

Na prawach rękopisu
(do użytku służbowego)

Politechnika Wroclawska
Instytut Telekomunikacji i Akustyki

Raport Serii Preprinty

Nr I-28/04/P-002

**Modelowanie numeryczne pola
akustycznego wewnątrz i na zewnątrz
obszarów ograniczonych z uwzględnieniem
impedancyjnych warunków brzegowych**

Romuald Bolejko

Praca doktorska

Promotor: dr hab. inż. Andrzej Dobrucki

Słowa kluczowe:

metody FEM i BEM
efektywność modelowania
pole akustyczne

Wrocław, styczeń 2004

SPIS TREŚCI

1	<u>WSTĘP</u>	6
2	<u>EFEKTYWNOŚĆ METOD NUMERYCZNYCH FEM I BEM</u>	13
2.1	KOSZTY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH	14
2.1.1	METODA FEM	16
2.1.2	METODA BEM	17
2.1.3	PORÓWNANIE KOSZTÓW OBLICZEŃ I PAMIĘCI OBLICZENIOWEJ METOD FEM I BEM	21
2.1.3.1	Wyniki porównania metod DBEM i IBEM	32
2.1.3.2	Wyniki porównania metod FEM i BEM	33
2.1.4	PORÓWNANIE KOSZTÓW OBLICZEŃ METOD SPRZĘŻONYCH BEM/FEM I FEM/FEM	34
2.2	BŁĘDY OBLICZENIOWE METOD NUMERYCZNYCH	36
2.2.1	METODA DBEM	42
2.2.2	METODA IBEM	50
2.3	WNIOSKI	52
3	<u>MODELOWANIE POLA AKUSTYCZNEGO W KOMORACH Z UWZGLĘDNIENIEM IMPEDANCYJNYCH WARUNKÓW BRZEGOWYCH</u>	55
3.1	WYZNACZANIE CZĘSTOTLIWOŚCI REZONANSOWYCH I POLA CIŚNIENIA AKUSTYCZNEGO W KOMORACH METODĄ FEM	56
3.2	WYZNACZANIE POLA PRĘDKOŚCI AKUSTYCZNEJ W KOMORACH	58
3.3	WYBRANE PARAMETRY OKREŚLAJĄCE WŁAŚCIWOŚCI POLA AKUSTYCZNEGO W KOMORACH W STANIE USTALONYM W ZAKRESIE ŚREDNICH CZĘSTOTLIWOŚCI	66
3.4	WPLYW IMPEDANCYJNYCH WARUNKÓW BRZEGOWYCH NA POLE AKUSTYCZNE WEWNĄTRZ KOMORY	73
3.4.1	KOMORY 2D O KSZTAŁCIE PROSTOKĄTA	79
3.4.2	KOMORY 2D O KSZTAŁCIE RÓŻNYM OD PROSTOKĄTA	87
3.5	WNIOSKI	93
4	<u>MODELOWANIE POLA AKUSTYCZNEGO W OBSZARZE ZEWNĘTRZNYM Z UWZGLĘDNIENIEM IMPEDANCYJNYCH WARUNKÓW BRZEGOWYCH</u>	95
4.1	WYZNACZANIE POLA CIŚNIENIA AKUSTYCZNEGO METODAMI FEM I BEM Z WYKORZYSTANIEM ANALOGII E-M-A	96
4.1.1	WYZNACZANIE CIŚNIENIA AKUSTYCZNEGO POPRZECZ OBLICZENIEM IMPEDANCJI OBCIĄŻAJĄCEJ TYLNĄ STRONĘ ELEMENTU DRGAJĄCEGO	96
4.1.2	MODEL STRAT WYSTĘPUJĄCYCH W KOMORACH	105
4.2	MODELOWANIE POLA AKUSTYCZNEGO W OBSZARZE ZEWNĘTRZNYM KOMORY Z UWZGLĘDNIENIEM JEJ REZONANSÓW AKUSTYCZNYCH I STRUKTURALNYCH	115
4.2.1	SZACOWANIE BŁĘDÓW MODELOWANIA NUMERYCZNEGO Z WYKORZYSTANIEM MODELI OPARTYCH NA ANALOGII E-M-A	115

4.2.2	WPLYW POLA AKUSTYCZNEGO WEWNĄTRZ OBUDOWY NA CHARAKTERYSTYKĘ PROMIENIOWANIA ZESTAWU GŁOŚNIKOWEGO	120
4.3	WNIOSKI	132
5	PODSUMOWANIE	134
LITERATURA		138
<u>DODATEK A. PORÓWNANIE KOSZTÓW OBLICZENIOWYCH METOD NUMERYCZNYCH DBEM I IBEM DLA OPROGRAMOWANIA SYSNOISE V.5.2</u>		142
<u>DODATEK B. WYZNACZANIE IMPEDANCJI OBCIĄŻAJACEJ TYLNA STRONĘ TŁOKA SZTYWNEGO O DOWOLNYM KSZTAŁCIE Z WYKORZYSTANIEM TRÓJKĄTNYCH ELEMENTÓW DYSKRETNÝCH</u>		145
<u>DODATEK C. PARAMETRY CZYNNE JEDNORODNEJ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ</u>		148

Spis głównych oznaczeń

- α - współczynnik pochłaniania dźwięku,
 δ - dekrement tłumienia,
 ε - błąd obliczeniowy metody numerycznej,
 ε_A - błąd aproksymacji zmiennych,
 ε_I - błąd interpolacji zmiennych,
 ε_Q - błąd kwadratury,
 ϕ - funkcja lub wektor własny analizowanego układu,
 η - współczynnik tłumienia wewnętrznego,
 λ - długość fali akustycznej w rozważanym ośrodku [m],
 μ - dwuwarstwowy potencjał akustyczny,
 ν - współczynnik Poissona,
 $\mathcal{D}$ - prędkość akustyczna [m/s],
 ρ_0 - gęstość ośrodka [kg/m³],
 ρ_p - gęstość materiału płyty jednorodnej [kg/m³],
 σ - odchylenie średniokwadratowe od wartości średniej kwadratu ciśnienia lub prędkości akustycznej (odchylenie standardowe),
 ω - częstość kołowa [rad/s],
 ω_i - zespolona pulsacja rezonansowa drgań własnych układu z tłumieniem dla rezonansu i [rad/s],
 ω_r - pulsacja rezonansowa drgań wymuszonych [rad/s],
 ξ - intensywność tłumienia wewnętrznego,
 $\mathcal{N}(r)$ - funkcja kształtu,
 $\mathcal{I}(x)$ - funkcja podcałkowa w równaniu określającym wyrazy macierzy głównej w metodzie BEM,
 $\Psi(x, \omega)$ - potencjał prędkości akustycznej,
 A - macierz główna układu równań w metodzie FEM i BEM,
BEM - metoda elementów brzegowych,
$$B = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$$
 - sztywność na zginanie płyty jednorodnej [Nm],
 b_w - średnia wartość połówkowej szerokości pasma macierzy głównej w metodzie FEM,
 C - macierz strat w metodzie FEM,
 c - prędkość fali akustycznej w ośrodku [m/s],
 C' - macierz strat w metodzie FEM we współrzędnych modalnych,
 C_c - mechaniczna podatność czynna [s²/kg],
 c_f - prędkość fali giętej w jednorodnej płycie [m/s],
 d - grubość jednorodnej płyty [m],
DBEM - kolokacyjno-wariacyjna metoda elementów brzegowych,
 E - moduł Younga [N/m²],
 e_j - element j siatki dyskretnej,
E-M-A - analogia elektro-mechano-akustyczna,
 f - częstotliwość [Hz],
 F - siła mechaniczna działająca na analizowany układ [N],
FEM - metoda elementów skończonych,
 $G(r_1, r_2)$ - funkcja Greena,

h – długość elementu dyskretnego [m],
 $H_0^{(2)}(r)$ – funkcja Hankela zerowego rzędu drugiego rodzaju,
 IBEM – wariacyjna metoda elementów brzegowych,
 K – całkowite koszty obliczeniowe metody numerycznej [*flops*],
 $\underline{k}$ – zespolona liczba falowa,
 k – liczba falowa,
 $\mathbf{K}$ – macierz sztywności w metodzie FEM,
 $\mathbf{K}'$ – macierz sztywności w metodzie FEM we współrzędnych modalnych,
 K_F – koszty obliczeniowe faktoryzacji macierzy głównej podczas rozwiązywania układu równań w metodach FEM i BEM [*flops*],
 K_K – koszty obliczeniowe kompozycji macierzy głównej w metodzie BEM [*flops*],
 K_S – koszty obliczeniowe eliminacji wprost/wstecz podczas rozwiązywania układu równań w metodach FEM i BEM [*flops*],
 $\mathbf{M}$ – macierz masy w metodzie FEM,
 m – stopień wielomianowej funkcji kształtu,
 $\mathbf{M}'$ – macierz masy w metodzie FEM we współrzędnych modalnych,
 M_c – masa czynna [kg],
 $M^{(DBEM)}$ – pamięć obliczeniowa wybranej metody (DBEM),
 M_s – masa powierzchniowa płyty [kg/m²],
 N – liczba stopni swobody modelu dyskretnego,
 N_e – liczba elementów modelu dyskretnego,
 n_G – liczba węzłów kwadratury Gaussa,
 N_w – liczba węzłów modelu dyskretnego,
 p – ciśnienie akustyczne [Pa],
 P_{m+1} – wielomian pomocniczy stosowany przy określeniu błędów interpolacji,
 P_{nG} – wielomian pomocniczy stosowany przy określeniu reszty kwadratury Gaussa,
 Q – rząd kwadratury,
 R – ciśnieniowy współczynnik odbicia fali akustycznej,
 R_m – rezystancja mechaniczna [kg/s],
 u – przemieszczenie [m],
 w_j – węzeł j siatki dyskretnej,
 $\mathcal{Z}$ – jednostkowa impedancja akustyczna [kg/m²/s],
 Z – jednostkowa impedancja akustyczna odniesiona do $\rho_0 c$,
 Z_f – akustyczna impedancja falowa wlotu komory przeniesiona do części mechanicznej [kg/s],
 $Z_m = R_m + j\omega M_m + 1/j\omega C_m$ – impedancja mechaniczna elementu elastycznego [kg/s],
 Z_p – akustyczna impedancja promieniowania elementu drgającego przeniesiona do części mechanicznej [kg/s],
 Z_w – impedancja mechaniczna obciążająca tylną stronę elementu drgającego [kg/s].

1 Wstęp

Modelowanie pola akustycznego w obszarach ograniczonych i nieograniczonych jest ważnym zagadnieniem w wielu dziedzinach akustyki. Podczas analizy i projektowania układów akustycznych modelowanie takie ma znaczenie zarówno poznawcze, jak i praktyczne.

Właściwości pola akustycznego wewnątrz lub na zewnątrz modelowanego obszaru zależą od jego geometrii i warunków brzegowych. W akustyce można wyróżnić trzy rodzaje warunków brzegowych dla równania Helmholtza: warunek brzegowy Dirichleta określający ciśnienie akustyczne, warunek brzegowy Neumanna opisujący prędkość akustyczną i warunek brzegowy Robina określający związek pomiędzy ciśnieniem a prędkością akustyczną na brzegu modelowanego obszaru. Impedancyjne warunki brzegowe zalicza się do warunków brzegowych Robina. Kształtując geometrię analizowanego układu akustycznego oraz impedancyjne warunki brzegowe możliwa jest zmiana jego parametrów akustycznych. Przeprowadzenie więc oceny jakościowej i ilościowej oddziaływania impedancyjnych warunków brzegowych na właściwości pola akustycznego jest ważnym zagadnieniem dla poprawy jakości układów akustycznych oraz ich optymalizacji.

Podczas modelowania pola akustycznego w obszarach ograniczonych i nieograniczonych stosuje się metody analityczne, statystyczne, geometryczne i metody numeryczne. Metody analityczne (falowe) polegają na rozwiązaniu równań różniczkowych opisujących pole akustycznego z uwzględnieniem zadanych warunków brzegowych. W praktyce ze względu na stopień skomplikowania zagadnienia rozwiązanie analityczne istnieje tylko dla szczegółowych, prostych przypadków. Brak jest rozwiązań analitycznych dla obszarów o geometrii różnej od kształtu prostopadłościanu, walca lub kuli oraz dla niejednorodnych warunków brzegowych i warunków brzegowych natury mechanicznej. W metodach statystycznych pole akustyczne jest opisywane z zastosowaniem prostych zależności statystycznych. Teoria statystyczna pola akustycznego opracowana przez Sabine'a na początku 20 wieku jest powszechnie używana w akustyce wnętrza [76,96]. W metodach geometrycznych fale dźwiękowe są interpretowane jako promiennie dźwiękowe, zaś analiza pola akustycznego odbywa się z wykorzystaniem metod stosowanych w optyce geometrycznej. Metody geometryczne są używane w akustyce wnętrza i w analizie hałasu środowiskowego [76]. Metody statystyczne i geometryczne umożliwiają

modelowanie pola akustycznego w obszarach o dowolnej geometrii. Metody te nie uwzględniają zjawisk falowych zachodzących w analizowanych obszarach. Pole akustyczne w obszarach o dowolnej geometrii i dla dowolnych warunków brzegowych z uwzględnieniem zjawisk falowych można natomiast modelować metodami numerycznymi. Wśród metod numerycznych stosowanych do analizy pola akustycznego można wyróżnić pięć podstawowych metod: metodę falowodu cyfrowego, metodę perturbacyjną, metodę różnic skończonych, metodę elementów skończonych i metodę elementów brzegowych.

W metodzie falowodu cyfrowego modelowany układ jest przybliżany falowodem fizycznym, który jest przedstawiany za pomocą modelu zbudowanego z cyfrowych filtrów i linii opóźniających. Działanie modelu jest następnie symulowano metodami cyfrowego przetwarzania sygnałów. Metoda falowodu cyfrowego najczęściej jest stosowana do analizy fizycznej instrumentów muzycznych [28,83], natomiast rzadziej do analizy pola akustycznego [61,79]. Dokładność modelowania pola akustycznego tą metodą jest mniejsza niż metodami FEM i BEM. W metodzie falowodu cyfrowego występują trudności z modelowaniem komór o skomplikowanych kształtach i komór z impedancyjnymi warunkami brzegowymi. Zaletą metody jest możliwość przeprowadzenia obliczeń w czasie rzeczywistym, co czyni ją szczególnie przydatną do syntezy dźwięków instrumentów muzycznych.

Metoda perturbacyjna polega na opisie analizowanego układu za pomocą zmodyfikowanego o pewien mały parametr (lub kilka małych parametrów) znanego rozwiązania dla układu podobnego [39,90]. W analizie pola akustycznego w komorach o geometrii nieznacznie różniącej się od prostopadłościanu potencjał prędkości jest przedstawiany jako ważona suma funkcji własnych dla komory prostopadłościennej o sztywnych ściankach. Waga przypisana do poszczególnych funkcji własnych uwzględnia zniekształcenia geometrii komory i impedancyjne warunki brzegowe. Przykłady zastosowania metody perturbacyjnej do analizy pola akustycznego wewnątrz obszarów ograniczonych można znaleźć w pracach [5,26,86]. Metoda perturbacyjna jest niestety mało uniwersalna, umożliwia analizę tylko niewielkich zmian w geometrii i impedancyjnych warunków brzegowych względem komory o znanym rozwiązaniu.

W metodzie różnic skończonych rozwiązanie dokładne jest przybliżane w wybranych punktach modelowanego obszaru poprzez zamianę pochodnej funkcji niewiadomych po współrzędnych geometrycznych ilorazami różnicowymi [54]. W ten sposób model matematyczny pola akustycznego jest wyrażany przez układ równań

algebraicznych. W akustyce metoda różnic skończonych jest najczęściej stosowana do modelowania przetworników elektroakustycznych [34], pola akustycznego w stanie ustalonym i nieustalonym [61,80]. Metoda różnic skończonych jest mało elastyczna ze względu na brak możliwości definiowania niejednorodnych siatek różnic skończonych. W metodzie tej błędy aproksymacji kształtu analizowanego obszaru mogą mieć duży wpływ na dokładność modelowania, która jest na ogół mniejsza niż metod FEM i BEM.

W metodzie elementów skończonych modelowany obszar ciągły jest zastępowany zbiorem elementów dyskretnych, natomiast szukana funkcja na poszczególnych elementach jest przybliżana wielomianami ustalonego stopnia. W metodzie tej analizowany układ, podobnie jak w metodzie różnic skończonych, jest przedstawiany w postaci układu równań algebraicznych. Szczegółowy opis metody można znaleźć m.in. w pracach [2,49,71,85,95]. W akustyce metoda FEM była wykorzystywana do analizy przetworników elektroakustycznych [4,8,10,30,31,58,60,65], konwerterów drgań [44], instrumentów muzycznych [36,50], pola akustycznego w obszarze ograniczonym [4,55,57,59,61,73,77,81]. W literaturze [4,55,57,59,61,73,77,81] metoda FEM była stosowana głównie do wyznaczania częstotliwości rezonansowych komory i do zobrazowania pola akustycznego, natomiast brak jest prac zawierających ilościową analizę oddziaływania warunków brzegowych na właściwości pola akustycznego wewnątrz komory. Metoda FEM w postaci klasycznej rzadko jest stosowana do modelowania pola akustycznego w obszarach nieograniczonych, ponieważ wymaga to stosowanie bardzo dużych siatek elementów skończonych. Istnieje jednak odmiana metody FEM [11,36] umożliwiająca modelowanie pola bez konieczności dyskretyzacji całego modelowanego obszaru. W metodzie tej są stosowane tzw. elementy nieskończone. Metoda FEM w postaci klasycznej może być również stosowana do modelowania pola akustycznego w obszarach nieograniczonych dla wybranych zagadnień wibroakustycznych poprzez wprowadzenie uproszczonych zależności uzyskanych z wykorzystaniem analogii elektro-mechano-akustycznej (E-M-A) [77].

W metodzie elementów brzegowych brzeg modelowanego obszaru zastępuje się zbiorem elementów dyskretnych na których szukaną funkcję przybliża się wielomianami określonego stopnia. Parametry pola akustycznego w dowolnym punkcie modelowanego obszaru oblicza się na podstawie parametrów określonych na jego brzegu wykorzystując równanie całkowe Helmholtza w postaci dyskretnej. W ten sposób układ równań różniczkowych zastępuje się układem równań algebraicznych. Istnieje kilka wersji metody BEM, z których najważniejszymi są metoda wariacyjno-

kolokacyjna DBEM i metoda wariacyjna IBEM. Formalny opis metod jest podany m.in. w pracach [36,71]. Metoda elementów brzegowych jest wykorzystywana do modelowania pola akustycznego w obszarach ograniczonych i nieograniczonych [4,17,21,36,42,47,62,70]. W przypadku metody DBEM w postaci klasycznej nie jest możliwe jednocześnie modelowanie pola akustycznego wewnątrz i na zewnątrz obszaru ograniczonego. Wpływ pola akustycznego wewnątrz komory na pole akustyczne na zewnątrz oblicza się dwuetapowo lub stosując pewne uproszczone zależności otrzymane na przykład z wykorzystaniem analogii E-M-A. Metoda IBEM natomiast umożliwia jednocześnie modelowanie pola akustycznego wewnątrz i na zewnątrz obszaru ograniczonego. W metodzie elementów brzegowych model dyskretny jest o jeden wymiar mniejszy niż w metodzie elementów skończonych.

Do analizy zagadnień wibroakustycznych z uwzględnieniem warunków brzegowych natury mechanicznej są stosowane tzw. metody sprzężone: BEM/FEM i FEM/FEM. W metodzie sprzężonej jedna z metod służy do modelowania pola akustycznego, natomiast metoda druga do modelowania struktury elastycznej. W metodzie sprzężonej BEM/FEM na ogół metoda BEM jest wykorzystywana do modelowania pola akustycznego, natomiast metoda FEM do modelowania struktury elastycznej.

Do modelowania pola akustycznego w obszarach ograniczonych i nieograniczonych o dowolnej geometrii i z dowolnymi warunkami brzegowymi w pracy wykorzystano metodę elementów skończonych i metodę elementów brzegowych. Każda z tych metod charakteryzuje się określoną efektywnością modelowania, która dla różnych zagadnień wibroakustycznych może znacznie się różnić. Niezmiernie ważnym zadaniem jest więc porównanie poszczególnych metod oraz określenie prostych reguł wyboru najefektywniejszej metody. Porównanie efektywności modelowania, a dokładniej tylko kosztów obliczeniowych, metod FEM i BEM wykonano w pracach [12,46]. W pracach tych jednak nie uwzględniono różnic występujących pomiędzy metodami DBEM i IBEM oraz kosztów obliczeniowych związanych z kompozycją układu równań algebraicznych. Okazuje się, że koszty te znacznie wpływają na całkowite koszty obliczeń metod BEM. Przy porównaniu efektywności metod FEM i BEM istotnym zagadnieniem jest analiza ich błędów obliczeniowych. Analizie błędów obliczeniowych metod FEM i BEM poświęcono m.in. prace [7,21-23,41,46,52,56,84,85,88,95]. Błędy obliczeniowe zależą od rodzaju metody [46,84,85], gęstości siatki elementów dyskretnych [3,10,46,56,69,84], sposobu rozmieszczenia węzłów na elementach dyskretnych [21-23], rzędu zastosowanych wielomianów interpolacyjnych

[43,52,84,85], rzędu kwadratur [7]. W artykule [7] określono wpływ błędów kwadratur w metodzie DBEM na wypadkowe błędy obliczeniowe. W pracy tej nie uwzględniono jednak związku pomiędzy wartością błędów kwadratur a odległością pomiędzy elementem dyskretnym i węzłem dla którego są wyznaczane współczynniki metody.

Błędy obliczeniowe metod FEM i BEM można zmniejszyć poprzez zwiększenie gęstości siatki elementów dyskretnych - wersja **h**, zwiększenie rzędu wielomianów interpolacyjnych – wersja **p**, poprzez przesunięcie węzłów wewnątrz elementów – wersja **r** lub stosując kombinacje wymienionych metod. W niniejszej rozprawie analizę ograniczono do wersji **h**.

Efektywność metod FEM i BEM można również znacznie zwiększyć stosując wybrane zależności uzyskane na podstawie analizy modelowanego układu metodą analogii E-M-A.

Przy modelowaniu zjawisk wibroakustycznych metodami numerycznymi oraz optymalizacji modeli dyskretnych ważnym zagadnieniem jest szacowanie błędów obliczeniowych. Błędy te można oszacować na podstawie porównania rozwiązania uzyskanego metodami numerycznymi z rozwiązaniem dokładnym lub z wynikami pomiarów analizowanego układu. Rozwiązanie dokładne niestety na ogół nie istnieje, natomiast pomiary są kosztowne i nie zawsze są realizowalne. Stosuje się zatem pewne modele uproszczone, uzyskane na przykład z zastosowaniem analogii E-M-A, które umożliwiają wyznaczenie wybranych parametrów modelowanego układu. W takim przypadku należy określić błędy obliczenia analizowanych parametrów z wykorzystaniem modeli uproszczonych oraz ich związek z błędami obliczenia pozostałych parametrów rozważanego układu akustycznego.

Pomimo istnienia stosunkowo dużej liczby prac poświęconych analizie błędów modelowania metodami FEM i BEM oraz kilku prac nt. kosztów obliczeniowych tych metod, brak jest reguł i kryteriów doboru metody oraz jej parametrów w zależności od rodzaju analizowanego zagadnienia akustycznego, które mogłyby być wykorzystane przez inżynierów przy projektowaniu i analizie rzeczywistych układów.

Praca doktorska dotyczy analizy oddziaływania impedancyjnych warunków brzegowych na właściwości pola akustycznego oraz analizy efektywności modelowania pola akustycznego metodami FEM i BEM w zależności od rodzaju zagadnienia akustycznego.

Celem rozprawy jest:

Przeprowadzenie analizy jakościowej i ilościowej wpływu warunków brzegowych na właściwości pola akustycznego w obszarach ograniczonych i nieograniczonych oraz porównanie efektywności modelowania pola akustycznego metodą elementów skończonych i metodą elementów brzegowych.

Sformułowano następujące tezy rozprawy:

- **Metoda elementów skończonych i metoda elementów brzegowych umożliwiają przeprowadzenie z zadaną dokładnością oceny jakościowej i ilościowej wpływu impedancyjnych warunków brzegowych na właściwości pola akustycznego wewnątrz i na zewnątrz obszarów ograniczonych.**
- **Efektywność metod elementów skończonych i elementów brzegowych zależy od typu oraz wielkości zagadnienia akustycznego i dla niektórych zagadnień efektywność metody elementów skończonych jest większa niż metody elementów brzegowych.**

Praca składa się z pięciu rozdziałów, spisu literatury i trzech dodatków.

Wstęp zawiera ogólny opis poruszanych w pracy zagadnień, stosowanych metod numerycznych oraz krótki przegląd literatury. W rozdziale tym przedstawiono również cel, tezy, zakres i układ pracy.

W rozdziale pt. „Efektywność metod numerycznych FEM i BEM” podano podstawowe parametry i zależności na podstawie których możliwe jest szacowanie kosztów obliczeniowych, błędów modelowania i pamięci obliczeniowej podczas modelowania obszarów ograniczonych i nieograniczonych metodami FEM i BEM. Porównano efektywność modelowania wewnętrznego zagadnienia akustycznego metodami FEM i BEM i określono kryteria wyboru najefektywniejszej metody w zależności od wielkości modelu dyskretnego. Dla metody BEM wyznaczono kryteria doboru rzędu kwadratur, które umożliwiają przeprowadzenie obliczeń metodami numerycznymi z wymaganą dokładnością.

W rozdziale pt. „Modelowanie pola akustycznego w komorach z uwzględnieniem impedancyjnych warunków brzegowych” rozpatrzono wpływ warunków brzegowych natury akustycznej na właściwości pola akustycznego w obszarze ograniczonym, zdefiniowano parametry umożliwiające przeprowadzenie takiej oceny. Przeprowadzono analizę błędów wyznaczania ciśnienia i prędkości akustycznej w obszarach ograniczonych.

Rozdział pt. „Modelowanie pola akustycznego w obszarze zewnętrznym z uwzględnieniem impedancyjnych warunków brzegowych” zawiera analizę oddziaływania pola akustycznego wewnątrz komory na pole akustyczne w obszarze zewnętrznym. Przedstawiono metodykę stosowania uproszczonych zależności otrzymanych z wykorzystaniem analogii E-M-A do oceny błędów modelowania pola akustycznego metodami FEM i BEM oraz metody modyfikacji modeli dyskretnych z wykorzystaniem analogii E-M-A w celu zwiększenia efektywności modelowania. Określono błędy modelowania pola akustycznego z wykorzystaniem tych metod oraz zakres ich stosowalności.

W każdym z tych rozdziałów podano wnioski szczegółowe wynikające z przeprowadzonych analiz.

Podsumowanie zawiera wnioski ogólne wynikające z przeprowadzonych badań i rozważań.

W dodatku A przedstawiono metodykę przeskalowania wyników porównania efektywności metod BEM podanych w rozdziale 2 dla dowolnej implementacji komputerowej tych metod. Porównano również efektywność metod BEM zastosowanych w programie komputerowym Sysnoise v.5.2.

Dodatek B zawiera opis metody wyznaczania impedancji mechanicznej obciążającej tylną stronę tłoka sztywnego o dowolnym kształcie z wykorzystaniem trójkątnych elementów dyskretnych.

Dodatek C przedstawia wyprowadzenie i opis parametrów czynnych jednorodnej płyty prostokątnej swobodnie podpartej lub sztywno zaciśniętej na obwodzie.

2 Efektywność metod numerycznych FEM i BEM

Zagadnienia wibroakustyczne mogą być rozwiązywane różnymi metodami numerycznymi. Każda z metod numerycznych charakteryzuje się określoną efektywnością. Efektywność modelowania wybranej metody zależy od rodzaju i stopnia skomplikowania modelowanego zagadnienia. Dla określonego problemu wibroakustycznego można znaleźć metodę numeryczną efektywność której będzie największa.

W pracy efektywność metody numerycznej jest mierzona trzema parametrami: błędem obliczeniowym metody, kosztem obliczeń i wielkością pamięci komputerowej niezbędnej do przeprowadzenia obliczeń (pamięć obliczeniowa).

Błędy obliczeniowe metod numerycznych FEM i BEM zależą głównie od rodzaju zastosowanych elementów dyskretnych, gęstości siatki za pomocą której jest przedstawiony modelowany obszar i zastosowanych algorytmów numerycznych, na przykład kwadratur. W pracy rozważania ograniczono do elementów liniowych i parabolicznych, jednorodnych lub quasi jednorodnych siatek elementów dyskretnych i algorytmów całkowania numerycznego (kwadratur).

Koszt obliczeń numerycznych jest określony przez liczbę operacji matematycznych wykonanych przy rozwiązywaniu określonego zagadnienia i liczbę operacji dodatkowych związanych z np. przesyłaniem danych w obszarze pamięci komputera. W metodach FEM i BEM liczba operacji dodatkowych jest na ogół o wiele mniejsza od liczby operacji matematycznych, więc może być pominięta w całkowitych kosztach obliczeniowych. Liczba operacji matematycznych wykonywanych podczas rozwiązywania określonych zagadnień zależy od wybranej metody, liczby stopni swobody modelu i wykorzystanych algorytmów numerycznych. Liczbę operacji matematycznych można mierzyć w jednostkach *flops* (*floating point operations*). Według klasycznej definicji jeden *flop* jest to jeden iloczyn i jedna suma liczb zmiennoprzecinkowych, tzn.: $flop = z_1 + z_2 z_3$. Pod pojęciem jednej operacji matematycznej należy więc rozumieć jedną operację mnożenia plus jedną operację dodawania. Szybkość obliczeń zależy natomiast od kosztów obliczeń i mocy obliczeniowej komputera. Moc obliczeniową komputera można wyrazić w jednostkach *flops/s*, które określają liczbę operacji zmiennoprzecinkowych wykonanych w ciągu jednej sekundy.

Pamięć maszyny obliczeniowej niezbędna do przeprowadzenia obliczeń będzie liczona w słowach maszynowych (*words*). W pracy pod pojęciem jednego słowa maszynowego należy rozumieć pamięć komputera równą 4 bajtom. W niektórych przypadkach w celu zwiększenia przejrzystości wyników pamięć obliczeniowa będzie podawana również w bajtach.

2.1 Koszty obliczeń numerycznych

W metodach FEM i BEM każde zagadnienie wibroakustyczne sprowadza się do układu równań algebraicznych:

$$[A]\{x\}=\{b\}. \quad (2-1)$$

Macierz A jest macierzą główną, x jest jednokolumnową macierzą niewiadomych, natomiast jednokolumnowa macierz b określa siły zewnętrzne działające na analizowany system. W układzie ze stratami wyrazy macierzy A i x są liczbami zespolonymi.

Układ równań (2-1) rozwiązuje się metodami bezpośrednimi, np. metodą eliminacji Gaussa, lub metodami iteracyjnymi. W praktyce, ze względu na łatwość implementacji i stabilność numeryczną, na ogół stosuje się metody bezpośrednie. Dla metod tych stosunkowo łatwo można wyznaczyć koszty obliczeniowe. Koszty obliczeniowe metod bezpośrednich szybko rosną ze wzrostem liczby stopni swobody modelowanego zagadnienia. Metody iteracyjne najczęściej stosowane są do analizy bardzo dużych układów, dla których koszty obliczeniowe tych metod mogą być mniejsze niż metod bezpośrednich [46,89]. W niniejszej pracy rozważania ograniczono do metod bezpośrednich.

Układ równań (2-1) z macierzą nieosobliwą $A \in C^{N,N}$ rozwiązuje się metodą bezpośrednią dwuetapowo. Pierwszym etapem jest faktoryzacja macierzy A , tzn. przedstawienie macierzy w postaci iloczynu macierzy trójkątnych, np. dolnej trójkątnej L i górnej trójkątnej U [48]:

$$A=LU \quad N^3/3 \text{ flops}. \quad (2-2)$$

Faktoryzacja macierzy A o wyrazach rzeczywistych wymaga wykonania $N^3/3$ operacji matematycznych, gdzie N jest liczbą stopni swobody modelu dyskretnego.

Drugim etapem jest rozwiązywanie zestawu dwóch układów równań [48]:

$$Ly=b \quad N^2/2 \text{ flops},$$

$$Ux=y \quad N^2/2 \text{ flops.} \quad (2-3)$$

Rozwiązywanie układów równań (2-3) nazywa się eliminacją wprost ($Ly=b$) i eliminacją wstecz ($Ux=y$). Operacja eliminacji wprost/wstecz wymaga ogółem wykonania N^2 operacji matematycznych.

Macierz główna A może posiadać pewne właściwości, które umożliwią zastosowanie szybszych algorytmów faktoryzacji i eliminacji wprost/wstecz niż klasyczny algorytm eliminacji Gaussa. Takimi właściwościami są symetria, pasmowość i określoność macierzy.

Do faktoryzacji macierzy symetrycznej dodatnio określonej stosuje się algorytm Choleskiego [91], który obniża koszt obliczeń o połowę w porównaniu z rozłożeniem LU . Niestety macierz główna A na ogół jest macierzą zespoloną, a więc nie jest macierzą dodatnio określoną. Dlatego do faktoryzacji symetrycznej macierzy zamiast klasycznego algorytmu Choleskiego stosuje się zmodyfikowany algorytm Choleskiego [31] lub rozłożenie $U^T D U$ [48]:

$$A=U^T D U \quad N^3/6 \text{ flops,} \quad (2-4)$$

gdzie macierz D jest macierzą diagonalną z elementami różnymi od zera.

Natomiast eliminacja wprost/wstecz odbywa się według wzorów:

$$\begin{aligned} U^T z &= b & N^2/2 \text{ flops,} \\ D y &= z & N \text{ flops,} \\ U x &= y & N^2/2 \text{ flops.} \end{aligned} \quad (2-5)$$

Liczba operacji matematycznych wykonywanych podczas faktoryzacji jest wprost proporcjonalna do trzeciej potęgi liczby równań (węzłów w siatce elementów dyskretnych), natomiast liczba operacji wykonywanych podczas eliminacji wprost/wstecz jest proporcjonalna do drugiej potęgi liczby równań. Dla modeli o liczbie węzłów większej od kilkudziesięciu o kosztach obliczeń decydować będzie głównie czas niezbędny do faktoryzacji macierzy A .

W przypadku arytmetyki na liczbach zespolonych liczba operacji matematycznych wykonywanych na każdym etapie rozwiązywania układu równań (2-1) jest czterokrotnie większa niż dla arytmetyki na liczbach rzeczywistych.

Liczba operacji matematycznych wykonywanych podczas rozwiązywania układu równań (2-1) może być 1,5÷2 razy większa od podanych ze względu na dodatkowe

operacje związane z manipulacją elementami macierzy głównej podczas doboru elementów na głównej przekątnej w celu uzyskania wymaganej dokładności operacji matematycznych [74].

Czas obliczeń w metodach FEM, BEM składa się więc z czasu niezbędnego do kompozycji układu równań, faktoryzacji macierzy głównej i eliminacji wprost/wstecz. Ponieważ macierz sztywności, masy i strat w metodzie FEM nie zależą od częstotliwości, ich kompozycja jest wykonywana tylko jeden raz na początku obliczeń. W metodzie BEM macierz główna zależy od częstotliwości, więc kompozycja macierzy odbywa się dla każdej częstotliwości osobno. Analizę układu rzeczywistego na ogół przeprowadza się w stosunkowo szerokim zakresie częstotliwości, dlatego czas przeznaczony na kompozycję układu równań w metodzie FEM można pominąć w analizie kosztów obliczeń metod FEM i BEM.

Koszty faktoryzacji i eliminacji wprost/wstecz zależą przede wszystkim od właściwości macierzy głównej, dlatego rozważane metody numeryczne można scharakteryzować poprzez jej właściwości.

2.1.1 Metoda FEM

Macierz główna w metodzie FEM jest symetryczna i pasmowa. Do faktoryzacji macierzy najczęściej stosuje się rozłożenie $U^T D U$ lub zmodyfikowane rozłożenie Choleskiego [31]. Tylko w przypadku układu bez strat wyrazy macierzy są liczbami rzeczywistymi, więc na ogół macierz główna jest macierzą o wyrazach zespolonych. Ponieważ w pracy modelowane są układy z uwzględnieniem impedancyjnych warunków brzegowych, macierz A będzie zawsze traktowana jako macierz o wyrazach zespolonych.

Liczba operacji matematycznych wykonywanych podczas faktoryzacji i eliminacji wprost/wstecz dla macierzy A o wyrazach zespolonych wynosi:

$$\begin{aligned}
 A &= U^T D U & 2b_w^2 N \text{ flops,} \\
 U^T z &= b & 4b_w N \text{ flops,} \\
 D y &= z & 4N \text{ flops,} \\
 U x &= y & 4b_w N \text{ flops,}
 \end{aligned} \tag{2-6}$$

gdzie b_w jest średnią wartością połówkowej szerokości pasma macierzy głównej.

Przedstawione wzory (2-6) są prawdziwe dla $N \gg 1$ i $N \gg b_w$, co na ogół zachodzi podczas modelowania układów rzeczywistych metodą FEM.

Ze wzorów (2-6) wynika, że na szybkość obliczeń ma duży wpływ pasmowość macierzy A . Szerokość pasma macierzy zależy od sposobu numeracji elementów skończonych i jest określona przez maksymalną różnicę numerów węzłów przyłączonych do tego samego elementu. Istnieje wiele algorytmów generacji optymalnej siatki elementów skończonych, które umożliwiają minimalizację szerokości pasma macierzy głównej [2,24,40,94]. Połówkowa szerokość pasma macierzy głównej b_w optymalnie zdefiniowanej siatki elementów skończonych jest o jeden rząd mniejsza od liczby węzłów N_w . W przypadku modeli o bardzo skomplikowanej geometrii podany związek pomiędzy b_w i N_w nie zawsze zachodzi, aczkolwiek relacja ta jest zachowana we wszystkich modelach analizowanych w pracy.

Koszty obliczeń w metodzie FEM można określić zatem następująco:

$$\begin{array}{ll}
 A=U^T D U & 0,02N_w^3 \text{ flops,} \\
 U^T z=b & 0,4N_w^2 \text{ flops,} \\
 D y=z & 4N_w \text{ flops,} \\
 U x=y & 0,4N_w^2 \text{ flops.}
 \end{array} \tag{2-7}$$

2.1.2 Metoda BEM

W metodzie BEM na szybkość obliczeń mają wpływ koszty rozwiązywania układu równań (2-1), koszty kompozycji macierzy głównej i koszty obliczenia parametrów akustycznych w punktach obserwacji. Parametry akustyczne w punktach obserwacji wyznacza się na podstawie obliczonego rozkładu ciśnienia i prędkości akustycznej na siatce elementów brzegowych. Związane z tym koszty zależą od liczby punktów obserwacji i na ogół są o wiele mniejsze od kosztów rozwiązywania głównego układu równań i kosztów kompozycji macierzy głównej. W pracy koszty obliczenia parametrów akustycznych w punktach obserwacji zostały pominięte.

Wyznaczenie macierzy głównej w metodzie BEM wymaga przeprowadzenia całkowania po wszystkich elementach siatki dyskretnej. Wiąże się to z obliczeniem całek w postaci:

$$I_{i,j}^{(DBEM)}(r_i) = \int_{S_j} (\aleph(r_j) J(r_i, r_j)) dS(r_j) \quad (2-8)$$

$$I_{i,j}^{(IBEM)}(r_i, r_j) = \int_{S_i} \int_{S_j} (\aleph(r_i) \aleph(r_j) J(r_i, r_j)) dS(r_i) dS(r_j),$$

gdzie r_i jest punktem należącym do elementu e_i , (2-9)

r_j jest punktem należącym do elementu e_j ,

$\aleph(r)$ - jest funkcją kształtu.

$J(r_i, r_j)$ jest funkcją Greena bądź jej pierwszą pochodną w metodzie DBEM lub funkcją Greena bądź jej pierwszą lub drugą pochodną w metodzie IBEM:

$$J(r_i, r_j) = G(r_i, r_j) \text{ lub } J(r_i, r_j) = \frac{\partial G(r_i, r_j)}{\partial n_j} \text{ lub } J(r_i, r_j) = \frac{\partial^2 G(r_i, r_j)}{\partial n_i \partial n_j}. \quad (2-10)$$

Rodzaj techniki obliczania całek numerycznych, tzw. kwadratury, ma duży wpływ na szybkość kompozycji macierzy głównej. W metodzie BEM najczęściej stosuje się kwadraturę Gaussa.

Podczas wyznaczania całek (2-8) i (2-9) w węzłach należących do elementu po którym odbywa się całkowanie, ze względu na kształt funkcji Greena, całkowana funkcja jest nieokreślona. Nieokreśloność tą można eliminować przez zmianę układu współrzędnych w których odbywa się całkowanie na współrzędne biegunowe [71] lub stosując inne techniki [36,45]. Każdy z tych zabiegów matematycznych zwiększa koszty obliczeń metody. Liczba punktów dla których występuje nieokreśloność zależy przede wszystkim od liczby węzłów należących do elementu.

Całkowity koszt kompozycji macierzy głównej w metodzie DBEM i IBEM może znacznie się różnić. Podczas wyznaczania wyrazów macierzy głównej w metodzie IBEM odbywa się dwukrotne całkowanie po powierzchni pary elementów, natomiast w metodzie DBEM tylko pojedyncze po powierzchni pojedynczego elementu. Kompozycja macierzy głównej w metodzie DBEM wymaga wyznaczenie N_w^2 pojedynczych całek (2-8), natomiast w metodzie IBEM, ze względu na występowanie pod całką funkcji kształtu pary elementów, około $N_e^2/2$ podwójnych całek (2-9), gdzie N_e jest liczbą elementów siatki dyskretnej. Ze względu na stosowane algorytmy koszty kompozycji w metodzie DBEM i IBEM należy szacować w zależności od, odpowiednio, liczby węzłów i liczby elementów dyskretnych. Kompozycja macierzy głównej w metodzie IBEM na ogół jest bardziej czasochłonna niż w metodzie DBEM.

Analizując strukturę całek (2-8) i (2-9) oraz układu równań (2-1) dla metody BEM w postaci dyskretnej [36,71] można wyprowadzić pewne uproszczone zależności określające liczbę operacji matematycznych wykonywanych podczas kompozycji macierzy głównej:

$$K_K^{(DBEM)} = C_0^{(DBEM)} C_1 N_w^2 \quad K_K^{(IBEM)} = C_0^{(IBEM)} C_1^2 C_2^2 N_e^2,$$

gdzie :

C_0 - współczynnik zależny od implementacji metody, algorytmu, funkcji kształtu, (2-11)

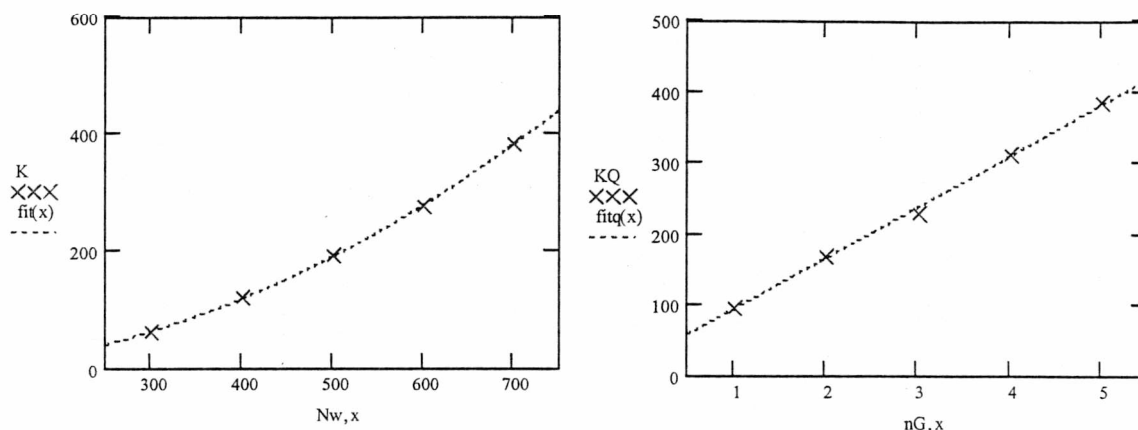
C_1 - współczynnik określający liczbę węzłów zastosowanej kwadratury,

C_2 - współczynnik określający rodzaj warunków brzegowych.

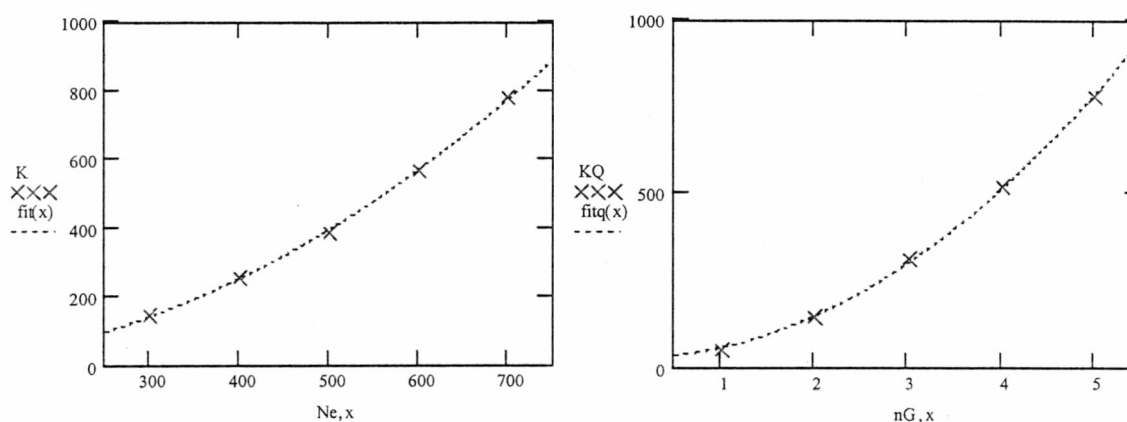
Współczynnik C_0 określony jest przez komputerową implementację metody, rodzaj funkcji kształtu i algorytm eliminacji nieokreśloności funkcji Greena. Wartość współczynnika można przyporządkować poszczególnym rodzajom elementów brzegowych: jednowymiarowy liniowy, jednowymiarowy paraboliczny, dwuwymiarowy czworokątny liniowy itd.

W przypadku metody IBEM koszt kompozycji macierzy głównej zależy dodatkowo od rodzaju warunków brzegowych. Najbardziej czasochłonne są obliczenia dla warunków brzegowych Neumanna, najmniej dla warunków Dirichleta. Równanie określające wyrazy macierzy głównej w modelu z warunkami brzegowymi Neumanna zawiera cztery razy więcej członów niż w modelu z warunkami brzegowymi Dirichleta [71]. Koszt wyznaczania poszczególnych wyrazów dla warunków brzegowych Neumanna jest zatem w przybliżeniu czterokrotnie większy niż dla warunków brzegowych Dirichleta. Współczynnik C_2 , wartość którego zmienia się w zakresie $0,25 \div 1$, uwzględnia to zjawisko. Współczynnik C_2 dla modelu wyłącznie z warunkami brzegowymi Neumanna lub wyłącznie z warunkami brzegowymi Dirichleta jest równy, odpowiednio, jedności ($C_2=1$) i jednej czwartej ($C_2=0,25$). W praktycznych zagadnieniach wibroakustyki najczęściej występują warunki brzegowe Neumanna. W analizie kosztów obliczeń metody IBEM rozpatrzono zatem najbardziej kosztochłonny przypadek modelu - modelu z warunkami brzegowymi Neumanna ($C_2=1$).

Przed porównaniem kosztów obliczeń metod FEM i BEM zweryfikowano wzory (2-11) na przykładzie dwuwymiarowego modelu komory prostopadłościennnej. Wyniki weryfikacji ilustrują rysunki 1 i 2.



Rysunek 1. Koszty kompozycji macierzy głównej dla metody DBEM w zależności od liczby węzłów N_w i liczby węzłów kwadratury Gaussa nG w porównaniu z krzywą wyznaczoną teoretycznie (linia przerywana)



Rysunek 2. Koszty kompozycji macierzy głównej dla metody IBEM w zależności od liczby elementów N_e i liczby węzłów kwadratury Gaussa nG w porównaniu z krzywą wyznaczoną teoretycznie (linia przerywana)

Wyniki modelowania potwierdzają poprawność wyznaczonych zależności (2-11).

W metodzie DBEM macierz A jest macierzą o wyrazach zespolonych, niesymetryczną, pełną. Do faktoryzacji macierzy stosuje się rozłożenie LU . Liczba operacji matematycznych wykonywanych na liczbach zespolonych podczas faktoryzacji wynosi $4N_w^3/3$, podczas eliminacji wprost/wstecz $4N_w^2$.

W metodzie IBEM macierz A jest macierzą o wyrazach zespolonych, pełną, lecz symetryczną. Do faktoryzacji macierzy stosuje się rozłożenie $U^T D U$. Liczba operacji matematycznych wykonywanych na liczbach zespolonych podczas faktoryzacji macierzy głównej wynosi $4N_w^3/6$, podczas eliminacji wprost/wstecz $4N_w^2$.

Faktoryzacja w metodzie IBEM jest dwa razy szybsza niż w metodzie DBEM. Koszty eliminacji wprost/wstecz metod DBEM i IBEM są jednakowe.

Koszty kompozycji macierzy głównej dla metody DBEM i IBEM są wprost proporcjonalna do drugiej potęgi, odpowiednio, liczby węzłów N_w^2 i liczby elementów N_e^2 . Na szybkość kompozycji macierzy ma znaczny wpływ parametr C_1 , określający liczbę węzłów zastosowanej kwadratury.

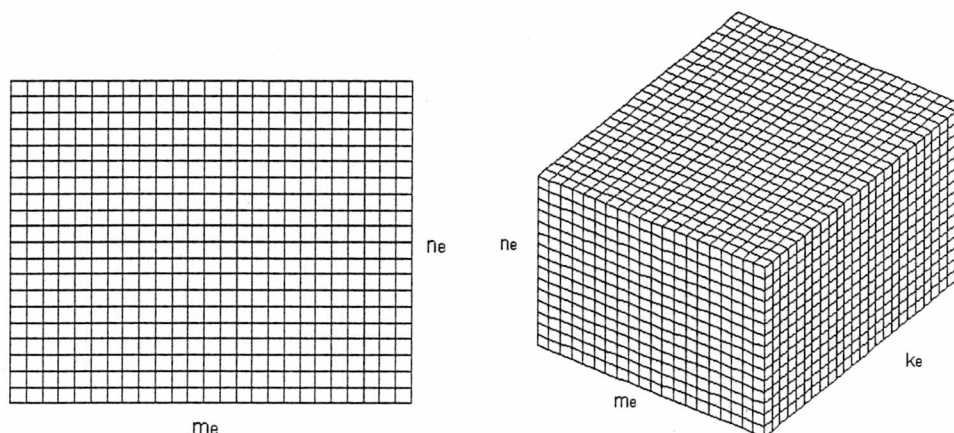
2.1.3 Porównanie kosztów obliczeń i pamięci obliczeniowej metod FEM i BEM

Porównanie kosztów obliczeń i pamięci obliczeniowej metod wykonano dla modeli dwu- i trójwymiarowych na przykładzie obszaru prostopadłościennego (rys.3). Porównano pomiędzy sobą metody DBEM, IBEM i FEM. Analizę wykonano dla modeli zbudowanych z liniowych i parabolicznych elementów dyskretnych. Porównania metod dokonano ze względu na całkowitą liczbę operacji matematycznych niezbędnych do rozwiązania układu równań (2-1) i rozmiar pamięci niezbędny do przechowywania macierzy głównej. Dla metod BEM analizę przeprowadzono dla kwadratur o różnej liczbie węzłów.

W przypadku metod BEM całkowity koszt obliczeń składa się z kosztów kompozycji macierzy głównej, jej faktoryzacji i eliminacji wprost/wstecz. W przypadku metody FEM koszt obliczeń składa się z kosztów faktoryzacji i eliminacji wprost/wstecz.

Koszty faktoryzacji w metodzie BEM są wprost proporcjonalne do trzeciej potęgi liczby węzłów N_w^3 , natomiast w metodzie FEM są wprost proporcjonalne do drugiej potęgi połówkowej szerokości pasma macierzy A pomnożonej przez liczbę węzłów $b_w^2 N_w$.

Koszty eliminacji wprost/wstecz w metodzie BEM są wprost proporcjonalne do drugiej potęgi liczby węzłów – N_w^2 , w metodzie FEM zaś są wprost proporcjonalna do połówkowej szerokości pasma macierzy A pomnożonej przez liczbę węzłów $b_w N_w$.



Rysunek 3. Kształt analizowanych obszarów dwu- i trójwymiarowych

W tabelach 2-1 i 2-2 podano podstawowe parametry siatek elementów dyskretnych dla dwuwymiarowego obszaru o kształcie prostokąta i trójwymiarowego obszaru o kształcie prostopadłościanu (rys.3) dla najczęściej spotykanych rodzajów elementów. Podane w tabeli przybliżone wzory na liczbę węzłów w modelu są dokładne dla siatek zbudowanych co najmniej z kilkunastu elementów dyskretnych. W celach orientacyjnych podane wzory można także wykorzystać w analizie kosztów obliczeń dla komórek o kształtach innych niż kształt prostopadłościenny.

W analizie kosztów obliczeń metod BEM liczba operacji matematycznych wykonywanych podczas kompozycji macierzy głównej jest liczona na podstawie równania (2-11). W tym celu przy pomocy programu komputerowego Sysnoise v.5.2, służącego do analizy zagadnień wibroakustycznych metodami FEM i BEM, wyznaczono współczynnik C_0 . Współczynnik C_0 obliczono z zależności:

$$C_0^{(DBEM)} = \frac{T^{(DBEM)} \times mok}{C_1 N_w^2} \quad C_0^{(IBEM)} = \frac{T^{(IBEM)} \times mok}{C_1^2 N_e^2}, \quad (2-12)$$

gdzie : T - czas kompozycji macierzy [s],
 mok - moc obliczeniowa komputera [flops/s].

W tabeli 2-1 przedstawiono wyznaczone wartości współczynnika C_0 .

Wartość współczynnika C_0 może zależeć od praktycznej implementacji metody i zastosowanego algorytmu eliminacji nieokreśloności związanych z funkcją Greena. Różnica w wynikach porównania metody DBEM i IBEM oraz FEM i DBEM/IBEM dla innych programów obliczeniowych niż Sysnoise nie powinna być jednak duża. W

przypadku metod DBEM i IBEM otrzymane wyniki można łatwo przeskalować dla innych wartości współczynnika C_0 (patrz Dodatek A).

