

Agata Gluzicka

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

ZASTOSOWANIE ROZSZERZONEGO WSPÓŁCZYNNIKA GINIEGO JAKO MIERNIKA RYZYKA DO WYZNACZANIA PORTFELA AKCJI

1. Wstęp

W analizie portfelowej stosowane są różne miary ryzyka. W klasycznym podejściu Markowitza jako miarę ryzyka przyjmuje się odchylenie standardowe lub wariancję. Znany jest również model wyboru portfela inwestycji, w którym ryzyko mierzone jest odchyleniem przeciętnym – model Konno, Yamazaki [Ogryczak 2003]. Jako miary ryzyka mogą być stosowane także semiwariancja i odchylenie standardowe stopy zwrotu oraz odchylenie i semiodchylenie przeciętne stopy zwrotu.

Z kolei S. Yitzhaki [1982, s. 178-185] wprowadził taki model wyboru portfela inwestycji, w którym jako miarę ryzyka przyjmuje się tzw. średnią różnicę Giniego. Jest on także autorem dwóch kryteriów dominacji stochastycznych opartych na średniej Giniego. S. Yitzhaki oraz H. Shalit [Shalit, Yitzhaki 2005, s. 59-75; 1984, s. 1449-1468] wprowadzili pojęcie rozszerzonego współczynnika Giniego. Współczynnik ten następnie zastosowali jako przykład miary ryzyka do wyznaczania portfeli efektywnych oraz do modelu CAMP (*capital-asset pricing model*).

W ostatnich kilkudziesięciu latach można zaobserwować rozwój badań nad zastosowaniem średniej Giniego oraz rozszerzonego współczynnika Giniego do analizy portfelowej.

J. Okunev [1991, s. 209-218] wykazał, że wszystkie portfele efektywne w sensie średniej Giniego są portfelami efektywnymi także według reguły dominacji stochastycznych drugiego stopnia. Zwraca on również uwagę na jedną z zalet modelu średniej Giniego, czyli uwzględnianie stopnia awersji do ryzyka przy wyznaczaniu portfeli optymalnych.

H. Shalit i S. Yitzhaki [2005, s. 59-75; 1984, s. 1449-1468] zastosowali średnią Giniego oraz rozszerzony współczynnik Giniego do konstrukcji granicy efektywnej portfeli złożonych z sześciu grup akcji, obligacji oraz weksli notowanych na nowojorskiej giełdzie papierów wartościowych. Zaobserwowali, że w razie braku

krótkiej sprzedaży portfele optymalne wyznaczone według modeli ze średnią Giniego oraz z rozszerzonym współczynnikiem Giniego są bardziej zdywersyfikowane niż portfele wyznaczone według modelu Markowitza.

Warto zwrócić uwagę, że modele wyboru portfela inwestycji, w których miarą ryzyka jest średnia Giniego lub rozszerzony współczynnik Giniego, to przykłady modeli sprowadzalnych do modeli liniowych w optymalizacji portfela inwestycji, przy skończonej liczbie scenariuszy przyszłych stanów ryzyka. Znane są wyniki analiz przeprowadzonych przez W. Ogryczaka [Ogryczak 2003; Ogryczak, Mansini, Speranza 2004], porównujące średnią Giniego z takimi miarami ryzyka jak wariancja, VaR, CVaR czy WCVaR.

W artykule wprowadzone zostaną definicje średniej różnicy Giniego oraz rozszerzonego współczynnika Giniego. Omówione zostaną podstawowe własności rozszerzonego współczynnika Giniego. W końcowej części pracy zostanie przedstawiony przykład zastosowania rozszerzonego współczynnika Giniego do analizy ryzyka inwestycyjnego dla danych z GPW w Warszawie.

2. Pojęcie średniej różnicy Giniego

Pojęcie średniej różnicy wprowadził w 1912 r. włoski profesor C. Gini, który zdefiniował współczynnik jako wartość oczekiwaną bezwzględnej różnicy dwóch zmiennych losowych o równych dystrybuantach rozkładu [Okuner 1991, s. 209-218].

Przez kolejne lata pojęcie średniej różnicy Giniego było wielokrotnie modyfikowane. Wśród tych modyfikacji pojawiła się definicja średniej różnicy Giniego wprowadzona przez S. Yitzhakiego, który następnie wykorzystał tę miarę do sformułowania kryteriów dominacji stochastycznych.

Poniżej przedstawiono definicje średniej Giniego zaproponowane przez S. Yitzhakiego [Shalit, Yitzhaki 1984, s. 178-185].

