

Politechnika Wrocławska

Wydział Mechaniczny

Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn (I-16)

Raport Serii PRE Nr 2/2005

mgr inż. Tomasz Zając

STANY GRANICZNE
WIELKOGABARYTOWYCH
SPRZĘGIEŁ MEMBRANOWYCH

Rozprawa doktorska

Promotor

dr hab. inż. Franciszek W. Przystupa, prof. nadzw. PWr

Słowa kluczowe:

stany graniczne,

sprzęgła membranowe,

elementy cienkościenne

Wrocław 2005

ZESTAWIENIE NAJWAŻNIEJSZYCH SYMBOLI I OZNACZEŃ

δ_{ij} – symbol Kroneckera

σ – naprężenia normalne

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – naprężenia główne

σ_{ij} – składowe tensora naprężeń normalnych

σ_m – naprężenie średnie

τ – naprężenia ścinające

ε – odkształcenia

ε_{ij}^p – składowe tensora odkształceń plastycznych

$\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – składowe tensora prędkości odkształceń plastycznych

ε_{ij}^s – składowe tensora odkształceń sprężystych

$\dot{\varepsilon}_{ij}^s$ – składowe tensora prędkości odkształceń sprężystych

ν – współczynnik Poissona

D – sztywność płyty na zginanie

E – moduł Younga

F – obciążenie siłą

G – moduł odkształcenia postaciowego

I_1, I_2, I_3 – niezmienniki tensora naprężeń

J_1, J_2, J_3 – niezmienniki dewiatora naprężeń

K – moduł odkształcenia objętościowego

M – obciążenie momentem

R_e – granica plastyczności

R_m – granica wytrzymałości

w – funkcja ugięcia płyty

SPIS TREŚCI

1. Wprowadzenie.....	5
1.1. Podstawowe pojęcia	7
1.2. Stany graniczne	11
2. Geneza problemu	14
3. Przykłady wykorzystania elementów cienkościennych	17
4. Teza i cel pracy	19
5. Stan wiedzy	20
5.1. Stan sprężysto-plastyczny materiału	20
5.2. Zagadnienie plastycznego płynięcia.....	22
5.3. Podstawowe warunki plastyczności	27
5.4. Wpływ umocnienia się materiału na dalszą deformację	32
6. Model analityczny deformacji membrany	34
6.1. Przykładowe modele	36
6.2. Proponowany analityczny opis deformacji membrany	43
7. Badania doświadczalne	45
7.1. Pomiar deformacji	45
7.2. Wyznaczenie naprężeń	51
8. Analiza danych doświadczalnych	54
9. Uogólnienie zjawiska	61
9.1. Analiza numeryczna	61

10. Narzędzia obserwacji i diagnostyki.....	79
11. Podsumowanie pracy	80
12. Literatura	82
13. Załączniki	91
Z.1. Karta pomiarowa z wynikami pomiarów wstępnych.....	92
Z.2. Wykresy funkcji aproksymujących deformację membrany dla $n = 20$	93
Z.3. Rozwinięcia w pojedynczy szereg trygonometryczny funkcji aproksymujących deformację membrany.....	97
Z.4. Graficzne uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej deformację membrany.....	100
Z.5. Wyniki analizy numerycznej membrany o grubości 12 mm obciążonej tylko momentem skręcającym	104
Z.6. Wyniki analizy numerycznej membrany o grubości 12 mm obciążonej momentem skręcającym oraz siłą wymuszającą.....	105

1. Wprowadzenie

Zadanie inżyniera polega na racjonalnym wyborze pomiędzy dwoma kluczowymi problemami: z jednej strony mamy do czynienia z bezpieczeństwem, trwałością i estetyką, z drugiej zaś z kosztami projektowania, wykonania oraz późniejszej eksploatacji. Wydaje się oczywiste, że osiągnięcie rozsądnego kompromisu możliwe jest tylko w przypadku zastosowania najnowszych metod analizy konstrukcji. Dlatego niezbędnymi składnikami nowoczesnego procesu projektowania powinny być zarówno rozważania teoretyczne, analiza numeryczna, jak i rzetelna weryfikacja doświadczalna przyjętych założeń konstrukcyjnych.

Istotną rolę pełni również analiza trwałości i niezawodności. Pozwala ona oszacować stan krytyczny, czyli określić warunki, przy których nastąpi zniszczenie całej konstrukcji, bądź jednego z jej elementów. Poprzez słowo *zniszczenie* należy rozumieć takie zmiany w elemencie, które uniemożliwiają jego dalszą eksploatację. Przestaje on bowiem spełniać swoje funkcje użytkowe. Proces zniszczenia jest zawsze destrukcyjny bez względu na jego rodzaj, dlatego to właśnie on określa dobór odpowiednich metod oraz modeli obliczeniowych.

W przypadku projektowania w zakresie obciążeń nominalnych wskazane jest wykorzystanie metod obliczeniowych określających, np. trwałość zmęczeniową lub wytrzymałość na pełzanie. Natomiast wówczas, gdy mamy do czynienia z obliczeniami uwzględniającymi maksymalne obciążenia konstrukcji, należy stosować, np. metody określające stateczność oraz metody obliczeniowe nośności granicznej. Dopiero dzięki tak przeprowadzonym obliczeniom możemy mieć pewność, że zaprojektowana konstrukcja będzie spełniać wymogi odnośnie trwałości i bezpieczeństwa, jak również ukształtowania optymalnego pod względem ekonomicznym.

Najstarszymi, bo sięgającymi czasów Galileusza, są klasyczne teorie wytrzymałościowe. Podstawy tej dziedziny wiedzy opracowali między innymi Mariotte, Tesca, Beltrami, Coulomb, Mohr, Mises, a w Polsce przede wszystkim Huber. Zakładają one liniową zależność między naprężeniami a odkształceniami oraz ciągłość ośrodka, z którego wykonano element. Można zaobserwować duże rozbieżności pomiędzy wynikami uzyskanymi z obliczeń opartych na klasycznej teorii wytrzymałościowej a rezultatami otrzymanymi z badań doświadczalnych, szczególnie w przypadkach, gdy pojawiają się duże gradienty naprężeń w elementach konstrukcyjnych lub nieliniowe związki fizyczne. Mimo tego – prostota sformułowania klasycznych teorii wytrzymałościowych, a w przypadku popełnienia znacznego błędu, otrzymane wyniki zwiększają tylko margines bezpieczeństwa eksploatacji takiej

konstrukcji – powodują, że są one wykorzystywane w praktyce inżynierskiej po dzień dzisiejszy. Do obliczeń wykorzystuje się obszerny aparat matematyczny teorii sprężystości oraz metody numeryczne, np. metodę elementów skończonych (MES).

Znaczną rolę przy określeniu stanu naprężenia oraz odkształcenia elementu konstrukcyjnego odgrywają metody teorii sprężystości. Jednakże ich wykorzystanie, słuszne dla niewielkich odkształceń, w wielu przypadkach może nie zapewniać pełnego wykorzystania możliwości wytrzymałościowych konstrukcji lub jej elementów. Niezbędna wówczas staje się analiza sprężysto-plastyczna, która umożliwia uzyskanie niezbędnych informacji o zachowaniu się konstrukcji, zarówno podczas obciążeń narastających monotonicznie, jak również podczas złożonych obciążeń zmieniających się w czasie. Metody zastosowania teorii plastyczności do analizy konstrukcji prezentowano w licznych pracach, spośród których należy wymienić między innymi monografie Hilla [48], Iliušina [51], Kačanova [56], Neala [85], Pragera [100], Pragera i Hodge'a [99], jak również innych autorów [93, 112, 118].

Przy wykorzystaniu analizy sprężysto-plastycznej konstrukcji można określić zakresy obciążeń cyklicznych, kiedy konstrukcja pracuje w sposób:

- a) idealnie sprężysty (bez żadnych odkształceń plastycznych);
- b) sprężysty w wyniku przystosowania się konstrukcji, kiedy występują pewne odkształcenia plastyczne i związane z nimi naprężenia resztkowe powodujące, że dalsza praca konstrukcji przebiega już dalej bez plastycznego odkształcania się;
- c) sprężysto-plastyczny w każdym cyklu obciążenia i można tu wyróżnić dwa przypadki uplastyczniania się: przemienne oraz przemienno-przyrostowego.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z obciążeniami monotonicznymi, można wyróżnić zagadnienie oceny zmiany geometrii elementów konstrukcyjnych wywołanej odkształceniami plastycznymi oraz zagadnienie oceny możliwości powstania mechanizmu plastycznego płynięcia (pewnej liczby przegubów plastycznych), czyli osiągnięcie przez konstrukcję pewnego stanu granicznego.

Rozwiązanie zagadnienia dotyczącego stanów granicznych konstrukcji polega na wyznaczeniu obciążenia granicznego oraz sił wewnętrznych, jak również mechanizmu odkształcania się konstrukcji związanego z tym obciążeniem granicznym. W praktyce kompleksowe rozwiązanie zagadnienia stanów granicznych jest w większości przypadków bardzo trudne, dlatego często wykorzystuje się metody przybliżone lub numeryczne.

Rozwój metody stanów granicznych postępuje w dwu kierunkach, z których oba posiadają szereg efektywnych rozwiązań dotyczących problemów o dużym znaczeniu poznawczym i praktycznym [124]. W ramach pierwszego kierunku dąży się do wyznaczenia możliwie ścisłych rozwiązań, które będą spełniać wszystkie warunki statyczne oraz kinematyczne. Wykorzystywana jest głównie metoda charakterystyk, która okazała się niezwykle efektywna, co w wielu przypadkach pozwalało na rozwiązanie nawet bardzo złożonych zagadnień. Ten kierunek jest szczególnie przydatny podczas badania stanów granicznych elementów konstrukcyjnych posiadających niezbyt skomplikowane kształty.

Natomiast gdy mamy do czynienia z projektowaniem elementów konstrukcyjnych o złożonych kształtach lub poddanych nietypowym obciążeniom, to częściej stosowany jest drugi kierunek metody stanów granicznych, oparty na ekstremalnych twierdzeniach teorii plastyczności. Przy wykorzystaniu tych twierdzeń możliwe jest jedynie wyznaczenie górnego i dolnego oszacowania nieznanej wartości obciążenia granicznego. W przypadku, kiedy oba rozwiązania są dostatecznie do siebie zbliżone, to z punktu widzenia zastosowań praktycznych brak ścisłego rozwiązania nie ma większego znaczenia. Jeszcze innym podejściem do zagadnienia stanów granicznych jest analizowanie zachowania się konstrukcji począwszy od stanu idealnie sprężystego, poprzez stan sprężysto-plastyczny, aż do stanu zniszczenia. Zastosowanie znajdują wówczas metody numeryczne, a przede wszystkim metoda elementów skończonych. Jest to metoda bardzo uniwersalna, która umożliwia uzyskanie dobrej dokładności obliczeń, nawet w przypadku bardzo złożonych zagadnień stanów granicznych¹.

1.1. Podstawowe pojęcia

Konstrukcjami cienkościennymi nazywamy taki rodzaj konstrukcji, w których jeden wymiar geometryczny (np. grubość) jest zdecydowanie mniejszy od dwóch pozostałych wymiarów (np. długości i szerokości) [18]. Dzięki temu analizę naprężeń i odkształceń takiej konstrukcji można znacznie uprościć. Zaletą cienkościenności z jednej strony zapewnia możliwość pominięcia od jednej do trzech składowych tensora naprężeń w dowolnym punkcie ciała (naprężeń normalnych w kierunku grubości oraz naprężeń stycznych), jak

¹ Należy zwrócić uwagę na duży wkład również polskich uczonych w rozwój metod stanów granicznych. Badania prowadzone pod kierunkiem profesorów A. Sawczuka, Z. Mroza i W. Szczepińskiego w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie oraz pod kierunkiem profesorów M. Kwiecińskiego i J. Szlagowskiego w Politechnice Warszawskiej, jak również profesora M. Życzkowskiego w Politechnice Krakowskiej, czy też W. Olszaka, D. Niepostyna, M. Janasa oraz wielu innych, stanowiły ważny wkład w opracowanie podstaw teoretycznych dotyczących metody stanów granicznych do analizy konstrukcji.

również założenie określonego rozkładu pozostałych składowych wzdłuż grubości (stałego lub liniowego – składowych normalnych, stałego lub parabolicznego – składowych tnących). Z drugiej zaś strony cienkościennosc konstrukcji może stwarzać pewne specyficzne problemy wytrzymałościowe związane z zagadnieniem stateczności. Często są to bowiem obiekty wielkogabarytowe, a więc szczególnie czułe na błędy wykonania i montażu. Ich elementy składowe przed zamontowaniem mają niewielką sztywność, co stwarza dodatkowe trudności w zapewnieniu wymaganej dokładności połączeń oraz zachowaniu niezmiennego kształtu, co determinuje dalszą pracę. Przyczyny te spowodowały, że podstawowym wyróżnikiem konstrukcji cienkościennych spośród pozostałych obiektów jest zastosowanie odmiennego podejścia do analizy wytrzymałościowej w zakresie sprężysto-plastycznym.

Wśród najczęściej spotykanych obiektów, zaliczających się do grupy konstrukcji cienkościennych, należy wymienić: tarcze, płyty, powłoki (membrany, przepony, diafragmy), oraz pręty cienkościenne. Niektóre spośród nich mogą występować jako samodzielne konstrukcje (np. tarcze, powłoki) albo stanowić elementy składowe bardziej złożonych obiektów. W obszernej literaturze technicznej [15, 18, 53, 63, 69] spotkać można szereg podobnych do siebie opisów, różniących się w niewielkim stopniu, na określenie wymienionych grup elementów. Dlatego poniżej przedstawiono kompilację spotykanych definicji.

Tarczami nazywamy płaskie elementy konstrukcyjne, w których jeden z wymiarów geometrycznych (grubość) jest zdecydowanie mniejszy od dwóch pozostałych wymiarów (długości i szerokości), a w których obciążenia oraz wywołane nimi przemieszczenia występują tylko w płaszczyźnie tych elementów. Przy czym są to najczęściej elementy obrotowe (osiowosymetryczne), których grubość może być stała, bądź zmieniać się wzdłuż promienia. Głównym rodzajem obciążeń przenoszonych przez te elementy jest moment skręcający, zaś same obciążenia przykładane są na ogół na jej brzegach. W przypadku tarcz wirujących dodatkowym obciążeniem mogą być siły masowe pochodzące od ruchu obrotowego, działające na każdy element objętości konstrukcji. Najczęściej tarcze pracują w płaskim stanie naprężenia. Znalezienie rozwiązania w postaci ogólnej, zamkniętej dla tarczy o dowolnym zarysie brzegu i przy dowolnych obciążeniach przyłożonych na brzegu, bądź wewnątrz obszaru tarczy, nie jest możliwe do uzyskania. Na analizę różnych szczególnych przypadków pozwala teoria sprężystości (np. tarcz kołowych obciążonych symetrycznie), natomiast przy zastosowaniu metody elementów skończonych istnieje możliwość rozwiązania każdego zadania płaskiego.

Płyty to również elementy płaskie, w sensie geometrii nie różniące się od tarcz, ale obciążone prostopadłe do swojej płaszczyzny. Jako płyty powinno się także traktować elementy, które na przykład w wyniku ściskania uległy wyboczeniu. Następuje wówczas ich zginanie, a więc oprócz przemieszczeń w płaszczyźnie elementu, zaobserwować można również przemieszczenia prostopadłe do ich powierzchni. Podstawowym typem obciążeń płyt, jak również i powłok, są siły bądź ciśnienia działające w kierunku prostopadłym do płaszczyzny lub powierzchni środkowej. Rozwiązania zamkniętego dla płyty o stałej grubości, ale o zarysie brzegu zadany dowolną funkcją przy dowolnym obciążeniu i sposobie podparcia nie można uzyskać. Zatem we wszystkich trudniejszych zadaniach przy złożonych obciążeniach czy skomplikowanych zarysach, posłużyć się należy metodami numerycznymi typu MES.

Powłoki mają podobną geometrię jak tarcze i płyty, ale ich powierzchnia jest zakrzywiona. Zbudowane są one na podstawie powierzchni przestrzennej otwartej lub zamkniętej, która stanowi powierzchnię środkową elementu o niewielkiej grubości ścianki w odniesieniu do pozostałych wymiarów. Powłoki mogą pracować w dwóch stanach: błonowym lub zgięciowym. Z pracą w *stanie błonowym* (nazwa pochodzi od analogii odnoszącej się do pracy błony mydlanej) mamy do czynienia wówczas, kiedy powłoka jest na tyle cienka, że jej powierzchnia posiada tylko niewielką sztywność na zginanie lub kiedy przy skończonej sztywności giętej powierzchni jest ona obciążona i ukształtowana w taki sposób, że nie występują w niej momenty zginające. Wówczas jako siły wewnętrzne występują wyłącznie siły styczne do powierzchni środkowej. Stan błonowy jest stanem podstawowym, rozprzestrzenionym na cały obszar konstrukcji. Natomiast *stan zgięciowy (momentowy)* ma charakter lokalny, występuje w okolicy załomów powłoki i rozprzestrzenia się w pasie o szerokości równej zaledwie kilku grubościom powłoki. W tym przypadku obok sił stanu błonowego występują również momenty zginające, skręcające oraz siły poprzeczne, zaś spowodowane nimi naprężenia są z zasady znacznie większe. Uzyskanie rozwiązania zamkniętego dla powłoki pracującej w tym stanie jest bardzo złożone, niekiedy nawet niemożliwe, a postać tego rozwiązania zależy w dużej mierze od geometrii elementu.

Dla powłok należy również przytoczyć tutaj określenia szczegółowe opisujące takie elementy jak: membrana, przepona oraz diafragma.

Pod pojęciem *membrany* należy rozumieć element cienkościenny o określonym kształcie, który jest utwierdzony na brzegach. Natomiast *przeponą* nazywa się cienkie sprężyste przegrody oddzielające od siebie dwie przestrzenie. Przegrody te mogą poruszać się samoczynnie (np. wyrównując ciśnienia) lub przymusowo (np. spełniając funkcję tłoczyska w pompach tłokowych). Zaś *diafragma* jest to rodzaj elementu cienkościennego spotykany w urządzeniach technicznych, stanowiący barierę oddzielającą dwa ośrodki uniemożliwiając ich wzajemne oddziaływanie.

Ostatnim obiektem są *pręty cienkościenne*, które stanowią specyficzny rodzaj konstrukcji cienkościennych. Pozostają one na pograniczu konstrukcji jedno- i dwuwymiarowych. Ich długość jest znacznie większa od maksymalnych wymiarów przekroju poprzecznego, co pozwala zaklasyfikować je do grupy prętów. Natomiast ich konstrukcja, składająca się z płaszcza wykonanego z cienkiej blachy o tworzących równoległych do osi pręta oraz z żeber poprzecznych do tej osi, pozwala zaliczyć je do grupy konstrukcji dwuwymiarowych. Wspomniane żebra mają postać płaskich przepon, ram, bądź też kratownic. Są sztywne w swojej płaszczyźnie, natomiast wiotkie w kierunku do niej prostopadłym. Ich podstawowym zadaniem jest wprowadzenie różnego rodzaju obciążeń (np. sił, momentów skupionych) w konstrukcję i przekazanie ich na płaszcza w postaci odpowiednio rozłożonych wydatków stycznych. Pełnią one również dodatkową funkcję, która polega na podparciu cienkich elementów płaszcza tak, aby zabezpieczyć je przed nadmierną lokalną utratą stateczności przy obciążeniach ściskających.

Analizę wytrzymałościową prętów cienkościennych najczęściej przeprowadza się według tych samych zasad i uproszczeń jakie stosuje się przeważnie przy analizie prętów. Wprowadza się przy tym jednak pewne dodatkowe elementy, które pozwalają na ilościowe określenie znaczących efektów wynikających z cienkościenności elementu. Głównie chodzi tu o ocenę wielkości oraz rozkładu naprężeń stycznych pochodzących od zginania, gdyż są one istotnym czynnikiem napięć wewnętrznych. Cienkościenność omawianej grupy elementów w połączeniu z ich jednowymiarowością pozwala na zastosowanie modelu znacznie upraszczającego analizę w porównaniu np. z płytami czy powłokami.

Ta krótka charakterystyka różnych rodzajów grup konstrukcji cienkościennych wskazuje, że zasadniczą cechą wyróżnienia jest tu ukształtowanie elementu oraz rodzaj przenoszonego obciążenia. Każda z tych grup odróżnia się także stosowną metodą obliczeń wytrzymałościowych.

Przedstawione pojęcia miały na celu ułatwienie zdefiniowania analizowanego dalej sprzęgła wielkogabarytowego. Podobnie jak membrana sprzęgło to utwierdzone jest na obrzeżach (na średnicy wewnętrznej do elementu czynnego, a na zewnętrznej do elementu biernego). Dzięki znacznie mniejszej grubości w stosunku do swojej średnicy możliwe było zapewnienie dużej elastyczności takiego połączenia w kierunku normalnym do powierzchni w zakresie sprężystym. Dla analizowanego w pracy sprzęgła można było przyjąć określenie „sprzęgło membranowe”.

1.2. Stany graniczne

Od pewnego czasu zamiast dość powszechnie stosowanej metody naprężeń dopuszczalnych, której ogólne zasady zostały opracowane przez Navier’a, coraz częściej w obliczeniach statycznych oraz przy projektowaniu różnego rodzaju konstrukcji wykorzystywana jest metoda stanów granicznych [72]. Okazało się, że stałe obniżanie współczynników bezpieczeństwa przez podnoszenie naprężeń dopuszczalnych na drodze deterministycznej nie może zapewnić odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa konstrukcji.

Natomiast w metodzie stanów granicznych uwzględnia się zapasy bezpieczeństwa istniejące w konstrukcji na skutek plastycznych własności materiału. Należałoby wspomnieć, że metoda stanów granicznych w sensie statycznym była znana już w XVIII wieku. Łączono bowiem problem oceny bezpieczeństwa konstrukcji z wyznaczeniem obciążeń granicznych, po przekroczeniu których konstrukcja mogłaby ulec zniszczeniu. Szczególnie znane są w tym zakresie postulaty sformułowane przez Coulomba.

Metoda stanów granicznych zapewnia bezpieczeństwo projektowanej konstrukcji nie tylko przed wystąpieniem stanów, po przekroczeniu których uległaby ona zniszczeniu, lecz także wszystkich innych, które uniemożliwiłyby jej normalne użytkowanie zgodnie z przeznaczeniem. Stany graniczne ogólnie dzieli się na dwie zasadnicze grupy [71, 72]:

- stany graniczne nośności, odpowiadające maksymalnej nośności konstrukcji,
- stany graniczne użytkowości, ustalone na podstawie kryteriów normalnego użytkowania lub trwałości konstrukcji.

Grupa *stanów granicznych nośności* obejmuje stany, których przekroczenie powoduje najczęściej konieczność przerwania eksploatacji konstrukcji. Stany te może osiągać cała konstrukcja lub tylko poszczególne jej elementy. Dotyczy to przede wszystkim katastrof lub innych form uszkodzeń konstrukcji, które mogą zagrażać bezpieczeństwu ludzi. Przyczyną powstawania stanów granicznych nośności są między innymi:

- zniszczenia krytycznych przekrojów konstrukcji,
- utrata stateczności sprężystej lub sprężysto-plastycznej,
- narastanie odkształceń trwałych i w konsekwencji przekształcenie się konstrukcji w mechanizm kinematyczny,
- utrata równowagi ogólnej lub częściowej konstrukcji,
- odkształcenia plastyczne i pełzanie,
- zmęczenie materiału.

Grupa *stanów granicznych użyteczności* obejmuje stany, po przekroczeniu których konstrukcja przestaje odpowiadać wymaganiom użytkowym założonym w projekcie. Przyczyną ich powstawania są między innymi:

- naprężenia (dla sytuacji początkowej w konstrukcjach sprężystych),
- odkształcenia i ugięcia, które mogą mieć wpływ na wygląd konstrukcji lub powodować uszkodzenia innych elementów,
- uszkodzenia wpływające ujemnie na wygląd lub trwałość konstrukcji,
- drgania szkodliwe dla ludzi, bądź powodujące ograniczenia w użytkowaniu konstrukcji,
- lokalne uszkodzenia powstałe, np. w skutek nadmiernego docisku, które mogą mieć niekorzystny wpływ na trwałość konstrukcji.

W metodzie stanów granicznych wykorzystuje się analizę pracy konstrukcji, opisującą wiernie zachowanie się w każdym rozpatrywanym stanie granicznym. Analizy te umożliwiają zabezpieczenie całej konstrukcji, bądź jej elementu przed wystąpieniem danego stanu granicznego, przez bezpośrednie porównanie wartości sił wewnętrznych, wywołanych działaniem oddziaływań zewnętrznych z nośnością konstrukcji lub z innymi wartościami sił, powodujących wystąpienie takiego stanu. Wyznaczenia porównywanych ze sobą sił dokonuje się z uwzględnieniem losowego charakteru oddziaływań i wytrzymałości materiałów. W obliczeniach stosuje się odpowiednio zwiększone wartości obciążeń, jak również odpowiednio zmniejszone wartości wytrzymałości materiałów w odniesieniu do charakteryzujących je wartości średnich.

Metoda stanów granicznych wykorzystuje w stosunkowo szerokim aspekcie metody teorii plastyczności w obliczeniach wytrzymałościowych i przy projektowaniu konstrukcji, a w tym także wykorzystanie zasad obliczania nośności granicznej przy uwzględnieniu plastycznej redystrybucji sił wewnętrznych lub naprężeń w konstrukcji [72]. Należy jednak pamiętać, że także w tym przypadku metoda ta narzuca wymogi sprężystej pracy konstrukcji dla obciążeń mieszczących się w wyznaczonych wartościach. Oznacza to, że przy obciążeniu osiągającym określoną wartość nastąpić może plastyczna redystrybucja sił wewnętrznych lub naprężeń z odpowiednim układem naprężeń własnych. Jednak po jednym lub pewnej niewielkiej liczbie cykli obciążenia, każde następne nie przekraczające wyznaczonej wartości, nie może spowodować dalszych odkształceń plastycznych.

Metodę stanów granicznych można również wiązać z granicą tolerancji określoną dla niekorzystnych losowych odchyłeń obciążeń, nośności i wymiarów elementów od wartości oczekiwanych [71]. Odchyleniem losowym nazywane jest takie odchylenie, któremu można przypisać określone prawdopodobieństwo. Przyjmuje się, że przekroczenie stanów granicznych oznacza naruszenie założeń projektu. Ponadto metoda stanów granicznych jasno rozgranicza odpowiedzialność za bezpieczeństwo konstrukcji. I tak:

- użytkownik odpowiada za pracę w zakresie dopuszczalnego obciążenia eksploatacyjnego urządzenia,
- wykonawca odpowiada za nośność obliczeniową konstrukcji.

2. Geneza problemu

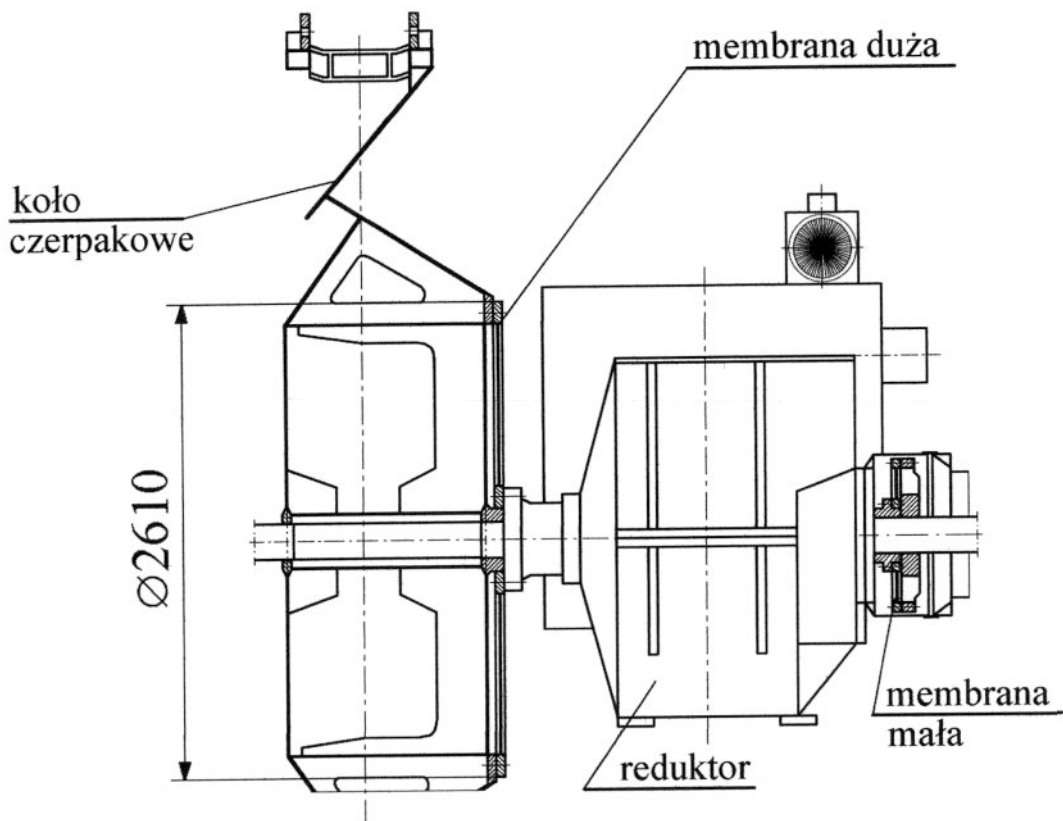
Często spotkać się można z sytuacją, w której przeprowadzone badania doświadczalne stwarzają potrzebę opracowania nowej, sformalizowanej teorii mającej na celu wyjaśnienie zaobserwowanych i nie w pełni rozumianych zdarzeń. Z takim przypadkiem mamy do czynienia w prezentowanej pracy.

W wyniku obserwacji oraz przeprowadzonych wstępnych pomiarów stwierdzono, że w trakcie normalnej eksploatacji koparki² uszkodzeniu uległo wielkogabarytowe sprzęgło membranowe. Przyczyną było wystąpienie plastycznej deformacji cienkościennego elementu pośredniczącego w przekazywaniu napędu na koło czerpakowe. Zaistniała więc potrzeba opracowania analitycznego opisu zjawiska deformacji badanej membrany, w celu określenia przyczyny powstania tego typu sytuacji.

W koparce zastosowano nowatorskie rozwiązanie konstrukcyjne, jakim jest wielkogabarytowe sprzęgło membranowe, co pozwoliło na wyeliminowanie sztywnego i ciasno pasowanego połączenia przekładnia – koło czerpakowe. Nowe rozwiązanie membranowe stanowi element pośredniczący w przekazywaniu momentu obrotowego z przekładni napędowej na koło czerpakowe i jest częścią zespołu napędowego dużej mocy w mechanizmie urabiania koparki. Rozwiązanie to charakteryzuje się tym, że z jednej strony przekładnia połączona jest z kołem czerpakowym przy pomocy membrany o dużej średnicy i niewielkiej grubości. Z drugiej zaś strony przekładnia jest przymocowana do kołnierza wału przy pomocy membrany o małej średnicy (rys. 2.1). Podstawowym zadaniem membrany dużej jest przeniesienie momentu obrotowego pochodzącego z układu napędowego koła czerpakowego. Jest ona również obciążona dodatkowo niewielkimi siłami osiowymi powstającymi w czasie urabiania. Natomiast membrana mała stanowi dodatkowe podparcie zespołu napędowego co eliminuje zginanie membrany dużej.

W trakcie wieloletniej eksploatacji zespołu napędowego koła czerpakowego koparki nastąpiła znaczna – widoczna nawet nieuzbrojonym okiem – deformacja plastyczna membrany dużej. Jednocześnie dwukrotnie uszkodzeniu uległa membrana mała, co było skutkiem niekorzystnego wpływu na nią zdeformowanej membrany dużej.

² Zdarzenie takie miało miejsce na koparce przeznaczonej do urabiania nadkładu na terenie odkrywkowych zakładów górniczych. Problem ten był poważny, gdyż dotyczył koparek, które stanowią najliczniejszą grupę maszyn podstawowych pracujących w kopalni i od ich wydajności oraz niezawodności eksploatacyjnej zależała ilość zdjętego nadkładu [126]

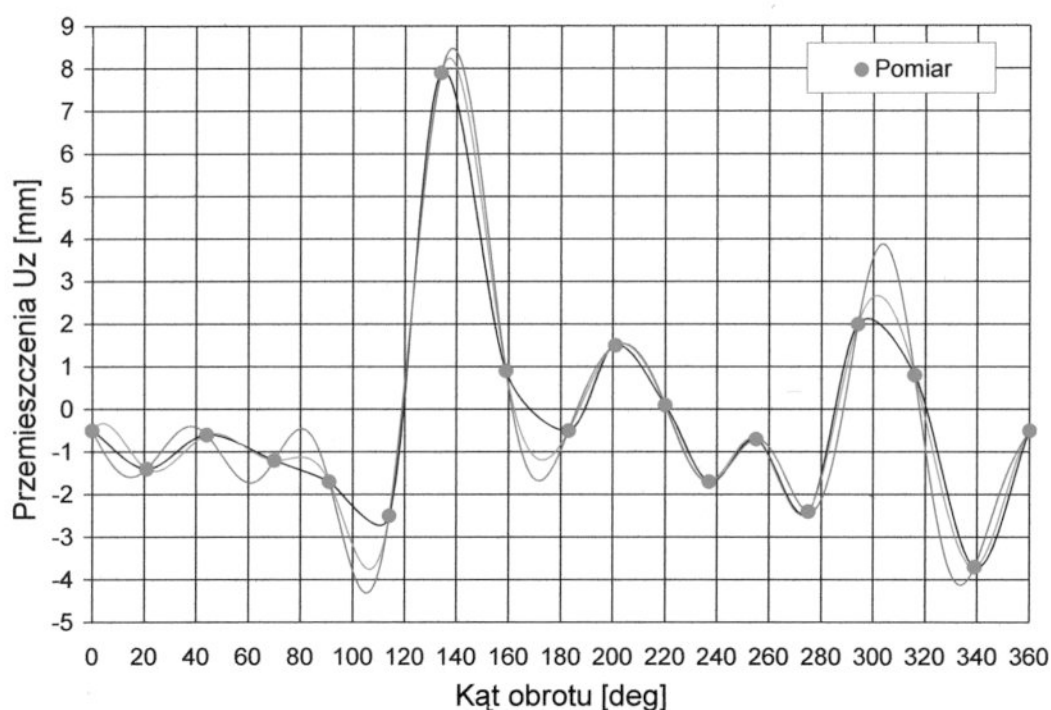


Rys. 2.1. Rozwiązanie układu napędowego koła czepakowego

Zaistniała potrzeba opracowania metod analizy i identyfikacji przyczyn prowadzących do odkształcania się membrany dużej, dzięki czemu można będzie w przyszłości zapobiegać tego typu zdarzeniom w innych sytuacjach technicznych. Wskazane zatem wydaje się określenie odpowiednich procedur do oceny stanu sprzęgła membranowego celem wykrywania wczesnych form degradacji membrany, co pozwoliłoby odpowiednio wcześniej zaplanować politykę remontową i wykonać naprawy w czasie planowanych przestojów.

Dane uzyskane z pomiarów wstępnych, wykonanych przez obsługę inżynierską kopalni (Załącznik Z.1), wyraźnie wskazują na wystąpienie plastycznej deformacji elementu cienkościennego, który w założeniu zaprojektowany był jako płaska tarcza. Pomiary wykonano w wybranych punktach rozmieszczonych na obwodzie membrany dla kilku promieni. Na podstawie uzyskanych danych sporządzono wykresy przedstawiające wartości zmierzonych przemieszczeń w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni w funkcji kąta obrotu.

Pomiary wykonano metodami przemysłowymi, stąd też dostępna ilość informacji była niewystarczająca do przeprowadzenia bardziej szczegółowej analizy mającej na celu wyjaśnienie przyczyn powstania trwałej deformacji. Tym samym nie można również odpowiedzieć na pytanie, czy element ten nadal może spełniać swoją podstawową funkcję przewidzianą przez konstruktora. Wynika to z faktu, że przez zmierzone wartości istnieje możliwość przeprowadzenia kilku krzywych różniących się między sobą charakterem przebiegu (rys. 2.2). Dlatego w ramach niniejszej pracy przeprowadzone zostały bardziej szczegółowe badania doświadczalne w warunkach eksploatacyjnych omawianego sprzęgła membranowego. Sposób realizacji pomiarów dostosowano do potrzeb dalszej analizy mającej na celu określenie zachowania się elementów cienkościennych pracujących w stanie plastycznej deformacji.



Rys. 2.2. Wykres zmierzonych przemieszczeń dla jednego z wybranych promieni z przykładowymi krzywymi o różnych przebiegach

3. Przykłady wykorzystania elementów cienkościennych

Wykorzystanie cienkościennych elementów osiowosymetrycznych jest szerokie. Jednym z najważniejszych elementów tego typu spotykanym we wszystkich niemal maszynach wirnikowych, tj. turbiny spalinowe i parowe, sprężarki, pompy osiowe i odśrodkowe, czy różnego rodzaju wirówki, są tarcze kołowe [18]. Ich podstawowym zadaniem jest zwykle przenoszenie sił z łopatek na wał (turbiny), bądź z wału na łopatki (sprężarki). Wówczas tarcze takie spełniają funkcję elementów wytrzymałościowych, które przejmują siły masowe pochodzące od wirowania łopatek.