Tabela 2-1 Liczba węzłów i elementów siatki dyskretnej w metodzie BEM dla obszaru dwu- i trójwymiarowego o kształcie prostokąta i prostopadłościanu. Wartość wyznaczonego współczynnika C_0 dla metod BEM

Obszar	Rodzaj elementów	Liczba elementów N_e	Liczba węzłów/ równań N_w	Współczynnik C_0	
				DBEM	IBEM
$m_e \times n_e$		$2(n_e + m_e)$	$2(n_e + m_e)$	255	109
		$2(n_e + m_e)$	$4(n_e + m_e)$	158	126
$m_e \times n_e \times k_e$		$2(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e)$	$2(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e + 1)$ $\approx 2(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e)$	238	82
		$4(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e)$	$2(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e + 1)$ $\approx 2(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e)$	396	65
		$2(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e)$	$2(3n_e m_e + 3n_e k_e + 3m_e k_e + 1)$ $\approx 6(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e)$	138	216
		$4(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e)$	$2(4n_e m_e + 4n_e k_e + 4m_e k_e + 1)$ $\approx 8(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e)$	192	146

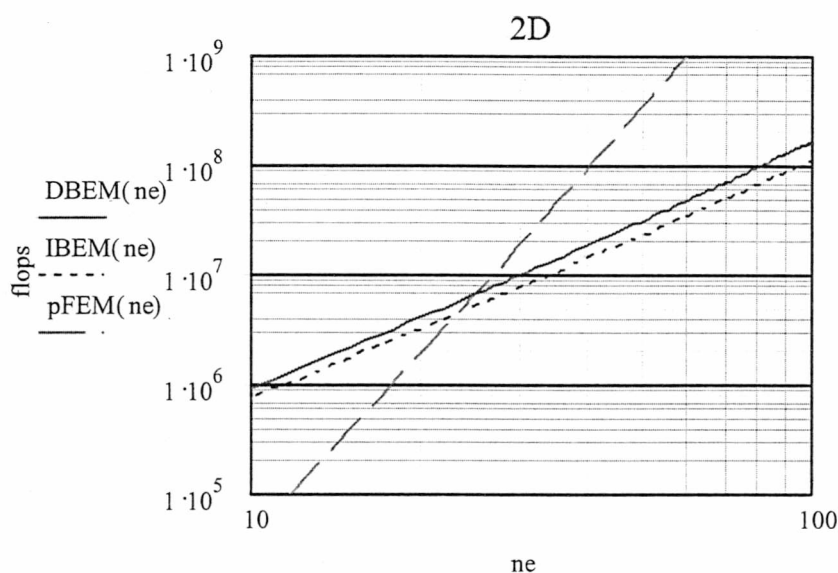
Tabela 2-2 Liczba węzłów i elementów siatki dyskretnej w metodzie FEM dla obszaru dwu- i trójwymiarowego o kształcie prostokąta i prostopadłościanu

Obszar	Rodzaj elementów	Liczba elementów N_e	Liczba węzłów/ równań N_w
$m_e \times n_e$		$n_e m_e$	$(n_e + 1)(m_e + 1)$ $= n_e m_e + n_e + m_e$
		$2n_e m_e$	$(n_e + 1)(m_e + 1)$ $= n_e m_e + n_e + m_e$
		$n_e m_e$	$(n_e + 1)(2m_e + 1) + n_e(m_e + 1)$ $\approx 3n_e m_e + 2(n_e + m_e)$
		$2n_e m_e$	$(n_e + 1)(2m_e + 1) + n_e(m_e + 1) + n_e m_e$ $\approx 4n_e m_e + 2(n_e + m_e)$
$m_e \times n_e \times k_e$		$n_e m_e k_e$	$(n_e + 1)(m_e + 1)(k_e + 1)$ $\approx n_e m_e k_e + n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e + n_e + m_e + k_e$
		$2n_e m_e k_e$	$(n_e + 1)(m_e + 1)(k_e + 1)$ $\approx n_e m_e k_e + n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e + n_e + m_e + k_e$
		$n_e m_e k_e$	$4n_e m_e k_e + 3(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e)$ $+ 2(n_e + m_e + k_e) + 1$ $\approx 4n_e m_e k_e + 3(n_e m_e + n_e k_e + m_e k_e) + 2(n_e + m_e + k_e)$
		$2n_e m_e k_e$	$5n_e m_e k_e + 4n_e m_e + 3(n_e k_e + m_e k_e)$ $+ 2(n_e + m_e + k_e) + 1$ $\approx 5n_e m_e k_e + 4n_e m_e + 3(n_e k_e + m_e k_e) + 2(n_e + m_e + k_e)$

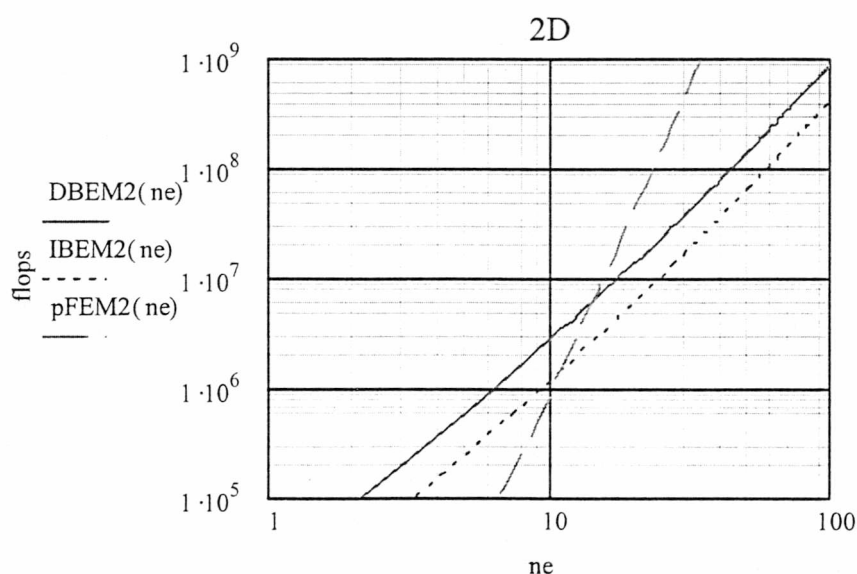
Przy porównaniu metod rozpatrzono dwuwymiarowy obszar w kształcie kwadratu i trójwymiarowy obszar w kształcie sześcianu podzielonego na, odpowiednio, $n_e \times n_e$ i $n_e \times n_e \times n_e$ elementów. Tabele 2-3 i 2-4 ilustrują charakterystyczne parametry rozważanych metod numerycznych dla analizowanych obszarów. Wartość parametrów

wyznaczono przy założeniu, że operacje matematyczne są wykonywane na liczbach zespolonych

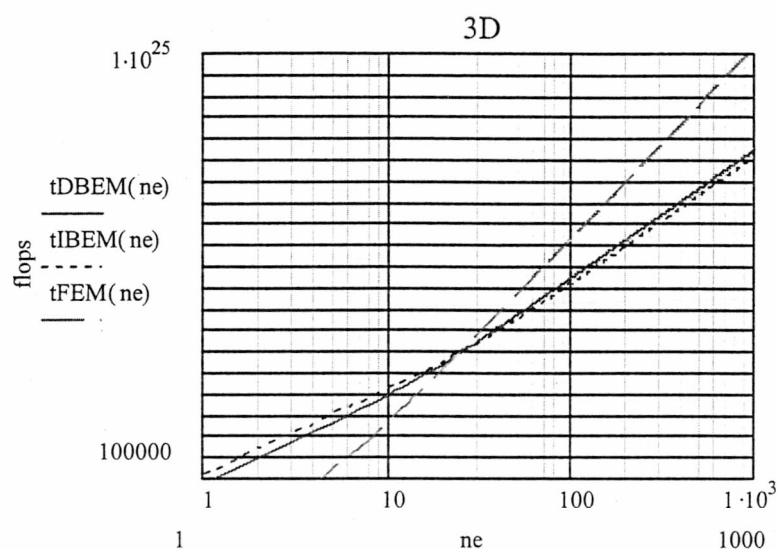
Na rysunkach 4÷6 przedstawiono zależność kosztów obliczeń dla kilku wybranych rodzajów elementów brzegowych/skończonych od liczby elementów przypadających na jeden wymiar modelu n_e . W przypadku obszaru dwuwymiarowego zastosowano kwadraturę Gaussa o dwóch węzłach, obszaru trójwymiarowego – kwadraturę Gaussa o czterech węzłach. Oznaczenia pFEM, tFEM, tIBEM identyfikują metodę i kształt elementów dyskretnych: p – element czworokątny, t – element trójkątny.



Rysunek 4. Liczba operacji matematycznych w zależności od liczby elementów liniowych przypadających na jeden wymiar dwuwymiarowego obszaru dla kwadratury o dwóch węzłach



Rysunek 5. Liczba operacji matematycznych w zależności od liczby elementów parabolicznych przypadających na jeden wymiar dwuwymiarowego obszaru dla kwadratury o dwóch węzłach



Rysunek 6. Liczba operacji matematycznych w zależności od liczby liniowych trójkątnych elementów dla trójwymiarowego obszaru i kwadratury o czterech węzłach

Na podstawie analizy rysunków 4÷6 stwierdzono, że dla obszarów 2D i kwadratur o 2 węzłach koszty obliczeniowe metody IBEM są mniejsze od kosztów metody DBEM niezależnie od wielkości modelu dyskretnego zarówno dla elementów liniowych, jak i parabolicznych. Dla modeli 3D zbudowanych z liniowych elementów trójkątnych i kwadratur o 4 węzłach koszty obliczeniowe metody IBEM są mniejsze od kosztów metody DBEM dla modeli średnich i dużych. Koszty obliczeniowe metody FEM rosną ze wzrostem liczby elementów dyskretnych znacznie szybciej niż koszty metod BEM.

Metody DBEM, IBEM i FEM porównano poprzez wyznaczenie liczby elementów siatki dyskretnej dla której ich koszty obliczeniowe są jednakowe. Ponieważ modelowany obszar przedstawiono w postaci $n_e \times n_e$ (2D) lub $n_e \times n_e \times n_e$ (3D) elementów, posługiwano się jednym parametrem n_e , który określa liczbę elementów skończonych/brzegowych przypadających na jeden wymiar modelowanego obszaru. W przypadku elementów trójkątnych parametr n_e oznacza połowę liczby trójkątnych elementów skończonych/brzegowych przypadających na jeden wymiar. Metody porównano rozwiązując następujące równania:

metody IBEM - DBEM

$$(K_K + K_F + K_S)_{IBEM} = (K_K + K_F + K_S)_{DBEM},$$

metody BEM - FEM

$$(K_K + K_F + K_S)_{BEM} = (K_F + K_S)_{FEM}, \quad (2-13)$$

gdzie :

K_K, K_F, K_S - koszty obliczeniowe kompozycji, faktoryzacji macierzy głównej oraz eliminacji wprost/wstecz dla porównywalnych metod.

Przeanalizowano koszty obliczeń dla siatek składających się z takich samych elementów w przypadku metod BEM i dla siatek składających się z elementów o podobnym kształcie w przypadku metod BEM/FEM: jednowymiarowy liniowy element BEM – dwuwymiarowy liniowy element czworokątny/trójkątny FEM, jednowymiarowy paraboliczny element BEM – dwuwymiarowy paraboliczny element czworokątny/trójkątny FEM, dwuwymiarowy czworokątny liniowy element BEM – trójwymiarowy liniowy element sześcienny FEM itd. W tabelach 2-5, 2-6 i 2-7 podano wyniki porównania metod DBEM/IBEM i BEM/FEM. W przypadku metod BEM/FEM oprócz parametru n_e i całkowitej liczby elementów siatki elementów dyskretnych N_e podano również pamięć komputera $M^{(Metoda)}$ niezbędną do przechowywania macierzy głównej A . W kolumnie pt. „Uwagi” podano relację kosztów obliczeniowych rozważanych metod dla modeli mniejszych od podanych w tabeli.

Tabele nie zawierają wyników porównania metod BEM i FEM dla jednowymiarowych liniowych (BEM) i dwuwymiarowych liniowych elementów trójkątnych (FEM), ponieważ wyniki są takie same, jak dla jednowymiarowych liniowych (BEM) i dwuwymiarowych liniowych elementów czworokątnych (FEM).

Przy porównaniu metod DBEM i IBEM wyniki podano dla kwadratur o $1 \div 5$ węzłach dla obszaru 2D i o $1 \div 25$ węzłach dla obszaru 3D. Przy porównaniu metod BEM i FEM wyniki przedstawiono dla kwadratur o $2 \div 4$ węzłach dla obszaru 2D i o $4 \div 16$ węzłach dla obszaru 3D. W przypadku elementów liniowych i parabolicznych kwadratury o większej liczbie węzłów bardzo rzadko są stosowane w modelowaniu i ewentualna analiza kosztów nie ma znaczenia praktycznego. Ze względu na różne techniki obliczeniowe stosowane w kwadraturach Gaussa dla elementów trójkątnych i czworokątnych liczba węzłów kwadratury o określonym rzędzie dla tych elementów jest różna.

Tabela 2-3 Koszty obliczeń i rozmiar pamięci obliczeniowej dla obszaru dwuwymiarowego

Metoda/ Siatka	Rodzaj elementów	Liczba elementów N_e	Liczba węzłów/ równań N_w	Półówkowa szerokość pasma macierzy A b_w	Kompozycja macierzy A [flops]	Faktoryzacja macierzy A [flops]	Eliminacja wprost/wstecz [flops]	Pamięć obliczeniowa [words]
DBEM					$C_0^{(b)} C_1 N_w^2$	$4N_w^3/3$	$4N_w^2$	$2N_w^2$
$n_e \times n_e$		$4n_e$	$4n_e$	-	$4080C_1 n_e^2$	$85n_e^3$	$64n_e^2$	$32n_e^2$
		$4n_e$	$8n_e$		$10112C_1 n_e^2$	$683n_e^3$	$256n_e^2$	$128n_e^2$
IBEM					$C_0^{(b)} C_1^2 N_e^2$	$2N_w^3/3$	$4N_w^2$	N_w^2
$n_e \times n_e$		$4n_e$	$4n_e$	-	$1744C_1^2 n_e^2$	$43n_e^3$	$64n_e^2$	$16n_e^2$
		$4n_e$	$8n_e$		$2016C_1^2 n_e^2$	$341n_e^3$	$256n_e^2$	$64n_e^2$
FEM						$2b_w^2 N_w$	$8b_w N_w$	$2b_w N_w$
$n_e \times n_e$		n_e^2	$n_e^2 + 2n_e$	$0,1(n_e^2 + 2n_e)$	-	$0,02(n_e^2 + 2n_e)^3$	$0,8(n_e^2 + 2n_e)^2$	$0,2(n_e^2 + 2n_e)^2$
		$2n_e^2$	$n_e^2 + 2n_e$	$0,1(n_e^2 + 2n_e)$		$0,02(n_e^2 + 2n_e)^3$	$0,8(n_e^2 + 2n_e)^2$	$0,2(n_e^2 + 2n_e)^2$
		n_e^2	$3n_e^2 + 4n_e$	$0,1(3n_e^2 + 4n_e)$		$0,02(3n_e^2 + 4n_e)^3$	$0,8(3n_e^2 + 4n_e)^2$	$0,2(3n_e^2 + 4n_e)^2$
		$2n_e^3$	$4n_e^2 + 4n_e$	$0,1(4n_e^2 + 4n_e)$		$0,02(4n_e^2 + 4n_e)^3$	$0,8(4n_e^2 + 4n_e)^2$	$0,2(4n_e^2 + 4n_e)^2$

Tabela 2-4 Koszty obliczeń i rozmiar pamięci obliczeniowej dla obszaru trójwymiarowego

Metoda/ Siatka	Rodzaj elementów	Liczba elementów N_e	Liczba węzłów/ równań N_w	Półówkowa szerokość pasma macierzy A b_w	Kompozycja macierzy A [flops]	Faktoryzacja macierzy A [flops]	Eliminacja wprost/wstecz [flops]	Pamięć obliczeniowa [words]
DBEM					$C_0^{(D)} C_1 N_w^2$	$4N_w^3/3$	$4N_w^2$	$2N_w^2$
$n_e \times n_e \times n_e$		$6n_e^2$	$6n_e^2$	-	$8568C_1 n_e^4$	$288n_e^6$	$144n_e^4$	$72n_e^4$
		$12n_e^2$	$6n_e^2$		$14256C_1 n_e^4$	$288n_e^6$	$144n_e^4$	$72n_e^4$
		$6n_e^2$	$18n_e^2$		$44712C_1 n_e^4$	$7776n_e^6$	$1296n_e^4$	$648n_e^4$
		$12n_e^2$	$24n_e^2$		$110592C_1 n_e^4$	$18432n_e^6$	$2304n_e^4$	$1152n_e^4$
IBEM					$C_0^{(I)} C_1^2 N_e^2$	$2N_w^3/3$	$4N_w^2$	N_w^2
$n_e \times n_e \times n_e$		$6n_e^2$	$6n_e^2$	-	$2952C_1^2 n_e^4$	$144n_e^6$	$144n_e^4$	$36n_e^4$
		$12n_e^2$	$6n_e^2$		$9360C_1^2 n_e^4$	$144n_e^6$	$144n_e^4$	$36n_e^4$
		$6n_e^2$	$18n_e^2$		$7776C_1^2 n_e^4$	$3888n_e^6$	$1296n_e^4$	$324n_e^4$
		$12n_e^2$	$24n_e^2$		$21024C_1^2 n_e^4$	$9216n_e^6$	$2304n_e^4$	$576n_e^4$
FEM						$2b_w^2 N_w$	$8b_w N_w$	$2b_w N_w$
$n_e \times n_e \times n_e$		n_e^3	$n_e^3 + 3n_e^2 + 3n_e$	$0,1(n_e^3 + 3n_e^2 + 3n_e)$	-	$0,02(n_e^3 + 3n_e^2 + 3n_e)^3$	$0,8(n_e^3 + 3n_e^2 + 3n_e)^2$	$0,2(n_e^3 + 3n_e^2 + 3n_e)^2$
		$2n_e^3$	$n_e^3 + 3n_e^2 + 3n_e$	$0,1(n_e^3 + 3n_e^2 + 3n_e)$		$0,02(n_e^3 + 3n_e^2 + 3n_e)^3$	$0,8(n_e^3 + 3n_e^2 + 3n_e)^2$	$0,2(n_e^3 + 3n_e^2 + 3n_e)^2$
		n_e^3	$4n_e^3 + 9n_e^2 + 6n_e$	$0,1(4n_e^3 + 9n_e^2 + 6n_e)$		$0,02(4n_e^3 + 9n_e^2 + 6n_e)^3$	$0,8(4n_e^3 + 9n_e^2 + 6n_e)^2$	$0,2(4n_e^3 + 9n_e^2 + 6n_e)^2$
		$2n_e^3$	$5n_e^3 + 10n_e^2 + 6n_e$	$0,1(5n_e^3 + 10n_e^2 + 6n_e)$		$0,02(5n_e^3 + 10n_e^2 + 6n_e)^3$	$0,8(5n_e^3 + 10n_e^2 + 6n_e)^2$	$0,2(5n_e^3 + 10n_e^2 + 6n_e)^2$

Tabela 2-5 Porównanie kosztów obliczeniowych metod DBEM i IBEM

Metoda / wymiar	Rodzaj elementów	n_e	N_e	n_e	N_e	n_e	N_e	n_e	N_e	n_e	N_e	Uwagi
2D		Liczba węzłów kwadratury										$K^{(IBEM)} > K^{(DBEM)}$
		1		2		3		4		5		
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		82	328	276	1104	552	2208	
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		
3D		Liczba węzłów kwadratury										$K^{(IBEM)} > K^{(DBEM)}$
		1		4		9		16		25		
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		10	600	34	6936	66	26136	106	67416	
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		8	384	18	1944	31	5766	
		Liczba węzłów kwadratury										
		1		4		7		13		16		
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		25	7500	50	30000	99	117612	123	181548	
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		5	300	15	2700	20	4800	

Tabela 2-6 Porównanie kosztów obliczeniowych metod FEM i DBEM;

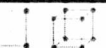
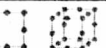
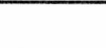
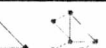
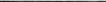
Metoda / wymiar	Rodzaj elementów	n_e	BEM N_e	$M^{(BEM)}$ [kB]	FEM N_e	$M^{(FEM)}$ [kB]	n_e	BEM N_e	$M^{(BEM)}$ [kB]	FEM N_e	$M^{(FEM)}$ [kB]	n_e	BEM N_e	$M^{(BEM)}$ [kB]	FEM N_e	$M^{(FEM)}$ [kB]	Uwagi
DBEM/FEM		Liczba węzłów kwadratury															
		2					3					4					
2D		22	88	61	484	218	24	96	72	576	304	26	104	85	676	414	$K^{(DBEM)} > K^{(FEM)}$
		14	56	98	196	325	15	60	113	225	423	16	64	128	256	542	
		11	44	61	242	219	12	48	72	288	305	13	52	85	338	415	
3D		Liczba węzłów kwadratury															
		4					9					16					
				[MB]		[MB]			[MB]		[MB]			[MB]		[MB]	
		23	3174	77	12167	146	24	3456	91	13824	186	26	4056	126	17576	296	$K^{(DBEM)} > K^{(FEM)}$
		17	1734	207	4913	381	18	1944	260	5832	530	19	2166	322	6859	724	
		Liczba węzłów kwadratury															
		4					7					13					
	24	6912	91	27648	186	25	7500	107	31250	236	27	8748	146	39366	368	$K^{(DBEM)} > K^{(FEM)}$	
	18	3888	462	11664	806	18	3888	462	11664	806	19	4332	573	13718	1103		

Tabela 2-7 Porównanie kosztów obliczeniowych metod FEM i IBEM

Metoda / wymiar	Rodzaj elementów	n_e	BEM N_e	$M^{(BEM)}$ [kB]	FEM N_e	$M^{(FEM)}$ [kB]	n_e	BEM N_e	$M^{(BEM)}$ [kB]	FEM N_e	$M^{(FEM)}$ [kB]	n_e	BEM N_e	$M^{(BEM)}$ [kB]	FEM N_e	$M^{(FEM)}$ [kB]	Uwagi
IBEM/FEM		Liczba węzłów kwadratury															
		2					3					4					
2D		23	92	33	529	258	29	116	53	841	631	33	132	68	1089	1042	$K^{(IBEM)} > K^{(FEM)}$
		11	44	30	121	130	13	52	42	169	245	15	60	56	225	423	
		7	28	12	98	40	11	44	30	242	219	12	48	36	288	305	
3D		Liczba węzłów kwadratury															
		4					9					16					
				[MB]		[MB]			[MB]		[MB]			[MB]		[MB]	
		20	2400	22	8000	65	26	4056	63	17576	296	32	6144	144	32768	985	$K^{(IBEM)} > K^{(FEM)}$
		13	1014	35	2197	82	15	1350	63	3375	186	18	1944	130	5832	530	
		Liczba węzłów kwadratury															
		4					7					13					
		24	6912	46	27648	186	29	10092	97	48778	556	36	15552	231	93312	1957	$K^{(IBEM)} > K^{(FEM)}$
	14	2352	84	5488	190	16	3072	144	8192	408	18	3888	231	11664	806		

2.1.3.1 Wyniki porównania metod DBEM i IBEM

Powszechnie się uważa, że ze względu na dwukrotne całkowanie po wszystkich elementach podczas kompozycji macierzy głównej w metodzie IBEM, metoda ta jest szybsza od DBEM tylko dla bardzo dużych modeli. Przedstawione wyniki pokazują jednak, że w niektórych przypadkach IBEM może być szybsza od DBEM zarówno jak dla dużych, tak i małych modeli (patrz tabela 2-5).

Dla modeli dwuwymiarowych zbudowanych z elementów liniowych metoda IBEM jest szybsza od DBEM niezależnie od wielkości modelu dla kwadratur o jednym lub dwóch węzłach. Dla kwadratur o trzech lub więcej węzłach metoda IBEM jest szybsza od DBEM tylko dla modeli średnich i dużych (powyżej 328 elementów). Punkt przecięcia kosztów obliczeń metod silnie zależy od liczby węzłów zastosowanej kwadratury, czyli od jej rzędu.

Dla modeli 2D zbudowanych z elementów parabolicznych metoda IBEM jest szybsza od DBEM niezależnie od wielkości modelu dla kwadratur o 1÷5 węzłach. Metoda IBEM jest szybsza od DBEM dla wspomnianych modeli dla kwadratur nawet o 5 węzłach dlatego, że koszty kompozycji macierzy głównej w pierwszej metodzie są wprost proporcjonalne do drugiej potęgi liczby elementów, gdy w drugiej metodzie do drugiej potęgi liczby węzłów. W modelach 2D zbudowanych z elementów parabolicznych węzłów jest dwa razy więcej niż elementów, natomiast koszty faktoryzacji macierzy A w metodzie IBEM są o połowę mniejsze niż w DBEM.

Dla modeli trójwymiarowych zbudowanych z elementów liniowych metoda IBEM jest szybsza od DBEM niezależnie od wielkości modelu tylko dla kwadratur o jednym węźle. Przy zastosowaniu kwadratur o większej liczbie węzłów metoda IBEM jest szybsza od DBEM tylko dla modeli dużych (powyżej 600 elementów).

Ze względu na znaczny wzrost liczby elementów przy takiej samej liczbie węzłów dla modeli 3D zbudowanych z liniowych trójkątnych elementów brzegowych metoda IBEM jest znacznie wolniejsza od DBEM.

Dla modeli 3D zbudowanych z elementów parabolicznych IBEM jest szybsza od DBEM dla małych modeli tylko dla kwadratur o 1 i 4 węzłach. Dla kwadratur o większej liczbie węzłów IBEM jest szybsza od DBEM dla modeli średnich i dużych (powyżej 300 elementów).

Punkt przecięcia kosztów obliczeniowych metod dla obszarów 3D również silnie zależy od liczby węzłów zastosowanej kwadratury.

W metodzie IBEM obszar pamięci komputera niezbędny do przechowywania macierzy głównej jest dwa razy mniejsze niż w metodzie DBEM. Fakt ten jest dodatkowym argumentem stosowania metody IBEM do modelowania dużych układów akustycznych.

2.1.3.2 Wyniki porównania metod FEM i BEM

W przypadku obszaru dwuwymiarowego i kwadratur o 2÷4 węzłach metoda FEM jest szybsza od DBEM dla modeli składających się co najwyżej z 22÷26 elementów liniowych lub co najwyżej z 11÷16 elementów parabolicznych przypadających na jeden wymiar (tabela 2-6). Odpowiada to siatce o 88÷104 liniowych elementach brzegowych i 484÷676 liniowych elementach skończonych oraz siatce o 44÷64 parabolicznych elementach brzegowych i około 220÷340 parabolicznych elementach skończonych. Punkt przecięcia kosztów obliczeniowych metod DBEM i FEM słabo zależy od liczby węzłów zastosowanej kwadratury.

Dla obszarów 2D i kwadratur o 2÷4 węzłach metoda FEM jest szybsza od IBEM dla modeli składających się co najwyżej z 23÷33 elementów liniowych lub co najwyżej z 7÷15 elementów parabolicznych przypadających na jeden wymiar (tabela 2-7). Odpowiada to siatce o 92÷132 liniowych elementach brzegowych i 529÷1089 liniowych elementach skończonych oraz siatce o 28÷60 parabolicznych elementach brzegowych i około 100÷290 parabolicznych elementach skończonych. Metoda FEM jest zatem szybsza od metod DBEM i IBEM dla małych i średnich modeli. Punkt przecięcia kosztów obliczeniowych metod silnie zależy od liczby węzłów zastosowanej kwadratury.

Dla modeli o jednakowych kosztach obliczeniowych rozmiar pamięci niezbędny do przechowywania macierzy głównej w metodzie FEM jest większy niż w metodzie BEM: 3÷5 razy dla metod DBEM/FEM i 3÷15 razy dla metod IBEM/FEM.

Dla modeli trójwymiarowych i kwadratur o 4÷16 węzłach metoda FEM jest szybsza od BEM dla małych, średnich i dużych modeli. W przypadku obszarów 3D w praktyce nie stosuje się kwadratury o mniejszej liczbie węzłów, niż 4 węzły. Dla kwadratury o 4 węzłach metoda BEM jest szybsza od metody FEM tylko dla modeli składających się co najmniej z 2400 liniowych elementów brzegowych lub z 8000 liniowych elementów skończonych i co najmniej z 1014 parabolicznych elementów brzegowych lub z 2197 parabolicznych elementów skończonych (tabela 2-7). Dla modeli o jednakowych

kosztach obliczeniowych rozmiar pamięci niezbędny do przechowywania macierzy głównej w metodzie FEM jest około 2 razy większy niż w metodzie DBEM i około 2÷8 razy większy niż w IBEM. Na przykład, koszty obliczeń dla modelu trójwymiarowego metodami IBEM lub FEM z wykorzystaniem liniowych czworokątnych elementów i kwadratury o 4 węzłach są takie same dla siatek składających się z 2400 elementów brzegowych (22 MB) lub z 8000 elementów skończonych (65 MB). Przechowywanie macierzy głównej o rozmiarach 65 MB w pamięci operacyjnej komputera może być utrudnione, natomiast stosowanie algorytmów podziału macierzy na mniejsze i ich przechowywanie na dysku twardym znacznie zwiększa czas obliczeń. Przy wyborze metody do modelowania obszarów trójwymiarowych należy rozważyć zatem zarówno koszty obliczeń, jak i rozmiar pamięci komputera niezbędny do przeprowadzenia obliczeń.

Koszty obliczeniowe w modelach 3D silnie zależą od rzędu zastosowanej kwadratury.

Model dyskretny zbudowany z trójkątnych elementów brzegowych dla którego koszty obliczeń metod BEM i FEM są równe jest kilkakrotnie większy od modelu zbudowanego z elementów czworokątnych.

Dla obszarów 2D i 3D model zbudowany z elementów parabolicznych dla którego koszty obliczeń metod BEM i FEM są równe jest zawsze mniejszy od modelu zbudowanego z elementów liniowych.

2.1.4 Porównanie kosztów obliczeń metod sprzężonych BEM/FEM i FEM/FEM

Do analizy zagadnień wibroakustycznych z uwzględnieniem warunków brzegowych natury mechanicznej są stosowane tzw. metody sprzężone: BEM/FEM i FEM/FEM. W metodzie sprzężonej jedna z metod służy do modelowania pola akustycznego, natomiast druga do modelowania struktury elastycznej. W metodzie sprzężonej BEM/FEM na ogół metoda BEM jest wykorzystywana do modelowania pola akustycznego, natomiast metoda FEM do modelowania struktury elastycznej.

W metodzie DBEM/FEM układ równań (2-1) przyjmuje następującą postać [71]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + j\omega\mathbf{C}_s - \omega^2\mathbf{M}_s & \mathbf{S}_{DBEM}^T \\ \rho_0\omega^2\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_a \end{Bmatrix},$$

gdzie:

$\mathbf{K}_s, \mathbf{C}_s, \mathbf{M}_s$ - macierze sztywności, strat i masy

w modelu FEM struktury elastycznej,

$\mathbf{B}, \mathbf{E}$ - macierze współczynników metody DBEM,

(2-14)

$\mathbf{S}_{DBEM}$ - macierz określająca sprzężenie pola akustycznego i struktury elastycznej,

$\mathbf{u}, \mathbf{p}$ - wektory przemieszczenia i ciśnienia akustycznego,

$\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_a$ - wektory sił zewnętrznych natury mechanicznej i akustycznej,

ρ_0, ω - gęstość ośrodka i częstota kołowa.

Liczba stopni swobody modelu sprzężonego jest sumą stopni swobody modelu akustycznego i modelu struktury elastycznej. Ponieważ różne macierze $\mathbf{S}_{DBEM}$ i $\mathbf{E}$ położone są symetrycznie względem głównej przekątnej oraz macierze $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{S}_{DBEM}$ są macierzami pełnymi i niesymetrycznymi, macierz główna układu równań (2-14) jest również pełna i niesymetryczna. Zatem macierz główna w metodzie sprzężonej DBEM/FEM ma takie same właściwości jak w metodzie DBEM, natomiast liczba stopni swobody modelu jest powiększona o liczbę stopni swobody związanych ze strukturą elastyczną.

W metodzie IBEM/FEM układ równań (2-1) przyjmuje postać [71]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + j\omega\mathbf{C}_s - \omega^2\mathbf{M}_s & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} / \rho\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\mu} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_a \end{Bmatrix},$$

gdzie:

(2-15)

$\mathbf{G}, \mathbf{H}$ - macierze współczynników metody IBEM,

$\boldsymbol{\mu}$ - wektor dwuwarstwowego potencjału akustycznego.

Macierze $\mathbf{K}_s, \mathbf{C}_s, \mathbf{M}_s$ są macierzami pasmowymi i symetrycznymi, $\mathbf{H}$ jest macierzą pełną i symetryczną, $\mathbf{G}$ jest macierzą pełną. Macierz główna w metodzie IBEM/FEM jest zatem pełna i symetryczna. Liczba stopni swobody modelu sprzężonego IBEM/FEM jest sumą stopni swobody modelu akustycznego i modelu struktury elastycznej, natomiast macierz główna ma takie same właściwości jak macierz w metodzie IBEM.

Ze względu na identyczne właściwości macierzy głównej metod DBEM/FEM i DBEM oraz identyczne właściwości macierzy głównej metod IBEM/FEM i IBEM wyniki porównania metod sprzężonych będą takie same, jak wyniki porównania metod niesprzężonych DBEM/IBEM. Wyniki te podano w poprzednim rozdziale.

W przypadku sprzężonej metody FEM/FEM w postaci klasycznej układ równań (2-1) jest określony jako [29]:

$$\begin{bmatrix} K_s + j\omega C_s - \omega^2 M_s & -\rho^{-1} S_{FEM}^T \\ -\omega^2 S_{FEM} & K_a + j\omega C_a - \omega^2 M_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ F_a \end{Bmatrix}, \quad (2-16)$$

K_s, C_s, M_s - macierze sztywności, strat i masy w modelu akustycznego,
 S_{FEM} - macierz określająca sprzężenie pola akustycznego i struktury elastycznej.

Macierz główna w metodzie sprzężonej FEM/FEM jest macierzą niesymetryczną [29] i do jej przechowania wymagany jest duży rozmiar pamięci obliczeniowej. Z tego względu metoda FEM/FEM w postaci klasycznej rzadko jest stosowana w praktycznych implementacjach komputerowych. Istnieje kilka sposobów przywrócenia symetrii macierzy głównej w metodzie FEM/FEM [29,37,58,78]. Wszystkie te metody dotyczą jednak tylko wąskiej klasy elementów skończonych lub wymagają zdefiniowania dodatkowej zmiennej o charakterze akustycznego potencjału przemieszczenia lub akustycznego potencjału prędkości. Stosowanie dodatkowej zmiennej powoduje zwiększenie, na ogół podwojenie, liczby stopni swobody modelu akustycznego.

Ze względu na istnienie wielu technik przywrócenia symetrii macierzy głównej w metodzie sprzężonej FEM/FEM porównanie metod BEM/FEM i FEM/FEM należałoby przeprowadzić dla każdej techniki osobno, co wykracza poza zakres niniejszej pracy. W przypadku technik nie wykorzystujących dodatkowej zmiennej o charakterze akustycznego potencjału przemieszczenia lub prędkości, ale przywracające symetrię macierzy głównej, wyniki porównania metod sprzężonych BEM/FEM i FEM/FEM będą identyczne z wynikami uzyskanymi dla metod niesprzężonych BEM i FEM. Wyniki te podano w poprzednim rozdziale.

2.2 Błędy obliczeniowe metod numerycznych

Podczas modelowania układów akustycznych metodami FEM i BEM błędy obliczeniowe powstają na skutek zamiany ciągłego modelowanego obszaru lub jego brzegu zbiorem elementów dyskretnych, aproksymacji szukanych parametrów funkcjami bazowymi, np. wielomianami określonego stopnia, i przeprowadzenia obliczeń matematycznych z wykorzystaniem pewnych algorytmów numerycznych. Można rozróżnić cztery podstawowe źródła błędów: aproksymacja kształtu modelowanego obszaru, aproksymacja szukanych zmiennych, numeryczne obliczanie całek przy wyznaczaniu wyrazów macierzy głównej (kwadratury), wykonanie operacji matematycznych na liczbach z określoną dokładnością. Ostatnie źródło błędów jest na

ogół do pominięcia w porównaniu z pozostałymi. Błędy aproksymacji kształtu można łatwo minimalizować przez dobór siatki elementów skończonych/brzegowych i dla nieskomplikowanych kształtów te błędy również są bardzo małe.

Błędy obliczeniowe metod FEM i BEM można zatem przedstawić jako sumę błędów aproksymacji zmiennych i błędów kwadratury:

$$\varepsilon \leq \varepsilon_A + \varepsilon_Q,$$

gdzie :

$$\varepsilon_A - \text{błędy aproksymacji, } \varepsilon_Q - \text{błędy kwadratury.} \quad (2-17)$$

W metodzie FEM funkcje występujące w kwadraturach na ogół są wielomianami o niskim stopniu i już przy małych rzędach zastosowane kwadratury są dokładne. Przy analizie błędów metody FEM rozważania więc można ograniczyć do analizy błędów aproksymacji. W przypadku metody BEM błędy kwadratur często są porównywalne z błędami aproksymacji.

Analiza błędów aproksymacji zmiennych w metodach FEM i BEM dla zagadnień opartych na równaniu Helmholtza była tematem prac [7,21-23,41,52,56,84,85]. Analizie błędów kwadratur metody BEM natomiast w literaturze poświęcono bardzo mało uwagi. W pracy [7] przedstawiono analizę błędów kwadratur dla metody kolokacyjno-wariacyjnej BEM (DBEM) dla dwuwymiarowych modeli. W wyniku przeprowadzonych rozważań stwierdzono, że dla metody DBEM w wersji **h** w postaci klasycznej błędy kwadratur nie mają wpływu na asymptotyczną zbieżność błędów obliczeń pod warunkiem, że rząd kwadratury jest większy lub równy stopniowi funkcji kształtu plus 1,5 ($Q \geq m+1,5$). Przedstawiona w pracy [7] analiza nie uwzględnia jednak zjawiska zmiany gładkości funkcji podcałkowej w zależności od odległości pomiędzy węzłem dla którego są wyznaczone współczynniki metody BEM a elementem po którym odbywa się całkowanie. Wyniki eksperymentów numerycznych pokazują ponadto, że warunek $Q \geq m+1,5$ nie zawsze jest wystarczającym kryterium.

W niniejszej rozdziale przeprowadzono analizę dla obszaru dwuwymiarowego błędów kwadratur metod kolokacyjno-wariacyjnej i wariacyjnej BEM (DBEM i IBEM) oraz porównano błędy aproksymacji zmiennych i błędy kwadratur dla metody DBEM. W wyniku tego wyprowadzono zależności pomiędzy rzędem kwadratury i stopniem wielomianów bazowych umożliwiające dobór rzędu kwadratury w taki sposób, aby błędy kwadratury były pomijalnie małe.

W przypadku metod FEM i BEM dla modeli zbudowanych z elementów o długości mniejszej od pewnej wartości h_0 błędy aproksymacji metod można przedstawić w postaci [84]:

$$\varepsilon_A \leq C^{(Metoda)} \cdot \inf \|p^e - p^h\|,$$

gdzie :

$$p^e - \text{funkcja szukana}, \quad (2-18)$$

$$p^h - \text{funkcja wyznaczona numerycznie},$$

$$C^{(Metoda)} - \text{współczynnik określony przez metodę}.$$

Zakres, w którym długość elementów h jest mniejsza od h_0 odpowiada zakresowi asymptotycznej zbieżności metody.

Współczynnik $C^{(Metoda)}$ nie zależy od częstotliwości i rozmiaru elementu brzegowego. W przypadku kolokacyjno-wariacyjnej metody elementów brzegowych DBEM człon $\inf \|p^e - p^h\|$ jest określony przez błąd interpolacji. Do modelowania zjawisk akustycznych metodą BEM jako funkcje interpolacyjne na ogół są wykorzystywane wielomiany Hermite'a lub Lagrange'a. Dla zagadnienia 2D błąd interpolacji funkcji tymi wielomianami jest określony równaniem [54]:

$$\varepsilon_I = \frac{p(x)^{(m+1)}}{(m+1)!} \cdot P_{m+1},$$

gdzie :

$$p(x)^{(m+1)} - \text{pochodna } (m+1) \text{ rzędu funkcji } p(x),$$

$$P_{m+1} = (x - x_0)^{s_0} (x - x_1)^{s_1} \dots (x - x_\tau)^{s_\tau} - \text{wielomian pomocniczy},$$

$$m+1 = \sum_{i=0}^{\tau} s_i, \quad (2-19)$$

$$x_i - \text{węzeł interpolacyjny } i,$$

$$m - \text{stopień wielomianu interpolacyjnego},$$

$$\tau + 1 - \text{liczba węzów interpolacyjnych},$$

$$s_i - \text{krotność węzłów}.$$

Ponieważ wszystkie węzły x_i wielomianu pomocniczego P_{m+1} leżą wewnątrz przedziału $0 \div h$, błąd interpolacji można przedstawić w postaci:

$$\varepsilon_I = \frac{p(x)^{(m+1)}}{(m+1)!} \cdot P_{m+1} \leq \frac{\max p(x)^{(m+1)}}{(m+1)!} \cdot h^{m+1}. \quad (2-20)$$

W przypadku zagadnień wibroakustycznych można dodatkowo założyć, że funkcja $p(x)$ jest funkcją oscylacyjną, tzn. $p(x) \sim e^{ikx}$. Pochodna $(m+1)$ rzędu funkcji $p(x)$ jest

zatem równa: $p^{(m+1)} = C^{(osc)} (j)^{m+1} k^{m+1} e^{jkx}$. Dla modeli 2D błąd aproksymacji w metodzie DBEM jest zatem określony równaniem:

$$\varepsilon_A \leq C^{(Metoda)} \cdot \inf \|p^e - p^h\| \leq \frac{C^{(Metoda)} C_{\max}^{(osc)}}{(m+1)!} \cdot (kh)^{m+1} = \frac{C_A}{(m+1)!} \cdot (kh)^{m+1}, \quad (2-21)$$

gdzie :

k - liczba falowa,

C_A - pewien współczynnik.

Błędy kwadratur w metodzie BEM powstają w wyniku numerycznego obliczenia całek podczas kompozycji macierzy głównej i podczas obliczania parametrów pola akustycznego. Wiąże się to z wyznaczaniem całek (2-8) i (2-9). W metodzie BEM do numerycznego obliczania całek najczęściej są stosowane kwadratury Gaussa. W pracy rozważania ograniczono do tej techniki, aczkolwiek podobne rozumowania można zastosować do innych kwadratur.

W celu obliczenia kwadratury Gaussa należy wykonać sumowanie funkcji pod całką z pewnymi wagami w n_G punktach (węzłach Gaussa), np. dla całki liniowej:

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n_G} W_i f(\zeta_i), \quad (2-22)$$

gdzie : W_i - waga, ζ_i - punkt z przedziału $0 \div h$.

Kwadratura jest rzędu Q , jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia mniejszego od Q oraz istnieje wielomian stopnia Q , dla którego reszta kwadratury (błąd kwadratury) jest różna od zera. Rząd liniowej kwadratury Gaussa jest równy podwójnej liczbie węzłów Gaussa: $Q=2n_G$.

Błąd liniowej kwadratury Gaussa rzędu Q z funkcji $f(x)$ można przedstawić w następującej postaci [54]:

$$\varepsilon_Q = \frac{f(x)^{(Q)}}{Q!} \cdot \int_0^h P_{n_G}^2(x) dx, \quad (2-23)$$

gdzie :

$f(x)^{(Q)}$ - pochodna rzędu Q z funkcji $f(x)$,

$P_{n_G} = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n_G})$ - wielomian pomocniczy.

Ponieważ wszystkie węzły x_i wielomianu pomocniczego P_{n_G} leżą wewnątrz przedziału $0 \div h$, błąd liniowej kwadratury można wyrazić jako:

$$\varepsilon_Q \leq \frac{\max f(x)^{(Q)}}{Q!} \cdot h^{Q+1}. \quad (2-24)$$

Charakterystyczną właściwością całkowanej funkcji w równaniach (2-8) i (2-9) jest silny związek pomiędzy gładkością funkcji podcałkowej a odległością pomiędzy węzłem w_i i elementem e_j po którym odbywa się całkowanie. Funkcja podcałkowa jest iloczynem funkcji kształtu i funkcji Greena. Gładkość funkcji zmniejsza się ze zmniejszeniem odległości pomiędzy węzłem w_i a elementem e_j . Dlatego dla węzłów leżących stosunkowo daleko od elementu e_j można stosować kwadraturę o mniejszym rzędzie niż dla węzłów znajdujących się blisko elementu. W praktyce rząd kwadratury Gaussa może być dobierany automatycznie w zależności od odległości węzeł-element.

W przypadku analizy 2D funkcja Greena jest funkcją Hankela zerowego rzędu drugiego rodzaju:

$$G(kr) = \frac{j}{4} H_0^{(2)}(kr) = \frac{j}{4} H_0^{(2)}(khr_h),$$

gdzie :

$$r = r_j - r_i,$$

r_h – wektor r o znormalizowanej długości względem h .

(2-25)

Dla małych wartości argumentu kr ($khr_h < 1$) funkcję Hankela można zastąpić funkcją logarytmiczną [1]:

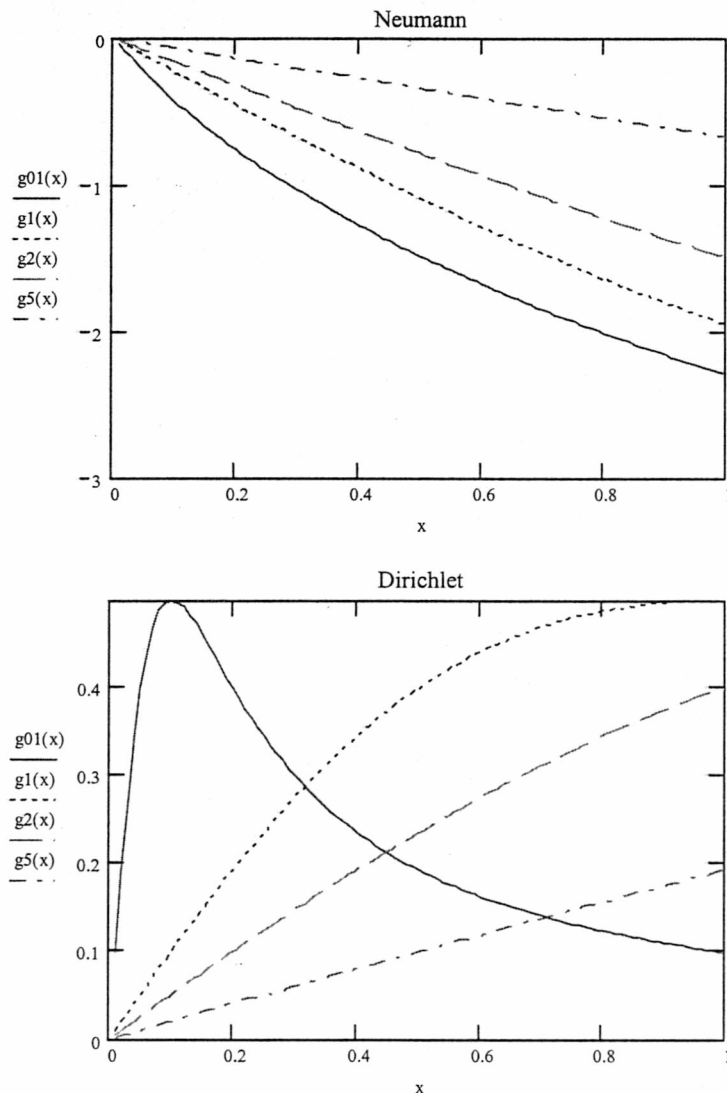
$$H_0^{(2)}(khr_h) \approx 1 - j \frac{2}{\pi} \ln(khr_h),$$
(2-26)

natomiast funkcję Greena przedstawić jako:

$$G(khr_h) \approx \frac{1}{2\pi} \ln(khr_h) + \frac{j}{4}.$$
(2-27)

Ponieważ drugi człon funkcji Greena jest stałą, w analizie błędów kwadratur wystarczy uwzględnić tylko człon $\frac{1}{2\pi} \ln(khr_h)$.

Kształt funkcji podcałkowej związanej z warunkami brzegowymi Neumanna i Dirichleta dla metody DBEM w przestrzeni dwuwymiarowego (2D) na przykładzie liniowej funkcji kształtu z wykorzystaniem wielomianów Lagrange'a, i różnych odległości węzeł-element ilustruje rysunek 7.



Rysunek 7. Kształt funkcji podcałkowej dla obszaru 2D i liniowej funkcji kształtu z wykorzystaniem wielomianów Lagrange'a dla $kh=0,1$. Odległość węzeł-element: g_{01} , g_1 , g_2 , g_5 – 1/10, 1, 2 i 5 długości elementu

Dla odległości węzeł-element równej lub większej od pięciu długości elementu funkcja podcałkowa ma kształt wielomianu interpolacyjnego. Dla odległości porównywalnej lub mniejszej od długości elementu, kształt funkcji podcałkowej znacznie się różni od funkcji kształtu.

Gładkość funkcji podcałkowej dla członu związanego z warunkami brzegowymi Neumanna zależy również od liczby falowej k , aczkolwiek przy spełnieniu warunku $kr < 1$, zależność ta jest bardzo słaba.

2.2.1 Metoda DBEM

W przypadku metody DBEM i przestrzeni 2D, wykorzystując zależność (2-27), równania (2-8) i (2-9) we współrzędnych prostokątnych przyjmują postać:

$$I_1^{(DBEM)}(r) = \frac{-1}{2\pi} \int_h \left(\aleph(x) \ln(k\sqrt{x^2 + y^2}) \right) dx$$

lub

$$I_2^{(DBEM)}(r) = \frac{-1}{2\pi} \int_h \left(\aleph(x) \frac{\partial}{\partial n} \ln(k\sqrt{x^2 + y^2}) \right) dx, \quad (2-28)$$

gdzie : $r^2 = x^2 + y^2$,

$\frac{\partial}{\partial n}$ jest pochodną normalną do elementu.

Pierwsza całka dotyczy warunków brzegowych Neumanna, druga Dirichleta. We współrzędnych prostokątnych pochodna $\partial/\partial n$ odpowiada pochodnej po współrzędnej y .

Wykorzystując postać naturalną wielomianu interpolacyjnego $\aleph(x)$, np. pierwszą całkę można przedstawić jako:

$$I_1^{(DBEM)}(r) = \frac{-1}{2\pi} \sum_{t=0}^m a_t \int_h \left(x^t \ln(k\sqrt{x^2 + y^2}) \right) dx = \frac{-1}{2\pi} \sum_{t=0}^m a_t \int_h \mathfrak{I}_{t_1} dx, \quad (2-29)$$

gdzie $\mathfrak{I}$ - funkcja podcałkowa.

Uwzględniając równanie (2-24) błędy kwadratury w metodzie DBEM określono w sposób następujący:

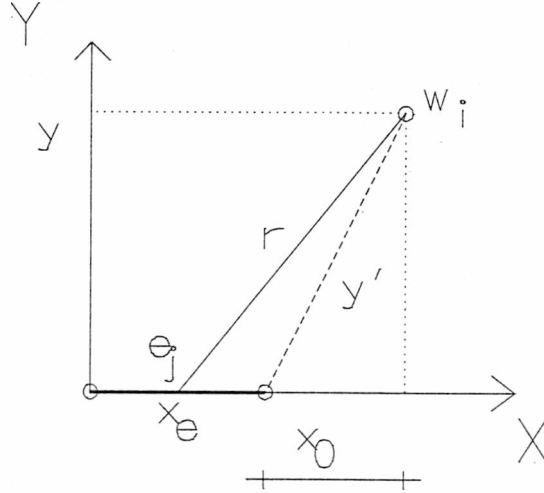
$$\varepsilon_Q \leq \frac{(m+1)}{2\pi} \max(a_t) \cdot \varepsilon_Q'(\mathfrak{I}_{1,2}') \leq \frac{(m+1)}{2\pi} \Lambda \cdot \frac{\max(\mathfrak{I}_{1,2}^{(Q)})}{Q!} \cdot h^{Q+1}, \quad (2-30)$$

gdzie Λ - pewien współczynnik.

Współczynnik Λ jest określony przez rodzaj zastosowanej funkcji kształtu i nie zależy od stopnia wielomianu interpolacyjnego m , rzędu kwadratury Q , długości elementu dyskretnego h .

Przy analizie błędów kwadratur posługiwano się lokalnym układem współrzędnych związanych z rozpatrywanym elementem, w którym początek układu należał do wybranego węzła elementu. Taką samą analizę można również przeprowadzić we współrzędnych globalnych, aczkolwiek wiąże się to ze zmniejszeniem jej przejrzystości, natomiast wynik końcowy jest taki sam. W zdefiniowanym układzie współrzędnych (rys.8) rzędne i odległość r są określone następująco:

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + x_e \text{ i } 0 \leq x_e \leq h \\
r &= \sqrt{(x_0 + x_e)^2 + y^2} = \sqrt{x_e^2 + 2x_0x_e + (y^2 + x_0^2)} = \sqrt{x_e^2 + 2x_0x_e + y'^2}.
\end{aligned} \tag{2-31}$$



Rysunek 8. Lokalny układ współrzędnych wykorzystany w analizie błędów

Przy $x_0 \gg h$ lub $x_0 \ll h$ i $y \geq h$ odległość r można wyrazić jako:

$$\begin{aligned}
x_0 &\gg h \\
r &= \sqrt{2x_0x_e + y'^2}, \\
x_0 &\ll h \text{ i } y \geq h \\
r &= \sqrt{x_e^2 + y'^2}.
\end{aligned} \tag{2-32}$$

W przypadku najbardziej niekorzystnym ze względu na kształt funkcji Greena, parametr r ma taką samą postać jak dla $x_0 \ll h$. Analizę błędów kwadratur wystarczy więc przeprowadzić dla przypadku $x_0 \ll h$. Funkcja podcałkowa $\mathfrak{I}_{i,2}$ związana z warunkami brzegowymi Neumanna i Dirichleta w rozważanych współrzędnych lokalnych ma następującą postać:

$$\mathfrak{I}_{i1} = x' \ln(k \sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{ i } \quad \mathfrak{I}_{i2} = x' \frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{2-33}$$

Największy błąd kwadratury z funkcji $\mathfrak{I}_1$ występuje zawsze dla członu wielomianu interpolacyjnego o największym stopniu, czyli o stopniu m . Największy błąd kwadratury z funkcji $\mathfrak{I}_2$ może zaistnieć dla członu wielomianu interpolacyjnego o stopniu mniejszym od m .

