

***Instytut Telekomunikacji i Akustyki
Politechniki Wrocławskiej
Raport Nr I-28 / P - 025 /01***

**Modelowanie
zniekształceń nieliniowych
głośników dynamicznych
metodą NARMAX**

Piotr Pruchnicki

Praca doktorska

Promotor: dr hab. inż. Andrzej B. Dobrucki, prof. nadzw. PWr

Słowa kluczowe:

głośnik dynamiczny,
metoda NARMAX,
modelowanie,
zniekształcenia nieliniowe,

Wrocław 2001

mgr inż. Piotr Pruchnicki
Instytut Telekomunikacji i Akustyki
Politechnika Wrocławska
50-370 Wrocław
Wyb. S. Wyspiańskiego 27
tel. (0 prefix 71) 320 30 65
email: misio@zakus.ita.pwr.wroc.pl

Składam podziękowania dla promotora
dr hab. inż. Andrzeja B. Dobruckiego
za pomoc w realizacji pracy

Spis treści

1 Wprowadzenie	6
2 Modelowanie zniekształceń nieliniowych głośników dynamicznych	9
2.1 Model fizyczny głośnika	9
2.2 Modele wejścia-wyjścia	12
2.3 Szeregi Volterry	14
3 Metoda NARMAX	16
3.1 Postać ogólna modelu	16
3.2 Modele liniowe względem współczynników	18
3.2.1 Funkcje radialne - RBF	20
3.3 Reprezentacja wielomianowa	21
3.4 Wyznaczanie wielomianowej postaci modelu NARMAX	23
4 Tworzenie modelu NARMAX	26
4.1 Algorytmy ortogonalizacji	26
4.2 Realizacja algorytmu CGS	27
4.3 Optymalizacja modelu	28
4.3.1 Cele optymalizacji	28
4.3.2 Modyfikacja algorytmu CGS	29
4.3.3 Kryterium zakończenia procesu wyboru współczynników	32
4.4 Tworzenie modeli wyższych rzędów	34
4.5 Kryterium oceny dokładności modelu	35
4.6 Testowanie metody NARMAX na modelach matematycznych	36
4.6.1 Model NARMAX bez optymalizacji	36
4.6.2 Testowanie procedury optymalizacji	37
5 Badania doświadczalne	40
5.1 Wybór głośników	40
5.2 Układ pomiarowy	40
5.3 Rodzaj sygnału pomiarowego	42
5.4 Wpływ czynników zewnętrznych	53
5.4.1 Rozdzielczość kwantowania procesu przetwarzania analogowo-cyfrowego	54
5.4.2 Zakłócający szum addytywny	56
5.5 Model głośnika dynamicznego bez optymalizacji	61
5.6 Optymalizowany model głośnika dynamicznego	66
5.6.1 Kryterium zakończenia optymalizacji	70

5.7 Modele wysokiego rzędu	74
5.7.1 Zachowanie modelu NARMAX głośnika dynamicznego przy różnych poziomach sygnału	75
5.8 Porównanie charakterystyk modelu NARMAX z charakterystykami głośnika rzeczywistego	78
5.8.1 Właściwości liniowe	78
5.8.2 Właściwości nieliniowe	79
6 Wnioski	86
Literatura	88
Załącznik A: Modele NARMAX głośników dynamicznych	92
Załącznik B: Opis programu NARMAXmodel	102
B.1 Menu	102
B.2 Parametry modelowania	105
B.3 Główne okno programu	107

1 Wprowadzenie

Najczęściej stosowanym w technice fonicznej przetwornikiem elektroakustycznym jest głośnik magnetoelektryczny nazywany także głośnikiem dynamicznym. Jego charakterystyczną cechą jest występowanie znacznych nieliniowości podczas zasilania go sygnałami o dużym poziomie. Szczególnie w zakresie małych częstotliwości (w okolicy rezonansu podstawowego głośnika) amplituda wychyleń membrany przetwornika osiąga często wartości bliskie wartościom dopuszczalnym wyznaczonym przez konstrukcję mechaniczną układu drgającego.

Próby wyjaśnienia charakteru i przyczyn powstawania nieliniowości w głośnikach dynamicznych nierozzerwalnie związane były z próbami utworzenia modeli przetwornika, które byłyby w stanie symulować jego nieliniowe właściwości. Modele tego typu bazują najczęściej na fizycznej budowie głośnika. Tworzone są na podstawie nieliniowych równań różniczkowych opisujących pracę przetwornika lub też wyprowadzane są z elektrycznego schematu zastępczego z nieliniowymi elementami [11, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 33, 37].

Bardziej ogólne są modele traktujące głośnik jak "czarną skrzynkę". Bazują one na zbiorze sygnałów pobudzających i odpowiedzi głośnika praktycznie nie uwzględniając struktury modelowanego obiektu.

Najczęściej stosowaną, należącą do tej grupy, metodą modelowania jest opis układu przy pomocy szeregów Volterry [17, 30, 39]. W modelu tym wartość na wyjściu układu wyznaczana jest na podstawie poprzednich wartości na jego wejściu. Z powodu wykorzystania w modelu tylko wartości z wejścia układu do opisu nawet prostych nieliniowości wymagana jest znajomość wielowymiarowych odpowiedzi impulsowych, dla których należy uwzględnić znaczne opóźnienie czasowe. W przypadku sygnałów dyskretnych oznacza to konieczność uwzględnienia bardzo dużej liczby współczynników (rzędu kilkuset). Operowanie tak obszernym zbiorem liczb stwarza poważne problemy obliczeniowe i interpretacyjne.

Zaproponowany przez I. J. Leontaritisa i S. A. Billingsa (Uniwersytet Sheffield W. Brytania) w 1985 roku model NARMAX (Non-linear AutoRegressive Moving Average with eXogenous input) [26, 27] jest

wygodniejszy w użyciu, bardziej ogólny i pozwala opisać układ mniejszą liczbą parametrów. Do tworzenia tego modelu wykorzystywane są nie tylko wartości z wejścia układu, ale także poprzednie wartości z jego wyjścia.

Wykorzystanie w zdyskretyzowanych szeregach Volterra tylko wartości pobudzenia nasuwa analogię do występujących w systemach cyfrowych filtrów typu FIR (Finite Impulse Response). Filtry te operują jedynie na wartościach próbek sygnału wejściowego i do realizacji założonej transmitancji wymagają zwykle kilkuset współczynników. Natomiast w przypadku filtrów typu IIR (Infinite Impulse Response), podobnie jak w modelu NARMAX, do zrealizowania podobnej funkcji przejścia wymagane jest tylko kilkanaście współczynników, gdyż oprócz wartości sygnału wejściowego uwzględniana jest także historia odpowiedzi układu [1].

W niniejszej pracy wszystkie prezentowane zależności i przekształcenia bazują na sygnałach przedstawionych w postaci dyskretniej. Z tego też powodu oznaczany przez t czas występujący w opisywanych modelach jest czasem dyskretnym.

Przystępując do realizacji pracy postanowiono udowodnić następującą tezę: **Możliwe jest zastosowanie metody NARMAX do modelowania zniekształceń nieliniowych głośników dynamicznych.**

Z przeglądu literatury wynika, że model NARMAX wykorzystywany jest najczęściej do modelowania przebiegu procesów fizycznych, fizykochemicznych oraz w systemach sterowania [7, 9, 25]. Jak dotąd pojawiły się tylko dwa artykuły, w których autorzy wykorzystali metodę NARMAX w elektroakustyce [14, 34]. W obu przedstawiono modele, które opisywały wyłącznie drgania membrany głośnika w zakresie małych częstotliwości. Z tego powodu modele te miały bardzo ograniczone zastosowanie praktyczne.

Podstawowym celem pracy jest w związku z tym zaimplementowanie metody NARMAX do modelowania nieliniowości przetworników elektroakustycznych, a zwłaszcza głośników dynamicznych.

Budowany model opisuje głośnik dynamiczny nie w wąskim zakresie częstotliwości, ale dla całego pasma częstotliwości jego pracy. Jako odpowiedź

głośnika zostało przyjęte nie wychylenie membrany, ale ciśnienie akustyczne, które on wytwarza. Takie podejście pozwala utworzyć modele, które w przyszłości można będzie weryfikować również poprzez testy odsłuchowe.

Praca polega na opracowaniu algorytmu wyznaczania modelu NARMAX głośnika dynamicznego na podstawie danych pomiarowych. W procedurze tej najważniejszą funkcję pełni proces optymalizacji modelu. Konieczne jest również dobranie właściwych parametrów pomiaru oraz modelowania, w taki sposób aby uzyskać możliwie najbardziej dokładny model.

Praca została podzielona na 6 rozdziałów:

- rozdział pierwszy zawiera wprowadzenie oraz nakreślenie celu pracy,
- rozdział drugi przedstawia stosowane obecnie sposoby modelowania zniekształceń nieliniowych głośników dynamicznych,
- w rozdziale trzecim został przedstawiony model NARMAX oraz jego reprezentacja wielomianowa,
- rozdział czwarty opisuje sposób wyznaczania reprezentacji wielomianowej modelu NARMAX głośnika dynamicznego oraz procedurę optymalizacji modelu,
- w rozdziale piątym przedstawione zostały wyniki przeprowadzonych doświadczeń: dokonano wyboru optymalnego sygnału pomiarowego, zbadano wpływ zakłóceń na proces tworzenia modelu, przetestowano działanie procedury optymalizacji, dokonano porównania wybranych charakterystyk i parametrów głośnika rzeczywistego oraz jego modelu,
- rozdział szósty to podsumowanie pracy oraz wnioski.

Praca zawiera również spis literatury, która została wykorzystana.

Dołączono również dwa załączniki:

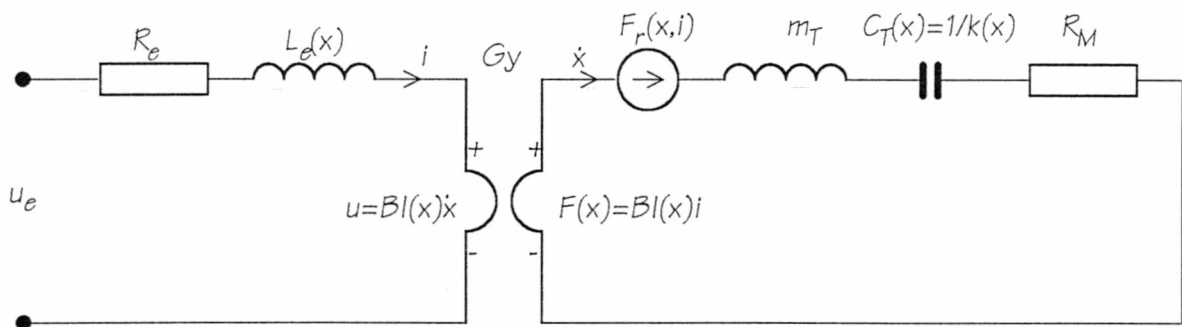
A - współczynniki niektórych modeli NARMAX analizowanych w pracy,

B - opis programu komputerowego powstałego w trakcie realizacji pracy, w którym zaimplementowano algorytm tworzenia modelu NARMAX.

2 Modelowanie zniekształceń nieliniowych głośników dynamicznych

2.1 Model fizyczny głośnika

W procesie modelowania nieliniowości głośników dynamicznych istotną rolę odgrywają modele fizyczne głośnika. Tworzone są one na podstawie wiedzy o budowie i zasadach działania tego przetwornika [11, 20, 21, 22, 23, 24, 33, 37]. Najczęściej punktem wyjścia do tworzenia modelu jest elektryczny schemat zastępczy głośnika pracującego w obudowie zamkniętej (rys. 1).



Rys. 1. Nieliniowy schemat zastępczy głośnika dynamicznego w obudowie zamkniętej.

Oznaczenia elementów na rysunku 1 są następujące:

- u_e - napięcie sygnału pobudzającego,
- i - prąd płynący w cewce głośnika,
- x - wychylenie membrany,
- $\dot{x}$ - prędkość membrany,
- R_e - rezystancja elektryczna cewki,
- $L_e(x)$ - indukcyjność elektryczna cewki,

- m_T - masa układu drgającego głośnika oraz masa współdrgającego środowiska,
- $C_T(x)$ - podatność zawieszeń głośnika oraz podatność powietrza w odudowie,
- $k(x)$ - sztywność,
- R_m - rezystancja strat w zawieszeniach oraz rezystancja promieniowania,
- $F(x)=Bl(x)i$ - siła Lorentza wywołana prądem płynącym w cewce,
- $F_r(x,i)$ - siła reluktancyjna spowodowana modulacją strumienia magnetycznego prądem zmiennym,
- G_y - żyrator reprezentujący przetwarzanie energii elektrycznej na mechaniczną, stała żyracji jest równa $Bl(x)$ i zależy od wychylenia.

Jak widać wartości wielu elementów zależą od wychylenia cewki drgającej x . W części elektrycznej największą nieliniowość przedstawia indukcyjność cewki $L_e(x)$, a w części przetwarzania elektromechanicznego stała $Bl(x)$. W części mechanicznej są to przede wszystkim nieliniowe zawieszenia ze sztywnością $k(x)$ zależną od wychylenia.

Dla schematu zastępczego przedstawionego na rys. 1 możemy sformułować następujące równania [21, 37]:

- część elektryczna

$$u_e = R_e i + i \frac{dL_e(x)}{dx} \frac{dx}{dt} + L_e(x) \frac{di}{dt} + Bl(x) \frac{dx}{dt}, \quad (2.1)$$

- część mechaniczna

$$Bl(x)i = m_T \frac{d^2x}{dt^2} + R_m \frac{dx}{dt} + k(x)x - \frac{1}{2} i^2 \frac{dL_e(x)}{dx}. \quad (2.2)$$

Przedstawiony schemat zastępczy jest uproszczonym schematem głośnika w obudowie. Nie uwzględnia on nieszczelności obudowy lub też prądów wirowych w obwodzie magnetycznym głośnika. W zastosowaniach praktycznych okazuje się, że schemat zastępczy przedstawiony na rysunku 1 charakteryzuje się wystarczającą dokładnością. Z tego też powodu mimo swojej niekompletności w większości analiz wykorzystywany jest bez dalszych uściśleń.

Na podstawie równań (2.1) i (2.2) możliwe jest utworzenie nieliniowych równań stanu opisujących głośnik [21, 37]:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})u \\ y &= h(\mathbf{v})\end{aligned}\tag{2.3}$$

gdzie: $\mathbf{v}$ - wektor stanu,

u - sygnał wejściowy,

y - odpowiedź głośnika.

Składowymi wektora stanu są:

➤ $v_1 = i$ (prąd płynący przez cewkę),

➤ $v_2 = x$ (wychylenie membrany),

➤ $v_3 = \frac{dx}{dt}$ (prędkość membrany).

Wektory $f(\mathbf{v})$, $g(\mathbf{v})$, $h(\mathbf{v})$ mają następującą postać:

$$f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -\frac{R_e}{L_e(v_2)}v_1 - \left\{ \frac{Bl(v_2) + L_{ex}(v_2)v_1}{L_e(v_2)} \right\}v_3 \\ v_3 \\ \left\{ \frac{Bl(v_2)}{m_T} + \frac{L_{ex}(v_2)v_1}{2m_T} \right\}v_1 - \frac{k(v_2)}{m_T}v_2 - \frac{R_m}{m_T}v_3 \end{bmatrix},$$

$$g(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e(v_2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

$$h(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & v_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{gdzie: } L_{ex}(v_2) = \frac{dL_e(v_2)}{dv_2}.$$

Jak widać na podstawie struktury wektora $h(\mathbf{v})$ odpowiedzią głośnika jest wychylenie membrany. Elementy nieliniowe modelu są najczęściej aproksymowane wielomianami drugiego rzędu [21, 37]:

$$\begin{aligned} Bl(v_2) &= Bl_0 + b_1 v_2 + b_2 v_2^2 \\ k(v_2) &= k_0 + k_1 v_2 + k_2 v_2^2 \\ L_e(v_2) &= L_{e0} + l_1 v_2 + l_2 v_2^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdzie: Bl_0, k_0, l_0 - wartości parametrów w położeniu spoczynkowym głośnika,

$b_1, b_2, k_1, k_2, l_1, l_2$ - poszukiwane parametry nieliniowe.

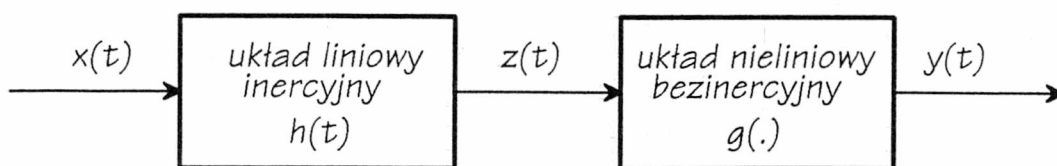
Rozwiązanie równań (2.3) prowadzi do wyznaczenia poszukiwanych nieliniowych zależności pomiędzy napięciem zasilającym głośnik, a wychyleniem membrany.

2.2 Modele wejścia-wyjścia

W przypadku braku informacji o strukturze modelowanego obiektu utworzenie modelu fizycznego jest praktycznie niemożliwe. Budowany jest w takiej sytuacji model posiłkujący się na obserwacjami pobudzenia i odpowiedzi układu. Tego typu podejście jest bardziej uniwersalne i z reguły prowadzi do dokładniejszych wyników, ale ma też zdecydowaną wadę - uzyskany model jest trudny do interpretacji.

Początkowe próby opracowania nieliniowych modeli wejścia - wyjścia polegały na uzupełnianiu znanych modeli liniowych o część nieliniową. Strukturę taką mają modele Wienera i Hammersteina [5, 27].

Model Wienera składa się z dwu niezależnych bloków przedstawionych schematycznie na rys. 2.



Rys. 2. Model Wiener'a układu nieliniowego.

Pierwszy blok jest inercyjnym układem liniowym opisanym równaniem:

$$z(t) = h_0 x(t) + h_1 x(t-1) + \dots + h_{t-1} x(1) \quad (2.6)$$

gdzie: t - czas dyskretny,

$x(t)$ - sygnał pobudzający układ,

$z(t)$ - odpowiedź układu,

$h_0, h_1, \dots, h_{t-1}$ - współczynniki odpowiedzi impulsowej układu.

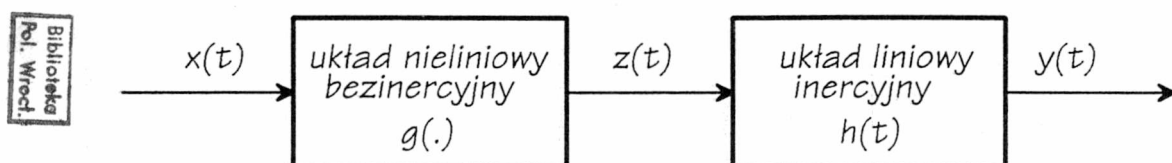
Drugi układ jest nieliniowy i bezinercyjny opisany pewną funkcją $g[.]$, której argumentem są tylko wartości $z(t)$:

$$y(t) = g[z(t)] \quad (2.7)$$

Wynika z tego, że model ten opisany jest następującym równaniem:

$$y(t) = g[h_0 x(t) + h_1 x(t-1) + \dots + h_{t-1} x(1)] \quad (2.8)$$

Model Hammersteina ma strukturę odwrotną (rys. 3). Pierwszym blokiem jest funkcja nieliniowa niezależna czasowo, następnie po nim znajduje się układ liniowy.



Rys. 3. Model Hammersteina układu nieliniowego.

Odpowiedź modelu Hammersteina jest następująca:

$$y(t) = h_0 g[x(t)] + h_1 g[x(t-1)] + \dots + h_{t-1} g[x(1)] \quad (2.9)$$

Oba przedstawione modele mają duże ograniczenia wynikające bezpośrednio z ich struktury oraz z założenia, że funkcja nieliniowa $g[\cdot]$ jest bezinercyjna.

2.3 Szeregi Volterry

Bardziej rozwiniętą metodą modelowania, pozwalającą na uwzględnienie jednocześnie właściwości nieliniowych i inercji układu jest przedstawienie go za pomocą szeregu Volterry [17, 39]. Szereg ten zdefiniowany jest w następujący sposób:

$$y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m[h_m, x(t)] \quad (2.10)$$

gdzie: $V_m[h_m, x(t)]$ - operator Volterry rzędu m :

$$V_m[h_m, x(t)] = \sum_{\tau_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\tau_m=0}^{\infty} h_m(\tau_1, \dots, \tau_m) x(t-\tau_1) \cdot \dots \cdot x(t-\tau_m) \quad (2.11)$$

gdzie: $h_m(\tau_1, \dots, \tau_m)$ - funkcja charakteryzująca m -ty rząd nieliniowości układu.

Jak wynika ze wzorów (2.10) i (2.11) do opisu inercyjnego układu nieliniowego wymagana jest znajomość funkcji $h_1(\tau_1), h_2(\tau_1, \tau_2), \dots, h_m(\tau_1, \dots, \tau_m)$. Funkcje te nazywane są jądrami szeregu Volterry lub też wielowymiarowymi odpowiedziami impulsowymi. Każda z nich związana jest tylko z jednym rzędem nieliniowości:

- > $h_1(\tau_1)$ - jest zwykłą odpowiedzią impulsową układu liniowego,
- > $h_2(\tau_1, \tau_2)$ - opisuje nieliniowości drugiego rzędu,
- > $h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ - opisuje nieliniowości rzędu trzeciego, itd....

Dla układu liniowego zachodzi warunek $h_m(\tau_1, \dots, \tau_m) \equiv 0$, dla $m = 2, 3, \dots$. Szereg Volterry przyjmuje wtedy następującą postać:

$$y(t) = \sum_{\tau_1=0}^{\infty} h_1(\tau_1) \cdot x(t - \tau_1) \quad (2.12)$$

Jak widać jest to klasyczny opis odpowiedzi układu liniowego na pobudzenie sygnałem $x(t)$ poprzez jego splot z odpowiedzią impulsową.

Największą zaletą opisu głośnika dynamicznego przy pomocy szeregu Volterry jest jednoczesne uwzględnienie jego właściwości nieliniowych oraz inercji. Wadą jest natomiast znaczna liczba współczynników tego modelu wynikająca z długiej odpowiedzi głośnika.

3 Metoda NARMAX

3.1 Postać ogólna modelu

W modelach opartych na sekwencjach wejściowych i wyjściowych układu (rys. 4) nie jest potrzebna znajomość struktury modelowanego obiektu. Cała informacja o jego właściwościach zawarta jest w ciągach pobudzenia i odpowiedzi.



Rys. 4. Układ pobudzany ciągiem $x(t)$ i z odpowiedzią $y(t)$.

W przypadku układów liniowych do ich opisu wykorzystywany jest najczęściej model utworzony w oparciu o układ liniowych równań różnicowych:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_y} b_{yi}y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_x} b_{xi}x(t-d-i) + \sum_{i=1}^{n_e} b_{ei}e(t-i) + e(t) \quad (3.1)$$

gdzie: t - czas dyskretny,

d - opóźnienie wnoszone przez układ.

b_{yi} , b_{xi} , b_{ei} , - współczynniki modelu,

$x(t)$ - pobudzenie,

$y(t)$ - odpowiedź układu,

$e(t)$ - błąd predykcji,

n_x - rząd sygnału wejściowego (maksymalne opóźnienie próbek sygnału $x(t)$ występujących w modelu),

n_y - rząd sygnału wyjściowego (maksymalne opóźnienie próbek sygnału $y(t)$ występujących w modelu),

n_e - rząd szumu (maksymalne opóźnienie próbek sygnału $e(t)$ występujących w modelu).

Model (3.1) nazywany jest często modelem autoregresyjnym i określany skrótem ARMAX (AutoRegressive Moving Average with eXogenous input) [8].

W 1985 roku Leontaritis i Billings [26, 27] przedstawili opis rozszerzenia modelu (3.1) na przypadek nieliniowy. Udowodnili, że bardzo szeroka klasa układów może być opisana ogólnym nieliniowym równaniem różnicowym:

$$y(t) = F[y(t-1), \dots, y(t-n_y), x(t-d), \dots, x(t-d-n_x), e(t-1), \dots, e(t-n_e)] + e(t) \quad (3.2)$$

gdzie: $F[.]$ - funkcja nieliniowa.

Ze względu na uogólnienie modelu liniowego (3.1) model o strukturze (3.2) jest powszechnie określany nazwą Non-linear ARMAX w skrócie NARMAX. Warunki istnienia modelu NARMAX dla danego układu są dość łagodne i pozwalają na stosowanie tego modelu do opisu szerokiej klasy układów nieliniowych [5, 7, 26, 27]:

I - układ musi być realizowalny, a jego przestrzeń stanu musi mieć skończony wymiar,

II - w okolicy punktu równowagi można utworzyć model liniowy układu.

Warunek **I** spełniony jest przez praktycznie wszystkie układy rzeczywiste i nie stanowi ograniczenia dla modelu.

Dużo bardziej istotny jest warunek **II**, który mówi o konieczności istnienia modelu liniowego dla małych amplitud, co nie pozwala na modelowanie na przykład układów z histerezą lub tarcie suchym. W przypadku głośników dynamicznych warunek **II** nie jest restrykcyjny, ponieważ przy pracy głośnika z małymi sygnałami można z powodzeniem utworzyć dokładne modele liniowe.

Model określony za pomocą wzoru (3.2) jest bardzo ogólny ponieważ funkcja $F[.]$ może mieć dowolną postać. Dzięki temu inne modele wykorzystywane w opisie układów nieliniowych mogą być traktowane jako szczególne przypadki modelu NARMAX [7].

Szereg Volterry (2.10) opisujący układ nieliniowy jest uproszczoną postacią modelu NARMAX, w którym odpowiedź układu jest nieliniową funkcją pobudzenia - elementów $x(i)$. Funkcja $F[.]$ jest w tym przypadku sumą nieliniowych wielomianów (2.11).

W podobny sposób można potraktować używany stosunkowo często model biliniowy:

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n_y} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_x} b_i x(t-i) + \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_x} c_{ij} y(t-i) \cdot x(t-j) \quad (3.3)$$

gdzie: a_0, a_i, b_i, c_i - współczynniki modelu.

Przy pomocy tego modelu opisywane są zjawiska zachodzące podczas destylacji oraz w systemach sterowania procesami termicznymi i nuklearnymi. Jest to prosty model NARMAX, w którym nieliniowa funkcja $F[.]$ została zastąpiona przez sumę jednomianów 1 i 2 stopnia, przy czym największa potęga w jakiej występują wyrazy pobudzenia $x(t)$ i odpowiedzi $y(t)$ jest równa jeden.

Nieco bardziej skomplikowana sytuacja występuje w przypadku modelu wymiernego. Przedstawiany jest on zwykle równaniem:

$$\begin{aligned} & a(y(t-1), \dots, y(t-r), x(t-1), \dots, x(t-r)) \cdot y(t) \\ & = b(y(t-1), \dots, y(t-r), x(t-1), \dots, x(t-r)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie: r - rząd modelu,

$a(\cdot), b(\cdot)$ - wielomiany skończonego stopnia

Po przekształceniu do następującej postaci:

$$y(t) = \frac{b(y(t-1), \dots, y(t-r), x(t-1), \dots, x(t-r))}{a(y(t-1), \dots, y(t-r), x(t-1), \dots, x(t-r))} \quad (3.5)$$

widać, że mamy do czynienia z modelem NARMAX, w którym nieliniowa funkcja $F[.]$ ma postać ilorazu dwu wielomianów.

3.2 Modele liniowe względem współczynników

Po przyjęciu uproszczenia, że badany układ nie jest źródłem szumu można wykorzystać wersję modelu NARMAX, która nie zawiera części szumowej. Model taki ma następującą postać ogólną [2, 7, 9]:

$$y(t) = F[y(t-1), \dots, y(t-n_y), x(t-d), \dots, x(t-d-n_x)] + e(t) \quad (3.6)$$

Porównując równania (3.1) i (3.7) widać, że opóźnione próbki błędu predykcji $e(t)$ nie są argumentami nieliniowej funkcji $F[.]$. Uproszczenie to prowadzi przede wszystkim do znacznego zmniejszenia liczby współczynników modelu oraz ułatwia ich wyznaczenie.

Model nie narzuca konkretnej postaci funkcji $F[.]$, zresztą w praktyce bardzo rzadko zdarza się aby była ona znana. Podczas tworzenia modelu należy więc a priori założyć pewną jej strukturę od czego zależy dalsza procedura obliczeniowa oraz liczba parametrów potrzebnych do opisu modelu.

W celu rozwiązywania układów równań liniowych został utworzony bardzo rozwinięty aparat matematyczny oraz zostały opracowane efektywne algorytmy numeryczne.

Istnieje możliwość wykorzystania tych metod w procesie wyznaczania modelu NARMAX pod warunkiem, że model będzie liniowy względem współczynników. Warunek ten spełniają modele o następującej strukturze [2]:

$$y(t) = \sum_{i=1}^m \phi_i[y(t-1), \dots, y(t-n_y), x(t-d), \dots, x(t-d-n_x)] \cdot \theta_i + e(t) \quad (3.7)$$

gdzie: m - liczba współczynników modelu,

θ_i - współczynniki modelu,

ϕ_i - funkcja bazowa, na ogół nieliniowa względem zmiennych $x(t)$ i $y(t)$.

Funkcja $\phi_i[.]$ musi być określona jeszcze przed procesem tworzenia modelu, a jej argumentami mogą być tylko opóźnione wartości sygnałów $x(t)$ i $y(t)$. Dzięki temu po podstawieniu wartości wektorów $x(t)$ i $y(t)$ uzyskanych z pomiarów otrzymujemy układ równań liniowych, gdzie niewiadomymi są współczynniki θ_i . Zbiór funkcji $\phi_i[.]$, które mogą być wykorzystywane w procesie modelowania NARMAX jest dość obszerny [2]. Najprostszym przykładem funkcji $\phi_i[.]$ są jednomiany utworzone z wyrazów $x(t)$ oraz $y(t)$. W tym przypadku model będzie miał strukturę wielomianu o wyrazach liniowych i nieliniowych.

W przypadku obiektów, które mają charakter nieliniowych oscylatorów, czyli występują w nich przebiegi harmoniczne, może okazać się korzystne zastosowanie funkcji trygonometrycznych. Najczęściej są to $\sin(.)$, $\cos(.)$ oraz

$\tan(\cdot)$. Spotykane są także modele z funkcją odwrotną - $\operatorname{atan}(\cdot)$ oraz funkcjami hiperbolicznymi $\sinh(\cdot)$, $\cosh(\cdot)$, $\tanh(\cdot)$ [2].

3.2.1 Funkcje radialne - RBF

W technice interpolacji wielowymiarowej wykorzystywane są często funkcje radialne (*Radial Basis Function* - RBF) zdefiniowane następująco [8]:

$$\phi(u) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_r} \lambda_i f(\|u - c_i\|) \quad (3.8)$$

gdzie: u - wektor wejściowy,

c_i - wektor centrów funkcji,

λ_i - współczynniki,

$f(\cdot)$ - funkcja bazowa,

$\|\cdot\|$ - norma Euklidesowa wektora.

Możliwe jest wykorzystanie funkcji RBF także do tworzenia nieliniowego modelu NARMAX. W tym przypadku należy przede wszystkim arbitralnie wybrać funkcję bazową $f(\cdot)$ oraz wyznaczyć centra c_i . Jako funkcje bazowe wybierane są najczęściej [8]:

➤ funkcja sklejana (spline) płaskiej płyty $f(v) = v^2 \log v$,

➤ funkcja gaussowska $f(v) = \exp(-v^2/\beta^2)$,

➤ funkcja wielokwadratowa $f(v) = \sqrt{v^2 + \beta^2}$,

➤ funkcja wielokwadratowa odwrotna $f(v) = \frac{1}{\sqrt{v^2 + \beta^2}}$,

gdzie: β - stała rzeczywista.

Centra c_i są punktami w przestrzeni n - wymiarowej (gdzie n to liczba zmiennych - wejść układu). Wybierane są one najczęściej spośród danych wejściowych lub też arbitralnie rozkładane równomiernie w dziedzinie wejścia.

Innym modelem liniowym względem współczynników jest model wykładniczy [2]:

$$y(t) = \sum_{i=1}^m [a_i + \beta_i \exp(-y^2(t-1))] \cdot y(t-i) \cdot \theta_i + e(t) \quad (3.9)$$

gdzie: $\alpha_i, \beta_i, \theta_i$ - współczynniki modelu.

Wyraz $-y^2(t-1)$ został wybrany arbitralnie możliwe jest zastosowanie w tym modelu innych wyrazów o strukturze: $-y^2(t-k_i)$. Wartość k_i wybierana jest tak, aby uzyskać jak największą dokładność modelu.

Spośród wszystkich modeli liniowych względem współczynników najczęściej stosowaną reprezentacją modelu NARMAX jest reprezentacja wielomianowa. Wynika to przede wszystkim z faktu, że większość ciągłych funkcji, w tym także wszystkie przedstawione wzorami (3.3 - 3.9), można aproksymować wielomianami. Wadą reprezentacji wielomianowej jest bardzo duża liczba współczynników reprezentacja ta ma jednak wiele zalet. Przede wszystkim model ten jest stosunkowo prosty do wyznaczenia i łatwy w interpretacji, a po zastosowaniu właściwej optymalizacji uzyskuje się model, który przy niewielkiej liczbie współczynników jest w stanie zamodelować nawet silnie nieliniowy obiekt.

3.3 Reprezentacja wielomianowa

Reprezentację wielomianową modelu NARMAX można przedstawić w następującej postaci [3, 7]:

$$y(t) = \sum_{i_1=0}^n \theta_{i_1} u_{i_1}(t) + \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=i_1}^n \theta_{i_1 i_2} u_{i_1}(t) u_{i_2}(t) + \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=i_1}^n \sum_{i_3=i_2}^n \theta_{i_1 i_2 i_3} u_{i_1}(t) u_{i_2}(t) u_{i_3}(t) + \dots + e(t) \quad (3.10)$$

gdzie: $n = n_x + n_y$,

$$u_0(t) = x(t-d), \dots, u_{n_x}(t) = x(t-d-n_x), u_{n_x+1}(t) = y(t-1),$$

$$u_{n_x+2}(t) = y(t-2), \dots, u_{n_x+n_y}(t) = y(t-n_y).$$

θ - poszukiwane współczynniki.

Jeśli nie jest znany charakter nieliniowości modelowanego układu, w jego reprezentacji wielomianowej należy uwzględnić wszystkie możliwe współczynniki wynikające ze struktury modelu. Wymaga to często wyznaczenia bardzo dużej liczby parametrów i stanowi poważny problem obliczeniowy. Liczba współczynników wielomianu opisującego model uzależniona jest od rzędu sygnału wejściowego, wyjściowego oraz od wybranego stopnia wielomianu (rzędu nieliniowości - l). Można ją wyznaczyć na podstawie rekurencyjnego wzoru [5, 9, 25]:

$$M = \sum_{i=1}^l n_i, \quad (3.11)$$

$$n_i = [n_{i-1}(n_y + n_x + i)]/i, \quad n_0 = 1$$

Przykładowo dla $n_y = n_x = 15$ oraz $l = 3$ mamy:

$$n_1 = (1 \cdot 31)/1 = 31,$$

$$n_2 = (31 \cdot 32)/2 = 496,$$

$$n_3 = (496 \cdot 33)/3 = 5456,$$

$$M = 31 + 496 + 5456 = 5983.$$

Jak widać nawet przy tak niewielkim rzędzie modelu liczba współczynników osiąga znaczną wartość $M = 5983$.

3.4 Wyznaczanie wielomianowej postaci modelu NARMAX

Reprezentację wielomianową modelu NARMAX można przedstawić także w następującej postaci:

$$y(t) = \sum_{m=1}^M \theta_m p_m(t) + e(t), \quad (3.12)$$

gdzie: M - liczba współczynników wielomianu,

$p_m(t)$ - jednomiany stopnia co najwyżej l będące iloczynem

$x(t)$ oraz $y(t)$:

$$p_m(t) = y(t-N_{y1}) \cdot \dots \cdot y(t-N_{yk}) \cdot x(t-d-N_{x1}) \cdot \dots \cdot x(t-d-N_{xj})$$

l - rząd nieliniowości.

$$k \geq 0, \quad j \geq 0,$$

$$1 \leq N_{y1} \leq n_y \quad \dots \quad 1 \leq N_{yk} \leq n_y,$$

$$0 \leq N_{x1} \leq n_x \quad \dots \quad 0 \leq N_{xj} \leq n_x,$$

$k=0$ oznacza, że $p_m(t)$ nie zawiera wyrazów $y(\cdot)$,

$j=0$ oznacza, że $p_m(t)$ nie zawiera wyrazów $x(\cdot)$.

