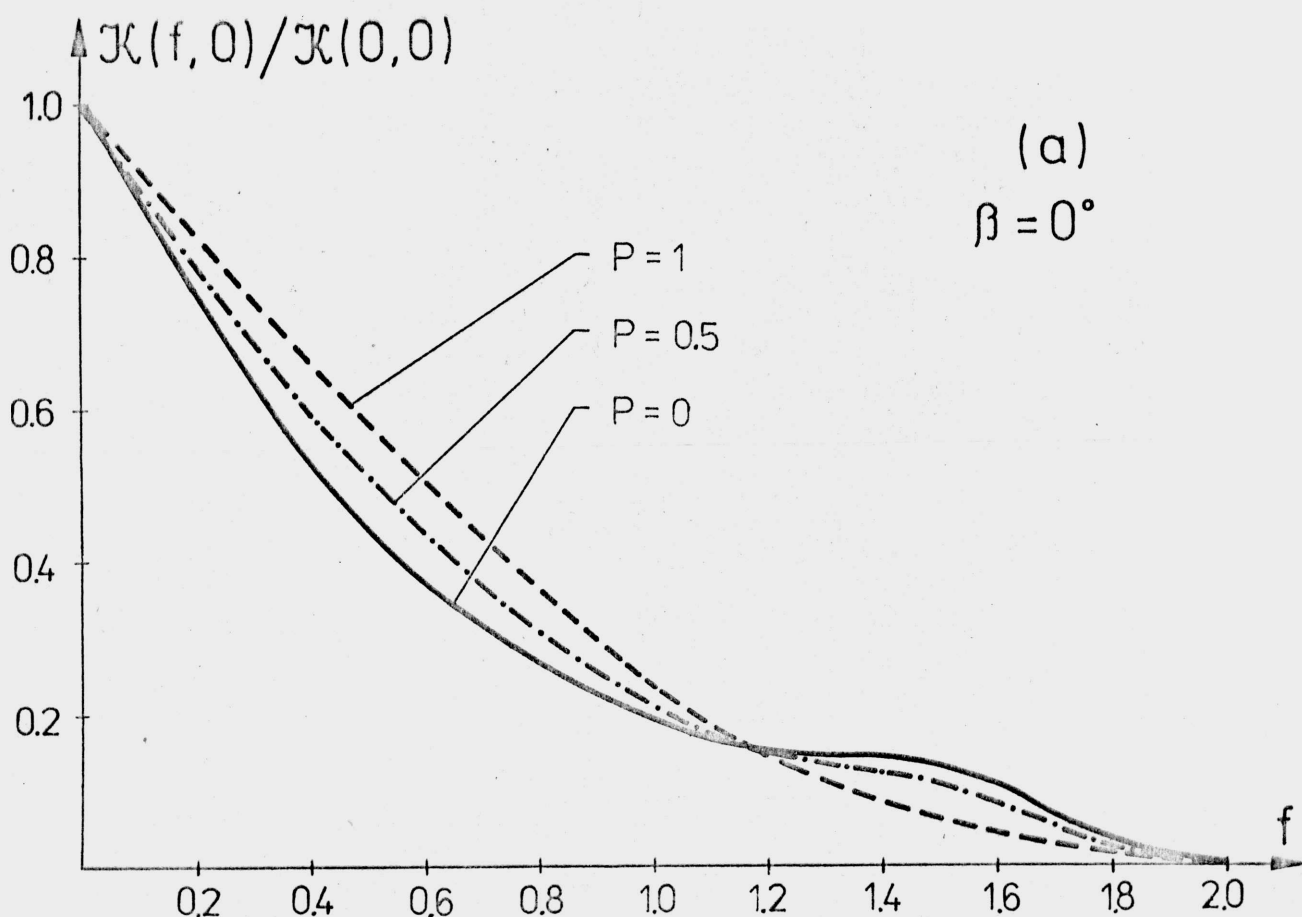
Rys.10.1. Optyczna funkcja przenoszenia /OTF/ dla układu z filtrem polaryzacyjnym o parametrach $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $p = 0.5$. Jedną z krzywych przedstawia OTF dla światła spolaryzowanego liniowo w stopniu $P = 1$ i o azymucie



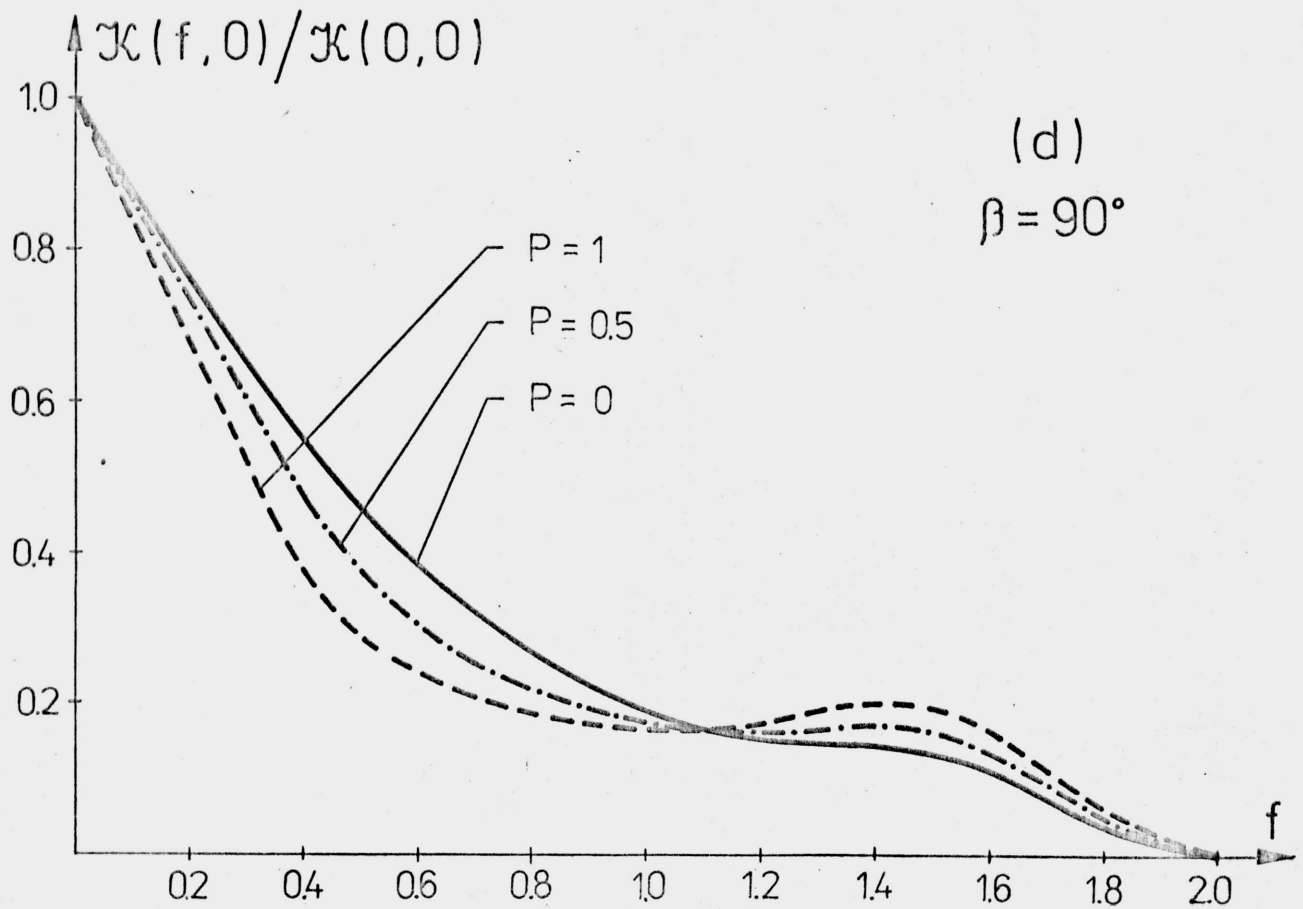
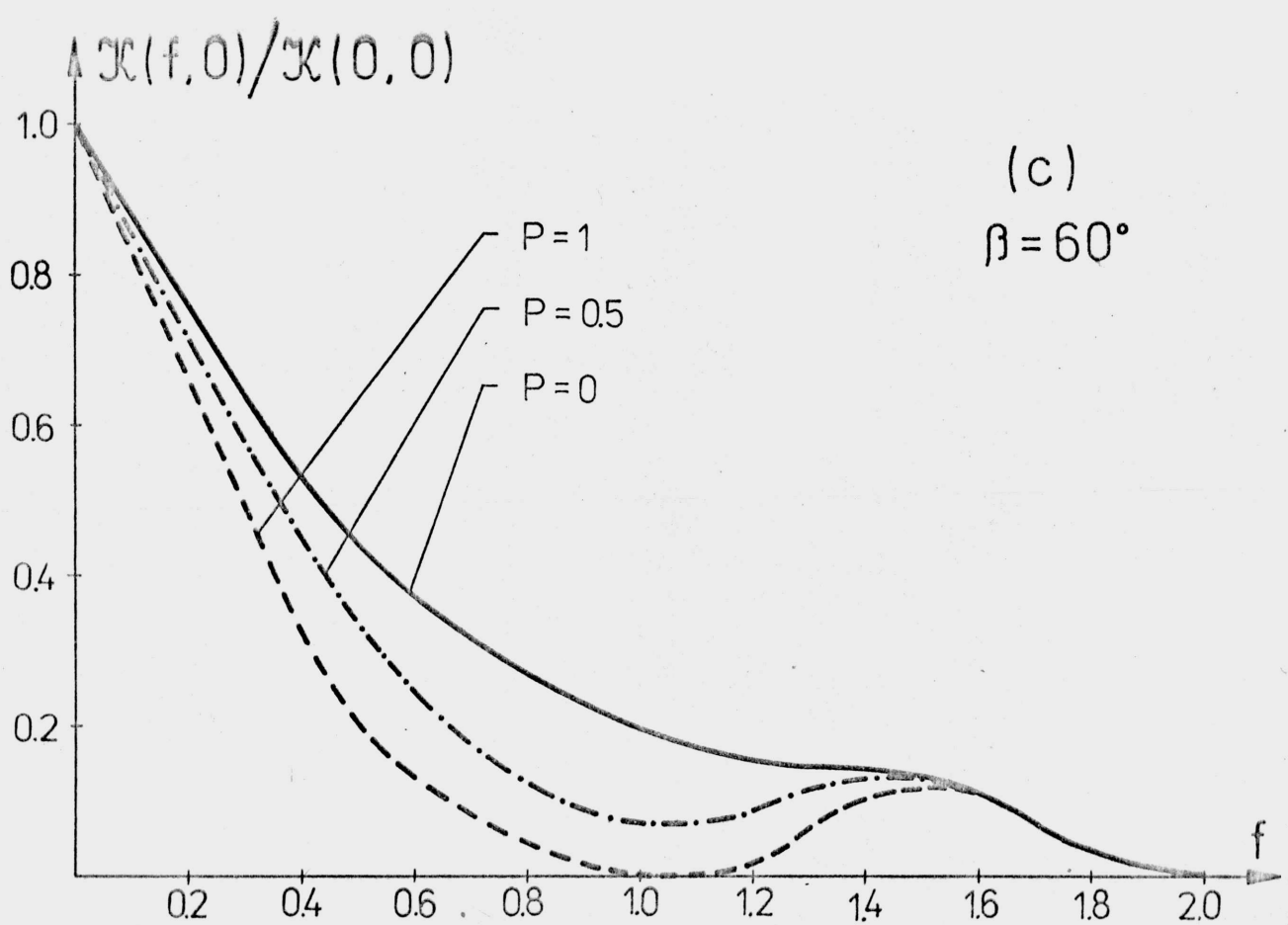
polaryzacji β równym odpowiednio 0° (a), 30° (b), 60° (c), 90° (d), 120° (e), 150° (f). Drugą wykreślono dla takich samych azymutów polaryzacji β lecz dla światła spolaryzowanego



