

Agnieszka Lipieta

Akademia Ekonomiczna w Krakowie

DOBRA KOMPLEMENTARNE W MODELU DEBREU**1. Wstęp**

W ekonomii Debreu z własnością prywatną (zob. [Debreu 1959]) rozważamy sytuację, w której przynajmniej dwa z rozważanych dóbr są komplementarne (zob. np. [Varian 2002]). W terminologii matematycznej taka proporcjonalność oznacza, że wszystkie zbiory konsumpcji indywidualnej są zawarte w pewnej właściwej podprzestrzeni wektorowej V przestrzeni $\mathfrak{R}^l$. Podprzestrzeń ta składa się z l -elementowych ciągów liczb rzeczywistych i jest mniejszego wymiaru niż przestrzeń $\mathfrak{R}^l$. Zakładamy dalej, że producenci dostosowali swoją produkcję do wymagań konsumentów, co przejawia się w postaci zbiorów produkcji, które również są podzbiórmi tej samej co zbiory konsumpcji podprzestrzeni wektorowej. Pokażemy, że zamiana wektora cen p^* , przy którym gospodarka osiąga stan równowagi, na wektor $p_v^* = Q(p^*)$, gdzie $Q: \mathfrak{R}^l \rightarrow V$ ($l \in N, l > 1$) jest pewną liniową i ciągłą projekcją, nie burzy równowagi. Zmodyfikowany model jest zawarty w przestrzeni wektorowej mniejszego wymiaru niż wyjściowa przestrzeń wektorowa $\mathfrak{R}^l$, co prowadzi do jego uproszczenia. Rezultaty uzyskane w tej pracy są uzupełnieniem pracy [Lipieta].

2. Definicja modelu Debreu. Struktura działania

Niech $\mathfrak{R}^l$ ($l \in N_+$) będzie przestrzenią wektorową z naturalnymi działaniami i bazą kanoniczną. W przestrzeni tej ustalamy standardowy iloczyn skalarny wektorów $x = (x_1, \dots, x_l)$, $y = (y_1, \dots, y_l) \in \mathfrak{R}^l$:

$$(x \circ y) = \sum_{k=1}^l x_k y_k \quad (1)$$

oraz pewną metrykę d . Rozważając w zbiorze $\mathfrak{R}^l$ topologię wyznaczoną przez metrykę d , oznaczamy

$$Z(\mathfrak{R}') = \{Z \subset \mathfrak{R}' : Z \text{ zwarty}\}. \quad (2)$$

Zbiór $\mathfrak{R}'$ interpretujemy jako przestrzeń towarów i cen. W przestrzeni tej działa grupa podmiotów gospodarczych: producenci i konsumenci. Celem producentów jest maksymalizacja zysków, a celem konsumentów – maksymalizacja użyteczności. Jeżeli istnieje wektor cen $p \in \mathfrak{R}'$, przy którym dochodzi do jednoczesnej realizacji owych zadań, to nazywa się go wektorem cen równowagi. Jest to zarazem wektor cen, przy którym gospodarka osiąga stan ogólnej równowagi konkurencyjnej (typu Walrasa), tzn. na rynkach wszystkich towarów panuje równowaga rynkowa oraz całkowity popyt na każdy towar jest równy jego całkowitej podaży.

Niech $m, n \in N_+$, $I = \{1, \dots, m\}$ jest zbiorem konsumentów, a $J = \{1, \dots, n\}$ zbiorem producentów. Niech $i \in I$ i $j \in J$. Możliwości wytwórcze j -tego producenta opisuje zbiór $Y^j \subset \mathfrak{R}'$ (zbiór planów produkcji możliwych do realizacji przez j -tego producenta ze względu na dostępne technologie). Podobnie przez $X^i \subset \mathfrak{R}'$ oznaczamy zbiór towarów, które chciałby posiadać i -ty konsument i nazywamy go zbiorem konsumpcji i -tego konsumenta. Sumę algebraiczną

$$Y = Y^1 + \dots + Y^n \quad (3)$$

nazywamy zbiorem produkcji całkowitej, podobnie sumę algebraiczną

$$X = X^1 + \dots + X^m \quad (4)$$

– zbiorem konsumpcji całkowitej.

