

Wojciech Rybicki, Jacek Juzwiszyn

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

NIEKTÓRE MODELE MATEMATYKI UBEZPIECZENIOWEJ I FINANSOWEJ

1. Wstęp

W pracy rozważa się formalne wzorce dynamiki zjawisk ekonomicznych. Będą to przede wszystkim modele procesów o charakterze przypadkowym (występujące w zagadnieniach aktuarialnych i finansowych). Nieco uwagi poświęcimy również deterministycznym „prawom ruchu”, znanym z teorii ekonomii. Modyfikacja klasycznych zależności mikroekonomicznych umożliwia opis fluktuacji wielkości pojawiających się na rynkach finansowych. Skonfrontowanie tych dwóch metodologii ma na celu nie ich przeciwstawienie, lecz raczej uwypuklenie ich komplementarności.

Omówimy najpierw pokrótce procesy Poissona, Coxa i ich uogólnienia (procesy podwójnie stochastyczne). Znajdują one zastosowania w matematyce ubezpieczeniowej i finansowej (procesy zgłoszeń o losowej intensywności, zrandomizowany czas operacyjny, procesy podporządkowane). Następnie zajmiemy się martyngałami jako modelami stochastycznie „sprawiedliwej” dynamiki i ich zastosowaniami w ubezpieczeniach i finansach. Dalej przedstawimy model procesu ryzyka z kapitalizacją nadwyżek i podamy informację o wykorzystaniu w teorii ryzyka kawałkami deterministycznych procesów markowskich. Ostatnia część pracy będzie poświęcona mikroekonomicznej analizie rynków finansowych. Akcent położony jest na różniczkową formalizację klasycznych praw ruchu „mechaniki wielkości ekonomicznych”. Wydaje się, że sferyczny model spiralny dynamiki rynków finansowych syntetyzuje: klasyczny model pąteczynowy, jego „płaskie” uogólnienie (spiralą logarytmiczna) oraz „metodologię falową” Elliota. Spostrzeżenie to sformułowano na podstawie analizy szeregów czasowych oraz trójwymiarowej symulacji komputerowej¹.

¹ Część zagadnień omawianych w niniejszym artykule była już poruszana we wcześniejszych pracach autorów (por. np. [Rybicki 1998; 2000; 1995, s. 237-247; Juzwiszyn 1999; 2001]).

2. Klasyczne procesy zgłoszeń

Problematyka modelowania dynamiki ryzyka wiąże się z aktywnością aktuarialną i finansową podmiotów ekonomicznych. Formalnymi modelami tej dynamiki są procesy stochastyczne, które opisują fluktuacje wielkości kapitału towarzystw ubezpieczeniowych w czasie oraz zmiany cen walorów na rynkach finansowych. Stanowią one szczególną (a zarazem szeroką) klasę modeli. Składa się na to kilka przyczyn: (a) stosunkowa łatwość przełożenia „zdroworozsądkowych” postulatów behawioralnych i spostrzeżeń natury mikroekonomicznej na język matematycznych własności funkcji losowych; (b) istnienie naturalnego *numeraire* – doskonale podzielnej zmiennej „bogactwa finansowego”; (c) mnogość realizacji, znaczna długość szeregów czasowych oraz możliwość „quasi-ciągłej” rejestracji ich wartości, co umożliwia statystyczną identyfikację (i weryfikację) struktury probabilistycznej tych procesów. Stosowanie modeli stochastycznych stanowi więc wiarygodną i efektywną metodę badawczą.

Inspiracje o rodowodzie ekonomicznym są tu „równorzędnym partnerem” tradycyjnych stymulatorów fizyczno-przyrodniczych: masowe procesy zgłoszeń (roszczeń) można porównywać z rejestracją promieniowania radioaktywnego, a „falowanie” giełdy – z dyfuzją. Trudno przecenić rolę wizjonerskich dokonań w tej materii **F. Lundberga** [1903] czy **L. Bacheliera** [1900], którzy przed wiekiem konstruowali swe pierwsze modele. Jednak dopiero w ostatnim półwieczu powstały formalne podstawy i narzędzia analityczne niezbędne do ścisłego opisu – **ważnych m.in. dla matematyki ubezpieczeniowej i finansowej – procesów punktowych, Levy’ego, dyfuzyjnych, stabilnych oraz martingałów**. Niektóre z nich omówimy w niniejszej pracy.

Matematycznymi modelami losowych **potoków zdarzeń** są **procesy punktowe**. „Liczą” one zgłoszenia jednostek do obsługi (teoria kolejek), awarie urządzeń i momenty instalacji nowych (teorie niezawodności i odnowy) oraz rejestrują roszczenia odszkodowawcze (matematyka ubezpieczeniowa). Poniższa definicja odwołuje się do ciągu chwil, w których pojawiają się owe „sygnały”.

Definicja 1 (por. np. [Serfozo 1990])

Niech dany będzie ciąg rzeczywistych zmiennych losowych, określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$T = \{T_n, n = 1, 2, \dots\}; \quad 0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty. \quad (1)$$

Procesem punktowym (liczącym) nazywa się funkcję losową

$$N = \{N(t), t \geq 0\}, \quad (2)$$

określoną wzorem

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I\{T_n \leq t\}, \quad (3)$$

gdzie symbol $I\{A\}$ oznacza indykator zbioru A (w równości (3) pominięto argument „losowy”: $N(t) = N(t; \omega)$). Dualizm procesów T oraz N wyraża się relacją

$$P(N(t) > n) = P(T_n \leq t) \quad (4)$$

(ciąg losowy $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$ także nazywany jest procesem liczącym). Jeżeli proces punktowy N ma niezależne, stacjonarne, poissonowskie przyrosty (dla dowolnych czterech punktów $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ różnice $N(t_4) - N(t_3)$ i $N(t_2) - N(t_1)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, oraz dla każdego $t \geq 0$ i $\tau > 0$

$$P(N(t + \tau) - N(\tau) = k) = e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

to jest to oczywiście proces Poissona. Proces odstępów pomiędzy zgłoszeniami $Y = \{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$, ($Y_n = T_{n+1} - T_n$) jest ciągiem niezależnych zmiennych o rozkładach wykładniczych z parametrem λ . Parametr ten to **intensywność procesu zgłoszeń**, czyli wartość oczekiwana zmiennej $N(1)$.

Założenie o wyidealizowanej „poissonowskiej losowości” rozmieszczenia sygnałów na osi czasowej może budzić zastrzeżenia praktyków i teoretyków. Rozpatruje się więc także **niejednorodne procesy Poissona** – o zmiennej intensywności, czyli **funkcji intensywności** $\lambda(t)$ („intensywności chwilowej”). Całkowanie tej funkcji prowadzi do innej charakterystyki procesu – **miary intensywności** Λ , zdefiniowanej relacją

$$\Lambda(\langle 0, t \rangle) = \int_0^t \lambda(t) dt. \quad (6)$$

Jeśli jako wielkość pierwotną przyjmiemy miarę Λ (borelowską, skończoną na zbiorach ograniczonych), określoną na przestrzeni $(R^+, \mathcal{B}_R)$, to funkcja $\Lambda(t) = \Lambda(\langle 0, t \rangle)^2$ jest niemalejąca, nieujemna i prawostronnie ciągła – posiada więc uogólnioną funkcję odwrotną Λ^{-1} .

² W dalszym ciągu będziemy używać tych samych oznaczeń (Λ) na tę miarę i jej dystrybuantę. Dodajmy, że własność (6) oznacza absolutną ciągłość miary intensywności względem miary Lebesgue’a λ na prostej.

Przypomnijmy teraz, że tzw. **miarę losową** Λ^3 (na $\langle 0; \infty \rangle$) można określić **jako proces stochastyczny** $\Lambda = \{\Lambda(t), t \geq 0\}$, spełniający warunki: (i) $\Lambda(0) = 0$; (ii) $\forall t \in (0; \infty) \Lambda(t) < \infty$; (iii) o niemalejących realizacjach [Grandell 1979]. Dodajmy, że miara losowa Λ na $\langle 0; \infty \rangle$ jest **procesem punktowym**, jeśli jej P -prawie wszystkie (p.w.) realizacje są niemalejącymi funkcjami schodkowymi o wartościach całkowitych. Niejednorodny proces Poissona $N(t) = N(\langle 0; t \rangle; t > 0)$, z miarą intensywności Λ , jest miarą całkowicie losową⁴, dla której

$$P(N(B) = k) = \frac{(\Lambda(B))^k}{k!} e^{-\Lambda(B)}; \quad k = 0, 1, \dots, \quad B \in \mathcal{R}_R^b. \quad (7)$$

Proces N ma stacjonarne przyrosty tylko wówczas, gdy Λ jest α -krotnością ($\alpha > 0$) miary Lebesgue'a l . Dla $\alpha = 1$ otrzymujemy tzw. standardowy proces Poissona, oznaczany symbolem $\tilde{N}(t)$ (zatem $\tilde{N}(1) = \tilde{N}(\langle 0; 1 \rangle) \in \mathcal{P}(1)$). $\forall B \in \mathcal{R}_R$ zachodzi równość $\Lambda(B) = E(N(B))$. W szczególności $\Lambda(t) = E(N(\langle 0; t \rangle)) = E(N(t))$. W związku z tym miarę Λ i jej dystrybuantę Λ nazywa się również miarami średniej procesu N .

Jeśli dla zadanego procesu punkowego $N(t)$ oraz dystrybuanty Λ (miary Λ) na prostej zdefiniujemy formalne złożenie wzorem

$$N^*(t) = (N \circ \Lambda)(t), \quad (8)$$

to właściwą rolą funkcji Λ jest „**przeskalowywanie czasu**”: $N^*(t) = N(\Lambda(t))$, a k -ty punkt procesu liczącego T_k zmienia położenie na $T_k^* = \Lambda^{-1}(T_k)$. Proces punktowy N z miarą średniej Λ jest procesem Poissona wtedy i tylko wtedy, gdy

³ Najogólniej rzecz ujmując, miara losowa jest funkcją zbioru określoną na $(R^*, \mathcal{R}_R^*)$ o wartościach w ustalonej przestrzeni zmiennych losowych (spełniająca odpowiednie warunki regularności). Formalną dyskusję tego pojęcia można znaleźć np. w [Grandell 1976]. Podobnie jak w przypadku deterministycznej miary intensywności, nie będziemy rozróżniać symbolu miary losowej Λ od oznaczenia jej dystrybuanty Λ (nie powinno to prowadzić do nieporozumień).

⁴ Miara losowa Λ na $\langle 0; \infty \rangle$ nazywa się **całkowicie losowa**, jeśli dla dowolnego układu wzajemnie rozłącznych, ograniczonych zbiorów borelowskich jej wartości są niezależne stochastycznie (oznacza to w szczególności niezależność przyrostów procesu Λ).

$N \stackrel{d}{=} \tilde{N} \circ A^5$. Proces N jest tzw. **transformacją w czasie** procesu $\tilde{N}$ (i *vice versa*). Funkcję A^{-1} nazywa się w tym kontekście **czasem operacyjnym**. Zwróćmy uwagę na **dualizm interpretacyjny** funkcji A : miara deterministyczna A „zdalnie” **kieruje procesem** $N(t)$ (fluktuacje intensywności), a zarazem **tylko** „ściska lub rozciąga” w czasie proces standardowy $\tilde{N}(t)$ – eliminując (częściowo) efekty typu trendów i sezonowości.

3. Zrandomizowany czas operacyjny i procesy podporządkowane

Załóżmy teraz, że miara kierująca procesem zgłoszeń jest losowa. Poniżej podamy trzy – równoważne – sposoby formalnego określenia takich procesów.

Definicja 2 [Grandell 1976; Serfozo 1990]

(a) Niech dany będzie standardowy proces Poissona $\tilde{N}(t)$ oraz niezależna od niego (stochastycznie) miara losowa A na $\langle 0; \infty \rangle$. **Odwzorowanie** $(\tilde{N}, A) \rightarrow \tilde{N} \circ A$ **jest mierzalne**. Proces $N(t)$ zdefiniowany wzorem

$$N(t) = (\tilde{N} \circ A)(t) \quad (9)$$

nazywa się podwójnie stochastycznym procesem Poissona [Grandell 1976].

