

skry
pty

TERESA ORŁOWSKA-KOWALSKA
CZESŁAW KOWALSKI

DYNAMIKA UKŁADÓW
ELEKTROMECHANICZNYCH

WROCŁAW 1979

KA
KA

skrypty

W PRODUKCJI:



- GRUDZEWSKI W., KLONOWSKI Z., *Informatyka w zarządzaniu szkołami wyższymi*
- HENDRICH A., *Chemia ogólna. Ćwiczenia laboratoryjne*
- JUCHNIEWICZ J., LISIECKI J., *Wysokonapięciowe układy izolacyjne*
- KAWALA Z., PAJĄK M., SZUST J., *Zbiór zadań z podstawowych procesów inżynierii chemicznej, cz. III, Przenoszenie masy*
- KINSNER K., TŁUCZKIEWICZ T., *Laboratorium miernictwa elektroenergetycznego*
- KOŁACZKOWSKI T. i inni, *Ćwiczenia laboratoryjne z chemii materiałów budowlanych*
- KUCZYŃSKI J., *Miejskie budowle podziemne*
- MACZEK K., MIECZYŃSKI M., *Chłodnictwo*
- MIELCARZEWICZ E. W., *Gospodarka wodna i ściekowa w zakładach przemysłowych, cz. II*
- NEGRUSZ A., STAŃDA J., *Badania procesów termoeenergetycznych*
- OHLY T., RADZIMSKI Z., *Elementy elektroniczne. Ćwiczenia laboratoryjne*
- Podstawy ochrony środowiska. Ćwiczenia laboratoryjne*
- Projektowanie kopalń, cz. I. Kopalnie odkrywkowe. Praca zbiorowa pod red. S. WIŚNIEWSKIEGO*
- SZLING Z., *Systemy odwadniania*
- SZTUK H., ŚNIEŻEK J., WOJTKIEWICZ H., *Technika urabiania skał*
- TALL M., DROBIŃSKI W., *Napęd i urządzenia elektryczne*

214866-1/1
Politechnika Wrocławska



Teresa Orłowska-Kowalska
Czesław Kowalski

Dynamika układów elektromechanicznych

Wrocław 1979

Instytut Układów Elektromaszynowych
Skrypt do przedmiotu *Napęd elektryczny – dynamika*
na studium dziennym, specjalizacja – *Maszyny elektryczne*
semestr VII, 2-2-0-0-0 h

Opiniodawca
Ludger SZKLARSKI

Redaktor
Leszek PIĄTEK

Korekta
Maria IZBICKA



Praca wydana za zgodą Rektora Politechniki Wrocławskiej



214866 L / 1

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

Nakład 500 + 75 egz. Ark. wyd. 13. Ark. druk. 14^{3/8} Papier offset. kl. V, 70 g. B1.
Oddano do druku w listopadzie 1979 r. Druk ukończono w grudniu 1979 r.
Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 6404/79 – P-12 – Cena zł 24,-

Alie. 1014/K/80

1. WSTĘP

Intensyfikacja procesów technologicznych i powstawanie nowych obiektów techniki powodują, że znaczenie układów przetwarzających energię elektryczną na mechaniczną stale zwiększa się. Zwiększają się również wymagania techniczne dotyczące tych układów. Jednym z podstawowych wymagań jest optymalizacja pracy całego układu i jego podzespołów. Ze względu na fakt, że współczesne układy elektromechaniczne bardzo często pracują przy zmieniających się wielkościach elektromechanicznych, (napięcie zasilania, częstotliwość napięcia zasilania, strumień magnetyczny, moment oporowy, moment bezwładności i inne), staje się konieczne projektowanie ich z uwzględnieniem własności dynamicznych oraz dążenie do zoptymalizowania tych własności.

W realizacji wymienionych celów istotne znaczenie mają badania modelowe oraz możliwości stwarzane przez współczesną technikę obliczeniową.

Znajomość metodyki badania modelowego dynamiki i optymalizowania układów elektromechanicznych jest dzisiaj konieczna dla każdego inżyniera zajmującego się projektowaniem, budową i eksploatacją takich układów. Autorzy skryptu starali się w sposób możliwie związać przedstawień metodykę badania dynamiki układów elektromechanicznych oraz przykłady jej praktycznego zastosowania.

Skrypt jest przeznaczony jako pomoc do wykładów nt. napęd elektryczny - dynamika, na Wydziale Elektrycznym na specjalności maszyny elektryczne w semestrze VII. Oprócz tego skrypt ten powinien służyć jako pomoc dla studentów zajmujących się badaniem dynamiki układów elektromechanicznych w ramach prac projektowych i dyplomowych.

Autorzy skryptu założyli, że studenci mają opanowane podstawowe wiadomości z teorii elektromechanicznego przetwarzania energii i teorii sterowania, a wykład z dynamiki układów elektromechanicznych wyprzedza takie przedmioty, jak napęd elektryczny, energoelektronika,

automatyka napędu. Konsekwencją tego jest odpowiedni układ treści skryptu oraz duża liczba przykładów analizy i syntezy układów elektromechanicznych.

Różnorodność zagadnień związanych z dynamiką układów elektromechanicznych spowodowała, że autorzy musieli niektóre z nich pominąć lub omówić tylko pobieżnie. Część z nich będzie wyjaśniana podczas zajęć laboratoryjnych, a pozostałe studenci będą mogli uzupełnić w ramach pracy własnej z literatury podanej w bibliografii.

2. ZAGADNIENIA DYNAMIKI UKŁADÓW ELEKTROMECHANICZNYCH.

WPROWADZENIE

2.1. Dynamika układów fizycznych

Przed przystąpieniem do szczegółowych rozważań o dynamice układów elektromechanicznych zdefiniowano następujące podstawowe pojęcia: dynamika układów fizycznych, system statyczny i dynamiczny, układ elektromechaniczny.

Dynamika jest nauką o tym, jak ciała zmieniają się w czasie i o siłach, które są przyczyną tych zmian. Nauka ta, w sytuacji szybkiego postępu technicznego, coraz szybszego przekazywania sygnałów i tendencji do całkowitej automatyzacji procesów, jest osią dla innych nauk.

W ogólnym przypadku układ, coraz częściej określany jako system, jest to zbiór obiektów materialnych, związanych określonymi wzajemnymi zależnościami lub oddziaływaniami. Ze względu na charakter oddziaływań i wzajemnych związków można wyróżnić układy (systemy) statyczne i dynamiczne.

W systemach dynamicznych wzajemne oddziaływania wywołują zmiany określonych wielkości fizycznych i parametrów w czasie. W związku z tym w systemach tych jest najważniejsze współdziałanie wszystkich elementów składowych w odróżnieniu od systemów znajdujących się w stanach statycznych, w których stopień współdziałania jest znacznie słabszy.

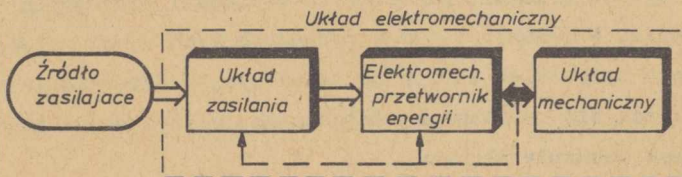
System statyczny można traktować jako szczególny przypadek pracy systemu dynamicznego. Po upływie odpowiednio długiego czasu od chwili podania określonego wymuszenia system znajduje się w stanie ustalonym, charakterystycznym dla systemu statycznego.

W praktyce nie istnieją systemy rzeczywiście statyczne, a jedynie quasi-statyczne, tzn. takie, w których oddziaływania dynamiczne są bardzo małe w stosunku do poziomu oddziaływań ustalonych.

Poznanie dynamiki dowolnego układu fizycznego, czyli zrozumienie, przewidzenie, a często i poprawienie jego zachowywania, wiąże się z odpowiednim studium (badaniem) dynamiki. Studium to może dotyczyć układów już istniejących, których działanie chcemy udoskonalić lub układów nowo projektowanych, których własności powinny być optymalne. W procesie studiowania dynamiki dowolnego układu można wyróżnić dwa podstawowe etapy: analizę i syntezę.

Szczegółowe ustalenie kolejnych zadań, występujących podczas analizy i syntezy dynamiki układu, zależy oczywiście od tego, jakie środowiska fizyczne występują w układzie (np. mechaniczne, elektryczne, elektromechaniczne itp.), jakie są rozmiary i złożoność systemu, z jaką dokładnością musi on działać itp. Główną cechą charakterystyczną, różniącą badanie dynamiki jednego ze środowisk od badania innego środowiska, są właściwe im związki przyczynowe, jakie wiążą elementy tych środowisk. Różne będą także rodzaje przybliżeń, wybór zmiennych, model matematyczny.

Pomimo wymienionych zastrzeżeń, niezależnie od tego jaki układ w danym przypadku podlega badaniu, procedura studium dynamiki ma kilka charakterystycznych etapów. Etapy te są związane z opracowywaniem modelu logicznego, matematycznego, analizą i syntezą własności dynamicznych. Będą one szczegółowo przedstawione w rozdziale 3, dotyczącym metodyki badania dynamiki.



Rys. 2.1. Schemat ideowy struktury układu elektromechanicznego: $\Rightarrow$ połączenia elektryczne zasilające, $\longleftrightarrow$ połączenia mechaniczne inercyjno-sprężyste i sztywne, $\rightarrow$ połączenia elektryczne typu sprzężenia zwrotnego

Zawężając obszar zainteresowań do środowiska elektromechanicznego, można podać następującą ogólną definicję układu elek-

t r o m e c h a n i c z n e g o : jest to zorganizowany zespół elementów mechanicznych i elektromagnetycznych, przetwarzających energię elektromechaniczną, łącznie z zespołem więzów typu elektromechanicznego, przetwarzających informację dostarczaną do układu. Na rysunku 2.1 przedstawiono schemat ideowy struktury układu elektromechanicznego. Z wymienionych definicji oraz doświadczeń praktycznych [21] wynika, że w procesach dynamicznych, zachodzących w tych układach decyduje współdziałanie struktury części mechanicznej i elektromagnetycznej. W badaniach dynamiki układów elektromechanicznych jest dlatego konieczne tzw. systemowe ujęcie zjawisk czyli uzależnienie trajektorii dynamicznych od struktury całego systemu. Jest to możliwe po zastosowaniu do opisu zjawisk dynamicznych zasad energetycznych, które umożliwiają sformułowanie odpowiednich dynamicznych modeli matematycznych układów metodą postępowania matematycznie sformalizowanego (rozdz. 4). Model statyczny jest szczególnym przypadkiem w tak otrzymanym modelu dynamicznym.

W wielu praktycznych zastosowaniach jest bardzo przydatne nieco odmienne zdefiniowanie układu elektromechanicznego. Każdy układ elektromechaniczny jest obiektem materialnym, dającym się scharakteryzować za pomocą zbioru cech konstrukcyjnych i fizycznych (struktura, rozmiary geometryczne, własności elektromagnetyczne, cieplne itp.), o wielu właściwościach eksploatacyjnych (charakterystyki jakości ruchu i przemiany energii) i wskaźników techniczno-ekonomicznych (ciężar, niezawodność, koszty). Układ traktuje się w ten sposób z reguły wtedy, gdy są znane już związki między własnościami (wskaźnikami) a parametrami (tzw. równania dynamiki) oraz związki między parametrami i cechami konstrukcyjnymi i fizycznymi (tzw. równania projektowania) i interesuje nas problem analizy lub syntezy właściwości dynamicznych układu z uwzględnieniem własności eksploatacyjnych i wskaźników techniczno-ekonomicznych.

W dalszych rozważaniach będą wykorzystywane obie definicje układów elektromechanicznych.

2.2. Charakterystyka procesów dynamicznych w układach elektromechanicznych

Każdy układ elektromechaniczny może znajdować się w jednym z dwóch stanów pracy: ustalonym lub dynamicznym. W zależności od stanu, w jakim znajduje się układ, mówi się, że zachodzą w nim procesy ustalone lub dynamiczne. Stan ustalony albo tzw. stan równowagi statycznej jest wtedy, gdy mechaniczne i elektryczne parametry stanu układu (np. napięcie, prąd, prędkość obrotowa) mają wartości ustalone, tzn. stałe w czasie. Teoretycznie taka sytuacja występuje podczas normalnej pracy silnikowej, generatorowej i hamulcowej elektromechanicznego przetwornika energii. W rzeczywistości układ elektromechaniczny w każdej chwili znajduje się w stanie dynamicznym, spowodowanym zmianami parametrów systemu elektroenergetycznego (np. wahania napięcia i częstotliwości sieci zasilającej), lub zmianami parametrów mechanicznych (np. momentu obciążenia, momentu bezwładności, prędkości obrotowej). Parametry te mogą zmieniać się podczas pracy układu przypadkowo albo zmiany mogą być wywoływane świadomie (w celu osiągnięcia określonej reakcji dynamicznej). Określone zmiany parametrów są związane z następującymi stanami pracy elektromechanicznego przetwornika energii: rozruch, hamowanie, nawrót, zmiana liczby par biegunów, zmiana źródła zasilania itp. Przypadkowe zmiany są natomiast związane ze stanami awaryjnymi, np. chwilowy zanik napięcia zasilania, zwarcia, itp. lub chwilowymi wahaniami parametrów, np. napięcia i częstotliwości zasilania, zmianami momentu obciążenia, asymetrią napięć zasilających itp.

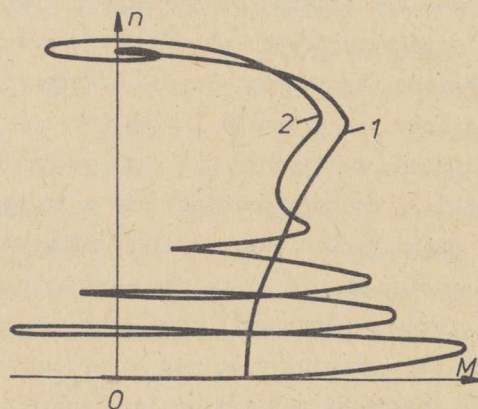
Spośród dużej liczby możliwych dynamicznych stanów pracy układów elektromechanicznych można wyodrębnić cztery najbardziej charakterystyczne przypadki, stosowane do analizy procesów dynamicznych:

1. Dynamiczne stany pracy układu przy stałej prędkości elektromechanicznego przetwornika energii.
2. Dynamiczne stany pracy układu przy zmianach prędkości obrotowej elektromechanicznego przetwornika energii.
3. Dynamiczne stany pracy w elektromechanicznym układzie napędowym, składającym się z przetworników energii, elementów inercyjnych

i sprężystych (tzw. układy elektromechaniczne wielokrotnie sprzężone).

4. Dynamiczne stany pracy w układzie elektromechanicznym ze sprzężeniami zwrotnymi.

Najczęściej występują przypadki 2, 3 i 4, przy czym przypadki 2 i 3 różnią się jedynie złożonością struktury układu mechanicznego, podłączonego do wału przetwornika energii. Niektóre zagadnienia praktycznie można uprościć do przypadku 1, wyjątkowo jest możliwe jeszcze większe uproszczenie, zakładające, że przetwornik elektromechaniczny znajduje się w stanie quasi-ustalonym. Stan ten w przybliżeniu istnieje wówczas, gdy zmiany parametrów elektrycznych i mechanicznych są tak niewielkie i w konsekwencji zmiany prędkości przetwornika odbywają się tak wolno, że przy jej poszczególnych wartościach pobiera on prawie ustalony prąd. W tym zakresie pracy przetwornik, a więc również i układ, można opisać za pomocą mechanicznych charakterystyk statycznych. Takie uproszczenie zjawisk w przetworniku wyklucza z rozważań elektromagnetyczne procesy przejściowe. Nieuwzględnianie tych procesów pociąga za sobą jako skutek niewłaściwe oszacowanie wartości momentów działających w układzie napędowym.



Rys.2.2. Charakterystyki mechaniczne: 1 - statyczna, 2 - i dynamiczna silnika SBJd-64b podczas rozruchu bezpośredniego

Taka metoda analizy stanów dynamicznych jest stosowana powszechnie w klasycznej teorii napędu elektrycznego na podstawie założenia bardzo dużej stałej czasowej mechanicznej, a nieskończenie małej sta-

łej czasowej elektromagnetycznej. Ze względu na nieliniowe procesy, występujące w stanach dynamicznych elektromechanicznych przetworników energii, pojęcie stałej czasowej jest jednak nieadekwatne i metodą tą można opisywać z dużym przybliżeniem niewielką liczbę przypadków praktycznych.

Na rysunku 2.2 przedstawiono przykład charakterystyki mechanicznej silnika asynchronicznego, otrzymaną bez uwzględnienia i z uwzględnieniem elektromagnetycznych procesów przejściowych.

W najbardziej ogólnym przypadku nie jest możliwa analiza dynamiki układów elektromechanicznych w taki sposób, aby zjawiska elektromagnetyczne i mechaniczne mogły być rozważane niezależnie od siebie. Jednoczesny opis tych zjawisk jest konieczny w przypadkach kiedy czasy trwania procesów mechanicznych i elektromagnetycznych są ze sobą porównywalne. Duże zróżnicowanie czasu trwania procesów elektromagnetycznych daje natomiast przesłankę do odrębnego rozpatrywania obu procesów. Podejście takie bardzo często stosuje się podczas badania układów napędowych o dużym momencie bezwładności (tzw. układy o ciężkim rozruchu), w których występuje mała nadwyżka momentu dynamicznego. W układach tych przebieg zjawisk elektromagnetycznych jest wielokrotnie szybszy od przebiegu zjawisk mechanicznych. Dzięki temu jest możliwe rozpatrywanie poszczególnych stanów elektromagnetycznych przy ustalonych prędkościach obrotowych. Bardzo często mówi się, że są to tzw. stany nieustalone przetwornika lub układu.

Spośród zakłóceń, które mogą być analizowane w ten sposób, można wymienić wszelkiego rodzaju przełączenia z jednego układu napięciowego na drugi, skoki napięciowe, wywołane zmianami układu zasilającego i jego parametrów, np. w silniku asynchronicznym przełączenie Δ/λ , wyłączanie oporów rozruchowych itp. Rozpatrując wymienione stany dynamiczne należy się ograniczyć do małych odcinków czasu, aby warunek $\omega = \text{const}$ był spełniony możliwie najdokładniej.

W razie założenia stałej prędkości obrotowej układy równań różniczkowych, opisujących stany dynamiczne maszyn i układów, sprowadzają się do układu liniowych równań różniczkowych, których rozwiązanie można uzyskać stosując transformacje całkowite tych równań, np. Laplacea-Carsona (rozdz. 4).

Pełną informację o zachowaniu się układu elektromechanicznego w stanach dynamicznych można uzyskać tylko po uwzględnieniu, że w rzeczywistości prędkość obrotowa jest zmienna w czasie. Stąd też podczas analizy stanów dynamicznych wynika konieczność jednoczesnego uwzględnienia procesów elektromagnetycznych i elektromechanicznych.

W razie założenia zmiennej prędkości obrotowej stany dynamiczne układu są opisywane nieliniowymi równaniami różniczkowymi. Ścisłe rozwiązanie tych równań nie jest możliwe analitycznie, lecz jedynie metodami przybliżonymi (rozdz. 6).

Najbardziej są zróżnicowane procesy dynamiczne, występujące w układach ze sprzężeniami zwrotnymi.

W obu przypadkach struktura mechaniczna układu jest czynnikiem równorzędnie istotnym i warunkującym przebieg trajektorii dynamicznych. Nieliniowość układów równań różniczkowych, tworzących dynamiczny model układu, przesądza negatywnie możliwość niezależnego studiowania procesów mechanicznych, elektromagnetycznych i superponowania ich skutków w celu uzyskania obrazu zachowania się całego systemu.

Uwarunkowanie dynamiki układów strukturą całego systemu powoduje, że do analizy stanów dynamicznych staje się niezbędne wykorzystanie współczesnych metod i sprzętu obliczeniowego (rozdz. 3 i 6).

Należy również zwrócić uwagę na fakt, że układy elektromechaniczne ze sprzężeniami zwrotnymi są klasycznymi przykładami liniowych i nieliniowych układów automatycznej regulacji, dlatego do analizy i syntezy ich własności dynamicznych stosuje się zwykle klasyczne metody, znane z automatyki i teorii sterowania. Badania dynamiki tej klasy układów elektromechanicznych są więc związane m.in. z następującymi zagadnieniami: stabilność układu, korekcja własności dynamicznych, jakość sterowania, dokładność statyczna regulacji itp.

3. METODYKA BADANIA DYNAMIKI UKŁADÓW ELEKTROMECHANICZNYCH

3.1. Etapy badania dynamiki

Badania układów elektromechanicznych w ogóle, a zwłaszcza ich dynamiki, mogą być wykonywane za pomocą różnych metod badawczych i aparatury pomiarowej, stosowanej do tych metod. Celem, jakiemu służą te metody, jest jakościowa i ilościowa analiza i synteza właściwości tych układów.

Wyróżnia się trzy ogólne metody badania dynamiki układów elektromechanicznych:

- metoda badania eksperymentalnego;
- metoda badania modelowego;
- metoda badania eksperymentalno-modelowego.

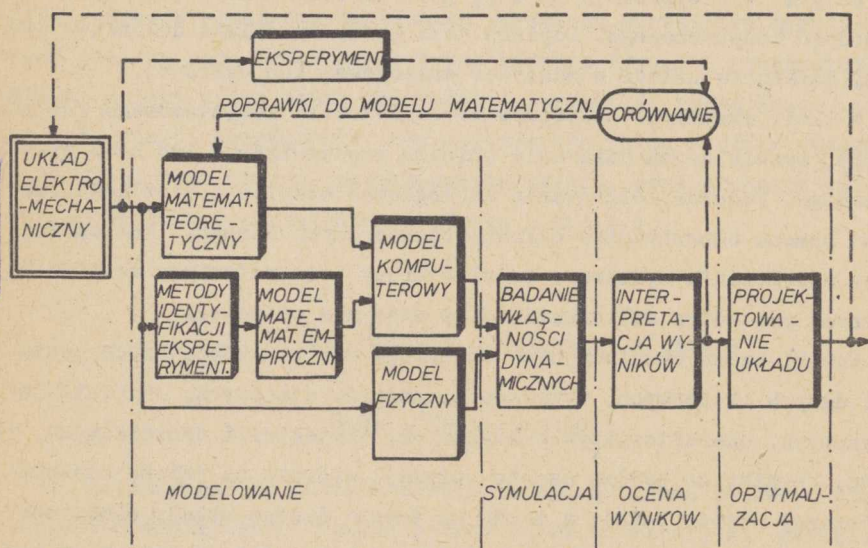
Metoda badań eksperymentalnych jest stosowana wtedy, gdy obiekt elektromechaniczny już istnieje. Cele tych badań mogą być następujące: a) identyfikacja obiektu elektromechanicznego, czyli wyznaczenie modelu matematycznego metodami eksperymentalnymi; b) wyznaczenie parametrów modelu matematycznego, sformułowanego na podstawie teorii obiektu; c) weryfikacja wyników analizy na modelu matematycznym, sformułowanym teoretycznie.

Metoda badania modelowego może być stosowana zarówno w odniesieniu do obiektów już istniejących, jak i nowo projektowanych. Metoda ta, jak nazwa wskazuje, polega na badaniu modeli układu rzeczywistego, przy czym mogą to być albo modele matematyczne, otrzymane na podstawie teorii lub identyfikacji albo modele fizyczne.

Metoda badania eksperymentalno-modelowa polega na tym, że łączy się realny element układu elektromechanicznego z modelem matematycznym lub fizycznym pozostałej części układu. Metoda ta może być stosowana do badania dynamiki układów już istniejących lub nowo projektowanych.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się jedynie do szczegółowego omówienia metody badań modelowych dynamiki układów elektromechanicznych, przy czym będą uwzględnione tylko badania na podstawie modeli matematycznych. Ograniczenie się do modeli matematycznych podyktowane jest następującymi przyczynami:

- umożliwiają one badanie układu podczas wstępnego projektowania;
- umożliwiają one szybkie sprawdzenie i określenie wpływu poszczególnych parametrów na dynamikę całego układu;
- umożliwiają szybkie zrealizowanie badań przy stosunkowo niskich nakładach finansowych i zaangażowaniu małego zespołu badawczego.



Rys.3.1. Schemat struktury badań modelowych dynamiki układu fizycznego

Na rysunku 3.1 przedstawiono ogólny schemat struktury badań modelowych dynamiki układu fizycznego. Jest więc on słuszny również w odniesieniu do układów elektromechanicznych. W toku badania dynamiki można ogólnie wydzielić następujące fazy:

- modelowanie;
- symulacja;
- ocena wyników badań symulacyjnych;
- optymalizacja.

Celem fazy modelowania jest opracowanie modelu, na którym będzie można wykonać symulację działania układu istniejącego w rzeczywistości lub planowanego do realizacji. Istnieją trzy podstawowe możliwości osiągnięcia tego celu:

1. Opracowanie modelu matematycznego na podstawie teorii obiektu elektromechanicznego.
2. Dokonanie identyfikacji eksperymentalnej.
3. Opracowanie modelu fizycznego.

O ile w przypadku 3. możliwe jest bezpośrednie przejście do symulowania pracy badanego układu (rzeczywistego lub nowo projektowanego), o tyle w przypadkach 1. i 2. jest jeszcze konieczne opracowanie tzw. modelu komputerowego. Dopiero taki model umożliwia dokonanie symulacji działania układu w maszynie analogowej lub cyfrowej.

W fazie symulacji następuje badanie modelu komputerowego lub fizycznego, symulujących działanie obiektu rzeczywistego lub nowo projektowanego. Podczas modelowania analogowego symulacja jest dokonywana za pomocą odpowiednich członów operacyjnych maszyny analogowej. W razie modelowania cyfrowego model cyfrowy jest natomiast realizacją określonej procedury obliczeniowej w maszynie cyfrowej.

Wyniki badań symulacyjnych otrzymuje się w następujących postaciach: danych liczbowych, wykresów przebiegów czasowych, charakterystyk fazowych, charakterystyk statycznych, trajektorii dynamicznych, tabel itp. Wyniki te bardzo często wpływają wtórnie na dalsze stosowanie wybranej metody badań, a także na teorię danego układu elektromechanicznego, dlatego w badaniach modelowych istotne znaczenie ma ocena otrzymanych wyników. Oceny dokonuje się poprzez interpretację otrzymanych wyników i ewentualne porównanie z wynikami otrzymanymi z badań eksperymentalnych rzeczywistego obiektu. Informacje wynikające z porównania będą służyły do uściślenia przyjętego opisu matematycznego obiektu.

Wyniki symulacji układu umożliwiają podjęcie odpowiednich decyzji projektowych, tzn. przyjęcie fizycznych parametrów układu i określenie wymagań technicznych, jakie ma spełniać projektowany obiekt. W większości przypadków chcemy, aby wyznaczone parametry miały takie wartości, przy których zostaną osiągnięte najkorzystniejsze przebiegi

sygnałów wyjściowych. Dlatego też jest niezbędna ostatnia faza badania dynamiki, tzn. optymalizacja układu.

Po zakończeniu ostatniego etapu badań zostaje ustalony wstępny projekt układu i często należy powtórzyć cały proces badawczy, ale już bez niektórych uproszczeń przyjętych do analizy wstępnej. Pozwoli to uzyskać dokładniejszą ocenę przewidywanego działania układu projektowanego albo dokładniejsze odzwierciedlenie działania układu już istniejącego.

Omówione fazy badania dynamiki zostaną wyjaśnione w następnych rozdziałach.

Należy również pamiętać, że w schemacie badania modelowego dynamiki układów elektromechanicznych występują sprzężenia zwrotne, tzn. błędy analizy mogą być wykryte przez badanie dynamiki rzeczywistego układu, dzięki czemu można wprowadzić poprawki do początkowego modelu matematycznego. Sprawdzenie czy rzeczywisty układ spełnia wymagania techniczne, ustalone do projektowanego układu, jest procesem mającym również charakter sprzężenia zwrotnego (rys.3.1).

3.2. Modele układów elektromechanicznych

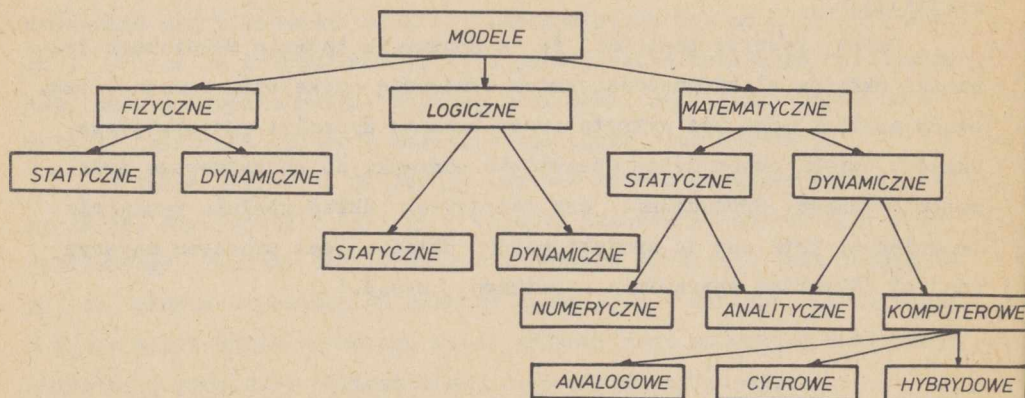
3.2.1. Podział modeli

Przystępując do badania dowolnego układu można posłużyć się eksperymentem empirycznym. Często jednak celem badania jest określenie własności układu, zanim zostanie on zbudowany. Jest oczywiste, że eksperymentowanie na układzie nie jest możliwe, jeżeli znajduje się on w sferze projektu. W takich sytuacjach stosuje się wprowadzić testowanie prototypów, ale jest to rozwiązanie kosztowne i czasochłonne. Nawet gdy układ już istnieje, wykonywanie na nim doświadczeń może okazać się niemożliwe lub niepraktyczne. Tak więc bardzo często wykonuje się badania na modelach. W większości przypadków rozpatrywanie wszystkich szczegółów układu nie jest konieczne, a model nie tylko zastępuje układ, lecz również jest jego uproszczeniem.

Model definiujemy jako zbiór informacji o układzie, zebranych w celu jego zbadania. Ponieważ rodzaj zebranej informacji jest okreś-

lony przez cel badań, wynika stąd, że do żadnego układu nie istnieje model określony jednoznacznie. W zależności od rozwiązywanego problemu można tworzyć różne modele a następnie zmieniać je w miarę jak rozwija się wiedza o badanym obiekcie.

W badaniach modelowych stosuje się zarówno różne rodzaje modeli, jak i różne sposoby ich klasyfikacji. Klasyfikację modeli dokonuje się także na podstawie reprezentowanych przez nie układów i stąd takie podziały, jak modele ciągłe i dyskretne, czy deterministyczne i stochastyczne.



Rys.3.2. Podział modeli układów elektromechanicznych

W dalszych rozważaniach modele będziemy dzielić na fizyczne, logiczne i matematyczne (rys. 3.2). Drugim będzie podział na modele statyczne i dynamiczne. W razie zastosowania modeli matematycznych trzeci podział wynika z metod przedstawienia modelu. Metody te dzieli się na analityczne, numeryczne i komputerowe.

W przypadku modelu fizycznego działanie układu znajduje swoje odzwierciedlenie w prawach fizycznych rządzących modelem. Najczęściej modele te wykonuje się w określonej skali (tzw. modele redukcyjne). Ustalone prawa podobieństwa umożliwiają dokładne wnioskowanie o działaniu układu pełnowymiarowego na podstawie jego modelu redukcyjnego [29]. Dynamiczne modele fizyczne powstają na podstawie analogii między układami różnego rodzaju. Analogia ta zwykle polega na podobieństwie praw fizycznych rządzących zachowaniem się obu układów [29].

M o d e l l o g i c z n y ma charakter koncepcyjny i jest pewną logiczną propozycją uporządkowania istotnych cech badanego układu na podstawie określonych danych fizycznych, analogii i równań. Jest on punktem wyjściowym do badania modelu matematycznego.

M o d e l e m m a t e m a t y c z n y m nazywamy formalny zapis uproszczonego obrazu rzeczywistego układu w postaci zbioru założeń i równań matematycznych, wiążących poszczególne wielkości istotne dla celów, jakim ma służyć ten model.

Statyczny model matematyczny przedstawia zależność między wielkościami charakteryzującymi układ w stanie równowagi. Po zmianie punktu równowagi, spowodowanej przez zmianę wartości jednej lub kilku wielkości model pozwala wyznaczyć nowe wartości wszystkich wielkości, chociaż nie wskazuje sposobu w jaki zostały one osiągnięte.

Dynamiczny model matematyczny pozwala na określenie zmian cech układu w funkcji czasu.

Ogólny model matematyczny, dotyczący stanów dynamicznych, tworzy układ równań różniczkowych nieliniowych o pochodnych cząstkowych, który odwzorowuje dokładnie model logiczny. Wykonywanie badań symulacyjnych wymaga "przetłumaczenia" modelu matematycznego do postaci akceptowanej przez techniczne urządzenia obliczeniowe, tzn. utworzenie modelu analogowego, cyfrowego lub hybrydowego.

3.2.2. Model fizyczny

Modele fizyczne są przeznaczone przede wszystkim do reprodukcji zjawisk fizycznych badanych obiektów na innych, o liniowo różnych parametrach i w innych skalach. W tego rodzaju modelu działanie układu znajduje swoje odzwierciedlenie w prawach fizycznych rządzących modelem. Najczęściej modele te wykonuje się w określonej skali (tzw. modele redukcyjne). Pojęcie skali jest związane nie tylko z wymiarami geometrycznymi, lecz przede wszystkim ze stosunkami pomiędzy fizycznymi parametrami w obiekcie rzeczywistym oraz w modelu, w którym zachodzą zjawiska fizyczne tej samej natury, lecz ilościowo różne.

Modele fizyczne mogą być całkowite, odtwarzające wymiary układu oryginalnego w trzech współrzędnych x , y , z i uwzględniające czynnik czasu

$$M = f(x, y, z, t).$$

Niekiedy jest konieczne dysponowanie częściowymi modelami fizycznymi, w których jest wystarczające odtworzenie dynamiki zmian pewnych wielkości w funkcji czasu

$$M_1 = \varphi(t),$$

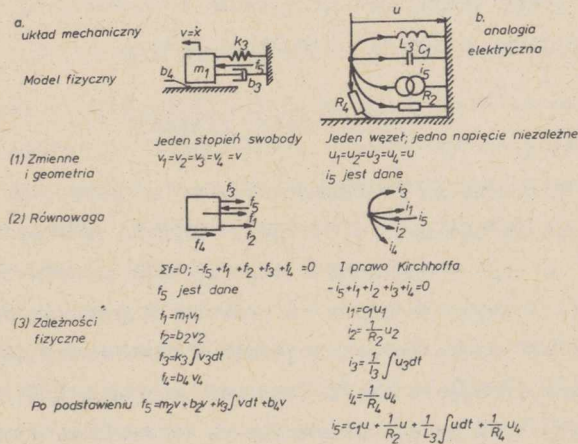
w których mają być ponadto odtworzone pewne zjawiska w przestrzeni lub na płaszczyźnie

$$M_2 = \Phi(x, y).$$

Podstawowe cele modelowania fizycznego są następujące: poszukiwanie lub uściślanie praw rządzących badanymi procesami, empiryczne sprawdzanie dociekań teoretycznych, sprawdzanie nowych rozwiązań urządzeń lub zespołów elementów w warunkach zbliżonych do rzeczywistych.

Dynamiczne modele fizyczne powstają na podstawie analogii między systemami różnego rodzaju, przy czym analogia ta polega na podobieństwie praw rządzących zachowaniem się obu systemów.

W celu zilustrowania dynamicznego modelu fizycznego rozważymy przykład (rys.3.3).



Rys.3.3. Model fizyczny prostego układu mechanicznego

Układ przedstawiony na rysunku 3.3 jest modelem prostego układu mechanicznego. W modelu tym występują wszystkie trzy rodzaje elementów mechanicznych: masa, sprężyna, tłumienie. W celu zbudowania elektrycz-

nej analogii tego układu przedstawimy każdy z mechanicznych elementów za pomocą jego elektrycznego odpowiednika (umieszczonego w drugiej kolumnie rys.3.3); masę zastąpimy kondensatorem, sprężynę cewką indukcyjną, a tłumik natomiast rezystorem. Siłę zewnętrzną, przyłożoną do masy, przedstawimy jako źródło prądu w sieci elektrycznej.

Kluczem do takiego połączenia elementów elektrycznych, aby we właściwy sposób przedstawiały układ mechaniczny, jest stwierdzenie, że napięcie w węźle musi być analogiczne do prędkości v . Ponieważ wszystkie cztery elementy fizyczne są związane prędkością v , przeto wszystkie cztery odpowiednie elementy elektryczne muszą być przyłączone do węzła jak pokazano na rysunku. Ponieważ siła zewnętrzna f_5 jest przyłożona do masy m_1 , więc źródło prądu i_5 musi być analogicznie połączone z nieuziemioną końcówką kondensatora C_1 . W celu stwierdzenia, że sieć jest analogiczna do układu mechanicznego, należy udowodnić, że oba układy są opisane tymi samymi równaniami. Jak wynika z rys.3.3 oba układy są równoważne.

Przedstawiony układ mechaniczny jest tak prosty, że w celu zbadania jego dynamiki można wprost rozwiązać opisujące go równania. Łatwo jest jednak wprowadzić takie warunki, że rozwiązanie równania staje się trudne. Jeśli np. ruch układu mechanicznego będzie ograniczony, to do opisu układu potrzebne będzie trudne do rozwiązania nieliniowe równanie różniczkowe. Zjawisko to natomiast łatwo jest przedstawić w postaci modelu elektrycznego, umieszczając odpowiednie ograniczniki napięcia na kondensatorze. Nawet wtedy, gdy można rozwiązać równanie opisujące układ, to ze względu na jego wielkość pomiary dokonywane na modelu fizycznym mogą okazać się bardziej dogodne niż wykonywanie odpowiednich obliczeń. Przykłady zastosowań modeli fizycznych można znaleźć w [29]. Tej klasy modele nie będą dalej rozpatrywane.

3.2.3. Model logiczny i matematyczny

Pierwszym krokiem w badaniu dynamiki układu fizycznego jest zaw sze dokładne określenie układu, który ma być zbadany i stworzenie tzw. modelu logicznego. Model ten ma charakter koncepcyjny i reprezentuje

pewną logiczną propozycję uporządkowania istotnych cech badanego układu, ale jest prostszy ("idealniejszy") i dlatego łatwiej poddający się studiom analitycznym.

Często tworzenie modelu logicznego skomplikowanego układu wiąże się z budową schematu blokowego, na którym uwidaczniają się związki między elementami składowymi rozważanego układu.

Tworzenie modelu logicznego wiąże się z przyjmowaniem wielu założeń upraszczających. Stosuje się następujące rodzaje przybliżeń:

1. Pomijanie małych wpływów - zmniejszeniu ulega liczba zmiennych, a więc i liczba oraz stopień skomplikowania równań ruchu (duże znaczenie przy wyborze zmiennych, których wpływ można pominąć ma wycucie techniczne).

2. Niezależność otoczenia od badanego układu - zakłada się, że środowisko otaczające badany układ nie podlega wpływom pochodzącym z układu.

3. Założenie liniowości.

Równanie różniczkowe zwyczajne liniowe ma postać:

$$A_n \frac{d^n x}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + A_1 \frac{dx}{dt} + A_0 x + B_m \frac{d^m y}{dt^m} + \\ + B_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + B \frac{dy}{dt} + B_0 y + \dots = f(t),$$

przy czym zmienne x , y są tylko funkcjami zmiennej niezależnej - czasu t , a współczynniki (A , B ...) mogą zmieniać się w funkcji czasu, ale nie w funkcji x , y itd. Wyraz $f(t)$ może być dowolną funkcją czasu, ale nie może zależeć od x i y . Nie mogą występować wyrazy typu xy , x^2 , $\dot{x}\dot{y}$, itp. Jeżeli współczynniki (A , B itd.) są stałe - równanie różniczkowe stacjonarne (albo o stałych współczynnikach). Ponieważ niewiele układów fizycznych ma charakterystyki rzeczywiście liniowe, należy pamiętać, że uproszczone rozwiązanie układu zlinearyzowanego może obowiązywać tylko w ograniczonym zakresie zmian jego stanów.

4. Zastąpienie parametrów rozłożonych przez parametry skupione. Układy o parametrach rozłożonych w sposób ciągły dają się opisać równaniami różniczkowymi cząstkowymi, które na ogół są bardzo trudne do

rozwiązania; do opisanie układu o parametrach skupionych wystarczą natomiast równania różniczkowe zwyczajne, które dają się rozwiązać względnie łatwo. Dotyczy to zwłaszcza parametrów konstrukcyjnych, zmieniających się - poprzez parametry fizyczne - w parametry matematyczne, np. traktowanie indukcyjności uzwojenia rozłożonego twornika silnika jako indukcyjności uzwojenia skupionego.

5. Zastąpienie parametrów faktycznie zmiennych w czasie i przeszerzeni przez parametry o wartościach stałych. Prowadzi to często do niedokładnych, nieadekwatnych przybliżeń i odwzorowań albo do konieczności zastosowań modelu dla kilku różnych stanów do różnych czasów, np. dla asynchronicznych silników o wirniku głębokożłobkowym należy rozważać stany w chwili załączenia silnika i przez kilka kolejnych sekund aż do stanu ustalonego ze względu na zmieniające się parametry klatki podczas trwania rozruchu.

6. Eliminacja niepewnych parametrów, co prowadzi do uproszczonego modelu deterministycznego zamiast trudniejszego stochastycznego.

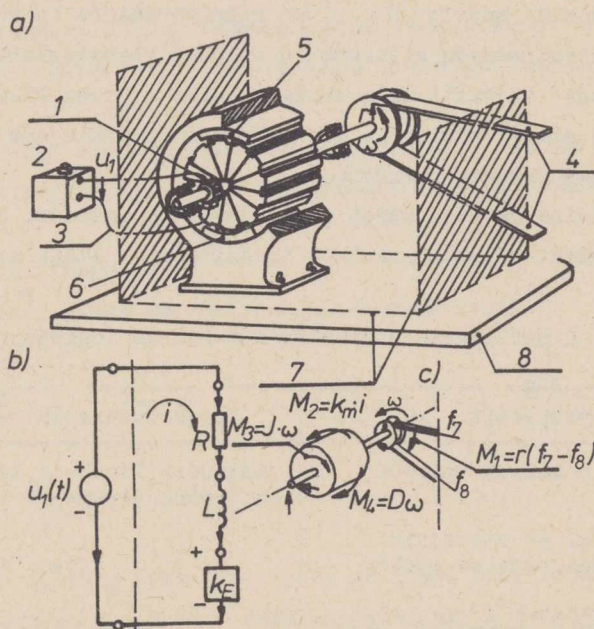
T a b e l a 3.1

Przybliżenia stosowane w modelach logicznych

Przybliżenie	Uproszczenie matematyczne
1. Pomijanie małych wpływów	zmniejsza liczbę i złożoność równań różniczkowych
2. Założenie, że otoczenie jest niezależne od ruchów układu	j.w.
3. Zastąpienie parametrów rozłożonych przez parametry skupione (tzw. dyskretyzacja)	proceedzi do równań różniczkowych zwyczajnych, a nie cząstkowych
4. Przyjęcie zależności liniowych	proceedzi do równań liniowych, umożliwia superpozycję rozwiązań
5. Założenie, że parametry mają stałe wartości	proceedzi do równań różniczkowych o stałych współczynnikach
6. Omijanie niezdeterminowanych zakłóceń, niepewnych parametrów, pomijanie szumów	usuwa konieczność traktowania statystycznego

Ścisły opis matematyczny dynamiki układu fizycznego w ogólnym przypadku daje układ równań różniczkowych nieliniowych, o pochodnych cząstkowych. Podane przybliżenia sprawiają, że model logiczny staje się łatwiejszy do analizy matematycznej. Zestawienie stosowanych przybliżeń wraz z opisem uproszczeń, jakie dają, znajduje się w tabeli 3.1.

Jako przykład będzie przedstawiony proces tworzenia modelu logicznego prostego układu elektromechanicznego: silnik elektryczny z przekładnią pasową (rys. 3.4a). Jako układ, który mamy przebadac,



Rys.3.4. Silnik elektryczny: a) układ rzeczywisty; b) model logiczny części elektrycznej układu; c) model logiczny części mechanicznej układu; 1 - komutator, 2 - wzmacniacze, 3 - wejście układu, 4 - wyjście układu, 5 - biegun "S", 6 - biegun "N", 7 - granice rozważanego układu, 8 - podstawa płyty

przyjmujemy wszystko to, co mieści się wewnątrz płaszczyzn zaznaczonych na rys. 3.4a liniami przerywanymi. Na jednej granicy tego układu znajduje się wejście, do którego doprowadzamy napięcie elektryczne, na drugiej zaś wyjście, w którym otrzymujemy siły mechaniczne, uruchamiające przekładnię pasową. Na trzeciej granicy, w punktach zamocowania

obudowy silnika do płyty sztywno związanej z podłożem, występują reakcje, siły statyczne, które w tym układzie pracy nie wykonują.

W stosunku do części mechanicznej układu można przyjąć model logiczny, przedstawiony na rys. 3.4c. W modelu tym przyjęto, że opór powietrza i tarcie w łożyskach dają w wyniku moment oporowy wprost proporcjonalny (i o zwrocie przeciwnym) do prędkości kątowej wirnika.

Odpowiedni model logiczny części elektrycznej otrzymamy przedstawiając cewki wirnika, przez które płynie prąd $i(t)$, jako rezystancję i indukcyjność plus dodatkowy spadek napięcia proporcjonalny do prędkości kątowej cewki w stacjonarnym polu magnetycznym (rys. 3.4b). Moment obrotowy wirnika przyjmujemy jako wprost proporcjonalny do prądu płynącego przez uzwojenie twornika, co umożliwi dobre przybliżenie.

Przytoczone modele logiczne części elektrycznej i mechanicznej dają podstawę do opracowania modelu matematycznego w następnym kroku badania układu.

Podsumowując należy stwierdzić, że spośród wszystkich założeń upraszczających zasadnicze znaczenie w badaniu układów elektromechanicznych ma przybliżenie związane zastąpieniem parametrów rozłożonych parametrami skupionymi, czyli tzw. dyskretyzacją modelu matematycznego. Założenie to jest podyktowane względami formalnymi, bowiem procesy elektromechaniczne w rzeczywistości są procesami rozłożonymi w przestrzeni i opisują je tzw. modele polowe. Analiza dynamiczna tak złożonych obiektów doprowadza do bardzo rozbudowanych układów równań różniczkowych cząstkowych, które łącznie z występującymi nieliniowościami magnetycznymi i elektrycznymi oraz bardzo złożonymi warunkami brzegowymi, stwarzają poważne problemy obliczeniowe i trudności związane z uzyskaniem wyników technicznie użytecznych.

Z tych powodów decydujemy się przeważnie na konstrukcję modeli dyskretnych (obwodowych), opisywanych za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych (w ogólnym przypadku o zmiennych współczynnikach). W dalszych rozważaniach będą brane pod uwagę tylko modele matematyczne dyskretne.

Dysponując myślowym modelem logicznym można przystąpić do budowy modelu matematycznego. Tworzenie modelu matematycznego jest

kolejnym krokiem w fazie modelowania badanego układu elektromechanicznego.

Model matematyczny jest formalnym zapisem wyobrażonego modelu logicznego; jest więc opisem matematycznym pewnego zespołu zjawisk fizycznych, istotnych dla funkcji technicznych układu, które są przedmiotem naszego zainteresowania.

Obecnie jest znanych wiele metod formułowania modeli matematycznych. Są to metody analityczne albo eksperymentalne [27]. W przypadku układów elektromechanicznych z reguły jest stosowana metoda analitycznego formułowania modeli matematycznych na podstawie teorii elektromechanicznego przetwarzania energii. Zasady budowy tych modeli zostaną szczegółowo przedstawione w rozdziale 4. Metody eksperymentalne najczęściej są stosowane do wyznaczania klasy modeli matematycznych elementów układów elektromechanicznych lub modeli z dokładnością do parametrów przy znanej klasie modelu matematycznego.

W dalszym ciągu ograniczymy nasze rozważania do modeli matematycznych - dynamicznych. Sposób tworzenia dynamicznych modeli matematycznych wyjaśnimy kontynuując przykład silnika prądu stałego (rys. 3.4).

Dla silnika elektrycznego wybiera się następujące zmienne matematyczne:

- do części elektrycznej: prąd i napięcie (i stosujemy II prawo Kirchhoffa),

- do części mechanicznej: prędkość kątowa wirnika.

Więzami elektrycznymi układu jest warunek, że u_1 jest daną funkcją czasu (i stosujemy równanie momentów wynikające z zasady d'Alemberta). Stąd

$$\Sigma u = u_2 + u_3 + u_4 - u_1 = 0,$$

gdzie $u_1 = u_1(t)$ - napięcie zasilające twornik;

$u_2 = Ri(t)$ - spadek napięcia na rezystancji twornika;

$u_3 = L \frac{di(t)}{dt}$ - napięcie samoindukcji;

$u_4 = k_E \omega(t)$ - siła elektromotoryczna rotacji;

oraz

$$M = M_2 - M_3 - M_4 - M_1 = 0$$

gdzie $M_1 = M(t)$ - moment oporowy;

$M_2 = k_M i(t)$ - moment elektromagnetyczny;

$M_3 = J \dot{\omega}(t)$ - moment sił bezwładności;

$M_4 = D \omega(t)$ - moment tarcia;

$k_M = k_E$ jeśli ω jest wyrażone w rad/s.

W ten sposób otrzymuje się równania opisujące dynamikę omawianego przetwornika

$$\left. \begin{aligned} Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + k_E \omega(t) &= u_1(t), \\ J \frac{d\omega(t)}{dt} &= k_M i(t) - D \omega(t) - M_1(t). \end{aligned} \right\}$$

3.2.4. Model komputerowy

W badaniach modelowych efektem końcowym fazy modelowania jest tzw. model komputerowy. Model komputerowy jest niczym innym jak modelem matematycznym, przedstawionym w formie umożliwiającej zastosowanie określonej techniki obliczeniowej w celu badań symulacyjnych tego układu. Wyróżnia się trzy podstawowe techniki obliczeniowe: analogową - wykorzystującą matematyczne maszyny analogowe, cyfrową - wykorzystującą matematyczne maszyny cyfrowe, hybrydową - wykorzystującą maszyny hybrydowe. Odpowiednio można wyróżnić modele komputerowe: analogowe, cyfrowe i hybrydowe.

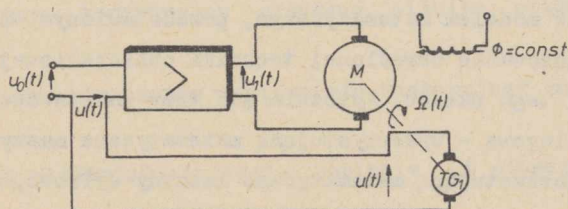
Modele analogowe są tworzone w maszynie analogowej za pomocą odpowiednich członów operacyjnych, będących układami fizycznymi (elektronicznymi), odwzorowującymi model matematyczny układu. Podstawowe człony operacyjne, powstające z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego prądu stałego są następujące: sumatory, integratory, inwerty, człony mnożące, człony realizujące pewne rodzaje nieliniowości itp. Maszyna analogowa odtwarza zależności matematyczne między parametrami czy zmiennymi modelowanego układu za pomocą analogicznych zależności między elementami modelującymi. Wartości zmiennych maszynowych są przyporządkowane wielkościom zmiennych rzeczywistych modelowanego układu za pomocą współczynników skali.

W zależności od rodzaju stawianego problemu są stosowane dwie zasadnicze metody opracowywania modelu analogowego, czyli tzw. m o d e l o w a n i a a n a l o g o w e g o .

M o d e l o w a n i e r ó w n a ń często zwane analitycznym, polega na odwzorowaniu w maszynie analogowej równań opisujących badany obiekt.

M o d e l o w a n i e s t r u k t u r a l n e jest odwzorowaniem w maszynie analogowej schematu strukturalnego obiektu badań i polega na zastąpieniu poszczególnych bloków modelowanego układu elementami operacyjnymi, że ich zależności pomiędzy sygnałem wejściowym a sygnałem wyjściowym odpowiadają fragmentowi układu, który mają odzwierciedlać. Bardziej szczegółowe omówienie zasad modelowania analogowego w odniesieniu do układów elektromechanicznych zostanie przedstawione w rozdziale 6.

W celu dokładniejszego wyjaśnienia różnic między modelem analogowym analitycznym i strukturalnym omówimy modelowanie układu dynamicznego przedstawionego na rys. 3.5.



Rys.3.5. Schemat układu regulacji prędkości obrotowej silnika prądu stałego

Jest to prosty układ regulacji prędkości obrotowej silnika prądu stałego. Prędkość kątowna wału silnika $\Omega(t)$ jest przetwarzana na napięcie $u(t)$ za pomocą prądnicy tachometrycznej. Napięcie to porównuje się z napięciem zadany $u_0(t)$ (sygnałem wejściowym układu). Różnica tych napięć (sygnał uchybu), po wzmacnieniu we wzmacniaczu prądu stałego, jest doprowadzana do zacisków twornika jako napięcie sterujące silnik. Zakładamy, że w rozpatrywanym zakresie pracy układ jest liniowym i poszczególne jego elementy są scharakteryzowane przez następujące zależności matematyczne:

wzmacniacz prądu stałego: $T_1 \dot{u}_1(t) + u_1(t) = K_1 [u_0(t) - u(t)]$,

silnik prądu stałego: $T_2 \dot{\Omega}(t) + \Omega(t) = K_2 u_1(t)$,

prądnica tachometryczna: $u(t) = K_3 \Omega(t)$,

Na ich podstawie otrzymujemy równanie całego układu, wiążące sygnał wejściowy $u_0(t)$ z sygnałem wyjściowym $u(t)$

$$T_1 T_2 \ddot{u}(t) + (T_1 + T_2) \dot{u}(t) + (1 + K) u(t) = K u_0(t),$$

przy czym $K = K_1 K_2 K_3$.

Model analogowy uzyskujemy najprościej przez przyrównanie wszystkich wyrazów równania do najwyższej pochodnej

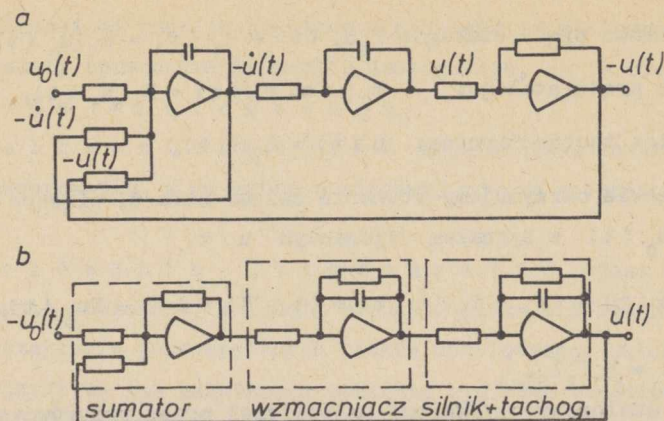
$$\ddot{u}(t) = - \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \dot{u}(t) - \frac{1 + K}{T_1 T_2} u(t) + \frac{K}{T_1 T_2} u_0(t).$$

Zakładając, że najwyższa pochodna jest znana, otrzymujemy przez jej całkowanie pochodną o rząd niższą. W rozpatrywanym przypadku należy całkować dwukrotnie: po pierwszym całkowaniu $\dot{u}(t)$ otrzymujemy $u(t)$, a po drugim $u(t)$. W celu uzyskania na wejściu członu całkującego $\ddot{u}(t)$ musimy doprowadzić tam i zsumować następujące składniki:

$$- \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \dot{u}(t); \quad - \frac{1 + K}{T_1 T_2} u(t); \quad \frac{K}{T_1 T_2} u_0(t).$$

Należy przy tym pamiętać, że wzmacniacz operacyjny zmienia znak sygnału; aby więc uzyskać odpowiednie znaki poszczególnych składników należy zastosować odwrócenie znaku funkcji otrzymanej na wyjściu drugiego integratora (rys.3.6a).

W przypadku budowy modelu analogowego strukturalnego wzmacniacz i silnik modelujemy za pomocą elementów inercyjnych pierwszego rzędu, utworzonych z integratorów z rezystorami w pętli sprzężenia zwrotnego. Połączony szeregowo układ dwóch elementów inercyjnych jest zamknięty pętlą sprzężenia zwrotnego. Należy pamiętać o zastosowaniu inwertora odwracającego znak sygnału $[u_0(t) - u(t)]$, doprowadzonego do wejścia pierwszego członu inercyjnego. Schemat modelu analogowego strukturalnego przedstawiono na rys.3.6b.



Rys.3.6. Model analogowy układu regulacji prędkości obrotowej silnika prądu stałego: a) model analogowy - analityczny; b) model analogowy - strukturalny

Modelowanie analogowe, ze względu na prostotę działania, operowanie sygnałami ciągłymi oraz łatwość budowy modelu i zmian jego parametrów, jest bardzo przydatne jako narzędzie zarówno do analizy, jak i syntezy układów elektromechanicznych.

Modelowanie cyfrowe są tworzone w maszynie cyfrowej za pomocą określonej procedury obliczeniowej (programu), odwzorowującej badany układ i symulującej jego działanie oraz umożliwiającej badanie odpowiedzi modelu obiektu na określone wymuszenia, wprowadzone jako informacje wejściowe. Zależności między wielkościami wejściowymi czyli informacjami o wymuszeniach, a odpowiedzią obiektu, czyli informacjami wyjściowymi, są ustalane za pomocą modeli matematycznych w postaci układu równań.

Modelowanie cyfrowe, czyli opracowanie programu odwzorowującego i symulującego badany układ, można wykonywać za pomocą języków programowania maszyn cyfrowych. Możliwe jest zastosowanie języków wyższego rzędu o ogólnym przeznaczeniu, np. FORTRAN, ALGOL albo języków symulacyjnych, np. CEMMA, SIAM [19]. Model cyfrowy, powstający za pomocą ogólnych języków wyższego rzędu, rozwiązuje w maszynie cyfrowej metodami numerycznymi określony układ równań. Języki symulacyjne tworzą programy, które modelują elementy i organi-

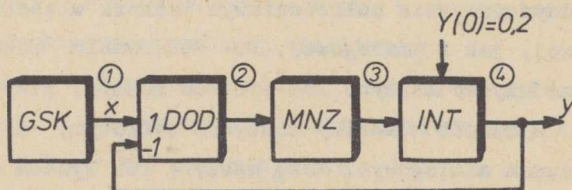
zaczę komputerów analogowych. Są to języki zorientowane strukturalnie. Oznacza to, że programy do komputerów cyfrowych są przygotowane na podstawie odpowiednich schematów strukturalnych, reprezentujących symulowany model, podobnie jak w modelowaniu analogowym. Należy pamiętać, że na ogół rozwiązywanie danego problemu za pomocą języka symulacyjnego zajmuje więcej czasu maszynowego niż rozwiązywanie tego samego problemu przez konwencjonalny program do tego samego komputera cyfrowego. Jednak czas potrzebny na napisanie programu w języku symulacyjnym jest znacznie krótszy. Bardziej szczegółowe zasady modelowania cyfrowego zostaną przedstawione w rozdziale 6. Na prostym przykładzie będzie przedstawiony tok postępowania podczas tworzenia modelu cyfrowego w języku CEMMA.

Jest dany układ inercyjny o transmitancji

$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k_0}{Tp + 1},$$

z warunkiem początkowym $y_0 = -0,2$. Należy zbadać odpowiedź układu na skok jednostkowy $x(t) = 10 \cdot 1(t)$, przyjmując następujące dane układu: $k_0 = 1$, $T = 10$ s, krok zmiennej niezależnej $t_B = 0,1$ s, wartość końcowa zmiennej niezależnej $t_k = 50$ s. Drukowanie wyników w postaci cyfrowej trzech zmiennych: czasu, pochodnej funkcji wyjściowej i funkcji wyjściowej w odstępach czasu $\Delta t = 0,5$ s.

W celu zaprogramowania zadania stosuje się metodę modelowania równań, dzięki czemu można otrzymać schemat analogowy jak na rys. 3.7, na którym jednocześnie została zastosowana symbolika języka CEMMA (rozdział 6).



Rys.3.7. Schemat analogowy układu inercyjnego pierwszego rzędu przedstawiony w symbolice języka CEMMA

Na podstawie schematu analogowego z rys. 3.7 można następnie wprost napisać program w języku CEMMA, który będzie miał postać następującą:

[BADANIE UKŁADU INERCYJNEGO O TRANSMITANCJI	}	Komentarz
[$G(P) = KO/(TP + 1)$		
[STAŁA CZASOWA $T = 10 \text{ SEK}$		
[WZMOCNIENIE $KO = 1$		
[WYMUSZENIE $X(T) = 10 \cdot 1(T)$		
[ODPOWIEDŹ $- Y(T)$		
[WARUNEK POCZĄTKOWY $Y(0) = -0.2$		
[KROK ZMIENNEJ NIEZALEŻNEJ $DT = 0.1 \text{ SEK}$		
$\approx 4 \ 0 \ 10 \ 0 \ 4$	}	Program właściwy
1 GSK = 10;		
2 DOD 1=1 4=-1;		
3 MNZ 2 = 0.1;		
4 INT 3 = 0.2;		
ZEGAR =50 =0.5 =0.5 =0.5;		
DRUKUJ 1 3 4 ;		
TYTUL		
CZAS (T)		
WYMUSZENIE X (T)		
ODPOWIEDŹ Y (T);		

(Zastosowane w przytoczonym programie oznaczenia zostaną szczegółowo wyjaśnione w pktcie 6.2.5 oraz w tab. 6.3).