Definicja 1 (zob. [Małowski 2001]). Systemem produkcji nazywamy dwuzakresowy system relacyjny

$$P = (J, \mathfrak{R}'; y, p, \eta, \pi),$$

w którym:

- $y \subset J \times Z(\mathfrak{R}')$ jest korespondencją zbiorów produkcji, która j -temu producentowi przyporządkowuje jego zbiór produkcji $Y^j \subset \mathfrak{R}'$, $y(j) = Y^j$,
- $p \in \mathfrak{R}'$ jest wektorem cen,
- $\eta \subset J \times Z(\mathfrak{R}')$ jest korespondencją podaży, która każdemu producentowi przypisuje zbiór planów produkcji maksymalizujących zysk przy danym wektorze cen p , tzn. $\eta^j = \{y^{j*} \in Y^j : p \circ y^{j*} = \max\{p \circ y^j : y^j \in Y^j\}\}$,
- $\pi : J \rightarrow \mathfrak{R}$ jest funkcją zysku maksymalnego, $\pi(j) = p \circ y^{j*}$.

Zauważmy, że korespondencja η^j oraz funkcja π są dobrze określone, tzn. maksimum funkcji ciągłej $Y^j \ni y^j \rightarrow p \circ y^j \in \mathfrak{R}$ na zbiorze zwartym Y^j istnieje (twierdzenie Weierstrassa).

Definicja 2 (zob. [Malawski 2001]). Systemem konsumpcji nazywamy trzyzakresowy system relacyjny:

$$K = (I, \mathcal{R}', \Xi; \chi, e, \varepsilon, p, \beta, \varphi),$$

gdzie:

- $\Xi \subset \mathcal{R}' \times \mathcal{R}'$ jest rodziną wszystkich relacji preferencji,
- $\chi \subset I \times Z(\mathcal{R}')$ jest korespondencją zbiorów konsumpcji, która i -temu konsumentowi przyporządkowuje jego zbiór konsumpcji, tzn. $\chi(i) = X^i$,
- $p \in \mathcal{R}'$ jest wektorem cen,
- $e: I \rightarrow \mathcal{R}'$ jest odwzorowaniem zasobu początkowego, które i -temu konsumentowi przyporządkowuje jego zasób początkowy $\omega^i \in \mathcal{R}'$, $e(i) = \omega^i$,
- $\varepsilon \subset I \times Z(\mathcal{R}' \times \mathcal{R}')$ jest korespondencją, która każdemu konsumentowi przypisuje relację preferencji ze zbioru Ξ zawężoną do zbioru konsumpcji $\chi(i)$,
- $\beta \subset I \times Z(\mathcal{R}' \times \mathcal{R}')$ jest korespondencją zbiorów budżetowych, która i -temu konsumentowi przyporządkowuje jego zbiór ograniczeń budżetowych $\beta(i) = \{x \in \chi(i): p \circ x \leq p \circ e(i)\}$ przy danym wektorze cen p i zasobie początkowym $e(i)$,
- $\varphi \subset I \times Z(\mathcal{R}')$ to korespondencja popytu, która i -temu konsumentowi przyporządkowuje plany konsumpcji maksymalizujące jego preferencje na zbiorze ograniczeń budżetowych, $\varphi(i) = \{x^{i*} \in \beta(i): \forall x^i \in \beta(i): x^i \preccurlyeq_i x^{i*}, \preccurlyeq_i \in \Xi\}$ (analogicznie jak przy funkcji zysku maksymalnego istnieje ekstremum ciągłej funkcji użyteczności na zwartym zbiorze ograniczeń budżetowych).

