

Paweł Hanczar

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

DOLNE OGRANICZENIE PROBLEMU WYZNACZANIA TRAS POJAZDÓW PRZY ZADANYM PODZIALE ODBIORCÓW

1. Wstęp

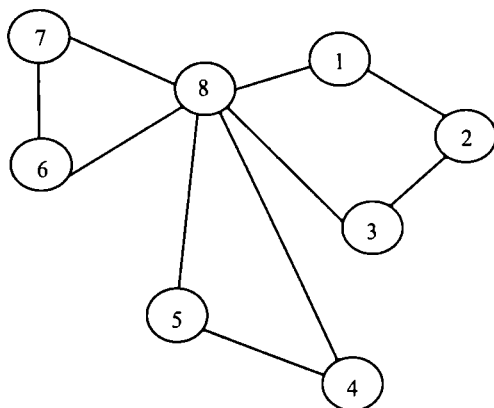
Ograniczenie dolne (ang. *lower bound*) jest wyznaczane przez rozwiązanie relaksacji problemu wyjściowego, uzyskanej najczęściej w wyniku usunięcia z problemu wyjściowego jednego lub kilku ograniczeń. Dla zagadnień minimalizacji rozwiązanie optymalne tak skonstruowanej relaksacji ogranicza rozwiązanie optymalne problemu wyjściowego od dołu i dlatego jest określane mianem dolnego ograniczenia. Różne sposoby relaksacji zagadnienia pierwotnego dają różne wartości dolnego ograniczenia. Podstawowym problemem przy opracowywaniu sposobów wyznaczania dolnego ograniczenia jest znalezienie relaksacji łatwej do rozwiązania, a zarazem dającej możliwie ciasne dolne ograniczenie.

Ograniczenie dolne odgrywa bardzo istotną rolę w rozwiązywaniu zadań z zakresu optymalizacji dystrybucji. W sytuacji stosowania algorytmów przybliżonych znajomość dolnego ograniczenia umożliwia szacowanie jakości uzyskanych rozwiązań, natomiast dla metod dokładnych wykorzystanie dolnego ograniczenia jest jednym z głównych elementów ich realizacji.

W miarę wzrostu popularności oraz w związku z sukcesami w rozwiązywaniu problemu komiwojażera podjęto próby zastosowania modeli matematycznych do rozwiązywania zagadnień bardziej skomplikowanych. To, że problem komiwojażera ma wiele zastosowań, jest bezdyskusyjne, jednak w realizacji procesu dystrybucji często korzysta się z więcej niż jednego środka transportu.

Jednym z pierwszych kroków w tym kierunku było zdefiniowanie na początku lat pięćdziesiątych problemu m -komiwojażerów. Problem ten polega na wyznaczeniu tras dla więcej niż jednego komiwojażera. Rozwiązaniem problemu m -komiwojażerów nie jest cykl Hamiltona, lecz m cykli, z których każdy rozpoczyna się i kończy w określonym, tym samym dla wszystkich komiwojażerów, mieście. Do-

datkowo zakłada się, że komiwojazer nie może odwiedzać miast obsługiwanych przez innych podróżników. Rozwiązanie przykładowego zadania m -komiwojazerów przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Przykład rozwiązania zadania m -komiwojazerów

Źródło: opracowanie własne.

Klasę problemów wyznaczania tras pojazdów (*vehicle routing problem*, w skrócie VRP) możemy określić jako zagadnienia optymalizacji polegające na wyznaczeniu rozwiązania problemu m -komiwojazerów z uwzględnieniem dodatkowych, zależnych od konkretnego zadania warunków.

2. Dolne ograniczenie problemu wyznaczania tras pojazdów z częściowym podziałem zbioru odbiorców

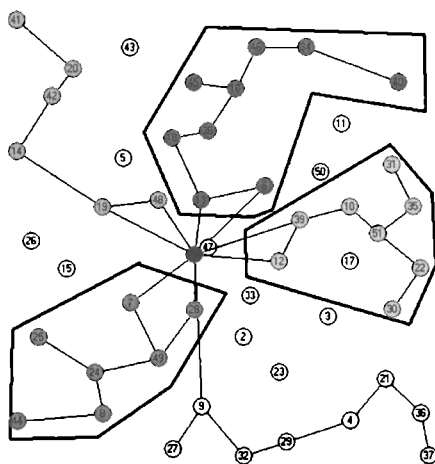
Algorytmy wyznaczania ograniczenia dolnego są ściśle związane ze sposobem sformułowania problemu. Klasyczne relaksacje VRP wykorzystują przynależność połączenia do rozwiązania (np. [Fisher 1988, s. 626-642; Miller 1995, s. 1-9]). Niestety, w przypadku takich podejść jak podział-trasa nadrzędna jest przynależność odbiorców do tras, co powoduje, że relaksacje te nie mogą być tutaj stosowane. Zagadnienie to nie było dotychczas poruszane w literaturze przedmiotu.