(b) Oznaczmy symbolem $\mathcal{S}$ σ -ciało generowane przez zmienne procesu A $\mathcal{S} = \mathcal{S}\{A(t), t \geq 0\}$. Proces punktowy $\{N(t), t \geq 0\}$ nazywa się **warunkowym procesem Poissona z procesem wartości średniej** A^6 , jeżeli $N(0) = 0$ (P -p.w.) – oraz

$$(i) \quad \forall n \in \{1, 2, \dots\}, \forall 0 < s_1 < t_1 < \dots < s_n < t_n, \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}^b$$

⁵ Równoważnie: dla procesu Poissona N z miarą intensywności A mamy $N \circ A^{-1} \stackrel{d}{=} \tilde{N}$, gdzie symbol $\tilde{N}$ oznacza tzw. standardowy proces Poissona – proces Poissona o intensywności 1 (por. np. [Grandell 1976]).

⁶ Równoznaczne są terminy: **proces Coxa** oraz **warunkowy proces Poissona** (nazwami tymi określa się także procesy stochastycznie równoważne $N^* \stackrel{d}{=} N$). Ich angielskie nazwy to: *double stochastic Poisson process* (np. [Kingman 1964, s. 923-930]), *conditional Poisson process* [Serfozo 1972, s. 288-302] oraz, oczywiście, *Cox process*. Dodajmy, że A nazywany jest **procesem kierującym** lub **procesem intensywności**.

$$P\left[\left(N(t_1) - N(s_1) \in B_1, \dots, N(t_n) - N(s_n) \in B_n\right) | \mathcal{F}\right] = \\ = P\left[\left(N(t_1) - N(s_1) \in B_1\right) | \mathcal{F}\right] \cdot \dots \cdot P\left[\left(N(t_n) - N(s_n) \in B_n\right) | \mathcal{F}\right] \quad P\text{-p.w.}, \quad (10)$$

$$(ii) \quad \forall 0 \leq s \leq t \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

$$P\left[\left(N(t) - N(s) = k\right) | \mathcal{F}\right] = \frac{\left[\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(s)\right]^k}{k!} e^{-[\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(s)]} \quad P\text{-p.w.} \quad (11)$$

(c) Niech N będzie procesem punktowym, a $\mathcal{A}$ – miarą losową na $\langle 0; \infty \rangle$. N nazywa się **procesem Coxa** kierowanym przez miarę $\mathcal{A}$, jeżeli $\forall n \in \{1, 2, \dots\}$ $\forall k_1, k_2, \dots, k_n \in \{0, 1, \dots\}$ i wzajemnie rozłącznych zbiorów $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}_R^b$

$$P\left[N(A_1) = k_1, \dots, N(A_n) = k_n\right] = E\left[\prod_{j=1}^n \mathcal{A}(A_j)^{k_j} \frac{e^{-\mathcal{A}(A_j)}}{k_j!}\right]. \quad (12)$$

Zauważmy, że w pierwszej definicji eksponuje się losową transformację czasu (realizowaną przez miarę $\mathcal{A}$). W drugiej i trzeciej na pierwszy plan wybija się fakt, że procesy Coxa są to, w zasadzie, procesy Poissona przebiegające w „**zmieniającym się losowo otoczeniu**”. Ta interpretacja najbardziej oddaje ducha „podwójnej losowości” – szczególnie sugestywna jest ona w kontekście modelowania procesów ryzyka matematyki ubezpieczeniowej.

Oto ilustracja „mechaniki” procesów Coxa: logicznie pierwotnym aktem jest generowanie realizacji $\bar{\mathcal{A}}$ miary losowej $\mathcal{A}$ – sukcesywnie „tworzy się” miarę intensywności $\{\bar{\mathcal{A}}(t), t \geq 0\}$ „dla” realizującego się zarazem procesu poissonowskiego N . Wtórność procesu N w stosunku do procesu $\mathcal{A}$ nie jest więc prostym następstwem czasowo-przyczynowym: „po losowym wyborze i **ustaleniu parametru »rusza« proces, zależny od tego parametru**”⁷. Kreacja parametru funkcyjnego $\mathcal{A}$ nie jest aktem jednorazowym (w „**pionowej**” przestrzeni fazowej): proces $\mathcal{A}$ ewoluuje losowo w czasie i na bieżąco aktualizuje probabilistyczne charakterystyki

⁷ Sytuacja taka ma miejsce tylko w przypadku, gdy $\mathcal{A}(t) = \lambda t$, gdzie λ jest ustaloną zmienną losową. $N(t)$ jest wtedy tzw. mieszanym procesem Poissona, a λ – wskaźnikiem struktury. O stochastycznych właściwościach całego procesu decyduje wówczas tylko „impuls początkowy”: $\lambda = \bar{\lambda}$ (por. np. [Panjer 1986]). Warto przy okazji dodać, że wyróżnioną pozycję w klasie procesów Coxa zajmują ujemnie dwumianowe procesy, w których proces kierujący jest procesem gamma. Stanowią one uogólnienie procesów Pólya: niezależne przyrosty mają rozkłady gamma, których parametry zależą tylko od długości przedziału, a nie od jego położenia [Bandorff-Nielsen 1969, s. 633-647].

(intensywności), toczącego się równolegle procesu Poissona. Należałoby zatem ten **dynamiczny warunek** „sytuować ukośnie” w produktowej przestrzeni czasowo-fazowej⁸.

Zmienność otoczenia wiodącego procesu często udaje się opisać **stochastycznym procesem intensywności** (chwilowych) $\lambda = \{\lambda(t), t \geq 0\}$, związanym z

miarą intensywności zależnością $A(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ ⁹. Sam proces λ może mieć

reprezentację postaci $\lambda(t) = g(\xi(t))$, gdzie g jest pewną borelowską funkcją $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\xi = \{\xi(t); t \geq 0\}$ jest procesem informującym o losowych zmianach otoczenia. Postulaty dotyczące rodzaju tych zmian formułuje się wtedy w językach procesów λ lub ξ – mogą to być procesy odnowy, markowskie, stacjonarne itp.

Stochastyczna dynamika otoczenia procesu ryzyka może mieć różne źródła i przejawiać się w różnych formach. Mogą to być, na przykład, fluktuacje warunków atmosferycznych lub mieć charakter bardziej „technologiczny”. Rozważmy superpozycję skończonej (n) ilości niezależnych procesów Poissona, $(N_1, \dots, N_n)$, gdzie liczba procesów składowych (dodawanych, w sensie funkcyjnym) zmienia się – losowo – w czasie [Serfozo 1972, s. 288-302]). Oznaczmy intensywności tych procesów odpowiednio: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Procedurą tą „steruje” wektorowy proces stochastyczny $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, którego współrzędne są procesami przyjmującymi wartości ze zbioru dwuelementowego $\{0; 1\}$. W danej chwili $t > 0$ „wybierane” i sumowane są te procesy (N_k) , dla których odpowiednie procesy $\xi_k(t)$ przyjmują wartość równą 1 („włączając” je w ten sposób).

Rozważmy teraz niektóre uogólnienia podwójnie stochastycznych procesów Poissona. Niech na ustalonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ określony będzie proces stochastyczny $\{A(t), t \geq 0\}$ o P -p.w. realizacjach niemalejących i prawostronnie ciągłych, przy czym $A(0) = 0$ (P -p.w.) i niechaj $\mathcal{A} = \sigma\{A(t); t \geq 0\}$.

⁸ Idea konstrukcji bliższa jest więc metodologii *empirical Bayes* niż klasycznej statystyce bayesowskiej (por. [Robbins 1956, s. 157-164]).

⁹ Proces λ musi spełniać warunki gwarantujące sens tej całki: np. jego P -prawie wszystkie realizacje są całkowalne w sensie Riemanna na każdym odcinku $\langle 0; t \rangle$.

Definicja 3 [Serfozo 1972, s. 303-315]

Proces stochastyczny $\{X(t), t \geq 0\}$ nazywa się procesem o **przyrostach warunkowo niezależnych i stacjonarnych względem procesu $\mathcal{A}(t)$** , jeśli

(i) X jest procesem określonym na tej samej przestrzeni co $\mathcal{A}$,

(ii) $\forall n \in \{1, \dots\}, \forall s_1 < t_1 < \dots < s_n < t_n, \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}_R^b$

$$\begin{aligned} & P[X(t_1) - X(s_1) \in A_1, \dots, X(t_n) - X(s_n) \in A_n | \mathcal{A}] = \\ & = P[X(t_1) - X(s_1) \in A_1 | \mathcal{A}] \cdot \dots \cdot P[X(t_n) - X(s_n) \in A_n | \mathcal{A}] \quad P\text{-p.w.}, \end{aligned} \quad (13)$$

(iii) $\forall 0 \leq s < t \quad \forall n \in R$

$$E\left\{\left[\exp iu(X(t) - X(s))\right] | \mathcal{A}\right\} = \Phi(u)^{\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(s)} \quad P\text{-p.w.}, \quad (14)$$

(Φ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu nieskończenie podzielnego).

Równość (13) definiuje **warunkową niezależność** procesu X względem elementu losowego $\mathcal{A}$, relacja (14) zaś oznacza **warunkową stacjonarność** przyrostów X względem $\mathcal{A}$. Warto podkreślić, że relatywizm ten przejawia się w dwójaki sposób: po lewej stronie wzoru występuje **warunek $\mathcal{A}$** (σ -ciało $\mathcal{A}$), po prawej zaś **stacjonarność przyrostów procesu $X(t)$ względem przyrostów procesu $\mathcal{A}$ na tych samych przedziałach czasu**. Inaczej mówiąc: jest to **jednorodność przyrostów względem zrandomizowanego czasu operacyjnego, a nie – czasu rzeczywistego**.

Ważnymi przykładami procesów z omawianej przez nas klasy są: (i) warunkowy złożony proces Poissona – względem procesu średniej procesu zewnętrznego (w relacji (14) $\Phi(u) = \exp[\psi(u) - 1]$, gdzie ψ jest funkcją charakterystyczną zmiennych procesu zewnętrznego); (ii) warunkowy proces Wienera – względem procesu wariancji (w relacji (14) $\Phi(u) = \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)$).

Miarę losową $\mathcal{A}$ nazywa się również **procesem kierującym**, sam proces Coxa $N(t)$ jest **procesem podporządkowanym** procesowi Poissona $\tilde{N}(t)$.

Nietrudno pokazać, że jeśli proces kierujący ma przyrosty stacjonarne, to własność tę dziedziczy proces podporządkowany. W pracy Feller'a [1969] bada się niezmienniki operacji podporządkowania dla procesów Markowa (na półprostej dodatniej) $X = \{X(t), t \geq 0\}$, o stacjonarnych prawdopodobieństwach przejścia.

Okazuje się, że proces $X \circ \mathcal{A} = \{X(\mathcal{A}(t)), t \geq 0\}$ „pozostanie” procesem Markowa, jeśli $\mathcal{A}$ jest procesem Levy'ego [Sato 1999]. Splotowa własność, charaktery-

zująca rozkłady nieskończenie podzielne, implikuje wtedy – dla prawdopodobieństw przejść (P_t) procesu złożonego – wzór

$$P_t(x, \Gamma) = \int_0^{\infty} Q_s(x, \Gamma) (F_t(ds)), \quad (15)$$

gdzie F_t jest dystrybuantą (rozkładem) zmiennej $A(t)$; $(t \geq 0)$. Relacja (15) oznacza właśnie „markowskość” procesu $X \circ A$.

Jeśli proces X ma również przyrosty niezależne, to procedura zrandomizowanego przeskalowania czasu znacznie się upraszcza i można otrzymać analityczne opisy efektów wielu interesujących zestawień – par (X, A) . Okazuje się, na przykład, że **proces Cauchy’ego jest podporządkowany ruchowi Browna** [Feller 1969]. Dokładniej: jeśli $X = \{X(t), t \geq 0\}$ jest procesem Wienera o gęstościach prawdopodobieństw przejścia

$$q_t(x) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right), \text{ natomiast kieruje nim proces stabilny } A = \{A(t), t \geq 0\}$$

o wykładniku charakterystycznym $\alpha = \frac{1}{2}$, którego gęstości prawdopodobieństw

przejścia są postaci $g_t(x) = (2\pi x^3)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-t^2}{2x}\right)$, to rozkład P_t ma gęstość

$$p_t(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{t^2 + x^2}. \text{ Równie ważna jest interpretacja tego wyniku: zmienna } Z(t)$$

(podporządkowanego) procesu Cauchy’ego, jest wartością procesu $X(t)$ w chwili $A(t)$, gdy pewien (niezależny od X) proces Wienera $Y = \{Y(s), s \geq 0\}$ po raz pierwszy osiąga wartość t . Spostrzeżenie to ma kapitalne znaczenie w kontekście praktyki aproksymacji procesów ryzyka procesami dyfuzyjnymi i rejestracji poziomów wiodących wskaźników (tych procesów), w momentach osiągania przez procesy pewnych wartości krytycznych. W matematyce finansowej procesy podporządkowane pojawiły się już w latach siedemdziesiątych [Clark 1973, s. 135-155] (por. także [Karandikar, Rachev 1995, s. 427-447]).

