

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA  
INSTYTUT TECHNIKI CIEPLNEJ I MECHANIKI PŁYNÓW

Raport serii **PREPRINTY** Nr 23/2003

**MODELOWANIE TRÓJWYMIAROWYCH  
PRZEPŁYWÓW WIROWYCH METODAMI  
DYSKRETNÝCH WIRÓW**

**Paweł REGUCKI**

Słowa kluczowe: przepływ trójwymiarowy  
metoda wirowa  
pierścień wirowy  
cząstka wirowa

**Praca doktorska**

Promotor: dr hab. inż. Henryk KUDELA, prof. PWr.

WROCŁAW 2003



*Pragnę gorąco podziękować Panu Prof. dr hab. inż. Henrykowi Kudeli  
za cenne uwagi i krytyczne komentarze pomocne przy realizacji niniejszej  
pracy, życzliwość, a przede wszystkim za poświęcony mi czas.*

2000

Biblioteka Główna i OINT  
Politechniki Wrocławskiej



100026631



316076 L/1

2004/0092/D



# Spis treści

|                                                                                     |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Wykaz ważniejszych oznaczeń                                                         | v         |
| <b>1 Wprowadzenie</b>                                                               | <b>1</b>  |
| 1.1 Znaczenie wirowości w mechanice płynów . . . . .                                | 1         |
| 1.2 Przedmiot badań . . . . .                                                       | 3         |
| 1.3 Równania ruchu płynu . . . . .                                                  | 4         |
| 1.4 Dynamika pola wirowości . . . . .                                               | 8         |
| 1.5 Prawo Biota–Savarta . . . . .                                                   | 10        |
| 1.6 Niezmienniki ruchu dla pola wirowości . . . . .                                 | 12        |
| 1.6.1 Całkowita cyrkulacja . . . . .                                                | 12        |
| 1.6.2 Enstropia i energia kinetyczna . . . . .                                      | 13        |
| 1.6.3 Skrętność . . . . .                                                           | 15        |
| 1.6.4 Impuls liniowy i kątowy . . . . .                                             | 16        |
| <b>2 Przegląd metod wirowych</b>                                                    | <b>19</b> |
| 2.1 Metoda włókien wirowych . . . . .                                               | 21        |
| 2.2 Metoda zorientowanych elementów<br>wirowych . . . . .                           | 27        |
| 2.3 Metoda zregularyzowanych elementów<br>wirowych . . . . .                        | 31        |
| <b>3 Cele, teza, zakres pracy</b>                                                   | <b>35</b> |
| <b>4 Metoda wirowa typu „wir w komórce”</b>                                         | <b>37</b> |
| 4.1 Aproksymacja funkcji ciągłej dyskretnym rozkładem cząstek<br>wirowych . . . . . | 39        |
| 4.2 Podstawowe własności $B$ -funkcji sklepanych . . . . .                          | 40        |

|          |                                                                                     |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3      | Algorytm numeryczny metody wirowej<br>typu „wir w komórce” . . . . .                | 42         |
| <b>5</b> | <b>Pierścień wirowy</b>                                                             | <b>49</b>  |
| 5.1      | Podstawowe własności pierścienia<br>wirowego . . . . .                              | 51         |
| 5.2      | Prędkość translacji pierścienia wirowego . . . . .                                  | 52         |
| 5.3      | Modelowanie dynamiki pierścienia<br>wirowego . . . . .                              | 53         |
| 5.3.1    | Torus wirowy . . . . .                                                              | 54         |
| 5.3.2    | Prędkość przemieszczania się torusa $U_T$ . . . . .                                 | 57         |
| 5.3.3    | Dynamika torusa wirowego . . . . .                                                  | 59         |
| <b>6</b> | <b>Oddziaływanie układu dwóch pierścieni wirowych</b>                               | <b>69</b>  |
| 6.1      | Zjawisko „gry wirów” . . . . .                                                      | 71         |
| 6.2      | Zjawisko nawijania się wirów . . . . .                                              | 78         |
| 6.3      | Zjawisko nawijania się pary pierścieni<br>z wytworzeniem „ogona wirowego” . . . . . | 86         |
| 6.4      | Nielepkie zderzenie dwóch pierścieni . . . . .                                      | 92         |
| <b>7</b> | <b>Modelowanie przepływów płynów lepkich</b>                                        | <b>97</b>  |
| 7.1      | Zjawisko przełączania linii wirowych – rekonekcja . . . . .                         | 97         |
| 7.2      | Algorytm dekompozycji lepkościowej . . . . .                                        | 101        |
| 7.2.1    | Metoda siatkowo-cząsteczkowa . . . . .                                              | 103        |
| 7.2.2    | Metoda wymiany intensywności cząstek PSE . . . . .                                  | 104        |
| 7.3      | Wyniki numeryczne modelowania zjawiska rekonekcji . . . . .                         | 106        |
|          | <b>Podsumowanie</b>                                                                 | <b>115</b> |
|          | <b>Dodatki</b>                                                                      | <b>117</b> |
| <b>A</b> | <b>Wyprowadzenie prędkości translacji pierścienia wirowego</b>                      | <b>117</b> |
| <b>B</b> | <b>Metoda wymiany intensywności cząstek – oszacowania</b>                           | <b>123</b> |
|          | <b>Spis literatury</b>                                                              | <b>127</b> |

## Wykaz ważniejszych oznaczeń

- $\mathbf{A}$  — potencjał wektorowy;  
 $d\mathbf{l}$  — wektorowy element długości łuku krzywej,  $m$ ;  
 $E$  — entropia;  
 $\mathbf{e}_i$  — wersor w kierunku osi  $i$ ;  
 $\mathcal{H}$  — skłonność;  
 $h$  — krok siatki numerycznej;  
 $I_i$  — całka objętościowa z  $i$ -tej składowej pola wirowości;  
 $\mathbf{L}$  — impuls kątowy;  
 $L_p$  — liczba przekrojów na którą podzielono pierścień wirowy;  
 $L_c$  — liczba cząstek wirowych w pojedynczym przekroju;  
 $N$  — całkowita liczba elementów wirowych w przepływie;  
 $\mathbf{n}$  — wersor normalny do powierzchni  $\mathcal{S}$ ;  
 $\mathbf{P}$  — impuls liniowy;  
 $p$  — ciśnienie,  $Pa$ ;  
 $R_0$  — promień zewnętrzny pierścienia wirowego;  
 $T, T_1, T_2$  — energia kinetyczna,  $J$ ;  
 $t$  — czas,  $s$ ;  
 $U$  — analityczna prędkość translacji pierścienia wirowego,  $m/s$ ;  
 $U_T$  — prędkość translacji torusa wirowego,  $m/s$ ;  
 $\mathbf{u}$  — prędkość,  $m/s$ ;  
 $\mathbf{x}$  — wektor położenia,  $m$ ;  
 $\alpha_p$  — intensywność  $p$ -tego elementu wirowego;  
 $\Delta t, \delta t$  — krok czasowy;  
 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  — kroki siatki numerycznej;  
 $\delta_{ij}$  — delta Kroneckera;  
 $\varepsilon_{ijk}$  — symbol permutacyjny (tensor antysymetryczny Levi-Civita);  
 $\varepsilon_0$  — promień wewnętrzny pierścienia wirowego;  
 $\Gamma$  — cyrkulacja,  $m^2/s$ ;  
 $\nu$  — kinematyczny współczynnik lepkości,  $m^2/s$ ;  
 $\omega$  — wirowość,  $1/s$ ;  
 $\Psi$  — funkcja prądu;  
 $\varphi$  — potencjał prędkości;  
 $\rho$  — gęstość,  $kg/m^3$ ;  
 $\sigma$  — promień obciążenia, promień wewnętrzny rurki wirowej;

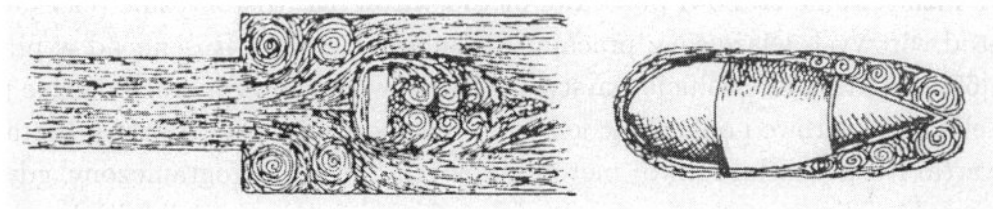


# Rozdział 1

## Wprowadzenie

### 1.1 Znaczenie wirowości w mechanice płynów

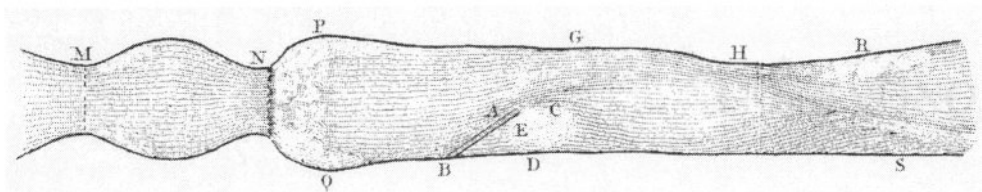
Wirowość ( $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ ) jest obecna we wszystkich realnych zjawiskach występujących w przepływach. Pomimo, że pomiar wartości wirowości jest bezpośrednio bardzo trudny, badacze zdają sobie sprawę, że decyduje ona o charakterze i ewolucji przepływu. Potwierdzają to liczne obserwacje i wizualizacje, które prowadzili już np. Leonardo da Vinci czy Venturi (rys. 1.1, 1.2).



Rys. 1.1. Formowanie się wirów wokół opływanych ciał według Leonarda da Vinci [17].

Z obserwacji doświadczalnych wynika, że wirowość jest zlokalizowane zazwyczaj w niewielkim obszarze, ale jej rozkład jednoznacznie określa pole prędy-

kości w całym obszarze przepływu. Wynika stąd, że różnorodność i złożoność przepływów jest w ścisłym związku z dynamiką pola wirowości.



Rys. 1.2. Szkic przepływu z zaznaczonymi strefami recyrkulacji według Venturiego [17].

We wszystkich rzeczywistych przepływach, warunek braku poślizgu na ściankach sztywnych, nieciągłości składowych stycznych pola prędkości lub niezachowawcze siły masowe (związane np. z różnicami gęstości) powodują produkcję wirowości, która jest unoszona i ulega dyfuzji w płynie. Badania nad ewolucją pola wirowości mają podstawowe znaczenie dla zrozumienia wielu fundamentalnych problemów mechaniki płynów np.: opływ przeszkody, powstawanie siły nośnej dla profilu lotniczego, opis mieszania się płynów o różnej gęstości i prędkości (niestabilność Rayleigha–Taylora), rozwój warstwy przyściennej.

Sformułowanie równań ruchu cieczy w ujęciu wirowości  $\omega$  i prędkości  $\mathbf{u}$  lub wirowości  $\omega$  i potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$  pozwala śledzić dynamikę przepływu badając ewolucję rozkładu wirowości. Zastąpienie ciągłego pola wirowości dyskretnym rozkładem elementów wirowych oraz badanie ich wzajemnego oddziaływania stanowi podstawę metod wirowych. Historycznie początek metod wirowych wiąże się z pracami Rosenheada (1931). Rosenhead w pracy [65] rozpatrywał ewolucję warstwy wirowej w dwóch wymiarach dzieląc ją na elementy wirowe i obliczając ich wzajemne oddziaływanie z prawa Biot–Savarta. Na początku rozwój metod wirowych był jednak ograniczony, gdyż większość obliczeń wykonywano ręcznie uwzględniając niewielką liczbę elementów wirowych w przepływie. Gwałtowny rozwój metod wirowych nastąpił dopiero w latach 70-tych XX wieku. Wzrost mocy obliczeniowej komputerów oraz ciągły postęp w dziedzinie technik modelowania numerycznego umożliwiły analizowanie dynamiki płynu z uwzględnieniem dużej liczby elementów wirowych. Obecnie metody wirowe stanowią atrakcyjne i konkurencyjne narzędzie badawcze w stosunku do metod numerycznych wykorzystujących do

modelowania przepływów równanie Naviera–Stokesa zapisane w zmiennych pierwotnych prędkości  $\mathbf{u}$  i ciśnienia  $p$ .

## 1.2 Przedmiot badań

Przedmiotem niniejszej rozprawy doktorskiej jest opracowanie i implementacja szybkiej metody wirowej typu „wir w komórce” do rozwiązywania nieściśliwych, trójwymiarowych przepływów lepkich. Równania ruchu cieczy sformułowane są w ujęciu wirowości  $\boldsymbol{\omega}$  i potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$ . Opracowana metoda jest w opozycji do bezpośrednich metod wirowych, w których prędkość elementu wirowego obliczana jest z prawa Biot–Savarta poprzez sumowanie wkładu do pola prędkości pochodzącego od pozostałych elementów wirowych znajdujących się w obszarze przepływu. Metoda wirowa typu „wir w komórce” (VIC) oparta jest na aproksymacji ciągłego pola wirowości dyskretnym rozkładem *punktowych cząstek wirowych*, które niosą informację o trzech składowych wektora wirowości, a do wyznaczenia pola prędkości w obszarze przepływu wykorzystywana jest siatka numeryczna. Metoda ta, zaproponowana przez Christansena w pracy [10], jest dobrze sformułowana teoretycznie [11] i z powodzeniem stosowana do modelowania przepływów dwuwymiarowych [15, 33, 34, 84], jednak wyników dotyczących przepływów trójwymiarowych jest wciąż mało i mają one charakter bardzo szczególny. Zawadzki w pracy [84] zastosował metodę VIC, korzystając z metody spektralnej, do modelowania ruchu pojedynczego pierścienia wirowego oraz zderzenia dwóch pierścieni wirowych. Cottet *et al.* w pracach [15, 58] zastosowali metodę VIC do modelowania zderzenia pierścienia wirowego ze ścianką sztywną. Dlatego w obecnej pracy podjęto próbę sformułowania jeszcze raz tego algorytmu i przeprowadzenia obliczeń sprawdzających.

Poprawność metody sprawdzono badając dynamikę pojedynczego, nielepkiego pierścienia wirowego. Porównano jego prędkość translacji ze wzorem analitycznym. Modelowano również oddziaływanie dwóch pierścieni dla różnych konfiguracji początkowych i odtworzono, dobrze znane w literaturze, zjawisko „gry wirów”. Otrzymane wyniki numeryczne są w dobrej zgodności z danymi eksperymentalnymi oraz wynikami otrzymanymi innymi metodami.

Dla nieściśliwych, lepkich przepływów trójwymiarowych przedstawiono różne metody modelowania lepkości. Odtworzono zjawisko rekonekcji dwóch pierścieni wirowych, które to zjawisko zachodzi jedynie w przepływach lepkich.

Układ pracy jest następujący: w *dalszej części rozdziału* przedstawiono równania ruchu dla nieściśliwego, lepkiego płynu, zdefiniowano wirowość  $\omega$  oraz niezmienniki ruchu dla przepływów wirowych w trzech wymiarach. W *drugim rozdziale* dokonano przeglądu metod numerycznego modelowania trójwymiarowych przepływów metodami wirowymi, zaprezentowano różne warianty dyskretyzacji ciągłego pola wirowości. W *rozdziale trzecim* przedstawiono cel, tezy oraz zakres pracy. W *rozdziale czwartym* sformułowano podstawy matematyczne oraz omówiono algorytm numeryczny prezentowanej metody „wir w komórce”. *Piąty rozdział* obejmuje fizykę pierścienia wirowego oraz wyniki numeryczne prezentujące dynamikę pojedynczego pierścienia. W *szóstym rozdziale* zaprezentowano oddziaływanie dwóch pierścieni wirowych dla różnych konfiguracji początkowych; otrzymane wyniki zostały porównane z wynikami innych badaczy. W *siódmym rozdziale* przedstawiono różne metody modelowania lepkości w przepływach trójwymiarowych oraz opisano zjawisko rekonekcji pierścieni wirowych.

### 1.3 Równania ruchu płynu

Dynamikę nieściśliwego, lepkiego płynu w trójwymiarowej przestrzeni  $\mathcal{D}$  opisuje układ równań [5, 12, 61]:

- równanie ciągłości opisujące prawo zachowania masy:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

- równanie Naviera–Stokesa opisujące prawo zachowania pędu:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (1.2)$$

gdzie  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  jest prędkością,  $p(\mathbf{x}, t)$  – ciśnieniem,  $\rho$  – gęstością,  $\nu$  – kinematycznym współczynnikiem lepkości; w dalszych rozważaniach założono, że siły masowe są równe zero ( $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0$ ) oraz że rozpatrywany płyn jest nieściśliwy ( $\rho = \text{const}$ ). Równania ruchu należy uzupełnić podając warunek początkowy  $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  oraz warunek brzegowy  $\mathbf{u}|_{\mathcal{S}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_{\mathcal{S}}, t)$ , gdzie  $\mathcal{S}$  – powierzchnia ograniczająca obszar  $\mathcal{D}$ .

Szczególne role wirowości w przepływie wynika również z twierdzenia o dekompozycji pola prędkości  $\mathbf{u}$  na sumę dwóch pól wektorowych: pola



beźródłowego  $\mathbf{u}_1$  i pola bezwirowego  $\mathbf{u}_2$  (tzw. dekompozycja Helmholtza–Hodge’a) [5, 21, 43]. Sformułowanie to opiera się na twierdzeniu o rozkładzie pola wektorowego:

**Twierdzenie 1 (Twierdzenie o rozkładzie)** *Dowolne, ciągłe pole wektorowe  $\mathbf{a}$ , zadane w całej przestrzeni i przyjmujące w nieskończoności wraz ze swoimi pierwszymi pochodnymi wartość zero, można przedstawić w postaci sumy dwóch pól wektorowych: pola beźródłowego  $\mathbf{a}_1$  ( $\nabla \cdot \mathbf{a}_1 = 0$ ) i bezwirowego  $\mathbf{a}_2$  ( $\nabla \times \mathbf{a}_2 = 0$ ):*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2.$$

Warunki graniczne narzucone na pole  $\mathbf{a}$  w powyższym twierdzeniu gwarantują zarazem jednoznaczność takiego rozkładu. Stosując je do pola prędkości  $\mathbf{u}$  otrzymujemy wspomniany rozkład:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,$$

gdzie:  $\mathbf{u}_1$  jest polem beźródłowym ( $\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$ ),

$\mathbf{u}_2$  jest polem bezwirowym ( $\nabla \times \mathbf{u}_2 = 0$ ).

Składową bezwirową pola prędkości  $\mathbf{u}$  można wyrazić za pomocą *potencjału prędkości*  $\varphi$ :

$$\mathbf{u}_2 = \nabla \varphi, \quad (1.3)$$

gdych:

$$\nabla \times \mathbf{u}_2 = \nabla \times \nabla \varphi \equiv 0. \quad (1.4)$$

Stąd przepływy bezwirowe nazywane są również potencjalnymi. Z twierdzenia Stokesa wynika, że:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{u}_2) \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{u}_2 \cdot d\mathbf{x} = \int_C \nabla \varphi \cdot d\mathbf{x} = 0, \quad (1.5)$$

gdzie  $S$  jest dowolną powierzchnią ograniczoną krzywą zamkniętą  $C$ .

Dla składowej beźródłowej pola prędkości  $\mathbf{u}_1$  warunek  $\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$  gwarantuje istnienie *potencjału wektorowego*  $\mathbf{A}$  ([12, 43, 61]):

$$\mathbf{u}_1 = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.6)$$

określonego z dokładnością do gradientu dowolnej funkcji skalarnej  $\psi$ :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi. \quad (1.7)$$

Na podstawie wzorów (1.3) i (1.6) pole prędkości można zapisać w postaci:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.8)$$

W celu realizacji zadanych warunków brzegowych do prawej strony równania (1.8) można dodać składnik  $\mathbf{v}$ , który jest związany zarazem z bezźródłową i bezwirową częścią pola prędkości ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  i  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ).

Dla przepływu nieściśliwego, zgodnie z równaniem ciągłości (1.1), wkład do pola prędkości pochodzi jedynie od pola wirowości  $\boldsymbol{\omega}$ , które definiujemy jako:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (1.9)$$

Dla celów opisu ruchu cieczy w terminach wirowości i prędkości równanie Naviera–Stokesa (1.2) należy przekształcić do postaci:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (1.10)$$

gdzie wykorzystano zależność  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla(\frac{1}{2}u^2)$  oraz tożsamość  $\nabla \times (\nabla(\frac{1}{2}u^2) + \frac{1}{\rho}\nabla p) \equiv 0$ . Człon  $(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2$  znika z założenia  $\rho = \text{const}$ . Warunek początkowy na pole wirowości otrzymujemy wprost z warunku początkowego na pole prędkości  $\boldsymbol{\omega}|_{t=0} = \nabla \times \mathbf{u}_0$ . Równanie (1.10) opisuje transport wirowości i nosi nazwę *równania Helmholtza*.

Z definicji pola wirowości  $\boldsymbol{\omega}$  wynika, że w obszarze nieograniczonym jest ono bezźródłowe ( $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ). W obszarze  $\mathcal{D}$  ograniczonym ściankami warunek na bezźródłowość pola wirowości w całym przepływie można spełnić zapewniając  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}|_{\mathcal{S}} = 0$ , gdzie  $\mathcal{S}$  – powierzchnia ograniczająca obszar  $\mathcal{D}$ . Biorąc dywergencję z równania (1.10), otrzymujemy równanie dyfuzji dla funkcji skalarnej  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}$ :

$$\frac{\partial (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})}{\partial t} = \nu \Delta (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) \quad (1.11)$$

z warunkiem początkowym  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}|_{t=0} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u}_0 \equiv 0$ . Jeżeli, dla  $t \geq 0$ , spełniony będzie warunek brzegowy:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}|_{\mathcal{S}} = 0, \quad (1.12)$$

to, z zasady maksimum dla parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych wynika, że rozwiązaniem równania (1.11) jest  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  w całym obszarze  $D$  dla  $t \geq 0$ .

W równaniu transportu (1.10) człon  $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$  można uprościć korzystając z wektorowej tożsamości:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}.$$

Z faktu, że  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  oraz  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  równanie transportu przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (1.13)$$

gdzie:  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  – człon związany z rozciąganiem linii wirowej,  
 $\nu \Delta \boldsymbol{\omega}$  – człon opisujący dyfuzję wirowości.

Człony po prawej stronie równania (1.13) przedstawiają dwa podstawowe mechanizmy zmiany wirowości w przepływie lepkim. Człon opisujący rozciąganie linii wirowych  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  związany jest ze zmianą wirowości spowodowaną gradientem prędkości w kierunku równoległym do wektora wirowości. Człon ten znika tożsamościowo w dwóch wymiarach (gdyż wektor wirowości  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$  jest prostopadły do wektora prędkości  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ ), ale w przepływach trójwymiarowych ma fundamentalne znaczenie w ewolucji pola wirowości. Człon związany z dyfuzją nie generuje nowej wirowości. Jest on odpowiedzialny za rozprzestrzenianie się pola wirowości w przepływie i wprowadzanie porcji wirowości wygenerowanej np. na ścianie sztywnej do obszaru przepływu.

Problemy występujące w modelowaniu przepływów trójwymiarowych związane są między innymi z następującymi zagadnieniami:

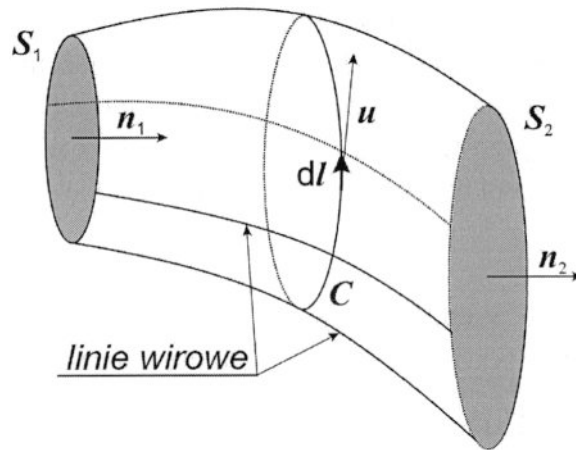
- wektor wirowości  $\boldsymbol{\omega}$  ma trzy składowe, które należy wyznaczyć;
- w przepływach wewnętrznych należy określić dwie składowe styczne wirowości na brzegu;
- pole wirowości powinno być bezźródłowe;
- w równaniach ruchu pojawia się dodatkowy człon związany z rozciąganiem linii wirowych;
- większość metod symulacji lepkości, stosowana z powodzeniem w przepływach dwuwymiarowych (np. metoda prędkości dyfuzyjnej, metoda przypadkowego błędzenia), nie przenosi się na trzy wymiary.

## 1.4 Dynamika pola wirowości

Do opisu numerycznego modelowania dynamiki pola wirowości wprowadza się pojęcie *linii wirowej*. Linia wirową nazywamy krzywą  $\mathcal{L}(s)$ , która jest w każdym swym punkcie styczna do pola wirowości  $d\mathcal{L}(s)/ds = \boldsymbol{\omega}$ . Powierzchnię utworzoną przez rodzinę linii wirowych przechodzących przez zamkniętą, redukowalną krzywą  $C$  nazywamy *rurką wirową*. Intensywność rurki wirowej definiujemy jako strumień wirowości przechodzący przez jej przekrój poprzeczny  $S$ :

$$\Gamma = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} ds = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.14)$$

gdzie  $\mathbf{n}$  jest wektorem prostopadłym do powierzchni  $S$ . Na mocy tw. Stokesa strumień ten jest równy cyrkulacji prędkości wzdłuż krzywej  $C$  obejmującej rurkę.



Rys. 1.3. Rurka wirowa utworzona z linii wirowych.

Przy opisie przepływów nielepkich, często korzystamy z twierdzenia Kelvina:

### **Twierdzenie 2 (Twierdzenie Kelvina o cyrkulacji)**

*W nielepkim przepływie, dla cieczy barotropowej lub o  $\rho = \text{const}$ , cyrkulacja  $\Gamma$  obliczona wzdłuż zamkniętej linii materialnej jest stała w czasie.*

Twierdzenie to ma odzwierciedlenie w prawach Helmholtza. *Pierwsze prawo Helmholtza* stwierdza, że intensywność rurki wirowej jest stała na całej jej długości, niezależnie od wyboru przekroju  $S_i$  (rys. 1.3):

$$\Gamma = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{n}_1 ds = \int_{S_2} \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{n}_2 ds = \text{const.} \quad (1.15)$$

Z bezźródłowości pola wirowości wynika również, że linie wirowe muszą tworzyć zamknięte pętle lub zaczynać się i kończyć na powierzchniach ograniczających przepływ. *Drugie prawo Helmholtza* stanowi, że w przepływie nielepkiem linie wirowe są unoszone tak jak linie materialne. Ewolucja linii materialnej w przepływie określona jest równaniem:

$$\frac{D}{Dt} d\mathbf{l} = (d\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (1.16)$$

gdzie  $d\mathbf{l} = (dl_1, dl_2, dl_3)$  jest elementem linii materialnej,  $D(\ )/Dt$  – pochodna substancjalna,  $D(\ )/Dt = \partial(\ )/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\ )$ . Równanie transportu wirowości ma postać:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (1.17)$$

Oznacza to, że jeżeli wybrany element płynu zawierał na początku fragment nici wirowej to, niezależnie od jego przemieszczenia i deformacji w trakcie przepływu, fragment nici wirowej będzie zawsze składał się z tych samych cząstek płynu. Stąd wynika, że w przepływie nielepkiem nić wirowa nie może ulec rozerwaniu. Prawo to przestaje obowiązywać dla przepływów lepkich z powodu członu związanego z dyfuzją wirowości. *Trzecie prawo Helmholtza* ujmuje twierdzenie Kelvina w postaci wzoru:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (1.18)$$

W przepływach lepkich cyrkulacja zmienia się zgodnie ze wzorem:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} + \int_C \mathbf{u} \cdot \frac{D d\mathbf{l}}{Dt}. \quad (1.19)$$

Drugi człon po prawej stronie równania znika, jeżeli zastosujemy równanie transportu linii materialnych w przepływie (1.16) oraz spostrzeżenie, że  $(d\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u} = d\mathbf{u}$ :

$$\int_C \mathbf{u} \cdot \frac{D d\mathbf{l}}{Dt} = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = 0. \quad (1.20)$$

Pierwszy człon przekształcamy wykorzystując równanie Naviera–Stokesa (1.2):

$$\int_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{\rho} \int_C \nabla p \cdot d\mathbf{l} + \nu \int_C \Delta \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.21)$$

Człon z gradientem ciśnienia znika, gdyż  $\int_C \nabla p \cdot d\mathbf{l} = \oint dp = 0$ . Ostatecznie wzór określający zmianę cyrkulacji w przepływach lepkich przyjmuje postać:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \nu \int_C \Delta \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = -\nu \int_C (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.22)$$

gdzie skorzystano z tożsamości  $\Delta \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}$  i założenia  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . W przepływach lepkich możliwe jest zjawisko zarówno rozrywania jak i przełączenia linii wirowych.

## 1.5 Prawo Biota–Savarta

Warunek nieściśliwości  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  gwarantuje istnienie potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$  (podrozdz. 1.3 wzór (1.6)):

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$$

określonego z dokładnością do gradientu dowolnej funkcji skalarnej  $\psi$  (1.7). Podstawiając równanie (1.6) do definicji wirowości (1.9) oraz korzystając z tożsamości wektorowej:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$$

otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}. \quad (1.23)$$

Aby ujednostacnić potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$  oraz otrzymać równanie Poissona na składowe wirowości zakłada się dodatkowo, że:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.24)$$

Rozwiązanie równania  $\Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = - \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) dv. \quad (1.25)$$

Funkcja Greena dla równania Poissona (w obszarze nieograniczonym przy założeniach, że w nieskończoności  $\omega \rightarrow 0$  i  $\mathbf{u} \rightarrow 0$ ) ma postać:

$$G(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln(r) & \text{dla dwóch wymiarów,} \\ -\frac{1}{4\pi r} & \text{dla trzech wymiarów,} \end{cases} \quad (1.26)$$

gdzie  $r = |\mathbf{r}|$ .

Wstawiając postać funkcji Greena dla trzech wymiarów do wzoru (1.25) otrzymujemy potencjał wektorowy w postaci ( $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{r} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) dv. \quad (1.27)$$

Rozkład pola prędkości otrzymuje się biorąc rotację z (1.27):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{r} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) dv. \quad (1.28)$$

Korzystając z tożsamości wektorowej:

$$\nabla \times \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{r} \right) = \frac{1}{r} \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \boldsymbol{\omega}$$

oraz z faktu, że

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

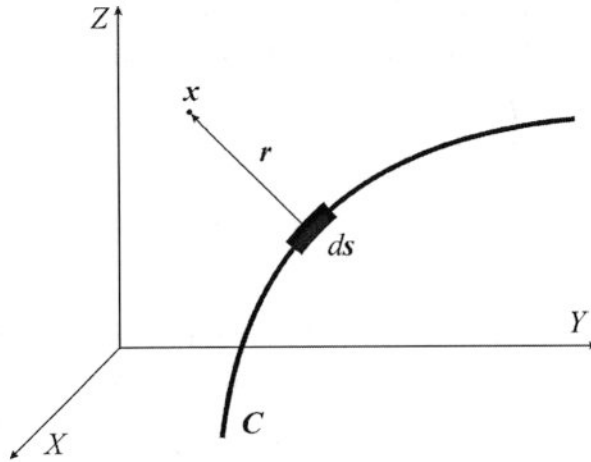
wzór (1.28), po całkowaniu przez części i założeniu, że wirowości w nieskończoności jest zero, przyjmuje ostateczną postać:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t)}{r^3} dv. \quad (1.29)$$

Idealizacją rurki wirowej jest *nić wirowa* [31]. Gdy przekrój poprzeczny rurki będzie dążył do zera, a jednocześnie strumień wirowości będzie dążył do nieskończoności tak, aby iloczyn pola przekroju i strumienia wirowości dążył do skończonej wartości  $\Gamma$ , to w granicy otrzymamy właśnie *nić wirową* o intensywności  $\Gamma$  (rys. 1.4).

Pole prędkości indukowane przez nić wirową otrzymujemy wprost ze wzoru (1.29) stosując podstawienie:

$$\boldsymbol{\omega} dv = \Gamma d\mathbf{s},$$



Rys. 1.4. Nić wirowa.

gdzie  $ds$  jest elementem długości łuku nici wirowej. Po podstawieniu otrzymujemy wzór:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}}{r^3}. \quad (1.30)$$

Wzór (1.30) nosi nazwę *prawa Biot–Savarta* i jest podstawowym wzorem używanym do obliczania pola prędkości w bezpośrednich metodach wirowych [12].

## 1.6 Niezmienniki ruchu dla pola wirowości

### 1.6.1 Całkowita cyrkulacja

W dwóch wymiarach całkowitą cyrkulację w przepływie definiujemy całką:

$$\Gamma_\infty = \int_A \omega da, \quad (1.31)$$

gdzie  $\omega$  jest składową pola wirowości w kierunku osi  $Z$  ( $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ ). Stała wartość  $\Gamma_\infty$  dla przepływów nielepkich wynika wprost z równania transportu wirowości, które ma postać  $D\omega/Dt = 0$ . Dla przepływów lepkich całkowita cyrkulacja pozostaje niezmiennikiem ruchu tylko w przypadku braku w przepływie obszarów, w których zachodzi proces generowania wirowości np. ścianek sztywnych.



W trzech wymiarach niezmiennikami ruchu są całki ze składowych pola wirowości w obszarze przepływu:

$$I_i = \int_{\mathcal{D}} \omega_i dv, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.32)$$

Korzystając z faktu bezźródłowości pola wirowości ( $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ) oraz z tożsamości:

$$\nabla \cdot (x_i \boldsymbol{\omega}) = \nabla x_i \boldsymbol{\omega} = \delta_{ij} \omega_j = \omega_i, \quad (1.33)$$

gdzie w zapisie zastosowano konwencję Einsteina o sumowaniu po powtarzającym się wskaźniku  $j$ , całkę (1.32) na mocy tw. Greena można przekształcić do postaci:

$$I_i = \int_{\mathcal{D}} \omega_i dv = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot (x_i \boldsymbol{\omega}) dv = \int_{\mathcal{S}} x_i \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (1.34)$$

Z zależności (1.34) wynika, że całka znika dla każdego obszaru  $\mathcal{D}$ , dla którego na powierzchni ograniczającej  $\mathcal{S}$  zachodzi warunek  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

### 1.6.2 Enstropia i energia kinetyczna

Enstropię  $E$  pola wirowości w trzech wymiarach definiujemy całką:

$$E = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} dv. \quad (1.35)$$

Zmianę enstropii w czasie wyraża zależność:

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} dv = \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\omega} \cdot ((\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}) dv. \quad (1.36)$$

Człon związany z rozciąganiem linii wirowych może powodować wzrost wartości enstropii w przepływie, zaś działanie operatora  $\Delta$  będzie sprowadzać się do wyrównywania i rozprzestrzeniania pola wirowości.

Energia kinetyczna  $T$  definiowana jest całką (przy założeniu, że prędkość  $\mathbf{u} \rightarrow 0$  w nieskończoności):

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) dv. \quad (1.37)$$

Zmianę w czasie energii kinetycznej  $T$  obliczamy biorąc pochodną czasową z (1.37) i podstawiając równanie Naviera–Stokesa (1.2):

$$\frac{dT}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p \right) dv + \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot (\nu \Delta \mathbf{u}) dv. \quad (1.38)$$

W przepływach nielepkich ( $\nu = 0$ ) energia kinetyczna jest niezmiennikiem ruchu, co można wykazać wykorzystując tożsamość wektorową  $\nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) = \psi (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi$  oraz fakt bezźródłowości pola prędkości ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) i założenia  $\rho = \text{const}$ . Stosując powyższe założenia, z tw. Greena otrzymujemy [43]:

$$\frac{dT}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \left[ \mathbf{u} \left( -\frac{p}{\rho} \right) \right] dv = \int_{\mathcal{S}} \left( -\frac{p}{\rho} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) ds. \quad (1.39)$$

Energia kinetyczna jest stała jeżeli na powierzchni  $\mathcal{S}$  ograniczającej obszar  $\mathcal{D}$  zachodzi warunek  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$  lub, dla obszaru nieograniczonego,  $\mathbf{u}$  maleje szybciej niż  $r^{-2}$  w trzech wymiarach i  $r^{-1}$  w dwóch wymiarach.

W przepływach płynów lepkich zmianę energii kinetycznej określa druga całka po prawej stronie (1.38):

$$\frac{dT}{dt} = \nu \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} dv. \quad (1.40)$$

Całkę po prawej stronie równania można przekształcić do równoważnej postaci, wykorzystując notację wskaźnikową [68]:

$$\begin{aligned} \nu \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} dv &= -\nu \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i)^2 dv \\ &\quad - \nu \int_{\mathcal{S}} u_i n_j (\partial u_j / \partial x_i - \partial u_i / \partial x_j) ds \\ &= -\nu \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\omega}^2 dv - \nu \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} ds. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Jeżeli całka powierzchniowa w (1.41) znika (np. gdy w obszarze nieograniczonym  $\mathbf{u} \rightarrow 0$  lub  $\boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$  w nieskończoności) to zmiana energii kinetycznej w przepływie jest związana z enstropią pola wirowości (1.35) (którą można tu interpretować jako strumień energii dysypacji na jednostkę objętości):

$$\frac{dT}{dt} = -\nu \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\omega}^2 dv = -2\nu E. \quad (1.42)$$

Definicję energii kinetycznej dla przepływów trójwymiarowych w ujęciu wirowości i potencjału wektorowego można wyprowadzić korzystając z tożsamości wektorowej:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (1.43)$$

Całkując (1.43) po obszarze  $\mathcal{D}$  oraz podstawiając  $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$  i  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  otrzymujemy:

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{A}) dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} dv - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dv. \quad (1.44)$$

Lewa strona powyższej zależności jest równa zero, bo, korzystając z tw. Greena, otrzymujemy  $\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{A}) dv = \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{u} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} ds = 0$ , gdyż  $\mathbf{u} \rightarrow 0$  w nieskończoności. Wówczas:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} dv. \quad (1.45)$$

### 1.6.3 Skrętność

Skrętność  $\mathcal{H}$  (ang. *helicity*) jest topologiczną miarą pola wirowości i określa stopień „węzłowości” linii wirowych (wielkość tę wprowadził Moffat w pracy [47]):

$$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dv. \quad (1.46)$$

W dwóch wymiarach skrętność jest tożsamościowo równa zero.

W trzech wymiarach zmiana skrętności w czasie określona jest całką:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} \right) dv. \quad (1.47)$$

Podstawiając do zależności (1.47) równanie Naviera–Stokesa (1.2) oraz równanie transportu wirowości (1.13) otrzymujemy:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \left( (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \right) dv. \quad (1.48)$$

Powyższe wyrażenie można przekształcić wykorzystując tożsamość wektorową zastosowaną do wzoru (1.38) oraz fakt, że  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  i  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \left( -\frac{p}{\rho} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \right) dv + \nu \int_{\mathcal{D}} (\Delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \Delta \boldsymbol{\omega}) dv. \quad (1.49)$$

Pierwszy człon po prawej stronie można przekształcić na całkę powierzchniową korzystając z tw. Greena:

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \left( -\frac{p}{\rho} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \right) dv = \int_{\mathcal{S}} \left( -\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \right) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} ds. \quad (1.50)$$

Wynika stąd, że dla nielepkich przepływów trójwymiarowych skrzętność  $\mathcal{H}$  jest niezmiennikiem ruchu jeżeli tylko  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$  na powierzchni  $\mathcal{S}$  ograniczającej obszar  $\mathcal{D}$  lub  $\boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$  w nieskończoności dla obszaru nieograniczonego. Dla przepływów lepkich wartości skrzętności może ulegać zmianie na skutek rozrywania się i łączenia linii wirowych.

#### 1.6.4 Impuls liniowy i kątowy

Impulsy: liniowy  $\mathbf{P}$  i kątowy  $\mathbf{L}$  są definiowane jako:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} dv, \quad \mathbf{L} = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} r^2 \boldsymbol{\omega} dv, \quad (1.51)$$

gdzie  $r^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ . W przepływach nielepkich pozostają one niezmiennikami ruchu pod warunkami, że: w nieograniczonym przepływie o stałej gęstości płynu występują jedynie siły zachowawcze, prędkość znika w nieskończoności i w przepływie nie ma ścian sztywnych. Można to wykazać obliczając zmianę w czasie impulsu liniowego  $\mathbf{P}$ :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left( \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{x} \times \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} \right) dv. \quad (1.52)$$

Podstawiając do (1.52) równanie transportu wirowości i rozpisując całki w notacji wskaźnikowej (z wykorzystaniem konwencji Einsteina o sumowaniu po powtarzającym się wskaźniku), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dt} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left( \varepsilon_{ijk} u_j \omega_k + \varepsilon_{ijk} x_j \omega_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left( 2\varepsilon_{ijk} u_j \omega_k + \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon_{ijk} x_j \omega_l u_k) \right) dv \\ &= \int_{\mathcal{D}} \varepsilon_{ijk} u_j \omega_k dv + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} n_l \varepsilon_{ijk} x_j \omega_l u_k ds. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Z założenia, że przepływ jest nieograniczony, powierzchnia  $\mathcal{S}$  rozciąga się w nieskończoności, gdzie prędkość dąży do zera. Zatem druga całka we wzorze (1.53) znika. Aby wykazać, że również pierwsza całka znika podstawiamy definicję wirowości  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_i}{dt} &= \int_{\mathcal{D}} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} u_j \frac{\partial u_m}{\partial x_l} dv \\
 &= \int_{\mathcal{D}} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_j \frac{\partial u_m}{\partial x_l} dv \\
 &= \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} u_j u_j \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) \right] dv \\
 &= \int_{\mathcal{S}} n_i \left( \frac{1}{2} u_j u_j \right) ds - \int_{\mathcal{S}} n_j (u_j u_i) ds. \tag{1.54}
 \end{aligned}$$

Podobnie jak powyżej, całki po powierzchni  $\mathcal{S}$  znikają na podstawie założenia, że prędkość dąży do zera w nieskończoności. Zatem impuls liniowy  $\mathbf{P}$  jest niezmiennikiem ruchu w przepływie nielepkiem przy zadanych wyżej warunkach. Podobnie dowodzi się zachowanie impulsu kąowego  $\mathbf{L}$ .



## Rozdział 2

# Przegląd metod wirowych

Obszary wirowe zajmują zazwyczaj niewielki obszar w stosunku do obszaru przepływu; wydaje się więc uzasadnionym skupianie się na tych właśnie obszarach, ponieważ to wirowość określa jednoznacznie pole prędkości. Fakt ten powoduje, że modelowanie dynamiki przepływu płynu w oparciu o równanie ewolucji pola wirowości (1.13):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \omega$$

jest atrakcyjnym narzędziem badawczym. Ewolucję pola wirowości można badać: w zmiennych Eulera (pokrywając obszar obliczeniowy siatką numeryczną i rozwiązując równanie transportu wirowości np. metodami spektralnymi, metodami różnic skończonych [18, 19]) lub w zmiennych Lagrange’a (metody wirowe [9, 12, 14, 38, 79]). Metody wirowe oparte są na zastąpieniu ciągłego pola wirowości dyskretnym rozkładem elementów wirowych. Zapis równań ruchu w zmiennych Lagrange’a pozwala na uproszczenie równań ruchu i uniknięcie konieczności obliczania nieliniowego członu konwekcyjnego. Ruch cieczy jest reprezentowany przez ewolucję zbioru elementów wirowych opisaną równaniem transportu wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Elementy te są unoszone w przepływie zgodnie z lokalnym polem prędkości, samorzutnie gromadząc się w obszarach o największych gradientach pola prędkości. Pole wirowości w przepływie może być odtworzone poprzez liniową superpozycję porcji wirowości niesionych przez elementy wirowe. Historycznie, początek metod wirowych wiąże się z pracami Rosenheada (1931) [65]. Znaczący rozwój metod wirowych zapoczątkowany został jednak dopiero w latach 70-tych ubiegłego wieku wraz z rozwojem komputerów i wiąże się z pracami Chorina [8]. W ostatnim dwudziestoleciu intensywne

badania były skupione na konstrukcji szybkich i efektywnych metod modelowania dyfuzji, prawidłowym formułowaniu warunków brzegowych oraz dowodach stabilności i zbieżności poszczególnych metod wirowych. Spośród wielu wariantów metod wirowych w niniejszym rozdziale zostaną omówione trzy z nich: włókien wirowych, zorientowanych elementów wirowych oraz zregularyzowanych elementów wirowych. Metoda wirowa typu „wir w komórce”, która jest przedmiotem badań w niniejszej pracy, zostanie omówiona osobno w rozdziale czwartym.

