



APROKSYMACJE WYŻSZYCH RZĘDÓW ROZWIĄZAŃ STOCHASTYCZNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH TYPU ITÔ ZE SKOKAMI

Albert Gardoń

ROZPRAWA DOKTORSKA
WROCLAW 2004



320901 L/1

Aproksymacje wyższych rzędów rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych typu Itô ze skokami

Albert Gardoń

ROZPRAWA DOKTORSKA

Promotor: Dr hab. Michał Morayne, prof. nadzw. PWr.

INSTYTUT MATEMATYKI
WYDZIAŁ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA WE WROCŁAWIU
WROCŁAW 2004

118665

2005/0563/D

Spis treści

Wstęp	5
1 Definicje i oznaczenia	9
1.1 Podstawowe pojęcia	9
1.2 Dyskretyzacja odcinka czasu	12
2 Własności całek wielokrotnych	15
2.1 Własności rozwiązywania	15
2.2 Wzory na dekompozycję	18
2.3 Oszacowania całek wielokrotnych	21
3 Schematy wyższych rzędów	29
3.1 Formuła ogólna	29
3.2 Schematy rzędu 0.5 i 1.0	32
3.3 Trajektorie procesu Wienera	35
3.4 Schematy rzędu 1.5 i 2.0	42
4 Symulacje komputerowe	47
4.1 Porównanie metod aproksymacji	47
4.2 Wybrane algorytmy komputerowe	56
Zakończenie	69
Dodatek	71
Bibliografia	73

Wstęp

Zarys historyczny Termin *stochastyczne równanie różniczkowe* został po raz pierwszy wprowadzony w 1934 roku przez Bernsteina w jego pracy "*Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques*" w odniesieniu do równania

$$dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dW_t ,$$

gdzie $W = \{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ był standardowym ruchem Browna, które obecnie nazywane jest równaniem Itô. Powyższa praca dotyczyła konstrukcji dyfuzyjnych procesów Markowa. Faktycznie, rozwiązania powyższego równania są przy pewnych technicznych założeniach procesami dyfuzyjnymi. Niestety, uzyskanie ich zamkniętej analitycznej postaci okazało się jeszcze trudniejsze niż w przypadku równań różniczkowych deterministycznych, dlatego dość wcześnie rozpoczęto prace nad poszukiwaniami rozwiązań przybliżonych, w tym też takich, które tworzone były bezpośrednio do prowadzenia obliczeń przez komputery. Wśród nich wyróżnić należy metody Monte Carlo (zob.np.[1]) czy metody łańcuchów Markowa o skończonej liczbie stanów (np.[10]). W związku z dyfuzyjnym charakterem rozwiązań, do poszukiwania ich gęstości stosowano równania Fokkera-Plancka, sprowadzając problem równań stochastycznych do cząstkowych równań deterministycznych, dla których istniały gotowe metody numeryczne.

Jednak najefektywniejszą metodą okazała się aproksymacja trajektorii rozwiązania na zadanej, dyskretnej siatce punktów, w której przybliżenia powinny zbiegać do ścieżek rozwiązania analitycznego wraz z zagęszczaniem siatki. Jedną z zalet tego podejścia jest dostarczanie informacji stosunkowo niskiego poziomu o rozwiązaniu (np. w porównaniu do gęstości). Ponadto łatwo zauważalne są daleko idące analogie z metodami numerycznymi dla deterministycznych równań różniczkowych zwyczajnych. Najprawdopodobniej jako pierwszy zastosował tę metodę Maruyama w 1955 roku (zob.[13]), adaptując w następujący sposób deterministyczny schemat Eulera:

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n) (\tau_{n+1} - \tau_n) + b(Y_n) (W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}) ,$$

gdzie Y_n jest przybliżeniem pojedynczej ścieżki w zadanym n -tym punkcie podziału τ_n , dlatego powyższy schemat różnicowy nazywany jest *schematem Eulera-Maruyamy* lub po prostu *stochastycznym schematem Eulera*. Jest to metoda, w której błąd aproksymacji zbiega średniokwadratowo do 0 tak szybko, jak średniokwadratowo maleje do 0 pierwiastek średnicy siatki dyskretyzacji, czyli metoda

rzędu $\frac{1}{2}$ w sensie średniokwadratowym.¹ Ponieważ trajektorie rozwiązania były tylko środkiem do uzyskiwania jego charakterystyk (gęstość, entropia, itp.), naturalną kontynuacją badań było poszukiwanie lepszych, szybciej zbieżnych metod, które pozwoliłyby na uzyskiwanie dokładniejszych wyników w krótszym czasie. Jednak już w latach sześćdziesiątych XX w. zauważono, że bezpośrednio adaptowanie metod deterministycznych powoduje, iż uzyskiwane rozwiązania są co prawda zbieżne, ale nie do rozwiązania analitycznego (zob.[21]). Wynikało to oczywiście ze specyficznej, odmiennej niż w przypadku deterministycznym, postaci różniczki stochastycznej, a konkretnie z lematu Itô. Jako pierwszy zbieżną do właściwej granicy metodę rzędu 1 w sensie średniokwadratowym postaci

$$Y_{n+1} = Y_n + \left(a - \frac{bb'}{2}\right) (\tau_{n+1} - \tau_n) + b(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}) + \frac{bb'}{2} (W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n})^2,$$

w której wartości funkcji wyliczane są w punkcie Y_n , zaproponował Milstein w 1974 roku (zob.[15]). Od tego czasu powstało wiele różnorodnych metod aproksymacji równania Itô, które w obszerny sposób prezentuje monografia [9].

Podobnie, jak w przypadku deterministycznym, można tu wprowadzić kilka podziałów. Schematy oparte na rozwijaniu rozwiązania w stochastyczny szereg Taylora-Itô, a następnie obcinaniu tego szeregu od pewnego miejsca, nazywane są *metodami Taylora*. Ich cechą charakterystyczną jest zawieranie pochodnych wyższych rzędów współczynników funkcyjnych. Jeśli natomiast pochodne te są zastępowane przez odpowiednie ilorazy różnicowe, to tak uzyskiwane metody noszą nazwę *metod Rungego-Kutty*. Ponadto w zależności od liczby punktów siatki, z których korzysta się do uzyskania aproksymacji ścieżki w kolejnym punkcie, metody dzielone są na *jedno-* lub *wielokrokowe*. Jeśli przybliżenie trajektorii w wybranym punkcie zależy tylko od wcześniejszych kroków, to metoda nazywa się *jawną*, a w przeciwnym wypadku *niejawną*. Jednak dla metod stochastycznych pojawiają się dodatkowe podziały, które wcześniej nie występowały. Jeżeli metoda produkuje aproksymacje jednoznaczne ze względu na losowy *proces wymuszający*,² to jest nazywana *mocną*, jeżeli nie, to *słabą*. Wreszcie schematy są dzielone ze względu na normę, w której bada się ich zbieżność. Ma ona szczególny wpływ na ich rząd, ponieważ ten sam schemat w dwóch różnych normach może nie mieć tego samego rzędu zbieżności. Ponadto istnieje pewne powiązanie (zob.[9]) między sposobem wyznaczania błędu metody, a wspomnianą przed momentem jednoznacznością ze względu na proces sterujący.

Zastosowania Powszechność występowania w przyrodzie zjawisk dyfuzyjnych spowodowała, że stochastyczne równanie dyfuzji stało się podstawą wielu modeli w różnych dziedzinach nauki. Dodatkowo w wielu istniejących wcześniej modelach

¹Ze względu na postać normy średniokwadratowej, w literaturze ten rodzaj zbieżności określany jest często również jako zbieżność pierwiastkowo-średniokwadratowa.

²W równaniu Itô losowym procesem wymuszającym, zwanym też sterującym, jest ruch Browna.

deterministycznych dało się zauważyć, że nie opisują właściwie pewnych zaburzeń, których chaotyczny charakter wskazywał na ich losowość. Z pewnością wpływ na popularność akurat takich modeli stochastycznych miał również dobrze rozwinięty aparat matematyczny związany z całą stochastyczną po ruchu Browna, którego budowanie rozpoczął Itô w połowie XX stulecia. Ponieważ jednak ani tworzenie kolejnych modeli, ani ich kalibracja czy weryfikacja, nie są celem niniejszej pracy, nie będą tu szeroko omawiane, a jedynie wspomniane.

Bardzo obszerne omówienie zastosowań znaleźć można w pracy [9]. Podane tam zostały zastosowania m.in. w takich dziedzinach jak psychologia eksperymentalna (koordynacja ruchowa człowieka), neurologia (aktywność neuronów), biologia (dynamika populacji, krzepnięcie krwi, proporcja dwóch alleli w genie), ekologia (rozkład odpadów biologicznych), hydrologia (poziom wód), sejsmologia (ruchy pionowe) czy inżynieria materiałowa (pękanie, ruchy molekuł w ciekłych kryształach). W monografii [19] omówione zostały różne modele zaburzeń w układach technicznych, jak np. opisywana równaniem Itô reakcja statku na fale morskie. Z kolei w publikacji [20] szeroko opisano zastosowania równań Itô do modelowania zjawisk związanych z rynkiem finansowym, takich jak proces portfela, kursy papierów wartościowych, ceny instrumentów pochodnych czy zmienność stóp procentowych.

Pomimo stosowania modeli opartych na równaniu Itô na tak wielką skalę, nie brakuje również słów krytyki pod ich adresem. Dwa najpoważniejsze zarzuty, jakie się im stawia, są następujące: po pierwsze, nie zawsze empiryczny rozkład ciągłych zaburzeń losowych da się uzyskać przez wymuszanie procesem gaussowskim; po drugie, zaburzenia nie zawsze mają charakter ciągły. Konkretnie przykłady i niektóre modele alternatywne można znaleźć w pracy [20]. Oczywiście w wielu wypadkach trudno określić, czy zjawisko ma charakter ciągły. Przykładem może być proces zmian ceny papieru wartościowego w przypadku załamań giełdowych. Jednak stosunkowo rzadko pojawiające się, gwałtowne fluktuacje, wydają się być wierniej opisywane przez procesy o nieciągłych trajektoriach, a mówiąc dokładniej, przez procesy o trajektoriach ciągłych z losowo pojawiającymi się skokami (zob.[11]). Stąd wywodzi się idea wprowadzenia do równania Itô kolejnego procesu wymuszającego wywołującego wspomniane skoki, mianowicie procesu Poissona, co powoduje pojawienie się dodatkowego składnika $c(X_t) dN_t$. Tak zmodyfikowany problem nazywany jest stochastycznym równaniem różniczkowym *typu Itô ze skokami* lub równaniem *dyfuzji skokowej*. Model ten zdobył już uznanie w wielu wymienionych wcześniej dziedzinach, szczególnie zaś w przypadku rynków finansowych (zob.[6]).

Cel badań Głównym celem tej pracy jest opracowanie mocnych schematów różnicowych wyższych rzędów w sensie jednostajnie średniokwadratowym (w normie $\mathcal{L}^2$) dla równania dyfuzji skokowej metodą obcinania szeregu Taylora-Itô oraz ich implementacja. W przeciwieństwie do aproksymacji wyższych rzędów dla stochastycznych równań różniczkowych typu Itô, przypadek ze skokami wymusza-

nymi przez proces Poissona jest słabo zbadany. W pracy [14] podano ogólną formułę na schemat dowolnego rzędu zbieżny w słabym sensie w końcowym punkcie czasu, w którym obserwowane jest rozwiązanie. W artykule [11] wyprowadzone zostały schematy zbieżne w każdym punkcie czasu obserwacji w sensie średniokwadratowym z prędkością 1 i, przy pewnych warunkach, z prędkością $\frac{3}{2}$, a w [12] schemat rzędu 1 o poprawionej efektywności. W pracy [7] rozpatrzony został schemat Eulera dla dyfuzji skokowych, w przypadku, gdy współczynnik dyfuzyjny b znika tożsamościowo, a wymuszający proces Poissona jest niejednorodny.

Treść niniejszej pracy oparta jest zasadniczo na trzech artykułach: [3], [4] i [5]. Na początek definiowane są podstawowe pojęcia i wprowadzane niezbędne oznaczenia. W następnym rozdziale opracowywany jest aparat matematyczny, głównie oszacowania pojawiających się stochastycznych całek wielokrotnych, wykorzystywany w dowodzie twierdzenia o rzędzie zbieżności przybliżeń, zawartego w kolejnej części pracy. Po dowiedzeniu prawdziwości tej ogólnej formuły teoretycznej na poszukiwane aproksymacje wyższych rzędów wyprowadzane są jawne, dające się bezpośrednio zaprogramować komputerowo postaci schematów różnicowych do rzędu $\frac{3}{2}$ włącznie oraz przedstawiony i rozwiązany zostaje problem niejednoznaczności w komputerowym generowaniu trajektorii procesu Wienera. Wreszcie ostatni rozdział zawiera wyniki przeprowadzonych eksperymentów komputerowych weryfikujących i porównujących opracowane aproksymacje wraz z ich implementacją w środowisku MATLAB³ i omówieniem zastosowanych algorytmów. Natomiast w zakończeniu proponowane są ewentualne dalsze kierunki badań. Całość uzupełnia dodatek z najistotniejszymi znanymi twierdzeniami, które zostały tu wykorzystane, z pominięciem dowodów. Skład i łamanie wykonano w systemie L^AT_EX.⁴

Podziękowania Autor pragnie gorąco podziękować promotorowi niniejszej rozprawy, prof. Michałowi Morayne, m.in. za stworzenie doskonałej atmosfery do pracy, za niezliczone godziny naukowych dyskusji i za cenne uwagi, które wyeliminowały z wyników badań wiele niedociągnięć i nieścisłości. Jednak w jednym zdaniu trudno wyrazić całą wdzięczność, jakiej są warte okazane pomoc i zaufanie.

³MATLAB jest nazwą zastrzeżoną, należącą do The MathWorks, Inc.

⁴L^AT_EX jest oprogramowaniem typu “freeware”, specjalną wersją systemu T_EX, stworzoną przez Lesliego Lamporta. T_EX jest znakiem handlowym, należącym do American Mathematical Society.

Rozdział 1

Definicje i oznaczenia

1.1 Podstawowe pojęcia

Na początek zostanie zdefiniowane znaczenie zapisu $\bar{V}$ w odniesieniu do procesu stochastycznego V .

Definicja 1.1 Niech prawie wszystkie trajektorie pewnego procesu stochastycznego $V = \{V_t, t \in D \subset \mathbb{R}_+\}$ posiadają lewostronną granicę w każdym punkcie pewnego domkniętego przedziału $D_0 \subset D \subset \mathbb{R}_+$. Wtedy proces $\bar{V}$ będzie zdefiniowany na D_0 jako:

$$\bar{V}_t = V_{t-} = \lim_{s \nearrow t} V_s,$$

przy czym prawą stronę powyższej równości należy rozumieć jako granicę trajektorii w punkcie.

Niech teraz $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oznacza zupełną przestrzeń probabilistyczną i niech proces stochastyczny

$$X = \{X_t, t \in J = [t_0, T] \subset \mathbb{R}_+\}$$

będzie zadany przez stochastyczne równanie różniczkowe w postaci całkowej:

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0^+}^t b(s, \bar{X}_s) dW_s + \int_{t_0^+}^t c(s, \bar{X}_s) dN_s, \quad (1.1)$$

gdzie W jest standardowym procesem Wienera, N jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ i zakłada się, że są one niezależne.

Uwaga 1.2 W powyższym równaniu zapis $\int_{t_0^+}^t$ należy rozumieć jako całkę stochastyczną po przedziale lewostronnie otwartym $(t_0, t]$. Oczywiście, w przypadku całki Riemanna nie jest istotne, czy całkuje się po przedziale lewostronnie otwartym, podobnie jak nie jest istotne, czy proces całkowany jest lewostronnie ciągły (co gwarantuje jego prognozowalność).

Niech $\Xi \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem wartości procesu X , niech $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in J\}$ będzie zupełną filtracją generowaną przez wymuszające procesy W i N oraz niech X_{t_0} będzie $\mathcal{F}_{t_0}$ -mierzalne i

$$EX_{t_0}^2 < \infty. \quad (1.2)$$

Jeżeli funkcje a , b i c spełniają następujące warunki (które implikują ich produktową mierzalność):

$$\exists K_0 > 0 \quad \exists_{g(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0} \forall_{t \in J} \forall_{x \in \Xi} \quad |h(t + \varepsilon, x) - h(t, x)| \leq K_0 (1 + |x|) |g(\varepsilon)|, \quad (1.3)$$

$$\exists K_1 > 0 \quad \forall_{t \in J} \forall_{x, y \in \Xi} \quad |h(t, x) - h(t, y)| \leq K_1 |x - y| \quad (Lipschitz), \quad (1.4)$$

to proces X (zob.[19]) będzie określony jednoznacznie z pr.1,¹ prawie wszystkie jego trajektorie będą prawostronnie ciągłe i będą posiadać lewostronną granicę (RCLL, càdlàg) w każdym punkcie przedziału J . Warunki (1.3) i (1.4) implikują tzw. *ograniczenie liniowego wzrostu*:

$$\exists K_2 > 0 \quad \forall_{t \in J} \forall_{x \in \Xi} \quad h^2(t, x) \leq K_2^2 (1 + x^2). \quad (1.5)$$

Pomimo istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania dyfuzji skokowej Itô (1.1), tylko w sporadycznych przypadkach możliwe jest znalezienie jego zamkniętej, analitycznej formuły (zob.[19]). Dlatego najefektywniejszym sposobem zdobywania informacji o nim jest jego przybliżanie. Do tego konieczne jest wprowadzenie na początek kilku pojęć i oznaczeń.

Definicja 1.3 Przez

$$\mathcal{M} = \{\nu\} \cup \{\alpha = (j_1, \dots, j_l) : j_i \in \{\widetilde{-1}, -1, 0, 1\}, 1 \leq i \leq l, l \in \mathbb{N}\}$$

oznaczany będzie zbiór multiindeksów, w którym ν oznacza indeks pusty, czyli indeks o długości zero. Niech dodatkowo

$$\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \setminus \{\alpha = (j_1, \dots, j_l) : \exists_{1 \leq i \leq l} j_i = \widetilde{-1}, l \in \mathbb{N}\}$$

oznacza podzbiór wszystkich multiindeksów nie zawierających elementu $\widetilde{-1}$. Numerycznie $\widetilde{-1}$ będzie traktowana jak -1 .

Niech teraz l_α oznacza długość multiindeksu, czyli liczbę elementów składających się na α ($l_\nu = 0$), natomiast p_α , n_α i w_α odpowiednio liczbę minus jedynek (również oznaczonych tyldą), zer i jedynek w multiindeksie α . Dodatkowo wprowadza się działania na multiindeksach, polegające na obcinaniu ich skrajnych składowych:

$$\rightarrow \alpha = \rightarrow(j_1, \dots, j_l) = (j_2, \dots, j_l), \quad \alpha \leftarrow = (j_1, \dots, j_l) \leftarrow = (j_1, \dots, j_{l-1})$$

¹Dla własności zachodzących z prawdopodobieństwem 1, czyli prawie na pewno, będą używane skróty z pr.1 lub p.n.p.

oraz na łączeniu ich ze sobą:

$$\alpha \wedge \beta = (j_1, \dots, j_l) \wedge (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_l, i_1, \dots, i_k) .$$

Przez $I_\alpha[\bar{V}]_{\varrho+}^\tau$ będzie oznaczana wielokrotna całka stochastyczna z procesu o prawie wszystkich trajektoriach lewostronnie ciągłych, posiadających prawostronną granicę (LCRL, cáglád) na J , definiowana rekurencyjnie w następujący sposób:

$$I_\alpha[\bar{V}]_{\varrho+}^\tau := \begin{cases} V_\tau & : \alpha = \nu \\ \int_{\varrho+}^\tau I_{\alpha\leftarrow}[\bar{V}]_{\varrho+}^t dt & : \alpha = (j_1, \dots, j_l) \neq \nu, j_l = 0 \\ \int_{\varrho+}^\tau \bar{I}_{\alpha\leftarrow}[\bar{V}]_{\varrho+}^t dW_t & : \alpha = (j_1, \dots, j_l) \neq \nu, j_l = 1 \\ \int_{\varrho+}^\tau \bar{I}_{\alpha\leftarrow}[\bar{V}]_{\varrho+}^t dN_t & : \alpha = (j_1, \dots, j_l) \neq \nu, j_l = -1 \\ \int_{\varrho+}^\tau \bar{I}_{\alpha\leftarrow}[\bar{V}]_{\varrho+}^t d\widetilde{N}_t & : \alpha = (j_1, \dots, j_l) \neq \nu, j_l = \widetilde{-1} , \end{cases} \quad (1.6)$$

przy czym $\alpha \in \mathcal{M}$, $V \in \text{RCLL}$, ϱ i τ są dwoma czasami zatrzymania takimi, że $t_0 \leq \varrho \leq \tau \leq T$ p.n.p., a $\widetilde{N}_t = N_t - \lambda t$ jest *skompensowanym procesem Poissona*. Gdy granice całkowania nie będą grały istotnej roli w obliczeniach lub $V = 1$, będzie używana skrócona notacja $I_\alpha[\bar{V}]$ lub I_α . Dalej, również rekurencyjnie, dla $\alpha \in \widehat{\mathcal{M}}$, definiuje się następującą funkcję $f_\alpha : J \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_\alpha(t, x) := \begin{cases} x & : \alpha = \nu \\ L_{(j_1)} f_{\rightarrow\alpha}(t, x) & : \alpha = (j_1, \dots, j_l) \in \widehat{\mathcal{M}} \setminus \{\nu\} , \end{cases} \quad (1.7)$$

gdzie

$$L_{(j)} h(t, x) := \begin{cases} h'_t(t, x) + a(t, x) h'_x(t, x) + \frac{1}{2} b^2(t, x) h''_{xx}(t, x) & : j = 0 \\ b(t, x) h'_x(t, x) & : j = 1 \\ h_c^*(t, x) - h(t, x) & : j = -1 \end{cases} \quad (1.8)$$

oraz

$$h_c^*(t, x) := h(t, x + c(t, x)) , \quad (1.9)$$

dla dowolnej funkcji $h : J \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$.

Przykład 1.4 Dla indeksu $\alpha = (-1, 1)$ funkcja $f_\alpha(t, x)$ przybiera postać:

$$\begin{aligned} f_{(-1,1)}(t, x) &= L_{(-1)} f_{(1)}(t, x) = L_{(-1)} (L_{(1)} f_\nu(t, x)) = L_{(-1)} (L_{(1)} x) = \\ &= L_{(-1)} \left(b(t, x) \frac{\partial}{\partial x}(x) \right) = L_{(-1)} b(t, x) = b_c^*(t, x) - b(t, x) . \end{aligned}$$

Definicja 1.5 Niepusty zbiór $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathcal{M}}$ nazywany jest zbiorem hierarchicznym, jeżeli prawdziwe jest wyrażenie:

$$\forall_{\alpha \in \mathcal{A}} \quad \alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\nu\} \implies \rightarrow \alpha \in \mathcal{A}.$$

Definicja 1.6 Niech $\mathcal{A}$ będzie pewnym zbiorem hierarchicznym. Wtedy zbiór

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \widehat{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{A} : \rightarrow \alpha \in \mathcal{A}\}$$

będzie nazywany zbiorem resztowym zbioru $\mathcal{A}$.

1.2 Dyskretyzacja odcinka czasu

Następną wymagającą wyjaśnienia kwestią jest sposób tworzenia aproksymacji. Oczywiście jeśli nie ma jawnego wzoru na X , można aproksymować tylko pewne jego charakterystyki czy np. trajektorie. Co więcej, żeby dowiedzieć się czegoś o własnościach procesu X na podstawie jego przykładowych trajektorii, konieczna jest ich duża liczba, co jest osiągalne tylko przy pomocy symulacji komputerowych. To z kolei pociąga za sobą konieczność ustalenia skończonej ilości punktów, w których będą przybliżane trajektorie. Operacja ta nosi nazwę *dyskretyzacji* odcinka czasu J i teraz zostaną wprowadzone pojęcia z nią związane.

Definicja 1.7 Niech $(\tau_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie niemalejącym ciągiem momentów Markowa takich, że $\lim \tau_n = \infty$, i niech n_t będzie największym indeksem n , dla którego τ_n jest nie większe niż t , czyli:

$$n_t = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : \tau_n \leq t\}.$$

Wtedy przez

$$\mathcal{P}_{\delta} = \left\{ (\tau_n)_{n=0}^{n_T} : t_0 = \tau_0 \leq \dots \leq \tau_{n_T} = T, \max_{1 \leq n \leq n_T} (\tau_n - \tau_{n-1}) \leq \delta \right\}$$

oznaczany będzie zbiór wszystkich δ -podziałów odcinka J (możliwe, że losowych), a przez $(\tau)^{\delta}$ dowolny element tego zbioru, czyli każdy podział o średnicy δ . Jeżeli będzie on losowy, to zakłada się dodatkowo, że każde τ_{n+1} jest $\mathcal{F}_{\tau_n}$ -mierzalne i wszystkie relacje zachodzą p.n.p.

Ogólnie każda ustalona aproksymacja rozwiązania równania (1.1) przy dyskretyzacji $(\tau)^{\delta}$ będzie oznaczana przez Y^{δ} i dodatkowo w punktach podziału będzie używana skrócona notacja $Y_n^{\delta} = Y^{\delta}(\tau_n)$. W oparciu o wprowadzone pojęcia można już podać definicję rzędu zbieżności aproksymacji. Można to zrobić na różne sposoby (zob.[9]), w zależności od funkcjonału reprezentującego jej błąd. W niniejszej pracy rozpatrywany będzie *jednostajny błąd średniokwadratowy*, a odpowiadająca mu definicja rzędu jest następująca.

Definicja 1.8 Jeżeli aproksymacje $(Y^\delta)_{\delta \in \mathbf{R}_+}$ procesu X spełniają poniższe oszacowanie:

$$\exists_{C>0} \exists_{\delta_0>0} \forall_{\delta \in (0, \delta_0)} \forall_{(\tau)^\delta \in \mathcal{P}_\delta} \quad \mathbb{E} \left(\sup_{\tau_n \in (\tau)^\delta} (X_{\tau_n} - Y_n^\delta)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq C \delta^{2\gamma},$$

to γ nazywane jest rzędem zbieżności tego ciągu aproksymacji w sensie jednostajnie średniokwadratowym. Innymi słowy $(Y^\delta)_{\delta \in (0, \delta_0)}$ zbiega wtedy przy $\delta \searrow 0$ do X w normie $\mathcal{L}^2$ z szybkością γ .