W. Feller pokazał również, że jeśli $X(t)$ i $A(t)$ są markowskimi procesami stabilnymi, to **proces podporządkowany** $X \circ A$ jest stabilny [Feller 1969]¹⁰. Dodajmy jeszcze, że **pojęcie podporządkowania** pochodzi od Bochnera [1955] (w jego badaniach wystąpiło ono w kontekście probabilistyki i analizy harmonicznej).

¹⁰ Autor ten informuje również o naturalnych zastosowaniach pojęcia podporządkowania w ogólnej teorii pólgrup.

4. Martynały – modele „stochastycznie sprawiedliwej” dynamiki

Martynały to matematyczne modele powtarzalnych gier losowych, „sprawiedliwych” na każdym etapie [Doob 1954; Feller 1969; Bojdecki 1976]. Formalnie są to często uogólnione ciągi projekcji ustalonych elementów pewnych przestrzeni liniowych na ich podprzestrzenie wstępujące. Znane są związki martynałów i półmartynałów z teorią potencjału i funkcjami harmonicznymi [Doob 1971; Mayer 1973] oraz ich zastosowania do badania zbieżności w przestrzeniach funkcyjnych [Bojdecki 1976; Szirajew, Jacod 1987]. Ich uogólnienia matematyczne sięgają procesów o wartościach w przestrzeniach Banacha [Scalora 1961, s. 347-374; Szulga 1979, s. 303-312], multifunkcji [Hiai, Umegaki 1977, s. 149-182] oraz algebr von Neumanna [Hiai, Tsukada 1984, s. 791-799].

W samym obszarze badawczym probabilistyki znajdujemy wiele powiązań martynałów z innymi obiektami tej teorii. W ich właściwościach łatwo dostrzec charakterystyczne rysy innych klas procesów: procesów o przyrostach niezależnych (lub – nieskorelowanych), stacjonarnych, ciągów „czysto losowych”, symetrycznie zależnych i łańcuchów Markowa. Należy tu wiele procesów punktowych gaussowskich¹¹. Techniki martynałowe okazały się mocnym narzędziem matematycznym przy badaniu procesów Markowa. Wreszcie – stanowią *clou* analizy stochastycznej (całka Ito). Niektóre zastosowania martynałów w teorii ryzyka i w matematyce finansowej omówimy w następnym paragrafie. Podamy teraz podstawowe definicje i standardowe „konstrukcje martynałowe”.

Definicja 4

(a) Niech dana będzie zupełna baza stochastyczna (b.s.)¹² $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \dots\}, P)$. Martynałem (nadmartynałem, podmartynałem) względem filtracji $\tilde{\mathcal{F}}$ i miary P nazywa się proces stochastyczny $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ adaptowany¹³ do filtracji $\tilde{\mathcal{F}}$, o zmiennych całkowalnych¹⁴, dla którego spełniony jest warunek: $\forall m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

¹¹ Szczególna rola przypada procesom Poissona oraz Wienera, które w pewnym sensie generują całą tę klasę procesów. Sam proces Poissona nie jest martynałem, jednak niewielka „korekta” czyni z niego martynał.

¹² Przypomnijmy, że baza stochastyczna to „zwykła” przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uzupełniona o tzw. filtrację $\tilde{\mathcal{F}}$, czyli wstępującą rodzinę pod- σ -ciał σ -ciała $\mathcal{F}$. Zupełność bazy stochastycznej oznacza zupełność przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oraz spełnienie warunku: zbiory miary zero należą do **wszystkich** historii $\mathcal{F}_n$; $n = 0, 1, 2, \dots$

¹³ Wszystkie zmienne X_n są – odpowiednio – $\mathcal{F}_n$ -mieralne.

¹⁴ Można osłabić to założenie (np. dla martynałów nieujemnych).

$$m \leq n \Rightarrow E(X_n | \mathcal{F}_m) = X_m \text{ P-p.w.} \quad (16)$$

(odpowiednio: $E(X_n | \mathcal{F}_m) \leq X_m$, $E(X_n | \mathcal{F}_m) \geq X_m$).

(b) W przypadku czasu ciągłego zmienne procesu są indeksowane parametrem $t \in (0; \infty)$ ($\{X(t), t \geq 0\}$, $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(t); t \geq 0\}$)¹⁵. □

Należy podkreślić element **relatywizmu** w określeniu martyngału: proces X na ogół nie będzie martyngałem, jeśli zmieni się rodzinę $\mathcal{F}$ lub miarę P . Z kolei dla wielu procesów możliwa jest transformacja miary bazowej w równoważną (w sensie równości klas zbiorów zerowych), względem której procesy te są martyngałami¹⁶. Jeśli filtrację tworzą σ -ciała, generowane przez przeciwobrazy segmentów procesu $X(t)$

$\left(\mathcal{F}^X(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(X(s), s \leq t) \right)$, to X jest martyngałem względem własnej historii (krótko – martyngałem). Filtrację tę nazywa się **standardową** i oznacza symbolem $\tilde{\mathcal{F}}^X = \{\tilde{\mathcal{F}}^X(t), t \geq 0\}$ ($\tilde{\mathcal{F}}^X = \{\mathcal{F}_n^X, n = 0, 1, \dots\}$)¹⁷. Postulaty typu ciągłości wiąże się zwykle z „milczącym” założeniem o przyjęciu tej właśnie filtracji ($\mathcal{F}$ -adaptowalność procesu X staje się wówczas trywialna). Dla zmiennych $X(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wygodna jest interpretacja „geometryczna funkcjonalna”: w języku rzutów ortogonalnych. Z definicji

$$\begin{aligned} E(X(t + \theta) - X(t) | \mathcal{F}(t)) &= E(X(t + \tau) | \mathcal{F}(t)) - E(X(t) | \mathcal{F}(t)) = \\ &= X_t - X_t = 0, \end{aligned}$$

przyrosty procesu są więc niezależne od historii procesu. W przypadku zmiennych z $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wynika stąd nieskorelowanie (ortogonalność) przyrostów. To uogólnienie własności klasycznych błędzeń przypadkowych oraz procesów o przyrostach niezależnych jest istotne – **w definicjach nie postuluje się konstrukcji martyngałów drogą sumowania zmiennych z ciągów niezależnych zmiennych lo-**

¹⁵ Zakłada się też na ogół prawostronną ciągłość filtracji $\left(\mathcal{F}(t) = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}(s) (\forall t \geq 0) \right)$, a tak-

że własność *càdlàg* procesu, czyli istnienie zbioru $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, dla którego $P(\Omega_0) = 1$ takiego, że wszystkie realizacje procesu $X(\omega)$ dla $\omega \in \Omega_0$ są prawostronnie ciągłe i mają lewostronne granice (por. np. [Janicki, Weron 1994; Revuz, Yor 1998]).

¹⁶ Zabieg ten odgrywa istotną rolę w modelowaniu i wycenie stochastycznych instrumentów matematyki finansowej (por. np. [Musielà, Rutkowski 1997; Szirajew i in. 1994, s. 23-79; Weron, Weron 1997]).

¹⁷ Używa się też nazwy **wewnętrzna historia** (*internal history*) procesu.

sowych¹⁸. Z równości $E(E(Z|\mathcal{A})) = EZ$ ($Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$; $\mathcal{A}$ – pod- σ -ciało $\mathcal{F}$) wynika, że w przypadku martyngałów funkcja $m(t) = E(X(t))$ ($t \in T$, $T = N$ lub $T = \langle 0, \infty \rangle$) jest stała¹⁹ – jak w przypadku procesów stacjonarnych.

Bezpośrednie uogólnienie ciągów zmiennych niezależnych stanowią tzw. **ciągi absolutnie fair** (a.f.) – zmiennych losowych całkowalnych $\{Y_n, n = 0, 1, \dots\}$, dla których

$$EY_0 = 0, E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0, n = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n). \quad (17)$$

Ciąg $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci

$$X_n = C + \sum_{k=0}^n Y_k, \quad (18)$$

gdzie $\{Y_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ jest ciągiem a.f., a C – stałą rzeczywistą [Feller 1969]. Urozmaicenie najprostszej (powtarzalnej) gry hazardowej (modelowanej sumami częściowymi ciągu n.i.r.²⁰ o średniej zero), poprzez dopuszczenie opcjonalnego ustalania stawek (oraz decyzji o uczestniczeniu w kolejnych powtórzeniach) na podstawie wyników poprzednich edycji gry, psuje wzajemną niezależność poszczególnych partii. Słynne twierdzenie Halmosa „o niemożliwości systemów gry” (zwiększających szanse wygranych) stanowi, iż zabiegi takie nie pozbawiają gry a.f. jej definicyjnego atrybutu. Oto formalne ujęcie tego zagadnienia (por. [Taylor 1990, t. 2]). Zmienne ciągu a.f., występujące w reprezentacji (18) są kolejnymi różnicami martyngałowymi $Y_k = X_k - X_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$). Zdefiniujmy ciąg losowy $S = \{S_k, k = 0, 1, \dots\}$ wzorami

$$S_0 = Y_0; S_{n+1} = \sum_{k=0}^n Y_{k+1} \cdot f_k(Y_0, \dots, Y_k), \quad (19)$$

gdzie funkcje f_k ($k = 0, \dots, n$) są ograniczone ($\mathcal{F}_k$ -mieralne). S jest martyngałem i nazywa się **transformacją martyngałową** procesu X . Jeśli zmienną Y_k będziemy interpretować jako wysokość wygranej (przegranej) w k -tej rozgrywce, odpowiadającą „obstawieniu” jednej złotówki, a funkcję f_k jako instrument usta-

¹⁸ Sumy częściowe ciągów n.i.r. (zob. wyjaśnienie w przypisie 20) o zerowej wartości oczekiwanej, a także procesy o przyrostach niezależnych i zerowej średniej, stanowią jednak „akademickie” przykłady martyngałów.

¹⁹ Dla nadmartyngałów – malejąca, dla podmartyngałów – rosnąca.

²⁰ Tym skrótem będziemy zastępować zwrot: „niezależne zmienne o identycznych rozkładach” (i.i.d. – *independent, identically distributed*).

lający wielkość stawki w $(k+1)$ -szym zakładzie, na podstawie wyników poprzednich zakładów, to zmienne S_k będą opisywać fluktuacje „fortuny” gracza w czasie. Dziedziczenie własności martyngałowej przez transformację S wyklucza istnienie systemu przekształcającego grę a.f. w grę korzystną dla gracza. Oznaczmy zmienną losową $f_k(Y_0, \dots, Y_k)$ symbolem Z_{k+1} ($k=0, \dots, n$) i wyeksponujemy „różnicową” naturę zmiennych Y_k w relacji (19). Otrzymamy zależność

$$S_0 = Y_0, \quad S_{n+1} = \sum_{k=0}^n Z_{k+1} (X_{k+1} - X_k), \quad (20)$$

którą można traktować jako „dyskretny prototyp” całki stochastycznej z procesu prognozowalnego $\{Z_k, k=0, 1, \dots\}$ względem martyngału $\{X_k, k=0, 1, \dots\}$ ²¹.