Na przykład dla $n_y = n_x = l = 2$, jednomianów $p_m(t)$ jest zgodnie ze wzorem (3.11) $M = 20$ i są następujące:

➤ jednomiany liniowe:

$$p_1(t) = y(t-1), \quad p_2(t) = y(t-2), \quad p_3(t) = x(t-d), \quad p_4(t) = x(t-d-1),$$

$$p_5(t) = x(t-d-2),$$

➤ jednomiany nieliniowe:

$$p_6(t) = y^2(t-1), \quad p_7(t) = y^2(t-2), \quad p_8(t) = x^2(t-d), \quad p_9(t) = x^2(t-d-1), \quad p_{10}(t) = x^2(t-d-2),$$

$$p_{11}(t) = y(t-1) \cdot y(t-2), \quad p_{12}(t) = y(t-1) \cdot x(t-d), \quad p_{13}(t) = y(t-1) \cdot x(t-d-1),$$

$$p_{14}(t) = y(t-1) \cdot x(t-d-2), \quad p_{15}(t) = y(t-2) \cdot x(t-d), \quad p_{16}(t) = y(t-2) \cdot x(t-d-1),$$

$$p_{17}(t) = y(t-2) \cdot x(t-d-2), \quad p_{18}(t) = x(t-d) \cdot x(t-d-1), \quad p_{19}(t) = x(t-d) \cdot x(t-d-2),$$

$$p_{20}(t) = x(t-d-1) \cdot x(t-d-2).$$

Jeśli dysponuje się uzyskanymi z pomiarów wektorami $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ o długości N próbek to na podstawie (3.12) możemy utworzyć układ równań liniowych i przedstawić go w postaci macierzowej [7, 9]:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(1) & p_2(1) & \dots & p_M(1) \\ p_1(2) & p_2(2) & \dots & p_M(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1(N) & p_2(N) & \dots & p_M(N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \dots \\ e(N) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

lub też w innym zapisie:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}\theta + \mathbf{e} \quad (3.14)$$

gdzie: $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ uzyskane z pomiarów wektory pobudzenia i

odpowiedzi układu o długości N ,

$\mathbf{P}$ - macierz predykcji o rozmiarze $N \times M$,

θ - współczynniki modelu,

$\mathbf{e}$ - błąd predykcji.

Przedstawiony układ równań jest układem liniowym ponieważ elementy macierzy $\mathbf{P}$ są liczbami wyznaczonymi na podstawie danych pomiarowych z czynników $p_m(t)$ zgodnie ze wzorem (3.12). Macierz $\mathbf{P}$ nazywana jest często macierzą regresji lub też predykcji [9]. Problem obliczenia modelu sprowadza się więc do wyznaczenia wektora θ , poprzez rozwiązanie układu równań (3.14) przy założeniu zerowego błędu predykcji $\mathbf{e}$. Jest to rozwiązanie klasycznego, liniowego zadania najmniejszych kwadratów czyli znalezienie takiego wektora θ , aby poniższa norma uzyskała wartość minimalną:

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{P}\theta\| \rightarrow \min \quad (3.15)$$

Rozwiązanie zadania najmniejszych kwadratów można przeprowadzić wieloma metodami, które można podzielić na cztery grupy [9, 18, 31]:

- algorytmy równań normalnych, w których dokonuje się rozkładu macierzy $\mathbf{P}^T\mathbf{P}$, do grupy tej zalicza się metodę eliminacji Gaussa,
- rozkład ortogonalny (ortogonalizacja) macierzy $\mathbf{P}$, do której zalicza się ortogonalizację Grama - Schmidta, obroty Givensa, transformację Householdera,
- rozkład macierzy $\mathbf{P}$ względem wartości własnych,
- metody iteracyjne: Seidla, nadrelaksacji, gradientów sprzężonych.

Ponieważ macierz $\mathbf{P}$ jest najczęściej źle uwarunkowana nie jest możliwe wykorzystanie najmniej kosztownych algorytmów równań normalnych. Najczęściej wykorzystuje się więc rozkład ortogonalny macierzy $\mathbf{P}$ [2, 9].

4 Tworzenie modelu NARMAX

4.1 Algorytmy ortogonalizacji

Znanych jest kilka algorytmów ortogonalizacji metodą najmniejszych kwadratów. Najbardziej rozpowszechnione są cztery [9, 18, 31]:

- klasyczny algorytm Grama-Schmidta (*CGS - Classical Gram - Schmidt*),
- zmodyfikowany algorytm Grama-Schmidta (*MGS - Modified Gram - Schmidt*),
- transformacja Householdera,
- obroty Givensa.

Przy wyborze algorytmu numerycznego ortogonalizacji wykorzystywanego do tworzenia modelu NARMAX brane były pod uwagę cztery główne czynniki:

- czas obliczeń (liczba wykonywanych elementarnych operacji matematycznych),
- możliwość wbudowania procedur optymalizacji modelu.
- dokładność (wszystkie obliczenia w komputerach wykonywane są na liczbach o skończonej precyzji),
- wykorzystanie pamięci operacyjnej.

Powyższe czynniki zostały uszeregowane według ich istotności. Ze względu na bardzo dużą liczbę współczynników modelu najważniejszy był krótki czas obliczeń oraz możliwość prostego wbudowania procedur optymalizacji. Dokładność numeryczna algorytmu nie była zbyt istotna z tego powodu, że przewidziano wykonywanie wszystkich obliczeń na liczbach zmiennopozycyjnych o podwójnej dokładności (typ *double*). Natomiast ilość zajmowanej pamięci operacyjnej w nowoczesnych komputerach nie jest już sprawą krytyczną, współczesne systemy operacyjne potrafią obsłużyć struktury danych o rozmiarach nawet rzędu setek MB.

Największą ilością operacji matematycznych potrzebnych do ortogonalizacji macierzy $\mathbf{P}$ charakteryzuje się metoda obrotów Givensa i dlatego też nie była ona zupełnie brana pod uwagę. Transformacja Householdera nie pozwala na proste

wbudowanie procedury optymalizacji do tego algorytmu z tego powodu także została odrzucona.

Algorytmy CGS i MGS są bardzo podobne w działaniu z tym, że algorytm zmodyfikowany (MGS) jest mniej wrażliwy na błędy zaokrągleń i w związku z tym daje dokładniejsze wyniki. W procedurze budowania modelu NARMAX zastosowano jednak klasyczny algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta (CGS) głównie ze względu na jego dużą przejrzystość (możliwość efektywnego poszukiwania ewentualnych błędów) i stosunkowo prosty sposób wbudowania procedury optymalizacyjnej wynikający z tego, że algorytm CGS przetwarza macierz predykcji kolumnami, a nie wierszami jak algorytm MGS. Dokładność algorytmu nie była tak istotnym czynnikiem ponieważ po zastosowaniu optymalizacji, z nie zawsze dobrze uwarunkowanej macierzy $\mathbf{P}$ tworzona jest mniejsza, dobrze uwarunkowana macierz $\mathbf{P}_s$ (patrz punkt 4.3), dla której rozkład ortogonalny metodą CGS daje wystarczająco dokładne wyniki.

4.2 Realizacja algorytmu CGS

Algorytm ortogonalizacji Grama - Schmidta bazuje na rozkładzie macierzy predykcji na dwie inne [2, 9, 18]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}\mathbf{A} \quad (4.1)$$

gdzie: $\mathbf{P}$ - macierz predykcji o rozmiarze $N \times M$,

$\mathbf{W}$ - macierz o rozmiarze $N \times M$ kolumnami ortogonalna

tzn. $\mathbf{W}^T\mathbf{W} = \mathbf{D}$,

$\mathbf{D}$ - macierz diagonalna, dodatnia,

$\mathbf{A}$ - macierz górna trójkątna o rozmiarze $M \times M$,

N - liczba równań utworzonych z wektorów $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ (3.14),

M - liczba wyznaczanych współczynników modelu, $N \geq M$

(3.12).

Po dokonaniu ortogonalizacji wyznaczany jest wektor $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{Y} \quad (4.2)$$

lub inaczej:

$$g_i = \frac{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}, \quad i = 1, \dots, M \quad (4.3)$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny, na przykład:

$$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{w}_j = \sum_{t=1}^N w_i(t) \cdot w_j(t) \quad (4.4)$$

Po przekształceniu równania (3.15) otrzymujemy:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}\theta + \mathbf{e} = [\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}][\mathbf{A}\theta] + \mathbf{e} = \mathbf{W}\mathbf{g} + \mathbf{e} \quad (4.5)$$

skąd:

$$\mathbf{A}\theta = \mathbf{g} \quad (4.6)$$

Następnie wykorzystując to, że macierz $\mathbf{A}$ jest trójkątna, metodą podstawiania wstecznego wyznaczane są współczynniki θ .

4.3 Optymalizacja modelu

4.3.1 Cele optymalizacji

Ze względu na nieznajomość struktury układu liczba wyznaczonych współczynników reprezentacji wielomianowej jest bardzo duża. Praktycznie uniemożliwia to właściwą interpretację modelu NARMAX, a jego użyteczność jest niewielka. Dodatkowo model taki jest bardzo często niestabilny. Niezwykle istotna jest więc jego właściwa optymalizacja. Bez tego procesu reprezentacja wielomianowa zawiera zbyt dużą liczbę współczynników (nawet kilkadziesiąt tysięcy). Oprócz tego znaczna liczba wyrazów macierzy predykcji $\mathbf{P}$ równa $M \cdot N$ ($N \geq M$, najczęściej $N > M$) stwarza bardzo poważne problemy obliczeniowe.

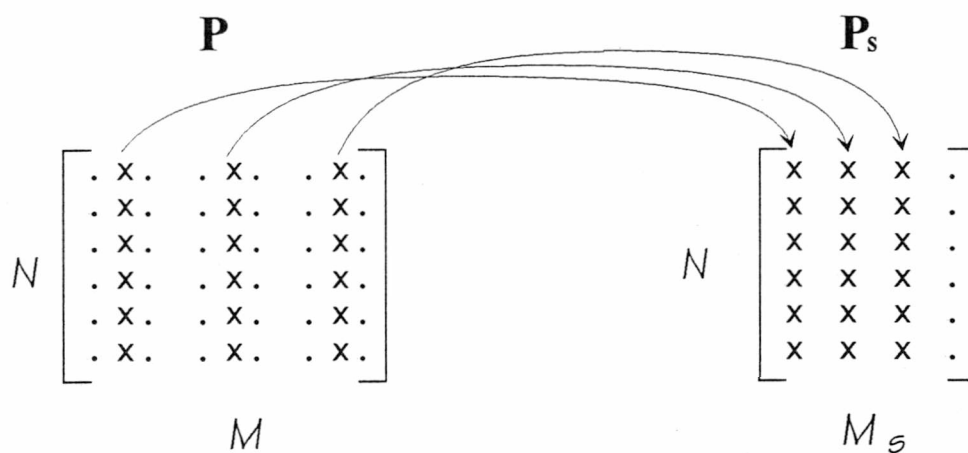
Procedura identyfikacji układu powinna, jeśli to możliwe, jednocześnie obliczać wartości współczynników modelu oraz wybierać tylko te, które są istotne. Tego typu optymalizację można zrealizować na kilka sposobów, przede wszystkim poprzez:

- modyfikację procedury dokonującej ortogonalizacji i wyznaczającej współczynniki wielomianu, tak aby jednocześnie dokonywała ona oceny każdego wyznaczonego współczynnika [2, 4, 9, 25],
- wykorzystanie odpowiednio skonfigurowanej sieci neuronowej [30, 38],
- utworzenie modelu liniowego (ARMAX) dla małych sygnałów w celu określenia rzędów modelu - n_x , n_y , a następnie wyznaczenie nieliniowych członów wielomianu w modelu NARMAX [14, 16].

4.3.2 Modyfikacja algorytmu CGS

Najczęściej stosowaną metodą umożliwiającą określenie struktury modelu jest modyfikacja algorytmu ortogonalizacji macierzy predykcji. Opracowana została procedura określająca istotność poszczególnych współczynników modelu, po czym została ona wbudowana do algorytmu ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Działanie procedury polega na wyborze ze wszystkich M kolumn macierzy predykcji $\mathbf{P}$ podzbioru M_s ($M_s < M$) kolumn. Powstaje w ten sposób macierz $\mathbf{P}_s$, która reprezentuje znacznie mniejszą liczbę współczynników (rys. 5).



Rys. 5. Wybór najbardziej istotnych kolumn macierzy regresji.

Wybór kolumn $\mathbf{P}_s$ dokonywany jest na podstawie wartości stopy redukcji błędu $[err]$ (*error reduction ratio*) [2, 4, 9, 25]. Współczynnik $[err]_i$ określa stopień zmniejszenia się energii błędu predykcji po uwzględnieniu współczynnika θ reprezentowanego przez kolumnę $\mathbf{p}_i$. Z równania (4.5) możemy wyznaczyć sumę kwadratów (energię) odpowiedzi układu:

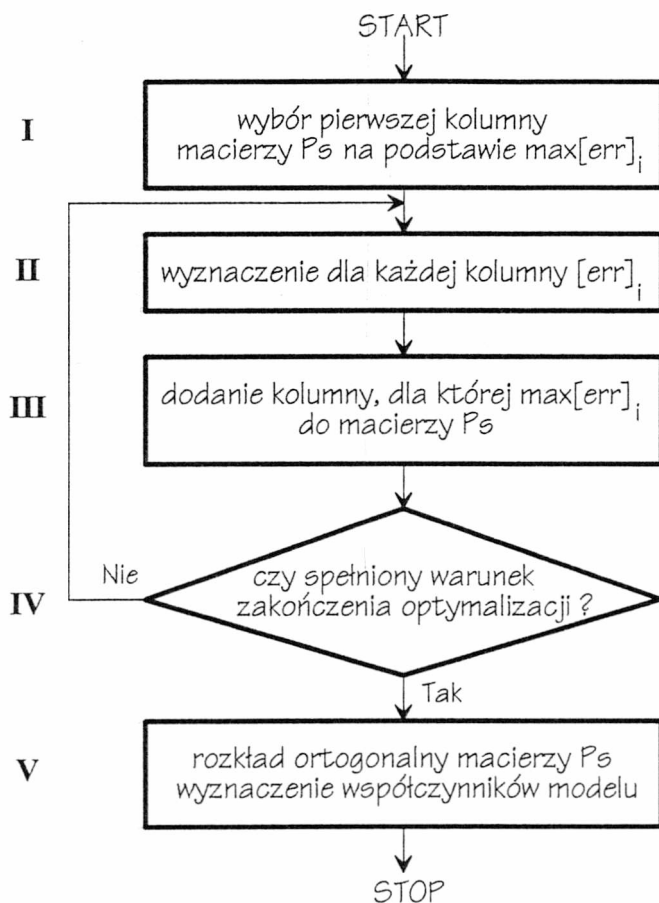
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^N g_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle + \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \quad (4.7)$$

gdzie: g_i - wyrazy wektora $\mathbf{g}$ (4.2).

Redukcja błędu $[err]_i$ wprowadzana przez uwzględnienie kolumny $\mathbf{w}_i$ może być zdefiniowana jako:

$$[err]_i = \frac{g_i^2 \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \quad (4.8)$$

Algorytm optymalizacji realizowany w trakcie ortogonalizacji macierzy $\mathbf{P}$ przedstawiony jest schematycznie na rysunku 6.



Rys. 6. Algorytm optymalizacji modelu NARMAX.

- **I** - W pierwszym kroku dla wszystkich kolumn macierzy $\mathbf{P}$ wyznaczany jest $[err]_i, i = 1 \dots M$. Następnie wybierana jest kolumna $\mathbf{p}_i$, dla której wartość $[err]_i$ jest największa. Stanowi ona pierwszą kolumnę macierzy $\mathbf{P}_s, M_s = 1$.
- **II** - Dla każdej z pozostałych $M - M_s$ kolumn $\mathbf{p}_i$ po podstawieniu ich na koniec macierzy $\mathbf{P}_s$ jako kolumnę $\mathbf{p}_{m_s+1}$ wyznaczany jest $[err]_i$.
- **III** - Wybierana jest kolumna $\mathbf{p}_i$, dla której $[err]_i$ osiągnął wartość największą. Staje się ona nową kolumną macierzy $\mathbf{P}_s, M_s$ zwiększane jest o jeden.
- **IV** - Następuje sprawdzenie warunku zakończenia optymalizacji - jeśli nie został on spełniony następuje przejście do kroku **II** i wybór kolejnej kolumny, w przeciwnym wypadku przejście do kroku **V**.
- **V** - Został utworzony optymalny model o M_s współczynnikach. Jego macierz regresji $\mathbf{P}_s = \mathbf{W}_s \mathbf{A}_s$ jest ortogonalizowana i na podstawie (4.6) wyznaczane są współczynniki.

4.3.3 Kryterium zakończenia procesu wyboru współczynników

Bardzo istotnym problemem jest ustalenie rozmiaru macierzy $\mathbf{P}_s$, czyli liczby współczynników θ_i modelu. Istnieje kilka kryteriów zakończenia procesu optymalizacji [2, 28, 34].

Najprostsze z nich opierają się na analizie błędu predykcji $e(t)$ i umożliwiają ocenę:

➤ błędu średniokwadratowego MSE (*Mean Squared Error*):

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k), \quad (4.9)$$

➤ odchylenia standardowego błędu predykcji:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k)}, \quad (4.10)$$

➤ lub też względnego błędu predykcji RPEL (*Relative Prediction Error Level*):

$$RPEL = \frac{\sum_{k=1}^N e^2(k)}{\sum_{k=1}^N y_m^2(k)}, \quad (4.11)$$

gdzie: $y_m(t)$ - odpowiedź modelu na pobudzenie $x(t)$.

Często wykorzystuje się także wyznaczone podczas optymalizacji wartości $[err]_i$ ponieważ określają one stopień redukcji błędu modelu. Wybór współczynników trwa więc tak długo, aż nie zostanie spełnione równanie:

$$1 - \sum_{i=1}^{M_s} [err]_i < \rho, \quad (4.12)$$

gdzie: ρ jest wybieraną arbitralnie wielkością ($0 < \rho \leq 1$), która określa dopuszczalny błąd modelu.

Kryterium (4.12) ma jednak pewną wadę. Przyjęcie zbyt dużej dokładności modelu (mała wartość ρ) może spowodować uwzględnienie bardzo wielu

współczynników, a w sytuacji granicznej nawet wszystkich dostępnych ($M_s = M$). Wartość ρ powinna więc być dobierana z dużą starannością. Korzystne jest aby była ona większa i bardzo bliska stosunkowi σ_e^2/σ_y^2 [2] gdzie:

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) - \text{wariancja błędu predykcji}, \quad (4.13)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) - \text{wariancja odpowiedzi modelowanego układu}. \quad (4.14)$$

O ile wartość σ_y^2 można wyznaczyć na podstawie danych pomiarowych, to wariancja błędu - σ_e^2 nie jest znana. Problem ten rozwiązuje się iteracyjnie. Początkowo zakłada się pewną wartość ρ , wyznacza model i oblicza przybliżoną wartość wariancji błędu predykcji. Na podstawie tak otrzymanej wartości σ_e^2 wyznacza się optymalną wartość ρ i ponawia proces modelowania. Wykonując opisane powyżej czynności kilkakrotnie możliwe jest bardzo dokładne obliczenie zalecanej wartości ρ .

Wszystkie przedstawione powyżej kryteria mają zasadniczą wadę, która polega na tym, że związane są one tylko z błędem predykcji modelu. Zupełnie nie uwzględniają natomiast jego złożoności. Oba czynniki brane są pod uwagę w tzw. kryteriach informacyjnych [2, 9, 28, 29, 34]. Najczęściej stosowane z nich są FPE (*Final Prediction Error*):

$$FPE = \frac{N+M_s}{N+M_s} \sigma_e^2, \quad (4.15)$$

oraz AIC (*Akaike Information Criterion*):

$$AIC(\phi) = N \log \sigma_e^2 + M_s \phi \quad (4.16)$$

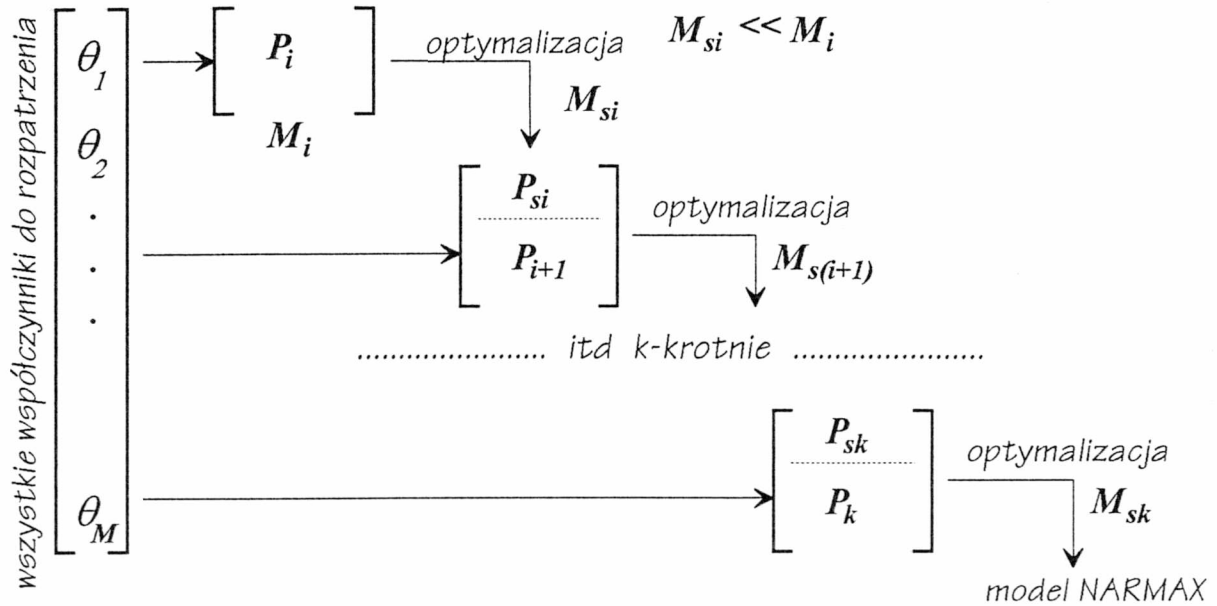
Kryteria informacyjne pozwalają uzyskać kompromis pomiędzy dokładnością modelu (uwzględnienie σ_e^2) oraz jego złożonością (uwzględnienie M_s). Wybór współczynników modelu, czyli tworzenie macierzy $\mathbf{P}_s$, przerywane jest po osiągnięciu przez te kryteria wartości minimalnej. Pozwala to na całkowitą automatyzację procesu optymalizacji. Nie ma potrzeby arbitralnego ustalania poziomu dokładności modelu ρ .

Przy określaniu struktury modelu NARMAX stosowane jest najczęściej kryterium AIC [9, 28, 29]. Jak widać we wzorze (4.16) występuje stała ϕ , która określa poziom istotności modelu α . Jeśli ϕ będzie mniejsze, prawdopodobieństwo wyboru zbyt dużej liczby współczynników rośnie. Najczęściej α przyjmuje się na poziomie 1 % lub 5 %. Dla poziomu istotności $\alpha = 5$ % wartość $\phi = 3.841$. Wybierana jest więc najbliższa liczba całkowita $\phi = 4$, dla której $\alpha = 4.56$ %. [2, 28]. Oczywiście możliwe jest przyjęcie większej wartości ϕ , co zmniejsza prawdopodobieństwo utworzenia zbyt złożonego modelu, ale nie jest to zalecane ponieważ znacznie pogarsza się wtedy jego dokładność.

4.4 Tworzenie modeli wyższych rzędów

Ze względu na długą odpowiedź impulsową głośnika uzyskanie zadowalającej dokładności możliwe jest tylko poprzez zastosowanie odpowiednio wysokiego rzędu modelu (uwzględnienie próbek sygnałów z dużymi opóźnieniami). Pojawia się wtedy problem bardzo dużej liczby współczynników. Przykładowo uzyskanie modelu NARMAX rzędu $n_y = n_x = 30$ z nieliniowościami rzędu $l = 3$ prowadzi do konieczności ortogonalizacji macierzy złożonej z około 50000 kolumn. Operowanie tak dużą ilością danych jest niezwykle trudne, macierz predykcji P zajmowałaby około 20 GB pamięci. Konieczne było więc opracowanie metody, która pozwoliłaby ominąć ten problem [35].

W tym celu wykorzystano fakt, że procedura optymalizacji pozwala wielokrotnie zmniejszyć liczbę współczynników. Model tworzony jest etapami, które przedstawione są na rysunku 7. Najpierw tworzony jest model niewielkiego rzędu o M_i (300 - 500) współczynnikach i przeprowadzana jest jego optymalizacja. W wyniku tego uzyskuje się model o kilkunastu, kilkudziesięciu współczynnikach, który następnie uzupełniany jest o kolejne M_i współczynników pochodzących ze zwiększenia rzędu modelu. Po kolejnej optymalizacji ponownie otrzymuje się kilkadziesiąt współczynników (niekoniecznie tych samych co w pierwszym etapie). Taka procedura powtarzana jest wielokrotnie, aż do chwili gdy przeanalizowane zostaną wszystkie współczynniki wynikające z założonego rzędu modelu.



Rys. 7. Etapowe tworzenie modelu NARMAX wysokiego rzędu.

4.5 Kryterium oceny dokładności modelu

W celu porównania różnych modeli konieczne jest przyjęcie pewnego kryterium, które pozwoli na szybką i obiektywną ocenę ich dokładności. Możliwe jest stosowanie wielu miar określających dokładność modelu. Niektóre z nich przedstawione zostały w rozdziale 4.3.3 (4.9-4.11).

W dalszych pracach jako miarę dokładności przyjęto stosunek energii błędu predykcji odniesionej do energii odpowiedzi modelowanego układu.

$$\varepsilon = \frac{\sum_{k=1}^{N_f} e^2(k)}{\sum_{k=1}^{N_f} y^2(k)} \cdot 100\% = \frac{\sum_{k=1}^{N_f} (y(k) - y_m(k))^2}{\sum_{k=1}^{N_f} y^2(k)} \cdot 100\% \quad (4.17)$$

gdzie: $y(k)$ - odpowiedź rzeczywistego głośnika na pobudzenie

$x(t)$,

$y_m(k)$ - odpowiedź modelu na pobudzenie $x(t)$,

$e(k)$ - błąd predykcji,

N_f - liczba próbek sygnału użyta do testowania modelu.

Przedstawiona miara dokładności określa względną różnicę pomiędzy odpowiedzią układu rzeczywistego, a odpowiedzią jego modelu. Pod tym względem jest ona bardzo podobna do miary *RPEL* (4.11) i dla małych wartości błędu predykcji obie miary będą dawały podobne wyniki. Jej zaletą jest to, że w przypadku dużej różnicy pomiędzy odpowiedzią modelu, a odpowiedzią układu, wartość ε szybko rośnie, często przekraczając 100 %.

4.6 Testowanie metody NARMAX na modelach matematycznych

4.6.1 Model NARMAX bez optymalizacji

W pierwszym etapie testowania procedury tworzenia modelu NARMAX założono nieliniowy, idealny obiekt bez pamięci, którego właściwości transmitancyjne opisuje równanie o arbitralnie dobranych współczynnikach z nieliniowościami szóstego rzędu:

$$y(t) = 1.0 \cdot x(t) + 1.5 \cdot x^2(t) - 1.2 \cdot x^3(t) - 0.5 \cdot x^4(t) + 0.01 \cdot x^5(t) + 0.006 \cdot x^6(t) \quad (4.18)$$

Sygnałem pobudzającym obiekt był generowany numerycznie szum biały o rozkładzie jednostajnym i wartości szczytowej ± 1.0 .

Na podstawie wartości pobudzenia oraz odpowiedzi obiektu utworzono macierz predykcji $\mathbf{P}$ modelu NARMAX zakładając następujące parametry modelowania:

- rząd nieliniowości - $l = 6$,
- rząd modelu - $n_x = n_y = 0$.

Po przeprowadzonej ortogonalizacji metodą CGS wyznaczono wartości współczynników modelu NARMAX. Jak się okazało uzyskane wartości współczynników były takie same jak założonego obiektu z dokładnością do 10 cyfr znaczących.

W następnym kroku założono idealny obiekt liniowy 5 rzędu z pamięcią o strukturze klasycznego filtra IIR z 8 współczynnikami także wybranymi arbitralnie:

$$y(t) = x(t) + 0.5x(t-1) - 0.3x(t-2) - 0.1x(t-4) - 0.1x(t-5) + 0.6y(t-1) - 0.5y(t-3) + 0.4y(t-4) \quad (4.19)$$

Także tutaj po utworzeniu modelu z parametrami $n_y=4$, $n_x=5$, $l=1$ uzyskano założone współczynniki z dokładnością powyżej 10 cyfr znaczących. Współczynniki, które nie występowały w przyjętym obiekcie (miały wartość 0) zostały przez algorytm wyznaczone na poziomie 10^{-20} .

4.6.2 Testowanie procedury optymalizacji

Po pozytywnie zakończonych próbach tworzenia modelu NARMAX bez optymalizacji w podobny sposób zostało przetestowane działanie algorytmu optymalizacji modelu.

Przyjęto taki sam jak w punkcie 4.6.1 obiekt idealny liniowy 5 rzędu o strukturze filtra IIR (4.19). Model pobudzano generowanym numerycznie szumem białym o rozkładzie jednostajnym i wartości szczytowej ± 1.0 . Następnie algorytm wyznaczał współczynniki modelu przy różnej przyjętej jego dokładności ρ (4.12).

Parametry modelowania były następujące:

- rząd nieliniowości - $l = 1$,
- rząd modelu - $n_y=4$, $n_x=5$,
- liczba wierszy macierzy $\mathbf{P}$ (liczba tworzonych równań) - $N = 1024$,
- liczba próbek sygnału do testowania dokładności modelu - $N_f = 1024$,
- kryterium wyboru współczynników - error reduction ratio $[err]$,
- kryterium zakończenia tworzenia modelu - ρ .

W tabeli 1 przedstawiony jest stopień redukcji błędu $[err]$ jaki zapewnia uwzględnienie każdego ze współczynników.

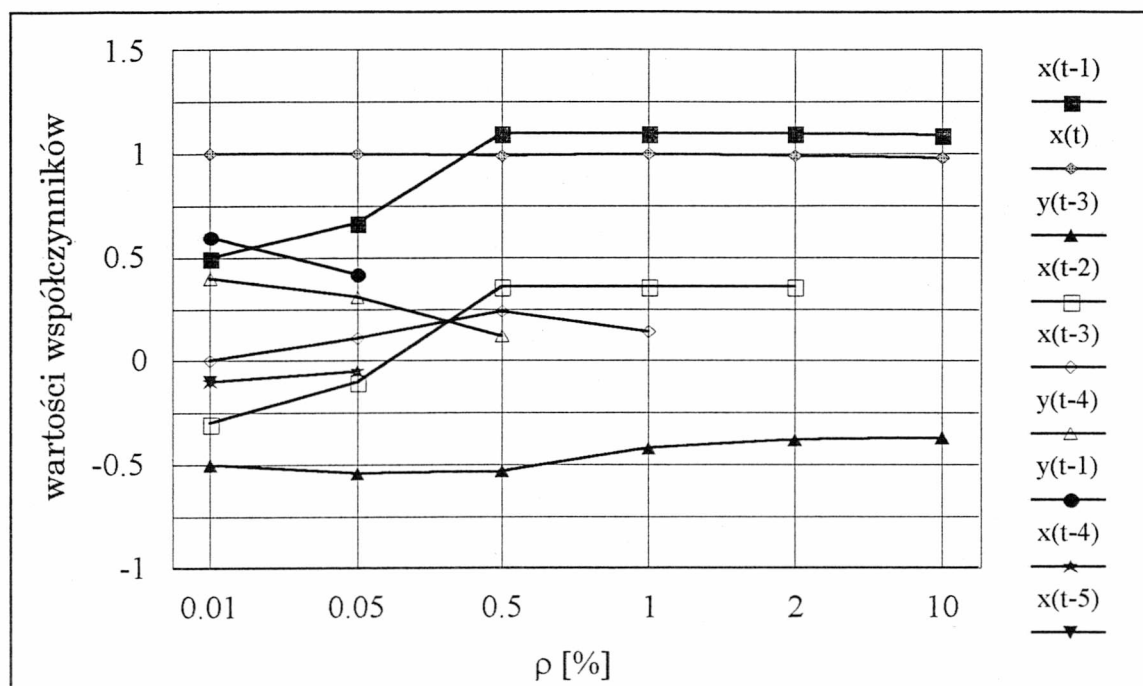
Tab. 1. Redukcja błędu $[err]_i$ wprowadzana do modelu przy uwzględnianiu kolejnych współczynników.

L.p.	Wartość współczynnika	Jednomian	$[err]_i$
1.	0.5	$x(t-1)$	0.4531
2.	1.0	$x(t)$	0.3722
3.	-0.5	$y(t-3)$	0.1179
4.	-0.3	$x(t-2)$	0.04353
5.	0.0	$x(t-3)$	0.00384
6.	0.4	$y(t-4)$	0.00686
7.	-0.1	$x(t-4)$	0.002287
8.	-0.1	$x(t-5)$	0.000178
9.	0.6	$y(t-1)$	0.000076
10.	0.0	$y(t-2)$	0.000001

Z zasady działania procedury optymalizacyjnej wynika, że jeśli zostanie założona mniejsza dokładność wyznaczenia modelu, algorytm uwzględni tylko kilka pierwszych współczynników z tabeli 1 o najwyższych wartościach $[err]_i$. I jest tak w rzeczywistości. Zakładając dokładność modelu ρ na poziomie kolejno 0%, 0.05%, 0.5%, 1%, 2%, 10% uzyskano modele o coraz mniejszej liczbie współczynników. Tabela 2 przedstawia błąd modelu ε oraz liczbę współczynników, natomiast rys. 8 zmianę wartości współczynników w zależności od przyjętej dokładności modelu.

Tab. 2. Liczba współczynników i uzyskany błąd modelowania w zależności od założonej dokładności ρ .

ρ [%]	0	0.05	0.5	1	2	10
ε [%]	4E-26	0.0492	0.426	1.25	1.759	6.362
liczba współczynników	10	8	6	5	4	3



Rys. 8. Zmiana wartości współczynników przy zmniejszaniu dokładności modelu.

Jak można zauważyć odrzucenie podczas optymalizacji niektórych współczynników powoduje czasami nawet dość znaczną zmianę wartości pozostałych.

5 Badania doświadczalne

5.1 Wybór głośników

Do eksperymentów zostało wybranych kilka typów głośników niskotonowych produkowanych przez firmę Tonsil S.A. Zdecydowano się na modelownie głośników niskotonowych, ponieważ są one źródłem największych zniekształceń nieliniowych w zestawach głośnikowych. Oprócz tego istotne było także to, że ich znamionowa moc elektryczna jest znana. Można więc badać zależność wielkości zniekształceń od poziomu pobudzenia przetwornika wyrażonego w procentach mocy znamionowej.

Obiektami badanymi, które wykorzystano do tworzenia opisywanych modeli były:

- głośnik GDN 20/40 w obudowie zamkniętej o objętości około 30 dm³,
- głośnik GDN 20/35/1 w obudowie zamkniętej o objętości około 40 dm³,
- głośnik GD 16/10 w obudowie zamkniętej ZgZ 10/8.