Dla dwóch zmiennych losowych X i Y , o ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa, określonym funkcją gęstości $f(x)$, $f(y)$ na przedziale $[a, b]$ średnią różnicę Giniego definiujemy następująco:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b |x - y| f(x) f(y) dx dy.$$

Jeśli F oznacza dystrybuantę rozkładu, określoną na przedziale $[a; b]$ dla ciągłej zmiennej losowej X , to średnią różnicę Giniego możemy zdefiniować następująco:

$$\Gamma = \int_a^b [1 - F(x)] dx - \int_a^b [1 - F(x)]^2 dx.$$

Ponadto, jeśli a jest wartością skończoną, zaś $\bar{X}$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej X , to średnią różnicę Giniego określamy wzorem:

$$\Gamma = \overline{X} - a - \int_a^b [1 - F(x)]^2 dx.$$

W analizie portfelowej średnia różnica Giniego stosowana jest m.in. jako jedna z miar ryzyka. Wówczas średnią Giniego definiuje się jako podwojoną kowariancję pomiędzy stopą zwrotu a wartością dystrybuanty tej stopy zwrotu. Symbolicznie możemy to zapisać następująco:

$$\Gamma = 2\text{cov}[R, F(R)],$$

gdzie R oznacza stopę zwrotu, a $F(R)$ dystrybuantę rozkładu dla tej stopy zwrotu.

3. Rozszerzony współczynnik Giniego i jego własności

W zależności od zastosowanej miary ryzyka uwzględniane są różne czynniki mające wpływ na wielkość ryzyka. Jednym z takich czynników, branych pod uwagę przy szacowaniu ryzyka, jest stopień awersji podejmującego decyzję do ryzyka. S. Yitzhaki jest autorem modelu wyboru portfela optymalnego, w którym miara ryzyka uwzględnia stopień awersji do ryzyka. Miarą tą jest tzw. rozszerzony współczynnik Giniego.

Jeśli X jest zmienną losową o dystrybucie rozkładu F określonej na przedziale $[a, b]$, natomiast ν oznacza stopień awersji do ryzyka, to rozszerzony współczynnik Giniego definiujemy następująco:

$$\Gamma(\nu) = \int_a^b [1 - F(x)] dx - \int_a^b [1 - F(x)]^\nu dx$$

lub w postaci równoważnej

$$\Gamma(\nu) = \overline{X} - a - \int_a^b [1 - F(x)]^\nu dx \text{ dla skończonych wartości } a.$$

Stopień awersji do ryzyka to określany przez podejmującego decyzję parametr, który powinien spełniać następujący warunek: $1 < \nu < \infty$. W przypadku, gdy parametr ν przyjmuje wartości z przedziału $[0; 1)$, o podejmującym decyzję mówimy, że ma skłonność do ryzyka. Natomiast wartość parametru $\nu = 1$ oznacza, że decydent jest neutralny wobec ryzyka.

Jak łatwo zauważyć, dla $\nu = 2$, z równania opisującego rozszerzony współczynnik Giniego otrzymujemy klasyczną postać średniej różnicy Giniego.

Z definicji bezpośrednio wynika kilka podstawowych własności rozszerzonego współczynnika Giniego [Shalit, Yitzhaki 1984, s. 1449-1468]:

Wartość rozszerzonego współczynnika Giniego jest wartością nieujemną i ograniczoną z góry.

Dla dowolnej, całkowitej wartości parametru awersji do ryzyka ν rozszerzony współczynnik Giniego można przedstawić w równoważnej postaci:

$$\Gamma(\nu) = \bar{X} - E[\min(X_1, X_2, \dots, X_\nu)],$$

gdzie $\bar{X}$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej X , natomiast $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ to kolejne obserwacje zmiennej X .

Dla dwóch niezależnych zmiennych losowych X_1 oraz X_2 spełniających następującą zależność:

$$X_2 = \alpha X_1,$$

gdzie α jest dowolną stałą, mamy prawdziwy następujący warunek:

$$\Gamma_2(\nu) = |\alpha| \Gamma_1(\nu),$$

$\Gamma_1(\nu)$ oraz $\Gamma_2(\nu)$ oznaczają rozszerzone współczynniki Giniego określone odpowiednio dla zmiennej X_1 oraz X_2 .