Na koniec należy wprowadzić jeszcze kilka oznaczeń, które będą używane w dalszej części pracy. Przez Δ_n , ΔW_n i ΔN_n oznaczane będą przyrosty procesów sterujących między punktami podziału, odpowiednio procesu czasu,² Wienera i Poissona, a przez Z_n całka z przyrostu procesu Wienera po czasie:

$$Z_n := \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} W_t - W_{\tau_n} dt = I_{(1,0)}[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}}.$$

Wreszcie niech dla $V \in \text{RCLL}$ będą zdefiniowane następujące operatory:

$$S_{V,n}^{k,m} := \sum_{i=N_{\tau_n}+k}^{N_{\tau_{n+1}}} (\bar{V}_{\Gamma(i)} - V_{\tau_n})^m \binom{i-1-N_{\tau_n}}{k-1}, \quad (1.10)$$

gdzie $\Gamma(i)$ jest momentem i -tego skoku procesu Poissona, oraz

$$F_{V,t}^{\delta,\alpha} := \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\sum_{n=0}^{n_s-1} I_\alpha[\bar{V}]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} + I_\alpha[\bar{V}]_{\tau_{n_s}^+}^s \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \quad (1.11)$$

i

$$G_{\varrho, \tau}^\alpha(V) := \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [\varrho, \tau]} (I_\alpha[\bar{V}]_{\varrho^+}^t)^2 \mid \mathcal{F}_\varrho \right), \quad (1.12)$$

przy czym $\alpha \in \mathcal{M}$, $\tau_n \in (\tau)^\delta \in \mathcal{P}_\delta$, a ϱ i τ są dwoma momentami Markowa takimi, że $t_0 \leq \varrho \leq \tau \leq T$ z pr.1.

Zakładając, że $h(t, x) \in C^{1,2}(J \times \Xi)$, uwzględniając szczególną postać równania (1.1) i wykorzystując uogólnienie klasycznej formuły Itô dla półmartyngałów (zob.[16] lub Dodatek), otrzymuje się:

$$h(t, X_t) = h(t_0, X_{t_0}) + \sum_{j=-1}^1 I_{(j)}[L_{(j)}h(\cdot, \bar{X})]_{t_0^+}^t, \quad (1.13)$$

przy czym operator L zdefiniowany jest tożsamością (1.8). Stosując (1.13) do współczynników a , b i c z równania (1.1) odpowiednio wiele razy, można rozwinąć

²Proces czasu $T_t = t$, choć nielosowy, też może być traktowany jako proces sterujący.

proces X w stochastyczny szereg Taylora-Itô (zob.[9]) dla dowolnego zbioru hierarchicznego $\mathcal{A}$ oraz dwóch momentów Markowa ϱ i τ takich, że $t_0 \leq \varrho \leq \tau \leq T$ p.n.p.:

$$X_\tau = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha[f_\alpha(\varrho, X_\varrho)]_{\varrho+}^\tau + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A})} I_\alpha[f_\alpha(\cdot, \bar{X})]_{\varrho+}^\tau. \quad (1.14)$$

Wykorzystując powyższy wzór analogicznie jak w przypadku deterministycznym, czyli opuszczając sumę po zbiorze resztowym i uwzględniając odpowiednio duży zbiór hierarchiczny, można teoretycznie otrzymać dowolnie dokładne przybliżenie procesu X , zwane mocną aproksymacją Taylora. Jednak by ustalić wpływ doboru zbioru hierarchicznego na dokładność, rozumianą w sensie rzędu zbieżności, konieczne jest uprzednie podanie kilku lematów, umożliwiających odpowiednie oszacowania. Zostaną one przedstawione w następnym rozdziale.

Rozdział 2

Własności całek wielokrotnych

2.1 Własności rozwiązania

W tym rozdziale zostaną podane lematy pozwalające na wyprowadzenie i udowodnienie najistotniejszych wyników. Na początek podjęty zostanie temat całkowalności procesu X . Ponieważ docelowo będzie badana zbieżność aproksymacji w normie $\mathcal{L}^2$, to proces X powinien być całkowny z kwadratem, co zostanie tu potwierdzone. W dowodach przez D_i ($i \in \mathbb{N}$) oznaczane będą skończone, dodatnie stałe, których dokładna wartość nie będzie odgrywała istotnej roli.

Lemat 2.1 *Niech dla rozwiązania równania (1.1) zachodzą warunki (1.2) i (1.5). Wtedy to rozwiązanie, mianowicie proces X , spełnia nierówność:*

$$\mathbb{E}X_t^2 \leq e^{C_1(t-t_0)} (1 + \mathbb{E}X_{t_0}^2) - 1,$$

gdzie C_1 jest skończoną stałą dodatnią.

Dowód: Wykorzystanie wzoru (1.13), skompensowanie procesu Poissona i użycie skróconej notacji typu $h_s = h(s, \bar{X}_s)$ daje:

$$\begin{aligned} X_t^2 &= X_{t_0}^2 + \int_{t_0}^t (2a_s X_s + b_s^2) ds + \\ &\quad + \int_{t_0^+}^t 2b_s \bar{X}_s dW_s + \int_{t_0^+}^t ((\bar{X}_s + c_s)^2 - \bar{X}_s^2) dN_s = \\ &= X_{t_0}^2 + \int_{t_0}^t (2a_s X_s + b_s^2 + 2\lambda c_s X_s + \lambda c_s^2) ds + \\ &\quad + \int_{t_0^+}^t 2b_s \bar{X}_s dW_s + \int_{t_0^+}^t (2c_s \bar{X}_s + c_s^2) d\tilde{N}_s. \end{aligned}$$

Dwa ostatnie składniki są lokalnymi martyngałami, zatem istnieje niemalejący ciąg czasów zatrzymania $\{\tau_n\}_{n=0}^\infty$ taki, że $\tau_0 \geq t_0$ i $\lim \tau_n = \infty$, dla którego całki¹

$$\int_{t_0^+}^{t \wedge \tau_n} 2b_s \bar{X}_s dW_s \quad \text{ i } \quad \int_{t_0^+}^{t \wedge \tau_n} (2c_s \bar{X}_s + c_s^2) d\tilde{N}_s$$

są martyngałami o zerowej wartości oczekiwanej, dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$. W szczególności niech $\tau_n = \inf\{t : |X_t| > |X_{t_0}| + n\}$. W połączeniu z własnością (1.5) oraz nierównością $x \leq \sqrt{1+x^2}$ daje to:

$$\begin{aligned} \int_{\{\tau_n \geq t\}} X_t^2 dP &\leq \int_{\{\tau_n \geq t\}} X_{t \wedge \tau_n}^2 dP + \int_{\{\tau_n < t\}} X_{t \wedge \tau_n}^2 dP = \\ &= EX_{t \wedge \tau_n}^2 = EX_{t_0}^2 + E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_n} (2a_s X_s + b_s^2 + 2\lambda c_s X_s + \lambda c_s^2) ds \leq \\ &\leq EX_{t_0}^2 + \int_{t_0}^t \left\{ 2E \left| a(s, \bar{X}_{s \wedge \tau_n}) \bar{X}_{s \wedge \tau_n} \right| + Eb^2(s, \bar{X}_{s \wedge \tau_n}) + \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda E \left| c(s, \bar{X}_{s \wedge \tau_n}) \bar{X}_{s \wedge \tau_n} \right| + \lambda Ec^2(s, \bar{X}_{s \wedge \tau_n}) \right\} ds \leq \\ &\leq EX_{t_0}^2 + \int_{t_0}^t (2K_2 + K_2^2 + 2K_2\lambda + K_2^2\lambda) E(1 + \bar{X}_{s \wedge \tau_n}^2) ds \leq \\ &\leq EX_{t_0}^2 + C_1(t - t_0) + C_1 \int_{t_0}^t E\bar{X}_{s \wedge \tau_n}^2 ds \leq \dots \end{aligned}$$

Następnie do ograniczonego i dodatniego $EX_{t \wedge \tau_n}^2$ wykorzystuje się nierówność Gronwalla (zob.[9] lub Dodatek) by uzyskać:

$$\begin{aligned} \dots &\leq EX_{t_0}^2 + C_1(t - t_0) + C_1 \int_{t_0}^t e^{C_1(t-s)} (EX_{t_0}^2 + C_1(s - t_0)) ds = \\ &= e^{C_1(t-t_0)} (1 + EX_{t_0}^2) - 1. \end{aligned}$$

Zbiory $\{\tau_n \geq t\}$ tworzą rodzinę wstępującą taką, że $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{\tau_n \geq t\} = \Omega$, więc dla dowolnej miary μ , względem której są one mieralne, zachodzi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{\tau_n \geq t\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{\tau_n \geq t\}\right) = \mu(\Omega).$$

¹Oczywiście $s \wedge t = \min\{s, t\}$.

Tymczasem każda całka z mierzalnej funkcji nieujemnej, w szczególności $\int X_t^2 dP$, definiuje pewną miarę, stąd prawdziwe jest następujące przejście do granicy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{\tau_n \geq t\}} X_t^2 dP = \int_{\bigcup_{n \in N_0} \{\tau_n \geq t\}} X_t^2 dP = EX_t^2,$$

czego należało dowieść. $\square$

Lemat 2.2 *Niech dla rozwiązania równania (1.1) zachodzą warunki (1.2) i (1.5). Wtedy to rozwiązanie, mianowicie proces X , spełnia nierówność:*

$$E \left(\sup_{t \in J} X_t^2 \right) \leq C_2 (1 + EX_{t_0}^2),$$

gdzie C_2 jest skończoną stałą dodatnią.

Dowód: Równanie (1.1), przy skróconej notacji typu $h_s = h(s, \bar{X}_s)$, można przedstawić w postaci:

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t \hat{a}_s ds + \int_{t_0^+}^t b_s dW_s + \int_{t_0^+}^t c_s d\widetilde{N}_s,$$

gdzie $\hat{a}_s = a_s + \lambda c_s$. Wtedy proces

$$\widetilde{X}_t = X_t - \int_{t_0}^t \hat{a}_s ds$$

jest martyngałem na J , co pozwala skorzystać z nierówności Dooba (zob.[16] lub Dodatek). Dodatkowo wykorzystanie nierówności $(q_1 + q_2)^2 \leq 2(q_1^2 + q_2^2)$ daje:

$$\begin{aligned} E \left(\sup_{t \in J} X_t^2 \right) &\leq 2 \left(E \left(\sup_{t \in J} \widetilde{X}_t^2 \right) + E \left(\sup_{t \in J} \left(\int_{t_0}^t \hat{a}_s ds \right)^2 \right) \right) \leq \\ &\leq 2 \left(4E\widetilde{X}_T^2 + E \left(\int_J |\hat{a}_s| ds \right)^2 \right) \leq 18 \left(EX_T^2 + E \left(\int_J |\hat{a}_s| ds \right)^2 \right) \leq \dots \end{aligned}$$

Stosując nierówność Höldera (zob.[18] lub Dodatek), otrzymuje się oszacowanie:

$$E \left(\int_J |\hat{a}_s| ds \right)^2 \leq E \int_J ds E \int_J \hat{a}_s^2 ds = (T - t_0) \int_J E \hat{a}_s^2 ds.$$

Uwzględniając wynikającą z własności (1.5) nierówność

$$\hat{a}_s^2 = (a_s + \lambda c_s)^2 \leq 2(1 + \lambda^2)(a_s^2 + c_s^2) \leq D_1(1 + X_s^2)$$

oraz wykorzystując powyższą zależność i lemat 2.1, uzyskuje się ostatecznie:

$$\begin{aligned}
\dots &\leq 18 \left((1 + EX_T^2) + D_1 (T - t_0) \int_J E (1 + X_s^2) ds \right) \leq \\
&\leq 18 \left(e^{C_1(T-t_0)} (1 + EX_{t_0}^2) + D_1 (T - t_0) (1 + EX_{t_0}^2) \int_J e^{C_1(s-t_0)} ds \right) \leq \\
&\leq C_2 (1 + EX_{t_0}^2),
\end{aligned}$$

co było do udowodnienia. $\square$

2.2 Wzory na dekompozycję

Z pewnych względów technicznych korzystniej jest czasem zamiast całki po procesie Poissona rozważać sumę całek po czasie i skompensowanym procesie Poissona, który jest martyngałem ze średnią 0. Poniższy lemat przedstawia, na czym ta zamiana dokładnie polega.

Lemat 2.3 *Niech $\alpha = (j_1, \dots, j_l) \in \widehat{\mathcal{M}} \setminus \{\nu\}$ będzie multiindeksem takim, że $j_i \neq 1$ dla każdego $1 \leq i \leq l$, a $k_1, \dots, k_{p_\alpha}$ będą pozycjami, na których znajdują się ujemne składowe multiindeksu i niech*

$$\alpha_i^\sim = (j_1, \dots, j_{k_i-1}, \widetilde{-1}, 0, \dots, 0), \quad \alpha_i^\circ = (j_1, \dots, j_{k_i-1}, 0, \dots, 0)$$

oraz $\underline{0}_l = (0, \dots, 0)$, gdzie wszystkie powyższe multiindeksy mają długość l . Wtedy $I_\alpha[\bar{V}]_{\varrho^+}^\tau$ można rozłożyć na sumę całek:

$$I_\alpha[\bar{V}]_{\varrho^+}^\tau = \sum_{i=0}^{p_\alpha-1} \lambda^i I_{\alpha_{p_\alpha-i}^\sim}[\bar{V}]_{\varrho^+}^\tau + \lambda^{p_\alpha} I_{\underline{0}_{l_\alpha}}[V]_{\varrho}^\tau,$$

w której pierwszy człon zawiera całki wielokrotne, w których przynajmniej jedna ze składowych jest całką po skompensowanym procesie Poissona, a drugi jest wielokrotną całką wyłącznie po czasie.

Dowód: Teza zostanie dowiedziona indukcyjnie ze względu na p_α . W sposób oczywisty jest ona prawdziwa dla $p_\alpha = 0$. Niech teraz teza będzie prawdziwa dla $0 \leq p_\alpha = m-1 < l_\alpha$. Dowodząc prawdziwości tezy dla $p_\alpha = m$ i zauważając, że $p_{\alpha_m^\circ} = m-1$, otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
I_\alpha[\bar{V}]_{\varrho^+}^\tau &= I_{\alpha_m^\sim}[\bar{V}]_{\varrho^+}^\tau + \lambda I_{\alpha_m^\circ}[\bar{V}]_{\varrho^+}^\tau = \\
&= I_{\alpha_m^\sim}[\bar{V}]_{\varrho^+}^\tau + \lambda \left(\sum_{i=0}^{m-2} \lambda^i I_{\alpha_{m-1-i}^\sim}[\bar{V}]_{\varrho^+}^\tau + \lambda^{m-1} I_{\underline{0}_{l_\alpha}}[V]_{\varrho}^\tau \right) = \\
&= \lambda^0 I_{\alpha_{m-0}^\sim}[\bar{V}]_{\varrho^+}^\tau + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda^i I_{\alpha_{m-i}^\sim}[\bar{V}]_{\varrho^+}^\tau + \lambda^m I_{\underline{0}_{l_\alpha}}[V]_{\varrho}^\tau = \\
&= \sum_{i=0}^{p_\alpha-1} \lambda^i I_{\alpha_{p_\alpha-i}^\sim}[\bar{V}]_{\varrho^+}^\tau + \lambda^{p_\alpha} I_{\underline{0}_{l_\alpha}}[V]_{\varrho}^\tau,
\end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

Kolejny lemat pozwala na upraszczanie całek wielokrotnych z procesu $V = 1$, w szczególności na sprowadzanie do postaci pozwalającej na ich wyznaczenie przy pomocy generatora liczb pseudolosowych. Należy przypomnieć, że zgodnie z przyjętą konwencją $I_\alpha[1]_{\mathcal{O}^+}^\tau = I_\alpha$, gdy granice całkowania nie odgrywają istotnej roli w obliczeniach.

Lemat 2.4 Niech $\alpha = (j_1, \dots, j_l) \in \widehat{\mathcal{M}}$ i niech $(j) \in \widehat{\mathcal{M}} \setminus \{\nu\}$. Wtedy iloczyn dwóch całek $I_{(j)}I_\alpha$ można wyrazić jako:

$$I_{(j)}I_\alpha = p_{(j)}p_\alpha I_\alpha + \sum_{i=0}^l I_{(j_1, \dots, j_i)} \hat{\wedge}_{(j)} \hat{\wedge}_{(j_{i+1}, \dots, j_l)} + w_{(j)} \sum_{i=1}^l w_{(j_i)} I_{(j_1, \dots, j_{i-1})} \hat{\wedge}_{(0)} \hat{\wedge}_{(j_{i+1}, \dots, j_l)}.$$

Dowód: Teza zostanie dowiedziona indukcyjnie ze względu na l_α . Dla $l_\alpha = 0$, czyli dla $\alpha = \nu$, jest ona spełniona w sposób oczywisty. Niech więc teza będzie spełniona dla dowolnego $\beta \in \widehat{\mathcal{M}}$ o długości $k-1$ i niech $l_\alpha = k$. Wtedy, korzystając z definicji (1.6) i biorąc pod uwagę własność (zob.[16])

$$dV_1V_2 = \bar{V}_1 dV_2 + \bar{V}_2 dV_1 + d[V_1, V_2],$$

gdzie V_1 i V_2 są dwoma półmartyngałami klasy RCLL,² a $[\cdot, \cdot]$ oznacza wzajemne wahanie kwadratowe, otrzymuje się:³

$$I_{(j)}I_\alpha = I_{(j_k)}[\bar{I}_{(j)}\bar{I}_{\alpha\leftarrow}] + I_\alpha \hat{\wedge}_{(j)} + [I_{(j)}, I_\alpha] = \dots$$

Ponieważ wzajemne wahanie kwadratowe procesów wymuszających jest zerowe poza dwoma przypadkami:

$$d[W, W]_t = dt, \quad d[N, N]_t = dN_t,$$

oraz zachodzi wzór (zob.[16])

$$\left[\int \bar{V}_1 dV_2, \int \bar{V}_3 dV_4 \right] = \int \bar{V}_1 \bar{V}_3 d[V_2, V_4],$$

w którym wszystkie V_i są półmartyngałami klasy RCLL, to ostatni składnik jest równy:

$$[I_{(j)}, I_\alpha] = \left\{ \begin{array}{ll} I_\alpha & : j = j_k = -1 \\ I_{\alpha\leftarrow \hat{\wedge}_{(0)}} & : j = j_k = 1 \\ 0 & : j \neq j_k \vee j = 0 \end{array} \right\} = p_{(j)}p_{(j_k)}I_\alpha + w_{(j)}w_{(j_k)}I_{\alpha\leftarrow \hat{\wedge}_{(0)}}.$$

²Dla każdego półmartyngału istnieje równoważna wersja klasy RCLL (zob.[16]).

³Należy odróżnić $[\cdot, \cdot]$ od $I_\alpha[\cdot]$.

Natomiast do $I_{(j)}I_{\alpha\leftarrow}$ można zastosować tezę lematu, gdyż $l_{\alpha\leftarrow} = k - 1$, więc:

$$\begin{aligned}
 \dots &= p_{(j)}p_{\alpha\leftarrow}I_{(j_k)}[\bar{I}_{\alpha\leftarrow}] + \sum_{i=0}^{k-1} I_{(j_k)}[\bar{I}_{(j_1,\dots,j_i)}^{\wedge(j)}{}^{\wedge(j_{i+1},\dots,j_{k-1})}] + \\
 &\quad + w_{(j)} \sum_{i=1}^{k-1} w_{(j_i)}I_{(j_k)}[\bar{I}_{(j_1,\dots,j_{i-1})}^{\wedge(0)}{}^{\wedge(j_{i+1},\dots,j_{k-1})}] + \\
 &\quad + I_{\alpha}^{\wedge(j)} + p_{(j)}p_{(j_k)}I_{\alpha} + w_{(j)}w_{(j_k)}I_{\alpha\leftarrow}^{\wedge(0)} = \\
 &= p_{(j)}(p_{\alpha\leftarrow} + p_{(j_k)})I_{\alpha} + \left(I_{\alpha}^{\wedge(j)} + \sum_{i=0}^{k-1} I_{(j_1,\dots,j_i)}^{\wedge(j)}{}^{\wedge(j_{i+1},\dots,j_k)} \right) + \\
 &\quad + w_{(j)} \left(w_{(j_k)}I_{\alpha\leftarrow}^{\wedge(0)} + \sum_{i=1}^{k-1} w_{(j_i)}I_{(j_1,\dots,j_{i-1})}^{\wedge(0)}{}^{\wedge(j_{i+1},\dots,j_k)} \right) = \\
 &= p_{(j)}p_{\alpha}I_{\alpha} + \sum_{i=0}^k I_{(j_1,\dots,j_i)}^{\wedge(j)}{}^{\wedge(j_{i+1},\dots,j_k)} + w_{(j)} \sum_{i=1}^k w_{(j_i)}I_{(j_1,\dots,j_{i-1})}^{\wedge(0)}{}^{\wedge(j_{i+1},\dots,j_k)},
 \end{aligned}$$

czego należało dowieść. $\square$

Uwaga 2.5 Z udowodnionego lematu wynikają następujące wzory na całki wielokrotne po jednym procesie sterującym:

$$\begin{aligned}
 j = (-1), \alpha = \underline{-1}_{l-1} &\Rightarrow I_{\underline{-1}_l}[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} = \frac{\Delta N_n - (l-1)}{l} I_{\underline{-1}_{l-1}}[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} = \binom{\Delta N_n}{l}, \\
 j = (0), \alpha = \underline{0}_{l-1} &\Rightarrow I_{\underline{0}_l}[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} = \frac{\Delta_n}{l} I_{\underline{0}_{l-1}}[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} = \frac{(\Delta_n)^l}{l!}, \\
 \begin{cases} j = (1), \alpha = \underline{1}_{l-1} \\ j = (0), \alpha = \underline{1}_{l-2} \end{cases} &\Rightarrow I_{\underline{1}_l}[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} = \frac{1}{l} (\Delta W_n I_{\underline{1}_{l-1}}[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} - \Delta_n I_{\underline{1}_{l-2}}[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}}),
 \end{aligned}$$

przy czym $\underline{-1}_l$, $\underline{0}_l$ i $\underline{1}_l$ oznaczają multiindeksy o długości l złożone odpowiednio wyłącznie z minus jedynek, zer i jedynek. Dla przypomnienia: ΔN_n , Δ_n i ΔW_n są przyrostami procesów sterujących na przedziale $(\tau_n, \tau_{n+1}]$.

Dwa ostatnie wzory można znaleźć również w pracy [9], a z pierwszego z nich wynika, iż ostatni człon definicji (1.10) jest wielkością skoku procesu $I_{\underline{-1}_k}[1]_{\tau_n^+}$ w punkcie i -tego skoku ($i > N_{\tau_n}$) wymuszającego procesu Poissona, gdyż łatwo sprawdzić, że

$$I_{\underline{-1}_k}[1]_{\tau_n^+}^{\Gamma(i)} - \bar{I}_{\underline{-1}_k}[1]_{\tau_n^+}^{\Gamma(i)} = \binom{i - N_{\tau_n}}{k} - \binom{i - 1 - N_{\tau_n}}{k} = \binom{i - 1 - N_{\tau_n}}{k-1}.$$

Co więcej, zachodzi równość:

$$S_{V,n}^{k,m} = \int_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} (\bar{V}_t - V_{\tau_n})^m dI_{\underline{-1}_k}[1]_{\tau_n^+}^t = I_{(-1)}[(\bar{V} - V_{\tau_n})^m \bar{I}_{\underline{-1}_{k-1}}[1]_{\tau_n^+}^{\cdot}]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}}.$$

2.3 Oszacowania całek wielokrotnych

Teraz zostaną podane najistotniejsze własności stochastycznych całek wielokrotnych, odgrywające kluczową rolę przy dowodzeniu prędkości zbieżności aproksymacji.

Lemat 2.6 Niech $\alpha = (j_1, \dots, j_l) \in \widehat{\mathcal{M}} \setminus \{\nu\}$, $V \in RCLL$, ϱ i τ będą dwoma momentami Markowa takimi, że $t_0 \leq \varrho \leq \tau \leq T$ i $\tau - \varrho \leq \delta < 1$ p.n.p. i niech τ będzie $\mathcal{F}_\varrho$ -mierzalne. Wtedy, jeśli $E(\sup_{t \in [\varrho, \tau]} V_t^2) < \infty$, to

$$G_{\varrho, \tau}^\alpha(V) \leq 4^{w_\alpha + p_\alpha} \hat{\lambda}^{p_\alpha} \delta^{l_\alpha + n_\alpha - 1} \int_{\varrho}^{\tau} G_{\varrho, t}^\nu(V) dt,$$

gdzie $G_{\varrho, \tau}^\alpha$ zdefiniowane jest równością (1.12), a $\hat{\lambda} = \frac{1}{2}\lambda(4 + \lambda)$.