Napisany w wymieniony sposób program (model cyfrowy) należy następnie przepisać na nośnik maszynowy, np. taśmę perforowaną lub karty i wprowadzić do maszyny cyfrowej w celu uzyskania wyników.

Modelowanie hybrydowe wiąże się z wykorzystaniem w jednym procesie obliczeniowym technik właściwych zarówno maszynie cyfrowej, jak i analogowej. Do zbudowania modelu hybrydowego jest niezbędne użycie maszyny lub systemu maszyn, których pewne elementy działają w sposób właściwy maszynom cyfrowym, a inne w sposób właściwy maszynom analogowym. Taką maszyną lub system nazywamy maszyną hybrydową lub systemem hybrydowym.

Wzajemne proporcje części analogowej i cyfrowej mogą być różne, poczynając od maszyny analogowej, wyposażonej jedynie w nieliczne elementy cyfrowe, poprzez tzw. zrównoważone systemy hybrydowe (w których sprzężone są ze sobą uniwersalna maszyna cyfrowa i maszyna analo-

gowa, a każda z nich jest zdolna do autonomicznej pracy) aż do maszyny cyfrowej wyposażonej jedynie w nieliczne elementy analogowe.

W zależności od sprzętu obliczeniowego, jakim się dysponuje, można budować modele symulacyjne o różnym stopniu hybrydyzacji.

Ze względu na bardzo duży koszt sprzętu hybrydowego stosowanie modeli hybrydowych jest jeszcze ograniczone. Najczęściej są stosowane maszyny analogowe z tzw. logicznym sterowaniem, wyposażone w następujące bloki hybrydowe: bramki logiczne, przerzutniki, liczniki, komparatory itp. Modele hybrydowe powstałe na takiej maszynie mają wszystkie zalety modeli analogowych oraz dodatkowo niektóre własności charakterystyczne dla modeli cyfrowych, np. wykorzystanie operacji logicznych i decyzyjnych, prostych pętli iteracyjnych, automatyzacji obliczeń.

Modele hybrydowe są zwłaszcza przydatne do modelowania układów o zmiennej strukturze oraz zagadnień związanych z optymalizacją.

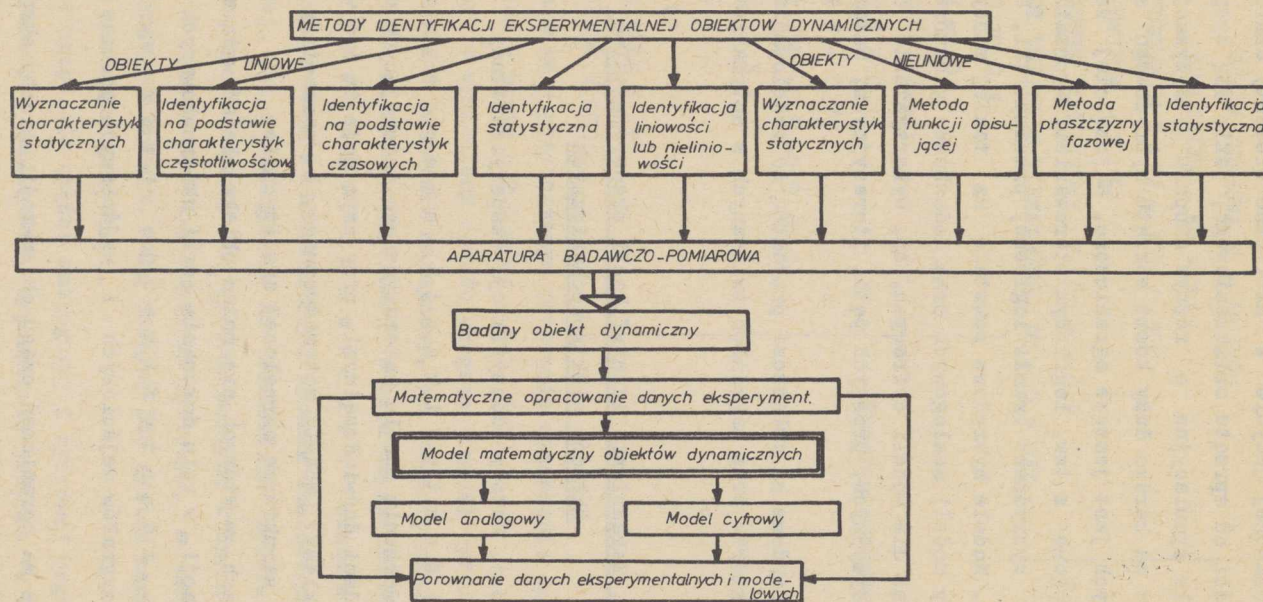
3.3. Zagadnienia identyfikacji eksperymentalnej układów elektromechanicznych

3.3.1. Metody identyfikacji eksperymentalnej

Termin i d e n t y f i k a c j a e k s p e r y m e n t a l n a oznacza tworzenie modelu matematycznego istniejących układów dynamicznych metodami doświadczalnymi, przy czym może to być wyznaczanie: a) struktury (klasy) modelu matematycznego, b) parametrów modelu matematycznego o strukturze określonej analitycznie.

W sytuacjach, w których nie można obiektu badań wyłączyć z normalnej eksploatacji, w celu dokonania serii ukierunkowanych badań, wykonuje się tzw. i d e n t y f i k a c j ę b i e r n ą. Polega ona na rejestracji sygnałów wejściowych i wyjściowych podczas normalnej pracy układu.

Jeżeli nie ma ograniczeń czasu obserwacji, liczby eksperymentów, zakresu zmienności sygnałów, kosztów wykonywania doświadczeń, kosztów wyłączenia obiektu z normalnej eksploatacji itp., stosuje się tzw.



Rys.3.8. Podział metod identyfikacji

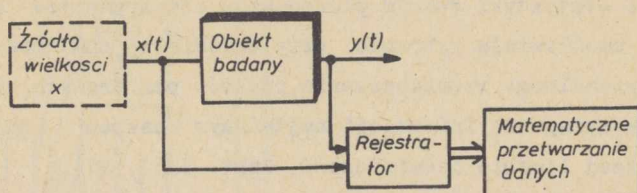
identyfikację czynną. Polega ona na stosowaniu specjalnie dobranych oddziaływań na badany obiekt. W takich przypadkach jest możliwe planowanie eksperymentów identyfikacyjnych, w celu zastąpienia intuicji eksperymentatora matematycznie uzasadnionym wyborem rozmieszczenia punktów pomiarowych.

W dziale statystyki zwanym planowaniem eksperymentów są znane metody, które umożliwiają wybranie, przy częściowej znajomości badanego obiektu, optymalnego rozmieszczenia punktów pomiarowych, zapewniające uzyskanie wymaganej informacji najtańszymi kosztami (najszybciej przy najmniejszej liczbie doświadczeń), (pkt. 3.5) [17].

Identyfikacji eksperymentalnej można dokonać wieloma metodami, w zależności od tego czy układ lub jego elementy zostaną uznane za liniowe lub nieliniowe. Na rysunku 3.8 przedstawiono podział metod identyfikacji stosowanych do badania układów liniowych i nieliniowych. W środkowej części różnych metod zaznaczono w prostokącie metody i sposoby identyfikacji umożliwiające stwierdzenie liniowości lub nieliniowości badanego układu. Wszystkie przedstawione metody pod względem rodzaju zastosowanego aparatu matematycznego i urządzeń pomiarowo-badawczych dzielą się na deterministyczne i niedeterministyczne, co zaznaczono na rysunku. Zgodnie z przyjętą metodą aparaturę pomiarową dołącza się do badanego obiektu dynamicznego w celu uzyskania odpowiednich danych doświadczalnych, np. charakterystyk statycznych określających zakres pracy obiektu, charakterystyk częstotliwościowych, czasowych itd. Dokonuje się następnie opracowania danych, co jest zaznaczone w prostokącie na rys. 3.8. Wymieniony fragment pracy, dotyczący eksperymentalnego wyznaczania opisu matematycznego obiektów dynamicznych, należy uznać za bardzo ważny, ponieważ wywiera decydujący wpływ na wynik końcowy.

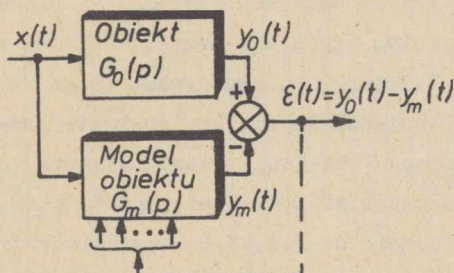
Mając gotowy opis matematyczny można opracować model komputerowy (analogowy lub cyfrowy), który następnie posłuży do realizacji badań symulacyjnych. Zaznaczone na rys. 3.8 linie skierowane oznaczają kolejność postępowania lub wzajemne zależności pomiędzy metodami, urządzeniami pomiarowymi lub badawczymi oraz kolejność wykonywania niezbędnych prac po uzyskaniu danych eksperymentalnych badanego obiektu lub jego modelu.

Wszystkie wyszczególnione metody są w ścisłym znaczeniu eksperymentalnymi, to znaczy wyznacza się przebieg $y(t)$ za obiektem i przebieg $x(t)$ przed obiektem (rys.3.9) oraz następnie przez odpowiednią obróbkę wyników pomiaru otrzymuje się opis matematyczny obiektu w jednej ze zwykle używanych postaci.



Rys.3.9. Idea identyfikacji metodami eksperymentalnymi

Istnieje również możliwość eksperymentalnego wyznaczania opisu matematycznego obiektu poprzez realizację eksperymentu symulacyjnego. Polega ona na tym, że budujemy model obiektu o dającej się zmieniać strukturze, dobierając doświadczalnie jego własności tak, aby były one najbardziej zbliżone do obiektu rzeczywistego (rys.3.10). Zgodność



Rys.3.10. Idea identyfikacji metodą eksperymentu symulacyjnego

przebiegów rzeczywistych i przebiegów w modelu przy różnych rodzajach wymuszeń jest warunkiem koniecznym (a przyjmuje się że i wystarczającym) do stwierdzenia, że model obiektu jest identyczny z obiektem rzeczywistym.

Szczegółowe omówienie poszczególnych metod liniowych i nieliniowych znajduje się między innymi w [3,5,27]. W rozdziale 5 zostaną omówione wybrane podstawowe metody identyfikacji eksperymentalnej układów elektromechanicznych.

3.3.2. Problemy identyfikacji parametrów modeli matematycznych

Dzięki istnieniu dobrze rozwiniętej teorii elektromechanicznego przetwarzania energii, w badaniach układów elektromechanicznych z reguły posługujemy się dyskretnymi modelami matematycznymi, wyznaczonymi analitycznie (pkt 3.2 i rozdział 4).

Modele te mają postać równań różniczkowych zwyczajnych o zmiennych współczynnikach. Współczynniki te są parametrami lub kombinacją parametrów elektrycznych i mechanicznych (dających się zmierzyć bezpośrednio lub pośrednio) o decydującym wpływie na charakterystyki układu.

Podstawowym technicznie użytecznym zagadnieniem tego typu modeli matematycznych jest eksperymentalne wyznaczenie ich parametrów. Modele powinny być sformułowane w taki sposób, aby wszystkie parametry były dostępne pomiarowo lub dały się obliczyć. Doprowadzenie do takiej postaci równań jest zadaniem teorii transformacji (rozdział 4).

Do każdego modelu matematycznego musi istnieć odpowiednio opracowana metoda identyfikacji, za pomocą której można określić parametry tego modelu metodą pomiarową. Identyfikacja eksperymentalna obiektu rzeczywistego może równocześnie ujawnić w jakim stopniu model matematyczny jest adekwatny. Metodą analizy porównawczej wyników symulacji komputerowej z mierzonymi wielkościami można doprowadzić do dyskwalifikacji założonego modelu matematycznego. W takim przypadku prowadzi to do konieczności opracowania nowego modelu matematycznego i związanej z nim metody identyfikacji.

Klasyczne metody identyfikacji, np. metoda skoku jednostkowego i metody częstotliwościowe umożliwiają identyfikację parametrów prostych modeli liniowych o stałych współczynnikach, dlatego są one wykorzystywane przede wszystkim do badania liniowych elementów (obiektów jednowymiarowych) układów elektromechanicznych. Złożone układy, opisywane układami równań różniczkowych, wymagają stosowania statystycznych metod identyfikacji [16].

Najbardziej popularną statystyczną metodą identyfikacji jest metoda funkcji korelacji, służąca do wyznaczania charakterystyk dyna-

micznych na podstawie obserwacji wejść i wyjść obiektu podczas jego normalnej pracy. U podstaw tej metody leżą bardzo znaczne ograniczenia, zmniejszające zakres jej zastosowania.

Metody korelacji nie mogą być stosowane w razie występowania niestacjonarnych zakłóceń przypadkowych oraz do obiektów istotnie nieliniowych. Metoda ta nie może być praktycznie stosowana do obiektów istotnie wielowymiarowych ze względu na dużą liczbę obliczeń. Dlatego też do takich obiektów stosuje się metody mniej dokładne, lecz znacznie prostsze i nie wymagające tak długich obliczeń.

Podstawową metodą identyfikacji statystycznej jest metoda analizy regresyjnej. Metoda ta jest coraz powszechniej stosowana do identyfikacji nieznanymi parametrów modeli matematycznych na podstawie rejestracji dynamicznej wielkości występujących podczas normalnej eksploatacji. Rejestruje się takie wielkości, jak np. prądy, napięcia, prędkości, przyspieszenia mas wirujących, naprężenia itp. (rozdział 5).

Realizacja identyfikacji parametrów modelu złożonego układu elektromechanicznego wymaga (oprócz dobrania odpowiedniej metody identyfikacji i metody interpretacji wyników) zbudowania odpowiedniego systemu pomiarowo-obliczeniowego.

3.4. Analiza i synteza dynamiki

W badaniach modelowych układów elektromechanicznych występują dwie grupy zadań badawczych: analizy i syntezy. W etapach 1-3 badań modelowych dynamiki (pkt 3.1.1) podstawowe znaczenie ma analiza, w etapie 4 natomiast - synteza.

Rozwiązanie zadania analizy dynamiki układu elektromechanicznego polega na określeniu wybranych własności lub wskaźników charakteryzujących jednoznacznie dynamikę, dla przyjętych wartości parametrów lub cech fizycznych i konstrukcyjnych. Cel analizy dynamiki silnika asynchronicznego może być np. następujący:

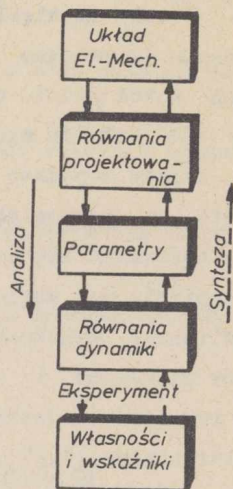
- znalezienie przebiegów czasowych prędkości obrotowej, momentu dynamicznego i prądu podczas skokowej zmiany napięcia zasilającego dla przyjętych wartości parametrów elektrycznych obwodu wirnika i stojana (rezystancji i reaktancji);

- określenie wpływu zmiany wartości parametrów elektrycznych obwodu stojana i wirnika na wartość momentu maksymalnego, prądu udarowego, czasu rozruchu.

Na rysunku 3.11 kierunek prowadzenia analizy został zaznaczony linią ciągłą. Rozwiązywanie zadania analizy nie stwarza obecnie większego problemu dzięki możliwości wykorzystania współczesnych metod matematycznych i techniki obliczeniowej. Wyniki analizy dynamiki uzyskuje się w etapie symulacji działania układu w maszynie analogowej lub cyfrowej. Na podstawie przebiegów sygnałów wyjściowych jest możliwe wyznaczenie charakterystycznych właściwości lub wskaźników techniczno-ekonomicznych badanego układu. Dokonując wielokrotnie obliczeń analitycznych przy różnych wariantach parametrów można uzyskać zależność wybranych wskaźników od parametrów w określonym przedziale wartości i dojść tą metodą do rozwiązania optymalnego pod względem wartości wybranego wskaźnika. W razie występowania dużej liczby parametrów uzyskanie tą metodą rozwiązania optymalnego jest bardzo żmudne, a często wręcz niemożliwe. Optymalizacja układu dynamicznego powinna być dlatego dokonywana metodą rozwiązania zadania syntezy.

Rozwiązanie zadania syntezy polega na określeniu takich wartości parametrów (lub cech fizycznych i konstrukcyjnych), dla których obiekt ma optymalne lub pożądane właściwości (wskaźniki). Na rysunku 3.11 kierunek rozwiązywania zadania syntezy został zaznaczony linią przerywaną.

Rozwiązanie zadania syntezy jest niewspółmiernie trudniejsze od zadania analizy, nawet w przypadkach gdy struktura obiektu jest znana. Do jego rozwiązania również jest niezbędne zastosowanie współczesnych metod matematycznych oraz technicznych urządzeń obliczeniowych. Trudności z rozwiązaniem zadania syntezy są spowodowane fak-



Rys.3.11. Idea analizy i syntezy układów elektromechanicznych

tem, że równania elektromechaniczne, wiążące własności z parametrami (równania dynamiki) i równania projektowania, wiążące parametry z cechami fizycznymi i konstrukcyjnymi, są nieliniowe i nie dają się w pełnej postaci rozwiązywać analitycznie.

W celu ominięcia wymienionych trudności często linearyzuje się równania dynamiczne i bada zachowanie układu przy niedużych wychyleniach wokół punktu pracy. Jest możliwe wtedy rozwiązanie zadania syntezy dla układów prostych analitycznie, a dla złożonych numerycznie (np. układy napędowe ze stabilizacją prędkości obrotowej syntetyzuje się za pomocą charakterystyk częstotliwościowych). Problem syntezy sprowadza się do zagadnień stabilności, wyboru współczynnika wzmocnienia pod względem pożądanых właściwości statycznych układu, optymalizacji wskaźników jakości regulacji (np. przeregulowania, wskaźników całkowych i częstotliwościowych). Zagadnienia te są przedmiotem rozważań w teorii regulacji automatycznej i automatyce napędu elektrycznego [1,27]. W dalszym ciągu uwaga zostanie skupiona na przypadku ogólnym, gdy dynamiczne modele matematyczne są w postaci nieliniowych układów równań różniczkowych.

Tej klasy modele matematyczne z natury swojej są przeznaczone do rozwiązywania zadań analizy i w bezpośredniej postaci nie nadają się do rozwiązywania zadań syntezy. Stąd też wynika problem sformułowania modeli matematycznych maksymalnie przystosowanych do zadań syntezy. Najkorzystniejsze są modele statyczne w postaci wielomianu n -tego stopnia

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_s), \quad (3.1)$$

wiązące wielkości wyjściowe y (parametry optymalizacji lub wielkości, na które są nałożone ograniczenia) z wielkościami wejściowymi x - zmiennymi niezależnymi podczas syntetyzowania. Jako wielkości y mogą być przyjmowane następujące wielkości i wskaźniki: maksymalny moment rozruchowy, maksymalny prąd rozruchowy, czas trwania rozruchu, maksymalne przeregulowanie prędkości, liczba oscylacji prędkości, stosunek dwóch wartości maksymalnych momentu dynamicznego itp. Jako wielkości x mogą być natomiast przyjmowane parametry elektryczne i mechaniczne układu, np. rezystancje i reaktancje maszyny, moment bezwładności, parametry układu zasilania, obciążenia i sterowania.

Dysponując statycznym modelem matematycznym w postaci (3.1) można do rozwiązywania zadania syntezy wykorzystywać standardowe metody optymalizacji, np. mnożniki Lagrange'a, programowanie liniowe, metody gradientowe [16].

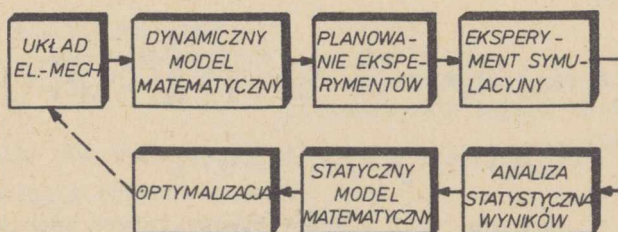
Statyczne modele matematyczne o postaci (3.1) umożliwiają rozwiązywanie następujących zadań:

- określenie wartości dynamicznych wskaźników przy zmianie parametrów w określonym zakresie wartości;
- określenie wartości parametrów, przy których wskaźnik dynamiczny spełnia określone ograniczenia;
- określenie wartości parametrów, przy których wskaźnik ma wartość optymalną w określonym sensie.

W rozdziale 7 będą podane przykłady analizy i syntezy wybranych układów elektromechanicznych.

3.5. Planowanie eksperymentów symulacyjnych

Utworzenie do syntezy dynamiki statycznych modeli matematycznych w postaci (3.1) wiąże się z koniecznością dokonania pewnych operacji matematycznych na klasycznych modelach stosowanych w zadaniach analizy. Na rysunku 3.12 przedstawiono schemat ilustrujący kolejne kroki postępowania podczas tworzenia tej klasy modeli.



Rys.3.12. Schemat procedury tworzenia statycznych modeli matematycznych

Model dynamiczny jest podstawą do serii eksperymentów symulacyjnych w maszynie cyfrowej lub analogowej, przy czym eksperymenty te różnią się tym od wykonywanych w zadaniach analizy, że są w specy-

ficzny sposób zorganizowane (zaplanowane). Traktując układ elektromechaniczny jako obiekt sterowania można dokonać jego identyfikacji wykorzystując wyniki czynnych eksperymentów symulacyjnych. Jako wejścia x obiektu, zmieniane podczas eksperymentów, przyjmuje się wybrane parametry lub cechy fizyczne i konstrukcyjne układu, i jako wyjścia y obiektu - własności i wskaźniki techniczne. Eksperyment symulacyjny powinien ponadto uwzględniać oddziaływanie na obiekt stałych wielkości kontrolowanych oraz przypadkowych niekontrolowanych.

Matematyczna teoria eksperymentu [17] umożliwia na podstawie zbioru wielkości x i y wyznaczenie modelu matematycznego w postaci wielomianu, będącego częścią rozwinięcia zależności (3.1) w szereg Taylora

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^S \beta_{1i} x_i + \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^S \beta_{ii} x_i^2 + \dots \quad (3.2)$$

gdzie $\beta_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$; $\beta_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$; $\beta_{ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Jeżeli podczas eksperymentów symulacyjnych będą uwzględnione oddziaływania niesterowalne i niekontrolowane (np. wahania napięcia i częstotliwości sieci zasilającej, zmiana wartości parametrów elektrycznych lub mechanicznych stałych w procesie syntezy) lub błędy obliczeniowe, to zmiany wielkości y mają charakter przypadkowy, a równanie (3.2) staje się równaniem regresji [17]. Tak więc przyjmuje ono postać

$$\begin{aligned} \hat{y} &= b_0 + \sum_{i=1}^S b_{1i} x_i + \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^S b_{ii} x_i^2 + \dots = \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_S; b_0, b_1, b_2, \dots, b_k), \end{aligned} \quad (3.3)$$

w której $b_0, b_1, b_{ij}, b_{ii}, \dots$ - oceny rzeczywistych współczynników $\beta_0, \beta_1, \beta_{ij}, \dots$;

$\hat{y}$ - funkcja regresji aproksymująca rzeczywistą funkcję y .

W konkretnych zastosowaniach postać równania (3.3) wybiera się arbitralnie. Równanie (3.3) aproksymuje równanie (3.1) z określonym błędem ε . Aby wyznaczyć optymalne współczynniki $b_0, b_1, \dots, b_k$ omawianego

modelu matematycznego (3.1) należy zminimalizować wartość ε . Wielkości błędu można oszacowywać za pomocą wyrażenia

$$S_R = \sum_{n=1}^N (y_n - \hat{y}_n)^2 = \sum_{n=1}^N [y_n - f(x_{n1}, \dots, x_{nS}; b_0, b_1, \dots, b_k)]^2, \quad (3.4)$$

w którym y_n - wyniki obserwacji wyjścia obiektu w chwili n ;
 $\hat{y}_n$ - wartości funkcji regresji w chwili n ;

znanego w matematyce jako **z a s a d a n a j m n i e j s z y c h** kwadratów. W celu wyznaczenia nieznanymi parametrów funkcji regresji (3.3) należy aproksymować zmienną y w taki sposób, by suma kwadratów odchyłeń do zaobserwowanych danych przyjęła wartość minimalną.

Rozważając jako przypadek szczególny wyznaczanie współczynników wielowymiarowej liniowej funkcji regresji, można zadanie doboru współczynników regresji przedstawić prosto, zwłaszcza w zapisie macierzowym. Obserwacje wielkości wejściowej x można przedstawić w postaci macierzy wejść X :

$$X = \begin{bmatrix} x_{10}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1S} \\ x_{20}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2S} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{N0}, x_{N1}, x_{N2}, \dots, x_{NS} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

w której S - liczba wejść;

x_{nS} - wartość wejścia x_S w chwili n ;

$x_{10} = x_{20} = \dots = x_{N0} = 1$ - elementy fikcyjne wprowadzone w celu ujednolicenia zapisu macierzowego.

Wyniki obserwacji wyjść obiektu y oraz wartości funkcji regresji zapiszemy w postaci wektorów

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T, \quad (3.6)$$

$$\hat{y} = [\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N]^T. \quad (3.7)$$

Nieznane parametry zapiszemy w postaci wektora parametrów

$$b = [b_0, b_1, \dots, b_S]^T. \quad (3.8)$$

Zakładając, że uwzględniamy tylko liniową część rozwinięcia funkcji regresji, wyrażenie (3.3) przyjmie postać

$$\hat{y} = Xb. \quad (3.9)$$

Zadanie minimalizacji sumy kwadratów przyjmie postać:

$$\begin{aligned} S_R &= \sum_{n=1}^N (y_n - \hat{y}_n)^2 = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) = (y - Xb)^T (y - Xb) = \\ &= y^T y - 2b^T X^T y + b^T X^T X b = \min. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Różniczkując (3.10) względem b i przyrównując do zera, otrzymujemy

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y. \quad (3.11)$$

Wzór (3.11) jest podstawową zależnością w analizie regresji.

W razie przyjęcia nieliniowej postaci funkcji regresji można stwierdzić, że otrzyma się analogiczne wyrażenie na współczynniki b [16].

Wyznaczenie wartości współczynników równania regresji za pomocą równania (3.11) w przypadku dużej liczby współczynników i nieliniowej postaci równania (3.3) jest zadaniem trudnym. Trudności obliczeniowe mogą wynikać zwłaszcza podczas odwracania macierzy $(X^T X)$. W celu uniknięcia tych trudności należy doprowadzić do tego, by $(X^T X)$ była macierzą diagonalną.

Przekształcenie macierzy $(X^T X)$ w diagonalną jest ważnym zagadnieniem w teorii planowania eksperymentów.

Realizując eksperyment wg planu uwzględniającego odpowiedni sposób określania wartości wejść $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{ns}$ ($n = 1, 2, \dots, N$ - numer serii eksperymentu) można znacznie uprościć proces wyznaczania statycznego modelu matematycznego. Istnieją różne plany eksperymentów, spełniające różne kryteria [17]. Najprostsze i najczęściej stosowane jest planowanie ortogonalne, spełniające następujące warunki:

- symetria doświadczeń względem środka eksperymentu

$$\sum_{n=1}^N x_{ns} = 0, \quad s = 1, \dots, S; \quad (3.12)$$

- ortogonalność, polegająca na zerowaniu wszystkich iloczynów skalarnych wektorów kolumnowych macierzy

$$\sum_{n=1}^N x_{ni} x_{nj} = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, S, \quad i \neq j \quad (3.13)$$

- równość sum kwadratów we wszystkich kolumnach macierzy eksperymentu

$$\sum_{n=1}^N x_{ns}^2 = N, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (3.14)$$

Najistotniejszym warunkiem jest ortogonalność wektorów kolumnowych, dzięki której macierz $(X^T X)^{-1}$ jest diagonalna.

Dzięki temu warunkowi podstawowy wzór analizy regresji w postaci (3.11) przyjmie w przypadku modelu liniowego (3.9) prostą postać:

$$b_s = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{ns} y_n, \quad s = 0, 1, \dots, S. \quad (3.15)$$

Wszystkie współczynniki w planowaniu ortogonalnym są wyznaczone niezależnie od siebie i z jednakową minimalną wariancją

$$\sigma^2\{b_i\} = \frac{\sigma^2\{\hat{y}\}}{N}, \quad (3.16)$$

gdzie N - liczba eksperymentów;
 $\sigma^2\{\hat{y}\}$ - wariancja błędu eksperymentu.

Najczęściej stosowany jest tzw. plan eksperymentu dwupoziomowego, który polega na przyjmowaniu wartości wejść x_s na dwóch poziomach

$$x_s; x_s^0 - \Delta x_s; x_s^0 + \Delta x_s, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (3.17)$$

Możliwe są dwa przypadki: eksperyment całkowity o 2^S eksperymentach i eksperyment ułamkowy o 2^{S-p} eksperymentach.

W celu ułatwienia obliczeń z reguły dokonuje się tzw. standaryzacji zmiennych wejściowych, polegającej na zamianie początku układu współrzędnych. Początek układu współrzędnych przenosi się do punktu bazowego $x_1^0, x_2^0, \dots, x_S^0$, w otoczeniu którego dokonuje się ekspery-

menty. Jednocześnie tak zmienia się skalę, aby planowane wartości zmian Δx_s ($s = 1, 2, \dots, S$) były jednostkowe w nowym układzie współrzędnych. Wprowadzamy nowe zmienne

$$x_s = \frac{x_s - x_s^0}{\Delta x_s}, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad (3.18)$$

przy czym Δx_s - wartość bezwzględna kroku wzdłuż osi x_s w skali naturalnej.

Po wykorzystaniu zależności (3.18) macierz eksperymentu (3.5) w nowych zmiennych ma elementy +1 i -1.

Dla trzech zmiennych plan eksperymentu całkowitego zawiera osiem eksperymentów (2^3) (tab. 3.2). Plusy oznaczają górny poziom a minusy dolny. Na podstawie ośmiu eksperymentów można wyznaczyć niezależnie nie więcej niż 8 współczynników funkcji regresji typu

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3$$

T a b e l a 3.2

Plan eksperymentu całkowitego typu 2^3

n	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$
1	-	-	-	+	+	+	-
2	+	-	-	-	-	+	+
3	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	-	+	-	-	-
5	-	-	+	+	-	-	+
6	+	-	+	-	+	-	-
7	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+

W razie występowania dużej liczby S zmiennych wejściowych dokonywanie eksperymentu całkowitego o 2 poziomach jest praktycznie niemożliwe (np. przy 30 zmiennych zachodziłaby konieczność wykonania 2^{30} eksperymentów).

Na uwagę zasługuje więc zwłaszcza e k s p e r y m e n t u ł a m k o w y, zawierający pewną liczbę doświadczeń z planu eksperymentu całkowitego. Plany eksperymentów ułamkowych tworzy się tak, aby spełniały warunki (3.12) - (3.14), obowiązujące dla eksperymentu całkowitego.

W celu spełnienia warunku ortogonalności przez eksperyment ułamkowy macierz eksperymentu całkowitego można jedynie dzielić na 2, 4, 8... części, a więc tworzyć plany połówkowe, ćwiartkowe, ósemkowe itd. Podziału nie można dokonywać mechanicznie, ponieważ w zależności od sposobu rozbicia planu całkowitego otrzymuje się różne plany ułamkowe. Wszystkie plany ułamkowe charakteryzują się tym, że nie stwarzają możliwości wyznaczania niezależnych ocen wszystkich współczynników (tak jak można to zrobić w planach całkowitych). Metody tworzenia planów całkowitych i ułamkowych nie będą szczegółowo omawiane. Są one dokładnie omówione w [17]. W tabeli 3.3 przedstawiono przykłady dwóch planów połówkowych. Pierwszy plan połówkowy o czterech doświadczeniach umożliwia identyfikowanie funkcji regresji nie więcej niż o czterech współczynnikach typu

$$\hat{y} = b'_0 + b'_1 X_1 + b'_2 X_2 + b'_3 X_3, \quad (3.19)$$

przy czym jeśli prawdziwe współczynniki $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ są niezerowe, to obliczone przez nas współczynniki regresji będą łączną oceną następujących wyrażeń:

$$b'_0 \approx \beta_0 + \beta_{123},$$

$$b'_1 \approx \beta_1 + \beta_{23},$$

$$b'_2 \approx \beta_2 + \beta_{13},$$

$$b'_3 \approx \beta_3 + \beta_{12}.$$

Nie można oddzielić wpływu tych współczynników regresji, bowiem w pierwszym planie połówkowym (tab. 3.3a) odpowiednie wektory kolumnowe są liniowo zależne, np. kolumna X_1 i kolumna $X_2 X_3$.

Plan połówkowy (tab. 3.3a) najlepiej charakteryzuje fakt, że wszystkie elementy spełniają równość

$$X_1 X_2 X_3 = 1, \quad (3.20)$$

zwaną równością charakterystyczną [17].

Można utworzyć plan połówkowy, który będzie np. określony równością charakterystyczną

$$X_1 X_2 = -1. \quad (3.21)$$

Z tabeli 3.2, uwzględniając wzór (3.21), otrzymamy plan połówkowy podany w tabeli 3.3b.

Analizując poszczególne kolumny w tabeli 3.3b, dochodzimy do wniosku, że ze względu na zależności liniowe między odpowiednimi wektorami kolumnowymi na podstawie tego planu można identyfikować funkcję regresji, np. o postaci

$$\hat{y} = b'_0 + b'_1 X_1 + b'_3 X_3 + b'_{13} X_1 X_3, \quad (3.22)$$

przy czym jeśli prawdziwe współczynniki funkcji regresji $\beta_1, \beta_{12}, \beta_{23}, \beta_{123}$ nie są zerowane, to obliczone przez nas współczynniki regresji będą łączną oceną następujących wyrażeń:

$$b'_0 \approx \beta_0 - \beta_{12},$$

$$b'_1 \approx \beta_1 - \beta_2,$$

$$b'_3 \approx \beta_3 - \beta_{123},$$

$$b'_{13} \approx \beta_{13} - \beta_{23}.$$

Stosując plan połówkowy z tabeli 3.3 nie można oddzielić wpływu członów liniowych β_1, β_2 . Plan ten ma mniejszą wartość praktyczną niż poprzedni plan.

T a b e l a 3.3

Przykłady planów ułamkowych połówkowych dla trzech zmiennych

a)

n	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	$X_1 X_2 X_3$
1	+	+	-	-	-	-	+	+
2	+	-	+	-	-	+	-	+
3	+	-	-	+	+	-	-	+
4	+	+	+	+	+	+	+	+

b)

n	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$
1	+	+	-	-	-	-	+	+
2	+	-	+	-	-	+	-	+
3	+	+	-	+	-	+	-	-
4	+	-	+	+	-	-	+	-

W procedurze otrzymywania modeli matematycznych w postaci (3.3) następnym krokiem, po planowaniu i realizacji eksperymentów symulacyjnych, jest analiza statystyczna otrzymanych wyników.

W statystyce matematycznej istnieją metody umożliwiające dokonanie analizy równania regresji, tzn. statystycznej oceny istotności współczynników b oraz adekwatności równania (3.3) do rzeczywistej zależności (3.1) [9,16,17].

Do sprawdzenia istotności otrzymanych współczynników jest niezbędne określenie wariancji charakteryzującej błąd eksperymentu oraz wariancji współczynników równania regresji. Realizując w każdym punkcie m równoległych eksperymentów wyniki obserwacji $y_1, y_2, \dots, y_m$ można uśredniać

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^m y_j}{m} \quad (3.23)$$

Jeżeli np. $m = 3$, to cały eksperyment jest dokonywany w trzech seriach, a w każdej serii jest uzyskiwana pełna macierz eksperymentu.

Wariancję błędu eksperymentu symulacyjnego można określić następująco:

$$\sigma^2\{\hat{y}\} = \frac{\sum_{j=1}^m y_j^2 - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j^2}{m - 1} \quad (3.24)$$

Na podstawie (3.16) i wykorzystując (3.24) można określić wariancję współczynników równania regresji.

Po określeniu, za pomocą wyrażenia (3.15), ocen współczynników równania regresji należy sprawdzić hipotezę o istotności współczynników b_i (sprawdzenie hipotezy zerowej $b_i = 0$) [17]. Sprawdzenia

hipotezy można dokonać za pomocą kryterium t - Studenta [17], które po badaniu hipotezy zerowej formuluje się następująco:

$$t_1 = \frac{[b_i]}{\sqrt{\sigma^2\{b_i\}}} \quad (3.25)$$

Jeżeli $t_1 > t_{kr}$ określonego wg tablicy podanej w [17] dla liczby stopni swobody

$$\nu_s = N(m - 1)$$

i zadany poziom ufności α [%], tzn.

$$\text{sign}(t_1 - t_{kr}) = +1,$$

to hipotezę odrzucamy i współczynnik b_i uważamy za istotny.

W przeciwnym razie hipotezę przyjmuje się i uważamy, że współczynnik b_i jest statystycznie nieistotny (tzn. równy zero).

Statystyczna nieistotność współczynnika b_i może wynikać z następujących przyczyn:

1. Punkt eksperymentu tzw. bazowy $x_1^0, x_2^0, \dots, x_S^0$ jest bliski punktowi ekstremalnemu względem zmiennej x_i

$$b_i \approx \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0.$$

2. Przyjęty krok wariantowania Δx_i jest zbyt mały.

3. Dana zmienna nie ma zależności funkcjonalnej z parametrem wyjściowym y , tzn. $b_i = 0$.

4. Występuje duży błąd eksperymentu, spowodowany obecnością oddziaływań niesterowalnych i niekontrolowanych.

W celu sprawdzenia adekwatności przyjętego modelu matematycznego (z odrzuconymi współczynnikami nieistotnymi) należy ocenić odchylenia wartości wielkości wyjściowej $\hat{y}$, obliczonej wg równania regresji od wyników otrzymanych podczas eksperymentów.

Można dokonać tej oceny za pomocą wariancji resztowej σ_R^2

$$\sigma_R^2 = \frac{\sum_{n=1}^N y_n^2 - \sum_{i=0}^k b_i \sum_{n=1}^N x_{in} y_n}{N - k}, \quad (3.26)$$

w której k - liczba członów aproksymujących wielomian.

Na podstawie statystyki

$$F = \frac{\sigma_R^2}{\sigma^2 \{\hat{y}\}} \quad (3.27)$$

o rozkładzie F - Snedecora [17] - można sprawdzić hipotezę o adekwatności modelu. Jeżeli $F < F_{kr}$, to hipotezę odrzucamy i uznajemy, że model jest adekwatny. Hipotezę sprawdzamy przy zadanym poziomie ufności $1 - (N - k)$ stopniach swobody, do których to wielkości można z tabel określić F_{kr} [17].

Jeżeli model okaże się nieadekwatny, to należy zastosować bardziej złożone formy równania regresji (3.3) lub (jeżeli to możliwe) wykonać eksperyment z mniejszym krokiem wariantowania. Zmniejszenie kroku wariantowania pociąga za sobą następujące trudności:

1. Rośnie stosunek zakłóceń do sygnału użytecznego, co prowadzi do konieczności zwiększenia liczby eksperymentów powtarzanych.
2. Zmniejsza się istotność współczynników, która zależy od wielkości kroku wariantowania (w równaniach o zmiennych standaryzowanych).

W celu dobrania wielkości kroku wariantowania z reguły dokonuje się wstępne eksperymenty. Krok wariantowania dobiera się w zakresie $(0,05-0,3)$ przedziału wariantowania współczynników, tzn. obszar wariantowania zajmuje 10-60% całego obszaru eksperymentowania.

Po odrzuceniu nieistotnych członów wyrażenia (3.3) oraz sprawdzeniu adekwatności, otrzymuje się ostateczną postać poszukiwanego modelu matematycznego. Model ten ze względu na swoją wielomianową postać może w stosunkowo prosty sposób stać się podstawą do poszukiwania zależności $y_{opt} = f(x_{opt})$, tzn. poszukiwania takiej kombinacji parametrów x_1 obiektu, przy której cecha y będzie miała wartość optymalną.

W rozdziale 7 będą przedstawione przykłady wykorzystania metody planowania eksperymentów do badania wybranych układów elektromechanicznych.

4. MODELE MATEMATYCZNE MASZYN I UKŁADÓW ELEKTROMECHANICZNYCH

4.1. Zasady budowy modeli matematycznych

W celu stworzenia modelu matematycznego układu elektromechanicznego należy ułożyć równania różniczkowe dla tego układu. Układanie równań może być wykonane za pomocą jednej z następujących metod:

1. Dla części mechanicznej równania są wyprowadzane z zasady d'Alemberta; dla części elektrycznej - z prawa Kirchhoffa, Coulomba i Faradaya.

2. Wyprowadza się równania ogólnie dla całego układu, na podstawie zasady wariacyjnej, czyli zasady Hamiltona, prowadzącej do równania Eulera-Lagrange'a.

W metodzie pierwszej otrzymuje się zazwyczaj układy równań, których rozwiązanie jest żmudne, zwłaszcza dla bardziej skomplikowanych układów, w tym układów nieliniowych.

Metoda druga, na podstawie zasady Hamiltona, jest ogólniejsza niż metoda pierwsza i nadaje się do układów skomplikowanych, m.in. w razie występowania zmiennych mas czy innych nieliniowości. Do równań otrzymanych tą metodą można użyć dowolnych współrzędnych elektrycznych i mechanicznych.

Zasada Hamiltona jest całkowicie zgodna z prawami Newtona, chociaż jest od nich niezależna.

W dalszym ciągu, w uproszczeniu będą zaprezentowane obydwie metody.

4.1.1. Zasada d'Alemberta

Do dalszych rozważań będzie potrzebne zestawienie podstawowych równań związanych z zastosowaniem metody d'Alemberta [26].

Zasada d'Alemberta stwierdza, że do układów dynamicznych wieloobwodowych (wielooczkowych) i wielowęzłowych, będących w stanie równowagi dynamicznej w k -tym węźle, obowiązuje zależność

$$\sum_{i=1}^r (\dot{p}_{ki} - f_{ki}) = 0. \quad (4.1)$$

Równanie to obejmuje również siły mechaniczne pochodzenia elektrycznego i magnetycznego, w których

$$\dot{p}_{ki} = \frac{d}{dt} (m_{ki} v_{ki}), \quad (4.2)$$

$$v_{ki} = \dot{x}_{ki},$$

przy czym x_{ki} - i-ta współrzędna k-tego węzła;
 m_{ki} - masa w k-tym węźle.

Równanie prędkości w obwodzie zamkniętym

$$\sum_{i=1}^r v_{ki} = 0. \quad (4.3)$$

Z prawa ciągłości przestrzeni otrzymamy

$$\sum_{i=1}^r x_{ki} = 0. \quad (4.4)$$

Równanie Kirchhoffa

$$\sum_{i=1}^s e_{ki} = 0, \quad (4.5)$$

w którym e_{ki} - i-ta SEM lub napięcie w k-tym węźle.

Analogicznie, w odniesieniu do prądów

$$\sum_{i=1}^r i_{ki} = 0, \quad (4.6)$$

gdzie i_{ki} - i-ty prąd przepływający przez k-ty węzeł obwodu.

Wpływy współrzędnych mechanicznych na prądy i napięcia również powinny być uwzględnione równaniami Kirchhoffa. Dwa prawa Kirchhoffa, dotyczące obwodów mechanicznych, brzmią następująco:

1. Suma momentów (lub sił) w węźle jest równa zeru - prawo to odpowiada zasadzie d'Alemberta.

2. Suma prędkości źródeł i spadków prędkości w obwodzie zamkniętym jest równa zeru.

Na prostym przykładzie prześledzimy opisany sposób tworzenia modelu matematycznego przetwornika elektromechanicznego.

Jest dany silnik elektryczny obcowzbudny prądu stałego, zasilany od strony twornika napięciem zmieniającym się w funkcji czasu.

Model logiczny elektrycznej części przetwornika otrzymamy przedstawiając cewki wirnika, przez które płynie prąd $i(t)$, jako rezystancję i indukcyjność plus dodatkowy spadek napięcia, proporcjonalny do prędkości kątowej cewki w stacjonarnym polu magnetycznym. Moment elektromagnetyczny wirnika przyjmiemy jako wprost proporcjonalny do prądu $i(t)$ (zakłada się stałą wartość strumienia wzbudzenia).

W stosunku do części mechanicznej układu można przyjąć, że opór powietrza i tarcie w łożyskach dają w wyniku moment oporowy wprost proporcjonalny (i o zwrocie przeciwnym) do prędkości kątowej wirnika.

Zastosujemy do części elektrycznej silnika II prawo Kirchhoffa, a do części mechanicznej - równanie momentów wynikające z zasady d'Alemberta. Tok postępowania i otrzymane równania są analogiczne jak w przykładzie podanym w pktcie 3.2.3 (w części dotyczącej modelu matematycznego ww. układu).

Ułożenie tych równań nie byłoby możliwe bez dokładnej znajomości zjawisk fizycznych, zachodzących w rozważanym obiekcie.

Takie same równania można otrzymać stosując zasadę Hamiltona.

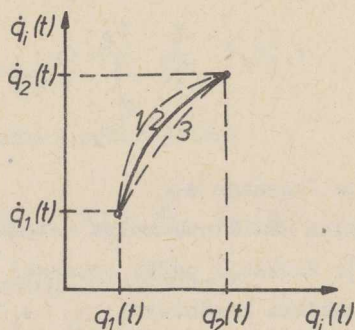
4.1.2. Zasada Hamiltona

Zasada Hamiltona powstała na podstawie funkcji opisujących stany energetyczne układów dynamicznych, przy czym układy te mogą być mechaniczne, elektryczne, hydrauliczne itp. (lub mieszane).

W metodzie wariacyjnej, a taką jest zasada Hamiltona, szuka się ekstremum funkcji energii, odpowiadającego przebiegom ekstremalnym pod względem energii, co odpowiada rzeczywistym przebiegom w przyrodzie. Metoda ta inaczej nosi nazwę metody minimalnej pracy lub zasady najmniejszego działania [21,26].

Traktując pracę układu z punktu widzenia energii, równania ruchu układu można otrzymać z warunku na ekstremalną wartość energii układu.

Stosując tę metodę szuka się przebiegu przez takie dopasowanie niezależnych od siebie współrzędnej q_1 (rys.4.1) oraz pochodnej przebiegu $\dot{q}_1$, aby warunek ekstremum energii był spełniony, co nastąpi wówczas, gdy niezależna od czasu wariacja funkcji będzie równa zero.



Rys.4.1. Ilustracja do zasady Hamiltona: $q_1(t)$ - współrzędne układu, $\dot{q}_1(t)$ - pochodne współrzędnych układu (prędkości), 2 - tor, któremu odpowiada wariacja równa zero, 1 i 3 - inne tory

Ponieważ przy większej liczbie zmiennych metoda ta może być stosowana w warunkach, które umożliwiają zasadę superpozycji, zatem jest konieczne, aby zmienne były niezależne od siebie.

Zakłada się więc, że ruch układu elektromechanicznego, a ściślej mówiąc jego dynamika, charakteryzuje się zmianami pewnych wielkości układu, określającymi w każdej chwili jego stan. Tak określone wielkości będzie się nazywać współrzędnymi układu. Najmniejsza liczba (ν) tych współrzędnych określająca stan układu w dowolnej chwili, nosi nazwę liczby stopni swobody, a współrzędne te nazywają się współrzędnymi uogólnionymi (niezależnymi).

Nie analizując szczegółów zagadnienia wystarczy nadmienić, że w układach elektromechanicznych jako współrzędne uogólnione przyjmuje się:

- przesunięcia kątowe lub liniowe,
- ładunki elektryczne.

Z wyborem współrzędnych układu jest ściśle związany układ współrzędnych, wyznaczający przestrzeń stanów układu elektromechanicznego. Po zmianie współrzędnych q_i punkt przestrzeni stanów, wyznaczony przez te współrzędne, zakresli linię noszącą nazwę trajektorii ruchu. Trajektorja ta jednoznacznie podaje położenie układu w każdej chwili t . Z ogólnych właściwości trajektorii (ciągłość oraz jednoznaczność) wynika, że jej współrzędne są opisane równaniami różniczkowymi rzędu najwyżej drugiego. Są one równaniami różniczkowymi ekstremal, a więc są równaniami Eulera-Lagrange'a funkcjonału

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (4.7)$$

w którym L - funkcja Lagrange'a.

Zasadę wariacyjną Hamiltona można matematycznie sformułować w sposób następujący [30]: Wariacja całki czasowej funkcji Lagrange'a pomiędzy ustalonymi punktami krańcowymi $q_i(t_1)$ i $q_i(t_2)$ powinna równać się zeru, czyli

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} (\delta L) dt = 0. \quad (4.8)$$

Zazwyczaj w układach fizycznych występują dwa rodzaje energii - kinetyczna i potencjalna. W zapisie energii za pomocą współrzędnych uogólnionych wprowadzamy nazwy: energii kinetycznej - wszędzie tam, gdzie energia zależy od $\dot{q}_i$, oraz energii potencjalnej - gdzie zależy ona wyłącznie od q_i . Funkcja Lagrange'a może być wobec tego zdefiniowana jako różnica pomiędzy energią kinetyczną T a energią potencjalną V układu, czyli jako potencjał kinetyczny

$$L = T - V. \quad (4.9)$$

Stwierdzenie (4.8) pociąga za sobą warunek analityczny (równanie Eulera-Lagrange'a) w postaci

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, v, \quad (4.10)$$

w której q_i - współrzędne uogólnione,
 $\dot{q}_i$ - prędkości uogólnione.

W układach elektromechanicznych współdziałają energie różnego rodzaju, spośród których istotne znaczenie dla nas będą miały funkcje [22]:

a) energii pola magnetycznego

$$E_{mg}(x, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n M_{sr}(x) \dot{q}_s \dot{q}_r ;$$

b) energii mechanicznej sprężystej

$$E_{sp}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^W k_i x_i^2 ;$$

c) energii mechanicznej potencjalnej

$$E_{pot}(x) = \sum_{i=1}^W f_i(x) ;$$

d) energii mechanicznej kinetycznej

$$E_{kin}(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^W m_i \frac{\dot{x}_i^2}{2} ;$$

e) energii mechanicznej dopływającej do przetwornika

$$E_{mech}(x, \dot{x}, t) = \sum_{i=1}^W \int_0^{t_1} F_i \dot{x} dt_1 ;$$

f) energii elektrycznej dopływającej do przetwornika

$$E_{el}(U, \dot{q}, t) = \sum_{s=1}^n \int_0^{t_1} U_s \dot{q}_s dt_1 ;$$

g) energii dyssypatywnej obwodów elektrycznych

$$E_R(\dot{q}) = \sum_{s=1}^n \int_0^{t_1} R_s \frac{\dot{q}_s^2}{2} dt_1 ;$$

h) energii dyssypatywnej mechanicznej

$$E_D(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^w \int_0^{t_1} D_i \frac{\dot{x}_i^2}{2} dt_1.$$

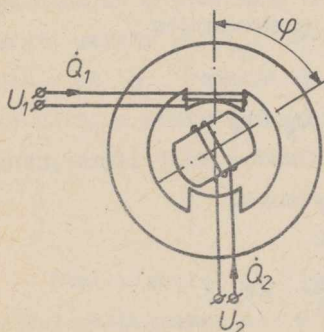
Tak przyjęte założenia, umożliwiają rozpatrywanie ogólne przetworników o dowolnej konfiguracji elektromagnetycznej i sformułowanie ogólnego funkcjonału przemiany energii

$$I = \int_0^t [E_{mg}(x, \dot{Q}) + E_{kin}(x, \dot{x}) - E_{sp}(x) - E_{pot}(x) + \\ - E_{mech}(x, \dot{x}, t) - E_{el}(U, \dot{Q}, t) + E_D(x, \dot{x}) + E_R(\dot{Q})] dt. \quad (4.11)$$

Stąd można zapisać

$$I = \int_0^t \left[\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{2} M_{sr}(x) \dot{Q}_s \dot{Q}_r + \sum_{i=1}^w m_i \frac{\dot{x}_i^2}{2} - \sum_{i=1}^w k_i \frac{x_i^2}{2} + \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^w f_i(x) - \sum_{i=1}^w \int_0^{t_1} F_i(t_1) \dot{x}_i dt_1 - \sum_{s=1}^n \int_0^{t_1} U_s(t_1) \dot{Q}_s dt_1 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^w \int_0^{t_1} D_i \frac{\dot{x}_i^2}{2} dt_1 + \sum_{s=1}^n \int_0^{t_1} R_s \frac{\dot{Q}_s^2}{2} dt_1 \right] dt, \quad (4.11a)$$

przy czym x - współrzędne mechaniczne układu;
 $\dot{x}$ - prędkości zmian współrzędnych mechanicznych układu;
 Q - współrzędne elektryczne układu;
 $\dot{Q}$ - prędkości zmian współrzędnych elektrycznych układu.



Rys.4.2. Schemat ideowy układu elektromechanicznego

Wiadomo, że ze wszystkich możliwych przepływów energii będą wyłącznie te, które ekstremalizują ten funkcjonal.

W celu prześledzenia toku postępowania dotyczącego praktycznego wykorzystania metod syntetycznych, prześledzimy układ elektromechaniczny, przedstawiony na rys. 4.2.

Silnik z jednym uzwojeniem w stojanie i jednym uzwojeniem w wirniku zostaje włączony na napięcia u_1, u_2 . Współczynniki indukcji własnych i wzajemnych obydwu uzwojeń oznaczmy jako

M_{11} - współczynnik indukcji własnej uzwojenia 1;

M_{22} - współczynnik indukcji własnej uzwojenia 2;

M_{12} - współczynnik indukcji wzajemnej.

Wszystkie współczynniki indukcji zależą od kąta φ , który jest przesunięciem geometrycznym wirnika względem stojana. Moment bezwładności wirnika wynosi J , współczynnik sprężystości K , współczynnik tarcia D . Stąd przyjmujemy następujące współrzędne uogólnione:

$q_1 = Q_1$ - ładunek w obwodzie 1,

$\dot{q}_1 = \dot{Q}_1$ - prąd w obwodzie 1,

$q_2 = Q_2$ - ładunek w obwodzie 2,

$\dot{q}_2 = \dot{Q}_2$ - prąd w obwodzie 2,

$q_3 = \varphi$ - przesunięcie wirnika,

$\dot{q}_3 = \dot{\varphi}$ - prędkość kątowa wirnika.

Zgodnie z (4.11a) funkcjonał I można zapisać jako

$$I = \int_0^t \left[M_{11}(\varphi) \frac{\dot{Q}_1^2}{2} + M_{22}(\varphi) \frac{\dot{Q}_2^2}{2} + M_{12}(\varphi) \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 + J \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - K \frac{\varphi^2}{2} + \right. \\ \left. - \int_0^{t_1} (U_1 \dot{Q}_1 + U_2 \dot{Q}_2) dt_1 - \int_0^{t_1} M_m \dot{\varphi} dt_1 + \int_0^{t_1} \left(R_1 \frac{\dot{Q}_1^2}{2} + R_2 \frac{\dot{Q}_2^2}{2} \right) dt_1 + \right. \\ \left. + \int_0^{t_1} D \frac{\dot{\varphi}^2}{2} dt_1 \right] dt.$$

Stosując formalnie operację wg równania (4.10), otrzymamy: względem Q_1

$$\frac{d}{dt} [M_{11}(\varphi) \dot{Q}_1 + M_{12}(\varphi) \dot{Q}_2] - U_1 + R_1 \dot{Q}_1 = 0;$$

względem Q_2

$$\frac{d}{dt} [M_{12}(\varphi) \dot{Q}_1 + M_{22}(\varphi) \dot{Q}_2] - U_2 + R_2 \dot{Q}_2 = 0;$$

względem φ

$$\frac{d}{dt} (J \dot{\varphi} + D\varphi) + K\varphi - M_m - \frac{\dot{Q}_1^2}{2} \frac{\partial M_{11}(\varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\dot{Q}_2^2}{2} \frac{\partial M_{22}(\varphi)}{\partial \varphi} + \\ - \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \frac{\partial M_{12}(\varphi)}{\partial \varphi} = 0.$$

Wprowadzając oznaczenia techniczne otrzymamy

$$M_{11}(\varphi) \frac{di_1}{dt} + M_{12}(\varphi) \frac{di_2}{dt} + i_1 \frac{dM_{11}(\varphi)}{d\varphi} + i_2 \frac{dM_{12}(\varphi)}{d\varphi} + R_1 i_1 = U_1, \\ M_{12}(\varphi) \frac{di_1}{dt} + M_{22}(\varphi) \frac{di_2}{dt} + i_1 \frac{dM_{12}(\varphi)}{d\varphi} + i_2 \frac{dM_{22}(\varphi)}{d\varphi} + R_2 i_2 = U_2, \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \frac{d\varphi}{dt} + K\varphi = M_m + \frac{i_1^2}{2} \frac{dM_{11}(\varphi)}{d\varphi} + \frac{i_2^2}{2} \frac{dM_{22}(\varphi)}{d\varphi} + i_1 i_2 \frac{dM_{12}(\varphi)}{d\varphi}.$$

Na tym bardzo prostym modelu matematycznym przetwornika elektromechanicznego widać, że konstrukcja opisu otrzymana została dzięki prawie całkowicie formalnemu procesowi postępowania. Łatwo stwierdzić, że metoda syntezy tego opisu na podstawie rozpoznania fizykalnego jest bardzo trudna (zwłaszcza po pominięciu założeń upraszczających, przyjętych w pktcie 4.2.1).

4.2. Metody opisu matematycznego układów elektromechanicznych

4.2.1. Opis za pomocą równań różniczkowych

Najczęściej spotykanym sposobem opisu (modelem matematycznym) układu elektromechanicznego jest układ równań różniczkowych zwyczajnych, stosowany do układów o stałych skupionych. Równania te są formułowane z wykorzystaniem praw fizyki.

Dla systemu elektromechanicznego, składającego się z maszyny elektrycznej i mechanizmu napędzanego, można utworzyć układ równań różniczkowych, opisujących dynamikę tego systemu, albo na podstawie

zasady Hamiltona albo zasad dynamiki Newtona i praw Kirchhoffa, jak zostało to przedstawione w pktcie 4.2. W obydwu sposobach dochodzimy do tych samych wyników.

W modelu matematycznym układu elektromechanicznego wyróżniny więc

równanie mechaniczne

$$\frac{d}{dt} (J\omega) + T - \frac{\partial u_m}{\partial \varphi} = M_m, \quad (4.12)$$

w którym J - moment bezwładności (w przypadku szczególnym $J = J(t) = \text{const}$), $T = D\omega$ - moment dyssypacji, D - parametr tłumienia, $\partial u_m / \partial \varphi = M_e$ - moment elektromagnetyczny, M_m - moment mechaniczny (w ogólnym przypadku może być funkcją drogi, prędkości, czasu).

Moment elektromagnetyczny maszyny można zapisać w następujący sposób:

$$M_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \varphi} \mathbf{i},$$

gdzie $\mathbf{i}$ - n -wymiarowy wektor prądów i_k ($k = 1, 2, \dots, n$);
 $\mathbf{L}$ - kwadratowa macierz indukcyjności L_{kl} o wymiarze $[n \times n]$, przy czym dla $k \neq l$ - L_{kl} jest indukcyjnością wzajemną między k -tym, a l -tym obwodem, w ogólnym przypadku zależy od kąta obrotu; dla $k = l$ - L_{kl} jest indukcyjnością własną.

Równania elektryczne:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi &= -R\mathbf{i} + \mathbf{U} \\ \Psi &= \mathbf{L}\mathbf{i} \end{aligned}, \quad (4.23)$$

w których $\mathbf{U}$ - n -wymiarowy wektor napięć,
 $\mathbf{R}$ - kwadratowa diagonalna $[n \times n]$ macierz oporności czynnych R_{kk} ($k = 1, 2, \dots, n$).

Ogólny model matematyczny, wyrażony równaniami (4.12) i (4.13), może ulegać zmianom w zależności od liczby stopni swobody układu elektromechanicznego i od przyjmowanych w konkretnych przypadkach założeń upraszczających.

4.2.1.1. Model liniowy i jego parametry. Liniowy obwód elektryczny jest opisywany układem liniowych równań różniczkowych ze stałymi współczynnikami. Taki obwód jest podstawą do konstruowania modeli dławików, transformatorów i maszyn elektrycznych, wirujących ze stałą prędkością $\omega = \text{const}$.

Układ, który ma n - niezależnych oczek prądowych, jest opisany układem n niezależnych równań różniczkowych, z których każde może być równaniem drugiego rzędu (jeżeli oczko zawiera element indukcyjny oraz element pojemnościowy) lub pierwszego rzędu (jeżeli oczko nie zawiera elementu pojemnościowego, a tylko element indukcyjny) lub też równaniem algebraicznym nieróżniczkowym (jeżeli oczko nie zawiera elementu indukcyjnego i pojemnościowego).

W modelach transformatorów i maszyn na ogół nie uwzględnia się magazynów energii pola elektrycznego, tj. pomija się wszelkie elementy pojemnościowe. Ogólnie model o n stopniach swobody elektrycznej jest opisany równaniem (4.13), przy czym macierz $\mathbf{L}$ rzędu n ma n^2 elementów, w tym liczba elementów niezależnych wynosi: n elementów na głównej przekątnej - indukcyjności własnych, $n(n-1)/2$ - elementów pozostałych - indukcyjności wzajemnych, czyli razem $n(n+1)/2$ elementów.

