

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA  
WYDZIAŁ BUDOWNICTWA LĄDOWEGO I WODNEGO  
INSTYTUT GEOTECHNIKI I HYDROTECHNIKI

Raport ser. PRE nr 21/2000

---

mgr inż. Andrzej Batog

NOŚNOŚĆ GRANICZNA PODŁOŻA  
W PRZYPADKU ZAMKNIĘTYCH  
WARUNKÓW PLASTYCZNOŚCI

Praca doktorska

Promotor: prof. dr hab. inż. Ryszard J. Izbicki

Słowa kluczowe

mechanika gruntów  
nośność graniczna  
warunki plastyczności

Wrocław, październik 2000 r.

Autor pragnie złożyć gorące podziękowania Promotorowi pracy, Panu prof. dr hab. inż. Ryszardowi J. IZBICKIEMU, dzięki którego doświadczeniu, inspiracji i pomocy praca zyskała niniejszy kształt. Autor składa również szczerze podziękowania Pracownikom Instytutu Geotechniki i Hydrotechniki PWr, których zainteresowanie postępami pracy oraz życzliwe uwagi stanowiły dodatkową pomoc i zachętę.



## SPIS TREŚCI

1. Wstęp
  - 1.1 Cel pracy
  - 1.2 Zakres pracy
2. Przegląd dotychczasowych rozwiązań
  - 2.1 Warunki stanu granicznego
  - 2.2 Metody obliczania nośności podłoża
  - 2.3 Modele stanu krytycznego
  - 2.4 Modele typu „cap”
3. Koncepcja warunku stanu granicznego
  - 3.1 Liniowy, zamknięty warunek stanu granicznego z niesymetryczną rotacją powierzchni plastyczności
  - 3.2 Przypadki szczególne
    - 3.2.1 Warunek symetryczny względem osi ciśnienia hydrostatycznego
    - 3.2.2 Warunek symetryczny względem prostej  $K_0$
    - 3.2.3 Warunek uwzględniający anizotropię naprężeń mniej ściskających
4. Ocena dolna i górna nośności granicznej
  - 4.1 Prawo płynięcia
  - 4.2 Twierdzenia nośności granicznej
  - 4.3 Funkcja dysypacji
  - 4.4 Moc dysypacji energii wzdłuż linii nieciągłości prędkości
  - 4.5 Równania mocy dysypacji
    - 4.5.1 Moc dysypacji dla klasycznej i zamykającej części warunku stanu granicznego
    - 4.5.2 Moc dysypacji w strefie przejściowej
  - 4.6 Moc dysypacji energii w przypadku ciągłego pola prędkości
  - 4.7 Nośność graniczna
    - 4.7.1 Ocena dolna nośności granicznej
    - 4.7.2 Ocena górna nośności granicznej
  - 4.8 Przykłady obliczeń
5. Rozwiązanie ściśle nośności granicznej – metoda charakterystyk
  - 5.1 Metoda charakterystyk
  - 5.2 Związki dla płaskiego stanu odkształcenia
    - 5.2.1 Pole naprężeń
    - 5.2.2 Pole prędkości

- 5.3 Związki dla osiowo- symetrycznego stanu odkształcenia
  - 5.3.1 Pole naprężeń
  - 5.3.2 Pole prędkości
- 5.4. Równania różnicowe metody charakterystyk
  - 5.4.1 Równania różnicowe pola naprężeń dla płaskiego stanu odkształcenia
  - 5.4.2 Równania różnicowe pola prędkości dla płaskiego stanu odkształcenia
  - 5.4.3 Równania różnicowe dla osiowo- symetrycznego stanu odkształcenia
- 5.5 Budowa pola naprężenia
  - 5.5.1 Schemat pola naprężenia
  - 5.5.2 Pole naprężenia w strefie AFE
  - 5.5.3 Pole naprężenia w strefie AED
  - 5.5.4 Pole naprężenia w strefie ADC
  - 5.5.5 Pole naprężenia w strefie ACB
  - 5.5.6 Pole naprężenia w strefie ABA
- 5.6 Budowa pola prędkości
- 5.7 Obliczenie nośności podłoża
- 5.8 Przykłady rozwiązań
  - 5.8.1 Metoda numeryczna
  - 5.8.2 Podstawowe typy rozwiązań
  - 5.8.3 Rozwiązania dla płaskiego stanu odkształcenia
    - 5.8.3.1 Rozwiązania z wyłącznymi efektami zagęszczenia ośrodka - nośność graniczna słabego i ściśliwego podłoża
    - 5.8.3.2 Rozwiązania ze zmienną dylatacją
    - 5.8.3.3 Rozwiązania przejściowe, prowadzące do rozwiązania klasycznego
  - 5.8.4 Rozwiązania dla osiowo- symetrycznego stanu odkształcenia i naprężenia
  - 5.8.5 Rozwiązania szczególne
    - 5.8.5.1 Rozwiązanie ze strefą stałego naprężenia pod fundamentem
    - 5.8.5.2 Rozwiązanie z ograniczoną strefą zagęszczenia pod fundamentem
    - 5.8.5.3 Rozwiązanie dla warunku symetrycznego względem prostej  $K_0$
- 6. Sprężysto- plastyczna analiza nośności
  - 6.1 Model obliczeniowy w analizie sprężysto- plastycznej
  - 6.2 Wyniki obliczeń nośności

## 7. Uwagi i wnioski końcowe

## Literatura

## 1. WSTĘP

### 1.1 Cel pracy

Zagadnienie określenia nośności granicznej podłoża obciążonego fundamentem bezpośrednim, ze względu na swoje praktyczne znaczenie, jest jednym z najważniejszych w geotechnice. W praktyce inżynierskiej wciąż szeroko stosowane jest klasyczne i stosunkowo proste rozwiązanie Terzaghiego [69] (bądź jego dalsze modyfikacje). Oparte jest ono na modelu ciała sztywno- idealnie plastycznego, ze stowarzyszonym prawem płynięcia i warunkiem stanu granicznego Coulomba- Mohra [14]. Rozwiązanie Terzaghiego jest jednakże pewnymi niedoskonałościami. Warunki stanu granicznego otwarte od strony naprężeń ściskających, wykorzystywane przy tworzeniu modeli sztywno- i sprężysto- idealnie plastycznych charakteryzują się stosunkowo ograniczoną zdolnością do poprawnego opisu istotnych właściwości gruntów.

Najistotniejsze odstępstwo modeli klasycznych od wyników obserwacji polega na przewidywaniu nierealistycznego rozluźniania się ośrodka podczas plastycznego płynięcia. Wynikiem przyjęcia stowarzyszonego prawa płynięcia jest stan permanentnego rozluźnienia ośrodka w całym obszarze plastycznego płynięcia. Należy zauważyć, iż współczesne teorie stanów krytycznych operują zamkniętymi warunkami plastyczności, które uwzględniają fakt, iż odkształcenia plastyczne związane są nie tylko z rozluźnianiem ośrodka gruntowego, ale również z jego zagęszczaniem por. Derski, Izbicki, Kisiel, Mróz [17].

Modele klasyczne nie uwzględniają również wyraźnie zauważalnego w wielu badaniach naturalnych gruntów wpływu anizotropii pierwotnej (typu  $K_0$ ), związanej z odkładaniem się osadów pierwotnych i ich konsolidacji w warunkach stanu naprężenia zbliżonego do stanu edometrycznego m. in. przedstawione przez Tavenasa i Leronuila [67], Dyera, Jamiolkowskiego i Lancellottę [19]. Wpływ anizotropii pierwotnej manifestuje się asymetrią (rotacją) przekroju powierzchni plastyczności w przestrzeni badań trójosiowych względem osi hydrostatycznej, wysmukleniem dewiatorowego przekroju powierzchni plastyczności, por. Banerjee i Yousif [2], Whittle [71], oraz tendencją do ustalania się objętości w stadium idealnego płynięcia materiału.

Skutkiem nieuwzględnienia powyższych faktów mogą być błędy w sztywno- i sprężysto- plastycznych analizach zagadnień nośności i stateczności, szczególnie gdy w obszarze deformacji w rzeczywistości występują strefy zagęszczenia.

Jednym z dotychczasowych sposobów zmniejszenia skutków nierealistycznego wzrostu objętości było stosowanie niestowarzyszonego prawa płynięcia. W najprostszym podejściu powierzchnie plastyczności i potencjału plastycznego opisywane są tą samą funkcją np. Jenike i Shield [39], przy parametrach zróżnicowanych tak, by nachylenie tworzących powierzchnie potencjału do osi hydrostatycznej było małe, a w skrajnym przypadku zerowe, por. Dembicki [16], czy Sawicki i Leśniewska [59].

Podstawą niniejszej pracy jest założenie, iż drogą do wyeliminowania powyższych mankamentów sztywno- idealnie plastycznych modeli gruntu jest wprowadzenie nowej postaci warunku plastyczności: liniowego, zamkniętego od strony naprężeń ściskających oraz asymetrycznie zorientowanego względem osi ciśnienia hydrostatycznego. Wartość ciśnienia prekonsolidacji wyznaczać będzie wielkość ograniczającego zamknięcia warunku. Należy dodać, że kształt tak zdefiniowanej powierzchni plastyczności nawiązuje do doświadczalnie zidentyfikowanej charakterystyki materiałowej gruntu tzw. granicznej powierzchni stanu, będącej kombinacją powierzchni Hvorsleva i Roscoe [26]. Ponadto założono, iż nośność graniczna wyznaczana w oparciu o taki model ośrodka będzie związana z początkowym położeniem powierzchni plastyczności.

Zastosowanie tak zdefiniowanej postaci warunku w rozwiązywaniu problemów brzegowych nośności granicznej ma pozwolić na otrzymanie wyników, które będą opisywać

pole deformacji w sposób zbliżony do obserwowanego w rzeczywistości (występowanie zarówno efektów rozluźnienia jak i zagęszczenia ośrodka) oraz uwzględniać warunki konsolidacji podłoża, czyli po części wpływ historii geologicznej podłoża na jego nośność.

W niniejszej pracy postawiono sobie osiągnięcie następujących celów:

- sformułowanie i przeanalizowanie różnych wariantów zamkniętego warunku plastyczności dla ciał izotropowych i anizotropowych,
- zbudowanie rozwiązań dla oceny dolnej i górnej nośności granicznej podłoża w oparciu o bilans mocy dysypowanych dla ośrodka nieważkiego i ważkiego w płaskim stanie odkształcenia przy przyjęciu nowego warunku stanu granicznego,
- wykazanie, że metoda charakterystyk jest metodą efektywną uzyskiwania rozwiązań również w przypadku zamkniętych warunków stanu granicznego,
- zbudowanie rozwiązania ścisłego w oparciu o metodę charakterystyk zarówno dla ośrodka nieważkiego jak i ważkiego w warunkach płaskiego stanu odkształcenia i osiowej symetrii,
- zreformowanie w oparciu o nowy warunek metody obliczania nośności granicznej, tak by zapewniała pełną ciągłość rozwiązań otrzymanych dla różnych typów budowy pola deformacji, zależnych od wartości ciśnienia prekonsolidacji,
- przeanalizowanie zmienności uzyskanych rozwiązań w zależności od wartości parametrów przyjętego warunku stanu granicznego,
- wykazanie poprawności i przydatności rozwiązań sztywno- idealnie plastycznych bazujących na początkowej powierzchni plastyczności wobec bardziej zaawansowanych rozwiązań sprężysto- plastycznych z zastosowanym prawem wzmocnienia, w których następuje rozszerzenie ograniczającej części powierzchni plastyczności.

## 1.2 Zakres pracy

Treść pracy zawierająca się w siedmiu rozdziałach obejmuje swoim zakresem

- przegląd istniejących sztywno- oraz sprężysto- plastycznych rozwiązań nośności granicznej oraz warunków stanu granicznego w nich stosowanych,
- przegląd zastosowań metody charakterystyk w rozwiązywaniu zagadnień inżynierskich w geotechnice,
- koncepcję nowego, zamkniętego warunku stanu granicznego wraz z dyskusją jego wariantów,
- dolną i górną ocenę nośności granicznej podłoża dla zamkniętego warunku stanu granicznego wraz z przykładami obliczeniowymi,
- rozwiązanie ścisłe nośności granicznej otrzymane przy zastosowaniu metody charakterystyk, wraz z bardzo obszernym studium zmienności rozwiązań dla różnych postaci przyjętego warunku stanu granicznego i wariantów budowy pola deformacji,
- porównanie otrzymanych rozwiązań sztywno- plastycznych z rozwiązaniami sprężysto- plastycznymi i wynikami badań modelowych, na podstawie których wykazano przydatność oraz poprawność proponowanych rozwiązań.

Pracę kończy spis wykorzystanej literatury.

## 2. PRZEGLĄD DOTYCHCZASOWYCH ROZWIĄZAŃ

W literaturze światowej można znaleźć ogromną ilość prac dotyczących zagadnienia określenia nośności granicznej podłoża obciążonego fundamentem bezpośrednim. Problem ten z uwagi swoje naukowe, inżynierskie jak i ekonomiczne znaczenie, jest jednym z ważniejszych, które jest wciąż w geotechnice rozważane oraz pogłębiane. Od szeregu lat wielu badaczy pracuje nad udoskonaleniem metod obliczeniowych, jak i modeli opisujących zachowanie gruntu, w celu uzyskania najbardziej zgodnej z rzeczywistością wartości nośności granicznej podłoża.

Przedstawione jako jedne z pierwszych klasyczne rozwiązania Prandtl'a [53] oraz Terzagiego [69], rozwiązania przedstawione w monografii W. W. Sokołowskiego [66] jak i przykłady liczbowe zawarte w książce E. Dembickiego [16] ograniczały się do rozpatrywania tylko statyki stanu granicznego. Dopiero pod koniec lat 60-tych i na początku 70-tych więcej uwagi poświęcono polu prędkości tychże rozwiązań np. w pracach Szczepińskiego [69] czy Izbickiego i Mroza [37].

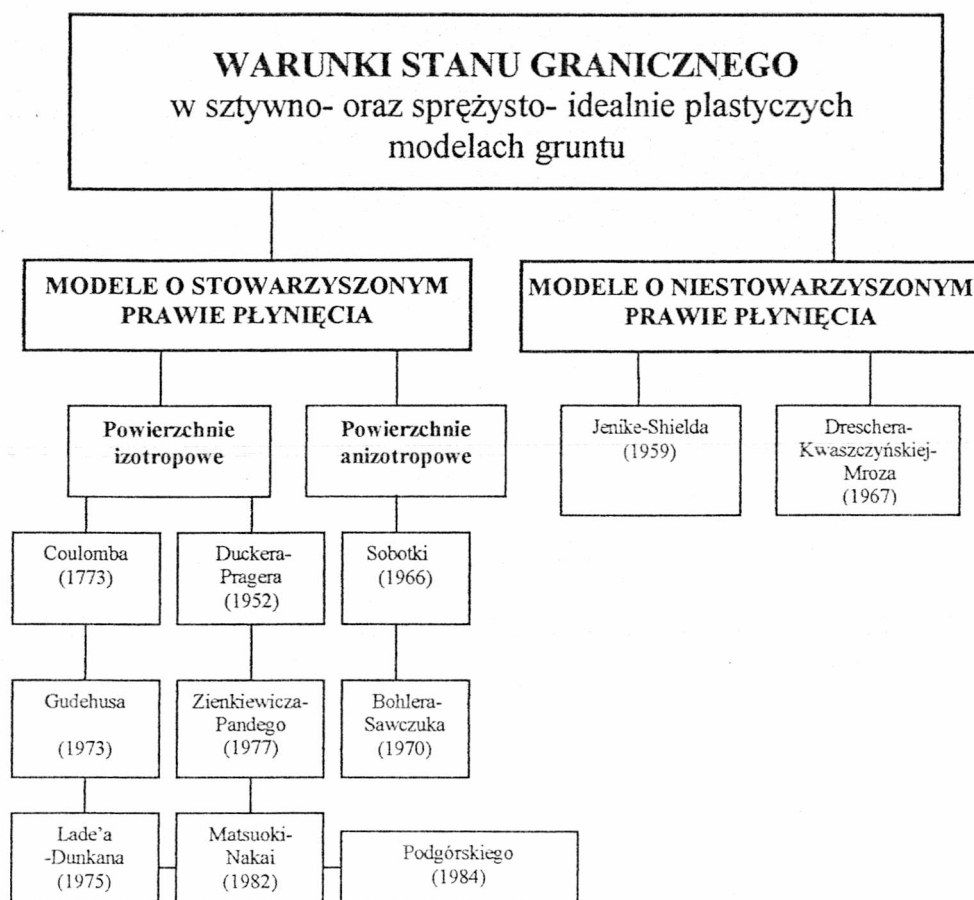
W szeregu prac powstałych w ciągu ostatnich kilku dekad zagadnienie nośności podłoża rozwijano wszechstronnie, co obejmowało zarówno:

- opracowywanie nowych metod obliczeniowych,
- polepszanie opisu zachowania się podłoża poprzez wprowadzanie nowych modeli gruntu,
- rozwój teorii wytrzymałościowych, decydujących m. in. o postaci warunku stanu granicznego,
- rozwój praw fizycznych, np. płynięcia, wzmocnienia, decydujących także o kształcie powierzchni plastyczności oraz sposobie jej zmian w procesie obciążania.

Trudnym zadaniem byłoby scharakteryzować wszystkie dotychczas stworzone metody obliczeniowe, modele gruntów czy prawa fizyczne mogące znaleźć zastosowanie w określaniu nośności granicznej podłoża. W celu przedstawienia historii ewolucji rozwiązań oraz kierunków ich poszukiwań wybrano tylko najistotniejsze, które stanowiły jakościowe punkty węzłowe nie tylko dla rozważanego zagadnienia ale i rozwoju całej geotechniki.

### 2.1 Warunki stanu granicznego

Najistotniejszym elementem rozwiązań jest warunek stanu granicznego, który opisuje taki stan obciążenia i naprężenia w ośrodku, dla którego zachodzi początek niestatecznego zniszczenia lub zaawansowanego płynięcia plastycznego, w wyniku czego rozpatrywany ośrodek staje się niezdolny do przeniesienia dodatkowych obciążeń. W większości metod obliczania nośności granicznej podłoża przyjmowano model ośrodka gruntowego sztywno idealnie- plastycznego ze stowarzyszonym prawem płynięcia, a do opisu stanu granicznego wykorzystywano warunek Coulomba- Mohra. Inne sztywno- oraz sprężysto- plastyczne modele gruntu o stowarzyszonym prawie płynięcia różnią się między sobą koncepcją (kształtem) powierzchni plastyczności warunku stanu granicznego oraz właściwościami sprężystymi ośrodka. W przypadku prawa niestowarzyszonego dodatkowy wyróżnik stanowi potencjał plastyczny  $G(\sigma')=0$ . Na rys. 1 przedstawiono za Gryczmańskim [23] klasyfikację warunków, sporządzoną pod kątem przyjętej koncepcji powierzchni plastyczności, bądź potencjału plastycznego.



Rys. 1 Klasyfikacja warunków stanu granicznego stosowanych w sztywno- i sprężysto- idealnie plastycznych modelach gruntu wg Gryczmańskiego [23]

### Warunek Coulomba- Mohra

W najstarszej hipotezie wytrzymałościowej, opublikowanej w 1773 r. przez Coulomba [14], przyjęto warunek stanu granicznego, w którym zniszczenie gruntu wywołuje obciążenie proporcjonalne do tarcia wewnętrznego, opisanego współczynnikiem  $\mu = \tan \varphi$ . Na płaszczyźnie naprężeń warunek opisuje prosta graniczna, dana równaniem:

$$\tau_f = \mu \sigma_n + c = \tan \varphi \sigma_n + c, \quad (1)$$

gdzie:  $\tau_f$  – wytrzymałość gruntu na ścinanie,  
 $\sigma_n$  – naprężenie normalne,  
 $\varphi$  – kąt tarcia wewnętrznego,  
 $c$  – spójność.

W latach 20-tych mijającego wieku K. Terzaghi [72] do opisu naprężeń wprowadził zasadę naprężeń efektywnych. Na podstawie wyników badań gruntów nasyconych uznał, iż reakcją gruntu na działające na brzegu obszaru elementarnego obciążenie wywołujące naprężenie całkowite  $\sigma$  jest suma naprężeń efektywnych  $\sigma'$  oraz ciśnienie wody w porach  $u_w$ . Pozwoliło to



na modyfikację wzoru (1), otrzymując warunek stanu granicznego wyrażony w naprężeniach efektywnych. Modyfikacja ta jest nazywana warunkiem Coulomba- Hvorsleva:

$$\tau_f = \tan \varphi' \sigma'_n + c', \quad (2)$$

gdzie:  $\sigma'$  – efektywne naprężenie normalne,  
 $\varphi'$  – efektywny kąt tarcia wewnętrznego,  
 $c'$  – spójność efektywna.

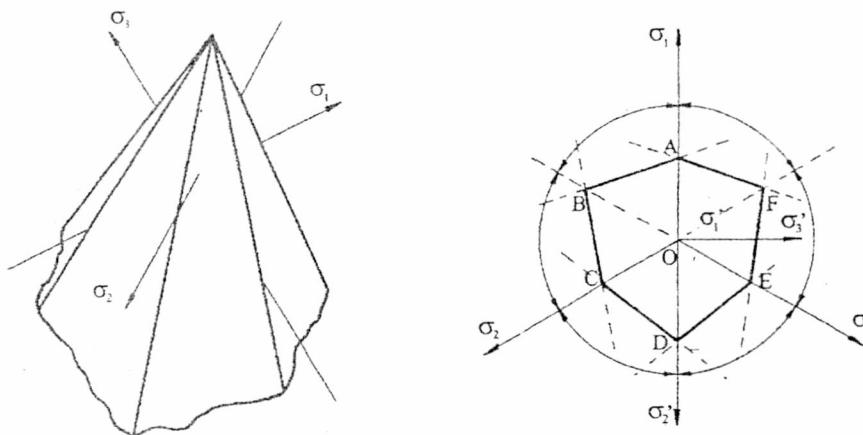
Powyższe równanie opisuje warunek w przekroju izotropowym za pomocą prostej granicznej. Natomiast warunek w przestrzeni naprężeń głównych opisuje powierzchnia Coulomba- Mohra w postaci ostrosłupa o przekroju różnokątnego sześcioboku (rys. 2), dana równaniem warunku Coulomba- Mohra, wyrażonym w niezmiennikach stanu naprężenia  $p'$ ,  $q$  i  $\theta$ :

$$F(p', q, \theta) = p' \sin \varphi' - \frac{1}{3} q (\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi') + c' \cos \varphi' = 0, \quad (3)$$

gdzie:  $p'$  – naprężenie średnie,  $p' = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)$ ,

$q$  – intensywność naprężenia,  $q = q' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ ,

$\theta$  – kąt Lodego,  $\theta = \theta' = \arcsin \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\sigma'_2 - \sigma'_1 - \sigma'_3}{\left[ (\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}$ .



Rys. 2 Warunek Coulomba- Mohra w przestrzeni naprężeń głównych i jego przekrój izotropowy

#### Warunki Tresci i Hubera- Misesa

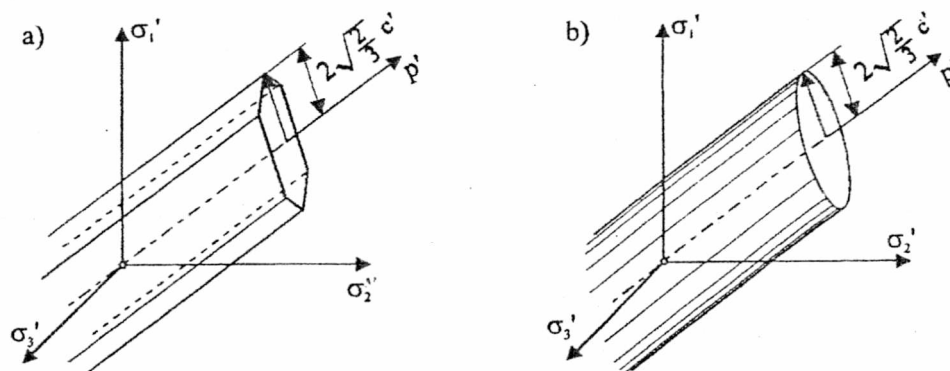
Dla ciała sprężysto- idealnie plastycznego przy  $\varphi = 0$  do opisu stanu granicznego znajduje zastosowanie warunek Tresci (rys. 3), którego izotropową powierzchnię plastyczności opisuje równanie:

$$F = \frac{1}{\sqrt{3}} q \cos \theta - c' = 0 \quad (4)$$

oraz Hubera- Misesa [31]:

$$F = q - 2c' = 0, \quad (5)$$

gdzie oznaczenia jak we wzorach (2) i (3).



Rys. 3 Warunek a) Tresca oraz b) Hubera- Misesa

### Warunek Druckera- Pragera

W obliczeniach numerycznych stosunkowo częściej niż warunek Coulomba- Mohra znajduje zastosowanie przedstawiony w 1957 r. warunek Druckera- Pragera [18]. Wynika to głównie z łatwości jego użycia w procedurach numerycznych. Powierzchnię graniczną tego warunku opisuje równanie:

$$F(p', q, \theta) = M p' - q + H_1 = 0, \quad (6)$$

gdzie:

$$M = \frac{6 \sin \varphi'}{3 - \sin \varphi'}, \quad H_1 = \frac{6c' \cos \varphi'}{3 - \sin \varphi'}.$$

W przestrzeni naprężeń głównych warunek dany jest stożkiem obrotowym, symetrycznym względem osi hydrostatycznej. Stożek ten może być również opisany na ostrosłupie warunku Coulomba- Mohra, bądź w niego wpisany, dla innych niż podane w (6) wartości parametrów  $M$  oraz  $H_1$ . Natomiast w przekroju izotropowym warunek Druckera- Pragera pokrywa się z warunkiem Coulomba- Mohra.

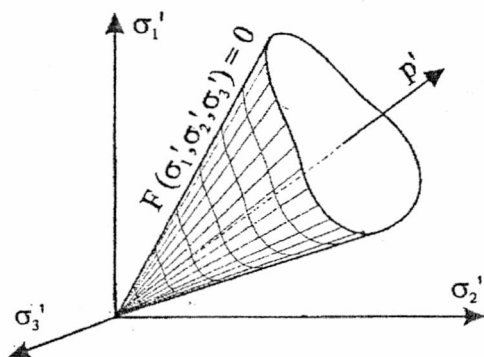
### Warunek Hvorsleva

Kolejne uogólnienie przyniosła w 1960 r. teoria Hvorsleva [32]. Opierając się na swoich badaniach oraz wcześniejszych pracach Terzagiego, które dotyczyły zmian porowatości w badaniach edometrycznych, Hvorslev uznał, iż o wytrzymałości gruntu, prócz wartości naprężenia efektywnego, decyduje również wskaźnik porowatości przy zniszczeniu. Warunek stanu granicznego uwzględniający to spostrzeżenie opisuje równanie:

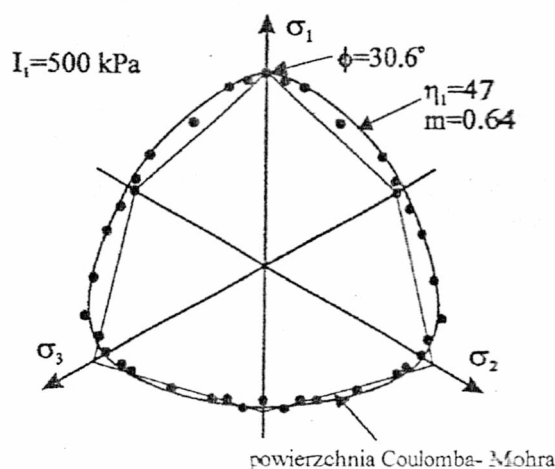
$$\tau_f = \tan \varphi_e' \sigma_n' + c_e', \quad (7)$$

gdzie:  $\varphi_e'$ ,  $c_e'$  – właściwy kąt tarcia wewnętrznego i właściwa spójność.





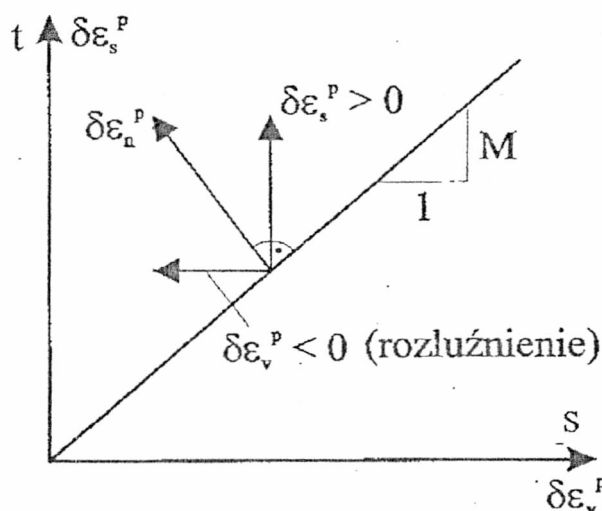
Rys. 4 Typowa powierzchnia plastyczności dla sztywno-idealnie plastycznego modelu gruntu



Rys. 5 Przekrój dewiatorowy powierzchni Coulomba-Mohra oraz obwiednia wyników prawdziwych badań trójosiowych [42]

Dalsze warunki stanu granicznego (rys. 1) o izotropowej powierzchni plastyczności, opracowane dla modelu ośrodka o stowarzyszonego prawa płynięcia, różnią się od siebie jedynie szczegółami geometrii prosto- bądź krzywoliniowego przekroju izotropowego i dewiatorowego. Ich wspólnym mianownikiem jest zależność powierzchni plastyczności od efektywnego naprężenia średniego. Ogólny charakter tej powierzchni pokazany jest na rys. 4. Kolejne modyfikacje kształtu powierzchni plastyczności w rozwiązaniach np. Gudehusa [24], Matsuoki-Nakai [47] i Podgórskiego [52] pozwalają uzyskać coraz bliższy rzeczywistości opis granicznego stanu naprężenia w płaszczyźnie przekroju dewiatorowego. Potwierdzeniem tego faktu są np. wyniki pochodzące z prawdziwych badań trójosiowych - Kirkgard i Lade [42], które układają się w kształt gładkiej i bliskiej obwiedni warunku Coulomba-Mohra – rys. 5.

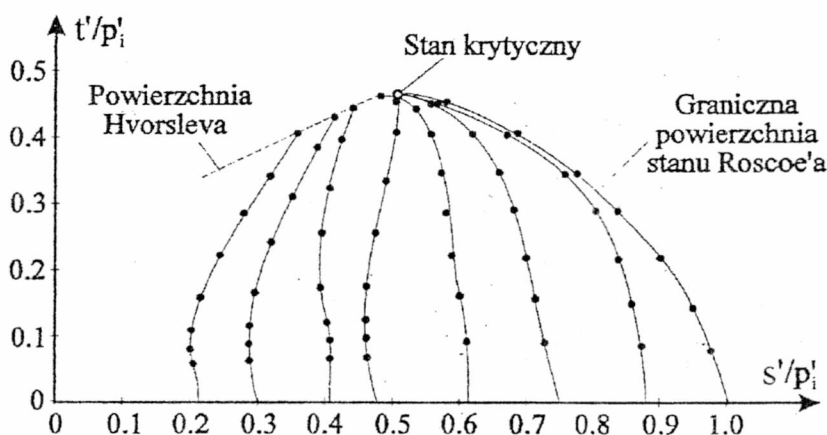
Ze względu na prostotę kalibrowania i numerycznych implementacji, metody obliczeniowe oparte na sztywno-idealnie plastycznych modelach ośrodka (szczególnie z



Rys. 6 Składowe wektora deformacji dla klasycznego warunku stanu granicznego

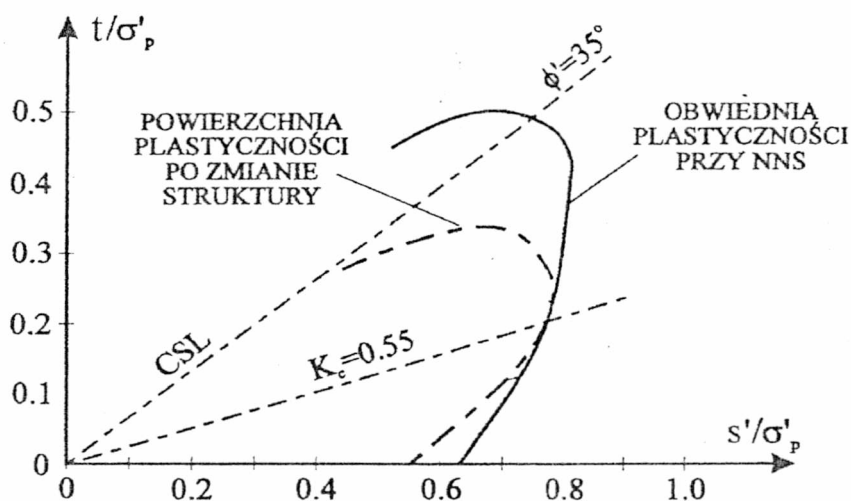
zastosowanym warunkiem Coulomba-Mohra) są wciąż powszechnie stosowane w praktyce inżynierskiej do rozwiązywania zagadnień nośności podłoża budowli, stateczności skarp itp. Należy jednakże zauważyć, iż mimo niewątpliwych udoskonaleń kształtu powierzchni plastyczności warunków, uzyskiwane rozwiązania tych zagadnień są jednak obciążone pewnymi niedoskonałościami. Dla modeli ze stowarzyszonym prawem płynięcia najistotniejsze odstępstwo od wyników obserwacji związane jest z permanentnym stanem rozluźnienia ośrodka podczas plastycznego płynięcia, co ilustruje rys. 6. Zjawisko nierealistycznego wzrostu

objętości zostało zdecydowanie wyeliminowane we współczesnych teoriach stanów krytycznych, operujących zamkniętymi warunkami plastyczności [23]. W tych teoriach odkształcenia plastyczne związane są nie tylko z rozluźnianiem ośrodka gruntowego, ale również z jego zagęszczaniem. W badaniach laboratoryjnych zagęszczanie ośrodka zachodzi m. in. podczas próby izotropowego ściskania w aparacie trójosiowego ściskania oraz próby edometrycznego ściskania, w której odkształcenia plastyczne występują po osiągnięciu przez stan naprężenia ciśnienia nazywanego ciśnieniem prekonsolidacji.



Rys. 7 Interpretacja zamkniętej powierzchni stanu granicznego na podstawie badań trójosiowego ściskania przerobionego kaolinu, Wroth i Loudon [76]

Natomiast w przypadku teorii nośności granicznej, operującej modelami ośrodka sztywno-idealnie plastycznego, w celu ograniczenia skutków nierealistycznego wzrostu objętości stosowano niestowarzyszone prawo płynięcia. Innym sposobem było nałożenie na klasyczny warunek Coulomba-Mohra liniowego zamknięcia od strony naprężeń bardziej ściskających. Rozwiązania dotyczące nośności granicznej podłoża nieważkiego, oparte na takim warunku, podał Izicki [35] a dla zagadnienia wciskania stempla Buczyński [10].



Rys. 8 Niesymetryczne obwiednie plastyczności uzyskane z badań naturalnych gruntów, Jamiolkowski i in [40]

Dalszy krok w rozwoju teorii nośności granicznej stanowi koncepcja zamkniętego warunku stanu granicznego dla gruntów anizotropowo skonsolidowanych przedstawiona przez Batoga i Izbickiego [5]. Zamknięty kształt powierzchni plastyczności liniowego warunku nawiązał do doświadczalnie zidentyfikowanej granicznej powierzchni stanu, będącej kombinacją powierzchni Hvorsleva i Roscoe, Wroth i Loudon [76] - rys. 7. O wielkości zamknięcia warunku decyduje wartość ciśnienia prekonsolidacji, która może być tu uważana za główny parametrów stanu [19], [23]. Przyjęta dla tego warunku rotacja powierzchni plastyczności jest również faktem, który potwierdzają wyniki badań gruntów zarówno o nienaruszonej jak i naruszonej strukturze, np. otrzymane przez Jamiolkowskiego i in. [40] – rys. 8. Taka postać warunku może znaleźć zastosowanie w rozwiązywaniu praktycznych, inżynierskich zagadnień, w których występują efekty zagęszczenia ośrodka w obszarze plastycznej deformacji, np. obliczanie nośności głębokich posadowień Batog i Izbicki [5], nośności granicznej podłoża anizotropowo skonsolidowanego, nośności granicznej słabego podłoża Batog i Izbicki [4], nośności kotwi wyciąganych Izbicki i Kozubal [34], opis i kalibracja sondowań statycznych itd.

## 2.2 Metody obliczania nośności podłoża

W licznie opracowywanych metodach określania nośności podłoża można zauważyć dwa odmienne podejścia:

- stosowane nowe modele mechanizmów zniszczenia, techniki obliczeniowe bądź procedury określania parametrów prowadzą do dalszego udoskonalania i modyfikacji klasycznego rozwiązania Terzagiego, czego efektem są głównie odmienne wartości współczynników nośności,
- opracowywane nowe prawa fizyczne, bardziej zaawansowane modele gruntów znajdują zastosowanie wyłącznie w obliczeniach numerycznych (głównie opartych na MES wraz z technikami analizy przyrostowej), także w profesjonalnych pakietach oprogramowania geotechnicznego.

Biblioteka  
Pol. Wrocław

### Rozwiązanie Prandtla i Reissnera

Jednymi z pierwszych badaczy, zajmujących się zagadnieniami nośności granicznej, byli Prandtl [53] i Reissner [55], którzy przedstawili rozwiązanie analityczne dla określenia nośności granicznej podłoża nieważkiego, obciążonego fundamentem bezpośrednim. Według tego rozwiązania wartość obciążenia zewnętrznego działającego na grunt, przy której rozpoczyna się płynięcie plastyczne gruntu, rozwijające się następnie bez dalszego wzrostu wielkości obciążenia określa następujący wzór:

$$q_f = cN_c + qN_q, \quad (8)$$

gdzie:  $q = D_{\gamma D}$  jest obciążeniem naziomu wg rys. 9, natomiast współczynniki nośności  $N_c$  i  $N_q$  określają wzory:

$$N_q = e^{\pi \tan \varphi} \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \quad (9)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi.$$

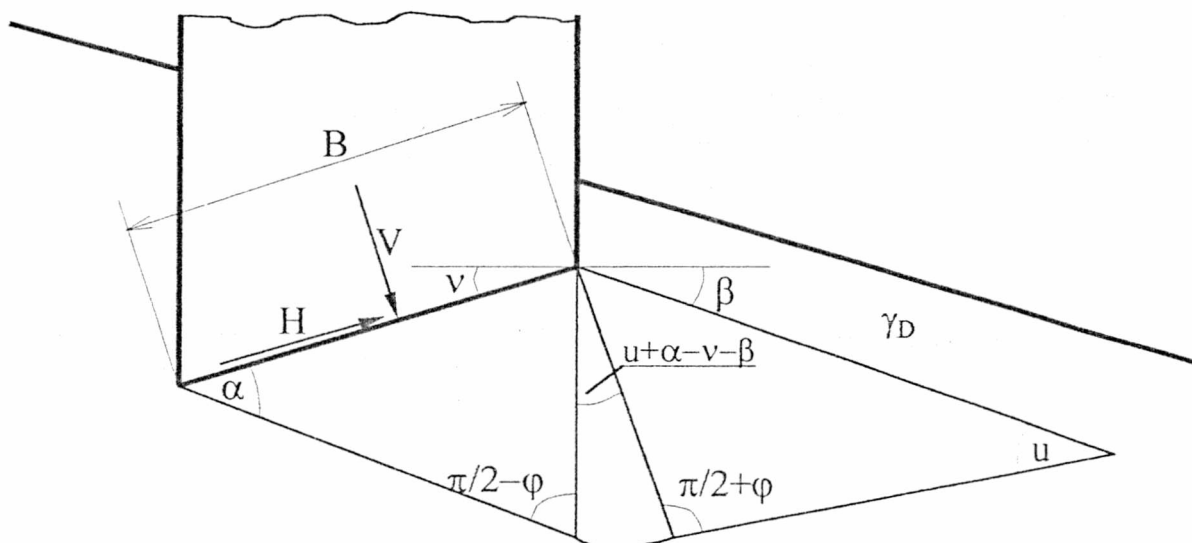


o współczynniki uwzględniające wpływ takich czynników jak: zagłębienie i kształt fundamentu, mimośrodowość obciążenia, nachylenie obciążenia zewnętrznego oraz nachylenie terenu czy nachylenie podstawy fundamentu do poziomu. Te czynniki zawiera modyfikacja wzoru Terzagiego zaproponowana przez Brinch- Hansena [9]:

$$q_f = cN_c s_c d_c i_c g_c b_c + qN_q s_q d_q i_q g_q b_q + \frac{1}{2} \gamma \bar{B} N_\gamma s_\gamma d_\gamma i_\gamma g_\gamma b_\gamma, \quad (12)$$

gdzie:  $s_c, s_q, s_\gamma$  -współczynniki redukcyjne uwzględniające kształt fundamentu,  
 $d_c, d_q, d_\gamma$  -współczynniki uwzględniające zagłębienie fundamentu,  
 $i_c, i_q, i_\gamma$  - współczynniki uwzględniające odchylenie obciążenia od kierunku pionowego,  
 $b_c, b_q, b_\gamma$  -współczynniki uwzględniające nachylenie podstawy fundamentu,  
 $g_c, g_q, g_\gamma$  -współczynniki uwzględniające nachylenie podłoża.

Na rys. 10 pokazano schemat budowy pola deformacji dla fundamentu posadowionego na zboczu w metodzie Brinch- Hansena.

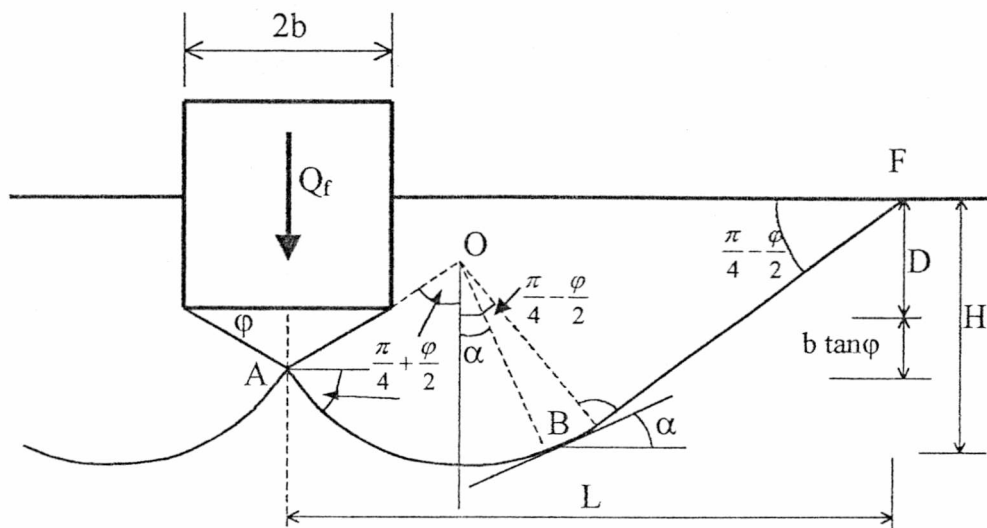


Rys. 10 Fundament posadowiony na skarpie w metodzie Brinch-Hansena [9]

W kolejnych pojawiających się metodach obliczeniowych modyfikacji głównie podlegał kształt linii poślizgu, natomiast stan graniczny opisany był wciąż warunkiem Coulomba- Mohra.

### Metoda Balla

Wśród takich metod mieści się zaproponowana w 1962 r. przez A. Balla [1] metoda, w której założono kinematycznie dopuszczalną, częściowo kołową powierzchnię poślizgu. Dla schematu na rys. 11 fundament oraz sztywny klin gruntu uformowany pod fundamentem powoduje przemieszczanie pozostałego obszaru deformacji, w wyniku czego wzdłuż linii poślizgu zostaną zmobilizowane naprężenia odpowiadające wytrzymałości na ścinanie gruntu, opisane warunkiem Coulomba- Mohra. Uwzględniając odpowiednie warunki brzegowe, sformułowano równanie nośności granicznej, podane w klasycznej postaci Terzagiego (10), różniące się co do wartości współczynników nośności, które opisują złożone zależności analityczne.



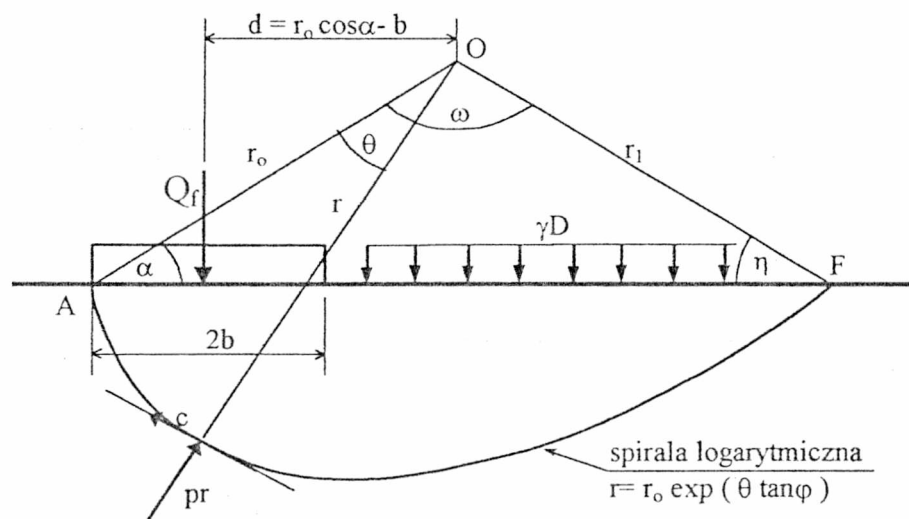
Rys. 11 Schemat budowy stref deformacji dla metody Balla [1]

## Metoda Ingry i Baechera

Odmienny sposób modyfikacji wzoru (10) przedstawili w 1983 r. Ingra i Baecher [33]. Zaproponowana została modyfikacja wartości współczynnika nośności  $N_\gamma$  oraz współczynników redukcyjnych uwzględniających nachylenie oraz mimośród obciążenia zewnętrznego. Zmodyfikowane wartości tych współczynników otrzymano w wyniku statystycznej analizy wyników badań modelowych. Przykładowo dla współczynnika kształtu  $L/B = 1$ , wartość oczekiwana współczynnika  $N$  opisano w funkcji kąta  $\varphi$ :

$$EX[N_\gamma] = \exp(-2,064 + 0,173\varphi). \quad (13)$$

Uzyskane w ten sposób wartości współczynników mają wartości nieco wyższe, niż uzyskane z metod analitycznych.



Rys. 12 Kształt powierzchni poślizgu w metodzie Narity i Yamaguchiego [49]



### Metoda Narity i Yamaguchiego

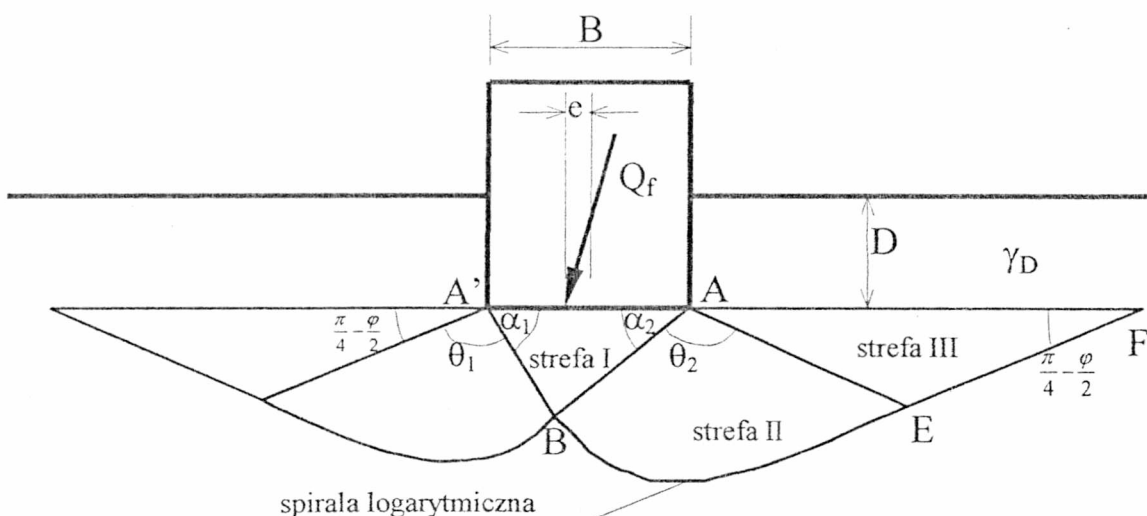
Z kolei w metodzie przedstawionej w 1989 r. przez Naritę i Yamaguchiego [49] założono istnienie linii poślizgu w postaci spirali logarytmicznej, bez wyraźnego wydzielenia w obszarze deformacji odrębnych stref zniszczenia – rys. 12. Współczynniki nośności wyznaczono z warunków równowagi momentów względem punktu O, zapisywanych kolejno dla schematów obciążonych odpowiednio: siłami spójności wzdłuż powierzchni poślizgu, obciążeniem naziomu  $\gamma D$  oraz obciążeniem ciężarem własnym gruntu w obszarze deformacji. W ten sposób uzyskano równanie nośności granicznej podane również w klasycznej postaci Terzagiego (10), różniące się co do wartości współczynników nośności.

### Metoda Sarana i Agarwala

W 1991 r. Saran i Agarwal [60] podali kolejną modyfikację metody Terzagiego, uwzględniającą możliwość obciążenia fundamentów ukośnie nachyloną siłą. W tym przypadku przyjęto schemat budowy obszaru deformacji złożony z trzech klasycznych stref: I - sztywnej pod fundamentem, II – przejściowej strefy ścinania radialnego, opisanej spiralą logarytmiczną oraz III – pasywnej strefy Rankina (rys. 13). Nowością jest tu założenie możliwości wystąpienia jednostronnego, asymetrycznego zniszczenia – wzdłuż linii AF na rys. 13, gdzie stan graniczny naprężeń opisuje warunek Coulomba- Mohra, natomiast po drugiej stronie linii poślizgu założono, iż następuje tylko częściowa mobilizacja naprężeń ścinających:

$$\tau_{zmob} = \sigma_n \tan \varphi_m + mc, \quad (14)$$

gdzie:  $m$  – współczynnik mobilizacji,  
 $\varphi_m = \tan^{-1} (m \tan \varphi)$ .



Rys. 13 Schemat budowy stref deformacji w metodzie Sarana i Agarwala [60]

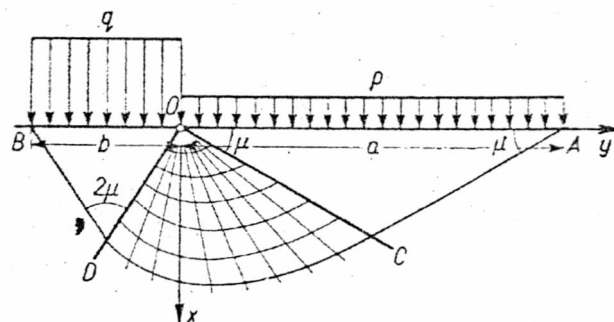
Wartość nośności podłoża określono z warunku równowagi sił działających na sztywny klin A'BE przy pominięciu jego ciężaru i opisano równaniem zbliżonym do klasycznego (10):

$$Q_d = B \left( \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + \gamma D N_q + c N_c \right). \quad (15)$$

Metoda charakteryzuje się nieco wyższymi wartościami współczynnika  $N_\gamma$  niż w przypadku wcześniej opisanych. Należy również dodać, iż metoda uwzględnia możliwość częściowego odrywania się fundamentu na wskutek mimośrodowego jego obciążenia.

### Rozwiązanie Sokołowskiego

Odmienny sposób uzyskania wartości nośności granicznej przedstawił W. W. Sokołowski [64] w 1953 r. Schemat pola deformacji nawiązuje do mechanizmu Prandtla – rys. 14. Współrzędne węzłów wzdłuż linii poślizgu opisuje układ równań różniczkowych:



Rys. 14 Schemat rozwiązania Sokołowskiego [64]

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \tan(\eta + \mu), \\ \frac{dy}{dx} &= \tan(\eta - \mu)\end{aligned}\quad (16)$$

Stan naprężenia w węzłach wzdłuż linii poślizgu (nieciągłości) dla ośrodka nieważkiego opisuje kolejny układ równań różniczkowych, z dwoma poszukiwanymi funkcjami  $\eta$ ,  $\xi$ :

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dx} + \tan(\eta + \mu)\frac{d\xi}{dy} &= 0, \\ \frac{d\xi}{dx} + \tan(\eta - \mu)\frac{d\xi}{dy} &= 0,\end{aligned}\quad (17)$$

gdzie:  $\xi=f(\sigma_1, \sigma_2)$ ,  $\zeta=f(\xi)$ .

Do rozwiązania układów quasi- liniowych równań różniczkowych typu hiperbolicznego (16) i (17) zastosowano metodę charakterystyk, szerzej opisaną w rozdziale 5. Wartość nośności granicznej otrzymano z warunku równowagi sztywnego trójkąta OBD – rys. 14.

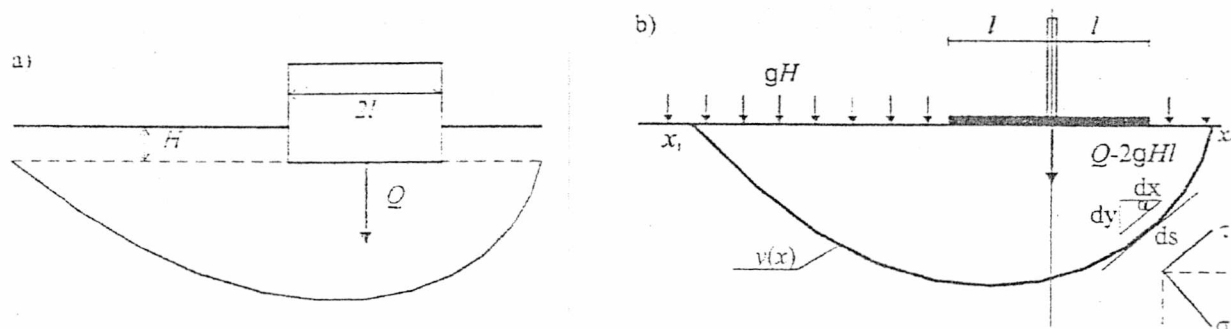
Należy zauważyć, iż w dotychczas przedstawionych metodach występowały zdeterminowane powierzchnie poślizgu, w mniejszym bądź większym stopniu nawiązujące do rozwiązania Terzaghiego. Prócz nich istnieją również metody, w których kształt tychże powierzchni nie jest z góry założony. Należą do nich metoda wariacyjna oraz rozwiązania oparte na MES.

### Metoda wariacyjna Garbera i Bakera

Metoda wariacyjna została zaproponowana przez Garbera i Bakera [22] w 1977 r. Dalsze prace nad tą metodą podejmowali m.in. Lewandowska i Dembicki [46], przedstawiając w 1991 r. rozwiązania dla fundamentów obciążonych siłą ukośną. Metoda polega na poszukiwaniu minimalnej wartości obciążenia zewnętrznego, która może spowodować osiągnięcie stanu granicznego w układzie fundament – podłoże. Poszukiwana jest potencjalna linia poślizgu, wzdłuż której spełniony jest warunek Coulomba- Mohra oraz spełnione są warunki równowagi



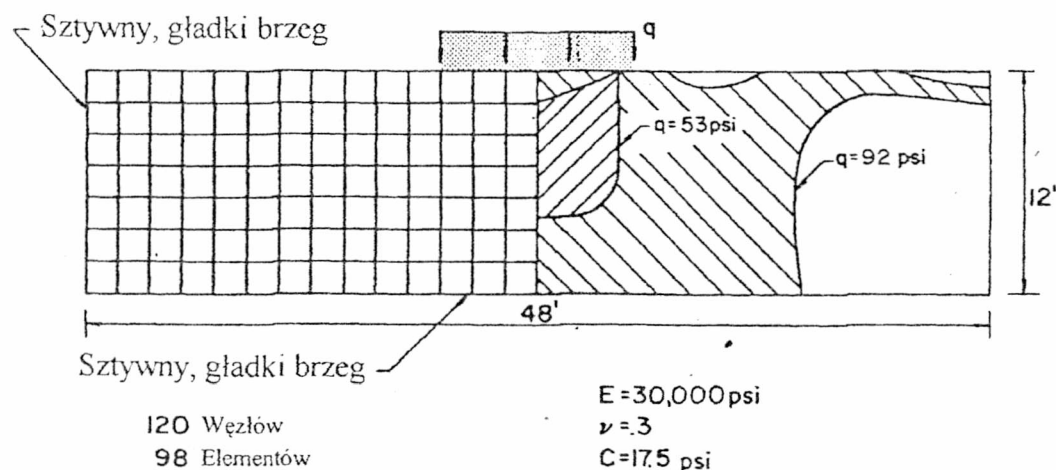
(sumy momentów oraz rzutów sił). W wyniku takiej analizy otrzymuje się klasyczną postać równania nośności granicznej (10) o odmiennych wartościach współczynników nośności. Interesujący jest fakt, iż mimo braku z góry założonego kształtu linii poślizgu, to i w metodzie wariacyjnej przyjmuje ona kształt zbliżony do rozwiązania klasycznego, opisanego spiralą logarytmiczną – rys. 15.