Podstawowymi obciążeniami zewnętrznymi, które uwzględnia się podczas projektowania i obliczania tarcz kołowych w maszynach wirnikowych, są: własne siły masowe od wirowania, siły masowe od łopatek (działające na obwodzie zewnętrznym) oraz obciążenia cieplne wynikające ze zmiennej wzdłuż promienia temperatury. Wszystkie tego rodzaju obciążenia są osiowosymetryczne albo do takich zbliżone, jak również tak rozłożone, że powodują równomierne, bądź bliskie równomiernemu, rozkłady naprężeń wzdłuż grubości. Pozostałe dodatkowe obciążenia takie jak: ciśnienie czynnika gazowego na powierzchnię tarczy lub łopatek czy też nierównomierny rozkład temperatury wzdłuż grubości, powodują zginanie tarczy, a zatem płytowy charakter jej pracy. Zazwyczaj są one niewielkie i dlatego najczęściej pomija się je w analizie. Zdarza się jednak czasami tak, że nieprzewidziane warunki w czasie eksploatacji mogą spowodować ich wzrost, wówczas będą one miały znaczny wpływ na charakter pracy takiego elementu i jego wytrzymałość.

Istnieje też wiele elementów cienkościennych, które można sprowadzić do schematu płyt i powłok, wykorzystywanych w napędach i strukturach maszyn. Przykładami płyt mogą być dna tłoków, płaskie ściany zbiorników, tarcze maszyn wirnikowych obciążone dodatkowo (niezależnie od sił działających w ich płaszczyźnie) oddziaływaniami brzegowymi w postaci momentów zginających lub sił poprzecznych, a także ciśnieniami wywieranymi przez czynnik gazowy. Do powłok zaliczyć można płaszcze zbiorników oraz kotłów, korpusy turbin, jak również pokrycia okrętów, wagonów, samolotów, itp. Powłoki obrotowe obciążone osiowosymetrycznie są jednym z najczęściej spotykanych rodzajów powłok. Stanowią one elementy różnego typu maszyn wirnikowych, ale także projektuje się je jako zbiorniki ciśnieniowe, zbiorniki wypełnione czynnikiem ciekłym lub stałym.

Natomiast pręty cienkościenne, w najprostszej postaci, są powszechnie stosowane w lotniczych konstrukcjach płatowców, ale spotkać je także można w blachownicach przemysłowych, okrętach, itp. Mając na uwadze tak szerokie wykorzystanie elementów cienkościennych w różnego rodzaju maszynach, ich analiza wytrzymałościowa ma bardzo istotne znaczenie w celu zapewnienia bezpieczeństwa i bezawaryjnej eksploatacji takich konstrukcji.

Z elementami podobnego typu, jak omawiana membrana sprzęgła wielkogabarytowego, można spotkać się w układach napędowych dużych maszyn roboczych. Najczęściej są to urządzenia przenoszące znaczne moce, nawet do 2 500 kW. W górnictwie odkrywkowym wykorzystuje się je w napędach koparek, jak i przenośników taśmowych, a więc w maszynach pracujących w ruchu ciągłym. Dlatego awaria takiego sprzęgła może spowodować olbrzymie straty materialne w przypadku wyeliminowania maszyny z pracy. Stąd też problem niezawodnej pracy wielkogabarytowych elementów cienkościennych jest niezmiernie istotny.

4. Teza i cel pracy

W związku z pojawieniem się, pod wpływem nieprzewidzianego wymuszenia zewnętrznego, plastycznej deformacji membrany sprzęgła wielkogabarytowego, w wyniku której przestało ono odpowiadać wymaganiom projektowym, zaistniała potrzeba odpowiedzi na pytanie, czy może ono dalej pracować zgodnie ze swoim przeznaczeniem. Aby tego dokonać należy opracować model teoretyczny zjawiska w celu jego dalszej analizy.

Mając to na uwadze, przyjęto założenia dla opracowania odpowiednich podstaw teoretycznych modelu, jak i tezy pracy. Rozpatrywana jest membrana wielkogabarytowa:

- o dużej średnicy i niewielkim wymiarze poprzecznym,
- utwierdzona na obwodzie,
- przeznaczona do przenoszenia znacznego momentu skręcającego,
- obciążona dodatkowym wymuszeniem zewnętrznym.

Przy tak ustalonych założeniach tezę pracy sformułowano następująco:

Plastyczne deformacje membrany sprzęgła wielkogabarytowego, w wyniku których przestaje ona spełniać wymogi, daje się wystarczająco dokładnie aproksymować pojedynczym szeregiem trygonometrycznym.

Celem pracy jest udowodnienie prawdziwości tezy dla membran sprzęgieł wielkogabarytowych poddanych złożonym obciążeniom, wynikającym z charakteru pracy całego układu napędowego, poprzez:

- opracowanie własnego modelu plastycznej deformacji membrany w oparciu o wybrane modele ugięć elementów cienkościennych spotykane w literaturze,
- wykonanie badań doświadczalnych na obiekcie rzeczywistym w celu weryfikacji eksperymentalnej założonego modelu deformacji membrany,
- przeprowadzenie analizy zebranych danych pomiarowych dla zidentyfikowania przyczyn powstania rzeczywistego plastycznego odkształcenia membrany,
- uogólnienie zjawiska na inne przypadki obciążeniowe oraz geometryczne przy wykorzystaniu metod numerycznych

Możliwe będzie uzyskanie informacji niezbędnych do określenia przyczyny powstania plastycznej deformacji membrany sprzęgła wielkogabarytowego, jak również prognozowanie dalszych zachowań tak odkształconego elementu. Dotyczyć to będzie także obiektów o podobnym charakterze pracy oraz zbliżonych parametrach geometrycznych.

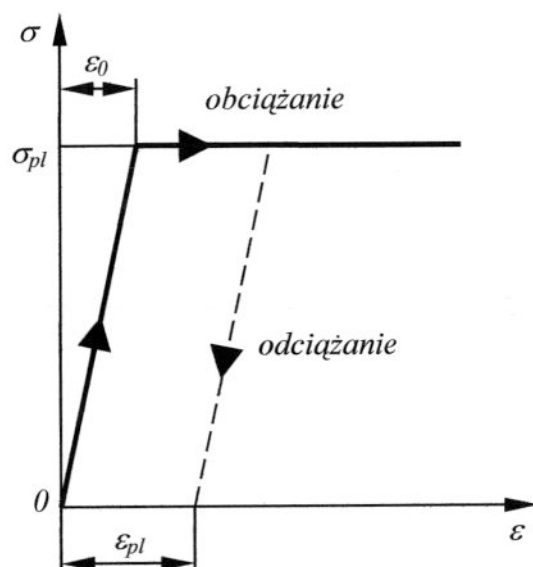
5. Stan wiedzy

Istnieje wiele opracowań monograficznych dotyczących podstawowych zależności teorii sprężystości i plastyczności. Można wśród nich wymienić między innymi prace Hilla [48], Iliušina [51], Kačanova [56], Koitera [64], Nowackiego [89], Pragera [100], Rabotnova [106], Sokołowskiego [118], Timoshenki i Goodiera [128], Życzkowskiego [144] oraz pracę zbiorową Olszaka, Perzyny i Sawczuka [93].

Ośrodkiem sprężystym nazywamy taki ośrodek, w którego każdym punkcie zawsze istnieje wzajemnie jednoznaczna zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami [28]. Aktualny stan naprężenia zależy od aktualnego stanu odkształcenia, a nie zależy od historii obciążenia. Ciało po zmianie swojego kształtu i wymiarów pod wpływem działających na nie obciążeń zewnętrznych powraca do swego pierwotnego kształtu i wymiarów po odciążeniu. Materiały konstrukcyjne odkształcają się w sposób czysto sprężysty tak długo, dopóki naprężenia pozostają poniżej pewnej granicznej wartości. Kiedy wartość ta zostanie osiągnięta pojawiają się wówczas odkształcenia plastyczne (nieodwracalne). Odkształcenia te nie znikają nawet po odciążeniu, zaś zależność między odkształceniami a naprężeniami powstałymi w takim procesie jest zazwyczaj nieliniowa.

5.1. Stan sprężysto-plastyczny materiału

Podczas wyznaczania wytrzymałości konstrukcji z uwzględnieniem odkształceń plastycznych zastępuje się najczęściej rzeczywistą zależność $\sigma(\varepsilon)$ modelem materiału sprężysto-plastycznego (tzw. modelem Prandtla) [71, 135]. Wynika z niego, że materiał zachowuje się zgodnie z prawem Hooke'a aż do momentu osiągnięcia przez naprężenia wartości granicy plastyczności σ_{pl} , a potem odkształca się dalej bez przyrostu naprężeń. Odcinek reprezentujący zakres plastyczny jest poziomy (rys. 5.1). Przyrost odkształcenia ponad wartość ε_0 ma charakter plastyczny i nieodwracalny. Naprężenia towarzyszące odkształceniom plastycznym nie są uzależnione od czasu. Oznacza to, że nie są one wrażliwe na prędkość odkształcenia. Natomiast proces odciążenie przebiega wzdłuż prostej równoległej do prostej zakresu sprężystego. Po zdjęciu obciążenia znika część sprężysta odkształcenia, a pozostaje tylko jego część plastyczna ε_{pl} . Model ten znajduje zastosowanie w warunkach obciążeń zbliżonych do statycznych lub w przypadku materiałów nieczułych na prędkość deformacji (nie wykazujących efektów lepkich).



Rys. 5.1. Model bilinearny materiału sprężysto-plastycznego [71]

Uwzględnienie sprężysto-plastycznej fazy pracy konstrukcji umożliwia lepsze wykorzystanie jej nośności. Wynika to z faktu, że jeżeli pewna jej część, wskutek osiągnięcia przez materiał stanu plastyczności, traci zdolność dalszego oporu przeciw narastającym odkształceniom, to inne części nie doprowadzone jeszcze do tego stanu, zwiększają swój udział w przenoszeniu obciążenia, pozwalając na dalszy jego wzrost. W zasadzie nośność graniczną dowolnej konstrukcji można by wyznaczyć analizując kolejne fazy jej pracy przy wzrastającym stopniowo obciążeniu, badając rozprzestrzenianie się stref oraz przegubów plastycznych, aż do momentu przekształcenia się konstrukcji w mechanizm ruchu plastycznego (gdy deformacje mogą się powiększać przy stałym obciążeniu). Jednak sposób ten jest bardzo pracochłonny i trudno go polecać do obliczeń praktycznych.

Metoda stanów granicznych ma zastosowanie głównie do rozpatrywania przypadków z obciążeniami stałymi lub wzrastającymi proporcjonalnie, natomiast obciążenia rzeczywiste są dość często bardziej skomplikowane. Ograniczenia spowodowane są tym, że konstrukcja, przy występowaniu odkształceń plastycznych, może reagować w różny sposób na kolejne, jednakowe cykle obciążeń. Dość często zdarza się tak, że w pierwszym cyklu obciążenia występują odkształcenia plastyczne, natomiast drugi i następne cykle mogą już przebiegać czysto sprężysto [71]. Z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji korzystne jest, żeby takie stabilizowanie się odkształceń plastycznych było zagwarantowane (można wówczas powiedzieć, że konstrukcja przystosowuje się do zadanych jej zmian obciążeń). Niestety,

spełnienie warunku nieprzekroczenia nośności granicznej konstrukcji jeszcze nie gwarantuje jej przystosowania się w przypadku ogólnym. Brak stabilizacji odkształceń plastycznych może prowadzić do ich narastania w kolejnych cyklach obciążania (zniszczenie przyrostowe) lub do ich oscylacji wokół pewnej wartości (plastyczność naprzemienna), co w konsekwencji, po niewielkiej liczbie cykli, może doprowadzić do zniszczenia materiału.

5.2. Zagadnienie plastycznego płynięcia

W przypadku niektórych wielkogabarytowych elementów cienkościennych, które zgodnie z założeniami konstruktora miały pracować w zakresie sprężystym, po plastycznym zdeformowaniu się nadal mogą spełniać swoją podstawową funkcję pracując w zakresie sprężysto-plastycznym. Ogólnie warunek przejścia w stan, w którym mogą występować odkształcenia plastyczne, nazywany również warunkiem plastyczności, można przedstawić w postaci [28, 37, 63]:

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_i) = 0 \quad (5.1)$$

gdzie:

F – funkcja potencjału plastycznego,

σ_{ij} – składowe tensora naprężeń normalnych,

ε_{ij}^p – składowe tensora odkształceń plastycznych,

χ_i – parametry umocnienia charakteryzujące zależność zmiany funkcji obciążenia od drogi obciążenia.

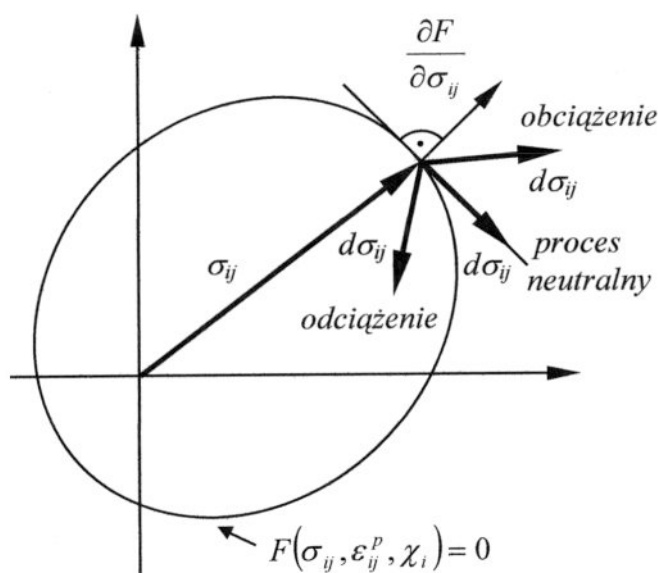
Materiał podlega odkształceniom sprężystym aż do momentu osiągnięcia powierzchni plastyczności. Z płynięciem materiału mamy do czynienia wówczas, gdy stan naprężeń jest usytuowany na powierzchni warunku plastyczności. Obciążenie, jako proces czynny, powoduje przyrost naprężeń, któremu towarzyszy powstanie odkształceń plastycznych. Zatem stan obciążenia występuje, gdy spełniony jest warunek:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad (5.2)$$

Natomiast z przypadkiem stanu odciążenia, jako procesem biernym, spotykamy się wówczas, gdy zachowany jest warunek:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (5.3)$$

Przy ustalonych odkształceniach plastycznych w sześciowymiarowej przestrzeni składowych naprężeń, funkcji (5.1) można przyporządkować pewną hiperpowierzchnię, zwaną powierzchnią plastyczności (rys. 5.2). W sposób ogólny dowodzi się, że powierzchnia plastyczności musi być zawsze wypukła [93]. Warunek ten nie wyklucza możliwości istnienia w niej ostrych naroży, czyli punktów nieregularnych o nieciągłych wartościach pochodnych.



Rys. 5.2. Interpretacja geometryczna powierzchni plastyczności [63]

Dla przypadku powierzchni plastyczności z osobliwościami występującymi na przecięciu się segmentów powierzchni gładkich warunek (5.1) można zapisać następująco:

$$F_k(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \chi_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.4)$$

gdzie: N jest liczbą gładkich płatów F_k .

Dla punktów, w których występują nieciągłości pochodnych, stowarzyszone prawo płynięcia przyjmuje postać:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sum_k \dot{\lambda} \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{dla} \quad \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad (5.5)$$

gdzie:

$\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – składowe tensora prędkości odkształceń plastycznych,

$\dot{\lambda}$ – współczynnik proporcjonalności.

Wektor prędkości odkształceń plastycznych lub przyrostu odkształceń plastycznych, zgodnie ze stowarzyszonym prawem płynięcia, jest ortogonalny do powierzchni plastyczności w regularnych punktach tej powierzchni. Natomiast w punktach nieciągłości pochodnych, wektor prędkości lub przyrosty odkształceń plastycznych znajdują się w stożku z wierzchołkiem w punkcie nieregularnym o tworzących normalnych do poszczególnych segmentów powierzchni plastyczności. Wartość współczynnika proporcjonalności $\dot{\lambda} > 0$ jest stała w danej chwili i w określonym punkcie ciała. Na ogół jednak jest ona zależna zarówno od czasu, jak również od położenia poszczególnych punktów ośrodka uplastycznionego.

Zależności określające wartość przyrostu odkształcenia plastycznego, zgodnie z teorią płynięcia plastycznego [51, 93], przedstawia się zwykle w postaci stowarzyszonego z funkcją obciążenia prawa płynięcia:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{dla} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad (5.6)$$

lub inaczej:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{dla} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad (5.7)$$

gdzie: $d\lambda$, $\dot{\lambda}$ – współczynniki proporcjonalności.

Po rozpisaniu dla każdej ze składowych tensora prędkości odkształcenia otrzymamy:

$$\frac{\dot{\epsilon}_x^p}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}} = \frac{\dot{\epsilon}_y^p}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_y}} = \dots = \frac{\dot{\epsilon}_{zx}^p}{\frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}}} = \dot{\lambda} \quad (5.8)$$

Związki wyrażające zależność prędkości odkształcenia od naprężenia wywodzą się z prac Levy i Misesa. Opierają się one na eksperymentalnie potwierdzonych założeniach, że materiał przy odkształceniach plastycznych nie zmienia swojej objętości, a więc jest nieściśliwy. Ponadto kierunki główne zarówno tensorów prędkości odkształcenia jak i naprężenia pokrywają się oraz składowe dewiatorów prędkości odkształceń i naprężeń są proporcjonalne.

Warunki te spełnia koncepcja tak zwanego potencjału plastycznego, utożsamianego z funkcją $F(\sigma_{ij})$ występującą w warunku plastyczności. Stąd prędkości odkształceń związane są z naprężeniami za pomocą zależności (5.9). Związek ten określany jest jako prawo płynięcia stowarzyszone z warunkiem plastyczności lub też nazywany krótko prawem płynięcia Levy-Misesa [28, 37, 45, 124, 131]:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.9)$$

gdzie:

$\dot{\epsilon}_{ij}^p$ – składowe tensora prędkości odkształceń plastycznych,

$\dot{\lambda}$ – współczynnik proporcjonalności,

$F(\sigma_{ij})$ – funkcja potencjału plastycznego.

Zależność (5.9) odpowiada przyjęciu warunku izotropii (tzn. o pokrywaniu się kierunków głównych tensorów naprężeń i prędkości odkształceń) i spełnia tożsamościowo warunek nieściśliwości:

$$\dot{\epsilon}_{ii}^p = 0 \quad (5.10)$$

Oznacza to, że uplastycznienie materiału jest wynikiem wyłącznie odkształceń plastycznych. Współczynnik proporcjonalności λ nie jest stałą materiałową. Jego wielkość jest w danej chwili i w danym punkcie ciała stała, ale na ogół zmienia się w czasie trwania procesu odkształcenia oraz zwykle jest w danej chwili inna w każdym punkcie ciała. Wielkość λ ma wartość nieujemną, co wynika z warunku, że przy odkształceniach plastycznych praca odkształcenia musi być w każdym punkcie ciała nieujemna. Dla pokonania oporów plastycznego materiału musimy bowiem doprowadzić energię z zewnątrz.

Przyjmując, że zarówno całkowity przyrost odkształcenia, jak i również całkowita prędkość odkształcenia składają się z części sprężystej i plastycznej:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^s + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^s + d\varepsilon_{ij}^p \quad (5.11)$$

gdzie:

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ – składowe tensora prędkości odkształceń,

$\dot{\varepsilon}_{ij}^s$ – składowe tensora prędkości odkształceń sprężystych,

$\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – składowe tensora prędkości odkształceń plastycznych.

Po uzupełnieniu o przyrost odkształcenia sprężystego, zgodnie z prawem Hooke'a:

$$d\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) d\sigma_{ij} - \nu d\sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (5.12)$$

gdzie:

E – moduł Younga,

ν – współczynnik Poissona,

ε_{ij}^s – składowe tensora odkształceń sprężystych,

σ_{ij} – składowe tensora naprężeń normalnych,

δ_{ij} – symbol Kroneckera.

Po rozpisaniu zależności (5.9) dla formy przyrostowej w postaci:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (5.13)$$

otrzymamy związki nazywane prawem plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa [28, 37]:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) d\sigma_{ij} - \nu d\sigma_{kk} \delta_{ij} \right] + d\lambda \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (5.14)$$

5.3. Podstawowe warunki plastyczności

W przypadku elementu obciążonego tak, że występuje w nim złożony stan naprężenia, powstaje pytanie – kiedy nastąpi przejście ze stanu sprężystego w stan plastyczny. Przy obciążeniu jednoosiowym przejście to nastąpi w chwili osiągnięcia przez materiał granicy plastyczności σ_{pl} . Natomiast w złożonym stanie naprężenia należy oczekiwać, że osiągnięcie stanu plastycznego jest związane z pewną kombinacją wielkości niezmienników tensora naprężeń. Oznacza to, iż materiał przechodzi w stan plastyczny, jeśli stan naprężenia jest taki, że zachodzi pewien związek między jego niezmiennikami. Związek ten w ogólnej postaci przedstawia się następująco:

$$F(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad (5.15)$$

gdzie: I_1, I_2, I_3 – niezmienniki tensora naprężeń.

Ponadto jak wiadomo z badań doświadczalnych przejście materiału w stan plastyczny nie zależy od wielkości naprężenia średniego σ_m , czyli właściwie od pierwszego niezmiennika tensora naprężeń. Oznacza to, że część kulista tensora naprężeń nie wpływa na warunek plastyczności, który można zatem zapisać jako pewną zależność między niezmiennikami dewiatora naprężeń:

$$F(J_2, J_3) = 0 \quad (5.16)$$

gdzie: J_2, J_3 – niezmienniki dewiatora naprężeń.

Przy czym pierwszy niezmiennik dewiatora naprężeń J_1 jest równy zero i nie występuje w powyższej zależności.

Dotychczas jednak nie znaleziono sposobu na teoretyczne ustalenie postaci tego związku i wszystkie znane odmiany warunku plastyczności są jedynie hipotezami. W praktyce mają zastosowanie dwa podstawowe warunki plastyczności: Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H) i Treski.

Warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego po raz pierwszy sformułował Huber, a następnie niezależnie od niego Mises oraz Hencky [28, 86, 93, 124]. Zakłada on bardzo prostą postać ogólnej zależności (5.17) w postaci:

$$J_2 - k^2 = 0 \quad (5.17)$$

gdzie:

k – pewna charakterystyczna dla danego materiału stała, równa wartości naprężeń stycznych podczas czystego ścinania, przy której materiał osiąga stan plastyczny,

$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]$ – drugi niezmiennik dewiatora naprężeń.

Jak widać z powyższej zależności warunek ten nie zależy od trzeciego niezmiennika dewiatora naprężeń J_3 i mówi, że materiał przejdzie w stan plastyczny, gdy drugi niezmiennik dewiatora naprężeń J_2 osiągnie pewną stałą wartość k . Często zależność (5.17) przedstawia się również jako wyrażenie związane z intensywnością naprężeń stycznych:

$$\sigma_{\text{int}} = k \quad (5.18)$$

gdzie: $\sigma_{\text{int}} = \sqrt{J_2}$ – intensywność naprężeń.

Dlatego też warunek ten, ze względu właśnie na powyższą zależność, nazywany jest często warunkiem intensywności naprężeń stycznych. Natomiast jeśli do wyrażenia (5.17) podstawimy zależność na drugi niezmiennik dewiatora naprężeń J_2 to otrzymamy warunek plastyczności H-M-H w postaci:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 6k^2 \quad (5.19)$$

lub dla kierunków głównych:

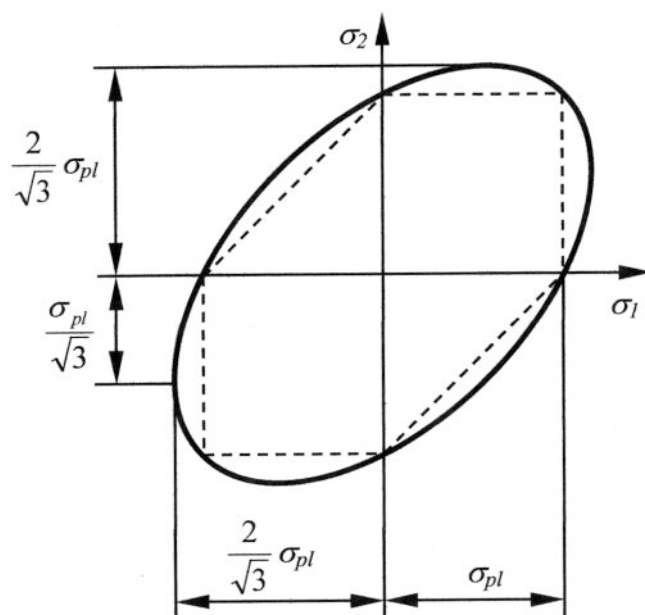
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2 \quad (5.20)$$

Dla przypadku jednoosiowego rozciągania, gdy np. występuje tylko naprężenie główne σ_1 , natomiast pozostałe są równe zeru ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), a ponadto wiedząc że przejście materiału w stan plastyczny nastąpi dla $\sigma_1 = \sigma_{pl}$, to dzięki zależności (5.20) można wówczas wyznaczyć wartość stałej k :

$$k = \frac{\sigma_{pl}}{\sqrt{3}} \quad (5.21)$$

gdzie: σ_{pl} – naprężenie plastyczne.

Powierzchnię plastyczności, która odpowiada warunkowi H-M-H można przedstawić w przestrzeni naprężeń głównych $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ w postaci nieskończenie długiego walca o przekroju kołowym o promieniu $\sqrt{2}k$ oraz osi jednakowo nachylonej względem wszystkich trzech osi naprężeń głównych. Przekrój tego walca płaszczyzną σ_3 daje elipsę przedstawioną na rys. 5.3.



Rys. 5.3. Powierzchnia plastyczności według hipotezy H-M-H
w płaskim stanie naprężenia [124]

Warunek plastyczności Treski mówi, że materiał może przejść w stan plastyczny w chwili, gdy maksymalne naprężenie styczne osiągnie pewną krytyczną wartość k . Warunek ten wyraża się następującą zależnością [28, 86, 93, 124]:

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2k \quad (5.22)$$

gdzie:

k – pewna charakterystyczna dla danego materiału stała, równa wartości naprężeń stycznych podczas czystego ścinania, przy której materiał osiąga stan plastyczny.

Jeżeli tak uporządkujemy oznaczenia naprężeń głównych, że $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, to warunek ten wówczas przyjmie postać:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k \quad (5.23)$$

Tak więc odpowiada on równości:

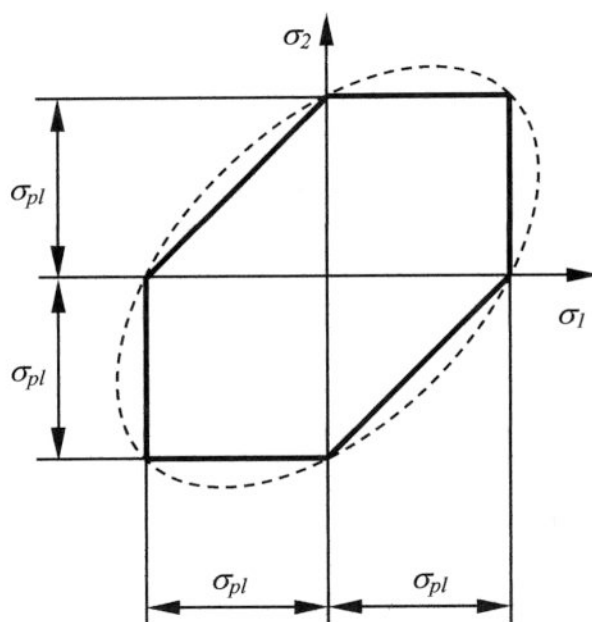
$$\tau_{\max} = k \quad (5.24)$$

Dlatego też warunek ten, ze względu właśnie na powyższą zależność, nazywany jest często warunkiem maksymalnych naprężeń stycznych.

Jeżeli podobnie jak dla warunku plastyczności H-M-H rozpatrzmy przypadek jednoosiowego rozciągania, to przy wykorzystaniu zależności (5.23) otrzymamy wyrażenie, dzięki któremu będzie można wyznaczyć wartość stałej k :

$$k = \frac{\sigma_{pl}}{2} \quad (5.25)$$

Warunkowi Treski w przestrzeni naprężeń głównych $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ odpowiada powierzchnia plastyczności w postaci nieskończenie długiego graniastoslupa o przekroju w kształcie regularnego sześciokąta. Graniastosłup Treski jest wpisany w walec H-M-H, a jego krawędzie leżą na powierzchni walca. Przekrój tego graniastoslupa płaszczyzną σ_3 daje sześciokąt przedstawiony na rys. 5.4.



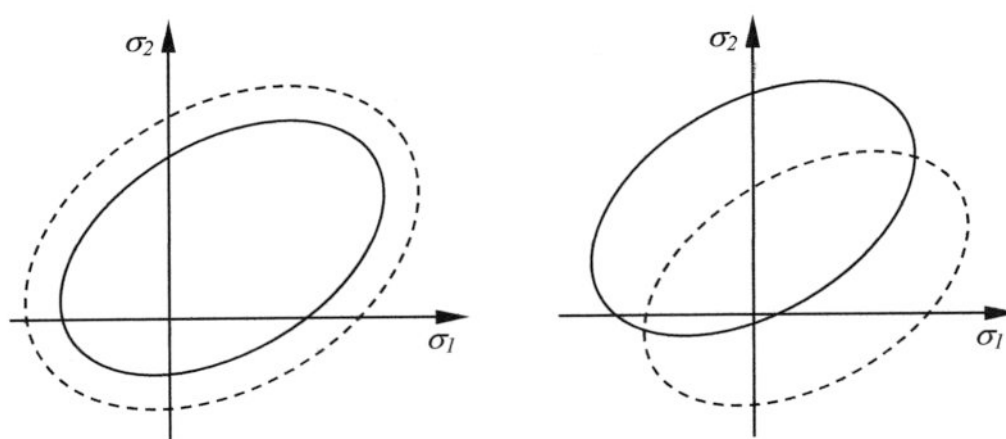
Rys. 5.4. Powierzchnia plastyczności według hipotezy Treski
w płaskim stanie naprężenia [124]

Jeżeli porównać zależności (5.21) i (5.25) to okaże się, że dla materiału o określonej granicy plastyczności σ_{pl} przy jednoosiowym rozciąganiu, wartość stałej k otrzymana z warunku Treski jest o około 15% mniejsza od otrzymanej z warunku H-M-H, co ma swoje odzwierciedlenie w interpretacji geometrycznej obu warunków. Ta niewielka różnica między powyższymi warunkami plastyczności powoduje, że w obliczeniach inżynierskich uważa się je za równoprawne. Ogólnie uważa się, że warunek H-M-H najlepiej odzwierciedla rzeczywiste zachowanie się materiałów sprężysto-plastycznych przy złożonych stanach naprężenia. Jednak również warunek Treski daje dość dobre przybliżenie opisu własności plastycznych materiału, a dodatkowo jest on niekiedy znacznie wygodniejszy przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień, np. w przypadku płaskiego stanu naprężenia. Jest to związane z tym, że warunek ten jest liniową funkcją naprężeń głównych, co w porównaniu z kwadratową funkcją wyrażającą warunek H-M-H często upraszcza rozwiązanie zadania teorii plastyczności. Poważną jednak niedogodnością w przypadku warunku Treski jest wymagana znajomość uporządkowanych wartości naprężeń głównych, często wstępnie niemożliwa do przewidzenia przed rozwiązaniem zadania oraz występowanie nieregularnych punktów tej powierzchni plastyczności.

5.4. Wpływ umocnienia się materiału na dalszą deformację

W przypadku modelu ośrodka idealnie sztywno-plastycznego jedyną stałą materiałową jest granica plastyczności. Wyniki uzyskane dla takiego modelu mają duże znaczenie praktyczne, gdyż wyjaśniają mechanizm odkształcenia i wpływ różnych czynników na proces. Dla wielu metali krzywa naprężenie-odkształcenie w zakresie dużych odkształceń jest dość płaska. W szczególności dotyczy to metali w stanie podgrzanym. W ogólnym przypadku wartość naprężeń uplastyczniających zależy od odkształceń i ich prędkości oraz temperatury. Zależność tę określa się doświadczalnie. Jeżeli proces odkształcenia zachodzi dość wolno z dobrą wymianą ciepła z otoczeniem, to wpływ prędkości odkształceń i wzrost temperatury w wyniku przekształcenia pracy deformacji plastycznych w ciepło okaże się nieznaczny. Głównym czynnikiem decydującym o wartości naprężeń uplastyczniających jest odkształcenie. Wzrost granicy plastyczności wywołany wzrostem odkształcenia plastycznego nazywamy wzmocnieniem lub umocnieniem materiału.

Wykorzystywane w teorii plastyczności matematyczne opisy wzmocnienia są zwykle bardzo uproszczone w stosunku do rzeczywistego zachowania się materiałów. Podstawowym założeniem jest hipoteza jednej krzywej, w myśl której postać zależności intensywności naprężenia do intensywności odkształcenia jest stała dla danego ośrodka i nie zależy od stanu naprężenia i sposobu obciążenia [74]. Hipoteza ta znajduje potwierdzenie doświadczalne dla przypadków, w których występują proporcjonalne sposoby obciążenia. Największe znaczenie praktyczne w analizie plastycznego płynięcia metali mają dwie propozycje dotyczące matematycznego opisu wzmocnienia: hipoteza wzmocnienia izotropowego oraz wzmocnienia kinematycznego (rys. 5.5) [63, 93, 144].



Rys. 5.5. Hipotezy wzmocnienia izotropowego i kinematycznego [63]

Są to hipotezy fenomenologiczne i nie wnikają one głębiej w istotę fizyczną procesu odkształceń plastycznych. Pierwsza z nich zakłada, że w skutek procesu odkształcenia powierzchnia plastyczności ulega jedynie równomiernemu rozszerzeniu, zachowując poprzednie położenie w przestrzeni naprężeń i kształt geometryczny. Hipoteza wzmocnienia kinematycznego przewiduje przemieszczanie się powierzchni plastyczności pod wpływem odkształceń plastycznych bez zmiany kształtu i wymiarów. Hipoteza wzmocnienia izotropowego nie uwzględnia efektu Bauschingera [37, 93, 144], natomiast hipoteza wzmocnienia kinematycznego uwzględnia jedynie idealny efekt Bauschingera (przy odciążaniu materiału uplastycznionego oraz poddaniu go dalej ścisaniu, granica plastyczności po stronie ujemnej naprężeń maleje, tzn. $|\sigma_{pl}| > |-\sigma_{pl}|$). Dokładniejszy opis zachowania się materiałów można uzyskać przez wprowadzenie pośredniej koncepcji wzmocnienia oraz dopuszczenie – poza wzrostem i translacją powierzchni plastyczności – możliwości zmiany jej kształtu [61].

6. Model analityczny deformacji membrany

Wyznaczenie stateczności konstrukcji cienkościennych jest równie istotne z punktu widzenia wytrzymałości jak określenie stanów naprężeń i odkształceń wywołanych obciążeniami zewnętrznymi nie wywołującymi wyboczenia [18]. W znacznej liczbie przypadków warunek zabezpieczenia się przed utratą stateczności jest znacznie bardziej surowy niż inne warunki i decyduje o wymiarach oraz ukształtowaniu konstrukcji. Należy przy tym pamiętać, aby wyznaczać zawsze obciążenie odpowiadające lokalnemu oraz globalnemu wyboczeniu konstrukcji. O ile wyboczenie lokalne jest często dopuszczalne i może zachodzić podczas eksploatacji, o tyle wyboczenie globalne prowadzi z zasady do zniszczenia konstrukcji i dlatego nie można do niego dopuścić.

Ogólne równanie różniczkowe funkcji ugięcia w cienkiej, sprężystej płycie w układzie współrzędnych prostokątnych x, y, z ma postać równania Lagrange'a [15, 18, 53, 59]:

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (6.1)$$

gdzie:

$q(x, y)$ – obciążenie zewnętrzne przypadające na jednostkę pola (działające prostopadle do powierzchni płyty),

D – sztywność płyty na zginanie:

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (6.2)$$

gdzie: h – grubość płyty.

Natomiast równanie (6.1) dla przypadku płyty kołowej, wyrażone w układzie współrzędnych biegunowych r, φ ma postać następującą [15, 59, 128]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{q(r, \varphi)}{D} \quad (6.3)$$

Równanie (6.1) ma rozwiązanie w postaci szybkozbieżnych szeregów trygonometrycznych i wyznacza się je przy uwzględnieniu warunków brzegowych podparcia płyty prostokątnej, które można sprowadzić do trzech głównych wariantów (np. w przypadku krawędzi $x = 0$) [63]:

- dla krawędzi utwierdzonych – w miejscu utwierdzenia płyty, ugięcie oraz kąt jaki tworzy styczna do powierzchni odkształconej płyty z odpowiednią osią układu współrzędnych są równe zero:

$$w(0, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (6.4)$$

- dla krawędzi swobodnie podpartych – w miejscu podparcia płyty, ugięcie oraz moment zginający są równe zero:

$$w(0, y) = 0, \quad M_x(0, y) = 0 \quad (6.5)$$

- dla krawędzi swobodnych – na krawędziach swobodnych płyty, moment zginający, moment skręcający oraz siła poprzeczna są równe zero:

$$M_x(0, y) = 0, \quad M_{xy}(0, y) = 0, \quad F_x(0, y) = 0 \quad (6.6)$$

Rozważając płytę prostokątną o wymiarach $a \times b$ oraz grubości h obciążoną w płaszczyźnie dowolnie zmiennymi wzdłuż brzegów, a równomiernie rozłożonymi wzdłuż grubości naprężeniami normalnymi od ściskania σ_x , σ_y oraz stycznymi τ_{xy} . Zakładając iż płyta może być w równowadze w postaci ugiętej, a każdy jej element, pomimo ugięcia, pozostaje w płaskim dwuwymiarowym stanie naprężeń.

