

Rozprawa doktorska

Zaawansowane metody analizy widmowej sygnałów elektrycznych

Zbigniew Leonowicz

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii
Politechniki Wrocławskiej

Promotor: prof. zw. dr hab. inż. Tadeusz Łobos
Wrocław 2000

Spis rzeczy

Przedmowa	iv
Cel i teza pracy	vi
Wykaz oznaczeń	vii
1 Pojęcia podstawowe	1
1.1 Stacjonarność procesu	1
1.2 Ergodyczność	2
1.3 Quasi-stacjonarność	2
1.4 Biały szum dyskretny	3
2 Wektor przestrzenny	4
2.1 Podstawowe zależności	5
2.1.1 Definicja	5
2.1.2 Związki wektora przestrzennego z symetrycznym układem trójfazowym.	5
2.1.3 Opis wektora przestrzennego szeregiem Fouriera	6
2.1.4 Wektor przestrzenny a wyższe harmoniczne	6
2.1.5 Wizualizacja układu trójfazowego	7
3 Widmowa gęstość mocy	14
3.1 Dokładność estymacji widma	14
3.1.1 Sygnały ciągłe	14
3.1.2 Sygnały dyskretne	17
4 Metody podprzestrzeni	20
4.1 Wprowadzenie	20
4.1.1 Macierz korelacji	20
4.1.2 Macierz kowariancji	21
4.2 Wprowadzenie metod podprzestrzeni	22
4.3 Metoda minimum normy (MN)	23
4.4 Estymacja parametrów sygnału	25

5	Statystyki wyższych rzędów	26
5.1	Definicje kumulantów	26
5.2	Właściwości kumulantów	27
5.3	Statystyki procesów harmonicznych	28
5.3.1	Definicje procesów harmonicznych	28
5.3.2	Definicje i właściwości kumulantów procesów harmonicznych	29
5.4	Estymacja statystyk wyższych rzędów	30
5.4.1	Wprowadzenie	30
5.4.2	Estymatory statystyk wyższych rzędów	30
6	Analiza czasowo-częstotliwościowa	32
6.1	Krótkoczasowa transformacja Fouriera	33
6.1.1	Właściwości STFT	34
6.2	Dystrybucja Wignera-Ville'a	34
6.2.1	Wstęp	34
6.2.2	Definicja	35
6.2.3	Właściwości dystrybucji Wignera-Ville'a	35
6.2.4	Pseudo-dystrybucja Wignera-Ville'a	36
6.2.5	Dokładność estymacji widma	37
6.2.6	Dystrybucja Choi-Williamsa	40
6.3	Metoda minimum-normy	40
7	Badania symulacyjne	42
7.1	Sygnały stacjonarne	42
7.1.1	Badania wstępne	42
7.1.2	Wyniki	44
7.2	Sygnały niestacjonarne	53
7.2.1	Widmo wektora przestrzennego - symulacje EMTP	53
7.2.2	Wyniki	55
7.2.3	Dystrybucja Wignera-Ville'a przebiegu zwarciovego	61
7.2.4	Wyniki	61
8	Badania przebiegów doświadczalnych	65
8.1	Badanie przebiegów w awaryjnych stanach pracy napędu przekształtnikowego	65
8.1.1	Wyniki	68
9	Wnioski	73
A	Zastosowanie metod podprzestrzeni	75
A.1	Praktyczne zastosowanie metody Pisarenki	75
A.1.1	Sygnał o jednej składowej wykładniczej	76
A.1.2	Sygnał o dwóch składowych wykładniczych	77

B Rozdzielczość reprezentacji	82
B.1 Rozdzielczość STFT	82
B.2 Rozdzielczość reprezentacji Wignera-Ville'a	83
C Symulacja EMTP napędu	84
D Wyznaczenie liczby sygnałów	86
Literatura	88
Indeks	93

Podziękowania

Autor wyraża podziękowanie Panu Profesorowi Tadeuszowi Łobosowi za opiekę naukową, Panu Profesorowi Adamowi Skopcowi za krytyczną analizę pracy, Komitetowi Badań Naukowych za wsparcie finansowe (grant promotorski numer 8T10A04517).

Przedmowa

Analizą widmową sygnału określamy problem wyznaczenia częstotliwościowej struktury sygnału, jego widma częstotliwościowego.

Pojęcie rozkładu sygnału na składowe harmoniczne wzięło swój początek w pracach Pitagorejczyków, w ich analizie ruchów planet („muzyka sfer”), w odkryciach praw muzycznej harmonii, w pracach Newtona nad widmem światła słonecznego (1677 r.), analizach drgających membran Bernoulli’ego (1738 r.) i Eulera (1755 r.), w aproksymacji Prony’ego drgających mechanizmów (1793 r.). Nowoczesna analiza Fouriera, stosowana powszechnie, ma swoje podstawy w pracach Fouriera (1807 r.), chociaż elementy szybkiej transformacji Fouriera (FFT) powstały w dziełach Gaussa o mechanice orbitalnej (1805 r.).

Podstawowym narzędziem analizy sygnałów jest widmo mocy. Algoritmy estymacji widma mocy znalazły szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach nauki, także w elektrotechnice.

Dokładne i szybkie wyznaczenie częstotliwościowych parametrów składowych badanego sygnału jest istotne z wielu powodów.

Sygnały rzeczywiste zawierają zwykle wiele składowych o różnych częstotliwościach, często ze znaczną zawartością szumu a ponadto parametry ich widm są zmienne w czasie. Dokładność estymacji widma składowych tych sygnałów zależy od wielu czynników, takich jak rozdzielczość, obciążenie, wariancja zastosowanego estymatora, długość badanej sekwencji danych, faz poszczególnych składowych i ich wzajemnego oddziaływania.

W wielu zagadnieniach telekomunikacji, elektroniki, automatyki, techniki zabezpieczeń energetycznych, istnieje konieczność identyfikacji stanu pracy, separacji i estymacji parametrów sygnałów elektrycznych, np.: wydzielanie z sygnału podstawowej harmonicznej, filtracja szumu, separacja wyższych harmonicznych, ocena zawartości wyższych harmonicznych czy estymacja częstotliwości, amplitudy i fazy.

Praca niniejsza jest kontynuacją i rozwinięciem cyklu publikacji ([1], [21-25], [27-33]), mającą na celu ich usystematyzowanie i uzupełnienie. Autor proponuje metodę wizualizacji widma sygnałów elektrycznych (w tym trójfazowych) przy pomocy metod podprzestrzeni a także poddaje analizie właściwości różnych metod analizy widmowej zastosowanych w praktyce. Wybrane metody analizy widmowej przedstawione w rozdziałach 3-6 zna-

lazły już zastosowanie w innych dziedzinach nauk stosowanych takich jak telekomunikacja czy akustyka, jednak ich zastosowanie w elektrotechnice i elektroenergetyce nie jest rozpowszechnione. Nowoczesne metody analizy widmowej charakteryzują się szeregiem zalet, nie spotykanych w klasycznych metodach fourierowskich, jednak niewątpliwym zaletom, takim jak wysoka rozdzielczość czy niewrażliwość na szum towarzyszą ograniczenia. Jednym z celów tej pracy jest wykazanie tych cech, zarówno korzystnych jak i ograniczających obszar zastosowań.

Cel i teza pracy

Celem pracy jest szczegółowe zbadanie właściwości zaawansowanych metod analizy widmowej, takich jak metody podprzestrzeni, statystyki wyższych rzędów, metody analizy czasowo-częstotliwościowej - dystrybucja Wignera-Ville'a, krótkoczasowa transformacja Fouriera, zastosowanych do badania odkształconych sygnałów występujących w elektrotechnice i elektroenergetyce, określenie obszaru zastosowań badanych metod, ich cech charakterystycznych, zarówno korzystnych z punktu widzenia zastosowań praktycznych jak i ograniczających celowość ich wykorzystania.

Teza pracy

Zaawansowane metody przetwarzania sygnałów, takie jak metody podprzestrzeni, statystyki wyższych rzędów, dystrybucja Wignera-Ville'a, umożliwiają dokładniejsze wyznaczanie parametrów mocno zniekształconych sygnałów elektrycznych oraz lepszą diagnozę stanu pracy układów elektrycznych niż metody fourierowskie.

Wykaz oznaczeń

A	wartość skuteczna
$\hat{A}$	amplituda zespolona
C	funkcja autokowariancji
$c_{(k)}^x(\tau_1, \dots)$	kumulant k -tego rzędu procesu losowego x
$\text{col}(x_1, \dots)$	zbiór zmiennych losowych
$\text{cum}(x_1, \dots)$	kumulant zmiennych losowych o średniej zerowej
e	wektor własny macierzy korelacji
$\mathcal{E}\{.\}$	wartość oczekiwana
E	macierz wektorów własnych
f	wektor przestrzenny
f_R, f_S, f_T	wielkości trójfazowe symetryczne
$f_x(x, t)$	funkcja gęstości prawdopodobieństwa procesu losowego x
$\mathcal{L}$	lagrangian
$m_{k_1 \dots k_n}$	momenty k -tego rzędu zmiennych losowych
$m_x(t)$	wartość średnia procesu losowego x
$\hat{P}_{MN}(e^{j\omega})$	pseudospektrum otrzymane metodą minimum normy
P_X	macierz operatora rzutowania ortogonalnego
$P(\omega)$	widmo mocy
$P(t, \omega)$	widmo mocy zależne od czasu
R_x	macierz korelacji procesu losowego x
$R_x(t)$	funkcja korelacji procesu losowego x
$R(t, \omega)$	funkcja autokorelacji zmienna w czasie
s, s_i	wektor próbek sygnału
$S_a(t)$	widmo sygnału analitycznego
$S_{k,x}(\omega_1, \dots)$	polispektrum k -tego rzędu
$S_x(e^{j\omega})$	widmowa gęstość mocy x
w	wektor składowych postaci $e^{j\omega n}$
$W(t, \omega)$	dystribucja Wignera-Ville'a
$x_a(t)$	sygnał analityczny
$\delta(n)$	dyskretny impuls jednostkowy
$\sigma_0^2(n)$	wariancja szumu
$\hat{\theta}$	estymator parametru θ

$\boldsymbol{\eta}$	wektor próbek szumu
λ	wartość własna macierzy korelacji
Λ	macierz wartości własnych
μ	współczynnik Lagrange'a
∇_{a^*}	gradient zespolony a

Rozdział 1

Pojęcia podstawowe

Przedstawiono definicje i właściwości podstawowych pojęć oraz wielkości dotyczących sygnałów i procesów losowych.

W pracy będą rozpatrywane sygnały spełniające warunek ergodyczności i stacjonarności, jak i nie spełniające tych warunków. Poniżej podano warunki, jakim musi odpowiadać proces stochastyczny, aby można go było uznać za stacjonarny i ergodyczny oraz definicje podstawowych wielkości statystycznych wykorzystanych w dalszej części pracy.

1.1 Stacjonarność procesu

Ze względu na cechę stacjonarności procesy stochastyczne dzieli się na stacjonarne i niestacjonarne [57]. Z kolei procesy stacjonarne dzieli się na stacjonarne w wąskim oraz szerokim sensie.

Proces stochastyczny $x(t)$ nazywamy stacjonarnym w wąskim sensie, jeżeli funkcja gęstości prawdopodobieństwa wektora losowego o składowych $[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]$ jest równa gęstości prawdopodobieństwa wektora losowego o składowych $[x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)]$ dla dowolnie wybranych chwil czasu $t_1, t_2, \dots, t_n$, dowolnego przesunięcia τ i dowolnej liczby składowych n . N -wymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa procesu stochastycznego stacjonarnego w wąskim sensie nie zależy zatem oddzielnie od każdej z chwil czasu $t_1, t_2, \dots, t_n$ a tylko od różnicy pomiędzy tymi chwilami, np. $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_n - t_1$.

Jednowymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa procesu stochastycznego $x(t)$, stacjonarnego nie zależy od czasu t , czyli $f_x(x, t) = f_x(x)$.

Z definicji wartości oczekiwanej i funkcji korelacji procesu stochastycznego wynika, że wartość oczekiwana procesu stochastycznego $x(t)$, stacjonarnego w wąskim sensie, jest stała i nie zależy od czasu t .

Proces stochastyczny $x(t)$ nazywamy stacjonarnym w szerokim sensie, jeżeli wartość oczekiwana tego procesu nie zależy od czasu.

Proces stochastyczny stacjonarny w wąskim sensie jest zawsze stacjonarny w szerokim sensie. Twierdzenie odwrotne nie zawsze jest prawdziwe. Procesy stochastyczne, które nie są stacjonarne w wąskim lub szerokim sensie, są procesami niestacjonarnymi.

1.2 Ergodyczność

Stacjonarny proces stochastyczny $x(t)$ jest procesem ergodycznym, jeżeli spełnia zależność [57]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt - m_x \right]^2 \right\} = 0 \quad (1.1)$$

gdzie: T - długość przedziału uśredniania, t_0 - dowolnie wybrana chwila początkowa przedziału uśredniania.

Dla procesu stochastycznego ergodycznego wartość oczekiwana w zbiorze realizacji jest równa wartości średniej jednej realizacji dla nieskończenie długiego okresu obserwacji T .

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (1.2)$$

Tylko procesy stacjonarne mogą być ergodyczne. Proces $\{x(t)\}$ jest procesem ergodycznym [40], jeżeli z prawdopodobieństwem równym jedności wszystkie jego momenty mogą być określone na podstawie pojedynczej realizacji procesu, czyli uśrednianie po zbiorze realizacji może być zastąpione uśrednianiem po czasie. Na tej podstawie zamiast zapisu $\{x(t)\}$, oznaczającego zbiór realizacji, można stosować zapis $x(t)$ dla sygnałów ciągłych oraz $x(n)$ dla sygnałów dyskretnych, tzn. za proces stochastyczny uznaje się jego pojedynczą realizację.

1.3 Quasi-stacjonarność

Podstawowym problemem analizy sygnałów losowych jest niemożliwość przeprowadzenia operacji uśredniania po zbiorze realizacji procesu losowego. Przy założeniu ergodyczności procesu uśrednianie po zbiorze realizacji może być zastąpione uśrednianiem po czasie, jednak dla procesów niestacjonarnych taka operacja jest niedostępna, ponieważ uśrednianie po czasie usuwa zmienne w czasie właściwości badanego sygnału [34]. Wprowadza się dla sygnałów niestacjonarnych pojęcie „quasi-stacjonarności” czyli założenie, że funkcja autokowariancji C sygnału zmienia się dostatecznie powoli aby spełnić warunek:

$$|C(t + \tau, t - \tau) - C_s(2\tau)| < \varepsilon(T) \quad (1.3)$$

Zakłada się, że w danej chwili t istnieje stacjonarna funkcja autokowariancji C_s i przedział czasu T , dla których spełniona jest nierówność (1.3). Przedziałem stacjonarności T_s nazwano najmniejszy przedział T spełniający (1.3). Proces niestacjonarny nazwano quasi-stacjonarnym jeśli $T_s > 0$ dla danego $\varepsilon > 0$, gdzie ε jest miarą przybliżenia.

1.4 Biały szum dyskretny

Każdy proces losowy o zerowej średniej, którego próbki nie są skorelowane nazywa się procesem „białym” [58]. Funkcja korelacji tego procesu ma postać:

$$R_{sb}[n_1, n_0] = \sigma_0^2[n_1] \delta[n_1 - n_0] \quad (1.4)$$

Najczęściej zakłada się, że mamy do czynienia z procesem stacjonarnym. W tym przypadku funkcja korelacji tego procesu ma postać:

$$R_{sb}[l] = \sigma_0^2 \delta[l] \quad (1.5)$$

a widmowa gęstość mocy:

$$S_{sb}(e^{j\omega}) = \sigma_0^2 \quad (1.6)$$

Odmianą białego szumu jest biały szum gaussowski, który powstaje przez próbkowanie białego szumu ciągłego. Jeżeli $\mathbf{w}$ jest wektorem losowym składającym się z N kolejnych próbek białego procesu losowego to jego macierz kowariancji ma postać:

$$\mathbf{C}_w = \mathbf{R}_w = \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad (1.7)$$

Próbki białego szumu gaussowskiego są nieskorelowane i niezależne.

Szum kolorowy otrzymuje się np. na wyjściu filtru, na którego wejście podano biały szum gaussowski. Przebieg widmowej gęstości mocy szumu kolorowego zależy od doboru współczynników tego filtru.

Rozdział 2

Wektor przestrzenny

Przedstawiono metodę reprezentacji układu trójfazowego przy pomocy wektora przestrzennego, podstawowe zależności tej wielkości zespolonej z symetrycznym i niesymetrycznym układem wielkości w układzie trójfazowym i w obecności wyższych harmonicznych. Wskazano na związki pomiędzy układem zgodnym i przeciwnym znanym z metody składowych symetrycznych a widmem wektora przestrzennego.

Metoda składowych symetrycznych (składowych 012) jest jedną z podstawowych metod analizy trójfazowych obwodów elektrycznych [26]. Metoda ta umożliwia analizę wyłącznie przebiegów stacjonarnych i sinusoidalnych dla składowej podstawowej. W maszynach elektrycznych układ napięć zasilających o kolejności zgodnej powoduje powstanie wirującego pola magnetycznego. Skutkiem oddziaływania układu symetrycznych napięć zasilających stojana jest powstanie symetrycznego układu prądów przy zakładanej symetrii budowy maszyny.

Badany sygnał trójfazowy może być kombinacją składowej podstawowej, harmonicznych i szumu losowego. Dodatkowe zakłócenia mogą być spowodowane występowaniem składowych przejściowych oraz obciążeń nieliniowych. Istnieje wiele możliwych sposobów opisu wielkości występujących w układach trójfazowych, których zadaniem jest uproszczenie analizy i modelowania układów elektrycznych. Jednym z możliwych opisów systemów trójfazowych jest wektor przestrzenny (Raumzeiger) zdefiniowany w [19] jako złożenie dwóch niezależnych wektorów wirujących opisujących układy o kolejności zgodnej i przeciwnej.

Metoda wizualizacji przy pomocy wektora przestrzennego jest stosowana w przypadku analizy widma i symetrii napięć i prądów występujących w układach trójfazowych [51].

2.1 Podstawowe zależności

2.1.1 Definicja

Zespolony wektor przestrzenny, opisujący składową zgodną, przeciwną, składowe harmoniczne i nieharmoniczne występujące w układzie trójfazowym f_R, f_S, f_T jest dany wzorem:

$$\mathbf{f} = \frac{(f_\alpha + j f_\beta)}{\sqrt{2}} \quad (2.1)$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_R \\ f_S \\ f_T \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Dzięki wprowadzeniu dodatkowej wielkości - składowej zerowej

$$f_0 = \frac{1}{3} (f_R + f_S + f_T) \quad (2.3)$$

możliwy jest pełny i jednoznaczny opis układu trójfazowego.

2.1.2 Związki wektora przestrzennego z symetrycznym układem trójfazowym.

Dla składowej zgodnej można utworzyć wektor przestrzenny $\mathbf{f}$ przy pomocy równań opisujących wartości chwilowe wielkości występujących w symetrycznym układzie trójfazowym [50]:

$$f_R = \mathbf{A}_{(1)} \sin(\omega t + \gamma) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_{(1)} e^{j\omega t} + \mathbf{A}_{(1)}^* e^{j\omega t} \right) e^{j\gamma} \quad (2.4)$$

$$f_S = \mathbf{A}_{(1)} \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(a^2 \mathbf{A}_{(1)} e^{j\omega t} + a \mathbf{A}_{(1)}^* e^{j\omega t} \right) e^{j\gamma} \quad (2.5)$$

$$f_T = \mathbf{A}_{(1)} \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(a \mathbf{A}_{(1)} e^{j\omega t} + a^2 \mathbf{A}_{(1)}^* e^{j\omega t} \right) e^{j\gamma} \quad (2.6)$$

gdzie $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$. Po podstawieniu do (2.1) otrzymano:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}_{(1)} e^{j\omega t} e^{j\gamma} \quad (2.7)$$

Dla składowej zgodnej wektor przestrzenny wiruje na płaszczyźnie zespolonej w kierunku dodatnim. Odpowiednio dla składowej przeciwniej wektor przestrzenny wiruje w przeciwnym kierunku i opisany jest wzorem:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}_{(2)} e^{-j\omega t} e^{-j\gamma} \quad (2.8)$$

W przypadku niesymetrycznych sinusoidalnych przebiegów trójfazowych wektor przestrzenny przedstawia się jako suma wektorów wirujących w przeciwnych kierunkach:

$$\mathbf{f} = \mathbf{\hat{A}}_{(1)} e^{j\omega t} + \mathbf{\hat{A}}_{(2)}^* e^{-j\omega t} \quad (2.9)$$

Równanie to opisuje na płaszczyźnie zespolonej elipsę, której jedna z osi jest równa sumie amplitud składowej zgodnej i przeciwnej a druga różnicy tych wielkości.

2.1.3 Opis wektora przestrzennego szeregiem Fouriera

Przebieg okresowy opisujący wektor przestrzenny można rozwinąć w szereg Fouriera:

$$\mathbf{f}(\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \mathbf{A}_n e^{jn\omega t} \quad (2.10)$$

o współczynnikach:

$$\mathbf{A}_n = \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\omega t) e^{jn\omega t} d(\omega t) \quad (2.11)$$

Występujące w rozwinięciu w szereg Fouriera harmoniczne o indeksach n dodatnich odpowiadają wirującym zgodnie z kierunkiem wirnika systemom zgodnym a harmoniczne o indeksach n ujemnych odpowiadają wirującym przeciwnie do kierunku wirowania wirnika systemom przeciwnym. Dwie podstawowe harmoniczne wektora przestrzennego o indeksach $n = 1$ i $n = -1$ odpowiadają składowej zgodnej i przeciwnej. Stąd:

$$\mathbf{\hat{A}}_{(1)} = \mathbf{A}_n|_{n=1} \quad \mathbf{\hat{A}}_{(2)} = \mathbf{A}_n^*|_{n=-1} \quad (2.12)$$

2.1.4 Wektor przestrzenny a wyższe harmoniczne

W przypadku obecności w systemie trójfazowym wyższych harmonicznych o częstotliwościach będących całkowitymi wielokrotnościami k częstotliwości podstawowej ω , można opisać ich przebiegi czasowe równaniami [51]:

$$f_{Rk}(t) = \mathbf{A}_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \quad (2.13)$$

$$f_{Sk}(t) = \mathbf{A}_k \sin \left[k \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \gamma_k \right] \quad (2.14)$$

$$f_{Tk}(t) = \mathbf{A}_k \sin \left[k \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) + \gamma_k \right] \quad (2.15)$$

Wyższe harmoniczne w symetrycznym stanie pracy układu należą kolejno do różnych systemów napięć [36]:

- System napięć o kolejności zgodnej tworzą harmoniczne o współczynnikach $k = 1, 4, 7, 10, \dots = 3n + 1; n \in N$

$$\mathbf{f}_{(k)} = \mathbf{\hat{A}}_{(k)} e^{jk\omega t} \quad (2.16)$$

- System napięć o kolejności przeciwnej tworzą harmoniczne o współczynnikach $k = 2, 5, 8, 11, \dots = 3n + 2; n \in N$

$$\mathbf{f}_{(k)} = \mathbf{\hat{A}}_{(k)} e^{-jk\omega t} \quad (2.17)$$

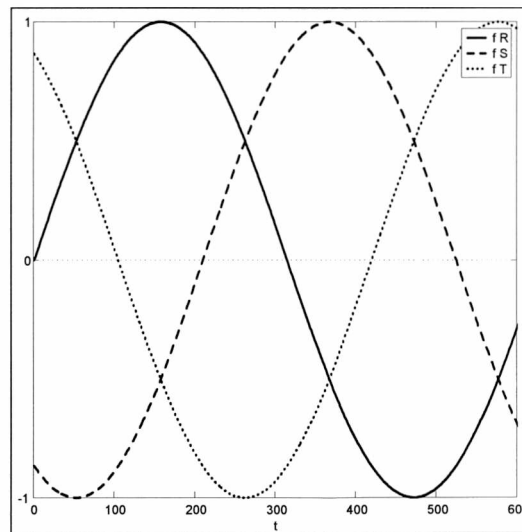
- System o kolejności zerowej tworzą harmoniczne o współczynnikach $k = 0, 3, 6, 9, \dots = 3n; n \in N$

2.1.5 Wizualizacja układu trójfazowego

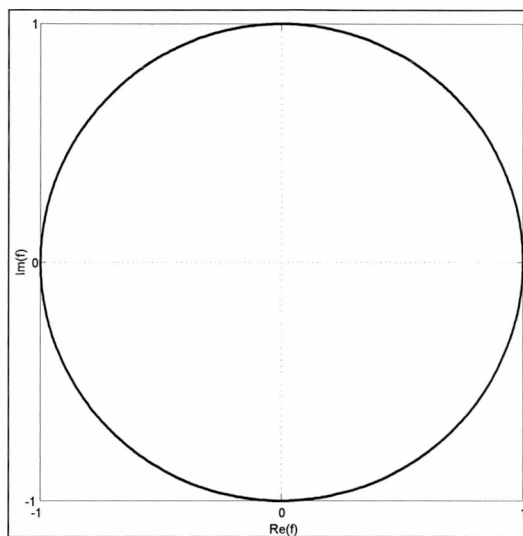
Wykres wektora przestrzennego na płaszczyźnie zespolonej jest naturalną i najprostszą metodą wizualizacji układu trójfazowego [50]. Interpretacja przebiegów czasowych i wykresu na płaszczyźnie zespolonej wektora przestrzennego jest łatwa tylko w przypadku przebiegów nie zmieniających się w czasie i o niewielkiej liczbie harmonicznych.

Poniżej podano wykresy przykładowych prostych przypadków niesymetrii i zniekształcenia przebiegów trójfazowych.

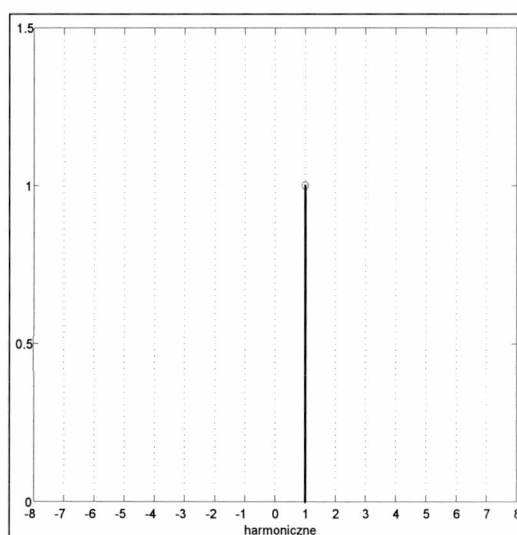
1. Przebieg nie zniekształcony symetryczny:



Rys.2.1. Przebiegi czasowe napięć.



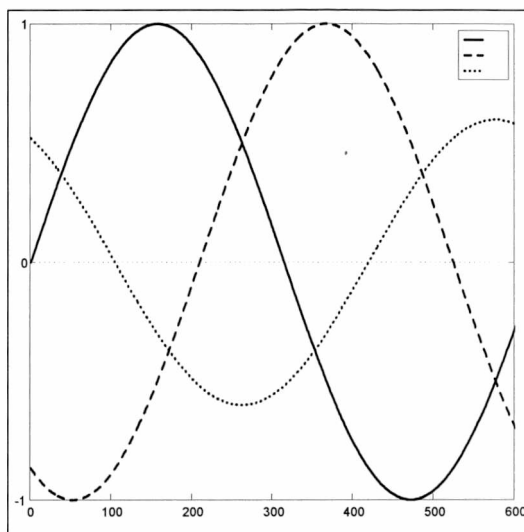
Rys.2.2. Wykres wektora przestrzennego.



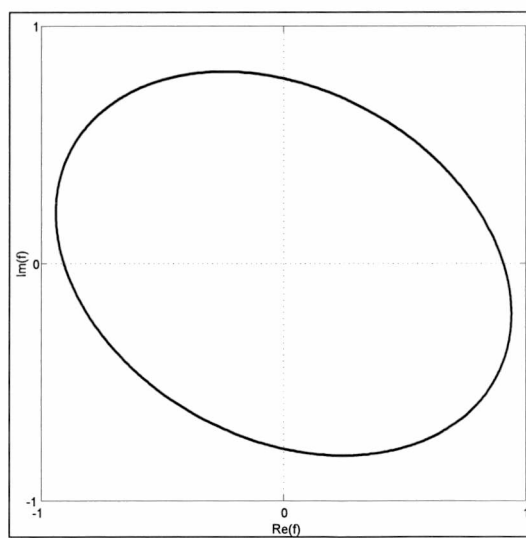
Rys.2.3. Widmo wektora przestrzennego.

Wektor przestrzenny w tym przypadku zakresła na płaszczyźnie zespolonej okrąg.

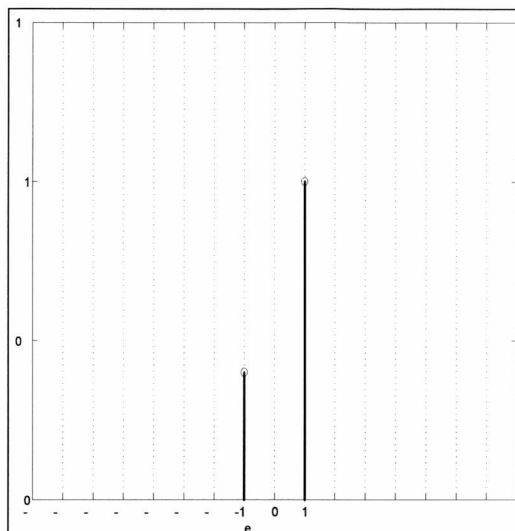
2. Przebieg nie zniekształcony niesymetryczny (amplituda napięcia w fazie T równa $\frac{6}{10}$ amplitudy napięcia w pozostałych fazach).