Dowód: Dowód lematu zostanie przeprowadzony analogicznie jak dowód lematu 5.7.3 w monografii [9], a więc indukcyjnie ze względu na l_α , jednak z uwzględnieniem całek po procesie Poissona. Została tam udowodniona następująca nierówność dla $l_\alpha = 1$ oraz $j_1 \in \{0, 1\}$:

$$G_{\varrho, \tau}^\alpha(V) = G_{\varrho, \tau}^{(j_1)}(V) \leq 4^{w_{(j_1)}} \delta^{n_{(j_1)}} \int_{\varrho}^{\tau} G_{\varrho, t}^\nu(V) dt = 4^{w_\alpha + p_\alpha} \hat{\lambda}^{p_\alpha} \delta^{l_\alpha + n_\alpha - 1} \int_{\varrho}^{\tau} G_{\varrho, t}^\nu(V) dt.$$

Dla $l_\alpha = 1$ i $j_1 = -1$, korzystając z nierówności Dooba (całka po $d\widetilde{N}_s$) i nierówności Höldera (całka po ds), wynikającej z założenia $E(\sup_{t \in [\varrho, \tau]} V_t^2) < \infty$ własności (zob.[19])

$$E \left(\int_{\varrho^+}^{\tau} \bar{V}_s d\widetilde{N}_s \right)^2 = \lambda \int_{\varrho}^{\tau} E V_s^2 ds$$

oraz uwzględniając $\mathcal{F}_\varrho$ -mierzalność czasu τ , otrzymuje się:

$$\begin{aligned} G_{\varrho, \tau}^\alpha(V) &= G_{\varrho, \tau}^{(-1)}(V) = E \left(\sup_{t \in [\varrho, \tau]} \left(\int_{\varrho^+}^t \bar{V}_s dN_s \right)^2 \mid \mathcal{F}_\varrho \right) \leq \\ &\leq 2 \left\{ E \left(\sup_{t \in [\varrho, \tau]} \left(\int_{\varrho^+}^t \bar{V}_s d\widetilde{N}_s \right)^2 \mid \mathcal{F}_\varrho \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 E \left(\sup_{t \in [\varrho, \tau]} \left(\int_{\varrho}^t V_s ds \right)^2 \mid \mathcal{F}_\varrho \right) \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \left\{ 4\mathbb{E} \left(\left(\int_{\varrho^+}^{\tau} \bar{V}_s d\widetilde{N}_s \right)^2 \mid \mathcal{F}_{\varrho} \right) + \lambda^2 \mathbb{E} \left((\tau - \varrho) \int_{\varrho}^{\tau} V_s^2 ds \mid \mathcal{F}_{\varrho} \right) \right\} \leq \\
&\leq 8\lambda \int_{\varrho}^{\tau} G_{\varrho,s}^{\nu}(V) ds + 2\lambda^2 \delta \int_{\varrho}^{\tau} G_{\varrho,s}^{\nu}(V) ds \leq 4\hat{\lambda} \int_{\varrho}^{\tau} G_{\varrho,t}^{\nu}(V) dt = \\
&= 4^{w_{\alpha}+p_{\alpha}} \hat{\lambda}^{p_{\alpha}} \delta^{l_{\alpha}+n_{\alpha}-1} \int_{\varrho}^{\tau} G_{\varrho,t}^{\nu}(V) dt .
\end{aligned}$$

Teraz niech teza będzie spełniona dla pewnego $l_{\alpha} = l - 1 \geq 1$. Ponieważ dowód z pracy [9] daje jej prawdziwość dla $l_{\alpha} = l$ i $j_l \in \{0, 1\}$, tzn.:

$$G_{\varrho,\tau}^{\alpha}(V) \leq (4\delta)^{w(j_l)} \delta^{2n(j_l)} G_{\varrho,\tau}^{\alpha\leftarrow}(V) \leq 4^{w_{\alpha}+p_{\alpha}} \hat{\lambda}^{p_{\alpha}} \delta^{l_{\alpha}+n_{\alpha}-1} \int_{\varrho}^{\tau} G_{\varrho,t}^{\nu}(V) dt ,$$

ponownie do rozpatrzenia pozostał przypadek, gdy $l_{\alpha} = l$ i $j_l = -1$:

$$\begin{aligned}
G_{\varrho,\tau}^{\alpha}(V) &= \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [\varrho, \tau]} \left(\int_{\varrho^+}^t \bar{I}_{\alpha\leftarrow}[\bar{V}]_{\varrho^+}^s dN_s \right)^2 \mid \mathcal{F}_{\varrho} \right) \leq \\
&\leq 2 \left\{ \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [\varrho, \tau]} \left(\int_{\varrho^+}^t \bar{I}_{\alpha\leftarrow}[\bar{V}]_{\varrho^+}^s d\widetilde{N}_s \right)^2 \mid \mathcal{F}_{\varrho} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \lambda^2 \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [\varrho, \tau]} \left(\int_{\varrho}^t I_{\alpha\leftarrow}[\bar{V}]_{\varrho^+}^s ds \right)^2 \mid \mathcal{F}_{\varrho} \right) \right\} \leq \\
&\leq 2 \left\{ 4\mathbb{E} \left(\left(\int_{\varrho^+}^{\tau} \bar{I}_{\alpha\leftarrow}[\bar{V}]_{\varrho^+}^s d\widetilde{N}_s \right)^2 \mid \mathcal{F}_{\varrho} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \lambda^2 \mathbb{E} \left((\tau - \varrho) \int_{\varrho}^{\tau} (I_{\alpha\leftarrow}[\bar{V}]_{\varrho^+}^s)^2 ds \mid \mathcal{F}_{\varrho} \right) \right\} \leq \\
&\leq 8\lambda\delta \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [\varrho, \tau]} (I_{\alpha\leftarrow}[\bar{V}]_{\varrho^+}^t)^2 \mid \mathcal{F}_{\varrho} \right) + \\
&\quad + 2\lambda^2 \delta^2 \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [\varrho, \tau]} (I_{\alpha\leftarrow}[\bar{V}]_{\varrho^+}^t)^2 \mid \mathcal{F}_{\varrho} \right) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4\hat{\lambda}\delta G_{\varrho,\tau}^{\alpha\leftarrow}(V) \leq 4\hat{\lambda}\delta 4^{w_{\alpha\leftarrow}+p_{\alpha\leftarrow}} \hat{\lambda}^{p_{\alpha\leftarrow}} \delta^{l_{\alpha\leftarrow}+n_{\alpha\leftarrow}-1} \int_{\varrho}^{\tau} G_{\varrho,t}^{\nu}(V) dt = \\
&= 4^{w_{\alpha}+p_{\alpha}} \hat{\lambda}^{p_{\alpha}} \delta^{l_{\alpha}+n_{\alpha}-1} \int_{\varrho}^{\tau} G_{\varrho,t}^{\nu}(V) dt,
\end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. $\square$

Uwaga 2.7 Jeżeli jedna z całek w I_{α} jest całką po skompensowanym procesie Poissona, to, jak w oczywisty sposób wynika z powyżej przeprowadzonego dowodu, w oszacowaniu $G_{\varrho,\tau}^{\alpha}(V)$ jeden z czynników $\hat{\lambda}$ należy zastąpić przez λ .

Lemat 2.8 Niech dla multiindeksu $\alpha = (j_1, \dots, j_l) \in \widehat{\mathcal{M}} \setminus \{\nu\}$, podziału $(\tau)^{\delta}$, $\delta \in (0, 1)$ oraz procesu $V \in RCLL$ zachodzi $E(\sup_{t \in J} V_t^2) < \infty$. Wtedy z pr.1 prawdziwe jest oszacowanie:

$$\forall_{t \in J} \quad F_{V,t}^{\delta,\alpha} \leq \begin{cases} (t - t_0) \delta^{2(l_{\alpha}-1)} \int_{t_0}^t G_{t_0,s}^{\nu}(V) ds & : w_{\alpha} = p_{\alpha} = 0 \\ C_3(\alpha) \delta^{l_{\alpha}+n_{\alpha}-1} \int_{t_0}^t G_{t_0,s}^{\nu}(V) ds & : w_{\alpha} + p_{\alpha} > 0, \end{cases}$$

przy czym $F_{V,t}^{\delta,\alpha}$ zdefiniowane jest zależnością (1.11), natomiast $C_3(\alpha)$ jest, przy ustalonym α , skończoną stałą dodatnią.

Dowód: Aby dowieść powyższego lematu, rozpatrzyć należy odpowiednie przypadki:

1°: $w_{\alpha} = p_{\alpha} = 0$:

Wykorzystanie definicji (1.6) oraz nierówności Höldera daje:

$$\begin{aligned}
F_{V,t}^{\delta,\alpha} &= E \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\int_{t_0}^s I_{\alpha\leftarrow}[V]_{\tau_{n_u}}^u du \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq \\
&\leq (t - t_0) \int_{t_0}^t E \left(G_{\tau_{n_u},u}^{\alpha\leftarrow}(V) \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) du \leq \dots
\end{aligned}$$

Stosując lemat 2.6 oraz podstawowe własności warunkowej wartości oczekiwanej, otrzymuje się:

$$\dots \leq (t - t_0) 4^{w_{\alpha\leftarrow}+p_{\alpha\leftarrow}} \hat{\lambda}^{p_{\alpha\leftarrow}} \delta^{l_{\alpha\leftarrow}+n_{\alpha\leftarrow}-1} \int_{t_0}^t E \left(\int_{\tau_{n_u}}^u G_{\tau_{n_u},s}^{\nu}(V) ds \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) du \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq (t - t_0) \delta^{2l_{\alpha\leftarrow} - 1} \int_{t_0}^t \mathbb{E} \left(\delta \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [\tau_{n_u}, u]} V_s^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_{n_u}} \right) \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) du \leq \\
&\leq (t - t_0) \delta^{2(l_{\alpha} - 1)} \int_{t_0}^t G_{t_0, u}^{\nu}(V) du,
\end{aligned}$$

czego należało dowieść.

2°: $w_{\alpha} > 0$:

(a) $j_l = 1$:

W tym przypadku suma pod supremum jest martyngałem, korzysta się więc z nierówności Dooba, własności (zob.[19])

$$\mathbb{E} \left(\int_{t_0^+}^t \bar{V}_s dW_s \right)^2 = \int_{t_0}^t \mathbb{E} V_s^2 ds$$

i ponownie z lematu 2.6, by otrzymać:

$$\begin{aligned}
F_{V,t}^{\delta, \alpha} &= \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\int_{t_0^+}^s \bar{I}_{\alpha\leftarrow} [\bar{V}]_{\tau_{n_u}^+}^u dW_u \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq \\
&\leq 4 \mathbb{E} \left(\left(\int_{t_0^+}^t \bar{I}_{\alpha\leftarrow} [\bar{V}]_{\tau_{n_u}^+}^u dW_u \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) = \\
&= 4 \int_{t_0}^t \mathbb{E} \left(\left(I_{\alpha\leftarrow} [\bar{V}]_{\tau_{n_u}^+}^u \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) du \leq 4 \int_{t_0}^t \mathbb{E} \left(G_{\tau_{n_u}, u}^{\alpha\leftarrow}(V) \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) du \leq \\
&\leq 4^{w_{\alpha\leftarrow} + p_{\alpha\leftarrow} + 1} \hat{\lambda}^{p_{\alpha\leftarrow}} \delta^{l_{\alpha\leftarrow} + n_{\alpha\leftarrow} - 1} \int_{t_0}^t \mathbb{E} \left(\int_{\tau_{n_u}}^u G_{\tau_{n_u}, s}^{\nu}(V) ds \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) du \leq \\
&\leq 4^{w_{\alpha} + p_{\alpha}} \hat{\lambda}^{p_{\alpha}} \delta^{l_{\alpha} + n_{\alpha} - 2} \int_{t_0}^t \delta \mathbb{E} \left(G_{\tau_{n_u}, u}^{\nu}(V) \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) du \leq \\
&\leq C_3(\alpha) \delta^{l_{\alpha} + n_{\alpha} - 1} \int_{t_0}^t G_{t_0, u}^{\nu}(V) du.
\end{aligned}$$

(b) $j_l = 0$:

Można ograniczyć $F_{V,t}^{\delta, \alpha}$ z góry przez sumę dwóch składników:

$$F_{V,t}^{\delta, \alpha} \leq 2 \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\sum_{n=0}^{n_s-1} I_{\alpha} [\bar{V}]_{\tau_{n_s}^+}^s \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) + 2 \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(I_{\alpha} [\bar{V}]_{\tau_{n_s}^+}^s \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right).$$

W pierwszym z nich występuje dyskretny martyngał postaci:

$$\sum_{n=0}^{m-1} I_{\alpha}[\bar{V}]_{(t \wedge \tau_n)^+}^{t \wedge \tau_{n+1}}, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

zatrzymany w chwili $m = n_s$, który, jak wynika z lematu 2.6, jest jednostajnie całkowny. Stąd, stosując dyskretną wersję nierówności Dooba i biorąc pod uwagę $\mathcal{F}_{\tau_m}$ -mierzalność zmiennej losowej $\sum_{n=0}^{m-1} I_{\alpha}[\bar{V}]_{(t \wedge \tau_n)^+}^{t \wedge \tau_{n+1}}$, fakt, że wartość oczekiwana stochastycznej całki wielokrotnej jest zerem, gdy $w_{\alpha} > 0$, oraz lemat 2.6, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\sum_{n=0}^{n_s-1} I_{\alpha}[\bar{V}]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) &\leq 4\mathbb{E} \left(\left(\sum_{n=0}^{n_t-1} I_{\alpha}[\bar{V}]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) = \\ &= 4\mathbb{E} \left(\left(\sum_{n=0}^{n_t-2} I_{\alpha}[\bar{V}]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} \right)^2 + \left(I_{\alpha}[\bar{V}]_{\tau_{n_t-1}^+}^{\tau_{n_t}} \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) + \\ &\quad + 8\mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(I_{\alpha}[\bar{V}]_{\tau_{n_t-1}^+}^{\tau_{n_t}} \sum_{n=0}^{n_t-2} I_{\alpha}[\bar{V}]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} \mid \mathcal{F}_{\tau_{n_t-1}} \right) \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq \\ &\leq 4\mathbb{E} \left(\left(\sum_{n=0}^{n_t-2} I_{\alpha}[\bar{V}]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} \right)^2 + 4^{w_{\alpha}+p_{\alpha}} \hat{\lambda}^{p_{\alpha}} \delta^{l_{\alpha}+n_{\alpha}-1} \int_{\tau_{n_t-1}}^{\tau_{n_t}} G_{\tau_{n_t-1},u}^{\nu}(V) du \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq \\ &\leq 4\mathbb{E} \left(\left(\sum_{n=0}^{n_t-3} I_{\alpha}[\bar{V}]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} \right)^2 + 4^{w_{\alpha}+p_{\alpha}} \hat{\lambda}^{p_{\alpha}} \delta^{l_{\alpha}+n_{\alpha}-1} \int_{\tau_{n_t-2}}^{\tau_{n_t}} G_{\tau_{n_t-2},u}^{\nu}(V) du \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq \\ &\leq \dots \leq 4\mathbb{E} \left(4^{w_{\alpha}+p_{\alpha}} \hat{\lambda}^{p_{\alpha}} \delta^{l_{\alpha}+n_{\alpha}-1} \int_{t_0}^{\tau_{n_t}} G_{t_0,u}^{\nu}(V) du \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq \\ &\leq D_1(\alpha) \delta^{l_{\alpha}+n_{\alpha}-1} \int_{t_0}^t G_{t_0,u}^{\nu}(V) du. \end{aligned}$$

Dla drugiego składnika stosuje się oszacowanie z punktu 1°, by otrzymać:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(I_{\alpha}[\bar{V}]_{\tau_{n_s}^+}^s \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) &= \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\int_{\tau_{n_s}}^s I_{\alpha^-}[\bar{V}]_{\tau_{n_s}^+}^u du \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq \\ &\leq \delta 4^{w_{\alpha^-}+p_{\alpha^-}} \hat{\lambda}^{p_{\alpha^-}} \delta^{l_{\alpha^-}+n_{\alpha^-}-1} \int_{t_0}^t \mathbb{E} \left(\delta G_{\tau_{n_u},u}^{\nu}(V) \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) du \\ &\leq D_2(\alpha) \delta^{l_{\alpha}+n_{\alpha}-1} \int_{t_0}^t G_{t_0,u}^{\nu}(V) du. \end{aligned}$$

Sumując prawe strony obu powyższych nierówności otrzymuje się tezę lematu.

(c) $j_l = -1$:

Korzystając z tego, że $N_t = \widetilde{N}_t + \lambda t$, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} F_{V,t}^{\delta,\alpha} &= \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\int_{t_0^+}^s \bar{I}_{\alpha\leftarrow} [\bar{V}]_{\tau_{n_u}^+}^u d\widetilde{N}_u + \lambda \int_{t_0}^s I_{\alpha\leftarrow} [\bar{V}]_{\tau_{n_u}^+}^u du \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq \\ &\leq 2\mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\int_{t_0^+}^s \bar{I}_{\alpha\leftarrow} [\bar{V}]_{\tau_{n_u}^+}^u d\widetilde{N}_u \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) + \\ &\quad + 2\lambda^2 \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\int_{t_0}^s I_{\alpha\leftarrow} [\bar{V}]_{\tau_{n_u}^+}^u du \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq \dots \end{aligned}$$

Całka z pierwszego członu jest martyngałem i korzystając z uwagi 2.7 oszacowuje się ją analogicznie jak w przypadku 2°(a):

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\int_{t_0^+}^s \bar{I}_{\alpha\leftarrow} [\bar{V}]_{\tau_{n_u}^+}^u d\widetilde{N}_u \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq 4^{w_\alpha + p_\alpha} \lambda \hat{\lambda}^{p_\alpha - 1} \delta^{l_\alpha + n_\alpha - 1} \int_{t_0}^t G_{t_0, u}^\nu(V) du ,$$

natomiast oszacowanie drugiego członu następuje w identyczny sposób jak w przypadku 2°(b), co daje razem:

$$\begin{aligned} \dots &\leq (D_3(\alpha) + D_4(\alpha)) \delta^{l_\alpha + n_\alpha - 1} \int_{t_0}^t G_{t_0, u}^\nu(V) du \leq \\ &\leq C_3(\alpha) \delta^{l_\alpha + n_\alpha - 1} \int_{t_0}^t G_{t_0, u}^\nu(V) du . \end{aligned}$$

To kończy dowód dla przypadku 2°.

3°: $w_\alpha = 0$, $p_\alpha > 0$:

Aby dowieść tezy lematu dla tego ostatniego przypadku, trzeba najpierw skorzystać z lematu 2.3 oraz nierówności

$$\left(\sum_{i=1}^k q_i \right)^2 \leq 2^{\lceil \log_2 k \rceil} \sum_{i=1}^k q_i^2 \leq 2k \sum_{i=1}^k q_i^2 , \quad (2.1)$$

która jest prostym uogólnieniem zależności $(q_1 + q_2)^2 \leq 2(q_1^2 + q_2^2)$ na dowolną, skończoną liczbę składników:

$$F_{V,t}^{\delta,\alpha} = \mathbb{E} \left\{ \sup_{s \in [t_0, t]} \left(\sum_{n=0}^{n_s-1} \left(\sum_{i=0}^{p_\alpha-1} \lambda^i I_{\alpha_{p_\alpha-i}} [\bar{V}]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} + \lambda^{p_\alpha} I_{Q_{l_\alpha}} [V]_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \right) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{i=0}^{p_\alpha-1} \lambda^i I_{\alpha_{p_\alpha-i}} [\bar{V}]_{\tau_{n_s}^+}^s + \lambda^{p_\alpha} I_{0_{l_\alpha}} [V]_{\tau_{n_s}}^s \right) \Bigg)^2 \Big| \mathcal{F}_{t_0} \Bigg\} = \\
& = \mathbb{E} \left\{ \sup_{s \in [t_0, t]} \left(\sum_{i=0}^{p_\alpha-1} \lambda^i \left(\sum_{n=0}^{n_s-1} I_{\alpha_{p_\alpha-i}} [\bar{V}]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} + I_{\alpha_{p_\alpha-i}} [\bar{V}]_{\tau_{n_s}^+}^s \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \lambda^{p_\alpha} \left(\sum_{n=0}^{n_s-1} I_{0_{l_\alpha}} [V]_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} + I_{0_{l_\alpha}} [V]_{\tau_{n_s}}^s \right) \right) \right)^2 \Big| \mathcal{F}_{t_0} \Bigg\} \leq \\
& \leq 2(p_\alpha+1) \left\{ \sum_{i=0}^{p_\alpha-1} \lambda^{2i} \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\sum_{n=0}^{n_s-1} I_{\alpha_{p_\alpha-i}} [\bar{V}]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} + I_{\alpha_{p_\alpha-i}} [\bar{V}]_{\tau_{n_s}^+}^s \right)^2 \Big| \mathcal{F}_{t_0} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \lambda^{2p_\alpha} \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\sum_{n=0}^{n_s-1} I_{0_{l_\alpha}} [V]_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} + I_{0_{l_\alpha}} [V]_{\tau_{n_s}}^s \right)^2 \Big| \mathcal{F}_{t_0} \right) \right\} \leq \dots
\end{aligned}$$

Ponieważ pierwszy składnik zawiera całki po martyngale, stosuje się do niego oszacowanie z punktu 2°, natomiast drugi składnik składa się jedynie z całek wyłącznie po czasie, oszacowuje się go więc identycznie jak w punkcie 1°. Dodatkowo należy zauważyć, że:

$$p_{\alpha_i} = i, \quad n_{\alpha_i} = n_\alpha + p_\alpha - i, \quad w_{\alpha_i} = w_\alpha = 0,$$

oraz skorzystać z uwagi 2.7, by uzyskać:

$$\begin{aligned}
\dots & \leq 2(p_\alpha + 1) \left(\sum_{i=0}^{p_\alpha-1} 4^{p_\alpha-i+2} \hat{\lambda}^{p_\alpha+i} \delta^{l_\alpha+n_\alpha+i-1} \right) \int_{t_0}^t G_{t_0,u}^\nu(V) du + \\
& + 2(p_\alpha + 1) \lambda^{2p_\alpha} (t - t_0) \delta^{2(l_\alpha-1)} \int_{t_0}^t G_{t_0,u}^\nu(V) du \leq \\
& \leq C_3(\alpha) \delta^{l_\alpha+n_\alpha-1} \int_{t_0}^t G_{t_0,u}^\nu(V) du.
\end{aligned}$$

W ten sposób lemat został w całości udowodniony. $\square$

Rozdział 3

Schematy wyższych rzędów

3.1 Formuła ogólna

Udowodnione w poprzednim rozdziale lematy pozwalają na przedstawienie i dowiedzenie najistotniejszego wyniku, a mianowicie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.1 *Niech dla ustalonego γ takiego, że $2\gamma \in \mathbb{N}$, dany będzie zbiór*

$$\mathcal{A}_\gamma = \left\{ \alpha \in \widehat{\mathcal{M}} : l_\alpha + n_\alpha \leq 2\gamma \quad \vee \quad l_\alpha = n_\alpha = \gamma + \frac{1}{2} \right\}$$

oraz proces

$$\begin{aligned} Y^\delta(t) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} I_\alpha \left[f_\alpha \left(\tau_{n_t}, Y^\delta(\tau_{n_t}) \right) \right]_{\tau_{n_t}^+}^t = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} f_\alpha(\tau_{n_t}, Y_{n_t}^\delta) I_\alpha[1]_{\tau_{n_t}^+}^t = \\ &= Y_0^\delta + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \setminus \{\nu\}} \left(\sum_{n=0}^{n_t-1} f_\alpha(\tau_n, Y_n^\delta) I_\alpha[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} + f_\alpha(\tau_{n_t}, Y_{n_t}^\delta) I_\alpha[1]_{\tau_{n_t}^+}^t \right), \end{aligned}$$

przy dyskretyzacji odcinka czasowego $(\tau)^\delta$, $\delta \in (0, 1)$. Niech dodatkowo wszystkie powyższe funkcje podcałkowe spełniają następujące warunki:

$$\begin{aligned} \forall_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} \quad f_\alpha \text{ spełnia (1.4)} \quad \wedge \quad f_\alpha \in C^{1,2}(J \times \Xi), \\ \forall_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \cup \mathcal{B}(\mathcal{A}_\gamma)} \quad f_\alpha \text{ spełnia (1.5)}. \end{aligned}$$

Wtedy, jeśli tylko $E(Y_0^\delta)^2 < \infty$ i rozwiązanie równania (1.1), czyli proces X , spełnia warunek (1.2), to:

$$E \left(\sup_{t \in J} (X_t - Y^\delta(t))^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq K_3(\gamma) (1 + X_{t_0}^2) \delta^{2\gamma} + K_4(\gamma) (X_{t_0} - Y_0^\delta)^2,$$

przy czym stałe $K_3(\gamma)$ i $K_4(\gamma)$ są dodatnie, skończone i nie zależą od δ .

