

Mirosław Wójciak

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

WYKORZYSTANIE ŁAŃCUCHÓW MARKOWA DO OCENY RYZYKA KREDYTOWEGO

1. Wstęp

Teoria łańcuchów Markowa dostarcza użytecznych metod analizy i prognozowania struktury systemów ekonomicznych, którą można zdefiniować dwojako: jako strukturę liczebności w wyniku podziału zbiorowości według określonego kryterium lub jako strukturę udziałów w pewnej populacji według określonego kryterium, w ogólnej liczebności populacji. W przypadku udziałów mamy do czynienia z dyskretnym rozkładem prawdopodobieństwa dla dyskretnych momentów. Zbadanie, czy rozkład ten jest stabilny w czasie, czy też wykazuje zmiany, jest możliwe za pomocą łańcuchów Markowa. Ze względu na swoją prostotę łańcuchy Markowa znalazły zastosowanie w wielu dziedzinach nauki. W artykule przedstawiono możliwości ich zastosowania do analizy poziomu ryzyka kredytowego.

Macierz prawdopodobieństw zmiany klasyfikacji kredytowej (macierz przejścia w łańcuchach Markowa), zwana też macierzą migracji kredytowych, która opisuje historyczne zmiany zdolności kredytowej podmiotów gospodarczych, jest obecnie zasadniczym elementem wielu metod zarządzania ryzykiem kredytowym. Oznacza to, że szczególną uwagę należy zwrócić na wybór metody jej estymacji. W pracy zaprezentowano kilka sposobów estymacji macierzy migracji kredytowych ze względu na wybór odpowiedniego modelu.

2. Proces Markowa z czasem dyskretnym

Ciąg zmiennych losowych $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ nazywa się ciągiem Markowa, jeśli spełniony jest warunek:

$$F_k(x_k | x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = F_k(x_k | x_{k-1}) \quad (1)$$

dla $2 \leq k \leq n$, gdzie przez $F_k(x_k | \dots)$ oznaczono dystrybuantę warunkową.

Procesy Markowa opisane na skończonym lub przeliczalnym zbiorze X noszą nazwę łańcuchów Markowa. Zwykle zbiór ten oznaczany jest jako $X = \{1, 2, \dots, r\}$,

czyli otrzymujemy zbiór stanów $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$. Proces jest ciągiem zmiennych losowych i jego własności nie zależą od przyjętych charakterystyk stanów s_i . Liczby $1, 2, \dots, r$ nazywamy stanami fazowymi procesu.

Możliwość modelowania zjawisk ekonomicznych za pomocą narzędzia w postaci procesu Markowa nadaje stanom określony sens i umożliwia interpretację wyników [Stawicki 2004, s. 10]. Przy ocenie ryzyka kredytowego poszczególne stany odpowiadają poziomowi ryzyka kredytowego, np. poszczególnym ocenom agencji ratingowych tj. AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D.

Proces $\{Y_t, t \in N\}$ spełnia własność Markowa, jeżeli dla każdego $t \in N$ oraz dla każdego stanu fazowego $j, i, i_{t-2}, \dots, i_0$ należącego do zbioru S mamy [Podgórska i in. 2002, s. 11]:

$$Pr\{Y_t = j | Y_{t-1} = i, Y_{t-2} = i_{t-2}, \dots, Y_0 = i_0\} = Pr\{Y_t = j | Y_{t-1} = i\}. \quad (2)$$

Powyższy warunek interpretujemy następująco: dla dowolnego momentu $t \in N$ oraz dowolnych stanów fazowych $i, j \in S$ prawdopodobieństwo warunkowe tego, iż proces w momencie t będzie w stanie j , jeśli wiadomo, że w momencie $t-1$ był on w stanie i , nie zależy od tego, w jakich stanach był w momentach wcześniejszych (por. [Stawicki 2004, s. 11]). Prawdopodobieństwo warunkowe oznaczamy jako:

$$p_{ij}(t) = Pr\{Y_t = j | Y_{t-1} = i\} \quad \text{dla } t \in N \text{ oraz } i, j \in S, \quad (3)$$

które tworzą macierz stochastyczną $P(t) = [p_{ij}(t)]_{r \times r}$. Otrzymane prawdopodobieństwa spełniają warunki:

$$\sum_{j=1}^r p_{ij}(t) = 1, \quad (4)$$

$$0 \leq p_{ij}(t) \leq 1. \quad (5)$$

Łańcuch Markowa $\{Y_t, t \in N\}$ o przestrzeni fazowej $S = \{1, 2, \dots, r\}$ nazywamy jednorodnym łańcuchem Markowa, jeżeli prawdopodobieństwa warunkowe $p_{ij}(t)$ przejścia ze stanu fazowego i do stanu j w jednostce czasu, tzn. w czasie $t-1$ do t , nie zależą od wyboru momentu t , tzn.