Rys.2.4. Przebiegi czasowe napięć.



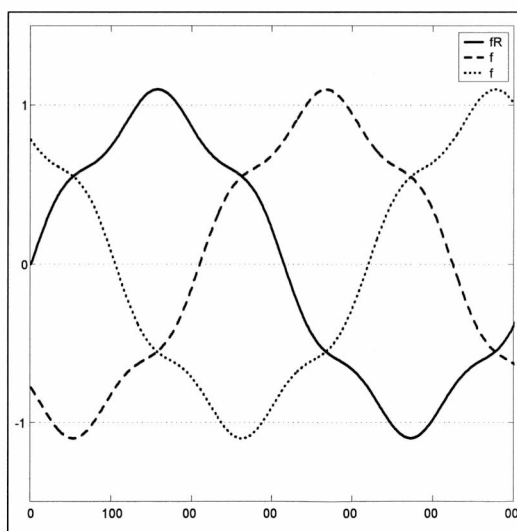
Rys.2.5. Wykres wektora przestrzennego.



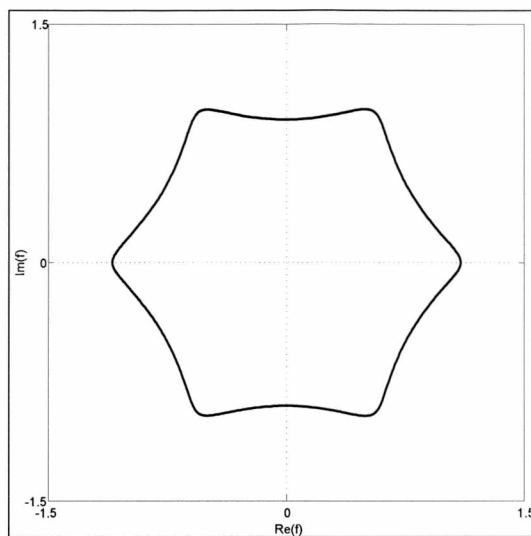
Rys.2.6. Widmo wektora przestrzennego.

W przypadku niesymetrii układu trójfazowego wektor przestrzenny zakreśla na płaszczyźnie zespolonej elipsę a w jego widmie pojawia się składowa przeciwna o ujemnej częstotliwości.

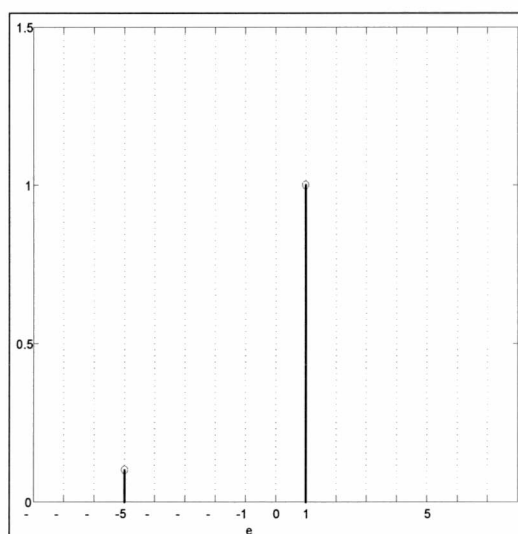
3. Przebiegi z zawartością 5. harmoniczną o amplitudzie równej $\frac{1}{10}$ amplitudy składowej podstawowej.



Rys.2.7. Przebiegi czasowe napięć.



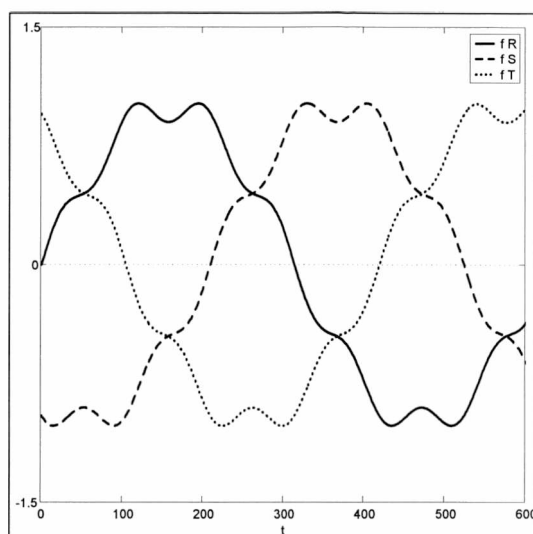
Rys.2.8. Wykres wektora przestrzennego.



Rys. 2.9. Widmo wektora przestrzennego.

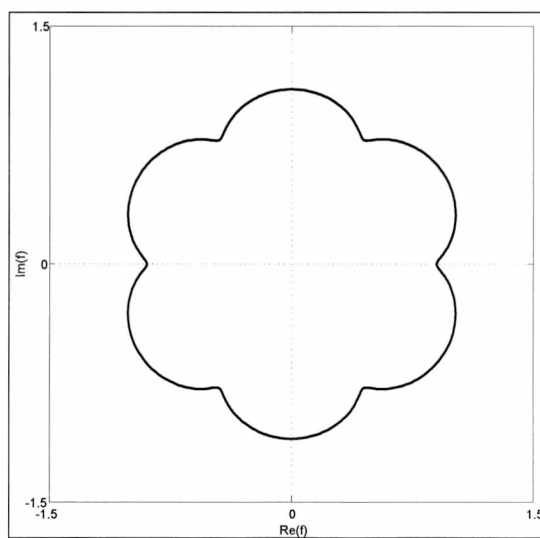
W obecności piątej harmonicznej obrazem wirującego wektora przestrzennego na płaszczyźnie zespolonej jest hipocykloida a w widmie pojawia się piąta harmoniczna należąca do przeciwnego układu napięć.

4. Przebiegi z zawartością 7. harmonicznej o amplitudzie równej $\frac{1}{10}$ amplitudy składowej podstawowej.

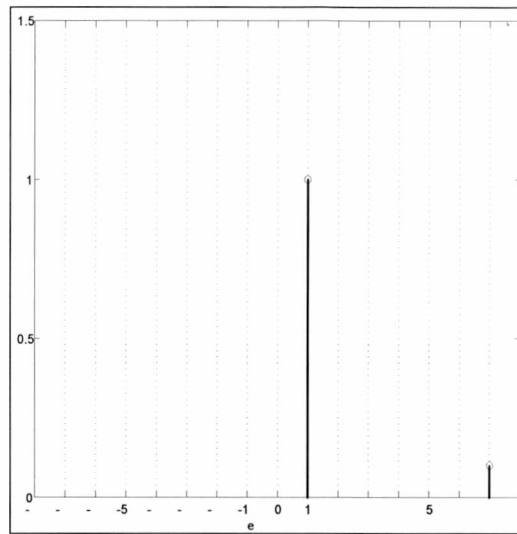


Rys.2.10. Przebiegi czasowe napięć.

Biblioteka
Pol. Wrocl.



Rys.2.11. Wykres wektora przestrzennego.



Rys.2.12. Widmo wektora przestrzennego.

W obecności siódmej harmonicznej obrazem wirującego wektora przestrzennego na płaszczyźnie zespolonej jest epicykloida a w widmie pojawia się siódma harmoniczna należąca do zgodnego układu napięć.

Rozdział 3

Widmowa gęstość mocy

Klasycznym narzędziem widmowej analizy sygnałów jest widmowa gęstość mocy. Podstawowym ograniczeniem jakości estymaty widma sygnałów losowych jest ograniczony w czasie okres obserwacji badanego sygnału. Przedstawiono zależności opisujące źródła błędów wyznaczenia widma sygnałów występujących w rzeczywistych zastosowaniach: wpływ okna analizującego i interakcji pomiędzy składowymi sygnału.

3.1 Dokładność estymacji widma

3.1.1 Sygnały ciągłe

Sygnały o jednej składowej

W rzeczywistych zastosowaniach możliwe jest badanie sygnału o ograniczonej czasowo długości co jest równoznaczne z nałożeniem na sygnał o nieskończonej długości okna prostokątnego o skończonej długości [59].

Badany sygnał zawiera jedną składową sinusoidalną o częstotliwości ω_i i fazie ϕ i jest postaci:

$$x(t) = \sin(\omega_i t + \phi) \quad (3.1)$$

Po poddaniu go transformacji Fouriera otrzymano:

$$X(\omega) = \pi \left[e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_i) + e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_i) \right] \quad (3.2)$$

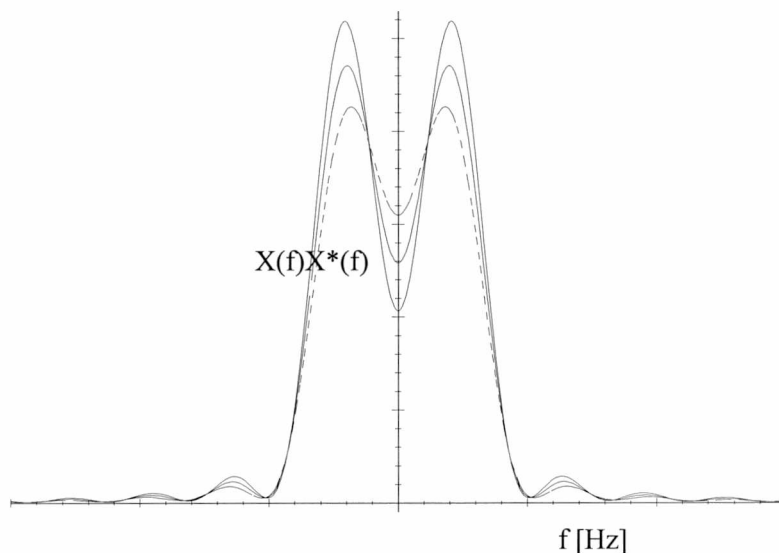
podczas gdy okno prostokątne o szerokości $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ma następującą transformatę Fouriera:

$$w(\omega) = T \frac{\sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega \frac{T}{2}} = T \operatorname{sinc}\left(\omega \frac{T}{2}\right) \quad (3.3)$$

Ostatecznie widmo mocy sygnału $x(t)$ można przedstawić wzorem:

$$X(\omega)X^*(\omega) = \left(\frac{T}{2}\right)^2 \left[\text{sinc}^2(\omega - \omega_1) \frac{T}{2} + \text{sinc}^2(\omega + \omega_1) \frac{T}{2} + 2 \cos(2\phi) \text{sinc}(\omega - \omega_1) \frac{T}{2} \text{sinc}(\omega + \omega_1) \frac{T}{2} \right] \quad (3.4)$$

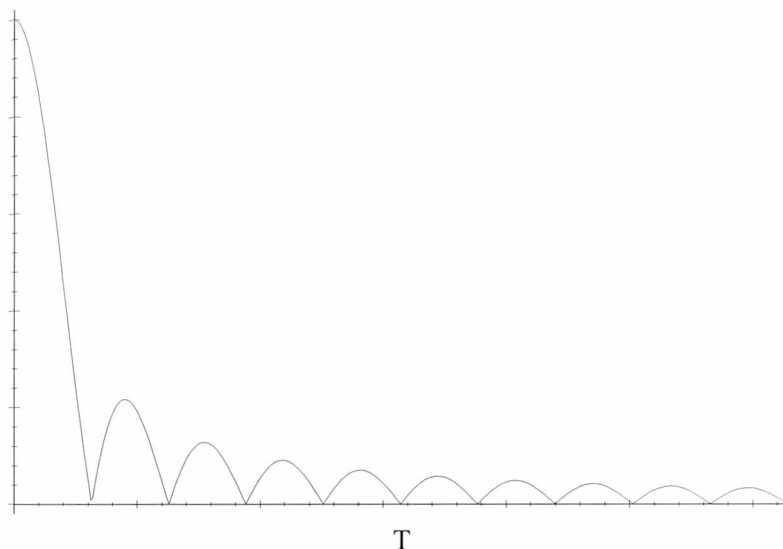
Ostatni składnik wyrażenia (3.4) opisuje interakcję pomiędzy ujemnymi i dodatnimi składowymi przebiegu sinusoidalnego. Interakcja ta jest przyczyną zmian położenia maksimum widma wraz ze zmianą fazy początkowej ϕ badanego sygnału (rys. 3.1). Wraz ze wzrostem długości okna T (rys. 3.2) maleje wpływ tego składnika (co wynika z właściwości funkcji sinc) na dokładność wyznaczenia widma sygnału.



Rys.3.1. Widmo mocy sygnału rzeczywistego (3.4) dla $\cos(\phi) = 0$ (—), $\cos(\phi) = 0,5$ (- - -), $\cos(\phi) = 1$ (· · · ·).

Istnieje możliwość minimalizacji wpływu fazy początkowej sygnału na dokładność estymacji widma dla ściśle określonych długości okna T i fazy ϕ . Należy tak dobrać fazę początkową sygnału aby wyrażenie $\cos(2\phi) = 0$. Ten warunek jest spełniony dla:

$$\phi = n \frac{\pi}{4}; \quad n \text{ nieparzyste} \quad (3.5)$$



Rys.3.2. Wpływ długości okna T na zależność dokładności widma od fazy sygnału (3.4).

W przypadku, gdy warunek (3.5) jest spełniony, widmo mocy sygnału dla częstotliwości ω_1 przyjmie postać:

$$P(\omega) = \left(\frac{T}{2}\right) [1 + \text{sinc}^2(\omega_1 T)] \quad (3.6)$$

Funkcja $\text{sinc}^2(\cdot)$ jest zawsze dodatnia i posiada miejsca zerowe w odstępach $(n\pi)$ od swojego maksimum. Wpływ ujemnych składowych widma zanika, gdy miejsce zerowe przypada dokładnie na ω_1 . Otrzymuje się wtedy bezbłędną estymatę widma po spełnieniu warunku:

$$T = \frac{n}{2f_1}; \quad n \text{ całkowite} \quad (3.7)$$

Otrzymanie bezbłędnej estymaty wymaga uprzedniej znajomości częstotliwości badanego sygnału. Jeśli oba warunki (3.5) i (3.7) są spełnione to otrzymuje się dokładne estymaty widma sygnału [59].

Sygnały o wielu składowych

Analiza sygnałów o wielu składowych jest trudna ze względu na obecność dodatkowych interakcji. W przypadku, gdy badany sygnał zawiera dwie składowe sinusoidalne o częstotliwościach ω_1, ω_2 i fazach ϕ_1, ϕ_2 i jest postaci:

$$x(t) = \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \sin(\omega_2 t + \phi_2) \quad (3.8)$$

Jego transformata Fouriera jest postaci:

$$X(\omega) = \pi \left[e^{j\phi_1} \delta(\omega - \omega_1) + e^{-j\phi_1} \delta(\omega + \omega_1) + e^{j\phi_2} \delta(\omega - \omega_2) + e^{-j\phi_2} \delta(\omega + \omega_2) \right] \quad (3.9)$$

Po nałożeniu okna prostokątnego o szerokości T widmo mocy sygnału w (3.8) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} |X(\omega)|^2 = & \left(\frac{T}{2} \right)^2 \left[\operatorname{sinc}^2(\omega - \omega_1) \frac{T}{2} + \operatorname{sinc}^2(\omega + \omega_1) \frac{T}{2} + \right. \\ & + \operatorname{sinc}^2(\omega - \omega_2) \frac{T}{2} + \operatorname{sinc}^2(\omega + \omega_2) \frac{T}{2} + \\ & + 2 \cos(2\phi_1) \operatorname{sinc}\left((\omega - \omega_1) \frac{T}{2}\right) \operatorname{sinc}\left((\omega + \omega_1) \frac{T}{2}\right) + \\ & + 2 \cos(2\phi_2) \operatorname{sinc}\left((\omega - \omega_2) \frac{T}{2}\right) \operatorname{sinc}\left((\omega + \omega_2) \frac{T}{2}\right) + \\ & + 2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \operatorname{sinc}(\omega - \omega_1) \frac{T}{2} \operatorname{sinc}(\omega - \omega_2) \frac{T}{2} + \\ & + \operatorname{sinc}(\omega + \omega_1) \frac{T}{2} \operatorname{sinc}(\omega + \omega_2) \frac{T}{2} + \\ & + 2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \operatorname{sinc}(\omega - \omega_1) \frac{T}{2} \operatorname{sinc}(\omega + \omega_2) \frac{T}{2} + \\ & \left. + \operatorname{sinc}(\omega + \omega_1) \frac{T}{2} \operatorname{sinc}(\omega - \omega_2) \frac{T}{2} \right] \quad (3.10) \end{aligned}$$

W wyrażeniu (3.10) cztery pierwsze składniki reprezentują interakcje pomiędzy dodatnimi i ujemnymi składowymi sygnału, kolejne reprezentują inne wzajemne oddziaływania pomiędzy składowymi. Położenie maksimów widma zmienia się w zależności od faz początkowych ϕ_1, ϕ_2 sygnału (3.8).

Rozważania dotyczące poprawy dokładności estymaty widma sprawdzają się także dla sygnałów o wielu składowych. Po zastosowaniu pewnych uproszczeń [59] dokładną estymatę widma otrzymuje się dla warunków (3.5) i (3.7) po podstawieniu $\phi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$ i $\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$.

3.1.2 Sygnały dyskretne

Sygnały o jednej składowej

Analiza sygnałów dyskretnych jest bardziej skomplikowana. Widmo mocy w przypadku sygnałów dyskretnych dla sygnału $x(n) = \sin(n\omega_1 T_0 + \phi)$

(T_0 – okres próbkowania, N – długość okna) wyraża się wzorem [59]:

$$|X(e^{j\omega T_0})|^2 = \frac{1}{4} \text{sind}_N^2\left((\omega - \omega_1) \frac{T_0}{2}\right) + \frac{1}{4} \text{sind}_N^2\left((\omega + \omega_1) \frac{T_0}{2}\right) + \\ + \frac{1}{2} \cos(2\phi + \alpha) \text{sind}_N\left((\omega - \omega_1) \frac{T_0}{2}\right) \text{sind}_N\left((\omega + \omega_1) \frac{T_0}{2}\right) \quad (3.11)$$

gdzie funkcja $\text{sind}_N(x)$ jest zdefiniowana jako $\text{sind}_N \triangleq \frac{\sin(Nx)}{\sin(x)}$
a $\alpha = \arg \left[\frac{1 - e^{-j(\omega - \omega_1)NT_0}}{1 - e^{-j(\omega - \omega_1)T_0}} \cdot \frac{1 - e^{-j(\omega + \omega_1)NT_0}}{1 - e^{-j(\omega + \omega_1)T_0}} \right]$

Odpowiednik (3.4) dla sygnałów dyskretnych ma podobną strukturę (po zastąpieniu funkcji $\text{sinc}(x)$ funkcją $\text{sind}(x)$). Trzeci składnik (3.11) reprezentuje interakcje pomiędzy składowymi sygnału i jest zależny od fazy początkowej badanego sygnału, czyli od pozycji okna pomiarowego.

W przypadku sygnałów dyskretnych jest trudniej znaleźć optymalną długość i pozycję okna, aby zminimalizować wpływ fazy sygnału na dokładność estymacji. Możliwa jest tylko pozycja okna przypadająca na moment próbkowania a długość okna musi być wielokrotnością okresu próbkowania. Można wyprowadzić [59] w tym przypadku przybliżony warunek na minimalizację błędu estymacji jako:

$$N = \frac{k}{4f_1T_0}; k \text{ nieparzyste, } N \text{ całkowite} \quad (3.12)$$

Tu także otrzymanie bezbłędnej estymaty jest uzależnione od wcześniejszej znajomości częstotliwości badanego sygnału, co można uzyskać przy pomocy algorytmów iteracyjnych.

Sygnały o wielu składowych

Analiza sygnału o dwóch składowych

$$x(n) = \sin(n\omega_1T_0 + \phi_1) + \sin(n\omega_2T_0 + \phi_2) \quad (3.13)$$

prowadzi do następujących zależności. Widmo mocy sekwencji próbek sygnału o długości N dane jest zależnością:

$$\begin{aligned}
|X(e^{j\omega T_0})|^2 = & \frac{1}{4} \left[\text{sind}_N^2 \left((\omega - \omega_1) \frac{T_0}{2} \right) + \text{sind}_N^2 \left((\omega + \omega_1) \frac{T_0}{2} \right) + \right. \\
& \text{sind}_N^2 \left((\omega - \omega_2) \frac{T_0}{2} \right) + \text{sind}_N^2 \left((\omega + \omega_2) \frac{T_0}{2} \right) + \\
& + 2 \cos(2\phi_1 + \alpha) \text{sind}_N \left[\left((\omega - \omega_1) \frac{T_0}{2} \right) \text{sind}_N \left((\omega + \omega_1) \frac{T_0}{2} \right) + \right. \\
& + \cos(2\phi_2 + \beta) \text{sind}_N \left((\omega - \omega_2) \frac{T_0}{2} \right) \text{sind}_N \left((\omega + \omega_2) \frac{T_0}{2} \right) + \\
& + 2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \text{sind}_N \left((\omega - \omega_1) \frac{T_0}{2} \right) \text{sind}_N \left((\omega - \omega_2) \frac{T_0}{2} \right) \cdot \\
& \cdot \text{sind}_N \left((\omega + \omega_1) \frac{T_0}{2} \right) \text{sind}_N \left((\omega + \omega_2) \frac{T_0}{2} \right) \left. \right] + \\
& + 2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \text{sind}_N \left((\omega - \omega_1) \frac{T_0}{2} \right) \text{sind}_N \left((\omega + \omega_2) \frac{T_0}{2} \right) + \\
& \left. + \text{sind}_N \left((\omega + \omega_1) \frac{T_0}{2} \right) \text{sind}_N \left((\omega - \omega_2) \frac{T_0}{2} \right) \right] \quad (3.14)
\end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha = \arg \left[\frac{1 - e^{-j(\omega - \omega_1)NT_0}}{1 - e^{-j(\omega - \omega_1)T_0}} \cdot \frac{1 - e^{-j(\omega + \omega_1)NT_0}}{1 - e^{-j(\omega + \omega_1)T_0}} \right] \quad (3.15)$$

$$\beta = \arg \left[\frac{1 - e^{-j(\omega - \omega_2)NT_0}}{1 - e^{-j(\omega - \omega_2)T_0}} \cdot \frac{1 - e^{-j(\omega + \omega_2)NT_0}}{1 - e^{-j(\omega + \omega_2)T_0}} \right] \quad (3.16)$$

Ze względu na skomplikowane zależności pomiędzy poszczególnymi składowymi sygnału i obecność wielu zależnych od fazy składników widma mocy nie jest możliwe wyprowadzenie warunku na eliminację wpływu faz początkowych składowych badanego sygnału. W przypadku sygnałów dyskretnych dodatkowym źródłem błędu jest dyskretyzacja sygnału.

Rozdział 4

Metody podprzestrzeni

Metody estymacji widma sygnałów losowych zwanych metodami podprzestrzeni należą do grupy metod parametrycznych bazujących na szczególnym modelu sygnału. Zakłada się, że badany sygnał składa się z zespolonych składowych wykładniczych (4.5) oraz szumu. Najistotniejszą informacją z punktu widzenia wyznaczenia widma sygnału są dyskretne składniki widma. Metody te charakteryzują się znacznie lepszą rozdzielczością i odpornością na szum niż metody fourierowskie.

W 1973 roku V.F. Pisarenko [43] zauważył, że zera transformaty Z wektora własnego odpowiadającego najmniejszej wartości własnej macierzy kowariancji leżą na okręgu jednostkowym, a ich położenie odpowiada częstościom sinusoid zawartych w badanym sygnale. Przyjęto, że macierz kowariancji ma rozmiar $2p + 1$, gdy p odpowiada liczbie sinusoid. Ulepszając tę metodę zaczęto badać macierz kowariancji o większym rozmiarze i wykazano, że wektory własne można podzielić na dwie grupy: na wektory własne rozpięte na podprzestrzeni sygnału i na wektory własne rozpięte na podprzestrzeni szumu, przy czym te ostatnie są wektorami własnymi odpowiadającymi najmniejszym wartościom własnym. Te ustalenia stały się podstawą metod MN, MUSIC, ESPRIT i metod pokrewnych [58].

4.1 Wprowadzenie

Poniżej przedstawiona metoda należy do grupy metod parametrycznych. Zakłada się, że badany sygnał opisany jest modelem macierzy korelacji. Opis praktycznego zastosowania metody Pisarenki podano w dodatku A.

4.1.1 Macierz korelacji

Podstawą prezentowanej poniżej metody estymacji widma jest macierz korelacji [37], zdefiniowana w następujący sposób. Niech $\mathbf{x}$ będzie losowym wektorem składającym się z N próbek procesu losowego $\mathbf{x}$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Macierz korelacji dyskretnego procesu losowego jest zdefiniowana jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \mathcal{E} \{ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^{*T} \} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{E} \{ |x(0)|^2 \} & \mathcal{E} \{ x(0) x^*(1) \} & \cdots & \mathcal{E} \{ x(0) x^*(N-1) \} \\ \mathcal{E} \{ x(1) x^*(0) \} & \mathcal{E} \{ |x(1)|^2 \} & \cdots & \mathcal{E} \{ x(1) x^*(N-1) \} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E} \{ x(N-1) x^*(0) \} & \mathcal{E} \{ x(N-1) x^*(1) \} & \cdots & \mathcal{E} \{ |x(N-1)|^2 \} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_x(0,0) & R_x(0,1) & \cdots & R_x(0,N-1) \\ R_x(1,0) & R_x(1,1) & \cdots & R_x(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(N-1,0) & R_x(N-1,1) & \cdots & R_x(N-1,N-1) \end{bmatrix} * \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dla stacjonarnego procesu losowego macierz korelacji przybiera formę symetrycznej macierzy Toeplitza.

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & & R_x(-N+1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & R_x(0) & R_x(-1) \\ R_x(N-1) & & & R_x(1) & R_x(0) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

4.1.2 Macierz kowariancji

Macierz kowariancji jest zdefiniowana jako:

$$\mathbf{C}_x = \mathcal{E} \{ (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^{*T} \} \quad (4.4)$$

Dla stacjonarnego procesu losowego funkcja korelacji zależy tylko od jednego argumentu a macierz kowariancji przybiera także formę symetrycznej macierzy Toeplitza.

4.2 Wprowadzenie metod podprzestrzeni

Rozpatruje się sygnał $\mathbf{x}$ składający się z M niezależnych sygnałów w szumie η :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^M A_i s_i + \eta; \quad A_i = |A_i| e^{j\phi_i}; \quad s_i = e^{j\omega_i} \quad (4.5)$$

gdzie A_i jest amplitudą zespoloną sygnału s_i o częstotliwości ω_i , inaczej:

$$\mathbf{x} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_M \end{bmatrix}^T + \eta \quad (4.6)$$

gdzie:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \dots & \mathbf{s}_M \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Jest to ogólny model sygnału używany we wszystkich metodach podprzestrzeni.

Macierz autokorelacji sygnału (przy założeniu, że szum jest biały) wyrażamy zależnością:

$$\mathbf{R}_x = \sum_{i=1}^M \mathcal{E} \{ A_i A_i^* \} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T + \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad (4.8)$$

inaczej:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{S} \mathbf{P}_0 \mathbf{S}^{*T} + \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad (4.9)$$

gdzie:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{E} \{ A_1 A_1^* \} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \{ A_2 A_2^* \} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{E} \{ A_M A_M^* \} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$(N - M)$ najmniejszych wartości własnych macierzy autokorelacji, która ma wymiar $N > M + 1$ odpowiada szumowi a M największych (większych niż σ_0^2) odpowiada sygnałowi.

Zdefiniowano macierze wektorów własnych sygnału i szumu:

$$\mathbf{E}_{syg} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_M \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{E}_{sz} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{e}_{M+1} & \mathbf{e}_{M+2} & \cdots & \mathbf{e}_N \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

i macierze wartości własnych:

$$\Lambda_{syg} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_M \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\Lambda_{sz} = \begin{bmatrix} \lambda_{M+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{M+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_0^2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Macierz korelacji $\mathbf{R}_x$ można zapisać jako:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{E}_{syg} \Lambda_{syg} \mathbf{E}_{syg}^{*T} + \mathbf{E}_{sz} \Lambda_{sz} \mathbf{E}_{sz}^{*T} \quad (4.15)$$

Wyrażając macierz operatora rzutowania ortogonalnego $\mathbf{P}_X$ przy pomocy $\mathbf{E}_{syg}$ (uwzględniając fakt, że kolumny macierzy $\mathbf{E}_{syg}$ są ortonormalne i definiują podprzestrzeń sygnału) otrzymano:

$$\mathbf{P}_{syg} = \mathbf{E}_{syg} (\mathbf{E}_{syg}^{*T} \cdot \mathbf{E}_{syg})^{-1} \mathbf{E}_{syg}^{*T} = \mathbf{E}_{syg} \cdot \mathbf{E}_{syg}^{*T} \quad (4.16)$$

Podobnie można wyrazić $\mathbf{P}_X$ przy pomocy $\mathbf{E}_{sz}$.

$$\mathbf{P}_{sz} = \mathbf{E}_{sz}^{*T} \cdot \mathbf{E}_{sz} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{syg} \quad (4.17)$$

4.3 Metoda minimum normy (MN)

Podstawą tej metody jest dobór odpowiedniego wektora $\mathbf{d}$ należącego do podprzestrzeni szumu i zdefiniowanie pseudospektrum jako jego funkcji [58].