Jeśli Y_n jest ciągiem n.i.r. ($Y_0=0$) zmiennych o funkcji tworzącej momenty $M_Y(\lambda) = E[\exp(\lambda Y_1)]$, skończonej dla pewnego $\lambda \neq 0$, to poniższy proces $\{X_n, n \in N\}$

$$X_0 = 1, \quad X_n = [M_Y(\lambda)]^{-n} \cdot \exp[\lambda(Y_1, \dots, Y_n)] \quad (21)$$

jest martyngałem. Jest to tzw. **martyngał Walda**²². Definicyjną równość $E(X_n | \mathcal{F}_m) = X_m$ ($m \leq n$) można, w tym przypadku, sprawdzić krótkim rachunkiem²³. Jeśli $Y_1 \sim N(0, 1)$, to martyngał (21) przyjmuje prostszą postać

$$X_n = \exp\left[\lambda(Y_1 + \dots + Y_n) - \frac{1}{2}n\lambda^2\right]. \quad (22)$$

Martyngał Levy’ego [Chow, Robbins, Siegmund 1971; Bojecki 1976] („sekwencyjnych projekcji”). Niech dana będzie b.s. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}, P)$ oraz zmienna losowa $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. P.s. $\{X(t), t \in T\}$

$$X(t) = E(Z | \mathcal{F}(t)) \quad (P\text{-p.w.}); \quad t \in T \quad (23)$$

jest martyngałem: dla $s \leq t$ mamy bowiem

$$X(s) = E(Z | \mathcal{F}(s)) = E[E(Z | \mathcal{F}(s)) | \mathcal{F}(t)] = E(Z | \mathcal{F}(t)) = X(t) \quad P\text{-p.w.}$$

²¹ Definicje procesów prognozowalnych będą podane w dalszej części pracy (por. także [Rolski i in. 1998]).

²² Należy on do klasy **martyngałów wykładniczych** stosowanych do modelowania kapitalizacji ciągłej w stochastycznej matematyce finansowej [Gerber 1979].

²³ Przy czym wystarczy pokazać ją tylko dla przypadku, gdy $n = m + 1$ (por. np. [Rolski i in. 1998]).

Martynał (23) tworzą kolejne rzuty prostokątne funkcji Z na narastające podprzestrzenie przestrzeni $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)^{24}$. Niech teraz sigma-ciało $\mathcal{F}_\infty$ stanowi domknięcie filtracji $\tilde{\mathcal{F}}: \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}(t)\right)$. Można również „domknąć” martynał (23). P. Levy pokazał, że martynał ten jest jednostajnie całkowalny i zbieżny do pewnej $\mathcal{F}_\infty$ -mierzalnej zmiennej $X_\infty \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (zob. [Chow, Robins, Siegmund 1971; Bojdecki 1976])²⁵

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(Z | \mathcal{F}(t)) = X_\infty. \quad (24)$$

Modyfikacja martynału, polegająca na dodaniu do niego rosnącej funkcji (ciągu) afinicznej, przekształca go w podmartynał. Również na odwrót – odjęcie od danego podmartynału odpowiedniej funkcji (**deterministycznej lub losowej**) czyni z niego martynał (elementarnym pierwowzorem takiej metodologii jest „usuwanie trendu” z szeregów czasowych). Zaczniemy od trzech przykładów.

(i) Niech $X = \{X(t), t \geq 0\}$ będzie procesem o przyrostach niezależnych, $X(0) = 0$, $E(X(t)) \equiv 0$. Jeśli $\forall t \geq 0 \quad X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, to proces stochastyczny (p.s.) $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$, gdzie $Z(t) = X^2(t) - E(X^2(t))$, jest martynałem (względem standardowej filtracji $\tilde{\mathcal{F}}^X$).

(ii) Niech $N = \{N(t), t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Rozważmy dwa p.s. X i Z , których zmienne określone są wzorami $X(t) = N(t) - \lambda t$ oraz $Z(t) = X^2(t) - \lambda t$. N jest podmartynałem względem $\tilde{\mathcal{F}}^N$ i miary P , $X(t)$ i $Z(t)$ zaś są $\forall p \geq 1$ prawostronnie ciągłymi L^p -martynałami (względem $\tilde{\mathcal{F}}^N$ i P)²⁶.

(iii) Niech $B = \{B(t), t \geq 0\}$ będzie jednowymiarowym ruchem Browna²⁷, przy czym $B_0 \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dla pewnego $p \geq 1$. Zarówno B , jak i $B_2 = \{B_2(t), t \geq 0\}$, gdzie $B_2(t) = B^2(t) - t$ są ciągłymi L^p -martynałami dla $p \geq 2$.

Podamy teraz twierdzenia dekompozycyjne dla podmartynałów.

²⁴ Przy założeniu, że $\forall t \in T \quad X(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

²⁵ Warto dodać, że martynały Levy’ego pojawiają się jako modele „sprawiedliwych wycen” w matematyce ubezpieczeniowej i finansowej. Stanowią też szeroką klasę wzorców formalnych porządkujących teorię tych procesów.

²⁶ $X(t)$ i $Y(t) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad \forall t \in T$.

²⁷ Czyli standardowym procesem Wienera.

Definicja 5 ([por. np. [Bojdecki 1976; Revuz, Yor 1998]])

(a) Niech będzie dana b.s. $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}, P)$, $\tilde{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Ciąg losowy $X = \{X_n, n \in N\}$ nazywa się **$\tilde{\mathcal{F}}$ -prognozowalny**, jeśli zmienna losowa X_0 jest $\mathcal{F}_0$ -mierzalna, oraz, dla każdego $n \in N$, X_{n+1} jest $\mathcal{F}_n$ -mierzalna.

(b) Niech będzie dana b.s. $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}, P)$, $\tilde{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$. Mówimy, że p.s. $X = \{X(t), t \geq 0\}$ jest **$\tilde{\mathcal{F}}$ -prognozowalny**, jeśli jest **$\tilde{\mathcal{F}}$ -adaptowany**, a funkcja dwóch zmiennych $X: (0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$ ($X(t, \omega)$) jest **mierzalna względem σ -ciała $\sigma((s, \infty) \times A; s \geq 0, A \in \mathcal{F}_R)$** ²⁸. □

Twierdzenie 1 (rozkład Dooba-Mayera)

(a) Czas dyskretny. Niech będzie dana b.s. $(\Omega, \mathbf{F}, \tilde{\mathbf{F}} = \{\mathbf{F}_n; n = 0, 1, 2, \dots\}, P)$ i podmartynał $X = \{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ względem $\tilde{\mathbf{F}}$ i P . Istnieje dokładnie jedna para procesów $M = \{M_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ oraz $A = \{A_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, z których pierwszy jest martynałem $(\tilde{\mathcal{F}}, P)$, a drugi – $\tilde{\mathcal{F}}$ -prognozowalnym, rosnącym ciągiem zmiennych losowych, taka, że dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots$ zachodzą nierówności $X_n = M_n + A_n$, $A_0 = 0$. Symbolicznie można ten związek zapisać w postaci

$$X = M + A^{29}. \quad (25)$$

(b) Czas ciągły. Niech będzie dana b.s. $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ oraz podmartynał $X = \{X(t), t \geq 0\}$ $(\mathcal{F}, P)$, dla którego rodzina zmiennych losowych $\{X_T; T \in \mathcal{T}_f\}$ ³⁰ jest jednostajnie całkowalna. Istnieje dokładnie jedna para procesów $M = \{M(t), t \geq 0\}$ oraz $A = \{A(t), t \geq 0\}$, z których pierwszy jest jednostajnie

²⁸ Każdy $\tilde{\mathcal{F}}$ -adaptowany proces X o P -p.w. lewostronnie ciągłych realizacjach jest $\tilde{\mathcal{F}}$ -prognozowalny – można właśnie tak wyobrażać sobie procesy prognozowalne. W przypadku czasu dyskretnego zmienna X_{n+1} zależy **funkcyjnie** od zmiennych o wcześniejszych indeksach – (P -p.w.).

²⁹ Jeśli zamiast podmartynałów wziąć dowolny $\tilde{\mathcal{F}}$ -adaptowany ciąg losowy, to „tracimy” w rozkładzie (25) monotoniczność części prognozowalnej, ale możliwa jest prosta konstrukcja procesu $A: A_0 = 0, A_n = \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1} - X_k | \mathcal{F}_k)$. Jednoznaczność rozumiana jest P -p.w. (por. np. [Bojdecki 1976]).

³⁰ Symbol $\mathcal{T}_f$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych (P -p.w.) czasów Markowa.

całkowalnym martyngałem $(\tilde{\mathcal{F}}, P)$, a drugi – $\tilde{\mathcal{F}}$ -prognozowalnym, rosnącym p.s. o zmiennych całkowalnych, para taka, że $\forall t \geq 0 \quad X(t) = M(t) + A(t)$.

(iii) Proces A nazywa się $\tilde{\mathcal{F}}$ -kompensatorem procesu X $\square$ ³¹.

Przytoczmy jeszcze trzy nierówności dla martyngałów z czasem dyskretnym, mające zastosowania m.in. w teorii ryzyka.

Nierówności Kołmogorowa-Dooba³²

(a) Załóżmy, że $S = \{S_n, n = 0, 1, \dots\}$ jest **nieujemnym podmartyngałem** $(\tilde{\mathcal{F}}, P)$. Dla każdego $x > 0$ i każdego naturalnego n zachodzi nierówność

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} S_k \geq x\right) \leq \frac{E(S_n)}{x}. \quad (26)$$

(b) (Wniosek z (a)) Jeżeli $S = \{S_n, n = 0, 1, \dots\}$ jest **martyngałem**, to dla każdego $x > 0$ i każdego naturalnego n

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} |S_k| \geq x\right) \leq \frac{E(S_n^2)}{x^2}. \quad (27)$$

(c) Jeżeli $S = (S_n; n = 0, 1, \dots)$ jest **nieujemnym nadmartyngałem**, to dla każdego $x \geq 0$ i każdego naturalnego n

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} S_k \geq x\right) \leq \frac{E(S_0)}{x}. \quad (28)$$

5. Przykłady procesów stochastycznych w matematyce ubezpieczeniowej i finansowej

Towarzystwo asekuracyjne, jak każdy podmiot ekonomiczny, zainteresowane jest zyskiem, natomiast jego klienci baczą, aby koszty polis były „rzetelnie skorelowane” z rozmiarami i prawdopodobieństwami ewentualnych roszczeń. Tak więc **strony wymuszają na sobie nawzajem prowadzenie gry fair** – i to w **wersji dynamicznej**. Obydwaj protagoniści kształtują swe opinie, odczucia i oceny w spo-

³¹ Zazwyczaj zakłada się prawostronną ciągłość procesu X . Procesy M i A dziedziczą tę własność. Dowody twierdzenia Dooba i Mayera można znaleźć w każdej monografii z analizy stochastycznej (por. np. [Doob 1954; Mayer 1973; Rolski i in. 1998; Neveu 1972; Bojdecki 1976; Mayer 1973]). W przypadku procesu punktowego kompensatorem jest jego stochastyczna intensywność Λ .

³² Wiąże się je z nazwiskami Kołmogorowa oraz Dooba, ponieważ są to uogólnione przez Dooba, martyngałowe wersje nierówności podanych wcześniej przez Kołmogorowa (por. np. [Doob 1954; Gichman, Skorochod 1968; Bojdecki 1976; Gerber 1979; Rolski i in., 1998; Weron, Weron 1997], w pracach tych można znaleźć proste dowody tych nierówności).

sób adaptacyjny – w miarę rejestracji kolejnych obserwacji interesującego ich procesu losowego. Ich decyzje, **na każdym etapie** tej konfrontacji, muszą spełniać warunki racjonalności i **sprawiedliwości** – w aspekcie **oczekiwań, wynikających z informacji** dostarczanych przez **narastającą historię procesu** oraz jego otoczenia. Również liczba tych etapów nie zawsze jest *a priori* znana stronom – i także zależy od przypadku. Opcjonalne są więc zarówno wysokości stawek i skali ubezpieczeń, jak i decyzje o ich kontynuacji. Modele dynamiki ubezpieczeń powinny być odporne na ten rodzaj zakłóceń – losowe zastopowanie procesu nie może wywoływać drastycznego zachwiania założonej symetrii ról „graczy”. Widać zatem, że rolę „strażników czystości sekwencyjnych gier ubezpieczeniowych” najlepiej mogą spełnić martyngały.