$$\forall_t p_{ij}(t) = p_{ij}. \quad (6)$$

Macierz $P = [p_{ij}]$ o wymiarach $S \times S$ nazywana jest macierzą przejścia (w jednym kroku). Macierz ta określa łańcuch Markowa w sposób jednoznaczny. Oznaczając przez:

$$P'_t = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_S(t)]', \quad (7)$$

otrzymujemy wektor bezwarunkowych prawdopodobieństw $p_j(t)$. Wówczas dla jednorodnego łańcucha Markowa prawdziwa jest równość:

$$p_t = P \cdot p_{t-1}. \quad (8)$$

Oznacza to, że bezwarunkowy rozkład prawdopodobieństwa w chwili t można otrzymać z bezwarunkowego rozkładu w chwili $t-1$, wymnażając go przez macierz przejścia. W tabeli 1 zaprezentowano przykładową macierz przejścia (macierz migracji kredytowej).

Tabela 1. Prawdopodobieństwa zmian klasyfikacji pożyczkobiorcy w ciągu roku oszacowane na podstawie lat 1981-2002

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	NR	D
AAA	89,73	5,03	0,56	0,07	0,18	0,01	0,00	4,5	0,016
AA	0,50	88,11	6,81	0,62	0,10	0,08	0,01	3,74	0,018
A	0,08	1,82	87,90	5,19	0,47	0,18	0,01	4,31	0,024
BBB	0,04	0,24	4,09	84,88	4,69	0,75	0,08	5,1	0,118
BB	0,04	0,11	0,58	4,97	77,30	7,94	0,74	7,71	0,619
B	0,01	0,08	0,27	0,49	3,99	76,45	5,16	9,10	4,464
CCC	0,07	0,01	0,30	0,53	1,08	6,55	41,99	9,65	39,824
NR*	0,03	0,08	0,26	0,40	0,42	0,38	0,03	97,69	0,700
D	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

* – Oznacza przedsiębiorstwo nie posiadające oceny ratingowej.

Źródło: Standard & Poor's.

Prawdopodobieństwo zmiany klasyfikacji kredytowej podmiotu gospodarczego jest określone wartościami zawartymi w tab. 1, np. prawdopodobieństwo, że podmiot gospodarczy przejdzie z klasy ratingowej AA do A, wynosi 6,81%. W tabeli 1 można zauważyć, że najwyższe wartości prawdopodobieństw znajdują się na głównej przekątnej macierzy przejścia, co oznacza, że najbardziej prawdopodobne jest, że podmiot nie zmieni swojej klasyfikacji ryzyka kredytowego. W macierzy przejścia w zależności od definicji stanu r wszystkie stany są wzajemnie osiągalne lub może występować $r-1$ stanów wzajemnie osiągalnych i stan r jako stan pochłaniający. Gdy ostatni stan r jest zdefiniowany tylko i wyłącznie ze względu na poziom ryzyka kredytowego, np. ryzyko upadłości powyżej 20%, co w warunkach gospodarki amerykańskiej oznacza upadłość, istnieje prawdopodobieństwo powrotu do którejś z wyższych ocen ratingowych (CCC, B, BB, ...). Stan r można zdefiniować także jako stan, kiedy następuje likwidacja podmiotu, i w tym przypadku będzie on stanem pochłaniającym¹.

3. Łańcuch Markowa wielokrotnego wiązania

W praktyce założenie, że prawdopodobieństwo warunkowe zależy tylko i wyłącznie od stanu i w okresie $t-1$, jest dość mocne. Należy raczej skłaniać się do stwierdzenia, że poziom ryzyka kredytowego nie zależy tylko od stanu w poprzed-

¹ Ocena ratingowa D (stan s) oznacza, że prawdopodobieństwo niewypłacalności w okresie rocznym jest wyższe od 20%. Agencja Standard & Poor's publikuje swoje macierze migracji obligacji, traktując stan D jako pochłaniający.

nim momencie, ale także od momentów wcześniejszych, zwłaszcza gdy korzysta się z danych o częstości obserwowania wyższej niż rok. W tabeli 2 zaprezentowano wartości współczynników autokorelacji syntetycznej miary określającej kondycję ekonomiczno-finansową działów produkcyjnych gospodarki polskiej obliczonej dla danych półrocznych.

