

Magdalena Pańczyk

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

WŁASNOŚCI DOMINACJI DLA ZMIENNYCH DWUWYMIAROWYCH

1. Wstęp

Porządki stochastyczne mają szeroki wachlarz zastosowań w probabilistyce, statystyce ekonomii i wszędzie tam, gdzie podjęcie decyzji następuje w warunkach niepewności. Podejmowanie decyzji w praktyce najczęściej sprowadza się do wyboru losowego wariantu decyzyjnego, który jest związany z uporządkowaniem rozpatrywanych losowych zmiennych decyzyjnych. Klasycznym przykładem dziedziny ekonomii, gdzie w warunkach niepewności podejmujemy decyzję, są finanse. Dotyczy to zwłaszcza graczy na giełdzie, którzy, podejmując decyzje o wyborze akcji bądź portfela akcji ryzykownych, wybierają pewną zmienną losową. Konsekwencje swojego wyboru mogą poznać dopiero po pewnym czasie. Finanse w dużej mierze przyczyniły się do rozwoju teorii szeroko rozumianych porządków stochastycznych.

W literaturze nie istnieje jedna obiektywna i niezawodna reguła porządkowania zbioru zmiennych losowych, która wskazywałaby najlepszy wariant losowy niezależnie od preferencji decydenta. Można zatem znaleźć wiele definicji wprowadzających porządek w zbiorze zmiennych losowych. H. Markowitz (1952) zaproponował tzw. model średnia-wariancja (M-V) do porównywania zmiennych losowych. Jest to dość szybka metoda porównywania zmiennych losowych, jednak pozostawia dość spory podzbiór zmiennych nieporównywalnych, gdyż nie jest to porządek pełny. Od końca lat sześćdziesiątych, kiedy Russel i Hadar oraz Hanoch i Levy zdefiniowali dominacje stochastyczne, dynamicznie rozwinęła się teoria związana z tymi dominacjami. Dominacje stochastyczne są szeroko stosowane w praktyce, bowiem istnieje współzależność pomiędzy wyborem wariantu decyzyjnego ze względu na jego wyższą od innych wariantów oczekiwaną użyteczność a wyborem zgodnie z dominacjami stochastycznymi.

Wspomniane porządki dotyczyły porównywania jednowymiarowych zmiennych losowych. Problem porządku w zbiorach zmiennych wielowymiarowych jest

już zagadnieniem znacznie bardziej skomplikowanym. W pracach z zakresu wielo-
atrybutowego podejmowania decyzji czynione jest założenie o niezależności po-
szczególnych składowych wektorów losowych. Rozpatrywanie porządków w sensie
dominacji przy braku założenia o niezależności opiera się na zaawansowanych
metodach probabilistycznych.

Celem badań jest analiza zmiennych dwuwymiarowych ze względu na wpro-
wadzone relacje porządkujące oraz ich związek z porządkami dla rozkładów
brzegowych tych zmiennych.

2. Porządki dla zmiennych jednowymiarowych

W całym wywodzie zakładamy, że $\xi, \eta: \Omega \rightarrow R$ są zmiennymi losowymi okreś-
lonymi na przestrzeni probabilistycznej (Ω, A, P) o dystrybuantach odpowiednio
 F, G .

H. Markowitz (1952) zaproponował tzw. model średnia–wariancja do porów-
nywania zmiennych losowych. Często wykorzystuje się go w praktyce, jeśli
istnieją skończone momenty, które można łatwo wyliczyć z próby. Według tej
teorii mówimy, że ξ dominuje nad η (piszemy $\xi \text{ } mv \text{ } \eta$), jeśli zachodzą warunki:

$$E\xi \geq E\eta \text{ i } Var\xi \leq Var\eta.$$

Teorię dominacji stochastycznych zapoczątkowali Russel i Hadar (1969) oraz
Hanoch i H. Levy (1969). Według tej koncepcji zmienna ξ dominuje zmienną η
(w sensie dominacji stochastycznych rzędu pierwszego), jeśli zachodzi związek:

$$\xi \succ \eta \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \left(\bigvee_{x \in R} F(x) \leq G(x) \quad \wedge \quad \bigvee_{x \in R} F(x) < G(x) \right).$$

Zdefiniowana powyżej relacja nie jest spójna, co oznacza, że wprowadza porządek
w zbiorze zmiennych losowych, ale nie jest to pełny porządek. Wobec tego istnieją
takie zmienne losowe, których nie możemy z sobą porównać i stwierdzić istnienia
między nimi relacji dominacji.