Ekonomia z własnością prywatną E_p łączy systemy produkcji P i konsumpcji K w ten sposób, że konsumenci uczestniczą w zyskach producentów, a zasób początkowy ω tej ekonomii jest własnością konsumentów. Dokładnie oznacza to, że

- dana jest funkcja $\theta: I \times J \rightarrow [0, 1]$ mierząca udziały konsumentów w zyskach producentów ($\theta_{ij} := \theta(i, j)$ oznacza udział i -tego konsumenta w zyskach j -tego producenta) oraz $\forall j \in J \sum_{i=1}^m \theta_{ij} = 1$,
- $\omega = \omega^1 + \dots + \omega^m$,
- dana jest korespondencja zbiorów budżetowych $\gamma: I \ni i \rightarrow \gamma(i) \subset X^i$, która i -temu konsumentowi przyporządkowuje jego zbiór ograniczeń budżetowych $\gamma(i) = \{x \in \chi(i): p \circ x \leq p \circ e(i) + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} \cdot \pi(j)\}$, przy danym wektorze cen p , zasobie początkowym $e(i)$ i udziałach θ_{ij} .

Definicja 3 (zob. [Malawski 2001]). Ekonomia Debreu z własnością prywatną E_p jest czterozakresowym systemem relacyjnym $E_p = (I, J, \mathfrak{R}', \Xi; y, p, \eta, \pi, \chi, e, \varepsilon, p, \gamma, \varphi, \theta, \omega)$.

Omówimy teraz bliżej zasady działania (algorytm) ekonomii Debreu z własnością prywatną E_p . Niech $p \in \mathfrak{R}'$ będzie pewnym wektorem cen. Przy danych cenach j -ty producent wybiera taki wektor produkcji y^{j*} ze zbioru Y^j , który zapewnia mu zysk maksymalny. Niech $\pi(j)$ oznacza zysk maksymalny j -tego producenta (zob. definicję 1). Zysk ten dzielony jest między wszystkich m konsumentów. Uwzględniając funkcję udziałów θ , liczbę w^i – wartość majątku i -tego konsumenta, wyznaczamy z równania

$$w^i = p \circ e(i) + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} \pi(j). \quad (5)$$

Konsument i -ty dąży do maksymalizacji swojej użyteczności na zbiorze

$$\gamma(i) = \{x^i \in X^i : p \circ x^i \leq w^i\}. \quad (6)$$

Niech x^{i*} będzie planem konsumpcji maksymalizującym użyteczność i -tego konsumenta na zbiorze X^i , dostępnych w ramach jego dochodu i cen obowiązujących na rynku. Zbiór (6) nazywać będziemy zbiorem ograniczeń budżetowych i -tego konsumenta. Niech

$$x^* := x^{1*} + \dots + x^{m*}, y^* := y^{1*} + \dots + y^{n*}. \quad (7)$$

Jeśli $x^* - y^* = \omega$, to wektor p (wówczas oznaczany przez p^*) nazywamy wektorem cen równowagi.

Definicja 4 (zob. [Malawski 2001]). Ciąg punktów $(x^{1*}, \dots, x^{m*}, y^{1*}, \dots, y^{n*}, p^*)$ w przestrzeni towarów $\mathfrak{R}'$ nazywamy stanem ogólnej równowagi konkurencyjnej Walrasa w ekonomii z własnością prywatną E_p , jeśli:

- $\forall i \in I : x^{i*}$ jest elementem maksymalnym ze względu na relację preferencji na zbiorze ograniczeń budżetowych $\gamma(i)$ (zob. (6)),
- $\forall j \in J : y^{j*}$ jest planem produkcji maksymalizującym zysk j -tego producenta na jego zbiorze produkcji Y^j ,
- $x^* - y^* = \omega$.