Tabela 2. Autokorelacja syntetycznej miary ryzyka kredytowego w poszczególnych działach o odstepie t

Dział	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	Dział	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
15	0,225	0,399	-0,145	27	0,682	0,349	-0,029
16	0,604	0,510	0,356	28	0,586	0,571	0,101
17	0,438	0,445	-0,001	29	0,709	0,423	0,164
18	0,566	0,581	0,094	30	0,169	0,073	-0,320
19	0,456	0,235	-0,218	31	0,557	0,419	0,231
20	0,534	0,000	-0,178	32	-0,062	0,060	-0,267
21	0,278	0,118	0,120	33	0,248	0,326	0,035
22	0,451	0,522	0,330	34	0,443	0,399	0,019
23	0,674	0,307	0,034	35	0,500	-0,080	-0,291
24	0,171	0,476	-0,243	36	-0,379	0,401	-0,111
25	0,579	0,530	0,222	37	0,359	0,016	-0,239
26	0,587	0,426	0,058				

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Autokorelacja prawdopodobieństwa niewypłacalności spółek branży budowlanych o odstepie t

Spółka	$t-1$	$t-2$	$t-3$	$t-4$	Spółka	$t-1$	$t-2$	$t-3$	$t-4$
Budimex	0,214	-0,002	-0,016	-0,015	Nafta	0,866	0,612	0,375	0,163
Echo	0,534	0,120	-0,043	-0,078	Pemug	0,887	0,624	0,366	0,121
Elbudowa	0,481	-0,004	-0,008	-0,114	Polnord	0,781	0,374	-0,028	-0,316
Elektroex	0,665	0,416	0,46	0,297	Prochem	0,619	0,358	0,034	-0,161
Elmontwar	0,853	0,589	0,296	0,050	Projprzem	0,616	0,192	0,08	-0,100
Energopld	0,773	0,489	0,371	0,199	Bick	0,899	0,582	0,467	0,355
Energopn	0,870	0,667	0,401	0,165	Budopol	0,890	0,678	0,454	0,253
Hydrobud	0,706	0,239	-0,106	-0,429	Energopol	0,866	0,616	0,343	0,044
Instal	0,836	0,611	0,337	0,088	Instal Krk	0,882	0,758	0,619	0,487
Mostalex	0,600	0,220	0,147	0,033	Mitex	0,356	0,051	0,006	-0,049
Mostalplc	-0,088	0,140	-0,076	-0,138	Mostal Gd.	0,755	0,396	0,050	-0,125
Mostalwar	0,549	0,156	-0,097	-0,263	Pekabex	0,721	0,464	0,220	-0,033
Mostalzb	0,823	0,645	0,469	0,328	Enap	0,870	0,554	0,266	0,044

Źródło: obliczenia własne.

W piętnastu działach wartość autokorelacji o opóźnieniu 1 jest większa od 0,4, a w jedenastu jest większa od 0,5. Świadczy to o umiarkowanej inercji w tych działach (maksymalna wartość wyniosła 0,709). W przypadku opóźnienia dwukresowego jedenaście działów wykazało autokorelację większą niż 0,4, a dla opóźnienia trzykresowego – żaden. Stąd wniosek, że maksymalny wpływ kondycji z okresów wcześniejszych sięga horyzontu rocznego, czyli dwóch obserwacji.

Kolejny przykład, że poziom ryzyka kredytowego sięga nie tylko najnowszego okresu, ale także momentów wcześniejszych, dotyczy poziomu ryzyka kredytowego spółek branży budowlanej, mierzonego prawdopodobieństwem niewypłacalności obliczonego dla danych kwartalnych. W przypadku 6 spółek zależność sięga do opóźnienia 3 kwartałów wstecz (okres jednoroczny), a dla 14 – dwa kwartały wstecz. Oznacza to, że tylko w 11 spółkach (na 26) spełniony jest warunek pojedynczego wiązania łańcucha Markowa.

