

Wydział Elektroniki Politechniki Wrocławskiej
Katedra Systemów i Sieci Komputerowych

RAPORT Pre-2/2005

Optymalizacja rozmieszczenia bram
w hierarchicznych sieciach komputerowych

(rozprawa doktorska)

Przemysław Ryba

Promotor:
prof. dr hab. inż. Andrzej Kasprzak

Wrocław 2005

Spis treści

ZESTAWIENIE WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ	4
1. WPROWADZENIE	8
1.1. Wstęp.....	8
1.2. Analiza literatury	9
1.3. Pojęcia podstawowe	13
1.3.1. Podstawowe pojęcia z teorii grafów	13
1.3.2. Przepływ wieloskładnikowy	15
1.3.3. Przepływ w sieci hierarchicznej	17
1.3.4. Kryteria oceny jakości działania rozległej sieci komputerowej	18
1.4. Problematyka pracy	20
2. MODEL HIERARCHICZNEJ ROZLEGŁEJ SIECI KOMPUTEROWEJ	25
3. PROBLEM GLCFA ZE ŚREDNIM OPÓŹNIENIEM PAKIETU W SIECI JAKO KRYTERIUM	29
3.1. Sformułowanie problemu	29
3.2. Opis algorytmu	30
3.3. Dolne oszacowanie	35
3.3.1. Dolne oszacowanie LB_{r1}	37
3.3.2. Dolne oszacowanie LB_{r2}	39
3.3.3. Dolne oszacowanie LB_r	39
3.4. Reguły podziału	42
3.4.1. Operacja wyboru	42
3.4.2. Operacja regulacji	44
3.5. Algorytm	46
3.6. Wyznaczanie reprezentacji początkowej	48
3.7. Eksperymenty obliczeniowe	51
3.7.1. Struktury badanych sieci	51
3.7.2. Definicje	57
3.7.3. Badanie zależności T^{opt} od budżetu sieci B	58
3.7.4. Badanie zależności T^{opt} od parametrów natężenia ruchu w sieci	64
3.7.5. Badanie zależności T^{opt} od liczby bram w sieci	68
3.7.6. Badanie własności obliczeniowych algorytmu dokładnego	73

3.7.7. Badanie odległości rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych	76
4. PROBLEM GLCFA Z KOSZTEM BUDOWY SIECI JAKO KRYTERIUM.....	81
4.1. Sformułowanie problemu.....	81
4.2. Opis algorytmu.....	82
4.3. Dolne oszacowanie.....	83
4.3.1. Dolne oszacowanie LB_{r3}	83
4.3.2. Dolne oszacowanie LB_{r4}	86
4.3.3. Dolne oszacowanie LB_r	86
4.4. Reguły podziału.....	87
4.4.1. Operacja wyboru.....	87
4.4.2. Operacja regulacji.....	87
4.5. Algorytm	89
4.6. Wyznaczanie reprezentacji początkowej	91
4.7. Eksperymenty obliczeniowe	93
4.7.1. Definicje	93
4.7.2. Badanie zależności kosztu budowy sieci od wartości T^{max}	94
4.7.3. Badanie zależności kosztu budowy sieci od parametru ro	97
4.7.4. Badanie zależności kosztu budowy sieci od liczby bram w sieci.....	98
4.7.5. Badanie własności obliczeniowych algorytmu dokładnego	100
4.7.6. Badanie odległości rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych	103
5. PROBLEM GLCFA Z UOGÓLNIONYM KRYTERIUM KOSZTOWYM JAKO KRYTERIUM.....	107
5.1. Uogólnione kryterium kosztowe	107
5.2. Sformułowanie problemu.....	108
5.3. Opis algorytmu.....	109
5.4. Dolne oszacowanie.....	109
5.4.1. Dolne oszacowanie LB_{r5}	110
5.4.2. Dolne oszacowanie LB_{r6}	111
5.4.3. Dolne oszacowanie LB_r	112
5.5. Reguły podziału.....	115
5.5.1. Operacja wyboru.....	115
5.5.2. Operacja regulacji.....	116
5.6. Algorytm	117
5.7. Wyznaczanie reprezentacji początkowej	119

5.8. Eksperymenty obliczeniowe	122
5.8.1. Definicje	122
5.8.2. Badanie zależności T^{opt} od wartości współczynnika α	123
5.8.3. Badanie zależności d^{opt} od wartości współczynnika α	126
5.8.4. Badanie zależności funkcji Q od parametru ro	127
5.8.5. Badanie zależności funkcji Q od liczby bram w sieci	129
5.8.6. Badanie własności obliczeniowych algorytmu dokładnego	132
5.8.7. Badanie odległości rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych	136
6. PODSUMOWANIE	142
LITERATURA.....	146

Zestawienie ważniejszych oznaczeń

A	- zbiór zmiennych x związanych z łukami o ustalonych przepustowościach
B	- budżet rozległej sieci komputerowej
B_r	- budżet rozległej sieci komputerowej pomniejszony o koszt łuków o ustalonych przepustowościach
$\bar{B}$	- unormowany budżet rozległej sieci komputerowej
c	- funkcja przepustowości łuków określona na zbiorze L
c^i	- przepustowość kanału i
$c_{\max}^{ir}$	- największą z przepustowości dostępnych do wyboru w zbiorze ZC^i
$\bar{c}$	- funkcja przepustowości łuków określona łukach sieci $\hat{S}_r$
$\bar{c}^i$	- przepustowość kanału i w sieci $\hat{S}$
c_0^i	- ustalona przepustowość kanału i
d	- funkcja kosztu dzierżawy łuków określona na zbiorze L
$\bar{d}$	- funkcja kosztu dzierżawy łuków określona łukach sieci $\hat{S}$
d^i	- koszt dzierżawy kanału i
$\bar{d}^i$	- koszt dzierżawy kanału i w sieci $\hat{S}$
$\hat{d}_k^i$	- minimalny koszt łuku wynikający z możliwych do wyboru lokalizacji bram łączonych przez łuk i
d_{ab}^{ik}	- koszt dzierżawy kanału i o przepustowości c_k^i , który łączy bramy umieszczone odpowiednio w węzłach a i b .
$d_{\min}^{ir}$	- minimalny koszt jednostki przepustowości zastępczego łuku i
d^{opt}	- wartość kosztu budowy sieci hierarchicznej uzyskana w wyniku rozwiązania rozważanego problemu optymalizacji
E_r	- zbiór zmiennych zgodnych, które mogą zostać przełączone na zmienne przeciwne
$\underline{f}$	- wektor przepływu wieloskładnikowego

f_{ir}	- sumaryczny przepływ w kanale i
F_r	- zbiór zmiennych x_k^i oraz y_a^g ustalonych chwilowo lub trwale w (X_r, Y_r)
F_r^t	- zbiór zmiennych x oraz y_a^g ustalonych tymczasowo w (X_r, Y_r)
$\overline{G}_r$	- graf reprezentujący sieć zastępczą do dolnego oszacowania
H^l	- zbiór bram do umieszczenia w sieci S_1^l
J_g	- zbiór węzłów z sieci 1. poziomu, w których może być umieszczona brama g
$J_g^{(r)}$	- zbiór węzłów, do których może być przeniesiona brama g w r iteracji algorytmu heurystycznego
K	- liczba sieci 1. poziomu
L	- zbiór wszystkich łuków sieci
L_1^l	- zbiór łuków sieci 1. poziomu S_1^l
L_2	- zbiór łuków sieci 2. poziomu
LG	- zbiór sztucznych łuków w sieci $\hat{S}_r$ łączących potencjalne lokalizacje bram z węzłami reprezentującymi bramy
m	- liczba kanałów w sieci 2. poziomu
M_r	- zbiór zmiennych przeciwnych, na które mogą zostać zamienione zmienne zgodne w wyniku operacji wyboru
N_1^l	- zbiór węzłów sieci 1. poziomu S_1^l
N_2	- zbiór węzłów sieci 2. poziomu
n_1^l	- liczba węzłów sieci 1. poziomu S_1^l
n	- liczba wszystkich węzłów w sieci
N	- zbiór wszystkich węzłów sieci
p	- liczba wszystkich kanałów w sieci rozległej
P_r	- zbiór zmiennych przeciwnych, na które mogą zostać zamienione zmienne zgodne w wyniku operacji regulacji
Q	- uogólnione kryterium kosztowe

R	- macierz wprowadzanych z zewnątrz natężeń
$\Re_H$	- zbiór wszystkich możliwych reprezentacji (X_r, Y_r)
ri	- średnie natężenie strumienia pakietów pomiędzy węzłami tej samej sieci 1. poziomu
rk	- średnie natężenie strumienia pakietów pomiędzy węzłami
ro	- średnie natężenie strumienia pakietów pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu
$\overline{ro}$	- unormowany parametr ro
$\tilde{S}$	- sieć zastępcza tworzona na potrzeby algorytmu heurystycznego
S_l^l	- sieć 1. poziomu o numerze l
$s(i)$	- liczba dostępnych przepustowości dla kanału i
S_r	- sieć wyznaczona przez reprezentację (X_r, Y_r)
$\hat{S}_r$	- sieć zastępcza utworzona do wyznaczenia dolnego oszacowania LB_r
$T^{\max}$	- maksymalne dopuszczalne średnie opóźnienie pakietu w sieci
$\overline{T}^{\max}$	- unormowana wartość parametru $T^{\max}$
T^{opt}	- wartość średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej uzyskana w wyniku rozwiązania rozważanego problemu optymalizacji
$T(Sl)$	- wartość średniego opóźnienia pakietu w sieci 1. poziomu S
$T(SN)$	- średnie opóźnienie pakietu w sieci 2. poziomu
V^g	- zbiór wszystkich kanałów sieci 2. poziomu przyległych do bramy g
X^i	- zbiór wszystkich zmiennych x_k^i związanych z wyborem przepustowości łuku i
$\bar{x}^i$	- zmienna ciągła określającą przepustowość kanału i
x^i	- zmienna związana z wyborem k -tej przepustowości dla kanału i
X_r	- zbiór wszystkich zmiennych x^i , które są równe jedności
y_a^g	- zmienna związana z wyborem lokalizacji bramy g w węźle a

Y^g	- zbiór wszystkich zmiennych y_a^g związanych z wyborem lokalizacji bramy g
Y_r	- zbiór wszystkich zmiennych y_a^g , które są równe jedności
YW	- zbiór zmiennych y_a^g , takich że w sieci zastępczej został dodany sztuczny łuk łączący węzeł reprezentujący bramę g z węzłem a .
ZC^i	- zbiór przepustowości dostępnych dla kanału i wyrażonych w bitach/s,
α	- współczynnik przeliczający średnie opóźnienie pakietu na koszt
$\bar{\alpha}$	- unormowany współczynnik α
α_{OR}	- współczynnik przeliczający opóźnienie na koszt w kryterium wyboru zmiennych do zamiany w operacji regulacji
α_{OW}	- współczynnik przeliczający opóźnienie na koszt w kryterium wyboru zmiennych do zamiany w operacji wyboru
χ	- odległość pomiędzy rozwiązaniem przybliżonym a rozwiązaniem dokładnym
δ_{ab}^{gr}	- szacunkowa zmiana średniego opóźnienia po zamianie zmiennej y_a^g na y_b^g
$\bar{\delta}_{ab}^{gr}$	- lokalne kryterium wyboru zmiennej y_a^g do zamiany na y_b^g
Δ_{kj}^{ir}	- szacunkowa zmiana średniego opóźnienia po zamianie zmiennej x na x_j^i
$\bar{\Delta}_j^i$	- lokalne kryterium wyboru zmiennej x do zamiany na x_j^i
Φ	- względna liczba iteracji potrzebna do rozwiązania rozważanego problemu
Γ	- liczba iteracji potrzebna do rozwiązania rozważanego problemu
Ω	- średnia odległość pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą algorytmu heurystycznego a rozwiązaniami dokładnymi
$\Theta(a, b)$	- względna liczba rozwiązań przybliżonych o wartości $\chi \in (a, b)$

1. Wprowadzenie

1.3. Wstęp

W ostatnich latach nie maleje znaczenie sieci komputerowych dla funkcjonowania niemal każdej organizacji. Trudno sobie wyobrazić, by państwo, duże przedsiębiorstwo, bank czy uczelnia mogły funkcjonować bez sprawnie działającej infrastruktury telekomunikacyjnej. Istotnym elementem infrastruktury telekomunikacyjnej są sieci komputerowe. Sposób transferu danych w sieci oraz zasięg terytorialny sieci, stanowią podstawę ich klasyfikacji. Ze względu na zasięg terytorialny, sieci komputerowe możemy podzielić na następujące klasy [19]:

- rozległe sieci komputerowe – WAN (*Wide Area Network*)
- lokalne sieci komputerowe – LAN (*Local Area Network*),
- miejskie sieci komputerowe – MAN (*Metropolitan Area Network*).

W pracach [19, 38, 48, 85, 88, 94, 95] przedstawione zostały zagadnienia związane z funkcjonowaniem sieci komputerowych. W niniejszej pracy zajmujemy się sieciami rozległymi, które definiujemy następująco:

Rozległa sieć komputerowa to system składający się z węzłów i łączących je linii transmisji danych obejmujący swym zasięgiem duży obszar geograficzny, np.: region, państwo, kontynent, a nawet cały świat. Dostęp do sieci rozległej uzyskuje się przez dołączenie systemów użytkownika do węzłów sieci.

Najważniejszą funkcją sieci komputerowych jest transfer danych między komputerami lub terminalami. Ilość danych przesyłanych w sieciach stale rośnie. Papierowe oferty, umowy, faktury i inne dokumenty powstające w procesach biznesowych zastępowane są przez elektroniczne odpowiedniki. Dążenie do zwiększania wydajności pracowników i poprawiania komunikacji wewnątrz organizacji wymusza stosowanie nowych aplikacji jak: wideokonferencje, komunikatory internetowe, telefonia IP, aplikacje pracy grupowej. Ponadto wszyscy uczestnicy procesów biznesowych potrzebują szybkiego i niezawodnego dostępu do różnorodnych danych dotyczących sprzedaży, marketingu, danych inżynierskich lub finansowych niezależnie od tego gdzie dane te są przechowywane fizycznie. Dostępu do danych wymagają nie tylko pracownicy i kierownictwo organizacji ale także dostawcy, dystrybutorzy, kooperanci i klienci. Aplikacje sieciowe odgrywają krytyczną rolę dla funkcjonowania wielu organizacji. W dobie postępującej globalizacji i ostrej konkurencji rynkowej, dochodzi do wielu fuzji i przejęć. Wraz z łączeniem przedsiębiorstw, organizacji, korporacji powstaje potrzeba łączenia istniejących infrastruktur telekomunikacyjnych. Ponadnarodowe korporacje muszą zapewnić sprawną komunikację swoim oddziałom rozproszonym na całym świecie. Budowa infrastruktury telekomunikacyjnej dla globalnych

organizacji jest olbrzymim wyzwaniem. Zadanie budowy dużych sieci rozległych zwykle musi być zdekomponowane na mniejsze problemy, które są łatwiejsze w planowaniu, realizacji i zarządzaniu. W tym celu często stosowane jest podejście hierarchiczne. Sieć rozległa dzielona jest na trzy warstwy [70, 78]: szkieletową (*backbone*), dystrybucyjną (*distribution*) i dostępową (*access*). Sieć szkieletowa jest na szczycie hierarchii, służy ona do przesyłania danych pomiędzy sieciami dystrybucyjnymi, te z kolei łączą sieci dostępowe, znajdujące się na najniższym poziomie hierarchii. Sieci każdej z warstw mogą być projektowane oddzielnie. W każdej sieci podrzędnej wyznaczane są węzły, których zadaniem jest obsługa ruchu sieciowego przesyłanego pomiędzy węzłami tej sieci a węzłami innych sieci. Węzły te będziemy nazywać bramami. Bramy sieci niższego poziomu są łączone podsiecią komunikacyjną sieci wyższego poziomu. Rozmieszczenie bram w sieci ma wpływ na przepływy w sieci oraz na koszt budowy sieci. Dlatego wyznaczenie lokalizacji bram jest istotnym problemem w projektowaniu sieci hierarchicznych. W niniejszej pracy rozważamy sieci hierarchiczne składające się z 2. poziomów hierarchii. Według nomenklatury używanej w pracach [70, 78] zajmujemy się warstwą szkieletową i dystrybucyjną, natomiast sieci dostępowe reprezentowane są przez węzły sieci dystrybucyjnej. Rozważamy zagadnienia związane z projektowaniem hierarchicznych sieci komputerowych szczególny nacisk kładąc na rozmieszczenie bram w sieciach. Przedstawimy rozwiązania problemów jednoczesnego wyznaczania rozmieszczenia bram w sieciach 1. poziomu hierarchii, przepustowości kanałów sieci 2. poziomu oraz przepływów w hierarchicznej rozległej sieci komputerowej. Przewidujemy, że problematyka projektowania hierarchicznych sieci rozległych będzie rozwijała się z powstawaniem kolejnych wielkich organizacji oraz z wdrażaniem sieci nowej generacji łączących sieci rozległe w jeden duży organizm.

1.4. Analiza literatury

Budowa rozległej sieci komputerowej jest złożonym przedsięwzięciem. Projekt sieci komputerowej musi uwzględniać wiele biznesowych i technicznych celów, wśród których są wymagania dotyczące dostępności, skalowalności, bezpieczeństwa, łatwości zarządzania i oczywiście kosztów. Zaspokojenie wielu, często sprzecznych, wymagań jest trudnym zadaniem wymagającym wielu trudnych wyborów i kompromisów. Budowa i projektowanie rozległych sieci komputerowych jest przedmiotem wielu prac [9, 11, 12, 22, 32, 39, 48, 63, 67, 85]. Koszt budowy lub rozbudowy sieci obsługującej setki, tysiące komputerów może być tak duży, że zmniejszenie go o kilka procent może przynieść oszczędności idące w dziesiątki tysięcy dolarów miesięcznie [12]. Rozległa sieć komputerowa powinna więc być zaprojektowana w oparciu o precyzyjny plan działania, na który składają się trzy kolejne etapy [51]:

- wstępnego rozpoznania
- projektowania

- instalacji i wdrażania

W ramach etapu wstępnego rozpoznania zbierane są informacje o użytkowniku, inwentaryzowane są jego zasoby informatyczne, określone są jego wymagania, szacuje się natężenia strumieni bitów przesyłanych pomiędzy poszczególnymi lokalizacjami, przygotowywana jest dokumentacja, na podstawie której oceniana jest celowość przedsięwzięcia i wykonywany jest projekt sieci. Na etap projektowania składają się między innymi: określenie lokalizacji węzłów, wybór protokołu komunikacyjnego, wyznaczenie struktury sieci, wybór platformy sprzętowej, opracowanie schematu adresacji w sieci. Niniejsza praca dotyczy zagadnień związanych z projektowaniem struktury sieci. Przez strukturę sieci rozumiemy schemat rozmieszczenia kanałów pomiędzy poszczególnymi węzłami sieci, natomiast przez projektowanie struktury sieci rozumiemy wyznaczanie struktury sieci, określenie przepustowości kanałów i reguły doboru tras. W niniejszej pracy reguła doboru tras jest reprezentowana przez przepływ w sieci.

Można wyróżnić cztery podstawowe zadania związane z projektowaniem struktur sieci rozległych [34]:

- wyznaczanie przepływów w sieci – FA (*Flow Assignment*). Zadanie to jest przedmiotem rozważań następujących prac [1, 3, 6, 8, 13, 17, 30, 34, 40, 53, 71, 90]. Powszechnie stosowanymi algorytmami wyznaczania przepływów są algorytmy FD (*Flow Deviation*) [30] oraz EF (*Extremal Flows*) [13]. Na szczególną uwagę zasługuje algorytm FD, który jest przejrzysty, łatwy w implementacji i szczególnie efektywny z obliczeniowego punktu widzenia.
- wyznaczanie przepustowości kanałów – CA (*Capacity Assignment*). Sformułowanie tego zadania można znaleźć w pracy [34],
- jednoczesne wyznaczanie przepływów i przepustowości kanałów – CFA (*Capacity and Flow Assignment*). Zadanie to jest przedmiotem rozważań wielu prac [2, 33, 34, 36, 37, 35, 46, 47, 49-52, 65, 77]. W pracach tych można znaleźć zarówno rozwiązania dokładne jak i przybliżone problemu jednoczesnego wyznaczania przepływów i przepustowości kanałów w rozległej sieci komputerowej z dyskretną funkcją kosztów.
- jednoczesne wyznaczanie przepływów, przepustowości kanałów i struktury sieci – TCFA (*Topology, Capacity and Flow Assignment*). Rozwiązania tego zadania, zarówno dokładne jak i przybliżone można znaleźć w następujących pracach [41, 44, 49, 51].

Wymienione zadania rozwiązywane są przy różnych założeniach dotyczących sieci oraz dla różnych wskaźników jakości. Ich wybór zależy od wymagań użytkownika oraz od zastosowań sieci rozległej. Do najważniejszych wskaźników jakości działania rozległej sieci komputerowej należą [49]:

- średnie opóźnienie pakietu w sieci,

- koszt budowy sieci,
- przepustowość sieci,
- niezawodność sieci,
- koszt korzystania z sieci.

Klasyczne metody projektowania sieci rozległych doskonale nadają się do projektowania małych i średnich sieci [56]. Natomiast w przypadku dużych sieci metody te stają się zbyt kosztowne z obliczeniowego punktu widzenia, a czasami nawet nie jest możliwe znalezienie rozwiązania optymalnego w realnym czasie. W pracy [56] została zaproponowana metodologia projektowania dużych rozległych sieci polegająca na grupowaniu węzłów sieci, w tzw. skupienia (*clusters*), a następnie wybieraniu spośród węzłów każdego skupienia tzw. bram (*gate, gateway*), których zadaniem jest komunikacja pomiędzy węzłami należącymi do różnych skupień. Metody projektowania oparte na hierarchicznym łączeniu węzłów w skupienia pozwalają znacząco ograniczyć koszt obliczeń poprzez dekompozycję problemu na mniejsze podproblemy i tym samym zmniejszenie rozmiaru problemu. Zadanie projektowania hierarchicznej sieci komputerowej można podzielić na następujące podproblemy:

- wybór liczby poziomów hierarchii oraz liczby skupień na każdym poziomie hierarchii
- grupowanie węzłów w skupienia
- wybór bram w skupieniach
- projektowanie sieci każdego ze skupień

W pracy [56] zostało przedstawione rozwiązanie problemu wyboru liczby poziomów hierarchii oraz liczby skupień na każdym poziomie, tak aby minimalizować koszt obliczeń. W literaturze jednak najczęściej spotyka się sieci hierarchiczne 2. lub 3. poziomowe. [70, 78, 89]. Do grupowania węzłów w skupienia korzysta się z technik heurystycznych wykorzystujących pojęcie „bliskości” węzłów (*nearness*). Wskaźnik „bliskości” węzłów wykorzystywany jest do znajdowania naturalnych zgrupowań węzłów, tj. węzłów rozmieszczonych fizycznie blisko siebie a także węzłów, pomiędzy którymi przesyłane są duże ilości danych. Przykłady wskaźników „bliskości” węzłów można znaleźć w pracach [56, 89]. W pracy [69] przedstawiony został algorytm do wyznaczania optymalnej liczby skupień węzłów oraz optymalnego przypisania węzłów do skupień na kolejnych poziomach hierarchii na podstawie ich położenia geograficznego. Metody łączenia węzłów w skupienia mają zastosowanie także do projektowania sieci bezprzewodowych [5, 15, 84]. Rozmieszczenie bram w poszczególnych skupieniach jest przedmiotem rozważań wielu prac. Jednak często w literaturze, skupienia 1. poziomu hierarchii są traktowane jako sieci dostępne, które nie są przedmiotem rozważań niniejszej pracy. W literaturze często rozpatrywany jest problem lokalizacji węzłów komunikacyjnych (koncentratorów), a następnie przypisania im zbioru hostów lub terminali. Problem ten odpowiada problemowi *concentrator location*, który należy do klasycznych problemów badań operacyjnych [14, 24, 25, 57, 66, 68]. W artykułach [57, 68] przedstawiony został przegląd algorytmów do projektowania sieci dostępowych

obejmujący sieci o różnych strukturach, m.in. gwiazda/gwiazda (*star/star*) i gwiazda/drzewo (*star/tree*). W sieciach o strukturze gwiazda/gwiazda występuje jeden punkt centralny, do którego podłączone są koncentratory, do koncentratorów natomiast podłączone są terminale. Sieci takie ograniczone są do dwóch poziomów hierarchii, niższy poziom stanowią terminale, wyższy koncentratory, do których są podłączone terminale. W sieciach o strukturze gwiazda/drzewo terminale podłączone są do koncentratorów, te z kolei połączone są ze sobą w drzewiastą strukturę. W sieciach gwiazda/drzewo koncentratory mogą być umieszczone na różnych poziomach hierarchii oraz mogą występować koncentratory różnego typu, różniące się np. przepustowością, pojemnością, itp.

W pracy [80] zaprezentowany został heurystyczny algorytm do budowy 2. poziomowej sieci hierarchicznej, na który składa się procedura wyboru liczby i wielkości skupień (*cluster*), procedura tworzenia skupień na podstawie geograficznego rozmieszczenia węzłów, procedura wyboru bram na podstawie ważonej odległości od centralnego punktu skupienia (od środka ciężkości) i procedura doboru przepustowości kanałów sieci 2. poziomu oraz sieci 1. poziomu. Algorytm znajduje rozwiązanie minimalizujące koszt budowy sieci tak, aby spełnione były wymagania na przepustowość kanałów, z uwzględnieniem wymagań niezawodnościowych. Podobny algorytm heurystyczny został zaprezentowany w pracy [81]. Węzły reprezentujące sieci LAN są przyłączane do bram, pełniących rolę koncentratorów. Przyjęta została struktura sieci drzewo/drzewo, w której bramy o różnych kosztach i przepustowościach połączone są w hierarchiczną strukturę.

Metodologię projektowania hierarchicznych sieci rozległych można wykorzystać również do projektowania sieci łączących istniejące sieci rozległe. Istniejące sieci rozległe są reprezentowane przez podsieci skupień 1. poziomu. Problem łączenia sieci rozległych sprowadza się do wyznaczenia rozmieszczenia bram oraz struktury sieci nadrzędnej łączącej bramy. Problem łączenia istniejących sieci rozległych jest w literaturze niemal nieobecny. Można za to znaleźć wiele rozwiązań problemów łączenia istniejących sieci lokalnych [16, 18, 26, 27, 58, 62]. W pracy [26] opisany jest algorytm oparty na relaksacji Lagrange’a do projektowania połączeń międzysieciowych tak, aby minimalizować całkowity koszt budowy sieci, na który składa się koszt mostów oraz koszt łączy, uwzględniając ograniczenia na przepustowość mostów i przy zachowaniu struktury drzewa. Problemu łączenia sieci LAN za pomocą mostów dotyczy również praca [27], w której przedstawiono rozwiązanie minimalizujące kryterium kosztowe uwzględniające koszt budowy sieci oraz koszt opóźnienia wiadomości. W pracy [27] przedstawione zostały rozwiązania przy użyciu relaksacji Lagrange’a oraz za pomocą heurystycznej metody “Taboo search”. W pracy [62] przedstawiono problem łączenia sieci ATM oraz optymalnego rozmieszczenia przełączników/routerów. Rozważane są tam dwa problemy. Problem łączenia węzłów w grupy (*peer groups*) i wybór liderów grup w taki sposób, aby minimalizować koszt połączenia

grup oraz problem łączenia grup przełączników ATM za pomocą routerów IP aby minimalizować koszt połączenia pomiędzy routerami.

W literaturze jest niewiele pozycji na temat łączenia istniejących sieci rozległych. Jest pozycja [61], w której przedstawiony został algorytm rozmieszczenia bram do łączenia dwóch istniejących rozległych sieci komputerowych oparty na relaksacji Lagrange'a. Bramy reprezentowane są przez kanały łączące węzły różnych sieci, przepustowość wszystkich bram jest taka sama, koszt ustanowienia bramy jest funkcją odległości pomiędzy węzłami do połączenia. Funkcją kryterialną jest liniowa kombinacja średnich opóźnień pakietów przesyłanych wewnątrz sieci i pomiędzy sieciami. Zaprezentowane zostały wyniki działania algorytmu lokalizacji bram do łączenia dwóch istniejących sieci z komutacją pakietów: wcześniejszej wersji sieci ARPANET i USA NET. Zaprezentowano wyniki badań dla dwóch wartości współczynników wagowych w funkcji kryterialnej, różnych natężeń ruchu wewnątrz łączonych sieci i kilku wartości budżetu. W pracy [61] rozważany jest problem łączenia dwóch istniejących sieci rozległych. Zagadnienia związane z łączeniem istniejących sieci rozległych są istotne w dobie Internetu i łączenia sieci rozległych i telekomunikacyjnych w jeden duży system. Powstała zatem luka w literaturze dotyczącej łączenia sieci rozległych. Jej wypełnienie było celem niniejszej pracy. Zaproponowaliśmy metodę połączenia wielu istniejących sieci rozległych korzystając z metodologii projektowania sieci hierarchicznych. W tym celu sformułowane zostały zadania jednoczesnego rozmieszczenia bram, przepustowości kanałów sieci 2. poziomu oraz przepływów w hierarchicznej sieci komputerowej oraz zaproponowano algorytmy dokładne do rozwiązywania rozważanych zadań, które minimalizują wybrane wskaźniki jakości działania sieci. Rozważane zadania, jak dotąd nie występują w dostępnej literaturze.

1.5. Pojęcia podstawowe

W celu przedstawienia używanej w pracy nomenklatury opiszemy podstawowe problemy i pojęcia związane z przepływami w sieciach komputerowych oraz w hierarchicznych sieciach komputerowych. Przedstawimy również definicje najczęściej stosowanych wskaźników oceny jakości działania sieci rozległych.

1.5.1. Podstawowe pojęcia z teorii grafów

Graf właściwy to uporządkowana para zbiorów $G = \langle N, L \rangle$: zbioru wierzchołków N i zbioru L par różnych wierzchołków ze zbioru N . Elementy zbioru L nazywane są krawędziami lub łukami. Uporządkowana para wierzchołków $\langle x, y \rangle \in L$ nazywana będzie łukiem zorientowanym, x początkiem łuku, natomiast y końcem łuku. Graf G , w którym zbiór L zawiera wyłącznie łuki zorientowane nazywany jest grafem zorientowanym. Nieuporządkowana para wierzchołków zwana jest łukiem niezorientowanym, zaś graf,

w którym zbiór L zawiera wyłącznie łuki nieorientowane nazywany jest grafem nieorientowanym. Jeśli w grafie występują zarówno łuki zorientowane jak i nieorientowane to graf nazywany jest grafem mieszanym. Graf, w którym każdej parze wierzchołków przyporządkowany jest co najwyżej jeden łączący je łuk, nazywany jest unigrafem. Jeżeli parze wierzchołków może być przyporządkowane więcej łuków, to graf nazywany jest multigrafem.

Sieć S to graf właściwy $G = \langle N, L \rangle$ z określonymi na jego łukach funkcjami. Sieć oznaczana jest następująco: $S = \langle G; h_1, \dots, h_s \rangle$, gdzie h_i $i = 1, \dots, s$ są funkcjami przyporządkowującymi każdemu łukowi ze zbioru L nieujemną liczbę rzeczywistą. Struktura sieci reprezentowana jest przez graf G . Sieć, w której graf G jest zorientowany, nieorientowany lub mieszany nazywana jest odpowiednio siecią zorientowaną, nieorientowaną lub mieszaną.