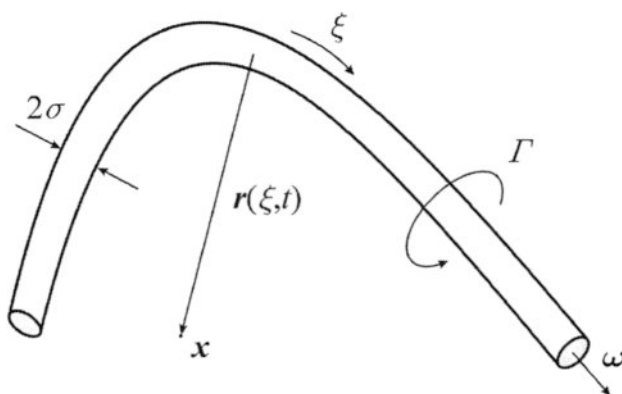
Metody wirowe można podzielić na dwa rodzaje ze względu na wykorzystanie siatki numerycznej podczas obliczeń [32]:

- **Metody wirowe bezpośrednie** – w których obliczenia prowadzone są bez użycia siatki numerycznej (a jeżeli siatka występuje to pełni jedynie rolę pomocniczą i zakłada się, że nie wprowadza lepkości numerycznej). Ruch cząstki wirowej odbywa się w polu prędkości obliczonym z prawa Biot–Savarta na podstawie rozkładu wszystkich elementów wirowych w przepływie. Ilość działań arytmetycznych w celu obliczenia prędkości  $N$  cząstek szacowana jest na  $\sim N^2$  co, nawet przy rozwoju algorytmów szybkiego obliczania oddziaływań (sumowania) cząstek, powoduje, że czas obliczeń za pomocą tych metod jest znaczny.
- **Metody wirowe typu „wir w komórce”** – w których siatka numeryczna jest wprowadzana w celu obliczenia rozkładu pola prędkości w przepływie. W każdym kroku czasowym następuje redystrybucja intensywności cząstek wirowych na węzły siatki, a następnie rozwiązywane jest równanie Poissona  $\Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}$  na potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$  w trzech wymiarach (lub równanie Poissona na funkcję prądu  $\Psi$  w dwóch wymiarach). Prędkość w węzłach siatki obliczana jest metodą różnic skończonych. Obliczona w węzłach wartość prędkości jest interpolowana na położenia cząstek wirowych. Liczba działań w tej metodzie szacowana jest na  $\sim M \log M + N$ , gdzie  $M$ ,  $N$  są liczbami węzłów siatki.



## 2.1 Metoda włókien wirowych

Z twierdzenia Kelvina o cyrkulacji oraz warunku  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  (podrozdz. 1.4) wynika, że pole wirowości w nieograniczonym przepływie nielepkim można przedstawić jako zbiór włókien albo rurek wirowych, które tworzą zamknięte pętle lub rozciągają się do nieskończoności. Metoda włókien wirowych (*vortex filament method*) zastępuje ciągłe pola wirowości zbiorem  $N$  włókien wirowych (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Fragment włókna wirowego.

Położenie w przestrzeni  $i$ -tego włókna wirowego o intensywności  $\Gamma_i$  opisane jest krzywą  $\mathbf{r}_i(\xi, t)$ , gdzie  $\xi$  jest parametryzacją krzywej. Pole wirowości wygenerowane przez rozkład  $N$  linii wirowych dane jest wzorem [12, 36, 38]:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cong \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \int f_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i(\xi', t)) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \xi'} d\xi'. \quad (2.1)$$

Znak „ $\sim$ ” oznacza aproksymowaną wartość pola wirowości. Zgodnie z tw. Kelvina o cyrkulacji, intensywność włókien wirowych jest stała  $\Gamma_i = \text{const.}$  Funkcję wygładzającą (*smooth delta function*)  $f_{\sigma}$  wprowadza się, aby usunąć osobliwość we wzorze (2.1) związaną z obliczaniem prędkości wzdłuż linii wirowej ( $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_{\sigma}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ ). Dobór odpowiedniej regularności funkcji wygładzającej  $f_{\sigma}$  ma decydujące znaczenie na rząd zbieżności metody [12]. Postuluje się, że funkcja  $f_{\sigma}$  ma postać:

$$f_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) = \frac{1}{\sigma_i^3} f\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|}{\sigma_i}\right), \quad (2.2)$$

gdzie  $\sigma_i$  jest promieniem przekroju  $i$ -tego włókna wirowego.

Funkcja obciążenia  $f$  określa rozkład wirowości w przekroju włókna wirowego i jest rzędu  $r$ , gdy spełniała warunki:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 1, & \Omega \in \mathbb{R}^3 \\ \int_{\Omega} \mathbf{x}^i f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0 & \text{jeżeli } 1 \leq |i| \leq r-1, \\ \int_{\Omega} |\mathbf{x}|^r |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} &< \infty. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Taki wybór funkcji obciążenia oznacza, że włókno wirowe zachowuje odpowiednie momenty (niezmienniki ruchu (podrozdz. 1.6)): całkowitą cyrkulację, impuls liniowy  $L$ , aż do rzędu  $r-1$ .

Rozkład pola prędkości w obszarze przepływu  $\mathcal{D}$  oblicza się z prawa Biota-Savarta (podrozdz. 1.5 wzór (1.30)). Pole prędkości w nieograniczonym obszarze  $\mathcal{D}$  dla sferycznie symetrycznej funkcji  $f_\sigma$  wyraża się wzorem [36]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \int \frac{[\mathbf{x} - \mathbf{r}_i(\xi', t)] \times (\partial \mathbf{r}_i / \partial \xi') q(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i| / \sigma_i) d\xi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|^3}, \quad (2.4)$$

gdzie funkcja  $q$  jest zdefiniowana jako:

$$q(y) = 4\pi \int_0^y f(\zeta) \zeta^2 d\zeta. \quad (2.5)$$

Z normalizacji funkcji  $f$  (2.3) wynika, że  $q(y) \rightarrow 1$  gdy  $y \rightarrow \infty$ , tak więc dla dużych odległości w porównaniu z promieniem  $\sigma$  włókna wirowego indukowana prędkość może być obliczana z założeniem, że cała intensywność wiru jest skoncentrowana na krzywej  $\mathbf{r}_i(\xi, t)$ . Prędkość pojedynczego włókna wirowego zależy od jego lokalnej krzywizny  $r_c(\xi)$  i przy założeniu, że  $\sigma \rightarrow 0$  wyraża się wzorem [36, 69]:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\xi)}{\partial t} = \frac{\Gamma \mathbf{b}}{4\pi r_c(\xi)} \ln \frac{r_c(\xi)}{\sigma} + \mathcal{O}(1). \quad (2.6)$$

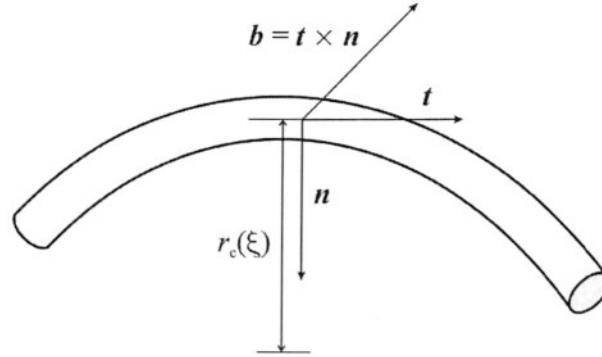
Wektor  $\mathbf{b}$  jest prostopadły do płaszczyzny zawierającej włókno wirowe (rys. 2.2). W trakcie ewolucji włókna wirowego zachowana jest jego objętość:

$$\frac{d}{dt}(\sigma_i^2 \mathcal{L}_i) = 0, \quad (2.7)$$

gdzie

$$\mathcal{L}_i = \int \left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \xi} \right| d\xi$$

jest całkowitą długością włókna wirowego.

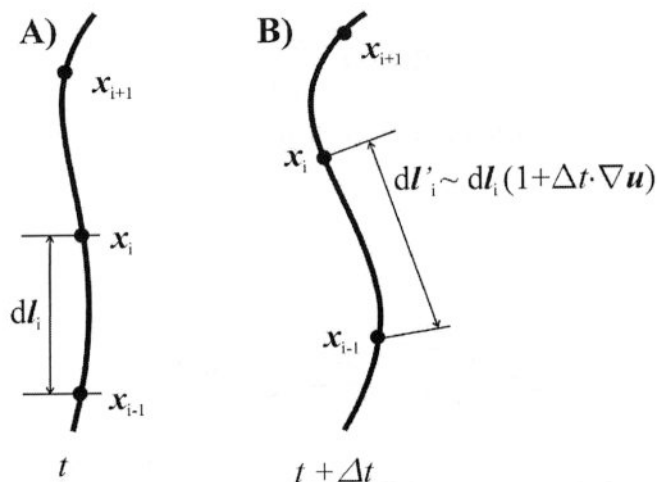


Rys. 2.2. Definicja lokalnej krzywizny  $r_c$  włókna wirowego oraz wektora  $b$ .

Metoda włókien wirowych jest stosowana przy modelowaniu przepływów nielepkich, gdyż z drugiego prawa Helmholtza (podrozdz. 1.4) wynika, że włókna wirowe są unoszone w przepływie jak linie materialne i nie mogą ulec rozerwaniu lub zanikowi. Z konstrukcji włókien wirowych wynika również bezźródłowość metody. Cottet w [12] udowadnia, że metoda spełnia zasadę zachowania energii oraz impulsów: liniowego i kątownego, jeżeli funkcja rozkładu wygładzająca  $f_\sigma$  jest parzysta.

Efektywność metody włókien wirowych wymaga, aby zmiany kształtu włókna wirowego śledzić jedynie w wybranych punktach – „markerach” rozłożonych wzdłuż krzywej  $\mathbf{r}(\xi, t)$  (rys. 2.3).

Po obliczeniu pola prędkości z formuły (2.4) następuje przemieszczenie znaczników. Kształt włókna wirowego jest odtwarzany na podstawie nowych położenia markerów za pomocą procedury interpolacyjnej. Prawidłowe odtworzenie kształtu krzywej  $\mathbf{r}(\xi, t)$  wymaga zachowania informacji o kolejności położenia markerów. W trakcie ewolucji włókno wirowe ulega deformacji pod wpływem gradientu lokalnego pola prędkości. Jeżeli przez  $d\mathbf{l}_i = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1})$  oznaczymy element włókna pomiędzy punktami  $\mathbf{x}_i$  i  $\mathbf{x}_{i-1}$  (rys. 2.3),  $d\mathbf{l}_i = (dl_{i(1)}, dl_{i(2)}, dl_{i(3)})$ , to jego dynamika będzie opisana równaniem ewolucji dla



Rys. 2.3. A) Lokalizacja znaczników wzdłuż włókna wirowego; B) deformacja włókna wirowego w kolejnym kroku czasowym.

linii materialnej:

$$\frac{D}{Dt} d\mathbf{l}_i = (d\mathbf{l}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

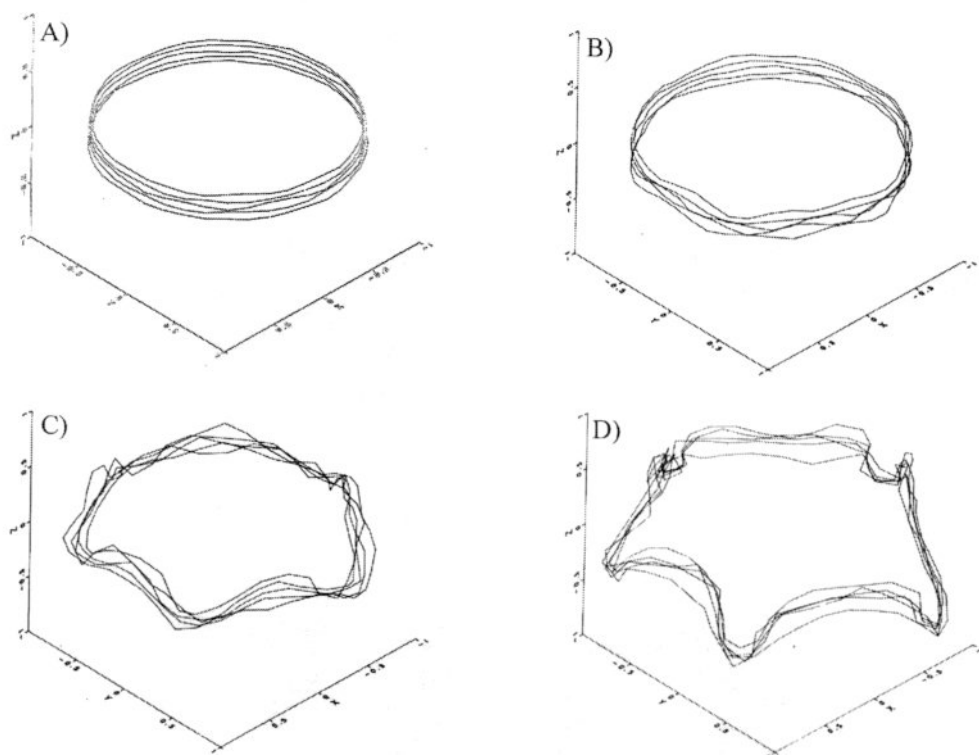
Ze wzoru (2.8) można oszacować zmianę długości elementu  $d\mathbf{l}_i$  w kolejnym kroku czasowym  $\Delta t$ , korzystając z aproksymacji:

$$d\mathbf{l}'_i \sim d\mathbf{l}_i (1 + \Delta t \nabla \mathbf{u}). \quad (2.9)$$

Zjawisko rozciągania (lub kurczenia) włókna wirowego nie powoduje, na mocy tw. Kelvina, zmiany intensywności włókna wirowego. Warunek zachowania objętości włókna (2.7) zapewnia, że zmiana długości  $\mathcal{L}$  powoduje zmianę przekroju  $\sigma$ . Wpływa to na modyfikację wartości wirowości w przekroju włókna. Zmiana odległości pomiędzy, rozłożonymi początkowo równomiernie wzdłuż krzywej  $\mathbf{r}(\xi, t)$ , znacznikami  $\mathbf{x}_i$  powoduje konieczność zmiany liczby markerów w trakcie obliczeń numerycznych. Jest to niezbędne w celu zachowania dokładności w odtwarzaniu kształtu włókna. Jeżeli odległość pomiędzy markerami  $\mathbf{x}_i$  i  $\mathbf{x}_{i-1}$  wzrośnie powyżej zadanej krytycznej wartości  $|d\mathbf{l}_i| > dl_{max}$  to do obliczeń wprowadzany jest dodatkowy znacznik  $\mathbf{x}^*$  w położeniu  $\mathbf{x}^* = 0.5(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i-1})$ .

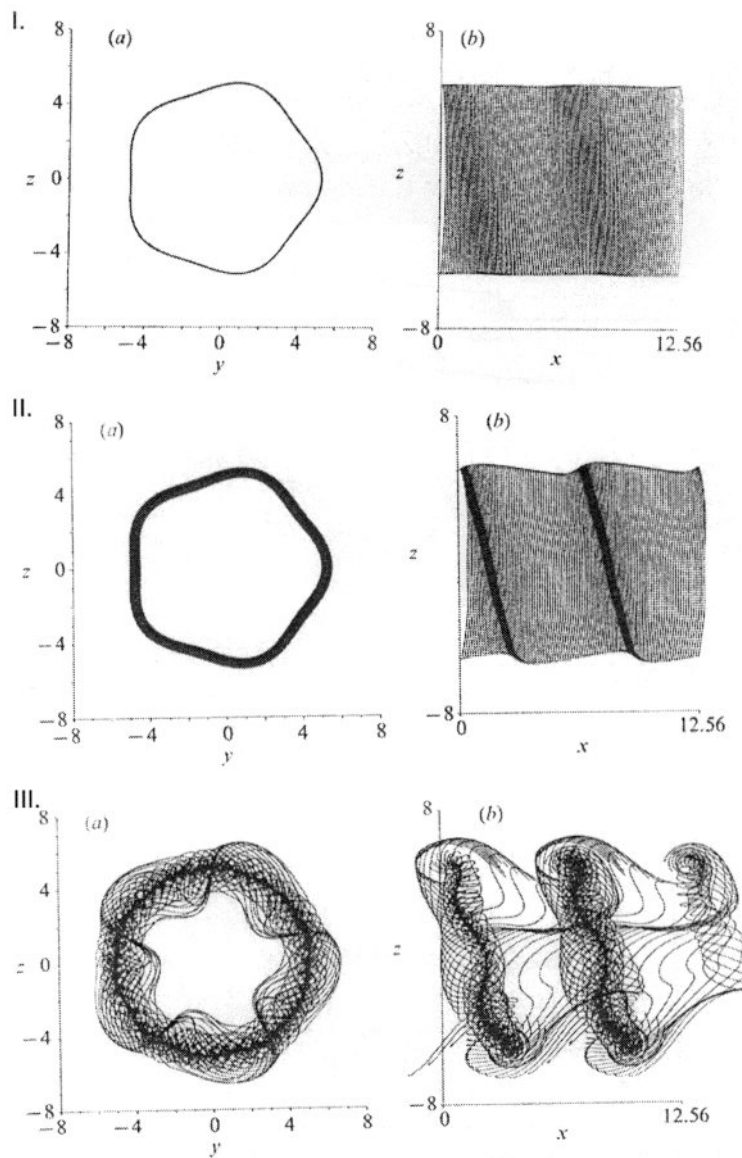
Leonard w pracach [37, 38] wykorzystał metodę włókien wirowych do modelowania ewolucji lokalnego zaburzenia w rozkładzie wirowości (*turbulent spot*) w laminarnej warstwie przyściennej. Ashurst w pracy [3] badał stabil-

ność pierścienia wirowego złożonego z 5 włókien wirowych. Każde z włókien poddano początkowemu niewielkiemu, losowemu zaburzeniu rzędu  $\sim 0.01 R$ , gdzie  $R$  - promień zewnętrzny pierścienia (rys. 2.4 A). Symulacja dynamiki pierścienia wirowego wykazała wrażliwość pierścienia na początkowe zaburzenie oraz wzrost niestabilności w trakcie ewolucji (rys. 2.4 B–D).



Rys. 2.4. Niestabilność pierścienia wirowego zbudowanego z pięciu włókien wirowych w kolejnych krokach czasowych A)–D) [3].

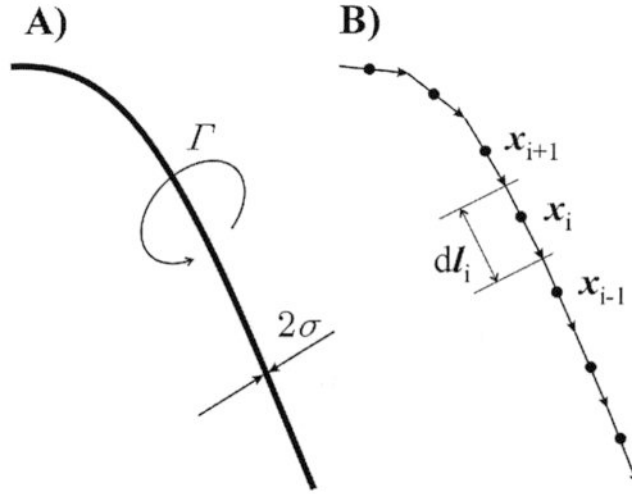
Martin i Meiburg wykorzystali w pracy [44] metodę włókien wirowych do modelowania niestabilności swobodnej strugi pod wpływem śrubowego i azymutalnego zaburzenia. Swobodną strugę modelowano warstwą złożoną z włókien wirowych w kształcie pierścieni. W wyniku modelowania numerycznego otrzymano strukturę podobną do niestabilności Kelvina–Helmholtza (rys. 2.5 III). Pod wpływem zaburzenia włókna wirowe grupowały się w regularne pierścienie wirowe.



Rys. 2.5. Ewolucja swobodnej strugi modelowanej zbiorem włókien wirowych. Początkowy układ włókien został zaburzony okresowymi falami: azymutalną i śrubową. Sekwencja rysunków przedstawia kolejne chwile czasowe: I. – 0.31, II. – 2.66, III. – 15.70; (a) – widok wzdłuż osi strugi, (b) – widok z boku na układ włókna wirowe [44].

## 2.2 Metoda zorientowanych elementów wirowych

W równoważnym podejściu znacznikom wprowadzonym w metodzie włókien wirowych można przypisać rolę wektorowych elementów wirowych [12]. Włókno wirowe jest wówczas aproksymowane dyskretnym rozkładem elementów o zadanej intensywności  $\Gamma_i$  i położeniu  $\mathbf{x}_i$  (rys. 2.6). Długość  $i$ -tego elementu wirowego wynosi  $dl_i = |\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}|/2$ , a orientację w przestrzeni określa wektor  $d\mathbf{l}_i = (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1})/2$ ,  $d\mathbf{l}_i = (dl_{i(1)}, dl_{i(2)}, dl_{i(3)})$ , wskazujący kierunek lokalnego pola wirowości.



Rys. 2.6. A) Fragment włókna wirowego; B) aproksymacja włókna wirowego elementami wirowymi.

Zgodnie z tw. Kelvina, elementy wirowe są unoszone w przepływie jak elementy płynu, a ich intensywności nie ulegają zmianie w trakcie ewolucji. Zbiór  $N$  elementów wirowych odtwarza pole wirowości w przepływie zgodnie ze wzorem (znak „ $\sim$ ” oznacza aproksymowaną wartość pola wirowości):

$$\omega(\mathbf{x}, t) \cong \tilde{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i dl_i(t) f_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (2.10)$$

gdzie  $f_\sigma$  jest funkcją wygładzającą spełniającą warunki (2.2) i (2.3);  $\sigma$  – promieniem obcięcia. Przyjmuje się, że funkcja wygładzająca  $f_\sigma$  ma postać

zadaną formułą (2.2) i spełnia właściwości (2.3):

$$f_{\sigma}(r) = \frac{1}{\sigma^3} f\left(\frac{r}{\sigma}\right),$$

gdzie  $f > 0$  dla  $r < \sigma$  i gwałtownie dąży do zera dla  $r > \sigma$ . Zatem  $\sigma$  określa promień sfery, wewnątrz której jest skoncentrowana większość wirowości. Dowód zbieżności metody wymaga, aby rozkłady wirowości sąsiednich elementów wirowych nakładały się tzn.  $\sigma > h$ , gdzie  $h$  jest odległością pomiędzy sąsiednimi elementami [12]. Nakładanie się elementów wirowych oraz odpowiedni wybór funkcji  $f$  wpływają również na rząd dokładności stosowanej metody [20, 29].

Ewolucja elementów wirowych w przepływie jest opisana równaniami:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i(t), t), \quad (2.11)$$

$$\frac{D}{Dt} d\mathbf{l}_i = (d\mathbf{l}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}_i(t), t). \quad (2.12)$$

Rozkład pola prędkości obliczany jest z prawa Biota–Savarta (podrozdz. 1.5), gdzie pole wirowości wyrażone jest wzorem (2.10):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) \times d\mathbf{l}_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|^3} q\left(\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|}{\sigma}\right), \quad (2.13)$$

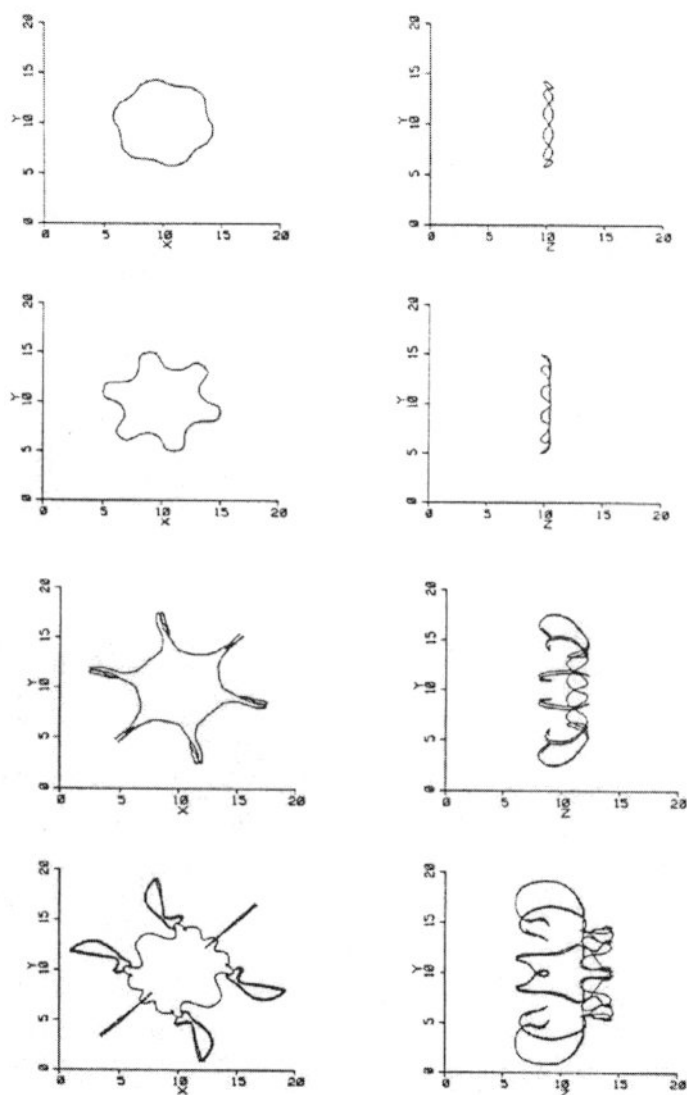
gdzie  $q(r) = 4\pi \int_0^r f(y) y^2 dy$ .

Z równania (2.12) wynika, że zmiana pola wirowości w przepływie związana jest ze zmianą długości elementów wirowych. Zachowanie dokładności dyskretyzacji pola wirowości w trakcie ewolucji wymusza wprowadzenie ograniczenia na maksymalną długość elementu wirowego  $dl_{max}$ . Jeżeli, na skutek rozciągania,  $dl_i > dl_{max}$  to  $i$ -ty element wirowy jest dzielony na dwa elementy, każdy o długości  $dl = dl_i/2$  i intensywności  $\Gamma = \Gamma_i$ . Zachowanie informacji o kolejności sąsiednich elementów wirowych pozwala odtworzyć kształt włókna wirowego w kolejnych krokach czasowych.

Knio i Ghoniem w pracy [28] wykorzystali wyżej opisaną metodę elementów wirowych do badania niestabilności pierścienia wirowego, który modelowany był pojedynczym włóknem wirowym podzielonym początkowo na 90 elementów. Promień obcięcia dobrano tak, aby  $\sigma/R = 0.25$ , gdzie  $R$  – promień zewnętrzny pierścienia. Zaburzenie modelowano falą  $\Delta r = \varepsilon \sin(n\theta)$ , gdzie  $\varepsilon$  jest amplitudą zaburzenia ( $\varepsilon/R = 0.02$ ), a  $n$  – liczbą falową. Początkowe położenia elementów wirowych zostały przemieszczone do  $r = R + \Delta r$ .



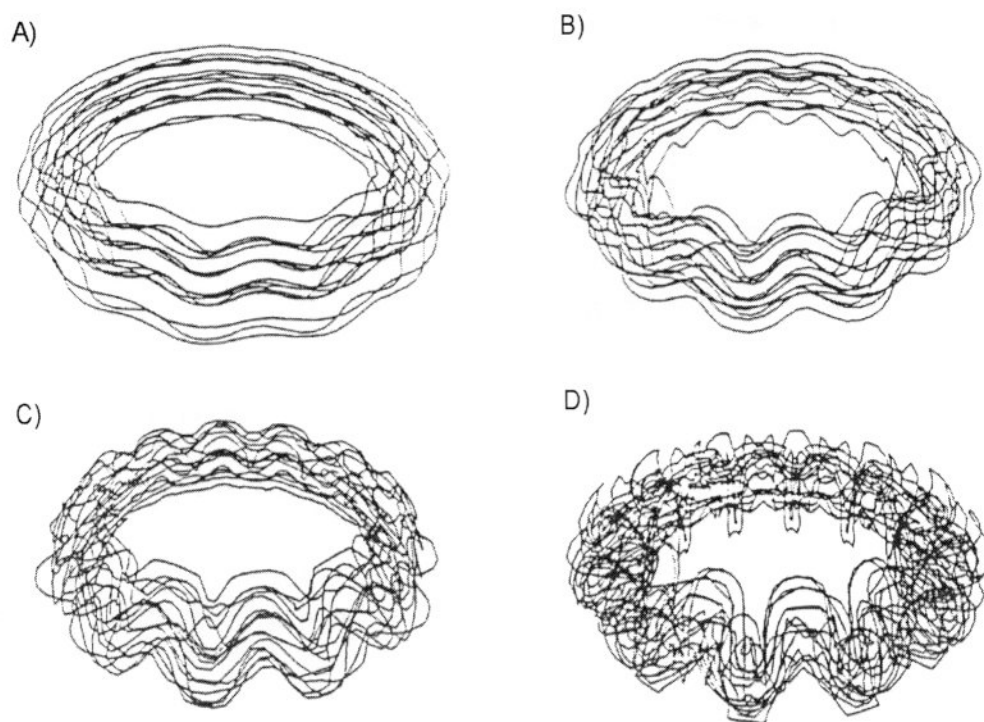
Obliczenia numeryczne wykazały, że niestabilność na obwodzie włókna wirowego pojawia się dla liczby falowej  $n^* = 6$ . Deformację włókna wirowego przedstawiono na rysunku 2.7.



Rys. 2.7. Rozwój niestabilności włókna wirowego dla parametrów  $\sigma/R = 0.25$ ,  $\varepsilon/R = 0.02$ ,  $n^* = 6$ . Ewolucję przedstawiono odpowiednio w rzucie z przodu i boku w kolejnych chwilach czasu  $t = 140$ ,  $t = 180$ ,  $t = 210$ ,  $t = 230$  [28].

Kształt pierścienia odtworzono łącząc kolejno ponumerowane elementy wirowe. W celu przeciwdziałania nadmiernemu rozciąganiu elementów wirowych w trakcie obliczeń zwiększono ich liczbę do  $N = 802$  dla  $t = 230$ .

Knio i Goniem badali również stabilność torusa zbudowanego z 17 włókien wirowych i podzielonych na 2040 elementów wirowych [28]. Pierścień o parametrach:  $\sigma/R = 0.275$  ( $\sigma$  – promień wewnętrzny pierścienia) zaburzono falą sinusoidalną o  $n^* = 12$ . Na rysunku 2.8 przedstawiono rozwój zaburzenia w kolejnych chwilach czasowych. Efekt rozciągania powodował, że w trakcie obliczeń zwiększano liczbę elementów wirowych osiągając  $N = 6936$  dla  $t = 140$ .



Rys. 2.8. Rozwój niestabilności pierścienia zbudowanego z 17 włókien wirowych dla parametrów:  $\sigma/R = 0.275$ ,  $n^* = 12$ . Ewolucję przedstawiono odpowiednio w rzucie pod kątem  $60^\circ$  do płaszczyzny pierścienia w kolejnych chwilach czasu  $t = 30$ ,  $t = 60$ ,  $t = 90$ ,  $t = 120$  [28].

## 2.3 Metoda zregularyzowanych elementów wirowych

W metodzie zregularyzowanych elementów wirowych ciągłe pole wirowości zastępowane jest przez rozkład elementów wirowych. Obszar przepływu, w którym pole wirowości  $\omega$  ma niezerową wartość, dzielony jest na fragmenty o objętości  $vol^p(\mathbf{x}_p)$ . Z każdym elementem objętości  $vol^p$  wiąże się zawartą w nim porcję wirowości  $\omega_p(\mathbf{x}_p)$  i nazywa taki twór elementem wirowym (punkt  $\mathbf{x}_p$ , zlokalizowany w środku  $vol^p$ , określa położenie elementu wirowego) [12, 78, 79]:

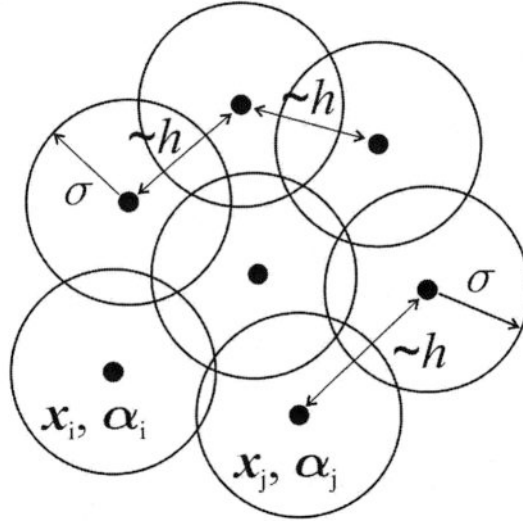
$$\omega(\mathbf{x}, t) \cong \tilde{\omega}_\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^N \omega_p(\mathbf{x}_p) vol^p f_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \sum_{p=1}^N \alpha_p(\mathbf{x}_p) f_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p). \quad (2.14)$$

Znak „ $\sim$ ” oznacza aproksymowaną wartość pola wirowości, które w ogólności nie jest bezźródłowe [79]. Jeżeli nawet na początku  $\nabla \cdot \omega \approx 0$ , to w trakcie obliczeń numerycznych wartość  $\nabla \cdot \omega$  staje się niezerowa. Jest to wynik przyjętego sposobu dyskretyzacji pola wirowości, który można minimalizować poprzez odpowiedni dobór funkcji wygładzającej  $f_\sigma$ . Wielkość  $\alpha_p(\mathbf{x}_p) = \omega_p(\mathbf{x}_p) vol^p$  określa intensywność  $p$ -tego elementu wirowego. Metodę tą stosuje się do modelowania zarówno nielepkich, jak i lepkich przepływów trójwymiarowych. Funkcja  $f_\sigma$  jest funkcją wygładzającą rzędu  $r$  o własnościach określonych wzorami (2.2) i (2.3) ( $\sigma$  – promień obciążenia). Zestaw przykładowych funkcji wygładzających zamieszczają Winckelmans i Leonard w pracy [79]. Dowód zbieżności metody zregularyzowanych elementów wirowych został przedstawiony w pracach Cotteta [11, 12] oraz Beale [6] przy założeniu, że rozkłady wirowości sąsiednich elementów wirowych nakładają się tzn.  $\sigma > h$ , gdzie  $h$  jest odległością pomiędzy sąsiednimi elementami (rys. 2.9). Nakładanie się elementów wirowych oraz odpowiedni wybór funkcji obciążenia  $f$  mają również wpływ na rząd dokładności stosowanej metody.

Dla przepływów nielepkich równania ewolucji położenia i intensywności elementów wirowych w zmiennych Lagrange’a mają postać:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p(t), t), \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt} \alpha_p(t) = (\alpha_p(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p(t), t). \quad (2.16)$$



Rys. 2.9. Aproksymacja pola wirowości zregularyzowanymi elementami wirowymi.

Prędkość elementu wirowego obliczana jest z prawa Biota–Savarta poprzez sumowanie wkładu do pola prędkości pochodzącego od pozostałych elementów wirowych znajdujących się w przepływie [12, 13]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{K} \star \omega_\sigma(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \times \omega_\sigma(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.17)$$

Macierzowa funkcja  $\mathbf{K}$  jest jądrem Biota–Savarta:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \nabla \times G(\mathbf{x}), \quad (2.18)$$

gdzie  $G(\mathbf{x}) = -1/4\pi|\mathbf{x}|$  jest funkcją Greena dla równania Poissona w trzech wymiarach.

W modelowaniu przepływów lepkich stosuje się algorytm dekompozycji lepkościowej tzn. najpierw rozwiązuje się równania ruchu dla przepływu nielepkiego (2.15), (2.16); następnie uwzględnia się w obliczeniach lepkość. Jedną ze stosowanych metod modelowania członu lepkościowego jest metoda wymiany intensywności cząstek (podrozdz. 7.2.2). Metoda oparta jest na przybliżeniu członu lepkościowego sumą:

$$\frac{d}{dt} \alpha_p(\mathbf{x}_p) = \frac{\nu}{\sigma^2} \sum_q [\alpha_q(\mathbf{x}_q) - \alpha_p(\mathbf{x}_p)] \eta \left( \frac{\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q}{\sigma} \right). \quad (2.19)$$

W każdym kroku czasowym elementy wirowe wymieniają intensywność z najbliższymi sąsiadami. Metoda zregulowanych elementów wirowych jest używana nie tylko do badania wzajemnego oddziaływania struktur wirowych [79], ale również do modelowania przepływów lepkich w obecności ścianek sztywnych lub opływu ciał [59].

Omówione metody wirowe należą do grupy metod bezpośrednich, w których obliczenie pola prędkości wymaga sumowania po wszystkich cząstkach w obszarze przepływu. Powoduje to, że metody stają się czasochłonne (pomimo rozwoju algorytmów szybkiego sumowania), jeżeli do obszaru przepływu zostanie wprowadzona znaczna ilość elementów wirowych. Niedogodność ta nie dotyczy metod wirowych typu „wir w komórce” (VIC), w których wprowadza się siatkę numeryczną w celu obliczenia rozkładu prędkości. Z wyników przedstawionych w artykule [16] wynika, że dla liczby elementów wirowych  $N \approx 100000$  metoda VIC jest około 1000 razy szybsza od metod bezpośrednich. Daje to możliwość zastosowania dużej liczby cząstek wirowych w przepływie bez znaczącego wpływu na szybkość obliczeń numerycznych, co z kolei umożliwia prowadzenie symulacji numerycznych na sprzęcie klasy PC. Własność ta powoduje, że metoda VIC jest atrakcyjnym narzędziem badawczym, choć zwraca uwagę fakt, że prezentowane w literaturze wyniki dla przepływów trójwymiarowych, otrzymane tą metodą, są skromne.

W rozdziale czwartym przedstawiono algorytm numeryczny metody VIC użyty w niniejszej pracy do modelowania oddziaływania pierścieni wirowych w przepływach nielepkich. Algorytm dekompozycji lepkościowej, wykorzystywany do modelowania przepływów lepkich, został przedstawiony w rozdziale siódmym.



## Rozdział 3

### Cele, teza, zakres pracy

#### *Cel pracy*

Celem pracy jest opracowanie i implementacja metody wirowej typu „wir w komórce” do rozwiązywania nieściśliwych, trójwymiarowych przepływów płynów lepkich.

#### *Cel użyteczny*

Celem użytecznym pracy jest opracowanie programu, który pozwoli na badanie ewolucji struktur wirowych mających fundamentalne znaczenie dla mechaniki płynów.

### *Teza pracy*

Możliwe jest zastąpienie trójwymiarowego, ciągłego pola wirowości dyskretnym rozkładem cząstek – „mas wirowości”, które w obliczeniach numerycznych pozwalają badać ewolucję pola wirowości.

### *Zakres pracy*

Zakres pracy obejmował:

- Sformułowanie równań ruchu w ujęciu wirowości  $\omega$  i potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$  dla nielepkiego i lepkiego przepływu trójwymiarowego;
- przygotowanie i przetestowanie algorytmu numerycznego metody wirowej typu „wir w komórce” w oparciu o sformułowane równania ruchu;
- sprawdzenie poprawności metody poprzez odtworzenie dynamiki pojedynczego pierścienia wirowego oraz porównanie jego prędkości translacji z formułą analityczną;
- odtworzenie zjawiska „gry wirów” i zbadanie dynamiki układu dwóch pierścieni wirowych dla różnych konfiguracji początkowych w przepływie nielepkim;
- odtworzenie zjawiska rekonekcji dwóch pierścieni wirowych, które zachodzi jedynie dla przepływów lepkich.



## Rozdział 4

# Metoda wirowa typu „wir w komórce”

Równania ruchu nieściśliwej, lepkiej cieczy, przekształcone do równań opisujących ewolucję wirowości, w nieograniczonym, trójwymiarowym obszarze  $\mathcal{D}$  mają postać (rozdz. 1):

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (4.3)$$

W celu obliczenia pola prędkości w metodzie „wir w komórce” wprowadza się potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$ . Istnienie potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$  gwarantowane jest warunkiem  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  (podrozdz. 1.3, wzór 1.6). Pole prędkości w przepływie wyznaczone jest z definicji  $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Rozkład pola  $\mathbf{A}$  w przepływie obliczany jest poprzez rozwiązanie równania Poissona (podrozdz. 1.5) w węzłach siatki numerycznej:

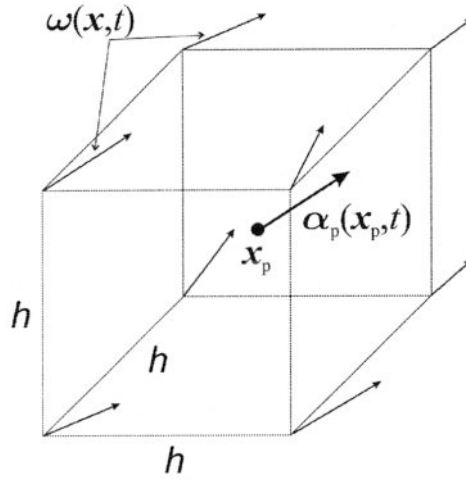
$$\Delta A_i = -\omega_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

W metodzie wirowej typu „wir w komórce” ciągłe pole wirowości zastępowane jest dyskretnym rozkładem miar Diraca – „cząstkami wirowymi”, które niosą

informację o trzech składowych pola wirowości [12, 35]:

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{x}) &\cong \tilde{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^N \alpha_p(\mathbf{x}_p) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p), \\ \alpha_{p(i)}(\mathbf{x}_p) &= \int_{V_p} \omega_i(x_1, x_2, x_3) d\mathbf{x} \approx h^3 \omega_i(\mathbf{x}_p), \\ \mathbf{x}_p &\in V_p, \quad |V_p| = h^3,\end{aligned}\tag{4.5}$$

gdzie  $\alpha_p$  oznacza cząstkę wektorową  $\alpha_p = (\alpha_{p(1)}, \alpha_{p(2)}, \alpha_{p(3)})$  w położeniu  $\mathbf{x}_p = (x_{p(1)}, x_{p(2)}, x_{p(3)})$ ; wskaźnik  $p$  numeruje cząstkę, a indeks liczbowy w nawiasach numeruje składowe wektora. Dystrybucja  $\delta(\mathbf{x})$  jest trójwymiarową deltą Diraca  $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \delta(x_3)$ . Znak „ $\sim$ ” oznacza aproksymowaną wartość pola wirowości. Cząstek wirowych nie należy traktować jako obiekty fizyczne (rzeczywiście występujących w przepływie), lecz jako obiekty pomocnicze, wprowadzane do obliczeń w celu śledzenia ewolucji pola wirowości.



Rys. 4.1. Aproksymacja pola wirowości cząstką wirową o intensywności  $\alpha$ .

Aproksymacja ciągłego pola wirowości  $\omega$  dyskretnym rozkładem cząstek wirowych nie zapewnia w ogólności warunku bezźródłowości pola  $\tilde{\omega}$  [79]:

$$\nabla \cdot \tilde{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^N \nabla(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t))) \cdot \alpha_p(\mathbf{x}_p, t) \neq 0.\tag{4.6}$$

Jednak Cottet w [12] pokazuje, że, przy założeniu  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , obszary o niezerowej wartości  $\nabla \cdot \tilde{\omega}$  są unoszone z przepływem nie wpływając na bezźródłowość pola wirowości w swoim otoczeniu. Konsekwencją tego faktu jest to, iż pole potencjału wektorowego  $\tilde{\mathbf{A}}$ , obliczane z równania Poissona  $\Delta \tilde{\mathbf{A}} = -\tilde{\omega}$  nie jest również w ogólności bezźródłowe. Warunek bezdywergentności pola prędkości ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) jest spełniony, gdyż wynika z konstrukcji potencjału wektorowego. W trakcie obliczeń numerycznych monitorowane były wartości  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  i  $\nabla \cdot \omega$  w celu kontroli zmian tych wielkości.

## 4.1 Aproksymacja funkcji ciągłej dyskretnym rozkładem cząstek wirowych

Dla  $\omega \in C^0(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$  aproksymacja (4.5) w sensie miarowym spełnia zależność ( $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$ ):

$$\int_{\mathcal{D}} \omega_i(\mathbf{x}, t) dv \approx \sum_{p=1}^N \alpha_{p(i)}(\mathbf{x}_p, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.7)$$

Wzór kwadraturowy (4.7) uogólnia się na aproksymację cząsteczkową dla dowolnej funkcji  $\varphi \in C_o^0(\mathbb{R}^3)$  (funkcja ciągła o zwartym nośniku):

$$\int_{\mathcal{D}} \omega_i(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}) dv \approx \sum_{p=1}^N \alpha_{p(i)}(\mathbf{x}_p, t) \varphi(\mathbf{x}_p). \quad (4.8)$$

Można badać jakość aproksymacji (4.8) definiując błąd:

$$\mathcal{E}_i(\omega) \equiv \int_{\mathcal{D}} \omega_i(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}) dv - \sum_{p=1}^N \alpha_{p(i)}(\mathbf{x}_p, t) \varphi(\mathbf{x}_p). \quad (4.9)$$

Warto przytoczyć lemat dotyczący oszacowania błędu (4.9) dla funkcji  $\omega(\mathbf{x})$  zakładając, że jest ona elementem przestrzeni Sobolewa  $W^{m,p}$  (funkcja  $f$  jest elementem przestrzeni Sobolewa  $W^{m,p}$ , jeżeli dla  $0 \leq |\gamma| \leq m$  spełniony jest warunek  $\int_{\mathcal{D}} |D^\gamma f(x)|^p dx < \infty$ , gdzie  $D^\gamma f(x)$  jest pochodną uogólnioną funkcji  $f$ ).