W celu wyznaczenia dolnego ograniczenia VRP przy uwzględnieniu częściowego podziału zbioru odbiorców (w skrócie VRPPP – *vehicle routing problem with partial partitioning*) rozważono cztery relaksacje. Pierwsze dwie to procedury k -MSP i k -2MCH, które są adaptacją klasycznych metod używanych do wyznaczania relaksacji problemu komiwojazera. Przy rozwiązywaniu tych relaksacji dla VRPPP uwzględnia się tylko odbiorców przydzielonych do bloków podziału, co negatywnie wpływa na jakość generowanych ograniczeń. Następnie zostaną zaprezentowane dwa sformułowania wykorzystujące specyficzną cechę grafu rozwiązania VRP. W tych metodach możliwe jest wyznaczenie ograniczenia dolnego VRPPP z uwzględnieniem wszystkich odbiorców.

3. Relaksacje k-MSP i k-2MCH

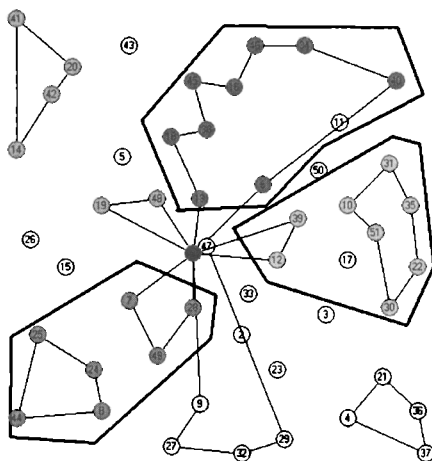
Pierwsze dwie przedstawione relaksacje VRPPP to adaptacja klasycznych metod używanych w rozwiązaniu problemu komiwojażera (Christofides, Mingozzi, Toth 1981, s. 255-282; Held, Karp 1970, s. 1138-1162]). W przypadku obu relaksacji wartość dolnego ograniczenia VRPPP będzie równa sumie dolnych ograniczeń wyznaczonych dla każdego bloku odbiorców w analizowanym podziale powiększonego o lokalizację dostawcy. W przypadku sformułowania k -MSP użyto minimalne 1-drzewo rozpinające, dla relaksacji k -2MCH wykorzystano 2-skojarzenie.

W przypadku podziału częściowego w metodach tych można wykorzystywać położenie tylko wierzchołków odbiorców przydzielonych do bloków podziału. Pozostałe wierzchołki nie są wykorzystywane podczas rozwiązywania relaksacji. Relaksacje te są dodatkowo wzmocnione założeniem, że jeśli trasa zawiera więcej niż jednego odbiorcę, muszą istnieć co najmniej dwie krawędzie incydentne z wierzchołkiem dostawcy. Dla tras, w których obsługiwany jest dokładnie jeden odbiorca, połączenie tego odbiorcy z dostawcą liczone jest dwukrotnie. Graf rozwiązania relaksacji k -MSP dla zadania testowego E- $n51-k5$ zaprezentowano na rys. 2. Do wyznaczenia tej relaksacji przyjęto podział częściowy uzyskany przez usunięcie 25% odbiorców z każdego bloku pełnego podziału dla rozwiązania optymalnego. Kolor wierzchołka grafu z rys. 2 określa jego przynależność do trasy. Wierzchołki białe to odbiorcy nieprzydzieleni do żadnego bloku, a wierzchołek czarny to lokalizacja dostawcy. Zgodnie z założeniem wierzchołki nienależące do żadnego bloku podziału nie są uwzględniane przy tworzeniu rozwiązania relaksacji, co ma niewątpliwie negatywny wpływ na wartość dolnego ograniczenia. Im mniej odbiorców jest przydzielonych do bloków podziału, tym większy jest negatywny wpływ na wartość dolnego ograniczenia uzyskanego tą metodą.