W zależności od tego w jakim stopniu konstrukcja maszyny wykazuje symetrię, następuje odpowiednie zmniejszenie liczby elementów tej macierzy różniących się od siebie wartościami i ponadto różniące się od siebie wartości elementów poszczególnego wiersza pozostając do siebie w zależności określonej przez warunki symetrii.

Model matematyczny maszyny elektrycznej trójfazowej - przy założeniu niezależności współczynników indukcyjności od prądu, liniowego tłumienia oraz stałej prędkości obrotowej - daje się opisać za pomocą równań różniczkowych liniowych

$$\mathbf{L}(\varphi) \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{i}} + \omega \left(\frac{d}{dt} \mathbf{L}(\varphi) \right) \dot{\mathbf{i}} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{i}} = \mathbf{u}. \quad (4.14)$$

Jest to równanie (macierzowe) o periodycznie zmiennych współczynnikach. W razie gdy współczynniki indukcyjności, tworzące elementy macierzy $\mathbf{L}(\varphi)$, są różniczkowalnymi periodycznymi funkcjami kąta, istnieje

je macierz, za pomocą której równanie (4.14) sprowadza się do postaci równania o stałych współczynnikach. Taką jest np. transformacja Parka do szczególnego założenia w odniesieniu do postaci funkcji periodycznej $\mathbf{L}(\varphi)$. Jeżeli przyjmuje się, że elementy macierzy $\mathbf{L}$ są jednoharmonicznymi funkcjami kąta, a prędkość ω jest synchroniczną z pulsacją ω napięcia zasilającego, otrzymuje się powszechnie stosowany prosty model maszyny trójfazowej.

4.2.1.2. Model dwuliniowy. Postać równania (4.14) wskazuje, że uwzględnienie dynamiki ruchu obrotowego $\omega(t)$ przekształca równanie liniowe o zmiennych współczynnikach w równanie nieliniowe:

$$\mathbf{L}(\varphi) \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{i}} + \frac{d}{d\varphi} \mathbf{L}(\varphi) \omega(t) \dot{\mathbf{i}} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{i}} = \mathbf{u}, \quad (4.15)$$

zawierające dwuliniową formę

$$\frac{d}{d\varphi} \mathbf{L}(\varphi) \omega(t) \dot{\mathbf{i}}.$$

Do pełnego opisu modelu dynamicznego dołącza się ponadto równanie mechaniczne

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = M_e - D\omega(t) + M_m, \quad (4.16)$$

zawierające również formę dwuliniową (kwadratową)

$$M_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{i}}^T \frac{d}{d\varphi} \mathbf{L}(\varphi) \dot{\mathbf{i}}.$$

W odniesieniu do parametrów elektrycznych ta okoliczność w zasadzie niczego nie zmienia. Swoje praktyczne znaczenie i interpretację tracą jedynie te pojęcia, które były sformułowane na podstawie założenia stałej prędkości, jak np. reaktancje i stałe czasowe przejściowe i podprzejściowe oraz funkcje własne rozwiązań równania liniowego, określone za pomocą wartości własnych. Parametry te zachowują swą interpretację przy rozważaniu małych drgań wokół stanów równowagi.

4.2.1.3. Model nieliniowy. Uwzględnienie nieliniowości spowodowanej mikroprocesami materii, będącej ośrodkiem pola magnetycznego

(w ferromagnetyku), zmienia w sposób zasadniczy model matematyczny maszyny, a z nim zmienia też interpretację współczynników równań jako parametrów maszyny.

Jeżeli pozostaniemy formalnie przy oznaczeniu $L(\varphi)$, to są to już nie współczynniki, lecz funkcje współrzędnych prądu, a wraz z nimi i funkcje czasu

$$L[(t); \Theta(i(t); \varphi(t))],$$

gdzie Θ - kombinacja liniowa współrzędnych prądu, zależna od położenia wirnika, związana z polem magnetycznym w maszynie równaniem Maxwella

$$\oint \frac{1}{\mu} \vec{B} d\vec{s} = \Theta.$$

Jedynie w odniesieniu do pojedynczego dławika można utrzymać się przy interpretacji pojęcia indukcyjności jako parametru dławika, odpowiednio do równania jego modelu

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi + Ri &= u \\ \Psi &= Li \end{aligned} \right\},$$

przy czym na ogół wprowadza się nowe pojęcia

$$\frac{d}{dt} \Psi = L \frac{di}{dt} + \frac{dL(i)}{di} i \frac{di}{dt},$$

gdzie $L(i)$ - krzywa indukcyjności statycznej;
 $dL(i)/di$ - krzywa indukcyjności dynamicznej.

Próby utrzymania tego modelu podczas poszukiwania analitycznych rozwiązań równania prowadzą do zastąpienia zależności $\Psi = Li$ funkcją

$$\Psi = A_1 \Psi + A_3 \Psi^3 + A_5 \Psi^5 + \dots,$$

tj. wielomianem o nieparzystych potęgach lub też inną funkcją nieparzystą, aproksymującą nieparzystą krzywą magnesowania żelaza (z pominięciem histerezy). Zespół współczynników $\{A_1, A_3, A_5, \dots\}$ odgrywa rolę parametru charakteryzującego indukcyjność maszyny. Znajomość krzywej indukcyjności dynamicznej odgrywa w praktyce pożyteczną rolę podczas rozważania małych drgań wokół położenia równowagi.

4.2.1.4. Przykład. Rozważmy maszynę obcowzbudną prądu stałego z nienasyconym obwodem magnetycznym, napędzającą mechanizm o stałym momencie obciążenia M_m oraz stałym momencie bezwładności J i współczynnikiem tarcia $D = 0$ [25].

Równanie ruchu ma postać zgodną ze wzorem (4.12)

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_e - M_m.$$

Równanie obwodów elektrycznych

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.17)$$

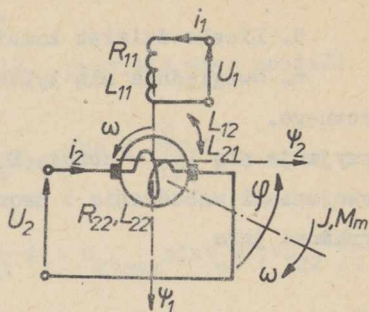
Równanie momentu elektromagnetycznego wg (4.13)

$$M_e = \frac{1}{2} [i_1; i_2] \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.18)$$

W rozważaniach całe uzwojenie twornika zastąpiono jedną cewką (rys.4.3), która obraca się o pewien kąt φ , odpowiadający działce komutatora. Po przejściu danej działki, do akcji wchodzi następna taka sama cewka itd.

Założenia:

1. Nienasycony obwód magnetyczny - przewodność magnetyczna $\lambda = \text{const.}$
2. Wirnik cylindryczny, tj. $\partial\lambda/\partial\varphi = 0$.
3. Moment bezwładności $J = \text{const.}$
4. Komutacja liniowa.



Rys.4.3. Schemat maszyny obcowzbudnej prądu stałego

5. Liczba działek komutatora $K \gg 1$.

6. Uwzględnia się tylko pierwszą harmoniczną rozkładu pola magnetycznego.

Przyjmuje się $L_{11} = \text{const}$, $L_{22} = \text{const}$. Indukcyjność wzajemna między uzwojeniami wzbudzenia i twornika, widziana od strony twornika może być wyrażona jako

$$L_{12} = k_n \lambda z_1 z_2 \cos \varphi = L_{12\max} \cos \varphi_0,$$

indukcyjność L_{21} między uzwojeniem wzbudzenia i twornika widziana od strony wzbudzenia

$$L_{21} = k_n \lambda z_1 z_2 \cos \varphi = k_n \lambda z_1 z_2 \cos (\varphi_0 + \omega \tau) = L_{21\max} \cos (\varphi_0 + \omega \tau),$$

gdzie $0 \leq \omega \tau \leq \frac{2\pi}{K}$;

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \tau,$$

τ - czas przemieszczenia się działki komutatora pod szczotką;

φ - [rad el.], gdy liczba par biegunów $p = 1$, to $\varphi = \varphi_g$ (kąt geometryczny);

$\varphi = \varphi_0 + \omega \tau$ - odpowiada elementarnej drodze kątowej przemieszczenia się danej działki pod szczotką.

Ponieważ okres $\omega \tau$ jest bardzo mały, to można przyjąć, że $\varphi = \varphi_0 + \omega \tau \approx \varphi_0$.

Po przyjęciu również, że $L_{12\max} \approx L_{21\max}$, równanie na moment przyjmie postać następującą:

$$M_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & ; & -L_{21\max} \sin \varphi \\ -L_{21\max} \sin \varphi & ; & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

skąd

$$M_e = -L_{21\max} i_1 i_2 \sin \varphi = -L_{21\max} i_1 i_2 \sin \varphi_0, \quad (4.20)$$

$$M_e \neq 0, \quad \text{gdy} \quad \varphi_0 = (2n + 1) \frac{\pi}{2},$$

przy czym $\varphi_0 = \pi/2$ dla pracy prądnicowej,
 $\varphi_0 = 3\pi/2$ dla pracy silnikowej.

Równanie obwodów elektrycznych (4.17) przyjmie więc postać:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} \frac{d}{dt} i_1 + L_{21\max} \cos \varphi_0 \frac{d}{dt} i_2 \\ L_{21\max} \cos \varphi_0 \frac{d}{dt} i_1 - L_{21\max} \sin \varphi_0 \omega i_1 + L_{22} \frac{d}{dt} i_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Dla $\varphi_0 = 3\pi/2$ (dla pracy silnikowej)

$$M_e = L_{21} i_1 i_2$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} \frac{d}{dt} i_1 \\ L_{21} i_1 \omega + L_{22} \frac{d}{dt} i_2 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Równania te można przekształcić do postaci dogodnej do przedstawienia ich w postaci blokowej

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} i_1 &= \frac{u_1}{L_{11}} - \frac{R_{11}}{L_{21}} i_1 \\ \frac{d}{dt} i_2 &= \frac{u_2}{L_{22}} - \frac{L_{21} \omega i_1}{L_{22}} - \frac{R_{22}}{L_{22}} i_2 \\ \frac{d}{dt} \omega &= \frac{L_{21} i_1}{J} i_2 - \frac{M_m}{J} \\ \frac{d}{dt} \varphi &= \omega \end{aligned} \right\}. \quad (4.23)$$

W razie stałego strumienia wzbudzenia ($\Phi = \text{const}$ - układ liniowy) i uwzględnienia uzwojenia kompensacyjnego, równania (4.23) uproszczą się (dla $i_1 = \text{const} = C_1$, $di_1/dt = 0$):

$$\left. \begin{aligned}
 i_1 &= \frac{u_1}{R_{11}} = C_1 \\
 \frac{d}{dt} i_2 &= \frac{u_2}{L_{22}} - \frac{\omega L_{21} C_1}{L_{22}} - \frac{R_{22}}{L_{22}} i_2 \\
 \frac{d}{dt} \omega &= \frac{L_{21} C_1 i_2}{J} - \frac{M}{J} \\
 \frac{d}{dt} \varphi &= \omega
 \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

4.2.2. Opis za pomocą transmitancji operatorowej

W odniesieniu do układów liniowych bardzo często do ich opisu matematycznego stosuje się transmitancję operatorową. Jeżeli układ jest opisany równaniem różniczkowym

$$\begin{aligned}
 A_n \frac{d^n x}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + A_1 \frac{dx}{dt} + A_0 x &= B_m \frac{d^m y}{dt^m} + B_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + \\
 &+ B_1 \frac{dy}{dt} + B_0 y,
 \end{aligned}$$

czyli

$$\sum_{k=0}^n A_k \frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^m B_i \frac{d^i y}{dt^i}, \quad (4.25)$$

gdzie x - sygnał wejściowy układu,

y - sygnał wyjściowy układu,

to stosując przekształcenie Laplace'a

$$\sum_{k=0}^n A_k p^k X(p) = \sum_{i=0}^m B_i p^i Y(p), \quad (4.26)$$

transmitancja operatorowa tego układu

$$G(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{k=0}^n A_k p^k}{\sum_{i=0}^m B_i p^i}. \quad (4.27)$$

Do rozważanego przykładu: silnik prądu stałego; $\Phi = \text{const}$; $J = \text{const}$; $M_m = 0$

$$\left. \begin{aligned} pI_2(p) &= \frac{1}{L_{22}} U_2(p) - \frac{k_E}{L_{22}} \Omega(p) - \frac{R_{22}}{L_{22}} I_2(p) \\ p\Omega(p) &= \frac{k_M}{J} I_2(p) \end{aligned} \right\}. \quad (4.28)$$

Stąd, po przekształceniach, transmitancja silnika

$$G(p) = \frac{\Omega(p)}{U_2(p)} = \frac{\frac{1}{k_E}}{\frac{JL_{22}R_{22}}{k_M k_E R_{22}} p^2 + \frac{JR_{22}}{k_M k_E} p + 1} = \frac{k_s}{T_e T_M p^2 + T_M p + 1}, \quad (4.29)$$

przy czym $T_e = L_{22}/R_{22}$ - elektromagnetyczna stała czasowa silnika,

$T_m = JR_{22}/k_E k_M$ - elektromechaniczna stała czasowa silnika.

Disponując transmitancjami elementów elektromechanicznych można zbudować schemat strukturalny, składający się z bloków, zawierających poszczególne transmitancje, połączonych liniami sygnałowymi. W tym etapie jest możliwe uproszczenie modelu matematycznego przez pominięcie transmitancji zawierających stałe czasowe, znacznie mniejsze od największych stałych czasowych występujących w schemacie strukturalnym.

Potrzeba stosowania modeli strukturalnych jest związana z tym, że podczas badania za pomocą maszyn analogowych zostaje zachowana struktura badanego obiektu i dlatego na modelu łatwo można odwzorować zmianę poszczególnych parametrów, sposób połączeń różnych urządzeń stabilizujących, wybór sprzężeń zwrotnych, koniecznych do uzyskania odpowiedniej jakości stanu nieustalonego układu.

Podczas modelowania strukturalnego jest możliwe zachowanie podstawowych sprzężeń wewnętrznych i zewnętrznych oraz kierunków sygnałów wejściowych i wyjściowych układu.

Jest ponadto bardzo dogodnie, jeżeli zmiana parametrów układu (współczynników wzmocnienia, stałych czasowych i in.) na modelu może być dokonana za pomocą zmiany współczynnika wzmocnienia nie więcej niż jednego lub dwóch bloków operacyjnych.

4.2.3. Opis w przestrzeni stanów

Do analizy dynamiki liniowych i nieliniowych układów elektromechanicznych, tworzących układy automatycznej regulacji, zwłaszcza w przypadku problemu syntezy (optymalizacji) tych układów, stosuje się opis w przestrzeni stanów.

Jest dany układ dynamiczny, opisany za pomocą modelu matematycznego zorientowanego, tj. takiego, w którym zostały wybrane grupy sygnałów wejściowych, czyli został określony kierunek przesyłania sygnałów (rys.4.4).



Rys.4.4. Schemat blokowy układu dynamicznego

Układ taki można opisać w następujący sposób:

$$Y(t) = S[V(t)], \quad (4.30)$$

gdzie $V(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \end{bmatrix}$ - wektor sygnałów wejściowych,

$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$ - wektor sygnałów wyjściowych,

S - operator przyporządkowujący sobie wektory V i Y . W ogólnym przypadku operator S może zależeć od t , $V(t)$ i $Y(t)$. Może zawierać takie operacje, jak różniczkowanie, całkowanie, przesunięcie w czasie itp. Zależność (4.30) jest jednoznaczna, jeżeli rozpatrujemy związek wektora $Y(t)$ z $V(t)$ w przedziale czasu $(-\infty, t)$. W rzeczy-

wistości jednak rozpoczynamy obserwację w chwili t_0 i obserwujemy układ w okresie (t_0, t) . Dlatego w celu jednoznacznego przyporządkowania funkcji $Y(t)$ funkcji $V(t)$ w określonym czasie (t_0, t) na podstawie zależności (4.30), należy podać wektor $X(t_0)$, reprezentujący informacje o układzie, dotyczące czasu $(-\infty, t_0)$ tak, aby zależność

$$Y(t) = F[X(t_0); V(t)] \quad \text{dla} \quad t_0 < \tau < t, \quad (4.31)$$

spełniając równanie (4.30), determinowała wektor $Y(t)$ dla każdej chwili czasu $t > t_0$ i dla każdej funkcji wektorowej $V(t)$, określonej w przedziale czasu (t_0, t) .

Wektor $X(t_0)$ nazywamy wektorem stanu układu dynamicznego lub stanem układu w chwili t_0 .

Znajomość stanu układu w chwili t_0 , rozpoczynającej obserwację układu, zastępuje obserwację tego układu w "przeszłości", więc dla $(-\infty, t_0)$.

W ten sposób do każdej pary funkcji $V(t)$ i $X(t)$, spełniającej zależność (4.30), jest przyporządkowany wektor stanu

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

określony w n -wymiarowej przestrzeni, zwanej przestrzenią stanów (przestrzeń fazowa).

Teraz układ dynamiczny można opisać dwoma równaniami:

1. Równanie wiążące stan układu w chwili t ze stanem w chwili t_0 i wektorem sygnałów wejściowych

$$X(t) = \Phi[X(t_0); V(t)] \quad \text{dla} \quad t_0 < \tau < t. \quad (4.32)$$

2. Równanie wiążące wektor sygnałów wyjściowych w chwili t ze stanem w chwili t_0 i wektorem sygnałów wejściowych

$$Y(t) = Y[X(t_0); V(t)] \quad \text{dla} \quad t_0 < \tau < t. \quad (4.33)$$

Stan układu może być przedstawiony jako punkt $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Punkt ten zmienia swe położenie zgodnie z zachowaniem się układu pod wpływem wymuszenia lub nagromadzenia w układzie energii, kreśląc w przestrzeni stanów krzywą, zwaną trajektorią stanu układu (trajektoria fazowa układu).

W celu wyjaśnienia związków zmian zachodzących w układzie ze stanem układu oraz sygnałem wejściowym, najczęściej korzysta się z równań opisujących układ fizyczny. Wybiera się jako współrzędne wektora stanu wielkości występujące w tych równaniach. Model matematyczny układu sprowadza się wówczas do postaci równania stanu i równania wyjść

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}(t) &= f[X(t); V(t); t] \\ Y(t) &= g[X(t); V(t); t] \end{aligned} \right\}, \quad (4.34)$$

gdzie $\dot{X}(t)$ - prędkość zmian wektora stanu.

W razie występowania liniowego układu dynamicznego, układ równań (4.34) przyjmuje postać

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t) X(t) + B(t) V(t) \\ Y(t) &= C(t) X(t) + D(t) V(t) \end{aligned} \right\}, \quad (4.35)$$

przy czym $A(t)$ - macierzowa funkcja t o wymiarze $[n \times n]$; (n - wymiar wektora stanu),

$B(t)$ - macierzowa funkcja t o wymiarze $[n \times m]$, (m - liczba współrzędnych wektora sygnałów wejściowych),

$C(t)$ - macierzowa funkcja t o wymiarze $[p \times n]$; (p - liczba współrzędnych wektora sygnałów wyjściowych),

$D(t)$ - macierzowa funkcja t o wymiarze $[p \times m]$.

Zależności (4.35) charakteryzują liniowy, ciągły i w ogólnym przypadku niestacjonarny układ dynamiczny. Jeżeli funkcje macierzowe A , B , C i D są niezależne od czasu, to układ dynamiczny jest stacjonarny.

Dla rozpatrywanego silnika prądu stałego przy stałym Φ wzbudz. można przyjąć następujący wektor stanu:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \\ i_2 \end{bmatrix}; \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix}; \quad (4.36)$$

czyli

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{V},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_1 L_{21}}{J} \\ 0 & -\frac{C_1 L_{21}}{L_{22}} & \frac{R_{22}}{L_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{J} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_m \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

4.3. Modele matematyczne maszyn prądu stałego

We współczesnych układach elektromechanicznych stosuje się odmiany maszyn prądu stałego, które można klasyfikować w różny sposób. Z punktu widzenia dynamiki tych układów dogodnie jest przyjąć jako kryterium charakter przemian energii, zachodzących w maszynach prądu stałego, co prowadzi do podziału ich na następujące grupy:

a) maszyny prądu stałego, w których następuje przemiana energii elektrycznej w mechaniczną; są to silniki podlegające (zależnie od rodzaju wzbudzenia) dalszemu podziałowi na obcowzbudne, bocznikowe, szeregowo i bocznikowo-szeregowe;

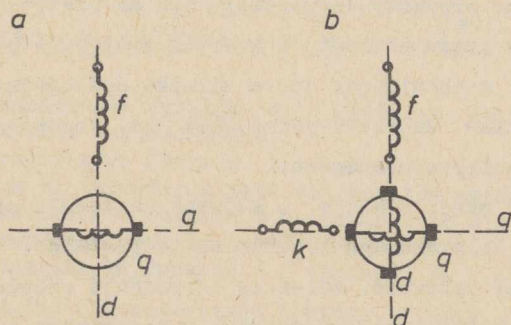
b) maszyny prądu stałego, w których następuje przemiana energii mechanicznej w elektromagnetyczną; są to prądnice i wzmacniacze elektromaszynowe; pierwsze, zależnie od rodzaju wzbudzenia, dzielą się następnie na obcowzbudne, bocznikowe i bocznikowo-szeregowe, a drugie - zależnie od zasady działania - na amplidyny, rototrole, magnikony, rapidyny i inne.

Podany podział według charakteru przemian energii jest podziałem funkcjonalnym, ustalonym na podstawie stanów, w jakich dana maszyna pracuje w układzie elektromechanicznym.

W określonych warunkach można jak wiadomo spowodować odpowiednie zmiany przemian energii w maszynie, co pociąga za sobą zmianę rodzaju pracy. Wtedy np. maszyna przechodzi z pracy silnikowej na prądnicową lub hamulcową - albo też odwrotnie. W związku z tym jest uza-

sadnione przyjęcie za punkt wyjścia ogólnego równania, dotyczącego wszystkich maszyn prądu stałego, a następnie dla poszczególnych grup wyodrębnionych już wyznaczać określone obowiązujące zależności, wynikające z konkretnych warunków pracy.

Biorąc pod uwagę najprostsze uzwojenie twornika maszyny prądu stałego, można stwierdzić, że szczotki dzielą to uzwojenie na dwie gałęzie równoległe, których położenie w przestrzeni pozostaje stałe. Podczas wirowania twornika zmieniać się będzie tylko przynależność poszczególnych zwojów do różnych gałęzi. Jeśli przyjmie się, że w zwojach twornika płynie prąd, to wytworzy on swoje własne pole, prawie nieruchome w przestrzeni, którego geometryczną osią będzie oś szczotek. Nazywa się ją osią poprzeczną maszyny i oznacza literą q - oś poprzeczna d jest wyznaczona osią biegunów głównych. Wobec tego do ogólnych rozważań często zastępuje się uzwojenie twornika jedną zastępczą cewką w osi q (rys. 4.5a). Jeżeli w specjalnych przypadkach na wirniku jest ustawiony podwójny komplet szczotek, to uzwojenie można przedstawić w postaci dwóch zastępczych cewek (rys. 4.5b).



Rys.4.5. Schemat ideowy maszyny: a) z pojedynczym układem szczotek, b) z podwójnym układem szczotek

Podstawą do ogólnego opisu może być maszyna z podwójnym układem szczotek na tworniku, która ma po jednym uzwojeniu na stojanie w każdej osi (rys. 4.5b).

Do analizy przyjmuje się następujące założenia upraszczające:

- pominięcie zjawiska histerezy obwodów magnetycznych maszyn;
- pominięcie efektów tłumiących związanych z prądami wirowymi w maszynnych częściach obwodów maszyn;

- pominięcie zjawiska nasycania się obwodu magnetycznego maszyny.

Przy wymienionych założeniach ogólne rozważania na podstawie zasady Hamiltona i równań Lagrange'a prowadzą do ułożenia następujących równań dotyczących takiej maszyny:

$$\begin{bmatrix} u_f \\ u_k \\ u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f & & & \\ & R_k & & \\ & & R_d & \\ & & & R_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_k \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_f & 0 & M_{fd} & 0 \\ 0 & L_k & 0 & M_{kq} \\ M_{df} & 0 & L_d & 0 \\ 0 & M_{qk} & 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_k \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \\
 + \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_q^k & 0 & -M_q^q \\ M_d^f & 0 & M_d^d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_k \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

w których R - rezystancje uzwojeń;

L - współczynniki indukcji własnej uzwojeń;

M_{xy} - współczynniki indukcji wzajemnej pomiędzy uzwojeniami x i y , leżącymi w tej samej osi (np. M_{qk} wyraża sprzężenie pomiędzy uzwojeniem poprzecznym q na tworniku a uzwojeniem komutacyjnym k na stojanie);

M_{xy}^y - rotacyjny współczynnik indukcji od uzwojenia y , wytwarzającego pole w osi x (np. M_d^f - współczynnik od uzwojenia wzbudzenia f umieszczonego w osi d); znaki przy tych współczynnikach są kwestią umowy.

Równanie elektromechaniczne względem współrzędnej geometrycznej ϕ przyjmie postać (przy momencie bezwładności $J = \text{const}$)

$$J \frac{d^2 \phi}{dt^2} + D \frac{d \phi}{dt} = M_m(t; \phi; \dot{\phi}) + \left[\frac{1}{2} M_d^f i_q i_f + M_q^k i_d i_k + \frac{1}{2} (M_d^d - M_q^q) i_d i_q \right]. \quad (4.31)$$

Tego typu maszyna prądu stałego z podwójnym układem szczotek na tworniku jest w praktyce stosowana jednak raczej rzadko. W ten sposób są wykonywane niektóre prądnice specjalne i wzmacniacze elektro-

maszynowe - w przemyśle są to najczęściej amplidyny. Nigdy nie mają podwójnego układu szczotek silniki, których liczbowo w eksploatacji jest znacznie więcej niż prądnic. W związku z tym nie ma potrzeby wyprowadzać równania elektromechanicznego dla maszyny z podwójnym układem szczotek. Tego typu prądnice mają bowiem zawsze niewielką moc i przyjmuje się, że pracują ze stałą prędkością $\omega = \text{const}$, która nie zależy od ich obciążenia.

Ogromna większość maszyn prądu stałego jest wykonywana z pojedynczym układem szczotek. W rozważaniach dotyczących dynamiki tych maszyn należy rozróżniać dwa przypadki:

1. Szczotki są wysunięte ze strefy geometrycznie obojętnej.
2. Szczotki są ustawione dokładnie w strefie geometrycznie obojętnej.

W pierwszym przypadku trzeba uzwojenie twornika podzielić na dwa wyobrażone uzwojenia, z których jedno jest zorientowane według osi poprzecznej i odpowiada części rzeczywistego uzwojenia rozłożonej na łuku o długości

$$l_q = \tau \frac{\pi - 2\delta}{\pi}, \quad (4.40)$$

w którym τ - podziałka biegunowa;

δ - kąt, o jaki wysunięto szczotki ze strefy geometrycznie obojętnej.

Drugie wyobrażone uzwojenie jest zorientowane według osi podłużnej i odpowiada części rzeczywistego uzwojenia, rozłożonej na łuku o długości

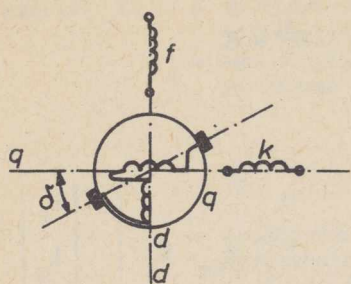
$$l_d = \tau \frac{2\delta}{\pi}. \quad (4.41)$$

Wydzielając dwie części uzwojenia twornika uzyskuje się maszynę jak na rys. 4.6, którą można rozpatrywać analogicznie jak maszynę z podwójnym układem szczotek, modyfikując odpowiednio równanie (4.38).

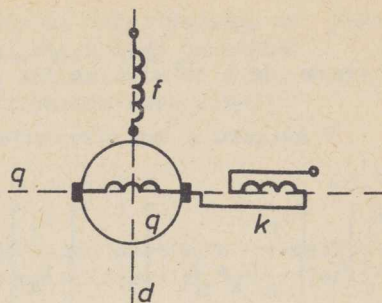
Ponieważ wydzielone uzwojenia twornika są połączone szeregowo i tworzą jeden obwód, obowiązują następujące zależności:

$$u_d = u_q; \quad i_d = i_q,$$

oraz $M_{df} = M_{qf}$.



Rys.4.6. Schemat ideowy maszyny prądu stałego z pojedynczym układem szczotek, dotyczący przypadku gdy szczotki są wysunięte o kąt δ ze strefy geometrycznie obojętnej



Rys.4.7. Typowy schemat maszyny z pojedynczym układem szczotek

Zatem zależności (4.38) i (4.39) przybierają postać

$$\begin{bmatrix} u_f \\ u_k \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f & & \\ & R_k & \\ & & (R_d + R_q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_k \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_f & 0 & M_{fd} \\ 0 & L_k & M_{qk} \\ M_{df} & M_{qk} & (L_d + L_q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_k \\ i_q \end{bmatrix} +$$

$$+ \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_d^f & -M_q^k & (M_d^d - M_q^d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_k \\ i_q \end{bmatrix}; \quad (4.42)$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \frac{d\varphi}{dt} = M_m(t; \varphi; \dot{\varphi}) + \left[\pm M_d^f i_q i_f \mp M_q^k i_q i_k \pm \right.$$

$$\left. \mp (M_d^d - M_q^d) i_q^2 \right]. \quad (4.43)$$

W razie ustawienia szczotek w strefie geometrycznie obojętnej, uzwojenie twornika jest zorientowane według osi poprzecznej q (rys. 4.7), równania (4.38) i (4.39) ulegają natomiast znacznemu uproszczeniu, ponieważ

$$u_d = 0; \quad i_d = 0; \quad M_{fd} = 0; \quad M_{df} = 0; \quad R_d = 0;$$

$$L_d = 0; \quad M_d^d = 0; \quad M_q^q = 0; \quad M_q^k = 0.$$

W związku z tym otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} u_f \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f \\ (R_k + R_q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_f & 0 \\ 0 & (L_q - M_{kq} - L_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_q \end{bmatrix} + \\ + \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_d^f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_q \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \frac{d\varphi}{dt} = M_m(t; \varphi; \dot{\varphi}) + M_d^f i_f i_q. \quad (4.45)$$

W najprostszym przykładzie maszyna prądu stałego może mieć tylko dwa uzwojenia: jedno na stojanie w osi d i jedno na wirniku w osi q (rys. 4.5a), co można przedstawić jako

$$\begin{bmatrix} u_f \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f \\ R_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_f \\ L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_q \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_d^f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_q \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

oraz równanie ruchu jak (4.45).

Po rozwinięciu macierzy otrzymuje się dwa równania różniczkowe (jedno dla obwodu wzbudzenia, drugie dla obwodu twornika), które wspólnie z równaniem ruchu tworzą układ opisujący zachowanie się silnika obcowzbudnego prądu stałego

$$u_w = R_w i_w + L_w \frac{di_w}{dt}, \quad (4.47)$$

$$u_{tw} = c_E \Phi(t) \omega(t) + R_{tw} i_{tw} + L_{tw} \frac{di_{tw}}{dt}, \quad (4.48)$$

$$c_M \Phi(t) i_{tw} + M_m(t; \varphi; \dot{\varphi}) = J \frac{d\omega(t)}{dt}. \quad (4.49)$$

w którym $\Phi(t)$ - chwilowa wartość strumienia magnetycznego na przestrzeni jednej podziałki biegunowej twornika;
 c_E - współczynnik (stały w odniesieniu do danej maszyny) we wzorze na siłę elektromotoryczną rotacji

$$e_r = \omega(t) \cdot M_d^f i_f = c_E \Phi(t) \omega(t); \quad (4.50)$$

c_M - współczynnik (stały do danej maszyny) we wzorze na moment elektromagnetyczny silnika; $c_M = c_E$ jeśli ω jest wyrażone w [rad/s]

$$M_e(t) = M_d^f i_f i_q = c_M \Phi(t) i_{tw}. \quad (4.51)$$

Postać równań (4.47) - (4.51) jest identyczna jak w przykładzie zawartym w pktcie 4.2.

Przebiegi czasowe prądu wzbudzenia silnika zależą od następujących czynników:

- oddziaływania twornika;
- prądów wirowych i prądów w zezwojach komutujących;
- stanu nasycenia obwodu magnetycznego.

Oddziaływanie twornika najczęściej bywa pomijane. W maszynach z uzwojeniem kompensacyjnym można uważać, że zostało ono praktycznie zniesione. Uwzględnianie prądów wirowych i prądów w zezwojach komutujących prowadzi do rozpatrzenia obwodu wzbudzenia jako pierwotnego obwodu wyobrażonego transformatora, w którego obwodzie wtórnym płyną prądy wirowe i prądy w zezwojach komutujących. Można także wprowadzać zastępczą indukcyjność uzwojenia wzbudzającego, uwzględniając w przybliżeniu wpływ prądów wirowych w zezwojach komutujących.

Znaczne trudności powstają również po uwzględnieniu nasycania się obwodu magnetycznego maszyny. Indukcyjność zastępcza L_w staje się wtedy funkcją prądu i_w , co znacznie komplikuje analizę, dlatego najczęściej przyjmuje się dalsze uproszczenia, polegające na założeniu, że obwód maszyny jest nienasycony, a zatem indukcyjność L_w jest stała.

W ogólnym przypadku, przy zmieniającym się prądzie wzbudzenia i_w , po uwzględnieniu nasycenia oraz zmienności momentu zewnętrznego, wyznaczenie przebiegów prądu twornika $i_{tw}(t)$, momentu elektromagne-

tycznego (wewnętrznego) silnika $M_e(t)$ i prędkości $\omega(t)$ stwarza poważne trudności i z reguły trzeba szukać rozwiązań konkretnych układów za pomocą maszyn matematycznych.

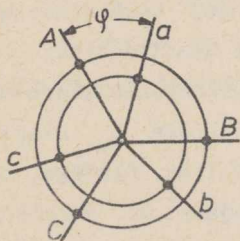
4.4. Model matematyczny maszyny asynchronicznej

4.4.1. Równania różniczkowe silnika asynchronicznego

Silnik asynchroniczny jest podstawowym elementem wielu układów napędowych, a obecnie, dzięki zastosowaniu tyrystorowych układów przekształtnikowych, umożliwia zastąpienie silnika prądu stałego.

W związku z tym staje się niezbędne dokładniejsze poznanie procesów przejściowych w takim napędzie. W tym celu należy przyjąć możliwie dokładny model matematyczny maszyny asynchronicznej. Podczas tworzenia tego modelu przyjmuje się zazwyczaj następujące założenia upraszczające:

- pomija się nasycenie obwodu magnetycznego;
- pomija się straty mocy w rdzeniu i wpływ żłobków;
- zakłada się pełną symetrię obwodów elektrycznych;
- zakłada się równomierność szczeliny powietrznej;
- nie uwzględnia się wyższych przestrzennych harmonicznych pola szczelinowego, co znaczy że pole magnetyczne każdego uzwojenia uważa się za rozłożone sinusoidalnie wzdłuż obwodu maszyny.



Rys.4.8. Przestrzenny rozkład osi uzwojeń trójfazowego silnika asynchronicznego

Po tych założeniach rozpatruje się maszynę asynchroniczną jako układ sprzężonych magnetycznie uzwojeń, umieszczonych na stojanie i wirniku, przy czym współczynniki indukcyjności wzajemnej tych uzwojeń są funkcjami położenia cewek względem siebie, a więc przy różnej od zera prędkości kątowej wirnika, są funkcjami czasu.

Przyjmując przestrzenny rozkład uzwojeń maszyny jak na rys. 4.8 funkcjonał przemiany energii (4.11a) można zapisać następująco:

$$I = \int_0^t \left[\sum_{s=1}^6 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{2} M_{sk} \dot{Q}_s \dot{Q}_k + J \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \sum_{k=1}^6 \int_0^{t_1} U_k \dot{Q}_k dt_1 - \int_0^{t_1} M_m \dot{\varphi} dt_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \int_0^{t_1} R_k \dot{Q}_k^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} D \dot{\varphi}^2 dt_1 \right] dt, \quad (4.52)$$

- w którym
- Q_s - ładunek elektryczny s -tego obwodu elektrycznego maszyny;
 - M_{sk} - współczynniki indukcyjności wzajemnej między s -tym i k -tym obwodem;
 - M_{kk} - współczynnik indukcyjności własnej k -tego obwodu;
 - U_k - napięcie k -tego obwodu elektrycznego;
 - R_k - rezystancja k -tego obwodu elektrycznego;
 - D - współczynnik dyssypacji mechanicznej;
 - J - moment bezwładności mechanicznej części układu;
 - φ - kąt między uzwojeniem stojana i wirnika (rys. 4.8) (w rad el.);
 - M_m - moment mechaniczny.

Rzeczywisty proces przemiany energii spełnia warunki stacjonarności tego funkcjonału. Możemy więc, stosując warunki Eulera (4.10), wyznaczyć ekstremalne współrzędnych poszczególnych funkcji energii.

Układ równań ekstremal obwodów elektrycznych maszyny asynchronicznej trójfazowej jest następujący:

$$u_f = R_f i_f + \frac{d}{dt} L_f i_f \\ \psi_f = L_f i_f, \\ M_e = \frac{1}{2} i_f^T \frac{\partial L_f}{\partial \varphi} i_f \quad (4.53)$$

- w którym
- $u_f = [u_a^s; u_b^s; u_c^s; u_a^r; u_b^r; u_c^r]^T$ - wektor napięć stojana i wirnika; (4.54)
 - $i_f = [i_a^s; i_b^s; i_c^s; i_a^r; i_b^r; i_c^r]^T$ - wektor prądów stojana i wirnika (4.55)

$$R_f = \text{diag} (R_s; R_s; R_s; R_r; R_r; R_r); \quad (4.56)$$

$$L_f = \begin{bmatrix} s & sr \\ L_{abc}; L_{abc} & L_{abc} \\ rs & r \\ L_{abc}; L_{abc} \end{bmatrix}; \quad L_{abc} = \begin{bmatrix} L_1 & M_1 & M_1 \\ M_1 & L_1 & M_1 \\ M_1 & M_1 & M_1 \end{bmatrix}; \quad L_{abc} = \begin{bmatrix} L_2 & M_2 & M_2 \\ M_2 & L_2 & M_2 \\ M_2 & M_2 & L_2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$L_{abc}^{rs} = \begin{bmatrix} M_{12} \cos \varphi & ; & M_{12} \cos (\varphi - 120^\circ); & M_{12} \cos (\varphi + 120^\circ) \\ M_{12} \cos (\varphi + 120^\circ); & M_{12} \cos \varphi & ; & M_{12} \cos (\varphi - 120^\circ); \\ M_{12} \cos (\varphi - 120^\circ); & M_{12} \cos (\varphi + 120^\circ); & M_{12} \cos \varphi & \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$L_{abc}^{sr} = \left[L_{abc}^{rs} \right]^T; \quad (4.59)$$

R_s, R_r - rezystancja fazy stojana i odpowiednio wirnika;

L_1, L_2 - indukcyjność własna fazy stojana i odpowiednio wirnika;

M_1, M_2 - indukcyjność wzajemna fazy stojana i odpowiednio wirnika;

M_{12} - maksymalna wartość indukcyjności wzajemnej między dowolną fazą stojana a wirnika.

Ekstremala względem współrzędnej mechanicznej φ :

$$\frac{d}{dt} J \dot{\varphi} + D \dot{\varphi} = \frac{1}{2} i_f^T \frac{\partial L_f}{\partial \varphi} i_f + M_m. \quad (4.60)$$

Jeśli moment bezwładności J jest stały, to

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} i_f^T \frac{\partial L_f}{\partial \varphi} i_f + M_m. \quad (4.60a)$$

Układ równań (4.53) - (4.60) określa całość procesów przejściowych w silniku asynchronicznym, ale jest bardzo trudny do analizy ze względu m.in. na nieliniowość równań różniczkowych.

4.4.2. Cel transformacji układu współrzędnych

Podane równania różniczkowe, opisujące dynamikę silnika asynchronicznego, są równaniami o skomplikowanej strukturze (nieliniowej), utworzonej na podstawie trudno mierzalnych parametrów przetwornika elektromechanicznego. Transformując układ współrzędnych można te równania przekształcić do postaci wygodnej do dalszych przekształceń. Ponieważ równania te mają dać odpowiedź dotyczącą nie tylko charakteru zmian współrzędnych, ale również wielkości energetycznych (straty mocy, energie zawarte w układzie, momenty itp.), obliczanych z tych współrzędnych, żąda się aby dokonywane transformacje równań nie zmieniały tych wielkości, czyli by te wielkości energetyczne były niezmiennikami dokonywanych transformacji. W celu spełnienia tego warunku, stosowane transformacje muszą być kontrgradientnymi i ortogonalnymi.

Wybór transformacji układu współrzędnych będzie zależeć od celu tej operacji oraz od skuteczności jej zastosowania. Ogólnie można stwierdzić, że podczas wyboru transformacji danego układu równań do innej postaci, reprezentującej nowy model matematyczny badanego obiektu, należy brać pod uwagę następujące postulaty:

- nowa postać równań powinna być mniej skomplikowana i szybciej prowadzić do rozwiązania;
- występujące parametry nowego modelu powinny być łatwo identyfikowalne;
- nowy model matematyczny powinien charakteryzować się prostą interpretacją i być bardziej przejrzysty;
- powinien w prosty sposób umożliwiać uwzględnienie interesujących nas warunków pracy układu;
- transformacja nie powinna zależeć od parametrów układu, a więc powinna obowiązywać dla stosunkowo szerokiej klasy układów.

Jest oczywiste, że wszystkie transformacje nie spełniają wszystkich wymienionych postulatów. Z tego też względu użycie tej czy innej transformacji uzależnia się często od celu badań danego obiektu.

4.4.3. Transformacje układu równań różniczkowych silnika asynchronicznego

Transformacje układu współrzędnych są stosowane na ogół w wielofazowych przetwornikach elektromechanicznych, z reguły z jednym mechanicznym stopniem swobody. Z tego też względu transformacji poddaje się współrzędne elektryczne. Istota transformacji polega na zastąpieniu wektorów współrzędnych elektrycznych pewnymi wektorami zastępczymi.

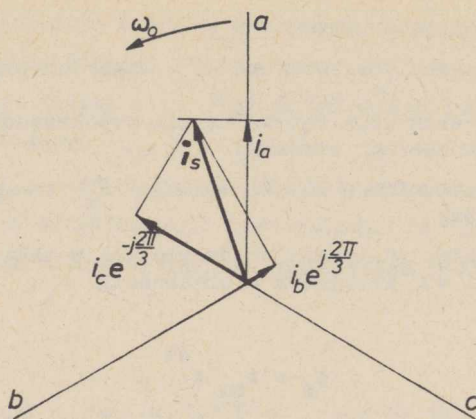
W szczelinie powietrznej maszyn symetrycznych, zasilanych trójfazowym symetrycznym napięciem o stałej częstotliwości, w rezultacie działania prądów w uzwojeniach wszystkich trzech faz, powstaje wirujące pole magnetyczne o stałej amplitudzie. Jeśli "rozwinie się" maszynę wzdłuż szczeliny powietrznej i dokona się superpozycji pulsującego pola wszystkich faz, to powstanie sinusoidalna fala indukcji magnetycznej, poruszająca się wzdłuż szczeliny. Pole wirujące można przedstawić za pomocą zastępczego wektora o amplitudzie równej modułowi wypadkowej fali sinusoidalnej i skierowanego zgodnie z tą amplitudą.

Wektor ten wiruje w szczelinie powietrznej z prędkością synchroniczną, odpowiadającą częstotliwości sieci. W dowolnej chwili czasu wirujący ze stałą prędkością wektor wypadkowej siły magnetomotorycznej jest określany za pomocą chwilowych wartości sił magnetomotorycznych poszczególnych faz i odwrotnie.

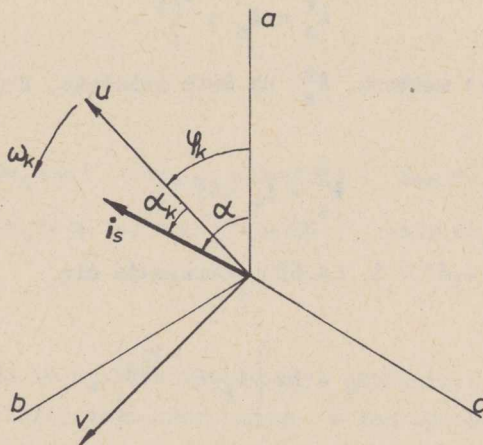
W danej maszynie, za pomocą takiego wirującego wektora można zastępować również inne wielkości fizyczne, np. prądy lub napięcia. Tak więc zastępczy wektor prądu stojana można określić według następującej zależności (zgodnie z rys. 4.9):

$$\dot{i}_s = \frac{2}{3} \left(i_a + e^{j\frac{2\pi}{3}} i_b + e^{-j\frac{2\pi}{3}} i_c \right). \quad (4.61)$$

Rzuty wektora $\dot{i}_s$ na osi uzwojeń poszczególnych faz określają chwilowe wartości prądów fazowych. Zastępczy wektor prądu można rozłożyć



Rys.4.9. Wektor zastępczy prądów stojana

Rys.4.10. Układ współrzędnych prostokątnych wirujących z prędkością ω_k

żyć na składową rzeczywistą i urojoną, rzutując go na osie prostokątne (u, v) , wirujące z dowolną prędkością ω_k (rys. 4.10).

Zgodnie z rysunkiem 4.10 zastępczy wektor prądu stojana, w układzie współrzędnych prostokątnych, można opisać następującą zależnością:

$$\dot{i}_s^k = i_{sm} e^{j\phi_k}, \quad (4.62)$$

- w której i_{sm} - amplituda wektora $\dot{i}_s$;
 α_k - przesunięcie wektora $\dot{i}_s$ względem układu współrzędnych (u, v) ($\alpha_k = \varphi - \varphi_k$);
 φ_k - przesunięcie katowe układu współrzędnych (u, v) względem osi a stojana;
 φ - przesunięcie katowe wektora $\dot{i}_s$ względem osi a stojana;
 $\dot{i}_s^k$ - wektor zastępczy prądu stojana w układzie współrzędnych (u, v) , wirującym z prędkością ω_k .

Uwzględniając, że

$$\dot{i}_s = i_{sm} e^{j\varphi},$$

otrzymuje się

$$\dot{i}_s^k = \dot{i}_s e^{-j\varphi_k}. \quad (4.63)$$

Po rozłożeniu wektora $\dot{i}_s^k$ na dwie składowe, skierowane zgodnie z osiami u i v

$$\dot{i}_s^k = i_u + j i_v \quad (4.64)$$

i uwzględnieniu (4.61) i (4.63), otrzymuje się

$$i_u = \operatorname{Re} \left\{ \dot{i}_s e^{-j\varphi_k} \right\}, \quad (4.65)$$

$$i_v = \operatorname{Im} \left\{ \dot{i}_s e^{-j\varphi_k} \right\}, \quad (4.66)$$

czyli

$$i_u = \frac{2}{3} \left[i_a \cos \varphi_k + i_b \cos \left(\varphi_k - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left(\varphi_k + \frac{2\pi}{3} \right) \right], \quad (4.67)$$

$$i_v = -\frac{2}{3} \left[i_a \sin \varphi_k + i_b \sin \left(\varphi_k - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left(\varphi_k + \frac{2\pi}{3} \right) \right]. \quad (4.68)$$

Wyrażenia (4.67) i (4.68), dotyczące prądów stojana oraz analogiczne do prądów wirnika, tworzą tzw. wzory przekształceniowe, tzn.

zależności transformujące zmienne rzeczywistej maszyny trójfazowej do zmiennych idealnej dwufazowej maszyny asynchronicznej. W celu umożliwienia całkowitego zastąpienia trzech zmiennych rzeczywistych i_a, i_b, i_c dwiema zmiennymi i_u, i_v , należy wprowadzić prąd $i_o = 1/3 (i_a + i_b + i_c)$, zwany prądem kolejności zerowej.

Tak utworzona transformacja jest opisana w literaturze jako transformacja Parka, która w zapisie macierzowym przyjmuje następującą postać:

dla stojana

$$T_s = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \omega_k t & \cos (\omega_k t - 120^\circ) & \cos (\omega_k t + 120^\circ) \\ -\sin \omega_k t & -\sin (\omega_k t - 120^\circ) & -\sin (\omega_k t + 120^\circ) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad (4.69)$$

dla wirnika

$$T_r = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos (\omega_k t - \varphi) & \cos (\omega_k t - \varphi - 120^\circ) & \cos (\omega_k t - \varphi + 120^\circ) \\ -\sin (\omega_k t - \varphi) & -\sin (\omega_k t - \varphi - 120^\circ) & -\sin (\omega_k t - \varphi + 120^\circ) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Transformacja ta przekształca prądy, napięcia i strumienie skorzarzone fazowo silnika asynchronicznego w ten sposób, że

$$i_s = T_s i_f^s; \quad i_r = T_r i_f^r, \quad (4.71)$$

$$u_s = T_s u_f^s; \quad u_r = T_r u_f^r, \quad (4.72)$$

$$\psi_s = T_s \psi_f^s; \quad \psi_r = T_r \psi_f^r, \quad (4.73)$$

gdzie $i_f^s, u_f^s, \psi_f^s, i_f^r, u_f^r, \psi_f^r$ - wektory prądów, napięć i strumieni skorzarzonych stojana (s) i odpowiednio wirnika (r) przed transformacją (we współrzędnych fazowych);

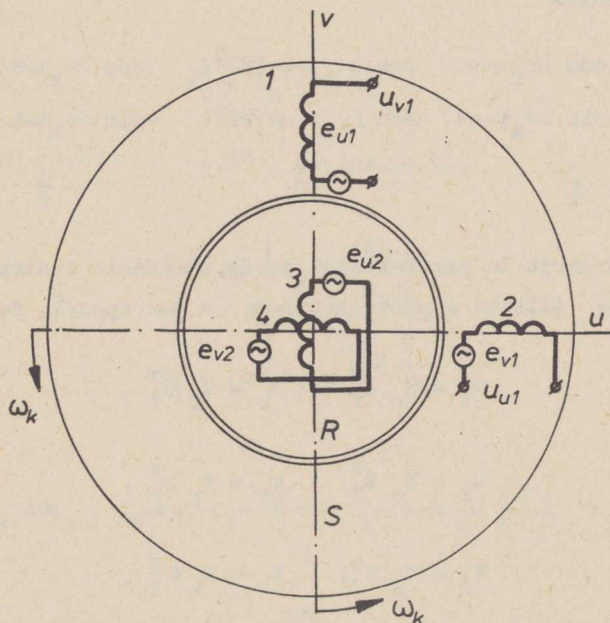
$\dot{i}_s, u_s, \Psi_s, \dot{i}_r, u_r, \Psi_r$ - wektory prądów, napięć i strumieni skojarzonych stojana i odpowiednio wirnika po transformacji;

$$\dot{i}_s = \begin{bmatrix} i_{u1} \\ i_{v1} \\ i_{o1} \end{bmatrix}; \quad \dot{i}_r = \begin{bmatrix} i_{u2} \\ i_{v2} \\ i_{o2} \end{bmatrix};$$

i_{o1}, i_{o2} - prądy kolejności zerowej.

W razie rozpatrywania silnika klatkowego $i_{o2} = 0$ oraz $u_u = u_v = 0$.

Transformacja Parka przekształca układ współrzędnych fazowych (trzyosiowy) rzeczywistej maszyny asynchronicznej do układu współrzędnych prostokątnych (dwuosiowy), używanego w teorii maszyny uogólnionej.



Rys.4.11. Schemat równoważny idealnej dwufazowej maszyny asynchronicznej: 1 - uzwojenie stojana v_1 , 2 - uzwojenie stojana u_1 , 3 - uzwojenie wirnika v_2 , 4 - uzwojenie wirnika u_2 , R - wirnik, S - stojan

Na rysunku 4.11 przedstawiono schemat równoważny maszyny asynchronicznej po transformacji z trzyosiowego układu współrzędnych do dwuosiowego. Uzwojenia stojana i wirnika są nieruchome względem siebie i umieszczone wzdłuż osi u oraz v prostokątnego układu współrzędnych, przy czym obie te osie w przypadku ogólnym wirują w przestrzeni z dowolną prędkością kątową ω_k . W każdym uzwojeniu są połączone dodatkowe siły elektromotoryczne, uwzględniające, oprócz ruchu obrotowego wirnika względem stojana w rzeczywistej maszynie asynchronicznej, także wartość prędkości ω_k układu współrzędnych $(u, v, 0)$.

Transformacja Parka T jest ortogonalna

$$T^T T^{-1} = 1,$$

co zapewnia niezmienniczość mocy podczas transformacji napięć i prądów z układu współrzędnych fazowych (a, b, c) do układu $(u, v, 0)$.

Transformacja odwrotna

$$i_f^s = T_s^{-1} i_s; \quad i_f^r = T_r^{-1} i_r.$$

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń i uwzględnieniu zależności (4.71) - (4.73), równania różniczkowe opisujące procesy dynamiczne silnika asynchronicznego klatkowego można zapisać m.in. w następujący sposób:

$$u = Ri + L\bar{p}i, \quad (4.74)$$

$$M_e = \frac{3}{2} p L_g (i_{u2} i_{v1} - i_{u1} i_{v2}), \quad (4.75)$$

gdzie $\bar{p}$ - operator d/dt ;
 p - liczba par biegunów silnika;

$$u = [u_{u1}; u_{v1}; 0; 0]^T; \quad (4.76)$$

$$i = [i_{u1}; i_{v1}; i_{u2}; i_{v2}]^T; \quad (4.77)$$

$$R = \text{diag}(R_s; R_s; R_r; R_r); \quad (4.78)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 ; & -\omega_k L_{1s} & ; 0 ; & ; -\omega_k L_g \\ \omega_k L_{1s} ; & 0 & ; \omega_k L_g ; & ; 0 \\ 0 ; & -(\omega_k - \omega) L_g ; 0 ; & & -(\omega_k - \omega) L_{2s} \\ (\omega_k - \omega) L_g ; 0 & & (\omega_k - \omega) L_{2s} ; 0 \end{bmatrix}, \quad (4.79)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{1s} & 0 & L_g & 0 \\ 0 & L_{1s} & 0 & L_g \\ L_g & 0 & L_{2s} & 0 \\ 0 & L_g & 0 & L_{2s} \end{bmatrix}, \quad (4.80)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{przy czym } -u_{u1} &= U_m \cos [(\omega_0 - \omega_k) t + \gamma] \\ u_{v1} &= U_m \sin [(\omega_0 - \omega_k) t + \gamma] \end{aligned} \right\}, \quad (4.81)$$

We wzorach (4.79) i (4.80) występują parametry L_{1s} , L_{2s} , L_g , które w określony sposób wiążą się z parametrami maszyny asynchronicznej L_1 , L_2 , M_1 , M_2 , M_{12} i parametrami schematu zastępczego, a mianowicie:

$$L_{1r} = L_1 - M_1 - \frac{3}{2} M_{12}, \quad (4.82)$$

$$L_{2r} = L_2 - M_2 - \frac{3}{2} M_{12}, \quad (4.83)$$

$$L_g = \frac{3}{2} M_{12}, \quad (4.84)$$

oraz

$$L_{1s} = \frac{X_{1s}}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} (X_g + X_{1r}) = L_1 - M_1, \quad (4.85)$$

$$L_{2s} = \frac{X_{2s}}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} (X_g + X_{2r}) = L_2 - M_2, \quad (4.86)$$

gdzie L_{1r} , L_{2r} - indukcyjność rozproszenia stojana i wirnika (parametry schematu zastępczego silnika);

L_g - indukcyjność magnesująca;

X_{1s}, X_{2s} - reaktancja synchroniczna stojana i odpowiednio wirnika, uwzględniająca sprzężenie magnetyczne z dwoma innymi uzwojeniami fazowymi stojana (wirnika);

X_g - reaktancja indukcji wzajemnej, uwzględniająca sprzężenie magnetyczne jednego uzwojenia stojana (wirnika) z trzema uzwojeniami wirnika (stojana).

Bardzo często stosuje się inny niż (4.74) model matematyczny silnika asynchronicznego, a mianowicie zapisany za pomocą strumieni skojarzonych

$$\bar{p}\Psi = u - A\Psi, \quad (4.87)$$

w którym $u = [u_{u1}; u_{v1}; 0; 0]^T$, (4.88)

$$\Psi = [\Psi_{u1}; \Psi_{v1}; \Psi_{u2}; \Psi_{v2}]^T, \quad (4.89)$$

$$A = \begin{bmatrix} \omega_o \alpha'_s & -\omega_k & -\omega_o \alpha'_s k_r & 0 \\ \omega_k & \omega_o \alpha'_s & 0 & -\omega_o \alpha'_s k_r \\ -\omega_o \alpha'_r k_s & 0 & \omega_o \alpha'_r & -(\omega_k - \omega) \\ 0 & -\omega_o \alpha'_r k_s & (\omega_k - \omega) & \omega_o \alpha'_r \end{bmatrix}, \quad (4.90)$$

przy czym $\alpha'_s = \frac{R_1}{X_{1s}\sigma}$; $\alpha'_r = \frac{R_2}{X_{2s}\sigma}$;

$$k_s = \frac{X_g}{X_{1s}}; \quad k_r = \frac{X_g}{X_{2s}};$$

$$\sigma = 1 - \frac{X_g^2}{X_{1s} X_{2s}}.$$

Równanie określające moment elektromagnetyczny silnika

$$M_e = \frac{3}{2} p \omega_o \frac{k_r}{X_{1s}\sigma} (\Psi_{u2} \Psi_{v1} - \Psi_{u1} \Psi_{v2}). \quad (4.91)$$

Należy pamiętać, że zarówno model (4.74), jak i (4.87) jest znacznie prostszy od modelu przedstawionego za pomocą rzeczywistych

wielkości fazowych maszyny (4.53). Ponadto równania (4.74) i (4.87) nie zawierają współczynników okresowych, co w sposób istotny upraszcza ich rozwiązywanie.

W teorii elektromagnetycznych procesów przejściowych maszyn elektrycznych rozpatruje się trzy układy współrzędnych, tworzące szczególne przypadki omawianego układu wirującego z dowolną prędkością ω_k :

- układ $(d, q, 0)$ - układ osi nieruchomy względem wirnika i obraca się względem stojana z prędkością wirnika, czyli że w tym przypadku $\omega_k = \omega$. Układ ten stosuje się podczas analizy procesów przejściowych w maszynach asynchronicznych o niesymetrycznym połączeniu obwodów wirnikowych;

- układ $(x, y, 0)$ - układ osi wirujących względem stojana z prędkością synchroniczną, tzn. nieruchomy względem pola maszyny asynchronicznej w stanie ustalonym; w tym przypadku $\omega_k = \omega_0$; ten układ współrzędnych jest najbardziej zalecany do analizy procesów przejściowych w maszynach asynchronicznych, ponieważ napięcia u_{x1} oraz u_{y1} tworzą zgodnie z (4.81) wielkości stałe;

- układ $(\alpha, \beta, 0)$ - układ osi nieruchomych względem stojana; w tym przypadku $\omega_k = 0$; napięcia $u_{\alpha 1}$, $u_{\beta 1}$ będą zmieniać się w czasie sinusoidalnie, zgodnie z (4.81); układ $(\alpha, \beta, 0)$ ma tę przewagę nad innymi, że prąd $i_{\alpha 1}$ w tym układzie równa się rzeczywistemu prądowi fazowemu w jednej z faz stojana maszyny trójfazowej.

W ogólnym przypadku wybór układu współrzędnych do analizy procesów przejściowych w maszynach asynchronicznych zależy od warunków konkretnego zagadnienia, np. symetrycznego lub niesymetrycznego układu połączeń uzwojeń stojana albo wirnika, konieczności otrzymania prądów fazowych, nieskomplikowanego schematu modelu itp.

4.4.4. Jednostki względne

Równania różniczkowe, tworzące model matematyczny silnika asynchronicznego, są wyrażone w jednostkach mianowanych. Fakt ten powoduje znaczne trudności w razie porównywania i uogólniania wyników badań symulacyjnych, zwłaszcza w przypadku symulacji układów wielomaszynowych. Ze względu na dużą liczbę zmiennych występujących w tych rów-

naniach (prądy osiowe wirnika i stojana, moment elektromagnetyczny, prędkość obrotowa, przyspieszenie kątowe) obserwacja ich podczas symulacji analogowej lub cyfrowej jest ponadto utrudniona, ponieważ wymaga jednoczesnego pamiętania zasadniczo różnych wartości znamionowych poszczególnych zmiennych.

Trudności te będą wyeliminowane z chwilą zapisania równań modelu matematycznego w jednostkach względnych. Wartości znamionowe poszczególnych zmiennych są wówczas równe jedności; łatwo je obserwować i porównywać.