Kształtu ugięcia płyty poszukuje się zazwyczaj w postaci iloczynu funkcji trygonometrycznych w kierunku x i y . Funkcje te zależą zarówno od warunków brzegowych (sposobów podparcia płyty), jak i od rozkładu naprężeń σ_x , σ_y , τ_{xy} na jej brzegach. Wartość tych naprężeń dla funkcji ugięcia tak dobranej, że zapewnia równowagę płyty dowolnie ugiętej (w ramach

małych ugięć), jest wartością naprężeń granicznych. Można wówczas udowodnić, że naprężenia krytyczne, możliwie najmniejsze z granicznych (zarówno styczne, jak i normalne) dla wszystkich przypadków podparcia i różnych obciążeń, są określone zależnością:

$$\tau_{kr} = \sigma_{kr} = K \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (6.7)$$

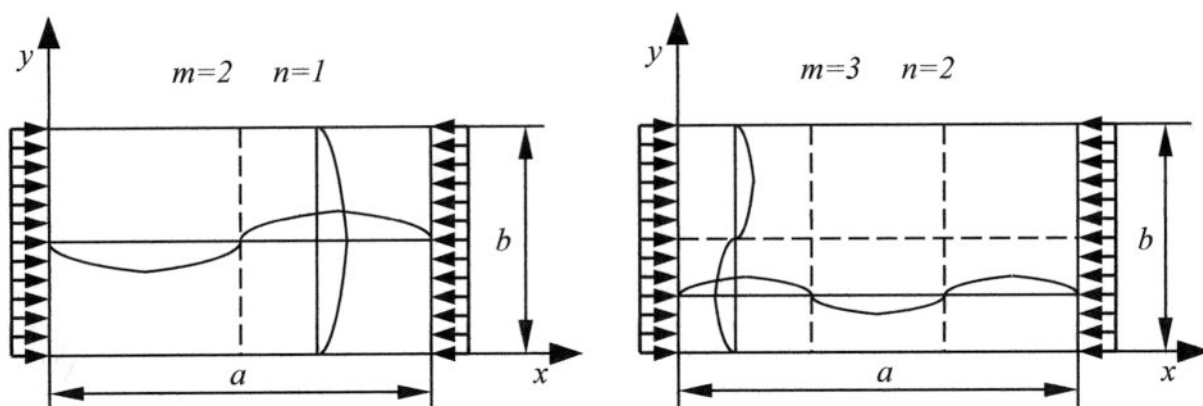
gdzie: K – współczynnik zależny od stosunku długości boków płyty $\alpha = a/b$, warunków podparcia oraz sposobu obciążenia.

6.1. Przykładowe modele

W rozdziale tym omówiono niektóre przykłady analiz charakterystyczne dla tego typu problematyki w celu prezentacji typowego rozwiązywania zagadnień dotyczących cienkościennych elementów konstrukcyjnych poddanych złożonym obciążeniom.

Przykład 1 [18]

Równomiernemu ściskaniu wzdłuż brzegów o długości b poddano swobodnie podpartą na wszystkich brzegach płytę prostokątną (rys. 6.1).



Rys. 6.1. Obciążenie płyty prostokątnej oraz sposób jej ugięcia się [18]

Zależność opisująca ugięcia płyty zazwyczaj określana jest za pomocą iloczynu funkcji trygonometrycznych w kierunku osi x i y . Stąd przyjmując, że spełnione są warunki brzegowe podparcia, a więc ugięcie na wszystkich brzegach jest równe zero oraz zapewniona jest możliwość swobodnego obrotu na wszystkich brzegach, otrzymano następującą zależność:

$$w(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \quad (6.8)$$

gdzie:

a – długość płyty prostokątnej,

b – szerokość płyty prostokątnej,

m – liczba sinusoidalnych półfal ugięcia płyty w kierunku osi x ,

n – liczba sinusoidalnych półfal ugięcia płyty w kierunku osi y ,

A_{mn} – pewne stałe współczynniki.

Dla przyjętej funkcji ugięcia płyty (6.8) można stwierdzić, że jej równowaga w postaci wygiętej (tzn. gdy $w \neq 0$) jest możliwa wówczas, gdy stałe obciążenie brzegu σ_x jest równe:

$$\sigma_x = \frac{\pi^2 D}{h b^2} \left(\frac{m}{\alpha} + n^2 \frac{\alpha}{m} \right)^2 \quad (6.9)$$

gdzie: α – współczynnik określający stosunek długości boków płyty $\alpha = a/b$.

Zatem wartość σ_x jest wartością graniczną powodującą utratę stateczności, a porównując (6.9) z (6.7) można zauważyć, że te wyrażenia są identyczne gdy:

$$K = \left(\frac{m}{\alpha} + n^2 \frac{\alpha}{m} \right)^2 \quad (6.10)$$

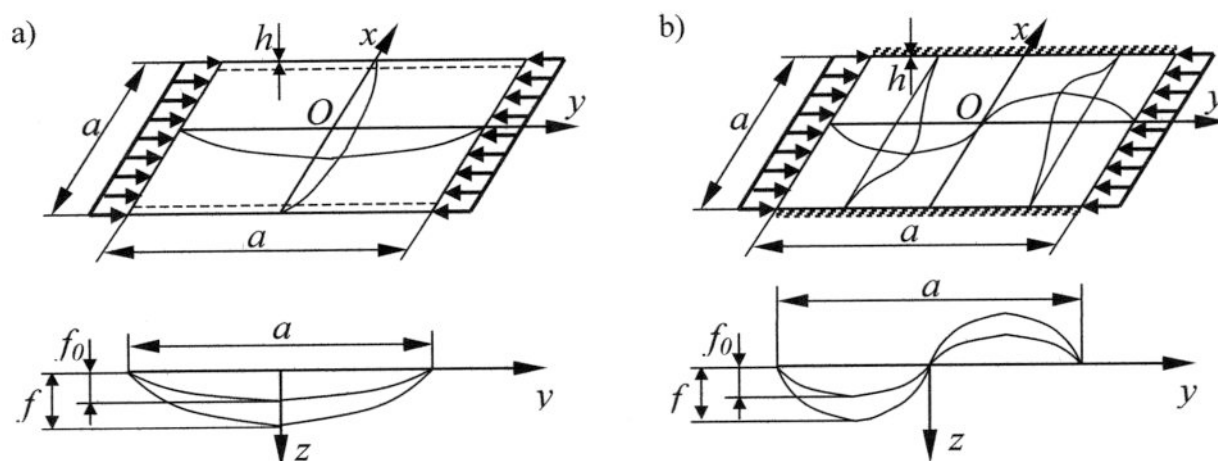
Chcąc uzyskać naprężenie krytyczne jako najmniejsze ze wszystkich możliwych granicznych, należy znaleźć najmniejszą wartość K . Taki przypadek zachodzi dla $n = 1$ (gdyż dla $n = 0$ ugięcia płyty są wszędzie zerowe) oraz dla różnych m w zależności od $\alpha = a/b$. Należy przy tym pamiętać, że wartości n i m mogą być tylko dodatnimi liczbami całkowitymi.

Należy zwrócić uwagę, że warunek swobodnego podparcia (podobnie też jak warunek utwierdzenia) oznacza, iż istnieje swoboda przemieszczeń w płaszczyźnie płyty (podpory traktowane są jako przesuwne). Jeśli więc ściskana wzdłużnie płyta nie mogłaby się swobodnie rozszerzać np. w kierunku poprzecznym, oznaczałoby to wprowadzenie dodatkowego poprzecznego ściskania i zmniejszenie siły krytycznej.

Przykład 2 [44]

Równomiernemu ściskaniu na jej brzegach $y = \pm a/2$ poddano cienką płytę kwadratową (stan zakrytyczny w zakresie sprężysto-plastycznym). Rozpatrywano dwa możliwe warunki kinematyczne wzdłuż nieobciążonych brzegów (rys. 6.2):

- krawędzie swobodnie podparte,
- krawędzie utwierdzone.



Rys. 6.2. Geometria, sposób obciążenia oraz ugięcie płyty [44]

Na rysunku przyjęto następujące oznaczenia:

a – szerokość i długość płyty,

f – strzałka ugięcia płyty,

f_0 – wstępna strzałka ugięcia płyty,

h – grubość płyty,

O – początek układu współrzędnych,

x, y, z – oznaczenia osi układu współrzędnych.

Założono, że obciążone brzegi płyty są swobodnie podparte, pozostają proste i równoległe podczas obciążania. Dodatkowo na nieobciążonych brzegach narzucone zostały warunki brzegowe Hempla (oznacza to, że brzegi są całkowicie wolne od naprężeń), a także warunki Marguerra-Trefftza (brzegi pozostają proste podczas obciążenia) [44].

Funkcje opisujące ugięcia płyty w kierunku osi z spełniające powyższe warunki brzegowe mają następującą postać:

a) dla przypadku płyty z nieobciążonymi brzegami swobodnie podpartymi

$$w(x, y) = f \cos \frac{1\pi x}{a} \cos \frac{1\pi y}{a} \quad (6.11)$$

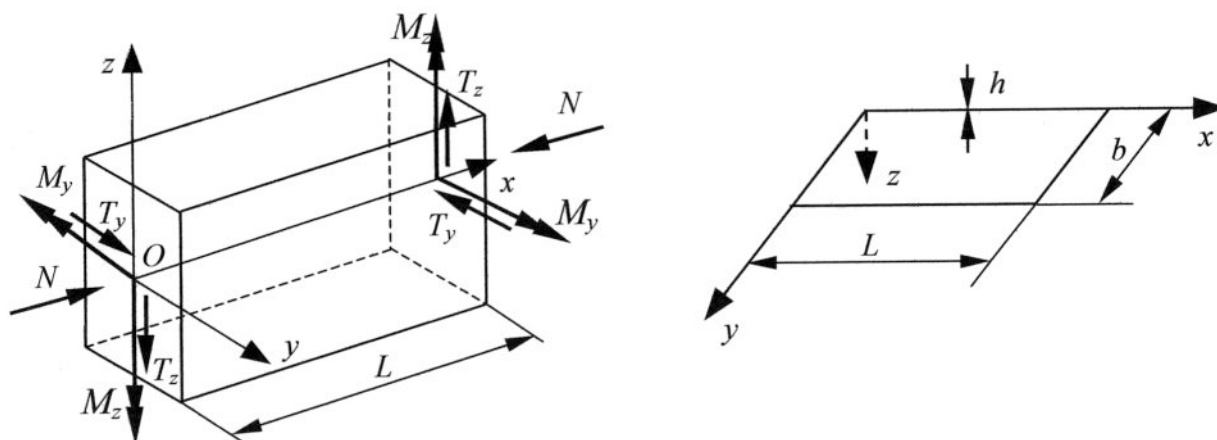
b) dla przypadku płyty z nieobciążonymi brzegami utwierdzonymi

$$w(x, y) = f \cos^2 \frac{1\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} \quad (6.12)$$

Postacie zależności na ugięcie wstępne są identyczne jak wyrażenia (6.11) i (6.12). Założenie to jest dla stanu najbardziej niekorzystnego ugięcia wstępnego.

Przykład 3 [54]

Segment belki skrzynkowej poddano złożonym obciążeniom, które stanowią: siła normalna, siły tnące oraz momenty zginające (stan zakrytyczny). Analizę takiego elementu oparto na myślowym rozbiciu segmentu na płaskie ścianki (rys. 6.3).



Rys. 6.3. Segment belki skrzynkowej wraz z wyizolowaną pojedynczą ścianką [54]

Na rysunku przyjęto następujące oznaczenia:

b – szerokość ścianki,

h – grubość ścianki,

L – długość ścianki,

M_y, M_z – momenty zginające,

N – siła normalna,

O – początek układu współrzędnych,

T_y, T_z – siły tnące,

x, y, z – oznaczenia osi układu współrzędnych.

Funkcja opisująca ugięcie wyizolowanej pojedynczej ścianki segmentu belkowego ma następującą postać:

$$w = h \sum_i \sum_n f_{in} Y_n \sin(i \pi \bar{x}) \quad (6.13)$$

gdzie:

f_{in} – współczynniki proporcjonalności,

h – grubość ścianki,

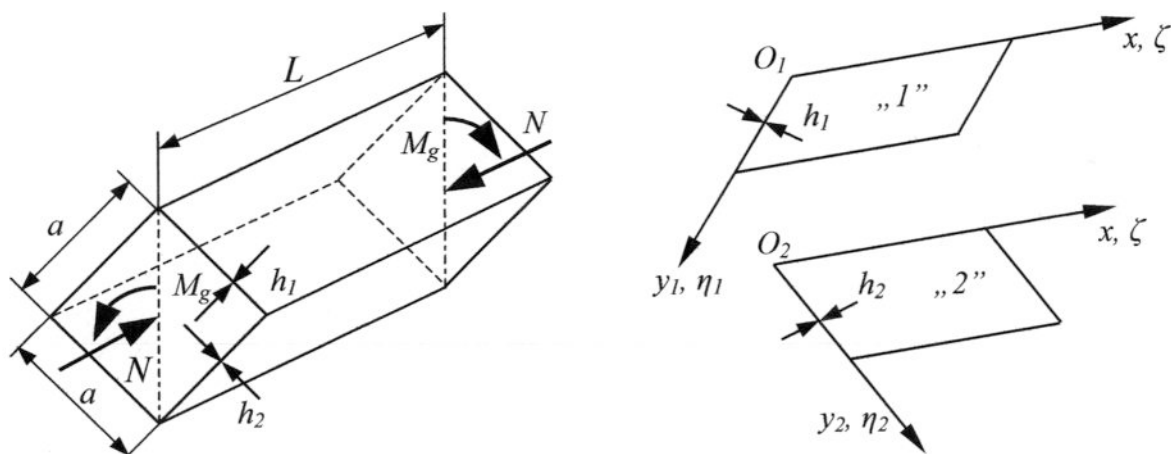
Y_n – oznacza rodzinę funkcji zmiennej $\bar{y}$, spełniających warunki $Y_n(0) = Y_n(1) = 0$,

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}.$$

Kąty nachylenia powierzchni płyty i momenty gnące wzdłuż krawędzi $\bar{y} = 0, \bar{y} = 1$ wyrażają się przy powyższych założeniach skończonymi szeregami sinusowymi i można wykorzystać dla nich warunki brzegowe wynikające, np. ze współpracy sąsiednich ścianek.

Przykład 4 [67]

Obciążeniu siłą normalną i stałym momentem zginającym działającym w płaszczyźnie symetrii poddano cienkościenny dźwigar o przekroju rombowym (stan zakrytyczny). Rozpatrzono możliwość wystąpienia symetrycznej lub niesymetrycznej postaci wyboczenia ścian dźwigara (rys. 6.4).



Rys. 6.4. Obciążenie segmentu dźwigara oraz wyizolowane pojedyncze ścianki [67]

Na rysunku przyjęto następujące oznaczenia:

ζ, η_i – oznaczenia osi układów współrzędnych poszczególnych ścianek (bezwymiarowe),

a – szerokość ścianek,

h_i – grubość i-tej ścianki

L – długość ścianek,

M_g – moment zginający,

N – siła normalna,

O_i – początek układu współrzędnych i-tej ścianki,

x, y_i – oznaczenia osi układów współrzędnych poszczególnych ścianek.

W celu umożliwienia opisu symetrycznej i niesymetrycznej postaci wyboczenia, funkcja ugięcia ścianek „1” i „2” została przedstawiona w następującej postaci:

$$w_i = h_i \left(\sum_j f_{ij} \eta_i^j \right) \sin \zeta \quad (6.14)$$

gdzie:

h_i – grubość i-tej ścianki,

f_{ij} – parametry funkcji ugięć,

$$\eta_i = \frac{y_i}{a}, \quad \zeta = \frac{\pi x}{l}.$$

Dzięki wykorzystaniu poniższych warunków brzegowych oraz warunków współpracy ścianek na podłużnych krawędziach dźwigara:

$$\begin{aligned}
 (w_1)_{\zeta, \eta_1=1} &= (w_2)_{\zeta, \eta_2=1} = 0 \\
 \left(\frac{\partial w_1}{\partial \eta_1} \right)_{\zeta, \eta_1=1} &= \left(\frac{\partial w_2}{\partial \eta_2} \right)_{\zeta, \eta_2=0} \\
 (M_{y_1})_{\zeta, \eta_1=1} &= (M_{y_2})_{\zeta, \eta_2=0}
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

- dla symetrycznej postaci wyboczenia:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial w_1}{\partial \eta_1} \right)_{\zeta, \eta_1=0} &= 0 \\
 \left(\frac{\partial w_2}{\partial \eta_2} \right)_{\zeta, \eta_2=1} &= 0
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

- dla niesymetrycznej postaci wyboczenia:

$$\begin{aligned}
 (M_{y_1})_{\zeta, \eta_1=0} &= 0 \\
 (M_{y_2})_{\zeta, \eta_2=1} &= 0
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

(gdzie M_{y_i} jest przekrojowym momentem zginającym i-tą ściankę w kierunku osi y), wyeliminowano sześć spośród dziesięciu parametrów f_{ij} funkcji ugięć ścianek. Pozostałe cztery niezależne parametry oznaczono jako f_j , a funkcję ugięć w_i zapisano następująco:

$$w_i = h_i \left[\sum_j \varphi_{ij}(\eta_i) f_j \right] \sin \zeta \tag{6.18}$$

W powyższej zależności funkcje φ_{ij} zmiennej η_i zależą od postaci wyboczenia i stosunku grubości ścianek dźwigara $t = \frac{h_1}{h_2}$.

6.2. Proponowany analityczny opis deformacji membrany

Na podstawie wyników pomiarów wstępnych³ stwierdzono, że uszkodzeniu uległo wielkogabarytowe sprzęgło membranowe, będące częścią zespołu napędowego mechanizmu urabiania koparki. Nastąpiło to na skutek wystąpienia plastycznej deformacji cienkościennego elementu pośredniczącego w przekazywaniu momentu obrotowego z przekładni napędowej na koło czepakowe. Zaistniała więc potrzeba analitycznego opisu zjawiska deformacji badanej membrany, w celu określenia przyczyny powstania tego typu sytuacji.

W oparciu o przykłady prezentowane w poprzednim rozdziale, ogólną zależność opisującą ugięcia elementu cienkościennego typu płyta prostokątna poddanego złożonemu stanowi obciążenia można przedstawić w postaci podwójnego szeregu iloczynu funkcji trygonometrycznych sinus w kierunku osi x i y [18].

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.19)$$

gdzie:

a – wymiar płyty wzdłuż osi x ,

b – wymiar płyty wzdłuż osi y ,

m – liczba sinusoidalnych półfal ugięcia płyty w kierunku osi x ,

n – liczba sinusoidalnych półfal ugięcia płyty w kierunku osi y ,

A_{mn} – pewne stałe współczynniki.

Zależność (6.19) przedstawia funkcję opisującą ugięcie płyty prostokątnej w sposób najbardziej ogólny. Określa ona ugięcia elementu w dwóch kierunkach wzajemnie prostopadłych – wzdłuż osi x i y . Stanowi to dogodny punkt wyjścia do wyprowadzenia zależności opisującej ugięcia kołowo-symetrycznych struktur cienkościennych wyrażone we współrzędnych biegunowych. W wyniku myślowego rozwinięcia powierzchni takiego elementu uzyskamy dwa kierunki wzajemnie prostopadłe – promieniowy i obwodowy. Dzięki temu istnieje możliwość wykorzystania zależności (6.19) przy wprowadzeniu pewnych wielkości odpowiadających parametrom płyty prostokątnej.

³ Przeprowadzonych przez obsługę inżynierską (Załącznik Z.1)

Podczas pomiarów wstępnych wielkogabarytowego sprzęgła membranowego zmierzone zostały przemieszczenia w wybranych punktach rozmieszczonych na obwodzie dla kilku promieni (Załącznik Z.1). Istniała zatem możliwość opisu funkcji deformacji membrany we współrzędnych biegunowych tworząc analogie jak dla przypadku płyty prostokątnej.

Stąd też po odpowiednich modyfikacjach własna zależność opisująca ugięcie obwodowe dla i -tego promienia przybierze następującą postać:

$$w_i(\varphi) = \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{n\pi\varphi}{360} \quad (6.20)$$

gdzie:

φ – kąt obrotu (w stopniach),

n – liczba sinusoidalnych półfal ugięcia obwodowego,

a_n – pewne stałe współczynniki.

Uzyskane z pomiarów wyniki deformacji membrany wyrażały przemieszczenia względne, dlatego też należy w zależności (6.20) uwzględnić dodatkowy składnik w postaci wyrazu wolnego. Dzięki temu w ostateczności otrzymano własną zależność na funkcję opisującą deformację membrany dla dowolnego promienia:

$$w_i(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{n\pi\varphi}{360} \quad (6.21)$$

Postać funkcji ugięcia wyrażona zależnością (6.21) jest wygodniejsza do stosowania w przypadku wykorzystania jej w celach technicznych, np. analizy danych uzyskanych z badań doświadczalnych, gdzie położenie po obwodzie ustalane było jako kąt obrotu φ wyrażony w stopniach. Natomiast w notacji naukowej powyższa wyprowadzona zależność, gdzie kąt wyrażony jest w mierze łukowej i oznaczony jako α , przedstawia się następująco:

$$w_i(\alpha) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{n\alpha}{2} \quad (6.22)$$

7. Badania doświadczalne

Weryfikację doświadczalną zachowania się wielkogabarytowego sprzęgła membranowego poddanego złożonym obciążeniom przeprowadzono na koparce kołowej pracującej w normalnych warunkach eksploatacyjnych podczas urabiania nadkładu [27].

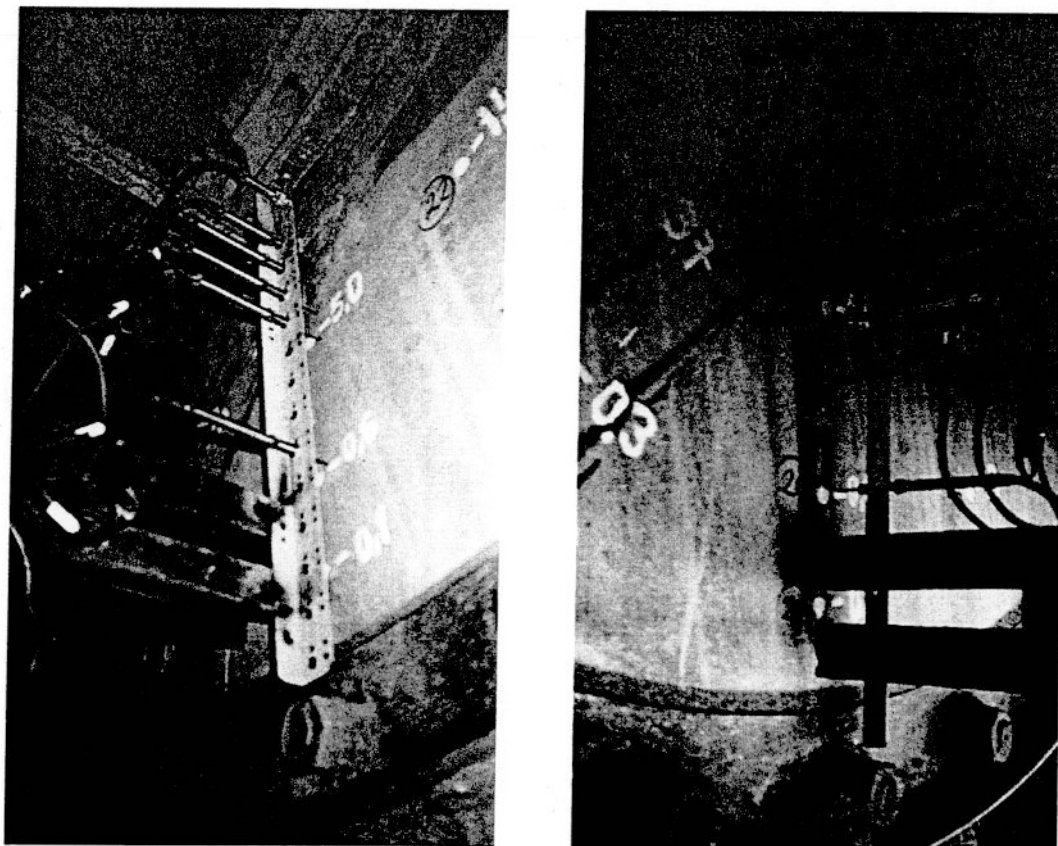
Do oceny stanu wielkogabarytowego sprzęgła membranowego koparki wybrano dwie metody – pomiar przemieszczeń (deformacji) oraz wyznaczenie naprężeń. W celu określenia stopnia deformacji membrany dużej wykonano badania jej odkształceń z zastosowaniem elektrycznych indukcyjnych czujników przemieszczeń. Ponieważ odkształcenie membrany może być przyczyną wzrostu i nierównomiernego rozkładu naprężeń, dokonano również ustalenia naprężeń w sześciu punktach pomiarowych w czasie eksploatacji koparki w warunkach rzeczywistych. Do wyznaczenia naprężeń zastosowano metodę tensometrii oporowej. Zdobyte w taki sposób informacje powinny następnie zostać potwierdzone przez wyniki obliczeń przeprowadzonych przy wykorzystaniu metody elementów skończonych.

7.1. Pomiar deformacji

Do pomiaru deformacji membrany dużej w kierunku normalnym do jej powierzchni wykorzystano osiem indukcyjnych czujników przemieszczeń o bazie pomiarowej ± 10 mm i ± 15 mm. Czujniki te zamocowane zostały do sztywnej stalowej listwy, która przy pomocy specjalnej konstrukcji została sztywno połączona z obudową przekładni napędowej (rys. 7.1). Dzięki temu wyeliminowano wpływ jej ewentualnej deformacji na dokładność otrzymanych wyników. Ponadto kontrolowano sztywność zamocowania listwy za pomocą dodatkowego czujnika indukcyjnego o bazie pomiarowej ± 5 mm, umieszczonego na skraju listwy i współpracującego ze sztywnym wewnętrznym pierścieniem membrany.

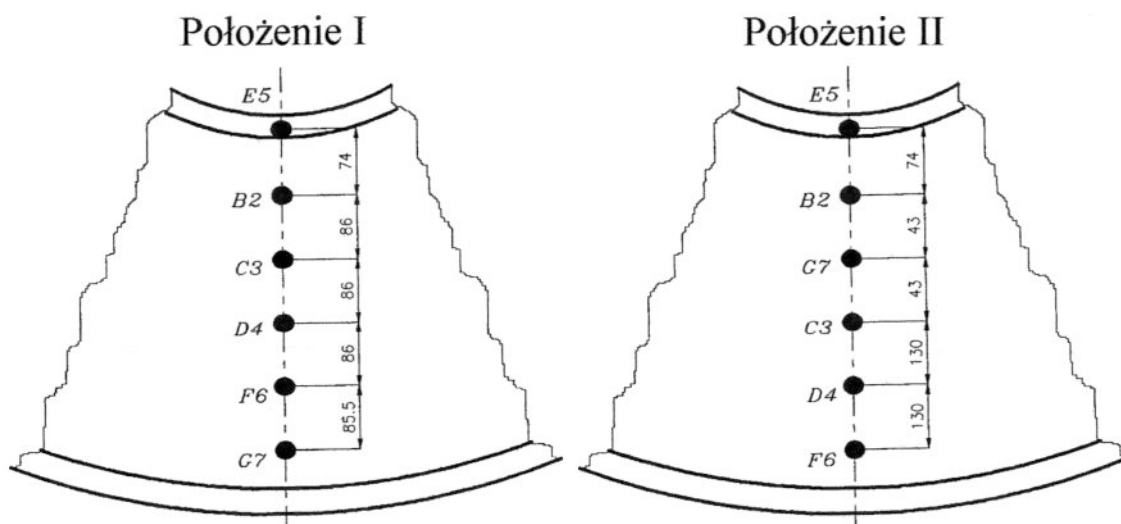
Sygnał z czujników przekazywany był do ośmiokanałowego miernika wielkości mechanicznych. Po wzmocnieniu sygnały ze wszystkich czujników przekazywane były za pomocą przetwornika A/C do komputera [127]. Dodatkowo do celów kontrolnych i bieżącej wizualizacji wyników pomiaru, a także późniejszego wyboru miejsc do pomiaru naprężeń, sygnał z czterech czujników rejestrowany był na rejestratorze pomiarowym.

Wykonano skalowanie każdego z czujników indukcyjnych przy pomocy śruby mikrometrycznej. Dzięki temu uzyskano możliwość wyrażenia zmierzonej wielkości napięcia sygnału elektrycznego w [V] przez wielkość przemieszczeń w [mm]. Skalowanie dodatkowo wykazało, że wykorzystywane indukcyjne czujniki przemieszczeń mają liniową charakterystykę w całym zakresie pomiarowym.



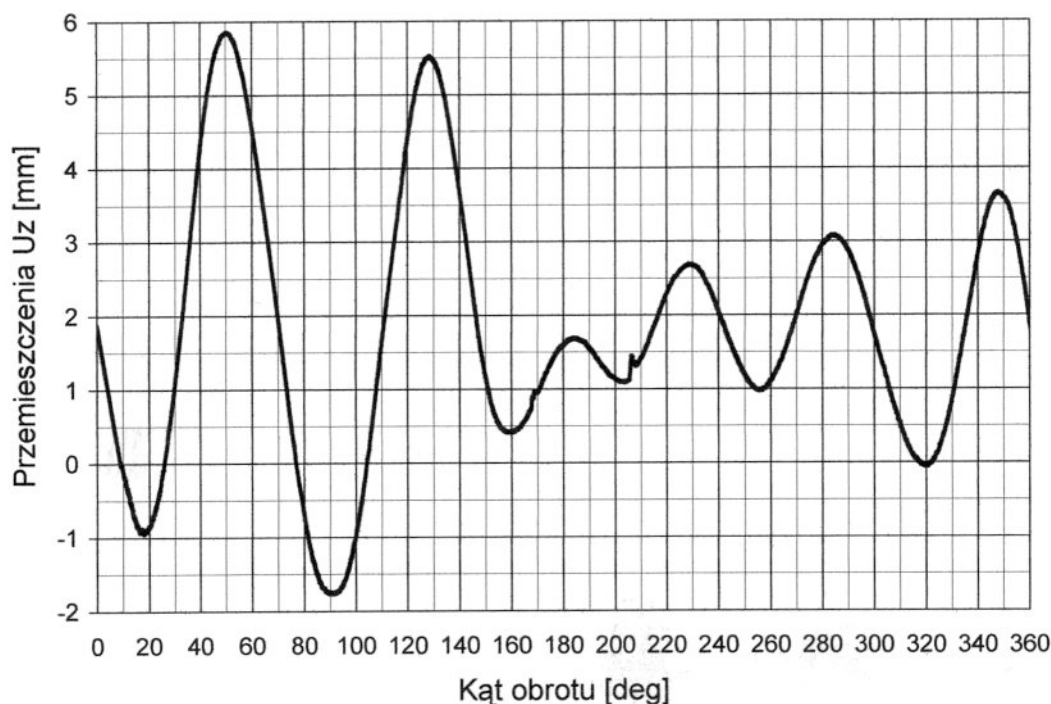
Rys. 7.1. Sposób zamocowania czujników przemieszczeń do stalowej listwy

Po zamocowaniu stalowej listwy wraz z umieszczonymi na niej czujnikami przemieszczeń, których rozmieszczenie pokazano na rys. 7.2, wykonano pomiar deformacji membrany dużej. Pomiar zrealizowano w ten sposób, że obracano nieobciążonym kołem czerpakowym, wykorzystując jego napęd pomocniczy. Jednocześnie w sposób ciągły rejestrowane były sygnały ze wszystkich indukcyjnych czujników przemieszczeń zamocowanych na stalowej listwie. Po wykonaniu pełnego obrotu koło czerpakowe zatrzymywano. Dla sprawdzenia powtarzalności wyników pomiary były realizowane trzykrotnie. Po zmianie usytuowania niektórych czujników na listwie pomiarowej, powtórnie wykonano pomiary według identycznej procedury.

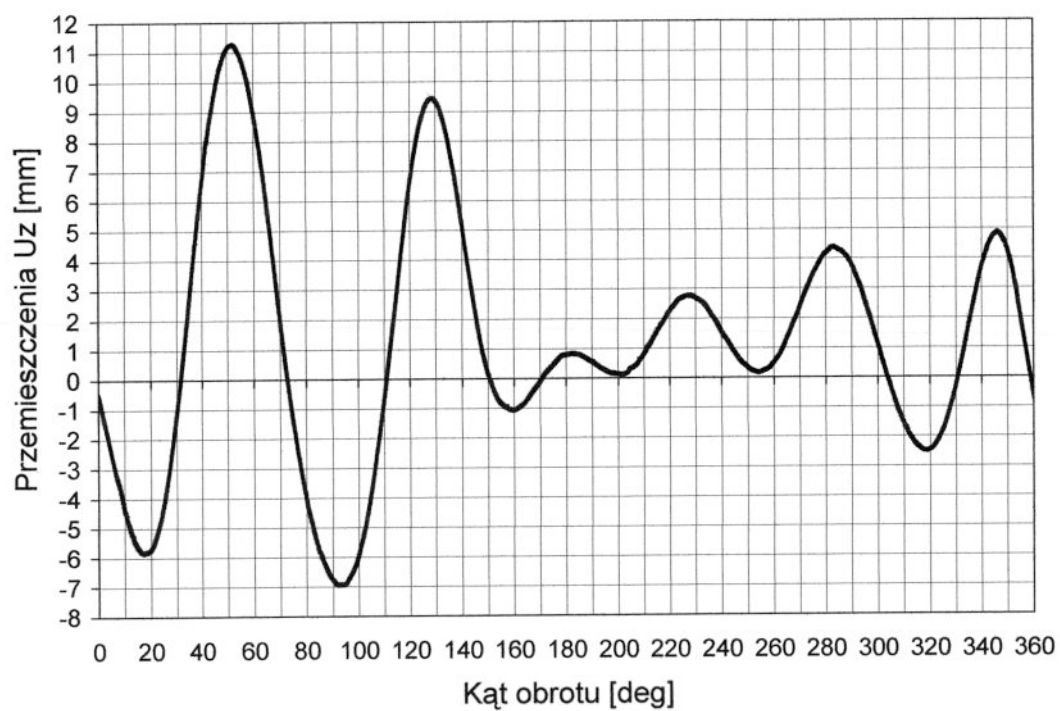


Rys. 7.2. Rozmieszczenie czujników przemieszczeń na stalowej listwie

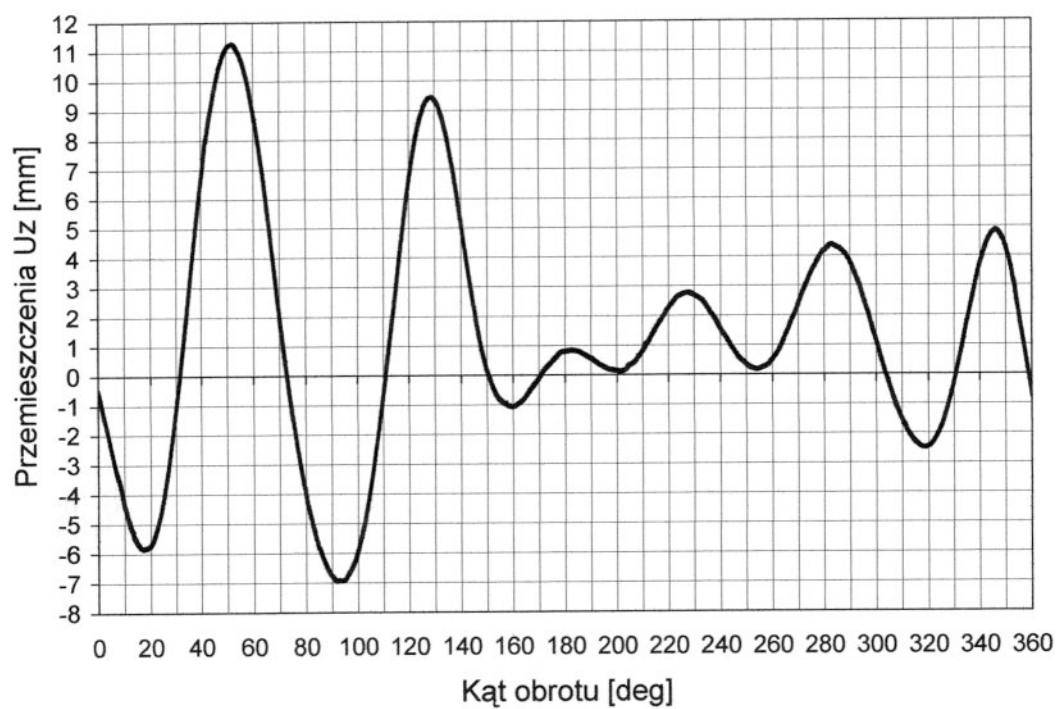
Otrzymane w ten sposób wyniki zostały następnie tak przetworzone, aby przedstawiały przemieszczenie wyrażone w [mm]. W tym celu została zamieniona, w oparciu o wyniki cechowania czujników, wielkość zarejestrowanego sygnału elektrycznego na odpowiadającą mu wartość przemieszczenia. W ostateczności otrzymano przebiegi zmiany odkształcenia membrany w funkcji kąta jej obrotu (rys. 7.3 ÷ 7.10). Wyniki jednoznacznie wskazują na fakt plastycznej deformacji membrany. Można zauważyć, że na membranie znajdują się dwa wyraźne fragmenty, w których odkształcenie jest największe.