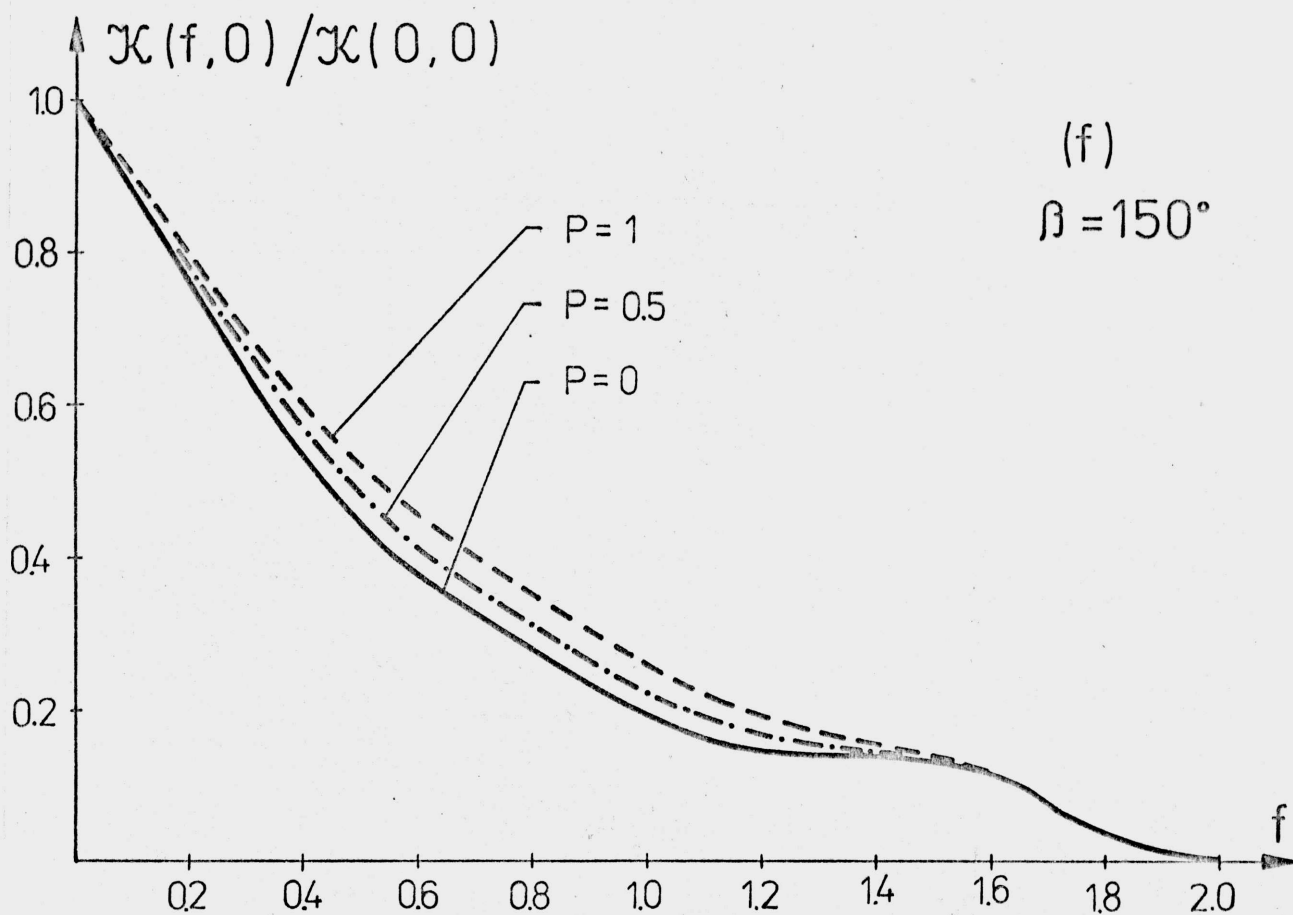
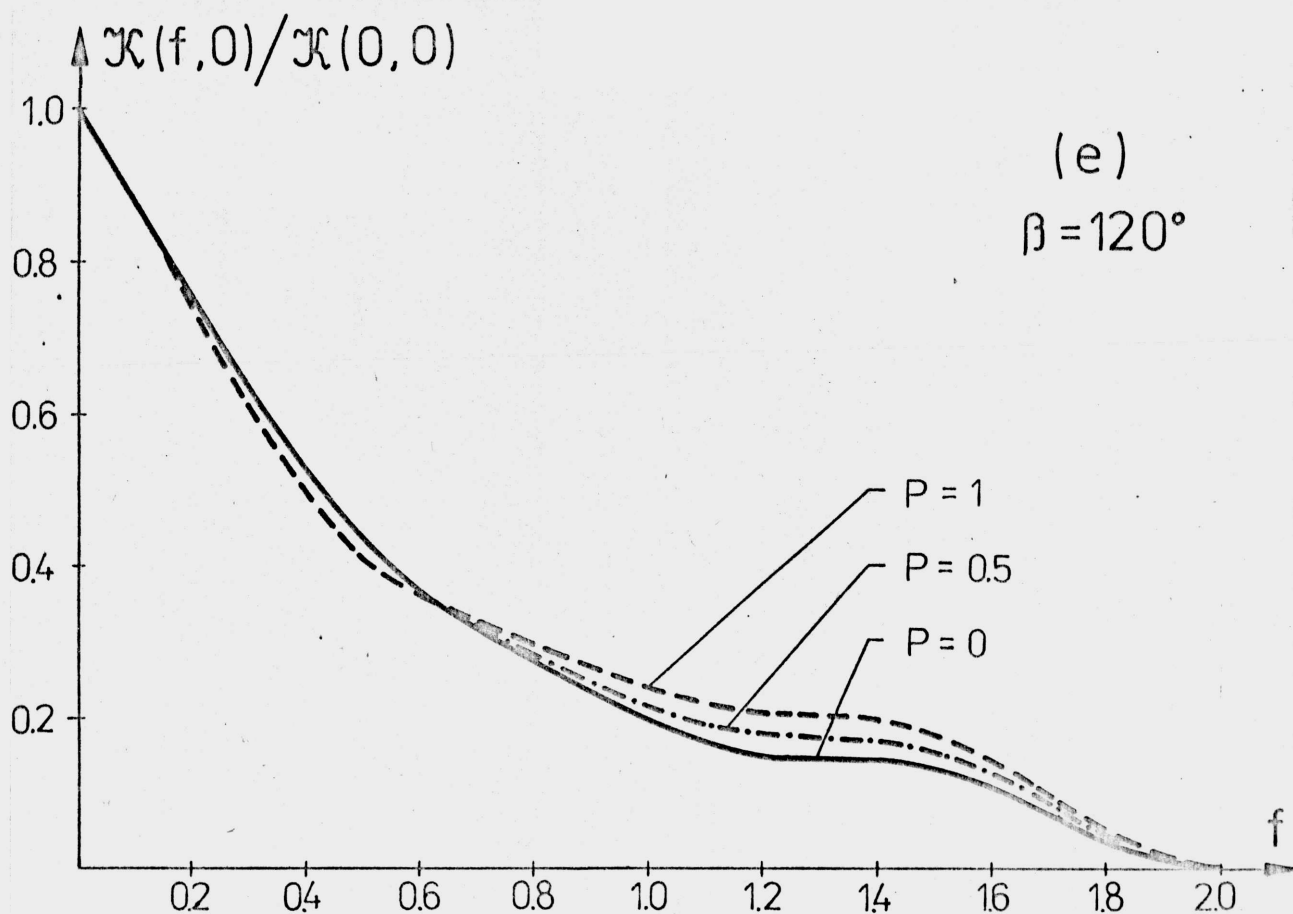
liniowo w stopniu $P = 0.5$. Na każdym z rysunków przedstawiono także OTF dla światła niespolaryzowanego $P = 0$.



Rys.10.2. Optyczna funkcja przenoszenia /OTF/ dla układu z
z filtrem polaryzującym o parametrach $\alpha_1 = 0^\circ$,
 $\alpha_2 = 120^\circ$, $p = 0.6$. Jedną z krzywych przedstawia



OTF dla światła spolaryzowanego liniowo w stopniu $P = 1$ i o azymucie polaryzacji β równym odpowiednio 0° (a), 30° (b), 60° (c), 90° (d), 120° (e), 150° (f). Drugą wykreślono dla takich samych azymutów polaryzacji β lecz dla światła spola-



ryzowanego liniowo w stopniu $P = 0.5$. Na każdym z rysunków przedstawiono także OTF dla światła niespolaryzowanego $P = 0$.

laryzacji światła wchodzącego do układu dla filtru o parametrach $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $p = 0.6$. Podobnie jak na rysunkach 5.1 a-f jedna z krzywych przedstawia optyczną funkcję przenoszenia dla światła spolaryzowanego liniowo w stopniu $P = 1$ o azymutach polaryzacji β równych odpowiednio: 0° (a), 30° (b), 60° (c), 90° (d), 120° (e), 150° (f). Drugą wykreślono dla takich samych azymutów polaryzacji β lecz dla światła spolaryzowanego częściowo w stopniu $P = 0.5$.

Dla porównania na każdym rysunku przedstawiono także optyczną funkcję przenoszenia dla światła niespolaryzowanego $P = 0$.

Krzywe z rysunków 10.2 a-f wyliczone zostały dla takich samych stanów polaryzacji jak odpowiednie krzywe z rysunków 10.1 a-f, lecz dla filtru o innych parametrach $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$, $p = 0.6$.

Podobnie jak rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu, również optyczna funkcja przenoszenia mocno zależy od stanu polaryzacji światła wchodzącego do układu.

11. ROZKŁAD NATĘŻENIA W DYFRAKCYJNYM OBRAZIE DWÓCH PUNKTÓW

Obok rozkładu natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu, jasności Strehla, optycznej funkcji przenoszenia inną ważną wielkością charakteryzującą układy odwzorowujące jest ich zdolność rozdzielcza. Istnieje kilka różnych definicji zdolności rozdzielczej układu, np. zdolność rozdzielcza w sensie Rayleigha, Sparrowa czy Huberta-Hopkinsa. Najczęściej podstawą do ich wyznaczenia jest rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie dwóch punktów. Celem poniższych rozważań jest wyznaczenie tego rozkładu dla punktów emitujących światło o różnych stanach polaryzacji.

Niech w płaszczyźnie przedmiotowej układu odwzorowującego zmieniającego stan polaryzacji znajdują się dwa punktowe źródła światła położone symetrycznie względem osi V_0 w punktach o współrzędnych $(-b, 0)$, $(b, 0)$.

11.1. Przypadek koherentny

Niech wektory $\hat{U}_1$ i $\hat{U}_2$ oznaczają amplitudy w punktach odpowiednio $(-b, 0)$ i $(b, 0)$. Rozkład amplitudy w płaszczyźnie przedmiotowej układu można wtedy przedstawić jako

$$\hat{U}(u_0, v_0) = \hat{U}_1 \delta(u_0 - b, v_0) + \hat{U}_2 \delta(u_0 + b, v_0), \quad (11.1-1)$$

gdzie δ oznacza deltę Diraca.