Rozpatrując maszyny asynchroniczne przyjmuje się następujące jednostki podstawowe:

1. Znamionową wartość amplitudy napięcia fazowego

$$U_b = U_{fnmax} = \sqrt{2} U_{fn}.$$

2. Znamionową wartość amplitudy prądu fazowego stojana

$$I_b = I_{fnmax} = \sqrt{2} I_{fn}.$$

3. Zastępczą impedancję

$$Z_b = X_b = R_b = \frac{U_b}{I_b} = \frac{U_{fnmax}}{I_{fnmax}}.$$

4. Zastępczą moc znamionową silnika

$$P_b = \frac{3}{2} U_b I_b = 3 U_{fn} I_{fn}.$$

5. Czas, w którym wirnik przy synchronicznej prędkości kątowej śróci się o 1 rad el.

$$t_b = \frac{1}{\omega_{on}}.$$

6. Synchroniczna prędkość kątowa

$$\omega_b = \omega_{on}.$$

7. Strumień sprzężony

$$\psi_b = U_b t_b = \frac{U_b}{\omega_b}.$$

8. Indukcyjność

$$L_b = \frac{\psi_b}{I_b} = \frac{X_b}{\omega_b}.$$

9. Moment elektromagnetyczny

$$M_b = \frac{P_b}{\omega_b}.$$

10. Moment bezwładności

$$J_b = \frac{P_b}{\omega_b^2}.$$

Po wprowadzeniu wymienionych jednostek podstawowych do równań (4.87), otrzymamy model matematyczny silnika, wyrażony w jednostkach względnych

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \psi_{u1}^* \\ \psi_{v1}^* \\ \psi_{u2}^* \\ \psi_{v2}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos[(\omega_o^* - \omega_k^*)\tau + \gamma] \\ \sin[(\omega_o^* - \omega_k^*)\tau + \gamma] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_o^* \alpha_s'; & -\omega_k^*; & -\omega_o^* \alpha_s' k_r; & 0 \\ \omega_k^*; & \omega_o^* \alpha_s'; & 0; & -\omega_o^* \alpha_s' k_r \\ -\omega_o^* \alpha_r' k_s; & 0; & \omega_o^* \alpha_r'; & -(\omega_k^* - \omega_o^*) \\ 0 & -\omega_o^* \alpha_r' k_s; & (\omega_k^* - \omega_o^*); & \omega_o^* \alpha_r' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{u1}^* \\ \psi_{v1}^* \\ \psi_{u2}^* \\ \psi_{v2}^* \end{bmatrix},$$

gdzie $\omega_o^* = \frac{\omega_o}{\omega_b} = \frac{\omega_o}{\omega_{on}}$; $\alpha_s' = \frac{R_1^*}{X_{1s}^* \sigma}$ itd,

przy czym $R_1^* = \frac{R_1}{R_b}$; $X_{1s}^* = \frac{X_{1s}}{X_b}$.

Równanie ruchu

$$\frac{d\omega^*}{d\tau} = \frac{P}{J} \left[\omega_o^* \frac{k_r}{X_{1s}^*} (\psi_{u2}^* \psi_{v1}^* - \psi_{u1}^* \psi_{v2}^*) - M_o^* \right].$$

4.5. Modele matematyczne układów elektromechanicznych ze sprzężeniami zwrotnymi

4.5.1. Układy z jednym sprzężeniem zwrotnym

Układ z jednym ujemnym sprzężeniem zwrotnym można ogólnie przedstawić jak na rys. 4.12.

Człon A i B są dowolnymi układami mechanicznymi, elektrycznymi lub elektromechanicznymi o dowolnej przeważnie liczbie stopni swobody.

Członom A i B tego układu można na ogół przyporządkować pewne transmitancje operatorowe w sposób ścisły bądź też za pomocą jednej ze znanych metod aproksymacyjnych. W celu jednoznacznego określenia tych transmitancji, w przypadku układów o większej liczbie stopni swobody, należałoby również założyć, że wszystkie dodatkowe wymuszenia zakłócające są stałe.

Jeśli założyć, że transmitancje członów A i B wynoszą odpowiednio $A(p)$ i $B(p)$, to transmitancja zastępcza układu z rys. 4.12

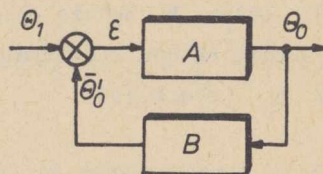
$$G(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}, \quad (4.92)$$

w którym p - operator Laplace'a.

Podanym zastępczym schematem strukturalnym odznaczają się m.in. niektóre układy napędowe oraz proste układy regulacji automatycznej.

Rozpatrując analitycznie omówiony układ elektromechaniczny ze sprzężeniem zwrotnym, można napisać równanie wiążące zasadnicze wielkości układu, wykorzystując do tego celu zasadę Hamiltona i równania Eulera-Lagrange'a. W tym celu należy określić szczegółowo liczbę stopni swobody poszczególnych elementów układu oraz napisać funkcjonal przemiany energii układu.

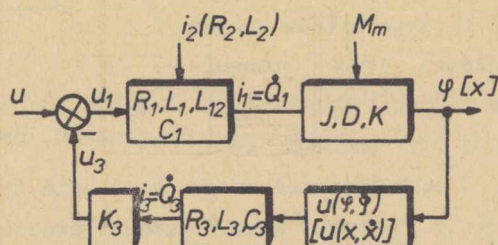
Przyjmijmy, że człon A, właściwy przetwornik elektromechaniczny, ma trzy stopnie swobody - dwa elektryczne i jeden mechaniczny. W torze



Rys.4.12. Schemat blokowy układu jednopętlowego

sprężenia zwrotnego można przyjąć ogólnie przetwornik elektromechaniczny bezstratny, bez żadnego stopnia swobody oraz szeregowo połączony z nim układ elektryczny o jednym stopniu swobody, dla którego wymuszeniem zewnętrznym jest elektryczna wielkość na wyjściu przetwornika, a wielkość wyjściowa zostaje odpowiednio wzmacniona po przejściu przez wzmacniacz.

Człon A charakteryzują wówczas ogólnie następujące parametry elektryczne: L_1, C_1, R_1, L_{12} oraz mechaniczne J (moment bezwładności), D (współczynnik tarcia lepkiego), K (współczynnik sprężystości). Człon B będzie charakteryzować funkcja $u(\varphi, \dot{\varphi})$ lub $[u(x, \dot{x})]$, parametry obwodu elektrycznego L_3, R_3, C_3 oraz współczynnik wzmocnienia k_3 (rys.4.13).



Rys.4.13. Struktura rozważanego układu jedнопętlowego

Przyjmuje się, że przetwornik elektromechaniczny ma równomierną szczelinę powietrzną, równomierny rozkład uzwojenia na obwodzie twornika, $J = \text{const}$, $M_m = \text{const}$, $i_2 = \text{const}$ (stały strumień wzbudzenia) $L_k = \text{const}$.

Przy tych założeniach i oznaczeniach jak na rys. 4.13, można napisać funkcjonalną przemianę energii, przyjmując współrzędne szczególne zgodnie z tabelą 4.2.

T a b e l a 4.2

Współrzędne uogólnione	Współrzędne szczególne			
	człon A			człon B
	obwód elektryczny		obwód mechaniczny	obwód elektryczny
	k = 1	k = 2	k = 3	k = 1
q_k	Q_1	Q_2	$\varphi[x]^{**})$	Q_3
$\dot{q}_k$	$\dot{Q}_1 = i_1$	$\dot{Q}_2 = i_2$	$\dot{\varphi}[\dot{x}]$	$\dot{Q}_3 = i_3$

**) W nawiasach podano współrzędne dla ruchu posuwistego.

Funkcjonał przemiany energii dla członu A

$$I_A = \int_0^t \left[L_1 \frac{\dot{Q}_1^2}{2} + L_2 \frac{\dot{Q}_2^2}{2} + L_2(\varphi) \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 + J \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - K \frac{\varphi^2}{2} - \frac{1}{C_1} \frac{Q_1}{2} + \right. \\ \left. - \int_0^{t_1} (u_1 \dot{Q}_1 + u_2 \dot{Q}_2 + M_m \dot{\varphi} - R_1 \frac{\dot{Q}_1^2}{2} - R_2 \frac{\dot{Q}_2^2}{2} - D \frac{\dot{\varphi}^2}{2}) dt_1 \right] dt,$$

dla członu B

$$I_B = \int_0^t \left\{ L_3 \frac{\dot{Q}_3^2}{2} - \int_0^{t_1} \left[u(\varphi, \dot{\varphi}) \dot{Q}_3 - R_3 \frac{Q_3^2}{2} \right] dt_1 - \frac{1}{C_3} \frac{Q_3}{2} \right\} dt.$$

Na podstawie równania Eulera-Lagrange'a, po uwzględnieniu wymienionych założeń upraszczających
dla członu A

$$\left. \begin{aligned} k=1, L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt + R_1 i_1 + \frac{\partial L_{21}(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi} i_2 &= u_1 \\ k=2, i_2 R_2 &= u_2 \\ k=3, J \ddot{\varphi} + D \dot{\varphi} + K \varphi - M_m &= \frac{\partial L_{21}(\varphi)}{\partial \varphi} i_1 i_2 \\ k=4, L_3 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt + R_3 i_3 &= u(\varphi, \dot{\varphi}) \end{aligned} \right\}, \quad (4.93)$$

dla członu B

Napięcie u_1 nie jest wielkością absolutnie niezależną, ponieważ ze względu na istniejące sprzężenia zwrotne napięcie u_1 jest różnicą

$$u_1 = U - u_3, \quad (4.94)$$

napięcie u_3 zależy natomiast od prądu i_3 i współczynnika wzmocnienia k_3 . Zakładając liniową charakterystykę wzmacniacza, otrzymuje się

$$u_3 = k_3 i_3. \quad (4.95)$$

Jako przetwornik elektromechaniczny w członie B niech będzie użyty element o liniowej charakterystyce (np. tachoprądnica z małym obciążeniem). Mamy wówczas

$$u(\varphi, \dot{\varphi}) = k_4 \dot{\varphi}. \quad (4.96)$$

Uwzględniając zależności (4.94), (4.95) i (4.96) można układ równań (4.93) napisać w postaci

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{21\max} C_2 \dot{\varphi} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt &= U - k_3 i_3 \\ J \ddot{\varphi} + D \dot{\varphi} + K \varphi &= L_{21\max} C_2 i_1 \\ L_3 \frac{di_3}{dt} + R_3 i_3 + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt &= k_4 \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4.97)$$

Układ równań (4.97) można rozwiązać metodą operatorową. Zakładając zerowe warunki początkowe, otrzymuje się

$$\left. \begin{aligned} (pL_1 + R_1 + \frac{1}{C_1 p}) i_1(p) + k_3 i_3(p) + k_5 p \varphi(p) &= U(p) \\ k_5 i_1(p) - (p^2 J + pD + K) \varphi(p) &= 0 \\ k_4 p \varphi(p) - (pL_3 + R_3 + \frac{1}{C_3 p}) i_3(p) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.98)$$

skąd

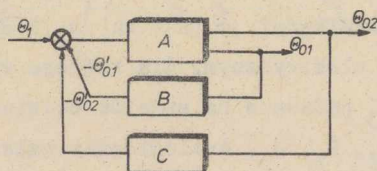
$$\varphi(p) = \frac{k_5 (pL_3 + R_3 + \frac{1}{C_3 p}) U(p)}{(pL_1 + R_1 + \frac{1}{C_1 p}) (pL_3 + R_3 + \frac{1}{C_3 p}) (p^2 J + pD + K) + pk_3 k_4 k_5 + k_5^2 p (pL_3 + R_3 + \frac{1}{C_3 p})}. \quad (4.99)$$

Przejście z formy operatorowej (4.99) na czasową jest uciążliwe, wymaga bowiem znalezienia miejsc zerowych mianownika wyrażenia (4.99). Rozwiązanie układu równań (4.98) można uzyskać dokonując modelowania strukturalnego omawianego układu (rozdział 6).

4.5.2. Układy z wieloma sprzężeniami zwrotnymi

Układy wielopętlowe mogą mieć różnorodną strukturę. Właściwość ta utrudnia w znacznym stopniu ogólne rozpatrzenie wymienionych układów i w przypadku szczegółowej analizy zmusza do przyjęcia pewnego konkretnego schematu strukturalnego układu. Niemniej jednak wewnętrzna struktura poszczególnych elementów układu może być w dalszym ciągu rozpatrywana ogólnie.

Duża grupa układów napędowych jest reprezentowana przez schemat strukturalny, przedstawiony na rys. 4.14.



Rys.4.14. Schemat blokowy układu wielopętlowego z dwoma sygnałami wyjściowymi

Przyjmijmy, że człon A jest elementem o co najmniej dwu wyjściach z tym, że w szczególnym przypadku wielkość θ_{01} może być pochodną wielkości θ_{02} lub przeciwnie. Poza tym charakter członów A, B, C nie jest ograniczony; mogą to być elementy o dowolnej liczbie stopni swobody. W odniesieniu do układu na rys. 4.14

$$\frac{\theta_{01}(p)}{\theta_1(p)} = \frac{A_1(p)}{1 + B(p)A_1(p) + C(p)A_2(p)}, \quad (4.100)$$

$$\frac{\theta_{02}(p)}{\theta_1(p)} = \frac{A_2(p)}{1 + B(p)A_1(p) + C(p)A_2(p)}, \quad (4.101)$$

gdzie $A_1(p) = \frac{\theta_{01}(p)}{\varepsilon(p)}$, $A_2(p) = \frac{\theta_{02}(p)}{\varepsilon(p)}$.

Człon znajdujący się w torze głównym (A) może być przetwornikiem elektromechanicznym; sygnałami wyjściowymi θ_{01} i θ_{02} odpowiednio prędkość i położenie. W torach sprzężeń zwrotnych są konieczne elementy spełniające funkcję przeciwną do roli przetwornika w torze

głównym, tj. przetwarzające sygnały wyjściowe z powrotem na wielkości elektryczne, które po wzmacnieniu sterują sygnałem wejściowym.

Przyjmijmy, podobnie jak w pktle 4.5.1, że przetwornik elektromechaniczny w torze głównym będzie układem o dwóch stopniach swobody: elektrycznym i jednym mechanicznym, scharakteryzowanym odpowiednio przez parametry i wielkości zmienne:

dla części elektrycznej

$$L_1, R_1, C_1, L_2, L_{21}$$

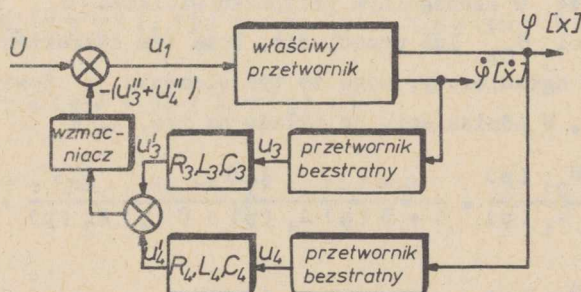
$$u_1, i_1, u_2, i_2$$

dla części mechanicznej

$$J, K, D$$

$$\phi, \dot{\phi}$$

Zakładamy, że człon B składa się z szeregowego połączenia bezstratnego przetwornika wielkości $\dot{\phi} [x]$ na u_3 i członu R_3, L_3, C_3 o jednym stopniu swobody elektrycznym, dla którego wymuszeniem jest wielkość u_3 . Napięcie u_3 podawane na sumator będzie funkcją prądu i_3 płynącego w układzie R_3, L_3, C_3 . Analogicznie człon C składa się z bezstratnego przetwornika wielkości $\phi [x]$ na wielkość u_4 i członu R_4, L_4, C_4 o jednym stopniu swobody elektrycznym, na który działa napięcie u_4 . Napięcie u_4 jest funkcją prądu i_4 , płynącego w układzie R_4, L_4, C_4 (rys. 4.15).



Rys.4.15. Struktura rozważanego układu wielopętlowego

W tabeli 4.3 zestawiono współrzędne szczególne rozważanego układu

T a b e l a 4.3

Współrzędne uogólnione	Współrzędne szczególne				
	człon A			człon B	człon C
	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
q_k	Q_1	Q_2	$\phi [x]$	Q_3	Q_4
$\dot{q}_k$	$\dot{Q}_1=i_1$	$\dot{Q}_2=i_2$	$\dot{\phi} [\dot{x}]$	$\dot{Q}_3=i_3$	$\dot{Q}_4=i_4$

Przy założeniach jak w pktcie 4.5.1 można napisać funkcjonal przemiany energii:

dla członu A

$$I_A = \int_0^t \left[L_1 \frac{\dot{Q}_1^2}{2} + L_2 \frac{\dot{Q}_2^2}{2} + L_{21}(\varphi) \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 + J \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - K \frac{\varphi^2}{2} - \int_0^{t_1} (u_1 \dot{Q}_1 + \right. \\ \left. + u_2 \dot{Q}_2 + M_m \dot{\varphi} - R_1 \frac{\dot{Q}_1^2}{2} - R_2 \frac{\dot{Q}_2^2}{2} - D \frac{\dot{\varphi}^2}{2}) dt_1 - \frac{1}{C_1} \frac{Q_1^2}{2} \right] dt;$$

dla członu B

$$I_B = \int_0^t \left\{ L_3 \frac{\dot{Q}_3^2}{2} - \int_0^{t_1} \left[u_3(\dot{\varphi}) \dot{Q}_3 - R_3 \frac{\dot{Q}_3^2}{2} \right] dt_1 - \frac{1}{C_3} \frac{Q_3^2}{2} \right\} dt;$$

dla członu C

$$I_C = \int_0^t \left\{ L_4 \frac{\dot{Q}_4^2}{2} - \int_0^{t_1} \left[u_4(\varphi) \dot{Q}_4 - R_4 \frac{\dot{Q}_4^2}{2} \right] dt_1 - \frac{1}{C_4} \frac{Q_4^2}{2} \right\} dt.$$

Dokonując przekształceń zgodnie z równaniem Eulera-Lagrange'a, otrzymuje się:

dla członu A

$$k = 1, L_1 \frac{d}{dt} i_1 + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt + \frac{\partial L_{21}(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi} i_2 = u_1(t);$$

$$k = 2, i_2 R_2 = u_2;$$

$$k = 3, J \ddot{\varphi} + D \dot{\varphi} + K \varphi - M_m = - \frac{\partial L_{21}(\varphi)}{\partial \varphi} i_1 i_2;$$

dla członu B

$$k = 4, L_3 \frac{d}{dt} i_3 + R_3 i_3 + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt = u_3(\dot{\varphi});$$

dla członu C

$$k = 5, L_4 \frac{d}{dt} i_4 + R_4 i_4 + \frac{1}{C_4} \int_0^t i_4 dt = u_4(\varphi).$$

(4.102)

Zgodnie z rys.4.15

$$u_1 = U - u_3'' - u_4'' . \quad (4.103)$$

Ponieważ napięcia u_3' i u_4' są doprowadzane do sumatora najczęściej z oporności czynnej, przez którą przepływa odpowiedni prąd, więc

$$u_3'' = k_w u_3' = k_w k_3' i_3 = k_3'' i_3, \quad (4.104)$$

$$u_4'' = k_w u_4' = k_w k_4' i_4 = k_4'' i_4. \quad (4.105)$$

Zgodnie z założonymi własnościami liniowego przenoszenia dla przetworników B i C

$$\left| u_3 = k_3 \ddot{\varphi} , \right. \quad (4.106)$$

$$\left| u_4 = k_4 \varphi . \right. \quad (4.107)$$

Uwzględniając zależności (4.103) - (4.107) można układ równań (4.102) napisać w postaci

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt + L_{21\max} C_2 \ddot{\varphi} &= U - k_3'' i_3 - k_4'' i_4, \\ J \ddot{\varphi} + D \dot{\varphi} + K \varphi &= L_{21\max} C_2 i_1, \\ L_3 \frac{di_3}{dt} + R_3 i_3 + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt &= k_3 \ddot{\varphi}, \\ L_4 \frac{di_4}{dt} + R_4 i_4 + \frac{1}{C_4} \int_0^t i_4 dt &= k_4 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.108)$$

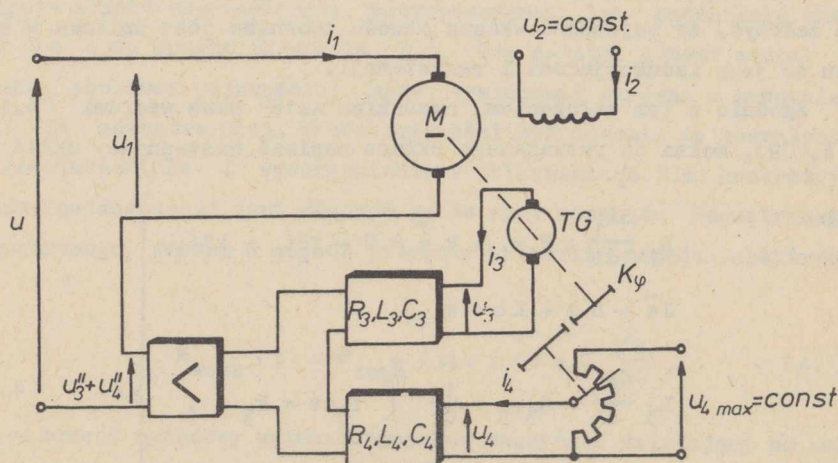
Układ równań różniczkowych (4.108) jest układem równań opisujących stan równowagi dynamicznej badanego układu z dwoma sprzężeniami zwrotnymi. Jest on układem zamkniętym w czterech funkcjach nie-

wiadomych $i_1(t)$, $i_3(t)$, $i_4(t)$, $\varphi(t)$ i jednej funkcji niezależnej U . Układ ten przy założeniu zerowych warunków początkowych można rozwiązać metodą operatorową i znaleźć w efekcie zależność $\varphi(U, t)$, będącą rozwiązaniem zagadnienia. Rozwiązywanie tą metodą jest jednak skomplikowane z uwagi na wysoki stopień wielomianu zmiennej p występującego w mianowniku wyrażenia $\varphi(p)$.

Z tego też powodu podczas rozwiązywania układu równań (4.108) jest wygodniej uciec się do modelowania strukturalnego za pomocą maszyn matematycznych o działaniu ciągłym (maszyn analogowych).

Jako przykład przytoczonych rozważań można rozpatrzeć układ serwo mechanizmu położenia z prędkościowym sprzężeniem zwrotnym. W zastosowaniach praktycznych układy tego typu spotyka się w automatycznej regulacji lotu samolotów lub kursu statków.

Założmy, że przetwornik elektromechaniczny w torze głównym będzie silnikiem obcowzbudnym prądu stałego z regulowanym napięciem twornika (rys. 4.16). Wielkościami wyjściowymi są prędkość kątowa i położenie katowe.



Rys. 4.16. Schemat ideowy serwo mechanizmu położenia z prędkościowym sprzężeniem zwrotnym

Wielkość $\dot{\phi}$ jest przekształcona za pomocą prądniczki tachometrycznej T o liniowej charakterystyce $u_3 = k_3 \dot{\phi}$ na napięcie u_2' , które daje wymuszenie dla członu R_3, L_3, C_3 . Można założyć, że prąd i_3 jest mały i nie wpływa na zmianę liniowości charakterystyki prądniczki. Prąd i_3 , płynąc przez oporność czynną, wytwarza spadek napięcia $u_3' = k_3' i_3$, który jest wielkością wyjściową z toru pierwszego sprzężenia zwrotnego.

W torze drugiego sprzężenia zwrotnego znajduje się przetwornik bezstratny, zamieniający położenie kątowe ϕ na napięcie $u_4 = k_4 \phi$. Może to być potencjometr zasilany z zewnątrz stałym napięciem U_{4max} . Element ten jest obciążony minimalnie członem R_4, L_4, C_4 , z którego jest odbierane napięcie $u_4' = k_4' i_4$. Suma napięć u_3' i u_4' jest podawana na wzmacniacz, który wywiera wpływ na zmianę napięcia przykładanego bezpośrednio na twornik silnika.

Należy zaznaczyć, że na wyjściu może być zastosowana przekładnia mechaniczna, traktowana jako całość z częścią mechaniczną silnika, a dająca jedynie przełożenie dla drogi kątowej:

$$\phi_1 = \frac{\phi}{k_\phi}, \quad (4.109)$$

co może zwiększyć zakres zastosowań opisywanego serwomechanizmu.

Formułując równania równowagi dynamicznej układu wydaje się właściwe założyć, że pojemność własna obwodu twornika jest znikoma w stosunku do jego indukcyjności i rezystancji.

Zgodnie z tym założeniem, rysunkiem 4.16 oraz wzorami (4.108) i (4.109), można do rozważanego układu napisać następujący układ równań:

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + k \dot{\phi} &= U - k_2'' i_2 - k_3'' i_3, \\ J \ddot{\phi} + D \dot{\phi} + K \phi &= k i_1, \\ L_3 \frac{di_3}{dt} + R_3 i_3 + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt &= k_3 \dot{\phi}, \\ L_4 \frac{di_4}{dt} + R_4 i_4 + \frac{1}{C_4} \int_0^t i_4 dt &= \frac{k_4}{k_\phi} \phi, \end{aligned} \right\} \quad (4.110)$$

Z rozważań zawartych w niniejszym rozdziale wynika, że analiza układów elektromechanicznych jedno- i wielopętlowych w stanach dynamicznych może być dokonana na podstawie ścisłych lub aproksymacyjnych metod znanych z teorii regulacji automatycznej.

Korzystając z metod modelowania strukturalnego można również badać stabilność tych układów, analizując przebieg funkcji wyjściowych z maszyny analogowej odwzorowującej dany układ.

4.6. Omówienie równania ruchu

W odniesieniu do poszczególnych rodzajów silnika równania obwodów elektrycznych mogą różnić się między sobą, równanie ruchu można natomiast doprowadzić do postaci uogólnionej, wspólnej dla wszystkich przetworników elektromechanicznych. W równaniu tym po jednej stronie znaku równości występują dwa składniki: moment obrotowy zewnętrzny (mechaniczny), działający na wał maszyny i wewnętrzny (elektromagnetyczny), wytwarzany na skutek oddziaływania strumienia magnetycznego na prąd w wirniku maszyny. Po drugiej stronie równania ruchu występuje moment odpowiadający przyspieszeniu lub opóźnieniu układu równy $J\ddot{\varphi}$ oraz moment tłumienia $D\dot{\varphi}$. Ten ostatni moment został wydzielony, ponieważ najczęściej może występować zarówno w maszynie, jak i na zewnątrz niej. Wobec trudności wyznaczenia go teoretycznie lub doświadczalnie i wyodrębnienia w obliczeniach dla konkretnych układów, najdogodniej jest włączyć go do sumy momentów wewnętrznego i zewnętrznego, pisząc w sposób przyjęty w teorii napędu elektrycznego:

$$M_{\text{wewn}}(t) + M_{\text{zewn}}(t; \varphi; \dot{\varphi}) = J \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (4.111)$$

M_{wewn} - moment napędowy wytwarzany przez maszynę i działający na wale jest sumą algebraiczną momentu wewnętrznego oraz momentów tłumiących w maszynie;

M_{zewn} - moment wypadkowy zewnętrzny, działający na wale maszyny; jest sumą algebraiczną wszystkich momentów występujących podczas

pracy mechanizmu sprzęgniętego z rozpatrywaną maszyną; w razie wystąpienia np. pracy prądnicowej tej maszyny moment zewnętrzny napędza ją, w przypadku pracy silnikowej natomiast zewnętrzny moment jest statycznym, pokonywanym przez silnik.

Rozpatrując równanie (4.111) należy ustalić umowne znaki występujących tam momentów. Przyjęto, że wytwarzany w maszynie moment wewnętrzny jest dodatni, jeżeli kierunek jego działania jest zgodny z przyjętym za dodatni kierunkiem wirowania wirnika. Oznacza to, że podczas pracy silnikowej moment wewnętrzny będzie dodatni, a prądnicowej - ujemny.

Znak momentu zewnętrznego określa się w identyczny sposób. Jeżeli zatem moment zewnętrzny jest skierowany zgodnie z momentem wewnętrznym, znaki ich będą jednakowe, a w przypadku przeciwnym - różne.

Moment zewnętrzny podczas pracy prądnicowej ma charakter momentu napędowego, podczas pracy silnikowej natomiast moment zewnętrzny na wale silnika może być a) aktywny, b) reaktywny.

Momenty aktywne działają w jednym kierunku, niezależnie od kierunku wirowania (np. momenty wywołane ciężarem czy deformacjami elastycznymi).

Momenty reaktywne zawsze przeciwdziałają ruchowi wirnika silnika i po zmianie kierunku wirowania zmieniają kierunek działania, a zatem zmieniają znak. Typowym przykładem momentów reaktywnych mogą być momenty spowodowane przez tarcie.

Stosownie do przyjętego umownego sposobu znakowania momentów obrotowych można zestawzić znaki momentu wewnętrznego i zewnętrznego, dotyczące różnych przypadków pracy (tab. 4.1).

T a b e l a 4.1

Znaki momentów M_{wewn} i M_{zewn}
przy różnych rodzajach pracy maszyny

Rodzaj pracy maszyny	Kierunek wirowania	Znak prędkości katowej	Charakter momen- tu zewnętrznego	Znaki momentów	
				M_{wewn}	M_{zewn}
1	2	3	4	5	6
	1 - zgodny z kierunkiem przyjętym za dodatni	+		+	-

c.d. tabeli 4.1

1	2	3	4	5	6
	2 - przeciwny do kierunku przy- jętego za dodatni	-	reaktywny	-	+
Silnikowa	1	+	aktywny - skiero- wany przeciwnie do momentu wewn.	+	-
	2	-		-	+
	1	+	aktywny - skiero- wany zgodnie z momentem wewn.	+	+
	2	-		-	-
Prądnicowa	1	+	napędzający ma- szynę	-	+
	2	-		+	-
Hamowanie	1	+	reaktywny	-	-
	2	-		+	+
	1	+	aktywny - skiero- wany przeciwnie do momentu wewnę- trznego	-	+
	2	-		+	-
	1	+	aktywny - skiero- wany zgodnie z mo- mentem wewn.	-	-
	2	-		+	+

5. WYBRANE METODY IDENTYFIKACJI UKŁADÓW ELEKTROMECHANICZNYCH

5.1. Metoda charakterystyk czasowych

Metody charakterystyk czasowych obejmują badania odpowiedzi $y(t)$ obiektu na dane przebiegi wejściowe $x(t)$ w czasie, gdy układ z jednego stanu ustalonego przechodzi do drugiego. Mając te dwie grupy informacji $x(t)$ i $y(t)$ wyznacza się następnie transmitancje operatorowe lub równanie różniczkowe, opisujące obiekt. Jest to możliwe po zastosowaniu odpowiedniego aparatu matematycznego [16,20].

Można stwierdzić, że najczęściej identyfikacja metodą charakterystyk czasowych służy do wyznaczania modelu matematycznego badanego obiektu. Równorzędnym celem, osiąganym za pomocą tych metod, jest uzyskanie pełnej informacji o stanach przejściowych badanego obiektu, jak np. wyznaczenie granic stabilności, dobór parametrów układu regulacji przy minimalizacji wskaźników jakości oraz badania dynamiki stanów awaryjnych lub różnych warunków pracy układu.

Skuteczność stosowania metod charakterystyk czasowych zależy w pierwszym rzędzie od sposobu wykonywania badań, tj. od dokładnego wyznaczenia przebiegu $y(t)$ przy danym $x(t)$. Istotne jest więc dysponowanie dokładną aparaturą badawczo-pomiarową (np. oscylografem pętlicowym), jak również umiejętnością uwzględnienia i oddzielenia wszelkiego rodzaju zakłóceń od sygnałów użytecznych. Warunki wykonywania badań muszą być takie, żeby uzyskać powtarzalność wyników badań. Należy również pamiętać, że odpowiedź obiektu zależy nie tylko od jego właściwości dynamicznych, lecz również od dokładności przebiegu czasowego sygnału wymuszającego.

W przypadku układów elektromechanicznych stosuje się najczęściej wymuszenie typu skoku jednostkowego $x(t) = A \cdot 1(t)$, np. skok napięcia zasilającego silnika asynchronicznego, napięcia wzbudzenia silnika prądu stałego, momentu obciążenia; jako odpowiedź obiektu $y(t)$ re-

jestruje się natomiast najczęściej prędkość obrotową $n(t)$ lub kątową $\omega(t)$.

W przypadku złożonych obiektów badania czasowe wykonuje się oddzielnie dla każdego elementu obiektu, a następnie oblicza się charakterystykę wypadkową na podstawie charakterystyk składowych.

Metoda identyfikacji na podstawie analizy przebiegów czasowych odpowiedzi obiektu na dane wymuszenie należy do najsłabszych metod identyfikacji i jest skuteczna przede wszystkim w odniesieniu do obiektów niskich rzędów.

Wiele elementów lub układów elektromechanicznych z jedną dominującą stałą czasową zachowuje się jak obiekty inercyjne pierwszego rzędu, opisywane następującym równaniem różniczkowym:

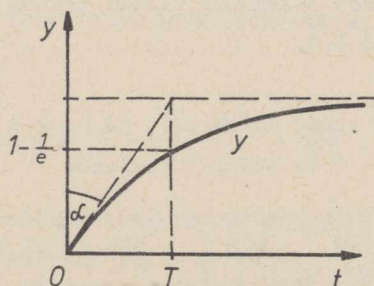
$$T \frac{dy}{dt} + y = x, \quad (5.1)$$

w którym $x = 1(t)$,

którego rozwiązaniem jest

$$y = 1(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right). \quad (5.2)$$

Odpowiedź tych układów na skok jednostkowy jest więc funkcją wykładniczą. Parametrem tej funkcji, charakteryzującym jednoznacznie obiekt pierwszego rzędu, jest stała czasowa T . Identyfikacja obiektu pierwszego rzędu będzie polegać na określeniu stałej czasowej z eksperymentalnie uzyskanych odpowiedzi na skok jednostkowy. Stała czasowa, jak wynika z rys. 5.1, charakteryzuje szybkość zmiany wartości wielkości wyjściowej.



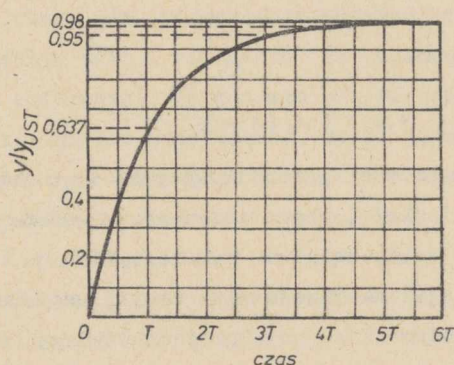
Rys.5.1. Wyznaczanie stałej czasowej T obiektu pierwszego rzędu

Graficznie stałą czasową T wyznaczamy następująco:

a) przez tangens kąta α , zawartego między styczną do krzywej przebiegu przechodzącą przez początek układu współrzędnych a osią rzędnych (rys. 5.1), czyli wartość podstyczną (przy założeniu, że $x = 1$);

b) czas, po upływie którego odpowiedź na skok jednostkowy osiąga wartość $(1 - 1/e)$, tj. około $2/3$ wartości ustalonej (rys. 5.1).

Teoretycznie stan ustalony obiektu zostaje osiągnięty dopiero po upływie nieskończenie wielkiego czasu. W zależności jednak od żądanej dokładności pomiaru można określić tzw. czas odpowiedzi na skok jednostkowy. Jeżeli na przykład przyjmiemy, że ze względów technicznych zadowala nas wynik z dokładnością 5%, to znaczy, że warunek ten jest spełniony, ponieważ stan przejściowy osiąga 95% swego stanu ustalonego, co odpowiada czasowi odpowiedzi $T_{95\%}$ osiągnięcia tego stanu. Czas odpowiedzi $T_{95\%}$ dla obiektów pierwszego rzędu jest równy potrójnej wartości stałej czasowej (rys. 5.2).



Rys.5.2. Stała czasowa T ; czasy odpowiedzi $T_{95\%}$, $T_{98\%}$

Dla innych wartości zależność między czasem odpowiedzi a stałą czasową podano w tabeli 5.1.

T a b e l a 5.1

Zależność czasu odpowiedzi od stałej czasowej
do różnych poziomów

$\frac{T_{50\%}}{T}$	$\frac{T_{90\%}}{T}$	$\frac{T_{95\%}}{T}$	$\frac{T_{97\%}}{T}$	$\frac{T_{98\%}}{T}$	$\frac{T_{98,5\%}}{T}$	$\frac{T_{99\%}}{T}$	$\frac{T_{99,5\%}}{T}$
0,69	2,30	3,00	3,68	4,00	4,43	4,61	5,30

Wymienione w tabeli 5.1 dane można wykorzystać po eksperymentalnym uzyskaniu tylko części odpowiedzi skokowej układu pierwszego rzędu przy znanym stanie ustalonym. Doświadczalnie uzyskano np. część charakterystyki umożliwiającą wyznaczenie czasu odpowiedzi $T_{50\%}$ równym 144s. Stałą czasową oblicza się z zależności $T_{50\%} = 0,69T$, czyli

$$T = \frac{T_{50\%}}{0,69} = \frac{144}{0,69} = 250s.$$

Jeśli chcemy obliczyć czas, po jakim uzyskamy odpowiedź z dopuszczalną dokładnością np. 2%, to korzystając z tabeli 5.1, otrzymujemy $T_{98\%} = 4T = 4 \cdot 250 = 1000s$.

W celu stwierdzenia czy badany obiekt jest rzędu pierwszego, jego odpowiedź na skok jednostkowy rysujemy we współrzędnych półlogarytmicznych, czyli otrzymujemy charakterystykę w postaci linii prostej. Wystarczy więc wyznaczyć kilka punktów i sprawdzić, czy znajdują się one na linii prostej. Jeśli nie, to znaczy, że badany obiekt nie jest obiektem rzędu pierwszego.

W odróżnieniu od obiektów pierwszego rzędu, w przypadku badania obiektów drugiego rzędu można uzyskać różnego rodzaju przebiegi odpowiedzi na skok jednostkowy, a mianowicie aperiodyczne i periodyczne. Wiele układów elektromechanicznych lub ich elementów reprezentuje tę klasę obiektów.

Obiekty drugiego rzędu o odpowiedzi aperiodycznej można opisać transmitancją

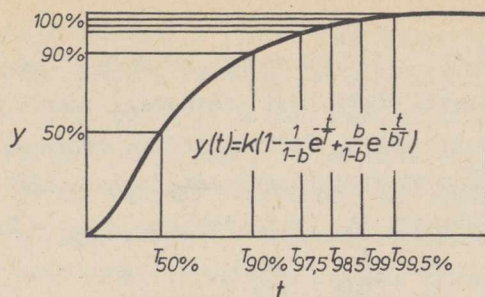
$$K \cdot G(p) = \frac{K}{(1 + T_p)(1 + T_{bp})}. \quad (5.3)$$

Odpowiedź takiego obiektu na skok jednostkowy przedstawia następująca funkcja:

$$y(t) = K \left(1 - \frac{1}{1-b} e^{\frac{-t}{T}} + \frac{b}{1-b} e^{\frac{-t}{bT}} \right), \quad (5.4)$$

w której $b > 1$ - współczynnik określający stosunek dwu stałych czasowych. Przebieg tej funkcji jest pokazany na rys. 5.3.

Otrzymany przebieg nie określa jednoznacznie czy mamy do czynienia z obiektem drugiego rzędu. W celu zidentyfikowania obiektu [20,27]



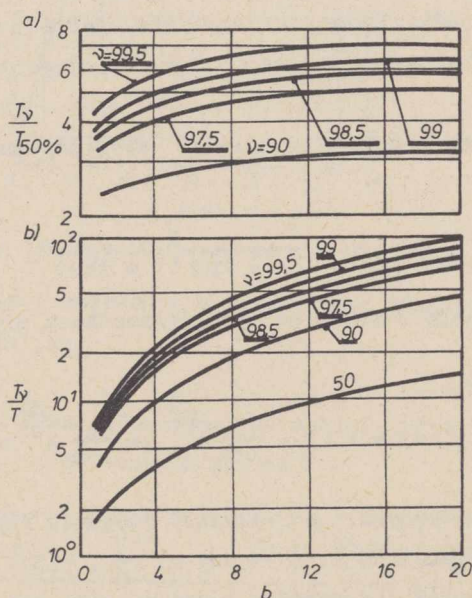
Rys.5.3. Odpowiedź obiektu drugiego rzędu o transmitancji
 $KG(p) = K/(1 + Tp)(1 + bTp)$

w pierwszym przybliżeniu należy rozpatrzeć stosunek czasów odpowiedzi $T_{90\%}$ do $T_{50\%}$, który powinien spełniać warunek

$$3,32 < \frac{T_{90\%}}{T_{50\%}} < 2,32. \quad (5.5)$$

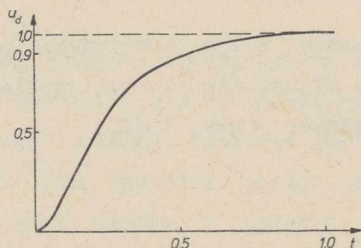
W razie występowania takich samych stałych czasowych ($b = 1$) obiekt można traktować jako złożony z dwóch obiektów pierwszego rzędu o takich samych stałych czasowych.

Stałe czasowe T i bT można wyznaczyć stosując wykresy podane na rys. 5.4.



Rys.5.4. Krzywe pomocnicze do wyznaczania transmitancji typu
 $K/(1 + Tp)(1 + bTp)$

Z krzywych $T_{50\%}$ w funkcji b , (gdzie $T_{50\%}$ oznacza wybrany czas odpowiedzi, której odpowiada odpowiednia krzywa) wyznacza się b a następnie z krzywych na rys. 5.4 b, znając poprzednio otrzymane b , wyznacza się stosunek T_v/T . Mając wartość T_v/T łatwo już wyznaczamy stałą czasową T . W celu sprawdzenia czy mamy do czynienia z układem drugiego rzędu można dokonać obliczeń przy różnych T_v . Wyznaczone wartości b i T muszą być takie same.



Rys.5.5. Odpowiedź skokowa badanego obiektu

P r z y k ł a d. Podczas badania dwustopniowego wzmacniacza elektromaszynowego-amplidydy otrzymano przebieg jak na rys. 5.5. Położę wartości ustalonej napięcia wyjściowego amplidydy uzyskuje po czasie odpowiedzi $T_{50\%} = 0,21s$, a 90% - po $T_{90\%} = 0,53s$. Stosunek tych dwóch czasów $T_{90\%}/T_{50\%} = 2,52$, a więc mamy do czynienia z obiektem drugiego rzędu, ponieważ jest spełniony warunek (5.5). Z rysunku 5.4a, posługując się krzywą odpowiadającą $v = 90\%$ (dla obliczonego stosunku $T_{90\%}/T_{50\%} = 2,52$) znajdujemy b , w tym przypadku $b = 2,5$. Posługując się następnie rys. 5.4b i biorąc pod uwagę krzywą $v = 90\%$, wyznaczamy dla obliczonego $b = 2,5$ stosunek T_v/T , który w rozpatrywanym przypadku jest równy $T_{90\%}/T = 6,9$. Znając z otrzymanej doświadczalnie krzywej czas odpowiedzi $T_{90\%} = 0,53s$, obliczamy

$$T = \frac{T_{90\%}}{6,9} = \frac{0,53}{6,9} = 0,077s.$$

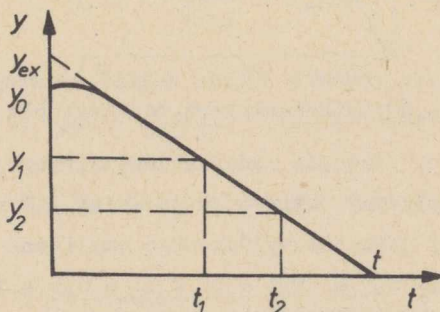
W ten sposób mamy wyznaczone $T = 0,077s$ i $Tb = 0,077 \cdot 2,5 = 0,192s$. W celu sprawdzenia można przyjąć np. $T = T_{97,5\%}$. Z rysunku 5.4a wyznaczamy dla stosunku $T_{97,5\%}/T_{50\%} = 0,77/0,21 = 3,7$ wartość $b = 2,5$ a więc tę samą co poprzednio. Transmitancja przyjmie więc postać:

$$K \cdot G(p) = \frac{K}{(1 + 0,077p)(1 + 0,192p)}.$$

Współczynnik K w omawianym przypadku wyznacza się biorąc pod uwagę wartość zmiany napięcia na zaciskach amplidydy w stosunku do zmiany napięcia sterującego

$$K = \frac{\partial E_A}{\partial U_S}.$$

Inny sposób wyznaczenia T i b aperiodycznego obiektu drugiego rzędu jest następujący. Rysuje się w skali półlogarytmicznej otrzymany eksperymentalnie przebieg (rys. 5.6).



Rys.5.6. Wyznaczenie transmitancji obiektu drugiego rzędu metodą ekstrapolacji

Ekstrapoluje się następnie odcinek prostoliniowy. Stosunek ekstrapolowanej wartości wielkości wyjściowej y_{ex} do różnicy między tą wielkością a wartością rzeczywistą y określa współczynnik b

$$b = \frac{y_{ex}}{y_{ex} - y}. \quad (5.6)$$

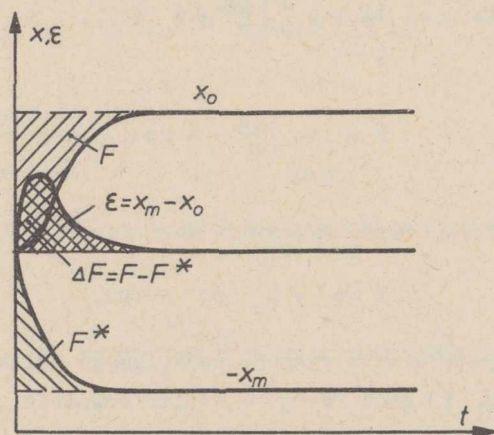
Większą stałą czasową wyznacza się albo w wyniku pomiarów i zlogarytmowania y_1 i y_2 , wyznaczonych w dowolnych czasach t_1 i t_2 i podstawienia do równania

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\log y_1 - \log y_2} \quad (5.7)$$

albo przyjmując, że ekstrapolowana prosta jest charakterystyką układu pierwszego rzędu, można wyznaczyć też T określając czas, po jakim wartość wyjściowa osiągnie $1/e$ swojej wartości. Znając T łatwo wyznaczyć mniejszą stałą czasową $T = bT$.

5.2. Metoda eksperymentu symulacyjnego

Zgodnie z zasadą identyfikacji metodą eksperymentu symulacyjnego, przedstawioną w rozdziale 3.3, warunkiem koniecznym adekwatności modelu matematycznego badanego obiektu jest pełna kompensacja błędu $\varepsilon(t)$ (rys. 3.10). Jako wskaźnik nastaw modelu przyjmuje się powierzchnię uchybu $\varepsilon(t)$ modelu i obiektu. Okazuje się bowiem, że powierzchnia odchyłki jest proporcjonalna do określonej w przybliżeniu sumarycznej stałej czasowej T_k obiektu. Powierzchnię odpowiedzi na wymuszenie skokowe obiektu F i modelu F^* oraz różnicy sygnałów $\Delta F = F - F^*$ przedstawia rysunek 5.7.



Rys. 5.7. Ilustracja metody identyfikacji za pomocą eksperymentu symulacyjnego

Powierzchnia odchyłki odpowiedzi jednostkowej obiektu wynosi

$$F = \int_0^{\infty} A_k dt - \int_0^{\infty} x(t) dt = \int_0^{\infty} [A_k - x(t)] dt. \quad (5.8)$$

Można ją obliczyć, mając transmitancję operatorową obiektu $G_0(p)$, po wykorzystaniu twierdzeń o całkowaniu oryginału

$$\mathcal{L} \left[\int_0^{\infty} x(t) dt \right] = \frac{1}{p} X(p) \quad (5.9)$$

oraz twierdzeń granicznych funkcji w dziedzinie zmiennej rzeczywistej i zespolonej

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p X(p), \quad (5.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p X(p). \quad (5.11)$$

Stąd

$$F = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \left[\frac{Ak}{p} - X(p) \right] = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{1}{p} \left[\frac{Ak}{p} - X(p) \right]. \quad (5.12)$$

Uwzględniając, że dla zerowych warunków początkowych

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{1}{p} \left[\frac{Ak}{p} - X(p) \right],$$

to

$$F = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{Ak}{p} - X(p) \right]. \quad (5.13)$$

Ponieważ sygnał wyjściowy obiektu

$$X(p) = G_0(p) \cdot W(p),$$

gdzie $W(p)$ - transformata sygnału wejściowego obiektu, oraz przyjmując $w(t) = A \cdot 1(t)$ czyli $W(p) = A/p$, to równanie (5.13) można napisać w następującej postaci:

$$F = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{Ak}{p} - \frac{A}{p} G_0(p) \right]. \quad (5.13a)$$

Przyjmijmy do rozważań obiekt o transmitancji najbardziej rozbudowanej, z członami inercyjnymi, różniczkującymi oraz z członem z opóźnieniem

$$G_o(p) = \frac{\prod_{j=1}^m k_j (1 + p\tau_{dj})}{\prod_{i=1}^m (1 + pT_{ai})} e^{-pT_o} \quad (5.14)$$

Obiekt ten można opisać zastępczą transmitancją, wykorzystując metodę Kesslera zastępowania dużej ilości małych stałych czasowych jedną sumaryczną stałą czasową. W tym celu równanie (5.14) poddamy następującym przekształceniom, uwzględniając, że

$$e^{-pT_o} = 1 + pT_o + p^2 T_o^2 + \dots = 1 + pT_o$$

i pomijając wyższe potęgi T_o

$$\begin{aligned} G_o(p) &= \frac{\prod_{j=1}^m k_j (1 + p\tau_{dj})}{\prod_{i=1}^m (1 + pT_{ai})} e^{-pT_o} = \prod_{i=1}^n k_i \frac{(1 + p\tau_{d1})(1 + p\tau_{d2}) \dots (1 + p\tau_{dm})}{(1 + pT_{a1})(1 + pT_{a2}) \dots (1 + pT_{an})(1 + pT_o)} = \\ &= \frac{k_I}{(1 + pT_o)} \frac{1 + p(\tau_{d1} + \tau_{d2} + \dots + \tau_{dm}) + p^2(\tau_{d1}\tau_{d2} + \tau_{d1}\tau_{d3} + \dots + \tau_{dm-1}\tau_{dm}) + \dots}{1 + p(T_{a1} + T_{a2} + \dots + T_{an}) + p^2(T_{a1}T_{a2} + T_{a1}T_{a3} + \dots + T_{an-1}T_{an}) + \dots} \\ &\quad \frac{+ p^3(\tau_{d1}\tau_{d2}\tau_{d3} + \dots) + \dots}{+ p^3(T_{a1}T_{a2}T_{a3} + \dots) + \dots} \end{aligned}$$

Po pominięciu iloczynów stałych czasowych jako dostatecznie małych, otrzymamy

$$\begin{aligned} G_o(p) &= k_I \frac{1 + p\tau_{k1}}{(1 + pT_{k1})(1 + pT_o)} = \frac{k_I}{(1 + pT_o)} \frac{(1 + pT_{k1})}{(1 + p\tau_{k1})} = \\ &= \frac{k_I}{(1 + pT_o) \left[1 + \frac{p(T_{k1} - \tau_{k1})}{(1 + p\tau_{k1})} \right]} \end{aligned}$$

Dla $p\tau_{k1} \ll 1$

$$G_o(p) = \frac{k_I}{(1+pT_o)[1+p(T_{k1}-\tau_{k1})]} = \frac{k_I}{(1+pT_o)(1+pT_{k2})} = \frac{k_I}{1+pT_k}, \quad (5.15)$$

w którym $k_I = \prod_{i=1}^n k_i$;

$$T_k = \sum_{i=1}^n T_{ai} - \sum_{j=1}^m \tau_{dj} + T_o.$$

Często w praktycznych układach napędowych istnieją jedna lub dwie stałe czasowe, dużo większe od pozostałych i mające zasadniczy wpływ na własności obiektu. W razie istnienia jednej dużej stałej czasowej i dowolnej ilości małych stałych czasowych, czyli

$$T_1 \gg T_2, T_3, \dots, T_n, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m,$$

transmitancję obiektu można przedstawić w następującej postaci:

$$G_o(p) = \frac{k_I}{(1+pT_1)(1+pT_{k2})}, \quad (5.16)$$

w którym

$$T_{k2} = \sum_{i=2}^n T_{ai} - \sum_{j=1}^m \tau_{dj} + T_o.$$

Podstawiając we wzorze (5.13a) za $G_o(p)$ wyrażenie (5.16), otrzymamy

$$\begin{aligned} F &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{Ak}{p} - \frac{Ak}{p(1+pT_1)(1+pT_{k2})} \right] = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{Ak}{p} - \frac{Ak}{p} - \frac{\frac{-T_1^2 Ak}{T_1 - T_{k2}}}{1 + pT_1} - \frac{\frac{T_{k2}^2 Ak}{T_1 - T_{k2}}}{1 + pT_{k2}} \right] = \\ &= \frac{T_1^2 Ak}{T_1 - T_{k2}} - \frac{T_{k2}^2 Ak}{T_1 - T_{k2}} = Ak(T_1 + T_{k2}) = Ak T_k. \end{aligned}$$

Zatem

$$F = Ak T_k, \quad (5.17)$$

w którym
$$T_k = \sum_{i=1}^n T_{ai} - \sum_{j=1}^m \tau_{dj} + T_o.$$

Podobnie oblicza się powierzchnię F odchyłki odpowiedzi jednostkowej modelu.

Zatem powierzchnia różnicy sygnałów modelu i obiektu

$$\Delta F = \int_0^{\infty} (x_m - x_o) dt = F^* - F = Ak (T_k - T_k^*), \quad (5.18)$$

a z przytoczonego dowodu wynika

$$\Delta F = Ak \left[\sum_{i=1}^n (T_{ai} - T_{ai}^*) - \sum_{j=1}^m (\tau_{dj} - \tau_{dj}^*) + (T_o - T_o^*) \right]. \quad (5.19)$$

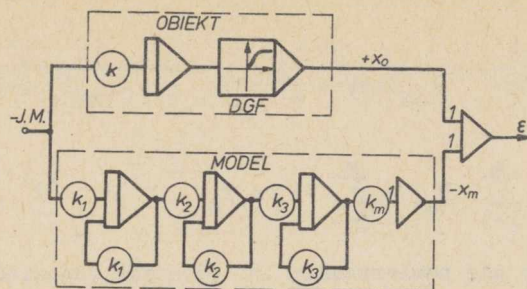
Po zastosowaniu metody kompensacji, której celem jest $\Delta F = 0$, zależność ta umożliwia proste wyznaczenie sumy stałych czasowych lub poszczególnych stałych czasowych układu identyfikowanego. Pełna kompensacja zachodzi wówczas, gdy $T_1^* = T_1 + T_{k2}$ lub $T_1^* = T_1$ a $T_2^* = T_{k2}$.

W celu dokonania identyfikacji układu napędowego na podstawie np. odpowiedzi na wymuszenie skokowe, wykorzystując do tego celu maszynę analogową, należy przebieg wyjściowy z obiektu, uzyskany z pomiarów, uzyskać w maszynie analogowej za pomocą diodowego generatora funkcji DGF (rozdział 6).

Zasadę procesu identyfikacji metodą eksperymentu symulacyjnego pokazano na rys. 5.8.

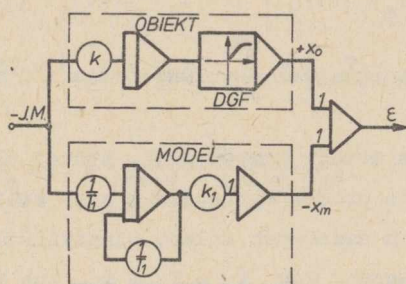
W celu wyjaśnienia metody postępowania, na rys. 5.8 przyjęto model analogowy obiektu rzeczywistego o transmitancji

$$G_m(p) = \frac{k_1}{(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3)}.$$

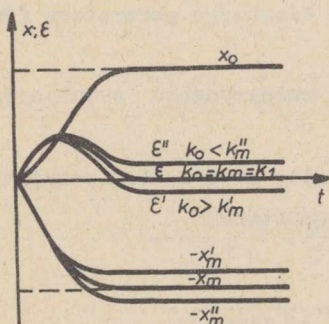


Rys.5.8. Zasada procesu identyfikacji metodą eksperymentu symulacyjnego

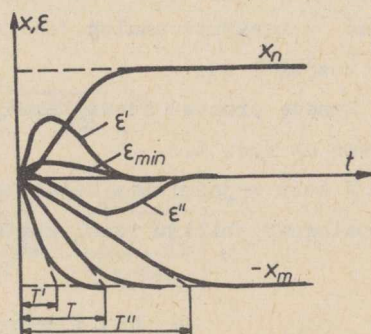
Transmitancję taką ma np. otwarty układ Leonarda z prądnicą. W przypadku ogólnym $G_m(p)$ może mieć dowolną postać; jest ona ograniczona tylko wielkością maszyny analogowej.



Rys.5.9. Pierwszy etap identyfikacji metodą symulacyjną



Rys.5.10. Sposób wyznaczania współczynnika wzmocnienia modelu w metodzie symulacyjnej



Rys.5.11. Sposób wyznaczania największej stałej czasowej obiektu

Układ na podstawie DGF będzie spełniał w procesie identyfikacji rolę rzeczywistego obiektu, symulując odpowiedź rzeczywistego układu na wymuszenie skokowe.

Pierwszym etapem identyfikacji badanego obiektu jest porównanie statycznych współczynników wzmocnienia obiektu i modelu w układzie pokazanym na rys. 5.9.

Na rysunku 5.9 założono transmitancję modelu

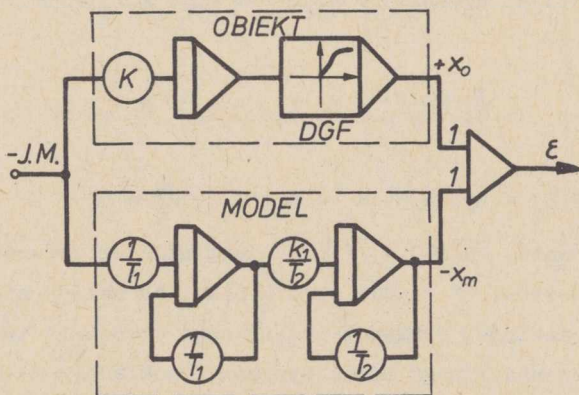
$$G_{m1}(p) = \frac{k_{m1}}{1 + pT_1}.$$

Sposób doregulowania współczynnika wzmocnienia $k_o = k_m = k_1$ pokazano na rys. 5.10.

Następnym krokiem postępowania jest określenie nastaw I elementu inercyjnego o największej stałej czasowej obiektu (rys. 5.11).

Odczytana stała czasowa T_1 odpowiada najmniejszej odchyłce $\varepsilon_{\min}$, przy której nie występuje zmiana znaku przy $0 \leq t \leq \infty$.

W podobny sposób można znaleźć drugą i dalsze stałe czasowe, zestawiając układy podane na rys. 5.12 oraz 5.8.



Rys.5.12. Układ do wyznaczania kolejnych stałych czasowych obiektu

Odczytując w końcu po doregulowaniu nastawy współczynników wzmocnienia w torach sprzężeń zwrotnych elementów inercyjnych, a następnie biorąc ich odwrotność, otrzymamy wartości poszczególnych stałych czasowych, wyrażone w sekundach. Wielkość statycznego współczynnika

wzmocnienia układu rzeczywistego określimy natomiast na podstawie odpowiedzi tego układu na wymuszenie skokowe, wyznaczając stosunek wartości ustalonego sygnału wyjściowego do wartości sygnału na wejściu.

5.3. Metoda statystyczna

Zastosowanie metod statystycznych do identyfikacji parametrów modeli matematycznych układów elektromechanicznych zostanie pokazane na przykładzie silnika prądu stałego z niesymetrią szczotkową w obwodzie wirnika.

Wykorzystując model matematyczny przedstawiony w pktcie 4.3, układ równań (4.42) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[(L_d + L_q) i_q + M_{df} i_f + M_{qk} i_k \right] - \omega \left[(M_d^d - M_q^q) i_q + M_q^k i_k - M_d^f i_f \right] = \\ = u_2 - (R_d + R_q) i_q; \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\frac{d}{dt} (L_f i_f + M_{fd} i_q) = u_f - R_f i_f; \quad (5.21)$$

$$\frac{d}{dt} (L_k i_k + M_{kq} i_q) = u_k - R_k i_k; \quad (5.22)$$

przy czym $L_d + L_q = L_t$; $R_d + R_q = R_t$; $M_d^d - M_q^q = M_t$.

Układ równań (5.20) - (5.22) jest układem równań liniowych względem parametrów. Z równań tych wynika, że należy zidentyfikować jedenaście parametrów. Ponieważ rezystancje uzwojenia twornika, wzbudzenia i kompensacyjnego można wyznaczyć dokładnie metodami konwencjonalnymi (np. pomiar mostkiem Thomсона lub metodą techniczną), to do wyznaczenia pozostaje osiem parametrów. Przyjmując następujące oznaczenia nieznanych parametrów:

$$x_1 = L_t; \quad x_2 = M_{df}; \quad x_3 = M_{qk}; \quad x_4 = M_t; \quad x_5 = M_q^k;$$

$$x_6 = M_d^f; \quad x_7 = L_f; \quad x_8 = L_k;$$

równania (5.20) - (5.22) można zapisać następująco:

$$x_1 \dot{I}_{qj} + x_2 \dot{I}_{fj} + x_3 \dot{I}_{kj} - x_4 \omega_j I_{qj} - x_5 \omega_j I_{kj} + x_6 \omega_j I_{fj} = \\ = U_{qj} - R_t I_{qj}; \quad (5.23)$$

$$x_7 \dot{I}_{fj} + x_2 \dot{I}_{qj} = U_{fj} - R_f I_{fj}; \quad (5.24)$$

$$x_8 \dot{I}_{kj} + x_3 \dot{I}_{qj} = U_{kj} - R_k I_{kj}; \quad (5.25)$$

przy czym $j = 1, 2, \dots, n$ jest liczbą pomiarów. Liczba pomiarów musi być równa lub większa od liczby wyznaczanych parametrów, występujących w modelu. Równania (5.23) - (5.25) będziemy rozwiązywać ze względu na zmienną x . Z równania (5.23) można otrzymać równocześnie sześć parametrów, w związku z tym w dalszej części zajmiemy się rozwiązaniem tego równania, ponieważ dwa pozostałe rozwiązuje się podobnie.