Rys. 15 Schematy obliczeniowe w metodzie wariacyjnej [22]

### Metody oparte na MES

Jedne z pierwszych analiz numerycznych nośności granicznej podłoża wykorzystujących MES wykonał w 1968 r. K. Höeg [27]. Stosując warunek Tresci oraz stowarzyszone prawo płynięcia dla ciała sprężysto- plastycznego określił rozkład deformacji pod fundamentem w cienkiej warstwie plastycznego iltu – rys. 16. Szereg dalszych przykładów obliczeniowych, w tym rozkłady pól prędkości, przyniosła w 1975 r. praca Chena [13] (rys. 17). Modyfikację klasycznego równania (10), uwzględniającą efekty obliczeń opartych na MES wykonał w 1982 r. Griffith [65]. Model obliczeniowy zakładał płaski stan odkształcenia, geostatyczny stan naprężenia, ośrodek sprężysto- idealnie plastyczny oraz warunek stanu granicznego Coulomba-Mohra z niestowarzyszonym prawem płynięcia. Obliczenia iteracyjne prowadzono kontrolując wielkość przemieszczeń fundamentu. Obciążając model obliczeniowy poszczególnymi

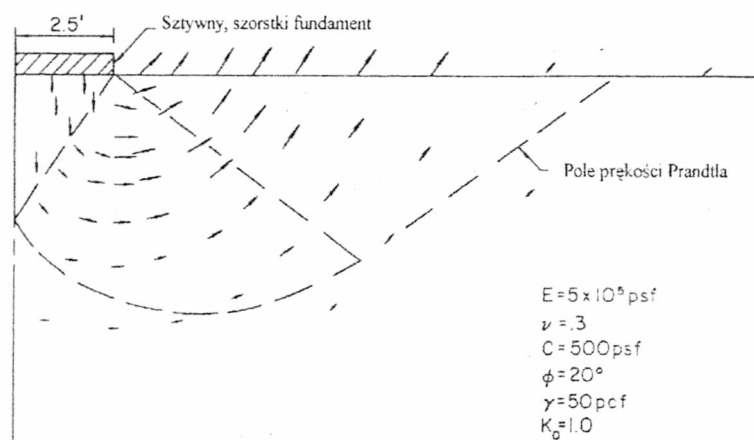


Rys. 16 Model obliczeniowy oraz pole naprężeń w rozwiązaniu Höega [27]

składowymi stanu obciążenia otrzymano współczynniki nośności  $N_c$ ,  $N_q$  i  $N_\gamma$  w funkcji kąta tarcia wewnętrznego. Kolejne wyniki dla bardziej zaawansowanych modeli ciała sprężysto- plastycznego ze wzmocnieniem- osłabieniem przedstawił w 1991 r. Siddique [64].

Podobnie jak w metodzie wariacyjnej, także i w rozwiązaniach otrzymanych z MES dla i- tego kroku obliczeniowego, w którym obciążenie osiąga wartość graniczną, linia nieciągłości

deformacji pod fundamentem układa się w kształt zbliżony do linii poślizgu z rozwiązania klasycznego, por. rys. 17.



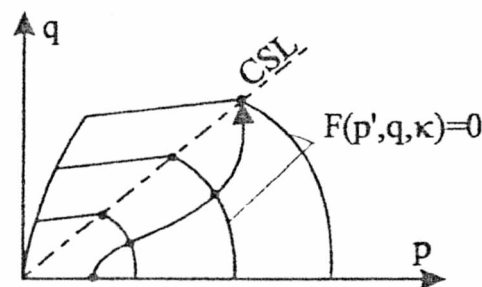
Rys. 17 Pole prędkości w rozwiązaniu MES wg Chena [13], tożsamy ze schematem Prandtla

Jak można zauważyć, w przedstawionych metodach do opisu stanu granicznego naprężeń stosowano przede wszystkim klasyczną hipotezę wytrzymałościową Coulomba-Mohra. W ostatnich trzech dekadach w zakresie budowania modeli fizycznych gruntów, formułowania hipotez wytrzymałościowych, jak i warunków stanu granicznego wystąpił bardzo istotny postęp, który znacznie wyprzedza praktyczne zastosowanie ich w rozwiązywaniu konkretnych zagadnień geotechniki, w tym w określaniu nośności podłoża.

Z uwagi na konieczność stosowania złożonych technik obliczeniowych tylko pewna część z nich została zastosowana w znanym oprogramowaniu geotechnicznym, np. CRISP, PLAXIS czy ZSOIL.

## 2.3 Modele stanu krytycznego

W przypadku gruntów sypkich istotnym faktem, mającym wpływ na ich wytrzymałość jest zjawisko dylatacji, polegające na występowaniu zmian objętości towarzyszących deformacjom postaciowym podczas ścinania. Badając te zjawiska w 1936 r. Casagrande [12] wprowadził pojęcie porowatości krytycznej, która występowała w gruncie sypkim w momencie jego ścicia, niezależnie od wartości porowatości początkowej. Grunty, dla których zmiany objętościowe nie są możliwe (ściananie bez drenażu) znajdują się w stanie krytycznym. W wyniku metodycznych, szeroko zakrojonych badań tych zjawisk, prowadzonych pod kierunkiem Roscoe'a [57], w latach 50-tych i 60-tych na Uniwersytecie Cambridge powstała mechanika stanu krytycznego. Stała się ona podstawą do utworzenia licznej grupy modeli stanu krytycznego typu „Cambridge”, z najczęściej w praktyce stosowanymi Cam-Clay oraz Modified Cam-Clay o obrotowo-symetrycznych powierzchniach plastyczności. Inną z kolei grupę warunków stanu granicznego przyniosły w latach 70-tych prace di Maggia i Sandlera (USA), w których powierzchnie plastyczności posiadały zamknięcia typu „cap”. Wspólną cechą obu typów modeli był generalny kształt zamkniętej powierzchni plastyczności oraz prawo izotropowego wzmocnienia typu objętościowego, wynikające z doświadczalnie potwierdzonych logarytmicznych zależności wskaźnika porowatości od efektywnego naprężenia średniego w stanie normalnej konsolidacji.



Rys. 18 Powierzchnia zniszczenia dla modelu stanu krytycznego

Wyczerpującą klasyfikację tych rozwiązań przedstawił w swojej pracy Gryczmański [23].

W mechanice stanu krytycznego zniszczenie następuje z chwilą osiągnięcia przez ścieżkę naprężenia zenitalnego punktu dowolnej konfiguracji obwiedni plastyczności (rys. 18). Linia stanu krytycznego CSL jest miejscem geometrycznym tych punktów, która przecina kolejne konfiguracje powierzchni, oddzielając przedkrytyczne stany wzmocnienia od pokrytycznych stanów osłabienia. Klasyczne modele operujące stanem krytycznym, takie jak wspomniane Cam-Clay, czy Modified Cam-Clay, stworzono przy następujących założeniach:

- sprężysto plastyczny model ośrodka z jednoparametrowym wzmocnieniem typu objętościowego,
- warunek stanu krytycznego opisany zamkniętą, obrotowo- symetryczną względem osi ciśnienia hydrostatycznego, powierzchnią plastyczności,
- stowarzyszone prawo płynięcia,
- sprężysta izotropia,
- liniowa zależność modułu ściśliwości  $K_t$  od naprężenia średniego  $p'$ .

Poszczególne rozwiązania różnią się od siebie kształtem powierzchni plastyczności (ściślej: powierzchni ograniczającej). Ich najbardziej charakterystyczne typy wg Gryczmańskiego [23] podano na rys. 19.

W modelu Cam-Clay [57] powierzchnia plastyczności przyjmuje kształt opisany równaniem:

$$F(p', q) = q + Mp' \ln \frac{p'}{p'_p} = 0, \quad (18)$$

gdzie  $p'_p$  – ciśnienie prekonsolidacji (izotropowe),  
M – parametr materiałowy.

Powierzchnię plastyczności Modified Cam-Clay (MCC) [11] opisuje równanie elipsoidy:

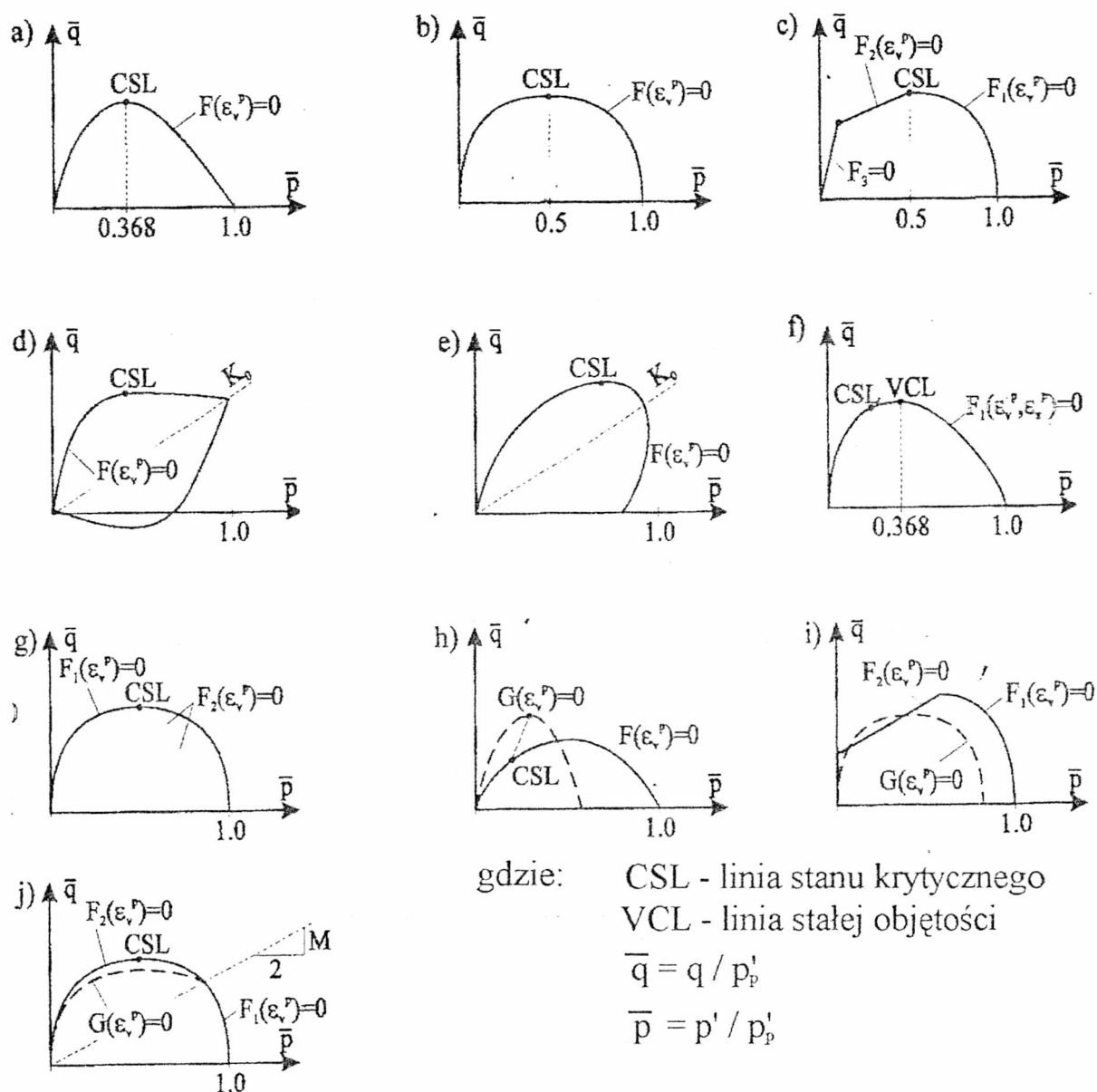
$$F(p', q) = q^2 + M^2 p' (p' - p'_p) = 0. \quad (19)$$

Bardziej złożony kształt powierzchni plastyczności występuje w modelu Roscoe'a- Hvorsleva [28], będący kombinacją trzech powierzchni, opisanych równaniami:

$$\begin{cases} q - 3p' = 0, \\ q - \frac{M}{1 + \alpha} \left( \frac{p'}{p'_p} + \frac{\alpha}{2} \right) = 0, & \text{dla } p' < p'_f, \\ q^2 + M^2 p' (p' - p'_p) = 0, & \text{dla } p' \geq p'_f, \end{cases} \quad (20)$$

gdzie:  $p'_f$  – odcięta stanu krytycznego,  
 $\alpha$  - parametr materiałowy.

Modele stanu krytycznego, szczególnie Roscoe-Hvorsleva zaproponowany przez Houlsby'ego, Wrotha i Wooda [28] dobrze jakościowo opisują większość podstawowych właściwości gruntów normalnie oraz słabo prekonsolidowanych. Uwzględniają odkształcenia trwałe, wpływ naprężenia średniego i historii obciążenia oraz nieliniowość w stanach normalnej konsolidacji. Uwzględniają sprzężenia procesów ścinania i dylatacji, ściśle wiążąc wzmocnienie z zagęszczeniem, osłabienie z rozluźnieniem i stan krytyczny ze stabilizacją objętości.



Rys. 19 Powierzchnie plastyczności modeli stanu krytycznego wg Gryczmańskiego [23]

- a) Cam-Clay, b) Modified Cam-Clay, c) model Roscoe'a-Hvorsleva,  
d) model Ohty-Yoshitaniego-Haty, e) model Novy, f) model Wildego,  
g) model Roscoe'a-Burlanda, h) model Poorooshasba, i) model Banerjee-Stipho,  
j) model Novy-Wooda

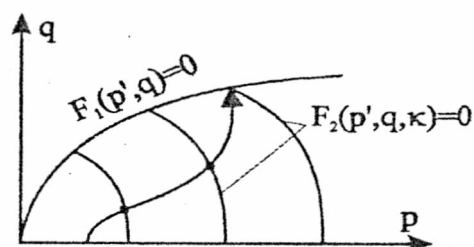
## 2.4 Modele typu „cap”

Modele typu „cap” charakteryzują się przede wszystkim posiadaniem powierzchni plastyczności złożonej z dwóch osobnych części – rys 20, co daje w procesie obciążania możliwość modelowania niezależnej ewolucji każdej z nich poprzez wprowadzenie dwóch parametrów wzmocnienia, zależnych w ogólności od plastycznego wzmocnienia objętościowego i postaciowego.

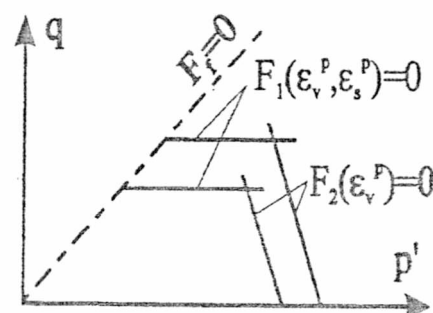
W stosunku do modeli stanu krytycznego modele typu „cap” jak np. Prévosta- Höega [54] - rys. 21, charakteryzują się pewnymi wadami, związanymi z brakiem możliwości opisu osłabienia gruntów prekonsolidowanych, występowaniem nierealistycznego wzrostu objętości w procesie plastycznego płynięcia. Także występująca na styku dwóch powierzchni krawędź plastyczna stwarza problemy obliczeniowe w aplikacjach numerycznych.

W niektórych modelach typu „cap”, np. w modelu Lade’a [45] - rys 22, w celu ograniczenia wzrostu objętości w stanie granicznym wprowadzono niestowarzyszone prawo płynięcia. W ogólnym przypadku, są one porównywalne pod względem zdolności modelowania właściwości gruntu do udoskonalonych modeli stanu krytycznego, jednakże charakteryzuje je nieco gorsze dopasowanie kształtu powierzchni plastyczności do obwiedni uzyskanych z badań doświadczalnych, jak i brak uwzględnienia anizotropii gruntów.

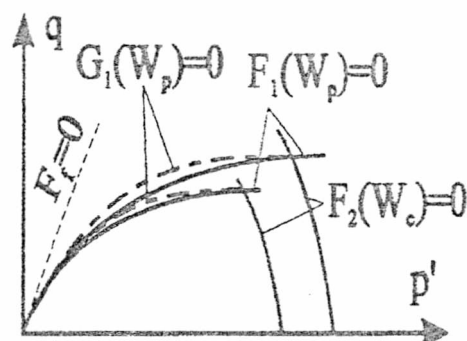
Powyższy, krótki przegląd stanowi jedynie próbę przedstawienia pewnej ewolucji metod obliczenia nośności podłoża oraz modeli opisu zachowania się ośrodka gruntowego w momencie osiągnięcia stanu granicznego (bądź zniszczenia). Do ilustracji zagadnienia rozważanego od ponad dwóch stuleci wybrano z ogromnej ilości rozwiązań jedynie te najbardziej istotne oraz najbardziej charakterystyczne.



Rys. 20 Powierzchnia plastyczności dla modelu typu Cap



Rys. 21 Model Prevosta- Höega I, przykład modelu „Cap” o dwuparametrowym wzmocnieniu oraz stowarzyszonym prawie płynięcia



Rys. 22 Model Lade’a, przykład modelu „Cap” o dwuparametrowym wzmocnieniu oraz niestowarzyszonym prawie płynięcia

### 3. KONCEPCJA WARUNKU STANU GRANICZNEGO

Zamknięty kształt powierzchni plastyczności warunku stanu granicznego, zaproponowanego w niniejszej pracy, nawiązuje do doświadczalnie zidentyfikowanej powierzchni stanu (rys. 7), będącej kombinacją powierzchni Hvorsleva i Roscoe [76]. Przesłanki do przyjęcia w ogólnej postaci warunku niesymetrycznej rotacji powierzchni plastyczności wynikają z rezultatów badań gruntów naturalnych oraz o naruszonej strukturze - Jamiolkowski i in. [40], Pietruszczak i Mróz [51] (por. rys. 7 i rys. 8). Przyjęcie warunku w postaci liniowej obwiedni wyników badań naturalnych gruntów (por. rys. 8) wynika przede wszystkim ze względów obliczeniowych. Zastosowanie liniowej postaci warunku w metodach nośności granicznej umożliwia uzyskanie także praktycznych rozwiązań inżynierskich.

W tym kontekście przyjęta w niniejszej pracy koncepcja zamkniętego warunku stanu granicznego o asymetrycznie zorientowanej względem osi ciśnienia hydrostatycznego powierzchni granicznej stanowi dalszy krok w rozwoju teorii nośności granicznej, przybliżając rozwiązania teoretyczne ku wynikom rzeczywistych obserwacji.

#### 3.1 Liniowy, zamknięty warunek stanu granicznego z niesymetryczną rotacją powierzchni plastyczności

W ogólnym przypadku zamknięty warunek stanu granicznego charakteryzuje brak symetrii względem prostej  $K_0$ . Tak przyjęty warunek dany jest za pomocą czterech prostych granicznych o następujących równaniach:

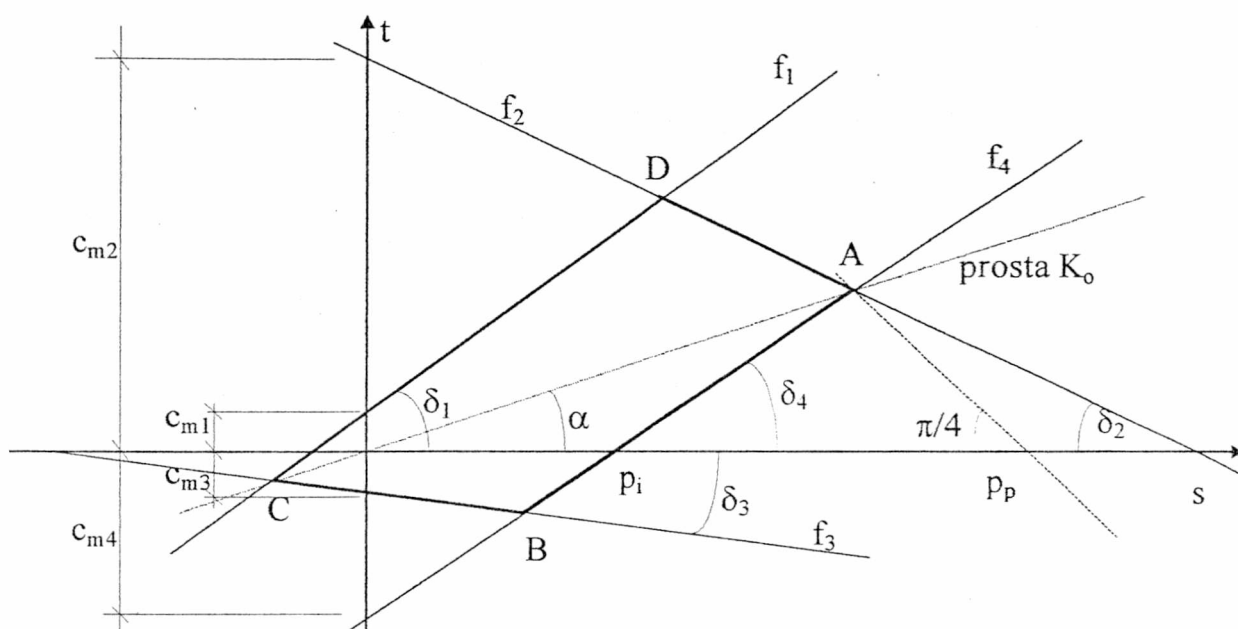
$$\begin{cases} f_1 = t - s \tan \delta_1 - c_{m1} = 0, \\ f_2 = t - s \tan \delta_2 - c_{m2} = 0, \\ f_3 = t + s \tan \delta_3 + c_{m3} = 0, \\ f_4 = t + s \tan \delta_4 + c_{m4} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

gdzie:  $s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ ,  $t = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  to naprężenia główne, naprężenia

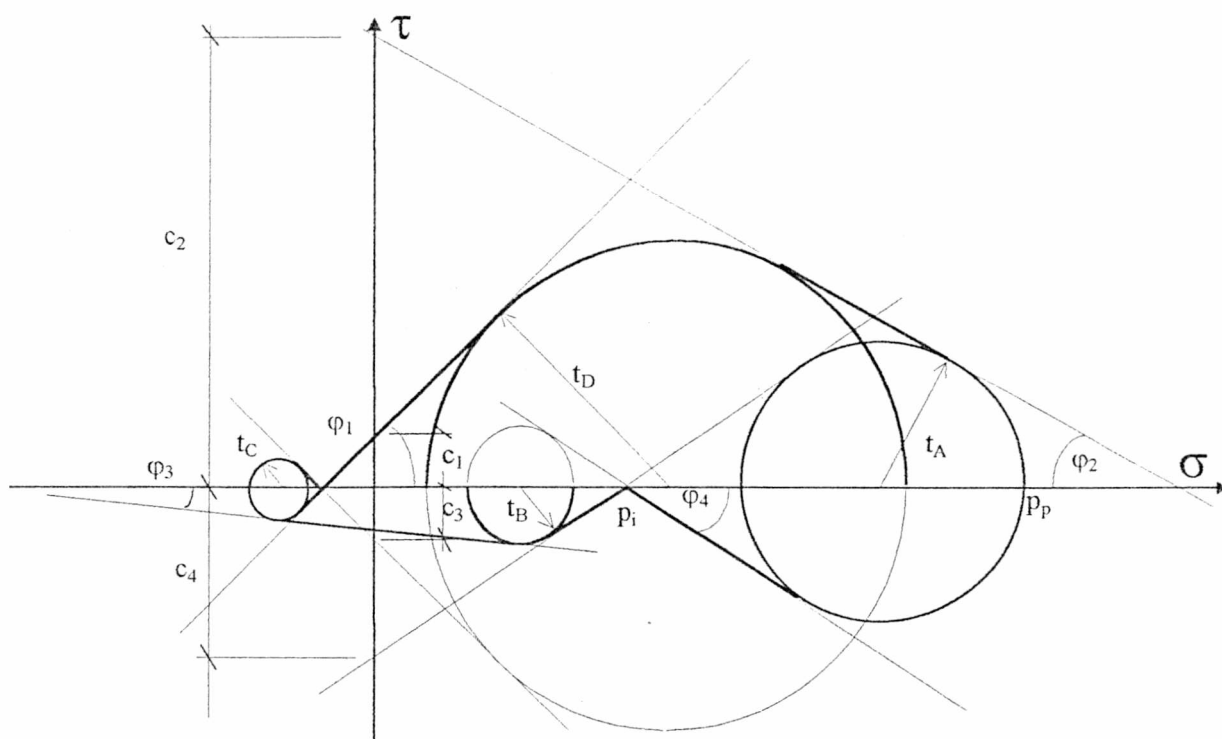
ściskające przyjęto jako dodatnie, kąty  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  oraz wielkości  $c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, c_{m4}$  są parametrami materiałowymi, parametry  $\delta_2, \delta_4$  przyjmują tylko wartości ujemne.

Jest to zatem warunek, w którym występuje osiem niezależnych parametrów. Jego proste graniczne leżące na płaszczyźnie  $s$ - $t$  przedstawia rys. 23. Konsekwencją braku symetrii prostych granicznych na płaszczyźnie  $s$ - $t$  względem osi ciśnienia hydrostatycznego  $s$  jest istnienie na płaszczyźnie naprężeń  $\sigma$ - $\tau$  dwóch odrębnych obwiedni granicznych kół Mohra, opisujących osobno graniczne stany naprężeń leżące powyżej i poniżej prostej  $K_0$ . Na rys. 24 przedstawiono złożenie dwóch połówek tychże obwiedni. Natomiast w przestrzeni naprężeń głównych warunek może przyjąć kształt połączonych oktaedralnymi podstawami dwóch ostrosłupów (rys. 25) bądź stożków.

Warunek stanu granicznego przedstawiono na rys. 24 za pomocą obwiedni, do opisu których użyto innych niż w (21) parametrów: kątów  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  oraz wielkości  $c_1, c_2, c_3, c_4$ . Górna część obwiedni, znajdująca się powyżej osi  $\sigma$  opisuje stany naprężeń wzdłuż prostych

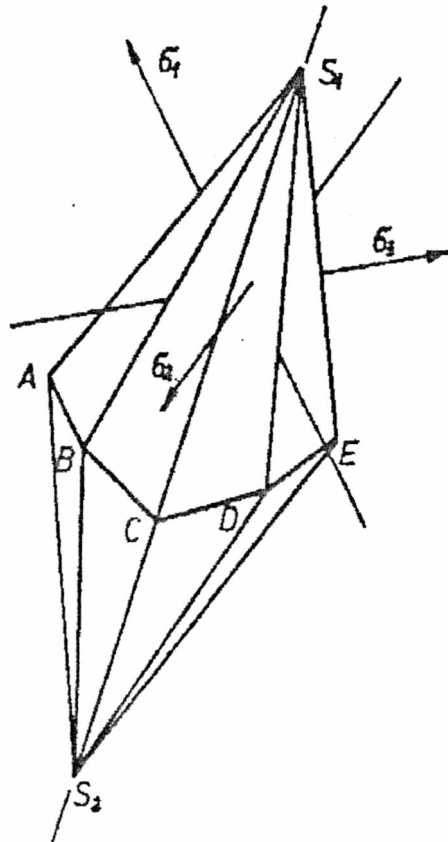


Rys. 23. Postać ogólna warunku stanu granicznego na płaszczyźnie s-t



Rys. 24. Obwiednie kół Mohra warunku stanu granicznego na płaszczyźnie naprężeń  $\tau$ - $\sigma$ .  
Powyżej osi  $\sigma$  znajduje się górna połowa obwiedni prostych granicznych  $f_1$  i  $f_2$ ,  
poniżej osi  $\sigma$  znajduje się dolna połowa obwiedni prostych granicznych  $f_3$  i  $f_4$ .





Rys. 25 Postać warunku w przestrzeni naprężeń głównych

granicznych  $f_1$  i  $f_2$  - równania (24.1) i (24.2). Stany te na podstawie metody stosowanej do ich osiągnięcia w aparacie trójosiowego ściskania można nazwać stanami typu "compression". Druga część obwiedni poniżej osi  $\sigma$  wyraża stany typu "extension", które zostały opisane równaniami prostych granicznych  $f_3$  i  $f_4$  - równania (24.3) i (24.4).

Korzystając z istniejących zależności geometrycznych pomiędzy prostymi granicznymi na płaszczyźnie  $s-t$  a obwiedniami granicznych kół Mohra na płaszczyźnie  $\sigma-\tau$ , związki pomiędzy parametrami opisującymi warunek można wyrazić w następujący sposób:

$$\tan \delta_i = \sin \varphi_i, \quad (22)$$

$$c_{mi} = c_i \cos \varphi_i. \quad (23)$$

Po podstawieniu ich do równań prostych granicznych (21) warunek przyjmie poniższą postać:

$$\begin{cases} f_1 = t - s \sin \varphi_1 - c_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ f_2 = t - s \sin \varphi_2 - c_2 \cos \varphi_2 = 0, \\ f_3 = t + s \sin \varphi_3 + c_3 \cos \varphi_3 = 0, \\ f_4 = t + s \sin \varphi_4 + c_4 \cos \varphi_4 = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Zgodnie z rys. 23 położenie zamykającej części warunku zależy od kąta nachylenia prostej  $K_0$  oraz od wartości parametrów:  $p_p$  - anizotropowego ciśnienia prekonsolidacji oraz  $p_i$  - izotropowego ciśnienia prekonsolidacji. Po przeanalizowaniu zależności geometrycznych występujących na rys. 23 i 24 określono związki pomiędzy parametrami opisującymi proste graniczne zamknięcia warunku  $f_2$  i  $f_4$  a parametrami  $K_0$ ,  $p_p$ ,  $p_i$ :

$$\left\{ \begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{\cos \varphi_2} [0,5(1 - K_0) - \sin \varphi_2] p_p, \\ \sin \varphi_4 &= \frac{0,5(1 - K_0)}{\frac{p_i}{p_p} - 0,5(1 + K_0)}, \\ c_4 &= \frac{1}{\cos \varphi_4} \frac{0,5(1 - K_0)}{0,5(1 + K_0) + \frac{p_i}{p_p}} p_p. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Po podstawieniu powyższych związków (25) do równań (24) można otrzymać ostateczną postać warunku stanu granicznego:

$$\begin{cases} f_1 = t - s \sin \varphi_1 - c_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ f_2 = t - s \sin \varphi_2 - p_p [0,5(1 - K_o) - \sin \varphi_2] = 0, \\ f_3 = t + s \sin \varphi_3 + c_3 \cos \varphi_3 = 0, \\ f_4 = t + \frac{0,5(1 - K_o)}{\frac{p_i}{p_p} - 0,5(1 + K_o)} (s - p_i) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

gdzie wartości parametrów muszą spełnić następujące warunki:

- $\varphi_2 < 0$ ,
- $K_o \leq 1$ ,
- $p_i \leq p_p$ .

Warunek ten jest zależny od ośmiu parametrów:  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, c_1, c_2, K_o, p_p, p_i$ .

### 3.2 Przypadki szczególne

Ogólna postać warunku charakteryzuje się niesymetryczną powierzchnią plastyczności. Możliwe jest zatem rozważenie szeregu przypadków szczególnych warunku związanych z:

- wystąpieniem symetrii prostych granicznych względem osi ciśnienia hydrostatycznego,
- wystąpieniem symetrii prostych granicznych względem linii  $K_o$ ,
- przyjęciem skrajnych wartości przez niektóre parametry warunku.

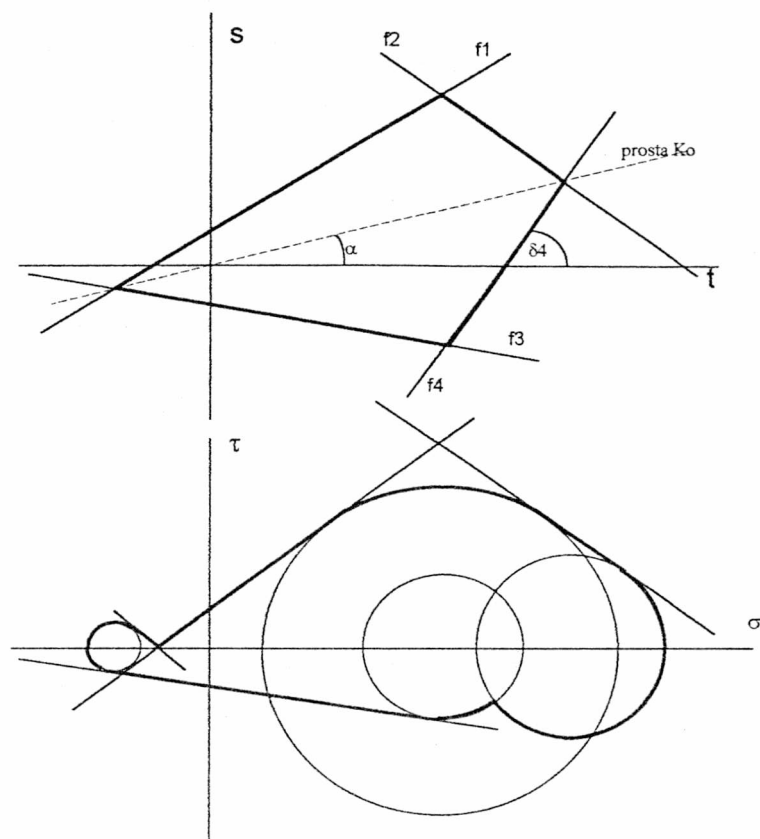
Można rozważać również przypadki szczególnych konfiguracji między prostymi granicznymi a linią  $K_o$ , różniące się od postaci ogólnej warunku, ale z praktycznego punktu widzenia istotne są tylko te przypadki, które wprowadzają redukcję ilości parametrów warunku.

Zgodnie ze wcześniejszymi założeniami jako fizycznie niepoprawny należy uznać warunek, dla którego jeden lub więcej kątów nachylenia prostych granicznych przyjmuje wartość  $|\delta_i| > \pi/4$ . Można podać postać tego warunku na płaszczyźnie  $s$ - $t$ , natomiast na płaszczyźnie  $\sigma$ - $\tau$  koła Mohra prostej granicznej, dla której  $|\delta_i| > \pi/4$  zawierają się w sobie, co uniemożliwia określenie obwiedni kół Mohra i podanie wartości parametrów opisujących obwiednie. Niemożliwe staje się podanie warunku w postaci (24) lub (26). Przypadek ten zilustrowano na rys. 26 przykładem otrzymanym dla  $\delta_4 < -\pi/4$ .

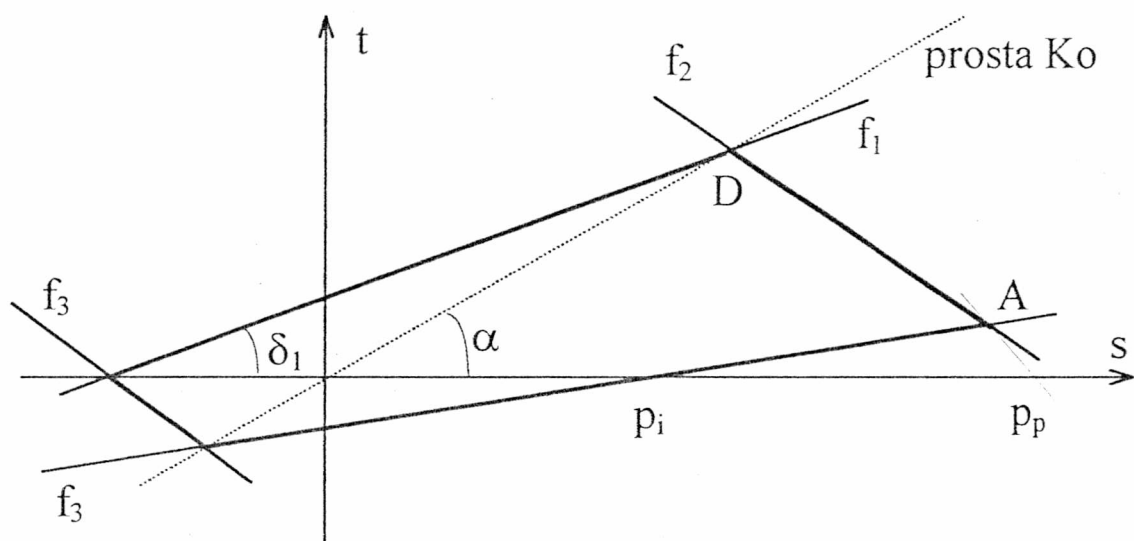
Przypadki warunku różniące się od ogólnej postaci, danej na rys. 23, mogą występować dla pewnych zależności między kątem nachylenia linii konsolidacji anizotropowej (linia  $K_o$ ) [40] a kątami nachylenia prostych granicznych  $\delta_i$ . Kąt nachylenia  $\alpha$  prostej  $K_o$  względem osi ciśnienia hydrostatycznego  $s$  można określić następująco:

$$\tan \alpha = \frac{1 - K_o}{1 + K_o} \quad (27)$$

Jako ilustrację podano na rys. 27 przypadek określony dla  $\alpha > \delta_1$ . Linia  $K_o$  przebiega prostą graniczną  $f_2$  w punkcie D, odmiennie niż w przypadku ogólnym, gdzie przecięcie linii  $K_o$  i prostej granicznej  $f_2$  znajduje się w punkcie A.

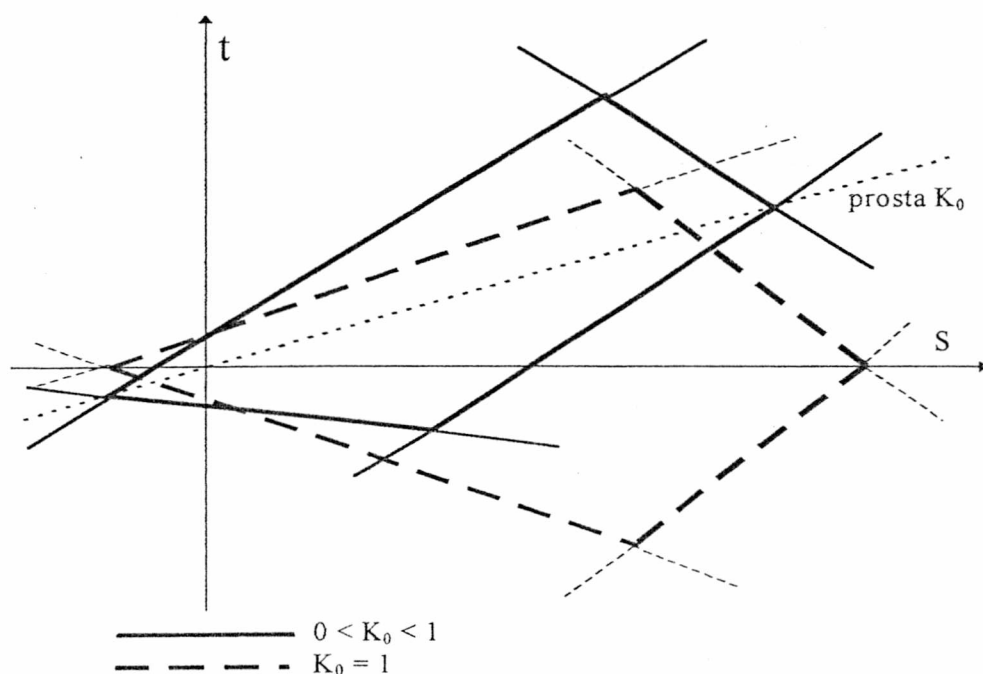


Rys. 26. Przypadek szczególny warunku stanu granicznego - dla  $\delta_4 < -\pi/4$



Rys. 27 Proste graniczne warunku dla  $\delta_1 < \alpha$

Jednak istotniejsze znaczenie może mieć postać warunku określona dla  $K_0 = 1$ , w której prosta  $K_0$  pokrywa się osią ciśnienia hydrostatycznego  $s$ , gdyż w takim przypadku występuje redukcja parametrów warunku. Został on przedstawiony na rys. 28 wraz z przypadkiem dla  $0 < K_0 < 1$ . Jak można zauważyć, dla  $K_0 = 1$  istnieje symetria względem osi  $s$ , a  $p_p$  pokrywa się z  $p_i$ .



Rys. 28. Warunek stanu granicznego dla różnych wartości współczynnika  $K_0$

### 3.2.1 Warunek symetryczny względem osi ciśnienia hydrostatycznego

Efektom przyjęcia wartości  $K_0=1$  w równaniach opisujących warunek (24) lub (26) jest jego uproszczenie do postaci symetrycznej względem osi ciśnienia hydrostatycznego. Jest to szczególny przypadek warunku stanu granicznego związany z izotropową konsolidacją ośrodka gruntowego. Tą uproszczoną postać warunku przedstawiono na rys 29.

Równania prostych granicznych na płaszczyźnie niezmienników naprężenia przyjmują poniższą postać:

$$f_1 = |t| - s \tan \delta_1 - c_{m1} = 0, \quad (28)$$

$$f_2 = |t| - s \tan \delta_2 - c_{m2} = 0.$$

Podstawiając do nich następujące zależności uzyskane ze związków geometrycznych na płaszczyźnie  $s$ - $t$  oraz  $\tau$ - $\sigma$ :

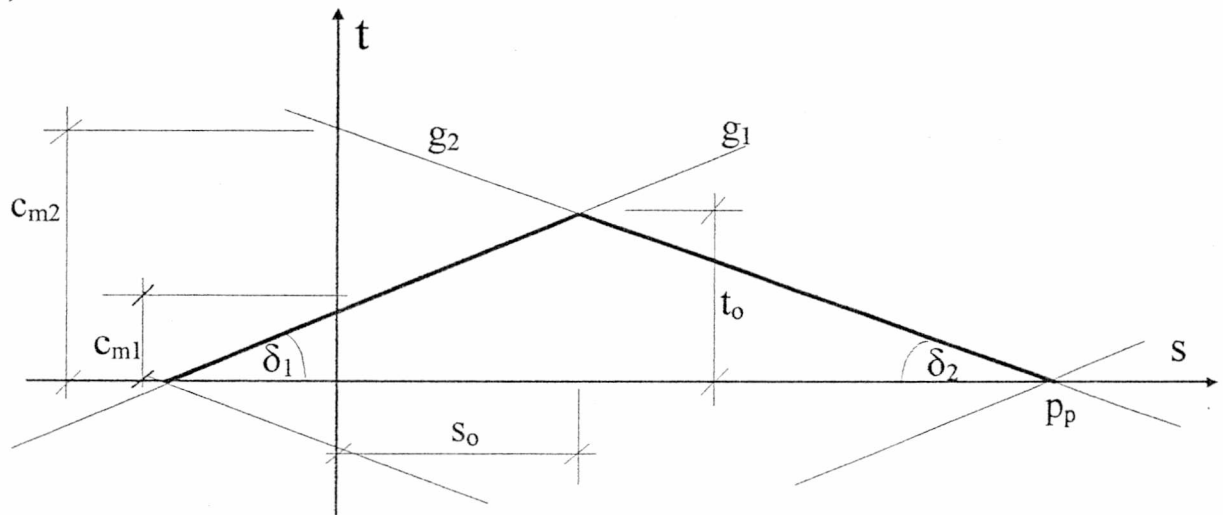
$$\begin{aligned} \tan \delta_i &= \sin \varphi_i, \\ c_{m1} &= c_1 \cos \varphi_1, \\ c_{m2} &= -p_p \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (29)$$

otrzymać można końcową postać równań prostych granicznych:

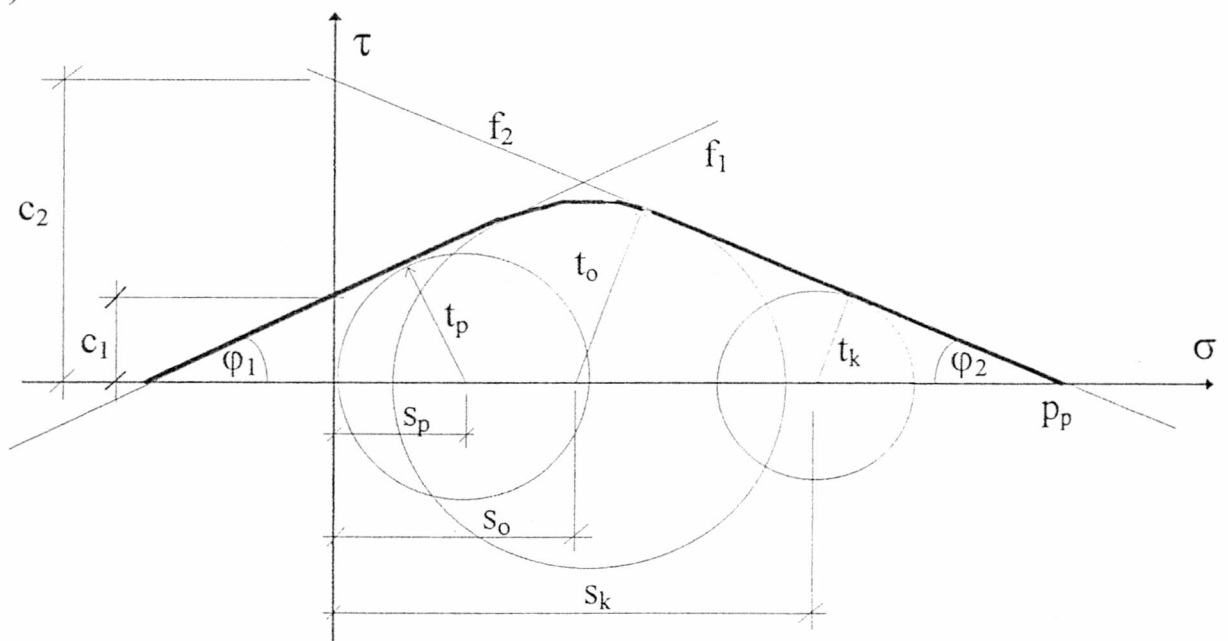
$$\begin{aligned} f_1 &= |t| - s \sin \varphi_1 - c_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ f_2 &= |t| - \sin \varphi_2 (p_p - s) = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

gdzie:  $s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ ,  $t = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ ,  
 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  to naprężenia główne,  
 $p_p$  - ciśnienie prekonsolidacji,  
 $\varphi_2 < 0$ .

a)



b)



Rys. 29. Warunek symetryczny względem osi ciśnienia hydrostatycznego oraz jego obwiednie granicznych kół Mohra

Równanie obwiedni granicznych kół Mohra na płaszczyźnie  $\sigma$ - $\tau$  przyjmie poniższą końcową postać:

$$|\tau| = g_1(\sigma) = \sigma \tan \varphi_1 + c_1 \quad (31)$$

$$|\tau| = g_2(\sigma) = (\sigma - p_p) \tan \varphi_2.$$

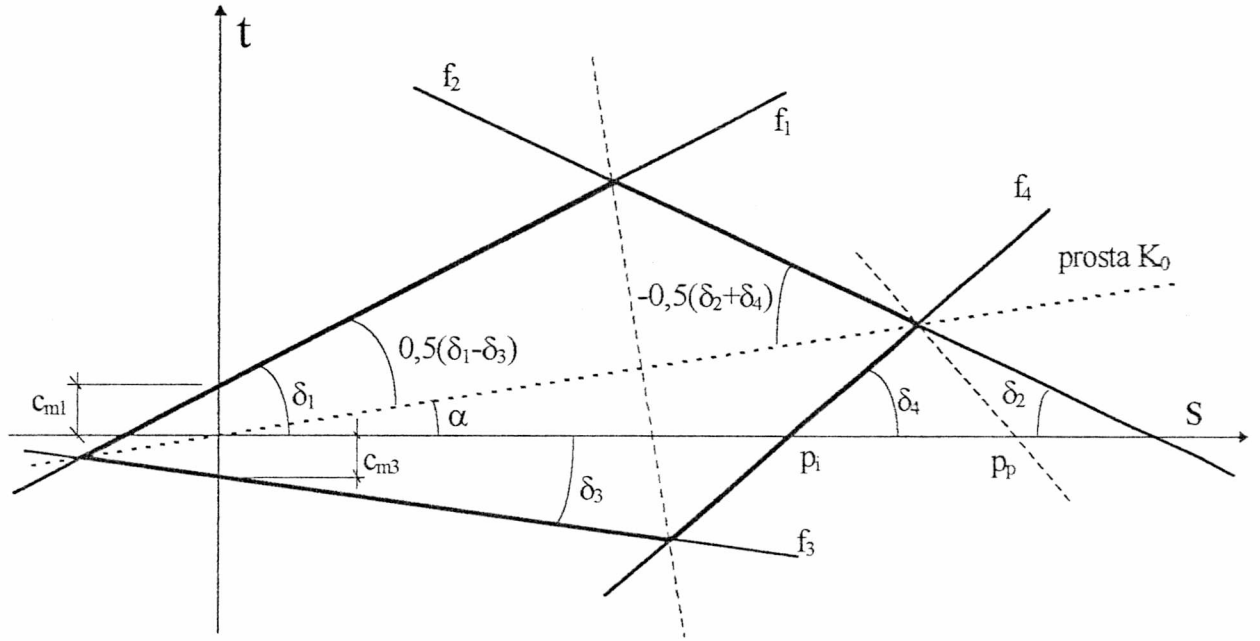
### 3.2.2 Warunek symetryczny względem prostej $K_0$

Jedną z możliwych sposobów uproszczenia ogólnej, niesymetrycznej postaci warunku jest przyjęcie symetrii prostych granicznych względem osi  $K_0$ , por. Batóg i Izbiński [5]. Przykład tak uproszczonego warunku pokazano na rys. 30. Symetria warunku względem osi  $K_0$  wprowadza dodatkowe związki pomiędzy jego parametrami, co daje możliwość redukcji ilości parametrów występujących w równaniach opisujących proste graniczne postaci ogólnej (24) lub (26). Na płaszczyźnie  $s$ - $t$  określono następujące związki:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_2 = 2\alpha + \delta_4, \\ \delta_3 = 2\alpha - \delta_1, \\ c_{m3} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(2\alpha - \delta_1)}{\operatorname{tg}\delta_1 - \operatorname{tg}\alpha} c_{m1}. \end{array} \right. \quad (32)$$

Po przeprowadzeniu odpowiednich przekształceń wzorów (25) z wykorzystaniem podstawień (22), (23) oraz (32), uzyskano następujące związki na płaszczyźnie naprężeń  $\sigma$ - $\tau$  pomiędzy parametrami prostych granicznych warunku symetrycznego względem  $K_0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi_2 = \frac{\frac{P_i}{P_p} \tan 2\alpha - 0,5(1 + K_0) \tan 2\alpha + 0,5(1 - K_0)}{\frac{P_i}{P_p} - 0,5(1 - K_0) - 0,5(1 + K_0)}, \\ \sin \varphi_3 = \frac{\tan 2\alpha - \sin \varphi_1}{1 + \tan 2\alpha \sin \varphi_1}, \\ c_3 = \frac{\tan 2\alpha - \sin \varphi_1 - \tan \alpha (1 + \tan 2\alpha \sin \varphi_1) \cos \varphi_1}{(\tan \alpha - \sin \varphi_1)(1 + \tan 2\alpha \sin \varphi_1)} \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_3} c_1. \end{array} \right. \quad (33)$$



Rys. 30. Warunek plastyczności z symetrią prostych granicznych

Ostateczną postać warunku stanu granicznego uwzględniającego symetrię prostych granicznych względem prostej  $K_0$  otrzymano wprowadzając związki (33) do równań (26):

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = t - s \sin \varphi_1 - c_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ f_2 = t + \frac{\frac{p_i}{p_p} \tan 2\alpha - 0,5(1 + K_0) \tan 2\alpha + 0,5(1 - K_0)}{\frac{p_i}{p_p} - 0,5(1 - K_0) - 0,5(1 + K_0)} (p_p - s) - 0,5(1 - K_0) p_p = 0, \\ f_3 = t + s \frac{\tan 2\alpha - \sin \varphi_1}{1 + \tan 2\alpha \sin \varphi_1} + \frac{\tan 2\alpha - \sin \varphi_1 - \tan \alpha (1 + \tan 2\alpha \sin \varphi_1)}{(\tan \alpha - \sin \varphi_1)(1 + \tan 2\alpha \sin \varphi_1)} c_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ f_4 = t + \frac{0,5(1 - K_0)}{\frac{p_i}{p_p} - 0,5(1 + K_0)} (s - p_i) = 0. \end{array} \right. \quad (34)$$

W tym przypadku warunek opisany jest pięcioma parametrami:  $\varphi_1$ ,  $c_1$ ,  $K_0$ ,  $p_p$ ,  $p_i$ . Zatem uzyskano redukcję o trzy ilości parametrów w stosunku do ogólnej postaci warunku.

Należy dodać, iż taki kształt powierzchni plastyczności został stwierdzony np. w badaniach skonsolidowanych ilów, Pietruszczak i Mróz [51] i związany jest z warunkami konsolidacji osadów.



### 3.2.3. Warunek uwzględniający anizotropię naprężeń mniej ściskających

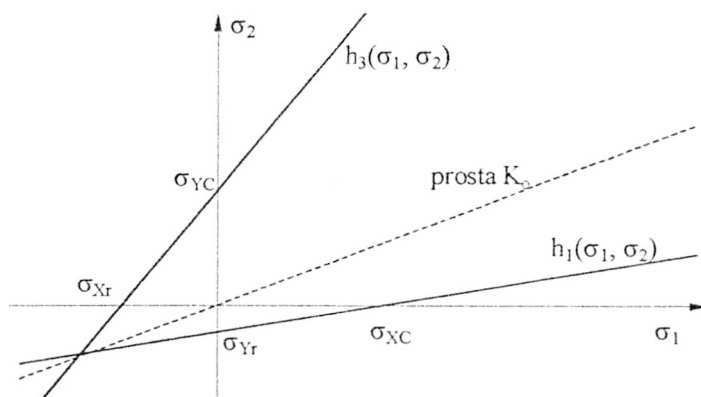
Oznaczając na płaszczyźnie naprężeń głównych (rys. 31) wartości wytrzymałości gruntu na ściskanie i rozciąganie, wyznaczone w jednoosiowym stanie naprężenia, można wprowadzić poniższe parametry, wyrażające anizotropię naprężeń mniej ściskających:

$$\begin{aligned} L_c &= \frac{\sigma_{yc}}{\sigma_{xc}}, \\ L_r &= \frac{\sigma_{yr}}{\sigma_{xr}}, \end{aligned} \quad (35)$$

gdzie:  $L_c$  – współczynnik anizotropii przy rozciąganiu,  
 $L_r$  – współczynnik anizotropii przy ściskaniu,  
pozostałe symbole wytrzymałości w jednoosiowym stanie – wg rys. 31.