Niech  $B_j$  oznacza  $j$ -tą komórkę  $j = (j_1, j_2, j_3)$  w  $\mathbb{R}^3$  taką, że:

$$B_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; (j_i - \frac{1}{2})h \leq x_i \leq (j_i + \frac{1}{2})h, i = 1, 2, 3\}. \quad (4.10)$$

Przy pewnych technicznych założeniach [62] prawdziwe jest oszacowanie:

$$|\mathcal{E}_i(\omega)| \leq C_i h^{m+\frac{d}{p}} \sum_j |\omega_i|_{m,p,B_j}, \quad (4.11)$$

gdzie  $C_i$  są pewnymi stałymi niezależnymi od  $h$ ,  $p > d/m$ ,  $q = 1 - 1/p$ . W szczególności dla  $\varphi = \varphi_m$  –  $B$ -funkcji sklejaney rzędu  $m$  ( $m > 1$ ),  $p = \infty$  mamy:

$$|\mathcal{E}_i(\omega)| \leq C_i h^{m+d} |\omega_i|_{m,\infty}. \quad (4.12)$$

Należy zwrócić uwagę, że w oszacowaniu błędów aproksymacji ważną rolę odgrywa odpowiedni stopień regularności  $m$  funkcji  $\varphi$ . W algorytmie numerycznym metody „wir w komórce”  $B$ -funkcje sklepane będą wykorzystywane do redystrybucji intensywności cząstek wirowych na węzły siatki, dlatego w następnym podrozdziale przedstawione zostaną ich podstawowe własności.

## 4.2 Podstawowe własności $B$ -funkcji sklepanych

$B$ -funkcję sklejaną (kawałkami gładką) stopnia  $m$  nazywamy funkcję zadaną wzorem rekurencyjnym [51]:

$$\varphi_0(x) = \chi(x), \quad (4.13)$$

$$\varphi_m(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \varphi_{m-1}(s) ds, \quad m \geq 1, \quad (4.14)$$

gdzie  $\chi(x)$  jest funkcją charakterystyczną przedziału  $(-1/2, 1/2)$ :

$$\chi(x) = \delta x_+^0 = \begin{cases} 1, & \text{dla } |x| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{dla } x = \pm \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{dla } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.15)$$

$B$ -funkcje sklejane określone wzorami (4.13) i (4.14) mają następujące własności:

- prawdziwy jest następujący wzór wielomianowy:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \delta x_+^0, \\ \varphi_m(x) &= \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{m!} C_{m+1}^j \left( x + \frac{m+1}{2} - j \right)_+^m, \quad m \geq 1,\end{aligned}\tag{4.16}$$

- zachodzi następujący wzór rekurencyjny:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \chi, \\ \varphi_m(x) &= \varphi_0(x) * \varphi_{m-1}(x) = \chi^{*(m+1)}, \quad m \geq 1,\end{aligned}\tag{4.17}$$

gdzie  $*$  oznacza splot funkcji,

- funkcje sklejane są dodatnie (parzyste) i mają zwarty nośnik:

$$\begin{aligned}\varphi_m(x) &= \varphi_m(-x) \geq 0, \\ \text{supp}(\varphi_m) &= \left[ -\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2} \right],\end{aligned}\tag{4.18}$$

- $B$ -funkcje sklejane spełniają warunek unormowania:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x) dx = 1,\tag{4.19}$$

i są elementami przestrzeni Sobolewa  $W^{m,\infty}$ ,

- w przestrzeni  $d$ -wymiarowej  $B$ -funkcja sklejana  $\varphi_d(\mathbf{x})$  jest iloczynem jednowymiarowych  $B$ -funkcji sklejanych  $\varphi(x)$ :

$$\varphi_d(\mathbf{x}) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \dots \cdot \varphi(x_d).\tag{4.20}$$

### 4.3 Algorytm numeryczny metody wirowej typu „wir w komórce”

Równania Naviera–Stokesa zapisane w zmiennych Lagrange’a dla zbioru  $N$  cząstek wirowych mają postać ( $p = 1, \dots, N$ ) [12, 82]:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t), \quad (4.21)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_p}{dt} = [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t)] \cdot \boldsymbol{\alpha}_p + \nu \Delta \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_p). \quad (4.22)$$

Powyższe równania mogą być rozwiązywane jednocześnie, lub też rozwiązanie może być osiągnięte w oparciu o algorytm dekompozycji lepkościowej. Wówczas w pierwszym kroku cząstki są unoszone z lokalną prędkością przepływu i ich intensywności są modyfikowane przez człon związany z rozciąganiem linii wirowych. W drugim kroku, w nowych położeniach, intensywności cząstek są modyfikowane przez człon dyfuzyjny.

W tym podrozdziale opisany zostanie algorytm numeryczny metody „wir w komórce” dla trójwymiarowych przepływów nielepkich, a modyfikacja algorytmu związana z uwzględnieniem w obliczeniach wpływu lepkości została przedstawiona w *rozdziale siódmym*.

W przepływach nielepkich rozwiązanie układu równań (4.21) i (4.22) otrzymywane jest w dwóch krokach:

- Najpierw uwzględnia się zjawisko unoszenia. Nowe położenia cząstek wirowych są otrzymywane poprzez rozwiązanie układu równań:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t), \quad p = 1, \dots, N, \\ \frac{d\boldsymbol{\alpha}_p}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

- Następnie, w nowych położeniach, modyfikuje się intensywności cząstek wirowych:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} &= 0, \\ \frac{d\boldsymbol{\alpha}_p}{dt} &= [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t)] \cdot \boldsymbol{\alpha}_p. \end{aligned} \quad (4.24)$$

**Obliczenia metodą „wir w komórce” przebiegały następująco:**

Obszar obliczeniowy  $\mathcal{D}$  pokryty był prostokątną siatką numeryczną o równomiernym kroku  $h$ . Węzły siatki są numerowane indeksami  $(l, m, n)$ .

1) W  $n$ -tym kroku czasowym  $t^n = n\Delta t$ , intensywność cząstek wirowych była rozkładana na węzły siatki  $\mathbf{x}_{l,m,n} = (x_l, y_m, z_n)$ :

$$\omega_i(x_l, y_m, z_n) = \frac{1}{h^3} \sum_{p=1}^N \alpha_{p(i)}(\mathbf{x}_p) \varphi_{l,m,n}(\mathbf{x}_p), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.25)$$

W trakcie modelowania numerycznego przetestowano różne funkcje interpolujące, między innymi proponowane przez Cotteta w [12] oraz Monaghana w pracy [49]. Kryterium, którym kierowano się przy wyborze funkcji interpolującej, była minimalizacja wyrażenia  $\sum_{l,m,n} |\nabla \cdot \omega_i(x_l, y_m, z_n)|$ . Do redystrybucji intensywności cząstek na węzły siatki ostatecznie wybrano, jako funkcję interpolującą  $\varphi(\mathbf{x}_p) = \varphi((\mathbf{x}_{l,m,n} - \mathbf{x}_p)/h)$ ,  $B$ -funkcją sklejaną stopnia  $m = 3$ :

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & |x| < 1, \\ -\frac{1}{6}|x|^3 + x^2 - 2|x| + \frac{4}{3}, & 1 \leq |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases} \quad (4.26)$$

Z własności (4.20)  $B$ -funkcji sklejanых wynika, że trójwymiarowa  $B$ -funkcja sklejana stopnia trzeciego  $\varphi_3(\mathbf{x})$  jest iloczynem jednowymiarowych funkcji  $\varphi_3(x_i)$ . Funkcja ta rozkłada intensywność niesioną przez jedną cząstkę wirową na 64 najbliższe węzły siatki numerycznej.

Problemem w trakcie modelowania dynamiki układu cząstek wirowych może być skupianie się kilku cząstek bardzo blisko siebie. Dynamika układu może bowiem prowadzić do kumulowania się cząstek w małym obszarze, co może generować błędy w obliczeniach. W celu uniknięcia tego niepożądanego zjawiska proponuje się modyfikację formuły redystrybucji wirowości cząstek na węzły siatki numerycznej (4.25) uwzględniającą w procesie redystrubucji objętość węzła siatki numerycznej  $J_{l,m,n} = \sum_p h^3 \varphi_{l,m,n}(\mathbf{x}_p)$ , w miejsce stałej

objętości komórki  $h^3$  [12, 16, 33]:

$$\omega_i(x_l, y_m, z_n) = \begin{cases} \frac{1}{J_{l,m,n}} \sum_{p=1}^N \alpha_{p(i)}(\mathbf{x}_p) \varphi_{l,m,n}(\mathbf{x}_p) & \text{dla } J_{l,m,n} \neq 0, \\ 0 & \text{dla } J_{l,m,n} = 0, \end{cases} \quad (4.27)$$

gdzie indeks:  $i = 1, 2, 3$  numeruje składowe: pola wirowości i intensywności cząstek;  $p$  – numeruje cząstki wirowe w przepływie;  $l, m, n$  – numerują węzły siatki numerycznej.

Wprowadzenie objętości węzła zapewnia, podobnie jak wzór (4.25), że schemat jest konserwatywny:

$$\sum_{l,m,n} J_{l,m,n} \omega_i(x_l, y_m, z_n) = \sum_p \alpha_{p(i)} \quad (4.28)$$

oraz stabilny w sensie  $L_2$ :

$$\sum_{l,m,n} J_{l,m,n} |\omega_i(x_l, y_m, z_n)|^2 \leq \frac{1}{h^3} \sum_p |\alpha_{p(i)}|^2. \quad (4.29)$$

Niepożądane grupowanie się cząstek wirowych można również usunąć przeprowadzając co kilka kroków czasowych procedurę ponownego, równomiernego rozkładu cząstek wirowych na podstawie istniejącego w przepływie pola wirowości (*metoda remeshingu*) [12, 16, 75]. Procedura redystrybucji położzeń cząstek pozwala na zachowanie równomiernego pokrycia cząstkami wirowymi obszarów o niezerowej wartości pola wirowości w trakcie obliczeń numerycznych, ale traci się możliwość śledzenia ewolucji cząstek wirowych (gdyż po każdym zastosowaniu procedury redystrybucji położzeń cząstek powstaje nowy rozkład cząstek wirowych).

W niniejszej pracy w obliczeniach numerycznych stosowano redystrybucję intensywności cząstek wirowych zgodnie ze wzorem (4.25).

2) Po redystrybucji rozwiązywane było na siatce równanie Poissona dla trzech składowych potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$ :

$$\Delta A_i = -\omega_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.30)$$

W pracy przyjęto okresowe warunki brzegowe dla potencjału  $\mathbf{A}$ . Wybór takiego warunku związany był z faktem, że w pracy modelowano dynamikę



pierścieni wirowych, a ścianki sztywne oddziaływałyby na struktury obecne w przepływie. Do rozwiązywania równań (4.30) wybrano szybką, bezpośrednią metodę do rozwiązywania równania Poissona.

3) Prędkość w węzłach siatki obliczana była za pomocą metody różnic skończonych ze wzoru  $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Przykładowo, dla składowej  $u_1$  wyrażenie na prędkość ma postać:

$$u_1(x_l, y_m, z_n) = \frac{A_3(x_l, y_{m+1}, z_n) - A_3(x_l, y_{m-1}, z_n)}{2\Delta y} - \frac{A_2(x_l, y_m, z_{n+1}) - A_2(x_l, y_m, z_{n-1})}{2\Delta z}. \quad (4.31)$$

4) Prędkość w położeniach cząstek  $\mathbf{u}_p = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p)$  była obliczana przez interpolację rzędu drugiego,  $\mathbf{u}_p = \sum_{l,m,n} \mathbf{u}_{l,m,n} \cdot l_{l,m,n}(\mathbf{x}_p)$ , gdzie  $l_{l,m,n}(\mathbf{x})$  – wielomian interpolacyjny Lagrange’a. Nowe położenia cząstek były obliczane poprzez rozwiązanie układu równań:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p \quad (4.32)$$

metodą Rungego–Kutty czwartego rzędu.

5) Dla przepływów nielepkich ewolucja intensywności cząstek obliczana była wzdłuż trajektorii ruchu cząstek wirowych poprzez rozwiązanie układu równań:

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_p}{dt} = [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t)] \cdot \boldsymbol{\alpha}_p. \quad (4.33)$$

Równanie różniczkowe (4.33), nazywane schematem klasycznym, rozwiązywano metodą Adamsa-Bashfortha czwartego rzędu. Pochodne prędkości w położeniu  $\mathbf{x}_p$  obliczano, podobnie jak we wzorze (4.32) prędkość  $\mathbf{u}_p$ , przy pomocy procedury interpolacyjnej rzędu drugiego, na podstawie wartości prędkości w węzłach siatki.

W pracy przetestowano również alternatywne schematy modelowania członu źródłowego w równaniu (4.33):

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_p}{dt} = [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t)]^T \cdot \boldsymbol{\alpha}_p. \quad (4.34)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_p}{dt} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t))^T] \cdot \boldsymbol{\alpha}_p. \quad (4.35)$$

Postać alternatywnych członów źródłowych (4.34) i (4.35), nazywanych odpowiednio schematem transponowanym i schematem mieszanym, wynika z tożsamości wektorowej:

$$(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = (\nabla \mathbf{a} - (\nabla \mathbf{a})^T) \cdot \mathbf{b}. \quad (4.36)$$

Jeżeli podstawimy:  $\mathbf{a} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}$  to otrzymamy:

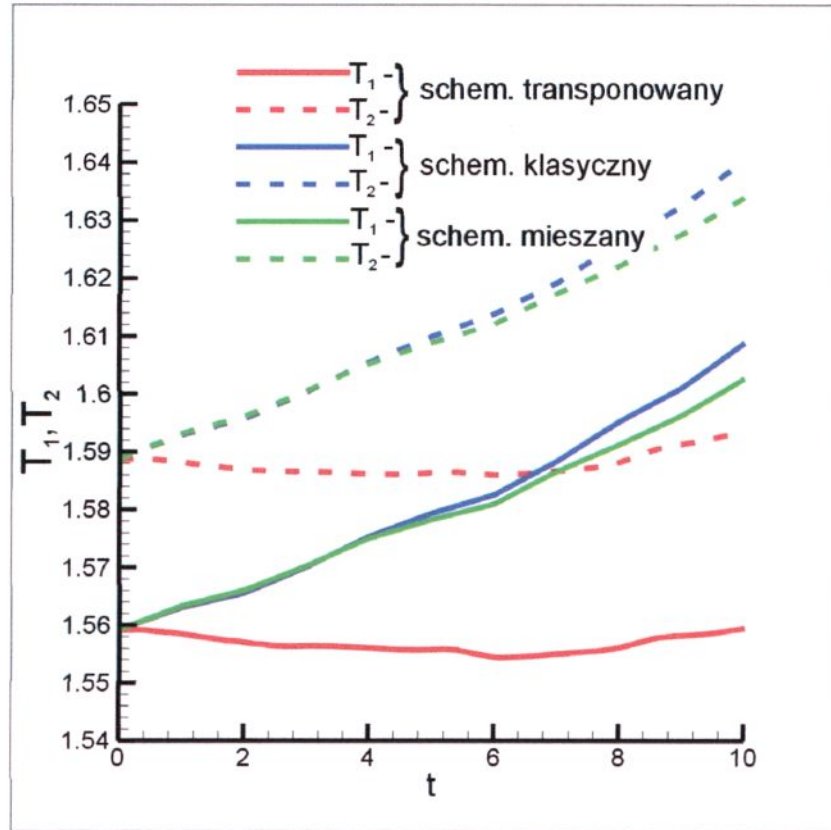
$$(\nabla \times \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \rightarrow \quad (\nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\omega} = (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (4.37)$$

Człon  $1/2[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$  jest symetrycznym tensorem deformacji  $D$ .

W opracowaniach [12,43,59,79] autorzy wskazują, że wszystkie trzy wyżej wymienione postacie członów źródłowych dają te same wyniki jeżeli spełniony jest warunek  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0$ . Niestety obliczenia numeryczne wprowadzają pewną niewielką niezerową źródłowość pola wirowości. W tym wypadku Wincklemans *at al.* w pracach [59,79] postulują za najlepszy schemat transponowany  $[\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t)]^T \cdot \boldsymbol{\alpha}_p$ , ponieważ zachowuje on jako jedyną całkowitą wirowość w przepływie. Również w niniejszej pracy modelowano dynamikę pierścienia wirowego testując trzy wymienione człony źródłowe i uzyskano potwierdzenie, że równanie (4.34) najlepiej zachowuje niezmienniki ruchu w trakcie obliczeń, choć Cottet w [12] zwraca uwagę, że schemat jest niekorzystny ze względu na „zachowywanie” istniejącej w przepływie dywergencji pola wirowości.

Na rysunku 4.2 przedstawiono przykładową zmianę wartości energii kinetycznych:  $T_1$  i  $T_2$  dla ewolucji pierścienia wirowego o parametrach:  $\varepsilon_0 = 0.3$ ,  $R_0 = 1.5$ ,  $\Gamma = 1.0$  przy zastosowaniu wymienionych powyżej członów źródłowych. Energie kinetyczne  $T_1$  i  $T_2$  obliczano w węzłach siatki ze wzorów:  $T_1 = \frac{1}{2} h^3 \sum_{l,m,n} |\mathbf{u}|_{l,m,n}^2$ ,  $T_2 = \frac{1}{2} h^3 \sum_{l,m,n} \mathbf{A}_{l,m,n} \cdot \boldsymbol{\omega}_{l,m,n}$ , gdzie  $l, m, n$  - numery węzłów siatki. Obliczanie energii kinetycznej dwoma sposobami umożliwiało dodatkową diagnostykę programu, gdyż rozbieżne wartości  $T_1$  i  $T_2$  wskazywałyby na ewentualny błąd w kodzie. Obie wartości energii kinetycznych były najlepiej zachowywane przy schemacie transponowanym. Z tego powodu schemat ten był wykorzystywany w dalszej pracy do modyfikowania intensywności cząstek wirowych. Wyznaczenie nowych intensywności cząstek wirowych kończyło jeden krok czasowy metody „wir w komórce”.

W trakcie modelowania numerycznego sprawdzono wpływ wyboru wartości kroku czasowego  $\Delta t$  oraz rozmiaru siatki  $h$  na ewolucję pierścienia wirowego. Przetestowano dynamikę pierścienia wirowego o parametrach:  $\varepsilon_0 = 0.3$ ,  $R_0 = 1.5$ ,  $\Gamma = 1.0$  z równomiernym rozkładem pola wirowości w przekroju dla kroków czasowych  $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005$ . W tabeli 4.1 przed-



Rys. 4.2. Zmiany wartości energii kinetycznych  $T_1$  i  $T_2$  podczas modelowania ruchu pierścienia wirowego o parametrach  $\varepsilon_0 = 0.3$ ,  $R_0 = 1.5$ ,  $\Gamma = 1.0$  przy zastosowaniu schematów: transponowanego, klasycznego i mieszanego.

| $\Delta t$ | $T_{1,k}$ | $T_{2,k}$ | $U_T$ |
|------------|-----------|-----------|-------|
| 0.1        | 2.67      | 3.70      | 0.177 |
| 0.05       | 1.77      | 1.79      | 0.178 |
| 0.02       | 1.61      | 1.64      | 0.185 |
| 0.01       | 1.56      | 1.59      | 0.185 |
| 0.005      | 1.54      | 1.57      | 0.185 |

Tabela 4.1. Porównanie końcowych wartości niezmienników ruchu  $T_{1,k}$  i  $T_{2,k}$  oraz prędkości translacji torusa  $U_T$  dla wybranych kroków czasowych  $\Delta t$ . Początkowe wartości energii kinetycznych wynosiły:  $T_{1,o} = 1.56$  i  $T_{2,o} = 1.59$ ; parametry pierścienia:  $\varepsilon_0 = 0.3$ ,  $R_0 = 1.5$ ,  $\Gamma = 1.0$ ; czas obliczeń  $t_c = 10.0$ .

stawiono końcowe wartości niezmienników ruchu  $T_1$  i  $T_2$  oraz wyznaczoną prędkość translacji torusa  $U_T$  po czasie  $t_c = 10.0$  ( $U_T = (y_k - y_o)/t_c$ , gdzie

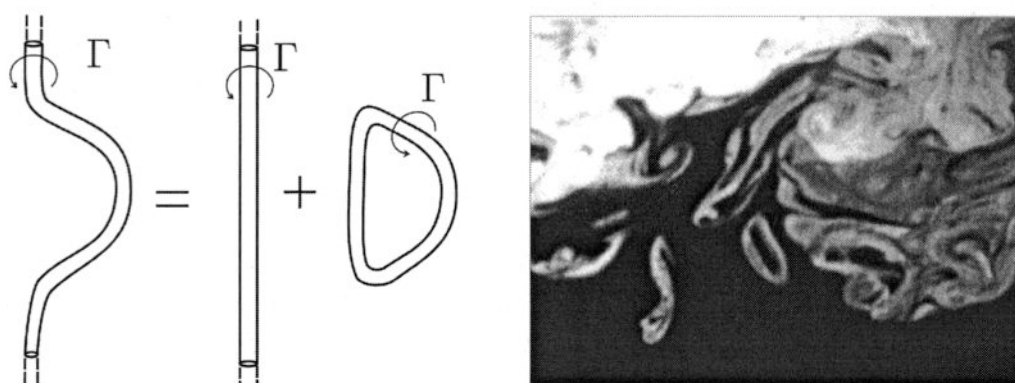
$y_k$ ,  $y_o$  położenia: końcowe i początkowe środka torusa względem osi  $Y$ , wzdłuż której poruszał się pierścień (patrz również podrozdz. 5.3.2 rys. 5.8). Wartości początkowe energii kinetycznych wynosiły:  $T_{1,o} = 1.56$ ,  $T_{2,o} = 1.59$ , a teoretyczna wartość prędkości translacji pierścienia  $U = 0.181$  (wzór 5.4). Różnice w dynamice pierścienia wirowego oraz zmiany wartości niezmienników:  $T_1$ ,  $T_2$  i prędkości  $U_T$  począwszy od kroku  $\Delta t = 0.02$  były minimalne, zatem krok ten zastosowano do wszystkich prezentowanych w niniejszej pracy wyników numerycznych.

Przetestowano również wpływ rozmiaru siatki  $h = 0.1$  i  $h = 0.05$  na dynamikę pierścienia. Nie stwierdzono znaczących różnic, więc wszystkie prezentowane w pracy obliczenia wykonano dla  $h = 0.1$ . Wybór takiego kroku był też spowodowany ograniczonym rozmiarem pamięci operacyjnej przechowującej w trakcie obliczeń wartości pól: potencjału wektorowego, prędkości i wirowości w węzłach siatki numerycznej. Zbyt duże macierze  $\sim 201 \times 201 \times 201$  (dla  $h = 0.05$ ) powodowały znaczne spowolnienie obliczeń, gdyż czas obliczeniowy był około 8-krotnie dłuższy niż w przypadku siatki numerycznej o  $h = 0.1$  (na której całkowity czas obliczeń zagadnienia dynamiki dwóch pierścieni wirowych był rzędu  $\sim 24$  godzin).

## Rozdział 5

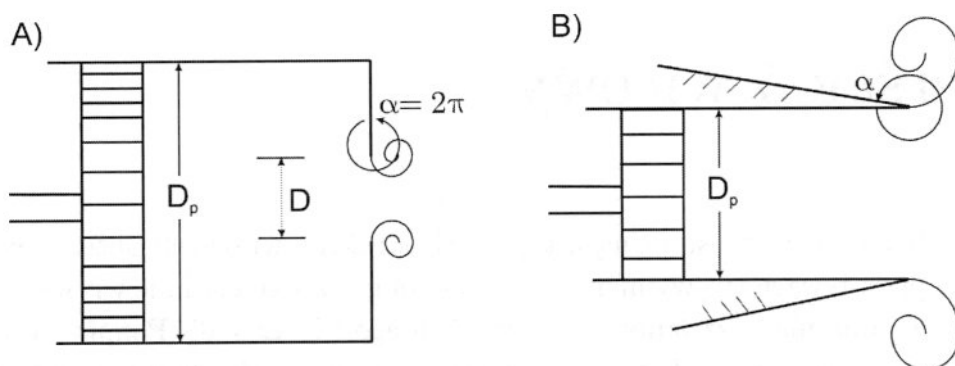
### Pierścień wirowy

Pierścień wirowy jest jedną z typowych struktur wirowych obserwowanych w przepływach trójwymiarowych. Tworzą go zamknięte linie wirowe, co wynika z założenia bezźródłowości pola wirowego ( $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ). Pomimo swojej pozornej prostoty, analiza powstawania, ewolucji i oddziaływania ze sobą pierścieni wirowych stanowi wciąż obszar intensywnych badań doświadczalnych [2, 45, 55, 74, 80, 81] i numerycznych [13, 27, 35, 48, 50, 52, 77, 84]. Leonard w pracy [38] przedstawił jeden z możliwych mechanizmów powstawania pierścieni wirowych w przepływie lepkim. Zasugerował on, że efekt rozciągania może lokalnie doprowadzić do deformacji rurki wirowej i w efekcie do wyodrębnienia się pierścienia (patrz rys. 5.1).



Rys. 5.1. Mechanizm generowania pierścienia wirowego z rozciągniętej rurki wirowej wg Leonarda [38] oraz wizualizacja przepływu turbulentnego z zaobserwowanym pierścieniem wirowym [60].

Eksperymentalnie pierścienie wirowe można wytworzyć w przepływie np. poprzez szybki ruch tłoka: w zbiorniku z niewielkim otworem kołowym (rys. 5.2A) lub w rurze z gwałtownym rozszerzeniem (rys. 5.2B). Możliwe jest też zastąpienie tłoka rozpiętą membraną [81]. Przykładowe eksperymentalne techniki produkcji pierścieni wirowych omówione zostały w przeglądowej pracy Shariffa i Leonarda [71] oraz Lima i Nickelsa [40].



Rys. 5.2. Generatory pierścieni wirowych, rysunek za [71].

Badania eksperymentalne nad pierścieniami wirowymi skupiają się m.in. na badaniu ich stabilności [45], wzajemnym oddziaływaniu pierścieni zależnie od konfiguracji początkowej [39, 53, 57, 81] i oddziaływaniu pierścienia wirowego ze ścianką sztywną [80].

Modelowanie numeryczne powstawania i wzajemnego oddziaływania pierścieni wirowych jest prowadzone zarówno za pomocą technik dwu- jak i trójwymiarowych. Dwuwymiarowe metody wirowe wykorzystują fakt osiowej symetrii pierścienia. Powstawanie pierścienia wirowego było modelowane np. metodą warstwy wirowej w pracy Nitsche i Krasnego [50], a wzajemne oddziaływanie pierścieni wirowych metodą konturów czy cząstek wirowych. Przykłady zastosowania trójwymiarowych metod wirowych do modelowania dynamiki pierścieni zostały przedstawione w drugim rozdziale.

Pierścienie wirowe znalazły również praktyczne, technologiczne zastosowania. Zostały opisane projekty wykorzystania ich do gaszenia pożarów szybów naftowych [1], a także do wytworzenia zjawiska kawitacji na powierzchni skał podwodnych w celu ich oczyszczania i cięcia [7], czy wynoszenia spalin z kominów w wysokie partie atmosfery itp..

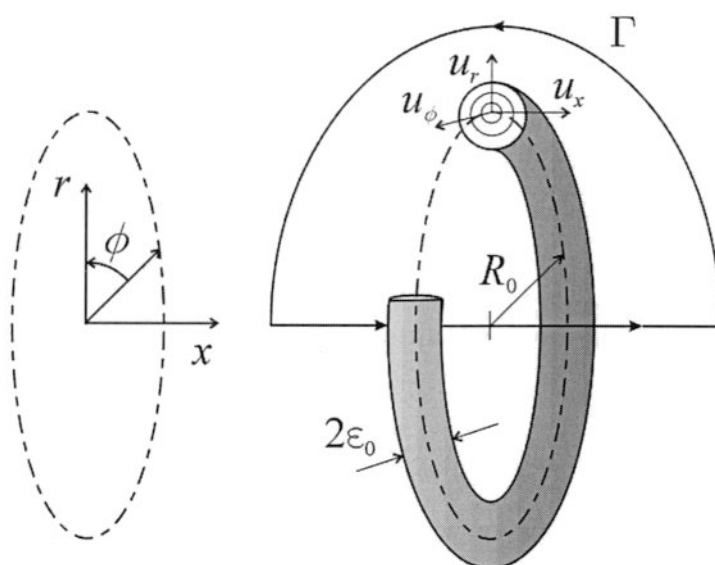
W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną wyniki numeryczne prezentujące ewolucję pierścienia wirowego dla przepływów nielepkich. Wpływ lep-

kości płynu na dynamikę pierścienia wirowego jest omówiony w rozdziale siódmym.

## 5.1 Podstawowe własności pierścienia wirowego

Pomimo, że pierścienie wirowe mogą mieć skomplikowaną geometrię, w niniejszej pracy skupiono uwagę na pierścieniach osiowo symetrycznych. Przyjęte w pracy oznaczenia parametrów pierścienia wirowego przedstawiono na rysunku 5.3:

- $R_0$  – promień zewnętrzny,
- $\varepsilon_0$  – promień wewnętrzny,
- $\Gamma$  – cyrkulacja pierścienia wirowego.



Rys. 5.3. Pierścień wirowy oraz cylindryczny układ współrzędnych.

Ze względu na osiową symetrię, dynamikę pierścienia wirowego wygodnie jest opisywać przyjmując cylindryczny układ współrzędnych  $\mathbf{x} = (r, \phi, x)$  (rys. 5.3). Z przyjętej symetrii wynika, że składowe pól prędkości i wirowości są funkcjami jedynie zmiennych  $x$  i  $r$ . Pole prędkości  $\mathbf{u}$  zapisane w zmiennych cylindrycznych ma składowe [43]:  $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\phi \mathbf{e}_\phi + u_x \mathbf{e}_x$ . Składowe pola



wirowości  $\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{e}_r + \omega_\phi \mathbf{e}_\phi + \omega_x \mathbf{e}_x$  można wówczas zapisać jako [43]:

$$\begin{aligned}\omega_r &= -\frac{\partial u_\phi}{\partial x}, \\ \omega_\phi &= \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}, \\ \omega_x &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_\phi).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Równanie transportu wirowości, zapisane w zmiennych cylindrycznych, dla przepływów nielepkich przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}\frac{D \omega_r}{D t} &= \omega_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \omega_x \frac{\partial u_r}{\partial x}, \\ \frac{D \omega_\phi}{D t} &= \frac{\omega_\phi u_r}{r} - \frac{2 \omega_r u_\phi}{r}, \\ \frac{D \omega_x}{D t} &= \omega_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \omega_x \frac{\partial u_x}{\partial x}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

W niniejszej pracy modelowano dynamikę pierścienia dla składowej  $u_\phi = 0$ . Ze wzorów (5.1) wynika wówczas, że wirowość rozłożona wewnątrz przekroju poprzecznego pierścienia ma tylko składową azymutalną różną od zera  $\boldsymbol{\omega} = \omega_\phi(r, x) \mathbf{e}_\phi$ . Równania transportu (5.2) opisujące składowe wirowości: radialną i wzdłużną są wówczas tożsamościowo równe zero, zaś równanie opisujące zmianę składowej azymutalnej pola wirowości można zapisać w postaci:

$$\frac{D}{D t} \left( \frac{\omega_\phi}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{D \omega_\phi}{D t} - \frac{\omega_\phi u_r}{r^2} = 0.\tag{5.3}$$

Z równania (5.3) wynika, że wielkość  $\omega_\phi/r$  jest niezmiennikiem ruchu dla przepływów nielepkich.

## 5.2 Prędkość translacji pierścienia wirowego

Charakterystyczną cechą pierścienia wirowego jest to, że generowane przez niego pole prędkości umożliwia pierścieniowi stabilny ruch translacyjny wzdłuż swojej osi symetrii. Prędkość przemieszczania się pierścienia, w nieograniczonym obszarze przepływu, zależy od jego parametrów geometrycznych oraz od rozkładu wirowości w przekroju pierścienia. Historycznie pierwsza formuła na



prędkość translacji pierścienia wirowego z jednorodnym rozkładem wirowości w przekroju została podana przez Kelvina w 1867 [43]:

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R_0} \left[ \ln \left( \frac{8 R_0}{\varepsilon_0} \right) - \frac{1}{4} \right]. \quad (5.4)$$

Wyprowadzenie powyższego wzoru zostało zamieszczone w *dodatku A*.

Formuły na prędkość translacji dla różnych rozkładów wirowości w pierścieniu przedstawiali później m.in. Hicks (1885), Lamb (1932) czy Fraenkel (1970).

### 5.3 Modelowanie dynamiki pierścienia wirowego

Modelowanie dynamiki pierścienia wirowego często jest podstawowym testem poprawności stosowanej metody rozwiązywania równań ruchu i aproksymacji pierścienia elementami wirowymi. W literaturze rozróżnia się dwa modele pierścienia wirowego : model cienkiej rurki wirowej i model torusa wirowego. Oba te modele charakteryzują się tym, iż wymagany jest warunek  $\varepsilon_0/R_0 < 1$ , ale różnice polegają na aproksymacji rozkładu wirowości wewnątrz pierścienia wirowego.

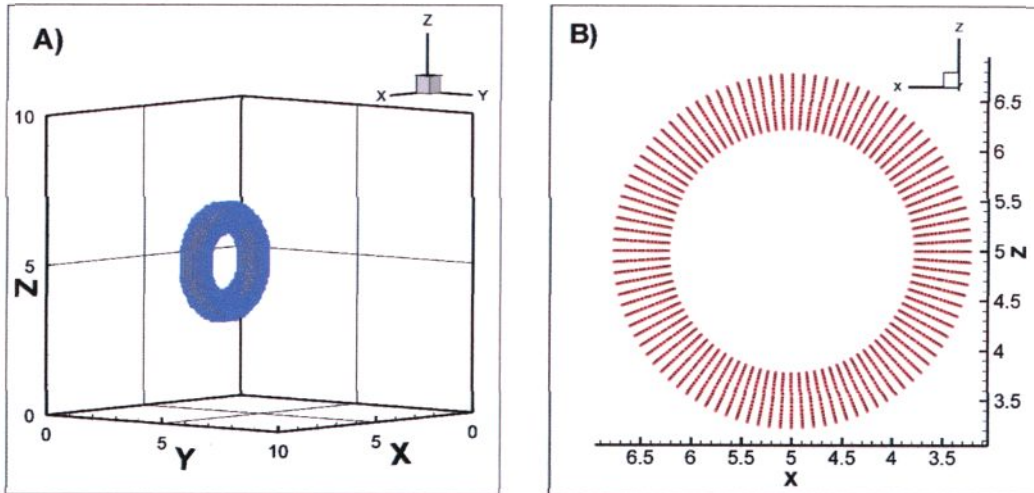
W modelu cienkiej rurki wirowej dynamika pierścienia jest modelowana poprzez ruch pojedynczego włókna wirowego o zadanym, stałym w czasie, rozkładzie wirowości w przekroju o promieniu obciążenia  $\varepsilon_0$ . Model ten był wykorzystywany do badań ewolucji, stabilności i wzajemnego oddziaływania pierścieni wirowych [38]. Jednak założenie stałości w czasie promienia  $\varepsilon_0$  (a co za tym idzie rozkładu wirowości) jest poważnym ograniczeniem, gdyż wiadomo z eksperymentów, że w trakcie ewolucji rozkład wirowości w przekroju ulega modyfikacji. Knio i Ghoniem w pracy [28] oraz Knio i Klein w [30] zaproponowali wprowadzenie do obliczeń numerycznych, zamiast włókna wirowego, zorientowanych elementów wirowych (podrozdz. 2.2). Intensywność elementów mogła zmieniać się zależnie od lokalnego gradientu pola prędkości w przepływie, przez co lepiej oddawać dynamikę pola wirowości.

Model torusa wirowego usuwa ograniczenie modelu cienkiej rurki wirowej aproksymując pierścień wirowy zbiorem kilku włókien wirowych lub, w metodach elementów czy cząstek wirowych, aproksymując rozkład wirowości w przekroju pierścienia zbiorem elementów wirowych. Wzajemne oddziaływanie włókien lub elementów wirowych w trakcie ewolucji powoduje wówczas

modyfikacje rozkładu wirowości w przekroju. Dodatkowo, model torusa wirowego daje możliwość wprowadzenia do obliczeń znacznej liczby cząstek wirowych, przez co zapewnia dobrą aproksymację pola wirowości w pierścieniu. Model ten został wykorzystany w niniejszej pracy do badania ewolucji pierścieni wirowych.

### 5.3.1 Torus wirowy

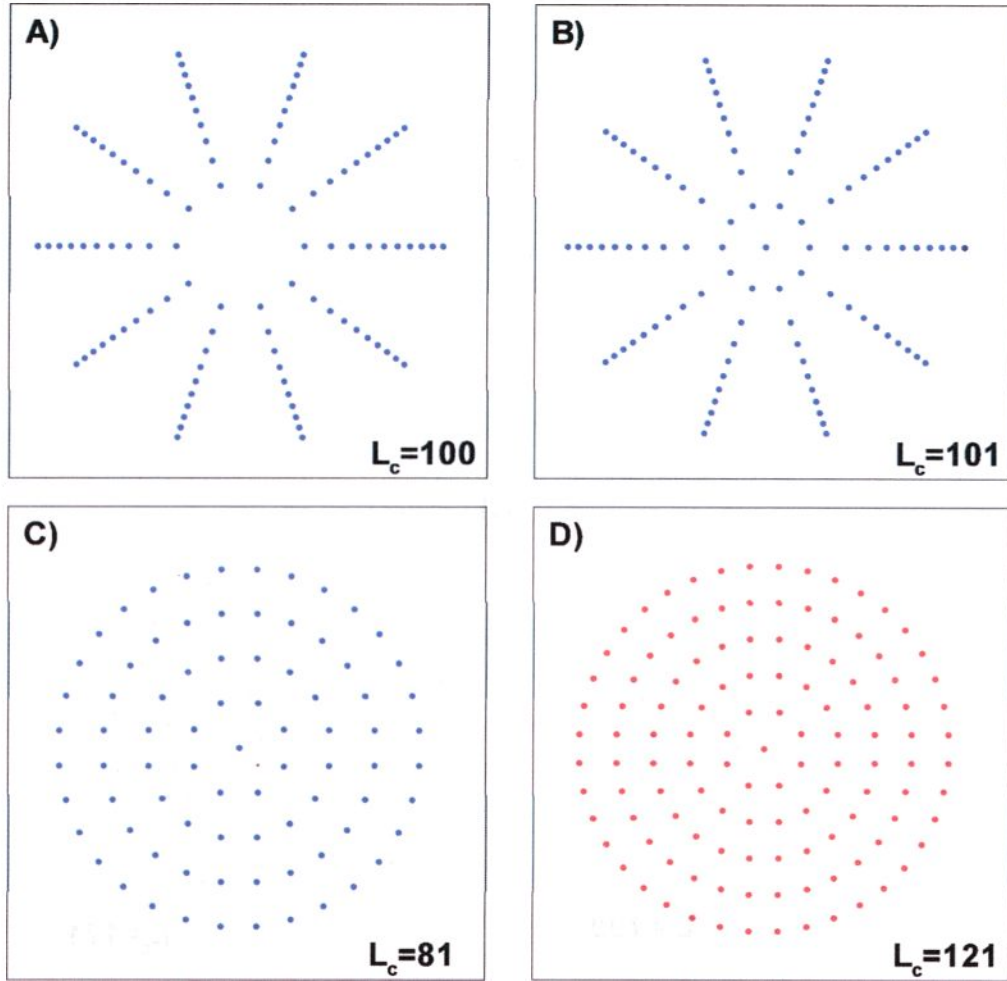
Modelowanie dynamiki pojedynczego pierścienia wirowego stanowiło podstawowy test sprawdzający poprawność metody wirowej typu „wir w komórce” opisaną w *rozdziale czwartym*. Obszar obliczeniowy stanowił sześcian o długości boku  $L = 10.0$  pokryty prostokątną siatką numeryczną o równomiernym kroku  $h = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1$  (rys. 5.4A). Liczba węzłów siatki wynosiła w każdym kierunku  $M = 101$ . Krok czasowy w trakcie obliczeń wynosił  $\Delta t = 0.01$ . W celu zbadania dynamiki pierścienia wirowego przyjęto okresowe warunki brzegowe dla równania Poissona na potencjał wektorowy.



Rys. 5.4. A) Układ współrzędnych z pierścieniem wirowym; B) pierścień wirowy podzielony na 100 przekrojów.

Pierścień wirowy został podzielony na  $L_p = 100$  przekrojów, a w każdym przekroju zostało rozmieszczonych  $L_c$  cząstek wirowych (rys. 5.4B). Całkowita liczba cząstek wprowadzonych do obliczeń wynosiła  $N = L_p \cdot L_c$  i zależała od sposobu rozkładu cząstek w przekroju. W trakcie modelowania ruchu torusa wirowego przetestowano różne sposoby rozłożenia cząstek opierając

się na pracach: Winckelmansa i Leonarda [79] oraz Knio i Ghoniem [28]. Przykładowe, testowane w pracy, rozkłady cząstek wirowych w przekroju są przedstawione na rysunku 5.5.



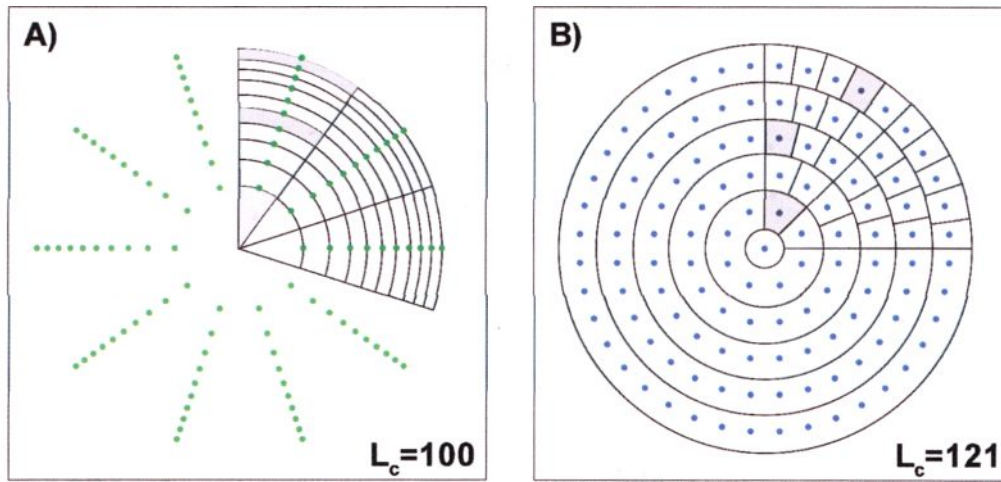
Rys. 5.5. Przykładowe, testowane w pracy rozkłady cząstek w przekroju torusa wirowego. W dalszych obliczeniach stosowano rozkład D).

Warunkiem, który musiał być spełniony przez zadany rozkład cząstek wirowych, było, aby wzajemne odległości pomiędzy sąsiednimi cząstkami były mniejsze niż rozmiar komórki siatki numerycznej  $h$  i cząstki pokrywały w miarę równomiernie cały przekrój. Stąd liczba cząstek w jednym przekroju musiała być rzędu  $L_c \sim 100$ . W trakcie modelowania dynamiki torusa nie stwierdzono znaczącego wpływu zaprezentowanych rozkładów cząstek na otrzymywane wyniki (w szczególności na prędkość translacji torusa). Począt-



kowy rozkład miał jednak wpływ na dynamikę cząstek wewnątrz przekroju w trakcie ewolucji pierścienia. W dalszej części pracy prezentowane będą wyniki oparte na równomiernym rozkładzie  $N = 121$  cząstek w przekroju (przykład D) rys. 5.5). Rozkład ten wybrano ze względu na dużą liczbę cząstek  $L_c$  i równomierne pokrycie nimi całej powierzchni przekroju. Było to szczególnie ważne przy modelowaniu lepkości w przepływie za pomocą metody wymiany intensywności cząstek w *rozdziale siódmym*.