Dla dwóch niezależnych zmiennych losowych X_1 oraz X_2 takich, że:

$$X_2 = X_1 + c,$$

gdzie c oznacza dowolną stałą, prawdziwa jest następująca zależność:

$$\Gamma_1(\nu) = \Gamma_2(\nu).$$

4. Zastosowanie rozszerzonego współczynnika Giniego w analizie portfelowej

W analizie portfelowej, stosując rozszerzony współczynnik Giniego jako miarę ryzyka, możemy m.in. wyznaczyć zbiór portfeli efektywnych. W takim razie rozszerzony współczynnik Giniego definiujemy jako iloczyn stopnia awersji do ryzyka (ν) oraz kowariancji pomiędzy stopą zwrotu R a jej dystrybuantą rozkładu $F(R)$. Symbolicznie rozszerzony współczynnik Giniego dla stopy zwrotu możemy zapisać następująco:

$$\Gamma(\nu) = -\nu \text{cov}\{R, [1 - F(R)]^{\nu-1}\}.$$

Natomiast dla portfela akcji złożonego z udziałów n akcji, rozszerzony współczynnik Giniego portfela jest równy:

$$\Gamma_p(\nu) = -\nu \sum_{i=1}^n w_i \text{cov}\left\{R_i, [1 - F_i(R_i)]^{\nu-1}\right\},$$

gdzie: ν – stopień awersji do ryzyka,

w_i – udziały i -tej spółki w portfelu,

R_i – stopa zwrotu dla i -tej spółki,

F_i – dystrybuanta rozkładu stopy zwrotu dla i -tej spółki.

W przykładach empirycznych jako funkcję skumulowanej dystrybuanty używa się estymatora rozpatrywanej dystrybuanty. Estymator wyznaczamy w sposób następujący: kolejne obserwacje zmiennej – stopy zwrotu – sortujemy rosnąco, a następnie tym posortowanym wartościom nadajemy rangi. Wartościami estymatora są wartości rang dzielonych przez liczbę obserwacji.

W pracy zostaną przedstawione wyniki przykładu zastosowania rozszerzonego współczynnika Giniego do analizy ryzyka inwestycyjnego. Przykład obejmuje konstrukcję i analizę portfeli efektywnych w dwóch przypadkach: na jednym jako miarę ryzyka przyjęto rozszerzony współczynnik Giniego, w drugim zaś klasyczną wariancję.

Poniżej przedstawione są dwa modele, na podstawie których konstruowano portfele. Pierwszy z modeli to przykład liniowego modelu wyboru portfela, w którym miarą ryzyka jest rozszerzony współczynnik Giniego (model MEG):

$$\Gamma_p(\nu) \rightarrow \min,$$

$$\mu_p = w^T \mu,$$

$$1 = w^T 1,$$

$$w \geq 0,$$

gdzie: $\Gamma_p(\nu)$ – oznacza rozszerzony współczynnik Giniego,

w – wektor udziałów poszczególnych spółek w portfelu,

μ_p – oczekiwany zysk portfela,

μ – wektor oczekiwanych stóp zwrotu rozpatrywanych spółek,

1 – wektor jedynek.

Kolejny model to klasyczny model wyboru portfela według Markowitza (model MV):

$$V^2(R_p) \rightarrow \min,$$

$$\mu_p = w^T \mu,$$

$$1 = w^T 1,$$

$$w \geq 0,$$

$V^2(R_p)$ oznacza wariancję stopy zwrotu portfela, pozostałe oznaczenia jak we wcześniejszym modelu MEG.

Portfele skonstruowane według tych dwóch przedstawionych modeli poddano analizie pod względem efektywności oraz stopnia dywersyfikacji.

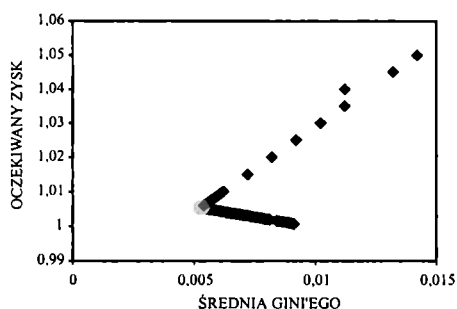
Portfele były konstruowane na podstawie tygodniowych stóp zwrotu, wyznaczonych dla notowań z okresu 2000-2004. Rozpatrywano notowania spółek dwóch sektorów: BANKI oraz SPOŻYWCZE. W przypadku modelu, w którym ryzyko określone jest współczynnikiem Giniego, portfele były konstruowane dla czterech różnych wartości parametru ν , tj. dla $\nu = 2, 4, 6, 8$. Konstruując portfele dla różnych

wartości oczekiwanego zysku, otrzymano zbiór portfeli efektywnych, które następnie poddano analizie.