Rozważmy uproszczony wariant klasycznego modelu ryzyka – z czasem dyskretnym. Niech dany będzie ciąg $\bar{X} = \{\bar{X}_n, n = 1, 2, \dots\}$ nieujemnych, całkowalnych zmiennych losowych n.i.r., reprezentujących łączne wartości roszczeń zgłaszanych towarzystwu ubezpieczeniowemu w kolejnych jednostkowych przedziałach czasu, $\bar{S} = \{\bar{S}_n, n = 1, 2, \dots\}$ zaś niechaj będzie ciągiem skumulowanych roszczeń (w okresach $\langle 0; n \rangle$). Przyjmijmy oznaczenie $E\bar{X}_n \equiv c > 0$. Oczywiście tożsamość $\bar{S}_n = (\bar{S}_n - c \cdot n) + c \cdot n$; $n = 1, 2, \dots$ można zapisać w skrótowej, symbolicznej postaci:

$$\bar{S} = \bar{M} + \bar{P}. \quad (29)$$

W równości (29) „ukryty” jest zarówno rozkład Dooba, jak i przepis na „uczciwą” składkę: proces $\bar{S}$ jest podmartyngałem, $\bar{M}$ – martyngałem, a $\bar{P}$ – procesem napływu składek (który tutaj jest deterministyczną funkcją $\bar{P}(n) = c \cdot n$, interpretowaną jako rekompensata ponadprzeciętnych strat towarzystwa). Analogiczny model dla czasu ciągłego i procesu o przyrostach niezależnych sprowadza się praktycznie do zmiany oznaczeń: $S(t) = M(t) + P(t)$; $t \geq 0$ ³³.

Druga przesłanka dla zastosowań martyngałów w teorii ryzyka ma charakter techniczny – chodzi o wykorzystanie technik martyngałowych do zadań szacowania prawdopodobieństwa ruiny (i innych parametrów procesów ryzyka) [Gerber 1973, s. 205-216; 1979]. Załóżmy zatem, że istnieje funkcja malejąca $v: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, dla której $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0$ (o wartościach dodatnich), przekształcająca oryginalny proces ryzyka w nadmartyngał $V = \{V_n, n = 1, 2, \dots\}$. Mamy więc, z definicji $V_n = v(\bar{U}_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Z nierówności Dooba otrzymujemy następujące oszacowanie prawdopodobieństwa ruiny firmy, dysponującej majątkiem początkowym $u > 0$

³³ Kompensator P jest tu **deterministyczną regułą** ciągłego naliczania sprawiedliwej składki. W ogólnym przypadku rozkładu Dooba nie otrzymuje się w tak prosty sposób. Jednak w szerokiej klasie procesów ryzyka naturalne jest założenie o ich „podmartyngałowym zachowaniu się”.

$$\Psi(u) \leq \frac{EV_0}{v(0)} = \frac{v(u)}{v(0)}. \quad (30)$$

Niech T będzie czasem Markowa (względem standardowej filtracji nadmartynału V), określonym jako moment ruiny: $T = \inf\{n \in N : V_n \geq u\}$ i niech $\tilde{V} = V_{T \wedge n}$ ³⁴. Ponieważ $E(\tilde{V}_0) \geq E(\tilde{V}_n) (\forall n = 1, 2, \dots)$, więc $E(\tilde{V}_0) \geq E(V_T | T \leq n) P(T \leq n) + E(V_T | T > n) P(T > n)$. Przejście graniczne ($n \rightarrow \infty$) prowadzi do uściślenia relacji (30)

$$\Psi(u) \leq \frac{v(u)}{E[v(W_T) | T < \infty]} \quad (31)$$

Udaną adaptację modeli (i technik) martyngałowych do opisu **dynamiki rynków finansowych** tłumaczy się podobnie jak w ubezpieczeniach. Permanentna konfrontacja elementów chaosu z procesami poszukiwania równowagi (w skali makroekonomicznej) wiąże się (w skali mikroekonomicznej) ze stałą wzajemną kontrolą stron w indywidualnych kontraktach finansowych, wymuszającą „sprawiedliwą” strukturę funkcjonowania tych umów. Stąd specyfika racjonalnych oczekiwań (podmiotów) co do przyszłych stanów procesów finansowych: są to inercyjne ekstrapolacje poziomu *status quo*. Łatwo tu rozpoznać **klasyczny paradygmat** – „hipotezę rynku efektywnego” [Fama 1970, s. 284-418; LeRoy 1989, s. 1563-1621]. Z matematycznego punktu widzenia, określanie optymalnej **prognozy** (rzutu ortogonalnego) „**późniejszej**” zmiennej losowej **na poziomie „obecnej”** oznacza akceptację **martyngałowej** struktury **procesu predykcyjnego** $E(X(t_2) | \mathcal{F}(t_1)) = X(t_1)$ P-p.w. ($t_1 < t_2$).

Rdzeń rynków finansowych stanowią **instrumenty finansowe** [Jajuga, Jajuga 1996]. Ich matematycznymi abstraktami są odpowiednie elementy losowe. Warto zwrócić uwagę na dualizm, występujący u podstaw formalnego modelowania rze-

³⁴ $T = \infty$, jeśli $\forall n \in N \quad V_n < u$. V_n to nadmartyngał „stopowany” czasem Markowa T ; $\tilde{V}_n = V_n^T = V_{T \wedge n}$.

³⁵ Bardziej wyspecyfikowany przykład podano w pracy [Rolski i in. 1998]. Dla danego ciągu i.i.c. $\bar{X} = \{\bar{X}_n, n = 1, 2, \dots\}$ oraz całkowitoliczbowej zmiennej „liczącej” T rozważa się rozkład złożo-

ny sumy losowej liczby składników $\bar{Y} = \sum_{k=1}^T \bar{X}_k$, przy czym T jest tutaj **regułą stopu niezależną**

od ciągu $\bar{X}$. W następnym etapie konstruuje się ciąg $V = \{V_n, n = 1, 2, \dots\}$, gdzie $V_n = \exp \gamma \bar{X}_{n+1}$ ($\gamma > 0$ odgrywa rolę analogiczną do współczynnika dostosowania – nie wchodzimy w szczegóły, ponieważ jedynie odtwarzamy szkic konstrukcji). Na nim – z kolei – wykonuje się złożenie operacji stopowania czasem T , z anihilacją zmiennych „dalszych” niż T . Otrzymany w ten sposób proces okazuje się nadmartyngałem, który umożliwia dokonanie zgrabnego oszacowania prawdopodobieństwa $P(\bar{Y} > u) \leq [\exp(\gamma u)]^{-1} \cdot EV_0$.

czonych instrumentów. Są to konkretne produkty ekonomiczne o wyspecyfikowanych cechach jednostkowych (regułach funkcjonowania). Uzasadnione jest więc pytanie o **wartość** każdego z takich instrumentów **jako całości**. Można teraz ograniczyć się do matematycznego charakteryzowania **określonej zmiennej** losowej. Jednak „formą życia” klasycznego instrumentu o ustalonym terminie wygaśnięcia (T) jest ewoluowanie w czasie jego wartości. Dynamikę tych zmian kształtują zarówno reguły określające działanie danego instrumentu, jak i ustawiczna, nie kontrolowana randomizacja – konsekwencja losowych zmian w jego otoczeniu. Jest to zatem proces stochastyczny – **zbiór zmiennych losowych**. Proces wyceny wartości instrumentu nie jest jednak dowolnym strumieniem zmiennych, wygenerowanym egzogenicznie (takim jak ciąg zmieniających się w czasie, **obiektywnych** wartości zjawiska przyrodniczego). Mamy tu raczej do czynienia z **permanentną ewolucją i ewaluacją jednego obiektu**. Zmiany szacunków badanych cech tego obiektu wynikają z ciągłych zmian zbioru informacji o jego – zmieniającym się – otoczeniu ekonomicznym. Oszacowania te mają charakter **predykcyjny**: są to **oczekiwane** – w świetle napływających informacji – **wartości interesującej nas zmiennej**. Zatem: zmienna, czy proces? I jedno, i drugie! I nie ma w tym sprzeczności. Naturalnym warunkiem (o charakterze spójności logicznej oraz rzetelności) stawianym określeniom wartości jest ich odporność na procedurę wyceny: niezależność wartości przypisywanej instrumentowi w chwili t_1 od – ewentualnego – wyboru ciągu momentów dla „wycen pośrednich”. **Prognoza** (wartości instrumentu) konstruowana **w chwili t_1** powinna „**zgadzać się**” z **prognozą prognozy** (tej wartości) liczoną **w chwili późniejszej t_2** . Niech zatem dana będzie b.s. $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}, P)$ i rzeczywista, całkowalna zmienna losowa $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (instrument finansowy). Wycena wartości instrumentu X w chwili t to wyznaczanie warunkowej wartości oczekiwanej $W(t) = E(X | \mathcal{F}(t))$. Proces W wycen „ X -a” dokonywanych w czasie, $W = \{W(t), 0 \leq t \leq T\}$ jest zatem martyngałem Levy’ego. Koło się zamyka: **jeden instrument (X) wraz z historią (filtracją $\tilde{\mathcal{F}}$) generuje cały proces ($W(t)$) swoich warunkowych wartości**.

A oto prosty model, łączący w sobie elementy stochastycznej dynamiki finansów oraz ubezpieczeń [Gerber 1979]. Uwzględnienie zmian wartości kapitału w czasie umożliwia jeszcze „konfrontację części dodatniej i ujemnej” procesu ryzyka. Niech $X = \{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ będzie ciągiem n.i.r. zmiennych losowych (na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, P)$), oraz $X_0 = u$ P -p.w. Dla stopy procentowej i oznaczmy symbolami r oraz v czynniki: oprocentowujący ($r = 1 + i$) oraz dyskontujący ($v = (1 + i)^{-1}$) (odpowiednio). Wartość obecna („wieczystej”) sumy wkładów okresowych, o wielkościach X_n ($n = 1, 2, \dots$) dana jest wzorem

$$X_n = \sum_{n=0}^{\infty} v^n X_n. \quad (32)$$

Z kolei skumulowana wartość tych wpłat do chwili n -tej (włącznie) wynosi

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n-k} X_k; \quad n = 0, 1, \dots \quad (33)$$

Zdefiniujmy funkcję $G(u) = P(X_n \leq 0) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} v^n X_n \leq -u\right)$, a następnie ciąg losowy $G = \{G_n, n = 0, 1, \dots\}$, gdzie $G_n = G(S_n)$; $n = 0, 1, \dots$. Proces G jest martingaleem $(\mathcal{F}^X, P)$. Jest to martingał Levy'ego: $G_n = E(I\{X_n \leq 0\} | \mathcal{F}_n^X)$; $n = 0, 1, \dots$. Rejestruje on zmiany – w czasie – prawdopodobieństw (warunkowych) zachodzenia pewnej „krytycznej” relacji pomiędzy zdyskontowaną wartością sumy wkładów a skumulowaną wielkością tych wkładów do chwili n . Równie ważny jest tutaj aspekt „techniczny”: rola **funkcji G , która transformuje proces S_n w martingał G_n** . Dzięki temu nietrudno pokazać, że prawdopodobieństwo ruiny dla procesu S_n dane jest wzorem dokładnym

$$\Psi(u) = \frac{G(u)}{E[G(S_T) | (T < \infty)]}, \quad (34)$$

(T oznacza tu, oczywiście, moment ruiny)³⁶.

Przedmiotem ogólnej **teorii ryzyka w otoczeniu ekonomicznym**³⁷ są modele uwzględniające czynniki makroekonomiczne: stopy procentowe dla wkładów i kredytów oraz inflację. Już w latach siedemdziesiątych **H. Gerber** zaproponował podejście w duchu programowania dynamicznego z dyskontowaniem [Gerber 1972, s. 37-45], a **M.J. Harrison** rozważał [Harrison 1977, s. 67-79] ciągły „proces aktywów” postaci

$$Z(t) = e^{\beta t} + \int_0^t e^{\beta(t-s)} dX(s); \quad t \geq 0, \quad (35)$$

gdzie β jest stopą procentową, a relacja (35) stanowi zapis „konfrontacji strat i zysków” towarzystwa (inwestującego oraz zaciągającego kredyty na tych samych warunkach).

Załóżmy, że ubezpieczyciel umieszcza nadwyżki (rezerwy) na rachunku bankowym, nominalna chwilowa stopa procentowa jest stała i wynosi β – przy oprocentowaniu ciągłym każda złotówka ulokowana w banku warta jest, po czasie t , $\exp(\beta t)$ złotych. Załóżmy, że składki napływające od nabywców polis natych-

³⁶ Korzysta się tu z klasycznych twierdzeń granicznych teorii funkcji rzeczywistych (por. [Sikorski 1958; Gerber 1979]).