Do oszacowania błędów kwadratury metody DBEM rozpatrzono dwa przypadki: węzeł w_i położony jest w odległości o wiele większej niż długość elementu e_j ($y \gg h$) i

$kr < 1$ oraz węzeł w_i położony jest w odległości równej długości elementu e_j ($y \approx h$) i $kr < 1$.

W pierwszym przypadku ($y \gg h$ i $kr < 1$) funkcja $\mathfrak{I}_1$ związana z warunkami brzegowymi Neumanna oraz jej błąd ε_Q przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{i_1} &\approx \ln(ky)x', \\ \varepsilon_Q &\leq \frac{(m+1)}{2\pi} \Lambda \cdot \ln(ky) \frac{x^{m(Q)}}{Q!} \cdot h^{Q+1}.\end{aligned}\quad (2-34)$$

Dla $Q > m$ błąd kwadratury z funkcji $\mathfrak{I}_1$ jest równy zero, natomiast dla $Q \leq m$ jest określony jako:

$$\begin{aligned}\text{dla } Q = m \\ \varepsilon_Q &\leq \frac{(m+1)}{2\pi} \Lambda \cdot \ln(ky) \cdot h^{m+1}, \\ \text{dla } Q < m \\ \varepsilon_Q &\leq \frac{(m+1)(m)(m-1)\dots(m-Q+1)}{2\pi} \Lambda \cdot \ln(ky) \cdot \frac{h^{m+1}}{Q!}\end{aligned}\quad (2-35)$$

Błąd ε_Q zależy od stopnia wielomianu interpolacyjnego, liczby falowej, współrzędnej y , rzędu kwadratury i długości elementu brzegowego.

Błędy kwadratury z funkcji $\mathfrak{I}_1$ przy $y \gg h$ i $kr < 1$ dla $Q \leq m$ są wprost proporcjonalne do długości elementu brzegowego podniesionej do potęgi $m+1$.

Błąd ε_Q nie wpływa na zbieżność metody jeżeli jest on o wiele mniejszy niż błąd aproksymacji. Uwzględniając równanie (2-21) otrzymuje się następujące zależności:

$$\begin{aligned}\varepsilon_A &\gg \varepsilon_Q \text{ gdy} \\ \text{dla } Q = m \\ C_A &\gg \frac{(m+1) \cdot (m+1)!}{2\pi} \cdot \frac{\ln(ky)}{k^{m+1}} \cdot \Lambda \\ \text{dla } Q < m \\ C_A &\gg \frac{(m+1)(m)(m-1)\dots(m-Q+1) \cdot (m+1)!}{2\pi} \cdot \frac{\ln(ky)}{Q!k^{m+1}} \cdot \Lambda.\end{aligned}\quad (2-36)$$

Przy spełnieniu powyższych warunków błąd kwadratury będzie pomijalnie mały dla kwadratury o rzędzie mniejszym lub równym stopniu wielomianu interpolacyjnego. Należy jednak podkreślić, że relacje pomiędzy współczynnikami Λ i C_A , dla których podane warunki są spełnione, zależą również od liczby falowej i odległości węzeł-element. Dodatkowo na ogół nie są znane wartości współczynników Λ i C_A . W zastosowaniach praktycznych należy więc stosować kryterium $Q > m$.

Podobne rozważania przeprowadzono dla funkcji $\mathfrak{I}_2$ związanej z warunkami brzegowymi Dirichleta.

Dla $y \gg h$ i $kr < 1$ funkcja $\mathfrak{I}_2$ oraz jej błąd ε_Q są równe:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{t_2} &= \frac{x'}{y}, \\ \varepsilon_Q &\leq \frac{(m+1)}{2\pi} \cdot \frac{A}{y} \cdot \frac{x^{m^{(Q)}}}{Q!} \cdot h^{Q+1}.\end{aligned}\tag{2-37}$$

Błąd ε_Q zależy od stopnia wielomianu interpolacyjnego, współrzędnej y , rzędu kwadratury i długości elementu brzegowego, ale nie zależy od liczby falowej.

Można wykazać w podobny sposób jak dla funkcji $\mathfrak{I}_1$, że błędy kwadratury z funkcji $\mathfrak{I}_2$ przy $y \gg h$ i $kr < 1$ dla $Q \leq m$ są wprost proporcjonalne do długości elementu brzegowego podniesionej do potęgi $m+1$.

Dla $Q > m$ błąd kwadratury z funkcji $\mathfrak{I}_2$ jest równy zeru, natomiast dla $Q \leq m$ można określić następujące relacje pomiędzy parametrami A i C_A :

$$\begin{aligned}\varepsilon_A &\gg \varepsilon_Q \text{ gdy} \\ \text{dla } Q &= m \\ C_A &\gg \frac{(m+1)!}{2\pi} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{k^{m+1}} \cdot A \\ \text{dla } Q &< m \\ C_A &\gg \frac{(m+1)(m)(m-1)\dots(m-Q+1) \cdot (m+1)!}{2\pi} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{Q!} \cdot \frac{1}{k^{m+1}} \cdot A\end{aligned}\tag{2-38}$$

W drugim z rozważanych przypadków, gdy $y \approx h$ i $kr < 1$, funkcję $\mathfrak{I}_1$ związaną z warunkami brzegowymi Neumanna można przedstawić jako:

$$\mathfrak{I}_{t_1} = x' \ln(k\sqrt{x^2 + y^2}) = x' \ln\left(kh\sqrt{\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 1}\right) = x' \ln(kh) + \frac{1}{2}x' \ln\left(\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 1\right).\tag{2-39}$$

Błędy kwadratury z pierwszego członu można sklasyfikować w sposób podobny, jak dla przypadku $y \gg h$, natomiast do oszacowania błędów związanych z drugim członem należy poczynić pewne uproszczenia. W tym celu funkcję $\ln((x/h)^2 + 1)$ rozłożono w szereg Taylora w punkcie $x/h=0,5$, w środku przedziału zmienności zmiennej x/h . Ponieważ argument przekształcanej funkcji zmienia się w wąskim zakresie, tzn. w zakresie $1 \div 2$, funkcję tą z zachowaniem dużej dokładności można zastąpić pierwszymi trzema wyrazami szeregu Taylora. Drugi człon funkcji $\mathfrak{I}_1$ jest zatem równy:

$$dla \ln\left(\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 1\right) \approx -0,06 + 0,32\frac{x}{h} + 0,48\left(\frac{x}{h}\right)^2,$$

$$\mathfrak{I}'_{t_1} \approx \frac{1}{2}x^t \left(-0,06 + 0,32\frac{x}{h} + 0,48\left(\frac{x}{h}\right)^2\right) = -0,03x^t + \frac{0,16}{h}x^{t+1} + \frac{0,24}{h^2}x^{t+2}, \quad (2-40)$$

gdzie $\mathfrak{I}'_{t_1}$ drugi człon funkcji $\mathfrak{I}_{t_1}$.

Dla $Q > m+2$ błędy kwadratury z funkcji $\mathfrak{I}_1$ powinny być równe zero, dla $Q = m+2$ błędy te są określone jako:

$$\varepsilon_Q \leq \frac{0,12}{\pi} \cdot (m+1) \cdot A \cdot h^{m+1}, \quad (2-41)$$

natomiast dla $Q < m+2$ dochodzą dodatkowo pierwsze dwa człony.

Błąd kwadratury z funkcji $\mathfrak{I}_1$ przy $y \approx h$ i $kr < 1$ zależy od stopnia wielomianu interpolacyjnego, rzędu kwadratury i długości elementu brzegowego, natomiast nie zależy od liczby falowej. Dla $Q = m+2$ błąd jest wprost proporcjonalny do długości elementu brzegowego podniesionej do potęgi $m+1$.

Dla $Q \leq m+2$ można wyznaczyć zależności pomiędzy A i C_A w sposób analogiczny jak w przypadku warunku $y \gg h$, aczkolwiek w zastosowaniach praktycznych wygodniej jest stosować warunek $Q > m+2$.

Z kolei funkcję $\mathfrak{I}_2$, związaną z warunkami brzegowymi Dirichleta, przy $y \approx h$ i $kr < 1$ można przedstawić jako:

$$\mathfrak{I}_{t_2} = x^t \frac{y}{(x^2 + y^2)} = \frac{1}{h} x^t \frac{1}{\left(\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 1\right)}. \quad (2-42)$$

Funkcję $((x/h)^2 + 1)^{-1}$ można zastąpić jej rozwinięciem w szereg Taylora w punkcie $x/h = 0,5$. Ograniczając rozwinięcie do pierwszych trzech wyrazów uzyskano przybliżenie funkcji z maksymalnym błędem około 10% na końcach przedziału zmienności argumentu x/h ($0 \leq x/h \leq 1$). Przy takim przybliżeniu największy błąd kwadratury występuje dla członu stopnia m , natomiast funkcja $\mathfrak{I}_2$ jest równa:

$$dla \frac{1}{\left(\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 1\right)} \approx 1,09 - 0,512\frac{x}{h} - 0,128\left(\frac{x}{h}\right)^2,$$

$$\mathfrak{I}_{m_2} \approx \frac{1,09}{h}x^m - \frac{0,512}{h^2}x^{m+1} - \frac{0,128}{h^3}x^{m+2}. \quad (2-43)$$

Dla $Q > m+2$ błędy kwadratury z funkcji $\mathfrak{J}_2$ powinny być równe zero, dla $Q = m+2$ są określone przez:

$$\varepsilon_Q \leq \frac{0,64}{\pi} \cdot (m+1) \cdot \Lambda \cdot h^m, \quad (2-44)$$

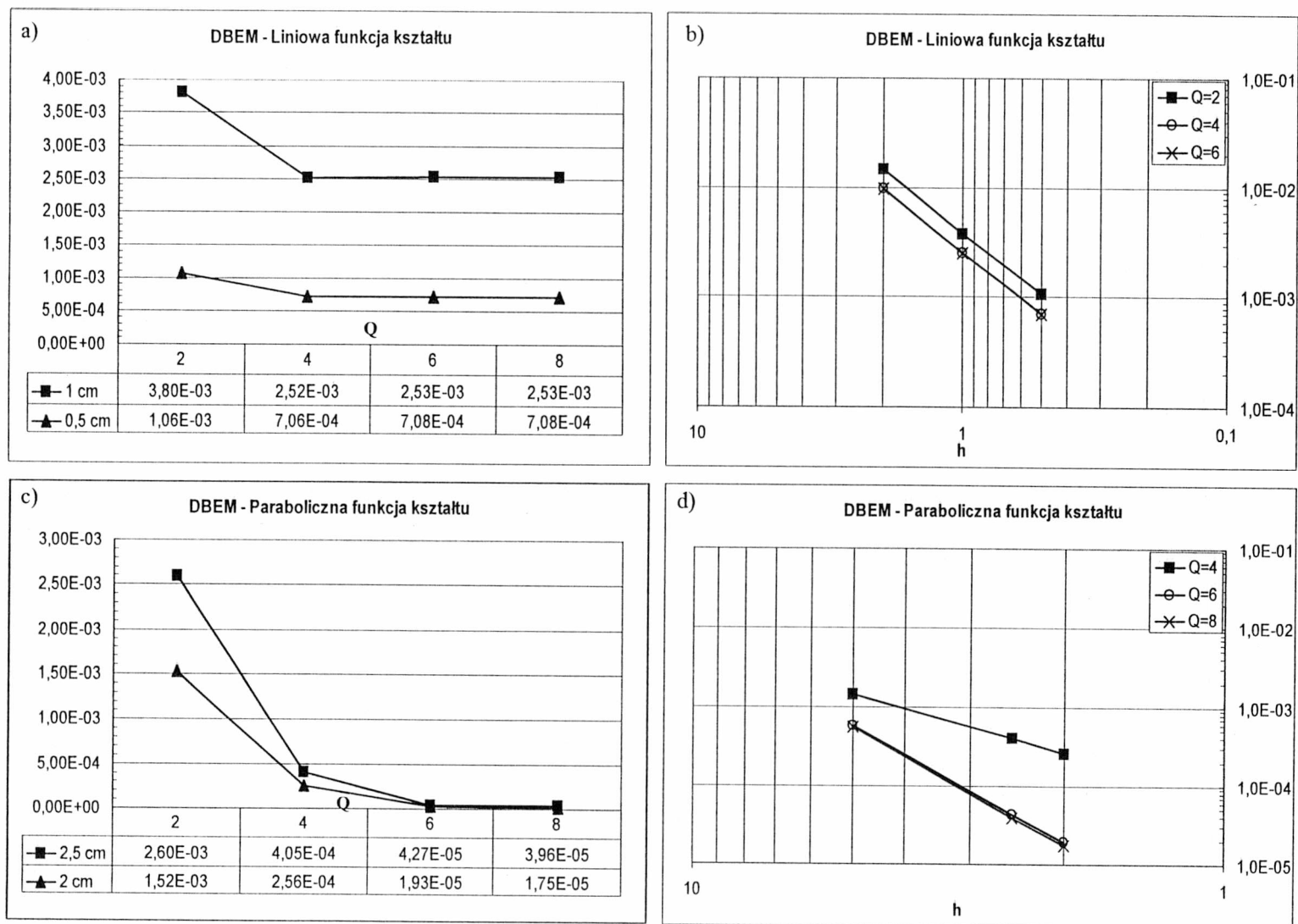
natomiast dla $Q < m+2$ zależą również od pozostałych członów funkcji $\mathfrak{J}_2$ rozłożonej w szereg Taylora.

Błąd kwadratury z funkcji $\mathfrak{J}_2$ przy $y \approx h$ i $kr < 1$ zależy od stopnia wielomianu interpolacyjnego, rzędu kwadratury i długości elementu brzegowego, natomiast nie zależy od częstotliwości. Dla $Q = m+2$ błąd jest wprost proporcjonalny do długości elementu brzegowego podniesionej do potęgi m .

Dla $Q \leq m+2$ można wyznaczyć zależności pomiędzy Λ i C_A w sposób analogiczny jak dla funkcji $\mathfrak{J}_1$.

Na podstawie przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że niezależnie od warunków brzegowych błędy kwadratury są pomijalnie małe przy spełnieniu następującego kryterium: przy dużych odległościach węzeł-element: $Q > m$ i przy odległościach węzeł-element porównywalnych z długością elementu h : $Q > m+2$. Wyznaczone kryteria można stosować zarówno w procesie kompozycji macierzy głównej DBEM, jak i przy obliczeniach parametrów pola akustycznego na podstawie rozkładu prędkości i ciśnienia akustycznego na brzegu modelowanego obiektu.

Wyniki rozważań teoretycznych porównano z wynikami obliczeń numerycznych. Zamodelowano kilka komór 2D o kształcie prostokąta i o różnych proporcjach wymiarów oraz komorę o kształcie koła. Wyniki obliczeń zilustrowano na przykładzie komory o przekroju prostokątnym o sztywnych ściankach i wymiarach 20×10 cm. Błędy obliczeniowe wyznaczono dla częstotliwości odpowiadającej podstawowemu akustycznemu rezonansowi komory. Wartość błędów liczono w węzłach siatki elementów brzegowych. Rysunki 9a÷9d ilustrują wartość błędów metody DBEM dla liniowej i parabolicznej funkcji kształtu z wykorzystaniem wielomianów Lagrange'a w zależności od rzędu kwadratury i długości elementu brzegowego.



Rysunek 9. Błędy obliczeniowe metody DBEM otrzymane w wyniku modelowania 2D komory o przekroju prostokąta i sztywnych ściankach

Na podstawie analizy otrzymanych wyników nasuwają się następujące wnioski.

Dla liniowej funkcji kształtu i kwadratury rzędu drugiego błędy kwadratur są porównywalne z błędami aproksymacji. Dla kwadratury rzędu czwartego lub wyższego błędy modelowania określone są wyłącznie przez błędy aproksymacji. Dla parabolicznej funkcji kształtu błędy modelowania określone są wyłącznie przez błędy aproksymacji dla kwadratur powyżej rzędu czwartego. Zatem jeżeli jest spełnione kryterium $Q > m+2$ błędy kwadratur zarówno dla liniowej, jak i parabolicznej funkcji kształtu są o wiele mniejsze od błędów aproksymacji.

Podane relacje pomiędzy wartością błędów a rzędem kwadratur zaobserwowano dla modeli komory prostokątnej zbudowanych zarówno z kilku elementów, w których na krótszą krawędź komory przypadają jeden element, jak i kilkunastu elementów brzegowych. Oznacza to, że podczas kompozycji macierzy głównej dominujący wpływ na błędy kwadratur mają błędy powstałe przy numerycznym całkowaniu pary węzeł-element oddalonych od siebie o odległość porównywalną lub mniejszą od długości elementu brzegowego.

Nachylenie krzywej zbieżności błędów w zależności od h dla liniowej funkcji kształtu jest równe $m+1$ i nie zależy od rzędu kwadratury, natomiast dla parabolicznej funkcji kształtu nachylenie jest równe $m+1$ przy spełnieniu warunku $Q > m+2$ i m w przeciwnym razie. Nachylenie krzywej zbieżności błędów aproksymacji w metodach BEM według (2-21) jest równe stopniowi wielomianu interpolacyjnego plus jeden: $m+1$. W przypadku komory o sztywnych ściankach o błędach kwadratury decydują błędy związane z funkcją $\mathcal{T}_2$, natomiast nachylenie krzywej zbieżności tych błędów dla $Q=m+2$ jest równe stopniowi wielomianu interpolacyjnego m . Relacja ta jest widoczna na przykładzie parabolicznej funkcji kształtu. Dla liniowej funkcji kształtu o nachyleniu krzywej zbieżności błędów decydują błędy aproksymacji nawet dla kwadratury rzędu drugiego ponieważ błędy tej kwadratury są około 2 razy mniejsze od błędów aproksymacji (rys.9). Dla porównania dla parabolicznej funkcji kształtu błędy kwadratury drugiego rzędu są około 60 razy większe od błędów aproksymacji (rys.9).

Wyniki eksperymentów numerycznych potwierdzają poprawność poczynionych uproszczeń i rozważań teoretycznych.

Otrzymany warunek $Q > m+2$ jest warunkiem mocniejszym od podanego w pracy [7].

2.2.2 Metoda IBEM

W przypadku metody IBEM w modelach 2D równanie (2-9) można przedstawić w postaci całki iterowanej:

$$\begin{aligned} I_{i,j}^{(IBEM)}(x_i, x_j) &= \int_{S_i} \int_{S_j} (\aleph(x_i) \aleph(x_j) J(x_i, x_j)) dx_i dx_j = \int_{S_i} \aleph(x_i) dx_i \cdot \int_{S_j, x_i} \aleph(x_j) J(x_i, x_j) dx_j \\ &= \int_{S_i} \aleph(x_i) dx_i \cdot \int_{S_j, x_i} f(x_i, x_j) dx_j = \int_{S_i} g(x_i, x_j) dx_i, \end{aligned} \quad (2-45)$$

gdzie: $f(x_i, x_j) = \aleph(x_j) J(x_i, x_j)$, $g(x_i, x_j) = \aleph(x_i) \cdot \int_{S_j, x_i} \aleph(x_j) J(x_i, x_j) dx_j$,

$J(x_i, x_j)$ – funkcja Greena lub jej pierwsza lub druga pochodna.

Reszta kwadratury jest określona jako suma reszty kwadratury funkcji $g(x_i, x_j)$ i ważonej reszty kwadratury funkcji $f(x_i, x_j)$ [54]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \mathfrak{R}(g(x_i, x_j)) + \sum_{i=1}^{n_{Gf}} W_i \mathfrak{R}(f(x_i, x_j)), \\ \text{gdzie } n_{Gf} &- \text{liczba punktów Gaussa w kwadraturze z funkcji } f(x_i, x_j), \\ W_i &- \text{współczynnik wagowy } i \text{ w kwadraturze z funkcji } g(x_i, x_j). \end{aligned} \quad (2-46)$$

Reszta kwadratury $\mathfrak{R}(f(x_i, x_j))$ jest określona w podobny sposób, jak błąd kwadratury w metodzie DBEM. Błędy kwadratury w metodzie IBEM są zatem zawsze większe niż w metodzie DBEM.

Reszta kwadratury $\mathfrak{R}(g(x_i, x_j))$ nie może być przedstawiona w prosty sposób, jej postać można jedynie oszacować dla przypadku gdy odległość r pomiędzy węzłem w_i i elementem e_j jest dużo większa od długości elementu brzegowego ($r \gg h$). W takiej sytuacji funkcja Greena nie zależy od współrzędnych x_i, x_j i może być wyciągnięta spod całki po elementach i, j . Funkcja $I^{(IBEM)}(x_i, x_j)$ jest zatem równa:

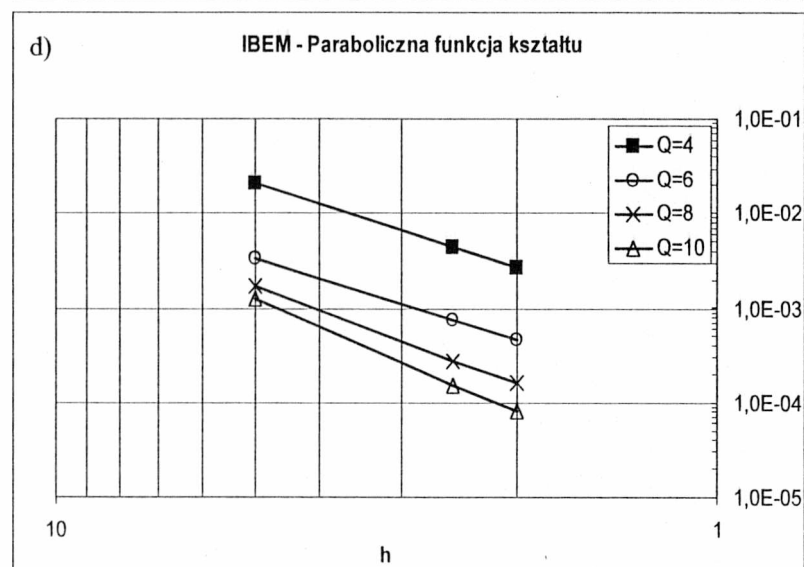
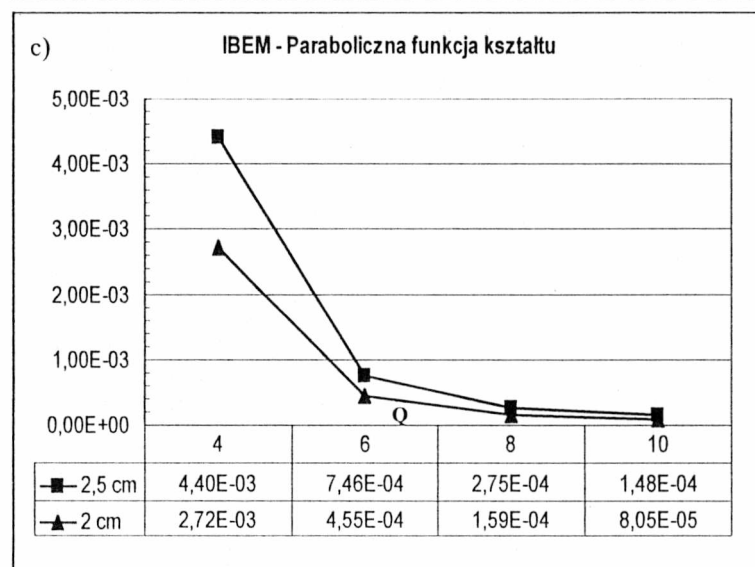
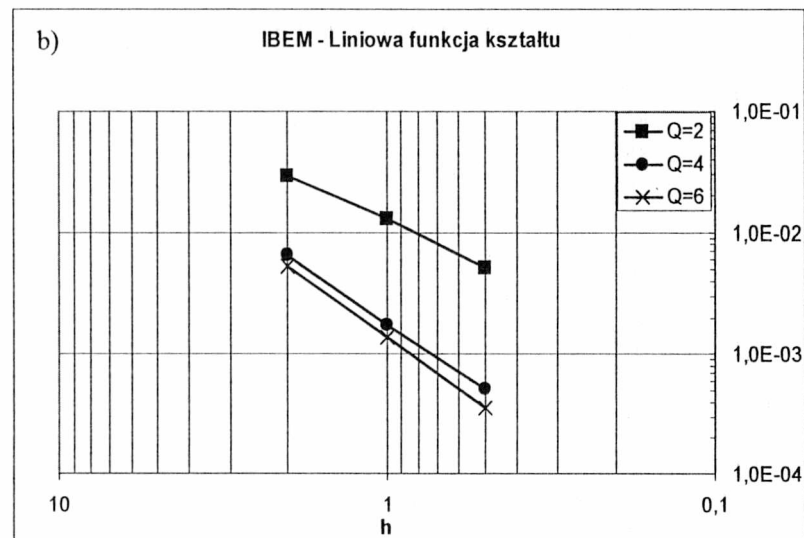
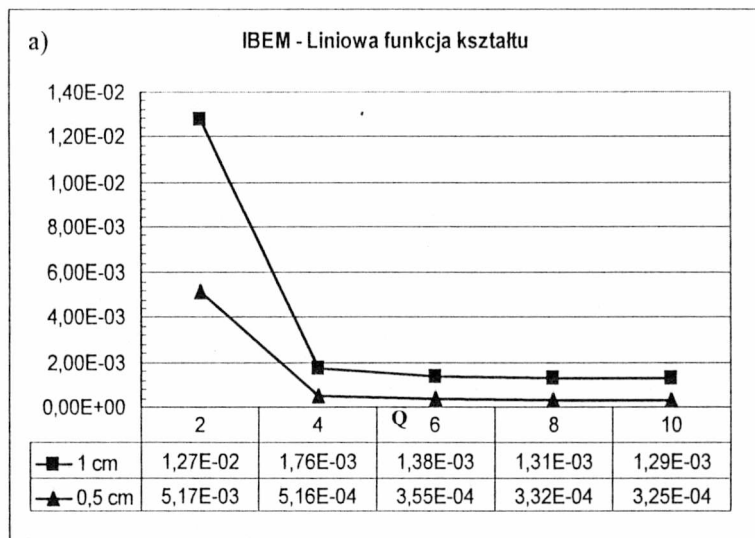
$$I_{i,j}^{(IBEM)}(x_i, x_j) = J(k) \cdot \int_{S_i} \aleph(x_i) dx_i \cdot \int_{S_j} \aleph(x_j) dx_j, \quad (2-47)$$

gdzie: $J(k)$ – funkcja Greena lub jej pierwsza lub druga pochodna.

Dla $Q > m$ reszta kwadratury z rozważanych funkcji jest równa zero.

Ponieważ dla większości modeli BEM błędy kwadratur są określone przez błędy dla elementów położonych w odległości równej lub mniejszej niż długość elementu brzegowego, kryterium $Q > m$ na ogół jest niewystarczające.

Rysunek 10 ilustrują błędy obliczeń numerycznych metodą IBEM dla komory o przekroju prostokąta i sztywnych ściankach oraz wymiarach 20×10 cm.



Rysunek 10. Błędy obliczeniowe metody IBEM otrzymane w wyniku modelowania 2D komory o przekroju prostokąta i sztywnych ściankach

Dla liniowej funkcji kształtu błędy kwadratur są o wiele mniejsze od błędów aproksymacji dla kwadratury co najmniej 6 rzędu. Nachylenie krzywej zbieżności błędów jest określono przez błędy aproksymacji dla kwadratur rzędu większego lub równego 4. Dla parabolicznej funkcji kształtu błędy kwadratur są pomijalnie małe dopiero dla kwadratury rzędu 10, natomiast są równe błędom aproksymacji dla kwadratury rzędu 8. Nachylenie krzywej zbieżności błędów odpowiada zbieżności błędów aproksymacji również dla kwadratury rzędu co najmniej 10.

Wyniki przeprowadzonych obliczeń metodą IBEM niestety nie można uogólnić na dowolny przypadek. Dla podobnych modeli zbudowanych z wykorzystaniem liniowych lub parabolicznych elementów brzegowych relacja pomiędzy błędami kwadratury i błędami aproksymacji będzie jednak zbliżona do podanej. W przypadku gdy punkt dla którego jest wyznaczana całka I_{ij} jest położony w odległości o wiele większej od długości elementu brzegowego po którym odbywa się całkowanie można stosować kryterium $Q > m$. Kryterium to najczęściej stosuje się przy obliczeniu pola akustycznego w polu dalekim na podstawie znajomości rozkładu ciśnienia i prędkości akustycznej na powierzchni modelowanego układu.

Porównując wyniki modelowania uzyskane metodą DBEM i IBEM stwierdzono, że błędy kwadratur o takich samych rzędach w metodzie DBEM są mniejsze niż w IBEM. W metodzie IBEM zatem należy stosować kwadratury o większym rzędzie niż w metodzie DBEM.

2.3 Wnioski

Metody DBEM, IBEM i FEM można porównywać ze względu na ich koszt obliczeniowy, błędy obliczeniowe lub rozmiar pamięci niezbędny do przechowywania macierzy głównej. Porównanie metod można również wykonać ze względu na ich efektywność, która jest określona przez trzy wymienione parametry.

Porównując metody DBEM i IBEM dla modeli 2D zbudowanych z liniowych i parabolicznych elementów na przykładzie obszaru o przekroju prostokąta można stwierdzić co następuje.

Dla elementów liniowych błędy obliczeniowe są określone przez błędy aproksymacji zmiennych i są tego samego rzędu w metodach DBEM i IBEM dla kwadratury rzędu, odpowiednio, czwartego i szóstego (kwadratura Gaussa o dwóch i trzech węzłach). Koszty obliczeniowe metody IBEM dla kwadratury o trzech węzłach

są mniejsze od kosztów obliczeniowych metody DBEM dla kwadratury o dwóch węzłach dla modeli zbudowanych co najmniej z 720 elementów. Rozmiar pamięci niezbędnej do przeprowadzenia obliczeń dla tak małych modeli jest równy kilkuset kB i nie jest istotnym ograniczeniem. Efektywność metod można więc ocenić na podstawie ich błędów i kosztów obliczeniowych. Efektywność metody IBEM więc jest większa od DBEM tylko dla modeli dużych.

Dla modeli zbudowanych z elementów parabolicznych błędy obliczeniowe są określone przez błędy aproksymacji i są tego samego rzędu w metodach DBEM i IBEM dla kwadratury rzędu, odpowiednio, szóstego i dziesiątego (rys. 9 i 10). Odpowiada to kwadraturze Gaussa o 3 i 5 węzłach. Przy takich kwadraturach koszty obliczeniowe metod są jednakowe dla modeli zbudowanych z 236 elementów. Dla mniejszych modeli metoda DBEM jest szybsza od IBEM. Rozmiar pamięci niezbędnej do przeprowadzenia obliczeń dla tak małych modeli jest równy kilkuset kB i nie jest istotnym ograniczeniem. Efektywność metody DBEM jest zatem większa od efektywności IBEM dla małych modeli, modeli o co najwyżej 236 elementach parabolicznych.

Analizę błędów kwadratur metod BEM przeprowadzono tylko dla obszarów 2D. Dla obszarów 3D metody DBEM i IBEM porównano tylko ze względu na ich koszty obliczeniowe i rozmiar pamięci obliczeniowej. Wyniki porównania przedstawiono w rozdziale 2.1.3.1. Ogólnie można stwierdzić, że dla kwadratur o więcej niż 4 węzłach (kwadratury Gaussa powyżej 4 rzędu) efektywność metody IBEM jest większa od metody DBEM dla modeli średnich i dużych, tzn. dla modeli zbudowanych z co najmniej 600 liniowych i 300 parabolicznych elementów brzegowych.

Ze względu na znaczne różnice w wartościach błędów aproksymacji zmiennych dla różnych implementacji metody FEM porównanie efektywności metod FEM i BEM wykonano ze względu na ich koszty obliczeniowe i rozmiar pamięci niezbędny do przeprowadzenia obliczeń.

W przypadku obszarów 2D metoda FEM jest szybsza od BEM dla małych modeli, modeli do 88/484 (DBEM/FEM) i 116/841 (IBEM/FEM) brzegowych/skończonych elementów liniowych dla kwadratur o 2 węzłach oraz modeli do 48/288 (DBEM/FEM) i około 60/220 (IBEM/FEM) brzegowych/skończonych elementów parabolicznych dla kwadratur o 3 węzłach. Pamięć niezbędna do przechowywania macierzy składowych dla podanych modeli wynosi od kilkudziesięciu do kilkuset kB i może być pominięta w analizie efektywności. Efektywność metod BEM jest zatem większa niż FEM dla modeli średnich i dużych.

W przypadku obszarów 3D zbudowanych z liniowych elementów dla kwadratur o $4 \div 16$ węzłach metody BEM są szybsze od FEM tylko dla bardzo dużych modeli. Na przykład dla kwadratury o 4 węzłach koszty obliczeniowe metod są jednakowe dla modelu DBEM o co najmniej 3174 czworokątnych lub 6912 trójkątnych elementów brzegowych i modelu FEM o 12167 czworokątnych i 27648 trójkątnych elementach skończonych. Wielkość podanych modeli DBEM mieści się w zakresie $77 \div 91$ MB, modeli FEM w zakresie $146 \div 186$ MB. Podobne wartości uzyskuje się dla metody IBEM, aczkolwiek wielkość modeli jest mniejsza niż dla DBEM. Koszty obliczeń metod BEM są zatem mniejsze od kosztów metody FEM tylko dla modeli bardzo dużych. Efektywność metody FEM jest natomiast większa niż BEM dla modeli małych, średnich i dużych. Dla modeli dużych przy wyborze metody należy uwzględnić również dostępny rozmiar pamięci komputera.

W przypadku modeli 3D zbudowanych z elementów parabolicznych dla kwadratur o $4 \div 16$ węzłach metody BEM są szybsze od FEM dla dużych modeli, modeli BEM o co najmniej 1019 czworokątnych lub 2352 trójkątnych elementów brzegowych, co odpowiada modelom FEM o 2197 czworokątnych i 5488 trójkątnych elementach skończonych. Rozmiar podanych modeli dla metody IBEM wynosi, odpowiednio, 35 i 84 MB, dla metody FEM 82 i 190 MB. Dla małych i średnich modeli zbudowanych z elementów parabolicznych efektywność metody FEM jest zatem większa niż BEM, natomiast dla modeli dużych jest mniejsza.

3 Modelowanie pola akustycznego w komorach z uwzględnieniem impedancyjnych warunków brzegowych

Modelowanie pola akustycznego w obszarach ograniczonych jest stosowane przy analizie i optymalizacji układów akustycznych. Analiza oddziaływania impedancyjnych warunków brzegowych na właściwości pola ciśnienia i prędkości akustycznej umożliwia dokładniejsze poznanie zjawisk akustycznych zachodzących wewnątrz komory oraz projektowanie układów akustycznych o wymaganych parametrach. W akustyce małych pomieszczeń i obudów głośnikowych szczególnie ważnym zagadnieniem jest wpływ impedancyjnych warunków brzegowych na nierównomierność i stopień dyfuzyjności pola akustycznego.

Właściwości pola akustycznego w obszarach zamkniętych na ogół są określane na podstawie znajomości pola ciśnienia akustycznego. Do całościowej oceny pola akustycznego w komorach dodatkowo niezbędna jest znajomość wektorowego pola natężenia dźwięku bądź prędkości akustycznej. W pracach [38,92] podano metody pomiaru i zobrazowania wektorowego pola natężenia dźwięku na przykładzie obszarów o prostej geometrii. W pracach tych wykazano, że znajomość pola wektorów natężenia dźwięku istotnie wzbogaca wiedzę na temat zjawisk akustycznych zachodzących w analizowanych obszarach. W komorach bez strat na ogół nie występuje przepływ energii akustycznej, więc natężenie dźwięku jest równe zero. Do analizy pola akustycznego w komorach, szczególnie jego nierównomierności, lepiej jest zatem stosować prędkość akustyczną niż natężenie dźwięku. Na podstawie znajomości pola ciśnienia i prędkości akustycznej można również łatwo wyznaczyć pole natężenia dźwięku.

Pole akustyczne w obszarach ograniczonych można modelować metodami FEM i BEM. W metodzie FEM dyskretyzacji podlega cały modelowany obszar, w metodzie BEM tylko jego brzeg. Pomimo tego, w poprzednim rozdziale wykazano, że efektywność modelowania pola akustycznego metodą FEM jest większa niż metodami BEM dla małych modeli 2D oraz małych, średnich i dużych modeli 3D.

Podczas modelowania pola akustycznego w komorach często jest stosowana analiza modalna, polegająca na wyznaczaniu częstotliwości własnych i odpowiadających im rozkładów pola akustycznego wewnątrz komory. Do analizy modalnej komór najczęściej jest stosowana metoda FEM. Metoda BEM w postaci klasycznej, ze względu na zależność macierzy głównej od liczby falowej, nie może być stosowana do

wyznaczania drgań własnych. Istnieją jednak pewne modyfikacje metody BEM umożliwiające taką analizę [6,9,27,62,68].

Ze względu na efektywność metod oraz trudności z zastosowaniem metody BEM do analizy modalnej w niniejszym rozdziale analizę pola akustycznego wewnątrz komór przeprowadzono głównie z zastosowaniem metody FEM. Rozważania ograniczono do modeli z warunkami brzegowymi o charakterze impedancji akustycznej. Rozpatrzono i porównano przypadek komór ze stratami i komór bez strat.

3.1 Wyznaczanie częstotliwości rezonansowych i pola ciśnienia akustycznego w komorach metodą FEM

Częstotliwości rezonansów akustycznych w obszarze ograniczonym wyznacza się z równania Helmholtza. Niezerowym rozwiązaniem równania Helmholtza są funkcje własne ϕ_i dla dyskretnych wartości pulsacji rezonansowych ω_i opisujące pole akustyczne w analizowanym obszarze. Dla dyskretnych układów funkcje własne ϕ_i stają się wektorami własnymi.

Przy wyznaczeniu częstotliwości rezonansowych i wektorów własnych metodą FEM układ równań (2-1) sprowadza się do postaci:

$$[K + j\omega C - \omega^2 M]\{x\} = 0, \quad (3-1)$$

gdzie: $K, M, i C$ - macierze sztywności, masy i strat,
 x - wektor ciśnienia lub prędkości akustycznej.

Dla układów bez strat macierz C jest macierzą zerową, a częstotliwości drgań własnych są liczbami rzeczywistymi. Natomiast częstotliwości drgań własnych układu ze stratami są liczbami zespolonymi i mogą być przedstawione w postaci:

$$\underline{\omega}_i = \omega_i + j\delta_i, \quad (3-2)$$

gdzie: ω_i - część rzeczywista pulsacji rezonansowej i układu z tłumieniem,
 δ_i - dekrement tłumienia dla rezonansu i .

Rezonans ciśnienia akustycznego w układzie ze stratami wystąpi dla pulsacji:

$$\omega_{r_i} = \sqrt{\omega_i^2 - \delta_i^2}. \quad (3-3)$$

Układ równań (3-1) rozwiązuje się metodami QR, Lanczosa, iteracji odwrotnych lub innymi [54,66,71,72]. W przypadku modeli ze stratami stosuje się algorytmy o większym stopniu skomplikowania i o dużo większych kosztach obliczeniowych [31,72].

Dla modeli ze stratami układ równań (3-1) można również rozwiązać metodą kombinacji liniowej wektorów własnych modelu bez strat [71]. W metodzie tej wektory własne modelu ze stratami są przedstawiane jako kombinacja liniowa wektorów własnych modelu bez strat, które wyznacza się metodą Lanczosa, iteracji odwrotnych lub inną:

$$\{\phi_c\} = [\Phi_u]\{a\},$$

gdzie: ϕ_c - wektor własny dla modelu ze stratami,

$$[\Phi_u] = [\phi_{u_1}, \phi_{u_2}, \dots, \phi_{u_v}]$$
 - baza v wektorów własnych dla modelu bez strat,

a - wektor zespolonych współczynników,

(3-4)

natomiast układ równań (3-1) sprowadza się do mniejszego układu równań:

$$[K' + j\omega C' - \omega^2 M']\{a\} = 0,$$

gdzie: K' , M' , i C' - macierze sztywności, masy i strat

z zastosowaniem współrzędnych modalnych.

(3-5)

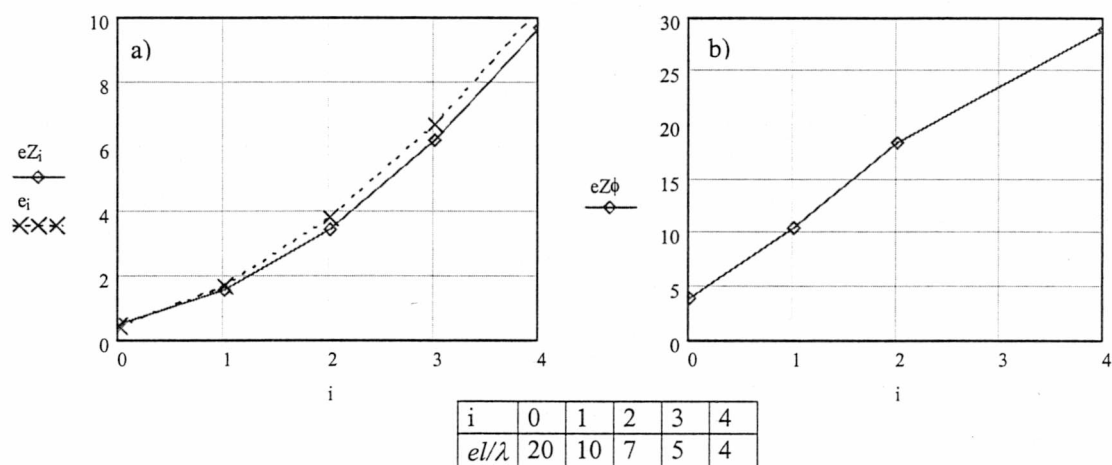
Układ równań (3-5) przekształca się do takiej postaci, dla której metodą QR wyznacza się częstotliwości drgań własnych i macierz współczynników a [71], na podstawie których oblicza się wektory własne ϕ_{ci} dla modelu ze stratami.

Podstawową zaletą metody kombinacji liniowej wektorów własnych jest możliwość wykorzystania istniejących, wydajnych algorytmów wyznaczania wektorów własnych dla modelu bez strat.

W pracy do modelowania komór ze stratami zastosowano metodę kombinacji liniowej wektorów własnych modelu bez strat. W wykorzystanej metodzie baza wektorów własnych modelu bez strat jest wyznaczana metodą iteracji odwrotnych. W celu oszacowania dokładności zastosowanej metody przeprowadzono analizę jej błędów na przykładzie komory prostopadłościennej. Błędy wyznaczono dla dwuwymiarowej komory o wymiarach 40×12 cm, w której na jednej z krótszych ścianek określono impedancyjny warunek brzegowy, zaś pozostałe ścianki są sztywne. Błędy metody numerycznej obliczono poprzez porównanie wyników modelowania z wynikami rozwiązania analitycznego. Rysunki 11a i 11b ilustrują błędy obliczenia częstotliwości rezonansowych i ciśnienia akustycznego dla różnej liczby elementów skończonych przypadających na jedną długość fali akustycznej (el/λ). Dla porównania na rysunku 11a podano błędy wyznaczenia częstotliwości rezonansowych modelu bez strat metodą iteracji odwrotnych. Błędy wyznaczenia ciśnienia akustycznego dla modelu bez strat metodą iteracji odwrotnych dla siatek elementów skończonych o rozpatrywanych

gęstościach są o kilka rzędów mniejsze od błędów metody kombinacji liniowej wektorów własnych i nie są podane na rysunku 11b.

Na podstawie przeprowadzonej analizy stwierdzono, że błędy wyznaczania częstotliwości rezonansowych metodą iteracji odwrotnych i metodą kombinacji liniowej wektorów własnych modelu bez strat są praktycznie jednakowe. Dla siatek o gęstości $5 \div 7 \text{ el}/\lambda$ błędy te wynoszą $3 \div 7 \%$. Błędy obliczenia ciśnienia akustycznego wewnątrz komory ze stratami metodą kombinacji liniowej wektorów własnych modelu bez strat dla siatek dyskretnej o gęstości $5 \div 7 \text{ el}/\lambda$ są równe $18 \div 24 \%$. Dla siatek o gęstości $20 \text{ el}/\lambda$ błędy te wynoszą około 4% . Przy podwojeniu gęstości siatki elementów skończonych błędy maleją w przybliżeniu o połowę. Przy wyznaczaniu pola ciśnienia akustycznego wewnątrz komory ze stratami metodą kombinacji liniowej wektorów własnych modelu bez strat należy więc stosować siatki o gęstości minimum $20 \text{ el}/\lambda$.



Rysunek 11. Błędy obliczenia częstotliwości rezonansowych eZ i ciśnienia akustycznego wewnątrz komory $eZ\phi$ metodą kombinacji liniowej wektorów własnych modelu bez strat oraz błędy obliczenia częstotliwości rezonansowych e dla modelu bez strat metodą iteracji odwrotnych dla różnej liczby elementów skończonych przypadających na jedną długość fali. Wartość błędów podano w procentach

3.2 Wyznaczanie pola prędkości akustycznej w komorach

Pole prędkości akustycznej w komorach może być wyznaczone metodą FEM, BEM lub inną metodą numeryczną. Przedstawione rozważania i wyniki dotyczą głównie metody elementów skończonych.

W metodzie FEM prędkość akustyczną wyznacza się bezpośrednio z układu równań (2-1) lub poprzez przetworzenie wartości ciśnień akustycznych w węzłach. Pierwsza technika wymaga takiego sformułowania metody FEM, w którym zmiennymi w

węzłach są zarówno ciśnienie, jak i prędkość akustyczna. Powoduje to znaczne zwiększenie liczby stopni swobody modelu, np. czterokrotne w przypadku modeli 3D, oraz konieczność stosowania funkcji kształtu wyższego rzędu. Dlatego na ogół jest stosowana technika przetworzenia ciśnienia akustycznego w węzłach. W takim przypadku prędkość akustyczna jest wyznaczana w wybranych punktach elementów skończonych na podstawie czego jest ekstrapolowana jej wartość w węzłach. Jedną z odmian tej techniki jest technika numerycznego różniczkowania ciśnienia akustycznego w węzłach. Technika ta może być stosowana w procesie przetwarzania pola ciśnienia akustycznego nawet przy braku informacji dotyczących zastosowanej metody, zadanych warunków brzegowych i sposobu aproksymacji zmiennych.

Prędkość akustyczna w wybranym kierunku jest określona jako pochodna ciśnienia:

$$g(x) = \frac{j}{\omega \rho_0} \cdot \frac{\partial p(x)}{\partial x}. \quad (3-6)$$

Prędkość akustyczna może być aproksymowana jako dyskretna pochodna ciśnienia akustycznego w punktach (węzłach) lub jako różniczka numeryczna funkcji rozkładu ciśnienia, funkcji interpolowanej na podstawie obliczonych wartości ciśnienia akustycznego w węzłach. Metodę interpolacji należy dobierać ze względu na oczekiwany kształt pola ciśnienia akustycznego. Najbardziej uniwersalną metodą wydaje się być metoda interpolacji funkcjami sklejanymi określonego stopnia. Ze względu na konieczność zachowania ciągłości pierwszej pochodnej interpolowanej funkcji należy użyć funkcji sklepanych z zastosowaniem wielomianów co najmniej drugiego stopnia.

Wyznaczając dyskretną pochodną w węzłach można wykorzystać techniką jedno- lub dwustronnego różniczkowania [90]:

$$g_{1_i} = \frac{j}{\omega \rho_0} \cdot \frac{p_{i+1} - p_i}{h} - \text{jednostronna (prawostronna) pochodna dyskretna w węzle } i, \quad (3-7)$$

$$g_{2_i} = \frac{j}{\omega \rho_0} \cdot \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2h} - \text{dwustronna pochodna dyskretna w węzle } i,$$

$$\text{gdzie : } p_i - \text{ciśnienie akustyczne w węzle } i, \quad (3-8)$$

h - długość elementu dyskretnego.

W celu oszacowania błędów obliczenia prędkości akustycznej techniką dyskretniej pochodnej przeanalizowano przykład, w którym parametry pola akustycznego w modelowanym obszarze są opisane funkcjami trygonometrycznymi sinus lub cosinus.

Przypadek ten odpowiada polu akustycznemu w komorach prostopadłościennych o sztywnych ściankach lub ze ściankami o jednorodnej impedancji akustycznej.

Błąd względny obliczenia dyskretnej pochodnej w punktach techniką jedno- i dwustronną z funkcji $p(x)=\cos(2\pi x/\lambda)$ jest określony zależnościami:

pochodna jednostronna

$$\varepsilon_1(x) = \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{\sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)}{2\pi \frac{h}{\lambda}} - 1 \right) + \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cdot \frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)}{2\pi \frac{h}{\lambda}}, \quad (3-9)$$

pochodna dwustronna

$$\varepsilon_2(x) = \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{\sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)}{2\pi \frac{h}{\lambda}} - 1 \right).$$

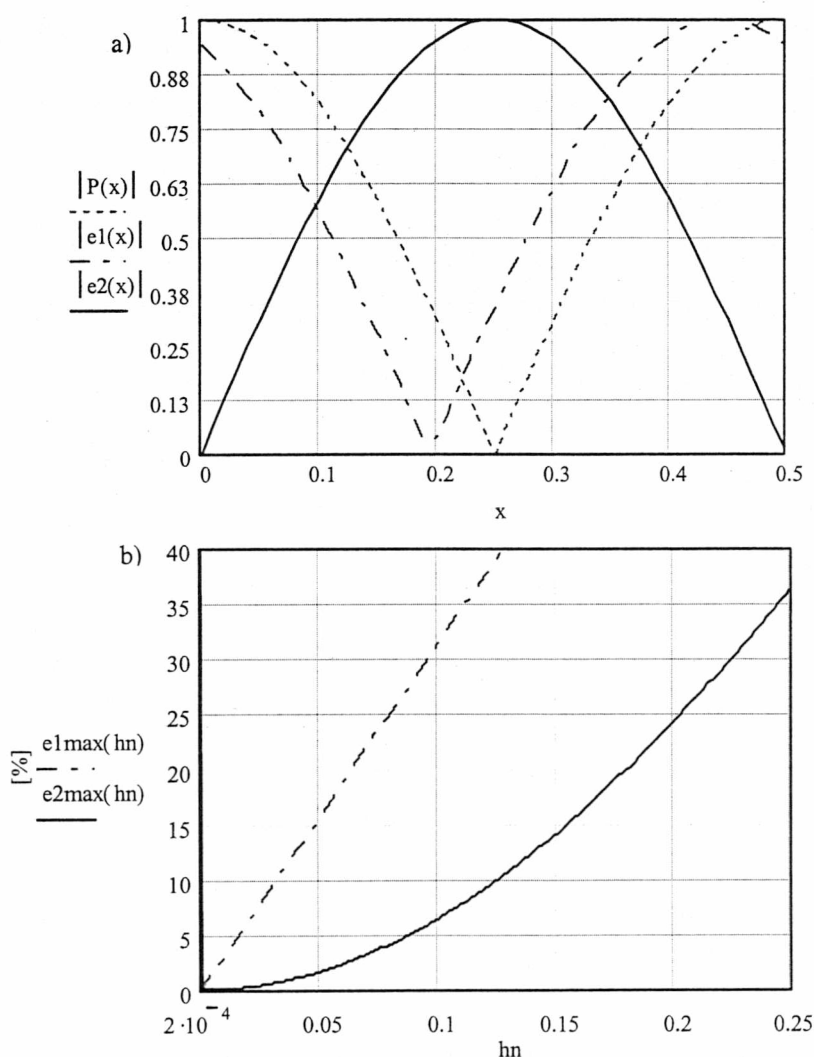
Wartość maksymalna błędu względnego pochodnej dwustronnej w analizowanym obszarze jest równa:

$$\varepsilon_{2\max} = \frac{\sin\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)}{2\pi \frac{h}{\lambda}} - 1 \approx -\frac{1}{6} \left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)^2. \quad (3-10)$$

Dla małych wartości parametru h ($h \ll \lambda$), rozwijając funkcje $\sin(2\pi h/\lambda)$ i $\cos(2\pi h/\lambda)$ w szereg Taylora i uwzględniając wyrazy najwyższej z kwadratem zależne od argumentu, względny błąd różniczkowania jednostronnego można uprościć do postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= \frac{1}{2} \left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right), \\ \varepsilon_{1\max} &= \frac{1}{2} \left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (3-11)$$

Rysunek 12a ilustruje błąd obliczenia prędkości akustycznej jako funkcję współrzędnej punktu różniczkowania dla podstawowego rezonansu komory o sztywnych ściankach. Na rysunku podano rozkład ciśnienia akustycznego wzdłuż osi komory ($P(x)$) oraz rozkład błędów dwustronnej i jednostronnej pochodnej dyskretnej dla siatki dyskretnej zbudowanej z elementów o długości $h=\lambda/6$. Wartość błędów znormalizowano względem ich wartości maksymalnej. Rysunek 12b przedstawia wartość maksymalną błędu względnego w zależności od długości elementu dyskretnego, znormalizowanej względem długości fali $h_n=h/\lambda$.



Rysunek 12. Błąd wyznaczenia prędkości akustycznej techniką jednostronnej e_1 i dwustronnej e_2 pochodnej dyskretnej dla komory o sztywnych ściankach jako funkcję (a) -współrzędnej punktu różniczkowania i (b) - znormalizowanego kroku różniczkowania

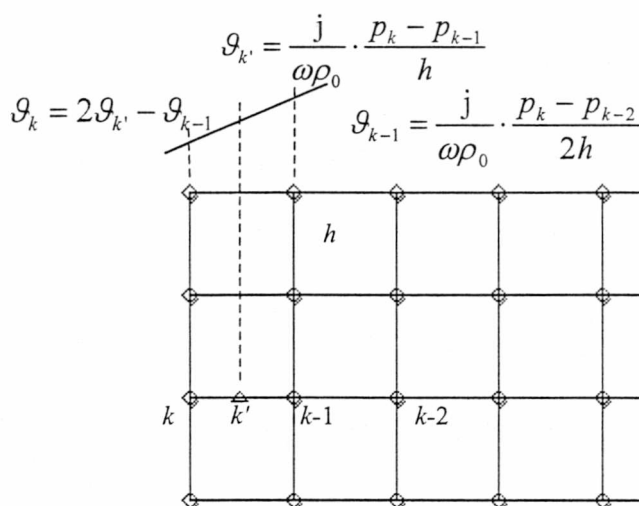
Wartość maksymalna błędu obliczenia prędkości akustycznej techniką dwustronnej pochodnej dyskretnej występuje zawsze w punktach dla których wartość ciśnienia akustycznego jest najmniejsza. Kształt krzywej błędów techniki jednostronnej pochodnej dyskretnej zależy od długości kroku różniczkowania i dla jego małych wartości jest określony przez krzywą rozkładu ciśnienia akustycznego.

Wartość maksymalna błędu względnego dwustronnej pochodnej dyskretnej rośnie w przybliżeniu z kwadratem długości elementu dyskretnego (równanie (3-10)). Wartość maksymalna błędu względnego jednostronnej pochodnej dyskretnej zależy liniowo od długości elementu dyskretnego (równanie (3-11)).