Wektor ten jest tak dobrany, aby kwadrat jego modułu był minimalny, gdy pierwszy z jego elementów jest równy jedności. Uzasadnienie takiego wyboru tego jednego szczególnego wektora można znaleźć w [20]. Aby znaleźć optymalny wektor $\mathbf{d}$ należy wyrazić te dwa warunki w postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{E}_{sz} \cdot \mathbf{E}_{sz}^{*T} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^{*T} \mathbf{l} &= 1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

Z warunków (4.18) utworzono jeden warunek:

$$\mathbf{d}^{*T} l = (\mathbf{E}_{sz} \cdot \mathbf{E}_{sz}^{*T} \mathbf{d})^{*T} \cdot l = \mathbf{d}^{*T} \mathbf{E}_{sz} \cdot \mathbf{E}_{sz}^{*T} \cdot l = 1 \quad (4.19)$$

a następnie utworzono lagrangian:

$$\mathcal{L} = \mathbf{d}^{*T} \mathbf{d} + \mu (1 - \mathbf{E}_{sz} \cdot \mathbf{E}_{sz}^{*T} \cdot l) + \mu^* (1 - l^T \mathbf{E}_{sz} \cdot \mathbf{E}_{sz}^{*T} \mathbf{d}) \quad (4.20)$$

Gradient zespolony (4.20) ma postać:

$$\nabla_{\mathbf{d}^*} \mathcal{L} = \mathbf{d} - \mu \mathbf{E}_{sz} \cdot \mathbf{E}_{sz}^{*T} \cdot l \quad (4.21)$$

gdzie μ należy dobrać tak, aby pierwszy element wektora był równy jedności. W tym celu można przedstawić macierz $\mathbf{E}_{sz}$ w postaci:

$$\mathbf{E}_{sz} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{*T} \\ \mathbf{E}'_{sz} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

gdzie $\mathbf{c}^{*T}$ jest górnym rzędem macierzy $\mathbf{E}_{sz}$. Stąd $\mathbf{c} = \mathbf{E}_{sz}^{*T} \cdot l$. Z równań (4.21) i (4.22) wynika, że pierwszy element wektora $\mathbf{d}$ jest równy $\mu \mathbf{c}^{*T} \mathbf{c}$, skąd można wyznaczyć μ . Ostatecznie wektor $\mathbf{d}$ wyraża się równaniem:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\mathbf{c}^{*T} \mathbf{c}} \mathbf{E}_{sz} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\mathbf{E}'_{sz} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^{*T} \mathbf{c}} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Pseudospektrum zdefiniowane przy pomocy wektora $\mathbf{d}$ ma postać:

$$\hat{P}_{MN}(e^{j\omega}) = \frac{1}{|\mathbf{w}^{*T} \mathbf{d}|^2} = \frac{1}{\mathbf{w}^{*T} \mathbf{d} \mathbf{d}^{*T} \mathbf{w}} \quad (4.24)$$

gdzie $\mathbf{w}$ jest zdefiniowany następująco:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_i} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_i} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Nazwa „pseudospektrum” jest uzasadniona ze względu na fakt, że wyznaczona wielkość $\hat{P}_{MN}(e^{j\omega})$ nie jest estymatorem widma, umożliwia tylko wyznaczenie częstotliwości $\{\omega_i\}_{i=1}^M$ dyskretnych składowych sygnału.

Należy udowodnić, że tylko częstotliwości $\{\omega_i\}_{i=1}^M$ są rozwiązaniem równania:

$$\mathbf{w}^{*T} \mathbf{d} \mathbf{d}^{*T} \mathbf{w} = 0 \quad (4.26)$$

Zakłada się [54], że istnieje jeszcze jedno rozwiązanie równania (4.26) $\omega_{\vartheta} \neq \omega_i$ ($i = 1, \dots, M$). Wyrażenie $\mathbf{d} \mathbf{d}^{*T}$ jest operatorem rzutowania ortogonalnego wektora $\mathbf{w}$ na podprzestrzeń szumu. Z równania (4.26) wynika, że $\mathbf{w}(\omega_{\vartheta})$ jest ortogonalny do tej podprzestrzeni. Jednocześnie wektor $\mathbf{w}(\omega_{\vartheta})$ jest liniowo niezależny od $\{\mathbf{w}(\omega_i)\}_{i=1}^M$. Stąd wynika, że ω_{ϑ} nie może być rozwiązaniem równania (4.26), ponieważ $M+1$ niezależnych liniowo wektorów nie może należeć do podprzestrzeni sygnału o rozmiarze M .

4.4 Estymacja parametrów sygnału

Po wyznaczeniu częstotliwości składowych sygnału, wyznaczenie pozostałych parametrów sprowadza się do problemu regresji liniowej [54]. Zbiór obserwacji sygnału $\mathbf{x}$ może być przedstawiony jako funkcja regresji liniowej, której współczynniki są pozostałymi nieznanymi parametrami:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^M A_i e^{j\omega_i} e^{j\phi_i} + \eta \quad (4.27)$$

Rozwiązanie równania (4.27) można uzyskać metodą najmniejszych kwadratów [46].

Korzystając z estymatora funkcji autokorelacji sygnału

$$R(k) = \mathcal{E} \{x(t) x^*(t-k)\} = \sum_{i=1}^M A_i^2 e^{j\omega_i k} + \sigma_0^2 \delta_{k,0} \quad (4.28)$$

można wyznaczyć moc A_i^2 poszczególnych składowych sygnału, co również sprowadza się do problemu regresji liniowej.

Rozdział 5

Statystyki wyższych rzędów

Podstawową cechą odróżniającą kumulanty od korelacji jest to, że wartość kumulantu jest całkowicie niezależna od wszelkiego rodzaju procesów o rozkładzie normalnym. Oznacza to w praktyce, że zastosowanie statystyk wyższego rzędu wobec użytecznego sygnału, nie posiadającego rozkładu normalnego, zakłóconego szumem o rozkładzie normalnym - nawet szumem kolorowym - automatycznie polepsza stosunek sygnału do szumu. Większość rzeczywistych sygnałów nie posiada rozkładu normalnego a szum pomiarowy można opisać jako kolorowy proces o rozkładzie normalnym. Ponadto, kumulanty zawierają informacje o amplitudzie i fazie danego procesu, podczas gdy korelacja i widmo mocy zawiera informację tylko o amplitudzie. Poniżej przedstawiono definicje i właściwości kumulantów oraz sposób ich zastosowania w parametrycznych metodach estymacji widma.

5.1 Definicje kumulantów

Niech będzie dany zbiór n rzeczywistych zmiennych losowych $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Kumulanty k -tego rzędu ($k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$) tych zmiennych można zdefiniować następująco [38]:

$$c_{k_1 \dots k_n} \hat{=} (-j)^k \frac{\partial^k \ln \Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial \omega^{k_1} \partial \omega^{k_2} \dots \partial \omega^{k_n}} \Big|_{\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0} \quad (5.1)$$

gdzie $\Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \mathcal{E} \{ e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n)} \}$ jest ich funkcją charakterystyczną.

Jednocześnie momenty k -tego rzędu tych zmiennych losowych wyrażają się wzorem:

$$m_{k_1 \dots k_n} \hat{=} (-j)^k \frac{\partial^k \Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial \omega^{k_1} \partial \omega^{k_2} \dots \partial \omega^{k_n}} \Big|_{\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0} \quad (5.2)$$

Kumulanty drugiego, trzeciego i czwartego rzędu procesu $\{x(t)\}$ o średniej zerowej można zdefiniować następująco [40]:

$$\begin{aligned} c_{2,x}(\tau) &= \mathcal{E} \{x(t) x(t+\tau)\} \\ c_{3,x}(\tau) &= \mathcal{E} \{x(t) x(t+\tau_1) x(t+\tau_2)\} \\ c_{4,x}(\tau) &= \mathcal{E} \{x(t) x(t+\tau_1) x(t+\tau_2) x(t+\tau_3)\} - c_{2,x}(\tau_1) c_{2,x}(\tau_2 - \tau_3) - \\ &\quad - c_{2,x}(\tau_2) c_{2,x}(\tau_3 - \tau_1) - c_{2,x}(\tau_3) c_{2,x}(\tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Wnioski wynikające z równań (5.3):

1. Kumulant pierwszego rzędu jest wartością średnią.
2. Kumulant drugiego rzędu jest autokorelacją $x(t)$.
3. Kumulant trzeciego rzędu jest identyczny z momentem trzeciego rzędu $x(t)$.
4. Kumulant czwartego rzędu różni się od momentu czwartego rzędu sześcioma różnymi funkcjami autokorelacji.
5. Kumulant k -tego rzędu nie zależy od czasu t , pod warunkiem, że proces $x(t)$ jest stacjonarny aż do rzędu k .

Jednowymiarowy przekrój kumulantu k -tego rzędu otrzymuje się przez zamrożenie $(k-2)$ z jego $(k-1)$ indeksów. Możliwe jest uzyskanie różnego rodzaju przekrojów np. przez podstawienie $\tau_i = \tau, i = 1, 2, \dots, (k-1)$ otrzymuje się przekrój diagonalny.

5.2 Właściwości kulantów

Kumulanty można traktować jak operatory ze względu na poniższe właściwości [38].

1. Kumulant zmiennych skalowanych przy pomocy współczynników a_i równa się iloczynowi tych współczynników i kumulantu zmiennych nie skalowanych. Jeśli $a_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ są stałymi a x_i zmiennymi losowymi to:

$$\text{cum}(a_1 x_1, \dots, a_n x_n) = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \text{cum}(x_1, \dots, x_n) \quad (5.4)$$

2. Kumulant jest symetryczny względem swoich argumentów:

$$\text{cum}(x_1, \dots, x_n) = \text{cum}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \quad (5.5)$$

gdzie $(i_1, \dots, i_n)$ jest permutacją $(1, \dots, n)$; oznacza to, że można dowolnie zmieniać kolejność argumentów kumulantu bez zmiany jego wartości, np. $c_4^x(\tau_3, \tau_1, \tau_2) = c_4^x(\tau_2, \tau_3, \tau_1)$.

3. Kumulant jest addytywny względem swoich argumentów, to znaczy, że kumulant sumy argumentów jest równy sumie kumulantów tych argumentów czyli jeśli nawet x_0 i y_0 nie są statystycznie niezależne to:

$$\text{cum}(x_0 + y_0, z_1, \dots, z_n) = \text{cum}(x_0, z_1, \dots, z_n) + \text{cum}(y_0, z_1, \dots, z_n) \quad (5.6)$$

4. Wartość kumulantu nie zależy od dodanej do argumentu stałej; jeśli a jest stałą to:

$$\text{cum}(a + z_1, z_2, \dots, z_n) = \text{cum}(z_1, \dots, z_n) \quad (5.7)$$

5. Kumulant sumy statystycznie niezależnych wielkości jest równy sumie kumulantów pojedynczych wielkości. Jeśli zmienne losowe $\{x_i\}$ są niezależne wobec zmiennych $\{y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$ to:

$$\text{cum}(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = \text{cum}(x_1, \dots, x_n) + \text{cum}(y_1, \dots, y_n) \quad (5.8)$$

6. Jeśli n zmiennych losowych zbioru $\{x_i\}$ jest niezależnych od pozostałych to:

$$\text{cum}(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (5.9)$$

Dowody powyższych właściwości zawarte są w [39].

5.3 Statystyki procesów harmonicznych

5.3.1 Definicje procesów harmonicznych

Zastosowania praktyczne przetwarzania sygnałów dotyczą sygnałów, które można określić jako rzeczywiste lub zespolone procesy harmoniczne (sinusoidalne). Sygnały te można ogólnie przedstawić wzorem [35]:

$$y(n) = \sum_{i=1}^n a_i(n) s_n(\omega_i) \quad (5.10)$$

gdzie $s_n(\cdot)$ oznacza kształt przebiegu sygnału, ω_i są stałymi a $a_i(n)$ są zmiennymi losowymi.

Gdy zmienne losowe są zespolone - (5.10) można przedstawić w postaci :

$$y(n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{j(\omega_i n + \phi_i)} \quad (5.11)$$

gdzie ϕ_i oznacza zbiór niezależnych zmiennych losowych równomiernie rozłożonych na $[-\pi, \pi]$, $\omega_i \neq \omega_j$ dla $i \neq j$ a α_i i ω_i są stałymi.

Odpowiednikiem wzoru (5.10) dla sygnałów rzeczywistych jest:

$$y(n) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cos(\omega_i n + \phi_i) \quad (5.12)$$

5.3.2 Definicje i właściwości kumulantów procesów harmonicznych

Niech $b = e^{j\psi}$, gdzie ψ jest równomiernie rozłożona na $[-\pi, \pi]$. Udowodniono następujące właściwości [39]:

1. Wszystkie kumulanty trzeciego rzędu zmiennych typu $b = e^{j\psi}$ są równe zero.
2. Tylko jeden z trzech sposobów obliczania kumulantu czwartego rzędu zmiennych b daje wynik różny od zera, czyli: $cum(b, b, b, b) = 0$, $cum(b^*, b, b, b) = 0$ ale $cum(b^*, b^*, b, b) = -1$.

Z powyższych właściwości wynika definicja kumulantu czwartego rzędu dla procesu zespolonego $y(n)$:

$$c_{4,y} = cum(y^*(n), y^*(n + \tau_1), y^*(n + \tau_2), y^*(n + \tau_3)) \quad (5.13)$$

gdzie $cum(\dots)$ zdefiniowany jest jak w (5.3)

Kumulant czwartego rzędu sygnałów opisanych wzorem(5.10) ma postać:

$$c_{4,y} = \sum_{i=1}^p s_n^*(\omega_i) s_{n+\tau_1}^*(\omega_i) s_{n+\tau_2}^*(\omega_i) s_{n+\tau_3}^*(\omega_i) c_{4,a_i}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \quad (5.14)$$

W przypadku (5.11), zmiennych harmonicznych zespolonych:

$$c_{4,y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = - \sum_{k=1}^p \alpha_k^4 e^{j\omega_k(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)} \quad (5.15)$$

W przypadku (5.12), zmiennych harmonicznych rzeczywistych:

$$c_{4,y} = -\frac{1}{8} \sum_{k=1}^p \alpha_k^4 [\cos(\omega_k(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)) + \cos(\omega_k(-\tau_1 + \tau_2 - \tau_3)) + \cos(\omega_k(-\tau_1 - \tau_2 + \tau_3))] \quad (5.16)$$

Jednocześnie:

$$c_{2,y} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \alpha_k^2 \cos(\omega_k \tau) \quad (5.17)$$

Związek pomiędzy autokorelacją a kumulantem

Jeśli $y(n)$ jest sumą p rzeczywistych sinusoid, to każdy jednowymiarowy przekrój jego kumulantu czwartego rzędu zawiera pełną informację o liczbie harmonicznych, ich amplitudzie i częstotliwościach. W szczególności, jeżeli podstawić $\tau = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ w (5.16) to równanie przyjmie postać:

$$c_{4,y} = -\frac{3}{8} \sum_{k=1}^p \alpha_k^4 \cos(\omega_k \tau) \quad (5.18)$$

Jest to wyrażenie prawie identyczne z autokorelacją sygnału. (por. (5.17) i (5.18)).

Wszystkie korelacyjne metody analizy można uzupełnić ich odpowiednikami wykorzystującymi kumulanty, uzyskując kosztem umiarkowanego wzrostu złożoności obliczeniowej teoretyczną niewrażliwość na addytywny gaussowski szum kolorowy [55].

5.4 Estymacja statystyk wyższych rzędów

5.4.1 Wprowadzenie

Definicje i właściwości statystyk opierają się na założeniu, że znane są nieskończone realizacje procesu. W praktyce dostępne są wyłącznie dane w postaci zbioru próbek sygnału o skończonej długości.

W przypadku, gdy rozkład badanej cechy mierzalnej nie jest znany, zachodzi potrzeba oszacowania potrzebnych parametrów tego rozkładu. Estymator parametru $\hat{\theta}_n = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest funkcją, która ma tę właściwość, że prawdopodobieństwo zdarzenia $\theta \approx \hat{\theta}_n$ jest tym bliższe jedności im większa jest liczebność próbki [6].

5.4.2 Estymatory statystyk wyższych rzędów

Niech $\{X(1), X(2), \dots, X(N)\}$ będzie zbiorem próbek reprezentujących realizację ściśle stacjonarnego procesu losowego lub sygnał deterministyczny. Algorytm obliczania estymatora kumulantu jest następujący [40]:

1. Należy podzielić zbiór próbek na K segmentów po M próbek każdy, tak aby $N = K \cdot M$, w celu zmniejszenia wariancji estymatora [58]
Jeśli proces jest okresowy wtedy M powinno być równe całkowitej wielokrotności okresu sygnału.

2. Jeżeli wartość średnia procesu jest różna od zera, to od każdej z próbek w segmencie odejmowana jest wartość średnia wszystkich próbek danego segmentu.
3. Przy założeniu, że $\{x^{(i)}(k); k = 0, 1, \dots, (M-1)\}$ jest zbiorem próbek przypadającym na segment $i = 1, 2, \dots, K$, naturalne estymatory momentów wyższych rzędów są wyrażone wzorem:

$$m_n^{(i)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \frac{1}{M} \sum_{k=s_1}^{s_2} x^{(i)}(k) x^{(i)}(k + \tau_1) \dots x^{(i)}(k + \tau_{n-1}) \quad (5.19)$$

gdzie $n = 2, 3, \dots$; $i = 1, 2, \dots, K$; $s_1 = \max(0, -\tau_1, \dots, -\tau_{n-1})$; $s_2 = \min(M-1, M-1-\tau_1, \dots, M-1-\tau_{n-1})$; $\tau_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; oraz $|\tau_k| \leq L_n$ (L_n określa dziedzinę estymowanego momentu rzędu n)

4. Estymator momentu rzędu n otrzymuje się po uśrednieniu wszystkich segmentów według wzoru:

$$m_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K m_n^{(i)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (5.20)$$

gdzie $n = 2, 3, \dots$; $|\tau_k| \leq L_n$.

5. Estymatory kumulantów $\hat{c}_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ sygnałów stochastycznych są wyznaczane zgodnie ze wzorami:

$$\begin{aligned} \hat{c}_2^x(\tau_1) &= \hat{m}_2^x(\tau_1) \\ \hat{c}_3^x(\tau_1, \tau_2) &= \hat{m}_3^x(\tau_1, \tau_2) \\ \hat{c}_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \hat{m}_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - \hat{m}_2^x(\tau_1) \hat{m}_2^x(\tau_3 - \tau_2) \\ &\quad - \hat{m}_2^x(\tau_2) \hat{m}_2^x(\tau_3 - \tau_1) - \hat{m}_2^x(\tau_3) \hat{m}_2^x(\tau_2 - \tau_1) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Rozdział 6

Analiza czasowo-częstotliwościowa

Przedstawiono zagadnienie wyznaczania czasowo-częstotliwościowej reprezentacji sygnałów zmiennych w czasie, właściwości krótkoczasowej transformacji Fouriera, definicje, właściwości i zagadnienie wyznaczania dystrybucji Wignera-Ville'a, źródła błędów w przypadku zastosowania tego przekształcenia do wyznaczania widma skończonych sygnałów o wielu składowych. Zaproponowano sposób wyznaczania widma sygnałów przy pomocy parametrycznego modelu otrzymanego metodą minimum-normy.

Podstawowym zadaniem przetwarzania sygnałów jest takie przekształcenie sygnału, aby jego właściwości stały się widoczne i dostępne dla analizy [47]. Badany sygnał można przedstawić jako funkcję czasu lub jako funkcję częstotliwości. Reprezentacja czasowa jest reprezentacją naturalną, podczas gdy reprezentacja częstotliwościowa zyskała popularność w początkach XIX wieku, gdy Fourier zaproponował zastosowanie harmonicznym szeregom trygonometrycznym. Teoretycznie możliwe jest przedstawienie sygnału na wiele sposobów, jednak tylko te dwie metody zyskały popularność i wiele praktycznych zastosowań.

Tradycyjnie analizuje się sygnał jako funkcję czasu **lub** jako funkcję częstotliwości. W rzeczywistości, zawartość częstotliwościowa większości sygnałów zmienia się w czasie i korzystniej jest analizować sygnały jednocześnie w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości.

Celem analizy czasowo-częstotliwościowej jest znalezienie takiej funkcji, która określa rozkład gęstości energii sygnału jednocześnie w czasie i częstotliwości. Z matematycznego punktu widzenia istnieje nieskończenie wiele dystrybucji czasowo-częstotliwościowych spełniających fundamentalny warunek niepewności¹. Nie istnieje dotąd pełna matematyczna teoria tych dystrybucji. Wybór stosowanych w praktyce dystrybucji nie jest tylko wyini-

¹zasada nieoznaczoności Heisenberga

kiem ścisłych wyprowadzeń matematycznych, ale wypadkową doświadczeń, matematycznej intuicji i interpretacji opisywanych zjawisk fizycznych [10].

Najczęściej stosowaną liniową reprezentacją czasowo-częstotliwościową jest krótkoczasowa transformacja Fouriera (STFT²). Przedstawicielem bilinearnej reprezentacji jest dystrybucja Wignera-Ville’a, która lepiej charakteryzuje zależne od czasu widmo sygnału niż spektrogram (STFT podniesiona do kwadratu) czy skalogram (reprezentacja falkowa sygnału podniesiona do kwadratu) [47], lecz posiada także właściwości utrudniające interpretację widma. Porównanie rozdzielczości dystrybucji Wignera-Ville’a i STFT podano w dodatku B.

6.1 Krótkoczasowa transformacja Fouriera

Klasyczna transformacja Fouriera uniemożliwia ocenę zmian widma sygnału w czasie, ponieważ jego funkcje bazowe nie są zlokalizowane w czasie. Uzyskanie widma sygnału zależnego od czasu umożliwia wprowadzenie funkcji bazowej zlokalizowanej zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości. Funkcja analizująca, z którą porównuje się badany sygnał, nazywana jest funkcją okna. Funkcję okna dobiera się tak, aby w jak najmniejszym stopniu zmieniała właściwości sygnału wokół chwili czasu t a eliminowała go dla czasów τ odległych od t . Krótkoczasowa transformacja Fouriera sygnału $s(\tau)$ jest przedstawiona wzorem [47]:

$$X_{STFT}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \gamma_{t, \omega}^*(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \gamma^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (6.1)$$

gdzie $\gamma(t)$ jest funkcją okna. Polega ona na porównaniu badanego sygnału z funkcją bazową postaci: $\gamma^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau}$. Jedną z interpretacji wzoru (6.1) jest metoda praktycznej implementacji algorytmu STFT. Polega ona na wyznaczeniu iloczynu przebiegu czasowego sygnału i funkcji okna a następnie poddaniu transformacji Fouriera iloczynu $s(\tau) \gamma^*(\tau - t)$. Wyznaczone przy pomocy funkcji okna widmo reprezentuje lokalną zawartość częstotliwościową sygnału. Jeśli oznaczyć jako Δ_t przedział niezerowej wartości funkcji $\gamma(t)$ a jako Δ_ω szerokość pasma to $X_{STFT}(t, \omega)$ charakteryzuje sygnał na przedziale $[t - \Delta_t, t + \Delta_t] \times [\omega - \Delta_\omega, \omega + \Delta_\omega]$. Poważnym ograniczeniem tej metody jest wzajemna zależność rozdzielczości w czasie od rozdzielczości w dziedzinie częstotliwości.

Nie jest możliwe dowolne zwiększanie rozdzielczości czasowej widma, ponieważ widmo sygnału wyznaczane w krótkich przedziałach czasowych traci związku z sygnałem oryginalnym i staje się nieprzydatne do analizy. Podstawowym ograniczeniem w przypadku widma sygnału jest warunek niepewności w odniesieniu do krótkich przedziałów czasowych, w których wyznaczane jest widmo sygnału [10].

²short-time Fourier transform

6.1.1 Właściwości STFT

Widmo gęstości energii STFT dane jest wzorem [10]:

$$|S_{STFT}(t, \omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \gamma(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (6.2)$$

Stąd można wyprowadzić:

- brzegowy warunek czasowy - poprzez całkowanie po ω .

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |S_{STFT}(t, \omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2 |\gamma(\tau - t)|^2 d\tau \neq |s(t)|^2 \quad (6.3)$$

podobnie można wyznaczyć:

- brzegowy warunek częstotliwościowy:

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega')|^2 |S_\gamma(\omega')|^2 d\omega' \neq |S(\omega)|^2 \quad (6.4)$$

Oznacza to, że STFT nie spełnia tych podstawowych warunków i średnie wartości funkcji czasowych i częstotliwościowych nie będą nigdy zachowane w tym przekształceniu. Istotą przekształcenia STFT jest zmieszanie funkcji gęstości energii okna z funkcją gęstości energii sygnału co wprowadza zniekształcenia nieobecne w sygnale oryginalnym.

6.2 Dystrybucja Wignera-Ville'a

Dystrybucja Wignera jest pierwszym z przekształceń jakościowo różnych od spektrogramu. Mimo fundamentalnych różnic obie te metody należą do jednej klasy reprezentacji określonej jako klasa Cohena [10].

6.2.1 Wstęp

Reprezentacje sygnału można podzielić na liniowe (jak transformacja Fouriera) i kwadratowe (jak widmo mocy). Reprezentacje czasowo-częstotliwościowe można także podzielić na liniowe (jak STFT, falki) i nieliniowe. Dystrybucja Wignera-Ville'a jest kwadratową albo bilinearną reprezentacją czasowo-częstotliwościową.

Otrzymanie dystrybucji Wignera dla danej chwili czasu polega na dodaniu do siebie elementów będących iloczynami wartości sygnału w przeszłości i wartości sygnału w przyszłości, przy jednakowych odstępach czasowych.

6.2.2 Definicja

Jedną z metod poznania, jak częstotliwościowa zawartość sygnału zmienia się w czasie, jest utworzenie widma mocy zależnego od czasu.

$$P(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (6.5)$$

Wybór funkcji $R(t, \tau)$ nie jest dowolny [47]. Należy ją tak dobrać, aby widmo odzwierciedlało rzeczywiste zmiany częstotliwości badanego sygnału a ponadto spełniało dodatkowe warunki: brzegowy warunek częstotliwościowy, brzegowy warunek czasowy oraz powinno być wielkością rzeczywistą i nieujemną. Spełnienie powyższych warunków nie jest proste (np. spektrogram STFT nie spełnia ani brzegowego warunku częstotliwościowego ani czasowego)[10].

W dystrybucji Wignera-Ville'a (WVD) wybrano, jako czasowo zmienną funkcję autokorelacji, następującą funkcję (s - dowolny sygnał):

$$R(t, \tau) = s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (6.6)$$

Po podstawieniu do (6.5) otrzymano:

$$W(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (6.7)$$

i równoważne wyrażenie wykorzystujące widmo sygnału $S(\omega)$

$$W(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S\left(\omega + \frac{\theta}{2}\right) S^*\left(\omega - \frac{\theta}{2}\right) e^{-j\omega\theta} d\theta \quad (6.8)$$

6.2.3 Właściwości dystrybucji Wignera-Ville'a

- Dystrybucja Wignera jest zawsze wielkością rzeczywistą nawet dla sygnałów zespolonych.

$$W(t, \omega) = W^*(t, \omega) \quad (6.9)$$

- Właściwość częstotliwości chwilowej

Właściwość ta określa czy dana reprezentacja czasowo-częstotliwościowa odzwierciedla wiernie rzeczywiste zmiany zawartości widma badanego sygnału. Dowodzi się [47], że WVD spełnia warunek:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega P(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) d\omega} = \varphi'(t) \quad (6.10)$$

$\varphi'(t)$ czyli pierwsza pochodna fazy sygnału odpowiada średniej chwilowej częstotliwości sygnału $\langle \omega \rangle_t$. Oznacza to, że w chwili t średnia chwilowa częstotliwość WVD odpowiada średniej chwilowej częstotliwości badanego sygnału.

- Brzegowy warunek częstotliwościowy

Suma wszystkich chwilowych mocy widmowych jest równa całkowitej mocy widmowej, czyli:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) d\omega = |s(t)|^2 \quad (6.11)$$

- Brzegowy warunek czasowy

Podobnie możliwe jest całkowanie po osi czasu

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t, \omega) dt = |S(\omega)|^2 \quad (6.12)$$

Oznacza to, że wynik całkowania po osi czasu jest równy chwilowej energii sygnału.

WVD spełnia zarówno brzegowy warunek czasowy jak i częstotliwościowy. Stąd, korzystając z twierdzenia Parsewala, można stwierdzić, że energia zawarta w $W(t, \omega)$ jest równa energii sygnału $s(t)$.

$$\frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} W(t, \omega) d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \quad (6.13)$$

6.2.4 Pseudo-dystrybucja Wignera-Ville'a

Dystrybucja Wignera-Ville'a jest przekształceniem wysoce niezlokalizowanym. Wyznaczając dystrybucję dla czasu t dąży się w praktyce do zbadania właściwości sygnału w najbliższym otoczeniu tej chwili czasu. Zastosowanie funkcji okna $\gamma(\tau)$ posiadającej maksimum dla $\tau = 0$ pozwala na zlokalizowanie dystrybucji (analiza sygnału odbywa się w otoczeniu chwili czasu t) oraz w pewnym zakresie zmniejsza amplitudę członów krzyżowych [10]. Pseudo-dystrybucja Wignera-Ville'a wyraża się wzorem:

$$W_{ps}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (6.14)$$

6.2.5 Dokładność estymacji widma

Sygnal analityczny

Niekorzystną właściwością WVD jest pojawienie się w widmie sygnału „członów krzyżowych”³. Dla sygnału $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ widmo Wignera wyraża się wzorem [47]:

$$W_s(t, \omega) = W_{s_1}(t, \omega) + W_{s_2}(t, \omega) + 2 \operatorname{Re} \{W_{s_1, s_2}(t, \omega)\} \quad (6.15)$$

W celu zmniejszenia amplitudy członów krzyżowych w WVD zaproponowano [4] zastosowanie sygnału analitycznego zamiast rzeczywistego.