Dla znalezienia rozkładu amplitudy w płaszczyźnie obrazowej układu wystarczy podstawić (11.1-1) do (10.1-5)

$$\hat{U}'(u_1, v_1) = \hat{h}(u_1 - b, v_1) \hat{U}_1 + \hat{h}(u_1 + b, v_1) \hat{U}_2. \quad (11.1-2)$$

Rozkład macierzy koherencji w płaszczyźnie przedmiotowej
wyraża się wzorem

$$\hat{J}'(u_1, v_1) = \hat{U}'(u_1, v_1) \hat{U}'^\dagger(u_1, v_1) \quad , \quad (11.1-3)$$

co w połączeniu z (11.1-2) daje

$$\begin{aligned} \hat{J}'(u_1, v_1) = & \hat{h}(u_1-b, v_1) \hat{J}_{11} \hat{h}^\dagger(u_1-b, v_1) + \\ & + \hat{h}(u_1+b, v_1) \hat{J}_{22} \hat{h}^\dagger(u_1+b, v_1) + \\ & + \hat{h}(u_1-b, v_1) \hat{J}_{12} \hat{h}^\dagger(u_1+b, v_1) + \\ & + \hat{h}(u_1+b, v_1) \hat{J}_{21} \hat{h}^\dagger(u_1-b, v_1) \quad , \end{aligned} \quad (11.1-3)$$

gdzie

$$\hat{J}_{11} = \hat{U}_1 \hat{U}_1^\dagger \quad , \quad \hat{J}_{22} = \hat{U}_2 \hat{U}_2^\dagger \quad (11.1-4)$$

są macierzami koherencji określającymi stan polaryzacji
światła emitowanego przez punkty $(b, 0)$ i $(-b, 0)$, a

$$\begin{aligned} \hat{J}_{12} = \hat{J}_m(b, 0, -b, 0) &= \hat{U}_1 \hat{U}_2^\dagger \quad , \\ \hat{J}_{21} = \hat{J}_m(-b, 0, b, 0) &= \hat{U}_2 \hat{U}_1^\dagger \end{aligned} \quad (11.1-5)$$

są macierzami koherencji wzajemnej. Ponieważ rozkład natę-
żenia równy jest zawsze śladowi macierzy koherencji, to

$$\begin{aligned} I'(u_1, v_1) = & \text{tr}[\hat{h}(u_1-b, v_1) \hat{J}_{11} \hat{h}^\dagger(u_1-b, v_1)] + \\ & + \text{tr}[\hat{h}(u_1+b, v_1) \hat{J}_{22} \hat{h}^\dagger(u_1+b, v_1)] + \\ & + \text{tr}[\hat{h}(u_1-b, v_1) \hat{J}_{12} \hat{h}^\dagger(u_1+b, v_1)] + \\ & + \text{tr}[\hat{h}(u_1+b, v_1) \hat{J}_{21} \hat{h}^\dagger(u_1-b, v_1)] \quad . \end{aligned} \quad (11.1-6)$$

Ze względu na fakt, że ślad macierzy jest nieczuły na operację transponowania (tw.2.2-3) oraz

$$\hat{J}_{21}^* = \hat{J}_{12}^{TR}, \quad (11.1-7)$$

dwa ostatnie wyrazy we wzorze (11.1-6) są wzajemnie sprzężone

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left[\hat{h}(u_1-b, v_1) \hat{J}_{12} \hat{h}^\dagger(u_1+b, v_1) \right] = \\ & = \text{tr} \left[\hat{h}(u_1-b, v_1) \hat{J}_{12} \hat{h}^\dagger(u_1+b, v_1) \right]^{TR} = \\ & = \text{tr} \left[\hat{h}^*(u_1+b, v_1) \hat{J}_{12}^{TR} \hat{h}(u_1-b, v_1) \right] = \\ & = \text{tr} \left[\hat{h}(u_1+b, v_1) \hat{J}_{21} \hat{h}^\dagger(u_1-b, v_1) \right]. \end{aligned} \quad (11.1-8)$$

Ostateczna postać wzoru określającego rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie dwóch punktów dla układów zmieniających stan polaryzacji światła jest więc następująca

$$\begin{aligned} I'(u_1, v_1) = & \text{tr} \left[\hat{h}(u_1-b, v_1) \hat{J}_{11} \hat{h}^\dagger(u_1-b, v_1) \right] + \\ & + \text{tr} \left[\hat{h}(u_1+b, v_1) \hat{J}_{22} \hat{h}^\dagger(u_1+b, v_1) \right] + \\ & + 2\text{Re} \left\{ \text{tr} \left[\hat{h}(u_1-b, v_1) \hat{J}_{12} \hat{h}^\dagger(u_1+b, v_1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.1-9)$$

W szczególnym przypadku, gdy $\hat{U}_1 = \hat{U}_2$ zachodzi

$$\hat{J}_{11} = \hat{J}_{22} = \hat{J}_{12} = \hat{J}_{21} = \hat{J}, \quad (11.1-10)$$

a wzór określający rozkład natężenia przyjmuje postać

$$\begin{aligned} I'(u_1, v_1) = & \text{tr} \left[\hat{h}(u_1-b, v_1) \hat{J} \hat{h}^\dagger(u_1-b, v_1) \right] + \\ & + \text{tr} \left[\hat{h}(u_1+b, v_1) \hat{J} \hat{h}^\dagger(u_1+b, v_1) \right] + \\ & + 2\text{Re} \left\{ \text{tr} \left[\hat{h}(u_1-b, v_1) \hat{J} \hat{h}^\dagger(u_1+b, v_1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.1-11)$$

11.2. Przypadek niekoherentny

Aby wyznaczyć rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie dwóch punktów, w przypadku ich pełnej niekoherencji, można posłużyć się ogólną zależnością (10.2-12). Zauważmy, że rozkład macierzy koherencji w płaszczyźnie przedmiotowej da się przedstawić następująco

$$\hat{J}(u_0, v_0) = \hat{J}_{11} \delta(u_0 - b, v_0) + \hat{J}_{22} \delta(u_0 + b, v_0), \quad (11.2-1)$$

gdzie $\hat{J}_{11}$ i $\hat{J}_{22}$ są macierzami koherencji światła emitowanego przez punkty $(b, 0)$ i $(-b, 0)$. Podstawiając (11.2-1) do (10.2-12) otrzymuje się

$$\begin{aligned} I'(u_1, v_1) = & \text{tr} \left[\hat{h}(u_1 - b, v_1) \hat{J}_{11} \hat{h}^\dagger(u_1 - b, v_1) \right] + \\ & + \text{tr} \left[\hat{h}(u_1 + b, v_1) \hat{J}_{22} \hat{h}^\dagger(u_1 + b, v_1) \right]. \end{aligned} \quad (11.2-2)$$

W przypadku niekoherentnym rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie dwóch punktów, a więc i zdolność rozdzielcza zależy nie tylko od własności układu odwzorowującego (macierz $\hat{h}(u_1, v_1)$) ale również od stanów polaryzacji światła emitowanego przez te punkty (macierze $\hat{J}_{11}$, $\hat{J}_{22}$).

W przypadku koherentnym zależy on dodatkowo od macierzy koherencji wzajemnej $\hat{J}_{12}$.

12. PORÓWNANIE MACIERZOWEGO I SKALARNEGO OPISU DLA UKŁADÓW ODWZOROWUJĄCYCH NIE ZMIENIAJĄCYCH STANU POLARYZACJI ŚWIATŁA

Klasyczne układy odwzorowujące (nie zmieniające stanu polaryzacji światła) można traktować jako szczególny przypadek klasy układów zmieniających stan polaryzacji światła. Macierzowy formalizm wprowadzony w poprzednich rozdziałach można zatem stosować także do opisu własności układów klasycznych. Celowe wydaje się więc porównanie macierzowego opisu układów klasycznych z ich opisem opartym na skalarnej teorii dyfrakcji - opisem skalarnym.

Porównanie takie przeprowadzono dla ważniejszych wyników przedstawionych w rozdziałach 4-11.

Gdy układ odwzorowujący nie zmienia stanu polaryzacji światła, to punktowy sygnał emitujący światło liniowo spolaryzowane implikuje odpowiedź układu spolaryzowaną w taki sam sposób. W źrenicy wyjściowej nie pojawią się więc fronty falowe typu $\sum_{xy}$ oraz $\sum_{yx}$ i w konsekwencji

$$H_{xy}(\xi, \eta) = H_{yx}(\xi, \eta) = 0 \quad . \quad (12-1)$$

Poza tym, odpowiedź układu nie zależy od azymutu polaryzacji co oznacza, że

$$H_{xx}(\xi, \eta) = H_{yy}(\xi, \eta) = H(\xi, \eta) \quad . \quad (12-2)$$

Macierzową funkcję źrenicową układu nie zmieniającego stanu polaryzacji można więc zapisać jako

$$\hat{H}(\xi, \eta) = H(\xi, \eta) \begin{bmatrix} 1 & ; & 0 \\ 0 & ; & 1 \end{bmatrix}, \quad (12-3)$$

gdzie $H(\xi, \eta)$ jest funkcją źrenicową używaną w skalarnym opisie układów odwzorowujących. Analogicznie da się przedstawić macierzowa funkcja rozmycia amplitudy

$$\hat{h}(u_1, v_1) = h(u_1, v_1) \begin{bmatrix} 1 & ; & 0 \\ 0 & ; & 1 \end{bmatrix}, \quad (12-4)$$

oraz macierzowa funkcja transmisji amplitudy

$$\hat{T}(\xi, \eta) = T(\xi, \eta) \begin{bmatrix} 1 & ; & 0 \\ 0 & ; & 1 \end{bmatrix}, \quad (12-5)$$

gdzie $h(u_1, v_1)$ i $T(\xi, \eta)$ są odpowiednio funkcjami rozmycia amplitudy oraz transmisji modułu amplitudy (chodzi o transmisję pomiędzy źrenicą wejściową a wyjściową) używanymi w opisie skalarnym.

Przyjmujemy, iż aberracje nie istniejących frontów falowych $\sum_{xy}$, $\sum_{yx}$ równe są zero, tak więc macierzowa funkcja aberracji przyjmuje postać

$$\hat{\Phi}(\xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta) \begin{bmatrix} 1 & ; & 0 \\ 0 & ; & 1 \end{bmatrix}, \quad (12-6)$$

gdzie $\Phi(\xi, \eta)$ jest aberracją falową układu klasycznego.

Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy oznaczenie

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 1 & ; & 0 \\ 0 & ; & 1 \end{bmatrix}. \quad (12-7)$$

Rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu dla układów zmieniających stan polaryzacji światła wyraża się wzorem (5-14)

$$K(u_1, v_1) = \text{tr} \left[\hat{h}(u_1, v_1) \hat{J}_0^{\dagger} \hat{h}(u_1, v_1) \right] . \quad (12-8)$$

Aby otrzymać rozkład natężenia dla układów nie zmieniających stanu polaryzacji światła za macierz $\hat{h}(u_1, v_1)$ należy podstawić wyrażenie (12-4)

$$K(u_1, v_1) = \text{tr} \left[\left| \hat{h}(u_1, v_1) \right|^2 \hat{E} \hat{J}_0^{\dagger} \hat{E} \right] . \quad (12-9)$$

Ponieważ $\hat{E}^{\dagger} = \hat{E}$ oraz $\text{tr} \hat{J}_0 = \text{tr} \hat{E} \hat{J}_0 = \text{tr} \hat{J}_0 \hat{E} = 1$, to otrzymuje się

$$K(u_1, v_1) = \left| \hat{h}(u_1, v_1) \right|^2 . \quad (12-10)$$

Jasność Strehla układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła wyraża się wzorem (6-9)

$$SR = \text{tr} \left[\langle \hat{H} \rangle \hat{J}_0^{\dagger} \langle \hat{H} \rangle^{\dagger} \right] . \quad (12-11)$$

Podstawiając wyrażenie (12-3) za macierzową funkcję źrenicową otrzymuje się wzór na jasność Strehla układów nie zmieniających stanu polaryzacji światła

$$SR = \left| \langle \hat{H} \rangle \right|^2 \text{tr} \hat{J}_0 , \quad (12-12)$$

a ponieważ $\text{tr} \hat{J}_0 = 1$, to

$$SR = \left| \langle \hat{H} \rangle \right|^2 . \quad (12-13)$$

Wzory określające rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu (12-10) oraz jasność Strehla układu (12-13) są identyczne z odpowiednimi wzorami wyprowadzonymi na

gruncie skalarnej teorii dyfrakcji [38] .

Przybliżenie Maréchała jasności Strehla dla układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła ma następującą postać (8-11)

$$SR = \text{tr}[\langle \hat{T} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{TR}] - \bar{k}^2 \left\{ \text{tr}[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{TR}] - \text{tr}[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle^{TR}] \right\}. \quad (12-14)$$

Podstawiając (12-5) za macierzową funkcję transmisji amplitudy oraz (12-6) za macierzową funkcję aberracji otrzymuje się

$$SR = |\langle T \rangle|^2 - \bar{k}^2 \left\{ \langle T \bar{\Phi}^2 \rangle - \langle T \Phi \rangle^2 \right\}, \quad (12-15)$$

co jest ogólnie znanym przybliżeniem Maréchała dla klasycznych układów z transmisją modułu amplitudy $T(\xi, \eta)$.