W celu wyznaczenia prędkości akustycznej na podstawie rozkładu ciśnienia akustycznego techniką pochodnej dyskretnej z dokładnością około 5% należy

zastosować siatkę o gęstości 12 elementów na długość fali w przypadku dwustronnej pochodnej dyskretnej i około 60 elementów na długość fali w przypadku jednostronnej pochodnej dyskretnej. Przeprowadzone rozważania dotyczą pól akustycznych parametry których opisane są funkcjami trygonometrycznymi sinus lub cosinus, jednakże wnioski ogólne powinny być prawdziwe również dla innych komórek o kształtach zbliżonych do kształtu prostokątnego.

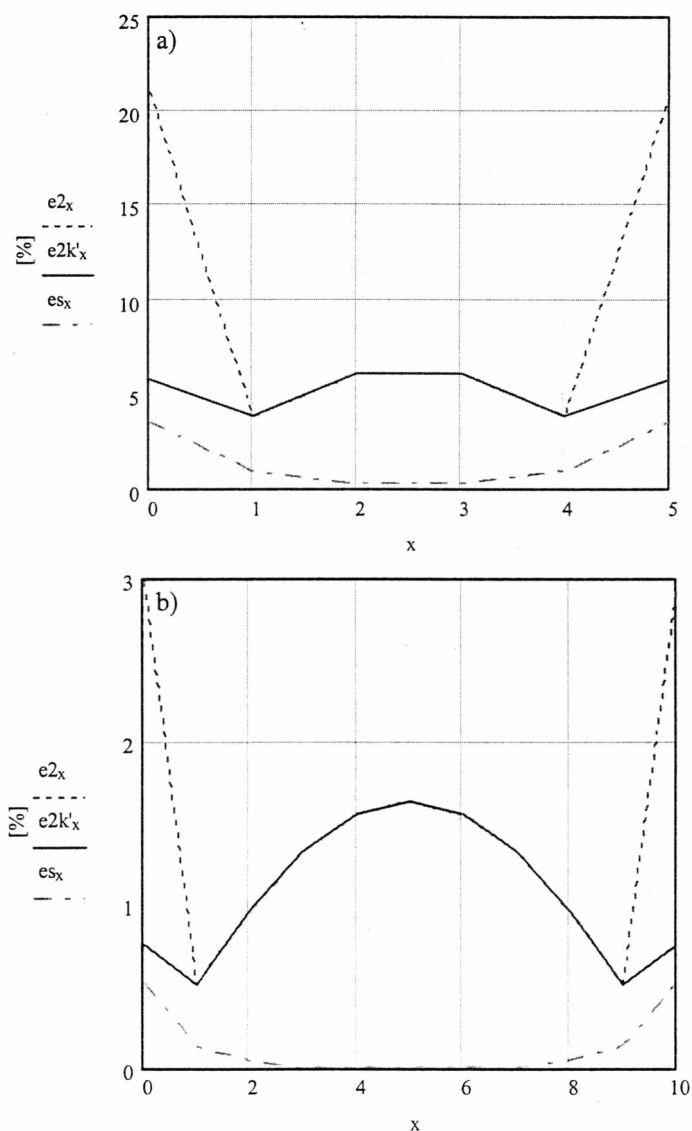
W przypadku dwustronnej pochodnej dyskretnej nie można wyznaczyć prędkości akustycznej na granicach modelowanego obszaru korzystając bezpośrednio z równania (3-8). Jeżeli na granicy obszaru jest zdany warunek brzegowy Neumanna lub Robina prędkość określa się bezpośrednio z warunku brzegowego, w przeciwnym razie prędkość można ekstrapolować na podstawie obliczonych wartości w najbliższych węzłach. Kształt funkcji prędkości w modelowanym obszarze na ogół nie jest znany, więc do szacowania prędkości na granicach obszaru najodpowiedniejszą wydaje się być ekstrapolacja liniowa. Prędkość w węźle k leżącym na granicy obszaru można ekstrapolować na podstawie obliczonych wartości w węzłach $k-1$ i $k-2$ lub poprzez ekstrapolację wartości w węźle $k-1$ i dodatkowym punkcie k' znajdującym się pomiędzy węzłami k i $k-1$ (rys.13). Prędkość w punkcie k' oblicza się wykorzystując wartości ciśnienia akustycznego w węzłach k i $k-1$. Druga technika umożliwia uzyskanie mniejszych błędów przy wyznaczaniu prędkości na granicach obszaru (rys.14).



Rysunek 13. Liniowa ekstrapolacja prędkości akustycznej na granicach obszaru w technice dwustronnej pochodnej dyskretnej

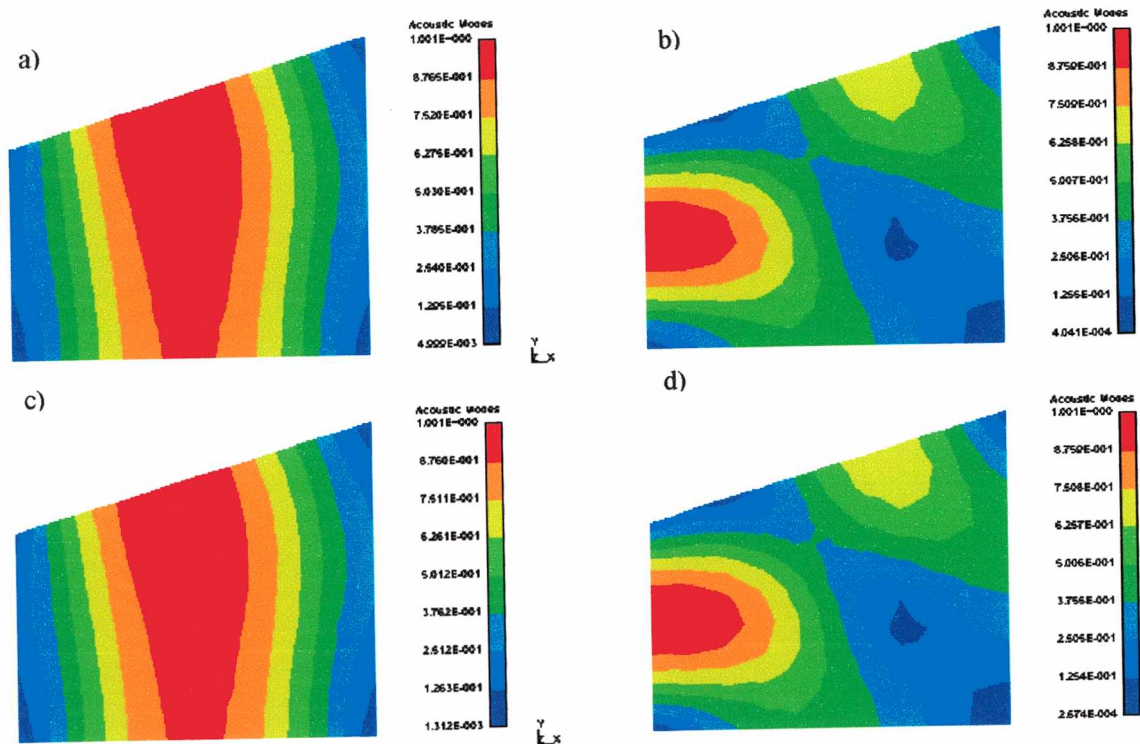
Do oszacowania błędów wyznaczenia prędkości akustycznej techniką numerycznego różniczkowania funkcji interpolowanej funkcjami sklepanych i ich

porównania z błędami techniki pochodnej dyskretnej rozważono przypadek komory prostopadłościennej o sztywnych ściankach. Rysunki 14a i 14b ilustrują rozkład błędów w węzłach wzdłuż głównej osi komory dla podstawowego modu osiowego i gęstości siatki dyskretnej $10 \text{ el}/\lambda$ i $20 \text{ el}/\lambda$. W przykładzie zastosowano interpolację funkcjami sklejanymi przy użyciu wielomianów trzeciego stopnia.

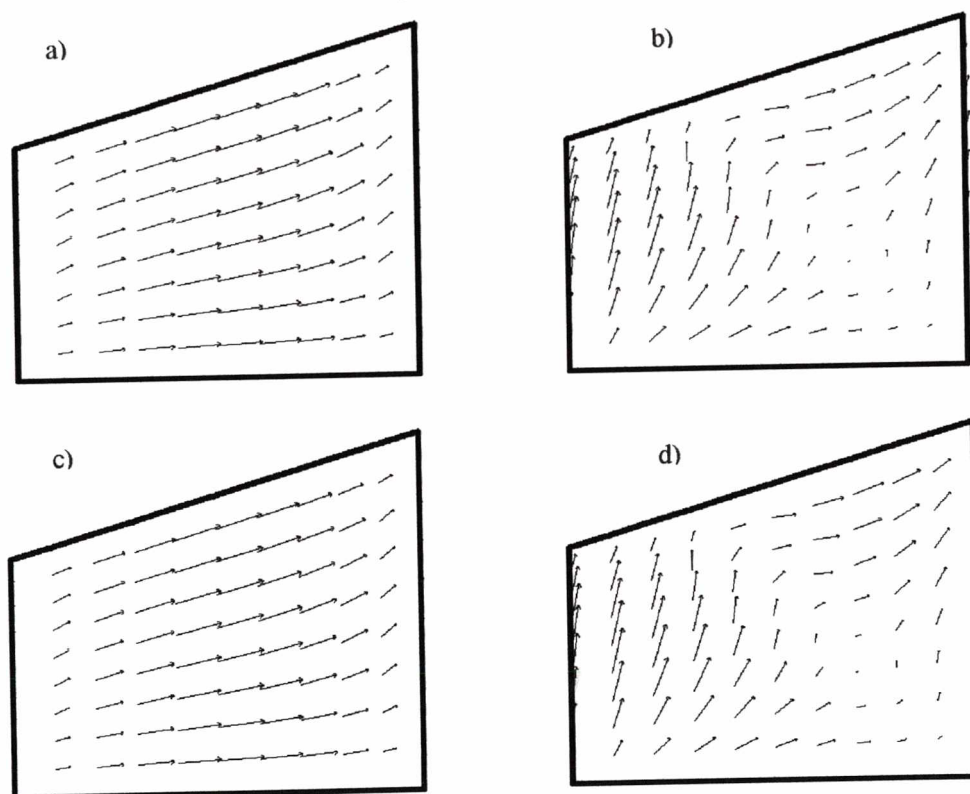


Rysunek 14. Błędy obliczenia prędkości akustycznej w komorze o przekroju prostokąta i sztywnych ściankach metodą numerycznego różniczkowania przy użyciu funkcji sklejaných i techniką dwustronnej pochodnej dyskretnej dla siatki o gęstości: (a) - $10 \text{ el}/\lambda$ i (b) - $20 \text{ el}/\lambda$; $e2k'$ - ekstrapolacja liniowa z dodatkowym punktem k' , $e2$ - ekstrapolacja liniowa, es - funkcje sklejané

Technika numerycznego różniczkowania funkcji interpolowanej funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia daje dokładniejsze wyniki niż technika pochodnej dyskretnej w całym modelowanym obszarze. Błędy obliczenia prędkości pierwszą



Rysunek 15. Moduł wektora prędkości akustycznej w komorze o sztywnych ściankach wyznaczony: (a) i (b) - techniką dwustronnej pochodnej dyskretnej, c) i d) - techniką numerycznego różniczkowania funkcji interpolowanej funkcjami sklejanymi



Rysunek 16. Wektorowe pole prędkości akustycznej w komorze o sztywnych ściankach wyznaczone: (a) i (b) - techniką dwustronnej pochodnej dyskretnej, c) i (d) - techniką numerycznego różniczkowania funkcji interpolowanej funkcjami sklejanymi

Kształt pola prędkości akustycznej wyznaczony omówionymi metodami jest praktycznie taki sam dla siatki elementów dyskretnych o gęstości $20 \text{ el}/\lambda$ oraz nieznacznie się różni dla siatki o gęstości $10 \text{ el}/\lambda$.

Omawiane metody wyznaczania prędkości akustycznej na podstawie rozkładu ciśnienia akustycznego mają wspólną wadę: siatka elementów dyskretnych powinna być regularna względem kierunków wzdłuż których jest wyznaczana prędkość. W metodzie pochodnej dyskretnej ograniczenie to można łatwo wyeliminować stosując lokalny układ współrzędnych dla poszczególnych elementów. Prędkość akustyczna jest wyznaczana wewnątrz elementów we współrzędnych lokalnych, rozkład prędkości oblicza się poprzez uśrednianie w węzłach wartości prędkości przetransformowanych do globalnego układu współrzędnych.

Podsumowując można stwierdzić, że do zastosowań praktycznych ze względu na koszt obliczeń, mniejsze wymagania dotyczące struktury siatki elementów dyskretnych i stosunkowo niedużą wrażliwość przestrzennego rozkładu prędkości akustycznej na błędy różniczkowania numerycznego, metoda dwustronnej pochodnej dyskretnej jest lepsza niż metoda numerycznego różniczkowania funkcji interpolowanej funkcjami sklejanymi.

3.3 Wybrane parametry określające właściwości pola akustycznego w komorach w stanie ustalonym w zakresie średnich częstotliwości

Pole akustyczne w komorze dla dowolnej częstotliwości można przedstawić jako superpozycję wektorów drgań własnych komory z odpowiednimi współczynnikami. W zakresie średnich częstotliwości rezonanse własne komory są rzadko rozmieszczone na skali częstotliwości i stosunkowo dobrze odseparowane od siebie. Kształt i właściwości pola akustycznego w tym zakresie określone są praktycznie przez kształt i właściwości wektorów drgań własnych. W zakresie średnich częstotliwości można zatem określić właściwości pola akustycznego w komorze poprzez właściwości wektorów drgań własnych.

Podstawowymi parametrami opisującymi właściwości pola akustycznego w komorach w stanie ustalonym są jego nierównomierność i dyfuzyjność. W zakresie małych i średnich częstotliwości pole akustyczne w komorze nie jest polem dyfuzyjnym. Ocenę właściwości akustycznych komór o różnych kształtach i różnych warunkach brzegowych dla małych i średnich częstotliwości można zatem dokonać na

podstawie analizy nierównomierności pola akustycznego dla poszczególnych rezonansów.

Ocenę nierównomierności pola akustycznego można dokonać wykorzystując szereg parametrów: wartość średnią, odchylenie średniokwadratowe od wartości średniej (odchylenie standardowe), współczynnik zmienności, współczynnik skupienia wokół wartości średniej, współczynnik skupienia wokół wartości maksymalnej [13]. Analiza przydatności wymienionych parametrów do oceny nierównomierności pola akustycznego w komorach wykazała, że najbardziej przydatnymi parametrami są wartość średnia i odchylenie średniokwadratowe od wartości średniej. Korzystniej jest przy czym stosować wymienione parametry zdefiniowane na zmiennych energetycznych, czyli kwadracie ciśnienia lub prędkości akustycznej. Pozostałe z wymienionych parametrów mają szereg wad. Współczynnik zmienności, zdefiniowany jako stosunek odchylenia średniokwadratowego od wartości średniej do wartości średniej, nie odwzorowuje poprawnie nierównomierności pola ciśnienia lub prędkości akustycznej dla pól o małych wartościach. Współczynnik skupienia wokół wartości średniej lub maksymalnej przekazuje podobną informację do uzyskanej na podstawie analizy wartości średniej, ale jest trudniejszy w interpretacji fizycznej. Wartość średnią kwadratu ciśnienia lub prędkości akustycznej wewnątrz komory można natomiast interpretować jako średnią gęstość potencjalnej (wartość średnia ciśnienia) lub kinetycznej (wartość średnia prędkości) energii akustycznej zmagazynowanej w komorze dla rozpatrywanego modu drgań własnych. Ocenę nierównomierności pola akustycznego przeprowadzono zatem z wykorzystaniem takich parametrów, jak średnia wartość kwadratu ciśnienia lub prędkości akustycznej oraz średniokwadratowe odchylenie kwadratu ciśnienia lub prędkości akustycznej od średniej arytmetycznej.

Analizowane parametry wyznaczano dla pola ciśnienia akustycznego znormalizowanego względem wartości maksymalnej ciśnienia p_{max} lub pola prędkości akustycznej znormalizowanej względem $\frac{p_{max}}{\rho_0 c}$. Taka normalizacja jest niezbędna przy

porównaniu pól akustycznych otrzymanych w wyniku analizy modalnej, bowiem wektory własne otrzymane w wyniku rozwiązania układu równań (3-1) nie są określone jednoznacznie. Z tego względu wykorzystane parametry umożliwiają ocenę nierównomierności pola akustycznego, ale nie niosą żadnej informacji na temat amplitudy drgań akustycznych w komorze.

Właściwości akustyczne modelowanych komór dla większości z rozpatrywanych w pracy przypadków są porównywane z właściwościami komory prostopadłościennej o sztywnych ściankach. Dla tego podstawowego przykładu wyznaczono analitycznie wymienione parametry. W komorze prostopadłościennej wyróżnia się trzy rodzaje modów: mody osiowe, mody równoległe i mody skośne. Mody osiowe, równoległe i skośne powstają na skutek odbić fali akustycznej pomiędzy, odpowiednio, dwiema ściankami, czterema ściankami i sześcioma ściankami komory.

Dla komory prostopadłościennej o sztywnych ściankach wartość średnia kwadratu ciśnienia lub prędkości akustycznej jest określona następująco:

$$\begin{array}{lll} \text{mody osiowe} & \text{mody równoległe} & \text{mody skośne} \\ \bar{x}_O^2 = \frac{1}{2} & \bar{x}_R^2 = \frac{1}{4} & \bar{x}_S^2 = \frac{1}{8}, \end{array} \quad (3-12)$$

gdzie x jest ciśnieniem lub prędkością akustyczną.

W przypadku komory prostopadłościennej bez tłumienia średnia gęstość energii akustycznej dla modów równoległych i skośnych stanowi, odpowiednio, połowę i jedną czwartą wartości dla modów osiowych.

Odchylenie standardowe kwadratu ciśnienia lub prędkości σ dla komory prostopadłościennej o sztywnych ściankach jest równe:

$$\begin{array}{lll} \text{mody osiowe} & \text{mody równoległe} & \text{mody skośne} \\ \sigma_O = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,354 & \sigma_R = \frac{\sqrt{5}}{8} \approx 0,280 & \sigma_S = \frac{\sqrt{19}}{16\sqrt{2}} \approx 0,193. \end{array} \quad (3-13)$$

Pole akustyczne dla modów osiowych charakteryzuje się największą, natomiast dla modów skośnych najmniejszą nierównomiernością pola mierzona odchyleniem standardowym. Różnica w nierównomierności pola pomiędzy osiowymi i równoległymi modami jest równa około 20%, natomiast pomiędzy równoległymi i skośnymi modami wynosi około 30%.

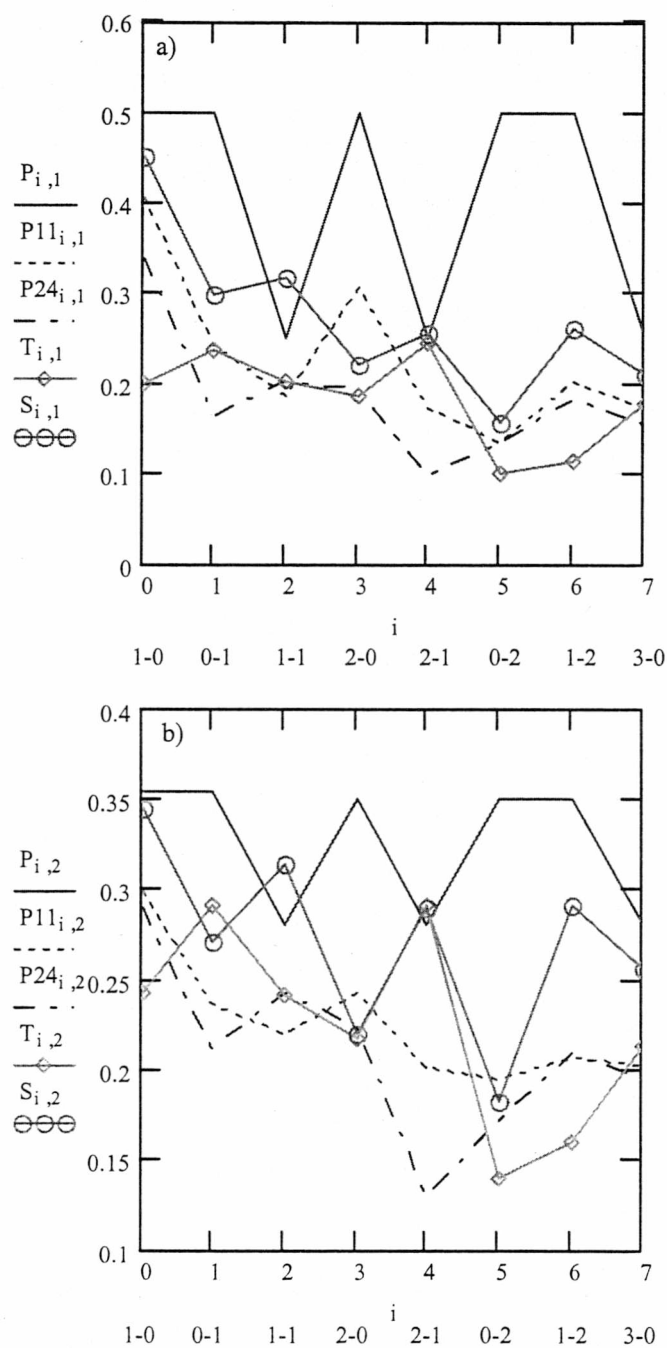
Ponieważ różnica w wartości odchylenia standardowego nawet dla modów o mocno różniącym się kształcie pola, np. modów osiowych i równoległych, nie jest zbyt duża, należy oszacować błędy obliczania tego parametru w zależności od dokładności odwzorowania modelowanego obszaru przez model dyskretny. W tym celu rozważono jednorodny model dyskretny dwuwymiarowej komory o przekroju prostokąta i sztywnych ściankach. Błędy obliczenia odchylenia standardowego i średniej gęstości energii pola akustycznego w komorze dla różnej gęstości siatki elementów dyskretnych podano w tabeli 3.1.

Tabela 3-1. Błędy obliczenia odchylenia standardowego i wartości średniej kwadratu ciśnienia akustycznego dla jednorodnego modelu dyskretnego dwuwymiarowej komory o przekroju prostokątnym

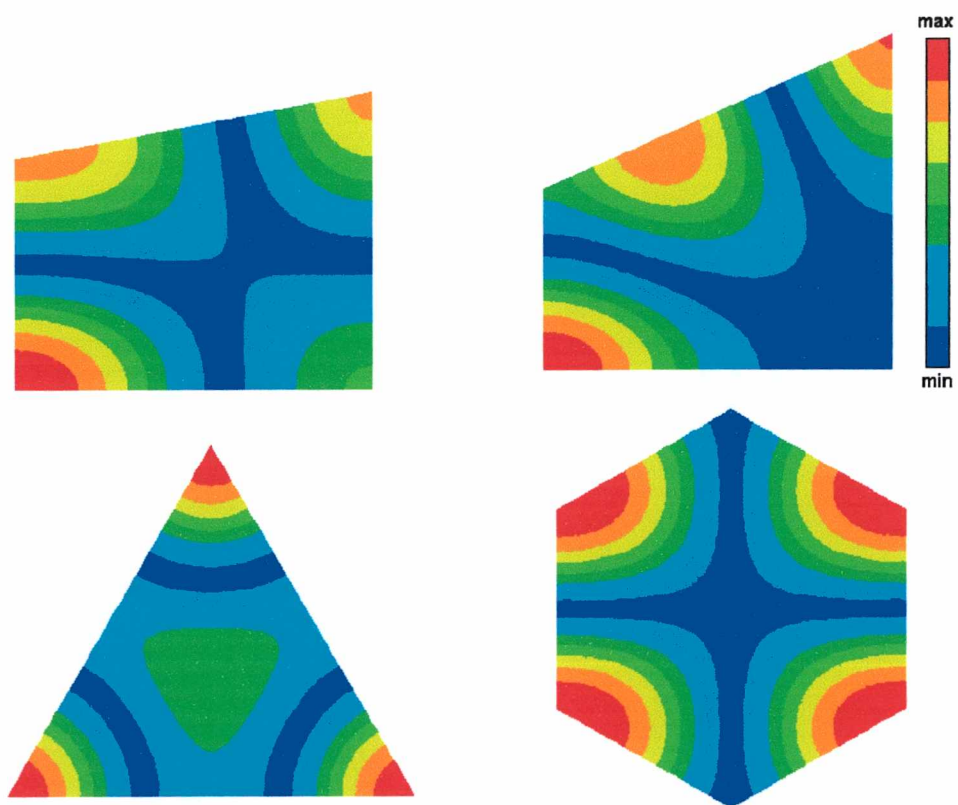
	Gęstość siatki elementów dyskretnych [el/ λ]			
	10	20	30	40
Mody osiowe	Błąd względny [%]			
σ	3,4	2,0	1,4	1,1
$\bar{x}^2$	9	4,8	3,2	2,4
Mody równoległe	Błąd względny [%]			
σ	11,8	6,4	4,3	3,2
$\bar{x}^2$	19,2	9,6	6,4	4,8

Błędy obliczenia odchylenia standardowego są na ogół nieco mniejsze od błędów wyznaczenia wartości średniej kwadratu ciśnienia lub prędkości akustycznej. Błędy obliczenia odchylenia standardowego dla modów osiowych i równoległych są mniejsze od 5% dla jednorodnych dwuwymiarowych modeli dyskretnych o gęstości co najmniej 30 el/ λ . Błędy obliczania wartości średniej kwadratu ciśnienia lub prędkości dla takiej siatki wynoszą 3÷7%.

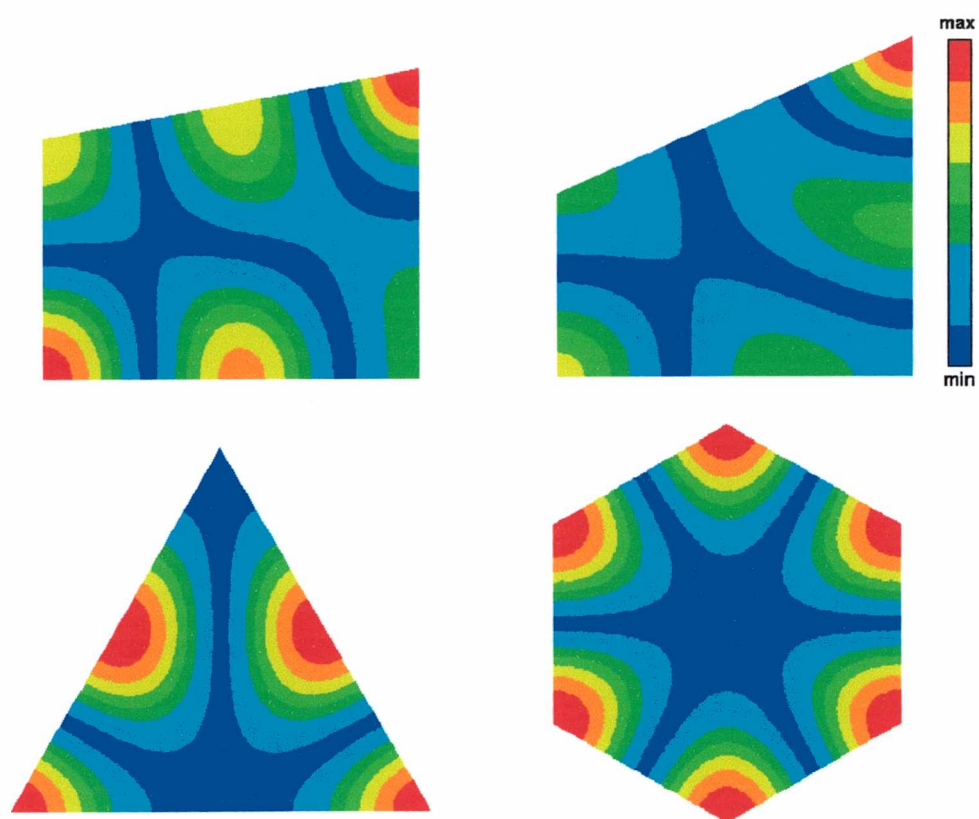
W celu określenia zakresu zmienności i relacji pomiędzy wartościami proponowanych parametrów a nierównomiernością pola rozpatrzono kilka prostych przypadków komór. Na rysunkach 17a i 17b na przykładzie pola ciśnienia akustycznego przedstawiono wartości parametrów σ , $\bar{x}^2$ dla dwuwymiarowych komór o kształcie prostokąta (P), prostokąta z pochylonym jednym z dłuższych boków o 11° ($P11$) i 24° ($P24$), trójkąta równobocznego (T) i sześciokąta równobocznego (S). Na rysunkach podano wartość parametrów dla pierwszych ośmiu rezonansów komory. We wszystkich analizowanych przypadkach ciśnienie akustyczne normalizowano względem wartości maksymalnej. Parametry σ i $\bar{x}^2$ określone dla pola prędkości akustycznej mają identyczne wartości jak dla pola ciśnienia akustycznego. Do oceny nierównomierności pola akustycznego wystarczy więc określić nierównomierność pola ciśnienia lub nierównomierność pola prędkości akustycznej. Rysunki 18÷20 ilustrują rozkład ciśnienia akustycznego w badanych komorach dla trzech wybranych modów drgań: modu numer 2 (rezonans rzędu 1-1 komory o przekroju prostokąta), numer 4 (rezonans rzędu 2-1) i numer 5 (rezonans rzędu 0-2).



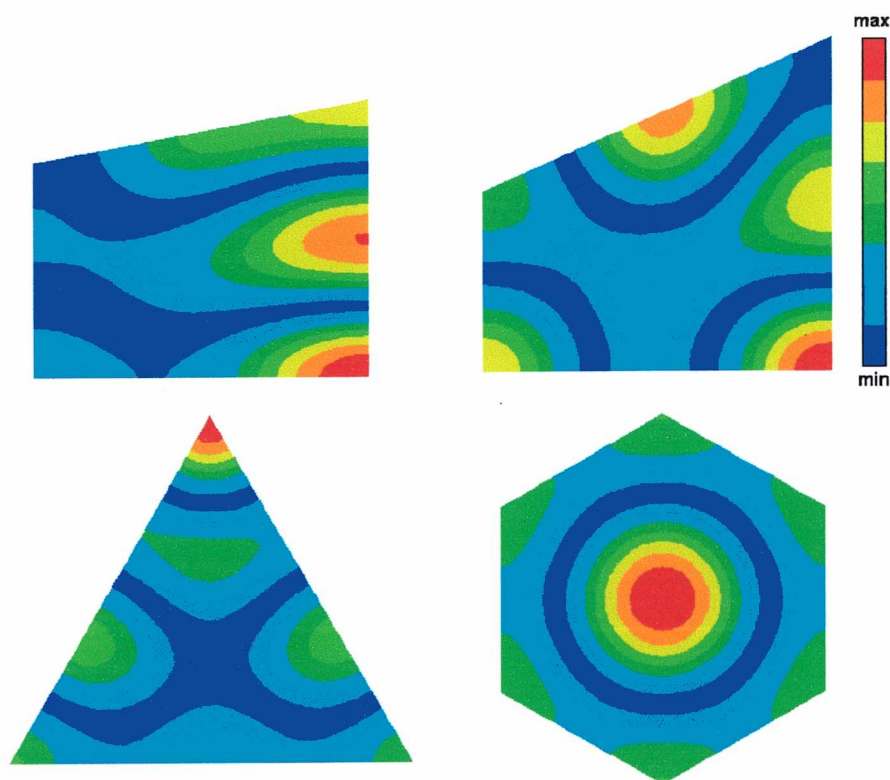
Rysunek 17. Wartość średnia kwadratu ciśnienia akustycznego (a) i odchylenie standardowe kwadratu ciśnienia akustycznego (b), dla pierwszych ośmiu rezonansów własnych dla pola 2D w komorach o kształcie: P – prostokąt, $P11$ i $P24$ – prostokąt z pochylonym jednym bokiem o 11° i 24° , T – trójkąt równoboczny i S – sześciokąt równoboczny



Rysunek 19. Kształt pola ciśnienia akustycznego w komorach 2D dla rezonansu rzędu 1-1



Rysunek 18. Kształt pola ciśnienia akustycznego w komorach 2D dla rezonansu rzędu 2-1



Rysunek 20. Kształt pola ciśnienia akustycznego w komorach 2D dla rezonansu rzędu 0-2

Średnia gęstość energii potencjalnej dla rezonansu rzędu 1-1 jest taka sama w komorach prostokątnych $P11$, $P24$ i trójkątnej T , natomiast jej wartość dla komory sześciokątnej S jest o 27 % większa niż dla komory prostokątnej P . Nierównomierność pola mierzona odchyleniem standardowym w komorach $P24$ i T jest praktycznie jednakowa, natomiast w komorze S jest większa niż w komorze P . Średnia gęstość energii akustycznej i nierównomierność pola mierzona parametrem σ w komorze $P24$ są, odpowiednio, o 37 % i 23 % mniejsze niż w komorze S .

W przypadku rezonansu rzędu 2-1 średnia gęstość energii potencjalnej w komorach T , S i P jest taka sama, natomiast w komorze $P24$ jest o 40 % mniejsza. Nierównomierność pola mierzona odchyleniem standardowym w komorach T i S jest porównywalna z nierównomiernością w komorze prostokątnej P , natomiast w komorze $P24$ jest najmniejsza wśród ośmiu rozpatrywanych rezonansów, mniejsza o 54 % względem komory P .

Dla modu rzędu 0-2 średnia gęstość energii akustycznej zmagazynowanej w komorach $P11$, $P24$ i S jest jednakowa, natomiast w komorze T jest mniejsza o 36 %. Nierównomierność pola mierzona odchyleniem standardowym w komorach $P11$, $P24$ i S jest praktycznie taka sama. Średnia gęstość energii potencjalnej i nierównomierność

ciśnienia akustycznego mierzona parametrem σ w komorze T jest, odpowiednio, o 80% i 60% mniejsza niż w komorze prostokątnej P .

Przedstawione przykłady potwierdzają słuszność założenia, że nierównomierność pola akustycznego można poprawnie ocenić na podstawie takich parametrów, jak wartość średnia lub odchylenie standardowe kwadratu ciśnienia/prędkości akustycznej. Analizując wykresy przedstawione na rysunkach 17a i 17b można zauważyć, że kształt wykresów średniej gęstości energii akustycznej jako funkcja rzędu modów dla analizowanych komór jest taki sam jak kształt wykresów odchylenia standardowego. Przy określeniu nierównomierności pola akustycznego można więc stosować zamiennie odchylenie standardowe lub średnią gęstość energii akustycznej. Warto jednak zauważyć, że różnica w wartości średniej gęstości energii akustycznej dla pól o różnej niejednorodności jest większa niż w wartości odchylenia standardowego, natomiast błędy wyznaczenia $\bar{x}^2$ z wykorzystaniem jednorodnej siatki dyskretnej są około 1,5÷2,0 razy większe niż błędy obliczenia σ .

3.4 Wpływ impedancyjnych warunków brzegowych na pole akustyczne wewnątrz komory

Parametry pola akustycznego wewnątrz komory zależą od kształtu komory, sposobu rozmieszczenia materiałów o określonej impedancji akustycznej oraz jej wartości, a także od częstotliwości. Na ogół nie istnieją zależności analityczne określające wpływ poszczególnych czynników na parametry pola akustycznego. Możliwe jest jednak określenie niektórych zależności i tendencji na podstawie analizy numerycznej wybranych komór. W tym celu rozpatrzono szereg przykładów, które umożliwiają oszacowanie wpływu impedancyjnych warunków brzegowych na parametry pola akustycznego w najczęściej spotykanych w praktyce rozwiązaniach.

W celu zwiększenia przejrzystości analizy i uproszczenia modeli numerycznych badania ograniczono do modeli dwuwymiarowych.

W wyniku przeprowadzonego modelowania określono wpływ impedancji akustycznej, małych deformacji kształtu komory o przekroju prostokąta, sposobu rozmieszczenia materiału o zadanej impedancji na kształt i parametry pola ciśnienia i prędkości akustycznej. Rozpatrzono szereg komór prostokątnych o różnych warunkach brzegowych i komór o kształcie nieznacznie odbiegającym od kształtu prostokąta. Wyniki analizy komór o kształcie figur równobocznych: trójkąta, kwadratu, pięciokąta i sześciokąta, można znaleźć w pracy [18].

Przy braku zewnętrznych źródeł dźwięku w komorach ze stratami powietrze w różnych punktach wewnątrz komory drga z różną fazą. Pole akustyczne w komorze składa się z fali stojącej oraz fali przenoszącej energię akustyczną w kierunku powierzchni pochłaniających dźwięk. Tylko w przypadku drgań wymuszonych pole akustyczne w komorze ze stratami jest polem stacjonarnym. Kształt pola oraz częstotliwości rezonansowe w takim przypadku różnią się od kształtu pola i częstotliwości rezonansowych komory bez strat. Im większe jest tłumienie, tym większe są różnice. W komorach z tłumieniem własna liczba falowa i pulsacji drgań własnych są liczbami zespolonymi.

Dla komory jednowymiarowej, tzn. stosunkowo długiej komory o małym przekroju, z jednorodnymi warunkami brzegowymi zadanymi na jednym lub obu jej końcach istnieje rozwiązanie analityczne określające pole akustyczne wewnątrz komory. Przypadek jednowymiarowej komory w której jednorodna impedancja akustyczna zadana jest na jednym z jej końców, zaś pozostałe ścianki są sztywne, został wykorzystany do analizy wpływu wartości impedancji akustycznej na właściwości pola akustycznego dla modów osiowych skierowanych prostopadle do krawędzi z impedancją oraz do weryfikacji modeli numerycznych.

W jednowymiarowej komorze potencjał prędkości można przedstawić jako [32]:

$$\begin{aligned}\Psi(x, \omega) &= \psi(x)e^{j\omega t}, \\ \text{gdzie :} \\ \psi(x) &= A_x \cos(k_x x) + B_x \sin(k_x x) \\ k_x &\text{ - liczba falowa, } A_x, B_x \text{ - stałe.}\end{aligned}\tag{3-14}$$

Stałe A_x i B_x określa się na podstawie warunków brzegowych zadanych na krawędziach komory. W przypadku, gdy jedna z krótkich krawędzi jest odbijająca, np. dla $x=0$, natomiast na drugiej $x=l_x$ jest zadana akustyczna impedancja jednostkowa $\mathcal{Z}$, stała A_x jest dowolną liczbą, stała B_x jest równa zero, natomiast własna liczba falowa k_x ma wartość zespoloną. Zespoloną własną liczbę falową wyznacza się z równania:

$$\text{ctg}(k_x l_x) = -j \frac{\mathcal{Z}}{\rho_0 c}.\tag{3-15}$$

Po przekształceniu równania (3-15) własną liczbę falową można określić jako:

$$\underline{k}_x = -\frac{1}{l_x} \operatorname{arctg}\left(j \frac{\mathcal{Z}}{\rho_0 c}\right) = \frac{\pi}{l_x} n_x - \frac{j}{2l_x} \ln\left(\frac{\frac{\mathcal{Z}}{\rho_0 c} - 1}{\frac{\mathcal{Z}}{\rho_0 c} + 1}\right) = \frac{\pi}{l_x} n_x - \frac{j}{2l_x} \ln(R),$$

gdzie R - ciśnieniowy współczynnik odbicia ściany zadaną impedancją (3-16)
 n_x - rząd drgań.

Ciśnienie i prędkość akustyczna dla poszczególnych rezonansów w stanie ustalonym w jednowymiarowej komorze są określone jako:

$$p(x) = A \cos(\underline{k}_x x) e^{j\omega t} = A \cos\left(\frac{\pi}{l_x} n_x - \frac{j}{2l_x} \ln R\right) e^{j\omega t}$$

$$g(x) = -j \frac{A \underline{k}_x}{\omega \rho_0} \sin(\underline{k}_x x) e^{j\omega t} = -j \frac{A}{\omega \rho_0} \left(\frac{\pi}{l_x} n_x - \frac{j}{2l_x} \ln R\right) \sin\left(\frac{\pi}{l_x} n_x - \frac{j}{2l_x} \ln R\right) e^{j\omega t}, \quad (3-17)$$

gdzie :

A - stała określająca amplitudę drgań.

Ciśnienie i prędkość akustyczna w komorze ze stratami mają wartości zespolone. Współczynnik odbicia ciśnienia akustycznego na krawędzi z impedancją akustyczną jest równy:

$$R = \frac{\frac{\underline{k}_x}{k} Z - 1}{\frac{\underline{k}_x}{k} Z + 1},$$

gdzie :

Z - impedancja jednostkowa $\mathcal{Z}$ odniesiona do $\rho_0 c$, (3-18)

$\underline{k}_x$ - składowa liczby falowej skierowana

prostopadle do krawędzi z materiałem pochaniającym dźwięk.

W przypadku, gdy impedancja akustyczna jest zadana wyłącznie na jednej z krótkich krawędzi komory, natomiast dłuższe krawędzi komory są odbijające, współczynnik odbicia R fali akustycznej biegnącej prostopadle do krawędzi komory o zadanej impedancji jest określony przez współczynnik odbicia fali płaskiej. Dla modów osiowych związanych z osią x wektor liczby falowej $\underline{k}_x$ zatem pokrywa się z wektorem $\underline{k}$, natomiast jego wartość można przedstawić jako:

$$\underline{k}_x = \frac{\pi}{l_x} n_x - \frac{j}{2l_x} \ln R = \frac{\pi}{l_x} n_x + \frac{\varphi}{2l_x} - j \frac{\chi}{2l_x} = k_x + j\beta_x,$$

gdzie:

$$R = \exp(-\chi + j\varphi), \quad (3-19)$$

k_x - część rzeczywista własnej liczby falowej,

β_x - współczynnik tłumienia fali akustycznej.

Częstość kołowa drgań własnych komory jest również liczbą zespoloną:

$$\underline{\omega}_x = \frac{k_x}{c} = \omega_x + j\delta_x,$$

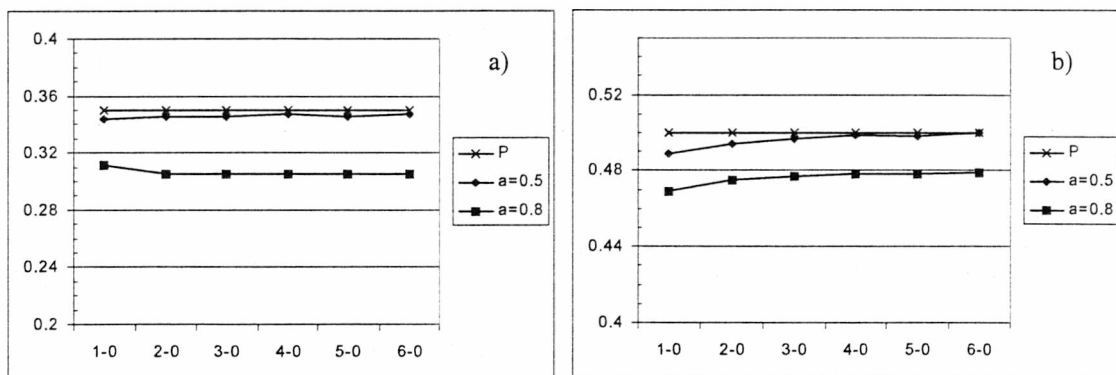
$$\text{gdzie: } \omega_x - \text{część rzeczywista pulsacji rezonansowej} \quad (3-20)$$

drgań swobodnych dla układu z tłumieniem,

δ_x - dekrement tłumienia.

Parametr δ określa tłumienie wprowadzone do komory poprzez umieszczenie materiału pochłaniającego dźwięk na jej krawędziach. W przypadku drgań wymuszonych rezonans amplitudy ciśnienia akustycznego w układzie ze stratami nastąpi przy pulsacji określonej wzorem (3-3).

Na podstawie równań (3-17) można obliczyć średnią gęstość energii akustycznej oraz odchylenie standardowe kwadratu ciśnienia lub prędkości akustycznej dla różnych wartości współczynnika pochłaniania dźwięku jednej z krawędzi komory. Rysunek 21 ilustruje wartość tych parametrów dla jednowymiarowej komory z zadaną impedancją na jednym z końców komory, dla której współczynnik pochłaniania krawędzi jest równy 0,5 i 0,8. Dla porównania na rysunku podano również wartość analizowanych parametrów dla komory bez pochłaniania (P). Parametry wyznaczono dla modułu ciśnienia akustycznego.



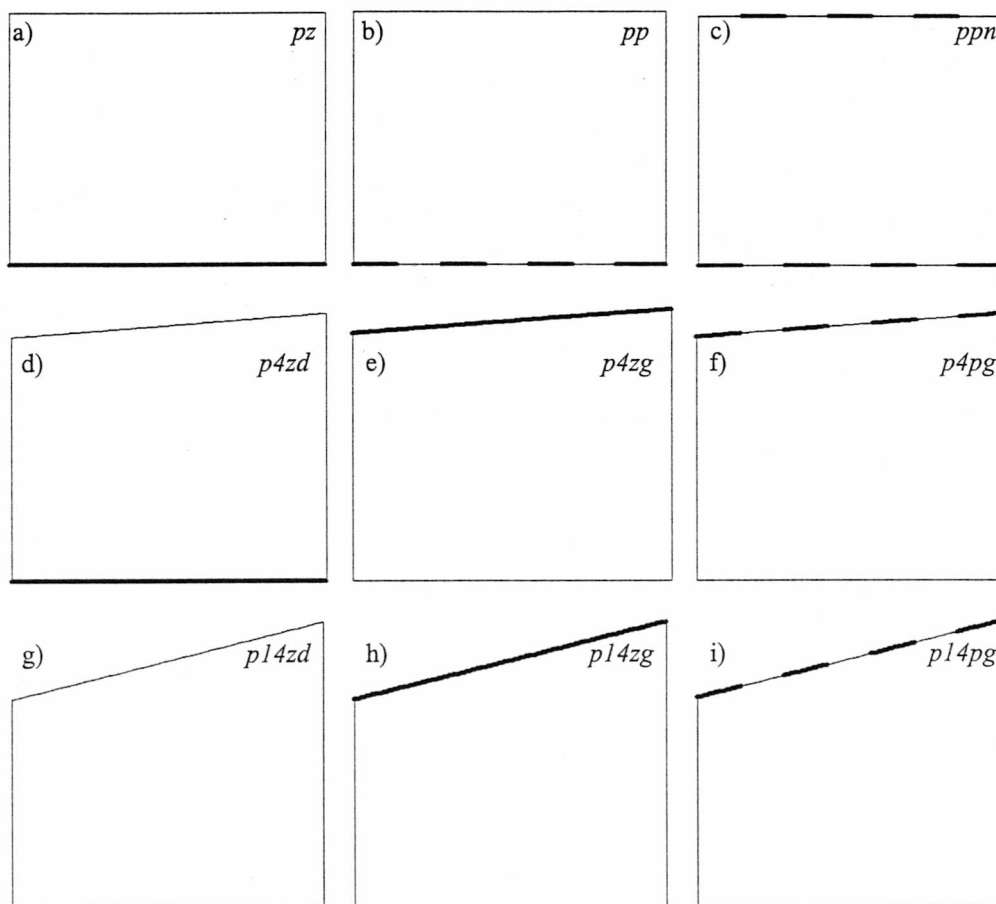
Rysunek 21. Średnia gęstość energii potencjalnej (a) i odchylenie standardowe kwadratu ciśnienia (b) dla pierwszych 6 modów osiowych w jednowymiarowej komorze przy różnych wartościach współczynnika pochłaniania dźwięku jednej wybranej krawędzi komory

Zauważalna zmiana, powyżej 10 %, średniej gęstości energii potencjalnej lub odchylenia standardowego kwadratu ciśnienia akustycznego występuje tylko dla bardzo dużych wartości współczynnika pochłaniania (powyżej 0,8). Wartość parametrów praktycznie nie zależy od rzędu modu oraz od wartości fazy impedancji akustycznej.

W przypadku komór dwu- lub trójwymiarowych pole ciśnienia lub prędkości akustycznej nawet w komorach prostopadłościennych z jednolitymi warunkami brzegowymi można wyznaczyć analitycznie tylko dla kilku prostych przypadków, między innymi, tylko dla dużych wartości impedancji akustycznej [82]. Dla dowolnej wartości jednolitej impedancji akustycznej w komorach prostopadłościennych pole akustyczne wyznacza się na podstawie nomogramów obliczonych numerycznie podanych np. przez Bolta i Morse'a [67,82]. Sposób ten jest niewygodny i mało dokładny ze względu na konieczność graficznego odczytywania wartości liczby falowej z nomogramów. Pole akustyczne w komorach o dowolnym kształcie i dowolnych warunkach brzegowych można natomiast łatwo wyznaczyć stosując metody FEM i BEM.

W pracy do określenia wpływu impedancyjnych warunków brzegowych na pole akustyczne w komorach wykorzystano metodę FEM. Geometrię komór i sposoby rozmieszczenia impedancji akustycznej dobrano w taki sposób, aby modelowane komory odpowiadały najczęściej spotykanym w praktyce przypadkom i jednocześnie umożliwiły przekrojowe badanie zjawisk akustycznych zachodzących w tego typu obszarach.

Rysunki 22a÷22i ilustrują rozmieszczenie materiałów o określonej impedancji akustycznej i kształt modelowanych komór.



Rysunek 22. Geometria modelowanych komór, sposób rozmieszczenia materiałów o zadanej impedancji akustycznej i oznaczenia poszczególnych modeli

W komorze o kształcie prostokąta impedancja jest zadana na jednej z krawędzi lub na dwóch równoległych krawędziach. W komorach o kształcie różnym od prostokąta impedancja jest zadana tylko na jednej krawędzi. Takie konfiguracje warunków brzegowych umożliwiają analizę pola akustycznego dla modów własnych komory, których oś jest prostopadła, równoległa lub skierowana pod kątem względem powierzchni pochłaniającej dźwięk. Przypadek komory prostokątnej z jednolitą impedancją został wykorzystany do weryfikacji modeli numerycznych oraz do celów porównawczych. W komorach z niejednorodną impedancją akustyczną warunki brzegowe określono jako pasy materiału pochłaniającego dźwięk równomiernie rozmieszczone na wybranych krawędziach komory. Rysunki 22d÷22i ilustrują komory o kształcie nieznacznie różnym od kształtu prostokąta. W tych komorach jedna z dłuższych krawędzi komory jest pochylona o 4° ($p4$) lub o 14° ($p14$) względem przeciwległej krawędzi. Długość komory (oś x) z pochyloną krawędzią jest równa długości komory prostokątnej, natomiast wysokość określono w taki sposób, aby jej powierzchnia była

równa powierzchni komory prostokątnej. Kąt pochylenia ściany komory dobrano tak, aby można było oszacować wpływ małego pochylenia ściany (do 10°) i średniego pochylenia ściany (o $10^\circ \div 20^\circ$) na nierównomierność pola akustycznego w komorze. Kąt pochylenia większy od 20° nie jest stosowany w praktycznych zagadnieniach obudów głośnikowych i małych wnętrz. Przykłady te umożliwią ocenę wpływu małych deformacji kształtu komory prostokątnej z określonymi warunkami brzegowymi na właściwości pola akustycznego.

Badania przeprowadzono dla pola ciśnienia i prędkości akustycznej. Pole ciśnienia akustycznego wyznaczono metodą FEM, natomiast pole prędkości akustycznej techniką dwustronnej pochodnej dyskretnej opisaną w rozdziale 3.2. Wykorzystując wyniki analizy błędów wyznaczania ciśnienia, prędkości akustycznej i parametrów określających nierównomierność pola akustycznego podane w rozdziałach 3.1÷3.3 dobrano gęstość siatki elementów skończonych tak, aby błędy obliczenia szukanych parametrów w analizowanym zakresie częstotliwości były mniejsze od 5%.

Ze względu na niewielkie różnice w wartościach odchylenia standardowego i średniej gęstości energii akustycznej dla pola prędkości i ciśnienia akustycznego, większość wyników omówiono na przykładzie pola ciśnienia akustycznego.

3.4.1 Komory 2D o kształcie prostokąta

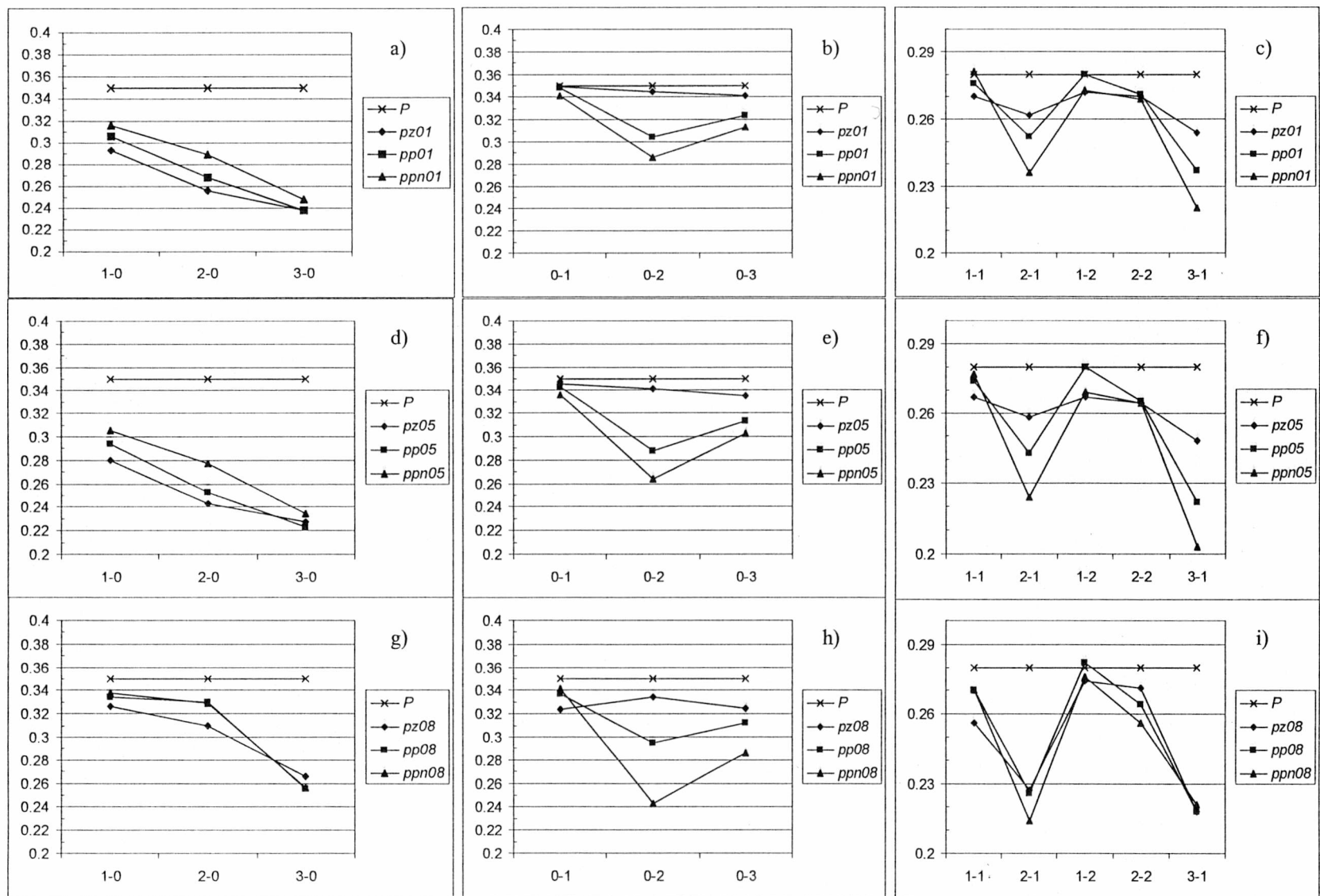
Rysunki 23 i 24 ilustrują wpływ sposobu umieszczenia impedancji akustycznej i jej wartości na nierównomierność pola mierzoną odchyleniem standardowym kwadratu ciśnienia akustycznego i na średnią gęstość energii kinetycznej dla komory prostokątnej. Powierzchnia o jednolitej impedancji akustycznej jest scharakteryzowana przez małe ($\alpha=0,1$), średnie ($\alpha=0,5$) i duże ($\alpha=0,8$) pochłanianie dźwięku. Wartość impedancji akustycznej dobrano tak, aby odpowiadała wartości impedancji akustycznej porowatych materiałów pochłaniających dźwięk, jednakże przyjęte wartości impedancji akustycznej są zbliżone do wartości impedancji innych materiałów lub urządzeń pochłaniających dźwięk o podobnym współczynniku pochłaniania. Poszczególne krzywe oznaczono według rysunku 22. W celach porównawczych na wykresach podano również badane parametry dla komory prostokątnej o sztywnych ściankach (P).