5.2 Układ pomiarowy

W celu zbudowania modelu NARMAX głośnika dynamicznego potrzebne są dane pomiarowe, czyli wartości pobudzenia - $x(t)$ oraz odpowiedzi głośnika - $y(t)$. Sygnałem wejściowym pobudzenia jest sygnał napięcia doprowadzonego do końcówek głośnika. Większym problemem jest wybór sygnału wyjściowego - odpowiedzi głośnika.

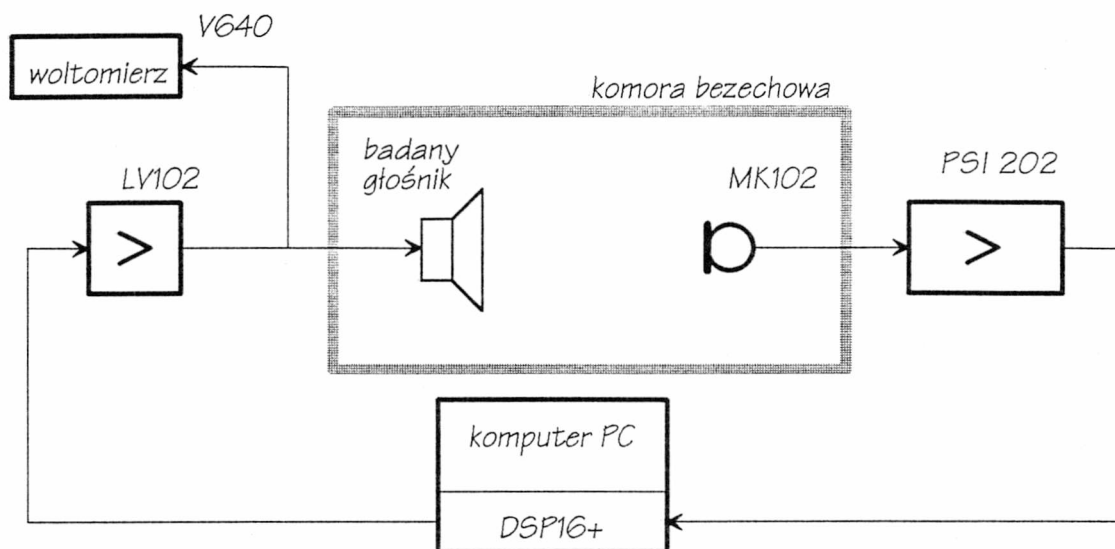
Badanie zniekształceń nieliniowych głośników dla małych częstotliwości przeprowadzane jest najczęściej poprzez analizę drgań jego membrany. Ponieważ stosowanie do tego celu akcelerometrów wprowadza duże błędy pomiarowe konieczne jest wykorzystanie metod bezstykowych. Powszechnie wykorzystuje się więc interferometrię laserową [14, 15], która wymaga specjalistycznego sprzętu. Oprócz tego poważną wadą tej metody jest pomiar wychYLENIA membrany tylko w jednym, ustalonym punkcie.

Dużo lepszym rozwiązaniem jest pomiar ciśnienia akustycznego, które wytwarza głośnik. Istnieje ku temu kilka istotnych przesłanek:

- ucho ludzkie percypuje ciśnienie fali akustycznej, wyjście modelu utworzonego na podstawie pomiaru ciśnienia odpowiada więc temu, co usłyszy słuchacz,
- ciśnienie akustyczne w danym punkcie przestrzeni jest zależne od rozkładu wychyleń na całej powierzchni membrany oraz od wielu czynników dodatkowych, uwzględnionych zostaje więc dużo więcej elementów, które mogą wpłynąć na zniekształcenia,
- pomiar ciśnienia jest prosty: można wykonać go dowolnym mikrofonem pomiarowym, nie ma potrzeby stosowania skomplikowanego i drogiego sprzętu.

Aby zapewnić powtarzalne warunki oraz zminimalizować wpływ czynników zewnętrznych pomiary wykonano w komorze bezpogłosowej Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej. Na rysunku 9 przedstawiony jest wykorzystany układ pomiarowy.

Głównym elementem układu jest komputer klasy PC zaopatrzony w specjalizowaną kartę przetworników cyfrowo-analogowych i analogowo-cyfrowych DSP16+ firmy Ariel (USA). Karta ta umożliwia akwizycję sygnału w dwóch kanałach z rozdzielczością 16 bitów i częstotliwością próbkowania do 50 kHz. Takimi samymi parametrami charakteryzuje się również przetwornik cyfrowo-analogowy. Umieszczony na karcie DSP16+ procesor sygnałowy Texas Instruments TMS320C25 pozwala na jednoczesną generację i akwizycję sygnałów, a także realizację w czasie rzeczywistym na przykład uśredniania sygnału. Wysoka jakość karty umożliwia uzyskanie dynamiki pomiaru przekraczającej 90 dB.



Rys. 9. Układ pomiarowy.

Sygnal z wyjścia karty DSP16+ doprowadzany jest do wzmacniacza mocy LV102, który wzmacnia go do odpowiedniego poziomu. Poziom napięcia zasilającego głośnik kontrolowany jest przy pomocy woltomierza. Znając impedancję znamionową głośnika możliwe jest obliczenie doprowadzonej do niego mocy elektrycznej.

Odpowiedź głośnika rejestrowana jest na drodze akustycznej przez mikrofon pomiarowy i poddawana procesowi przetwarzania analogowo-cyfrowego. Odpowiedź uśredniona jest 100 razy, aby wyeliminować wpływ przypadkowych, nieskorelowanych zakłóceń i szumów.

Spróbki 16-bitowo wartości pobudzenia i odpowiedzi głośnika zapisywane są w plikach i na podstawie tych danych pomiarowych przeprowadzane jest modelowanie.

5.3 Rodzaj sygnału pomiarowego

Do modelowania układów liniowych wymagane są sygnały o szerokim i wyrównanym widmie. Pozwalają one na pobudzenie układu i określenie jego odpowiedzi dla każdej częstotliwości zawartej w paśmie użytecznym. Najczęściej wykorzystuje się więc następujące sygnały:

- Chirp - szybko przestrajany przebieg sinusoidalny, częstotliwość może zmieniać się liniowo lub logarytmicznie,

- MLS (*Maximum Length Sequence*) - przebieg pseudolosowy przyjmujący tylko dwie wartości $+A$ i $-A$ (A - amplituda sygnału),
- szum o rozkładzie gaussowskim - biały lub różowy.

Nieco inna sytuacja występuje w przypadku modeli nieliniowych. Nie wystarczy, aby sygnał pobudzający miał szerokie pasmo częstotliwości. Ze względu na nieliniowości wymagane jest także, aby występowały w nim wszystkie wartości z zakresu amplitud jakie występują na wejściu układu podczas jego pracy.

Często wykorzystywany w modelowaniu liniowym szum biały o rozkładzie gaussowskim najczęściej przyjmuje wartości w okolicy zera. Model NARMAX wyznaczony z wykorzystaniem takiego pobudzenia jest więc dokładniejszy dla małych wartości pobudzenia, w miarę wzrostu poziomu pobudzenia dokładność modelu ulega pogorszeniu. Dokładniejsza analiza problemu [6] pozwala na ustalenie, że najbardziej odpowiednim sygnałem wykorzystanym do tworzenia modelu NARMAX jest szerokopasmowy szum biały o jednostajnym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa.

Ponieważ pomiary przetworników elektroakustycznych wykonuje się często z wykorzystaniem innych sygnałów postanowiono zbadać ich wpływ na dokładność modelu.

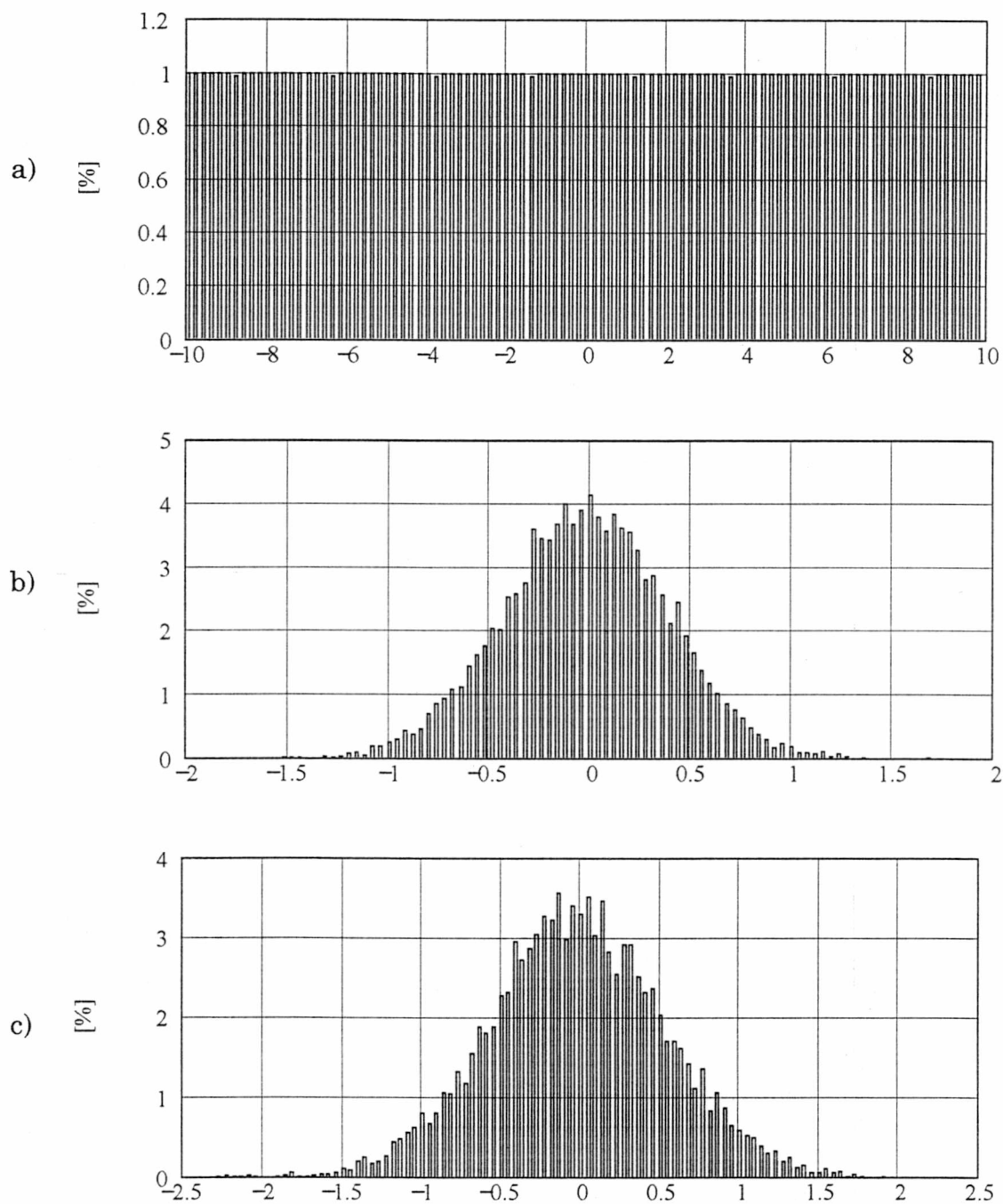
Dane do modelowania uzyskano pobudzając głośnik GDN 20/40 mocą elektryczną 30 W (75 % mocy znamionowej głośnika), aby wyeksponować jego nieliniowości.

Do badania wpływu rodzaju pobudzenia na tworzenie modelu NARMAX wykorzystano następujące sygnały:

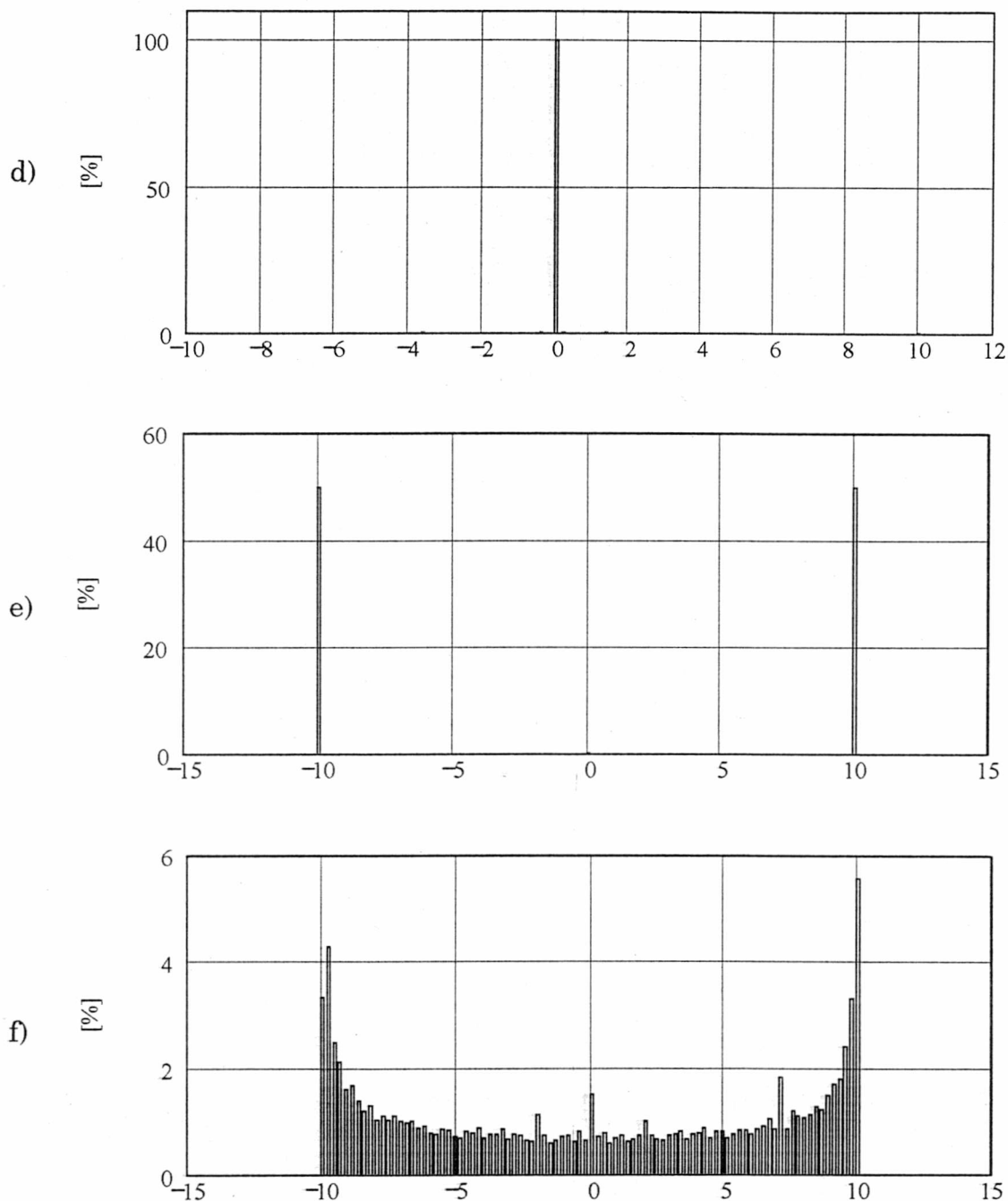
- szum biały o rozkładzie jednostajnym w przedziale ± 10 V,
- biały i różowy szum o rozkładzie gaussowskim,
- impuls wykładniczy,
- MLS,
- Chirp przestrajany liniowo.

Na rysunku 10 przedstawiono obliczone rozkłady gęstości prawdopodobieństwa dla wszystkich sygnałów wykorzystanych w eksperymencie. Wykresy przedstawiają procentowy udział każdej ze 100 klas na jakie został podzielony

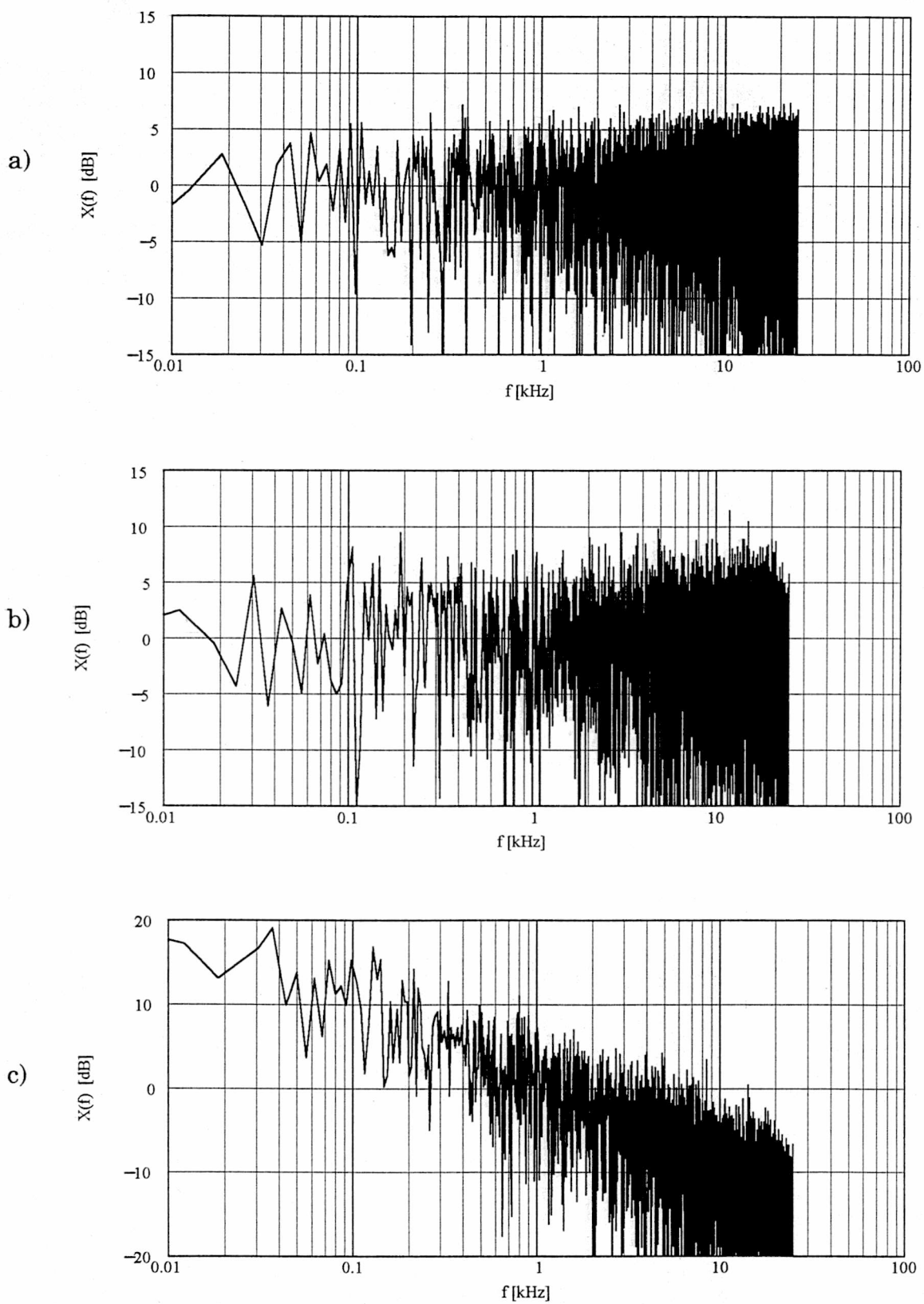
zakres wartości chwilowych sygnałów. Na rysunku 11 znajdują się moduły widma sygnałów użytych w pomiarach.

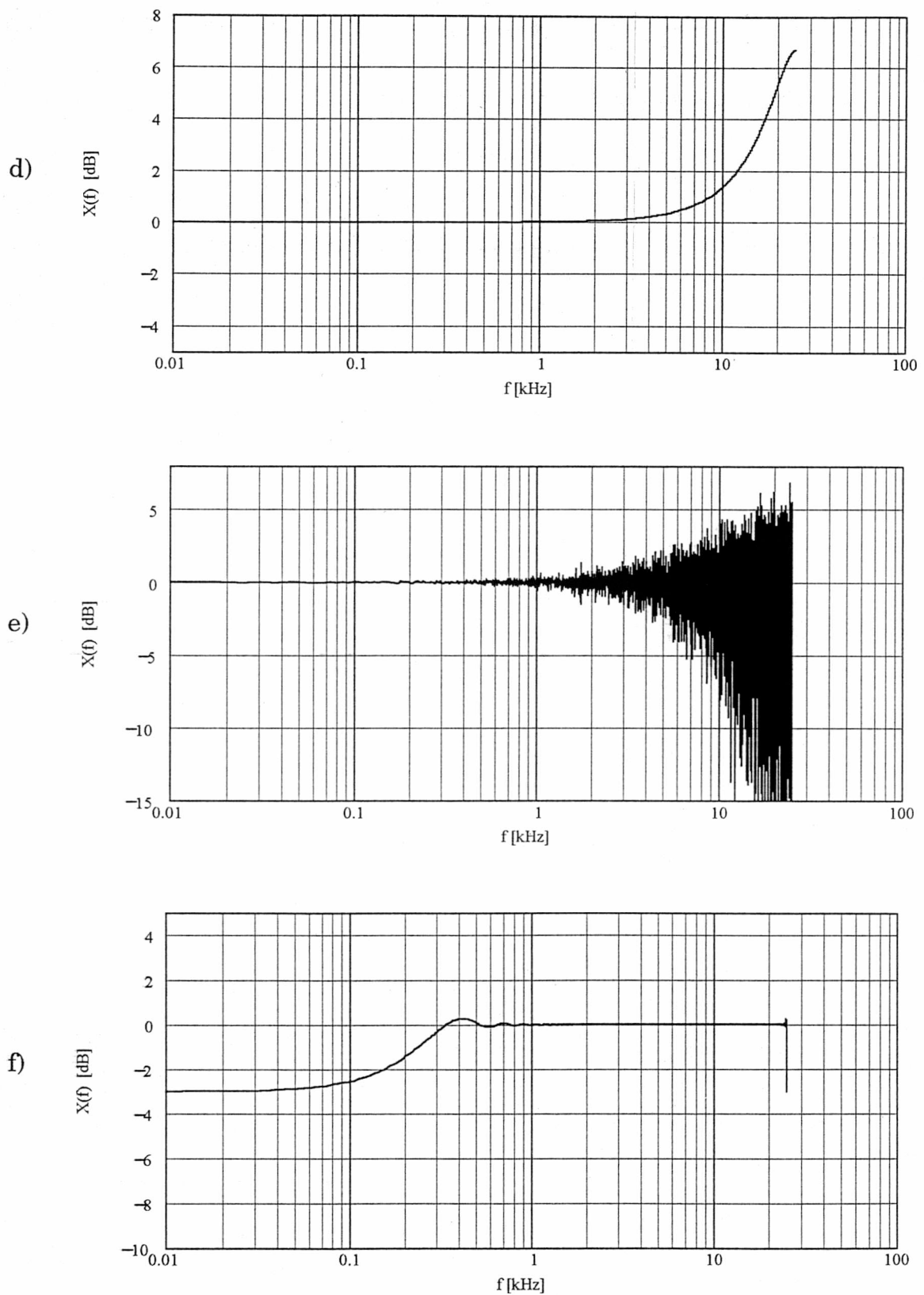


Rys. 10



Rys. 10. Rozkłady gęstości prawdopodobieństwa dla sygnałów wykorzystanych w eksperymencie: a) szum o rozkładzie jednostajnym, b) szum biały gaussowski, c) szum różowy gaussowski, d) impuls, e) MLS, f) Chirp.

*Rys. 11*



Rys. 11. Moduły widma sygnałów wykorzystanych w eksperymencie: a) szum o rozkładzie jednostajnym, b) szum biały gaussowski, c) szum różowy gaussowski, d) impuls, e) MLS, f) Chirp.

Podczas tworzenia modelu NARMAX przyjęte zostały następujące parametry modelowania:

- rząd nieliniowości - $l = 3$,
- rząd modelu - $n_x = n_y = 15$,
- liczba wierszy macierzy $\mathbf{P}$ - $N = 450$,
- liczba próbek do testowania modelu - $N_f = 8192$,
- kryterium wyboru współczynników - stopa redukcji błędu $[err]$ określona wzorem (4.8),
- kryterium zakończenia tworzenia modelu - $AIC(4)$ (patrz wzór 4.16).

Wyniki modelowania zestawiono w tabeli 3. Przedstawiono tu liczbę współczynników oraz dokładność poszczególnych modeli. Utworzenie stabilnego modelu przy pobudzeniu sygnałem impulsowym oraz MLS jest trudne. Spowodowane jest to bardzo specyficznym charakterem pobudzenia. Jak widać na rys. 10 rozkłady amplitud obu tych sygnałów są bardzo niekorzystne.

Tab. 3. Wpływ rodzaju sygnału pobudzającego na uzyskane modele NARMAX.

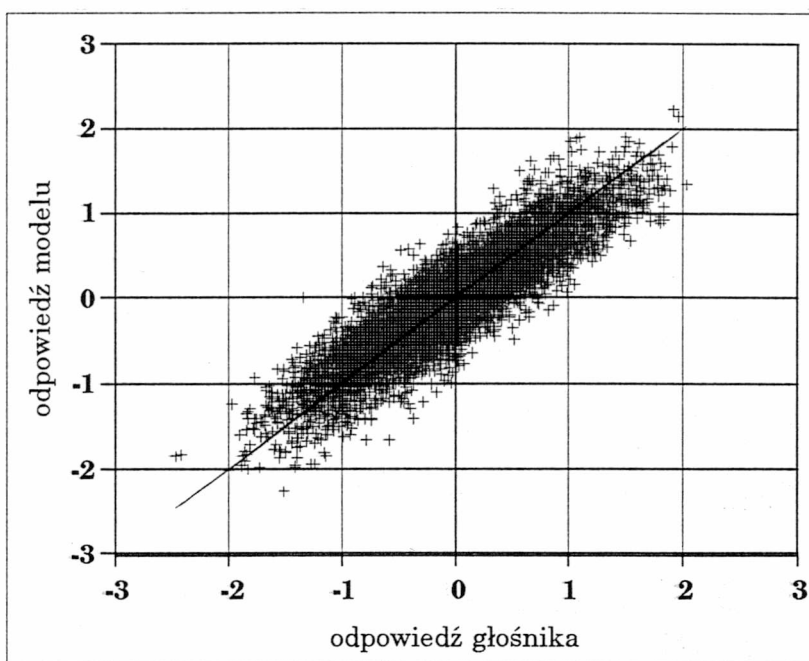
Sygnał pobudzający	M_s	ε [%]
szum o rozkładzie jednostajnym	27	18.9
szum biały (gaussowski),	27	28.8
szum różowy (gaussowski),	23	44.2
impuls	38	58.5
MLS	12	$5.9 \cdot 10^{23}$
Chirp	38	54.82

Na rysunku 12 przedstawiono odpowiedź modelu w stosunku do rzeczywistej odpowiedzi głośnika dla różnych sygnałów. Punkty na tym wykresie tworzone są na podstawie odpowiedzi rzeczywistego głośnika i modelu NARMAX na to samo pobudzenie. Dla każdej próbki pobudzenia tworzony jest punkt,

którego odcięta jest równa wartości próbki odpowiedzi głośnika, natomiast rzędna - wartości odpowiedzi modelu. Przedstawiona na wykresach linia prosta nachylona pod kątem 45° ilustruje sytuację idealną, gdy odpowiedź modelu jest identyczna z odpowiedzią rzeczywistego głośnika.

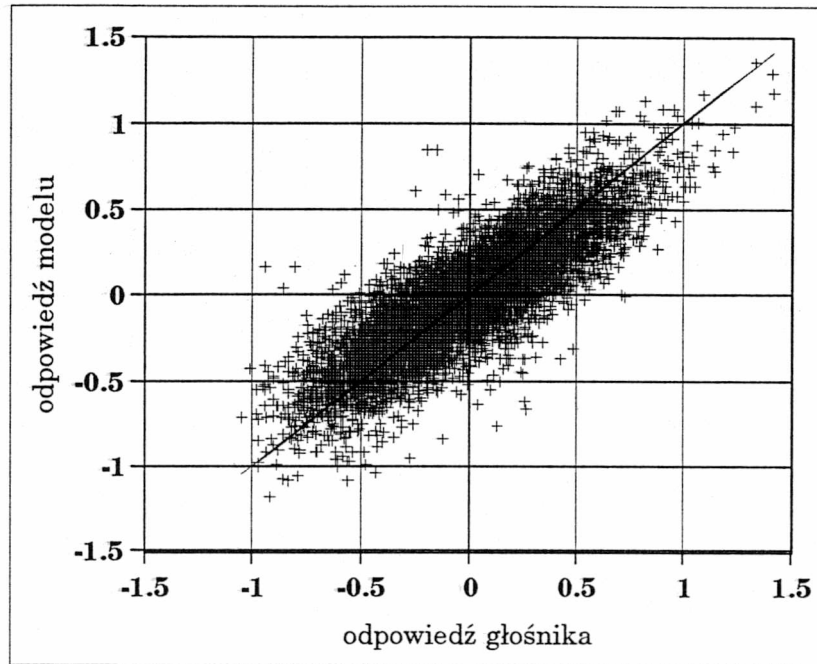
Wykresy te znakomicie ilustrują różnice między odpowiedziami obiektu rzeczywistego i modelu. W przypadku błędu modelu o charakterze losowym punkty są rozmieszczone w szerokim pasie wzdłuż linii odpowiadającej sytuacji idealnej (rys. 12b)). Jeśli punkty tworzą pas o nachyleniu mniejszym niż ta linia oznacza to, że model wprowadza kompresję - jest to widoczne na przykład na rys. 12c). Wykresy takie pomagają zinterpretować odpowiedź modelu na różne pobudzenia. Widoczna na rys. 12f) duża liczba punktów zgrupowana wzdłuż osi rzędnych (dla $x = 0$) oznacza, że model odpowiadał sygnałem o znacznej amplitudzie przy praktycznie zerowym pobudzeniu.

a)

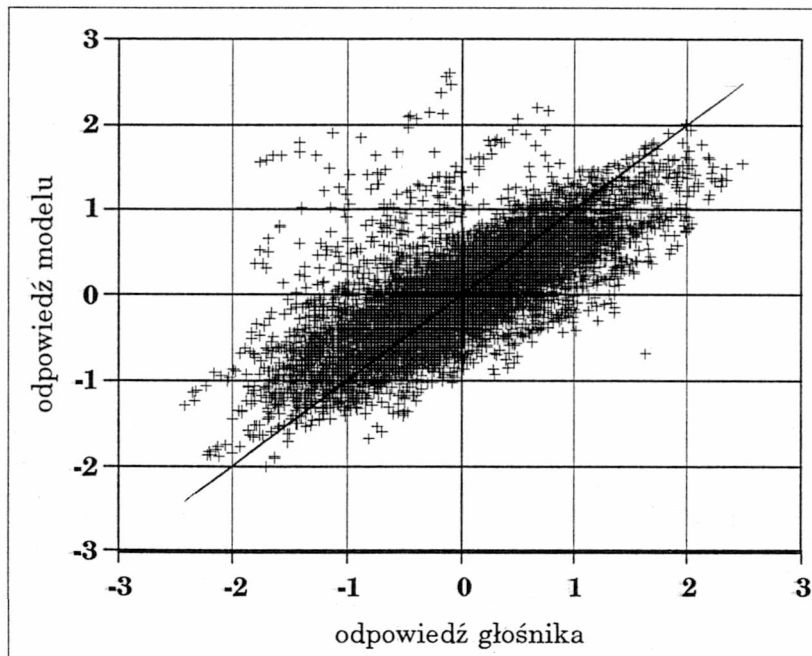


Rys. 12

b)

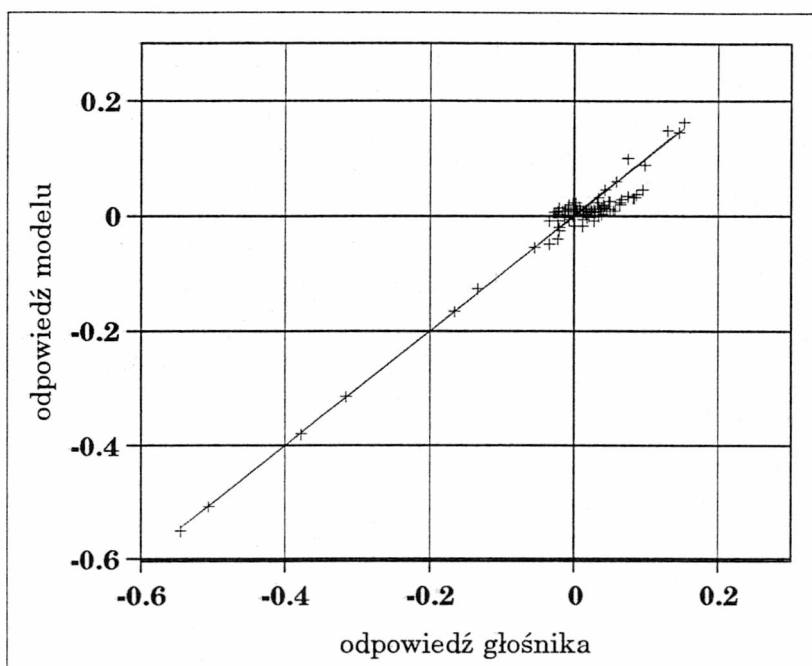


c)

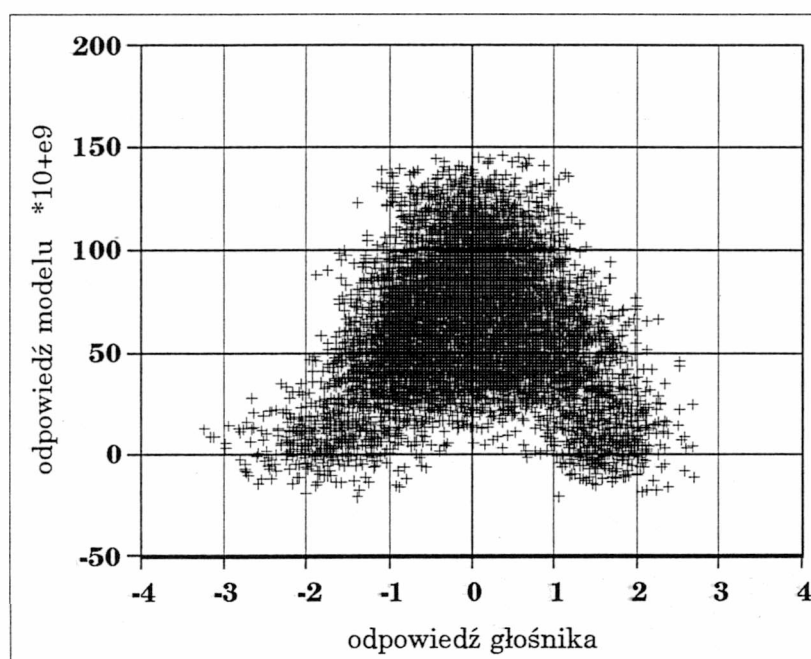


Rys. 12 (ciąg dalszy)

d)

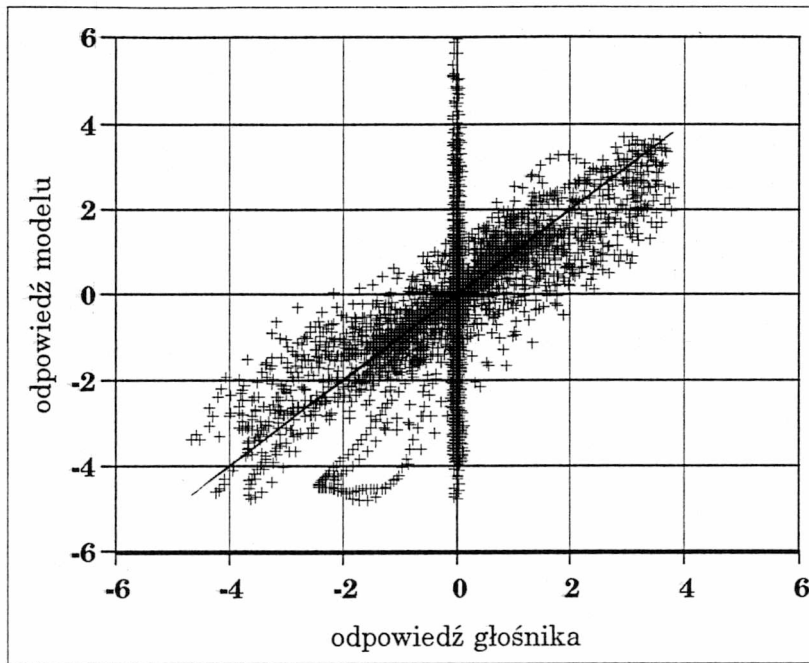


e)



Rys. 12 (ciąg dalszy)

f)



Rys. 12. Odpowiedź modelu w stosunku do rzeczywistej odpowiedzi głośnika:
 a) szum o rozkładzie jednostajnym, b) szum biały gaussowski, c)
 szum różowy gaussowski, d) impuls, e) MLS, f) Chirp.