W związku z istnieniem wpływu o więcej niż jeden okres na poziom ryzyka kredytowego należałoby wykorzystać łańcuchy Markowa wielokrotnego wiązania. Warunek (1) dla ciągu Markowa może być rozszerzony do postaci:

$$F_k(x_k | x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = F_k(x_k | x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-m}). \quad (9)$$

Skonstruowany w ten sposób łańcuch będzie łańcuchem m -krotnie związanym. Łańcuch Markowa podwójnie wiązany można wyrazić zatem następującą formułą:

$$F_k(x_k | x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = F_k(x_k | x_{k-1}, x_{k-2}), \quad (10)$$

a prawdopodobieństwa warunkowe osiągnięcia stanu j w czasie t wzorem:

$$p_{lij} = \Pr\{Y_t = j | Y_{t-1} = i, Y_{t-2} = l\} \quad \text{dla } t \in N \text{ oraz } l, i, j \in S. \quad (11)$$

Łańcuch podwójnie wiązany może być sprowadzony do jednorodnego łańcucha (por. [Stawicki 2004, s. 20]).

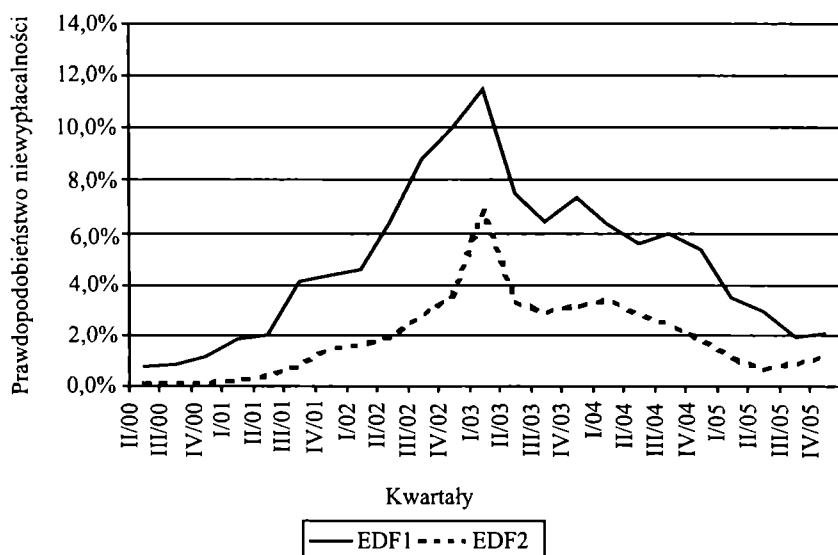
Estymacja macierzy prawdopodobieństw możliwa jest na podstawie mikro danych. Dla łańcucha dwukrotnie związanego prawdopodobieństwa uzyskane metodą największej wiarygodności dla próby przestrzenno-czasowej przybierają postać:

$$p_{lij} = \frac{n_{lij}(t)}{\sum_t \sum_{j=1}^r n_{lij}(t)}, \quad (12)$$

gdzie: n_{lij} jest liczbą jednostek populacji (próby), które w kolejnych okresach (momentach) $t-2$, $t-1$, t przebywały kolejno w stanach l , i , j .

4. Przypadek heterogeniczności macierzy migracji kredytowych

Badania empiryczne wskazują, że zmiany klasyfikacji kredytowej zależą od fazy cyklu koniunkturalnego². Na rysunku 1 przedstawiono średnie prawdopodobieństwa niewypłacalności dla spółek branży budowlanej notowanej na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie w latach 2000-2005. W poszczególnych latach widać znaczne zmiany w przeciętnym poziomie ryzyka kredytowego, co oznacza, że zbudowane wtedy macierze migracji kredytowych mogą się różnić od siebie prawdopodobieństwami zmiany poziomu ryzyka kredytowego. Istnieją przynajmniej dwa sposoby uwzględnienia sytuacji makroekonomicznej w modelu zdolności kredytowej [Saunders 2001, s. 64]: dane historyczne dzieli się na okresy recesji oraz wzrostu gospodarczego i dla każdego z nich z osobna można zbudować macierze zmian klasyfikacji kredytowej, bezpośrednio modelując relacje pomiędzy prawdopodobieństwem zmiany klasyfikacji a czynnikami makroekonomicznymi³.