Rezonanse osiowe rzędu 1-0, 2-0 i 3-0 określone są przez parę ścian na których brak jest pochłaniania dźwięku (oś x), rezonanse osiowe rzędu 0-1, 0-2 i 0-3 określone są przez parę ścian z zadaną impedancją akustyczną (oś y). W powstaniu rezonansów

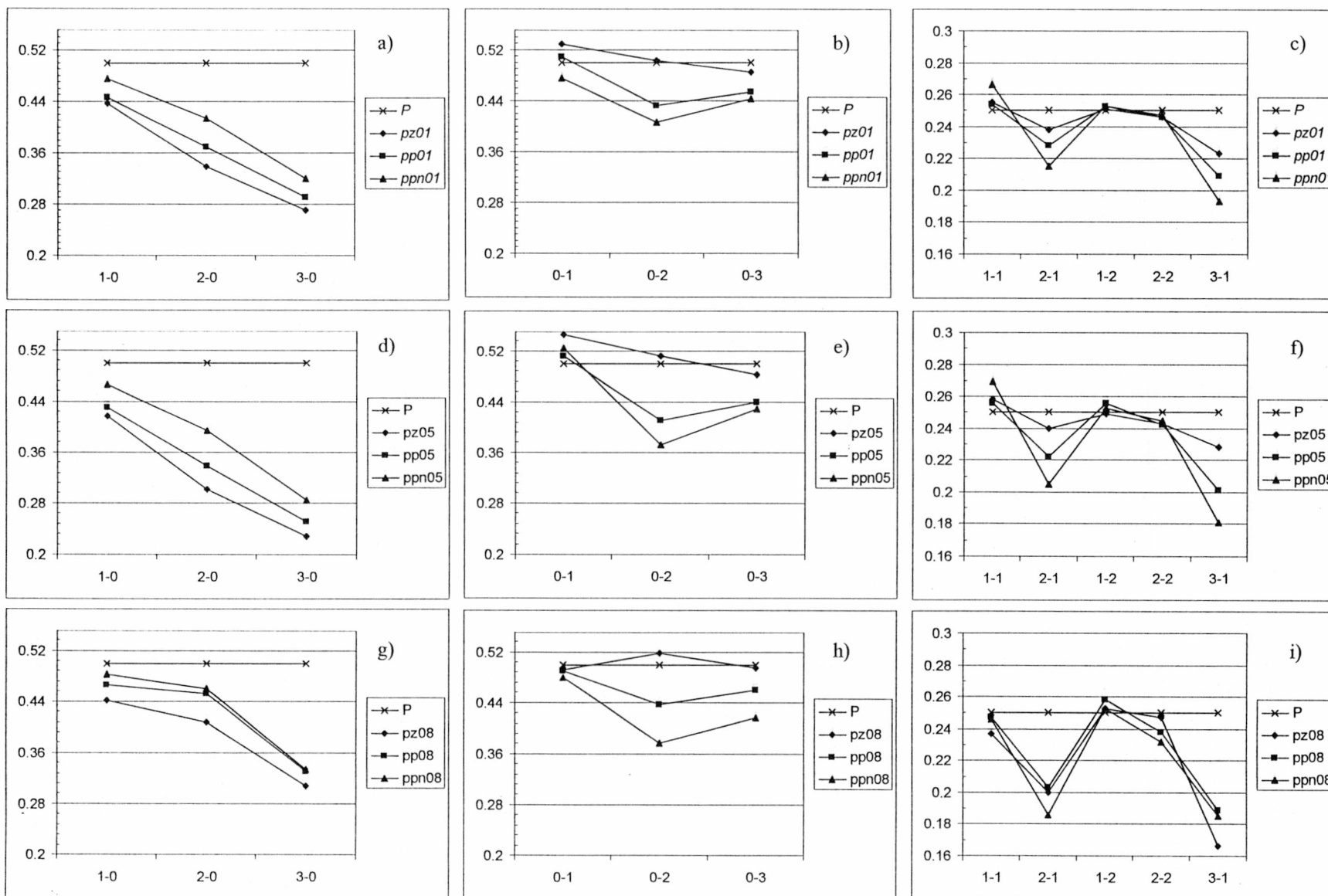
równoległych rzędu 1-1, 2-1, 1-2, 2-2 i 3-1 biorą udział wszystkie cztery ściany, przy czym pierwszy indeks jest związany z osią x , drugi z osią y .

We wszystkich analizowanych przypadkach pole ciśnienia akustycznego normalizowano względem wartości maksymalnej ciśnienia p_{max} , natomiast pole prędkości akustycznej normalizowano względem $\frac{p_{max}}{\rho_0 c}$.

Wykresy przedstawiające średnią gęstość energii potencjalnej są praktycznie identyczne z wykresami średniej gęstości energii kinetycznej podanymi na rysunku 24. Z tego względu w pracy dla większości analizowanych przypadków podano krzywe opisujące średnią gęstość energii potencjalnej, natomiast nierównomierność pola akustycznego mierzona odchyleniem standardowym ilustrowano najczęściej na przykładzie pola ciśnienia akustycznego.



Rysunek 23. Nierównomierność pola ciśnienia akustycznego mierzona odchyleniem standardowym w dwuwymiarowych komorach o kształcie prostokąta zadaną impedancją akustyczną o różnych wartościach: $Z=6e^{-j80}$ ($\alpha=0,1$), $Z=3,6e^{-j50}$ ($\alpha=0,5$) i $Z=2,5e^{-j10}$ ($\alpha=0,8$); (a),(b),(d),(e),(g),(h) - mody osiowe, (c),(f),(i) – mody równoległe



Rysunek 24. Średnia gęstość energii kinetycznej w dwuwymiarowych komorach o kształcie prostokąta zadaną impedancją akustyczną o różnych wartościach: $Z=6e^{-j80}$ ($\alpha=0,1$), $Z=3,6e^{-j50}$ ($\alpha=0,5$) i $Z=2,5e^{-j10}$ ($\alpha=0,8$); (a),(b),(d),(e),(g),(h) - mody osiowe, (c),(f),(i) – mody równoległe

Analizując przedstawione wykresy na rysunkach 23 i 24 nasuwają się następujące wnioski.

Duży wpływ impedancyjnych warunków brzegowych na pole akustyczne zaobserwowano dla modów osiowych rzędu $i-0$ (rys.23a,d,g i 24a,d,g) oraz dla modów równoległych, których oś jest skierowana pod ostrym kątem do krawędzi zadaną impedancją, np. 2-1 i 3-1 (rys. 23c,f,i i 24c,f,i). Jednolita impedancja akustyczna zadana na jednej z krawędzi komory ma istotny wpływ na nierównomierność pola akustycznego przede wszystkim dla modów utworzonych przez fale biegnące równoległe do tej krawędzi (oś modów jest równoległa do krawędzi). Nawet w przypadku bardzo dużych wartości współczynnika pochłaniania ($\alpha=0,8$) impedancja akustyczna nie ma istotnego wpływu na kształt pola dla modów, których oś jest prostopadła lub prawie prostopadła do powierzchni z jednolitą impedancją akustyczną.

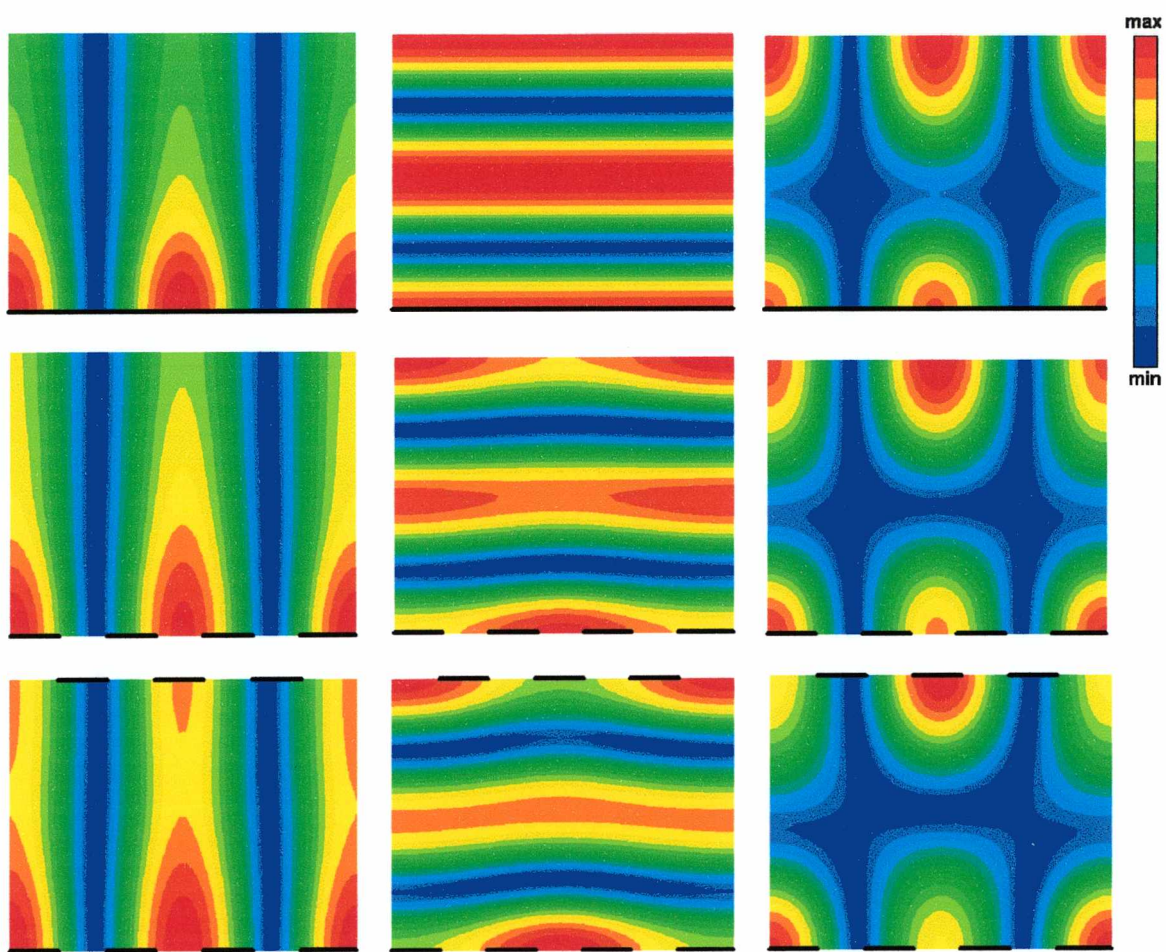
Wpływ niejednolitej impedancji akustycznej na nierównomierność pola akustycznego jest znaczny również dla modów, których oś jest skierowana równoległe lub pod ostrym kątem do powierzchni zadaną impedancją. Dla wspomnianych modów wpływ ten jest nieco mniejszy niż w przypadku jednolitej impedancji. Natomiast dla części modów równoległych, których oś jest skierowana pod ostrym kątem do krawędzi z impedancyjnym warunkiem brzegowym wpływ niejednolitej impedancji na nierównomierność pola jest większy niż impedancji jednolitej. Dla modów osiowych, których oś jest skierowana prostopadle do krawędzi z określonym warunkiem brzegowym oddziaływanie niejednolitej impedancji na nierównomierność pola akustycznego jest również większe niż impedancji jednolitej (rys.23b,e,h i 24b,e,h). Kształtowanie impedancji akustycznej w postaci pasów naprzemiennych na przeciwległych krawędziach jest na ogół korzystniejsze ze względu na nierównomierność pola, niż w postaci pasów tylko na jednej krawędzi. Wyjątek stanowią mody osiowe oś których jest równoległa do krawędzi z niejednolitą impedancją akustyczną (rys.23a,d,g i 24a,d,g).

Nierównomierność pola mierzona odchyleniem standardowym dla rozpatrywanych wartości impedancji akustycznej w rozważanym zakresie częstotliwości dla komory z tłumieniem zmienia się do 30 % względem komory bez tłumienia. Zmiana odchylenia standardowego pomiędzy komorą z jednolitą impedancją a komorą z impedancją w postaci pasów wynosi do 27 %. Średnia gęstość energii potencjalnej w pierwszym i drugim przypadku zmienia się nawet, odpowiednio, o 50 % i 30 %.

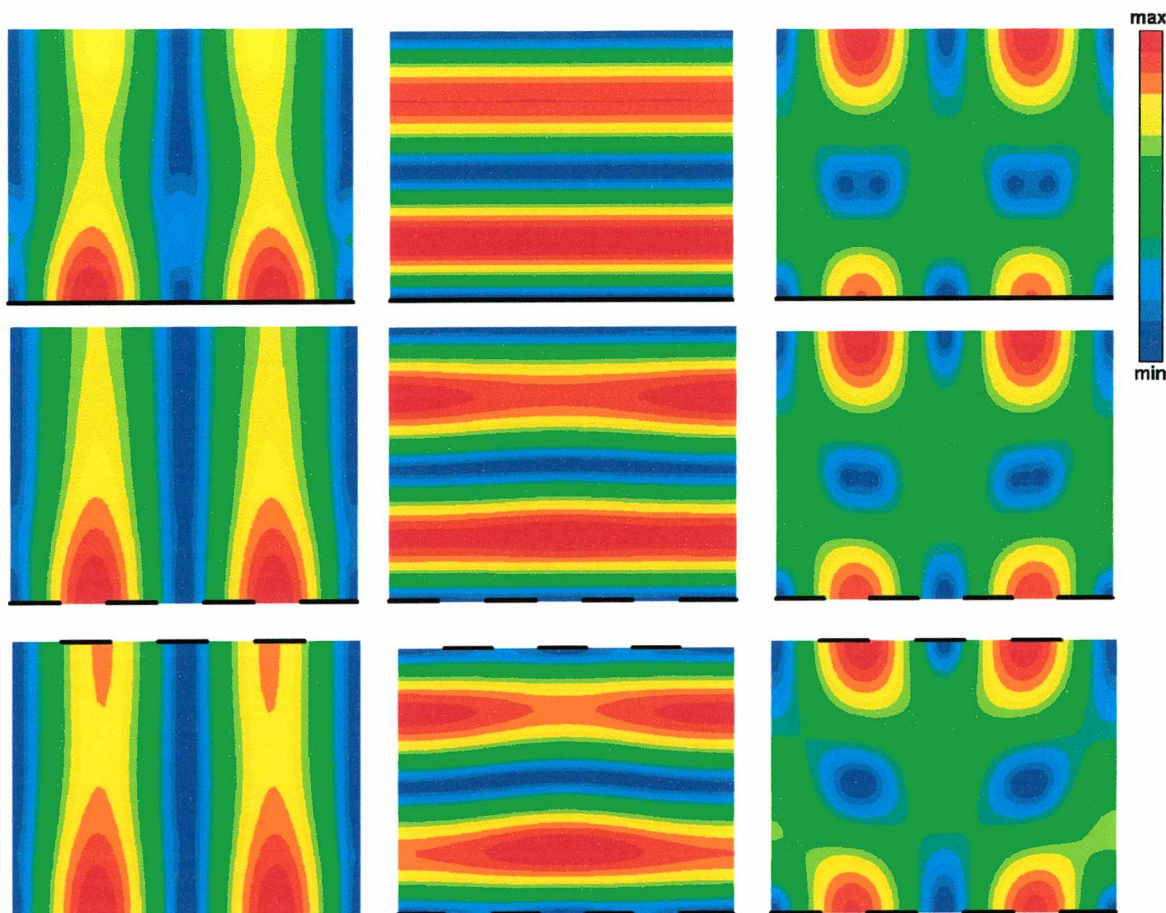
Zwiększenie wartości współczynnika pochłaniania dźwięku prawie we wszystkich przypadkach zmniejsza nierównomierność pola akustycznego. Tylko dla modów osiowych skierowanych równoległe do krawędzi z impedancją akustyczną zwiększenie pochłaniania może spowodować wzrost nierównomierności pola. Należy jednak zaznaczyć, że kształt pola akustycznego zależy zarówno od modułu, jak i kąta fazowego impedancji akustycznej. Kształt i parametry pola mogą znacznie się różnić dla takiej samej wartości współczynnika pochłaniania, ale różnego skoku fazy występującego na krawędzi komory z zadaną impedancją. Materiały pochłaniające dźwięk o dużym współczynniku α na ogół charakteryzują się małą wartością kąta fazowego, a za tym powodują mały skok fazy fali akustycznej padającej na krawędź komory z impedancyjnym warunkiem brzegowym. Wyniki podane na rysunkach 23g÷23i i 24g÷24i odpowiadają właśnie takiemu przypadkowi. Duże pochłanianie dźwięku z jednoczesnym dużym przesunięciem fazy odpowiada akustycznie miękkiej powierzchni odbijającej dźwięk. Tego typu powierzchni na ogół nie występują w praktycznych zagadnieniach obudów głośnikowych lub małych pomieszczeń i dlatego nie są rozpatrywane w niniejszej pracy. Ogólnie można stwierdzić, że duże przesunięcie fazy na krawędziach komór prostopadłościennych przy dużym pochłanianiu dźwięku jest zjawiskiem korzystnym i pozytywnie wpływa na nierównomierność pola akustycznego wewnątrz komory. Przy modelowaniu pola akustycznego w komorach należy zatem precyzyjne określenie zarówno modułu, jak i fazy impedancji akustycznej zastosowanego materiału pochłaniającego dźwięk.

Wykresy przedstawione na rysunkach 23 i 24 potwierdzają przypuszczenie, że przy ocenie nierównomierności pola akustycznego można stosować zamiennie odchylenie standardowe kwadratu ciśnienie/ prędkości akustycznej lub średnią gęstość energii akustycznej pola znormalizowanego względem wartości maksymalnej ciśnienia. Zakres zmian tych parametrów jest różny, ale związek pomiędzy nierównomiernością pola a wartością parametrów jest praktycznie taki sam.

Rysunki 25÷26 ilustrują pole ciśnienia i modułu wektora prędkości akustycznej w komorach z zadaną impedancją akustyczną o średnim pochłanianiu dźwięku ($\alpha=0,5$) dla trzech najciekawszych przypadków, dla rezonansów rzędu 2-0, 0-2 i 2-1.



Rysunek 25. Pole ciśnienia akustycznego w komorach prostokątnych z impedancją akustyczną $Z=3,6e^{-j50}$ ($\alpha=0,5$) dla modów rzędu 2-0, 0-2 i 2-1



Rysunek 26. Moduł wektora prędkości akustycznej w komorach prostokątnych z impedancją akustyczną $Z=3,6e^{-j50}$ ($\alpha=0,5$) dla modów rzędu 2-0, 0-2 i 2-1

Kształt pola ciśnienia i modułu wektora prędkości akustycznej dla rezonansów osiowych, których oś jest skierowana równolegle do krawędzi z impedancją akustyczną znacznie się różni od kształtu pola w komorze prostokątnej bez tłumienia. Odchylenie standardowe zmienia się o 21÷31 % względem komory bez tłumienia. Największa różnica w nierównomierności pola mierzona odchyleniem standardowym pomiędzy trzema sposobami zadania impedancji akustycznej wynosi 12 % (jednolita impedancja i pasy naprzemienne). Dla rezonansów osiowych, których oś jest skierowana równolegle do krawędzi z impedancją akustyczną obszary o dużej wartości ciśnienia i prędkości akustycznej występują w pobliżu krawędzi pochłaniającej dźwięk

Dla modów osiowych oś których skierowana jest prostopadle do płaszczyzny pochłaniającej dźwięk kształt pola ciśnienia i modułu wektora prędkości akustycznej różni się od pola w komorze bez pochłaniania tylko dla przypadku niejednolitej impedancji akustycznej (nierównomierność pola zmienia się do 25 % dla pasów naprzemiennych względem komory o sztywnych ściankach). Zmiana ta następuje w wyniku rozproszenia fali akustycznej na krawędzi z niejednolitą impedancją. Dla

przedstawionego na rysunkach 25÷26 rezonansu rzędu 0-2 szerokość pasów impedancji jest równa około 1/5 długości fali. Nawet przy tak małych rozmiarach geometrycznej niejednorodności impedancji akustycznej zachodzi znaczna zmiana kształtu pola ciśnienia i prędkości akustycznej.

Dla rezonansu równoległego rzędu 2-1 nierównomierność ciśnienia akustycznego w komorze z niejednorodną impedancją akustyczną jest mniejsza o 13÷20 % w porównaniu z komorą bez tłumienia. Największe różnice występują dla niejednorodnej impedancji w postaci pasów naprzemiennych.

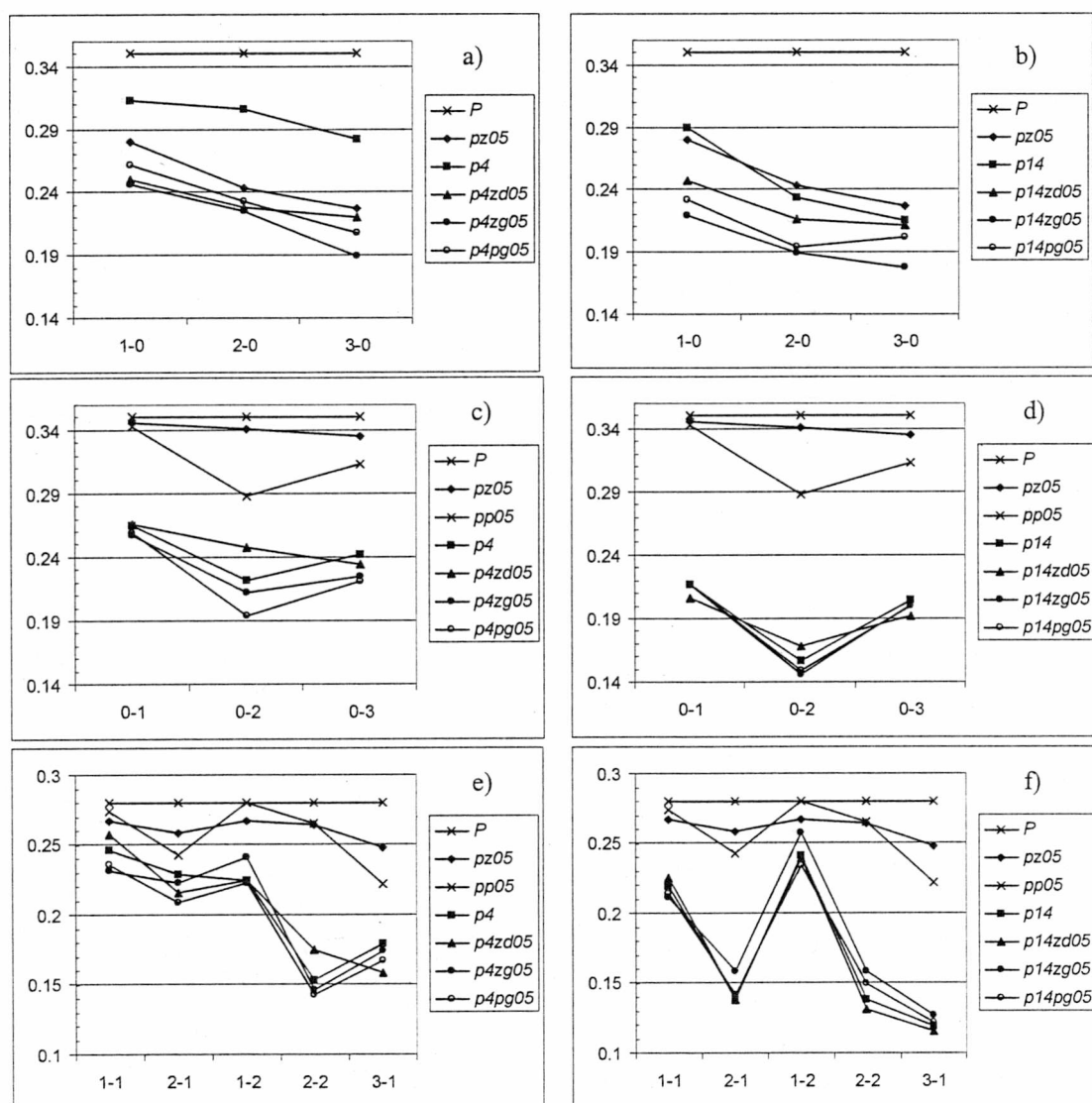
3.4.2 Komory 2D o kształcie różnym od prostokąta

Przypadek komór o kształcie nieznacznie różnym od kształtu prostokąta (rys.22): prostokąta z pochyloną jedną z dłuższych krawędzi o 4° i 14° , rozpatrzono dla jednej wartości impedancji akustycznej, odpowiadającej współczynnikowi pochłaniania dźwięku na krawędzi $\alpha=0,5$. Warunek brzegowy w postaci jednolitej lub niejednorodnej impedancji akustycznej określono na jednej z dłuższych nierównoległych krawędziach komory. Rysunki 27a÷27f ilustrują nierównomierność pola ciśnienia akustycznego w badanych komorach. Na wykresach podano odchylenie standardowe ciśnienia akustycznego dla pierwszych jedenastu rezonansów komory. Dla porównania na każdym wykresie podano również nierównomierność pola dla prostokątnej komory bez tłumienia (P), dla komór o zmodyfikowanym kształcie bez tłumienia ($p4$, $p14$) oraz prostokątnej komory z jednolitą impedancją (pz) i impedancją w postaci pasów (pp) umieszczonych na jednej z dłuższych krawędzi. Ze względu na zachowanie dobrej czytelności wykresów rysunki 27a÷27b nie zawierają przypadku pp .

Pochylenie jednej z krawędzi komory prostokątnej powoduje znaczne zmniejszenie nierównomierności pola akustycznego dla wszystkich rodzajów modów. Dla wszystkich modów osiowych i większości modów równoległych ze zwiększeniem kąta pochylenia krawędzi zmniejsza się nierównomierność pola.

Przy małych kątach pochylenia krawędzi wprowadzenie impedancji do komory ma istotny wpływ na nierównomierność pola dla wszystkich modów (rys.27a,c,e). Dla dużych kątów pochylenia krawędzi impedancja akustyczna w znaczny sposób wpływa na nierównomierność pola tylko dla modów osiowych, których oś jest równoległa lub prawie równoległa do krawędzi z określoną impedancją akustyczną (rys.27b,d,f). Dla pozostałych modów w modelu $p14$ o nierównomierności pola akustycznego decyduje głównie kształt komory.

Umieszczenie w komorach $p4$ i $p14$ materiału pochłaniającego dźwięk na pochyłonej krawędzi zwiększa wpływ impedancyjnego warunku brzegowego na nierównomierność pola akustycznego tylko dla modów osiowych (rys.27a÷27d). Określenie impedancyjnego warunku brzegowego w postaci pasów zmniejsza nierównomierność pola akustycznego dla modów, których oś jest prostopadła do krawędzi z zadaną impedancją. Dla komory $p4$ nierównomierność pola w takim przypadku jest mniejsza o około 10 % niż w komorze z jednolitą impedancją (rys. 27c).



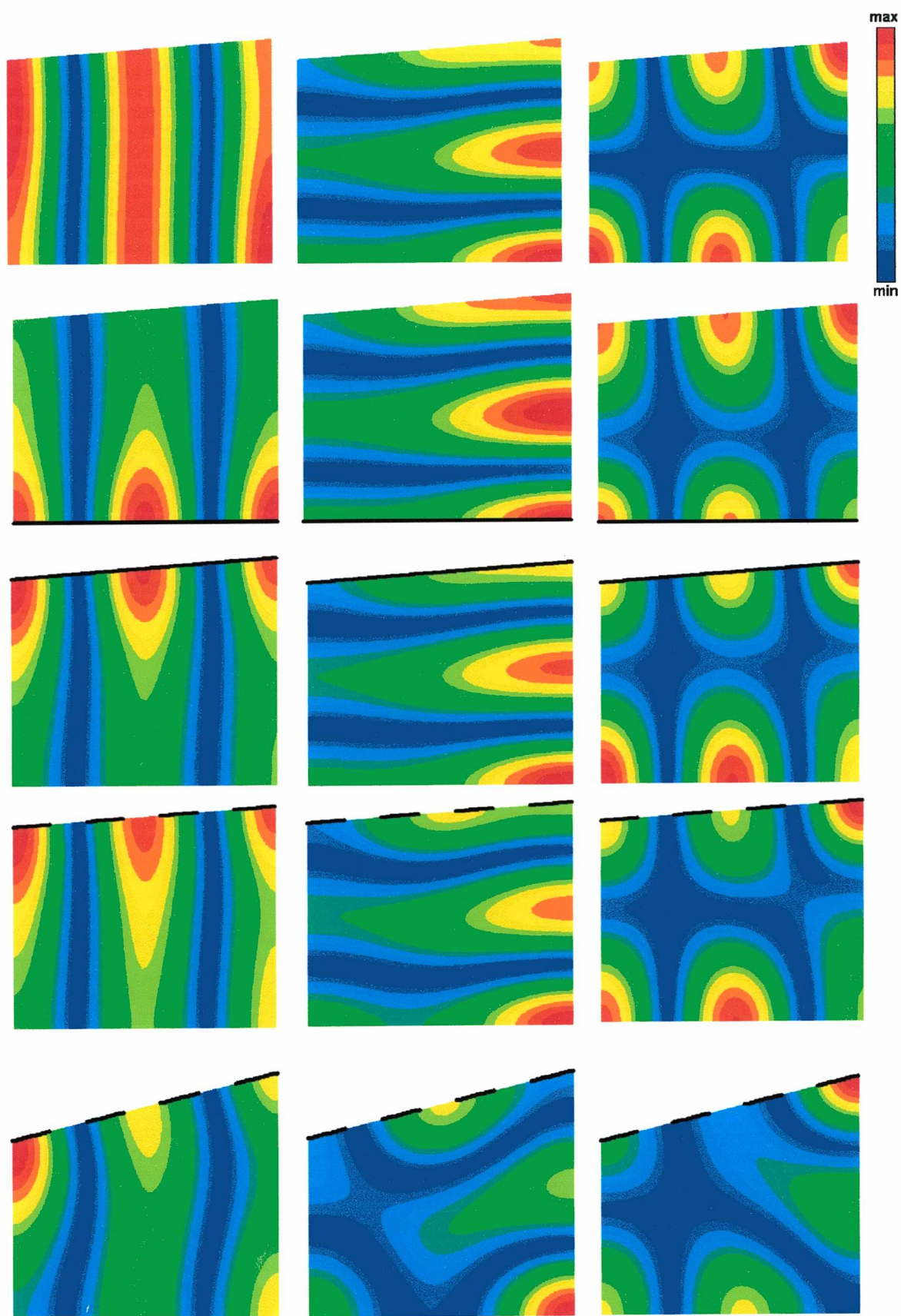
Rysunek 27. Nierównomierność pola ciśnienia akustycznego mierzona odchyleniem standardowym w dwuwymiarowych komorach o kształcie prostokąta z pochyłą jedną z dłuższych krawędzi o 4° i 14° z zadaną impedancją akustyczną o wartości $Z=3,6e^{-j50}$ ($\alpha=0,5$); (a), (c), (e)- przypadek $p4$; (b), (d), (f) – przypadek $p14$

W komorze z zadaną impedancją akustyczną na pochyłonej krawędzi o 4° nierównomierność pola akustycznego wśród pierwszych 11 modów mierzona

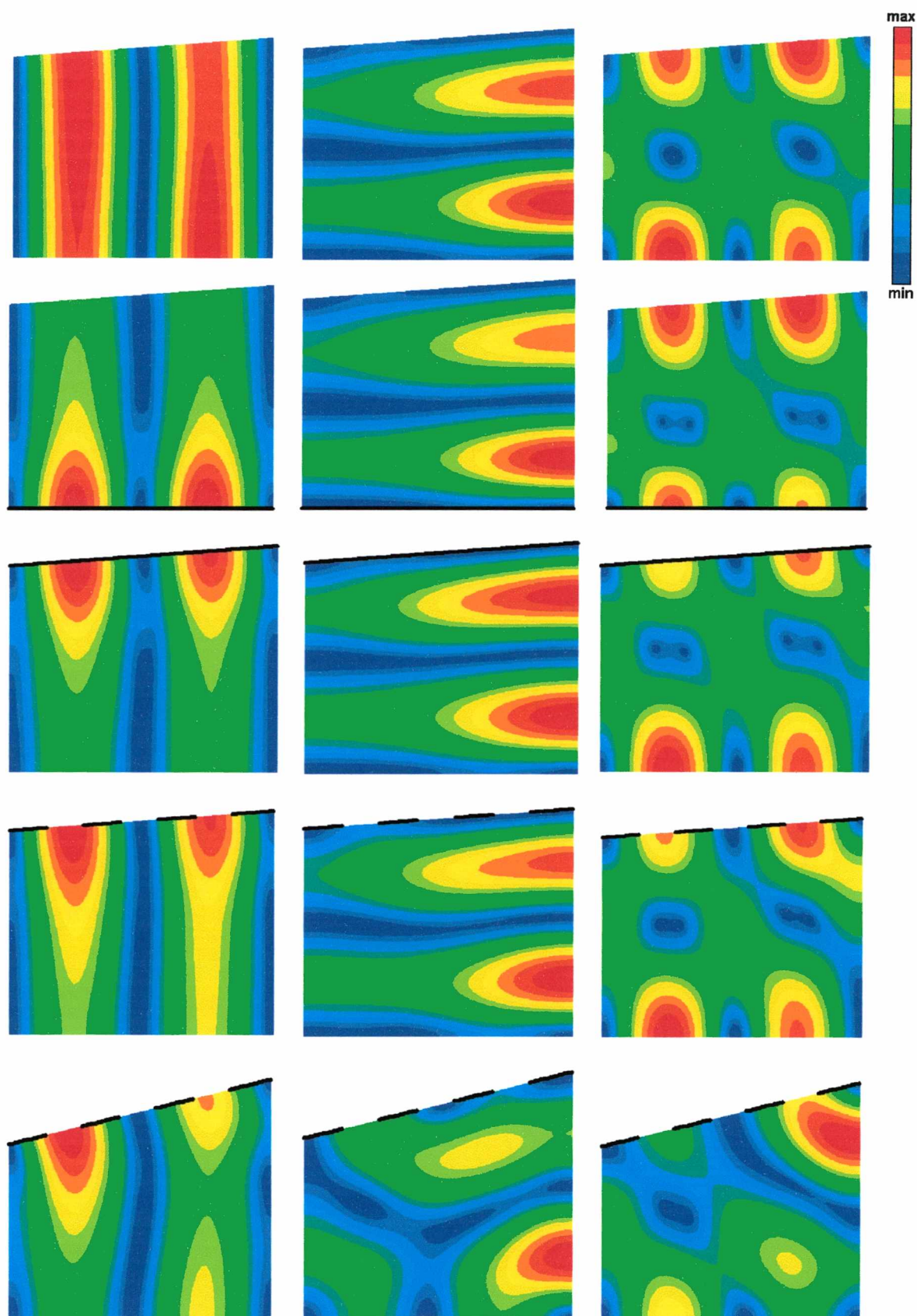
odchyleniem standardowym jest mniejsza do 46% i 44% niż w komorze prostokątnej bez pochłaniania dla modów, odpowiednio, osiowych, których oś jest skierowana prawie równolegle do powierzchni z impedancją i modów osiowych, których oś jest skierowana prawie prostopadłe do powierzchni z impedancją. Dla modów równoległych nierównomierność pola akustycznego jest mniejsza nawet do 49% niż w komorze prostokątnej bez tłumienia. Porównując nierównomierność pola w komorach z tłumieniem stwierdzono, że nierównomierność pola mierzona parametrem σ w komorze z pochyloną krawędzią o 4° jest o 17% i 33% mniejsza niż w komorze prostokątnej dla modów, odpowiednio, osiowych, których oś jest skierowana prawie równolegle do powierzchni z zadaną impedancją i modów osiowych, których oś jest skierowana prawie prostopadłe do powierzchni z impedancją. Dla modów równoległych nierównomierność pola akustycznego jest mniejsza do 46% niż w komorze prostokątnej.

W komorze *p14* z zadaną impedancją akustyczną na pochylonej krawędzi o 14° nierównomierność pola jest do 50 % i 59 % mniejsza niż w komorze prostokątnej bez pochłaniania dla modów, odpowiednio, osiowych i równoległych. Nierównomierność pola w takiej komorze dla modów osiowych, których oś jest prawie równoległa do krawędzi z impedancją akustyczną jest o 20÷50 % mniejsza niż w komorze prostokątnej z pochłanianiem.

Na rysunku 28 przedstawiono kształt pola ciśnienia akustycznego w komorze *p4* i *p14* dla wybranych sposobów rozmieszczenia impedancji akustycznej o wartości $Z=3,6e^{-j50}$ ($\alpha=0,5$) dla modów rzędu 0-2 i 2-1. Dla porównania na rysunku podano również przypadek komory *p4* bez pochłaniania. Dla komory *p14* podano tylko przykład niejednolitej impedancji na jednej krawędzi, dla którego nierównomierność pola jest najmniejsza wśród rozpatrywanych modów.



Rysunek 28. Pole ciśnienia akustycznego w komorach o kształcie różnym od kształtu prostokąta przy zadanej impedancji akustycznej $Z=3,6e^{-j50}$ ($\alpha=0,5$) dla modów rzędu 2-0, 0-2 i 2-1



Rysunek 29. Moduł wektora prędkości akustycznej w komorach o kształcie różnym od kształtu prostokąta przy zadanej impedancji akustycznej $Z=3,6e^{-j50}$ ($\alpha=0,5$) dla modów rzędu 2-0, 0-2 i 2-1

Kształt pola ciśnienia i modułu prędkości akustycznej dla modów osiowych utworzonych przez parę nierównoległych ścian zależy zarówno od kąta pochylenia jednej krawędzi względem drugiej, jak i sposobu umieszczenia materiału pochłaniającego dźwięk. Zadanie impedancji akustycznej w sposób niejednolity zmniejsza nierównomierność pola akustycznego w porównaniu z przypadkiem jednolitej impedancji. Przy dużych kątach, tzn. powyżej 10° , o kształcie pola akustycznego decyduje głównie geometria komory.

Kształt modów osiowych, których oś jest skierowana równolegle lub pod ostrym kątem do krawędzi z impedancją, jest określony głównie przez stopień jednolitości i wartość impedancyjnego warunku brzegowego. Tylko dla dużych kątów pochylenia krawędzi komory lub dla małych wartości impedancji akustycznej o kształcie pola decyduje wyłącznie jej geometria. Obszar o największej wartości ciśnienia i prędkości akustycznej zawsze występują w pobliżu krawędzi pochłaniającej dźwięk. Nierównomierność pola akustycznego w komorze z niejednolitą impedancją akustyczną jest mniejsza niż w komorze z jednolitą impedancją.

Kształt modów równoległych zależy zarówno od geometrii komory, jak i sposobu umieszczenia materiału pochłaniającego dźwięk. Zadanie impedancji akustycznej w sposób niejednolity zmniejsza nierównomierność pola akustycznego w porównaniu z komorą z impedancją jednolitą.

Na skutek umieszczenia materiału pochłaniającego dźwięk na krawędziach komory zmieniają się również częstotliwości drgań własnych komory. Częstotliwość drgań własnych zależy od rozmiarów geometrycznych komory oraz skoku fazy na krawędzi z zadana impedancją. Dla komory jednowymiarowej częstotliwość drgań własnych można określić na podstawie równania (3-20). Dla komór dwu- i trójwymiarowych brak jest zależności analitycznych. Wartość częstotliwości drgań własnych komór prostopadłościennych z tłumieniem określa się na podstawie nomogramów [67,82] lub metodami numerycznymi. W rozpatrywanych przykładach największa zmiana częstotliwości rezonansowej względem komory o sztywnych ściankach występuje dla komory prostokątnej z jednolitą impedancją akustyczną o wartości $Z=3,6e^{-j50}$ ($\alpha=0,5$) dla rezonansu rzędu 0-1. Dla tego przypadku częstotliwość rezonansowa zmienia się o -7%, a więc o wartość którą można pominąć w wielu zagadnieniach praktycznych. Należy również przypomnieć, że powierzchnia wszystkich modelowanych komór dwuwymiarowych jest jednakowa.

Dla modelowanych komór zbadano również wpływ sposobu umieszczenia i stopnia jednolitości impedancyjnego warunku brzegowego na częstotliwość drgań własnych. Okazuje się, że w analizowanych przypadkach wymienione czynniki praktycznie nie mają wpływu na częstotliwość rezonansów. Największa zaobserwowana różnica wynosi 3 %, czyli jest na poziomie błędów stosowanej metody numerycznej.

3.5 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy błędów wyznaczania pulacji rezonansowych i rozkładu ciśnienia akustycznego dla modeli z impedancyjnymi warunkami brzegowymi natury akustycznej metodą kombinacji liniowej wektorów własnych modelu bez strat określono gęstość siatki elementów skończonych dla której błędy te są mniejsze od 5%. Wartość częstotliwości rezonansowych jest wyznaczana ze wspomnianą dokładnością dla siatek o gęstości co najmniej 6 el/ λ , natomiast rozkład ciśnienia akustycznego dla siatek o gęstości co najmniej 20 el/ λ . Przy wyznaczaniu rozkładu ciśnienia akustycznego wewnątrz komory metodą kombinacji liniowej wektorów własnych modelu bez strat należy więc stosować inne kryterium doboru siatki elementów skończonych, niż kryterium 6 el/ λ powszechnie stosowane w modelowaniu zagadnień wibroakustycznych metodą FEM.

Porównanie błędów wyznaczania pola prędkości akustycznej poprzez przetworzenie pola ciśnienia akustycznego różnymi technikami oraz analiza wrażliwości kształtu pola prędkości na te błędy wykazały, że technika dwustronnej pochodnej dyskretnej jest efektywniejsza od techniki jednostronnej pochodnej dyskretnej i techniki numerycznego różniczkowania funkcji interpolowanej funkcjami sklejanymi. Błędy obliczenia prędkości akustycznej techniką dwustronnej pochodnej dyskretnej są mniejsze od 5% dla siatek dyskretnych o gęstości co najmniej 10 el/ λ .

W wyniku modelowania szeregu komór o różnej geometrii i dla różnych impedancyjnych warunków brzegowych natury akustycznej wykazano, że nierównomierność pola akustycznego można mierzyć odchyleniem średniokwadratowym kwadratu ciśnienia/prędkości akustycznej od wartości średniej lub wartością średnią kwadratu ciśnienia/prędkości akustycznej. Parametry te mogą być stosowane zamiennie, aczkolwiek błędy wyznaczania parametru $\bar{x}^2$ z wykorzystaniem jednorodnych siatek dyskretnych są około 2 razy większe niż odchylenia

standardowego σ . Parametr σ natomiast jest mniej czuły na zmianę nierównomierności pola niż parametr $\bar{x}^2$.

Przy ocenie właściwości pola akustycznego w komorach oprócz wymienionych parametrów pomocna jest również wizualizacja zarówno pola ciśnienia, jak i prędkości akustycznej. Zobrazowanie kształtu pola ciśnienia i prędkości akustycznej umożliwia dokładniejszą analizę zjawisk akustycznych zachodzących wewnątrz komory, m.in., określenie obszarów skupienia energii akustycznej (potencjalnej i kinetycznej) i tym samym optymalizację rozmieszczenia w komorze materiałów pochłaniających dźwięk.

W wyniku przeprowadzonego modelowania określono jakościowy i ilościowy wpływ warunków brzegowych natury akustycznej na nierównomierność i kształt pola ciśnienia i prędkości akustycznej w zależności od rodzaju modów drgań własnych komory. Nierównomierność pola akustycznego dla modów, których oś jest skierowana równolegle lub pod ostrym kątem do ścianek komory z jednolitą impedancją akustyczną jest mniejsza niż w komorze bez tłumienia. Nierównomierność pola dla modów, których oś jest skierowana prostopadle do powierzchni z jednolitym impedancyjnym warunkiem brzegowych jest praktycznie taka sama, jak w komorze bez strat. Określenie impedancji akustycznej w postaci pasów zwiększa jej wpływ na pole akustyczne i zmniejsza nierównomierność pola akustycznego dla modów, których oś jest skierowana prostopadle do powierzchni z zadana impedancją. Pochylenie jednej ze ścianek komory od kilku do kilkudziesięciu stopni względem ścianki przeciwległej zmniejsza nierównomierność pola w komorze. Dla dużych kątów pochylenia ścianki nierównomierność pola akustycznego w komorze jest określona głównie przez geometrię komory.

W rozdziale wykazano również, że wprowadzając niewielkie modyfikacje w geometrii komory prostokątnej oraz zadając w odpowiedni sposób impedancyjne warunki brzegowe na jej krawędziach możliwa jest w stosunkowo szerokim zakresie zmiana nierównomierności pola akustycznego wewnątrz analizowanego obszaru.

4 Modelowanie pola akustycznego w obszarze zewnętrznym z uwzględnieniem impedancyjnych warunków brzegowych

Pole akustyczne w obszarach nieograniczonych na ogół jest modelowane metodą BEM, rzadziej FEM oraz metodami mieszanymi FEM/BEM. W metodzie FEM obszar nieograniczony zastępuje się odpowiednio dużym obszarem ograniczonym na brzegu którego nakładany jest warunek brzegowy zapewniający całkowite pochłanianie fali akustycznej. Ponieważ w przypadku metody BEM dyskretyzacji podlega wyłącznie brzeg modelowanego obszaru metoda ta na ogół jest efektywniejsza, niż metoda FEM. Istnieje jednak odmiana metody FEM w której są stosowane tzw. elementy nieskończone [11] umożliwiające analizę pola nieograniczonego bez konieczności dyskretyzacji całego modelowanego obszaru. W takim przypadku efektywność metody FEM może być większa niż metody BEM [36]. Efektywność metody FEM można również zwiększyć wykorzystując pewne zależności uzyskane z zastosowaniem analogii E-M-A.

W przypadku kolokacyjno-wariacyjnej metody DBEM w postaci klasycznej nie jest możliwe jednoczesne modelowanie pola akustycznego wewnątrz i na zewnątrz obszaru ograniczonego. Wpływ pola akustycznego wewnątrz komory na pole akustyczne na zewnątrz komory oblicza się dwuetapowo lub wykorzystując analogię E-M-A. W przypadku analizy dwuetapowej najpierw wyznacza się pole wewnątrz komory na podstawie czego są określane warunki brzegowe stosowane w modelowaniu na drugim etapie. Metoda IBEM natomiast umożliwia jednoczesne modelowanie pola akustycznego wewnątrz i na zewnątrz analizowanego obszaru. Ze względu na sposób formułowania metody IBEM istnieją jednak trudności z definiowaniem impedancyjnych warunków brzegowych o różnych wartościach na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej modelowanej komory. Zostanie również wykazano, że podczas analizy związku pomiędzy parametrami pola akustycznego wewnątrz i na zewnątrz komory, efektywność modelowania metodą FEM z wykorzystaniem analogii E-M-A jest o wiele większa od efektywności modelowania metodą IBEM.

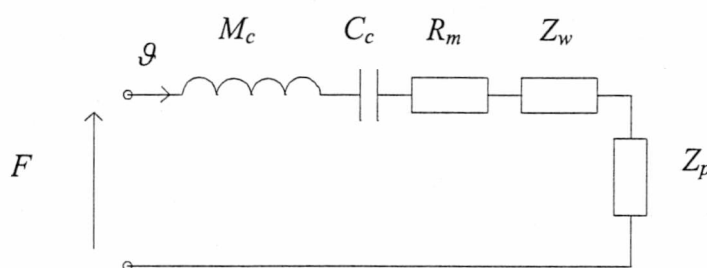
W pracy modelowanie pola akustycznego w obszarze zewnętrznym komory z uwzględnieniem impedancyjnych warunków brzegowych ograniczono do analizy oddziaływania pola akustycznego wewnątrz komory na parametry pola akustycznego na zewnątrz komory. Problematyka ta jest ważnym zagadnieniem w akustyce małych pomieszczeń, projektowaniu obudów głośnikowych i w wibroakustyce.

4.1 Wyznaczanie pola ciśnienia akustycznego metodami FEM i BEM z wykorzystaniem analogii E-M-A

Pole akustyczne na zewnątrz komory z elementami promieniującymi dźwięk można wyznaczyć łącząc metody FEM, BEM i metodę analogii E-M-A. Podejście takie umożliwia znaczne uproszczenie modeli numerycznych przy jednoczesnym zachowaniu dobrej dokładności modelowania zjawisk falowych zachodzących wewnątrz komory. Wykorzystanie zmodyfikowanej metody FEM z wykorzystaniem analogii E-M-A na przykładzie modelowania urządzeń głośnikowych można znaleźć między innymi w pracach [30,77].

4.1.1 Wyznaczanie ciśnienia akustycznego poprzez obliczenie impedancji obciążającej tylną stronę elementu drgającego

Komorę zamkniętą z elementem promieniującym dźwięk w świetle analogii E-M-A można przedstawić za pomocą schematu zastępczego według rysunku 30.



gdzie:

F – siła mechaniczna działająca na element drgający [N],

ϑ – prędkość elementu drgającego [m/s],

M_c – masa mechaniczna czynna elementu drgającego [kg],

C_c – podatność mechaniczna czynna elementu drgającego [s^2/kg],

R_m – rezystancja mechaniczna elementu drgającego [kg/s],

Z_w – impedancja mechaniczna obciążająca tylną stronę elementu drgającego [kg/s],

Z_p – impedancja promieniowania elementu drgającego przeniesiona na stronę mechaniczną [kg/s].

Rysunek 30. Schemat zastępczy komory z elementem promieniującym dźwięk

Korzystając ze schematu zastępczego można wyznaczyć prędkość elementu promieniującego dźwięk:

$$\vartheta = \frac{F}{Z_m + Z_p + Z_w},$$

gdzie :

(4-1)

$$Z_m = R_m + j\omega M_c + \frac{1}{j\omega C_c} - \text{impedancja mechaniczna elementu drgającego}.$$

W większości zagadnień wibroakustycznych, a w szczególności w zagadnieniu modelowania obudów głośnikowych, impedancja promieniowania jest o wiele mniejsza od impedancji mechanicznej elementu drgającego i od impedancji obciążającej tylną

stronę elementu drgającego. Masa współdrzającego środowiska na zewnątrz komory jest mniejsza od masy membrany głośnika lub masy czynnej drgającej struktury elastycznej, natomiast rezystancja promieniowania jest o wiele mniejsza od rezystancji strat komory z materiałem nawet słabo pochłaniającym dźwięk. Analizę wpływu impedancji promieniowania na wypadkową masę i rezystancję mechaniczną elastycznych układów powierzchniowych na przykładzie płyty kołowej można znaleźć w pracy [15]. Prędkość drgań elementu promieniującego dźwięk zatem praktycznie nie zależy od impedancji promieniowania Z_p .

Podczas modelowania obudów głośnikowych w zakresie małych i średnich częstotliwości membranę głośnikową można traktować jako sztywny tłok. Dodatkowo można założyć, że w zakresie średnich częstotliwości reaktancja impedancji mechanicznej elementu drgającego jest określona wyłącznie przez jego masę czynną, natomiast straty w układzie mechanicznym są pomijalnie małe. W takim przypadku równanie (4-1) można uprościć do postaci:

$$g = \frac{F}{j\omega M_c + Z_w}. \quad (4-2)$$

Do obliczenia prędkości drgań elementu promieniującego dźwięk wystarczy zatem wyznaczyć impedancję obciążającą jego tylną stronę. Impedancję Z_w w sposób analityczny można wyznaczyć dla nielicznych przypadków, między innymi dla tłoka sztywnego umieszczonego na jednym z końców sztywnej rury oraz dla prostopadłościenną komory o sztywnych ściankach [51]. Pierwszy model jest powszechnie stosowany w analizie urządzeń głośnikowych [75].

Impedancja obciążająca tylną stronę tłoka sztywnego jest określona jako stosunek siły mechanicznej działającej na element do jego prędkości drgań:

$$Z_w = \frac{- \int p dS_t}{g_0},$$

gdzie: S_t - powierzchnia tłoka,

g_0 - zadana prędkość drgań tłoka. (4-3)

Przy zadanej prędkości drgań tłoka rozkład ciśnienia akustycznego na jego powierzchni można wyznaczyć metodami FEM lub BEM. W metodach tych ciśnienie akustyczne oblicza się w dyskretnych punktach (węzłach) na powierzchni tłoka. Zakładając liniowy lub inny charakter zmian ciśnienia pomiędzy węzłami można numerycznie, a w niektórych przypadkach również analitycznie, wyznaczyć całkę po

powierzchni tłoka. W pracy założono liniową zmianę ciśnienia pomiędzy węzłami, natomiast całkę wyznaczono analitycznie dzieląc powierzchnię tłoka na trójkątne elementy skończone. Metodykę wyznaczania impedancji Z_w na podstawie rozkładu ciśnienia akustycznego w dyskretnych punktach na powierzchni tłoka przy użyciu trójkątnych elementów dyskretnych przedstawiono w dodatku B. Zastosowanie trójkątnych elementów umożliwia analityczne wyznaczanie całki (4-3) dla tłoka o dowolnym kształcie.