Zdefiniujemy następujące macierze

$$U_o = \begin{bmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \\ \vdots \\ U_{qn} \end{bmatrix}; \quad J_o = R_t \begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \\ \vdots \\ I_{qn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix};$$

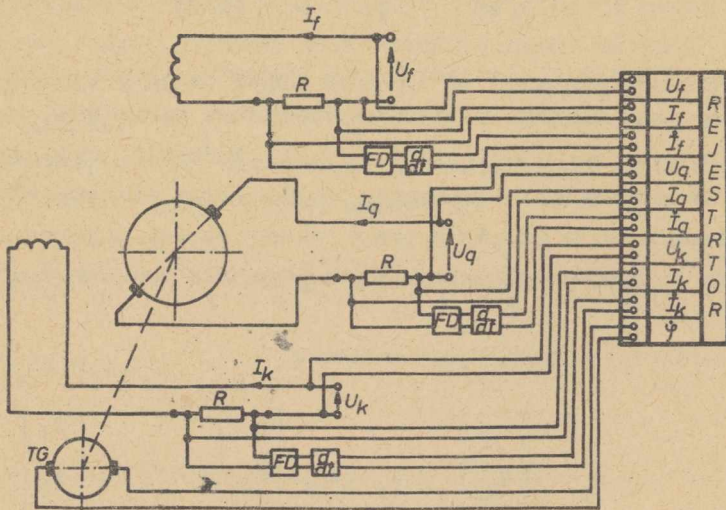
$$J = \begin{bmatrix} \dot{I}_{q1} & \dot{I}_{f1} & \dot{I}_{k1} & \omega_1 I_{q1} & \omega_1 I_{k1} & \omega_1 I_{f1} \\ \dot{I}_{q2} & \dot{I}_{f2} & \dot{I}_{k2} & \omega_2 I_{q2} & \omega_2 I_{k2} & \omega_2 I_{f2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{I}_{qn} & \dot{I}_{fn} & \dot{I}_{kn} & \omega_n I_{qn} & \omega_n I_{kn} & \omega_n I_{fn} \end{bmatrix}.$$

W ogólnym przypadku wektor parametrów X będzie miał wymiar $[m \times 1]$, a macierz J - $[n \times m]$, gdzie m - oznacza liczbę estymowanych parametrów.

Model matematyczny maszyny prądu stałego można zapisać w postaci macierzowej

$$U_0 - J_0 - JX = 0. \quad (5.26)$$

Elementy macierzy U_0 , J_0 , J otrzymujemy na podstawie pomiarów w układzie jak na rys. 5.13.



Rys.5.13. Schemat układu pomiarowego (FD-filtr dolnoprzepustowy; TG-prądnica tachometryczna)

Każdy pomiar jest obciążony pewnym błędem ϵ_j . Zakładając, że błędy pomiarów mają rozkład normalny $N(0, \sigma)$ [16], można napisać, że wyniki pomiarów U_j będą

$$U_j = U_{0j} + \epsilon_j, \quad (5.27)$$

przy czym wartość średnia błędów $E(\epsilon_j) = 0$, a wariancja $D^2(\epsilon_j) = \sigma^2$. Ponieważ wyniki pomiarów U_j są zmiennymi niezależnymi, dlatego ich wariancje σ^2 można przedstawić w postaci diagonalnej macierzy kowariancji zmiennej U_j lub ϵ_j , czyli

$$C_u = C_\epsilon = \sigma^2 \mathbf{1},$$

przy czym $\mathbf{1}$ - macierz jedykowa. Macierz odwrotna będzie natomiast macierzą wag, czyli

$$W_u = W_\varepsilon = C_u^{-1} = C_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} I. \quad (5.28)$$

Zapisując równanie (5.27) macierzowo

$$U = U_0 + \varepsilon \quad (5.29)$$

i wstawiając je do (5.26), otrzymujemy

$$U - \varepsilon - J_0 - JX = 0. \quad (5.30)$$

Rozpatrywany układ równań należy rozwiązać pod względem X .

Do wyznaczenia wektora parametrów X wykorzystamy metodę największej wiarygodności - podstawową metodę analizy regresyjnej [16].

Ponieważ przyjęliśmy, że błędy pomiarowe mają rozkład normalny, to wartości zmiennej niezależnej U_j również będą podlegały rozkładowi normalnemu o gęstości prawdopodobieństwa

$$f(U_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_j^2}{\sigma^2} \right]. \quad (5.31)$$

Funkcja wiarygodności dla n pomiarów ma postać

$$L(U_1, U_2, \dots, U_n; x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{j=1}^n f(U_j/x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (5.32)$$

w której $f(U_j/x_1, x_2, \dots, x_m)$ - funkcja gęstości prawdopodobieństwa
 n - wymiarowej zmiennej losowej U_j .

W przypadku estymacji nieznanymi parametrów $x_1, x_2, \dots, x_m$ na podstawie próby $U_1, U_2, \dots, U_n$ metodą największej wiarygodności przyjmujemy za estymatory tych parametrów wartości $x_1, x_2, \dots, x_m$ spełniające zależność

$$\begin{aligned} L(U_1, U_2, \dots, U_n; x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) = \\ = \max_{x_1, \dots, x_m} L(U_1, U_2, \dots, U_n; x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (5.33)$$

W celu wyznaczenia wartości optymalnych $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$, należy obliczyć pochodne cząstkowe funkcji wiarygodności L względem parametrów x_k

$$\frac{\partial L(X)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \prod_{j=1}^n f(U_j/x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, m \quad (5.34)$$

i przyrównać je do zera. W wyniku otrzymujemy układ równań

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \prod_{j=1}^n f(U_j/x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, m \quad (5.35)$$

trudny do rozwiązania ze względu na formę multiplikatywną.

Logarytmując stronami układ równań (5.34), otrzymujemy układ równań, równoważny z układem (5.35), lecz o postaci addytywnej:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n \ln f(U_j/x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, m, \quad (5.36)$$

który umożliwia łatwiejsze wyznaczenie wartości optymalnych współczynników.

Podstawiając zależność (5.31) do (5.36) otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon_j^2}{\sigma^2} = 0 \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, m. \quad (5.37)$$

Ponieważ wyrażenie pod znakiem sumy w równaniu (5.37) jest symetryczną formą kwadratową n zmiennych $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ typu

$$Y^T A Y = \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i^2,$$

w którym $Y^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$,

to równanie to możemy zapisać w następującej postaci:

$$\frac{\partial}{\partial X} (\varepsilon^T W \varepsilon) = 0. \quad (5.38)$$

Wykorzystując równanie (5.30) i wykonując różniczkowanie, otrzymujemy

$$2J^T W_u (U - J_0 - JX) = 0. \quad (5.39)$$

Rozwiązaniem tego układu równań ze względu na X jest

$$X = (J^T W_u J)^{-1} J^T W_u (U - J_0). \quad (5.40)$$

Wymieniony układ równań określa najlepsze estymaty szukanych parametrów równania (5.20) modelu matematycznego silnika prądu stałego.

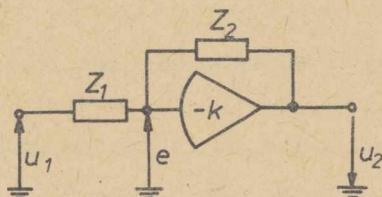
6. PODSTAWY MODELOWANIA ANALOGOWEGO I CYFROWEGO UKŁADÓW ELEKTROMECHANICZNYCH

6.1. Zasady modelowania analogowego

6.1.1. Człony obliczeniowe maszyn analogowych

Podstawą liniowych i nieliniowych członów maszyny analogowej jest wzmacniacz operacyjny. Jest on wzmacniaczem prądu stałego o bardzo dużym współczynniku wzmocnienia k rzędu 10^8 i przede wszystkim od jego parametrów zależy dokładność rozwiązywania analogowego.

Elementy sprzęgające w obwodzie wejściowym i sprzężenia zwrotnego wzmacniacza operacyjnego decydują o charakterze zależności napięcia wyjściowego od napięcia wejściowego (rys. 6.1).



Rys.6.1. Schemat wzmacniacza operacyjnego z obwodem wejściowym

Równanie wzmacniacza operacyjnego przy $k \rightarrow \infty$ ma postać

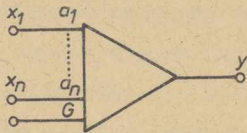
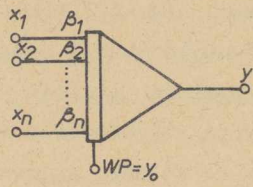
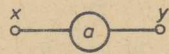
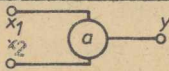
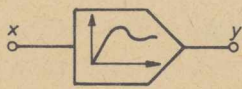
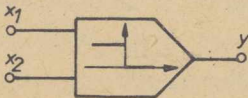
$$u_2 = - \frac{Z_2}{Z_1} u_1. \quad (6.1)$$

Na podstawie zależności (6.1) można więc za pomocą wzmacniacza operacyjnego wykonywać podstawowe działania matematyczne.

W tabeli 6.1 zestawiono podstawowe człony obliczeniowe maszyn analogowych z wyszczególnieniem oznaczeń graficznych, stosowanych na schematach i realizowanych zależności. Wyszczególnione człony są najczęściej dostępne w postaci niezależnych bloków operacyjnych.

T a b e l a 6.1

Człony liniowe i nieliniowe maszyny analogowej

Lp	Nazwa członu	Symbol	Zależności i uwagi
1	Wzmacniacz operacyjny		$y = -kx$, wzmacniacz bez sprzężenia zwrotnego; k - współczynnik wzmocnienia pętli otwartej
2	Inwertor		$y = -x$
3	Sumator		$y = - \sum_{i=1}^n a_i x_i$; $a_i = \frac{R_z}{R_i}$ sumator z dostępnym punktem sumowania G
4	Integrator		$y(t) = - \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_i x_i dt + y(t_0)$ t_0 - czas początku liczenia $y^0(t_0)$ - warunek początkowy liczenia $a_i = \frac{1}{R_i C}$ - stała całkowania
5	Potencjometr jednostronny		$y = ax$ $0 \leq a \leq 1$
6	Potencjometr dwustronny		$y = ax_1 + (1-a)x_2$
7	Mnożarka		$y = \frac{x_1 x_2}{JM}$; JM - jednostka maszynowa
8	Generator funkcji		$y = f(x)$; $f(x)$ - podane analitycznie lub wykreślnie aproxymacja odcinkowo-liniowa dowolnej krzywej
9	Komparator		$y = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x_1 + x_2 > 0 \\ 1 & \text{gdy } x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Jeżeli do układu na rysunku 6.1 zamiast Z_1 włączymy R_1 , a zamiast Z_2 włączymy pojemność C , otrzymamy na wyjściu całkowanie napięcia wejściowego czyli *i n t e g r a t o r*.

Jeżeli zamiast jednej rezystancji wejściowej zastosujemy kilka, a w sprzężeniu zwrotnym znajduje się również rezystancja, to otrzymamy *s u m a t o r* z odpowiednimi współczynnikami wzmocnienia do poszczególnych wejść.

I n w e r t o r otrzymujemy z sumatora jednoweściowego w przypadku gdy rezystancja wejściowa i sprzężenia zwrotnego mają tę samą wartość. Służy on do odwracania znaku sygnałów wejściowych.

P o t e n c j o m e t r y są najprostszymi członami obliczeniowymi maszyny analogowej i umożliwiają mnożenie sygnału wejściowego przez stałą liczbę α ($0 \leq \alpha \leq 1$), zwaną nastawą potencjometru.

Omówione człony maszyn analogowych są członami liniowymi. Zakres zastosowań maszyn analogowych jest znacznie szerszy dzięki wyposażeniu w elementy, które umożliwiają wykonywanie różnych operacji nieliniowych (tab. 6.1). Konstrukcja członów nieliniowych wymaga poza wzmacniaczem operacyjnym zastosowania elementów o nieliniowej charakterystyce statycznej. Do tego celu służą tzw. segmenty diodowe.

Elementem podstawowym segmentu diodowego jest dioda prostownicza o charakterystyce podanej w tabeli 6.2 poz. 1. Włączając diodę do układu przedstawionego w tabeli 6.2 na pozycji 2 można otrzymać przedstawioną tam charakterystykę statyczną. Charakterystykę tę można dowolnie kształtować zmieniając wartość oporności R_1 i potencjału polaryzacji E_p . Zmiana kierunku diody i kierunku napięcia E_p prowadzi do uzyskania charakterystyki, będącej odwróceniem charakterystyki z rysunku na pozycji 2, tab. 6.2.

Układ segmentu diodowego daje podstawę do budowy innych układów dokonujących nieliniowych operacji. Między innymi jest wykorzystywany do budowy diodowych generatorów funkcji oraz mnożarek.

G e n e r a t o r f u n k c j i składa się z wielu współpracujących ze sobą segmentów diodowych, umożliwiających tworzenie z kolejnych odcinków bardziej złożonej linii łamanej. Linia łamana, uzyskiwana jako charakterystyka wypadkowa, może tworzyć aproksymację dowolnej funkcji nieliniowej. Dopasowanie charakterystyki łamanej do poszukiwanej ciągłej jest możliwe dzięki temu, że zarówno punkty załamania,

jak i nachylenia poszczególnych odcinków, są regulowane odpowiednimi potencjometrami (tab. 6.2).

Przeciętna liczba segmentów diodowych w członie wynosi 10 do 20 i z tyłu też odcinków może składać się linia łamana uzyskiwana za pomocą bloku.

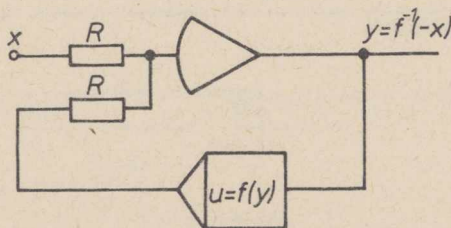
Diodowy generator funkcji może być więc używany do aproksymacji dowolnych charakterystyk nieliniowych, zadanych w polu napięć maszyny analogowej.

Mając zadaną (najlepiej wykresem) charakterystykę nieliniową podlegającą aproksymacji, dobieramy linię łamaną, możliwie dokładnie odwzorowującą zadaną charakterystykę. Nie istnieją ogólne metody aproksymacji za pomocą linii łamanych. Jest pożądane stosowanie tym krótszych odcinków linii łamanej, im większa jest krzywizna aproksymowanej charakterystyki.

Mnożarki są wykonywane najczęściej na tzw. kwadratorach diodowych, składających się z segmentów diodowych, modelujących funkcję x^2 . Dzięki nim jest możliwe wykonywanie mnożenia wg następującej tożsamości:

$$y = x_1 x_2 = \frac{1}{4} [(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2].$$

Są stosowane również mnożarki o innych konstrukcjach, np. wykorzystujące elektroniczne mnożenie szerokości impulsów [18,28].

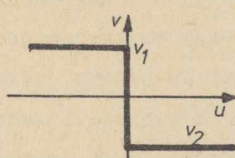
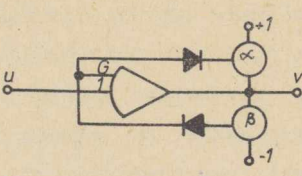
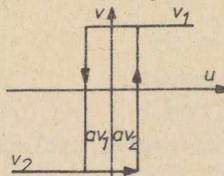
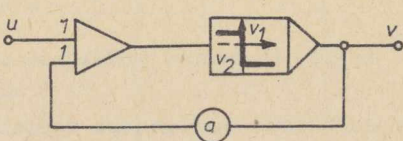
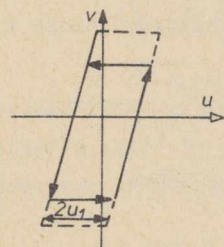
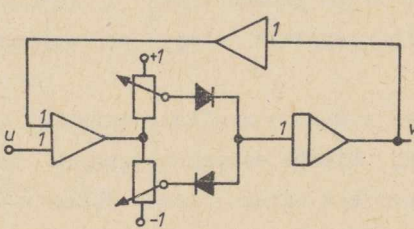
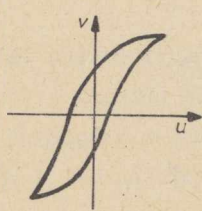
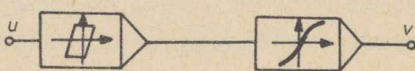


Rys.6.2. Schemat układu generującego funkcję odwrotną

Jeżeli istnieje potrzeba uzyskania charakterystyki nieliniowej, odwrotnej do charakterystyki istniejącego generatora funkcji, to można dokonać tego za pomocą wzmacniacza operacyjnego bez sprzężeń zwrotnych, do wejścia którego dołączamy przez rezystancję R sygnał

Modelowanie typowych charakterystyk nieliniowych

Lp	Charakterystyka	Model analogowy	Uwagi
1	Dioda		Charakterystyka diody: 1. "Idealnej" 2. Rzeczywistej
2	Segment diodowy		Charakterystyka odwrotna: zmiana znaku E_p i kierunku diody
3	Strefa nieczułości		
4	Wartość bezwzględna		1. Układ z diodą rzeczywistą 2. Układ z diodą "idealną" (kompensacja ΔU)
5	Ogranicznik amplitudy		1. Układ z diodą rzeczywistą 2. Układ z diodą "idealną"

Lp	Charakterystyka	Model analogowy	Uwagi
6	Funkcja Signum 		
7	Przełącznik dwupołożeniowy z histerezą 		
8	Luz 		
9	Pętla histerezy 		

wejściowy oraz sygnał pochodzący z członu nieliniowego, przyłączonego do wyjścia wzmacniacza. Strukturę taką przedstawiono na rysunku 6.2.

Możliwość łatwego uzyskiwania funkcji odwrotnej rozszerza możliwości generowania funkcji nieliniowych za pomocą typowych generatorów. Zasady uzyskiwania funkcji odwrotnej wykorzystuje się również do uzyskania dzielenia, jeżeli mamy jedynie człon wykonujący mnożenie.

W tabeli 6.2 zestawiono podstawowe nieliniowe układy operacyjne, umożliwiające uzyskiwanie za pomocą segmentów diodowych i wzmacniaczy operacyjnych nieliniowe charakterystyki statyczne. Są to przypadki najczęściej spotykane w układach elektromechanicznych. W tabeli 6.2 (oprócz charakterystyki) jest podany model analogowy układu tworzącego daną charakterystykę.

6.1.2. Procedura modelowania analogowego

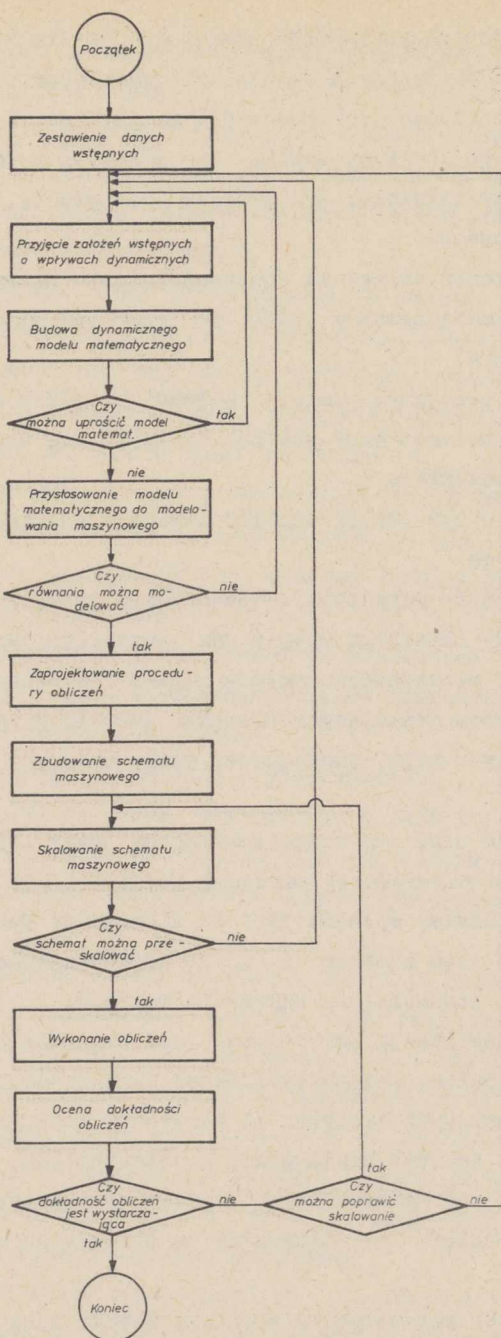
Proces modelowania analogowego dynamiki ma charakter wielopętlowej iteracji. Na rysunku 6.3 przedstawiono w formie sieci działań procedurę postępowania podczas modelowania analogowego dynamiki. W sieci zaznaczono tylko główne kroki i pętle. W dalszym ciągu będą omówione pobieżnie wszystkie etapy postępowania, wyszczególnione na rysunku 6.3.

Pierwszym etapem w analizie dynamiki powinno być zestawienie danych wstępnych. Liczba danych wstępnych zależy od fazy, w jakiej znajduje się projekt układu i celu obliczeń dynamicznych. Zazwyczaj dane wstępne są następujące:

- założenia techniczne układu;
- wyniki obliczeń stanów ustalonych;
- zbiór charakterystyk statycznych i dynamicznych elementów, które wchodzi w skład układu;
- wyniki badań laboratoryjnych elementów, a nawet całego układu, o ile celem obliczeń dynamicznych jest identyfikacja układu.

Oprócz wymienionych informacji do zestawu danych wstępnych powinien wchodzić ramowy program obliczeń, określający ich cel i zakres oraz żądana dokładność obliczeń.

Po zestawieniu danych wstępnych, na ich podstawie, a zwłaszcza na podstawie ramowego programu obliczeń, można przyjąć założenia wstępne



ys.6.3. Sieć działań procedury postępowania podczas modelowania analogowego

o wpływie poszczególnych parametrów układu na przebiegi dynamiczne i o pomijaniu czynników mających znaczenie drugorzędne. W tym etapie procesu modelowania bardzo duże znaczenie ma intuicja i doświadczenie zawodowe prowadzącego analizę, bowiem im bardziej założenia wstępne są zgodne z rzeczywistością, tym krótszy jest proces iteracyjny budowy modelu analogowego.

Przyjęcie założeń polega na wyszczególnieniu parametrów, które najprawdopodobniej mają istotny wpływ na przebieg procesów dynamicznych w danym układzie.

Na podstawie przyjętych założeń wstępnych buduje się następnie dynamiczny model matematyczny układu, kierując się zasadami i metodami omówionymi w rozdziale 4.

Jak wiadomo w tym etapie analizy istnieje możliwość skorygowania założeń wstępnych.

Polega ono przede wszystkim na pominięciu tych elementów układu, które nie będą miały istotnego wpływu na przebiegi dynamiczne. W celu oceny możliwości uproszczenia modelu należy porównywać między sobą wartości parametrów opisujących elementy struktury tego samego typu, a więc np. rezystancje, impedancje, stałe czasowe, natężenia prądów itp.

Jeżeli wartość liczbowa charakteryzująca dany element jest znacznie mniejsza od największej wartości liczbowej dla elementów tego samego typu w układzie, element taki ma nieznaczny wpływ na dynamikę układu, można go więc pominąć i w ten sposób uprościć model matematyczny, korygując jednocześnie założenia wstępne.

Kryterium klasyfikacji parametrów - pod względem ich wartości - na istotne i pomijalne, zależy od żądanej dokładności obliczeń i od możliwości obliczeniowych maszyny. W maszynach analogowych, ze względu na dość wąskie zakresy nastawienia współczynników, elementy o wartościach mniejszych od maksymalnych więcej niż sto razy muszą być na ogół odrzucone ze względu na trudności z przeskalowaniem modelu maszynowego.

Otrzymany model matematyczny dynamiki układu musi być przystosowany do maszyny matematycznej, którą dysponuje modelujący. Chodzi tutaj nie o typ maszyny, lecz o jej wyposażenie. Przystosowywanie rów-

nań do modelowania maszynowego wymaga zastosowania przede wszystkim kilku następujących uproszczeń:

- takiego uproszczenia przebiegów zmiennych wejściowych, aby łatwo można było je tworzyć w maszynie; konieczność korzystania z tego zabiegu występuje rzadko, ponieważ zmienne wejściowe są zazwyczaj dość prostymi funkcjami standardowymi;
- uproszczenia formy nieliniowości do postaci łatwej do modelowania; jest oczywiście możliwa nawet całkowita linearyzacja w przypadkach dopuszczalnych ze względu na dokładność przybliżenia;
- ponownego przeanalizowania możliwości pominięcia niektórych wpływów dynamicznych, jak to było już dokonane.

Jeżeli w wyniku procesu przystosowywania równań do modelowania są wprowadzone do nich jakiekolwiek zmiany, to niezbędna jest korekta założeń wstępnych i w miarę konieczności również pozostałych wcześniejszych kroków algorytmu.

Po przystosowaniu układu równań do możliwości maszyny, którą dysponuje modelujący, jest niezbędne ułożenie procedury obliczeń. Należy więc wykonać następujące działania:

- wyszczególnić zmienne obserwowalne,
- ułożyć plan obliczeń, zawierający sposób i kolejność wprowadzania do modelu zmiennych sterujących, procedurę rozwiązywania zadania, sposób i kolejność rejestracji danych wyjściowych (zmiennych obserwowalnych).

Bardziej szczegółowego omówienia wymaga procedura rozwiązywania zadania, która jest podstawową częścią planu obliczeń. W pracy inżynierskiej najczęściej używa się procedury prób i błędów w celu uzyskania żadanego rozwiązania. Dotyczy to zwłaszcza układów elektromechanicznych przemysłowych, które są budowane z elementów dobieranych z typoszeręgów. W razie modelowania dynamiki nowo projektowanych elementów, a również całych układów o przeznaczeniu specjalnym, jest możliwe stosowanie procedur optymalizacyjnych.

Praktycznie można rozpatrywać tzw. optymalizację parametryczną, czyli automatyczne poszukiwanie za pomocą maszyny takich wartości wybranych parametrów modelu dynamicznego, dla których rozwiązanie jest możliwie najbliższe optymalnemu, według przyjętego kryterium jakości.

Kryteria jakości mogą mieć różną postać, zależnie od potrzeb. Muszą one jednak zawsze mieć właściwości funkcji odległości w przestrzeni rozwiązań. Często stosowanym kryterium podczas modelowania dynamiki jest całka z kwadratu uchybu lub algebraicznej kombinacji kwadratów uchybów, czyli różnic między przebiegiem rzeczywistym a założonym danej zmiennej w zadanym czasie [18,27].

Istnieje wiele sposobów automatycznej optymalizacji parametrycznej za pomocą maszyn analogowych, przy czym tradycyjne maszyny analogowe (bez sterowania logicznego) do tego celu się nie nadają.

Mając określony model matematyczny i procedurę obliczeń należy przystąpić do zaprogramowania maszyny analogowej. Pierwszym krokiem w programowaniu maszyny jest wybór metody programowania. Wyboru metody programowania dokonuje się na podstawie rodzaju modelu matematycznego, jakim się dysponuje. Istnieją cztery podstawowe metody programowania:

1. Metoda ogólna.
2. Metoda zmiennej pomocniczej.
3. Metoda kanoniczna.
4. Metoda modelowania strukturalnego.

Szczegółowe omówienie poszczególnych metod znajduje się w pktcie 6.1.3. Każda z metod umożliwia, po dokonaniu określonych zabiegów formalnych na modelu matematycznym, zbudowanie schematu maszynowego.

Schemat maszynowy jest graficznym przedstawieniem sieci połączeń członów obliczeniowych maszyny analogowej. Schemat maszyny buduje się tak, aby odwzorowywał model matematyczny, przedstawiony w formie układu równań bądź schematu blokowego. Podczas budowania schematu maszynowego wykorzystuje się graficzne symbole członów obliczeniowych maszyn analogowych, wyszczególnione w tabeli 6.1.

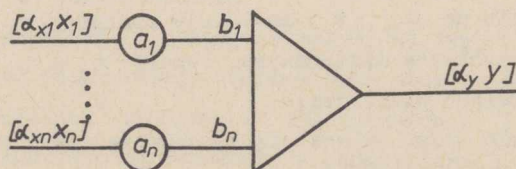
Ze względu na fakt, że zakres zmian sygnałów w maszynie jest ograniczony do $\pm JM$ (JM - jednostka maszynowa, np. w maszynie MEDA 42TA wynosi 10V), zakresy zmian zmiennych fizycznych, występujących w równaniach zazwyczaj nie odpowiadają możliwemu zakresowi zmian zmiennych maszynowych, niezbędne jest skalowanie schematu maszynowego. Wyróżnia się skalowanie amplitud i skalowanie czasu.

Skalowanie może być dokonane już podczas modelowania matematycznego i polega wówczas na wprowadzaniu współczynników skal do równań fizycznych. Takie skalowanie nie jest jednak zalecane, ponieważ powoduje ono nadmierną komplikację bardzo prostych operacji, z jakich składa się skalowanie amplitud i czasu.

Najprostszy sposób doboru skal amplitud do zmiennych maszynowych polega na oszacowaniu wartości maksymalnych odpowiednich zmiennych fizycznych i doborze współczynnika skali amplitudy α_x danej zmiennej fizycznej x z zależności

$$\alpha_x = \frac{1JM}{|x_{\max}|} \quad (6.2)$$

W celu ułatwienia odczytywania i rejestracji wyników jest wskazane takie dobieranie skal, aby były one wielokrotnościami lub podwielokrotnościami jednostek, w jakich są wyrażone zmienne fizyczne. Wymienione zalecenie nie jest w zgodzie z preferowaną przez podręcznik z modelowania analogowego zasadą, aby każda zmienna osiągała wartość jednostki maszynowej. Ścisłe przestrzeganie tej zasady wymaga stosowania dowolnych skal, co ogromnie utrudnia odczyt wyników i ich rejestrację na papierze milimetrowym.



Rys.6.4. Zasada skalowania członów operacyjnych

Po określeniu współczynników skal amplitud oblicza się wartości nastawień potencjometrów i wybiera się wzmocnienia wejść członów operacyjnych maszyny na podstawie zależności (rys. 6.4):

dla sumatorów

$$a_i b_i = \frac{\alpha_y}{\alpha_{xi}} K, \quad (6.3)$$

dla integratorów

$$a_i b_i = \frac{\alpha_y}{\alpha_{x_i} \alpha_t} K, \quad (6.4)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$;
 a_i - nastawienie i-tego potencjometru;
 b_i - wzmocnienie i-tego wejścia;
 K^i - wartość współczynnika, przez który jest mnożona zmienna fizyczna x_i w modelu matematycznym;
 α_{x_i} - współczynnik skali amplitudy zmiennej wejściowej x_i ;
 α_y - współczynnik skali amplitudy zmiennej wyjściowej y ;
 α_t - współczynnik skali czasu;
 $[\alpha_{x_i} \cdot x_i]$; $[\alpha_y \cdot y]$ - zmienne maszynowe.

Po przeskalowaniu amplitud, jeżeli wzmocnienie na wejściach integratorów otrzymuje się zbyt małe (co wydłuża czas obliczeń i pogarsza dokładność) lub zbyt duże (co utrudnia rejestrację i uruchomienie programu) w stosunku do możliwości maszyny, jest niezbędne odpowiednie przyspieszenie lub zwolnienie przebiegów obliczeniowych w maszynie w stosunku do przebiegów w rzeczywistym układzie, czyli jest niezbędne wprowadzenie różnicy między czasem maszynowym i rzeczywistym według współczynnika skali czasu

$$\alpha_t = \frac{t_m}{t_{rzecz}}, \quad (6.5)$$

gdzie t_m - czas maszynowy;
 t_{rzecz} - czas rzeczywisty w układzie fizycznym.

W odniesieniu do $\alpha_t > 1$ następuje zwolnienie, natomiast $\alpha_t < 1$ przyspieszenie przebiegów maszynowych. Jeżeli $\alpha_t = 1$, to mówimy o modelowaniu w naturalnej skali czasu.

Do skalowania czasu zaleca się stosowanie tylko skali $1 \cdot 10^n$. Spowoduje to, że wszystkie zmienne będą miały wartości nie mniejsze od 50% JM, lecz nie większe od 100% JM, co w większości przypadków zapewnia wystarczającą dokładność.

Ze względu na niemożność dokładnego określenia wartości maksymalnych wszystkich zmiennych fizycznych, opisane skalowanie jest wstępnym. Należy następnie uruchomić program w maszynie i jeżeli część członów operacyjnych przesterowuje się (wartości maksymalne zmiennych maszynowych przekraczają 1JM) poprawić skalowanie zmniejszając odpowiednio współczynniki skal przesterowujących się zmiennych. Jeżeli war-

tości maksymalne niektórych zmiennych są znacznie mniejsze od 1JM, należy odpowiednio zwiększyć współczynniki skal tych zmiennych.

Każda zmiana współczynnika skali amplitudy danej zmiennej wymaga zmiany tych nastawień, w określeniu których dany współczynnik skali występuje. Zmiana współczynnika skali czasu wymaga równoczesnej zmiany współczynników na wejściach wszystkich integratorów w schemacie maszynowym.

Jeżeli schemat maszynowy nie daje się przeskalować, tzn. wartości współczynników wykraczają poza zakres możliwy do realizacji, oznacza to błędnie przyjęty model matematyczny i należy wrócić do początku procedury.

Po przeskalowaniu i uruchomieniu programu wykonuje się obliczenia zgodnie z procedurą zaplanowaną wcześniej. Wyniki obliczeń z maszyny analogowej można zwykle otrzymać w postaci odczytów z woltomierza cyfrowego, wyskalowanego w JM, w postaci przebiegów obserwowanych na monitorze, wreszcie, co jest najwygodniejsze, jako wykresy z rejestratora XYt zarówno w funkcji czasu, jak i w formie portretu fazowego.

Ostatnim etapem procedury jest ocena dokładności obliczeń. W problemie dokładności obliczeń można wyróżnić dwa zagadnienia: a) dokładność obliczeń w maszynie; b) dokładność odwzorowania właściwości rzeczywistego układu za pomocą modelu.

Dokładność obliczeń w maszynie zależy od typu i dokładności samej maszyny i jej podstawowych członów oraz sposobu zaprogramowania. Zagadnienie dokładności obliczeń w tym rozumieniu i sposobów ich poprawiania są omówione szczegółowo w podręcznikach programowania [18,24].

W razie występowania niezadowolającej dokładności obliczeń w maszynie należy przede wszystkim podjąć próbę poprawienia programu maszynowego, zwłaszcza jego ponownego przeskalowania.

Wstępnej oceny dokładności odwzorowania właściwości rzeczywistego układu za pomocą modelu można dokonać metodą analizy założeń upraszczających, przyjętych podczas modelowania. Ścisła ocena dokładności może być jednak dokonana tylko przez porównanie przebiegów dynamicznych w modelu z przebiegami w rzeczywistym obiekcie. Podczas iden-

tyfikacji obiektu sterowania porównanie takie jest celem obliczeń. Projektując nowe urządzenie porównania takiego można dokonać dopiero po wykonaniu i przebadaniu prototypu. Tym można wytłumaczyć prawidłowość, że model dynamiczny układu jest tym ściślejszy, im bliżej końca procesu projektowania.

Jeżeli dokładność obliczeń jest niewystarczająca (w obu aspektach) należy wrócić do początku procesu iteracyjnego. W razie stwierdzenia zadowalającej dokładności obliczeń proces modelowania analogowego jest zakończony.

6.1.3. Metody programowania

6.1.3.1. Metoda ogólna. Jest to najprostsza metoda programowania maszyn analogowych. Stosuje się ją do równań różniczkowych liniowych i nieliniowych oraz do układów tych równań. Metoda postępowania będzie wyjaśniona na przykładzie równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach

$$a_3 \frac{d^3 y}{dx^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \quad (6.6)$$

i określonych warunkach początkowych

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} = A_2; \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = A_1; \quad (y)_{x=0} = A_0. \quad (6.7)$$

Kolejność postępowania podczas programowania metodą ogólną jest następująca:

1. Przekształcić dane równanie różniczkowe tak, aby po jednej stronie otrzymać pochodną najwyższego rzędu, a po drugiej stronie sumę pozostałych wyrazów równania.

2. Zbudować układ sumujący, na którego wejściach będą dane składniki sumy prawej strony równania przekształconego. Na wyjściu sumatora otrzymamy (zgodnie z równaniem) pochodną najwyższego rzędu.

3. Założyć, że pochodna najwyższego rzędu istnieje i jest na wejściu pierwszego integratora.

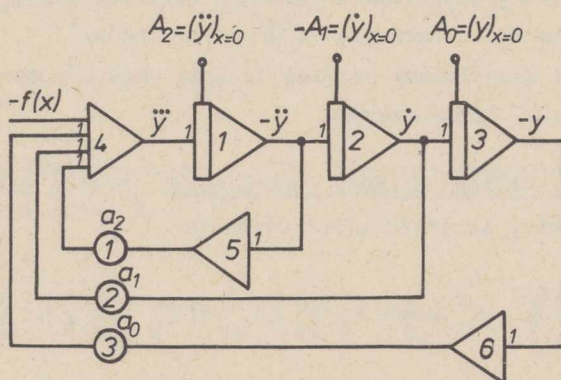
4. Narysować tyle integratorów ile wynosi rząd równania różniczkowego i połączyć je szeregowo.

5. Korzystając z wyjść integratorów i wejść sumatora, zamknąć obwody dla wszystkich tych punktów, w których przebiegi czasowe są takie same. Współczynniki równania ustawiamy przy tym na potencjometrach, wykorzystując odpowiednie wartościowości wejść, a ewentualne niezgodności znaków korygujemy przez dodanie inwertorów.

6. Wygenerować lub pobrać ze źródła funkcję wymuszającą i podać ją na wejście układu sumatora.

7. Ustalić warunki początkowe równania na wyjściach integratorów. Należy przy tym zwrócić uwagę na znak podawanych warunków początkowych.

Na rysunku 6.5 przedstawiono schemat maszynowy do równania (6.6) i warunków początkowych (6.7), otrzymany w wyniku programowania metodą ogólną.



Rys.6.5. Schemat analogowy równania (6.6)

W celu uproszczenia schematu maszynowego można zrezygnować z sumatora 4 (rys.6.5), a sumowanie dokonać na integratorze 1. Takie uproszczenie wiąże się z niemożnością obserwacji najwyższej pochodnej i koniecznością zmodyfikowania schematu poprzez wyrzucenie inwertorów 5 i 6 oraz dołączenie inwertora przed potencjometrem 2.

Jeżeli mamy do zaprogramowania układ równań różniczkowych typu

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^m y_1}{dx^m} &= f_1(x, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{d^m y_2}{dx^m} &= f_2(x, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots \\ \frac{d^m y_n}{dx^m} &= f_n(x, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\},$$

to stosuje się następujące etapy działania:

1. Zakładamy istnienie pochodnych rzędu m dla wszystkich n zmiennych zależnych.
2. Każdą z pochodnych rzędu m wprowadzamy na wejścia ciągów połączonych szeregowo m integratorów, które poprzez m -krotne całkowanie dają pochodne rzędu zerowego.
3. Tworzymy sumy równe funkcjom $f_1, f_2, \dots, f_n$; sumy te, wynikające z działania odpowiednich członów obliczeniowych, wprowadzamy na wejścia pierwszych integratorów każdego z ciągów.
4. Układ uzupełniamy poprzez dodanie warunków początkowych na wyjścia odpowiednich integratorów.

6.1.3.2. Metoda zmiennej pomocniczej. Metodę zmiennej pomocniczej przedstawimy na przykładzie równania

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (6.8)$$

o warunkach początkowych

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)_{t=0} = A_2; \quad \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=0} = A_1; \quad (y)_{t=0} = A_0;$$

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)_{t=0} = B_2; \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = B_1; \quad (x)_{t=0} = B_0.$$

Równanie (6.8) można by łatwo zaprogramować w maszynie analogowej według metody ogólnej i bez potrzeby różniczkowania elementów prawej strony, gdyby dało się ono sprowadzić do postaci

$$a_3 \frac{d^3 z}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + a_1 \frac{dz}{dt} + a_0 z = x. \quad (6.9)$$

Jeżeli założymy, że

$$y = b_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + b_1 \frac{dz}{dt} + b_0 z, \quad (6.9a)$$

to wtedy równania (6.8) i (6.9) są sobie równoważne. Aby to udowodnić wykonamy kilka operacji na równaniu (6.9). Pomnożymy równanie (6.9) przez b_0

$$a_3 b_0 \frac{d^3 z}{dt^3} + a_2 b_0 \frac{d^2 z}{dt^2} + a_1 b_0 \frac{dz}{dt} + a_0 b_0 z = b_0 x. \quad (6.10)$$

Następnie zróżniczkujemy równanie (6.9) i pomnożymy przez b_1

$$b_1 a_3 \frac{d}{dt} \left(\frac{d^3 z}{dt^3} \right) + a_2 b_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) + a_1 b_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) + b_1 a_0 \frac{d}{dt} (z) = b_1 \frac{d}{dt} x. \quad (6.11)$$

Poddamy następnie równanie (6.9) operacji dwukrotnego różniczkowania i pomnożymy przez b_2

$$b_2 a_3 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d^3 z}{dt^3} \right) + b_2 a_2 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) + b_2 a_1 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{dz}{dt} \right) + b_2 a_0 \frac{d^2}{dt^2} (z) = b_2 \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (6.12)$$

Równania (6.10), (6.11), (6.12) dodamy stronami i pogrupujemy odpowiednio wyrażenia zakładając, że współczynniki a_i, b_j są stałe (założenie to ogranicza zastosowanie omawianej metody do równań o stałych współczynnikach):

$$a_3 \frac{d^3}{dt^3} (b_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + b_1 \frac{dz}{dt} + b_0 z) + a_2 \frac{d^2}{dt^2} (b_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + b_1 \frac{dz}{dt} + b_0 z) +$$

$$\begin{aligned}
 & + a_1 \frac{d}{dt} (b_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + b_1 \frac{dz}{dt} + b_0 z) + a_0 (b_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + b_1 \frac{dz}{dt} + b_0 z) = \\
 & = b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Z przytoczonego przykładu wynika, że jest możliwe zaprogramowanie równania (6.8) za pomocą metody ogólnej bez potrzeby tworzenia pochodnych funkcji x , kosztem wprowadzenia zmiennej pomocniczej z . Istotnym ograniczeniem, zawężającym możliwości stosowania tej metody, jest założenie o stałości współczynników a_i, b_j , dzięki któremu było możliwe wykonanie operacji matematycznych w równaniu (6.13).

Zaprogramowanie za pomocą metody ogólnej równania (6.9) daje rozwiązanie w postaci funkcji zmiennej pomocniczej na wyjściu ostatniego integratora oraz odpowiednie pochodne na wyjściach pozostałych integratorów. Interesującą nas zmienną y uzyskujemy poprzez odpowiednie zsumowanie składników prawej strony równania (6.9a), zgodnie z rysunkiem 6.6.

Pozostaje jeszcze dobranie warunków początkowych w integratorach, ponieważ uległy one zmianie. Należy pamiętać, że na wyjściach 1, 2, 3 mamy teraz nie zmienną y (do której są dane warunki początkowe), lecz zmienną z , do której wartości tych warunków trzeba dobierać na nowo. Doboru nowych warunków początkowych dokonujemy za pomocą układu równań liniowych o postaci

$$b_2 \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{t=0} + b_1 \left(\frac{dz}{dt} \right)_{t=0} + b_0 (z)_{t=0} = A_0,$$

$$b_2 \left(\frac{d^3 z}{dt^3} \right)_{t=0} + b_1 \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{t=0} + b_0 \left(\frac{dz}{dt} \right)_{t=0} = A_1,$$

$$b_2 \left(\frac{d^4 z}{dt^4} \right)_{t=0} + b_1 \left(\frac{d^3 z}{dt^3} \right)_{t=0} + b_0 \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{t=0} = A_2,$$

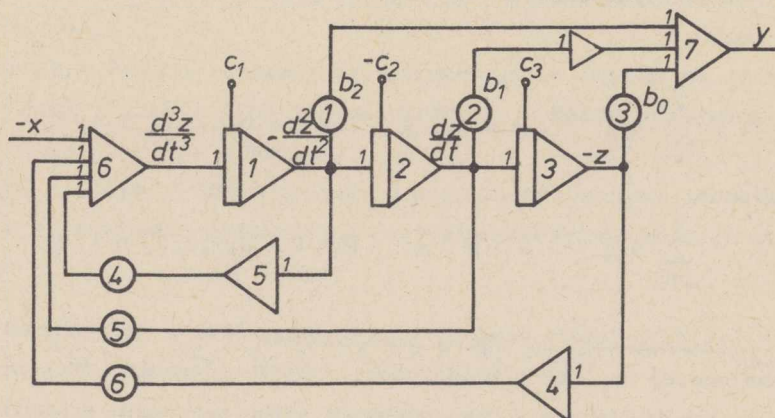
$$a_3 \left(\frac{d^3 z}{dt^3} \right)_{t=0} + a_2 \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{t=0} + a_1 \left(\frac{dz}{dt} \right)_{t=0} + a_0 (z)_{t=0} = B_0,$$

$$a_3 \left(\frac{d^4 z}{dt^4} \right)_{t=0} + a_2 \left(\frac{d^3 z}{dt^3} \right)_{t=0} + a_1 \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{t=0} + a_0 \left(\frac{dz}{dt} \right)_{t=0} = B_1.$$

Wyznaczone stąd wielkości C_1, C_2, C_3 , dane wzorami

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{t=0} = C_1; \quad \left(\frac{dz}{dt} \right)_{t=0} = C_2; \quad (z)_{t=0} = C_3$$

tworzą wartości nowych warunków początkowych na integratorach. Na rysunku 6.6 przedstawiono pełny schemat maszynowy omówionego przykładu.



Rys.6.6. Schemat analogowy równania (6.9)

W ogólnym przypadku, jeżeli równanie różniczkowe jest dane w postaci

$$\sum_{j=0}^n a_j \bar{p}^{(j)} y = \sum_{i=0}^m b_i \bar{p}^{(i)} x,$$

gdy $m \leq n$,

gdzie $\bar{p} = \frac{d}{dt}$ - operator różniczkowania,

$\bar{p}^{(m)} = \frac{d^m}{dt^m}$ - operator pochodnej m-tego rzędu,

to równanie zmiennej pomocniczej ma postać

$$\sum_{j=0}^n a_j \bar{p}^{(j)} z = x,$$

przy czym z jest określone wzorami

$$y = \sum_{i=0}^m b_i \bar{p}^{(i)} z$$

oraz

$$\bar{p}^{(k)} y = \sum_{i=0}^m b_i \bar{p}^{(i+k)} z.$$

Warunki początkowe programu, za pomocą nowej zmiennej z , określamy z równań

$$\sum_{i=0}^n b_i \bar{p}^{(i+1)} z = \bar{p}^{(1)} y \quad \text{dla } l = 0, 1, \dots, n-1, n,$$

$$\sum_{j=0}^m a_j \bar{p}^{(j+k)} z = \bar{p}^{(k)} z \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, m-1, m.$$

6.1.3.3. Metoda postaci kanonicznej. Metoda programowania maszyny analogowej za pomocą kanonicznej postaci równania różniczkowego polega na przekształceniu tego równania przed ułożeniem schematu połączeń. Metodę tę musimy stosować jeżeli po prawej stronie równania różniczkowego występuje poza funkcją wymuszającą $x(t)$ także jej pochodne. Metoda ogólna jest w tym przypadku niemożliwa do stosowania, ponieważ pochodne funkcji wymuszającej $x(t)$ w postaci jawnej najczęściej nie występują w maszynie.

Postępowanie jest następujące:

1. Równania różniczkowe należy zapisać w postaci operatorowej (za pomocą operatora p).
2. Przyrównać pochodną najwyższego rzędu do pozostałych wyrazów równania.
3. Uporządkować prawą stronę równania tak, aby rząd operatorów był tym niższy, im dany wyraz stoi bardziej na prawo.

4. Scałkować równanie tyle razy, ile wynosi jego rząd. Z lewej strony równań otrzymamy wtedy zmienną zależną.
5. Narysować taką liczbę integratorów, ile wynosi rząd równania.
6. Założyć, że funkcja, której poszukujemy jako rozwiązania, jest na wyjściu integratora (jeżeli przy najbardziej na lewo stojącym wyrażeniu prawej strony równania stoi operator całkowy) lub założyć, że funkcja poszukiwana jako rozwiązanie jest na wyjściu sumatora.
7. W przeciwnym razie założyć, że istnieje funkcja wymuszająca (chwilowo z niczym nie połączona).
8. Korzystając z założonego istnienia funkcji, dokonać kolejno połączeń pętli obejmujących coraz większą liczbę integratorów połączonych kaskadowo.
9. Połączyć funkcję wymuszającą, poczynając od członu, na którego wyjściu jest założona funkcja poszukiwana; w wyniku otrzymamy równość prawej i lewej strony równania.
10. Podać na integratory odpowiednio przeliczone warunki początkowe.

W celu wyjaśnienia wymienionego postępowania będzie zaprogramowane równanie

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_3 \frac{dy}{dt} + a_4 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (6.14)$$

o warunkach początkowych

$$y(0) = A; \quad \dot{y}(0) = B; \quad \ddot{y}(0) = 0.$$

Równanie (6.14) w zapisie operatorowym ma postać

$$p^3 y + a_2 p^2 y + a_3 p y + a_4 y = b_1 p x + b_0 x. \quad (6.15)$$

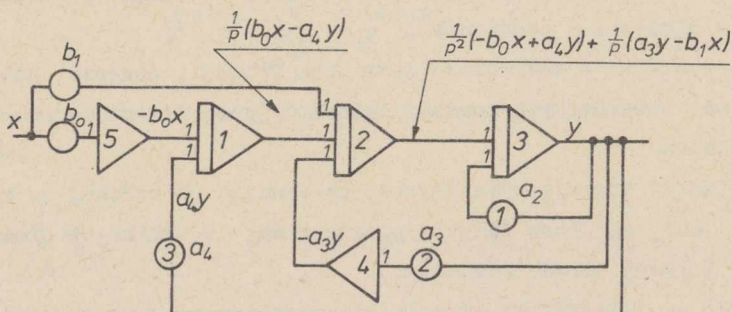
Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$p^3 y = (b_0 x - a_4 y) + p(b_1 x - a_3 y) - a_2 p^2 y. \quad (6.16)$$

Równanie to całkujemy trzykrotnie

$$y = -\frac{1}{p} a_2 y + \frac{1}{p^2} (b_1 x - a_3 y) + \frac{1}{p^3} (b_0 x - a_4 y). \quad (6.17)$$

Łączymy trzy integratory. Zakładamy, że na wyjściu ostatniego integratora istnieje funkcja y , poszukiwana jako rozwiązanie równania. Na wejściu układu zmienna niezależna x opisuje wejście nie połączone jeszcze z żadnym integratorem. Korzystając z wyjścia ostatniego integratora budujemy pętle tak, aby otrzymać najbardziej na lewo stojący wyraz po prawej stronie równania (6.17). Za pomocą wyjścia y oraz utworzonych pętli utworzymy przebiegi opisane wyrazami po prawej stronie równania (6.17).



Rys.6.7. Schemat analogowy równania (6.14)

Na rysunku 6.7 przedstawiono schemat analogowy równania (6.14). Pozostaje tylko uzupełnić schemat przez dodanie warunków początkowych. Podanie warunku początkowego na ostatni integrator nie następuje żadnych trudności, ponieważ wartość $(y)_{t=0}$ jest znana. Inaczej jest z pozostałymi warunkami początkowymi.

Warunek początkowy, dotyczący integratora 2, można obliczyć następująco:

z równania (6.16)

$$p(a_3 y - b_1 x) + (a_4 y - b_0 x) = -a_2 p^2 y - p^3 y,$$

po dwukrotnym scałkowaniu

$$\frac{1}{p^2}(a_3 y - b_1 x) + \frac{1}{p}(a_4 y - b_0 x) = -a_2 y - p y.$$

Wielkość po lewej stronie jest sygnałem wyjściowym integratora 2. Wielkości po prawej stronie są natomiast znane, a więc można obliczyć warunki początkowe na wyjściu integratora 2.

Przedstawiona metoda jest zwłaszcza przydatna do modelowania równań, których funkcja wymuszająca występuje wraz ze swoimi pochodnymi oraz warunki początkowe są zerowe. Wadą metody jest przede wszystkim brak możliwości uzyskania w postaci jawnej pochodnych poszukiwanego rozwiązania.

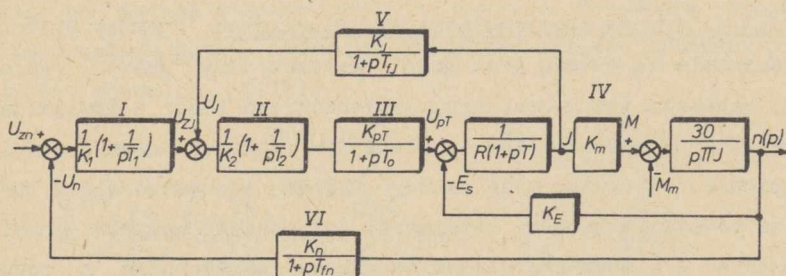
6.1.3.4. Metoda programowania strukturalnego. Punktem wyjściowym do programowania tą metodą jest model matematyczny układu, podany w postaci schematu strukturalnego, zawierającego bloki z transmitancjami operatorowymi poszczególnych elementów układu. Schemat strukturalny, opisujący dynamikę modelowanego układu, otrzymuje się w ten sposób, że na podstawie założeń wstępnych, dotyczących wpływów dynamicznych, układu się równania elementów układu korzystając z podstawowych zależności fizycznych. Równania te następnie linearyzuje się, stosuje się do nich przekształcenie Laplace'a i sprowadza do formy transmitancji opisujących poszczególne elementy układu. Dysponując transmitancjami elementów buduje się schemat strukturalny, składający się z bloków, zawierających poszczególne transmitancje, połączonych liniami sygnałowymi. W tym etapie jest możliwe upraszczanie modelu matematycznego i korekta założeń wstępnych w wyniku pominięcia transmitancji, zawierających stałe czasowe znacznie mniejsze od największych stałych czasowych występujących w schemacie strukturalnym.

Po ewentualnym uproszczeniu schematu strukturalnego jest niezbędne jego dostosowanie do formy możliwej do modelowania. Chodzi o wyeliminowanie ze schematów członów różniczkujących. Do przekształceń należy posługiwać się zasadami algebry schematów strukturalnych, opisanymi w podręcznikach klasycznej teorii regulacji automatycznej i modelowania [1,4,5,27]. Należy zwrócić uwagę, że jeżeli wyeliminowanie czystych członów różniczkujących ze schematu jest niemożliwe, najprawdopodobniej przyjęto niewłaściwe założenia wstępne i należy wrócić do początku procedury.

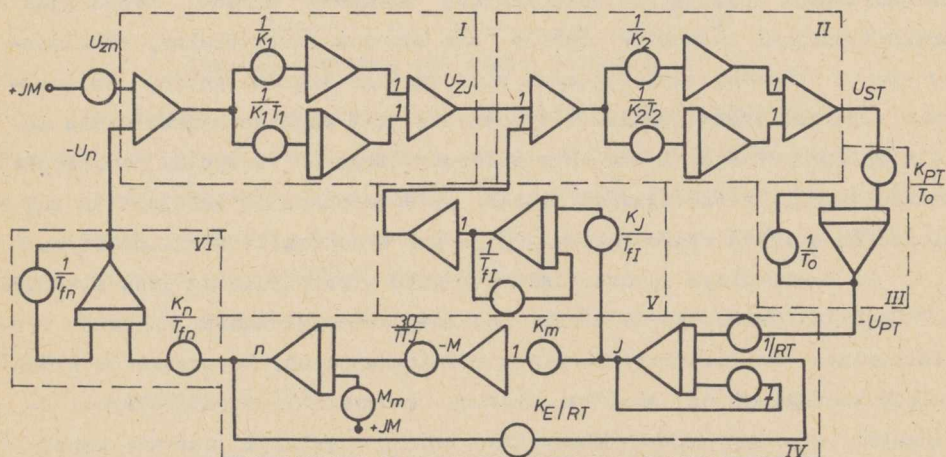
Do przekształceniu schematu strukturalnego na potrzeby modelowania buduje się na jego podstawie schemat maszynowy, zastępując bloki z transmitancjami odpowiednimi zestawami członów analogowych. Modele analogowe typowych transmitancji są zestawione w podręcznikach doty-

czących zastosowań maszyn analogowych [24,28,29]. Dalszy tok postępowania jest zgodny z przedstawionym w pktcie 6.1.2.

Całość układu połączeń maszyny analogowej zachowuje taką samą strukturę, jak na schemacie, dla którego określono transmitancje operatorowe.



Rys.6.8. Schemat strukturalny układu napędowego prostownik tyrystorowy-silnik obcowzbudny



Rys.6.9. Schemat analogowy układu napędowego prostownik tyrystorowy-silnik obcowzbudny

Metoda programowania strukturalnego ma wiele zalet:

1. Programowanie jest znacznie ułatwione, ponieważ poszczególne bloki, odpowiadające odpowiednim transmitancjom, modelujemy niezależnie (np. metodą postaci kanonicznej) lub wykorzystujemy zestawienia różnych modeli (podawane w literaturze), a następnie łączymy strukturę obejmującą cały układ. Ułatwia to orientację i kontrolę.

2. Istnieje prosta i jednoznaczna zależność między strukturą programu w maszynie i strukturą problemu rzeczywistego. Ułatwia to bardzo orientację i interpretację.

3. Łatwo odwzorować ewentualne zmiany struktury układu w badanym modelu matematycznym.

Jako przykład ilustrujący omawianą metodę rozważymy układ z rysunku 6.8, dla którego transmitancje operatorowe są określone w poszczególnych blokach schematu strukturalnego. Przedstawiony schemat odnosi się do zlinearyzowanego układu napędowego prostownik tyrystorowy-silnik obcowzbudny prądu stałego (w strefie prądów ciągłych). Schemat połączeń, przedstawiony na rys. 6.9, odzwierciedla układ połączeń maszyny analogowej, programowanej strukturalnie według schematu przedstawionego na rys. 6.8. Elementy schematu analogowego, znajdujące się w ramach, tworzą graficzny opis poszczególnych transmitancji schematu strukturalnego.

6.1.4. Modele analogowe wybranych elementów układów elektromechanicznych

6.1.4.1. Model analogowy regulatora liniowego. Każdy zamknięty układ elektromechaniczny (jedno- lub wielopętlowy) zawiera regulatory. Najczęściej są to regulatory liniowe o strukturze P, PI, PID.

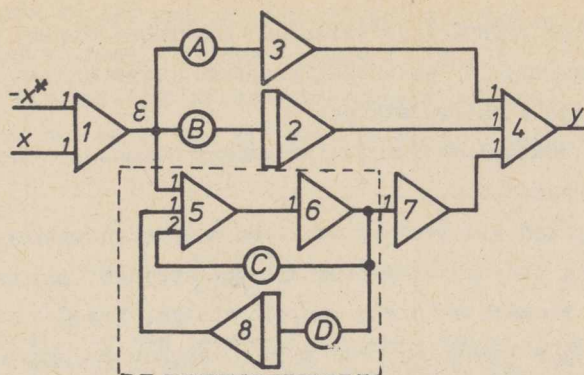
Liniowy regulator o strukturze PID opisuje równanie

$$y(t) = k \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_z} \int_0^t \varepsilon(t) dt + T \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right] + y_0, \quad (6.18)$$

w którym $y(t)$ - wartość chwilowa sygnału na wyjściu regulatora;
 y_0 - wartość początkowa sygnału wyjściowego;
 $\varepsilon(t)$ - błąd regulacji;
 T_z - czas zdwojenia;
 T_d - czas wyprzedzenia;
 k - współczynnik proporcjonalności.

Z równania (6.18) wynika transmitancja regulatora PID

$$K(p) = k \left[1 + \frac{1}{pT_z} + pT_d \right]. \quad (6.19)$$



Rys.6.10. Schemat analogowy regulatora PID:

$$A = \frac{\alpha_y}{\alpha_x} k, \quad B = \frac{\alpha_y}{\alpha_x \alpha_t} \frac{k}{T_z}, \quad C = \frac{1 - \frac{\alpha_x T_1}{\alpha_y T_d}}{2}, \quad D = \frac{\alpha_x}{\alpha_y \alpha_t k T_d}$$

Ponieważ idealny człon różniczkujący jest nierealizowalny, istnieje więc konieczność przybliżonego obliczania pochodnej sygnału $\varepsilon(t)$. Najczęściej wprowadza się następujące uproszczenia w postaci transmi-tancji (6.19):

$$K(p) = k \left[1 + \frac{1}{pT_z} + pT_d f(p) \right], \quad (6.20)$$

gdzie $f(p)$ - funkcja aproksymująca rzeczywisty człon różniczkujący. Najczęściej przyjmuje się funkcję $f(p)$ w postaci

$$f(p) = \frac{1}{1 + pT_1}, \quad T_1 \ll T_d.$$

Postępując zgodnie z zasadami programowania strukturalnego, uwzględniając ponadto współczynniki skali amplitud α_x, α_y oraz współczynnik skali czasu α_t , otrzymujemy schemat maszynowy, przedstawiony na rys. 6.10. Na schemacie X oznacza sygnał zadany, X^* - sygnał sprzężenia zwrotnego. Ze względu na ograniczone wartości sygnałów wyjściowych, wyjścia integratora 2 i wzmacniacza 4 mają układy ograniczające sygnał wyjściowy na poziomie jednostki operacyjnej maszyny analogowej (tab. 6.2).