Niech $x_1, x_2, \dots, x_a$ ($a \geq 2$) będzie ciągiem różnych węzłów sieci S , takich że każdej parze węzłów (x_i, x_{i+1}) $i = 1, \dots, a-1$ przyporządkowany jest łuk zorientowany $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$. Ciąg węzłów i łuków $x_1, \langle x_1, x_2 \rangle, x_2, \dots, x_{a-1}, \langle x_{a-1}, x_a \rangle, x_a$ nazywany jest trasą od węzła x_1 do węzła x_a . Niech $x_1, x_2, \dots, x_a$ ($a \geq 2$) będzie ciągiem różnych węzłów sieci S , takich że każdej parze węzłów (x_i, x_{i+1}) $i = 1, \dots, a-1$ przyporządkowany jest łuk zorientowany $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ lub łuk zorientowany $\langle x_{i+1}, x_i \rangle$. Utworzony w ten sposób ciąg węzłów i łuków nazywany jest ścieżką od węzła x_1 do węzła x_a . Łuki $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ nazywane są łukami zgodnymi ścieżki, natomiast pozostałe łuki tej ścieżki nazywane są łukami niezgodnymi. W sieciach nieorientowanych pojęcia ścieżki i trasy pokrywają się.

Sieć S zdefiniowana powyżej jest matematycznym modelem rozległej sieci komputerowej. Wierzchołki grafu G odpowiadają węzłom rozległej sieci komputerowej, natomiast łuki reprezentują kanały transmisyjne sieci rozległej. Łuki zorientowane odpowiadają kanałom jednokierunkowym, łuki nieorientowane – kanałom półdupleksowym. Kanały dwukierunkowe, które są równoważne dwóm kanałom jednokierunkowym, przez które dane przesyłane są w przeciwnych kierunkach, reprezentowane są przez parę łuków zorientowanych, przeciwnie skierowanych, łączących tę samą parę wierzchołków.

Aby uwzględnić własności rzeczywistej rozległej sieci komputerowej zdefiniowane zostały następujące funkcje określone na łukach grafu G :

- funkcja przepustowości łuków $c: L \rightarrow R^+ \cup \{0\}$,
- funkcja kosztów dzierżawy łuków $d: L \rightarrow R^+ \cup \{0\}$.

Przepustowości kanałów rozległej sieci komputerowej określane są przez zalecenia ITU-T, które definiują skończony zbiór dostępnych przepustowości. Funkcja przepustowości łuków przyporządkowuje wszystkim łukom sieci przepustowości takie jak przepustowości reprezentowanych przez nie kanałów sieci rozległej. Koszty dzierżawy kanału zależą od przepustowości kanału oraz od jego długości. Funkcja kosztów dzierżawy łuków przyporządkowuje każdemu łukowi sieci koszt, który odpowiada kosztowi dzierżawy kanału

sieci rozległej. Zarówno funkcja przepustowości łuków jak i funkcja kosztów dzierżawy łuków są funkcjami dyskretnymi. Przegląd cenników firm telekomunikacyjnych oraz literatury [34] pozwala przyjąć założenie, że wraz ze wzrostem przepustowości kanału, koszt dzierżawy jednostki przepustowości kanału maleje lub pozostaje stały.

Uwzględniając wprowadzone funkcje, rozległą sieć komputerową reprezentuje sieć $S = \langle G; c, d \rangle$, w której graf G reprezentuje strukturę sieci, czyli rozmieszczenie węzłów oraz kanałów w sieci, zaś funkcje c oraz d reprezentują parametry kanałów sieci rozległej.

1.5.2. Przepływ wieloskładnikowy

W rozległych sieciach komputerowych dane przesyłane są w postaci bitów. Ciąg danych do przesłania dzielony jest na porcje zwane pakietami, które przesyłane są pojedynczo od nadawcy do odbiorcy. Zbiór pakietów mających wspólnie węzeł źródłowy i węzeł docelowy nazywany jest składnikiem. W większości sieci komputerowych, w tym samym czasie, odbywa się transfer danych pomiędzy wieloma parami węzłów, czyli wiele składników jest przesyłanych jednocześnie. Taki jednoczesny przepływ wielu składników nazywa się przepływem wieloskładnikowym [55]. Przepływ wieloskładnikowy odpowiada średniemu przepływowi pakietów w sieci komputerowej w jednostce czasu.

Przez r'_{ab} oznaczmy średnie natężenie strumienia pakietów kierowanych od węzła a do węzła b wyrażone w pakietach/s, natomiast przez $1/\mu$ oznaczmy średnią długość pakietu [bit/pakiet]. Zatem $r_{ab} = r'_{ab}/\mu$ jest średnim natężeniem strumienia kierowanego od węzła a do węzła b wyrażonym w bitach/s. Macierz $R = [r_{ab}]_{n \times n}$, gdzie n jest liczbą węzłów w sieci, nazywana jest macierzą wprowadzanych z zewnątrz natężeń. Jako, że w sieci nie są przesyłane pakiety, dla których węzeł źródłowy pokrywa się z węzłem docelowym $r_{aa} = 0$, $a = 1, \dots, n$, na przekątnej macierzy R znajdują się elementy zerowe. Wszystkie składniki w sieci są ponumerowane od 1 do q . Ze składnikiem k związana jest para węzłów: węzeł źródłowy s_k i węzeł docelowy u_k . Przez r_k oznaczone jest średnie natężenie składnika k , tj. dla $a = s_k$ i $b = u_k$ zachodzi $r_k = r_{ab}$; r_k nazywamy również wartością składnika k .

Niech S będzie siecią, której strukturę określa graf $G = \langle N, L \rangle$, który jest zorientowanym unigrafem właściwym. Przepływem wieloskładnikowym w sieci S realizującym macierz wprowadzanych z zewnątrz natężeń R jest zespół funkcji:

$$f^k : L \rightarrow R^+ \cup \{0\}, \quad k = 1, \dots, q,$$

których wartości $f^k(x, y)$, $k = 1, \dots, q$ przypisane łukom $\langle x, y \rangle \in L$, określane jako przepływ składnika k w łuku $\langle x, y \rangle$, spełniają następujący układ warunków:

$$f^k(x, y) \geq 0 \text{ dla każdego } \langle x, y \rangle \in L, \quad k = 1, \dots, q \quad (1.1)$$

$$\sum_{y \in A(x)} f^k(x, y) - \sum_{y \in B(x)} f^k(y, x) = \begin{cases} r_k & \text{dla } x = s_k \\ -r_k & \text{dla } x = u_k \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (1.2)$$

dla każdego $x \in N$, $k = 1, \dots, q$,

gdzie zbiory $A(x)$, $B(x)$ zdefiniowane są następująco:

$A(x) = \{y : y \in N \text{ i } \langle x, y \rangle \in L\}$ – zbiór węzłów sieci, do których prowadzą łuki wychodzące z węzła x ,

$B(x) = \{y : y \in N \text{ i } \langle y, x \rangle \in L\}$ – zbiór węzłów sieci, od których prowadzą łuki skierowane do węzła x .

Warunek (1.2) oznacza, że suma przepływów składnika wpływającego do węzła pośredniego, nie będącego ani źródłem ani ujściem składnika, jest równa sumie przepływów składnika wypływającego z tego węzła. W przypadku węzła źródłowego, suma przepływów składnika wypływającego z tego węzła jest równa wartości składnika, zaś w przypadku węzła docelowego, suma przepływów składnika wpływającego do węzła jest także równa wartości tego składnika.

Niech sumaryczny przepływ w łuku $\langle x, y \rangle$ będzie oznaczany przez $f(x, y)$. Jeśli łuk $\langle x, y \rangle$ jest łukiem zorientowanym to:

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^q f^k(x, y) \quad (1.3)$$

Natomiast jeśli łuk $\langle x, y \rangle$ jest łukiem niezorientowanym to:

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^q |f^k(x, y) - f^k(y, x)| \quad (1.4)$$

gdzie $f^k(x, y)$ i $f^k(y, x)$ są odpowiednio przepływami k -tego składnika w łukach skierowanych $\langle x, y \rangle$ i $\langle y, x \rangle$ zastępujących łuk niezorientowany $\langle x, y \rangle$. Warunek (1.4) wynika z przyjętego w literaturze założenia [29], że przepływ dowolnego składnika w łuku niezorientowanym odbywa się w jednym kierunku. W celu wyznaczenia przepływu w sieci niezorientowanej lub mieszanej, sprowadza się ją do sieci zorientowanej przez zastąpienie wszystkich łuków niezorientowanych parą przeciwnie skierowanych łuków zorientowanych. Po wyznaczeniu przepływu w tak skonstruowanej sieci zorientowanej, przepływy w łukach niezorientowanych wyznacza się w następujący sposób: jeśli $f^k(x, y) \geq f^k(y, x)$, to w łuku niezorientowanym przepływ składnika k o wartości $f^k(x, y) - f^k(y, x)$ jest kierowany z węzła x do węzła y . W łuku niezorientowanym różne składniki mogą być przesyłane w różnych kierunkach, natomiast sumaryczny przepływ wieloskładnikowy w łuku jest sumą przepływów wszystkich składników, niezależnie od ich kierunku. W niniejszej pracy wykorzystywane będą wyłącznie łuki niezorientowane, zatem sumaryczny przepływ w łukach będzie wyznaczany za pomocą wyrażenia (1.4).

W związku ze skończoną przepustowością kanałów sieci rozległej, przepływ wieloskładnikowy w sieci musi spełniać dodatkowe ograniczenie:

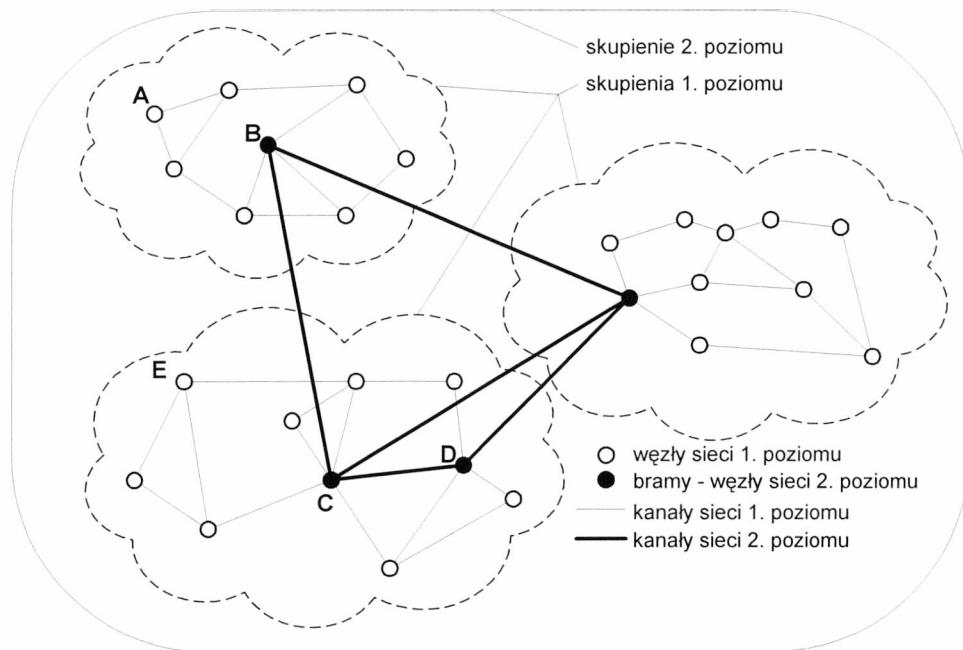
$$f(x, y) \leq c(x, y) \text{ dla każdego } \langle x, y \rangle \in L \quad (1.5)$$

W celu uproszczenia zapisów w dalszej części pracy, wprowadzone zostają następujące oznaczenia związane z przepływem wieloskładnikowym:

- $\underline{f}$ – wektor sumarycznych przepływów w łukach sieci,
- $\underline{f}^k$ – wektor przepływów składnika k w łukach sieci,
- $\underline{c}$ – wektor przepustowości łuków sieci,
- $\mathfrak{T}_w$ – zbiór wektorów $\underline{f}$ odpowiadających przepływowi wieloskładnikowemu,
- $\mathfrak{T}_{wc}$ – zbiór wektorów $\underline{f} \in \mathfrak{T}_w$, dla których jest spełniona zależność (1.5)

1.5.3. Przepływ w sieci hierarchicznej

W sieciach hierarchicznych węzły sieci są grupowane w skupienia na 1. poziomie, a te z kolei są łączone w skupienia na 2. poziomie hierarchii itd.; najwyższy poziom w strukturze hierarchicznej zawiera wszystkie węzły sieci. W skupieniach każdego poziomu hierarchii wyszczególnione są węzły nazywane bramami. Bramy są jednocześnie węzłami wyższego poziomu hierarchii. W skupieniach 1. poziomu spośród węzłów wyznaczane są bramy, które są jednocześnie węzłami skupienia 2. poziomu, itd. Podsiecią skupienia k -tego poziomu nazywana jest sieć komunikacyjną łączącą węzły k -tego poziomu, należące do tego samego skupienia na tym poziomie. Na każdym poziomie hierarchii występuje tyle różnych podsieci, ile jest skupień na tym poziomie. W niniejszej pracy rozpatrywana jest dwupoziomowa sieć hierarchiczna. Węzły sieci pogrupowane są w skupienia 1. poziomu. W sieciach 1. poziomu wyróżnione są bramy, które jednocześnie są węzłami sieci 2. poziomu łączącej wszystkie sieci 1. poziomu.



Rys. 1.1. Struktura dwupoziomowej hierarchicznej sieci rozległej

Przepływ pakietów między węzłami należącymi do tego samego skupienia wykorzystuje tylko trasy tworzone wewnątrz podsieci tego skupienia. Przepływ pakietów między węzłami należącymi do dwóch różnych skupień 1. poziomu, wchodzącymi w skład tego samego skupienia 2. poziomu, będzie przesyłany przez podsieć pierwszego skupienia 1. poziomu do bram w tym skupieniu, dalej przez podsieć skupienia 2. poziomu do bram w drugim skupieniu 1. poziomu, a następnie przez podsieć drugiego skupienia 1. poziomu do węzła przeznaczenia. Na rys. 1.1, na którym przedstawiamy przykładową strukturę 2. poziomowej hierarchicznej sieci rozległej, oznaczyliśmy literami kilka wybranych węzłów sieci. Prześledźmy przepływ pakietów pomiędzy węzłem A a węzłem E. Z węzła A pakiety są przesyłane kanałami sieci 1. poziomu do bramy B, następnie kanałami sieci 2. poziomu od bramy B do bramy C lub bramy D, następnie kanałami docelowej sieci 1. poziomu do węzła E.

1.5.4. Kryteria oceny jakości działania rozległej sieci komputerowej

Przepływ wieloskładnikowy może być optymalizowany ze względu na różne kryteria [34, 38, 49]. W przypadku rozległych sieci komputerowych do najistotniejszych należą: średnie opóźnienie pakietu oraz koszt budowy sieci. Opóźnienie pakietu jest to czas, jaki upływa pomiędzy momentem wysłania pakietu z węzła źródłowego a momentem odebrania tego pakietu w węźle docelowym. Na opóźnienie to składa się kilka czynników, z których większość uwarunkowana jest własnościami fizycznymi łączy transmisyjnych lub parametrami technicznymi sprzętu. Istotnym czynnikiem, odgrywającym zasadniczą rolę w obciążonych sieciach jest czas oczekiwania pakietu na obsługę w buforze wejściowym węzła

sieci. Wyrażenie uwzględniające wpływ tego czynnika na opóźnienie pakietu w sieci zostało sformułowane przez Kleinrocka w pracy [54]:

$$T = \frac{1}{\gamma} \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \frac{f(x, y)}{c(x, y) - f(x, y)} \text{ [s/pakiet]} \quad (1.6)$$

gdzie $\gamma = \sum_{a, b=1}^n r'_{ab}$ jest natężeniem sumarycznego strumienia pakietów wprowadzanych do sieci.

Zależność (1.5) określająca średnie opóźnienie pakietu w sieci została podana przez Kleinrocka przy licznych założeniach dotyczących sieci rozległej, z których najważniejsze to [54]:

- wszystkie strumienie w sieci są stacjonarnymi strumieniami Poissona,
- wszystkie strumienie są statystycznie niezależne,
- chwile pojawiania się pakietów są statystycznie niezależne od ich długości,
- losowe długości pakietów mają rozkład wykładniczy,
- czasy obsługi w węzłach są statystycznie niezależne,
- wszystkie elementy sieci są w pełni niezawodne,
- każdy pakiet jest przesyłany tylko do jednego węzła przeznaczenia,
- pojemności pamięci buforowych w węzłach są nieskończone.

Liczne założenia powodują, że wyniki uzyskane przy użyciu wyrażenia (1.5) odbiegają od opóźnień w rzeczywistych sieciach [73]. Mimo to zależność (1.5) jest powszechnie stosowana w projektowaniu rozległych sieci komputerowych i w ich analizie, ponieważ dotychczas nic lepszego nie udało się stworzyć [48].

Koszt budowy sieci rozległej jest określany jako suma kosztów dzierżawy wszystkich kanałów w sieci rozległej:

$$D = \sum_{\langle x, y \rangle \in L} d(x, y) \quad (1.7)$$

Przedstawione powyżej kryteria pozwalają ocenić jakość działania rozległej sieci komputerowej. Podczas rozwiązywania problemów projektowania struktur rozległych sieci komputerowych, szczególnie do wyznaczenia optymalnych przepływów, często konieczny jest wybór najlepszej trasy pomiędzy parą węzłów. Do oceny jakości trasy wykorzystywana jest jej długość według metryki [30, 51]. W niniejszej pracy wykorzystywana będzie metryka $l(\pi)$ określająca długość trasy π zdefiniowana następująco:

$$l(\pi) = \sum_{\langle x, y \rangle \in \pi} l(x, y) \quad (1.8)$$

gdzie:

$$l(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial f(x, y)} \quad (1.9)$$

gdzie Q jest funkcją kryterialną.

1.6. Problematyka pracy

Przedstawimy ogólne sformułowania rozpatrywanych w niniejszej pracy problemów. Problemy jednoczesnego wyznaczania rozmieszczenia bram, przepustowości kanałów sieci 2. poziomu oraz przepływu wieloskładnikowego w hierarchicznych sieciach komputerowych nazwijmy **GLCFA** (*Gateway Location, Capacity and Flow Allocation*).

Problem I

Zadanie wyznaczania rozmieszczenia bram, przepustowości kanałów sieci 2. poziomu i przepływów w hierarchicznej sieci rozległej tak, aby minimalizować średnie opóźnienie pakietu w sieci przy ograniczeniu na koszt budowy sieci.

W dalszej części pracy problem ten będzie nazywany krótko: **GLCFA ze średnim opóźnieniem pakietu jako kryterium**.

dane:

- struktura sieci 1. poziomu,
- struktura sieci 2. poziomu,
- przepustowości kanałów sieci 1. poziomu,
- potencjalne lokalizacje bram w sieciach 1. poziomu,
- zbiory dopuszczalnych przepustowości kanałów sieci 2. poziomie i kosztów ich dzierżawy,
- macierz natężeń wprowadzanych z zewnątrz,
- dopuszczalny koszt budowy sieci;

minimalizować:

- średnie opóźnienie pakietu w sieci;

względem:

- rozmieszczenia bram w sieciach 1. poziomu,
- przepustowości kanałów w sieci 2. poziomu,
- przepływu wieloskładnikowego w sieci hierarchicznej,

przy ograniczeniach:

- przepływ wieloskładnikowy realizuje macierz wprowadzanych z zewnątrz natężeń,
- sumaryczny przepływ w każdym z kanałów nie przekracza jego przepustowości,
- suma kosztów dzierżawy kanałów nie może przekroczyć założonego budżetu na budowę sieci.

Problem II

Zadanie wyznaczania rozmieszczenia bram, przepustowości kanałów sieci 2. poziomu i przepływów w hierarchicznej sieci rozległej tak, aby minimalizować koszt budowy sieci przy ograniczeniu na średnie opóźnienie pakietu w sieci

W dalszej części pracy problem ten będzie nazywany krótko: **GLCFA z kosztem budowy sieci jako kryterium.**

dane:

- struktura sieci 1. poziomu,
- struktura sieci 2. poziomu,
- przepustowości kanałów sieci 1. Poziomu,
- potencjalne lokalizacje bram w sieciach 1. poziomu,
- zbiory dopuszczalnych przepustowości kanałów sieci 2. poziomie i kosztów ich dzierżawy,
- macierz natężeń wprowadzanych z zewnątrz,
- maksymalne dopuszczalne średnie opóźnienie pakietu w sieci;

minimalizować:

- koszt budowy sieci;

względem:

- rozmieszczenia bram w sieciach 1. poziomu,
- przepustowości kanałów w sieci 2. poziomu,
- przepływu wieloskładnikowego w sieci hierarchicznej;

przy ograniczeniach:

- przepływ wieloskładnikowy realizuje macierz wprowadzanych z zewnątrz natężeń,
- sumaryczny przepływ w każdym z kanałów nie przekracza jego przepustowości,
- średnie opóźnienie pakietów w sieci nie może przekroczyć założonego maksymalnego dopuszczalnego opóźnienia pakietu w sieci.

Problem III

Zadanie wyznaczania rozmieszczenia bram, przepustowości kanałów sieci 2. poziomu i przepływów w hierarchicznej sieci rozległej tak, aby minimalizować kryterium będące liniową kombinacją średniego opóźnienia pakietu i kosztu budowy sieci przy ograniczeniu na koszt budowy sieci

W dalszej części pracy problem ten będzie nazywany krótko: **GLCFA z uogólnionym kryterium kosztowym jako kryterium.**

dane:

- struktury sieci 1. poziomu,
- struktura sieci 2. poziomu,
- przepustowości kanałów sieci 1. poziomu,
- potencjalne lokalizacje bram w sieciach 1. poziomu,
- zbiory dopuszczalnych przepustowości kanałów sieci 2. poziomu i kosztów ich dzierżawy,
- macierz natężeń wprowadzanych z zewnątrz,
- dopuszczalny koszt budowy sieci;

minimalizować:

- liniową kombinację średniego opóźnienia pakietu w sieci i kosztu budowy sieci;

względem:

- rozmieszczenia bram w sieciach 1. poziomu,
- przepustowości kanałów w sieci 2. Poziomu,
- przepływu wieloskładnikowego;

przy ograniczeniach:

- przepływ wieloskładnikowy realizuje macierz wprowadzanych z zewnątrz natężeń,
- sumaryczny przepływ w każdym z kanałów nie przekracza jego przepustowości,
- suma kosztów dzierżawy kanałów nie przekracza założonego budżetu na budowę sieci.

We wszystkich przedstawionych powyżej problemach należy, dla kilku istniejących rozległych sieci komputerowych o ustalonej strukturze i przepustowościach kanałów, zaprojektować sieć nadrzędną łączącą te sieci. W tym celu należy wyznaczyć rozmieszczenie bram w istniejących sieciach (1. poziomu), przepustowości kanałów sieci 2. poziomu (zakładamy, że liczba bram do umieszczenia w sieciach 1. poziomu oraz struktura sieci

2. poziomu jest znana) oraz wyznaczyć reguły doboru tras reprezentowane przez przepływ wieloskładnikowy w sieci. Zadanie to należy rozwiązać tak, by minimalizować wartość wybranego kryterium. Poszczególne problemy rozważane w pracy różnią się kryterium optymalizacyjnym oraz przyjętymi ograniczeniami.

Złożoność obliczeniową algorytmu definiowana jest jako funkcja głównych parametrów rozwiązywanego problemu. Do określenia złożoności obliczeniowej korzysta się z notacji „Wielkiego O”. Mówiąc, że algorytm ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$ rozumiemy, że istnieje taka stała a , że funkcja an^2 jest górnym oszacowaniem czasu obliczeń będącego funkcją n . Algorytm, którego złożoność obliczeniowa jest ograniczona przez wielomian zmiennej n , tj. algorytm o złożoności $O(n^c)$, nazywamy algorytmem wielomianowym. Problemy, które można rozwiązać korzystając z algorytmów wielomianowych tworzą klasę P. Ponadto istnieje klasa problemów, nazywanych NP-zupełnymi, które charakteryzują się dwiema cechami:

- nie jest znany algorytm wielomianowy do ich rozwiązania
- jeżeli zostanie poznany algorytm wielomianowy dla dowolnego problemu NP-zupełnego to będzie można otrzymać algorytmy wielomianowe dla wszystkich problemów NP-zupełnych.

Jak dotąd, nie udało się znaleźć wielomianowego algorytmu do rozwiązywania problemu NP-zupełnego ani też wykazać, że taki algorytm nie istnieje [91]. Rozważania na temat złożoności obliczeniowej oraz wiele dowodów NP-zupełności problemów można znaleźć w pracy [72].

Do klasy problemów NP-zupełnych należy problem wyznaczania przepływów i przepustowości kanałów z dyskretną funkcją kosztu [23, 49]. Można zauważyć, że zadanie GLCFA, kiedy pominiemy wybór rozmieszczenia bram, sprowadza się do problemu jednoczesnego wyznaczania przepływów i przepustowości kanałów z dyskretną funkcją kosztu. Problem GLCFA jest więc problemem ogólniejszym od problemu CFA, który należy do klasy problemów NP-zupełnych, zatem GLCFA również należy do klasy problemów NP-zupełnych.

Ponieważ rozważane w pracy problemy są NP-zupełne, uzasadnione jest stosowanie metody podziału i oszacowań (*branch and bound*), której szerszy opis można znaleźć w pracach [7, 31, 45, 60, 87, 93]. Metoda podziału i oszacowań jest często stosowana do znajdowania optymalnych rozwiązań problemów optymalizacji struktury rozległych sieci komputerowych [48, 76]. Rozwiązania dokładne mogą służyć do oceny rozwiązań przybliżonych uzyskiwanych za pomocą, charakteryzujących się mniejszym kosztem obliczeń, algorytmów heurystycznych, mogą zatem służyć do weryfikacji przydatności algorytmów heurystycznych do rozwiązywania problemów będących przedmiotem rozważań niniejszej pracy. Na podstawie określonych w tym rozdziale celów możemy postawić następującą tezę rozprawy doktorskiej:

Istnieją algorytmy dokładne oparte na metodzie podziału i oszacowań, nadające się do wyznaczania optymalnych rozwiązań problemów jednoczesnego wyznaczania rozmieszczenia bram, przepustowości kanałów i przepływów w hierarchicznej sieci rozległej.

W kolejnych rozdziałach rozprawy przedstawimy algorytmy dokładne, nadające się do znalezienia optymalnych rozwiązań przedstawionych problemów optymalizacyjnych. Zaprezentujemy również wyniki eksperymentów obliczeniowych, przeprowadzonych z wykorzystaniem opracowanych algorytmów oraz wnioski dotyczące własności rozważanych problemów.

2. Model hierarchicznej rozległej sieci komputerowej

W rozdziale tym zaprezentujemy model hierarchicznej rozległej sieci komputerowej skonstruowany w oparciu o teorię grafów. Omówimy związek pomiędzy rzeczywistą siecią komputerową a jej modelem oraz oznaczenia dotyczące rozmieszczenia bram w sieciach.

Hierarchiczna rozległa sieć komputerowa reprezentowana będzie przez sieć $S = \langle G; c, d \rangle$, gdzie $G = \langle N, L \rangle$ jest grafem właściwym, N oznacza zbiór węzłów, L oznacza zbiór łuków, c oznacza funkcję przepustowości łuków ze zbioru L , natomiast d oznacza funkcję kosztów dzierżawy łuków ze zbioru L . Rozważana jest dwupoziomowa sieć hierarchiczna, na którą składa się K sieci 1. poziomu oraz jedna sieć 2. poziomu, która łączy sieci 1. poziomu. Każda z sieci 1. poziomu jest reprezentowana przez sieć $S_1^l = \langle G_1^l; c, d \rangle$, gdzie odpowiednio $G_1^l = \langle N_1^l, L_1^l \rangle$, $l = 1, \dots, K$, N_1^l – zbiór węzłów sieci S_1^l , L_1^l – zbiór łuków sieci S_1^l . Żaden węzeł ani łuk nie może należeć do dwóch sieci 1. poziomu, więc zbiory N_1^l i L_1^l $l = 1, \dots, K$ są rozłączne. Każdy węzeł sieci S_1^l , $l = 1, \dots, K$ odpowiada węzłowi sieci komputerowej, liczba węzłów sieci S_1^l oznaczona jest przez $n_1^l = |N_1^l|$. Przez n oznaczana będzie liczba wszystkich węzłów sieci 1. poziomu: $n = \sum_{l=1}^K n_1^l$. Sieć komunikacyjna 2. poziomu jest reprezentowana przez sieć $S_2 = \langle G_2; c, d \rangle$, gdzie $G_2 = \langle N_2, L_2 \rangle$, N_2 – zbiór węzłów sieci 2. poziomu, L_2 – zbiór łuków sieci 2. poziomu. Na zbiór N_2 węzłów sieci 2. poziomu składają się bramy, czyli wyróżnione węzły sieci 1. poziomu. Zatem $N_2 \subset \bigcup_{l=1}^K N_1^l$.

Zakładamy, że wszystkie kanały w sieci są kanałami półdupleksowymi, zatem każdemu kanałowi sieci komputerowej odpowiada łuk nieorientowany. Struktura sieci 1. poziomu jak i 2. poziomu są ustalone. Każdemu kanałowi 1. poziomu przyporządkowana jest para węzłów sieci 1. poziomu, natomiast każdemu kanałowi 2. poziomu przyporządkowana jest para węzłów 2. poziomu, tj. para bram. Kanałom sieci 2. poziomu, rozmieszczonym pomiędzy bramami, przypisane zostały numery od 1 do m , natomiast kanałom sieci 1. poziomu – od $m+1$ do p , gdzie p oznacza liczbę wszystkich kanałów w sieci rozległej. Wszystkie kanały sieci 1. Poziomu, w rozważanej hierarchicznej rozległej sieci komputerowej, mają ustalone przepustowości, natomiast przepustowości kanałów sieci 2. poziomu należy wyznaczyć. Niech $ZC^i = \{c_1^i, \dots, c_{s(i)}^i\}$ $i = 1, \dots, m$ oznacza zbiór przepustowości dostępnych dla kanału i sieci 2. poziomu wyrażonych w bitach/s, gdzie $s(i)$ jest liczbą dostępnych przepustowości dla i -tego kanału. Niech zbiór ZC^i dla każdego kanału i będzie uporządkowany malejąco, tj. $c_1^i > c_2^i > \dots > c_{s(i)}^i$.

Niech wyborowi przepustowości dla kanału i odpowiada zmienna x_k^i .

$$x_k^i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli dla kanału } i \text{ wybrano przepustowość } c_k^i \\ 0 & \text{W przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Zbiór wszystkich zmiennych x_k^i związanych z kanałem i oznaczamy przez $X^i = \bigcup_{k=1}^{s(i)} \{x_k^i\}$.