Znając prędkość drgań elementu drgającego można wyznaczyć wartość ciśnienia akustycznego w dowolnym punkcie obszaru na zewnątrz komory. Dla tłoka sztywnego umieszczonego w nieskończenie wielkiej odgradzie ciśnienie akustyczne na osi promieniowania w polu dalekim można wyznaczyć z równania [32]:

$$p(r) = \rho_0 c \frac{ka^2}{2r} \mathcal{G},$$

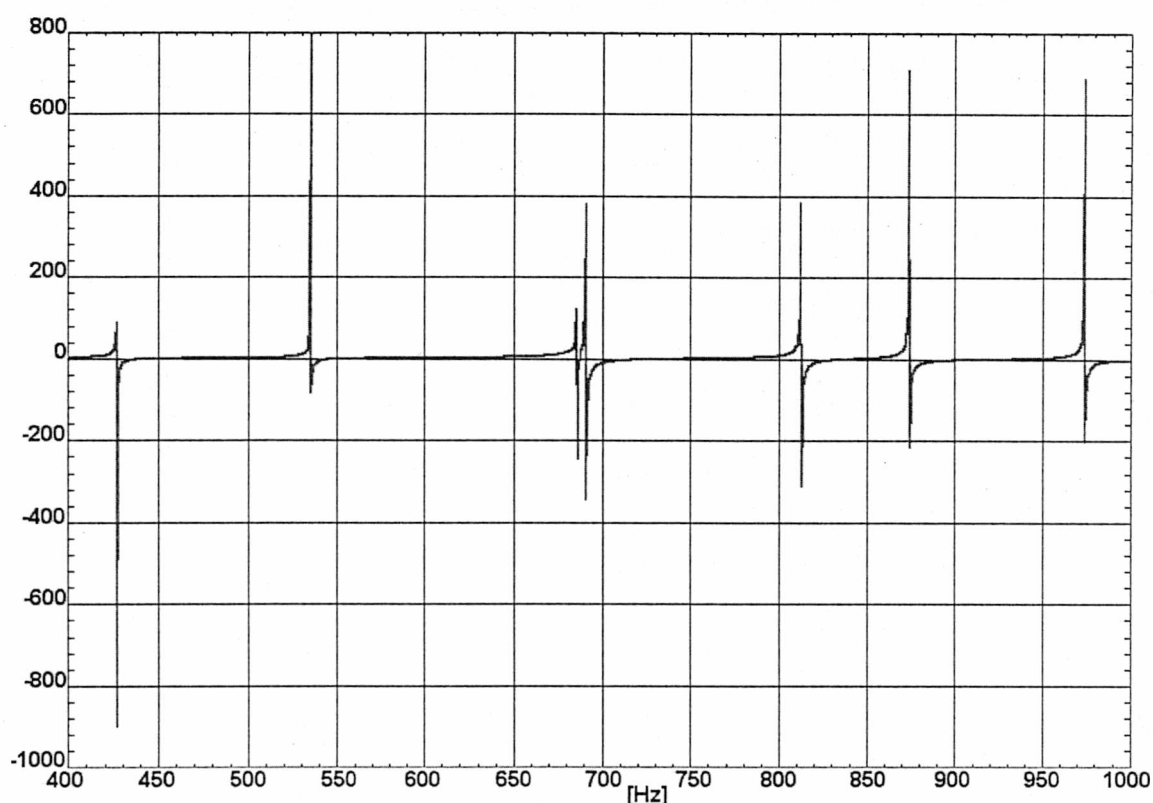
gdzie : $\rho_0 c$ - akustyczna rezystancja właściwa osrodka, (4-4)
 a - promień tłoka, r - odległość.

Wyznaczona prędkość drgań elementu promieniującego dźwięk może być również wykorzystana jako warunek brzegowy w metodach FEM i BEM przy obliczeniu pola akustycznego na zewnątrz komory.

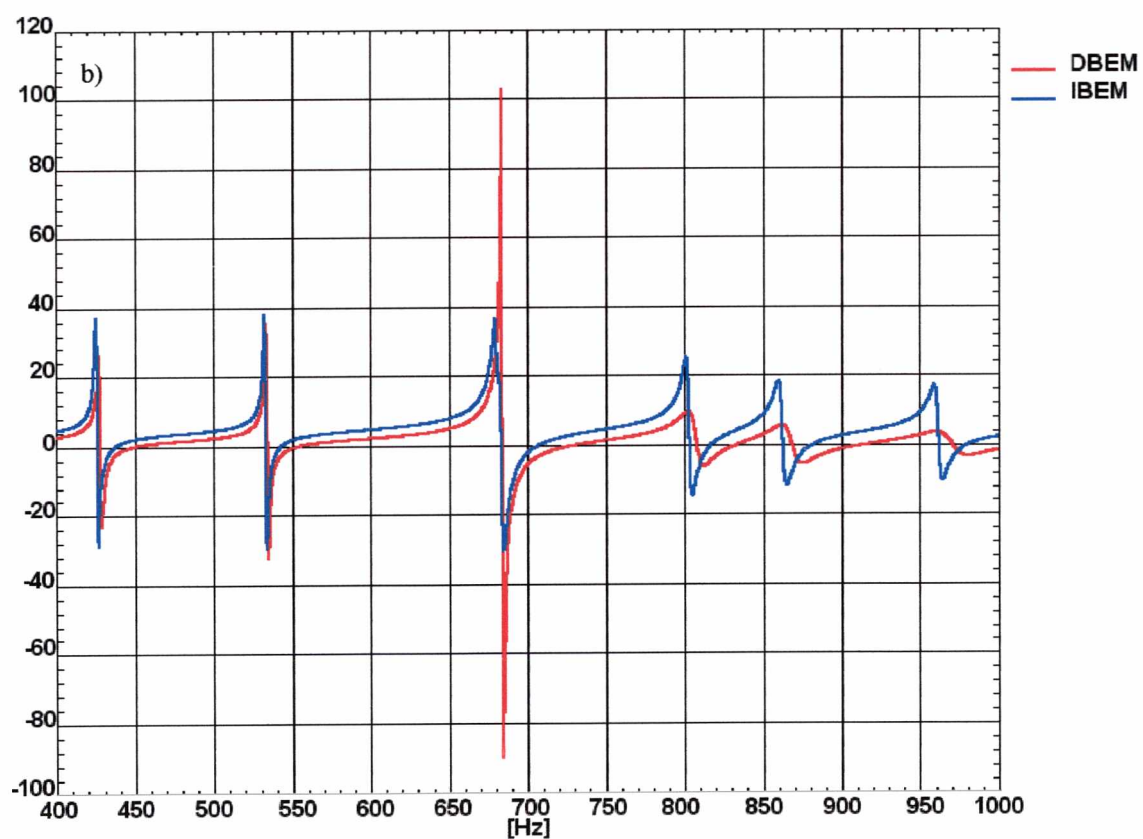
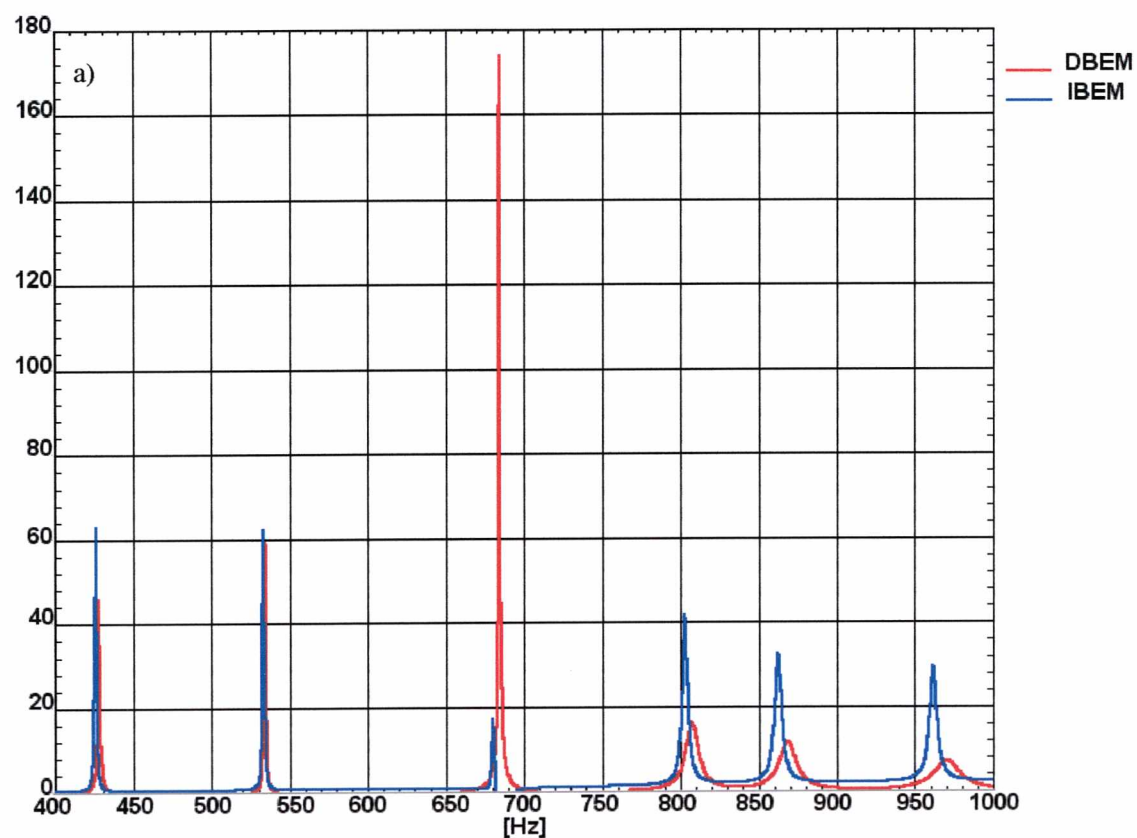
W celu oszacowania efektywności obliczenia ciśnienia akustycznego na zewnątrz komory z elementem drgającym poprzez wyznaczenia impedancji obciążającą tylną stronę elementu metodami FEM, DBEM i IBEM rozważono przypadek komory prostopadłościennej o wymiarach 40×32×25 cm, odpowiadającej obudowie głośnikowej średniej wielkości (32 litry). Element promieniujący dźwięk w postaci tłoka sztywnego o efektywnym promieniu 6 cm i masie czynnej 10 g umieszczono niesymetrycznie w ścianie o największej powierzchni. Siatka elementów skończonych modelu FEM składa się z 375 elementów i 510 węzłów, natomiast siatka elementów brzegowych modelu BEM zawiera 300 elementów i 290 węzłów. Siatka elementów brzegowych jest dokładnym odwzorowaniem powierzchni zewnętrznej siatki elementów skończonych. Gęstość siatek elementów dyskretnych dobrano tak, aby na jedną długość fali akustycznej przypadało co najmniej 6 elementów w modelowanym zakresie częstotliwości (do 1kHz).

Rysunki 31÷32 ilustrują impedancję Z_w tłoka sztywnego wyznaczoną metodami FEM, DBEM i IBEM dla obudowy bez strat. Dla modeli bez strat macierz główna w metodzie FEM jest macierzą rzeczywistą, zaś rezystancja obciążająca tylną stronę tłoka

jest równa zero. W metodach BEM macierz główna jest zawsze macierzą zespoloną, a więc impedancja Z_w jest również wartością zespoloną. W metodach BEM rezystancja obciążająca tylną stronę tłoka dla częstotliwości rezonansowych jest nieskończenie wielka, natomiast dla pozostałych częstotliwości jest równa zero.



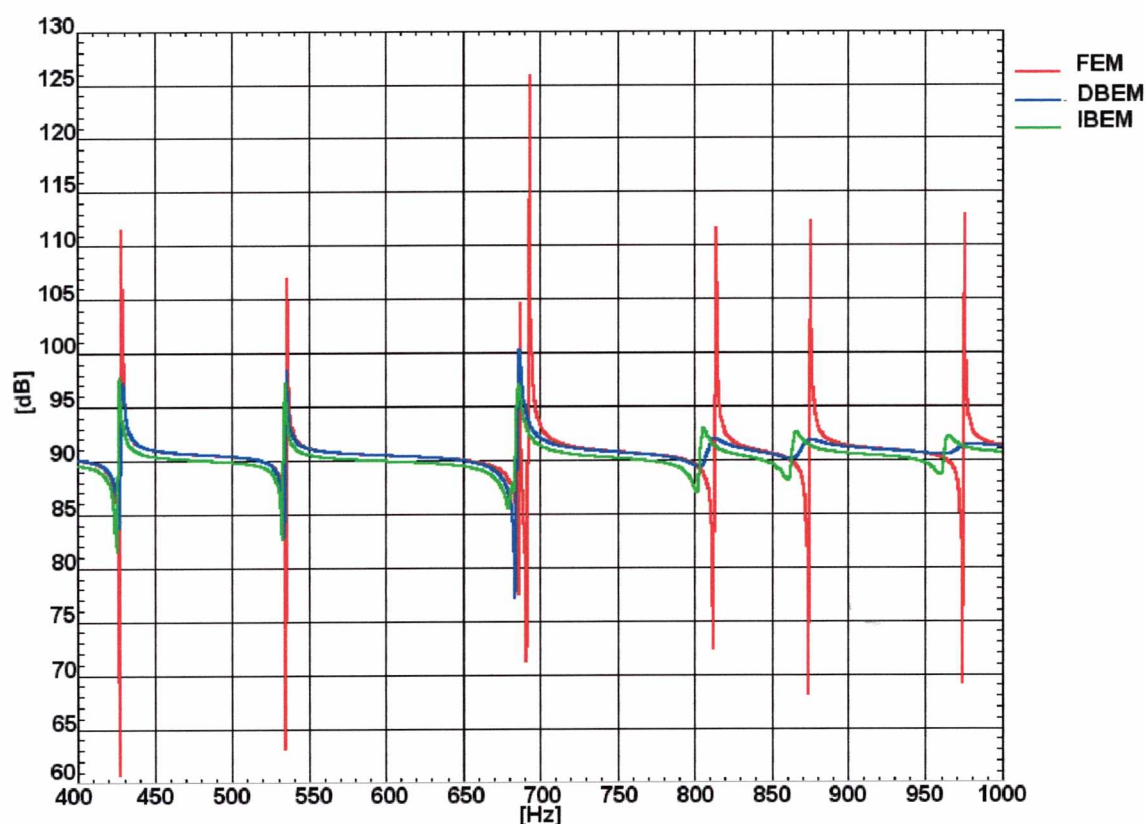
Rysunek 31. Reaktancja obciążająca tylną stronę tłoka sztywnego w obudowie bez strat wyznaczona metodą FEM



Rysunek 32. Rezystancja (a) i reaktancja (b) obciążającą tylną stronę tła sztywnego w obudowie bez strat wyznaczone metodami DBEM i IBEM

Impedancja obciążająca tylną stronę tłoka jest różna od zera tylko w pobliżu częstotliwości rezonansowych obudowy. W tym zakresie ze wzrostem częstotliwości impedancja Z_w najpierw staje się nieskończenie wielka i tłok nie promieniuje energii akustycznej, po czym następuje zmiana znaku impedancji Z_w i prędkość drgań tłoka oraz energia promieniowania rośnie, wreszcie impedancja Z_w maleje do zera i obudowa nie wpływa na promieniowanie dźwięku.

Rysunek 33 przedstawia charakterystykę częstotliwościową poziomu ciśnienia akustycznego w polu dalekim na osi tłoka modelowanego zestawu głośnikowego obliczoną według wzoru (4-4) z wykorzystaniem impedancji obciążającej tylną stronę tłoka.



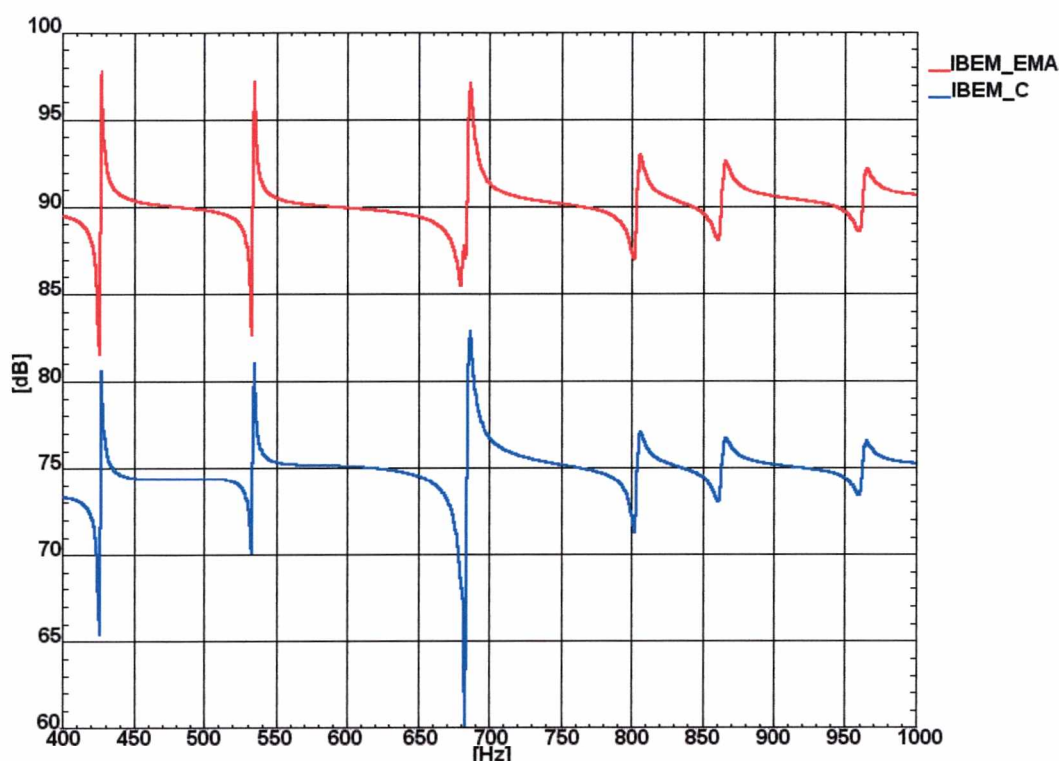
Rysunek 33. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego na osi tłoka sztywnego w polu dalekim wyznaczona poprzez obliczenie impedancji Z_w metodami FEM, DBEM i IBEM

W zakresie częstotliwości do 600 Hz metody DBEM i IBEM prawidłowo odwzorowują kształt charakterystyk impedancji Z_w i charakterystyki częstotliwościowej ciśnienia akustycznego. W tym zakresie częstotliwości różnice w charakterystykach wyznaczonych metodami FEM i BEM występują na skutek skończonej rozdzielczości modelowania na skali częstotliwości. Dla częstotliwości powyżej 600 Hz (około $1/2$ częstotliwości granicznej według kryterium $h=\lambda/6$) występują znaczne różnice w

wartościach i kształcie modelowanych charakterystyk wyznaczonych metodami BEM. W tym zakresie częstotliwości błędy modelowania metod BEM przejawiają się jako dodatkowe straty, nie związane ze stratami fizycznymi modelu, które rosną wraz z częstotliwością. Błędy te są spowodowane zespoloną postacią macierzy głównej w metodach BEM oraz zamianą ciągłego brzegu modelowanego obszaru zbiorem skończonych elementów brzegowych. Poza tym w przypadku metod BEM nie wszystkie rezonanse obudowy są prawidłowo identyfikowane. Trzeci i czwarty rezonanse akustyczne obudowy o mało różniące się częstotliwości są identyfikowane jako pojedynczy rezonans. Oznacza to, że modelowanie pola akustycznego z wykorzystaniem impedancji obciążającej tylną stronę tłoka metodami DBEM i IBEM jest mniej dokładne niż metodą FEM.

W metodzie IBEM możliwe jest jednoczesne modelowanie pola wewnątrz i na zewnątrz komory zamkniętej lub nawet częściowo otwartej. Stosując metodę sprzężoną IBEM/FEM (model akustyczny jest sprzężony z modelem mechanicznym) można w sposób bezpośredni wyznaczyć ciśnienie akustyczne na zewnątrz komory z uwzględnieniem drgań elementu promieniującego dźwięk i właściwości pola akustycznego wewnątrz komory. Wyniki modelowania promieniowania tłoka sztywnego w obudowie zamkniętej metodą sprzężoną IBEM/FEM i metodą niesprzężoną IBEM z wykorzystaniem analogii E-M-A przedstawiono na rysunku 34. Wyniki te umożliwiają ocenę dokładności modelowania pola akustycznego na zewnątrz komory techniką wyznaczenia impedancji obciążającej tylną stronę elementu promieniującego dźwięk. W celu zwiększenia czytelności wykresów charakterystyki na rysunku są przesunięte względem siebie o 15 dB.

Największa różnica wartości ciśnienia akustycznego zachodzi dla częstotliwości około 680 Hz dla której występują dwa rezonanse obudowy o mało różniące się częstotliwości. Zarówno w metodzie sprzężonej i niesprzężonej następuje błędna identyfikacja 3 i 4 rezonansów obudowy, rezonansów rzędu 1-1-1 i 0-0-1. W pozostałym zakresie częstotliwości różnicy pomiędzy charakterystykami są mniejsza od kilku dB. Wyniki obliczenia ciśnienia akustycznego na zewnątrz komory z elementem promieniującym dźwięk metodą sprzężoną IBEM/FEM i metodą wyznaczenia impedancji Z_w są zatem praktycznie identyczne.

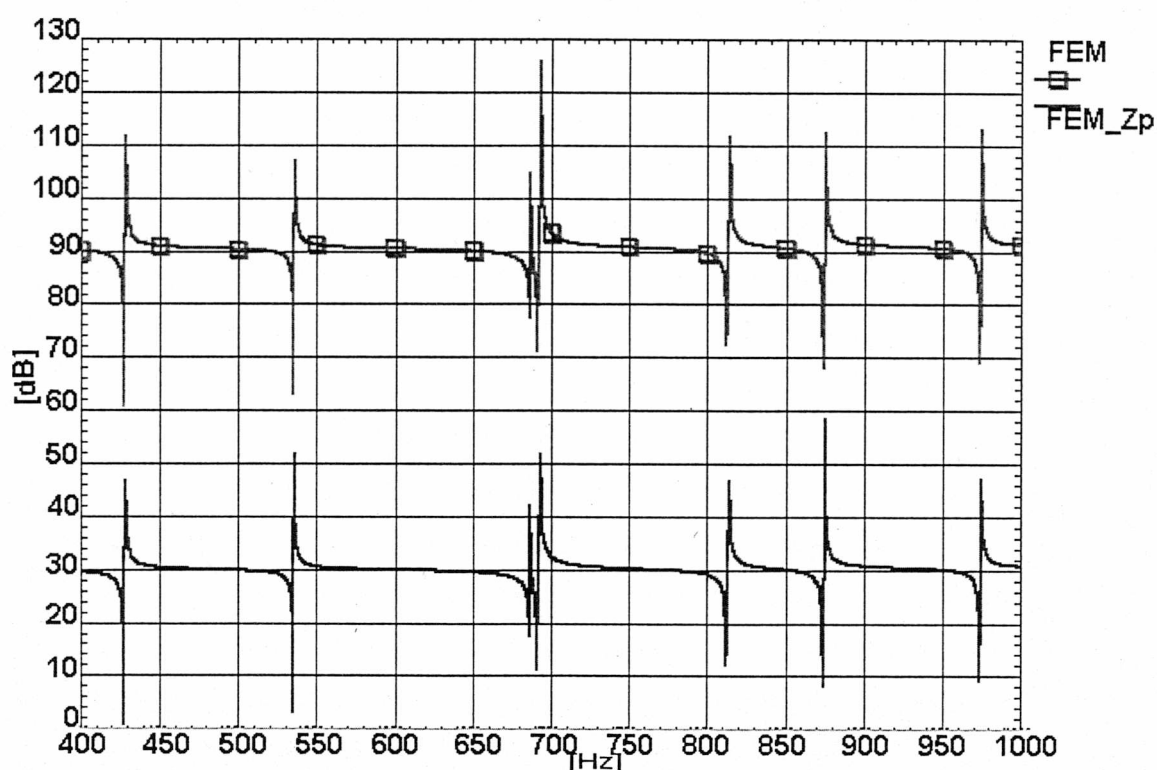


Rysunek 34. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego w polu dalekim na osi tłoka wyznaczone metodą sprzężoną IBEM (*IBEM_C*) oraz nie sprzężonej IBEM (*IBEM_EMA*)

Koszty obliczeniowe metod DBEM i IBEM przy zastosowaniu kwadratury Gaussa 4 rzędu (w modelu 3D 4 węzły Gaussa) dla siatki elementów brzegowych modelowanej obudowy składającej się z 300 czworokątnych elementów liniowych są o wiele większe od kosztów obliczeniowych metody FEM dla siatki elementów skończonych składającej się z 375 elementów liniowych. Dlatego szybkość obliczeń metodą FEM modelowanej komory jest około 10 razy większa niż metodami DBEM i IBEM. Efektywność metody FEM przy modelowaniu pola akustycznego na zewnątrz komory z elementem promieniującym dźwięk poprzez wyznaczenie impedancji obciążającą jego tylną stronę dla modeli średniej wielkości jest zatem co najmniej o rząd większa niż efektywność metod DBEM i IBEM. Efektywność metody FEM dodatkowo można znacznie zwiększyć stosując technikę superpozycji modalnej. W rozpatrywanym przypadku czas obliczeń metodą superpozycji modalnej jest 3 razy mniejszy niż metodą bezpośrednią.

Przy wyprowadzeniu wzoru określającego ciśnienie akustyczne na zewnątrz komory z elementem promieniującym dźwięk założono, że impedancja promieniowania przedniej strony elementu drgającego jest pomijalnie mała, natomiast wypadkowe straty w modelu są określone głównie przez straty wewnątrz komory. Wykorzystując metodę FEM sprawdzono wpływ impedancji promieniowania przedniej strony tłoka na dokładność obliczenia ciśnienia akustycznego oraz wpływ strat wewnątrz obudowa na

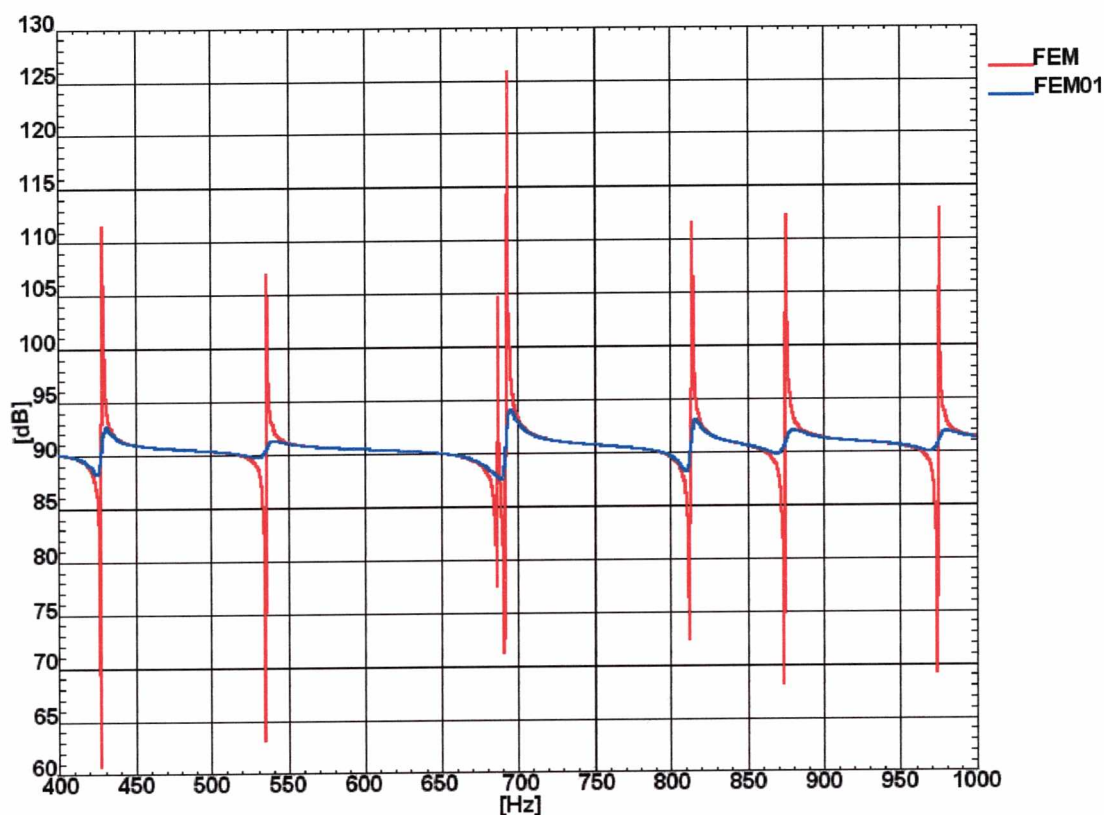
kształt charakterystyki częstotliwościowej poziomu ciśnienia akustycznego. W tym celu przy obliczeniu prędkości drgań tłoka sztywnego uwzględniono impedancję promieniowania jego przedniej strony korzystając ze znanej postaci na impedancję promieniowania kołowego tłoka sztywnego umieszczonego w nieskończenie wielkiej odgradzie. Wpływ strat wewnątrz obudowy na kształt charakterystyki częstotliwościowej poziomu ciśnienia określono wprowadzając do komory materiał pochłaniający dźwięk. Rysunek 35 ilustruje wpływ impedancji promieniowania Z_p na charakterystykę częstotliwościową poziomu ciśnienia akustycznego modelowanej obudowy głośnikowej, natomiast rysunek 36 przedstawia charakterystykę promieniowania dla obudowy, w której na dwóch wybranych równoległych ściankach umieszczono materiał o współczynniku pochłaniania dźwięku $\alpha=0,1$. Na rysunku 35 dla zwiększenia przejrzystości wykresów charakterystyki są przesunięte względem siebie o 60 dB.



Rysunek 35. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego na osi tłoka w polu dalekim wyznaczone metodą FEM z uwzględnieniem (FEM_{Zp}) i bez uwzględniania (FEM) impedancji promieniowania jego przedniej strony

Masa współdrgającego środowiska nie wpływa na kształt obliczonej charakterystyki ciśnienia akustycznego, natomiast rezystancja promieniowania ma znikomy wpływ na dobroć układu dla poszczególnych rezonansów obudowy. Znacznie większy wpływ na dobroć mają straty wprowadzone do wnętrza komory. Nawet przy małym pochłanianiu

dźwięku ($\alpha=0,1$) straty te decydują o dobroci układu dla poszczególnych rezonansów komory (rys.36). W przypadku modelowania komory zawierającej nawet małe straty akustyczne przy wyznaczaniu prędkości drgań elementu promieniującego dźwięk z zachowaniem dobrej dokładności można pominąć impedancję promieniowania przedniej strony elementu oraz straty w jego układzie mechanicznym.



Rysunek 36. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego na osi tłoka w polu dalekim wyznaczone metodą FEM dla obudowy bez strat (*FEM*) i z materiałem pochłaniającym dźwięk o $\alpha=0,1$ (*FEM01*)

4.1.2 Model strat występujących w komorach

W poprzednim rozdziale wykazano, że związek pomiędzy parametrami pola akustycznego wewnątrz komory z właściwościami pola na zewnątrz komory można analizować z zastosowaniem metod FEM i BEM oraz wybranych zależności wyprowadzonych w oparciu o analogię E-M-A oraz, że największą efektywność modelowania wykazuje metoda FEM z zastosowaniem współrzędnych modalnych. W metodzie tej można również w łatwy sposób uwzględnić straty występujące w części akustycznej bądź strukturalnej modelu numerycznego.

W modelowaniu struktur elastycznych najczęściej wykorzystuje się dwa modele strat: model strat lepkościowych i strat histerezy. W modelu strat lepkościowych

siła dysypatywna jest proporcjonalna do prędkości drgań, natomiast w modelu histerezywnym do wychylenia. Układ równań (2-1) z zastosowaniem współrzędnych modalnych dla wspomnianych modeli strat dla metody FEM można przedstawić jako [93]:

model strat lepkościowych

$$\left[k'_i + 2j\omega\xi_i\sqrt{k'_im'_i} - \omega^2m'_i \right] \{a_i\} = \{f'_i\},$$

model strat histerezywnych

$$\left[k'_i(1 + j\eta_i) - \omega^2m'_i \right] \{a_i\} = \{f'_i\},$$

$$\eta = 2\xi,$$

gdzie :

k'_i, m'_i, f'_i - sztywność, masa i siła we współrzędnych modalnych
dla poszczególnych modów i ,

$\mathbf{a}$ - wektor współrzędnych modalnych,

ξ_i, η_i - intensywność tłumienia i współczynnik tłumienia wewnętrznego.

(4-5)

W modelach przedstawionych z zastosowaniem współrzędnych modalnych straty występujące w części strukturalnej można określić za pomocą intensywności tłumienia ξ , bądź współczynnika tłumienia η .

Straty w części akustycznej na ogół są określane przez impedancję akustyczną. Możliwe jest jednak określenie strat w tej części poprzez współczynnik ξ lub η . W ten sposób można ujednolicić model strat dla części akustycznej i strukturalnej oraz stosować efektywniejsze algorytmy rozwiązywania układu równań (2-1).

W niniejszym rozdziale przedstawiono model strat akustycznych wyrażonych przez współczynnik intensywności tłumienia ξ dla komór prostopadłościennych. Opracowana metodyka wykorzystania strat akustycznych wyrażonych przez współczynnik ξ w metodzie FEM oraz wyniki modelowania można rozszerzyć również do przypadku komór o innej geometrii. Straty w komorach o dowolnej geometrii mogą być wyznaczone przez pomiar lub metodami numerycznymi poprzez obliczenie części urojonej pulsacji rezonansowej drgań własnych badanych komór.

W komorze prostopadłościennej z zadaną impedancją akustyczną na wybranych powierzchniach wewnętrznych pole akustyczne można przedstawić jako superpozycję fal płaskich rozchodzących się wzdłuż osi głównych komory [64]. Liczbę falową można wyrazić przez składowe związane z poszczególnymi osiami komory:

$$\underline{k}^2 = \underline{k}_x^2 + \underline{k}_y^2 + \underline{k}_z^2. \quad (4-6)$$

Składowe liczby falowej określa się na podstawie wymiarów geometrycznych komory i wartości współczynnika odbicia ciśnienia akustycznego R ścianek komory prostopadłych do rozważanych osi. W przypadku określenia impedancyjnego warunku brzegowego na dwóch przeciwległych ściankach komory, stosując analogię pomiędzy modelowanym układem a układem o jednym stopniu swobody, liczbę falową można wyrazić jako [64]:

$$\underline{k}_x = \frac{\omega_x}{c} + j \frac{\delta_x}{c} = \left(\frac{\pi n_x}{l_x} + \frac{\varphi_x}{l_x} \right) + j \frac{\chi_x}{l_x},$$

gdzie :

ω_x - część rzeczywista pulsacji rezonansowej
dla drgań swobodnych w komorze ze stratami,
 δ_x - dekrement tłumienia,
 l_x - długość komory,
 $n_x = 1, 2, \dots$ - rząd drgań,
 $R = \exp(-\chi + j\varphi)$ - współczynnik odbicia ciśnienia akustycznego
powierzchni z impedancją akustyczną.

(4-7)

Intensywność tłumienia ξ można wyrazić przez dekrement tłumienia:

$$\xi = \frac{\delta}{\omega_r},$$

(4-8)

natomiast dekrement tłumienia dla komory prostopadłościennej przedstawić jako [64]:

$$\delta = \frac{c}{\omega_r} (\delta_x k_x + \delta_y k_y + \delta_z k_z).$$

(4-9)

Dla układów o małym i średnim tłumieniu, tzn. $\delta \ll \omega_r$, wypadkowy dekrement tłumienia można wyrazić jako:

$$\delta \approx \delta_x \cos \Theta_x + \delta_y \cos \Theta_y + \delta_z \cos \Theta_z,$$

gdzie Θ_i - kąt propagacji fali względem osi i ,

$$\delta_x = \frac{\chi_x}{l_x} c \quad i \quad \cos \Theta_x = \frac{\omega_x}{\omega_r} = \frac{(\pi n_x + \varphi_x) c}{l_x \omega_r},$$

$$\delta_y = \frac{\chi_y}{l_y} c \quad i \quad \cos \Theta_y = \frac{\omega_y}{\omega_r} = \frac{(\pi n_y + \varphi_y) c}{l_y \omega_r},$$

$$\delta_z = \frac{\chi_z}{l_z} c \quad i \quad \cos \Theta_z = \frac{\omega_z}{\omega_r} = \frac{(\pi n_z + \varphi_z) c}{l_z \omega_r},$$

$$\omega_r \approx c \sqrt{\left(\frac{\pi n_x + \varphi_x}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_y + \varphi_y}{l_y} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_z + \varphi_z}{l_z} \right)^2}.$$

(4-10)

W przypadku określenia impedancji akustycznej tylko na jednej ścianie komory parametry χ i φ są o połowę mniejsze.

Równania (4-10) nie uwzględniają pochłaniania fal biegnących równoległe do powierzchni z impedancją akustyczną. Można wykazać jednak, że dekrement tłumienia dla fali akustycznej rozchodzącej się równoległe do powierzchni z impedancją o dużej wartości jest dwa razy mniejszy niż dekrement tłumienia dla fali biegnącej prostopadle do tych powierzchni [64]. Zakładając podobną relację również dla małych wartości impedancji akustycznej, dodatkowe pochłanianie występujące dla fal biegnących równoległe do powierzchni z impedancją akustyczną można uwzględnić w sposób następujący:

mody osiowe związane z wybraną osią, np. osią z

$$\delta_o = \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y + \delta_z,$$

mody równoległe skierowane prostopadle do wybranej osi, np. osi z

$$\delta_r = \delta_x \cos \Theta_x + \delta_y \cos \Theta_y + \frac{1}{2}\delta_z, \quad (4-11)$$

mody skośne

$$\delta_s = \delta_x \cos \Theta_x + \delta_y \cos \Theta_y + \delta_z \cos \Theta_z.$$

Na podstawie równań (4-10) i (4-11) można wyznaczyć wypadkowy dekrement tłumienia, natomiast z równania (4-8) intensywność tłumienia ξ dla poszczególnych częstotliwości rezonansowych komory. Wyznaczone w ten sposób współczynnik ξ może być wykorzystany przy określeniu tłumienia dla poszczególnych rezonansów w analizie modalnej metodą FEM.

Do wyznaczania dekrementu tłumienia δ niezbędna jest znajomość wartości współczynnika odbicia ciśnienia akustycznego wewnętrznych powierzchni komory. Współczynnik odbicia R określa się na podstawie zespolonej wartości impedancji akustycznej zadanej na poszczególnych powierzchniach. W praktyce jednak rzadko jest znana wartość impedancji akustycznej stosowanych materiałów, na ogół podany jest wyłącznie współczynnik pochłaniania dźwięku α . Pomijając fazę impedancji akustycznej przedstawiony model strat akustycznych w komorze można uprościć do takiej postaci, dla której wystarczy podać wyłącznie wartość współczynnika pochłaniania dźwięku stosowanych materiałów akustycznych.

Równanie (4-10) w takim przypadku przekształca się do postaci:

$$\delta \approx \delta_x \cos \Theta_x + \delta_y \cos \Theta_y + \delta_z \cos \Theta_z,$$

gdzie :

$$\delta_x = \frac{-\ln \sqrt{1-\alpha_x}}{l_x} c \quad i \quad \cos \Theta_x = \frac{\pi n_x c}{l_x \omega_r},$$

$$\delta_y = \frac{-\ln \sqrt{1-\alpha_y}}{l_y} c \quad i \quad \cos \Theta_y = \frac{\pi n_y c}{l_y \omega_r},$$

$$\delta_z = \frac{-\ln \sqrt{1-\alpha_z}}{l_z} c \quad i \quad \cos \Theta_z = \frac{\pi n_z c}{l_z \omega_r},$$

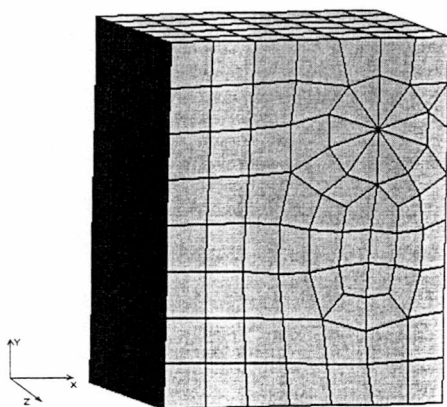
(4-12)

$$\omega_r \approx \pi c \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2},$$

gdzie :

α_i - współczynnik pochłaniania dźwięku powierzchni prostopadych do osi i .

W celu sprawdzenia dokładności modelowania pola akustycznego na zewnątrz komory z zastosowaniem opracowanego modelu strat akustycznych rozważono obudowę głośnikową o wymiarach 40×32×25 cm, w której na dwóch równoległych ściankach w płaszczyźnie y - z umieszczono materiał pochłaniający dźwięk o zadanej impedancji akustycznej lub współczynniku α (rys. 37). Elementem promieniującym dźwięk jest sztywny tłok kołowy o promieniu 6 cm i masie czynnej równej 10 g.



Rysunek 37. Model FEM obudowy głośnikowej z zadaną impedancją akustyczną na ściankach y - z

Rozpatrzono przypadki małego ($\alpha=0,1$), średniego ($\alpha=0,5$) i dużego ($\alpha=0,8$) pochłaniania dźwięku przez powierzchnie z impedancyjnym warunkiem brzegowym. Obliczenia wykonano techniką superpozycji modalnej i techniką bezpośredniego rozwiązywania układu równań (2-1) metodą FEM. Przeanalizowano błędy obliczeń dla modelu strat akustycznych z uwzględnieniem i bez uwzględnienia skoku fazy na krawędzi z materiałem pochłaniającym dźwięk.

Ponieważ współczynnik odbicia płaszczyzny z impedancją akustyczną dla większości materiałów akustycznych o dużym współczynniku pochłanianiu dźwięku charakteryzuje się małym przesunięciem

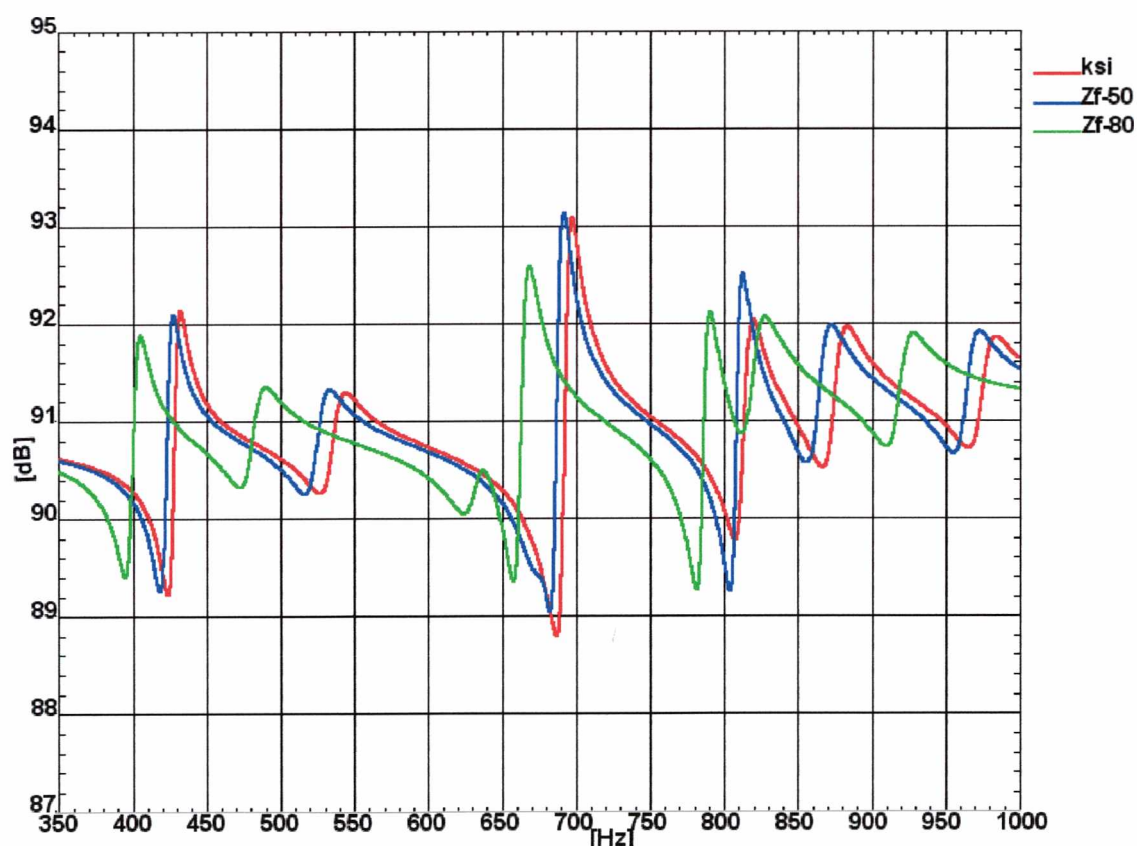
fazowym, wpływ fazy impedancji akustycznej na wyniki modelowania określono tylko dla modelu z małym pochłanianiu.

W tabeli 4-1 podano wartość współczynnika ξ dla rozpatrywanych strat akustycznych w komorze prostopadłościowej obliczoną na podstawie wzorów (4-10)÷(4-12).

Tabela 4-1. Wyznaczone wartości współczynnika ξ dla modelu strat akustycznych w komorze przedstawionej na rysunku 37

Rząd drgań (x-y-z)	$\xi \cdot 10^{-3}$			
	$Z=6e^{-j80^\circ} / \alpha=0,1$	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,5$	$\alpha=0,8$
0-1-0	11	10	69	161
1-0-0	20	17	111	258
1-1-0	16	14	95	220
0-0-1	6,99	6,55	43	101
0-1-1	8,15	7,65	51	118
1-0-1	11	10	69	160
1-1-1	11	10	69	161

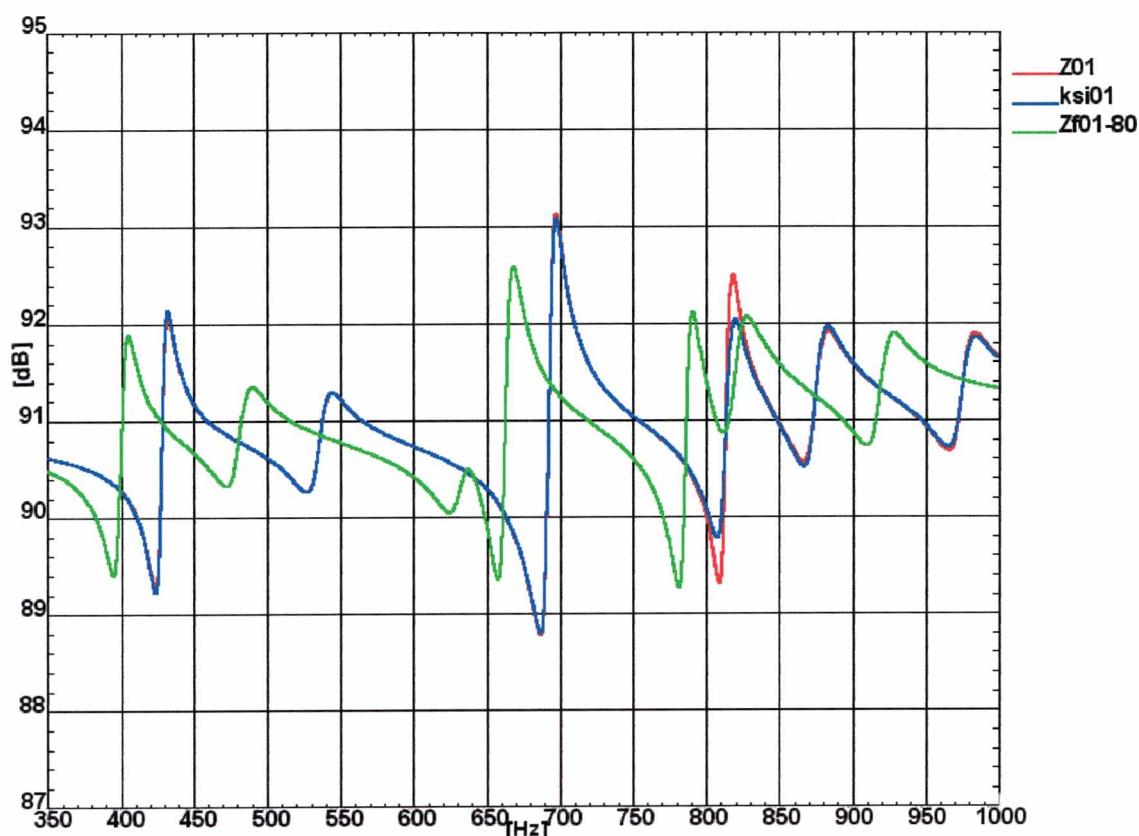
Rysunek 38 ilustruje charakterystyki częstotliwościowe poziomu ciśnienia akustycznego na osi głównej tłoka dla małego pochłaniania wyznaczone z zastosowaniem opisanego modelu.



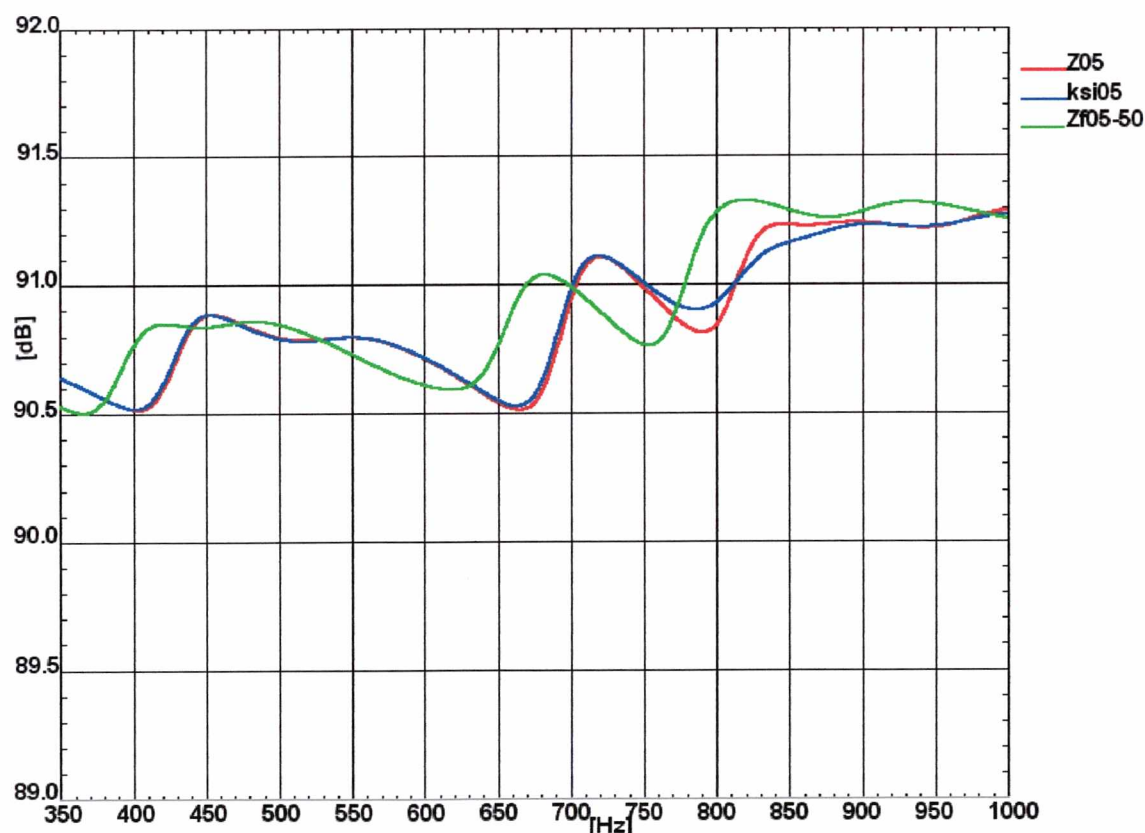
Rysunek 38. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego na osi tłoka w polu dalekim dla różnych kątów fazy impedancji materiału pochłaniającego dźwięk o $\alpha=0,1$; *ksi* – brak przesunięcia fazowego, *Zf-50* – kąt fazowy impedancji równy -50° , *Zf-80* – kąt fazowy impedancji równy -80°

W zależności od wartości kąta fazowego impedancji akustycznej w komorze z pochłanianiem następuje obniżenie częstotliwości rezonansów obudowy i przesunięcie całej charakterystyki w kierunku mniejszych częstotliwości. Zmiana fazy fali akustycznej odbitej od powierzchni o współczynniku pochłaniania $\alpha=0,1$ zadaną impedancją o kącie fazowym -50° i -80° wynosi, odpowiednio, $-3,5^\circ$ i -19° . W sytuacji, gdy kąt fazowy współczynnika odbicia jest mniejszy od 4 stopni wpływ fazy na charakterystykę częstotliwościową ciśnienia akustycznego jest niewielki i model strat akustycznych oparty na współczynniku α daje poprawne wyniki z dokładnością do 1 dB (rys.38). W przypadku gdy występuje duży skok fazy na powierzchni odbijająco-pochłaniającej dobroć modelowanego układu dla poszczególnych rezonansów jest obliczana nadal poprawnie, natomiast nie jest odzwierciedlona zmiana częstotliwości rezonansowych obudowy. Częstotliwości akustycznych rezonansów obudowy w przypadku małego pochłaniania dla impedancji akustycznej o kącie fazowym równym -80° zmieniają się do 10 % względem wartości dla obudowy bez strat. Zmiana częstotliwości rezonansów jest niejednakowa dla kolejnych rzędów drgań własnych. Dlatego dla dużych wartości fazy impedancji akustycznej kształt charakterystyki częstotliwościowej ciśnienia akustycznego zestawu może znacznie się zmienić. Na przykład dla dużego skoku fazy na powierzchniach odbijająco-pochłaniających rezonanse rzędu 1-1-0 i 0-0-1 są stosunkowo dobrze odseparowane na charakterystyce poziomu ciśnienia akustycznego, natomiast dla małych wartości skoku fazy występują jako pojedynczy rezonans (rys.38).