Zmienne takie badane są ze względu na dominacje wyższych rzędów. Sposób
definiowania dominacji stochastycznej dowolnego rzędu przedstawiony jest poniżej:

Dominacją stochastyczną rzędu k nazywamy relację:

$$\xi \succ_{(k)} \eta \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \left(\bigvee_{x \in R} F^{(k)}(x) \leq G^{(k)}(x) \quad \wedge \quad \bigvee_{x \in R} F^{(k)}(x) < G^{(k)}(x) \right),$$

gdzie: $F^{(1)}(x) := F(x)$,

$$F^{(k)}(x) := \int_{-\infty}^x F^{(k-1)}(y) dy, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in R.$$

$$G^{(1)}(x) := G(x),$$

$$G^{(k)}(x) := \int_{-\infty}^x G^{(k-1)}(y) dy, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in R.$$

Powyższe funkcje są dobrze zdefiniowane, jeżeli

$$E|\xi|^{k-1} < +\infty \quad i \quad E|\eta|^{k-1} < +\infty.$$

Miedzy dominacjami stochastycznymi istnieje związek:

$$\xi \succ_{(k-1)} \eta \Rightarrow \xi \succ_{(k)} \eta.$$

Oznacza to, że istnieją zmienne losowe, które są porównywalne w sensie dominacji stochastycznej rzędu k , lecz dominacje rzędów niższych nie są w stanie wskazać porządku między tymi zmiennymi losowymi. Jednakże niezależnie od tego, jak wysoki weźmiemy stopień dominacji, nigdy nie osiągniemy pełnego porządku.

Ze względu na pewne szczególne własności, w ekonomii najczęściej stosuje się dominacje pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu.

Jednym z alternatywnych podejść w odniesieniu do dominacji stochastycznych jest podejście kwantylowe, które przypomina w swojej idei konstrukcję dominacji stochastycznych. Dominacje kwantylowe bywają również nazywane dominacjami dualnymi lub odwrotnymi (por. [Ogryczak, Ruszczyński 2002, s. 611-680]).

Mówimy, że zmienna losowa ξ dominuje w sensie kwantylowej dominacji stopnia pierwszego zmienną η (piszemy $\xi \succ_{(1)}^{-1} \eta$), jeżeli

$$\bigvee_{p \in (0,1)} F^{-1}(p) \geq G^{-1}(p),$$

gdzie: $F^{-1} : (0,1) \rightarrow R$ dana jest wzorem $F^{-1}(p) = \inf\{x \in R; F(x) \geq p\}$.

Wartość funkcji $F^{-1}(p)$ nazywamy kwantylem rzędu p zmiennej ξ .

Analogicznie definiujemy funkcję G^{-1} dla zmiennej η .

Łatwo wykazuje się równoważność dominacji stochastycznych i kwantylowych rzędu pierwszego, czyli $\xi \succ_{(1)}^{-1} \eta \Leftrightarrow \xi \succ_{(1)} \eta$.

Dominacje kwantylowe wyższych rzędów definiujemy w następujący sposób:

$$F_1^{-1}(p) := F^{-1}(p) \text{ oraz } G_1^{-1}(p) := G^{-1}(p),$$

$$F_k^{-1}(p) := \int_0^p F_{k-1}^{-1}(q) dq \text{ podobnie } G_k^{-1}(p) := \int_0^p G_{k-1}^{-1}(q) dq.$$

Formalna definicja dominacji kwantylowych stopnia k jest następująca:

$$\xi \succ_{(k)}^{-1} \eta \Leftrightarrow \bigvee_{p \in (0,1)} F_k^{-1}(p) \geq G_k^{-1}(p) \text{ i } \exists_{p^* \in (0,1)} F_k^{-1}(p^*) > G_k^{-1}(p^*).$$

Kwantylova dominacja stopnia drugiego również, jak to jest w przypadku stopnia pierwszego, jest równoważna dominacji stochastycznej stopnia drugiego. Jednak zależności tego typu nie zachodzą pomiędzy dominacjami kwantylowymi i stochastycznymi stopnia trzeciego i wyższych. Man-Chung Ny [2000, s. 870-593]) umieścił w swojej pracy przykłady numeryczne obalające prawdziwość tezy Levy'ego [1992, s. 552-593] o równoważności dominacji stochastycznych i kwantylowych.