W prezentowanych rozkładach z  $i$ -tą cząstką związana jest jednakowa część pola przekroju równa  $P_i = \pi \varepsilon_0^2 / L_c$ . Przedstawione rozkłady różnią się zarówno liczbą cząstek  $L_c$  jak również położeniem  $i$ -tej cząstki wewnątrz pola  $P_i$ . Różna liczba cząstek w poszczególnych rozkładach wynika ze sposobu pokrycia przekroju torusa polami  $P_i$ . Przykładowe podziały przekroju na pola  $P_i$  oraz położenie cząstek wirowych w tych polach przedstawiono na rysunku 5.6 (przedstawione rozkłady odpowiadają rozkładowi A) i D) z rysunku 5.5).

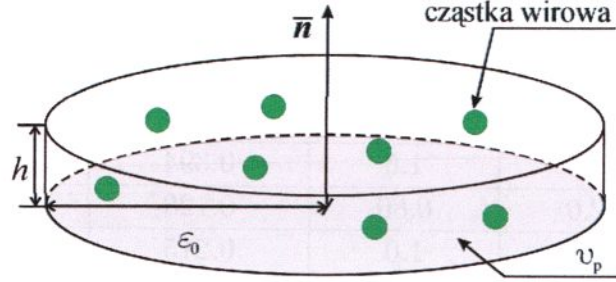


Rys. 5.6. Podział przekroju na pola o równej powierzchni  $P_i$  (przykładowe pola zaznaczono szarym wypełnieniem) z zaznaczonym rozkładem cząstek.

Równomierny rozkład wirowości w przekroju otrzymano zadając w chwili czasu  $t_0$  każdej cząstce wirowej jednakową wartość  $|\alpha_i| = \alpha = \text{const}$  zgodnie z aproksymacją zadaną wzorem (4.5).

Wzór na wartość intensywności  $i$ -tej cząstki można wyprowadzić rozważając porcję wirowości zawartą w przedstawionej na rysunku 5.7 objętości  $v_p = \pi \varepsilon_0^2 h$  torusa. Z definicji intensywności  $\Gamma$  (1.14) otrzymujemy równość:

$$\Gamma h = \omega_n \pi \varepsilon_0^2 h = \omega_n v_p, \quad (5.5)$$



Rys. 5.7. Schematyczny wycinek torusa wirowego z zaznaczonymi cząstkami wirowymi.

gdzie  $\omega_n$  oznacza składową normalną pola wirowości do powierzchni przekroju ( $\omega_n = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ ). Zapisując objętość  $v_p$  jako  $N h^3$ , gdzie  $N$  – liczba cząstek zawarta w wybranej objętości, otrzymujemy:

$$\Gamma h = \omega_n h^3 N = \sum_i^N \alpha_i \cdot \mathbf{n} = N \alpha. \quad (5.6)$$

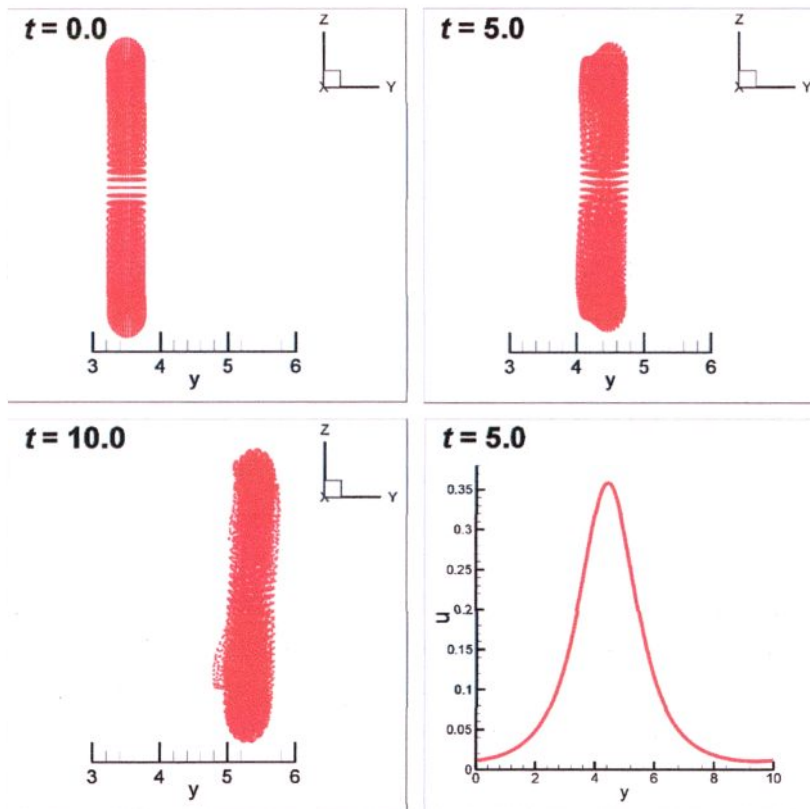
Powyższa formuła określa intensywność cząstek wirowych w zależności od ich liczby w objętości  $v_p$  oraz intensywności  $\Gamma$ .

### 5.3.2 Prędkość przemieszczania się torusa $U_T$

Testem poprawności zastosowanej metody było zbadanie dynamiki torusa wirowego i porównanie jego prędkości translacji  $U_T$  z wartością  $U$  otrzymaną z formuły analitycznej (5.4). Wartości prędkości:  $U$  i  $U_T$ , wyznaczone dla przykładowych parametrów  $\varepsilon_0$ ,  $R_0$  i  $\Gamma$ , zebrano w tabeli 5.1. Prezentowane wyniki odnoszą się do przypadku równomiernego rozkładu wirowości w przekroju. Prędkość  $U_T$  wyznaczono ze wzoru  $U_T = (y_k - y_o)/t_c$ , gdzie  $t_c$  – czas, dla którego modelowano ruch torusa;  $y_k$ ,  $y_o$  – położenia: końcowe i początkowe środka torusa względem osi  $Y$ , wzdłuż której poruszał się pierścień (rys. 5.8). Na rysunku 5.8 przedstawiono ruch torusa w rzucie z boku w chwilach  $t = 0.0$ ,  $t = 5.0$ ,  $t = 10.0$ , z zaznaczonym położeniem względem osi  $Y$ . Takie ujęcie daje możliwość prześledzenia przemieszczania się torusa jak również umożliwia analizę jego stabilności. Można zauważyć, że torus z czasem ulega niewielkiej deformacji lecz cały czas zachowuje zwarty kształt.

| $\varepsilon_0$ | $R_0$ | $\Gamma$ | $U$    | $U_T$  |
|-----------------|-------|----------|--------|--------|
| 0.3             | 1.5   | 1.0      | 0.181  | 0.185  |
| 0.3             | 2.5   | 0.70     | 0.0880 | 0.0800 |
| 0.3             | 2.0   | 0.80     | 0.110  | 0.120  |
| 0.3             | 1.0   | 1.6      | 0.394  | 0.390  |
| 0.2             | 2.0   | 0.80     | 0.120  | 0.133  |
| 0.2             | 1.5   | 1.0      | 0.215  | 0.217  |
| 0.2             | 1.0   | 1.6      | 0.430  | 0.441  |

Tabela 5.1. Porównanie przykładowych wartości teoretycznej prędkości translacji pierścienia  $U$  (wzór (5.4)) oraz prędkości translacji  $U_T$  uzyskanej z modelowania ruchu torusa wirowego dla czasu  $t_c = 10.0$  dla wybranych parametrów  $\varepsilon_0$ ,  $R_0$ ,  $\Gamma$ .



Rys. 5.8. Położenie torusa wirowego w wybranych chwilach czasu (widok z boku). Dla czasu  $t = 5.0$  przedstawiono profil prędkości wzdłuż osi symetrii torusa. Parametry torusa:  $\varepsilon_0 = 0.3$ ,  $R_0 = 1.5$ ,  $\Gamma = 1.0$ .

Dodatkowo na rysunku 5.8 umieszczono profil prędkości wyznaczony wzdłuż osi symetrii torusa dla  $t = 5.0$ . Maksymalna prędkość występuje w płaszczyźnie pierścienia, a następnie szybko spada do zera.

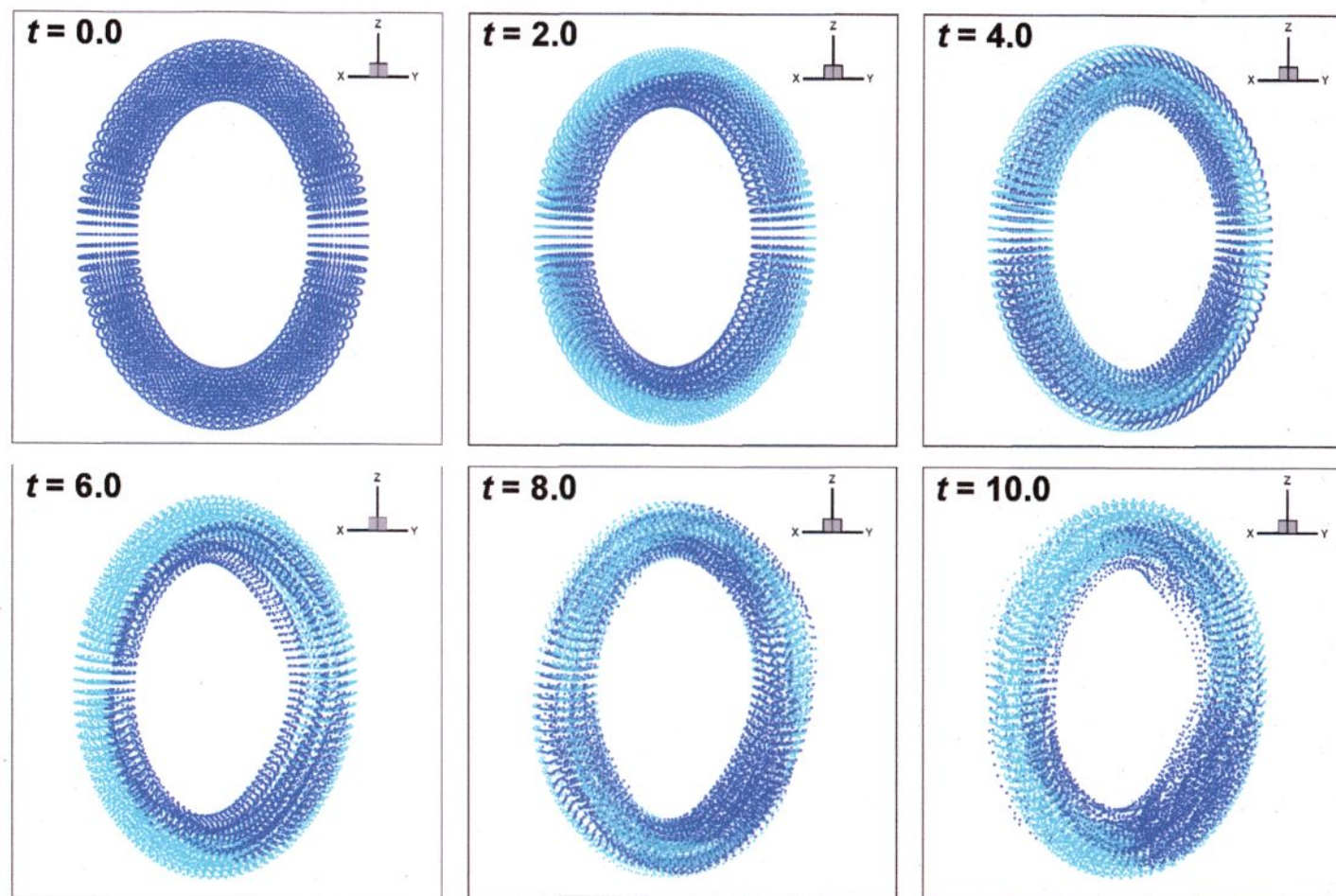
### 5.3.3 Dynamika torusa wirowego

Modelowanie numeryczne dynamiki torusa umożliwia prześledzenie zarówno zmian położenia i intensywności cząstek wirowych, jak również ewolucję pól wirowości i prędkości w obszarze przepływu.

Przykładowe wyniki modelowania numerycznego ruchu torusa wirowego zostaną przedstawione dla parametrów:  $\varepsilon_0 = 0.3$ ,  $R_0 = 1.5$ ,  $\Gamma = 1.0$ .

Na rysunku 5.9 przedstawiono dynamikę torusa aproksymowanego rozkładem 12100 cząstek wirowych w widoku z boku, pod kątem  $45^\circ$  do płaszczyzny  $yz$ . Torus w trakcie ewolucji zachowuje swój kształt i ulega tylko nieznacznej deformacji. Cząstki pomiędzy sąsiednimi przekrojami nie mieszają się i nawet dla  $t = 10.0$  można jeszcze rozróżnić poszczególne przekroje. Oznacza to, że w trakcie modelowania numerycznego nie jest generowana składowa azymutalna prędkości  $u_\phi$ . Dodatkowo cząstki pogrupowano ze względu na ich intensywność. Kolorem granatowym zaznaczono cząstki, których intensywność jest większa od średniej  $\alpha_{sr}$ , a kolorem niebieskim cząstki o intensywności mniejszej od  $\alpha_{sr}$  (w pierwszym pierścieniu (dla  $t = 0.0$ ) cząstki mają takie same intensywności stąd ich jednakowy, granatowy kolor). Średnią intensywność  $\alpha_{sr}$  obliczono biorąc średnią arytmetyczną z modułów intensywności po wszystkich cząstkach w danej chwili czasu  $\alpha_{sr}(t) = \sum_i |\alpha_i(t)|/N$ . Z przedstawionej na rysunku 5.9 dynamiki pierścienia wynika, że najpierw zwiększają swoją intensywność, na skutek rozciągania linii wirowych, cząstki leżące po wewnętrznej stronie pierścienia ( $t = 2.0$ ), co jest związane z efektem stretchingu. Po wewnętrznej stronie pierścienia wirowego występują bowiem największe wartości i gradienty prędkości. Następnie cząstki te, w wyniku ruchu torusa, przemieszczają się po obwodzie pierścienia (kolejne rysunki dla  $t = 4.0$ ,  $t = 6.0$ ,  $t = 8.0$ ). W wyniku skomplikowanej dynamiki wewnątrz przekroju torusa cząstki, o wartości intensywności większej od średniej  $\alpha_{sr}$ , mogą grupować się powodując niestabilność torusa wirowego (na rysunku dla  $t = 10.0$  widać zgrubienie powstałe w dolnej prawej części torusa).





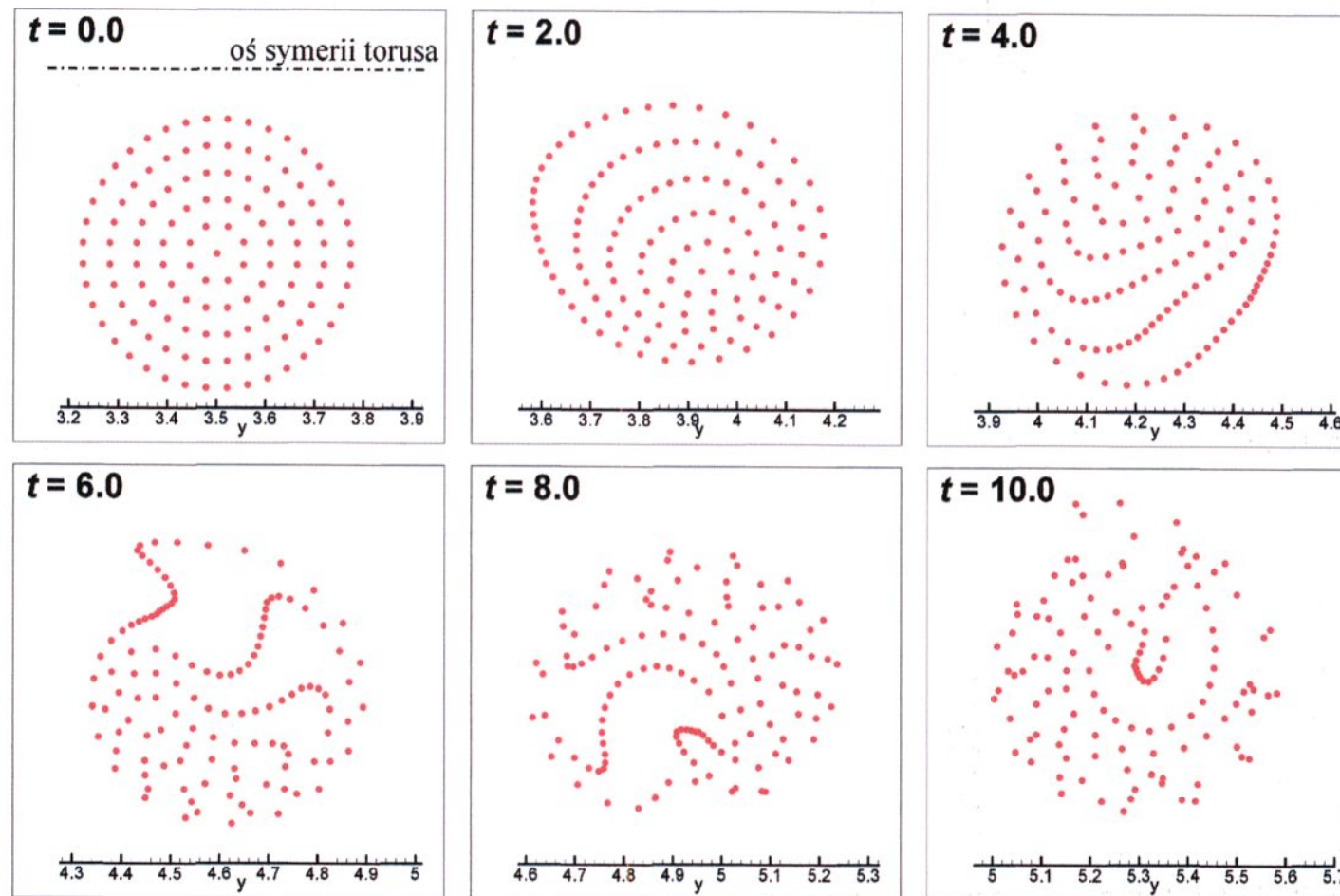
Rys. 5.9. Dynamika torusa wirowego aproksymowanego rozkładem 12100 cząstek wirowych w wybranych chwilach czasu, kolorem granatowym zaznaczono cząstki o intensywności większej od  $\alpha_{sr}$ ; kolorem niebieskim cząstki o intensywności mniejszej od  $\alpha_{sr}$ . Widok z boku, pod kątem  $45^\circ$  do płaszczyzny  $yz$ .



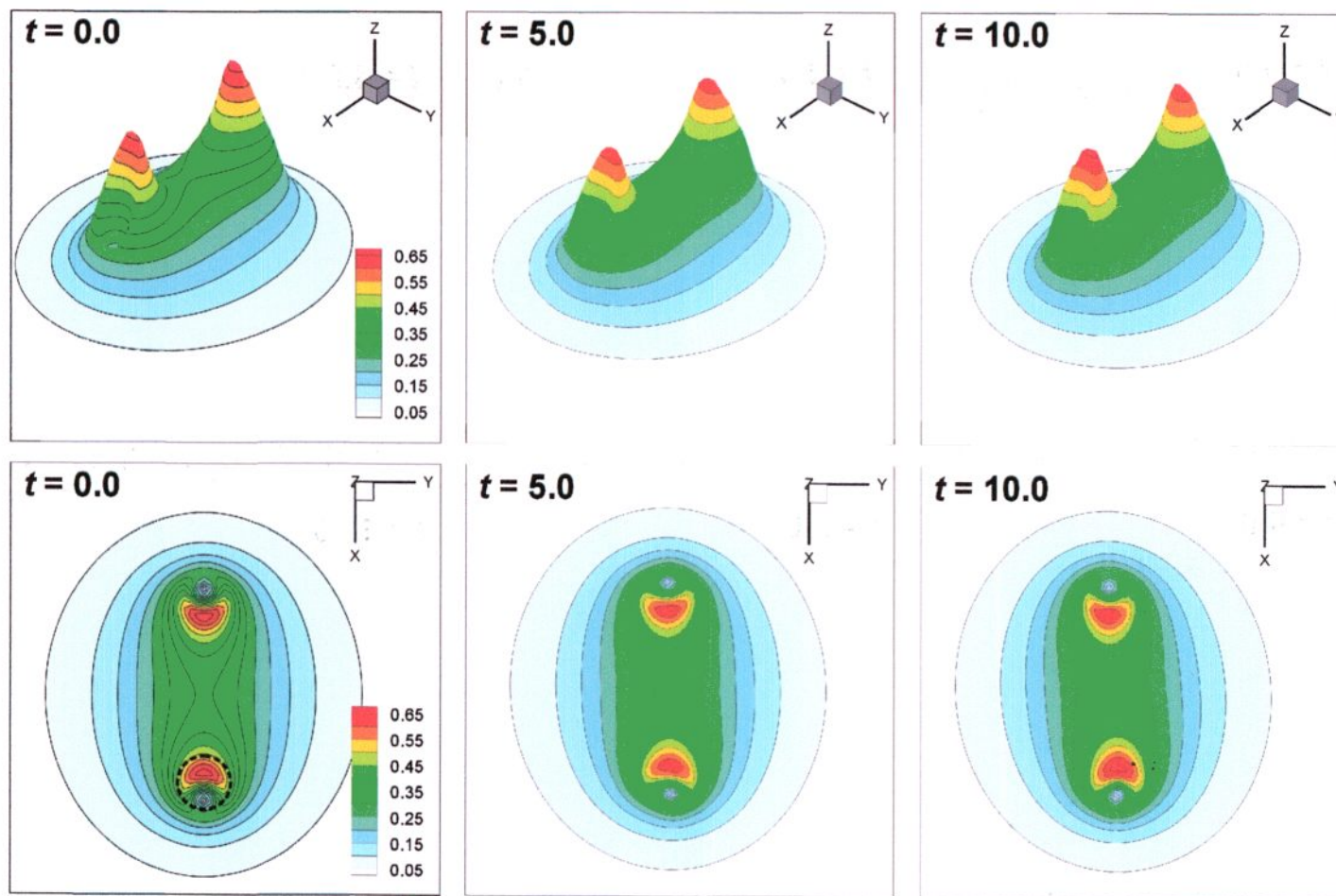
Ruch cząstek w przykładowym przekroju został przedstawiony na rysunku 5.10 (na rysunku zaznaczono również oś symetrii, ale jedynie w celu poglądowym, bez zachowania właściwych proporcji). W trakcie ewolucji cząstki wykonują skomplikowane ruchy i początkowo równomierny, kołowy rozkład traci z czasem swój kształt. Cząstki znajdujące się po wewnętrznej stronie torusa (bliżej osi symetrii) ulegają największym przemieszczeniom, gdyż w tym obszarze przekroju prędkości są największe. W wyniku ruchu, cząstki w przekroju mieszają się, a początkowy rozkład cząstek ulega całkowitemu zanikowi i staje się nieuporządkowany, co wyraźnie widać dla  $t = 8.0$  czy  $t = 10.0$ . W trakcie ewolucji kształt przekroju ulega zmianie z kołowego na eliptyczny ( $t = 2.0$ ,  $t = 4.0$ ).

Rozkład pola prędkości wokół torusa w płaszczyźnie  $xy$  (zawierającej oś symetrii pierścienia) przedstawiony został na rysunku 5.11. Rut z góry na płaszczyznę  $xy$  umożliwia prześledzenie rozkładu izolinii prędkości wokół pierścienia. Dodatkowo na dolnym diagramie dla  $t = 0.0$  zaznaczono linią przerywaną obwód przekroju torusa na tle pola prędkości. Tak jak wspomniano wcześniej, prędkość osiąga największą wartość po wewnętrznej (bliższej osi symetrii) stronie przekroju torusa. Interesujący jest rozkład pola prędkości wewnątrz przekroju torusa, gdyż niemal w środku przekroju występuje obszar o niewielkiej wartości prędkości. Charakterystyczne obniżenie jest dobrze widoczne w rzucie z boku. Z rysunku 5.11 wynika, że rozkład pola prędkości zachowuje się w czasie i zmiana rozkładu cząstek wirowych w przekroju niewiele wpływa na jego kształt.

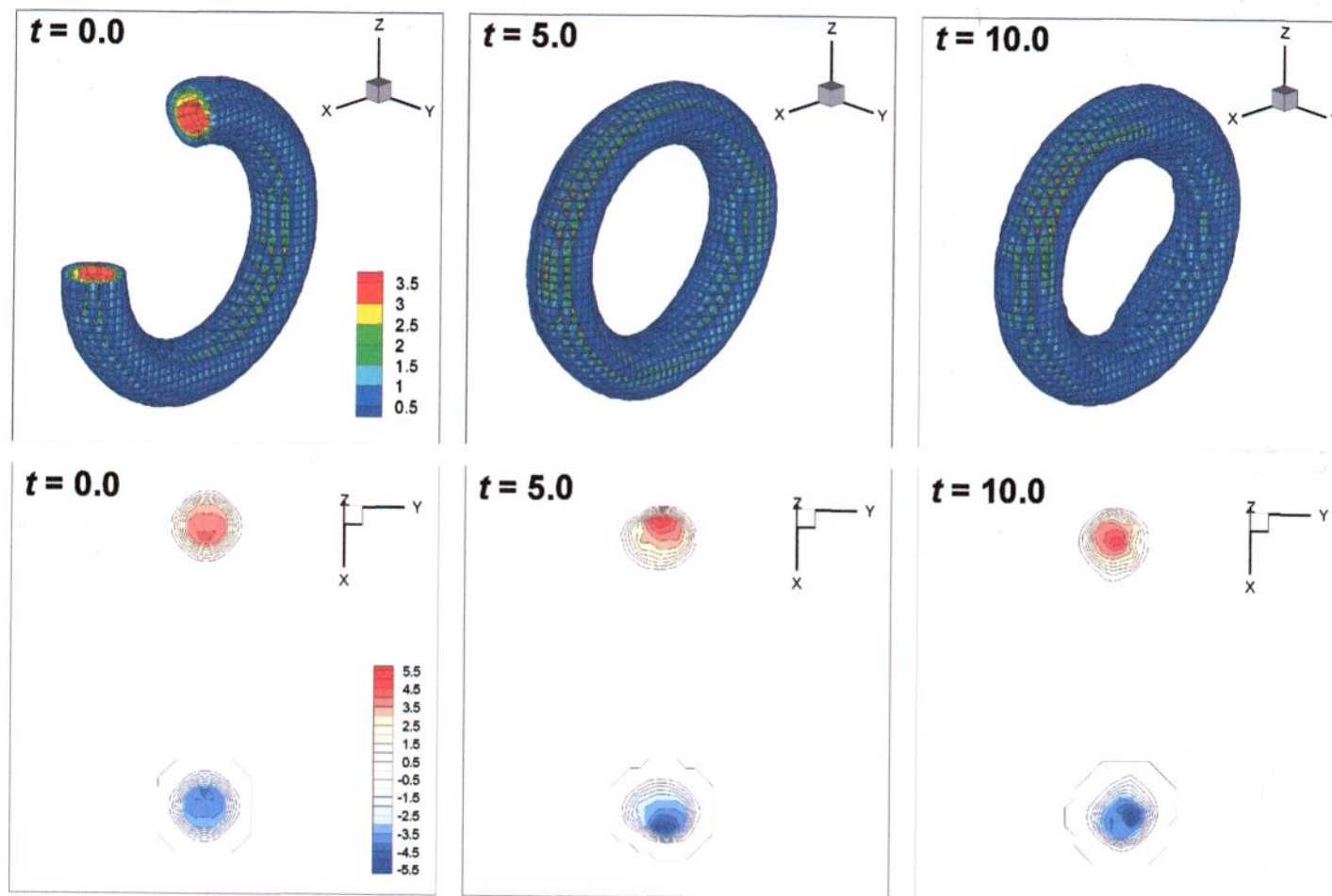
Skomplikowany ruch cząstek wirowych wpływa na zmianę rozkładu wirowości w przekroju. Dynamika pola wirowości w przepływie oraz rozkład wirowości w płaszczyźnie  $xy$  zawierającej oś symetrii pierścienia zostały przedstawione na rysunkach 5.12 i 5.13. Można zauważyć, że zaproponowana aproksymacja rozkładem cząstek wirowych dobrze przybliża kształt torusa wirowego. Wykresy przedstawiające rozkład izolinii pola wirowości w płaszczyźnie  $xy$  umożliwiają prześledzenie zmian rozkładu wirowości w przekroju torusa. Początkowo równomierny rozkład zmienia się wraz z ruchem cząstek wirowych. Wyraźnie widać to na rysunku 5.13, na którym przedstawiono rozkład składowej stycznej pola wirowości  $\omega_z$  do płaszczyzny  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii pierścienia w kolejnych chwilach czasu (widok z boku, pod kątem  $60^\circ$  do płaszczyzny  $xy$ ). Ruch cząstek powoduje powstawanie chwilowego maksimum w rozkładzie, co jest widoczne np. dla  $t = 6.0$ ,  $t = 8.0$ .



Rys. 5.10. Dynamika cząstek wirowych w wybranym przekroju torusa wirowego. Na rysunku zaznaczono oś symetrii torusa bez zachowania właściwych proporcji.

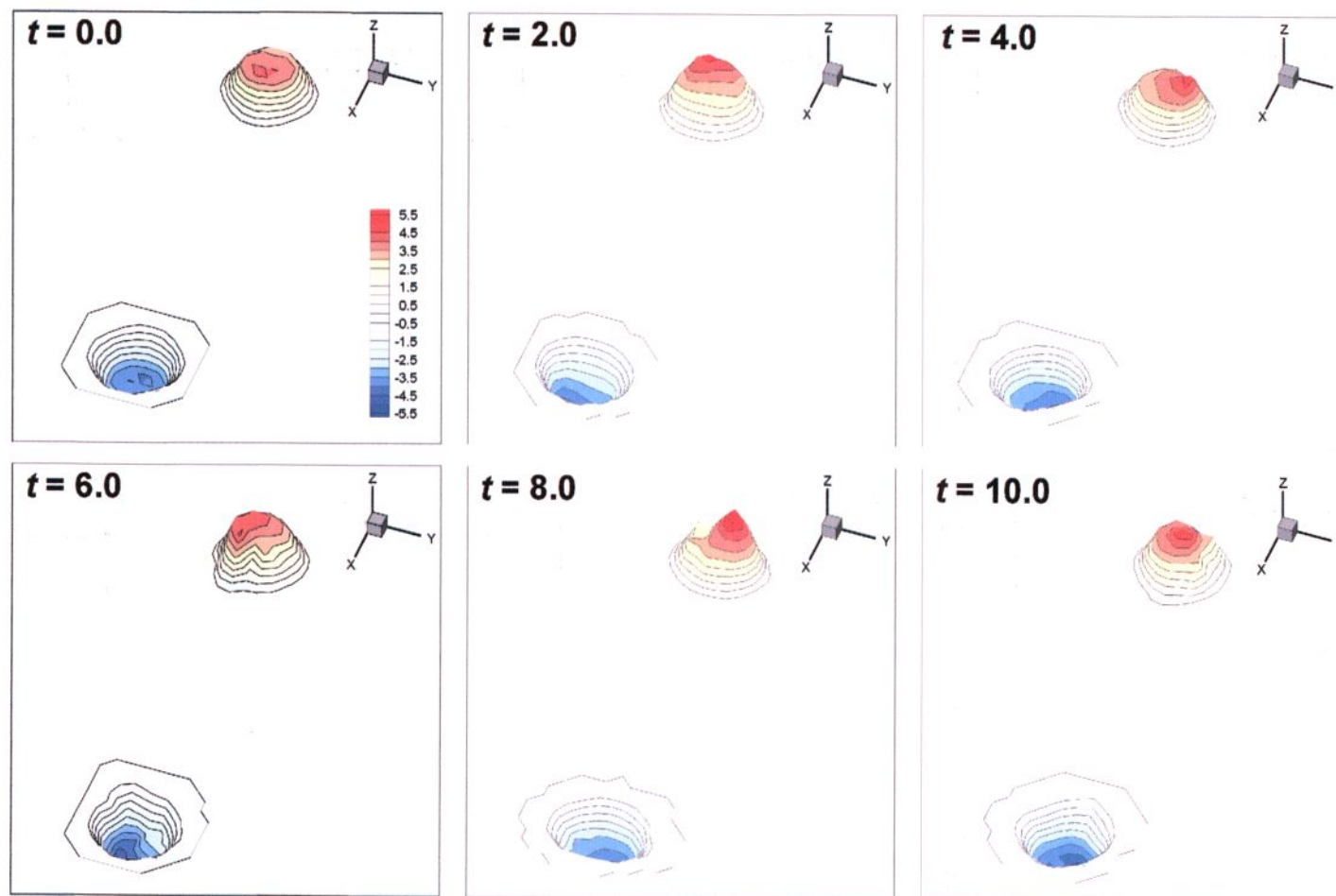


Rys. 5.11. Rozkład pola prędkości generowany przez poruszający się torus wirowy w kolejnych chwilach czasu w płaszczyźnie  $xy$  (zawierającej oś symetrii pierścienia). Widok w rzucie z boku oraz z góry na płaszczyznę  $xy$ . Dodatkowo na dolnym diagramie dla  $t = 0.0$  zaznaczono linią przerywaną obwód przekroju torusa na tle pola prędkości.



Rys. 5.12. Dynamika pola wirowości w przepływie w rzucie z boku oraz rozkład pola wirowości generowany w płaszczyźnie  $xy$  zawierającej oś symetrii pierścienia.





Rys. 5.13. Rozkład składowej  $\omega_z$  pola wirowości na płaszczyźnie  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii pierścienia w kolejnych chwilach czasu (widok z boku, pod kątem  $60^\circ$ ).

W trakcie obliczeń numerycznych kontrolowane były niezmienniki ruchu w celu sprawdzenia poprawności zastosowanego algorytmu. Kontrolowanymi niezmiennikami były:

- Energia kinetyczna  $T$  obliczana ze wzorów (1.37) i (1.45) w węzłach siatki numerycznej  $l, m, n$  (podwójny sposób obliczania energii kinetycznej pozwalał na lepszą diagnostykę programu):

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dv \approx \frac{1}{2} h^3 \sum_{l,m,n} |\mathbf{u}|_{l,m,n}^2, \quad (5.7)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} \, dv \approx \frac{1}{2} h^3 \sum_{l,m,n} \mathbf{A}_{l,m,n} \cdot \boldsymbol{\omega}_{l,m,n}. \quad (5.8)$$

- Enstropia  $E$  obliczana ze wzoru (1.35):

$$E = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \, dv \approx \frac{1}{2} h^3 \sum_{l,m,n} |\boldsymbol{\omega}|_{l,m,n}^2. \quad (5.9)$$

- Skrętność  $\mathcal{H}$  obliczana ze wzoru (1.46):

$$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \, dv \approx h^3 \sum_{l,m,n} \mathbf{u}_{l,m,n} \cdot \boldsymbol{\omega}_{l,m,n}. \quad (5.10)$$

- Całki ze składowych pola wirowości  $I_i$  obliczane ze wzorów (1.32):

$$I_i = \int_{\mathcal{D}} \omega_i \, dv \approx h^3 \sum_{l,m,n} \omega_{(i)l,m,n}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.11)$$

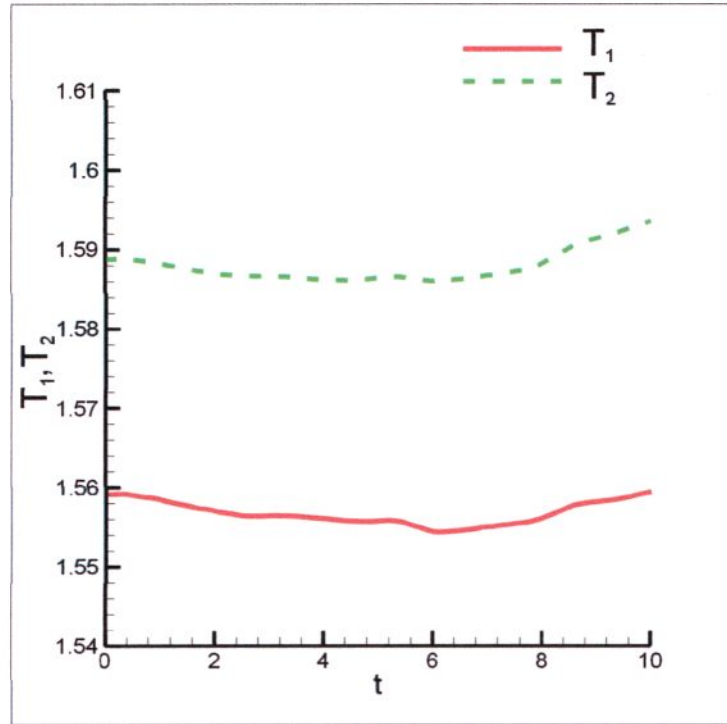
- Dywergencje z pól: prędkości  $\mathbf{u}$ , potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$  i wirowości  $\boldsymbol{\omega}$  obliczane w węzłach siatki numerycznej:

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla \cdot \mathbf{u}| \, dv \approx h^3 \sum_{l,m,n} |\nabla \cdot \mathbf{u}|_{l,m,n}, \quad (5.12)$$

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla \cdot \mathbf{A}| \, dv \approx h^3 \sum_{l,m,n} |\nabla \cdot \mathbf{A}|_{l,m,n}, \quad (5.13)$$

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}| \, dv \approx h^3 \sum_{l,m,n} |\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}|_{l,m,n}. \quad (5.14)$$

Przebieg zmian energii kinetycznych  $T_1$  i  $T_2$  dla prezentowanych wyników numerycznych przedstawiono na rysunku 5.14.



Rys. 5.14. Zmiany wartości energii kinetycznych  $T_1$  i  $T_2$ , obliczanych ze wzorów (5.7) i (5.8), w trakcie modelowania dynamiki torusa wirowego.

Zmiany w trakcie obliczeń wartości początkowych  $T_1 = 1.559$  i  $T_2 = 1.589$  nie były większe niż  $\sim 1\%$ . Początkowa wartość entropii  $E_0 = 14.91$  zwiększyła się po czasie  $t = 10.0$  o  $\sim 3\%$ . W trakcie obliczeń monitorowano również cyrkulację torusa  $\Gamma$  przybliżając całkę  $\Gamma = \int_S (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}) ds$  sumowaniem po węzłach półpłaszczyzny  $xy$ :  $\Gamma \approx \sum_{l=1}^{51} \sum_{m=1}^{101} \omega_{(3)l,m,51} h^2$  (liczba węzłów siatki w jednym kierunku  $M = 101$ ). Początkowa cyrkulacja  $\Gamma_0 = 1.07$  wzrosła w trakcie obliczeń o  $\sim 3.5\%$ . Skrętność  $\mathcal{H}_0$  pozostawała cały czas na poziomie  $\sim 10^{-6}$ ; całki ze składowych wirowości  $I_i$  pozostawały w trakcie obliczeń w przedziale wartości  $(10^{-6}, 10^{-3})$ . Dywergencje z pól: potencjału wektorowego i wirowości pozostawały na poziomie  $\sim 10^{-3}$ , zaś bezźródłowość pola prędkości była zachowana z dokładnością  $\sim 10^{-6}$ .





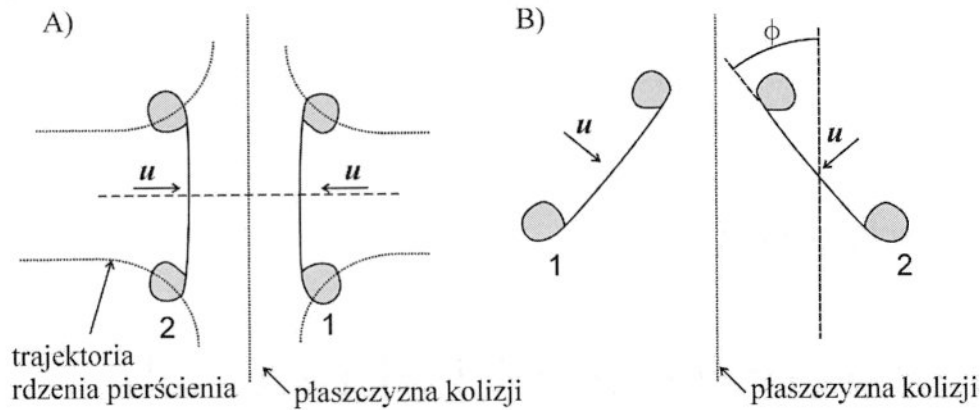
## Rozdział 6

# Oddziaływanie układu dwóch pierścieni wirowych

Analiza wzajemnego oddziaływania pierścieni wirowych jest obszarem intensywnych badań eksperymentalnych i numerycznych. Zainteresowanie tym tematem wynika zarówno z przekonania, że pierścienie są jednymi z podstawowych struktur wirowych w przepływach trójwymiarowych, jak również z łatwości generowania tych struktur w warunkach laboratoryjnych. Spośród wielu możliwych konfiguracji wzajemnego oddziaływania pierścieni wirowych, przedstawianych w literaturze, można wyszczególnić trzy główne kierunki badań:

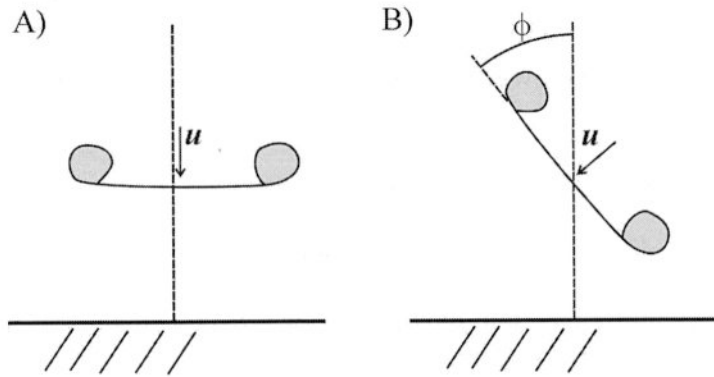
- różne warianty zderzeń pierścieni wirowych;
- zderzenia pierścienia wirowego ze ścianką;
- oddziaływanie pierścieni wirowych poruszających się w tym samym kierunku (gra wirów, nawijanie się wirów itp.);

W przypadku zderzeń pierścieni wirowych badania koncentrują się zarówno na analizie czołowego zderzenia pierścieni [39, 53] (rys. 6.1A), jak również na zderzeniach pierścieni nachylonych początkowo pod kątem  $\phi$  do płaszczyzny kolizji [42, 85] (rys. 6.1B). Badania laboratoryjne i modelowanie numeryczne zderzeń pierścieni wirowych dla przepływów lepkich są szczególnie interesujące ze względu na zachodzące wówczas zjawisko przełączania linii wirowych (zjawisko rekonekcji) [26, 55, 56]. Szczegółowy opis tego zjawiska jest przedstawiony w *rozdziale siódmym*.



Rys. 6.1. A) Czołowe zderzenie pierścieni wirowych; B) zderzenie dwóch pierścieni nachylonych początkowo pod kątem  $\phi$  do płaszczyzny kolizji.

W przypadku przepływów lepkich modelowane jest zderzenie pierścienia wirowego ze ścianką sztywną [76, 80] (rys. 6.2). Warunek zerowania się pola prędkości na ściance prowadzi do generacji wirowości. Powstają wówczas w przepływie nowe struktury wirowe, które oddziałują z pierścieniem powodując jego deformację i odbicie od ścianki [16, 41, 52].

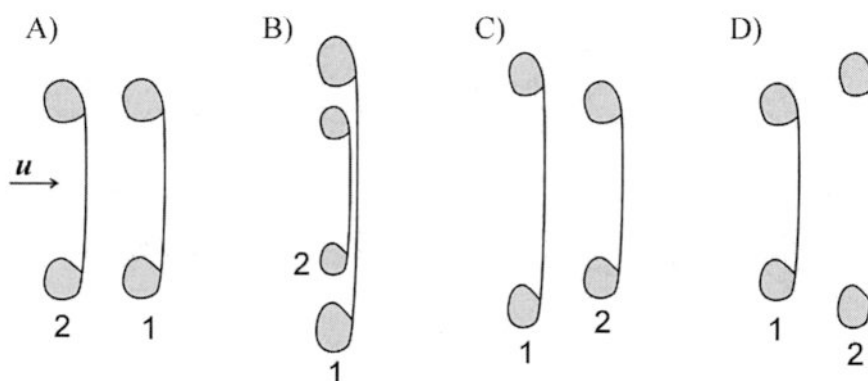


Rys. 6.2. A) Czołowe zderzenie pierścienia wirowego ze ścianką sztywną; B) zderzenie ze ścianką sztywną pierścienia wirowego nachylonego początkowo pod kątem  $\phi$ .