Rys. 2. Graf rozwiązania relaksacji k -MSP dla częściowego podziału (waga rozwiązania 388)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Graf rozwiązania relaksacji k -2MCH dla częściowego podziału (waga rozwiązania 449)

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 3 zaprezentowano graf rozwiązania relaksacji k -2MCH dla zadania testowego E-n51-k5. Do wyznaczenia tej relaksacji przyjęto podział częściowy uzyskany przez usunięcie 25% odbiorców z każdego bloku pełnego podziału dla rozwiązania optymalnego.

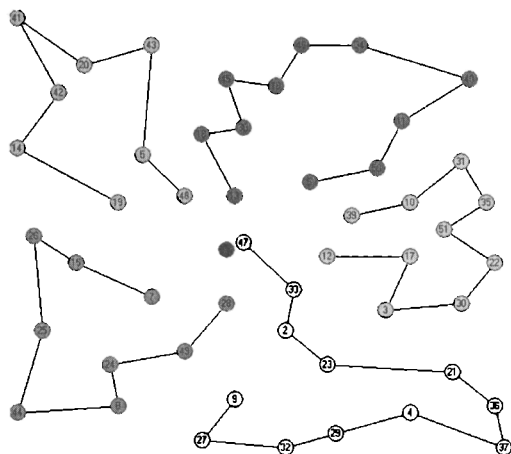
4. Relaksacja k -MPP

W celu wzmocnienia jakości ograniczenia dolnego VRPPP w kolejnej relaksacji wykorzystano specyficzne właściwości VRP. Analizując graf rozwiązania VRP (rys. 4), można dostrzec, że po usunięciu z niego wszystkich krawędzi incydentnych z wierzchołkiem dostawcy nie istnieją ścieżki zawierające wierzchołki odbiorców należących do różnych tras. Wierzchołki nieprzyporządkowane do bloków podziału można wykorzystywać podczas wyznaczania ograniczenia, pod warunkiem, że po usunięciu z grafu rozwiązania relaksacji połączeń incydentnych z wierzchołkiem dostawcy nie wystąpią w nim ścieżki zawierające wierzchołki odbiorców z różnych tras oraz że odbiorcy zostaną dołączeni w sposób gwarantujący minimalną wagę tworzonego grafu.

Rozwiązanie nowej relaksacji oznaczonej jako k -MPP jest zagadnieniem wyznaczenia k -minimalnego drzewa rozpinającego, w którym po usunięciu połączeń incydentnych z wierzchołkiem dostawcy nie istnieją ścieżki łączące wierzchołki odbiorców przydzielonych do różnych bloków podziału.

Mimo licznych prób autorowi nie udało się opracować dokładnego algorytmu rozwiązywania tej relaksacji, realizowanego w czasie wielomianowym. Stosowany w dalszej części pracy algorytm heurystyczny jest modyfikacją algorytmu Kruskala

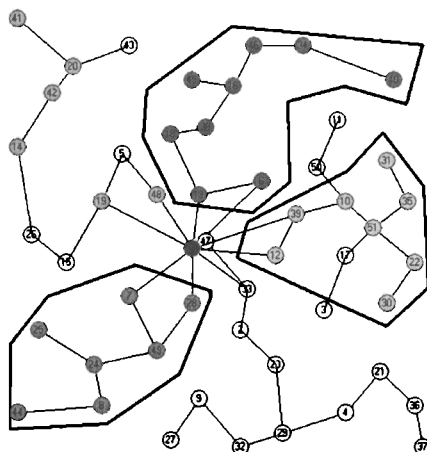
wyznaczania minimalnego drzewa rozpinającego. Liczne eksperymenty empiryczne potwierdziły jego prawidłowość, nie można jednak analitycznie dowieść optymalności generowanych przez niego rozwiązań.



Rys. 4. Rozwiązanie VRP po usunięciu krawędzi incydentnych z wierzchołkiem dostawcy

Źródło: opracowanie własne.