Współczynnik  $K_o$  można również wyrazić za pomocą wytrzymałości w jednoosiowym stanie:

$$K_o = L_c L_r \frac{\sigma_{xc} - \sigma_{xr}}{\sigma_{yc} - \sigma_{yr}}, \quad (36)$$



Rys. 31 Warunek na płaszczyźnie naprężeń głównych

Wartości parametrów  $\varphi_3$  oraz  $c_3$  są możliwe do wyznaczenia w badaniach typu „extension”, również można je wyrazić za pomocą zależności wynikających ze związków geometrycznych określonych na płaszczyźnie naprężeń głównych (rys. 31), wprowadzając współczynniki anizotropii określone wzorami (35):

$$\begin{cases} \sin \varphi_3 = \frac{\sin \varphi_1 [(1 - K_o) + L_c (1 + K_o)] - (1 - K_o)(L_c + 1)}{\sin \varphi_1 (1 + K_o)(L_c - 1) + [(1 + K_o) - L_c (1 - K_o)]}, \\ c_3 = L_c \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_3} \frac{1 - \sin \varphi_3}{1 - \sin \varphi_1} c_1. \end{cases} \quad (37)$$

Za pomocą powyższych zależności można zmodyfikować równanie prostej granicznej  $f_3$ , danej wzorem (24.3) lub (26.3).

## 4. OCENA DOLNA I GÓRNA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ

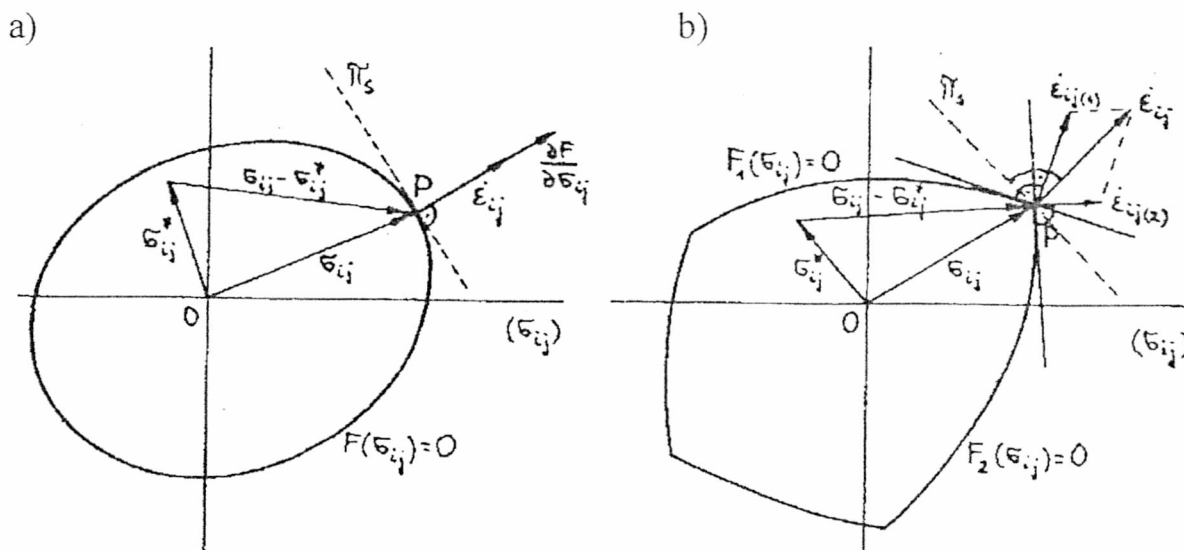
W niniejszej pracy zagadnienie nośności granicznej podłoża rozwiązywane przy przyjęciu trzech wcześniej opisanych wariantów stanu granicznego: niesymetrycznego (punkt 3.1), symetrycznego względem osi ciśnienia hydrostatycznego (punkt 3.2.1) i symetrycznego względem prostej  $K_0$  (punkt 3.2.2). W rozważanym zadaniu stany naprężenia opisane będą jedynie przez dwie z czterech prostych granicznych: klasyczną (24.1) oraz zamykającą (24.2), bez względu, który z trzech wariantów warunku będzie zastosowany. Z tego względu w dalszej części pominięto wyprowadzanie zbędnych równań i związków dla pozostałych dwóch prostych granicznych.

### 4.1 Prawo płynięcia

Prawo plastycznego płynięcia jest zależnością wiążącą mechanizm plastycznego płynięcia bądź zniszczenia z granicznym stanem naprężenia. Zakłada się istnienie funkcji potencjału plastycznego  $G(\sigma_{ij})=0$ . Prędkości odkształcenia są związane z naprężeniami poprzez niestowarzyszone prawo płynięcia, dane równaniem:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\lambda} \frac{\delta G(\sigma_{ij})}{\delta \sigma_{ij}}, \quad (38)$$

gdzie  $\dot{\lambda}$  jest dodatnim współczynnikiem proporcjonalności.



Rys. 32 Prawo plastycznego płynięcia w przypadku gładkiej powierzchni granicznej (a) oraz powierzchni posiadającej punkty osobliwe (b)

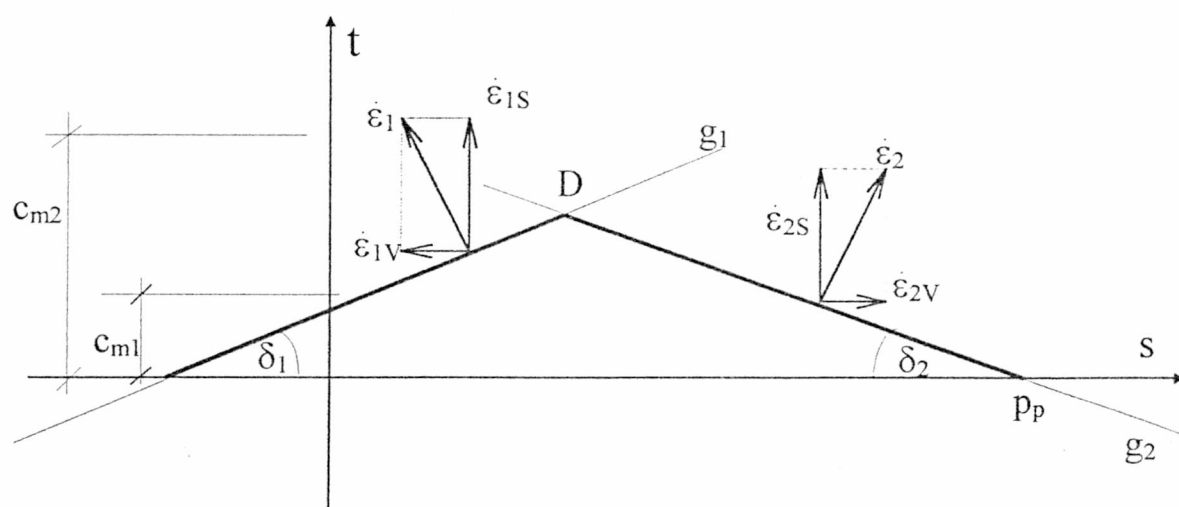
Zakładając, iż w równaniu prawa płynięcia powierzchnia potencjału plastycznego  $G(\sigma_{ij})=0$  jest identyczna z powierzchnią plastyczności  $F(\sigma_{ij})=0$ , opisaną warunkiem stanu granicznego, otrzymuje się równanie stowarzyszonego prawa płynięcia:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\lambda} \frac{\delta F(\sigma_{ij})}{\delta \sigma_{ij}} \quad (39)$$

W przypadku, gdy powierzchnię stanu granicznego buduje kilka gładkich, przecinających się segmentów, to w punkcie osobliwym, leżącym na ich przecięciu (rys. 32 b), prawo płynięcia należy zapisać jako sumę:

$$\dot{\epsilon} = \sum_{k=1}^n \dot{\lambda}_k \frac{\delta F_k}{\delta \sigma_{ij}} \quad (40)$$

Zagęszczenie (zmniejszenie objętości) występować będzie dla stanów naprężenia opisanych przez te części powierzchni plastyczności, dla których  $\delta F / \delta s > 0$ , natomiast rozluźnienie (zwiększenie objętości) wystąpi, gdy  $\delta F / \delta s < 0$ . Ilustracją tego faktu jest rysunek 33, na którym pokazano składowe wektora deformacji dla obu prostych granicznych warunków symetrycznego względem osi ciśnienia hydrostatycznego, opisanego równaniami (33). Wektor zmian prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  na każdej części warunku plastyczności rozkłada się na składową zmian objętościowych  $\dot{\epsilon}_v$  oraz składową zmian postaciowych  $\dot{\epsilon}_s$ . Jak można zauważyć, wektory składowej zmian objętościowych na części klasycznej oraz zamykającej mają przeciwne zwroty. Ze stanem naprężenia opisanym punktem osobliwym A będą związane efekty zmiennej dylatacji, co szerzej przedstawione zostanie w dalszej części pracy.



Rys. 33 Składowe wektora deformacji dla symetrycznego względem osi ciśnienia hydrostatycznego warunku stanu granicznego

## 4.2 Twierdzenia nośności granicznej

Głównym zagadnieniem problemów nośności granicznej jest określenie jakie obciążenie wywołuje ruch plastyczny lub zniszczenie. Pole naprężeń i mechanizm ruchu nie są tu głównym celem obliczeń, ale do wyznaczenia nośności w pełnym rozwiązaniu konieczna jest jednak znajomość pól naprężeń i prędkości odkształceń, a więc uzyskanie rozwiązania problemu brzegowego dla idealnej plastyczności. Do rozwiązania tak sformułowanego zagadnienia

konieczna jest zatem znajomość odpowiednich zależności wiążących wymagania statyczne i kinematyczne z własnościami rozpatrywanego ciała. Do tych zależności należą:

- warunek stanu granicznego, czyli związek między naprężeniami powodującymi uplastycznienie lub zniszczenie;
- prawo plastycznego płynięcia, czyli związek między naprężeniami wewnętrznymi a lokalnym mechanizmem ruchu.

Na tej podstawie sformułować można twierdzenia o nośności granicznej, por. [37]. Mają one na celu określenie, czy pod danymi obciążeniami możliwe jest osiągnięcie stanu granicznego, z którym jest związane zniszczenie materiału, bądź zainicjowanie w nim procesu plastycznego ruchu. Sformułowane zostały dwa twierdzenia o dolnej i górnej ocenie nośności granicznej.

#### Twierdzenie o ocenie dolnej

Obciążenie wynikające z dowolnie przyjętego, statycznie dopuszczalnego stanu naprężeń jest mniejsze lub co najwyżej równe obciążeniu granicznemu, wywołującego ruch plastyczny.

#### Twierdzenie o ocenie górnej

Obciążenie wynikające z dowolnie przyjętego, kinematycznie dopuszczalnego schematu odkształcenia jest większe, lub co najmniej równe obciążeniu granicznemu.

Rozpatrując ciało z materiału sztywnie-idealnie plastycznego, będące pod obciążeniem można poszukiwać rozwiązania ścisłego problemu nośności granicznej, bądź też konstruować rozwiązania przybliżone. Ścisłe rozwiązanie można uzyskać, gdy:

- pole statyczne spełnia warunki równowagi wewnętrznej i warunki brzegowe na brzegach, gdzie działają siły zewnętrzne oraz warunek stanu granicznego  $F(\sigma_{ij})=0$  w obszarach plastycznych, zaś nierówność  $F(\sigma_{ij}) \leq 0$  w obszarach sztywnych;
- związek pola prędkości odkształcenia z polem naprężenia opisany jest prawem płynięcia, pole prędkości spełnia warunki brzegowe oraz określa mechanizm plastycznego płynięcia, który spełnia warunki statyczne i kinematyczne, jak i warunek przyjmowania dodatniej wartości przez moc dysypowaną w obszarach plastycznych.

Uzyskanie rozwiązań ścisłych możliwe jest dla szeregu elementarnych zagadnień, takich jak wciskanie stempla w półpłaszczyznę, czy parcie ścianki pionowej na ośrodek gruntowy, por. Izbicki i Mróz [37]. Jednakże w większości przypadków uzyskanie rozwiązania ścisłego jest trudne i wtedy konieczne jest posłużenie się metodami przybliżonymi. Istnieje sporo metod przybliżonych polegających na przybliżonym spełnieniu warunków równowagi, w których np. rozpatrywany obszar jest dzielony na podobszary a ich warunki równowagi zostają spełnione w sposób globalny. Tego rodzaju metody mają tą istotną wadę, iż trudno określić ich dokładność oraz stwierdzić, czy otrzymany wynik leży po stronie bezpiecznej czy niebezpiecznej. Metody przybliżone związane z twierdzeniami nośności granicznej pozwalają na dwustronną ocenę tej nośności, a więc na ocenę dokładności przybliżenia. Szereg rozwiązań podających oceny nośności granicznej dla praktycznych zagadnień brzegowych przedstawił w swoich pracach A. Florkiewicz [20], [21].

Dla uzyskania szacowania dwustronnego wystarcza:

- 1) zbudować pole naprężenia spełniające warunki równowagi wewnętrznej oraz na brzegu nie naruszające warunku stanu granicznego;
- 2) zbudować pole kinematyczne określające mechanizm plastycznego płynięcia, następnie z równości mocy dysypacji wewnątrz ciała i mocy sił zewnętrznych określić górną ocenę wartości obciążenia granicznego.

W szczególnych przypadkach, gdy górne i dolne oceny pokrywają się, otrzymujemy rozwiązanie ścisłe, co znaczy, że wybrane pola statyczne i kinematyczne spełniają warunki rozwiązania ścisłego. Takie rozwiązania można uzyskać przy wykorzystaniu równań charakterystyk naprężeń i prędkości, wyniki obliczeń z ich zastosowaniem zamieszczono w rozdziale 5.

### 4.3 Funkcja dysypacji

Dla klasycznej części powierzchni plastyczności, opisanej prostą graniczną  $f_1$  prędkości odkształceń głównych, określone dla stowarzyszonego prawa płynięcia (39), dane są poniższymi wzorami:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} \lambda (1 - \sin \varphi_1), \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2} \lambda (1 + \sin \varphi_1), \quad \dot{\varepsilon}_3 = 0. \quad (41)$$

Jednostkową moc dysypacji dla stowarzyszonego prawa płynięcia można wyrazić jako funkcję prędkości odkształceń:

$$D = D(\dot{\varepsilon}_i) = \sigma_i \dot{\varepsilon}_i \quad (42)$$

Podstawiając do (42) związki opisujące prędkości odkształceń, porównując z równaniem stanu granicznego dla prostej granicznej  $f_1$  i po wyeliminowaniu współczynnika proporcjonalności  $\lambda$  otrzymać można funkcję dysypacji dla części klasycznej:

$$D = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) c_1 \cot \varphi_1 = -(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1) c_1 \cos \varphi_1. \quad (43)$$

Dla części zamykającej powierzchni plastyczności opisanej prostą  $f_2$  (ogólny przypadek niesymetrycznej postaci warunku) prędkości odkształceń głównych, wynikające ze stowarzyszonego prawa, płynięcia opisują poniższe wzory:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} \lambda (1 - \sin \varphi_2), \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{2} \lambda (1 + \sin \varphi_2), \quad \dot{\varepsilon}_3 = 0. \quad (44)$$

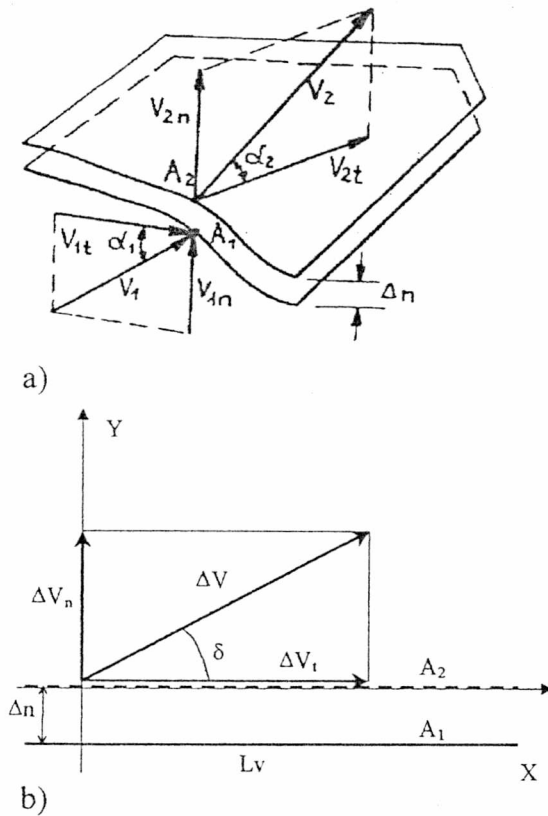
Wykonując dla prostej granicznej  $f_2$  podobne przekształcenia jak dla prostej  $f_1$  otrzymać można równanie opisujące funkcję dysypacji dla części zamykającej warunku stanu granicznego :

$$D = -\lambda p_p [0.5(1 - K_o) - \sin \varphi_2] \quad (45)$$

która po wyeliminowaniu współczynnika proporcjonalności przyjmie ostateczną postać:

$$D = -(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1) [0.5(1 - K_o) - \sin \varphi_2] p_p \quad (46)$$

#### 4.4 Moc dysypacji energii wzdłuż linii nieciągłości prędkości



Rys. 34. Linia nieciągłości prędkości

W teorii nośności granicznej w przeciwieństwie do np. teorii sprężystości, dopuszcza się występowanie linii (powierzchni) wzdłuż których składowe naprężenia bądź prędkości w sposób nagły zmieniają się. Własności tych powierzchni w aspekcie teorii nośności granicznej omówiono np. w [37].

Na rys. 34 przedstawiono najbardziej ogólny przypadek nieciągłości prędkości. Cienka warstwa  $\Delta n$  rozdziela dwie powierzchnie  $A_1$  oraz  $A_2$ . Wektor prędkości ruchu przechodząc z powierzchni  $A_1$  na  $A_2$  zmienia kierunek i wielkość, dzięki czemu możliwe jest względne przemieszczenie się obu części ośrodka rozdzielonych warstwą  $\Delta n$ . Linie nieciągłości prędkości  $L_v$  przedstawioną na rys. 34a należy interpretować jako nieskończenie cieniłą warstwę  $\Delta n$ , w której zmieniają się składowe styczna i normalna wektora prędkości. Przyjęty lokalny układ współrzędnych pokrywa się z linią nieciągłości. Przyjęto, że składowe prędkości normalna  $V_n$  i styczna  $V_t$  są ujemne dla rozciągania. Prędkości odkształcenia w warstwie  $\Delta n$  wynoszą:

$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = -\frac{\Delta V_n}{\Delta n}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\Delta V_t}{\Delta n} \quad (47)$$

W dalszej kolejności wykorzystując poniższe wzory transformacyjne:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) + \left[ \frac{1}{4}(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + \dot{\varepsilon}_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) - \left[ \frac{1}{4}(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + \dot{\varepsilon}_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (48)$$

można określić prędkości odkształcenia w układzie osi głównych :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2\Delta n}(\Delta V - \Delta V_n), \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{2\Delta V}(\Delta V_n + \Delta V), \quad \dot{\varepsilon}_3 = 0 \quad (49)$$

## 4.5 Równania mocy dysypacji

### 4.5.1 Moc dysypacji dla klasycznej i zamykającej części warunku stanu granicznego

Porównując prędkości odkształceń głównych określone na podstawie prawa płynięcia (39) i wynikające ze wzorów (49), następnie eliminując współczynnik proporcjonalności  $\lambda$ , przy  $\Delta n \rightarrow 0$  otrzymuje się następujący związek dla prostej granicznej  $f_1$ :

$$\frac{\Delta V_n}{\Delta V} = \sin \varphi_1 = \sin \delta \quad (50)$$

oraz zamykającej  $f_2$ :

$$\frac{\Delta V_n}{\Delta V} = \sin \varphi_2 = \sin \delta \quad (51)$$

Jednostkową moc dysypowaną wzdłuż linii nieciągłości można obliczyć wychodząc ze wzoru  $D_L = \Delta n D$ . Po podstawieniu do niego prędkości odkształceń głównych (49) dla części klasycznej warunku stanu granicznego otrzymuje się:

$$D_L = c_1 \cos \varphi_1 \Delta V = c_1 \Delta V_t. \quad (52)$$

Podstawiając dalej wg (31.1)  $c_1 = \tau - \sigma \tan \varphi_1$  oraz przyjmując na podstawie zależności (22)  $\tan \varphi_1 = \tan \delta_1$ , otrzymać można ostateczną postać związku określającego jednostkową moc dysypacji wzdłuż linii nieciągłości prędkości:





gdzie punkt osobiwy powierzchni plastyczności na płaszczyźnie s-t ma następujące współrzędne:

$$s_o = \frac{p_p [0.5(1 - K_0) - \sin \varphi_2] - c_1 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2},$$

$$t_o = \frac{p_p [0.5(1 - K_0) - \sin \varphi_2] \sin \varphi_1 - c_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}.$$
(56)

Zakładając stowarzyszone prawo płynięcia przyjąć należy następujący zakres zmienności kąta  $\delta$  w strefie przejściowej:  $\varphi_2 \leq \delta \leq \varphi_1$ . Składowe wektora nieciągłości prędkości można wyrazić wg rys. 34b za pomocą następujących związków:

$$\Delta V_n = \Delta V \sin \delta,$$

$$\Delta V_t = \Delta V \cos \delta.$$
(57)

Podstawiając (55) i (57) do (53) otrzymać można końcowy wzór określający dysypację mocy w strefie przejściowej:

$$D_L = (t_o - s_o \sin \delta) \Delta V.$$
(58)

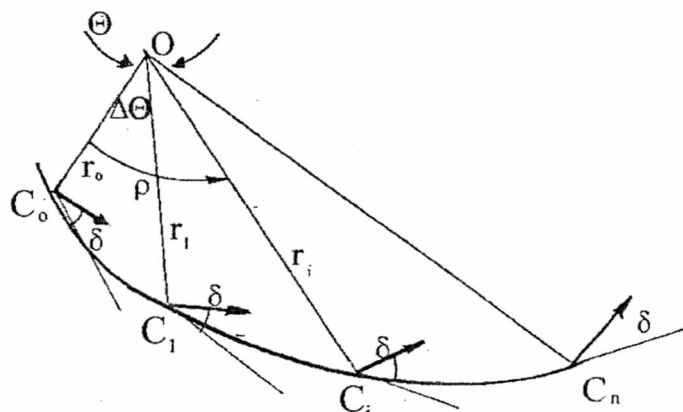
#### 4.6 Moc dysypacji energii w przypadku ciągłego pola prędkości

Powyżej podane wzory określają moc dysypacji wzdłuż pojedynczej linii nieciągłości prędkości, natomiast by otrzymać ocenę górną nośności granicznej konieczna jest umiejętność określenia mocy dysypacji dla dowolnego, ciągłego pola prędkości.

Podstawowe rozwiązanie tego zagadnienia podaje praca [37]. Rozpatrywana jest strefa złożona z  $n$  sztywnych bloków materiału, pokazana na rys. 36. Mechanizm odkształcenia polega na wzajemnym ruchu bloków ze stałymi prędkościami  $V_0, V_1, \dots, V_i, \dots, V_n$ , które ślizgają się po sobie wzdłuż linii nieciągłości  $OC_i$  i wzdłuż linii oddzielających obszar podlegający odkształceniu od obszaru sztywnego  $C_{i-1}C_i$ . Zgodnie ze wzorem (50) lub (51) linie te muszą tworzyć z wektorem nieciągłości prędkości stały kąt  $\delta = \varphi_1$  lub  $\delta = \varphi_2$ . Taki wymóg spełnia spirala logarytmiczna. Przechodząc do granicy przy ilości bloków  $n \rightarrow \infty$  otrzymać można ciągłe pole prędkości:

$$V = V_o \exp(\theta \tan \delta)$$
(59)

gdzie  $\Theta$  - kąt wg rys. 35.



Rys. 36 Mechanizm odkształcenia zespołu sztywnych bloków wzdłuż spirali logarytmicznej

Obliczając z równania (52) wartości mocy dysypowanej dla  $i$ -tego bloku, a następnie całkując je wzdłuż całej linii  $C_0C_n$ , danej równaniem spirali, określić można moc dysypowaną w całej rozpatrywanej strefie  $OC_0C_n$ , w której stan naprężenia opisuje prosta graniczna  $f_1$ :

$$D = c_1 V_o r_o \cot \varphi_1 [\exp(2\theta \tan \varphi_1) - 1] \quad (60)$$

Analogicznie można określić moc dysypowaną dla zamykającej części warunku stanu granicznego, całkując wzdłuż całej linii  $C_0C_n$  wartości obliczone z równania (54) dla  $i$ -tego bloku:

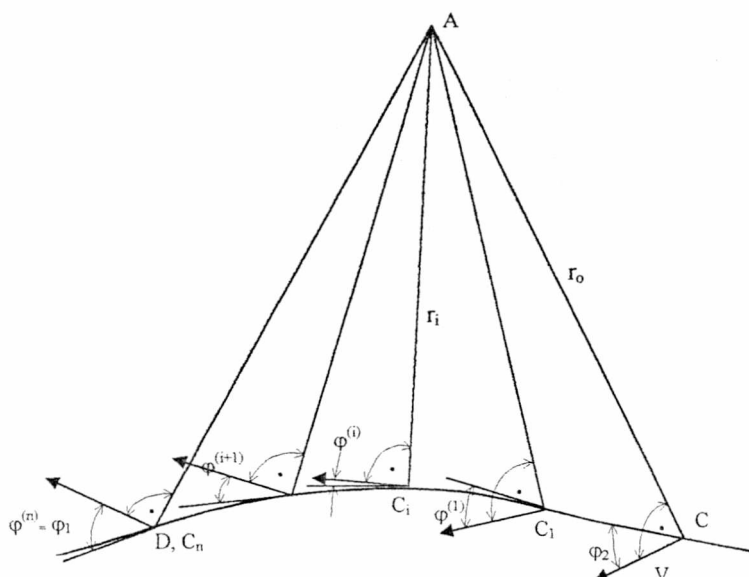
$$D = p_c V_o r_o \left[ \frac{0.5(1 - K_o)}{\sin \varphi_2} - 1 \right] [\exp(2\theta \tan \varphi_2) - 1]. \quad (61)$$

Bardziej złożona sytuacja występuje w strefie, w której stan naprężenia dany jest przejściowym kołem Mohra – por. rys. 35. W strefie tej zachodzi zarówno zagęszczenie jak i rozluźnienie, parametry wytrzymałościowe  $c^{(i)}$  i  $\varphi^{(i)}$  zmieniają się w sposób ciągły:  $c_1 \leq c^{(i)} \leq c_2$ ,  $\varphi_1 \geq \varphi^{(i)} \geq \varphi_2$ . W tym przypadku wektor nieciągłości prędkości jest odchyłony od linii  $C_0C_n$  (rys. 36) o zmienny kąt:

$$\delta(\rho) = \delta_o + \frac{\rho}{\theta} (\delta_n - \delta_o) \quad (62)$$

Dla stowarzyszonego prawa płynięcia można przyjąć podobnie jak w przypadku wzorów (50) oraz (51) następującą zależność  $\varphi(\rho) = \delta(\rho)$ . Równanie linii  $C_0C_n$  można zapisać zatem w następującej postaci:

$$r = r_o \exp \left\{ \rho \tan \left[ \varphi_2 + \frac{\rho}{\theta} (\varphi_1 - \varphi_2) \right] \right\}. \quad (63)$$



Dla mechanizmu odkształcenia jak na rys. 37, złożonego z  $n$ -sztynych bloków, kąt jaki tworzy wektor nieciągłości prędkości z linią  $CoC_n$  można dla  $i$ -tego bloku zapisać następująco:

$$\varphi^{(i)} = \varphi_2 + \frac{i}{n-1}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (64)$$

Na podstawie zależności geometrycznych można też określić prędkości poszczególnych bloków:

Rys. 37 Mechanizm odkształcenia dla strefy przejściowej

$$\begin{aligned} V_i &= V_{i-1} (1 + \Delta\theta \tan\varphi^{(i-1)}) \\ V_n &= V_o (1 + \Delta\theta \tan\varphi_o) (1 + \Delta\theta \tan\varphi^{(1)}) \dots (1 + \Delta\theta \tan\varphi^{(i)}) \dots (1 + \Delta\theta \tan\varphi^{(n-1)}) (1 + \Delta\theta \tan\varphi_n) \end{aligned} \quad (65)$$

Dla takiego zadania niemożliwe jest uzyskanie rozwiązania ścisłego, opisującego ciągle pole prędkości. Przykłady ocen nośności, podane w dalszej części pracy (punkt 4.8), zostały uzyskane na drodze obliczeń numerycznych, w których wykorzystano powyższe zależności (65).

#### 4.7 Nośność graniczna

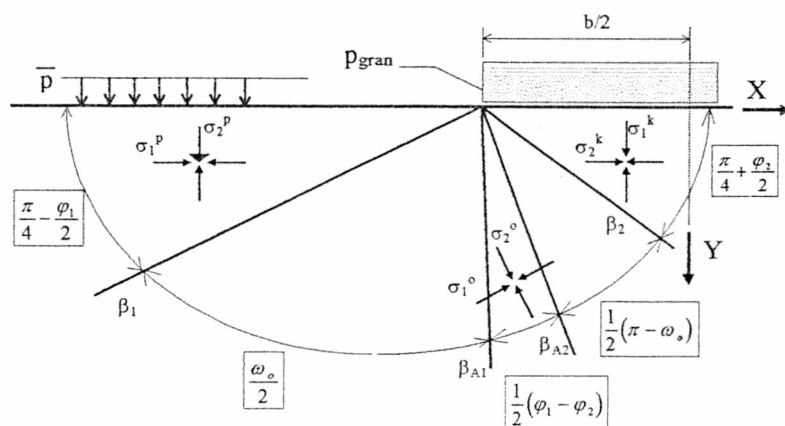
#### 4.7.1 Ocena dolna nośności granicznej

Rozwiązanie określające nośność graniczną podłoża dla liniowego fundamentu o jednostkowej szerokości w przypadku ośrodka nieważkiego, gdzie stan graniczny dany jest warunkiem Coulomba- Mohra z liniowym zamknięciem od strony naprężeń bardziej ściskających (por. rys. 29) zawiera praca Izbieckiego [35]. Poniżej natomiast przedstawiono rozwiązanie określone dla warunku stanu granicznego z rotacją powierzchni plastyczności (26).

Aby uzyskać ocenę dolną nośności granicznej, należy zbudować statycznie dopuszczalne pole naprężeń (por. p. 4.2). Dla ogólnego przypadku jest ono przedstawione na rys. 38. Poniższe związki opisują stany naprężenia w poszczególnych strefach:

- stan naprężenia w strefie między osią x a linią  $\beta_1$

$$s = s_p = \frac{c_1 \cot \varphi_1 + \bar{p}}{1 - \sin \varphi_1}, \quad t = t_p = \frac{c_1 \cos \varphi_1 + \bar{p} \sin \varphi_1}{1 - \sin \varphi_1} \quad (66)$$



Rys. 38. Statycznie dopuszczalne pole naprężeń

- stan naprężenia w strefie między linią  $\beta_1$  a linią  $\beta_{A1}$

$$s = \frac{c_1 \cot \varphi_1 + \bar{p}}{1 - \sin \varphi_1} \exp(\omega \tan \varphi_1) - c_1 \cot \varphi_1, \quad t = \frac{c_1 \cos \varphi_1 + \bar{p} \sin \varphi_1}{1 - \sin \varphi_1} \exp(\omega \tan \varphi_1) \quad (67)$$

gdzie:

$$0 \leq \omega \leq \omega_o,$$

$$\omega_o = \cot \varphi_1 \ln \left( \frac{t_o}{t_p} \right), \quad (68)$$

$$t = t_o \text{ wg wzoru (36.2),}$$

- stan naprężenia w strefie między linią  $\beta_{A1}$  a linią  $\beta_{A2}$

$$s = s_o = \frac{p_p [0.5(1 - K_o) - \sin \varphi_2] - c_1 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}, \quad t = t_o, \quad (69)$$

- stan naprężenia w strefie między linią  $\beta_{A2}$  a linią  $\beta_2$

$$s = p_p - \frac{0.5 p_p (1 - K_o)}{\sin \varphi_2} - \left[ p_p - s_o - \frac{0.5 p_p (1 - K_o)}{\sin \varphi_2} \right] \exp[(\omega - \omega_o) \tan \varphi_2],$$

$$t = t_o \exp[(\omega - \omega_o) \tan \varphi_2], \quad (70)$$

gdzie  $\omega_o \leq \omega \leq \pi$ ,

- stan naprężenia w strefie między linią  $\beta_2$  a osią x

$$s = s_k = p_p + \frac{t_o}{\sin \varphi_2} \exp[\tan \varphi_2 (\pi - \omega_o)], \quad t = t_k = t_o \exp[\tan \varphi_2 (\pi - \omega_o)] \quad (71)$$

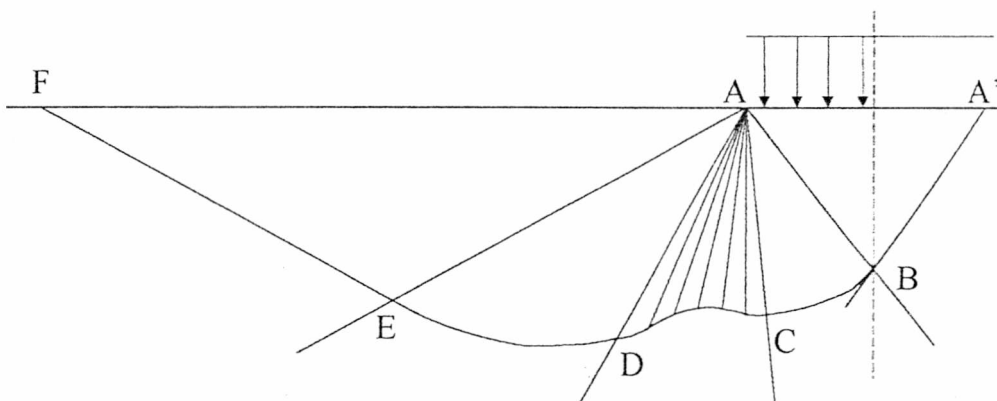
Po zdefiniowaniu statycznie dopuszczalnego pola naprężeń można podać wzór określający ocenę dolną nośności granicznej podłoża:

$$p^d_{gran} = p_p + t_o \frac{1 + \sin \varphi_2}{\sin \varphi_2} \exp[\tan \varphi_2 (\pi - \omega_o)]. \quad (72)$$

#### 4.7.2. Ocena górna nośności granicznej

Aby uzyskać ocenę górną nośności (por. punkt 4.2) należy zbudować kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczeń. Przy budowie takiego pola schemat wyjściowy może stanowić pole naprężeń przyjęte dla określenia oceny dolnej, dla którego granice pomiędzy strefami naprężeń należy traktować jako linie nieciągłości prędkości. Istnieje duża dowolność w budowie pola przemieszczeń, sposobie przyjęcia poszczególnych stref (bloków) i linii nieciągłości prędkości. Można wykazać, że istnieje nieskończenie wiele możliwości zbudowania teoretycznych kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości, por. Izbicki i Mróz [37].

Dla warunku z liniowym zamknięciem dotychczas zaproponowano dwie koncepcje budowy pola przemieszczeń. W obu przyjęto, podobnie jak w klasycznym rozwiązaniu Prandtla, że pod obciążeniem (fundamentem) formuje się jeden sztywny klin a w strefie promieniowego ścinania zakłada się możliwość występowania stref rozluźnienia i zagęszczenia.



Rys. 39 Pole przemieszczeń ze strefą przejściową ADC zbudowaną z wielu segmentów wg Buczyńskiego [10]

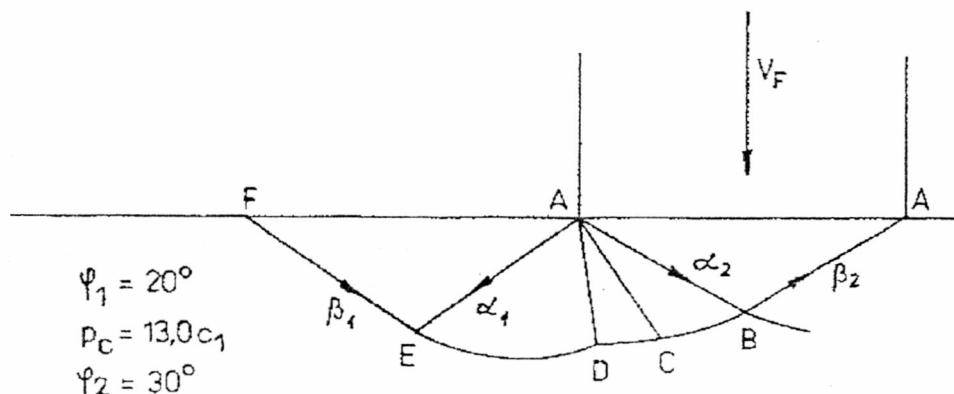
W podejściu zaproponowanym przez A. Buczyńskiego w pracy [10] kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczeń (rys. 39) jest zbudowane z dwóch obszarów w postaci bloków sztywnych ABA', AFE oraz strefy promieniowego ścinania, złożonej z trzech obszarów (rys. 39):

1. ACB - obszar, w którym występuje zagęszczenie materiału, linia BC jest spiralą logarytmiczną,
2. ADC - strefa przejściowa, gdzie występuje zagęszczenie i rozluźnienie materiału, strefa ta jest zbudowana z wielu segmentów, traktowanych w obliczeniach jako bloki sztywne,
3. AED - obszar, w którym występuje rozluźnienie, linia ED jest spiralą logarytmiczną.

Z kolei w pracy R. Izbickiego [35] przyjęto odmienną koncepcję budowy strefy promieniowego ścinania. Strefa przejściowa ADC jest zbudowana z jednego sztywnego bloku - rys. 40, dla którego linia DC jest prostą będącą charakterystyką, która tworzy z osią x kąt

$$\psi_a = \frac{\omega}{2} - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right)$$

Rozwiązanie to jest ograniczone do przypadku ośrodka nieważkiego. Należy zauważyć, iż w tym rozwiązaniu, w odróżnieniu do wariantu z „wachlarzem”, linia nieciągłości prędkości AD jest również linią nieciągłości parametrów wytrzymałości  $\varphi$  i  $c$ . W tym sensie można ją traktować jako nieskończenie cienką warstwę, w której następuje przejście od parametrów wytrzymałościowych  $\varphi_1$  i  $c_1$  do  $\varphi_2$  i  $c_2$ .



Rys. 40 Pole przemieszczeń ze strefą przejściową w postaci jednego bloku wg Izbickiego [35]

Poniżej przedstawione rozwiązanie stanowi uogólnienie obu wariantów, pozwala określić wartość oceny górnej nośności granicznej dla schematu pola przemieszczeń, w którym przyjęto strefę przejściową zbudowaną z dowolnej ilości sztywnych bloków, dla  $n \geq 1$ .

W strefie przejściowej przyjęto, że następuje liniowa zmiana parametrów wytrzymałościowych od  $\varphi_1$  na linii nieciągłości prędkości AD do  $\varphi_2$  na linii AC. Dla  $i$ -tego bloku strefy przejściowej parametry określają poniższe związki:

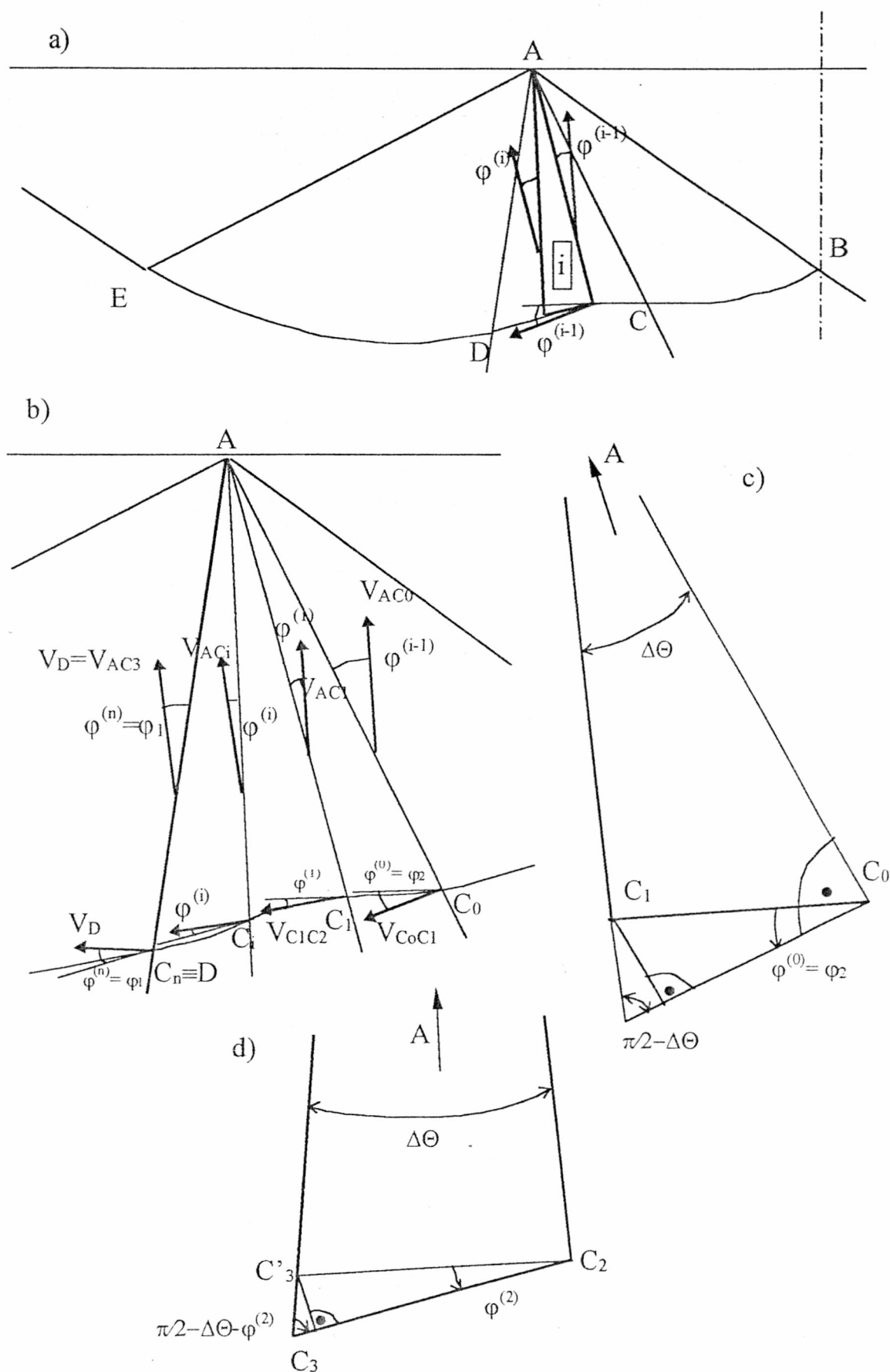
$$\varphi^{(i)} = \varphi_2 + \frac{i}{n}(\varphi_1 - \varphi_2), \quad c^{(i)} = c_1 - \frac{n-1}{n}(p_p \tan \varphi_2 + c_1), \quad (73)$$

gdzie podane w nawiasach indeksy górne określają parametry wzdłuż linii nieciągłości prędkości  $i$ -tego bloku, co ilustruje przykład zamieszczony na rys. 41a.

W celu uzyskania rozwiązania należy określić długości odpowiednich linii nieciągłości prędkości dla poszczególnych bloków na podstawie zależności geometrycznych z płaszczyzny fizycznej. Następnie należy określić wartości nieciągłości prędkości wzdłuż poszczególnych linii nieciągłości wynikające z zależności występujących na planie prędkości (hodografie). Sposób ustalenia tych wielkości, opisanych wzorami (74), zilustrowano na rys. 41a - 41d za pomocą przykładu, w którym strefę przejściową podzielono na trzy bloki.

Długość linii nieciągłości  $AC_0$  i  $AE$ , wg rys. 41a określono na podstawie równania spirali logarytmicznej. Długości pozostałych linii nieciągłości prędkości wyznaczono ze związków geometrycznych danych na rys. 41. Uwagę należy zwrócić na fakt, że w strefie przejściowej postać wzorów opisujących długości linii nieciągłości jest także zależna od znaku kąta  $\varphi^{(i)}$ .





Rys. 41 Zależności geometryczne dla określenia długości linii nieciągłości prędkości

Wzory dla kątów ujemnych otrzymano z zależności z rys. 41 c, dla dodatnich z kolei z rys. 41 d. W przypadku wariantu strefy przejściowej zbudowanej tylko z jednego bloku, długość linii  $C_i C_{i-1}$  należy przyjąć jak dla  $\varphi^{(i)} < 0$  (dla  $\varphi^{(i)} = \varphi_2$ ), natomiast dla linii  $AC_i$  jak dla  $\varphi^{(i)} \geq 0$  (dla  $\varphi^{(i)} = \varphi_1$ ). Długości linii nieciągłości prędkości opisują poniższe wzory:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \frac{b}{2 \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right)}, \\ \overline{AC} = \overline{AB} \exp \left[ \frac{1}{2} (\pi - \omega_o) \tan \varphi_2 \right], \\ \text{dla } \varphi^{(i-1)} < 0 : \\ \overline{C_i C_{i-1}} = \frac{\overline{AC_{i-1}}}{\cos \varphi^{(i-1)} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{2} - \Delta \Theta \right) - \tan \varphi^{(i-1)} \right]}, \\ \overline{AC_i} = \left[ \frac{1}{\cos \Delta \Theta} + \frac{\tan \varphi^{(i-1)} \operatorname{tg} \Delta \Theta}{\left[ \tan \left( \frac{\pi}{2} - \Delta \Theta \right) - \operatorname{tg} \varphi^{(i-1)} \right] \cos \left( \frac{\pi}{2} - \Delta \Theta \right)} \right] \overline{AC_{i-1}}, \\ \text{dla } \varphi^{(i-1)} \geq 0 : \\ \overline{C_i C_{i-1}} = \left[ \cos \varphi^{(i-1)} + \sin \varphi^{(i-1)} \cot \left( \frac{\pi}{2} - \Delta \Theta - \varphi^{(i-1)} \right) \right] \tan \Delta \Theta \overline{AC_{i-1}}, \\ \overline{AC_i} = \frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \Delta \Theta - \varphi^{(i-1)} \right) + \sin \varphi^{(i-1)} \sin \Delta \Theta}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \Delta \Theta - \varphi^{(i-1)} \right) \cos \Delta \Theta} \overline{AC_{i-1}}, \\ \overline{FE} = \overline{AE} = \overline{AD} \exp \left( \frac{\omega_o}{2} \tan \varphi_1 \right), \end{array} \right. \quad (74)$$

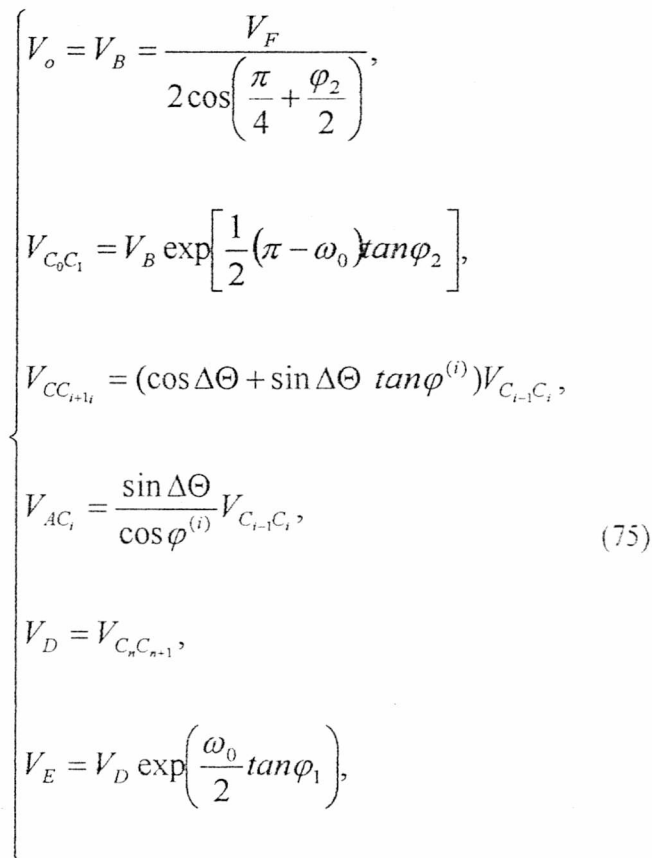
gdzie:  $\omega_o$ - kąt dany wzorem (68),

$n$  - ilość bloków w strefie przejściowej,

$AD \equiv AC_n$ , dla  $n=1$   $AD \equiv AC_1$ ,

$$\Delta \Theta = \frac{1}{2n} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Mechanizm zniszczenia w rozwiązaniu dla prędkości nawiązuje również do klasycznego rozwiązania Prandtla [53]. Wartości skoku prędkości wzdłuż poszczególnych linii nieciągłości prędkości określono na podstawie hodografu - rys. 42:



Rys. 42 Hodograf prędkości

gdzie  $V_F$  jest prędkością z jaką porusza się fundament o szerokości  $B$ .

Przedstawiony na rys. 42 hodograf prędkości odnosi się do przykładu z rys. 41, w którym strefę przejściową podzielono na trzy bloki. Do jego wykreślenia wykorzystano tą właściwość, iż wektory prędkości są prostopadłe do promieni z płaszczyzny fizycznej.

Wartość oceny górnej nośności granicznej  $p_{gran}^g$  obliczyć można z równania bilansu mocy dysypowanych, w którym moc obciążeń zewnętrznych porównano z mocą dysypacji wewnętrznej, określoną w każdej z wydzielonych stref pola kinematycznego. Moce dysypowane w strefie AFE i AED określa wzór (52), w strefie przejściowej ADC (58) oraz w strefie ACB wzór (54). Ze względu na symetrię zadania bilans mocy dysypowanych zapisano tylko dla jednej połowy pola deformacji:

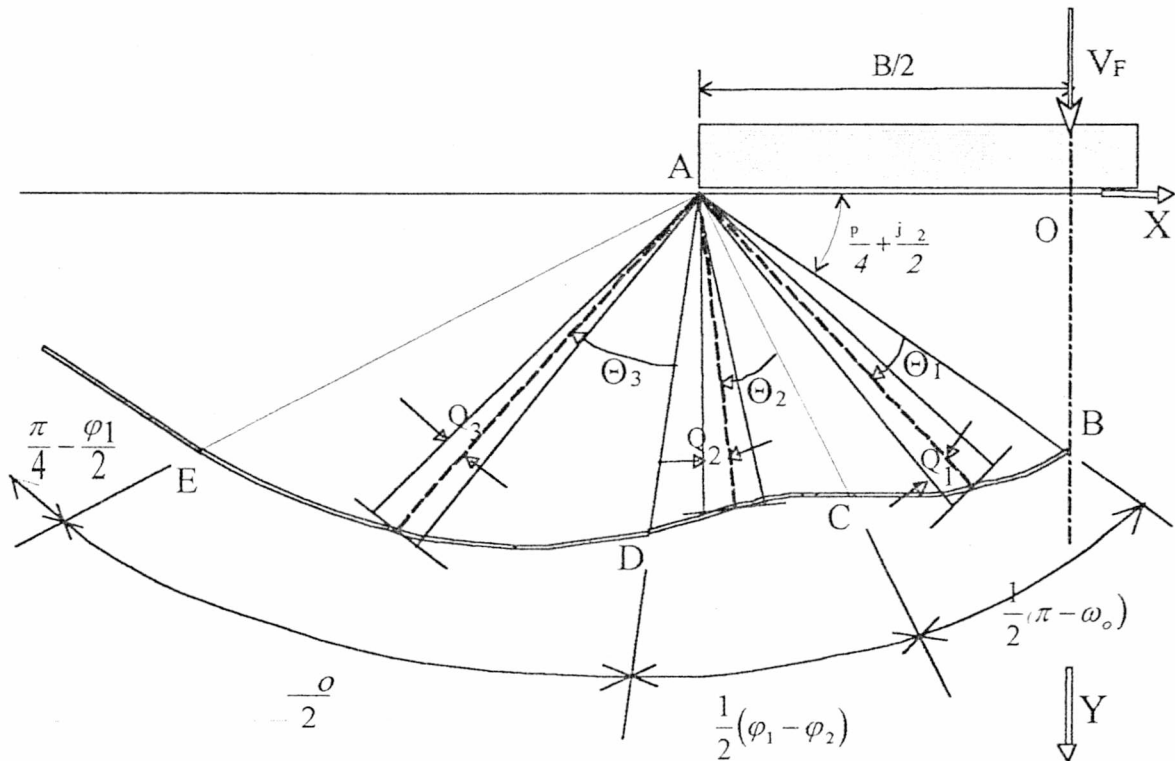
$$\frac{1}{2}BV_F p_{gram}^g = \sum_{i=1}^n c_i \cos \varphi_1 V_i l_i + \sum_{j=1}^m (t_o - s_o \sin \varphi^{(j)}) V_j l_j + \sum_{k=1}^o p_p [0,5(1-K_o) - \sin \varphi_2] V_k l_k \quad (76)$$

gdzie: B - szerokość fundamentu,

$V_F$  - prędkość, z jaką porusza się fundament,

$l_i, l_j, l_k$  – odpowiednio długości poszczególnych linii nieciągłości prędkości w poszczególnych strefach,

$V_i, V_j, V_k$  – odpowiednio prędkości bloków w poszczególnych strefach.



Rys. 43 Schemat do obliczenia mocy sił prędkości – związki na płaszczyźnie fizycznej

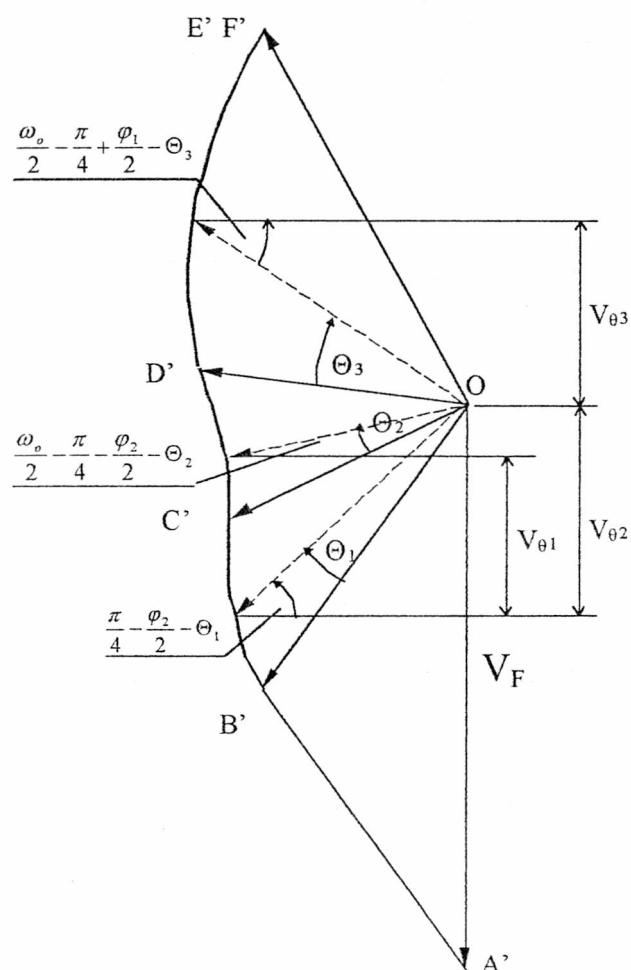
W celu uzyskania końcowego wyrażenia na bilans mocy dysypowanych należy do równania (76) podstawić odpowiednie wartości długości linii nieciągłości I zgodnie z (74) oraz wartości skoków prędkości  $V$  otrzymane ze wzorów (75):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} B V_F p_{gran}^g &= p_P \left[ \frac{1}{2} (1 - K_0) - \sin \varphi_2 \right] \overline{AB} V_0 + \\
 &+ p_P \left( \frac{1 - K_0}{2 \sin \varphi_2} - 1 \right) \{ \exp[(\pi - \omega_0) \tan \varphi_2] - 1 \} \overline{AB} V_B + \\
 &+ \sum_{i=1}^n \{ [t_O - s_O \sin \varphi^{(i-1)}] \overline{C_{i-1} C_i} V_{C_{i-1} C_i} + [t_O - s_O \sin \varphi^{(i)}] \overline{AC_i} V_{AC_i} \} + \\
 &+ c_1 \overline{AC_n} V_D \cot \varphi_1 [\exp(\omega_0 \tan \varphi_1) - 1] + c_1 \overline{EF} V_E \cos \varphi_1,
 \end{aligned} \tag{77}$$

Z kolei aby uzyskać oszacowanie wartości nośności dla ośrodka ważkiego można wykorzystać ten sam kinematycznie dopuszczalny mechanizm odkształcenia ośrodka, który został wcześniej zastosowany. Należy na niego nałożyć stałe pole ciężkości, w wyniku czego prawa strona równania bilansu mocy dysypowanych należy uzupełnić wyrazami określającymi moc sił ciężkości obliczonymi w kolejnych strefach pola deformacji:

$$\left\{ \begin{aligned}
 L_{ABO} &= \gamma W_F A_{ABO} = \gamma \frac{B}{4} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) V_B, \\
 L_{ABC} &= \gamma \int V_{\Theta_1} dA = \frac{\gamma W_B L_{AB}^2}{2(1 + 9 \tan^2 \varphi_2)} \left\langle \left\{ 3 \tan \varphi_2 \sin \left[ \frac{\omega_o}{2} - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) \right] + \cos \left[ \frac{\omega_o}{2} - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) \right] \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp \left[ \frac{3}{2} (\pi - \omega_o) \tan \varphi_2 \right] - \left\{ 3 \tan \varphi_2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right\} \right\rangle, \\
 L_{ACD} &= \gamma W_B L_{AC} L_{AD} \sin \left( \frac{\omega_o}{2} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \frac{V_C}{2}, \\
 L_{ADE} &= \gamma \int V_{\Theta_2} dA = \frac{\gamma W_D L_{AD}^2}{2(1 + 9 \tan^2 \varphi_1)} \left\langle \left\{ 3 \tan \varphi_1 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) - \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp \left( \frac{3}{2} \omega_o \tan \varphi_1 \right) + \left\{ 3 \tan \varphi_1 \sin \left[ \frac{\omega_o}{2} - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] + \cos \left[ \frac{\omega_o}{2} - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \right\} \right\rangle, \\
 L_{AEF} &= -\gamma W_B L_{AE}^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \frac{V_E}{2}.
 \end{aligned} \right. \tag{78}$$

Sposób określenia mocy sił ciężkości w strefie promieniowego ścinania ilustruje rys. 43 oraz rys. 44.