W niniejszym rozdziale przedstawiono dynamikę oddziaływania dwóch pierścieni wirowych poruszających się w tym samym kierunku dla przepływów nielepkich. Przedstawiono wpływ warunków początkowych tj. wzajemnego położenia pierścieni wirowych oraz ich parametrów geometrycznych, na dynamikę układu oraz końcową postać struktur wirowych.

## 6.1 Zjawisko „gry wirów”

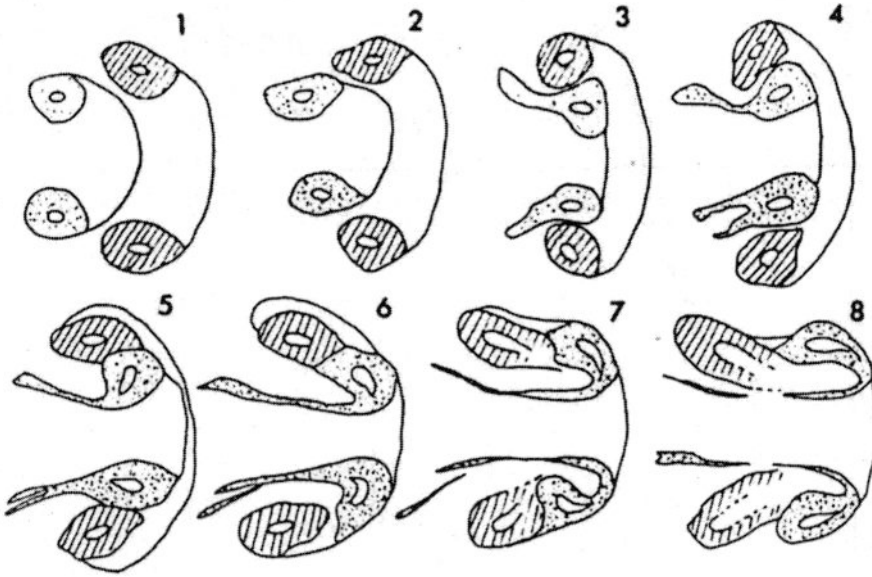
Zjawisko „gry wirów” polega na wzajemnym przeciąganiu się pierścieni wirowych poruszających się w tym samym kierunku zadłuż wspólnej osi symetrii. Schematycznie zjawisko zostało przedstawione na rysunku 6.3. Układ początkowy dwóch pierścieni wirowych został przedstawiony na rys. 6.3A. Wygenerowane przez pierścienie pole prędkości jest takie, że pierścień nr 2, znajdujący się z tyłu w stosunku do kierunku ruchu, ulega kontrakcji i przyspiesza doganiając pierścień nr 1. W tym czasie pierwszy pierścień jest spowalniany i rozciągany, co powoduje powiększenie jego średnicy (rys. 6.3B). W rezultacie drugi pierścień przechodzi przez pierwszy (rys. 6.3C). W wyniku przejścia oba pierścienie zamieniły się kolejnością i cykl może się powtórzyć (rys. 6.3D).



Rys. 6.3. Dynamika dwóch pierścieni wirowych odtwarzająca zjawisko „gry wirów”.

Zjawisko „gry wirów” jest spektakularne i stanowi dobry test na poprawność zastosowanego algorytmu obliczeniowego, gdyż zachodzi jedynie w wąskim zakresie parametrów geometrycznych i położeń początkowych pierścieni wirowych. Saffman w [69] podawał je jako ciekawostkę, dobrze znaną z opracowań teoretycznych, ale bardzo trudną do odtworzenia zarówno eksperymentalnie jak i numerycznie. Dopiero w eksperymentalnych pracach: Maxworthy’ego [45] i Oshimy *et al.* [57] przedstawiono próby odtworzenia tego zjawiska, a Yamada *et al.* [81], zaprezentował przekonujące wyniki potwierdzające odtworzenie „gry wirów” (rys. 6.4). Przykład modelowania numerycznego zjawiska został przedstawiony w pracach: Riley’a i Stevensa [64] i Shariffa *et al.* [72]. Riley rozwiązywał równania ruchu Naviera–Stokesa metodą różnic skończonych na siatce numerycznej w cylindrycznym układzie

współrzędnych, zakładając symetrię kołową układu, co pozwalało zredukować zagadnienie do dwóch wymiarów. Shariff modelował oddziaływania pierścieni metodą dynamiki konturu. W literaturze nie spotkałem się z żadną pracą przedstawiającą zjawisko „gry wirów” modelowane metodami w pełni trójwymiarowymi.

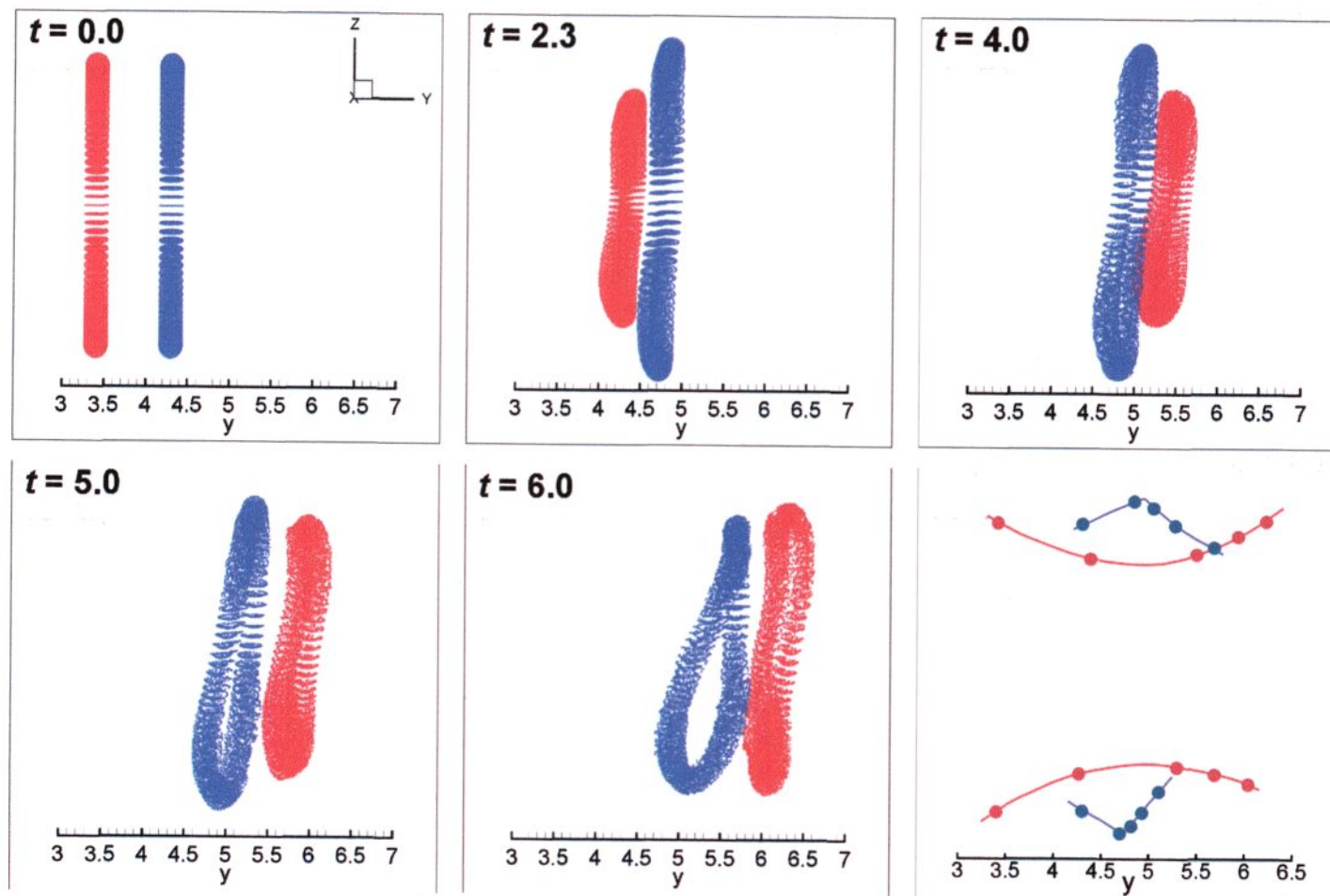


Rys. 6.4. Schematycznie przedstawione zjawisko „gry wirów” uzyskane przez Yamadę *et al.* w pracy [81].

W niniejszej pracy zjawisko „gry wirów” odtworzono dla parametrów pierścieni odpowiednio:  $\varepsilon_1 = 0.15$ ,  $R_1 = 1.5$ ,  $\Gamma_1 = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 0.15$ ,  $R_2 = 1.5$ ,  $\Gamma_2 = 1.0$  oraz dla położeń początkowych:  $X_1 = (5.0, 4.3, 5.0)$ ,  $X_2 = (5.0, 3.4, 5.0)$ . Każdy z pierścieni wirowych aproksymowany był zbiorem 12100 cząstek wirowych (rozkład cząstek był taki sam jak w przypadku pojedynczego pierścienia wirowego omawianego w rozdziale piątym).

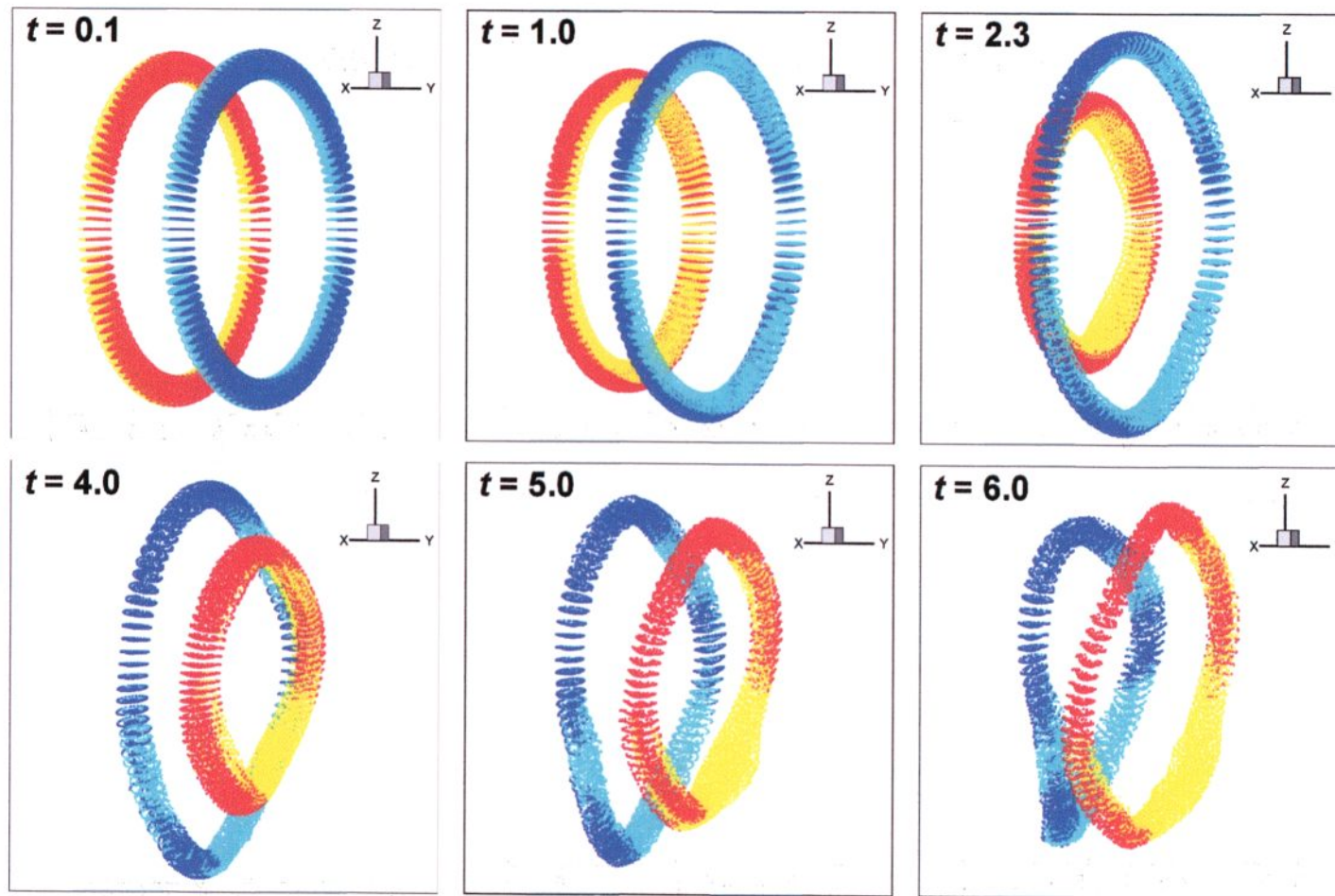
Yamada *et al.* w pracy [81] zwracają uwagę, że do prawidłowego odtworzenia zjawiska potrzebne jest spełnienie warunku  $\varepsilon/R \ll 1$ . Warunek ten gwarantuje, że w trakcie przeciągania się pierścieni nie następuje za silna deformacja rozkładów wirowości wewnątrz ich rdzeni. W prezentowanym przypadku stosunek wynosił  $\varepsilon/R = 0.1$ , co zapewniło prawidłowe odtworzenie jednego pełnego cyklu „gry wirów”.

Na rysunku 6.5 przedstawiono sekwencję położenia układu dwóch pierścieni wirowych w wybranych krokach czasowych w rzucie z boku. Dodatkowo na rysunku przedstawiono trajektorie zakreślone przez środki przekroji pierścieni leżących w płaszczyźnie  $yz$  przechodzącej przez oś symetrii układu. Na trajektoriach zaznaczono punktami położenia przekrojów dla chwil  $t = 0.0, 2.3, 4.0, 5.0, 6.0$ . Daje to możliwość prześledzenia zmian wzajemnego położenia pierścieni w trakcie ruchu. Z prezentowanych diagramów widać jak, na skutek wzajemnego oddziaływania, następuje deformacja pierścieni (co jest szczególnie widoczne dla  $t = 6.0$ ) i w efekcie ich połączenie. Powodem deformacji pierścieni może być nierównomierny rozkład w ich wnętrzu cząstek o jednakowej intensywności w trakcie ewolucji układu. Na rysunku 6.6 przedstawiono rozkład cząstek o intensywnościach mniejszych (kolor niebieski i żółty) i większych (kolor granatowy i czerwony) w stosunku do intensywności średnich:  $\alpha_{sr(1)}$  i  $\alpha_{sr(2)}$ . Intensywności średnie obliczano w każdym kroku czasowym ze wzoru  $\alpha_{sr}(t) = \sum_i |\alpha_i(t)|/N$ , osobno dla każdego pierścienia wirowego. Barwienie cząstek na na celu prześledzenie efektu rozciągania w trakcie ewolucji układu. Na początku ewolucji ( $t = 0.1$ ) cząstki o intensywności większej niż średnia pojawiają się na obwodzie pierścieni po wewnętrznej ich stronie, a następnie przemieszczają się po obwodzie. W trakcie przeciągania się drugiego pierścienia ( $t = 2.3, 4.0$ ) cząstki o podwyższonej wartości intensywności występują na zewnętrznej stronie pierścieni. Taki rozkład może prowadzić do lokalnego wzrostu wartości pola prędkości, co w efekcie może przyczyniać się do deformacji pierścieni. Nierównomierny rozkład cząstek wirowych o różnej intensywności jest wyraźnie widoczny dla czasów  $t = 5.0, 6.0$ , gdy pierścienie są zniekształcone. Ewolucję pola wirowości można prześledzić na rysunkach 6.7 i 6.8. W górnej części rysunku 6.7 przedstawiono kształt pierścieni wirowych uzyskany po redystrybucji wirowości cząstek na węzły siatki numerycznej. W dolnej części przedstawiono rozkład składowej  $\omega_z$  pola wirowości na płaszczyźnie  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii pierścieni. Można zauważyć, że w trakcie ewolucji kształty przekroji pozostają w przybliżeniu kołowe (co wyraźnie widać na rysunku 6.8), ale zmienia się wartość wirowości w przekrojach. Jest to widoczne w dolnej sekwencji rysunku 6.7 dla  $t = 2.5$  i  $t = 4.0$ , gdzie wartość wirowości w przekroju rozciąganego pierścienia wzrosła, a w przekroju pierścienia przeciąganego zmalała.

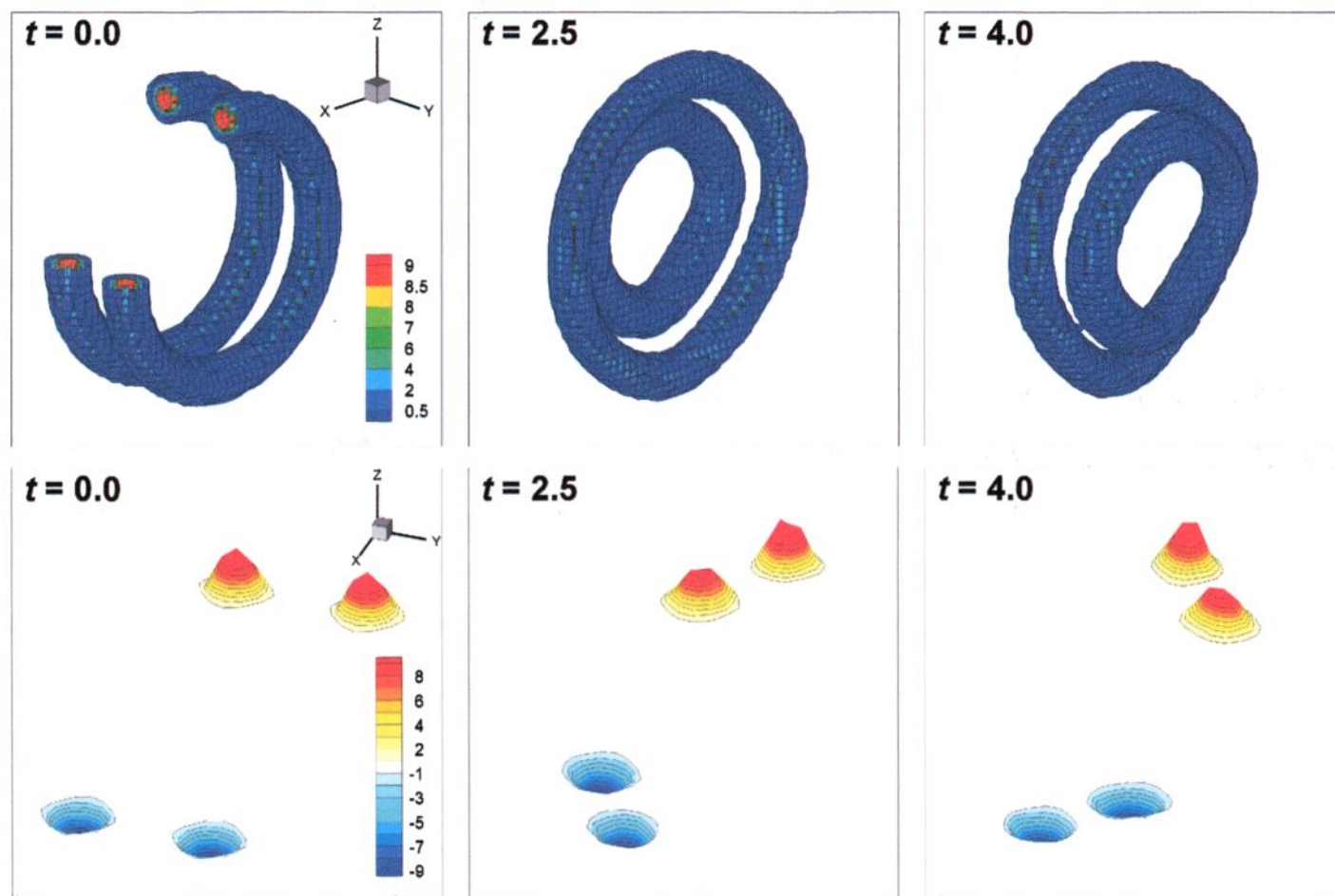


Rys. 6.5. Sekwencja położenia układu dwóch pierścieni wirowych w wybranych krokach czasowych – zjawisko „gry wirów” (widok z boku); dodatkowo przedstawiono trajektorie zakresłone przez przekroje pierścieni w płaszczyźnie  $yz$  przechodzącej przez oś symetrii układu; punktami zaznaczono położenia przekrojów dla  $t = 0.0, 2.3, 4.0, 5.0, 6.0$ .



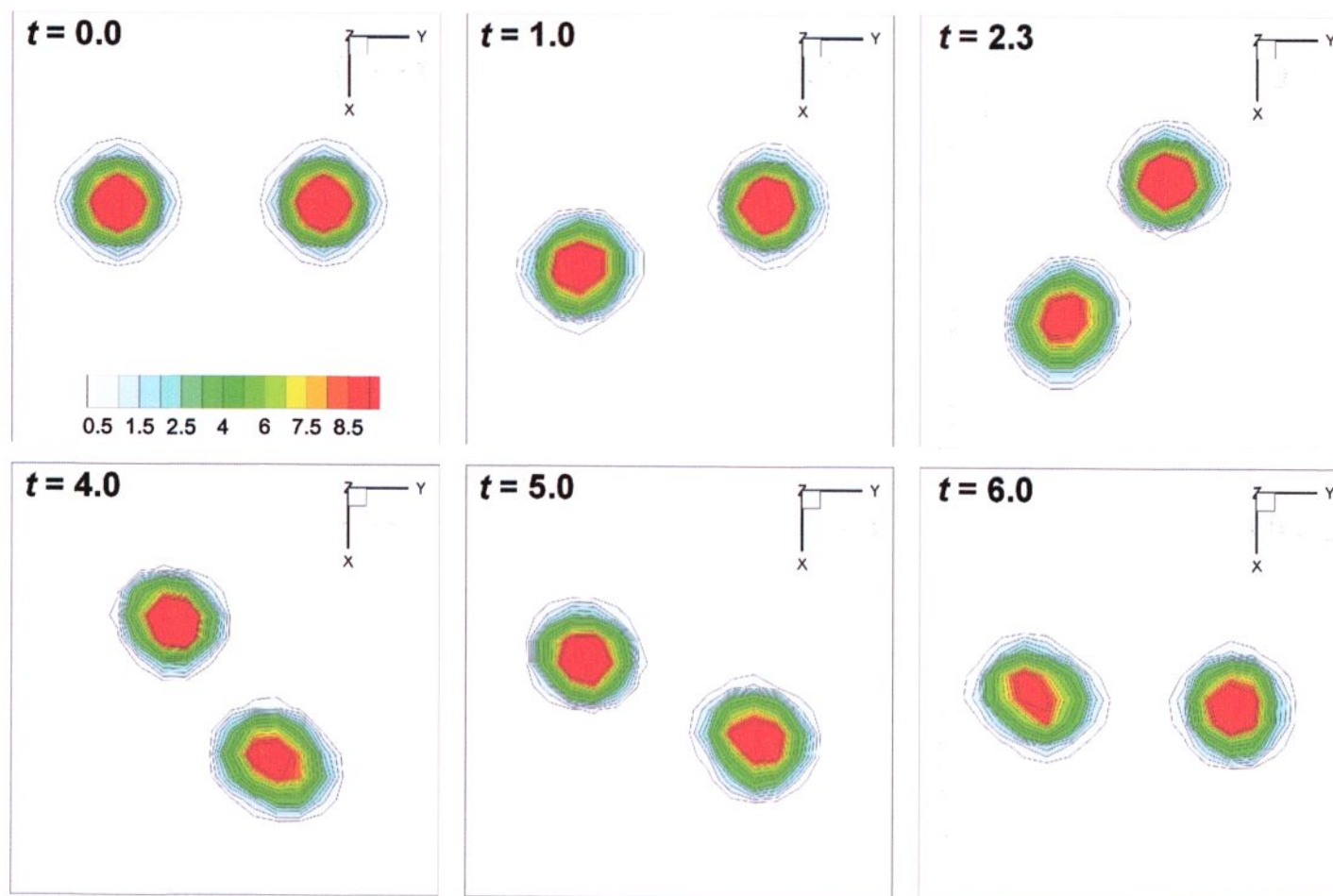


Rys. 6.6. Sekwencja położenia układu dwóch pierścieni wirowych w wybranych krokach czasowych – zjawisko „gry wirów”; kolorem granatowym i czerwonym zaznaczono cząstki o intensywności większej od  $\alpha_{gr}$ ; kolorem niebieskim i żółtym – cząstki o intensywności mniejszej od  $\alpha_{gr}$ .



Rys. 6.7. Rozkład pola wirowości w przepływie w wybranych chwilach czasu oraz rozkład składowej  $\omega_z$  pola wirowości na płaszczyźnie  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii pierścieni dla zjawiska „gry wirów”.





Rys. 6.8. Sekwencja rozkładów wirowości w płaszczyźnie  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii układu dla zjawiska „gry wirów”. Na rysunkach przedstawiono tylko przekroje pierścieni leżące powyżej osi.

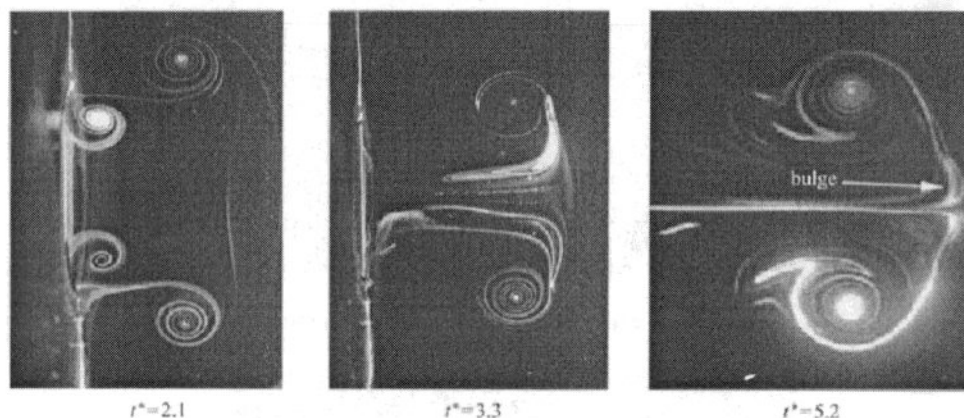
Zmiany w trakcie obliczeń wartości początkowych energii kinetycznej:  $T_1 = 4.53$  i  $T_2 = 4.69$  nie były większe niż  $\sim 3\%$ . Początkowa wartość entropii  $E_0 = 77.8$  zwiększyła się po czasie  $t = 6.0$  o  $\sim 5\%$ . Skrętność  $\mathcal{H}_0$  pozostawała cały czas na poziomie  $\sim 10^{-5}$ . Całki ze składowych wirowości  $I_i$  pozostawały w trakcie obliczeń w przedziale wartości  $(10^{-5}, 10^{-2})$ . Dywergencje z pól: potencjału wektorowego i wirowości pozostawały na poziomie  $\sim 10^{-3}$ , zaś bezźródłowość pola prędkości była zachowana z dokładnością  $\sim 10^{-6}$ .

## 6.2 Zjawisko nawijania się wirów

Oshima *et al.* w pracy [57] przedstawia trzy możliwe scenariusze oddziaływania dwóch pierścieni wirowych poruszających się wzdłuż wspólnej osi symetrii (pomijając omówione zjawisko „gry wirów”). Przebieg ewolucji układu zależy od początkowych prędkości translacji pierścieni:

1. Oba pierścienie mają zbliżoną prędkość translacji lub pierwszy pierścień (znajdujący się z przodu względem kierunku ruchu) ma znacznie większą prędkość  $U_1 \gtrsim U_2$ . Nie dochodzi wówczas do interakcji i oba pierścienie poruszają się osobno.
2. Drugi pierścień ma większą prędkość od pierwszego, ale mniejszą od pewnej wartości krytycznej  $U_1 < U_2 < U_{kr}$ . Wówczas, w trakcie ewolucji, pierścień będący z tyłu przechodzi przez pierścień będący z przodu i nawija się na niego. W efekcie powstaje jeden pierścień wirowy o zwartym rdzeniu (pierwszy pierścień) i otoczce wirowej powstałej z drugiego pierścienia. Wizualizacja dynamiki nawijania się pierścieni wirowych jest przedstawiona na rysunku 6.9. Zdjęcie zaczerpnięto z pracy Allena i Auvity’a [2], w której autorzy badali oddziaływanie pierścienia wygenerowanego przez ruch tłka z pierścieniem wtórnym, powstałym na krawędzi dyszy po przejściu głównego pierścienia.
3. Drugi pierścień ma prędkość większą zarówno od pierwszego pierścienia jak również od pewnej wartości krytycznej  $U_1 < U_{kr} < U_2$ . Wówczas drugi pierścień ma wystarczającą prędkość by przejść przez pierwszy pierścień i wyprzedzić go. Potem pierwszy pierścień, będący teraz z tyłu, dogania drugi i przechodząc przez niego nawija się. Inaczej jednak, niż w drugim przypadku, nawinięcie nie jest całkowite i część wirowo-

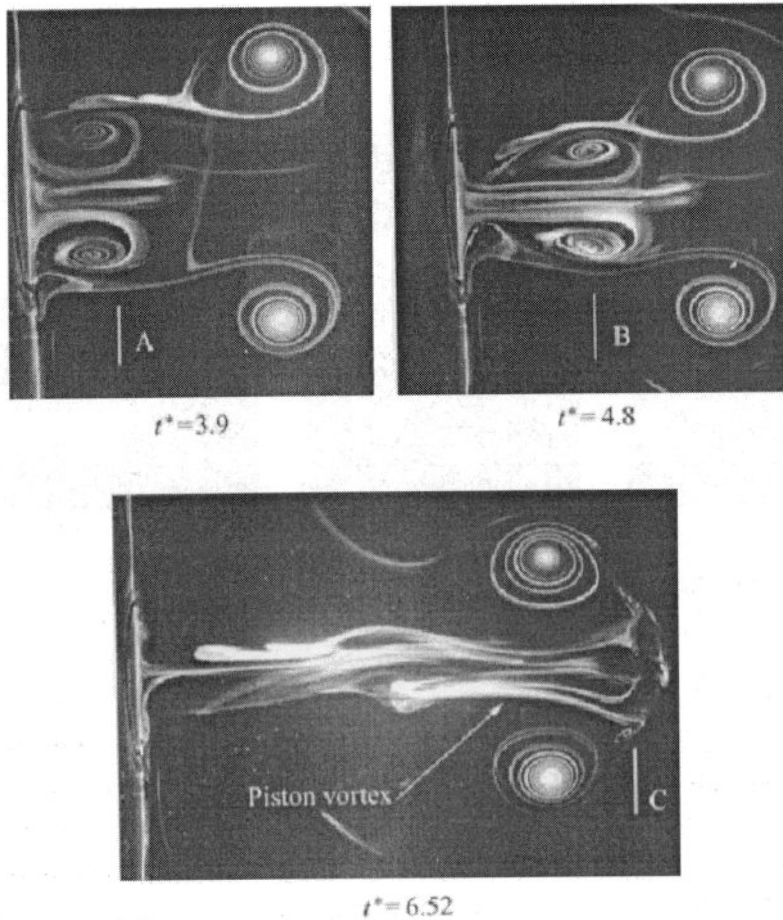
ści pierwszego pierścienia pozostaje z tyłu tworząc charakterystyczny „ogon wirowy”.



Rys. 6.9. Wizualizacja oddziaływania pierścienia wirowego z pierścieniem wtórnym – zjawisko nawijania się pierścieni. Zdjęcie zaczerpnięte z pracy Allena i Auvity’a [2].

Należy zwrócić uwagę, że „ogon wirowy” powstaje również w przypadku, gdy w układzie dwóch pierścieni generowane jest takie pole prędkości, że drugi pierścień jest rozciągany zanim zdola przeciągnąć się przez pierścień będący z przodu. W tym wypadku również obserwuje się powstanie jednego, wypadkowego pierścienia z ciągnącym się za nim obszarem wirowym. Przykładową wizualizację takiej dynamiki pierścieni wirowych przedstawiono na rysunku 6.10. Po wygenerowaniu przez ruch tłoka pierścienia głównego, powstaje za nim pierścień wtórny. Oba pierścienie poruszają się wzdłuż wspólnej osi symetrii i, w wyniku wzajemnego oddziaływania, drugi (wtórny) pierścień jest nawijany na pierwszy. Jednak w trakcie przeciągania, pierścień jest rozrywany i pozostawia za sobą część wirowości, która tworzy wspomniany „ogon”. Zdjęcie zaczerpnięte z pracy Allena i Auvity’a [2].

Wprowadzony przez Oshimę *et al.* podział jest wygodny ze względów eksperymentalnych, bowiem relatywnie łatwo jest zmierzyć prędkości translacji poszczególnych pierścieni. Podobny podział można również wprowadzić rozpatrując parametry geometryczne i intensywności pierścieni wirowych, gdyż w jednoznaczny sposób określają one prędkość pierścienia. Takie podejście umożliwiłoby określenie zakresu zmienności np. intensywności pierścieni dla poszczególnych scenariuszy oddziaływania układu.



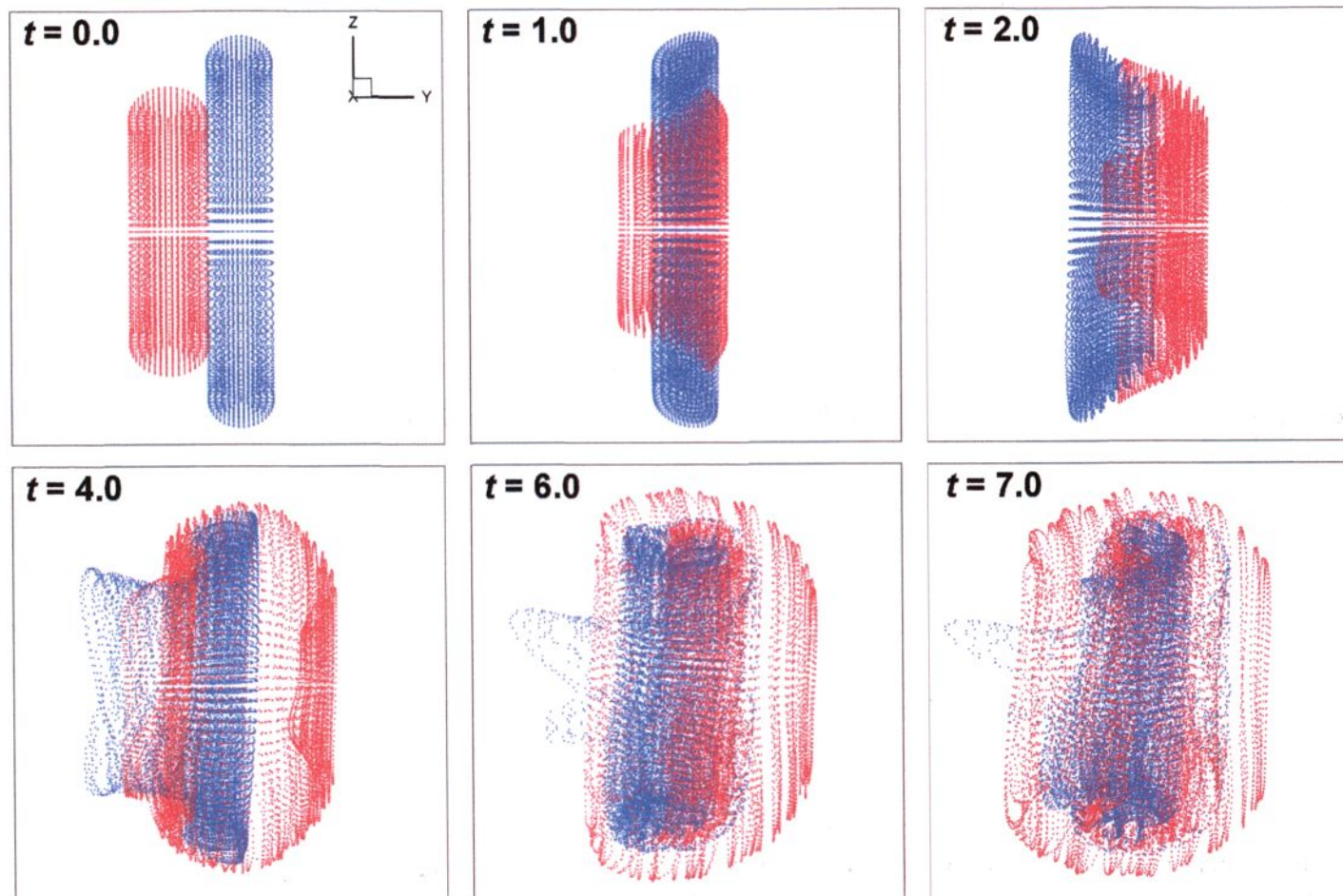
Rys. 6.10. Wizualizacja oddziaływania pierścienia wirowego z pierścieniem wtórnym – zjawisko nawijania się pierścieni z powstawaniem „ogona wirowego”. Zdjęcie zaczerpnięte z pracy Allena i Auvity’a [2].

W niniejszej pracy zjawisko nawijania się pierścieni wirowych odtworzono dla parametrów pierścieni odpowiednio:  $\varepsilon_1 = 0.25$ ,  $R_1 = 1.5$ ,  $\Gamma_1 = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 0.3$ ,  $R_2 = 1.0$ ,  $\Gamma_2 = 1.0$  oraz dla położenia początkowych:  $X_1 = (5.0, 4.0, 5.0)$ ,  $X_2 = (5.0, 3.5, 5.0)$ . Każdy z pierścieni wirowych aproksymowany był zbiorem 12100 cząstek wirowych (rozkład cząstek był taki sam jak w przypadku pojedynczego pierścienia wirowego omawianego w *rozdziale piątym*).

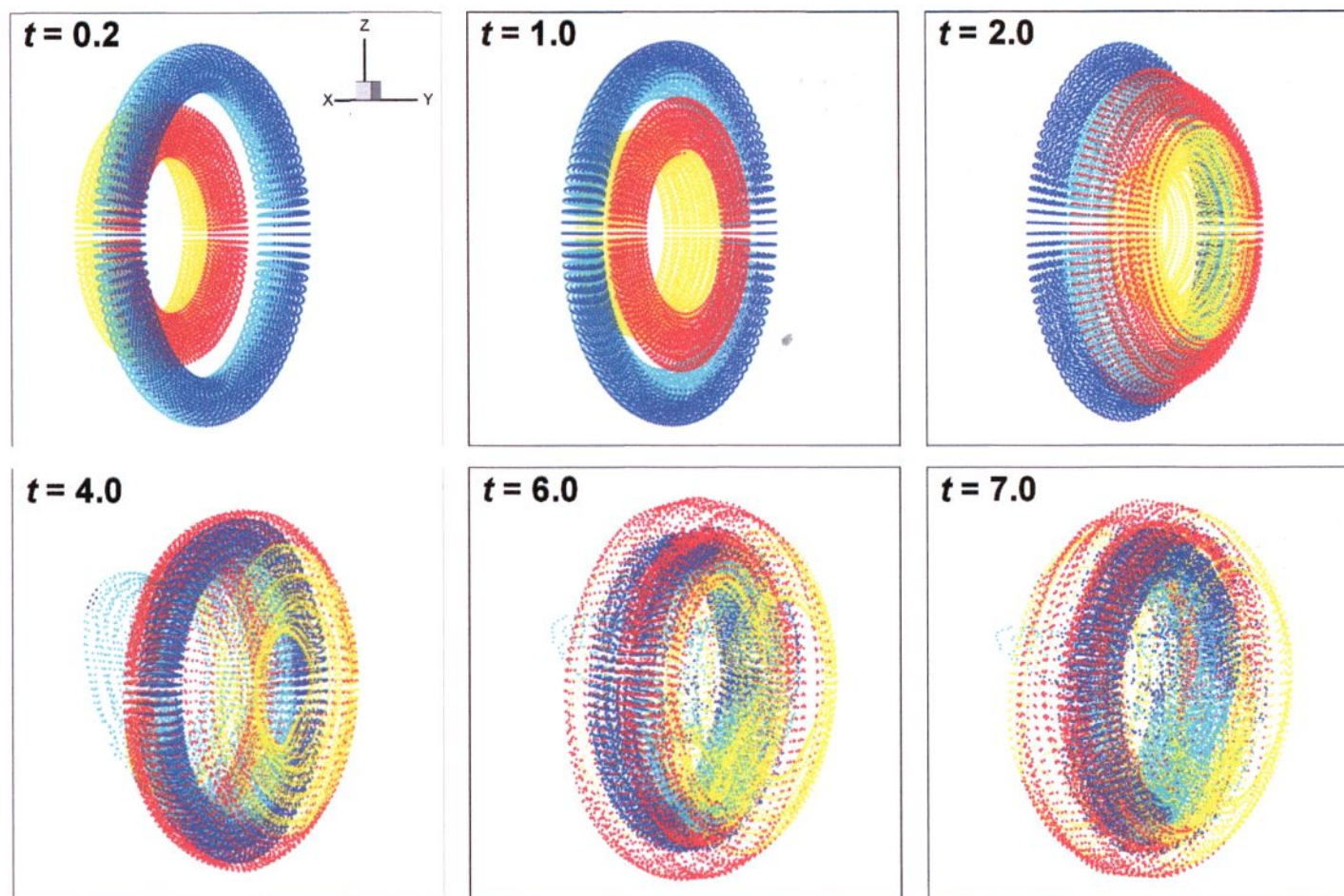
Na rysunku 6.11 przedstawiono sekwencję położenia pierścieni w wybranych chwilach czasu w rzucie z boku. Drugi pierścień, przechodząc przez partnera, zaczyna się na niego nawijać ( $t = 2.0$ ,  $t = 4.0$ ). Proces nawijania zaburza również pierwszy pierścień i dopiero po  $t = 6.0$  powstaje struktura wirowa,

której rdzeń stanowi pierwszy pierścień, a atmosferę wirową tworzą resztki przeciągniętego pierścienia. Nowopowstały pierścień jest trwały, co potwierdza diagram dla  $t = 7.0$ . Rysunek 6.12 przedstawia rozkład cząstek wirowych o intensywnościach mniejszych (kolor niebieski i żółty) i większych (kolor granatowy i czerwony) w stosunku do intensywności średnich:  $\alpha_{sr(1)}$  i  $\alpha_{sr(2)}$ . Intensywności średnie obliczano podobnie jak dla przypadku „gry wirów”. Na początku ewolucji ( $t = 0.2$ ) cząstki o intensywności większej niż średnia intensywności pojawiają się na obwodzie pierścieni po wewnętrznej ich stronie, a następnie przemieszczają się po obwodzie. W trakcie ewolucji, jako pierwsze przeciągane są cząstki o podwyższonej wartości intensywności ( $t = 1.0$ ). Cząstki te są następnie nawijane na pierwszy pierścień, zaś cząstki o podwyższonej intensywności pierwszego pierścienia przesuwają się w tym czasie po obwodzie ( $t = 2.0$ ). Na diagramie dla  $t = 4.0$  można zauważyć, że rdzeń nowo powstałego pierścienia stanowią cząstki o podwyższonej intensywności, pochodzące od pierwszego pierścienia. Za pierścieniem powstaje niewielki „ogon wirowy” z cząstek o obniżonej intensywności, pochodzących z pierwszego pierścienia ( $t = 4.0$ ), cząstki te jednak zostają wchłonięte przez atmosferę wirową w trakcie dalszej ewolucji ( $t = 6.0$ ,  $t = 7.0$ ). Ewolucję pola wirowości można prześledzić na rysunkach 6.13 i 6.14. W górnej części rysunku 6.13 przedstawiono kształt pierścieni wirowych uzyskany po redystrybucji wirowości cząstek na węzły siatki numerycznej. Dodatkowo przy prezentacji kształtów pierścieni wirowych usunięto ich górną ćwiartkę w celu lepszego wglądu w dynamikę układu. W dolnej części przedstawiono rozkład składowej  $\omega_z$  pola wirowości na płaszczyźnie  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii pierścieni. Dla  $t = 2.0$  widać proces łączenia się pierścieni z rozróżnialnymi jeszcze środkami obu pierścieni. Diagramy dla  $t = 7.0$  przedstawiają rozkład wirowości nowo powstałej struktury wirowej, widoczna jest również słaba atmosfera wirowa wokół skoncentrowanej w rdzeniu wirowości. Rysunek 6.14 umożliwia prześledzenie zmian rozkładu składowej  $\omega_z$  w płaszczyźnie  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii układu w trakcie procesu nawijania się pierścieni wirowych. Zmiany w trakcie obliczeń wartości początkowych  $T_1 = 3.08$  i  $T_2 = 3.13$  nie były większe niż  $\sim 3\%$ . Początkowa wartość entropii  $E_0 = 26.2$  zmniejszyła się po czasie  $t = 7.0$  o  $\sim 16\%$ . Skrętność  $\mathcal{H}_0$  pozostawała cały czas na poziomie  $\sim 10^{-5}$ . Całki ze składowych wirowości  $I_i$  pozostawały w trakcie obliczeń w przedziale wartości  $(10^{-5}, 10^{-2})$ . Dywergencje z pól: potencjału wektorowego i wirowości pozostawały na poziomie  $\sim 10^{-2}$ , zaś bezźródłowość pola prędkości była zachowana z dokładnością  $\sim 10^{-6}$ .