Przedstawione badania dowodzą, że bardzo istotną sprawą jest właściwy wybór sygnału pobudzającego. Do tworzenia modelu NARMAX najlepiej nadają się szumy białe. Uzyskany z ich pomocą model jest najbardziej dokładny. Nie należy stosować natomiast sygnału MLS ze względu na bardzo niekorzystny rozkład amplitudy pobudzenia (rys. 10), co uniemożliwia wyznaczenie stabilnego modelu. W utworzonym z wykorzystaniem tego sygnału modelu pojawiły się dwa współczynniki przy jednomianach $x^2(t-2)x(t-3)$ oraz $x^3(t-3)$, które miały wartości odpowiednio: $7.49051178315164416 \cdot 10^{10}$ i $-7.4905117831516992 \cdot 10^{10}$.

Jak można zauważyć na rys. 12 model utworzony z wykorzystaniem szumu różowego cechuje się pewną kompresją tzn. odpowiedź modelu zasadniczo ma wartości mniejsze niż odpowiedź rzeczywistego głośnika.

Pobudzenie impulsowe nie pozwala natomiast zdefiniować poprawnie modelu dla wszystkich poziomów pobudzeń ponieważ tylko kilkanaście próbek przyjmuje wartości istotnie odbiegające od zera.

5.4 Wpływ czynników zewnętrznych

Podczas pomiarów przetworników elektroakustycznych istotnym problemem jest wpływ sygnałów zakłócających na uzyskiwane rezultaty. Dlatego też zbadano jak zmienia się dokładność uzyskiwanych modeli w obecności zakłóceń. Przeanalizowano wpływ różnej rozdzielczości kwantowania analogowo-cyfrowego oraz szumu addytywnego [36].

Do eksperymentów wybrany został głośnik niskotonowy GDN 20/40 umieszczony w obudowie zamkniętej. Do głośnika doprowadzono szum biały o rozkładzie jednostajnym i amplitudzie dobranej tak, aby głośnik pracował z mocą 20 W (50 % mocy znamionowej).

Uzyskaną z pomiarów odpowiedź głośnika potraktowano jako referencyjną (niezniekształconą) - $y_{ref}(t)$. Następnie poddano ją modyfikacjom symulującym różnorodne błędy pomiarowe w ten sposób tworząc przebiegi $y_n(t)$. Modelowanie przeprowadzono wykorzystując wektor pobudzenia $x(t)$ oraz zmodyfikowaną odpowiedź głośnika $y_n(t)$.

W celu określenia stopnia zaburzenia odpowiedzi głośnika $y_{ref}(t)$ wywołanej modyfikacjami zdefiniowano stosunek sygnału do szumu $(S/N)_y$ przebiegu $y_n(t)$ (5.1). Jego mniejsza wartość oznacza większe zakłócenie oryginalnej odpowiedzi głośnika.

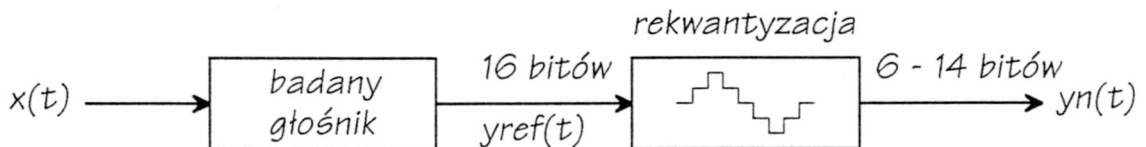
$$(S/N)_y = 10 \log \left(\frac{\sum_{N_f} y_{ref}^2}{\sum (y_{ref} - y_n)^2} \right) [\text{dB}] \quad (5.1)$$

We wszystkich symulacjach przyjęte zostały następujące parametry modelowania:

- rząd nieliniowości - $l = 3$,
- rząd modelu - $n_x = n_y = 10$,
- liczba wierszy macierzy $\mathbf{P}$ - $N = 450$,
- liczba próbek do testowania modelu - $N_f = 8192$,
- kryterium wyboru współczynników - stopa redukcji błędu $[err]$,
- kryterium zakończenia tworzenia modelu - $AIC(4)$.

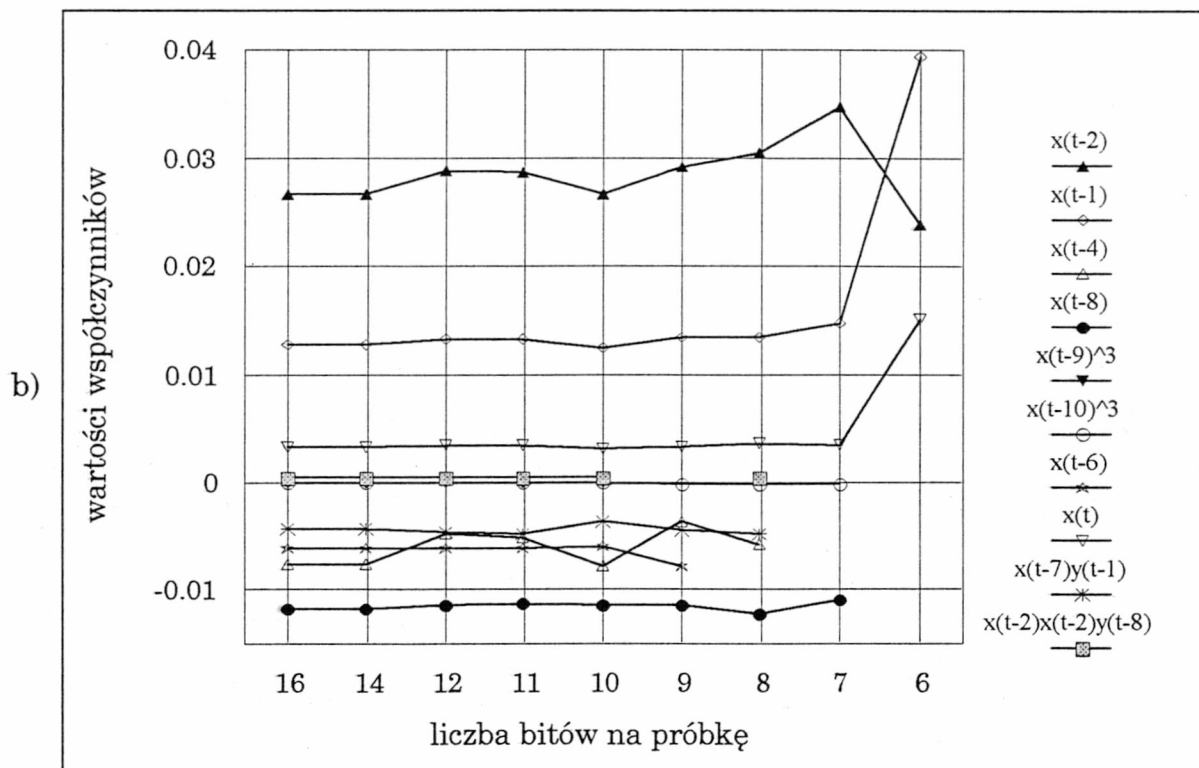
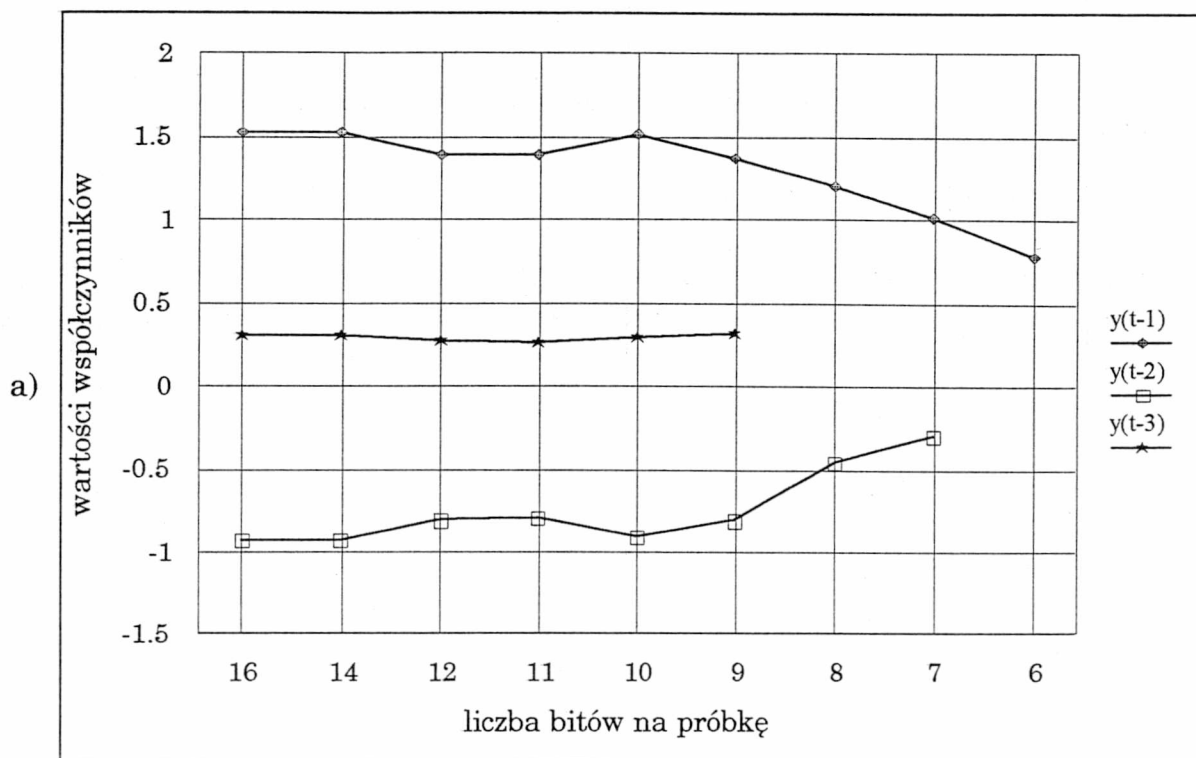
5.4.1 Rozdzielczość kwantowania procesu przetwarzania analogowo-cyfrowego

W pierwszej kolejności sprawdzono wpływ zmiany rozdzielczości kwantowania procesu przetwarzania analogowo-cyfrowego na dokładność uzyskanego modelu NARMAX. W tym celu referencyjną odpowiedź $y_{ref}(t)$ poddano rekwantyzacji zmniejszając rozdzielczość próbek z 16 do 6 - 14 bitów (rys. 13).



Rys. 13. Symulacja kwantowania odpowiedzi głośnika z różnymi rozdzielczościami.

Wyniki przedstawiające wpływ dokładności procesu przetwarzania analogowo-cyfrowego przedstawia tabela 4. Na rysunku 14 zilustrowano zmiany wartości współczynników modelu spowodowane różną rozdzielczością kwantowania.



Rys. 14. Zmiana wartości współczynników modelu NARMAX w zależności od dokładności procesu przetwarzania analogowo-cyfrowego (współczynniki zostały podzielone na dwie grupy a) i b) dla większej przejrzystości wykresu).

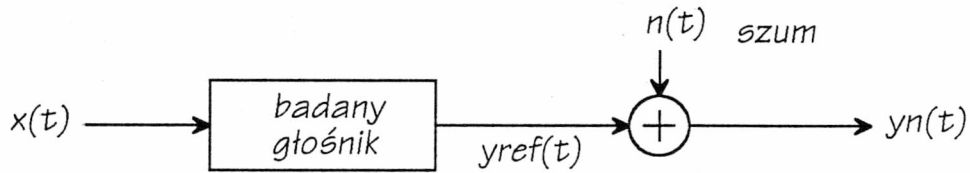
Tab. 4. Wpływ dokładności procesu przetwarzania analogowo-cyfrowego na model NARMAX.

liczba bitów na próbkę	M_s	$(S/N)_y$ [dB]	ε [%]
16	14	-	14.2
14	14	64.5	14.2
12	15	53.1	14.2
11	15	47.2	14.8
10	14	41.2	13.9
9	18	35.1	14.2
8	19	29.1	14.1
7	12	23.1	15.0
6	16	17.2	18.2

Jak widać w tabeli 4 oraz na rysunku 14 zmiana rozdzielczości kwantowania nie wpływa znacząco na proces tworzenia modelu NARMAX. W zakresie rozdzielczości 10 - 16 bitów na próbkę powstaje niemalże taki sam model. Wartości współczynników oraz ich liczba prawie się nie zmienia. Pozwala to na stosowanie podczas pomiarów sprzętu o mniejszej rozdzielczości przetwarzania A/D np. 12 bitowego.

5.4.2 Zakłócający szum addytywny

Analizę wpływu addytywnego szumu zakłócającego na proces tworzenia modelu NARMAX zrealizowano poprzez modyfikację zmierzonej wzorcowo odpowiedzi głośnika $y_{ref}(t)$. W układzie przedstawionym na rysunku 15 do nieznieskształconej odpowiedzi $y_{ref}(t)$ dodano generowany numerycznie szum biały o rozkładzie jednostajnym.



Rys. 15. Tworzenie zaszumionej odpowiedzi głośnika.

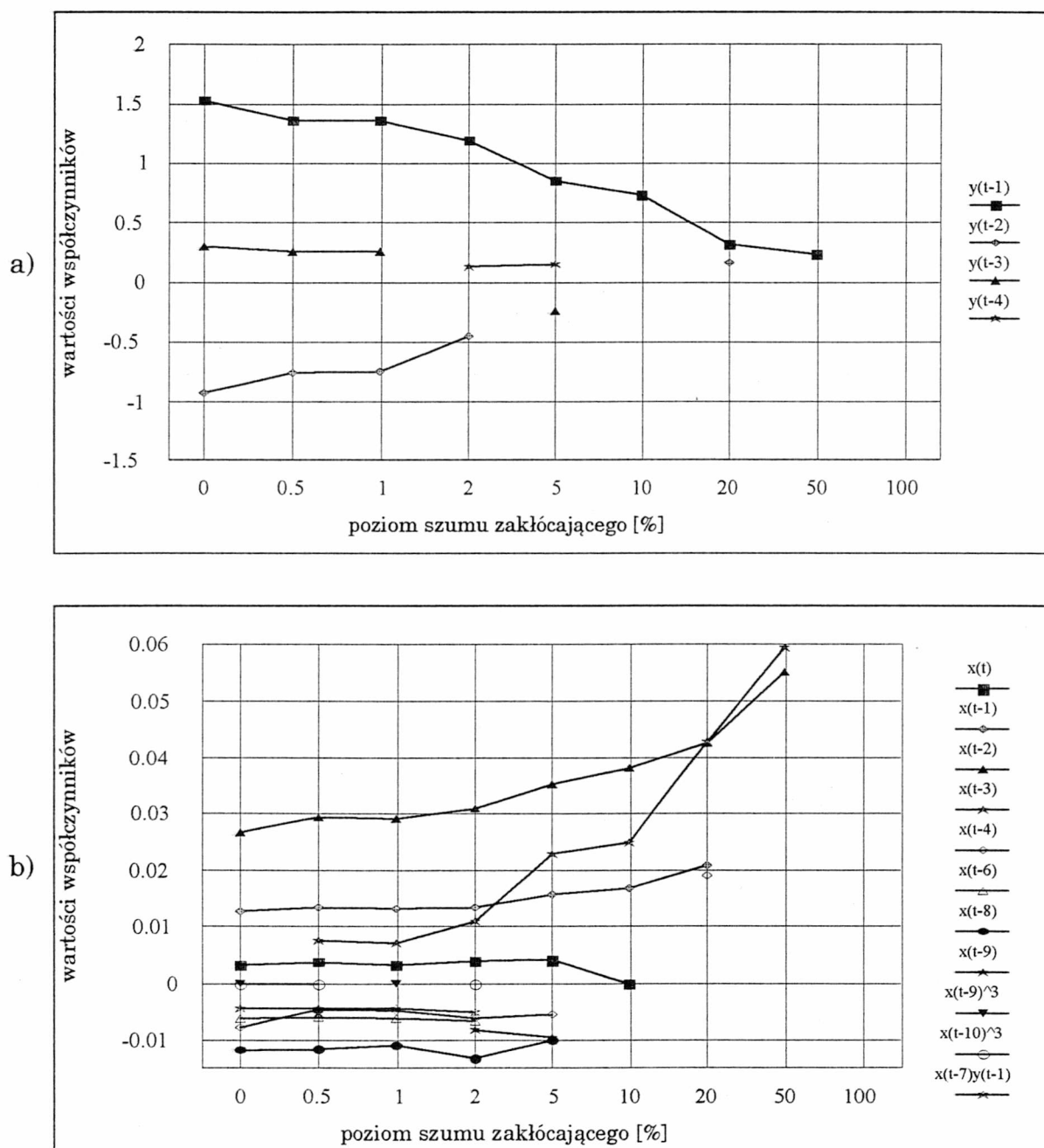
Wartość szczytową szumu zakłócającego $n(t)$ ustalono w zakresie 0.5 - 100 % wartości szczytowej odpowiedzi głośnika $y_{ref}(t)$.

W tabeli 5 przedstawiono wpływ szumu zakłócającego na dokładność tworzonych modeli NARMAX. Jak widać, niewielki szum zakłócający (do 2 %) nie wpływa niekorzystnie na proces tworzenia modelu, natomiast większe zakłócenia powodują tworzenie błędnych modeli.

Tab. 5. Wpływ szumu zakłócającego na model NARMAX głośnika dynamicznego.

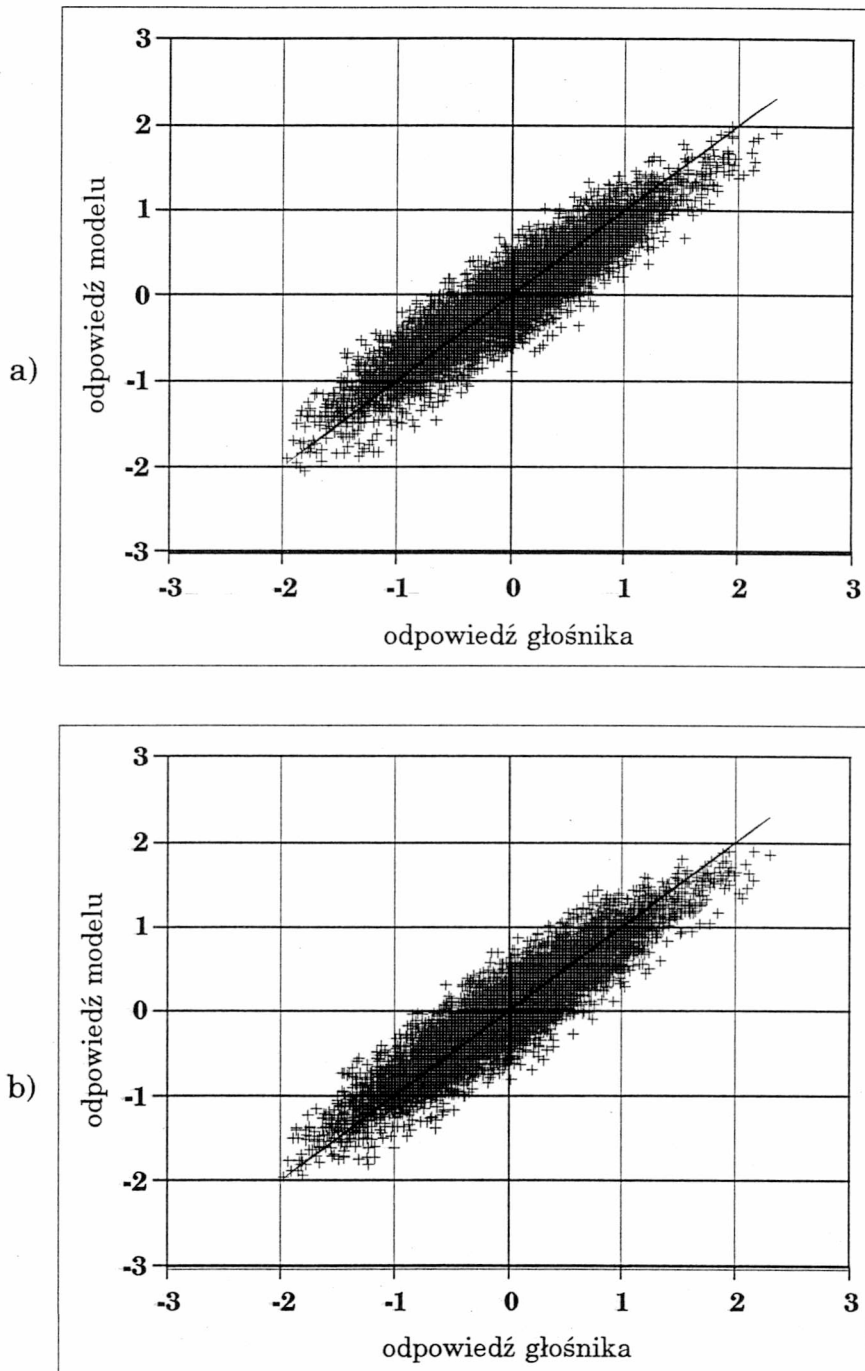
względny poziom szumu $\frac{\max(n(t))}{\max(y_{ref}(t))} \cdot 100 [\%]$	M_s	$(S/N)_y$ [dB]	ε [%]
0	14	-	14.2
0.5	16	35.3	14.5
1	16	35.1	14.3
2	15	29.2	13.1
5	14	27.1	15.9
10	11	15.1	19.8
20	10	9.1	26.5
50	10	1.14	61.4
100	8	-4.82	88.3

Na rysunku 16 przedstawiona jest zmiana wartości współczynników modelu NARMAX w zależności od poziomu szumu zakłócającego. Gdy wartość szczytowa szumu zakłócającego nie przekracza 2 % wartości szczytowej odpowiedzi głośnika zmiana współczynników jest niewielka. Dla większych poziomów zakłóceń niektóre ze współczynników zanikają, pojawiają się nowe o dość przypadkowych wartościach.

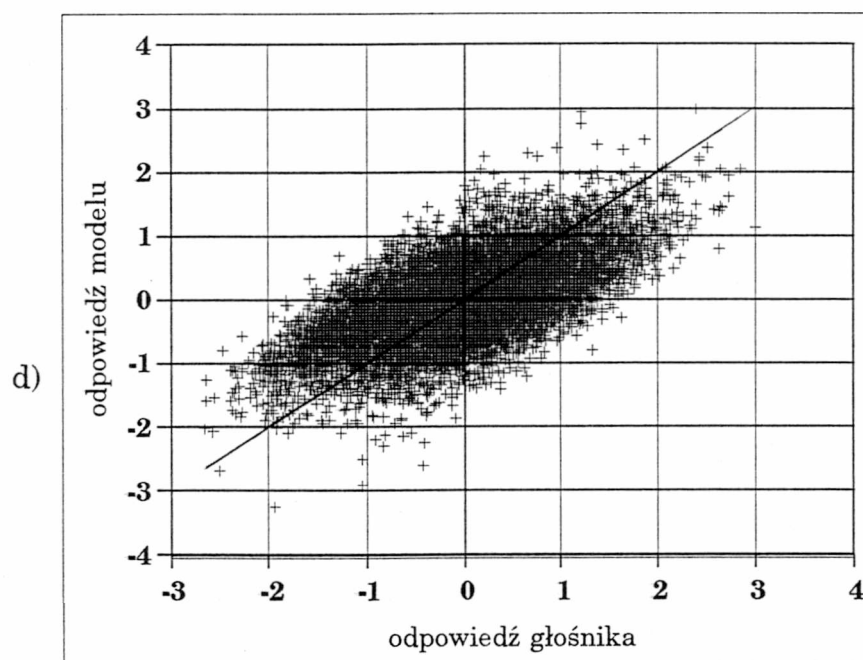
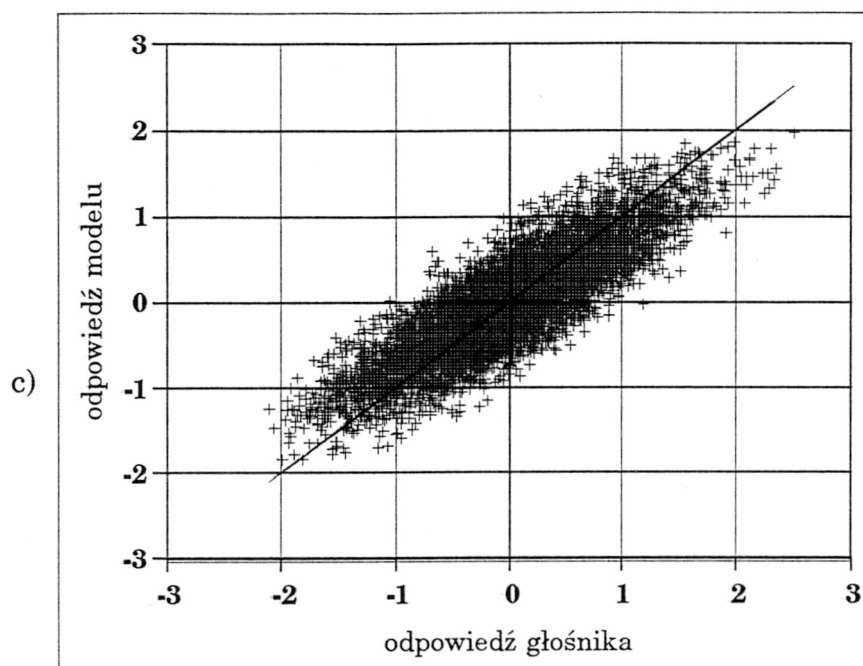


Rys. 16. Zmiana wartości współczynników modelu NARMAX w zależności od poziomu szumu zakłócającego (współczynniki zostały podzielone na dwie grupy a) i b) dla większej przejrzystości wykresu).

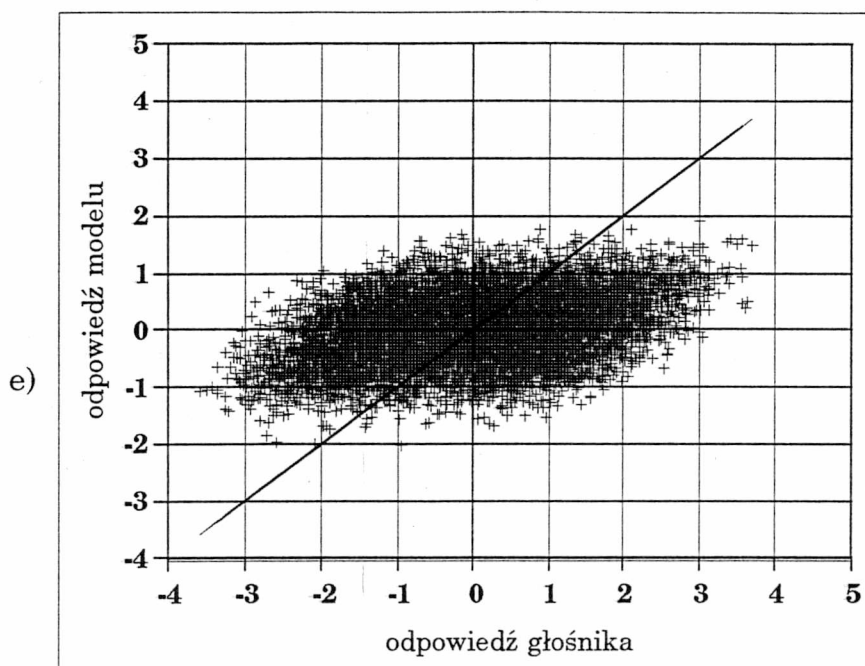
Na rysunku 17 przedstawiono wykres odpowiedzi modelu w stosunku do zaszumionej odpowiedzi głośnika $y_n(t)$ dla różnych poziomów szumu zakłócającego. W miarę wzrostu zakłóceń odpowiedź modelu coraz bardziej odbiega od odpowiedzi głośnika i staje się losowa.



Rys. 17



Rys. 17 (ciąg dalszy)



Rys. 17. Odpowiedź modelu w stosunku do zaszumionej odpowiedzi głośnika $y_n(t)$ dla różnych poziomów szumu zakłócającego: a) - 1%, b) - 5%, c) - 20%, d) - 50%, e) - 100%.

Z przedstawionych symulacji wynika, że wpływ szumu zakłócającego na uzyskane modele NARMAX jest wyraźny. Zauważyć można bardzo duże zmiany wartości współczynników przy różnych poziomach zakłóceń.

5.5 Model głośnika dynamicznego bez optymalizacji

Po dokonaniu wyboru sygnału pobudzającego oraz zbadaniu wpływu zakłóceń na tworzone modele przeprowadzono próby budowania modeli NARMAX o różnej strukturze. W celu oceny zastosowanej w późniejszym etapie procedury optymalizacyjnej proces modelowania realizowany był początkowo bez optymalizacji.

Dane pomiarowe do modelowania uzyskano pobudzając głośnik GDN 20/40 szumem białym o rozkładzie jednostajnym. Poziom sygnału dobrano w ten sposób aby głośnik pracował z mocą 10 W. Odpowiada to 25 % jego mocy znamionowej. Wybór niewielkiego poziomu podyktowany był chęcią uzyskania w miarę liniowej pracy przetwornika. Pozwoliło to na uniknięcie zbyt dużej komplikacji modelu, co na wstępnym etapie prac było dość istotne.

Na podstawie wartości wektorów pobudzenia $x(t)$ i odpowiedzi $y(t)$ uzyskanych z pomiarów zbudowano 8 modeli NARMAX głośnika dynamicznego [12, 13].

Do eksperymentów założono następujące struktury:

- A. model liniowy o strukturze filtru FIR rzędu 50 ($l=1, n_x = 50, n_y = 0$),
- B. model liniowy o strukturze filtru FIR rzędu 200 ($l=1, n_x = 200, n_y = 0$),
- C. model liniowy o strukturze filtru IIR rzędu 20 ($l=1, n_x = 20, n_y = 20$),
- D. model liniowy o strukturze filtru IIR rzędu 40 ($l=1, n_x = 40, n_y = 40$),
- E. model nieliniowy rzędu 9 zależny tylko od $x(t)$ ($l=3, n_x = 9, n_y = 0$),
- F. model nieliniowy rzędu 13 zależny tylko od $x(t)$ ($l=3, n_x = 13, n_y = 0$),
- G. model nieliniowy rzędu 4 zależny od $x(t)$ i $y(t)$ ($l=3, n_x = 4, n_y = 4$),
- H. model nieliniowy rzędu 7 zależny od $x(t)$ i $y(t)$ ($l=3, n_x = 7, n_y = 7$).

Do tworzenia modeli wykorzystano pierwszych 700 próbek sygnałów pomiarowych, tzn. liczba wierszy macierzy $\mathbf{P}$ była równa $N = 700$. Weryfikację i wyznaczenie błędu ε przeprowadzono z wykorzystaniem $N_f = 8192$ próbek.

Wyniki modelowania zestawione są w tabeli 6. Brak wartości ε w tabeli oznacza, że utworzony model był niestabilny.

Tab. 6. Porównanie dokładności modeli NARMAX o różnej strukturze.

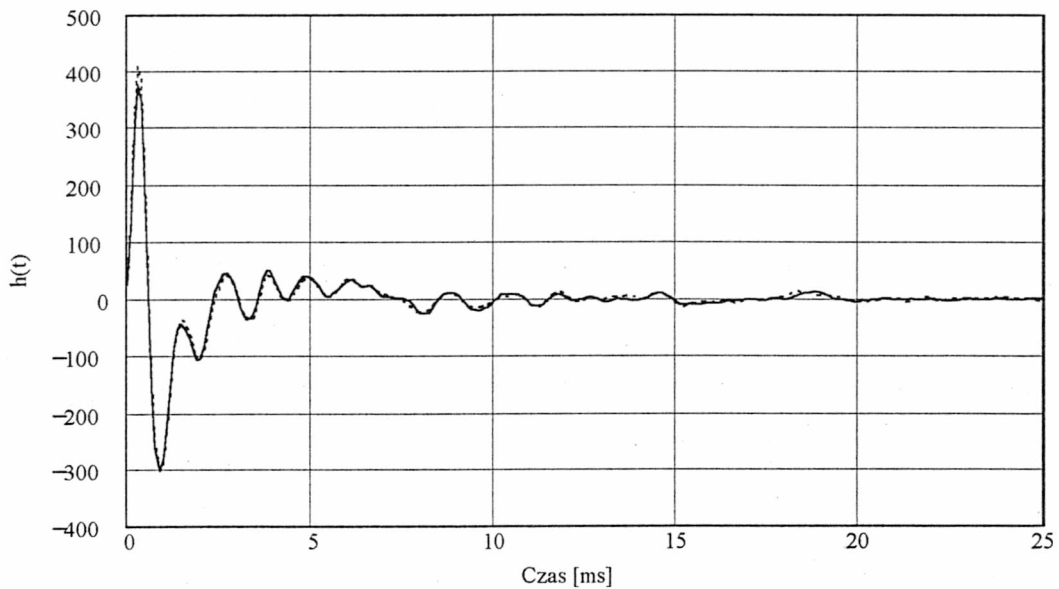
Model	Struktura modelu	ε [%]	liczba współczynników
A	$l=1, n_x = 50, n_y = 0$	2.99	51
B	$l=1, n_x = 200, n_y = 0$	1.22	201
C	$l=1, n_x = 20, n_y = 20$	507.6	41
D	$l=1, n_x = 40, n_y = 40$	-	81
E	$l=3, n_x = 9, n_y = 0$	57.8	220
F	$l=3, n_x = 13, n_y = 0$	49.5	560
G	$l=3, n_x = 4, n_y = 4$	-	165
H	$l=3, n_x = 7, n_y = 7$	-	680

Nieliniowe modele G i H wykorzystujące oprócz wartości wektorów pobudzenia $x(t)$ także próbki odpowiedzi $y(t)$ są niestabilne. Podobna sytuacja występuje także dla liniowego modelu D o strukturze filtra IIR rzędu 40.

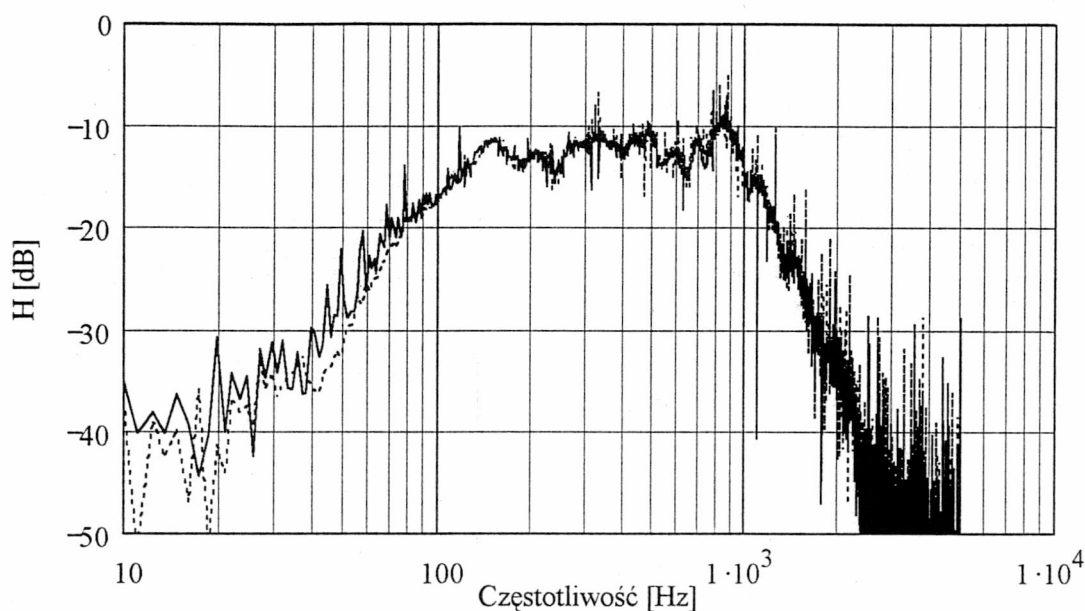
Największą dokładność wykazują modele najwyższych rzędów (A i B), co wskazuje na konieczność uwzględniania dużej liczby współczynników podczas modelowania głośnika dynamicznego.