W przypadku gdy transmisja modułu amplitudy pomiędzy źrenicami równa jest jedności otrzymuje się jeszcze bardziej znaną wersję przybliżenia Maréchała dla jasności Strehla [38]

$$SR = 1 - \bar{k}^2 \left\{ \langle \bar{\Phi}^2 \rangle - \langle \Phi \rangle^2 \right\}. \quad (12-16)$$

Układ równań określający optymalne wartości parametrów q_1, q_2, q_3 dla układów zmieniających stan polaryzacji światła ma następującą postać (9-13)

$$\hat{B} \hat{Q} = \hat{C}, \quad (12-17)$$

gdzie

$$[B]_{ij} = \text{tr}[\langle \hat{T} a_i \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} a_j \rangle^{TR}] - \text{tr}[\langle \hat{T} a_i a_j \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{TR}]$$

dla $i, j = 1, 3$,

$$[\hat{C}]_i = \text{tr}[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} a_i \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} \rangle^{\text{TR}}] - \text{tr}[\langle \hat{T} \nabla \hat{\Phi} \rangle \hat{D}_0 \langle \hat{T} a_i \rangle^{\text{TR}}] \\ \text{dla } i = 1, 3, \quad (12-18)$$

$$[\hat{Q}]_i = q_i \quad \text{dla } i = 1, 3.$$

Podstawiając do powyższych zależności (12-5) oraz (12-6) otrzymuje się liniowy układ równań określający optymalne wartości parametrów q_1, q_2, q_3 dla układów nie zmieniających stanu polaryzacji światła

$$[\hat{B}]_{ij} = \langle T a_i \rangle \langle T a_j \rangle - \langle T a_i a_j \rangle \langle T \rangle \\ \text{dla } i, j = 1, 3,$$

$$[\hat{C}]_i = \langle T \Phi a_i \rangle \langle T \rangle - \langle T \Phi \rangle \langle T a_i \rangle \quad (12-19) \\ \text{dla } i = 1, 3,$$

$$[\hat{Q}]_i = q_i \quad \text{dla } i = 1, 3.$$

Jest on identyczny z odpowiednim układem równań wyprowadzonym na gruncie skalarnej teorii dyfrakcji [48].

Optyczną funkcję przenoszenia dla układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła można przedstawić jako (10.2-22)

$$\mathcal{K}(f, g) = |c|^2 \text{tr}[\hat{H}(f, g) \hat{J}_0 \odot \hat{H}(f, g)] \quad (12-20)$$

Podstawiając za macierzową funkcję źrenicową wyrażenie (12-3) otrzymuje się

$$\mathcal{K}(f, g) = |c|^2 H(f, g) \odot H(f, g), \quad (12-21)$$

co jest ogólnie znanym wzorem [38] na optyczną funkcję

przenoszenia układów nie zmieniających stanu polaryzacji światła.

Podsumowując stwierdzić można, że macierzowy formalizm wprowadzony do opisu własności układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła jest naturalnym uogólnieniem skalarne go opisu stosowanego do układów nie zmieniających stanu polaryzacji światła.

13. ODWZOROWANIE PRZEDMIOTÓW DYFUZYJNYCH W ŚWIECIE KOHERENTNYM^{*)}

Koherentne promieniowanie elektromagnetyczne rozproszone od przedmiotów dyfuzyjnych charakteryzuje się strukturą ziarnistą. Ziarnistość ta nazywana bywa w optyce efektem plamkowym, a czasem speklowym. W ciągu ostatnich piętnastu lat była ona przedmiotem intensywnych badań. Ukazało się w tym czasie około trzystu publikacji oraz kilka opracowań monograficznych [58-60]. W badaniach związanych z efektem plamkowym można aktualnie wyróżnić cztery główne kierunki:

- (1) badanie podstawowych statystycznych własności struktur plamkowych;
- (2) zastosowanie efektu plamkowego do pomiaru chropowatości powierzchni rozpraszających;
- (3) zastosowanie efektu plamkowego do pomiaru deformacji i pomieszczeń powierzchni rozpraszających (interferometria plamkowa) ;
- (4) zastosowanie efektu plamkowego w astronomii i optycznym przetwarzaniu informacji.

Efekt plamkowy towarzyszy nie tylko zjawisku rozpraszania lecz powstaje również przy odwzorowaniu przedmiotów dyfuzyjnych w świetle koherentnym. Na tle regularnych zmian

^{*)} Materiał przedstawiony w tym rozdziale został częściowo opublikowany w [57].

natężenia związanych z odpowiednimi zmianami transmitancji przedmiotu widoczne są wtedy przypadkowe zmiany natężenia o wysokich częstościach przestrzennych i silnym kontraście wywołane nieregularnym rozkładem fazy na powierzchni przedmiotu. Jeżeli przedmiotem zainteresowania są regularne zmiany natężenia, to efekt plamkowy może być traktowany jako szum zniekształcający informację zawartą w obrazie przedmiotu dyfuzyjnego.

Kilku autorów podjęło problem określenia statystycznych własności szumu plamkowego. W pracy [61] Enloe wyznaczył podstawowe wielkości statystyczne charakteryzujące rozkład amplitudy zespolonej i natężenia w koherentnym obrazie jednorodnego dyfuzora (matówki). Wyniki te zostały następnie uogólnione przez Lowenthala i Arsenaulta [62] na przypadek niejednorodnych*) przedmiotów dyfuzyjnych, a później przez Ichioka [63] również na przypadek przedmiotów częściowo koherentnych. Błędy które znalazły się w pracy Lowenthala i Arsenaulta sprostowano w [64].

W niniejszym rozdziale określono statystyczne własności rozkładu amplitudy zespolonej i natężenia w obrazach powstających przy odwzorowaniu w świetle koherentnym niejednorodnych przedmiotów dyfuzyjnych przy zastosowaniu układów zmieniających stan polaryzacji światła. W szczególności wyznaczono wartość średnią i autokorelację amplitudy zespolonej

*) Terminu niejednorodny użyto dla podkreślenia, iż transmitancja przedmiotu jest funkcją współrzędnych.

w płaszczyźnie obrazowej układu. Następnie wyznaczono rozkład średniego natężenia w płaszczyźnie obrazowej, a także jego autokorelację i wariancję. Na podstawie autokorelacji rozkładu natężenia można określić kształt średniej plamki w dowolnym punkcie płaszczyzny obrazowej. Wariancja rozkładu natężenia jest natomiast dobrą miarą "głębokości" przypadkowych zmian natężenia związanych z efektem plamkowym.

13.1. Statystyczny model przedmiotu

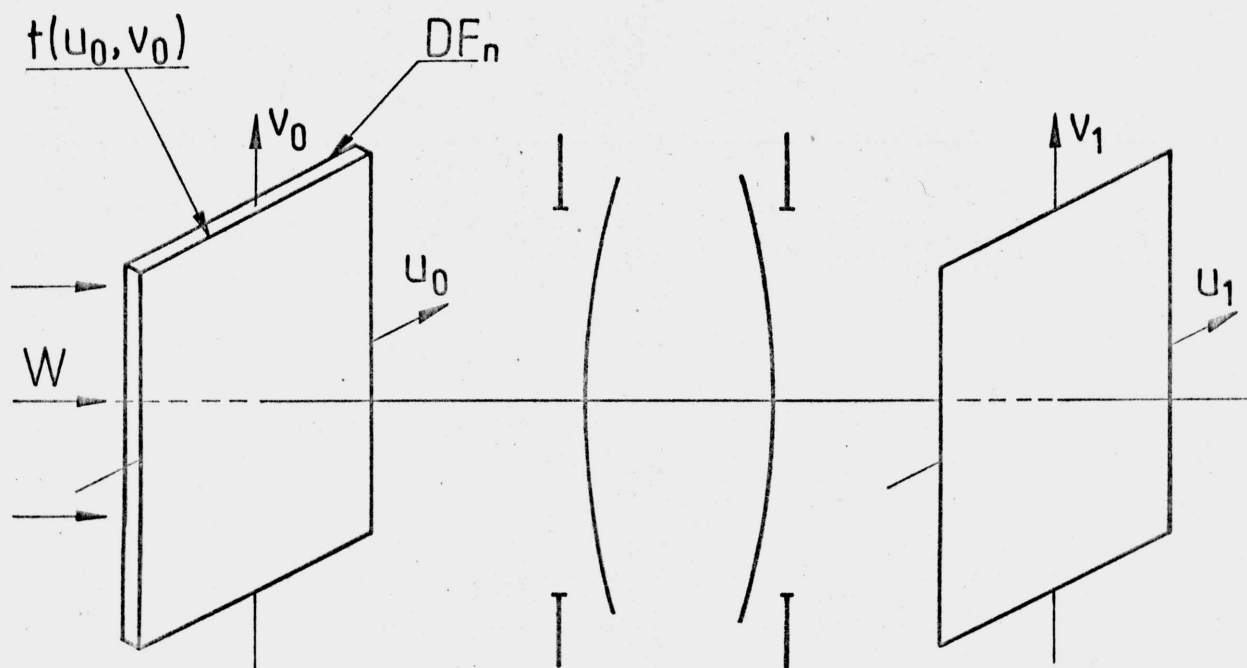
Rys.13.1 przedstawia układ odwzorowujący zmieniający stan polaryzacji światła. W płaszczyźnie przedmiotowej układu znajduje się przedmiot dyfuzyjny oświetlony wiązką światła koherentnego W . Rozważania zostaną ograniczone tylko do takich przedmiotów dyfuzyjnych, które mogą być traktowane jako złożenie jednorodnego dyfuzora DF_n z niejednorodnym przedmiotem amplitudowo-fazowym o zespolonej transmitancji $t(u_o, v_o)$.

Niech wektor

$$\hat{d}_n(u_o, v_o) = \begin{bmatrix} d_x(u_o, v_o) \\ d_y(u_o, v_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |d_x(u_o, v_o)| \exp i \varphi_x(u_o, v_o) \\ |d_y(u_o, v_o)| \exp i \varphi_y(u_o, v_o) \end{bmatrix} \quad (13.1-1)$$

reprezentuje rozkład składowej x-owej i y-owej amplitudy zespolonej w płaszczyźnie dyfuzora DF_n .

Założmy dla celów modelowych, iż dysponujemy zbiorem dyfuzorów DF wykonanych tą samą technologią i że istnieje



Rys.13.1. Układ odwzorowujący zmieniający stan polaryzacji światła. Wybór układów odniesienia i oznaczeń.

możliwość wymiany poszczególnych egzemplarzy dyfuzora DF_n w płaszczyźnie przedmiotowej układu. Podejście takie pozwala traktować rodzinę funkcji $\hat{d}(u_0, v_0)$ opisujących rozkład amplitudy na dyfuzorach jako dwuwymiarowy proces stochastyczny, a rozkład amplitudy $\hat{d}_n(u_0, v_0)$ na konkretnym dyfuzorze jako pewną realizację tego procesu [65].

Dla najbardziej typowych dyfuzorów proces stochastyczny $\hat{d}(u_0, v_0)$ posiada następujące własności statystyczne:

- (1) obie składowe kartezjańskie amplitudy zespolonej $d_x(u_0, v_0)$ i $d_y(u_0, v_0)$ są stacjonarne i ergodyczne;

(ii) zmienne losowe $\varphi_x(u_o, v_o)$ i $\varphi_y(u_o, v_o)$ charakteryzują się jednostajnym rozkładem gęstości prawdopodobieństwa w przedziale $[-\pi, \pi]$;

(iii) pary zmiennych losowych $|d_x(u_o, v_o)|$ i $\varphi_x(u_o, v_o)$, a także $|d_y(u_o, v_o)|$ i $\varphi_y(u_o, v_o)$ są statystycznie niezależne.