Jeśli $S(\omega)$ jest transformatą Fouriera rzeczywistego sygnału $s(t)$ to sygnał analityczny jest odwrotną transformatą Fouriera $S_a(\omega)$ określonego zależnością:

$$S_a(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega) & \omega > 0 \\ S(\omega) & \omega = 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

W praktyce sygnał analityczny otrzymuje się zgodnie ze wzorem:

$$\underline{s}_a(t) = s(t) + j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t')}{t - t'} dt' \quad (6.17)$$

Część urojona (6.17) jest transformatą Hilberta sygnału.

Zastosowanie funkcji analitycznej zamiast rzeczywistej ma jednak negatywne konsekwencje. Funkcja analityczna ma takie samo dodatnie widmo mocy jak odpowiadająca jej funkcja rzeczywista lecz jej chwilowe właściwości mogą znacznie odbiegać od właściwości sygnału oryginalnego [47].

Sygnały ciągłe

Sygnały o jednej składowej Dystrybucja Wignera-Ville’a sygnału analitycznego

$$x_a(t) = e^{j(\omega_i t + \phi)} \quad (6.18)$$

jest postaci:

$$W_x(t, \omega) = \int e^{j(\omega_i t + \omega_i \frac{\tau}{2} + \phi)} e^{-j(\omega_i t - \omega_i \frac{\tau}{2} + \phi)} e^{-j\omega \tau} d\tau = 2\pi \delta(\omega - \omega_i) \quad (6.19)$$

³cross-term interference

Dystrybucja Wignera-Ville'a prostokątnego okna analizującego $w(t)$ o długości T dla $t = 0$ jest dana wzorem:

$$W_w(0, \omega) = \int w\left(0 + \frac{\tau}{2}\right) w^*\left(0 + \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2T \operatorname{sinc}(\omega T) \quad (6.20)$$

Dowodzi się [8], że dystrybucja Wignera-Ville'a sygnału ograniczonego oknem jest dana wzorem:

$$W_{xw}(t, \omega) = W_x(t, \omega) * W_w(0, \omega) = 2T \operatorname{sinc}[(\omega - \omega_i) T] \quad (6.21)$$

WVD skończonego sygnału o jednej składowej zawsze daje dokładne estymaty widma niezależnie od fazy czy długości okna analizującego a ponadto charakteryzuje się dobrą koncentracją czasową i częstotliwościową (dodatek B).

Sygnały o wielu składowych Sygnał analityczny odpowiadający sygnałowi rzeczywistemu w (3.13) ma postać:

$$x_a(t) = e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} + e^{j(\omega_2 t + \phi_2)} \quad (6.22)$$

Dystrybucja Wignera-Ville'a tego sygnału jest postaci [59]:

$$\begin{aligned} W_x(t, \omega) &= \int \left(e^{j(\omega_1 t + \omega_1 \frac{\tau}{2} + \phi_1)} + e^{j(\omega_2 t + \omega_2 \frac{\tau}{2} + \phi_2)} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(e^{-j(\omega_1 t - \omega_1 \frac{\tau}{2} + \phi_1)} + e^{-j(\omega_2 t - \omega_2 \frac{\tau}{2} + \phi_2)} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= 2\pi \left[\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega - \omega_2) + 2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \right. \\ &\quad \left. + (\phi_1 - \phi_2)) \delta\left(\omega - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\right) \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

Z (6.19), (6.20) i (6.23) otrzymano dystrybucję Wignera-Ville'a sygnału analitycznego ograniczonego oknem analizującym:

$$\begin{aligned} W_x(t, \omega) &= 2T \left[\operatorname{sinc}((\omega - \omega_1) T) + \operatorname{sinc}((\omega - \omega_2) T) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2)) t \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \operatorname{sinc}\left(\left(\omega - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\right) T\right) \right] \end{aligned} \quad (6.24)$$

Dwa pierwsze człony (6.24) odpowiadają dwóm składowym analizowanego sygnału, trzeci człon jest członem krzyżowym reprezentującym interakcje pomiędzy dwoma składowymi o różnych częstotliwościach i fazach

[59]. Jest możliwe takie dobranie czasu t , aby człon krzyżowy był równy zero. W praktyce stosuje się wygładzanie w czasie odpowiednio dobranym oknem, uśredniając amplitudę członu krzyżowego i zmniejszając jego wpływ na estymatę widma.

Sygnały dyskretne

Sygnały o jednej składowej Sygnał analityczny dyskretny odpowiadający rzeczywistemu sygnałowi dyskretnemu o jednej składowej sinusoidalnej ma postać:

$$x_a(n) = e^{j(\omega_1 n T_0 + \phi)} \quad (6.25)$$

Dystrybucję Wignera-Ville'a sygnału (6.25) ograniczonego oknem prostokątnym o długości N można przedstawić wzorem [59]:

$$W_{xw}(n, e^{j\omega T_0}) = \sum_{k=\frac{-(N-1)}{2}}^{\frac{(N-1)}{2}} e^{j((n+k)\omega_1 T_0 + \phi)} e^{-j((n-k)\omega_1 T_0 + \phi)} e^{-j2k\omega T_0} \quad (6.26)$$

$$= \text{sind}_N((\omega - \omega_1) T_0); N \text{ nieparzyste} \quad (6.27)$$

WVD skończonego sygnału dyskretnego o jednej składowej zawsze daje dokładne estymaty widma niezależnie od fazy czy długości okna analizującego

Sygnały o wielu składowych Sygnał analityczny dyskretny odpowiadający rzeczywistemu sygnałowi dyskretnemu o dwóch składowych sinusoidalnych ma postać:

$$x_a(n) = e^{j(\omega_1 n T_0 + \phi_1)} + e^{j(\omega_2 n T_0 + \phi_2)} \quad (6.28)$$

Dystrybucję Wignera-Ville'a tego sygnału ograniczonego oknem prostokątnym o długości N można przedstawić wzorem [59]:

$$W_{xw}(n, e^{j\omega T_0}) = \text{sind}_N((\omega - \omega_1) T_0) + \text{sind}_N((\omega - \omega_2) T_0) + 2 \cos((\omega_1 - \omega_2) n T_0 + (\phi_1 - \phi_2)) \text{sind}_N\left(\left(\omega - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) T_0\right) \quad (6.29)$$

Ostatecznie, po zastosowaniu funkcji okna postaci: $O = \frac{2k\pi}{(\omega_1 - \omega_2)T_0}$ dystrybucja przyjmie postać:

$$W_{xwO}(n, e^{j\omega T_0}) = O[\text{sind}_N((\omega - \omega_1)T_0) + \text{sind}_N((\omega - \omega_2)T_0)] \quad (6.30)$$

Zastosowanie odpowiednio dobranej funkcji okna pozwala zminimalizować wpływ członu krzyżowego.

6.2.6 Dystrybucja Choi-Williamsa

Aby zmniejszyć amplitudę członów krzyżowych pojawiających się w dystrybucji Wignera-Ville'a zmodyfikowano to przekształcenie przez wprowadzenie zamiast jądra przekształcenia $\phi(t, \tau) = 1$, funkcji wykładniczej postaci $\phi(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\tau^2}} e^{-\frac{t^2}{\sigma\tau^2}}$ [47]. Tak zmodyfikowana dystrybucja nosi nazwę dystrybucji Choi-Williamsa i jest postaci:

$$CW(t, \omega) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma\tau^2}} e^{-\frac{(t-u)^2}{\sigma\tau^2}} s\left(u + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} du d\tau \quad (6.31)$$

Parametr σ należy dobrać eksperymentalnie tak, aby zmniejszyć amplitudę członów krzyżowych a jednocześnie zminimalizować zniekształcenie składowych sygnału.

6.3 Metoda minimum-normy

Zaproponowano wykorzystanie opisanej w p. 4.3 metody minimum normy do wyznaczenia widma sygnałów o zmiennej w czasie zawartości częstotliwościowej.

Badany sygnał zawiera wiele składowych o zmiennej w czasie zarówno liczbie jak i częstotliwości. Podobnie jak w przypadku sygnału stacjonarnego, można oczekiwać, że metoda bazująca na modelu sygnału umożliwi wyznaczenie jego parametrów z większą dokładnością, opierając się na wiedzy *a priori* o sygnale (postać modelu sygnału i liczba składowych) [52].

Badana sekwencja próbek sygnału jest analizowana przy pomocy funkcji analizującej (okna prostokątnego), tak aby wyznaczyć lokalne parametry sygnału wokół chwili czasu t . Jest to sposób wyznaczenia reprezentacji czasowo-częstotliwościowej sygnału, analogiczny do STFT, jednak, jak tego dowodzą symulacje numeryczne, zastosowanie funkcji okna ma znacznie mniejszy wpływ na dokładność estymacji parametrów modelu (nie występuje w obliczeniach numerycznych zależność błędu estymacji od fazy położenia okna analizującego - p. 7.2.1).

Model sygnału ma tę samą postać jak w przypadku stacjonarnym. Rząd modelu (liczba sygnałów M) jest wyznaczany dla każdej chwili czasu t niezależnie metodą opisaną w dodatku D. Częstotliwości ω_i (4.26) mogą być wyznaczone jako chwilowe wartości argumentu pierwiastków wielomianu $D(z)$

(leżących na okręgu jednostkowym na płaszczyźnie z) [58] utworzonego z elementów wektora $\mathbf{d}$ (4.23):

$$D(z) = \sum_{k=0}^{N-1} d[k] z^{-k} \quad (6.32)$$

Rozdział 7

Badania symulacyjne

7.1 Sygnały stacjonarne

Program badań symulacyjnych obejmuje typowe zakłócenia przebiegów napięć, jakie mogą wystąpić w sieciach eksploatowanych przez energetykę zawodową [48]. Pod pojęciem zakłóceń napięcia rozumie się odchylenia częstotliwości od wartości znamionowej i odkształcenie kształtu przebiegu od założonej sinusoidy wywołane występowaniem harmonicznych i interharmonicznych oraz szumu.

W opracowaniu programu badań symulacyjnych brano pod uwagę przeprowadzone badania kontroli jakości energii w sieciach średnich i wysokich napięć [14], wyniki badań nad awaryjnymi stanami sieci [2] i napędowych układów przekształtnikowych [9], [13] oraz literaturę dotyczącą cyfrowych metod wyznaczania widma sygnałów, m.in. [16], [30], [32].

7.1.1 Badania wstępne

Dokonano wstępnej oceny dokładności opisanych metod estymacji widma przy pomocy następujących procedur:

1. Badanie wpływu poziomu szumu białego i rozmiaru prostokątnego okna analizującego na dokładność estymacji częstotliwości sygnału o jednej składowej (50 Hz) przy częstotliwości próbkowania sygnału 160 Hz. Celem tego doświadczenia jest zbadanie wpływu fazy badanego sygnału na dokładność estymacji przy zmieniającym się poziomie szumu białego. Proces estymacji był przeprowadzony 100 razy dla każdego rozmiaru okna analizującego przy zmieniającym się położeniu okna, co odpowiadało losowo zmieniającej się fazie sinusoidy w badanym sygnale. Położenie maksimum widma w każdym z eksperymentów odpowiadało estymowanej częstotliwości. Obliczenia przeprowadzono dla

każdej z czterech badanych metod estymacji widma¹. Wyniki przedstawiono na rysunkach nr 7.1 do 7.8 a podsumowanie wyników na rysunku nr 7.9.

2. Badanie interakcji pomiędzy składowymi sygnału o liczbie od jednej do pięciu przy zmieniającej się amplitudzie harmonicznych $\mathbf{A}$ (zawartości harmonicznych). Podstawowa składowa ma częstotliwość 50 Hz, dodatkowe składowe sygnału są jej kolejnymi harmonicznymi, częstotliwość próbkowania sygnału wynosi 1000 Hz przy poziomie szumu 50 dB. Metodyka obliczeń jest zgodna z opisaną w punkcie 1. Wyniki przedstawiono na rysunkach nr 7.10 do 7.13. Na rysunkach nr 7.14 do 7.16 przedstawiono zależność błędu estymacji od zawartości harmonicznych kolejno dla każdej z metod.

Ocena błędu estymacji

Miarą dokładności estymacji parametrów sygnału jest średni kwadratowy błąd estymacji widmowej. Całkowity błąd estymacji jest dany wzorem:

$$e = \frac{1}{Q} \sum_{m=1}^Q \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K (\bar{f}_{em} - f_m)^2 \quad (7.1)$$

gdzie Q jest liczbą składowych sygnału, K jest liczbą prób ($K = 100$), f_m jest częstotliwością rzeczywistą m -tej składowej, $\bar{f}_{em}$ jest estymowaną częstotliwością m -tej składowej wyznaczonej jako położenie lokalnego maksimum widma położonego najbliżej m -tej składowej w n -tej próbie.

Stosunek sygnału do szumu (SNR)

zdefiniowano jako:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_0^2} \right) \quad (7.2)$$

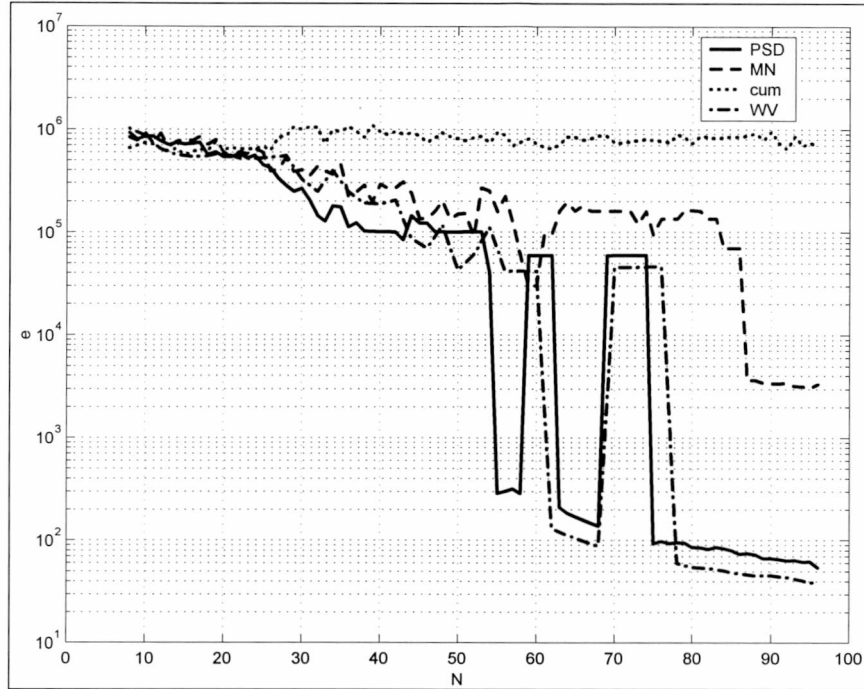
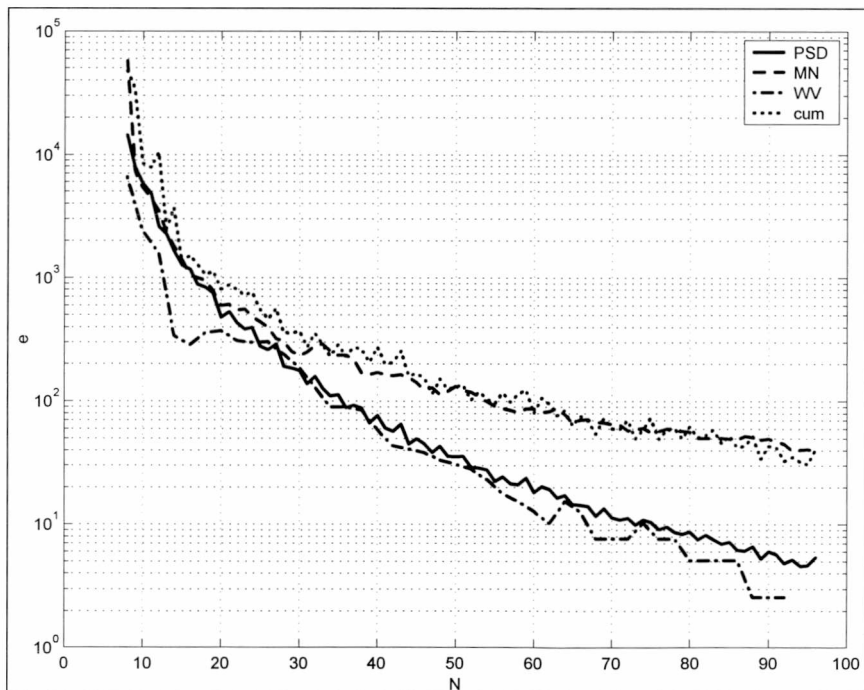
gdzie σ_s^2 jest wariancją sygnału a σ_0^2 jest wariancją szumu.

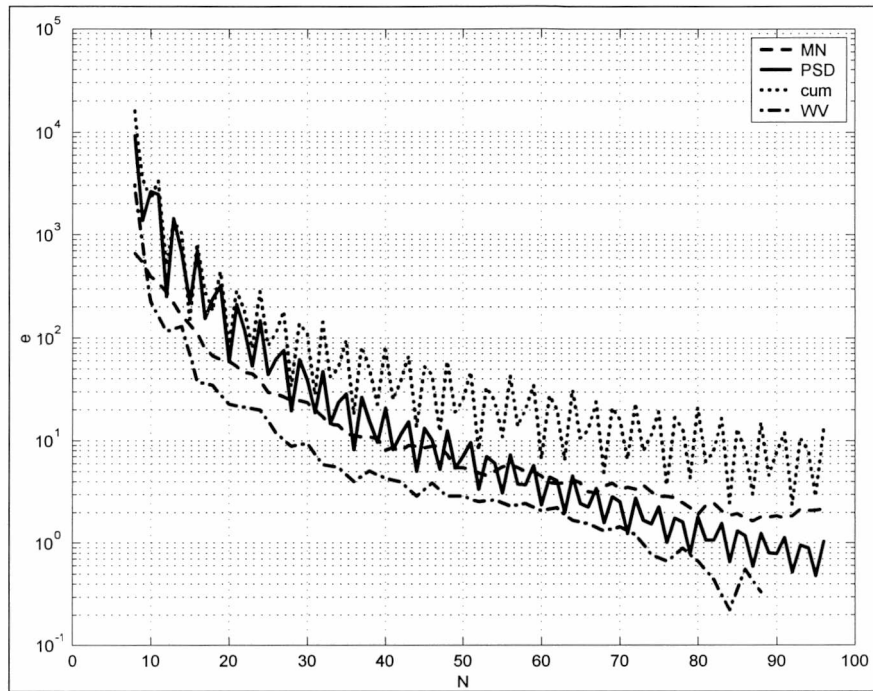
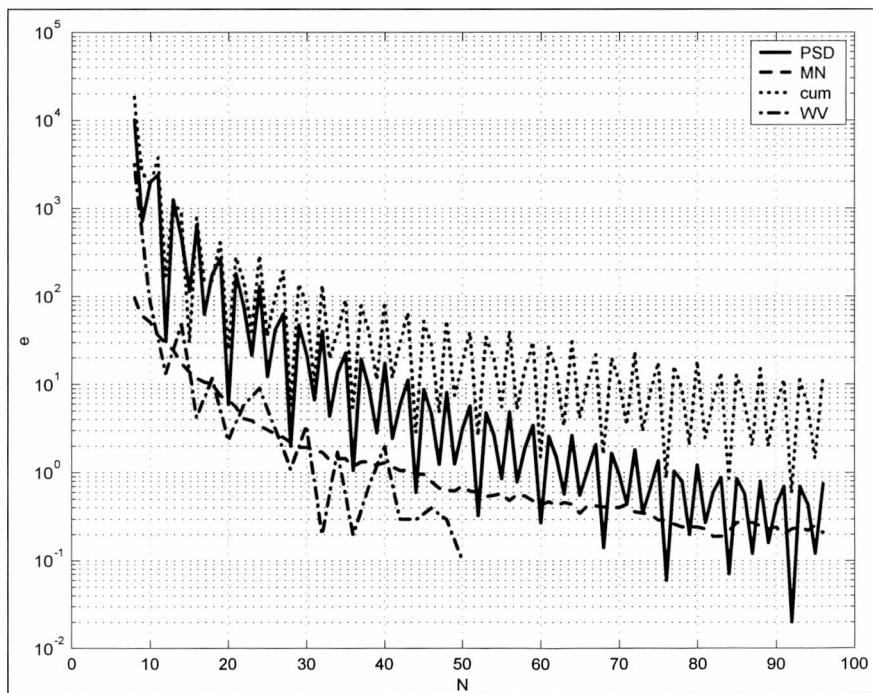
Częstotliwość wyznaczano metodami:

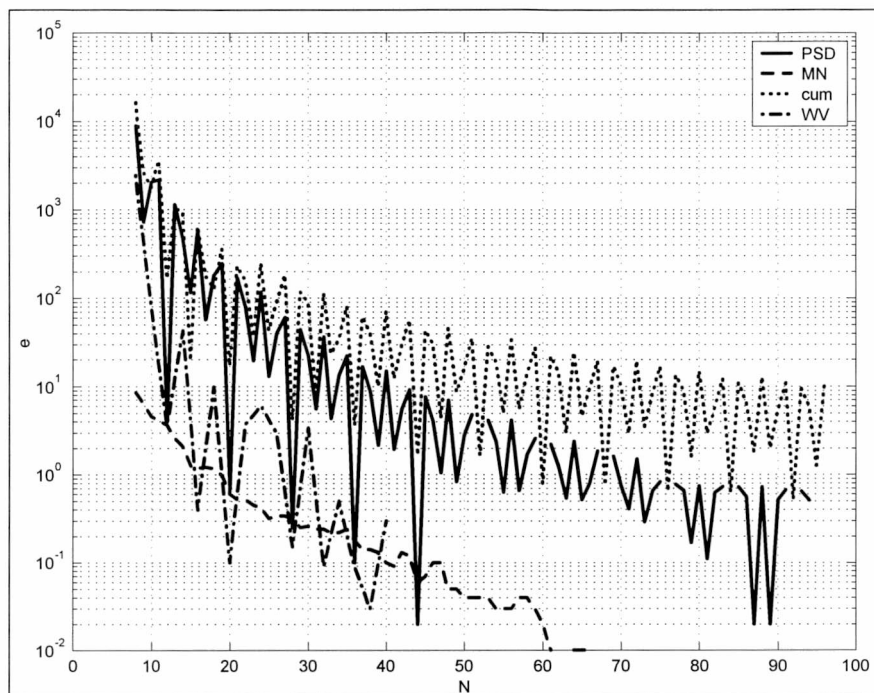
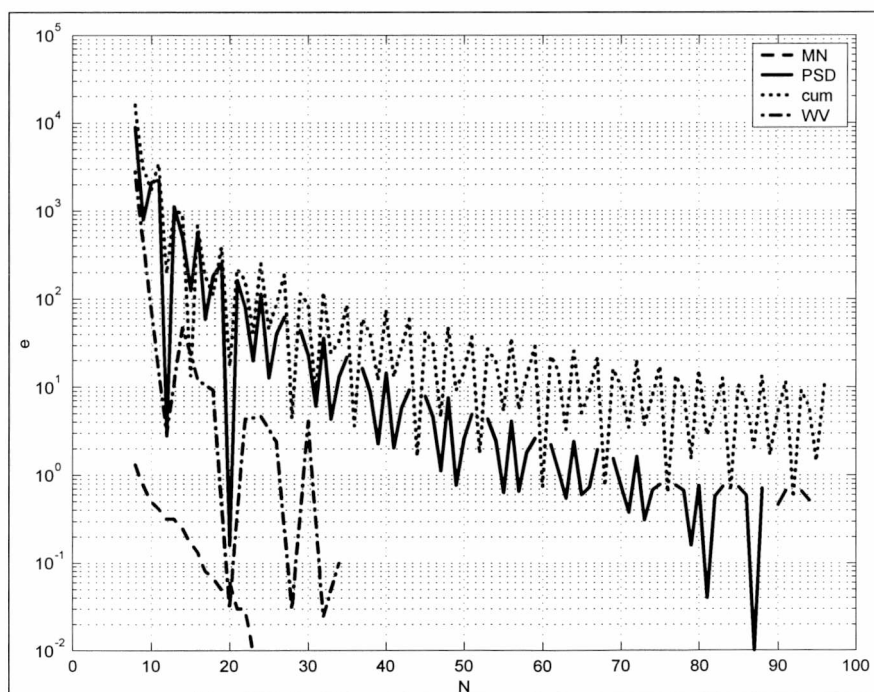
- **PSD**-widmo mocy
- **MN**-minimum normy i autokorelacji
- **WV**-Wignera-Ville'a
- **cum**- minimum normy i kumulantu (statystyki wyższych rzędów)

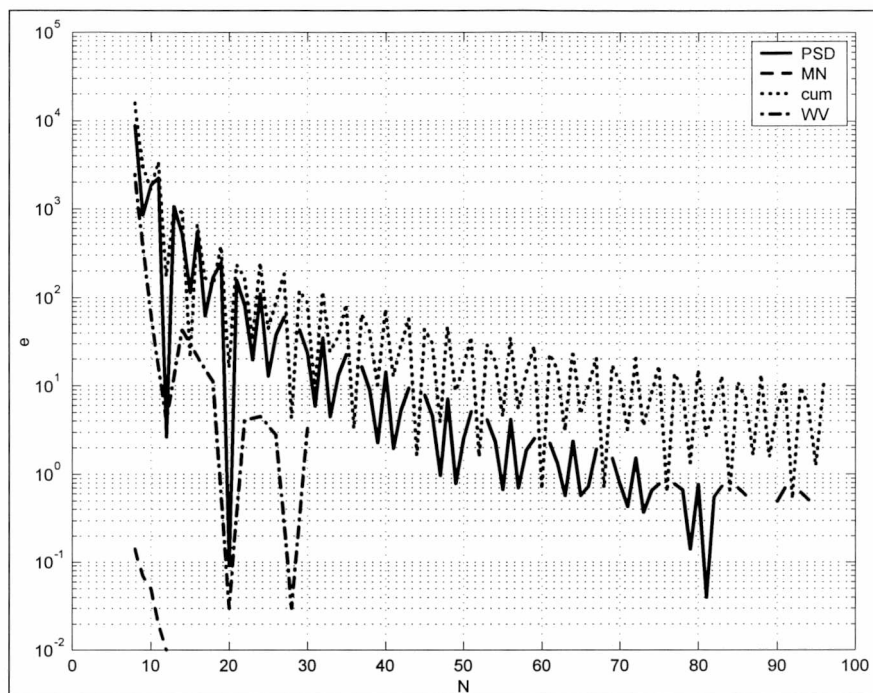
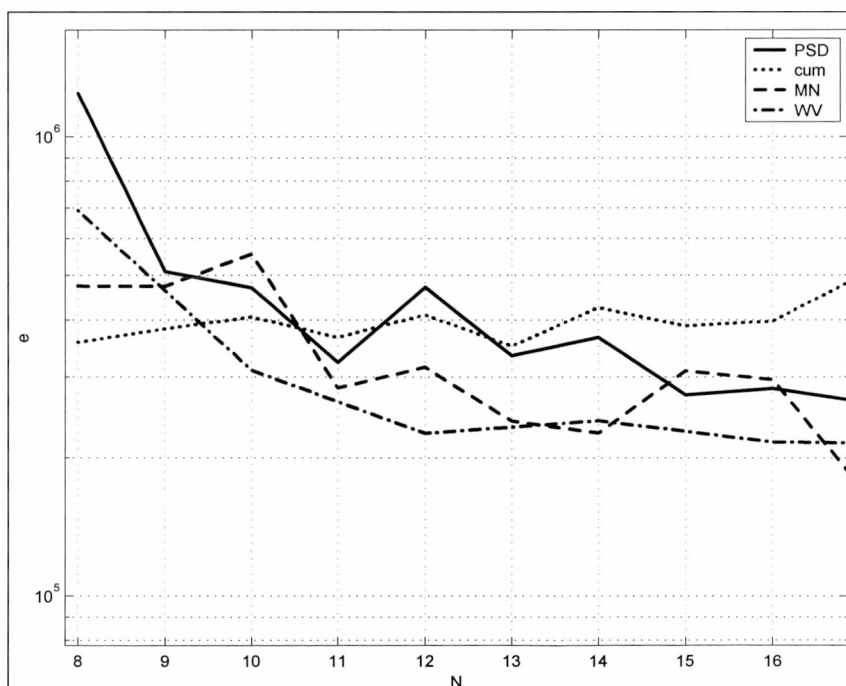
¹W przypadku estymacji widma przy pomocy przekształcenia Wignera-Ville'a z powodów technicznych (długi czas obliczeń) ograniczono liczbę eksperymentów.