Minimalne drzewo rozpinające według algorytmu Kruskala tworzy się, rozpatrując krawędzie w porządku ich niemalejących wag. Jeśli kolejno wybrana krawędź tworzy cykl z krawędziami dotychczas wybranymi, to jest pomijana. W przeciwnym razie krawędź ta jest dodawana do grafu rozwiązania. Postępowanie Kruskala kończy się, gdy wybrano już do rozwiązania $n-1$ krawędzi. W przypadku al-



Rys. 5. Graf rozwiązania relaksacji k -MPP dla częściowego podziału (waga rozwiązania 465)

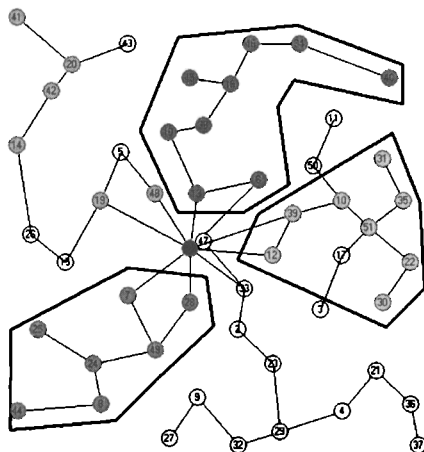
Źródło: opracowanie własne.

gorytmu rozwiązywania relaksacji k -MPP w fazie dołączania krawędzi sprawdza się dodatkowo, czy dodanie krawędzi nie spowoduje powstania ścieżki od dostawcy, łączącej wierzchołki należące do różnych bloków podziału. Po zakończeniu tej części następuje sprawdzenie, czy możliwe jest, zgodnie z zaprezentowanymi wcześniej przesłankami, dodanie do grafu rozwiązania relaksacji krawędzi incydentnych z wierzchołkiem dostawcy. Graf rozwiązania relaksacji k -MPP dla częściowego podziału odbiorców przykładowego VRP uzyskany za pomocą algorytmu heurystycznego zaprezentowano na rys. 5.

Przydzielenie odbiorcy do bloku podziału ogranicza możliwe sposoby dołączania wierzchołka do grafu rozwiązania, gdyż wierzchołek odbiorcy przydzielonego do bloku podziału nie może być połączony z wierzchołkiem odbiorcy z innego bloku. Wynika to z przyjętych wcześniej założeń. Natomiast wierzchołek nieprzydzielony do bloku podziału może być połączony z dowolnym wierzchołkiem grafu. Tak więc przydzielenie odbiorcy do bloku ogranicza możliwe sposoby jego dołączenia do grafu. Stąd wiadomo, że dodanie odbiorcy do bloku podziału nie może spowodować zmniejszenia rozwiązania relaksacji.

5. Relaksacja k -bMCH

Zaprezentowaną w poprzednim punkcie własność grafu rozwiązania VRP można zastosować również przy wyznaczaniu dolnego ograniczenia VRPPP opartego na sformułowaniu 2-skojarzenia. Wierzchołki nieprzyporządkowane do bloków podziału można wykorzystywać podczas budowania grafu relaksacji, pod warunkiem, że po usunięciu połączeń incydentnych z wierzchołkiem dostawcy w grafie rozwiązania nie znajdują się ścieżki zawierające wierzchołki odbiorców z różnych tras oraz że odbiorcy zostaną dołączeni w sposób gwarantujący minimalną wagę tworzonego grafu. Nową relaksację oznaczono jako k -bMCH.



Rys. 6. Graf rozwiązania relaksacji k -bMCH dla częściowego podziału (waga rozwiązania 508)

Źródło: opracowanie własne.

Mimo licznych starań autora nie udało się opracować algorytmu pozwalającego na znalezienie w czasie wielomianowym dokładnego rozwiązania tak postawionego zadania. W dalszej części rozprawy do wyznaczenia rozwiązania tej relaksacji użyto algorytmu przybliżonego, który polega na iteracyjnym włączaniu do rozwiązania relaksacji k -2MCH odbiorców nienależących do żadnego bloku podziału. Nie.dołączony do rozwiązania k -bMCH odbiorca jest dołączany tak, aby wzrost wagi rozwiązania był jak najmniejszy. Sformułowanie to może być ograniczeniem dolnym VRPPP, gdyż dodawanie kolejnych odbiorców do tras nie spowoduje skrócenia rozwiązania VRP. Graf rozwiązania relaksacji k -bMCH dla częściowego podziału odbiorców uzyskany za pomocą algorytmu przybliżonego zaprezentowano na rys. 6.