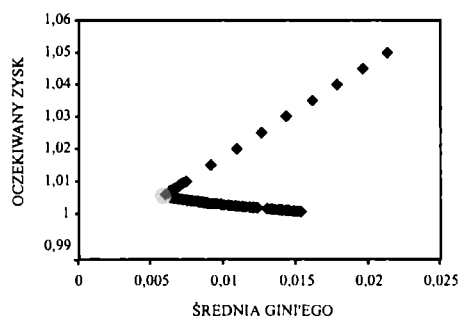
Porównując wykresy przedstawiające zależność rozszerzonego współczynnika Giniego od oczekiwanego zysku (rys. 1-8), możemy zauważyć, że kształt linii efektywnej portfeli wyznaczonych według tego modelu wykazuje pewną prawidłowość – bez względu na wartość parametru ν otrzymujemy wykresy o takim samym kształcie. Wykresy różnią się tylko przedziałami wartości rozszerzonego współczynnika Giniego, dla których są określone.

Poniżej opisano, jak zmienia się wartość współczynnika Giniego dla danego portfela przy zmianie wartości parametru ν , który mówi o skłonności do ryzyka, a nie o sile awersji.

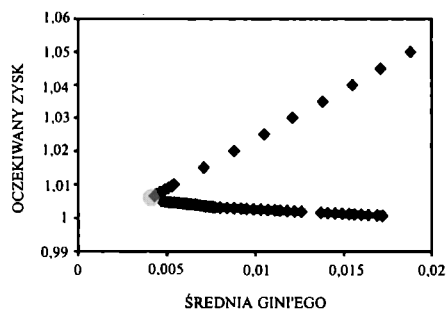
W sektorze BANKI, dla każdej wartości parametru ν , globalnym portfelem minimalnego współczynnika Giniego jest portfel o wartości oczekiwanego zysku równej 1,0055 (szary punkt na rys. a, b, c i d). Jednak portfele te przyjmują różne wartości współczynnika Giniego. Dla stopnia awersji $\nu = 2$ oczekiwany zysk równy 1,0055 ma portfel o wartości współczynnika $\Gamma = 0,0053$. W przypadku $\nu = 4$ wartość współczynnika Giniego dla portfela globalnego wynosi $\Gamma = 0,0058$. W dwóch pozostałych przypadkach, tj. dla $\nu = 6$ oraz $\nu = 8$, współczynnik Giniego jest równy odpowiednio 0,0041 oraz 0,0028.



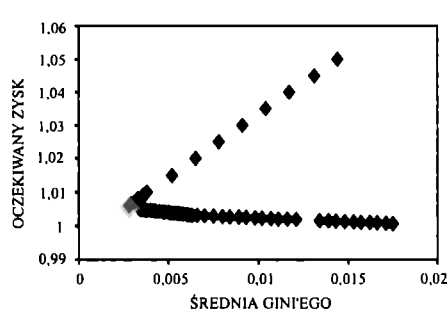
a) Stopień awersji $\nu = 2$



b) Stopień awersji $\nu = 4$



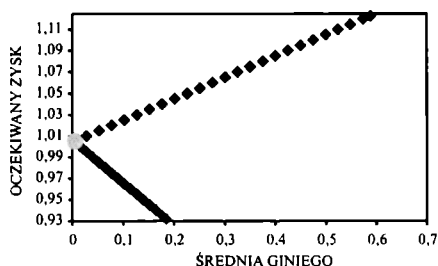
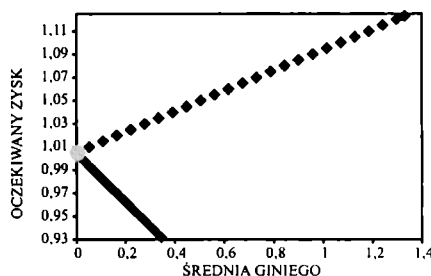
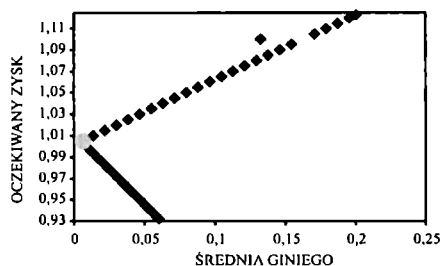
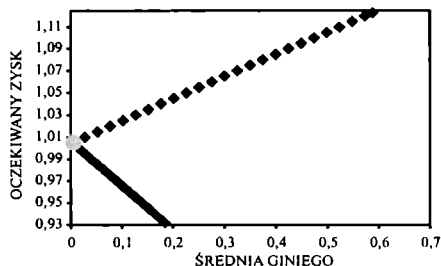
c) Stopień awersji $\nu = 6$



d) Stopień awersji $\nu = 8$

Rys. 1. Wykresy zależności współczynnika Giniego od wartości oczekiwanej portfela dla spółek sektora BANKI