³⁷ *Risk theory in an economic environment.*

miast wpłacane są do banku, a roszczenia ubezpieczonych realizuje się ze środków towarzystwa, znajdujących się na jego koncie. Jeśli stan konta ubezpieczyciela wynosi zero, to bank automatycznie udziela mu pożyczki, oprocentowanej tak jak wkłady, również stosując oprocentowanie ciągłe. Niech u oznacza wielkość kapitału początkowego towarzystwa, a $t_1, t_2, \dots$ – momenty, w których następują kolejne zgłoszenia. Wówczas wysokość rezerw w chwili t opisana jest równaniem

$$U(t) = e^{i\beta} u + \int_0^t c e^{\beta(t-s)} ds - \sum_{k=1}^{N(t)} e^{\beta(t-t_k)} X_k; \quad t \geq 0. \quad (36)$$

$N = \{N(t), t \geq 0\}$ jest procesem liczącym zgłoszenia, a $X = \{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ – ciągiem wielkości zgłaszanych roszczeń. Załóżmy teraz, że na ustalonej przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dany jest proces Levy'ego [Sato 1999; Szirajew, Jacod 1987] $X = \{X(t), t \geq 0\}$, o realizacjach *càdlàg* (P -p.w.), przy czym $E[X(t)] = \mu t$, $Var[X(t)] = \sigma^2 t$ ($\mu \in R$, $\sigma^2 > 0, t \geq 0$). Relację (36) można zapisać w postaci

$$U(t) = e^{\beta} [u + V(t)]; \quad t \geq 0, \quad (37)$$

gdzie

$$V(t) = \int_0^t e^{-\beta s} dX(s); \quad t \geq 0. \quad (38)$$

Funkcja losowa $V = \{V(t), t \geq 0\}$ jest **procesem wartości bieżącej zysków**³⁸ (zdyskontowanej do chwili $t_0 = 0$), a $U = \{U(t), t \geq 0\}$ – uogólnionym procesem ryzyka. Standardowa procedura kompensacyjna, zastosowana do procesu X , prowadzi do określenia martyngału $M = \{M(t), t \geq 0\}$ (gdzie $M(t) = X(t) - \mu t$; $t \geq 0$). Można teraz zapisać proces ryzyka $U(t)$ w postaci

$$U(t) = \int_0^t e^{-\beta s} dM(s) + \left(\frac{\mu}{\beta}\right) (1 - e^{-\beta t}); \quad t \geq 0. \quad (39)$$

Zróznicujmy teraz stopy procentowe dla inwestycji oraz kredytów, wprowadzając także pewne naturalne ograniczenia na aktywność ekonomiczną towarzy-

³⁸ Zarówno proces X , jak i V mogą przyjmować także wartości ujemne. Oczywiście, zdarzenie $\{Z(t) < 0\}$ oznacza ruinę towarzystwa, zmienna $T = \inf\{t \geq 0: Z(t) < 0\}$ to moment ruiny, a funkcja $\psi(u) = P(T \leq \infty | Z(0) = u)$ określa prawdopodobieństwo tego zdarzenia (analogicznie do modelu klasycznego).

³⁹ W pracy [Harrison 1977] sprawdza się formalną poprawność operacji zdefiniowanych wzorami (37), (38), (39), a także podaje równanie, które winno spełniać prawdopodobieństwo ruiny (jako funkcja kapitału początkowego u).

stwa ubezpieczeniowego; (i) firma zbyt uboga nie może inwestować, (ii) bankrutom nie udziela się pożyczek. Skutecznym narzędziem do opisu takich modeli i ich analitycznej „obróbki” okazały się tzw. **kawałkami deterministyczne procesy Markowa** [Davis 1984, s. 353-388]. A. Dassios i P. Embrechts [1989, s. 181-217] zauważyli, że mogą one stanowić wzorce matematyczne dla obszernej klasy procesów ryzyka. Pogląd ten uzasadnia sama natura jednych i drugich procesów (wszak **procesy** opisujące dynamikę **zmian kapitału firmy** ubezpieczeniowej są – warunkowo – **deterministyczne na przedziałach czasowych pomiędzy poszczególnymi zgłoszeniami**). Markowskość tych procesów w naturalny sposób „współgra” z technikami martyngałowymi. Rozważmy (za [Dassios, Embrechts 1989, s. 181-217]) następującą modyfikację klasycznego modelu ryzyka. Kiedy proces nadwyżek kapitału towarzystwa ubezpieczeniowego maleje do wartości ujemnych, firma nie traci – od razu – zdolności funkcjonowania. Może pożyczyć pieniądze na swą działalność, płacąc odsetki od zaciągniętego kredytu, o ustalonej intensywności δ (efektywna stopa procentowa i wynosi więc $100(e^\delta - 1)\%$). Załóżmy, że – w rozważanym przedziale czasowym – intensywność napływu składki (p) jest stała. Wówczas funkcja dochodów towarzystwa ma (lokalnie) postać $p(z) = p + \delta \cdot I(\{z < 0\})$. Z chwilą, gdy proces zysków zejdzie poniżej pewnego krytycznego poziomu, towarzystwo nie będzie w stanie płacić odsetek. Poziom ten wynosi oczywiście $-\frac{p}{\delta}$, bo właśnie wtedy **intensywność wpłaty odsetek przewyższy intensywność napływu składki**. Zdarzenie

$$\left\{ \exists t > 0 : Z(t) \leq -\frac{p}{\delta} \right\} \quad (40)$$

nazywa się **absolutną ruiną**.

W klasycznym modelu ryzyka skumulowane roszczenia tworzą złożony proces Poissona, a składka napływa (liniowo) z intensywnością p i stanowi jedyne źródło dochodów firmy. Zmiany kapitału ubezpieczyciela pomiędzy zgłoszeniami opisane są funkcjami liniowymi postaci

$$x(t+h) = x(t) + ph \text{ dla } T_n \leq t \leq t+h < T_{n+1}d. \quad (41)$$

Model ten można uczynić bardziej realistycznym [Embrechts, Schmidli 1994, s. 1-34]. Oznaczmy przez Δ sumę, którą towarzystwo ustaliło jako rezerwę płynności, a przez β_1 oraz β_2 stopy procentowe dla inwestycji oraz kredytów – odpowiednio. Dla $T_n \leq t \leq t+h < T_{n+1}$ deterministyczną (warunkowo) trajektorię procesu określimy wzorami

$$x(t+h) = \begin{cases} \left(x(t) + \frac{p}{\beta_2} \right) e^{\beta_2 h} - \frac{p}{\beta_2} & \text{jeśli } x(t) < 0 \text{ i } x(t+h) \leq 0, \\ x(t) + ph & \text{jeśli } 0 \leq x(t) < \Delta \text{ i } x(t+h) \leq \Delta, \\ \left(x(t) - \Delta + \frac{p}{\beta_1} \right) e^{\beta_1 h} + \Delta - \frac{p}{\beta_1} & \text{jeśli } \Delta < x(t). \end{cases} \quad (42)$$

Lepsze możliwości interpretacyjne daje analiza pochodnej funkcji $x(t)$ – pozwala dostrzec i skwantyfikować „pasmowy” regulamin funkcjonowania firmy

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} \beta_2 x(t) + p & \text{dla } x(t) < 0, \\ p & \text{dla } 0 \leq x(t) < \Delta, \\ \beta_1 (x(t) - \Delta) + p & \text{dla } \Delta < x(t). \end{cases} \quad (43)$$

Widzimy, że jeżeli $x(t) < 0$, to firma musi płacić odsetki o intensywności $-\beta_2 x(t)$, jeśli $x(t) > \Delta$, to zarabia na inwestycjach – z intensywnością $\beta_1 (x(t) - \Delta)$, natomiast w pasie wyznaczonym przez przedział $\langle 0; \Delta \rangle$ proces ryzyka ewoluuje identycznie jak w modelu klasycznym.

6. Spiralna dynamika rynków finansowych

W roku 1939 R.N. Elliott opublikował w „Financial World” cykl artykułów poświęconych nowo stworzonej przez siebie teorii o tematyce prognostycznej [Elliot 1939]. Teoria nosiła nazwę „zasada fal”. Okazało się, że od strony matematycznej jest to metodologia prognozowania rynku, oparta na rekurencji L. Fibonacciego [Fischer 1996]. W roku 1995 analitycy A. Forst i R. Prechter uogólnili zasadę fal Elliotta [Forst, Prechter 1995]. W swym uogólnieniu próbowali wykorzystać płaską krzywą zwaną spiralą logarytmiczną. Analizy rynku dokonywane przez wyżej wymienionych badaczy zawsze były oparte na spostrzeżeniach dotyczących „dwuwymiarowych” obserwacji rynku. Konstrukcja dwuwymiarowej spirali logarytmicznej pozwala jednocześnie „otrzymać” z niej tzw. złotą liczbę $c \approx 0,618$. Złota liczba [Ghyka 2001] jest podstawową proporcją, na której oparta jest prognostyczna zasada fal Elliotta. Na podstawie obserwacji długich szeregów czasowych zauważono, że złota proporcja dobrze opisuje dynamikę rynku. Wykorzystywana jest w związku z tym do (adaptacyjnej) charakteryzacji trendu i ustalania poziomu cen akcji. Wyznacza również tzw. wzór giełdowego ruchu, określając jednocześnie poziom cen i czas trwania trendu [Forst, Prechter 1995]. Współczesna ekonomia zna wiele teorii, które definiują i

opisują dynamikę rynku. Pierwszymi, którzy w 1930 r. niezależnie od siebie opisali dynamiczny model rynku, byli: T. Hanau, R. Ricci i J. Tinbergen [Mantegna, Stanley 2001]. Model ten miał wyjaśniać cykliczność wahań cen pewnych dóbr w zależności od zmian popytu i podaży, w konsekwencji zaś – dostarczać narzędzi dla ekstrapolacji (w czasie) podstawowych wielkości opisujących rynki. Założenia tego klasycznego modelu pochodzą od L. Walrasa (1874) [Walras 1954; Klimczak 1998].

W celu uproszczenia analizy przyjmujemy, że funkcje popytu i podaży są postaci liniowej, tj.

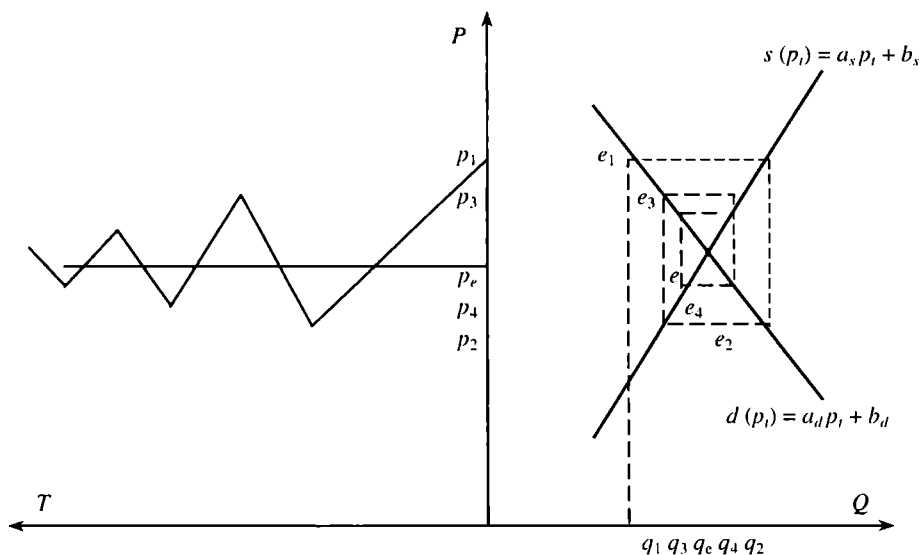
$$\begin{aligned}d(p_t) &= a_d p_t + b_d, \\s(p_t) &= a_s p_t + b_s, \\p_t &= c[d(p_t) + s(p_t)],\end{aligned}\tag{44}$$

gdzie: $d(p_t)$ i $s(p_t)$ są, odpowiednio funkcjami popytu i podaży pewnych dóbr zależnych od ceny p_t . Zmiana ceny w różnych okresach uzależniona jest od bezwzględnej wartości ilorazu współczynników kierunkowych funkcji popytu i podaży. Tak zwany model pajęczynowy-spiralny wyjaśnia wpływ, jaki wywierają zmiany ilości dóbr na ich ceny. Oscylacje ceny wokół hipotetycznego poziomu równowagi wyznaczonego przez punkt e wskazują na stabilność modelu (decyduje o tym bezwzględna wartość ilorazu współczynników kierunkowych funkcji popytu i podaży). Sytuację tę ilustruje rys. 1.