3. Podprzestrzeń wektorowa i operatory rzutowe

Niech X będzie przestrzenią wektorową o wymiarze skończonym ($\dim X = l, l \in N_+$), a $H \subset X$ hiperpłaszczyzną (podprzestrzenią wektorową o kowymiarze 1). Wówczas hiperpłaszczyzna H jest jądrem pewnego funkcjonału ($H = \ker h$) postaci:

$$h : \mathfrak{R}^l \ni x \rightarrow h_1 x_1 + \dots + h_l x_l \in \mathfrak{R}. \quad (8)$$

Zatem

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_l) \in X : h_1 x_1 + \dots + h_l x_l = 0\}. \quad (9)$$

Gdy H jest hiperpłaszczyzną w przestrzeni $\mathfrak{R}^l$, wtedy wektor $h = (h_1, \dots, h_l)$ (utożsamiany z funkcjonalem h) jest prostopadły do hiperpłaszczyzny H . Jeśli $V \subset X$ jest podprzestrzenią wektorową o kowymiarze k ($1 \leq k \leq l-1$), to istnieją takie hiperpłaszczyzny $H^1, \dots, H^k$, że

$$V = \bigcap_{i=1}^k H^i, \quad (10)$$

gdzie funkcjonały $h^t : \mathfrak{R}^l \ni x \rightarrow h_1^t x_1 + \dots + h_l^t x_l \in \mathfrak{R}$ ($t \in \{1, \dots, k\}$) są liniowo niezależne.

Ustalmy więc $V \subset X$ podprzestrzeń wektorową o kowymiarze k ($1 \leq k \leq l-1$) i przestrzeni unormowanej X . Wówczas istnieją pewne liniowo niezależne funkcjonały h^t ($t \in \{1, \dots, k\}$) takie, że zachodzi warunek (10).

Definicja 5. Odwzorowanie $Q : X \rightarrow X$ nazywamy projekcją (operatorem rzutowym) z X na V (co zapisujemy: $Q \in P(X, V)$) wtedy i tylko wtedy, gdy

- $\forall x \in \mathfrak{R}^l : Q(x) \in V$,
- $\forall v \in V : Q(v) = v$.

Twierdzenie 1 (zob. [Cheney 1966]). Jeśli X jest przestrzenią unormowaną oraz $Q \in P(X, V)$, to istnieją wektory $q^i \in \mathfrak{R}^l$ takie, że

$$h^i(q^j) = \delta^{ij} \text{ dla } i, j \in \{1, \dots, k\} \quad (11)$$

oraz

$$Q(x) = x - \sum_{i=1}^k h^i(x) \cdot q^i. \quad (12)$$

Z drugiej strony, jeśli wektory $q^1, \dots, q^k \in X$ spełniają warunek (11), to odwzorowanie postaci (12) jest operatorem rzutowym z X na V .

4. Główne rezultaty

W modelu Debreu (zob. definicję 3) rozważamy sytuację, w której przynajmniej dwa dobra są komplementarne. Zatem (zob. np. [Varian 2002]) ilości tych dwóch towarów są proporcjonalne w każdym ze zbiorów konsumpcji X^i , tzn.

$$\exists h \in \mathfrak{R}^l \forall i \in I \forall x^i \in X^i : h_1 x_1^i + \dots + h_l x_l^i = 0. \quad (13)$$

W terminologii matematycznej warunek (13) oznacza, że zbiory X^i zawierają się w pewnej hiperpłaszczyźnie H (zob. (9)) oraz że wektor h jest prostopadły do

każdego ze zbiorów X^i względem iloczynu skalarnego (1). Jeśli natomiast istnieje więcej par dóbr komplementarnych lub ich grupy (np. trzy dobra są komplementarne), to istnieją liniowo niezależne funkcjonały wyznaczone przez wektory $h^1, \dots, h^k \in \mathfrak{R}^l$ ($k \in \{1, \dots, l-1\}$) (zob. (8) i (9)) spełniające warunek (13). Zatem zbiory X^i zawierają się w podprzestrzeni wektorowej V (zob. (10)) przestrzeni $\mathfrak{R}^l$, kowymiaru większego od 1.

Rozważmy ekonomię $E_p = (I, J, \mathfrak{R}^l, \Xi, y, p, \eta, \pi, \chi, e, \varepsilon, p, \gamma, \varphi, \theta, \omega)$ Debreu z własnością prywatną, taką jak w definicji 3. Załóżmy, że ciąg $(x^{1*}, \dots, x^{m*}, y^{1*}, \dots, y^{n*}, p^*)$ jest stanem ogólnej równowagi konkurencyjnej Walrasa (zob. definicję 4) w ekonomii E_p .