C. Wrather i P.L. Yu [1982, s. 315-334] zaproponowali w swojej pracy ciekawą koncepcję porównywania zysków losowych, czyli tzw. dominację probabilistyczne – porównywanie zmiennych losowych według prawdopodobieństwa przyjęcia przez nie odpowiednich wartości. Formalna definicja jest następująca:

Mówimy, że zmienna ξ dominuje zmienną η z prawdopodobieństwem β , jeśli prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną ξ wartości większych niż zmienna η wynosi β (piszemy $\xi \succ_{\beta} \eta$). Zakładamy przy tym, że $\beta \geq 0.5$.

3. Dwuwymiarowe zmienne losowe

Niniejsza część artykułu zawiera definicje porządków między dwuwymiarowymi zmiennymi losowymi. Jednak zanim przejdziemy do definiowania relacji porządku, przypomnijmy podstawowe własności o dwuwymiarowych zmiennych losowych:

Załóżmy, że X_1, X_2 to zmienne losowe określone na przestrzeniach probabilistycznych (Ω_1, A_1, P_1) oraz (Ω_2, A_2, P_2) .

Parę $X = (X_1, X_2)$ nazywamy dwuwymiarową zmienną losową (dwuwymiarowym wektorem losowym), a X_1, X_2 jej współrzędnymi.

Dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej nazywamy funkcję $F : R^2 \rightarrow R$ daną wzorem:

$$F(x) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2), \text{ dla } x = (x_1, x_2) \in R^2.$$

Rozważmy jednowymiarową zmienną losową, która jest pewną funkcją zmiennych losowych X_1, X_2 . Wartością przeciętną zmiennej $Z = g(X_1, X_2)$ (o ile istnieje) jest liczba określona wzorem:

- dla zmiennej ($X = X_1, X_2$) typu ciągłego:

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

- dla zmiennej ($X = X_1, X_2$) typu skokowego:

$$E[Z] = \sum_i \sum_k g(x_{1i}, x_{2k}) p_{ik}.$$

Momentem zwykłym mieszanym rzędu $r+s$ dwuwymiarowej zmiennej losowej X nazywamy wartość przeciętną (o ile istnieje) iloczynu zmiennych losowych $X_1^r X_2^s$ i oznaczamy ją przez:

$$\alpha_{rs} = E[X_1^r X_2^s] \text{ dla } r, s \in N_0.$$

Momentem centralnym mieszanym rzędu $r+s$ dwuwymiarowej zmiennej losowej X nazywamy liczbę obliczaną z wzoru:

$$\mu_{rs} = E[(X_1 - EX_1)^r (X_2 - EX_2)^s] \text{ dla } r, s \in N_0.$$

Porządki stochastyczne dla zmiennych dwuwymiarowych. Rozważmy dwuwymiarowe zmienne losowe X, Y . Dość powszechnym opisem nierówności probabilistycznej jest:

$$P(X \in A) \leq P(Y \in A), \quad A \in \mathcal{A},$$

gdzie $\mathcal{A}$ jest pewną rodziną zdarzeń (zbiorów).

Dla danej klasy zbiorów $\mathcal{A}$ istnieje taka klasa funkcji H odzworowujących przestrzeń R^2 w R , że powyższa nierówność jest równoważna:

$$Eh(X) \leq Eh(Y), \quad h \in H.$$

Oczywiście rozważamy tylko takie funkcje, dla których wartości oczekiwane istnieją.

Mówimy, że funkcja $h: R^2 \rightarrow R$ jest rosnąca (malejąca), jeśli dla każdych $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$ takich, że $x \leq y$ (tzn. $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$), zachodzi $h(x) \leq (\geq) h(y)$. Mówimy, że zbiór $A \subset R^2$ jest rosnący (malejący), jeśli funkcja charakterystyczna zbioru A jest rosnąca (malejąca). Prezentowana koncepcja dominacji została przedstawiona w pracy [Bergmann 1991].

Jeśli H jest klasą wszystkich rosnących funkcji, a $\mathcal{A}$ jest rodziną wszystkich rosnących zbiorów, to powyższe nierówności są równoważne. Mówimy wtedy, że X jest stochastycznie mniejsze od Y (piszemy $X \leq_d Y$), jeśli odpowiednia nierówność zachodzi dla rozpatrywanej klasy zbiorów lub funkcji.