Dowód: Przez C_i i D_i ($i \in \mathbb{N}$) będą oznaczane skończone stałe dodatnie. Łatwo sprawdzić z definicji, że $\mathcal{A}_\gamma$ jest zbiorem hierarchicznym, ponieważ dla każdego $\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \setminus \{\nu\}$ zachodzi nierówność:

$$l_{\rightarrow\alpha} + n_{\rightarrow\alpha} \leq l_\alpha + n_\alpha - 1 \leq 2\gamma,$$

czyli $\rightarrow\alpha$ również jest elementem zbioru $\mathcal{A}_\gamma$. Dalej należy zauważyć, że z założenia, iż $E(Y_0^\delta)^2 < \infty$, i rekurencyjnej formuły na Y^δ wynika, że również

$$E\left(\sup_{t \in J} (Y^\delta(t))^2\right) < \infty.$$

Następnie, korzystając kolejno z nierówności (2.1), lematu 2.8, warunku (1.5) i nierówności Gronwalla, uzyskuje się:

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{t \in J} (Y^\delta(t))^2 \mid \mathcal{F}_{t_0}\right) &\leq \tag{3.1} \\ &\leq D_1 \left\{ (Y_0^\delta)^2 + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \setminus \{\nu\}} E\left(\sup_{t \in J} \left(\sum_{n=0}^{n_t-1} f_\alpha(\tau_n, Y_n^\delta) I_\alpha[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + f_\alpha(\tau_{n_t}, Y_{n_t}^\delta) I_\alpha[1]_{\tau_{n_t}^+}^t\right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0}\right)\right\} \leq \\ &\leq D_1 \left((Y_0^\delta)^2 + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \setminus \{\nu\}} D_2(\alpha) \int_J E\left(\sup_{s \in [t_0, t]} (f_\alpha(s, Y^\delta(s)))^2 \mid \mathcal{F}_{t_0}\right) dt \right) \leq \\ &\leq D_1 (1 + (Y_0^\delta)^2) + D_3(\gamma) \int_J E\left(\sup_{s \in [t_0, t]} (1 + (Y^\delta(s))^2) \mid \mathcal{F}_{t_0}\right) dt \leq \\ &\leq D_1 (1 + (Y_0^\delta)^2) + D_3(\gamma) \int_J e^{D_3(\gamma)(t-t_0)} D_1 (1 + (Y_0^\delta)^2) dt \leq \\ &\leq C_4(\gamma) (1 + (Y_0^\delta)^2). \end{aligned}$$

Teraz, korzystając z rozwinięcia (1.14), można przedstawić X (podobnie jak Y^δ) jako sumę:

$$\begin{aligned} X_t = X_{t_0} &+ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \setminus \{\nu\}} \left(\sum_{n=0}^{n_t-1} I_\alpha[f_\alpha(\tau_n, X_{\tau_n})]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} + I_\alpha[f_\alpha(\tau_{n_t}, X_{\tau_{n_t}})]_{\tau_{n_t}^+}^t \right) + \\ &+ \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_\gamma)} \left(\sum_{n=0}^{n_t-1} I_\alpha[f_\alpha(\cdot, \bar{X})]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} + I_\alpha[f_\alpha(\cdot, \bar{X})]_{\tau_{n_t}^+}^t \right). \end{aligned}$$

Niech teraz

$$Q_t := E \left(\sup_{s \in [t_0, t]} (X_s - Y^\delta(s))^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right).$$

Wtedy, stosując powyższe rozwinięcia, nierówność $\sup(g_s + h_s) \leq \sup g_s + \sup h_s$ i nierówność (2.1), otrzymuje się:

$$Q_t \leq C_5 \left((X_{t_0} - Y_0^\delta)^2 + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \setminus \{\nu\}} R_t^{\delta, \alpha} + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_\gamma)} U_t^{\delta, \alpha} \right),$$

gdzie

$$\begin{aligned} R_t^{\delta, \alpha} &= E \left\{ \sup_{s \in [t_0, t]} \left(\sum_{n=0}^{n_s-1} I_\alpha [f_\alpha(\tau_n, X_{\tau_n}) - f_\alpha(\tau_n, Y_n^\delta)]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + I_\alpha [f_\alpha(\tau_{n_s}, X_{\tau_{n_s}}) - f_\alpha(\tau_{n_s}, Y_{n_s}^\delta)]_{\tau_{n_s}^+}^s \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right\}, \\ U_t^{\delta, \alpha} &= E \left(\sup_{s \in [t_0, t]} \left(\sum_{n=0}^{n_s-1} I_\alpha [f_\alpha(\cdot, \bar{X})]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}} + I_\alpha [f_\alpha(\cdot, \bar{X})]_{\tau_{n_s}^+}^s \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right). \end{aligned}$$

Składniki pierwszej sumy, dla każdego $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\nu\}$, oszacowuje się wykorzystując lemat 2.8 i warunek (1.4):

$$\begin{aligned} R_t^{\delta, \alpha} &\leq D_4(\alpha) \int_{t_0}^t E \left(\sup_{s \in [t_0, u]} (f_\alpha(s, X_s) - f_\alpha(s, Y^\delta(s)))^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) du \leq \\ &\leq D_4(\alpha) \int_{t_0}^t K_1^2 E \left(\sup_{s \in [t_0, u]} (X_s - Y^\delta(s))^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) du \leq C_6(\alpha) \int_{t_0}^t Q_u du. \end{aligned}$$

Dla oszacowania składników drugiej sumy, tym razem dla każdego $\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_\gamma)$, najpierw należy zauważyć, że w zbiorze resztowym zachodzi nierówność:

$$2\gamma \leq \begin{cases} l_\alpha + n_\alpha - 1 & : l_\alpha \neq n_\alpha \\ 2(l_\alpha - 1) & : l_\alpha = n_\alpha. \end{cases}$$

Wtedy ponowne wykorzystanie lematu 2.8, warunku (1.5) i lematu 2.2 daje:

$$\begin{aligned} U_t^{\delta, \alpha} &\leq D_5(\alpha) \delta^{2\gamma} \int_{t_0}^t E \left(\sup_{s \in [t_0, u]} (f_\alpha(s, X_s))^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) du \leq \\ &\leq D_5(\alpha) \delta^{2\gamma} \int_{t_0}^t K_2^2 \left(1 + E \left(\sup_{s \in [t_0, u]} X_s^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \right) du \leq \\ &\leq D_6(\alpha) \delta^{2\gamma} \int_{t_0}^t 1 + C_2 \left(1 + E(X_{t_0}^2 \mid \mathcal{F}_{t_0}) \right) du \leq \\ &\leq C_7(\alpha) (1 + X_{t_0}^2) \delta^{2\gamma}. \end{aligned}$$

Sumując na koniec powyższe oszacowania i stosując nierówność Gronwalla do Q_t , nieujemnego i ograniczonego oszacowaniem z lematu 2.2 i nierównością (3.1), otrzymuje się ostatecznie:

$$\begin{aligned}
Q_t &\leq C_5 \left\{ (X_{t_0} - Y_0^\delta)^2 + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \setminus \{\nu\}} C_6(\alpha) \int_{t_0}^t Q_u du + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_\gamma)} C_7(\alpha) (1 + X_{t_0}^2) \delta^{2\gamma} \right\} \leq \\
&\leq C_5 \left((X_{t_0} - Y_0^\delta)^2 + D_7(\gamma) (1 + X_{t_0}^2) \delta^{2\gamma} \right) + D_8(\gamma) \int_{t_0}^t Q_u du \leq \\
&\leq K_3(\gamma) (1 + X_{t_0}^2) \delta^{2\gamma} + K_4(\gamma) (X_{t_0} - Y_0^\delta)^2, \quad \forall t \in J,
\end{aligned}$$

co było do udowodnienia. $\square$

Wniosek 3.2 Z udowodnionego twierdzenia wynika, że $(Y^\delta)_{\delta \in (0,1)}$ zbiega jednostajnie średniokwadratowo przy $\delta \searrow 0$ do X z szybkością γ , jeśli tylko $X_{t_0} = Y_0^\delta$ z pr.1.

Uwaga 3.3 W powyższym twierdzeniu indeks γ zbioru hierarchicznego $\mathcal{A}_\gamma$ jest jednocześnie rzędem zbieżności aproksymacji Y^δ .

Teoretycznie w oparciu o powyższe twierdzenie można wyprowadzić schemat różnicowy dowolnego rzędu, jednak w praktyce może się to okazać trudne a nawet niemożliwe ze względu na trudności w obliczaniu stochastycznych całek wielokrotnych. Konkretnie problemy zostaną przedstawione i rozwiązane w kolejnych podrozdziałach.

3.2 Schematy rzędu 0.5 i 1.0

Z ogólnej postaci zbioru hierarchicznego z twierdzenia 3.1 wynika, że rząd zbieżności konstruowanych na podstawie tego twierdzenia aproksymacji zawsze będzie wielokrotnością liczby $\frac{1}{2}$. Na początek zostanie zatem podana aproksymacja rzędu $\frac{1}{2}$, czyli najprostsza z nich. Punktem wyjściowym jest oczywiście ustalenie odpowiedniego zbioru hierarchicznego:

$$\mathcal{A}_{\frac{1}{2}} = \left\{ \alpha \in \widehat{\mathcal{M}} : l_\alpha + n_\alpha \leq 1 \quad \vee \quad l_\alpha = n_\alpha = 1 \right\} = \left\{ \nu, (-1), (0), (1) \right\}.$$

Kolejnym krokiem jest ustalenie, zgodnie z definicją (1.7), odpowiednich funkcji podcałkowych $f_\alpha(\tau_n, Y_n^\delta)$:

$$f_{(-1)}(\tau_n, Y_n^\delta) = c(\tau_n, Y_n^\delta), \quad f_{(0)}(\tau_n, Y_n^\delta) = a(\tau_n, Y_n^\delta), \quad f_{(1)}(\tau_n, Y_n^\delta) = b(\tau_n, Y_n^\delta).$$

W celu skrócenia notacji nie będzie wpisywany punkt, w którym te funkcje będą wyznaczane, ale jeśli nie zostanie wyraźnie powiedziane, że jest inaczej, wartości wszystkich współczynników funkcyjnych wyliczane będą w punkcie (τ_n, Y_n^δ) , stąd skrócony zapis:

$$f_{(-1)} = c, \quad f_{(0)} = a, \quad f_{(1)} = b.$$

Następnie należy wyznaczyć odpowiednie całki wielokrotne $I_\alpha[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}^+}$:

$$I_{(-1)} = \Delta N_n, \quad I_{(0)} = \Delta_n, \quad I_{(1)} = \Delta W_n.$$

Ostatecznie otrzymuje się następujący schemat:

$$Y_{n+1}^\delta = Y_n^\delta + a\Delta_n + b\Delta W_n + c\Delta N_n, \quad (3.2)$$

który jest szczególną postacią stochastycznego schematu Eulera dla półmartingałów (zob.[8]), zaadaptowaną do konkretnej postaci równania dyfuzji skokowej. Jak więc wynika z przeprowadzonego postępowania, schemat Eulera dla rozważanego równania i w rozważanej normie $(\mathcal{L}^2)$ jest rzędu $\frac{1}{2}$.

Kolejnym możliwym do uzyskania rzędem zbieżności jest rząd 1. Ponownie należy więc ustalić odpowiedni zbiór hierarchiczny:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \left\{ \alpha \in \widehat{\mathcal{M}} : l_\alpha + n_\alpha \leq 2 \quad \vee \quad l_\alpha = n_\alpha = \frac{3}{2} \right\} = \\ &= \left\{ \nu, (-1), (0), (1), (-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1) \right\} \supset \mathcal{A}_{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

odpowiednie funkcje podcałkowe:

$$\begin{aligned} f_{(-1)} &= c, \quad f_{(0)} = a, \quad f_{(1)} = b, \\ f_{(-1,-1)} &= c_c^* - c, \quad f_{(-1,1)} = b_c^* - b, \quad f_{(1,-1)} = bc'_x, \quad f_{(1,1)} = bb'_x, \end{aligned}$$

gdzie h_c^* zdefiniowane jest przez (1.9), i odpowiednie całki wielokrotne:

$$\begin{aligned} I_{(-1)} &= \Delta N_n, \quad I_{(0)} = \Delta_n, \quad I_{(1)} = \Delta W_n, \quad I_{(-1,-1)} = \frac{1}{2} \left((\Delta N_n)^2 - \Delta N_n \right), \\ I_{(-1,1)} &= \Delta W_n \Delta N_n - S_{W,n}^{1,1}, \quad I_{(1,-1)} = S_{W,n}^{1,1}, \quad I_{(1,1)} = \frac{1}{2} \left((\Delta W_n)^2 - \Delta_n \right), \end{aligned}$$

przy czym $S_{V,n}^{k,m}$ zdefiniowane jest równością (1.10). Ostatecznie więc schemat rzędu 1 przybiera postać:

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^\delta &= Y_n^\delta + \left(a - \frac{bb'_x}{2} \right) \Delta_n + b\Delta W_n + \left(-\frac{c_c^*}{2} + \frac{3c}{2} \right) \Delta N_n + \\ &+ \frac{bb'_x}{2} (\Delta W_n)^2 + \left(\frac{c_c^*}{2} - \frac{c}{2} \right) (\Delta N_n)^2 + \\ &+ (b_c^* - b) \Delta W_n \Delta N_n + (bc'_x - b_c^* + b) S_{W,n}^{1,1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Z postaci całki $S_{W,n}^{1,1}$ wynika, że w schemacie konieczna jest znajomość wartości trajektorii ω_0 sterującego procesu Wienera w punktach skoków trajektorii ω_0 sterującego procesu Poissona. Zmusza to do pewnej ostrożności przy generowaniu tych trajektorii. Problem ten zostanie omówiony w kolejnym rozdziale.

Powyższą formułę można znacznie uprościć, jeśli do dyskretyzacji odcinka J doda się punkty skoków procesu Poissona, tworząc nowy podział $(\tilde{\tau})^\delta$, oczywiście inny dla każdej trajektorii.¹ Wtedy na każdym pododcinku może wystąpić co najwyżej jeden skok i tylko na jego końcu, co pozwala na sprowadzenie powyższego schematu do następującej postaci:

$$\check{Y}_{n+1}^\delta = \check{Y}_n^\delta + \left(a - \frac{bb'_x}{2}\right) \check{\Delta}_n + b\check{\Delta}W_n + c\check{\Delta}N_n + \frac{bb'_x}{2}(\check{\Delta}W_n)^2 + bc'_x\check{\Delta}W_n\check{\Delta}N_n,$$

w której wartości wszystkich funkcji wyliczane są w punkcie $(\tilde{\tau}_n, \check{Y}_n^\delta)$, a wartości przyrostów (oznaczone symbolem “ $\check{\cdot}$ ”) na przedziale $(\tilde{\tau}_n, \tilde{\tau}_{n+1}]$. Ta postać wydaje się być zdecydowanie prostsza, ale tak naprawdę najistotniejszym jej uproszczeniem jest to, że nie są w niej wykorzystywane składniki wyższych rzędów szeregu Taylora-Itô zawierające proces Poissona, gdyż, jak wynika z uwagi 2.5, całki k -krotne po procesie Poissona są niezerowe dopiero przy k skokach wewnątrz pododcinka czasu. Co za tym idzie, skrócony zostaje czas potrzebny do wyliczenia pojedynczej wartości (w punkcie) aproksymowanej ścieżki. Niestety, jak można się domyślać, takie podejście ma też wady. Za pomocą powyższych schematów aproksymowane są tylko wartości niektórych trajektorii poszukiwanego procesu w wybranych punktach dyskretyzacji, więc aby uzyskać jakąś wiedzę o procesie X w chwili t należy dysponować odpowiednio dużą liczbą wartości trajektorii w tym punkcie. Tymczasem prawdopodobieństwo tego, że choćby dwie trajektorie będą miały skok w tym samym punkcie, wynosi oczywiście 0. Oznacza to, że albo punkty skoków jednej ścieżki będą wkomponowywane w dyskretyzację wszystkich innych ścieżek, albo wartości każdej ścieżki w punktach skoków będą wyliczane tylko do jej wykreślenia, a potem pomijane, ponieważ jeżeli taka wartość pojawia się tylko na jednej trajektorii, to jest praktycznie bezużyteczna. W pierwszym przypadku otrzymywałoby się ostatecznie znacznie gęstszy podział od zaplanowanego. Zwiększałoby to dokładność przybliżeń, choć być może wcale nie byłaby ona konieczna, ale zwiększałoby się w ten sposób również liczbę koniecznych obliczeń, tym bardziej, im większa byłaby częstotliwość procesu Poissona i im większa byłaby liczba generowanych trajektorii. Jeżeli wyjściowy podział $(\tau)^\delta$ składałby się z η elementów, a liczba zaplanowanych do wygenerowania trajektorii wynosiłaby M , to liczba koniecznych obliczeń rosłaby średnio $\frac{\eta + M\lambda(T-t_0)}{\eta}$ -krotnie. Ponadto, gdyby zaszła potrzeba dołączenia wyników z ewentualnie dodatkowo wyznaczonych trajektorii, byłoby to bardzo trudne z powodu nowych punktów skoków. Natomiast w przypadku drugiego rozwiązania dokonywanych byłoby średnio $\frac{\eta + \lambda(T-t_0)}{\eta}$ -krotnie więcej obliczeń, których wyniki nie byłyby w pełni wykorzystywane. Tak więc decyzja o uproszczeniu schematu poprzez wkomponowanie czasów

¹Naturalnie $(\tilde{\tau})^\delta$ też jest δ -podziałem, gdyż jest gęstszy od wyjściowego $(\tau)^\delta$.

skoków w siatkę dyskretyzacji powinna zostać wcześniej rozważona w odniesieniu do konkretnej postaci równania (1.1).

3.3 Trajektorie procesu Wienera

Zarówno schemat (3.2) jak i (3.3), w przypadku, gdy w równaniu nie występują zaburzenia losowe ($b(t, x) \equiv c(t, x) \equiv 0$), redukują się do deterministycznego schematu Eulera, który jest rzędu 1. W związku z tym, gdy rozwiązanie będzie zależeć głównie od części deterministycznej, zbieżność obu aproksymacji powinna być podobna, a mówiąc wprost, podobnie wolna. Biorąc jeszcze pod uwagę, że formuła przybliżenia (3.3) jest znacznie bardziej skomplikowana, można wyciągnąć wniosek, że tylko w nielicznych przypadkach będzie ono efektywniejsze niż aproksymacja (3.2). Właściwe byłoby więc przedstawienie schematu zawierającego informacje drugiego rzędu o części nielosowej równania (1.1). Ponieważ zbiór hierarchiczny

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\frac{3}{2}} &= \left\{ \alpha \in \widehat{\mathcal{M}} : l_{\alpha} + n_{\alpha} \leq 3 \quad \vee \quad l_{\alpha} = n_{\alpha} = 2 \right\} = \\ &= \left\{ \nu, (-1), (0), (1), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), \right. \\ &\quad (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (-1, -1, -1), (-1, -1, 1), \\ &\quad \left. (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1) \right\} \supset \mathcal{A}_1 \end{aligned}$$

zawiera indeks $(0, 0)$, to aproksymacja rzędu $\frac{3}{2}$ będzie spełniała wspomniany wymóg. Dlatego jej wyprowadzenie będzie kolejnym tematem tego rozdziału. Jednak $\mathcal{A}_{\frac{3}{2}}$ zawiera również indeks $(1, 0)$, co, jak wiadomo, nawet w przypadku, gdy $c(t, x) \equiv 0$, powoduje pewne problemy, gdyż całek $I_{(1,0)}[1]_{\tau_n^+}^{\tau_{n+1}^+} = Z_n$ nie da się wyrazić w sposób dokładny przy pomocy przyrostów procesów sterujących. Jak zostało pokazane w pracy [17], najwyższym możliwym do uzyskania w ogólnym przypadku rzędem dla dyfuzji Itô, przy znajomości wartości sterującego procesu Wienera jedynie w punktach $(\tau)^{\delta}$, jest rząd 1. Tylko dla pewnej klasy równań, w której zachodzi warunek

$$s(t, x) := b(t, x)a'_x(t, x) - a(t, x)b'_x(t, x) - b'_t(t, x) - \frac{b^2(t, x)b''_{xx}(t, x)}{2} \equiv 0, \quad (3.4)$$

rzęd ten może osiągnąć wartość $\frac{3}{2}$. Jak wynika z rozwinięcia procesu X w szereg Taylora-Itô, s jest współczynnikiem stojącym w tym rozwinięciu właśnie przy całce Z_n (zob.[9]). Zostanie tu jednak przedstawione twierdzenie, które pokaże, że funkcja s znika tożsamościowo dla szerokiej klasy rozwiązań, ale żeby je udowodnić, należy skorzystać z następującego lematu.

Lemat 3.4 Niech $J = [0, T]$ i $X_t = h(t, W_t, N_t)$, gdzie $h(\cdot, \cdot, n) \in C(J \times \mathbb{R})$ dla każdego ustalonego $n \in \mathbb{N}_0$. Niech będą dane zbiory:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (t, x) : x = h(t, w, n) \in \Xi, t \in J, w \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0 \right\} \subset J \times \Xi, \\ \hat{A} &= \left\{ \left(t, h(t, W_t(\omega), N_t(\omega)) \right) : t \in J, \omega \in \Omega \right\} \subset A \subset J \times \Xi. \end{aligned}$$

Wtedy zbiór $\hat{A}$ jest gęsty w A .

Dowód: Niech

$$A_n = \left\{ (t, x) : x = h(t, w, n) \in \Xi, t \in J, w \in \mathbb{R} \right\},$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$, a $A_{n,t}$ oznacza cięcie tego zbioru w punkcie t . Należy pokazać, że

$$\forall_{(t,x) \in A} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\omega \in \Omega} O_{(t,x)}(\varepsilon) \cap \hat{A} \neq \emptyset,$$

przy czym $O_D(\varepsilon)$ oznacza otwarte ε -otoczenie punktu D . Aby to osiągnąć wystarczy dowieść, że dla dowolnie wybranych, ustalonych $t \in J \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}_0$ zachodzi:

$$\forall_{x \in A_{n,t}} \forall_{\varepsilon > 0} P(h(t, W_t, n) \in O_x(\varepsilon) \wedge N_t = n) > 0.$$

Funkcja $g = h(t, \cdot, n)$ jest ciągła dla dowolnych $(t, n) \in J \times \mathbb{N}_0$, a przeciwobrazy zbiorów otwartych przez odwzorowanie ciągłe są również zbiorami otwartymi, w szczególności więc:

$$\forall_{x \in A_{n,t}} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{w \in \mathbb{R}} \exists_{\sigma > 0} g^{-1}(O_x(\varepsilon)) \supset O_w(\sigma).$$

Stąd, biorąc pod uwagę, że procesy W i N są niezależne, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P(h(t, W_t, n) \in O_x(\varepsilon) \wedge N_t = n) &= P(h(t, W_t, n) \in O_x(\varepsilon)) P(N_t = n) \geq \\ &\geq P(W_t \in O_w(\sigma)) P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n! \sqrt{2\pi t}} \int_{O_w(\sigma)} e^{-\frac{u^2}{2t}} du > 0. \end{aligned}$$

Ze względu na dowolność wyboru t zostało w ten sposób udowodnione, że $\hat{A}$ jest gęsty w A_n , dla każdego ustalonego n , a ponieważ $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$, to $\hat{A}$ jest gęsty w całym zbiorze A , co było do udowodnienia. $\square$

Uwaga 3.5 Ze stacjonarności przyrostów procesów Wienera i Poissona wynika, że teza powyższego lematu będzie prawdziwa również w przypadku, gdy przedział J będzie równy $[t_0, T]$, a procesy W i N będą startowały w chwili $t_0 \geq 0$ od wartości, odpowiednio, w_0 i n_0 .

Twierdzenie 3.6 Niech proces X , będący rozwiązaniem równania (1.1), zależy w każdym czasie $t \in J$ w sposób jawny jedynie od procesów wymuszających w chwili t , tzn. $X_t = h(t, W_t, N_t)$, i niech zbiory A i $\hat{A}$ będą zdefiniowane jak w lemacie 3.4. Dalej, niech na A istnieją s zdefiniowana przez (3.4) i h''_{tw} oraz niech s będzie tam ciągła, a $h''_{tw} = h''_{wt}$. Wtedy tożsamość (3.4) jest prawdziwa dla każdego $(t, x) \in A$.

Dowód: Ponieważ $X = h(t, W_t, N_t) : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \Xi$, to s można przedstawić jako funkcję zmiennych t, w i n , a tezy dowieść dla każdych $(t, w, n) \in J \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}_0$ takich, że $(t, h(t, w, n)) \in \hat{A}$. Wtedy

$$\begin{aligned} s(t, h(t, w, n)) &= b(t, h(t, w, n)) a'_x(t, h(t, w, n)) - \\ &\quad - a(t, h(t, w, n)) b'_x(t, h(t, w, n)) - b'_t(t, h(t, w, n)) - \\ &\quad - \frac{1}{2} b^2(t, h(t, w, n)) b''_{xx}(t, h(t, w, n)) \end{aligned}$$

i niech

$$\begin{aligned} \check{s}(t, w, n) &= s(t, h(t, w, n)) , \\ \check{a}(t, w, n) &= a(t, h(t, w, n)) , \quad \check{b}(t, w, n) = b(t, h(t, w, n)) . \end{aligned}$$

Stosując uogólnioną formułę Itô do procesu $X = h(\cdot, W_\cdot, N_\cdot)$ i porównując otrzymany wynik z równaniem (1.1), można wyrazić $\check{a}$ i $\check{b}$, a następnie ich pochodne cząstkowe, za pomocą pochodnych cząstkowych funkcji h :

$$\check{a} = h'_t + \frac{h''_{ww}}{2}, \quad \check{a}'_w = h''_{tw} + \frac{h'''_{www}}{2}, \quad \check{b} = h'_w, \quad \check{b}'_t = h''_{wt}, \quad \check{b}'_w = h''_{ww}, \quad \check{b}''_{ww} = h'''_{www}.$$

Teraz można wyliczyć odpowiednie pochodne cząstkowe funkcji a i b , które występują w wyrażeniu na $\check{s}$:

$$\begin{aligned} \check{a}'_w(t, w, n) &= h'_w(t, w, n) a'_x(t, h(t, w, n)) \implies \\ &\implies a'_x(t, h(t, w, n)) = \frac{2h''_{tw}(t, w, n) + h'''_{www}(t, w, n)}{2h'_w(t, w, n)}, \\ \check{b}'_w(t, w, n) &= h'_w(t, w, n) b'_x(t, h(t, w, n)) \implies b'_x(t, h(t, w, n)) = \frac{h''_{ww}(t, w, n)}{h'_w(t, w, n)}, \\ \check{b}'_t(t, w, n) &= b'_t(t, h(t, w, n)) + h'_t(t, w, n) b'_x(t, h(t, w, n)) \implies \\ &\implies b'_t(t, h(t, w, n)) = h''_{wt}(t, w, n) - \frac{h'_t(t, w, n) h''_{ww}(t, w, n)}{h'_w(t, w, n)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\check{b}_{ww}''(t, w, n) &= \left(h_w'(t, w, n)\right)^2 b_{xx}''(t, h(t, w, n)) + \frac{\left(h_{ww}''(t, w, n)\right)^2}{h_w'(t, w, n)} \implies \\ \implies b_{xx}''(t, h(t, w, n)) &= \frac{h_w'(t, w, n)h_{www}'''(t, w, n) - \left(h_{ww}''(t, w, n)\right)^2}{\left(h_w'(t, w, n)\right)^3}.\end{aligned}$$

Należy dodatkowo uwzględnić założenie, że $h_{tw}'' = h_{wt}''$, a wtedy

$$\begin{aligned}\check{s} &= h_w' \frac{2h_{tw}'' + h_{www}'''}{2h_w'} - \left(h_t' + \frac{h_{ww}''}{2}\right) \frac{h_{ww}''}{h_w'} - h_{wt}'' + \frac{h_t' h_{ww}''}{h_w'} - \\ &\quad - \frac{(h_w')^2}{2} \frac{h_w' h_{www}''' - (h_{ww}'')^2}{(h_w')^3} = \\ &= h_{wt}'' + \frac{h_{www}'''}{2} - \frac{h_t' h_{ww}''}{h_w'} - \frac{(h_{ww}'')^2}{2h_w'} - h_{wt}'' + \frac{h_t' h_{ww}''}{h_w'} - \frac{h_{www}'''}{2} + \frac{(h_{ww}'')^2}{2h_w'} = 0\end{aligned}$$

na zbiorze $\hat{A}$. Ponieważ jednak s jest z założenia ciągła na A , a na mocy lematu 3.4 zbiór $\hat{A}$ jest gęsty w A , to $s(t, x) \equiv 0$ również na całym zbiorze A , czego należało dowieść. $\square$

W odniesieniu do rozważań poprzedzających powyższe twierdzenie, jego wynik, w przypadku, gdy $c(t, x) \equiv 0$, oznacza, że dla każdego równania spełniającego jego założenia (i założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania) można skonstruować aproksymację rzędu $\frac{3}{2}$ jedynie w oparciu o przyrosty procesu Wienera bez żadnych dodatkowych warunków. Innymi słowy, jeśli w rozwiązaniu jedynym składnikiem losowym jest pewna funkcja zależąca w sposób jawny od procesu Wienera w danej chwili t , to w schemacie różnicowym tego rzędu nie trzeba korzystać z informacji zawartych w procesie Z . A zatem jeśli współczynnik s nie zeruje się tożsamościowo na $\hat{A}$, to rozwiązanie analityczne nie może zależeć tylko od pewnej funkcji czasu t i ruchu Browna w chwili t . Stąd wynika, że jeśli do wykreślenia przybliżeń rzędu $\frac{3}{2}$ trajektorii rozwiązania analitycznego w punktach podziału jest konieczna znajomość procesu Z , to również do wyznaczenia trajektorii dokładnego rozwiązania są konieczne dodatkowe informacje o trajektoriach procesu Wienera.