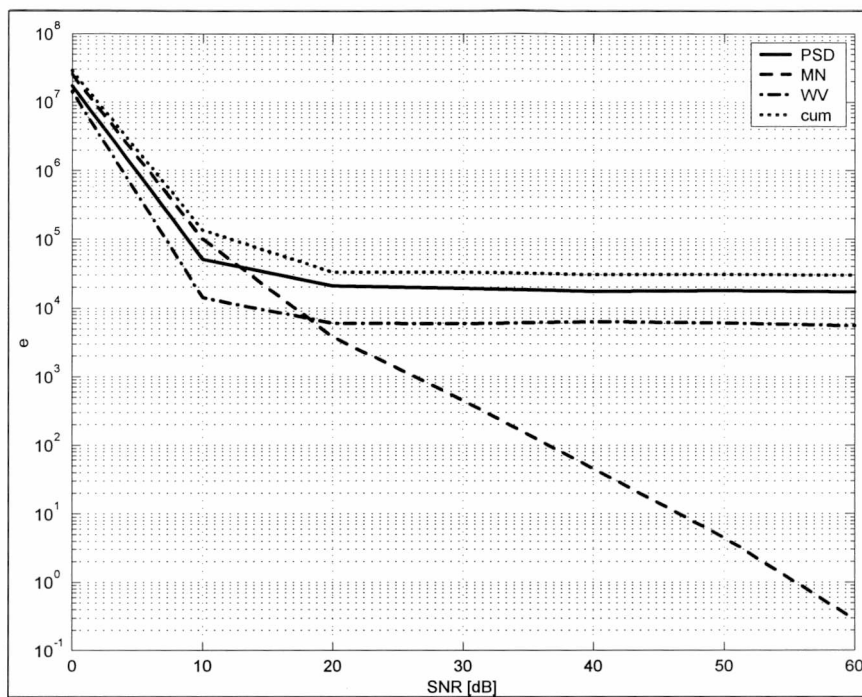
7.1.2 Wyniki

Rys.7.1. Zależność błędu estymacji e od długości okna N dla $\text{SNR}=0$ dB.Rys.7.2. Zależność błędu estymacji e od długości okna N dla $\text{SNR}=10$ dB.

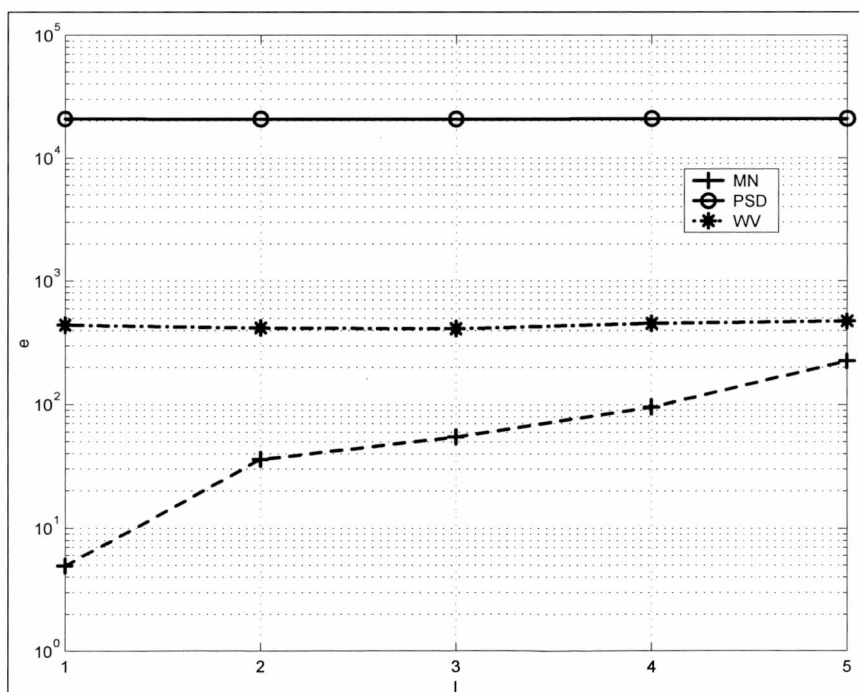
Rys.7.3. Zależność błędu estymacji e od długości okna N dla $\text{SNR}=20$ dB.Rys.7.4. Zależność błędu estymacji e od długości okna N dla $\text{SNR}=30$ dB.

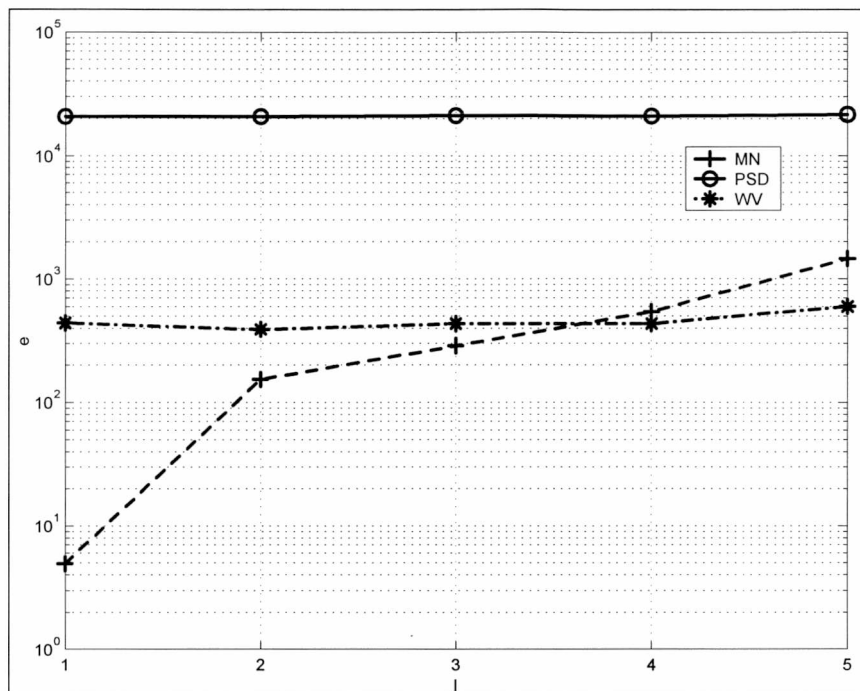
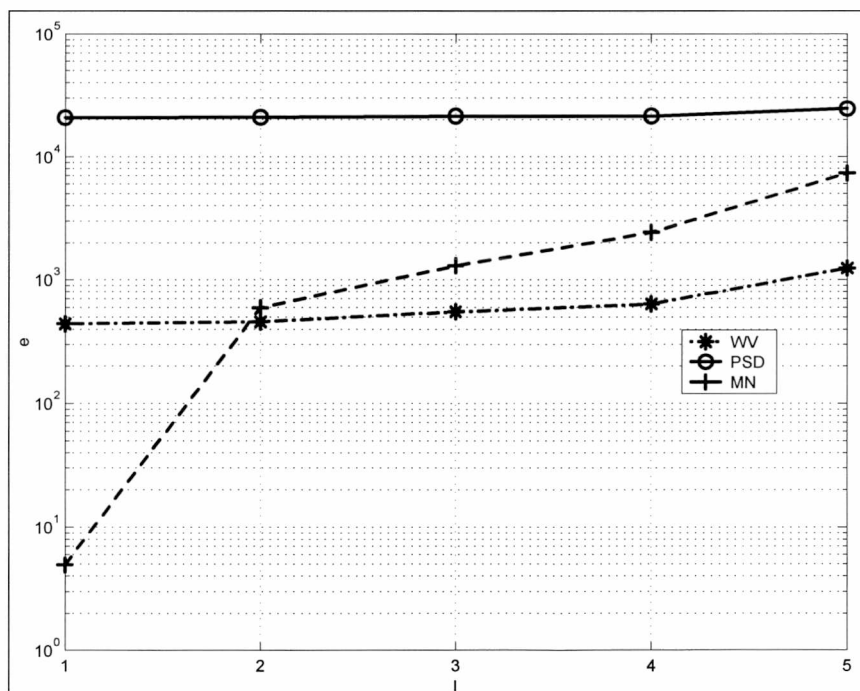
Rys.7.5. Zależność błędu estymacji e od długości okna N dla $\text{SNR}=40$ dB.Rys.7.6. Zależność błędu estymacji e od długości okna N dla $\text{SNR}=50$ dB.

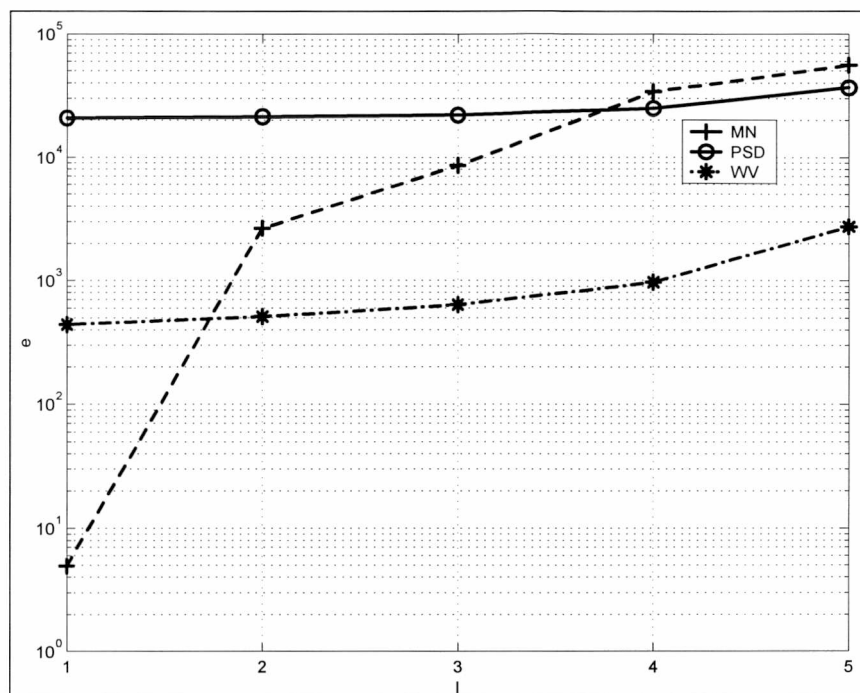
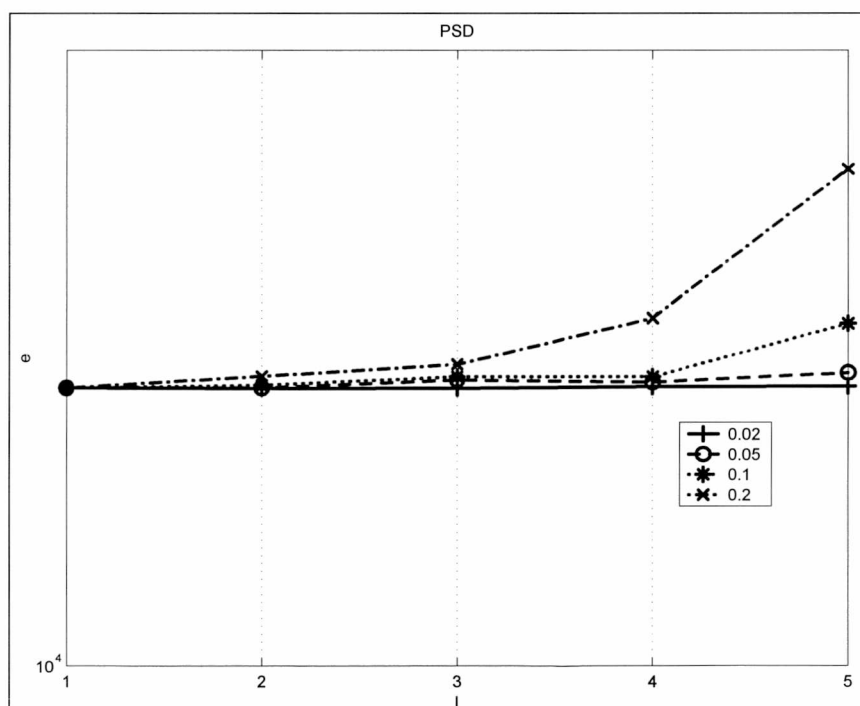
Rys.7.7. Zależność błędu estymacji e od długości okna N dla $\text{SNR}=60$ dB.Rys.7.8. Zależność błędu estymacji e od długości okna N dla $\text{SNR}=0$ dB szum kolorowy o współczynnikach $\text{AR}=[1,1.6,0.9]$ i $\text{MA}=[1,2,1]$.

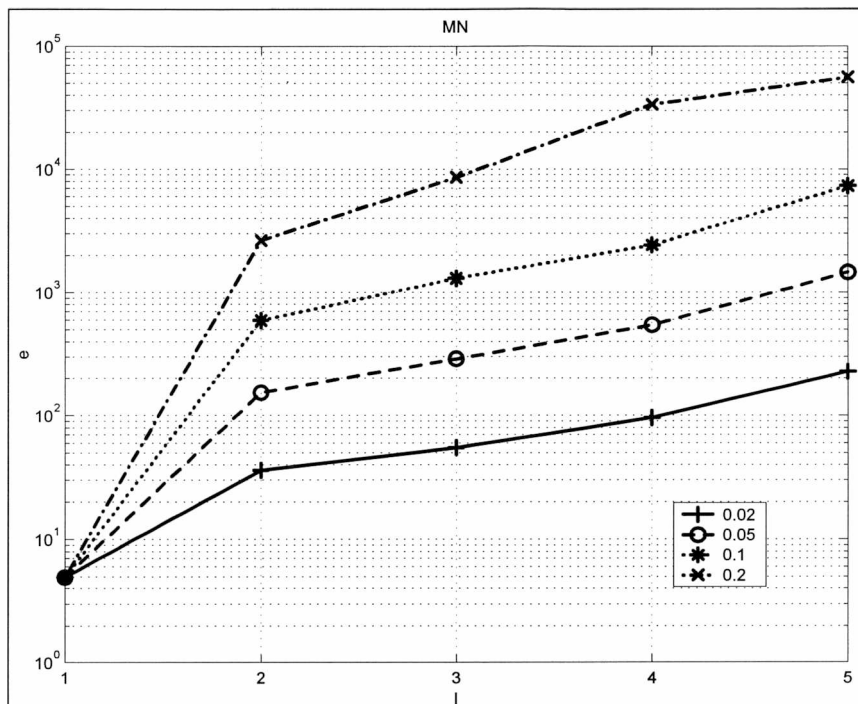
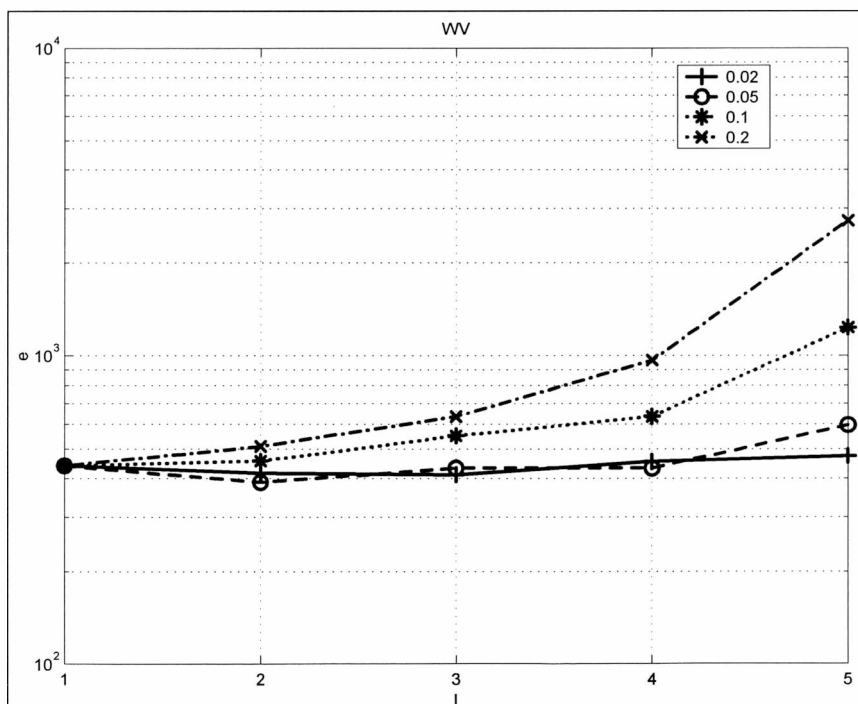


Rys.7.9. Zależność całkowitego błędu estymacji od SNR.

Rys.7.10. Zależność błędu estymacji ϵ od liczby składowych l przy poziomie wyższych harmonicznych $A=0,02$.

Rys.7.11. Zależność błędu estymacji e od liczby składowych l dla $A=0,05$.Rys.7.12. Zależność błędu estymacji e od liczby składowych l dla $A=0,1$.

Rys.7.13. Zależność błędu estymacji e od liczby składowych l dla $A=0,2$.Rys.7.14. Zależność błędu estymacji e od liczby składowych l .

Rys.7.15. Zależność błędu estymacji e od liczby składowych l .Rys.7.16. Zależność błędu estymacji e od liczby składowych l .

Omówienie wyników

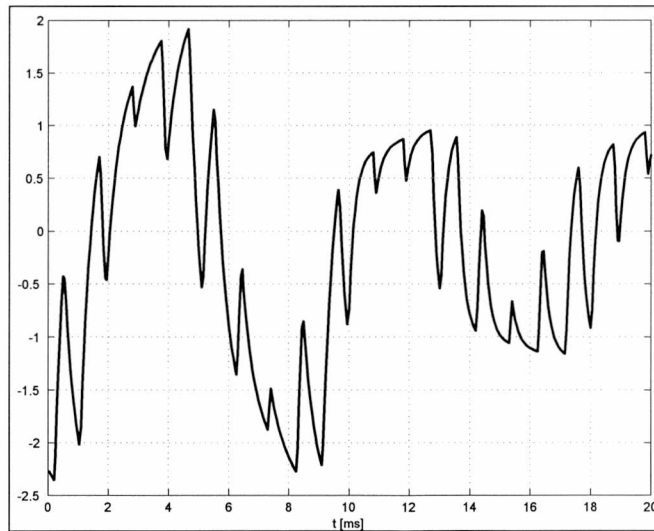
1. Jeśli poziom szumu w sygnale jest bardzo wysoki (rysunki 7.1 i 7.2, SNR rzędu 0 do 10 dB) najdokładniejsze wyniki uzyskano metodami Wignera-Ville'a i widma mocy, pod warunkiem zastosowania okna analizującego o odpowiednio dużej długości.
2. Wraz ze zmniejszaniem się poziomu szumu (rys. 7.3, SNR=20 dB) najmniejszy błąd estymacji częstotliwości uzyskano przy zastosowaniu metod minimum normy i Wignera-Ville'a, szczególnie dla małych rozmiarów okna analizującego. W przypadku widma mocy i metody bazującej na statystykach wyższych rzędów uwidocznia się wpływ interakcji okna analizującego i sygnału w postaci cyklicznych zmian błędu estymacji (zależność błędu od fazy badanego sygnału).
3. Przy średnim poziomie szumu (rysunki 7.4 i 7.5, SNR rzędu 30 do 40 dB) w przypadku widma mocy i metody bazującej na statystykach wyższych rzędów pogłębia się ta zależność a ponadto pojawia się cykliczne wahanie błędu estymacji w przypadku metody Wignera-Ville'a, spowodowane zarówno wpływem okna analizującego jak i interakcji dodatnich i ujemnych składowych w widmie sygnału.
4. Przy małym poziomie szumu (rysunki 7.6 i 7.7, SNR rzędu 50 do 60 dB) najwyraźniej ujawnia się przewaga metod minimum normy i Wignera-Ville'a nad pozostałymi metodami, szczególnie w przypadku zastosowania okna analizującego o małym rozmiarze.
5. Jeśli szum addytywny jest szumem białym, metoda wykorzystująca statystyki wyższych rzędów jest obciążona w każdym przypadku największym błędem estymacji. Jeśli szum addytywny jest szumem kolorowym (rys. 7.8. szum kolorowy o SNR=0 dB i współczynnikach $AR=[1,1.6,0.9]$ i $MA=[1,2,1]$ uwidocznia się cecha polegająca na zmniejszeniu wpływu tego szumu poprzez zastosowanie statystyk wyższego rzędu wobec użytecznego sygnału. Wpływ ten jest widoczny tylko w przypadku wysokiego poziomu szumu.
6. Porównanie badanych metod pod względem całkowitego błędu estymacji dla rozmiarów okna analizującego równego od 8 do 96 próbek sygnału w zależności od poziomu szumu przedstawiono na rys. 7.9. Przy zmniejszającym się poziomie szumu, począwszy od SNR=20 dB, najmniejszym błędem estymacji częstotliwości jest obciążona metoda minimum normy, między innymi dzięki nie występowaniu w przypadku tej metody efektu interakcji okna analizującego i sygnału.
7. Kolejne rysunki od nr 7.10 do 7.16 przedstawiają wyniki badań wpływu interakcji pomiędzy składowymi sygnału przy rosnącej zawartości har-

monicznych. Dla jednej wybranej długości okna analizującego określono zależność błędu estymacji częstotliwości podstawowej harmonicznej przy zmiennej zawartości harmonicznych w badanym sygnale. Metoda minimum normy charakteryzuje się bardzo silną zależnością błędu estymacji od amplitudy i liczby harmonicznych (rys. 7.15) i w przypadku dużej zawartości harmonicznych ($l=4$ i $A=0,2$, rys. 7.13) błąd tej metody przekracza poziom błędu estymacji przy pomocy widma mocy. Wpływ interakcji pomiędzy składowymi sygnału na dokładność estymacji jest najmniejszy w przypadku metody Wignera-Ville'a (rys. 7.16).

7.2 Sygnały niestacjonarne

7.2.1 Widmo wektora przestrzennego - symulacje EMTP

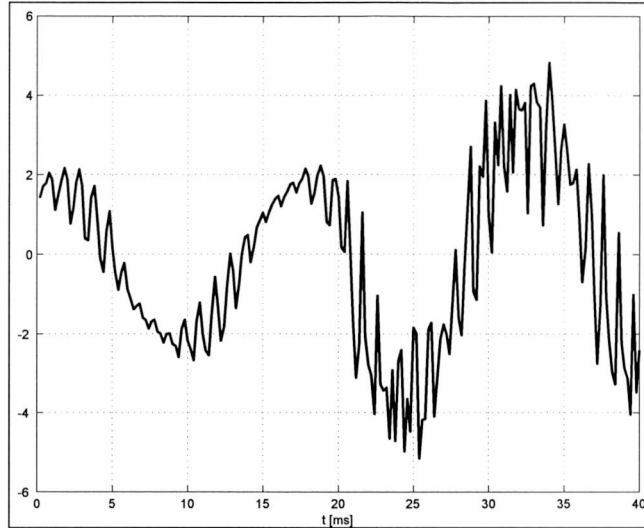
1. Stan awaryjny napędu przekształtnikowego² - zwiększenie rezystancji przewodu fazowego R silnika do $100\ \Omega$. Częstotliwość podstawowa falownika wynosi $120\ \text{Hz}$ a częstotliwość próbkowania sygnału $20\ \text{kHz}$.



Rys.7.17. Stan awaryjny 1.

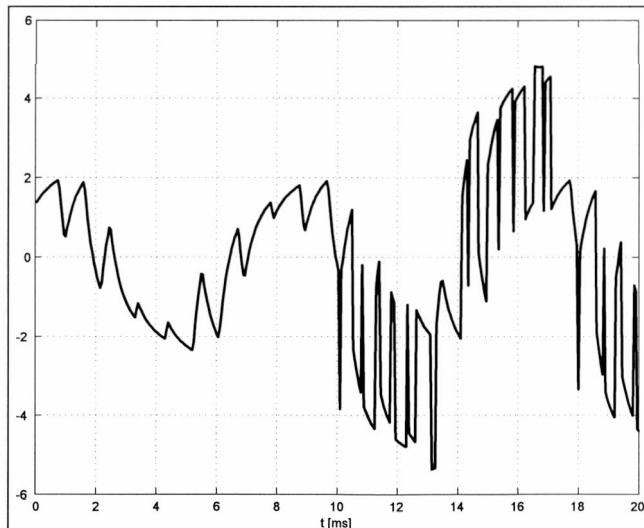
²opis symulacji EMTP w dodatku C

2. Stan awaryjny napędu przekształtnikowego - zwarcie pomiędzy przewodami fazowymi R i S silnika rezystancją $100\ \Omega$. Częstotliwość podstawowa wynosi 60 Hz a częstotliwość próbkowania sygnału 20 kHz.



Rys.7.18. Stan awaryjny 2.

3. Stan awaryjny napędu przekształtnikowego - zwarcie pomiędzy przewodami fazowymi R i S silnika rezystancją $100\ \Omega$. Częstotliwość podstawowa wynosi 120 Hz a częstotliwość próbkowania sygnału 20 kHz.



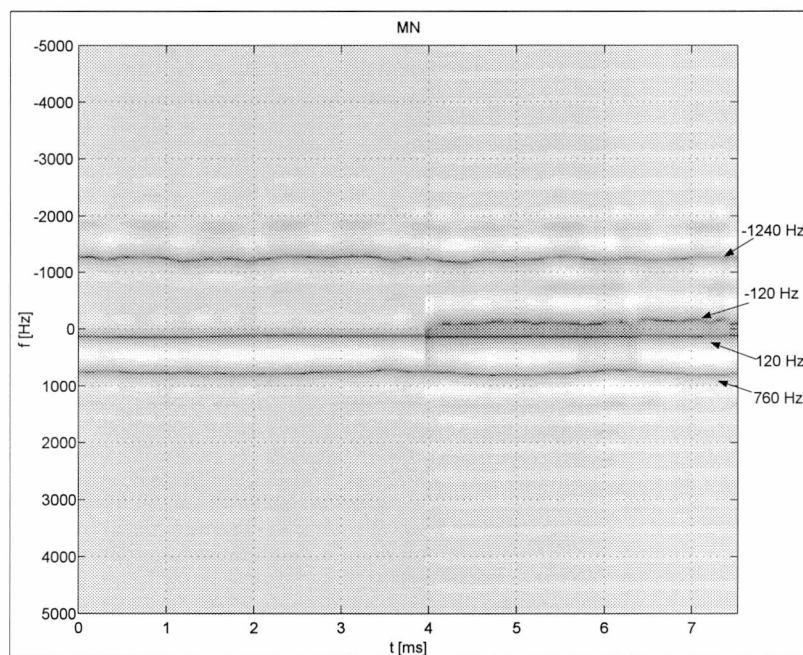
Rys.7.19. Stan awaryjny 3.

7.2.2 Wyniki

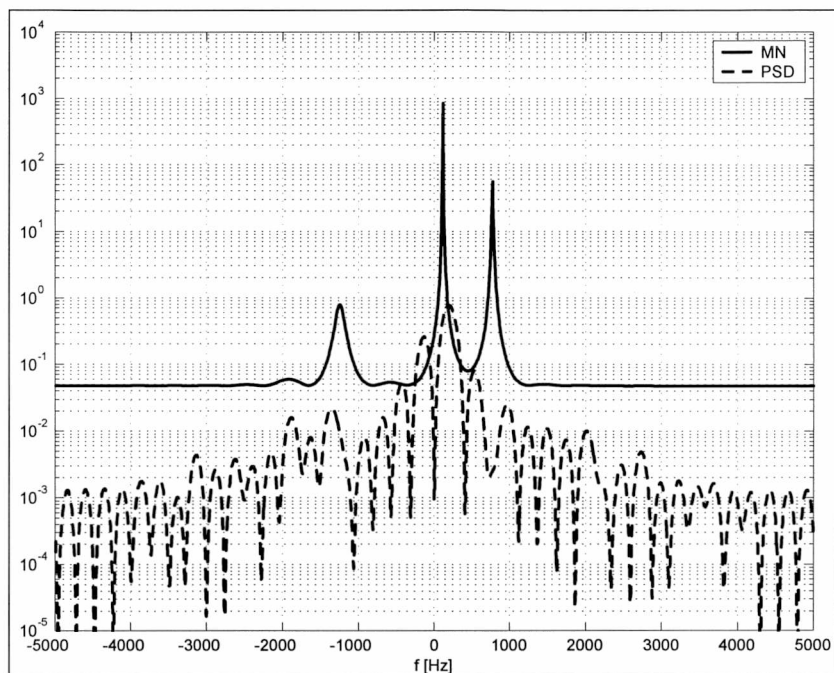
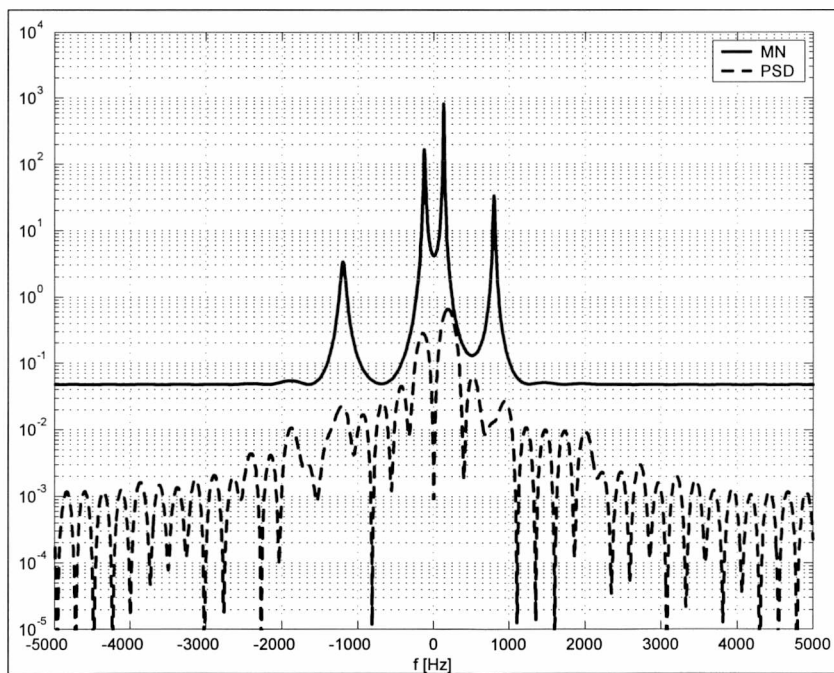
Reprezentacja czasowo-częstotliwościowa wektora przestrzennego

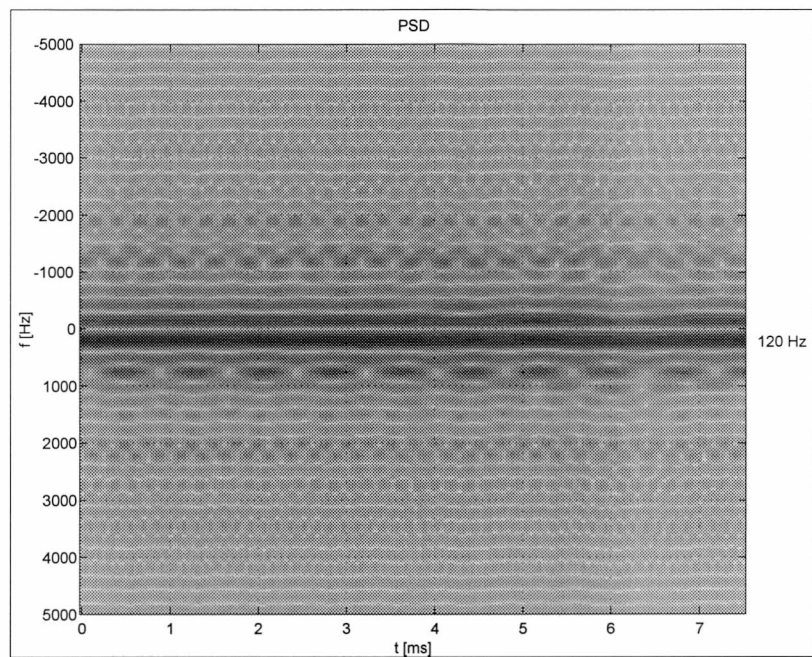
Wyznaczono reprezentacje czasowo-częstotliwościowe sygnałów opisanych w p. 7.2.1 rys. 7.17, 7.18, 7.19 metodą minimum normy i spektrogramu. Wyznaczenie obu reprezentacji czasowo-częstotliwościowych polegało na wyznaczeniu chwilowego widma sygnału na podstawie 40 próbek sygnału, przesunięciu okna czasowego o jedną próbkę i wyznaczenie kolejnego chwilowego widma sygnału. W ten sposób wyznaczono 150 linii reprezentacji i przedstawiono na wykresie, na którym większa wartość amplitudy widma (skala logarytmiczna) odpowiada ciemniejszemu odcieniowi w skali szarości. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 7.20÷7.29.