Ponieważ każdemu kanałowi może zostać przypisana dokładnie jedna z dostępnych przepustowości, musi być spełniona następująca zależność:

$$\sum_{k=1}^{s(i)} x_k^i = 1 \text{ dla } i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

Kanały sieci 2. poziomu łączą bramy, których rozmieszczenie należy wyznaczyć. Niech wyborowi lokalizacji bramy odpowiada przypisanie bramy do węzła sieci 1. poziomu. Zbiór bram przeznaczonych do umieszczenia w sieci S_1^l oznaczmy przez H^l . Niech każda brama g ze zbioru H^l ma określony zbiór potencjalnych lokalizacji, tj. zbiór węzłów, w których może być umieszczona. Zbiór ten oznaczmy przez J_g . Niech wyborowi lokalizacji bramy g odpowiada zmienna y_a^g .

$$y_a^g = \begin{cases} 1 & \text{jeśli brama } g \text{ została umieszczona w węźle } a \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Zbiór wszystkich zmiennych y_a^g związanych z bramą g oznaczamy przez $Y^g = \bigcup_{a \in J_g} \{y_a^g\}$.

Dla każdej bramy musi zostać wybrana dokładnie jedna lokalizacja. Zatem każdej bramie g musi zostać przyporządkowany dokładnie jeden węzeł ze zbioru J_g . Ograniczenie to można zapisać następująco:

$$\sum_{a \in J_g} y_a^g = 1, \quad g \in H^l, \quad l = 1, \dots, K \quad (2.2)$$

W węźle sieci 1. poziomu może być umieszczona co najwyżej jedna brama. Musi zatem być zachowane następujące ograniczenie:

$$\sum_{g: a \in J_g} y_a^g \leq 1, \quad a \in N_1^l, \quad l = 1, \dots, K \quad (2.3)$$

Niech koszt dzierżawy przepustowości c_k^i dla kanału i łączącego bramy g_1 i g_2 , będzie oznaczony przez d_k^i i określony następująco:

$$d_k^i = \sum_{a \in J_{g_1}} \sum_{b \in J_{g_2}} y_a^{g_1} y_b^{g_2} d_{ab}^{ik} \quad (2.4)$$

W wyrażeniu (2.4) koszt dzierżawy przepustowości c_k^i dla kanału i zależy od rozmieszczenia bram g_1 i g_2 . Każdej parze potencjalnych lokalizacji bram $\langle a, b \rangle$ jest przyporządkowany koszt d_{ab}^{ik} , którego wartość zależy od odległości węzłów a i b . Koszt d_k^i jest równy wartości d_{ab}^{ik} odpowiadającej wybranym na lokalizację bram g_1 i g_2 węzłom a i b .

Funkcje przepustowości i kosztów dzierżawy kanałów określone na zbiorze L są zdefiniowane następująco:

Funkcja przepustowości c :

$$c^i = \sum_{k=1}^{s(i)} x_k^i c_k^i \quad \text{dla } i = 1, \dots, m,$$

$$c^i = c_0^i \quad \text{dla } i = m+1, \dots, p.$$

Kanały sieci 1. poziomu $i = m+1, \dots, p$ mają ustalone przepustowości. Przepustowości tych kanałów oznaczyliśmy przez c_0^i .

Funkcja kosztów dzierżawy d :

$$d^i = \sum_{k=1}^{s(i)} x_k^i d_k^i \quad \text{dla } i = 1, \dots, m,$$

$$d^i = 0 \quad \text{dla } i = m+1, \dots, p,$$

gdzie d_k^i określone jest wyrażeniem (2.4).

W rozdziale 1.3.1 założyliśmy, że koszt budowy jednostki przepustowości kanału maleje lub pozostaje stały ze wzrostem przepustowości tego kanału. W związku z tym przyjęliśmy następujące założenie o funkcjach c oraz d : Dla każdego z kanałów elementy zbiorów ZC^i są uporządkowane według malejących przepustowości, zatem dla

$$c_1^i > c_2^i > \dots > c_{s(i)}^i \quad (2.5)$$

dla każdego rozmieszczenia bram zachodzi

$$\frac{d_1^i}{c_1^i} \leq \frac{d_2^i}{c_2^i} \leq \dots \leq \frac{d_{s(i)}^i}{c_{s(i)}^i} \quad (2.6)$$

Niech $\hat{X}_r$ będzie pewną permutacją wszystkich zmiennych x_k^i , $k = 1, \dots, s(i)$, $i = 1, \dots, m$, spełniających warunek (2.1) zaś $\hat{Y}_r$ pewną permutacją wszystkich zmiennych y_a^g , $g = 1, \dots, H^l$, $a \in J_g$, $l = 1, \dots, K$, spełniających warunki (2.2) oraz (2.3). Niech X_r , Y_r będą zbiorami tych zmiennych, które są równe jedności odpowiednio w zbiorach $\hat{X}_r$ i $\hat{Y}_r$. Para zbiorów (X_r, Y_r) w sposób jednoznaczny wyznacza wybór rozmieszczenia bram w sieciach 1. poziomu oraz wybór przepustowości kanałów w sieci 2. poziomu. Taka para zbiorów (X_r, Y_r) będzie nazywana reprezentacją. Przez $\mathfrak{R}_H$ natomiast zostanie oznaczona rodzina wszystkich takich reprezentacji.

Podsumowując sformułowany model hierarchicznej sieci rozległej oraz uwzględniając informacje zawarte w literaturze [49], [56], można określić kolejne związki pomiędzy modelem sieci S a rzeczywistą siecią hierarchiczną:

- każda reprezentacja (X_r, Y_r) określa jednoznacznie pewne rozmieszczenie bram w sieciach 1. poziomu oraz przepustowości kanałów sieci 2. poziomu.

- przepływ wieloskładnikowy w sieci S odpowiada przepływowi pakietów w hierarchicznej sieci WAN z rozmieszczeniem bram ustalonym przez Y_r oraz przepustowościami kanałów sieci 2. poziomu ustalonymi przez X_r
- przepływ pakietów między węzłami należącymi do tej samej sieci wykorzystuje tylko trasy tworzone wewnątrz danej sieci.
- przepływ pakietów między węzłami należącymi do różnych sieci 1. poziomu, jest przesyłany od węzła źródłowego do bramy umieszczonej w sieci nadawcy, następnie siecią 2. poziomu do bramy umieszczonej w sieci odbiorcy, a następnie tą siecią przesyłany do węzła przeznaczenia.

3. Problem GLCFA ze średnim opóźnieniem pakietu w sieci jako kryterium

W rozdziale tym zostanie przedstawiony problem wyznaczania rozmieszczenia bram w sieciach 1. poziomu, przepływów oraz przepustowości kanałów sieci 2. poziomu, które minimalizują średnie opóźnienie pakietu w sieci hierarchicznej przy ograniczeniu na koszt budowy sieci. W kolejnych punktach przedstawione zostaną: sformułowanie problemu, algorytm dokładny oraz algorytm heurystyczny do rozwiązywania rozważanego problemu oraz rezultaty eksperymentów komputerowych ilustrujące własności rozważanego problemu.

3.1. Sformułowanie problemu

Niech dane będzie struktura sieci 1. poziomu, czyli rozmieszczenie węzłów i kanałów w tych sieciach oraz przepustowości kanałów sieci 1. poziomu. Dane będą również zbiory potencjalnych lokalizacji bram w sieciach 1. poziomu, (tj. ustalone są zbiory węzłów sieci 1. poziomu, w których mogą być umieszczone poszczególne bramy), rozmieszczenie kanałów w sieci 2. poziomu a także zbiory dostępnych przepustowości dla tych kanałów. Zakładamy również, że znana jest macierz wprowadzanych z zewnątrz natężeń, tj. wymagania dotyczące średnich przepływów pomiędzy węzłami tej samej sieci 1. poziomu oraz pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu.

Rozważane zadanie polega na znalezieniu takiej reprezentacji $(X_r, Y_r) \in \mathfrak{R}_H$ i związanego z nią przepływu wieloskładnikowego $\underline{f}$, dla których wartość średniego opóźnienia pakietów w sieci osiągnie minimum, a koszt dzierżawy łuków sieci 2. poziomu określonych przez (X_r, Y_r) nie przekroczy budżetu B . Wartość średniego opóźnienia pakietów w sieci wyznaczana będzie następująco:

$$T(X_r, Y_r) = \min_{\underline{f}} \frac{1}{\gamma} \left(\sum_{i \in L_2} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^K L_l^I} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) \quad (3.1)$$

dla przepływu $\underline{f}$ spełniającego ograniczenia (1.1 ÷ 1.4).

Zatem zadanie wyznaczania lokalizacji bram, przepływów, przepustowości kanałów i struktury hierarchicznej sieci rozległej można sformułować następującej postaci:

$$\min_{(X_r, Y_r)} T(X_r, Y_r) \quad (3.2)$$

uwzględniając, że

$$(X_r, Y_r) \in \mathfrak{R}_H \quad (3.3)$$

$$d(X_r, Y_r) \leq B \quad (3.4)$$

gdzie B oznacza dopuszczalny koszt budowy sieci 2. poziomu, tj. maksymalny dopuszczalny miesięczny koszt dzierżawy kanałów tej sieci, oraz

$$d(X_r, Y_r) = \sum_{i=1}^m d^i.$$

jest kosztem dzierżawy kanałów sieci 2. poziomu o przepustowościach ustalonych przez X_r i rozmieszczeniu kanałów, determinowanym przez rozmieszczenie bram, ustalonym przez Y_r .

3.2. Opis algorytmu

Niech $(X_1, Y_1) \in \mathfrak{R}_H$ będzie rozwiązaniem początkowym takim, że spełniony jest warunek (3.4) oraz istnieje przepływ wieloskładnikowy realizujący macierz R wprowadzanych z zewnątrz natężeń. Zmienne x_k^i oraz y_a^g , które należą do rozwiązania początkowego, czyli odpowiednio $x_k^i \in X_1$ i $y_a^g \in Y_1$ są nazywane zgodnymi. Natomiast pozostałe zmienne x_k^i i y_a^g nazywane są przeciwnymi.

Czynność zastępowania zmiennej zgodnej zmienną przeciwną przez wykonanie podstawienia $x_k^i = 0$, $x_j^i = 1$, gdzie $x_k^i \in X_1$, albo przez podstawienie $y_a^g = 0$, $y_b^g = 1$, gdzie $y_a^g \in Y_1$, zostanie nazwana zamianą. Zamieniać można tylko zmienne x_k^i związane z tym samym kanałem i , tj. $x_k^i, x_j^i \in X^i$ lub zmienne y_a^g związane z jedną bramą g , czyli $y_a^g, y_b^g \in Y^g$. Jako, że zbiory X_r i Y_r są zbiorami tych zmiennych, które są równe jedności, czynność zamiany można potraktować jako jednocześnie usunięcie z reprezentacji zmiennej zgodnej i dodanie zmiennej do niej przeciwniej. Czynność taką zapisuje się odpowiednio $(X_r - \{x_k^i\}) \cup \{x_j^i\}$ oraz $(Y_r - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$.

Działanie algorytmu polega na generowaniu i sprawdzaniu kolejnych reprezentacji (X_r, Y_r) i odpowiadających im sieci S_r . Proces ten można przedstawić za pomocą drzewa rozwiązań, w którym wierzchołki odpowiadają reprezentacjom (X_r, Y_r) natomiast łuki odpowiadają parom reprezentacji $\{(X_r, Y_r), (X_s, Y_s)\}$, takich że reprezentacja (X_s, Y_s) została otrzymana z reprezentacji (X_r, Y_r) przez zamianę jednej zmiennej zgodnej na zmienną przeciwną. Każdy wierzchołek, poza wierzchołkiem odpowiadającym reprezentacji (X_1, Y_1) , ma dokładnie jednego poprzednika oraz może mieć więcej niż jednego następnika. Wierzchołek odpowiadający reprezentacji (X_1, Y_1) nazywamy korzeniem drzewa rozwiązań.

Nową reprezentację (X_s, Y_s) uzyskuje się z reprezentacji (X_r, Y_r) przez wybór pewnej zmiennej zgodnej ze zbioru X_r lub ze zbioru Y_r oraz zmiennej przeciwniej, na którą wybraną zmienną należy zamienić. Czynność ta jest realizowana za pomocą reguł podziału, na które składają się operacja wyboru i operacja regulacji:

- Operacja wyboru jest stosowana do wyboru zmiennych do zamiany, jeśli dla reprezentacji (X_r, Y_r) jest spełniony warunek ograniczenia kosztu budowy sieci (3.4),

- Operacja regulacji jest stosowana w przypadku, gdy ograniczenie (3.4) nie jest zachowane.

Za pomocą reguł podziału dokonujemy wyboru zmiennych do zamiany na postawie kryterium lokalnej optymalizacji. Dodatkowo dla każdej reprezentacji (X_r, Y_r) sprawdzane jest, czy jest możliwe wygenerowanie z niej następnika, dla którego wartość funkcji kryterialnej będzie mniejsza od najmniejszej dotychczas znalezionej wartości. W tym celu wyznaczane jest dolne oszacowanie funkcji kryterialnej. Jeżeli wartość dolnego oszacowania jest większa od najmniejszej dotąd znalezionej wartości funkcji kryterialnej, to bieżąca reprezentacja (X_r, Y_r) jest odrzucana i następuje cofanie się do jej poprzednika.

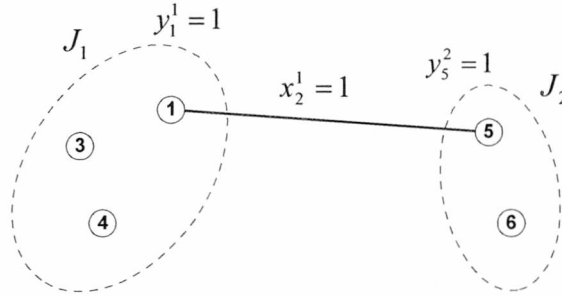
Każda reprezentacja może wystąpić w drzewie rozwiązań tylko jeden raz. Aby to zapewnić, zmienne biorące udział w generowaniu kolejnych reprezentacji są oznaczane. Zmienna przeciwna dodana do reprezentacji (X_s, Y_s) w wyniku operacji wyboru lub operacji regulacji zostaje oznaczona jako *ustalona chwilowo*. Zmienna oznaczona w ten sposób nie może zostać usunięta z żadnej reprezentacji będącej następnikiem reprezentacji (X_s, Y_s) . Jeśli reprezentacja (X_s, Y_s) jest odrzucana i następuje cofanie się do reprezentacji (X_r, Y_r) po pewnej zmiennej przeciwnej, to zmienna ta jest usuwana z reprezentacji i oznaczana jest jako *ustalona tymczasowo*. Zmienna taka nie może zostać ponownie dodana do reprezentacji (X_r, Y_r) ani do żadnej reprezentacji będącej jej następnikiem. Jeśli wszystkie zmienne przeciwne do pewnej zmiennej zgodnej zostały ustalone tymczasowo, to zmienna taka nie może już zostać zamieniona i zostaje oznaczona jako *ustalona trwale*.

Dla każdej reprezentacji (X_r, Y_r) zostaje określony zbiór zmiennych ustalonych chwilowo lub trwale $F_r \subset (X_r, Y_r)$ oraz zbiór zmiennych ustalonych tymczasowo F_r' . Zmienne ustalone chwilowo w zbiorze F_r , to zmienne przeciwne dodane do reprezentacji (X_r, Y_r) w drodze od korzenia do wierzchołka, odpowiadającego reprezentacji (X_r, Y_r) w drzewie rozwiązań. Zmienne ustalone trwale w zbiorze F_r to zmienne zgodne, dla których wszystkie zmienne przeciwne do nich wystąpiły już w drzewie rozwiązań, tj. zostały dodane do reprezentacji w wyniku operacji wyboru lub regulacji i następnie usunięte z niej przez cofanie się. Żadna zmienna ze zbioru F_r nie może być zamieniona w żadnym następniku reprezentacji (X_r, Y_r) . Zmienne ustalone tymczasowo ze zbioru F_r' to zmienne przeciwne, które były już dodane do reprezentacji i usunięte przez cofanie się do reprezentacji należącej do drogi od korzenia drzewa rozwiązań do wierzchołka odpowiadającego reprezentacji bieżącej a zmienne zgodne to tych zmiennych przeciwnych nie zostały jeszcze ustalone trwale. Algorytm kończy działanie, gdy należy cofnąć się od korzenia drzewa rozwiązań, tj. od reprezentacji (X_1, Y_1) .

Aby zilustrować sposób działania przedstawionego algorytmu oraz zasady umieszczania zmiennych w zbiorach F_r oraz F_r' podczas tworzenia drzewa rozwiązań, omówiony zostanie przykład rozwiązania problemu rozmieszczenia bram oraz przepustowości kanałów dla prostej sieci.

Przykład

Niech zadanie polega na wyznaczeniu rozmieszczenia dwóch bram oraz przepustowości kanału łączącego te bramy. Niech zbiory węzłów, w których można umieścić bramy są następujące: $J_1 = \{1, 3, 4\}$, $J_2 = \{5, 6\}$, stąd $Y^1 = \{y_1^1, y_3^1, y_4^1\}$, $Y^2 = \{y_5^2, y_6^2\}$, a kanałowi można przypisać jedną z przepustowości ze zbioru $ZC^1 = \{c_1^1, c_2^1, c_3^1, c_4^1\}$, stąd $X^1 = \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1\}$. Niech rozwiązaniem początkowym będzie $(X_1, Y_1) = (\{x_2^1\}, \{y_1^1, y_5^2\})$. Ilustrację rozwiązania początkowego oraz interpretację zbiorów J_g dla tego zadania przedstawia rysunek 3.1.



Rys. 3.1. Rozwiązanie początkowe dla rozważanej sieci

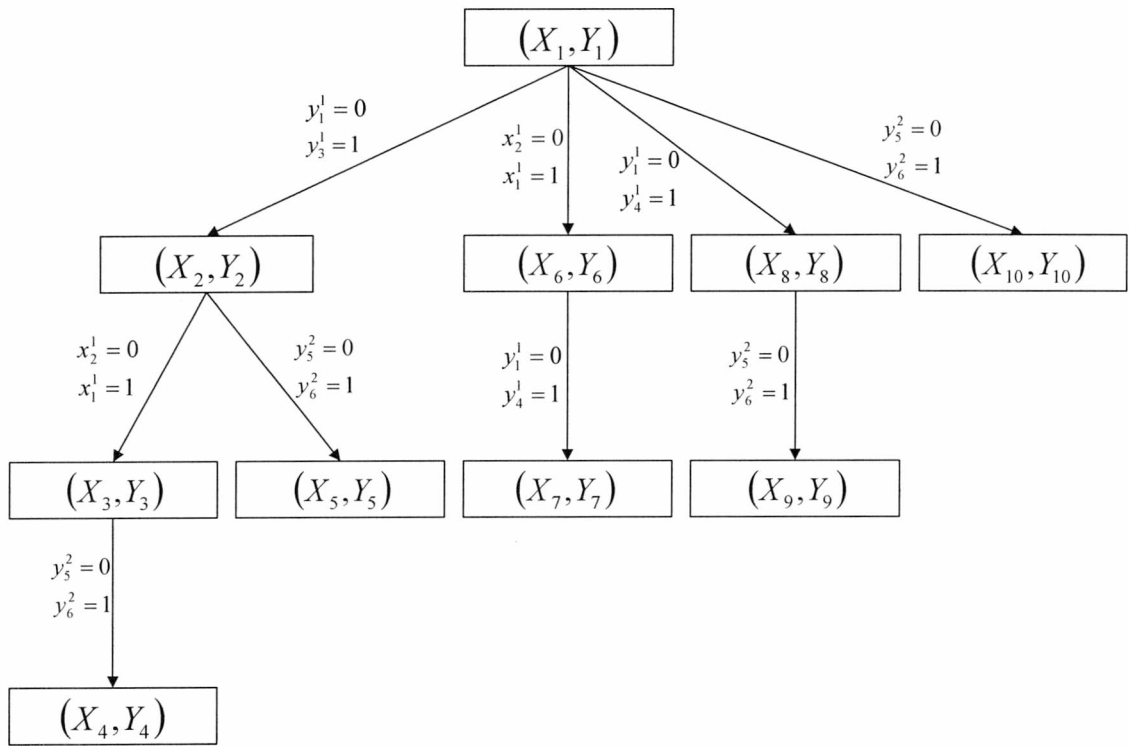
Proces tworzenia drzewa rozwiązań przedstawionego na rys. 3.2 zaprezentujemy w postaci listy kolejnych operacji wykonywanych przez algorytm. Symbolem „ $\downarrow$ ” oznaczmy operację generowania nowej reprezentacji za pomocą reguł podziału. I tak „ $1 \downarrow 2$ ” oznacza, że reprezentacja $2: (X_2, Y_2)$ jest następnikiem $1: (X_1, Y_1)$. Symbolem „ $\uparrow$ ” oznaczmy operację cofania. Dla każdej operacji przedstawiony jest stan po jej wykonaniu w postaci reprezentacji oraz zbiorów F_r i F_r' .

1:	$(X_1, Y_1) = (\{x_2^1\}, \{y_1^1, y_5^2\})$,	$F_1 = \emptyset$,	$F_1' = \emptyset$
$1 \downarrow 2$	$(X_2, Y_2) = (\{x_2^1\}, \{y_3^1, y_5^2\})$,	$F_2 = \{y_3^1\}$,	$F_2' = \emptyset$
$2 \downarrow 3$	$(X_3, Y_3) = (\{x_3^1\}, \{y_3^1, y_5^2\})$,	$F_3 = \{x_1^1, y_3^1\}$,	$F_3' = \emptyset$
$3 \downarrow 4$	$(X_4, Y_4) = (\{x_3^1\}, \{y_3^1, y_6^2\})$,	$F_4 = \{x_1^1, y_3^1, y_6^2\}$,	$F_4' = \emptyset$
$4 \uparrow 3$	$(X_3, Y_3) = (\{x_3^1\}, \{y_3^1, y_5^2\})$,	$F_3 = \{x_1^1, y_3^1, y_5^2\}$,	$F_3' = \emptyset$
$3 \uparrow 2$	$(X_2, Y_2) = (\{x_2^1\}, \{y_3^1, y_5^2\})$,	$F_2 = \{y_3^1\}$,	$F_2' = \{x_1^1\}$
$2 \downarrow 5$	$(X, Y) = (\{x_2^1\}, \{y_3^1, y_6^2\})$,	$F_5 = \{y_3^1, y_6^2\}$,	$F_5' = \{x_1^1\}$
$5 \uparrow 2$	$(X_2, Y_2) = (\{x_2^1\}, \{y_3^1, y_5^2\})$,	$F_2 = \{y_3^1, y_5^2\}$,	$F_2' = \{x_1^1\}$
$2 \uparrow 1$	$(X_1, Y_1) = (\{x_2^1\}, \{y_1^1, y_5^2\})$,	$F_1 = \emptyset$,	$F_1' = \{y_3^1\}$
$1 \downarrow 6$	$(X, Y) = (\{x_1^1\}, \{y_1^1, y_5^2\})$,	$F_6 = \{x_1^1\}$,	$F_6' = \{y_3^1\}$
$6 \downarrow 7$	$(X_7, Y_7) = (\{x_1^1\}, \{y_4^1, y_5^2\})$,	$F_7 = \{x_1^1, y_4^1\}$,	$F_7' = \{y_3^1\}$
$7 \uparrow 6$	$(X, Y) = (\{x_1^1\}, \{y_1^1, y_5^2\})$,	$F = \{x_1^1, y_1^1\}$,	$F_6' = \emptyset$
$6 \uparrow 1$	$(X_1, Y_1) = (\{x_2^1\}, \{y_1^1, y_5^2\})$,	$F_1 = \emptyset$,	$F_1' = \{x_1^1, y_3^1\}$

$$\begin{aligned}
1 \downarrow 8 & \quad (X_8, Y_8) = (\{x_2^1\}, \{y_4^1, y_5^2\}), \quad F_8 = \{y_4^1\}, \quad F_8' = \{x_1^1, y_3^1\} \\
8 \downarrow 9 & \quad (X_9, Y_9) = (\{x_2^1\}, \{y_4^1, y_6^2\}), \quad F_9 = \{y_4^1, y_6^2\}, \quad F_9' = \{x_1^1, y_3^1\} \\
9 \uparrow 8 & \quad (X_8, Y_8) = (\{x_2^1\}, \{y_4^1, y_5^2\}), \quad F_8 = \{y_4^1, y_5^2\}, \quad F_8' = \{x_1^1, y_3^1\} \\
8 \uparrow 1 & \quad (X_1, Y_1) = (\{x_2^1\}, \{y_1^1, y_5^2\}), \quad F_1 = \{y_1^1\}, \quad F_1' = \{x_1^1\} \\
1 \downarrow 10 & \quad (X_{10}, Y_{10}) = (\{x_2^1\}, \{y_1^1, y_6^2\}), \quad F_{10} = \{y_1^1, y_6^2\}, \quad F_{10}' = \{x_1^1\} \\
10 \uparrow 1 & \quad (X_1, Y_1) = (\{x_2^1\}, \{y_1^1, y_5^2\}), \quad F_1 = \{y_1^1, y_5^2\}, \quad F_1' = \{x_1^1\} \\
1 \uparrow \text{koniec} &
\end{aligned}$$

Analiza fragmentu przedstawionego przykładu pozwoli lepiej zrozumieć działanie algorytmu. Niech T^* oznacza najmniejszą dotychczas znaną wartość funkcji kryterialnej T . Początkowo zbiory zmiennych ustalonych chwilowo i trwale oraz tymczasowo są puste, $F_1 = \emptyset$, $F_1' = \emptyset$, a najlepszym rozwiązaniem jest $T^* = T(X_1, Y_1)$. Niech dolne oszacowanie dla reprezentacji (X_1, Y_1) jest mniejsze od T^* i reprezentacja (X_1, Y_1) spełnia ograniczenia na budżet (3.4), więc zmienna do zamiany wybierana jest w wyniku operacji wyboru. Dla uproszczenia zapisu wierzchołki drzewa rozwiązań będą nazywane wierzchołkami oraz zostało założone, że kolejne generowane reprezentacje spełniają warunek (3.4) i jeśli nie zostało zaznaczone inaczej, dolne oszacowanie jest mniejsze od aktualnego T^* . Podczas generowania reprezentacji **2**, **3** oraz **4**, kolejne zmienne przeciwne, na które zamieniane są zmienne zgodne, odznaczane są jako ustalone chwilowo, tj. dodawane są kolejno do zbiorów F_r . W wierzchołku **4** żadna zmienna nie może zostać zamieniona, gdyż wszystkie zmienne z (X_4, Y_4) występują w zbiorze F_4 . Podczas operacji cofania do wierzchołka **3** zmienna y_6^2 zostaje ustalona tymczasowo, tj. dodana do zbioru $F_3' = F_3' \cup \{y_6^2\}$. Jako, że wszystkie zmienne przeciwne do zmiennej y_5^2 znajdują się w zbiorze F_3' , zmienna y_5^2 zostaje ustalona trwale w węźle **3**, tj. $F_3 = F_3 \cup \{y_5^2\}$, a wszystkie zmienne przeciwne do zmiennej y_5^2 są usuwane ze zbioru F_3' , tj. $F_3' = F_3' - Y^2 = \emptyset$. W wierzchołku **3** znów żadna zmienna nie może zostać zamieniona, gdyż wszystkie zmienne należą do F_3 . Zostaje wykonane cofanie do wierzchołka **2**, zmienna x_1^1 zostaje oznaczona jako ustalona tymczasowo w wierzchołku **2**, czyli $F_2' = F_2' \cup \{x_1^1\}$. Kolejny następnik reprezentacji (X_2, Y_2) , reprezentacja (X_5, Y_5) , może zostać wygenerowany wyłącznie przez zamianę zmiennej y_5^2 . Wynika to stąd, że $y_3^1 \in F_2$, zatem zmienna y_3^1 nie może być zamieniona, natomiast zmienne x_3^1 i x_4^1 , na które można by zamienić zmienną zgodną x_2^1 , odpowiadają mniejszym od bieżącej przepustowości kanału, więc nie mogą być użyte w operacji wyboru. Z wierzchołka **5** nie można wygenerować następnika, gdyż podobnie jak w wierzchołku **2**, zmiennej zgodnej x_2^1 nie można zamienić na zmienną odpowiadającą mniejszej przepustowości kanału. Zostaje wykonane cofanie do wierzchołka **2** i dalej do wierzchołka **1**. Podczas operacji cofania do wierzchołka **1** zostaje ustalona tymczasowo zmienna y_3^1 , tj. $F_1' = F_1' \cup \{y_3^1\}$. Można zauważyć, że zmienna y_3^1 nie może już zostać wykorzystana do wygenerowania żadnego nowego wierzchołka. Opis procesu generowania wierzchołków **6** – **9** zostanie pominięty.

Podczas operacji „ $8 \uparrow 1$ ” zmienna, po której następuje cofanie y_4^1 zostaje oznaczona jako ustalona tymczasowo, tj. $F_1' = F_1 \cup \{y_4^1\}$. Po tej operacji w zbiorze $F_1' = \{x_1^1, y_3^1, y_4^1\}$ znajdują się wszystkie zmienne przeciwne do zmiennej y_1^1 . Zmienna ta nie może już zostać zamieniona, więc zostaje ustalona trwale, tj. $F_1 = F_1 \cup \{y_1^1\}$ a wszystkie zmienne przeciwne do zmiennej y_1^1 są usuwane ze zbioru F_1' , tj. $F_1' = F_1' - Y^1 = \{x_1^1\}$. Operacje „ $1 \downarrow 10$ ” oraz „ $10 \uparrow 1$ ” są przeprowadzone w ten sam sposób jak para operacji „ $2 \downarrow 5$ ” oraz „ $5 \uparrow 2$ ”. Po operacji cofania „ $10 \uparrow 1$ ” nie ma już możliwości wygenerowania nowej reprezentacji, gdyż zmienne y_1^1 i y_5^2 są ustalone trwale, natomiast zmienna x_2^1 mogłaby być zamieniona jedynie na zmienne odpowiadające mniejszym przepustowościom kanału. Należy zatem wykonać cofanie od wierzchołka 1, czyli algorytm kończy działanie.



Rys. 3.2. Drzewo rozwiązań dla rozważanego przykładu

3.3. Dolne oszacowanie

W punkcie tym zostanie zaprezentowany sposób wyznaczenia dolnego oszacowania LB_r wartości średniego opóźnienia pakietu dla reprezentacji (X_r, Y_r) i każdego następnika (X_s, Y_s) możliwego do wygenerowania z reprezentacji (X_r, Y_r) .