Ze względu na własności (ii) oraz (iii) wartość średnia amplitudy zespolonej $\hat{d}(u_o, v_o)$ w dowolnym punkcie (u_o, v_o) równa jest zero

$$E\{\hat{d}(u_o, v_o)\} = \begin{bmatrix} E\{d_x(u_o, v_o)\} \\ E\{d_y(u_o, v_o)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\{|d_x(u_o, v_o)|\} E\{\exp i \varphi_x(u_o, v_o)\} \\ E\{|d_y(u_o, v_o)|\} E\{\exp i \varphi_y(u_o, v_o)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (13.1-2)$$

gdzie $E\{\dots\}$ oznacza uśrednianie po zbiorze dyfuzorów DF .

Dla pełnej statystycznej charakterystyki procesu $\hat{d}(u_o, v_o)$ należy znać także jego macierz autokorelacji $\hat{R}_d(u_o, v_o, u_o', v_o')$ rozumianą jako

$$\hat{R}_d(u_o, v_o, u_o', v_o') = E\{\hat{d}(u_o, v_o) \hat{d}^*(u_o', v_o')\} = \begin{bmatrix} E\{d_x(u_o, v_o) d_x^*(u_o', v_o')\} ; E\{d_x(u_o, v_o) d_y^*(u_o', v_o')\} \\ E\{d_y(u_o, v_o) d_x^*(u_o', v_o')\} ; E\{d_y(u_o, v_o) d_y^*(u_o', v_o')\} \end{bmatrix} . \quad (13.1-3)$$

Z założenia, że proces stochastyczny $\hat{d}(u_o, v_o)$ jest stacjonarny (i) wynika, że jego macierz autokorelacji jest funkcją tylko różnicy współrzędnych $\hat{R}_d(u_o - u'_o, v_o - v'_o)$.

Dalsze rozważania zostaną ograniczone tylko do takich klas dyfuzorów DF, dla których średnia szerokość pojedynczego elementu rozpraszającego jest znacznie mniejsza niż szerokość głównego maksimum rozkładu natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu. W takim przypadku możliwe jest traktowanie dyfuzora DF_n jako zbioru statystycznie niezależnych punktowych rozpraszaczy. Uzasadnia to przyjęcie następującego przybliżenia dla macierzy autokorelacji procesu $\hat{d}(u_o, v_o)$

$$\hat{R}_d(u_o - u'_o, v_o - v'_o) = \hat{R} \delta(u_o - u'_o, v_o - v'_o), \quad (13.1-4)$$

gdzie $\delta(u_o - u'_o, v_o - v'_o)$ oznacza dwuwymiarową deltę Diraca, a macierz $\hat{R}$ dana jest wzorem

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} E\{|d_x(u_o, v_o)|^2\}; E\{d_x(u_o, v_o) d_y^*(u_o, v_o)\} \\ E\{d_y(u_o, v_o) d_x^*(u_o, v_o)\}; E\{|d_y(u_o, v_o)|^2\} \end{bmatrix}. \quad (13.1-5)$$

Jednakże oprócz stacjonarności (i) założono także ergodyczność procesu stochastycznego $\hat{d}(u_o, v_o)$. Oznacza to w praktyce, iż średnia z dowolnej wielkości po zbiorze dyfuzorów DF staje się równa średniej tej wielkości po powierzchni każdego konkretnego dyfuzora DF_n . Zachodzi zatem

$$\hat{R} = E\{\hat{J}(u_o, v_o)\} = \lim_{s_d \rightarrow \infty} \frac{1}{s_d} \int_{\hat{S}_d} \hat{J}(u_o, v_o) du_o dv_o, \quad (13.1-6)$$

gdzie s_d jest powierzchnią dyfuzora. Macierz $\hat{R}$ opisuje więc średni stan polaryzacji światła emitowanego przez powierzchnię dowolnego dyfuzora DF_n .

Rozważania ograniczone zostały tylko do takich przedmiotów dyfuzyjnych, które mogą być traktowane jako złożenie jednorodnego dyfuzora z niejednorodnym przedmiotem amplitudowo-fazowym o transmitancji $t(u_o, v_o)$. Tak więc rozkład amplitudy zespolonej w płaszczyźnie przedmiotowej układu dany jest wzorem

$$\hat{U}(u_o, v_o) = t(u_o, v_o) \hat{d}(u_o, v_o) \quad (13.1-7)$$

Uwzględniając zależność (13.1-2) można łatwo zauważyć, że

$$\begin{aligned} E\{\hat{U}(u_o, v_o)\} &= E\{t(u_o, v_o) \hat{d}(u_o, v_o)\} = \\ &= t(u_o, v_o) E\{\hat{d}(u_o, v_o)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.1-8) \end{aligned}$$

tj., że średnia z amplitudy zespolonej w dowolnym punkcie płaszczyzny przedmiotowej równa jest zero.

Macierz autokorelacji amplitudy w płaszczyźnie przedmiotowej można zapisać jako

$$\begin{aligned} \hat{R}_U(u_o, v_o, u'_o, v'_o) &= E\{\hat{U}(u_o, v_o) \hat{U}^*(u'_o, v'_o)\} = \\ &= t(u_o, v_o) t^*(u'_o, v'_o) E\{\hat{d}(u_o, v_o) \hat{d}^*(u'_o, v'_o)\}, \end{aligned} \quad (13.1-9)$$

a po podstawieniu (13.1-4) otrzymuje się

$$\hat{R}_U(u_o, v_o, u'_o, v'_o) = \hat{R} t(u_o, v_o) t^*(u'_o, v'_o) \delta(u_o - u'_o, v_o - v'_o) \quad (13.1-10)$$

Pomimo, że rozkład amplitudy zespolonej $\hat{d}(u_o, v_o)$ w płaszczyźnie dyfuzora jest stacjonarnym procesem stochastycznym, to rozkład amplitudy $\hat{U}(u_o, v_o)$ w płaszczyźnie przedmio-

towej układu nie jest już stacjonarnym procesem stochastycznym. Wynika to z faktu, iż transmitacja $t(u_o, v_o)$ jest funkcją współrzędnych (przedmiot niejednorodny).

Natężenie równe jest zawsze śladowi z macierzy koherencji, tak więc rozkład natężenia w płaszczyźnie przedmiotowej układu wyraża się wzorem

$$I(u_o, v_o) = \text{tr} [\hat{U}(u_o, v_o) \hat{U}^+(u_o, v_o)]. \quad (13.1-11)$$

Dla wyznaczenia rozkładu średniego natężenia w płaszczyźnie przedmiotowej $E\{I(u_o, v_o)\}$ posłużyć się można zależnościami (13.1-9) i (13.1-10)

$$\begin{aligned} E\{I(u_o, v_o)\} &= E\left\{\text{tr} [\hat{U}(u_o, v_o) \hat{U}^+(u_o, v_o)]\right\} = \\ &= \text{tr} \left[E\left\{ \hat{U}(u_o, v_o) \hat{U}^+(u_o, v_o) \right\} \right] = \text{tr} \left[\hat{R}_U(u_o, v_o) \right] = \\ &= |t(u_o, v_o)|^2 \text{tr} \hat{R}. \end{aligned} \quad (13.1-12)$$

13.2. Statystyczne własności amplitudy zespolonej w płaszczyźnie obrazowej

W rozdziale tym wyznaczone zostaną średnia oraz macierz autokorelacji amplitudy zespolonej w płaszczyźnie obrazowej układu. Ponieważ detekcja amplitudy zespolonej nie jest możliwa powyższe wielkości nie mają większego znaczenia praktycznego. Macierz autokorelacji amplitudy będzie jednak bardzo pomocna przy określaniu statystycznych własności rozkładu natężenia w płaszczyźnie obrazowej.

Związek pomiędzy rozkładem amplitudy zespolonej w płaszczyznach przedmiotowej i obrazowej dla koherentnych układów

odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła określony jest równaniem (10.1-5)

$$\hat{U}'(u_1, v_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \hat{U}(u_0, v_0) du_0 dv_0 \quad (13.2-1)$$

lub w notacji symbolicznej

$$\hat{U}'(u_1, v_1) = \hat{h}(u_1, v_1) \otimes \hat{U}(u_1, v_1) \quad (13.2-2)$$

Ponieważ $\hat{U}(u_0, v_0)$ jest dwuwymiarowym procesem stochastycznym, to rozkład amplitudy zespolonej w płaszczyźnie obrazowej układu $\hat{U}'(u_1, v_1)$ można również traktować jako dwuwymiarowy proces stochastyczny.

Uwzględniając (13.1-8) można łatwo wykazać, iż średnia amplituda w dowolnym punkcie płaszczyzny obrazowej, podobnie jak w płaszczyźnie przedmiotowej, równa jest zero

$$\begin{aligned} E\{\hat{U}'(u_1, v_1)\} &= E\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \hat{U}(u_0, v_0) du_0 dv_0\right\} = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) E\{\hat{U}(u_0, v_0)\} du_0 dv_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.2-3) \end{aligned}$$

W powyższych przekształceniach wykorzystano przemienność operacji uśredniania $E\{\dots\}$ z całkowaniem [65].

Wyznamy także macierz autokorelacji amplitudy w płaszczyźnie obrazowej

$$\hat{R}_{U'}(u_1, v_1, u_1', v_1') = E\{\hat{U}'(u_1, v_1) \hat{U}'^*(u_1', v_1')\} \quad (13.2-4)$$

Po podstawieniu (13.2-1) do powyższego równania otrzymuje się

$$\begin{aligned} \hat{R}_U(u_1, v_1, u'_1, v'_1) &= E \left\{ \iiint \hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \hat{U}(u_0, v_0) \cdot \right. \\ &\quad \left. \hat{U}^\dagger(u'_0, v'_0) \hat{h}^\dagger(u'_1 - u'_0, v'_1 - v'_0) du_0 dv_0 du'_0 dv'_0 \right\} = \\ &= \iiint \hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) E \left\{ \hat{U}(u_0, v_0) \hat{U}^\dagger(u'_0, v'_0) \right\} \cdot \\ &\quad \hat{h}^\dagger(u'_1 - u'_0, v'_1 - v'_0) du_0 dv_0 du'_0 dv'_0 . \end{aligned} \quad (13.2-5)$$

Ponieważ $E \left\{ \hat{U}(u_0, v_0) \hat{U}^\dagger(u'_0, v'_0) \right\}$ jest macierzą autokorelacji amplitudy przedmiotowej (13.1-9), to zachodzi

$$\begin{aligned} \hat{R}_U(u_1, v_1, u'_1, v'_1) &= \iiint \hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \hat{R}_U(u_0, v_0, u'_0, v'_0) \cdot \\ &\quad \hat{h}^\dagger(u'_1 - u'_0, v'_1 - v'_0) du_0 dv_0 du'_0 dv'_0 , \end{aligned} \quad (13.2-6)$$

a uwzględniając (13.1-10) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \hat{R}_U(u_1, v_1, u'_1, v'_1) &= \iiint |t(u_0, v_0)|^2 \hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \cdot \\ &\quad \hat{R} \hat{h}^\dagger(u'_1 - u_0, v'_1 - v_0) du_0 dv_0 . \end{aligned} \quad (13.2-7)$$

Po wprowadzeniu nowych zmiennych

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= v_1 - v'_1 , \\ \Delta u_1 &= u_1 - u'_1 , \end{aligned} \quad (13.2-8)$$

wyrażenie na macierz autokorelacji amplitudy zespolonej w płaszczyźnie obrazowej można zapisać jako

$$\begin{aligned} \hat{R}_U(u_1, v_1, \Delta u_1, \Delta v_1) &= \iiint |t(u_1 - u_0, v_1 - v_0)|^2 \hat{h}(u_0, v_0) \cdot \\ &\quad \hat{R} \hat{h}^\dagger(u_0 - \Delta u_1, v_0 - \Delta v_1) du_0 dv_0 . \end{aligned} \quad (13.2-9)$$

Wszystkie elementy macierzowej funkcji rozmycia amplitudy h_{xx} , h_{xy} , h_{yx} , h_{yy} równe są praktycznie zero poza pewnym skończonym obszarem S_h , tj.