Ogólnie wydaje się być uzasadnionym, że przy tworzeniu aproksymacji powinno się dysponować co najmniej takimi danymi, jakie byłyby niezbędne do wygenerowania ścieżek dokładnego rozwiązania, jeżeli znana byłaby jego analityczna postać. Co więcej, właściwie nic nie stoi na przeszkodzie, aby przy tworzeniu aproksymacji mieć możliwość dysponowania wszystkimi dostępnymi informacjami o tych ścieżkach (zob.[11]). Oczywiście nie wszystkie są dostępne, gdyż nawet przy pomocy komputera nie można wygenerować dokładnej trajektorii ruchu Browna, czyli pojedynczego zdarzenia losowego $\omega_0 \in \Omega$. Czasem, np. w schematach niższych rzędów lub gdy $s(t, x) \equiv 0$, wystarczająca jest znajomość wartości w_n trajektorii ω_0 w wybranych punktach, np. punktach nielosowego podziału $(\tau)^\delta$,

czyli znajomość podzbioru

$$\Omega_1 = \left\{ \omega : W_{\tau_n}(\omega) = w_n, \tau_n \in (\tau)^\delta, 0 \leq n \leq n_T \right\} \subset \Omega,$$

który jest miary zero i z którego pochodzi ω_0 . Jednak nie zawsze, co zostanie pokazane w poniższym lemacie.

Lemat 3.7 Niech proces X , będący rozwiązaniem równania (1.1), zależy jedynie od czasu i całki

$$\tilde{Z}_r(t) = \int_{t_0^+}^t r(s) dW_s,$$

gdzie $r \in C^1(J)$, tzn. $X_t = h(t, \tilde{Z}_r(t))$, $t \in J$, i dane niech będą zbiory:

$$\begin{aligned} B &= \left\{ (t, x) : x = h(t, z) \in \Xi, t \in J, z \in \mathbb{R} \right\} \subset J \times \Xi, \\ \hat{B} &= \left\{ \left(t, h(t, \tilde{Z}_r(t, \omega)) \right) : t \in J, \omega \in \Omega \right\} \subset B \subset J \times \Xi. \end{aligned}$$

Dalej, niech:

- (a) na B istnieje s zdefiniowana równaniem (3.4) i jest tam ciągła;
- (b) istnieje niepusty, otwarty prostokąt $J_0 \times \tilde{\Xi}_0 \subset J \times \mathbb{R}$ taki, że $h(t, \cdot)$ jest odwracalna na $\tilde{\Xi}_0$ i $g(t, \cdot) = h^{-1}(t, \cdot)$ na $\Xi_{0,t} = h(t, \tilde{\Xi}_0) \subset \Xi$, dla każdego ustalonego $t \in J_0$;
- (c) r będzie ściśle monotoniczna na J_0 ;
- (d) na

$$B_0 = \left\{ (t, x) : x = h(t, z) \in \Xi, t \in J_0, z \in \tilde{\Xi}_0 \right\} \subset B \subset J \times \Xi$$

istnieją g''_{tx} , g''_{xt} , g'''_{xxx} , oraz $g''_{tx} = g''_{xt}$ i $g'_x(t, x) \neq 0$.

Wtedy tożsamość (3.4) nie jest spełniona dla żadnego $(t, x) \in B_0$ i zbiór ten jest przecinany przez trajektorie procesu X z dodatnim prawdopodobieństwem.

Dowód: Należy zauważyć, że X jest w tym przypadku procesem o ciągłych trajektoriach, co wynika m.in. z ciągłości trajektorii procesu $\tilde{Z}_r$ i ciągłości funkcji h . Co więcej, dla każdego ustalonego t , $\tilde{Z}_r(t)$ ma rozkład normalny, więc dla pewnej wybranej chwili czasu $\tilde{t} \in J_0$ zachodzi:

$$P\left(\exists_{t \in J_0} : (t, X_t) \in B_0\right) = P\left(\exists_{t \in J_0} : \tilde{Z}_r(t) \in \tilde{\Xi}_0\right) \geq P\left(\tilde{Z}_r(\tilde{t}) \in \tilde{\Xi}_0\right) > 0,$$

gdyż zmienna losowa o rozkładzie normalnym z dodatnim prawdopodobieństwem przyjmuje wartości z dowolnego zbioru o dodatniej mierze Lebesgue'a, a taką własność ma każdy przedział otwarty na prostej. Czyli zbiór trajektorii procesu X , które przecinają B_0 , również ma dodatnie prawdopodobieństwo.

Z założenia, że $g(t, \cdot) = h^{-1}(t, \cdot)$ na $\Xi_{0,t}$, wynika, że $x \equiv h(t, g(t, x))$ dla

każdego ustalonego $t \in J_0$. Różniczkując tą tożsamość kolejno dwukrotnie po x i biorąc pod uwagę, że $g'_x(t, x) \neq 0$, otrzymuje się zależności:

$$\begin{aligned} 1 = \frac{\partial h}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x} &\implies \frac{\partial h}{\partial g} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^{-1}, \\ 0 = \frac{\partial^2 h}{\partial g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial h}{\partial g} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &\implies \frac{\partial^2 h}{\partial g^2} = - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^{-3}, \end{aligned}$$

a z kolei różniczkowanie po t daje:

$$0 = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial t} \implies \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial g}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^{-1}.$$

Wtedy, na mocy uogólnionej formuły Itô, współczynniki z równania (1.1) przybierają na $B_0 \cap \hat{B}$ postać:

$$a = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial g^2} r^2 = - \frac{g'_t}{g'_x} - \frac{r^2 g''_{xx}}{2(g'_x)^3}, \quad b = \frac{\partial h}{\partial g} r = \frac{r}{g'_x},$$

a ich pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned} a'_x &= - \frac{g''_{tx}}{g'_x} + \frac{g'_t g''_{xx}}{(g'_x)^2} - \frac{r^2 g'''_{xxx}}{2(g'_x)^3} + \frac{3r^2 (g''_{xx})^2}{2(g'_x)^4}, \\ b'_t &= \frac{r'}{g'_x} - \frac{r g''_{xt}}{(g'_x)^2}, \quad b'_x = - \frac{r g''_{xx}}{(g'_x)^2}, \quad b''_{xx} = - \frac{r g'''_{xxx}}{(g'_x)^2} + \frac{2r (g''_{xx})^2}{(g'_x)^3}, \end{aligned}$$

gdyż g jest wystarczająco gładka. To pozwala na wyznaczenie s na $B_0 \cap \hat{B}$:

$$\begin{aligned} s &= \left(- \frac{r g''_{tx}}{(g'_x)^2} + \frac{r g'_t g''_{xx}}{(g'_x)^3} - \frac{r^3 g'''_{xxx}}{2(g'_x)^4} + \frac{3r^3 (g''_{xx})^2}{2(g'_x)^5} \right) - \\ &- \left(\frac{r'}{g'_x} - \frac{r g''_{xt}}{(g'_x)^2} \right) - \left(- \frac{r^3 g'''_{xxx}}{2(g'_x)^4} + \frac{r^3 (g''_{xx})^2}{(g'_x)^5} \right) - \\ &- \left(\frac{r g'_t g''_{xx}}{(g'_x)^3} + \frac{r^3 (g''_{xx})^2}{2(g'_x)^5} \right) = - \frac{r'}{g'_x} \neq 0, \end{aligned}$$

co wynika z założeń, że $g''_{tx} = g''_{xt}$, i że r jest ściśle monotoniczna na J_0 . Ponownie korzystając z faktu, że $\tilde{Z}_r(t)$ ma rozkład normalny dla każdego ustalonego t i używając analogicznych argumentów jak w lemacie 3.4, można uzasadnić, że $B_0 \cap \hat{B}$ jest gęsty w B_0 . Wtedy z ciągłości s wynika, że $s(t, x) \neq 0$ dla każdej pary $(t, x) \in B_0$, co kończy dowód lematu. $\square$

Uwaga 3.8 Warto zauważyć, że s zerowałaby się tożsamościowo na B_0 , gdyby r była funkcją stałą na J_0 . Wtedy proces X nie zależałby na J_0 od $\tilde{Z}_r$, tylko w sposób jawny od W , co byłoby szczególnym przypadkiem twierdzenia 3.6.

Uwaga 3.9 Założenia powyższego lematu wydają się być bardzo mocne, ale w rzeczywistości takie nie są. Niech $h \in C^{1,2}(J \times \mathbb{R})$, co oznacza m.in., że pierwsza pochodna h po drugiej współrzędnej jest gładka. Jeśli przyjmie się założenie, że funkcje $r \in C^1(J)$ i, dla każdego ustalonego $t \in J$, $h(t, \cdot)$ nie są stałe na żadnym podprzedziale (byłby to szczególny przypadek twierdzenia 3.6), to istnieje taki punkt $(\tilde{t}, \tilde{z}) \in J \times \mathbb{R}$, że $r'(\tilde{t}) \neq 0$ i $h'_z(\tilde{t}, \tilde{z}) \neq 0$. Ale r' i h'_z są ciągłe, więc musi istnieć również pewien otwarty zbiór zawierający punkt $(\tilde{t}, \tilde{z})$, w szczególności pewien otwarty prostokąt $J_0 \times \tilde{\Xi}_0$, na którym $r' \neq 0$ i $h'_z \neq 0$. Dla każdego $t \in J_0$, $h(t, \cdot)$ jest ściśle monotoniczna (rosnąca lub malejąca) na $\tilde{\Xi}_0$, a więc odwracalna, czyli dla każdego ustalonego t istnieje $g(t, \cdot) = h^{-1}(t, \cdot)$, która również jest ściśle monotoniczna i różniczkowalna, stąd $g'_x(t, x) \neq 0$ na $B_0 \subset B \subset J \times \Xi$. Ale g mogłaby nie być wystarczająco gładka, dlatego w lemacie zakłada się istnienie odpowiednich pochodnych cząstkowych. Jeśli zaś chodzi o ciągłość funkcji s , to jest ona wymagana zarówno do rozwinięcia procesu X w szereg Taylora-Itô (1.14), zawierający składnik $s(\varrho, X_\varrho)I_{(1,0)}[1]_{\varrho+}^\tau$, jak i do konstrukcji schematu różnicowego rzędu $\frac{3}{2}$, co wynika z twierdzenia 3.1.

Uwaga 3.10 Przykładem procesu spełniającego założenia lematu jest modyfikacja procesu omawianego w ostatnim rozdziale, zadanego równaniem (4.3), jeśli przyjmie się w nim, że $c(t, x) \equiv 0$.

Jak więc wynika z przytoczonego lematu, istnieje pewna klasa równań, dla której z dodatnim prawdopodobieństwem $s(t, X_t) \neq 0$ na pewnym otwartym przedziale i w schematach wyższych rzędów niezbędne są dokładniejsze dane na temat wybranej ścieżki procesu Wienera. W szczególności, dla schematu rzędu $\frac{3}{2}$, informacje o całce z jej przyrostów między punktami podziału, czyli o Z_n . W literaturze znane jest stwierdzenie, że ta informacja o trajektorii nie może zostać wygenerowana w sposób dokładny, a jedynie aproksymowana, jednak z lokalną² dokładnością nie większą niż rzędu $\frac{3}{2}$, i wykluczenie jej ze schematów wydaje się być niemożliwe (zob.[11]). Przyrosty procesu Wienera i aproksymacje $\hat{Z}_n$ całek z tych przyrostów mogą być wyznaczone np. za pomocą wyrażenia:

$$(\Delta W_n, \hat{Z}_n) = \left(\xi_{1,n} \sqrt{\Delta_n}, \sqrt{\frac{(\Delta_n)^3}{12}} (\xi_{1,n} \sqrt{3} + \xi_{2,n}) \right), \quad (3.5)$$

gdzie wszystkie $\xi_{1,n}, \xi_{2,n} \text{ iid}^3 \sim N(0, 1)$. Trudno się jednak zgodzić z tym, że jest to tylko aproksymacja. Faktycznie, ΔW_n i Z_n są dwiema różnymi, skorelowanymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym,⁴ ale dokładne wybranie ścieżki ω_0

²Dokładność lokalna to dokładność na pojedynczym podprzedziale; dokładność globalna, czyli na całym J , okazuje się być niższa, ze względu na rosnącą liczbę podprzedziałów wraz z zagęszczaniem podziału.

³Niezależne o jednakowym rozkładzie.

⁴ $E Z_n = 0$, $\text{Var } Z_n = \frac{1}{3}(\Delta_n)^3$, $E(Z_n | \Delta W_n) = \frac{1}{2}\Delta_n \Delta W_n$, $\text{Var}(Z_n | \Delta W_n) = \frac{1}{12}(\Delta_n)^3$, $\text{Cov}(\Delta W_n, Z_n) = \frac{1}{2}(\Delta_n)^2$, $\text{Corr}(\Delta W_n, Z_n) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ruchu Browna na odcinku $(\tau_n, \tau_{n+1}]$ daje również wartość Z_n jako zwykłej całki Riemanna z tej ścieżki. Formuła (3.5) pozwala więc raczej na dokładniejsze określenie trajektorii ω_0 ze zbioru Ω_1 , uściślając ją o wartości z_n całek Z_n , co zawęży zbiór Ω_1 do

$$\Omega_2 = \left\{ \omega : W_{\tau_n}(\omega) = w_n, Z_n(\omega) = z_n, \tau_n \in (\tau)^\delta, 0 \leq n \leq n_T \right\} \subset \Omega_1 \subset \Omega.$$

Oznacza to, że dokładne (!) wielkości pól, jakie zakreśla trajektoria ω_0 między punktami podziału są generowane analogicznie jak dokładne wartości trajektorii w $(\tau)^\delta$. W razie potrzeby i o ile będzie to możliwe, można w analogiczny sposób zawężyć zbiór, z którego pochodzi generowana ścieżka, do coraz mniejszych podzbiorów miary 0, dostarczając dodatkowych informacji o niej. W połączeniu z twierdzeniem 3.6 pozwala to na wyciągnięcie wniosku, że schemat rzędu $\frac{3}{2}$ będzie zachowywał swoją prędkość zbieżności również dla równań, w których współczynnik (3.4) nie będzie zerowy, co zresztą potwierdzą przeprowadzone w ostatnim rozdziale eksperymenty. Nie stoi to jednak w sprzeczności z tezami podanymi w pracy [17], gdyż zakłada się tam, że dostępne są jedynie informacje o trajektorii procesu Wienera ze zbioru Ω_1 , a tutaj to założenie nie jest przyjmowane. Oczywiście jest jasne, że używanie dodatkowych danych o procesie sterującym wydłuża czas obliczeń, ale jednocześnie pozwala na poprawę szybkości zbieżności, co może w sumie spowodować szybsze osiągnięcie wymaganej dokładności. Ponadto ograniczenie się tylko do wartości ścieżek procesów wymuszających w punktach podziału w przypadku dyfuzji skokowej bardzo utrudniałoby konstrukcję schematów, ze względu na mieszane całki po procesach Wienera i Poissona, jak chociażby $S_{W,n}^{1,1}$ z aproksymacji (3.3). Do ich dokładnego wyliczenia potrzebna jest dodatkowo znajomość wartości trajektorii ruchu Browna w punktach skoków procesu Poissona, co jest kolejnym argumentem na to, by nie ograniczać się tylko do informacji ze zbioru Ω_1 .

Na koniec warto jeszcze zauważyć, że podobnych problemów nie ma z trajektoriami procesu Poissona. Co prawda również jest to proces o przyrostach niezależnych i można by za ich pomocą generować jego trajektorie analogicznie jak trajektorie procesu Wienera, uzyskując wartości jedynie w punktach $(\tau)^\delta$. Jednak, jak wiadomo, odległości między kolejnymi skokami ścieżki procesu Poissona tworzą ciąg zmiennych losowych iid $\sim \text{Exp}(\lambda)$, którego wygenerowanie dokładnie precyzuje jej kształt.

3.4 Schematy rzędu 1.5 i 2.0

Można teraz przejść do wyprowadzenia aproksymacji rzędu $\frac{3}{2}$. Po wyznaczeniu zbioru hierarchicznego, co miało miejsce w poprzednim podrozdziale, zostaną obliczone funkcje f_α :

$$f_{(-1)} = c, \quad f_{(0)} = a, \quad f_{(1)} = b, \quad f_{(-1,-1)} = c_c^* - c, \quad f_{(-1,0)} = a_c^* - a,$$

$$\begin{aligned}
f_{(-1,1)} &= b_c^* - b, \quad f_{(0,-1)} = c'_t + ac'_x + \frac{1}{2}b^2c''_{xx}, \quad f_{(0,0)} = a'_t + aa'_x + \frac{1}{2}b^2a''_{xx}, \\
f_{(0,1)} &= b'_t + ab'_x + \frac{1}{2}b^2b''_{xx}, \quad f_{(1,-1)} = bc'_x, \quad f_{(1,0)} = ba'_x, \quad f_{(1,1)} = bb'_x, \\
f_{(-1,-1,-1)} &= c_{cc}^{**} - 2c_c^* + c, \quad f_{(-1,-1,1)} = b_{cc}^{**} - 2b_c^* + b, \quad f_{(-1,1,-1)} = b_c^*(c'_x)_c^* - bc'_x, \\
f_{(1,-1,-1)} &= b(c'_x(c'_x)_c^* + (c'_x)_c^* - c'_x), \quad f_{(1,-1,1)} = b(c'_x(b'_x)_c^* + (b'_x)_c^* - b'_x), \\
f_{(-1,1,1)} &= b_c^*(b'_x)_c^* - bb'_x, \quad f_{(1,1,-1)} = b(b'_xc'_x + bc''_{xx}), \quad f_{(1,1,1)} = b((b'_x)^2 + bb''_{xx}),
\end{aligned}$$

przy czym

$$h_{cc}^{**}(t, x) := (h_c^*)_c^*(t, x) = h(t, x + c(t, x) + c_c^*(t, x)).$$

Było to stosunkowo łatwe zadanie, ale wyznaczenie formuł na odpowiednie całki wielokrotne, które pozwolą je wygenerować przy pomocy komputera, nastrocza pewne trudności. Całki pojedyncze i podwójne nie sprawiają większych problemów:

$$\begin{aligned}
I_{(-1)} &= \Delta N_n, \quad I_{(0)} = \Delta_n, \quad I_{(1)} = \Delta W_n, \\
I_{(-1,-1)} &= \frac{1}{2}((\Delta N_n)^2 - \Delta N_n), \quad I_{(-1,0)} = \Delta_n \Delta N_n - S_{T,n}^{1,1}, \quad I_{(0,-1)} = S_{T,n}^{1,1}, \\
I_{(-1,1)} &= \Delta W_n \Delta N_n - S_{W,n}^{1,1}, \quad I_{(1,-1)} = S_{W,n}^{1,1}, \quad I_{(0,0)} = \frac{1}{2}(\Delta_n)^2, \\
I_{(0,1)} &= \Delta_n \Delta W_n - Z_n, \quad I_{(1,0)} = Z_n, \quad I_{(1,1)} = \frac{1}{2}((\Delta W_n)^2 - \Delta_n).
\end{aligned}$$

Problemy pojawiają się przy całkach potrójnych, jednak część da się wyliczyć bezpośrednio lub na podstawie uwagi 2.5:

$$\begin{aligned}
I_{(-1,-1,-1)} &= \frac{1}{6}(\Delta N_n)^3 - \frac{1}{2}(\Delta N_n)^2 + \frac{1}{3}\Delta N_n, \quad I_{(1,1,-1)} = \frac{1}{2}(S_{W,n}^{1,2} - S_{T,n}^{1,1}), \\
I_{(-1,-1,1)} &= \frac{1}{2}\Delta W_n(\Delta N_n)^2 - \frac{1}{2}\Delta W_n \Delta N_n - S_{W,n}^{2,1}, \quad I_{(1,1,1)} = \frac{1}{6}(\Delta W_n)^3 - \frac{1}{2}\Delta_n \Delta W_n,
\end{aligned}$$

a pozostałe można wyznaczyć za pomocą lematu 2.4, rozwiązując odpowiednie układy równań, co daje ostatecznie:

$$\begin{aligned}
I_{(-1,1,-1)} &= 2S_{W,n}^{2,1} - \Delta N_n S_{W,n}^{1,1} + S_{W,n}^{1,1}, \\
I_{(-1,1,1)} &= \frac{1}{2}(\Delta W_n)^2 \Delta N_n - \frac{1}{2}\Delta_n \Delta N_n - \Delta W_n S_{W,n}^{1,1} + \frac{1}{2}S_{T,n}^{1,1} + \frac{1}{2}S_{W,n}^{1,2}, \\
I_{(1,-1,-1)} &= \Delta N_n S_{W,n}^{1,1} - S_{W,n}^{1,1} - S_{W,n}^{2,1}, \quad I_{(1,-1,1)} = \Delta W_n S_{W,n}^{1,1} - S_{W,n}^{1,2}.
\end{aligned}$$

Po odpowiednim przegrupowaniu składników otrzymuje się następującą formułę na aproksymację rzędu $\frac{3}{2}$ w normie $\mathcal{L}^2$:

$$\begin{aligned}
Y_{n+1}^\delta = & Y_n^\delta + \left(a - \frac{bb'_x}{2}\right) \Delta_n + b\Delta W_n + \left(\frac{c_{cc}^{**}}{3} - \frac{7c_c^*}{6} + \frac{11c}{6}\right) \Delta N_n + \quad (3.6) \\
& + \left(\frac{a'_t}{2} + \frac{aa'_x}{2} + \frac{b^2a''_{xx}}{4}\right) (\Delta_n)^2 + \frac{bb'_x}{2} (\Delta W_n)^2 + \\
& + \left(-\frac{c_{cc}^{**}}{2} + \frac{3c_c^*}{2} - c\right) (\Delta N_n)^2 + \left(b'_t + ab'_x - \frac{b(b'_x)^2}{2}\right) \Delta_n \Delta W_n + \\
& + \left(ba'_x - b'_t - ab'_x - \frac{b^2b''_{xx}}{2}\right) Z_n + \left(a_c^* - a - \frac{b_c^*(b'_x)_c^*}{2} + \frac{bb'_x}{2}\right) \Delta_n \Delta N_n + \\
& + \left(-a_c^* + a + c'_t + ac'_x + \frac{b_c^*(b'_x)_c^*}{2} - \frac{bb'_x}{2} - \frac{bb'_x c'_x}{2}\right) S_{T,n}^{1,1} + \\
& + \left(-\frac{b_{cc}^{**}}{2} + 2b_c^* - \frac{3b}{2}\right) \Delta W_n \Delta N_n + ((c'_x)_c^* - 1) (b_c^* - b - bc'_x) S_{W,n}^{1,1} + \\
& + \left(\frac{b(b'_x)^2}{6} + \frac{b^2b''_{xx}}{6}\right) (\Delta W_n)^3 + \left(\frac{c_{cc}^{**}}{6} - \frac{c_c^*}{3} + \frac{c}{6}\right) (\Delta N_n)^3 + \\
& + \left(\frac{b_c^*(b'_x)_c^*}{2} - \frac{bb'_x}{2}\right) (\Delta W_n)^2 \Delta N_n + (b'_x)_c^* (-b_c^* + b + bc'_x) \Delta W_n S_{W,n}^{1,1} + \\
& + \left((b'_x)_c^* \left(\frac{b_c^*}{2} - b - bc'_x\right) + \frac{b}{2} (b'_x + b'_x c'_x + bc''_{xx})\right) S_{W,n}^{1,2} + \\
& + \left(\frac{b_{cc}^{**}}{2} - b_c^* + \frac{b}{2}\right) \Delta W_n (\Delta N_n)^2 + (c'_x)_c^* (-b_c^* + b + bc'_x) \Delta N_n S_{W,n}^{1,1} + \\
& + \left(((c'_x)_c^* + 1) (2b_c^* - b - bc'_x) - b_{cc}^{**}\right) S_{W,n}^{2,1}.
\end{aligned}$$

Podobnie jak w schemacie (3.3) można uprościć formułę tej aproksymacji wkomponowując skoki procesu Poissona w wybrany δ -podział. Ponownie uwzględniając, że na każdym pododcinku może wystąpić co najwyżej jeden skok i tylko na jego końcu, uzyskuje się poniższy wzór:

$$\begin{aligned}
\check{Y}_{n+1}^\delta = & \check{Y}_n^\delta + \left(a - \frac{bb'_x}{2}\right) \check{\Delta}_n + \left(\frac{a'_t}{2} + \frac{aa'_x}{2} + \frac{b^2a''_{xx}}{4}\right) (\check{\Delta}_n)^2 + \\
& + b\check{\Delta}W_n + \frac{bb'_x}{2} (\check{\Delta}W_n)^2 + \left(b'_t + ab'_x - \frac{b(b'_x)^2}{2}\right) \check{\Delta}_n \check{\Delta}W_n + \\
& + \left(ba'_x - b'_t - ab'_x - \frac{b^2b''_{xx}}{2}\right) \check{Z}_n + \left(\frac{b(b'_x)^2}{6} + \frac{b^2b''_{xx}}{6}\right) (\check{\Delta}W_n)^3 + \\
& + c\check{\Delta}N_n + \left(c'_t + ac'_x - \frac{bb'_x c'_x}{2}\right) \check{\Delta}_n \check{\Delta}N_n +
\end{aligned}$$

$$+ bc'_x \check{\Delta} W_n \check{\Delta} N_n + \left(\frac{bb'_x c'_x}{2} + \frac{b^2 c''_{xx}}{2} \right) (\check{\Delta} W_n)^2 \check{\Delta} N_n ,$$

w którym wartości wszystkich funkcji ponownie wyliczane są w punkcie $(\check{\tau}_n, \check{Y}_n^\delta)$, a wartości przyrostów ze znakiem “ $\sim$ ” na przedziale $(\check{\tau}_n, \check{\tau}_{n+1}]$. Wynik tej operacji jest co prawda efektowny, trzeba jednak przypomnieć, że należy go traktować z pewną rezerwą, zgodnie z uwagami podanymi na końcu poprzedniego podrozdziału. Dość istotny jest za to fakt, że w przypadku, gdy c znika tożsamościowo na $J \times \Xi$, podane aproksymacje redukują się do schematu rzędu $\frac{3}{2}$ dla zwykłej dyfuzji Itô podanego w pracy [9]. Dotyczy to również aproksymacji z poprzedniego podrozdziału, które upraszczają się do schematów odpowiedniego rzędu dla równania bez skoków.