Rys. 1. Średnie ważone prawdopodobieństwa niewypłacalności branży budowlanej w okresie rocznym (EDF 1) oraz prawdopodobieństwo niewypłacalności neutralne względem ryzyka* (EDF 2) w latach 2000-2005

* Prawdopodobieństwo neutralne względem ryzyka oznacza, że stopa zwrotu z aktywów firmy w horyzoncie rocznym jest równa stopie wolnej od ryzyka

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku recesji wartości prawdopodobieństw z tab. 1 będą się przemieszczać w kierunku południowo-wschodnim, a więc prawdopodobieństwo przejścia z

² Szczególnie stopy niewypłacalności w wypadku pożyczek gorszej jakości są bardzo wrażliwe na fazę cyklu koniunkturalnego.

³ Ujęcie to zostało wykorzystane w modelu CreditPortfolioView firmy McKinsey.

kategorii CCC do D będzie większe w przypadku recesji gospodarki niż w okresie ekspansji. W pierwszym przypadku można zastosować przełącznikowe modele Markowa. W drugim natomiast możliwe jest zastosowanie niejednorodnych łańcuchów Markowa.

Łańcuch Markowa $\{Y_t, t \in N\}$ o przestrzeni fazowej $S = \{1, 2, \dots, r\}$ nazywamy niejednorodnym łańcuchem Markowa, jeżeli prawdopodobieństwa warunkowe $p_{ij}(t)$ przejścia ze stanu fazowego i do stanu j w jednostce czasu, tzn. w czasie $(t-1)$ do t , zależą od czasu w jawnej postaci [Stawicki 2004, s. 33 i nast.]:

$$p_{ij}(t) = f_{ij}(t) \quad (13)$$

bądź od procesów będących funkcjami czasu:

$$p_{ij}(t) = f_{ij}[z^*(t)], \quad (14)$$

gdzie: $z^*(t)$ jest wektorem procesów objaśniających zmiany prawdopodobieństw przejść.

Podstawowa zależność niejednorodnego łańcucha Markowa może być przedstawiona w postaci układu równań:

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^r y_i(t-1) p_{ij}(t) \quad \text{dla } t \in N, \quad j \in S. \quad (15)$$

Zastąpienie prawdopodobieństw bezwarunkowych $d_k(t)$ przez ich oszacowania $y_k(t)$ prowadzi do sformułowania następującego modelu ekonometrycznego:

$$y_k(t) = \sum_{j=1}^r y_j(t-1) p_{jk}(t) + u_k(t) \quad \text{dla } t \in N, \quad j \in S. \quad (16)$$

Określenie kształtu funkcji $f_{ij}(t)$ w formule (17) jako trendu wyznaczonego dla parametrów łańcucha Markowa może narażać na pewnych trudności ze względu na warunki (4) i (5).

$$\hat{p}_{ij}(t) = f_{ij}(t) + u_{ij}(t), \quad (17)$$

gdzie: $\hat{p}_{ij}(t)$ jest estymatorem prawdopodobieństw przejścia ze stanu i do j w czasie t uzyskany z metody największej wiarygodności.

Najczęstszą propozycją jest przyjęcie funkcji liniowej dla $r-1$ pierwszych stanów, a element r w każdym wierszu macierzy wyznacza się ze wzoru:

$$f_{ir}(t) = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} f_{ij}(t). \quad (18)$$

Innym sposobem rozwiązania tego problemu jest przyjęcie założenia o liniowości związku między parametrami niejednorodnego łańcucha a opisującymi je czynnikami i wykorzystanie liniowego modelu ekonometrycznego do opisu w czasie prawdopodobieństw $p_{jk}(t)$ ⁴:

⁴ Takie podejście zastosowano w modelu firmy McKinsey.

$$p_{jk}(t) = \sum_{h=1}^M \beta_{jkh} z_h(t) + \xi_{jk}(t), \quad (19)$$

$z_h(t)$ są zmiennymi objaśniającymi reprezentującymi czynniki, które wpływają na zmienność prawdopodobieństw $p_{jk}(t)$.