Dolne oszacowanie można uzyskać poprzez rozluźnienie pewnych ograniczeń w problemie (3.2 ÷ 3.4). Rozluźnione zostaną ograniczenie (2.1) związane z wyborem przepustowości kanałów ze zbiorów ZC^i oraz ograniczenia (2.2) i (2.3) związane z wyborem lokalizacji bram. Ograniczenie (2.1) rozluźniamy, dopuszczając by przepustowości kanałów przyjmowały wartości spoza zbiorów dopuszczalnych przepustowości ZC^i . Przy uwzględnieniu założeń (2.5) i (2.6) o funkcjach c i d , dla każdego kanału i , dla którego żadna ze zmiennych x_k^i nie została ustalona chwilowo lub trwale, tj. $X^i \cap F_r = \emptyset$, można dyskretną zależność kosztu dzierżawy łuku od jego przepustowości ograniczyć od dołu funkcją liniową. Zmienne dyskretne ze zbioru X^i dotyczące wyboru przepustowości kanału i zostają zastąpione zmienną $\bar{x}^i$, która może przyjmować dowolne wartości z przedziału $(0, 1]$. Zmienna $\bar{x}^i$ określa jaka część maksymalnej dostępnej przepustowości zostanie przypisana kanałowi i . Niech zbiór wszystkich zmiennych $\bar{x}^i$ będzie oznaczony przez XW i określony następująco:

$$XW = \bigcup_{i: X^i \cap F_r = \emptyset} \{\bar{x}^i\}$$

Ograniczenia (2.2) i (2.3) są rozluźniane w taki sposób, że każda brama g , dla której żadna ze zmiennych y_a^g nie została ustalona chwilowo lub trwale, tj. $Y^g \cap F_r = \emptyset$, jest umieszczana jednocześnie we wszystkich węzłach $a \in J_g$, takich że $y_a^g \notin F_r^i$. Jednoczesne umieszczenie bramy w kilku węzłach odpowiada zwiększeniu liczby bram w sieci 1. poziomu. Zwiększenie ilości bram w sieci 1. poziomu powoduje zmniejszenie ruchu pakietów w sieci 1. poziomu i tym samym zmniejszenie średniego opóźnienia pakietu w tej sieci. Od rozmieszczenia bram w sieciach 1. poziomu zależy rozmieszczenie i długość kanałów sieci 2. poziomu, więc i koszt ich dzierżawy. Aby oszacować od dołu koszt kanałów sieci 2. poziomu, należy oszacować od dołu długość każdego kanału uwzględniając rozluźnione ograniczenia (2.2) i (2.3). Dolnym oszacowaniem długości kanału łączącego bramy g_1 i g_2 jest najmniejsza odległość pomiędzy węzłami $a \in J_{g_1} - F_r^i$ i $b \in J_{g_2} - F_r^i$, w których bramy mogą być rozmieszczone. Rozwiązanie problemu optymalizacyjnego (3.2 ÷ 3.4) z uwzględnieniem rozluźnienia ograniczeń (2.1 ÷ 2.3), z uwzględnieniem liniowej zależności kosztu od przepustowości kanałów, oraz z uwzględnieniem kanałów o przepustowościach ustalonych przez zmienne ze zbioru F_r , jest zatem dolnym oszacowaniem wartości $T(X_s, Y_s)$.

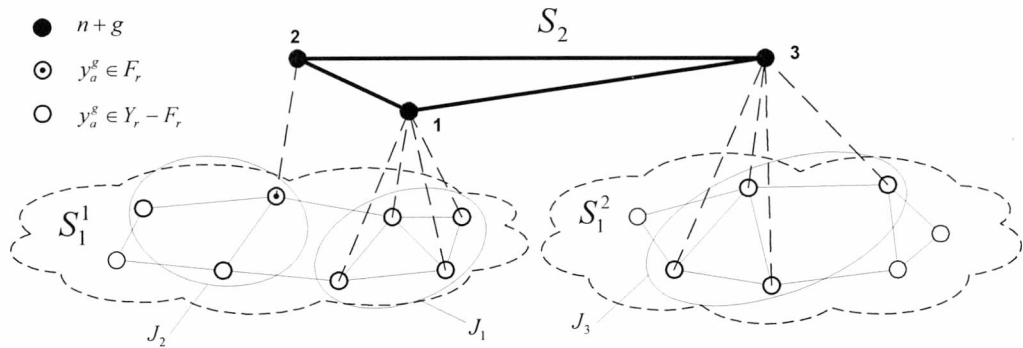
W celu sformułowania i rozwiązania takiego problemu utworzymy zmodyfikowaną sieć $\hat{S}_r = \langle \bar{G}_r; \bar{c}; \bar{d} \rangle$ określoną w następujący sposób: $\bar{G}_r = \langle N \cup NG, L \cup LG \rangle$ jest unigrafem, w którym:

- NG jest zbiorem sztucznych węzłów, takich że każdej bramie g , odpowiada sztuczny węzeł $n + g$,
- Łuki ze zbioru L_2 łączą sztuczne węzły ze zbioru NG ,
- LG jest zbiorem sztucznych łuków takich, że dla każdej bramy g , dla której żadna ze zmiennych y_a^g nie została ustalona chwilowo lub trwale, tj. $Y^i \cap F_r = \emptyset$ dodawane są sztuczne kanały łączące sztuczny węzeł reprezentujący bramę ze wszystkimi węzłami będącymi możliwymi do wyboru lokalizacjami bramy.

Łuki ze zbioru LG są określone następująco:

- dla $a \in J_g$ jeśli $y_a^g \in F_r$ dodawany jest łuk niezorientowany $\langle a, n + g \rangle$
- dla $a \in J_g$ jeśli $y_a^g \in Y_r - F_r$ dodawane są łuki niezorientowane $\langle b, n + g \rangle$ dla każdego $b \in J_g$, takiego że $y_b^g \notin F_r^i$.

Niech zbiór zmiennych y_a^g , takich że w sieci $\hat{S}_r$ został dodany łuk $\langle a, n + g \rangle$, zostanie oznaczony przez YW .



Rys. 3.3 Struktura sieci $\hat{S}_r$

Funkcje $\bar{c}$ i $\bar{d}$ zdefiniowane są następująco:

$$\text{dla } i: x_k^i \in F_r \cup A: \quad \bar{c}^i = c^i, \quad \bar{d}^i = 0,$$

$$\text{dla } i: \bar{x}^i \in XW \quad \bar{c}^i = c_{\max}^{ir} \bar{x}^i, \quad \bar{d}^i = d_{\min}^{ir} \bar{c}^i = d_{\min}^{ir} c_{\max}^{ir} \bar{x}^i,$$

$$\text{dla } i \in LG \quad \bar{c}^i = \infty, \quad \bar{d}^i = 0,$$

gdzie $d_{\min}^{ir} = \min_{i,k: x_k^i \in X^i - F_r} (\hat{d}_k^i / c_k^i)$ jest minimalnym kosztem jednostki przepustowości łuku i , przy

czym $\hat{d}_k^i = \min_{a,b: y_a^{g_1}, y_b^{g_2} \in YW} d_{ab}^{ik}$ jest minimalnym kosztem łuku i , o przepustowości c_k^i , łączącego

bramy g_1 i g_2 ; $c_{\max}^{ir} = \max_{x_k^i \in X^i - F_r} c_k^i$ jest największą przepustowością z dostępnych w zbiorze

ZC^i , z pominięciem przepustowości odpowiadających zmiennym ustalonym tymczasowo.

Dla tak skonstruowanej sieci $\hat{S}_r$ dolne oszacowanie wartości $T(X_s, Y_s)$ dla dowolnego następnika S_s możliwego do wygenerowania z sieci S_r można uzyskać przez rozwiązanie następującego problemu optymalizacji przepływu wieloskładnikowego i przepustowości łuków w $\hat{S}_r$:

$$\min_{\underline{f}, \bar{x}^i} \frac{1}{\gamma} \left(\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} \frac{f_i}{\bar{x}^i c_{\max}^{ir} - f_i} + \sum_{i: x_k^i \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^K L_1^l} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) \quad (3.5)$$

uwzględniając ograniczenia (1.1 ÷ 1.4) oraz

$$f_i \leq c^i \text{ dla każdego } i: x_k^i \in F_r \text{ oraz } i \in \bigcup_{l=1}^K L_1^l \quad (3.6)$$

$$f_i \leq c_{\max}^{ir} \bar{x}^i \text{ dla każdego } i: \bar{x}^i \in XW \quad (3.7)$$

$$\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} d_{\min}^{ir} c_{\max}^{ir} \bar{x}^i \leq B_r \quad (3.8)$$

$$\bar{x}^i \leq 1 \text{ dla każdego } \bar{x}^i \in XW \quad (3.9)$$

gdzie $B_r = B - d(F_r)$, $d(F_r) = \sum_{i: x_k^i \in F_r} d^i$.

Funkcja w zależności (3.5) nie jest wypukła ze względu na zmienne $\underline{f}$ oraz $\bar{x}^i$, zatem znalezienie globalnego minimum dla problemu (3.5 ÷ 3.8), (1.1 ÷ 1.4) jest zadaniem trudnym. Zamiast znajdować globalne minimum, można funkcję z zależności (3.5) oszacować od dołu przez funkcję wypukłą. W kolejnych punktach zostaną przedstawione dwa różne sposoby tego oszacowania, z których wynikają dwa dolne oszacowania.

3.3.1. Dolne oszacowanie LB_{r1}

Problem (3.5 ÷ 3.8), (1.1 ÷ 1.4) można rozwiązać najpierw względem zmiennych $\bar{x}^i$ dla każdego $i: \bar{x}^i \in XW$, przyjmując że zmienne $\underline{f}$ są ustalone, a następnie względem $\underline{f}$, korzystając z rozwiązania względem $\bar{x}^i$. Do rozwiązania tego problemu względem zmiennych $\bar{x}^i$ można skorzystać z warunków Kuhna-Tuckera [28], [64] dla zadań optymalizacyjnych z ograniczeniami nierównościami. Warunki konieczne optymalności Kuhna-Tuckera dla tego problemu przedstawiają się następująco:

$$\frac{-f_i c_{\max}^{ir}}{\gamma (c_{\max}^{ir} \bar{x}^i - f_i)^2} + \lambda d_{\min}^{ir} c_{\max}^{ir} + \lambda_i c_{\max}^{ir} = 0 \text{ dla każdego } i: \bar{x}^i \in XW \quad (3.10)$$

$$\lambda \left(\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} d_{\min}^{ir} c_{\max}^{ir} \bar{x}^i - B_r \right) = 0 \quad (3.11)$$

$$\lambda_i (f_i - \bar{x}^i c_{\max}^{ir}) = 0 \text{ dla każdego } i : \bar{x}^i \in XW \quad (3.12)$$

Wartości mnożników λ_i wynikają z zależności (3.12). Dla $\lambda_i > 0$ zachodziłoby $f_i - \bar{x}^i c_{\max}^{ir} = 0$, co po wstawieniu do równania (3.10) daje lewą stronę równania (3.10) równą $-\infty$, stąd dla każdego $i : \bar{x}^i \in XW$ $\lambda_i = 0$. W zależności (3.11) również należy rozpatrzeć dwa przypadki, gdy $\lambda = 0$ lub $\lambda > 0$. Po podstawieniu $\lambda = 0$ do równania (3.10) i uwzględnieniu $\lambda_i = 0$ równanie (3.10) jest spełnione tylko w przypadku zerowych przepływów, tj. przy $f_i = 0$ dla każdego $i : \bar{x}^i \in XW$. Pozostaje zbadać przypadek, gdy $\lambda > 0$.

Z równania (3.10) wyznaczmy $\bar{x}^i$ w zależności od λ

$$\bar{x}^i = \sqrt{\frac{f_i}{\gamma \lambda d_{\min}^{ir} (c_{\max}^{ir})^2}} + f_i \quad (3.13)$$

Po podstawieniu zależności (3.13) do równania (3.11) (z uwzględnieniem $\lambda > 0$) otrzymamy:

$$\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} d_{\min}^{ir} c_{\max}^{ir} \left(\sqrt{\frac{f_i}{\gamma \lambda d_{\min}^{ir} (c_{\max}^{ir})^2}} + f_i \right) - B_r = 0 \quad (3.14)$$

stąd można wyprowadzić zależność na λ :

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} \sqrt{d_{\min}^{ir} f_i}}{B_r - \sum_{i: \bar{x}^i \in XW} d_{\min}^{ir} c_{\max}^{ir} f_i} \right)^2 \quad (3.15)$$

Po podstawieniu (3.15) do zależności (3.13) otrzymamy wyrażenie na $\bar{x}^i$:

$$\bar{x}^i = \sqrt{\frac{f_i}{d_{\min}^{ir} c_{\max}^{ir}}} \frac{B_r - \sum_{j: \bar{x}^j \in XW} d_{\min}^{jr} c_{\max}^{jr} f_j}{\sum_{j: \bar{x}^j \in XW} \sqrt{d_{\min}^{jr} f_j}} + f_i \quad (3.16)$$

Uwzględniając powyższą zależność w funkcji (3.5) otrzymujemy następujący problem optymalizacyjny:

$$\min_{\underline{f}} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\left(\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} \sqrt{d_{\min}^{ir} f_i} \right)^2}{B_r - \sum_{i: \bar{x}^i \in XW} d_{\min}^{ir} c_{\max}^{ir} f_i} + \sum_{i: x_k^i \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^K L_l'} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) \quad (3.17)$$

przy uwzględnieniu ograniczeń (1.1 ÷ 1.4), (3.6) oraz ograniczenia

$$\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} d_{\min}^{ir} c_{\max}^{ir} f_i \leq B_r \quad (3.18)$$

Pierwszy składnik sumy (3.17) jest funkcją quasi-wklęsłą [30], drugi natomiast funkcją wypukłą ze względu na $\underline{f}$. Szacujemy więc od dołu pierwszy składnik sumy (3.17) przez

funkcję wypukłą mnożąc poszczególne składniki sumy w liczniku przez $\sqrt{f_i/c_{\max}^{ir}} < 1$.

Wówczas otrzymujemy następującą funkcję:

$$T_r^A = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\left(\sum_{i:\bar{x}^i \in XW} \sqrt{\frac{d_{\min}^{ir}}{c_{\max}^{ir}}} f_i \right)^2}{B_r - \sum_{i:\bar{x}^i \in XW} d_{\min}^{ir} c_{\max}^{ir} f_i} + \sum_{i:x_k^i \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^k L_l^i} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) \quad (3.19)$$

Jest ona funkcją wypukłą i szacuje od dołu funkcję (3.17) dla każdego $\underline{f}$ spełniającego ograniczenia (1.1 ÷ 1.4), (3.6), (3.18). Zatem rozwiązanie problemu

$$LB_{r1} = \min_{\underline{f}} T_r^A \quad (3.20)$$

przy uwzględnieniu ograniczeń (1.1 ÷ 1.4), (3.6), (3.18) jest dolnym oszacowaniem wartości średniego opóźnienia dla sieci S_r oraz wszystkich jej następników.

3.3.2. Dolne oszacowanie LB_{r2}

Łatwo zauważyć, że funkcja (3.5) jest funkcją malejącą ze względu na zmienne $\bar{x}^i$. Dla każdego $i: \bar{x}^i \in XW$ zachodzi $c_{\max}^{ir} - f_i \geq \bar{x}^i c_{\max}^{ir} - f_i > 0$, ponieważ $\bar{x}^i$ przyjmuje wartości z przedziału $(0, 1]$ oraz musi być spełnione ograniczenie (3.7), stąd $f_i / (c_{\max}^{ir} - f_i) \leq f_i / (\bar{x}^i c_{\max}^{ir} - f_i)$ dla każdego $i: \bar{x}^i \in XW$. Zatem funkcję (3.5) można oszacować od dołu przyjmując $\bar{x}^i = 1$ dla każdego $i: \bar{x}^i \in XW$. Uzyskana w ten sposób funkcja

$$T_r^B = \frac{1}{\gamma} \left(\sum_{i:\bar{x}^i \in XW} \frac{f_i}{c_{\max}^{ir} - f_i} + \sum_{i:x_k^i \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^k L_l^i} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) \quad (3.21)$$

jest wypukła i zależna jedynie od $\underline{f}$. Zatem rozwiązanie problemu

$$LB_{r2} = \min_{\underline{f}} T_r^B \quad (3.22)$$

przy uwzględnieniu ograniczeń (1.1 ÷ 1.4), (3.6), (3.7) jest dolnym oszacowaniem wartości średniego opóźnienia dla reprezentacji (X_r, Y_r) oraz wszystkich jej następników.

3.3.3. Dolne oszacowanie LB_r

W poprzednich punktach przedstawiliśmy dwie propozycje dolnego oszacowania wartości $T(X_s, Y_s)$ dla dowolnego następnika (X_s, Y_s) możliwego do wygenerowania z reprezentacji (X_r, Y_r) . Przeprowadzono szereg badań numerycznych w celu ustalenia, które z przedstawionych dolnych oszacowań jest lepsze. Jako że obie funkcje szacują od dołu funkcję określoną wyrażeniem (3.4), za lepsze można uznać te oszacowanie, którego wartość jest większa. Na rysunkach 3.4 oraz 3.5 przedstawiamy przykładowe wyniki jakie uzyskano

dla sieci hierarchicznych złożonych z dwóch sieci 1. poziomu oraz jednej sieci 2. poziomu. Przeprowadzono badania dla różnych struktur sieci i różnych ograniczeń na budżet sieci. Zostało wygenerowanych wiele reprezentacji (X_r, Y_r) . Dla każdej z wygenerowanych reprezentacji porównana została wartość obu dolnych oszacowań.

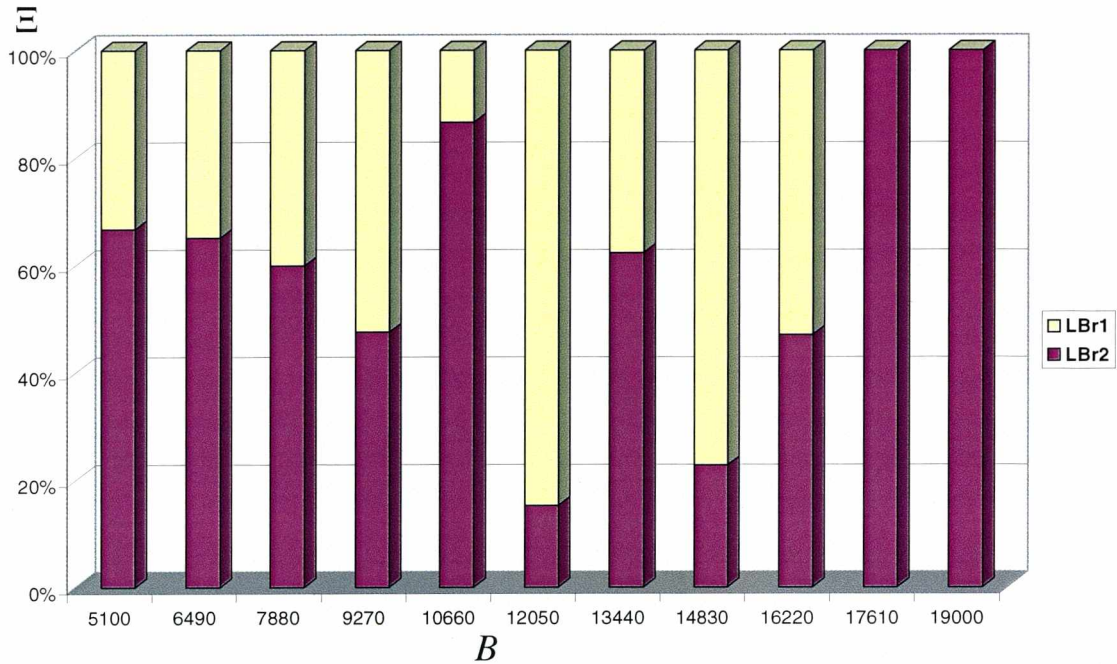
Wprowadźmy zmienną binarną ϑ_i^1 , która przyjmuje wartość zależną od wyniku porównania dolnych oszacowań LB_{r1} i LB_{r2} przedstawionych w poprzednich punktach rozdziału. Zmienna ϑ_i^1 określona jest następująco:

$$\vartheta_i^1 = \begin{cases} 1 & LB_{r1} > LB_{r2} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

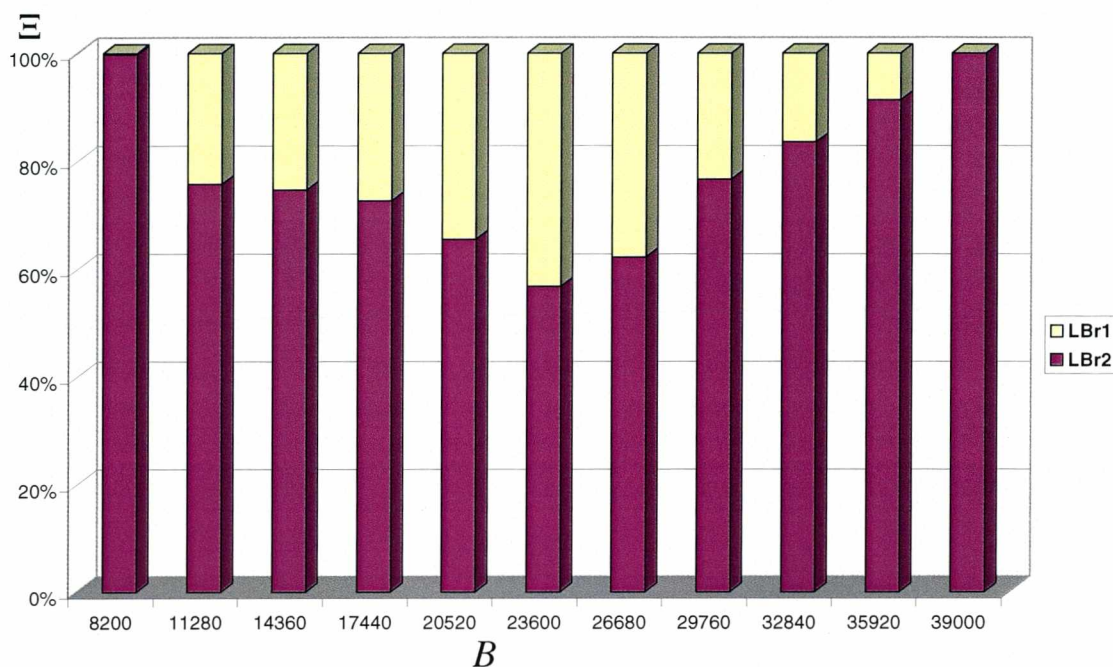
Niech Ξ_1 oznacza procentowy stosunek liczby przypadków, w których $LB_{r1} > LB_{r2}$ do liczby wszystkich porównań:

$$\Xi_1 = \frac{\sum_{i=1}^M \vartheta_i^1}{M} \cdot 100\%,$$

gdzie M jest liczbą porównań dolnych oszacowań. Analogicznie wyznaczamy Ξ_2 , który jest procentowym udziałem przypadków, w których $LB_{r2} \geq LB_{r1}$. Rysunki 3.4 oraz 3.5 przedstawiają przykładowe wartości Ξ_1 oraz Ξ_2 uzyskane dla dwóch różnych sieci hierarchicznych składających się z dwóch sieci 1. poziomu i jednej sieci 2. poziomu. Przedstawione zostały wartości Ξ_1 oraz Ξ_2 dla różnych wartości budżetu B .



Rys. 3.4 Przykładowe wyniki porównania dolnych oszacowań LB_{r1} i LB_{r2}

Rys. 3.5 Przykładowe wyniki porównania dolnych oszacowań LB_{r1} i LB_{r2}

Na rys. 3.4 można zauważyć, że Ξ_2 przyjmuje wartości z bardzo szerokiego przedziału, od $\Xi_2 = 15,2\%$ dla budżetu $B = 12050$ po $\Xi_2 = 100\%$ dla budżetu $B > 17000$. Natomiast na rys. 3.5 można zaobserwować, że dla wszystkich wartości budżetu zachodzi $\Xi_2 > \Xi_1$, jednak tylko dla budżetu $B = 8200$ i $B = 39000$ $\Xi_2 = 100\%$.

Na podstawie przeprowadzonych badań nie można jednoznacznie określić, które z badanych oszacowań lepiej przybliża wartość funkcji kryterialnej. Występują zarówno takie reprezentacje, dla których lepiej funkcję kryterialną przybliża wyrażenie LB_{r2} jak i takie, dla których bliższe oszacowanie uzyskuje się za pomocą wyrażenia LB_{r1} . Dlatego też w dalszej części rozdziału wyznaczane będą oba dolne oszacowania LB_{r1} oraz LB_{r2} i jako dolne oszacowanie wartości $T(X_s, Y_s)$, dla dowolnego następnika (X_s, Y_s) możliwego do wygenerowania z reprezentacji (X_r, Y_r) , będzie wybierane większe z nich:

$$LB_r = \max\{LB_{r1}, LB_{r2}\} . \quad (3.23)$$

3.4. Reguły podziału

Zadaniem reguł podziału jest wybór pary zmiennych, zgodnej i przeciwnej, do zamiany w celu wygenerowania następnika (X_s, Y_s) reprezentacji (X_r, Y_r) . Na reguły podziału składają się operacje *wyboru* i *regulacji*. Wybór, która z tych operacji jest wykonywana zależy od tego, czy dla reprezentacji (X_r, Y_r) spełniony jest warunek (3.4), tj. czy nie jest przekroczony budżet przeznaczony na budowę sieci. W przypadku, gdy warunek (3.4) jest spełniony wykonywana jest *operacja wyboru*, w przeciwnym wypadku *operacja regulacji*.

3.4.1. Operacja wyboru

Operacja ta ma na celu wybór pary zmiennych: zmiennej zgodnej należącej do zbioru X_r lub Y_r i zmiennej do niej przeciwnej do zamiany, takich by wygenerowany w ten sposób został następnik z możliwie najmniejszą wartością średniego opóźnienia pakietu. Wybór ten jest dokonywany na podstawie lokalnego kryterium optymalizacji. W przypadku przełączania zmiennej x_k^i na zmienną przeciwną x_j^i zmiana średniego opóźnienia jest oceniana wykorzystując własność przedstawioną w [48].

Niech $(X_r, Y_r) \in \mathfrak{R}_H$. Jeżeli reprezentację (X_s, Y_s) otrzymano z reprezentacji (X_r, Y_r) przez wykonanie podstawienia $X_s = (X_r - \{x_k^i\}) \cup \{x_j^i\}$ oraz $c_j^i > f_{ir}$, to

$$T(X_s, Y_s) \leq T(X_r, Y_r) - \Delta_{kj}^{ir} \quad (3.24)$$

gdzie

$$\Delta_{kj}^{ir} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{f_{ir}}{c_k^i - f_{ir}} - \frac{f_{ir}}{c_j^i - f_{ir}} \right)$$

zaś f_{ir} jest sumarycznym przepływem w kanale i określonym przez wektor $\underline{f}_r$ w sieci S_r .

W przypadku zamiany zmiennych y_a^g zmianę średniego opóźnienia można oszacować korzystając z następującego twierdzenia:

Niech Π_{eb} oznacza zbiór wszystkich tras prowadzących od węzła e do węzła b ; π_{eb}^k oznacza k -tą trasę od węzła e do węzła b oraz $v_{eb}^k(i)$ jest zmienną dyskretną określającą przynależność łuku i do trasy π_{eb}^k ,

$$v_{eb}^k = \begin{cases} 1 & \text{jeśli łuk } i \text{ należy do trasy } \pi_{eb}^k \\ 0 & \text{W przeciwnym razie} \end{cases}$$

Twierdzenie 3.1. Niech $(X_r, Y_r) \in \mathfrak{R}_H$. Jeżeli reprezentację (X_s, Y_s) otrzymano z reprezentacji (X_r, Y_r) w następujący sposób: $Y_s = (Y_r - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$ oraz $X_s = X_r$, to

$$T(X_s, Y_s) \leq T(X_r, Y_r) - \delta_{ab}^{gr} \quad (3.25)$$

gdzie

$$\delta_{ab}^{gr} = \begin{cases} T(X_r, Y_r) - \frac{1}{\gamma} \left(\sum_{i \in L_1^l} \frac{\tilde{f}_i}{c^i - \tilde{f}_i} + \sum_{i \in L_2 \cup \bigcup_{l=1}^L L_1^l - L_1^l} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) & \text{jeśli } \tilde{f}_i \leq c^i \text{ dla } i \in L_1^l, \\ \infty & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i = f_i - f_{ia}'' + \sum_{e \in N_1^l} \sum_{\pi_{eb}^k \in \Pi_{eb}} v_{eb}^k(i) \tilde{f}_{eb}^k,$$

$$\tilde{f}_{eb}^k = \frac{m_{eb}^k}{m_{eb}}(\tilde{f}_{ea}), \quad m_{eb} = \sum_{\pi_{eb}^k \in \Pi_{eb}} m_{eb}^k,$$

$$m_{eb}^k = \min_{w \in \pi_{eb}^k} (c_i - f_i + f_{ia}'') \text{ dla } i \in L_1^l,$$

f_{ia}'' jest częścią przepływu w kanale i odpowiadającą przepływowi pomiędzy węzłami sieci S_1^l a węzłami innych sieci 1. poziomu przez bramę umieszczoną w węźle a ; $\tilde{f}_{ea}$ jest przepływem do oraz od węzła e przez bramę w węźle a ,

Dowód. Jeżeli spełniony jest warunek $\tilde{f}_i \leq c^i$ dla wszystkich łuków sieci S_1^l , to przepływ $\tilde{f}$ jest przepływem dopuszczalnym w sieci z przepustowościami kanałów w sieci 2. poziomu określonymi przez X_r i rozmieszczeniem bram wyznaczonym przez $(Y_r - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$.

Przepływ $\tilde{f}$ został skonstruowany w następujący sposób: przepływy w łukach poza siecią S_1^l pozostały niezmienione; przepływy pomiędzy węzłami sieci S_1^l a węzłami innych sieci 1. poziomu przechodzące przez bramę g , umieszczoną w węźle a , przeniesiono z tras prowadzących do (z) węzła a na trasy prowadzące do (z) węzła b . Przepływ został przeniesiony tak, by rezydualne przepustowości tras pomiędzy węzłami sieci S_1^l a węzłem b zostały proporcjonalnie wypełnione.

Prawa strona zależności (3.25) jest średnim opóźnieniem pakietu dla dopuszczalnego przepływu $\tilde{f}$ w sieci określonej przez (X_s, Y_s) , a $T(X_s, Y_s)$ jest minimalną wartością średniego opóźnienia pakietu w tej sieci, więc zależność (3.25) jest prawdziwa. Natomiast, jeśli nie jest możliwe skonstruowanie dopuszczalnego przepływu $\tilde{f}$ to $\delta_{ab}^{gr} = \infty$ i zależność (3.25) również jest prawdziwa. ■

Niech $E_r = (X_r \cup Y_r) - F_r$ będzie zbiorem takich zmiennych x_k^i oraz y_a^g , które mogą zostać zamienione na zmienne przeciwne. Natomiast przez M_r będzie oznaczony zbiór zmiennych przeciwnych do zmiennych ze zbioru E_r takich, że zamiana na nie może zmniejszyć wartość średniego opóźnienia pakietu. Zmienne $x_k^i \in M_r$ odpowiadają większym przepustowościom łuków od przepustowości wyznaczonych przez zmienne $x_k^i \in E_r$.

Natomiast zmienne $y_a^g \in M_r$ to wszystkie zmienne przeciwne do zmiennych należących do zbioru E_r , na które można dokonać zamiany.

Kryteria wyboru pary zmiennych do zamiany (3.24) oraz (3.25) pozwalają oszacować jedynie zmianę średniego opóźnienia pakietu. Aby uwzględnić zmianę kosztu budowy sieci wynikającą z zamiany zmiennych x_k^i bądź y_a^g wprowadzone zostało następujące kryterium wyboru zmiennych do zamiany: $\alpha_{OW}(T(X_r, Y_r) - T(X_s, Y_s)) + (d(X_r, Y_r) - d(X_s, Y_s))$. Kryterium to jest sumą ważoną zmiany średniego opóźnienia pakietu w sieci i zmiany kosztu budowy sieci z wagą α_{OW} . Współczynnik α_{OW} przelicza średnie opóźnienie na koszt. Pierwszy składnik sumy reprezentuje zmianę kosztu średniego opóźnienia pakietu. Drugi składnik sumy reprezentuje zmianę kosztu budowy sieci. Wartość współczynnika α_{OW} została dobrana w wyniku eksperymentów obliczeniowych w taki sposób, by koszt średniego opóźnienia był znacząco większy od kosztu budowy sieci. W przypadku zamiany zmiennych x_k^i zmiana kosztu budowy sieci wyrażona jest następująco:

$$d(X_r, Y_r) - d(X_s, Y_s) = d_k^i - d_j^i, \quad (3.26)$$

więc kryterium wyboru zmiennych x_k^i do zamiany przyjmuje postać:

$$\bar{\Delta}_{kj}^{ir} = \alpha_{OW} \Delta_{kj}^{ir} + (d_k^i - d_j^i) \quad (3.27)$$

Natomiast w przypadku zamiany zmiennych y_a^g zmiana kosztu budowy sieci to:

$$d(X_r, Y_r) - d(X_s, Y_s) = \sum_{i: \langle g, g_2 \rangle \in V^k} (d_{ea}^{ij} - d_{eb}^{ij}), \quad (3.28)$$

więc kryterium wyboru zmiennych y_a^g jest następujące:

$$\bar{\delta}_{ab}^{gr} = \alpha_{OW} \delta_{ab}^{gr} + \sum_{i: \langle g, g_2 \rangle \in V^g} (d_{ea}^{ij} - d_{eb}^{ij}) \quad (3.29)$$

gdzie V^g jest zbiorem wszystkich kanałów sieci 2. poziomu przyległych do bramy g , natomiast e jest węzłem, w którym umieszczona jest brama g_2 .