1. Stan awaryjny napędu przekształtnikowego - zwiększenie rezystancji przewodu fazowego R silnika do 100 Ω .



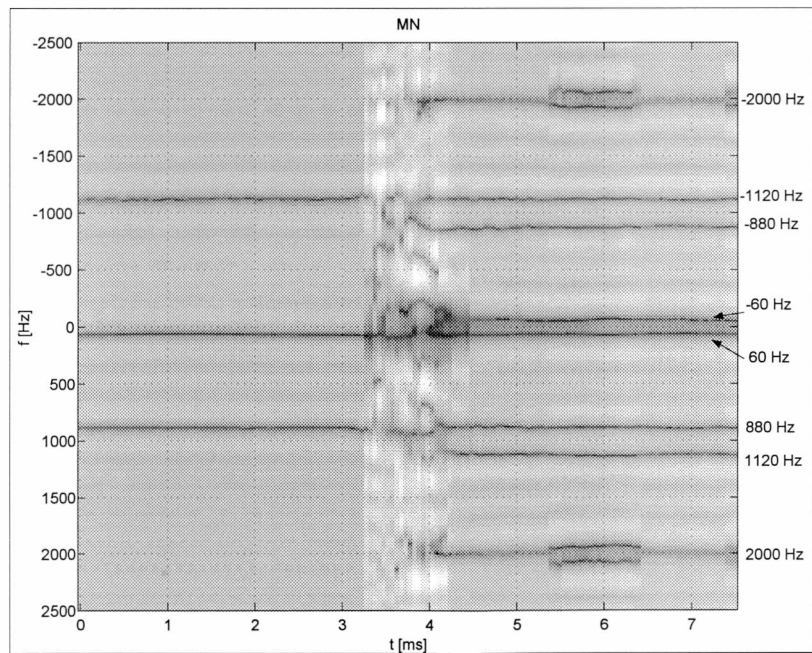
Rys.7.20. Reprezentacja MN sygnału z rys. 7.17.

Rys.7.21. Przekrój reprezentacji MN i spektrogramu (PSD) dla $t=2$ ms.Rys.7.22. Przekrój reprezentacji MN i spektrogramu (PSD) dla $t=6$ ms.

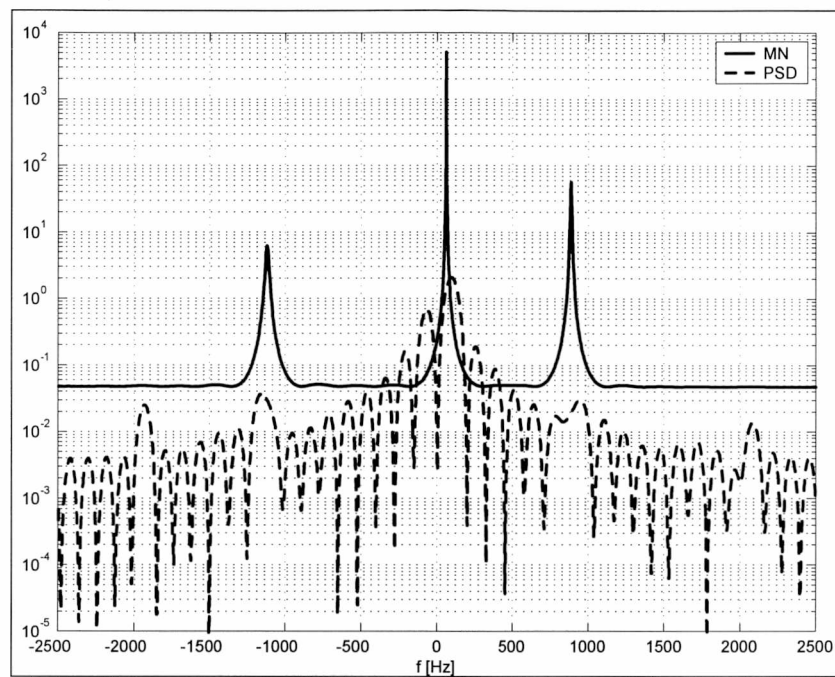
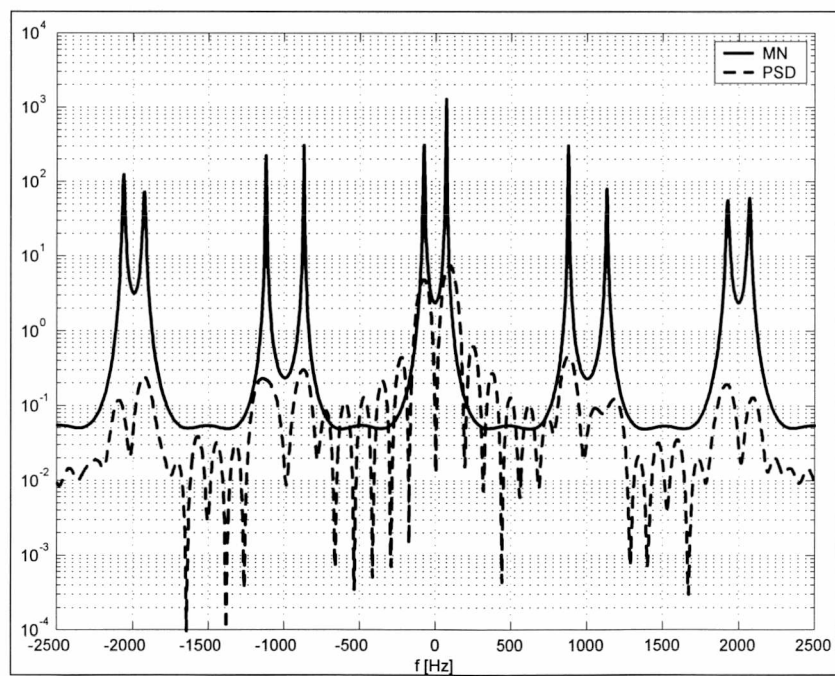


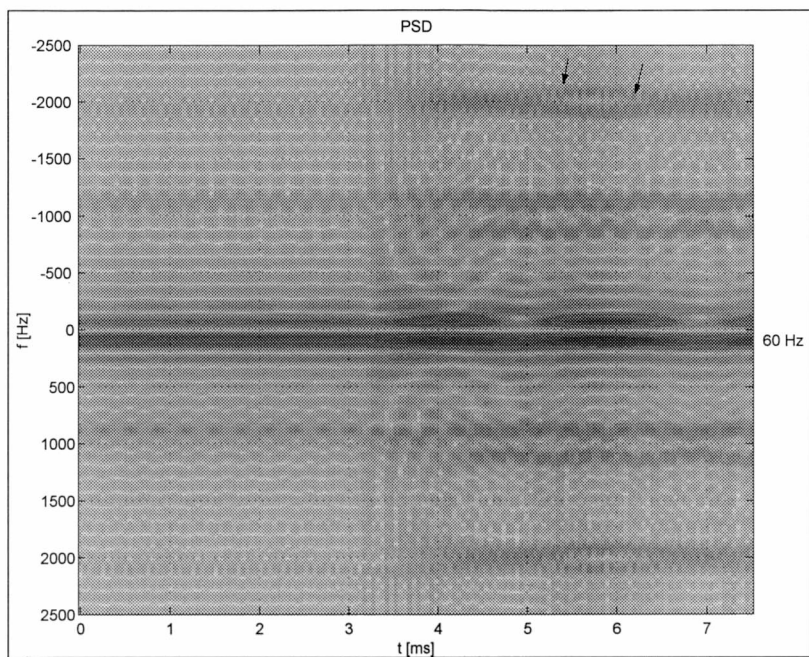
Rys.7.23. Spektrogram sygnału z rys. 7.17.

2. Stan awaryjny napędu przekształtnikowego - zwarcie pomiędzy przewodami fazowymi R i S silnika rezystancją 100Ω . Częstotliwość podstawowa pracy falownika wynosi 60 Hz.



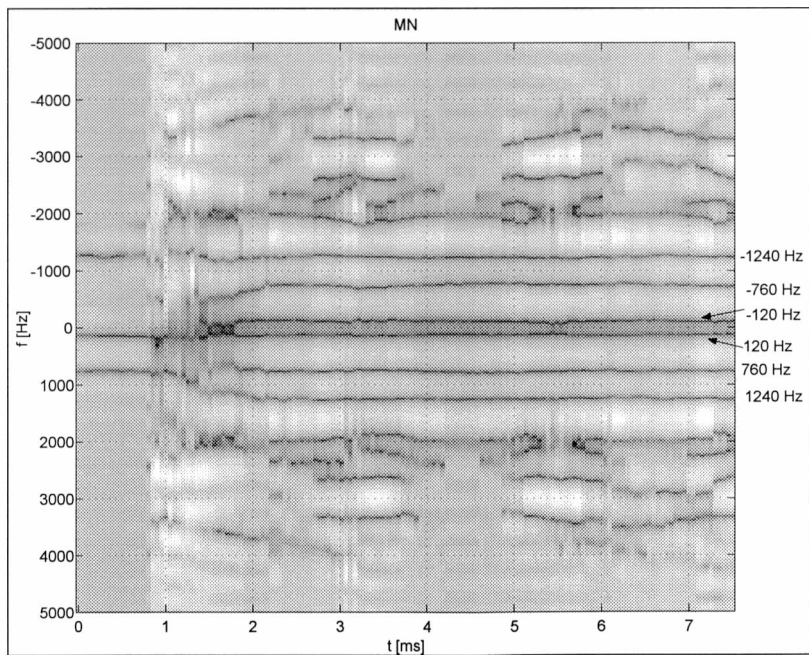
Rys. 7.24. Reprezentacja MN sygnału z rys. 7.18.

Rys.7.25. Przekrój reprezentacji MN i spektrogramu (PSD) dla $t=2$ ms.Rys.7.26. Przekrój reprezentacji MN i spektrogramu (PSD) dla $t=6$ ms.

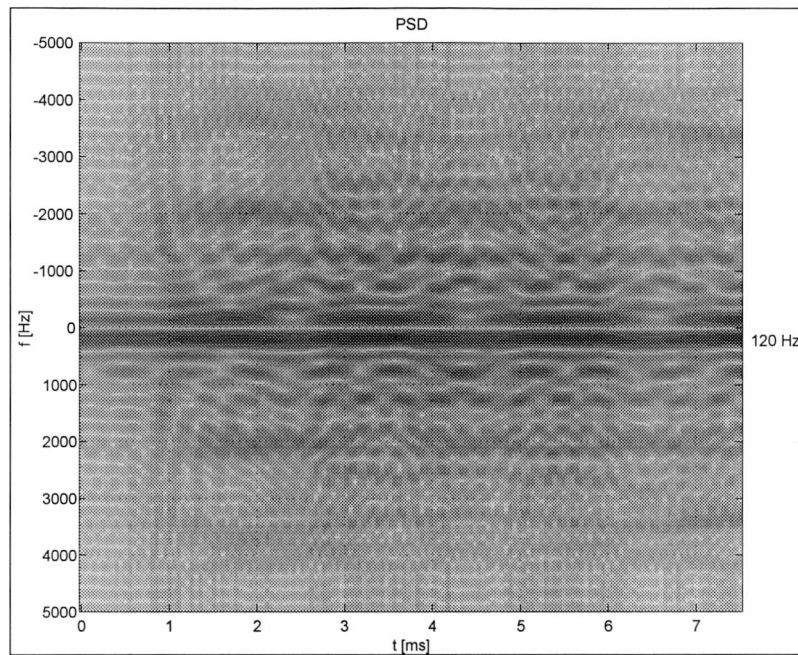


Rys.7.27. Spektrogram sygnału z rys. 7.18.

3. Stan awaryjny napędu przekształtnikowego - zwarcie pomiędzy przewodami fazowymi R i S silnika rezystancją $100\ \Omega$. Częstotliwość podstawowa falownika wynosi 120 Hz.



Rys.7.28. Reprezentacja MN sygnału z rys. 7.19.



Rys.29. Spektrogram sygnału z rys. 7.19.

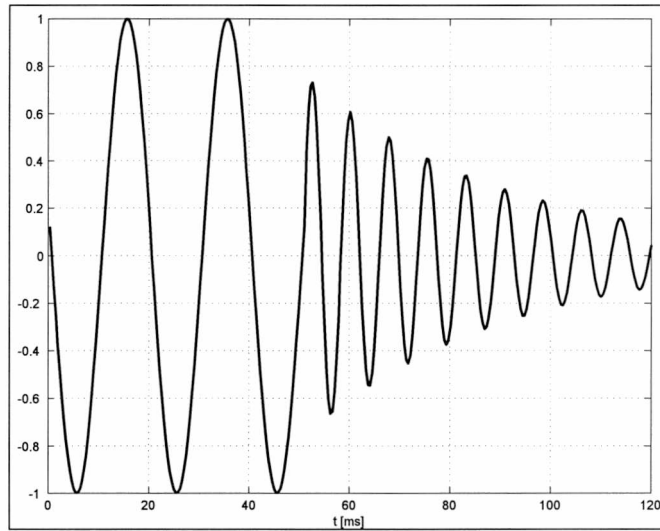
Omówienie wyników

1. W sytuacji, gdy zwiększono rezystancję jednego z przewodów zasilających silnik, wystąpił prosty stan niesymetrii napięć zasilających. Na rys. 7.20 jest widoczne pojawienie się w chwili $t = 4$ ms ujemnej składowej o częstotliwości 120 Hz będącej skutkiem niesymetrii zasilania. Zauważyć można także składową intermodulacyjną symetryczną o częstotliwości 760 Hz (1000 Hz (częstotliwość modulacji PWM) - $2 \cdot 120 \text{ Hz} = 760 \text{ Hz}$) i składową niesymetryczną -1240 Hz ($1000 \text{ Hz} + 2 \cdot 120 \text{ Hz} = 1240 \text{ Hz}$). Spektrogram (rys. 7.23) tego samego przebiegu uwiidocznia praktycznie tylko składową podstawową o częstotliwości 120 Hz.
2. W sytuacji, gdy zwarcie nastąpiło pomiędzy przewodami zasilającymi silnik, powstają dodatkowe składowe intermodulacyjne (rys. 7.24). Spektrogram (rys. 7.27) zawiera te same składowe a szczególnie warty uwagi jest zaznaczony strzałkami fragment przebiegu, który potwierdza zarówno prawidłowość wyznaczenia rzędu modelu w metodzie minimum normy jak i wyższą dokładność i rozdzielczość tej metody.
3. Przebieg, którego widmo pokazano na rys. 7.28 wyróżnia się największą liczbą składowych jak i krótko trwającymi przebiegami przejściowymi. Oprócz składowych intermodulacyjnych widoczne są przebiegi

przejściowe, np. przebieg o częstotliwości od ok. 3300 Hz do 4000 Hz o czasie trwania od 1 do 3 ms. Interpretacja spektrogramu (rys. 7.29) jest znacznie trudniejsza.

7.2.3 Dystrybucja Wignera-Ville’a przebiegu zwarciovego

Badanym sygnałem jest przebieg zwarciovowy, który powstaje podczas jednofazowego zwarcia doziemnego linii przesyłowej. Analizie poddano przebieg w fazie, w której nastąpiło zwarcie (przedstawiony na rys. 7.30). W chwili zwarcia dla $t = 50$ ms powstaje wykładniczo tłumiona składowa przejściowa o częstotliwości 130 Hz.



Rys.7.30. Przebieg zwarciovowy.

7.2.4 Wyniki

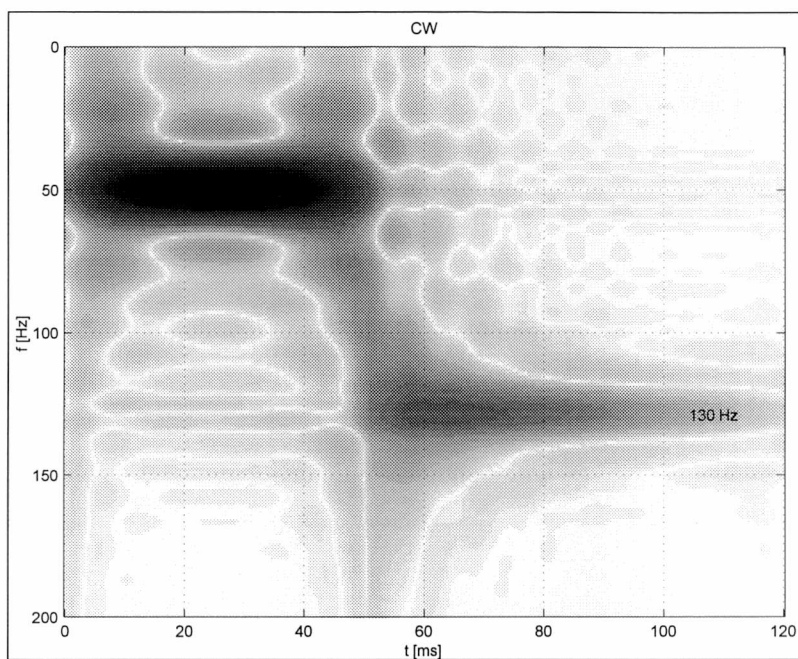
Wyznaczono dystrybucję Wignera-Ville’a przebiegu przedstawionego na rys. 7.30. Aby zmniejszyć amplitudę członów krzyżowych zastosowano postać analityczną sygnału i dystrybucję zmodyfikowaną przy pomocy wprowadzenia jądra przekształcenia typu Choi-Williamsa [47]. Dla porównania przedstawiono dystrybucję Wignera-Ville’a tego samego sygnału na rys. 7.28.

Sporządzono także wykres częstotliwości chwilowej (rys. 7.29) na podstawie reprezentacji Choi-Williamsa jako położenie na osi częstotliwości lokalnego maksimum reprezentacji z rys. 7.27. Chwilową amplitudę sygnału uzyskano zgodnie z zależnością:

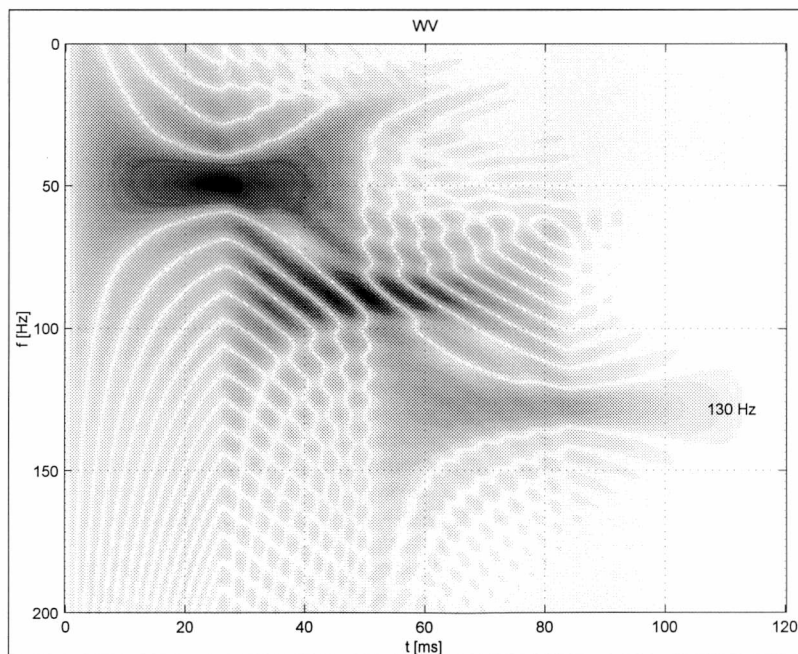
$$A(t) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N a_i(t)}}{N} \quad (7.3)$$

gdzie N jest liczbą próbek reprezentacji w dziedzinie częstotliwości, $a_i(t)$ amplitudą chwilową. Powyższa metoda jest prawidłowa tylko dla sygnałów

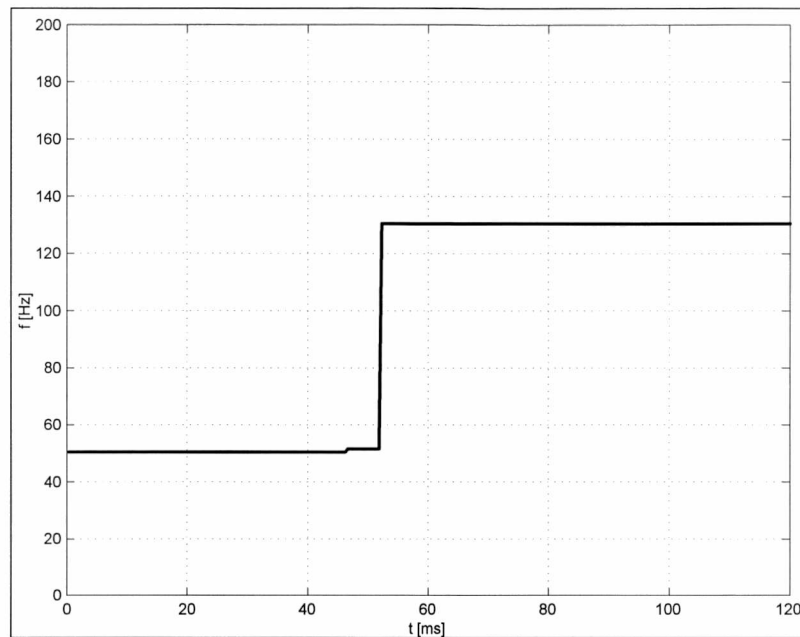
o jednej składowej, ponieważ amplituda jest wyznaczana na podstawie całkowitej chwilowej energii sygnału.



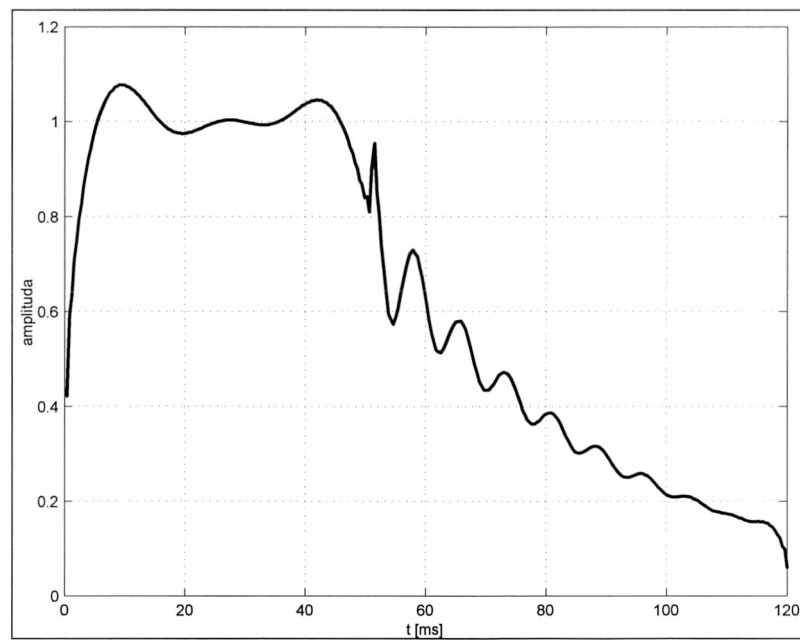
Rys.7.31. Dystrybucja Choi-Williamsa ($\sigma = 0,05$) syg. z rys. 7.20.



Rys.7.32. Dystrybucja Wignera-Ville'a sygnału z rys. 7.30.



Rys.7.33. Chwilowa częstotliwość sygnału.



Rys.7.34. Chwilowa amplituda sygnału.

Omówienie wyników

1. W przypadku analizy sygnału przy pomocy dystrybucji Wignera-Ville'a powstają utrudniające interpretację człony krzyżowe (rys. 7.32). Zastosowanie zmodyfikowanej dystrybucji Choi-Williamsa (rys. 7.31)

umożliwia uzyskanie reprezentacji pozbawionej znacznej części składowych utrudniających analizę sygnału.

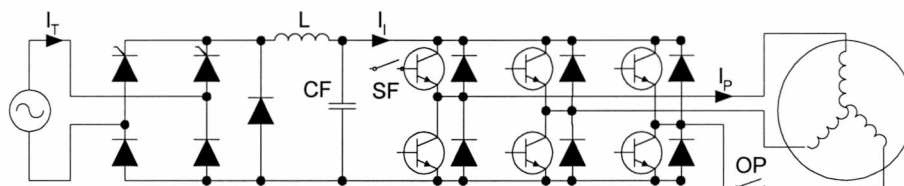
2. Chwilowa częstotliwość sygnału jest wyznaczana z bardzo dobrą dokładnością (rys. 7.33).
3. Wykres chwilowej amplitudy sygnału (rys. 7.34), uzyskany na podstawie chwilowej całkowitej energii sygnału, wykazuje dużą zgodność z amplitudą sygnału oryginalnego (rys. 7.30). Zniekształcenia tego przebiegu są skutkiem zastosowania okna analizującego i przeprowadzenia filtracji w dziedzinie czasowo-częstotliwościowej.

Rozdział 8

Badania przebiegów doświadczalnych

8.1 Badanie przebiegów w awaryjnych stanach pracy napędu przekształtnikowego

Przedstawiono wyniki badań awaryjnych stanów pracy układu przekształtnikowego. Zbadano widmo prądów występujących w poszczególnych modułach układu przekształtnika podczas stanów awaryjnych a w szczególności stanów, które nie powodują zadziałania zwykle spotykanych zabezpieczeń przy częściowym obciążeniu. Napęd pokazany na rys. 8.1 działa na zasadzie zachowania stałego stosunku napięcie-częstotliwość. Jest to typowy układ napędów przemysłowych prądu przemiennego, składający się z trójfazowego silnika asynchronicznego klatkowego i przekształtnika mocy. Modułami przekształtnika są: jednofazowy prostownik sterowany i falownik ze źródłem napięciowym o sterowaniu PWM.



Rys. 8.1. Schemat napędu przekształtnikowego.

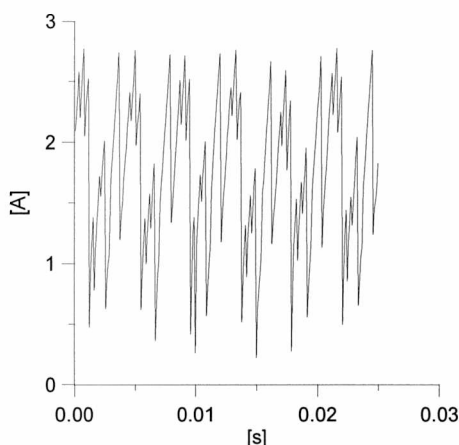
Układ sterowania mikroprocesorowego zmienia kąt zapłonu tyrystorów prostownika, zmieniając napięcie zasilania falownika w zależności od częstotliwości. Technika modulacji falownika zapewnia minimalizację amplitudy piątej i siódmej harmonicznej w napięciach wyjściowych.