$$\hat{h}(u_o, v_o) \approx \begin{bmatrix} 0 & ; & 0 \\ 0 & ; & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (u_o, v_o) \notin S_h \quad (13.2-10)$$

Oznacza to, iż dla każdego punktu (u_1, v_1) płaszczyzny przedmiotowej wszystkie elementy macierzy autokorelacji R_{xx} , R_{xy} , R_{yx} , R_{yy} zerują się również poza pewnym skończonym obszarem S_R

$$\begin{aligned} \hat{R}_U(u_1, v_1, \Delta u_1, \Delta v_1) &= E \left\{ \hat{U}'(u_1, v_1) \hat{U}^{\dagger}(u_1 - \Delta u_1, v_1 - \Delta v_1) \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & ; & 0 \\ 0 & ; & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (\Delta u_1, \Delta v_1) \notin S_R \quad (13.2-11) \end{aligned}$$

Ponieważ średnia wartość amplitudy zespolonej w dowolnym punkcie płaszczyzny przedmiotowej równa jest zero (13.2-3), to dla dowolnych (u_1, v_1) i $(\Delta u_1, \Delta v_1)$ zachodzi

$$E \left\{ \hat{U}'(u_1, v_1) \right\} E \left\{ \hat{U}^{\dagger}(u_1 - \Delta u_1, v_1 - \Delta v_1) \right\} = \begin{bmatrix} 0 & ; & 0 \\ 0 & ; & 0 \end{bmatrix}, \quad (13.2-12)$$

co w połączeniu z (13.2-11) oznacza, iż poza obszarem S_R spełniona jest następująca zależność

$$\begin{aligned} E \left\{ \hat{U}'(u_1, v_1) \hat{U}^{\dagger}(u_1 - \Delta u_1, v_1 - \Delta v_1) \right\} &= E \left\{ \hat{U}'(u_1, v_1) \right\} \cdot \\ E \left\{ \hat{U}^{\dagger}(u_1 - \Delta u_1, v_1 - \Delta v_1) \right\} &\Leftrightarrow (\Delta u_1, \Delta v_1) \notin S_R \quad (13.2-13) \end{aligned}$$

Fakt, iż poza obszarem S_R średnia z iloczynu amplitud równa jest iloczynowi średnich świadczy o tym, że korelacja statystyczna pomiędzy amplitudami w punktach (u_1, v_1) i (u_1', v_1') istnieje tylko na obszarze dwa razy mniejszym niż S_R . Obszar ten nazywany będzie obszarem korelacji amplitudy w płaszczyźnie obrazowej

$$S_k = \left\{ (\Delta u_1, \Delta v_1) : (2 \Delta u_1, 2 \Delta v_1) \in S_R \right\} \quad (13.2-14)$$

Dla przedmiotów jednorodnych ($t(u_0, v_0) = \text{const}$) rozkład amplitudy w płaszczyźnie obrazowej (także przedmiotowej) jest stacjonarnym procesem stochastycznym, a jego macierz autokorelacji jest funkcją tylko różnicy współrzędnych

$$\hat{R}_U(\Delta u_1, \Delta v_1) = |\text{const}|^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u_0, v_0) \hat{R} \hat{h}^t(u_0 - \Delta u_1, v_0 - \Delta v_1) du_0 dv_0 \quad (13.2-15)$$

Zauważmy, że dla przedmiotów jednorodnych obszar korelacji S_k zależy jedynie od macierzowej funkcji rozmycia amplitudy $\hat{h}(u, v)$ i średniego stanu polaryzacji światła $\hat{R}$ emitowanego przez dyfuzor. Dla przedmiotów niejednorodnych zależy on dodatkowo od rozkładu transmitancji natężeniowej $|t(u_0, v_0)|^2$. Z postaci całki (13.2-9) wynika, że w obydwu przypadkach obszar korelacji S_k musi być mniejszy od obszaru S_h , lub jemu równy

$$S_k \leq S_h \quad (13.2-16)$$

13.3. Rozkład średniego natężenia w płaszczyźnie obrazowej

Natężenie w dowolnym punkcie płaszczyzny obrazowej dane jest wzorem

$$I'(u_1, v_1) = \text{tr} \left[\hat{U}'(u_1, v_1) \hat{U}'^\dagger(u_1, v_1) \right], \quad (13.3-1)$$

a średnie natężenie równe jest śladowi macierzy autokorelacji amplitudy obrazowej

$$\begin{aligned} E \{ I'(u_1, v_1) \} &= \text{tr} \left[E \{ \hat{U}'(u_1, v_1) \hat{U}'^\dagger(u_1, v_1) \} \right] = \\ &= \text{tr} \left[\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) \right]. \end{aligned} \quad (13.3-2)$$

Podstawiając do powyższego wyrażenie na macierz autokorelacji dane wzorem (13.2-7) otrzymuje się

$$\begin{aligned} E \{ I'(u_1, v_1) \} &= \iiint |t(u_0, v_0)|^2 \text{tr} \left[\hat{h}(u_1 - v_0, v_1 - v_0) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \hat{R} \hat{h}^\dagger(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \right] du_0 dv_0. \end{aligned} \quad (13.3-3)$$

Macierz $\hat{R}$ opisującą średni stan polaryzacji światła emitowanego przez dyfuzor wygodniej jest przedstawić w postaci

$$\hat{R} = \hat{R}_0 \text{tr} [\hat{R}] \quad , \quad (13.3-4)$$

gdzie $\hat{R}_0$ jest macierzą ze śladem unormowanym do jedności.

Po podstawieniu (13.3-4) do (13.3-3) wzór na średnie natężenie w płaszczyźnie obrazowej przyjmuje postać

$$\begin{aligned} E \{ I'(u_1, v_1) \} &= \iiint |t(u_0, v_0)|^2 \text{tr} [\hat{R}] \text{tr} \left[\hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \hat{R}_0 \hat{h}^\dagger(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \right] du_0 dv_0. \end{aligned} \quad (13.3-5)$$

Zauważmy, że wyrażenie $|t(u_0, v_0)|^2 \text{tr} [\hat{R}]$ opisuje rozkład

średniego natężenia w płaszczyźnie przedmiotowej układu
(13.1-12)

$$E \{ I(u_0, v_0) \} = |t(u_0, v_0)|^2 \text{tr} \hat{R}, \quad (13.3-6)$$

a $\text{tr} [\hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \hat{R}_0 \hat{h}^\dagger(u_1 - u_0, v_1 - v_0)]$ reprezentuje
średnią z rozkładu natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu
(z natężeniowej funkcji rozmycia); porównaj (5-14) i (13.1-6)

$$\begin{aligned} \text{tr} [\hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \hat{R}_0 \hat{h}^\dagger(u_1 - u_0, v_1 - v_0)] &= \\ &= \text{tr} [\hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) E \{ \hat{J}_0 \} \hat{h}^\dagger(u_1 - u_0, v_1 - v_0)] = \\ &= E \left\{ \text{tr} [\hat{h}(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \hat{J}_0 \hat{h}^\dagger(u_1 - u_0, v_1 - v_0)] \right\} = \\ &= E \{ K(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \}. \end{aligned} \quad (13.3-7)$$

Tak więc, rozkład średniego natężenia w płaszczyźnie obrazo-
wej wyraża się splotem średniego natężenia w płaszczyźnie
przedmiotowej ze średnią z natężeniowej funkcji rozmycia

$$E \{ I'(u_1, v_1) \} = \iint_{-\infty}^{\infty} E \{ I(u_0, v_0) \} E \{ K(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \} du_0 dv_0, \quad (13.3-8)$$

lub w notacji symbolicznej

$$E \{ I'(u_1, v_1) \} = E \{ I(u_1, v_1) \} \circledast E \{ K(u_1, v_1) \}. \quad (13.3-9)$$

Przy owdzorowaniu przedmiotów dyfuzyjnych w świetle koherent-
nym średnie natężenie transformuje się więc tak, jak przez
układ niekoherentny o natężeniowej funkcji rozmycia równej
 $E \{ K(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \}$.

13.4. Autokorelacja rozkładu natężenia w płaszczyźnie obrazowej.

Wyznamy autokorelację rozkładu natężenia w płaszczyźnie obrazowej rozumianą jako

$$R_I(u_1, v_1, u'_1, v'_1) = E \{ I(u_1, v_1) I(u'_1, v'_1) \} . \quad (13.4-1)$$

Podstawiając do powyższego wyrażenia (13.3-1) otrzymuje się

$$R_I(u_1, v_1, u'_1, v'_1) = E \left\{ \text{tr} \left[\hat{U}(u_1, v_1) \hat{U}^\dagger(u_1, v_1) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \text{tr} \left[\hat{U}(u'_1, v'_1) \hat{U}^\dagger(u'_1, v'_1) \right] \right\} . \quad (13.4-2)$$

lub w postaci rozwiniętej

$$R_I(u_1, v_1, u'_1, v'_1) = E \left\{ |U_x(u_1, v_1)|^2 |U_x(u'_1, v'_1)|^2 \right\} + \\ + E \left\{ |U_x(u_1, v_1)|^2 |U_y(u'_1, v'_1)|^2 \right\} + E \left\{ |U_y(u_1, v_1)|^2 \cdot \right. \\ \left. \cdot |U_x(u'_1, v'_1)|^2 \right\} + E \left\{ |U_y(u_1, v_1)|^2 |U_y(u'_1, v'_1)|^2 \right\} . \quad (13.4-3)$$

Dla dyfuzorów spełniających założenia statystyczne (i), (ii), (iii) z rozdz.13.1 oraz warunek (13.1-4) składowe $U_x(u_1, v_1)$ i $U_y(u_1, v_1)$ amplitudy zespolonej w dowolnym punkcie płaszczyzny obrazowej charakteryzują się kołowym rozkładem Gaussa gęstości prawdopodobieństwa [59]. Dla dowolnych zespolonych zmiennych losowych X i Y o kołowym rozkładzie Gaussa gęstości prawdopodobieństwa prawdziwe jest następujące twierdzenie [59]

$$E \{ |X|^2 |Y|^2 \} = E \{ |X|^2 \} E \{ |Y|^2 \} + |E \{ XY^* \}|^2 . \quad (13.4-4)$$

W związku z powyższym autokorelację rozkładu natężenia w płaszczyźnie obrazowej można zapisać jako

$$\begin{aligned}
 R_I(u_1, v_1, u'_1, v'_1) = & E\left\{\left|U'_x(u_1, v_1)\right|^2\right\} E\left\{\left|U'_x(u'_1, v'_1)\right|^2\right\} + \\
 & + E\left\{\left|U'_x(u_1, v_1)\right|^2\right\} E\left\{\left|U'_y(u'_1, v'_1)\right|^2\right\} + E\left\{\left|U'_y(u_1, v_1)\right|^2\right\} \cdot \\
 & E\left\{\left|U'_x(u'_1, v'_1)\right|^2\right\} + E\left\{\left|U'_y(u_1, v_1)\right|^2\right\} E\left\{\left|U'_y(u'_1, v'_1)\right|^2\right\} + \\
 & + \left|E\left\{U'_x(u_1, v_1) U'^{*}_x(u'_1, v'_1)\right\}\right|^2 + \left|E\left\{U'_y(u_1, v_1) U'^{*}_x(u'_1, v'_1)\right\}\right|^2 + \\
 & + \left|E\left\{U'_x(u_1, v_1) U'^{*}_y(u'_1, v'_1)\right\}\right|^2 + \left|E\left\{U'_y(u_1, v_1) \cdot \right. \right. \\
 & \left. \left. U'^{*}_y(u'_1, v'_1)\right\}\right|^2. \quad (13.4-5)
 \end{aligned}$$