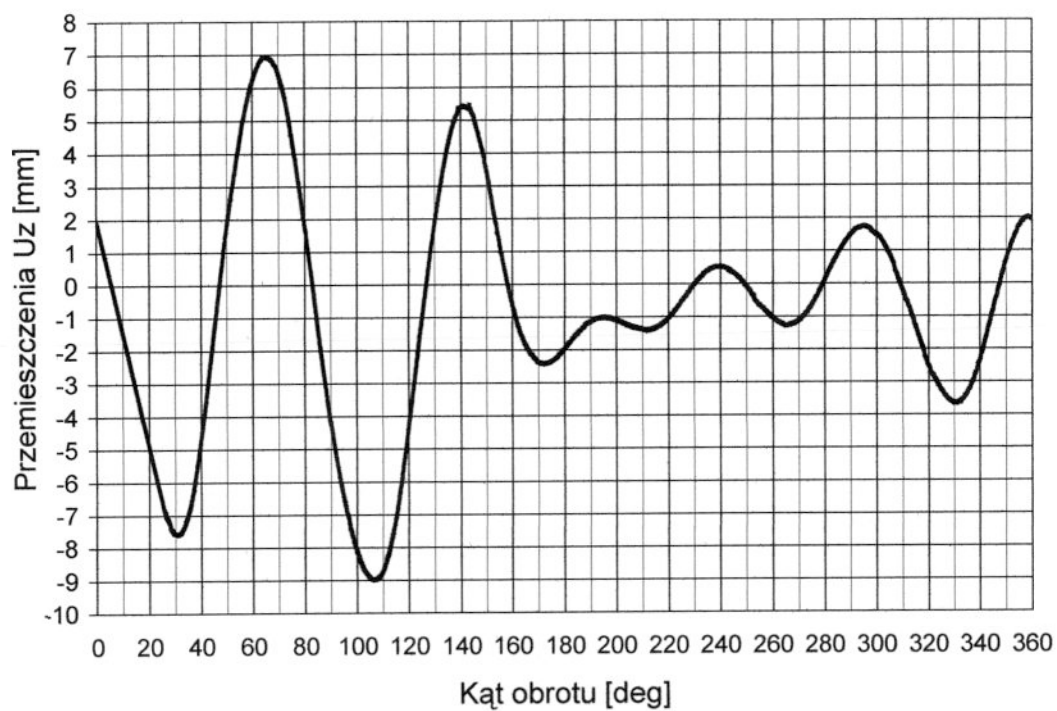
Rys. 7.3. Wykres zmierzonych deformacji membrany przez czujnik B2 w położeniu I i II



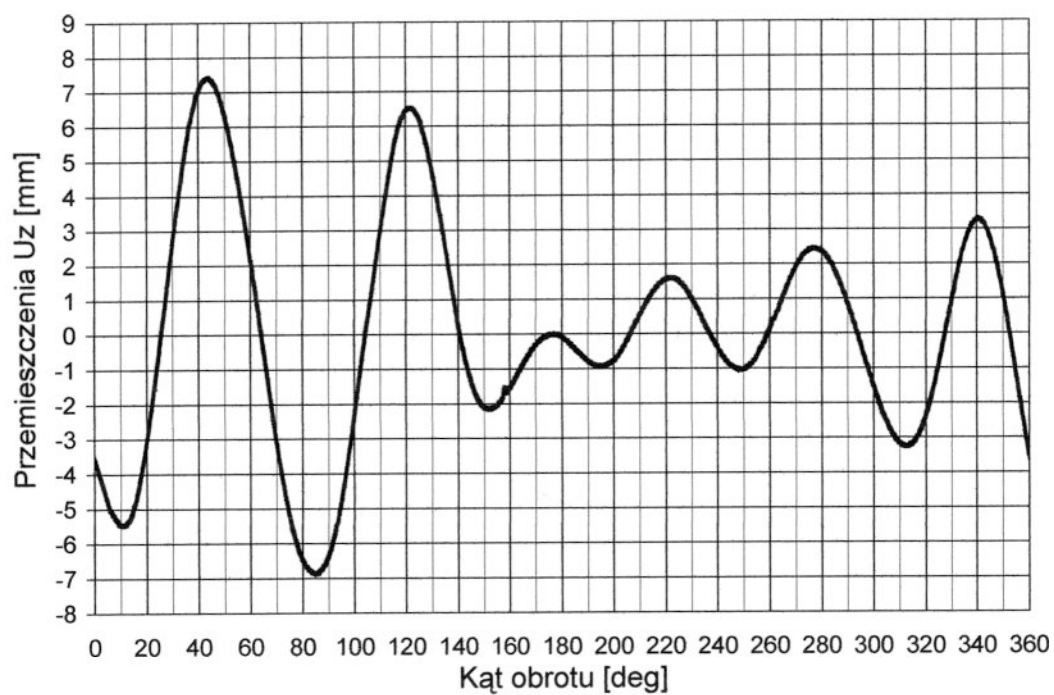
Rys. 7.4. Wykres zmierzonych deformacji membrany przez czujnik G7 w położeniu II



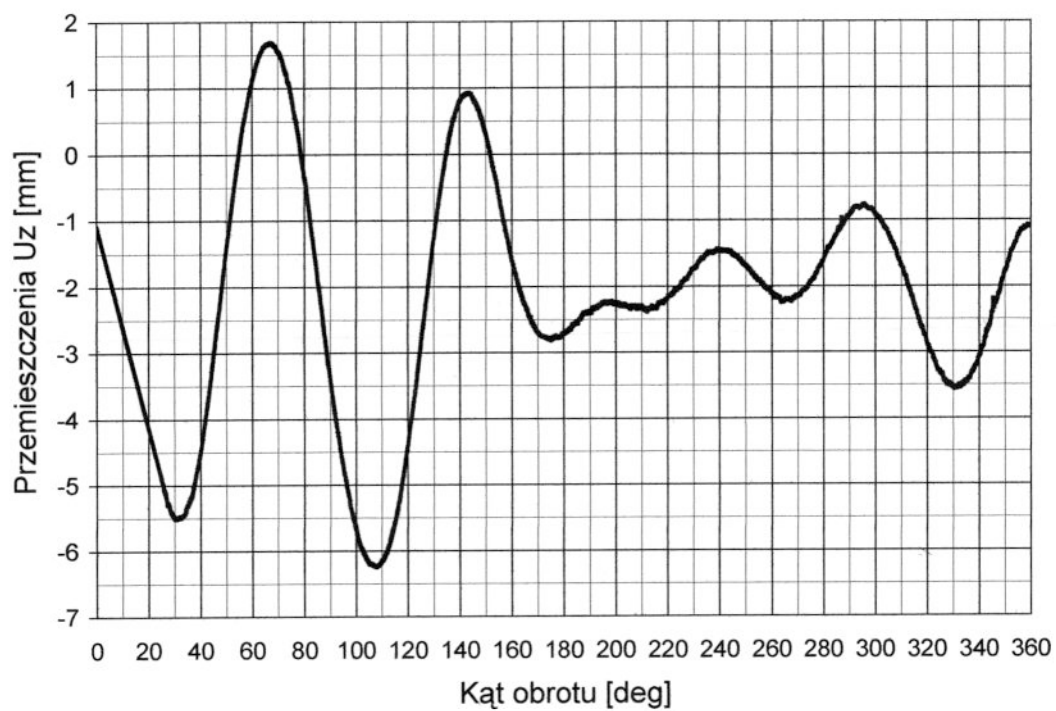
Rys. 7.5. Wykres wartości zmierzonych przez czujnik C3 w położeniu I i II



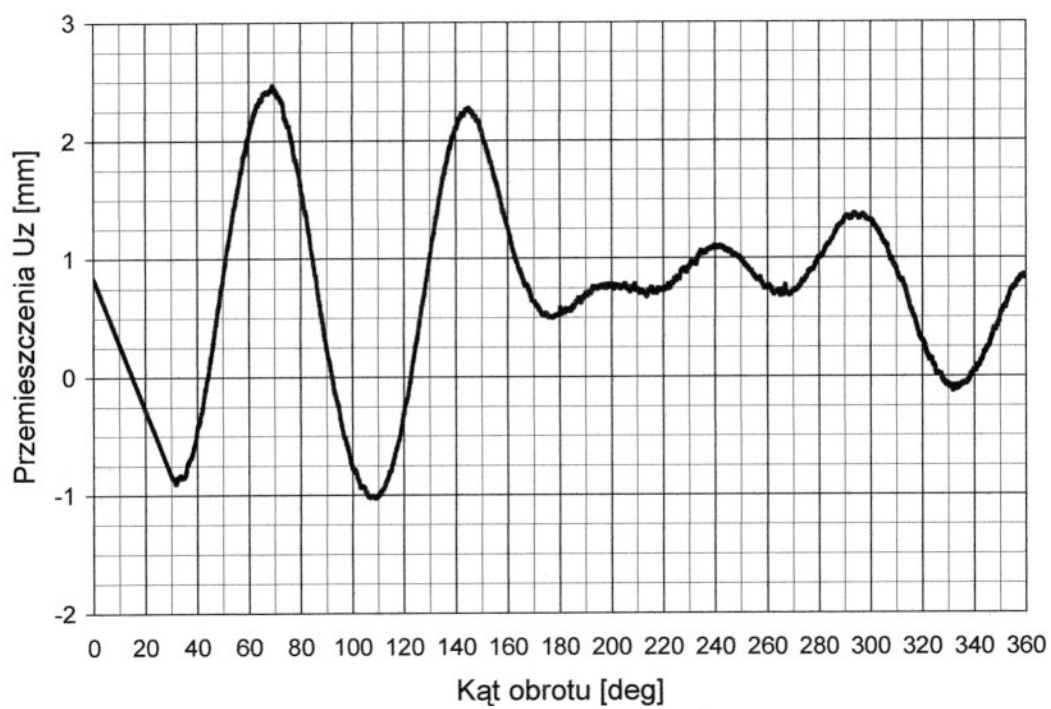
Rys. 7.6. Wykres wartości zmierzonych przez czujnik D4 w położeniu I



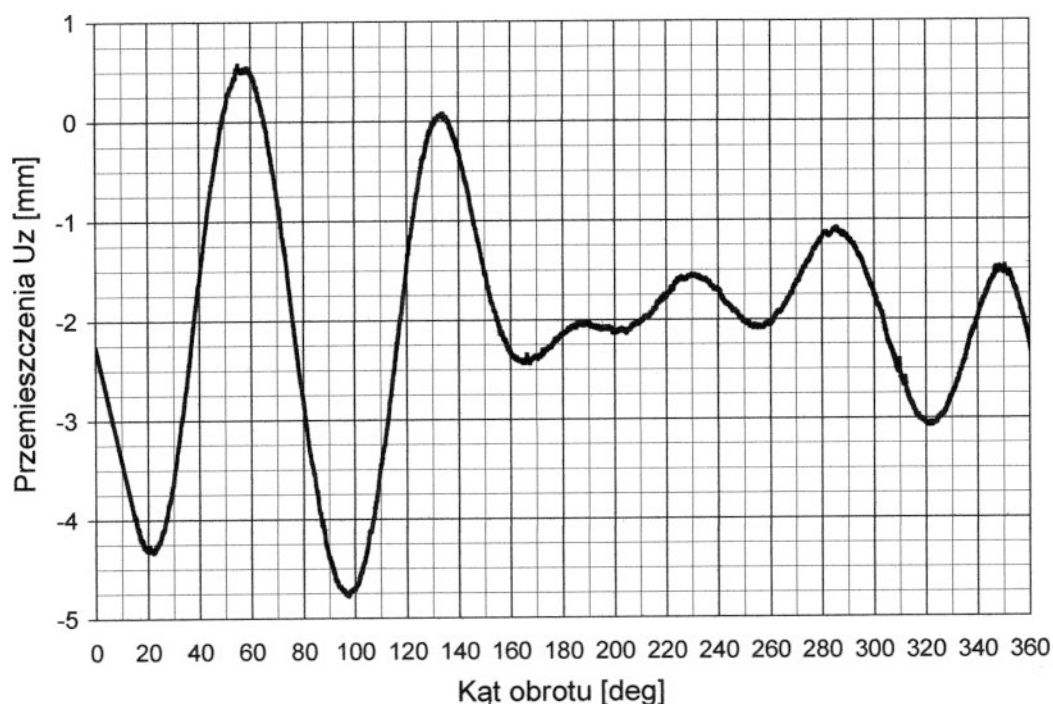
Rys. 7.7. Wykres wartości zmierzonych przez czujnik D4 w położeniu II



Rys. 7.8. Wykres wartości zmierzonych przez czujnik F6 w położeniu I



Rys. 7.9. Wykres wartości zmierzonych przez czujnik G7 w położeniu I

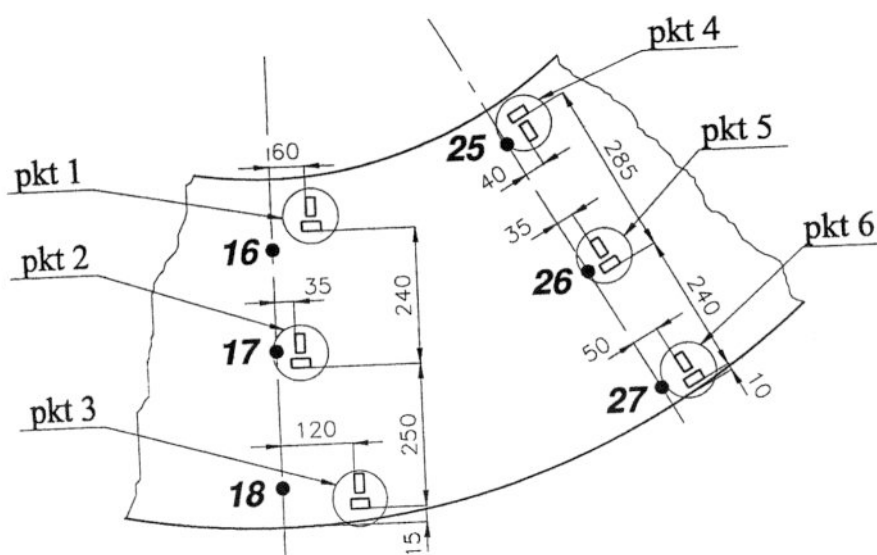


Rys. 7.10. Wykres wartości zmierzonych przez czujnik F6 w położeniu II

7.2. Wyznaczenie naprężeń

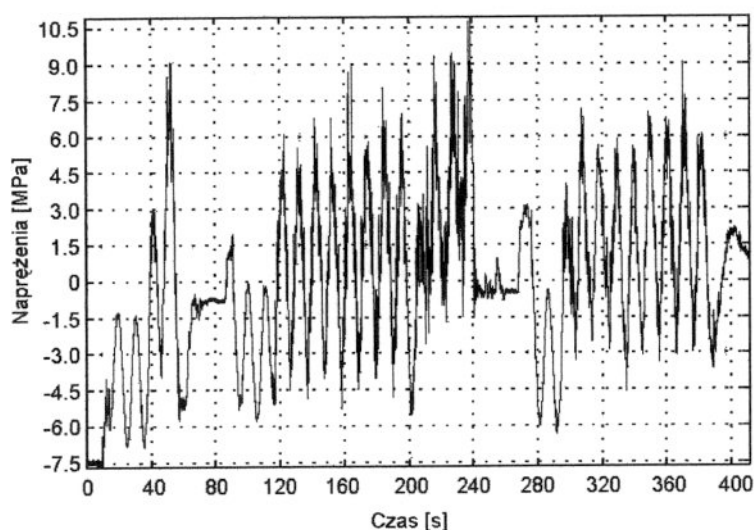
Do wyznaczenia naprężeń powstających w membranie dużej podczas eksploatacji koparki posłużono się metodą tensometrii oporowej. Czujniki tensometryczne naklejono w sześciu punktach pomiarowych na odpowiednio przygotowanych wcześniej fragmentach powierzchni membran. W każdym z tych punktów umieszczono po dwa tensometry: promieniowo i osiowo. Dodatkowo do każdego z nich doklejono trzy tensometry kompensacyjne, dzięki czemu otrzymano pełnomostkowe układy pomiarowe [108].

Wyboru miejsc dla punktów pomiarowych dokonano na podstawie otrzymanych wcześniej wyników z pomiaru deformacji. Tensometry usytuowane zostały w pobliżu tych miejsc membrany, w których zmierzono jej największe przemieszczenia. Szczegółowe rozmieszczenie wszystkich punktów pomiarowych na membranie dużej pokazano na rys. 7.11. Dla dokładniejszej identyfikacji położenia punktów pomiarowych na rysunku zaznaczono położenie kilku wybranych punktów, w których wykonywane były wstępne pomiary deformacji membrany dużej przez obsługę inżynierską. Do pomiaru odkształceń czujników tensometrycznych wykorzystano tensometryczny wzmacniacz pomiarowy. Następnie sygnał ze wzmacniacza przekazywany był do komputera w celu jego rejestracji.

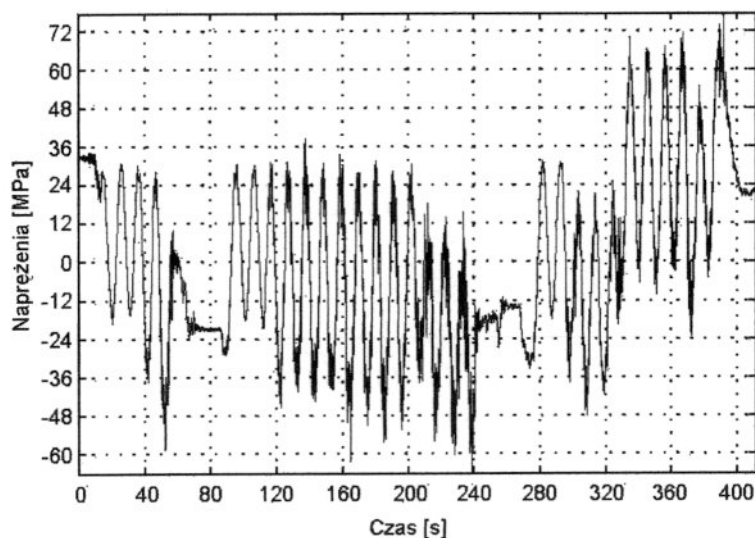


Rys. 7.11. Rozmieszczenie punktów pomiarowych na membranie dużej

Wyznaczenia naprężeń dokonano podczas normalnej eksploatacji maszyny. Wymagało to połączenia punktów pomiarowych z mostkiem tensometrycznym, tak aby membrana mogła się swobodnie obracać. W tym celu tensometry połączono z miernikiem za pomocą długich przewodów, które podczas wykonywania pomiaru były nawijane na wał zdawczy przekładni. Powodowało to pewne ograniczenia związane z jednoczesną rejestracją wyników z wszystkich punktów pomiarowych. W trakcie jednego pełnego obrotu wysięgnika koparki rejestrowano sygnał jednocześnie z dwóch punktów pomiarowych. Pomiary wykonano powtórnie rejestrując sygnał z kolejnych punktów pomiarowych. Uzyskane w ten sposób wyniki przetworzono, aby otrzymać wartości naprężeń. Przykładowe wyniki zmian naprężeń dla jednego z punktów pomiarowych pokazano na rys. 7.12 i 7.13.



Rys. 7.12. Przebieg zmian naprężeń obwodowych dla membrany dużej



Rys. 7.13. Przebieg zmian naprężeń promieniowych dla membrany dużej

Wyniki otrzymane z pomiarów wskazują, że w obszarze gdzie nastąpiło trwałe odkształcenie membrany – potwierdzone pomiarem deformacji – powstające naprężenia dynamiczne są wysokie i zmieniają się w zależności od położenia koła czepakowego w granicach: $\sigma = -60 \text{ MPa} \div +72 \text{ MPa}$. Otrzymane wartości naprężeń mogą ulec jeszcze dodatkowo zwiększeniu, gdyż warunki eksploatacyjne w jakich zostały wykonano pomiary, nie uwzględniały skrajnego przypadku, jakim jest uderzenie koła czepakowego o kamień i jego gwałtowne zatrzymanie się. Ponadto wartości naprężeń dynamicznych wyznaczone na podstawie przeprowadzonych pomiarów należy uznać za wystarczająco niebezpieczne, ponieważ nie uwzględniają naprężeń statycznych.

8. Analiza danych doświadczalnych

Przedstawione w poprzednim rozdziale badania doświadczalne zostały tak wykonane, aby uzyskane dane mogły posłużyć do przeprowadzenia analizy zachowania się wielkogabarytowych elementów cienkościennych pracujących w stanie plastycznym. Głównym zadaniem tej analizy jest określenie przyczyny powstania deformacji, aby w przyszłości zapobiegać powstawaniu tego typu zdarzeniom. Ponadto uzyskane w ten sposób informacje o odkształconym elemencie zapewnią możliwość dalszej bezpiecznej pracy takiej konstrukcji pomimo, że przestała ona już spełniać założenia projektowe.

Ponieważ pomiar deformacji zrealizowano przy wykorzystaniu indukcyjnych czujników przemieszczeń rozmieszczonych wzdłuż promienia, dzięki temu dla każdego z nich zarejestrowano przemieszczenia prostopadłe do powierzchni elementu wzdłuż całego obwodu. Uzyskane w ten sposób wartości deformacji membrany wyrażały przemieszczenia względne. Jest to związane ze specyfiką pomiaru, gdzie stan zerowy czujników jest ustawiany sztucznie. Dlatego można było wykorzystać wyprowadzoną wcześniej postać funkcji opisującą deformację membrany w postaci:

$$w_i(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{n\pi\varphi}{360} \quad (8.1)$$

gdzie:

φ – kąt obrotu (w stopniach),

n – liczba sinusoidalnych półfal ugięcia obwodowego,

a_0, a_n – pewne stałe współczynniki.

W celu wyznaczenia konkretnej analitycznej postaci funkcji opisującej ugięcia badanej membrany, dla każdego z promieni należało ustalić wartości nieznanymi współczynników a poprzez aproksymację danych pomiarowych wyrażeniem (8.1).

Procedura wyznaczania odpowiednich współczynników polega na przybliżaniu danych doświadczalnych funkcją (8.1) z członami sinusowymi dla kolejnych wartości parametru n . Liczba członów została dobrana w ten sposób, żeby uzyskać wystarczająco dokładną aproksymację danych doświadczalnych (na poziomie ufności 95%). Dla każdej takiej funkcji wyznaczano odpowiednie wartości współczynników a_0 oraz a_n przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów, czyli poprzez minimalizację sumy kwadratów różnic między wartością uzyskaną z pomiarów, a wartością wynikającą z funkcji przybliżającej:

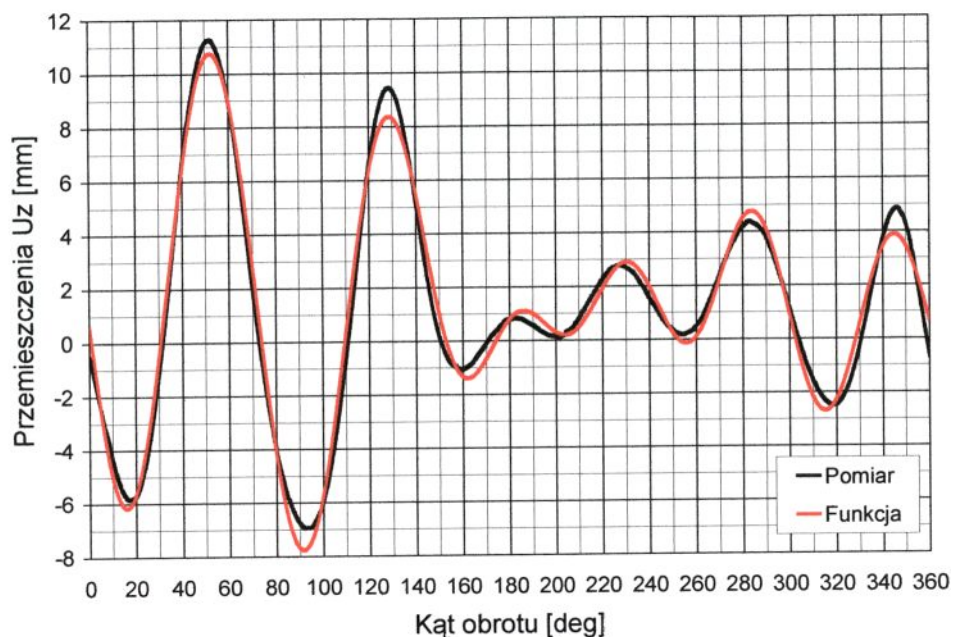
$$\sum_i (y_i - f(\varphi_i))^2 = \min \quad (8.2)$$

Dokładność aproksymacji oceniano na podstawie zgodności dopasowania jej kształtu, tzn. identycznej liczby półfal, jak również ich wartości zbliżonych do przebiegu uzyskanego z badań doświadczalnych. Na potrzeby porównywania ze sobą różnych postaci uszczegółowienia funkcji aproksymujących (dla różnych wartości współczynników n) wyznaczano również odchylenie średniokwadratowe według wzoru:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - f(\varphi_i))^2 \quad (8.3)$$

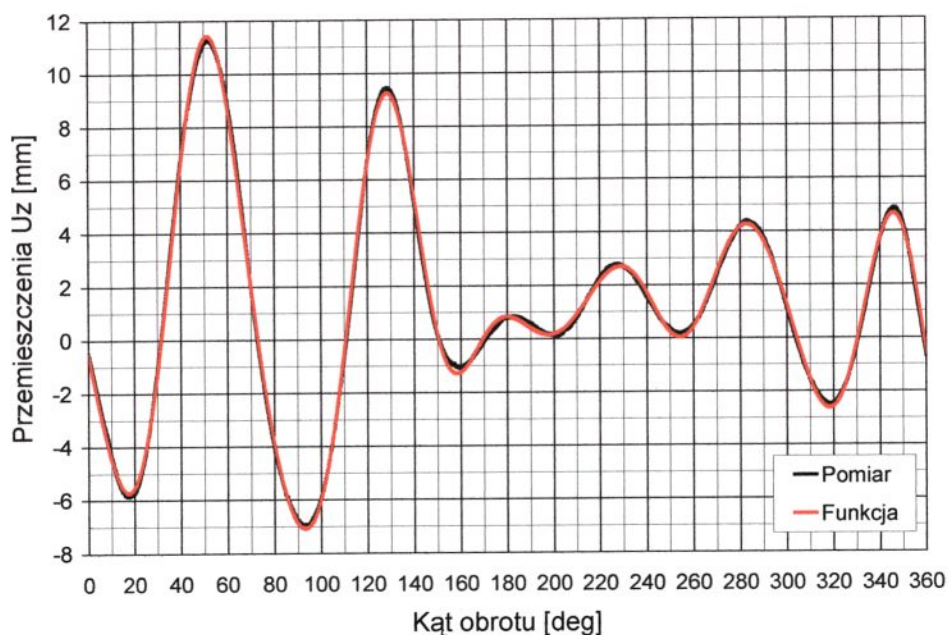
W dalszej części z pracy odchylenie średniokwadratowe (8.3) wykorzystano w celu określenia wpływu danego wyrazu na postać funkcji aproksymującej i uporządkowania ich według kryterium wrażliwości.

W konsekwencji tak przeprowadzonej analizy osiągnięto odpowiednie dopasowanie kształtu funkcji przybliżającej już dla parametru $n = 15$, a w kilku przypadkach nawet $n = 14$. Poniżej przedstawiono przykładowy przebieg funkcji aproksymującej dla $n = 15$ uzyskany dla jednego z promieni (rys. 8.1).



Rys. 8.1. Wykres funkcji aproksymującej ($n = 15$) deformację membrany dla czujnika G7 w położeniu II

W celu uzyskania dokładniejszego dopasowania funkcji przybliżającej (na poziomie ufności 95%), w dalszej części pracy rozpatrywano funkcję aproksymującą z parametrem n zwiększonym do 20. Na rys. 8.2 zamieszczono przykładowy przebieg funkcji aproksymującej dla $n = 20$ otrzymany dla jednego z promieni.



Rys. 8.2. Wykres funkcji aproksymującej ($n = 20$) deformację membrany dla czujnika G7 w położeniu II

Wykresy funkcji aproksymujących ($n = 20$) dla wszystkich czujników (Załącznik Z.2) oraz ich rozwinięcia w szereg trygonometryczny (Załącznik Z.3) znajdują się na końcu pracy.

Po ustaleniu pełnych postaci funkcji przybliżających wyniki uzyskane z badań doświadczalnych dla każdego z promieni, przystąpiono do uporządkowania wyznaczonych w ten sposób składników funkcji według ich wrażliwości. Za kryterium przyjęto wpływ członu zawierającego dany parametr n na postać funkcji aproksymującej, poprzez porównanie wartości odchylenia średniokwadratowego wyznaczonego po usunięciu rozpatrywanego członu. W tabeli 8.1 przedstawiono rozmieszczenie składników funkcji według kryterium ważności wraz z uzyskanymi dla nich wartościami odchylenia średniokwadratowego (człony zidentyfikowane zostały przez odpowiadające im parametry n). Graficzne uporządkowanie według kryterium ważności przedstawione jest na końcu pracy (Załącznik Z.4).

Takie uporządkowanie składników funkcji aproksymującej dało możliwość przeprowadzenia analizy dla identyfikacji podstawowych wyrazów określających ich związek z wymuszeniem zewnętrznym, a także z odpowiedzią układu na to wymuszenie. Dzięki temu istnieje możliwość:

- ustalenia postaci wymuszenia powodującego plastyczną deformację membrany,
- lokalizacji obszaru jego wystąpienia wzdłuż promienia.

Należy tutaj wziąć pod uwagę przede wszystkim człony mające największy wpływ na postać funkcji aproksymującej. W tabeli 8.3 przedstawiono dla każdego z promieni podstawowe składniki mające największy wpływ na przebieg funkcji przybliżającej.

Tabela 8.1. Uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej deformację membrany ($n = 20$) według ich wpływu na postać funkcji

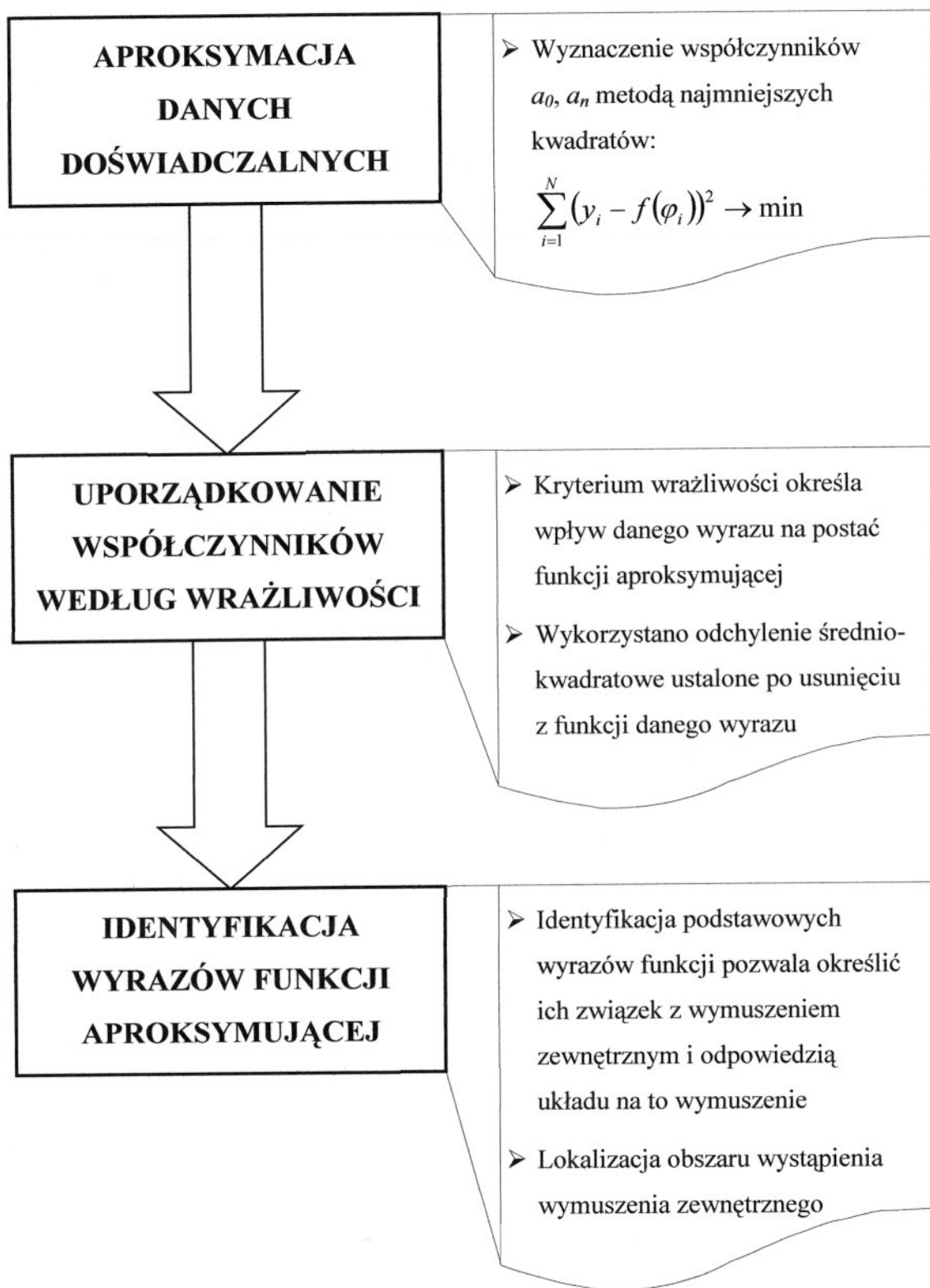
B2	18 0,004	20 0,004	3 0,005	5 0,005	4 0,008	19 0,011	2 0,011	16 0,012	8 0,012	15 0,022	17 0,023	14 0,030	1 0,047	7 0,116	11 0,186	13 0,210	6 0,225	12 0,251	9 0,699	10 1,312
G7 (II)	20 0,016	2 0,018	4 0,056	18 0,056	15 0,060	16 0,071	14 0,082	19 0,091	17 0,120	5 0,204	8 0,309	3 0,460	7 0,612	11 0,682	13 0,998	12 1,136	6 1,221	1 3,075	9 3,412	10 7,543
C3	18 0,011	17 0,011	8 0,011	20 0,012	2 0,013	14 0,018	19 0,019	4 0,044	15 0,083	16 0,157	5 0,414	13 0,481	11 0,749	3 0,810	9 0,918	6 1,108	7 1,695	12 2,061	10 6,583	1 7,711
D4 (I)	18 0,020	19 0,020	4 0,023	20 0,027	15 0,059	16 0,079	2 0,098	11 0,108	17 0,116	14 0,116	5 0,218	6 0,262	10 0,372	13 0,527	12 0,849	3 0,886	7 1,662	8 2,661	9 6,747	1 6,787
D4 (II)	19 0,010	18 0,010	20 0,011	14 0,012	2 0,012	9 0,016	17 0,017	4 0,036	15 0,075	13 0,122	16 0,150	8 0,172	11 0,460	5 0,570	6 0,725	3 1,446	12 2,202	7 2,522	10 4,177	1 12,712
F6 (I)	19 0,003	18 0,004	4 0,004	20 0,005	15 0,015	16 0,016	17 0,017	14 0,022	10 0,025	5 0,036	2 0,038	6 0,051	11 0,068	13 0,097	3 0,145	12 0,240	7 0,503	8 0,733	1 0,907	9 1,520
G7 (I)	4 0,001	19 0,001	10 0,001	20 0,001	18 0,001	17 0,002	16 0,004	5 0,004	14 0,004	1 0,005	15 0,005	2 0,007	6 0,013	13 0,015	3 0,016	11 0,020	12 0,051	7 0,110	8 0,144	9 0,292
F6 (II)	20 0,001	16 0,002	15 0,002	3 0,002	18 0,002	5 0,002	19 0,003	7 0,004	4 0,004	14 0,005	12 0,006	17 0,008	2 0,009	11 0,018	1 0,029	13 0,083	6 0,099	8 0,121	10 0,438	9 0,571

Tabela 8.3. Składniki funkcji mające największy wpływ na postać aproksymacji

Lp.	Oznaczenie czujnika	Położenie względne czujnika wzdłuż promienia membrany	Liczba półfal ugięcia obwodowego n
1	B2	0,074	10
2	G7 (II)	0,146	10
3	C3	0,218	1
4	D4 (I)	0,363	1
5	D4 (II)	0,437	1
6	F6 (I)	0,508	9
7	G7 (I)	0,651	9
8	F6 (I)	0,655	9

Na podstawie uporządkowania wyrazów funkcji aproksymującej, przedstawionego w tabeli 8.3, można postawić hipotezę, że z wymuszeniem zewnętrznym związane są składniki o wartościach $n = 1$, a z odpowiedzią układu na to wymuszenie – składniki o wartościach $n = 9$ oraz $n = 10$. Ma to swoje potwierdzenie w interpretacji parametru n , który zgodnie z zależnością (8.1) określa liczbę półfal. Na tej podstawie można stwierdzić, że zewnętrzne wymuszenie jest w postaci siły skupionej na niewielkim obszarze, a miejsce jego przyłożenia zlokalizowane jest w okolicach $0,218 \div 0,437$ odległości pomiędzy pierścieniami, licząc od pierścienia wewnętrznego. Odpowiada to obszarowi zamocowania czujników C3 oraz D4.

Dzięki zdobytym w ten sposób informacjom odnośnie postaci oraz miejsca przyłożenia wymuszenia zewnętrznego możliwe jest przeprowadzenie analizy numerycznej z możliwością zamodelowania odpowiedniego obciążenia. Algorytm postępowania przy powyższej analizie funkcji opisującej deformację membrany przedstawiono na rysunku 8.3.



Rys. 8.3. Algorytm analizy funkcji opisującej deformację membrany

9. Uogólnienie zjawiska

Przeprowadzenie analizy funkcji opisującej deformację membrany sprzęgła wielkogabarytowego według algorytmu przedstawionego w poprzednim rozdziale umożliwiło zidentyfikowanie postaci wymuszenia zewnętrznego oraz lokalizację obszaru jego działania. Dzięki temu możliwe jest uogólnienie zjawiska plastycznej deformacji membrany również na inne przypadki. W tym celu posłużono się metodą elementów skończonych (MES).

9.1. Analiza numeryczna

Metoda elementów skończonych stała się uniwersalnym narzędziem inżynierskim wykorzystywanym do rozwiązywania złożonych problemów wytrzymałościowych, optymalizacyjnych i innych w szeroko rozumianej mechanice konstrukcji i mechanice ciała stałego. Poświęconych jest jej wiele szczegółowych pozycji literaturowych [55, 110, 141]. Błyskawiczny rozwój technik komputerowych sprawił, że analiza numeryczna, głównie przy użyciu MES, praktycznie wyparła inne metody obliczeń, zarówno te bazujące na rozwiązaniach zamkniętych, jak i przybliżonych.