Badano niektóre stany awaryjne, które w warunkach niepełnego obciążenia napędu, nie powodują zadziałania standardowych zabezpieczeń:

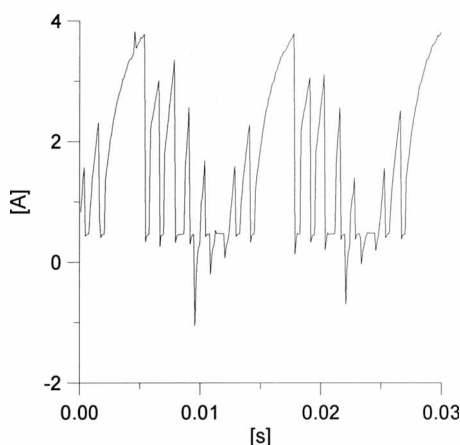
1. **OP** - Przerwa w jednym z przewodów zasilających silnika.
2. **SF** - Uszkodzenie jednego z tranzystorów falownika.
3. **CF** - Uszkodzenie kondensatora, którego pojemność zmniejsza się do połowy wartości prawidłowej.

Opisane powyżej stany awaryjne zostały zbadane doświadczalnie [13]. Napięcie wejściowe przekształtnika wynosi 230 V, częstotliwość 50 Hz, częstotliwość falownika 40 Hz, silnik pracował przy poślizgu 6%. W stanie awaryjnym zmniejszano obciążenie silnika, aby utrzymać wartości prądów w dopuszczalnych granicach.

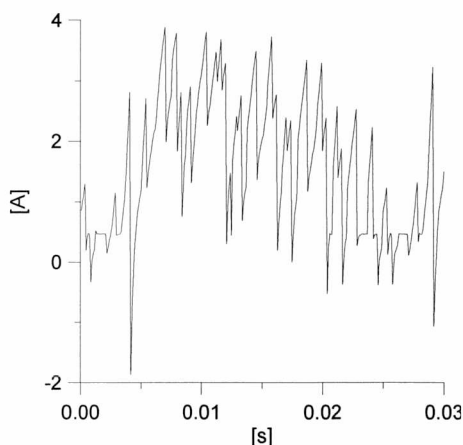
Na rys. 8.2 abcd przedstawiono przebiegi prądu wejściowego falownika I_I .



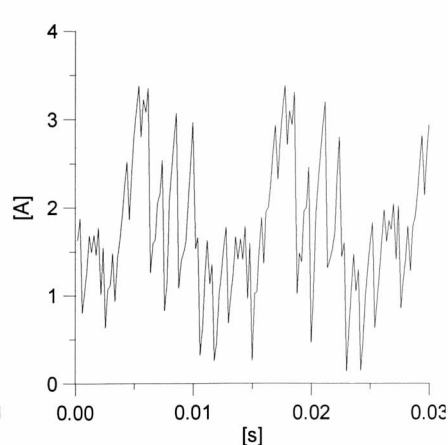
Rys.8.2a. Stan bezawaryjny.



Rys.8.2b. Awaria OP.

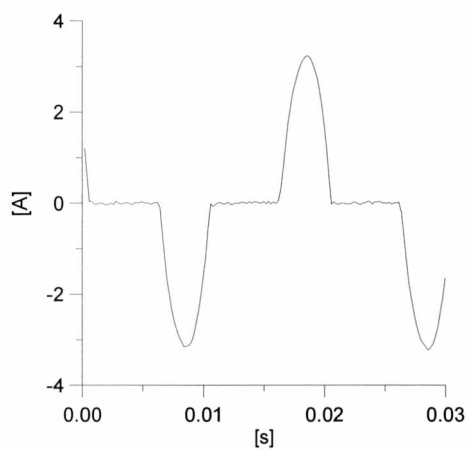


Rys.8.2c. Awaria SF.

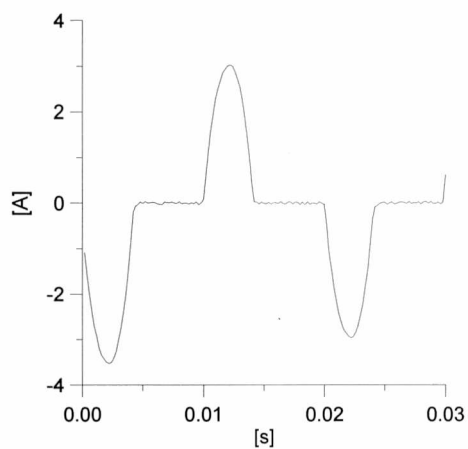


Rys.8.2d. Awaria CF.

Na rys. 8.3ab przedstawiono przebiegi prądu wejściowego prostownika I_T w przypadku awarii tranzystora falownika SF:

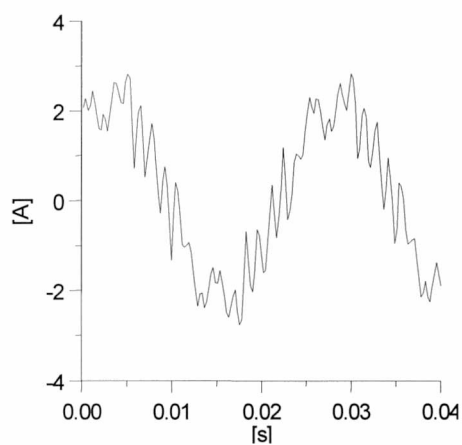


Rys.8.3a. Stan bezawaryjny.

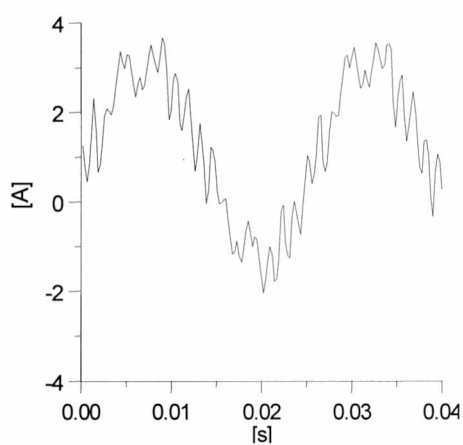


Rys.8.3b. Awaria SF.

Na rys. 8.4ab przedstawiono przebiegi prądu zasilającego silnika I_P w przypadku awarii tranzystora falownika SF:



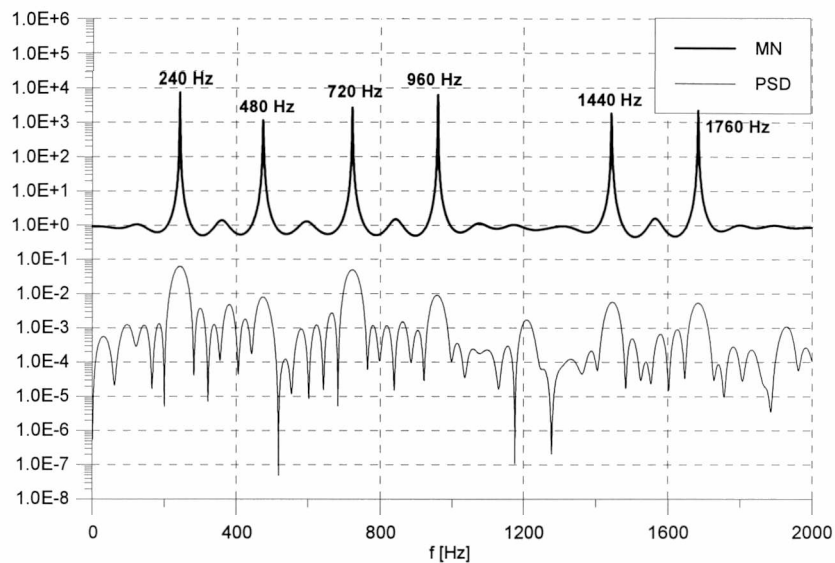
Rys. 8.4a. Stan bezawaryjny.



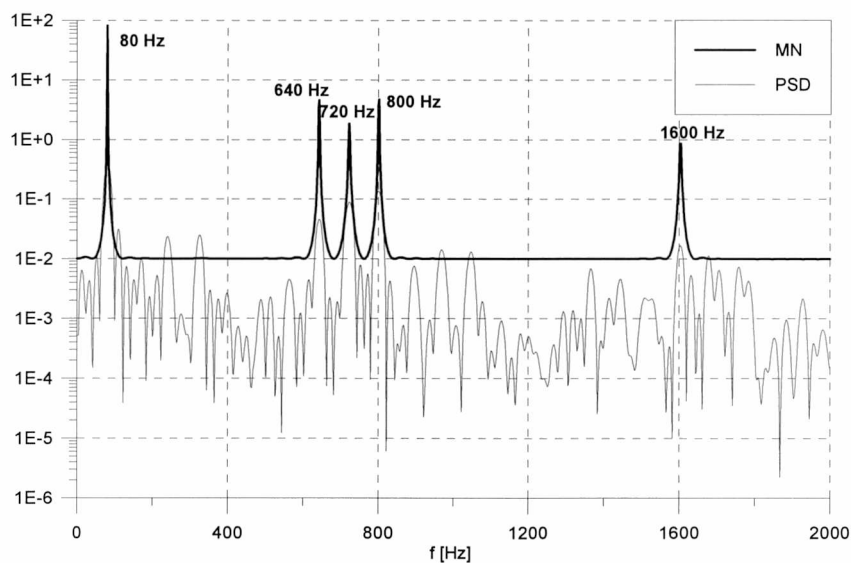
Rys.8.4b. Awaria SF.

Przebiegi te analizowano przy pomocy metody widma mocy (PSD) i metody minimum normy (MN).

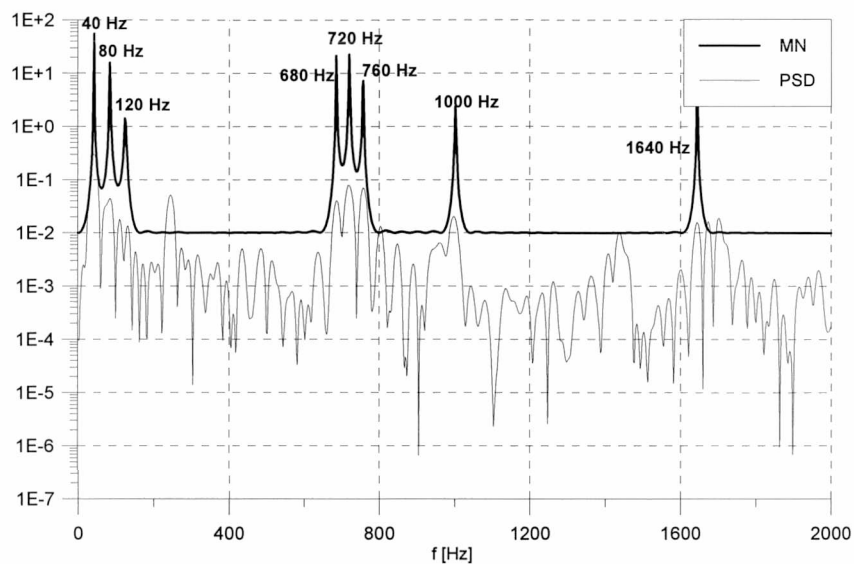
8.1.1 Wyniki



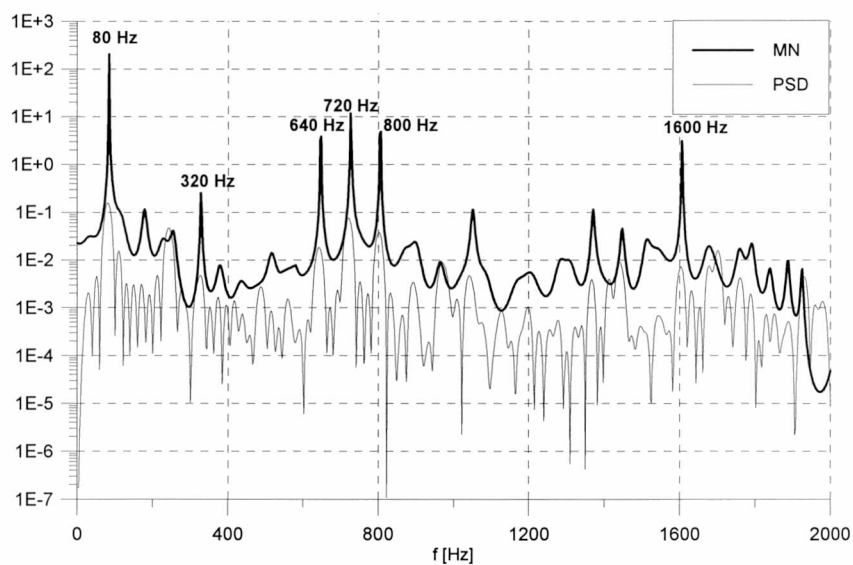
Rys.8.5. Widmo prądu wejściowego falownika (rys. 8.2a) I_I bez awarii.



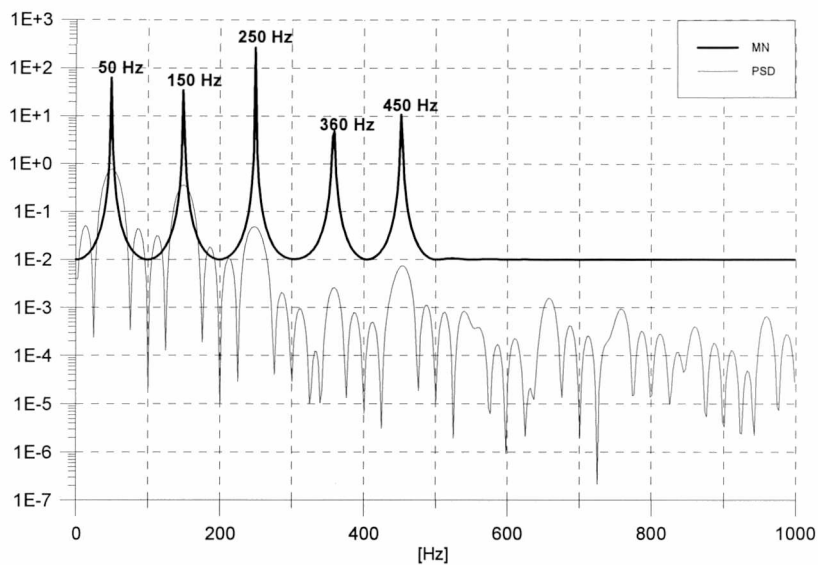
Rys.8.6. Widmo prądu wejściowego falownika (rys. 8.2b) I_I - awaria OP.



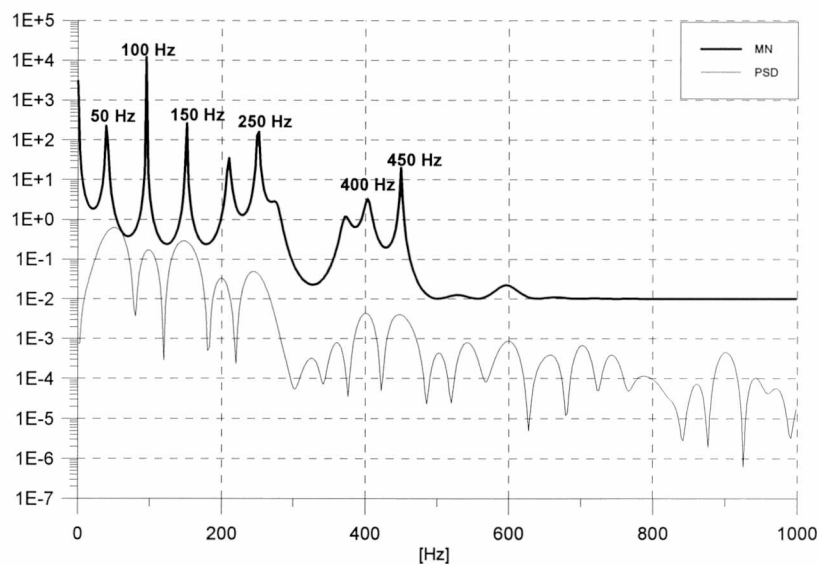
Rys.8.7. Widmo prądu wejściowego falownika (rys. 8.2c) I_I - awaria SF.



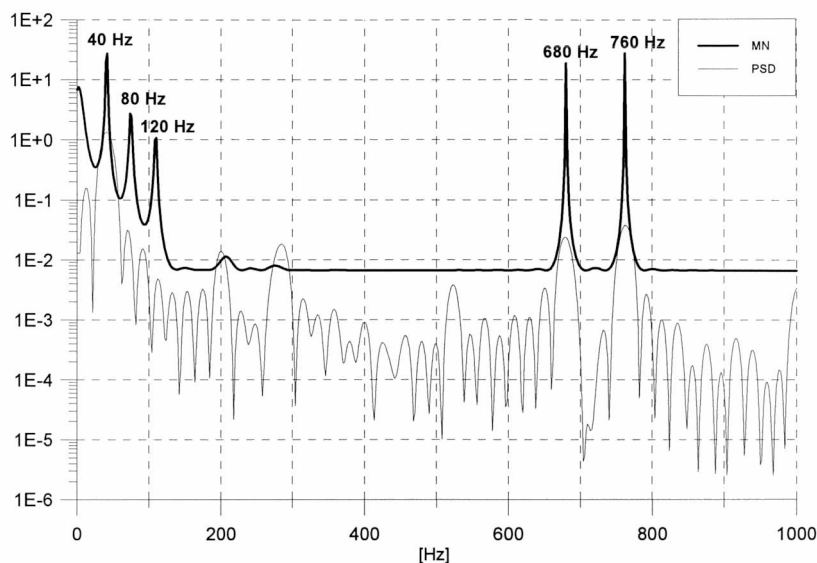
Rys.8.8. Widmo prądu wejściowego falownika (rys. 8.2d) I_I - awaria CF.



Rys.8.9. Widmo prądu wejściowego prostownika (rys. 8.3a) I_T bez awarii.



Rys.8.10. Widmo prądu wejściowego prostownika (rys. 8.3b) I_T - awaria SF.

Rys.8.11. Widmo prądu zasilania silnika (rys. 8.4b) I_P - awaria SF.

Omówienie wyników

W normalnych warunkach pracy (rys. 8.5) w widmie **prądu wejściowego falownika** I_I wykryto składowe o częstotliwościach 240, 480, 720, 960, 1440 i 1740 Hz (6, 12, 18, 24, 36 i 44 harmoniczna częstotliwości podstawowej 40 Hz).

W warunkach pracy awaryjnej (OP - przerwy w jednym z przewodów fazowych silnika - rys. 8.6) wykryto charakterystyczne składowe o częstotliwościach 640, 800 i 1600 Hz.

W warunkach pracy awaryjnej (SF - awarii jednego z tranzystorów falownika - rys. 8.7) wykryto charakterystyczne składowe o częstotliwościach 680, 760 i 1640 Hz.

W warunkach pracy awaryjnej (CF - zmniejszenie pojemności kondensatora filtrującego do połowy - rys. 8.8) wykryto charakterystyczne składowe o częstotliwościach 640, 800 i 1600 Hz. Od stanu awaryjnego OP odróżnia ten stan obecność jednej składowej o częstotliwości 320 Hz.

W normalnych warunkach pracy (rys. 8.9) w widmie **prądu wejściowego prostownika** I_T wykryto składowe o częstotliwościach 50, 150, 250, 360 i 450 Hz (1, 3, 5 i 9 harmoniczna częstotliwości napięcia zasilającego).

W warunkach pracy awaryjnej (SF - awarii jednego z tranzystorów falownika - rys. 8.10) wykryto dodatkowe charakterystyczne składowe o częstotliwościach 100 i 400 Hz.

W warunkach pracy awaryjnej (SF - awarii jednego z tranzystorów falownika - rys. 8.11) w widmie **prądu zasilającego silnika** I_P wykryto składowe o częstotliwościach 40, 80, 120, 680 i 760 Hz. Od normalnego stanu pracy ten przebieg odróżnia się tylko obecnością składowej stałej.

Obecność dodatkowych czy niecharakterystycznych składowych w stanach awaryjnych może być wykorzystane jako wskaźnik awarii [28][33]. Analiza widma przy pomocy metody minimum normy umożliwia dokładniejsze wyznaczenie częstotliwości składowych i łatwiejszą analizę i diagnostykę stanu pracy układu przekształtnikowego.

Rozdział 9

Wnioski

Poniżej przedstawiono ogólne wnioski wynikające z przeprowadzonych i przedstawionych w tej pracy analiz teoretycznych i badań symulacyjnych. Szczegółowe omówienie wyników przedstawiono w odpowiednich rozdziałach.

1. Zastosowanie statystyk wyższych rzędów nie znajduje uzasadnienia w przypadku wyznaczania widma sygnałów o dużym odstępie sygnału od szumu, spotykanych najczęściej w układach elektroenergetycznych. Metoda obliczania kumulantu jest obciążona dużym błędem, występuje wyraźna zależność błędu estymacji kumulantu od fazy sygnału (p. 5.4.2.1, p. 7.1.2 rys. 7.1-2). W przypadku małego odstępów sygnału od szumu lepsze wyniki uzyskuje się stosując klasyczne metody fourierowskie przy odpowiednio dobranej długości okna analizującego (p. 3.1.2, p. 7.1.2 rys. 7.1).
2. Metoda minimum normy, reprezentująca parametryczne metody podprzestrzeni, wykazuje szereg korzystnych cech. Charakteryzuje się ona największą dokładnością wyznaczania częstotliwości dyskretnych składowych widma w przypadku umiarkowanego i małego poziomu szumu (p. 7.1.2 rys. 7.5-7). Nie występuje przy tym zjawisko zależności błędu estymacji od położenia okna analizującego. W przypadku dużej amplitudy harmonicznych rośnie błąd tej metody, jednak w praktyce rzadko spotyka się sygnały zawierające harmoniczne o dużej tak amplitudzie [2]. Zastosowanie tej metody jest szczególnie korzystne w przypadku badania sygnałów o wielu składowych, składowych przejściowych, zawierających subharmoniczne [16], niecharakterystyczne harmoniczne i składowe przejściowe (p. 7.2.3, 8.1.1).
3. Metoda wizualizacji przy pomocy wektora przestrzennego jest stosowana w przypadku analizy widma i symetrii napięć i prądów występujących w układach trójfazowych. Połączenie tej metody z metodą minimum normy pozwala na uzyskanie reprezentacji czasowo-częstotliwościowych umożliwiających całościową wizualizację obwodu

trójfazowego z bardzo dobrą rozdzielczością i dokładnością i uzyskanie obrazu stanu jego pracy o znacznie lepszych parametrach niż metodą krótkoczasowej transformacji Fouriera (p. 7.2.3).

4. Analiza reprezentacji czasowo-częstotliwościowych otrzymanych przy pomocy dystrybucji Wignera-Ville'a jest utrudniona ze względu na charakterystyczne dla tego przekształcenia człony krzyżowe. Modyfikacja Choi-Williamsa usuwa większą ich część kosztem nie zachowania niektórych właściwości [47]. Zastosowanie tej metody jest korzystne w przypadku badania sygnałów o jednej składowej (także o zmieniających parametrach) i w przypadku małego odstępów sygnału od szumu. Wpływ interakcji pomiędzy składowymi sygnału na dokładność estymacji jest najmniejszy w przypadku tej metody (p. 7.1.2 rys. 7.16).

Dodatek A

Zastosowanie metod podprzestrzeni

Metody podprzestrzeni są narzędziem estymacji widma o odmiennych właściwościach od dotychczas znanych metod. Metody te są podzbiorem ogólnej metodologii podprzestrzeni znanej jako dopasowanie podprzestrzeni¹ [58], która, po spełnieniu dodatkowych warunków, zapewnia uzyskanie estymat widma spełniających asymptotycznie ograniczenie Cramér-Rao. Przedstawiono sposób wyznaczania pseudospektrum metodą Pisarenki - pierwszej i najprostszej z metod podprzestrzeni.

A.1 Praktyczne zastosowanie metody Pisarenki

Praktyczne wyznaczenie estymaty widma sygnału składa się z następujących etapów:

1. Utworzenie macierzy korelacji (kowariancji) (4.2)
2. Wyznaczenie wartości własnych i wektorów własnych macierzy korelacji.
3. Wydzielenie podzbioru najmniejszych wartości własnych o jednakowej wartości równej wariancji szumu σ_0^2 zawartego w badanym sygnale, i o liczebności równej $N - 1$, gdzie N jest równe liczbie próbek badanego procesu losowego.
4. Wektory własne odpowiadające tym wartościom wykorzystuje się do wyznaczenia częstotliwości składowych badanego sygnału.
5. Pozostałe wektory własne zawierają informację o amplitudach składowych badanego sygnału.

¹subspace fitting

Dla zilustrowania tej metody przedstawiono powyższe etapy na przykładzie.

A.1.1 Sygnał o jednej składowej wykładniczej

$x[n]$ reprezentuje ciąg losowy składający się z pojedynczej zespolonej składowej wykładniczej o zespolonej amplitudzie A w szumie η (niezależnym od sygnału) o zerowej średniej i wariancji σ_0^2 [58].

$$x[n] = |A| e^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 n} + \eta[n] \quad (\text{A.1})$$

czyli

$$\mathbf{x} = A\mathbf{s} + \boldsymbol{\eta} \quad (\text{A.2})$$

gdzie

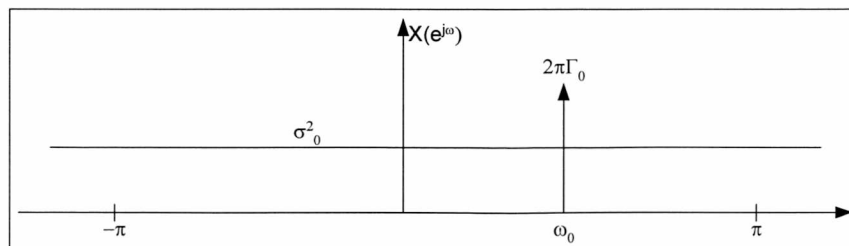
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$A = |A| e^{j\phi} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_0} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta[0] \\ \eta[1] \\ \vdots \\ \eta[N-1] \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Symbolem Γ_0 oznaczono wariancję sygnału



Rys.A.1. Widmo sygnału o jednej składowej wykładniczej w szumie.

Macierz korelacji wektora obserwacji x wyraża się wzorem:

$$\mathbf{R}_x = \mathcal{E} \{ \mathbf{A} \mathbf{s} \cdot \mathbf{A} \mathbf{s}^{*T} + \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}^{*T} \} = \Gamma_0 \mathbf{s} \mathbf{s}^{*T} + \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad (\text{A.7})$$

gdzie

$$\Gamma_0 = \mathcal{E} \{ |\mathbf{A}|^2 \} \quad (\text{A.8})$$

Jeden z wektorów własnych macierzy korelacji jest wektorem sygnału $\mathbf{s}$. Z (A.7) wynika:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{s} = (\Gamma_0 \mathbf{s} \mathbf{s}^{*T} + \sigma_0^2 \mathbf{I}) \mathbf{s} = \Gamma_0 \mathbf{s} \mathbf{s}^{*T} \mathbf{s} + \sigma_0^2 \mathbf{s} = (N \Gamma_0 + \sigma_0^2) \mathbf{s} \quad (\text{A.9})$$

Wektorowi własnemu $\mathbf{s}$ odpowiada wartość własna równa $(N \Gamma_0 + \sigma_0^2)$ gdzie $N = \|\mathbf{s}\|^2$. Macierz korelacji ma N ortonormalnych wektorów własnych, stąd wszystkie pozostałe wektory $\mathbf{e}_{sz}$ są ortogonalne do $\mathbf{s}$. Właściwość $\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_{sz} = 0$, wynikająca z ortogonalności wektorów, umożliwia wyznaczenie częstotliwości badanego sygnału.

A.1.2 Sygnał o dwóch składowych wykładniczych

Ciąg próbek badanego sygnału ma postać [58]:

$$x[n] = A_1 s_1[n] + A_2 s_2[n] + \eta[n] \quad (\text{A.10})$$

gdzie, dla $i = 1, 2$

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_i} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_i} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$A_i = |A_i| e^{j\phi_i} \quad (\text{A.12})$$

stąd

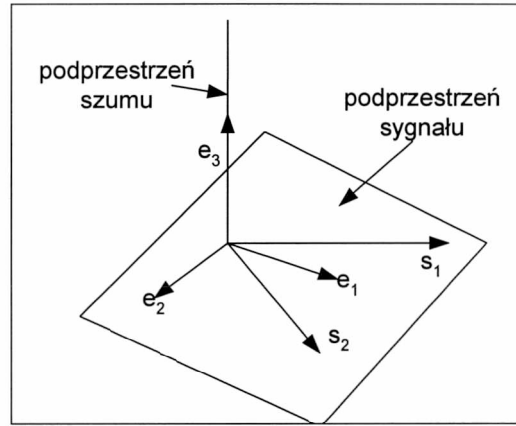
$$\mathbf{x} = A_1 \mathbf{s}_1 + A_2 \mathbf{s}_2 + \boldsymbol{\eta} \quad (\text{A.13})$$

Korzystając z (A.7) otrzymano wyrażenie:

$$\mathbf{R}_x = \Gamma_1 \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_1^{*T} + \Gamma_2 \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_2^{*T} + \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad (\text{A.14})$$

Wyznaczono wektory własne macierzy korelacji. Wektory $\mathbf{s}_1$ i $\mathbf{s}_2$ są liniowo niezależne, ponieważ $\omega_1 \neq \omega_2$. W takim wypadku można znaleźć dokładnie $N - 2$ wektory własne N -wymiarowej przestrzeni równocześnie

ortogonalne do $\mathbf{s}_1$ i $\mathbf{s}_2$. Pozostałe dwa wektory należą do podprzestrzeni rozpiętej na $\mathbf{s}_1$ i $\mathbf{s}_2$ i odpowiadają wartościom własnym większym niż σ_0^2 . Podprzestrzeń ta jest nazwana „podprzestrzenią sygnału”, podczas gdy ortogonalna do niej podprzestrzeń nazwana jest nieprecyzyjnie „podprzestrzenią szumu” (mimo, że elementy wektora szumu $\boldsymbol{\eta}$ należą do każdej z obu podprzestrzeni). Na rysunku 2 wektory $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ odpowiadają składowym sygnału a $\mathbf{e}_3$ odpowiada szumowi.