Źródło: opracowanie własne.

a) Stopień awersji $\nu = 2$ b) Stopień awersji $\nu = 4$ c) Stopień awersji $\nu = 6$ d) Stopień awersji $\nu = 8$

Rys. 2. Wykresy zależności współczynnika Giniego od wartości oczekiwanej portfela dla spółek sektora SPOŻYWCZE

Źródło: pracowanie własne.

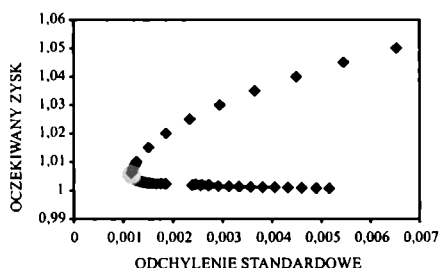
Analizując portfele grupy SPOŻYWCZE, dochodzimy do podobnych wniosków. Globalnym portfelem minimalnego współczynnika Giniego dla każdego rozpatrywanego stopnia awersji jest portfel o wartości oczekiwanego zysku równej 1,005. Portfele te oznaczono na rys. 2a, b, c, d szarym punktem.

Globalnymi portfelami minimalnego współczynnika Giniego są portfele dla następujących wartości ryzyka: w przypadku $\nu = 2$ dla współczynnika Giniego $\Gamma = 0,0062$; gdy $\nu = 4$, to współczynnik Giniego globalnego portfela jest równy $\Gamma = 0,005$; jeśli $\nu = 6$, to $\Gamma = 0,0032$, a dla $\nu = 8$ mamy $\Gamma = 0,002$. Widać w tym przypadku wyraźny spadek wartości współczynnika Giniego globalnego portfela przy wzroście wartości stopnia awersji ν .

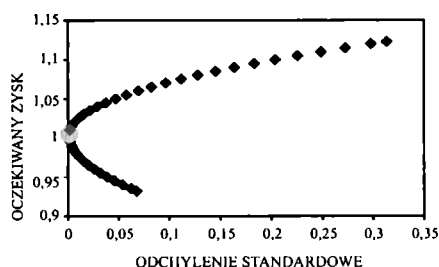
Porównując portfele MEG oraz MV, zauważa się, że portfele efektywne w sensie MEG są także portfelami efektywnymi w sensie MV, co również w swoich badaniach uzyskali J. Okunev [1991, s. 209-218] oraz H. Shalit i S. Yitzhaki [2005, s. 59-75].

W sektorze SPOŻYWCZE globalnym portfelem minimalnego ryzyka jest portfel o oczekiwanym zysku równym 1,005 (rys. 3a). Natomiast dla sektora BANKI portfel o oczekiwanym zysku równym 1,0055 to jeden z portfeli efektywnych (rys. 3b).

Analizując skład oraz stopień zdywersyfikowania wyznaczonych portfeli, należy zwrócić uwagę, że portfele efektywne uzyskane na podstawie omówionego modelu



a) Zależność między odchyleniem standardowym a wartością oczekiwaną portfela dla sektora BANKI



b) Zależność między odchyleniem standardowym a wartością oczekiwaną portfela dla sektora SPOŻYWCZE

Rys. 3. Wykresy zależności odchylenia standardowego od wartości oczekiwanej portfela

Źródło: opracowanie własne.

MEG (modelu liniowego) są portfelami dwuskładnikowymi. Ponadto w rozpatrywanym przykładzie stopień awersji do ryzyka (wartość parametru ν) nie ma wpływu na strukturę portfeli efektywnych. Oznacza to, że portfele wyznaczone dla różnych stopni awersji, ale o tych samych oczekiwanych stopach zwrotu, składają się z udziałów tych samych spółek (portfele z grupy SPOŻYWCZE). Natomiast w grupie BANKI porównanie składu portfeli efektywnych o tej samej wartości oczekiwanej portfela pozwala wyodrębnić dwie grupy portfeli. Portfele identyczne pod względem struktury to portfele dla stopnia awersji do ryzyka $\nu = 2$ i $\nu = 4$ oraz $\nu = 6$ i $\nu = 8$.