Do zamiany należy wybrać te zmienne ze zbioru M_r , dla których wartość wyrażenia (3.27) lub (3.29) jest największa.

3.4.2. Operacja regulacji

Operacja ta ma na celu wybór pary zmiennych: zmiennej zgodnej należącej do zbioru X_r lub Y_r i zmiennej do niej przeciwnej do zamiany, takich by wygenerowany w ten sposób został następnik o mniejszym koszcie budowy i możliwie małej wartości średniego opóźnienia pakietu. Zmniejszenie kosztu budowy sieci możemy uzyskać albo zmniejszając przepustowości kanałów albo zmieniając lokalizacje bram w taki sposób, aby mniejsze były odległości pomiędzy bramami a co za tym idzie mniejsze długości kanałów sieci 2. poziomu.

Niech P_r będzie zbiorem wszystkich zmiennych przeciwnych do zmiennych ze zbioru E_r , takich, że zamiana na te zmienne może zmniejszyć koszt budowy sieci. Zmienne $x_k^i \in P_r$ odpowiadają mniejszym przepustowościom kanałów od tych wyznaczonych przez zmienne ze zbioru E_r . Natomiast zmienne $y_a^g \in P_r$ to wszystkie zmienne przeciwnie do zmiennych należących do zbioru E_r , na które można dokonać zamiany.

Oceny zmiennych do zamiany dokonujemy za pomocą kryteriów w postaci sumy ważonej, podobnie jak w przypadku operacji wyboru. Wartość współczynnika α_{OR} została, w wyniku eksperymentów obliczeniowych, dobrana w taki sposób, by koszt budowy sieci był znacząco większy od kosztu średniego opóźnienia. W ten sposób do zamiany wybierane są zmienne, których zamiana może spowodować największe zmniejszenie kosztu budowy sieci. Do wyboru pary zmiennych (y_a^g, y_b^g) do zamiany proponujemy następujące kryterium:

$$\bar{\delta}_{ab}^{kr} = \alpha_{OR} \delta_{ab}^{kr} + \sum_{i: (g, g_2) \in I^{r^k}} (d_{ea}^{ij} - d_{eb}^{ij}) \quad (3.30)$$

Przy ocenie zamiany zmiennych x_k^i na x_j^i należy uwzględnić przypadek, w którym po zamianie nie jest spełniony warunek $c_j^i > f_{ir}$. W takim przypadku możemy oszacować od góry wartość wyrażenia $f_{is}/(c_j^i - f_{is})$ przez wyrażenie $c_{\max}^{ir}/\varepsilon$ ponieważ $f_{is} \leq c_{\max}^{is} \leq c_{\max}^{ir}$ zaś $c_j^i - f_{is} \geq \varepsilon$, gdzie ε oznacza minimalną dopuszczalną różnicę pomiędzy przepływem w łuku a jego przepustowością. Z uwzględnieniem powyższego, wartość Δ_{kj}^{ir} można wyznaczyć posługując się następującym wyrażeniem:

$$\Delta_{kj}^{ir} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{f_{ir}}{c_k^i - f_{ir}} - \frac{f_{ir}}{c_j^i - f_{ir}} \right) & \text{jeśli } c_j^i > f_{ir} \\ \frac{1}{\gamma} \left(\frac{f_{ir}}{c_k^i - f_{ir}} - \frac{c_{\max}^{ir}}{\varepsilon} \right) & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (3.31)$$

Kryterium wyboru pary zmiennych (x_k^i, x_j^i) do zamiany pozostaje:

$$\bar{\Delta}_{kj}^{ir} = \alpha_{OR} \Delta_{kj}^{ir} + (d_k^i - d_j^i) \quad (3.32)$$

Podobnie jak w przypadku operacji wyboru do zamiany należy wybrać te zmienne ze zbioru P_r , dla których wartość wyrażenia (3.30) lub (3.32) jest największa.

3.5. Algorytm

Niech $(X_1, Y_1) \in \mathfrak{R}_H$ będzie reprezentacją początkową taką, że spełniony jest warunek (3.4) oraz istnieje przepływ wieloskładnikowy realizujący macierz R wprowadzanych z zewnątrz natężeń w sieci S_1 . Niech F_r oznacza zbiór zmiennych ustalonych chwilowo lub trwale, F'_r zbiór zmiennych ustalonych tymczasowo w r -tej iteracji algorytmu, natomiast $d(F_r)$ oznacza sumę kosztów kanałów, których rozmieszczenie i przepustowość określone są przez zmienne należące do zbioru F_r . Dla reprezentacji początkowej przyjmujemy, że $F_1 = \emptyset$, $F'_1 = \emptyset$ oraz $T^* = \infty$.

Krok 1. *Wyznaczanie dolnego oszacowania*

Jeżeli $d(F_r) > B$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie wyznaczyć LB_r .

Jeżeli $LB_r \geq T^*$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie przejść do kroku 2.

Krok 2. *Wyznaczanie wartości kryterium*

Obliczyć $T(X_r, Y_r)$ oraz $d(X_r, Y_r)$.

Jeżeli $d(X_r, Y_r) \leq B$, to wyznaczyć zbiór M_r oraz podstawić $M_r = M_r - F'_r$.

Jeżeli $T(X_r, Y_r) < T^*$, to podstawić $T^* = T(X_r, Y_r)$ oraz $(X_*, Y_*) = (X_r, Y_r)$.

Przejsć do kroku 3.

Jeżeli $d(X_r, Y_r) > B$, to wyznaczyć zbiór P_r oraz podstawić $P_r = P_r - F'_r$.

Przejsć do kroku 4.

Krok 3. *Operacja wyboru*

Jeżeli $M_r = \emptyset$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie wybrać takie zmienne przeciwne $x_j^i, y_b^g \in M_r$ oraz takie zmienne zgodne $x_k^i, y_a^g \in E_r$, dla których wartości

wyrażeń (3.27), (3.29) są największe. Następnie wygenerować reprezentację (X_s, Y_s) w następujący sposób: jeśli wartość wyrażenia (3.27) jest większa od

wartości (3.29) to $X_s = (X_r - \{x_k^i\}) \cup \{x_j^i\}$, $Y_s = Y_r$, $F_s = F_r \cup \{x_j^i\}$, $F'_s = F'_r$,

w przeciwnym razie: $Y_s = (Y_r - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$, $X_s = X_r$, $F_s = F_r \cup \{y_b^g\}$, $F'_s = F'_r$.

Przejsć do kroku 1.

Krok 4. *Operacja regulacji*

Jeżeli $P_r = \emptyset$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie wybrać takie zmienne przeciwne $x_j^i, y_b^g \in P_r$, oraz takie zmienne zgodne $x_k^i, y_a^g \in E_r$, dla których wartości

wyrażeń (3.30), (3.32) są największe. Następnie wygenerować reprezentację (X_s, Y_s) w następujący sposób:

Jeśli wartość wyrażenia (3.32) jest większa od wartości (3.30) to:

$X_s = (X_r - \{x_k^i\}) \cup \{x_j^i\}$, $Y_s = Y_r$, $F_s = F_r \cup \{x_j^i\}$, $F'_s = F'_r$,

w przeciwnym razie: $Y_s = (Y_r - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$, $X_s = X_r$, $F_s = F_r \cup \{y_b^g\}$, $F'_s = F'_r$.

Przejsć do kroku 1.

Krok 5. *Operacja cofania*

Cofnąć się do poprzednika (X_p, Y_p) , z którego została wygenerowana reprezentacja (X_r, Y_r) . Jeżeli reprezentacja (X_r, Y_r) nie ma poprzedników, to zakończyć obliczenia. Reprezentacja (X_*, Y_*) związana z aktualną wartością T^* jest rozwiązaniem optymalnym. W przeciwnym razie uaktualnić dane dla (X_p, Y_p) w następujący sposób: Jeżeli reprezentacja S_r została wygenerowana z (X_p, Y_p) poprzez zamianę zmiennej zgodnej na zmienną przeciwną $x_j^i \in X_r$, to wykonać $F_p^t = F_p^t \cup \{x_j^i\}$. Jeżeli wszystkie zmienne przeciwe do zmiennej zgodnej x_k^i należą do F_p^t , to wykonać $F_p = F_p \cup \{x_k^i\}$ i $F_p^t = F_p^t - X^i$. Jeżeli sieć S_r została wygenerowana z sieci S_p poprzez zamianę zmiennej zgodnej na zmienną przeciwną $y_b^g \in Y_r$, to wykonać $F_p^t = F_p^t \cup \{y_b^g\}$. Jeżeli wszystkie zmienne przeciwe do zmiennej zgodnej y_a^g należą do F_p^t , to wykonać $F_p = F_p \cup \{y_a^g\}$ oraz $F_p^t = F_p^t - Y^g$.
Przejsć do kroku 1.

3.6. Wyznaczanie reprezentacji początkowej

W rozdziale tym przedstawimy algorytm heurystyczny dla wyznaczania reprezentacji początkowej (X_1, Y_1) . Rozwiązanie uzyskane za pomocą tego algorytmu musi należeć do zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Algorytm heurystyczny musi więc znaleźć takie rozmieszczenie bram oraz ustalić takie przepustowości kanałów sieci 2. poziomu, że:

- reprezentacja $(X_1, Y_1) \in \mathfrak{R}_H$,
- dla sieci S_1 odpowiadającej reprezentacji (X_1, Y_1) spełnione są ograniczenia (3.4),
- dla sieci S_1 istnieje przepływ wieloskładnikowy realizujący zadaną macierz z zewnątrz wprowadzanych natężeń,
- średnie opóźnienie pakietu w sieci jest możliwie małe.

Przedstawiony algorytm jest modyfikacją rozwiązania zaproponowanego w pracy [79]. Idea działania algorytmu jest następująca. Bramy są rozmieszczane początkowo w taki sposób, aby minimalizować lokalnie średnie opóźnienie pakietu w sieciach 1. poziomu, następnie tworzona jest sieć 2. poziomu. W kolejnych iteracjach algorytmu struktura utworzonej w ten sposób sieci hierarchicznej jest poprawiana.

W celu wyznaczenia początkowej lokalizacji bram tworzymy sieć $\tilde{S}$ składającą się z sieci 1. poziomu S_1^l , $l=1, \dots, K$ oraz dodatkowego węzła reprezentującego wszystkie bramy, oznaczonego przez $n+1$. Dla każdego węzła $b \in J_g$, $g \in H^l$, $l=1, \dots, K$, w którym może być umieszczona brama, dodawany jest sztuczny kanał $\langle b, n+1 \rangle$ łączący potencjalną bramę ze sztucznym węzłem $n+1$. Przepustowość wszystkich sztucznych kanałów jest równa ∞ . Dla tak skonstruowanej sieci $\tilde{S}$ rozwiązywane jest zadanie wyznaczania przepływu wieloskładnikowego korzystając z metody FD. W każdej z sieci 1. poziomu na początkowe lokalizacje bram wybierane są węzły przyległe do sztucznych kanałów, w których wartość przepływu jest największa. W sieci S_1^l , $l=1, \dots, K$ na lokalizacje bram wybieranych jest $|H^l|$ węzłów, gdzie $|H^l|$ oznacza licznosc zbioru H^l bram do umieszczenia w sieci S_1^l .

Mając wyznaczone początkowe lokalizacje bram można przejść do wyznaczenia reprezentacji początkowej dla algorytmu dokładnego. Algorytm korzysta z koncepcji algorytmu „Top Down” przedstawionego w pracy [34]. Tworzona jest sieć $S_1^{(1)}$ z rozmieszczeniem bram ustalonym przez zbiór $Y_1^{(1)}$ i przepustowościami kanałów w sieci 2. poziomu ustalonymi na największe dostępne wartości. Następnie przepustowości kanałów są zmniejszane tak długo, aż reprezentacja $(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ będzie spełniała warunek (3.4). Kanał, którego przepustowość jest zmniejszana, jest wybierany przy użyciu kryterium lokalnej optymalizacji, analogicznym do wykorzystywanego w operacji regulacji. W przypadku, gdy dla bieżącego rozmieszczenia bram nie jest możliwe znalezienie dopuszczalnego rozwiązania, wybierana jest brama, której lokalizację należy zmienić tak, aby zmniejszyć koszt budowy sieci. Dla nowego rozmieszczenia bram powtarzana jest procedura znajdowania dopuszczalnych przepustowości kanałów sieci 2. poziomu.

Po otrzymaniu reprezentacji, która jest rozwiązaniem dopuszczalnym, sprawdzane jest czy istnieje w sieci kanał, którego przepustowość można zwiększyć nie powodując przekroczenia założonego budżetu. Spośród kanałów spełniających ten warunek, korzystając z kryterium wykorzystywanego w operacji wyboru, wybierany jest kanał, którego przepustowość jest zwiększana. Jeśli nie można zwiększyć przepustowości żadnego z kanałów, to bieżąca wartość średniego opóźnienia $T(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ w sieci $S_1^{(r)}$ jest porównywana z wartością najlepszego dotąd znalezionego rozwiązania T^* . Jeśli bieżąca wartość jest mniejsza, to bieżące rozwiązanie jest zapamiętywane jako najlepsze. Następnie wybierana jest brama, której zmiana lokalizacji może zmniejszyć wartość średniego opóźnienia w sieci lub koszt budowy sieci. Brama do przeniesienia oraz węzeł, do którego należy bramę przenieść są wybierane przy użyciu kryterium wykorzystywanego w operacji wyboru. Dla nowego rozmieszczenia bram powtarzana jest procedura znajdowania dopuszczalnych przepustowości kanałów sieci 2. poziomu. Algorytm kończy pracę, kiedy nowe rozwiązanie jest gorsze od najlepszego dotychczas znalezionego.

Algorytm WRP1

Niech $(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ oznacza początkową reprezentację w r -tej iteracji algorytmu heurystycznego. Niech $J_g^{(r)}$ będzie zbiorem węzłów, do których może zostać przeniesiona brama g w r -tej iteracji algorytmu oraz niech $Y_1^{(1)} = \emptyset$, $T^* = \infty$, $r = 1$.

Krok 0. *Wyznaczenie początkowego rozmieszczenia bram*

Wyznaczyć $\underline{f}$ w sieci $\tilde{S}$ korzystając z metody FD. $Y_1^{(1)} = \emptyset$.

Dla każdej bramy g :

Wybrać węzeł $b \in J_g$ taki, że $f(b, n_1 + 1) = \max_{a \in J_g - \{w_c, y_w^g \in Y_1^{(1)}\}} f(a, n_1 + 1)$

Umieścić bramę g w węźle b , tj. $Y_1^{(1)} = Y_1^{(1)} \cup \{y_b^g\}$, $J_g^{(1)} = J_g - \{b\}$.

Podstawić $X_1^{(1)} = \bigcup_{i=1}^m \{x_1^i\}$

Krok 1. *Sprawdzenie ograniczenia na budżet sieci*

Wyznaczyć $\underline{f}^{(r)}$ oraz $d(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$. Jeżeli $d(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)}) > B$, to przejść do kroku 2.

W przeciwnym razie przejść do kroku 3.

Krok 2. *Zmniejszanie przepustowości wybranego kanału*

Wybrać taką zmienną $x_k^i \in X_1^{(r)}$, że $k \leq s(i) - 1$, dla której wartość $\bar{\Delta}_{k,k+1}^{ir}$ wyznaczona z wyrażenia (3.32) jest największa i podstawić $X_1^{(r+1)} = (X_1^{(r)} - \{x_k^i\}) \cup \{x_{k+1}^i\}$ oraz $r = r + 1$. Jeśli taka zmienna nie istnieje przejść do kroku 4. Następnie przejść do kroku 1.

Krok 3. *Wybór kanału, którego przepustowość należy zwiększyć*

Jeśli $\min_{i: x_k^i \in X_1^{(r)}} (d_{k-1}^i - d_k^i) \leq B - d(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ to:

Wybrać taką zmienną $x_k^i \in X_1^{(r)}$, że $k \geq 2$ oraz $d_{k-1}^i - d_k^i \leq B - d(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$, dla której wartość $\bar{\Delta}_{k-1,k}^r$ wyznaczona z wyrażenia (3.27) jest największa i podstawić $X_1^{(r+1)} = (X_1^{(r)} - \{x_k^i\}) \cup \{x_{k-1}^i\}$ oraz $r = r + 1$. Następnie przejść do kroku 1.

W przeciwnym razie przejść do kroku 5.

Krok 4. *Wybór bramy, której lokalizację należy zmienić*

Wybrać taką parę zmiennych $y_a^g \in Y_1^{(r)}$ i $y_b^g : b \in J_g^{(r)}$, dla której wartość (3.28) jest największa. Następnie wykonać $Y_1^{(r+1)} = (Y_1^{(r)} - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$, $J_g^{(r+1)} = J_g^{(r)} - \{b\}$, $X_1^{(r+1)} = \bigcup_{i=1}^m \{x_i^i\}$ oraz $r = r + 1$.

Przejsć do kroku 1.

Krok 5. *Sprawdzenie wartości kryterium, decyzja o zakończeniu działania algorytmu*

Jeżeli $T(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)}) < T^*$, to:

Podstawić $T^* = T(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ oraz $(X_1^*, Y_1^*) = (X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$. Następnie wybrać parę zmiennych $y_a^g \in Y_1^{(r)}$ oraz $y_b^g : b \in J_g^{(r)}$, dla której wartość wyrażenia (3.29) jest największa. Następnie podstawić $Y_1^{(r+1)} = (Y_1^{(r)} - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$, $J_g^{(r+1)} = J_g^{(r)} - \{b\}$ oraz $r = r + 1$.

Przejsć do kroku 1.

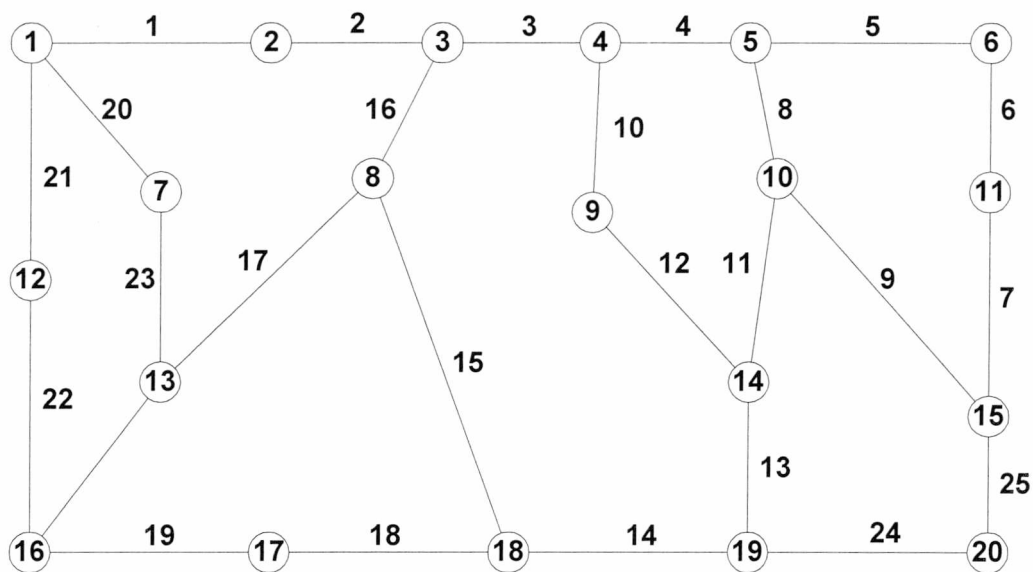
W przeciwnym razie zakończyć działanie algorytmu. Sieć S_* związana z aktualną wartością T^* jest rozwiązaniem przybliżonym spełniającym ograniczenie (3.4), dla którego istnieje przepływ realizujący zadaną macierz z zewnątrz wprowadzanych natężeń natomiast $(X_1, Y_1) = (X_1^*, Y_1^*)$ jest reprezentacją początkową dla algorytmu dokładnego.

3.7. Eksperymenty obliczeniowe

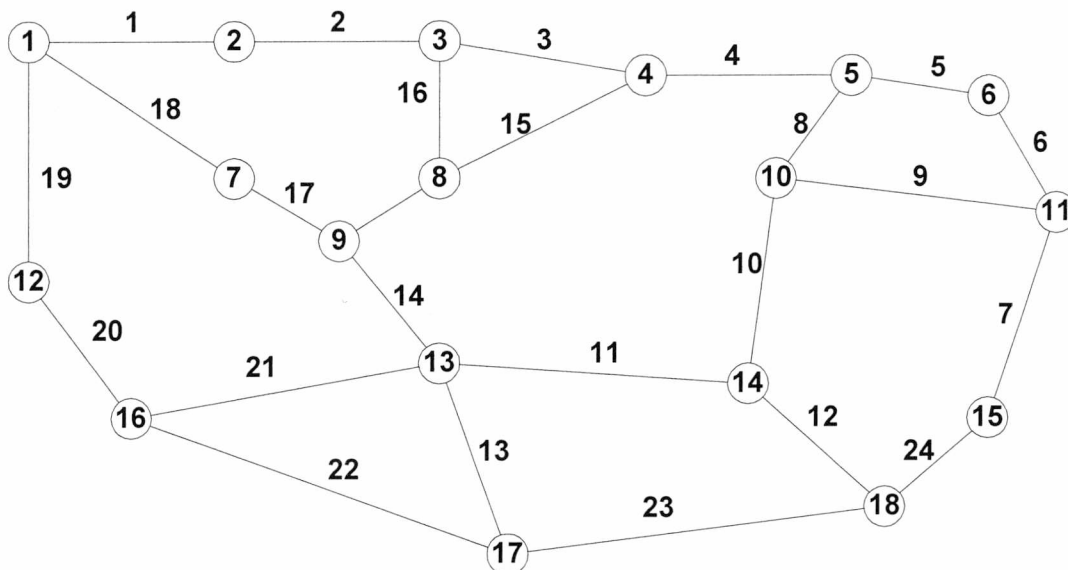
W poprzednich punktach tego rozdziału przedstawiony został algorytm dokładny do wyznaczania rozmieszczenia bram, przepływów i przepustowości kanałów w hierarchicznej sieci rozległej minimalizujący średnie opóźnienie pakietów w sieci przy ograniczeniu na koszt budowy sieci. Model sieci oraz algorytm zostały zaimplementowane w języku C++. Obecnie zostanie przedstawiona metodyka oraz wyniki przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych, których celem było zbadanie własności problemu optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) sformułowanego w rozdziale 3.1. Przedstawione zostaną również wnioski wynikające z przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych.

3.7.1. Struktury badanych sieci

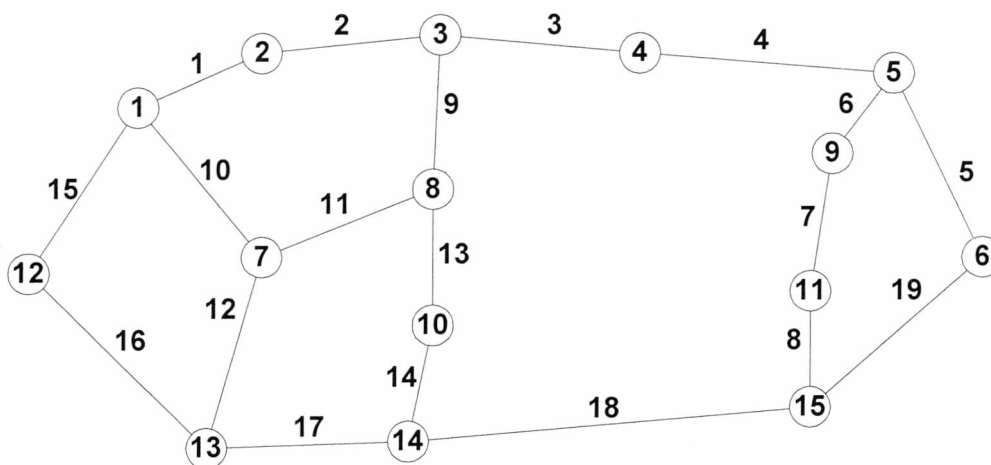
Badania były prowadzone dla różnych struktur sieci 2. poziomu łączących dwie lub trzy sieci 1. poziomu o zadanych strukturach. Poniżej na rysunkach 3.6 ÷ 3.8 przedstawione zostały struktury sieci 1. poziomu oznaczone odpowiednio jako SK-1, SK-2 oraz SK-3.



Rys. 3.6. Struktura sieci SK-1

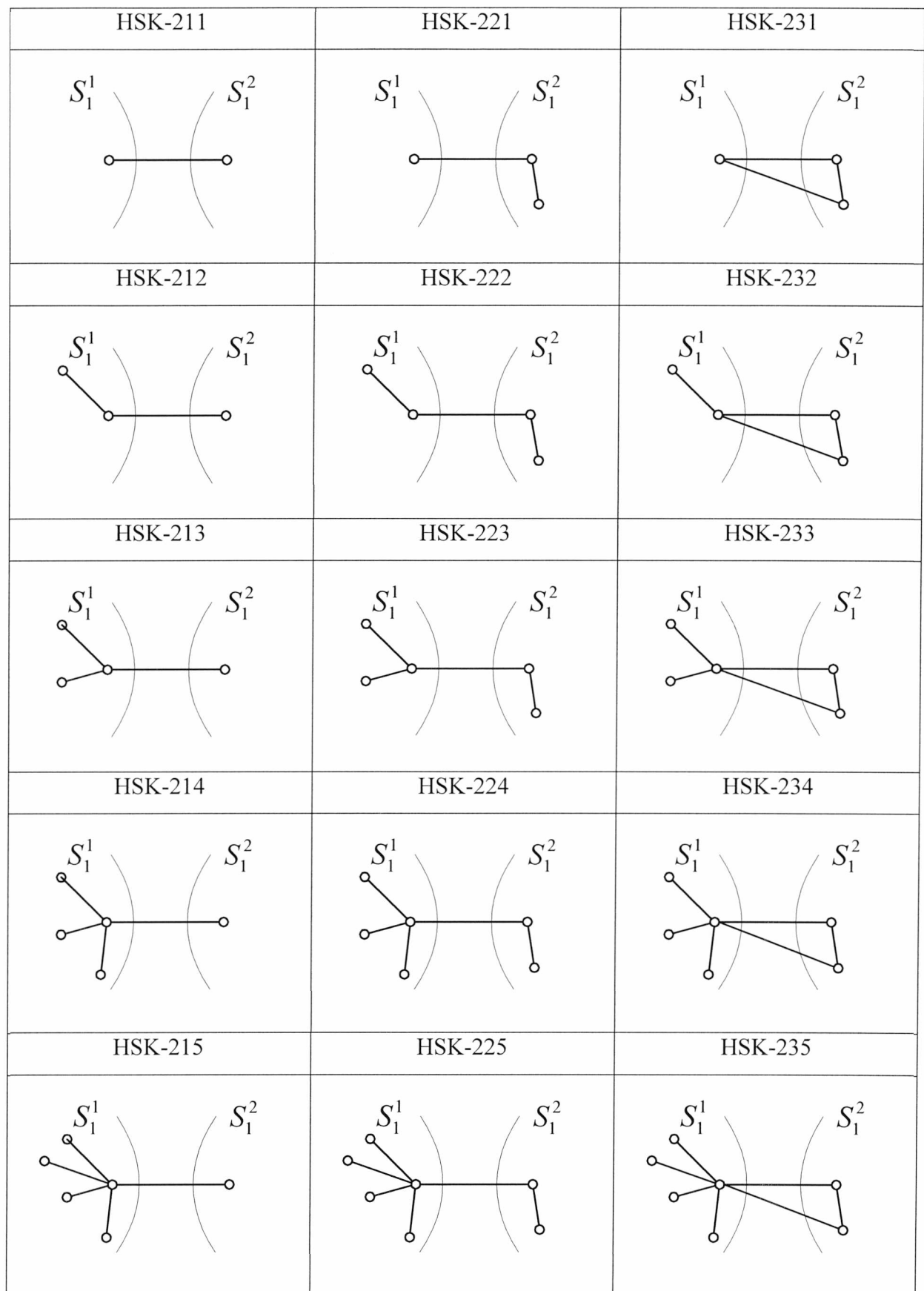


Rys. 3.7. Struktura sieci SK-2



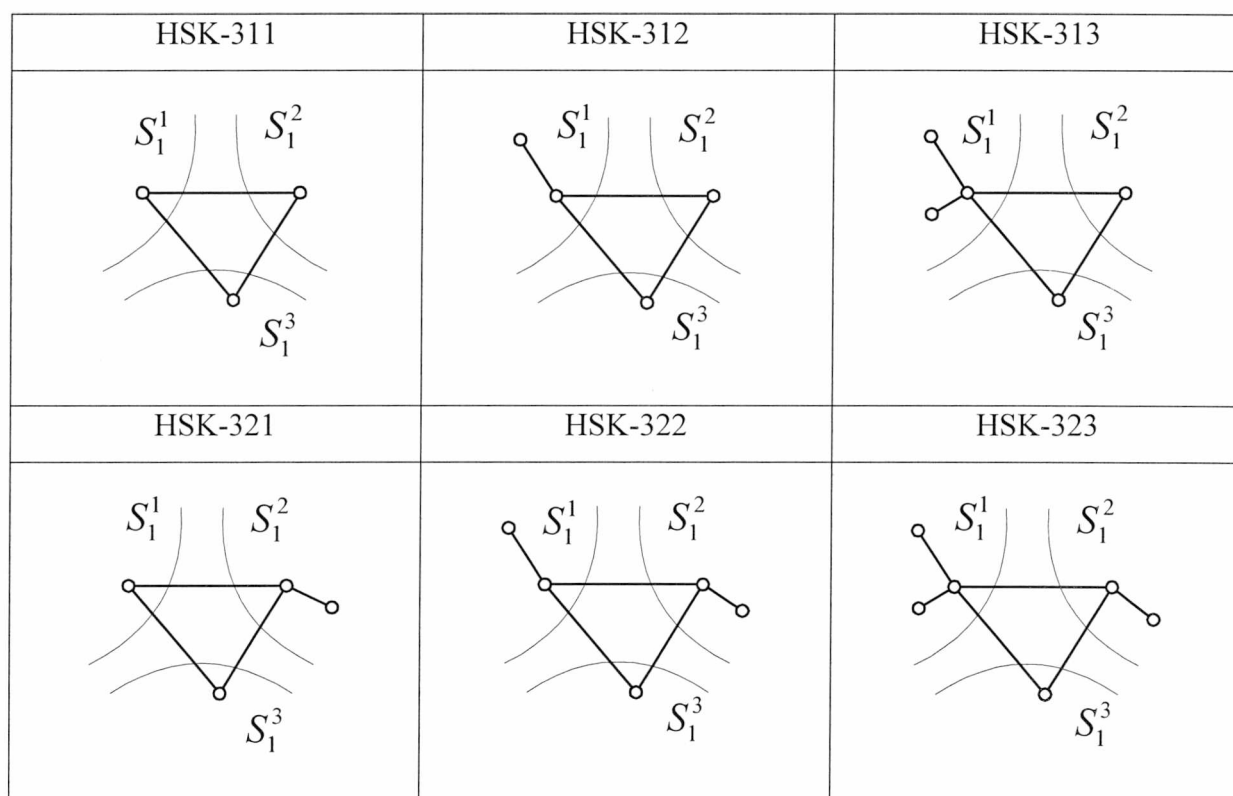
Rys. 3.8. Struktura sieci SK-3

W eksperymentach obliczeniowych rozpatrywane były dwa warianty struktur sieci 1. poziomu różniące się sposobem ustalania przepustowości kanałów sieci 1. poziomu. W pierwszym wariantcie, w każdej sieci 1. poziomu wszystkie kanały miały przypisaną jedną wartość przepustowości. Drugi wariant polegał na przypisaniu kanałom w sieciach 1. poziomu różnych przepustowości ze zbioru $\{256, 128, 64\}$ [kbit/s].