Odpowiednio modyfikując $\mathcal{A}$ lub H , otrzymujemy inne ciekawe porządki między zmiennymi losowymi, wykorzystując zdefiniowane na początku nierówności. Poniżej przedstawimy definicje kilku otrzymanych w ten sposób porządków.

- Jeśli $\mathcal{A}$ jest klasą zbiorów wypukłych i symetrycznych, to otrzymujemy tzw. porządek ze względu na wypukłość i symetryczność (piszemy $X \leq_{CS} Y$). Jest to równoważne klasie wszystkich funkcji quasi-wklęsłych i symetrycznych.
- Jeśli $\mathcal{A}$ jest rodziną wszystkich rosnących i wypukłych zbiorów, to otrzymujemy tzw. porządek ze względu na wypukłość i rosnące zbiory (piszemy $X \leq_{CI} Y$). Odpowiada to klasie funkcji quasi-wklęsłych, rosnących.
- Postępując analogicznie, otrzymujemy tzw. porządek ze względu na wklęsłość i rosnące zbiory ($X \leq_{CD} Y$).

Dwuwymiarowy model średnia-wariancja. Rozważmy dwuwymiarowe zmienne losowe X, Y , dla których istnieje skończony moment zwykły rzędu $1+1$ oraz

centralny mieszany rzędu 2+2. Wprowadźmy relacje między tymi zmiennymi daną wzorem:

$$X \succ Y \Leftrightarrow \alpha_{11}^X \geq \alpha_{11}^Y \text{ i } \mu_{22}^X \leq \mu_{22}^Y.$$

Przykład 1

Sprawdźmy, czy zachodzi powyższa relacja pomiędzy zmiennymi losowymi X, Y o rozkładzie danym w poniższych tabelkach:

		x_{1i}	
		1	4
x_{2k}	2	0,1	0,2
	3	0,2	0,5

		y_{1j}	
		2	3
y_{2l}	1	0,3	0,4
	4	0,2	0,1

Momenty zwykłe i centralne występujące w definicji relacji mają wartości:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^X = 8,4 &\geq \alpha_{11}^Y = 4,6, \\ \mu_{22}^X = 0,4113 &\leq \mu_{22}^Y = 0,4725. \end{aligned}$$

Wobec czego $X \succ Y$.

Jeśli moment zwykły rzędu 1+1 dwuwymiarowej zmiennej losowej potraktujemy jako odpowiednik wartości oczekiwanej, a moment centralny rzędu 2+2 jako wariancję, to zdefiniowaną relację dominacji możemy traktować jak relację porządku w sensie M-V.

Powstaje pytanie, czy jeśli zachodzi relacja M-V między dwuwymiarowymi zmiennymi losowymi, to zachodzi również taka relacja pomiędzy odpowiednimi rozkładami brzegowymi tych zmiennych. Policzmy wartości oczekiwane i wariancje poszczególnych współrzędnych zmiennych z powyższego przykładu.

$$\begin{aligned} EX_1 = \alpha_{10}^X = 3,1 &\geq EY_1 = \alpha_{10}^Y = 2,5; \\ VarX_1 = \mu_{20}^X = 1,89 &\geq VarY_1 = \mu_{20}^Y = 0,25; \\ EX_2 = \alpha_{01}^X = 2,7 &\geq EY_2 = \alpha_{01}^Y = 1,9; \\ VarX_2 = \mu_{02}^X = 0,21 &\leq VarY_2 = \mu_{02}^Y = 1,89. \end{aligned}$$

Z tego przykładu wnioskujemy, że występowanie dominacji średnia – wariancja w przypadku dwuwymiarowych zmiennych losowych nie zapewnia nam dominacji M-V rozkładów brzegowych poszczególnych składowych wektora.

Dominacje stochastyczne pomiędzy dwuwymiarowymi zmiennymi losowymi. Poniższe rozważania stanowią uogólnienie koncepcji dominacji stochastycznej dla zmiennych dwuwymiarowych. Rozważmy relację

$$X \succ Y \Leftrightarrow \bigvee_{x \in R_+^2} F(X) \leq G(X),$$

gdzie: F, G – dystrybuanty odpowiednio zmiennej X i Y .