W notacji macierzowej powyższa zależność staje się bardziej przejrzysta

$$\begin{aligned}
 R_I(u_1, v_1, u'_1, v'_1) = & \text{tr} \left[E\left\{ \hat{U}(u_1, v_1) \hat{U}^{\dagger}(u_1, v_1) \right\} \right] \cdot \\
 & \text{tr} \left[E\left\{ \hat{U}(u'_1, v'_1) \hat{U}^{\dagger}(u'_1, v'_1) \right\} \right] + \text{tr} \left[E\left\{ \hat{U}(u_1, v_1) \hat{U}^{\dagger}(u'_1, v'_1) \right\} \cdot \right. \\
 & \cdot \left. E\left\{ \hat{U}(u_1, v_1) \hat{U}^{\dagger}(u'_1, v'_1) \right\}^{\dagger} \right],
 \end{aligned}$$

a po uwzględnieniu (13.2-4) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 R_I(u_1, v_1, u'_1, v'_1) = & \text{tr} \left[\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) \right] \text{tr} \left[\hat{R}_U(u'_1, v'_1, u'_1, v'_1) \right] + \\
 & + \text{tr} \left[\hat{R}_U(u_1, v_1, u'_1, v'_1) \hat{R}_U^{\dagger}(u_1, v_1, u'_1, v'_1) \right]. \quad (13.4-7)
 \end{aligned}$$

Na podstawie (13.3-2) oraz (13.4-1), a także po zamianie zmiennych (13.2-8) zachodzi

$$\begin{aligned}
 E\left\{ I(u_1, v_1) I(u_1 - \Delta u_1, v_1 - \Delta v_1) \right\} = & E\left\{ I(u_1, v_1) \right\} \cdot \\
 E\left\{ I(u_1 - \Delta u_1, v_1 - \Delta v_1) \right\} + & \text{tr} \left[\hat{R}_U(u_1, v_1, \Delta u_1, \Delta v_1) \cdot \right. \\
 & \left. \hat{R}_U^{\dagger}(u_1, v_1, \Delta u_1, \Delta v_1) \right]. \quad (13.4-8)
 \end{aligned}$$

W rozdz.13.2 wykazano, iż dla każdego u_1, v_1 wszystkie elementy macierzy autokorelacji $\hat{R}_U(u_1, v_1, \Delta u_1, \Delta v_1)$ zerują się poza pewnym skończonym obszarem S_R . Oznacza to, iż poza obszarem S_R spełniony jest warunek

$$\begin{aligned} E \{ I'(u_1, v_1) I'(u_1 - \Delta u_1, v_1 - \Delta v_1) \} = \\ = E \{ I'(u_1, v_1) \} E \{ I'(u_1 - \Delta u_1, v_1 - \Delta v_1) \}, \end{aligned} \quad (13.4-8)$$

który pokazuje, że statystyczna korelacja pomiędzy natężeniami w punktach (u_1, v_1) oraz (u_1', v_1') istnieje tylko na obszarze dla razy mniejszym niż S_R , czyli na obszarze korelacji S_k amplitudy obrazowej.

Za kształt średniej plamki (średniego spekła) w płaszczyźnie obrazowej układu można przyjąć zarys obszaru występowania statystycznej korelacji rozkładu natężenia w tej płaszczyźnie. Zatem obszar korelacji S_k wyznacza rozmiary średniej plamki. Dla przedmiotów jednorodnych rozmiary średniej plamki zależą więc jedynie od macierzowej funkcji rozmycia amplitudy $\hat{h}(u, v)$ i średniego stanu polaryzacji światła $\hat{R}_0$ emitowanego przez dyfuzor. Dla przedmiotów niejednorodnych zależą one dodatkowo od rozkładu transmisji natężeniowej $|t(u_0, v_0)|^2$ i mogą się zmieniać od punktu do punktu. Jednak w obydwu przypadkach rozmiary średniej plamki nie są większe niż rozmiary obszaru S_h poza którym zerują się wszystkie elementy macierzowej funkcji rozmycia amplitudy.

13.5. Wariancja natężenia w płaszczyźnie obrazowej.

Statystyczny kontrast struktury plamkowej

Dysponując autokorelacją rozkładu natężenia $R_I(u_1, v_1, u_1', v_1')$ można łatwo wyznaczyć jego wariancję $\sigma_I^2(u_1, v_1)$ w dowolnym punkcie płaszczyzny obrazowej

$$\sigma_I^2(u_1, v_1) = E\{I^2(u_1, v_1)\} - E^2\{I(u_1, v_1)\}. \quad (13.5-1)$$

Zauważmy, że

$$E\{I^2(u_1, v_1)\} = R_I(u_1, v_1, u_1, v_1) = \text{tr}^2[\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1)] + \\ + \text{tr}[\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) \hat{R}_U^\dagger(u_1, v_1, u_1, v_1)], \quad (13.5-2)$$

a także na podstawie (13.3-2)

$$E^2\{I(u_1, v_1)\} = \text{tr}^2[\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1)]. \quad (13.5-3)$$

Wariancja natężenia będąca miarą jego statystycznego rozrzutu dana jest więc wzorem

$$\sigma_I^2(u_1, v_1) = \text{tr}[\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) \hat{R}_U^\dagger(u_1, v_1, u_1, v_1)]. \quad (13.5-4)$$

Innym ważnym parametrem charakteryzującym głębokość przypadkowych zmian natężenia jest tzw. kontrast statystyczny rozumiany jako stosunek odchylenia standartowego do wartości średniej natężenia [59]

$$C_S(u_1, v_1) = \frac{\sigma_I(u_1, v_1)}{E\{I(u_1, v_1)\}}. \quad (13.5-5)$$

Podstawiając (13.3-2) i (13.5-4) do powyższej zależności otrzymuje się

$$C_S(u_1, v_1) = \frac{\sqrt{\text{tr} [\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) \hat{R}_U^\dagger(u_1, v_1, u_1, v_1)]}}{\text{tr} [\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1)]} \quad (13.5-6)$$

Można wykazać, że kontrast statystyczny w układach odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła spełnia warunek

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq C_S(u_1, v_1) \leq 1 \quad (13.5-7)$$

Zauważmy w tym celu, że macierz

$$\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) = E \left\{ \hat{U}(u_1, v_1) \hat{U}^\dagger(u_1, v_1) \right\} \quad (13.5-8)$$

jest hermitowska. Każdą macierz hermitowską można sprowadzić do postaci diagonalnej poprzez transformację podobieństwa [34]

$$\hat{L}_R(u_1, v_1) = \hat{A}^{-1}(u_1, v_1) \hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) \hat{A}(u_1, v_1), \quad (13.5-9)$$

gdzie $\hat{A}(u_1, v_1)$ jest macierzą unitarną. Jeżeli $l_1(u_1, v_1)$ i $l_2(u_1, v_1)$ są wartościami własnymi macierzy $\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1)$, to jej diagonalna postać jest następująca [34]

$$\hat{L}_R(u_1, v_1) = \begin{bmatrix} l_1 & ; & 0 \\ 0 & ; & l_2 \end{bmatrix} \quad (13.5-10)$$

Ponieważ $\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1)$ jest macierzą hermitowską, to l_1 i l_2 są rzeczywiste dla dowolnego (u_1, v_1) . Ponadto ponieważ oba minory główne M_1, M_2 macierzy $\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1)$ są nieujemne, to jej wartości własne l_1, l_2 są także nieujemne [34]

$$M_1 = E \left\{ \left| U_x(u_1, v_1) \right|^2 \right\} \geq 0, \quad (13.5-11)$$

$$M_2 = E \left\{ \left| U_x'(u_1, v_1) \right|^2 \right\} E \left\{ \left| U_y'(u_1, v_1) \right|^2 \right\} - \\ - \left| E \left\{ U_x'(u_1, v_1) U_y'^*(u_1, v_1) \right\} \right|^2 \geq 0 .$$

Pierwsza nierówność spełniona jest ze względu na fakt, iż wartość średnia funkcji nieujemnej jest nieujemna; druga wynika z nierówności Schwarz'a.

Zauważmy, że macierz unitarna $\hat{A}(u_1, v_1)$ sprowadza również do postaci diagonalnej wyrażenie $\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1)$.
 $\hat{R}_U^\dagger(u_1, v_1, u_1, v_1)$

$$\begin{aligned} \hat{L}_{RR}(u_1, v_1) &= \hat{A}^{-1}(u_1, v_1) \hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) \cdot \\ \hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) \hat{A}(u_1, v_1) &= \hat{A}^{-1}(u_1, v_1) \hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) \hat{A}(u_1, v_1) \\ \hat{A}^{-1}(u_1, v_1) \hat{R}_U^\dagger(u_1, v_1, u_1, v_1) \hat{A}(u_1, v_1) &= \\ &= \hat{L}_R(u_1, v_1) \hat{L}_R(u_1, v_1) . \end{aligned} \quad (13.5-12)$$

Uwzględniając (13.5-10) otrzymuje się

$$\hat{L}_{RR}(u_1, v_1) = \begin{bmatrix} l_1^2 & ; & 0 \\ 0 & ; & l_2^2 \end{bmatrix} . \quad (13.5-13)$$

Transformacja podobieństwa nie zmienia śladu macierzy, zatem zachodzi

$$\text{tr} \left[\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) \right] = \text{tr} \hat{L}_R(u_1, v_1) = l_1 + l_2 , \quad (13.5-14)$$

oraz

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\hat{R}_U(u_1, v_1, u_1, v_1) \hat{R}_U^\dagger(u_1, v_1, u_1, v_1) \right] &= \\ &= \text{tr} \hat{L}_{RR}(u_1, v_1) = l_1^2 + l_2^2 , \end{aligned} \quad (13.5-15)$$

a kontrast statystyczny wyraża się wzorem

$$c_s(u_1, v_1) = \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{l_1 + l_2} = \sqrt{1 - \frac{2l_1 l_2}{(l_1 + l_2)^2}} \quad (13.5-16)$$

Dla dowolnych liczb nieujemnych l_1, l_2 spełniona jest nierówność

$$\frac{1}{2} \geq \frac{2l_1 l_2}{(l_1 + l_2)^2} \geq 0 \quad (13.5-17)$$

Tak więc dla kontrastu statystycznego $c_s(u_1, v_1)$ w dowolnym punkcie płaszczyzny obrazowej rzeczywiście zachodzi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c_s(u_1, v_1) \leq 1 \quad (13.5-18)$$

Podstawiając do powyższego wzór definiujący kontrast statystyczny (13.5-5) stwierdzić można, iż wariancja natężenia w dowolnym punkcie płaszczyzny obrazowej spełnia warunek

$$\frac{1}{2} E^2 \{ I'(u_1, v_1) \} \leq \sigma_{I'}^2(u_1, v_1) \leq E^2 \{ I'(u_1, v_1) \} \quad (13.5-19)$$

13.6. Podsumowanie.

W niniejszym rozdziale otrzymano szereg wyników określających statystyczne własności rozkładu amplitudy i natężenia w płaszczyźnie obrazowej koherentnego układu odwzorowującego zmieniającego stan polaryzacji światła. Interpretacja tych wyników prowadzi do następujących wniosków :

- (1) Obydwie składowe średniej amplitudy zespolonej w dowolnym punkcie płaszczyzny obrazowej równe są zero.

- (2) Średnie natężenie transformuje się tak jak przez układ niekoherentny o natężeniowej funkcji rozmycia równej $E \{ K(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \}$.
- (3) Rozmiary średniej plamki równe są rozmiarom obszaru korelacji S_k amplitudy w płaszczyźnie obrazowej. Dla przedmiotów jednorodnych zależą one tylko od macierzowej funkcji rozmycia amplitudy $\hat{h}(u_1, v_1)$ i średniego stanu polaryzacji światła $\hat{R}_0$ emitowanego przez dyfuzor. Dla przedmiotów niejednorodnych mogą się zmieniać od punktu do punktu, gdyż zależą także od rozkładu transmittancji $|t(u_0, v_0)|^2$.
- (4) Wariancja natężenia w dowolnym punkcie płaszczyzny obrazowej nie jest większa niż kwadrat średniego natężenia i nie mniejsza niż połowa kwadratu średniego natężenia.
- (5) Kontrast statystyczny struktury plamkowej spełnia następujący warunek w dowolnym punkcie płaszczyzny obrazowej

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c_s(u_1, v_1) \leq 1 \quad . \quad (13.6-1)$$

Należy podkreślić, iż powyższe wnioski słuszne są jedynie dla klasy przedmiotów dyfuzyjnych spełniających statystyczne założenia (i), (ii), (iii) z rozdz.13.1, a także warunek (13.1-4).