Analiza dynamiki rynku wskazuje na jego oscylacje względem hipotetycznego poziomu równowagi rynkowej. Najpowszechniejsza definicja równowagi gospodarczej głosi, że rynek jest w równowadze, gdy istnieje równość pomiędzy popytem i podażą. Ta pozornie statyczna definicja w istocie jest oparta na założeniu o charakterze dynamicznym, postulującym istnienie sił, które oddziałują na takie zmienne ekonomiczne, jak ceny i ilości pewnych dóbr.

Trzecie równanie określane jest mianem postulatu cenowego Walrasa, w którym duża wartość parametru $c > 0$ świadczy o gwałtownym charakterze rynku, natomiast mała wartość parametru c określa tzw. rynek ospały. Parametr c nazywany jest parametrem dynamiki rynku [Panek 2000]. Wzrost lub spadek ceny w postulatcie Walrasa wyrażają odpowiednie nierówności:

$$\begin{aligned}p > 0 &\Leftrightarrow d(p_t) > s(p_t), \\p < 0 &\Leftrightarrow d(p_t) < s(p_t), \\a_d < 0, \quad a_s > 0, \quad b_d > b_s.\end{aligned}\tag{45}$$



Rys. 1. Model pajęczynowy – oscylacje tłumione

Źródło: [Klimczak 1998, s. 98].

Rynek jest zatem w równowadze dla ceny równowagi p_e : $d(p_e) = s(p_e)$, czyli $a_d p_e + b_d = a_s p_e + b_s$ lub $(a_d - a_s) p_e = b_s - b_d$, a stąd $p_e = \frac{b_s - b_d}{a_d - a_s}$.

Funkcja ceny w modelu Walrasa jest postaci [Panek 2000]:

$$p(t) = (p_0 - p_e) \exp[c(a_d - a_s)t] + p_e, \quad p(0) = p_0, \quad (46)$$

(jeżeli $p_0 = p_e$, to funkcja $p(t) = p_e = \text{const}$). Jeśli współczynniki kierunkowe liniowych funkcji popytu i podaży spełniają nierówności: $a_d < 0$, $a_s > 0$ i $c > 0$, to – oczywiście – $c(a_d - a_s) < 0$. Wówczas $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp[c(a_d - a_s)t] = 0$, zatem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = (p_0 - p_e) \lim_{t \rightarrow \infty} \exp[c(a_d - a_s)t] + p_e = 0. \quad (47)$$

W modelu rynku zrównoważonego ($d(p_e) = s(p_e)$) powyższa relacja graniczna ma następującą interpretację ekonomiczną. Jeśli tylko cena odbiegała w pewnym okresie od określonego poziomu równowagi $p_0 \neq p_e$, to w wyniku oddziaływania rynku będzie ona samoczynnie dążyć do tego poziomu.

Funkcja ceny (46) w modelu Walrasa jest rozwiązaniem równania różniczkowego [Panek 2000; Arnold 1983]

$$p'(t) = c(a_d - a_s) p(t) + c(b_d - b_s), \quad (48)$$

przy warunkach

$$\begin{aligned} a &= c(a_d - a_s) < 0, \\ b &= c(b_d - b_s) > 0, \\ p_e &= -\frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (49)$$

Nierówności powyższe są spełnione dla tzw. rynku typowego, tzn. niezależnie od tego, jak duża jest różnica pomiędzy p_0 a p_e , spełniona jest równość graniczna $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_e$, tak więc cena wytrącona z poziomu równowagi p_e powraca w czasie do tego samego poziomu – wykazując tym samym „stabilną dynamikę”.

Założmy teraz, że istnieją funkcje $u(t)$ i $v(t)$, które są rozwiązaniami równania różniczkowego $p'(t) = ap(t) + b$ z warunkami brzegowymi $p(0) = u_0$, $v(0) = v_0$:

$$\begin{aligned} u(t) &= (u_0 - p_e) \exp[c(a_d - a_s)t] + p_e, \\ v(t) &= (v_0 - p_e) \exp[c(a_d - a_s)t] + p_e. \end{aligned} \quad (50)$$

Bezwzględna różnica tych funkcji równa jest

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= |(u_0 - p_e) \exp[c(a_d - a_s)t] - (v_0 - p_e) \exp[c(a_d - a_s)t]| = \\ &= |u_0 - v_0| \exp[c(a_d - a_s)t] \end{aligned} \quad (51)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_0 - v_0| \exp[c(a_d - a_s)t] = 0. \quad (52)$$

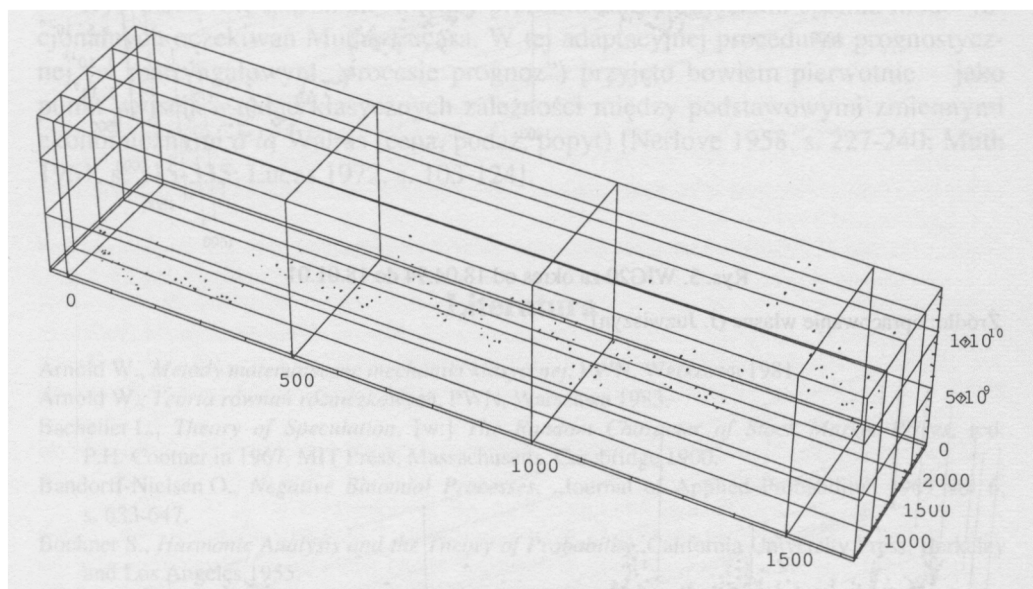
Zatem każde dwa rozwiązania wraz „z upływem czasu zbliżają się do siebie” (różnica pomiędzy wartościami tych funkcji dla tzw. dużych t maleje do zera). Prawdziwe jest też jednostajne (słabe) oszacowanie tej różnicy

$$|u(t) - v(t)| = |u_0 - v_0| \exp[c(a_d - a_s)t] \leq |u_0 - v_0| \quad \forall t \geq 0 \quad (53)$$

(różnica wartości funkcji $u(t_0)$ i $v(t_0)$ w punkcie początkowym determinuje zakres ich zróżnicowania na całej dodatniej półosi czasowej). Dodatkowo należy zauważyć, że jeśli $a = c(a_d - a_s) > 0$ (przypadek rynku nietypowego), to dla $p_e \neq p_0$ nie istnieje skończona granica $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$. Natomiast nawet niewielka róż-

nica pomiędzy u_0 i v_0 spowoduje znaczący wzrost wartości bezwzględnej różnicy $|u(t) - v(t)|$, gdy $t \rightarrow \infty$. W takiej sytuacji rynek będzie wykazywał bardzo dużą dynamikę cen.

Empiryczna analiza **trójwymiarowych** modeli giełdowych umożliwia pełniejszy – niż w metodologii standardowej – opis dynamiki rynku [Juzwiszyn 1999; 2001]. Ruch ten jest ruchem spiralnym. Występuje on we wszystkich przebadanych indeksach giełdowych z WGPW. Spiralna dynamika tego ruchu jest najlepszym uzasadnieniem tak częstego pojawiania się współczynników Fibonacciego na giełdach. Być może trójwymiarowa spirala jest również naturalną formą opisu ewolucji otaczającego nas rynku globalnego. Potwierdzeniem trójwymiarowego spiralnego charakteru giełdowych ruchów są kinematyczne trajektorie indeksów notowanych na GPW w Warszawie [Mantegna, Stanley 1996; 1997].

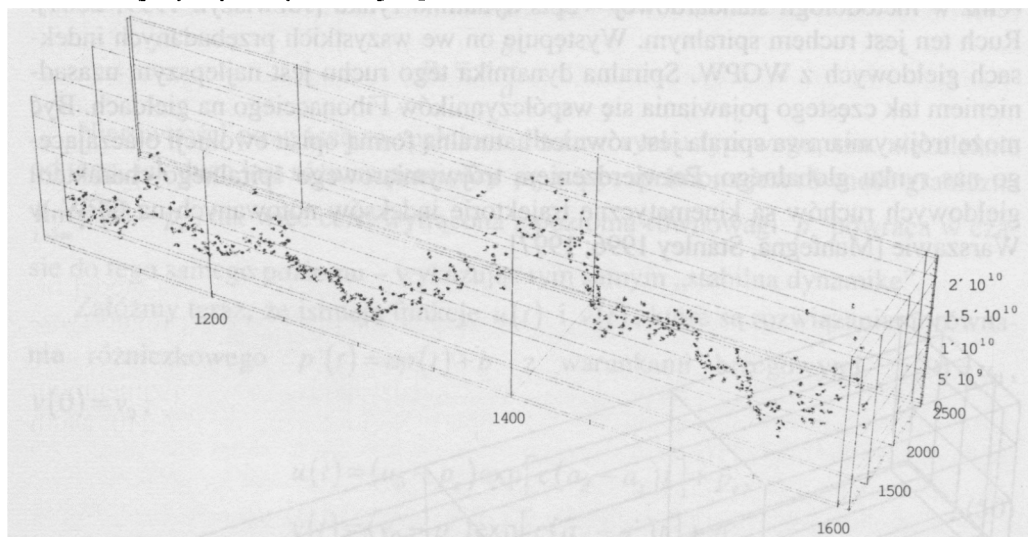


Rys. 2. WIG20 za okres od 18.04.94 do 18.01.01

Źródło: opracowanie własne (J. Juzwiszyn).

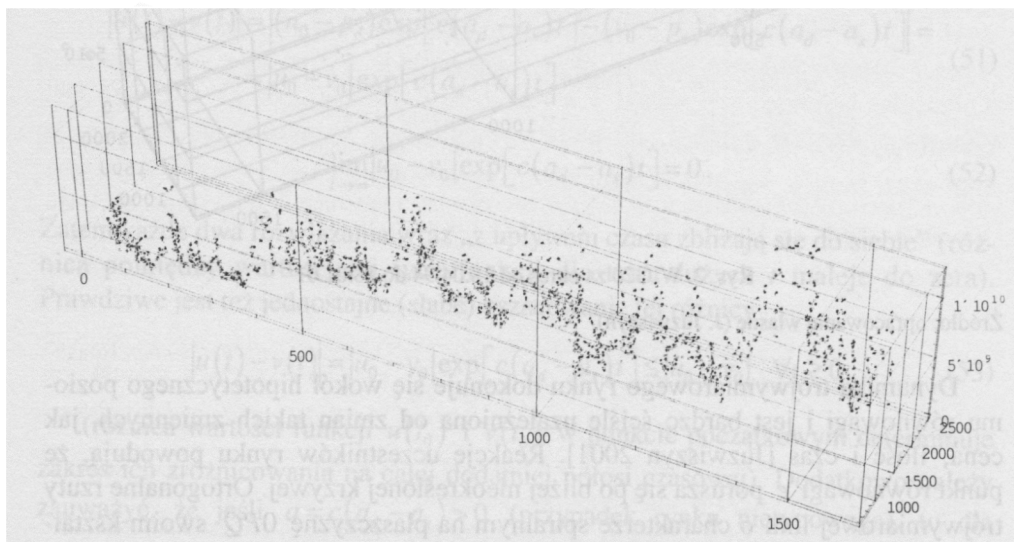
Dynamika trójwymiarowego rynku dokonuje się wokół hipotetycznego poziomu równowagi i jest bardzo ściśle uzależniona od zmian takich zmiennych, jak cena, ilość i czas [Juzwiszyn 2001]. Reakcje uczestników rynku powodują, że punkt równowagi e porusza się po bliżej nieokreślonej krzywej. Ortogonalne rzuty trójwymiarowej linii o charakterze spiralnym na płaszczyznę OPQ swoim kształtem przypominają tzw. spiralę Archimedesesa, której uproszczeniem jest model pajęczynowy. Natomiast rzuty ortogonalne wspomnianej spiralnej linii na płaszczyznę

OTP lub *OTQ* są niczym innym, jak tylko tzw. dwuwymiarowymi funkcjami segmentowymi (w najprostszym przypadku poligonalnymi [Smoluk 2001]). Potwierdzeniem trójwymiarowego spiralnego charakteru giełdowych ruchów są dane z WIG20 za okres od 18.04.94 do 18.01.01 przedstawione w układzie *PQT* (opracowane przy wykorzystaniu programu Mathematica v. 3.0) [Drwal i in. 1998].