Rysunek 3.9. Wybrane struktury sieci 2. poziomu łączących dwie sieci 1. poziomu

Liczba bram do umieszczenia w każdej z sieci 1. poziomu oraz zbiór potencjalnych lokalizacji tych bram zależy od wybranej struktury sieci hierarchicznej. Na rysunku 3.9 zostały przedstawione przykładowe struktury sieci 2. poziomu łączącej dwie sieci 1. poziomu. Przyjęto oznaczenie sieci hierarchicznej składające się z trzech cyfr. Pierwsza oznacza liczbę sieci 1. poziomu, druga oznacza wariant struktury sieci 2. poziomu, trzecia zaś liczbę bram w sieci S_1^1 , np. HSK-214 oznacza hierarchiczną sieć komputerową z dwiema sieciami 1. poziomu, czterema bramami w sieci SK-1 oraz jedną bramą w sieci SK-2. W celu umożliwienia porównania wielu sieci z różnymi liczbami bram do umieszczenia w sieciach 1. poziomu, zaproponowaliśmy struktury sieci 2. poziomu z jedną wyróżnioną bramą w każdej z sieci 1. poziomu, do której przyłączane są pozostałe bramy umieszczane w tej sieci 1. poziomu.



Rys. 3.10. Wybrane struktury sieci 2. poziomu łączących trzy sieci 1. poziomu

Wybrane struktury sieci 2. poziomu łączących trzy sieci 1. poziomu zostały przedstawione na rys. 3.10. Struktury rozpatrywanych sieci 1. poziomu S_1^l $l=1, \dots, 3$ przedstawiają rysunki 3.6 ÷ 3.8.

Zbiory potencjalnych lokalizacji bram w sieciach 1. poziomu oraz zbiory dostępnych przepustowości kanałów sieci 2. poziomu dla sieci HSK-216 przedstawiono w tabeli 3.1 oraz w tabeli 3.2. W przypadku sieci HSK-211 do HSK-215 liczba bram w sieci S_1^1 jest odpowiednio mniejsza. Zbiory potencjalnych lokalizacji bram w sieciach 1. poziomu dla tych sieci można również wyznaczyć z tabeli 3.1. w następujący sposób: Zbiory J_g potencjalnych

lokalizacji bram w sieci S_1^i dla sieci HSK-215 to zbiory J_g dla bram $g=1, \dots, 5$ dla sieci HSK-216. Odpowiednio dla sieci HSK-214 to zbiory J_g dla bram $g=1, \dots, 4$, itd. Analogicznie można wyznaczyć zbiory dostępnych przepustowości kanałów sieci 2. poziomu dla sieci HSK-211 - HSK-215.

Tabela 3.1. Potencjalne lokalizacje bram w sieciach 1. poziomu dla sieci HSK-216

Sieć	Numer bramy	Zbiór J_g potencjalnych lokalizacji bram w sieciach 1. poziomu
SK-1	1	{1, 4, 5, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 19}
	2	{1, 4, 13, 15}
	3	{3, 5, 14, 16}
	4	{8, 10, 18}
	5	{1, 4, 13, 15}
	6	{3, 5, 14, 16}
SK-2	7	{1, 4, 10, 13, 18}

Tabela 3.2. Zbiory dostępnych przepustowości kanałów sieci 2. poziomu dla sieci HSK-216

Numer kanału	Brama	Brama	Zbiór ZC^i [kbit/s]
1	1	2	{512, 256, 128, 64}
2	1	3	{512, 256, 128, 64}
3	1	4	{512, 256, 128, 64}
4	1	5	{512, 256, 128, 64}
5	1	6	{512, 256, 128, 64}
6	1	7	{1024, 768, 512, 384, 256}

W tabeli 3.3 zostały umieszczone zbiory węzłów, w których mogą zostać rozmieszczone poszczególne bramy w sieci HSK-236, natomiast w tabeli 3.4 zbiory dostępnych przepustowości kanałów sieci 2. poziomu dla sieci HSK-236. Podobnie jak w przypadku sieci HSK-216, zbiory potencjalnych lokalizacji bram oraz zbiory dostępnych przepustowości kanałów dla sieci HSK-231 do HSK-235 można wyznaczyć korzystając z tabel 3.3 i 3.4.

Tabela 3.3. Potencjalne lokalizacje bram w sieciach 1. poziomu dla sieci HSK-236

Sieć	Numer bramy	Zbiór J_g potencjalnych lokalizacji bram w sieciach 1. poziomu
SK-1	1	{1, 4, 5, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 19}
	2	{1, 4, 13, 15}
	3	{3, 5, 14, 16}
	4	{8, 10, 18}
	5	{1, 4, 13, 15}
	6	{3, 5, 14, 16}
SK-2	7	{1, 4, 9, 10}
	8	{13, 18}

Tabela 3.4. Zbiory dostępnych przepustowości kanałów sieci 2. poziomu dla sieci HSK-236

Numer kanału	Brama	Brama	Zbiór ZC' [kbit/s]
1	1	2	{512, 256, 128, 64}
2	1	3	{512, 256, 128, 64}
3	1	4	{512, 256, 128, 64}
4	1	5	{512, 256, 128, 64}
5	1	6	{512, 256, 128, 64}
6	1	7	{1024, 768, 512, 384, 256}
7	7	8	{512, 256, 128, 64}
8	1	8	{1024, 512, 256, 128, 64}

W zależności od rozmieszczenia bram w sieciach 1. poziomu, zmieniają się długości kanałów a koszt dzierżawy kanałów zależy od ich długości. Dlatego też koszty dzierżawy kanałów były wyznaczane z tabel 3.5 oraz 3.6. Tabele te zostały opracowane na podstawie cennika operatora telekomunikacyjnego TPSA.

Tabela 3.5. Koszty dzierżawy kanałów

Przepustowość kanału	Koszt dzierżawy kanału
[kbit/s]	[zł/m-c]
64	$\text{opłata_stała} + \text{opłata_zmienna} * \text{długość}$
128	$2 * 0.80 * (\text{opłata_stała} + \text{opłata_zmienna} * \text{długość})$
192	$3 * 0.75 * (\text{opłata_stała} + \text{opłata_zmienna} * \text{długość})$
256	$4 * 0.70 * (\text{opłata_stała} + \text{opłata_zmienna} * \text{długość})$
384	$6 * 0.65 * (\text{opłata_stała} + \text{opłata_zmienna} * \text{długość})$
512	$8 * 0.60 * (\text{opłata_stała} + \text{opłata_zmienna} * \text{długość})$
768	$12 * 0.55 * (\text{opłata_stała} + \text{opłata_zmienna} * \text{długość})$
1024	$16 * 0.50 * (\text{opłata_stała} + \text{opłata_zmienna} * \text{długość})$

Tabela 3.6. Wartości składowych kosztu dzierżawy kanału w zależności od jego długości

długość kanału	opłata_stała	opłata_zmienna
[km]	[zł]	[zł/km]
do 3	90	70
3 – 20	120	50
20 – 30	400	36
30 – 50	1150	11
50 – 100	1400	6
Powyżej 100	1700	3

3.7.2. Definicje

W punkcie tym wprowadzimy definicje wielkości, które pozwolą zaprezentować własności rozważanego problemu optymalizacji. Niech wartość kryterium, jakim jest średnie opóźnienie pakietu w sieci hierarchicznej, uzyskana w wyniku rozwiązania problemu (3.2 ÷ 3.4) oznaczona będzie przez T^{opt} . Wartość średniego opóźnienia w poszczególnych sieciach 1. poziomu S_1^l oznaczona będzie odpowiednio przez $T(S1)$, $T(S2)$ oraz $T(S3)$, natomiast wartość średniego opóźnienia pakietu w sieci 2. poziomu S_2 przez $T(SN)$. Dodatkowo zdefiniowane zostaną parametry dotyczące natężeń ruchu pakietów w sieci. Niech średnie natężenie strumienia pakietów pomiędzy węzłami tej samej sieci 1. poziomu oznaczone będzie przez ri , zaś natężenie strumienia pakietów pomiędzy węzłami różnych sieci przez

ro . W przypadkach, kiedy oba natężenia będą równe $ri = ro$, na oznaczenie średniego natężenia strumienia pakietów stosowany będzie parametr rk .

W celu porównania wyników badań uzyskanych dla różnych sieci, wprowadzimy pojęcie unormowanego budżetu $\bar{B}$ oraz unormowanego natężenia strumienia pakietów przesyłanych pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu $\overline{ro}$.

Niech $D^{\max}$ będzie maksymalnym kosztem budowy hierarchicznej rozległej sieci komputerowej, tj. o maksymalnych dostępnych przepustowościach kanałów sieci 2. poziomu oraz z bramami rozmieszczonymi w sieciach 1. poziomu w taki sposób, że długości kanałów sieci 2. poziomu są największe. Niech $B^{\min}$ będzie minimalnym dopuszczalnym budżetem na budowę sieci takim, że dla zadanej macierzy R wprowadzanych z zewnątrz natężeń zadanie (3.2 ÷ 3.4) ma rozwiązanie. Unormowany budżet $\bar{B}$ rozległej sieci komputerowej będzie określony następująco:

$$\bar{B} = \frac{B - B^{\min}}{D^{\max} - B^{\min}} \cdot 100\%.$$

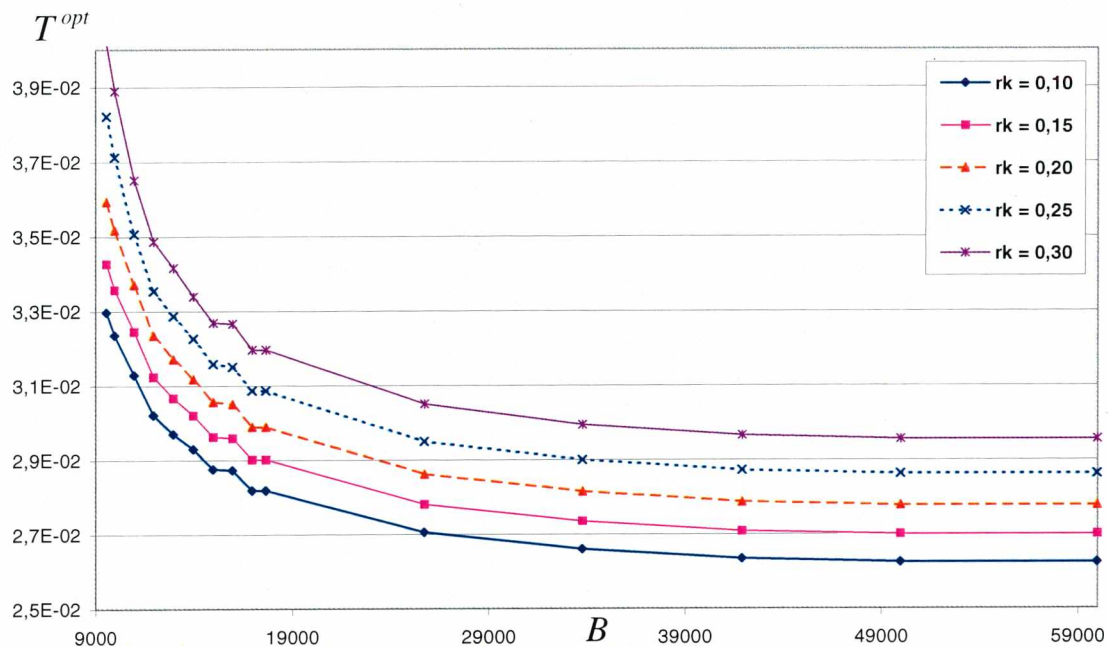
Dla wartości budżetu $B = B^{\min}$ przyjmuje on wartość $\bar{B} = 0\%$, natomiast dla wartości budżetu $B = D^{\max}$ wartość unormowanego budżetu $\bar{B} = 100\%$.

Niech $ro_{\max}$ będzie maksymalną wartością parametru ro , dla którego zadanie (3.2 ÷ 3.4) dla sieci o określonej strukturze ma rozwiązanie przy określonym budżecie na budowę sieci. Niech unormowana wartość parametru ro ma postać:

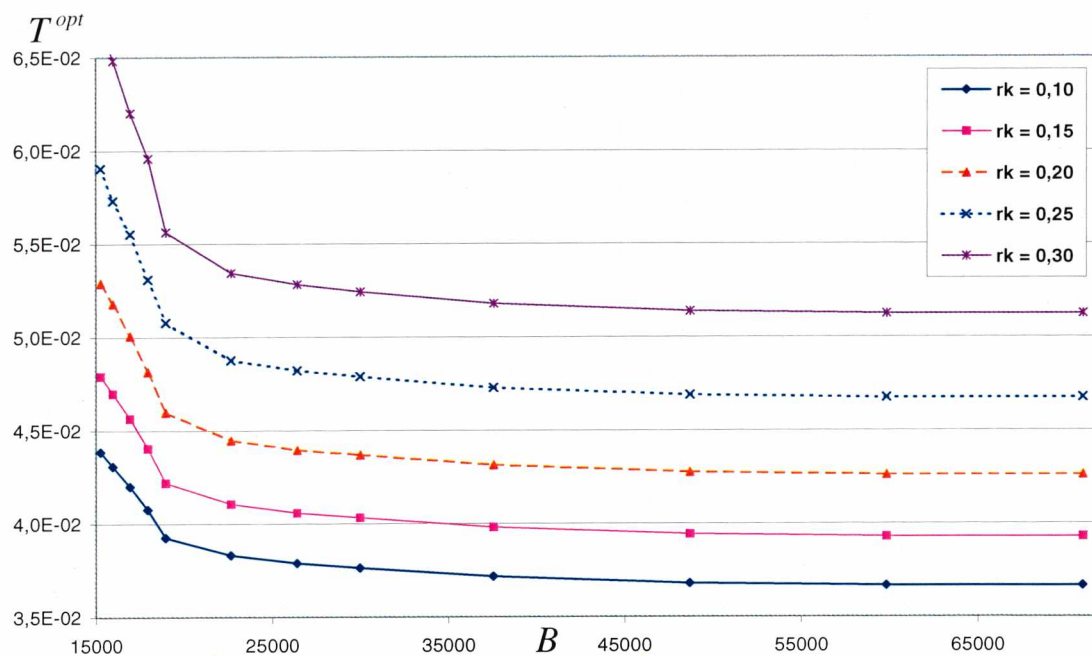
$$\overline{ro} = \frac{ro}{ro_{\max}} \cdot 100\%$$

3.7.3. Badanie zależności T^{opt} od budżetu sieci B

Celem badania było wyznaczenie zależności pomiędzy wartością średniego opóźnienia pakietu w hierarchicznej sieci komputerowej a wartością budżetu na budowę tej sieci B . Przebadano wiele sieci hierarchicznych o różnych strukturach, różnych macierzach R wprowadzanych z zewnątrz natężeń, różnych przepustowościach kanałów w sieciach 1. poziomu. Dla wszystkich przebadanych sieci zostały uzyskane podobne wyniki. Na rys. 3.11 przedstawione zostały wyniki uzyskane dla sieci HSK-223 z dwiema sieciami 1. poziomu, z przepustowościami kanałów w sieciach 1. poziomu równymi 128 kbit/s, natomiast na rys. 3.12 wyniki dla sieci HSK-312 z trzema sieciami 1. poziomu, z przepustowościami kanałów w sieciach 1. poziomu ze zbioru $\{256, 128, 64\}$ [kbit/s].



Rys. 3.11. Zależność wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci T^{opt} od budżetu B dla sieci HSK-223



Rys. 3.12. Zależność wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci T^{opt} od budżetu B dla sieci HSK-312

Jak można zauważyć na rysunku 3.11 oraz rysunku 3.12, wzrost budżetu na budowę sieci 2. poziomu powoduje spadek średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej. Powyżej pewnej wartości budżetu średnie opóźnienie pakietu przestaje maleć i pozostaje stałe. W przypadku sieci HSK-223 zachodzi to dla $B > 49000$, natomiast w przypadku sieci HSK-312 dla $B > 55000$. Na tę zależność nie wpływa wartość parametru rk . Można także zauważyć, że również przy małych wartościach budżetu, jego przyrost nie zawsze powoduje zmniejszenie funkcji kryterialnej. Wynika to stąd, że rozpatrywany problem optymalizacyjny jest problemem dyskretnym.

Dla wszystkich przebadanych sieci zauważono, że powyżej pewnej wartości budżetu wartość średniego opóźnienia w sieci pozostaje stała, bądź zmienia się nieznacznie. Pozwala to na sformułowanie następującego wniosku:

Wniosek 3.1. Istnieje taki budżet B' , że dla $B > B'$ wartość średniego opóźnienia T^{opt} pozostaje stała.

Wyznaczenie wartości B' może mieć duże znaczenie z ekonomicznego punktu widzenia. Pozwala uniknąć sytuacji, w której projektowana jest sieć, której koszt jest większy od B' a wartość funkcji kryterialnej taka sama jak dla sieci o budżecie $B = B'$. Zwiększanie budżetu sieci powyżej wartości B' nie powoduje zmniejszania wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci, a więc nie ma uzasadnienia ekonomicznego. Zauważono również, że wartość parametru rk nie wpływa znacząco na wartość B' , więc wartość B' można wyznaczyć dla wybranej wartości parametru rk i stosować dla innych wartości rk .

W dalszej części przedstawimy sposób wyznaczenia wartości B' . W tym celu wprowadzimy nowe oznaczenia: Niech $YB = \{B_1, B_2, \dots, B_s\}$ będzie zbiorem wartości budżetu B , natomiast $YT = \{T_1^{opt}, T_2^{opt}, \dots, T_s^{opt}\}$ zbiorem wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej, uzyskanych w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) dla odpowiednich wartości budżetu ze zbioru YB . Tak więc T_1^{opt} jest wartością średniego opóźnienia pakietu uzyskaną w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) dla budżetu $B = B_1$. Niech zbiór YB będzie uporządkowany rosnąco. Dla rosnących wartości budżetu B wartość średniego opóźnienia T^{opt} maleje, więc najmniejszą wartością ze zbioru YT , która zostanie oznaczona przez $T_{\min}^{opt}$, jest wartość $T_{\min}^{opt} = T_s^{opt}$.

Na podstawie analizy wyników badań dla różnych struktur sieci hierarchicznych z kilkoma sieciami 1. poziomu oraz jedną siecią 2. poziomu, do przybliżenia zależności średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej od budżetu B wybraliśmy funkcję z klasy:

$$T^{opt} = \frac{u1}{B + u2} + u3 \quad (3.33)$$

gdzie $u1$, $u2$ i $u3$ są współczynnikami rzeczywistymi.

Wyznaczenie współczynników sprowadza się do rozwiązania zadania identyfikacji polegającego na wyborze najlepszego modelu z klasy (3.33). Jako kryterium jakości identyfikacji zostało przyjęte kryterium kwadratowe:

$$\Psi = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left(T_i^{opt} - \left(\frac{u1}{B_i + u2} + u3 \right) \right)^2$$

gdzie s jest liczbą pomiarów, a T_i^{opt} jest wartością średniego opóźnienia pakietu uzyskaną w wyniku rozwiązywania zadania optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) dla budżetu $B = B_i$.

Przedstawiony zostanie przykład wyznaczenia wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$ dla przedstawionych wcześniej przykładowych sieci HSK-223 oraz HSK-312. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$, minimalizujące kryterium Ψ dla wybranych wartości rk , zostały wyznaczone numerycznie. Wyniki przedstawione zostały w tabelach 3.7 i 3.8.

Tabela 3.7. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$ dla sieci HSK-223

rk	$u1$	$u2$	$u3$	Ψ
0.1	29.881	-5536	0.02560	3.41E-09
0.2	31.122	-6075	0.02709	4.24E-09
0.3	31.250	-6829	0.02888	7.84E-09

Tabela 3.8. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$ dla sieci HSK-312

rk	$u1$	$u2$	$u3$	Ψ
0.1	26.316	-11974	0.03609	1.03E-07
0.2	33.614	-12333	0.04178	2.58E-07
0.3	44.013	-12705	0.05007	6.83E-07

Mając wyznaczone współczynniki funkcji (3.33) można wyznaczyć wartość B' . Niech B' będzie taką wartością budżetu B , dla której względna różnica pomiędzy minimalną wartością średniego opóźnienia T_{min}^{opt} a wartością T^{opt} wyznaczoną z (3.33) będzie równa pewnej ustalonej wartości ε , czyli:

$$\frac{T^{opt}(B') - T_{min}^{opt}}{T_{min}^{opt}} = \varepsilon \quad (3.34)$$

Po wstawieniu (3.33) do (3.34) dla $B = B'$ i po pewnych przekształceniach otrzymujemy następujące wyrażenie na B' :

$$B' = \frac{u1}{T_{min}^{opt}(1 + \varepsilon) - u3} - u2 \quad (3.35)$$

W tabeli 3.9 zostały umieszczone wartości B' uzyskane dla sieci HSK-223 oraz HSK-312 dla $\varepsilon = 0,005$.

Tabela 3.9. Wartości B' uzyskane dla sieci HSK-223 oraz HSK-312

Sieć HSK-223		Sieć HSK-312	
rk	B'	rk	B'
0.1	44589	0.1	47222
0.2	44234	0.2	45655
0.3	44948	0.3	44201

Podczas badań zależności średniego opóźnienia w sieci od wielkości budżetu obserwowane były wartości średniego opóźnienia w sieciach 1. poziomu oraz w sieci 2. poziomu. Rysunek 3.13 oraz rysunek 3.14 ilustrują jak zmienia się średnie opóźnienie pakietów w sieciach 1. poziomu oraz w sieci 2. poziomu wraz ze zwiększaniem budżetu sieci. Można zauważyć, że przy małych wartościach budżetu, jego zmiana wpływa na średnie opóźnienie pakietu zarówno w sieciach 1. poziomu jak i w sieci 2. poziomu. Dla wartości budżetu $B > 19000$ w przypadku sieci HSK-223 oraz $B > 25000$ w przypadku sieci HSK-312, średnie opóźnienia w sieciach 1. poziomu pozostają na stałym najniższym poziomie, zmienia się tylko średnie opóźnienie pakietu w sieci 2. poziomu. Z powyższych rozważań wynika następujący wniosek:

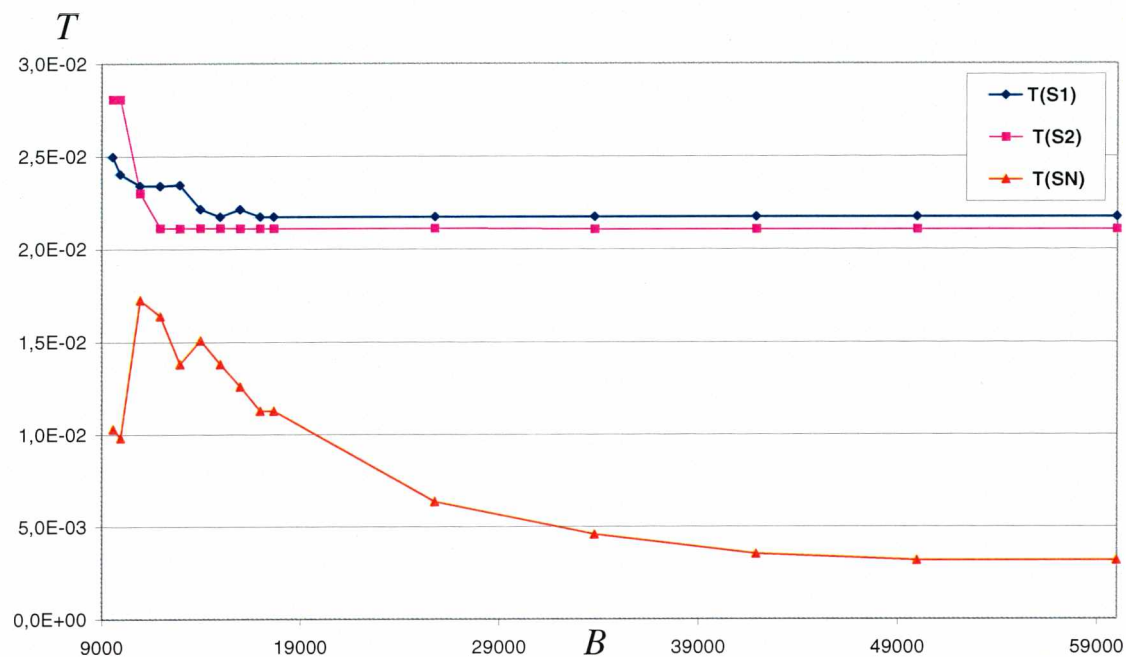
Wniosek 3.2. Istnieje taka wartość budżetu $B'' < B'$, że dla $B > B''$ wartość średniego opóźnienia pakietów we wszystkich sieciach 1. poziomu pozostaje stała i jego wartość jest minimalna.

Na średnie opóźnienie pakietów w sieciach 1. poziomu mają wpływ rozmieszczenie bram oraz przepływy w tych sieciach. Dla budżetu o wartości $B > B''$ rozmieszczenie bram w sieciach 1. poziomu jest rozmieszczeniem minimalizującym średnie opóźnienie w sieci hierarchicznej i jednocześnie minimalizującym średnie opóźnienie pakietów w sieciach 1. poziomu. Inaczej jest w przypadku budżetu na budowę sieci o wartości $B < B''$. Wartości średniego opóźnienia pakietu w sieciach 1. poziomu są w wielu przypadkach większe od wartości minimalnej. Powyższe rozważania prowadzą do następującego wniosku:

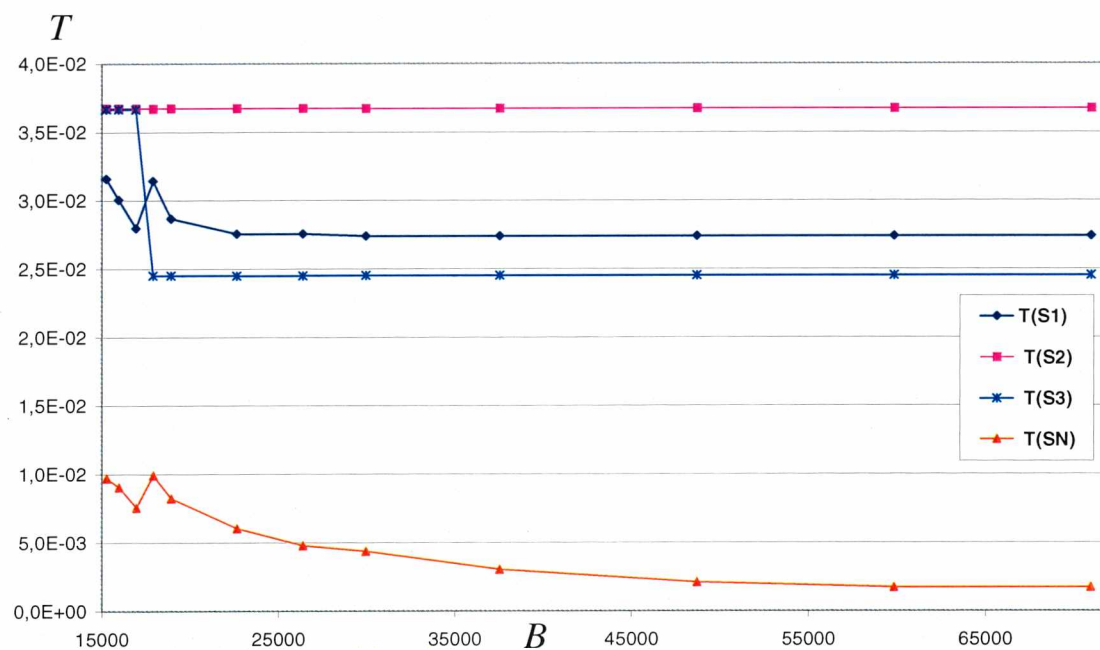
Wniosek 3.3. Rozmieszczenie bram minimalizujące średnie opóźnienie pakietu w sieciach 1. poziomu nie zawsze prowadzi do minimalnej wartości średniego opóźnienia pakietów w sieci hierarchicznej T^{opt} .

Powyższy wniosek uzasadnia jednocześnie wyznaczanie lokalizacji bram, przepływów, przepustowości kanałów i struktury hierarchicznej sieci rozległej. Wyznaczenie lokalizacji bram, która minimalizuje średnie opóźnienie pakietów w sieciach 1. poziomu a następnie

wyznaczanie rozmieszczenia i przepustowości kanałów sieci 2. poziomu nie musi prowadzić do optymalnego rozwiązania problemu (3.2 ÷ 3.4).