Zbiór hierarchiczny, który zgodnie z twierdzeniem 3.1 odpowiada aproksymacji kolejnego rzędu, czyli rzędu 2, ma postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \left\{ \alpha \in \widehat{\mathcal{M}} : l_\alpha + n_\alpha \leq 4 \quad \vee \quad l_\alpha = n_\alpha = \frac{5}{2} \right\} = \\ &= \left\{ \nu, (-1), (0), (1), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), \right. \\ &\quad (1, -1), (1, 0), (1, 1), (-1, -1, -1), (-1, -1, 0), (-1, -1, 1), \\ &\quad (-1, 0, -1), (-1, 0, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 0), (-1, 1, 1), \\ &\quad (0, -1, -1), (0, -1, 1), (0, 1, -1), (0, 1, 1), (1, -1, -1), \\ &\quad (1, -1, 0), (1, -1, 1), (1, 0, -1), (1, 0, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 0), \\ &\quad (1, 1, 1), (-1, -1, -1, -1), (-1, -1, -1, 1), (-1, -1, 1, -1), \\ &\quad (-1, -1, 1, 1), (-1, 1, -1, -1), (-1, 1, -1, 1), (-1, 1, 1, -1), \\ &\quad (-1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, -1), (1, -1, -1, 1), (1, -1, 1, -1), \\ &\quad \left. (1, -1, 1, 1), (1, 1, -1, -1), (1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1), (1, 1, 1, 1) \right\} \supset \mathcal{A}_{\frac{3}{2}} . \end{aligned}$$

Z jego postaci wynika w sposób oczywisty, że aproksymacja rzędu 2 będzie o wiele bardziej skomplikowana obliczeniowo od schematu (3.6). I chodzi tu nie tylko o samą liczbę składników, które musiałyby zostać obliczone. Mieszane całki stochastyczne po różnych procesach sterujących najprawdopodobniej nie dałyby się wyrazić jedynie przy pomocy przyrostów procesów wymuszających i całki Riemanna z przyrostów procesu Wienera. Tymczasem polepszenie prędkości zbieżności byłoby zapewne w ogólnym przypadku niewielkie, szczególnie, gdy najistotniejszy wpływ na zmienność rozwiązania miałaby część nielosowa. Podejrzenie to

bierze się z analogii do sytuacji z poprzedniego podrozdziału. Tak jak obie omawiane tam aproksymacje były rzędu 1, gdy w równaniu znikaly czynniki losowe, tak oba tu omawiane przybliżenia są w takim przypadku również jednakowego rzędu – rzędu 2. Dlatego wyprowadzanie tą metodą kolejnych aproksymacji wydaje się być bezproduktywne. Ponadto, co pokażą symulacje komputerowe w następnym rozdziale, już za pomocą schematu (3.6) osiąga się doskonałe wyniki.

Rozdział 4

Symulacje komputerowe

4.1 Porównanie metod aproksymacji

Teraz dokonanych zostanie kilka porównań wyprowadzonych schematów zbieżnych w sensie jednostajnie średniokwadratowym z pewnym schematem rzędu $\frac{3}{2}$ w zwykłym sensie średniokwadratowym, tzn. spełniającym dla pewnej skończonej i dodatniej stałej C oraz każdego odpowiednio małego δ oszacowanie:

$$\max_{\tau_n \in (\tau)^\delta} \mathbb{E} \left((X_{\tau_n} - Y_n^\delta)^2 \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq C\delta^3.$$

Został on zaproponowany w pracy [11], dlatego tymczasowo będzie nazywany *schematem M*. Jest następującej postaci:

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^\delta &= Y_n^\delta + \left(a - \frac{bb'_x}{2} \right) \Delta_n + b\Delta W_n + \left(\frac{c_{cc}^{**}}{3} - \frac{7c_c^*}{6} + \frac{11c}{6} \right) \Delta N_n + \\ &+ \frac{bb'_x}{2} (\Delta W_n)^2 + \left(-\frac{c_{cc}^{**}}{2} + \frac{3c_c^*}{2} - c \right) (\Delta N_n)^2 + \\ &+ \left(b'_t + ab'_x - \frac{b^2 b''_x}{2} \right) \Delta_n \Delta W_n + \left(ba'_x - b'_t - ab'_x - \frac{b^2 b''_{xx}}{2} \right) Z_n + \\ &+ \left(a_c^* - a - c'_t - ac'_x - \frac{b^2 c''_{xx}}{2} - k + \frac{bb'_x}{2} + g \right) (\Delta_n \Delta N_n - S_{T,n}^{1,1}) + \\ &+ \left(c'_t + ac'_x - \frac{bb'_x c'_x}{2} \right) \Delta_n \Delta N_n + \left(\frac{b(b'_x)^2}{2} + \frac{b^2 b''_{xx}}{2} \right) (\Delta W_n)^3 + \\ &+ \left(\frac{b_{cc}^{**}}{2} - \frac{b}{2} + bc'_x - bb'_x - 2k - 2p - 2g + q + 2h \right) \Delta W_n \Delta N_n + \\ &+ \left(-\frac{b_{cc}^{**}}{2} + \frac{b}{2} + 2k + 2p + bb'_x + 2g - 2h - \frac{3q}{2} + \frac{bc_x}{2} \right) S_{W,n}^{1,1} + \\ &+ \left(\frac{c_{cc}^{**}}{6} - \frac{c_c^*}{3} + \frac{c}{6} \right) (\Delta N_n)^3 + \left(\frac{q}{2} + \frac{bc'_x}{2} \right) \Delta W_n (\Delta N_n)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(h - k - \frac{bb'_x}{2} \right) (\Delta W_n)^2 (\Delta N_n)^2 + (2k - h) \Delta W_n (\Delta W_n \Delta N_n - S_{W,n}^{1,1}) + \\
& + \left(-\frac{b_{cc}^{**}}{2} + b_c^* - \frac{b}{2} + 2p + k + \frac{bb'_x}{2} + g - h - \frac{bc'_x}{2} - \frac{3q}{2} \right) \times \\
& \quad \times \Delta N_n (\Delta W_n \Delta N_n - S_{W,n}^{1,1}) + \\
& + \left(-\frac{b_{cc}^{**}}{2} + b_c^* - \frac{b}{2} + p + 2k + bb'_x + 2g - 2h - \frac{bc'_x}{2} - \frac{q}{2} \right) \times \\
& \quad \times (S_{W,n}^{1,2} + \Delta W_n (\Delta N_n)^2 - 2S_{W,n}^{2,1} - S_{W,n}^{1,1}) + \\
& + \left(\frac{b_{cc}^{**}}{2} - b_c^* + \frac{b}{2} - p - k - \frac{bb'_x}{2} - g + h + \frac{bc'_x}{2} + \frac{q}{2} \right) \times \\
& \quad \times \Delta N_n (S_{W,n}^{1,2} + \Delta W_n (\Delta N_n)^2 - 2S_{W,n}^{2,1} - S_{W,n}^{1,1}) ,
\end{aligned}$$

gdzie

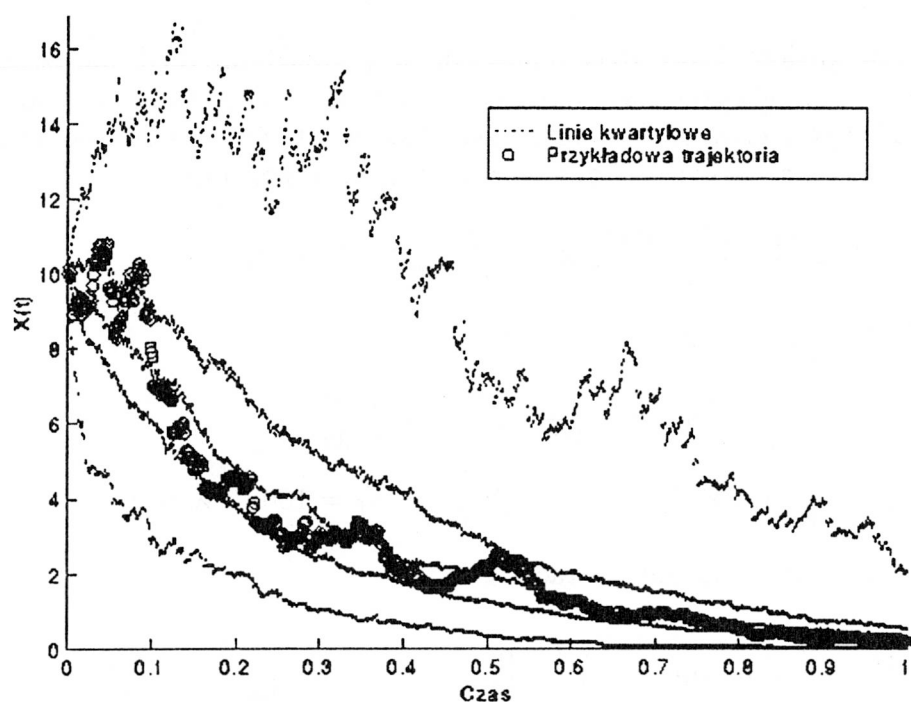
$$\begin{aligned}
g &= \frac{1}{2} b (b'_x c'_x + bc''_{xx}) , & h &= b(b'_x)_c^* (1 + c'_x) , \\
k &= \frac{1}{2} b_c^* (b'_x)_c^* , & p &= b_c^* (c'_x)_c^* , & q &= b(c'_x)_c^* (1 + c'_x) .
\end{aligned}$$

W powyższym schemacie nietrudno zauważyć znaczne rozbieżności w stosunku do aproksymacji (3.6). Chyba najistotniejsza jest taka, że nie uwzględnia on składników $f_{(0,0)}I_{(0,0)}$ i $f_{(-1,1)}I_{(-1,1)}$, a ponadto różni się w postaci kilku współczynników przy całkach wyższych rzędów i zawiera kilka członów z rozwinięcia Taylora-Itô, jak np. całki poczwórne po W i N , które nie są konieczne do osiągnięcia tej szybkości zbieżności, a więc mogą zbędnie wydłużać czas obliczeń. Oczywiście mogą one również wpływać na polepszenie jego dokładności, ale nie tak znaczące, by zwiększyć rząd zbieżności. Co więcej, wbrew zapewnieniom autora, gdy w równaniu (1.1) znika człon wywołujący skoki ($c(t, x) \equiv 0$), schemat M nie redukuje się do aproksymacji rzędu $\frac{3}{2}$ z monografii [9] dla zwykłej dyfuzji Itô.

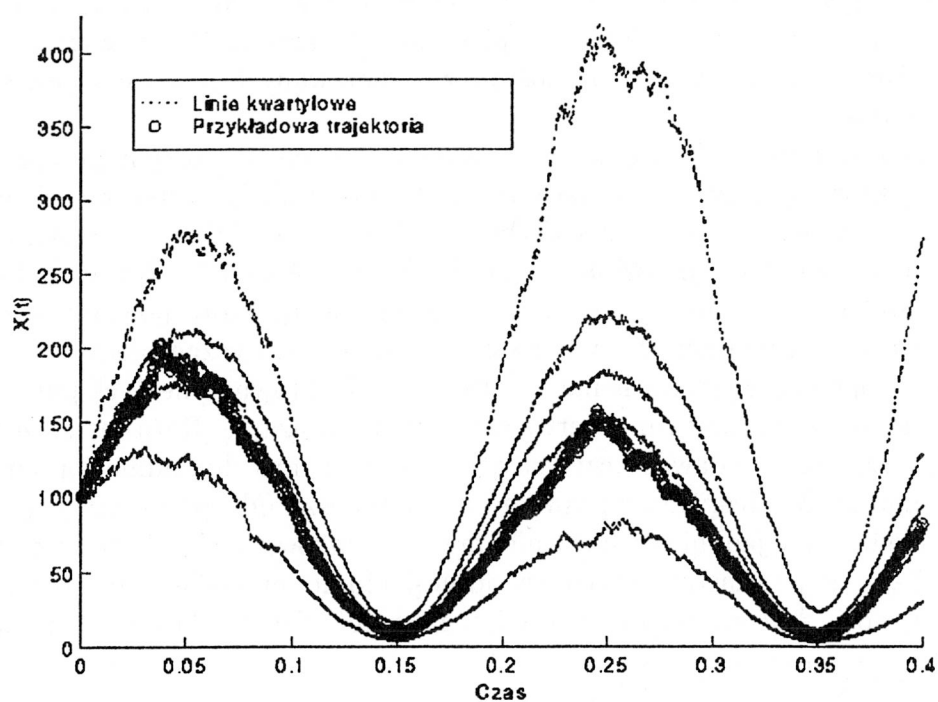
Jest jasne, że wyniki komputerowych eksperymentów nie mogą tu służyć jako dowody stawianych hipotez, gdyż odnoszą się jedynie do wybranych, szczególnych przypadków. I nie mają takiego przeznaczenia. Formalne dowody przedstawione zostały we wcześniejszych rozdziałach, a teraz dokonana będzie ich praktyczna weryfikacja i przedyskutowane zostaną pewne szczególne problemy obliczeniowe. Do porównań zostaną wykorzystane dwa równania. Pierwsze to autonomiczne równanie liniowe o następujących parametrach:

$$\begin{cases} a(t, x) = 2x , & b(t, x) = \frac{1}{2}x , & c(t, x) = -\frac{1}{10}x , \\ J = [0, 1] , & X_0 = 10 , & \lambda = 50 , \end{cases} \quad (4.1)$$

Rysunek 4.1: Przykładowa trajektoria i empiryczne linie kwantylowe procesu będącego rozwiązaniem równania (4.1).



Rysunek 4.2: Przykładowa trajektoria i empiryczne linie kwantylowe procesu będącego rozwiązaniem równania (4.2).



którego rozwiązanie analityczne ma postać:

$$X_t = 10 \left(\frac{9}{10} \right)^{N_t} \exp \left(\frac{15}{8}t + \frac{1}{2}W_t \right).$$

Z pewnych względów, które były omawiane w poprzednim rozdziale, zostanie zademonstrowane, jak działają porównywane schematy na równaniu, w którym dominującą rolę odgrywa część deterministyczna, a zaburzenia losowe są stosunkowo niewielkie, stąd drugie testowe równanie ma współczynniki:

$$\begin{cases} a(t, x) = \frac{10\pi \cos(10\pi t)}{r(t)}x + 12t\sqrt[3]{r(t)x^2} + 3\sqrt[3]{r^2(t)x} \\ b(t, x) = 3\sqrt[3]{r(t)x^2} \\ c(t, x) = \frac{-3t}{10}\sqrt[3]{r(t)x^2} + \frac{3t^2}{100}\sqrt[3]{r^2(t)x} - \frac{t^3 r(t)}{1000} \\ r(t) = \frac{11}{10} + \sin(10\pi t), \quad J = [0, \frac{2}{5}], \quad X_0 = 100, \quad \lambda = 30, \end{cases} \quad (4.2)$$

a jego analityczne rozwiązanie postać:

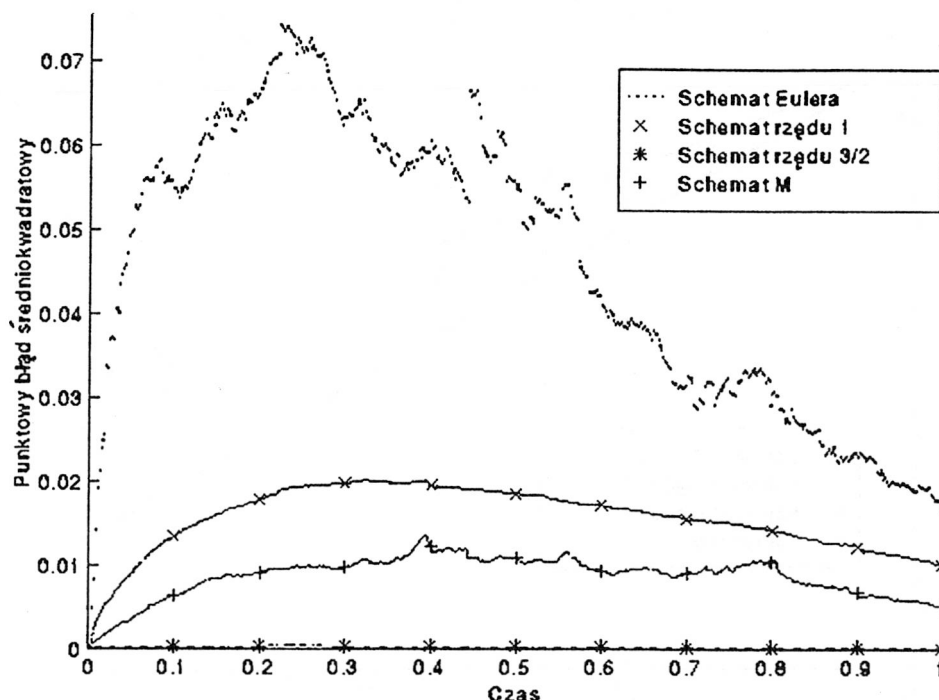
$$X_t = \left(\frac{11}{10} + \sin(10\pi t) \right) \left(\frac{10}{\sqrt[3]{11}} + 2t^2 + W_t - \frac{1}{10} \int_0^t s dN_s \right)^3.$$

Przybliżone linie kwartyłowe¹ obu powyższych procesów oraz ich przykładowe realizacje można zobaczyć na rysunkach 4.1 i 4.2. Pozwalają one na uzyskanie pewnego wyobrażenia o zachowaniu się rozważanych procesów. W obu przypadkach dwie skrajne krzywe, odpowiadające empirycznym kwartyłom 0 i 1, wyznaczają minimalne i maksymalne wartości spośród wygenerowanych ścieżek w poszczególnych punktach.

Z przeprowadzonych eksperymentów, wykonywanych w każdym przypadku dla 100 trajektorii, pokazane zostaną wyniki ukazujące błędy punktowe schematów (rys.4.3), ich empiryczną prędkość zbieżności (rys. 4.4 i 4.6) oraz ich skuteczność w osiąganiu założonego poziomu dokładności (rys. 4.5 i 4.7). Równanie (4.1) jest być może banalne, ale doskonale ilustruje problemy, które powinny zostać zaprezentowane. Na rysunku 4.3 wykreślone zostały empiryczne błędy średniokwadratowe popełniane przez schematy w każdym z 500 równoodległych punktów podziału odcinka J , na którym obserwowane jest rozwiązanie. Rezultat może się na pierwszy rzut oka wydawać oczywisty, warto się jednak dokładniej przyjrzeć wynikom metody M. Jest ona wprawdzie dokładniejsza od aproksymacji (3.3), która jest rzędu 1, ale jedynie dwukrotnie, przy stosunkowo małej długości kroku, wynoszącej $\frac{1}{500}$, co jest zastanawiające w odniesieniu do jej deklarowanego rzędu, mającego wynosić $\frac{3}{2}$. Jeszcze istotniejszy jest fakt, że schemat (3.6), który miałby

¹Linie odpowiadające kwartyłom 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ i 1.

Rysunek 4.3: *Empiryczne punktowe błędy średniokwadratowe na przedziale obserwacji przy równomiernym podziale, gdy $\delta = \frac{1}{500}$ (równanie (4.1)).*

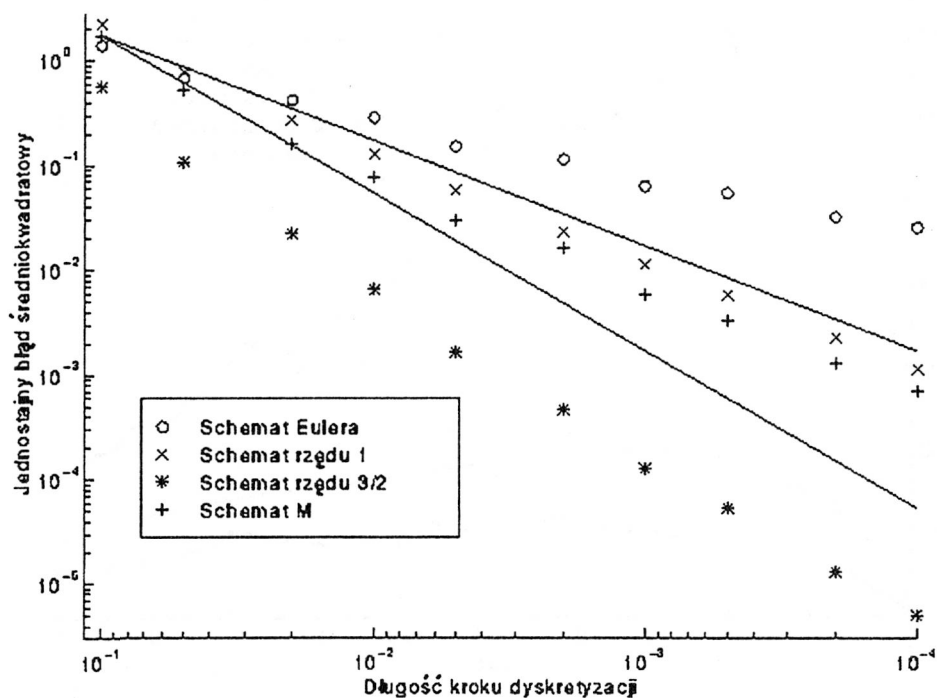


być tego samego rzędu, jest od niej zdecydowanie skuteczniejszy, a popełniane przez ten schemat przy tej dyskretyzacji błędy są na rysunku niemalże niedostrzegalne, gdyż maksymalny wynosi tu zaledwie $3,0315 \cdot 10^{-4}$.

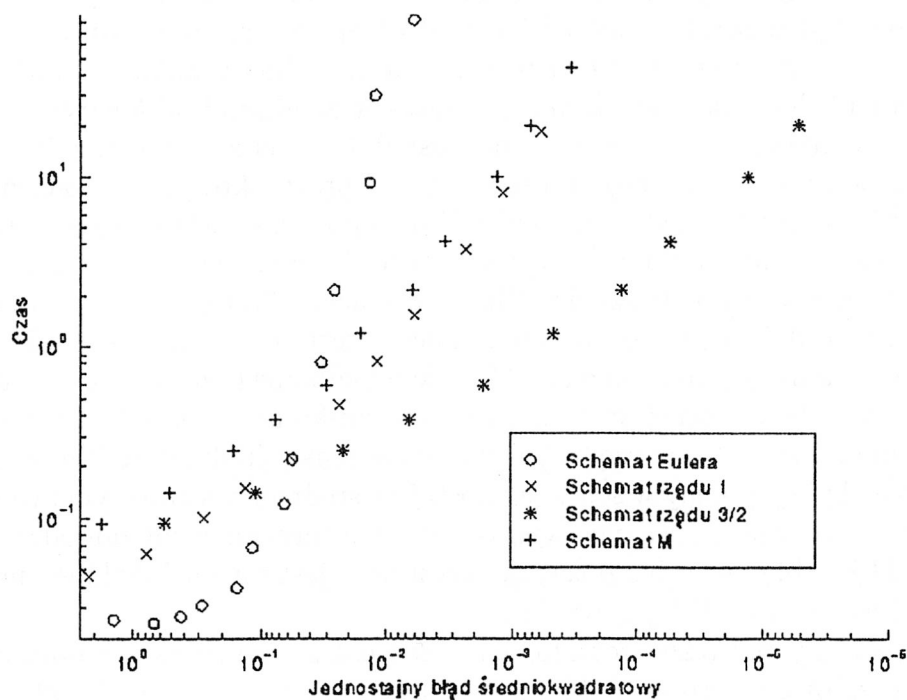
Jednak nawet maksymalny średniokwadratowy błąd punktowy jest zawsze mniejszy, niż błąd w sensie zbieżności jednostajnej, dlatego w kolejnych eksperymentach uwaga zostanie skupiona właśnie na nim. Na rysunku 4.4 widać logarytmy tych błędów dla wszystkich schematów w zależności od logarytmu długości kroku dyskretyzacji. Jak wynika bezpośrednio z definicji rzędu zbieżności, teoretycznie powinny one asymptotycznie tworzyć proste, których współczynniki nachylenia równe są tym rzędom (zob.[9]). Z tego powodu dodatkowo nakreślone zostały proste o nachyleniu 1 i $\frac{3}{2}$. Wyraźnie widać, że eksperyment potwierdza wcześniejsze teoretyczne rozważania. Błędy schematu (3.6) faktycznie układają się równolegle do dolnej prostej. Zupełnie inaczej jest ze schematem M. Jest on wprawdzie dokładniejszy niż schemat (3.3), ale popełniane przez tą aproksymację błędy są równoległe do górnej prostej, o współczynniku nachylenia 1. Trzeba jednak przypomnieć, że jest ona rzędu $\frac{3}{2}$ w zwykłym sensie średniokwadratowym, a tu sprawdzane były jej błędy w sensie jednostajnie średniokwadratowym i właśnie to może być przyczyną uzyskanych wyników. Ten eksperyment nie dowodzi więc, że schemat M jest błędny, tylko pokazuje, jak mocny jest warunek jednostajności, co potwierdzają również kolejne wyniki.