Dzięki utworzeniu modeli liniowych o strukturze filtra FIR możliwe było porównanie wyznaczonych współczynników ze zmierzoną odpowiedzią impulsową modelowanego, rzeczywistego głośnika - $h(t)$. Współczynniki modelu B oraz odpowiedź impulsowa głośnika przedstawione są na rysunku 18. Oprócz samego początku odpowiedzi (dla czasów do około 1 ms) uzyskano dużą zgodność wartości współczynników.

Na rysunku 19 porównano charakterystyki częstotliwościowe modelu i rzeczywistego głośnika. Mają one podobny przebieg, jednak charakterystyka modelu wykazuje znacznie większe nierównomierności.

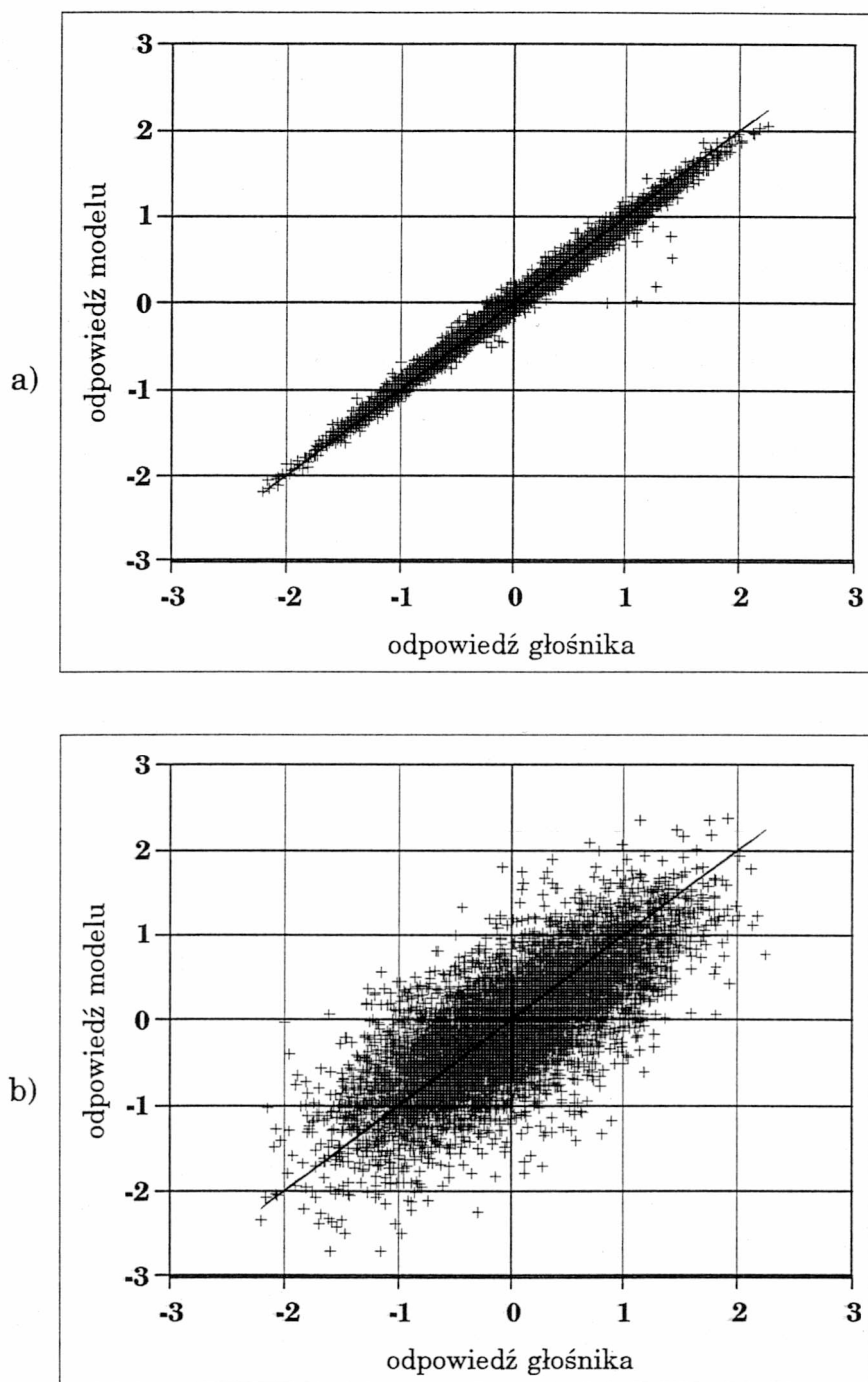


Rys. 18. Odpowiedź impulsowa głośnika (linia przerywana) oraz wyznaczone współczynniki modelu B (linia ciągła).



Rys. 19. Charakterystyka częstotliwościowa głośnika rzeczywistego (linia przerywana) i modelu B (linia ciągła).

Konieczność stosowania odpowiednio wysokiego rzędu modelu, czyli uwzględnienia długiej historii układu prezentuje rysunek nr 20. Przedstawiona jest tam odpowiedź modelu w stosunku do odpowiedzi głośnika dla dwu różnych przypadków: modelu liniowego rzędu 200 (B) oraz modelu nieliniowego rzędu 13 (F). Mimo znacznie większej liczby współczynników modelu F jego odpowiedź znacznie odbiega od odpowiedzi głośnika.



Rys. 20. Odpowiedź modelu w stosunku do odpowiedzi rzeczywistego głośnika: a) model liniowy rzędu 200 o strukturze filtru FIR, b) model nieliniowy rzędu 13 zależny tylko od $x(t)$.

Przeprowadzone próby udowodniły, że konieczne jest stosowanie procedury optymalizującej model. Bez niej liczba współczynników jest zbyt duża i nie jest możliwe uzyskanie odpowiednio wysokiego rzędu modelu. Drugim nie mniej

istotnym problemem jest niestabilność modeli NARMAX tworzonych na podstawie próbek pobudzenia $x(t)$ i odpowiedzi układu $y(t)$.

5.6 Optymalizowany model głośnika dynamicznego

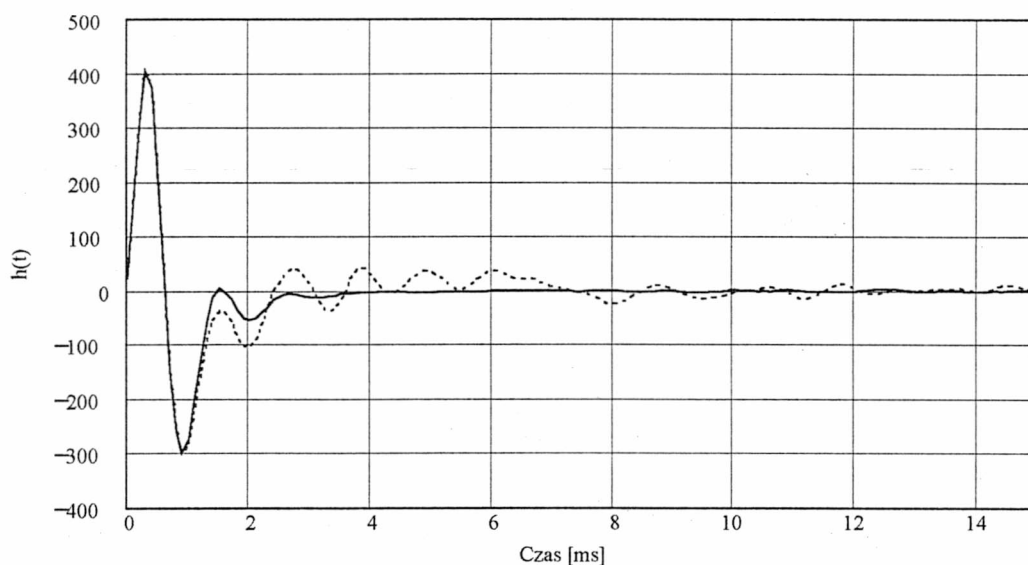
Do procesu modelowania wykorzystano sygnały uzyskane z pomiarów przedstawionych w punkcie 5.5. Przyjęto takie same parametry modelowania oraz takie same struktury modeli. Jedyną różnicą było zastosowanie opisanej w punkcie 4.3 procedury optymalizacyjnej. Uzyskane wyniki przedstawia tabela 7. Dla większej czytelności w tabeli tej umieszczono także wyniki dla modeli bez optymalizacji z tabeli 6.

Tab. 7. Porównanie dokładności modeli NARMAX o różnej strukturze z wyłączoną i włączoną procedurą optymalizacji.

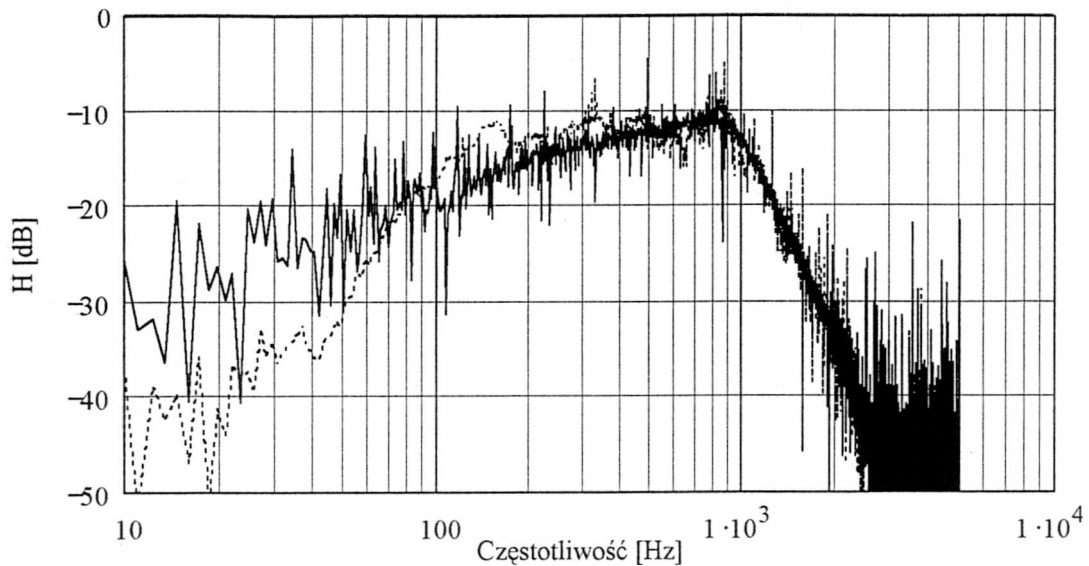
Model	Struktura modelu	bez optymalizacji		z optymalizacją	
		ε [%]	liczba współcz.	ε [%]	liczba współcz.
A	$l=1, n_x = 50, n_y = 0$	2.99	51	2.62	40
B	$l=1, n_x = 200, n_y = 0$	1.22	201	1.59	46
C	$l=1, n_x = 20, n_y = 20$	507.6	41	3.52	21
D	$l=1, n_x = 40, n_y = 40$	-	81	2.47	28
E	$l=3, n_x = 9, n_y = 0$	57.8	220	29.27	9
F	$l=3, n_x = 13, n_y = 0$	49.5	560	10.69	13
G	$l=3, n_x = 4, n_y = 4$	-	165	21.59	10
H	$l=3, n_x = 7, n_y = 7$	-	680	7.85	17

W procesie optymalizacji udało się znacznie zmniejszyć liczbę współczynników na skutek odrzucenia tych, które nie są istotne. Oprócz poprawy dokładności modeli zapewniło to także ich stabilność [12, 13].

Na rysunku 21 przedstawiono odpowiedź impulsową głośnika oraz modelu H. Zbyt krótka odpowiedź modelu spowodowana jest jego niewielkim rzędem ($n_x = 7$, $n_y = 7$). Pozytywnym elementem jest fakt bardzo dokładnego zamodelowania początkowej części odpowiedzi impulsowej (do 1.5 ms). Niestety przyjęcie wyższych rzędów modelu powoduje poważne problemy obliczeniowe spowodowane dużym zbiorem współczynników (metoda rozwiązania tego problemu przedstawiona została w punkcie 4.4). Na rysunku 22 zaprezentowane zostały charakterystyki częstotliwościowe głośnika oraz modelu. Duża zgodność charakterystyk występuje dla częstotliwości powyżej 500 Hz ponieważ w tym paśmie odpowiedź impulsowa głośnika jest stosunkowo krótka. Dla częstotliwości mniejszych charakterystyki zdecydowanie się różnią.

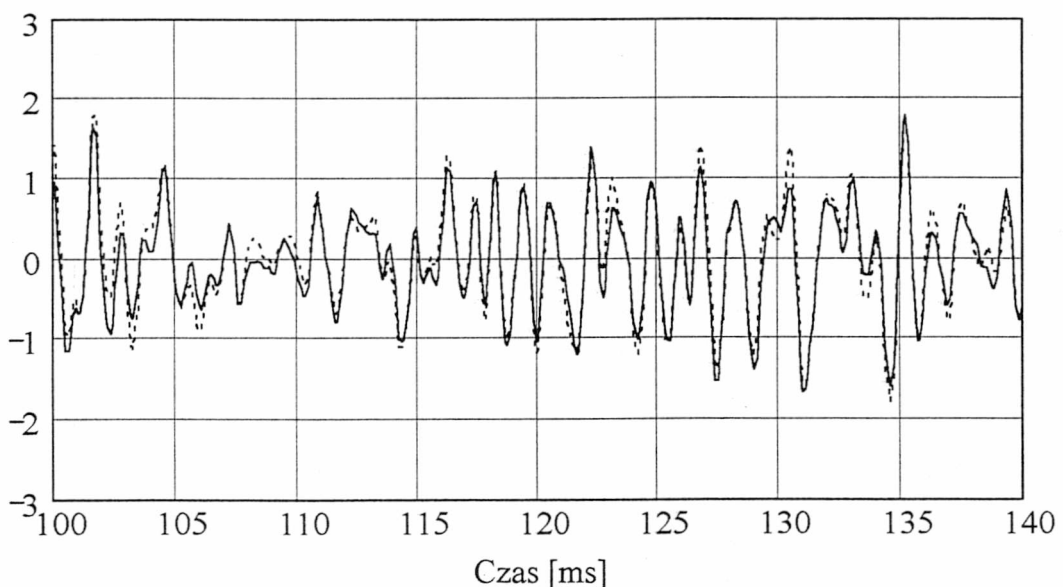


Rys. 21. Odpowiedź impulsowa głośnika (linia przerywana) oraz optymalizowanego nieliniowego modelu H (linia ciągła).



Rys. 22. Charakterystyka częstotliwościowa głośnika rzeczywistego (linia przerywana) i optymalizowanego nieliniowego modelu H (linia ciągła).

Na rysunku 23 przedstawione są przykładowe przebiegi sygnału na wyjściu modelu H oraz zmierzona odpowiedź głośnika na to samo pobudzenie. Porównanie tych przebiegów czasowych ujawnia skłonność modelu do zmniejszania wartości chwilowych sygnału.



Rys. 23. Przykładowe przebiegi sygnałów na wyjściu głośnika (linia przerywana) i na wyjściu modelu H (linia ciągła).

W tabeli 8 umieszczone zostały współczynniki modelu H oraz odpowiadająca każdemu z nich stopa redukcji błędu - $[err]$ (zdefiniowana wzorem 4.8). Współczynniki ułożone są w kolejności malejącej wartości $[err]$. Oznacza to, że największy wpływ na dokładność modelu mają współczynniki w pierwszych wierszach tabeli i dlatego też wybierane są przez procedurę optymalizacji na początku. Największą wartość $[err]$ mają współczynniki liniowe ponieważ ze względu na mały poziom pobudzenia nieliniowości badanego głośnika dynamicznego były niewielkie.

Tab. 8. Redukcja błędu - $[err]$, jaką zapewnia uwzględnienie każdego ze współczynników modelu H.

jednomian	$[err]$	wartość współczynnika
$y(t-1)$	0.81371	2.2954
$y(t-2)$	0.15532	-1.9508
$y(t-3)$	0.016157	0.85256
$x(t-1)$	0.008291	-0.011176
$x(t-3)$	0.002087	0.00579
$y(t-5)$	0.001054	0.28115
$x(t-0)$	0.000676	-0.00296
$x(t-4)$	0.000674	0.007299
$x(t-5)$	0.000375	0.006146
$x(t-7)$	0.000125	-0.001667
$x(t-2)$	0.000094	-0.002661
$y(t-4)$	0.000052	-0.46022
$y(t-7)$	0.000049	-0.044058
$x(t-6) y(t-1)$	0.000037	0.0011
$x(t-2) y(t-2) y(t-7)$	0.000032	0.001393

$x(t-5) \ x(t-7) \ y(t-5)$	0.00002	-0.000177
$y(t-1) \ y(t-4) \ y(t-7)$	0.000015	0.008793

5.6.1 Kryterium zakończenia optymalizacji

W celu zobrazowania jak uzależniona jest dokładność modelu od liczby współczynników zbudowano grupę modeli. Wszystkie modele utworzono na podstawie sygnałów uzyskanych przez pobudzenie głośnika GDN 20/35/1 szumem białym o rozkładzie jednostajnym. Poziom sygnału dobrano w ten sposób aby głośnik pracował z mocą 28 W (2/3 mocy znamionowej).

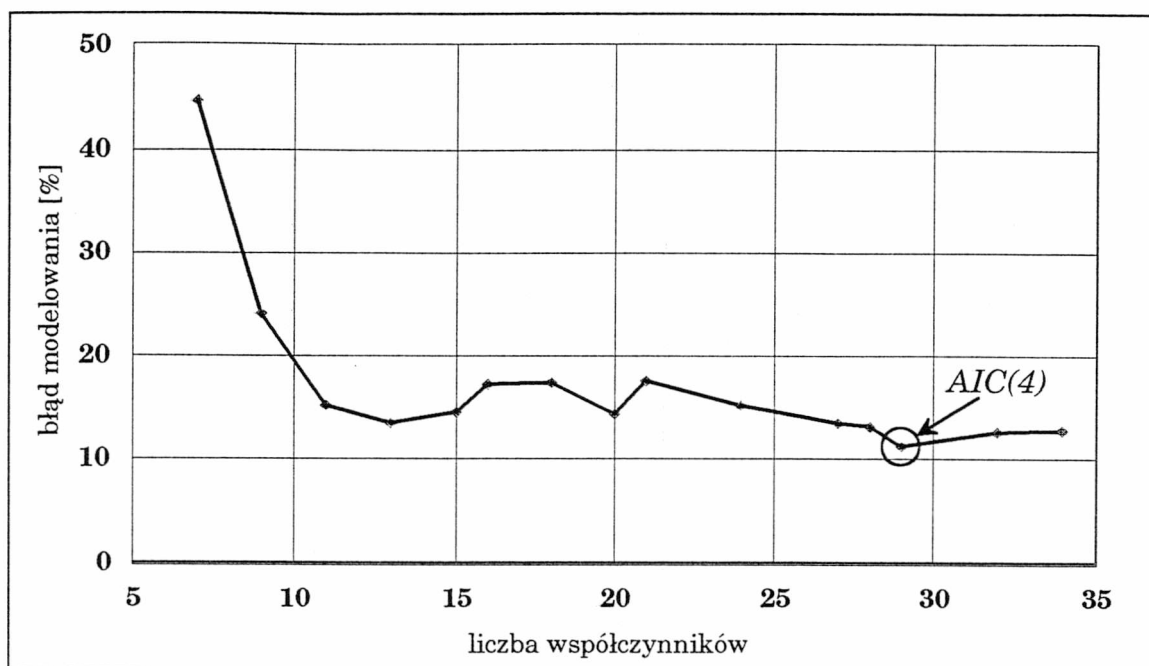
Wszystkie modele w grupie utworzono przy tych samych, następujących parametrach:

- rząd nieliniowości - $l = 3$,
- rząd modelu - $n_x = n_y = 16$,
- liczba wierszy macierzy $\mathbf{P}$ - $N = 700$,
- liczba próbek do testowania modelu - $N_f = 8192$,
- kryterium wyboru współczynników - stopa redukcji błędu $[err]$,
- kryterium zakończenia tworzenia modelu - ρ .

Badano wpływ zmiany wartości dopuszczalnego błędu modelu - ρ (4.12). Uzyskano w ten sposób modele o różnej liczbie współczynników. Przeprowadzono także modelowanie z kryterium zakończenia wykorzystującym AIC(4), aby zaobserwować kiedy proces wyboru współczynników zostanie przerwany. W tabeli 9 oraz na rysunku 24 przedstawione są wyniki modelowania. Na rysunku zaznaczono także liczbę współczynników, które zostaną wybrane przy zastosowaniu kryterium AIC(4).

Tab. 9. Zależność błędu modelowania od liczby współczynników modelu NARMAX głośnika GDN 20/35/1.

ρ [%]	Liczba współczynników M_s	ε [%]
2	7	44.56
1	9	24.14
0.7	11	15.22
0.6	13	13.41
0.5	15	14.53
0.45	16	17.26
0.4	18	17.39
0.37	20	14.33
0.35	21	17.63
0.33	24	15.19
0.3	27	13.51
0.28	28	13.19
AIC(4)	29	11.27
0.26	32	12.6
0.25	34	12.77



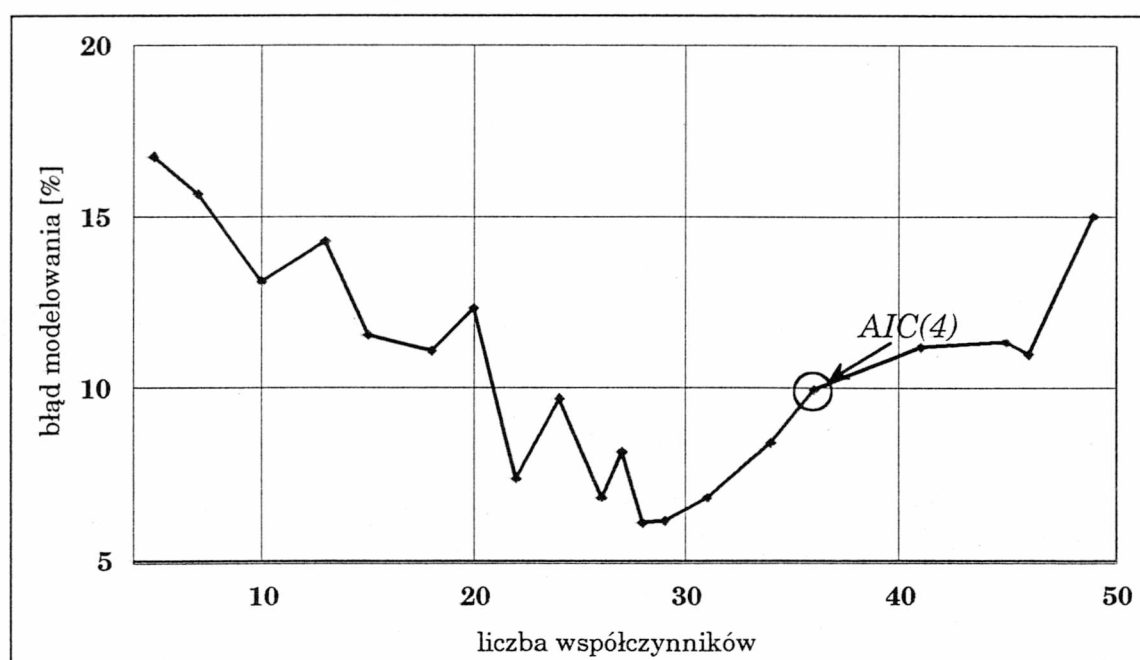
Rys. 24. Zależność błędu modelowania od liczby współczynników modelu NARMAX głośnika GDN 20/35/1

Dla tych samych parametrów modelowania przeprowadzono także symulacje dla głośnika GDN 16/10 (punkt 5.1) pobudzanego sygnałem o mocy 10 W. Wyniki przedstawione są w tabeli 10 oraz na rysunku 25.

Tab. 10. Zależność błędu modelowania od liczby współczynników modelu NARMAX głośnika GDN 16/10.

ρ [%]	Liczba współczynników M_s	ε [%]
5	5	16.8
4	7	15.7
3	10	13.1
2	13	14.3
1.8	15	11.56
1.5	18	11.1
1.3	20	12.37

1	22	7.4
0.9	24	9.73
0.8	26	6.81
0.6	27	8.18
0.55	28	6.13
0.5	29	6.15
0.45	31	6.82
0.4	34	8.45
AIC(4)	36	9.99
0.33	41	11.22
0.31	45	11.37
0.3	46	11.01
0.28	49	15



Rys. 25. Zależność błędu modelowania od liczby współczynników modelu NARMAX głośnika GDN 16/10.

Uzyskane wyniki pokazują, że tworzone modele NARMAX są mało dokładne nie tylko wtedy gdy liczba współczynników jest zbyt mała, ale także wtedy gdy jest ona za duża. Powstanie optymalnego modelu uzależnione jest więc od przyjęcia właściwego kryterium zakończenia procesu jego tworzenia. W przypadku głośnika GDN 20/35/1 kryterium AIC(4) pozwoliło na uzyskanie modelu o najmniejszym błędzie. Dla głośnika GDN 16/10 bardziej korzystne byłoby wybranie mniejszej liczby współczynników - 28 zamiast 36.

5.7 Modele wysokiego rzędu

Zgodnie z algorytmem przedstawionym w punkcie 4.4 wyznaczone zostały modele NARMAX wysokiego rzędu kilku głośników dynamicznych. Przyjęte zostały następujące parametry modelowania:

- rząd nieliniowości - $l = 3$,
- rząd modelu - $n_x = n_y = 35$,
- liczba wierszy macierzy $\mathbf{P}$ - $N = 500$,
- liczba współczynników wyznaczanych w jednym etapie - $M_i = 350$,
- liczba próbek do testowania modelu - $N_f = 8192$,
- kryterium wyboru współczynników - stopa redukcji błędu $[err]$,
- kryterium zakończenia tworzenia modelu - $AIC(4)$.

W tabeli 11 przedstawione są ogólne wyniki modelowania, a w załączniku A znajdują się wartości współczynników prezentowanych modeli. Na szczególną uwagę zasługuje fakt występowania w wyznaczonych modelach dużej liczby jednomianów trzeciego stopnia. Oznacza to, że dominujące w głośniku dynamicznym są nieliniowości trzeciego rzędu, co pozostaje w zgodzie z fizyczną naturą tych nieliniowości. Główne źródła zniekształceń nieliniowych w głośniku, czyli nierównomierny rozkład pola magnetycznego w szczelinie oraz nieliniowa sztywność zawiesznień zależne od wychylenia generują właśnie zniekształcenia trzeciego rzędu.

Tab. 11. Błąd modeli NARMAX wysokiego rzędu kilku głośników dynamicznych.

Typ głośnika	Moc elektryczna pobudzenia [W]	Liczba współczynników	ε [%]
GDN 16/10	10	42	8.1
GDN 20/40	20	50	10.7
GDN 20/40	30	53	17.1
GDN 20/40	40	43	13.8
GDN 20/35/1	28	51	15.9

Modele NARMAX dla głośnika GDN 20/40 tworzone były na podstawie danych pomiarowych uzyskanych w różnym czasie i w różnych warunkach. Różnice dotyczyły przede wszystkim odległości mikrofonu od głośnika oraz częstotliwości próbkowania sygnału. Dlatego też przy niewielkiej różnicy w poziomie sygnału pobudzającego otrzymano różniące się od siebie modele.

5.7.1 Zachowanie modelu NARMAX głośnika dynamicznego przy różnych poziomach sygnału

Ponieważ głośnik dynamiczny jest elementem nieliniowym jego charakterystyki uzależnione są od poziomu sygnału pobudzającego. Tworzenie modeli liniowych jest więc bardzo utrudnione - są one dokładne tylko dla wąskiego zakresu poziomów pobudzenia. Model NARMAX pozwala na zamodelowanie nieliniowości układu, powinien więc charakteryzować się taką samą dokładnością w całym zakresie stosowanych poziomów sygnału pobudzającego.

W celu sprawdzenia powyższego faktu zebrano odpowiedzi głośnika GDN 20/40 na pobudzenie szumem białym o poziomach dobranych tak, aby pracował on z mocami od 1 W do 40 W. Następnie na podstawie przebiegu pobudzenia i odpowiedzi przy mocy 40 W utworzono model NARMAX głośnika. Rząd nieliniowości modelu ograniczono do $l = 3$ natomiast rząd modelu był równy $n_x = n_y = 30$. W wyniku modelowania i przeanalizowania $M = 41663$

współczynników uzyskano model o $M_s = 43$ współczynnikach (wartości współczynników modelu w załączniku A).

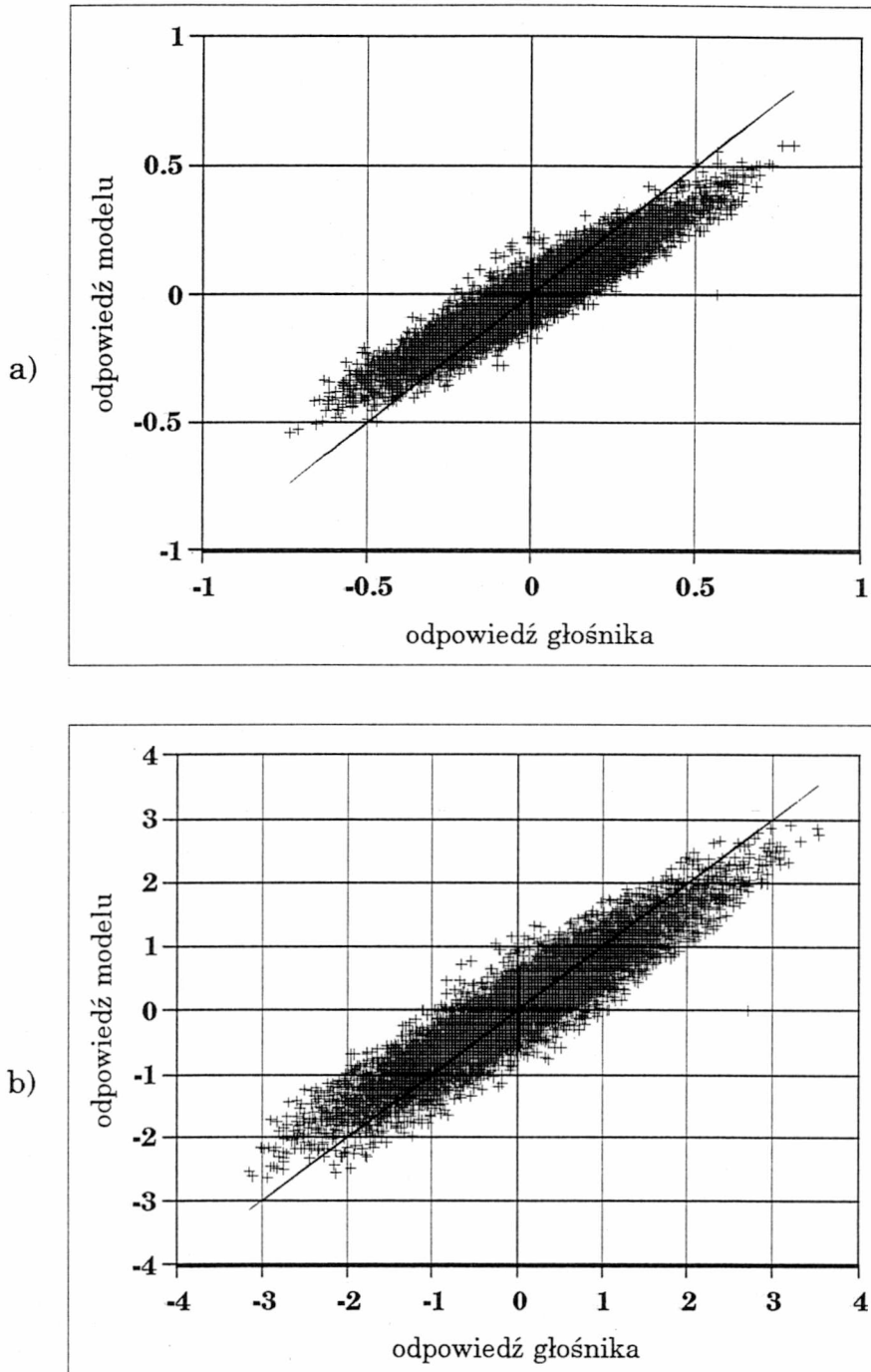
Powstały model NARMAX pobudzano następnie sygnałami o różnych poziomach (tymi samymi, które pobudzały modelowany głośnik) i porównywano jego odpowiedź z odpowiedzią głośnika. Wyniki eksperymentu przedstawione są w tabeli 12.

Tab. 12. Dokładność modelu NARMAX utworzonego na podstawie pobudzenia o mocy 40 W w zależności od poziomu sygnału.

Moc elektryczna pobudzenia [W]	ε [%]
1	15.8
5	15.2
10	14.7
20	14.2
30	13.8
40	13.8

Najmniejszym błędem charakteryzuje się model NARMAX przy pobudzeniu 40 W, ponieważ dla tego poziomu został wyznaczony. Jednak wraz ze zmniejszaniem poziomu sygnału błąd modelu wzrasta nieznacznie osiągając wartość 15.8 % dla pobudzenia sygnałem o mocy 1 W. Właściwości tej nie mają modele liniowe.

Na rys. 26 przedstawiona jest odpowiedź modelu w stosunku do odpowiedzi głośnika dla dwu różnych poziomów pobudzenia: 1 W i 40W.



Rys. 26. Odpowiedź modelu w stosunku do odpowiedzi głośnika dla różnych mocy sygnału pobudzającego: a) 1 W, b) 40 W.

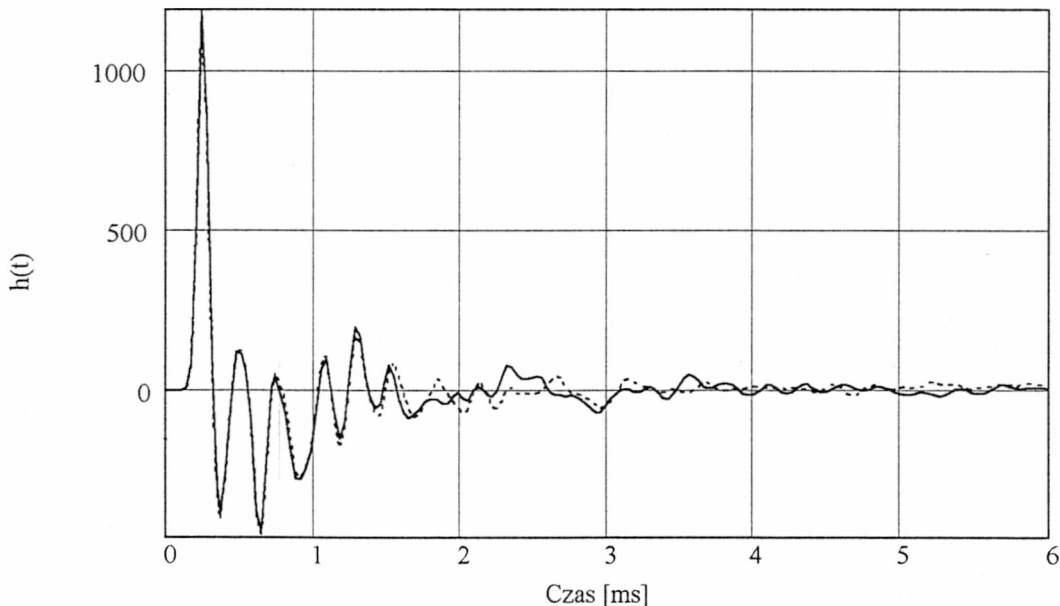
Przy pobudzaniu sygnałem odpowiadającym mocy 1 W model charakteryzuje się pewną kompresją. Mimo mniejszego rozrzutu wartości odpowiedzi modelu powoduje to, że błąd modelowania jest podobny jak przy mocy 40 W.