Obok obciążeń typu powierzchniowego, takich jak ciśnienie, ciężar własny, siły bezwładności, konstrukcje cienkościenne są dość często poddane obciążeniom skupionym (lokalnym) działającym na małym wycinku brzegu lub niewielkim obszarze powierzchni konstrukcji (np. o wymiarach rzędu kilku grubości ścianek) [18]. Siły te wywołują, podobnie jak wszelkiego rodzaju karby, zmiany przekrojów czy otwory, bardzo znaczne koncentracje naprężeń w konstrukcji. Jednakże obciążenia skupione, czyli działające w teoretycznym punkcie, w rzeczywistości nie istnieją. W przypadku, gdy jednak wyznacza się siły wewnętrzne w oddalonych od siebie miejscach konstrukcji, można obciążenie rzeczywiste zastąpić skupionym w punkcie. Jest ono wówczas wygodną idealizacją stanu rzeczywistego, upraszczającą przeprowadzenie analizy obliczeniowej. Jednak jeśli rozpatrujemy naprężenia w bezpośrednim sąsiedztwie obciążonego obszaru, to aby uzyskać prawidłowy wynik, należy uwzględnić rzeczywisty rozkład naprężenia na tej niewielkiej, ale skończonej powierzchni.

Dla wyznaczania odkształceń i naprężeń w konstrukcjach cienkościennych poddanych działaniu sił skupionych dzieli się obciążenia na ogólne i lokalne. Pierwsze powoduje powstanie stanu napięcia w całej konstrukcji, zaś drugie sprowadza się do efektów o zasięgu lokalnym i wywołuje zaburzenia bardzo szybko znikające. Należy uwzględnić fakt, że o ile przemieszczenia są zawsze skończone, o tyle siły wewnętrzne lokalnie z reguły dążą do nieskończoności w miejscu, bądź też na granicy przyłożenia obciążeń skupionych. Stąd istotną sprawą jest przyjęcie odpowiednich założeń upraszczających. Przy wyprowadzaniu zależności na model analityczny opisujący zjawisko deformacji membrany sprzęgła wielkogabarytowego przyjęto następujące założenia upraszczające:

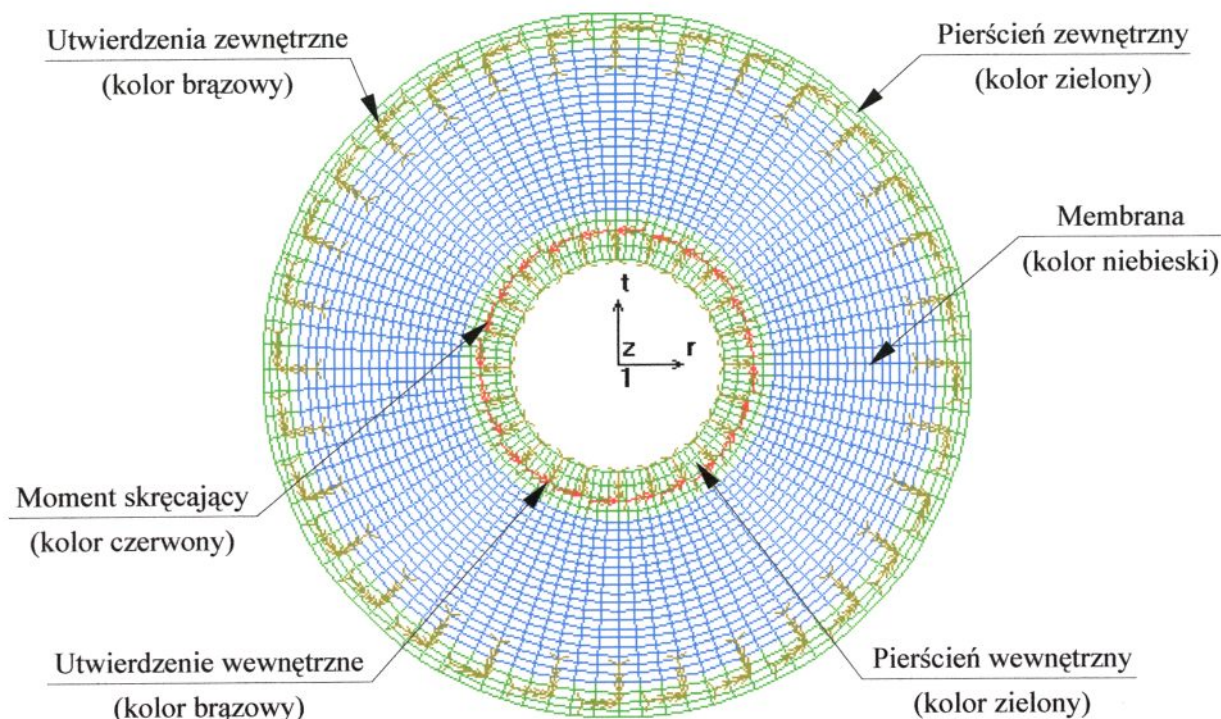
- uproszczenie kształtu geometrycznego do postaci płaskiej tarczy cienkościennej,
- założenie jednorodności materiału poszczególnych elementów,
- przyjęcie niektórych elementów (pierścienia zewnętrznego i wewnętrznego) jako nieodkształcalnych (sztywnych),
- założenie liniowych charakterystyk właściwości fizycznych materiału elementu, bilinearny model sprężysto-plastyczny,
- pominięcie mało istotnych oddziaływań zewnętrznych między rozpatrywanym układem i otoczeniem.

W celu uogólnienia zjawiska plastycznej deformacji membrany sprzęgła wielkogabarytowego na inne przypadki, przeprowadzono analizę numeryczną dla różnych parametrów:

- wartości siły wymuszającej normalnej do powierzchni membrany (5 wartości sił),
- miejsca przyłożenia siły wzdłuż promienia (9 wartości położeń),
- przeciążenia momentem skręcającym (10 wartości momentów),
- grubości membrany (2 warianty grubościowe).

Istnieje również możliwość rozpatrzenia każdego dowolnego przypadku zróżnicowanego geometrycznie oraz obciążeniowo.

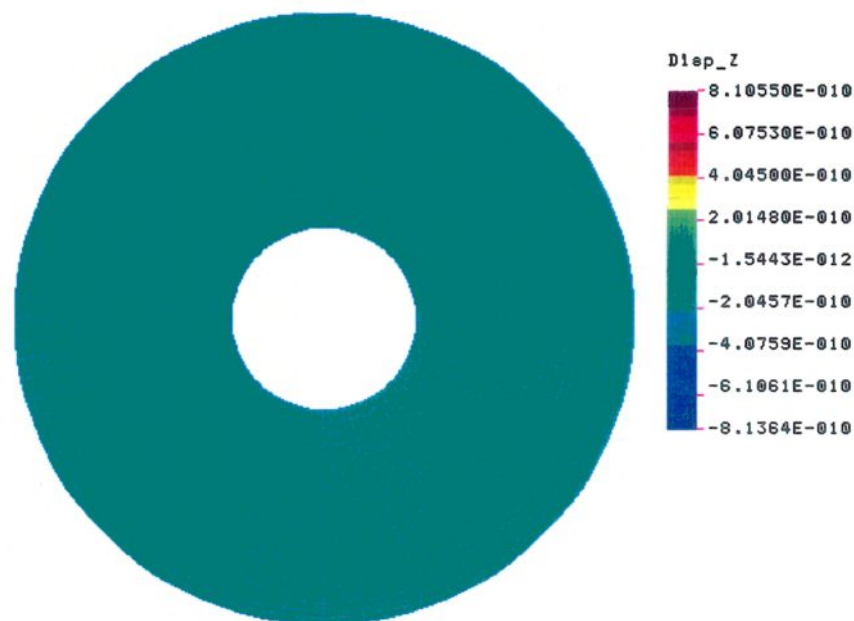
Poniżej omówiono wyniki otrzymane po przeprowadzeniu analizy numerycznej dla membrany sprzęgła wielkogabarytowego, która pod względem geometrycznym odpowiada badanej na obiekcie rzeczywistym (o grubości 8 mm i średnicy zewnętrznej 2 610 mm). Numeryczny model dyskretny, oparty na powłokowych elementach skończonych typu SHELL4T, składał się ze wspomnianej membrany oraz połączonych z nią pierścieni: wewnętrznego i zewnętrznego o grubościach 30 mm (rys. 9.1).



Rys. 9.1. Numeryczny model dyskretny membrany

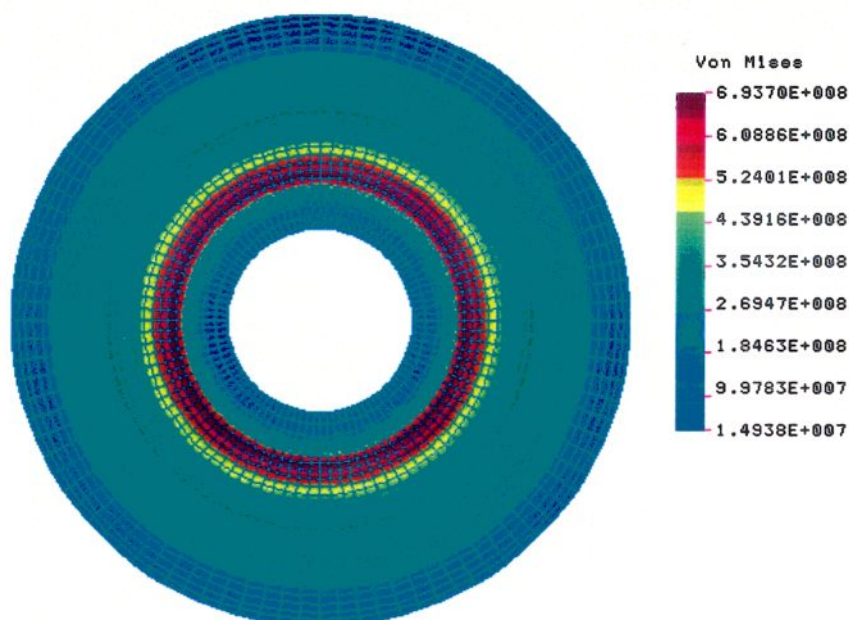
Charakterystyki materiału, z którego wykonano omawiany element zostały uwzględnione w modelu numerycznym. Szczególnie należy zwrócić tutaj uwagę na takie parametry jak: granica plastyczności wynosząca 360 MPa oraz granica wytrzymałości równa 640 MPa. Sposób zamocowania membrany do koła czepakowego na średnicy zewnętrznej oraz do wału napędowego na średnicy wewnętrznej jest możliwie najbardziej zbliżony do rzeczywistego. Punkty utwierdzenia znajdują się w otworach na śruby mocujące. Założono, że wszystkie śruby są dokładnie dokręcone, co odpowiada odebraniu wszystkich sześciu stopni swobody (zamocowanie sztywne). Dodatkowo na końcu pracy zamieszczono przypadki przedstawiające zachowanie się membrany o grubości 12 mm (Załącznik Z.5 i Z.6).

Na wstępie rozważono przypadek wielkogabarytowego sprzęgła membranowego, w którym głównym obciążeniem jest wyłącznie moment skręcający przyłożony do pierścienia wewnętrznego, zgodnie z tym jak przebiega przekazywanie napędu na koło czepakowe. Stan taki odpowiada charakterowi pracy sprzęgła zgodnie z założeniami projektowymi. Wartość tego momentu wyrażono w postaci krotności przeciążenia momentem obrotowym nominalnym osiąganym na wale koła czepakowego koparki ($M_s = 1084 \text{ kNm}$). Ma to na celu umożliwienie odniesienia otrzymanych wyników do uzyskanych na obiekcie rzeczywistym, na którym przeprowadzono badania doświadczalne. W przypadku przemieszczeń w płaszczyźnie normalnej do powierzchni elementu można stwierdzić, że nawet przy znacznym przeciążeniu momentem skręcającym ($7 * M_s$) nie pojawia się charakterystyczna deformacja plastyczna membrany w postaci pofałdowania powierzchni jakie zaobserwowano na obiekcie rzeczywistym (rys. 9.2).



Rys. 9.2. Warstwice przemieszczeń U_z [m] dla momentu skręcającego $7 * M_s$

Odpowiadające takiemu stanowi przemieszczeń naprężenia zredukowane (według hipotezy Hubera-Misesa) mają charakter jak dla przypadku skręcania, pola naprężeń układają się w kształcie pierścieni. Przy czym największe wartości występują w pobliżu pierścienia wewnętrznego, a więc tam gdzie przyłożony jest napęd w postaci momentu obrotowego. W sytuacji, gdy moment skręcający wynosi $7 * M_s$ następuje ukręcenie membrany w miejscu, gdzie naprężenia osiągnęły wartość największą 694 MPa, a więc przekraczającą wartość granicy wytrzymałości (rys. 9.3).

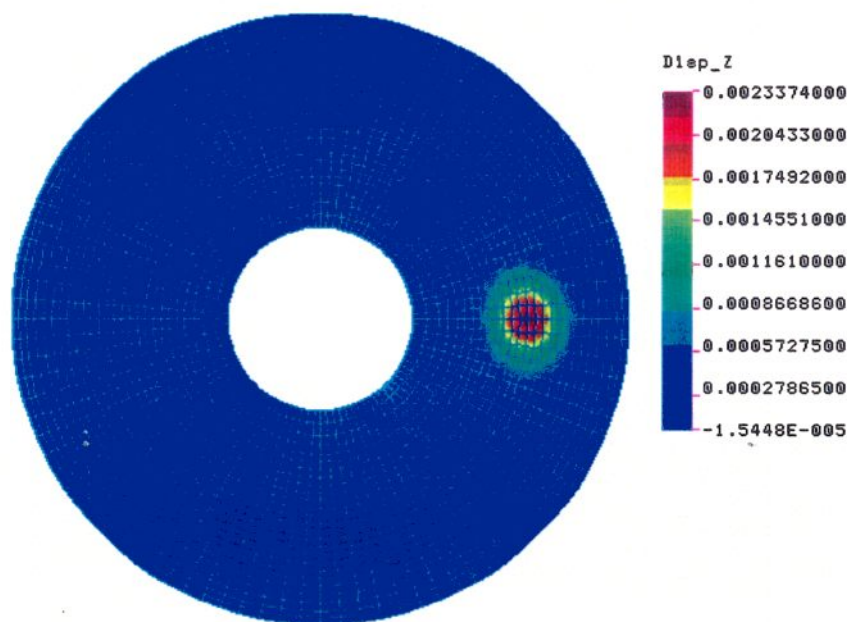


Rys. 9.3. Warstwy naprężeń zredukowanych [N] dla momentu skręcającego $7 * M_s$

Widać zatem, że przyłożenie jedynie momentu skręcającego, nawet o znacznej wartości przekraczającej wartość nominalną, nie spowoduje powstania charakterystycznego stanu pofałdowania membrany jaki zaobserwowano na obiekcie rzeczywistym. Jest to widoczne, także dla innego analizowanego przypadku – membrany o grubości 12 mm (Załącznik Z.5).

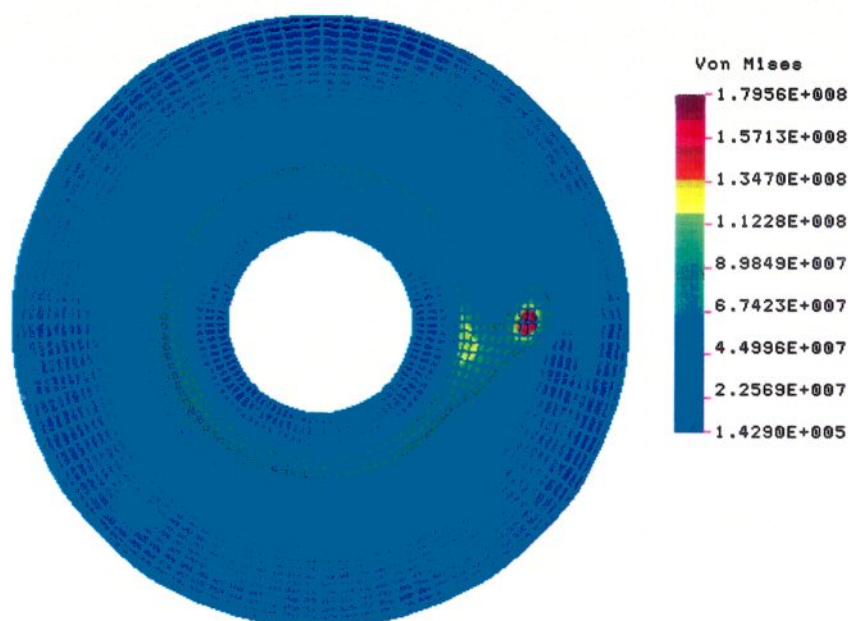
Kolejny przypadek jaki przeanalizowano charakteryzował się tym, że oprócz znacznego momentu skręcającego, na membranę działano również dodatkowym wymuszeniem zewnętrznym. Postać tego wymuszenia przyjęto zgodnie z ustaleniami wynikającymi z analizy funkcji opisującej deformację membrany, przeprowadzonej w poprzednim rozdziale. Wynikło z niej, że jest to wymuszenie zewnętrzne w postaci pojedynczej siły skupionej prostopadłej do powierzchni membrany, działającej na niewielkim obszarze i przyłożonej w pewnej odległości od wewnętrznego pierścienia membrany.

Rozpatrzono przypadek, w którym membranę przy momencie skręcającym równym wartości nominalnej obciążono dodatkowo wymuszeniem zewnętrznym w postaci siły skupionej $F = 10$ kN działającej na niewielkim obszarze. Pod wpływem tego dodatkowego obciążenia membrana uległa przemieszczeniu w tym miejscu na głębokość ponad 2 mm (rys. 9.4). Wynika stąd, że na stan deformacji membrany w tym wypadku większy wpływ ma oddziaływanie pochodzące od zewnętrznej siły wymuszającej niż momentu skręcającego wynikającego z charakteru pracy układu napędowego. Tym bardziej, że wartość siły była stosunkowo niewielka.



Rys. 9.4. Warstwy przemieszczeń U_z [m] dla momentu skręcającego $1 * M_s$ oraz siły wymuszającej $F = 10$ kN

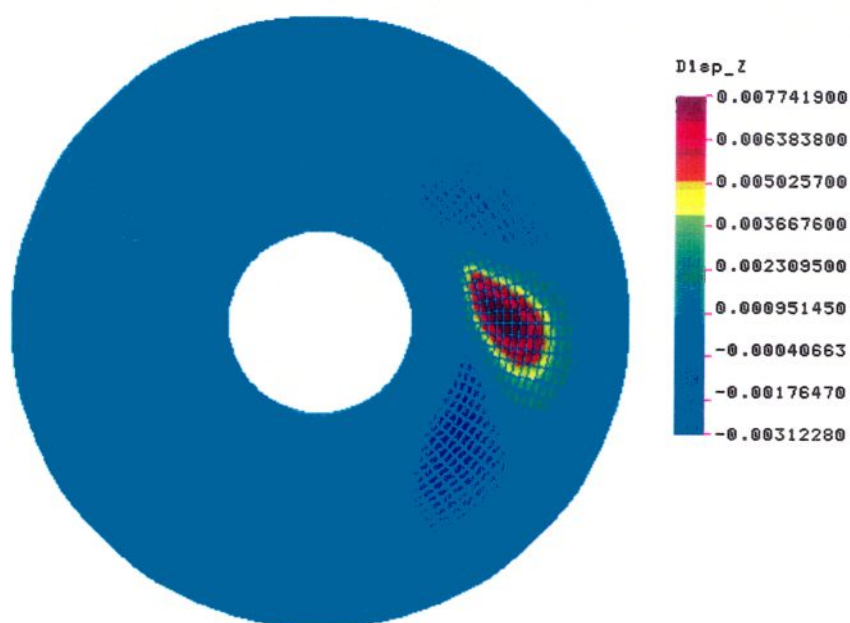
Niewielka wartość siły wymuszającej nie spowodowała w membranie odkształceń plastycznych, gdyż wszystko odbywało się w zakresie sprężystym (rys. 9.5). Uzyskane w tym wypadku maksymalne wartości naprężeń zredukowanych nie przekroczyły 180 MPa, a więc były znacznie poniżej granicy plastyczności. Pojawiły się też pola naprężeń pochodzące od momentu skręcającego poniżej 135 MPa, widoczne w postaci pierścienia przebiegającego wokół krawędzi wewnętrznej membrany. Podobne wyniki otrzymano dla innego analizowanego przypadku, jakim jest membrana o grubości 12 mm (Załącznik Z.6).



Rys. 9.5. Warstwice naprężeń zredukowanych [N] dla momentu skręcającego $1 \cdot Ms$ oraz siły wymuszającej $F = 10 \text{ kN}$

Dalsze zwiększanie wartości momentu skręcającego powoduje, że wzrasta jego wpływ na stan deformacji membrany. W wyniku tego, oprócz głównego miejsca gdzie została ona odkształcona pod wpływem działającego w tym miejscu wymuszenia zewnętrznego, pojawiają się kolejne pofałdowania. Są to odkształcenia wtórne, pochodzące już od wpływu narastającego momentu skręcającego. Mają one charakter symetryczny względem miejsca przyłożenia siły wymuszającej. Ich wartości są znacznie mniejsze w porównaniu z odkształceniem pierwotnym pochodzącym od wymuszenia zewnętrznego. Ponadto ich znak jest naprzemienny, w efekcie powstaje charakterystyczne pofałdowanie powierzchni membrany, które przybiera postać wybrzuszeń i wgłębień.

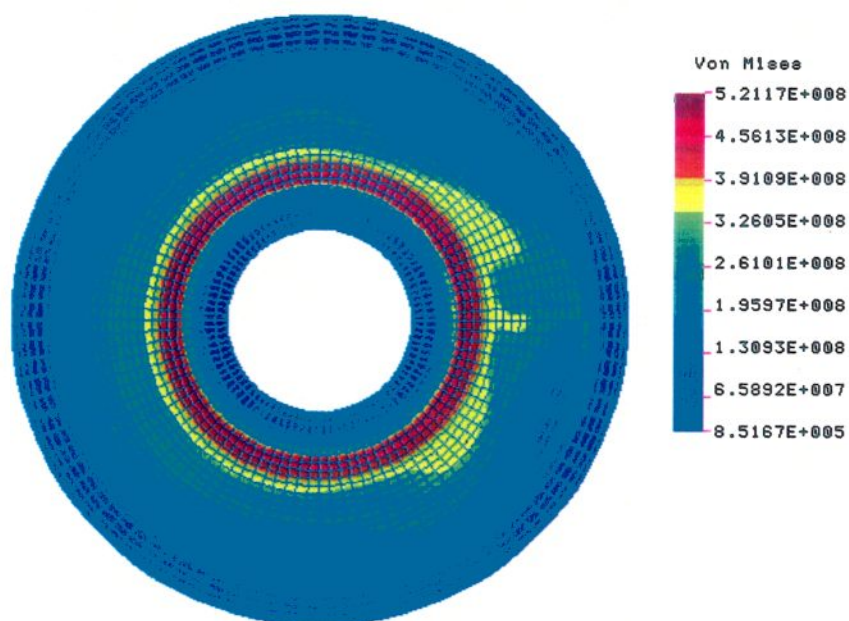
Ostatecznie przy przeciążeniu równym $5 * M_s$ otrzymano charakterystyczną deformację membrany, podobną jak zaobserwowana na obiekcie rzeczywistym (rys. 9.6). Wartości maksymalne przemieszczeń w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni elementu osiągnięte zostały w miejscu, gdzie przyłożono siłę wymuszającą i wynosiły 7,7 mm. Natomiast wartość maksymalna odkształceń wtórnych równa była 3,1 mm. Cechuje je symetryczność względem odkształcenia pierwotnego, a ich znaki są naprzemienne. Ponadto mają one charakter znikający w miarę oddalania się od źródła wymuszenia zewnętrznego, a kształt jest efektem skręcenia się membrany pod wpływem przyłożonego momentu obrotowego.



Rys. 9.6. Warstwy przemieszczeń U_z [m] dla momentu skręcającego $5 * M_s$ oraz siły wymuszającej $F = 10$ kN

Maksymalne naprężenia zredukowane osiągane dla stanu deformacji membrany w tym przypadku są znaczne i wynoszą około 520 MPa, a więc jeszcze poniżej granicy wytrzymałości. Ich postać jest głównie wynikiem działania przede wszystkim momentu skręcającego i dlatego przyjmują mają kształt znanych już wcześniej pierścieni wokół krawędzi wewnętrznej membrany (rys. 9.7). W miejscach gdzie wystąpiły charakterystyczne pofałdowania, naprężenia osiągają wartości przekraczające już granicę plastyczności. Tak więc w tym przypadku można powiedzieć, że mamy do czynienia z plastyczną deformacją membrany. Dla membrany o grubości 12 mm także uzyskano plastyczne pofałdowanie powierzchni przy wartości przeciążenia momentem skręcającym równym $9 * M_s$ (Załącznik Z.6).

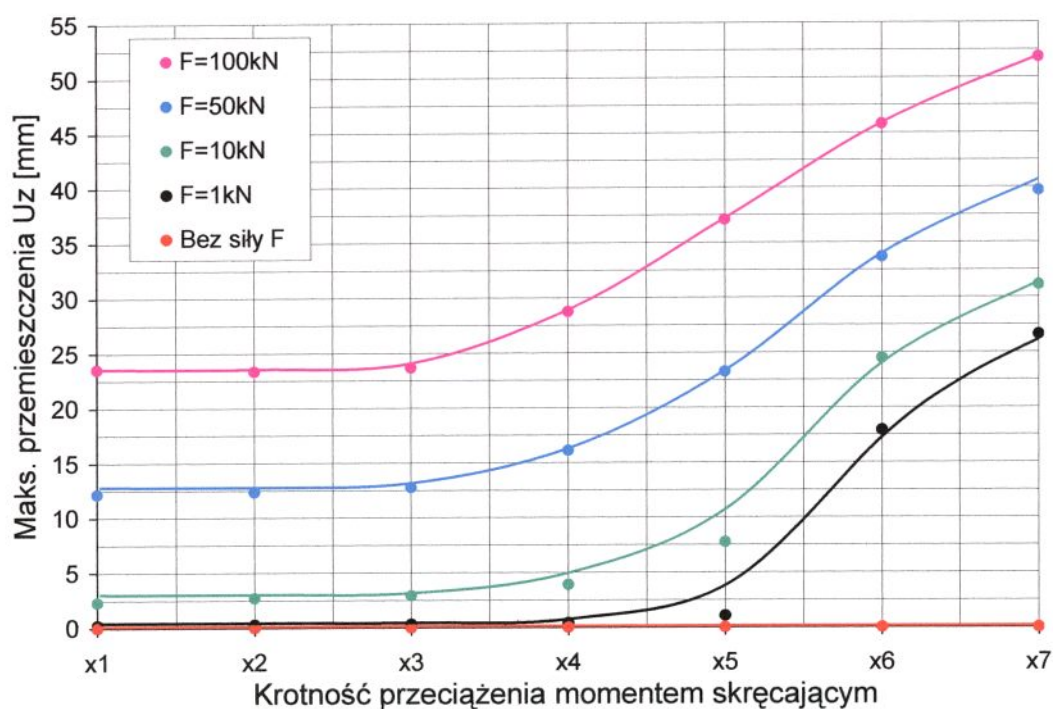
Dalsze zwiększanie wartości momentu skręcającego powodować będzie pogłębianie się efektu plastycznego pośladowania powierzchni membrany. Jednocześnie wzrastać będą naprężenia w obszarze wokół krawędzi wewnętrznej pochodzące od skręcania. Tym samym membrana ulegnie rozerwaniu (ukręceniu) z chwilą przekroczenia przez naprężenia granicy wytrzymałości. Dlatego też istotną sprawą jest prognozowanie jak długo jeszcze pracować może plastycznie zdeformowany element, zanim ulegnie zniszczeniu. Pomóc w tym mogą przedstawione wyniki analizy numerycznej dla różnych wariantów w celu uogólnienia zjawiska również na inne obiekty tego typu.



Rys. 9.7. Warstwie naprężeń zredukowanych [N] dla momentu skręcającego $5 * Ms$ oraz siły wymuszającej $F = 10 \text{ kN}$

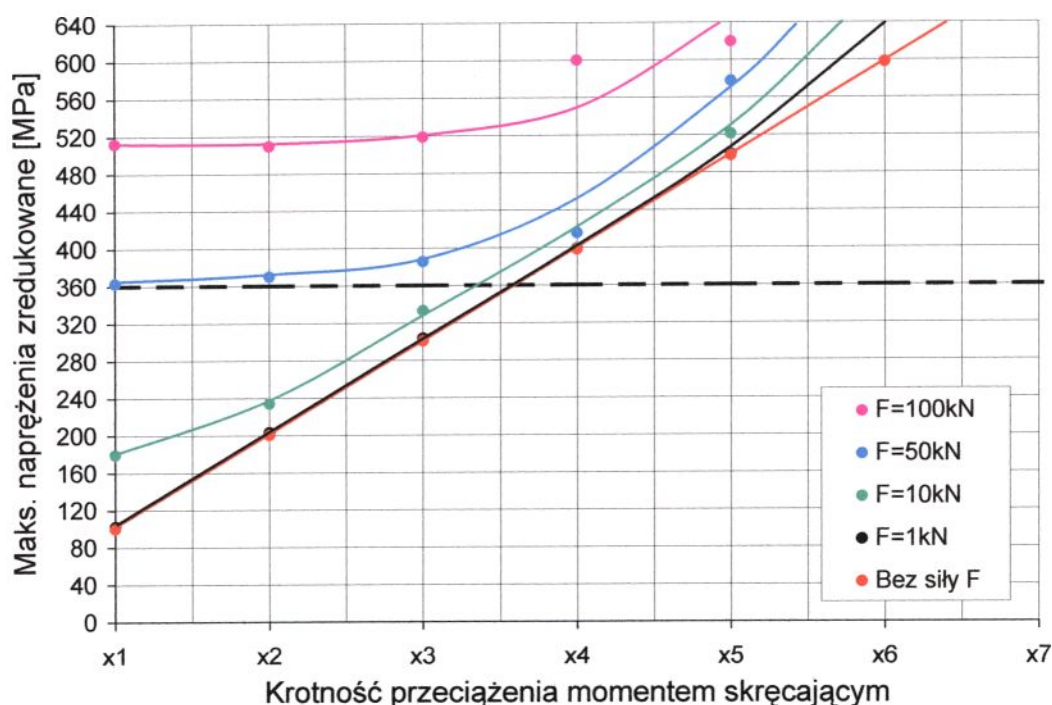
Uogólnienia zjawiska plastycznej deformacji membrany sprzęgła wielkogabarytowego dokonano na podstawie przeprowadzonej analizy numerycznej dla dwóch wariantów grubości membrany. Obciążano je różnymi wartościami siły wymuszającej, przy przeciążeniach momentem skręcającym wynoszącym od $1 * Ms$ do $10 * Ms$. Analizowano również wpływ zmiany położenia siły wymuszającej wzdłuż promienia na powstające przemieszczenia oraz wywołane nimi naprężenia. W wyniku tak przeprowadzonej analizy uzyskano rezultaty, które teraz zostaną omówione.

W przypadku membrany o grubości 8 mm charakterystyczne pofałdowanie jej powierzchni pojawia się tylko wówczas, gdy wystąpiło dodatkowe wymuszenie zewnętrzne w postaci siły skupionej działającej na niewielkim obszarze przy znacznej wartości momentu skręcającego. Odształcenia wtórne pojawiają się już dla przeciążeń momentem o wartości $3 * M_s$, mają one jednak znacznie mniejsze wartości w porównaniu z pierwotnym pocho-
dzącym od siły. Jednak już od tej chwili widać wyraźny wzrost wartości maksymalnych przemieszczeń osiąganych przez membranę w miarę zwiększania przeciążenia momentem (rys. 9.8). Deformacje te są największe w miejscu, gdzie przyłożona była zewnętrzna siła wymuszająca. Przy przeciążeniach momentem skręcającym równym $5 * M_s$ pojawia się już kilka odształceń wtórnych, symetrycznych względem pierwotnego oraz o naprzemiennych znakach. Mają one charakter zanikający w miarę oddalania się od miejsca przyłożenia siły wymuszającej. Ich największa wartość jest mniejsza prawie o połowę i ma przeciwny znak. Dalszy wzrost momentu skręcającego powoduje już duży przyrost przemieszczeń i są to już deformacje w zakresie plastycznym. Im większa jest wartość siły wymuszającej tym większe są przemieszczenia oraz łagodniejszy ich przyrost po pojawieniu się deformacji wtórnych.



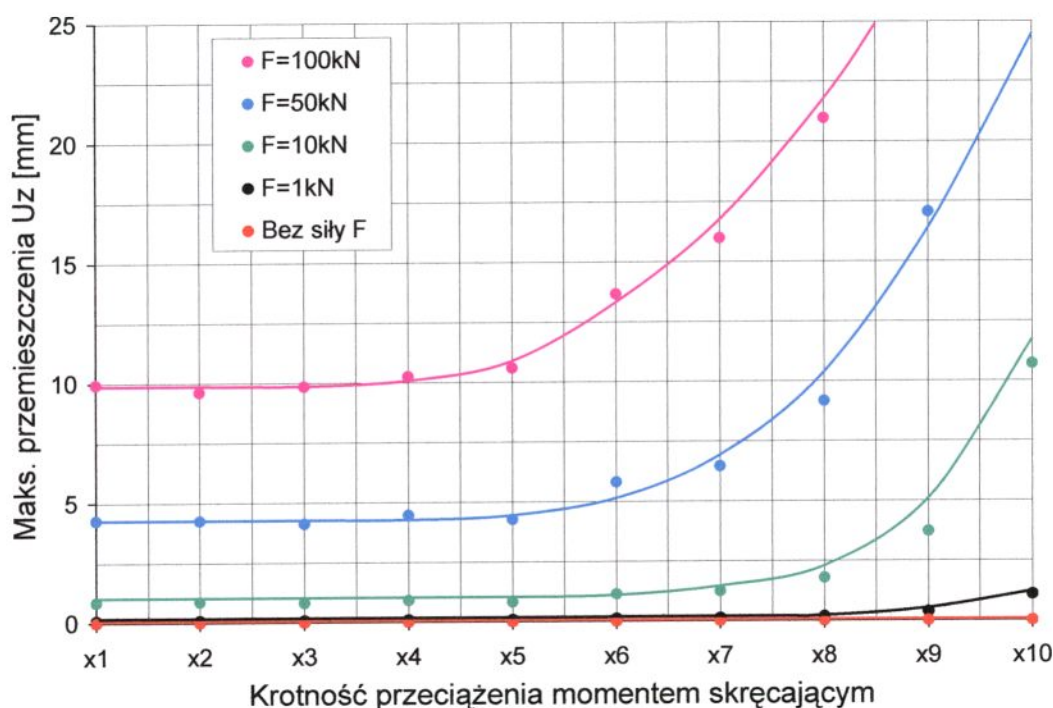
Rys. 9.8. Wykres maksymalnych przemieszczeń U_z membrany o grubości 8 mm dla różnych wartości siły wymuszającej

W przypadku naprężeń zredukowanych według hipotezy Hubera-Misesa, kiedy występuje zewnętrzna siła wymuszająca, ich przebieg odbiega od liniowego charakteru narastania zaobserwowanego dla membrany obciążonej tylko momentem skręcającym (rys. 9.9). Dla niewielkich wartości siły ok. 1 kN, odchylenia te są niewielkie i występują dopiero przy przeciążeniach momentem równych $5 \cdot M_s$, a więc już po wystąpieniu charakterystycznego pofałdowania powierzchni membrany. Im większa jest wartość przyłożonej siły wymuszającej, tym większe są osiągane maksymalne naprężenia zredukowane. Przy siłach powyżej 50 kN już na początku znajdujemy się w zakresie plastycznym, gdzie przeważają naprężenia pochodzące od siły wymuszającej. Siły powyżej 100 kN powodują, że membrana z chwilą wystąpienia charakterystycznego plastycznego pofałdowania ulega zniszczeniu, gdyż osiągnięta zostaje granica wytrzymałości materiału.



Rys. 9.9. Wykres maksymalnych naprężeń zredukowanych membrany o grubości 8 mm dla różnych wartości siły wymuszającej

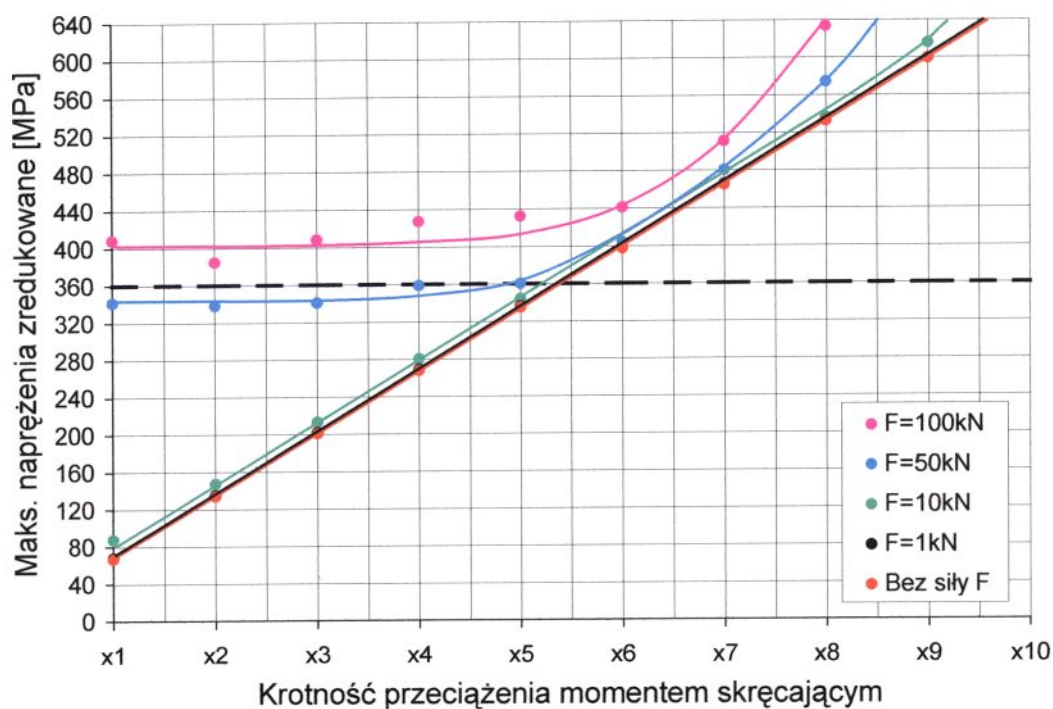
Dla wariantu membrany o grubości 12 mm charakterystyczne pofałdowanie jej powierzchni następuje dla przypadku działania siły wymuszającej oraz momentu skręcającego, przy przeciążeniach momentem równym $9 \cdot M_s$. Przebiegi narastania przemieszczeń mają identyczny charakter jak dla membrany o grubości 8 mm (rys. 9.10). W tym przypadku odkształcenia wtórne są zauważalne już dla przeciążeń momentem o wartości $4 \cdot M_s$. Membrana o grubości 12 mm charakteryzuje się większą sztywnością, a tym samym przemieszczenia pochodzące od tych samych wartości sił co dla membrany o mniejszej grubości są w tym przypadku o ponad połowę mniejsze. Im większa jest wartość siły wymuszającej tym większe są wywołane nimi przemieszczenia.