Na rysunku 4.5 pokazane zostało, jaki czas należy poświęcić na obliczenia, aby uzyskać założony poziom dokładności. Jest to o tyle istotne, że schematy

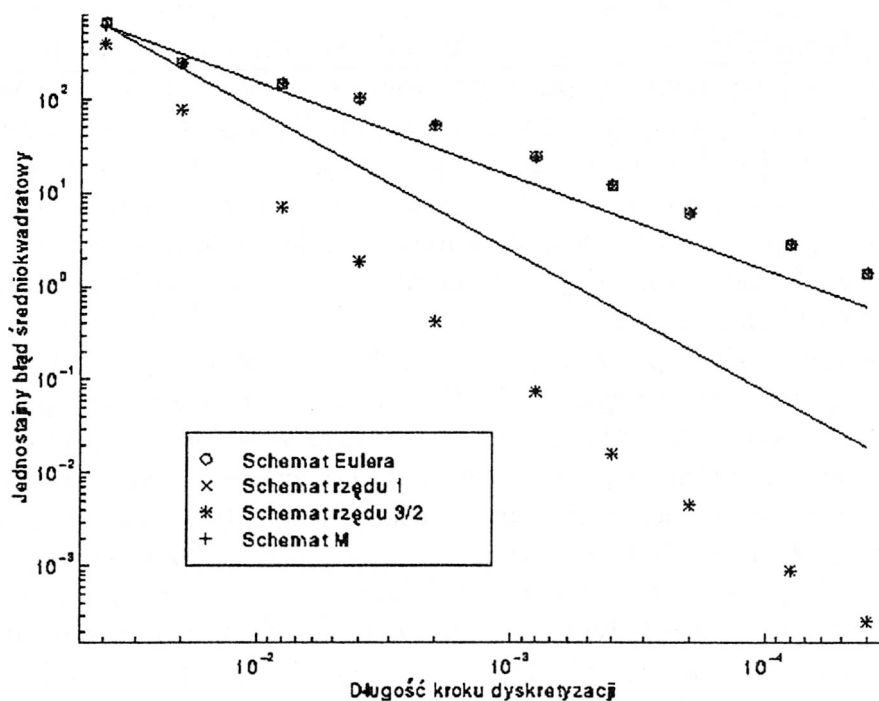
Rysunek 4.4: Empiryczne błędy w normie $\mathcal{L}^2$ w zależności od długości kroku przy równomiernym podziale w skali podwójnie logarytmicznej (równanie (4.1)).



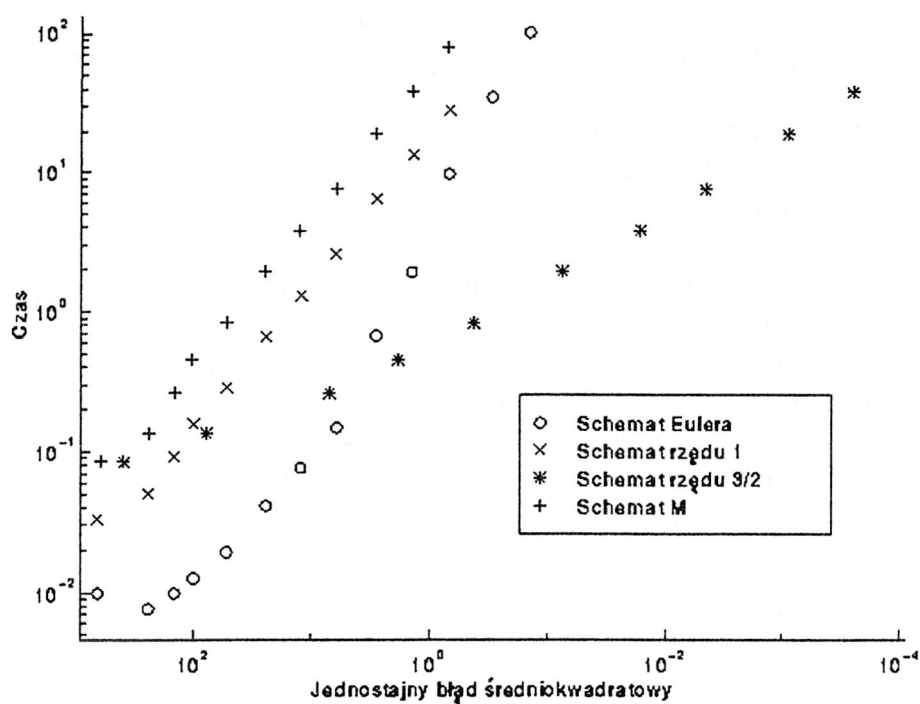
Rysunek 4.5: Czas obliczeń potrzebny do uzyskania założonej dokładności w skali podwójnie logarytmicznej (równanie (4.1)).



Rysunek 4.6: Empiryczne błędy w normie $\mathcal{L}^2$ w zależności od długości kroku przy równomiernym podziale w skali podwójnie logarytmicznej (równanie (4.2)).



Rysunek 4.7: Czas obliczeń potrzebny do uzyskania założonej dokładności w skali podwójnie logarytmicznej (równanie (4.2)).



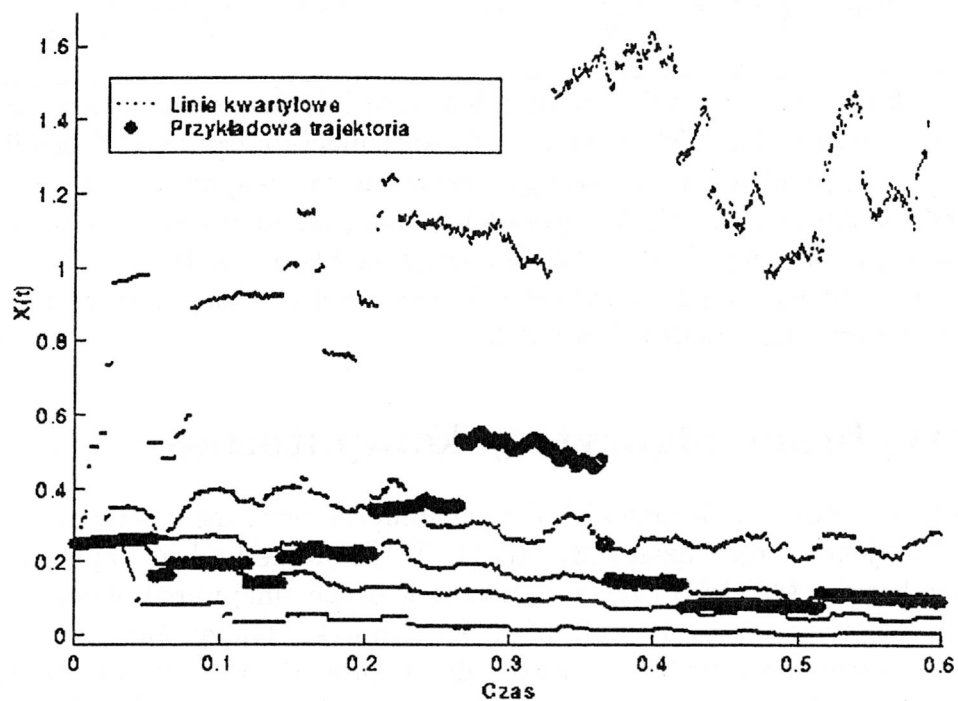
dokładniejsze są zwykle bardziej skomplikowane obliczeniowo i należy sprawdzić, czy czas konieczny do przeprowadzenia bardziej złożonych obliczeń nie jest zbyt długi w porównaniu z czasem zaoszczędzonym w wyniku zwiększonej dokładności. I faktycznie, co prawda metoda (3.6) przeszła ten test pomyślnie i mimo swej rozbudowanej formuły jest w tym przypadku najefektywniejsza w rozpatrywanej grupie, ale z wyżej wymienionej przyczyny aproksymacja (3.3) okazała się tu lepsza od schematu M, który jest wyższego rzędu. Wydaje się, że kluczowym powodem tak niskiej efektywności tego ostatniego jest pominięcie w nim składnika $f_{(0,0)}I_{(0,0)}$. To właśnie jego brak powoduje, że gdy w równaniu (1.1) nie występują skoki ($c(t, x) \equiv 0$), schemat M nie redukuje się do schematu rzędu $\frac{3}{2}$ z monografii [9]. Podane wnioski jeszcze dobitniej zostaną potwierdzone przez eksperymenty na równaniu (4.2).

Rysunek 4.6 może się na pierwszy rzut oka wydawać nieczytelny. Dzieje się tak dlatego, że błędy schematów rzędu 1, M i Eulera są tu bardzo zbliżone, przez co zlewają się na wykresie i wszystkie układają się równolegle do prostej o nachyleniu 1. Jedynie błędy popełniane przez schemat (3.6) są znacząco mniejsze i asymptotycznie tworzą prostą o nachyleniu nawet większym niż $\frac{3}{2}$ (właściwie nachylenie to osiąga wartość 2). Dodatkowo porównanie efektywności obliczeniowej (rys.4.7) pokazuje, że od bardzo prostego schematu Eulera szybsza w uzyskaniu zadanej dokładności jest tym razem jedynie metoda rzędu $\frac{3}{2}$. Wy tłumaczeniem takiego stanu rzeczy może być fakt, że w równaniu (4.2) dominującą rolę w zmienności procesu X odgrywa część deterministyczna. Tymczasem jeżeli w porównywanych schematach wyeliminuje się składniki losowe ($b(t, x) \equiv c(t, x) \equiv 0$), to jedynie aproksymacja (3.6) osiągnie (deterministyczny) rząd 2, ponieważ tylko ona zawiera składnik $f_{(0,0)}I_{(0,0)}$. Wszystkie pozostałe będą natomiast rzędu 1, zgodnie z wyjaśnieniami podanymi w poprzednim rozdziale. W ten sam sposób można tłumaczyć fakt, że poprawa efektywności obliczeń przy przejściu od aproksymacji rzędu 1 do rzędu $\frac{3}{2}$ jest wiele większa niż analogiczna poprawa przy przejściu od rzędu $\frac{1}{2}$ do rzędu 1, co potwierdza wcześniejsze przypuszczenia. Tym bardziej więc uzasadnionym wydaje się podejrzenie, że poprawa efektywności przy przejściu od rzędu $\frac{3}{2}$ do rzędu 2 nie byłaby w ogólnym przypadku wyraźna, a w takich równaniach, jak właśnie rozważane, mogłoby jej wogóle nie być. Oczywiście nie można tego stwierdzić z całą pewnością, dopóki nie zostaną przeprowadzone odpowiednie eksperymenty.

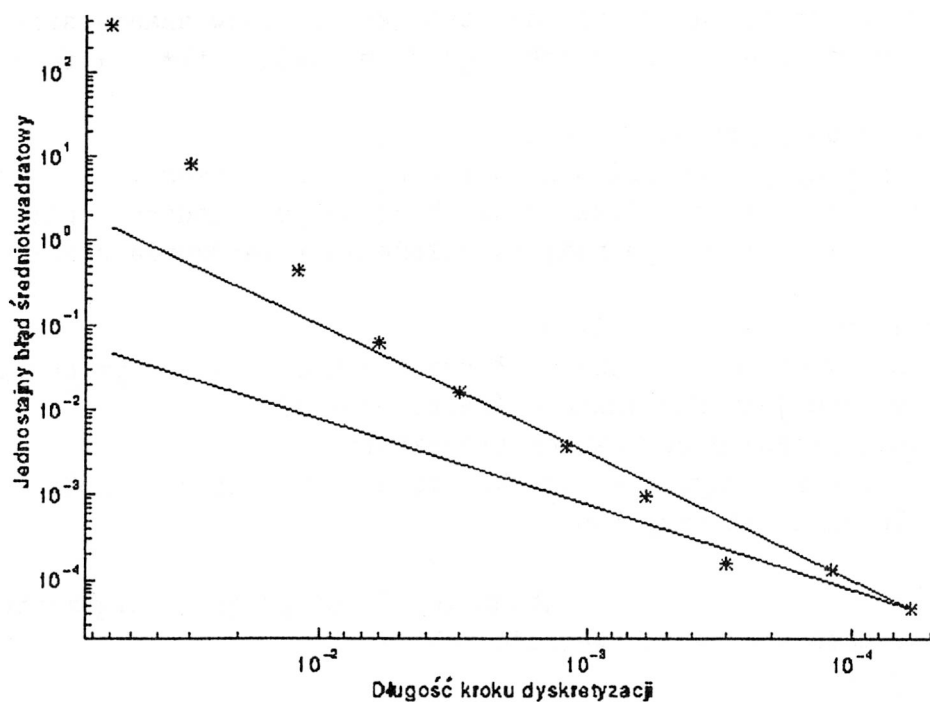
Pozostała jeszcze do sprawdzenia jedna teza, że aproksymacja (3.6) zachowuje dowiedzioną prędkość zbieżności nawet w przypadku, gdy nie zachodzi warunek (3.4). Do tego testu potrzeba jednak innego równania, ponieważ, jak wynika z twierdzenia 3.6, dla równań (4.1) i (4.2) warunek (3.4) jest spełniony. Można natomiast rozważyć równanie o współczynnikach:

$$\begin{cases} a(t, x) = \cos(10t)x, & b(t, x) = tx, & c(t, x) = \frac{\sin(100t)x}{2} \\ J = [0, \frac{3}{5}], & X_0 = \frac{1}{4}, & \lambda = 20, \end{cases} \quad (4.3)$$

Rysunek 4.8: Przykładowa trajektoria i empiryczne linie kwantylowe procesu będącego rozwiązaniem równania (4.3).



Rysunek 4.9: Empiryczne błędy schematu (3.6) w normie $\mathcal{L}^2$ w zależności od długości kroku przy równomiernym podziale w skali podwójnie logarytmicznej (równanie (4.3)).



z rozwiązaniem analitycznym

$$X_t = \frac{1}{4} \exp \left(\frac{1}{10} \sin(10t) - \frac{t^3}{6} + \int_0^t s dW_s + \int_0^t \ln \left(1 + \frac{\sin(100s)}{2} \right) dN_s \right).$$

Podobnie jak przy poprzednich równaniach pewne informacje o zachowaniu się tego procesu można odczytać z rysunku 4.8, pokazującego jego przybliżone linie kwartylowe oraz przykładową realizację. Oczywiście łatwo sprawdzić, że w tym przypadku tożsamość (3.4) nie jest prawdziwa. Jednak, co zostało pokazane na rysunku 4.9, przybliżenie (3.6) zachowało swoją szybkość zbieżności (widoczne proste mają nachylenia 1 i $\frac{3}{2}$), co w pewnej mierze potwierdza słuszność weryfikowanych tu rozważań z podrozdziału 3.3.

4.2 Wybrane algorytmy komputerowe

Na koniec zostaną omówione niektóre zagadnienia związane z generowaniem przybliżeń trajektorii rozwiązań równania (1.1). Wszystkie funkcje napisane zostały w środowisku MATLAB i zostaną podane w oryginalnej wersji, jednak uzupełnione obszernymi komentarzami, dzięki którym dokładna znajomość tego języka programowania nie będzie konieczna do zrozumienia algorytmów. W najprostszym przypadku, gdy trajektorie są przybliżane przez schemat Eulera, odpowiada za to następująca funkcja `tay205()`:

```
function Y05=tay205(X0,time,lambda,m);
%% Y05 = tay205 ( X0 , time , lambda , m ) ; -----
%% Funkcja wyznaczająca przybliżone trajektorie rozwiązania sto-
%% chastycznego równania różniczkowego dX = fa*dt + fb*dW + fc*dN,
%% gdzie
%% W - standardowy proces Wienera,
%% N - jednorodny proces Poissona o intensywności lambda,
%% fa,fb,fc - rzeczywiste funkcje dwóch zmiennych, zadane w plikach *.m, spełniające założenia twierdzenia o zbieżności,
%% X0 - stan procesu w chwili t0,
%% time - zdyskretyzowany przedział czasu [t0,T], na którym poszukiwane jest rozwiązanie (delta-podział),
%% m - zadana liczba generowanych trajektorii.
%% Poszczególne aproksymacje trajektorii umieszczane są w kolejnych kolumnach macierzy Y05.

if nargin<3                                %badanie liczby podanych argumentów
    error('Za mało argumentów wejściowych!');
elseif nargin<4
```

```

    m=100;                                %domyślnie dla 100 trajektorii
elseif nargin>4
    error('Za dużo argumentów wejściowych!');
end;

time=time(:);
dt=diff(time);                            %przyrosty czasu
n=length(dt);                             %liczba podprzedziałów czasu

Początkowa macierz rozwiązań wymiaru (n+1)×m; wszystkie trajektorie startują
od wartości  $X_{t_0} = X_0$ , pozostałe elementy są na razie zerowe; należy wziąć
pod uwagę, że w języku MATLAB macierze są indeksowane od 1, więc wartości
początkowe  $X_{t_0}$  będą elementami Y05(1,:), a chwila  $t_0$  – czasem time(1):

Y05=[X0*ones(1,m);zeros(n,m)]; %macierz rozwiązań (przyrostów N)

Generowanie przyrostów procesu Wienera poprzez wygenerowanie n·m zmien-
nych losowych  $iid \sim N(0, 1)$  za pomocą funkcji randn() i przeskalowanie ich przez
pierwiastki z przyrostów czasu:

dW=(sqrt(dt)*ones(1,m)).*randn(n,m); %macierz przyrostów W

Generowanie przyrostów procesu Poissona poprzez wygenerowanie punktów jego
skoków, czyli ciągu  $iid \sim Exp(\lambda)$ , za pomocą funkcji rande(); czasy skoków
wyznaczone są, dopóki nie zostanie przekroczony przedział time; tymczasowo, dla
zaoszczędzenia miejsca w pamięci operacyjnej, przyrosty N będą przechowywane
w macierzy rozwiązań Y05:

for j=1:m                                %oddzielnie dla każdej trajektorii
    lastjp=time(1)+rande(lambda);          %czas pierwszego skoku
    while lastjp<=time(n+1) %wykonuj, aż czas skoku przekroczy time
        i=sum(time<lastjp);                %indeks chwili przed skokiem
        Y05(i+1,j)=Y05(i+1,j)+1;           %zwiększenie przyrostu o 1 skok
        lastjp=lastjp+rande(lambda);        %czas następnego skoku
    end;                                   %wróć do sprawdzenia warunku while
end;                                     %przejdź do skoków następnej trajektorii

Jednoczesna aproksymacja wszystkich m trajektorii w kolejnych chwilach:

for i=1:n                                %oddzielnie dla każdej chwili
    Y05(i+1,:)=Y05(i,:)+fa(time(i),Y05(i,:))*dt(i)+...
        fb(time(i),Y05(i,:)).*dW(i,:)+...
        fc(time(i),Y05(i,:)).*...
        Y05(i+1,:);                      %przyrosty N
end;

%% END tay205.m -----

```

Zmienne losowe, a właściwie pseudolosowe, generowane są za pomocą standardowego generatora kongruentnego (zob.[9]), w który wyposażony jest MATLAB, reprezentowanego przez funkcje `rand()` ($\sim Uni(0, 1)$) i `randn()` ($\sim N(0, 1)$). Większość użytych funkcji to standardowe funkcje programu, oprócz `fa()`, `fb()`, `fc()` i `rande()`, które muszą być zdefiniowane w oddzielnych plikach o nazwach odpowiadających nazwie funkcji z rozszerzeniem `.m`. Pierwsze trzy zawierają definicje współczynników a , b i c z równania dyfuzji skokowej, natomiast ostatnia generuje zmienne o rozkładzie wykładniczym z rozkładu jednostajnego poprzez odwrócenie dystrybuanty. Funkcja ta, zapisana w pliku o nazwie `rande.m`, zostanie podana poniżej.

```
function X=rande(lambda,n,m);
%% X = rande ( lambda , n , m ) ; -----
%% Generuje macierz n*m liczb pseudolosowych o rozkładzie wykład-
%% niczym z parametrem lambda > 0.

if (nargin==0)                                %badanie liczby podanych argumentów
    lambda=1; n=1; m=1;    %wartości domyślne, gdy za mało argumentów
elseif (nargin==1)
    n=1; m=1;
elseif (nargin==2)
    m=1;
else
    error('Za dużo argumentów wejściowych!');
end;

if lambda>0                                    %tylko dla dodatniej intensywności
    X=-(1/lambda)*log(rand(n,m));    %F^{-1} w n*m punktach ~Uni(0,1)
else
    error('Wszystkie parametry muszą być dodatnie!');
end;

%% END rande.m -----
```

Ze względu na niezależność przyrostów i ich rozkład $\sim N(0, \sqrt{\Delta_n})$, wartości trajektorii procesu Wienera w punktach $(\tau)^\delta$ wyznaczone są poprzez wygenerowanie i zsumowanie tych przyrostów. Proces Poissona, podobnie jak proces Wienera, również ma niezależne przyrosty, stąd można by go generować w analogiczny sposób za pomocą ciągu iid $\sim Poi(\lambda \Delta_n)$. Jednak generowanie zmiennych o rozkładzie Poissona jest mało efektywne, dlatego tu została zastosowana inna metoda. Ponieważ odstępy czasu między kolejnymi skokami trajektorii tworzą ciąg zmiennych losowych iid $\sim Exp(\lambda)$, wystarczy generować te zmienne, aż ich suma nie przekroczy $T - t_0$, czyli długości przedziału J , a wtedy ich kolejne sumy częściowe dodane do t_0 zdefiniują chwile skoków ścieżki procesu Poissona. Takie

podejście ma jeszcze jedną zaletę. Ustalenie przyrostów określa wartość trajektorii tylko w punktach podziału, natomiast ustalenie chwil skoków definiuje ją dokładnie. W metodzie Eulera nie miało to akurat znaczenia, ale będzie miało w metodach wyższych rzędów.

Funkcja `tay205()` wykonuje obliczenia bardzo szybko również dzięki zastosowaniu tzw. *wektoryzacji*, specyficznej metody języka MATLAB polegającej na jednoczesnym wykonywaniu operacji dla całych wektorów (macierzy), co jest wiele efektywniejsze, niż stosowanie pętli (zob.[2]). Jej wadą jest jednak jednoczesne przechowywanie wszystkich przyrostów procesów sterujących, co przy problemach wymagających dużej liczby trajektorii i gęstej siatki dyskretyzacji może doprowadzić do przepełnienia dostępnej na komputerze pamięci i przerwania obliczeń. Dlatego powyższą funkcję można nieco zmodyfikować, przez co będzie wolniejsza, ale będzie zajmować około dwukrotnie mniej miejsca. Tak zmieniony algorytm realizowany jest w poniższej funkcji `tay205a()`. Poszczególne kroki, które zostały wyjaśnione w poprzedniej funkcji, nie będą ponownie komentowane.

```
function Y05a=tay205a(X0,time,lambda,m);
%% Y05a = tay205a ( X0 , time , lambda , m ) ; -----
%% (...)

if nargin<3
    error('Za mało argumentów wejściowych!');
elseif nargin<4
    m=100; %wartość domyślna
elseif nargin>4
    error('Za dużo argumentów wejściowych!');
end;

time=time(:);
dt=diff(time); %przyrosty czasu
n=length(dt); %liczba przedziałów czasu
Y05a=[X0*ones(1,m);zeros(n,m)]; %macierz rozwiązań (przyrostów N)

for j=1:m %generowanie każdej trajektorii oddzielnie
    dW=sqrt(dt).*randn(n,1); %wektor przyrostów procesu Wienera
    lastjp=time(1)+rande(lambda); %pierwszy skok
    while lastjp<=time(n+1)
        i=sum(time<lastjp);
        Y05a(i+1,j)=Y05a(i+1,j)+1; %przyrosty procesu Poissona
        lastjp=lastjp+rande(lambda);
    end;
    for i=1:n
        Y05a(i+1,j)=Y05a(i,j)+fa(time(i),Y05a(i,j))*dt(i)+...
            fb(time(i),Y05a(i,j))*dW(i)+...
```

```

                                fc(time(i),Y05a(i,j))*...
                                Y05a(i+1,j);      %przyrosty N
    end;
end;                                %przejdź do kolejnej trajektorii

%% END tay205a.m -----

```

Kolejna funkcja, czyli `tay210()`, służy do generowania aproksymacji w oparciu o schemat (3.3). O ile w poprzednich algorytmach kolejność generowania procesów wymuszających była nieistotna, tak tym razem, z powodu całki $S_{W,n}^{1,1}$, najpierw powinny zostać wygenerowane punkty skoków wybranej ścieżki procesu Poissona, ponieważ konieczna jest znajomość wartości odpowiedniej ścieżki procesu Wienera w tych punktach. Gdyby postąpiło się odwrotnie, należałoby generować te wartości z rozkładu warunkowego, mianowicie pod warunkiem istniejących już wartości W w punktach $(\tau)^\delta$, co byłoby co najmniej kłopotliwe. Funkcja ma więc następującą postać.

```

function Y10=tay210(X0,time,lambda,m);
%% Y10 = tay210 ( X0 , time , lambda , m ) ; -----
%% (...)

if nargin<3
    error('Za mało argumentów wejściowych!');
elseif nargin<4
    m=100;                                %wartość domyślna
elseif nargin>4
    error('Za dużo argumentów wejściowych!');
end;

time=time(:);
dt=diff(time);                            %przyrosty czasu
n=length(dt);                            %liczba podprzedziałów czasu

Y10=[X0*ones(1,m);zeros(n,m)]; %macierz rozwiązań, początkowo=X0,0

for j=1:m                                %odzielnie dla każdej trajektorii
    dW=zeros(n,1);                       %przyrosty procesu Wienera, początkowo=0
    dN=zeros(n,1);                       %przyrosty procesu Poissona, początkowo=0
    E=rande(lambda);                     %czas od t0 do pierwszego skoku~Exp(lambda)
    lastjp=time(1);                       %miejsce ostatniego skoku (najpierw t0)
    i=sum(time<lastjp+E);                 %indeks chwili przed skokiem
    if i>1 %jeśli miejsce 1-go skoku poza pierwszym podprzedziałem
        dW(1:i-1)=sqrt(dt(1:i-1)).*randn(i-1,1); %pełne przyrosty W
    end
end

```

Aproksymacja trajektorii w początkowych punktach podziału, między którymi nie było skoków ($dN = 0$):

```

for k=1:i-1          %oddzielnie dla każdego podprzedziału
    ffb=fb(time(k),Y10(k,j));
    ffbx=fbx(time(k),Y10(k,j));
    Y10(k+1,j)=Y10(k,j)+(fa(time(k),Y10(k,j))-...
        .5*ffb*ffbx)*dt(k)+ffb*dW(k)+.5*ffb*ffbx*dW(k)^2;
end;                %przejdź do następnego podprzedziału bez skoków

end;
while lastjp+E<=time(n+1)    %wykonuj, aż skoki przekroczą time
    Sw=0;                    %całka  $S^{\{1,1\}}_{\{W,n\}}$ , początkowo=0
    lastid=i;                %indeks chwili przed podprzedziałem ze skokami
    while i==lastid          %wykonuj, póki skoki w jednym podprzedziale
        lastjp=lastjp+E;      %chwila ostatniego skoku

```

Przyrost procesu Wienera od początku podprzedziału dyskretyzacji do ostatniego skoku uzyskiwany przez dodanie do przyrostu między początkiem podprzedziału a przedostatnim skokiem przyrostu między przedostatnim a ostatnim skokiem:

```

dW(i)=dW(i)+sqrt(min(lastjp-time(i),E))*randn;

dN(i)=dN(i)+1;                %powiększ o 1 przyrost N
Sw=Sw+dW(i);                  %dodaj kolejny składnik sumy  $S^{\{1,1\}}_{\{W,n\}}$ 
E=rande(lambda);              %czas do kolejnego skoku
i=sum(time<lastjp+E);          %indeks chwili przed kolejnym skokiem
end;                            %sprawdź warunek while-czy kolejny skok w podprzedziale

```

Pełny przyrost procesu Wienera na podprzedziale uzyskiwany przez dodanie do przyrostu między początkiem podprzedziału a ostatnim skokiem przyrostu między ostatnim skokiem a końcem podprzedziału:

```

dW(lastid)=dW(lastid)+sqrt(time(lastid+1)-lastjp)*randn;

```

Aproksymacja trajektorii w chwili kończącej podprzedział czasu, na którym wystąpiły skoki:

```

ffb=fb(time(lastid),Y10(lastid,j));    %współczynniki funkcyjne
ffc=fc(time(lastid),Y10(lastid,j));
ffbc=fb(time(lastid),Y10(lastid,j)+ffc);    % $b^{\{*\}}_{\{c\}}$ 
ffcc=fc(time(lastid),Y10(lastid,j)+ffc);    % $c^{\{*\}}_{\{c\}}$ 
ffbx=fbx(time(lastid),Y10(lastid,j));
Y10(lastid+1,j)=Y10(lastid,j)+...
    (fa(time(lastid),Y10(lastid,j))-...
    .5*ffb*ffbx)*dt(lastid)+...
    ffb*dW(lastid)-.5*(ffcc-3*ffc)*dN(lastid)+...