Relację (19) wstawiamy do modelu (16), relację liniową prawdopodobieństw wykorzystujemy do zastąpienia nieznanymi parametrów strukturalnych modelu niejednorodnego łańcucha Markowa:

$$y_k(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{h=1}^M \beta_{jkh} y_j(t-1) z_h(t) + \eta_k(t), \quad (20)$$

$$\eta_k(t) = \sum_{j=1}^r y_j(n-1) \xi_{jk}(t) + u_k(t).$$

Oszacowanie parametrów strukturalnych tak zmodyfikowanego modelu pozwoli w sposób pośredni uzyskać oszacowanie prawdopodobieństw $p_{jk}(t)$. Można także założyć nieliniową zależność pomiędzy prawdopodobieństwami przejścia a opisującymi je czynnikami, przy czym czynniki $z_h(t)$ są powiązane między sobą liniową zależnością postaci:

$$f_{jk}(\bar{z}(t)) = \sum_{h=0}^M a_{jk}^h \cdot z_h(t). \quad (21)$$

Zależności między prawdopodobieństwami przejścia $p_{jk}(t)$ a wpływającymi na nie czynnikami określone są funkcjami logistycznymi w postaci (por. [Kadam, Lenk 2005, s. 7; Stawicki 2004, s. 38]):

$$p_{jk}(t) = \begin{cases} \frac{\exp(f_{jk}(\bar{z}(t)))}{1 + \sum_{i=1}^{r-1} \exp(f_{ji}(\bar{z}(t)))} & \text{dla } k = 1, 2, \dots, r-1, \\ \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{r-1} \exp(f_{ji}(\bar{z}(t)))} & \text{dla } k = r. \end{cases} \quad (22)$$

W ten sposób otrzymujemy układ równań:

$$y_k(t) = \sum_{j=1}^r y_j(t-1) p_{jk}(t) + u_k(t) \quad \text{dla } t \in N, \quad j \in S. \quad (23)$$

Równania te są spełnione z dokładnością do składnika resztowego. Uzyskanie ocen parametrów następuje poprzez rozwiązania następującego zadania programowania kwadratowego:

$$\sum_{t=1}^T [\bar{y}(t) - \bar{y}(t-1) \cdot P(t)]^T [\bar{y}(t) - \bar{y}(t-1) \cdot P(t)] \Rightarrow \min. \quad (24)$$

Niezajomość macierzy wariancji i kowariancji estymatorów parametrów modelu nie pozwala na ocenę dokładności oszacowania zarówno parametrów a_{jk}^h , jak i parametrów niejednorodnego łańcucha Markowa $p_{jk}(t)$. Model może być tylko opisany przez sumę kwadratów odchyleń wartości teoretycznych od wartości empirycznych.

5. Macierze przejścia w czasie ciągłym

Uzyskując macierz przejścia na podstawie estymatora największej wiarygodności na podstawie danych rocznych, nie uwzględnia się pełnej informacji zawartej w ocenie ratingowej. Wynika to z tego, że zmiana klasyfikacji może nastąpić w dowolnym momencie, a estymując prawdopodobieństwa bierze się pod uwagę tylko stan na koniec okresu. W związku z tym prawdopodobieństwa przejścia estymowane na podstawie zmian klasyfikacji kredytowej obserwowanych w czasie ciągłym są dokładniejsze. Ma to szczególne znaczenie przy estymacji zdarzeń bardzo rzadkich, np. zmiany klasyfikacji z oceny ratingowej AAA do stanu niewypłacalności. Wartość estymatora uzyskanego z metody największej wiarygodności przejścia z AAA do D powinna być niezerowa, ponieważ jeśli występują przejścia z AAA do AA i z AA do stanu niewypłacalności (dla innych podmiotów gospodarczych), to prawdopodobieństwo przejścia z AAA do stanu niewypłacalności też powinno być większe od zera (por. [Lando, Skødeberg 2002, s. 2]). Estymator największej wiarygodności w czasie ciągłym ujmuje tę relację, a estymator dla czasu dyskretnego – nie⁵.

W przypadku jednorodnego łańcucha Markowa⁶ macierz przejścia w czasie ciągłym wyraża się formułą (por. [Lando, Skødeberg 2002, s. 5]):

$$P(t) = \exp(\Lambda t), \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Prawdopodobieństwo przejścia dla dowolnego horyzontu t jest funkcją macierzy Λ . Zatem do oszacowania prawdopodobieństwa przejścia wykorzystujemy metodę największej wiarygodności. Jednak w pierwszej kolejności należy oszacować elementy macierzy generującej Λ (także metodą największej wiarygodności). Następnie stosuje się macierzową funkcję wykładniczą przemnożoną przez horyzont czasowy do tego oszacowania.

⁵ Jeśli ani jedna firma nie przeszła z klasyfikacji AAA do stanu niewypłacalności, to wartość prawdopodobieństwa wyniesie zero.