Rys. 44 Schemat do obliczenia mocy sił prędkości – hodograf prędkości

Na podstawie wartości nośności granicznej obliczonej z bilansu mocy dysypowanych (77) można również określić współczynnik nośności  $N_c$ :

$$N_c = \frac{p_{gran}^g}{c_1 B}. \quad (79)$$

Sumując dalej prace sił ciężkości w poszczególnych strefach pola deformacji, opisane wzorami (78), otrzymać można kolejny współczynnik nośności:

$$N_\gamma = \frac{L_{ABO} + L_{ABC} + L_{ACD} + L_{ADE} + L_{AEF}}{\gamma B}. \quad (80)$$

Za pomocą współczynników (79) i (80) można ocenę górną nośności dla ośrodka wazkiego zapisać w sposób nawiązujący do wzoru Terzagiego:

$$q_f^g = c_1 N_c + B \gamma N_\gamma. \quad (81)$$

## 4.8 Przykłady obliczeń

W niniejszym rozdziale wyprowadzono wzory służące określeniu wartości ocen dolnej oraz górnej nośności podłoża obciążonego fundamentem pasmowym – w warunkach płaskiego stanu odkształcenia dla wazkiego ośrodka. Uzyskano je dla ogólnej postaci warunku stanu granicznego, charakteryzującego się niesymetryczną rotacją powierzchni plastyczności.

Wszystkie obliczone wartości nośności otrzymano dla fundamentu o jednostkowej szerokości  $B = 1$  m, posadowionego na powierzchni gruntu, który charakteryzują następujące wartości parametrów materiałowych:  $\gamma/c_1 = 1$ ,  $p_p = 13 c_1$ , współczynnik  $K_o = 0,8$ , kąt  $\varphi_1 = 5^\circ \div 40^\circ$  oraz  $\varphi_2 = -20^\circ \div -10^\circ$ . Obliczenia numeryczne przeprowadzono za pomocą własnego, oryginalnego programu komputerowego NOGRAV1.0. Wartość oceny dolnej nośności uzyskano stosując wzór (72), natomiast wartość oceny górnej ze wzoru (77), uzupełnionego o (78) w celu określenia wartości współczynnika nośności  $N_\gamma$ . Wartość oceny górnej obliczono przyjmując podział strefy przejściowej na 1000 bloków.

Wyniki zestawiono w tabeli 1, w której wartości oceny górnej oraz dolnej podano w formie współczynnika nośności  $N_c$ , jak również zamieszczono wartości współczynnika nośności  $N_\gamma$ . W tejże tabeli wyróżniono trzy obszary, w których występują odmienne typy rozwiązań:



- rozwiązania, w których stany naprężenia na płaszczyźnie deformacji leżą na obu częściach warunku stanu granicznego (prosta  $f_1$  oraz  $f_2$ ), czyli postać warunku jest zgodna z przyjętą w niniejszej pracy, są to rozwiązania oznaczone w tabeli kolorem szarym; ich ilustracją są rys. 45 a oraz 45 b,
- rozwiązania, w których stany naprężenia leżą tylko na klasycznej części warunku stanu granicznego (prosta  $f_1$ ), czyli postać warunku jest tożsama z otwartym warunkiem Coulomba- Mohra, w tabeli są oznaczone kolorem niebieskim, ich ilustracją jest rys. 46,
- rozwiązania, w których stany naprężenia leżą wyłącznie na zamykającej części warunku stanu granicznego (prosta  $f_2$ ), są oznaczone w tabeli kolorem żółtym, ich ilustracją jest rys. 47.

Tab. 1 Wyniki obliczeń ocen górnych i dolnych nośności przy  $p_p=13c_1$ ,  $\gamma/c_1=1$  oraz  $K_o=0,8$

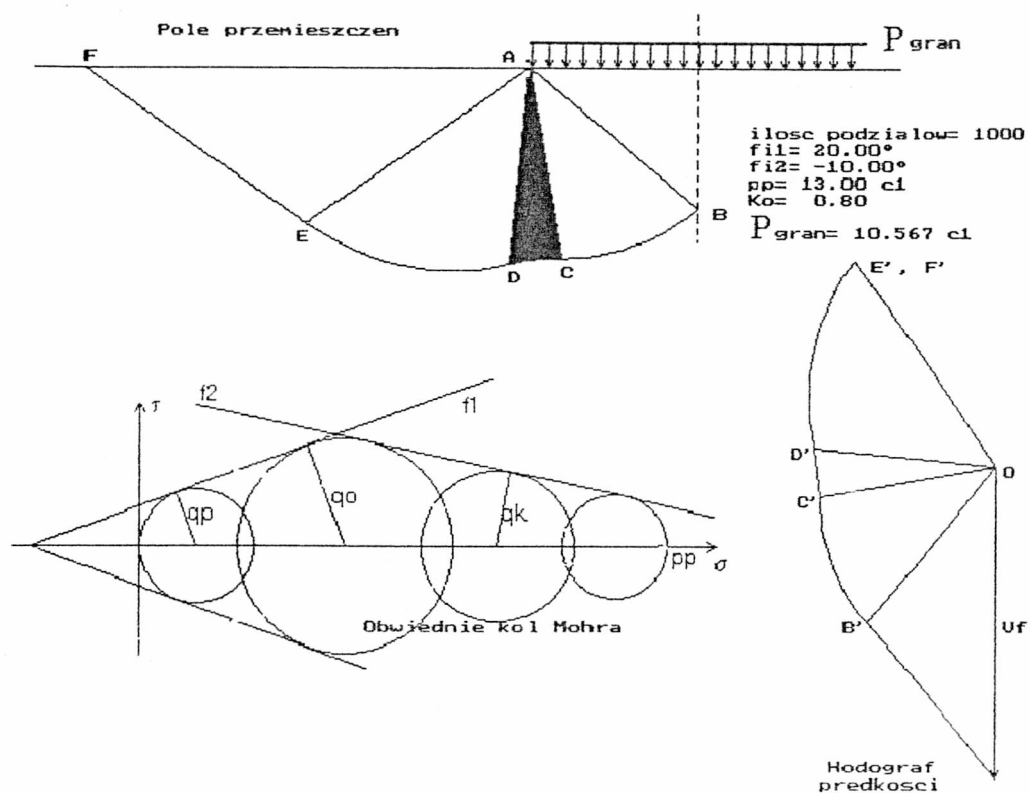
| $\Phi_1$ |            | $\Phi_2$ |         |         |         |
|----------|------------|----------|---------|---------|---------|
|          |            | -5°      | -10°    | -15°    | -20°    |
| 5°       | $N_c^g$    | 4,7076   | 6,489   | 6,489   | 6,489   |
|          | $N_\gamma$ | -0,1261  | 0,2476  | 0,2476  | 0,2476  |
| 15°      | $N_c^g$    | 4,7076   | 9,854   | 10,484  | 10,924  |
|          | $N_c^d$    |          | 3,314   | 6,484   | 8,010   |
|          | $N_\gamma$ | -0,1261  | 0,2778  | 0,3510  | 0,4013  |
| 20°      | $N_c^g$    | 4,7076   | 10,567  | 11,364  | 11,945  |
|          | $N_c^d$    |          | 3,892   | 7,085   | 8,819   |
|          | $N_\gamma$ | -0,1261  | 0,1539  | 0,1850  | 0,1909  |
| 30°      | $N_c^g$    | 4,7076   | 11,318  | 12,310  | 12,976  |
|          | $N_c^d$    |          | 4,560   | 7,875   | 9,6564  |
|          | $N_\gamma$ | -0,1261  | -0,0340 | -0,0006 | -0,0149 |
| 40°      | $N_c^g$    | 4,7076   | 11,764  | 12,827  | 13,505  |
|          | $N_c^d$    |          | 4,950   | 8,316   | 10,096  |
|          | $N_\gamma$ | -0,1261  | -0,1044 | -0,1028 | -0,1120 |

Tab. 2 Kształty obszarów deformacji dla przykładów obliczeniowych z tab. 1  
(ocena górnych i dolnych nośności przy  $p_p=13c_1$ ,  $\gamma/c_1=1$  oraz  $K_0=0,8$ )

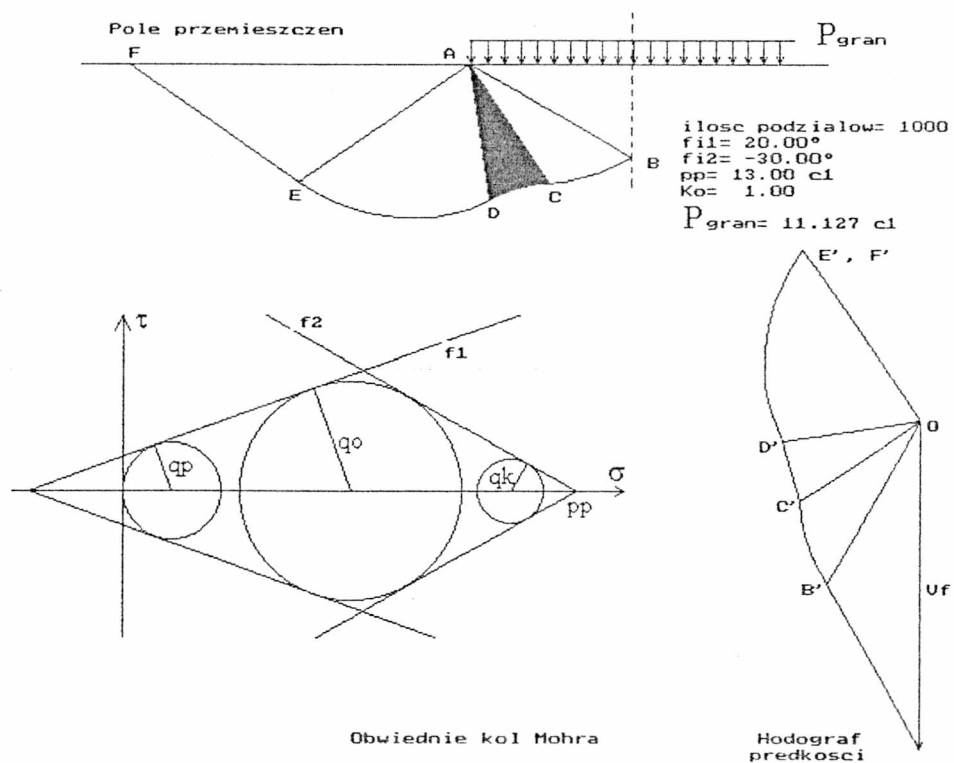
| $\varphi_1$ | $\varphi_2$ |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|             | $-5^\circ$  | $-10^\circ$ | $-15^\circ$ | $-20^\circ$ |
| $10^\circ$  |             |             |             |             |
| $15^\circ$  |             |             |             |             |
| $20^\circ$  |             |             |             |             |
| $30^\circ$  |             |             |             |             |
| $40^\circ$  |             |             |             |             |



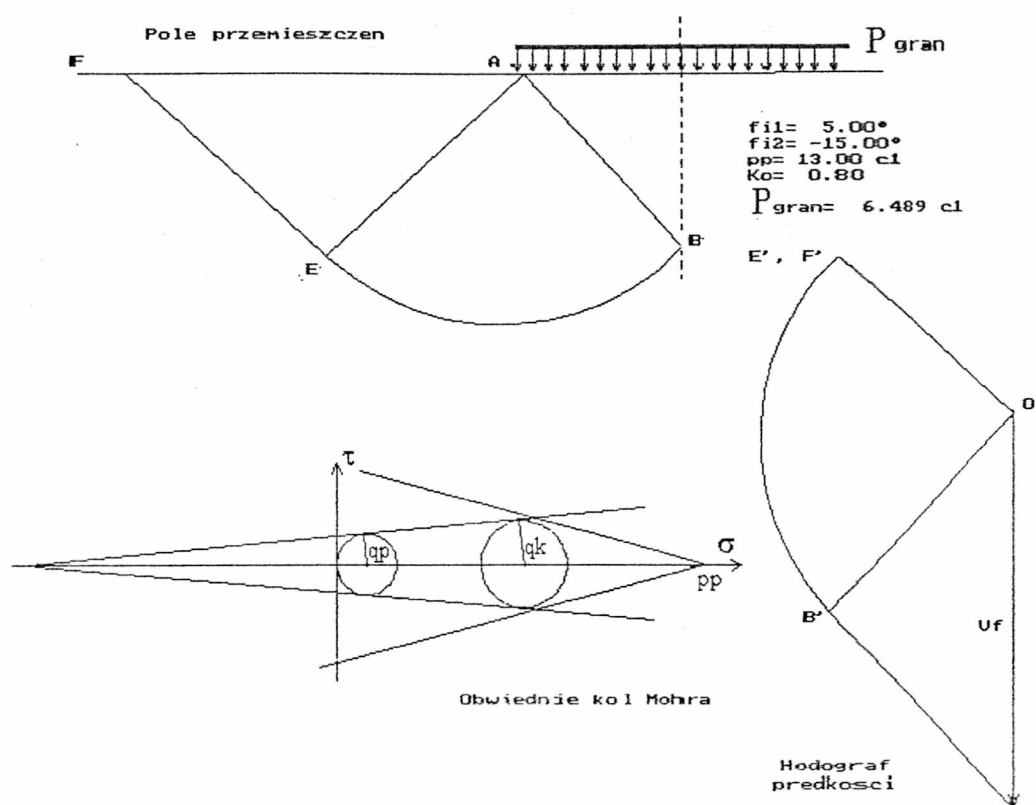
a)



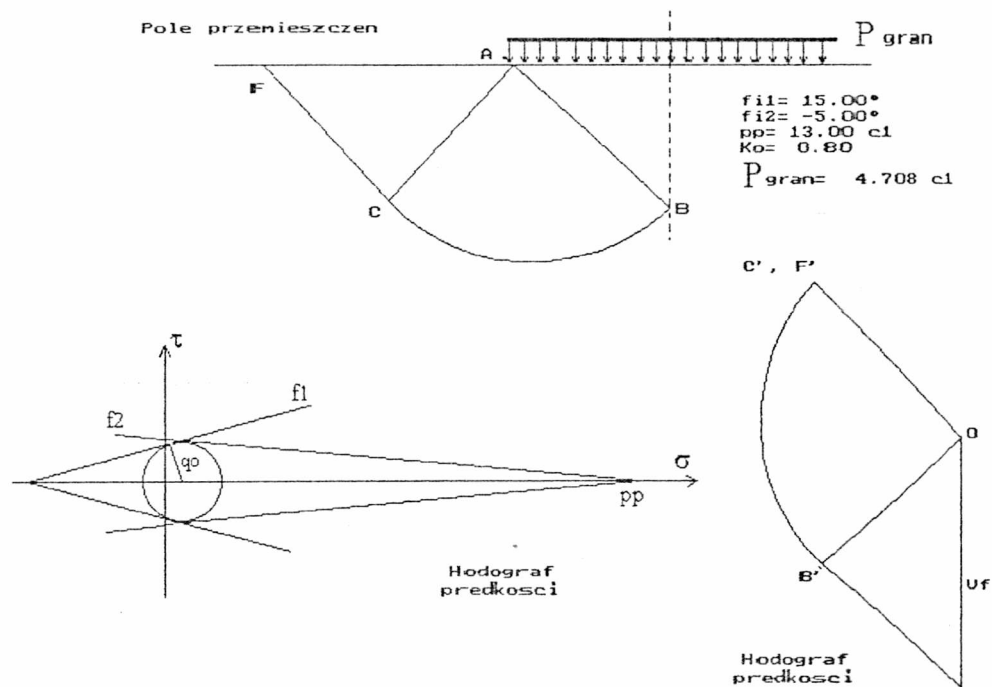
b)



Rys. 45 Ocena górna nośności granicznej – stany naprężenia leżą na obu częściach warunku stanu granicznego. Obliczenia dla a)  $K_o=0,8$  oraz b)  $K_o=1,0$



Rys. 46 Ocena górna nośności granicznej – stany naprężenia leżą na klasycznej części warunku stanu granicznego – warunek otwarty



Rys. 47 Ocena górna nośności granicznej – stany naprężenia leżą na zamykającej części warunku stanu granicznego

Uzupełnieniem obliczonych wartości ocen nośności są kształty obszarów deformacji zamieszczone w tab. 2, które uzyskano dla przykładów zestawionych w tab. 1. Szerszą ilustrację wykonanych obliczeń stanowią wybrane przykłady uzyskane za pomocą programu NOGRAv1.0, które zamieszczono na rysunkach 45- 47. Prócz kształtów obszarów deformacji zawierają one także postać warunku stanu granicznego oraz hodograf prędkości.

Dla stosunkowo wysokich wartości ciśnienia prekonsolidacji niemożliwe jest osiągnięcie stanu naprężenia na części zamykającej warunku. Wartość ciśnienia prekonsolidacji, która oddziela rozwiązania dla warunku zamkniętego od otwartego określa poniższy wzór:

$$p_p^{gran} = c_1 \cot \varphi_1 \left[ \frac{2}{1 - \sin \varphi_1} \exp(\pi \tan \varphi_1) - 1 \right].$$

Uwagę może zwrócić fakt, iż dla niektórych obliczonych przypadków współczynnik nośności  $N_\gamma$  przyjmuje wartość ujemną. Wynika to głównie z faktu, że zasięg obszaru deformacji w zadaniu rozwiązywanym w oparciu o przyjętą w niniejszej pracy formułę warunku stanu granicznego jest daleko mniejszy niż dla klasycznego mechanizmu Prandtla, stąd też mogą wystąpić przypadki, w których składowa pionowa prędkości dla większej części obszaru deformacji skierowana jest w dół (por. hodograf – rys. 41 oraz kształty obszarów deformacji w tab. 2), w rezultacie czego nałożenie pola ciężkości zmniejsza wartość nośności w stosunku do rozwiązania nieważkiego.

Występująca w przypadku większych wartości kąta  $\varphi_2$  duża różnica między wartością oceny dolnej i górnej zmniejsza się istotnie z obniżaniem się wartości tego parametru.

Ilość bloków, na jaką została podzielona strefa przejściowa ADC, ma stosunkowo nieduży wpływ na dokładność obliczeń wartości współczynnika nośności  $N_\gamma$ . Zależność tą zilustrowano przykładami zamieszczonymi w tabeli 3.

Tab. 3 Ocena dokładności obliczeń

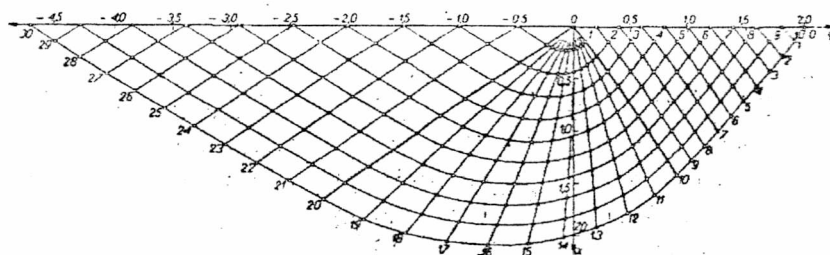
| Ilość podziałów strefy przejściowej ADC | Współczynniki nośności |        |
|-----------------------------------------|------------------------|--------|
|                                         | $N_\gamma$             | $N_c$  |
| n                                       |                        |        |
| 1                                       | 0,13691                | 10,540 |
| 2                                       | 0,14525                |        |
| 5                                       | 0,15041                |        |
| 10                                      | 0,15215                |        |
| 100                                     | 0,15372                |        |
| 1000                                    | 0,15388                |        |

Szersza analiza rozkładu typów rozwiązań zawartych w tab. 1 i 2 znajduje się w rozdziale 5, który poświęcono rozwiązaniom ścisłym.

## 5. ROZWIĄZANIE ŚCISLE NOŚNOŚCI GRANICZNEJ – METODA CHARAKTERYSTYK

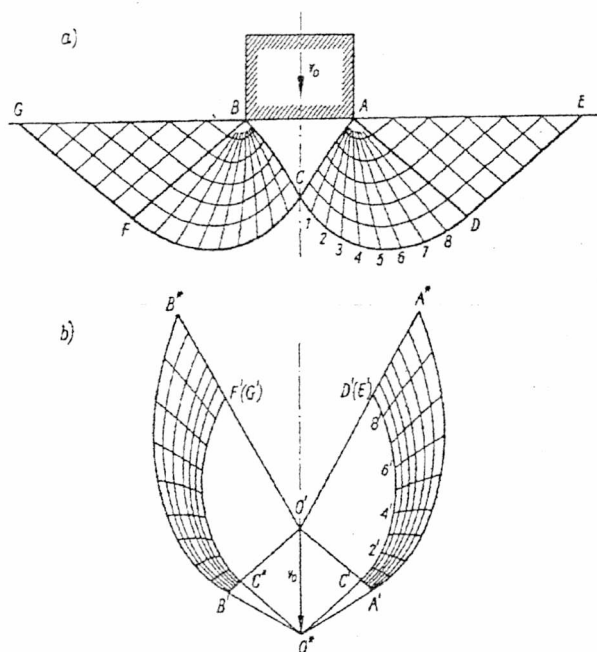
### 5.1 Metoda charakterystyk

Począwszy od lat 50-tych metoda charakterystyk była szeroko stosowana do rozwiązywania rozmaitych zagadnień nośności granicznej podłoża, w których stan graniczny opisywał warunek Coulomba-Mohra [14]. Zostały one szeroko przedstawione w literaturze, np. rozwiązania Sokołowskiego [66] podane w 1953 r. (polskie wydanie z 1958 r.), Szczepińskiego [69] w 1974 r., w 1976 r. Izbickiego i Mroza [37] czy Salencona [59] w 1977 r.



Rys. 47 Siatka charakterystyk z rozwiązania Sokołowskiego [66]

W zagadnieniach płaskich równania plastycznego płynięcia separują się na dwie osobne grupy:



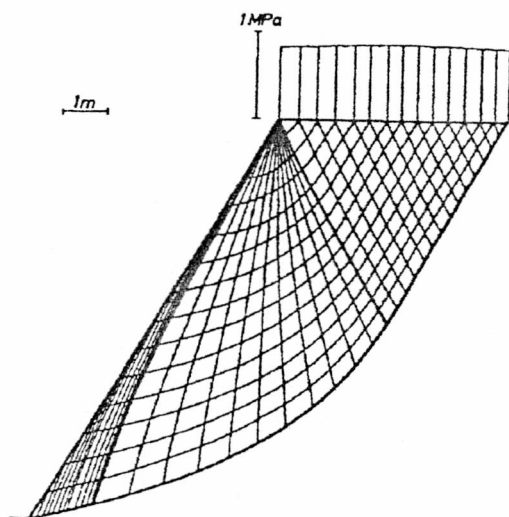
Rys. 48. Nośność graniczna podłoża – przypadek ośrodka ważkiego wg [69]

- równania naprężeniowe, otrzymane z warunku równowagi oraz przyjętego warunku stanu granicznego,
- równania kinematyki, wynikające z przyjętego prawa płynięcia.

Przedstawione w tym rozdziale równania zostały wyprowadzone przy wykorzystaniu zaproponowanej nowej formuły zamkniętego warunku stanu granicznego dla jego części klasycznej opisaną prostą graniczną  $f_1$  oraz zamykającej opisaną prostą  $f_2$  i przyjęciu znakowania naprężeń według konwencji stosowanej w mechanice gruntów (naprężenia ściskające jako dodatnie), czyli odwrotnie niż w cytowanych powyżej rozwiązaniach. Równania dla pozostałych prostych granicznych nie zostały tu pokazane, gdyż nie występują one w rozpatrywanym zagadnieniu nośności granicznej podłoża.

Klasyczna teoria plastyczności została zaadaptowana i przystosowana do rozwiązywania zagadnień nośności

granicznej gruntów już w latach 50-tych. Rozwiązania wykorzystujące warunek stanu granicznego Coulomba-Mohra oraz równania równowagi prowadziły do otrzymania układu równań różniczkowych typu hiperbolicznego, wyrażonych w naprężeniach, których rozwiązanie jest możliwe przy zastosowaniu metody charakterystyk. Metoda ta znalazła zastosowanie do rozwiązywania wyłącznie zagadnień, w których występuje dwuwymiarowy stan naprężeń (płaski stan odkształcenia oraz stan osiowej symetrii). Szeroki zakres takich rozwiązań przedstawił wspomniany już Sokołowski [66] (por. rozdz. 2) oraz Bierzancew [6]. W dalszych latach były kontynuowane teoretyczne prace nad kolejnymi aplikacjami tej metody, np. w 1972 r. Serrano [63] przedstawił uzyskane za pomocą metody charakterystyk rozwiązanie opisujące proces plastycznego wzmocnienia w gruntach, w którym połączył równania naprężeniowe i



Rys.49 Stateczność skarpy z gruntu zbrojonego [61]

odkształceniowe. Rozszerzenie rozwiązania tego problemu w tym samym przyniosła praca Wrotha [77]. Wśród polskich opracowań należy wymienić przede wszystkim dwie prace: W. Szczepińskiego [69] oraz Izbickiego i Mroza [37].

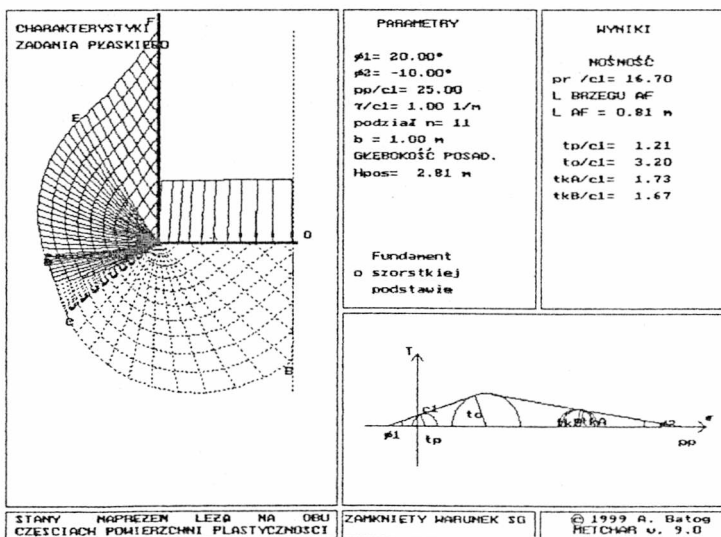
Równoległe z pracami teoretycznymi prowadzono badania laboratoryjne nad eksperymentalną weryfikacją rozwiązań uzyskanych przy zastosowaniu metody charakterystyk. Głównym ośrodkiem tychże badań w latach 1969- 74 był Uniwersytet Cambridge, których wyniki zostały zawarte w szeregu publikacji, m. in. Roscoe'a [58], Jamesa i Bransby'ego [38], [39], Bransby'ego i Milligana [7], Bransby'ego [8].

W kolejnych latach ze względu na znaczny rozwój numerycznych technik obliczeniowych i większej dostępności komputerów, metoda

charakterystyk zaczęła być z wolna zarzucana na korzyść metody elementów skończonych MES. Porównanie zalet i wad tych obu metod zostało przedstawione w 1982 r. w pracy Houssby'ego i

Wrotha [29], która zawiera również bardzo szeroką listę publikacji, dotyczących wykorzystania metody charakterystyk w mechanice gruntów.

Od połowy lat 80-tych pojawiają się prace, w których do rozwiązywania szeregu rozmaitych zagadnień mechaniki gruntów zastosowano metodę charakterystyk, np. obliczanie nośności granicznej podłoża z gruntów zbrojonych Kulczykowski i Sawicki [44], nośności granicznej skarp E. Stilger-Szydło [65], [66], skarp z gruntów zbrojonych Sawicki i Leśniewska [61], [62], Zhao [79], parcia granicznego Hua [30], czy nośności granicznej głębokich posadowień Batog i Izbicki [3].

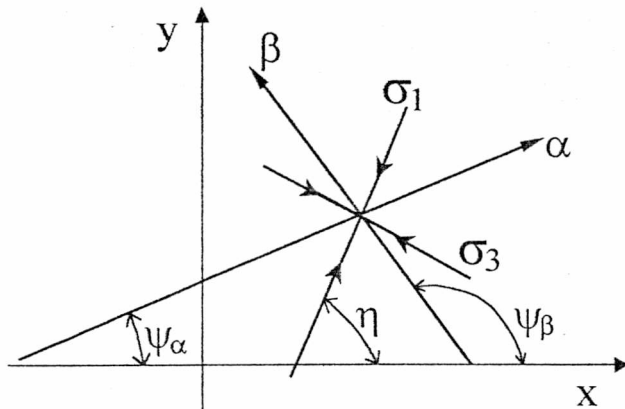


Rys. 50 Nośność graniczna głębokiego posadowienia [3]

## 5.2. Związki dla płaskiego stanu odkształcenia

### 5.2.1. Pole naprężeń

Założono, iż ruch wszystkich cząstek odbywa się w równoległe do płaszczyzny fizycznej  $x, y$  (rys. 51), niezależnie od współrzędnej  $z$ . Składowe naprężenia w płaszczyźnie deformacji



Rys. 51 Związki na płaszczyźnie fizycznej

oznaczono jako  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$ , a naprężenia główne przez  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$  ( $\sigma_1 > \sigma_3$ ). Trzecie naprężenie główne, prostopadłe do płaszczyzny fizycznej jest tu naprężeniem pośrednim  $\sigma_2$ . Składowe prędkości odkształcenia oznaczono jako  $\dot{\epsilon}_x$ ,  $\dot{\epsilon}_y$  i  $\dot{\epsilon}_{xy}$ . Składowe główne prędkości odkształcenia to  $\dot{\epsilon}_1$  oraz  $\dot{\epsilon}_2$ . Z uwagi na fakt, iż przemieszczenia zachodzą tylko równoległe do płaszczyzny  $x, y$ , to składowe  $\dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_3$ .

Dla zagadnienia płaskiego równania równowagi przyjmują poniższą postać:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \gamma,\end{aligned}\tag{82}$$

gdzie:  $\gamma$  jest składową siły ciężkości na jednostkę objętości wzdłuż kierunku  $y$ , natomiast składową siły ciężkości wzdłuż osi  $x$  pominięto.

Przyjęto, że kierunek działania sił ciężkości jest przeciwnie skierowany w stosunku do osi  $y$ .

Stan graniczny naprężenia można wyrazić za pomocą poniższych związków:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= s + t \cos 2\eta, \\ \sigma_y &= s - t \cos 2\eta, \\ \tau_{xz} &= t \sin 2\eta,\end{aligned}\tag{83}$$

w których wielkości  $s=f(t)$  wiąże warunek stanu granicznego.

Po podstawieniu związków (83) do równań równowagi (82) otrzymuje się następujące równania różniczkowe cząstkowe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}[f'(t) + \cos 2\eta] + \frac{\partial}{\partial y} \sin 2\eta + 2t \left[ -\frac{\partial \eta}{\partial x} \sin 2\eta + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos 2\eta \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \sin 2\eta + \frac{\partial}{\partial y}[f'(t) - \cos 2\eta] + 2t \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} \cos 2\eta + \frac{\partial \eta}{\partial y} \sin 2\eta \right] - \gamma &= 0, \end{aligned} \quad (84)$$

które należy uzupełnić o wyrażenia na różniczkę zupełną:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy - dt &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy - d\eta &= 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Warunek stanu granicznego może być tu opisany równaniami (26.1) dla jego części klasycznej bądź (26.2) dla zamykającej.

Po przyrównaniu do zera wyznacznika charakterystycznego układu czterech równań (84) i (85) otrzymać można klasyczny układ równań różniczkowych typu hiperbolicznego o dwóch niewiadomych  $t$  oraz  $\eta$ . Charakterystyki tego układu równań określone są związkami:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \quad \text{dla rodziny } \alpha\text{-linii}, \\ \frac{dy}{dx} &= \tan \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \quad \text{dla rodziny } \beta\text{-linii}. \end{aligned} \quad (86)$$

Wzdłuż charakterystyk muszą być spełnione pewne zależności różniczkowe pomiędzy współrzędnymi a przyrostami poszukiwanych niewiadomych  $t$  i  $\eta$ . Otrzymać można je poprzez zastąpienie dowolnej kolumny w wyznaczniku charakterystycznym kolumną wyrazów wolnych:

$$\begin{aligned} \cot \varphi dt + 2td\eta &= \gamma \cos \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] d\alpha, \\ \cot \varphi dt - 2td\eta &= -\gamma \cos \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] d\beta, \end{aligned} \quad (87)$$

gdzie:  $d\alpha$  i  $d\beta$  oznaczają elementarne przyrosty wzdłuż linii  $\alpha$  i  $\beta$ .

W przypadku, gdy stan naprężenia znajduje się na klasycznej części warunku, w równaniach (86) i (87) należy przyjąć  $\varphi = \varphi_1$ , natomiast gdy stany naprężenia leżą na zamykającej części warunku stanu granicznego  $\varphi = \varphi_2$ .



## 5.2.2 Pole prędkości

W celu uzyskania rozwiązania kinematycznego należy stworzyć pole wektorów prędkości. Wykorzystując równanie opisujące stowarzyszone prawo płynięcia (39) i warunek stanu granicznego zapisany za pomocą naprężeń głównych, dla części klasycznej:

$$f(\sigma_i) = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) - 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)\sin\varphi_1 - c_1\cos\varphi_1 \quad (88)$$

oraz dla części zamykającej warunku:

$$f_2(\sigma_i) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\sin\varphi_2 - p_p[0,5(1 - K_o) - \sin\varphi_2] = 0, \quad (89)$$

można określić prędkości odkształceń głównych dla obu części warunku:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2}\lambda[1 - \sin\varphi], \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{2}\lambda[1 + \sin\varphi], \quad \dot{\varepsilon}_3 = 0, \quad (90)$$

gdzie:  $\varphi = \varphi_1$  dla klasycznej części warunku stanu granicznego,  
 $\varphi = \varphi_2$  dla zamykającej części warunku.

Następnie dokonując kilku niezbędnych przekształceń, stosując m. in. wzory transformacyjne dla składowych prędkości odkształceń, warunek izotropii, mówiący o pokrywaniu się kierunków głównych tensora odkształcenia i tensora naprężenia oraz po wyeliminowaniu współczynnika  $\lambda$  otrzymuje się układ dwóch równań typu hiperbolicznego ze składowymi wektora prędkości przemieszczeń:

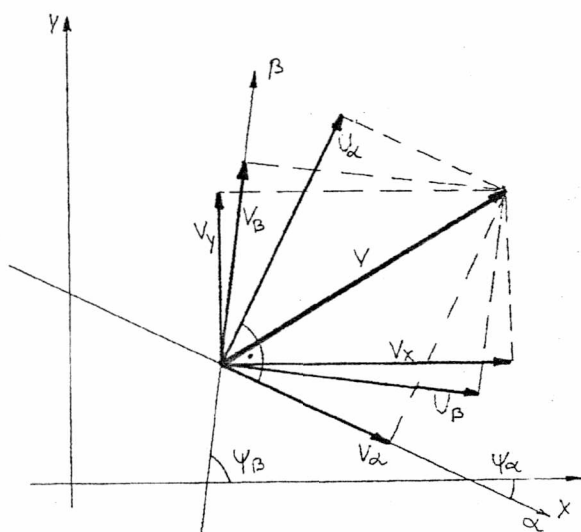
$$\frac{\delta V_x}{\delta x} \frac{\sin\varphi + \cos 2\eta}{\sin\varphi} - \frac{\delta V_y}{\delta y} \frac{\sin\varphi - \cos 2\eta}{\sin\varphi} = 0, \quad (91)$$

$$\frac{\delta V_x}{\delta x} - \frac{\delta V_y}{\delta y} - \frac{\delta V_y}{\delta x} \cot 2\eta - \frac{\delta V_x}{\delta y} \cot 2\eta = 0$$

Należy zauważyć, iż charakterystyki układu równań (91) pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń, opisują je również równania (86). Wzdłuż charakterystyk muszą być spełnione związki różniczkowe dla prędkości wzdłuż obu rodzin charakterystyk:

$$\begin{aligned} dV_x + \tan\left[\eta + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] dV_y &= 0 \quad \text{dla } \alpha - \text{linii}, \\ dV_x + \tan\left[\eta - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] dV_y &= 0 \quad \text{dla } \beta - \text{linii}. \end{aligned} \quad (92)$$

Powyższe równania można przedstawić w postaci wygodniejszej do całkowania, w której składowe wektora przemieszczeń  $V_x$  i  $V_y$  zastąpiono składowymi  $V_\alpha$  i  $V_\beta$  (rys. 52), skierowanymi wzdłuż linii stycznych w danym punkcie odpowiednio do charakterystyk rodziny  $\alpha$  oraz  $\beta$ :



Rys. 52 Składowe wektorów prędkości

$$\begin{aligned} dV_\alpha - \frac{1}{\cos \varphi} (V_\beta + V_\alpha \sin \varphi) d\psi_\alpha &= 0, \\ dV_\beta + \frac{1}{\cos \varphi} (V_\alpha + V_\beta \sin \varphi) d\psi_\beta &= 0, \end{aligned} \quad (93)$$

gdzie:  $\psi_\alpha$  i  $\psi_\beta$  są kątami, jakie tworzą charakterystyki danej rodziny z kierunkiem poziomym (por. rys. 51):

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), \\ \psi_\beta &= \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (94)$$

Podobnie jak dla równań naprężeniowych, w przypadku, gdy powyższe równania opisują rozwiązanie w obszarze, w którym stan naprężenia dany jest prostą  $f_1$ , należy przyjąć  $\varphi = \varphi_1$ , natomiast drugim przypadku należy przyjąć  $\varphi = \varphi_2$ .

### 5.3. Związki dla osiowo- symetrycznego stanu odkształcenia

#### 5.3.1 Pole naprężenia

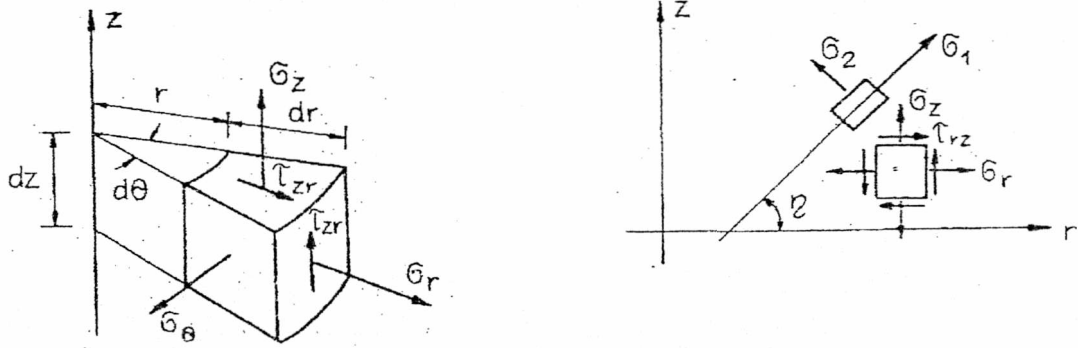
Zagadnienie rozpatrzono w układzie współrzędnych walcowych  $r, \Theta, z$ , w którym oś  $z$  pokrywa się z osią symetrii – rys. 53. W takiej sytuacji występują jedynie składowe naprężenia  $\sigma_r, \sigma_\Theta, \sigma_z$  i  $\tau_{rz}$ . Pozostałe dwie składowe  $\tau_{\Theta r}$  i  $\tau_{\Theta z}$  z założenia są równe zero. Jako  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  oznaczono naprężenia główne działające w płaszczyźnie osiowej, a jako  $\sigma_3 = \sigma_\Theta$  trzecie naprężenie główne równe obwodowemu  $\sigma_\Theta$ . Dla praktycznych zastosowań znaczenie mają takie rozwiązania, w których naprężenie  $\sigma_3$  jest równe jednemu z pozostałych naprężeń głównych. Mówi o tym tak zwany postulat pełnej plastyczności zaproponowany przez A. Haara i Th. Kármána [25]. Za pomocą znacznika  $\bar{\omega}$  można wyróżnić dwa stany:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= 1 \quad \text{gdy} \quad \sigma_2 = \sigma_3, \\ \bar{\omega} &= -1 \quad \text{gdy} \quad \sigma_1 = \sigma_3. \end{aligned}$$

Równania równowagi w tak opisanym układzie przyjmują poniższą postać:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} &= \gamma.\end{aligned}\quad (95)$$

Przyjęto, że kierunek działania sił ciężkości jest przeciwnie skierowany w stosunku do osi z.



Rys. 53 Oznaczenia dla zadania osiowo-symetrycznego

Wprowadzając poniższe podstawienia:

$$\sigma_r = p + q \cos 2\eta, \quad \sigma_z = p - q \cos 2\eta, \quad \sigma_\theta = p - \bar{\omega}q, \quad \tau_{rz} = q \sin 2\eta, \quad (96)$$

gdzie:  $s=f(t)$  wiąże warunek stanu granicznego,

do równań równowagi (95) otrzymuje się następujące równania różniczkowe cząstkowe:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \frac{\sin \varphi_1 + \cos 2\eta}{\sin \varphi_1} + \frac{\partial}{\partial z} \sin 2\eta + 2t \left[ -\frac{\partial \eta}{\partial r} \sin 2\eta + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cos 2\eta \right] + \frac{t}{r} (\cos 2\eta + \bar{\omega}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \sin 2\eta + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\sin \varphi_1 - \cos 2\eta}{\sin \varphi_1} + 2t \left[ \frac{\partial \eta}{\partial r} \cos 2\eta + \frac{\partial \eta}{\partial z} \sin 2\eta \right] + \frac{t}{r} \sin 2\eta - \gamma &= 0,\end{aligned}\quad (97)$$

które należy uzupełnić o wyrażenia na różniczkę zupełną:

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial r} dr + \frac{\partial t}{\partial z} dz - dt &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} dr + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz - d\eta &= 0.\end{aligned}\quad (98)$$

Równania dla obu rodzin charakterystyk różniczkowych charakterystyk opisują równania:

$$\frac{dz}{dr} = \tan \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \quad \text{dla rodziny } \alpha\text{- linii,} \quad (99)$$

$$\frac{dz}{dr} = \tan \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \quad \text{dla rodziny } \beta\text{- linii.}$$

Wzdłuż charakterystyk muszą być spełnione pewne zależności różniczkowe pomiędzy współzrzednymi a przyrostami poszukiwanych niewiadomych  $t$  i  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \cot \varphi dt + 2td\eta &= \gamma \cos \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] d\alpha - \frac{t}{r} \left\{ \sin \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] - \bar{\omega} \sin \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right\} d\alpha, \\ \cot \varphi dt - 2td\eta &= -\gamma \cos \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] d\beta + \frac{t}{r} \left\{ \sin \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] - \bar{\omega} \sin \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right\} d\beta, \end{aligned} \quad (100)$$

gdzie:  $d\alpha$  i  $d\beta$  oznaczają elementarne przyrosty wzdłuż linii  $\alpha$  i  $\beta$ .

Aby otrzymać równania charakterystyk dla części klasycznej bądź zamykającej warunku należy w równaniach (99) i (100) w miejsce parametru  $\varphi$  podstawić odpowiednio  $\varphi_1$  bądź  $\varphi_2$ .

### 5.3.2 Pole prędkości

Składowe prędkości odkształcenia w walcowym układzie współrzędnych  $r, \theta, z$  zostały oznaczone symbolami  $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_z$  i  $\dot{\epsilon}_{rz}$  a prędkości odkształceń głównych przez  $\dot{\epsilon}_1$  i  $\dot{\epsilon}_2$ . Składowa obwodowa prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_3 = \dot{\epsilon}_\theta$ .

Składowe prędkości odkształcenia w zależności od składowych prędkości: promieniowej  $V_r$  oraz osiowej  $V_z$  opisane są następująco:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{V_r}{r}, \quad \dot{\epsilon}_{rz} = \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad \dot{\epsilon}_{zr} = \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right), \quad (101)$$

przy czym składowa obwodowa  $V_\theta$  jest równa zero.

Pole prędkości opisane są dwoma równaniami, w których jako niewiadome występują składowe prędkości  $V_r$  oraz  $V_z$ . Pierwsze równanie, podobnie jak dla zadania płaskiego, dostarcza warunek izotropii (konieczność pokrywania się kierunku osi głównych tensora naprężenia i prędkości odkształcenia):

$$\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z = 2\dot{\epsilon}_{rz} \cot 2\eta \quad (102)$$

Drugie równanie otrzymać można dodając stronami wzory transformacyjne dla składowych głównych prędkości odkształceń:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z) + \left[ \frac{1}{4}(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_z)^2 + \dot{\varepsilon}_\tau \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z) - \left[ \frac{1}{4}(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_z)^2 + \dot{\varepsilon}_\tau \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \dot{\varepsilon}_\theta.\end{aligned}\tag{103}$$

Zgodnie z wybranym stanem Haara i Kármána do drugiego równania należy podstawić odpowiednie wyrażenia na odkształcenia główne, w których podobnie jak w rozwiązaniu płaskim, wprowadzono ogólny parametr  $\varphi$ , mogący przyjmować wartość  $\varphi_1$  bądź  $\varphi_2$ :

- dla stanu  $\bar{\omega} = 1$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\lambda}}{2}[1 + \sin \varphi], \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\frac{\dot{\lambda}}{2}(1 - \mu)[1 - \sin \varphi], \quad \dot{\varepsilon}_3 = -\mu \frac{\dot{\lambda}}{2}[1 - \sin \varphi],\tag{104}$$

- dla stanu  $\bar{\omega} = -1$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \mu \frac{\dot{\lambda}}{2}[1 + \sin \varphi], \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\frac{\dot{\lambda}}{2}[1 - \sin \varphi], \quad \dot{\varepsilon}_3 = (1 - \mu) \frac{\dot{\lambda}}{2}[1 + \sin \varphi],\tag{105}$$

gdzie: parametr  $\mu$  przyjmuje wartości z zakresu  $0 \leq \mu \leq 1$ , por. [37].

Po wyeliminowaniu parametrów  $\mu$ ,  $\dot{\lambda}$  oraz dalszym uproszczeniu wynikającym z wykorzystania warunku izotropii, drugie równanie prędkości przyjmie następującą postać:

$$\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_\theta [1 + \bar{\omega} \sin \varphi] - \frac{\sin \varphi}{\cos 2\eta} (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_z) = 0.\tag{106}$$

Następnie należy przejść do składowych promieniowej  $V_r$  oraz osiowej  $V_z$  prędkości podstawiając wyrażenia na prędkości odkształceń do równań (102) i (106):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \cot 2\eta \frac{\partial V_r}{\partial z} - \cot 2\eta \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0, \\ [\cos 2\eta - \sin \varphi] \frac{\partial V_r}{\partial r} + [\cos 2\eta + \sin \varphi] \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} [1 + \bar{\omega} \sin \varphi] \cos 2\eta &= 0.\end{aligned}\tag{107}$$

Po dołączeniu wyrażen na różniczkę zupełną:

$$\begin{aligned}\frac{\delta V_r}{\delta r} dr + \frac{\delta V_r}{\delta z} dz &= dV_r, \\ \frac{\delta V_z}{\delta r} dr + \frac{\delta V_z}{\delta z} dz &= dV_z,\end{aligned}\tag{108}$$

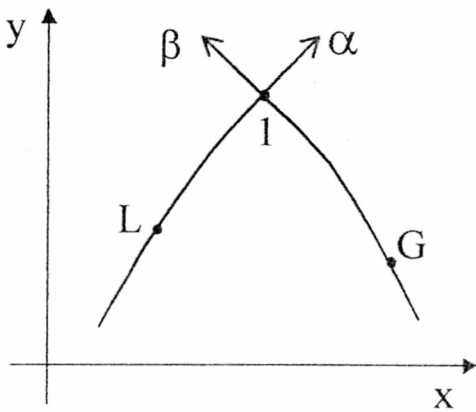
oraz przyrównaniu wyróżnika głównego układu czterech równań do zera otrzymać można równania różniczkowe charakterystyk opisane wzorami (90). Związki wzdłuż charakterystyk można otrzymać zastępując jedną z kolumn wyznacznika kolumną wyrazów wolnych:

$$\begin{aligned} \cos\left[\eta + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] dV_r + \sin\left[\eta + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] dV_z + \frac{1}{2r}(1 - \bar{\omega} \sin \varphi) V_r d\alpha &= 0, \\ \cos\left[\eta - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] dV_r + \sin\left[\eta - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] dV_z + \frac{1}{2r}(1 - \bar{\omega} \sin \varphi) V_r d\beta &= 0. \end{aligned} \quad (109)$$

W równaniach (90) oraz (109) opisujących pole prędkości, parametr  $\varphi$ , może przyjmować wartość  $\varphi_1$  bądź  $\varphi_2$ , w zależności od przyjętej prostej granicznej.

## 5.4. Równania różnicowe metody charakterystyk

Otrzymanie analitycznego rozwiązania na drodze bezpośredniego całkowania równań charakterystyk (86) oraz związków wzdłuż charakterystyk (87) jest możliwe tylko dla nielicznych przypadków zagadnień brzegowych. Natomiast stosunkowo proste jest uzyskanie



Rys. 54 Ilustracja metody Massau

takiego rozwiązania na drodze obliczeń numerycznych. W przypadku konkretnych zagadnień brzegowych mogą wystąpić obszary, w których pola naprężeń będą typu hiperbolicznego oraz obszary, w których równania te będą typu parabolicznego. W obszarze hiperboliczności budowanie rozwiązania polega na rozwiązywaniu kolejnych elementarnych zagadnień brzegowych dla równań charakterystyk. Najbardziej uniwersalna metoda rozwiązywania quasi- liniowych równań hiperbolicznych polega na zapisaniu równań różniczkowych w postaci różnicowej i rozwiązaniu otrzymanych w ten sposób równań algebraicznych. Jest to metoda Massau [50].

### 5.4.1 Równania różnicowe pola naprężeń dla płaskiego stanu odkształcenia

Sposób uzyskania rozwiązania ilustruje rys. 54. W dwóch punktach L i G, leżących na różnych charakterystykach, znane są wartości  $t$  i  $\eta$ . Współrzędne punktu 1 leżącego na przecięciu charakterystyk znaleźć można po rozwiązaniu poniższego układu równań:

$$\begin{cases} y_1 - y_L = (x_1 - x_L) \tan\left[\eta_L - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_L}{2}\right)\right] \\ y_1 - y_G = (x_1 - x_G) \tan\left[\eta_G + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_G}{2}\right)\right] \end{cases}, \quad (110)$$

otrzymanego po zastąpieniu w równaniach charakterystyk (99) różniczek różnicami skończonymi.

Stosownie do wybranego równania opisującego stan graniczny należy przyjąć w (110) oraz następnych równaniach różnicowych:

$\varphi = \varphi_1$  dla klasycznej części warunku stanu granicznego,

$\varphi = \varphi_2$  dla zamykającej części warunku.

Następnie nieznane wartości  $t_1$  i  $\eta_1$  wyznacza się z układu równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cot \varphi_L t_1 + 2t_L \eta_1 = \gamma \frac{\cos \left[ \eta_L - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_L}{2} \right) \right]}{\cos \left[ \eta_L + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_L}{2} \right) \right]} (x_1 - x_L) + \cot \varphi_L t_L + 2t_L \eta_L, \\ \cot \varphi_G t_1 - 2t_G \eta_1 = -\gamma \frac{\cos \left[ \eta_G + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_G}{2} \right) \right]}{\cos \left[ \eta_G - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_G}{2} \right) \right]} (r_1 - r_G) + \cot \varphi_G t_G - 2t_G \eta_G, \end{array} \right. \quad (111)$$

otrzymanych w podobny sposób z równań (100). Linie charakterystyk - czyli linie poślizgu tworzyć zatem będą w ogólnym przypadku nieortogonalną, krzywoliniową siatkę, w której linie obu rodzin przecinają się pod kątem  $2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$  a ich dwusieczne pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych.

#### 5.4.2 Równania różnicowe pola prędkości dla płaskiego stanu odkształcenia

Pole prędkości opisują składowe wektora prędkości przemieszczeń  $V_\alpha$  oraz  $V_\beta$  wyznaczone w węzłach siatki. Współrzędne węzłów siatki należy przyjąć z rozwiązania statycznego - punkt 5.3.1, a składowe prędkości można określić rozwiązując równania (93) zapisane w postaci różnicowej:

$$\begin{aligned} V_{\alpha 1} - V_{\alpha L} &= \frac{1}{\cos \varphi_L} (V_{\beta L} + V_{\alpha L} \sin \varphi_L) \left( \eta_1 - \eta_L + \frac{\varphi_L - \varphi}{2} \right), \\ V_{\beta 1} - V_{\beta G} &= -\frac{1}{\cos \varphi_G} (V_{\alpha G} + V_{\beta G} \sin \varphi_G) \left( \eta_1 - \eta_G + \frac{\varphi - \varphi_G}{2} \right), \end{aligned} \quad (112)$$

gdzie wartości  $\eta$  w węzłach siatki także należy przyjąć z rozwiązania statycznego a indeksy identyfikują tu wartości parametrów w punktach 1, G oraz L zgodnie z oznaczeniami na rys. 54.