5.8 Porównanie charakterystyk modelu NARMAX z charakterystykami głośnika rzeczywistego

Oprócz przyjętego w punkcie 4.5 kryterium oceny dokładności modelu porównane zostały także niektóre parametry i charakterystyki stosowane powszechnie do opisu właściwości głośników dynamicznych.

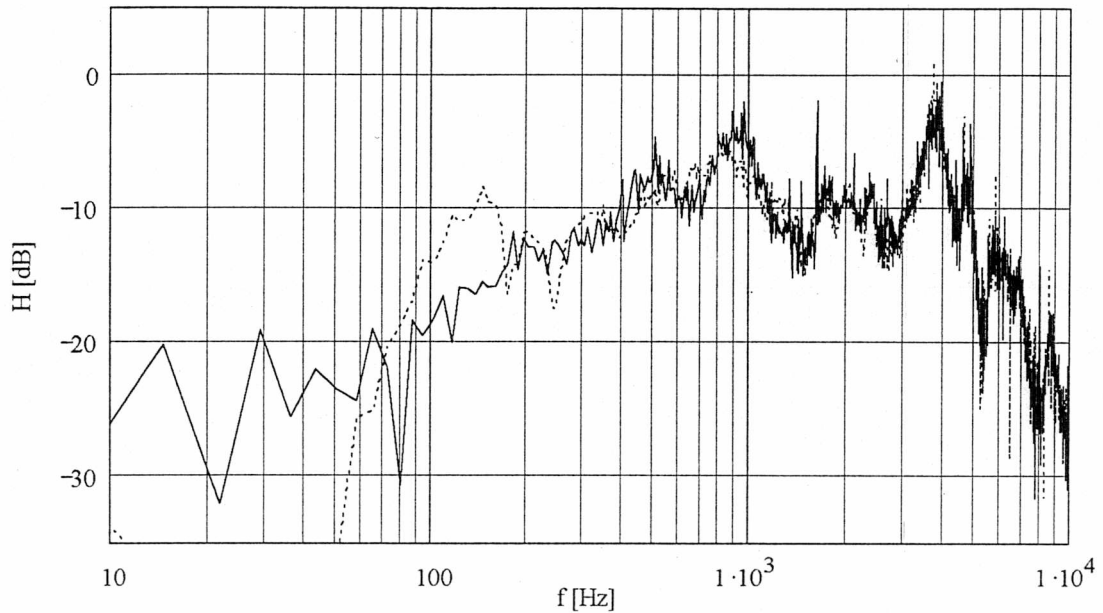
5.8.1 Właściwości liniowe

Na rysunku 27 przedstawiono odpowiedź impulsową głośnika GDN16/10 (pobudzenie mocą 10 W) oraz obliczoną odpowiedź impulsową jego modelu (przedstawionego w punkcie 5.7). W początkowym zakresie obie odpowiedzi są identyczne. Zasadnicze różnice pojawiają się dla czasów większych niż 1 ms. Związane jest to przede wszystkim z małym rzędem modelu, w tym przypadku $n_x = n_y = 30$.



Rys. 27. Odpowiedź impulsowa modelu (linia ciągła) oraz rzeczywistego głośnika (linia przerywana).

Na rys. 28 przedstawione są charakterystyki częstotliwościowe głośnika oraz modelu. Kształt obu charakterystyk jest bardzo podobny, szczególnie w zakresie częstotliwości powyżej 1 kHz. Charakterystyka modelu jest jednak dużo bardziej nieregularna, co związane jest także z niewielkim rzędem modelu.



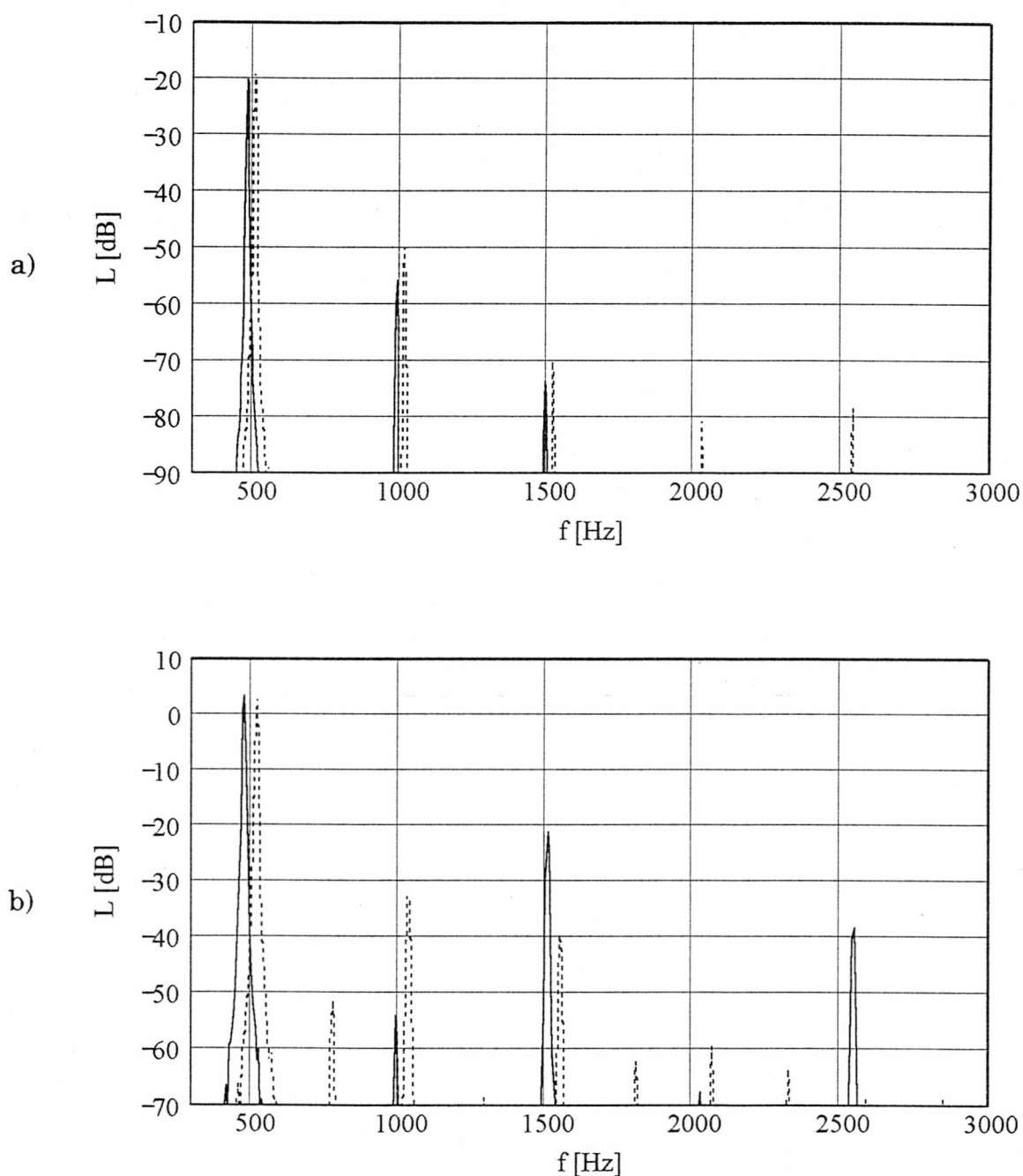
Rys. 28. Charakterystyka częstotliwościowa modelu NARMAX (linia ciągła) oraz rzeczywistego głośnika (linia przerywana).

5.8.2 Właściwości nieliniowe

Porównując odpowiedzi impulsowe oraz charakterystyki częstotliwościowe można ocenić jedynie właściwości liniowe modelu. Aby zaobserwować jak utworzony model radzi sobie z nieliniowościami wykorzystano parametr stosowany najczęściej do oceny zniekształceń nieliniowych - współczynnik zawartości harmonicznych THD. Aby uzyskać potrzebne do jego wyznaczenia dane na wejście głośnika podawano przebiegi sinusoidalne o różnych częstotliwościach, a następnie przeprowadzano analizę widmową odpowiedzi głośnika odczytując poziomy poszczególnych harmonicznych. Te same sygnały pobudzające podawano także na wejście modelu i analizowano jego odpowiedź.

W eksperymencie wykorzystano dwa głośniki: GDN 20/35/1 pobudzany sygnałem o mocy 28 W oraz GDN 20/40 pobudzany mocą 20 W.

Na rys. 29 przedstawione jest przykładowe widmo odpowiedzi głośników oraz modeli przy pobudzeniu sygnałem sinusoidalnym o częstotliwości 500 Hz. Widma na rysunkach są nieco przesunięte względem siebie na osi częstotliwości dla lepszej czytelności.



Rys. 29. Widmo odpowiedzi głośnika (linia przerywana) i modelu NARMAX (linia ciągła) na pobudzenie sygnałem sinusoidalnym o częstotliwości 300 Hz: a) głośnik GDN 20/35/1, b) głośnik GDN 20/40.

W widmie odpowiedzi modelu głośnika GDN 20/35/1 nie występują składowe powyżej trzeciej harmonicznej. Natomiast w przypadku modelu głośnika GDN 20/40 dominujące są harmoniczne nieparzyste - przede wszystkim

trzecia. Zwraca uwagę również występowanie dużej piątej harmonicznej, mimo ograniczenia rzędu nieliniowości do wartości $l = 3$. Związane jest to z zawartymi w nieliniowych jednomianach modelu NARMAX próbkami odpowiedzi $y(t)$. Przy modelowaniu szeregiem Volterry sytuacja taka nie byłaby możliwa.

Na podstawie pierwszych kilku harmonicznych (do piątej włącznie), zgodnie ze wzorem (5.2), obliczono współczynnik zawartości harmonicznych THD (w dB).

$$L_{THD} = 10 \log \left(\sum_{i=2}^5 10^{L_i/10} \right) - L_1 \text{ [dB]} \quad (5.2)$$

Wyniki dla głośnika GDN 20/35/1 zamieszczone są w tabeli 13, natomiast dla głośnika GDN 20/40 w tabeli 14.

Tab. 13. Współczynnik zawartości harmonicznych odpowiedzi rzeczywistego głośnika (GDN 20/35/1) oraz modelu.

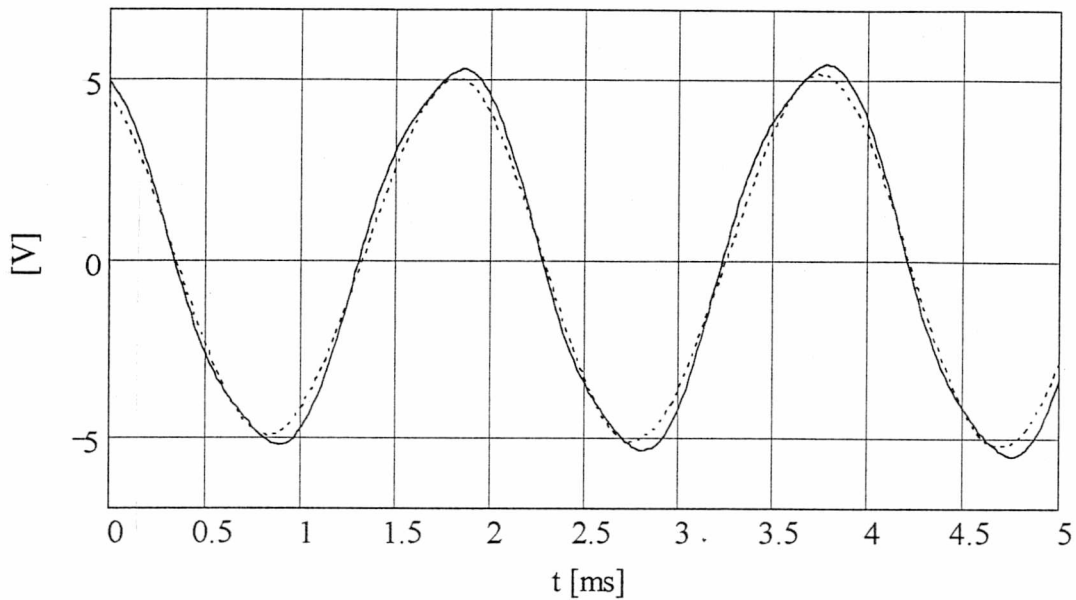
Częstotliwość [Hz]	THD głośnik [dB]	THD model [dB]
100	-21.9	-39.1
150	-25.9	-48.2
200	-25.5	-33.2
300	-28.9	-35.1
500	-30.7	-35.6
700	-38.5	-44.0
1000	-37.8	-49.3
2000	-33.1	-51.8
4000	-49.5	-73.6

Tab. 14. Współczynnik zawartości harmonicznych odpowiedzi rzeczywistego głośnika (GDN 20/40) oraz modelu.

Częstotliwość [Hz]	THD głośnik [dB]	THD model [dB]
100	-22.7	-14.6
200	-22.2	-21.4
500	-34.8	-24.5
800	-34.2	-21.1
1000	-34.8	-25.6
2000	-40.1	-36.9
4000	-44.9	-41.3

W przypadku głośnika GDN 20/35/1 odpowiedź modelu charakteryzuje się mniejszymi zniekształceniami nieliniowymi. Wynika to z zaniżonych poziomów drugiej i trzeciej harmonicznej oraz braku w odpowiedzi modelu harmonicznych powyżej trzeciej.

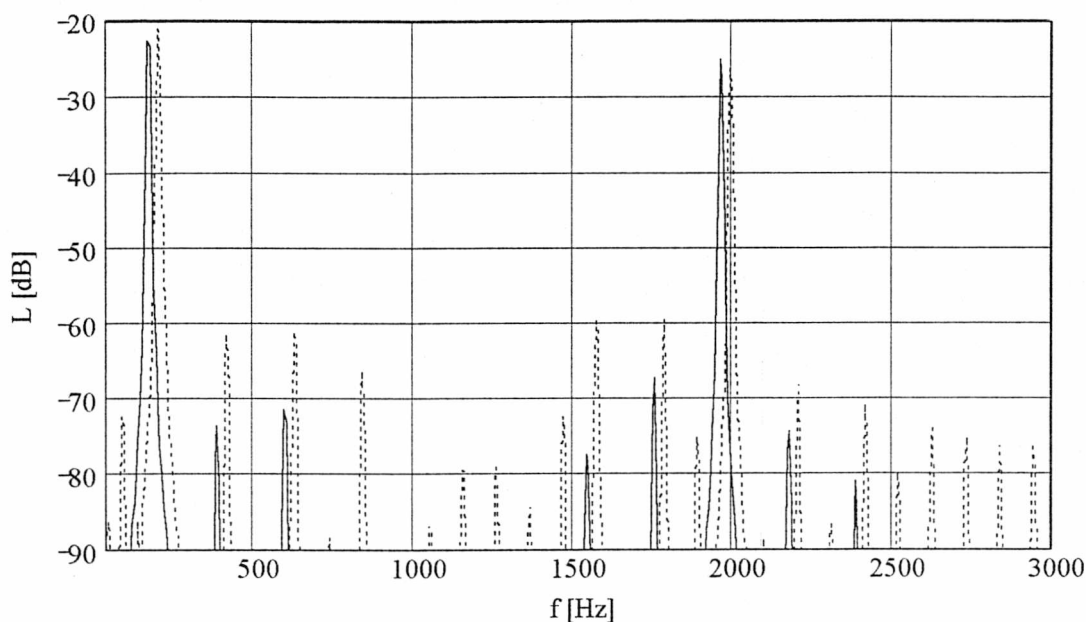
Całkowicie odmienna sytuacja ma miejsce w przypadku głośnika GDN 20/40. THD jego modelu ma wartości większe niż głośnik rzeczywisty. Spowodowane jest to bardzo dużym poziomem trzeciej i piątej harmonicznej natomiast harmoniczne parzyste praktycznie nie powstają. Związane jest to z brakiem w modelu wyrazów związanych z jednomianami w potęgach 2 i dużą liczbą jednomianów w potęgach 3 (model A.2 w załączniku A).



Rys. 30. Przebieg czasowy na wyjściu głośnika GDN 20/40 (linia przerywana) oraz jego modelu NARMAX (linia ciągła) przy pobudzeniu tonem o częstotliwości 500 Hz.

Na rys. 30 przedstawiony został przykładowy przebieg czasowy sygnału na wyjściu rzeczywistego głośnika oraz modelu przy pobudzeniu sygnałem sinusoidalnym o częstotliwości 500 Hz. Znaczne zniekształcenie przebiegu na wyjściu modelu spowodowane są bardzo dużym poziomem trzeciej harmonicznej.

Badając właściwości nieliniowe głośników wyznaczono także zniekształcenia intermodulacyjne. W tym celu na głośnik GDN 16/10 podano sygnał będący sumą dwu przebiegów sinusoidalnych o częstotliwościach $f_1 = 200$ Hz i $f_2 = 2$ kHz i stosunku amplitud odpowiednio 4:1 [32]. Na skutek nieliniowości głośnika powstały zniekształcenia harmoniczne oraz intermodulacyjne.



Rys. 31. Moduł widma odpowiedzi głośnika (linia przerywana) oraz modelu NARMAX (linia ciągła) na pobudzenie sumą przebiegów sinusoidalnych o częstotliwościach 200 Hz i 2 kHz.

Następnie wykonano analizę widmową odpowiedzi głośnika (rys. 31) i wyznaczono zniekształcenia intermodulacyjne drugiego i trzeciego rzędu [32] wykorzystując wzory odpowiednio (5.3) i (5.4).

$$d_2 = \frac{p_{(f_2-f_1)} + p_{(f_2+f_1)}}{p_{f_2}} 100 [\%] \quad (5.3)$$

$$L_{d_2} = 20 \log\left(\frac{d_2}{100}\right) [\text{dB}]$$

$$d_3 = \frac{p_{(f_2-2f_1)} + p_{(f_2+2f_1)}}{p_{f_2}} 100 [\%] \quad (5.4)$$

$$L_{d_3} = 20 \log\left(\frac{d_3}{100}\right) [\text{dB}]$$

gdzie: $p_{(fx)}$ - ciśnienie akustyczne wytwarzane przez głośnik dla częstotliwości fx ,

d_2 , d_3 - zniekształcenia intermodulacyjne odpowiednio drugiego i trzeciego rzędu wyrażone w %,

Ld_2, Ld_3 - zniekształcenia intermodulacyjne odpowiednio drugiego i trzeciego rzędu wyrażone w dB.

Operację wyznaczania zniekształceń intermodulacyjnych przeprowadzono także dla odpowiedzi modelu NARMAX. W tabeli 15 przedstawione są obliczone wartości zniekształceń.

Tab. 15. Zniekształcenia intermodulacyjne drugiego i trzeciego rzędu głośnika dynamicznego oraz jego modelu.

	głośnik rzeczywisty	model NARMAX
d_2	3.00 %	1.14 %
d_3	2.77 %	0.41 %
Ld_2	-30.5 dB	-38.9 dB
Ld_3	-31.2 dB	-47.8 dB

Utworzony model NARMAX cechuje się mniejszymi zniekształceniami intermodulacyjnymi niż głośnik rzeczywisty.

6 Wnioski

Wynikiem realizacji pracy jest zaimplementowanie metody NARMAX do modelowania nieliniowości głośników dynamicznych. Charakterystycznymi cechami, które odróżniają opracowany algorytm od innych, przedstawionych w nielicznych publikacjach są:

- zbudowanie modelu na podstawie danych pomiarowych, w których jako odpowiedź głośnika zostało przyjęte wytwarzane przez niego ciśnienie akustyczne,
- modelowanie nieliniowości głośnika dynamicznego w całym paśmie częstotliwości jego pracy.

Ze względu na stosunkowo długą odpowiedź impulsową głośnika dynamicznego konieczne jest stosowanie modeli NARMAX wysokiego rzędu (duże wartości rzędu sygnału wejściowego - n_x i wyjściowego - n_y). W tej sytuacji reprezentacja wielomianowa modelu charakteryzuje się dużą liczbą współczynników. Stwarza to znaczne problemy obliczeniowe oraz interpretacyjne. Dodatkowo utworzone w ten sposób modele NARMAX mogą być niestabilne. W tej sytuacji konieczne było wprowadzenie procedury optymalizującej modele. Po jej zastosowaniu znacznie zmniejszyła się liczba współczynników, a jednocześnie uzyskano stabilność modeli.

Ze względu na konieczność optymalizacji modeli złożonych często z ponad 50 000 i więcej współczynników opracowano efektywny algorytm optymalizacji etapowej. Bez niego utworzenie modeli wysokiego rzędu byłoby niemożliwe.

Przeprowadzono również eksperymenty, w wyniku których wybrano optymalny sygnał pobudzający wykorzystywany do tworzenia modelu NARMAX. Najlepiej nadają się do tego celu szumy białe, a zwłaszcza szum o jednostajnym rozkładzie amplitudy. Uzyskany z ich pomocą model jest najbardziej dokładny. Nie należy stosować sygnału MLS oraz impulsu ze względu na bardzo niekorzystny rozkład amplitudy.

Zbadano także wpływ czynników zewnętrznych (rozdzielczości kwantowania oraz szumu zakłócającego) na proces tworzenia modelu NARMAX. Okazało się, że zmiana rozdzielczości kwantowania nie wpływa znacząco na ten

proces. W zakresie rozdzielczości 10 - 16 bitów na próbkę powstaje niemalże taki sam model. Wartości współczynników oraz ich liczba praktycznie nie zmieniają się. Pozwala to na stosowanie podczas pomiarów sprzętu o mniejszej rozdzielczości przetwarzania A/D np. 12 bitowego.

Wpływ szumu zakłócającego na dokładność uzyskanych modeli NARMAX uzależniony jest wyraźnie od poziomu zakłóceń. Dla stosunku (S/N) poniżej 30 dB tworzone modele charakteryzują się dużym błędem.

W ostatniej części pracy porównano wybrane charakterystyki i parametry głośnika rzeczywistego oraz jego modelu NARMAX. Stwierdzono duże podobieństwo charakterystyk liniowych modelu i głośnika.

Odpowiedź modelu charakteryzuje się w przypadku jednego głośnika mniejszymi, a w przypadku drugiego większymi zniekształceniami nieliniowymi, co wynika przede wszystkim ze struktury uzyskanych modeli (mniejsza lub większa liczba jednomianów nieliniowych). Aby uzyskać dokładniejsze modele należy zwiększyć rząd modelu (n_x i n_y) oraz modelować nieliniowości wyższego stopnia (zwiększyć l).

Wynikiem pracy jest także program komputerowy "*NARMAX model*" opisany w dodatku B. W programie tym zaimplementowano przedstawiony algorytm tworzenia modelu NARMAX i wykorzystywano go z powodzeniem we wszystkich przedstawionych w pracy eksperymentach.

Podsumowując należy stwierdzić, że teza pracy przedstawiona w rozdziale 1 została udowodniona. Powstał efektywny algorytm wyznaczania modelu NARMAX głośnika dynamicznego.

Została otwarta droga do dalszych eksperymentów. W toku późniejszych prac możliwe jest wyznaczenie z modelu NARMAX jąder szeregów Volterry lub też wielowymiarowych funkcji przejścia. Praca stanowi też punkt wyjścia do tworzenia filtrów cyfrowych służących do redukcji zniekształceń nieliniowych głośników.

Literatura

- [1] S.A. Billings, F.A. Alturki: *Performance Monitoring in Non-Linear Adaptive Noise Cancellation*. J. Sound and Vibration, 1992, vol. 151, s. 161-175.
- [2] S.A. Billings, S. Chen: *Extended model set, global data and threshold model identification of severely non-linear systems*. Int. J. of Control, 1989, vol. 50, s. 1897-1923.
- [3] S.A. Billings, S. Chen: *Identification of non-linear rational systems using a prediction-error estimation algorithm*. Int. J. of Systems Sci. 1989, vol. 20, s. 467-494.
- [4] S.A. Billings, M.J. Korenberg, S. Chen: *Identification of non-linear output-affine systems using an orthogonal least-squares algorithm*. Int. J. of Systems Sci. 1988, vol. 19, s. 1559-1568.
- [5] S.A. Billings, W.S.F. Voon: *A prediction-error and stepwise-regression estimation algorithm for non-linear system*. Int. J. of Control, 1986 vol. 44, s. 803-822.
- [6] S.A. Billings, W.S.F. Voon: *Least squares parameter estimation algorithms for non-linear systems*. Int. J. of Systems Sci. 1984, vol. 15, s. 601-615.
- [7] S. Chen, S.A. Billings: *Representations of non-linear systems: the NARMAX model*. Int. J. of Control, 1989 vol. 49, s. 1013-1032.
- [8] S. Chen, S.A. Billings, C.F.N. Cowan, P.M. Grant: *Practical identification of NARMAX models using radial basis functions*. Int. J. of Control, 1990 vol. 52, s. 1327-1350.
- [9] S. Chen, S.A. Billings, W. Luo: *Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification*. Int. J. of Control, 1989, vol. 50, s. 1873-1896.
- [10] A. Desrochers, S. Mohsen: *On determining the structure of a non-linear system*. Int. J. of Control, 1984 vol. 40, s. 923-938.
- [11] A.B. Dobrucki: *Nontypical Effects in an Electrodynamic Loudspeaker with a Nonhomogeneous Magnetic Field in the Air Gap and Nonlinear Suspensions*. J. of the Audio Eng. Soc., 1994, vol. 42, s. 565-576

-
- [12] A.B. Dobrucki, P. Pruchnicki: *Application of the NARMAX-method for modelling of the nonlinearity of dynamic loudspeakers* 106th Audio Eng. Soc. Convention, Munich, 1999, Preprint 4868 (A8), s.1-8.
 - [13] A.B. Dobrucki, P. Pruchnicki: *Determination of structure of NARMAX model for dynamic loudspeaker using orthogonal algorithm*. Acustica United with Acta Acustica, 1999, vol. 85, Supl. 1, s. 9.
 - [14] H.-K. Jang, K.-J. Kim: *Identification of Loudspeaker Nonlinearities Using the NARMAX Modeling Technique*, J. Audio Eng. Soc, 1994, vol. 42, s. 50-59
 - [15] H. Jeong, J.G. Ih: *Harmonic Balance Method for Estimating the Nonlinear Parameters of Electrodynamic Direct-Radiator Loudspeakers*. J. Audio Eng. Soc., 1996, vol. 44, s. 245-257.
 - [16] T.A. Johansen, B.A. Foss: *Constructing NARMAX models using ARMAX models*. Int. J. of Control, 1993 vol. 58, s. 1125-1153.
 - [17] A.J. Kaiser: *Modeling of the Nonlinear Response of an Electrodynamic Loudspeaker by a Volterra Series Expansion*. J. Audio Eng. Soc. 1987, vol. 35, s. 421-433.
 - [18] A. Kielbasiński, H. Schwetlick: *Numeryczna algebra liniowa*. WNT, Warszawa 1992.
 - [19] W. Klippel: *Adaptive Nonlinear Control of Loudspeaker Systems*. J. Audio Eng. Soc., 1998, vol. 46, s. 939-954.
 - [20] W. Klippel: *Compensation of Nonlinear Distortion of Horn Loudspeakers by Digital Signal Processing*. J. Audio Eng. Soc., 1996, vol. 44, s. 964-972.
 - [21] W. Klippel: *Dynamic Measurement and Interpretation of the Nonlinear Parameters of Electrodynamic Loudspeakers*. J. Audio Eng. Soc., 1990, vol. 38, s. 944-955.
 - [22] W. Klippel: *Modeling the Nonlinearities in Horn Loudspeakers*. J. Audio Eng. Soc., 1996, vol. 44, s. 470-480.
 - [23] W. Klippel: *Nonlinear Large-Signal Behavior of Electrodynamic Loudspeakers at Low Frequencies*. J. Audio Eng. Soc., 1992, vol. 40, s. 483-496.
 - [24] W. Klippel: *The Mirror Filter - A New Basis for Reducing Nonlinear Distortion and Equalizing Response in Woofer Systems*. J. Audio Eng. Soc. 1992, vol. 40, s. 675-691.

- [25] M.J. Korenberg, S.A. Billings, Y.P. Liu, P.J. McIlroy: *Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems*. Int. J. of Control, 1988, vol. 48, s. 193-210.
- [26] I.J. Leontaritis, S.A. Billings: *Input-output parametric models for non-linear systems, Part I: deterministic non-linear systems*. Int. J. of Control, 1985, vol. 41, s. 303-328.
- [27] I.J. Leontaritis, S.A. Billings: *Input-output parametric models for non-linear systems, Part II: stochastic non-linear systems*. Int. J. of Control, 1985, vol. 41, s. 329-344.
- [28] I.J. Leontaritis, S.A. Billings: *Model selection and validation methods for non-linear systems*. Int. J. of Control, 1987, vol. 45, s. 311-341.
- [29] I.J. Leontaritis, S.A. Billings: *Prediction error estimator for non-linear stochastic systems*. Int. J. Systems Sci. 1988, vol. 19, s. 519-536.
- [30] D. Maksimiuk: *Volterra Systems Identification Using Neural Networks Approach*. XIXth National Conference Circuit Theory and Electronic Networks, Kraków-Krynica, 1996, s. 663-668.
- [31] A. Marciniak, D. Gregulec, J. Kaczmarek: *Basic Numerical Procedures in Turbo Pascal for Your PC*. Wydawnictwo NAKOM, Poznań 1992.
- [32] Norma IEC 268-5: *Sound system equipment, Part 5: Loudspeakers*.
- [33] S.-T. Park, S.-Y. Hong: *Development of the Two-Stage harmonic Balance Method to Estimate Nonlinear Parameters of Electrodynamic Loudspeakers*. J. Audio Eng. Soc., 2001, vol. 49, s. 99-116.
- [34] S.M. Potirakis, G.E. Alexakis, M.C. Tsilis, P.J. Xenitidis: *Time-Domain Nonlinear Modeling of Practical Electroacoustic Transducers*. J. of the Audio Eng. Soc., 1999, vol. 47, s. 447-468.
- [35] P. Pruchnicki: *Model NARMAX wysokiego rzędu dla głośnika dynamicznego*. XLVIII Otwarte Seminarium z Akustyki OSA'2001, Wrocław-Polanica Zdrój, 2001, s. 497-502.
- [36] P. Pruchnicki: *The Influence of Measurement Accuracy on the NARMAX Model of Dynamic Loudspeaker*. 108th Audio Eng. Soc. Convention, Paris, 2000, Preprint 5111 (G-6), s. 1-10.

-
- [37] H. Schurer, C.H. Slump, O.E. Herrmann: *Theoretical and Experimental Comparison of Three Methods for Compensation of Electrodynamic Transducer Nonlinearity*. J. Audio Eng. Soc., 1998, vol. 46, s. 723-740.
- [38] H. Shindou, M. Noshiro, Y. Fukuoka, M. Ishikawa, H. Minamitani: *A new method for parameter estimation in the NARMAX model using neural computation*. IEEE-EMBC and CMBEC 1995, s. 839-841.
- [39] J. Zarzycki: *Związek między określonymi szeregiem Volterry charakterystykami toru elektroakustycznego a powstającymi w nim zniekształceniami sygnałów fonicznych*. Praca doktorska, Komunikat nr 11, ITA Politechnika Wrocławska, Wrocław 1975.

Załącznik A: Modele NARMAX głośników dynamicznych

Poniżej przedstawione są współczynniki modeli NARMAX kilku głośników dynamicznych. Współczynniki te umieszczone są w tabelach w kolejności malejącej wartości $[err]$.