W odróżnieniu od wcześniej zaprezentowanych relaksacji metody te podczas generowania ograniczenia dolnego VRPPP uwzględniają wierzchołki wszystkich odbiorców. Powoduje to, że już w początkowej fazie generowania podziału odbiorców (nawet gdy do bloków podziału przydzielonych jest około 25% odbiorców) uzyskuje się dobre ograniczenie dolne VRP. Niestety, ponieważ nie opracowano dokładnych algorytmów rozwiązywania zaprezentowanych relaksacji, wszystkie metody rozwiązywania VRP, gdzie zostały one zastosowane, są metodami przybliżonymi.

6. Porównanie relaksacji dla częściowego podziału

Zaprezentowane algorytmy zostały sprawdzone na zbiorze zadań testowych. Dodatkowo prezentowaną charakterystyką jest procent odbiorców przydzielonych do bloków rozwiązania.

Kolor tła komórek w tab. 1 został wykorzystany do prezentacji jakości uzyskanych dolnych ograniczeń w ramach każdego z analizowanych poziomów przydziału odbiorców do rozwiązania. Najciemniejszy kolor tła oznacza najlepsze rozwiązania, tło białe oznacza rozwiązania najgorsze. Taki sposób prezentacji pozwala szybko zauważyć, że najlepsze wyniki dla każdego poziomu przydzielenia odbiorców do rozwiązania uzyskano za pomocą algorytmu k -bMCH. Algorytmem, który wygenerował najgorsze wyniki, jest algorytm k -MSP. Jakość dolnego ograniczenia wygenerowana przez pozostałe 2 algorytmy zależy od liczby odbiorców należących do rozwiązania. I tak, dla poziomu 25% i 50% lepsze wyniki uzyskujemy dzięki procedurze k -MPP, natomiast jeśli do rozwiązania przydzielonych zostało 75% odbiorców, to lepsze wyniki daje algorytm k -2MCH.

Analizując zaprezentowane wyniki, można zauważyć, że algorytm służący do rozwiązywania relaksacji k -bMCH jest algorytmem przybliżonym i w 6 przypadkach uzyskane rozwiązanie relaksacji przekracza optymalne rozwiązanie problemu wyjściowego (w tabeli zaznaczono to wytłuszczoną czcionką). Najczęściej sytuacja ta ma miejsce, gdy do bloków podziału przyporządkowanych jest tylko 25% odbiorców. Z pewnością wynika to z tego, że analizowany algorytm wyznaczania

Tabela 1. Wyniki testów dolnych ograniczeń VRPPP dla podziału według górnego ograniczenia

Zadanie	Ograniczenie górne	25%				50%				75%			
		k-MSP	k-MPP	k-2MCH	k-bMCH	k-MSP	k-MPP	k-2MCH	k-bMCH	k-MSP	k-MPP	k-2MCH	k-bMCH
E-n22-k4	375*	203	318	216	349	243	335	267	356	312	343	357	384
E-n23-k3	569*	283	484	317	569	317	489	376	569	419	489	497	569
E-n30-k3	534*	232	388	291	507	322	419	391	506	380	423	399	478
E-n33-k4	835*	615	727	639	807	733	763	765	807	779	779	799	816
E-n51-k5	521*	186	459	225	508	284	462	331	508	388	466	449	508
E-n76-k10	830*	424	703	438	792	575	716	657	825	706	741	759	825
E-n76-k14	1021*	644	816	667	931	750	879	816	970	908	917	972	1010
E-n76-k7	682*	265	579	313	692	416	594	485	683	552	597	613	683
E-n76-k8	735	221	634	256	687	416	672	427	692	589	698	702	705
E-n101-k8	817	278	712	320	754	455	726	477	767	680	757	682	782
E-n101-k14	1071	352	812	410	882	568	876	798	943	723	890	912	987
F-n45-k4	724*	233	491	281	770	367	520	416	700	417	526	390	632
F-n72-k4	237*	117	195	131	252	148	195	153	230	185	198	193	220
F-n135-k7	1162*	696	805	760	1003	887	856	906	1006	893	981	1004	1041
M-n101-k10	820*	579	679	601	810	659	717	689	813	717	719	718	754
M-n121-k7	1034*	736	662	799	1001	805	687	802	939	772	890	909	964
M-n151-k12	1053	745	701	832	984	795	802	976	1012	826	834	1003	1037

* rozwiązanie optymalne zadania

Źródło: opracowanie własne na podstawie eksperymentów.