#### 5.4.3 Równania różnicowe dla osiowo- symetrycznego stanu odkształcenia

Sposób uzyskania rozwiązania dla zadania osiowo- symetrycznego jest podobny do sposobu wykorzystanego w zadaniu płaskim. Współrzędne punktu 1 (rys. 54) leżącego na przecięciu charakterystyk znaleźć można po rozwiązaniu poniższego układu równań:



$$\begin{cases} z_1 - z_L = (r_1 - r_L) \tan \left[ \eta_L - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_L}{2} \right) \right] \\ z_1 - z_G = (r_1 - r_G) \tan \left[ \eta_G + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_G}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (113)$$

otrzymanego po zastąpieniu w równaniach charakterystyk (99) różniczek różnicami skończonymi. Następnie nieznane wartości  $t_1$  i  $\eta_1$  wyznacza się z układu równań:

$$\left\{ \begin{aligned} & \cot \varphi_L t_1 + 2t_L \eta_1 = \gamma \frac{\cos \left[ \eta_L - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_L}{2} \right) \right]}{\cos \left[ \eta_L + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_L}{2} \right) \right]} (r_1 - r_L) - \\ & \quad - \frac{t_L}{r_L} \left\{ \tan \left[ \eta_L + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_L}{2} \right) \right] - \frac{\sin \left[ \eta_L - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_L}{2} \right) \right]}{\cos \left[ \eta_L + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_L}{2} \right) \right]} \right\} (r_1 - r_L) + \\ & \quad + \cot \varphi_L t_L + 2t_L \eta_L \\ & \cot \varphi_G t_1 - 2t_G \eta_1 = -\gamma \frac{\cos \left[ \eta_G + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_G}{2} \right) \right]}{\cos \left[ \eta_G - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_G}{2} \right) \right]} (r_1 - r_G) + \\ & \quad + \frac{t_G}{r_G} \left\{ \tan \left[ \eta_G - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_G}{2} \right) \right] - \frac{\sin \left[ \eta_G + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_G}{2} \right) \right]}{\cos \left[ \eta_G - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_G}{2} \right) \right]} \right\} (r_1 - r_G) + \\ & \quad + \cot \varphi_G t_G - 2t_G \eta_G \end{aligned} \right. \quad (114)$$

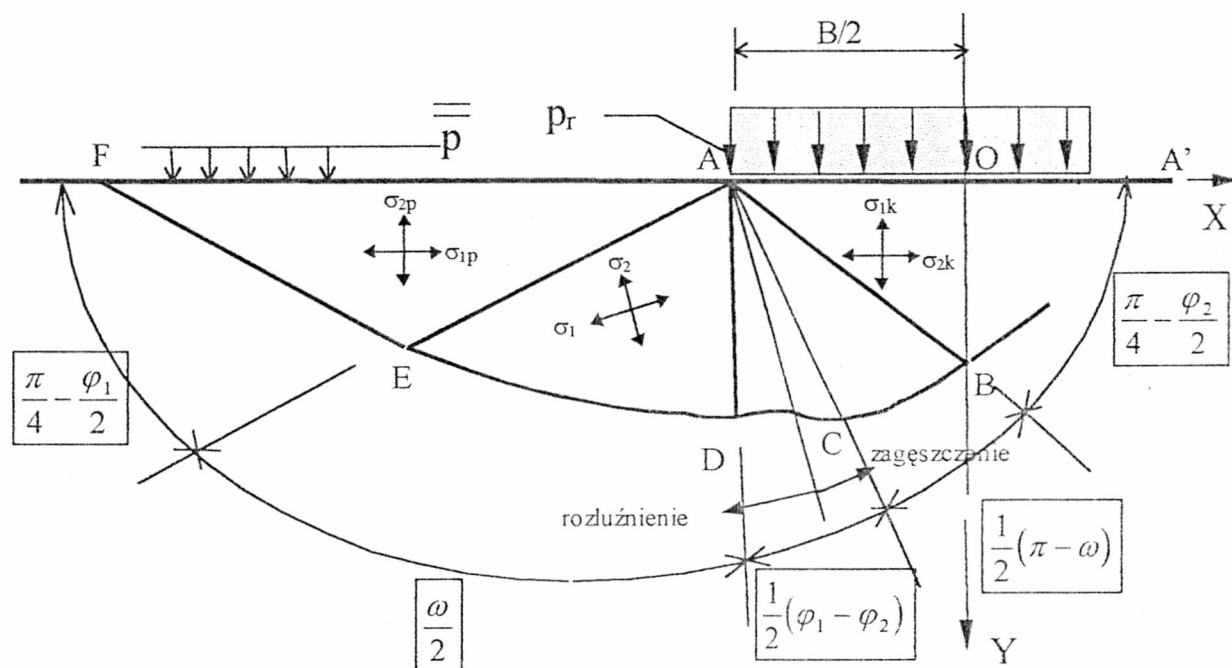
otrzymanych w podobny sposób z równań (100).

## 5.5 Budowa pola naprężenia

Rozwiązywanie konkretnych zadań dotyczących plastycznego płynięcia gruntów sprowadza się do podziału rozpatrywanego zadania na elementarne zagadnienia brzegowe i rozwiązywania w nich równań różnicowych charakterystyk. Sposób wykonywania obliczeń dla czterech podstawowych zagadnień brzegowych (Cauchy’ego, charakterystycznego, charakterystycznego z punktem osobliwym i mieszanego) dla zagadnień nośności granicznej podłoża został szeroko przedstawiony w literaturze, np. w [37], [66] czy [69].

### 5.5.1. Schemat pola naprężenia

Punktem wyjścia do budowy pola naprężenia jest schemat, który zastosowano przy formułowaniu oceny górnej i dolnej nośności granicznej - rys. 55. Jest to najprostsze rozwiązanie w płaskim stanie deformacji, w którym fundament o jednostkowej szerokości spoczywa na powierzchni ośrodka nieważkiego. Stan naprężenia w obszarze deformacji znajduje się zarówno na klasycznej jak i zamykającej części warunku stanu granicznego. Schemat ten można modyfikować w celu uzyskania rozwiązania dla innych warunków np. dla ośrodka ważkiego czy zadania osiowo- symetrycznego, por. rys. 56.

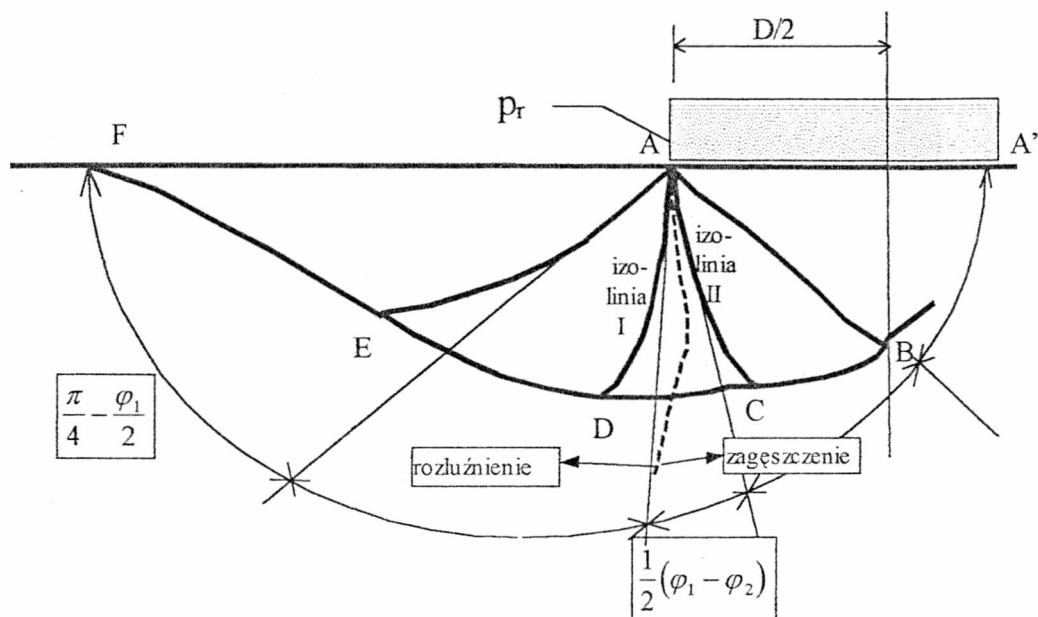


Rys. 55 Wyjściowy schemat pola naprężeń dla zadania płaskiego

W obszarze plastycznego płynięcia znajdują się dwa sztywne bloki i obszar promieniowego ścinania złożony z trzech stref, w których występować będą zarówno efekty rozluźnienia jak i zagęszczenia:

- strefa AFE - blok sztywny pod brzegiem swobodnym,
- strefa AED - występują tu wyłącznie efekty rozluźnienia, stan naprężenia znajduje się na części klasycznej warunku, który opisuje prosta graniczna  $f_1$ ,
- strefa ADC - występują tu efekty zmiennej dylatacji, stan naprężenia opisany jest przejściowym kołem Mohra ( $s_0, t_0$ ),
- strefa ACB - strefa wyłącznie z efektami zagęszczenia, stan naprężenia znajduje się na części zamykającej warunku (opisany jest prostą graniczną  $f_2$ ),
- strefa ABA' - sztywny blok pod fundamentem bądź strefa zagęszczenia.

Wytrzymałość ośrodka w obszarze AFD opisują parametry  $\varphi_1$  oraz  $c_1$ , a w obszarze AOC parametry  $\varphi_2$  oraz  $c_2$ . Zmiana parametrów z  $\varphi_1$  na  $\varphi_2$  oraz z  $c_1$  na  $c_2$  występuje w obszarze między charakterystyką AD oraz AC (rys. 55). Przejście to może być przeprowadzone w dowolny sposób, w szczególnym przypadku dla ośrodka nieważkiego można nawet założyć, iż cała zmiana parametrów skoncentrowana jest na charakterystyce AD (por. rozdz. 4, rys. 40).



Rys. 56. Budowa pola deformacji dla zadania osiowo- symetrycznego, ośrodek wązki

Dla ośrodka nieważkiego granice wydzielonych stref stanu naprężenia (rys. 55) są prostoliniowymi charakterystykami rodziny  $\beta$ , a linia zerowej dylatacji, oddzielająca efekty rozluźnienia od zagęszczenia (linia przerywana w strefie ADC) jest także charakterystyką. Natomiast dla zadania uwzględniającego ciężar własny ośrodka charakterystyki tworzyć będą ortogonalną, krzywoliniową siatkę, w wyniku czego granice między wydzielonymi strefami oraz linia zerowej dylatacji w ogólnym przypadku nie będą charakterystykami. Z tego względu konieczna jest odpowiednia korekta wyjściowego schematu, w którym najistotniejszym zadaniem jest zbudowanie poprawnego rozwiązania w strefie przejściowej, w której efekty rozluźnienia przechodzą w efekty zagęszczenia – rys. 56. Rozwiązanie w wyszczególnionych strefach jest budowane z klasycznych, elementarnych rozwiązań brzegowych. Poniżej przedstawiono niezbędne szczegóły uzyskania rozwiązania numerycznego w każdej z wyszczególnionych stref oraz w dalszej kolejności dyskusję wariantów budowy strefy przejściowej dla ośrodka wązkiego.

### 5.5.2 Pole naprężenia w strefie AFE

W sztywnym obszarze AFE istnieje możliwość rozwiązania zadania brzegowego Cauchy'ego na podstawie znanych warunków na brzegu swobodnym AF, które wynikają z jego obciążenia, które opisuje funkcja  $\bar{p}(x)$ . Przyjmując, iż to obciążenie dane jest stałą wartością  $\bar{p}$ , to wzdłuż odcinka AF:  $\sigma_2 = \sigma_z = \bar{p}$  oraz  $\tau_{xy} = 0$ . Na podstawie związków z płaszczyzny fizycznej (rys. 51) kąt między charakterystykami rodziny  $\alpha$  a kierunkiem poziomym można wyrazić jako  $\eta = 0 \pm n \frac{\pi}{4}$ , natomiast wartość większego naprężenia głównego  $\sigma_1 = \sigma_x$  obliczyć można na podstawie warunku stanu granicznego opisanego prostą graniczną  $f_1$  lub  $f_2$ , w zależności od typu rozwiązania (por. punkt 4.8).

Kąt wachlarza AED (rys. 56) w otoczeniu punktu osobliwego określić można posługując się graficzną metodą całkowania wg Chena [13]. Jest to droga kątowna  $\omega/2$ , na której koło Mohra z początkowego położenia ( $s_p$ ,  $t_p$ ) przemieszcza się do położenia przejściowego ( $s_o$ ,  $t_o$ ). Wartość kąta  $\omega/2$  dla rozwiązania nieważkiego wynosi:

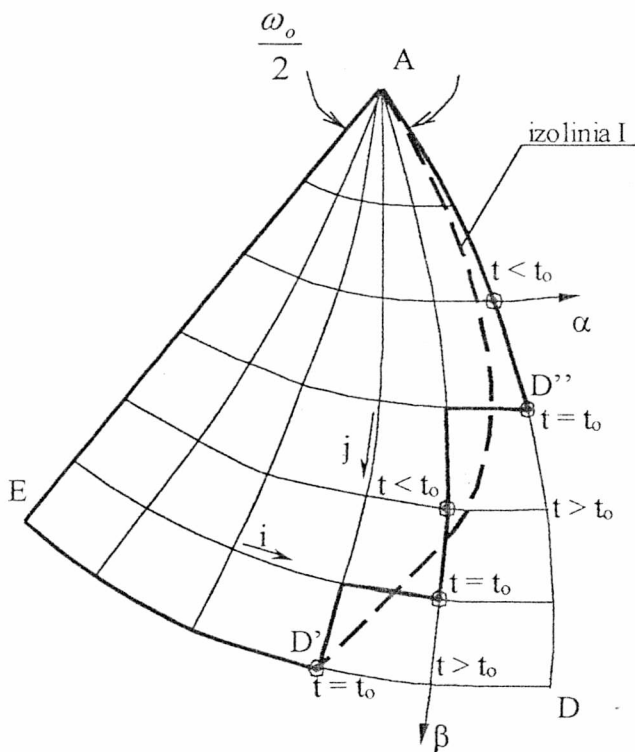
(115)

gdzie:  $t_0$  określone jest przez (36) a parametr  $t_p$  wzorem:

(116)

Dla rozwiązania ważkiego kąt wachlarza AED może mieć inną wartość niż wynikająca ze wzoru (115), jednak można ją przyjąć jako wstępne przybliżenie, służące do wyznaczenia dokładnej wartości w toku kolejnych obliczeń iteracyjnych.

Stan naprężenia w obszarze AED oraz siatkę charakterystyk wyznaczyć można



Rys. 57 Budowa rozwiązania w strefie AED

zależności otrzymać można poniższy związek, określający zmianę wielkości dewiatora  $t$  w punkcie osobliwym:

$$t_{Ai} = t_{Ao} \exp[2(\eta_{Ao} - \eta_{Ai}) \tan \varphi_{Ai}],$$

$\delta\eta = \frac{\omega_o}{2(n-1)}$  Wzdłuż tejże charakterystyki należącej do rodziny  $\alpha$  muszą zachodzić związki opisane równaniami (86) i (87) dla płaskiego, bądź (99) i (100) dla osiowo-symetrycznego stanu odkształcenia. Dla punktu osobliwego (czyli charakterystyki rodziny  $\alpha$  o zerowej długości)  $d\alpha=0$ , zatem całkując te

gdzie:  $\eta_{Ai} = \eta_{Ao} - i\delta\eta$ .

Po jego przekształceniu uzyskać można równania opisujące wartości parametrów  $t$ ,  $\eta$  i  $\varphi$  dla kolejnych  $i$ -tych punktów wzdłuż charakterystyki  $\alpha$  w punkcie osobliwym:

$$\begin{aligned} t_{Ai} &= t_{Ao} \exp[2i\delta\eta \tan\varphi_{Ai}] \\ \eta_{Ai} &= \eta_{Ao} - i\delta\eta, \\ \varphi^{(i)} &= \varphi_1. \end{aligned} \quad (117)$$

Zbudowanie rozwiązania w strefie AFE jest już zatem możliwe, stosując równania różnicowe (110) i (111) dla zadania płaskiego, bądź (113) i (114) dla osiowo- symetrycznego, uzupełnione o warunki (117) w punkcie osobliwym.

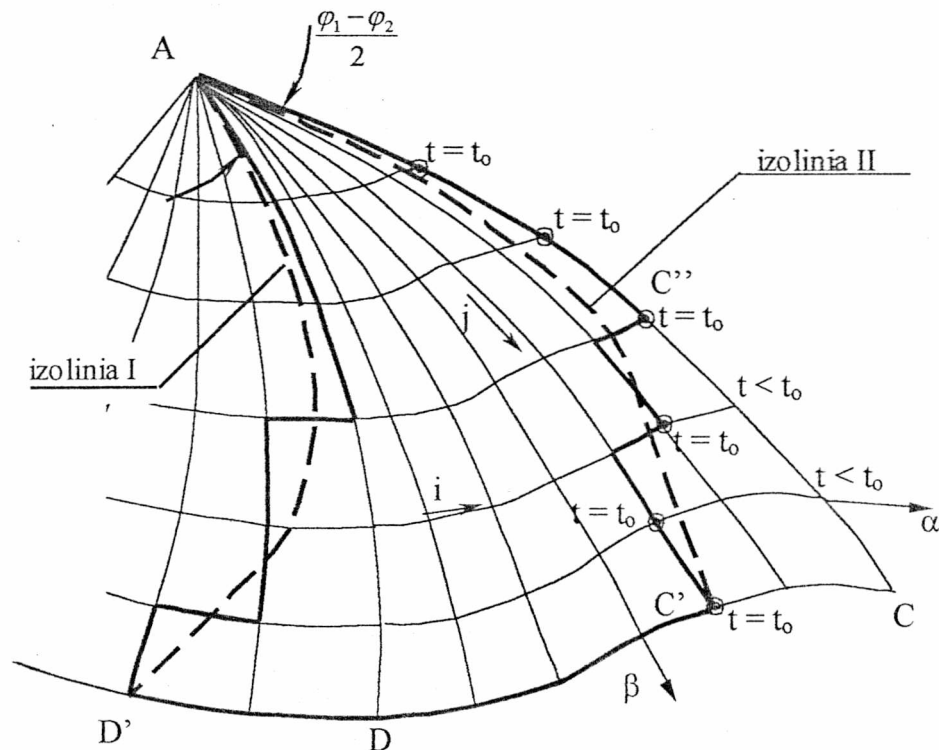
Dla rozwiązania nieważkiego (rys. 55) wzdłuż prostoliniowych charakterystyk rodziny  $\beta$  wartości parametru  $t$  mają stałe wartości. Natomiast przy rozwiązywaniu zagadnienia ważkiego, należy wziąć pod uwagę fakt, iż wzdłuż krzywoliniowych charakterystyk rodziny  $\beta$  (w kierunku wzdłuż węzłów od punktu A do skrajnej charakterystyki rodziny  $\alpha$ ) wartości parametru  $t$  wzrastają. Nie mogą one jednak przekroczyć wartości  $t_0$  (56), która odpowiada promieniowi przejściowego koła Mohra ( $s_0$ ,  $t_0$ ). Narzuca to konieczność modyfikacji zasięgu strefy AED w sąsiedztwie charakterystyki AD - rys. 57. Aby określić zasięg strefy AED należy znaleźć na  $k$ -tej charakterystyce rodziny  $\beta$   $m$ -ty węzeł, w którym spełniony jest warunek  $t_{k,m} = t_0$  (punkt D' na rys. 53), a następnie  $i,j$  – te węzły na kolejnych charakterystykach, dla których  $t_{i,j} = t_0$ , aż do ostatniej  $n$ -tej (charakterystyka AD), dla której  $t_{n,j} = t_0$  (punkt D''). Węzły, w których  $t_{i,j} = t_0$  wyznaczają krzywą (linia graniczna), po osiągnięciu której stanu naprężenia nie można dalej opisywać równaniem  $f_1$ . Współrzędne ( $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$ ) tej izoliny naprężeń ( $s_0$ ,  $t_0$ ), przechodzącej przez  $i,j$ -te węzły siatki można wyznaczyć numerycznie z warunku:

$$\begin{cases} t_{i,j} = t_0, \\ t_{i-1,j} < t_0, \\ t_{i,j-1} < t_0. \end{cases}$$

Na rysunku 53 oznaczono ją jako izolinię I. Strefa rozluźnienia AED dla rozwiązania ważkiego zawiera się między charakterystyką AE a izolinią naprężeń I, która nie jest charakterystyką i w rozwiązaniu numerycznym składa się z odcinków charakterystyk rodziny  $\beta$ .

#### 5.5.4 Pole naprężenia w strefie ADC

Strefa ADC charakteryzuje się stałym stanem naprężenia, danym przejściowym kołem Mohra oraz zmiennymi parametrami wytrzymałościowymi  $\varphi$  i  $c$ . Podobnie jak w strefie AED, konieczne jest tu rozwiązanie zadania charakterystycznego z punktem osobliwym. Wstępnie przyjęto wartość kąta, jaki tworzy wachlarz charakterystyk w punkcie A, z rozwiązania dotyczącego oceny górnej i dolnej nośności (rozdział 4). Kąt ten wynosi  $0,5(\varphi_1 - \varphi_2)$ . W toku obliczeń iteracyjnych dla rozwiązania ważkiego, kąt ten ulega korekcie.



Rys. 58 Budowa rozwiązania w strefie ADC

W strefie ADC (rys. 58) brak jest przesłanek dla jednoznacznego przyjęcia rozkładu parametrów  $\varphi^{(i)}$  i  $c^{(i)}$  między krzywymi AD i AC. Stan naprężenia w tej strefie opisany jest jednym punktem ( $s_0, t_0$ ), będącym wierzchołkiem powierzchni plastyczności - punkt B na rys. 23 i można zatem do niego dowolnie prowadzić styczną, z nachyleniem której związana jest wartość parametrów wytrzymałościowych. Przyjęto, podobnie jak w rozdziale 4, liniową zmianę tych parametrów wzdłuż charakterystyk rodziny  $\alpha$  pomiędzy granicami strefy, określonymi przez krzywe AD oraz AC. Można również oczywiście zastosować inne rozkłady wartości parametrów  $\varphi^{(i)}$  i  $c^{(i)}$ , skrajnym przypadkiem jest wspomniane wcześniej rozwiązanie (rys. 40) [35], w którym cała zmiana tych parametrów skoncentrowana jest na charakterystyce AD.

Wzdłuż zredukowanej do punktu A charakterystyki  $\alpha$  dla równomiernie rozmieszczonych punktów o jednakowych współrzędnych parametr  $\varphi^{(i)}$  zmienia się następująco:

$$\varphi^{(i)} = \varphi_1 + \frac{i-1}{n}(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (118)$$

gdzie:  $n$  jest liczbą punktów wprowadzonych na charakterystyce  $A_0A_n$

W celu odróżnienia od stałych materiałowych  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  (związanych z prostymi granicznymi  $f_1$  i  $f_2$ ) od zmiennego w strefie przejściowej kąta  $\varphi$ , oznaczono go symbolem  $\varphi^{(i)}$ , gdzie indeks w nawiasie oznacza najczęściej kolejną i – tą charakterystykę rodziny  $\beta$  znajdującą się w strefie ADC.

Ze względów obliczeniowych przyjęto, że stały przyrost parametru  $\varphi^{(i)}$  pomiędzy poszczególnymi kolejnymi węzłami siatki, wg (118) równy  $\delta\varphi = \frac{1}{n}(\varphi_2 - \varphi_1)$ , występuje tylko



wzdłuż charakterystyk rodziny  $\alpha$ , natomiast wzdłuż charakterystyk drugiej rodziny przyrost ten w obliczeniach numerycznych nie jest regulowany.

Wzdłuż charakterystyki  $A_0A_n$  parametr  $\eta_{Ai}$  przyjmuje stałą wartość równą  $\eta_{A0}$  a parametr  $t_{Ai} = t_0$ . W całej strefie naprężenia główne zachowują stałe wartości, a stan naprężenia dany jest przez  $s_0$  i  $t_0$  (56).

Dla rozwiązania układu równań różnicowych (110) i (111), bądź (113) i (114), konieczne jest w każdym  $i, j$  - tym węźle wyliczenie wartości kąta  $\varphi^{(i)}$ , która wynosi:  $\varphi_{i,j}^{(i)} = \varphi_{i-1,j}^{(i)} - \delta\varphi$ . Przy występujących w całej strefie stałych wartościach parametrów  $t$  i  $\eta$ , wyłącznie ze zmianą wartości kąta  $\varphi^{(i)}$  związana jest zmiana kąta nachylenia charakterystyk  $\psi$  (94).

Z podobnych względów jak w strefie AED, dla zadania ważkiego i w tej strefie występuje konieczność wprowadzenia izolinii II - linia AC (rys. 41), która przecina pewną część charakterystyk rodziny  $\beta$ . Położenie  $i, j$ -tych węzłów izolinii II, która nie jest charakterystyką, wyznaczyć można z poniższego warunku:

$$\begin{cases} t_{i,j} = t_0, \\ t_{i+1,j} < t_0, \\ t_{i,j+1} < t_0, \\ \varphi_{i,j}^{(i)} = \varphi_2. \end{cases}$$

Dalej stany naprężenia przechodzą na zamykającą część warunku stanu granicznego danego prostą graniczną  $f_2$  (24.2) lub (26.2).

### 5.5.5 Pole naprężenia w strefie ACB

Strefa ACB (rys 57) obejmuje obszar deformacji z zagęszczeniem ośrodka, w którym stany naprężenia opisane są równaniem zamykającej części warunku plastyczności np. (26.2). W strefie tej wymagane jest rozwiązanie zadania charakterystycznego z punktem osobliwym. Kąt wachlarza charakterystyk wychodzących z punktu A dla zadania ważkiego jest początkowo nieznanym, można go określić na podstawie przebiegu skrajnej charakterystyki AB, dla której w punkcie przecięcia z osią z wartość kąta  $\eta$  winna wynosić  $\pi/2$ , gdyż uwagi na warunek symetrii, kierunek większego naprężenia głównego musi tu pokrywać się z osią pionową. Do rozwiązania tego zadania wystarczające są dane określone na charakterystyce AC i znajomość związków opisujących zmiany parametrów w punkcie A. Dla punktów leżących wzdłuż zredukowanej do punktu A charakterystyki rodziny  $\alpha$  należy przyjąć następujące wartości:

$$\begin{aligned} t_{Ai} &= t_{A0} \exp[2i\delta\eta \tan\varphi_2], \\ \eta_{Ai} &= \eta_{A0} - i\delta\eta, \end{aligned} \quad (119)$$

wartość przyrostu kąta  $\delta\eta$  można określić na drodze obliczeń numerycznych, tak dobierając jego wartość, by był spełniony wspomniany wyżej warunek dla skrajnej charakterystyki AB:  $\eta_{n,n} = \pi/2$  oraz utrzymana założona do obliczeń gęstość węzłów siatki.

W przypadku zadania rozwiązywanego w warunkach osiowej symetrii w równaniach różniczkowych (100) w otoczeniu osi pionowej występuje nieoznaczoność. Usunąć ją można



poprzez wyznaczenie granicy, do jakiej dążą przy  $r \rightarrow \infty$  zależności różniczkowe. Zależności te można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \cot \varphi dt + 2t d\eta &= \gamma \frac{\cos \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]}{\cos \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]} dr - t \frac{\sin \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right] - \bar{\omega} \sin \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]}{r \cos \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]} dr, \\ \cot \varphi dt - 2t d\eta &= -\gamma \frac{\cos \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]}{\cos \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]} dr + t \frac{\sin \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right] - \bar{\omega} \sin \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]}{r \cos \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]} dr. \end{aligned} \quad (120)$$

Dla osi z, gdzie  $\eta = \pi/2$  i  $r = 0$  po prawej stronie równań w drugich wyrazach występuje nieoznaczoność typu 0/0. Wykorzystując regułę de l'Hospitala znaleźć można dla tych wyrazów granicę równą:

- dla rodziny charakterystyk  $\alpha$ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ -t \frac{\sin \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right] - \bar{\omega} \sin \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]}{r \cos \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]} dr \right] = -t \left[ 1 - \bar{\omega} \frac{\cos \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]}{\cos \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]} \right] d\eta,$$

- dla rodziny charakterystyk  $\beta$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ t \frac{\sin \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right] - \bar{\omega} \sin \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]}{r \cos \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]} dr \right] = t \left[ 1 - \bar{\omega} \frac{\cos \left[ \eta + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]}{\cos \left[ \eta - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2} \right) \right]} \right] d\eta.$$

Zależności różniczkowe zachodzące wzdłuż charakterystyk w otoczeniu osi z przyjmą poniższą, uproszczoną postać odpowiednio dla rodziny charakterystyk  $\alpha$  i  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \cot\varphi_2 dt + t \left\{ 3 - \frac{\cos\left[\eta - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2}\right)\right]}{\cos\left[\eta + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2}\right)\right]} \right\} d\eta &= \gamma \cos\left[\eta - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2}\right)\right] d\alpha, \\ \cot\varphi_2 dt - t \left\{ 3 - \frac{\cos\left[\eta + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2}\right)\right]}{\cos\left[\eta - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2}\right)\right]} \right\} d\eta &= -\gamma \cos\left[\eta + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2}\right)\right] d\beta, \end{aligned} \quad (121)$$

gdzie:  $\eta = \pi/2$ .

### 5.5.6 Pole naprężenia w strefie ABA'

W trójkącie ABA' stan naprężenia jest w zasadzie nieokreślony. Można założyć zatem dwa warianty budowy rozwiązania:

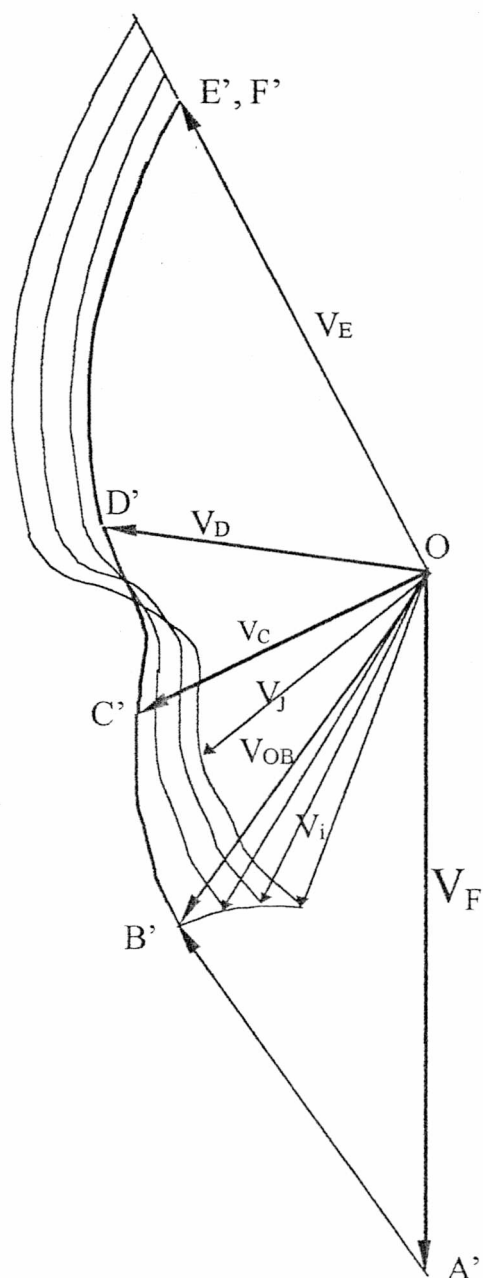
- trójkąt jest w stanie sztywnym i nie zachodzi w nim deformacja ośrodka, w rozwiązaniu dla prędkości cały blok przesuwa się wraz z fundamentem ze stałą prędkością, a wypadkową nacisku fundamentu (nośność graniczną) można wyznaczyć przez całkowanie naprężeń wzdłuż charakterystyki AB,
- przy założeniu, że w trójkącie panuje stan graniczny naprężeń opisany równaniem (28.2), należy rozwiązać na podstawie znanych warunków na charakterystykach AB i A'B zadanie charakterystyczne.

W drugim wariancie siatka charakterystyk zadania charakterystycznego jest rozwijana również w obszarze leżącym powyżej brzegu AA'. Stan naprężenia na linii kontaktu fundament-podłoże określić należy na podstawie wartości  $t$  i  $\eta$  obliczonych w węzłach siatki leżących (dla przyjętej jej gęstości) najbliżej brzegu AA'. Współczynnik tarcia na kontakcie musi mieć wartość dostatecznie dużą, aby mogły zaistnieć naprężenia styczne wynikające z tego rozwiązania, por. [69].

Należy tu nadmienić, iż stosując drugi wariant, uzyskano również interesujące rozwiązania, w których w trójkącie ABA' występują również efekty zmiennej dylatacji (patrz punkt 5.8.5.2).

### 5.6. Budowa pola prędkości

Pole prędkości zbudowane jest na podstawie zastosowanego prawa płynięcia (39) stowarzyszonego z przyjętym warunkiem stanu granicznego (26). Aby zbudować rozwiązanie (rys. 59) należy nałożyć na całe pole prędkości sztywną translację z prędkością  $v_0$ . Fundament wraz ze sztywnym w tym rozwiązaniu blokiem ABA' pozostaje nieruchomy. Najpierw ustala się wartości wektora prędkości wzdłuż krzywoliniowej (w rozwiązaniu ważkim) charakterystyki AB, gdzie wektor prędkości musi być odchylony pod kątem  $\varphi_2$ . W punkcie B prędkość wynosi:



Rys. 59 Hodograf prędkości dla rozwiązania ważkiego

$$v_{OB} = \frac{v_O}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}, \quad (122)$$

natomiast w j-tym węźle wzdłuż charakterystyki AB wartość wektora prędkości wynosi:

$$v_j = v_{OB} \exp\left[\left(\frac{\pi}{2} - \eta_j\right) \tan \varphi_2\right]. \quad (123)$$

Następnie należy budować rozwiązanie wzdłuż krzywoliniowej charakterystyki BCDEF, która jest linią nieciągłości prędkości, poniżej której nie ma ruchu ośrodka. Wartości wektora prędkości w i-tym węźle wzdłuż charakterystyki BC opisuje wzór:

$$v_i = v_{OB} \exp\left[\left(\eta_i - \frac{\pi}{2}\right) \tan \varphi_2\right]. \quad (124)$$

Tak zdefiniowane kinematyczne warunki brzegowe pozwalają zbudować plan prędkości dla całego obszaru odkształcenia. W dalszej kolejności obliczenia w strefie promieniowego ścinania ACE można prowadzić dwojako.

W pierwszym podejściu, analogicznie jak przy budowaniu pola naprężeń (punkty 5.5.2 ÷ 5.5.7), należy rozwiązać zadanie charakterystyczne z punktem osobliwym, wykorzystując równania różnicowe określone dla pola prędkości (110) i (112). Rozwiązanie takie jest poprawne zarówno w płaskim jak i osiowo-symetrycznym stanie odkształcenia.

W drugim podejściu do budowy pola prędkości dla zadania zdefiniowanego w płaskim stanie odkształcenia wykorzystano tą właściwość hodografu prędkości, polegającą na tym, iż tworzy on siatkę ortogonalną w stosunku do siatki charakterystyk

naprężeniowych. Prędkości obliczone w kolejnych węzłach charakterystyki BC za pomocą wzoru (124) należy odłożyć na planie wzdłuż promieni poprowadzonych z bieguna O i odchylonych pod kątem  $\varphi_2$  od stycznych do BC. Dla odcinka CD charakterystyki BCDE kąt, pod którym odchylony jest wektor prędkości zmienia się od  $\varphi_2$  do  $\varphi_1$  (patrz punkt 4.5.4). Dla odcinka DE kąt odchylenia wektora od charakterystyki jest stały, wynosi  $\varphi_1$ . Prędkości ośrodka wewnątrz obszaru ABE można znaleźć kreśląc na planie prędkości siatkę linii odcinkami ortogonalną do siatki charakterystyk, ustalając w każdym węźle wartość kąta  $\psi$  na podstawie wcześniej rozwiązanego pola naprężeń.

Z kolei dla zagadnienia osiowo-symetrycznego graficzną metodę budowania hodografu prędkości przedstawił Z. Mróz [48].

## 5.7 Obliczenie nośności podłoża

Ze względu na możliwe dwa warianty budowy strefy ABA' (patrz punkt 5.5.6) istnieje możliwość określania nośności granicznej podłoża na dwa sposoby. Dla sztywnego bloku ABA' można ją obliczyć na podstawie wartości naprężeń wzdłuż ostatniej charakterystyki AB, w drugim przypadku nośność oblicza się na podstawie wartości naprężeń normalnych występujących na linii kontaktu AA' (rys. 55).

Zakładając istnienie sztywnego trójkąta w strefie ABA' wartość nośności granicznej podłoża otrzymuje się całkując naprężenia działające wzdłuż charakterystyki AB. W przypadku rozwiązania dla ośrodka ważkiego należy dodatkowo odjąć ciężar klina ABA'. Wtedy wartość średniego nacisku dla zadania płaskiego można obliczyć ze wzoru:

$$Q_f = 2 \int_0^{B/2} \sigma_y(x) x dx - 2\gamma \int_0^{B/2} y(x) x dx, \quad (125)$$

gdzie: B - szerokość fundamentu pasmowego,

a nośność graniczną

$$q_f = \frac{Q_f}{B}. \quad (126)$$

W drugim wariancie przyjęto rozwinięcie charakterystyk naprężeniowych również w strefie ABA', co zakłada występowanie i tam efektów zagęszczania. Z rozwiązanego zadania charakterystycznego, opartego na charakterystykach AB oraz A'B należy wybrać węzły leżące w otoczeniu linii AA' - linia kontaktu fundament-podłoże. Do wzoru (125) należy podstawić wartości naprężeń normalnych obliczonych w tych węzłach. W podobny sposób można policzyć wartość nośności granicznej dla zadania osiowosymetrycznego.

Należy dodać, iż dla oceny ściśle rozwiązania ważkiego nie jest możliwe, jak w rozdziale 4 przy określaniu oceny dolnej i górnej nośności granicznej, podanie rozwiązania w formie sumy współczynników nośności  $N_c$  oraz  $N_\gamma$ . Wynika to z faktu, iż obszary deformacji dla rozwiązania nieważkiego, określony za pomocą metody charakterystyk dla tych samych parametrów co w rozwiązaniu nieważkim, mają różne kształty i zasięgi.

## 5.8 Przykłady rozwiązań

### 5.8.1 Metoda numeryczna

Obliczenia numeryczne nośności granicznej oparte na metodzie charakterystyk wykonano za pomocą oryginalnego programu komputerowego METCHAR 7.0, napisanego w języku programowania Pascal 7.0. Program ten w poszczególnych obszarach pola deformacji (będących elementarnymi zadaniami brzegowymi), opisanych w punkcie 5.5, oblicza w węzłach siatki charakterystyk poszukiwane wartości  $t$  oraz  $\eta$ . Wymaga to przeprowadzenia dużej ilości iteracji. W największej części przypadków rozwiązanie budowano zmieniając zasięg obszaru deformacji oraz wartość kąta rozwarcia strefy AED lub (i) strefy ACB, tak by uzyskać jednostkową szerokość fundamentu, następnie wielokrotnie powtarzając obliczenia znajdowano współrzędne punktu F – rys. 51, tj. maksymalny zasięg obszaru deformacji oraz wartość kąta rozwarcia strefy AED lub (i) strefy ACB. Dla wstępnie dobranego zakresu wartości  $L_{AF}$  (zasięgu obszaru deformacji) i wartości kąta rozwarcia strefy AED (ściślej, zamiast tego kąta w obliczeniach numerycznych zastosowano zmienny mnożnik wartości kąta  $\omega_0$ ) obliczana była wartość szerokości obciążenia (fundamentu) i kąta  $\eta$  w punkcie przecięcia skrajnej charakterystyki rodziny  $\alpha$  z osią  $y$  (lub  $z$  dla osiowej symetrii). Za pomocą tych parametrów kontrolowano dokładność obliczeń. Podane w niniejszej pracy wartości nośności były obliczone z następującą dokładnością wyznaczanych parametrów:

$$\left| \overline{AO} - \frac{B}{2} \right| \leq 0,005, \quad \left| \eta_{n,n} - \frac{\pi}{2} \right| \leq 0,005, \quad (127)$$

gdzie: szerokość fundamentu  $B = 1$  m,

$\eta_{n,n}$  – wartość kąta  $\eta$  w punkcie przecięcia skrajnej charakterystyki  $\alpha$  z osią pionową.

Duży wpływ na dokładność obliczeń ma przyjęta gęstość siatki charakterystyk (szczególnie ilość charakterystyk rodziny  $\beta$ ) w poszczególnych elementarnych zadaniami. W przedstawionych przykładach obliczeń numerycznych przyjęto minimalną ilość 11 charakterystyk dla rodziny  $\alpha$  oraz 11÷33 charakterystyk drugiej rodziny  $\beta$  w każdej z wydzielonych stref. Dalsze zwiększenie gęstości charakterystyk daje zmianę wartości nośności jedynie na czwartym, bądź trzecim miejscu znaczącym, natomiast powoduje kilku- a nawet kilkudziesięciokrotne wydłużenie czasu obliczeń.

Na kompletne rozwiązanie otrzymane z programu METCHAR 7.0 składa się para rysunków (por. rys. 58), z których pierwszy przedstawia siatkę charakterystyk pola naprężeń określoną dla przyjętego schematu pola deformacji oraz postać zastosowanego w obliczeniach warunku stanu granicznego, przedstawionego za pomocą obwiedni kół Mohra prostych granicznych  $f_1$  i  $f_2$ . Prócz budowy siatki charakterystyk oraz obwiedni kół Mohra rysunek podaje także wybrane wartości dewiatora stanu naprężenia  $t$ : wartość  $t_p$  na brzegu AF,  $t_0$  dla przejściowego koła Mohra oraz wartości na ostatniej charakterystyce  $t_k$  w punktach A i B (por. rys. 55, 56). Drugi rysunek zawiera hodograf prędkości z odpowiadającym mu polem deformacji. Deformację układu węzłów siatki charakterystyk w początkowej fazie ruchu wyznaczono zakładając, iż w przeciągu dostatecznie małego okresu czasu  $\delta t$  prędkości nie zmieniają się, wobec czego przemieszczenia punktów węzłów siatki określono jako  $u = V \delta t$ . Dodatkowo podano wartości prędkości w punktach B i E -  $V_{OB}$ ,  $V_{OE}$  oraz stosunek objętości ośrodka wypchniętego do wciśniętego.

## 5.8.2 Podstawowe typy rozwiązań

Wyniki obliczeń oceny górnej i dolnej nośności granicznej (tab. 1 oraz 2) wskazały, iż opierając się na przyjętej w niniejszej pracy formule stanu granicznego (26) możliwe jest otrzymanie czterech odmiennych typów rozwiązań, które różnią się występowaniem oraz zasięgiem efektów zagęszczania. Typ rozwiązania jest głównie związany z wartością ciśnienia prekonsolidacji:

- w całym obszarze deformacji występują wyłącznie efekty zagęszczania ośrodka, stany naprężenia znajdują się tylko na zamykającej części warunku  $f_2$  (rys. 56), rozwiązanie uzyskiwane dla stosunkowo najniższych wartości ciśnienia prekonsolidacji,
- w obszarze deformacji występują zarówno efekty zagęszczenia jak i rozluźnienia, stany naprężenia leżą zarówno na klasycznej jak i zamykającej części warunku danych prostymi granicznymi  $f_1$  i  $f_2$ ,
- w obszarze deformacji występują wyłącznie efekty rozluźnienia, stany naprężenia opisuje klasyczna część warunku stanu granicznego oraz przejściowe koło Mohra, są uzyskiwane dla stosunkowo wysokich wartości ciśnienia prekonsolidacji,
- rozwiązanie, w którym stany naprężenia leżą wyłącznie na klasycznej części warunku, jest ono tożsame z rozwiązaniem klasycznym, opartym na otwartym warunku Coulomba- Mohra, otrzymywane wyłącznie dla stosunkowo najwyższych wartości ciśnienia prekonsolidacji.

W dalszej części pracy przedstawiono przykłady tych czterech typów rozwiązań zarówno dla płaskiego, jak i osiowo- symetrycznego stanu odkształcenia wraz z analizą zmienności wyników w zależności od parametrów warunku stanu granicznego i ciężaru objętościowego ośrodka. Na końcu rozdziału zamieszczono przykłady szczególnych rozwiązań.

## 5.8.3 Rozwiązania dla płaskiego stanu odkształcenia

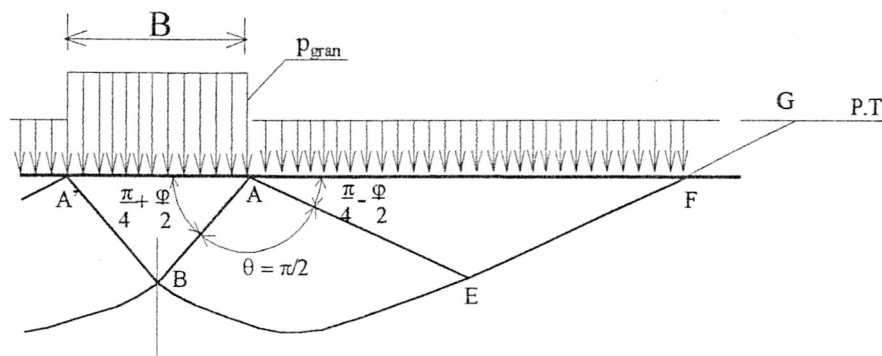
### 5.8.3.1 Rozwiązania z wyłącznymi efektami zagęszczenia ośrodka - nośność graniczna słabego i ściśliwego podłoża

Dla pewnego zakresu parametrów warunku (26), w przypadku rozważanego zadania nośności granicznej podłoża, zaobserwować można interesujący efekt, który polega na całkowitej redukcji strefy rozluźnienia oraz strefy przejściowej ACE (rys. 55), tak że cały obszar deformacji obejmuje wyłącznie strefa zagęszczenia, o bardzo niewielkim, w stosunku do schematu Prandtla, zasięgu. Budowę pola naprężeń dla tego wariantu przedstawiono na rys. 60, w którym stany naprężeń znajdują się wyłącznie na zamykającej części warunku – rys. 61.

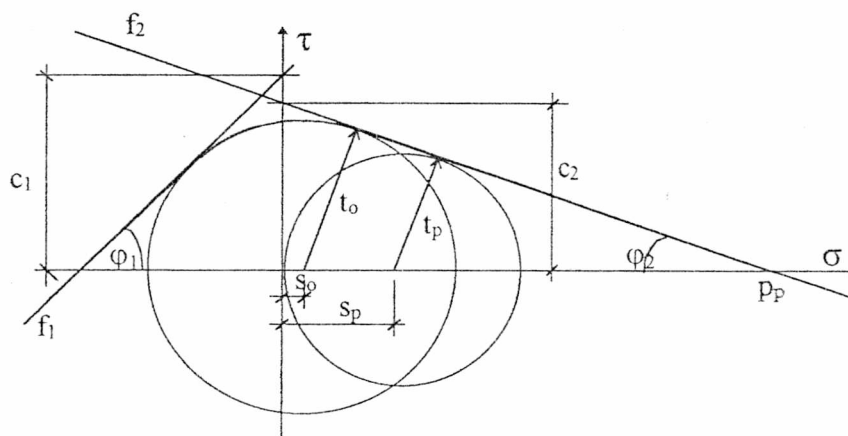
Należy zauważyć, iż tego typu rozwiązanie może mieć zastosowanie do opisu rzeczywistych gruntów - słabych, charakteryzujących się dużą ściśliwością, a więc takich, w których pod wpływem przyłożonego obciążenia przeważają efekty zagęszczania. Aby to zilustrować wykonano obliczenia, do których przyjęto parametry warunku pochodzące z badań ściśliwości torfu, zawartych pracy Kroka i Meyera [43]. Był to torf średnio rozłożony, o wartości ciśnienia prekonsolidacji  $p_p=17,09 \div 27,32$  kPa, przy spójności ok. 7 kPa, czyli  $p_p/c = 2,4 \div 3,9$ . Na rys. 62 przedstawiono rozwiązanie uzyskane dla parametrów warunku mieszczących się w tym zakresie:  $p_p/c_1 = 3,5$  oraz  $\phi_2 = -20^\circ$ . Otrzymane pole deformacji (rys. 62a) charakteryzuje się



niewielkim zasięgiem oraz występowaniem wyłącznych efektów zagęszczenia, czego w przypadku podłoża w postaci torfu należałoby oczekiwać.



Rys. 60 Schemat pola naprężenia dla zadania, w którym stany naprężenia leżą wyłącznie na zamykającej części warunku stanu granicznego

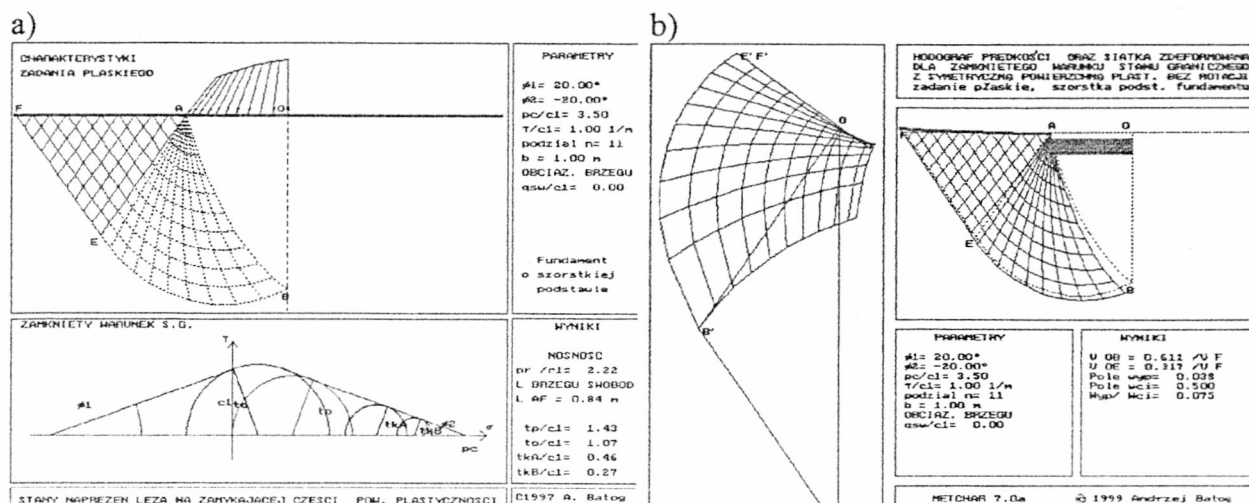


Rys. 61 Obwiednie granicznych kół Mohra dla zadania, w którym stany naprężenia leżą wyłącznie na zamykającej części warunku stanu granicznego

Prócz tego pojedynczego przykładu bazującego na parametrach pochodzących z badań laboratoryjnych przeprowadzono dla typu rozwiązania z wyłącznymi efektami zagęszczenia w polu deformacji szeroką analizę zmienności wyników: wartości nośności granicznej  $p_{gran}/c_1$ , długości brzegu swobodnego  $L_{AF}$ , (która decyduje o zasięgu obszaru deformacji) oraz stosunku objętości ośrodka wciśniętego do wypchniętego  $V_{wci}/V_{wyp}$ .

W tym celu wykonano dużą serię obliczeń numerycznych, które zilustrowano trzema przykładami, wybranymi dla różnych wartości ciśnienia prekonsolidacji - pary rysunków (rys. 63a- c). Otrzymano je dla fundamentu o jednostkowej szerokości, posadowionego na podłożu ważkim przy stosunku  $\gamma/c_1 = 1/m$  oraz  $\phi_2 = -20^\circ$ , kolejno dla rosnących wartości ciśnienia prekonsolidacji  $p_p = 3,6c_1$ ,  $6,0c_1$  oraz  $8,4c_1$ . W miarę odsuwania zamknięcia warunku zauważalna jest w tych trzech przykładach tendencja, polegająca na zwiększaniu się nośności granicznej podłoża, połączonej ze zmniejszaniem się zasięgu obszaru deformacji, czyli wielkości obszaru wciągniętego do współpracy z obciążeniem. Efekty zagęszczania ośrodka w wyniku odsuwania zamknięcia warunku ulegają stosunkowo niewielkiemu ograniczeniu.





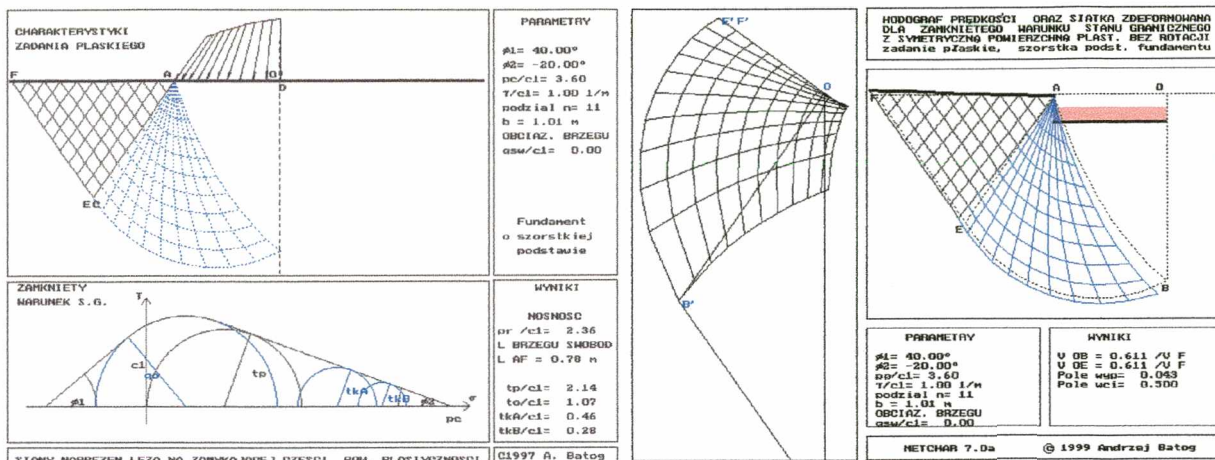
Rys. 62 Pole naprężeń i hodograf prędkości z siatką zdeformowaną dla  $p_p = 3,5 c_1$   
 Stany naprężeń leżą na zamykającej powierzchni plastyczności, zadanie płaskie

Uzyskane wyniki całej serii obliczeń pozwoliły sporządzić szereg wykresów, ilustrujących zmienność rozwiązań w szerokim zakresie parametrów tego zadania.

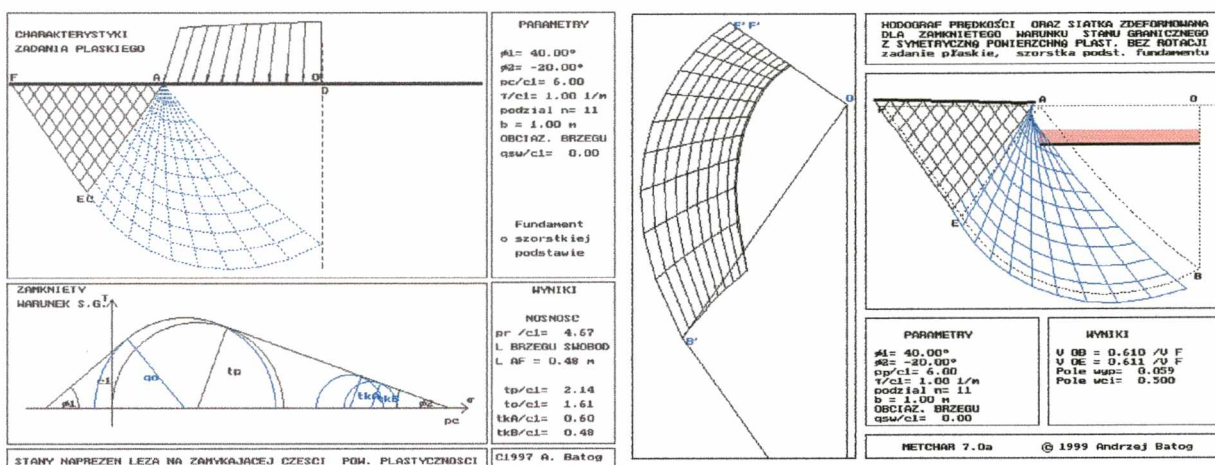
Na wykresach zamieszczonych na rys. 64 i 65 przedstawiono zależność wartości nośności granicznej od wartości ciśnienia prekonsolidacji, ciężaru objętościowego i kąta nachylenia zamykającej części warunku  $\phi_2$ . Zakres występowania rozwiązań z wyłącznymi efektami zagęszczania oznaczono czerwonymi liniami. Dla najniższych wartości ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$  w obliczeniach numerycznych jest niemożliwe uzyskanie rozwiązania, z kolei dla wyższych wartości  $p_p$  w obszarze deformacji pojawiają się efekty rozluźnienia. Nośność graniczna maleje ze wzrostem ciężaru objętościowego, natomiast rośnie ze zwiększaniem się wartości ciśnienia prekonsolidacji oraz ze zwiększaniem się nachylenia zamknięcia warunku – dla malejących wartości kąta  $\phi_2$ .

Na kolejnych wykresach (rys. 66 i 67) pokazano zależności długości brzegu swobodnego  $L_{AF}$  od parametrów ośrodka. Przy jednostkowej szerokości fundamentu długość  $L_{AF}$  informuje o zasięgu obszaru deformacji. Zauważalne jest zmniejszanie się zasięgu obszaru deformacji w miarę wzrostu wartości ciśnienia prekonsolidacji oraz wzrostu nachylenia zamknięcia warunku. Zatem dla ośrodka stosunkowo mocniejszego dla przeniesienia obciążenia granicznego wymagane jest wciągnięcie mniejszego obszaru do współpracy z fundamentem. Z podobnego względu zasięg obszaru deformacji maleje dla niższych wartości ciężaru objętościowego ośrodka.