Model A.1

➤ typ głośnika	GDN 16/10
➤ moc elektryczna pobudzenia [W]	10
➤ liczba współczynników	42
➤ błąd modelu ε [%]	8.1

jednomian	wartość współczynnika
y(t-1)	2.2178
y(t-2)	-2.3269
x(t-2)	0.022818
x(t-1)	0.045617
x(t-13)	-0.01784
y(t-19)	0.31819
x(t-14)	0.017091
y(t-21)	0.34914
x(t-12)	-0.01389
x(t-20)	0.0054527
x(t-4)	0.0348
x(t-9) x(t-9) y(t-6)	0.0001942
x(t-3)	-0.081928
y(t-3)	1.4678
y(t-4)	-0.6871
x(t-0)	0.0088811
y(t-5)	0.28831
x(t-17)	-0.0014298
x(t-24)	0.0053377
y(t-23)	0.34037
x(t-10)	-0.0048932
y(t-25)	0.0072746
x(t-11)	0.006586
y(t-18)	-0.27912
y(t-16)	0.1717
x(t-22)	-0.0074054

jednomian	wartość współczynnika
$y(t-15)$	-0.15213
$y(t-14)$	0.035658
$y(t-6)$	-0.08178
$x(t-5) x(t-9) y(t-3)$	0.0003859
$x(t-18) x(t-19) y(t-16)$	-0.0002817
$x(t-3) y(t-4)$	-0.0019597
$x(t-7) y(t-10) y(t-25)$	0.0017511
$x(t-4) x(t-7) x(t-24)$	0.0000831
$y(t-8) y(t-11) y(t-19)$	-0.0075212
$x(t-15) x(t-20) y(t-23)$	-0.0002205
$x(t-23)$	-0.012679
$y(t-22)$	-0.40787
$y(t-20)$	-0.27277
$y(t-24)$	-0.13295
$x(t-6) y(t-1) y(t-17)$	0.0016727
$x(t-12) x(t-22) y(t-15)$	0.0003383
$x(t-11) y(t-6) y(t-19)$	0.0015481
$x(t-5) x(t-8) y(t-15)$	-0.0003038
$x(t-11) y(t-3) y(t-9)$	0.0012984
$x(t-3) x(t-13) y(t-22)$	-0.0002224
$x(t-0) x(t-5) y(t-18)$	-0.0002075
$x(t-7) x(t-7) y(t-15)$	0.0002366
$x(t-1) x(t-11) y(t-19)$	-0.0002262
$x(t-9) y(t-7) y(t-14)$	-0.0009634
$x(t-5) x(t-25) y(t-24)$	0.0002227
$x(t-2) x(t-22) y(t-23)$	-0.0002086
$x(t-6) x(t-14) y(t-25)$	0.0001682

Model A.2

➤ typ głośnika	GDN 20/40
➤ moc elektryczna pobudzenia [W]	20
➤ liczba współczynników	50
➤ błąd modelu ε [%]	10.7

jednomian	wartość współczynnika
$y(t-1)$	1.7033
$y(t-2)$	-1.1293
$x(t-3)$	0.024748
$x(t-2)$	0.011741
$x(t-5)$	-0.010523
$x(t-14)$	-0.0061334
$x(t-9)$	-0.0097342
$y(t-3)$	0.40201
$x(t-21)$	-0.0053022
$y(t-9)$	0.1273
$x(t-7)$	-0.0062022
$y(t-5)$	-0.059621
$x(t-25)$	0.0023468
$x(t-32)$	0.0027151
$x(t-28)$	-0.0025891
$x(t-23)$	-0.0009122
$x(t-20)$	0.0022673
$y(t-6) y(t-9) y(t-15)$	-0.043925
$y(t-15) y(t-15) y(t-30)$	-0.01732
$x(t-1) x(t-2) x(t-2)$	0.0000424
$x(t-34) y(t-11) y(t-28)$	0.0032726
$x(t-9) x(t-32) y(t-35)$	0.000299
$x(t-12) x(t-20) y(t-16)$	0.0002298
$x(t-28) y(t-14) y(t-23)$	0.0021267
$x(t-0) y(t-1) y(t-1)$	0.0035627
$x(t-6) x(t-15) y(t-17)$	0.0003709
$x(t-19) x(t-30) y(t-26)$	-0.0002764
$x(t-10) x(t-30) y(t-33)$	0.0002088
$x(t-11)$	-0.0016952
$x(t-31) x(t-32) x(t-32)$	-0.000038
$y(t-10)$	-0.144
$y(t-12)$	0.065904
$x(t-16) x(t-16) x(t-35)$	-0.0000334
$x(t-4)$	-0.0032813
$x(t-1) y(t-3)$	0.0018699
$x(t-32) x(t-32) x(t-34)$	-0.0000309
$x(t-13)$	0.002351

jednomian	wartość współczynnika
$x(t-15) x(t-29) y(t-25)$	0.0002944
$x(t-24) x(t-32) y(t-2)$	-0.0004082
$x(t-15) x(t-17) y(t-25)$	-0.0003213
$x(t-26) x(t-34) y(t-35)$	0.0002546
$y(t-15) y(t-15) y(t-15)$	-0.010049
$x(t-13) x(t-14) y(t-34)$	-0.000238
$x(t-21) x(t-26) y(t-1)$	-0.0002747
$x(t-2) y(t-10) y(t-25)$	0.0027187
$x(t-4) x(t-9) y(t-35)$	0.0002348
$x(t-3) x(t-16) y(t-31)$	0.0002301
$x(t-11) x(t-12) y(t-11)$	0.0002507
$x(t-5) x(t-16) y(t-35)$	-0.0002177
$x(t-1) x(t-9) y(t-26)$	0.0002085

Model A.3

> typ głośnika	GDN 20/40
> moc elektryczna pobudzenia [W]	30
> liczba współczynników	53
> błąd modelu ε [%]	17.1

jednomian	wartość współczynnika
$y(t-1)$	2.1805
$y(t-2)$	-2.0506
$y(t-3)$	1.4461
$x(t-2)$	-0.01174
$x(t-1)$	-0.0069738
$x(t-3)$	-0.0028974
$y(t-7)$	0.60698
$x(t-9)$	-0.0021589
$x(t-16)$	-0.0040751
$x(t-17) x(t-29) x(t-29)$	0.000025
$x(t-24)$	0.0019069
$y(t-4)$	-1.2934
$x(t-4) x(t-4) x(t-7)$	-0.0000193
$x(t-10)$	0.0034247
$y(t-5)$	1.273
$x(t-17)$	0.0020776
$x(t-0)$	-0.0017615
$y(t-11) y(t-11) y(t-29)$	0.018165
$y(t-14)$	-0.0010103
$x(t-4) x(t-23) x(t-23)$	0.0000227
$x(t-5)$	0.0067361
$x(t-4)$	0.0088041
$y(t-6)$	-0.9153
$x(t-19) x(t-19) x(t-22)$	0.0000269
$x(t-20)$	-0.002709
$x(t-25)$	-0.0017772
$x(t-19) x(t-19) x(t-29)$	0.0000162
$y(t-10) y(t-25) y(t-27)$	0.030186
$x(t-28)$	0.0022646
$x(t-14)$	0.0029075
$x(t-7) y(t-2) y(t-2)$	0.0018298
$x(t-24) x(t-24) x(t-30)$	-0.0000284
$y(t-9)$	0.41024
$y(t-8)$	-0.58052
$y(t-10)$	-0.10167
$x(t-9) x(t-27) y(t-4)$	-0.0003506
$x(t-4) x(t-4) x(t-13)$	0.0000257

jednomian	wartość współczynnika
$x(t-21) y(t-9) y(t-23)$	-0.002283
$x(t-2) x(t-2) y(t-13)$	-0.0002089
$x(t-4) x(t-5) x(t-5)$	-0.0000296
$x(t-15) x(t-19) x(t-22)$	0.0000237
$x(t-2) x(t-28) y(t-16)$	0.0001754
$x(t-5) x(t-11) y(t-1)$	-0.0002428
$x(t-2) x(t-23) y(t-6)$	-0.0001742
$x(t-11) x(t-24) y(t-9)$	-0.0002351
$x(t-16) x(t-24) x(t-30)$	-0.0000233
$y(t-3) y(t-5) y(t-19)$	-0.017294
$x(t-16) x(t-16) y(t-6)$	-0.0001852
$x(t-18) x(t-24) y(t-13)$	0.0001985
$x(t-2) x(t-15) y(t-10)$	-0.0002096
$x(t-19) x(t-19) y(t-29)$	0.0001176
$x(t-3) x(t-4) y(t-23)$	-0.0001554
$x(t-11) x(t-29) y(t-15)$	0.0001689

Model A.4

➤ typ głośnika	GDN 20/40
➤ moc elektryczna pobudzenia [W]	40
➤ liczba współczynników	43
➤ błąd modelu ε [%]	13.8

jednomian	wartość współczynnika
$y(t-1)$	2.3241
$y(t-2)$	-2.3482
$y(t-3)$	1.2847
$y(t-4)$	-0.20191
$x(t-2)$	0.018777
$x(t-1)$	0.015293
$x(t-4)$	-0.01492
$x(t-14)$	0.0087302
$x(t-0)$	0.0093611
$x(t-7)$	-0.010337
$x(t-30)$	0.0070059
$x(t-25)$	-0.0057886
$x(t-16) x(t-17) x(t-17)$	-0.0001457
$x(t-19)$	0.0002446
$x(t-13)$	-0.0042082
$x(t-24)$	0.0023366
$x(t-29)$	-0.0028238
$x(t-9) x(t-22) y(t-19)$	-0.0005084
$x(t-20) x(t-20) x(t-20)$	0.0000346
$x(t-21)$	-0.0032097
$x(t-21) x(t-21) y(t-18)$	0.000116
$x(t-11)$	0.0019484
$x(t-16)$	-0.0055765
$x(t-18)$	-0.0058658
$y(t-15)$	0.026791
$x(t-2) x(t-2) x(t-22)$	-0.0001385
$x(t-26)$	-0.0031923
$y(t-5)$	-0.10891
$x(t-5)$	-0.004448
$x(t-17)$	-0.0029812
$x(t-3) x(t-3) x(t-3)$	0.0001445
$x(t-9) x(t-27) y(t-4)$	0.0004675
$x(t-8) x(t-8) y(t-9)$	0.0005061
$x(t-10) x(t-23) y(t-6)$	0.0004509
$x(t-4) x(t-21) x(t-26)$	-0.0001174
$x(t-21) x(t-21) y(t-24)$	0.0003167

jednomian	wartość współczynnika
$x(t-6) x(t-6) y(t-29)$	-0.0003025
$x(t-5) x(t-14) y(t-11)$	0.0003343
$x(t-20) x(t-27) y(t-21)$	-0.0003806
$x(t-15) x(t-22) y(t-21)$	-0.0003493
$x(t-16) x(t-21) y(t-27)$	0.000294
$x(t-13) x(t-18) y(t-30)$	-0.0002863
$x(t-19) x(t-20) y(t-26)$	0.00033

Model A.5

➤ typ głośnika	GDN 20/35/1
➤ moc elektryczna pobudzenia [W]	28
➤ liczba współczynników	51
➤ błąd modelu ε [%]	15.9

jednomian	wartość współczynnika
y(t-1)	2.0184
y(t-2)	-1.5661
y(t-3)	0.4944
x(t-3)	0.018178
x(t-7)	0.01214
x(t-5)	-0.016116
x(t-2)	0.011706
x(t-9)	-0.0069418
x(t-17)	-0.00688
x(t-15)	-0.0049095
x(t-1) x(t-13) x(t-13)	0.0000519
x(t-6)	-0.012291
x(t-23)	-0.0049008
y(t-34)	0.0286
x(t-35)	-0.0031819
x(t-20)	0.0035258
x(t-28)	0.0033106
x(t-8)	0.0038512
x(t-1) x(t-17) x(t-17)	0.0000429
x(t-26)	-0.0022365
y(t-10)	-0.021729
x(t-23) x(t-23) y(t-17)	0.0002588
x(t-24) y(t-2) y(t-2)	-0.0012789
x(t-1) x(t-4) y(t-10)	0.000259
x(t-23) y(t-11) y(t-22)	-0.0022634
x(t-35) y(t-25)	-0.0019045
x(t-12) y(t-28) y(t-31)	0.0013109
x(t-9) x(t-25) y(t-18)	0.0002492
x(t-6) x(t-12) x(t-35)	-0.0000451
x(t-12) x(t-19) y(t-9)	-0.0003162
x(t-4) x(t-26) x(t-33)	-0.0000456
x(t-5) x(t-16) x(t-23)	0.0000395
y(t-8) y(t-11) y(t-33)	-0.014321
x(t-30) y(t-18) y(t-19)	0.0014106
x(t-11) y(t-18) y(t-19)	-0.001097
x(t-11) x(t-18) y(t-35)	-0.0001722

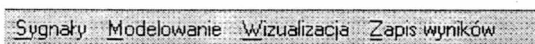
jednomian	wartość współczynnika
$x(t-4) x(t-13) y(t-29)$	-0.0002962
$x(t-12) x(t-20) y(t-19)$	0.0002915
$x(t-1) x(t-31) y(t-31)$	-0.0002711
$x(t-1) x(t-18) x(t-18)$	0.0000297
$x(t-7) x(t-21) y(t-18)$	0.0002361
$x(t-3) x(t-22) y(t-35)$	-0.0002011
$x(t-0) x(t-9) y(t-33)$	0.0002799
$x(t-1) x(t-9) y(t-33)$	0.0002007
$x(t-3) x(t-28) y(t-30)$	-0.0001844
$x(t-18) x(t-27) y(t-29)$	-0.0002892
$x(t-20) x(t-22) y(t-29)$	0.0001888
$x(t-4) x(t-32) y(t-35)$	-0.0001699
$x(t-6) x(t-9) y(t-35)$	-0.0002163
$x(t-27) x(t-35) y(t-34)$	-0.0001749
$x(t-15) x(t-21) y(t-25)$	0.0001526

Załącznik B: Opis programu NARMAXmodel

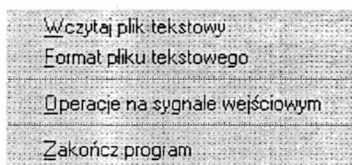
Program komputerowy **NARMAXmodel** przeznaczony jest do wyznaczania modeli NARMAX głośników dynamicznych na podstawie zarejestrowanych sygnałów: pobudzenia i odpowiedzi głośnika. Program powstał w środowisku *Borland Delphi 4.0* z wykorzystaniem komponentów *National Instruments ComponentWorks SDS 2.0.1*.

B.1 Menu

Główne menu programu zawiera cztery pozycje:



W podmenu *Sygnały* zawarte są opcje służące do wczytywania sygnałów pomiarowych z plików tekstowych oraz dokonywania na nich pewnych operacji:

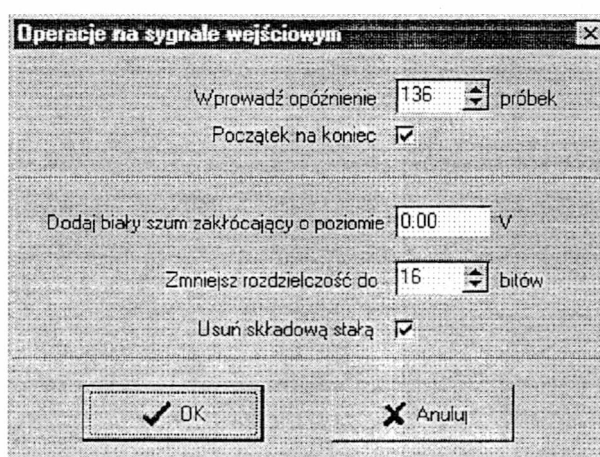


- Opcja *Wczytaj plik tekstowy* pozwala na wybranie pliku tekstowego z zarejestrowanymi sygnałami pomiarowymi.
- Wybranie opcji *Format pliku tekstowego* otwiera okienko, w którym ustala się format zapisanych danych:



Sygnały w pliku powinny być zapisane w kolumnach. Należy ustalić w której kolumnie jest pobudzenie (*sygnał $x(t)$*), a w której odpowiedź głośnika (*sygnał $y(t)$*). Wartości napięć we wczytywanych plikach tekstowych wyrażone są w krokach kwantyzacji. Aby poprawnie zinterpretować poziomy sygnału konieczne jest więc wpisanie napięcia, które odpowiada 32768 krokom kwantyzacji. Na podstawie tej wartości program przelicza wczytany sygnał na napięcie w [V] i na takich właśnie wartościach prowadzone są dalsze obliczenia.

- Opcja *Operacje na sygnale wejściowym* otwiera okienko, w którym możemy wybrać rodzaj operacji jakie chcemy wykonać na zebranej odpowiedzi głośnika przed rozpoczęciem modelowania:



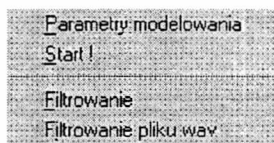
Najważniejszą operacją jest uwzględnienie opóźnienia sygnału w torze, które trzeba podać dla poprawnej pracy algorytmu tworzącego model. Opóźnienie to realizowane jest przez przesunięcie odpowiedzi głośnika na osi czasu. Dodatkowo możliwe jest (*Początek na koniec*) przeniesienie wyrzucanych w tej sytuacji, początkowych próbek sygnału na jego koniec. Operacja ta zalecana jest w sytuacji gdy rejestrowana jest odpowiedź na pobudzenie cykliczne.

Opcje dodawania szumu oraz zmniejszania rozdzielczości kwantyzacji wykorzystywane były podczas eksperymentów nad wpływem czynników zewnętrznych opisanych w punkcie 5.4 pracy.

Opcja *Usuń składową stałą* pozwala na wyeliminowanie składowej stałej z sygnału. Opcja ta jest przydatna w przypadku niedokładnej kalibracji przetwornika analogowo-cyfrowego.

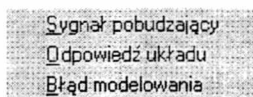
- Ostatnia pozycja menu - *Zakończ program* kończy działanie programu.

W podmenu *Modelowanie* zawarte są wszystkie opcje odpowiedzialne za proces modelowania:



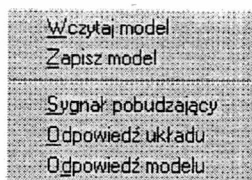
- Pierwsza, najważniejsza opcja to ustalenie *Parametrów modelowania*. Do tego celu służy okienko, które ze względu na wielość opcji zostanie szczegółowo omówione w części B.2.
- Wybranie opcji *Start!* rozpoczyna obliczenia.
- Opcja *Filtrowanie* realizuje filtrowanie załadowanego sygnału pobudzenia (opcja *Wczytaj plik tekstowy*) przez aktualny model. Pozwala to na wyznaczenie odpowiedzi utworzonego modelu na różnorodne pobudzenia. Opcja ta wykorzystywana była szeroko w punktach 5.7.1 i 5.8 pracy.
- Po wybraniu opcji *Filtrowanie pliku WAV* możliwe jest przefiltrowanie przez aktualny model dowolnego pliku dźwiękowego w formacie WAVE. Opcja ta nie była wykorzystywana w pracy, została wprowadzona w celu auralizacji modelowanych zniekształceń. Dzięki niej możliwe jest zrealizowanie subiektywnych testów odsłuchowych jakości modeli.

Podmenu *Wizualizacja* pozwala na przedstawienie na wykresie przebiegu czasowego sygnału.



Można obserwować kolejno: sygnał pobudzający, odpowiedź układu lub też błąd modelowania. Opcja ta przydatna jest do szybkiego stwierdzenia czy sygnał z pliku tekstowego został wczytany poprawnie oraz do oceny błędu modelowania.

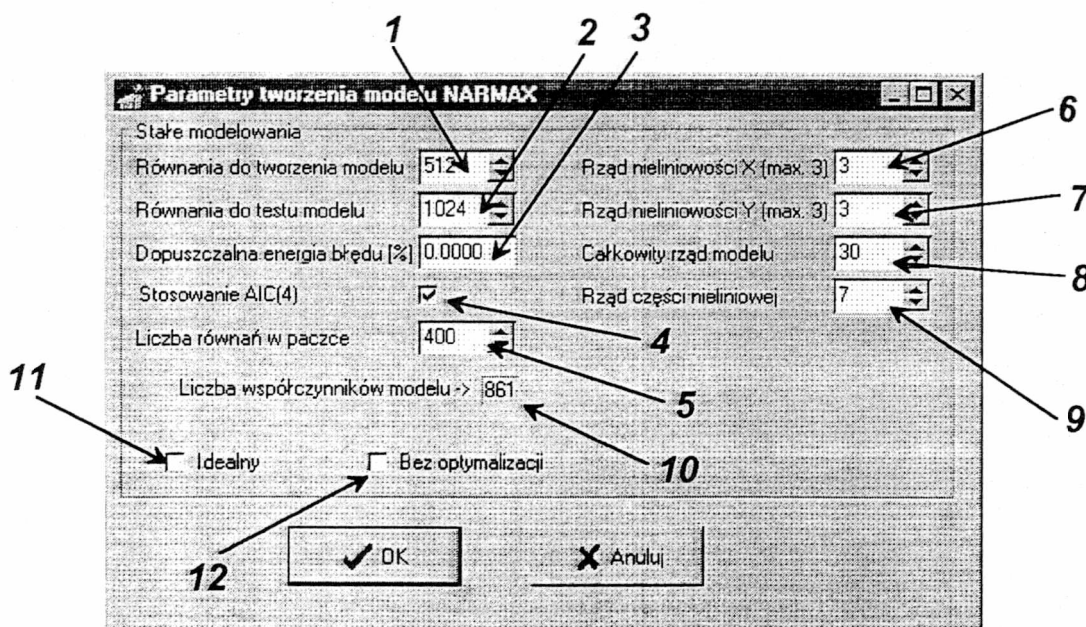
Podmenu *Zapis wyników* służy do zapisywania wyników modelowania w plikach:



- Opcje *Wczytaj model* oraz *Zapisz model* służą odpowiednio do wczytywania do programu oraz do zapisywania na dysk modeli NARMAX będących wynikiem przeprowadzonych obliczeń. Dzięki temu możliwe jest późniejsze przeprowadzanie analiz i symulacji bez konieczności ponownego tworzenia modelu.
- Pozostałe trzy opcje pozwalają na zapisanie na dysku w plikach tekstowych następujących sygnałów: pobudzenia, odpowiedzi głośnika i odpowiedzi modelu. Dzięki temu, że są to zwykłe pliki tekstowe można importować je do innych programów (np. MathCad, arkusze kalkulacyjne) w celu dokonania dodatkowych przekształceń, obliczeń bądź też wykresów.

B.2 Parametry modelowania

Okienko przeznaczone do ustalenia parametrów tworzenia modelu NARMAX przedstawione jest poniżej.



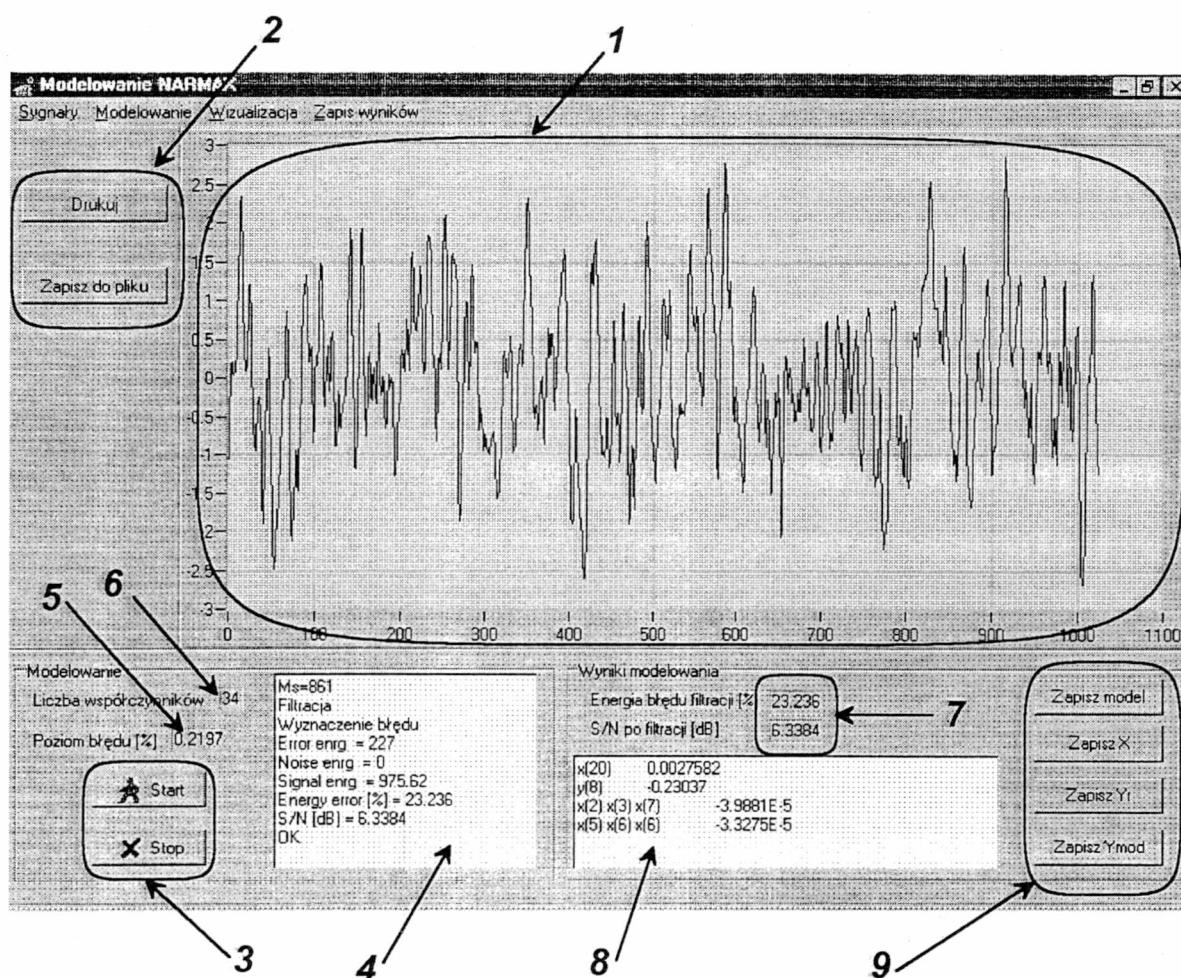
Poszczególne kontrolki spełniają następujące funkcje (podane są również oznaczenia stosowane w pracy):

1. Liczba równań wykorzystywanych do tworzenia modelu - N , jest to jednocześnie liczba wierszy macierzy predykcji $\mathbf{P}$.
2. Długość sygnału pobudzenia (w próbkach) - N_f , używana podczas oceny dokładności modelu. Liczba ta określa także ile próbek zostanie wykorzystanych podczas filtrowania sygnału. Oprócz tego wszystkie sygnały zapisywane w opcji *Zapis wyników* mają właśnie tę długość.
3. Dopuszczalna wartość błędu modelu - ρ określająca moment zakończenia tworzenia modelu.
4. Pole wyboru, które określa czy ma być stosowane kryterium $AIC(4)$ zakończenia procesu tworzenia modelu. Proces tworzenia modelu NARMAX jest kończony gdy spełnione jest kryterium z punktu **3** lub **4**.
5. Liczba współczynników wyznaczanych w jednym etapie - M_i (punkt 4.4 pracy).
6. Rząd nieliniowości sygnału $x(t)$ - l_x może być zmieniany w granicach od 1 do 3.
7. Rząd nieliniowości sygnału $y(t)$ - l_y może być zmieniany w granicach od 0 do 3, $l_y = 0$ oznacza brak w modelu wyrazów zależnych od $y(t)$, w takich warunkach powstaje model NARMAX, który jest szeregiem Volterry.
8. Długość liniowego "ogona" modelu NARMAX. Wartość ta pozwala zwiększyć dokładność modelu poprzez dołożenie do niego liniowych wyrazów wysokiego rzędu. Opcja ta wykorzystywana była tylko na początkowym etapie eksperymentów. Po opracowaniu algorytmu tworzenia pełnych modeli NARMAX wysokiego rzędu, nie była wykorzystywana.
9. Rząd modelu - $n_x = n_y$.
10. Kontrolka pokazująca na podstawie ustawionych parametrów modelowania z ilu współczynników składa się model (przed optymalizacją). Dzięki niej możliwe jest szybkie zorientowanie się ile współczynników modelu jest do rozpatrzenia.

11. Pole wyboru, które przełącza program w tryb testowania na idealnym modelu matematycznym, wykorzystane to zostało w punkcie 4.6 pracy.
12. Wyłączenie procesu optymalizacji. Opcja była wykorzystana w punkcie 5.5.

B.3 Główne okno programu

Poniżej przedstawione jest główne okno programu:



Funkcje elementów głównego okna programu są następujące:

1. Wykres, na którym można zaprezentować przebieg czasowy sygnału - podmenu *Wizualizacja*.
2. Przyciski pozwalające na wydrukowanie wykresu lub też zapisanie go do pliku graficznego.
3. Przyciski uruchamiające i zatrzymujące proces modelowania.

4. Okienko, w którym prezentowane są informacje związane z modelowaniem: liczba współczynników, wartości $[err]_i$, wyniki filtrowania.
5. Aktualny poziom błędu modelu $(1 - \sum [err]_i)$ wyznaczonych współczynników).
6. Aktualna liczba wybranych współczynników modelu.
7. Błąd modelu po filtracji przedstawiony w [%] i [dB] (punkt 4.5 pracy).
8. Okienko w którym wyświetlane są wartości współczynników modelu. Przy etapowym wyznaczaniu modelu prezentowane są tutaj współczynniki wyznaczone po każdym etapie.
9. Grupa przycisków służących do zapisu na dysk analizowanych przebiegów. Realizują one te same funkcje co opcje podmenu *Zapis wyników*.



***Instytut Telekomunikacji i Akustyki
Politechniki Wrocławskiej
Raport Nr I-28 / 02 / P-002***

**Modelowanie
zniekształceń nieliniowych
głośników dynamicznych
metodą NARMAX
(suplement)
Piotr Pruchnicki**

Praca doktorska

Promotor: dr hab. inż. Andrzej B. Dobrucki, prof. nadzw. PWr

Słowa kluczowe:

głośnik dynamiczny,
metoda NARMAX,
modelowanie,
zniekształcenia nieliniowe,

Wrocław 2002

mgr inż. Piotr Pruchnicki
Instytut Telekomunikacji i Akustyki
Politechnika Wrocławska
50-370 Wrocław
Wyb. S. Wyspiańskiego 27
tel. (0 prefix 71) 320 30 65
email: misio@zakus.ita.pwr.wroc.pl



315756L/1

Spis treści

S.1 Wstęp	4
S.2 Wyznaczanie szeregu Wienera	4
S.3 Miara podobieństwa jąder Wienera głośnika i modelu NARMAX	7
S.4 Wyniki obliczeń	8
S.5 Wnioski	17
Literatura	17

S.1 Wstęp

Podczas analizy właściwości nieliniowych głośników dynamicznych najczęściej wyznaczanymi parametrami są współczynnik zawartości harmonicznych (THD) oraz zniekształcenia intermodulacyjne (IMD). Mimo tego, że współczynniki te wykorzystywane są szeroko w praktyce, nie niosą jednak one wyczerpującej i jednoznacznej informacji o nieliniowościach badanego układu [39, 40, 41].

Charakterystyki głośnika dynamicznego, liniowe i nieliniowe, można opisać wykorzystując przedstawiony w punkcie 2.3 szereg Volterry lub też jego ortogonalną postać nazywaną szeregiem Wienera. Prace nad zastosowaniem tych szeregów do opisu toru elektroakustycznego zapoczątkowali między innymi A. Gabor [41] oraz J. Zarzycki [39].

W celu określenia dokładności modelu NARMAX zdecydowano się na wyznaczenie szeregu Wienera dla rzeczywistego głośnika oraz dla utworzonego modelu NARMAX. Oba szeregi porównano następnie ze sobą określając stopień ich podobieństwa.

S.2 Wyznaczanie szeregu Wienera

Do opisu nieliniowego układu inercyjnego podobnie jak szereg Volterry (2.10) można wykorzystać szereg Wienera. Szereg ten dla czasu dyskretnego opisany jest następującym równaniem [41, 42]:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n[k_n, x(t)] \quad (\text{S.1})$$

gdzie: $G_n[k_n, x(t)]$ - operator Wienera rzędu n :

$$G_n[k_n, x(t)] = \sum_{\tau_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_n=0}^{\infty} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \cdot \dots \cdot x(t - \tau_n) + \\ \sum_{u=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(\sum_{\tau_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{n-2u}=0}^{\infty} k_{n-2u(n)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-2u}) x(t - \tau_1) \cdot \dots \cdot x(t - \tau_{n-2u}) \right)$$

$k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ - jądro całkowe Wienera rzędu n ,

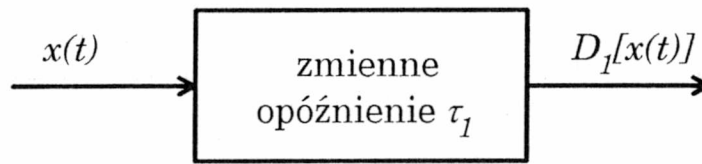
$k_{n-2u(n)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-2u})$ - jądro całkowe Wienera rzędu $n-2u$

utworzone z jądra rzędu n ,

Aby całkowicie scharakteryzować układ nieliniowy inercyjny konieczna jest znajomość jąder całkowych $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Ich wyznaczenie najwygodniej jest przeprowadzić poprzez wyliczenie odpowiednich funkcji korelacji wzajemnych [42].

Układ wprowadzający zmienne opóźnienie τ_1 przy pobudzeniu $x(t)$ ma odpowiedź $x(t - \tau_1)$ (rys. S.1). Dla tego układu można zdefiniować jednowymiarowy operator opóźnienia [42]:

$$D_1[x(t)] = x(t - \tau_1) \quad (\text{S.2})$$

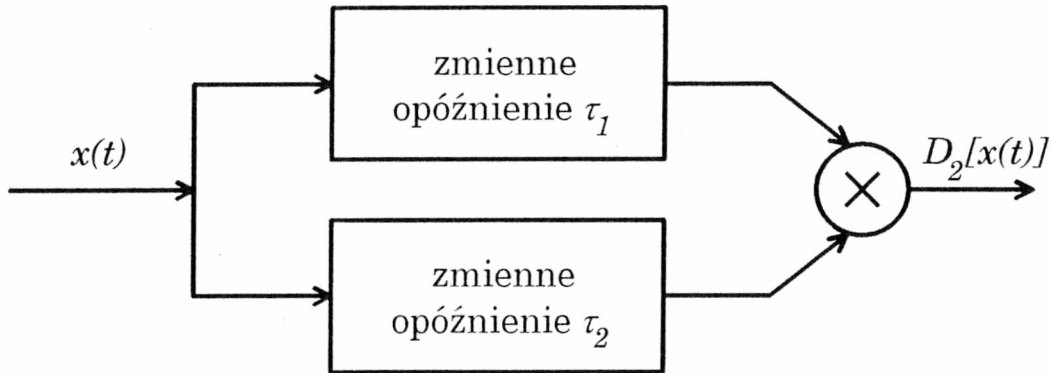


Rys. S.1. Jednowymiarowy układ wprowadzający zmienne opóźnienie

Podobnie definiuje się operator $D_2[x(t)]$ opisujący system przedstawiony na rys. S.2:

$$D_2[x(t)] = x(t - \tau_1) \cdot x(t - \tau_2) \quad (\text{S.3})$$

Operator $D_2[x(t)]$ nazywa się dwuwymiarowym operatorem opóźnienia.



Rys. S.2. Dwuwymiarowy układ wprowadzający zmienne opóźnienie

W ten sam sposób definiowane są operatory opóźnienia wyższych wymiarów:

$$D_n[x(t)] = x(t - \tau_1) \cdot \dots \cdot x(t - \tau_n) \quad (\text{S.4})$$

Zdefiniowane operatory opóźnienia posłużą do wyznaczenia jąder Wienera. Wykorzystując cechę ortogonalności operatorów $G_n[k_n, x(t)]$ dla jądra Wienera pierwszego rzędu można wyprowadzić następujące zależności [42]:

$$\overline{y(t) \cdot D_1[x(t)]} = \overline{G_1[k_1, x(t)] \cdot D_1[x(t)]} = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\sigma_1) x(t - \sigma_1) d\sigma_1 \cdot x(t - \tau_1) = A k_1(\tau_1) \quad (\text{S.5})$$

$$\text{stad: } k_1(\tau_1) = \frac{1}{A} \overline{y(t) \cdot D_1[x(t)]} \quad (\text{S.6})$$

gdzie: A - energia sygnału $x(t)$,

$\overline{\bullet}$ - operacja uśredniania.

Jądro Wienera drugiego rzędu wyznaczane jest z następującej zależności:

$$k_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2A^2} \overline{\{y(t) - G_0[k_0, x(t)]\} \cdot D_2[x(t)]} \quad (\text{S.7})$$

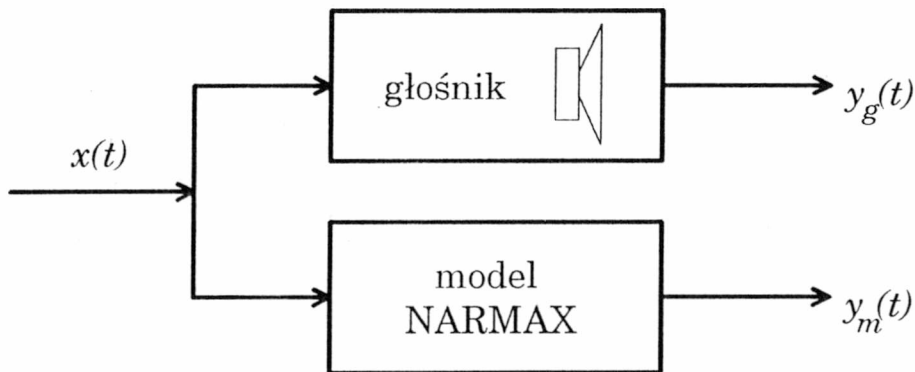
Dla jądra Wienera rzędu n można napisać:

$$k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{n!A^n} \overline{\left\{y(t) - \sum_{m=0}^{n-1} G_m[k_m, x(t)]\right\} \cdot D_n[x(t)]} \quad (\text{S.8})$$

Podczas wyznaczania jąder k_n we wzorze (S.8) konieczne jest odejmownie tylko tych operatorów G_m , które mają taką samą parzystość co n , tzn. takich że $m-n$ jest liczbą parzystą.

S.3 Miara podobieństwa jąder Wienera głośnika i modelu NARMAX

W dalszej części pracy do wyznaczania jąder całkowych Wienera został wykorzystany wzór (S.8).



Rys. S.3. Odpowiedź głośnika i modelu NARMAX na pobudzenie sygnałem $x(t)$

Głośnik rzeczywisty oraz jego model NARMAX pobudzano tym samym szumem białym $x(t)$ (rys. S.3). Otrzymano odpowiedzi odpowiednio $y_g(t)$ i $y_m(t)$. Na podstawie tych sygnałów obliczono następnie jądra całkowe Wienera rzędów od 1 do 3:

- dla głośnika: $k_{g1}(\tau_1)$, $k_{g2}(\tau_1, \tau_2)$, $k_{g3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$,
- dla modelu NARMAX: $k_{m1}(\tau_1)$, $k_{m2}(\tau_1, \tau_2)$, $k_{m3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

W celu porównania uzyskanych jąder wprowadzono dwie miary określające różnice pomiędzy charakterystykami głośnika rzeczywistego i modelu NARMAX:

➤ współczynnik korelacji jąder Wienera k_{gn} i k_{mn} :

$$r = \frac{\sum_{i_1=0}^N \cdots \sum_{i_n=0}^N k_{gn}(i_1, \dots, i_n) k_{mn}(i_1, \dots, i_n)}{\sqrt{\sum_{i_1=0}^N \cdots \sum_{i_n=0}^N k_{gn}^2(i_1, \dots, i_n) \cdot \sum_{i_1=0}^N \cdots \sum_{i_n=0}^N k_{mn}^2(i_1, \dots, i_n)}} \cdot 100\% \quad (S.9)$$

➤ względny błąd średniokwadratowy pomiędzy k_{gn} i k_{mn} (miara analogiczna do miary zdefiniowanej wzorem 4.17):

$$e = \frac{\sum_{i_1=0}^N \cdots \sum_{i_n=0}^N (k_{gn}(i_1, \dots, i_n) - k_{mn}(i_1, \dots, i_n))^2}{\sum_{i_1=0}^N \cdots \sum_{i_n=0}^N k_{gn}^2(i_1, \dots, i_n)} \cdot 100\% \quad (S.10)$$

gdzie: N - długość obliczanych jąder Wienera.