5. Podsumowanie

Prace, w których porównywano model z klasyczną średnią różnicą Giniego jako miarą ryzyka oraz tradycyjny model Markowitza, sugerują, że stopień zdywersyfikowania portfeli MG jest niższy niż portfeli MV (w przypadku małej liczby danych). W pracy [Głuzicka, Kopańska-Bródka 2005] porównane zostały rzeczywiste stopy zwrotu wyznaczonych portfeli efektywnych. Rzeczywiste stopy zwrotu wyznaczono na podstawie udziałów wybranych czterech portfeli efektywnych i stóp zwrotu oszacowanych dla danych pochodzących z pierwszych tygodni 2005 r., tj. dla danych po okresie analizowanym. Portfele efektywne w sensie średniej Giniego miały wyższe rzeczywiste stopy zwrotu niż portfele MV.

Tematem tej pracy było porównanie portfeli wyznaczanych na podstawie modelu MEG oraz modelu Markowitza. Zaletą stosowania rozszerzonego współczynnika Giniego jako miary ryzyka jest to, że miara ta uwzględnia stosunek inwestora (decydenta) do ryzyka. Modele MEG pozwalają wyznaczyć portfele efektywne, które są także portfelami efektywnymi w sensie MV. Model MEG jest przykładem liniowego modelu wyboru portfeli optymalnych, dlatego stopień zdywersyfikowania portfeli MEG jest niższy niż stopień zdywersyfikowania portfeli wyznaczanych według klasycznego modelu MV (zadanie kwadratowe).

Modele wyboru portfela inwestycji oparte na kryterium zaproponowanym przez S. Yitzhakiego mogą w skuteczny sposób wspomagać podejmowanie decyzji inwestycyjnych. Wnioski te skłaniają do dalszych badań nad zastosowaniem średniej różnicy Giniego do analizy portfelowej oraz porównaniem efektywności portfeli wyznaczonych współczynnikiem Giniego oraz miarami ryzyka innymi niż odchylenie standardowe.

Literatura

- Dorfman R., *A Formula for the Gini Coefficient*, „The Review of Economics and Statistics” 1979 (February), s. 146-149.
- Gluzicka A., Kopańska-Bródka D., *Applications of Gini's Mean Difference to Portfolio Analysis*, Proceedings of the 23rd International Conference „Mathematical Methods in Economics”, Hradec Kralove, Czech Republic 2005.
- Ogryczak W., *Modele programowania liniowego w optymalizacji portfela inwestycji*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko '03*”, praca zbiorowa pod red. T. Trzaskalika, AE, Katowice 2003.
- Ogryczak W., Mansini R., Speranza G., *Conditional Value at Risk and Related Linear Programming Models for Portfolio Optimization*, Report of the Institute of Control and Computation Engineering, Warsaw University of Technology 2004.
- Okunev J., *The Generation of Mean Gini Efficient Sets*, „Journal of Business Finance and Accounting” 1991 (January), s. 209-218.
- Shaffer D., *Estimating the Gini Hedge Ratio*, „Managerial Finance” 2003 vol. 29, s. 73-84.
- Shalit H., Yitzhaki S., *The Mean-Gini Efficient Portfolio Frontier*, „The Journal of Financial Research” (2005) vol. 28, s. 59-75.
- Shalit H., Yitzhaki S., *Mean-Gini, Portfolio Theory and the Pricing of Risky Assets*, „The Journal of Finance” 1984 (December) vol. 39, s. 1449-1468.
- Yitzhaki S., *Stochastic Dominance, Mean Variance and Gini's Mean Difference*, „The American Economic Review” 1982 (March) vol. 72, s. 178-185.

APPLICATION OF THE EXTENDED GINI'S MEAN AS A RISK MEASURE IN DETERMINING A SHARES PORTFOLIO

Summary

In the traditional Markowitz's approach to determining optimal portfolio, a variance (or the standard deviation) is being accepted as the measure of risk. Beside the variance, there exist many different quantities which are applied as the risk measures.

One of such measures was proposed by Yitzhaki, who used Gini's mean difference as a risk measure. Yitzhaki is also the author of the model, in which the risk is measured by the so-called extended Gini's mean. This coefficient is a modification of the Gini's mean difference, which considers the level of risk aversion.

In this paper the author will show more significant properties of the extended Gini's mean. This measure will be applied in determining optimal portfolios for companies listed on the Warsaw Stock Exchange.