⁶ Estymator macierzy przejścia dla niejednorodnego łańcucha Markowa w czasie ciągłym można znaleźć w pracy [Lando, Skødeberg 2002]).

Elementy macierzy Λ spełniają warunek:

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &\geq 0 && \text{dla } i \neq j, \\ \lambda_{ii} &= -\sum_{i \neq j} \lambda_{ij} && \text{dla } i = j. \end{aligned} \quad (26)$$

Elementy macierzy λ opisują własności stochastyczne czasu przebywania w stanie i jako realizację zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ_i , gdzie $\lambda_i = -\lambda_{ii}$. Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do j , pod warunkiem że w ogóle dojdzie do przejścia, wynosi $\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}$. Do estymacji elementów macierzy Λ wykorzystuje się metodę największej wiarygodności (por. [Jafry, Schuermann 2004, s. 20]):

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{n_{ij}(T)}{\int_0^T Y_i(s) ds}, \quad (27)$$

gdzie: $Y_i(s)$ – liczba przedsiębiorstw w danej klasie ratingowej i w czasie s ,
 $n_{ij}(T)$ – liczba przejść przedsiębiorstw ze stanu i do j .

W celu zilustrowania omówionej metody estymacji prawdopodobieństw rozpatrzmy następujący przykład. Dane są 4 kategorie poziomu ryzyka kredytowego: A, B, C oznaczające podmioty wypłacalne oraz kategoria D oznaczająca podmioty niewypłacalne (przyjmijmy, że jest to stan pochłaniający). Załóżmy, że mamy dane dotyczące migracji kredytowej 25 podmiotów w ciągu roku. Na początku roku 10 podmiotów miało ocenę A, 10 podmiotów miało ocenę B, a pozostałe miały ocenę C. W ciągu roku jedna firma z kategorii A do B przeszła po 3 miesiącach, a druga po 7 miesiącach. Z kategorii A do C przeszła jedna firma po 5 miesiącach. Z kategorii B do A przeszła 1 firma po 4 miesiącach, a z B do C 2 firmy, przy czym pierwsza po 8, a druga po 10 miesiącach. Z B do D przeszedł jeden podmiot po 4 miesiącach. Z kategorii C do B przeszła jedna firma po 6 miesiącach, a z kategorii C do D przeszły dwie firmy, obie po 7 miesiącach. Przykładowe elementy macierzy Λ są następujące:

$$\hat{\lambda}_{AB} = \frac{N_{AB}(1)}{\int_0^1 Y_A(s) ds} = \frac{2}{7 + 3/12 + 7/12 + 5/12 + 8/12} = 0,22430,$$

$$\hat{\lambda}_{BA} = \frac{N_{BA}(1)}{\int_0^1 Y_B(s) ds} = \frac{1}{6 + 9/12 + 5/12 + 4/12 + 8/12 + 10/12 + 4/12 + 6/12} = 0,10170,$$

$$\hat{\lambda}_{CD} = \frac{N_{CD}(1)}{\int_0^1 Y_C(s) ds} = \frac{2}{2 + 6/12 + 7/12 + 7/12 + 7/12 + 4/12 + 2/12} = 0,42105.$$

Oszacowana macierz Λ ma postać:

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} -0,33645 & 0,22430 & 0,11215 & 0,0000 \\ 0,10170 & -0,40678 & 0,20339 & 0,10170 \\ 0,0000 & 0,21053 & -0,63158 & 0,42105 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

oraz macierz prawdopodobieństw zmiany klasyfikacji kredytowej:

$$\hat{P}(1) = \begin{bmatrix} 0,72257 & 0,16387 & 0,08468 & 0,02889 \\ 0,07089 & 0,68718 & 0,12629 & 0,11565 \\ 0,00682 & 0,12696 & 0,54435 & 0,32187 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}.$$

W przypadku zastosowania metody największej wiarygodności w czasie dyskretnym uzyskana macierz prawdopodobieństw zmiany klasyfikacji przybiera postać:

$$\hat{P}(1)_d = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,2 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}.$$