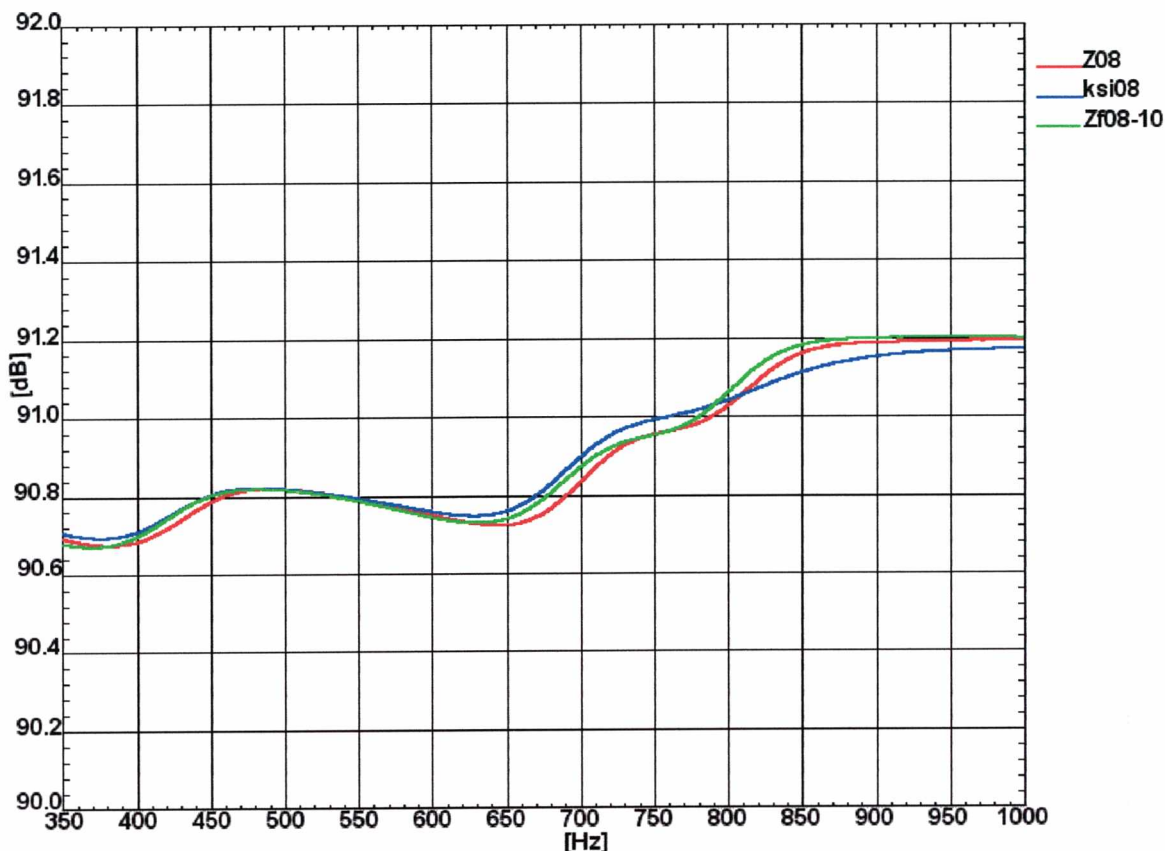
Rysunki 39÷41 ilustrują charakterystyki częstotliwościowe poziomu ciśnienia akustycznego na osi tłoka modelowanego zestawu głośnikowego dla przypadku małego, średniego i dużego pochłaniania dźwięku obliczone z zastosowaniem modelu strat akustycznych na bazie współczynnika α (ksi) oraz obliczone z wykorzystaniem impedancji akustycznej z pominięciem (Z) i z uwzględnieniem (Z_f) jej kąta fazowego.



Rysunek 39. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego na osi tłoka w polu dalekim dla przypadku małego pochłaniania dźwięku ($\alpha=0,1$) dla różnych modeli strat w obudowie z uwzględnieniem (*Zf01-80*) i bez uwzględnienia (*Z01*, *ksi01*) fazy impedancji akustycznej



Rysunek 40. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego na osi tłoka w polu dalekim dla przypadku średniego pochłaniania dźwięku ($\alpha=0,5$) dla różnych modeli strat w obudowie z uwzględnieniem (*Zf05-50*) i bez uwzględnienia (*Z05*, *ksi05*) fazy impedancji akustycznej



Rysunek 41 Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego na osi tłoka w polu dalekim dla przypadku dużego pochłaniania dźwięku dla różnych modeli strat w obudowie z uwzględnieniem ($pZf08-10$) i bez uwzględnienia ($pZ08$, $ksi08$) fazy impedancji akustycznej ($\alpha=0,8$)

W przypadku małego pochłaniania (rysunek 39) charakterystyka poziomu ciśnienia akustycznego otrzymana z wykorzystaniem opracowanego modelu strat akustycznych stosując współczynnik α (ksi) jest prawie identyczna (z dokładnością do 0,6 dB) z charakterystyką obliczoną z wykorzystaniem impedancji akustycznej o charakterze rezystancji akustycznej (Z). Największa różnica w charakterystykach występuje dla rezonansu równoległego rzędu 0-1-1, płaszczyzna którego jest prostopadła do ścianek z zadaniem warunkiem brzegowym. Uwzględnienie kąta fazowego impedancji akustycznej o wartości $6e^{-j80}$ powoduje przesunięcie charakterystyki w kierunku małych częstotliwości.

Dla modelu o średnim pochłanianiu (rysunek 40) obliczone charakterystyki poziomu ciśnienia akustycznego z wykorzystaniem modelu strat i impedancji akustycznej z pominięciem jej fazy praktycznie nie różnią się pomiędzy sobą. Maksymalna różnica 0,1 dB występuje również dla rezonansu rzędu 0-1-1. Uwzględnienie przesunięcia fazy na powierzchniach o zadanej impedancji istotnie wpływa na kształt charakterystyki ciśnienia akustycznego. Impedancja o wartości

$3,6e^{-j50}$ ($\alpha=0,5$) powoduje skok fazy na powierzchni pochłaniająco-odbijającej dźwięk o -25° . Tak duży skok fazy powoduje zmianę częstotliwości rezonansowej nawet do 12 % (rezonans drugi rzędu 1-0-0).

Dla modelu o dużym pochłanianiu wszystkie trzy charakterystyki praktycznie pokrywają się. Różnica w wartościach pomiędzy poszczególnymi charakterystykami jest mniejsza od 0,1 dB. Pomimo tego, że dla modelu uwzględniającego fazę impedancji akustycznej o wartości $3,6e^{-j50}$ skok fazy na powierzchni pochłaniającej wynosi -10° , nie wpływa to na kształt obliczonej charakterystyki ciśnienia akustycznego.

Koszty obliczeniowe metody FEM przy uwzględnieniu impedancji akustycznej dla modelu z zastosowaniem współrzędnych fizycznych są około 10 razy większe od kosztów dla modelu z zastosowaniem współrzędnych modalnych. Z kolei koszty obliczeń metody FEM z zastosowaniem współrzędnych modalnych dla modelu strat akustycznych z wykorzystaniem współczynnika ξ są około 7 razy mniejsze od kosztów dla modelu z wykorzystaniem impedancji akustycznej. Stosując więc model strat oparty na współczynniku ξ i współrzędnych modalnych można przyspieszyć obliczenia 70 razy względem modelu z wykorzystaniem impedancji akustycznej i współrzędnych fizycznych.

Przedstawiony model strat akustycznych z wykorzystaniem współczynnika ξ umożliwia uzyskanie dokładnym wyników modelowania ciśnienia akustycznego na zewnątrz prostopadłościennej komory z elementem promieniującym dźwięk zarówno dla przypadku małych, jak i dużych strat akustycznych w komorze. Potwierdza to słuszność przyjętego uproszczenia dotyczącego pochłaniania fal akustycznych rozchodzących się równolegle do powierzchni pochłaniającej dźwięk.

Podany model strat nie uwzględnia zmiany częstotliwości rezonansów akustycznych komory ze względu na przesunięcie fazowe fali padającej na płaszczyznę z zadaną impedancją akustyczną. W przypadku występowania dużego skoku fazy na powierzchniach z impedancyjnym warunkiem brzegowym charakterystyka promieniowania wyznaczona z zastosowaniem opracowanego modelu strat może znacznie się różnić od charakterystyki obliczonej z uwzględnieniem fazy impedancji akustycznej.

4.2 Modelowanie pola akustycznego w obszarze zewnętrznym komory z uwzględnieniem jej rezonansów akustycznych i strukturalnych

Wykorzystując metodę wyznaczania ciśnienia akustycznego poprzez obliczenie impedancji obciążającej tylną stronę elementu drgającego i opracowany model strat akustycznych przeprowadzono modelowanie pola akustycznego w obszarze zewnętrznym z uwzględnieniem zjawisk falowych zachodzących wewnątrz komory. Do modelowania użyto metodę FEM z zastosowaniem współrzędnych modalnych, ponieważ jej efektywność jest większa niż metod DBEM, IBEM i FEM z zastosowaniem współrzędnych fizycznych.

Zbadano wpływ rezonansów akustycznych komory i rezonansów jej ścianek na charakterystykę częstotliwościową ciśnienia akustycznego w obszarze zewnętrznym.

Modelowanie przeprowadzono na przykładzie obudowy głośnikowej, niemniej jednak wyniki analizy mogą być również wykorzystane w zagadnieniach wibroakustyki i w akustyce małych wnętrz.

4.2.1 Szacowanie błędów modelowania numerycznego z wykorzystaniem modeli opartych na analogii E-M-A

W analizie oddziaływania pola akustycznego wewnątrz komory na właściwości pola w obszarze zewnętrznym z uwzględnieniem rezonansów akustycznych i rezonansów ścianek komory można wyróżnić trzy podstawowe źródła błędów: modelowanie części akustycznej, modelowanie części strukturalnej modelu i stosowanie uproszczonych zależności uzyskanych na podstawie analogii E-M-A. W rozdziale 4.1.1 wykazano, że w przypadku modelowania promieniowania dźwięku przez tłok sztywny w obudowie poprzez wyznaczanie impedancji obciążającej jego tylną stronę ostatnie źródło błędów może być zminimalizowane przez dobór elementów w schemacie zastępczych analizowanego układu. Błędy modelowania i efektywność modelowania części akustycznej i mechanicznej modelu należy natomiast optymalizować poprzez dobór siatki elementów dyskretnej.

Wybór siatki elementów skończonych/brzegowych dokonuje się w taki sposób, aby poprawnie odzwierciedlić kształt modelowego obszaru oraz zminimalizować błędy aproksymacji szukanych zmiennych. Błędy aproksymacji minimalizowane są poprzez dobór rodzaju elementów skończonych, np. elementy liniowe, paraboliczne itd., oraz gęstości siatki dyskretnej. W analizie zagadnień akustycznych z wykorzystaniem

elementów liniowych stosuje się kryterium co najmniej 6 elementów przypadających na jedną długość fali w modelowanym zakresie częstotliwości [2,3,8,10,21,36,57,88]. Podczas modelowania elementów elastycznych znajdujących się w części mechanicznej modelu dodatkowo należy uwzględnić zjawisko dyspersji prędkości fal akustycznych rozchodzących się w elementach elastycznych, czyli zmianę prędkości tych fal w zależności od częstotliwości.

W pracy przy analizie wpływu drgań ścianek komory na parametry pola akustycznego na zewnątrz komory stosowano powierzchniowe struktury elastyczne takie jak płyta. Długość fal giętnych w płycie można oszacować na podstawie równania określającego prędkość tych fal w nieskończenie rozległej cienkiej płycie [32]:

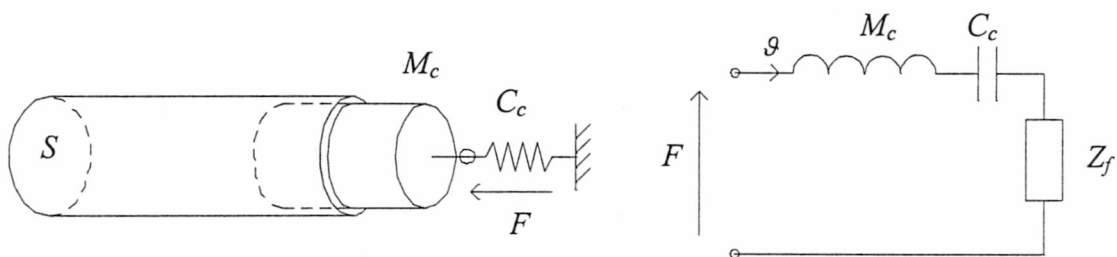
$$c_f = \sqrt{\omega_4 \frac{B}{d\rho_p}},$$

gdzie : ρ_p - gęstość materiału z którego jest wykonana płyta, (4-13)
 B - sztywność płyty na zginanie,
 d - grubość płyty.

Prędkość fal giętnych w płytach, a więc również ich długość, zależy od sztywności na zginanie płyty, gęstości materiału, grubości płyty i od częstotliwości. Zależność prędkości fal od częstotliwości oznacza dyspersję.

Szacowanie błędów obliczeniowych przeprowadza się na ogół poprzez porównanie wyników modelowania z rozwiązaniem analitycznymi lub z wynikami pomiarów. Rozwiązania analityczne dla komór z warunkami brzegowymi natury mechanicznej na ogół nie istnieją. Stosuje się zatem pewne uproszczone modele analityczne lub zdefiniowane w oparciu o analogię E-M-A, które umożliwiają szacowanie dokładności modelowania dla tego typu warunków brzegowych. Jednym ze sposobów określenia dokładności modelowania jest wyznaczenie błędów obliczenia częstotliwości rezonansowych modelowego układu. Dla metod FEM i BEM w postaci klasycznej błędy te w wielu przypadkach określają dokładność modelowania pola ciśnienia i prędkości akustycznej [36,70,72,77,86]. Dla niektórych modyfikacji metod FEM i BEM błędy obliczenia pola ciśnienia lub prędkości akustycznej a częstotliwości rezonansowych mogą jednak znacznie się różnić. Przedstawiona w rozdziale 3.1 analiza błędów zmodyfikowanej metody FEM, metody analizy układów ze stratami opartej na kombinacji liniowej wektorów własnych modelu bez strat, wykazała, że w tym przypadku błędy obliczenia częstotliwości rezonansowych są o wiele mniejsze od błędów obliczenia ciśnienia akustycznego.

W komorze z elastycznymi ściankami częstotliwości rezonansów akustycznych komory i rezonansów elementów sprężystych są różne od częstotliwości rezonansów komory o sztywnych ściankach i elementów elastycznych w próżni. Zmianę częstotliwości rezonansowych na skutek interakcji pola akustycznego wewnątrz komory z elementami elastycznymi można oszacować wykorzystując model jednowymiarowej komory z jednym elementem strukturalnym o jednym stopniu swobody (rys. 42). Model ten może być również wykorzystany do analizy komór z rzeczywistymi elementami elastycznymi, bowiem stosując analogię E-M-A każdy element sprężysty w ograniczonym zakresie częstotliwości można zastąpić elementem o jednym stopniu swobody.



Rysunek 42. Jednowymiarowa bezstratna komora z elementem elastycznym o jednym stopniu swobody oraz jej schemat zastępczy, Z_f – impedancja wlotu komory przeniesiona na stronę mechaniczną

Korzystając ze schematu zastępczego częstotliwości rezonansowe jednowymiarowej komory z elementem o jednym stopniu swobody można wyznaczyć rozwiązując równanie:

$$\operatorname{ctg}(\pi \cdot \Omega) + \frac{\pi \cdot M_c S}{\rho_0 S_c^2 l} \frac{1}{\Omega} (\Omega_m^2 - \Omega^2) = 0,$$

gdzie :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_a}, \quad \Omega_m = \frac{\omega_m}{\omega_a},$$

$$\omega_a = \frac{\pi \cdot c}{l} - \text{pulsacja rezonansowa podstawowego modu akustycznego} \quad (4-14)$$

zamkniętej komory o sztywnych ściankach,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{M_c C_c}} - \text{pulsacja rezonansowa struktury elastycznej},$$

l, S - długość i powierzchnia przekroju komory,

M_c, C_c, S_c - masa, podatność i powierzchnia czynne elementu elastycznego.

Zmianę częstotliwości rezonansów badanego układu na skutek interakcji pola akustycznego i struktury elastycznej zilustrowano na przykładzie komory o wymiarach

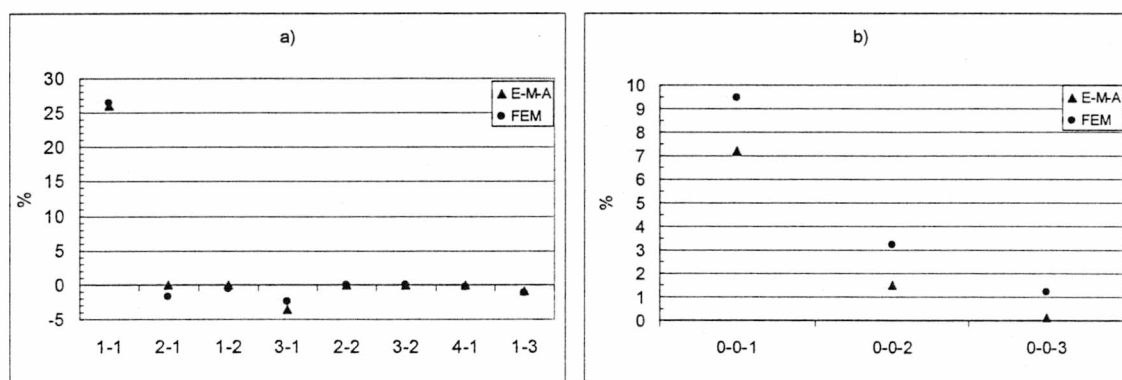
40×26×160 cm. W przykładzie tym masa tłoka sztywnego jest dwa razy większa od masy powietrza w komorze, natomiast jego częstotliwość rezonansowa jest nieco mniejsza od częstotliwości podstawowego rezonansu akustycznego komory ($\Omega_m=0,7$). Rezonanse akustyczny i mechaniczny układu bez wzajemnego sprzężenia zachodzą, odpowiednio, dla 106,25 Hz i 74,4 Hz, natomiast przy uwzględnieniu wzajemnego oddziaływania dla 140,55 Hz i 59,83 Hz. Częstotliwość rezonansu akustycznego wzrasta o 32,3%, natomiast częstotliwość rezonansu mechanicznego maleje o 19,6%. W przypadku, gdy rezonans akustyczny występuje dla częstotliwości większej od częstotliwości rezonansu strukturalnego, impedancja tłoka sztywnego ma charakter bezwładnościowy i następuje zwiększenie częstotliwości rezonansu akustycznego. W sytuacji, gdy częstotliwość rezonansu akustycznego jest mniejsza od rezonansu strukturalnego, impedancja tłoka ma charakter podatnościowy i następuje obniżenie częstotliwości rezonansu akustycznego. Podobnie częstotliwość rezonansowa elementu elastycznego wzrasta, gdy impedancja wlotu komory ma charakter bezwładnościowy i maleje, gdy ta impedancja ma charakter podatnościowy. Zmiana częstotliwości rezonansów komory z elastycznymi ściankami jest znaczna, gdy podatność i/lub masa czynne powietrza w komorze są porównywalna z podatnością czynną i/lub masą czynną elementu strukturalnego. W przypadku analizy interakcji rezonansów akustycznych komory i rezonansów jej ścianek jako elementów powierzchniowych należy również uwzględnić zmianę parametrów czynnych struktury, między innymi powierzchni czynnej, ze zmianą częstotliwości.

Do analizy wpływu parametrów struktury elastycznej na pole akustyczne wewnątrz lub na zewnątrz komory wykorzystano przypadek jednorodnej płyty prostokątnej swobodnie podpartej lub sztywno zaciśniętej na krawędziach. Przypadek ten jest najczęściej spotykany w zagadnieniach obudów głośnikowych i akustyki małych wnętrz. Parametry czynne płyty prostokątnej dla wymienionych warunków brzegowych podano w dodatku C.

W celu oszacowania zakresu zmian częstotliwości rezonansów akustycznych i rezonansów ścianek komory rozważono przykład komory prostopadłościennej z jedną ścianką elastyczną w postaci płyty prostokątnej swobodnie podpartej na krawędziach. Wymiary komory wynoszą 40×26×160 cm, natomiast elastyczna ścianka o wymiarach 40×26×0,15 cm jest wykonana ze szkła organicznego (pleksi). Geometrię komory dobrano tak, aby można było pominąć wpływ rezonansów akustycznych związanych z

szerokością i wysokością komory. W zagadnieniach obudów głośnikowych i małych wnętrz oddziaływanie modów akustycznych utworzonych przez falę akustyczną biegnącą równolegle do struktury elastycznej na częstotliwość rezonansową struktury jest na ogół o wiele mniejsze niż modów akustycznych utworzonych przez falę biegnącą prostopadłe do elementu elastycznego. Tylko w przypadku bardzo wiotkich ścianek lub ścianek, których drgania w rezonansie wytwarzają pole akustyczne o kształcie zbliżonym do kształtu pola modu akustycznego, obserwuje się istotny wpływ rezonansów akustycznych, których oś jest skierowana równolegle do ścianki, na częstotliwość rezonansową ścianki. Zmianę częstotliwości rezonansów ścianek komory dla wspomnianych par rezonansów strukturalnych i akustycznych ilustrują wyniki modelowania obudów głośnikowych przedstawione w rozdziale 4.2.2 w tabeli 4-2. W rozważanych obudowach największa zmiana około 4% występuje dla rezonansu akustycznego i strukturalnego, dla których częstotliwość rezonansów niesprzężonych różni się o 1%.

Zmianę częstotliwości rezonansów akustycznych i rezonansów ścianek komory na skutek ich wzajemnej interakcji obliczoną z wykorzystaniem przedstawionego modelu i metodą FEM dla komory o wymiarach $40 \times 26 \times 160$ cm ilustrują rysunkach 43a i 43b. Siatkę elementów skończonych modelu numerycznego dobrano tak, aby błędy wyznaczania częstotliwości niesprzężonych rezonansów metodą FEM były mniejsze od 1%.



Rysunek 43. Zmiana częstotliwości rezonansów płyty elastycznej o wymiarach $40 \times 26 \times 0,15$ cm (a) i rezonansów akustycznych komory o wymiarach $40 \times 26 \times 160$ cm (b) dla kilku pierwszych modów drgań obliczona metodami FEM i analogii E-M-A

Częstotliwość rezonansów struktury elastycznej zmienia się tylko dla modów o nieparzystej liczbie linii węzłowych (mody rzędu 1-1, 3-1, 1-3). Największy wpływ pola akustycznego na częstotliwość rezonansową zachodzi dla podstawowego rezonansu płyty (26%), natomiast dla pozostałych modów wpływ ten jest o wiele

mniejszy. Wyniki uzyskane z wykorzystaniem analogii E-M-A są zgodne z wynikami uzyskanymi metodą FEM z dokładnością do 1 punktu procentowego.

Dla rezonansów akustycznych zgodność pomiędzy wynikami uzyskanymi z wykorzystaniem przedstawionego modelu i metodą FEM jest nieco mniejsza. Różnica w wynikach, w rozważanym przykładzie do 2,5 punktów procentowych, określona jest stosunkowo dużą liczbą modów struktury elastycznej występujących w pobliżu częstotliwości dla której zachodzi rezonans akustyczny. W takim przypadku na drganie powietrza w komorze ma znaczny wpływ nie pojedynczy rezonans struktury elastycznej, lecz cały ich szereg.

Dla poprawnie zdefiniowanego modelu numerycznego błędy modelowania zjawisk wibroakustycznych metodą FEM i BEM są na ogół na poziomie kilku procent. Przedstawiona technika szacowania błędów może być zatem stosowana przy szacowaniu błędów modelowaniu komór z elastycznymi ściankami. Przy ocenie błędów obliczenia częstotliwości rezonansów akustycznych podaną technikę należy stosować bardzo ostrożnie, pamiętając o jej stosunkowo małej dokładności w przypadku występowania dużej liczby rezonansów strukturalnych w pobliżu analizowanego rezonansu akustycznego. Błędy obliczenia częstotliwości rezonansów elementów elastycznych dla modów o parzystej liczbie linii węzłowych można natomiast określić wykorzystując wzory wyprowadzone dla elementów elastycznych w próżni.

4.2.2 Wpływ pola akustycznego wewnątrz obudowy na charakterystykę promieniowania zestawu głośnikowego

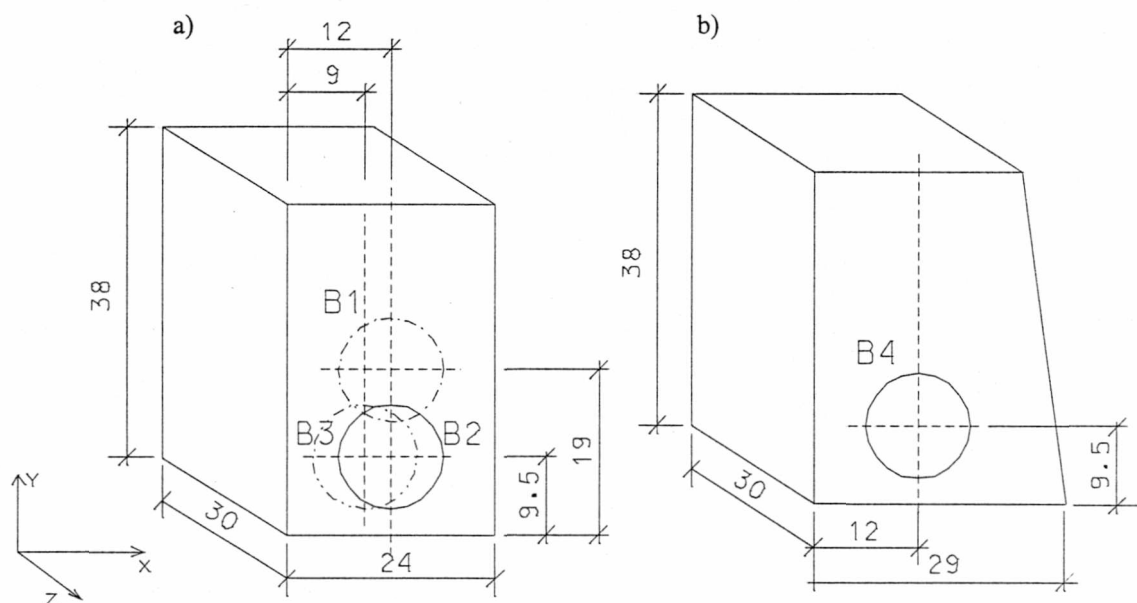
Zagadnienie oddziaływanie rezonansów akustycznych na charakterystykę częstotliwościową poziomu ciśnienia akustycznego zestawu głośnikowego było tematem prac [3,4,10,51,58,77]. W artykule [51] zagadnienie to było analizowane metodą analityczną, natomiast w pozostałych przypadkach metodami FEM i BEM. Wpływ rezonansów ścianek obudowy na charakterystykę częstotliwościową poziomu ciśnienia akustycznego głośnika w obudowie był analizowany metodami eksperymentalnymi w pracach [53,87]. W tych artykułach podano wyniki pomiarów dla kilku przypadków obudów prostopadłościennych ze ściankami o różnej grubości oraz omówiono praktyczne metody zwiększenia sztywności ścianek obudowy przy użyciu dodatkowych elementów konstrukcyjnych. W wymienionych pracach nie przeprowadzano analizy wzajemnej interakcji rezonansów akustycznych i rezonansów ścianek obudowy oraz optymalizacji grubości ścianek obudowy.

W celu określenia wzajemnej interakcji rezonansów akustycznych i rezonansów ścianek obudowy oraz ich wpływu na charakterystykę promieniowania zestawu głośnikowego rozpatrzono przypadek prostopadłościenną obudowy głośnikowej o średniej pojemności oraz przypadek obudowy o geometrii nieco różnej od prostopadłościanu. W rozdziale 3.4.2 wykazano, że pochylenie jednej ze ścianek w komorze o przekroju prostokąta od kilku do kilkunastu stopni zmniejsza nierównomierność pola akustycznego oraz zmniejsza skupienie energii akustycznej w niewielkich obszarach wewnątrz komory praktycznie dla wszystkich rzędów rezonansów akustycznych. Dla takiej obudowy należy zatem oczekiwać zmniejszenie wpływu rezonansów akustycznych na charakterystykę promieniowania zestawu głośnikowego. Nawiązując do wyników uzyskanych w rozdziale 3.4.2 porównano obudowy głośnikowe o geometrii prostopadłościanu i prostopadłościanu z jedną ścianką pochyłą o 14° .

Analizę przeprowadzono dla obudowy z jedną ścianką elastyczną. W ten sposób ułatwiono interpretację wyników bez utraty na ogólności analizy zjawisk zachodzących w obudowach z elastycznymi ściankami. W wyniku przeprowadzonej analizy określono wpływ rezonansów akustycznych i rezonansów ścianek komory na charakterystykę promieniowania zestawu głośnikowego z uwzględnieniem sposobu umieszczenia tłoka sztywnego i geometrii komory. Ze względu na efektywność modelowania metodami numerycznymi rozważanych zjawisk (porównaj rozdział 4.1.1), analizę przeprowadzono metodą FEM z wykorzystaniem współrzędnych modalnych.

Rysunki 44a i 44b ilustrują geometrię analizowanych obudów głośnikowych. Wymiary obudowy prostopadłościenną dobrano według kryterium $a:a \times 2^{1/3}:a \times 2^{2/3}$ uzyskując w ten sposób optymalny rozkład rezonansów akustycznych na skali częstotliwości [20,25], natomiast wymiary obudowy z pochyłą ścianką określono w taki sposób, aby objętość obydwu komór była jednakowa i równa 27 l. Głośnik o efektywnej średnicy 12 cm i masie czynnej 10 g jest umieszczony w trzech punktach płyty czołowej obudowy prostopadłościenną: na środku płyty czołowej (B1), na osi symetrii względem szerokości płyty i w odległości jednej czwartej wysokości płyty względem dolnej krawędzi (B2) oraz niesymetrycznie w lewym dolnym rogu płyty czołowej (B3). Elastyczna ścianka obudowy znajduje się w płaszczyźnie x - y naprzeciwko płyty czołowej (B1,B2,B3) lub w płaszczyźnie y - z (B2_1). W obudowie o geometrii prostopadłościanu z jednym pochyłym bokiem głośnik znajduje się w odległości jednej czwartej wysokości względem dolnej krawędzi płyty czołowej i w

odległości 12 cm od nie pochylonej ścianki bocznej (B4), czyli w takim samym punkcie płyty czołowej jak w obudowie B2. Ścianką elastyczną jest pochylony bok obudowy. We wszystkich rozważanych przypadkach płyta elastyczna jest sztywno zaciśnięta na obwodzie.



Rysunek 44. Modelowane zestawy głośnikowe

Straty akustyczne w modelowanych komorach są określone wyłącznie przez pochłanianie dźwięku przez ścianki obudowy, które są wykonane z materiału drewnopochodnego. Założono, że współczynnik pochłaniania dźwięku α ścianek w modelowanym zakresie częstotliwości (200÷1000 Hz) jest równy 0,01, co odpowiada współczynnikowi pochłaniania α płyty MDF ($\rho=750 \text{ kg/m}^3$). Płyta MDF została wybrana jako materiał na ścianki obudowy, ponieważ materiał ten jest często stosowany w praktycznych konstrukcjach obudów głośnikowych [25]. Parametry strukturalne i współczynnik pochłaniania α płyt MDF są zbliżone do parametrów i współczynnika α płyt wiórowych, które także często są wykorzystywane jako materiał na obudowę głośnikową. Dla przypadku pochłaniania dźwięku przez wszystkie ścianki obudowy na podstawie równań (4-11) i (4-12) określono intensywność tłumienia dla pierwszych ośmiu rezonansów akustycznych obudowy (Tabela 4-2). Ze względu na małą wartość fazy współczynnika odbicia ścianki obudowy wykonanej z twardej płyty drewnopochodnej podane wartości intensywności tłumienia ξ wyznaczono z jej pominięciem.

Tabela 4-2. Wyznaczone wartości współczynnika ξ dla obudowy prostopadłościennej przedstawionej na rysunku 44

	$\xi \cdot 10^{-3}$
Rząd drgań (x-y-z)	$\alpha=0,01$
0-1-0	4,1
0-0-1	3,4
1-0-0	2,88
0-1-1	2,5
1-1-0	2,2
0-2-0	2,0
1-0-1	2,1
1-1-1	1,68

Straty akustyczne w obudowie o geometrii różnej od prostopadłościanu (*B4*) można wyznaczyć obliczając zespolone częstotliwości własne obudowy, na przykład metodą FEM. Straty akustyczne dla modów które są tworzone przez nierównoległe ścianki są nieco większe od strat w obudowie prostopadłościennej, aczkolwiek w rozważanym przypadku małego pochłaniania dźwięku różnice te są niewielkie i mogą być pominięte. W celu ujednolicenia modeli wykorzystano jednakowe wartości współczynnika ξ dla wszystkich analizowanych obudów. Straty w części strukturalnej modelu natomiast odpowiadają stratom występującym w gęstych płytach MDF, tzn. $\eta=0,01$ [35].

Wykorzystując metodykę opisaną w rozdziale 4.2.1 dobrano siatkę elementów skończonych modelowanych obudów w taki sposób, aby błędy wyznaczanie częstotliwości rezonansów ścianek komory i rezonansów akustycznych były mniejsze od 2% w rozważanym zakresie częstotliwości. Błędy obliczenia ciśnienia akustycznego na zewnątrz modelowanych obudów będą zatem również na poziomie 2%.

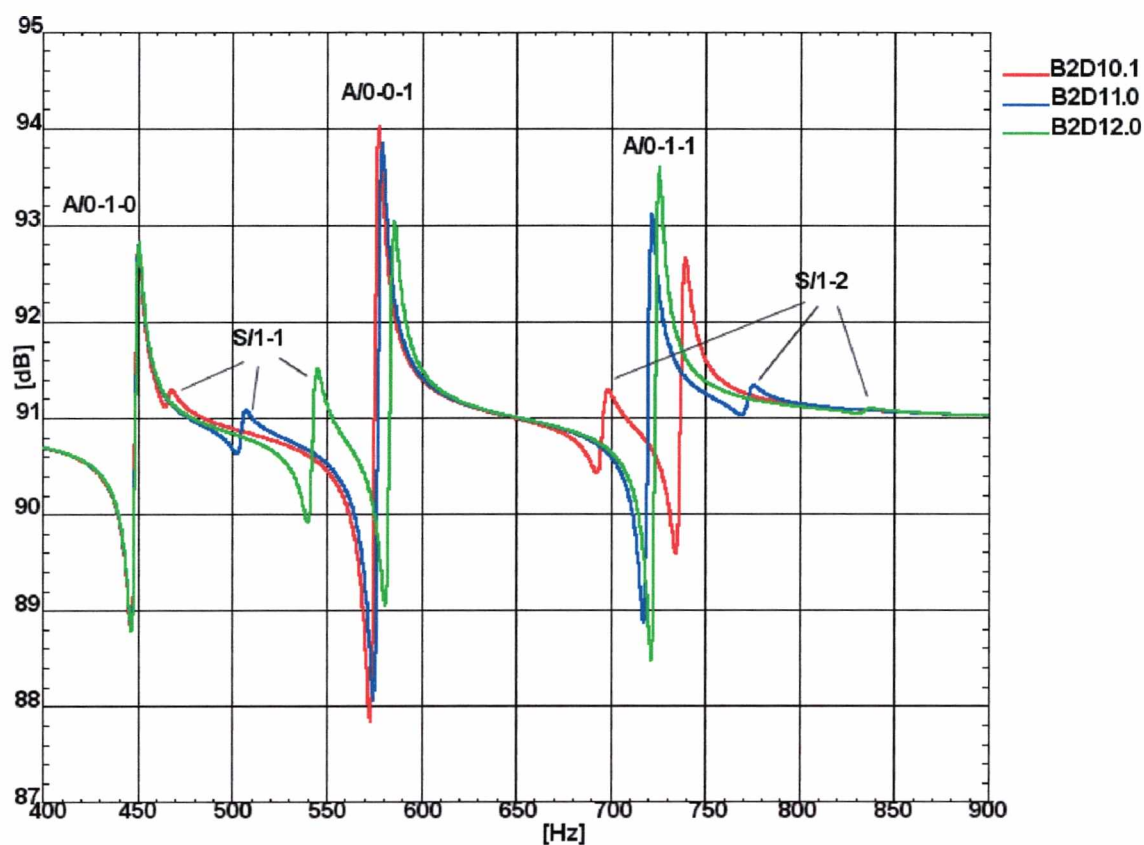
Podczas modelowania obudów głośnikowych w zakresie średnich częstotliwości membranę głośnikową można traktować jako sztywny tłok. Dodatkowo można założyć, że w rozpatrywanym zakresie częstotliwości impedancja mechaniczna głośnika jest określona wyłącznie przez masę czynną jego membrany. W takim przypadku przy pobudzeniu do drgań membrany siłą o stałej amplitudzie, ciśnienie akustyczne wytwarzane na osi głównej głośnika w polu dalekim nie zależy od częstotliwości. Taki model głośnika w obudowie zamkniętej wykorzystano do analizy wpływu rezonansów akustycznych i rezonansów ścianek obudowy na charakterystykę promieniowania zestawu głośnikowego.

Rysunki 45 i 46 ilustrują wzajemną interakcję rezonansów akustycznych i rezonansów ścianek obudowy oraz ich wpływ na charakterystykę częstotliwościową poziomu ciśnienia akustycznego w polu dalekim na osi głównej głośnika dla obudowy

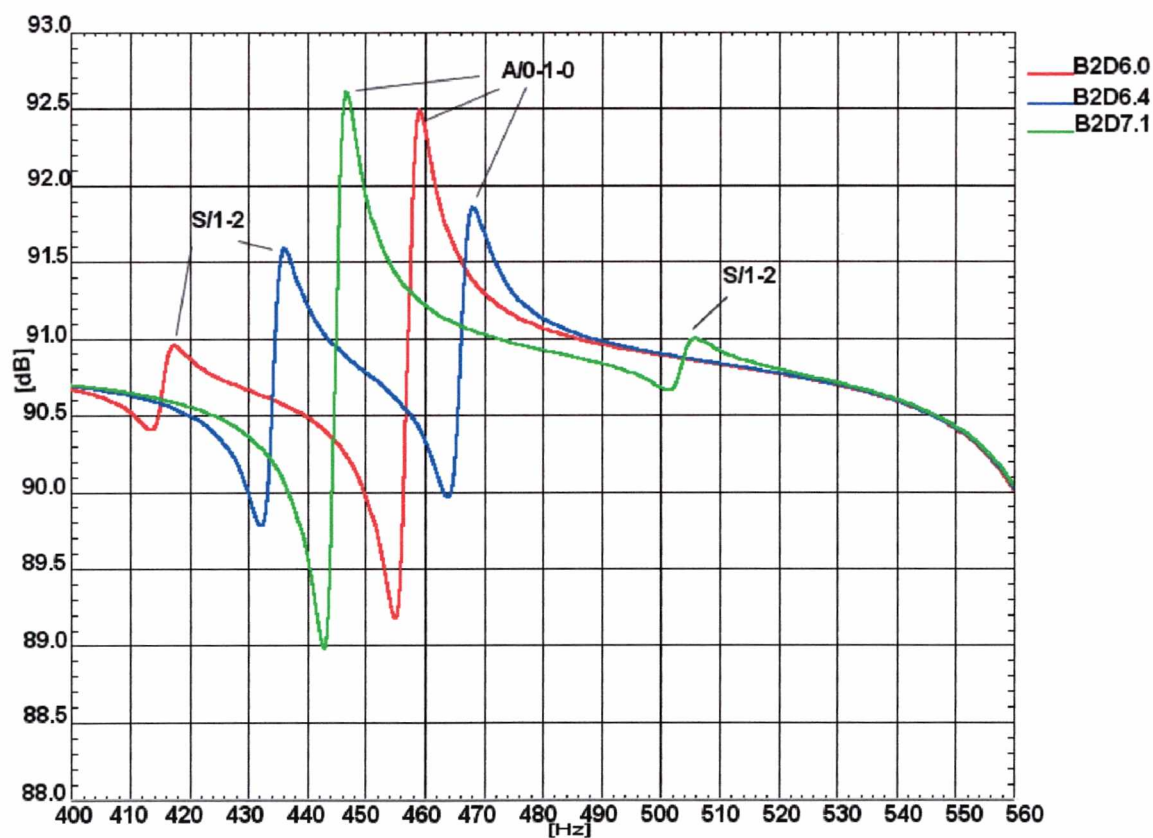
B2. Na rysunkach podano charakterystyki promieniowania dla różnych grubości ścianki elastycznej, czyli dla różnego stosunku wartości częstotliwości niesprężonych rezonansów strukturalnych i akustycznych. Relacje częstotliwości rezonansów niesprężonych podano w tabeli 4-3. W tabeli podano również zmianę częstotliwości rezonansów na skutek interakcji modów akustycznych i strukturalnych dla ścianek o grubości 6÷7,1 mm.

Tabela 4-3. Relacja częstotliwości wybranych niesprężonych rezonansów akustycznych i strukturalnych oraz zmiana częstotliwości rezonansów na skutek ich wzajemnej interakcji

Model	1-1/0-0-1	1-2/0-1-1	Model	1-2/0-1-0		
	f_s/f_a	f_s/f_a		f_s/f_a	$\Delta f_a[\%]$	$\Delta f_s[\%]$
B2D10.1-10,1mm	0,82	0,97	B2D6.0-6mm	0,93	1,87	-2,24
B2D11.0-11mm	0,9	1,06	B2D6.4-6.4mm	0,99	3,9	-4,15
B2D12.0-12mm	0,99	1,15	B2D7.1-7,1mm	1,1	-0,87	0,46



Rysunek 45. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego zestawu głośnikowego B2 przy różnych grubościach ścianki elastycznej: B2D10.1-10,5 mm, B2D11.0-11 mm i B2D12.0-12 mm

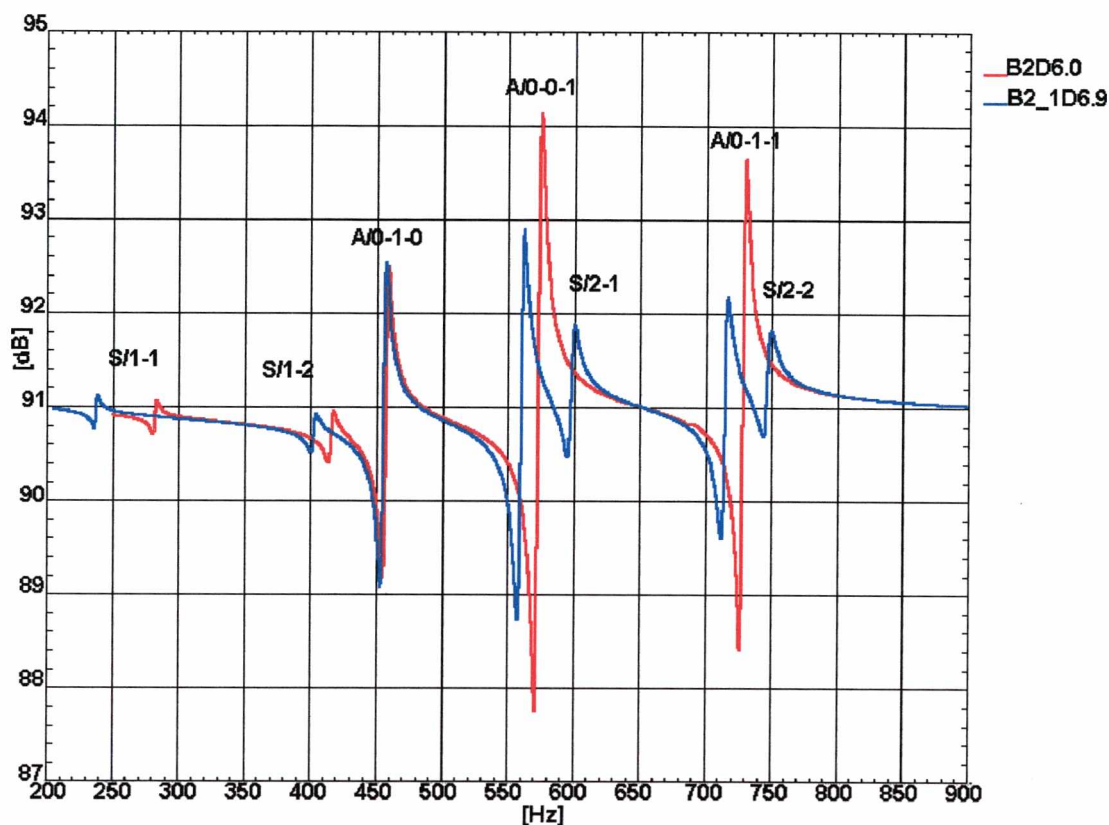


Rysunek 46. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego zestawu głośnikowego B2 w zakresie częstotliwości interakcji rezonansu akustycznego rzędu 0-1-0 i mechanicznego rzędu 1-2 przy różnych grubościach elastycznej ścianki: B2D6.0-6 mm, B2D6.4-6,4 mm i B2D7.1-7,1 mm

Wzajemna interakcja rezonansów akustycznych i strukturalnych występuje tylko dla modów strukturalnych, które wytwarzają pole ciśnienia akustycznego o kształcie zbliżonym do kształtu pola ciśnienia rezonansów akustycznych, na przykład w obudowie *B2* dla rezonansów strukturalnego 1-1 (S/1-1) i akustycznego 0-0-1 (A/0-0-1), 1-2 i 0-1-1 (rys.45), 1-2 i 0-1-0 (rys.46) itd. Na skutek interakcji rezonansów następuje zmiana ich częstotliwości nawet o kilka procent (o 4% w obudowie *B2D6.4*). Dla pozostałych rezonansów wzajemne oddziaływanie pomiędzy strukturą elastyczną a polem akustycznym wewnątrz komory praktycznie nie występuje, np. mody 1-1/0-1-0 (rys.46).

Dla rezonansu strukturalnego, który wytwarza pole ciśnienia akustycznego o podobnym kształcie do pola ciśnienia rezonansu akustycznego następuje wzmocnienie drgań struktury elastycznej. Wpływ drgań struktury na kształt charakterystyki promieniowania zestawu głośnikowego w takim przypadku również jest większy. Dla ścianek elastycznych o współczynniku tłumienia $\eta=0,01$ zniekształcenia charakterystyki częstotliwościowej poziomu ciśnienia akustycznego są mniejsze od 0,5 dB tylko wtedy, gdy częstotliwość takich rezonansów akustycznych i strukturalnych różni się co najmniej o 10% (rys.45 i 46 oraz tabela 4-3).

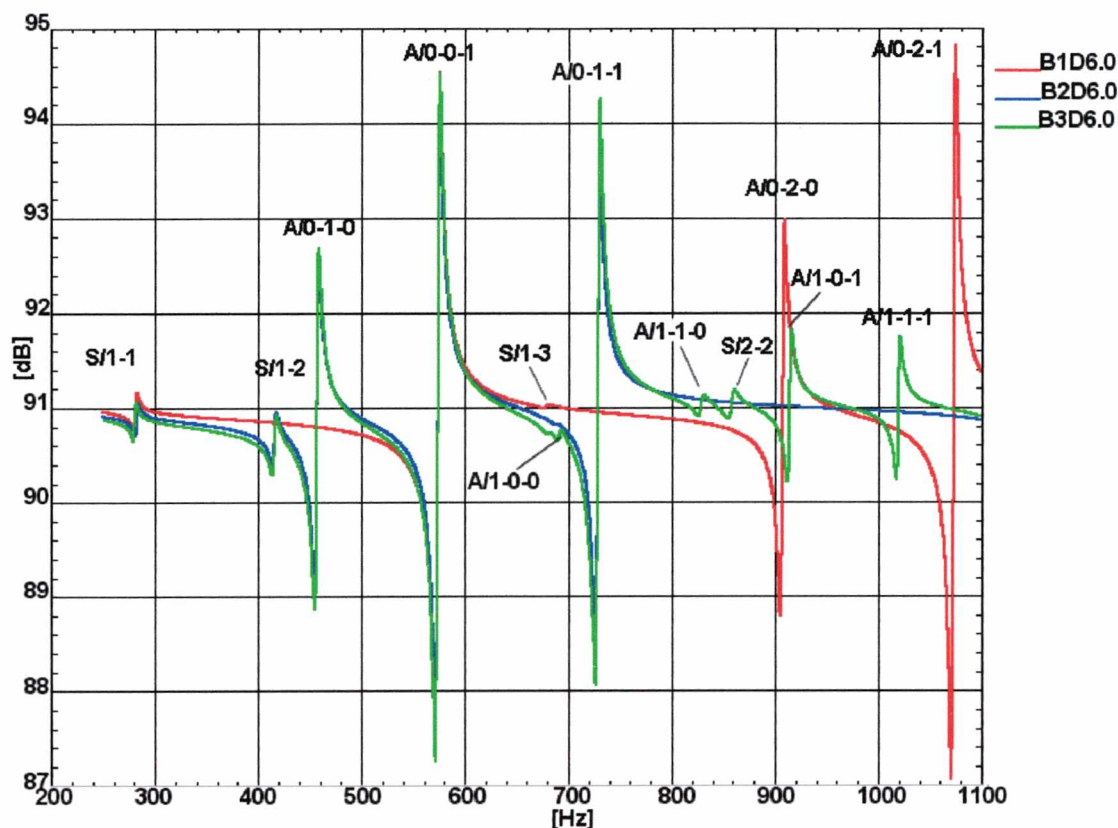
Podczas modelowania określono również wpływ usytuowania ścianki elastycznej względem płyty czołowej w której umieszczony jest tłok sztywny na charakterystykę promieniowania zestawu. Rysunek 47 ilustruje charakterystyki częstotliwościowe poziomu ciśnienia akustycznego zestawu głośnikowego *B2* dla przypadku umieszczenia ścianki elastycznej równolegle (*B2D*) i prostopadle (*B2_1D*) do płyty czołowej, tzn. w płaszczyźnie *x-y* i *y-z*. Grubość ścianki dobrano w taki sposób, aby uzyskać podobny stosunek częstotliwości niesprężonych rezonansów akustycznego rzędu 0-1-0 (A/0-1-0) i strukturalnego rzędu 1-2 (S/1-2) dla obydwu obudów. Dla obudów *B2D* i *B2_1D* parametr ten wynosi, odpowiednio, 0,93 i 0,91.



Rysunek 47. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego zestawu głośnikowego B2 dla przypadku ścianki elastycznej o grubości 6 mm umieszczonej naprzeciwko płyty czołowej (B2D6.0) i ścianki elastycznej o grubości 6.9 mm umieszczonej prostopadłe do płyty czołowej (B2_1D6.9)

Na podstawie rysunku 47 można stwierdzić, że przy takim samym stosunku częstotliwości rezonansów akustycznych i strukturalnych zmiana położenie ścianki elastycznej obudowy względem tłoka sztywnego nie wpływa na stopień zniekształcenia charakterystyki częstotliwościowej poziomu ciśnienia akustycznego zestawu (rezonanse S/1-2 i A/0-1-0). Ze względu na inne wymiary ścianki bocznej zmienia się natomiast parametr f_s/f_a dla pozostałych rezonansów ścianki elastycznej, co może znacznie zwiększyć ich wpływ na charakterystykę promieniowania zestawu. Przypadek taki ilustruje rysunek 47 na przykładzie par rezonansów A/0-0-1 i S/2-1 (y-z) oraz A/0-1-1 i S/2-2. Przy doborze grubości ścianek obudowy głośnikowej należy zatem przeprowadzić analizę dla wszystkich ścianek niezależnie od ich usytuowania względem elementu drgającego.

Rysunek 48 z kolei ilustruje wpływ lokalizacji tłoka sztywnego na charakterystykę promieniowania zestawu. Tłok sztywny jest umieszczony w płycie czołowej w trzech punktach podanych na rysunku 44.