Założmy, że zachodzą warunki

$$\forall i \in I: X^i \subset V, \quad (14)$$

$$\forall j \in J: Y^j \subset V. \quad (15)$$

Warunek (15) oznacza, że producenci dostosowali profil swojej produkcji do wymogów konsumentów. Poza przestrzenią wektorową pozostają wektor cen i wektory zasobów poszczególnych konsumentów. Zajmiemy się teraz odpowiedzią na pytanie, czy potrafimy zastąpić wektor cen równowagi p^* takim wektorem cen p_V^* z przestrzeni V , przy którym nie zmienia się wektory maksymalizujące użyteczności producentów i zyski konsumentów oraz cały układ nadal pozostanie w równowadze. Zauważmy, że jeśli $\forall v \in V: p \circ v = 0$, to wówczas definiujemy $p_V^* := \mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathfrak{R}^l$. Jest to element podprzestrzeni V , którego szukamy. W dalszych rozważaniach zakładamy więc, że

$$\exists v \in V: p \circ v \neq 0. \quad (16)$$

Twierdzenie 2. Niech $P = (J, \mathfrak{R}^l; y, p, \eta, \pi)$ będzie systemem produkcji (por. definicję 1). Załóżmy, że zachodzi warunek (15). Niech $p \in \mathfrak{R}^l$. Wówczas istnieje $Q \in P(\mathfrak{R}^l, V)$ projekcja liniowa i ciągła taka, że:

$$\forall v \in V: p \circ v = Q(p) \circ v. \quad (17)$$

Dowód. Z twierdzenia 1 wynika, że znalezienie odpowiedniej projekcji jest równoważne z wyznaczeniem wektorów $q^1, \dots, q^k \in \mathfrak{R}^l$ spełniających warunek (11). Niech $t \in \{1, \dots, k\}$ oraz wektory $v^1, \dots, v^{l-k}$ będą ustaloną bazą przestrzeni V . Zauważmy, że z (13), (14) wynika, że układ wektorów

$$\{v^1, \dots, v^{l-k}, h^1, \dots, h^k\} \quad (18)$$

jest liniowo niezależny. Wektor $q' \in \mathfrak{R}'$ wyznaczmy z układu równań:

$$\begin{cases} h^s(x) = \delta^{st} \\ v^r(x) = 0 \end{cases}, \quad s \in \{1, \dots, k\}, r \in \{1, \dots, l-k\}. \quad (19)$$

Z warunku (18) wynika, że rząd kwadratowej macierzy współczynników układu (19) jest maksymalny. Zatem układ ten jest oznaczony. Dla $t \in \{1, \dots, k\}$,

$$v \circ Q(p) = v \circ \left(p - \sum_{i=1}^k h^i(p) \cdot q^i \right) = v \circ p - \sum_{i=1}^k h^i(p) \cdot (v \circ q^i).$$

Wektor $v \in V$, wektor q^i jest rozwiązaniem układu (19), więc $\forall t \in \{1, \dots, k\}: v \circ q^t = 0$, co kończy dowód twierdzenia.

Wniosek 1. Niech $Q \in P(\mathfrak{R}', V)$ będzie projekcją wyznaczoną z warunków (19) i (12) oraz $p^* \in \mathfrak{R}'$ będzie wektorem cen równowagi. Oznaczmy

$$p_v^* = Q(p^*). \quad (20)$$

Jeśli w systemie produkcji $P = (J, \mathfrak{R}'; y, p, \eta, \pi)$ (por. definicję 1) zastąpimy wektor p^* przez wektor cen p_v^* z warunku (20), to nie ulegną zmianie wartości funkcji zysków maksymalnych poszczególnych producentów. Jeśli wektory $y^{1*}, \dots, y^{n*}$ realizowały maksimum zysku przy systemie cen p^* , to maksymalizują go również przy systemie cen p_v^* . Zatem system relacyjny $P(V, Q) = (J, \mathfrak{R}'; y, Q(p), \eta, \pi)$ będzie dobrze określonym systemem produkcji zawartym w przestrzeni wektorowej V .