Można zauważyć, że estymator w czasie dyskretnym nie ujmuje prawdopodobieństwa zmiany klasyfikacji z kategorii A do D, gdyż nie było w danym przypadku takiego podmiotu gospodarczego. W przypadku estymatora w czasie ciągłym jest możliwa taka zmiana klasyfikacji, chociaż prawdopodobieństwo jest niskie. Jest to prawidłowy wynik, ponieważ możliwa jest zmiana kategorii z A do B, a w kategorii B wystąpiły przypadki niewypłacalności. W związku z tym można sądzić, że istnieje możliwość upadłości wprost z kategorii A. Dodatkowo można zauważyć, że w przypadku podwyższenia kategorii ryzyka kredytowego, np. z B do A, w tradycyjnej metodzie wyznaczania prawdopodobieństw jest ujmowane tylko i wyłącznie przy określaniu prawdopodobieństwa przejścia z B do A. W przykładzie przejście podmiotu w 4 miesiącu z kategorii B do A ma także wpływ na wyznaczone prawdopodobieństwa przejścia z kategorii A, gdyż dany podmiot jest ujmowany w obliczeniach w następujący sposób: 4 miesiące kategorii B i 8 miesięcy kategorii A. Dodatkowym atutem przedstawianej metody estymacji prawdopo-

bieństw przejścia jest możliwość korzystania z mniej licznych baz danych. Wiąże się to z tym, że do obliczeń używa się bardziej szczegółowych danych (obejmujących np. miesięczne zmiany klasyfikacji kredytowej, a nie roczne).

6. Zakończenie

Zastosowanie łańcuchów Markowa do analizy i prognozowania zmian klasyfikacji zdolności kredytowej wiąże się z pewnymi trudnościami. Po pierwsze, brakuje odpowiednich baz danych. Dotyczy to zarówno liczności takiej bazy danych, jak i odpowiedniego zdefiniowania stanów łańcucha Markowa, np. w Stanach Zjednoczonych agencja Standard & Poor's dysponuje bazą danych kilkudziesięciu tysięcy podmiotów posiadających ocenę ratingową, które automatycznie definiują poszczególne stany łańcucha. W Polsce do tego celu mogłyby posłużyć wewnętrzne ratingi stosowane przez największe banki, które także musiałyby ulec ujednoliceniu ze względu na otrzymane klasy ryzyka kredytowego. Kolejnym problemem jest wybór odpowiedniej klasy modelu, tzn. zadecydowanie, czy ma to być jednorodny łańcuch Markowa, łańcuch Markowa wielokrotnego wiązania czy też może niejednorodny łańcuch Markowa. W przypadku niejednorodnego łańcucha Markowa należałoby odpowiednio uwzględnić zmienne opisujące prawdopodobieństwa przejścia. Zastosowanie estymatora prawdopodobieństw w czasie ciągłym pozwala na dokładniejszą estymację prawdopodobieństw zmiany klasyfikacji poziomu ryzyka kredytowego.

Literatura

- Frydman H., Schuermann T., *Credit Rating Dynamics and Markov Mixture Models*, http://www.defaultrisk.com/pp_other107.htm, 2005.
- Jafry Y., Schuermann T., *Measurement, estimation and Comparison of Credit Migration Matrices*, http://www.defaultrisk.com/pp_other_81.htm, 2004.
- Kadam A., Lenk P., *Heterogeneity in Ratings Migration*, http://www.defaultrisk.com/pp_other121.htm, 2005.
- Lando D., Skødeberg T., *Analyzing Rating Transitions and Rating Drift with Continuous Observations*, „Journal of Banking and Finance”, vol. 26, no. 2-3, (Mar-2002), s. 423-444.
- Podgórska M., Śliwka P., Topolewski M., Wrzosek M., *Łańcuchy Markowa w teorii i w zastosowaniach*, SGH, Warszawa 2002.
- Skrodzka W., Włodarczyk A., *Wykorzystanie łańcuchów Markowa do badania zmienności indeksu WIG20*, [w:] *Rynek kapitałowy – skuteczne inwestowanie*, red. W. Tarczyński, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2002, s. 565-576.
- Saunders A., *Metody pomiaru ryzyka kredytowego*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2001.
- Stawicki J., *Wykorzystanie łańcuchów Markowa w analizie rynku kapitałowego*, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Toruń 2004.

USE OF MARKOV CHAINS TO ESTIMATE CREDIT RISK LEVEL

Summary

Credit migration or transition matrices, which characterise past changes in credit quality of firms, are cardinal inputs to many risk management applications. It means that the main stress is to choose the right estimation method. The paper presents a few methods of transition matrices estimation due to appropriate method choice. Multi-binding Markov chains are described together with non-homogeneous Markov chains. The article presents also a continuous-time credit migration estimation method which enables to use Markov chains in case of less numerous data bases.