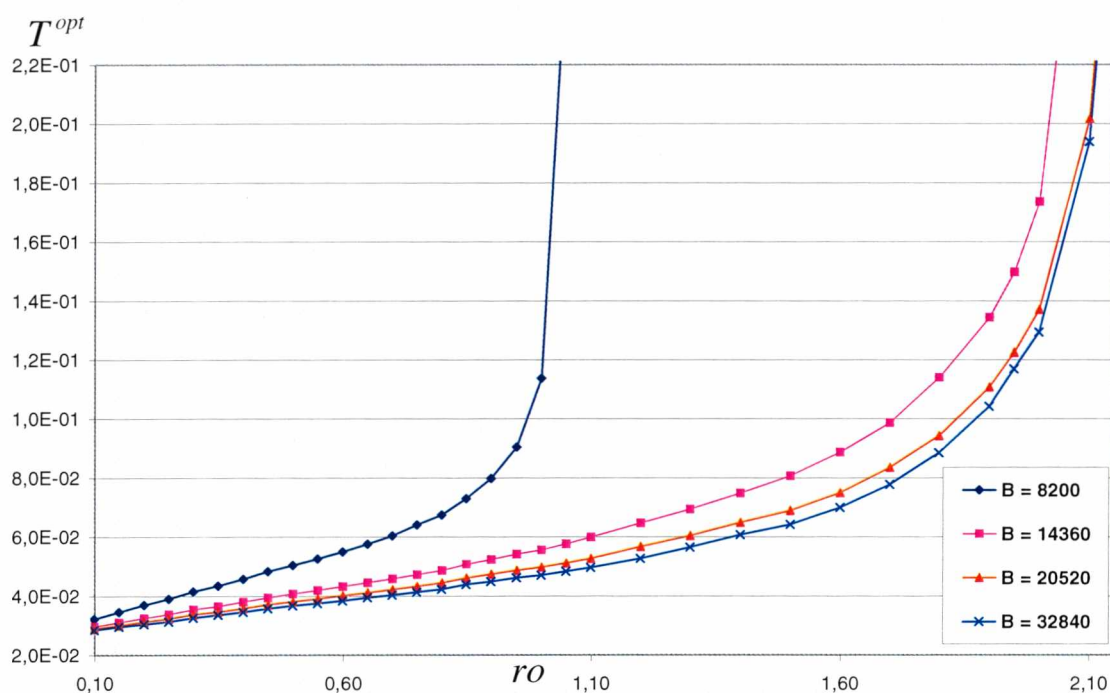
Rys. 3.13. Zależność wartości średniego opóźnienia pakietów w sieciach 1. poziomu oraz w sieci 2. poziomu hierarchicznej sieci HSK-223 od budżetu B



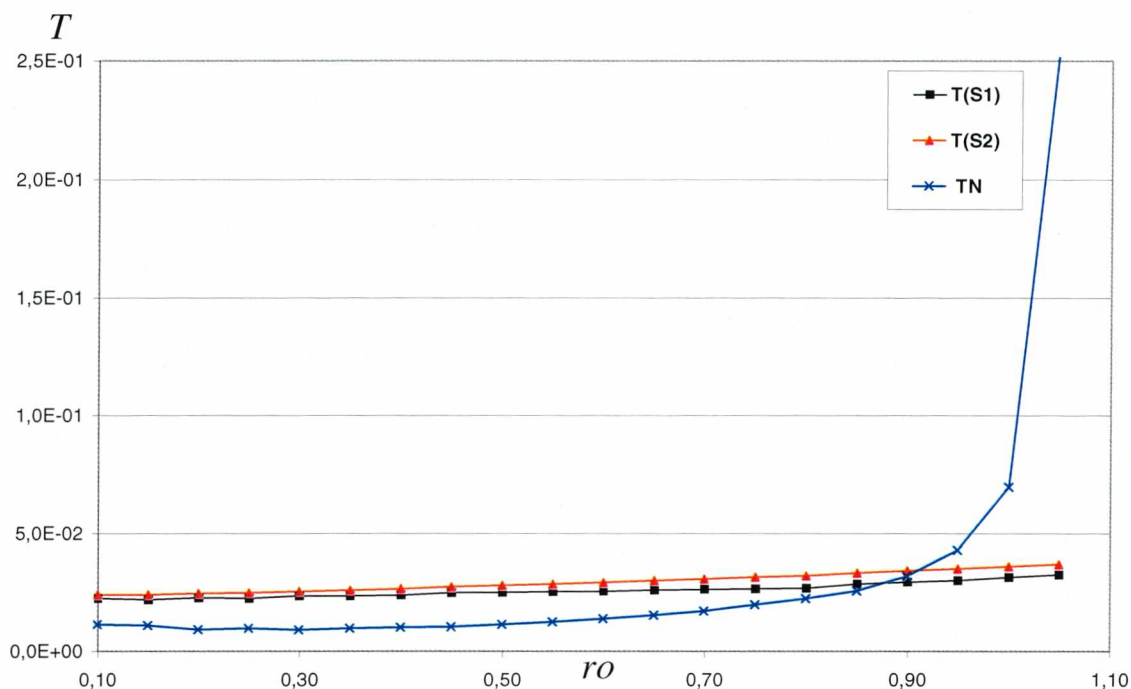
Rys. 3.14. Zależność wartości średniego opóźnienia pakietów w sieciach 1. poziomu oraz w sieci 2. poziomu hierarchicznej sieci HSK-312 od budżetu B

3.7.4. Badanie zależności T^{opt} od parametrów natężenia ruchu w sieci

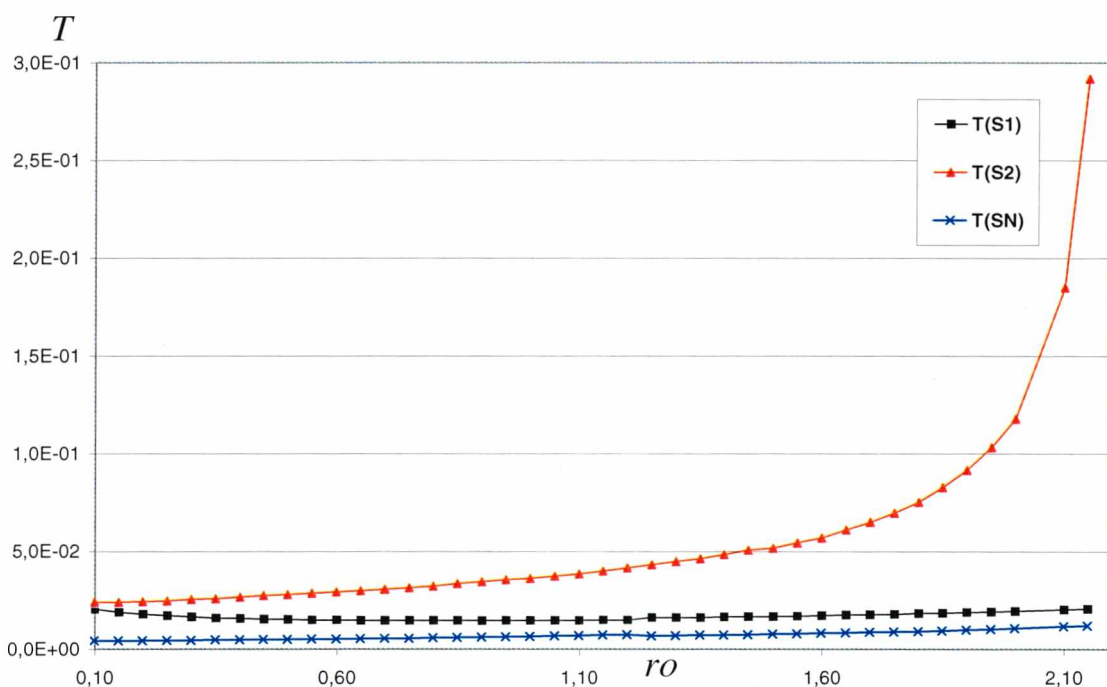
Celem badania było wyznaczenie zależności pomiędzy wartością średniego opóźnienia pakietu w hierarchicznej sieci komputerowej a wartością parametrów ri oraz ro , będących wartościami składników przesyłanych odpowiednio pomiędzy węzłami tej samej sieci 1. poziomu i pomiędzy węzłami należącymi do różnych sieci 1. poziomu. Przebadano wiele sieci hierarchicznych o różnych strukturach i różnych przepustowościach kanałów w sieciach 1. poziomu. Dla wszystkich przebadanych sieci rezultaty nie różniły się znacząco. Na rys. 3.15 przedstawione zostały wyniki badania wpływu parametru ro na wartość średniego opóźnienia pakietu uzyskane dla sieci HSK-213 przy ustalonej wartości parametru $ri = 0.1$. Można zauważyć, że dla wartości parametru $ro < 0.6$ w przypadku budżetu $B = 8200$ oraz $ro < 1.1$ dla większych wartości budżetu, wzrost wartości ro powoduje liniowy wzrost wartości średniego opóźnienia T^{opt} . Dalsze zwiększanie parametru ro powoduje gwałtowny wzrost wartości T^{opt} . Dla wartości parametru $ro \geq 1.1$ w przypadku budżetu $B = 8200$ oraz dla wartości parametru $ro \geq 2.2$ w przypadku budżetu $B > 14300$, zadanie (3.2 ÷ 3.4) nie ma rozwiązania.



Rys. 3.15. Zależność wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci HSK-213 T^{opt} od parametru ro



Rys. 3.16. Zależność wartości średniego opóźnienia pakietów w sieciach 1. poziomu oraz w sieci 2. poziomie od parametru ro w sieci HSK-213, przy budżecie $B = 8200$



Rys. 3.17. Zależność wartości średniego opóźnienia pakietów w sieciach 1. poziomu oraz w sieci 2. poziomie od parametru ro w sieci HSK-213, przy budżecie $B = 20520$

Rysunek 3.16 oraz rysunek 3.17 ilustrują wpływ wartości parametru ro na opóźnienie pakietów w poszczególnych sieciach wchodzących w skład sieci HSK-213. Można zauważyć, że wzrost wartości T^{opt} wynika ze wzrostu wartości średniego opóźnienia w jednej z sieci 1. poziomu lub w sieci 2. poziomu. Rysunek 3.16 przedstawia wykres zmian wartości średniego

opóźnienia w sieciach 1. poziomu oraz w sieci 2. poziomu dla budżetu $B = 8200$. Wartość średniego opóźnienia w sieciach 1. poziomu zmienia się nieznacznie. Jedynie w sieci 2. poziomu wraz ze wzrostem wartości parametru ro następuje znaczny wzrost wartości średniego opóźnienia. Rysunek 3.17 przedstawia wykres zmian wartości średnich opóźnień dla budżetu $B = 20520$. Można na nim zauważyć, że zwiększanie parametru ro powoduje jedynie wzrost wartości średniego opóźnienia w sieci SK-2 $T(S_2)$. Z powyższych rozważań wynika następujący wniosek:

Wniosek 3.4. Duży wzrost wartości średniego opóźnienia pakietów w jednej z sieci (1. poziomu lub 2. poziomu) wchodzących w skład sieci hierarchicznej powoduje podobny wzrost wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej T^{opt} .

Analiza wyników otrzymanych dla sieci HSK-213 oraz dla pozostałych sieci wykazuje, że zależność wartości średniego opóźnienia T^{opt} od parametru ro można przybliżyć funkcją z następującej klasy:

$$T^{opt} = \frac{u1}{u2 - ro} + u3 \quad (3.36)$$

gdzie $u1$, $u2$ i $u3$ są współczynnikami rzeczywistymi.

Wyznaczenie współczynników sprowadza się do rozwiązania zadania identyfikacji polegającego na wyborze najlepszego modelu z klasy (3.36). Jako kryterium jakości identyfikacji zostało przyjęte kryterium kwadratowe:

$$\Psi = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left(T_i^{opt} - \left(\frac{u1}{u2 - ro_i} + u3 \right) \right)^2$$

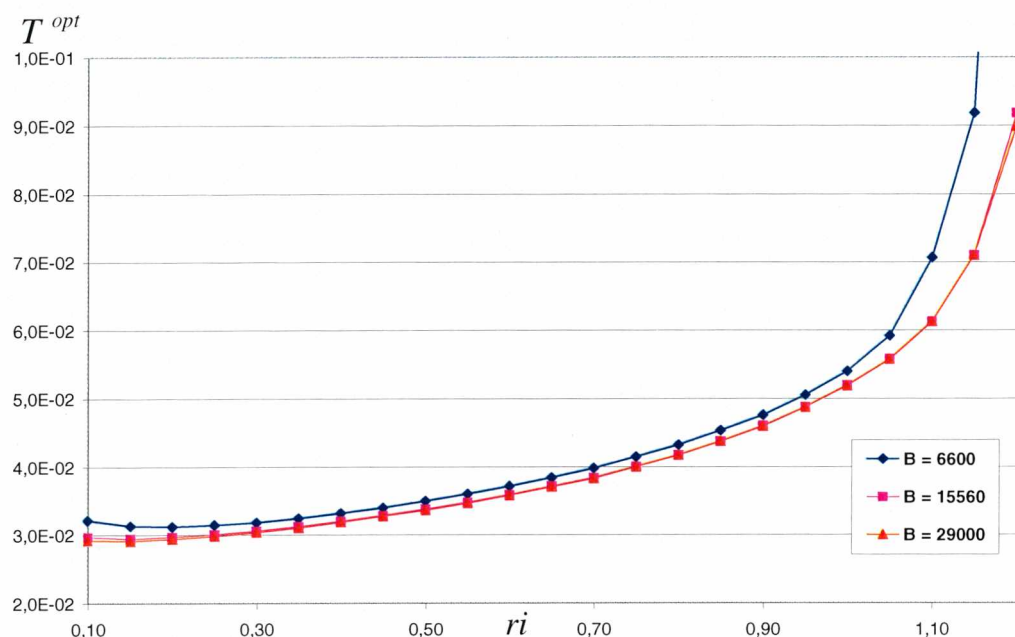
gdzie s jest liczbą pomiarów, a T_i^{opt} jest wartością średniego opóźnienia pakietu uzyskaną w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) przy wartości składników przesyłanych pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu $ro = ro_i$.

Przedstawimy przykład wyznaczenia wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$ dla sieci HSK-213. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$, minimalizujące kryterium Ψ dla wybranych wartości budżetu B , zostały wyznaczone numerycznie. Wyniki przedstawione zostały w tabeli 3.10.

Tabela 3.10. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$ dla sieci HSK-213

B	$u1$	$u2$	$u3$	Ψ
8200	0,0068	1,08	0,0374	3,16E-05
14360	0,0355	2,22	0,0234	4,38E-05
20520	0,0288	2,26	0,0247	3,04E-05
32840	0,0192	2,22	0,0350	5,76E-05

Rysunek 3.18 przedstawia wyniki badania wpływu parametru ri na wartość średniego opóźnienia pakietu uzyskane dla sieci HSK-213 przy ustalonej wartości parametru $ro = 0.1$. Można zauważyć, że wartość budżetu ma znikomy wpływ na zależność wartości T^{opt} od wartości parametru ri . Wynika to stąd, że parametr ri odpowiada wartości składników przesyłanych pomiędzy węzłami tej samej sieci 1. poziomu. Wartość parametru ri nie wpływa więc na wartość średniego opóźnienia pakietów w sieci 2. poziomu, co można zaobserwować na rysunku 3.19.



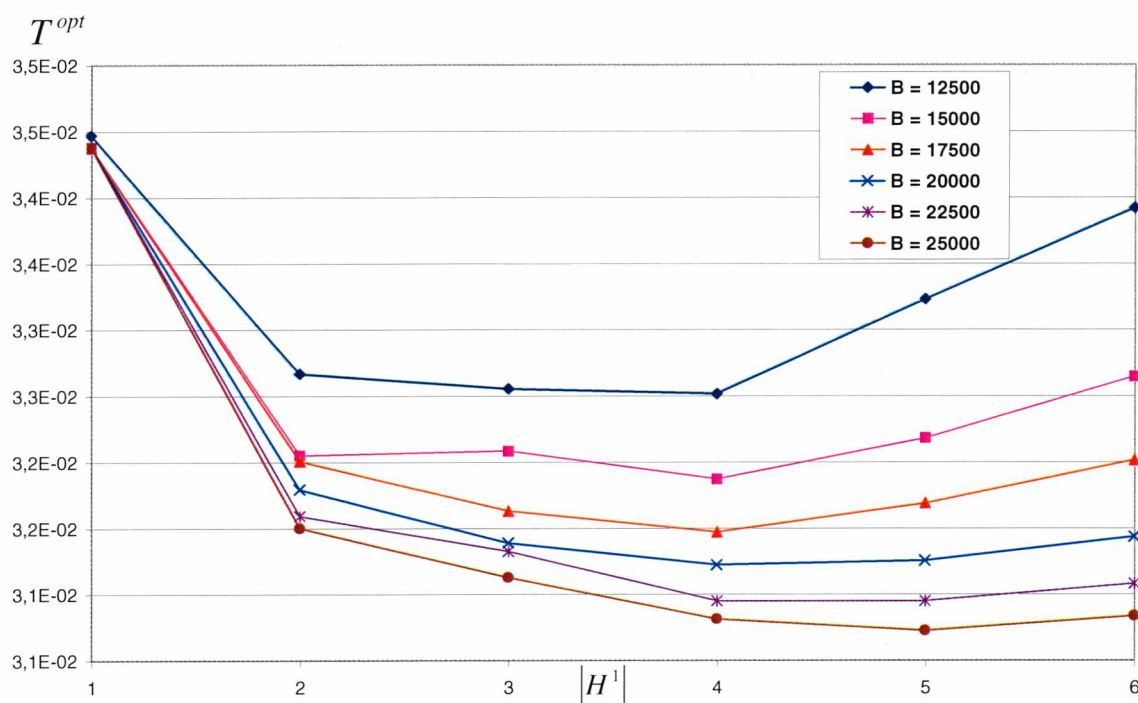
Rys. 3.18. Zależność wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci HSK-212 T^{opt} od parametru ri



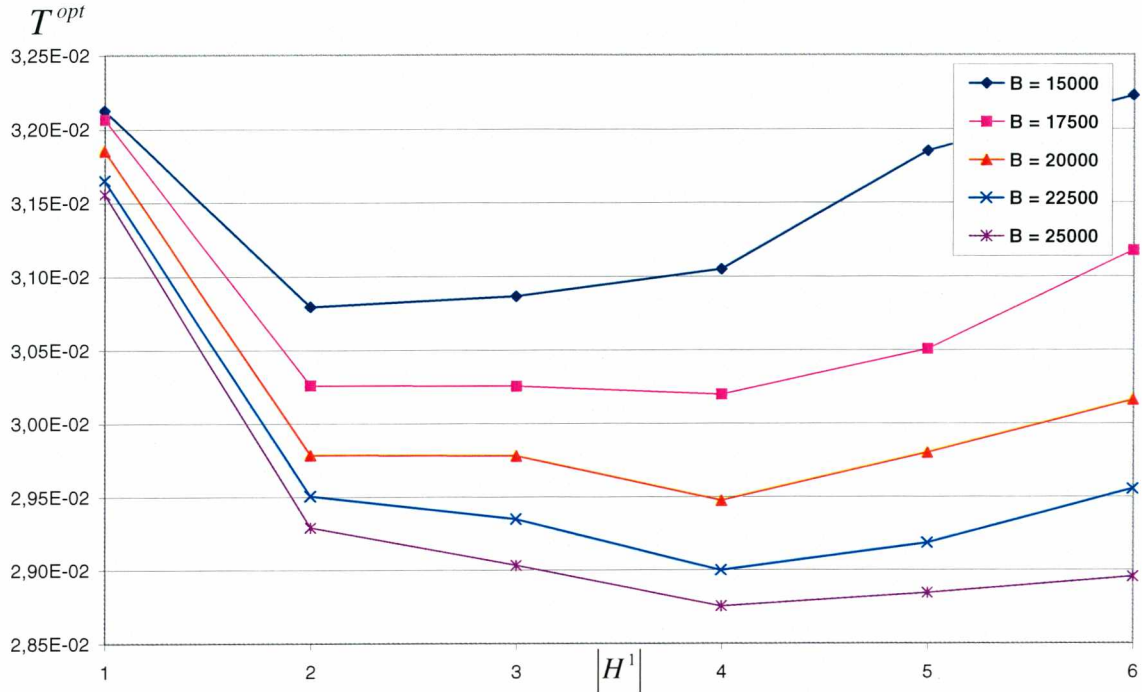
Rys. 3.19. Zależność wartości średniego opóźnienia pakietów w sieciach 1. poziomu oraz w sieci 2. poziomu sieci HSK-212 od parametru ri , dla budżetu $B = 11080$

3.7.5. Badanie zależności T^{opt} od liczby bram w sieci

Celem badania było wyznaczenie zależności pomiędzy wartością średniego opóźnienia pakietu w hierarchicznej sieci komputerowej a liczbą bram umieszczonych w jednej z sieci 1. poziomu. Przebadano wiele sieci hierarchicznych o różnych strukturach, różnych macierzach R wprowadzanych z zewnątrz natężeń, różnych przepustowościach kanałów w sieciach 1. poziomu. Dla wszystkich przebadanych sieci zostały uzyskane podobne wyniki. Rys. 3.20 przedstawia wyniki uzyskane dla sieci HSK-211 do HSK-216 z dwiema sieciami 1. poziomu i jedną siecią 2. poziomu, z przepustowościami kanałów w sieciach 1. poziomu równymi 128 kbit/s, natomiast rys. 3.21 przedstawia wyniki uzyskane dla sieci HSK-221 do HSK-226, również z dwiema sieciami 1. poziomu i jedną siecią 2. poziomu, z przepustowościami kanałów w sieciach 1. poziomu równymi 128 kbit/s.



Rys. 3.20. Zależność wartości T^{opt} od liczby bram w sieci SK-1 $|H^1|$ w sieciach HSK-211 do HSK-216



Rys. 3.21. Zależność wartości T^{opt} od liczby bram w sieci SK-1 $|H^1|$ w sieciach HSK-221 do HSK-226

We wszystkich przebadanych sieciach hierarchicznych można zauważyć zmniejszenie wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci T^{opt} przy dodaniu drugiej bramy w sieci SK-1. Zmniejszenie wartości T^{opt} następowało niezależnie od wartości budżetu na budowę sieci. Dalsze zwiększanie liczby bram w sieci SK-1: $|H^1|$ dawało rezultaty zależne od wartości budżetu B . Przy małych wartościach budżetu, wartość T^{opt} zmniejszała się tylko nieznacznie lub nawet rosła, natomiast przy większych wartościach budżetu B zwiększając liczbę bram w sieci SK-1 $|H^1|$ uzyskiwano zmniejszenie wartości T^{opt} dla $|H^1| \leq 4$.

Wniosek 3.5. Istnieje taka liczba bram do umieszczenia w sieci 1. poziomu, dla której wartość T^{opt} osiąga minimum.

Wniosek 3.6. Liczba bram w sieci, dla której wartość T^{opt} jest najmniejsza, zależy od wartości budżetu B .

Na wykresach umieszczonych na rysunku 3.20 oraz rysunku 3.21 można zauważyć, że w okolicy minimum wartości T^{opt} nie różnią się znacząco. Zależność wartości T^{opt} od liczby bram $|H^1|$ można przybliżyć funkcją kwadratową:

$$T^{opt} = u_1(|H^1| - u_2)^2 + u_3 \quad (3.37)$$

gdzie u_1 , u_2 i u_3 są współczynnikami rzeczywistymi.

Wyznaczenie współczynników sprowadza się do rozwiązania zadania identyfikacji polegającego na wyborze najlepszego modelu z klasy (3.37). Jako kryterium jakości identyfikacji zostało przyjęte kryterium kwadratowe:

$$\Psi = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \left(T_i^{opt} - (u1(i-u2)^2 + u3) \right)^2$$

gdzie T_i^{opt} jest wartością średniego opóźnienia pakietu uzyskaną w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) dla liczby bram w sieci SK-1 $|H^1|=1$.

Przedstawimy przykład wyznaczenia wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$ dla sieci HSK-211 do HSK-216. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$, minimalizujące kryterium Ψ dla wybranych wartości budżetu B , zostały wyznaczone numerycznie. Wyniki przedstawione zostały w tabeli 3.11.

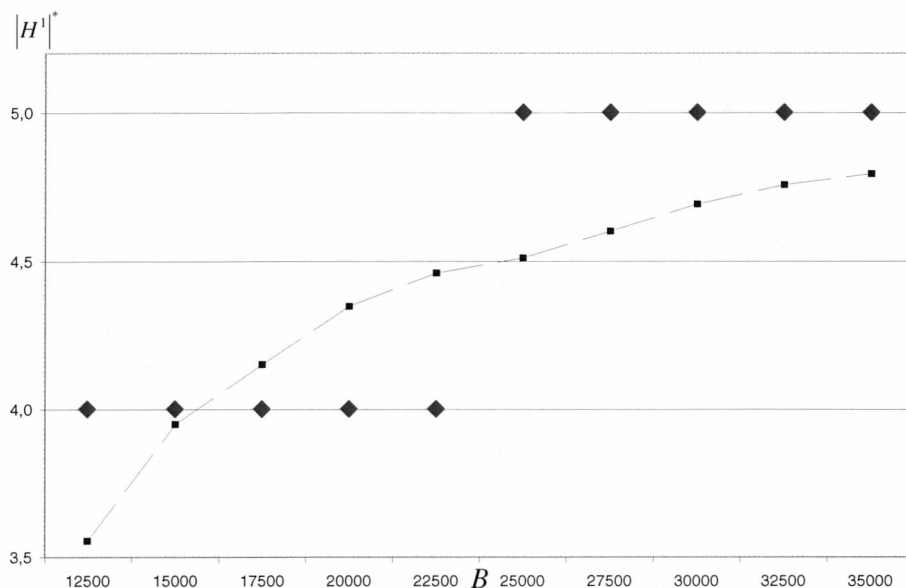
Tabela 3.11. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$ dla sieci HSK-211 do HSK-216

B	$u1$	$u2$	$u3$	Ψ
12500	2,82E-04	3,56	3,24E-02	5,33E-08
15000	2,69E-04	3,95	3,17E-02	1,14E-07
17500	2,83E-04	4,15	3,12E-02	9,18E-08
20000	2,78E-04	4,35	3,09E-02	1,22E-07
22500	2,79E-04	4,46	3,06E-02	1,45E-07
25000	2,87E-04	4,51	3,04E-02	1,53E-07
27500	2,89E-04	4,60	3,02E-02	1,41E-07
30000	2,86E-04	4,69	3,01E-02	1,33E-07
32500	2,86E-04	4,76	3,00E-02	1,27E-07
35000	2,87E-04	4,79	2,99E-02	1,19E-07

Można zauważyć, że funkcja (3.37) określająca zależność wartości T^{opt} od liczby bram $|H^1|$ osiąga minimum dla wartości $|H^1|=u2$. Liczba bram w sieci SK-1 $|H^1|$ musi być liczbą całkowitą. Liczbę bram, dla której wartość T^{opt} jest najmniejsza, oznaczmy przez $|H^1|^*$ i będziemy określać jako liczbę całkowitą najbliższą wartości parametru $u2$:

$$|H^1|^* = \begin{cases} [u2]+1 & \text{jeżeli } u2 - [u2] \geq 0.5 \\ [u2] & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

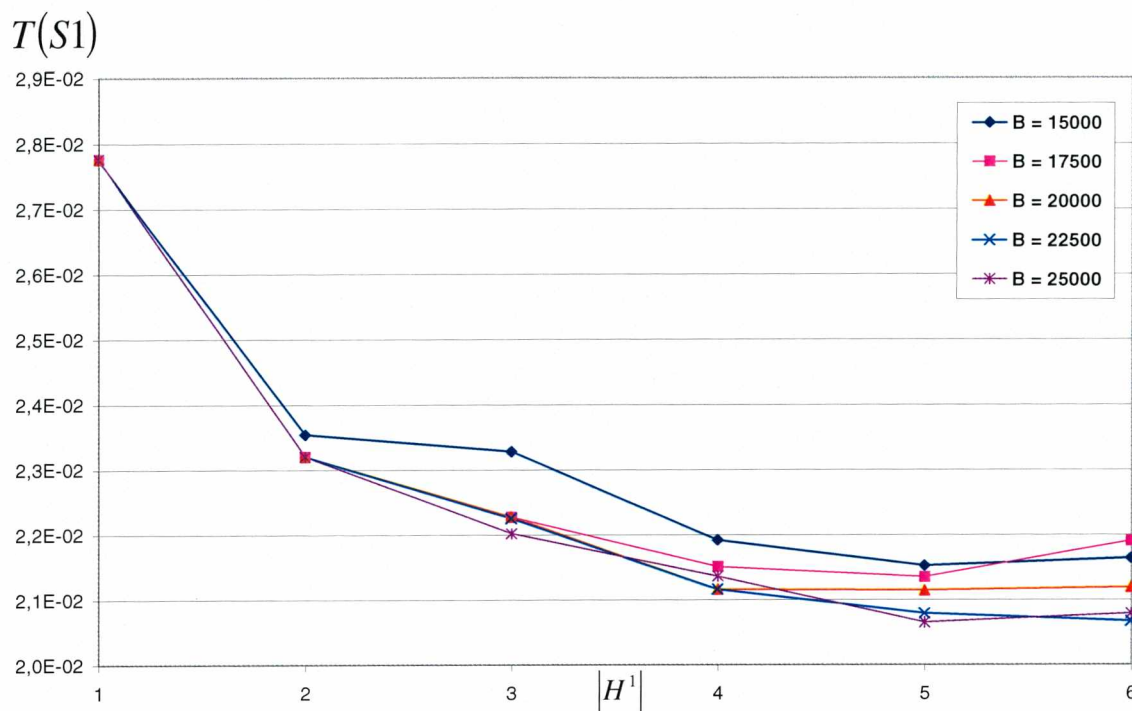
gdzie przez $[u2]$ oznaczona została część całkowita parametru $u2$. Rysunek 3.22 przedstawia wykres zależności wartości parametru $u2$ od budżetu B wraz z wyznaczonymi wartościami $|H^1|^*$.



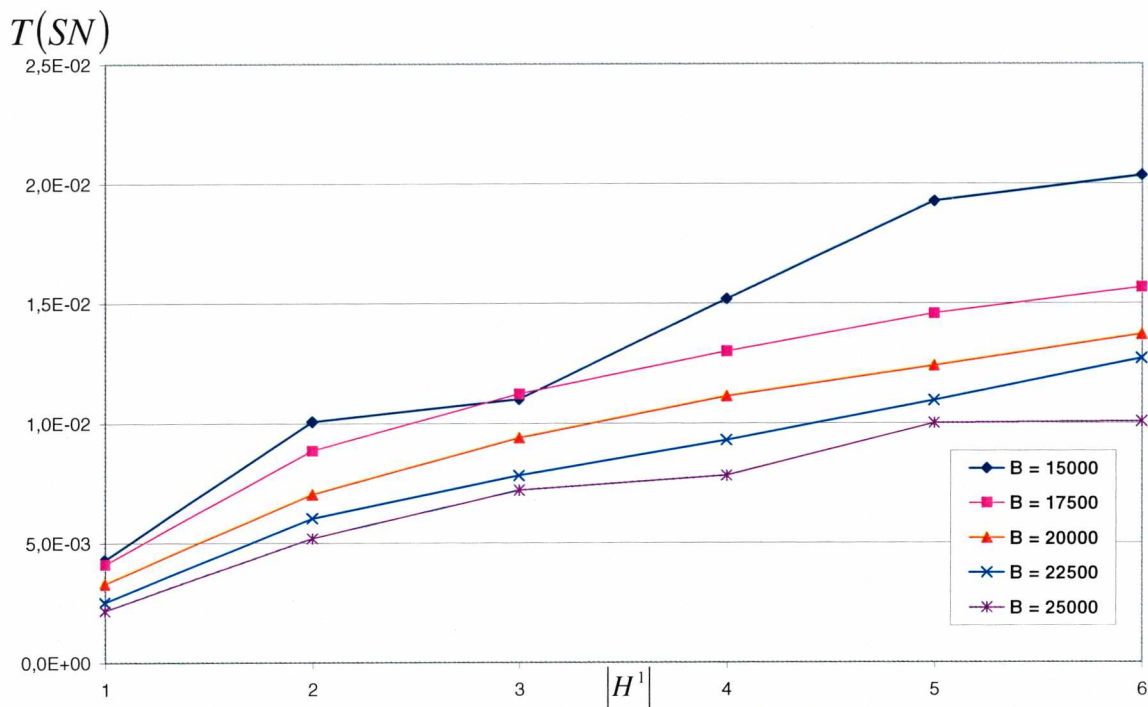
Rys. 3.22. Zależność wartości u_2 oraz $|H^1|^*$ od wartości budżetu B w sieciach HSK-221 do HSK-226

Można łatwo zauważyć, że wartość parametru u_2 a tym samym wartość $|H^1|^*$ rośnie wraz ze zwiększaniem wartości budżetu B . Zwiększanie liczby bram do umieszczenia w sieci SK-1 prowadzi do zmniejszania się wartości średniego opóźnienia w tej sieci $T(S1)$. Jednocześnie zwiększa się wartość średniego opóźnienia pakietów w sieci 2. poziomu $T(SN)$. Tą zależność dla sieci HSK-211 do HSK-216 przedstawiają rysunek 3.23 oraz rysunek 3.24. Wartość $T(S1)$ zmniejsza się wraz ze zwiększaniem wartości $|H^1|$, ponieważ dodawanie kolejnych bram w sieci SK-1 powoduje zmniejszenie przepływów w kanałach tej sieci. Wzrost wartości $T(SN)$ przy zwiększaniu $|H^1|$ wynika stąd, że dodawanie nowych bram pociąga za sobą zwiększanie liczby kanałów w sieci 2. poziomu i tym samym wzrost kosztu budowy sieci. Przy stałej wartości budżetu prowadzi to do zmniejszenia przepustowości kanałów sieci 2. poziomu i w wyniku do wzrostu wartości średniego opóźnienia pakietów w sieci 2. poziomu $T(SN)$. Z powyższych rozważań wynika następujący wniosek:

Wniosek 3.7. Zwiększanie liczby bram w sieci 1. poziomu powoduje zmniejszanie wartości średniego opóźnienia pakietu w tej sieci oraz wzrost wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci 2. poziomu.