Twierdzenie 3. Niech $K = (I, \mathfrak{R}'; \Xi; \chi, e, \varepsilon, p, \beta, \varphi)$ będzie systemem konsumpcji (por. definicję 2) w modelu E_p Debreu. Załóżmy warunki (14), (15), (16). Niech $Q \in P(\mathfrak{R}', V)$ będzie projekcją wyznaczoną z (14), (15). Wtedy

$$\forall i \in I: p \circ Q(\omega^i) = \omega^i \circ Q(p) = Q(p) \circ Q(\omega^i). \quad (21)$$

Dowód. Ustalmy $i \in I$. Zauważmy najpierw (z układu (19)), że

$$\forall t \in \{1, \dots, k\}: q^t \circ Q(p) = q^t \circ Q(\omega^i) = 0. \quad (22)$$

Teraz z (12) otrzymujemy

$$Q(p) \circ Q(\omega^i) = \left(p - \sum_{i=1}^k h^i(p) \cdot q^i \right) \circ Q(\omega^i) = p \circ Q(\omega^i),$$

$$Q(\omega^i) \circ Q(p) = \left(\omega^i - \sum_{i=1}^k h^i(\omega^i) \right) \circ Q(p) = \omega^i \circ Q(p),$$

co daje tezę twierdzenia.

Wniosek 2. Załóżmy, że w modelu E_p Debreu zachodzą warunki (14) i (15). Niech $Q \in P(\mathfrak{R}', V)$ będzie projekcją wyznaczoną z warunków (19) i (12) oraz $p^* \in \mathfrak{R}'$ będzie wektorem cen równowagi spełniającym (16). Niech $p_V^* = Q(p^*)$ (por. (20)). Jeśli

$$\forall i \in I : \omega^i \in V, \quad (23)$$

to wartość majątku w^i (por. (5)) wyznaczona dla $p = p_V^*$ jest taka sama jak dla $p = p^*$.

Uwaga 1. Niech $p^* \in \mathfrak{R}'$ będzie wektorem cen równowagi spełniającym warunek (16) w ekonomii E_p Debreu, w której zachodzą warunki (14) i (15). Jeśli zastąpimy wektor cen p^* przez p_V^* przy założeniu (23), to z twierdzenia 2 oraz wniosku 2 wynika, że nie ulegną zmianie również wektory maksymalizujące użyteczności poszczególnych konsumentów. Ekonomia E_p będzie w stanie równowagi (dla $p = p_V^*$).

Jeśli zachodzą warunki (14) i (15), to intuicyjne wydaje się założenie (23). Ale żaden z tych warunków nie implikuje tego założenia. W dalszych rozważaniach przyjmujemy więc, że

$$\exists i \in I : \omega^i \notin V. \quad (24)$$

Aby uzyskać uproszczony model ekonomii Debreu zawarty w podprzestrzeni wektorowej V , przypiszemy każdemu konsumentowi zmodyfikowany wektor zasobu $\omega^i \in V$ taki, aby wartość majątku i -tego konsumenta obliczona z równania (5) dla $p = p_V^*$ oraz majątku ω^i była identyczna jak w modelu wyjściowym.

Twierdzenie 4. Niech $p \in V$ spełnia warunek (16). Wówczas istnieje $R \in P(\mathfrak{R}', V)$ taka, że

$$\forall i \in I : p \circ R(\omega^i) = p \circ \omega^i. \quad (25)$$

Dowód. Zob. [Lipieta].