rozwiązania *k*-bMCH działa w dwóch etapach. W pierwszej części dla wierzchołków należących do bloków podziału wyznaczamy rozwiązanie relaksacji *k*-2MCH, korzystając z algorytmu dokładnego [Miller, Pekny 1994, s. 68-81]. Następnie do wyznaczonych cykli za pomocą heurystycznej procedury sukcesywnego dołączania są dodawane pozostałe wierzchołki. Im mniej wierzchołków jest wykorzystanych w pierwszej, dokładnej fazie algorytmu, tym więcej wierzchołków zostaje dołączonych do rozwiązania w drugiej, przybliżonej fazie procedury – co oczywiście ma wpływ na jakość generowanego rozwiązania. Wniosek ten potwierdza również spostrzeżenie, że w niektórych przypadkach (np. F-n45-k4) rozwiązania relaksacji maleją przy zwiększającej się liczbie wierzchołków przydzielonych do bloków podziału. Sytuacja taka, w przypadku algorytmu dokładnego, nie mogłaby mieć miejsca.

Powyższe problemy, mimo że mamy do czynienia również z procedur przybliżoną, nie występują w przypadku algorytmu rozwiązywania *k*-MPP. Rozwiązanie relaksacji nie przekracza rozwiązania optymalnego problemu wyjściowego, ponadto nie obserwuje się spadku wagi rozwiązania relaksacji przy wzroście liczby wierzchołków przypisanych do bloków podziału.

W tabeli 2 wyniki te przedstawiono jako średni stosunek wagi rozwiązania relaksacji do wagi rozwiązania optymalnego dla każdego algorytmu wyznaczania dolnego ograniczenia.

Tabela 2. Wyniki testów dolnych ograniczeń VRPPP dla podziału według górnego ograniczenia

Przydzielni odbiorcy [% liczby miast w problemie]	k -MSP	k -MPP	k -2MCH	k -bMCH
25%	0,533	0,795	0,586	0,951
50%	0,673	0,827	0,736	0,957
75%	0,803	0,847	0,856	0,943
średnio	0,669	0,823	0,726	0,950

Źródło: opracowanie własne na podstawie eksperymentów.

Wartości zaprezentowane w tab. 2 należą do przedziału od zera do 1. Im bliższe są 1, tym bardziej trafne jest ograniczenie. Jak widać, najlepsze rezultaty osiągnięto przy wykorzystaniu algorytmu k -bMCH. Należy jednak przypomnieć, że algorytm ten generuje wyniki przybliżone i w prawie 1/3 przypadków wygenerował dolne ograniczenie, którego wartość przekraczała optymalne rozwiązanie zadania. Zastosowanie proponowanych sposobów wyznaczania dolnego ograniczenia VRP dla podziału częściowego charakteryzuje się, szczególnie w początkowej fazie tworzenia podziału, dużą trafnością.

Literatura

- Christofides N., Mingozzi A., Toth O., *Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem Based on Spanning Tree and Shortest Path Relaxations*, „Mathematical Programming” 1981 vol. 20, s. 255-282.
- Fisher M., *Optimal Solution of Vehicle Routing Problems Using k -tree Problem*, „Operations Research” 1988 vol. 42, s. 626-642.
- Held M., Karp R. M., *The Traveling-salesman Problem and Minimum Spanning Trees*, „Operations Research” 1970 vol. 19, s. 1138-1162.
- Miller D., *A Matching Based Exact Algorithm for Capacitated Vehicle Routing Problem*, „ORSA Journal of Computing” 1995 vol. 7, s. 1-9.
- Miller D., Pekny J., *A Staged Primal-dual Algorithm for Finding a Minimum Cost Perfect Two-matching in an Undirected graph*, „ORSA Journal of Computing” 1984 vol. 6, s. 68-81.

LOWER BOUND FOR SET PARTITIONING FORMULATIONS IN VEHICLE ROUTING PROBLEM

Summary

The lower bound plays a very important role in the solution of combinatorial optimization problems. In the case of usage of heuristic methods, knowledge about lower bound enables the estimation of the quality of achieved solutions. However, in the case of exact methods, particularly in the case of branch and bound methods, the usage of lower bound for the solution subset is one of the algorithms for the solution determination. In this paper we propose a method for finding lower bound for set partitioning formulations of vehicle routing problem.