Jeśli między zmiennymi losowymi zachodzi powyższa relacja, to mówimy, że zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y (w sensie dominacji stochastycznej).

Przykład 2

Prześledźmy zmienne dwuwymiarowe X i Y o poniższym rozkładzie prawdopodobieństwa.

x_{1i}		x_{2k}	
		1	3
		0,2	0,1
	1	0,2	0,1
	4	0,2	0,5

y_{1j}		y_{2l}	
		0	2
		0,2	0,3
	0	0,2	0,3
	3	0,3	0,2

W tabelce przedstawiono wartości dystrybuant tych zmiennych losowych w odpowiednich punktach masy każdej ze zmiennych.

x	$G(x)$		$F(x)$
(0,0)	0,2	>	0
(0,2)	0,5	>	0
(3,0)	0,5	>	0
(3,2)	1	>	0,2
(1,1)	0,2	=	0,2
(1,3)	0,5	>	0,3
(4,1)	0,5	>	0,4
(4,3)	1	=	1

Na podstawie zachowania nierówności pomiędzy wartościami dystrybuant możemy wywnioskować, że $X \succ Y$.

W dalszej kolejności pokażemy, że zdefiniowana na początku rozdziału relacja jest częściowym porządkiem w zbiorze dwuwymiarowych zmiennych losowych.

Zwrotność jest oczywista, natomiast antysymetrię bardzo łatwo można sprawdzić:

Niech zmienne losowe $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ będą takie, że $X \succ Y$ oraz $X \succ Y$, co znaczy, że $\bigvee_{x \in R_+^2} F(x) \leq G(x)$ i $\bigvee_{x \in R_+^2} G(x) \leq F(x)$.

Relacja „ $\leq$ ” jest porządkiem w zbiorze liczb rzeczywistych, więc mamy: $\bigvee_{x \in R_+^2} F(x) = G(x)$ co daje, że zmienna X oraz Y są równe.

Określona relacja $\succ$ jest przechodnia. Niech zmienne losowe X, Y, Z mają rozkłady zadane przez funkcje dystrybuanty F, G, H . Załóżmy, że zachodzą między nimi relacje $X \succ Y$ i $X \succ Z$. Czyli $\bigvee_{x \in R_+^2} F(x) \leq G(x)$ i $\bigvee_{x \in R_+^2} G(x) \leq H(x)$. Ponownie z

faktu, że relacja $\leq$ jest porządkiem w zbiorze liczb rzeczywistych, otrzymujemy $\bigvee_{x \in R_+^2} F(x) \leq H(x)$. Ostatecznie $X \succ Z$.

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowych zmiennych losowych, relacja zdefiniowana powyżej nie porządkuje dobrze zbioru dwuwymiarowych zmiennych losowych, bowiem $\succ$ nie jest relacją spójną, a zatem nie wszystkie zmienne losowe są porównywalne.

Poniższy przykład ilustruje dwie dwuwymiarowe zmienne losowe, których nie możemy porównać ze sobą ze względu na relację $\succ$:

Przykład 3

Rozkłady zmiennej X z dystrybuantą F i zmiennej Y z dystrybuantą G przedstawiają poniższe tabelki:

		x_{2k}	
		1	3
x_{1i}	1	0,2	0,1
	4	0,2	0,5

		y_{2l}	
		2	4
y_{1j}	2	0,3	0,1
	4	0,1	0,5

Zauważmy, że:

$$F(1,1) = P(X_1 \leq 1, X_2 \leq 1) = 0,2 > 0 = P(Y_1 \leq 1, Y_2 \leq 1) = G(1,1),$$

$$F(2,2) = P(X_1 \leq 2, X_2 \leq 2) = 0,2 < 0,3 = P(Y_1 \leq 2, Y_2 \leq 2) = G(2,2).$$

Zarówno zmienna Y nie dominuje w sensie dominacji stochastycznej zmiennej X , jak i odwrotnie.

Określona relacja dominacji ma szczególną własność, która mówi, że jeśli pewna zmienna dwuwymiarowa $X = (X_1, X_2)$ dominuje zmienną $Y = (Y_1, Y_2)$, to pomiędzy odpowiednimi składowymi zachodzi dominacja stochastyczna rzędu pierwszego, czyli prawdziwa jest następująca implikacja:

$$X \succ Y \Rightarrow X_1 \succ Y_1 \text{ i } X_2 \succ Y_2.$$

Symbol $\succ$ zawarty pomiędzy poszczególnymi współrzędnymi zmiennych X i Y rozumiany jest jako relacja dominacji stochastycznej rzędu pierwszego dla zmiennych jednowymiarowych.