Rys. 9.10. Wykres maksymalnych przemieszczeń U_z membrany o grubości 12 mm dla różnych wartości siły wymuszającej

Dla naprężenia powstającego w membranie o grubości 12 mm, można zaobserwować podobne charakterystyki ich narastania (rys. 9.11). Dla przypadku obciążenia tylko momentem skręcającym jak również przy wystąpieniu dodatkowego wymuszenia zewnętrznego, ale niewielkich wartości siły poniżej 10 kN, przebiegi narastania naprężeń zredukowanych mają charakter liniowy. Im większa jest wartość przyłożonej siły wymuszającej, tym większe są osiągane maksymalne naprężenia. W przypadku sił o wartościach powyżej 10 kN do około 50 kN i nominalnym momencie skręcającym, przeważają naprężenia pochodzące już od siły

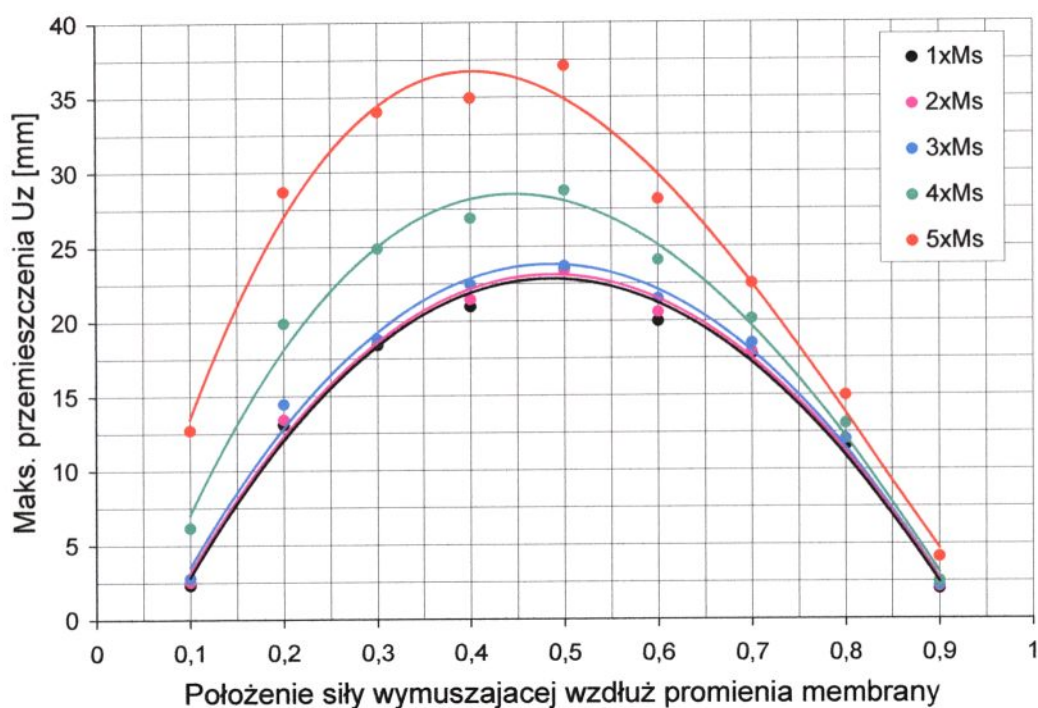
wymuszającej, ale są one jeszcze w zakresie sprężystym. Dopiero przy siłach większych przechodzi się już na samym początku do deformacji plastycznych. Jednakże w tym wypadku nie zostaje osiągnięte charakterystyczne pofałdowanie membrany widoczne przy przeciążeniu momentem równym $9 * M_s$, gdyż wcześniej membrana ta ulegnie zniszczeniu (ukręceniu) w wyniku przekroczenia granicy wytrzymałości.



Rys. 9.11. Wykres maksymalnych naprężeń zredukowanych membrany o grubości 12 mm dla różnych wartości siły wymuszającej

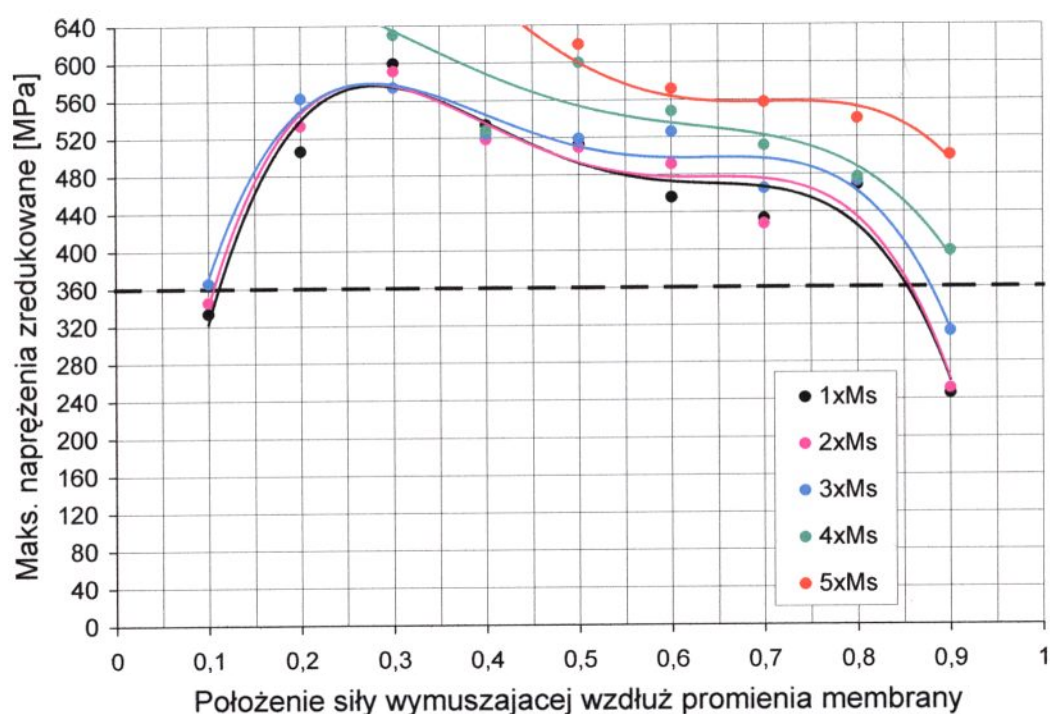
Dalej zostaną omówione przypadki, w których analizowano wpływ zmiany położenia siły wymuszającej wzdłuż promienia membrany – przy różnych wartościach przeciążenia momentem skręcającym – na uzyskane pod wpływem jej działania przemieszczenia w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni i odpowiadające im naprężenia zredukowane według hipotezy Hubera-Misesa. W tym przypadku przyłożona siła wymuszająca była stała i wynosiła $F = 100$ kN. Przykładano ją równomiernie wzdłuż promienia membrany w pewnej odległości od pierścienia wewnętrznego i zewnętrznego. Analizę numeryczną przeprowadzono dla dwóch grubości membrany: 8 i 12 mm.

Zmiany wartości maksymalnych przemieszczeń dla membrany o grubości 8 mm przebiegały według krzywych zbliżonych charakterem do paraboli (rys.9.12). Wzrostowi przeciążenia momentem skręcającym towarzyszył również wzrost powstałych od działania wymuszenia zewnętrznego przemieszczeń normalnych do powierzchni. Położenie, w którym dla danej siły wymuszającej uzyskiwano największe przemieszczenia, ulegało wraz ze wzrostem momentu skręcającego niewielkim przesunięciom w kierunku pierścienia wewnętrznego. Dla analizowanych wartości momentu skręcającego obszar ten znajdował się pomiędzy 0,5 (połową) odległości między brzegami membrany – dla małych przeciążeń oraz 0,4 tej odległości – dla większych momentów. Ponadto wartości przemieszczeń dla danego przeciążenia momentem skręcającym były większe przy pierścieniu wewnętrznym niż przy zewnętrznym. Może to być związane ze strefą wpływu momentu skręcającego przyłożonego właśnie w tamtym obszarze.



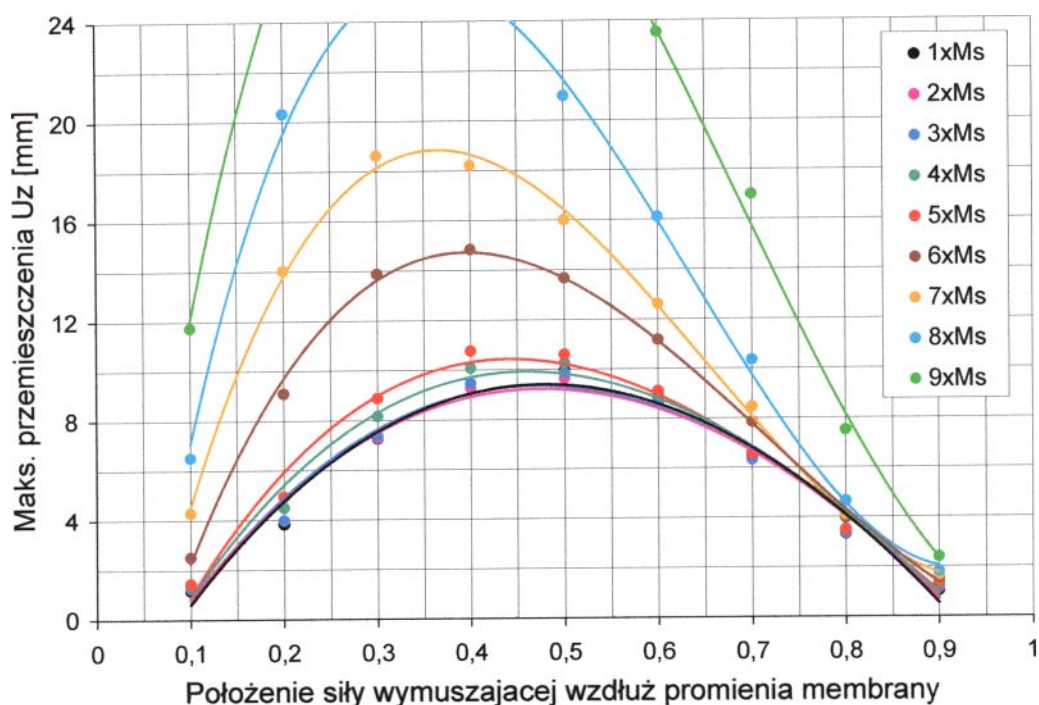
Rys. 9.12. Wykres maksymalnych przemieszczeń U_z membrany o grubości 8 mm dla różnych przeciążeń momentem skręcającym

W przypadku membrany o grubości 8 mm dla małych przeciążeń momentem skręcającym o wartościach do $3 * Ms$ naprężenia uzyskane pod wpływem siły wymuszającej działającej w najbliższym otoczeniu pierścienia wewnętrznego i zewnętrznego pozostają w granicach sprężystości (rys. 9.13). Jednak w pozostałych przypadkach znajdują się one już w strefie plastycznej. Dla dużych przeciążeń momentem skręcającym powyżej $4 * Ms$ naprężenia pochodzące od siły znajdującej się przy pierścieniu wewnętrznym przekraczają wartość granicy wytrzymałości dla danego materiału. Przebiegi naprężeń mają charakter siodłowy w okolicach $0,4 \div 0,7$ odległości między pierścieniami, z większymi wartościami od strony wewnętrznego brzegu membrany.



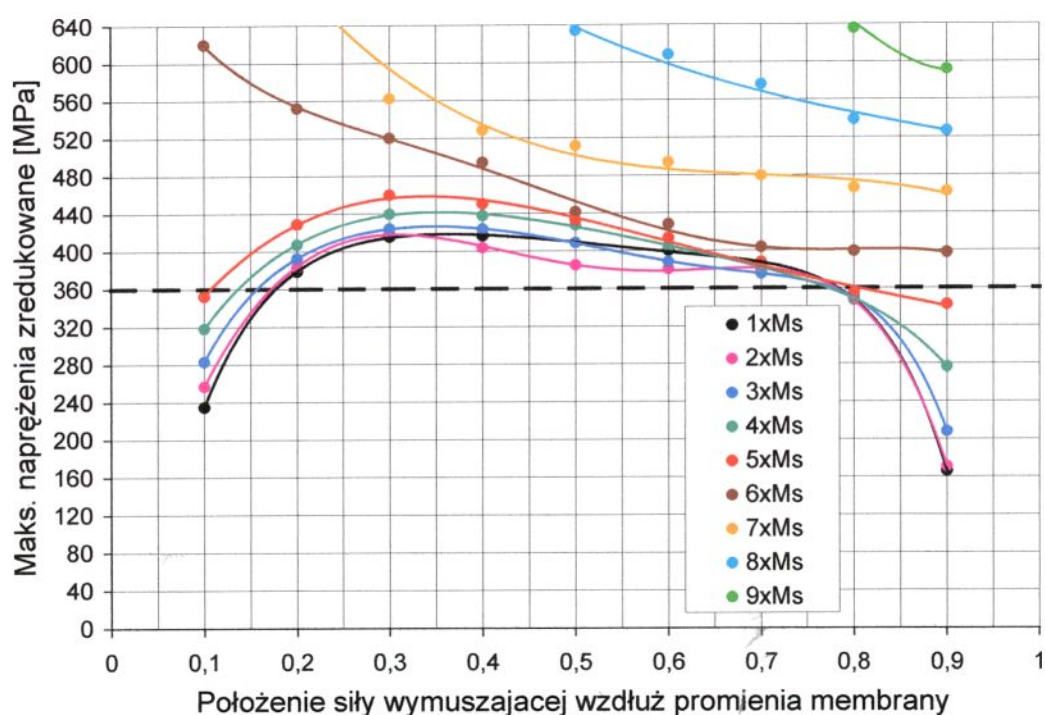
Rys. 9.13. Wykres maksymalnych naprężeń zredukowanych membrany o grubości 8 mm dla różnych przeciążeń momentem skręcającym

Dla przypadku membrany o grubości 12 mm krzywe przemieszczeń mają identyczny charakter jak dla omawianej wcześniej membrany o grubości 8 mm (rys. 9.14). Większa sztywność omawianej membrany powoduje, że przemieszczenia odpowiadające tym samym przeciążeniom momentem skręcającym co dla membrany o mniejszej grubości, osiągają o ponad połowę mniejsze wartości. W tym wypadku również zaobserwowano przesunięcie strefy maksymalnych przemieszczeń, dla danego przeciążenia momentem skręcającym, w kierunku pierścienia wewnętrznego wraz ze wzrostem wartości momentu. Również wartości osiąganych przemieszczeń są większe, jeżeli siłę wymuszającą przyłoży się bliżej wewnętrznego brzegu membrany niż w przypadku zewnętrznego. Jest to wyraźne dla przeciążeń momentem skręcającym większym niż $6 \cdot Ms$.



Rys. 9.14. Wykres maksymalnych przemieszczeń U_z membrany o grubości 12 mm dla różnych przeciążeń momentem skręcającym

Analiza stanu naprężeń występujących w membranie o grubości 12 mm pokazuje, że również w tym wypadku dla przeciążeń momentem skręcającym o wartościach do $5 * Ms$ naprężenia wywołane działaniem siły wymuszającej w najbliższym otoczeniu pierścienia wewnętrznego i zewnętrznego pozostają w granicach sprężystości (rys. 9.15). W pozostałych przypadkach pozostają one już w strefie plastycznej. Gdy mamy do czynienia z dużymi przeciążeniami momentem skręcającym powyżej $7 * Ms$, to naprężenia pochodzące od siły znajdującej się w pobliżu pierścienia wewnętrznego przekraczają wartość granicy wytrzymałości dla danego materiału. W porównaniu z membraną o grubości 8 mm przebiegi naprężeń nie mają tak wyraźnego charakteru siodłowego, jedynie dla dwukrotnego przeciążenia momentem skręcającym. Również w tym wypadku mamy do czynienia z większymi wartościami od strony pierścienia wewnętrznego. Istotny dla tej wartości siły wymuszającej jest fakt, że charakterystyczne pofałdowanie powierzchni membrany uzyskiwane przy przeciążeniach równych $9 * Ms$, pojawia się tylko w dwóch położeniach leżących w najbliższym sąsiedztwie pierścienia zewnętrznego. W pozostałych przypadkach przy tym przeciążeniu momentem przekroczona zostaje granica wytrzymałości materiału.



Rys. 9.15. Wykres maksymalnych naprężeń zredukowanych membrany o grubości 12 mm dla różnych przeciążeń momentem skręcającym

Dzięki przeprowadzonej analizie z wykorzystaniem metod numerycznych możliwe jest uogólnienie własnego modelu zjawiska plastycznej deformacji membrany sprzęgła wielkogabarytowego również na inne przypadki obciążeniowe i geometryczne, które nie zostały w tej pracy przedstawione. Opisane przykłady umożliwiają wysunięcie wniosków na temat zachowania się wielkogabarytowych elementów cienkościennych obciążonych momentem skręcającym, wynikającym z pracy całego mechanizmu, jak i dodatkowo wymuszeniem zewnętrznym w postaci siły skupionej na niewielkim obszarze.

Widać wyraźne podobieństwa zachowania się analizowanych obiektów dla różnych grubości. Przemieszczenia oraz wywołane nimi naprężenia mają przebiegi o podobnym charakterze. Różnica dotyczy jedynie osiąganych wartości, co jest wynikiem różnych sztywności analizowanych membran. W obu przypadkach uzyskano zaobserwowane na obiekcie rzeczywistym charakterystyczne pofałdowanie plastyczne powierzchni elementu otrzymane jedynie przy różnych wartościach przeciążenia momentem skręcającym. Zwrócono również uwagę na istotność miejsca przyłożenia siły wymuszającej wzdłuż promienia membrany. Zaproponowany własny model plastycznej deformacji membrany sprzęgła wielkogabarytowego może stać się uniwersalnym narzędziem dla analizy tego istotnego zjawiska.

10. Narzędzia obserwacji i diagnostyki

Ważnym problemem w zakresie obserwacji i diagnostyki rozpatrywanego obiektu jest dobór odpowiedniej metody pomiarowej dostosowanej do założonego algorytmu. Zgodnie z tym pomiar powinien być przeprowadzony wzdłuż całego obwodu dla wybranych promieni membrany. Proces ten można zrealizować poprzez zamocowanie czujników do listwy usytuowanej wzdłuż promienia membrany, połączonej nieruchomo z konstrukcją koparki. Pomiar odbywać się będzie w trakcie obracania nieobciążonym kołem czerpakowym, przy podniesionym wysięgniku, z wykorzystaniem napędu pomocniczego. W trakcie tych czynności czujniki będą mierzyły przemieszczenia względne membrany dla wybranych promieni. Wykrycie dużych wartości deformacji (stanu granicznego) spowoduje, że koparka nie zostanie dopuszczona do dalszej eksploatacji i podjęte zostaną odpowiednie decyzje eksploatacyjne. Diagnostyka taka przeprowadzana będzie w trakcie przestoju maszyny, zaś na czas pracy koparki – czujniki będą właściwie zabezpieczone przed uszkodzeniem.

W związku z powyższym działaniem diagnostycznym należy zadbać o odpowiedni dobór czujników pomiarowych, przystosowanych do panujących warunków środowiskowych. Najkorzystniejsze to przetworniki zamieniające wybrane wielkości mechaniczne na sygnały elektryczne [127]. Ich zwarta i trwała konstrukcja, właściwie dobrane materiały oraz podzespoły gwarantują bardzo dobre parametry metrologiczne, dzięki czemu znajdują one szerokie zastosowanie jako narzędzia obserwacji i diagnostyki. W praktyce eksperymentalnej spotyka się czujniki pomiarowe typu: potencjometrycznego, indukcyjnego, pojemnościowego, ultradźwiękowego, optycznego i inne [139].

Wiedza o charakterystykach najczęściej spotykanych w praktyce czujnikach pomiarowych ułatwia podjęcia decyzji odnośnie doboru odpowiedniego rodzaju narzędzia pomiarowego dostosowanego do postawionego mu zadania oraz panujących warunków środowiskowych. W przypadku obserwacji i diagnostyki wielkogabarytowego sprzęgła membranowego, najwłaściwszy wydaje się wybór czujników indukcyjnych. Są one odporne na trudne warunki środowiskowe, a z takimi mamy do czynienia w przypadku maszyn eksploatowanych w kopalniach odkrywkowych. Wykazują one dużą trwałość oraz brak histerezy. Znakomicie sprawdzają się w warunkach występowania drgań oraz wibracji z dużymi przyspieszeniami, a taką sytuację spotykamy podczas obracania się koła czerpakowego koparki. Wysoka niezawodność, duża dokładność pomiaru oraz znaczny zakres pomiarowy powodują, że znajdują one zastosowanie przy obserwacji przemieszczeń mocno zdeformowanej plastycznie membrany sprzęgła wielkogabarytowego.

11. Podsumowanie pracy

Genezę pracy stanowi zjawisko zaobserwowane na obiekcie rzeczywistym. W wyniku obserwacji i wstępnych pomiarów stwierdzono, że w trakcie normalnej eksploatacji maszyny roboczej uszkodzeniu uległo wielkogabarytowe sprzęgło membranowe wchodzące w skład układu napędowego dużej mocy. Nastąpiło to na skutek wystąpienia plastycznej deformacji (pofałdowania) cienkościennego elementu pośredniczącego w przekazywaniu napędu.

Wynikła potrzeba opracowania analitycznego opisu deformacji membrany w celu określenia przyczyny powstania tego typu zjawisk i zapobiegania im w przyszłości. Z elementami podobnego typu można spotkać się w układach napędowych dużych maszyn roboczych pracujących najczęściej w ruchu ciągłym. Dlatego awaria sprzęgła membranowego może spowodować olbrzymie straty materialne w przypadku wyeliminowania maszyny z pracy. Problem niezawodnej pracy wielkogabarytowych elementów cienkościennych okazał się niezmiernie istotny.

Należało odpowiedzieć na pytanie, czy plastycznie zdeformowana membrana sprzęgła wielkogabarytowego, która nie odpowiada już wymaganiom projektowym, może dalej pracować zgodnie ze swoim przeznaczeniem. W tym celu najpierw trzeba było określić przyczynę powstania tego typu zjawiska. Aby to zrealizować, należało opracować model teoretyczny deformacji membrany do dalszej analizy. Stąd też została postawiona teza pracy dotycząca stanu granicznego membrany sprzęgła wielkogabarytowego.

Dla udowodnienia tezy, w oparciu o wybrane literaturowe modele ugięć elementów cienkościennych, zaproponowano własny model analityczny funkcji opisującej plastyczną deformację membrany wielkogabarytowej w postaci pojedynczego szeregu trygonome-

$$\text{trycznego: } w_i(\alpha) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{n\alpha}{2}.$$

Dla potwierdzenia słuszności przyjętego własnego modelu deformacji membrany przeprowadzono badania doświadczalne na obiekcie rzeczywistym, na którym zaobserwowano zjawisko plastycznej deformacji elementu. Dzięki tak uzyskanym informacjom możliwe było przeprowadzenie analizy, przy wykorzystaniu wspomnianego własnego modelu, w celu identyfikacji przyczyn powstania deformacji membrany sprzęgła wielkogabarytowego. Ustalono, że plastyczne pofałdowanie membrany nastąpiło w skutek wystąpienia dodatkowego i nieprzewidzianego wymuszenia zewnętrznego w postaci siły skupionej działającej na niewielkim obszarze. Przeprowadzona analiza umożliwiła również lokalizację miejsca wystąpienia wymuszenia zewnętrznego.

Znajomość przyczyny powodującej powstanie plastycznej deformacji oraz lokalizację obszaru wystąpienia wymuszenia zewnętrznego umożliwia uogólnienie zjawiska na inne przypadki obciążeniowe oraz geometryczne. Do tego celu wykorzystano analizę numeryczną MES, aby możliwe było prognozowanie zachowania się odkształconych wielkogabarytowych elementów cienkościennych podczas ich eksploatacji.

W ten sposób udowodniono, że przyjęta metoda okazała się właściwa, a tym samym teza pracy mówiąca, że *plastyczne deformacje membrany sprzęgła wielkogabarytowego, w wyniku których przestaje ona spełniać wymogi, daje się wystarczająco dokładnie aproksymować pojedynczym szeregiem trygonometrycznym* została udowodniona.

12. Literatura

- [1] Agrygis J. H., *Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej*, Wydawnictwo PAN, Ossolineum, Wrocław 1977
- [2] Bielak S., *Nieliniowa teoria powłok*, cz. I, Wydawnictwo TiT, Opole 1994
- [3] Brzoska Z., *Statyka i stateczność konstrukcji*, PWN, Warszawa 1965
- [4] Brzoska Z., *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, PWN, Warszawa 1965
- [5] Brzoska Z., *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1974
- [6] Buczyński A., Dąbrowski D., Dobrowolski H., Gomoliński P., *Weryfikacja doświadczalna lokalnych stanów wyężenia elementów konstrukcyjnych*, IV Konferencja Naukowa nt. Metody Doświadczalne w Budowie i Eksploatacji Maszyn, t. I, Szklarska Poręba 1999
- [7] Cempel Cz., *Diagnostyka wibroakustyczna maszyn*, PWN, Warszawa 1989
- [8] Cempel Cz., *Szacowanie wartości granicznej w diagnostyce maszyn*, Eksploatacja Maszyn Nr 5-6, Warszawa 1988
- [9] Cempel Cz., *Wibroakustyka stosowana*, PWN, Warszawa 1989
- [10] Chakrabarty P., *Theory of Plasticity*, McGraw-Hill, New York 1987
- [11] Cholewa W., Kaźmierczak J., *Diagnostyka techniczna maszyn. Przetwarzanie cech sygnałów*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1993
- [12] Cholewa W., Moczulski W., *Diagnostyka techniczna maszyn. Pomiar i analiza sygnałów*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1993
- [13] Ciastoń A., Gabryszewski Z., *Teoria plastyczności*, Wrocław 1971
- [14] Dacko M., Borkowski W., Dobrociński S., Niezgoda T., Wieczorek M., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1994
- [15] Dąbrowski O., Kolendowicz T., *Poradnik inżyniera i technika budowlanego*, t. III, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1998
- [16] Dietrich L., *Uwzględnienie wzmocnienia materiału w analizie złożonych procesów plastycznego płynięcia*, Prace Naukowe Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN Nr 53, 1977
- [17] Dietrich L., Miastkowski J., Szczepiński W., *Nośność graniczna elementów konstrukcji*, PWN, Warszawa 1970
- [18] Dietrich M., *Podstawy konstrukcji maszyn*, t. II, WNT, Warszawa 1999

- [19] Drwal G., Grzymkowski R., Kapusta A., Słota D., *Mathematica. Programowanie i zastosowania*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1995
- [20] Dudek D., *Degradacja maszyn roboczych. Teoria czy sztuka?*, Problemy Maszyn Roboczych Nr 7, Warszawa 1996
- [21] Dudek D., *Elementy dynamiki maszyn górnictwa odkrywkowego*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1999
- [22] Dudek D., *Modele statyczne obciążeń eksploatacyjnych w procesie urabiania wielonaczyniowymi koparkami kołowymi*, Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej Nr 53, Seria Monografie Nr 12, Wrocław 1987
- [23] Dudek D., Dudek K., *Metody tensometryczne w oszacowaniach stanów statycznych konstrukcji nośnych*, IV Konferencja Naukowa nt. Metody Doświadczalne w Budowie i Eksploatacji Maszyn, t. I, Szklarska Poręba 1999
- [24] Dudek D., Figiel A., Nowakowski T., *Problemy degradacji i odnowy maszyn roboczych*, Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej Nr 78, Seria Konferencje Nr 24, Projektowanie i Badanie Maszyn – Kierunki Rozwojowe, Wrocław 1995
- [25] Dudek D., Kwaśniak M., Przystupa F.W., Sozański L., *Doświadczalna ocena eksploatacyjnej degradacji maszyn roboczych*, V Konferencja Naukowa nt. Metody Doświadczalne w Budowie i Eksploatacji Maszyn, t. I, Szklarska Poręba 2001
- [26] Dudek D., Oziemski S., Sobczykiewicz W., *Elementy teorii degradacji maszyn*, Problemy Maszyn Roboczych Nr 4, Warszawa 1994
- [27] Dudek D., Rusiński E. i inni, *Wykonanie badań i obliczeń membranowego połączenia koła czerpakowego koparki SRs-1200/1 odkrywka Józwin, z przekładnią KPA 75 w KWB Konin*, Raport Serii Sprawozdania Nr S 066/99, Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1999
- [28] Dudziak M., Seweryn A., Siemieniuk M., Zwoliński J., *Analiza elementów konstrukcyjnych metodami nośności granicznej*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1995
- [29] Dudziński P., Madejski W., Roos J. Horst, *Inteligentne systemy kontroli procesów eksploatacji pojazdów przemysłowych*, Transport Przemysłowy Nr 2, Wrocław 2003
- [30] Dudziński P., Pieczonka K., Włodarczyk J., *Metody badań obciążeń zewnętrznych mobilnych maszyn roboczych*, Konferencja Naukowa nt. Metody Doświadczalne

- w Budowie i Eksploatacji Maszyn Roboczych, Technologicznych oraz Środków Transportu, Szklarska Poręba 1993
- [31] Dunikowski A., Sajkiewicz J., Strzodka K., *Górnictwo odkrywkowe*, t. I, Wydawnictwo Śląsk, Katowice 1983
 - [32] Figiel A., Górski A., Zając T., *Numeryczno-doświadczalna analiza stanu wyężenia i deformacji układu napędowego koparki SRs-1200*, V Międzynarodowa Konferencja Naukowa nt. Komputerowe Wspomaganie Prac Inżynierskich, t. I, Polanica Zdrój 2000
 - [33] Figiel A., Górski A., Zając T., *Numeryczno-doświadczalna analiza stanu wyężenia i deformacji układu napędowego koparki SRs-1200*, Przegląd Mechaniczny Nr 23-24, Oficyna Wydawnicza Simp, Warszawa 2000
 - [34] Figiel A., Muchaczow J., Zając T., *Ocena deformacji membranowego połączenia koła czerpakowego z przekładnią napędową koparki kołowej SRs-1200*, Górnictwo Odkrywkowe Nr 4-5, VI Konferencja Naukowa nt. Metody Doświadczalne w Budowie i Eksploatacji Maszyn, Kudowa Zdrój 2003
 - [35] Figiel A., Zając T., *Obserwacja stanu granicznego wielkośrednicowej membrany napędowej*, Problemy Maszyn Roboczych Nr 16, XIV Konferencja Naukowa nt. Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych, Zakopane 2001
 - [36] Flügge W., *Powłoki. Obliczenia statyczne*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1972
 - [37] Gabryszewski Z., *Teoria sprężystości i plastyczności*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001
 - [38] Gołaś K., Jachimowicz J., Ruszkowski P., Techmański T., *Badanie numeryczne wpływu imperfekcji technologicznych na obciążenia krytyczne i pracę zakrytyczną cienkich płyt i powłok*, VI Międzynarodowa Konferencja Naukowa nt. Komputerowe Wspomaganie Prac Inżynierskich, Polanica Zdrój 2002
 - [39] Gołabek A., Przystupa F. W., *Diagnostyka w systemach bezpieczeństwa. Granice stanów*, Górnictwo Odkrywkowe Nr 2 (232), Wrocław 1994
 - [40] Gołabek A., Przystupa F. W., *Diagnozer systemu bezpieczeństwa w maszynach roboczych*, Problemy Maszyn Roboczych, Zakopane 1995
 - [41] Gołabek A., Przystupa F. W., *Kryteria oceny bezpieczeństwa systemów technicznych*, VII Konferencja Naukowa nt. Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych, Zakopane 1994
 - [42] Gomoliński P., *Metoda wspomaganego komputerowo kształtowania konstrukcji według kryterium nośności granicznej z uwzględnieniem warunków brzegowych*, IX Konferencja naukowa nt. Metody i Środki Projektowania Wspomaganego Komputerowo, Warszawa 1993

- [43] Gomoliński P., Szlagowski J., *Metodyka komputerowo wspomaganego projektowania elementów maszyn roboczych z uwzględnieniem kryterium nośności granicznej*, VIII Konferencja Naukowa nt. Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych, Zakopane 1995
- [44] Grądzki R., Kowal-Michalska K., *Stan zakrytyczny w zakresie sprężysto-plastycznym i nośność graniczna płyt kwadratowych poddanych ściskaniu*, Prace Naukowe Centralnego Programu Badań Podstawowych 02.05 nt. Rozwój Podstaw Budowy, Eksploatacji i Badań Maszyn Roboczych – w tym Budowlanych, cz. I, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1989
- [45] Gryboś R., *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym*, PWN, Warszawa-Poznań 1980
- [46] Grzymkowski R., Kapusta A., Słota D., *Mathematica. Narzędzie inżyniera*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1994
- [47] Hawrylak H., Sobolski R., *Maszyny podstawowe górnictwa odkrywkowego*, Wydawnictwo Naukowe Śląsk, Katowice 1974
- [48] Hill R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, Oxford 1950
- [49] Hodge P. G., *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill, New York 1959
- [50] Huber M. T., *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1954
- [51] Iljušin A. A., *Plastičnost*, Izd. AN SSSR, Moskva 1963
- [52] Ivlev D. D., *Teorija idealnoj plastičnosti*, Nauka, Moskva 1966
- [53] Jakubowicz A., Orłoś Z., *Wytrzymałość materiałów*, WNT, Warszawa 1986
- [54] Jakubowski S., *Sprężyste wyboczenie belek cienkościennych przy złożonym obciążeniu*, Prace Naukowe Centralnego Programu Badań Podstawowych 02.05 nt. Rozwój Podstaw Budowy, Eksploatacji i Badań Maszyn Roboczych – w tym Budowlanych, Mechanika Nr 121, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1989
- [55] Jaworski A., *Metoda elementów skończonych w wytrzymałości konstrukcji*, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1981
- [56] Kačanov L. M., *Osnovy teorii plastičnosti*, Nauka, Moskva 1969
- [57] Kapkowski J., *Podstawy doświadczalnej analizy naprężeń i odkształceń*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1996
- [58] Kapkowski J., Stupnicki J., *Doświadczalne badania elementów maszyn projektowanych metodą nośności granicznej*, Rozprawy Inżynierskie Nr 21, Warszawa 1973
- [59] Kączkowski Z., *Płyty. Obliczenia statyczne*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1980
- [60] Klejber M., *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa 1985

- [61] Kljušnikov V. D., *Matematičeskaja teorija plastičnosti*, Izd. Mosk. Univ., Moskva 1979
- [62] Kłosowski P., *Nieliniowa analiza numeryczna i badania doświadczalne drgań sprężysto-plastycznych płyt i powłok*, Seria Monografie Nr 8, Gdańsk 1999
- [63] Kmieciak M., Wismur M., Bielewicz E., *Analiza nieliniowa tarcz i płyt*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1995
- [64] Koiter W. T., *General Theorems of Elastic-plastic Solids*, North-Holland, Amsterdam 1960
- [65] Kołakowski Z., *Interakcyjne wyboczenie cienkościennych konstrukcji sprężystych*, III Konferencja Centralnego Programu Badań Podstawowych 02.05 nt. Rozwój Podstaw Budowy, Eksploatacji i Badań Maszyn Roboczych – w tym Budowlanych, cz. I, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1989
- [66] Konat Ł., Pękalski G., Kujawa A., Muchaczow J., *Porównawcza ocena podatności do degradacji stali gatunków 18G2 i 18G2A*, Górnictwo Odkrywkowe Nr 4-5, VI Konferencja Naukowa nt. Metody Doświadczalne w Budowie i Eksploatacji Maszyn, Kudowa Zdrój 2003
- [67] Królać M., *Stan zakrytyczny cienkościennego dźwigara o przekroju rombówym*, Prace Naukowe Centralnego Programu Badań Podstawowych 02.05 nt. Rozwój Podstaw Budowy, Eksploatacji i Badań Maszyn Roboczych – w tym Budowlanych, cz. I, Szczyrk 1989
- [68] Królać M., *Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich*, PWN, Warszawa-Łódź 1990
- [69] Kurowski R., Niezgodziński M. E., *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1970
- [70] Lukasevič S., *Lokalnyje nagruzki w plastinach i oboločkach*,
- [71] Łubiński M., Filipowicz A., Żółtowski W., *Konstrukcje metalowe*, cz. I, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 2000
- [72] Łubiński M., Filipowicz A., Żółtowski W., *Wymiarowanie konstrukcji stalowych metodą stanów granicznych*, PWN, Warszawa 1979
- [73] Łukasiewicz S., *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa 1976
- [74] Malinin N. N., *Prikladnaja teorija plastičnosti i polzučesti*, Mašinostroenie, Moskva 1975
- [75] Malinin N. N., Rżysko J., *Mechanika materiałów*, PWN, Warszawa 1981