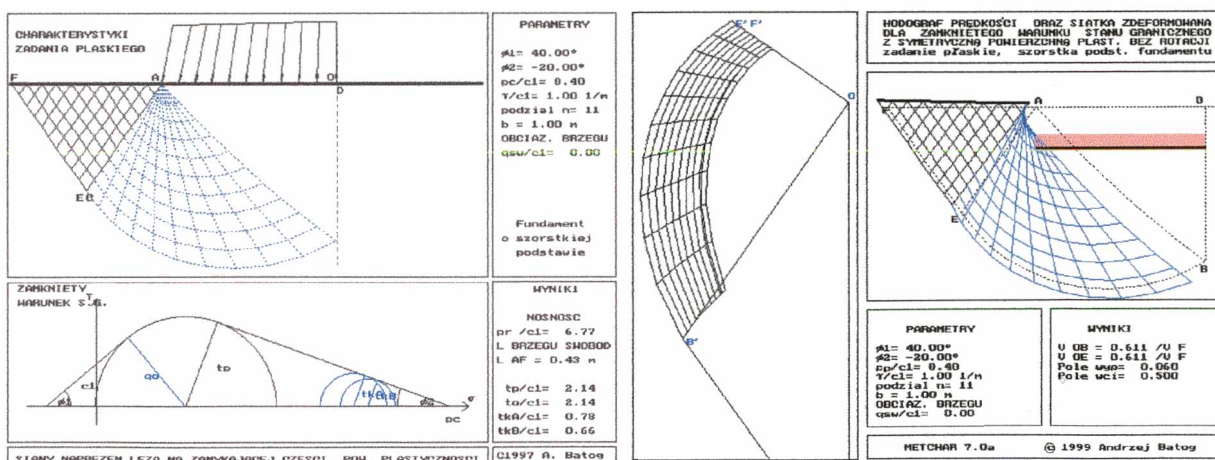
Trzecia seria wykresów (rys. 68a – 68c) podaje zależność stosunku objętości ośrodka wypchniętego do wciśniętego  $V_{wyp}/V_{wci}$  od wartości ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$ , ciężaru objętościowego  $\gamma/c_1$  oraz kąta  $\phi_2$ . Stosunek  $V_{wyp}/V_{wci}$  można uważać za miarę intensywności rozluźniania ośrodka. Jak można zauważyć, w tym zadaniu dominują efekty zagęszczania. Stosunek  $V_{wyp}/V_{wci}$  nieznacznie tylko zmienia się ze wzrostem wartości ciśnienia prekonsolidacji (z wyjątkiem niewielkiego zakresu najniższych wartości  $p_p$ ). Efekty zagęszczania znacznie nasilają się ze zwiększaniem nachylenia zamykającej części warunku, natomiast w niewielkim stopniu maleją z ze wzrostem ciężaru objętościowego.



a) Rozwiązanie dla  $p_p = 3,6c_1$

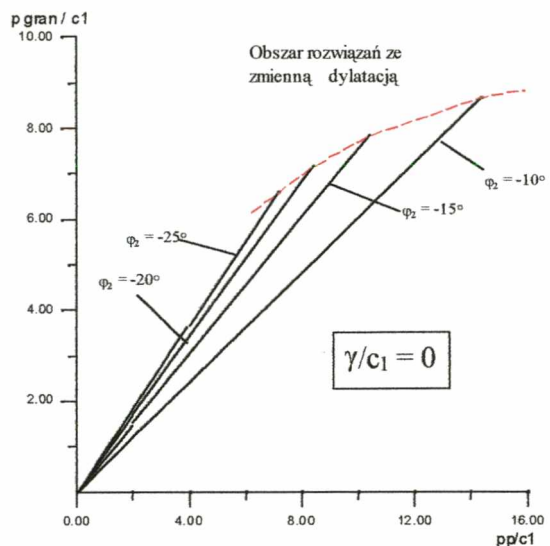


b) Rozwiązanie dla  $p_p = 6,0c_1$

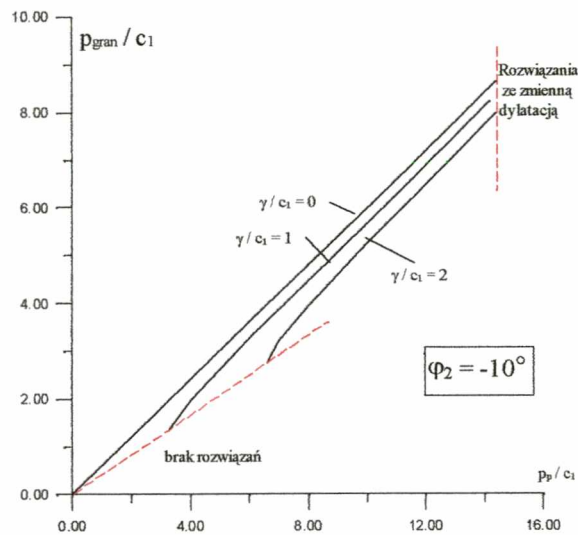


c) Rozwiązanie dla  $p_p = 8,4c_1$

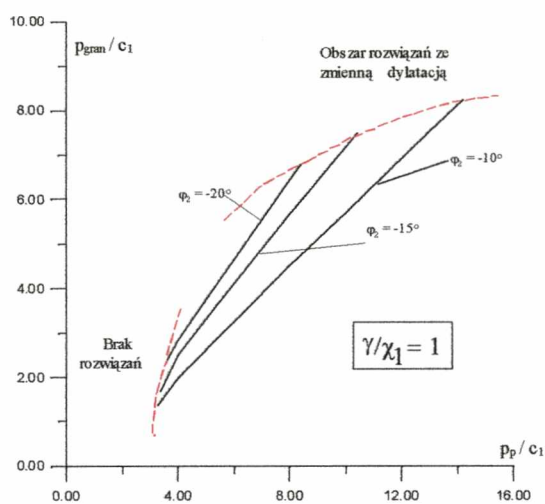
Rys. 63 Siatka charakterystyk naprężeniowych i hodograf prędkości dla rozwiązania, w którym występują wyłącznie efekty zagęszczania.  
 Zależność nośności od wartości ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$ .  
 Zadanie płaskie, ośrodek wałki  $\gamma/c_1 = 1/m$ ,  $\varphi_2 = -20^\circ$ .



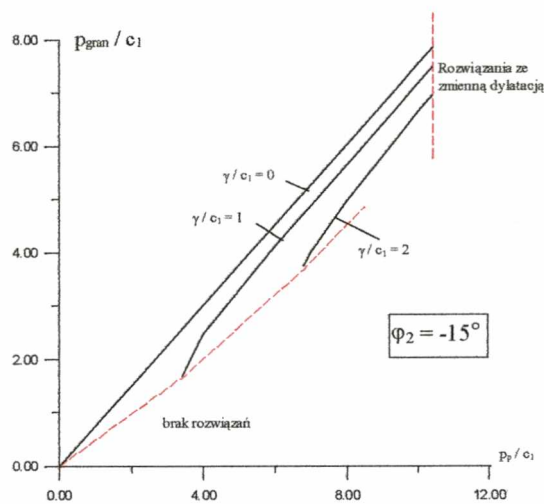
a) Nośność graniczna dla ośrodka nieważkiego



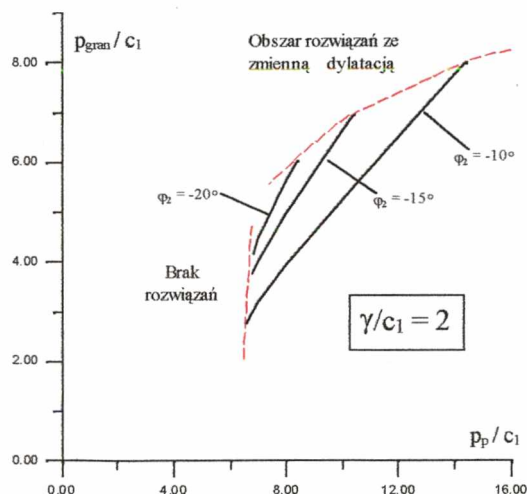
a) Nośność graniczna dla  $\phi_2 = -10^\circ$



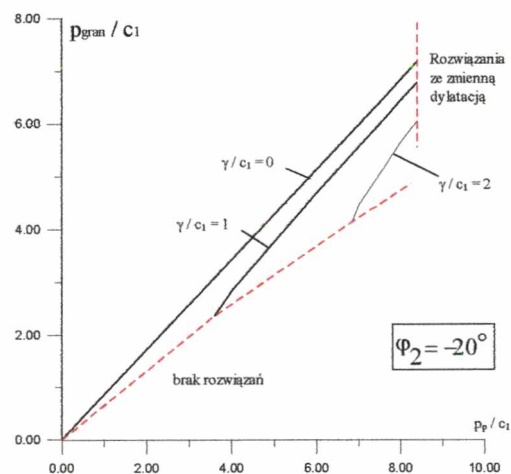
b) Nośność graniczna dla ośrodka ważkiego przy  $\gamma / c_1 = 1$



b) Nośność graniczna dla  $\phi_2 = -15^\circ$



c) Nośność graniczna dla ośrodka ważkiego przy  $\gamma / c_1 = 2$

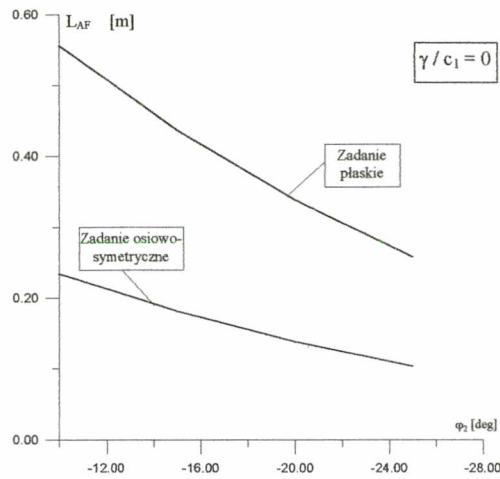


c) Nośność graniczna dla  $\phi_2 = -20^\circ$

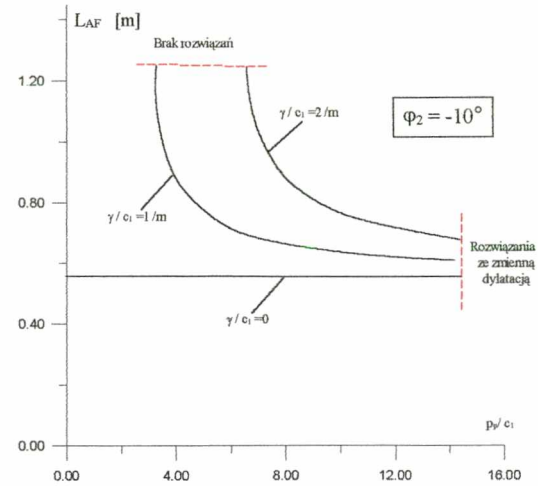
Rys. 64 Zależność nośności od ciężaru obj.  $\gamma/c_1$   
Zadanie płaskie, wyłączne efekty zagęszczania

Rys. 65 Zależność nośności od wartości kąta  $\phi_2$   
Zadanie płaskie, wyłączne efekty zagęszczania

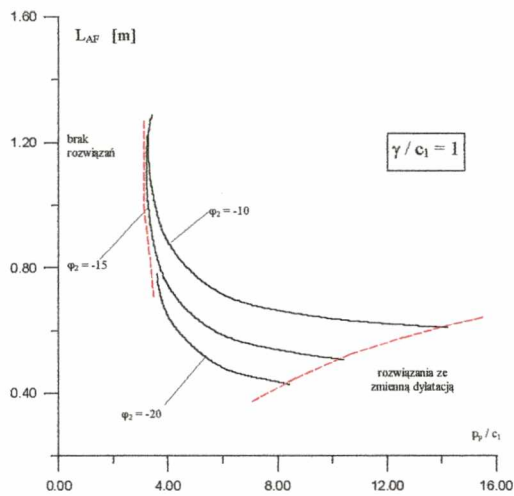




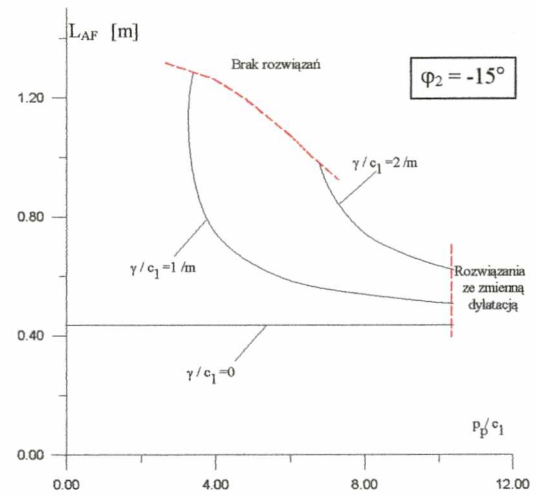
a) Zasięg obszaru deformacji dla rozwiązań nieważkich



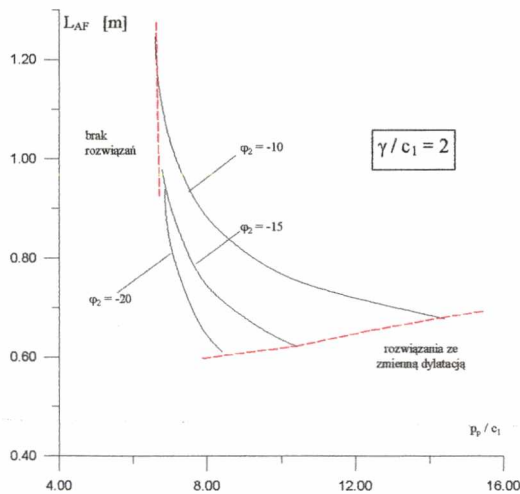
a) Zasięg obszaru deformacji dla zadania płaskiego przy  $\varphi_2 = -10^\circ$



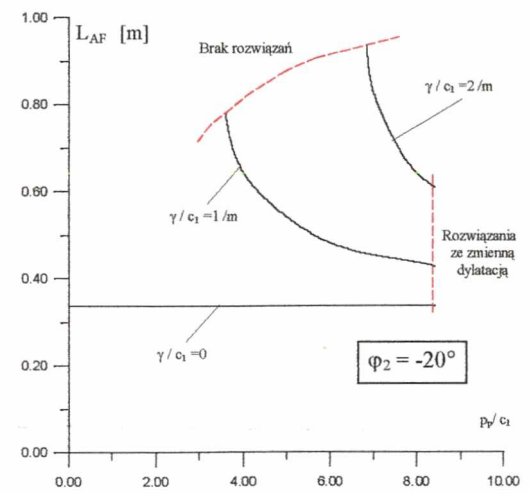
b) Zasięg obszaru deformacji dla zadania płaskiego,  $\gamma/c_1 = 1$



b) Zasięg obszaru deformacji dla zadania płaskiego przy  $\varphi_2 = -15^\circ$



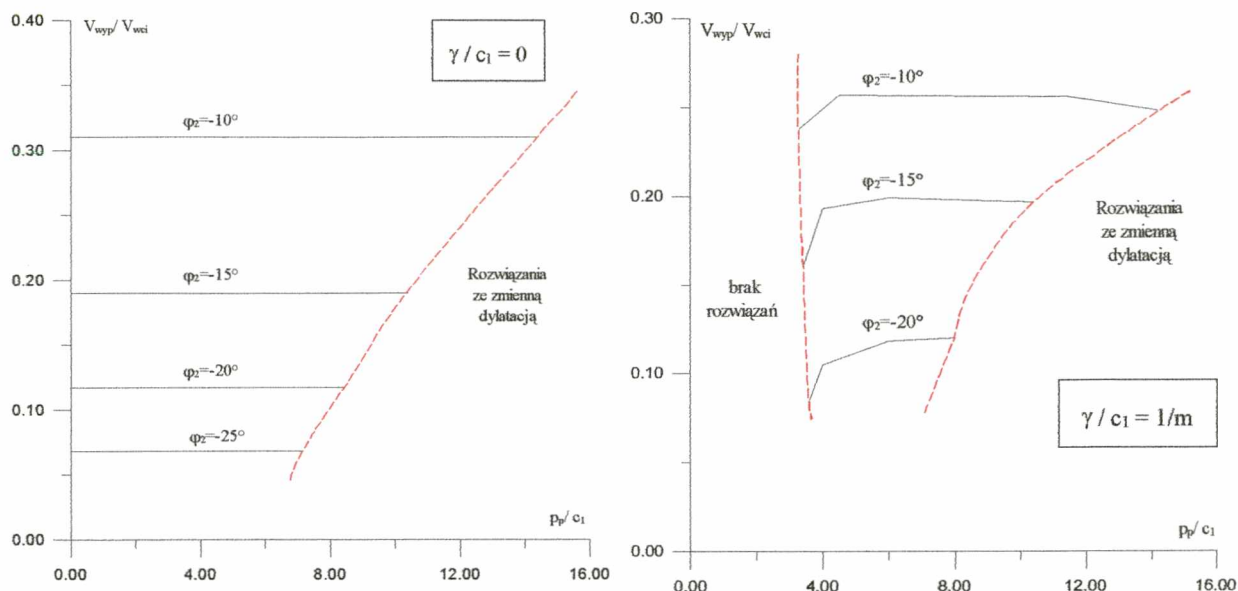
c) Zasięg obszaru deformacji dla zadania płaskiego,  $\gamma/c_1 = 2$



c) Zasięg obszaru deformacji dla zadania płaskiego przy  $\varphi_2 = -20^\circ$

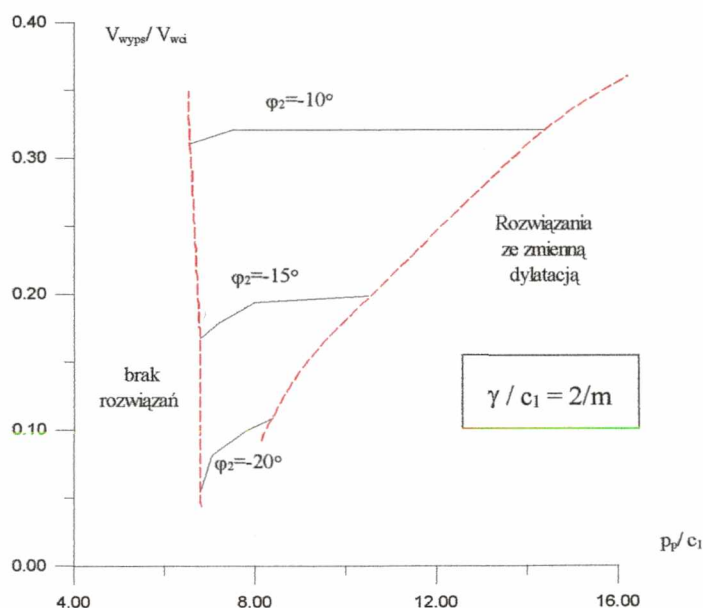
Rys. 66 Zależność długości brzegu swobodnego  $L_{AF}$  od ciężaru objętościowego. Zadanie płaskie, wyłączne efekty zagęszczania.

Rys. 67 Zależność długości brzegu swobodnego  $L_{AF}$  od wartości kąta  $\varphi_2$ . Zadanie płaskie, wyłączne efekty zagęszczania.



a) Wartość stosunku objętości ośrodka wypchniętego do wciśniętego dla ośrodka nieważkiego

b) Wartość stosunku objętości ośrodka wypchniętego do wciśniętego dla  $\gamma/c_1 = 1 \text{ [m}^{-1}\text{]}$



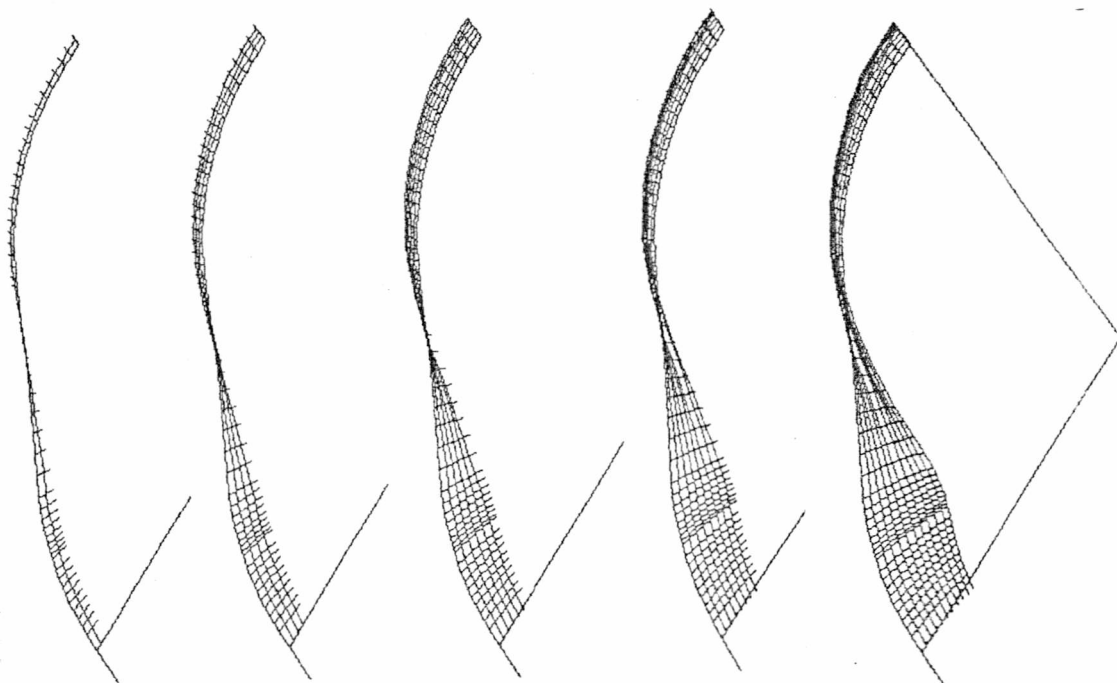
c) Wartość stosunku objętości ośrodka wypchniętego do wciśniętego dla  $\gamma/c_1 = 2 \text{ [m}^{-1}\text{]}$

Rys. 68 Zależność stosunku objętości ośrodka wypchniętego do wciśniętego  $V_{wyp}/V_{wci}$  od wartości ciśnienia prekonsolidacji  $p_p/c_1$ .  
Rozwiązanie, w którym stany naprężeń leżą na zamykającej powierzchni plastyczności, zadanie płaskie

### 5.8.3.2 Rozwiązania ze zmienną dylatacją

Schemat pola naprężenia dla zadania ze zmienną dylatacją zawiera wszystkie opisane w punkcie 5.5 strefy, w którym występują zarówno efekty zagęszczenia jak i rozluźnienia. W niniejszym punkcie przedstawiono wyniki uzyskane dla zakresu parametrów rozważanego zadania, które pozwalają otrzymać tego typu rozwiązania.

Zamieszczone przykłady, podobnie jak w punkcie poprzednim, podają wyniki w postaci siatek charakterystyk naprężeniowych oraz hodografów prędkości. Obszary z efektami rozluźnienia w polu deformacji (rys. 70 – 72) oznaczono ciągłymi charakterystykami w kolorze czarnym, natomiast efekty zagęszczenia przerywanymi, niebieskimi. Pogrubione linie przerywane AD i AC są odpowiednio izoliniami I i II (patrz punkt 5.5.3 i 5.5.4), pomiędzy którymi stan naprężenia opisuje przejściowe koło naprężeń ( $s_0$ ,  $t_0$ ) – rys. 35. Ponadto na rysunkach podano rozkład naprężenia głównego  $\sigma_1$  pod fundamentem i postać zastosowanego warunku stanu granicznego, dany za pomocą obwiedni kół Mohra.



Rys. 69 Fazy tworzenia hodografu prędkości dla rozwiązania ze zmienną dylatacją, program METCHAR v.7.0a

Osobnego komentarza wymagają otrzymane hodografy prędkości, które mogą znacznie różnić się od kształtu hodografu klasycznego rozwiązania, opartego na warunku otwartym – rys. 48. Istotną cechą hodografów prędkości otrzymanych dla zadania ze zmienną dylatacją są występujące w różnym stopniu zaburzenia regularności rozkładu kierunków oraz długości wektorów składowych prędkości. Fazy tworzenia hodografu za pomocą zastosowanego programu komputerowego pokazano na rys. 69. Nakładanie się i krzyżowanie linii hodografu jest głównie konsekwencją zmienności wartości kąta  $\varphi^{(i)}$ , o który w strefie AEB jest odchylony wektor prędkości od linii nieciągłości prędkości oraz pewnej dowolności, opisanej w punkcie 5.5.4, która występuje przy budowie strefy o zmiennej dylatacji między izoliniami I oraz II. Jednakże ten interesujący efekt nie wpływa na fizyczną poprawność rozwiązania. Prócz

hodografu prędkości przedstawiono również deformację układu węzłów siatki charakterystyk, wyznaczoną w początkowej fazie ruchu. Deformację siatki wyznaczono zakładając, iż w przeciągu dostatecznie małego okresu czasu  $\delta t$  prędkości nie zmieniają się, wobec czego przemieszczenia punktów węzłów siatki określono jako  $u = V \delta t$ . Na siatce deformacji zaznaczono również występowanie efektów zmiennej dylatacji w podobny sposób, jak na siatce charakterystyk naprężeniowych.

Podobnie jak w punkcie 5.8.3.1, rozwiązano zadanie nośności fundamentu o jednostkowej szerokości, posadowionego na powierzchni ważkiego ośrodka (przyjęto do obliczeń  $\gamma/c_1 = 2$ ,  $\gamma/c_1 = 1$  oraz  $\gamma/c_1 = 0$  1/m - ośrodek nieważki). Przyjęto wariant warunku stanu granicznego z niesymetryczną rotacją powierzchni plastyczności o następujących parametrach:  $K_o = 0,6$ ,  $K_o = 0,8$  oraz  $K_o = 1$  (warunek symetryczny względem osi ciśnienia hydrostatycznego), kąty  $\varphi_1 = 20^\circ$  oraz  $\varphi_2 = -30^\circ$ . Przeprowadzono kilka serii obliczeń dla kolejno rosnących wartości ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$ , które zilustrowano kilkoma wybranymi przykładami – rys. 70- 72. Wszystkie uzyskane wyniki obliczeń zestawiono w formie graficznej za pomocą wykresów – rys. 73 – 76.

Na rysunkach 70 a-c zamieszczono trzy przykłady rozwiązań uzyskane dla ośrodka ważkiego  $\gamma/c_1 = 1/\text{m}$ , warunku z rotacją przy  $K_o = 0,8$  i dla kolejno rosnących wartości ciśnienia prekonsolidacji. Z odsuwaniem zamknięcia warunku związane jest zwiększenie nośności granicznej i zasięgu obszaru deformacji przy zauważalnej redukcji strefy zagęszczania ośrodka, zmianie ulega rozkład prędkości odkształceń, również zwiększają się efekty rozluźnienia.

Z kolei na rys. 71 a-c podano przykłady rozwiązań uzyskane dla warunku z rotacją przy  $K_o = 0,8$  i  $p_p/c_1 = 15$  dla zwiększających się wartości ciężaru objętościowego ośrodka. Dla wyższych wartości ciężaru objętościowego ograniczeniu ulegał zasięg obszaru deformacji przy jednoczesnym niewielkim wzroście zasięgu występowania efektów zagęszczania ośrodka. Z wyższymi wartościami ciężaru objętościowego związany jest także bardziej zróżnicowany rozkład prędkości odkształceń.

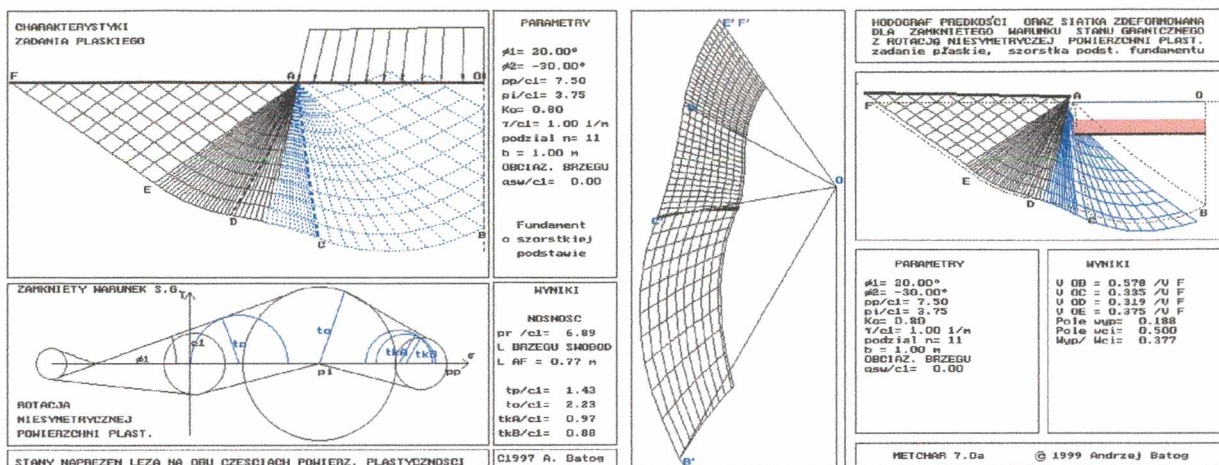
Szczególnie duże różnice w budowie siatek charakterystyk naprężeniowych można zauważyć w przykładach z rys. 72 a-c, które otrzymano przy  $K_o = 0,6$  i  $p_p/c_1 = 15$  dla kolejno rosnących wartości kąta  $\varphi_1$ . Stosunkowo niewielkie zwiększenie parametru wytrzymałościowego, o około 20%, pociąga za sobą znaczną zmianę kształtu i zasięgu obszaru deformacji. Towarzyszy temu również pogłębienie efektów zagęszczenia oraz większe zróżnicowanie prędkości odkształceń.

Na rys. 73 a-c znajdują się wykresy, przedstawiające zmianę wartości nośności granicznej, długości brzegu swobodnego i stosunku objętości  $V_{wyp}/V_{wci}$  w miarę odsuwania się zamknięcia warunku (zwiększania się wartości ciśnienia prekonsolidacji) dla różnych wartości współczynnika  $K_o$  oraz  $\gamma/c_1 = 1$ . Czerwone linie oddzielają rozwiązania ze zmienną dylatacją od przejściowych, prowadzących do rozwiązań dla otwartego warunku stanu granicznego. Zwiększaniu wartości ciśnienia prekonsolidacji towarzyszy zarówno wzrost wartości nośności granicznej, zasięgu obszaru deformacji jak i efektów rozluźnienia, najsilniej te zależności występują dla najniższych wartości współczynnika  $K_o$ .

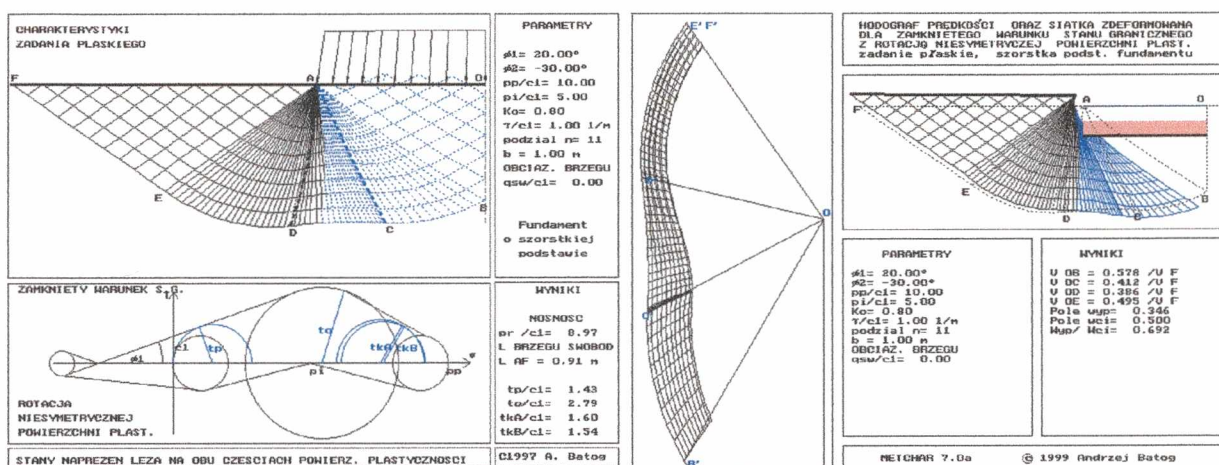
Z kolei na rys. 74 a-c zestawiono zależności wyników rozwiązań od kąta  $\varphi_1$  dla ośrodka ważkiego  $\gamma/c_1 = 1$ , przy  $p_p/c_1 = 15$  i dla różnych wartości  $K_o$ . Efektem zwiększenia wytrzymałości ośrodka (wyższe wartości kąta  $\varphi_1$ ) jest większa nośność graniczna podłoża, zmniejszony obszar deformacji i zmniejszenie efektów rozluźnienia ośrodka. Stosunkowo najwyższe wartości nośności granicznej i silniejsze efekty rozluźnienia otrzymano dla najmniejszej wartości współczynnika  $K_o = 0,6$ .

Bardzo podobny charakter mają wykresy przedstawione na rys. 75 a-c, gdzie pokazano zależność rozwiązań od kąta nachylenia zamykającej części warunku  $\varphi_2$ .

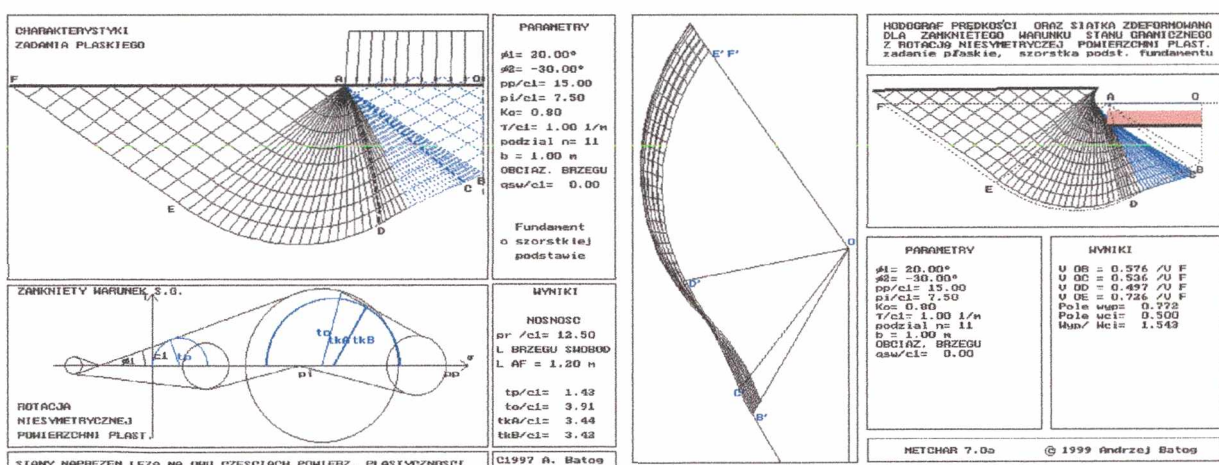




a) Rozwiązanie dla  $p_p = 7.5c_1$



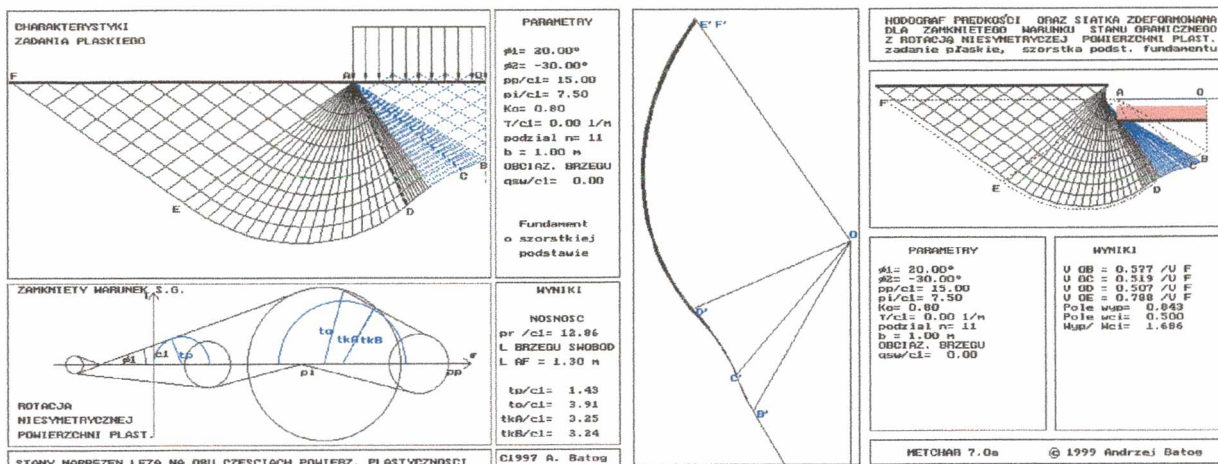
b) Rozwiązanie dla  $p_p = 10c_1$



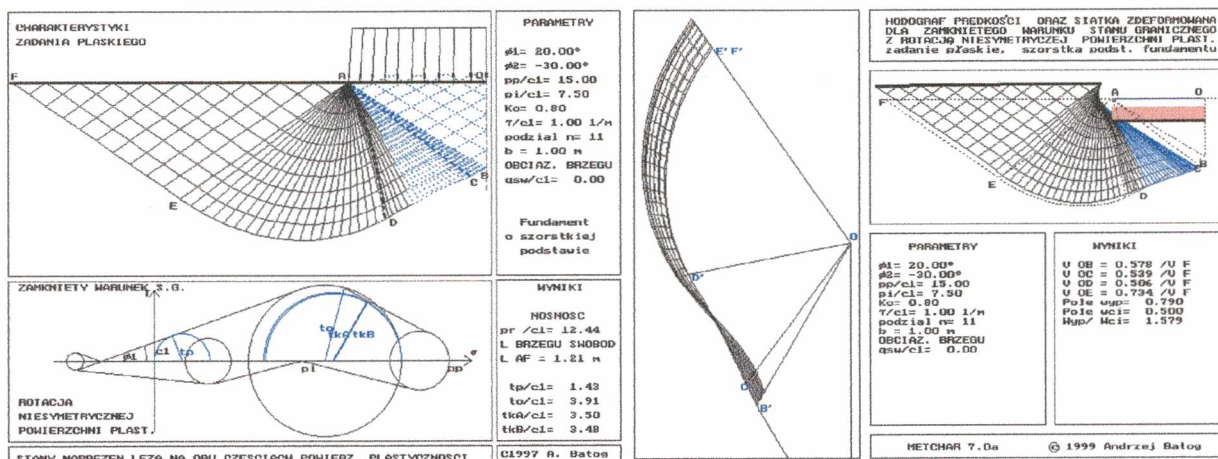
c) Rozwiązanie dla  $p_p = 15c_1$

Rys. 70 Siatki charakterystyk oraz hodograf prędkości dla rozwiązań z rotacją warunku,  $K_0 = 0.8$   
Rozwiązania dla różnych wartości ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$ .  
Zadanie płaskie, zmienna dyatacja ośrodka

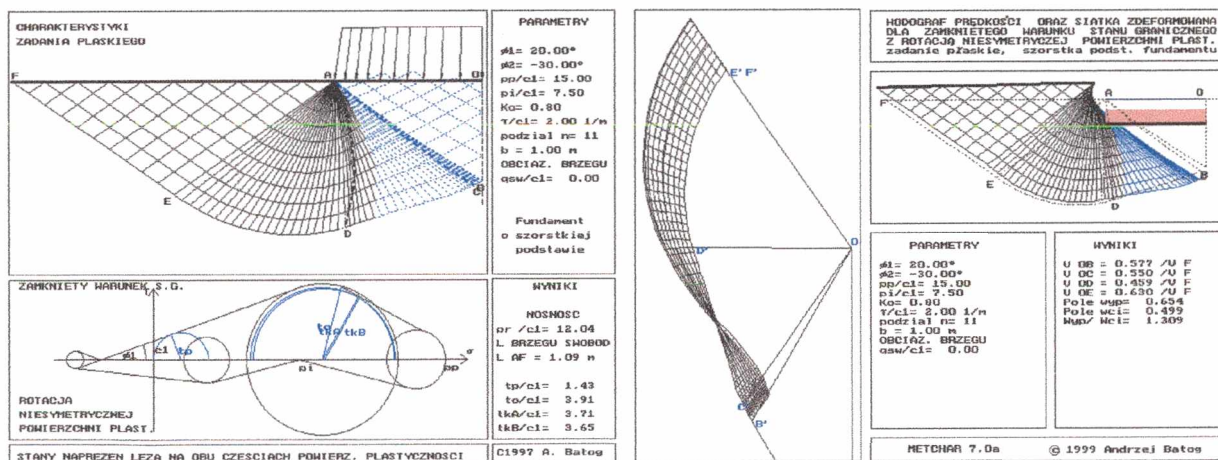




a) Rozwiązanie dla ośrodka nieważkiego

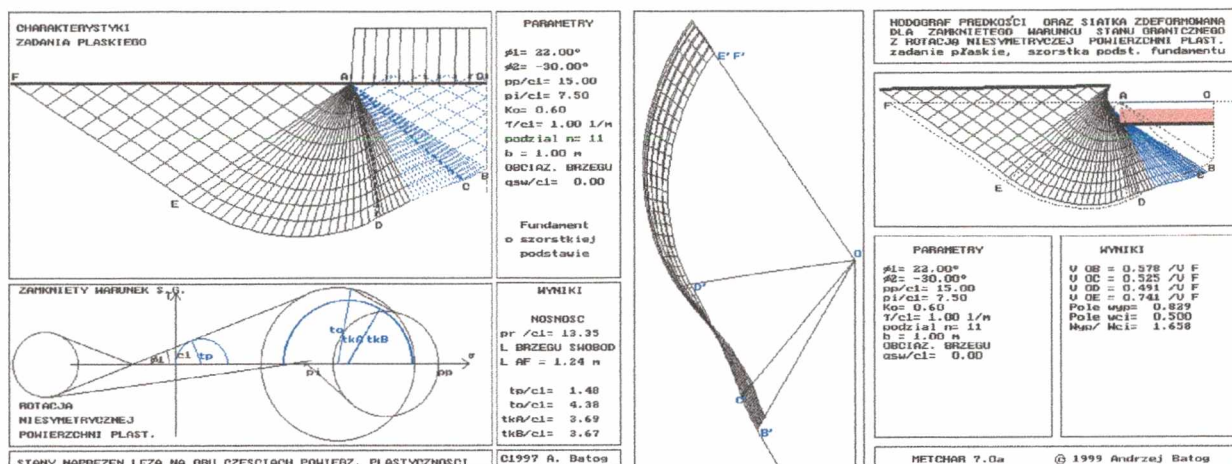


b) Rozwiązanie dla  $\gamma/c_1 = 1 \text{ [m}^{-1}\text{]}$

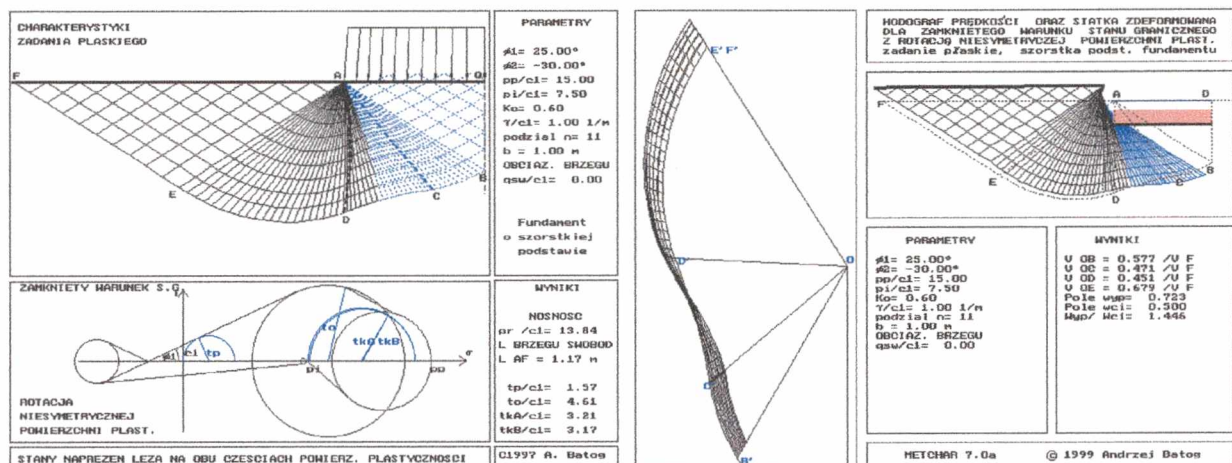


c) Rozwiązanie dla  $\gamma/c_1 = 2 \text{ [m}^{-1}\text{]}$

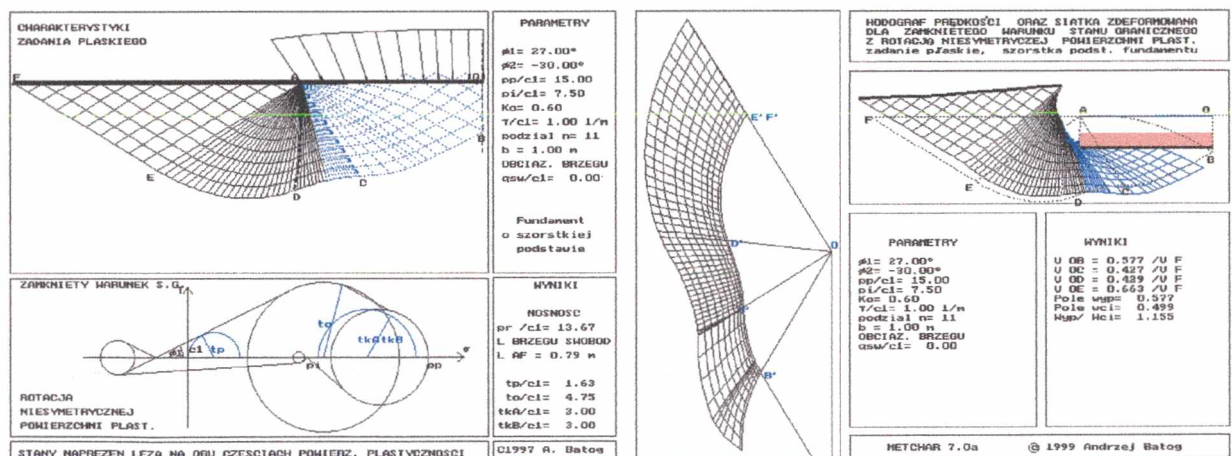
Rys. 71 Siatki charakterystyk oraz hodograf prędkości dla rozwiązań z rotacją warunku,  $K_0 = 0.8$ . Rozwiązania dla różnych wartości ciężaru objętościowego ośrodka.  
Zadanie płaskie, zmienna dylatacja ośrodka.



a) Rozwiązanie dla  $\varphi_1 = 22^\circ$



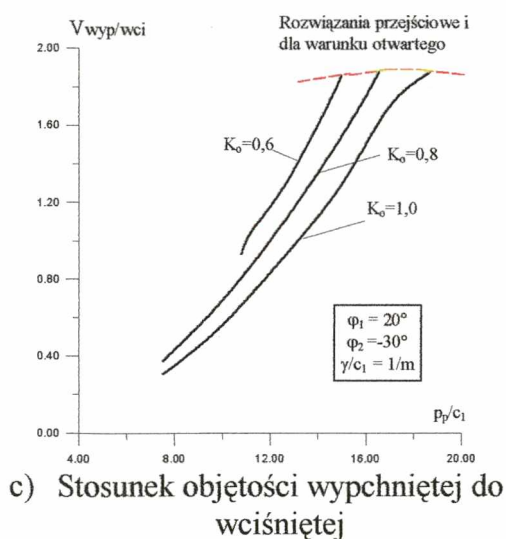
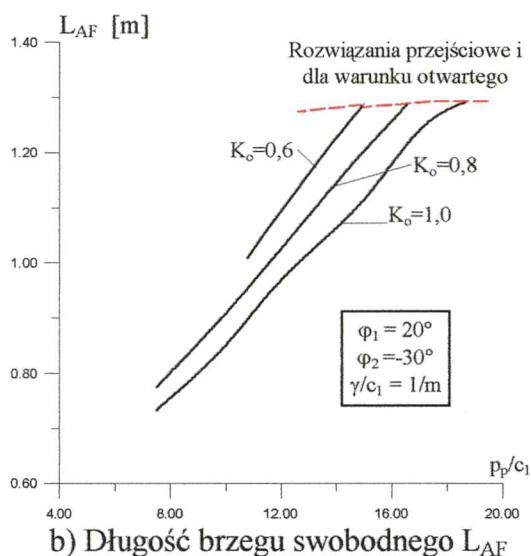
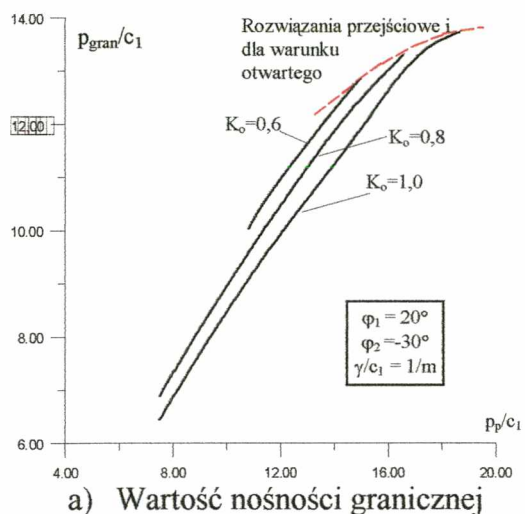
b) Rozwiązanie dla  $\varphi_1 = 25^\circ$



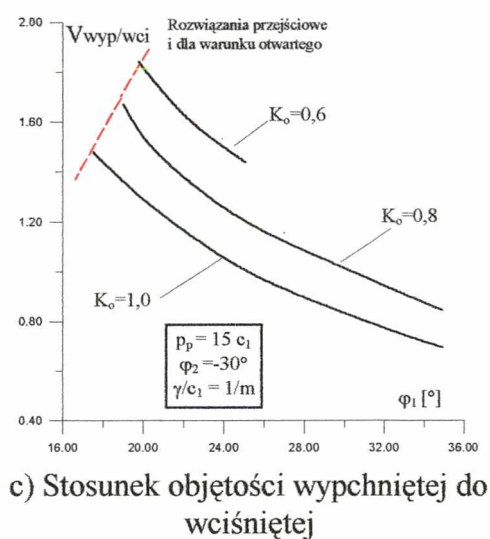
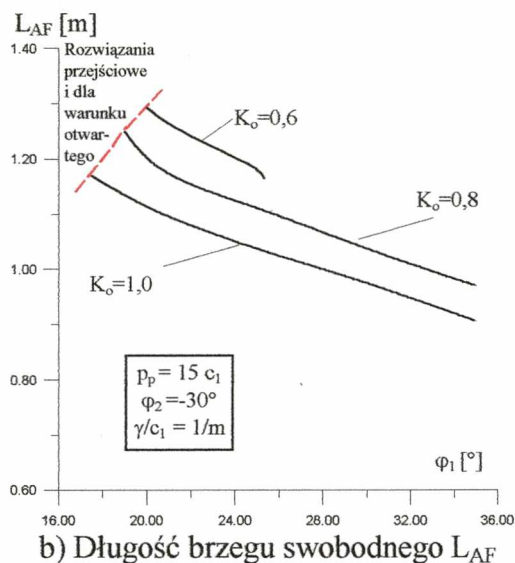
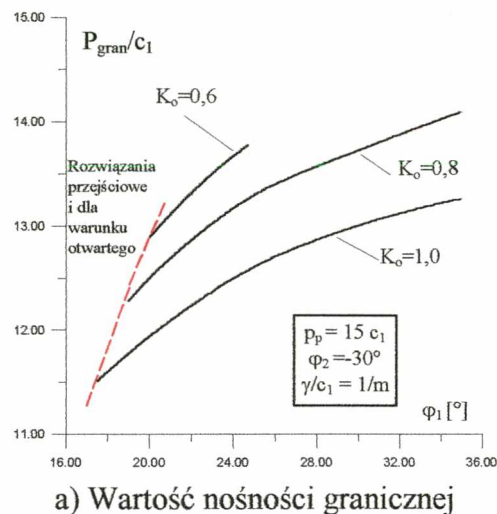
c) Rozwiązanie dla  $\varphi_1 = 27^\circ$

Rys. 72 Siatki charakterystyk oraz hodograf prędkości dla rozwiązań z rotacją warunku,  $K_0 = 0.6$ .  
Rozwiązania dla różnych wartości kąta nachylenia klasycznej części warunku  $\varphi_1$ .  
Zadanie płaskie, zmienna dylatacja ośrodka

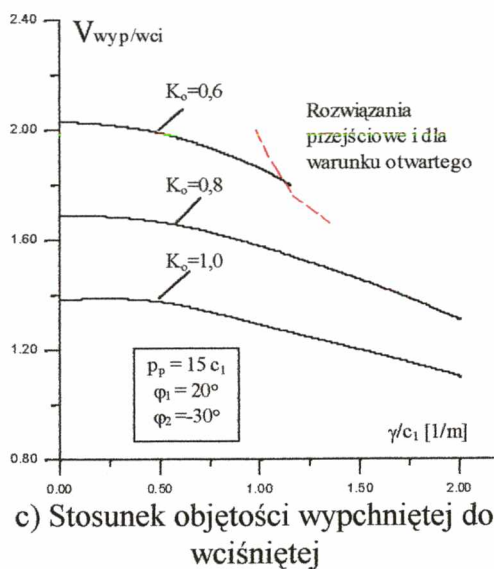
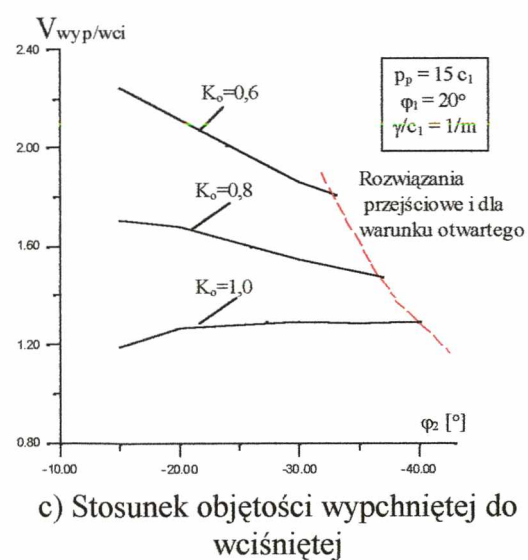
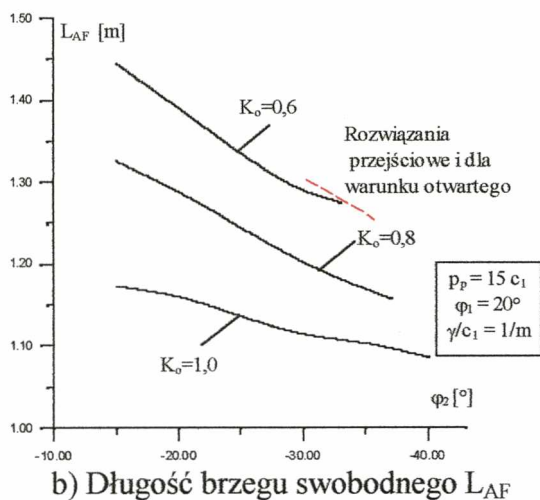
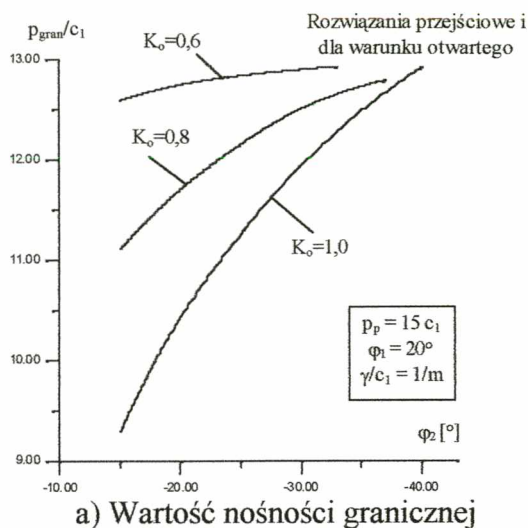




Rys. 73 Zależność wyników rozwiązań od ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$  i współczynnika  $K_o$ .  
Zadanie płaskie, zmienna dylatacja ośrodka



Rys. 74 Zależność wyników rozwiązań od kąta  $\phi_1$  i współczynnika  $K_o$ .  
Zadanie płaskie, zmienna dylatacja ośrodka



Rys. 75 Zależność wyników rozwiązań od wartości kąta  $\varphi_2$  i współczynnika  $K_o$ . Zadanie płaskie, zmienna dylatacja ośrodka.