Własność zostanie wykazana dla przypadku rozkładów dyskretnych. Załóżmy, że X, Y przyjmują przeliczalnie wiele wartości z prawdopodobieństwami

$$p_{ik} := P(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2k}), \quad q_{jl} := P(Y_1 = y_{1j}, Y_2 = y_{2l}).$$

Z założenia, że $X \succ Y$, mamy:

$$\forall_{x=(x_1, x_2)} F(x) \leq G(x)$$

$$\forall_{x=(x_1, x_2)} P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \leq P(Y_1 \leq x_1, Y_2 \leq x_2),$$

$$\forall_{x=(x_1, x_2)} \sum_{\substack{x_{1i} \leq x_1 \\ x_{2k} \leq x_2}} p_{ik} \leq \sum_{\substack{y_{1j} \leq x_1 \\ y_{2l} \leq x_2}} q_{jl}.$$

Pomiędzy poszczególnymi współzrędnymi zmiennych losowych zachodzi dominacja stochastyczna rzędu pierwszego: $X_1 \succ Y_1$ i $X_2 \succ Y_2$, jednak zmiennych dwuwymiarowych $X = (X_1, X_2)$ i $Y = (Y_1, Y_2)$ nie można porównać w sensie dominacji stochastycznej, bowiem

$$F(0;0) = 0,2 < 0,25 = G(0;0)$$

$$F(0,5;0) = 0,55 > 0,25 = G(0,5;0).$$

4. Zakończenie

Mimo wielu lat badań i olbrzymiej liczby prac na temat porządków w zbiorze zmiennych losowych, nie istnieje obiektywna reguła decyzyjna, która wskazywałaby najlepszy wariant losowy. Nie znaleziono relacji, która byłaby porządkiem i opowiadałaby intuicji optymalności. Zdefiniowane w literaturze relacje dominacji są tylko częściowym porządkiem i kryteria decyzyjne oparte na takich relacjach nie we wszystkich sytuacjach są rozstrzygające. Zatem problem określenia obiektywnej reguły decyzyjnej dotyczącej zmiennych losowych jest w dalszym ciągu problemem otwartym.

Literatura

- Gotoch Jun-ya, Konno H., *Third Degree Stochastic Dominance and Mean-Risk Analysis*, „Management Science” 2000 vol. 46 nr 2, s. 289-301.
- Bergmann R., *Stochastic Orders and their Application to a Unified Approach Concepts of Dependence and Association*, Stochastic Orders and Decision under Risk, IMS Lecture Notes – Monograph Series (1991).
- Levhari D., Paroush J., Peleg B., *Efficiency Analysis for Multivariate Distributions*, „Review of Economic Studies” 1975 vol. 42, s. 87-91.
- Levy H., *Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis*, „Management Science” 1992 vol. 38, s. 555-593.
- Man-Chung Ny, *A Remark on Third Degree Stochastic Dominance*, „Management Science” 2000 vol. 46 nr 6, s. 870-873.
- Ogryczak W., Ruszczyński A., *Dual Stochastic Dominance and Quintile risk measure*, „International Transactions in Operational Research” 2002 nr 9, s. 611-680.
- Scarsini M., *Dominance Conditions for Multivariate Utility Functions*, „Management Science” 1998 vol. 34 nr 4. ABI/INFORM Global.
- Stoyan D., *Comparison Methods for Queues – and other Stochastic Models*. John Wiley & Sons, Chichester 1983.
- Wrather C., Yu P.L., *Probability Dominance in Random Outcomes*, „Journal of Optimisation Theory and Application” 1982 vol. 36 nr 3, s. 315-334.

STOCHASTIC DOMINANCE RULES – BIVARIATE RANDOM VARIABLE

Summary

After the publication of the stochastic ordering research efforts have been made directed wards to generalizing these rules to multivariate case.

In this paper we describe stochastic orderings, especially model of mean – variance and stochastic dominance – the one-attribute case. In the next step, we generalize these results to two-attribute cases. We define moments for bivariate random variable and describe analogous to mean-variance orders. We define stochastic dominance rules for marginalizations, later we define bivariate stochastic ordering, especially in the context of probability inequalities.