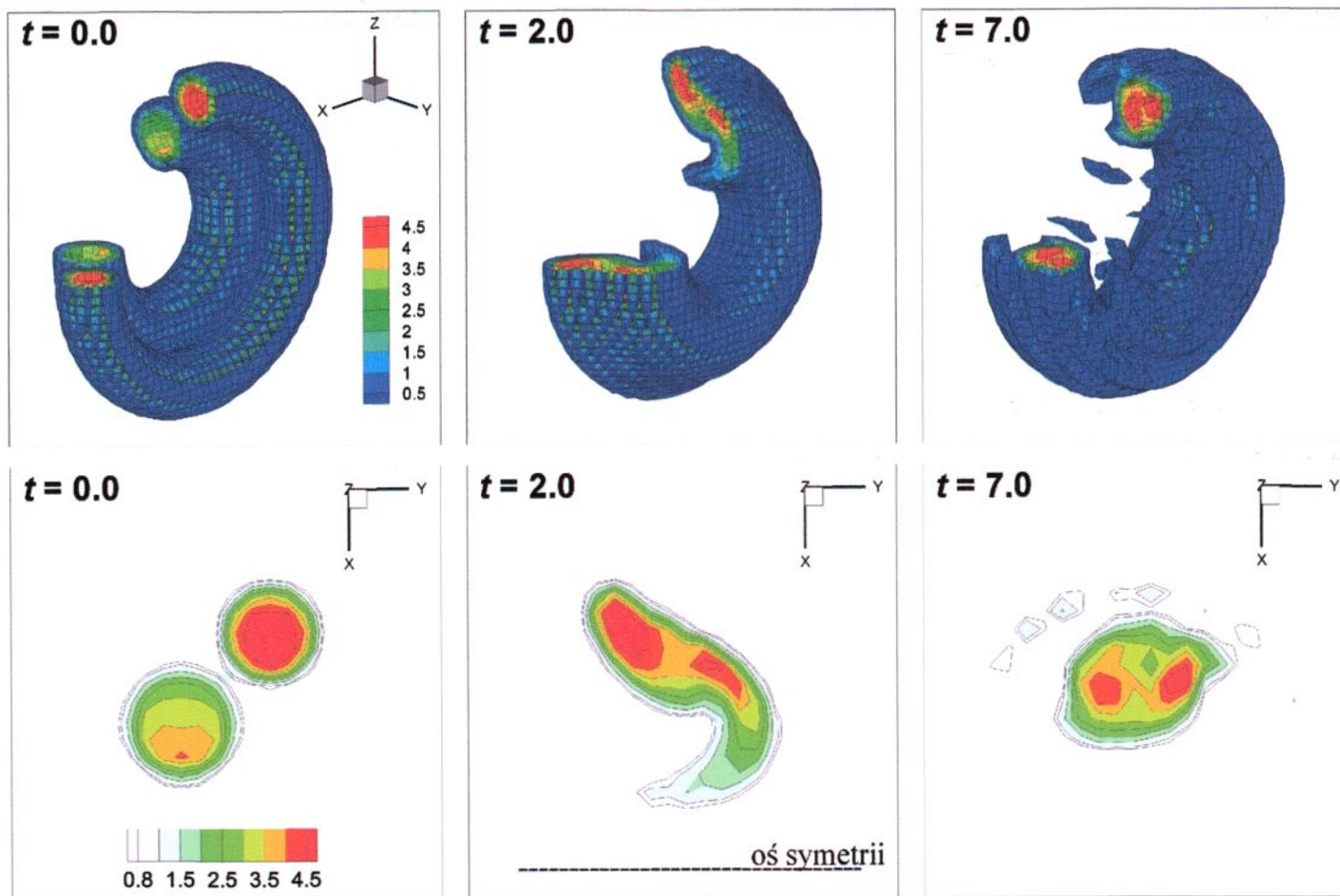




Rys. 6.11. Sekwencja położenia pierścieni podczas odtwarzania zjawiska nawijania się pierścieni wirowych (widok z boku).

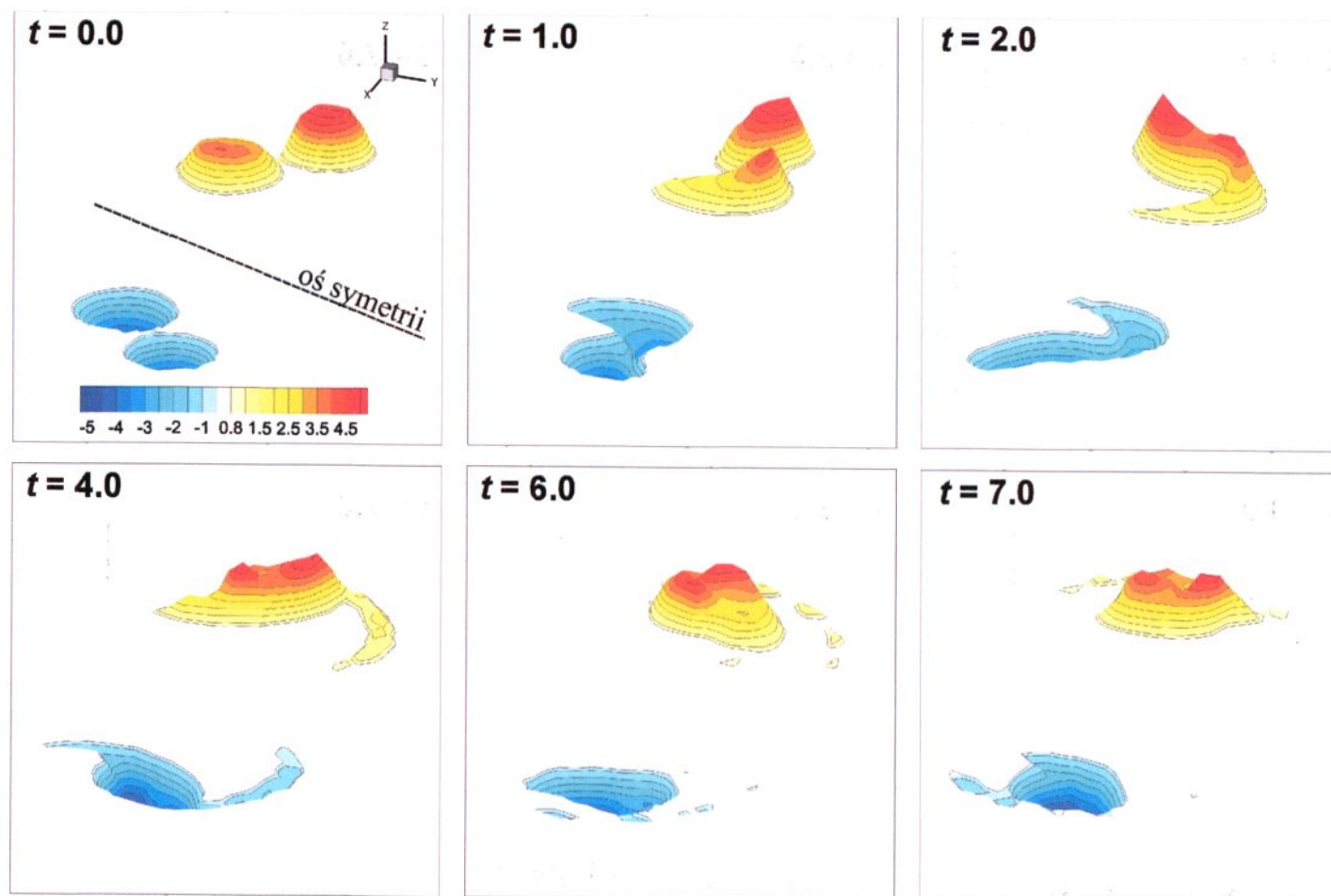


Rys. 6.12. Sekwencja położenia układu dwóch pierścieni wirowych w wybranych krokach czasowych – zjawisko nawijania się pierścieni; kolorem granatowym i czerwonym zaznaczono cząstki o intensywności większej od  $\alpha_{gr}$ ; kolorem niebieskim i żółtym – cząstki o intensywności mniejszej od  $\alpha_{gr}$ .



Rys. 6.13. Rozkład pola wirowości w przepływie w wybranych chwilach czasu oraz rozkład składowej  $\omega_z$  pola wirowości na płaszczyźnie  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii pierścieni dla zjawiska nawijania się pierścieni wirowych.





Rys. 6.14. Sekwencja rozkładów wirowości w płaszczyźnie  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii układu dla zjawiska nawijania się pierścieni wirowych.

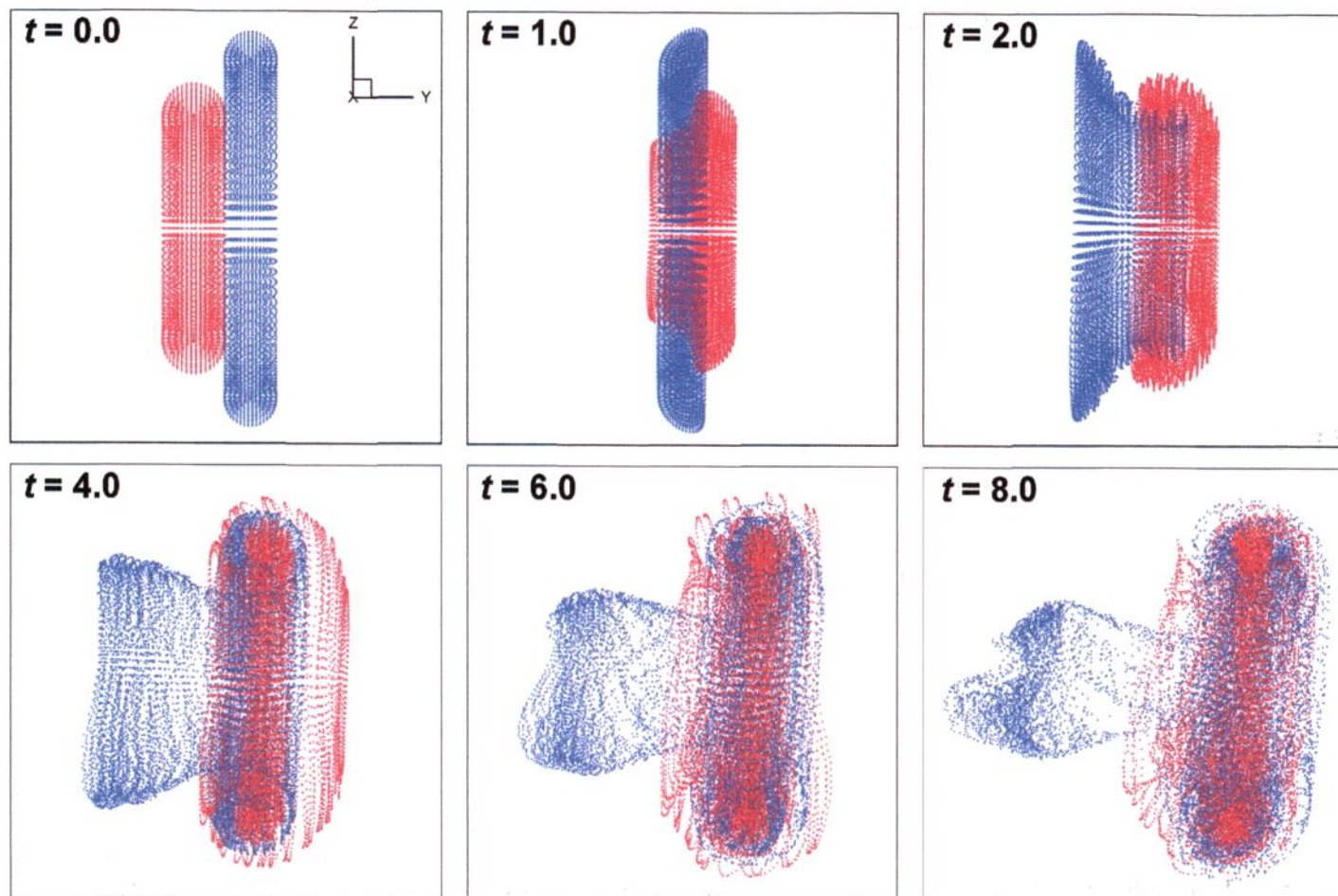
### 6.3 Zjawisko nawijania się pary pierścieni z wytworzeniem „ogona wirowego”

Modelowanie zjawiska nawijania się wirów z wytworzeniem „ogona wirowego”, uwidacznia jak wrażliwy jest układ pierścieni na zadane warunki początkowe. Obliczenia zostały powtórzone z położeniami początkowymi pierścieni jak w przykładzie nawijania się pierścieni wirowych, lecz zmieniono cyrkulację drugiego pierścienia  $\Gamma_2$ . Dane początkowe wynoszą odpowiednio:  $\varepsilon_1 = 0.25$ ,  $R_1 = 1.5$ ,  $\Gamma_1 = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 0.3$ ,  $R_2 = 1.0$ ,  $\Gamma_2 = 1.5$  dla położen początkowych odpowiednio:  $X_1 = (5.0, 4.0, 5.0)$ ,  $X_2 = (5.0, 3.5, 5.0)$ . Rysunek 6.15 przedstawia sekwencję położen pierścieni podczas odtwarzania zjawiska łączenia się pierścieni wirowych z wytworzeniem „ogona wirowego” w rzucie z boku. Inaczej niż w poprzednim przypadku nawijania się pierścieni wirowych, teraz to drugi pierścień, po przejściu przez towarzysza stanowi rdzeń nowo powstającej struktury (diagram dla  $t = 2.0$ ), a rozciągnięty, pierwszy pierścień zaczyna owijać się wokół niego. Część pierwszego pierścienia pozostaje jednak z tyłu i tworzy niewielki obszar wirowy za nową strukturą, co widać na diagramach dla  $t = 4.0$ ,  $t = 6.0$ . Powstała struktura jest trwała i nie zmienia już swojego kształtu, co można wywnioskować porównując diagramy dla  $t = 6.0$  i  $t = 8.0$ . Rysunek 6.16 przedstawia rozkład cząstek wirowych o intensywnościach mniejszych (kolor niebieski i żółty) i większych (kolor granatowy i czerwony) w stosunku do intensywności średnich:  $\alpha_{sr(1)}$  i  $\alpha_{sr(2)}$ . Intensywności średnie obliczano podobnie jak dla przypadku „gry wirów”. Na początku ewolucji ( $t = 0.2$ ), podobnie jak dla zjawiska nawijania się pierścieni wirowych, cząstki o intensywności większej niż średnia pojawiają się na obwodzie pierścieni po wewnętrznej ich stronie i przemieszczają się po obwodzie. W trakcie ewolucji, jako pierwsze przeciągane są cząstki o podwyższonej wartości intensywności ( $t = 1.0$ ), a w pierwszym pierścieniu cząstki o podwyższonej intensywności są zlokalizowane po jego zewnętrznej stronie. Po przejściu drugiego pierścienia zaczynają się proces nawijania na niego cząstek z pierwszego pierścienia i tworzenia „atmosfery wirowej” wokół dobrze zlokalizowanego rdzenia. Jednak, co ciekawe, cząstki o podwyższonej intensywności pochodzące z pierścienia pierwszego znajdują się w obszarze formowania ogona wirowego ( $t = 2.0$ ,  $t = 4.0$ ). Dopiero po uformowaniu się nowej struktury, intensywność cząstek znajdujących się w ogonie maleje, tworząc niewielki ślad wirowy ( $t = 6.0$ ,  $t = 8.0$ ).

Ewolucję pola wirowości można prześledzić na rysunkach 6.17 i 6.18. Na

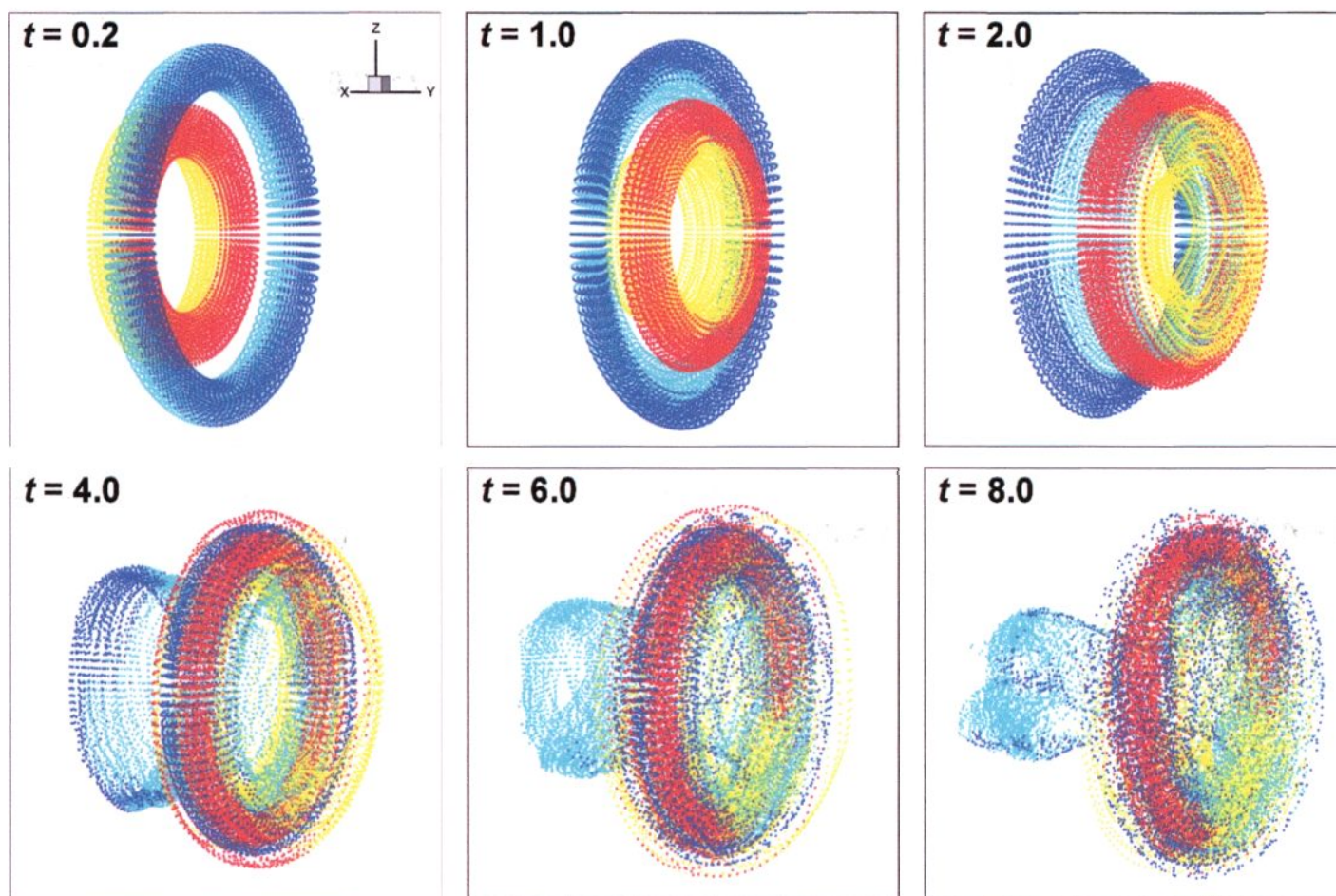
górnych diagramach rysunku 6.17 przedstawiono kształt pola wirowości uzyskany po redystrybucji wirowości cząstek na węzły siatki numerycznej. Dodatkowo przy prezentacji kształtów pierścieni wirowych usunięto ich górną ćwiartkę w celu lepszego wglądu w dynamikę układu. Na dolnych diagramach przedstawiono rozkład składowej  $\omega_z$  pola wirowości w górnej części płaszczyzny  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii pierścieni. Dla  $t = 2.0$  widać proces łączenia się pierścieni z rozróżnialnymi jeszcze środkami obu pierścieni, choć już dominuje drugi pierścień. Diagram dla  $t = 6.0$  przedstawia rozkład wirowości nowo powstałej struktury wirowej, widoczna jest słaba atmosfera wirowa i pozostający z tyłu obszar – „ogon wirowy”. „Ogon” na postać rozciągniętego, małego pierścienia wirowego o niewielkiej wartości pola wirowości. Rysunek 6.18 umożliwia prześledzenie zmian rozkładu składowej  $\omega_z$  w płaszczyźnie  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii układu w trakcie procesu łączenia się pierścieni wirowych.

Zmiany w trakcie obliczeń wartości początkowych  $T_1 = 4.42$  i  $T_2 = 4.49$  nie były większe niż  $\sim 7\%$ . Początkowa wartość entropii  $E_0 = 36.8$  wzrosła po czasie  $t = 8.0$  o  $\sim 17\%$ . Skrętność  $\mathcal{H}_0$  pozostawała cały czas na poziomie  $\sim 10^{-5}$ . Całki ze składowych wirowości  $I_i$  pozostawały w trakcie obliczeń w przedziale wartości  $(10^{-5}, 10^{-2})$ . Dywergencje z pól: potencjału wektorowego i wirowości pozostawały na poziomie  $\sim 10^{-2}$ , zaś bezźródłowość pola prędkości była zachowana z dokładnością  $\sim 10^{-6}$ .

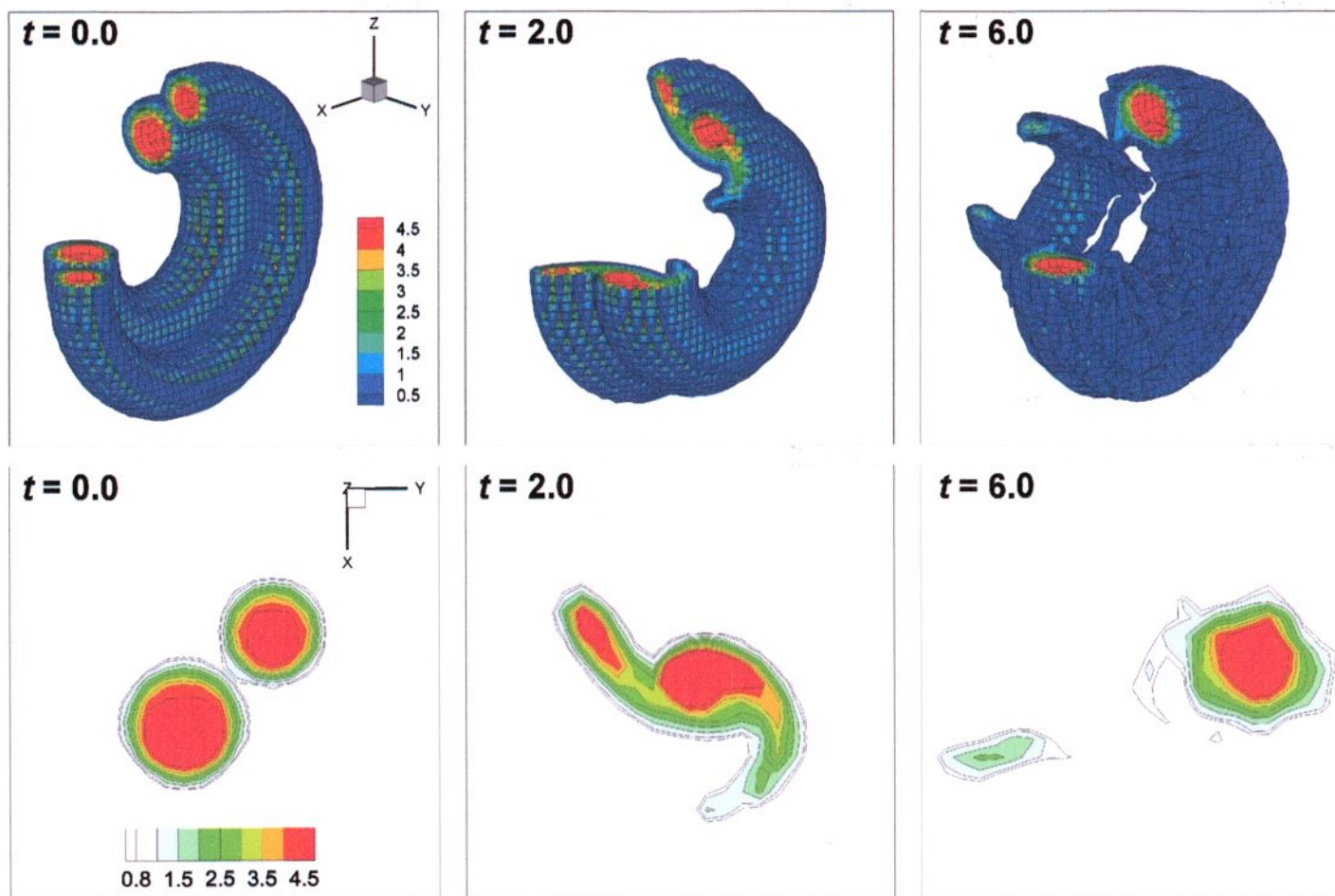


Rys. 6.15. Sekwencja położenia pierścieni podczas odtwarzania zjawiska nawijania się pierścieni wirowych z wytworzeniem „ogona wirowego” (widok z boku).

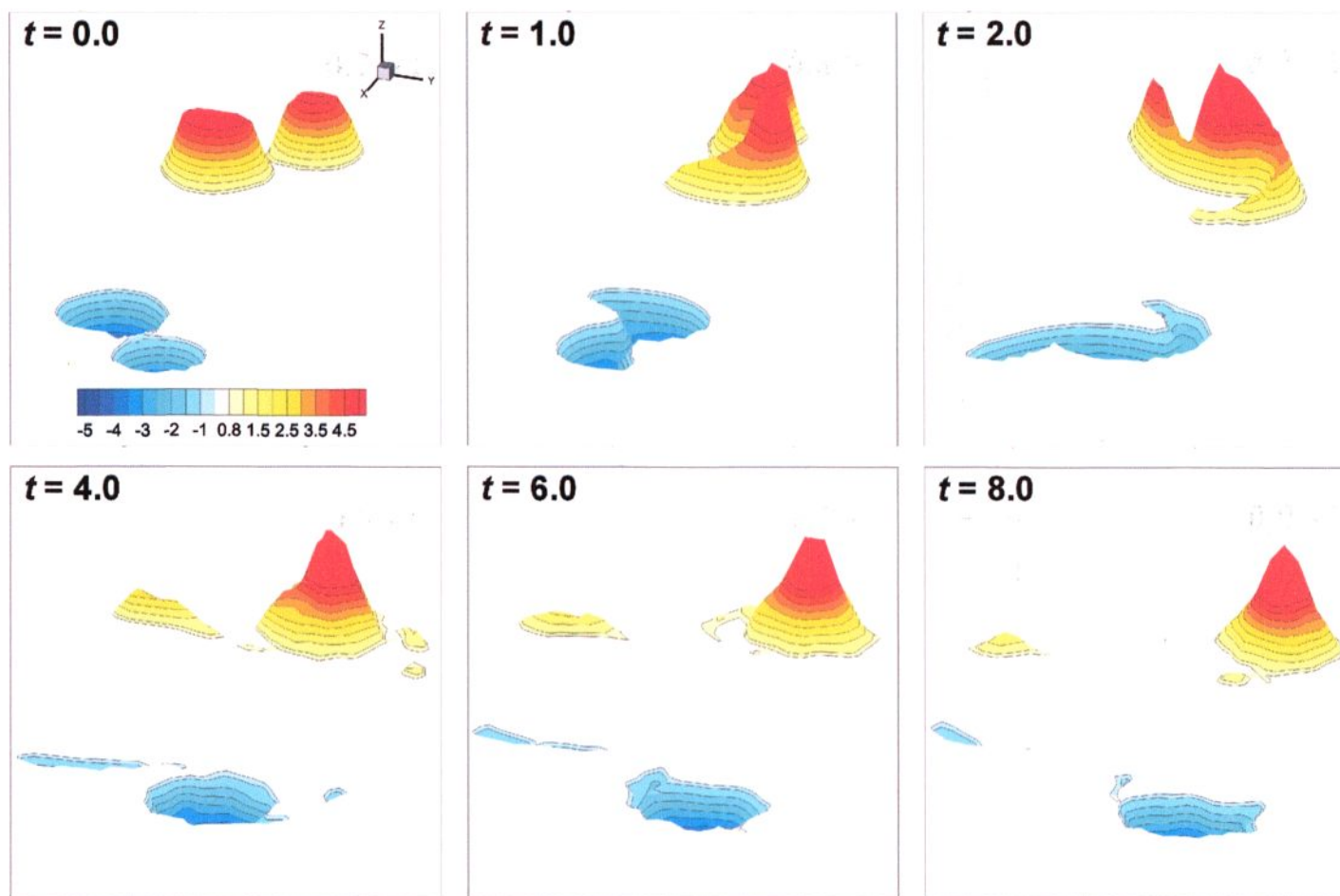




Rys. 6.16. Sekwencja położenia układu dwóch pierścieni wirowych w wybranych krokach czasowych – zjawisko nawijania się wirów z wytworzeniem „ogona wirowego”; kolorem granatowym i czerwonym zaznaczono cząstki o intensywności większej od  $\alpha_{gr}$ ; kolorem niebieskim i żółtym – cząstki o intensywności mniejszej od  $\alpha_{gr}$ .



Rys. 6.17. Rozkład pola wirowości w przepływie w wybranych chwilach czasu oraz rozkład składowej  $\omega_z$  pola wirowości na płaszczyźnie  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii pierścieni dla zjawiska nawijania się wirów z wytworzeniem „ogona wirowego”.



Rys. 6.18. Sekwencja rozkładów wirowości w płaszczyźnie  $xy$  przechodzącej przez oś symetrii układu dla zjawiska nawijania się pierścieni wirowych z wytworzeniem „ogona wirowego”.



## 6.4 Nielepkie zderzenie dwóch pierścieni

Modelowanie zderzenia dwóch pierścieni wirowych jest dobrym testem na sprawdzenie, czy użyty algorytm numeryczny nie wprowadza do obliczeń niezamierzonej lepkości numerycznej. Wiadomo bowiem, że w przepływach nielepkich nie może dojść do rozerwania linii wirowych (rozdz. 1). Dla przepływów płynów lepkich, podczas zderzenia pierścieni, może zajść zjawisko przełączenia (rekonekcji) linii wirowych i wówczas dwa pierścienie mogą połączyć się i utworzyć pojedynczy pierścień wirowy [26, 73] (rozdz. 7).

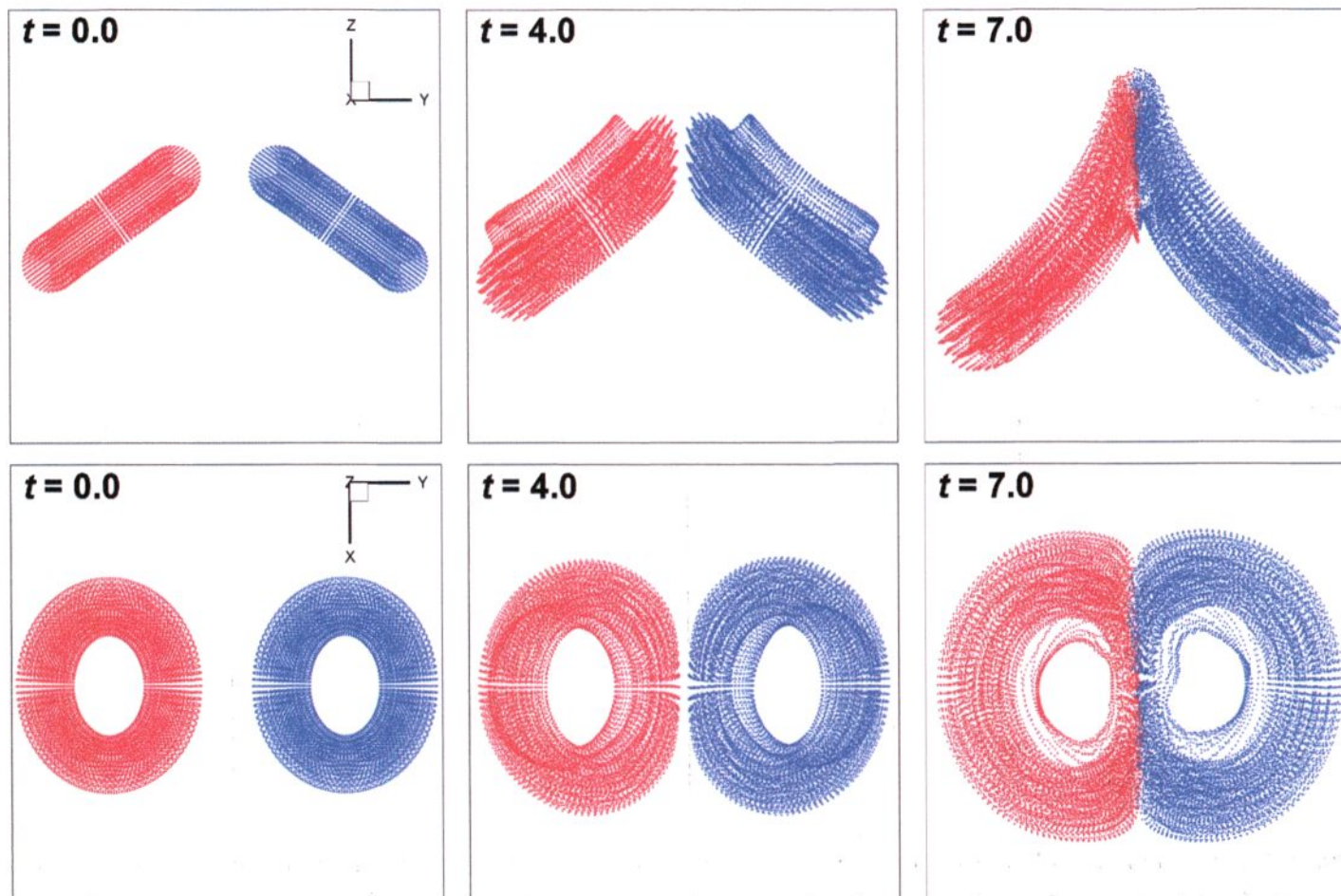
Parametry początkowe zderzających się pierścieni wirowych wynoszą odpowiednio:  $\varepsilon_1 = 0.4$ ,  $R_1 = 1.0$ ,  $\Gamma_1 = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 0.4$ ,  $R_2 = 1.0$ ,  $\Gamma_2 = 1.0$  dla położenia początkowego odpowiednio:  $X_1 = (5.0, 3.5, 6.0)$ ,  $X_2 = (5.0, 6.5, 6.0)$ . Kąt odchylenia od pionu pierścieni wynosił  $\phi = 54^\circ$  (rys. 6.1B).

Rysunek 6.19 przedstawia sekwencję położenia układu podczas zderzenia pierścieni w rzucie z góry i z boku. Diagramy są przeskalowane, aby przedstawić jak najwięcej szczegółów dynamiki pierścieni. Można prześledzić, jak pierścienie zbliżają się do siebie zachowując symetrię zwierciadlaną układu ( $t = 4.0$ ). Z teorii przepływów płynów nielepkich wynika, że pierścienie mogą się ze sobą co najwyżej zlepić, ale ich cząstki nie mogą się przemieszczać. Na diagramie  $t = 7.0$  widać jak obszar styku pierścieni zaczyna się deformować, starając się zachować prawa przepływu nielepkiego. Nieuwzględnienie w przepływie lepkości powoduje, że w obszarze kontaktu obu pierścieni szybko wzrasta wartość pola wirowości i rozwiązanie w tym miejscu eksploduje. Dzieje się to z powodu dużych gradientów prędkości w tym obszarze i dużego wkładu do ewolucji wirowości członu źródłowego. Rysunek 6.20 w górnej części przedstawia rozkład cząstek wirowych o intensywnościach mniejszych (kolor niebieski i żółty) i większych (kolor granatowy i czerwony) w stosunku do intensywności średnich:  $\alpha_{sr(1)}$  i  $\alpha_{sr(2)}$ . Intensywności średnie obliczano podobnie jak dla przypadku „gry wirów”. Na początku ewolucji ( $t = 0.5$ ) cząstki o większej niż średnia intensywności pojawiają się na obwodzie pierścieni po wewnętrznej ich stronie i przemieszczają się po obwodzie. W trakcie ewolucji cząstki o podwyższonej intensywności gromadzą się w obszarze zderzenia ( $t = 4.0$ ,  $t = 7.0$ ), gdzie pierścienie stają się coraz cieńsze i zdeformowane. Można to prześledzić na rozkładzie cząstek w przekrojach przedstawionych na dolnych diagramach rysunku 6.20.

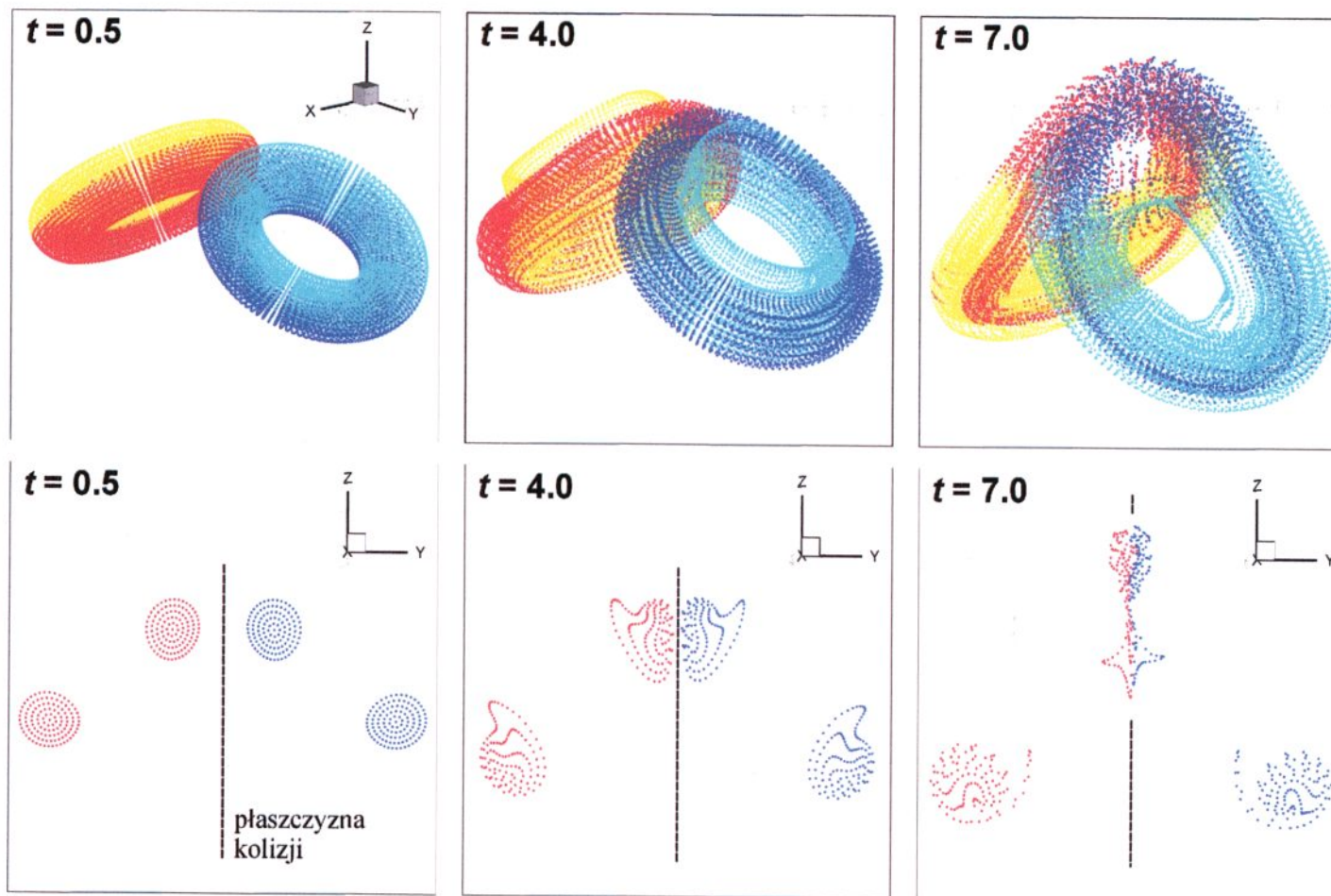
Ewolucję pola wirowości można prześledzić na rysunku 6.21. Na górnych diagramach przedstawiono kształt pola wirowości uzyskany po redystrybucji

wirowości cząstek na węzły siatki numerycznej. Dodatkowo w celu lepszego wglądu w dynamikę pola wirowości dla  $t = 4.0$  i  $t = 7.0$ , wycięto ćwiartkę pierścienia. Na dolnych diagramach przedstawiono rozkład składowej  $\omega_x$  pola wirowości na płaszczyźnie  $yz$  przechodzącej przez oś symetrii pierścieni. Dla  $t = 4.0$  widać proces sklejania się pierścieni, których kształty są jeszcze dobrze rozróżnialne. Na diagramie dla  $t = 7.0$  rozróżnienie pierścieni w obszarze zderzenia jest już bardzo trudne.

Wartości początkowe  $T_1 = 1.11$  i  $T_2 = 1.14$  wzrosły o  $\sim 4.5\%$  na końcu obliczeń. Początkowa wartość entropii  $E_0 = 10.1$  wzrosła gwałtownie dla  $t = 7.0$  do wartości  $E = 14.2$ . Skretność z wartości początkowej  $\mathcal{H}_0 = 10^{-6}$  wzrosła do  $\mathcal{H} \approx 0.1$ . Całki ze składowych wirowości  $I_i$  pozostawały w trakcie obliczeń w przedziale wartości  $(10^{-3}, 10^{-1})$ . Dywergencje z pól: potencjału wektorowego i wirowości pozostawały w przedziale wartości  $(10^{-3}, 10^{-1})$ , zaś bezźródłowość pola prędkości była zachowana z dokładnością  $\sim 10^{-6}$ .

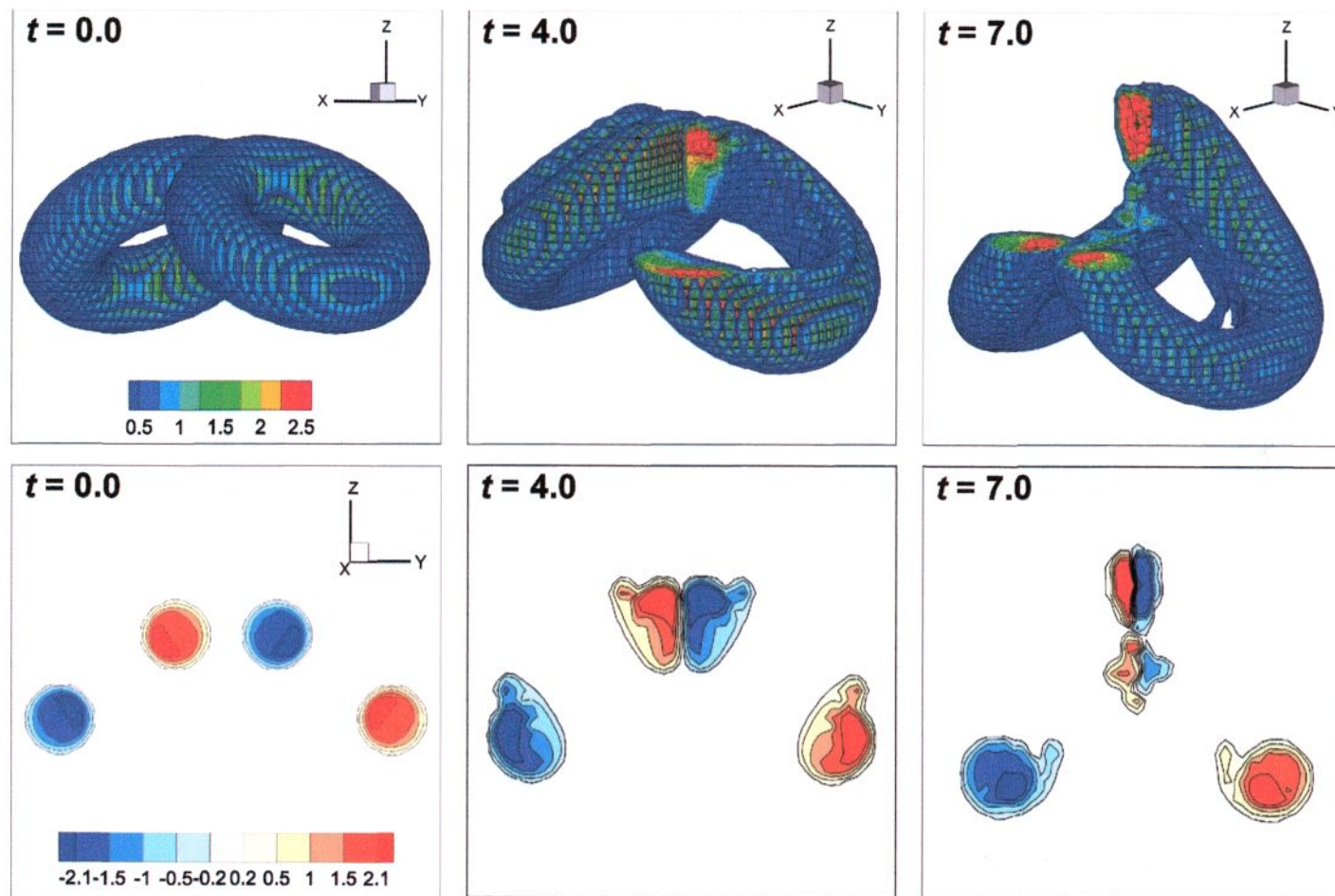


Rys. 6.19. Sekwencja położenia pierścieni podczas nielepkiego zderzenia się dwóch pierścieni wirowych. Diagramy górne przedstawiają widok z boku; dolne – widok z góry).