Rys.A.2. Podprzestrzenie sygnału i szumu.

Częstotliwości składowych sygnału można wyznaczyć dzięki utworzeniu funkcji

$$E_{sz}(z) = \mathbf{e}_{sz}[0] + \mathbf{e}_{sz}[1]z^{-1} + \dots + \mathbf{e}_{sz}[N-1]z^{-(N-1)} \quad (\text{A.15})$$

zwanej filtrem wektora własnego².

Funkcja $E_{sz}(z)$ ma $M = N - 1$ pierwiastków o argumentach równych częstotliwościom badanego sygnału.

Wyznaczenie mocy sygnału

Gdy częstotliwości składowych sygnału są znane, korzystając z informacji zawartej w wektorach należących do podprzestrzeni sygnału, można wyznaczyć moce (amplitudy) poszczególnych składowych sygnału. Zależność

$$\mathbf{e}_i^{*T} \mathbf{R}_x \mathbf{e}_i = \lambda_i \quad (\text{A.16})$$

została przekształcona przy pomocy (A.14) dla $i = 1, 2$ do postaci:

$$\Gamma_1 \mathbf{e}_1^{*T} \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_1^{*T} \mathbf{e}_1 + \Gamma_2 \mathbf{e}_1^{*T} \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_2^{*T} \mathbf{e}_1 + \sigma_0^2 = \lambda_1 \quad (\text{A.17})$$

$$\Gamma_1 \mathbf{e}_2^{*T} \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_1^{*T} \mathbf{e}_2 + \Gamma_2 \mathbf{e}_2^{*T} \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_2^{*T} \mathbf{e}_2 + \sigma_0^2 = \lambda_2 \quad (\text{A.18})$$

² eigenfilter

po zdefiniowaniu współczynników α_{ij} i przekształceniu do postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{e}_1^{*T} & - \\ - & \mathbf{e}_2^{*T} & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

(A.17) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} |\alpha_{11}|^2 & |\alpha_{12}|^2 \\ |\alpha_{21}|^2 & |\alpha_{22}|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \sigma_0^2 \\ \lambda_2 - \sigma_0^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Równania te można rozwiązać względem Γ_1 i Γ_2 .

Uogólnienie powyższych rozważań dla M niezależnych składowych sygnału w szumie przedstawiono w (4.5) i następnych.

Przykład

Sygnał $\mathbf{x}$ składa się z jednej rzeczywistej sinusoidy o częstotliwości ω_0 i amplitudzie A , czyli z dwóch ($M = 2$) zespolonych składowych wykładniczych o częstotliwościach $\pm\omega_0$ i szumu białego o zerowej średniej i wariancji σ_0^2 . W tym przypadku w metodzie Pisarenki zakłada się, że liczba próbek sygnału $N = M + 1$.

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_0} \\ e^{j2\omega_0} \end{bmatrix}, \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\omega_0} \\ e^{-j2\omega_0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_0} \\ e^{j2\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_0} & e^{-2j\omega_0} \end{bmatrix} + \\ &+ A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\omega_0} \\ e^{-j2\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega_0} & e^{2j\omega_0} \end{bmatrix} + \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2A^2 + \sigma_0^2 & 2A^2 \cos \omega_0 & 2A^2 \cos 2\omega_0 \\ 2A^2 \cos \omega_0 & 2A^2 + \sigma_0^2 & 2A^2 \cos \omega_0 \\ 2A^2 \cos 2\omega_0 & 2A^2 \cos \omega_0 & 2A^2 + \sigma_0^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

Dla $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 2A^2 + \sigma_0^2 & A^2 & -A^2 \\ A^2 & 2A^2 + \sigma_0^2 & A^2 \\ -A^2 & A^2 & 2A^2 + \sigma_0^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Wyznaczono wektory własne i wartości własne macierzy $\mathbf{R}_x$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \sigma_0^2$$

$$\mathbf{e}_{2,3} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \sigma_0^2 + 3A^2$$

Wektor $\mathbf{e}_1$ odpowiada wektorowi własnemu należącemu do podprzestrzeni szumu (odpowiada wartości własnej równej wariancji szumu) i ten wektor wykorzystuje się do wyznaczenia częstotliwości składowych badanego sygnału.

Szukane częstotliwości są pierwiastkami wielomianu (tworzącego filtr wektora własnego) postaci:

$$E_1(z) = -1 + z^{-1} - z^{-2},$$

$$\{z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{3}\}, \{z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{3}\}$$

stąd $\omega_0 = \pm \frac{\pi}{3}$

Wektory własne $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ są wektorami sygnału i zawierają informacje o mocy sygnału:

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{(j\frac{\pi}{3})} \\ e^{(j\frac{2\pi}{3})} \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{(-j\frac{\pi}{3})} \\ e^{(-j\frac{2\pi}{3})} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{(j\frac{\pi}{3})} & e^{(-j\frac{\pi}{3})} \\ e^{(j\frac{2\pi}{3})} & e^{(-j\frac{2\pi}{3})} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{E}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{E}_{2,3}^{*T} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{(j\frac{\pi}{3})} & e^{(-j\frac{\pi}{3})} \\ e^{(j\frac{2\pi}{3})} & e^{(-j\frac{2\pi}{3})} \end{bmatrix} = \quad (\text{A.27})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{3} & \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{3} \\ j\sqrt{3} & -j\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

(A.20) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(-3+j\sqrt{3})^2 & \frac{1}{4}(3+j\sqrt{3})^2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3A^2 \\ 3A^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{3} \right) \\ A^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{3} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{bmatrix} |\Gamma_1| \\ |\Gamma_2| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 \\ A^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

Dodatek B

Rozdzielczość reprezentacji

B.1 Rozdzielczość STFT

Rozdzielczość tej metody można w przybliżeniu ocenić [47] rozpatrując krótkoczasową transformatę Fouriera sygnału gaussowskiego s , gdy funkcja analizująca γ jest tego samego typu. Po podstawieniu:

$$s(\tau) = \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{a}{2}\tau^2} \quad (\text{B.1})$$

$$\gamma(\tau - t) = \sqrt[4]{\frac{b}{\pi}} e^{-\frac{b}{2}(\tau-t)^2} \quad (\text{B.2})$$

do wzoru (6.1) otrzymano:

$$\begin{aligned} X_{STFT}(t, \omega) &= \frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}\tau^2} e^{-\frac{b}{2}(\tau-t)^2} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{ab}{2(a+b)}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a+b}{2}\left[\tau^2 - \frac{2bt}{a+b}\tau + \left(\frac{bt}{a+b}\right)^2\right]} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \sqrt{\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}} e^{\left(-\frac{ab}{2(a+b)}t^2 - \frac{1}{2(a+b)}\omega^2 + j\frac{b}{a+b}\omega t\right)} \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Spektrogram odpowiadający (B.3) wyraża się wzorem:

$$|X_{STFT}(t, \omega)|^2 = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} e^{\left(-\frac{ab}{2(a+b)}t^2 - \frac{1}{2(a+b)}\omega^2\right)} \quad (\text{B.4})$$

Spektrogram funkcji gaussowskiej jest skoncentrowany wokół początku układu współrzędnych i jego przekrój ma kształt elipsy o polu powierzchni $A = \frac{(a+b)\pi}{\sqrt{ab}}$ dla wartości amplitudy widma równej $\frac{1}{e}$. Pole A jest miarą koncentracji spektrogramu. Pole A osiąga minimum gdy wariancja okna analizującego jest dokładnie równa czasowi trwania badanego sygnału. W praktyce czas trwania sygnału a jest nieznany a osiągnięcie optymalnej rozdzielczości gdy $A = 2\pi$ jest niemożliwe.

B.2 Rozdzielczość reprezentacji Wignera-Ville'a

Podobną analizę można przeprowadzić dla reprezentacji Wignera-Ville'a sygnału gaussowskiego z (B.1):

$$\begin{aligned}
 X_{WV}(t, \omega) &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2} \left[\left(t + \frac{\tau}{2} \right)^2 + \left(t - \frac{\tau}{2} \right)^2 \right]} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\
 &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-at^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{4}\tau^2} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\
 &= 2e^{-[at^2 + \frac{1}{a}\omega^2]} \quad (\text{B.5})
 \end{aligned}$$

Minimalne pole powierzchni A , które jest miarą koncentracji reprezentacji ma wartość π . Rozdzielczość reprezentacji Wignera-Ville'a jest co najmniej dwukrotnie lepsza od spektrogramu a ponadto negatywny wpływ okna analizującego może być całkowicie wyeliminowany [47].

Dodatek C

Symulacja EMTP napędu

Pakiet symulacyjny EMTP-ATP jest zbiorem programów służących do symulacji złożonych układów elektroenergetycznych, zarówno statycznych jak i dynamicznych a szczególnie do symulacji przebiegów przejściowych spowodowanych zjawiskami elektromagnetycznymi występujących w urządzeniach elektroenergetycznych.

Do symulacji przekształtnikowego układu napędowego, składającego się asynchronicznego silnika klatkowego i typowego przekształtnika tyrystorowego z modulacją PWM, zastosowano typowy model maszyny klatkowej zgodnie z [11] rozdział VIII oraz model mostka tyrystorowego zgodnie z [11] rozdział XXIX-F [50].

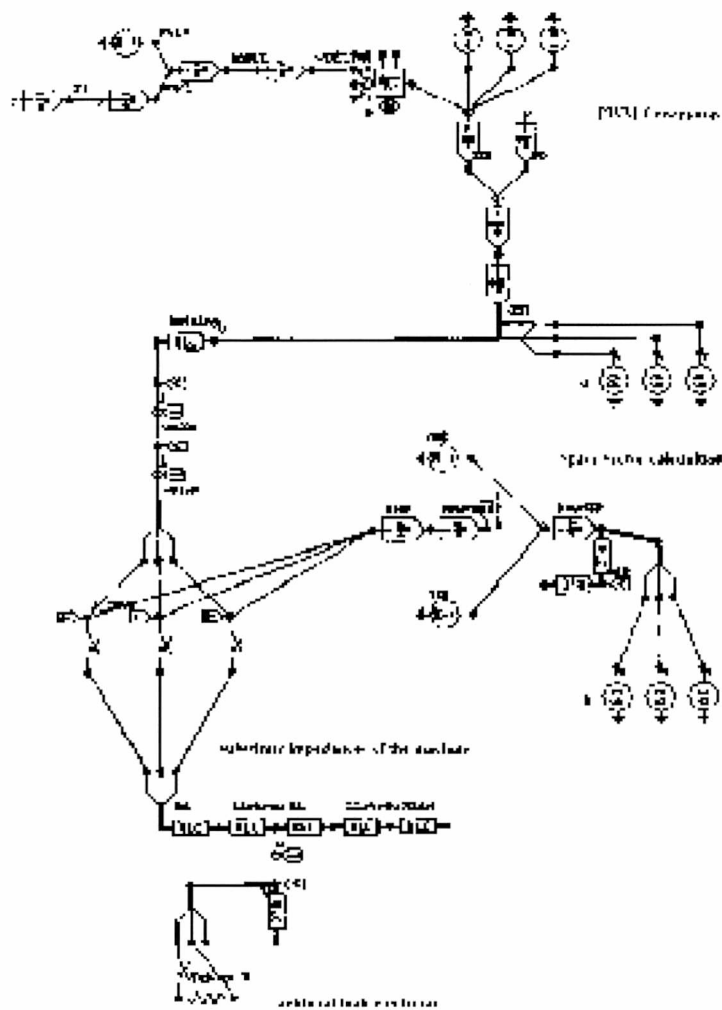
Na rys. C.1 przedstawiono częściowy schemat układu przekształtnikowego. Z powodu niedoskonałości programu EMTP¹ do badania stanu zwarcia pomiędzy przewodami zasilającymi silnika wykorzystano uproszczony model przekształtnika bez modelowania mostka tyrystorowego a jedynie bezpośrednie zasilanie modelu silnika z generatora napięcia opisanego poleceniami TACS² [50].

Podstawowe dane modelu silnika:

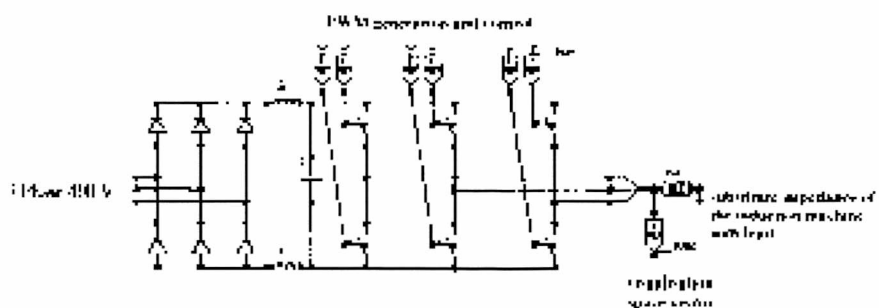
napięcie znamionowe	$U_N = 220 \text{ V}$
moc znamionowa	$P_N = 1,1 \text{ kW}$
poślizg znamionowy	$s = 6 \%$
współczynnik mocy	$\cos\varphi = 0,81$
prędkość obrotowa zn.	$n = 1410 \text{ min}^{-1}$
częstotliwość modulacji PWM	$f_{PWM} = 1000 \text{ Hz}$

¹ w przypadku pełnej symulacji układu przekształtnikowego i silnika asynchronicznego występowały opóźnienia obliczeniowe i cykliczna niesymetria sterowania przekształtnika.

² Transient Analysis Control Systems - podobne do języka Fortran polecenia odpowiadające funkcjom modelu analogowego oraz bloki funkcjonalne (registry, akumulatory itp.).



Rys.C.1. Schemat EMTP symulacji zwarcia.



Rys.C.2. Układ symulacji przekształtnika PWM.

Dodatek D

Wyznaczenie liczby sygnałów

Teoria estymacji parametrycznej wymaga wcześniejszej znajomości liczby sygnałów M zawartych w badanym sygnale złożonym czyli wyznaczenia rzędu modelu sygnału. Jeśli SNR jest wysoki, wtedy można wyznaczyć tę liczbę przez wydzielenie zbioru najmniejszych wartości własnych macierzy korelacji w przybliżeniu jednakowych - ich liczba jest równa $N - M$ [58]. Metoda ta zawodzi, gdy poziom szumu jest wysoki i gdy sekwencje badanych próbek są krótkie. Proponuje się wtedy zastosowanie innych metod statystycznych, jak AIC¹. AIC jest zdefiniowany jako [58]:

$$AIC(M) = -2(N - M) \ln \rho(M) + 2M(2N - M) \quad (D.1)$$

gdzie N jest liczbą próbek badanego sygnału a $\rho(M)$ jest ilorazem średniej geometrycznej wartości własnych do średniej arytmetycznej wartości własnych macierzy korelacji i opisany wzorem:

$$\rho(M) = \frac{(\lambda_{M+1} \lambda_{M+2} \dots \lambda_N)^{\frac{1}{N-M}}}{\frac{1}{N-M} (\lambda_{M+1} + \lambda_{M+2} + \dots + \lambda_N)} \quad (D.2)$$

Liczbę sygnałów M wybiera się jako minimalizującą równanie (D.2)

Jednym z celów tej pracy jest wykorzystanie metody minimum normy do wyznaczenia widma sygnałów o zmiennej w czasie ilości składowych. Konieczne jest w tym przypadku wielokrotne wyznaczanie widma sygnału na podstawie krótkich sekwencji danych i dla jednej realizacji badanego przebiegu. Praktyczne próby wykazały, że zarówno proponowana w [56] metoda wyznaczenia liczby sygnałów z obserwacji wykresu wartości własnych jak i opisane kryterium AIC, nie dają prawidłowych wyników przy opisanych ograniczeniach.

Zaproponowano metodę wyznaczenia liczby M w następujący sposób, praktycznie zastosowany w algorytmach wyznaczenia widma metodą minimum-normy dla sygnałów niestacjonarnych.

¹Akaike Information Criterion

Niech Λ będzie wektorem wartości własnych macierzy korelacji utworzonej z próbek sygnału. Wartości własne są uszeregowane w kolejności malejącej: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Po unormowaniu wektora Λ , liczbę M wyznacza się jako indeks najmniejszej wartości własnej większej niż założona dodatnia liczba ε .

$$\lambda_M \geq \varepsilon \quad (\text{D.3})$$

W szeregu doświadczeń określono, że liczba ε powinna zawierać się w przedziale $(0,0005, 0,001)$.

Literatura

- [1] Bachry A., Leonowicz Z., Piotrowicz J., Ruczewski P.: „Realizacja wybranych filtrów cyfrowych z wykorzystaniem procesorów sygnałowych”, *Zastosowania komputerów w elektrotechnice, IV Konferencja naukowo-techniczna*, Poznań-Kiekrz, 1999, ss. 47-50.
- [2] Begović M.M., Djurić P.M., Dunlap S., Phadke A.G.: „Frequency tracking in power networks in the presence of harmonics”, *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 8, No. 2, 1993, pp. 480-486.
- [3] Bendat J.S., Piersol A.G.: *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*. PWN, Warszawa 1976.
- [4] Boashash B.: „Note on the use of the Wigner distribution for time-frequency signal analysis”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. 36, no. 9, Sept. 1988, pp. 1518-1521.
- [5] Borodziejewicz W., Jaszczak K.: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów - wybrane zagadnienia*, WNT, Warszawa 1987
- [6] Bronsztejn K., Siemiediajew A.: *Matematyka - Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa, 1995.
- [7] Burns S.C., McClellan J.H., Oppenheim A.V., Schafer W.R., Schüssler H.W.: *Computer-Based Exercises for Signal Processing Using Matlab[®]*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1994.
- [8] Claasen T.A.C.M., Mecklenbrauker W.F.G.: „The Wigner distribution—A tool for time-frequency signal analysis—Part II: Discrete-time signals”, *Philips J. Res.*, Vol. 35, Oct. 1980, pp. 276-300.
- [9] Carbone, R., D. Menniti, N. Sorrentino and A. Testa: „Iterative Harmonic and Interharmonic Analysis In Multiconverter Industrial Systems”, *8th International Conference on Harmonics and Quality of Power*, Vol.1, 1998, pp. 432-438.
- [10] Cohen L.: *Time-Frequency Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

- [11] *EMTP-ATP Rule Book*, Canadian-American User Group, 1987-1992.
- [12] *EMTP-Theory Book-Theoretical basics of the EMTP program by prof. Dommel*, Canadian-American User Group.
- [13] Gentile G., Rotondale N., Tursini M., Franceschini G., Tassoni C.: „Fault operations of inverter-fed induction motor”, *Proceedings of the 31st Universities Power Engineering Conference*, Vol. 2, 1996, pp. 353-360.
- [14] Geppart A., Polaczek A.: „Wytyczne kontroli i ograniczania odkształceń i wahań napięcia w sieciach rozdzielczych 10 kV i sieciach 110 kV eksploatowanych przez energetykę zawodową”, *Opracowanie Instytutu Energetyki-Zakład Sieci Rozdzielczych*, Katowice, 1985.
- [15] Giannakis G.: „Cumulants: A Powerful Tool in Signal Processing”, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 75, No. 9, Sept. 1987, pp. 1333-1334.
- [16] IEC, Sub-Committee 77B, „*Compatibility levels in industrial plants*”, Document 77B (Sec) 49, March 1988.
- [17] Kesler S.B. (ed.): *Modern Spectrum Analysis II*, IEEE Press, New York, 1986.
- [18] Kiełbasiński A., Schwetlick H.: *Numeryczna algebra liniowa – wprowadzenie do obliczeń zautomatyzowanych*, WNT, Warszawa, 1992, ss. 371-471.
- [19] Kovacs K.P.: *Symmetrische Komponenten in Wechselstrommaschinen*, Birkhäuser Verlag, 1962.
- [20] Kumaresan R.: *Estimating the Parameters of Exponentially Damped/Undamped Sinusoidal Signals in Noise*, rozprawa doktorska, University of Rhode Island, Kingston, Rhode Island, 1982.
- [21] Leonowicz Z.: *Analiza sygnałów okresowych metodami statystyk wyższych rzędów*, magisterska praca dyplomowa, Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1997.
- [22] Leonowicz Z., Lobos T., Ruczewski P., Szymańda J.: „Application of Higher-Order Spectra for Signal Processing in Electrical Power Engineering”, *IX International Symposium on Theoretical Electrical Engineering*, Palermo, Italy, June 1997, pp. 108-111.
- [23] Leonowicz Z., Lobos T., Ruczewski P., Szymańda J.: „Analiza sygnałów odkształconych przy pomocy statystyk wyższych rzędów”. *XX Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów*, Gliwice-Ustroń, 1997, t. II, ss. 475-478.

- [24] Leonowicz Z., Lobos T., Ruczewski P., Szymańda J.: „Analysis of distorted signals using HOS”, *International Journal for Computation and Mathematics in Electronic Engineering COMPEL (Great Britain)*, 1998, vol. 17, issue 5/6, pp. 602-611.
- [25] Leonowicz Z., Piotrowicz J.: „Wyznaczanie składowej podstawowej sygnałów odkształconych metodą minimum normy”, *XXII Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów*, Gliwice- Ustroń, 1999, ss. 425-428.
- [26] Lobos T.: „Fast estimation of symmetrical components in real time”, *IEE Proceedings-C*, 1992, Vol. 139, No. 1, ss. 27-30.
- [27] Lobos T., Kozina T., Leonowicz Z., Bachry A.: „Novel Approach to the Interharmonic Analysis Using High-Resolution Spectrum Estimation Methods”, *EPNC'99*, Kraków, Poland, 1999, pp. 135-141.
- [28] Lobos T., Leonowicz Z.: „Investigations of the Fault Operation of Inverter-Fed Induction Motors Using Higher Order Statistics”, *2nd IMACS Intl. Multiconference Computational Engineering in Systems Applications, Symposium on Signal Processing and Cybernetics*, Nabeul-Hammamet, Tunisia, 1998, vol. 4, pp. 892-896.
- [29] Lobos T., Leonowicz Z.: „Investigations of Inverter Drives Fault Operation Using Higher Order Statistics”, *IV Szkoła-Konferencja Elektrotechnika-Prądy niesinusoidalne*, Zielona Góra, Poland, 1998, t. II, pp. 277-286.
- [30] Lobos T., Leonowicz Z.: „Badania stanów awaryjnych układów przekształtnikowych z zastosowaniem statystyk wyższych rzędów - Investigations of the Fault Operation of Inverter-Fed Induction Motors Using Higher-Order Statistics”, *Jakość i Użytkowanie Energii Elektrycznej*, 1999, tom V, zeszyt 1, pp. 37-42.
- [31] Lobos T., Leonowicz Z.: „Higher-Order Statistics for Signal Analysis in Inverter-Fed Induction Motor Drives”, *UEES '99 Conference on Unconventional Electromechanical and Electrical Systems*, St. Petersburg, Russia, June 1999, pp. 659-664.
- [32] Lobos T., Leonowicz Z., Piotrowicz J.: „Detection of the fundamental harmonic of distorted signals using min-norm method”, *X International Symposium on Theoretical Electrical Engineering*, Magdeburg, Germany, 1999, pp. 642-647.
- [33] Lobos T., Leonowicz Z., Ruczewski P.: „Investigations of Inverter Drives Fault Operation Using Higher Order Statistics”, *XX Symposium Electromagnetic Phenomena in Non-linear Circuits*, Liège, Belgium, 1998, pp. 196-199.

- [34] Martin W., Flandrin P.: „Wigner-Ville Spectral Analysis of Nonstationary Processes”, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. Assp. 33, No. 4, Dec. 1985, pp. 1461-1470.
- [35] Mendel J.M.: „Tutorial on Higher-Order Statistics (Spectra) in Signal Processing and System Theory: Theoretical Results and Some Applications”, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 79, No. 3, March 1991, pp. 279-305.
- [36] Mikołajuk K.: *Podstawy analizy obwodów energoelektronicznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1998.
- [37] Naidu P.S.: *Modern Spectrum Analysis of Time Series*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996.
- [38] Nikias C.L.: *Higher-Order Spectral Analysis, Advances in Spectral Analysis and Array Processing I* (ed. S. Haykin), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1991.
- [39] Nikias C.L., Mendel J.M.: „Signal Processing with Higher-Order Spectra”, *IEEE Signal Processing Magazine*, July 1993, pp. 10-37.
- [40] Nikias C.L., Petropulu A.P.: *Higher-Order Spectra Analysis: A non-linear processing framework*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1993.
- [41] Oppenheim A.V., Schaffer R.W.: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*. WKŁ, Warszawa 1979.
- [42] Papoulis A.: *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*. WKŁ, Warszawa 1972.
- [43] Pisarenko V.F.: „The retrieval of harmonics from a covariance function”, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 33, 1973, pp. 347-366. (reprint w [17])
- [44] Poularikas A.: *The Transforms and Applications Handbook*, CRC Press, 1996.
- [45] Proakis J. G., Manolakis D.G.: *Digital Signal Processing; Principles, Algorithms, and Applications*, Macmillan Publishing, 1992, pp. 864-915.
- [46] Proakis J., Rader C.M., Ling F., Nikias C.L.: *Advanced digital signal processing*, Macmillan Publishing, New York 1992.
- [47] Quian S., Chen D.: *Joint Time-Frequency Analysis; Methods and Applications*, Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1996, pp.45-199.

- [48] Rezmer J.: *Cyfrowe wyznaczanie częstotliwości podstawowej sygnałów w czasie rzeczywistym*, rozprawa doktorska, Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1995.
- [49] Ruczewski P., Piotrowicz J., Leonowicz Z., Bachry A.: „Praktyczna realizacja filtrów nierekursywnych z wykorzystaniem procesora sygnałowego TMS320C50, *Raporty Inst. Podst. Elektrotechniki i Elektrotechnologii Politechniki Wrocławskiej*, 1999, Ser. SPR nr 389.
- [50] Ruhm D.: *Visualisierung einer stromrichter gespeisten Asynchronmaschine*, rozprawa doktorska, Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2000.
- [51] Serrano-Iribarnegaray L.: „The modern space-phasor theory, Part I, 1st coherent formulation and its advantages for transient analysis of converter-fed AC machines”, *ETEP*, vol. 3, No. 3, pp. 171-180.
- [52] Shan P., Beex A. A.: „High-resolution instantaneous frequency estimation based on time-varying AR modeling”, *Proceedings of the IEEE-SP Int. Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, Oct. 6-9, Pittsburgh, USA, 1998, pp. 109-112.
- [53] Sobkowski J.: *Częstotliwościowa analiza sygnałów*, Wydawnictwo MON, Warszawa, 1975.
- [54] Stoica P., Moses R.: *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [55] Swami A.: „Cumulant-Based Approach to the Harmonic Retrieval and Related Problems”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 39, Iss. 5, pp. 1099-1108.
- [56] Swami A: *Toolbox Higher-order statistics*, United Signals & Systems, Inc. & The MathWorks, Inc, Revision: 1.6., 1991-98.
- [57] Szabatin J.: *Podstawy teorii sygnałów*, WKŁ, Warszawa, 1982.
- [58] Therrien C.W.: *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1992.
- [59] Velez E. F., Absher R. G.: „Spectral Estimation Based on the Wigner-Ville Representation”, *Signal Processing*, Vol. 20, No. 4, August 1990, pp. 325-347.

Indeks

- błąd estymacji, 42
- dystribucja
 - Choi-Williamsa, 39, 64
 - Wignera-Ville'a, 32, 34–37, 64
- estymator
 - kumulantu, 29
 - momentu, 30
- filtr wektora własnego, 71, 73
- funkcja
 - analityczna, 36
 - autokorelacji, 24, 26
 - autokowariancji, 2
 - charakterystyczna, 25
 - gęstości prawdopodob., 1
 - korelacji, 3, 20
 - regresji liniowej, 24
- kumulant, 26, 28, 29
- macierz
 - autokorelacji, 21
 - korelacji, 20, 22, 68, 70, 79
 - kowariancji, 3, 19, 20
 - Toeplitza, 20
 - wartości własnych, 22
 - wektorów własnych, 21
- okno
 - prostokątne, 14, 16
- podprzestrzeń
 - sygnału, 22, 71
 - szumu, 22, 71
- proces
 - harmoniczny, 27
 - stochastyczny, 1–3, 19, 20, 29, 68
 - ergodyczny, 2
 - quasi-stacjonarny, 3
 - stacjonarny, 1
- pseudospektrum, 22, 23
- SNR, 48
- STFT, 34
- sygnał
 - analityczny, 36–38
 - deterministyczny, 29
 - dyskretny, 16, 17
 - rzeczywisty, 37
 - stochastyczny, 30
 - trójfazowy, 4
 - zespólny, 34
- transformata
 - Fouriera, 14, 36
 - krótkoczasowa, 32, 75
 - Fouriera odwrotna, 36
 - Hilberta, 36
- wektor
 - losowy, 1, 3
 - przestrzenny, 4–7
 - sygnału, 73
 - szumu, 71
 - własny, 68, 70
- widmo
 - mocy, 15–17, 36
 - Wignera-Ville'a, 36