Na rysunku 6.10 linią przerywaną zaznaczono tę część schematu, która odzwierciedla przybliżone działanie różniczkujące. Układ ten działa stabilnie, jeżeli nastawa potencjometru $C < 0,5$.

6.1.4.2. Model analogowy obwodów sprzężonych magnetycznie z uwzględnieniem nieliniowości krzywej magnesowania. Podczas modelowania obwodów sprzężonych magnetycznie, z jednoczesnym uwzględnieniem wpływu nieliniowości obwodu magnetycznego zamiast prądów osiowych, indukcyjności własnych, wzajemnych i SEM rotacji, wprowadza się strumień główny i strumienie rozproszenia oraz permeancje. Taki sposób przedstawienia obwodu umożliwia w najprostszy sposób uwzględnić zjawiska nasycenia, a uzyskany przy tym model nie zatracą swojej pogłębłości. Zakładając, że wszystkie obwody sprzężone magnetycznie tworzą wspólny strumień rozproszenia, można do n obwodów przyjąć następujące równania:

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n R_i I_i + \sum_{i=1}^n z_i (\Phi + \Phi_{\sigma}) p, \quad (6.21)$$

$$\Phi = \lambda_o K F_{\Sigma}, \quad (6.22)$$

$$\Phi_{\sigma} = \lambda_{\sigma} F_{\Sigma}, \quad (6.23)$$

$$F_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n I_i z_i, \quad (6.24)$$

w których λ_o - permeancja na drodze strumienia głównego, odpowiadająca liniowej części krzywej magnesowania;
 λ_{σ} - permeancja na drodze strumienia rozproszenia;
 K - współczynnik ≤ 1 , uwzględniający nieliniowość krzywej magnesowania, definiowany

$$K = \frac{\lambda}{\lambda_o};$$

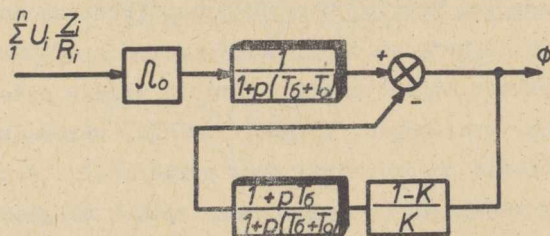
F_{Σ} - całkowity przepływ, wymuszany amperozwojami poszczególnych uzwojeń.

Po pomnożeniu równania (6.21) przez z_i/R_i oraz uwzględnieniu zależności (6.23) i (6.24), otrzymujemy

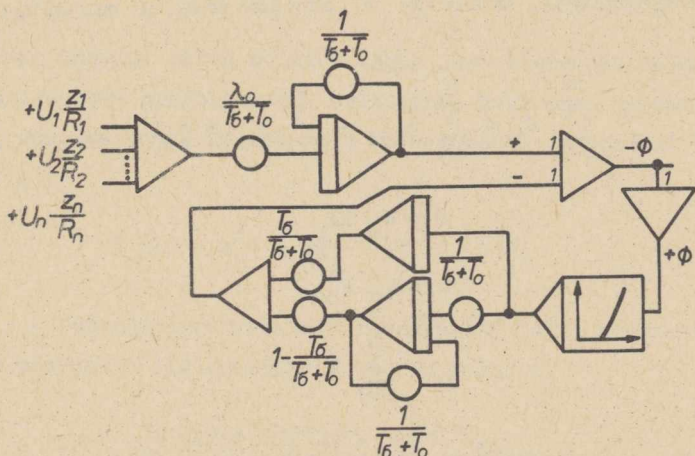
$$\lambda_o \sum_{i=1}^n U_i \frac{z_i}{R_i} = \frac{\Phi}{K} + \frac{T_{\sigma}}{K} \Phi p + T_o \Phi p, \quad (6.25)$$

gdzie $T_0 = \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{R_i}$ - stała czasowa strumienia głównego na liniowej części charakterystyki;

$T_\sigma = \lambda_\sigma \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{R_i}$ - stała czasowa strumienia rozproszenia na liniowej części charakterystyki.



Rys.6.11. Schemat strukturalny obwodów sprzężonych magnetycznie z uwzględnieniem nasycenia



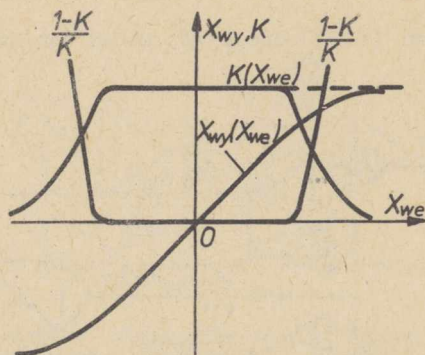
Rys.6.12. Schemat analogowy obwodów sprzężonych magnetycznie z uwzględnieniem nasycenia

Dodając do lewej i prawej strony równania (6.25) wyrażenie $(T_0 p + 1) \Phi$, otrzymujemy po przekształceniach

$$\Phi [1 + (T_0 + T_\sigma) p] = \lambda_0 \sum_{i=1}^n U_i \frac{z_i}{R_i} - \left(\frac{1}{K} - 1\right) (1 + p T_\sigma) \Phi. \quad (6.26)$$

Na podstawie równania (6.26) można zbudować schemat strukturalny, przedstawiony na rys. 6.11 oraz odpowiadający mu model analogowy

(rys. 6.12). Na rysunku 6.13 przedstawiono ponadto poglądowo sposób otrzymywania charakterystyk nieliniowych, omówioną metodą.



Rys.6.13. Zasada otrzymywania charakterystyk nieliniowych

6.1.4.3. Model analogowy silnika prądu stałego. Po założeniu, że pomija się:

- nieliniowości obwodów magnetycznych,
- efekty tłumiące od prądów wirowych,
- wpływ procesów komutacyjnych i rezystancji przejścia szczotki,
- wpływ reakcji twornika,

po przyjęciu ponadto, że silnik jest obciążony momentem aktywnym i pracuje na prostoliniowej części charakterystyki magnesowania, zlinearyzowany model matematyczny silnika bocznikowego (obcownobudnego) ma postać

$$u_w = R_w i_w + L_w \frac{di_w}{dt},$$

$$u_{tw} = e_r + R_{tw} i_{tw} + L_{tw} \frac{di_{tw}}{dt}, \quad (6.27)$$

$$e_r = c_E \Phi n,$$

$$\Phi = k i_w,$$

$$M_e = c_M \Phi i_{tw},$$

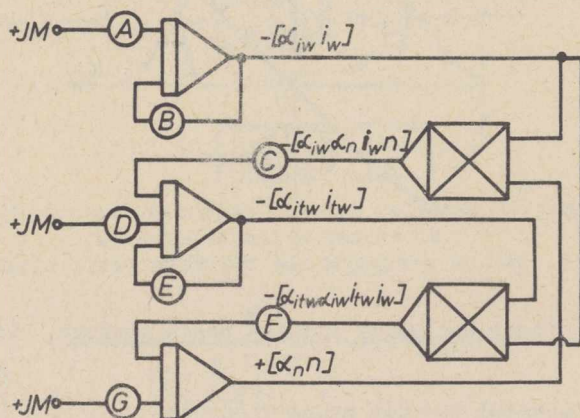
$$M_e - M_m = \frac{\pi}{30} J \frac{dn}{dt},$$

w której n - prędkość obrotowa w [obr/min];

J - moment bezwładności mas wirujących w [Nms^2].

Szczegółowe wyprowadzenie zależności (6.27) zostało podane w rozdziale 4.

Układowi równań (6.27) odpowiada model analogowy, przedstawiony na rys. 6.14.



Rys.6.14. Schemat analogowy układu równań (6.27):

$$A = \frac{U_w}{L_w} \frac{\alpha_{i_w}}{\alpha_t}, \quad B = \frac{R_w}{L_w} \frac{1}{\alpha_t}, \quad C = \frac{c_E k}{L_{tw}} \frac{\alpha_{i_{tw}}}{\alpha_{i_w} \alpha_n \alpha_t}, \quad D = \frac{U_{tw}}{L_{tw}} \frac{\alpha_{i_{tw}}}{\alpha_t},$$

$$E = \frac{R_{tw}}{L_{tw}} \frac{1}{\alpha_t}, \quad F = \frac{30 k c_M}{\pi J} \frac{\alpha_n}{\alpha_{i_{tw}} \alpha_{i_w} \alpha_t}, \quad G = \frac{30 M_m}{\pi J} \frac{\alpha_n}{\alpha_t}$$

W przypadku gdy $\Phi = \text{const}$, układ równań (6.27) upraszcza się do postaci

$$u_{tw} = e_r + R_{tw} i_{tw} + L_{tw} \frac{di_{tw}}{dt},$$

$$e_r = c_E \Phi n = K_E n, \quad (6.28)$$

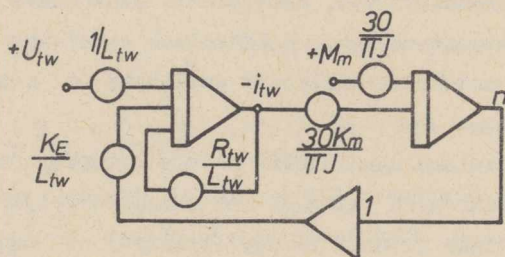
$$M_e = c_M \Phi i_{tw} = K_M i_{tw},$$

$$M_e - M_m = \frac{\pi}{30} J \frac{dn}{dt},$$

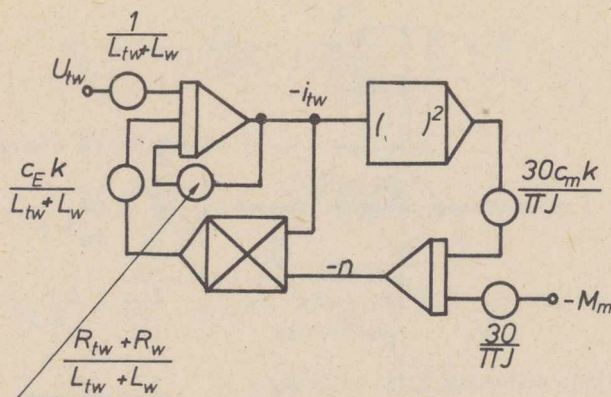
w którym K_E , K_M - stałe silnika;

$$K_M = \frac{30}{\pi} K_E, \quad [\text{Nm/A}] \rightarrow$$

Układowi równań (6.28) odpowiada model analogowy przedstawiony na rys. 6.15. Model ten jest najczęściej stosowany do badań modelowych układów napędowych z silnikami prądu stałego.



Rys.6.15. Schemat analogowy układu równań 6.28



Rys.6.16. Schemat analogowy układu równań 6.29

W razie rozpatrywania silnika prądu stałego o wzbudzeniu szeregowym, zlinearyzowany model matematyczny ma postać

$$u_{tw} = e_r + (R_{tw} + R_w) i_{tw} + (L_{tw} + L_w) \frac{di_{tw}}{dt},$$

$$e_r = c_E \Phi n,$$

$$\Phi = k i_{tw},$$

(6.29)

$$M_e = c_M \Phi i_{tw} = c_M k i_{tw}^2,$$

$$M_e - M_m = \frac{\pi}{30} J \frac{dn}{dt}.$$

$$E_d(p) = k_d z_q I_q(p), \quad (6.30)$$

$$I_q(p) = \frac{E_q(p)}{R_q(1+pT_q)},$$

w których

k_q, k_d - współczynniki proporcjonalności;

$$T = \sum_i T_{si} = \sum_i \frac{L_{si}}{R_{si}} - \text{wypadkowa stała czasowa obwodu sterującego.}$$

Na podstawie równań (6.30) można wyznaczyć związek sygnałów sterujących $U_{si}(p)$ z siłą elektromotoryczną E_d , zmierzona na zaciskach wyjściowych

$$E_d(p) = \frac{k_q}{(1+pT_\Sigma)} \frac{k_d z_q}{R_q} \sum_i \frac{z_{si}}{R_{si}} U_{si}(p). \quad (6.31)$$

Po podstawieniu zależności

$$K_{qi} = k_q \frac{z_{si}}{R_{si}} = \frac{\partial E_q}{\partial U_{si}} - \text{współczynnik wzmocnienia w osi poprzecznej,}$$

$$K_d = k_d \frac{z_q}{R_q} = \frac{\partial E_d}{\partial E_q} - \text{współczynnik wzmocnienia w osi podłużnej,}$$

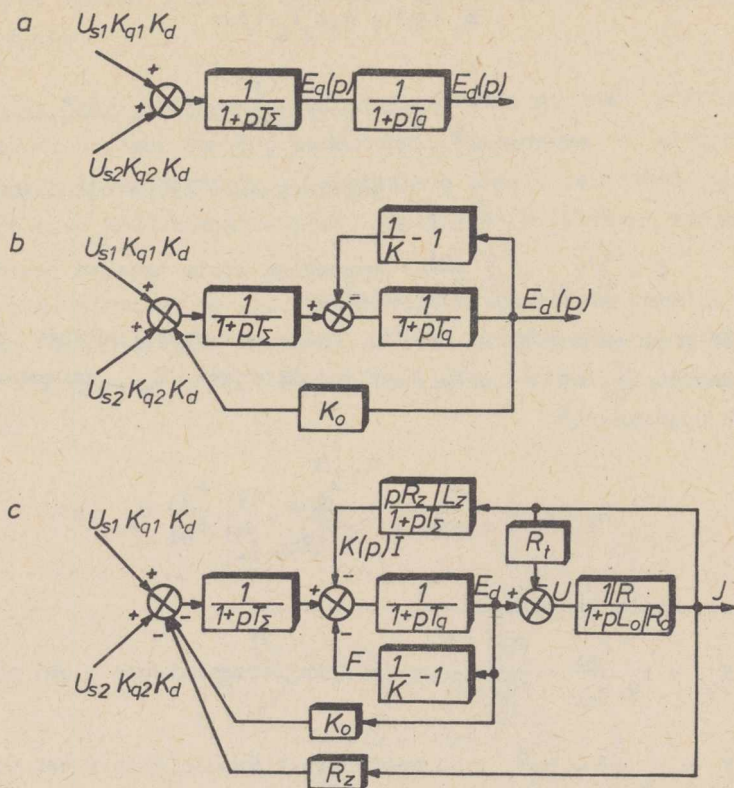
$$K_A = K_{qi} K_d - \text{wypadkowy współczynnik wzmocnienia amplidyń,}$$

równanie (6.31) przyjmie postać

$$E_d(p) = \frac{1}{(1+pT_\Sigma)(1+pT_q)} \sum_i K_d K_{qi} U_{si}(p). \quad (6.32)$$

Równaniu (6.32) odpowiada schemat strukturalny, przedstawiony na rys. 6.18a. Tego rodzaju model strukturalny amplidyń jest najczęściej stosowany w badaniach modelowych dynamiki układów napędowych.

Jeżeli jest konieczne uwzględnienie nieliniowości charakterystyki magnesowania (zwykle tylko dla osi poprzecznej), to schemat strukturalny amplidyń ma postać przedstawioną na rys. 6.18b. Nieliniowość jest uwzględniona za pomocą członu o transmitancji $[(1/K) - 1]$



Rys.6.18. Schematy strukturalne amplitdyny: a) w stanie jałowym bez uwzględnienia nasycenia charakterystyki magnesowania; b) w stanie jałowym z uwzględnieniem nasycenia i strat w stali twornika; c) w stanie obciążenia z uwzględnieniem nasycenia i strat w stali twornika

w obwodzie sprzężenia zwrotnego, obejmującego stopień wyjściowy amplidydy. Metodę uwzględniania nieliniowości obwodów magnetycznych omówiono w pktcie 6.1.4.2. Na schemacie 6.18b zaznaczono ponadto wewnętrzne sprzężenie zwrotne, spowodowane wpływem prądów wirowych i zjawiska histerezy od strumienia poprzecznego w stali twornika, wpływem prądów opóźnionej komutacji i przesunięciem szczotek ze strefy obojętnej. Współczynnik K_o , związany ze stratami w stali twornika, można wyznaczyć na podstawie charakterystyki częstotliwościowej amplidydy w stanie jałowym [4].

Po obciążeniu na charakterystyki dynamiczne amplitdyny wywiera wpływ wiele czynników: niedoskonała kompensacja, przesunięcie szczotek ze strefy obojętnej, strumienie rozproszenia uzwojenia kompensacyjnego, twornika itd.

W celu uwzględnienia wymienionych oddziaływań należy do modelu matematycznego, wyrażonego równaniem (6.32), wprowadzić wyrazy proporcjonalne do natężenia prądu i jego pierwszej pochodnej [4]. Uwzględniając również składową czynną spadku napięcia i straty w stali twornika, równania amplitdyny po obciążeniu możemy napisać w postaci

$$E_d(p) = \frac{1}{(1+pT_z)(1+pT_q)} \left[\sum_i K_{dq1} U_{si}(p) - E_d(p) K_o - (R_z + pL_z) I(p) \right], \quad (6.33)$$

$$U(p) = E_d(p) - R_t I(p),$$

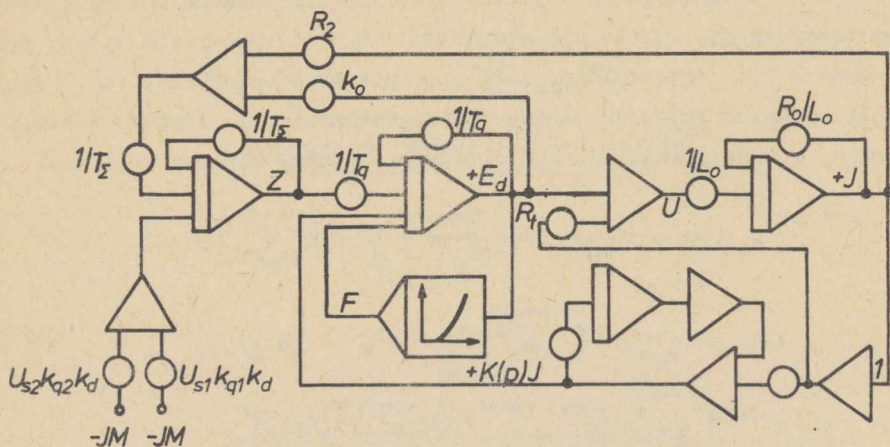
gdzie U - napięcie na wyjściu amplitdyny;
 R_z, L_z - odpowiednio zastępcza rezystancja i indukcyjność obwodu twornika, uwzględniające wpływ prądu obciążenia;
 R_t - rezystancja obwodu twornika z uwzględnieniem uzwojenia kompensacyjnego, biegunów dodatkowych i rezystancji przejścia szczotek.

Wielkości R_z i L_z w schemacie strukturalnym i równaniu (6.33) mogą być wyznaczone dla konkretnej amplitdyny metodą eksperymentalną lub obliczone na podstawie parametrów konstrukcyjnych.

W stanie ustalonym wyrażenie $R_z I(p)$ odpowiada zmianie napięcia wywołanej przez reakcję twornika i przepływ uzwojenia kompensującego. W zależności od stopnia kompensacji wyrażenie to może być dodatnie lub ujemne. Wielkość $pL_z I(p)$ odpowiada zmianie napięcia w wyniku tzw. dynamicznego rozkompensowania. Zjawisko to powstaje wskutek zbocznikowania uzwojenia kompensującego. Zmiana prądu w uzwojeniu kompensacyjnym, na skutek jego indukcyjności, następuje z pewnym opóźnieniem. Prowadzi to w stanach przejściowych do zakłócenia kompensacji, pogarszając tym samym własności dynamiczne amplitdyny.

Na rysunku 6.18c przedstawiono schemat strukturalny obciążonej amplitdyny, ułożony na podstawie równań (6.33). Należy pamiętać, że w układzie tym podatne sprzężenie zwrotne od prądu obciążenia jest

wprowadzone do wejścia drugiego stopnia poprzez człon $pT/(1+pT)$. Umożliwia to usunięcie ze schematu modelu członu o transmitancji odpowiadającej idealnemu różniczkowaniu, który jest bardzo niedogodny do realizacji w maszynach analogowych.



Rys.6.19. Schemat analogowy amplidyny obciążonej

Schematowi strukturalnemu z rysunku 6.18c odpowiada model analogowy przedstawiony na rysunku 6.19. Ma on charakter ogólny i może być wykorzystywany do budowy bardziej uproszczonych modeli poprzez odłączenie nieistotnych sprzężeń wewnętrznych.

6.2. Zasady modelowania cyfrowego

6.2.1. Charakterystyka modelowania cyfrowego

Modelowaniem cyfrowym układów dynamicznych nazywamy metody umożliwiające badania układów dynamicznych na maszynie cyfrowej w sposób łatwy do interpretacji.

Modelem cyfrowym jest program w maszynie cyfrowej, którego poszczególne fragmenty opisują zjawiska, zwłaszcza dynamiczne, zachodzące w poszczególnych częściach modelowanego układu. Program ten powoduje, że po wprowadzeniu na wejście maszyny cyfrowej lub po wytworzeniu w tej maszynie ciągu danych, odpowiadających wartościom sygnałów wejściowych modelowanego układu, na wyjściu maszyny cyfrowej otrzyma się

wydruk ciągu liczb, równych z pewną dokładnością wartościom sygnałów wyjściowych. Liczby określające sygnały wejściowe i wyjściowe są podawane z uwzględnieniem parametru czasu. Mogą dotyczyć jednego lub kilku wyjść, zarówno całego układu, jak i poszczególnych jego części. Jeżeli maszyna cyfrowa ma na wyjściu rejestrator X-Y, to wyniki mogą być przedstawione w postaci graficznej.

Podczas układania programu na maszynę cyfrową istnieje zawsze możliwość wyboru między językiem wewnętrznym maszyny, językiem algorytmicznym typu FORTRAN lub ALGOL oraz językiem symulacyjnym. Zastosowanie języka wewnętrznego jest uzasadnione wtedy, gdy program ma być stosowany bardzo często, jak np. gdy jest on częścią pracującego układu, a nie został ułożony w celu analizy i syntezy układu. Ułożenie takiego programu wymaga pomocy wyspecjalizowanego programisty, w pełni zaznajomionego z konkretną maszyną, która będzie liczyła program. Dlatego też zwykle są stosowane języki algorytmiczne i symulacyjne, przy czym nie ma precyzyjnych kryteriów dotyczących wyboru jednego z tych języków. Trzeba pamiętać, że na ogół rozwiązywanie danego problemu za pomocą języka symulacyjnego zajmuje więcej czasu maszynowego niż rozwiązywanie tego samego przez konwencjonalny program dla tego samego komputera. Czas potrzebny na napisanie programu w języku symulacyjnym jest jednak znacznie krótszy niż napisanie programu w języku konwencjonalnym dla tego samego problemu. Istnieje jednocześnie mniejsza możliwość popełnienia błędów przy pisaniu programu.

Zastosowanie komputerów cyfrowych pozwala wyeliminować takie wady komputerów analogowych, jak całkowanie względem zmiennej czasowej, niewielki zakres zmiennych zależnych i niezależnych oraz współczynników. Uzyskane rozwiązanie osiąga dużą dokładność, niewrażliwość na zakłócenia i dużą niezawodność, będące cechami komputerów cyfrowych.

za pomocą uniwersalnego komputera, przystosowanego do modelowania cyfrowego, jest teoretycznie możliwe rozwiązywanie zadań z dowolną liczbą zmiennych niezależnych i w dowolnym zakresie zmiennych. Wynik można uzyskać zarówno w postaci cyfrowej, jak i wykresnej. Ograniczenia podczas rozwiązywania zadań są następujące: szybkość działań komputera cyfrowego i pojemność pamięci.

Bardzo istotne w modelowaniu cyfrowym, o decydującym wpływie na dokładność wyników modelowania, jest przyjęty w komputerze algorytm całkowania. Algorytm ten umożliwia rozwiązywanie metodą numeryczną równań różniczkowych opisujących rzeczywisty układ fizyczny. Metody numeryczne zastępują rozwiązywanie równania różniczkowego rozwiązaniem pewnego równania różnicowego. Rozwiązanie numeryczne równania różniczkowego polega na wyznaczeniu wartości funkcji $y(t)$ dla ciągu wartości t_i , $i = 1, 2, 3, \dots$.

Wśród metod całkowania numerycznego można wyróżnić dwie podstawowe:

- a) zapoczątkowania rozwiązania (jednokrokowe);
- b) przedłużenia rozwiązania (wielokrokowe).

W metodach jednokrokowych do określenia wartości rozwiązania w punkcie $(t + h)$ wykorzystuje się dodatkowo informacje o rozwiązaniu w punkcie t ; w metodach wielokrokowych wykorzystuje się dodatkowo informację o rozwiązaniu w kilku punktach (tj. w punktach $t - h$, $t - 2h, \dots$). Metody jednokrokowe wymagają do rozpoczęcia obliczeń znajomości rozwiązania w jednym punkcie. Ponieważ zawsze dany jest jeden punkt rozwiązania (warunek początkowy), dlatego metody te są tzw. samostartujące. W metodach wielokrokowych do zapoczątkowania obliczeń jest potrzebna znajomość wartości rozwiązania w kilku kolejnych punktach. Wartości te (wartości startowe) muszą być określone inną metodą, na przykład jednokrokową.

Do istotnych cech metod całkowania numerycznego należy ich dokładność i stabilność. D o k ł a d n o ś ć m e t o d y jest podawana najczęściej w postaci jej rzędu, przy czym metoda jest rzędu k , jeśli do wyznaczenia wartości rozwiązania w punkcie $(t + h)$ użyto rozwinięcia w szereg Taylora funkcji $y(t)$, uwzględniając składniki z h^{θ} , $\theta \leq k$, gdzie h jest krokiem całkowania. W metodzie rzędu k błąd obcięcia ε , mierzony różnicą między rozwiązaniem dokładnym i numerycznym, jest rzędu $O(h^{k+1})$; znaczy to, że istnieje taka stała L , że $\varepsilon \leq L \cdot h^{k+1}$, gdy $h \rightarrow 0$. Dokładniejszego wyjaśnienia wymaga pojęcie s t a b i l n o ś c i m e t o d y. Algorytm całkowania numerycznego jest stabilny, gdy $\partial g(t, y) / \partial y < 0$ ($g(t, y)$ - funkcja będąca rozwiązaniem równania różniczkowego), jeżeli błąd obcięcia $\varepsilon_n =$

$= \varepsilon(t_0 + nh)$ przeciętnie zmniejsza się ze wzrostem n (przeciętne zmniejszanie znaczy, że po dłuższej serii kroków błąd maleje). Gdy $\partial g(t, y) / \partial y > 0$, to definiuje się tzw. s t a b i l n o ść w z g l ę d n ą: algorytm całkowania numerycznego jest względnie stabilny, jeżeli $\varepsilon_n < \gamma_n$ (błąd wprowadzany w każdym kroku wzrasta, ale wolniej niż wartość funkcji będącej rozwiązaniem). Pojęcie stabilności względnej jest użyteczne, jeżeli rozwiązanie zbliża się do zera.

W metodach niestabilnych błąd ma tendencję do eksponencjalnego wzrostu z liczbą kroków. W niektórych metodach stabilność lub jej brak zależy od wielkości kroku. Nazywane jest to częściową niestabilnością.

W każdym kroku całkowania numerycznego popełniane są dwa rodzaje błędów: a) błąd obcięcia, b) błąd zaokrąglenia. B ł ą d o b c i ę c i a jest związany ze stosowaną metodą całkowania i wynika z nieuwzględnienia wszystkich członów rozwinięcia w szereg Taylora, któremu metoda jest równoważna. B ł ą d z a o k r ą g l e n i a wynika natomiast z ograniczonej dokładności obliczeń i zależy od długości słowa stosowanego komputera. W normalnych warunkach błąd obcięcia odgrywa decydującą rolę i wielokrotnie przewyższa błąd zaokrąglenia.

Całkowanie numeryczne może być wykonywane ze stałym krokiem lub ze zmiennym. Obliczenia ze stałym krokiem są na ogół dłuższe czasowo od obliczeń ze zmiennym krokiem, ponieważ muszą przebiegać z odpowiednio małym krokiem, dobranym w celu uzyskania żądanej dokładności w całym zakresie całkowania, a nie tylko lokalnie. Algorytmy zmienno-krokowe z reguły dają zysk na czasie obliczeń oraz zmniejszają liczbę potrzebnych kroków całkowania, są jednak znacznie trudniejsze w realizacji.

Najczęściej stosowaną metodą wykorzystującą technikę stałego kroku jest metoda Runge-Kutta drugiego lub czwartego rzędu. W technice zmiennego kroku najczęściej stosowanymi są metody z grupy predyktor-korektor i metoda Runge-Kutta-Mersona. Metoda Runge-Kutta-Mersona polega na tym, że wartość kroku jest dobierana automatycznie w taki

sposób, aby było spełnione kryterium dopuszczalnego błędu na każdym etapie obliczeń we wszystkich operatorach całkujących.

Technika zmiennego kroku ma wiele zalet, z których najważniejsza umożliwia otrzymywanie rozwiązań o z góry założonej dokładności. Okazuje się w praktyce, że stosując zmienny krok często uzyskuje się rozwiązanie szybciej niż przy stałym kroku, pomimo że traci się sporo czasu na ustalanie długości kroku. Wynika to stąd, że przy stałym kroku w przedziałach, gdzie zmienność całkowanej funkcji jest mała, liczba kroków całkowania jest o wiele większa, niż jest to konieczne ze względu na dokładność. W niektórych przypadkach technika stałego kroku okazuje się szybsza. Występuje to wówczas, gdy całkowana funkcja ma charakter sinusoidalny. W razie występowania nieciągłości w funkcjach podcałkowych znacznie jest korzystniejsze stosowanie kroku stałego. Technika zmiennego kroku dąży wtedy do zredukowania długości kroku bardziej niż jest to konieczne i dzięki temu wzrasta czas rozwiązania.

Z przytoczonego porównania wynika, że technika stałego kroku jest bezpieczniejsza, dlatego bywa stosowana częściej. Przy stałym kroku można z dobrym przybliżeniem przewidzieć czas potrzebny na rozwiązanie. Przy zmiennym kroku natomiast, choć rozwiązanie ma być uzyskane z założoną dokładnością i często jest uzyskiwane w krótszym czasie niż przy stałym kroku, to jednak czas rozwiązania nie może być łatwo przewidziany.

Jako przykład będzie podany algorytm całkowania numerycznego metodą Runge-Kutta czwartego rzędu.

6.2.2. Metoda Runge-Kutta czwartego rzędu

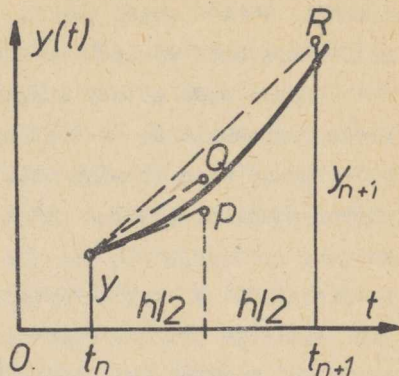
Metody Runge-Kutta nie wymagają znajomości poprzednich wartości rozwiązania do obliczenia rozwiązania aktualnego, tzn. że są samostartujące. Jest to ich najważniejszą cechą.

Jedną z bardziej popularnych jest metoda całkowania Runge-Kutta czwartego rzędu. Obliczenia składają się z czterech etapów. W pierwszym etapie następuje obliczenie nachylenia krzywej w punkcie P (rys. 6.20), zgodnie z wzorami

$$y_{n+1/2}^P = y_n + \frac{h}{2} \dot{y}_n^P, \quad (6.34)$$

$$\dot{y}_{n+1/2}^P = f(y_{n+1/2}^P; t_{n+1/2}).$$

W drugim etapie powtarza się obliczenia, ale zamiast nachylenia $\dot{y}_n$ korzysta się z ostatnio obliczonego nachylenia w punkcie P, to znaczy $\dot{y}_{n+1/2}^P$ i uzyskuje się w ten sposób nachylenie w punkcie Q



Rys.6.20. Zasada metody Runge-Kutta czwartego rzędu

$$y_{n+1/2}^Q = y_n + \frac{h}{2} \dot{y}_{n+1/2}^P, \quad (6.35)$$

$$\dot{y}_{n+1/2}^Q = f(y_{n+1/2}^Q; t_{n+1/2}).$$

W trzecim etapie korzysta się z obliczonych wyników w celu wyznaczenia nachylenia w punkcie R

$$y_{n+1}^R = y_n + h \dot{y}_{n+1/2}^Q, \quad (6.36)$$

$$\dot{y}_{n+1}^R = f(y_{n+1}^R; t_{n+1}).$$

W etapie czwartym używa się natomiast średniej ważonej obliczonych poprzednio nachyleń w celu ostatecznego wyznaczenia dokładnej wartości y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{1}{6} \dot{y}_n + \frac{1}{3} \dot{y}_{n+1/2}^P + \frac{1}{3} \dot{y}_{n+1/2}^Q + \frac{1}{6} \dot{y}_{n+1}^R \right), \quad (6.37)$$

$$\dot{y}_{n+1} = f(y_{n+1}; t_{n+1}).$$

Współczynniki sumy ważonej we wzorze (6.37) zostały tak dobrane, że wartość y_{n+1} jest równa wartości uzyskanej przez rozwinięcie

funkcji $y(t)$ wokół punktu (y_n, t_n) w szereg Taylora, po uwzględnieniu wszystkich wyrazów w szeregu, aż do wyrazu zawierającego h^4 .

Dokładność metody Runge-Kutta zależy od wielkości przyjętego kroku całkowania h . Im krótszy krok, tym oczywiście większa dokładność, ale dłuższy czas rozwiązania. Krok całkowania najczęściej dobiera się eksperymentalnie, można także korzystać z pewnych zależności szacunkowych, występujących między długością kroku a stałymi czasowymi istniejącymi w rozwiązywanym równaniu. Trudności w doborze całkowania wynikają przede wszystkim z braku prostych formuł do oceny błędów obcięcia, a więc też braku kryteriów wyboru kroków całkowania. W celu oceny poprawności doboru kroku całkowania jest stosowane w praktyce obliczanie wartości rozwiązania w danym punkcie dwoma różnymi krokami. Błąd popełniany przy danym kroku całkowania h jest równy w przybliżeniu

$$\Delta = \frac{y_{2h} - y_h}{2^k - 1}, \quad (6.38)$$

gdzie k - rząd metody;

y_{2h} - rozwiązanie przy całkowaniu krokiem $2h$;

y_h - rozwiązanie przy całkowaniu krokiem h .

6.2.3. Metody programowania zadań modelowania cyfrowego

Programowanie zadań modelowania cyfrowego wykonuje się jedną z trzech grup metod: a) metodami bezpośrednimi, b) metodami korzystającymi z programów maszyn analogowych, c) metodami z wykorzystaniem specjalnych języków modelowania cyfrowego.

Metody bezpośrednie - punktem wyjściowym jest opis układu dynamicznego (model matematyczny) za pomocą równań różniczkowych lub przestrzeni stanów. Przedmiotem metod bezpośrednich jest modelowanie tych równań za pomocą równań różnicowych lub innych metod numerycznych, właściwych maszynom cyfrowym. Programuje się w takich językach algorytmicznych, jak FORTRAN i ALGOL.

Metody z wykorzystaniem programów maszyn analogowych - powstały z założeniem, że użytkownik ma świetnie opanowaną technikę korzystania z maszyn analogo-

wych, a maszyna, którą dysponuje, nie jest w stanie rozwiązać postawionego zadania (ograniczona dokładność, wielkość, repertuar bloków operacyjnych). Zadania wykonuje się w trzech etapach: najpierw pisze się program jak dla maszyny analogowej, następnie zapisuje się ten program za pomocą specjalnego języka symulacyjnego (np. GEMMA), a wreszcie tak napisany program tłumaczy się automatycznie na język wewnętrzny komputera.

Metody z wykorzystaniem języków modelowania cyfrowego - polegają na opisanu modelu za pomocą specjalnie do tego celu opracowanych języków programowania. Języki programowania cyfrowego są opracowane pod względem specyfiki modeli matematycznych i komputerów cyfrowych bez odwoływania się do programowania maszyn analogowych. Ta grupa metod programowania nie będzie dalej omawiana.

6.2.4. Modelowanie cyfrowe w języku algorytmicznym

Proces opracowywania modelu cyfrowego (programu obliczeniowego, opisującego zjawiska dynamiczne modelowanego układu) można podzielić na dwa zasadnicze etapy:

1. Wybór metody numerycznej, najbardziej odpowiedniej do danego problemu.

Metoda numeryczna jest zwykle algorytmem lub zespołem algorytmów procesu obliczania.

2. Programowanie. Etap ten zwykle składa się z następujących czynności:

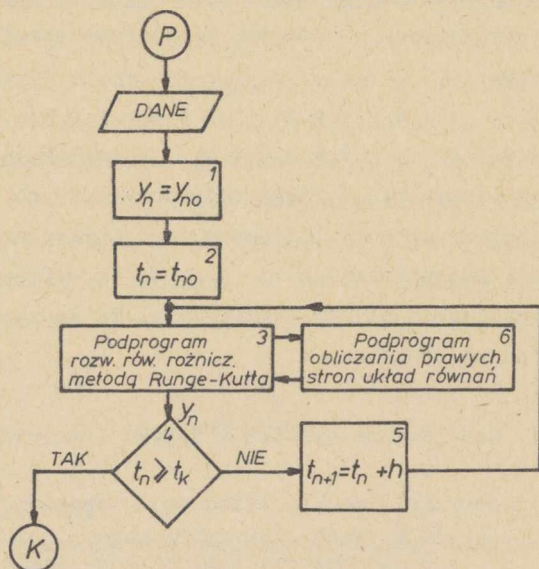
a) ułożenie schematu logicznego (blokowego) problemu; schemat logiczny przedstawia kolejne grupy operacji wykonywanych przez maszynę cyfrową i związane ze sobą w sposób zgodny z algorytmem i ze strukturą logiczną maszyny;

b) ułożenie schematu logicznego (blokowego) programu;

c) ułożenie programu, czyli tzw. kodowanie w wybranym języku algorytmicznym.

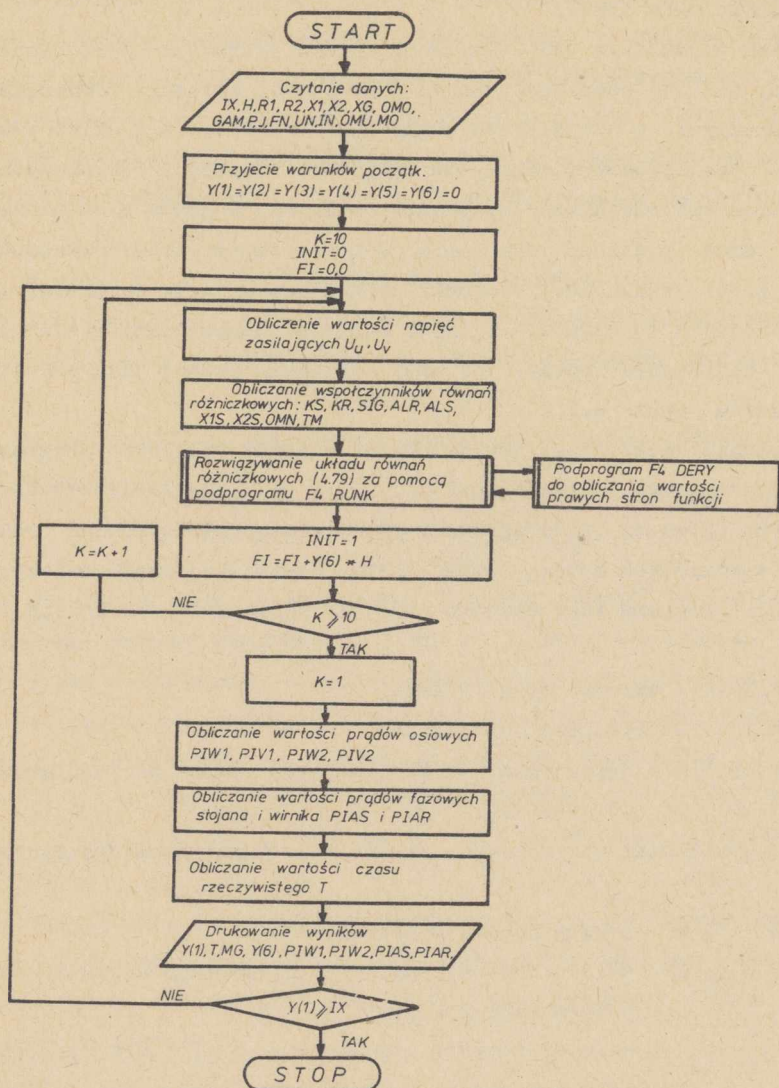
Podczas programowania spotykamy się z pewnymi typowymi częściami programu, które często się pokrywają, dlatego są one przygotowane

w postaci podprogramów bibliotecznych. Podczas układania programu są one częścią składową programu głównego. Na przykład metoda Runge-Kutta jest standardowym podprogramem i jest częścią składową programu rozwiązywania równań różniczkowych.



Rys.6.21. Schemat algorytmu obliczeń elektromechanicznych procesów przejściowych metodą Runge-Kutta

Na rysunku 6.21 przedstawiono ogólny schemat algorytmu obliczeń metodą Runge-Kutta dowolnego układu równań różniczkowych. Na początku działania programu bieżącym wartościom funkcji i czasu przyporządkowywane są wartości początkowe (blok 1 i 2). Są one zwykle zerowe. Obliczanie wartości funkcji w każdym kroku oraz współczynników rozwinięcia funkcji dokonuje standardowy podprogram całkowania, znajdujący się w bibliotece podprogramów każdej większej maszyny cyfrowej (blok 3). Podczas obliczeń podprogram całkowania stale wywołuje podprogram obliczający wartości funkcji prawych stron układu równań (blok 6). Warunkiem zakończenia obliczeń może być w mniej skomplikowanych przypadkach osiągnięcie zadanej wartości zmiennej niezależnej (zwykle czasu), w bardziej złożonych - osiągnięcie wartości ustalonej (quasi-ustalonej) wybranej zmiennej zależnej.



Rys.6.22. Schemat blokowy programu #RBSA

W dalszym ciągu sposoby postępowania podczas modelowania w języku algorytmicznym omówimy na przykładzie modelowania bezpośredniego rozruchu silnika asynchronicznego klatkowego, zasilanego napięciem sinu-

soidalnym. Model cyfrowy opracujemy w języku FORTRAN 1900 (dla maszyn cyfrowych serii ODRA 1300).

Punktem wyjściowym do tworzenia modelu cyfrowego jest model matematyczny silnika asynchronicznego klatkowego, opisany równaniami (4.79), zapisanymi w jednostkach względnych (pkt 4.4.4). Układ równań (4.79) jest podstawą algorytmu obliczania wartości chwilowych osiowych strumieni skojarzonych, prądów osiowych, momentu elektromagnetycznego oraz prędkości wirowania podczas bezpośredniego włączenia silnika do sieci zasilającej. Warunki początkowe wszystkich zmiennych i ich pochodnych są zerowe. Algorytm obliczeń uzupełniamy metodą numerycznego całkowania równań (4.79). Wybieramy metodę Runge-Kutta czwartego rzędu (pkt 6.2.2).

Na rysunku 6.22 jest przedstawiony schemat blokowy programu #RBSA, rozwiązującego układ równań (4.79). W celu wywołania z biblioteki maszyny cyfrowej podprogramu rozwiązywania układu równań różniczkowych zwyczajnych metodą Runge-Kutta czwartego rzędu należy użyć w treści programu instrukcji o postaci: CALL F4RUNK (M,INIT,H,Y,DY,P,Q)

w której M,INIT - zmienne typu INTEGER,

H - zmienna typu REAL,

Y,DY,P,Q - jednowymiarowe tablice typu REAL o rozmiarze $\geq n + 1$.

Przed wywołaniem podprogramu należy nadać parametrom następujące wartości:

M = n + 1, n - liczba równań w układzie;

Y(1) = x, x - zmienna niezależna (dla pierwszego wejścia do podprogramu $x = x_0$);

Y(j+1) = y_j, y_j - wartość funkcji w punkcie $x = x_0$, j = 1, 2, ..., n (dla pierwszego wejścia do podprogramu $y_j = y_{0j}$);

H = h h - krok całkowania;

INIT = $\begin{cases} 0 & \text{dla pierwszego wejścia do podprogramu,} \\ 1 & \text{dla następnych wejść.} \end{cases}$

Podczas następnych wywoływań podprogramu należy uważać, by wartości tablic P, Q, DY, Y oraz zmiennej H były takie, jak na wyjściu z podprogramu.


```

REAL Y ( 6 ), DY ( 6 ), Q ( 6 ), KS, KR, IN, J, MG, MT, MO
COMMON/KROL/ UU, OMO, ALS, KR, OMK, UV, ALR, KS, P, MG, SIG, MO, X1S, TM, OMN
READ ( 1, 1 ) IX, LICZ, H, R1, R2, X1, X2, XG, OMO, GAM, P, J, FN, UN, IN, OMK, MO
FORMAT ( 2I0, 15F0.0 )

1 WRITE ( 2, 21 ) LICZ
  WRITE ( 2, 22 )
  DO 2 I=1, 6
2  Y ( I ) = 0.0
  K=10
  INIT=0
  FI=0.0
3  UU=COS ( ( OMO-OMK ) * Y ( 1 ) + GAM )
  UV=SIN ( ( OMO-OMK ) * Y ( 1 ) + GAM )
  KS=XG/X1
  KR=XG/X2
  SIG=1.0-KS*KR
  ALR=R2/( X1*SIG )
  ALS=R1/( X1*SIG )
  X1S=X1*IN/UN
  X2S=X2*IN/UN
  OMN=6.283186*FN/P
  TM=J*OMN*OMN/( 3.0*UN*IN )
  CALL F4RUNK ( 6, INIT, H, Y, DY, Q )
  INIT=1
  FI=FI+Y ( 6 ) * H
  IF ( K-10 ) 0, 4, 4
  K=K+1
  GO TO 3
4  K=1
  PIU1=OMO*Y ( 2 )/( SIG*X1S ) -OMO*XG*Y ( 4 )/( SIG*X1S*X2 )
  PIV1=OMO*Y ( 3 )/( SIG*X1S ) -OMO*XG*Y ( 5 )/( SIG*X1S*X2 )
  PIU2=OMO*Y ( 4 )/( SIG*X2S ) -OMO*XG*Y ( 2 )/( SIG*X1S*X2 )
  PIV2=OMO*Y ( 5 )/( SIG*X2S ) -OMO*XG*Y ( 3 )/( SIG*X1S*X2 )
  PIAS=PIU1*COS ( OMK*Y ( 1 ) ) -PIV1*SIN ( OMK*Y ( 1 ) )
  PIAR=PIU2*COS ( OMK*Y ( 1 ) -FI ) -PIV2*SIN ( OMK*Y ( 1 ) -FI )

```



```

T=Y (6)/(6.283186*FN
WRITE (2,20) Y (1),T,MG,Y (6),PIU1,PIU2,PIAS,PIAR,Y (2)
IF (Y(1).GT.IX) GO TO 5
GO TO 3
5 CONTINUE
20 FORMAT (2X,F10.3,2X,F9.3,7 (3X,F10.5))
21 FORMAT (5X,12HPROGRAM RBSA/5X,15HGRUPA DANYCH NR,I4)
22 FORMAT (//7X,3HTAL,9X,1HT,10X,2HMG,9X,5HOMEGA,9X,3HIU1,10X,3HIU2,
*10X,3HIAS,10X,3HIAR,9X,5HPSIU1//)
STOP
END
SUBROUTINE F4DERY (M,Y,DY)
REAL Y (6),DY (6),KR,KS,MG,MO
COMMON/KROL/ UU,OMO,ALS,KR,OMK,UV,ALR,KS,P,MG,SIG,MO,X1S,TM,OMN
DY (2) =UU-OMO*ALS*Y (2) +OMO*ALS*KR*Y (4) +OMK*Y (3)
DY (3) =UV-OMO*ALS*Y (3) +OMO*ALS*KR*Y (5) -OMK*Y (2)
DY (4) =-OMO*ALR*Y (4) +OMO*ALR*KS*Y (2) + (OMK-Y (6))*Y (5)
DY (5) =-OMO*ALR*Y (5) +OMO*ALR*KS*Y (3) - (OMK-Y (6))*Y (4)
MG=OMO*KR*(Y (4)*Y (3) -Y (2)*Y (5))/(SIG*X1S)
DY (6) = (MG-MO)/(TM*OMN*P)
RETURN
END
FINISH

```

Na podstawie przedstawionego programu obliczeniowego otrzymuje się wyniki w postaci tabulogramu z wydrukowanymi wartościami M , ω , i_{u1} , i_{u2} , i_{as} , i_{ar} , ψ_{u1} dla dyskretnych wartości czasu względnego τ i rzeczywistego T , przy czym jeden wydruk wyników przypada na dziesięć kroków obliczeniowych procedury. Na podstawie tabulogramu można wykreślić przebiegi wymienionych wielkości w funkcji czasu.

Jak wskazuje doświadczenie, zupełnie poprawne wyniki badań modelowych dynamiki silnika asynchronicznego, zasilanego z sieci o sinusoidalnym napięciu, uzyskuje się przyjmując krok całkowania $h = T/(16-20)$, gdzie T - okres napięcia zasilania. Jeżeli napięcie zasilające jest niesinusoidalne, to jest konieczne zmniejszenie kroku całkowania. Na przykład w razie konieczności uwzględnienia trzeciej harmonicznej napięcia zasilania, krok całkowania $h = T_3/(8-10) = T/(24-30)$.

Jeśli istnieje potrzeba znacznego zwiększenia prędkości obliczeń, to często stosuje się zabieg programowy, umożliwiający drukowanie wyników nie w całym zakresie zmian wartości, ale tylko w najbardziej interesujących okresach: na początku procesu przejściowego i na jego końcu, gdy maszyna osiąga stan ustalony.

6.2.5. Modelowanie cyfrowe w języku symulacyjnym

6.2.5.1. Rozważania wstępne. Konieczność analizy i syntezy złożonych układów dynamicznych z dużą dokładnością wymaga zastosowania uniwersalnych maszyn cyfrowych.

Opracowanie języków symulacyjnych sprzyja maksymalnemu ułatwieniu programowania maszyn cyfrowych dla osób, które opanowały umiejętności programowania maszyn analogowych. Języki te symulują maszyny analogowe w maszynie cyfrowej.

Przy takim traktowaniu proces modelowania cyfrowego przebiega zgodnie ze schematem:

- sformułowanie problemu do modelowania;
- ułożenie programu dla maszyny analogowej (schemat blokowy lub analogowy zapisany w symbolice właściwej wybranemu językowi symulacyjnemu);
- zapisanie programu w języku symulacyjnym;
- tłumaczenie programu (kompilacja, konsolidacja);
- obliczenia i rejestracja wyników.

W wymienionym schemacie sformułowanie zadania do modelowania i ułożenie programu dla maszyny analogowej, pokrywa się z normalnym postępowaniem podczas wykorzystywania maszyn analogowych, nie zawiera więc praktycznie żadnych dodatkowych czynności do wykonania. Tłumaczenie programu odbywa się automatycznie, podobnie jak obliczenia w maszynie cyfrowej i nie wymaga pracy ludzkiej. Jedynym elementem w przedstawionym schemacie, wymagającym dodatkowego nakładu pracy, jest zapisanie programu w języku symulacyjnym. Modelowanie w języku symulacyjnym dokonuje się za pomocą podprogramów, które są równoważne standardowym członom operacyjnym maszyn analogowych, jak np.: sumatorom, integratorom itd. Problematyka ta jest szczegółowo omówiona w literaturze [14,19,27,29].

Zasady modelowania cyfrowego w języku symulacyjnym będą przedstawione na przykładzie opracowanego w Polsce języka CEMMA (Cyfrowe Modelowanie Maszyny Analogowej) w wersji CEMMA-M2, przeznaczonej do minikomputera MERA 400 (wykorzystywanego w zajęciach laboratoryjnych z dynamiki układów elektromechanicznych).

Za pomocą języka CEMMA-M2 można modelować procesy dynamiczne, opisywane równaniami liniowymi lub nieliniowymi z dowolnym typem wymuszeń zdeterminowanych lub z wymuszeniami stochastycznymi o określonych rozkładach prawdopodobieństwa.

Inną metodą opisu układu dynamicznego, która może być traktowana jako informacja wyjściowa do tworzenia programu w języku CEMMA-M2, jest schemat strukturalny układu, wskazujący poszczególne elementy obiektu symulowanego z podaniem parametrów i warunków początkowych, rodzajów połączeń między nimi, typów wymuszeń oraz punktów oddziaływania wymuszeń na obiekt.

Poza ułatwieniem modelowania układów dynamicznych język CEMMA-M2 udostępnia także aparat matematyczny optymalizacji wybranych parametrów związanych z układem. Optymalizacja jest rozumiana w sensie minimalizacji kryterium podanego przez użytkownika i zaprogramowanego w języku CEMMA jako część programu symulacji.

6.2.5.2. Schemat blokowy. Schemat blokowy jest to układ elementów z których każdy oznacza jedną z funkcji spełnianych przez zdania języka CEMMA-M2 lub funkcję zdefiniowaną przez użytkownika i wprowadzoną w postaci makrobloku. Elementy te (bloki schematu) są połączone między sobą liniami wskazującymi drogi przepływu informacji.

Schemat blokowy jest graficznym przedstawieniem układu równań opisujących układ dynamiczny. Jeżeli opis jest podany za pomocą schematu strukturalnego, schemat blokowy można traktować jako bardziej szczegółowe rozrysowanie schematu strukturalnego.

Programista przydziela każdemu elementowi ze schematu strukturalnego numer, za pomocą którego w programie jest identyfikowana wielkość wyjściowa z danego elementu. Wielkość wyjściowa jednego elementu może być wielkością wejściową innego elementu lub kilku elementów. Przyporządkowanie numerów poszczególnym elementom schematu blo-

kowego jest dowolne, ale w programie nie mogą wystąpić dwa elementy o tych samych numerach.

Przy każdym elemencie schematu blokowego należy podać parametry i warunki początkowe, potrzebne do realizacji danej funkcji, np. warunek początkowy dla elementu całkującego.

Warunki początkowe i parametry podawane, w sposób jawny lub symbolicznie, są stałe w trakcie wykonywania obliczeń związanych z symulacją układu dynamicznego. Język CEMMA-M2 umożliwia wielokrotne dokonywanie obliczeń związanych z danym układem dynamicznym, chociaż nie dopuszcza on możliwości zmiany struktury układu pomiędzy kolejnymi obliczeniami, a jedyną zmianą, dopuszczalną z punktu widzenia procesu modelowanego, jest zmiana parametrów i warunków początkowych, o ile były one wprowadzone w postaci symbolicznej.

Po skonstruowaniu i opisanu schematu blokowego napisanie programu jest jedynie kwestią mechanicznego zakodowania informacji zawartej w schemacie i uzupełnienia tak otrzymanego programu poleceniami dotyczącymi sposobu dokonywania obliczeń i rejestracji wyników.

6.2.5.3. Opis języka symulacyjnego CEMMA-M2. W skład programu w języku CEMMA wchodzi deklaracje, zdania strukturalne, definicje makrobloków i dyrektywy.

D e k l a r a c j a umożliwia gospodarkę pamięcią operacyjną i służy do rezerwowania tablic o odpowiednim rozmiarze, związanych z procesem translacji i wykonywania obliczeń. W deklaracji należy kolejno podać maksymalny numer parametru symbolicznego, maksymalny numer symbolicznego warunku początkowego, maksymalny numer elementu, maksymalną liczbę elementów typu PAL, liczbę elementów INT i OPZ (por. tab. 6.3).

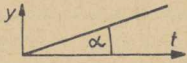
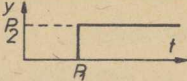
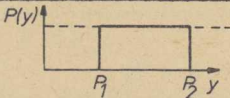
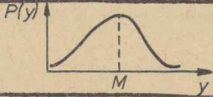
Przykład deklaracji:

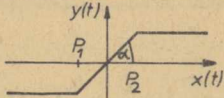
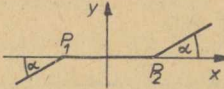
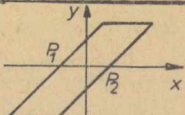
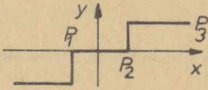
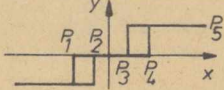
* 0 3 150 6 7;

Z d a n i a s t r u k t u r a l n e opisują zależności funkcjonalne między zmiennymi modelu. Każdemu elementowi ze schematu blokowego odpowiada jedno zdanie. Zdanie opisujące dany element zawiera informacje o następujących jego cechach:

Tabela 6.3

Spis podstawowych bloków strukturalnych języka CEMMA

Lp.	Przykładowy zapis formalny	Skrócony opis
1	2	3
1	$GNL = 1 = 2;$	 $P_2 = \operatorname{tg} \alpha$
2	$GSK P_{99} = -3 \cdot 5;$	
3	$GRN = 0 = 1 = 10;$	 $1/(P_2 - P_1)$
4	$GGs = 0 = 1 = 10$	
5	$INT 20 = - 10;$	$Y(t) = \int_0^t X(t) dt + Y_0 \begin{cases} Y_0 = 0 \\ Y_0 = P_1 \end{cases}$
6	$DOD 10 = 1 \quad 15 = -1;$	$Y(t) = \sum_i P_i X_i(t)$
7	$SUM \quad 1 \quad 3 \quad 5;$	$Y(t) = \sum_i X_i(t)$
8	$MNZ \quad 17 \quad 32 \quad 5 = 2;$	$Y(t) = P \prod_i X_i(t)$
9	$DZL \quad 10 \quad 20;$	$Y(t) = X_1(t)/X_2(t)$
10	$PWK \quad 12;$	$Y(t) = \sqrt{X(t)}$
11	$EXP \quad 13;$	$Y(t) = e^{X(t)}$
12	$LGN \quad 14;$	$Y(t) = \ln X(t) $
13	$SIN \quad 20;$	$Y(t) = \sin X(t)$
14	$COS \quad 10;$	$Y(t) = \cos X(t)$
15	$ATG \quad 30;$	$Y(t) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} X(t)$
16	$ABS \quad 20;$	$Y(t) = X(t) $
17	$AND \quad 11 \quad 10;$	$Y = 1, \text{ gdy } X_1 > 0; X_2 > 0$

1	2	3
18	UOR 4 7;	$Y = 0$, gdy $X_1 \leq 0$; $X_2 \leq 0$
19	NOR 10, 12;	$Y = 1$, gdy $X_1 \leq 0$ $X_2 \leq 0$
20	NEG 5;	$Y = 1$, gdy $X \leq 0$
21	OGR 15 = -2 = 3 = 7;	 $P_3 = \operatorname{tg} \alpha$
22	STN18 = -2 = 3 = 7;	
23	LUZ16 = -5 = 6 = 8 = 10;	 $Y(0) = P_4 \text{ lub } 0$
24	PRZ 10 = -2 = 3 = 2 = -2;	
25	PHZ10 = -5 = -4 = 2 = 3 = 4 = 3;	
26	COM 10 15;	$Y = 1$ gdy $X_1 \geq X_2$
27	PWE 10 11 12 13;	$Y = X_2 \quad Y = X_3 \quad Y = X_4$ $X_1 < 0, \quad X_1 = 0 \quad X_1 > 0$
28	FUN 14 F5;	$Y = f(x)$
29	FUD 10 11 T3;	$Z = f(X, Y)$
30	MAX 0 2 30 32;	$Y(t) = \max\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_{10}(t)\}$
31	MIN 3 13 40;	$Y(t) = \min\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_{10}(t)\}$
32	OPZ 16 = 10 = 200;	$Y(t) = X(t-P) \quad Y(t) = 0 \text{ dla } t < P$
33	PAL 1 2/21 25 16 7 = 0.1 = 1;	Funkcja uwikłana $Y_{33} = f(Y_{33}, X_1, X_2, Y_{21}, Y_{25}, Y_{16}, Y_7)$

- numer porządkowy zadany mu przez programistę;
- nazwę operacji, czyli rodzaj realizowanej przez ten element funkcji;
- numery elementów, których wielkości wyjściowe są podawane do wejścia danego elementu;
- wartości parametrów związanych z wykonywaną funkcją.

Przykład zdania strukturalnego:

Całkowanie w języku CEMMA jest opisane zdaniem INT.

Ogólna postać zapisu zdania jest następująca:

$$A \text{ INT } B = y_0,$$

przy czym A - numer elementu, którego sygnał wyjściowy podlega całkowaniu, B - numerem elementu, w którym odbywa się całkowanie, y_0 - wartość warunku początkowego. Jeżeli np. $A = 7$, $B = 3$, $y_0 = 0,2$, to wówczas otrzymamy

$$7 \text{ INT } 3 = 0,2.$$

Język CEMMA-M2 zawiera 39 podstawowych elementów (bloków), wykonujących funkcje matematyczne i logiczne, generatory funkcji, funkcje przełączające oraz funkcje nieliniowe. Każdy blok jest opisany przez odpowiednie zdanie strukturalne. W tabeli 6.3 zestawiono i krótko opisano podstawowe bloki. W opisie są stosowane następujące oznaczenia:

t - czas (zmienna niezależna);

$Y(t)$ - wielkość wyjściowa danego bloku;

$X(t)$ lub $X_i(t)$ (gdzie $i = 1, 2, \dots, N$) - wielkość (lub wielkości) innego bloku, która jest argumentem dla funkcji realizowanej przez dany blok;

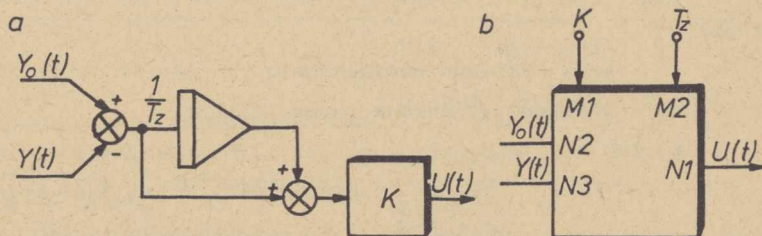
P lub P_i (gdzie $i = 1, 2, \dots, N$) - parametr (lub parametry) związany z funkcją wykonywaną przez dany blok.