Rys. 6.20. Sekwencja położenia układu dwóch pierścieni wirowych w wybranych krokach czasowych – zderzenie pierścieni wirowych; na górnych diagramach zaznaczono kolorem granatowym i czerwonym cząstki o intensywności większej od  $\alpha_{sr}$ , zaś kolorem niebieskim i żółtym – cząstki o intensywności mniejszej od  $\alpha_{sr}$ ; na dolnych diagramach przedstawiono dynamikę cząstek leżących w płaszczyźnie  $yz$  przechodzącej przez środki pierścieni.





Rys. 6.21. Rozkład pola wirowości w przepływie w wybranych chwilach czasu (dla lepszej czytelności dynamiki układu wycięto część pola wirowości) oraz rozkład składowej  $\omega_x$  pola wirowości na płaszczyźnie  $yz$  przechodzącej przez środki pierścieni.

## Rozdział 7

# Modelowanie przepływów płynów lepkich

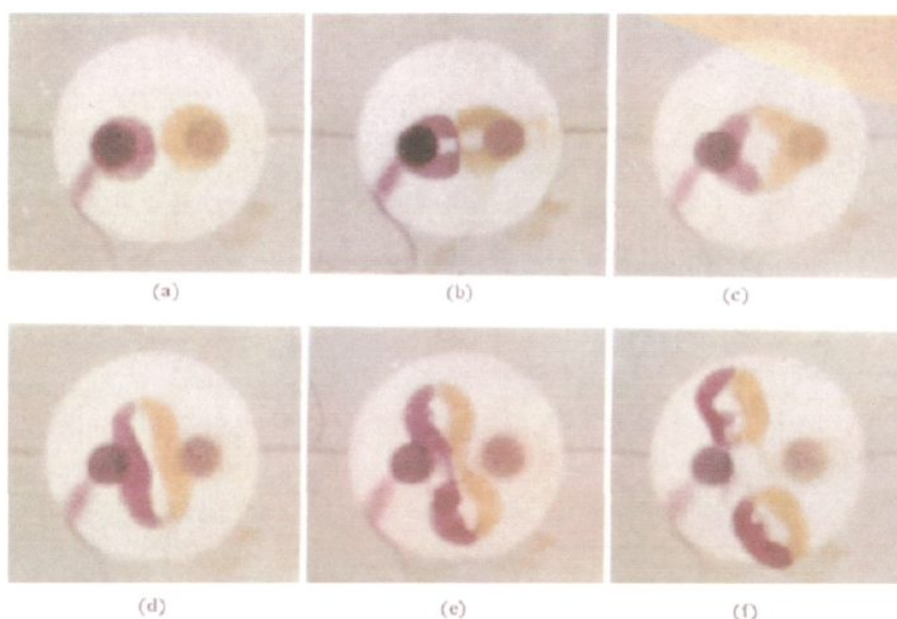
W modelowaniu trójwymiarowych przepływów płynów lepkich lepkość ma podstawowy wpływ na powstawanie i ewolucję struktur wirowych. Szczególnie interesujące, ze względu na swoją prostotę, jest zjawisko przełączania linii wirowych (zjawisko rekonekcji) polegające na zmianie topologii pola wirowości [4, 25, 67, 73, 83]. Zjawisko to demonstrowuje różnice pomiędzy przepływami nielepkimi i lepкими oraz odgrywa ważną rolę przy: zjawisku mieszania ośrodków, generowaniu turbulencji itp. [46]. W niniejszym rozdziale zamodelowano jeden z najprostszych eksperymentów, umożliwiając zaobserwowanie podstawowych mechanizmów rekonekcji, a mianowicie zderzenia dwóch pierścieni wirowych w przepływie lepkim [22, 24, 54, 70].

### 7.1 Zjawisko przełączania linii wirowych – rekonekcja

W przepływach nielepkich zgodnie z *drugim prawem Helmholtza* (podrozdz. 1.4) linie wirowe są unoszone w przepływie jak linie materialne. Oznacza to, że jeżeli wybrany element płynu zawierał na początku fragment nici wirowej to w trakcie przepływu, pomimo deformacji, fragment ów będzie zawsze składał się z tych samych cząstek cieczy. Z bezźródłowości pola wirowości wynika zaś, że, przy nieobecności w przepływie ścianek sztywnych, linie wirowe muszą tworzyć zamknięte pętle lub rozciągać się do nieskończoności. Z powyższego wynika, że proces rozrywania lub łączenia linii wirowych w prze-

pływach nielepkich jest niemożliwy. Dopiero obecność lepkości w przepływie powoduje, że linie wirowe mogą przełączać się między sobą, powodując zmianę topologii pola wirowości w przepływie (tzw. zjawisko rekonekcji). Kida *et al.* w pracach [25, 26] zwracają uwagę, że można wyróżnić trzy rodzaje rekonekcji: pasywnego skłara (*scalar reconnection*), rurek wirowych (*vorticity reconnection*) i powierzchni stałej wirowości (*vortex reconnection*).

Rekonekcja pasywnego skłara zachodzi podczas wizualizacji zjawiska dymem lub barwnikiem. Wówczas to wprowadzony do przepływu znacznik pozwala prześledzić proces przełączania się np. pierścieni wirowych (rys. 7.1).



Rys. 7.1. Wizualizacja zjawiska rekonekcji podczas zderzenia dwóch pierścieni wirowych (widok z góry; widoczne w tle ciemne otwory to generatory pierścieni). Dwa pierścienie wirowe zbliżają się do siebie tworząc strefę kontaktu (b). Następnie, w wyniku rekonekcji, powstaje jeden, wydłużony pierścień (c, d). Podczas dalszej ewolucji, w wyniku drugiej rekonekcji, pierścień dzieli się znów na dwa pierścienie (f). Pierścienie zostały zabarwione różnymi znacznikami w celu lepszej prezentacji zjawiska [54, 70].

Zwraca się jednak uwagę, że zawizualizowana w ten sposób dynamika przepływu nie musi oddawać dynamiki samego pola wirowości, gdyż równanie

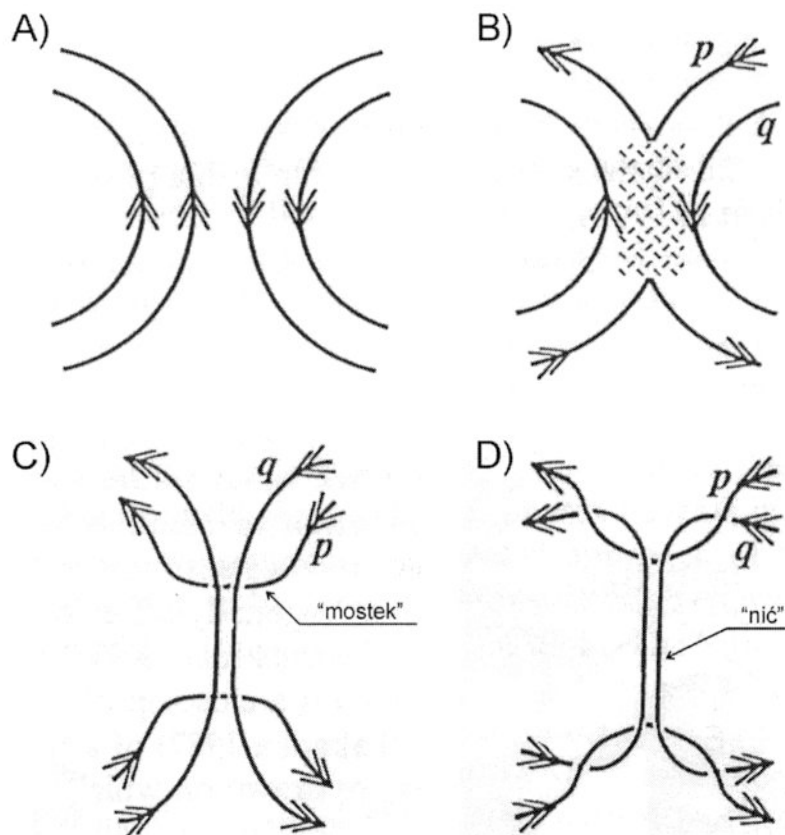


transportu pasywnego skalara  $S$  (wprowadzonego do przepływu znacznika):

$$\frac{DS}{Dt} = \kappa \Delta S \quad (7.1)$$

jest inne niż równanie transportu wirowości (nawet gdy  $\kappa = \nu$ ;  $\kappa$  — współczynnik dyfuzji znacznika). Rozbieżności te wymuszają ostrożność w interpretowaniu obserwacji eksperymentalnych i porównywaniu ich z wynikami numerycznymi.

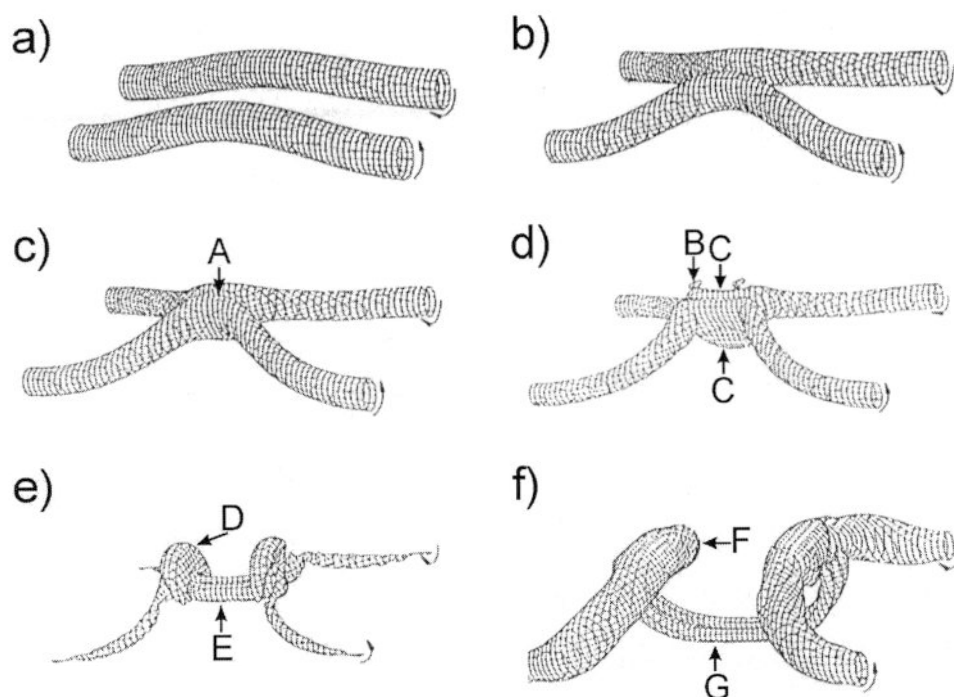
Rekonekcja rurek wirowych polega na zmianie topologii linii wirowych, a więc ich rozłączaniu i ponownym łączeniu. Przykładowy przebieg zjawiska rekonekcji linii wirowych o zbliżonych intensywnościach został przedstawiony na rys. 7.2.



Rys. 7.2. Przebieg procesu rekonekcji linii wirowych. Wyróżniono obszar, w którym wirowość zeruje się; podwójne strzałki określają kierunek pola wirowości [25].

W pierwszym etapie dwie rurki wirowe o przeciwnych cyrkulacjach zbliżają się do siebie tak jak w przepływie nielepkim (diagram A). Kiedy się do siebie

zbliza dostatecznie blisko powstaje obszar, w którym wirowości przeciwnych znaków znoszą się zapoczątkowując zjawisko rekonekcji (diagram B). Obszar ten jest ograniczony liniami wirowymi  $q$ , które nie ulegają rozłączeniu. Linie wirowe  $p$  uległy rozerwaniu i na brzegu obszaru rekonekcji połączyły się ze swoimi odpowiednikami w przeciwnej rurce wirowej (diagramy B i C). Przełączone linie  $p$  formują tzw. „mostek”, a proces ich przełączania nazywany jest „mostkowaniem” [25, 26]. Dodatkowo, na skutek wygenerowanego, skomplikowanego pola prędkości, linie wirowe  $p$  i  $q$  skracają się wokół siebie (diagram D). Nerozerwane linie  $q$ , nazywane „nici” [46], są wypychane z obszaru rekonekcji i mogą następnie również przejść proces przełączenia. Rekonekcja izopowierzchni wirowości polega na zmianie topologii powierzchni o stałych wartościach wirowości w obszarze przepływu. Przykładowy przebieg zjawiska rekonekcji dla powierzchni o stałej wartości wirowości został przedstawiony na rysunku 7.3.



Rys. 7.3. Przebieg zjawiska rekonekcji przedstawiony dla powierzchni o stałej wartości wirowości  $|\omega| = 10$  (na diagramie f)  $|\omega| = 5$ ) w kolejnych krokach czasowych. A – formowanie się strefy kontaktu; B – początek formowania się „mostka”; C – deformacja rdzenia rurek; D – „mostek”; E – początek formowania się „nici”; F – wpłni rozwinięty „mostek”; G – wpłni rozwinięte „nici”. [46].

Wyjściowy układ stanowią dwie równoległe rurki wirowe o przeciwnych cyrkulacjach przedstawione za pomocą powierzchni stałej wirowości  $|\omega| = \text{const}$  (rys. 7.3a). Pod wpływem wygenerowanego pola prędkości, rurki wirowe zbliżają się do siebie (rys. 7.3b), by w niewielkiej odległości wytworzyć strefę kontaktu (rys. 7.3c). Bliska odległość rurek powoduje dodatkowo deformację rozkładu wirowości w ich rdzeniach, co odtwarza się w zmianie kształtu powierzchni stałej wirowości. W strefie kontaktu zachodzi rekonekcja, co objawia się zmianą topologii pola wirowości i formowaniem się, na obrzeżach strefy, tzw. „mostków” (rys. 7.3d). W wyniku przełączenia powstaje nowy rozkład wirowości związany z powstaniem nowych rurek wirowych. W strefie kontaktu formują się wąskie obszary wirowe o przeciwnych cyrkulacjach zwane „nićmi” (rys. 7.3e), które następnie mogą ulec dalszej rekonekcji. Ostatecznie, w efekcie zajścia zjawiska rekonekcji, formuje się nowy rozkład pola wirowości przedstawiony na rys. 7.3f.

Przebieg zjawiska rekonekcji jest nieco inny, gdy rurki wirowe różnią się znacznie wartością intensywności. Wówczas to rurka wirowa o mniejszej intensywności owija się wokół drugiej czemu towarzyszy deformacja kształtów przekrojów obu rurek [83].

Prezentowane w literaturze prace eksperymentalne skupiają się na wizualizacji zjawiska rekonekcji zachodzącego przy: zderzeniu dwóch pierścieni wirowych (rys. 7.1) [54, 70], wzajemnym oddziaływaniu kilku pierścieni wirowych [55], czy deformacji eliptycznego pierścienia wirowego [23]. Prace numeryczne koncentrują się na modelowaniu zjawiska rekonekcji dla układu dwóch rurek wirowych ułożonych początkowo względem siebie anty-równoległe [46, 73] lub prostopadłe [83] oraz przy zderzeniu dwóch pierścieni wirowych [22, 24]. Prosta konfiguracja tych układów umożliwia ich łatwe zamodelowanie w programach numerycznych oraz pozwala na porównanie otrzymanych wyników z eksperymentem. Odtworzenie zjawiska rekonekcji stanowi również test poprawności zastosowanych algorytmów modelowania lepkości.

## 7.2 Algorytm dekompozycji lepkościowej

Przy modelowaniu przepływów lepkich metodami wirowymi stosuje się algorytm dekompozycji lepkościowej: w pierwszym etapie rozwiązuje się równanie Eulera dla cieczy nielepkiej, a następnie uwzględnia człon dyfuzyjny. W celu linearyzacji członu konwekcyjnego i członu źródłowego, związanego z rozciąganiem linii wirowych, zakłada się, że pole prędkości w przepływie nie

zmienia się w czasie całego kroku czasowego. Niech  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  będzie polem prędkości wygenerowanym w  $n$ -tym kroku czasowym  $t^n = n \Delta t$ . Wówczas równanie transportu wirowości (1.13) można schematycznie zapisać w postaci [12]:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \mathcal{A}\omega + \mathcal{B}\omega, \\ -(\mathbf{c} \cdot \nabla)(\omega) + (\nabla \mathbf{c}) \cdot (\omega) &\rightarrow \mathcal{A}, \quad \nu \Delta(\omega) \rightarrow \mathcal{B}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

gdzie  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  – odpowiednio: operator związany z unoszeniem i rozciąganiem pola wirowości oraz operator dyfuzji. Całkując powyższe równanie na przedziale  $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$  z warunkiem początkowym  $\omega(n\Delta t) = \omega^n$  otrzymujemy rozwiązanie w formie operatorowej:

$$\omega^{n+1} = e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})\Delta t} \omega^n. \quad (7.3)$$

W algorytmie dekompozycji lepkościowej równanie (7.2) rozwiązywane jest w dwóch krokach:

- w pierwszym kroku rozwiązuje się równanie Eulera dla cieczy nielepkiej:

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{A}\omega \quad (7.4)$$

z warunkiem początkowym  $\omega^n$ . Rozwiązanie ma postać:

$$\omega^{n+\frac{1}{2}} = e^{\mathcal{A}\Delta t} \omega^n. \quad (7.5)$$

- Następnie rozwiązywane jest równanie dyfuzji z warunkiem początkowym  $\omega^{n+\frac{1}{2}}$ :

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{B}\omega. \quad (7.6)$$

W efekcie otrzymujemy rozwiązanie dla  $\omega^{n+1}$ :

$$\omega^{n+1} = e^{\mathcal{B}\Delta t} \omega^{n+\frac{1}{2}} = (e^{\mathcal{B}\Delta t} e^{\mathcal{A}\Delta t}) \omega^n. \quad (7.7)$$

Rozwijając w szereg Taylora operator  $e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})\Delta t}$  wokół  $\Delta t$  otrzymujemy:

$$e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})\Delta t} = e^{\mathcal{A}\Delta t} e^{\mathcal{B}\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (7.8)$$

gdyż, w ogólności, operatory  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  nie komutują,  $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$ . Zatem metoda dekompozycji lepkościowej jest w każdym kroku czasowym algorytmem rzędu drugiego, ale na całym przedziale  $[0, t]$ , rozważając  $N$  kroków czasowych  $\Delta t$ , jest rzędu  $\mathcal{O}(\Delta t)$ .

Algorytm metody „wir w komórce”, przedstawiony w podrozdz. 4.3, został zmodyfikowany w celu uwzględnienia członu dyfuzyjnego:

- W pierwszy kroku modelowano unoszenie i zmianę intensywności cząstek w przepływie nielepkim:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t), \quad p = 1, \dots, N, \\ \frac{d\alpha_p}{dt} &= [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t)] \cdot \alpha_p.\end{aligned}\tag{7.9}$$

- Następnie, w nowych położeniach i z nowymi intensywnościami cząstek, modelowano zjawisko dyfuzji ( $\nu$  – kinematyczny współczynnik lepkości):

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} &= 0, \\ \frac{d\alpha_p}{dt} &= \nu \Delta \alpha(\mathbf{x}_p).\end{aligned}\tag{7.10}$$

W przepływach dwuwymiarowych człon lepkościowy modeluje się metodami: stochastycznymi (metoda przypadkowego błędzenia) lub deterministycznymi (metoda prędkości dyfuzyjnej, metoda wymiany intensywności cząstek, metoda siatkowo-cząsteczkowa itp.) [12, 32]. Większość z tych metod, opracowana i z powodzeniem stosowana w dwóch wymiarach (np. metoda prędkości dyfuzyjnej, metoda przypadkowego błędzenia), nie przenosi się jednak na trzy wymiary. W niniejszej pracy przetestowano dwie metody: siatkowo-cząsteczkową oraz wymiany intensywności cząstek (*particle strength exchange* PSE).

### 7.2.1 Metoda siatkowo-cząsteczkowa

W metodzie tej na obszar obliczeniowy nakładana jest siatka numeryczna. Wartość laplasjanu  $\Delta \omega$  obliczana jest w węzłach siatki za pomocą metody różnic centralnych [32]:

$$\begin{aligned}\Delta \omega_{l,m,n} &= \frac{\omega_{l+1,m,n} - 2\omega_{l,m,n} + \omega_{l-1,m,n}}{h^2} \\ &+ \frac{\omega_{l,m+1,n} - 2\omega_{l,m,n} + \omega_{l,m-1,n}}{h^2} \\ &+ \frac{\omega_{l,m,n+1} - 2\omega_{l,m,n} + \omega_{l,m,n-1}}{h^2}.\end{aligned}\tag{7.11}$$

gdzie wskaźniki  $l, m, n$  numerują węzły siatki, a  $h$  jest krokiem siatki. Wówczas drugie z równań (7.10) aproksymowane jest wyrażeniem:

$$\frac{d\alpha_p}{dt} = \nu h^3 \sum_{l,m,n} (\Delta\omega)_{l,m,n} l_{l,m,n}(\mathbf{x}_p), \quad (7.12)$$

gdzie  $l_{l,m,n}(\mathbf{x})$  – wielomian interpolacyjny Lagrange’a, a wyrażenie pod znakiem sumy (7.12) oznacza interpolację wartości laplasjanu z węzłów siatki na położenie cząstki wirowej. Zmiana wirowości cząstki jest obliczana wzdłuż jej trajektorii ruchu. W niniejszej pracy do rozwiązania równania (7.12) wykorzystano schemat Eulera rzędu pierwszego. W celu zachowania stabilności numerycznej schematu, parametry obliczeniowe dobierano tak, aby spełniony był warunek  $\nu \Delta t/h^2 \leq 1$ .

### 7.2.2 Metoda wymiany intensywności cząstek PSE

Idea metody jest związana z zastąpieniem różniczkowego operatora Laplace’a operatorem całkowym  $\Delta_\varepsilon$ , który dla trzech wymiarów przyjmuje postać [12, 32, 75]:

$$\Delta_\varepsilon \omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int (\omega(\mathbf{y}) - \omega(\mathbf{x})) \eta_\varepsilon(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y}. \quad (7.13)$$

Funkcja obcięcia  $\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-3} \eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ) rzędu  $r$  jest funkcją symetryczną spełniającą warunki:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} x_i x_j \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 2\delta_{ij} \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3, \\ \int_{\mathbb{R}^3} x_i^{k_1} x_j^{k_2} \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0 \quad \text{dla } k_1 + k_2 = 1 \text{ lub } 3 \leq k_1 + k_2 \leq r + 1, \\ \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}|^{r+2} |\eta(\mathbf{x})| d\mathbf{x} &< \infty. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Dodatkowo metoda PSE wymaga, aby przy doborze parametru  $\varepsilon$  spełniona była zależność  $\varepsilon/r_{ij} > 1$ , tzn. nośniki sąsiednich cząstek nakładały się ( $r_{ij}$  – odległość pomiędzy cząstkami  $i$  i  $j$ ). Przy założeniach (7.14) spełnione jest oszacowanie na operator całkowy dla składowych pola wirowości (7.13) [12, 75]:

$$\|\Delta_\varepsilon \omega_i - \Delta \omega_i\|_{0,p} \leq C_i \varepsilon^r \|\omega_i\|_{r+2,p}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.15)$$



gdzie  $\omega_i$  należy do przestrzeni Sobolewa ( $\omega_i \in W^{r+2,p}(\mathbb{R}^3)$  dla  $p \in [1, \infty]$ ), a normę  $\|\cdot\|$  rozumie się w sensie przestrzeni Sobolewa. Dowód powyższego oszacowania oraz analiza stabilności metody wymiany intensywności cząstek zostały przedstawione w *dodatku B*.

Drugie z równań (7.10) aproksymowane jest zatem wyrażeniem [14]:

$$\frac{d\alpha_p}{dt} = \nu \varepsilon^{-2} \sum_q (\alpha_q - \alpha_p) \eta\left(\frac{\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_p}{\varepsilon}\right). \quad (7.16)$$

Przykładowe funkcje  $\eta(\mathbf{x})$ , o nośniku nieograniczonym, zostały przedstawione np. w pracy VanderLindena [75]. Wybór funkcji o nośniku nieograniczonym wymusza jednak uwzględnienie w powyższym sumowaniu wszystkich cząstek wirowych znajdujących się w obszarze przepływu, co przy dużej ich liczbie może znacznie spowolnić proces obliczeniowy nawet przy zastosowaniu algorytmu szybkiego sumowania. Stąd w niniejszej pracy, aby przyspieszyć czas obliczeń, wybrano funkcję  $\eta(\mathbf{x})$  dla  $r = 2$  o nośniku ograniczonym w postaci:

$$\eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} C \frac{1}{1 + |\mathbf{x}|^2} & \text{dla } |\mathbf{x}| \leq 2, \\ 0 & \text{dla } |\mathbf{x}| > 2. \end{cases} \quad (7.17)$$

Stała  $C$  jest tak dobierana, aby spełniony był pierwszy z warunków (7.14):

$$\int_{\mathbb{R}^3} x^2 \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2. \quad (7.18)$$

Wartość  $C$  można łatwo obliczyć korzystając ze spostrzeżenia:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (x^2 + y^2 + z^2) \frac{C}{1 + |\mathbf{x}|^2} dx dy dz = 6 \quad (7.19)$$

oraz zapisując powyższą całkę w zmiennych sferycznych dla  $\eta(\mathbf{x})$  określonej wzorem (7.17):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \frac{C r^2}{1 + r^2} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi C \int_0^2 \frac{r^4}{1 + r^2} dr \approx 22.29 C = 6. \quad (7.20)$$

Stała  $C$  wynosi zatem 0.269.

Cechą charakterystyczną metody PSE jest to, że rząd aproksymacji zależy od rzędu  $r$  funkcji  $\eta_\varepsilon(\mathbf{x})$  (przez rząd funkcji rozumie się zerowanie odpowiednich momentów określonych ostatnią z formuł (7.14)). Umożliwia to podnoszenie rzędu metody poprzez odpowiedni dobór funkcji  $\eta_\varepsilon(\mathbf{x})$ . Wadą metody jest potrzeba sumowania po wszystkich cząstkach znajdujących się w obszarze przepływu, co przy znacznej ich liczbie, może prowadzić do wydłużenia czasu obliczeń. Dodatkowo, na potrzeby sumowania we wzorze (7.16), ważne jest, by w sąsiedztwie o promieniu  $\varepsilon$  każdej cząstki było odpowiednio wiele innych cząstek (co najmniej od kilku do kilkunastu).

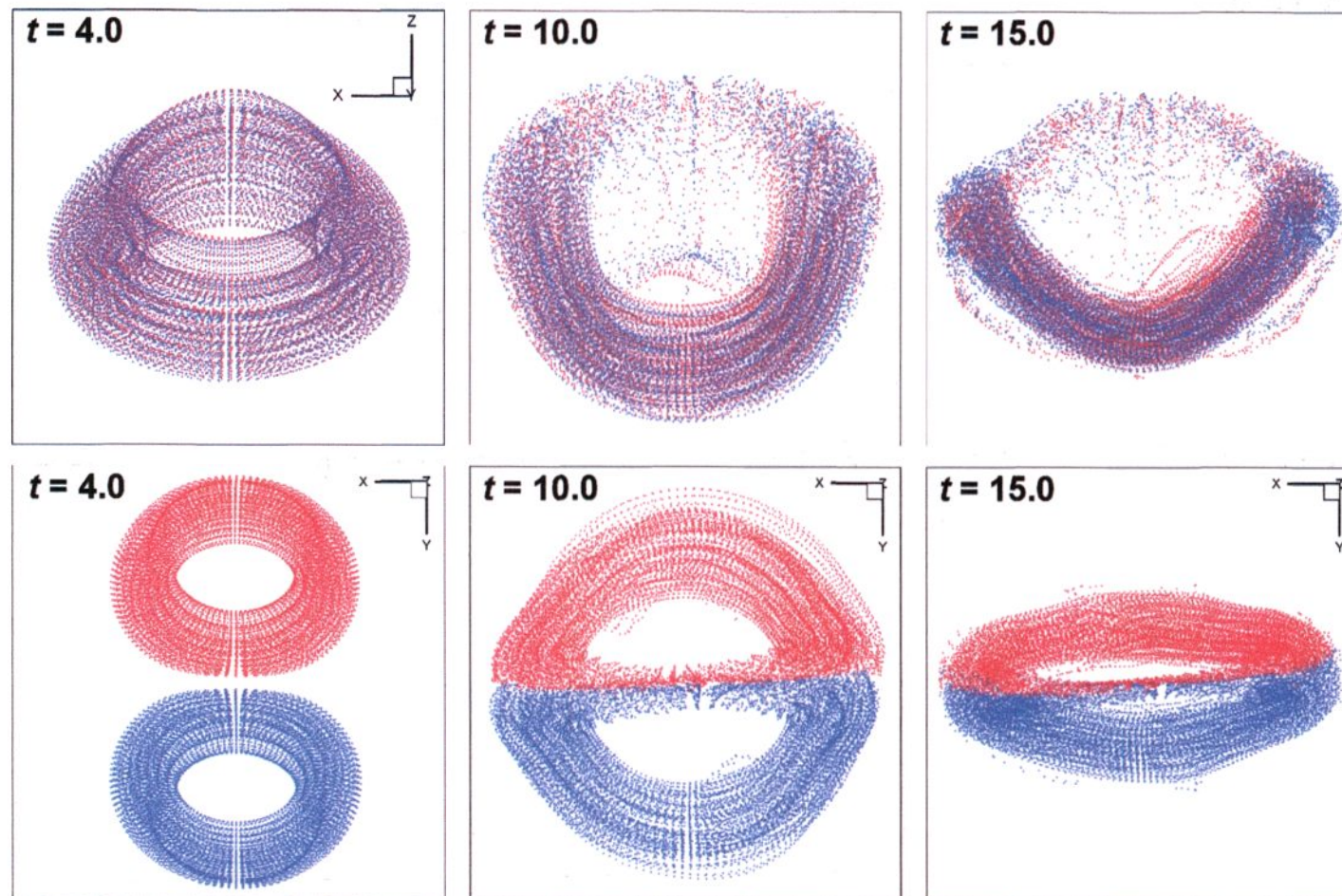
### 7.3 Wyniki numeryczne modelowania zjawiska rekonekcji

Wybór modelowania zjawiska rekonekcji związany jest z faktem, że zjawisko to w istotny sposób zależy od lepkości. Poprawne odtworzenie zjawiska świadczy, że zaproponowany algorytm jest prawidłowy. Przy modelowaniu zjawiska rekonekcji parametry początkowe pierścieni wirowych były takie same jak w przypadku modelowania zjawiska nielepkiego zderzenia dwóch pierścieni opisanego w podrozdziale 6.4. Umożliwiło to porównanie dynamiki obydwu zjawisk i wykazanie istotnych różnic wynikających z uwzględnienia w modelowaniu lepkości ośrodka.

Parametry początkowe pierścieni wirowych wynosiły zatem odpowiednio:  $\varepsilon_1 = 0.4$ ,  $R_1 = 1.0$ ,  $\Gamma_1 = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 0.4$ ,  $R_2 = 1.0$ ,  $\Gamma_2 = 1.0$  dla położeń początkowych odpowiednio:  $X_1 = (5.0, 3.5, 6.0)$ ,  $X_2 = (5.0, 6.5, 6.0)$ . Kąt odchylenia od pionu pierścieni wynosił  $\phi = 54^\circ$  (rys. 6.1B). Każdy z pierścieni wirowych aproksymowany był zbiorem 12100 cząstek wirowych (rozkład cząstek był taki sam jak w przypadku pojedynczego pierścienia wirowego omawianego w rozdziale piątym). Do obliczeń zastosowano krok czasowy  $\Delta t = 0.02$ ; krok siatki wynosił  $h = 0.1$ . Wartość kinematycznego współczynnika lepkości wynosiła  $\nu = 0.001 \text{ m}^2/\text{s}$ , a liczba Reynoldsa, określona wzorem  $Re = \Gamma/\nu$ , wynosiła  $Re = 1000$ . Równanie opisujące zmianę intensywności cząstek wirowych w przepływie nielepkim (7.9) rozwiązywane było ulepszoną metodą Eulera rzędu drugiego. Równanie dyfuzji rozwiązywano metodą Eulera rzędu pierwszego, a człon lepkościowy modelowano wykorzystując metodę wymiany intensywności cząstek. W celu prawidłowego zamodelowania wartości kinematycznego współczynnika lepkości  $\nu$ , w równaniu (7.16) pod-

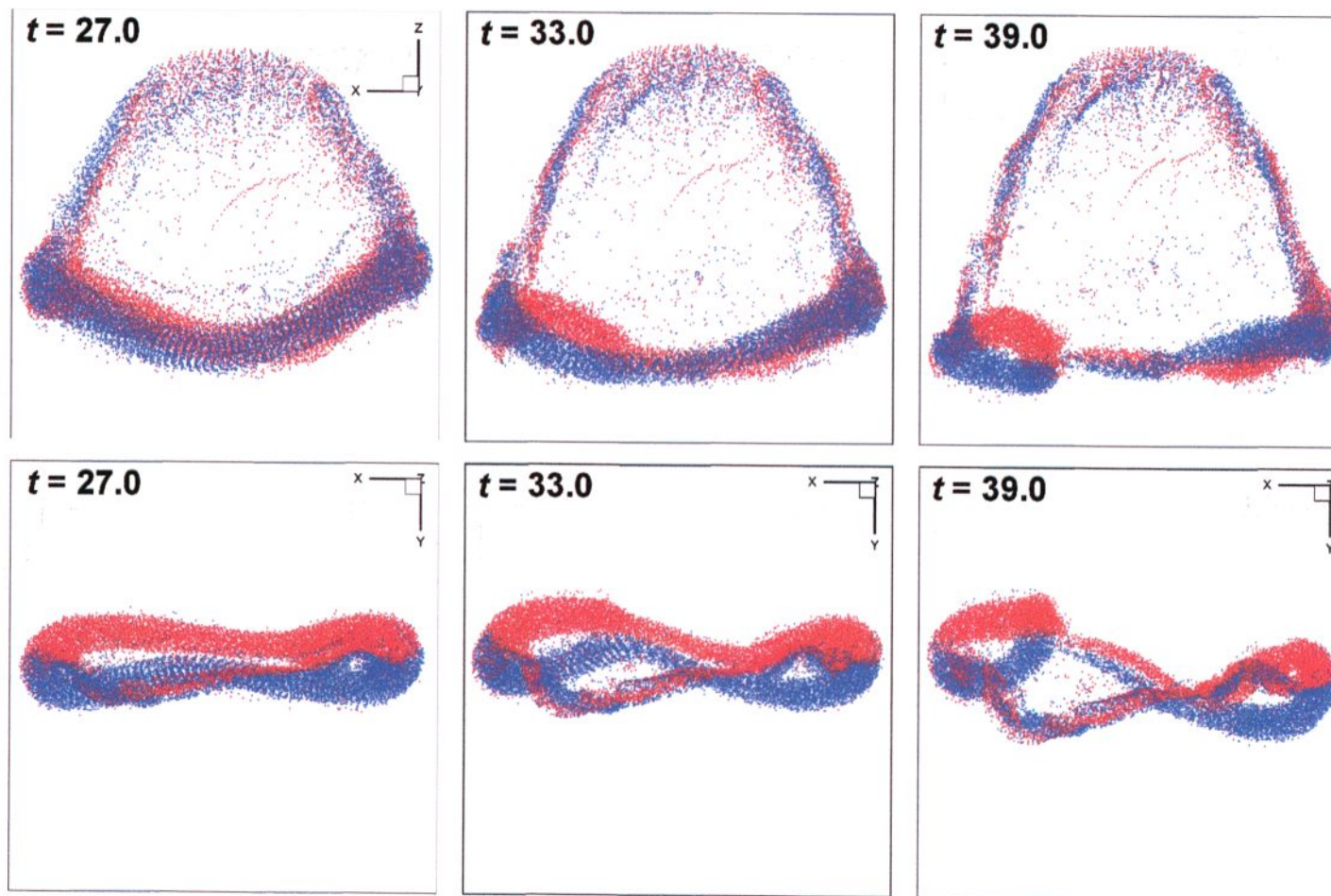
stawiono parametr  $\varepsilon = \zeta h$ , gdzie  $\zeta = 1.5$ .

Sekwencja położenia przedstawiona na rysunku 7.4 prezentuje pierwszą rekonekcję pierścieni wirowych w rzucie z góry i z boku do czasu  $t = 15.0$ . Diagramy są przeskalowane, aby oddać jak najwięcej szczegółów dynamiki pierścieni. Na początku oddziaływania pierścienie zbliżają się do siebie zachowując symetrię zwierciadlaną układu ( $t = 4.0$ ). Ich położenia i kształty są takie same jak w przypadku nielepkiego zderzenia pierścieni omawianego w podrozdziale 6.4 (rys. 6.19). Różnice w dynamice pojawiają się, gdy pierścienie zaczynają się ze sobą stykać. Lepkość przeciwdziała nadmiernemu wzrostowi wartości pola wirowości, spowodowanemu efektem rozciągania w obszarze styku, a zarazem umożliwia zmianę topologii pola wirowości obu pierścieni. Na diagramach dla  $t = 10.0$  można zaobserwować jak cząstki wirowe, znajdujące się w obszarze styku, są rozsuwane na boki, inicjując połączenie się obu pierścieni. Etap ten odpowiada początkowi zjawiska „mostkowania” przedstawionemu na rys. 7.3d oraz rysunkowi 7.1b przy wizualizacji procesu zderzenia dwóch pierścieni. Po czasie  $t = 15.0$  pozostałe w obszarze styku cząstki, pod wpływem wygenerowanego w przepływie pola prędkości, są wypychane poza obszar tworząc cienką „nić wirową”. W efekcie zjawiska rekonekcji z dwóch pierścieni powstaje jeden, wygięty po bokach, eliptyczny pierścień wirowy (etap ten można porównać z rys. 7.1c). Dalsza ewolucja pierścienia jest przedstawiona na rysunku 7.5. Po czasie  $t = 27.0$  można zauważyć, że pierścień ulega deformacji, a jego boki zaczynają zbliżać się do siebie. „Nić wirowa”, pozostała po pierwszej rekonekcji, jest odepchnięta i nie ma wpływu na dalszą dynamikę pierścienia. Na diagramach dla  $t = 33.0$  widać początek drugiej rekonekcji, w wyniku której powstają znowu dwa pierścienie wirowe zbudowane, po połowie, z cząstek koloru niebieskiego i czerwonego (diagramy dla  $t = 39.0$ ). Dla czasu  $t = 39.0$  można również zauważyć wyraźną „nić wirową” łączącą oba pierścienie. Pierścienie są zdeformowane i poruszają się w kierunku prostym do początkowego kierunku ruchu wyjściowych pierścieni wirowych. Przedstawiony przebieg zjawiska podwójnej rekonekcji zderzających się pierścieni wirowych jest w dobrej jakościowo zgodności z eksperymentalną wizualizacją zjawiska przedstawioną przez Oshimę i Asakę w pracy [54] (rys. 7.1).



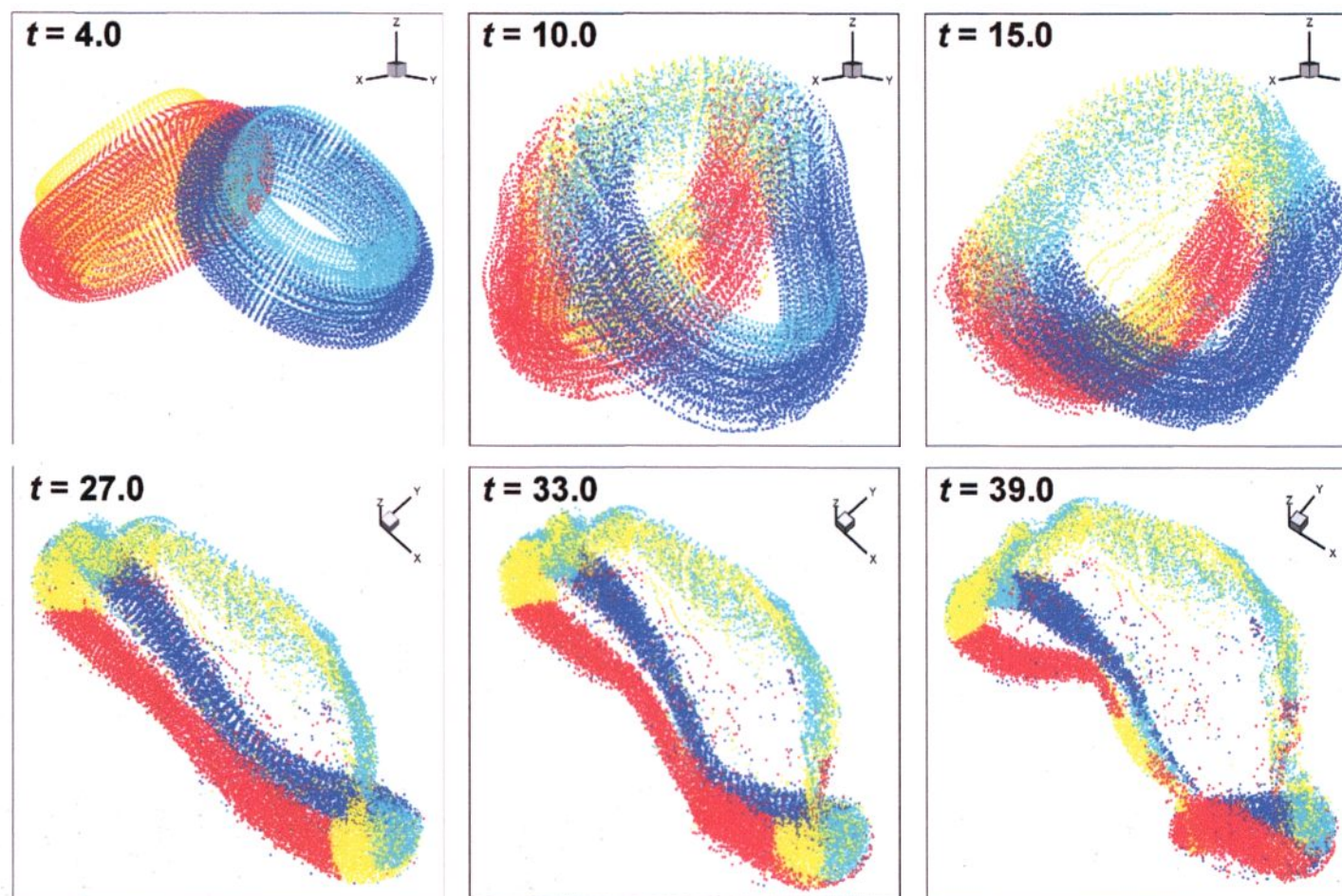
Rys. 7.4. Sekwencja położenia pierścieni podczas pierwszej rekonekcji. Diagramy górne przedstawiają widok z boku; dolne – widok z góry.