```

```

.5*ffb*ffbx*dW(lastid)^2+.5*(ffcc-ffc)*dN(lastid)^2+...
(ffbc-ffb)*dW(lastid)*dN(lastid)-...
(ffbc-ffb-ffb*fcx(time(lastid),Y10(lastid,j))))*Sw;

if i>lastid+1 %jeśli po drodze były podprzedziały bez skoków
dW(lastid+1:i-1)=sqrt(dt(lastid+1:i-1)).*...
    randn(i-1-lastid,1); %pełne przyrosty W
for k=lastid+1:i-1 %aproksymacje bez skoków
    ffb=fb(time(k),Y10(k,j));
    ffbx=fbx(time(k),Y10(k,j));
    Y10(k+1,j)=Y10(k,j)+(fa(time(k),Y10(k,j))-...
        .5*ffb*ffbx)*dt(k)+ffb*dW(k)+.5*ffb*ffbx*dW(k)^2;
end; %przejdź do następnego podprzedziału bez skoków
end;
end; %sprawdź warunek while dla kolejnej chwili skoku
end; %przejdź do następnej trajektorii

%% END tay210.m -----

```

Powyższy algorytm wymaga częstego odwoływania się do kilku zewnętrznych plików, zawierających definicje współczynników funkcyjnych ($fa()$, $fb()$ i $fc()$, czyli a , b i c) z równania (1.1) oraz niektórych ich pochodnych cząstkowych ($fbx()$ i $fcx()$, czyli b'_x i c'_x). Jest to bardzo czasochłonne obliczeniowo, dlatego jeśli dana wartość zewnętrznej funkcji jest wykorzystywana więcej niż raz, korzystnie jest przypisać ją jakiejś lokalnej zmiennej wewnątrz głównej funkcji, co tu właśnie zostało zrobione. Ponadto tym razem, ze względu na całkę $S_{W,n}^{1,1}$, nie było możliwe zastosowanie wektoryzacji, gdyż wartość tej całki musi być wyznaczana przez sumowanie przyrostów procesu Wienera do kolejnych punktów skoków na każdym pododcinku dyskretyzacji. Jedynie gdy w kilku kolejnych podprzedziałach dyskretyzacji nie występował żaden skok trajektorii procesu Poissona, można było wykonać obliczenia jednocześnie dla nich wszystkich. Ogólnie jednak wymienione czynniki powodują spowolnienie działania metody (3.3). Jeżeli dodatkowo weźmie się pod uwagę, że sama jej formuła jest bardziej skomplikowana niż w przypadku schematu Eulera, to nietrudno wywnioskować, że mimo, iż jest ona wyższego rzędu, będzie w niektórych przypadkach wolniejsza, co zresztą wykazały eksperymenty komputerowe z poprzedniego podrozdziału.

Podobne utrudnienia napotyka się w schemacie (3.6). Występuje tu nawet więcej całek, wymagających znajomości chwil skoków ścieżek procesu Poissona i trzeba odwoływać się do jeszcze większej ilości pojawiających się zewnętrznych funkcji. Jednak jedynym jakościowo nowym problemem jest generowanie całek Z_n za pomocą formuły (3.5), dlatego funkcja `tay215()`, mimo, że bardziej rozbudowana, jest bardzo podobna do poprzedniej.

```
function Y15=tay215(X0,time,lambda,m);
```

```

%% Y15 = TAY215 ( X0 , time , lambda , m ) ; -----
%% (...)

if nargin<3
    error('Za mało argumentów wejściowych!');
elseif nargin<4
    m=100; %wartość domyślna
elseif nargin>4
    error('Za dużo argumentów wejściowych!');
end;

time=time(:);
dt=diff(time); %przyrosty czasu
n=length(dt); %liczba podprzedziałów czasu

Y15=[X0*ones(1,m);zeros(n,m)]; %macierz rozwiązań, początkowo=X0,0

for j=1:m
    dW=zeros(n,1); %przyrosty W, początkowo=0
    dZ=zeros(n,1); %całki Z_{n}, początkowo=0
    dN=zeros(n,1); %przyrosty N, początkowo=0
    E=rande(lambda); %czas do kolejnego skoku
    lastjp=time(1); %poprzedni skok
    i=sum(time<lastjp+E); %indeks chwili przed skokiem
    if i>1 %początkowe podprzedziały bez skoków
        dW(1:i-1)=sqrt(dt(1:i-1)).*randn(i-1,1);

        Całka  $Z_n$  na początkowych podprzedziałach, na których nie wystąpiły skoki:

        dZ(1:i-1)=.5*dt(1:i-1).*(dW(1:i-1)+...
            sqrt(dt(1:i-1)/3).*randn(i-1,1));

        for k=1:i-1 %aproksymacje bez skoków
            ffa=fa(time(k),Y15(k,j));
            ffb=fb(time(k),Y15(k,j));
            ffbt=fbt(time(k),Y15(k,j));
            ffax=fax(time(k),Y15(k,j));
            ffbx=fbx(time(k),Y15(k,j));
            ffbxx=fbxx(time(k),Y15(k,j));
            Y15(k+1,j)=Y15(k,j)+(ffa-.5*ffb*ffbx)*dt(k)+ffb*dW(k)+...
                .5*ffb*ffbx*dW(k)^2+.5*(fat(time(k),Y15(k,j))+...
                ffa*ffax+.5*ffb^2*ffaxx(time(k),Y15(k,j)))*dt(k)^2+...
                (ffbt+ffa*ffbx-.5*ffb*ffbx^2)*dW(k)*dt(k)+...
                (ffb*ffax-ffbt-ffa*ffbx-.5*ffb^2*ffbxx)*dZ(k)+...

```

```

        (ffb/6)*(ffbx^2+ffb*ffbxx)*dW(k)^3;
    end;
end;
while lastjp+E<=time(n+1)    %wykonuj, aż skoki przekroczą time
    Sw=0;                    %całka  $S^{1,1}_{W,n}$ , początkowo=0
    St=0;                    %całka  $S^{1,1}_{T,n}$ , początkowo=0
    Sw2=0;                   %całka  $S^{2,1}_{W,n}$ , początkowo=0
    Sw12=0;                  %całka  $S^{1,2}_{W,n}$ , początkowo=0
    lastid=i;
    while i==lastid          %wykonuj, póki skoki w jednym podprzedziale
        lastjp=lastjp+E;

```

Przyrost procesu Wienera między kolejnymi skokami lub między skokiem a początkiem podprzedziału dyskretyzacji:

```

    U=sqrt(min(lastjp-time(i),E))*randn;    %podprzyrost W

```

Całka Z_n od początku podprzedziału dyskretyzacji do ostatniego skoku uzyskiwana przez dodanie do całki między początkiem podprzedziału a przedostatnim skokiem całki między przedostatnim a ostatnim skokiem:

```

    dZ(i)=dZ(i)+.5*min(lastjp-time(i),E)*...
        (U+sqrt(min(lastjp-time(i),E)/3)*randn)+...
        min(lastjp-time(i),E)*dW(i);    %Z_{n} do ostatniego skoku

    dW(i)=dW(i)+U;                    %przyrost W do ostatniego skoku
    dN(i)=dN(i)+1;                    %powiększ o 1 przyrost N

```

Dodawanie kolejnych składników do całek związanych ze skokami trajektorii procesu Poissona wewnątrz jednego podprzedziału dyskretyzacji:

```

    Sw=Sw+dW(i);                    %S^{1,1}_{W,n} do ostatniego skoku
    St=St+lastjp-time(i);           %S^{1,1}_{T,n} do ostatniego skoku
    Sw2=Sw2+dW(i)*(dN(i)-1);        %S^{2,1}_{W,n} do ostatniego skoku
    Sw12=Sw12+dW(i)^2;              %S^{1,2}_{W,n} do ostatniego skoku

    E=rande(lambda);
    i=sum(time<lastjp+E);
end;    %sprawdź warunek while dla kolejnej chwili skoku

```

Przyrost procesu Wienera od ostatniego skoku do końca podprzedziału dyskretyzacji:

```

    U=sqrt(time(lastid+1)-lastjp)*randn;    %ostatni podprzyrost W

```

Pełna całka Z_n po całym podprzedziale dyskretyzacji uzyskiwana przez dodanie do całki między początkiem podprzedziału a ostatnim skokiem całki między ostatnim skokiem a końcem podprzedziału:

```

dZ(lastid)=dZ(lastid)+.5*(time(lastid+1)-lastjp)*...
(U+sqrt((time(lastid+1)-lastjp)/3)*randn)+...
(time(lastid+1)-lastjp)*dW(lastid);  %ostatni składnik Z_{n}

```

```

dW(lastid)=dW(lastid)+U;    %pełny przyrost W na podprzedziale

```

Aproksymacja trajektorii w chwili kończącej podprzedział czasu, na którym wystąpiły skoki:

```

ffa=fa(time(lastid),Y15(lastid,j));    %współczynniki funkcyjne
ffb=fb(time(lastid),Y15(lastid,j));
ffc=fc(time(lastid),Y15(lastid,j));
ffac=fa(time(lastid),Y15(lastid,j)+ffc);    %a^{*}_{c}
ffbc=fb(time(lastid),Y15(lastid,j)+ffc);    %b^{*}_{c}
ffcc=fc(time(lastid),Y15(lastid,j)+ffc);    %c^{*}_{c}
ffbt=fbt(time(lastid),Y15(lastid,j));
ffax=fax(time(lastid),Y15(lastid,j));
ffbx=fbx(time(lastid),Y15(lastid,j));
ffcx=fcx(time(lastid),Y15(lastid,j));
ffbcc=fb(time(lastid),Y15(lastid,j)+ffc+ffcc);    %b^{**}_{cc}
ffccc=fc(time(lastid),Y15(lastid,j)+ffc+ffcc);    %c^{**}_{cc}
ffbxcc=fbx(time(lastid),Y15(lastid,j)+ffc);    %(b'_{x})^{*}_{c}
ffcxcc=fcx(time(lastid),Y15(lastid,j)+ffc);    %(c'_{x})^{*}_{c}
ffbxcc=fbxc(time(lastid),Y15(lastid,j));
Y15(lastid+1,j)=Y15(lastid,j)+...
(ffa-.5*ffb*ffbx)*dt(lastid)+ffb*dW(lastid)+...
(1/6)*(2*ffccc-7*ffcc+11*ffc)*dN(lastid)+...
.5*ffb*ffbx*dW(lastid)^2+...
.5*(fat(time(lastid),Y15(lastid,j))+ffa*ffax+...
.5*ffb^2*faxx(time(lastid),Y15(lastid,j))*dt(lastid)^2-...
.5*(ffccc-3*ffcc+2*ffc)*dN(lastid)^2+...
(ffbt+ffa*ffbx-.5*ffb*ffbx^2)*dW(lastid)*dt(lastid)+...
(ffb*ffax-ffbt-ffa*ffbx-.5*ffb^2*ffbx)*dZ(lastid)+...
(ffac-ffa-.5*(ffbc*ffbx-ffb*ffbx))*...
dN(lastid)*dt(lastid)+((ffcx+1)*(ffa-.5*ffb*ffbx)-ffac+...
.5*ffbc*ffbx+fct(time(lastid),Y15(lastid,j))*St-...
.5*(ffbcc-4*ffbc+3*ffb)*dW(lastid)*dN(lastid)+...
(ffcx-1)*(ffbc-ffb-ffb*ffcx)*Sw+...
(ffb/6)*(ffbx^2+ffb*ffbx)*dW(lastid)^3+...
(1/6)*(ffccc-2*ffcc+ffc)*dN(lastid)^3+...
.5*(ffbc*ffbx-ffb*ffbx)*dW(lastid)^2*dN(lastid)-...
ffbx*(ffbc-ffb-ffb*ffcx)*dW(lastid)*Sw+...
((ffcx+1)*(2*ffbc-ffb-ffb*ffcx)-ffbcc)*Sw2+...
.5*(ffbcc-2*ffbc+ffb)*dW(lastid)*dN(lastid)^2-...

```



```

ffcxc*(ffbc-ffb-ffb*ffcxc)*dN(lastid)*Sw+...
(ffbxc*(.5*ffbc-ffb-ffb*ffcxc)+.5*ffb*(ffbx+ffbx*ffcxc+...
ffb*fcxx(time(lastid),Y15(lastid,j))))*Sw12;

if i>lastid+1 %jeśli po drodze były podprzedziały bez skoków
dW(lastid+1:i-1)=sqrt(dt(lastid+1:i-1)).*...
    randn(i-1-lastid,1); %pełne przyrosty W

Całka  $Z_n$  na podprzedziałach, na których nie wystąpiły skoki:

dZ(lastid+1:i-1)=.5*dt(lastid+1:i-1).*(dW(lastid+1:i-1)+...
    sqrt(dt(lastid+1:i-1)/3).*randn(i-1-lastid,1)); %Z_{n}

for k=lastid+1:i-1 %aproksymacja bez skoków
    ffa=fa(time(k),Y15(k,j));
    ffb=fb(time(k),Y15(k,j));
    ffbt=fbt(time(k),Y15(k,j));
    ffax=fax(time(k),Y15(k,j));
    ffbx=fbx(time(k),Y15(k,j));
    ffbxx=fbxx(time(k),Y15(k,j));
    Y15(k+1,j)=Y15(k,j)+(ffa-.5*ffb*ffbx)*dt(k)+ffb*dW(k)+...
        .5*ffb*ffbx*dW(k)^2+.5*(fat(time(k),Y15(k,j))+...
        ffa*ffax+.5*ffb^2*faxx(time(k),Y15(k,j)))*dt(k)^2+...
        (ffbt+ffa*ffbx-.5*ffb*ffbx^2)*dW(k)*dt(k)+...
        (ffb*ffax-ffbt-ffa*ffbx-.5*ffb^2*fbxx)*dZ(k)+...
        (ffb/6)*(ffbx^2+ffb*fbxx)*dW(k)^3;
end;
end;
end; %sprawdź warunek while dla kolejnej chwili skoku
end; %przejdź do kolejnej trajektorii

%% END tay215.m -----

```

Tym razem zewnętrznymi funkcjami, do których należało się odwołać, oprócz tych, które zostały użyte w poprzednim algorytmie, były: $\text{fat}()$, $\text{fbt}()$, $\text{fct}()$, $\text{fax}()$, $\text{faxx}()$, $\text{fbxx}()$ i $\text{fcxx}()$. Zawierają one definicje pochodnych współczynników równania (1.1), odpowiednio: a'_t , b'_t , c'_t , a'_x , a''_{xx} , b''_{xx} i c''_{xx} . Powyższa metoda nie jest aż tak uciążliwsza obliczeniowo od poprzedniej, jak metoda (3.3) w stosunku do (3.2), a jest znacznie dokładniejsza. Oprócz posiadania wyższego rzędu zbieżności w przypadku stochastycznym, jest również wyższego rzędu w przypadku, gdy znikają zaburzenia losowe, co było omawiane w poprzednim rozdziale. W ten sposób staje się jasne, dlaczego jest ona najefektywniejszą z przedstawionych aproksymacji.

Na koniec, już bez podawania kodu źródłowego, zostanie poruszona kwestia tworzenia oprogramowania służącego do porównań zaprezentowanych metod

aproksymacji. Aby testy były przeprowadzone rzetelnie, należało każdorazowo porównywać przybliżenia wybranej ścieżki, uzyskiwane wszystkimi omawianymi metodami, z trajektorią rozwiązania analitycznego dla tego samego zdarzenia losowego ω_0 . Innymi słowy, zarówno wszystkie aproksymacje, jak i trajektoria rozwiązania rzeczywistego, powinny być obliczane dla tego samego ciągu skoków procesu Poissona, tego samego ciągu przyrostów ruchu Browna i tego samego ciągu całek Z_n . I tak też zostały przeprowadzone porównania, których wyniki prezentowane były w poprzednim podrozdziale. Ponieważ jednak każda z przedstawionych funkcji przybliżających realizacje rozwiązania wyznacza niezależnie własne zdarzenia losowe (generuje własne ścieżki procesów wymuszających), to do testów musiała zostać stworzona specjalna funkcja porównawcza, która spełnia podany wymóg.

Zakończenie

Mimo zamkniętej formuły opracowanego wzoru na schematy wyższych rzędów tematyka badań jest ciągle otwarta. Pojawiające się pochodne wyższych rzędów współczynników równania dyfuzji skokowej można spróbować zastąpić przez odpowiednie ilorazy różnicowe. Aby rozszerzyć stosowalność podanych metod na układy równań, można by spróbować wyprowadzić analogiczny wzór dla wektora rozwiązań, zastępując skalarne procesy sterujące odpowiednimi macierzami i ewentualnie rezygnując również z założenia o ich niezależności. Interesującym problemem wydaje się być również wrażliwość wyznaczonych schematów na normę, ze względu na tego typu wrażliwość wymuszającego procesu Poissona. Zastosowanie mniej rygorystycznej normy, jednak wciąż dającej mocne przybliżenia i spełniającej inne wymogi praktyczne (np. $\mathcal{L}^1$ zamiast $\mathcal{L}^2$), pozwoliłoby na wyprowadzenie wzoru na szybsze aproksymacje zadanego rzędu bez istotnej straty na dokładności przybliżonego rozwiązania. Zagadnienia te mogą być przedmiotem przyszłych interesujących badań.

Dodatek

Uogólniona formuła Itô Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ będzie n -wymiarowym półmartyngałem rzeczywistym z klasy RCLL i niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie miała ciągle pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Wtedy $f(\mathbf{X})$ też jest półmartyngałem z klasy RCLL i zachodzi następująca tożsamość (zob.[16]):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}_t) = f(\mathbf{X}_0) &+ \sum_{i=1}^n \int_{0+}^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{X}}_s) dX_{i,s} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{0+}^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{\mathbf{X}}_s) d[X_i, X_j]_s^c + \\ &+ \sum_{s \in (0,t]} \left(f(\mathbf{X}_s) - f(\bar{\mathbf{X}}_s) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{X}}_s) (X_{i,s} - \bar{X}_{i,s}) \right), \end{aligned}$$

gdzie $[\cdot, \cdot]^c$ jest ciągłym składnikiem wzajemnego wahania kwadratowego.

Nierówność Dooba Niech $p > 1$ i niech X będzie dodatnim podmartyngałem na $J \subset \mathbb{R}_+$. Wtedy prawdziwe jest oszacowanie (zob.[16]):

$$E \left(\sup_{t \in J} X_t \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{t \in J} EX_t^p.$$

W szczególnym przypadku, gdy X jest martyngałem na $[t_0, T]$ i $E|X_T|^p < \infty$, a $\mathcal{F}_t$ jest rozważaną tu filtracją, to $\chi_D X$, gdzie $D \in \mathcal{F}_{t_0}$ a χ oznacza funkcję charakterystyczną, też jest martyngałem na $[t_0, T]$ i zachodzi nierówność:

$$E \left(\sup_{t \in [t_0, T]} |\chi_D X_t|^p \right) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p E |\chi_D X_T|^p,$$

a ponieważ powyższe oszacowanie jest spełnione dla każdego $D \in \mathcal{F}_{t_0}$, to

$$E \left(\sup_{t \in [t_0, T]} |X_t|^p \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p E (|X_T|^p \mid \mathcal{F}_{t_0}).$$

Nierówność Gronwalla Niech $J = [t_0, T] \subset \mathbb{R}_+$, niech $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ będą całkowalne oraz niech dla każdego $t \in J$ i pewnej skończonej, dodatniej stałej C zachodzi oszacowanie:

$$0 \leq f(t) \leq g(t) + C \int_{t_0}^t f(s) ds.$$

Wtedy dla każdego $t \in J$ prawdziwa jest nierówność (zob.[9]):

$$f(t) \leq g(t) + C \int_{t_0}^t e^{C(t-s)} g(s) ds .$$

Nierówność Höldera Niech $(\Gamma, \mathcal{G}, \mu)$ będzie przestrzenią miarową i niech liczby rzeczywiste p i q spełniają zależności $p, q > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wtedy dla dowolnych mierzalnych funkcji f i g oraz dowolnego mierzalnego zbioru J zachodzi nierówność (zob.[18]):

$$\int_J |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_J |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_J |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Bibliografia

- [1] W. E. Boyce. *Approximate Solution of Random Ordinary Differential Equations*. Advances in Applied Probability, Vol. 10, str. 172–184, 1978.
- [2] R. Cegiela, A. Zalewski. *MATLAB. Obliczenia numeryczne i ich zastosowania*. Wydawnictwo NAKOM, Poznań 1996.
- [3] A. Gardoń. *The Order 1 Approximation for Solutions of Itô-type Stochastic Differential Equations with Jumps*. Prace Naukowe Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej, Nr 25, Ser. 4, str. 15–20, 2003.
- [4] A. Gardoń. *The Order of Approximations for Solutions of Itô-type Stochastic Differential Equations with Jumps*. Stochastic Analysis and Applications, Vol. 22, No. 3, str. 679–699, 2004.
- [5] A. Gardoń. *The Order 1.5 Approximation for Solutions of Jump-diffusion Equations*. SIAM Journal on Numerical Analysis (recenzowana), 2004.
- [6] P. Glasserman, N. Merener. *Numerical Solution of Jump-diffusion LIBOR Market Models*. Finance and Stochastics, Vol. 7, str. 1–27, 2003.
- [7] E. Hausenblas. *Error Analysis for Approximation of Stochastic Differential Equations Driven by Poisson Random Measures*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 40, No. 1, str. 87–113, 2002.
- [8] J. Jacod, P. Protter. *Asymptotic Error Distributions for the Euler Method for Stochastic Differential Equations*. The Annals of Probability, Vol. 26, No. 1, str. 267–307, 1998.
- [9] P. E. Kloeden, E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, New York — Berlin — Heidelberg 1995.
- [10] H. J. Kushner. *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*. Academic Press, New York 1977.
- [11] Y. Maghsoodi. *Mean Square Efficient Numerical Solution of Jump-Diffusion Stochastic Differential Equations*. The Indian Journal of Statistics, Vol. 58, Sers. A, Pt. 1, str. 25–47, 1996.

- [12] Y. Maghsoodi. *Exact Solutions and Doubly Efficient Approximation and Simulation of Jump-diffusion Itô Equations*. Stochastic Analysis and Applications, Vol. 16, No. 6, str. 1049–1072, 1998.
- [13] G. Maruyama. *Continuous Markov Processes and Stochastic Equations*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Vol. 4, str. 48–90, 1955.
- [14] R. Mikulevičius, E. Platen. *Time Discrete Taylor Approximations for Itô Processes with Jump Component*. Mathematische Nachrichten, Vol. 138, str. 93–104, 1988.
- [15] G. N. Milstein. *Approximate Integration of Stochastic Differential Equations*. Theory of Probability and Its Applications, Vol. 19, str. 557–562, 1974.
- [16] P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations. A New Approach*. Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg 1990.
- [17] W. Rümelin. *Numerical Treatment of Stochastic Differential Equations*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 19, No. 3, str. 604–613, 1982.
- [18] R. Sikorski. *Funkcje rzeczywiste. Tom II*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1959.
- [19] K. Sobczyk. *Stochastyczne równania różniczkowe. Teoria i zastosowania*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
- [20] A. Weron, R. Weron. *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.
- [21] E. Wong, M. Zakai. *On the Convergence of Ordinary Integrals to Stochastic Integrals*. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 36, str. 1560–1564, 1965.