D y r e k t y w y służą do definiowania pewnych operacji związanych z translacją, wykonywaniem programu i rejestracją wyników obliczeń. Za pomocą dyrektyw programista podaje translatorowi niezbędne informacje dotyczące symulowanego układu i sposobu, w jaki mają być dokonane obliczenia. Szczegółowy opis dyrektyw jest podany w [19, 31].

Programista korzystający z języka GEMMA może tworzyć inne zdefiniowane przez siebie bloki (tzw. makrobloki).

Definicja makrobloku składa się z ciągu zdań strukturalnych, opisujących grupę bloków standardowych, tworzących dany makroblok, zawartych między dyrektywami MAKRO i KONMAKRO. Raz zdefiniowany makroblok może być używany wielokrotnie do opisu danego układu, analogicznie jak inne funkcje standardowe. Definicja makrobloku musi poprzedzać w programie pierwsze zdanie strukturalne, w którym jako nazwa operacji występuje nazwa danego makrobloku. Nazwę makrobloku programista definiuje w dyrektywie MAKRO. Definicja makrobloku opisuje zależności funkcjonalne między elementami tworzącymi dany makroblok. Każdemu elementowi w ramach makrobloku musi być przypisany numer wewnętrzny. Poprzedzające nazwy operacji w zdaniach strukturalnych numery są wewnętrznymi (oznaczenie $W0, W1, W2$). Mogą występować również numery zewnętrzne i formalne. Zewnętrzny jest numerem elementu ze schematu blokowego, który nie wchodzi w skład danego makrobloku.

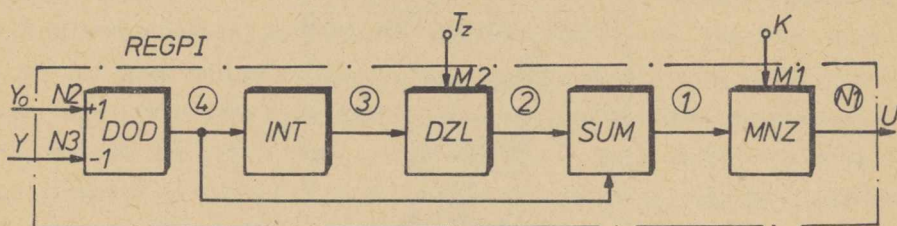
Numerami formalnymi, oznaczonymi $N1, N2, \dots$, numerujemy wejścia i wyjścia sygnałowe. Parametry formalne oznaczone symbolami $M1, M2, \dots$ wskazują natomiast wejścia parametryczne.



Rys.6.23. Regulator proporcjonalno-całkowy: a) schemat strukturalny (blokowy), b) makroblok

Zasadę tworzenia makrobloków przedstawimy na przykładzie regulatora PI. Schemat strukturalny (blokowy) regulatora jest przedstawiony na rysunku 6.23a. Na rysunku 6.23b jest przedstawiony natomiast makroblok REGPI, spełniający rolę regulatora PI w programie symulującym. Makroblok REGPI ma jedno wyjście i dwa wejścia sygnałowe

oraz dwa wejścia parametryczne. Wejścia parametryczne umożliwiają zmianę parametrów K i T_z regulatora na początku każdej sekcji.



Rys. 6.24. Schemat strukturalny makrobloku REGPI (regulatora PI)

Schemat ideowy makrobloku REGPI, złożonego z podstawowych bloków języka CEMMA-M2, przedstawiono na rysunku 6.24. Numery umieszczone w kółkach oznaczają wyjścia bloków podstawowych. Blok DOD wykonuje dodawanie sygnałów y_0 oraz y z wagami +1 oraz -1, blok INT całkuje natomiast sygnał $e(t)$ w zakresie od 0 do t . Na wyjściu bloku dzielenia DZL występuje sygnał

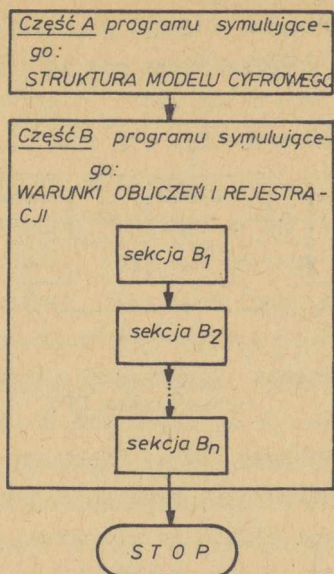
$$C_1(t) = \frac{1}{T_z} C(t).$$

Blok SUM sumuje sygnały wyjściowe o numerach 4 i 2. Na wyjściu N1 pojawia się sygnał będący wynikiem mnożenia stałej K i sygnału $C_2(t)$.

Program definiujący strukturę makrobloku REGPI jest następujący:

```
MAKRO N1 REGPI N2 N3 M1 M2;
N1 MNZ 1 M1;
1 SUM 2 4;
2 DZL 3 M2;
3 INT 4;
4 DOD N2 = 1 N3 = -1;
KONMAKRO
```

6.2.5.4. Struktura programu w języku CEMMA-M2. Program w języku CEMMA składa się z dwóch części (rys. 6.25). Część A programu symulującego jest częścią strukturalną. Podaje się w niej pełny opis schematu strukturalnego. Składa się ona z ciągu zdań strukturalnych, definicji makrobloków, dyrektyw i komentarza.



Rys.6.25. Budowa programu symulującego w języku GEMA

Część B natomiast określa warunki konieczne i wystarczające do rozpoczęcia obliczeń określonych w części strukturalnej. Może składać się z wielu sekcji, a każdej z nich odpowiada rozwiązanie jednego problemu związanego z układem modelowanym, przy zadanych (w danej sekcji) parametrach, np. obliczanie przebiegów przejściowych, dokonanie optymalizacji wybranych parametrów układu.

Sekcje B_i mogą się składać z ciągu dyrektyw i komentarzy, nie mogą natomiast zawierać zdań strukturalnych, co znaczy, że w sekcjach następnych nie można zmieniać konfiguracji schematu strukturalnego. Można natomiast zmieniać znaczenie poszczególnych dyrektyw, co umożliwia powtarzanie obliczeń w sposób określony dyrektywami danej sekcji. Translator języka wczytuje każdorazowo tylko jedną sekcję programu i po jej przetłumaczeniu inicjuje obliczenia. Po zakończeniu obliczeń jest wczytywana następna sekcja i obliczenia są powtarzane. Taka organizacja języka umożliwia uzyskanie różnych wariantów rozwiązania w wyniku zmiany wartości parametrów, warunków początkowych, funkcji wymuszających lub przez zmianę znaczenia poszczególnych dyrektyw. Jest to bardzo istotna zaleta języka, która czyni go przydatnym zwłaszcza na potrzeby projektowania wielowariantowego układów automatycznej regulacji.

W języku CEMMA-M2 parametry i warunki początkowe mogą występować w postaci symbolicznej lub w postaci numerycznej. Podanie parametru w postaci symbolicznej oznacza, że odpowiednia wartość liczbową zostanie nadana temu parametrowi w odpowiedniej dyrektywie. Jeśli chcemy uzyskać kilka wariantów rozwiązania dla różnych wartości pewnego parametru, to wtedy wartość tego parametru należy podać w części strukturalnej programu w sposób symboliczny, a w następnych sekcjach nadawać mu kolejno żądane wartości liczbowe za pomocą dyrektywy PARAMETRY. To samo odnosi się do warunków początkowych, ale przedstawienie przez programistę warunku w postaci symbolicznej znaczy, że odpowiednia wartość liczbową zostanie nadana danemu warunkowi początkowemu w odpowiedniej dyrektywie STARTOWEJ.

Zaletą języka CEMMA-M2 jest możliwość kontynuowania obliczeń z sekcji poprzedniej. Jeżeli w ostatnio wczytanej sekcji programu nie było dyrektywy KONTYNUACJA, to wówczas program zeruje zmienną niezależną, uwzględnia zmiany zawarte w sekcji i na nowo ustawia warunki początkowe. Jeżeli natomiast w sekcji występuje dyrektywa KONTYNUACJA, to obliczenia związane z daną sekcją rozpoczynają się od miejsca, w którym zostały zakończone w sekcji poprzedniej. Zmienna niezależna nie jest wtedy zerowana, a w programie są jedynie dokonywane zmiany określone przez dyrektywy wczytanej sekcji.

Bezspornym walorem języka CEMMA-M2 jest możliwość korzystania aż z siedmiu algorytmów całkowania. Jest stosowanych sześć metod ze stałym krokiem oraz jedna metoda ze zmiennym krokiem. Wybór metody całkowania zależy jedynie od programisty, tzn. od tego, w jakim czasie i z jaką dokładnością pragnie się uzyskać wyniki obliczeń. Wybrany algorytm całkowania określa się za pomocą dyrektywy METODA.

Język CEMMA-M2 umożliwia łatwą i wygodną rejestrację wyników w trzech postaciach.

Drukowanie wyników w postaci numerycznej uzyskuje się za pomocą dyrektywy DRUKUJ. Dyrektywa ta definiuje zmienne (numery elementów ze schematu blokowego), których wartości będą drukowane w postaci numerycznej.

Wyniki w postaci graficznej zapewnia dyrektywa RYSUNEK. Dyrektywa RYSUNEK definiuje jedną zmienną ze schematu blokowego, której war-

tości będą rejestrowane w postaci graficznej jako jedne z krzywych o numerze NR, kreślone za pomocą zadeklarowanego znaku. Na jednym rysunku może być kreślonych do siedmiu krzywych.

Trzecia możliwość to otrzymywanie wyników w postaci graficznej. Wyniki te uzyskuje się za pomocą dyrektywy WYKRES. Dyrektywa ta definiuje dwie zmienne ze schematu blokowego, których funkcja jest rejestrowana w postaci graficznej na urządzeniu typu pisak X-Y, zadeklarowanym przez użytkownika.

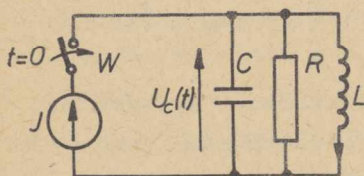
Warto pamiętać, że w języku CEMMA-M2 istnieje możliwość automatycznego określania wartości ekstremalnych rzędnych danego wykresu zmiennej wyjściowej.

Szczegółowy opis programowania minikomputera MERA 400 w języku symulacyjnym CEMMA-M2 został podany w [31].

Sposób programowania minikomputera za pomocą języka symulacyjnego CEMMA-M2 przy zastosowaniu wyżej omówionych zasad przedstawimy na przykładach.

6.2.5.5. Przykłady modelowania cyfrowego w języku CEMMA.

Przykład 1.



Rys.6.26. Schemat ideowy obwodu RLC

Jest dany obwód elektryczny, przedstawiony na rysunku 6.26. W chwili $t = 0$ jest zamykany wyłącznik W, włączający do obwodu idealne źródło prądowe, dające prąd o natężeniu $I = 1\text{A}$. Należy zbadać na modelu cyfrowym obwodu wpływ wartości rezys-

tancji R na wartość napięcia na kondensatorze C ($C = 1\text{F}$, $L = 1\text{H}$).

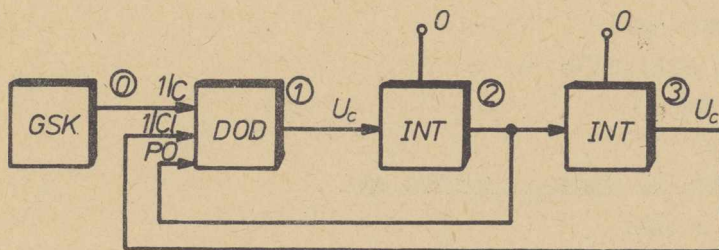
Równanie opisujące dany obwód przy zamkniętym przełączniku W ma postać

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{R} u_c(t) + \frac{1}{L} \int_0^t u_c(t) dt + i_c(0).$$

Ponieważ $i_c(0) = 0$, ostatni składnik równania znika. Równanie to można napisać w postaci

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i - \frac{1}{CR} u_c - \frac{1}{LC} \int_0^t u_c dt; \quad u_c(0) = 0, \quad \int_{-\infty}^0 u_c(t) dt = 0.$$

Do wymienionego równania można zbudować schemat blokowy, przedstawiony na rysunku 6.27. Każdemu elementowi ze schematu blokowego jest przyporządkowany numer.



Rys.6.27. Schemat blokowy obwodu RLC

Stałe związane z elementem nr 0 - generatorem funkcji skokowej, oznaczające czas, dla którego występuje skok i wartość tego skoku, będą równe odpowiednio 0 i 1. To znaczy dla $t = 0$ będzie wytworzona funkcja skokowa o amplitudzie równej 1.

Stałe związane z elementem dodającym (element nr 1) zostaną oznaczone

$$\frac{1}{C} = 1, \quad \frac{1}{CL} = -1, \quad \frac{1}{CR} = PO.$$

Ostatni z parametrów, zależny od wartości R , będzie wprowadzony jako parametr symboliczny, co umożliwi jego prostą zmianę.

Program (model cyfrowy) omawianego problemu w języku CEMMA wygląda następująco:

[SYMULACJA OBWODU ELEKTRYCZNEGO I BADANIE

[PRZEBIEGU NAPIĘCIA NA KONDENSATORZE W FUNKCJI

[WIELKOŚCI REZYSTANCJI R

* 4 0 20 0 4;

0 GSK = 0 =1;

1 DOD 0 = 1 2 = -1 3 PO;

2 INT 1;

3 INT 2;

ZEGAR = 5 = 0.125 = 0.125 = 0.125 = 0.125;

RYSUNEK O A 2 = - 0.4 = 1;

GRAFIK;

PARAMETRY PO = -2;

TYTUL

SYMULACJA OBWODU ELEKTRYCZNEGO

R = 0.5 OHMA;

KONIEC;

[SEKCJA DRUGA

PARAMETRY PO = -1;

GRAFIK;

TYTUL

SYMULACJA OBWODU ELEKTRYCZNEGO

R = 1 OHM;

KONIEC;

[SEKCJA TRZECIA

PARAMETRY PO = -4;

GRAFIK;

TYTUL

SYMULACJA OBWODU ELEKTRYCZNEGO

R = 0.25 OHMA;

KONIEC;

STOP;

Program ten składa się z trzech sekcji - sekcji strukturalnej i dwu sekcji następnych. Z każdą sekcją jest związane zadeklarowanie nowej wartości parametru symbolicznego PO, zależnego od wartości rezystancji w badanym obwodzie elektrycznym. Wyniki w każdej sekcji są rejestrowane w postaci wykresu funkcji $y = u_c(t)$ na drukarce znakowo-mozaikowej.

Po bezbłędnej translacji kolejnej sekcji programu maszyna przystępuje do obliczeń i rejestracji wyników na urządzeniu wyjściowym, związanym z użytą w programie dyrektywą rejestracji wyników, np. RYSUNEK. Użycie dyrektywy GRAFIK powoduje, że wyniki są rejestrowane w postaci graficznej (w sekcji, w której nie wystąpiłaby dyrektywa GRAFIK, wyniki są otrzymywane w postaci numerycznej na urządzeniu zadeklarowanym w dyrektywie RYSUNEK).

R=1 OHMA

METODA CAŁKOWANIA= RUKU KROK CAŁKOWANIA = 1.25000E -1,

KONCOWE= 5.00000E +0,

YMIN= -4.20000E -1, YMAX= +1.03950E +0,

SKALA: 1SPACJA= +2.100E -2, ZMIENNA NR 2, RYS.NR 0, ZNAK: A

-2.1000 +.00000 +2.1000 +4.2000 +6.3000 +8.4000 E -1,

```

:-----:-----:-----:-----:-----:-----:-----:
TIME:      DELTA TIME= +.125000E +0,
.00000E +0:      A      :      :      :      :
:      :      :      A      :      :      :      :
:      :      :      :      A      :      :      :
:      :      :      :      :      A      :      :
:      :      :      :      :      :      A      :
.62500E +0:      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      A      :
.12500E +1:      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
.18750E +1:      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
.25000E +1:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
.31250E +1:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
.37500E +1:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
.43750E +1:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
.50000E +1:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :
.50000E +1:      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      :      A      :

```

PRZYCZYNA ZAKONCZENIA= 6

Rys.6.28. Przykład wyniku symulacji obwodu elektrycznego RLC

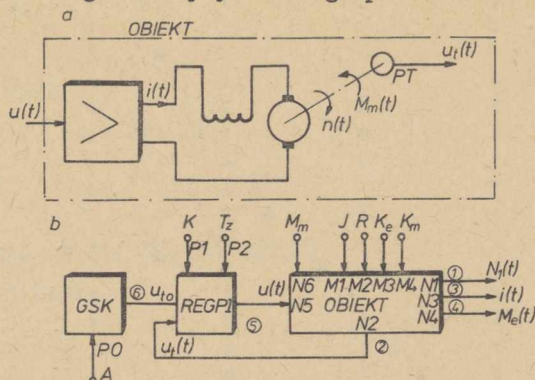
Ponieważ w treści programu brak jest dyrektywy METODA, określającej jedną z możliwych metod całkowania numerycznego, całkowanie odbywa się za pomocą metody Runge-Kutta 4 rzędu (RUKU).

Użyta w sekcji strukturalnej dyrektywa ZEGAR definiuje: wartość końcową zmiennej niezależnej = 5, krok całkowania = 0.125, kroki związane z rejestracją wyników obliczeń dyrektywami DRUKUJ, RYSUJ, WYKREŚL = 0.125.

Na rysunku 6.28 przedstawiono przykład zarejestrowanych wyników obliczeń dla drugiej sekcji programu.

Przykład 2

Drugi przykład modelowania cyfrowego w języku symulacyjnym GEMMA przedstawimy w odniesieniu do układu regulacji prędkości silnika szeregowego, sterowanego z tyrystorowego prostownika (rys.6.29).



Rys.6.29. Układ napędowy z silnikiem szeregowym prądu stałego:
a) schemat obiektu sterowania, b) schemat cyfrowego modelu całego układu napędowego

Ustalmy następujące założenia:

1. Model cyfrowy obiektu sterowania jest makroblokiem o nazwie OBIEKT.
2. W modelu cyfrowym obiektu sterowania chcemy nastawiać następujące stałe (parametry silnika):
M1 - moment bezwładności J,
M2 - rezystancję silnika R,
M3 - stałą elektryczną silnika K_E ,
M4 - stałą elektromechaniczną silnika K_M .

3. Sygnały wyjściowe obiektu sterowania są następujące:

N1 - prędkość obrotowa $n(t)$,

N2 - napięcie prądnicy tachometrycznej $u_t(t)$,

N3 - prąd silnika $i(t)$,

N4 - moment elektromagnetyczny $M_e(t)$.

4. Sygnały wejściowe obiektu sterowania są następujące:

N5 - napięcie sterujące $u(t)$,

N6 - moment obciążenia $M_m(t)$.

Z tych założeń wynika, że makroblok OBIEKT ma cztery wyjścia i dwa wejścia sygnałowe oraz cztery wejścia parametryczne.

Definicja makrobloku OBIEKT jest następująca:

MAKRO N1 N2 N3 N4 OBIEKT N5 N6 M1 M2 M3 M4;

... (zbiór instrukcji podstawowych, określających strukturę makrobloku) ...

KONMAKRO;

Jeżeli założymy, że badania symulacyjne będziemy wykonywać przy wymuszeniach

$$u_{to}(t) = A \cdot 1(t - t_0) \text{ i } m_m(t) = \text{const} = M_m,$$

gdzie wartość momentu hamującego M_m będzie nastawiana na początku każdej sekcji obliczeń, to wejście N6 makrobloku OBIEKT ma charakter parametryczny i możemy mu nadać numer zastrzeżony dla parametrów, np. P 11.

Jeżeli zaplanujemy, że we wszystkich sekcjach będzie stałe opóźnienie skoku wymuszenia, np. $t_0 = 0,01$ s, a wartości parametrów A , K , T_z , M_m oraz J , R , K_E , K_M będą nastawiane dowolnie w poszczególnych sekcjach, to zbiór instrukcji definiujących strukturę modelu cyfrowego układu napędowego (część A programu symulującego) będzie następujący:

... definicje makrobloków REGPI i OBIEKT ...

1 2 3 4 OBIEKT 5 P11 PO1 PO2 PO3 PO4;

5 REGPI 6 2 P1 P2;

6 GSK = .01 PO;

KONIEC;

Budowa wewnętrzna części B programu symulującego zależy od tego, czy chcemy obliczać jedynie przebiegi (badanie stanów dynamicznych), czy też chcemy wykonywać optymalizację wybranych parametrów układu.

Jeżeli mamy zamiar obliczyć tylko jeden komplet przebiegów przejściowych (jeden raz rozwiązać układ równań opisujących działanie układu napędowego), to w sekcji B₁ należy umieścić instrukcje określające warunki obliczeń i rejestracji.

Założmy na przykład, że równania różniczkowe chcemy scałkować metodą Runge-Kutta w czasie 10 s z krokiem 0,1 s, przy założonych następujących parametrach układu:

$$A = 0,5 \quad K = 20, \quad T_z = 1,5 \text{ s} \quad M_m = 0,5 M_n \\ J = 2 \text{ Nms}^2, \quad R = 0,2 \Omega, \quad K_E = 0,1 \quad K_M = 40.$$

Jeżeli chcemy ponadto zarejestrować przebiegi $u_{to}(t)$, $u(t)$, $i(t)$ oraz $n(t)$ w formie wykresów próbkowanych co 0,1 s, to część B programu symulującego będzie mieć następującą postać:

METODA RUKU;

ZEGAR = 10 = .01 = .1;

WYKR 6 (A) 5 (U) 3 (I) 1 (N);

PARAMETR PO=.5 P11=.5 P1=20 P2=1.5 P01=2 P02=.2 P03=.1 P04=40;

KONIEC;

STOP;

Po wczytaniu całego programu i dokonaniu translacji komputer rozwiązuje równania różniczkowe, wg których został zbudowany model cyfrowy układu napędowego, a następnie rejestruje na drukarce wierszowej tylko te sygnały, które wymieniono w dyrektywie WYKRES.

Sygnały wymienione w dyrektywie WYKRES zostaną narysowane na jednej płaszczyźnie rysunku z maksymalną rozdzielczością, metodą drukowania punkt po punkcie, czcionkami wskazanymi w dyrektywie, a więc:

- przebieg $u_{to}(t)$ zostanie wydrukowany czcionką A,
- przebieg $u(t)$ - czcionką U,
- przebieg prądu silnika $i(t)$ - czcionką I,
- przebieg prędkości obrotowej $n(t)$ - czcionką N.

Zarówno skala, jak i zakres czasu są narzucone dyrektywą ZEGAR i tak w rozpatrywanym przykładzie drukowane przebiegi będą próbkowane co 0,1 s w przedziale od 0 do 10 s.

7. PRZYKŁADY ANALIZY I SYNTEZY DYNAMIKI PRZETWORNIKÓW I UKŁADÓW ELEKTROMECHANICZNYCH

7.1. Analiza dynamiki silnika prądu stałego, z uwzględnieniem nasylenia obwodów magnetycznych

Do analizy przyjmuje się następujące założenia upraszczające:

- pominięcie zjawisk histerezy obwodów magnetycznych maszyny;
- pominięcie efektów tłumiących, związanych z prądami wirowymi

w masywnych częściach obwodów maszyny.

Uwzględnienie zjawiska histerezy jest trudne ze względu na brak analitycznego opisu charakterystyki niejednoznaczności, która zależy ponadto od stanów poprzedzających rozważane przebiegi.

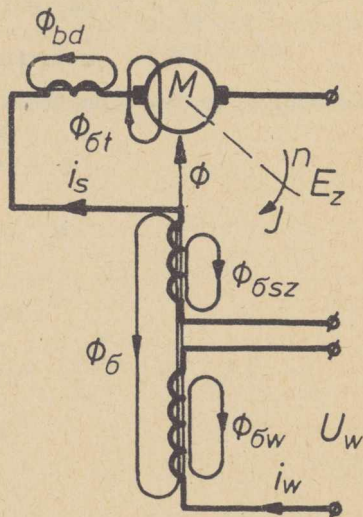
Oddziaływanie prądów tłumiących w żelazie może być uwzględnione, lecz wymaga to rozwiązania równań Maxwella i określenia rzeczywistego układu pola magnetycznego w przestrzeni, co stwarza duże trudności, a często nie jest ważne z punktu widzenia charakterystyk maszyny [4,15].

Rozpatrzmy procesy elektromechaniczne, zachodzące w silniku prądu stałego, przy wymienionych założeniach.

Przyjmujemy, że układ połączeń silnika jest taki sam jak na rysunku 7.1.

Oznaczenia na rysunku 7.1:

- ϕ - strumień główny sprzężony z twornikiem,
- $\phi_{\sigma sz}$ - strumień rozproszenia dozwojenia szeregowego,



Rys.7.1. Schemat połączeń
silnika prądu stałego

- Φ_{bd} - strumień biegunów dodatkowych,
 $\Phi_{\sigma w}$ - strumień rozproszenia uzwojenia wzbudzenia,
 Φ_{σ} - strumień rozproszenia uzwojenia wzbudzenia i szeregowego,
 Φ_t - strumień rozproszenia twornika.

Model matematyczny silnika można zapisać w następującej postaci:

$$\frac{d}{dt} z_{sz} (\Phi + \Phi_{\sigma sz} + \Phi_{\sigma}) + \frac{d}{dt} z_{bd} \Phi_{bd} + \frac{d}{dt} z'_t \Phi_t + R_{t\Sigma} i_s + R_z i_s + \frac{d}{dt} L_z i_s + c_E \Phi n = E_z, \quad (7.1)$$

$$\frac{d}{dt} z_w (\Phi + \Phi_w + \Phi_{\sigma}) + R_w i_w = U_w, \quad (7.2)$$

gdzie z - liczby zwojów poszczególnych uzwojeń;
 E_z, L_z, R_z - napięcie, indukcyjność i rezystancja źródła zasilającego ($R_z = L_z = 0, E_z = U$ - przyjęcie idealnej sztywnej sieci prądu stałego).

Równania strumieni są następujące:

$$\begin{aligned} \Phi &= \lambda (i_w z_w + i_s z_{sz} - i_s z'_t), \\ \Phi_{\sigma} &= \lambda_{\sigma} (i_w z_w + i_s z_{sz}), \\ \Phi_{\sigma sz} &= \lambda_{\sigma sz} i_s z_{sz}, \\ \Phi_{\sigma w} &= \lambda_{\sigma w} i_w z_w, \\ \Phi_{bd} &= \lambda_{bd} i_s z_{bd}, \\ \Phi_{\sigma t} &= \lambda_{\sigma t} i_s z'_t, \end{aligned} \quad (7.3)$$

gdzie λ - permeancja;
 z'_t - zredukowana liczba zwojów reakcji twornika.

Równanie ruchu silnika

$$M_e - M_m = \frac{\pi}{30} J \frac{d}{dt} n, \quad (7.4)$$

$$\text{gdzie } M_e = c_M \Phi i_s. \quad (7.5)$$

W równaniach (7.1)-(7.3) są uwzględnione różne warianty połączeń uzwojeń wzbudzenia maszyny, nieliniowość krzywej magnesowania,

rozmagnesowujące oddziaływanie reakcji twornika, wpływ ograniczenia mocy źródeł zasilania, strumienie rozproszenia uzwojeń wzbudzenia.

Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned} R_{t\Sigma} &= R_t + R_{bd} + R_{sz}, \\ L_{t\Sigma} &= L_{ot} + L_{bd} + L_{osz}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

gdzie $L_{ot} = \lambda_{ot} z_t^2$; $L_{bd} = \lambda_{bd} z_{db}^2$; $L_{osz} = \lambda_{osz} z_{sz}^2$;

równanie (7.1) przyjmuje następującą postać:

$$E_z - c_E \Phi n = R_{\Sigma} (1 + pT_{\Sigma}) i_s - \frac{T_{sz} - T'_{osz}}{K_{sz}} K_e \omega_p \Phi, \quad (7.7)$$

w którym $T'_{osz} = \lambda_{osz} \frac{z_{sz}^2}{R_{sz}}$; $T_{sz} = (\lambda + \lambda_{osz} + \lambda_{\sigma}) \frac{z_{sz}^2}{R_{sz}}$ - stała czasowa szeregowego uzwojenia wzbudzenia;

$K_{sz} = \lambda \frac{z_{sz}}{R_{sz}} K_e \omega_p$ - współczynnik wzmocnienia szeregowego uzwojenia wzbudzenia;

$$T_{\Sigma} = \frac{L_{\Sigma}}{R_{\Sigma}}.$$

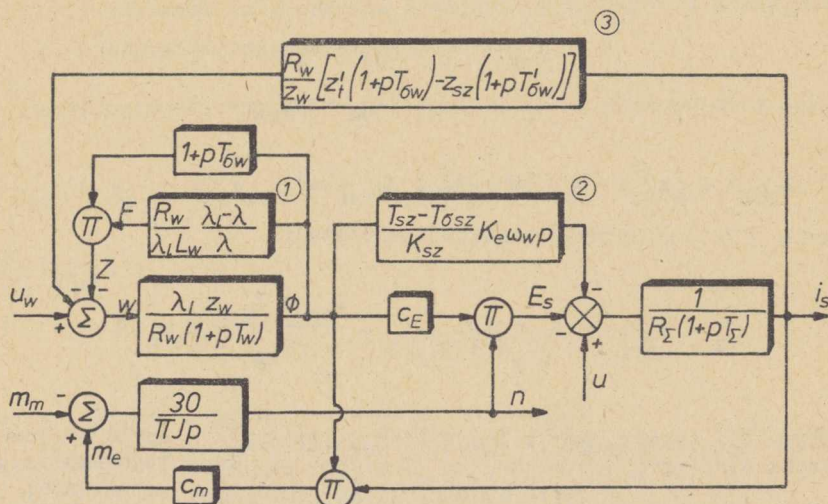
Rozwiązując układ równań (7.2)-(7.3), otrzymuje się

$$\begin{aligned} U_w &= \frac{R_w}{\lambda_1 z_w} (1 + pT_w) \Phi + \frac{R_w}{\lambda_1 z_w} \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda} (1 + pT_{\sigma w}) \Phi + \frac{R_w z_t'}{z_w} (1 + pT_{\sigma w}) i_s + \\ &- \frac{R_w z_{sz}}{z_w} (1 + pT'_{\sigma w}) i_s, \end{aligned} \quad (7.8)$$

gdzie $T_w = (\lambda_1 + \lambda_{\sigma w} + \lambda_{\sigma}) \frac{z_w^2}{R_w}$ - stała czasowa obwodu wzbudzenia;

$$\left. \begin{aligned} T_{\sigma w} &= (\lambda_{\sigma w} + \lambda_{\sigma}) \frac{z_w^2}{R_w} \\ T'_{\sigma w} &= \lambda_{\sigma w} \frac{z_w^2}{R_w} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{- stałe czasowe obwodu rozproszenia} \\ \text{wzbudzenia;} \end{array}$$

λ_1, λ - odpowiednio: permeancja obwodu głównego na liniowej części charakterystyki magnesowania i permeancja obwodu głównego w dowolnym punkcie pracy maszyny.

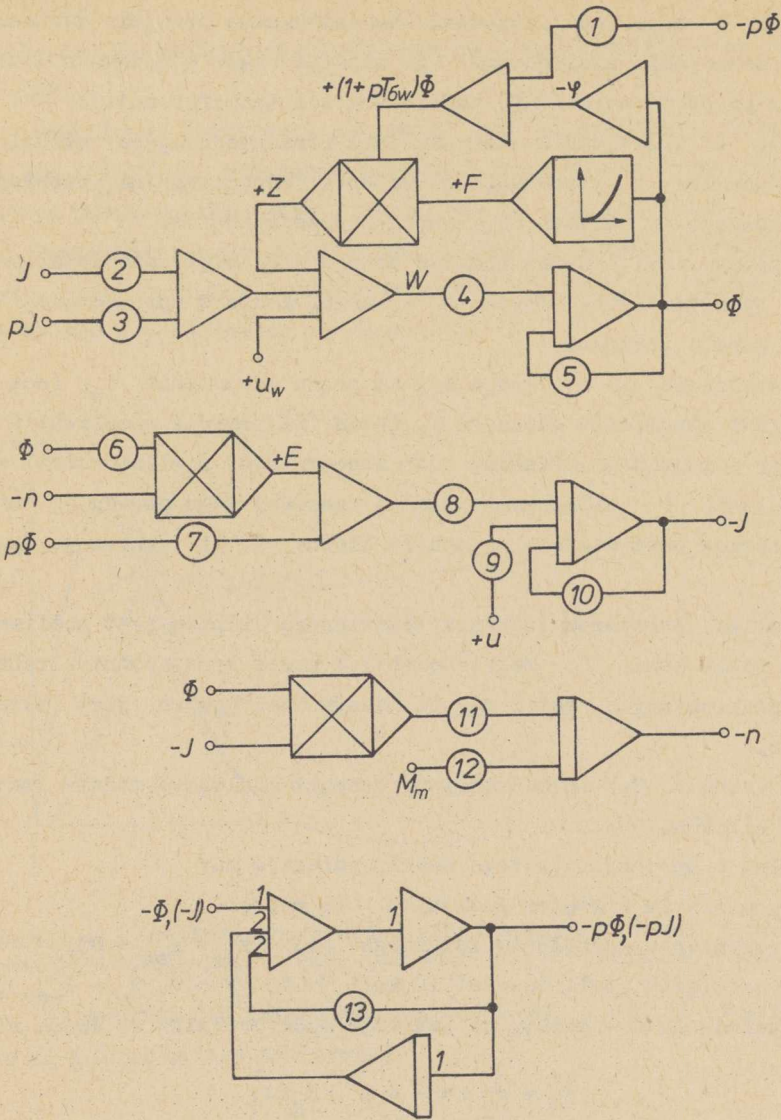


Rys. 7.2. Schemat strukturalny silnika prądu stałego
($R_z = L_z = 0, E_z = U$)

Na podstawie równań (7.4), (7.7) i (7.8) może być ułożony schemat strukturalny silnika - model odzwierciedla rzeczywistą strukturę obiektu. Bloki operacyjne są połączone ze sobą zgodnie ze schematem strukturalnym badanego układu (rys. 7.2).

Model maszynowy zbudowany na podstawie tego schematu strukturalnego, umożliwia obliczanie związków statycznych (charakterystyki sterowania i mechaniczne) oraz dokonać analizę stanów nieustalonych w dowolnych warunkach pracy.

Blok 1 na rysunku 7.2 obrazuje nieliniowość charakterystyki magnesowania, a także zmienność stałej czasowej w torze strumienia głównego. Sygnał wyjściowy F tego elementu, po pomnożeniu przez sygnał $(1 + pT_{ow})\phi$, tworzy sygnał Z , odwzorowujący w stanach przejściowych i ustalonych rzeczywistą nieliniowość obwodu magnetycznego maszyny (bez uwzględnienia histerezy). Sygnał ten jest równy zero na liniowym odcinku krzywej magnesowania. Sygnał $Z = F(\phi)(1 + pT_{ow})\phi$. Kształt funkcji $F(\phi)$ wynika z przebiegu uśrednionej charakterystyki magnesowania.



Rys.7.3. Schemat analogowy silnika prądu stałego:

$$\begin{aligned}
 1 &= T_{cw}, \quad 2 = \frac{R_w}{z_w} (z'_t - z_{sz}), \quad 3 = \frac{R_w}{z_w} (z'_t T_{\sigma w} - z_{sz} T'_{\sigma w}), \quad 4 = \frac{\lambda z_w}{R_w}, \quad 5 = 1/T_w, \\
 6 &= c_E, \quad 7 = \frac{T_{sz} - T_{\sigma sz}}{K_{sz}} K_e \omega_n, \quad 8 = 1/L_\Sigma, \quad 9 = R_\Sigma/L_\Sigma, \quad 10 = 1/\frac{L_\Sigma}{T_\Sigma}, \quad 11 = c_M \frac{30}{\pi J}, \\
 12 &= \frac{30}{\pi J}, \quad 13 = 0,49
 \end{aligned}$$

Blok 2 odpowiada sprzężeniu magnetycznemu uzwojeń: wzbudzającego i dozwojenia szeregowego (po zmianie prądu w jednym z uzwojeń, w drugim powstają przeciwnie skierowane sem transformacji).

Blok 3 przedstawia oddziaływanie roz magnesowujące strumienia reakcji twornika i strumienia dozwojenia szeregowego na przebieg strumienia głównego w stanach ustalonych i przejściowych.

Przedstawiony schemat blokowy ujmuje więc większość istotnych zjawisk i sprzężeń wewnętrznych w silniku, które w uproszczonej analizie są zwykle pomijane.

W schemacie nie występuje sygnał prądu wzbudzenia i_w , lecz jedynie sygnał strumienia głównego Φ . Takie traktowanie umożliwia w prosty sposób otrzymanie zbliżonej do rzeczywistej nieliniowości w torze strumienia i uzależnienie stałej czasowej tego obwodu od punktu pracy, poprzez wprowadzenie do modelu bloku 1 i generację sygnału Z .

Analiza operatorowa tak przedstawionego silnika jest możliwa jedynie w odniesieniu do małych odchyśleń przez wprowadzenie transmitancji przyrostowych, toteż użycie maszyn analogowych jest bardzo potrzebne.

Na rysunku 7.3 przedstawiono schemat analogowy modelu matematycznego silnika.

Kolejne uproszczenia tego modelu polegają na:

- pominięciu sprzężeń podatnych ($T_\sigma = 0$);
- pominięciu sprzężenia sztywnego ($\Delta z = z'_t - z_{sz} = 0$);
- pominięciu nieliniowości funkcji $\Phi(\theta)$ ($F = 0$, $T_w = T_{wsr}$);
- założeniu $\Phi = \text{const}$, co redukuje model silnika do dwóch równań:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{1}{L_g} (u - K_E n - R_g i) \\ \frac{dn}{dt} &= \frac{30}{\pi J_s} (K_M i - M_m) \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

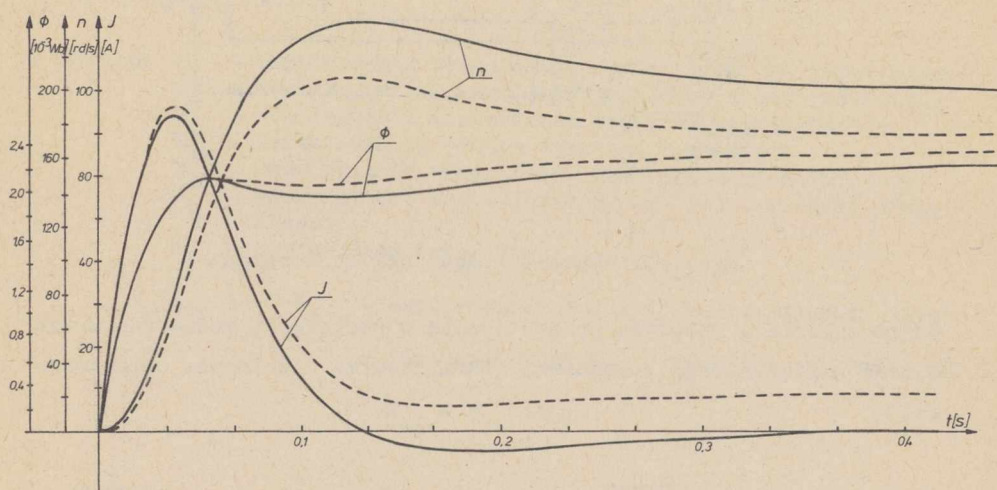
Dwa ostatnie uproszczenia dają bardzo proste modele matematyczne, są jednak niedopuszczalne, jeżeli obliczenia mają dać wyniki zbliżone do rzeczywistych.

Jeżeli jest rozważana zwłaszcza praca przy zmiennym Φ , to przyjęcie średniej stałej czasowej T_{wsr} pociąga znaczne odstępstwa

przebiegów obliczonych od rzeczywistych i to niezależnie od wartości tej stałej.

Pominięcie sprzężenia sztywnego jest dopuszczalne, jeżeli rozważa się silnik o starannie dobranych uzwojeniach kompensacyjnych, w którym można uważać wpływ reakcji twornika za pomijalny.

Pominięcie sprzężeń podatnych deformuje jedynie przebiegi przejściowe przy dużych i szybkich zmianach wymuszeń, nie powodując znacznych błędów w pozostałych przypadkach.



Rys.7.4. Przebiegi przejściowe silnika prądu stałego przy pełnym modelu analogowym: — bieg jałowy, - - - obciążenie znamionowe

Na rysunku 7.4 przedstawiono przebiegi $\Phi(t)$, $I(t)$, $n(t)$, uzyskane na pełnym modelu analogowym.

7.2. Analiza dynamiki układu Leonarda ze sprzężeniami zwrotnymi

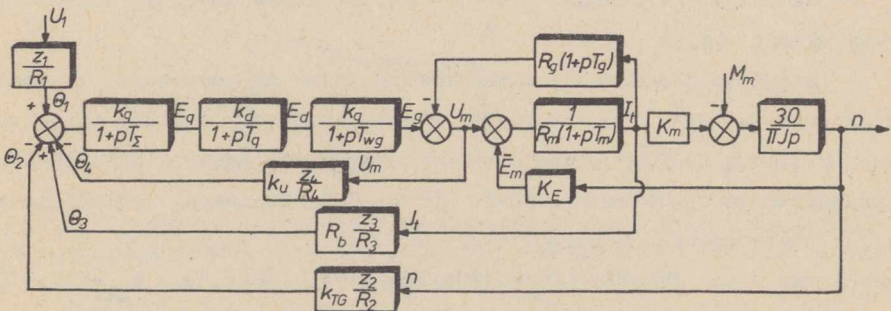
Jako przykład układu wielopętlowego będzie przedstawiony układ Leonarda, którego schemat ideowy podano na rys. 7.5.

Po założeniach upraszczających, takich jak w pktcie 7.1 i dodatkowym założeniu liniowości charakterystyk magnesowania maszyn, postę-

$$\left. \begin{aligned} E_q(p) &= k_q [z_1 I_1(p) - z_2 I_2(p) + z_3 I_3(p) - z_4 I_4(p)] \\ E_g(p) &= k_g I_{wg}(p) \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

$$\left. \begin{aligned} E_M(p) &= k_E n(p) \\ U_{TG}(p) &= k_{TG} n(p) \\ U_b(p) &= R_b I_t(p) \\ U_u(p) &= k_u U_u(p) \\ E_d(p) &= k_d z_g I_q(p) \end{aligned} \right\}, \quad (7.11)$$

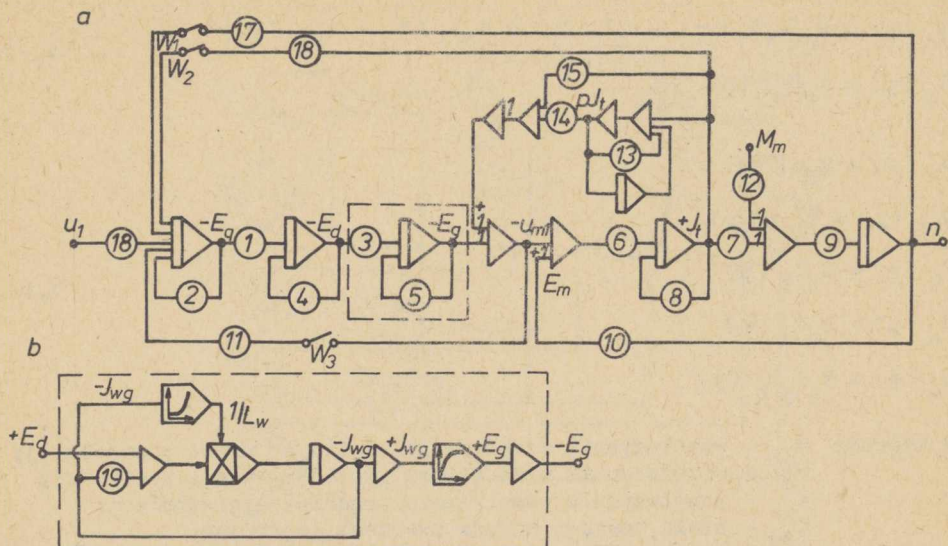
w których k_q - współczynnik wzmocnienia amplidyny w osi poprzecznej;
 k_d - współczynnik wzmocnienia amplidyny w osi podłużnej;
 k_{TG} - współczynnik wzmocnienia prądnicy obcowzbudnej;
 T_g^{zw} - stała czasowa obwodu zwartego amplidyny;
 k_{TG} - współczynnik wzmocnienia prądnicy tachometrycznej;
 k_u - współczynnik wzmocnienia sprzężenia zwrotnego napięciowego;
 R_b - rezystancja bocznika;
 $M_{12} = \frac{z_2}{z_1} R_1 T_1$ - współczynnik indukcyjności wzajemnej uzwojeń amplidyny; $M_{21} = \frac{z_1}{z_2} R_2 T_2$; zakłada się $M_{12} = M_{21}$ itd.



Rys.7.6. Schemat blokowy układu Leonarda ze sprzężeniem zwrotnym napięciowym, prądowym i prędkościowym

Po przekształceniu układu równań (7.10) równanie obwodu zwartego amplidyny można zapisać w następującej postaci:

$$E_q(p) = \frac{k_q}{1+pT_\Sigma} \left[\frac{z_1}{R_1} U_1(p) - \frac{z_2}{R_2} U_{TG}(p) + \frac{z_3}{R_3} U_b(p) - \frac{z_4}{R_4} U_u(p) \right]. \quad (7.12)$$



Rys.7.7. Schemat analogowy układu Leonarda: a) z pominięciem nieliniowości charakterystyk magnesowania; b) część układu uwzględniająca nieliniowość charakterystyki magnesowania prądnicy: 1 - k_d/T_q , 2 - $1/T_\Sigma$, 3 - k_g/T_{wg} , 4 - $1/T_q$, 5 - $1/T_{wg}$, 6 - $1/R_M T_M$, 7 - k_M , 8 - $1/T_M$, 9 - $30/\pi J$, 10 - k_E , 11 - $z_4 k_u/R_4$, 12 - a , 13 - 0,49, 14 - $R_g T_g$, 15 - R_g , 16 - $R_b z_3/R_3$, 17 - $k_{TG} z_2/R_2$, 18 - z_1/R_1 , 19 - $R_{wg} + R_{dA}$

Na podstawie równań (7.10) - (7.12) można utworzyć schemat blokowy układu (rys. 7.6).

Stosując modelowanie strukturalne można na podstawie schematu blokowego z rys. 7.6. utworzyć schemat analogowy układu, odwzorowując za pomocą bloków operacyjnych maszyny analogowej poszczególne transmitancje operatorowe układu (rys. 7.7) Leonarda, składającego się z następujących maszyn [15]:

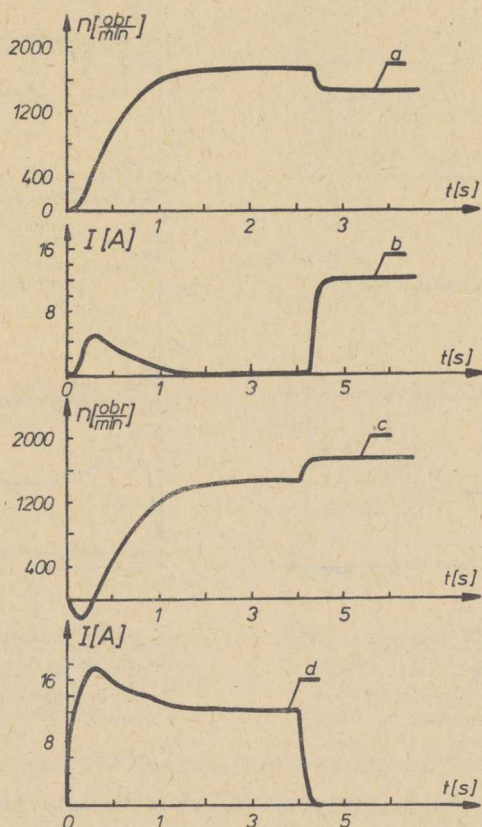
amplidyna typu PWMa2A ($P_{nA} = 1\text{kW}$; $U_d = 230\text{V}$; $I_d = 4,35\text{A}$; $R_{dA} = 11,15\Omega$; $n_{nA} = 1420\text{ obr/min}$);

prądnica typu PZM54a ($P_{ng} = 2,5\text{kW}$; $U_g = 230\text{V}$; $I_g = 10,9\text{A}$; $R_g = 1,02\Omega$; $n_{ng} = 1450\text{ obr/min}$; $I_{wg} = 0,52\text{A}$; $R_{wg} = 330\Omega$);

silnik typu PZMb44b ($P_n = 2,2\text{kW}$; $U_M = 220\text{V}$; $I_M = 12,3\text{A}$; $n_M = 1450\text{ obr/min}$; $I_{wM} = 0,51\text{A}$; $R_M = 1,63\Omega$);

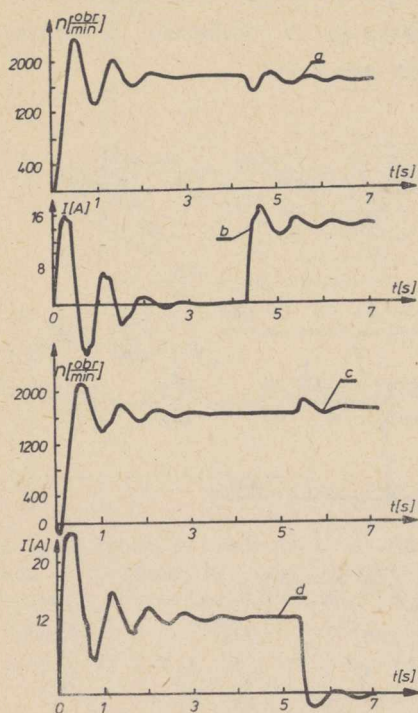
wykonano badania modelowe podczas rozruchu układu na biegu jałowym i pod obciążeniem przy skokowym zadawaniu napięcia sterującego u_1 ampli-

dyny. Po ustaleniu się prędkości było badane zachowywanie się układu podczas obciążenia skokowego i obciążenia momentem znamionowym. Na rys. 7.8-7.12 podano przykładowe przebiegi w układzie otwartym i zamkniętym z wybranymi sprzężeniami zwrotnymi.

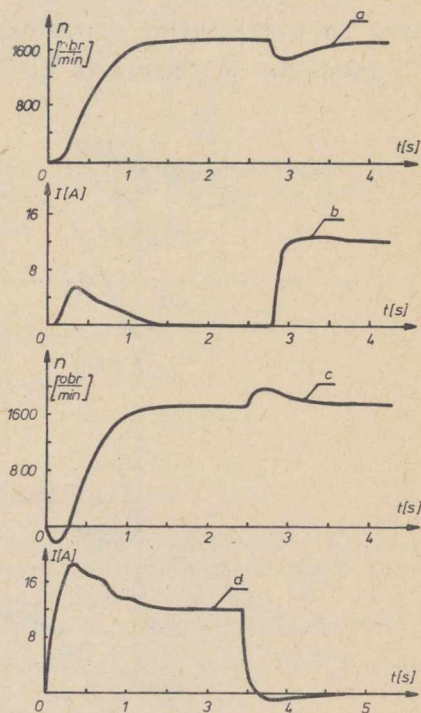


Rys.7.8. Przebiegi prędkości i prądu w otwartym układzie Leonarda: a,b) rozruch układu na biegu jałowym i obciążeniu; c,d) rozruch układu obciążonego i odciążenie

Przebiegi prędkości i prądu w układzie Leonarda ze sprzężeniem prędkościowym narastają bardzo szybko i mają charakter oscylacyjny (rys. 7.9). Oscylacje prędkości można zmniejszyć kosztem pogorszenia własności statycznych (zmniejszenie sztywności charakterystyki mechanicznej) lub też przez wprowadzenie do układu sprzężenia stabilizującego. Podobny charakter mają przebiegi prędkości i prądu w układzie z napięciowym sprzężeniem zwrotnym.



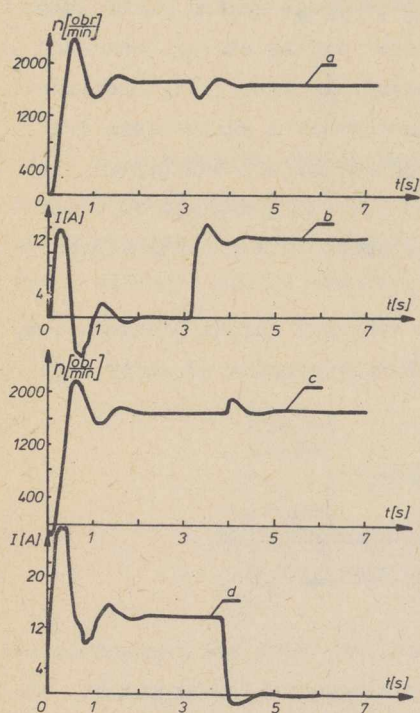
Rys.7.9. Przebiegi prędkości i prądu w układzie Leonarda ze sprzężeniem prędkościowym



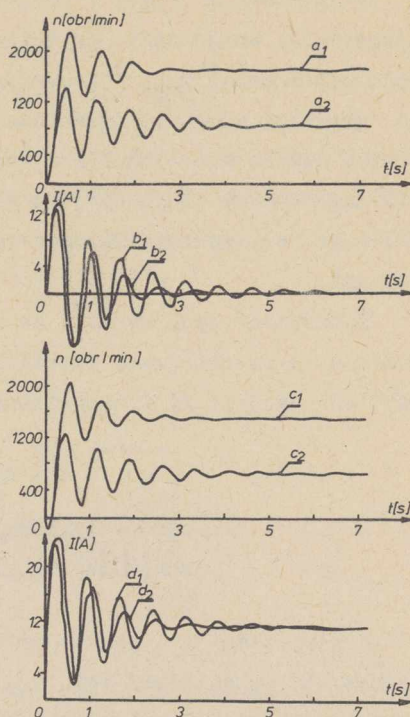
Rys.7.10. Przebiegi prędkości i prądu w układzie Leonarda ze sprzężeniem prądowym

Rozpatrując sprzężenie prądowe (rys.7.10) można stwierdzić, że przebiegi mają charakter aperiodyczny, czas trwania procesów przejściowych jest nieco krótszy niż w przypadku układu otwartego (rys. 7.8). Przy zmianach obciążenia występują przeregulowania, których amplituda zwiększa się po zwiększeniu sztywności charakterystyki mechanicznej.

W praktyce najczęściej jednak są stosowane układy Leonarda z dodatnim prądowym i ujemnym napięciowym sprzężeniem zwrotnym (rys.7.11). Zarówno charakterystyki statyczne, jak i dynamiczne, są znacznie korzystniejsze niż w przypadkach gdy sprzężenia działają pojedynczo. Zastosowanie obydwu sprzężeń umożliwia równocześnie osiągnięcie następujących korzyści:



Rys. 7.11. Przebiegi prędkości i prądu w układzie Leonarda z dodatnim sprzężeniem zwrotnym prądowym i ujemnym napięciowym



Rys. 7.12. Przebiegi prędkości i prądu w układzie Leonarda z ujemnym sprzężeniem napięciowym w przypadku skokowej zmiany przepływu sterującego θ_3 (a_1, b_1, c_1, d_1) i $1/2 \theta_3$ (a_2, b_2, c_2, d_2)

- uzyskanie dowolnie sztywnej charakterystyki mechanicznej;
- forsowanie wzbudzenia, dzięki czemu uzyskuje się skrócenie czasu trwania przebiegów przejściowych zarówno przy rozruchu, jak i przy zmianach obciążenia;
- zmniejszenie wpływu magnetyzmu szczątkowego, a w konsekwencji zwiększenie dokładności regulacji.

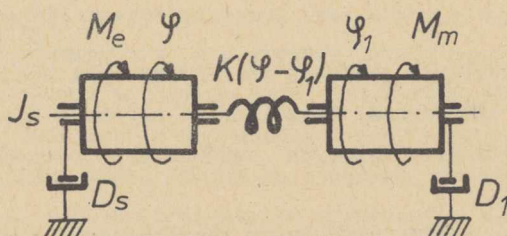
Wprowadzając do modelu analogowego układu strukturę przedstawioną na rys. 7.7b w miejsce uproszczonego modelu prądnicy, można w badaniach uwzględnić nieliniowość charakterystyki magnesowania prądnicy.

Nieliniowość charakterystyki wywiera duży wpływ na charakter przebiegów przejściowych (rys. 7.12), ponieważ powoduje zmianę statycznego współczynnika wzmocnienia prądnicy k_g oraz zmianę stałej czasowej obwodu wzbudzenia T_{wg} . Jak wynika z wykresów na rys. 7.12, nielinowość prądnicy znacznie ogranicza przeregulowania i skraca czas ich trwania, działa więc stabilizująco na pracę układu. Nasycający się obwód magnetyczny prądnicy jest elementem tłumiącym drgania oscylacyjne, a więc jest pewnego rodzaju zabezpieczeniem układu automatycznej regulacji.

Z rozważań tych wynika, że analiza dynamiki układu Léonarda przy założeniu prostoliniowej charakterystyki magnesowania prądnicy daje wyniki odbiegające od rzeczywistości.

7.3. Analiza dynamiki układu napędowego z elementami inercyjno-sprężystymi

W większości przypadków układ mechaniczny może być reprezentowany przez moment bezwładności urządzenia napędzanego oraz moment obciążenia. Jeżeli jednak występuje w nim w sposób wyraźny element sprężysty, np. sprzęgło elastyczne lub długi wał, należy to uwzględnić zwiększając odpowiednio liczbę stopni swobody układu. Na rysunku 7.13 został przedstawiony np. układ mechaniczny, w którym występuje jeden element sprężysty.

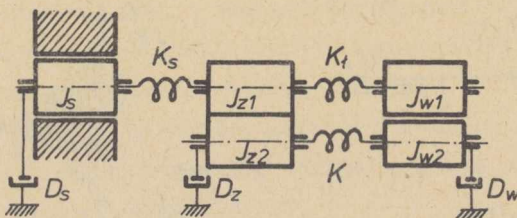


Rys. 7.13. Schemat kinematyczny układu z jednym elementem sprężystym

Ponieważ w układzie mechanicznym występują straty ruchu obrotowego elementów, należy je uwzględnić wprowadzając odpowiednie współczynniki dyssypacji D . Wobec powyższego, układ mechaniczny przedstawiony na rys. 7.13 można opisać następującymi równaniami:

$$\left. \begin{aligned} J_s \frac{d\dot{\varphi}}{dt} + D_s \dot{\varphi} + K(\varphi - \varphi_1) &= M_e \\ J \frac{d\dot{\varphi}_1}{dt} + D_1 \dot{\varphi}_1 - K(\varphi - \varphi_1) &= M_m \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Jako przykład układu napędowego z elementami inercyjno-sprężystymi zostanie przedstawiony układ napędowy walcarki-zgniatacza. Schemat kinematyczny tego układu, napędzanego przez silnik obcowzbudny prądu stałego, został przedstawiony na rys. 7.14.