Rys. 76 Zależność wyników rozwiązań od ciężaru objętościowego i współczynnika  $K_o$ . Zadanie płaskie, zmienna dylatacja ośrodka.

Ostatnia seria wykresów (rys. 76 a-c) ilustruje zależności wyników rozwiązania od ciężaru objętościowego  $\gamma/c_1$ , określone dla różnych wartości współczynnika  $K_0$ . Dla wyższych wartości ciężaru objętościowego obserwuje się zmniejszenie wartości zarówno nośności granicznej, zasięgu obszaru deformacji jak i stosunku objętości wypchniętej do wciśniętej  $V_{wyp}/V_{wci}$ . Najniższe wartości uzyskano dla warunku symetrycznego względem osi ciśnienia hydrostatycznego przy  $K_0 = 1$ .

Jak podano w punkcie 5.7, wartość nośności granicznej może być obliczona dwoma metodami: na podstawie wartości naprężeń na charakterystyce AB, bądź na podstawie wartości naprężeń wzdłuż linii kontaktu AO podłoże - fundament. Wszystkie podane w tym punkcie wartości nośności zostały obliczone drugą metodą, którą zastosowano w celu uzyskania siatki charakterystyk również w obszarze ABO. Umożliwia to określenie w obszarze ABO efektów zagęszczenia, bądź rozluźnienia. Różnice między nośnościami, określonymi za pomocą obu metod, są stosunkowo nieduże, wynoszą 1 – 2 % ich wartości średniej. Porównanie obliczonych wartości nośności zawarto w tabeli 4, otrzymano je dla  $\phi_1=20^\circ$ ,  $\phi_2=-30^\circ$ ,  $\gamma/c_1 = 1/m$ ,  $K_0=0,8$  oraz różnych wartości ciśnienia prekonsolidacji.

Tab. 4 Zależność wartości nośności granicznej od metody obliczeniowej

| Wartość ciśnienia prekonsolidacji | $p_p / c_1$           | 7,5  | 10   | 15    | 17    |
|-----------------------------------|-----------------------|------|------|-------|-------|
| Nośność wg charakterystyki AB     | $p_{gran}^{AB} / c_1$ | 6,90 | 8,97 | 12,50 | 14,12 |
| Nośność wg linii kontaktu AO      | $p_{gran}^{AC} / c_1$ | 7,08 | 9,13 | 12,64 | 14,26 |

### 5.8.3.3 Rozwiązania przejściowe, prowadzące do rozwiązania klasycznego

W przypadku oceny górnej i dolnej (rozdział 4) występowała duża różnica wyników obliczeń, uzyskanych na granicy pomiędzy rozwiązaniem dla zamkniętego i otwartego warunku stanu granicznego, patrz tab. 1. Stwierdzono występowanie nieciągłości, zarówno co do wartości nośności, jak i zasięgu obszaru deformacji. Dobra metoda obliczeniowa winna zapewniać ciągłe przejście między rozwiązaniami uzyskanymi w oparciu o zamknięty warunek stanu granicznego a rozwiązaniami otrzymanymi dla warunku otwartego. Uzyskanie takiego rozwiązania wymaga odpowiedniej modyfikacji budowy strefy zagęszczania ośrodka ACB a następnie strefy zmiennej dylatacji ADC (rys. 55). W wyniku rozszerzania się (odsuwania się w kierunku naprężeń bardziej ściskających) zamykającej części warunku stanu granicznego, w schematach budowy pola naprężeń, zastosowanych w procedurach numerycznych, musi być uwzględniona postępująca redukcja strefy zagęszczenia, a następnie strefy przejściowej. W tym procesie przejścia wyodrębniono kilka etapów, które zilustrowano przykładami uzyskanymi z obliczeń numerycznych:

A. Występuje strefa zagęszczenia ACB o znacznie zredukowanej wielkości, w której stan naprężenia opisuje równanie części zamykającej stanu granicznego. - rys. 77a,

- B. W wyniku zwiększenia się wartości ciśnienia prekonsolidacji strefa ACB ulega pełnej redukcji, w strefie przejściowej ADC, gdzie stan naprężenia opisany jest przejściowym kołem Mohra, występują efekty zmiennej dylatacji - rys. 77b,
- C. Dalsze zwiększenie wartości ciśnienia prekonsolidacji powoduje dalszą redukcję strefy przejściowej ADC, natomiast w obszarze AOC pod krawędzią fundamentu oraz na skrajnej charakterystyce AC pojawiają się efekty rozluźnienia - rys. 77c,
- D. W wyniku zwiększania się wartości ciśnienia prekonsolidacji strefa przejściowa ADC ulega znacznej redukcji, występują w niej efekty tylko rozluźnienia, na skrajnej charakterystyce AC oraz w obszarze AOD prócz stanów danych przejściowym kołem Mohra występują także stany naprężenia opisane równaniem klasycznej części warunku - rys. 77d,
- E. Wartość ciśnienia prekonsolidacji osiąga pewną wartość graniczną, przy której stan naprężenia dany przejściowym kołem Mohra występuje już tylko w strefie AOD w pobliżu punktu D, w pozostałej części pola naprężenia jego stan opisany jest równaniem klasycznej części warunku – rys. 77e,
- F. Dalsze odsuwanie powierzchni ograniczającej w wyniku zwiększania wartości ciśnienia prekonsolidacji pozostaje bez wpływu na stan naprężenia w obszarze deformacji, rozwiązanie jest tożsame z rozwiązaniem dla warunku otwartego rys. 77f.

Zależność wyników zadania przejściowego od wartości ciśnienia prekonsolidacji podano na wykresach rys. 78 – 80. Wyniki obliczono przyjmując ośrodek wałki przy  $\gamma/c_1=1/m$  i  $\gamma/c_1=2/m$ , warunek stanu granicznego z rotacją powierzchni plastyczności przy  $\varphi_1=20^\circ$ ,  $\varphi_2=-30^\circ$  i dla różnych wartości  $K_0$ .

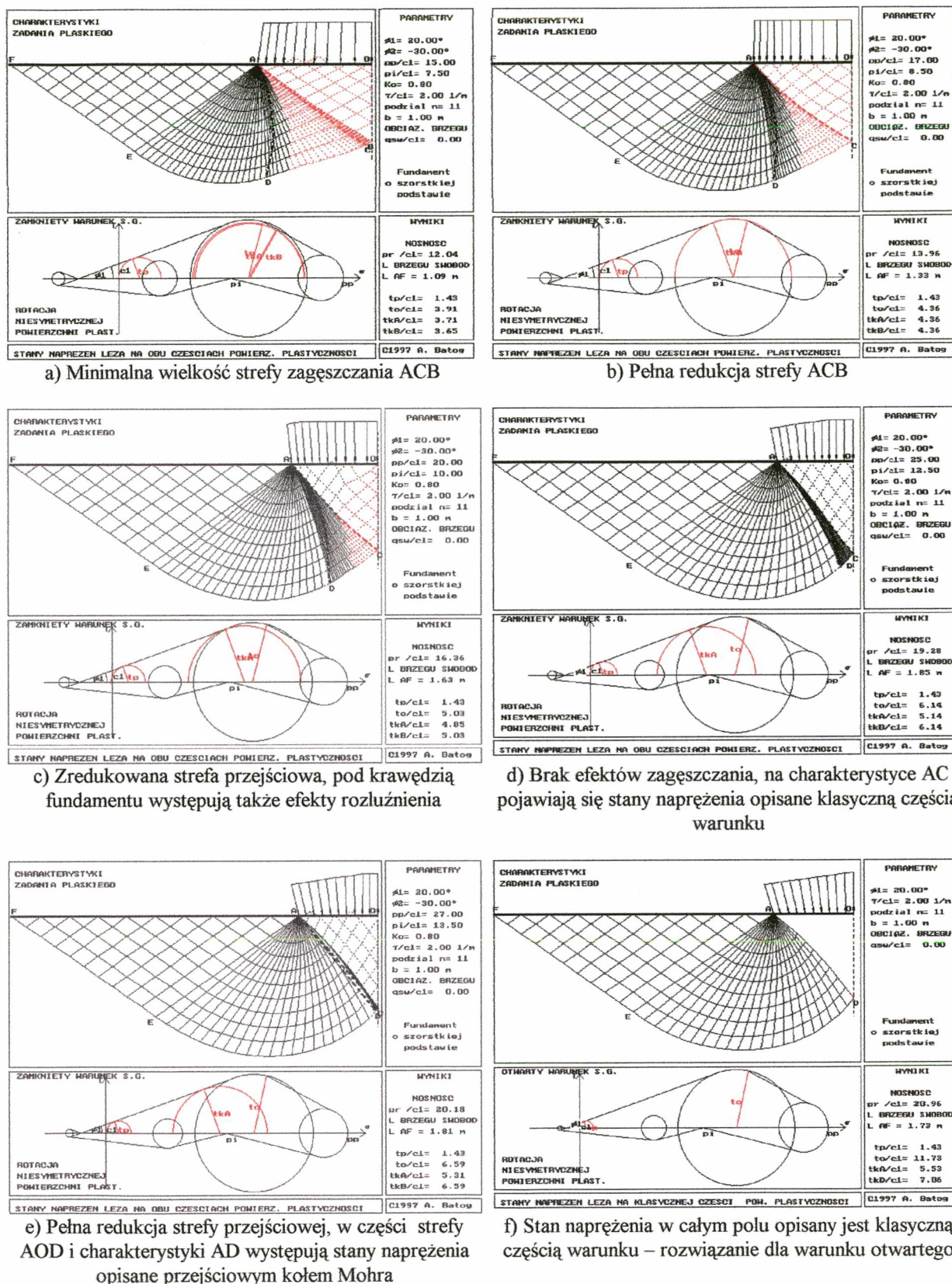
Na wykresach zamieszczonych na rys. 78 podano zależność nośności granicznej od ciśnienia prekonsolidacji. Najwyższą wartość nośności granicznej uzyskano dla przypadku, w którym stan naprężenia w całym obszarze deformacji opisany jest klasyczną częścią warunku, co zachodzi dla stosunkowo wysokiej wartości ciśnienia prekonsolidacji. Taki wymóg mogą spełniać grunty mocno prekonsolidowane, przykładowo w pracy Izbickiego i Stachonia [36] dla iłu plicieńskiego podano wartość ciśnienia prekonsolidacji wynoszącą 980 kPa, przy współczynniku prekonsolidacji  $OCR \approx 5$ . Porównując oba wykresy 78a i 78b można zauważyć, iż wyższe wartości nośności granicznej uzyskano dla większego ciężaru objętościowego ośrodka i niższych wartości współczynnika  $K_0$ .

Kolejny, interesujący fakt ujawnia się na wykresach rys. 79a i 79b, które przedstawiają zależność długości brzegu swobodnego od ciśnienia prekonsolidacji. Podane zależności mają charakterystyczny, „garbaty” kształt. Największy zasięg obszaru deformacji uzyskano tu nie dla rozwiązania klasycznego, ale dla schematu pola naprężenia, w którym w strefie ABO stan naprężenia jest opisany prostą graniczną  $f_1$  oraz przejściowym kołem Mohra (jak na rys. 77d). Efekt ten nasila się dla wyższych wartości ciężaru objętościowego ośrodka. Natomiast generalnie ze wzrostem wartości  $\gamma/c_1$  maleje długość brzegu swobodnego.

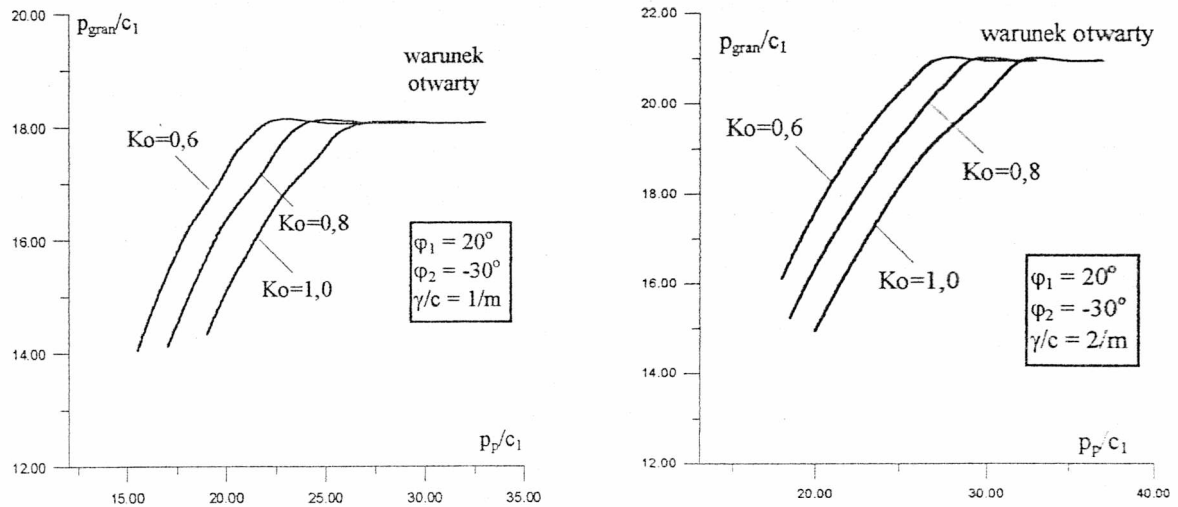
Podobny, ale znacznie słabszy efekt występuje na wykresach (rys. 80), które przedstawiają zależność stosunku objętości ośrodka wypartego do wciśniętego  $V_{wyp}/V_{wci}$  od ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$ . Porównując wykresy rys. 80a i 80b można stwierdzić, iż wyższym wartościom ciężaru objętościowego towarzyszą nieco mniejsze efekty rozluźniania ośrodka.

Ograniczono się tu tylko do zaprezentowania i omówienia rozwiązań naprężeniowych. Nie pokazano rozwiązań kinematyki, gdyż niewiele one tu wnoszą. Rozkłady prędkości odkształceń dla rozwiązań z rys. 77 w niewielkim stopniu różnią się między sobą. Generalnie są zbliżone do hodografów przedstawionych na rys. 72c oraz rys. 48.

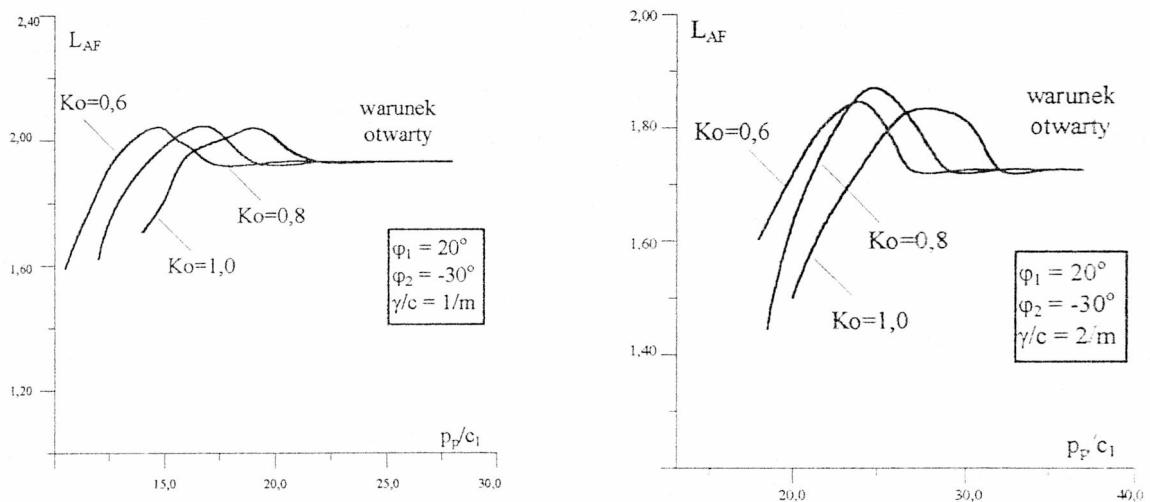




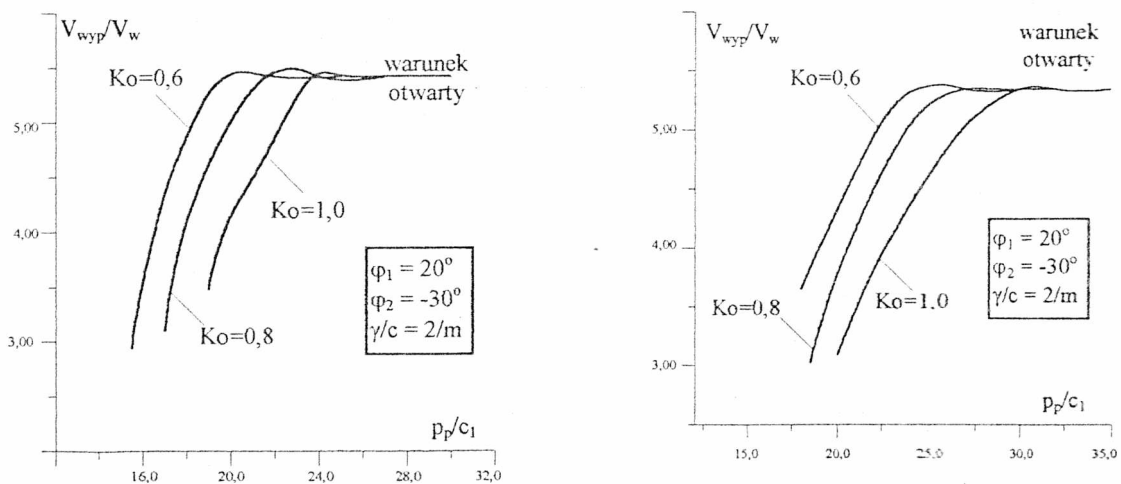
Rys. 77 Fazy przejścia od rozwiązania dla zamkniętego warunku do zadania dla otwartego warunku stanu granicznego – budowa pola naprężenia



Rys. 78 Rozwiązania przejściowe. Zależność nośności granicznej od ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$  i współczynnika  $K_o$  dla a)  $\gamma/c_1=1/m$  i b) dla  $\gamma/c_1=2/m$



Rys. 79 Rozwiązania przejściowe. Zależność długości brzegu swobodnego od ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$  i współczynnika  $K_o$  dla a)  $\gamma/c_1=1/m$  i b) dla  $\gamma/c_1=2/m$



Rys. 80 Rozwiązania przejściowe. Zależność stosunku objętości wypchniętej do wciśniętej  $V_{wyp}/V_{wci}$  od ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$  i współczynnika  $K_o$  dla a)  $\gamma/c_1=1/m$  i b) dla  $\gamma/c_1=2/m$

#### 5.8.4. Rozwiązania dla osiowo- symetrycznego stanu odkształcenia i naprężenia

Schemat budowy pola naprężenia dla zadania osiowo- symetrycznego (rys. 56) został zbudowany w analogiczny sposób jak dla zadania płaskiego. Sposób otrzymania rozwiązania za pomocą metody charakterystyk w poszczególnych strefach pola naprężenia opisują punkty 5.5.1 – 5.5.7, z tą różnicą, iż poszukiwane wartości  $t$ ,  $\eta$  w węzłach siatki należy wyliczyć z równań różnicowych podanych dla zadania osiowo- symetrycznego (93) i (94). Również w zbliżony sposób otrzymano rozwiązania wyrażone w prędkościach.

Dla zadania osiowo- symetrycznego występować będą analogiczne typy rozwiązań, jakie zdefiniowano dla zadania płaskiego w punkcie 5.8.2 i których wyniki szeroko przedstawiono w punkcie 5.8.3.

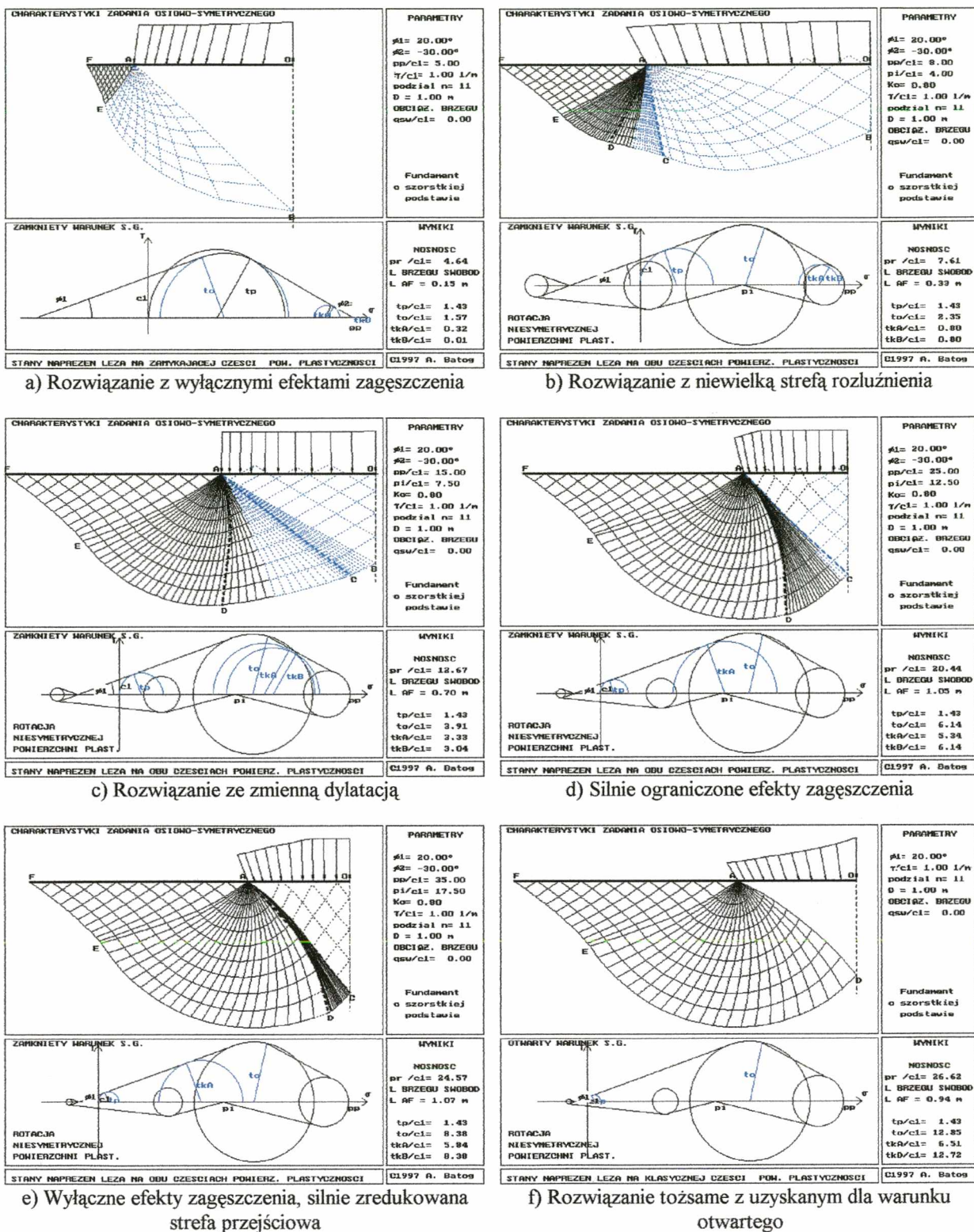
Obliczenia numeryczne dla zadania osiowo- symetrycznego wykonano dla kołowego fundamentu o jednostkowej średnicy, posadowionego na powierzchni ważkiego ośrodka dla  $\gamma/c_1=1/m$  oraz dla warunku stanu granicznego z niesymetryczną rotacją powierzchni granicznej. Aby umożliwić porównanie rozwiązań płaskich i osiowo- symetrycznych, obliczenia wykonano dla wartości parametrów warunku, które były stosowane również w rozwiązaniu płaskim:  $\varphi_1=20^\circ$ ,  $\varphi_2=-30^\circ$ ,  $K_o=1,0$ ,  $K_o=0,8$ ,  $K_o=0,6$  oraz dla  $p_p/p_i=0,5$ .

Wybrane przykłady rozwiązań, reprezentujące wszystkie typy rozwiązań, określone w naprężeniach (rys. 81) i w prędkościach (rys. 82) uszeregowano zgodnie z rosnącymi wartościami ciśnienia prekonsolidacji. Na rys. 81a i 82a znajduje się przykład otrzymany dla najniższej wartości  $p_p$ , w którym występują tylko efekty zagęszczenia. Dla nieco wyższej wartości ciśnienia prekonsolidacji – rys. 81b i 82b w polu deformacji występują również efekty rozluźnienia, ale zagęszczanie dominuje. Dla kolejnych dwóch rozwiązań 81c-d oraz 82c-d efekty zagęszczania ulegają ograniczeniu a rozkłady prędkości, szczególnie brzegu swobodnego, znacznie się różnicują. Na rys. 81e i 82e znajduje się przykład rozwiązania przejściowego, w którym w całym obszarze deformacji występują tylko efekty rozluźnienia, w silnie zredukowanej strefie ADC stan naprężenia opisany jest przejściowym kołem Mohra. Hodograf prędkości w tym przykładzie jest bardzo zbliżony do hodografu z zadania otwartego. Ostatni przykład dany na rys. 81f i 82f, otrzymany dla stosunkowo najwyższej wartości ciśnienia prekonsolidacji, dotyczy zadania analogicznego z otrzymanym dla otwartego warunku stanu granicznego, w którym stany naprężenia opisuje tylko klasyczna część warunku.

Największa jakościowa różnica, w porównaniu z rozwiązaniami płaskimi, zachodzi w budowie strefy AFE, w której w rozwiązaniu osiowo- symetrycznym występuje krzywoliniowa siatka charakterystyk naprężeniowych, natomiast w rozwiązaniu płaskim charakterystyki są prostoliniowe.

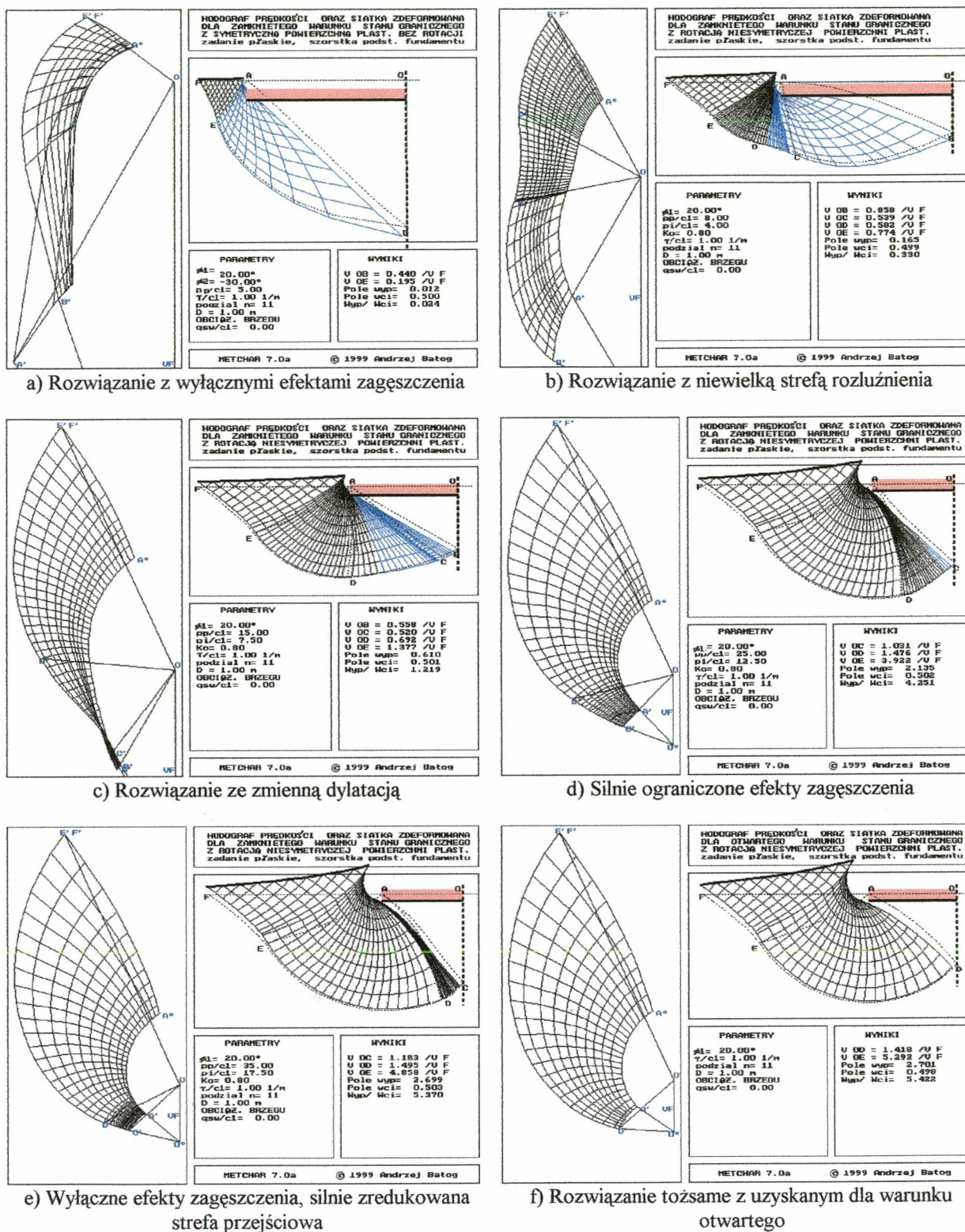
Liczbowe wartości wyników obliczeń:  $p_{gran}$ ,  $L_{AF}$  oraz  $V_{WYP}/V_{WCI}$  zestawiono na wykresach zamieszczonych na rys. 83- 85. Liniami przerywanymi oznaczono zakresy występowania poszczególnych typów rozwiązań. Wykresy te, w porównaniu z wykresami uzyskanymi w płaskim stanie odkształcenia (np. rys. 73-76, 78-80), jakościowo różnią się w niewielkim stopniu. Również stosunkowo wyższe wartości nośności granicznej otrzymano dla niższych wartości współczynnika  $K_o$  (rys. 83), przy czym najwyższa wartość nośności granicznej związana jest z rozwiązaniem dla warunku otwartego. Podobnie jak w płaskim stanie odkształcenia, zależność długości brzegu swobodnego  $L_{AF}$  od ciśnienia prekonsolidacji (rys. 84) na wykresie przyjmuje charakterystyczny „garbaty” kształt, obszar deformacji osiąga swój maksymalny zasięg dla rozwiązania przejściowego. Również podobny charakter ma wykres zależności stosunku  $V_{WYP}/V_{WCI}$  od ciśnienia prekonsolidacji – rys. 85, gdzie stosunkowo



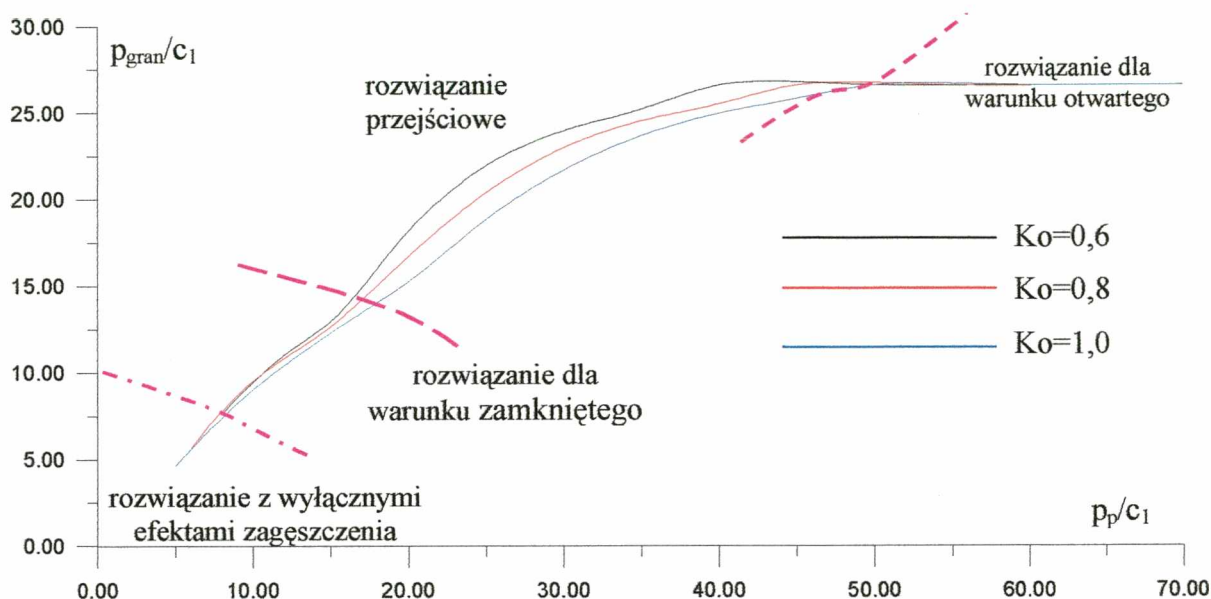


Rys. 81 Przegląd typów rozwiązań dla osiowo- symetryczny stan odkształcenia.  
Budowa pola deformacji dla ośrodka wazkiego,  $\gamma/c_1 = 1 \text{ / m}$ ,  $\varphi_1 = 20^\circ$ ,  $\varphi_2 = -30^\circ$ ,  $K_0 = 0,8$

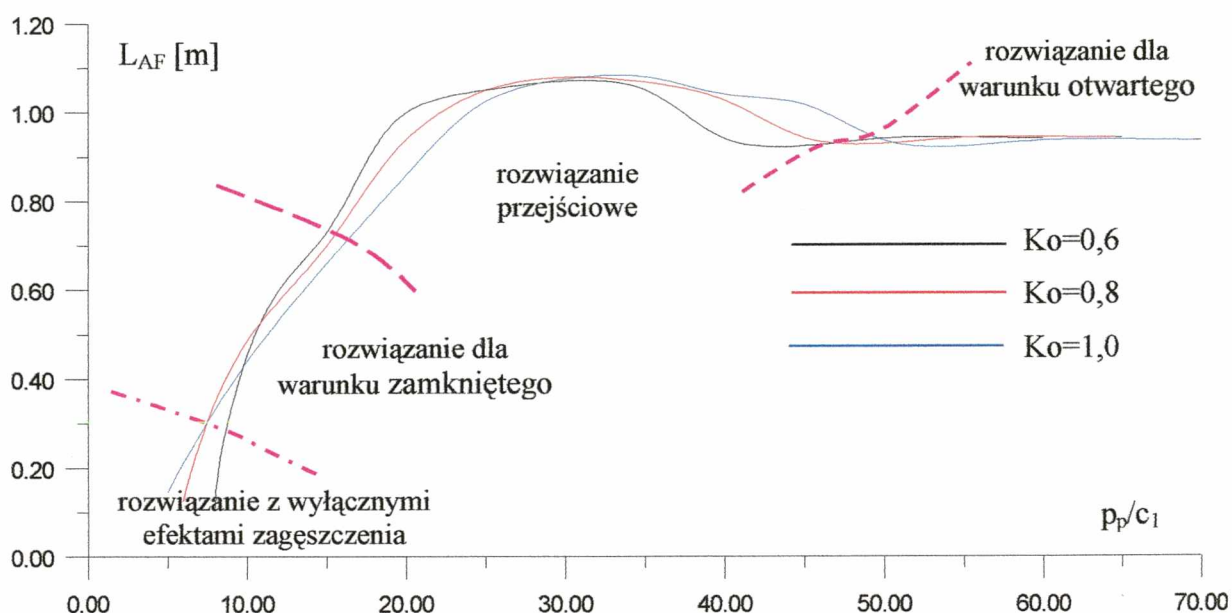




Rys. 82 Przegląd typów rozwiązań dla osiowo- symetryczny stan odkształcenia.  
Hodografy prędkości i siatki deformacji dla ośrodka wazkiego,  
 $\gamma/c_1 = 1 / \text{m}$ ,  $\phi_1 = 20^\circ$ ,  $\phi_2 = -30^\circ$ ,  $K_0 = 0,8$



Rys. 83 Zależność nośności granicznej od ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$  i współczynnika  $K_0$ .  
Zadanie osiowo- symetryczne dla ośrodka ważkiego  $\gamma/c_1 = 1/m$



Rys. 84 Zależność długości brzegu swobodnego od ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$  i współczynnika  $K_0$ .  
Zadanie osiowo- symetryczne dla ośrodka ważkiego  $\gamma/c_1 = 1/m$

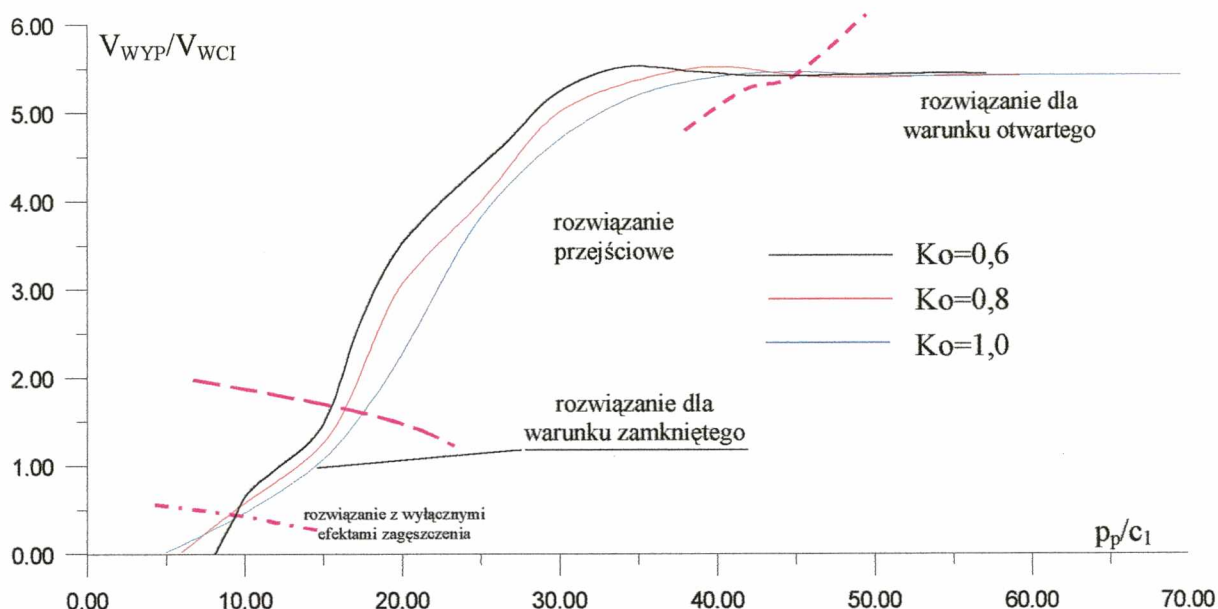
najwyższe wartości  $V_{WYP}/V_{WCI}$  otrzymano dla najniższych wartości współczynnika  $K_0$ , podobnie jak dla zadania płaskiego.

Przykłady otrzymane w osiowo- symetrycznym stanie odkształcenia, w porównaniu z wynikami zadania płaskiego, obliczonymi dla tych samych wartości parametrów, charakteryzują



się znacznie wyższymi wartościami nośności granicznej i znacznie mniejszymi zasięgami obszaru deformacji przy stosunkowo niewielkich wartościach stosunku  $V_{WYP}/V_{WCI}$ . Występują także inne różnice, zakres występowania rozwiązania przejściowego (ze zredukowanymi strefami ACB i ADC) jest znacznie większy w przypadku zadania osiowo-symetrycznego.

Należy tu zauważyć, iż zastosowana metoda obliczeniowa dała możliwość uzyskania pełnej ciągłości wyników dla różniących się znacznie typów budowy pola naprężenia, poczynsz od otrzymanego dla stosunkowo niewielkich wartości ciśnienia prekonsolidacji (z wyłącznymi efektami zagęszczenia, jakimi charakteryzują się grunty mocno ściśliwe) poprzez rozwiązania ze zmienną dylatacją, aż po rozwiązanie analogiczne z klasycznym, otrzymanych dla stosunkowo wysokich ciśnień prekonsolidacji, w którym występują wyłączne efekty rozluźnienia.



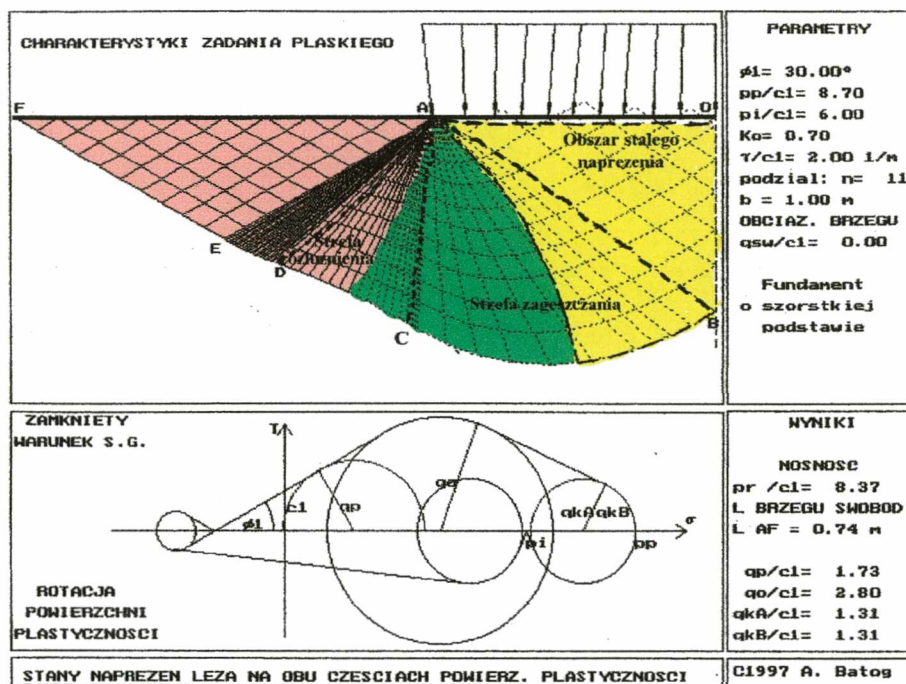
Rys. 85 Zależność stosunku  $j V_{WYP}/V_{WCI}$  od ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$  i współczynnika  $K_0$ .  
Zadanie osiowo- symetryczne dla ośrodka ważkiego  $\gamma/c_1=1/m$

## 5.8.5 Rozwiązania szczególne

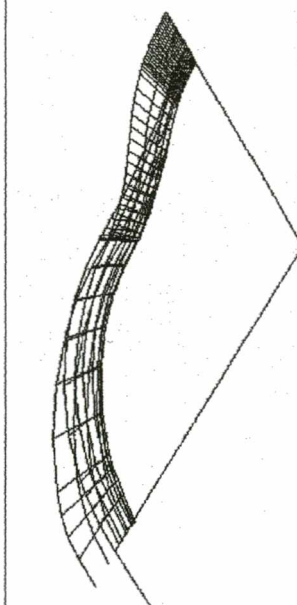
### 5.8.5.1 Rozwiązanie ze strefą stałego naprężenia pod fundamentem

W przypadku ośrodka rzeczywistego proces obciążania wywołuje jego dogęszczenie, w wyniku czego zamknięcie warunku ulega pewnemu odsunięciu w kierunku naprężeń bardziej ściskających, jednakże dla zagadnienia nośności granicznej podłoża jej wartość zależeć będzie przede wszystkim od początkowego położenia powierzchni plastyczności. Stosując model ciała sztywno- idealnie plastycznego i warunek z niesymetryczną rotacją powierzchni plastyczności dla stosunkowo niewielkich wartości ciśnienia prekonsolidacji  $p_p$ , stan naprężenia w części strefy pod fundamentem i strefy zagęszczenia może osiągnąć wartość opisaną narożem C warunku (rys. 23), które jest dane kołem Mohra ( $s_c$ ,  $t_c$ ) - rys. 24. Należy tu dodać, iż kierunki naprężeń głównych w tym obszarze nie są stałe, a jego granica jest krzywą nie będącą charakterystyką. Zjawisko to zilustrowano na rys. 86 i 87 dwoma przykładami, określonymi w

płaskim stanie odkształcenia. Obszar stałego naprężenia został zaznaczony na siatce charakterystyk naprężeniowych żółtym kolorem, dalsza część strefy występowania

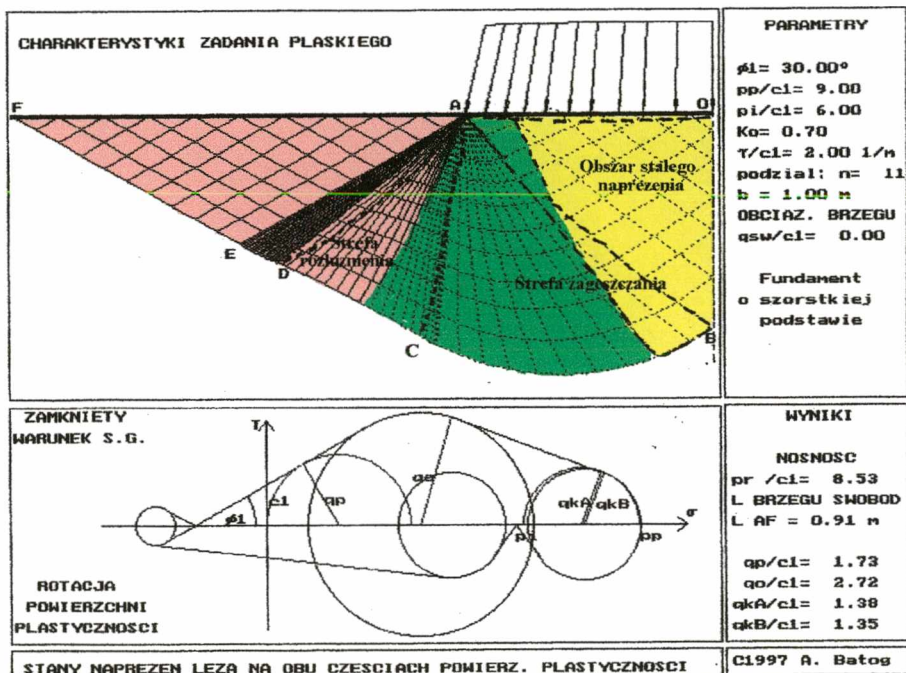


a) siatka charakterystyk naprężeniowych

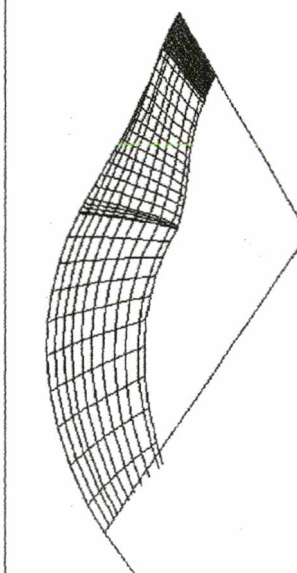


b) hodograf prędkości

Rys. 86 Rozwiązanie ze strefą stałego naprężenia pod fundamentem dla warunku z rotacją. Zadanie płaskie, dla ośrodka wazkiego  $\gamma/c_1=2/\text{m}$ ,  $K_0=0,7$ ,  $\phi_1=30^\circ$ ,  $\phi_2=-20^\circ$ ,  $p_p=8.7c_1$ ,  $p_i=6c_1$



a) siatka charakterystyk naprężeniowych



b) hodograf prędkości

Rys. 87 Rozwiązanie ze strefą stałego naprężenia pod fundamentem dla warunku z rotacją. Zadanie płaskie, dla ośrodka wazkiego  $\gamma/c_1=2/\text{m}$ ,  $K_0=0,7$ ,  $\phi_1=30^\circ$ ,  $\phi_2=-20^\circ$ ,  $p_p=9c_1$ ,  $p_i=6c_1$



efektów zagęszczania, opisanych prostą graniczną  $f_2$ , oznaczono kolorem zielonym a strefę rozluźnienia kolorem różowym. Ponadto pokazano hodograf prędkości.

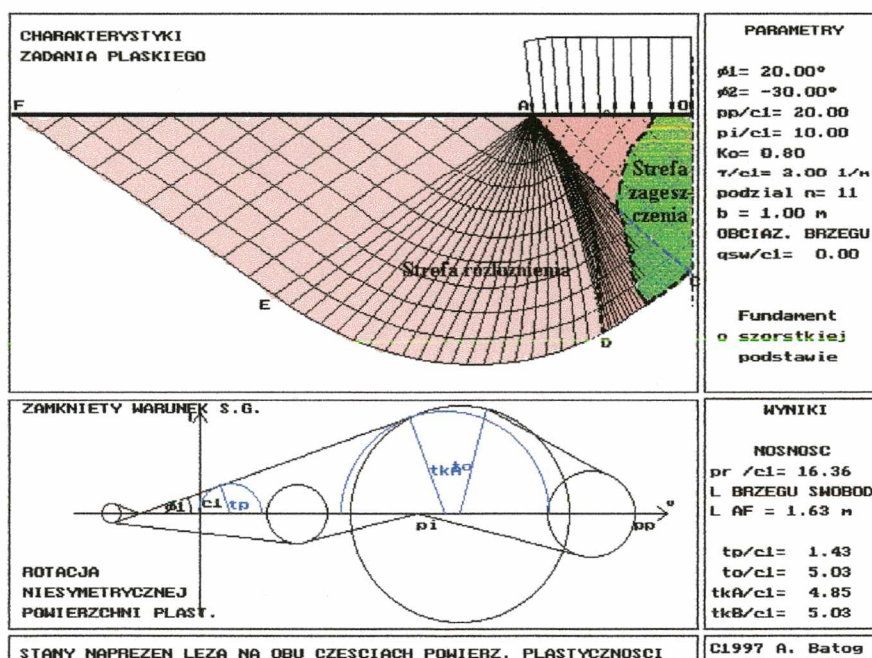
Należy zauważyć, iż oba te przykłady uzyskano dla nieznacznie różniących się wartości ciśnienia prekonsolidacji ( $p_p = 8,7c_1$  oraz  $p_p = 8,7c_1$ ) i jednakowych pozostałych parametrach. Niewielkie odsunięcie zamknięcia (wzrost wartości  $p_p$ ) powoduje w tym przypadku znaczne zmniejszenie zasięgu obszaru ze stałym naprężeniem por. rys. 86a i 87a. znajduje to także odbicie w znacznej zmianie rozkładów prędkości – por. kształty hodografów prędkości, rys. 86b i 87b.

### 5.8.5.2 Rozwiązanie z ograniczoną strefą zagęszczenia pod fundamentem

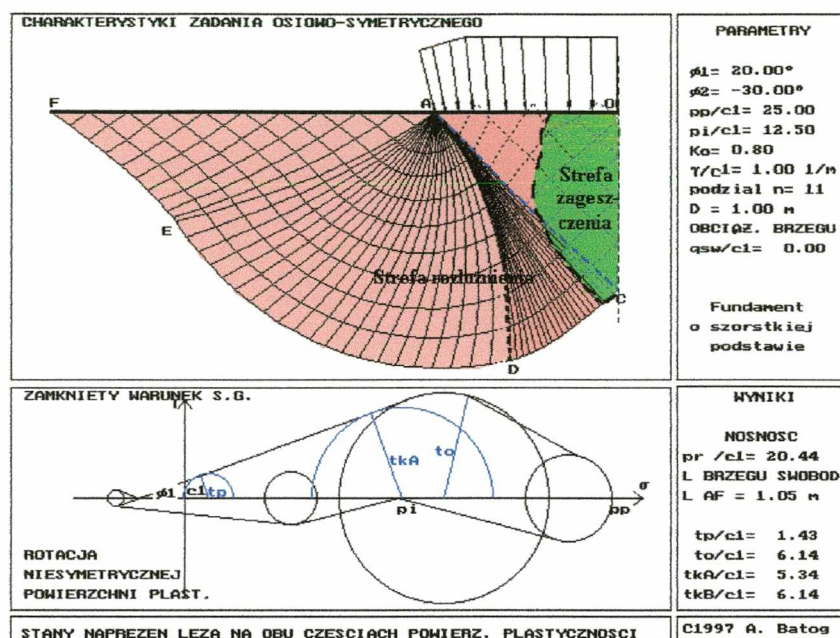
Dla stosunkowo dużych wartości ciśnienia prekonsolidacji można zaobserwować interesujący efekt, polegający na występowaniu bezpośrednio pod fundamentem niewielkiej, ograniczonej w swoim zasięgu strefy, w której zachodzi zagęszczanie ośrodka. Poza nią w całym obszarze deformacji występują wyłącznie efekty rozluźnienia.

Zjawisko to zilustrowano dwoma przykładami, uzyskanymi zarówno dla płaskiego, jak i osiowo- symetrycznego stanu naprężenia - rys. 88 i 89.

Należy zauważyć, iż tego typu efekty są uzyskiwane raczej w bardziej zaawansowanych metodach obliczeniowych, bazujących na opcji sprężysto- plastycznej ze wzmocnieniem/ osłabieniem, rozwiązywanych metodą elementów skończonych.



Rys. 88 Rozwiązanie z ograniczoną strefą zagęszczenia pod fundamentem dla warunku z rotacją. Zadanie płaskie, dla ośrodka wazkiego  $\gamma/c_1=2/m$ ,  $K_0=0,8$ ,  $\phi_1=20^\circ$ ,  $\phi_2=-30^\circ$ ,  $p_p=20c_1$



Rys. 89 Rozwiązanie z ograniczoną strefą zagęszczenia pod fundamentem dla warunku z rotacją. Zadanie osiowo- symetryczne, dla ośrodka ważkiego  
 $\gamma/c_1=1/m$ ,  $K_0=0,8$ ,  $\phi_1=20^\circ$ ,  $\phi_2=-30^\circ$ ,  $p_p=25c_1$

### 5.8.5.3 Rozwiązanie dla warunku symetrycznego względem prostej $K_0$

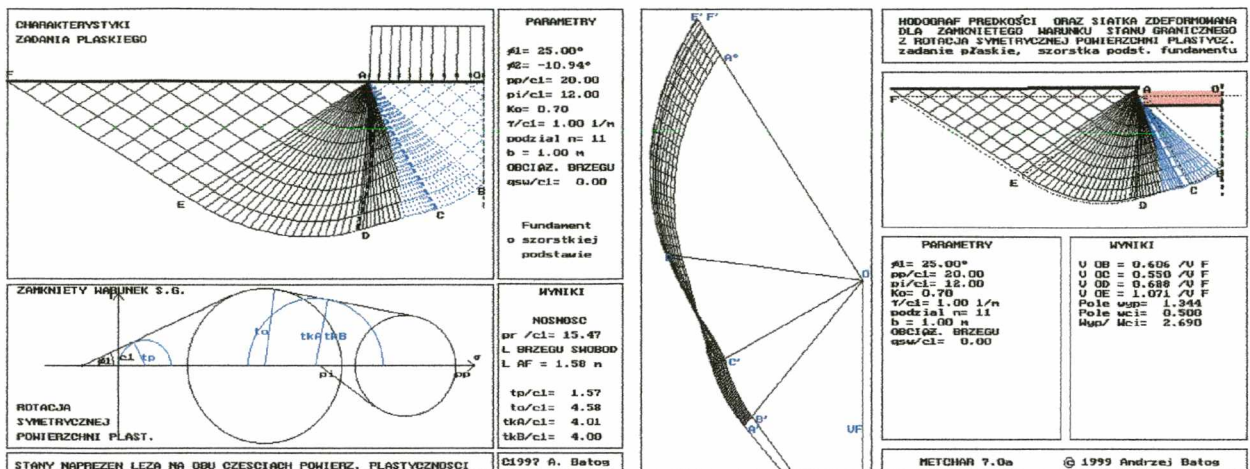
Wszystkie dotychczas zaprezentowane w niniejszym rozdziale przykłady obliczeniowe zostały otrzymane dla niesymetrycznej względem osi ciśnienia hydrostatycznego postaci warunku stanu granicznego – punkt 3.1, bądź dla wariantu warunku symetrycznego względem osi ciśnienia hydrostatycznego – punkt 3.2.1. W punkcie 3.2.2 podano także inny, interesujący wariant warunku, w którym występowała symetria względem prostej  $K_0$  (rys. 30). Warunek ten, w przypadku  $K_0=1$ , upraszcza się do warunku symetrycznego względem osi ciśnienia hydrostatycznego. Na podstawie związków danych wzorami (33) symetria warunku względem prostej  $K_0$  redukuje ilość jego parametrów, do opisu warunku wymagane są:  $\phi_1$ ,  $c_1$ ,  $K_0$ ,  $p_p$  oraz  $p_i$ . Są to zatem parametry klasycznej części warunku  $f_1$  oraz parametry ciśnienia prekonsolidacji.