Podobieństwo jest tym większe im r jest bliższe 100 %, a błąd e bliski zeru.

S.4 Wyniki obliczeń

Procedurze weryfikacyjnej poddano dwa modele przedstawione w punkcie 5.8.2:

- model głośnika dynamicznego GDN 20/35/1 pracującego z mocą 28 W,
- model głośnika dynamicznego GDN 20/40 pracującego z mocą 20 W.

Dla obu głośników i modeli wyznaczono jądra pierwszego i drugiego rzędu: k_1 , k_2 oraz niektóre przekroje jąder rzędu trzeciego - k_3 . Obliczono także współczynnik korelacji r oraz błąd średniokwadratowy e dla całego jądra k_3 (a nie tylko jego przekrojów).

Wartości $k_1(\tau_1)$, $k_2(\tau_1, \tau_2)$, $k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ wyznaczono w punktach: $\tau_1, \tau_2, \tau_3 = 0.02 \cdot N$ [ms] (głośnik GDN 20/40) i $\tau_1, \tau_2, \tau_3 = 0.03356 \cdot N$ [ms] (głośnik GDN 20/35/1). N zmieniało się w granicach $N = 0, 1, 2, \dots, 500$.

Uzyskane wyniki przedstawione są w tabeli S.1. Natomiast wykresy jąder całkowych Wienera na rysunkach:

➤ S.4 - $k_1(\tau_1)$,

➤ S.5 - $k_2(\tau_1, \tau_2)$,

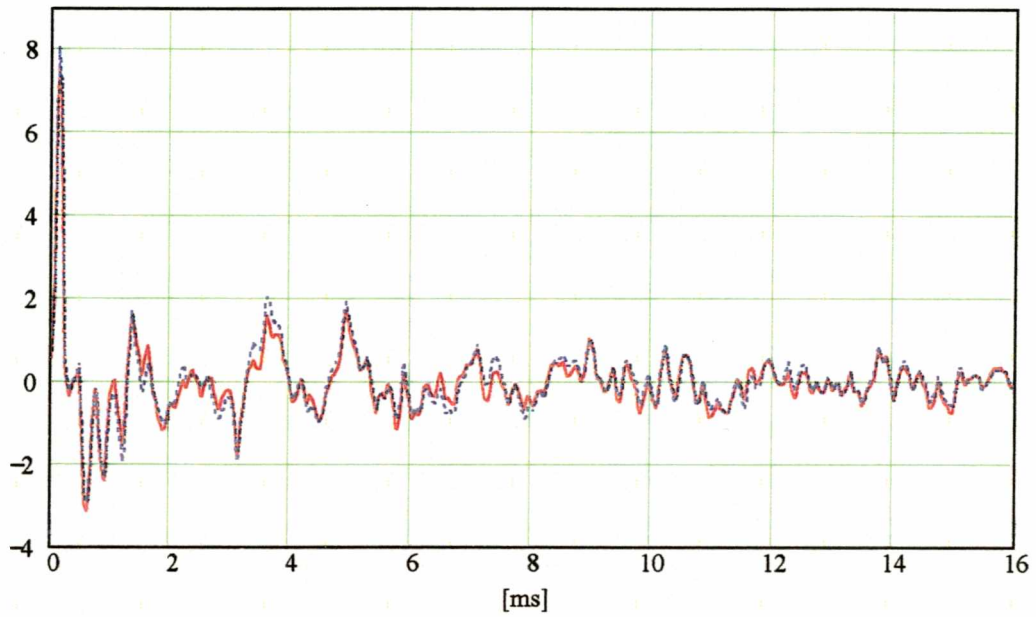
➤ S.6 - S.10 - przekroje $k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Ze względu na symetrię jąder całkowych Wienera względem τ_1, τ_2, τ_3 , np. $k_2(\tau_1, \tau_2) = k_2(\tau_2, \tau_1)$, obliczenia przeprowadzono tylko dla części przestrzeni wyznaczonej przez τ_1, τ_2, τ_3 . W ten sposób udało się zmniejszyć ilość koniecznych obliczeń.

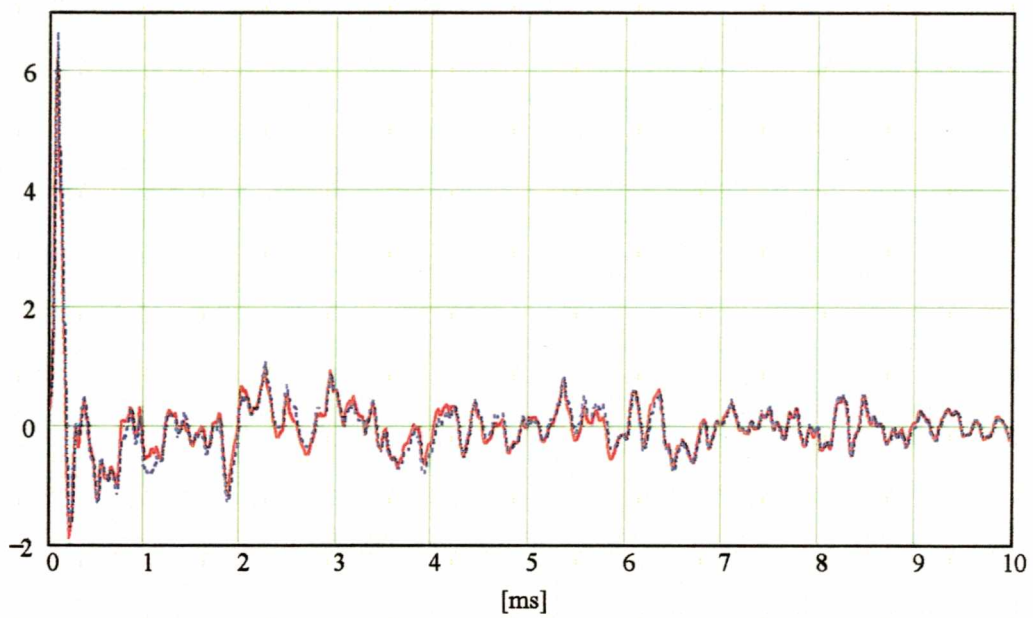
Tabela S.1 Wyniki porównania wyznaczonych jąder Wienera głośnika rzeczywistego i modelu NARMAX

Jądro	głośnik GDN 20/35/1		głośnik GDN 20/40	
	r [%]	e [%]	r [%]	e [%]
$k_1(\tau_1)$	96.98	5.22	97.85	3.55
$k_2(\tau_1, \tau_2)$	95.56	8.8	97.68	3.73
$k_3(\tau_1, \tau_2, 0)$	96.59	6.18	97.1	5.52
$k_3(\tau_1, \tau_2, 20)$	97.81	4.4	97.51	4.11
$k_3(\tau_1, \tau_2, 100)$	93.97	10.48	96.8	5.75
$k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2+10)$	95.96	7.05	97.6	3.89
$k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2+50)$	95.79	7.38	97.69	3.71
$k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$	96.51	6.05	97.85	3.45

a)

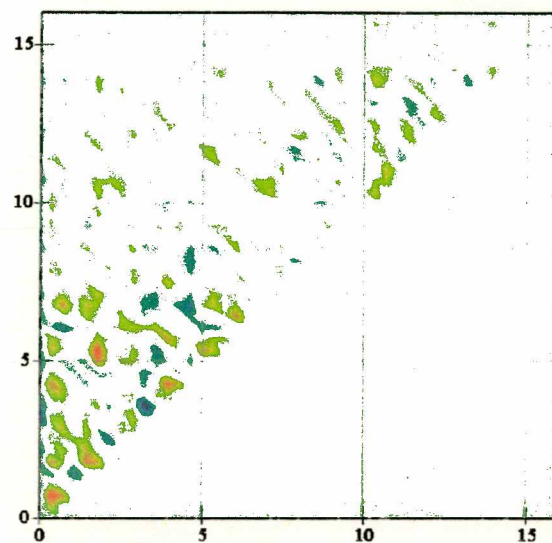
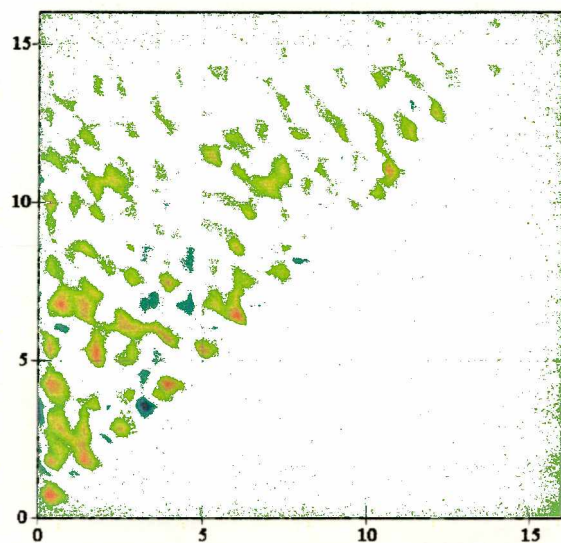


b)

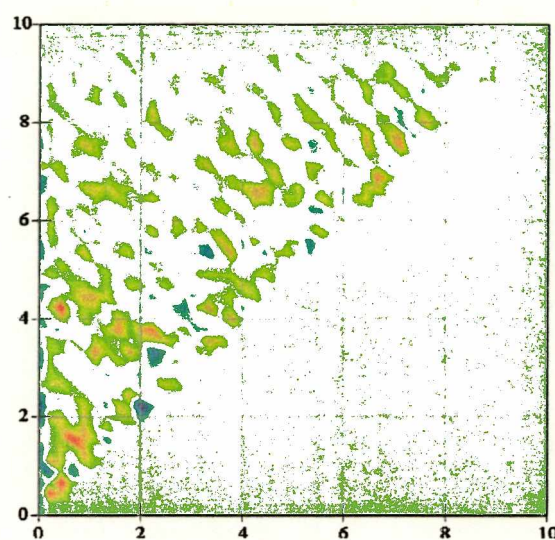
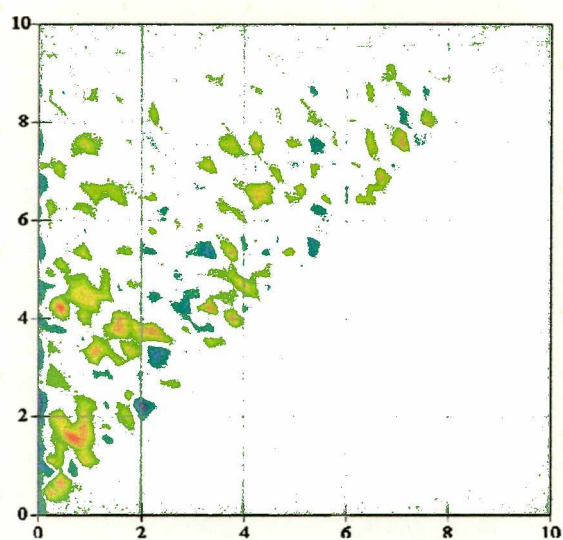


Rys. S.4. Jądra Wienera pierwszego rzędu $k_1(\tau_1)$ głośnika (linia przerywana) i modelu NARMAX (linia ciągła): a) głośnik GDN 20/35/1, b) głośnik GDN 20/40.

a)

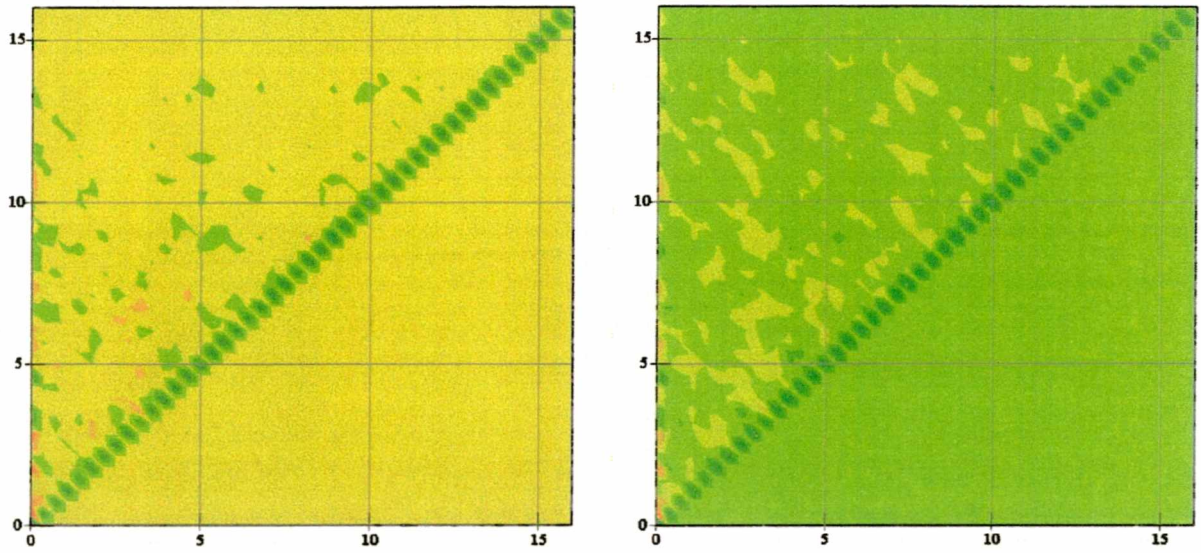


b)

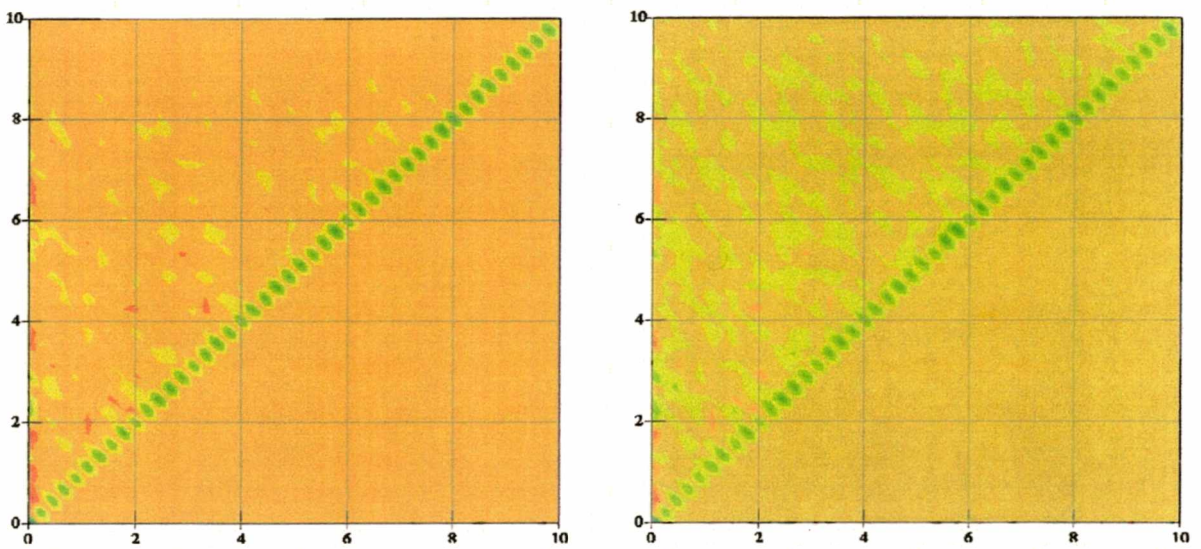


Rys. S.5. Jądra Wienera drugiego rzędu $k_2(\tau_1, \tau_2)$ głośnika (z lewej) i modelu NARMAX (z prawej): a) głośnik GDN 20/35/1, b) głośnik GDN 20/40.

a)

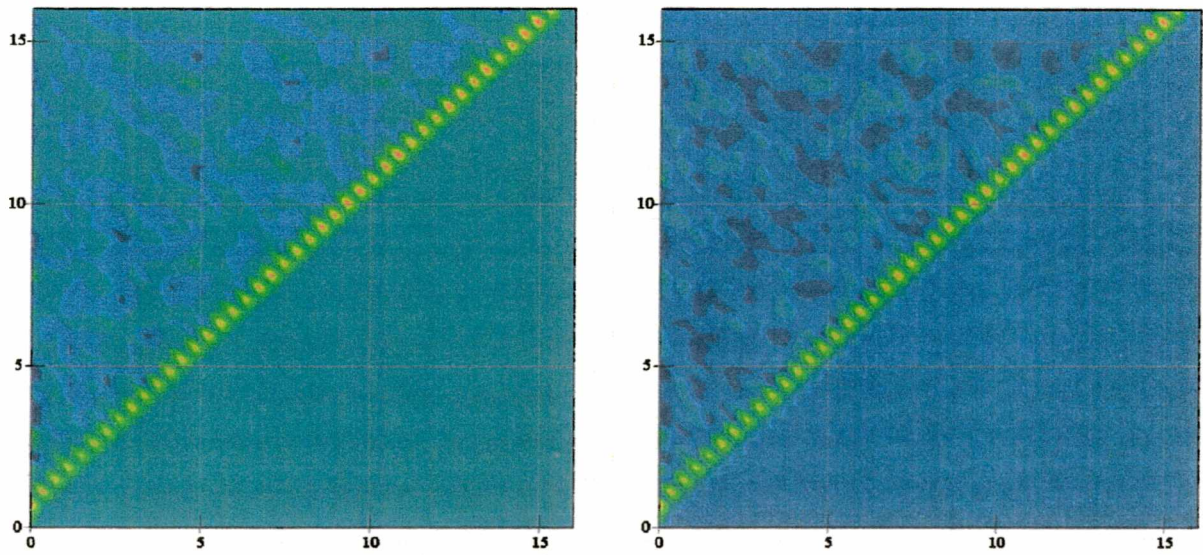


b)

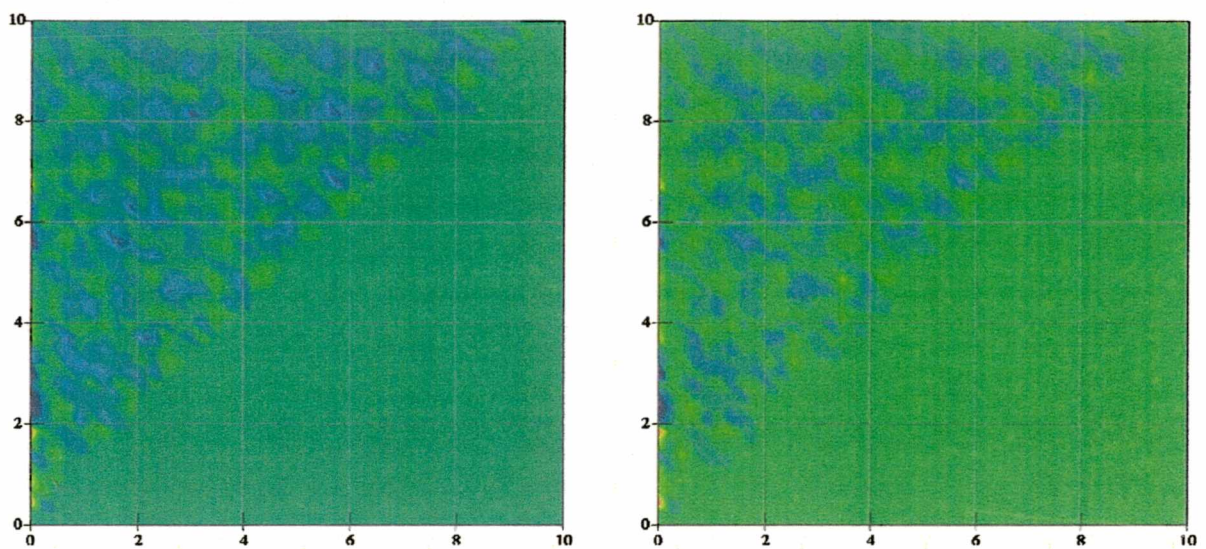


Rys. S.6. Jądra Wienera trzeciego rzędu $k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ przekrój $\tau_3 = 0$, dla głośnika (z lewej) i modelu NARMAX (z prawej): a) głośnik GDN 20/35/1, b) głośnik GDN 20/40.

a)

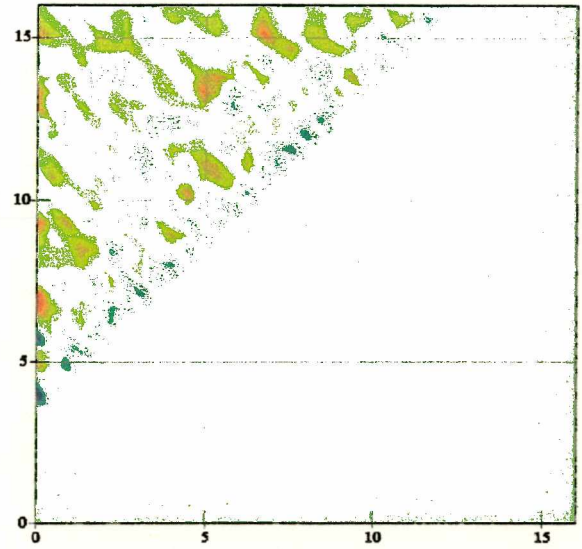
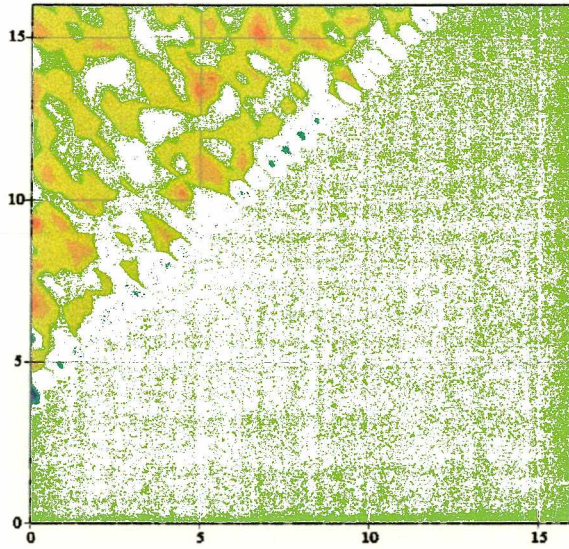


b)

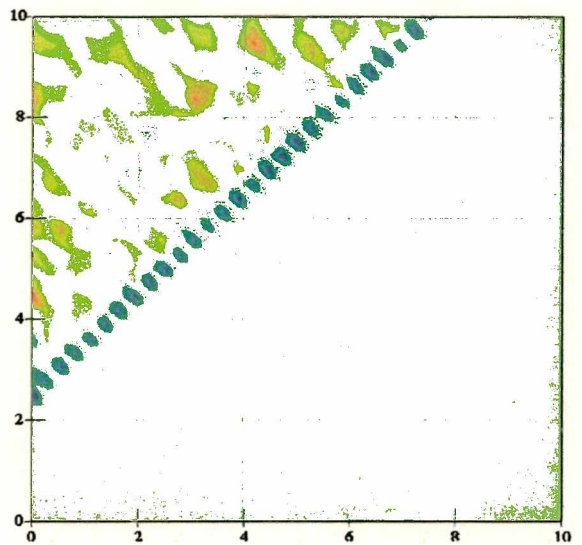
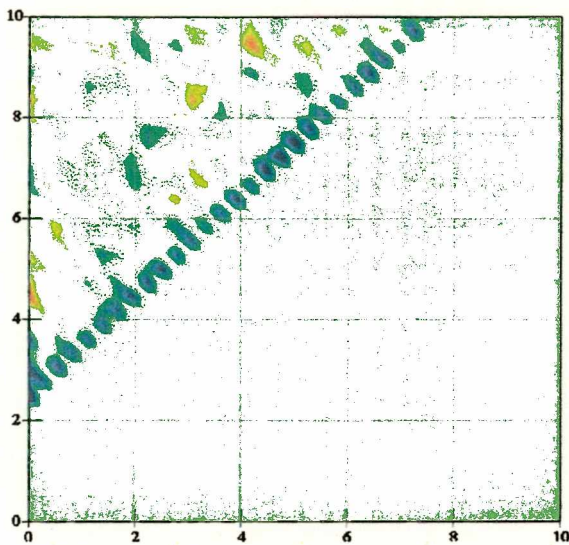


Rys. S.7. Jądra Wienera trzeciego rzędu $k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ przekrój $\tau_3 = 20$ dla głośnika (z lewej) i modelu NARMAX (z prawej): a) głośnik GDN 20/35/1, b) głośnik GDN 20/40.

a)

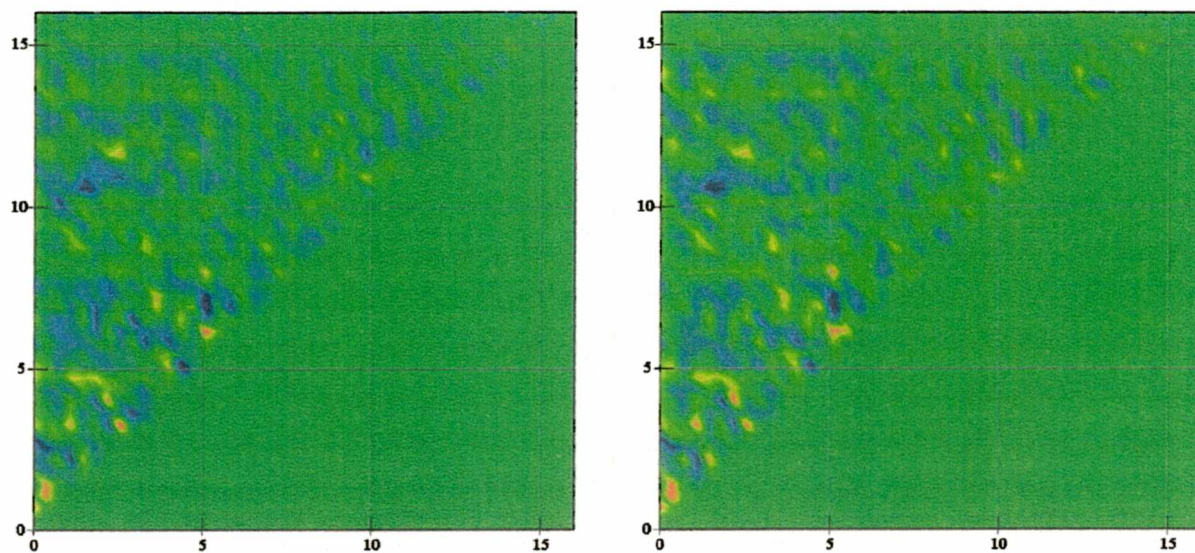


b)

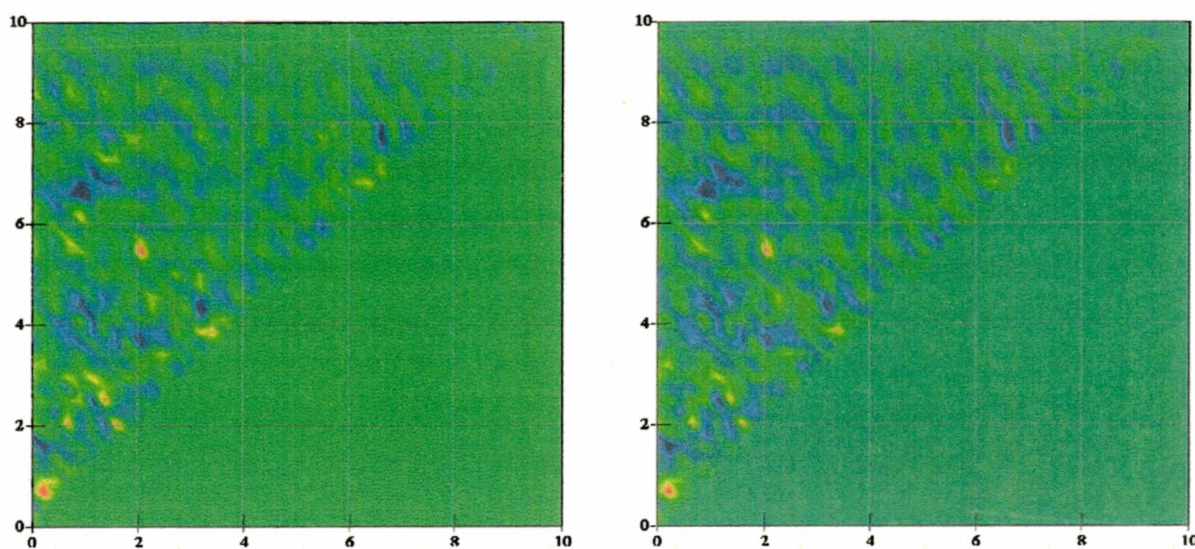


Rys. S.8. Jądra Wienera trzeciego rzędu $k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ przekrój $\tau_3 = 100$ dla głośnika (z lewej) i modelu NARMAX (z prawej): a) głośnik GDN 20/35/1, b) głośnik GDN 20/40.

a)

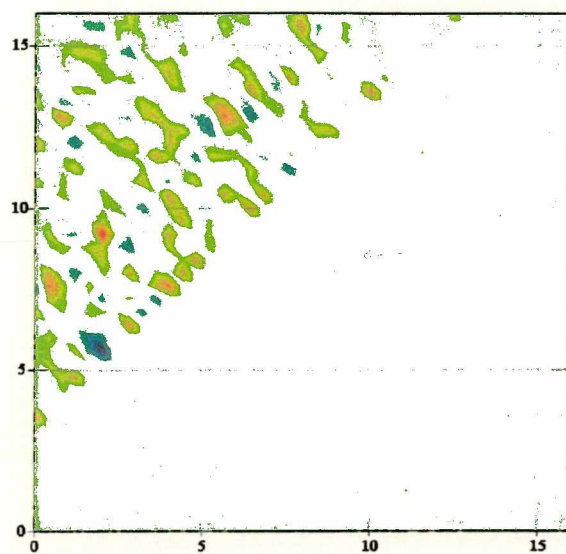
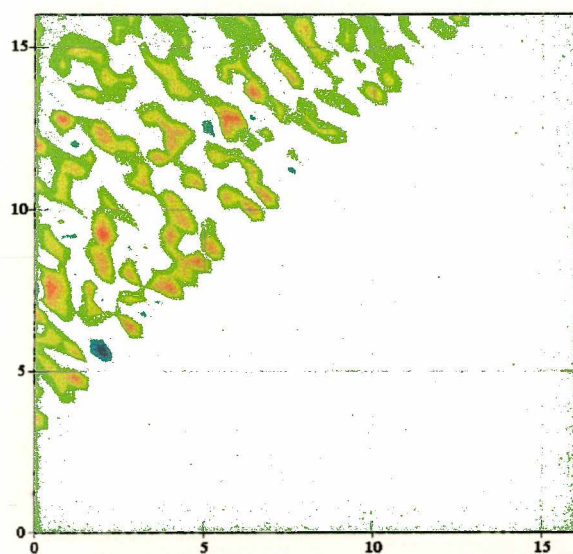


b)

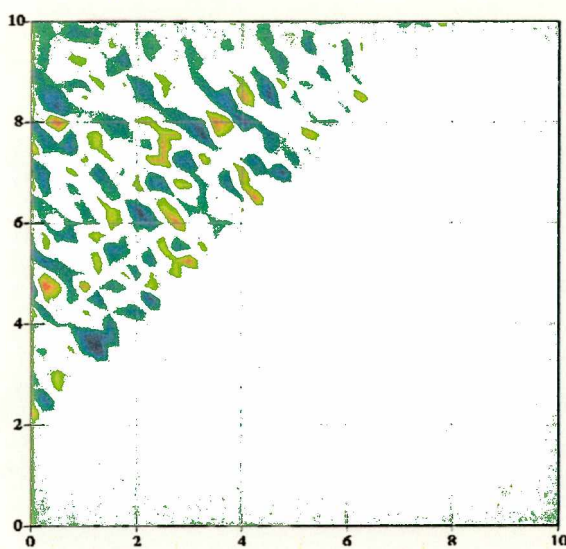
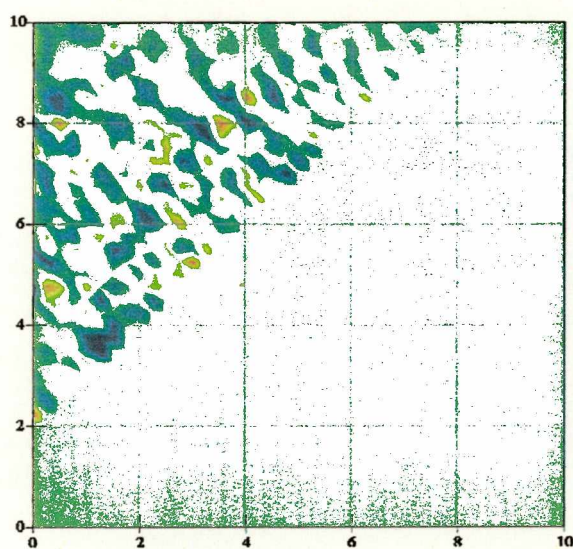


Rys. S.9. Jądra Wienera trzeciego rzędu $k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ przekrój $\tau_3 = \tau_2 + 20$ dla głośnika (z lewej) i modelu NARMAX (z prawej): a) głośnik GDN 20/35/1, b) głośnik GDN 20/40.

a)



b)



Rys. S.10. Jądra Wienera trzeciego rzędu $k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ przekrój $\tau_3 = \tau_2 + 50$ dla głośnika (z lewej) i modelu NARMAX (z prawej): a) głośnik GDN 20/35/1, b) głośnik GDN 20/40.

S.5 Wnioski

Uzyskane wyniki wykazują bardzo dobrą zgodność przebiegów jąder całkowych Wienera głośnika rzeczywistego oraz jego modelu NARMAX.

Dla modelu NARMAX głośnika GDN 20/35/1, którego dokładność na podstawie kryterium (4.17) określono na 15.9 %, uzyskano współczynnik korelacji r w granicach $r = 94 \div 97.8 \%$, a średniokwadratowy błąd względny $e = 4.4 \div 10.6 \%$. Natomiast dla głośnika GDN 20/40 (dokładność na podstawie (4.17) równa 10.7 %) uzyskano współczynnik korelacji $r = 96.8 \div 97.9 \%$, a średniokwadratowy błąd względny $e = 3.5 \div 5.8 \%$.

Przy tak dobrej zgodności charakterystyk modelu z charakterystykami głośnika rzeczywistego należy wyjaśnić stosunkowo duże rozbieżności pomiędzy wyznaczonymi w punkcie 5.8.2 współczynnikami zawartości harmonicznych THD. Przyczyn rozbieżności może być kilka. Po pierwsze mierzone zniekształcenia są na poziomie pojedynczych procent, są więc porównywalne z błędem względnym wyznaczonych jąder całkowych. Po drugie rząd modelu NARMAX został ograniczony do trzech, co może powodować, że harmoniczne pochodzące od nieliniowości wyższego stopnia są uwzględniane tylko w niewielkim stopniu.

Użyta w pracy, zdefiniowana wzorem (4.17), miara dokładności modelu NARMAX jest bardziej restrykcyjna niż miary oparte na wyznaczonych jądrach Wienera.

Przeprowadzona procedura weryfikacyjna wykazała poprawność i użyteczność modelu NARMAX. Jednocześnie większa różnica w THD i IMD pokazuje, że jeśli chodzi o zniekształcenia nieliniowe, parametry te są czulszymi wskaźnikami dokładności modelu niż jądra całkowite.

Literatura

[40] E. Czerwinski, A. Voishvillo, S. Alexandrov, A. Terekhov: *Multitone Testing of Sound System Components - Some Results and Conclusions. Part1: History and Theory*. J. Audio Eng. Soc., 2001, vol. 49, s.1011 - 1048.

-
- [41] A. Gabor: *Badanie określonych szeregiem Volterry charakterystyk toru elektroakustycznego*. Praca doktorska, Komunikat nr 10, ITA Politechnika Wrocławska, Wrocław 1975.
- [42] M. Schetzen: *The Volterra & Wiener Theories of Nonlinear Systems*. Wiley-Interscience, New York 1980.