Rys.7.14. Schemat kinematyczny części mechanicznej układu napędowego

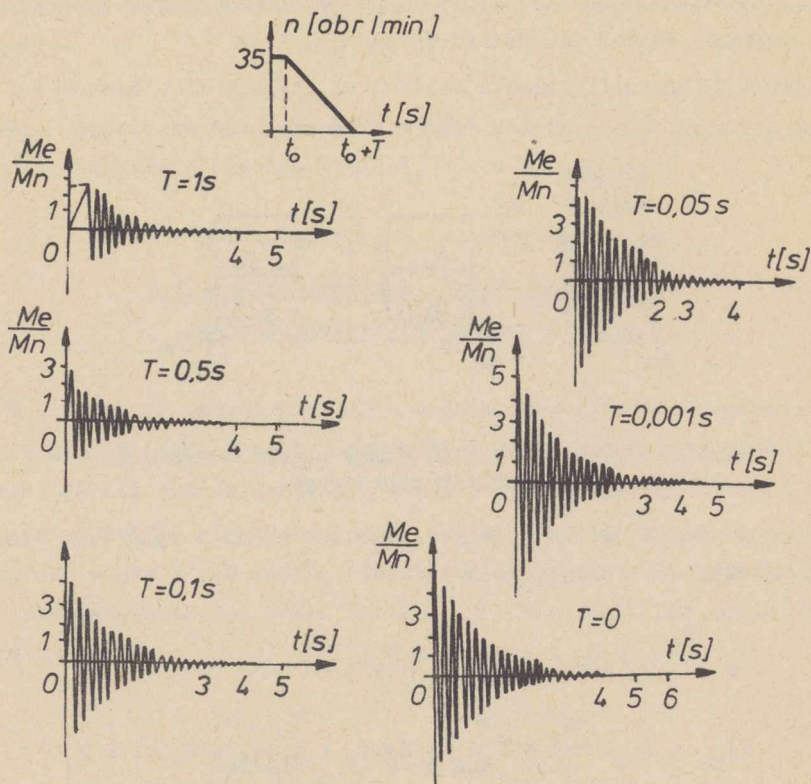
Na podstawie przedstawionych rozważań układ z rys. 7.14 można opisać następującym układem równań:

$$\left. \begin{aligned} J_s \frac{d\omega_s}{dt} + D_s \omega_s + K_s \Delta\varphi_1 &= c_M \Phi_w i_t \\ (J_{z1} + J_{z2}) \frac{d\omega_z}{dt} + D_z \omega_z - K_s \Delta\varphi_1 + K_t \Delta\varphi_2 + K_t \Delta\varphi_3 &= 0 \\ J_{w1} \frac{d\omega_1}{dt} + D_w \omega_1 - K_t \Delta\varphi_2 &= M_{m1} \\ J_{w2} \frac{d\omega_2}{dt} + D_w \omega_2 - K_t \Delta\varphi_3 &= M_{m2} \\ \frac{d}{dt} L_w i_w + R_w i_w &= U_w \\ \frac{d}{dt} L_t i_t + R_t i_t + c_E \Phi_w \omega_s &= U_t \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

$$\Delta \varphi_1 = \varphi_s - \varphi_z,$$

$$\Delta \varphi_2 = \varphi_z - \varphi_1,$$

$$\Delta \varphi_3 = \varphi_z - \varphi_2.$$



$$M_n = 630 \cdot 10^3 \text{ Nm}$$

$$n = 35 \text{ obr/min}$$

Rys.7.15. Charakterystyki $M_e = f(t)$ dla stanu zablokowania walców ($n_0 = 35 \text{ obr/min}$)

W układzie równań (7.14) zastosowano następujące oznaczenia:

- J_s - moment bezwładności wirnika silnika;
- J_{z1}, J_{z2} - momenty bezwładności walców zgniatacza;
- J_{w1} - moment bezwładności walca górnego;

- J_{w2} - moment bezwładności walca dolnego;
- D_s - współczynnik dyssypacji silnika;
- D_z - współczynnik dyssypacji układu sprzęgło zgniatacz;
- D_w - współczynnik dyssypacji układu łącznik walca;
- K_s - współczynnik sprężystości wału + sprzęgło silnika;
- K_t - współczynnik sprężystości łącznika;
- ω_s - prędkość kątowna wirnika silnika;
- ω_z - prędkość kątowna zgniatacza;
- ω_{w1} - prędkość kątowna walca górnego;
- ω_{w2} - prędkość kątowna walca dolnego;
- Φ_w, i_w, u_w - strumień, prąd i napięcie wzbudzenia silnika;
- L_w, R_w - współczynnik indukcyjności i rezystancji obwodu wzbudzenia;
- i_t, u_t - prąd i napięcie twornika silnika;
- L_t, R_t - współczynnik indukcyjności i rezystancja obwodu twornika.

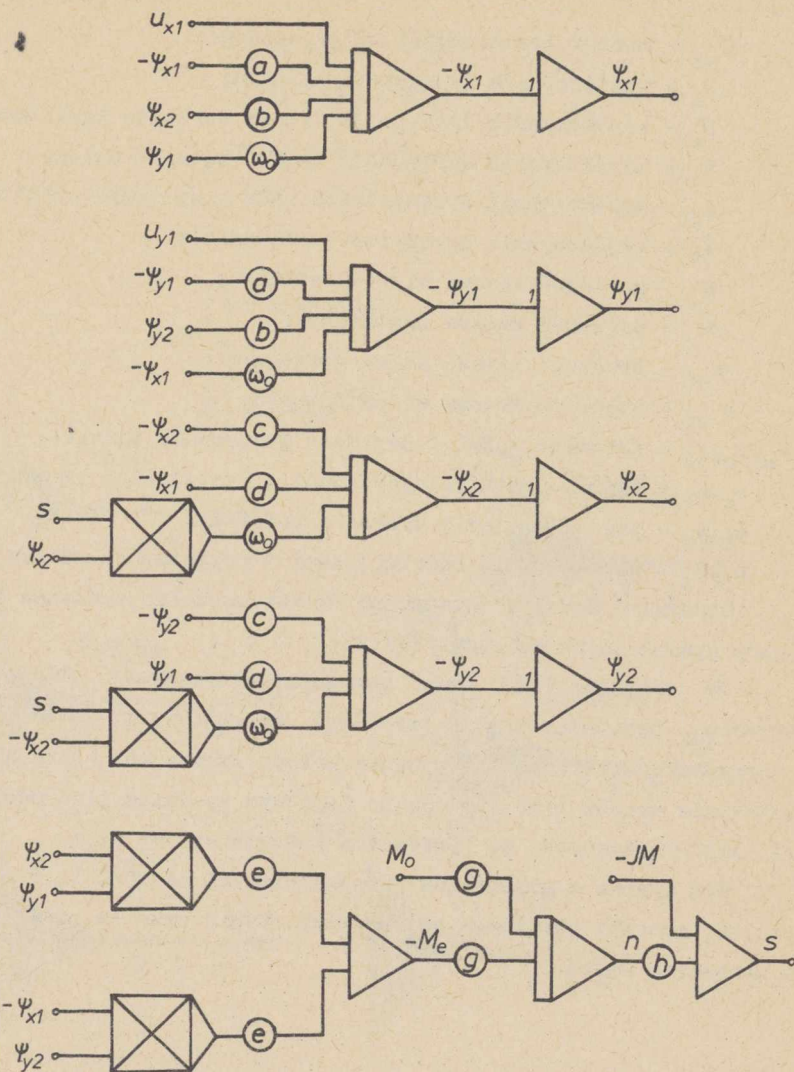
Otrzymany model matematyczny układu może być podstawą do analizy stanów dynamicznych walcarki [21,22].

Na rysunku 7.15 będą pokazane oscylogramy obliczeń analogowych, przedstawiające przebiegi momentów skrętnych na łączniku w przypadku szybkiego zatrzymania walców roboczych (stan awaryjny). Blokowanie walców było symulowane liniowym spadkiem prędkości obrotowej walców roboczych od prędkości początkowej do zera.

Jak wynika z przebiegów przedstawionych na rys. 7.15 wartość maksymalna momentu skrętnego na łączniku rośnie wraz ze zmniejszeniem czasu hamowania walców.

7.4. Analiza dynamiki silnika asynchronicznego

Do analizy przyjęto założenia podane w pktcie 4.5 oraz model matematyczny silnika asynchronicznego, opisany układem równań (4.79) - (4.82). Ponieważ badania były wykonywane na maszynie analogowej, toteż w celu uproszczenia struktury modelu analogowego zastosowano układ współrzędnych $(x, y, 0)$, nieruchomy względem pola silnika asynchronicznego. Równania (4.87) - (4.91) przyjmują w tym przypadku następującą postać:



Rys.7.16. Schemat analogowy silnika asynchronicznego: $a = \omega_0 \alpha'_s$,

$$b = \omega_0 \alpha'_r k_r, c = \omega_0 \alpha'_r, d = \omega_0 \alpha'_r k_s, e = \frac{3}{2} p \omega_0 \frac{k_r}{X_{1s} \sigma}, g = \frac{30 p}{\pi J}, h = \frac{1}{n_0}$$

$$\frac{d\psi_{x1}}{dt} = U_m \cos \gamma - \omega_0 \alpha'_s \psi_{x1} + \omega_0 \alpha'_r k_r \psi_{x2} + \omega_0 \psi_{y1}$$

$$\frac{d\psi_{y1}}{dt} = U_m \sin \gamma - \omega_0 \alpha'_s \psi_{y1} + \omega_0 \alpha'_r k_r \psi_{y2} - \omega_0 \psi_{x1}$$

(7.15)

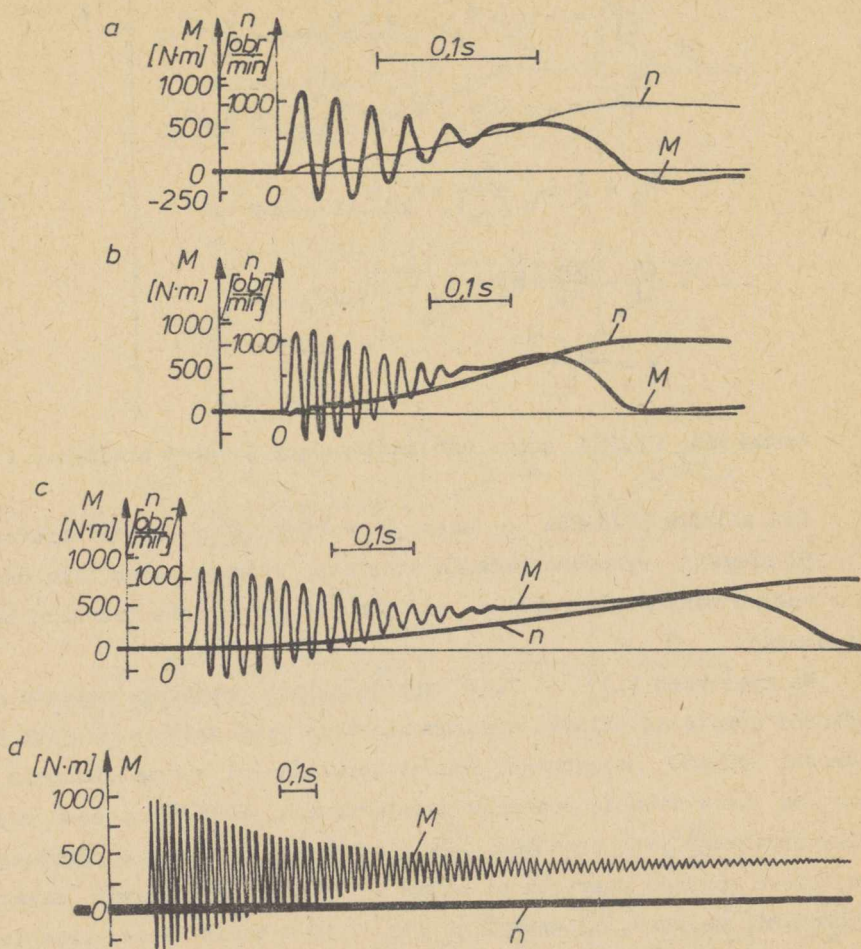
$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\psi_{x2}}{dt} &= -\omega_o \alpha_r \psi_{x2} + \omega_o \alpha_k \psi_{x1} + \omega_o s \psi_{y2} \\
 \frac{d\psi_{y2}}{dt} &= -\omega_o \alpha_r \psi_{y2} + \omega_o \alpha_k \psi_{y1} - \omega_o s \psi_{x2} \\
 M_e &= \frac{3}{2} p \omega_o \frac{k_r}{X_{1s}} \sigma (\psi_{x2} \psi_{y1} - \psi_{x1} \psi_{y2}) \\
 \frac{dn}{dt} &= \frac{30p}{\pi J} (M_e - M_m) \\
 s &= \frac{n_o - n}{n_o}
 \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Równaniom (7.15) odpowiada następujący schemat analogowy (rys. 7.16).

Dla silnika SBJd-86a o mocy $P_n = 28\text{kW}$ i prędkości obrotowej $n_n = 750\text{ obr/min}$ wykonano badania modelowe, których celem było określenie wpływu parametrów silnika na procesy dynamiczne rozruchu bezpośredniego.

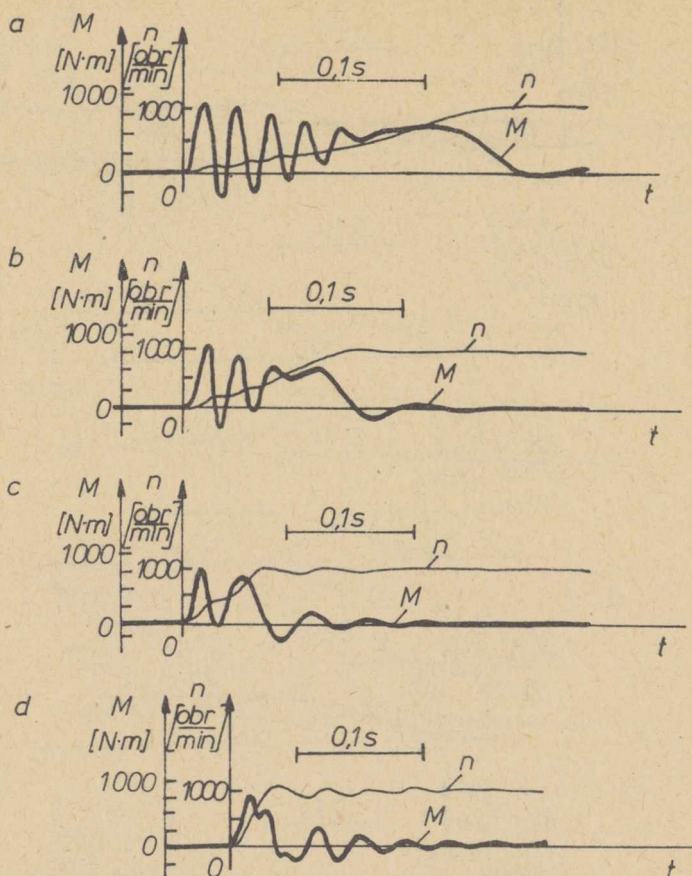
Na rysunkach 7.17 i 7.18 przedstawiono przebiegi momentu oraz prędkości obrotowej silnika asynchronicznego przy zmianie momentu bezwładności układu napędowego. Moment bezwładności wpływa znacznie nie tylko na czas trwania procesów przejściowych, lecz również na charakter przebiegu tych procesów. Na rysunku 7.17 pokazano przebiegi przejściowe podczas rozruchu silnika z różnymi dodatkowymi masami zamachowymi na wale, natomiast na rys. 7.18 - takie same przebiegi, jeżeli wypadkowy moment bezwładności jest mniejszy niż moment bezwładności wirnika silnika.

Jak wynika z wykresów, w miarę zwiększania momentu bezwładności napędu, liczba oscylacji przejściowego momentu elektromagnetycznego na początku procesu przejściowego ulega zwiększeniu, a wahania prędkości oraz momentu w strefie prędkości synchronicznej się zmniejszają (rys. 7.17a-c). Jest to spowodowane tym, że niektóre współczynniki tłumienia składowych przejściowych momentu są przy małej prędkości bardzo małe. Dlatego też, jeżeli moment bezwładności zostanie zwiększony, to silnik będzie pracować stosunkowo dłużej przy prędkościach małych, gdy małe są wartości współczynników tłumienia, co warunkuje wol-



Rys.7.17. Rozruch nieobciążonego silnika SBJd-86a przy różnych wartościach wypadkowego momentu bezwładności: a) $J_{\Sigma}/J_s = 1$; b) $J_{\Sigma}/J_s = 2$; c) $J_{\Sigma}/J_s = 4$; d) $J_{\Sigma}/J_s \rightarrow \infty$

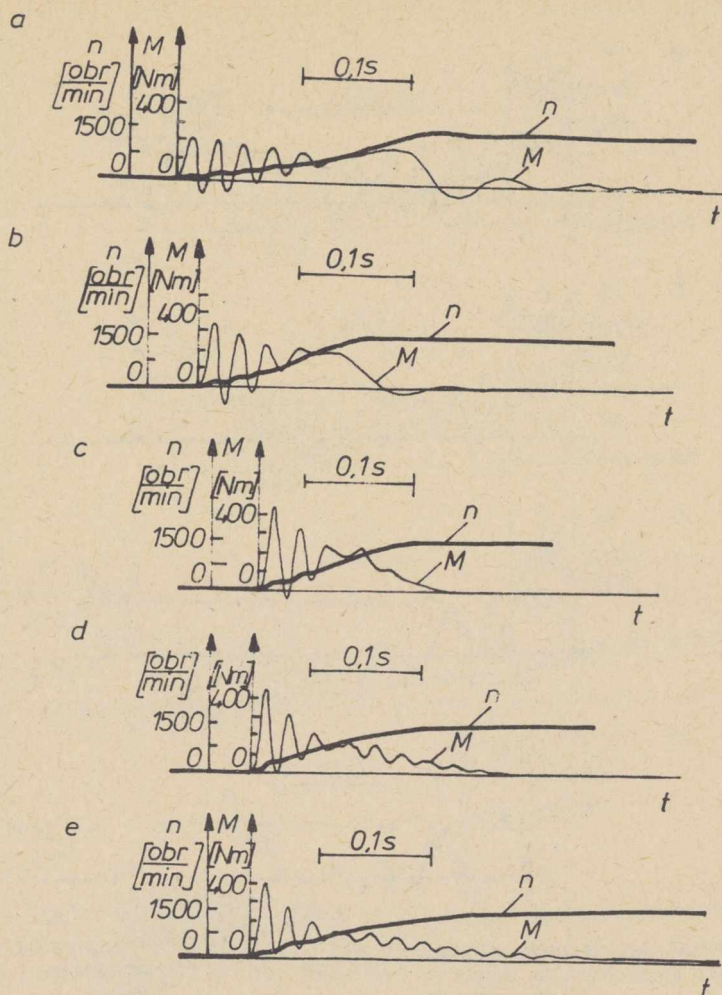
niejsze tłumienie procesu elektromagnetycznego po zwiększeniu J_{Σ} . Przy większych wartościach J_{Σ} liczba skoków momentu silnika na początku procesu przejściowego zwiększa się bardzo znacznie. W ten sposób rozruch silnika asynchronicznego, obciążonego na wale znacznymi pod względem wartości dodatkowymi masami zamachowymi, przebiega niekorzystnie, ponieważ zmiana momentu elektromagnetycznego silnika ma charakter oscylacyjny, o znacznych amplitudach i powolnym tłumieniu, przy



Rys.7.18. Rozruch nieobciążonego silnika SBJd-86a przy różnych wartościach wypadkowego momentu bezwładności: a) $J_L/J_s = 1$; b) $J_L/J_s = 0,5$; c) $J_L/J_s = 0,25$; d) $J_L/J_s = 0,15$

czyli wartość chwilowa momentu może być ujemna. Po zmniejszeniu wypadkowego momentu bezwładności liczba osiągniętych przez moment elektromagnetyczny na początku procesu przejściowego wartości szczytowych ulega zmniejszeniu, gwałtownie natomiast wzrastają wahania momentu i prędkości w strefie prędkości synchronicznej (rys. 7.18).

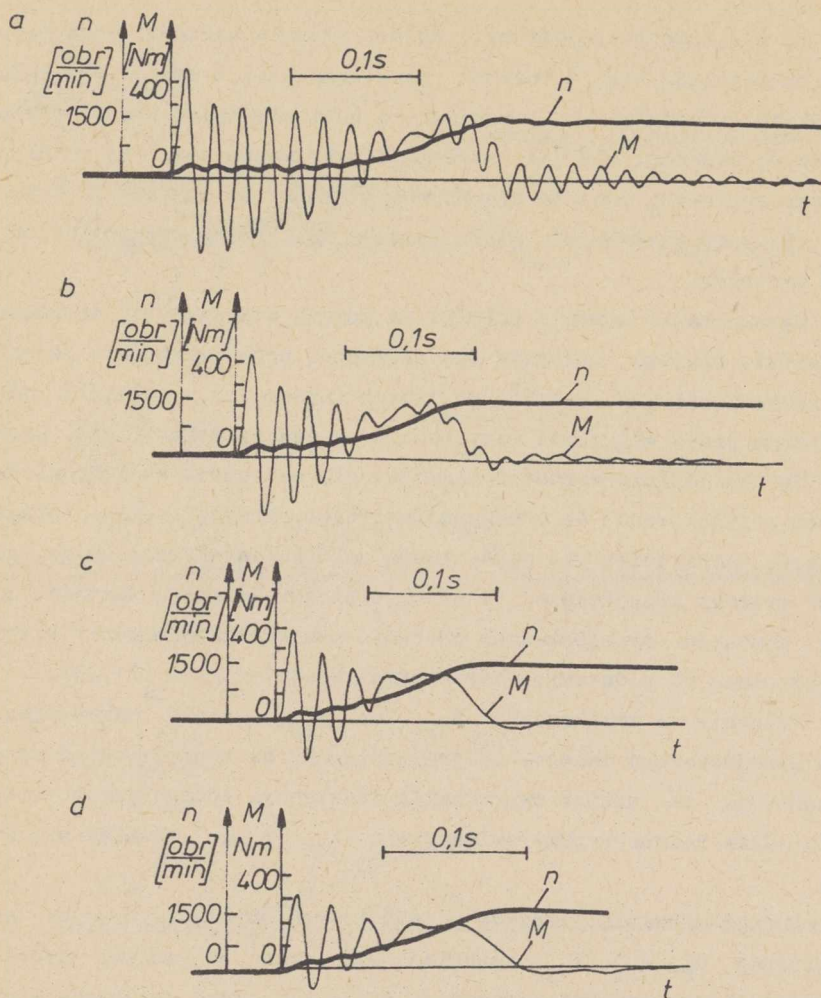
Na tym samym modelu analogowym można badać wpływ parametrów schematu zastępczego silnika asynchronicznego na przebiegi procesów przejściowych. Na rysunku 7.19 przedstawiono przebiegi rozruchowe silnika SBJd-64b o mocy $P_n = 14\text{kW}$ i prędkości obrotowej $n_n = 1450\text{ obr/min}$ przy różnych wartościach rezystancji obwodu wirnika.



Rys. 7.19. Rozruch silnika SBJd-64b przy różnych wartościach rezystancji wypadkowej obwodu wirnika: a) $R_{2\Sigma} = 0,5R_2$; b) $R_{2\Sigma} = R_2$; c) $R_{2\Sigma} = 2R_2$; d) $R_{2\Sigma} = 4R_2$; e) $R_{2\Sigma} = 6R_2$. R_2 - rezystancja uzwojenia wirnika, $R_{2\Sigma}$ - sumaryczna rezystancja obwodu wirnika

Zwiększenie rezystancji obwodu wirnika wywołuje najpierw zwiększenie się maksymalnej wartości szczytowego przejściowego momentu elektromagnetycznego silnika (rys. 7.19a i c), po czym następuje zmniejszenie się tej wartości. Tłumaczy się to znaną zależnością momentu rozruchowego silnika asynchronicznego od rezystancji wirnika

$$M_r = \frac{9,55}{n_c} m \frac{U_1^2 R_2'}{(R_1 + C_1 R_2')^2 + (X_1 + C_1 X_2')^2} \cdot$$



Rys.7.20. Rozruch silnika SBJd-64b z różnymi rezystancjami w obwodzie stojana: a) $R_{1\Sigma} = 0,125 R_1$; b) $R_{1\Sigma} = 0,25 R_1$; c) $R_{1\Sigma} = 0,5 R_1$; d) $R_{1\Sigma} = 1,1 R_1$

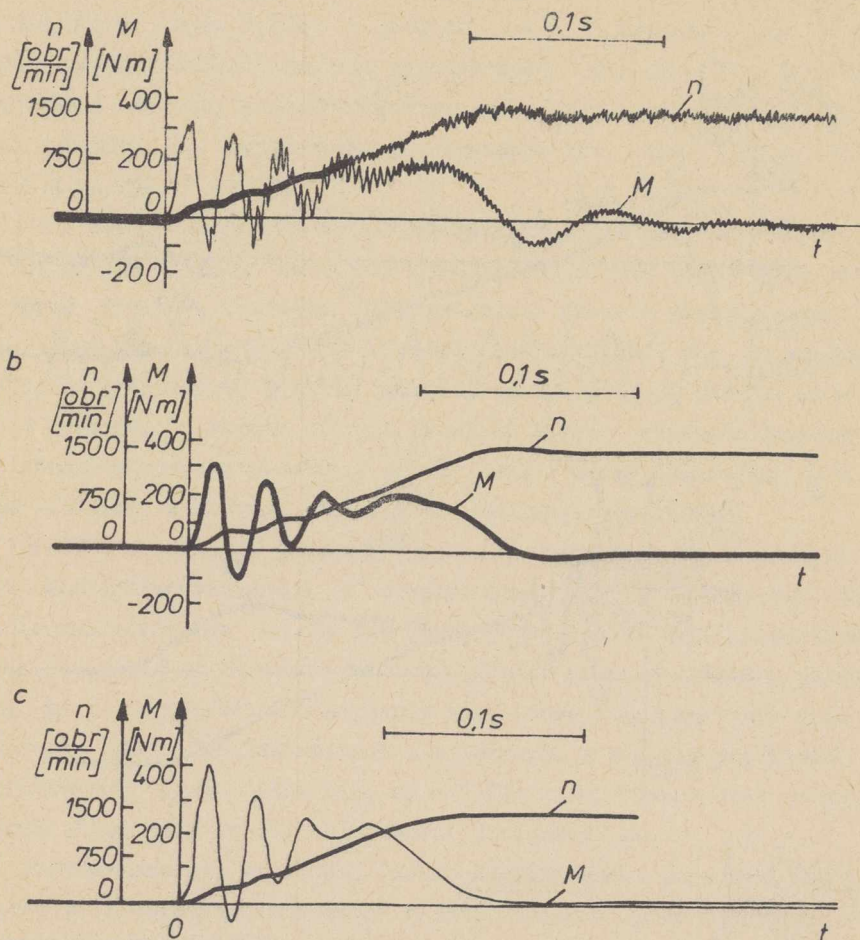
Jeżeli wartość R_2' jest niewielka (rys. 7.19a), to mogą wystąpić znaczne wahania momentu i prędkości wokół ich wartości ustalonych w końcowej części procesu przejściowego. Amplitudy wahań mają wartość maksymalną przy najmniejszej rezystancji wirnika. Tłumaczy się to tym, że przy najmniejszej wartości rezystancji wirnika odcinek liniowy charakterystyki mechanicznej silnika ma maksymalną sztywność.

Po zwiększeniu rezystancji obwodu stojana wartości szczytowe momentu zmniejszają się, a rozruch przeciąga się w czasie (rys.7.20). Zmniejszanie wartości $R_{1\Sigma}$ pociąga za sobą nie tylko wzrost wartości szczytowej momentu, ale też wzrost liczby wahań momentu; rośnie przy tym czas rozruchu. Jest to spowodowane faktem, że po zmniejszeniu wartości $R_{1\Sigma}$ zwiększają się stałe czasowe składowych przejściowych prądów i momentów.

Ograniczanie momentu silnika za pomocą rezystancji dodatkowej w obwodzie stojana dokonuje się zazwyczaj przez włączenie jednakowych rezystancji we wszystkich trzech fazach lub w układzie niesymetrycznym przez włączenie rezystancji w jednej tylko fazie. Zazwyczaj do obliczania wartości rezystancji, służącej do ograniczania momentu rozruchowego do wymaganej wartości, przyjęło się posługiwać statyczną charakterystyką mechaniczną silnika asynchronicznego, pomijając procesy przejściowe. W rzeczywistości jednakże wartości maksymalne momentów przejściowych znacznie przewyższają momenty rozruchowe, obliczone na podstawie charakterystyk statycznych [21,23].

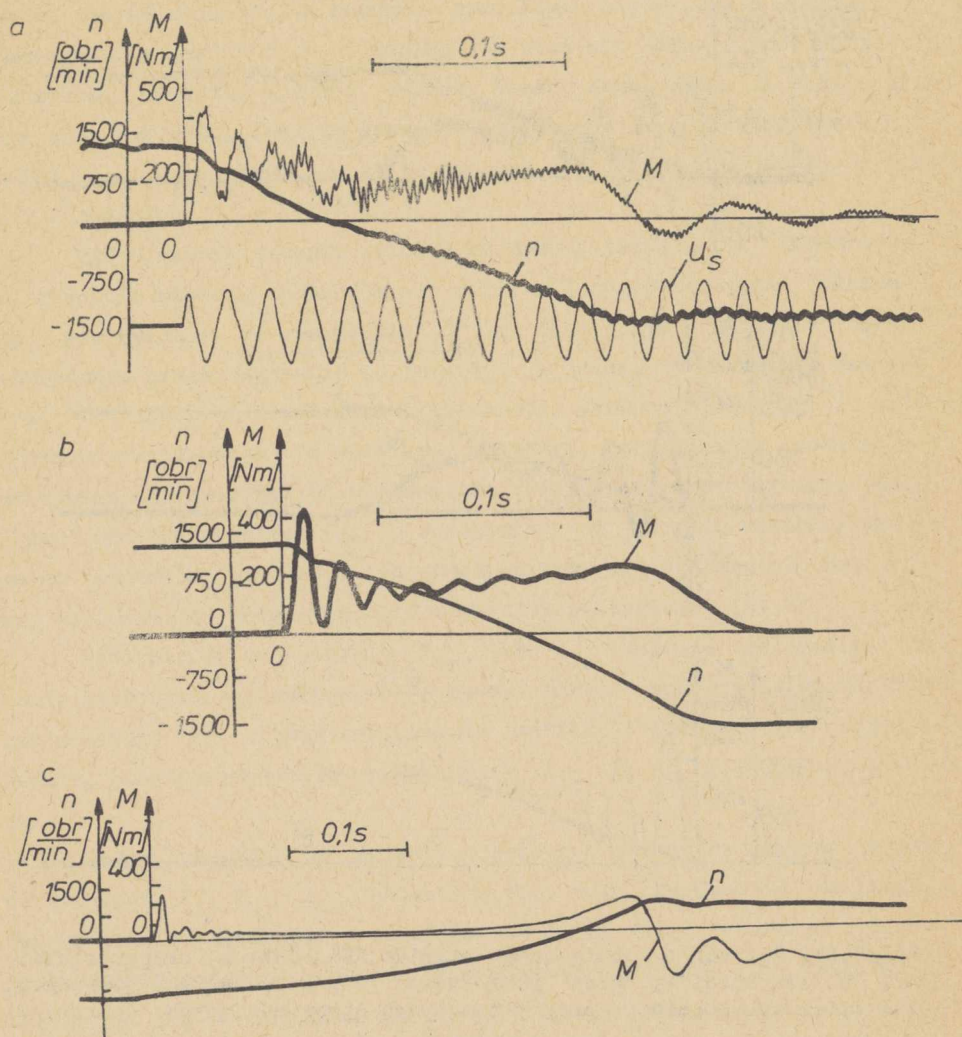
Podobnie po zwiększeniu X_{1r} lub X_{2r} wartość maksymalna momentu przejściowego maleje, co jest związane ze zmniejszaniem momentu rozruchowego na skutek zwiększania reaktancji indukcyjnych rozproszczenia. Czas rozruchu przy zwiększaniu X_{1r} i X_{2r} również się zwiększa.

Podczas trwania procesów przejściowych parametry maszyny asynchronicznej R'_2 , X_{2r} , X_{1r} zmieniają się wraz ze zmianą poślizgu. Uwzględnianie zmienności parametrów staje się ważne zwłaszcza w przypadkach, gdy podczas procesu przejściowego prędkość lub poślizg zmieniają się w szerokim zakresie, jak na przykład podczas nawrotu. W związku z tym do analizy procesów dynamicznych najważniejszej byłoby przyjmować parametry zmienne, zależne od zmieniającego się poślizgu i od prądów, ale to znacznie komplikuje obliczenia. W celu uproszczenia można zakładać, że parametry silnika nie zmieniają się przy zmianie prędkości wówczas jednak powstaje pytanie, które parametry najlepiej jest wybrać do obliczeń - czy parametry odpowiadające początkowej, końcowej czy też pośredniej prędkości procesu przejściowego.



Rys.7.21. Rozruch nieobciążonego silnika SBJd-64b: a) eksperymentalny; b) obliczeniowy, przy parametrach odpowiadających poślizgowi $s = 1$; c) obliczeniowy, przy parametrach odpowiadających poślizgowi $s = 2$

Na rysunku 7.21 przedstawiono oscylogram rozruchu silnika SBJd-64b, otrzymany eksperymentalnie oraz wykresy obliczone przy użyciu maszyny analogowej. Parametry silnika (R'_2 , X_{2r} , X_{1r}) obliczono z uwzględnieniem wypierania prądu i nasycenia główic zębów stojana oraz wirnika przy poślizgu $s = 1$ (rys. 7.21b) i poślizgu $s = 2$ (rys. 7.21c). Porównanie przebiegów wskazuje, że najlepszą zgodność wyników obliczeń i eksperymentu otrzymuje się wówczas, gdy parametry



Rys.7.22. Nawrót z polem stłumionym silnika SBjd-64b: a) eksperymentalny; b) obliczeniowy, przy parametrach odpowiadających poślizgowi $s = 2$; c) obliczeniowy, przy parametrach odpowiadających poślizgowi $s = 0,1$.

silnika oblicza się zakładając $s = 1$ (rys. 7.21b i 7.21a), co odpowiada początkowemu poślizgowi podczas rozruchu.

Na rysunku 7.22 przedstawiono podobne wykresy do nawrotu z polem stłumionym silnika SBjd-64b. Parametry maszyny obliczono w jed-

nym przypadku przyjmując za punkt wyjściowy $s = 2$ (rys. 7.22b), w drugim natomiast (rys. 7.22c) - poślizg $s = 0,1$, odpowiadający robocznemu odcinkowi charakterystyki mechanicznej. Obliczeniowy przebieg przejściowy nawrotu, przedstawiony na rys. 7.22b, jest znacznie bardziej zbliżony do otrzymanego eksperymentalnie (rys. 7.22a) niż przebieg na rys. 7.22c.

Jak wynika z analizy oscylogramów obliczeniowych, odpowiedni dobór parametrów silnika umożliwia otrzymanie podczas modelowania wiarygodnych wyników, służących do wyznaczania procesu przejściowego - głównie w strefie początkowej. Jeżeli zaś uwzględni się, że właśnie w strefie początkowej procesu przejściowego występują maksima momentów i prądów, to metodę badania dynamiki napędu asynchronicznego przy niezmiennych parametrach należy uważać za odpowiadającą podstawowym zadaniom, z którymi ma się do czynienia w praktyce.

W celu otrzymania prawidłowego opisu charakteru zmienności momentu elektromagnetycznego w strefie prędkości synchronicznej silnika asynchronicznego, należy się posłużyć w obliczeniach parametrami odpowiadającymi jego warunkom roboczym. Wyniki badań modelowych potwierdzają, że w tym przypadku uzyskuje się zadowalającą zgodność obliczeniowych oraz doświadczalnych oscylogramów w strefie prędkości synchronicznej (rys. 7.21a i c, rys. 7.22a i c), gorsza jest natomiast zgodność w początkowym okresie procesu przejściowego.

Podczas analizy modelowej elektromagnetycznych procesów przejściowych silnika asynchronicznego należy dobierać jego parametry tak, aby odpowiadały określonej wartości poślizgu. Wyniki obliczeń są najbardziej wiarygodne w otoczeniu tego poślizgu.

7.5. Synteza dynamiki silnika asynchronicznego metodą planowanego eksperymentu

Do syntezy przyjęto założenia podane w rozdziale 3.5 oraz dynamiczny model matematyczny opisany układem równań (4.87) - (4.91). Badania modelowe wykonano na maszynie analogowej. Model analogowy został opracowany w układzie współrzędnych $(\alpha, \beta, 0)$.

W celu uproszczenia zadań projektowania potrzeba przedstawić wyjściowy model matematyczny (4.87) - (4.91) w postaci bardziej dogodnej. Zgodnie z tym, co zostało wyjaśnione w pkt 3.4, można to wykonać metodami planowanego eksperymentu symulacyjnego (pkt 3.5).

Badania wykonano na modelu analogowym silnika asynchronicznego o mocy $P_n = 300W$. Parametry silnika - współczynniki w równaniach (4.66) - (4.73) - są następujące: $R_s = 14\Omega$, $R_r = 100\Omega$, $X_{1s} = 14\Omega$, $X_{2s} = 17\Omega$, $X_g = 110\Omega$, $J = 340,5 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$.

Cele badań modelowych były następujące:

1. Jakościowa ocena wpływu parametrów na właściwości dynamiczne maszyny.
2. Znalezienie "strefy występowania" określonych wartości syntetyzowanych wskaźników.

Zbadano wpływ rezystancji i indukcyjności uzwojeń stojana i wirnika na następujące wskaźniki dynamiczne maszyny: t_r - czas rozruchu silnika od stanu zatrzymanego do prędkości ustalonej przy $M_m = 0$ i pełnym napięciu zasilania; M_{max} - maksymalny moment w czasie rozruchu; $K = i_{\alpha r} / i_{\alpha u}$ - krotność osiowego prądu rozruchowego ($i_{\alpha r}$ - maksymalna wartość osiowego prądu stojana, $i_{\alpha u}$ - ustalona wartość osiowego prądu stojana).

Przyjęto następujące przedziały wariantowania wielkości:

$$x_1 = R_s = 7-21\Omega; \quad x_2 = R_r = 5-15\Omega; \quad x_3 = X_g = 55-165\Omega; \quad x_4 = X_{1s} = 8,8-26,2\Omega; \quad x_5 = X_{2s} = 8,8-26,2\Omega.$$

Wyszczególnione przedziały wariantowania obejmują praktycznie cały zakres zmian wartości parametrów, mający realne znaczenie podczas projektowania badanego silnika. W celu ułatwienia obliczeń dokonano standaryzacji zmiennych wejściowych x_i (zgodnie z zależnością 3.18) i zmienne przyjmują na końcach przedziałów wariantowania wartości +1 i -1 (w dalszym ciągu będą pisane tylko "+" i "-").

W celu określenia współczynników b_o, b_i, b_{ij}, b_{ii} równania (3.3) wykonano eksperyment według planu ukłankowego typu 2^{5-1} z równością charakterystyczną $X_5 = X_1 X_2 X_3 X_4$. Tego typu plan umożliwia dokonanie rozdzielnej oceny oddziaływań liniowych i podwójnych. Oddziaływania potrójne i wyższe były pominięte. Macierz planowania eksperymentu oraz wyniki doświadczeń przedstawiono w tabeli 7.1.

Tabela 7.1

Plan eksperymentu ułamkowego typu 2^{5-1}

n	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_1x_5	x_2x_3	x_2x_4	x_2x_5	x_3x_4	x_3x_5	x_4x_5	$Y_1 = t_r$	$Y_2 = M_{\max}$	$Y_3 = K$
1	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	5,2	9,9	1,33
2	+	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	5,7	7,2	1,11
3	+	-	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	10,2	5,6	1,06
4	+	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	10,6	2,9	1,04
5	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	+	+	4,0	11,2	2,94
6	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-	-	4,2	8,4	2,26
7	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	-	-	8,1	6,8	1,39
8	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	+	11,5	5,1	1,37
9	+	-	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-	6,5	7,6	1,31
10	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	7,5	4,6	1,31
11	+	-	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	-	+	+	21,4	3,8	1,19
12	+	+	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-	23,6	2,5	1,12
13	+	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	5,35	9,0	2,44
14	+	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	4,6	8,0	2,25
15	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	10,15	5,5	1,34
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	9,95	4,3	1,41
17	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8,1	6,5	1,42
18	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7,2	6,8	1,33
19	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8,8	6,7	1,39
20	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7,6	6,5	1,33
21	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7,7	6,5	1,49

Tabela 7.2

Współczynniki b

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{23}	b_{24}	b_{25}	b_{34}	b_{35}	b_{45}
t_r	9,3*	0,44*	3,9	-2,05*	1,84*	-0,24	0,30	-0,08	-0,14	-1,46*	-1,20*	1,24*	-0,425*	-1,57*	-0,083	0,162
$M_{\max}$	6,4*	-1,03*	-1,83*	0,88*	-1,01*	-0,18*	0,17*	0,19*	0,22*	-0,14*	-0,03	0,2*	0,07	0,16*	0,004	-0,054
K	1,6*	-0,06*	-0,31*	0,37*	-0,01	-0,01	0,06*	-0,03*	0,05*	0,03*	-0,23*	0,03*	0,02*	-0,06	-0,04*	0,049*

Wartości prądów i momentów podane w tabeli 7.1 są wyrażone w jednostkach maszynowych maszyny analogowej (w zakresie 0-10V dla maszyny MEDA 42TA), czas natomiast w skali czasu maszynowego. Rzeczywiste wartości prądów, momentów i czasu otrzymuje się po uwzględnieniu współczynników skali amplitud i czasu: $\alpha_{i\alpha} = 1,5V/A$, $\alpha_M = 0,5V/Nm$, $\alpha_t = 30$. W kontynuowanych rozważaniach nie było potrzeby przechodzenia na wielkości rzeczywiste. Współczynniki wielomianów (3.2), zostały określone zgodnie z zależnością (3.15), a ich wartości przytoczono w tabeli 7.2. Ocena istotności współczynników była dokonana za pomocą kryterium t-Studenta. W celu określenia wariancji błędu eksperymentu z zależności (3.24), dokonano w punkcie centralnym planu dodatkowe eksperymenty (17-21). Współczynniki istotne zaznaczono w tabeli 7.1 gwiazdką. Po odrzuceniu współczynników nieistotnych sprawdzono adekwatność otrzymanych wielomianów za pomocą kryterium F-Snedecora. Wszystkie otrzymane modele statyczne okazały się adekwatne.

Po obliczeniu współczynników dla wielkości standaryzowanych, można za pomocą (3.19) przejść do zapisu wielomianów w wielkościach rzeczywistych.

Przytoczmy w wielkościach naturalnych jako przykład zależność dla momentu maksymalnego

$$M_{\max} = 159,65 - 2,71 R_s - 0,51 R_r + 0,0315 X_g - 2,7 X_{1s} + 0,108 X_{2s} + \\ + 0,0048 R_s R_r + 0,0049 R_s X_g + 0,0356 X_{1s} R_s - 0,0226 R_s X_{2s} + \\ + 0,0455 R_r X_{1s} + 0,00355 X_g X_{1s}$$

Należy jednak wiedzieć, że przytoczoną operację najdogodniej jest wykonać w końcowym etapie badań; analizę i interpretację wyników, poszukiwanie optimum i inne działania na otrzymanych wynikach najdogodniej jest wykonywać na wielomianach w postaci standaryzowanej.

Otrzymane w rezultacie eksperymentów symulacyjnych w maszynie analogowej, statyczne modele matematyczne (t_r , $M_{\max}$, $K = f(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$) tworzą narzędzie do badań dynamiki silnika asynchronicznego i realizacji wymienionych na wstępie celów badań.

W rozpatrywanym przykładzie największy wpływ na czas rozruchu ma rezystancja wirnika R_r ($b_2 = 3,9$). Słabszy wpływ wywierają X_g ($b_3 = 2,5$)

i X_{1s} ($b_4 = 1,844$). Wpływy R_s i X_{2s} na t_r są minimalne (0,44 i 0,243). Z oddziaływań podwójnych należy wyszczególnić $R_s X_{1s}$, $R_r X_g$, $R_r X_{1s}$, $X_g R_s$. Pomimo słabego oddziaływania każdego z osobna parametrów R_s i X_{2s} , ich oddziaływanie wspólne jest stosunkowo duże ($b_9 = 1,46$). Najbardziej racjonalna jest oczywiście zamiana R_r i tylko wtedy, kiedy ta możliwość całkowicie zostanie wyczerpana, należy zmieniać szczelinę powietrzną i liczbę zwojów stojana.

Na moment maksymalny $M_{\max}$ największy wpływ ma rezystancja R_r ($b_2 = 1,835$) a najmniejszy R_s (1,032), X_g (0,88), X_{1s} (1,011). W odróżnieniu od t_r znaczny wpływ na $M_{\max}$ ma wartość R_s . Z podwójnych oddziaływań należy zauważyć wpływ $X_g R_s$, $R_s X_{1s}$, $R_s X_{2s}$, $R_r X_{1s}$, $X_g X_{1s}$.

Wynika z tego, że wartość momentu maksymalnego można kształtować przede wszystkim poprzez zmianę R_r i R_s .

Na krotność K prądu rozruchowego największy wpływ ma wartość R_s (0,314) i X_g (0,37), z podwójnych oddziaływań jest natomiast dominujący udział $R_r X_g$.

W celu określenia wartości parametrów, zapewniających zmiany t_r , $M_{\max}$ i K , w zadanym przedziale, wykonano obliczenia przy wariantowaniu R_s i X_{1s} i pozostałych parametrach ustalonych na poziomie bazowym.

Parametry stojana można określić za pomocą zależności

$$X_{1s} = 0,158 \frac{f}{100} \left(\frac{W_s}{100} \right)^2 \frac{1}{\rho q} \Sigma \lambda,$$

$$R_s = \frac{1}{sa},$$

w której W_s - liczba zwojów fazy stojana;
 l_s - długość przewodów fazy stojana;
 q - liczba żłobków na biegun i fazę;
 $\Sigma \lambda$ - suma przewodności rozproszenia stojana;
 s - przekrój przewodu;
 a - liczba równoległych gałęzi.

W celu utrzymania określonych wartości parametrów R_s i X_{1s} należy wariantować wielkości wchodzące do wymienionych zależności.

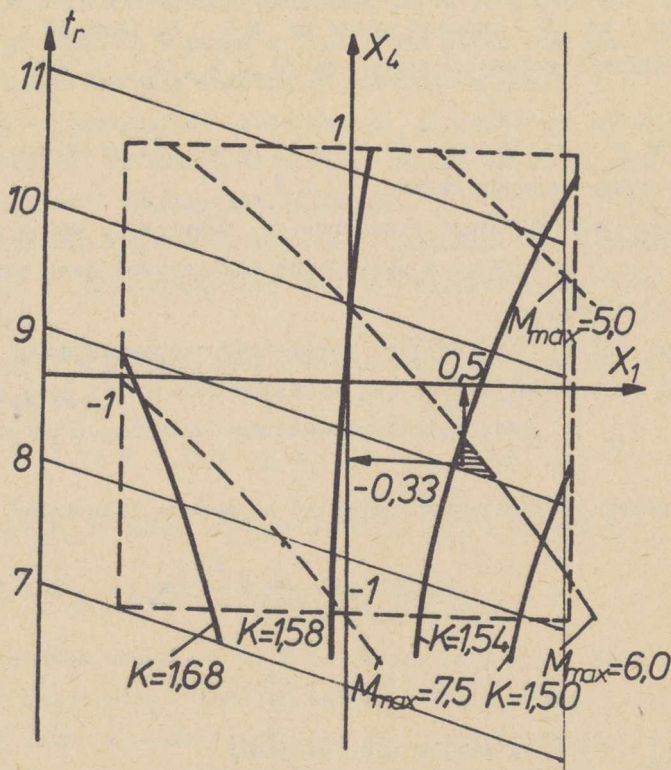
Ponieważ przyjęto, że $X_2 = X_3 = X_5 = 0$, to wielomiany na t_r , $M_{\max}$, K mają następującą postać:

$$t_r = 9,28 + 0,44X_1 + 1,844X_4,$$

$$M_{\max} = 6,4 - 1,032X_1 - 1,01X_4 + 0,216 X_1X_4, \quad (7.16)$$

$$K = 1,58 - 0,069X_1 - 0,0084X_4 + 0,0466X_1X_4.$$

Równania (7.16) umożliwiają określenie "strefy występowania" różnych wartości t_r , $M_{\max}$, K , w zależności od X_1 i X_4 , wariantowanych w przyjętym zakresie wartości (rys. 7.23).



Rys.7.23. Graficzna metoda określania stref występowania dopuszczalnych wartości wskaźników dynamicznych

Za pomocą przytoczonych na rys. 7.23 "stref występowania" jest możliwe sprawdzenie czy realizowane są wymagania dotyczące wartości t_r , $M_{\max}$, K w zadanym przedziale zmian parametrów. Jeżeli tak, to można określić wartości X_1 , X_4 (R_s , X_{1s}), zapewniające otrzymanie żąda-

nych charakterystyk i przeciwnie: na podstawie parametrów stojana określić wartości wyjściowych charakterystyk.

T a b e l a 7.3

Optymalne wartości wskaźników dynamicznych t_r , $M_{\max}$

Wskaźnik	Kryterium optymalizacji	Maszyna bazowa	Wartość optimum	Wartość drugiego wskaźnika	Współrzędne punktu optymalnego
t_r	min	7,63	4,0	$M_{\max} = 11,2$	$X_1 = -1, X_2 = -1$ $X_3 = +1, X_4 = -1$ $X_5 = -1$
$M_{\max}$	min	6,61	2,36	$t_r = 25$	$X_1 = +1, X_2 = +1,$ $X_4 = +1, X_3 = -1$ $X_5 = -1$

Jeżeli na przykład jest wymagane zbudowanie maszyny o następujących wskaźnikach dynamicznych: $9 \leq t_r \leq 10$, $M_{\max} \leq 6,0$, $K \leq 1,54$, to wartości parametrów stojana, przy zadanych ograniczeniach wartości syntetyzowanych wskaźników, leżą w zakreskowanym obszarze na rys.7.23. Wynoszą one odpowiednio $X_1 = 0,33$, $X_4 = -0,25$, a w wartościach rzeczywistych $R_s = 18,66 \Omega$, $X_{1s} = 13,13 \Omega$. Jest oczywiście możliwe rozwiązanie zadania odwrotnego: przyjmując określone wartości parametrów X_1 i X_4 , obejmujące zakreskowany obszar, można określić wartości wskaźników dynamicznych. Analogiczne badania można dokonać podczas wariantowania innych parametrów np.: X_2 i X_3 , a ustaleniu na poziomie bazowym $X_1 = X_4 = X_5 = 0$.

Jeżeli istnieje potrzeba znalezienia optymalnych wartości syntetyzowanych wskaźników dynamicznych z uwzględnieniem różnego rodzaju ograniczeń, to jest konieczne zastosowanie określonej metody optymalizacji. Zagadnienia poszukiwania ekstremum funkcji wielu zmiennych są dość skomplikowane i pracochłonne, ale wykorzystując maszyny cyfrowe można bez większych przeszkód znaleźć wymagany punkt ekstremalny.

W tabeli 7.3 podano wyniki optymalizacji wskaźników t_r i $M_{\max}$ dla omawianego silnika asynchronicznego.

Literatura

- [1] ANDRZEJEWSKI F., Automatyka napędu elektrycznego, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1972.
- [2] ANDRZEJEWSKI F., Tyrystorowe układy napędowe, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1976.
- [3] CANNON R.H. jr, Dynamika układów fizycznych, WNT, Warszawa 1973.
- [4] DUNAJEWSKI S.J., KRYŻOW O.A., MAZIJA Ł.W., Modelowanie elementów układów elektromechanicznych, WNT, Warszawa 1970.
- [5] FINDEISEN W., Technika regulacji automatycznej, PWN, Warszawa 1969.
- [6] GOGOLEWSKI Z., KUCZEWSKI Z., Napęd elektryczny, WNT, Warszawa 1971.
- [7] GORDON G., Symulacja systemów, WNT, Warszawa 1974.
- [8] ILINSKIJ N.F., O primeneni metodov planirovanija eksperimenta k zadaczam analiza i sintieza elektriceskich masin, [w:] Električestvo 2, 1970.
- [9] ILINSKIJ N.F., i inni, Modeli elektromechaničeskich ustrojstv i sistem v zadaczach sintieza, [w:] Električestvo 3, 1973.
- [10] ILINSKIJ N.F., Problema nieadekvatnosti i preobrazovanie niezavisimych pieriemiennych v matiematičeskich modelach elektromechaničeskich sistem, Trudy MEI vyp. 86, Moskva 1971.
- [11] KARWACKI W., Teoria elektromechanicznego przetwarzania energii, cz.I, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1978.
- [12] KOPYŁOW I.P., SZCZEDRIN O.P., Rasčot na CWM charakteristik asinchronnyh masin, Energija, Moskva 1973.
- [13] KOPYŁOW I.P., MAMIEDOW F.A., BIESPAŁOW W.J., Matiematičeskoje modelirovanije asinchronnyh masin, Energija, Moskva 1969.
- [14] KOCHENBURGER R.J., Modelowanie układów dynamicznych przy użyciu maszyn matematycznych, WNT, Warszawa 1975.
- [15] KUCZEWSKI Z. (pod red.), Modelowanie układów elektromechanicznych, Politechnika Śląska, Gliwice 1976.
- [16] MAŃCZAK K., Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania, WNT, Warszawa 1971.
- [17] MAŃCZAK K., Technika planowania eksperymentu, WNT, Warszawa 1976.
- [18] ORD-SMITH R.I., STEPHENSON J., Computer simulation of continuous systems, Cambridge University Press, Cambridge 1975.
- [19] ORŁOWSKI H., HAWRYLUK J., Modelowanie cyfrowe, WNT, Warszawa 1971.
- [20] PŁASKOWSKI A., Eksperymentalne wyznaczanie własności dynamicznych obiektów regulacji, WNT, Warszawa 1965.
- [21] PUCHAŁA A., Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych, WNT, Warszawa 1977.
- [22] PUCHAŁA A., Teoria przetworników elektromechanicznych, cz. II, AGH, Kraków 1969.
- [23] SOKOŁOW M.M. i inni, Elektromagnetyczne procesy przejściowe w asynchronicznym napędzie elektrycznym, WNT, Warszawa 1970.
- [24] SYDOW A., Programmierungstechnik für elektronische Analogrechner, VEB Verlag Technik, Berlin 1961.
- [25] SZKLARSKI L., PALUSIŃSKI O., MINASIEWICZ S., Wybrane zagadnienia dynamiki układów napędowych, AGH, Kraków 1973.
- [26] SZKLARSKI L. i inni, Dynamika układów elektromechanicznych, PWN, Warszawa 1963.

- [27] SZOPLIŃSKI Z., Badanie i projektowanie układów regulacji, WNT, Warszawa 1975.
- [28] TADEUSIEWICZ R., WAJS W., Maszyny analogowe i ich programowanie, AGH Kraków 1975.
- [29] UHLMAN H., Grundlagen der Modellierung und Simulationstechnik, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1977.
- [30] WHITE D.C., WOODSON H.H., Electromechanical energy conversion. New York, J.Willey 1959.
- [31] Instrukcja obsługi minikomputera MERA-400, tom V/II. Oprogramowanie.

Spis treści

1. Wstęp	3
2. Wprowadzenie w zagadnienia dynamiki układów elektromechanicznych	5
2.1. Uwagi ogólne o dynamice układów fizycznych	5
2.2. Charakterystyka procesów dynamicznych w układach elektromechanicznych	8
3. Metodyka badania dynamiki układów elektromechanicznych	12
3.1. Etapy badania dynamiki	12
3.2. Modele układów elektromechanicznych	15
3.2.1. Podział modeli	15
3.2.2. Model fizyczny	17
3.2.3. Model logiczny i matematyczny	19
3.2.4. Model komputerowy	25
3.3. Zagadnienia identyfikacji eksperymentalnej układów elektromechanicznych	31
3.3.1. Metody identyfikacji eksperymentalnej	31
3.3.2. Problemy identyfikacji parametrów modeli matematycznych	35
3.4. Analiza i synteza dynamiki	36
3.5. Planowanie eksperymentów symulacyjnych	39
4. Modele matematyczne maszyn i układów elektromechanicznych ...	50
4.1. Zasady budowy modeli matematycznych	50
4.1.1. Zasada d'Alemberta	50
4.1.2. Zasada Hamiltona	52
4.2. Metody opisu matematycznego układów elektromechanicznych	58
4.2.1. Opis za pomocą równań różniczkowych	58
4.2.1.1. Model liniowy i jego parametry	60
4.2.1.2. Model dwuliniowy	61
4.2.1.3. Model nieliniowy	61
4.2.1.4. Przykład	63

4.2.2. Opis za pomocą transmitancji operatorowych	65
4.2.3. Opis w przestrzeni stanów	67
4.3. Modele matematyczne maszyn prądu stałego	71
4.4. Model matematyczny maszyny asynchronicznej	78
4.4.1. Równania różniczkowe silnika asynchronicznego ...	78
4.4.2. Cel transformacji układu współrzędnych	81
4.4.3. Transformacja układu równań różniczkowych silnika asynchronicznego	82
4.4.4. Jednostki względne	90
4.5. Modele matematyczne układów elektromechanicznych ze sprzężeniami zwrotnymi	93
4.5.1. Układy z jednym sprzężeniem zwrotnym	93
4.5.2. Układy z wieloma sprzężeniami zwrotnymi	97
4.6. Omówienie równania ruchu	103
5. Wybrane metody identyfikacji układów elektromechanicznych ...	106
5.1. Metoda charakterystyk czasowych	106
5.2. Metoda eksperymentu symulacyjnego	113
5.3. Metoda statystyczna	120
6. Podstawy modelowania analogowego i cyfrowego układów elektro- mechanicznych	126
6.1. Zasady modelowania analogowego	126
6.1.1. Człony obliczeniowe maszyn analogowych	126
6.1.2. Procedura modelowania analogowego	132
6.1.3. Metody programowania	140
6.1.3.1. Metoda ogólna	140
6.1.3.2. Metoda zmiennej pomocniczej	142
6.1.3.3. Metoda postaci kanonicznej	146
6.1.3.4. Metoda programowania strukturalnego	149
6.1.4. Modele analogowe wybranych elementów układów e- lektromechanicznych	151
6.1.4.1. Model analogowy regulatora liniowego ...	151
6.1.4.2. Model analogowy obwodów sprzężonych mag- netycznie z uwzględnieniem nieliniowoś- ci krzywej magnesowania	153
6.1.4.3. Model analogowy silnika prądu stałego ..	155

6.1.4.4. Model analogowy amplitudyny	158
6.2. Zasady modelowania cyfrowego	162
6.2.1. Charakterystyka modelowania cyfrowego	162
6.2.2. Metoda Runge-Kutta czwartego rzędu	166
6.2.3. Metody programowania zadań modelowania cyfrowego	168
6.2.4. Modelowanie cyfrowe w języku algorytmicznym	169
6.2.5. Modelowanie cyfrowe w języku symulacyjnym	176
6.2.5.1. Rozważania wstępne	176
6.2.5.2. Schemat blokowy	177
6.2.5.3. Opis języka symulacyjnego CEMMA-M2	178
6.2.5.4. Struktura programu w języku CEMMA-M2 ...	183
6.2.5.5. Przykłady modelowania cyfrowego w języku CEMMA	186
7. Przykłady analizy i syntezy dynamiki przetworników i układów elektromechanicznych	193
7.1. Analiza dynamiki silnika prądu stałego z uwzględnieniem nasycenia obwodów magnetycznych	193
7.2. Analiza dynamiki układu Leonarda ze sprzężeniami zwrotnymi	199
7.3. Analiza dynamiki układu napędowego z elementami inercyjno-sprężystymi	206
7.4. Analiza dynamiki silnika asynchronicznego	209
7.5. Synteza dynamiki silnika asynchronicznego metodą planowanego eksperymentu	219
Literatura	226



W SPRZEDAŻY:

BĘDZIŃSKI B., CHOMIAK Ł., DUDEK K., <i>Pomiary naprężeń metodą elastooptyczną</i> , Wrocław 1975	14,—
BROMIRSKI J., <i>Podsiawy systemów informatycznych</i> , wyd. II popr., Wrocław 1978	39,—
BRZUCHOWSKI E., <i>Geometryczne podstawy zapisu konstrukcji</i> , cz. II, <i>Utwory przestrzenne</i> , Wrocław 1975	11,—
CIASTOŃ A., NOWICKA G., NOWICKI A., <i>Kinetyka i dynamika. Wybór zadań</i> , Wrocław 1977	40,—
DZIAMA A., <i>Podstawy konstrukcji maszyn. Zbiór zadań</i> , Wrocław 1973	15,—
<i>Elektrotechnika — Ćwiczenia laboratoryjne. Praca zbiorowa pod red. A. KOSTOWSKIEGO</i> , Wrocław 1978	19,—
FOLTAŃSKA-WERSZKO D., <i>Teoria systemów cieplnych</i> , Wrocław 1978	32,—
GABRYSZEWSKA B., PSZONKA A., <i>Mechanika</i> , cz. II, <i>Kinematyka i dynamika</i> , Wrocław 1978	34,—
GABRYSZEWSKI Z., <i>Teoria sprężystości</i> , Wrocław 1977	25,—
GOTSZALK R., <i>Podstawy metrologii</i> , wyd. II, Wrocław 1978	11,—
<i>Instrukcje do laboratorium z pomiarów warsztatowych. Praca zbiorowa pod red. H. BARTOSZEWICZA</i> , Wrocław 1976	25,—
JARYCH J., <i>Elementy informatyki</i> , Wrocław 1978	20,—
JASNIEWICZ Z., PORĘBSKI T., <i>Zbiór zadań ze statyki i wytrzymałości materiałów (wznowienie)</i> , Wrocław 1978	23,—
JELENIEWSKI T., <i>Systemy informatyczne. Programowanie w języku FORTRAN (wznowienie)</i> , Wrocław 1978	19,—
JĘDRYSZEK J., WYSZYŃSKI R., <i>Obliczenia wybranych elementów turbin parowych</i> , Wrocław 1977	17,—
KABACIK T., <i>Ćwiczenia laboratoryjne z urządzeń telekomunikacyjnych</i> , Wrocław 1976	12,—
KARWACKI W., <i>Teoria elektromechanicznego przetwarzania energii</i> , Wrocław 1978	25,—
KĄCKI E., WOŹNIAKOWSKI M., <i>System dydaktyczny oparty na symulacji układów ciągłych</i> , Wrocław 1978	14,—
KOCIATKIEWICZ P., KURAŚ A., <i>Laboratorium cyfrowej techniki obliczeniowej</i> , cz. I (wznowienie), Wrocław 1978	19,—
KOMOROWSKI W., <i>Technika komputerowa. Laboratorium II (wznowienie)</i> , Wrocław 1978	19,—
KONARSKI., <i>Przepustowość dróg i ulic</i> , Wrocław 1977	26,—
KRUCZEK S., SIKORSKI W., <i>Przygotowanie paliwa</i> , Wrocław 1977	14,—
KUBZDELA S., KUROWSKI T., SZMORLIŃSKI Z., <i>Elektrotechnika</i> , Wrocław 1978	27,—
KULISIEWICZ M., PIESIAK P., <i>Identyfikacja własności dynamicznych konstrukcji mechanicznych</i> , Wrocław 1975	21,—
LAWROWSKI Z., <i>Metodyczny zbiór zadań z rysunku technicznego</i> , wyd. II, Wrocław 1973	23,—
MAZUR B., TEISSEYRE M., <i>Podstawy teorii konstrukcji urządzeń odpylających</i> , Wrocław 1977	27,—