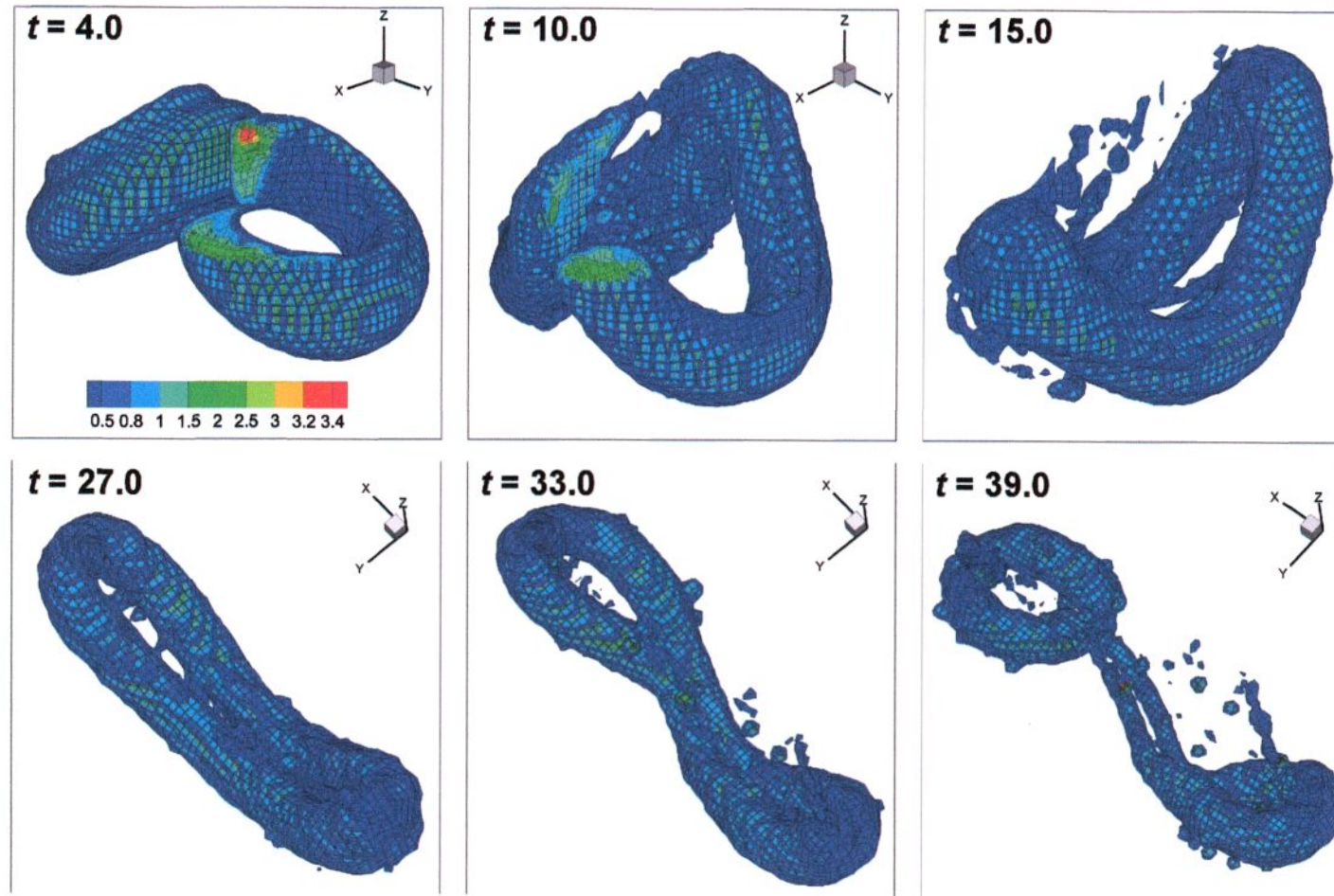
Rys. 7.5. Sekwencja położeń pierścieni podczas drugiej rekonekcji. Diagramy górne przedstawiają widok z boku; dolne – widok z góry.

Rysunek 7.6 przedstawia rozkład cząstek wirowych o intensywnościach mniejszych (kolor niebieski i żółty) i większych (kolor granatowy i czerwony) w stosunku do intensywności średnich:  $\alpha_{sr(1)}$  i  $\alpha_{sr(2)}$ . Intensywności średnie obliczano w każdym kroku czasowym. W przepływie lepkim intensywność cząstek zmienia się nie tylko na skutek mechanizmu rozciągania, jak jest to w przypadku przepływów nielepkich, ale również na skutek dyfuzji pola wirowości. Na początku ewolucji ( $t = 4.0$ ), rozkład cząstek jest taki sam jak dla nielepkiego zderzenia. Cząstki o intensywnościach większych niż średnia pojawiają się po wewnętrznej stronie pierścieni, by następnie przesunąć się po ich obwodzie. Gdy pierścienie znajdują się blisko siebie, wartość wirowości w obszarze styku zaczyna rosnąć na skutek rozciągania linii wirowych. Inaczej jednak niż w przypadku nielepkiego zderzenia, lepkość nie dopuszcza do nadmiernego wzrostu wartości wirowości. Na diagramie  $t = 10.0$  widzimy, że cząstki w obszarze zetknięcia się obu pierścieni mają teraz intensywności mniejsze od średniej, zaś cząstki o intensywnościach większych niż średnia są zgrupowane w obszarach w których następuje połączenie obu pierścieni (tworzą się tzw. „mostki”) oraz na ich obwodach. W trakcie procesu rekonekcji żółte i jasnoniebieskie cząstki tworzą w obszarze styku „nić wirową”, która jest powoli wypychana na zewnątrz obszaru ( $t = 15.0$ ). W powstałym eliptycznym pierścieniu wirowym cząstki o podwyższonej intensywności są zgrupowane wzdłuż jego boków ( $t = 27.0$ ). W trakcie dalszej ewolucji pierścienia, wygenerowane przez rozkład wirowości pole prędkości powoduje zbliżanie się do siebie obu boków, a cząstki o podwyższonej wirowości są zlokalizowane w obszarach przyszłej rekonekcji ( $t = 33.0$ ). Po zejściu drugiej rekonekcji i ponownym podziale na dwa pierścienie, intensywność cząstek wirowych wzdłuż nowej „nici wirowej” zaczyna maleć ( $t = 39.0$ ). Zmiany pola wirowości w przepływie można prześledzić na rysunku 7.7. Na dwóch pierwszych diagramach wycięto część pola wirowości w celu lepszego wglądu w jego dynamikę. Na diagramach dla  $t = 10.0$  i  $t = 15.0$  widać proces formowania się eliptycznego pierścienia wirowego. Dla  $t = 15.0$  i późniejszych czasów można zauważyć, że cząstki tworzące „nić wirową”, powstałą po pierwszej rekonekcji, praktycznie pozbawione są intensywności i nie wpływają na kształt pola wirowości. W wyniku dalszej ewolucji eliptycznego pierścienia dochodzi do ponownej rekonekcji. Na ostatnim diagramie ( $t = 39.0$ ) można rozróżnić dwa oddzielne pierścienie wirowe połączone dwiema nowymi „niami wirowymi”. Ich kształt jest podobny do „nici” przedstawionych na rys. 7.3f. „Nici wirowe” są wyraźnie widoczne, a więc zawierają znaczną porcję wirowości.



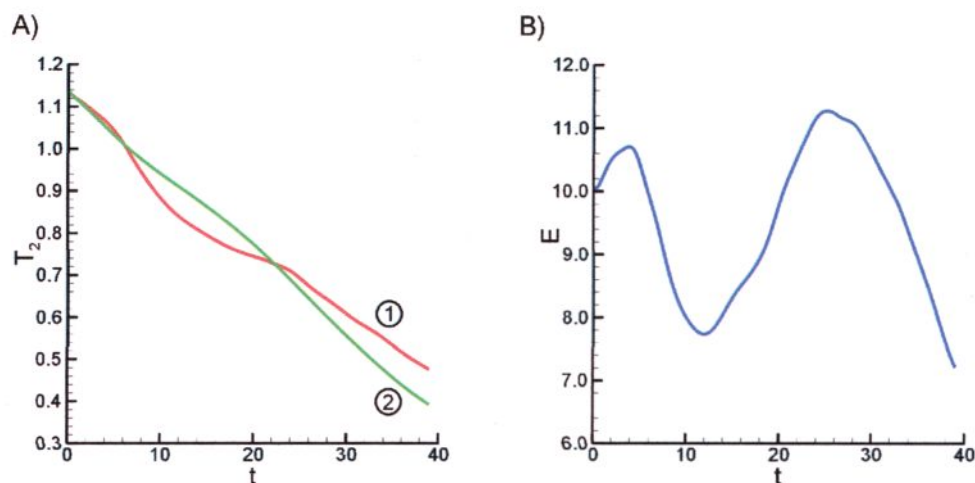
Rys. 7.6. Sekwencja położenia układu dwóch pierścieni wirowych w wybranych krokach czasowych – zjawisko rekonekcji; kolorem granatowym i czerwonym zaznaczono cząstki o intensywności większej od  $\alpha_{gr}$ , zaś kolorem niebieskim i żółtym – cząstki o intensywności mniejszej od  $\alpha_{gr}$ . Dolna sekwencja położenia cząstek jest obrócona w celu lepszej prezentacji wyników.





Rys. 7.7. Rozkład pola wirowości w przepływie podczas zjawiska rekonekcji pierścieni wirowych w wybranych chwilach czasu (dla lepszej czytelności dynamiki układu na pierwszy dwóch diagramach wycięto część pola wirowości). Na dolnych diagramach pola wirowości przedstawione jest w rzucie pod innym kątem niż na górnych rysunkach w celu lepszej prezentacji wyników.

W trakcie obliczeń monitorowano zmiany wartości energii kinetycznych:  $T_1$ ,  $T_2$  oraz entropii  $E$ . Początkowe wartości  $T_1 = 1.11$  i  $T_2 = 1.14$  spadły do wartości  $T_1 = 0.43$  i  $T_2 = 0.48$  po czasie  $t = 39.0$ . Zmiany wartości  $T_2$  zostały przedstawione na wykresie 7.8A krzywą nr 1 (kolor czerwony). Zmianę wartości entropii  $E$  w trakcie obliczeń przedstawia wykres 7.8B.



Rys. 7.8. A) krzywa nr 1 przedstawia zmiany wartości energii kinetycznej  $T_2$  w trakcie modelowania zjawiska rekonekcji pierścieni wirowych, krzywa nr 2 przedstawia zmiany wartości energii kinetycznej  $T$  obliczone na podstawie wzoru (7.21) dla  $\nu = 0.001$ ; B) zmiany wartości entropii  $E$  w trakcie obliczeń.

Monitorowanie w trakcie obliczeń zmian wartości entropii dało możliwość porównania zmiany energii kinetycznej  $T_2$  (krzywa nr 1 rys. 7.8A) z rozwiązaniem równania (1.42) dla wartości  $\nu = 0.001$ :

$$\frac{dT}{dt} = -2\nu E. \quad (7.21)$$

Równanie (7.21) rozwiązano metodą Eulera:

$$T((n+1)\delta t) = T(n\delta t) - 2\nu\delta t E(n\delta t), \quad (7.22)$$

gdzie  $\delta t$  – częstotliwość zapisu parametrów kontrolnych np.  $T_2$ ,  $E$  w trakcie obliczeń,  $\delta t = 0.2$ . Dla  $T(0)$  i  $E(0)$  przyjęto wartości  $T_2 = 1.14$  oraz  $E = 10.0$ . Rozwiązanie przedstawia krzywa nr 2 (kolor zielony) na wykresie 7.8A. Wiadąc dobrą zgodność otrzymanej krzywej z wykresem  $T_2(t)$ , z czego wynika, że efekt lepkości cieczy był dobrze modelowany w obliczeniach.

W trakcie obliczeń monitorowano również  $\mathcal{H}$  i  $I_i$ . Początkowa wartość skrętności  $\mathcal{H}_0 = 0$  wzrosła podczas obu rekonekcji do wartości  $\mathcal{H} \sim 0.1$ . Całki ze składowych wirowości  $I_i$  pozostawały w trakcie obliczeń w przedziale wartości  $(10^{-5}, 10^{-1})$ . Dywergencje z pól: potencjału wektorowego i wirowości pozostawały w przedziale  $(10^{-3}, 10^{-1})$ , zaś bezźródłowość pola prędkości była zachowana z dokładnością  $\sim 10^{-5}$ .

## Podsumowanie

Przedmiotem niniejszej rozprawy doktorskiej było opracowanie i implementacja szybkiej metody wirowej typu „wir w komórce” (VIC) do rozwiązywania nieściśliwych, trójwymiarowych przepływów lepkich. Proponowana w pracy metoda oparta jest na aproksymacji ciągłego pola wirowości dyskretnym rozkładem cząstek wirowych, które niosą informację o trzech składowych wektora wirowości. Równania ruchu cieczy sformułowane zostały w ujęciu wirowości  $\omega$  i potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$ . Metoda jest w opozycji do bezpośrednich metod wirowych, w których obliczenia prowadzone są bez użycia siatki numerycznej, a ruch cząstek wirowych odbywa się w polu prędkości obliczonym z prawa Biota–Savarta. Potrzeba uwzględnienia wkładu do pola prędkości pochodzącego od wszystkich elementów wirowych w przepływie powoduje, że metody bezpośrednie, pomimo rozwoju algorytmów szybkiego sumowania, są nadal bardzo czasochłonne. Zastosowanie w metodzie wirowej typu „wir w komórce” siatki numerycznej w celu obliczenia rozkładu pola prędkości w przepływie powoduje znaczne skrócenie czasu obliczeń. Z wyników przedstawionych w artykule [16] wynika, że dla liczby elementów wirowych  $N \approx 100000$  metoda VIC jest około 1000 razy szybsza od metod bezpośrednich. Użycie siatki obliczeniowej umożliwia zatem wprowadzenie do obszaru przepływu znacznie większej liczby cząstek wirowych niż w metodach bezpośrednich.

Poprawność proponowanej metody sprawdzono badając dynamikę pojedynczego, nielepkiego pierścienia wirowego. Porównano jego prędkość translacji z formułą analityczną, otrzymując dobrą zgodność wyników. Dla przepływów nielepkich, modelowano również dynamikę układu dwóch pierścieni wirowych w różnych konfiguracjach początkowych. Odtworzono, dobrze znane w literaturze, zjawisko „gry wirów”, uzyskując jeden pełny cykl przejścia pierścieni. Modelowanie nieściśliwych, lepkich przepływów trójwymiarowych oparte było na algorytmie dekompozycji lepkościowej tzn. rozwiązanie otrzymywane

było w dwóch krokach: najpierw rozwiązywano równania ruchu cieczy nielepkiej, a następnie uwzględniano w obliczeniach lepkość. Przedstawiono dwie metody modelowania lepkości: metodę siatkowo-cząsteczkową oraz metodę wymiany intensywności cząstek PSE. Wykorzystując metodę PSE odtworzono zjawisko rekonekcji pierścieni wirowych, które to zjawisko zachodzi jedynie dla przepływów lepkich.

Zaprezentowane w niniejszej rozprawie doktorskiej wyniki numeryczne otrzymane metodą wirową typu „wir w komórce” dla przepływów nielepkich i lepkich są w dobrej jakościowo zgodności z wynikami eksperymentalnymi i numerycznymi innych autorów. Osiągnięte wyniki potwierdzają postawioną na początku pracy tezę, że w obliczeniach numerycznych możliwe jest zastąpienie bezźródłowego pola wirowości dyskretnym rozkładem cząstek wektorowych będących nośnikami wirowości. Opracowany program numeryczny pozwoli na badanie ewolucji struktur wirowych co było celem użytecznym niniejszej pracy doktorskiej. Prezentowane w literaturze, a także w niniejszej pracy, wyniki jednoznacznie wskazują, że metody cząstek wirowych w niedługim czasie staną się równoprawnymi metodami rozwiązywania równań Naviera-Stokesa w stosunku do innych klasycznych metod takich jak np.: metody różnic skończonych, metody spektralne [14, 16, 58].

Dalszy wysiłek autora będzie skierowany na uwzględnienie w przepływie ścianek sztywnych. Obecność ścianek sztywnych wiąże się z nowymi warunkami brzegowymi na potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$  [63] oraz z generacją nowej wirowości [16] w celu zapewnienia warunku przylegania cieczy do ścianki. Będą prowadzone dalsze prace mające na celu zapobieganie nadmiernej koncentracji cząstek wirowych podczas obliczeń. Podjęto również prace w kierunku poprawy symulacji efektu lepkości cieczy metodami cząsteczkowymi.

## Dodatek A

### Wyprowadzenie prędkości translacji pierścienia wirowego

Poniżej przedstawione zostanie wyprowadzenie prędkości translacji pierścienia wirowego zaproponowane w 1970 roku przez Saffmana [40, 43, 66]. Wprowadźmy dwa układy współrzędnych (rys. A.1): pierwszy, nieruchomy układ  $r \phi x$  będzie związany z przepływem (w tym układzie pole prędkości znika w nieskończoności), drugi układ  $r' \phi' x'$  związany będzie z poruszającym się pierścieniem wirowym.

Oznaczmy przez  $\mathbf{u}$  pole prędkości w układzie  $r \phi x$ , a przez  $\mathbf{u}'$  pole prędkości w układzie  $r' \phi' x'$ , wówczas [43]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{U}, \quad (\text{A.1})$$

gdzie  $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_{x'}$  – prędkość translacji pierścienia wirowego. Podstawiając wyrażenie (A.1) do wzoru na energię kinetyczną  $T$  (1.37) otrzymujemy:

$$T = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{U} \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) dv + \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) dv. \quad (\text{A.2})$$

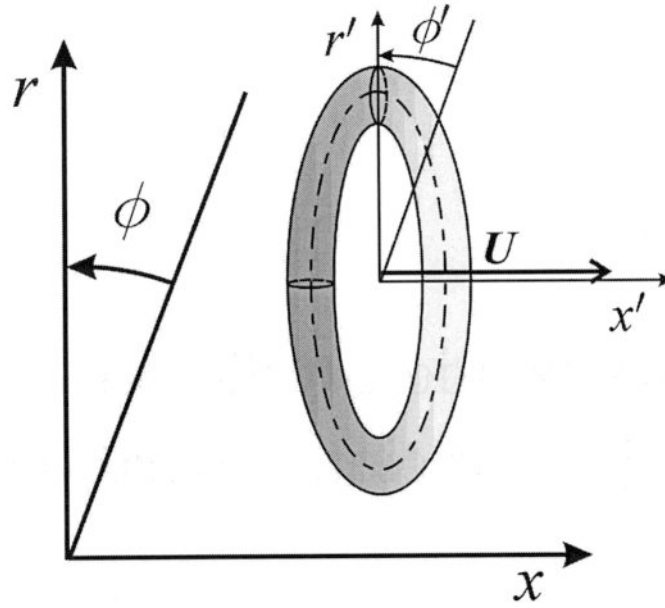
Pierwszy człon po prawej stronie w (A.2) możemy przekształcić wykorzystując niezmiennik ruchu – impuls liniowy (1.51):

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{U} \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) dv = 2U P_x, \quad (\text{A.3})$$

gdzie składową  $x$ -ową impulsu liniowego obliczamy całkując:

$$P_x = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega_{\phi} r^2 dr dx \cong \pi \varepsilon_0^2 \Gamma. \quad (\text{A.4})$$





Rys. A.1. Układ współrzędnych  $r \phi x$  i układ  $r' \phi' x'$  związany z poruszającym się pierścieniem wirowym.

Drugi człon we wzorze (A.2) rozpisujemy:

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) dv = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} r \omega_{\phi} (-x u'_r + r u'_x) dr dx. \quad (\text{A.5})$$

Wyrażenie pod całką można uprościć korzystając z zależności [43]:

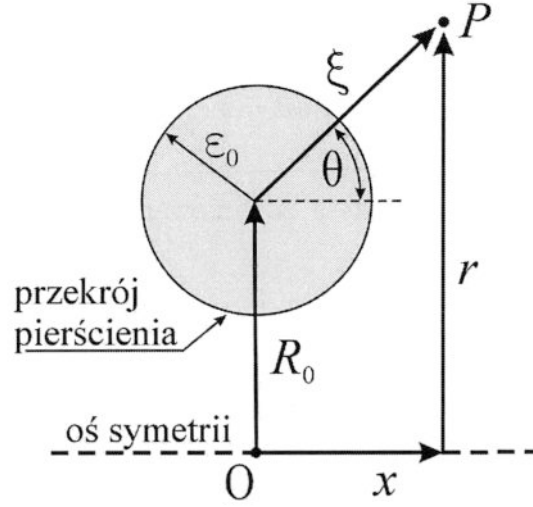
$$r \omega_{\phi} (-x u'_r + r u'_x) = -3 x r u'_r \omega_{\phi} + \frac{\partial}{\partial x} (x r^2 u'_x \omega_{\phi}) + \frac{\partial}{\partial r} (x r^2 u'_r \omega_{\phi}). \quad (\text{A.6})$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (A.5) całki z pochodnych po  $r$  i  $x$  znikają w nieskończoności i pozostaje jedynie:

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) dv = -6\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} r x \omega_{\phi} u'_r dr dx. \quad (\text{A.7})$$

Całkę w wyrażeniu (A.7) można rozwiązać wprowadzając nowe współrzędne  $\xi$  i  $\theta$  związane ze środkiem przekroju pierścienia wirowego (rys. A.2):

$$r = R_0 + \xi \sin \theta, \quad x = \xi \cos \theta. \quad (\text{A.8})$$



Rys. A.2. Układ współrzędnych  $\xi \theta$  związany ze środkiem przekroju pierścienia wirowego.

Oznaczmy przez  $\Gamma_0(\xi)$  cyrkulację zawartą wewnątrz rdzenia pierścienia w odległości  $\xi$  od środka przekroju, który leży w płaszczyźnie  $r - x$ . Składową azymutalną wirowości w tym przekroju może być aproksymowana przez:

$$\omega_\phi \cong \omega_0(\xi) = \frac{1}{2\pi\xi} \frac{d\Gamma_0}{d\xi}. \quad (\text{A.9})$$

Podstawiając formułę (A.9) do wyrażenia (A.7) oraz zastępując składową prędkości  $u'_r$  wyrażeniem:  $u'_r \cong (\Gamma_0(\xi)/2\pi\xi) \cos\theta$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & -6\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} r x \omega_\phi u'_r dr dx = \\ & -6\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\varepsilon_0} (\xi \cos\theta)(R_0 + \xi \sin\theta) \omega_\phi \frac{\Gamma_0(\xi)}{2\pi\xi} \cos\theta \xi d\xi d\theta = \\ & -3R_0 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^{\varepsilon_0} \omega_\phi \Gamma_0(\xi) \xi d\xi - 3 \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos^2\theta d\theta \\ & \int_0^{\varepsilon_0} \omega_\phi \Gamma_0(\xi) \xi^2 d\xi = -\frac{3R_0}{2} \int_0^{\varepsilon_0} \Gamma_0(\xi) \frac{d\Gamma_0(\xi)}{d\xi} d\xi = -\frac{3R_0}{4} \Gamma^2. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Drugi człon całkowy w (A.10) znika, gdyż  $\int_0^{2\pi} \sin\theta \cos^2\theta d\theta = 0$ .

Podstawiając do wzoru (A.2) wyniki przekształceń (A.4) i (A.10) otrzymujemy:

$$T = 2\pi U R_0^2 \Gamma - \frac{3R_0}{4} \Gamma^2. \quad (\text{A.11})$$

Teraz należy obliczyć wartość energii kinetycznej korzystając ze wzoru (1.45):

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} dv = \pi \int_S \Psi \omega_\phi ds, \quad (\text{A.12})$$

gdzie  $\Psi$  jest funkcją prądu Stokesa zdefiniowaną we współrzędnych cylindrycznych na płaszczyźnie  $r - x$ :

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad u_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (\text{A.13})$$

W celu obliczenia wyrażenia (A.12) należy określić funkcję prądu wewnątrz przekroju pierścienia  $\Psi \sim \Psi_0(\xi)$ . Dla przekroju pierścienia jak na rys. A.2, funkcja prądu  $\Psi_0(\xi)$  wyraża się wzorem [43, 66]:

$$\Psi_0(\xi) = \frac{R_0 \Gamma}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{8R_0}{\varepsilon_0} \right) - 2 \right] + \frac{R_0}{2\pi} \int_{\xi}^{\varepsilon_0} \frac{\Gamma_0(\xi')}{\xi'} d\xi'. \quad (\text{A.14})$$

Wyrażenie na energię kinetyczną w zmiennych  $\xi\theta$  przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} T = \pi \int_0^{\varepsilon_0} \Psi_0(\xi) \omega_0(\xi) 2\pi \xi d\xi &= \frac{R_0 \Gamma}{2} \left[ \ln \left( \frac{8R_0}{\varepsilon_0} \right) - 2 \right] \int_0^{\varepsilon_0} \frac{d\Gamma_0}{d\xi} d\xi \\ &+ \frac{R_0}{2} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{d\Gamma_0}{d\xi} \left[ \int_{\xi}^{\varepsilon_0} \frac{\Gamma_0(\xi')}{\xi'} d\xi' \right] d\xi, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

gdzie za  $\omega_0(\xi)$  podstawiono formułę (A.9). Całkując przez części ostatni człon w (A.15) otrzymujemy ostateczną formułę na energię kinetyczną pierścienia wirowego:

$$T = \frac{R_0 \Gamma^2}{2} \left[ \ln \left( \frac{8R_0}{\varepsilon_0} \right) - 2 \right] + \frac{R_0}{2} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\Gamma_0^2(\xi)}{\xi} d\xi. \quad (\text{A.16})$$

Porównując ze sobą wzory (A.11) i (A.16) otrzymujemy wzór na prędkość translacji pierścienia wirowego  $U$ :

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R_0} \left[ \ln \left( \frac{8R_0}{\varepsilon_0} \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{\Gamma^2} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\Gamma_0^2(\xi)}{\xi} d\xi \right]. \quad (\text{A.17})$$

Dla równomiernego rozkładu pola wirowości wewnątrz przekroju pierścienia ( $\omega_0(\xi) = \text{const}$ ) cyrkulacja  $\Gamma$  wyraża się formułą:

$$\Gamma = \omega_0 \pi \varepsilon_0^2, \quad \Gamma_0(\xi) = \omega_0 \pi \xi^2 \quad (\text{A.18})$$

i otrzymujemy:

$$\frac{1}{\Gamma^2} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\Gamma_0^2(\xi)}{\xi} d\xi = \frac{\pi^2 \omega_0^2}{\Gamma^2} \int_0^{\varepsilon_0} \xi^3 d\xi = \frac{1}{4}. \quad (\text{A.19})$$

Ostateczny wzór na prędkość translacji dla pierścienia o równomiernym rozkładzie wirowości w przekroju przyjmuje postać:

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R_0} \left[ \ln \left( \frac{8R_0}{\varepsilon_0} \right) - \frac{1}{4} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Jest to formuła podana pierwotnie przez Kelvina w 1867 roku [43].



## Dodatek B

# Metoda wymiany intensywności cząstek – oszacowania

Zastąpmy różniczkowy operator Laplace’a operatorem całkowym  $\Delta_\varepsilon$  zdefiniowanym wzorem (7.13) [12, 32, 75], gdzie  $i = 1, 2, 3$  – składowe pola wirowości  $\omega$ :

$$\Delta_\varepsilon \omega_i(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-2} \int (\omega_i(\mathbf{y}) - \omega_i(\mathbf{x})) \eta_\varepsilon(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y}, \quad (\text{B.1})$$

gdzie  $\eta(\mathbf{x})$  jest funkcją obcięcia spełniającą warunki (7.14):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} x_i x_j \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 2\delta_{ij} \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3, \\ \int_{\mathbb{R}^3} x_i^{k_1} x_j^{k_2} \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0 \quad \text{dla } k_1 + k_2 = 1 \text{ lub } 3 \leq k_1 + k_2 \leq r + 1, \\ \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}|^{r+2} |\eta(\mathbf{x})| d\mathbf{x} &= 0 < \infty. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

### Twierdzenie 3

Pod warunkami (B.2), jeżeli  $\omega_i \in W^{r+2,p}(\mathbb{R}^3)$  dla  $p \in [1, \infty]$  spełnione jest następujące oszacowanie ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\|\Delta_\varepsilon \omega_i - \Delta \omega_i\|_{0,p} \leq C_i \varepsilon^r \|\omega_i\|_{r+2,p}, \quad (\text{B.3})$$



### Dowód

Udowodnimy wynik dla  $p = \infty$ . Rozważmy rozwinięcie w szereg Taylora funkcji  $\omega_i$ , gdzie  $i = 1, 2, 3$ , w punkcie  $\mathbf{x}$  aż do rzędu  $r + 2$ :

$$\begin{aligned} \omega_i(\mathbf{y}) &= \omega_i(\mathbf{x}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x}, \nabla) \omega_i(\mathbf{x}) + \cdots + \\ &+ \frac{1}{(r+1)!} (\mathbf{y} - \mathbf{x}, \nabla)^{(r+1)} \omega_i(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{r+2} \|\omega_i\|_{r+2, \infty}). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Wprowadzając to rozwinięcie do członu po prawej stronie zależności (B.1) i na mocy własności funkcji  $\eta(\mathbf{x})$  (B.2) człony poza  $\int (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2 \eta_\varepsilon(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y}$  zerują się i w efekcie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon \omega_i(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_k^2}(\mathbf{x}) \int (y_k - x_k)^2 \eta_\varepsilon(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &+ \|\omega_i\|_{r+2, \infty} \mathcal{O} \left( \int |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{r+2} \eta_\varepsilon(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Po zamianie zmiennej  $\mathbf{z} = (\mathbf{y} - \mathbf{x})/\varepsilon$  w całkach, otrzymujemy:

$$\Delta_\varepsilon \omega_i(\mathbf{x}) = \Delta \omega_i(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^r). \quad \square \quad (\text{B.6})$$

### Analiza stabilności metody

Układ równań różniczkowych zwyczajnych odpowiadający równaniu dyfuzji wirowości zapisanemu wzdłuż trajektorii ruchu cząstek wirowych z wykorzystaniem operatora całkowego (B.1) przyjmuje postać [12, 75]:

$$\frac{d\omega_p}{dt} = \nu \varepsilon^{-2} \sum_q (v_q \omega_q - v_p \omega_p) \eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_p), \quad (\text{B.7})$$

gdzie indeksy  $p, q$  numerują cząstki wirowe. Powyższy układ całkujemy wykorzystując schemat Eulera z krokiem czasowym  $\Delta t$ :

$$\omega_p^{n+1} = \omega_p^n + \frac{\nu \Delta t}{\varepsilon^2} \sum_q (v_q \omega_q^n - v_p \omega_p^n) \eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_p^n). \quad (\text{B.8})$$

Pod inną postacią:

$$\omega_p^{n+1} = \omega_p^n \left( 1 - \frac{\nu \Delta t}{\varepsilon^2} \sum_q v_q \eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_p^n) \right) + \frac{\nu \Delta t}{\varepsilon^2} \sum_q v_q \omega_q^n \eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_p^n). \quad (\text{B.9})$$

Jeżeli przyjęta funkcja  $\eta$  jest dodatnia i jeśli:

$$\frac{\nu \Delta t}{\varepsilon^2} \sum_q v_q |\eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_p^n)| \leq 1, \quad (\text{B.10})$$

wtedy

$$\max_p |\boldsymbol{\omega}_p^{n+1}| \leq \max_p |\boldsymbol{\omega}_p^n| \quad (\text{B.11})$$

i gdy

$$\sum_q v_q |\eta_\varepsilon(\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_p^n)| \approx C = \int \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{B.12})$$

otrzymujemy warunek stabilności dla schematu Eulera w postaci:

$$\frac{\nu \Delta t C}{\varepsilon^2} \leq 1. \quad (\text{B.13})$$



## Spis literaturey

- [1] Akhmetov D.G., Lugovtsov B.A., Tarasov V.F. Extinguishing gas and oil well fires by means of vortex rings. *Combustion, Explosion, and Shock Wave*, **16**: 490–494, 1980.
- [2] Allen J.J., Auvity B. Interaction of a vortex ring with a piston vortex. *J. Fluid Mech.*, **465**: 353–378, 2002.
- [3] Ashurst W.T. Vortex ring instability. *Bull. Am. Phys. Soc.*, **26**: 1267, 1981.
- [4] Barenghi C.F., Samuels D.C., Kivotides D. Superfluid vortex reconnections. *J. Low Temp. Phys.*, **126**(1), 2002.
- [5] Batchelor G.K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1970.
- [6] Beale J.T. A convergent 3D vortex method with grid-free stretching. *Math. Comput.*, **46**: 401–424, 1986.
- [7] Chahine G.L., Genoux Ph.F. Collapse of a cavitating vortex ring. *ASME J. Fluids Eng.*, **105**: 400–405, 1983.
- [8] Chorin A.J. Numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, **57**: 785–796, 1973.
- [9] Chorin A.J. *Vorticity and turbulence*. Springer-Verlag, 1994.
- [10] Christiansen J.P. Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices. *J. Comput. Phys.*, **13**(3): 363–379, 1973.
- [11] Cottet G-H. A new approach for the analysis of vortex methods in two and three dimensions. *Ann. Inst. H. Poincaré*, **5**: 227–285, 1988.

- [12] Cottet G-H., Koumoutsakos P. *Vortex methods: theory and practice*. Cambridge University Press, wydanie First, 2000.
- [13] Cottet G-H., Koumoutsakos P., Ould Salihi M.L. Vortex methods with spatially varying cores. *J. Comput. Phys.*, **162**: 164–185, 2000.
- [14] Cottet G-H., Michaux B., Ossia S., VanderLinden G. A comparison of spectral and vortex methods in three-dimensional incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, **175**: 702–712, 2002.
- [15] Cottet G-H., Ould Salihi M.L., El Hamraoui M. Multi-purpose regridding in vortex methods. *European Series in Applied and Industrial Mathematics (ESAIM): Proceedings*, **7**: 94–103, 1999. Third International Workshop on Vortex Flows and Related Numerical Methods.
- [16] Cottet G-H., Poncet Ph. Particle methods for direct numerical simulations of three-dimensional wakes. *Journal of Turbulence*, **3**(38): 1–9, 2002.
- [17] Darrigol O. Between hydrodynamics and elasticity theory: the first five births of the Navier–Stokes equation. *Arch. Hist. Exact Sci.*, **56**: 95–150, 2002.
- [18] E W., Liu J-G. Finite difference scheme for incompressible flows in vorticity formulations. *ESAIM: Proceedings*, **1**: 181–195, 1996.
- [19] E W., Liu J-G. Finite difference methods for 3D viscous incompressible flows in vorticity— vector potential formulation on nonstaggered grids. *J. Comput. Phys.*, **138**: 57–82, 1997.
- [20] Ghoniem A.F., Knio O.M. The development and application of the transport element method to three dimensional reacting shear layers. *Lectures in Applied Mathematics*, **28**: 165–218, 1991.
- [21] Girault V., Raviart P.A. *Finite element approximation of the Navier–Stokes equations*, wolumen 749 serii *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1981.
- [22] Hassan A., Zawadzki I. Linking of vortex rings. *Nature*, **354**: 50–53, 1991.

- [23] Hussain F., Husain H. Elliptic jets. Part 1. Characteristics of unexcited and excited jets. *J. Fluid Mech.*, **208**: 257–320, 1989.
- [24] Kida S., Takaoka M. Breakdown of frozen motion of vorticity field and vorticity reconnection. *J. Phys. Soc. Japan*, **60**(7): 2184–2196, 1991.
- [25] Kida S., Takaoka M. Vortex reconnection. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **26**: 169–189, 1994.
- [26] Kida S., Takaoka M., Hussain F. Collision of two vortex rings. *J. Fluid Mech.*, **230**: 583–646, 1991.
- [27] Kivotides D., Barengi C.F., Samuels C. Triple vortex ring structures in superfluid Helium II. *Science*, **290**: 777–779, 2000.
- [28] Knio O.M., Ghoniem A.F. Numerical study of a three-dimensional vortex method. *J. Comput. Phys.*, **86**: 75–106, 1990.
- [29] Knio O.M., Ghoniem A.F. Vortex simulation of a three-dimensional reacting shear layer with infinite-rate kinetics. *AIAA Journal*, **30**(1): 105–116, 1992.
- [30] Knio O.M., Klein R. Improved thin-tube models for slender vortex simulations. *J. Comput. Phys.*, **163**: 68–82, 2000.
- [31] Kudela H. *Modelowanie zjawisk hydrodynamicznych metodami dyskretnych wirów*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995. Prace Naukowe Instytutu Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów Politechniki Wrocławskiej nr **48**, seria Monografie nr **25**.
- [32] Kudela H. *Numeryczne modelowanie przepływów cieczy lepkiej metodami dyskretnych wirów. Deterministyczne metody symulacji lepkości*, 1998. Instytut Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów, Raport SPR nr 53/98.
- [33] Kudela H. Application of the vortex-in-cell method for the simulation of two-dimensional viscous flow. *Task Quarterly*, **3**(3): 343–360, 1999.
- [34] Kudela H., Regucki P. Study of the „negative temperature” effect in vortex point system by the vortex-in-cell method. *5<sup>th</sup> ISAIIF International Symposium on Experimental and Computational Aerodynamics of Internal Flows*, strony 869–876, 2001. ed. P. Doerffer, Gdańsk.



- [35] Kudela H., Regucki P. The vortex in cell method for the study of three-dimensional vortex structures. *Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics*, wolumen **71** serii *Fluid Mechanics and Its Applications*, strony 49–54. Kluwer Academic Publisher, 2003.
- [36] Leonard A. Vortex methods for flow simulation. *J. Comput. Phys.*, **37**: 289–335, 1980.
- [37] Leonard A. Vortex simulation of three-dimensional spotlike disturbances in a laminar boundary layer. *Turbulent shear flows 2*, strony 67–77. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1980.
- [38] Leonard A. Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **17**: 523–559, 1985.
- [39] Lim T.T., Nickels T.B. Instability and reconnection in the head-on collision of two vortex rings. *Nature*, **357**: 225–227, 1992.
- [40] Lim T.T., Nickels T.B. Vortex rings. *Fluid Vortices*, strony 95–153. Kluwer Academic Publisher, 1995.
- [41] Liu Ch.H. A three-dimensional vortex particle-in-cell method for vortex motions in the vicinity of a wall. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **37**: 501–523, 2001.
- [42] Mansfield J.R., Knio O.M., Meneveau Ch. Dynamic LES of colliding vortex rings using a 3D vortex method. *J. Comput. Phys.*, **152**: 305–345, 1999.
- [43] Marshall J.S. *Inviscid incompressible flow*. John Wiley & Sons, Inc., wydanie First, 2001.
- [44] Martin J.E., Meiburg E. Numerical investigation of three-dimensionally evolving jets under helical perturbations. *J. Fluid Mech.*, **243**: 457–487, 1992.
- [45] Maxworthy T. The structure and stability of vortex rings. *J. Fluid Mech.*, **51**(1): 15–32, 1972.
- [46] Melander M.V., Hussain F. Reconnection of two antiparallel vortex tubes: a new cascade mechanism. *Turbulent Shear Flows 7*, strony 9–16. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

- 
- [47] Moffatt H.K. The degree of knottedness of tangled vortex lines. *J. Fluid Mech.*, **35**: 117–129, 1969.
- [48] Mohseni K., Ran H., Colonius T. Numerical experiments on vortex ring formation. *J. Fluid Mech.*, **430**: 267–282, 2001.
- [49] Monaghan J.J. Extrapolating B splines for interpolation. *J. Comput. Phys.*, **60**(2): 253–262, 1985.
- [50] Nitsche M., Krasny R. A numerical study of vortex ring formation at the edge of a circular tube. *J. Fluid Mech.*, **276**: 139–161, 1994.
- [51] Nurnberger G. *Approximation by spline functions*. Springer Verlag, 1989.
- [52] Orlandi P., Verzicco R. Vortex rings impinging on walls: axisymmetric and three-dimensional simulations. *J. Fluid Mech.*, **256**: 615–646, 1993.
- [53] Oshima Y. Head-on collision of two vortex rings. *J. Phys. Soc. Japan*, **44**(1): 328–331, 1978.
- [54] Oshima Y., Asaka S. Interaction of two rings moving side by side. *Natural Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **26**(1): 31–37, 1975.
- [55] Oshima Y., Asaka S. Interaction of multi-vortex rings. *J. Phys. Soc. Japan*, **42**(4): 1391–1395, 1977.
- [56] Oshima Y., Asaka S. Interaction of two vortex rings along parallel axes in air. *J. Phys. Soc. Japan*, **42**(2): 708–713, 1977.
- [57] Oshima Y., Kambe T., Asaka S. Interaction of two vortex rings moving along a common axis of symmetry. *J. Phys. Soc. Japan*, **38**(4): 1159–1166, 1975.
- [58] Ould Salihi M.L., Cottet G-H., El Hamraoui M. Blending finite-difference and vortex methods for incompressible flow computations. *SIAM J. Sci. Comput.*, **22**(5): 1655–1674, 2000.
- [59] Ploumhans P., Winckelmans G.S., Salmon J.K., Leonard A., Warren M.S. Vortex methods for direct numerical simulation of three-dimensional bluff body flows: application to the sphere at  $Re=300$ , 500 and 1000. *J. Comput. Phys.*, **178**: 427–463, 2002.

- [60] Pope S.B. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [61] Quartapelle L. *Numerical solution of the incompressible Navier–Stokes equations*. Birkhäuser Verlag, wydanie First, 1993.
- [62] Raviart P.A. *An analysis of particle methods, numerical methods in fluid dynamics*, wolumen 1127 serii *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, 1985. ed. Brezzi F.
- [63] Richardson S.M., Cornish A.R. Solution of three-dimensional incompressible problems. *J. Fluid Mech.*, **82**(2): 309–319, 1977.
- [64] Riley N., Stevens D.P. A note on leapfrogging vortex rings. *Fluid Dynamics Research*, **11**: 235–244, 1993.
- [65] Rosenhead L. The point vortex approximation of a vortex sheet. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **134**: 170–192, 1931.
- [66] Saffman P.G. The velocity of viscous vortex rings. *Studies in Applied Mathematics*, **49**(4), 1970.
- [67] Saffman P.G. A model of vortex reconnection. *J. Fluid Mech.*, **212**: 395–402, 1990.
- [68] Saffman P.G. *Vortex dynamics*. Cambridge University Press, 1992.
- [69] Saffman P.G., Baker G.R. Vortex interactions. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **11**: 95–122, 1979.
- [70] Schatzle P. *An experimental study of fusion of vortex rings*. Praca doktorska, California Institute of Technology, 1987.
- [71] Shariff K., Leonard A. Vortex rings. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **24**: 235–279, 1992.
- [72] Shariff K., Leonard A., Zabusky N.J., Ferziger J.H. Acoustics and dynamics of coaxial interacting vortex rings. *Fluid Dyn. Res.*, **3**: 337–343, 1988.
- [73] Shelley M.J., Meiron D.I., Orszag S.A. Dynamical aspects of vortex reconnection of perturbed anti-parallel vortex tubes. *J. Fluid Mech.*, **246**: 613–652, 1993.

- [74] Shusser M., Gharib M. Energy and velocity of a forming vortex ring. *Phys. Fluids*, **12**(3), 2000.
- [75] VanderLinden G. *Simulation de la turbulence par la méthode particulaire*, Grenoble, 1998.
- [76] Verzicco R., Orlandi P. Normal and oblique collisions of a vortex ring with a wall. *Meccanica*, **29**: 383–391, 1994.
- [77] Wakelin S.L., Riley N. On the formation and propagation of vortex rings and pair of vortex rings. *J. Fluid Mech.*, **332**: 121–139, 1997.
- [78] Winckelmans G.S., Leonard A. Improved vortex methods for three-dimensional flows. *Mathematical Aspects of Vortex Dynamics*, strony 25–35. ed. R.E. Caflisch, SIAM, Philadelphia, 1989.
- [79] Winckelmans G.S., Leonard A. Contributions to vortex particle methods for the computation of three-dimensional incompressible unsteady flows. *J. Comput. Phys.*, **109**: 247–273, 1993.
- [80] Yamada H., Kohsaka T., Yamabe H., Matsui T. Flowfield produced by a vortex ring near a plane wall. *J. Phys. Soc. Japan*, **51**(5): 1663–1670, 1982.
- [81] Yamada H., Matsui T. Mutual slip-through of a pair of vortex rings. *Phys. Fluids*, **22**(7): 1245–1249, 1979.
- [82] Ying L., Zhang P. *Vortex methods*, wolumen 381 serii *Mathematics and Its Application*. Science Press and Kluwer Academic Publishers, wydanie First, 1997.
- [83] Zabusky N.J., Melander M.V. Three-dimensional vortex tube reconnection: morphology for orthogonally-offset tubes. *Physica D*, **37**: 555–562, 1989.
- [84] Zawadzki I. Numerical experiments on vortex dynamics. Praca magisterska, University of California, San Diego, 1989.
- [85] Zawadzki I., Aref H. Mixing during vortex ring collision. *Phys. Fluids A*, **3**(5): 1405–1410, 1991.