14. UWAGI KOŃCOWE

W niniejszej pracy zaproponowano macierzowy opis własności układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła. Jego istotą jest połączenie metod używanych w podejściu skalarnym z macierzowym formalizmem Jonesa wprowadzonym do opisu elementów zmieniających stan polaryzacji światła.

W przedstawionym w pracy materiale wyróżniają się cztery grupy zagadnień. Pierwsza, to zdefiniowanie macierzowych charakterystyk układu zmieniającego stan polaryzacji światła, a będących uogólnieniem odpowiednich funkcji skalarnych używanych do opisu układów klasycznych, rozdz.4. Druga, to grupa problemów związanych z odwzorowaniem przedmiotów punktowych, rozdz.5-9. Trzecią i czwartą grupę stanowią zagadnienia związane z odwzorowaniem przedmiotów rozciągniętych i wielopunktowych, rozdz.10-11, oraz z określeniem podstawowych wielkości statystycznych charakteryzujących rozkład amplitudy zespolonej i natężenia w koherentnych obrazach przedmiotów dyfuzyjnych, rozdz.13.

Jak wykazano w rozdz.12, uzyskane w pracy rezultaty są naturalnym macierzowym uogólnieniem wyników, które otrzymuje się na podstawie rozważań skalarnych. Mogą one być stosowane do oceny jakości odwzorowania w układach optycznych zawierających dowolne elementy zmieniające stan polaryzacji światła, jak również do oceny własności szumu plamkowego powstającego przy odwzorowaniu koherentnych przedmiotów dyfuzyjnych w tego typu układach. Na podkreślenie zasługuje fakt, iż dla omawianej klasy układów podstawowe mierniki jakości

odwzorowania, np. jasność Strehla, zdolność rozdzielcza, optyczna funkcja przenoszenia etc., zależą nie tylko od parametrów układu odwzorowującego lecz także od rodzaju światła użytego do odwzorowania. Zależność ta reprezentowana jest we wszystkich końcowych formułach przy pomocy dwuwymiarowej macierzy koherencji.

W rozważaniach niniejszej pracy pomijano składową amplitudy równoległą do osi optycznej układu (składową z-ową). Przyjęcie takiego założenia uzasadnione jest tylko dla układów o niezbyt dużych kątach aperturowych. Umożliwiło ono stosowanie dwuwymiarowej macierzy koherencji do opisu efektów polaryzacyjnych. W konsekwencji, uzyskane wyniki nie mogą być stosowane do układów o dużych kątach aperturowych. Analogiczne przybliżenie stosowane jest zresztą także w opisie klasycznych układów odwzorowujących. W szczególności w pracy [1] Hopkins wyliczył rozkład natężenia w dyfrakcyjnym obrazie punktu dla układu idealnego z uwzględnieniem składowej amplitudy równoległej do osi optycznej układu (składowej z-owej). Wykazał on, iż pomijanie składowej z-owej w układach o kątach aperturowych nie większych niż 30° prowadzi do błędu w rozkładzie natężenia rzędu jednego do dwóch procent. W związku z tym kąt aperturowy równy 30° można traktować jako granicę stosowalności opisu skalarne. Ponieważ w proponowanym opisie macierzowym przyjęto ten sam rodzaj przybliżenia, to wydaje się uzasadnione, aby kąt aperturowy równy 30° był również traktowany jako granica stosowalności tego opisu. Rozszerzenie zaproponowanego macierzowego formalizmu na układy o większych kątach aperturowych, a więc uwzględnienie w rozważaniach składowej z-owej amplitudy, będzie prawdopodobnie przedmiotem dalszych badań autora.

LITERATURA

- [1] Hopkins H.H. - Proc. Phys. Soc. 55 (1943) 116
- [2] Hopkins H.H. - Nature, Lond. 155 (1945) 275
- [3] Burtin R. - Optica Acta 3 (1956) 104
- [4] Pocke J. - Optica Acta 4 (1957) 124
- [5] Ignatowski V.S. - Trudy Petrogradskogo Optičeskogo
Instituta, tom I, vyp.IV, 1919
- [6] Ignatowski V.S. - Trudy Petrogradskogo Optičeskogo
Instituta, tom I, vyp.V, 1920
- [7] Wolf E. - Proc. Roy. Soc. A, 253 (1959) 349
- [8] Richards B.
Wolf E. - Proc. Roy. Soc. A, 253 (1959) 358
- [9] Richards B.
Wolf E. - Proc. Phys. Soc. B, 69 (1956) 854
- [10] Kubota H.
Inoue S. - J. Opt. Soc. Am. 49 (1959) 191
- [11] Kubota H.
Saito H. - J. Opt. Soc. Am. 50 (1960) 1020
- [12] Singh J.
Singh K. - Optica Acta 23 (1976) 161
- [13] Dalbera J.P. - Nouv. Rev. Opt. Appl. 2 (1971) 225
- [14] Katti P.K.
Singh K. - Appl. Optics 9 (1970) 1379
- [15] Katti P.K.
Singh K.
Chopra K.N. - Optica Acta 17 (1970) 439
- [16] Chopra K.N.
Bhatnaga G.S.
Kumor R. - Appl. Optics 13 (1974) 1768

- [17] Komissaruk V.A. - Opt. i. Spektr. 29 (1970) 178
- [18] Pietraszkiewicz K. - Praca Doktorska, Instytut Fizyki
Politechniki Wrocławskiej 1974
- [19] Pietraszkiewicz K. - Opt. Appl. 4 (1974) 7
Ratajczyk F.
- [20] Pietraszkiewicz K. - Opt. Appl. 6 (1976) 107
- [21] Pietraszkiewicz K. - Feingerätetechnik 26 (1977) 256
- [22] Pietraszkiewicz K. - Opt. Comm. 25 (1978) 149
- [23] Chakraborty A.K. - J. Optics 9 (1978) 251
Mondal A.B.
Roy Chondhury R.J.
- [24] Gupta S.D. - Optica Acta 30 (1983) 607
- [25] Urbanczyk W. - EOC'83, Rydzyna, 30.05 - 4.06,
Polska
- [26] Ghosh A. - Optica Acta 30 (1983) 425
Chakraborty A.K.
- [27] Machodo M.A. - Optik 62 (1982) 347
- [28] Jones R.C. - J. Opt. Soc. Am. 31 (1941) 488
- [29] Jones R.C. - J. Opt. Soc. Am. 32 (1942) 486
- [30] Jones R.C. - J. Opt. Soc. Am. 37 (1947) 107
- [31] Jones R.C. - J. Opt. Soc. Am. 38 (1948) 671
- [32] Wiener N. - J. Math. Phys. 7 (1928) 109
- [33] Wiener N. - Acta Math. 55 (1930) 117
- [34] Gelfand I.M. - Wykłady z Algebry Liniowej, PWN,
Warszawa 1975

- [35] Bracwell R. - Przekształcenia Fouriera i jego Zastosowania, WNT, Warszawa 1968
- [36] Wolf E. - Nuovo Cimento 13 (1959) 1165
- [37] Parrent G.B.
Roman P. - Nuovo Cimento 15 (1960) 370
- [38] Born M.
Wolf E. - Principles of Optics, Pergamon Press, Oxford 1965
- [39] Peřina J. - Kogerentnost' Sveta, Izdatel'stvo "Mir", Moskva 1974
- [40] Wigner E. - Phys. Rev. 40 (1932) 749
- [41] Panchartnam S. - Proc. Indian Acad. Sci. 57 (1963) 218
- [42] Parrent G. - Nuovo Cimento 13 (1959) 974
- [43] Goodman J.W. - Introduction to Fourier Optics, McGraw-Hill Book Company, New York, London, Sydney 1968
- [44] Urbańczyk W. - Optik 63 (1982) 25
- [45] Urbańczyk W. - Optik (w druku)
- [46] Maréchal A.
Françon M. - Diffraction Structure des Images, Editions de la Revue d'Optique Théoretique et Instrumentale, Paris 1960
- [47] Pietraszkiewicz K. - J. Opt. Soc. Am. 69 (1979) 1045
- [48] Magiera A.
Pietraszkiewicz K. - Optik 58 (1981) 85
- [49] Szapiel S. - J. Opt. Soc. Am. 78 (1982) 947
- [50] Barakat R. - J. Opt. Soc. Am. 70 (1980) 739

- [51] Lowenthal D.D. - Appl. Opt. 13 (1974) 2126
- [52] Arimoto A. - J. Opt. Soc. Am. 64 (1974) 850
- [53] Tatian B. - J. Opt. Soc. Am. 64 (1974) 1083
- [54] Leja F. - Rachunek Różniczkowy i Całkowy,
PWN, Warszawa 1979
- [55] Roman P.
Wolf E. - Nuovo Cimento 17 (1960) 462
- [56] Roman P.
Wolf E. - Nuovo Cimento 17 (1960) 477
- [57] Urbańczyk W. - Optik (w druku)
- [58] Françon M. - La Granularite Laser et ses
Applications en Optique, Masson,
Paris 1978
- [59] Dainty J.C. - Laser Speckle and Related
Phenomena, Springer-Verlag,
Berlin 1975
- [60] Erf R. - Speckle Metrology, Academic Press,
New York, London, Sydney 1978
- [61] Enloe L.H. - Bell System Tech. J. 46 (1967) 1479
- [62] Lowenthal S.
Arsenault H. - J. Opt. Soc. Am. 60 (1970) 1478
- [63] Ichioka Y. - J. Opt. Soc. Am. 64 (1974) 919
- [64] Urbańczyk W. - Optik (w druku)
- [65] Papoulis A. - Prawdopodobieństwo, Zmienne Loso-
we i Procesy Stochastyczny, WNT,
Warszawa 1972 .

Niniejszy komunikat otrzymują:

Promotor 1 egz.

Recenzenci 2 egz.

Biblioteka Instytutu Fizyki 2 egz.

Autor 2 egz.

*** KRAJOWY OŚRODEK BADAŃ IZOTOPÓW ***

7 egz.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	* N *										
	Rozpocz. pr.	Zakonczeni. pr.	Opubl. pr.	Instytut	Nr tematu.						
	Nr zlecenia.	Nr archiwu									
		I 09 / P - 340 / 84 *									
	Symbol UKD.										

Opis bibliograficzny.

Urbańczyk Wacław

Odwzorowanie w układach optycznych
zmieniających stan polaryzacji światła -
opis macierzowy.

Raporty Inst.Fiz. PWr. 1984
serii PRE nr 340

137 s., 18 rys., bibliogr.65 poz.
/maszyn. powiel./

Rozprawa doktorska
Politechnika Wrocławska Instytut
Fizyki, Wrocław

Promotor: doc.dr Ireneusz Wilk

Charakter pracy:
Materiały odpłatne:

Rozpowszechnienie:

Analiza dokumentacyjna

<P

Przedstawiono macierzowy opis optycznych układów odwzorowujących zmieniających stan polaryzacji światła. Po zdefiniowaniu macierzowej funkcji aberracji, macierzowej funkcji źrenicowej, macierzowej funkcji rozmycia amplitudy oraz macierzowej funkcji transmisji, określono natężeniową funkcję rozmycia układu, jasność Strehla oraz optyczną funkcję przenoszenia. Uogólniono twierdzenie o przesunięciu, a także przybliżenie Maréchała dla jasności Strehla. Podano procedurę doboru optymalnej sfery odniesienia dla omawianej klasy układów. Zbadano statystyczne własności amplitudy zespolonej oraz natężenia w koherentnych obrazach przedmiotów dyfuzyjnych.

Imię i Nazwisko autora analizy

Wacław Urbańczyk

Słowa kluczowe

<S

- odwzorowanie optyczne
- polaryzacja światła
- opis macierzowy

**0480*00*

<A. * B. * C. * D.

* E. * F. * G. * H.

Tylko PRL	CINTE	APW	Podpis red.	Podpis asyst. d/s badań	Potwierdzenie przyjęcia poprawki	Potwierdzenie przyjęcia karty w Oddziale Dokumentacji
Wpisać TAK lub NIE						