Wniosek 3. Niech E_p będzie ekonomią Debreu (por. definicję 4) będącą w stanie równowagi dla wektora cen $p^* \in \mathfrak{R}'$ spełniającego (16). Załóżmy, że zachodzą warunki (14), (15) i (24). Niech $i \in I$, R będzie projekcją z twierdzenia 4, a Q projekcją wyznaczoną z (19) oraz (12). Definiujemy

$$\omega^i = R(\omega^i). \quad (26)$$

Wówczas

$$p^* \circ \omega^i = \omega^i \circ Q(p^*) = p_V^* \circ \omega^i = p_V^* \circ \omega^i. \quad (27)$$

Przedstawiona modyfikacja wektora cen i wektorów zasobów indywidualnych w ekonomii z własnością prywatną E_p (zob. definicję 3) przy założeniu warunków (14), (15), (16), oraz (23) albo (24) nie zmienia istotnych z punktu widzenia producentów (zyski maksymalne) i konsumentów (wektory maksymalizujące użyteczność) parametrów tego modelu (zob. twierdzenia 2 i 4). Spostrzeżenie to pozwala na poprawne zdefiniowanie systemów konsumpcji i produkcji na podprzestrzeni V przestrzeni $\mathfrak{R}^l$. Zauważmy, że wygodniej jest wyznaczać efektywnie wektory maksymalizujące zyski poszczególnych producentów i wektory maksymalizujące użyteczności konsumentów w przestrzeni wektorowej o wymiarze mniejszym.

Niech $m, n \in N_+$, $I = \{1, \dots, m\}$ oznacza zbiór konsumentów, a $J = \{1, \dots, n\}$ zbiór producentów. Niech E_p będzie ekonomią Debreu z własnością prywatną (zob. definicję 3). Zakładamy dalej, że przynajmniej dwa rozważane w modelu dobra są komplementarne, czyli istnieją takie liniowo niezależne wektory $h^1, \dots, h^k \in \mathfrak{R}^l$ ($l \in N, l > 1, k \in \{1, \dots, l-1\}$), że zachodzą warunki (14) i (15) dla podprzestrzeni wektorowej V przestrzeni $\mathfrak{R}^l$ wyznaczonej z warunku (10). Ponadto zakładamy, że $Q: X \rightarrow V$ jest projekcją otrzymaną z warunków (19), (12), R projekcją z twierdzenia 4 oraz wektor p_V jest wyznaczony z warunku (20). Wówczas

Definicja 6. Układ relacyjny $P(V, Q)$ o którym mowa we wniosku 1, nazywać będziemy *systemem produkcji w podprzestrzeni V wyznaczonym przez projekcję Q* .

Twierdzenie 5. System $K(V, Q, R) = (I, V, \Xi_V; \chi_V, e_R, \varepsilon_V, p_V, \beta_{Q,R}, \varphi_{Q,R})$ jest trzyzakresowym systemem relacyjnym, w którym:

- $\Xi_V \subset V \times V$ jest rodziną wszystkich relacji preferencji, które są zawężeniem relacji preferencji ze zbioru Ξ (zob. definicję 2) do podprzestrzeni V ,
- $\chi_V \subset I \times Z(V)$ jest korespondencją zbiorów konsumpcji, która i -temu konsumentowi przyporządkowuje jego zbiór konsumpcji, $\chi_V(i) = X^i$,
- $p_V \in V$ jest wektorem cen,
- $e_R: I \rightarrow V$ jest odwzorowaniem zasobu początkowego, które i -temu konsumentowi przyporządkowuje jego zasób początkowy, $e_R(i) = \varpi^i = R(\omega^i) \in V$,
- $\varepsilon_V \subset I \times Z(V \times V)$ jest korespondencją, która każdemu konsumentowi przypisuje relację preferencji ze zbioru Ξ_V zawężoną do zbioru konsumpcji $\chi_V(i)$,
- $\beta_{Q,R} \subset I \times Z(V \times V)$ jest korespondencją zbiorów budżetowych, która i -temu konsumentowi przyporządkowuje jego zbiór ograniczeń budżetowych $\beta_{Q,R}(i) = \{x \in \chi_V(i): p_V \circ x \leq p_V \circ e_R(i)\}$, przy danych cenach p_V i zasobie początkowym $e_R(i)$,
- $\varphi_{Q,R} \subset I \times Z(V)$ to korespondencja popytu, która i -temu konsumentowi przyporządkowuje plany konsumpcji maksymalizujące jego preferencje na zbiorze

ograniczeń budżetowych, $\varphi_{Q,R}(i) = \{x^{i*} \in \beta_{Q,R}(i) : \forall x^i \in \beta_{Q,R}(i) : x^i \preccurlyeq_i x^{i*}, \preccurlyeq_i \in \Xi_V\}$.