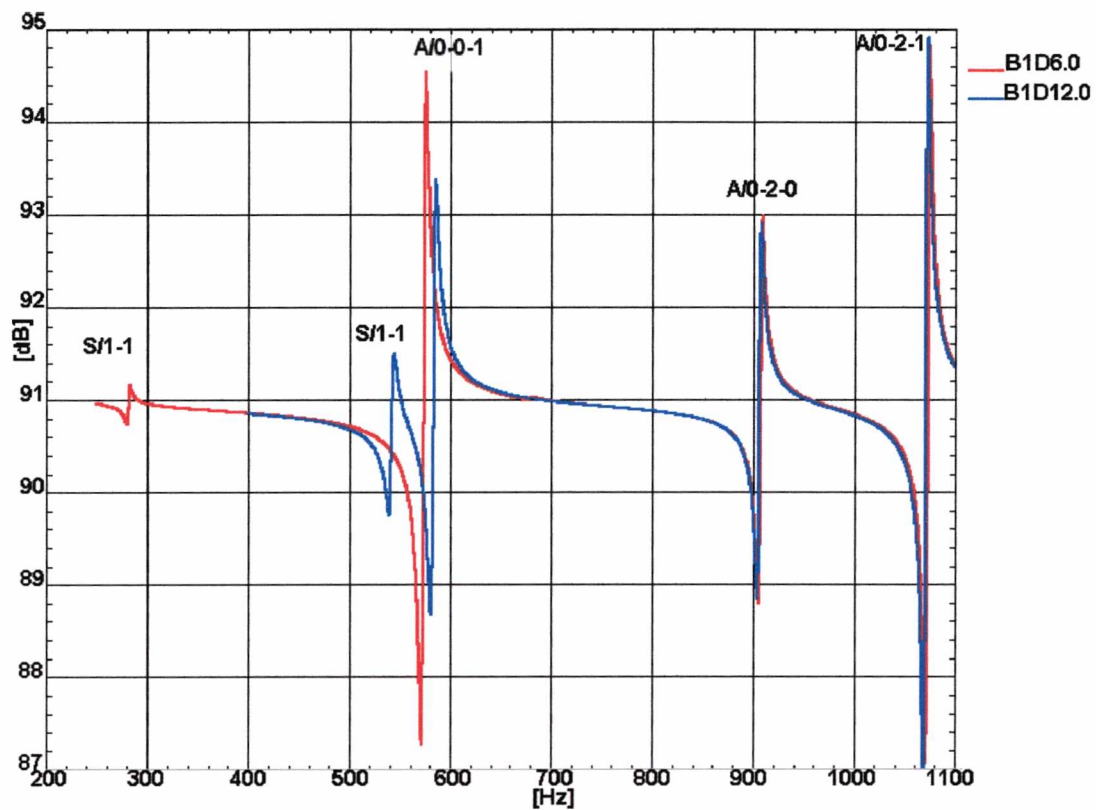


Rysunek 48. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego zestawu głośnikowego o geometrii prostopadłościanu z jedną ścianką elastyczną o grubości 6 mm dla różnych lokalizacji tłoka sztywnego na płycie czołowej

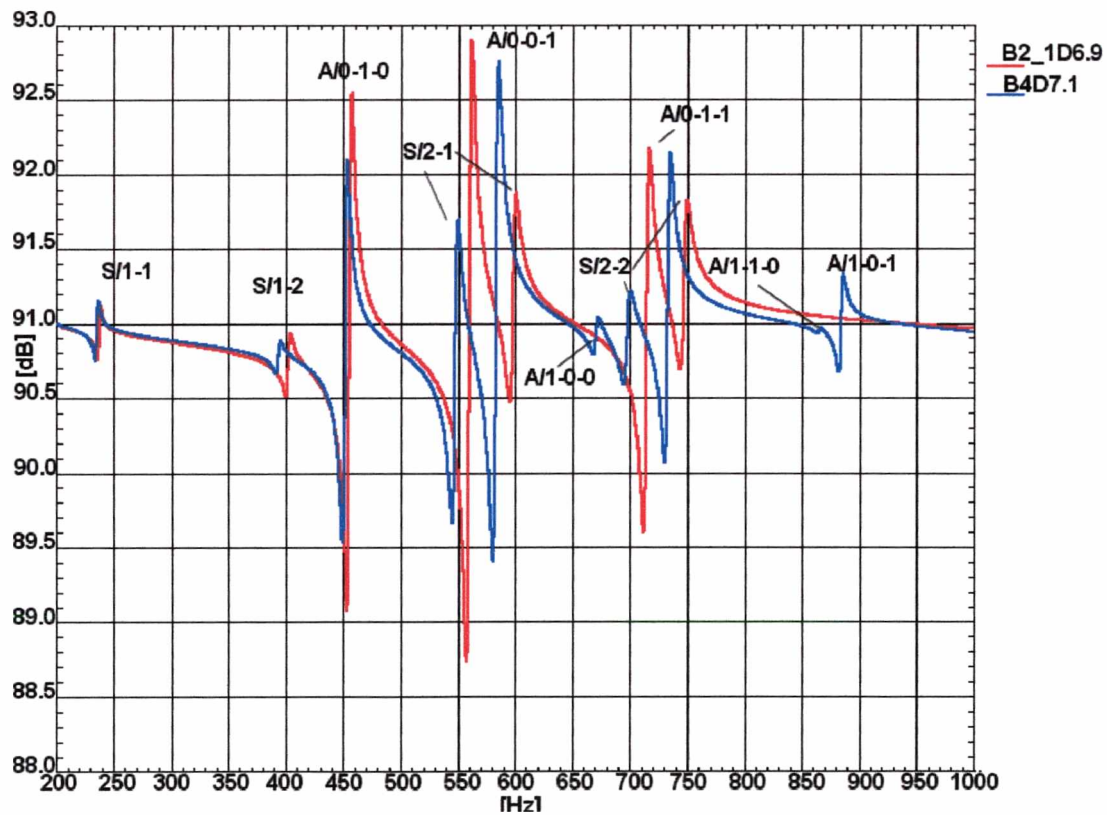
Na podstawie przedstawionych charakterystyki można zauważyć, że mody akustyczne, których węzły pokrywają się z miejscem usytuowania tłoka, nie są wzbudzane i nie mają wpływu na charakterystykę promieniowania zestawu. Na przykład przy umieszczeniu tłoka na środku płyty czołowej (*B1*) w zakresie częstotliwości do 1100 Hz są wzbudzane rezonanse akustyczne wyłącznie rzędu 0-0-1, 0-2-0, 0-2-1, natomiast pozostałe (0-1-0, 1-0-0, 0-1-1, 1-1-0, 1-0-1, 1-1-1) nie mają wpływu na charakterystykę częstotliwościową poziomu ciśnienia akustycznego. Umieszczenie tłoka sztywnego niesymetrycznie w dolnym rogu płyty czołowej (*B3*) jest najmniej korzystne wśród analizowanych przypadków ze względu na nierównomierność charakterystyki częstotliwościowej poziomu ciśnienia akustycznego. Rezonanse ścianek o częstotliwości i kształcie wytwarzanego przez nich pola ciśnienia akustycznego porównywalnymi z częstotliwością i kształtem pola nieaktywnego modu akustycznego również nie mają wpływu na nierównomierność częstotliwościowej charakterystyki poziomu ciśnienia zestawu, np. mody *S/1-2* i *A/0-1-0* oraz *S/2-2* i *A/1-1-0* w obudowie *B1D6.0*.

Analizując interakcję rezonansów akustycznych i strukturalnych można zatem optymalizować grubość ścianek obudowy ze względu na charakterystykę promieniowania i konstruować zestawy o takich samych lub lepszych parametrach przy mniejszych kosztach produkcji obudowy. Przykład obudowy *B1* przedstawiony na rysunku 49 ilustruje przypadek zastosowanie cieńszej ścianki elastycznej dla której jej wpływ na nierównomierność charakterystyki częstotliwościowej poziomego ciśnienia akustycznego modelowanego zestawu jest mniejszy, niż ścianki dwa razy grubszej. Większy wpływ rezonansów akustycznych ($A/0-0-1$) na nierównomierność charakterystyki promieniowania w analizowanej obudowie z cieńszą ścianką niż ze ścianką grubszą można natomiast zminimalizować umieszczając wewnątrz obudowy materiał pochłaniający dźwięk.

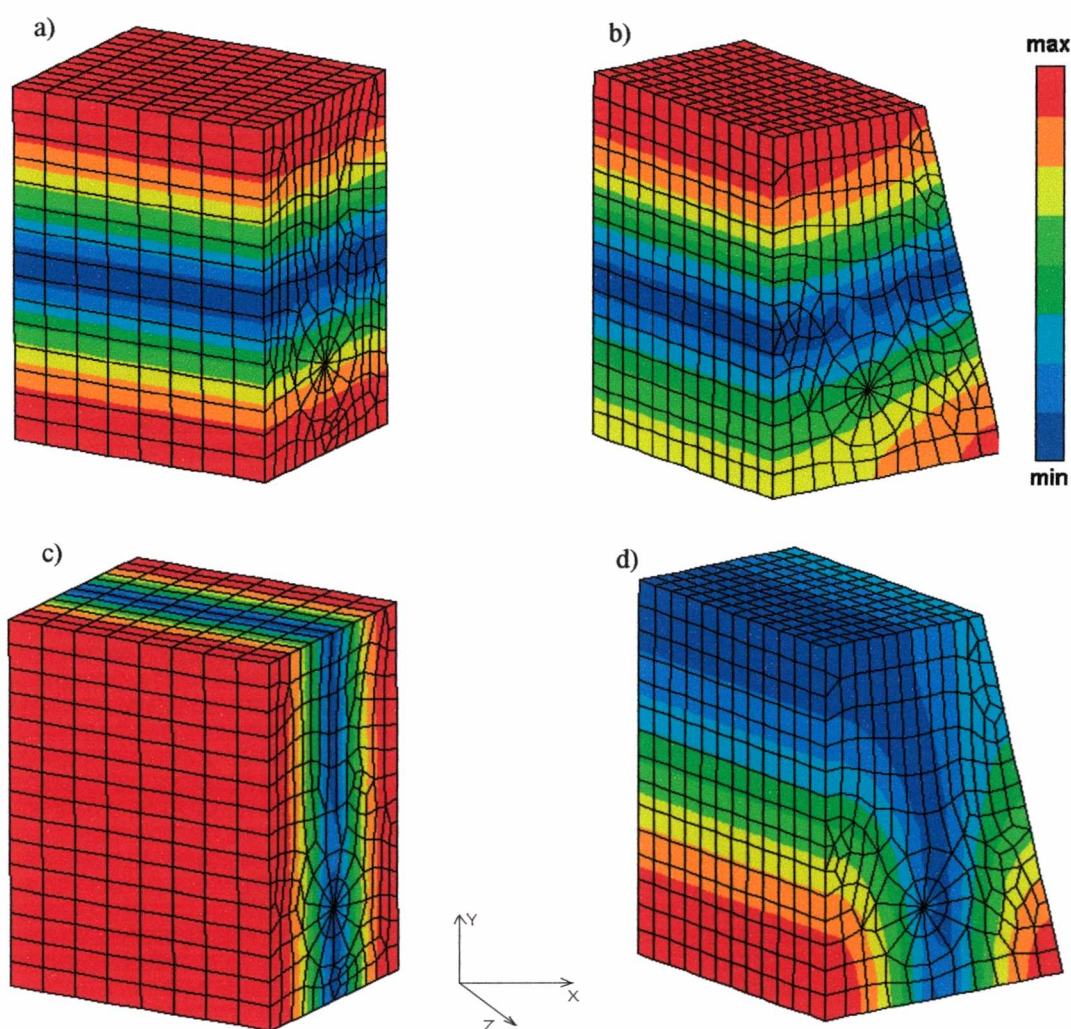
Rysunek 50 ilustruje charakterystykę promieniowania zestawu *B4* o geometrii różnej od kształtu prostopadłościanu podanej na rysunku 44, natomiast na rysunku 51 przedstawiono kształt pola ciśnienia akustycznego dla dwóch wybranych rezonansów akustycznych modelowanych obudów. Ścianka elastyczna w obudowach jest umieszczona w płaszczyźnie y - z , czyli prostopadle do płyty czołowej w której jest umieszczony element promieniujący dźwięk.



Rysunek 49. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego obudowy B1 dla różnej grubości ścianki elastycznej umieszczonej naprzeciwko płyty czołowej zestawu



Rysunek 50. Charakterystyka częstotliwościowa poziomu ciśnienia akustycznego obudowy prostopadłościennej B2_1 i obudowy różnej od kształtu prostopadłościanu B4



Rysunek 51. Kształt pola ciśnienia akustycznego dla rezonansów akustycznych rzędu 0-1-0 i 1-0-0 w obudowie B2 i B4

Pochylenie jednej ze ścianek obudowy powoduje zmianę kształtu pola ciśnienia akustycznego dla rezonansów akustycznych, zmniejsza skupienie energii akustycznej w małych obszarach dla wybranych modów. Powoduje to zmniejszenie wpływu tych modów akustycznych na rezonans struktury, np. dla modów S/1-2 i A/0-1-0 (rys.50 i rys.51a i 51b). Zmiany te jednak nie są duże i przy optymalizacji obudowy głośnikowej skonstruowanej z materiału o współczynniku strat wewnętrznych większym lub równym $\eta=0,01$ mogą być pominięte. W przypadku obudów głośnikowych wykonanych z materiału o mniejszych stratach wewnętrznych wpływ pochylenia jednej ze ścianek obudowy na amplitudę drgań struktury elastycznej w rezonansie jest znacznie większy. Zmiana kształtu pola ciśnienia akustycznego dla modów akustycznych na skutek modyfikacji geometrii obudowy przy takim samym umieszczeniu tłoka na płycie czołowej może spowodować wzbudzenie większej liczby

rezonansów akustycznych niż w obudowie prostopadłościenniej (rys.50 mody A/1-0-0 i A/1-0-1). Zjawisko wzbudzenie większej liczby modów akustycznych spowodowane jest przesunięciem węzłów ciśnienia akustycznego w obudowie o zmienionym kształcie (rys.51c i 51d). Kształt obudowy różny od kształtu prostopadłościanu nie zawsze więc korzystnie wpływa na charakterystykę promieniowania zestawu głośnikowego.

4.3 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy sformułowano następujące wnioski.

Pole akustyczne w obszarze zewnętrznym komory można modelować z dużą dokładnością poprzez wyznaczenie impedancji obciążającej tylną stronę elementu promieniującego dźwięk. Umożliwia to znaczne uproszczenie modeli numerycznych i tym samym zwiększenie efektywności modelowania metodami FEM i BEM. Dokładność uzyskiwanych wyników techniką połączenia metod numerycznych z metodą analogii E-M-A jest nie mniejsza niż dokładność wyników uzyskanych wyłącznie metodami numerycznymi. Wyniki modelowania otrzymane z wykorzystaniem metody FEM są dokładniejsze, a czas ich uzyskania jest mniejszy niż metodami DBEM i IBEM.

Przedstawiony model strat akustycznych z wykorzystaniem współczynnika ξ umożliwia uzyskanie dokładnych wyników modelowania ciśnienia akustycznego w obszarze na zewnątrz komory z elementem promieniującym dźwięk w przypadku małego skoku fazy na powierzchniach odbijająco-pochłaniających dźwięk. Zastosowanie modelu strat akustycznych z wykorzystaniem współczynnika ξ umożliwia kilkudziesięciokrotne przyspieszenie obliczeń, a więc model ten jest szczególnie przydatny do modelowania dużych układów akustycznych.

Błędy modelowania pola akustycznego wewnątrz lub na zewnątrz komory metodami numerycznymi można oszacować wykorzystując proste modele otrzymane z wykorzystaniem analogii E-M-A. Stosowanie takich modeli umożliwia optymalizację gęstości siatki elementów skończonych/brzegowych i tym samym zwiększenie efektywności modelowania.

Niekorzystny wpływ rezonansów akustycznych obudowy na charakterystykę promieniowania zestawu głośnikowego można minimalizować poprzez dobór geometrii obudowy i umiejscowienia elementu promieniującego dźwięk. Optymalne położenie elementu promieniującego dźwięk jest różne dla obudów o różnej geometrii.

Grubość ścianek obudowy głośnikowej może być optymalizowana poprzez analizę wzajemnej interakcji rezonansów akustycznych i strukturalnych obudowy. Możliwe jest zmniejszenie wpływu rezonansów strukturalnych obudowy na charakterystykę promieniowania zestawu wraz ze zmniejszeniem grubości ścianek. Analizując wzajemną interakcję rezonansów akustycznych i strukturalnych można opracować proste kryterium uwzględniające parametry materiałowe ścianek obudowy, przy spełnieniu którego wpływ drgań ścianek na nierównomierność charakterystyki częstotliwościowej poziomu ciśnienia akustycznego zestawu będzie pomijalnie mały. Dla obudów wykonanych z płyt MDF lub wiórowych kryterium to określa minimalną 10% różnicę w wartości częstotliwości rezonansów akustycznych i strukturalnych wytwarzających pole akustyczne o porównywalnym kształcie.

5 Podsumowanie

W pracy przeprowadzono analizę właściwości pola akustycznego w obszarach ograniczonych i nieograniczonych z uwzględnieniem impedancyjnych warunków brzegowych. Określono efektywność modelowania pola akustycznego metodami FEM i BEM. Wykorzystując analogię E-M-A opracowano modele umożliwiające szacowanie błędów obliczeniowych metod numerycznych i zwiększenie efektywności modelowania pola akustycznego metodami FEM i BEM. Dla wybranych metod obliczeniowych określono proste kryteria doboru gęstości siatki elementów dyskretnych oraz rzędu kwadratury (w metodzie BEM) umożliwiające przeprowadzenie obliczeń metodami numerycznymi z określoną dokładnością.

Efektywność modelowania pola akustycznego metodami numerycznymi określono na podstawie analizy kosztów obliczeniowych, rozmiaru pamięci obliczeniowej i błędów obliczeniowych. Analizę przeprowadzono dla metody elementów skończonych FEM, kolokacyjno-wariacyjnej metody elementów brzegowych DBEM i wariacyjnej metody elementów brzegowych IBEM. Dla obszarów ograniczonych porównano efektywność wymienionych metod i określono kryteria doboru metody o największej efektywności w zależności od rozmiaru modelu dyskretnego. W wyniku przeprowadzonej analizy wykazano, że:

- Przy modelowaniu pola akustycznego metodami DBEM i IBEM zarówno błędy modelowania, jak i koszty obliczeniowe silnie zależą od rzędu zastosowanej kwadratury.
- Efektywność modelowania pola akustycznego metodą DBEM jest większa od efektywności metody IBEM tylko dla modeli małych i średnich, modeli zbudowanych co najwyżej z kilkuset liniowych lub parabolicznych elementów brzegowych.
- Efektywność modelowania dwuwymiarowych obszarów ograniczonych metodą FEM jest większa niż metodą BEM tylko dla modeli małych, modeli zbudowanych najwyżej z kilkuset liniowych lub parabolicznych elementów skończonych.
- Efektywność modelowania trójwymiarowych obszarów ograniczonych metodą FEM jest większa niż metodą BEM dla modeli małych, średnich i dużych. Tylko dla modeli bardzo dużych, modeli zbudowanych co najmniej z kilkudziesięciu

tysięcy liniowych lub kilku tysięcy parabolicznych elementów skończonych metoda BEM jest efektywniejsza od metody FEM.

W wyniku analizy pola akustycznego w obszarach ograniczonych określono wpływ małych zmian kształtu komory prostopadłościennej i warunku brzegowego Robina na nierównomierność pola ciśnienia i prędkości akustycznej. Opracowano metody wyznaczania prędkości akustycznej w komorze poprzez przetworzenie pola ciśnienia akustycznego. Przeprowadzono analizę błędów wyznaczania ciśnienia i prędkości akustycznej wybranymi metodami oraz omówiono ich efektywność. Na podstawie przeprowadzonej analizy sformułowano wnioski ogólne:

- Nierównomierność pola akustycznego w komorze można kształtować w stosunkowo szerokim zakresie poprzez zadanie w odpowiedni sposób impedancyjnych warunków brzegowych na jej ściankach lub poprzez dobór jej geometrii. Określając warunek brzegowy w sposób niejednorodny możliwe jest znaczne zmniejszenie nierównomierności pola akustycznego dla wybranych postaci drgań w komorze.
- Pole prędkości akustycznej można wyznaczyć z wystarczającą dokładnością i z dużą efektywnością poprzez przetworzenie pola ciśnienia akustycznego wyznaczonego dla siatki o stosunkowo małej gęstości stosując technikę dwustronnej pochodnej dyskretnej.

Analizę wpływu impedancyjnych warunków brzegowych na właściwości pola akustycznego w obszarze zewnętrznym ograniczono do zagadnienia oddziaływania pola akustycznego wewnątrz komory na parametry pola akustycznego na zewnątrz komory. Analizę przeprowadzono metodami FEM i BEM wykorzystując uproszczone modele opracowane z wykorzystaniem analogii E-M-A. Użycie takich modeli umożliwiło stosowanie metod FEM i DBEM w postaci klasycznej do analizy wpływu rezonansów akustycznych i rezonansów ścianek komory na charakterystykę częstotliwościową poziomu ciśnienia akustycznego dla komory z elementem promieniującym dźwięk oraz znacznie zmniejszyło koszty obliczeniowe metody FEM. Na przykładzie zestawu głośnikowego przeanalizowano wpływ rezonansów akustycznych i rezonansów ścianek obudowy na charakterystykę częstotliwościową poziomu ciśnienia akustycznego zestawu. Opracowano kryteria umożliwiające optymalizację grubości ścianek obudowy ze względu na ich wpływ na charakterystykę promieniowania analizowanego zestawu akustycznego.

Wykazano, że:

- Dokładność modelowania pola akustycznego metodami FEM i BEM z zastosowaniem poprawnie zdefiniowanych uproszczonych modeli opartych na analogii E-M-A jest nie mniejsza niż dokładność modelowania wyłącznie metodami numerycznymi.
- Efektywność modelowania pola akustycznego w obszarze zewnętrznym z zastosowaniem uproszczonych modeli metodą FEM jest większa od efektywności modelowania metodą BEM.
- Wpływ rezonansów akustycznych i strukturalnych na charakterystykę częstotliwościową poziomu ciśnienia akustycznego komory z elementem promieniującym dźwięk można zminimalizować poprzez dobór geometrii obudowy (kształtu obudowy i grubości ścianek) oraz sposobu umieszczenia elementu promieniującego dźwięk.
- Grubość ścianek obudowy może być optymalizowana poprzez analizę wzajemnej interakcji rezonansów akustycznych i strukturalnych.

Głównym wnioskiem wypływającym z pracy jest prawdziwość postawionych tez. Udowodniono, że metody FEM i BEM umożliwiają przeprowadzenie zadaną dokładnością analizy wpływu impedancyjnych warunków brzegowych na właściwości pola akustycznego. Wykazano, że efektywność modelowania zagadnień wibroakustycznych metod FEM i BEM zależy od typu oraz wielkości zagadnienia akustycznego i dla niektórych zagadnień efektywność metody FEM jest większa od efektywności modelowania metodą BEM.

Problematyka przedstawiona w pracy stanowi zwartą całość, ale nie jest całościowym rozwiązaniem zagadnienia modelowania zjawisk wibroakustycznych metodami FEM i BEM. Rozwiązanie tak szeroko postawionego problemu w jednej pracy nie jest możliwe. Poniżej wymieniono kilka zagadnień, które mogą stanowić kontynuacją rozpatrywanej w pracy problematyki:

- Analiza błędów kwadratur i opracowanie kryteriów doboru rzędu kwadratury w metodzie BEM dla obszarów trójwymiarowych.
- Adaptacyjna optymalizacja siatek dyskretnych w zależności od analizowanego zagadnienia wibroakustycznego.
- Wpływ geometrycznych niejednorodności brzegu analizowanego obszaru na właściwości pola akustycznego.

Przystawione w pracy rozważania i wyniki modelowania mają znaczenie zarówno poznawcze, jak i praktyczne. Opracowane kryteria doboru metody ze względu na jej efektywność, kryteria doboru gęstości siatek elementów dyskretnych i metodyka szacowania błędów modelowania numerycznego mogą być pomocne w procesie projektowania i optymalizacji różnorodnych układów akustycznych.

Literatura

1. Abramowitz M., Stegun I.A., Handbook of mathematical functions, Dover Publications, New York, 1972
2. Akin J.E., Application and implementation of finite element methods, Academic Press, 1982
3. Aldoshina I., Nazarov S., Olyushin M., Loudspeaker system sound field and vibration behavior computer simulation, Proc. 97th Audio Eng. Soc. Convention San Francisco, preprint 3912, 1994
4. Aldoshina I., Teorija i praktyka projektowania elektroakustycznych źródeł dźwięku, Disertacja ukończona stopniem doktora technicznych nauk, Sankt Petersburg, 1995
5. Aldoshina I.A., Olushin M.V., Rezonansy częstoty i struktury dźwiękowych pól w korpusach akustycznych systemów, Akustyczny Żurnal, vol.38, pp.965-973, 1992
6. Ali A., Rajakumarand C., Yunus S.M., On the formulation of the acoustic boundary element eigenvalue problem, Int. J. Num. Meth. Eng., vol.31, pp.1271-1282, 1991
7. Amini S., Kirkup S.M., Solution of Helmholtz equation in the exterior domain by elementary boundary integral methods, J. Comput. Phys., vol.118, pp.208-211, 1995
8. Anthony P.J., Wright J.R., Finite element analysis in the design of high-quality loudspeaker, Proc. 108th Audio Eng. Soc. Convention Paris, preprint 5162, 2000
9. Banerjee P.K., Ahmad S., Wang H.C., A new BEM formulation for the acoustic eigenfrequency analysis, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 26, pp.1299-1309, 1988
10. Beltran C.I., Spence J.H., High accuracy wide bandwidth automated loudspeaker modeling using finite element analysis, Proc. 109th Audio Eng. Soc. Convention Los Angeles, preprint 5220, 2000
11. Bettess P., Infinite elements, Int. J. Numer. Methods Eng., vol.11, pp.53-64, 1977
12. Bettess P., Operation counts for boundary integral and finite element methods, Int. J. Numer. Methods Eng., vol.17, pp.306-308, 1981
13. Bobrowski D., Probabilistyka w zastosowaniach technicznych, WNT, Warszawa, 1986
14. Bolejko R., Dobrucki A., Błędy obliczeniowe w metodzie elementów brzegowych dla dwuwymiarowego wewnętrznego zagadnienia akustycznego, L OSA, Szczyrk-Gliwice, 2003
15. Bolejko R., Dobrucki A., Wpływ impedancji promieniowania na rezonans drgań własnych płaskich struktur mechanicznych o określonej straconości wewnętrznej, OSA XLVII, Rzeszów – Jawor, 2000
16. Bolejko R., Idczak H., Model numeryczny rozpraszania fali akustycznej na nierównościach kształtu i admitancji powierzchni, XLIV OSA97, Gdańsk-Jastrzębia Góra, 1997
17. Bolejko R., Pruchnicki P., Sound diffusers based on number theory with random variations of surface acoustic impedance, Proc. 104th Audio Eng. Soc. Convention Amsterdam, preprint 4711, 1998
18. Bolejko R., Wpływ kształtu na pole akustyczne wewnątrz przestrzeni ograniczonej, OSA XLVIII, Wrocław-Polanica Zdrój, 2001
19. Bolejko R., Wyznaczanie pola prędkości akustycznej w komorach metodą numerycznego różniczkowania ciśnienia akustycznego, L OSA, Szczyrk-Gliwice, 2003
20. Bolt R.H., Normal Frequency Spacing Statistics, J. Acous. Soc. Am., vol.13, pp.1-7, 1941
21. Brański A., Analiza akustycznych zagadnień brzegowych, WSP, Rzeszów, 2001
22. Brański A., Problem of an optimal discretization in acoustic modeling, Archives of Acoustics, vol.23, No 2, pp.239-249, 1998
23. Brański A., Smooth model of an acoustic source, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol.22, pp.333-340, 1998

24. Collins R.J., Bandwidth reduction by automatic renumbering, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol.6, pp.345-356, 1973
25. Colloms M., *High performance loudspeaker*, John Wiley & Sons, New York, 1997
26. Cooper I.J., Pollard H.F., Low-frequency resonance in unsymmetrical enclosure, *Acustica*, vol.41, pp.86-93, 1978
27. Coyette J.P., Fyfe K.R., An improved formulation for acoustic eigenmode extraction from boundary element models, *J. Sound and Vib.*, vol.112, pp.392-397, 1990
28. Czyżewski A., Jaroszuk J., Kostek B., Digital waveguide models of the Pan-pipes, *Archives of Acoustics*, vol.27, No 4, pp.303-317, 2002
29. Ding W.P., Chen H.L., A symmetrical finite element model for structure-acoustic coupling analysis of an elastic, thin-walled cavity, *J. Sound and Vib.*, vol.243, pp.547-559, 2001
30. Dobrucki A., Modrzejewski T., Construction of equivalent electrical circuits for loudspeaker moving system, *Proc. 94th Audio Eng. Soc. Convention Berlin*, preprint 3509, 1993
31. Dobrucki A., Numeryczne modelowanie układu drgającego głośnika magnetoelektrycznego cewkowego, *Prace Naukowe Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej, Monografia*, Wrocław, 1992
32. Dobrucki A., *Podstawy akustyki*, WPW, Wrocław, 1987
33. Dobrucki A., Szmal C., Quasistatic effective parameters of vibrating elements of electro-acoustic transducers, *Archives of Acoustics*, vol.13, pp.257-266, 1988
34. Dobrucki A., Teoria drgań i promieniowania dźwięku przez stożkową membranę głośnika, *Prace Naukowe Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej, Monografia*, Wrocław, 1978
35. Engel Z., *Ochrona środowiska przed drganiami i hałasem*, PWN, Warszawa, 1993
36. Estorff O.Von, *Boundary elements in acoustics*, WIT Press, Southampton, 2000
37. Everstine G.C., A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction, *J. Sound and Vib.*, vol.79, pp.157-160, 1981
38. Fahy F.J., *Sound intensity*, Elsevier Applied Science, London, 1990
39. Feshbach H., On the perturbation of boundary conditions, *Phys. Rev.*, vol.65, pp.307, 1944,
40. Fukuda J., Suhara J., Automatic mesh generation for Finite Element Analysis, in *Advances in computational methods in structural mechanics and design*, J.T.Oden, R.W.Clough, Y.Yammamoto, University of Alabama Press, Huntsville, Ala, 1972
41. Geng P., Oden J.T., Demkowicz L., Numerical solution and *a posteriori* error estimation of exterior acoustics problems by a boundary element method at high wave numbers, *J. Acous. Soc. Am.*, vol.100, pp.335-345, 1996
42. Gołaś A., *Metody komputerowe w akustyce wnętrz i środowiska*, AGH, Kraków, 1995
43. Grannell J.J., Shirron j.j., Couchman L.S., A hierarchic p-version boundary-element method for axisymmetric acoustic scattering and radiation, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol.95, pp.2320-2329, 1994
44. Gudra T., Analiza rezonatorów o konwersji kierunku drgań metodą elementów skończonych na przykładzie rezonatora o konwersji typu R-L, *Praca doktorska*, Politechnika Wrocławska, 1981
45. Guiggiani M., Gigante A., A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method, *J. Appl. Mech.*, vol.57, 1990
46. Harari. I., Grosh K., Hughes T.J.R., Malhotra M., Pinsky P.M., Steward J.R., Thompson L.L., Recent developments in finite element methods for structural acoustics, *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol.3, pp.204-226, 1996
47. Henwood D.J., The boundary-element method and horn design, *J. Audio Eng. Soc.*, vol.41, pp.485-496, 1993
48. Horn R.A., Johnson C.R., *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989

49. Huebner K.H., The finite element method for engineers, John Wiley & Sons, New York, 1982
50. Hutchins C.M., The air and wood modes of the violin, J. Audio Eng. Soc., vol.46, pp.751-765, 1998
51. Ih Jeong-Guon, Acoustic wave action inside rectangular loudspeaker cabinets, J. Audio Eng. Soc., vol.39, pp.945-954, 1991
52. Ihlenburg F., Babuška I., Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part II: The h-p version of the FEM, SIAM J. Numer. Anal., vol. 34, pp.315-358, 1997
53. Iverson J.K., The theory of loudspeaker cabinet resonances, J. Audio Eng. Soc., vol.21, pp.177-180, 1973
54. Jankowscy Janina i Michał, Przegląd metod i algorytmów numerycznych, WNT, Warszawa, 1988
55. Joppa P.D., Fyee I.M., A finite element analysis of the impedance properties of irregular shaped cavities with absorptive boundary, J. Sound and Vib., vol.56, pp.61-69, 1978
56. Juhl P., A Note on the convergence of the direct collocation boundary element method, J. Sound and Vib., vol.212, pp.703-709, 1998
57. Kagawa Y., Yamabuchi T., Yoshikawa T., Finite element approach to acoustic transmission-radiation systems and application to horn and silencer design, J. Sound and Vib., vol. 69, pp.207-228, 1980
58. Kagawa Y., Yamabuchi T., K. Sugihara, A finite element approach to a coupled structural-acoustic radiation system with application to loudspeaker characteristic calculation, J. Sound and Vib., vol.69, pp.229-243, 1980
59. Kagawa Y., Yamabuchi T., Mori A., Finite element simulation of an axisymmetric acoustic transmission system with a sound absorbing wall, J. Sound and Vib., vol. 53, pp.357-374, 1977
60. Kaizer A.J.M., Leeuwetein A., Calculation of the sound radiation of nonrigid loudspeaker diaphragm using the finite-element method, in Loudspeaker Anthology, vol.4, J. Audio Eng. Soc.
61. Karjalainen M., Ikonen V., Antsalo P., Maijala P., Savioja L., Suutala A., Pohjolainen, Comparison of numerical simulation models and measured low-frequency behavior of loudspeaker enclosure, J. Audio Eng. Soc., vol.49, pp.1148-1166, 2001
62. Kirkup S.M., Jones M.A., Computational methods for the acoustic modal analysis of an enclosed fluid with application to a loudspeaker cabinet, Applied Acoustics, vol.48, pp.275-299, 1996
63. Leissa A.W., The free vibration of rectangular plates, J. Sound and Vib., vol. 31, pp.257-293, 1973
64. Malecki I., Physical foundations of technical acoustics, PWN, Warszawa, 1969
65. Mapes-Riordan D., Horn modeling with conical and cylindrical transmission-line elements, J. Audio Eng. Soc., vol.41, pp.471-484, 1993
66. Mazuch T., The use of Lanczos method for determining the acoustic natural modes and frequencies of irregular shaped cavities, Noise-Control, Kraków, 1992
67. Morse P.M., Ingard K.U., Theoretical acoustics, McGraw Co., New York, 1968
68. Nardini D, Brebbia C.A., A new approach to free vibration analysis using boundary elements, Proc. 4th Int. Conf. on BEM Berlin, Springer-Verlag, pp.313-326, 1982
69. Nefske D.J., Wolf J.A., Howell L.J., Structural-acoustic finite element analysis of the automobile passenger compartment: A review of current practice, J. Sound and Vib., vol. 80, pp.247-266, 1982
70. Numerical Integration Technologies, SYSNOISE - Application notes, Rev.5.2, Belgium, 1995
71. Numerical Integration Technologies, SYSNOISE - Theoretical manual, Rev.5.2, Belgium, 1995
72. Peterson K., MSC/NASTRAN Encyclopedia – Knowledge solution for MCAE professionals, The MacNeal-Schwendler Corporation, 1996

73. Petyt M., Lea J., Koopmann G.H., A finite element method for determining the acoustic modes of irregular shaped cavities, *J. Sound and Vib.*, vol.45, pp.302-495, 1976
74. Pissanetzky S., Sparse matrix technology, Academic Press, London, 1984
75. Podrez A., Renowski J., Rudno-Rudziński K., Urządzenia głośnikowe, *Prace Naukowe Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej*, Monografia, Wrocław, 1977
76. Sadowski J., Podstawy akustyki urbanistycznej, Arkady, Warszawa, 1982
77. Sakai S., Kagawa Y., Yamabushi T., Acoustic field in an enclosure and its effect on sound-pressure responses of a loudspeaker, *J. Audio Eng. Soc.*, vol.32, pp.218-227, 1984
78. Sandberg G., Göransson P., A symmetric finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction analysis, *J. Sound and Vib.*, vol.123, pp.507-515, 1988
79. Savioja L., Backman J., Järvinen A., Takala T., Waveguide mesh method for low-frequency simulation of room acoustics, *Proc. 15th Int. Congr. On Acoustics Trondheim*, vol.2, pp.637-640, 1995
80. Shuku T., Finite difference analysis of the acoustic field in irregular rooms, *J. Acoust. Soc. Jap.*, vol.28, pp.5-12, 1972
81. Shuku T., Ishihara K., The analysis of the acoustic field in irregularly shaped rooms by the finite element method, *J. Sound and Vib.*, vol. 29, pp.67-76, 1973
82. Skudrzyk E., *Die Grundlagen Der Akustik*, Springer-Verlag, 1954
83. Smith J., Physical modeling using digital waveguides, *Computer Music J.*, vol.16, pp.74-87, 1992
84. Stain E., Wendland W., Finite element and boundary element techniques from mathematical and engineering point of view, *Courses and Lectures No.301*, Springer-Verlag, Wien-New York, 1988
85. Strang G., Fix G.J., *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1973
86. Succi G.P., The interior acoustic field of an automobile cabin, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol.81, pp.1688-1694, 1987
87. Tappan P.W., Loudspeaker enclosure walls, in *Loudspeaker Anthology*, vol.2, *J. Audio Eng. Soc.*
88. Tetambe R.P., Rajakumar C., Estimation of error in finite element acoustic analysis, *Computers & Structures*, vol.61, pp.13-19, 1996
89. Tournour M., Rossion J.P., Bricteux L., McCulloch C., McGann I., Accelerating FEM and BEM acoustic solutions, in *Modeling and Experimental Measurements in Acoustics III*, Almorza D., Brebbia C.A., Hernandez R., Witpress Southampton, Boston, 2003
90. Vinogradov I. M., *Matematičeskaja encyklopedia*, Sovetskaja Encyklopedia, Moskva, 1977
91. Vojevodin V.V., Kuznecov J.A., *Matricy i vyčislenia*, Nauka, Moskva 1984
92. Weyna S., An image of the energetic acoustic field in reduced parallelepiped room models, *Acustica*, vol.82, pp.72-81, 1996
93. Zaveri K., Phil M., Modal analysis of large structure – multiple exciter systems, *Brüel&Kjær*, 1984
94. Zienkiewicz O.C., Philips D.V., An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by 'isoparametric' coordinates, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 3, 1971
95. Zienkiewicz O.C., *The finite element method in engineering science*, McGraw-Hill Book Company, London, 1971
96. Żyszkowski Z., *Podstawy elektroakustyki*, WNT, Warszawa, 1984

Dodatek A. Porównanie kosztów obliczeniowych metod numerycznych DBEM i IBEM dla oprogramowania Sysnoise v.5.2

W celu wyznaczenia liczby elementów modelowanego obszaru dla której koszty obliczeniowe porównywalnych metod są równe należy przyrównać koszty obliczeniowe rozważanych metod i rozwiązać otrzymane równanie ze względu na zmienną określającą liczbę elementów. Wygodnie jest posługiwać się parametrem n_e , który określa liczbę elementów przypadających na jeden wymiar modelowanego obszaru.

Dla porównanych metod szukane równanie ma postać:

$$(K_K + K_F + K_S)_{IBEM} = (K_K + K_F + K_S)_{DBEM},$$

gdzie :

$$K_K, K_F, K_S - \text{koszty obliczeniowe, odpowiednio, kompozycji, faktoryzacji}$$

$$\text{macierzy głównej i eliminacji wprost/wstecz dla porównywalnych metod.} \quad (A-1)$$

Liczba operacji matematycznych wykonywanych podczas eliminacji wprost/wstecz jest co najmniej o rząd mniejsza od liczby operacji niezbędnych do faktoryzacji lub kompozycji macierzy głównej dla rozpatrywanych metod. W równaniu (A-1) koszty K_S mogą być więc pominięte:

$$(K_K + K_F)_{IBEM} = (K_K + K_F)_{DBEM}. \quad (A-2)$$

Postać funkcji K zależy od metody, wymiaru modelu oraz pewnych współczynników zależnych od sposobu implementacji metody i zastosowanych algorytmów obliczeniowych. Równanie (A-2) można przedstawić w takiej postaci, dla której niewiadomymi współczynnikami będą współczynniki zależny tylko od zastosowanych algorytmów obliczeniowych, natomiast zmienną będzie liczba n_e określająca liczbę elementów przypadających na jeden wymiar modelowanego obszaru.

W przypadku modeli dwu- i trójwymiarowych równanie (A-2) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} &2D \\ &a_{IBEM} n_e^2 + b_{IBEM} n_e^3 = a_{DBEM} n_e^2 + b_{DBEM} n_e^3 \\ &3D \\ &a_{IBEM} n_e^4 + b_{IBEM} n_e^6 = a_{DBEM} n_e^4 + b_{DBEM} n_e^6, \end{aligned} \quad (A-3)$$

gdzie a, b są współczynnikami określonymi przez zastosowane algorytmy kompozycji macierzy głównej i jej faktoryzacji.

Znając współczynniki a i b można wyznaczyć wartość parametru n_e dla której koszty obliczeniowe porównywalnych metod są równe:

$$\begin{array}{cc}
2D & 3D \\
n_e = \frac{a_{DBEM} - a_{IBEM}}{b_{IBEM} - b_{DBEM}} & n_e = \sqrt{\frac{a_{DBEM} - a_{IBEM}}{b_{IBEM} - b_{DBEM}}}
\end{array} \quad (A-4)$$

Całkowita liczba elementów modelu dla obszaru dwuwymiarowego i trójwymiarowego wynosi, odpowiednio, $4n_e$ i $6n_e^2$ (elementy czworokątne) lub $12n_e^2$ (elementy trójkątne).

Wykorzystując równania (A-4) można przeskalować wyniki porównania kosztów obliczeniowych metod IBEM i DBEM przedstawione w rozdziale 2.1.3 dla oprogramowania Sysnoise v.5.2 lub innych implementacji komputerowych metod BEM.

Tabela A-1 przedstawia wartość współczynników a , b dla algorytmów wykorzystanych w programie Sysnoise v5.2 [71] względem wartości wykorzystanej w rozdziale 2.1.3 oraz parametr korekcyjny C przez który należy przemnożyć wyniki podane we wspomnianym rozdziale aby uzyskać liczbę elementów przypadających na jeden wymiar obszaru n_e , dla której koszty obliczeniowe porównywalnych metod są równe. Tabela A-2 przedstawia porównanie kosztów obliczeniowych metod DBEM i IBEM dla oprogramowania Sysnoise v.5.2.

Tabela A-1. Wartość współczynników a i b i współczynnika skalującego C dla oprogramowania Sysnoise v.5.2

	a	b	C		C	
			IBEM		DBEM	
			2D	3D	2D	3D
IBEM	a	$1,7b$	-	-	$\frac{1}{1,7}$	$\frac{1}{\sqrt{1,7}}$
DBEM	a	$1,7b$	$\frac{1}{1,7}$	$\frac{1}{\sqrt{1,7}}$	-	-

Tabela A-2. Porównanie kosztów obliczeniowych metod DBEM i IBEM dla oprogramowania Sysnoise v.5.2; n_e jest liczbą elementów przypadających na jeden wymiar obszaru dla której koszty obliczeniowe porównywalnych metod są równe, N_e – całkowita liczba elementów

Metoda / wymiar	Rodzaj elementów	n_e	N_e	n_e	N_e	n_e	N_e	n_e	N_e	n_e	N_e	Koszty dla modeli mniejszych od podanych	
2D		Liczba węzłów kwadratury										$K^{(IBEM)} > K^{(DBEM)}$	
		1	2	3	4	5							
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$	$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$	48	192	162	648	325	1300				
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$	$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$	$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$					
3D		Liczba węzłów kwadratury										$K^{(IBEM)} > K^{(DBEM)}$	
		1	4	9	16	25							
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$	8	384	26	4056	51	15606	81	39366			
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$	$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		6	216	14	1176	24	3456			
		Liczba węzłów kwadratury											
		1	4	7	13	16							
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$	13	2028	38	17328	76	69372	94	106032			
		$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$	$K^{(IBEM)} < K^{(DBEM)}$		4	192	12	1728	15	2700			

Dodatek B. Wyznaczanie impedancji obciążającej tylną stronę tłoka sztywnego o dowolnym kształcie z wykorzystaniem trójkątnych elementów dyskretnych

Impedancja mechaniczna obciążająca tylną stronę tłoka sztywnego jest określona jako stosunek siły mechanicznej działającej na tłok do jego prędkości drgań:

$$Z_w = \frac{-\int p dS}{\dot{g}_0},$$

gdzie: p - ciśnienie akustyczne działające na tłok

S - powierzchnia tłoka,

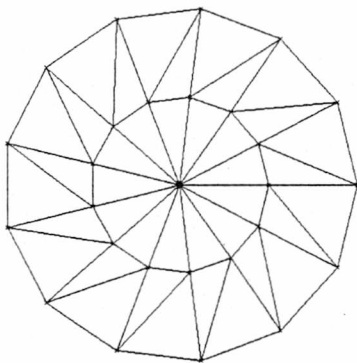
$\dot{g}_0$ - zadana prędkość drgań tłoka.

(B-1)

Przy zadanej prędkości drgań tłoka rozkład ciśnienia akustycznego w skończonej liczbie punktów na powierzchni można wyznaczyć metodami FEM lub BEM. Następnie powierzchnię tłoka zastępuje się zbiorem trójkątnych elementów dyskretnych o wierzchołkach pokrywających się z punktami, w których wyznaczono ciśnienie akustyczne. Ciśnienie akustyczne wewnątrz elementu skończonego interpoluje się wielomianem określonego stopnia z uwzględnieniem zadanych wartości w wierzchołkach elementu. Wybór elementów trójkątnych jest uzasadniony możliwością przybliżenia takimi elementami praktycznie dowolnego kształtu tłoka oraz istnieniem analitycznej całki z wielomianu każdego stopnia po powierzchni dowolnego elementu trójkątnego [2].

Przykładowy podział tłoka kołowego na elementy trójkątne ilustruje rysunek 52.

Całkę po powierzchni tłoka można zastąpić sumą całek po powierzchni elementów dyskretnych, natomiast impedancję Z_w przedstawić w postaci:



Rysunek 52. Podział tłoka kołowego na dyskretne elementy trójkątne

$$Z_w = \frac{-\int p dS}{\dot{g}_0} = \frac{-\sum_{N_e} \int p dS_e}{\dot{g}_0},$$

gdzie:

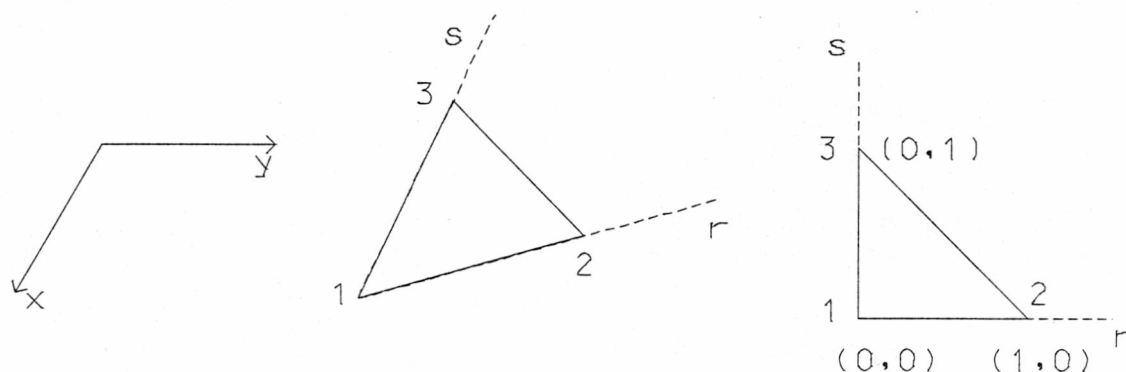
S_e - powierzchnia elementu dyskretnego,

N_e - liczba elementów dyskretnych.

(B-2)

Dowolny element trójkątny można przedstawić w bezwymiarowych współrzędnych

lokalnych (rysunek 53) [2].



Rysunek 53. Zamiana współrzędnych globalnych x, y na bezwymiarowe współrzędne lokalne r, s

We współrzędnych lokalnych definiuje się funkcję interpolacyjną ciśnienia akustycznego wewnątrz elementu, na przykład dla liniowej interpolacji:

$$\begin{aligned} \aleph_1(r, s) &= 1 - r - s, \\ \aleph_2(r, s) &= r, \\ \aleph_3(r, s) &= s. \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

Natomiast całka po powierzchni elementu z funkcji ciśnienia akustycznego określa się jako:

$$\int_{S_e} p(r, s) dS_e(r, s) = \int_{S_e} [p_1 \ p_2 \ p_3] \cdot \begin{bmatrix} \aleph_1 \\ \aleph_2 \\ \aleph_3 \end{bmatrix} dS_e(r, s) = [p] \int_{S_e} [\aleph] dS_e(r, s), \quad (\text{B-4})$$

gdzie : $\mathbf{p}$ - wektor ciśnienie akustycznego w węzłach elementu dyskretnego,
 $[\aleph]$ - kolumna funkcji interpolacyjnych we współrzędnych lokalnych.

Całkę powierzchniową z wielomianu interpolacyjnego stopnia m, n można wyznaczyć analitycznie [2]:

$$\int_{S_e} r^m s^n dS_e(r, s) = 2S_e \frac{m!n!}{(2+m+n)!} \quad (\text{B-5})$$

gdzie : m, n - liczby naturalne.

Równanie (B-4) dla przypadku interpolacji liniowej można zatem przedstawić jako:

$$\int_{S_e} p(r,s) dS_e(r,s) = [p] \int_{S_e} \begin{vmatrix} 1-r-s \\ r \\ s \end{vmatrix} dS_e(r,s) = \frac{S_e}{3} [p] \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{gdzie : } S_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (\text{B-6})$$

x_i, y_i - współrzędne wierzchołków elementu trójkątnego
we współrzędnych globalnych.

Natomiast impedancja Z_w jest określona jako:

$$Z_w = \frac{-\frac{S_e}{3} \sum_{N_e} [p] \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}}{\mathcal{G}_0}. \quad (\text{B-7})$$

W ten sposób można wyznaczyć impedancję mechaniczną obciążającą tylną stronę tłoka sztywnego o dowolnym kształcie na podstawie zadanego rozkładu ciśnienia akustycznego w skończonych punktach na jego powierzchni.

Wzór (B-7) określa impedancję Z_w tłoka sztywnego dla przypadku liniowej interpolacji ciśnienia akustycznego wewnątrz trójkątnych elementów dyskretnych. W analogiczny do podanego sposobu można wyprowadzić wzór na impedancję Z_w dla interpolacji wyższego rzędu.

Dodatek C. Parametry czynne jednorodnej płyty prostokątnej

W celu przeprowadzenia analizy elastycznych struktur metodą analogii E-M-A wprowadza się tzw. parametry czynne struktury. Parametry czynne są parametrami układu o jednym stopniu swobody, którymi w pewnym zakresie częstotliwości można z dużą dokładnością opisać układ ciągły. Do analizy struktur powierzchniowych wystarczy określić masę czynną, mechaniczną podatność czynną lub mechaniczną sztywność czynną, rezystancję i powierzchnię czynną. Parametry czynne wyznacza się za pomocą zależności energetycznych [33].

W pracy przy szacowaniu błędów modelowania numerycznego komór i w analizie wpływu parametrów struktury elastycznej na pole akustyczne wykorzystano przypadek jednorodnej płyty prostokątnej swobodnie podpartej lub sztywno zaciśniętej na krawędziach. We współrzędnych prostokątnych rozkład wychyleń płyty prostokątnej można przedstawić jako iloczyn wychyleń wzdłuż osi x i y [64]:

$$u(x, y) = u_x(x) \cdot u_y(y). \quad (\text{C-1})$$

Dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej na krawędziach rozkład wychyleń dla poszczególnych częstotliwości rezonansowych jest określony równaniem [64]:

$$u(x, y) = u_x(x) \cdot u_y(y) = u_{x_{\max}} \sin k_i x \cdot u_{y_{\max}} \sin k_j y, \quad (\text{C-2})$$

gdzie:

$$k_i = \frac{i \cdot \pi}{a}, k_j = \frac{j \cdot \pi}{b},$$

$u_{x_{\max}}, u_{y_{\max}}$ - amplituda drgań,

a, b - wymiary geometryczne płyty,

i, j - liczby naturalne $1, 2, \dots$, określające rząd drgań,

natomiast częstotliwość rezonansów:

$$f_{i,j} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) \left(\frac{B}{M_s} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{C-3})$$

gdzie:

B - sztywność na zginanie płyty,

M_s - masa powierzchniowa płyty.

Korzystając z definicji [32,33] wyprowadzono parametry czynne dla płyty swobodnie podpartej na krawędziach:

$$M_c = 0,25M_g$$

$$k_{c_{i,j}} = \frac{B}{8} (\sin(2k_i a) + 2k_i a) (\sin(2k_j b) + 2k_j b) \left[k_i k_j + \frac{1}{2} \frac{(k_i^2 + k_j^2)}{k_i k_j} \right]$$

$$S_{c_{i,j}} = a \cdot b \left(\frac{1}{k_i a} - \frac{\cos(k_i a)}{k_i a} \right) \left(\frac{1}{k_j b} - \frac{\cos(k_j b)}{k_j b} \right), \quad (C-4)$$

gdzie:

M_g – masa geometryczna płyty

M_c – masa czynna płyty

k_c – mechaniczna sztywność czynna płyty,

S_c – powierzchnia czynna płyty.

Masa czynna płyty swobodnie podpartej na krawędziach nie zależy od częstotliwości i jest równa 1/4 masy geometrycznej. Sztywność czynna płyty zależy od sztywności na zginanie i wymiarów geometrycznych płyty oraz rośnie z kwadratem częstotliwości. Powierzchnia czynna maleje ze wzrostem częstotliwości i przyjmuje niezerowe wartości tylko dla modów o nieparzystej liczbie linii węzłowych jednocześnie w kierunku osi x i y , tzn. $i, j = 1, 3, 5, \dots$.

W przypadku płyty sztywno zamocowanej na krawędziach zależności opisujące drgania struktury są bardziej skomplikowane. Rozkład wychyleń płyty można przedstawić jako iloczyn funkcji opisujących drganie belek jednorodnych [63]:

$$u(x, y) = u_x(x) \cdot u_y(y)$$

gdzie:

$$u_x(x) = u_{x_{\max}} \left[\left(\frac{ch(k_i x) - \cos(k_i x)}{ch(k_i a) - \cos(k_i a)} \right) - \left(\frac{sh(k_i x) - \sin(k_i x)}{sh(k_i a) - \sin(k_i a)} \right) \right] \quad (C-5)$$

$$u_y(y) = u_{y_{\max}} \left[\left(\frac{ch(k_j y) - \cos(k_j y)}{ch(k_j b) - \cos(k_j b)} \right) - \left(\frac{sh(k_j y) - \sin(k_j y)}{sh(k_j b) - \sin(k_j b)} \right) \right],$$

$$k_i \approx \frac{(2 \cdot i + 1)\pi}{2a}, k_j \approx \frac{(2 \cdot j + 1)\pi}{2b}.$$

Przybliżone wartości częstotliwości rezonansowych płyty sztywno zamocowanej na krawędziach można wyznaczyć stosując metodę energetyczną Rayleigh-Ritza [63]:

$$f_{i,j} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{T_i^4}{a^4} + \frac{2O_i O_j}{a^2 b^2} + \frac{T_j^4}{b^4} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{B}{M_s} \right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie :

$$T_1 = 1,506 \quad O_1 = 1,248 \quad (C-6)$$

$$T_i = n + \frac{1}{2} \quad O_i = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi} \right) \quad \text{dla } n > 1.$$

Wzory określające sztywność i powierzchnię czynne płyty prostokątnej sztywno zaciśniętej na krawędziach wyznaczone z ich definicji są skomplikowane i niewygodne do zastosowania w praktyce. Dla pierwszych szesnastu częstotliwości rezonansowych można stosować wartości obliczone numerycznie z wykorzystaniem wspomnianych wzorów oraz wykorzystując związek pomiędzy częstotliwością rezonansową układu o jednym stopniu swobody a jego parametrami czynnymi:

$$\begin{aligned} M_c &= 0,17 M_g \\ k_{c,i,j} &= (2\pi \cdot f_{i,j})^2 M_c \\ S_{c,i,j} &= L_{i,j} \times S_g \end{aligned} \quad \begin{array}{ccccc} i-j & 1-1 & 3-1 & 1-3 & 3-3 \\ L_{i,j} & 0,285 & 0,129 & 0,129 & 0,058 \end{array} \quad (C-7)$$

gdzie :

$$L_{i,j} = 0 \quad \text{dla } i, j = 2, 4, \dots,$$

$f_{i,j}$ – częstotliwość rezonansowa wg. wzoru (C - 6).

Masa czynna płyty zaciśniętej na krawędziach nie zależy od częstotliwości i jest równa 1/6 masy geometrycznej. Sztywność czynna płyty rośnie z kwadratem częstotliwości. Powierzchnia czynna płyty prostokątnej sztywno zaciśniętej na krawędziach maleje ze wzrostem częstotliwości, natomiast dla częstotliwości rezonansowych o parzystej liczbie linii węzłowych jest równa zero.

Częstotliwość podstawowego rezonansu jednorodnej płyty prostokątnej swobodnie zamocowanej na krawędziach jest około półtora razy mniejsza niż płyty sztywno zaciśniętej na krawędziach.

Ponieważ powierzchnia czynna płyty prostokątnej maleje, natomiast sztywność czynna rośnie z częstotliwością, należy się spodziewać zmniejszenia wpływu drgań struktury elastycznej na pole akustyczne wewnątrz i na zewnątrz komory ze wzrostem częstotliwości.