Rys. 3. WIG20 za okres od 18.04.94 do 18.01.01

Źródło: opracowanie własne (J. Juzwiszyn).



Rys. 4. WIG20 za okres od 18.04.94 do 18.01.01

Źródło: opracowanie własne (J. Juzwiszyn).

7. Zakończenie

W artykule przedstawiono kilka stochastycznych modeli dynamiki ubezpieczeń i finansów oraz model deterministyczny – spiralnej dynamiki rynków finansowych. Wyróżnioną pozycję zajmują – z naturalnych powodów – procesy punktowe (losowe) oraz martyngały. Od dawna panuje konsensus w kwestii stochastycznej natury zjawisk przyrodniczych i ekonomicznych (przynajmniej w sferze modelowej). Z drugiej strony nonsensowne byłoby ignorowanie podstawowych, zweryfikowanych po wielokroć, zależności ekonomicznych i wymyślania *ad hoc* „nowych praw ekonomii” (na podstawie odpowiednio skompilowanych kolekcji danych). Interesujące jest natomiast to stadium badań, w którym rozważa się różne warianty tzw. rozsądnej formalizacji ewoluujących, nie rozpoznanych jeszcze do końca zjawisk (być może – z natury – efemerycznych).

Być może rolę „łącznika” między prezentowanymi ujęciami spełnia model racjonalnych oczekiwań Mutha-Lucasa. W tej adaptacyjnej procedurze prognostycznej (w martyngałowym „procesie prognoz”) przyjęto bowiem pierwotnie – jako punkt wyjścia – układ klasycznych zależności między podstawowymi zmiennymi ekonomicznymi *à la* Walras (cena, podaż, popyt) [Nerlove 1958, s. 227-240; Muth 1961, s. 315-335; Lucas 1972, s. 103-124].

Literatura

- Arnold W., *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa 1981.
- Arnold W., *Teoria równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1983.
- Bachelier L., *Theory of Speculation*, [w:] *The Random Character of Stock Market Prices*, red. P.H. Cootner in 1967, MIT Press, Massachusetts, Cambridge 1900.
- Bandorff-Nielsen O., *Negative Binomial Processes*, „Journal of Applied Probability” 1969 vol. 6, s. 633-647.
- Bochner S., *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, California University Press, Berkeley and Los Angeles 1955.
- Bojdecki T., *Martyngały z czasem dyskretnym*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1976.
- Carolan C., *Kalendarz spiralny*, WIG Press, Warszawa 1996.
- Chow Y.S., Robbins H., Siegmund D., *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*, Houghton Miffling Co., Boston-New York 1971.
- Clark P.K., *A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices*, „Econometrica” 1973 vol. 41, s. 135-155.
- Dassios A., Embrechts P., *Martingales and Insurance Risk*, „Communications in Statistics – Stochastic Models” 1989 vol. 5, s. 181-217.
- Davis M.H.A., *Piecewise – Deterministic Markov Processes: a General Class of Nondiffusion Stochastic Models*, „Journal of the Royal Statistical Society” Series B, 1984 vol. 46, s. 353-388.
- Doob J.L., *Stochastic Processes*, Wiley and Sons, New York 1954.

- Doob J.L., *What is a Martingale?*, „American Mathematical Monthly” 1971 vol. 76, s. 451-463.
- Drwal G., Grzymkowski R., Kapusta Z., Słota D., *Mathematica 3.0/2.2*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1998.
- Elliott R., *The Wave Principle*, Financial World, New York 1939.
- Embrechts P., Schmidli H., *Modelling of Extremal Events in Insurance and Finance*, Zürich Operational Research – Mathematical Methods Operational Research, vol. 39, Zürich 1994, s. 1-34.
- Fama E., *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, „Journal of Finance” 1970 vol. 25, s. 384-418.
- Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. T. 2, PWN, Warszawa 1969.
- Fischer R., *Liczby Fibonacciego na giełdzie*, WIG Press, Warszawa 1996.
- Forst A., Prechter R., *Teoria fal Elliotta*, WIG Press, Warszawa 1995.
- Frisch U., *Turbulence*, University Press, Cambridge 1995.
- Gerber H., *Games of Survival with Discrete and Continuous – Income Processes*, Zürich Operational Researches, vol. 20, 1972, s. 37-45.
- Gerber H., *Martingales in Risk Theory*, „Mitteilungen der Schweizerischen Vereinigung der Versicherungsmathematiker” 1973 vol. 73, s. 205-216.
- Gerber H., *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Huebner Foundation for Insurance Education, Philadelphia 1979.
- Ghyka M., *Złota liczba*, Universitas, Kraków 2001.
- Gichman I.I., Skorochod A.W., *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1968.
- Grandell J., *Doubly Stochastic Poisson Processes*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.
- Harrison M., *Ruin Problems with Compounding Assets*, „Journal of Stochastic Processes and their Applications” 1977 vol. 5, s. 67-79.
- Hiai F., Tsukada M., *Strong Martingale Convergence of Generalized Conditional Expectations on von Neuman Algebras*, „Transactions of the American Mathematical Society” 1984 vol. 282, s. 791-799.
- Hiai F., Umegaki H., *Integrals, Conditional Expectations and Martingales of Multivalued Functions*, „Journal of Multivariable Analysis” 1977 vol. 7, s. 149-182.
- Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, PWN, Warszawa 1996.
- Janicki A., Weron A., *Simulation and Chaotic Behavior of α -stable Stochastic Processes*, Marcel Dekker, Inc., New York 1994.
- Juzwiszyn J., *Ekonometryczna istota fal Elliotta*, Wyd. AE, Wrocław 1999.
- Juzwiszyn J., *O obrotach sfer finansowych*, „Ekonomia Matematyczna” 2001 nr 5.
- Karandikar R.L., Rachev S.T., *A Generalized Binomial Model and Option Pricing Formulae for Subordinated Stock-price Processes*, „Probability and Mathematical Statistics” 1995 vol. 15, s. 427-447.
- Kingman J.F.C., *On Double Stochastic Poisson Processes*, Proc. Camb. Phil. Soc. 1964 nr 60, s. 923-930, Cambridge 1964.
- Klimczak B., *Mikroekonomia*, Wyd. AE, Wrocław 1998.
- LeRoy S.F., *Efficient Capital Markets and Martingales*, „Journal of Economic Literature” 1989 vol. 27, s. 1583-1621.
- Lucas R.E., *Expectations and the Neutrality of Money*, „Journal of Economic Theory” 1972 vol. 4, s. 103-124.
- Lundberg F., *Approximerad Framställning of Sanolikhetsfunktioner. Återförsäkring of Kollektivrisker*, Akademisk handling, Uppsala 1903.
- Łyko J., *Równowaga rynków finansowych*, „Ekonomia Matematyczna” 1999 nr 3.

- Mantegna R., Stanley H., *Turbulence and Financial Markets*, Nature, Cambridge 1996.
- Mantegna R., Stanley H., *Stock Market Dynamics and Turbulence*, Physica, Cambridge 1997.
- Mantegna R., Stanley H., *Ekonoofizyka – wprowadzenie*, PWN, Warszawa 2001.
- Mayer P.A., *Wierojatnosti i potencjały*, MIR, Moskwa 1973.
- Murphy J., *Analiza techniczna*, WIG Press, Warszawa 1995.
- Musiela M., Rutkowski M., *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1997.
- Muth J., *Rational Expectations and the Theory of Price Movements*, „Econometrica” 1961 vol. 25, s. 315-335.
- Nerlove M., *Adaptive Expectations and Cobweb Phenomena*, „Quarterly Journal of Economics” 1958 vol. 73, s. 227-240.
- Panek E., *Ekonomia matematyczna*, Wyd. AE, Poznań 2000.
- Panjer H.H., *Models in Risk Theory*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics vol. 35, American Math. Society, New York 1986.
- Plummer U., *Psychologia rynków finansowych u źródeł analizy technicznej*, WIG Press, Warszawa 1995.
- Revuz D., Yor M., *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1998.
- Robbins H., *The Empirical Bayes Approach to Statistics*, Proc. of the Third Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability vol. I, s. 157-164, University of California Press, Berkeley 1956.
- Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Chichester-New York-Weinheim-Brisbane-Singapore-Toronto 1998.
- Rybicki W., *Martyngały matematyki finansowej i ubezpieczeniowej*, „Ekonomia Matematyczna” 1998 nr 1.
- Rybicki W., *Procesy stochastyczne w matematyce ubezpieczeniowej*, „Przegląd Statystyczny” 1995 nr 42, s. 237-247.
- Rybicki W., *Matematyczne modele dynamiki ryzyka*, [w:] *Modele aktuarialne*, red. W. Ostasiewicz, Wyd. AE, Wrocław 2000.
- Sato K.-I., *Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, University Press, Cambridge 1999.
- Scalora F., *Abstract Martingale Convergence Theorems*, „Pacific Journal Mathematics” 1961 nr 11, s. 347-374.
- Serfozo R.F., *Conditonal Poisson Processes*, „Journal of Applied Probability” 1972 vol. 9, s. 288-302.
- Serfozo R.F., *Processes with Conditional Stationary Independent Increments*, „Journal of Applied Probability” 1972 vol. 9, s. 303-315.
- Serfozo R.F., *Point Processes*, [w:] *Stochastic Models. Handbooks in OR & MS*. Vol. 2, Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), Amsterdam 1990.
- Sikorski R., *Funkcje rzeczywiste*. T. I, PWN, Warszawa 1958.
- Smoluk A., Zamorski J., *Współczynniki warunków ekstremalności uogólnionych funkcji spiralnych*. Roczniki PTM, Seria I, Prace Matematyczne, Warszawa 1962.
- Smoluk A., *Uwagi o równowadze*, „Ekonomia Matematyczna” 2001 nr 5.
- Szirjajew A.N., Jacod J., *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo 1987.
- Szirjajew A.N., Kabanow J.M., Kramkow D.O., Mielnikow A.W., *K teorii rasczotow opcjonow ewropejskiego i amerykanskiego tipow. I Diskretnoje wremija*. „Teoria wserojatnostiej i jejo primienienija” 1994 vol. 39, s. 23-79.
- Szulga J., *Regularity of Banach Lattice Valued Martingales*, „Colloquium Mathematicum” 1979 vol. 41, s. 303-312.

- Taylor H., *Martingales and Random Walks*, [w:] *Stochastic Models. Handbooks in OR & M.S.* Vol. 2. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), Amsterdam 1990.
- Varian H., *Mikroekonomia*, PWN, Warszawa 1997.
- Walras L., *Elements of Pure Economics*, George Allen and Unwin, London 1954.
- Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, NT, Warszawa 1997.

SOME MODELS FROM THE AREA OF THE ACTUARIAL AND FINANCIAL MATHEMATICS

Summary

In the paper some formal models concerning dynamics of economic phenomena are considered. First of all we discuss random processes appearing in theoretical investigations of insurance and financial practical ("real") problems. We also consider some deterministic "rules of motion" known from economic theory. A slight modification of classic economic relations enables us to describe in new fashion fluctuations of crucial quantities characterizing financial markets.

We begin with discussing Poisson processes, Cox processes and their generalizations such as so called doubly stochastic processes. These processes play an important role in the insurance as well as in the financial mathematics (processes of calls with random intensity, randomized operational time, subordinated processes). Next we consider martingales as a models of "fair stochastic dynamics". At the same time we reveal (and report) their applications in insurance and finance. The final part of the article is devoted to microeconomic analysis of financial market (in deterministic setting – as mentioned above). We propose to use so called three dimensional spiral model of behavior of financial markets. It seems to generalize a classical cobweb model and logarithmic spiral on the plane as well as famous Elliot waves. This hypothesis has been formulated on the basis of time series analysis joined with computer simulations.