Sposób budowy rozwiązania za pomocą metody charakterystyk przy wykorzystaniu tego wariantu warunku, nie różni się niczym od dotychczas przedstawionych. Do obliczenia wartości naprężeń w węzłach siatki charakterystyk naprężeniowych, szczególnie przy obliczaniu wartości nośności granicznej, w strefie zagęszczania ACB należy wykorzystać równanie (34.2) warunku, natomiast konieczną do wykonania obliczeń w strefie przejściowej wartość kąta  $\phi_2$  należy obliczyć ze wzoru (33.1).

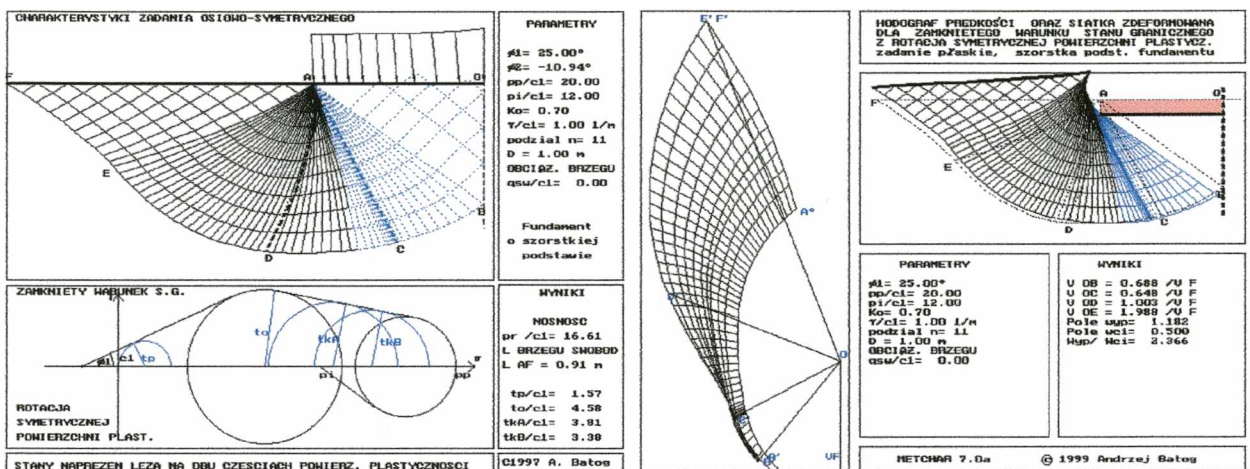
Przykłady wyników obliczeń dla zadania płaskiego jak i osiowo- symetrycznego zestawiono na rys. 90 – 94. W kształcie warunku podanego na tychże rysunkach za pomocą obwiedni kół Mohra nie należy doszukiwać się wspomnianej symetrii, gdyż występuje ona tylko na płaszczyźnie  $s - t$ .

Parę rozwiązań z rys. 90- 91 otrzymano dla ośrodka ważkiego przy  $\gamma/c_1=1/m$ . W celu umożliwienia porównania rozwiązań płaskich i osiowo- symetrycznych obliczenia wykonano dla takich samych wartości parametrów warunku:  $K_0=0,7$ ,  $\phi_1=25^\circ$ ,  $p_p=20c_1$ ,  $p_i=12c_1$ , z tą różnicą, że na rys. 90 podano rozwiązanie określone w warunkach zadania płaskiego, a na rys. 91 osiowo- symetrycznego.

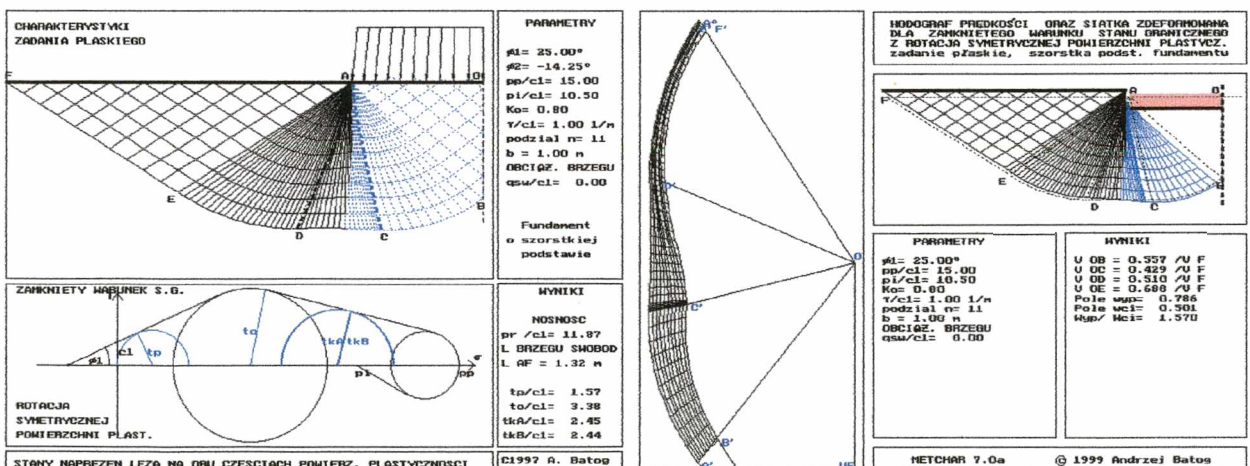




Rys. 90 Rozwiązanie dla warunku symetrycznego względem linii  $K_0$ .  
Zadanie płaskie dla ośrodka wazkiego  $\gamma/c_1=1/m$ ,  $K_0=0,7$ ,  $\phi_1=25^\circ$ ,  $p_p=20c_1$ ,  $p_i=12c_1$ .

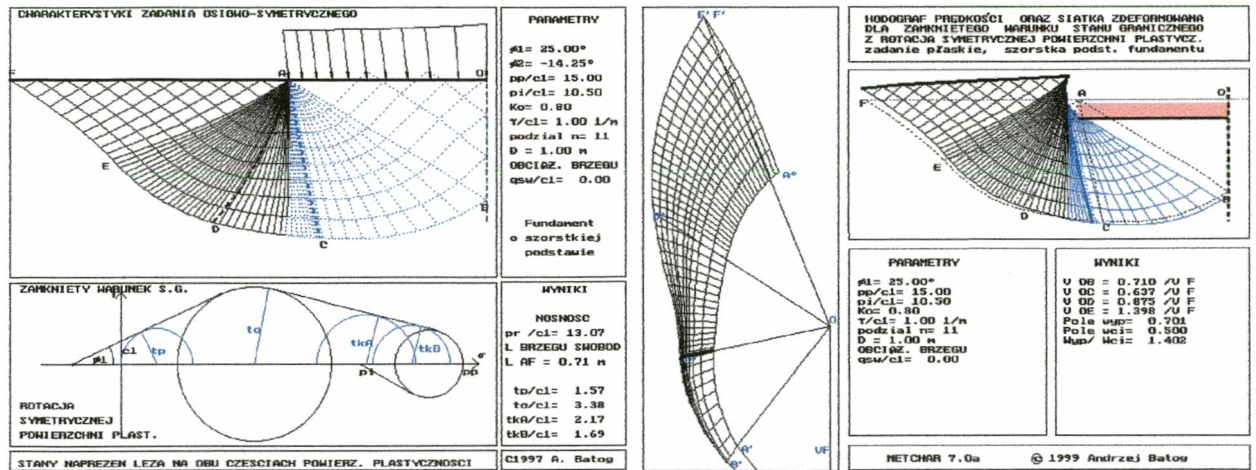


Rys. 91 Rozwiązanie dla warunku symetrycznego względem linii  $K_0$ .  
Zadanie osiowo- symetryczne dla parametrów jak w rozwiązaniu z rys.90.

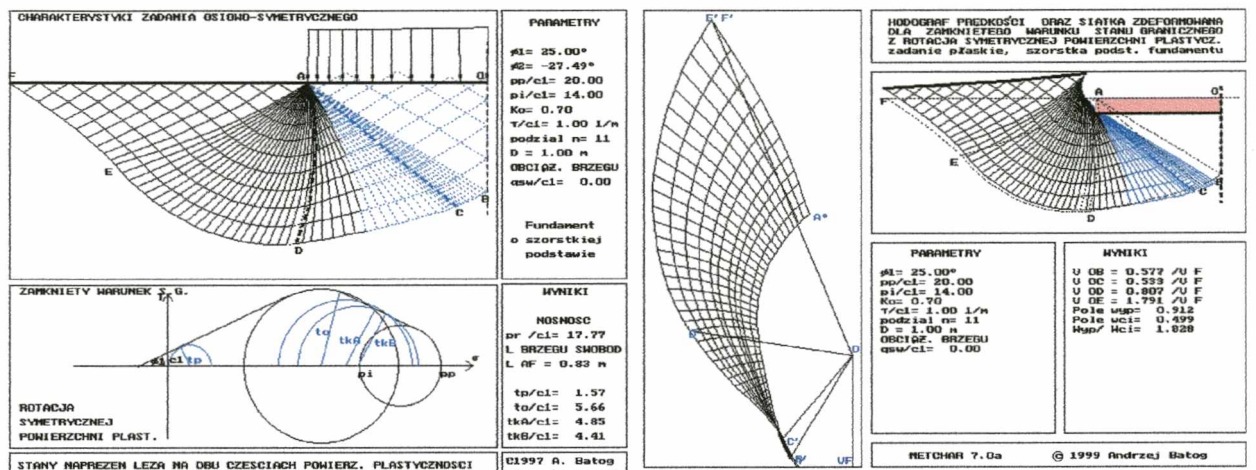


Rys. 92 Rozwiązanie dla warunku symetrycznego względem linii  $K_0$ .  
Zadanie płaskie dla ośrodka wazkiego  $\gamma/c_1=1/m$ ,  $K_0=0,8$ ,  $\phi_1=25^\circ$ ,  $p_p=15c_1$ ,  $p_i=10,5c_1$ .





Rys. 93 Rozwiązanie dla warunku symetrycznego względem linii  $K_0$ .  
Zadanie osiowo-symetryczne dla parametrów jak w rozwiązaniu z rys. 92.



Rys. 94 Rozwiązanie dla warunku symetrycznego względem linii  $K_0$ .  
Zadanie osiowo-symetryczne dla parametrów jak w rozwiązaniu z rys. 92, zmiana wartości  $K_0=0,7$ .

Drugą parę rozwiązań podano na rysunkach 92 – 93, które otrzymano również dla ośrodka wazkiego przy  $\gamma/c_1=1/m$ , ale dla innych parametrów warunku:  $K_0=0,8$ ,  $\phi_1=25^\circ$ ,  $p_p=15c_1$ ,  $p_i=10,5c_1$ .

Porównując otrzymane wyniki, należy stwierdzić, iż także dla takiej postaci warunku różnice między rozwiązaniami płaskim a osiowo-symetrycznym mają spodziewany charakter. Dla rozwiązania osiowo-symetrycznego uzyskano nieco większą wartość nośności, przy znacznie mniejszym zasięgu obszaru deformacji ale znacznie większych prędkościach deformacji w strefie rozluźnienia.

Jako ostatni przykład podano rozwiązanie osiowo-symetryczne otrzymane dla parametrów jak na rys. 93, ale dla zmniejszonej wartości parametru  $K_0$  do  $K_0=0,7$ . Jest to kolejny szczególny przypadek, zbliżony do podanego na rys. 25, w którym doszło do nałożenia się kół Mohra prostej granicznej  $f_4$  w wyniku przyjęcia wartości kąta  $\delta_4 < -\pi/4$ . W rozwiązaniu z rys. 93 występuje przypadek, w którym koła Mohra ( $s_B$ ,  $t_B$ ) oraz ( $s_A$ ,  $t_A$ ) są do siebie styczne w punkcie  $p_i$  – patrz rys. 24, kąt  $\phi_4 \approx -\pi/4$  (na rys. 93 położenie koła Mohra ( $s_B$ ,  $t_B$ ) nie jest podane). Dla niższych wartości parametru  $K_0$  jest już niemożliwe otrzymanie poprawnej postaci powierzchni plastyczności.

## 6. SPRĘŻYSTO- PLASTYCZNA ANALIZA NOŚNOŚCI

Dotychczas przedstawione rozwiązania, obejmujące zarówno oceny dolnej i górnej nośności granicznej, jak i wartości ścisłej, wyznaczonej z metody charakterystyk, uzyskane zostały dla modeli obliczeniowych przyjmujących ciało sztywno- idealnie plastyczne. Położenie zamknięcia zastosowanego w tych modelach warunku stanu granicznego związane było z początkową wartością ciśnienia prekonsolidacji czyli z początkowym kształtem powierzchni plastyczności. Natomiast w bardziej zaawansowanych modelach obliczeniowych, np. zaimplementowanych w geotechnicznych pakietach oprogramowania komputerowego wykorzystujących MES, stosowane są modele ciała sprężysto- plastycznego ze wzmocnieniem/ osłabieniem, gdzie wartość ciśnienia prekonsolidacji uzależniona jest od zmian wskaźnika porowatości oraz często z warunkami stanu granicznego o złożonym kształcie powierzchni plastyczności (por. rozdz. 2).

Aby wykazać przydatność zaprezentowanych w niniejszej pracy ocen nośności granicznej podłoża, uzyskanych dla zamkniętego warunku stanu granicznego, wykonano za pomocą programu ZSOIL obliczenia porównawcze nośności dla bardziej zaawansowanego modelu sprężysto- plastycznego.

### 6.1 Model obliczeniowy w analizie sprężysto- plastycznej

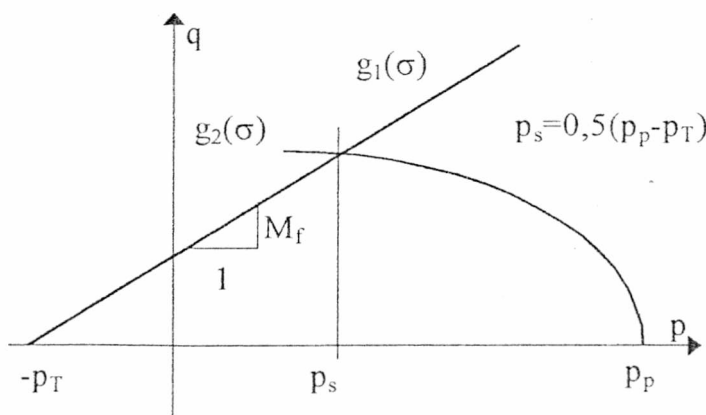
Wykorzystany do obliczeń porównawczych szwajcarski program ZSOIL v. 2.12 daje możliwość wyboru między kilkoma warunkami stanu granicznego. Jedynym warunkiem zamkniętym jest tu kombinacja warunku Druckera- Pragera z eliptycznym zamknięciem (rys. 95). Dla otwartego warunku Druckera- Pragera wg Chena [13] stan graniczny opisuje równanie:

$$g_1(\sigma) = q - 3\sqrt{3}a_p p - \sqrt{3}k = 0 \quad (128)$$

gdzie:  $p = \frac{1}{3}I_1$ ,  $q = \sqrt{3J_2}$ ,

$I_1$  - jest pierwszym niezmiennikiem tensora naprężenia,

$J_2$  - drugim niezmiennikiem dewiatora tensora naprężenia.



Rys. 95 Warunek stanu granicznego Druckera- Pragera z eliptycznym zamknięciem

Warunkowi temu odpowiada prosta  $g_1$  na rys. 95. W przestrzeni naprężeń głównych warunek (128) przedstawić można za pomocą powierzchni stożka kołowego. W wypadku płaskiego stanu odkształcenia oraz stowarzyszonego prawa płynięcia (39) parametry warunku  $a_p$ ,  $k$  można wyrazić za pomocą spójności  $c_1$  i kąta tarcia wewnętrznego  $\phi_1$  za pomocą następujących zależności:

$$a_{\varphi} = \frac{\tan \varphi_1}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi_1}}, \quad (129)$$

$$k = \frac{3c_1}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi_1}}.$$

W przypadku przyjęcia niestowarzyszonego prawa płynięcia oraz nieściśliwości materiału, zależności między parametrami można zapisać w postaci wzorów:

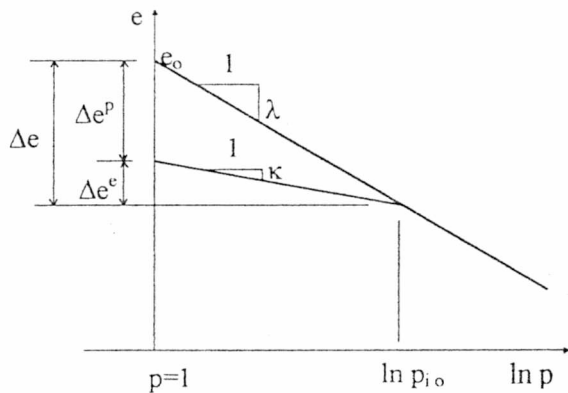
$$a_{\varphi} = \frac{1}{3} \sin \varphi_1, \quad k = c_1 \cos \varphi_1 \quad (130)$$

W modelach stanu krytycznego typu „Cap” występuje zamykająca część powierzchni ograniczającej opisaną równaniem:

$$g_2(\sigma) = q^2 - M_f^2 (p_i - p)(p + p_T), \quad (131)$$

gdzie:  $M_f = 3\sqrt{3}a_{\varphi}$ ,  $p_T = \frac{k}{3a_{\varphi}}$ ,

$p_i$  - izotropowe ciśnienie prekonsolidacji.



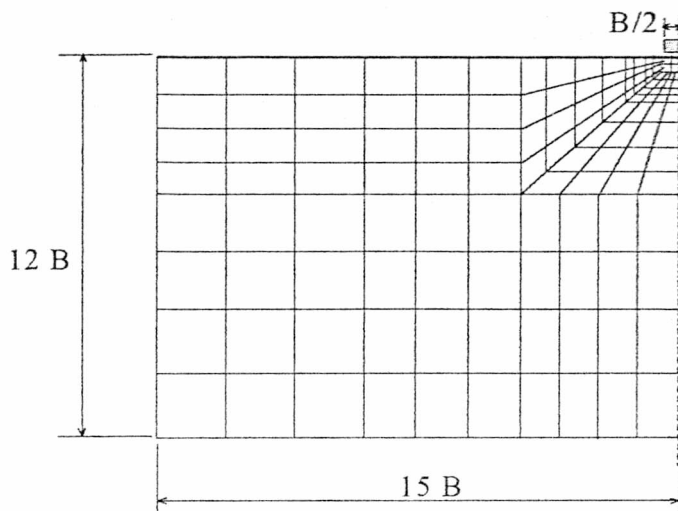
W procesach obciążania może występować zarówno osłabienie jak i wzmocnienie materiału, związane z kurczeniem lub rozszerzaniem się powierzchni ograniczającej. Ciśnienie prekonsolidacji, rządzące izotropowym osłabieniem-wzmocnieniem, zmienia się z nieodwracalną zmianą wskaźnika porowatości, zgodnie z prawem wzmocnienia:

$$p_i = p_{i0} \exp \left[ \frac{\Delta e^p}{\lambda - \kappa} \right] \quad (132)$$

Rys. 96 Prawo izotropowego wzmocnienia

gdzie  $p_{i0}$  - początkowa wartość ciśnienia prekonsolidacji,  
pozostałe parametry zgodnie z rys. 96.

W przeprowadzonych obliczeniach numerycznych rozpatrzono podobnie jak w poprzednich rozdziałach, fundament pasmowy o jednostkowej szerokości, w tym przypadku posadowiony na powierzchni nieważkiego gruntu. Założono płaski stan odkształcenia. Do obliczeń numerycznych zastosowano schemat obliczeniowy MES składający się z 144 prostokątnych elementów obliczeniowych, który przedstawiono na rys. 97.



Rys. 97 Schemat obliczeniowy dla MES

Ośrodek, dla którego stan naprężenia leży wewnątrz warunku, jest traktowany jak materiał liniowo-sprężysty, opisany następującymi parametrami:  $E = 22 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,30$ .

Gdy stan naprężenia osiągnie prostą graniczną  $g_1(\sigma)$ , daną warunkiem Druckera- Pragera, to stan naprężenia opisać, zgodnie z (129) lub (130), parametry warunku Coulomba- Mohra:  $\phi_1 = 16,5^\circ$ ,  $c_1 = 28 \text{ kPa}$ .

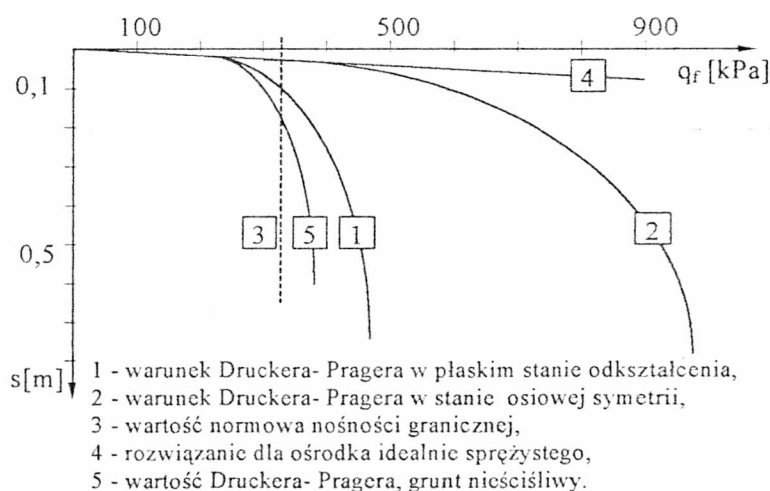
W przypadku osiągnięcia przez stan naprężenia eliptycznego zamknięcia warunku rozważono dwa warianty ośrodka gruntowego:

- grunt mniej ściśliwy:  $e_0 = 0,9$ ,  $\lambda = 0,1$ ,
- grunt bardziej ściśliwy:  $e_0 = 0,9$ ,  $\lambda = 0,2$ .

Obliczenia wykonano dla kilku różnych wartości początkowych ciśnienia prekonsolidacji:  $p_{10} = 100 \div 500 \text{ kPa}$ .

## 6.2 Wyniki obliczeń nośności

Wyniki obliczeń numerycznych utrzymane dla modelu ciała sprężysto- plastycznego i zamkniętego warunku stanu granicznego o postaci danej na rys. 95 porównano z wynikami oceny dolnej nośności granicznej uzyskanej dla modelu obliczeniowego, przyjmującego ciało



Rys. 98 Zależność osiadań pod środkiem fundamentu od obciążenia dla otwartych warunków plastyczności

sztywno- plastyczne oraz postać zamkniętego, liniowego warunku o postaci najbardziej zbliżonego warunku danego na rys. 95, tzn. wariant symetryczny względem osi ciśnienia hydrostatycznego (rys. 29), w którym  $\phi_2 = -\phi_1$  (odpowiada to zastąpieniu na rys. 95 eliptycznego zamknięcia przez prostą, nachyloną pod kątem  $\phi_2 = -\phi_1$ ).

Najwyższe wartości nośności otrzymywano dla warunku otwartego, dla najwyższej wartości ciśnienia prekonsolidacji. Dla rozważanego zadania wartość oceny dolnej nośności granicznej, obliczona dla warunku otwartego zgodnie ze wzorem (72) wynosi



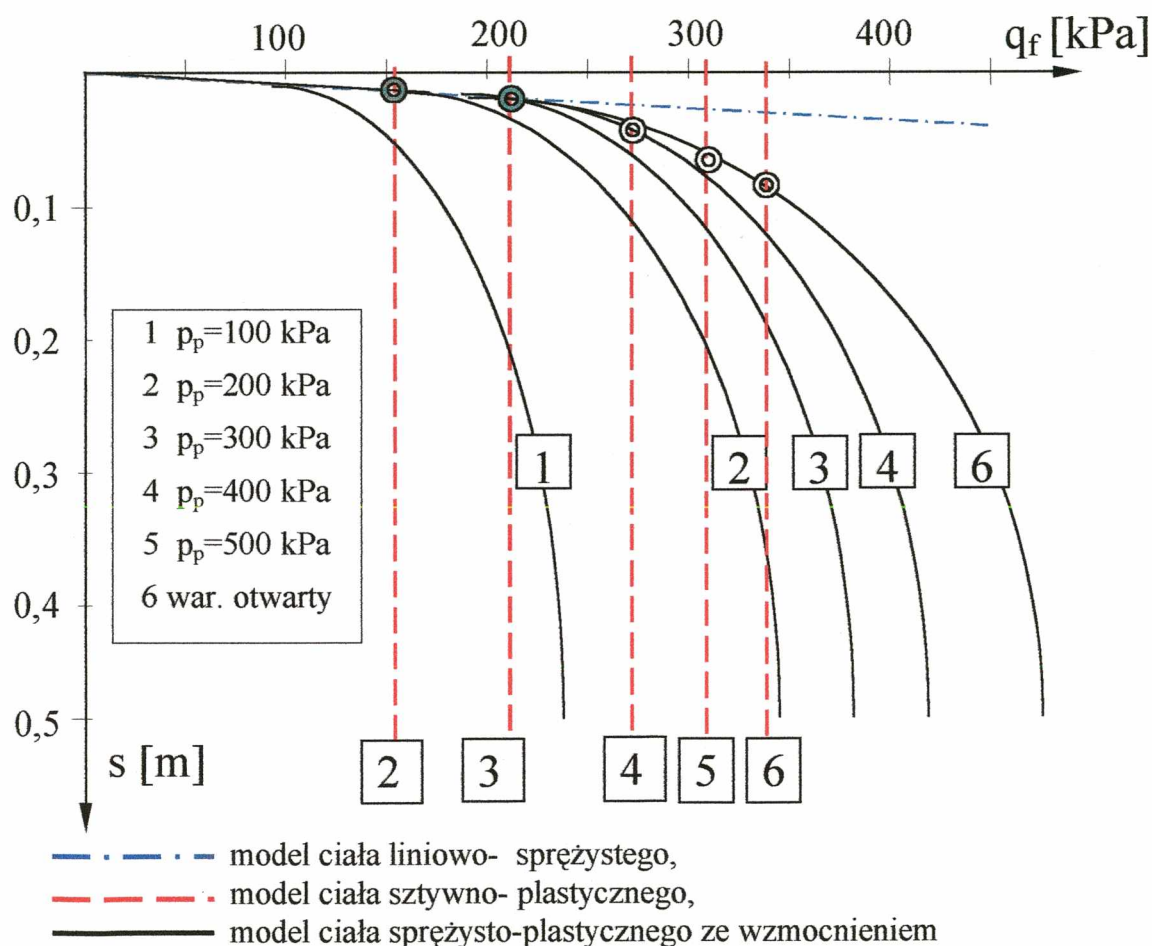
$q_f = p_{gran}^d = 335$  kPa, odpowiada to normowej wartości nośności granicznej podłoża [80]. Z kolei na rys. 98 zestawiono porównanie wyników otrzymanych za pomocą programu ZSOIL dla różnych wariantów warunku otwartego.

Tabela 5 Wartości oceny dolnej nośności granicznej dla warunku zamkniętego

| Ciśnienie prekonsolidacji $p_p$ [kPa]   | 200   | 300   | 400   | 500   |
|-----------------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Ocena dolna nośności $p_{gran}^d$ [kPa] | 153,6 | 216,8 | 269,3 | 311,0 |

Rozwiązania te, w porównaniu do sztywno- plastycznych, są bogatsze, wyniki rozwiązań podane są w postaci krzywych osiadań - zależności wielkości osiadania pod środkiem fundamentu od wartości obciążenia fundamentem.

Z kolei obliczone wartości oceny dolnej nośności granicznej (72) jednostkowego fundamentu dla warunku zamkniętego i różnych wartości ciśnienia prekonsolidacji, zestawiono w tab. 5.

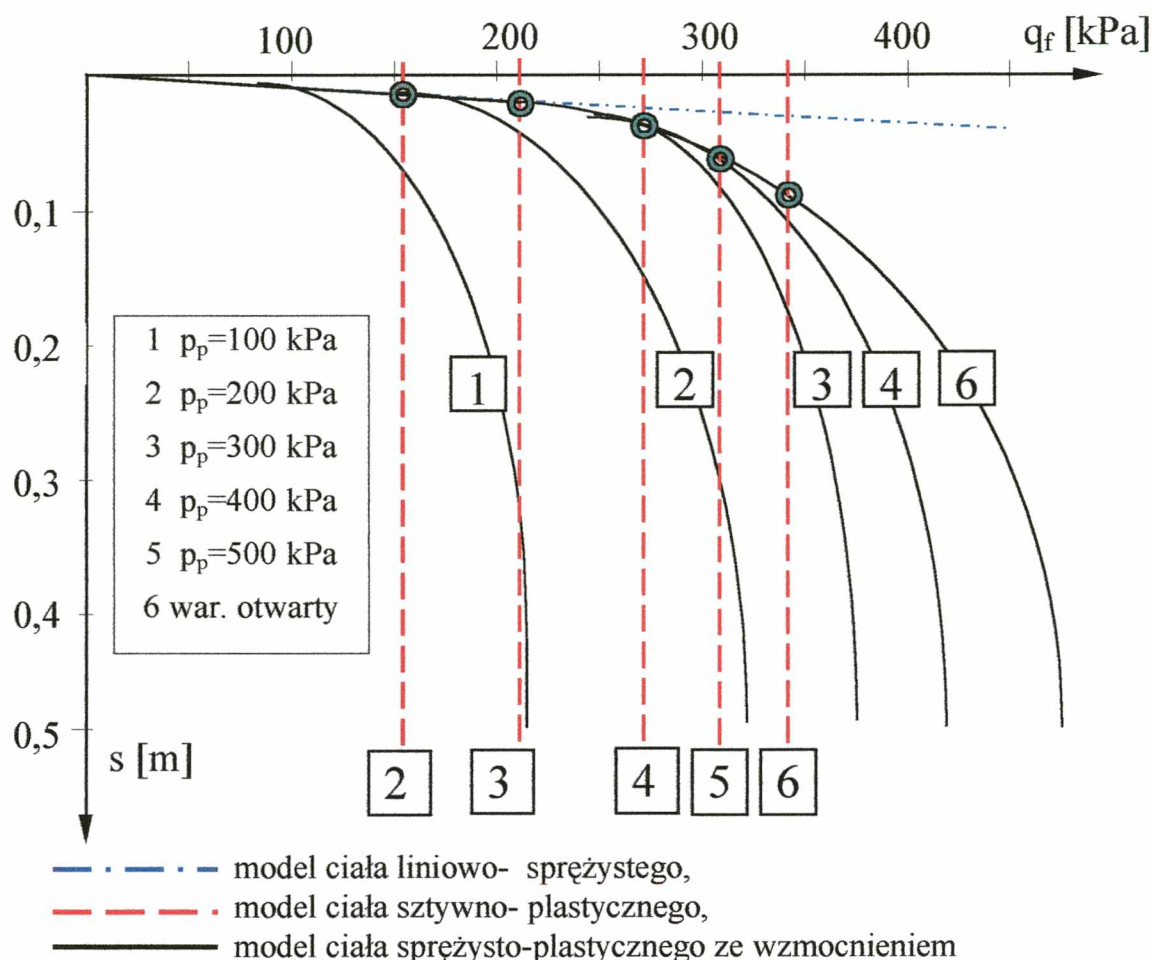


Rys. 99. Rozwiązanie dla warunku zamkniętego plastyczności dla ośrodka mniej ściśliwego, przy  $e_o = 0,9$ ,  $\lambda = 0,1$



Na dwóch kolejnych wykresach zamieszczono wyniki obliczeń wykonanych w oparciu o model sprężysto- plastyczny z warunkiem zamkniętym, w którym przyjęto początkowe wartości ciśnienia prekonsolidacji  $p_{i0}$  takie same jak wartości  $p_p$  (tab. 5) przyjęte w obliczeniach sztywno- plastycznych. Na rys. 99 zamieszczono krzywe osiadania dla ośrodka mniej ściśliwego ( $e_0 = 0,9$  oraz  $\lambda = 0,1$ ), natomiast na rys. 100 dla ośrodka bardziej ściśliwego ( $e_0 = 0,9$ ,  $\lambda = 0,2$ ).

Na wykresy krzywych ściśliwości dla porównania nałożono wartości oceny nośności z rozwiązania sztywno- idealnie plastycznego, zamieszczone się w tab. 4, jak i prostą otrzymaną dla ośrodka liniowo- sprężystego.



Rys. 100 Rozwiązanie dla warunku zamkniętego plastyczności  
dla ośrodka bardziej ściśliwego, przy  $e_0 = 0,9$ ,  $\lambda = 0,2$

Aby umożliwić porównanie nośności podłoża określonych wg obu modeli obliczeniowych, należy przyjąć dla krzywych osiadania kryterium dopuszczalnej wielkości osiadań, co pozwoli określić odpowiadającą jej wartość nośności, którą można by porównać z wartością oceny dolnej z rozwiązania sztywno- plastycznego.

Takiej przesłanki dostarcza praca Zadrogi i Hartikainena [78], w której przedstawiono m. in. wyniki analizy krzywych osiadania otrzymanych dla różnych modeli fundamentu. W przypadku fundamentu posadowionego bezpośrednio na powierzchni terenu rozpoczęcie procesu plastycznego płynięcia obserwowano, gdy stosunek osiadań do szerokości fundamentu

wynosił 3- 8 %. Można zatem przyjąć, iż nośność podłoża jest osiągnięta, gdy wielkość osiadań fundamentu wyniesie:

$$s_{gran} = 0,03 \div 0,08B \quad (133)$$

gdzie: B - szerokość fundamentu.

Aby dokonać oceny w oparciu o powyższy warunek, należy przeanalizować położenie na rys. 99 i 100 punktów przecięcia krzywych osiadań z rozwiązań sprężysto- plastycznych z prostymi otrzymanymi z rozwiązań sztywno- plastycznych. Na wykresach rys. 99 i rys. 100 oznaczono je zielonymi kółkami. Należy zauważyć, iż wszystkie te punkty spełniają kryterium (133), rozwiązania te otrzymano dla fundamentu o jednostkowej szerokości  $B=1$  m. Najniższą wartość z przedziału osiadań granicznych z kryterium (133) – ok. 3%, uzyskano dla rozwiązania charakteryzującego się najniższą wartością ciśnienia prekonsolidacji, natomiast najwyższą wartość z tego przedziału – ok. 8%, uzyskano dla rozwiązania z warunkiem otwartym.

Powyższe wyniki, bazujące na przesłankach wynikających z badań modelowych [78], jednoznacznie wskazują, iż wartości nośności granicznej określone w oparciu o modele sztywno-idealnie plastyczne o zamkniętym warunku stanu granicznego, które są przedmiotem niniejszej pracy, nie odbiegają zasadniczo od uzyskanych w wyniku zastosowania bardziej zaawansowanych modeli sprężysto- plastycznych ze wzmocnieniem/ osłabieniem. Wyniki te także potwierdzają poprawność jednego z założeń niniejszej pracy, które wiązało wartość nośności granicznej z początkowym położeniem zamykającej powierzchni plastyczności, co również stanowiło jedną z przesłanek do sformułowania zaproponowanej w niniejszej pracy, postaci warunku stanu granicznego.

## 7. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE

1. W niniejszej pracy sformułowano i przedstawiono postać nowego, oryginalnego warunku stanu granicznego: liniowego o niesymetrycznej rotacji powierzchni plastyczności względem prostej  $K_0$ , którego liniowe zamknięcie na płaszczyźnie badań trójosiowych wyznaczają dwie proste graniczne. Położenie zamknięcia warunku związane z początkowym kształtem powierzchni plastyczności. Przedstawiono również analizę i dyskusję szeregu przypadków szczególnych tego warunku.
2. W celu określenia nośności granicznej podłoża przy zastosowaniu nowego warunku stanu granicznego odpowiednio zmodyfikowano metody określenia wartości ocen górnej i dolnej nośności granicznej. Z kolei dla wyznaczenia wartości ścisłej nośności granicznej odpowiednio zmodyfikowano rozwiązanie wykorzystujące metodę charakterystyk. W celu uzyskania zadawalających rozwiązań przeprowadzono szeroką analizę i dyskusję sposobów budowy pola deformacji, szczególny nacisk kładąc na właściwe rozpoznanie i opisanie efektów zmiennej dylatacji w obszarze deformacji, także dla przypadków uwzględniających ciężar własny ośrodka.
3. W celu praktycznego wykorzystania przedstawionych metod obliczeniowych nośności granicznej stworzono pakiet oprogramowania komputerowego, który posłużył do przeprowadzenia szerokiej analizy zmienności rozwiązań nośności granicznej podłoża.

Obliczenia wykonano dla szeregu przypadków, w których przyjęto zarówno ośrodek nieważki jak i ważki, płaski jak i osiowo- symetryczny stan odkształcenia oraz wszystkie przedstawione typy zamkniętego warunku stanu granicznego. Na otrzymane rozwiązania składają się charakterystyki pola naprężenia oraz charakterystyki określone w polu kinematycznym.

4. Uzyskane rozwiązania mają charakter jakościowo nowych, różniących się znacznie od istniejących w tym zakresie. Obejmują następujące przypadki:
  - Rozwiązania dla gruntów stosunkowo słabych i ściśliwych, o niewielkiej wartości ciśnienia prekonsolidacji, w przypadku których w obszarze deformacji dominują efekty zagęszczenia a stan graniczny opisany jest przez zamykającą część warunku. Uzyskano stosunkowo niskie wartości nośności granicznej, obszar deformacji jest bardzo niewielki, szczególnie w warunkach osiowej symetrii.
  - Przypadki ze zmienną dylatacją, w których w polu deformacji występują zarówno efekty zagęszczenia jak i rozluźnienia a stan naprężenia opisany jest zamkniętym warunkiem stanu granicznego. Stosunkowo wyższe wartości nośności granicznej określono w warunkach osiowej symetrii, natomiast większe zasięgi obszarów deformacji w rozwiązaniu płaskim.
  - Rozwiązania dla gruntów przekonsolidowanych, w których występują wyłącznie efekty rozluźnienia. W tym przypadku stan naprężenia na zamykającej części warunku osiągany jest tylko w niewielkiej strefie podłoża pod obciążeniem, bądź w całym obszarze deformacji stan naprężenia opisany jest klasyczną częścią warunku i warunek jest tożsamy z otwartym warunkiem Coulomba- Mohra. Najwyższe wartości nośności granicznej otrzymano w rozwiązaniu dla warunku otwartego, natomiast największe zasięgi obszaru deformacji określono dla zadania przejściowego, w którym stany naprężenia w strefie pod obciążeniem opisuje przejściowe koło Mohra, łączące część klasyczną i zamykającą warunku.
5. W oparciu o metodę charakterystyk stworzono numeryczną metodę obliczeniową, która zapewnia pełną ciągłość rozwiązań otrzymanych dla różnych typów budowy pola deformacji, zależnych głównie od wartości ciśnienia prekonsolidacji, które decyduje o położeniu zamknięcia warunku stanu granicznego.
6. Rozwiązania ze zmiennymi efektami dylatacji wyeliminowały najpoważniejszy mankament rozwiązań sztywno- idealnie plastycznych w ramach teorii nośności granicznej, który polega na występowaniu permanentnego stanu rozluźnienia ośrodka w całym obszarze plastycznego płynięcia związany z przyjęciem stowarzyszonego prawa płynięcia.
7. Przyjęcie zamkniętego warunku stanu granicznego z niesymetryczną rotacją powierzchni plastyczności umożliwiło rozszerzenie rozwiązań teorii nośności granicznej na przypadki ośrodka anizotropowo skonsolidowanego.
8. Przedstawiono także szereg szczególnych przypadków rozwiązań, w których w budowie pola deformacji występują np. strefy ograniczonego zagęszczenia pod obciążeniem, co do tej pory uzyskiwano tylko w bardziej zaawansowanych modelach obliczeniowych.
9. Dane pochodzące z badań modelowych oraz wyniki uzyskane z obliczeń wykonanych w oparciu o bardziej zaawansowany model sprężysto- plastyczny ze wzmocnieniem, potwierdziły poprawność i praktyczną przydatność przedstawionych rozwiązań sztywno- idealnie plastycznych teorii nośności granicznej, szczególnie uzyskanych w oparciu o metodę charakterystyk.

- [16] Dembicki E., *Parcie, odpór i nośność gruntu*, Arkady, Warszawa 1979
- [17] Derski W., Izbicki R. J. Kisiel I., Mróz Z., *Rock and soil mechanics*, Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [18] Drucker D. C., Prager W., *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*, Q. Appl. Math., 10, 1952
- [19] Dyer M., Jamiolkowski M., Lancellotta R.: *Experimental soil engineering and models for geomechanics*, 2<sup>nd</sup> Int. Symp. Numerical Models in Geomechanics, Ghent, 1989
- [20] Florkiewicz A., *Nośność graniczna podłoża o cechach skokowo zmiennych*, Politechnika Poznańska, Rozprawy 224, Poznań, 1990
- [21] Florkiewicz A., *Nośność warstwy gruntu spoczywającej na podłożu o nachylnym stropie*, XII Krajowa Konferencja Mechaniki Gruntu i Fundamentowania, Szczecin-Międzyzdroje, 2000
- [22] Garber M., Baker R., *Bearing capacity by variational method*, Journal of the Geotechnical Eng. Division, ASCE, Vol. 102, No. GT11, 1977
- [23] Gryczmański M.: *Wprowadzenie do opisu sprężysto- plastycznych modeli gruntu*, PAN, Studia z zakresu inżynierii Nr 40, Warszawa, 1995
- [24] Gudehus G., *Elastoplastische Stoffgleichungen für trockenden Sand*, Ing. Arch. 42, 1973, 151-169
- [25] Haar A., Karman T., *Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. –Phys. Klasse, 1909, 204- 218
- [26] Hettler A., Gudehus G., *Influence of the foundation width on the bearing capacity factor*, Soils and Foundations, Vol. 28, No. 4, 1988
- [27] Höeg K., Christian I. T., Whitman R. V., *Settlement of strip load on elastic- plastic soil*, Journal of the Soil Mechanics and found. Divisions, Proc. of the ASCE, Vol. 94, No. SM2, 1968
- [28] Houlsby G. T., Wroth C. P., Wood D. M., *Predictions of the results of laboratory tests on a clay using a critical state model*, Results Int. Workshop on Const. Relations for Soils, Grenoble, 1982
- [29] Houslby G. T., Wroth, C.P., *Direct Solution of Plasticity Problems in Soils by the Method of Characteristics*, Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton, Alberta, Canada, 1982
- [30] Hua Y.T., *Wall pressure analysis of two-dimension shallow bins with top piles*, Powder Technology 86, 1996
- [31] Huber M. T., *Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej*, IW SIMP, Warszawa, 1948
- [32] Hvorslev M. J., *Physical components the shear strength of saturated clays*, ASCE Research Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils, boulder, Colorado, 1960
- [33] Ingra T. S., Baecher G. B., *Uncertainty in bearing capacity of sands*, Journal of the Geotechnical Eng. Division, Vol. 109, No. 7, 1983



Przedstawiona w niniejszej pracy idea zamkniętego warunku stanu granicznego oraz metody nośności granicznej mogą stanowić podstawę dalszych prac naukowych, rozwijających teorię nośności granicznej. Zagadnienia te będą kontynuowane przez autora w kolejnych pracach.

## LITERATURA

- [1] Balla A., Bearing capacity of foundations, Journal of Soil Mechanics and Found. Division, ASCE, 88(5), 1962
- [2] Banerjee P. K., Yousif N. B., A plasticity model for the mechanical behaviour of anisotropically consolidated clay, Int. J. Num. Anal. Methods in Geomechanics, vol. 10, 1986
- [3] Batog A., Izbicki R. J., Nośność graniczna głębokich posadowień, Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej PWr, 48, Wrocław, 1999
- [4] Batog A., Izbicki R. J., Nośność graniczna słabego i ściśliwego podłoża gruntowego, 48, XLV Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PziTB, Wrocław – Krynica, 1999
- [5] Batog A., Izbicki R. J.: Zamknięty liniowy warunek stanu granicznego dla gruntów anizotropowo skonsolidowanych, XX Zimowa Szkoła Mechaniki Górniczej, Szklarska Poręba, 1997
- [6] Bierzancew W. G., Obliczanie nośności podłoża budowli, Arkady, Warszawa, 1964
- [7] Bransby P.L., Milligan, G.W.E., Soil deformations near cantilever sheet pile walls, Geotechnique 25, No. 175-195, 1975
- [8] Bransby P.L., Stress and strain in sand caused by rotation of a model wall, PhD Thesis, University of Cambridge, 1968
- [9] Brinch-Hansen J., A revised and extended formula for bearing capacity, Bull. No 28, Danish Geotechnical Institute, Copenhagen, 1968
- [10] Buczyński A., Stany graniczne w ośrodkach krucho-plastycznych, Politechnika Warszawska, Warszawa, 1991
- [11] Burland J. B., Deformation of soft clay, Ph. D. Thesis, University of Cambridge, 1967
- [12] Casagrande A., Characteristics of cohesionless soils affecting the stability of slopes and earth fills, Journal Boston Soc. Civil Eng., 1936
- [13] Chen W. F., Limit analysis and soil plasticity, Elsevier Sci. Pub. Comp., New York, 1975
- [14] Coulomb C. A., Essais sur une application des regles des Maxims et Minims a quelques problems de statique, relatifs a l'architecture, Mem. Acad. Roy. Sci. div Sav., 7, Paris, 1776
- [15] De Beer E. E., Bearing capacity and settlement of shallow foundations on sand, Proc. of the Symp. on Bearing Capacity and Settlement of Foundations, Duke University, Durham, 1965



- [16] Dembicki E., *Parcie, odpór i nośność gruntu*, Arkady, Warszawa 1979
- [17] Derski W., Izbiński R. J., Kisiel I., Mróz Z., *Rock and soil mechanics*, Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [18] Drucker D. C., Prager W., *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*, Q. Appl. Math., 10, 1952
- [19] Dyer M., Jamiolkowski M., Lancellotta R.: *Experimental soil engineering and models for geomechanics*, 2<sup>nd</sup> Int. Symp. Numerical Models in Geomechanics, Ghent, 1989
- [20] Florkiewicz A., *Nośność graniczna podłoża o cechach skokowo zmiennych*, Politechnika Poznańska, Rozprawy 224, Poznań, 1990
- [21] Florkiewicz A., *Nośność warstwy gruntu spoczywającej na podłożu o nachylnym stropie*, XII Krajowa Konferencja Mechaniki Gruntu i Fundamentowania, Szczecin-Międzyzdroje, 2000
- [22] Garber M., Baker R., *Bearing capacity by variational method*, Journal of the Geotechnical Eng. Division, ASCE, Vol. 102, No. GT11, 1977
- [23] Gryczmański M.: *Wprowadzenie do opisu sprężysto-plastycznych modeli gruntu*, PAN, Studia z zakresu inżynierii Nr 40, Warszawa, 1995
- [24] Gudehus G., *Elastoplastische Stoffgleichungen für trockenden Sand*, Ing. Arch. 42, 1973, 151-169
- [25] Haar A., Karman T., *Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 1909, 204-218
- [26] Hettler A., Gudehus G., *Influence of the foundation width on the bearing capacity factor*, Soils and Foundations, Vol. 28, No. 4, 1988
- [27] Höeg K., Christian I. T., Whitman R. V., *Settlement of strip load on elastic-plastic soil*, Journal of the Soil Mechanics and found. Divisions, Proc. of the ASCE, Vol. 94, No. SM2, 1968
- [28] Housley G. T., Wroth C. P., Wood D. M., *Predictions of the results of laboratory tests on a clay using a critical state model*, Results Int. Workshop on Const. Relations for Soils, Grenoble, 1982
- [29] Housley G. T., Wroth, C.P., *Direct Solution of Plasticity Problems in Soils by the Method of Characteristics*, Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton, Alberta, Canada, 1982
- [30] Hua Y.T., *Wall pressure analysis of two-dimension shallow bins with top piles*, Powder Technology 86, 1996
- [31] Huber M. T., *Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej*, IW SIMP, Warszawa, 1948
- [32] Hvorslev M. J., *Physical components the shear strength of saturated clays*, ASCE Research Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils, boulder, Colorado, 1960
- [33] Ingra T. S., Baecher G. B., *Uncertainty in bearing capacity of sands*, Journal of the Geotechnical Eng. Division, Vol. 109, No. 7, 1983

- [34] Izbicki R. J., Kozubal J.: Nośność graniczna zakotwień poziomych, Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej PWr, 48, Wrocław 1999
- [35] Izbicki R. J., Limit state of soils in the case of a closed plasticity condition, *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. XVII, No. 1-2, 1995.
- [36] Izbicki R. J., Stachoń M.: Odprężenie gruntów prekonsolidowanych oraz wpływ na stateczność głębokich wykopów. Materiały XLI Konferencji Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Kraków - Krynica, 1995.
- [37] Izbicki R., Mróz Z., Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał, PWN, Warszawa, 1976
- [38] James R.G., Bransby P.L., A velocity field for some passive earth pressure problems, *Geotechnique* 21, No.1, 61-83, 1971
- [39] James, R.G., Bransby, P.L., Experimental and theoretical investigations of passive earth pressure problem, *Geotechnique* 20, No.1, 1970
- [40] Jamiołkowski M., Ladd C. C., Germaine J. T., Lancelotta R., New developments in field and laboratory testing in soils, Theme Lect., Proc. 11<sup>th</sup> ICSMFE, San Francisco, Vol. 1, 1985
- [41] Jenike A. W., Shield R. T., On the plastic flow of Coulomb Solids Beyond original failure, *J. Appl. Mech.*, ASME, 26, 1959
- [42] Kirgord M. M., Lade P. V., Anisotropic three-dimensional behavior of normally consolidated clay, *Can. Geotech. J.*, 30, 1993
- [43] Krok R., Meyer Z., Interpretacja badań edometrycznych torfu, *Inżynieria Morska i Geotechnika*, 2/94, 1994
- [44] Kulczykowski M., Sawicki A., Bearing capacity of footing on reinforced earth, *Archiwum Hydrotechniki* 3/84, 1984
- [45] Lade P. V., Elasto- plastic stress- strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces, *Int. Journal of Solids and Structures*, 13, 1977
- [46] Lewandowska J., Dembicki E., Bearing capacity of non-cohesive soil by variational method, *Archiwum Hydrotechniki*, XXXVII (3/4), 1991
- [47] Matsuoka H., Nakai T., A new failure condition for soils in three- dimensional stresses, Proc. IUTAM Conf. defor. Fail. Granular Mat., Delft, 1982
- [48] Mróz Z., Graphical solution of axially symmetric problems of plastic flow, *J. Appl. Math. Phys.* 18, 1967
- [49] Narita K., Yamaguchi H., Analysis of bearing capacity for long- spiral sliding surfaces, *Soil and Foundation* Vol. 29, No 2, 1989
- [50] Panow D. J., Metody numeryczne rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych, PWN, Warszawa, 1955
- [51] Pietruszczak St., Mróz Z., On hardening anisotropy of  $K_0$  consolidated clays, *Int. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 11, 1987
- [52] Podgórski J., Limit state condition and dissipation function for isotropic materials, *Arch.Mech.* 36, 3, 1984

- [53] Prandtl L., Über die Härte plastische Körper, Nachr., Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 1920
- [54] Prévost J. H., - Höeg K., Analysis of pressuremeter test in strain-softening soil, Journ. of Geotech. Engineering, ASCE, 101, GT8, 1975
- [55] Reissner H., Zum Erdruckproblem, Proceed. First Int. Conf. Appl. Mech., Delft, 1924
- [56] Roscoe K. H., The influence of strains in soil mechanics, 10-th Rankine Lecture, Geotechnique, 20, 1970
- [57] Roscoe K. H., Schofield A. N., Wroth C. P., On the yielding of soils, Geotechnique, 8, 1, 1958
- [58] Roscoe K.H., The influence of strains in soil mechanics, Geotechnique 20, No.2, 1970
- [59] Salencon J., Application of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics, John Wiley, New York, 1977
- [60] Saran S., Agarwal R. K., Bearing capacity of eccentrically loaded footings, Journal of the Soil Mechanics and Found. Divisions, Proc. of the ASCE, Vol. 97, No. SM1, 1991
- [61] Sawicki A., Leśniewska D., Grunt zbrojony. Teoria i zastosowanie, PWN, Warszawa 1993
- [62] Sawicki A., Leśniewska, D., Limit analysis of reinforced slopes, Geotextiles and Geomembranes Int. Journal, Vol.7, No.3, 1988
- [63] Serrano A. A., The method of associated fields of stress and velocity and its application to earth pressure problems. Proc. 5<sup>th</sup> European Conf. Soil Mech., Madrid, Vol.1, 1972
- [64] Siddiquee M. S. A., Finite element analysis of settlement and bearing capacity of footing on sand, M. Sc. Thesis, Geotechnical Eng. Laboratory, University of Tokyo, 1991
- [65] Smith I. M., Griffith S., Programming the Finite Element Method, J. Willey & Sons, 1988
- [66] Sokołowski W. W., Statyka ośrodków sypkich, PWN, Warszawa, 1958
- [67] Stilger- Szydło E., Analysis of embankment slope with random soil parameters based on the theory of limit states, Studia Geotechnica, 3-4/90, 1990
- [68] Stilger – Szydło E., Stany graniczne skarp i zboczy, Rozwiązania kompletne, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1993
- [69] Szczepiński W., Stany graniczne i kinematyka ośrodków syokich, PWN, Warszawa, 1974
- [70] Tatsuoka F., Shear band formation related to scale effect in bearing capacity of footing on sand, Experimental results, Proceedings of International Workshop „Numerical Methods for Localization and Bifurcation of Granular Bodies”, Gdańsk, 1989
- [71] Tavenas F., Leronuil S.: Clay behaviour and the selection of design parameters, Proc. 7th European Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Vol. 1, Brighton, 1979
- [72] Terzaghi K., Erdbaumechnik auf bodenphysikalischer Grundlage, F. Deuticke, Wien, 1925

- [73] Terzaghi K., Theoretical soil mechanics, 5-th edition, J. Wiley and Sons Inc., New York, 1943
- [74] Vesić A. S., Analysis of ultimate loads of shallow foundations, Journal of the Soil Mechanics and Found. Division, ASCE, Vol. 99, No SM1, 1973
- [75] Whittle A. J.: Evaluation of a constitutive model for overconsolidated clays, Geotechnique, No. 43, 1993, s. 289-313
- [76] Wroth C. P., Loudon P. A., The correlation of strains within a family of triaxial tests on overconsolidated samples of kaolin, Proc. Geotech. Conf., Vol. 1, Oslo, 1967
- [77] Wroth C.P., General theories of earth pressures and deformations, General Report, Proc. 5<sup>th</sup> European Conf. Soil Mech. Found. Eng., Vol.2, Madrid, 1972
- [78] Zadroga B., Hartikainen J., Bearing capacity of shallow foundations on slopes, Archives of Hydro-engineering and Enviromental Mechanics, 1-2/95, 1995
- [79] Zhao A., Failure loads on Geosynthetic Reinforced Soil Structures, Geotextiles and Geomembranes 14, 289-300, 1986
- [80] PN-81/B-03020. Grunty budowlane. Posadowienie bezpośrednie budowli