- [76] Marcinowski J., *Nieliniowa stateczność powłok sprężystych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 1999
- [77] Markusik S., *Sprzęgła mechaniczne*, WNT, Warszawa 1979
- [78] Markusik S., *Wyznaczanie obciążeń konstrukcji stalowych dźwignic*, Transport Przemysłowy Nr 2, Wrocław 2001
- [79] Markusik S., Łukasik T., *Naprężenia zmęczeniowe w złączach spawanych konstrukcji stalowych*, Transport Przemysłowy Nr 4, Wrocław 2001
- [80] Markusik S., Opasiak T., *Charakterystyki sprzęgieł podatnych w funkcji wymuszeń dynamicznych oraz błędów montażowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Transport Z. 42, Gliwice 2001
- [81] Markusik S., Opasiak T., *Charakterystyki sprzęgieł podatnych w funkcji wymuszeń dynamicznych oraz błędów montażowych*, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej Nr 18, XLI Sympozjon PTMTS nt. Modelowanie w Mechanice, Gliwice 2002
- [82] Markusik S., Opasiak T., *Wpływ błędów montażu sprzęgieł skrętnie podatnych na pracę układu napędowego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Transport Z. 44, Gliwice 2002
- [83] Mazurkiewicz Z., Nagórski R., *Powłoki obrotowe sprężyste*, PWN, Warszawa 1987
- [84] Murzewski J., *Niezawodność konstrukcji inżynierskich*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1989
- [85] Neal B. G., *The Plastic Methods of Structural Analysis*, J. Wiley, New York 1956
- [86] Niepostyn D., *Nośność graniczna płyt kołowo-symetrycznych*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1963
- [87] Niepostyn D., *Nośność graniczna płyt prostokątnych*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1962
- [88] Niezgodziński M. E., Niezgodziński T., *Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe*, WNT, Warszawa 1996
- [89] Nowacki W., *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970
- [90] Nowacki W., *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1974
- [91] Olszak W., *Z podstawowych zagadnień teorii stanów granicznych. Plastyczne wyczerpanie nośności*, Rozprawy Inżynierskie Nr 6, Warszawa 1954
- [92] Olszak W., Perzyna P., *Teoria nośności granicznej w świetle weryfikacji doświadczalnej*, Rozprawy Inżynierskie Nr 28, Warszawa 1959
- [93] Olszak W., Perzyna P., Sawczuk A., *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965

- [94] Orłoś A., *Doświadczalna analiza odkształceń i naprężeń*, PWN, Warszawa 1975
- [95] Ostrowska-Maciejewska J., *Mechanika ciał odkształcalnych*, PWN, Warszawa 1994
- [96] Perzyna P., *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa 1966
- [97] Pieczonka K., *Maszyny urabiające. Podstawy urabiania i przemieszczania*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1988
- [98] Piwnik M., *Uwzględnienie wzmocnienia materiału w rozwiązaniach plastyczności w płaskim stanie odkształcenia*, Prace Naukowe Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN Nr 21, Warszawa 1987
- [99] Prager W., Hodge P. G., *Theory of Perfectly Plastic Solids*, J. Wiley, London 1951
- [100] Prager W., *Introduction to Plasticity*, Addison-Wesley, Reading 1959
- [101] Przystupa F. W., *Dobór kryteriów oceny systemów diagnozujących*, Diagnostyka Techniczna Urządzeń i Systemów, ZDKBM PAN, Kielce 1990
- [102] Przystupa F. W., *Efektywność diagnozowania maszyn roboczych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej, Seria Mechanika Z. 64, XIV Konferencja Naukowa nt. Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych, Zakopane 2001
- [103] Przystupa F. W., *Granice diagnozy*, III Konferencja Naukowa nt. Diagnostyka Techniczna Systemów, ITWL WAT, Warszawa-Szczyrk 1995
- [104] Przystupa F. W., *Problemy doboru diagnosty dla systemu bezpieczeństwa*, I Konwersatorium nt. Bezpieczeństwo i Degradacja Maszyn, Wrocław 1995
- [105] Przystupa F. W., *Proces diagnozowania w ewoluującym systemie technicznym*, Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej Nr 83, Seria Monografie Nr 29, Wrocław 1999
- [106] Robotnov Ju. N., *Mechanika deformiruemogo tverdogo tela*, Nauka, Moskva 1979
- [107] Rodionov P. V., Tiszkov A. Ja., *O silovoj charakteristike membrany s žestkim centrom*,
- [108] Roliński Z., *Tensometria oporowa. Podstawy teoretyczne i przykłady zastosowań*, WNT, Warszawa 1981
- [109] Rusiński E., *Metoda elementów skończonych. System COSMOS/M*, WKiŁ, Warszawa 1994
- [110] Rusiński E., Czmochoński J., Smolnicki T., *Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000
- [111] Rymarz Cz., *Mechanika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa 1993
- [112] Sawczuk A., *Wprowadzenie do mechaniki konstrukcji plastycznych*, PWN, Warszawa 1982

- [113] Sawczuk A., Izbicki R., *Podstawy mechaniki ośrodków plastycznych*, Wrocław 1984
- [114] Sawczuk A., Janas M., König J. A., *Analiza plastyczna konstrukcji*, Ossolineum, Wrocław 1972
- [115] Sawyer W. W., *W poszukiwaniu modelu matematycznego*, Seria Omega, Wiedza Powszechna, Warszawa 1975
- [116] Sobotka Z., *Nośność graniczna płyt*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1975
- [117] Sokołowski M., *Mechanika techniczna. Sprężystość*, t. IV, PWN, Warszawa 1978
- [118] Sokołowski W. W., *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1957
- [119] Strzałkowski A., Śliżyński A., *Matematyczne metody opracowania wyników pomiarów*, PWN, Warszawa 1978
- [120] Strzodka K., Sajkiewicz J., Dunikowski A., *Górnictwo odkrywkowe*, t. I, Wydawnictwo Śląsk, Katowice 1983
- [121] Szczepiński W., *Mechanika plastycznego płynięcia*, PWN, Warszawa 1978
- [122] Szczepiński W., *Metody doświadczalne mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1984
- [123] Szczepiński W., *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, PWN, Warszawa 1968
- [124] Szczepiński W., Szlagowski J., *Projektowanie konstrukcji metodą granicznych pól naprężeń*, PWN, Warszawa-Poznań 1985
- [125] Szlagowski J., *Metodyka kształtowania wytrzymałościowego elementów konstrukcji według kryterium nośności granicznej*, Prace Naukowe Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN Nr 25, Warszawa 1990
- [126] Sztorch S., Woźniak Z., Rybczyńska T., *Modernizacja zespołu urabiającego koparki SRs-1200*, Węgiel Brunatny, IV Konwersatorium nt. Bezpieczeństwo oraz Degradacja Maszyn, Ślesin k. Konina 2000
- [127] Szumielewicz B., Słomski B., Styburski W., *Pomiary elektroniczne w technice*, WNT, Warszawa 1982
- [128] Timoshenko S. P., Goodier J. N., *Teoria sprężystości*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1969
- [129] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., *Teoria płyt i powłok*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1962
- [130] Vodjanik V. I., *Elastičnye membrany*, Mašinostroenie, Moskva 1974
- [131] Wierzbicki T., *Obliczania konstrukcji obciążonych dynamicznie*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1980

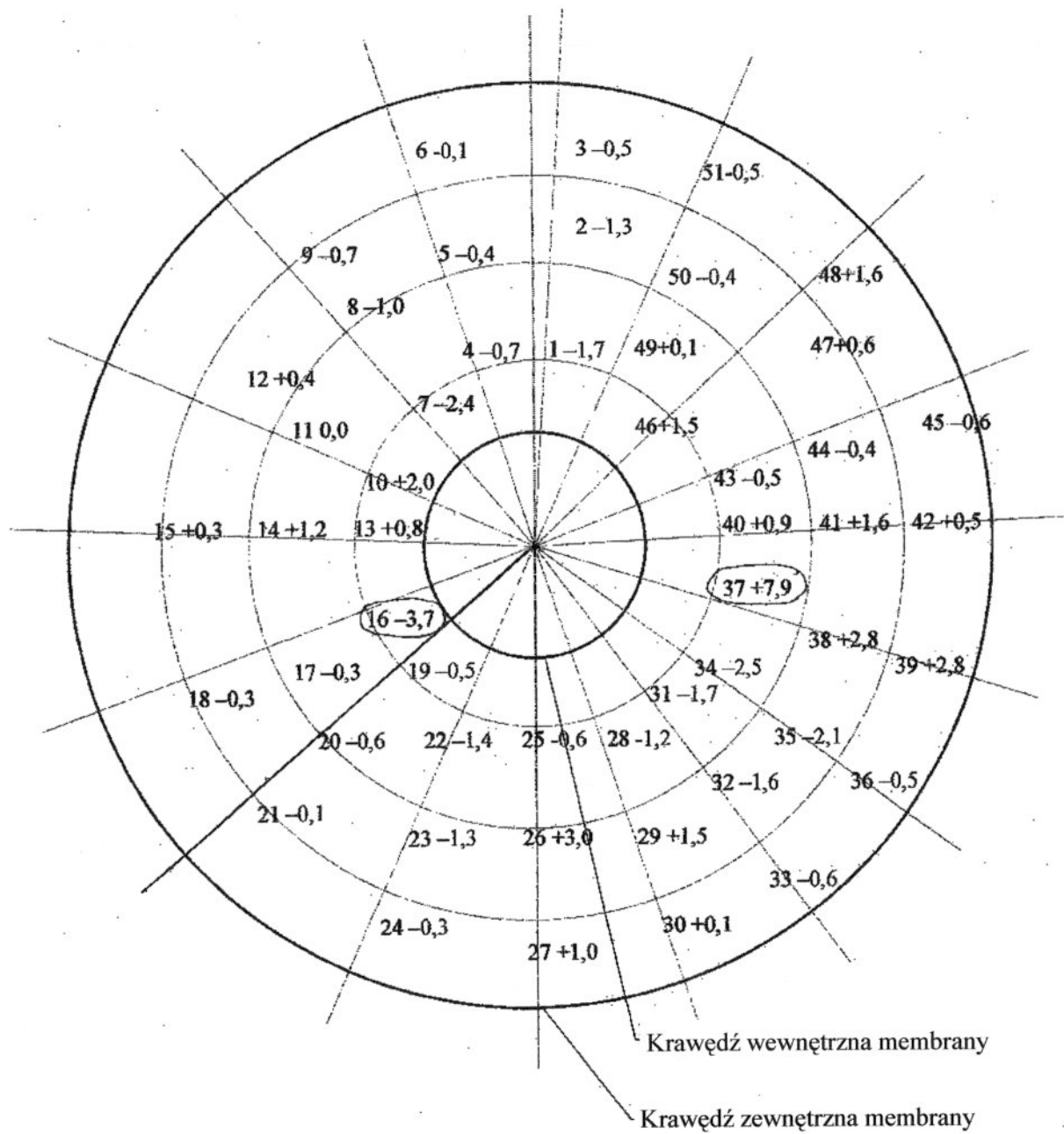
- [132] Wocka N, *Dynamika procesu urabiania i jej wpływ na obciążalność elementów zespołu napędowego urabiania przy koparkach kołowych pracujących w utworach trudno urabialnych*, Węgiel Brunatny Nr 3, 2001
- [133] Wocka N., *Urabianie koparkami kołowymi w warunkach dużych oporów kopania*, Górnictwo Odkrywkowe Nr 1, Wrocław 1989
- [134] Wocka N., Felisiak I., *Ważniejsze zjawiska dynamiczne powstające w procesie urabiania skał trudnourabialnych koparkami kołowymi*, Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej Nr 63, Seria Konferencje Nr 18, Problemy Urabiania i Przeróbki Skał, Wrocław 1991
- [135] Wojewódzki W., *Nośność graniczna płyt*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995
- [136] Woźniak Cz., *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966
- [137] Woźniak Cz., Kleiber M., *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN, Poznań 1982
- [138] Wrzecionarz P. A., *Metamorfozy cienkościennych elementów nośnych pojazdów*, Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej Nr 78, Seria Konferencje Nr 24, Projektowanie i Badanie Maszyn – Kierunki Rozwoju, Wrocław 1995
- [139] Zakrzewski J., *Czujniki i przetworniki pomiarowe. Podręcznik problemowy*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004
- [140] Zalewski A., Cegiela R., *Matlab – obliczenia numeryczne i ich zastosowanie*, Wydawnictwo Nakom, Poznań 2000
- [141] Zienkiewicz O. C., *Metoda elementów skończonych*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1972
- [142] Zienkiewicz O. C. Taylor R. L., *The Finite Element Method*, vol. I i II, McGraw-Hill, London 1991
- [143] Życzkowski M., *Mechanika techniczna. Wytrzymałość elementów konstrukcyjnych*, t. IX, PWN, Warszawa 1988
- [144] Życzkowski M., *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1973

13. Załączniki

Z.1. Karta pomiarowa z wynikami pomiarów wstępnych.....	92
Z.2. Wykresy funkcji aproksymujących deformację membrany dla $n=20$	93
Z.3. Rozwinięcia w pojedynczy szereg trygonometryczny funkcji aproksymujących deformację membrany.....	97
Z.4. Graficzne uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej deformację membrany	100
Z.5. Wyniki analizy numerycznej membrany o grubości 12 mm obciążonej tylko momentem skręcającym	104
Z.6. Wyniki analizy numerycznej membrany o grubości 12 mm obciążonej momentem skręcającym oraz siłą wymuszającą.....	105

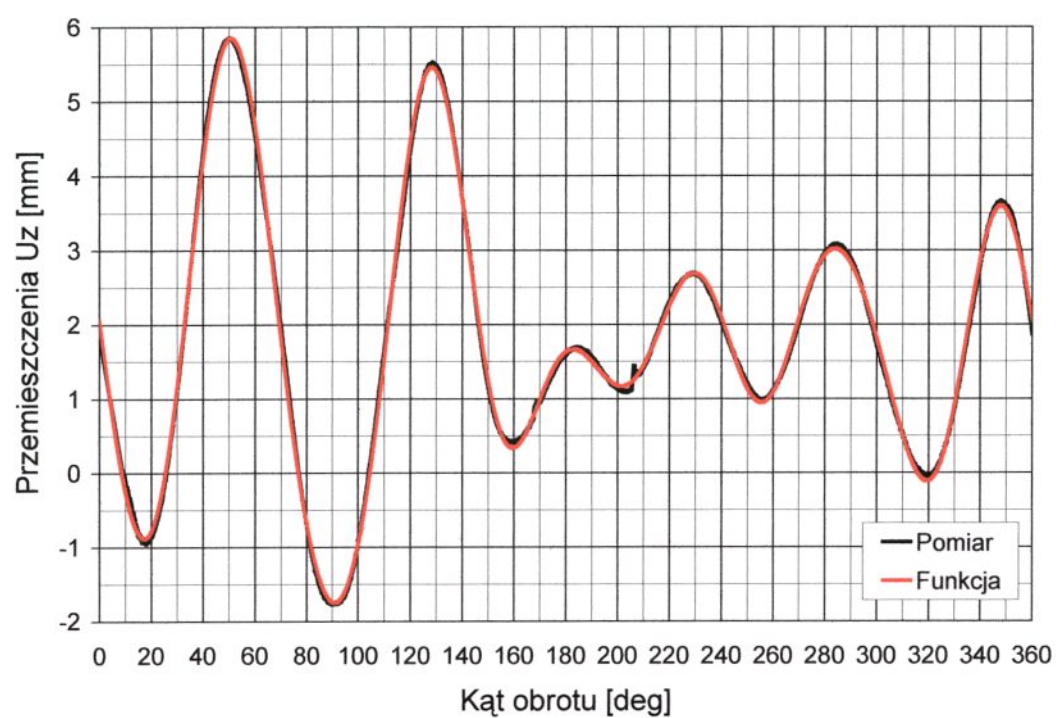
ZAŁĄCZNIK Z.1

Karta pomiarowa z wynikami pomiarów wstępnych

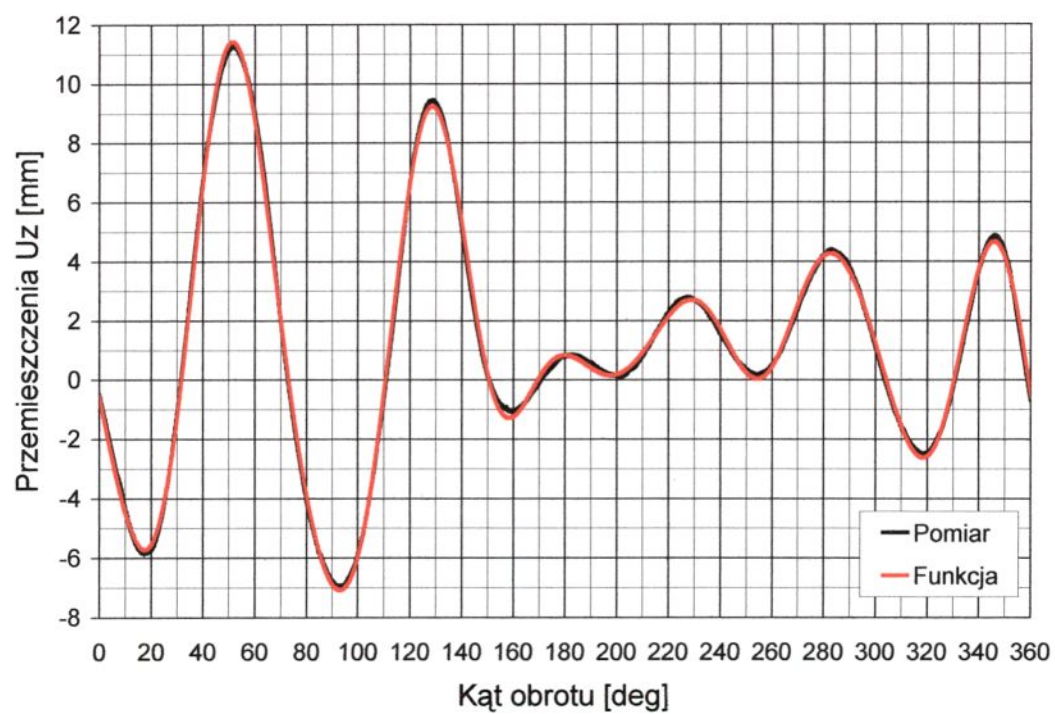


ZAŁĄCZNIK Z.2

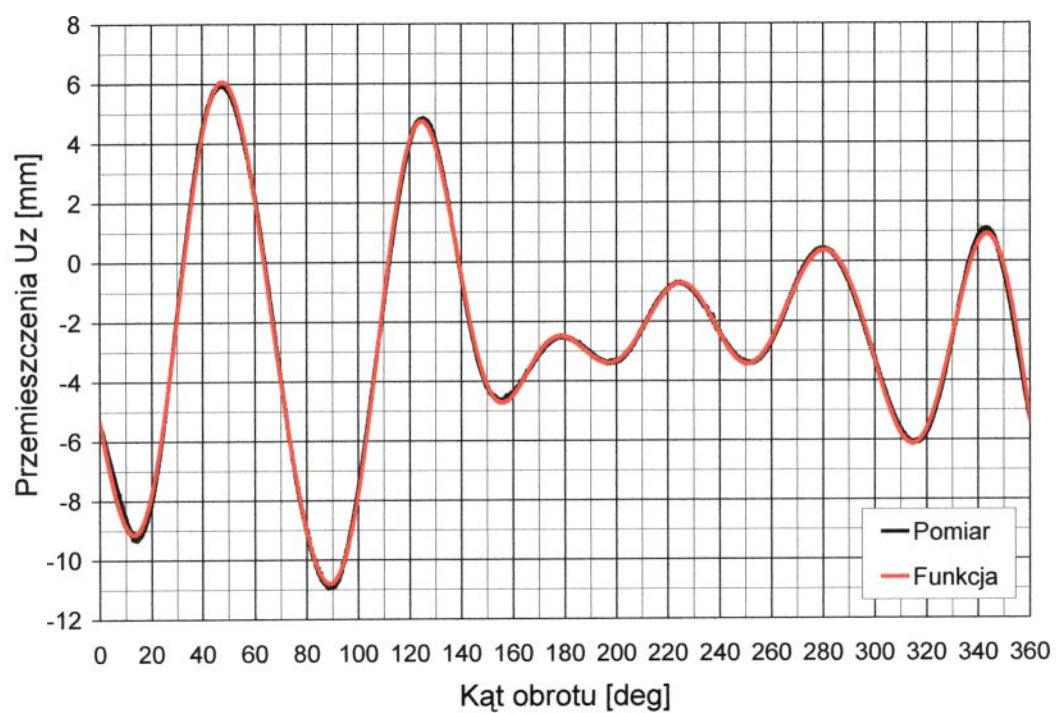
Wykresy funkcji aproksymujących deformację membrany dla $n = 20$



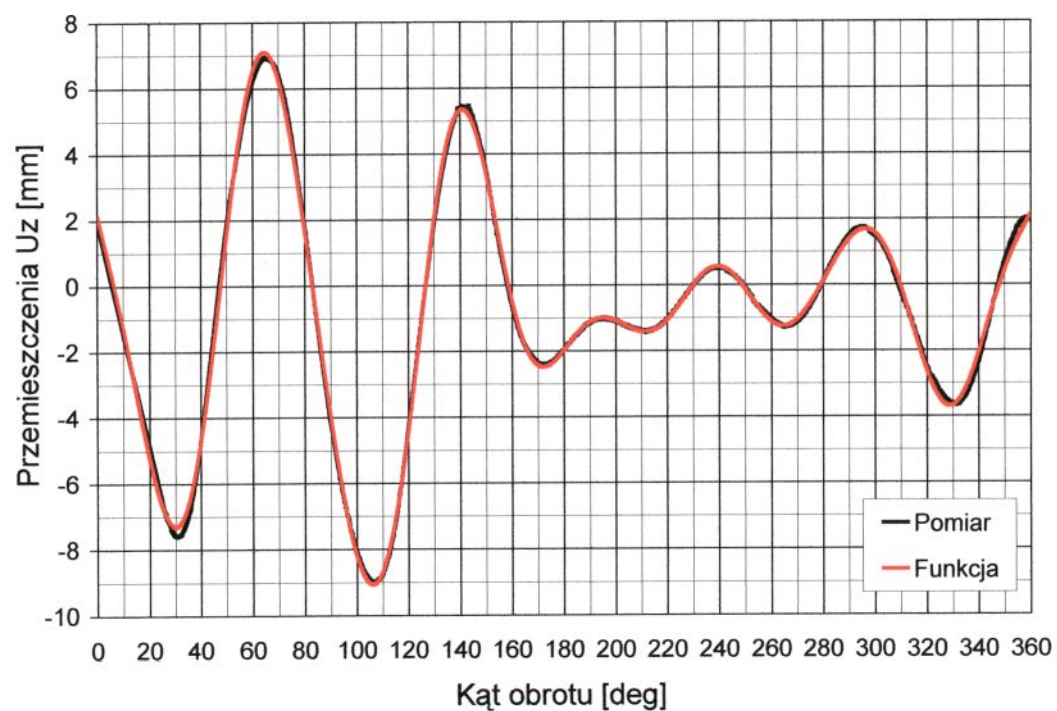
Rys. Z.2.1. Wykres funkcji aproksymującej dla czujnika B2 w położeniu I i II



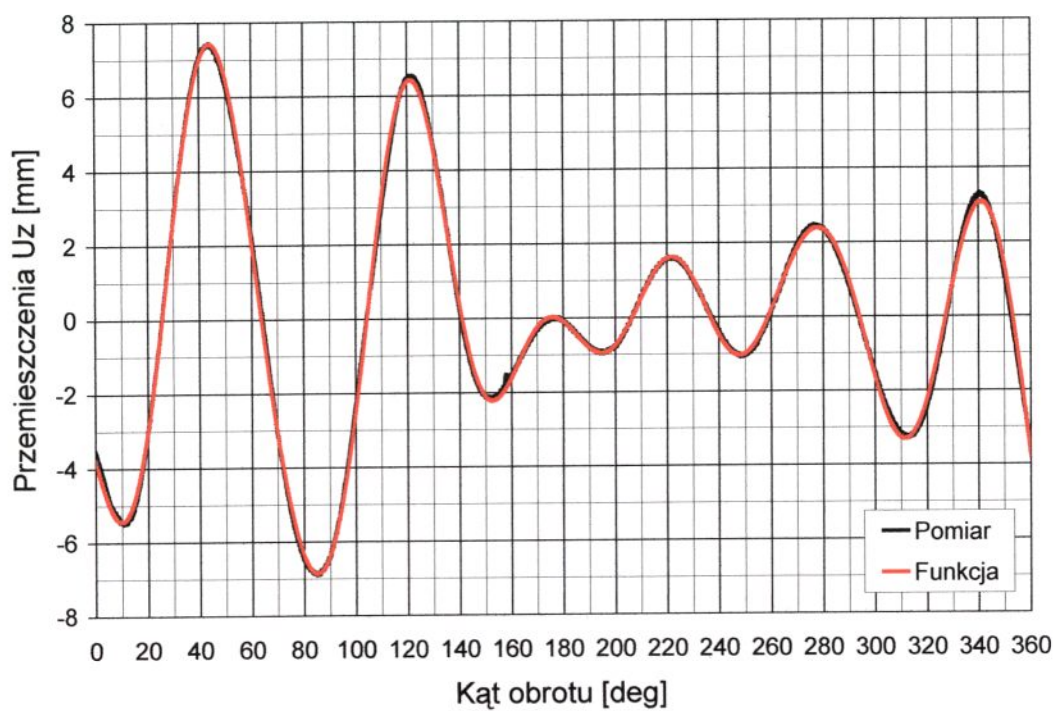
Rys. Z.2.2. Wykres funkcji aproksymującej dla czujnika G7 w położeniu II



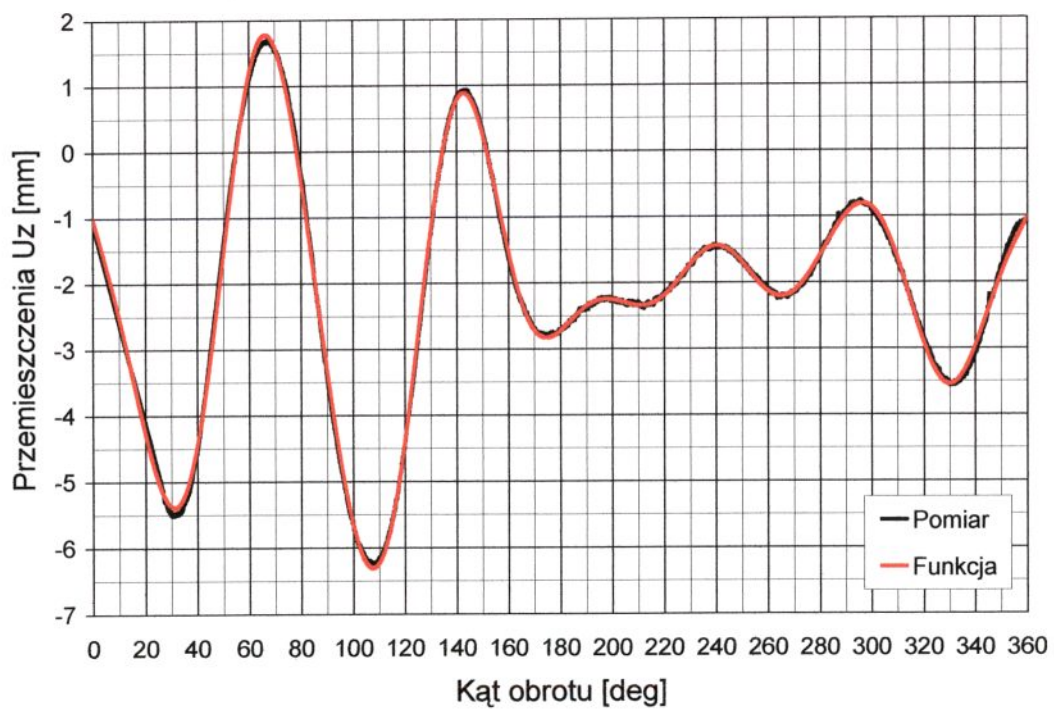
Rys. Z.2.3. Wykres funkcji aproksymującej dla czujnika C3 w położeniu I i II



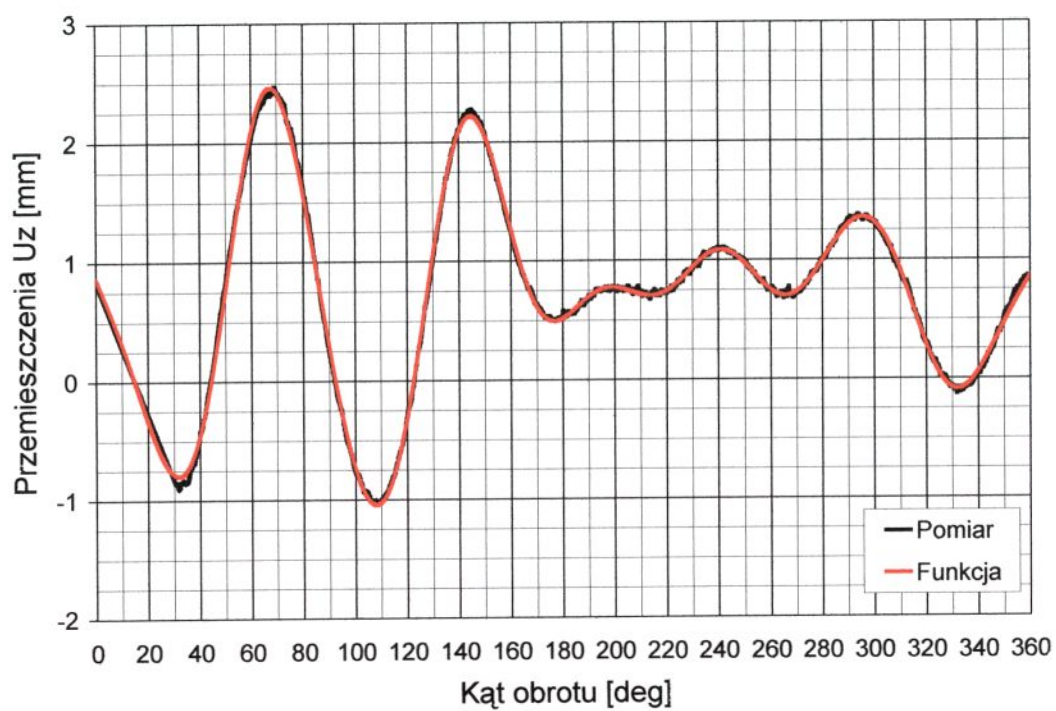
Rys. Z.2.4. Wykres funkcji aproksymującej dla czujnika D4 w położeniu I



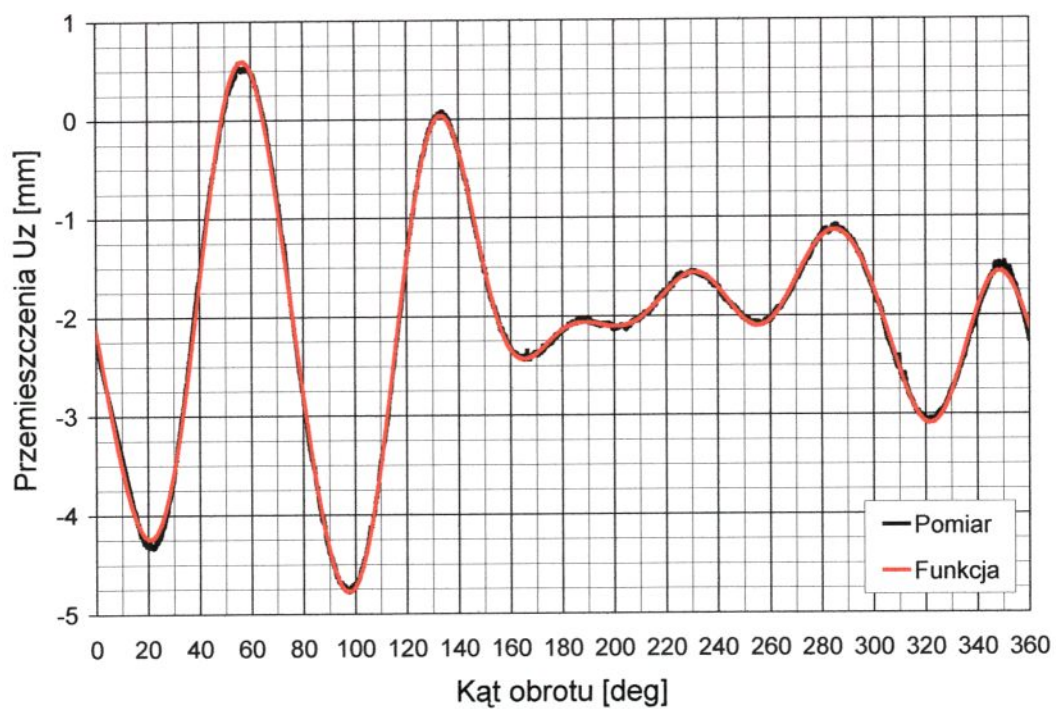
Rys. Z.2.5. Wykres funkcji aproksymującej dla czujnika D4 w położeniu II



Rys. Z.2.6. Wykres funkcji aproksymującej dla czujnika F6 w położeniu I



Rys. Z.2.7. Wykres funkcji aproksymującej dla czujnika G7 w położeniu I



Rys. Z.2.8. Wykres funkcji aproksymującej dla czujnika F6 w położeniu II

ZAŁĄCZNIK Z.3

Rozwinięcia w pojedynczy szereg trygonometryczny funkcji aproxymujących deformację membrany

Czujnik B2 w położeniu I i II

$$\begin{aligned}w(\varphi) = & 2,0625 - 0,2951 \sin\left(\frac{1 \pi \varphi}{360}\right) + 0,1200 \sin\left(\frac{2 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0571 \sin\left(\frac{3 \pi \varphi}{360}\right) + 0,1004 \sin\left(\frac{4 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 0,0596 \sin\left(\frac{5 \pi \varphi}{360}\right) + 0,6654 \sin\left(\frac{6 \pi \varphi}{360}\right) + 0,4736 \sin\left(\frac{7 \pi \varphi}{360}\right) - 0,1300 \sin\left(\frac{8 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 1,1796 \sin\left(\frac{9 \pi \varphi}{360}\right) - 1,6182 \sin\left(\frac{10 \pi \varphi}{360}\right) - 0,6051 \sin\left(\frac{11 \pi \varphi}{360}\right) - 0,7041 \sin\left(\frac{12 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,6426 \sin\left(\frac{13 \pi \varphi}{360}\right) - 0,2288 \sin\left(\frac{14 \pi \varphi}{360}\right) - 0,1933 \sin\left(\frac{15 \pi \varphi}{360}\right) - 0,1286 \sin\left(\frac{16 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,1954 \sin\left(\frac{17 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0281 \sin\left(\frac{18 \pi \varphi}{360}\right) + 0,1196 \sin\left(\frac{19 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0306 \sin\left(\frac{20 \pi \varphi}{360}\right)\end{aligned}$$

Czujnik G7 w położeniu II

$$\begin{aligned}w(\varphi) = & -0,5442 + 2,4745 \sin\left(\frac{1 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0846 \sin\left(\frac{2 \pi \varphi}{360}\right) + 0,9440 \sin\left(\frac{3 \pi \varphi}{360}\right) + 0,2865 \sin\left(\frac{4 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,6149 \sin\left(\frac{5 \pi \varphi}{360}\right) + 1,5532 \sin\left(\frac{6 \pi \varphi}{360}\right) + 1,0927 \sin\left(\frac{7 \pi \varphi}{360}\right) - 0,7678 \sin\left(\frac{8 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 2,6071 \sin\left(\frac{9 \pi \varphi}{360}\right) - 3,8809 \sin\left(\frac{10 \pi \varphi}{360}\right) - 1,1557 \sin\left(\frac{11 \pi \varphi}{360}\right) - 1,4974 \sin\left(\frac{12 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 1,4027 \sin\left(\frac{13 \pi \varphi}{360}\right) - 0,3659 \sin\left(\frac{14 \pi \varphi}{360}\right) - 0,3016 \sin\left(\frac{15 \pi \varphi}{360}\right) - 0,3362 \sin\left(\frac{16 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,4594 \sin\left(\frac{17 \pi \varphi}{360}\right) + 0,2879 \sin\left(\frac{18 \pi \varphi}{360}\right) + 0,3904 \sin\left(\frac{19 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0413 \sin\left(\frac{20 \pi \varphi}{360}\right)\end{aligned}$$

Czujnik C3 w położeniu I i II

$$\begin{aligned}w(\varphi) = & -5,3470 + 3,9249 \sin\left(\frac{1 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0671 \sin\left(\frac{2 \pi \varphi}{360}\right) + 1,2647 \sin\left(\frac{3 \pi \varphi}{360}\right) + 0,2579 \sin\left(\frac{4 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,8978 \sin\left(\frac{5 \pi \varphi}{360}\right) + 1,4816 \sin\left(\frac{6 \pi \varphi}{360}\right) + 1,8355 \sin\left(\frac{7 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0317 \sin\left(\frac{8 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 1,3475 \sin\left(\frac{9 \pi \varphi}{360}\right) - 3,6261 \sin\left(\frac{10 \pi \varphi}{360}\right) - 1,2155 \sin\left(\frac{11 \pi \varphi}{360}\right) - 2,0252 \sin\left(\frac{12 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,9694 \sin\left(\frac{13 \pi \varphi}{360}\right) - 0,1200 \sin\left(\frac{14 \pi \varphi}{360}\right) - 0,3788 \sin\left(\frac{15 \pi \varphi}{360}\right) - 0,5408 \sin\left(\frac{16 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,0250 \sin\left(\frac{17 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0112 \sin\left(\frac{18 \pi \varphi}{360}\right) + 0,1246 \sin\left(\frac{19 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0413 \sin\left(\frac{20 \pi \varphi}{360}\right)\end{aligned}$$