Dowód. Wynika z dotychczasowych rozważań przeprowadzonych w czwartej części pracy.

Definicja 7. Układ relacyjny $K(V, Q, R)$ z twierdzenia 5 nazywamy systemem konsumpcji w podprzestrzeni V wyznaczonym przez projekcję Q i R .

Definicja 8. Czterozakresowy system relacyjny

$$E_P(V, Q, R) = (I, J, V, \Xi_V, \gamma, p_V, \eta, \pi, \chi_V, e_R, \varepsilon_Q, \gamma_{Q,R}, \varphi_{RQ}, \theta, \varpi),$$

w którym $\gamma_{Q,R} : I \ni i \rightarrow \gamma_{Q,R}(i) \in X^i$ jest korespondencją zbiorów budżetowych, która i -temu konsumentowi przyporządkowuje jego zbiór ograniczeń budżetowych

$$\gamma_{Q,R}(i) = \{x \in \chi_{VQ}(i) : p_V \circ x \leq p_V \circ e_R(i) + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \cdot \pi(j)\}$$

przy danym systemie cen p_V , zasobie początkowym $e_R(i)$ i udziałach θ_{ij} ($i \in I, j \in J$) oraz pozostałe zbiory i relacje są analogiczne jak we wniosku 1 i w twierdzeniu 5, nazywamy ekonomią Debreu z własnością prywatną w podprzestrzeni V wyznaczoną przez projekcję Q i R .

Uwaga 2. Jeżeli przynajmniej dwa z rozważanych w modelu *Debreu* dóbr są komplementarne, to zbiory i relacje, o których mowa w definicji 3, można poprawnie zdefiniować w podprzestrzeni wektorowej V mniejszego wymiaru niż przestrzeń wyjściowa $\mathfrak{R}^l$, co prowadzi do uproszczenia modelu. Podprzestrzeń V , w ogólnym przypadku, nie jest przestrzenią typu $\mathfrak{R}^k$, gdzie $k \in N_+$, $k \leq l$. Z taką sytuacją mielibyśmy do czynienia tylko wówczas, gdyby oba podmioty gospodarcze nie były zainteresowane konsumpcją i produkcją pewnego dobra. Rozumowanie przedstawione w trzeciej części pracy dotyczy również tej sytuacji. Zauważmy też, że jeśli w modelu występuje większa liczba bądź grupy dóbr komplementarnych, to podprzestrzeń V ma dużo mniejszy wymiar niż l .

Literatura

- Cheney E.W., *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York 1966.
 Debreu G., *Theory of Value*, New York, Viley 1959.
 Lipieta A., *Ekonomia Debreu z dobrami komplementarnymi*, Przegląd Statystyczny (przyjęty do druku).
 Maławski A., *Metoda aksjomatyczna w ekonomii. Studia nad strukturą i ewolucją systemów ekonomicznych*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 2001.
 Varian H.R., *Mikroekonomia. Kurs średni – ujęcie taksonomiczne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

COMPLEMENTARY COMMODITIES IN DEBREU ECONOMY

Summary

We assume that at least two commodities in a Debreu model are complementary. It means that all the individual consumption sets are contained in a proper subspace V of $\mathfrak{R}^I$ ($V \subset \mathfrak{R}^I$). Let the individual production sets are also the subsets of V and let $p \in \mathfrak{R}^I$ is an equilibrium price vector. We show that there exists such a vector $p_V \subset V$ that replacing prices p by p_V will not destroy the equilibrium. As a result the whole model becomes less complicated.