Czujnik D4 w położeniu I

$$\begin{aligned}w(\varphi) = & 2,1521 - 3,6795 \sin\left(\frac{1 \pi \varphi}{360}\right) - 0,3960 \sin\left(\frac{2 \pi \varphi}{360}\right) - 1,3167 \sin\left(\frac{3 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0824 \sin\left(\frac{4 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 0,6303 \sin\left(\frac{5 \pi \varphi}{360}\right) + 0,6961 \sin\left(\frac{6 \pi \varphi}{360}\right) - 1,8125 \sin\left(\frac{7 \pi \varphi}{360}\right) - 2,2987 \sin\left(\frac{8 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 3,6688 \sin\left(\frac{9 \pi \varphi}{360}\right) - 0,8397 \sin\left(\frac{10 \pi \varphi}{360}\right) + 0,4202 \sin\left(\frac{11 \pi \varphi}{360}\right) + 1,2879 \sin\left(\frac{12 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 1,0075 \sin\left(\frac{13 \pi \varphi}{360}\right) - 0,4390 \sin\left(\frac{14 \pi \varphi}{360}\right) + 0,2787 \sin\left(\frac{15 \pi \varphi}{360}\right) + 0,3439 \sin\left(\frac{16 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,4382 \sin\left(\frac{17 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0069 \sin\left(\frac{18 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0238 \sin\left(\frac{19 \pi \varphi}{360}\right) - 0,1231 \sin\left(\frac{20 \pi \varphi}{360}\right)\end{aligned}$$

Czujnik D4 w położeniu II

$$\begin{aligned}w(\varphi) = & -3,7869 + 5,0413 \sin\left(\frac{1 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0729 \sin\left(\frac{2 \pi \varphi}{360}\right) + 1,6951 \sin\left(\frac{3 \pi \varphi}{360}\right) + 0,2280 \sin\left(\frac{4 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 1,0588 \sin\left(\frac{5 \pi \varphi}{360}\right) + 1,1966 \sin\left(\frac{6 \pi \varphi}{360}\right) + 2,2420 \sin\left(\frac{7 \pi \varphi}{360}\right) + 0,5690 \sin\left(\frac{8 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 0,1086 \sin\left(\frac{9 \pi \varphi}{360}\right) - 2,8873 \sin\left(\frac{10 \pi \varphi}{360}\right) - 0,9495 \sin\left(\frac{11 \pi \varphi}{360}\right) - 2,0942 \sin\left(\frac{12 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,4732 \sin\left(\frac{13 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0688 \sin\left(\frac{14 \pi \varphi}{360}\right) - 0,3608 \sin\left(\frac{15 \pi \varphi}{360}\right) - 0,5290 \sin\left(\frac{16 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 0,1228 \sin\left(\frac{17 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0234 \sin\left(\frac{18 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0220 \sin\left(\frac{19 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0580 \sin\left(\frac{20 \pi \varphi}{360}\right)\end{aligned}$$

Czujnik F6 w położeniu I

$$\begin{aligned}w(\varphi) = & -1,0148 - 1,3446 \sin\left(\frac{1 \pi \varphi}{360}\right) - 0,2650 \sin\left(\frac{2 \pi \varphi}{360}\right) - 0,5315 \sin\left(\frac{3 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0240 \sin\left(\frac{4 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 0,2555 \sin\left(\frac{5 \pi \varphi}{360}\right) + 0,3100 \sin\left(\frac{6 \pi \varphi}{360}\right) - 1,0003 \sin\left(\frac{7 \pi \varphi}{360}\right) - 1,2082 \sin\left(\frac{8 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 1,7417 \sin\left(\frac{9 \pi \varphi}{360}\right) - 0,2074 \sin\left(\frac{10 \pi \varphi}{360}\right) + 0,3585 \sin\left(\frac{11 \pi \varphi}{360}\right) + 0,6887 \sin\left(\frac{12 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,4331 \sin\left(\frac{13 \pi \varphi}{360}\right) - 0,1944 \sin\left(\frac{14 \pi \varphi}{360}\right) + 0,1498 \sin\left(\frac{15 \pi \varphi}{360}\right) + 0,1569 \sin\left(\frac{16 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,1657 \sin\left(\frac{17 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0218 \sin\left(\frac{18 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0113 \sin\left(\frac{19 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0576 \sin\left(\frac{20 \pi \varphi}{360}\right)\end{aligned}$$

Czujnik G7 w położeniu I

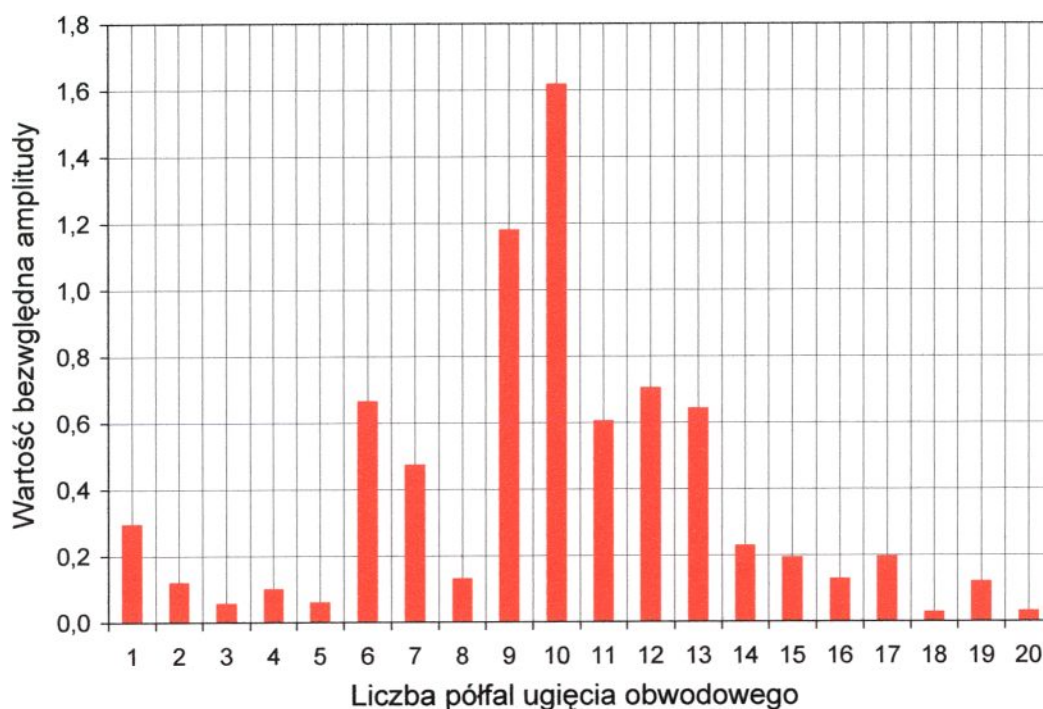
$$\begin{aligned}w(\varphi) = & 0,8667 - 0,0864 \sin\left(\frac{1 \pi \varphi}{360}\right) - 0,1139 \sin\left(\frac{2 \pi \varphi}{360}\right) - 0,1743 \sin\left(\frac{3 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0030 \sin\left(\frac{4 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 0,0816 \sin\left(\frac{5 \pi \varphi}{360}\right) + 0,1559 \sin\left(\frac{6 \pi \varphi}{360}\right) - 0,4680 \sin\left(\frac{7 \pi \varphi}{360}\right) - 0,5345 \sin\left(\frac{8 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 0,7626 \sin\left(\frac{9 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0175 \sin\left(\frac{10 \pi \varphi}{360}\right) + 0,1957 \sin\left(\frac{11 \pi \varphi}{360}\right) + 0,3154 \sin\left(\frac{12 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,1680 \sin\left(\frac{13 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0843 \sin\left(\frac{14 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0904 \sin\left(\frac{15 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0769 \sin\left(\frac{16 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,0404 \sin\left(\frac{17 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0266 \sin\left(\frac{18 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0168 \sin\left(\frac{19 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0240 \sin\left(\frac{20 \pi \varphi}{360}\right)\end{aligned}$$

Czujnik F6 w położeniu II

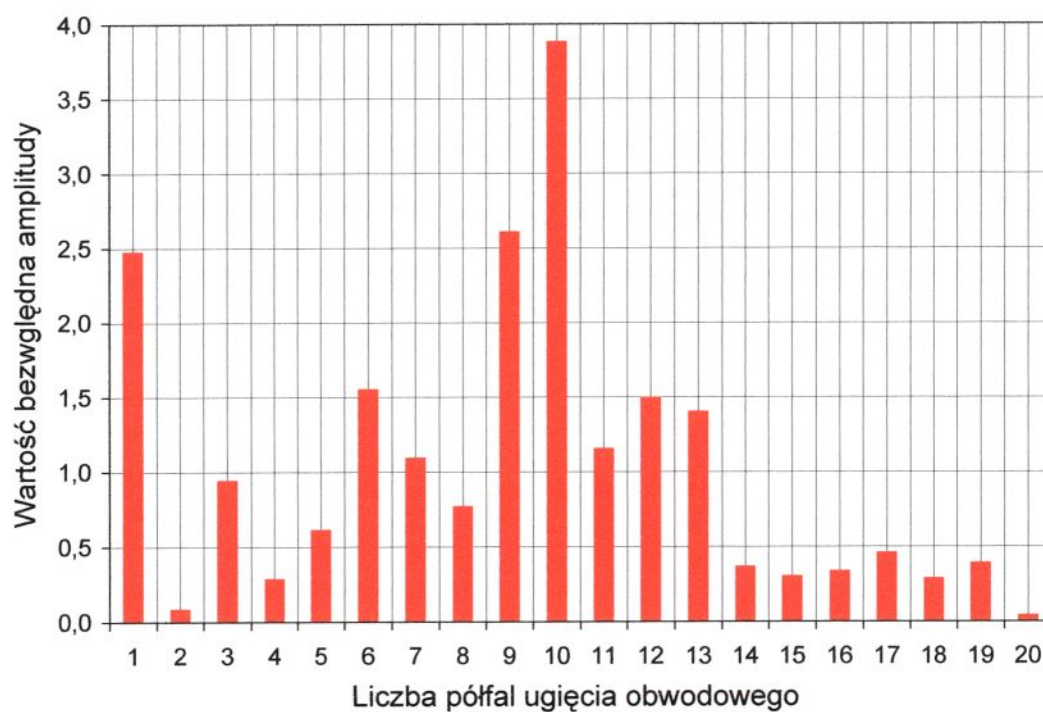
$$\begin{aligned}w(\varphi) = & -2,1310 + 0,2367 \sin\left(\frac{1 \pi \varphi}{360}\right) - 0,1206 \sin\left(\frac{2 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0307 \sin\left(\frac{3 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0776 \sin\left(\frac{4 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,0433 \sin\left(\frac{5 \pi \varphi}{360}\right) + 0,4426 \sin\left(\frac{6 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0759 \sin\left(\frac{7 \pi \varphi}{360}\right) - 0,4894 \sin\left(\frac{8 \pi \varphi}{360}\right) \\& - 1,0672 \sin\left(\frac{9 \pi \varphi}{360}\right) - 0,9344 \sin\left(\frac{10 \pi \varphi}{360}\right) - 0,1848 \sin\left(\frac{11 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0976 \sin\left(\frac{12 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,4040 \sin\left(\frac{13 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0916 \sin\left(\frac{14 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0295 \sin\left(\frac{15 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0244 \sin\left(\frac{16 \pi \varphi}{360}\right) \\& + 0,1137 \sin\left(\frac{17 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0365 \sin\left(\frac{18 \pi \varphi}{360}\right) + 0,0590 \sin\left(\frac{19 \pi \varphi}{360}\right) - 0,0121 \sin\left(\frac{20 \pi \varphi}{360}\right)\end{aligned}$$

ZAŁĄCZNIK Z.4

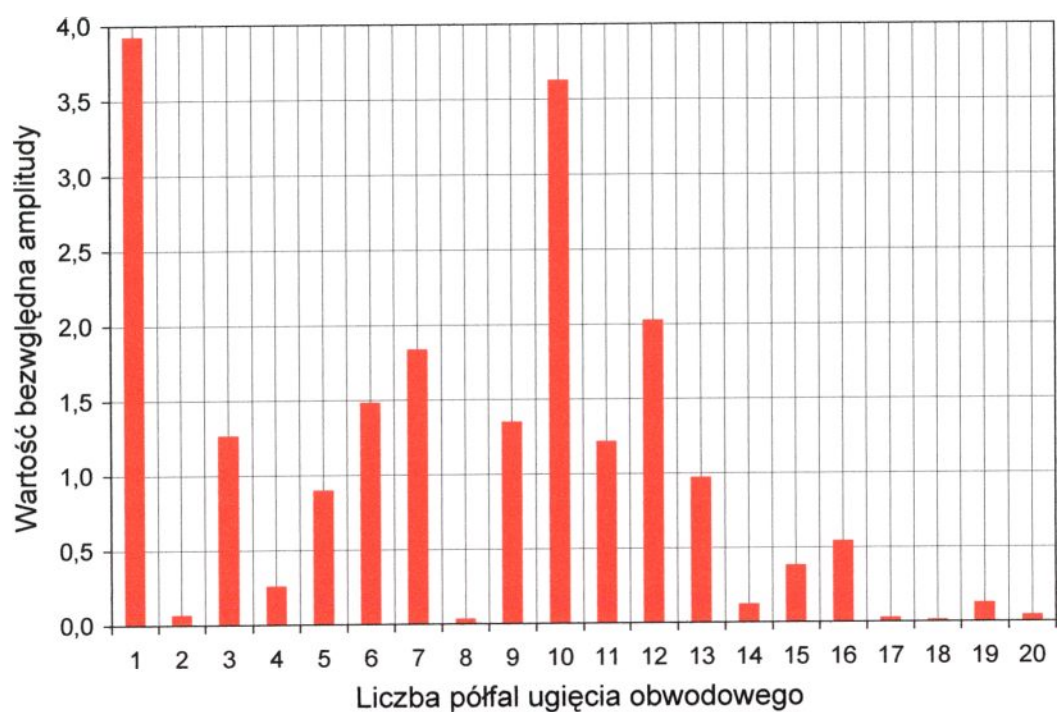
Graficzne uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej deformację membrany



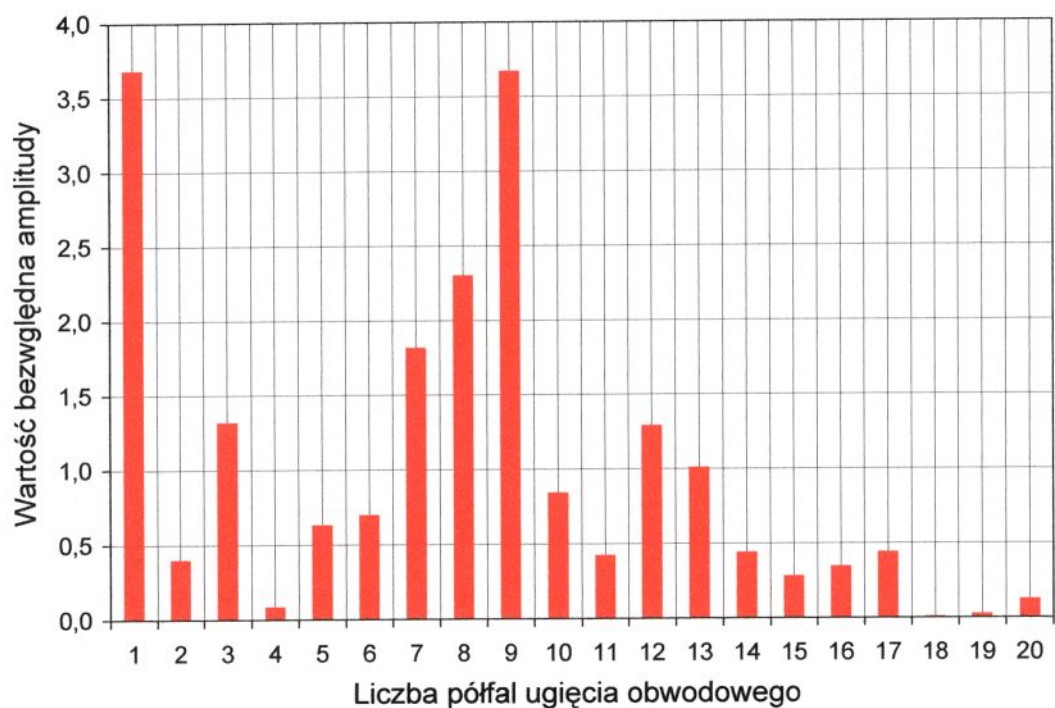
Rys. Z.4.1. Uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej dla czujnika B2 w położ. I i II



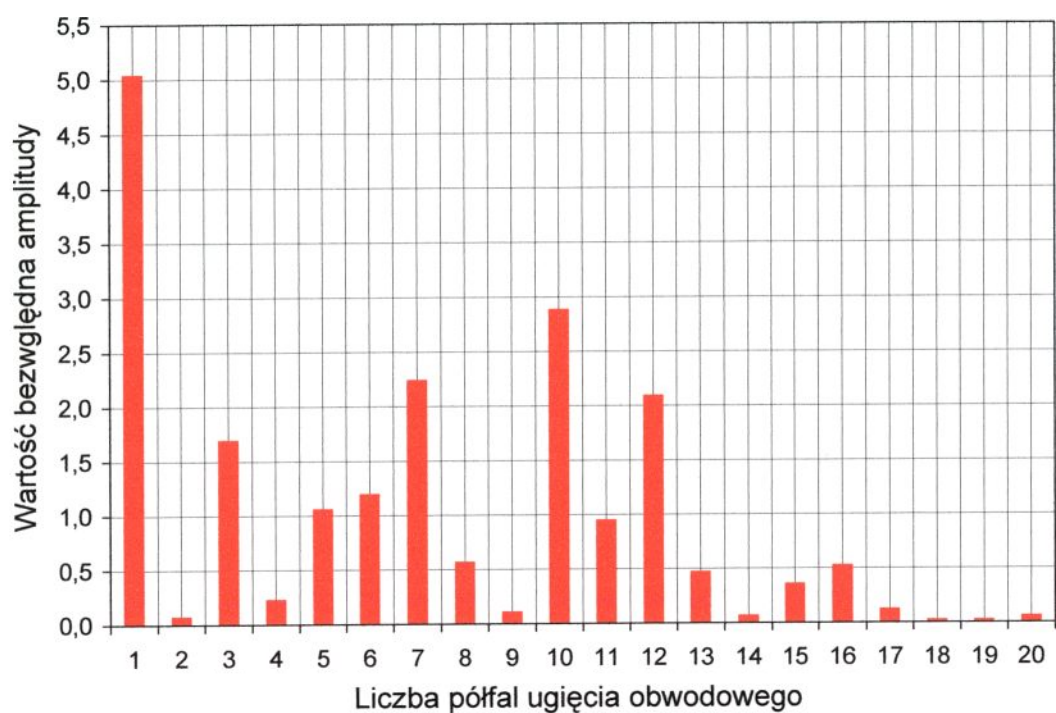
Rys. Z.4.2. Uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej dla czujnika G7 w położeniu II



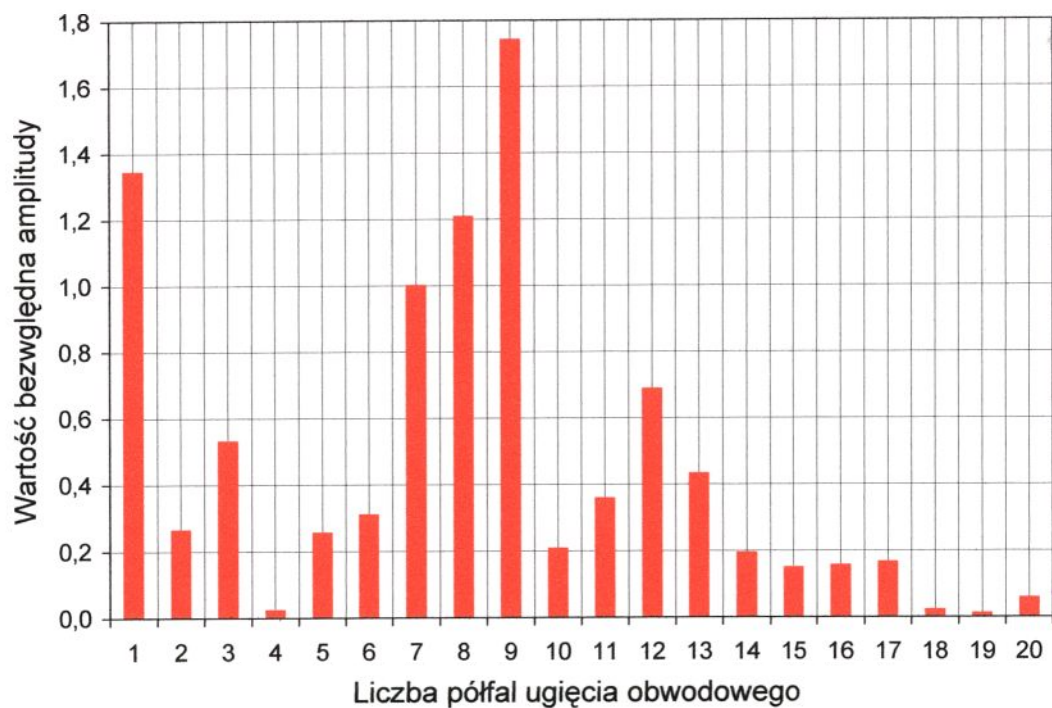
Rys. Z.4.3. Uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej dla czujnika C3 w położ. I i II



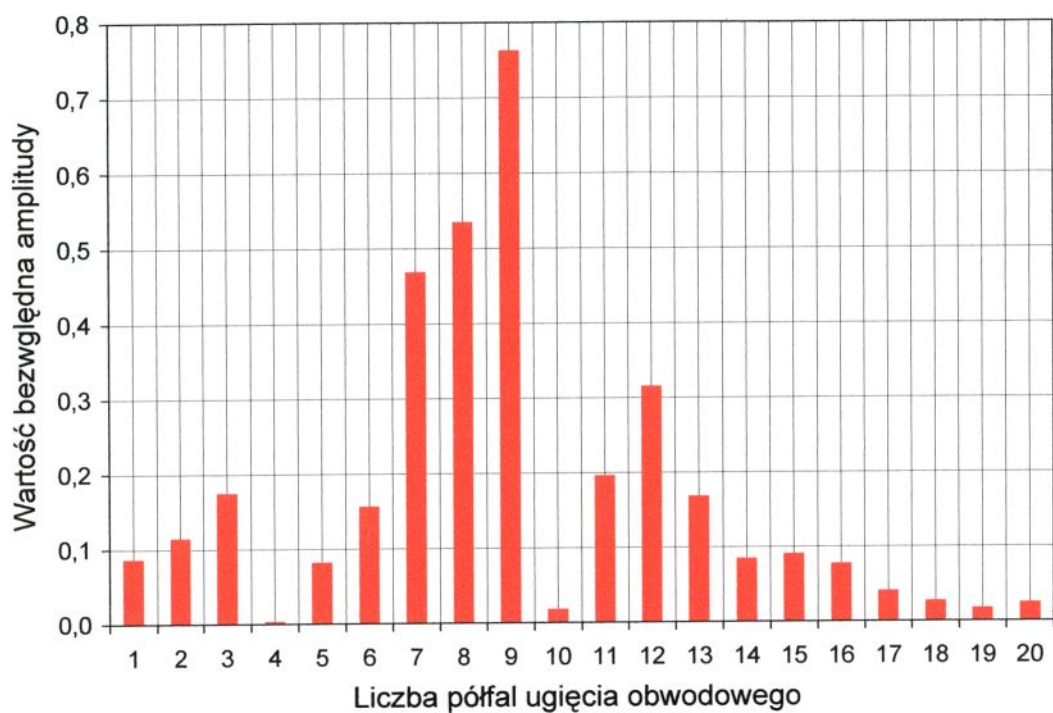
Rys. Z.4.4. Uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej dla czujnika D4 w położeniu I



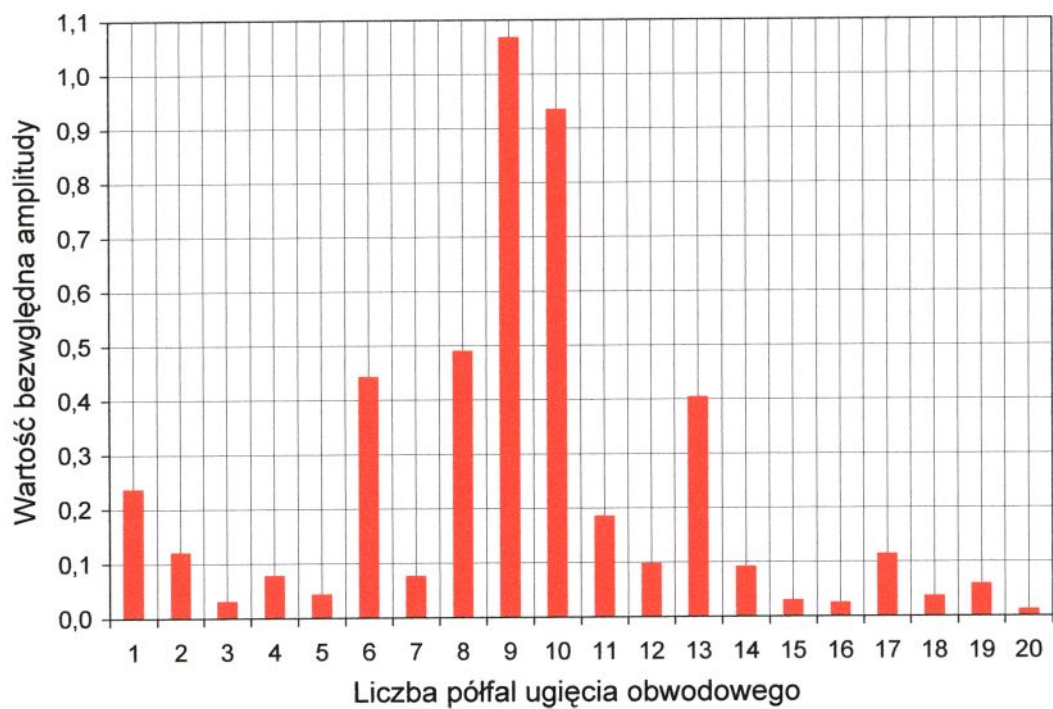
Rys. Z.4.5. Uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej dla czujnika D4 w położeniu II



Rys. Z.4.6. Uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej dla czujnika F6 w położeniu I



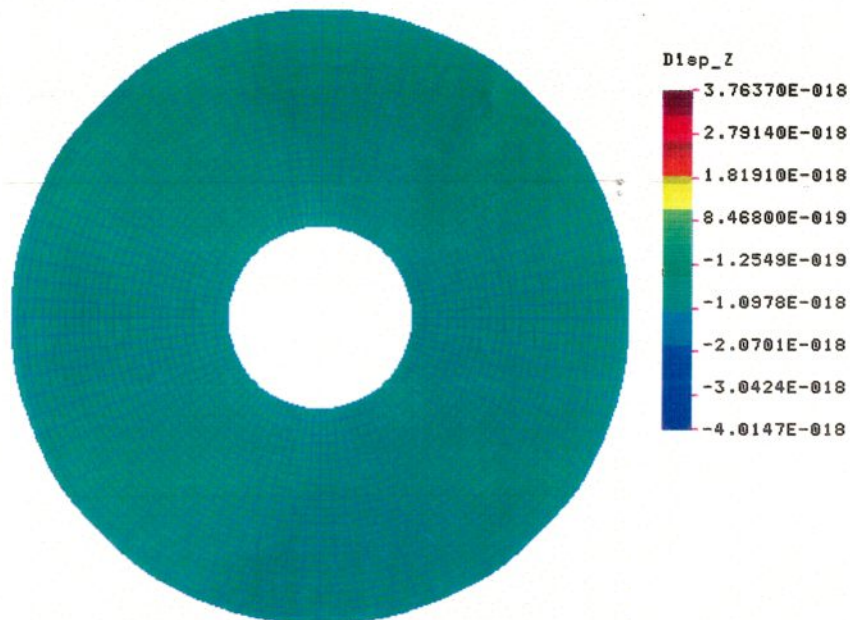
Rys. Z.4.7. Uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej dla czujnika G7 w położeniu I



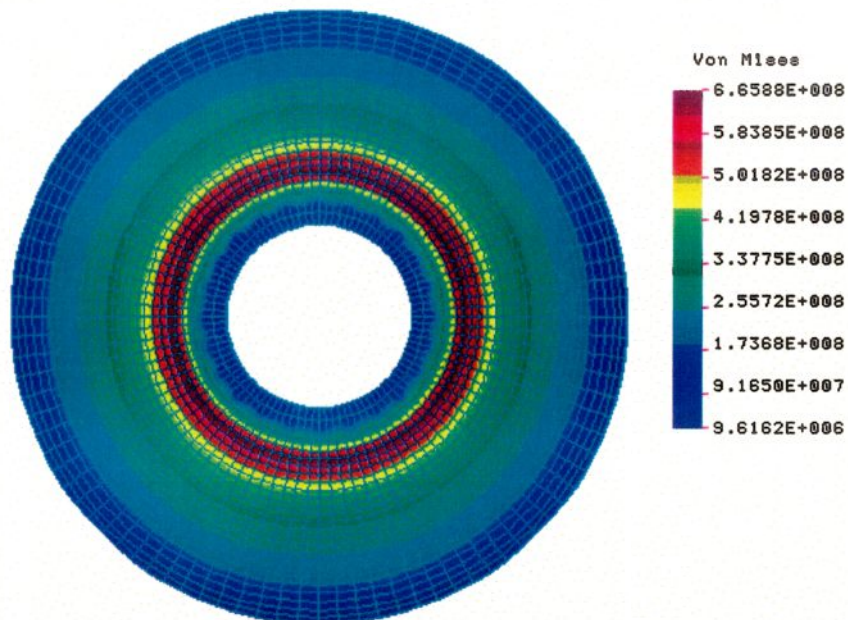
Rys. Z.4.8. Uporządkowanie wyrazów funkcji aproksymującej dla czujnika F6 w położeniu II

ZAŁĄCZNIK Z.5

Wyniki analizy numerycznej membrany o grubości 12 mm
obciążonej tylko momentem skręcającym



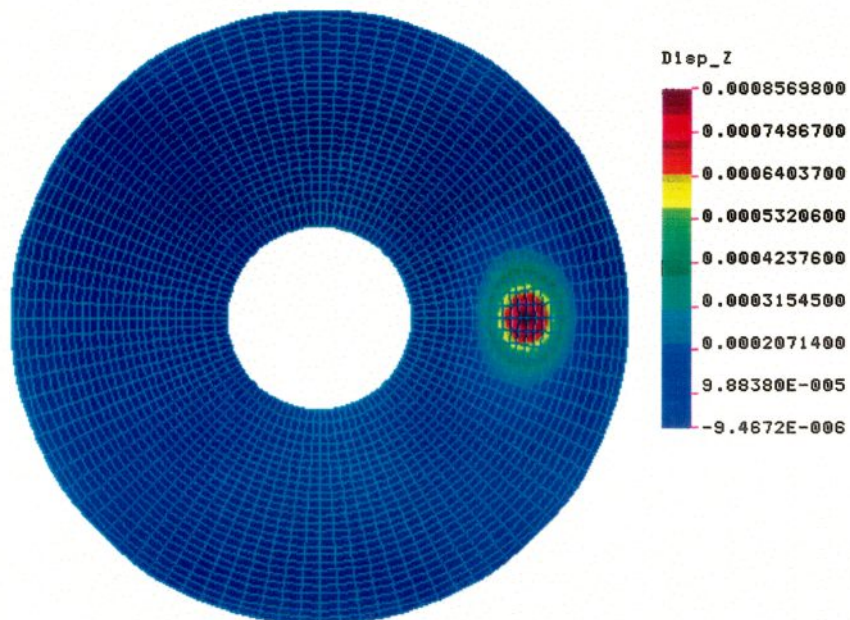
Rys. Z.5.1. Warstwice przemieszczeń U_z [m] dla momentu skręcającego $10 \cdot M_s$



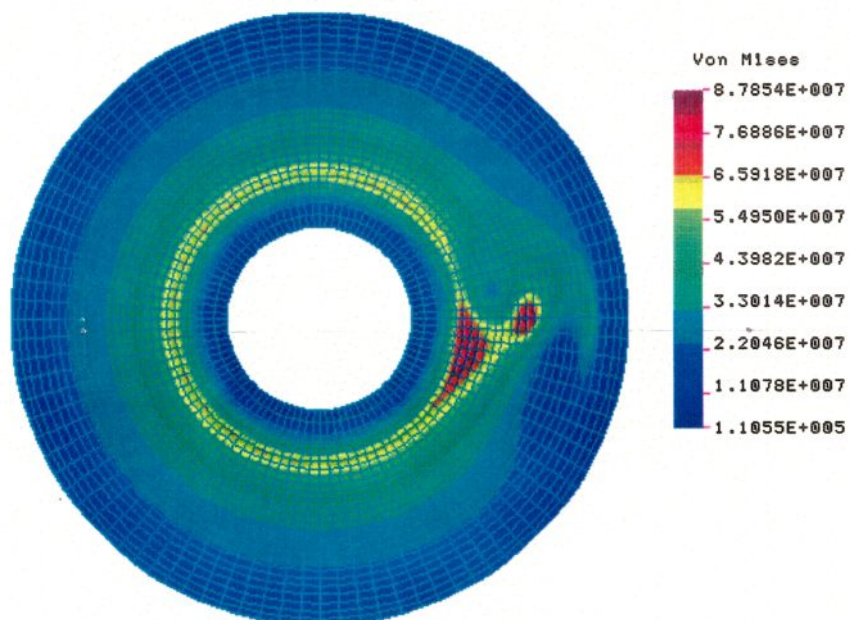
Rys. Z.5.2. Warstwice naprężeń zredukowanych [N] dla momentu skręcającego $10 \cdot M_s$

ZAŁĄCZNIK Z.6

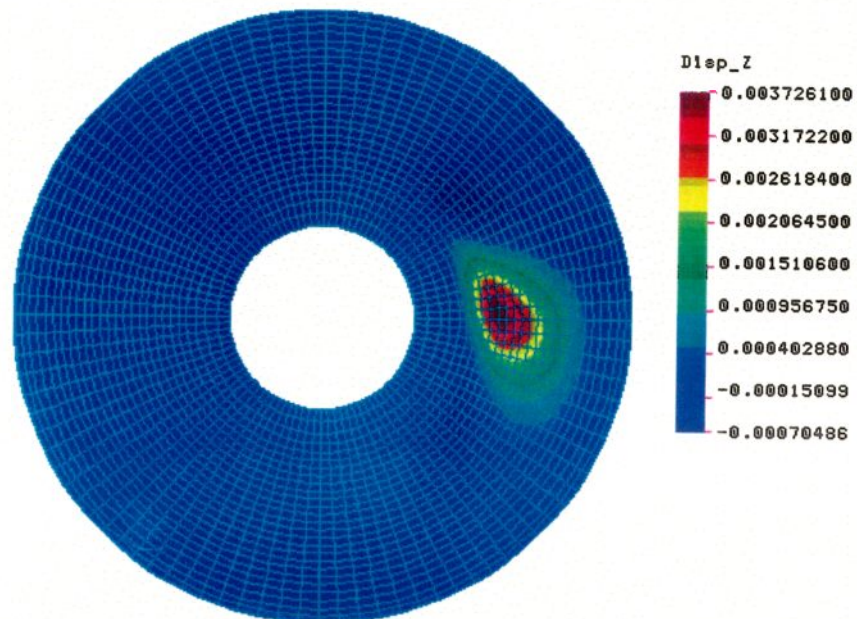
Wyniki analizy numerycznej membrany o grubości 12 mm
obciążonej momentem skręcającym oraz siłą wymuszającą



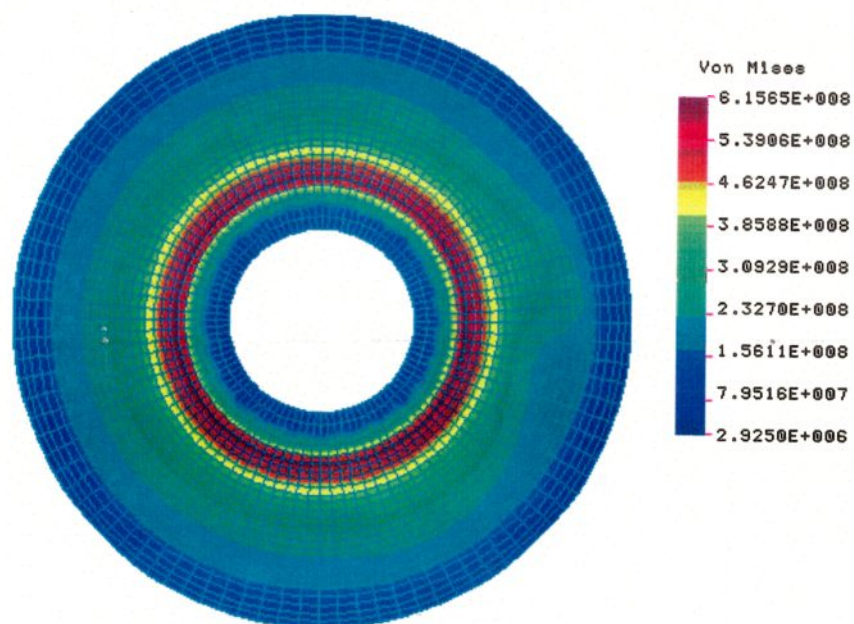
Rys. Z.6.1. Warstwice przemieszczeń U_z [m] dla momentu skręcającego $1 * Ms$
oraz siły wymuszającej $F = 10$ kN



Rys. Z.6.2. Warstwice naprężeń zredukowanych [N] dla momentu skręcającego $1 * Ms$
oraz siły wymuszającej $F = 10$ kN



Rys. Z.6.3. Warstwice przemieszczeń U_z [m] dla momentu skręcającego $9 \cdot M_s$ oraz siły wymuszającej $F = 10$ kN



Rys. Z.6.4. Warstwice naprężeń zredukowanych [N] dla momentu skręcającego $9 \cdot M_s$ oraz siły wymuszającej $F = 10$ kN