Rys. 3.23. Zależność wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci 1. poziomu $T(S1)$ od $|H^1|$ w sieciach HSK-221 do HSK-226



Rys. 3.24. Zależność wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci 2. poziomu $T(SN)$ od $|H^1|$ w sieciach HSK-221 do HSK-226

3.7.6. Badanie własności obliczeniowych algorytmu dokładnego

Celem badania było ustalenie zależności pomiędzy liczbą iteracji algorytmu potrzebną do rozwiązania problemu optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) a wartościami parametrów występujących w rozważanym problemie. Badania przeprowadzono dla różnych sieci hierarchicznych z jedną siecią 2. poziomą i kilkoma sieciami 1. poziomą. W celu porównania wyników uzyskanych dla różnych sieci wykorzystamy pojęcia unormowanego budżetu $\bar{B}$ oraz unormowanego parametru $\bar{r}_0$ wprowadzonych w punkcie 3.7.2 niniejszego rozdziału.

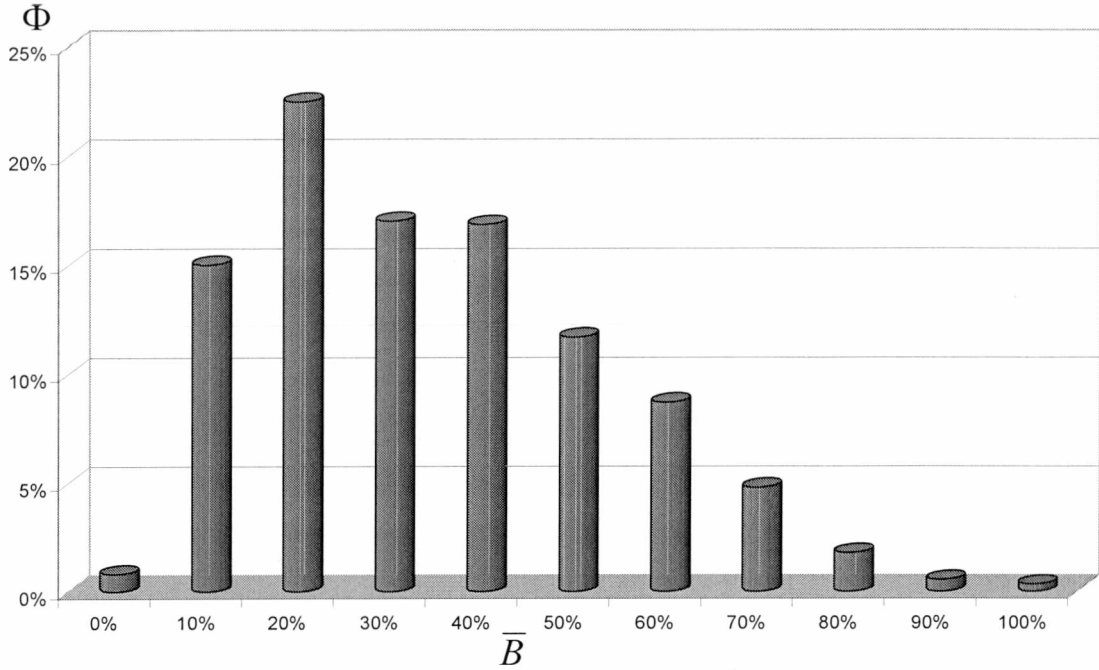
Niech $\Gamma^k(\bar{B}_i)$ będzie liczbą iteracji algorytmu potrzebną do rozwiązania problemu optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) dla k -tej rozległej sieci komputerowej przy unormowanym budżecie $\bar{B} = \bar{B}_i$. Jako miarę efektywności rozpatrywanego algorytmu dla określonej wartości unormowanego budżetu $\bar{B} = \bar{B}_i$ przyjęty został stosunek liczby iteracji algorytmu $\Gamma^k(\bar{B}_i)$ do sumy iteracji algorytmu dla wszystkich rozpatrywanych wartości budżetu:

$$\Phi_i^k = \frac{\Gamma^k(\bar{B}_i)}{\sum_{j=1}^M \Gamma^k(\bar{B}_j)} \cdot 100\%,$$

gdzie M jest liczbą wartości unormowanego budżetu, dla których przeprowadzone były badania. Niech Φ_i będzie średnią wartością Φ_i^k dla wszystkich przebadanych sieci hierarchicznych:

$$\Phi_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi_i^k,$$

gdzie K jest liczbą badanych hierarchicznych sieci komputerowych. Dla każdej z badanych sieci przeprowadzone zostały eksperymenty obliczeniowe dla jedenastu wartości unormowanego budżetu $\bar{B} \in \{0\%, 10\%, 20\%, \dots, 90\%, 100\%\}$. Wyniki badań zostały przedstawione na rysunku 3.25.



Rys. 3.25. Zależność względnej liczby iteracji algorytmu dokładnego Φ od wartości unormowanego budżetu $\bar{B}$

Można zauważyć, że Φ_i przyjmuje największe wartości dla $\bar{B} \in [10\%, 40\%]$. Dla $\bar{B} > 40\%$, wraz ze wzrostem wartości unormowanego budżetu, wartość Φ_i wyraźnie maleje. Algorytm potrzebował najmniejszej liczby iteracji do rozwiązywania problemu optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) dla $\bar{B} = 0\%$ oraz dla $\bar{B} > 60\%$.

Wniosek 3.8. Przedstawiony algorytm jest szczególnie efektywny z obliczeniowego punktu widzenia dla $\bar{B} = 0\%$ oraz dla $\bar{B} > 60\%$.

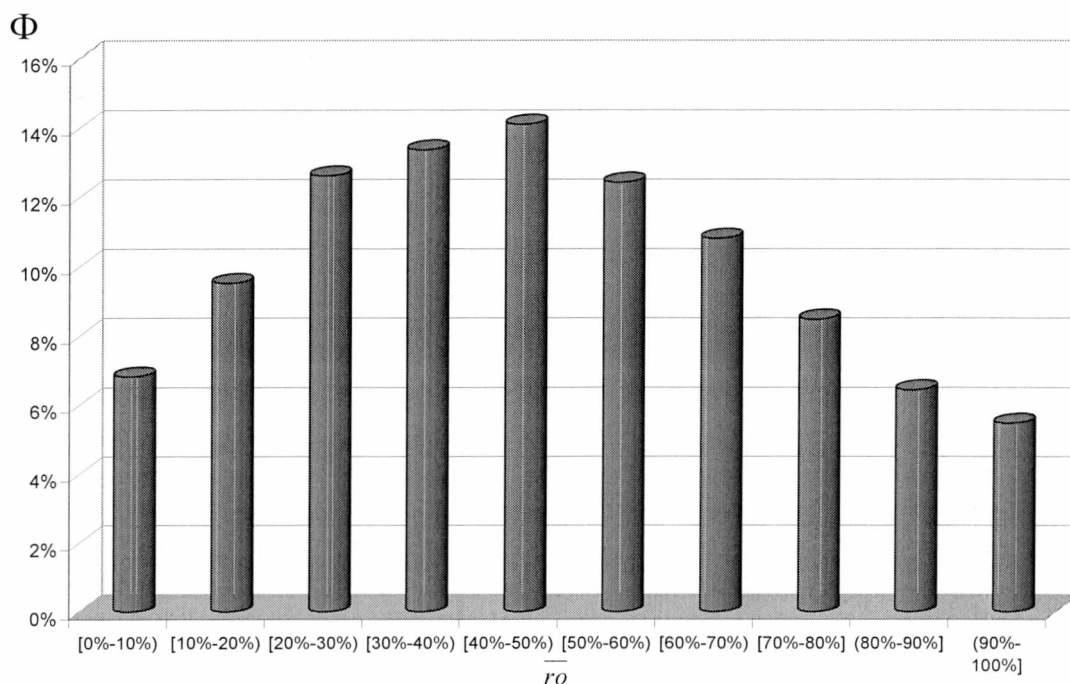
Niech $\Gamma^k(\bar{ro})$ będzie liczbą iteracji algorytmu potrzebną do rozwiązania problemu optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) dla k -tej rozległej sieci komputerowej dla unormowanego parametru o wartości $\bar{ro}$. Przez $\Phi^k(a, b)$ oznaczmy stosunek liczby iteracji algorytmu dla wartości unormowanego parametru $\bar{ro}$ z przedziału (a, b) do sumy iteracji dla wszystkich wartości unormowanego parametru $\bar{ro} \in [0\%, 100\%]$:

$$\Phi^k(a, b) = \frac{\sum_{\bar{ro} \in (a, b)} \Gamma^k(\bar{ro})}{\sum_{\bar{ro} \in [0\%, 100\%]} \Gamma^k(\bar{ro})} \cdot 100\%$$

Niech $\Phi(a, b)$ będzie średnią wartością $\Phi^k(a, b)$ dla wszystkich przebadanych sieci hierarchicznych:

$$\Phi(a, b) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi^k(a, b),$$

gdzie K jest liczbą badanych rozległych sieci komputerowych. Dla każdego badanego przedziału (a,b) zostało przeprowadzonych tyle samo eksperymentów. Stąd wartość $\Phi(a,b)$ ilustruje procentowy udział iteracji algorytmu dla $\overline{ro}$ z przedziału (a,b) w iteracjach algorytmu wykonanych dla wszystkich przebadanych sieci. Wyniki zostały przedstawione na rysunku 3.26



Rys. 3.26. Zależność względnej liczby iteracji algorytmu dokładnego Φ od unormowanego parametru $\overline{ro}$

Można zauważyć, że różnice w wartości Φ pomiędzy poszczególnymi przedziałami wartości unormowanego parametru $\overline{ro}$ nie przekraczają 10 punktów procentowych i są dużo mniejsze niż w przypadku różnych wartości unormowanego budżetu. Różnica w wartości Φ dla różnych wartości unormowanego budżetu $\overline{B}$ przekracza 20 punktów procentowych. Wpływ wartości składników przesyłanych pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu na liczbę iteracji algorytmu potrzebnych do rozwiązania problemu optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) jest zatem mniejszy niż wpływ wartości budżetu. Można jednak zauważyć, że dla skrajnych wartości unormowanego parametru $\overline{ro}$ algorytm potrzebuje wyraźnie mniej iteracji do rozwiązania rozważanego problemu niż w przypadku $\overline{ro} \in [20\%, 70\%)$.

Wniosek 3.9. Przedstawiony algorytm jest szczególnie efektywny z obliczeniowego punktu widzenia dla $\overline{ro} < 20\%$ oraz dla $\overline{ro} > 70\%$.

3.7.7. Badanie odległości rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych

Celem badania było określenie odległości rozwiązania przybliżonego uzyskiwanego za pomocą algorytmu heurystycznego WRP1 a rozwiązaniem uzyskanym przez algorytm dokładny. Algorytm WRP1 przedstawiony został w rozdziale 3.6. Wyznaczone zostały zależności pomiędzy różnymi parametrami a odległością uzyskiwanych rozwiązań. Badania przeprowadzono dla różnych sieci hierarchicznych z jedną siecią 2. poziomu i kilkoma sieciami 1. poziomu. W celu porównania wyników uzyskanych dla różnych sieci wykorzystamy unormowane parametry $\bar{B}$ oraz $\bar{ro}$ wprowadzone w punkcie 3.7.2 niniejszego rozdziału.

3.7.7.1 Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych

Oznaczmy przez χ odległość rozwiązania przybliżonego od rozwiązania optymalnego.

$$\chi = \frac{(T_{app} - T_{opt})}{T_{opt}},$$

gdzie T_{app} jest wartością średniego opóźnienia pakietu w sieci uzyskaną w wyniku działania algorytmu heurystycznego WRP1, natomiast T_{opt} jest wartością średniego opóźnienia pakietu w sieci uzyskaną w wyniku rozwiązania problemu (3.2 ÷ 3.4).

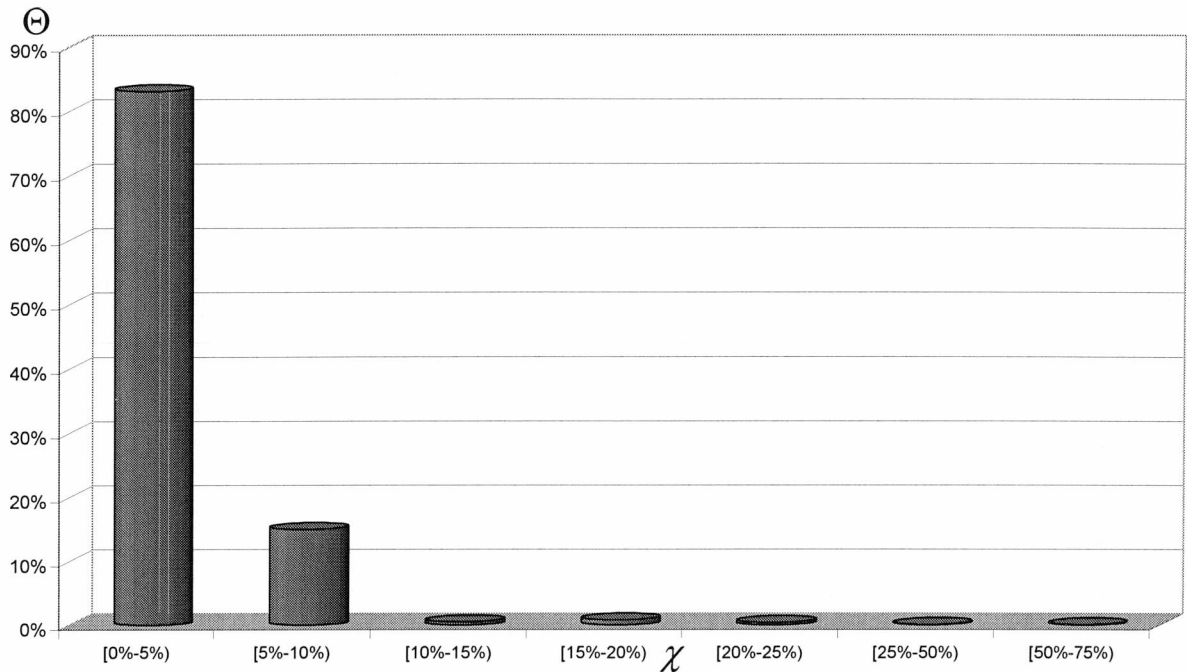
Wprowadźmy zmienną binarną $\eta(a, b)$, która przyjmuje wartość 1 jeżeli odległość rozwiązania przybliżonego od rozwiązania optymalnego χ należy do przedziału (a, b) :

$$\eta(a, b) = \begin{cases} 1 & \chi \in (a, b) \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Przez $\Theta(a, b)$ oznaczmy stosunek liczby rozwiązań przybliżonych, dla których $\chi \in (a, b)$, do liczby wszystkich badanych rozwiązań.

$$\Theta(a, b) = \frac{\sum_{i=1}^K \eta^i(a, b)}{K} \cdot 100\%$$

gdzie K jest liczbą badanych rozległych hierarchicznych sieci komputerowych. Na rys. 3.27 zostały przedstawione wyniki uzyskane za pomocą algorytmu WPR1 dla 986 badanych hierarchicznych sieci komputerowych. Jeżeli rozwiązanie uzyskane za pomocą algorytmu przybliżonego różni się od rozwiązania optymalnego o mniej niż 5% można przyjąć, że rozwiązanie przybliżone jest bardzo dobre.

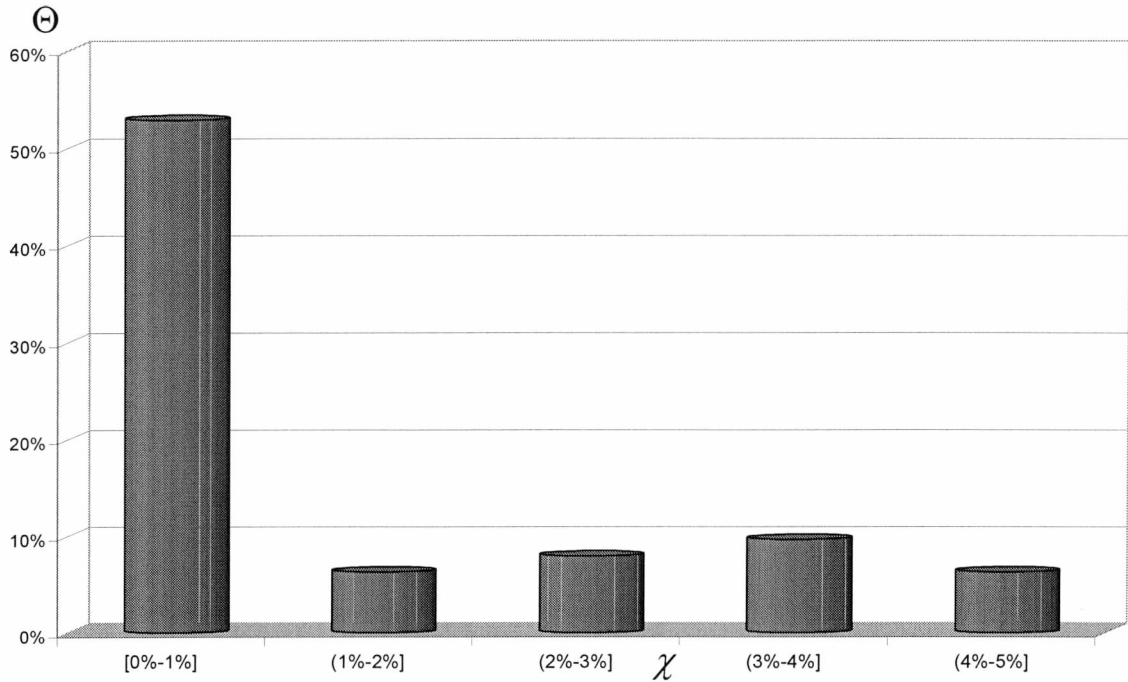


Rys. 3.27. Względna liczba rozwiązań Θ algorytmu WRP1 o wartości χ

Na rysunku 3.27 widać wyraźnie, że dla większości badanych sieci (ponad 83%) odległości rozwiązań przybliżonych uzyskanych za pomocą algorytmu WRP1 od rozwiązań optymalnych mieszczą się w przedziale $[0\%, 5\%)$, natomiast w przedziale $[0\%, 10\%)$ mieści się ponad 98% rozwiązań. Świadczy to o tym, że wyniki uzyskiwane za pomocą proponowanego algorytmu WRP1 dają bardzo dobre przybliżenie rozwiązania optymalnego.

Wniosek 3.10. Wyniki uzyskane za pomocą zaproponowanego algorytmu heurystycznego w większości przypadków nie różnią się znacznie od rozwiązań optymalnych. W 98% przebadanych sieci różnica nie przekraczała 10%.

Rysunek 3.28 przedstawia wartości Θ dla $\chi \in [0\%, 5\%]$. Można zauważyć, że ponad połowa rozwiązań przybliżonych różni się od rozwiązań optymalnych o nie więcej niż 1%. Poza przedziałem $\chi \in [0\%, 1\%]$ wartości Θ są dużo mniejsze.

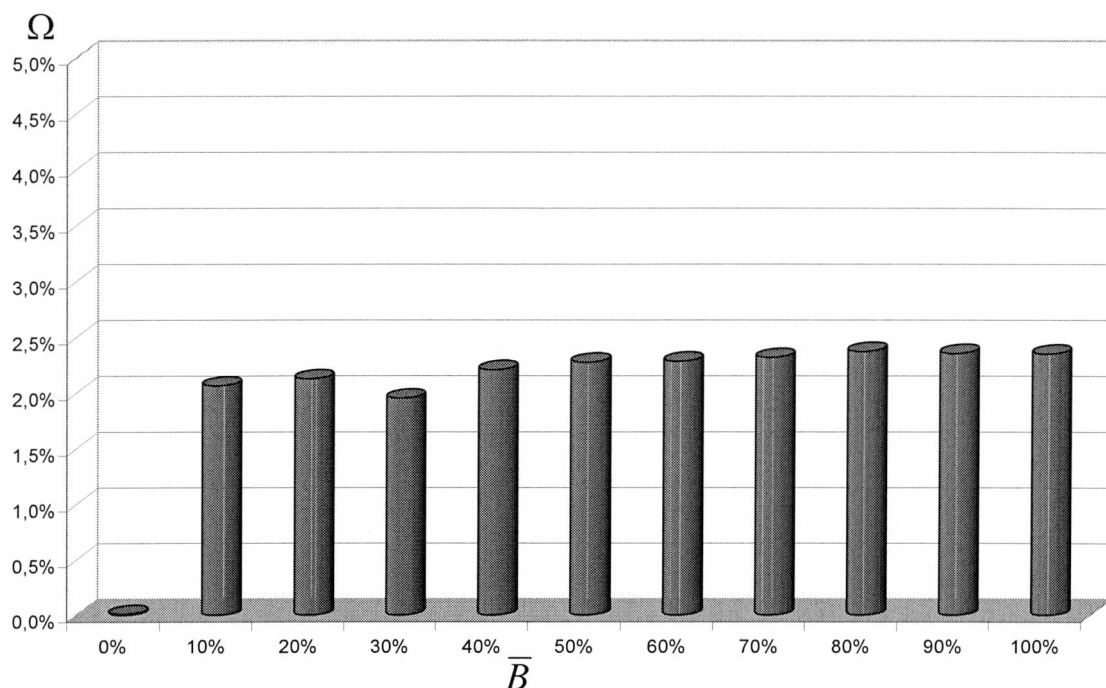
Rys. 3.28. Wykres wartości Θ dla χ z przedziału $[0\%, 5\%]$

3.7.7.2 Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych w zależności od unormowanego budżetu na budowę sieci $\bar{B}$

Niech średnia odległość pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą algorytmu heurystycznego a rozwiązaniami optymalnymi dla wszystkich przebadanych sieci przy określonej wartości unormowanych parametrów $\bar{B}$ oraz $\bar{r}_o$ oznaczona będzie przez Ω :

$$\Omega = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \chi^i$$

Na rysunku 3.29 została przedstawiona zależność Ω od unormowanego budżetu $\bar{B}$. Można zauważyć, że dla unormowanego budżetu $\bar{B} = 0\%$ odległość pomiędzy rozwiązaniami przybliżonym i optymalnymi jest bliska zera, natomiast dla pozostałych wartości budżetu odległość wynosi około 2%.



Rys. 3.29. Średnia odległość rozwiązań przybliżonych uzyskanych za pomocą algorytmu WRP1 od rozwiązań optymalnych Ω w zależności od unormowanego budżetu $\bar{B}$

Na podstawie powyższych spostrzeżeń dotyczących Rys. 3.29 można sformułować następujący wniosek:

Wniosek 3.11. Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych dla $\bar{B} \geq 10\%$ nie zależy od wartości unormowanego budżetu $\bar{B}$. Dla wszystkich przebadanych wartości $\bar{B}$ średnia odległość rozwiązań przybliżonych od optymalnych Ω nie przekracza 2,5%.

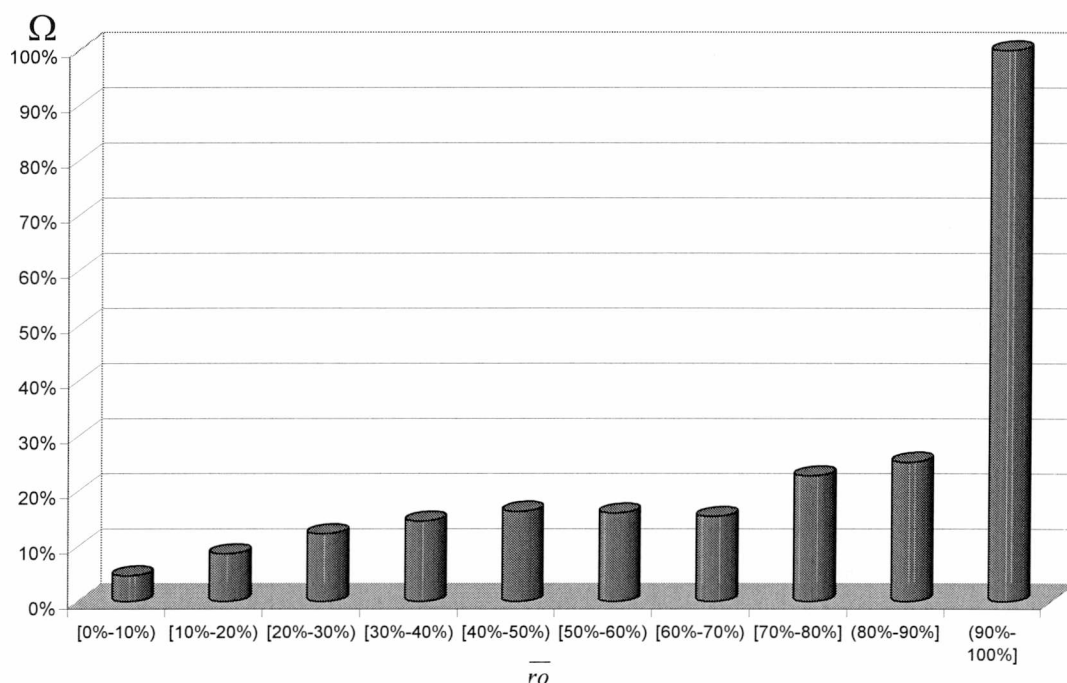
3.7.7.3 Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych w zależności od wartości unormowanego parametru $\bar{r}_o$.

Na rysunku 3.30 przedstawiona została zależność średniej odległości pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą algorytmu heurystycznego a rozwiązaniami optymalnymi Ω od unormowanego natężenia pakietów pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu, które zostało oznaczone przez $\bar{r}_o$. Można zauważyć, że wraz ze zwiększaniem wartości unormowanego parametru $\bar{r}_o$ w przedziale $[0\%, 90\%]$ zwiększa się wartość Ω . Dla wartości unormowanego parametru $\bar{r}_o \in (90\%, 100\%]$, odpowiadającym dużemu natężeniu strumienia pakietów przesyłanych pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu, wartość Ω jest bardzo duża, bliska 100%. Rozwiązania przybliżone, uzyskiwane za pomocą algorytmu WRP1, przy bardzo dużym natężeniu pakietów znacznie odbiegają od rozwiązania optymalnego.

Na podstawie powyższych spostrzeżeń można sformułować następujące wnioski:

Wniosek 3.12. Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych dla wartości parametru $\overline{ro} \in [0\%, 90\%]$ nieznacznie rośnie wraz ze zwiększaniem wartości składników przesyłanych pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu. Proponowany algorytm heurystyczny osiąga najlepsze rezultaty dla $\overline{ro} < 70\%$.

Wniosek 3.13. Przy bardzo dużym natężeniu pakietów przesyłanych między węzłami różnych sieci 1. poziomu, tj. dla $\overline{ro} \in (90\%, 100\%]$, rozwiązania przybliżone, uzyskane za pomocą proponowanego algorytmu heurystycznego, odbiegają znacząco od rozwiązań optymalnych.



Rys. 3.30. Średnia odległość rozwiązań przybliżonych uzyskanych za pomocą algorytmu WRP1 od rozwiązań optymalnych Ω w zależności od unormowanego parametru $\overline{ro}$

4. Problem GLCFA z kosztem budowy sieci jako kryterium

W rozdziale tym zostanie przedstawiony problem wyznaczania rozmieszczenia bram w sieciach 1. poziomu, przepływów oraz przepustowości kanałów sieci 2. poziomu, które minimalizują koszt budowy sieci przy ograniczeniu na średnie opóźnienie pakietu w sieci hierarchicznej. W kolejnych punktach przedstawione zostaną: sformułowanie problemu, algorytm dokładny oraz algorytm heurystyczny do rozwiązywania rozważanego problemu oraz rezultaty eksperymentów komputerowych ilustrujące własności rozważanego problemu.

4.1. Sformułowanie problemu

Niech dane będą struktury sieci 1. poziomu, czyli rozmieszczenie węzłów i kanałów w tych sieciach oraz przepustowości kanałów sieci 1. poziomu. Dane są również zbiory potencjalnych lokalizacji bram w sieciach 1. poziomu, tj. ustalone są zbiory węzłów sieci 1. poziomu, w których mogą być umieszczone poszczególne bramy, rozmieszczenie kanałów w sieci 2. poziomu, a także zbiory dostępnych przepustowości dla tych kanałów. Zakładamy również, że znana jest macierz wprowadzanych z zewnątrz natężeń, tj. wymagania dotyczące średnich przepływów pomiędzy węzłami tej samej sieci 1. poziomu oraz pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu.

Rozważane zadanie polega na znalezieniu takiej reprezentacji $(X_r, Y_r) \in \mathfrak{R}_H$ i związanego z nią przepływu wieloskładnikowego $\underline{f}$ realizującego macierz R wprowadzanych z zewnątrz natężeń, dla których koszt budowy sieci określonej przez (X_r, Y_r) osiągnie minimum, a wartość średniego opóźnienia pakietów w sieci nie przekroczy zadanej wartości.

$$\min_{(X_r, Y_r)} d(X_r, Y_r) \quad (4.1)$$

uwzględniając, że

$$(X_r, Y_r) \in \mathfrak{R}_H \quad (4.2)$$

$$T(X_r, Y_r) \leq T^{\max} \quad (4.3)$$

gdzie $T^{\max}$ oznacza maksymalną dopuszczalną wartość średniego opóźnienia pakietu w sieci, natomiast $T(X_r, Y_r)$ jest minimalnym średnim opóźnieniem pakietu w sieci określonej przez reprezentację (X_r, Y_r) .

Rozpatrywany problem, podobnie jak problem (3.2 ÷ 3.4), należy do klasy problemów NP-zupełnych, co wykazaliśmy w rozdziale 2. Dlatego też do jego rozwiązania zostanie skonstruowany algorytm oparty na metodzie podziału i oszacowań.

4.2. Opis algorytmu

Do rozwiązania rozważanego problemu optymalizacji został zastosowany algorytm, oparty na metodzie podziału i oszacowań, opisany w punkcie 3.2. Przypomnijmy, że zasada działania tego algorytmu jest następująca: generowane i sprawdzane są kolejne reprezentacje (X_r, Y_r) i odpowiadające im sieci S_r . Nowa reprezentacja (X_s, Y_s) generowana jest z reprezentacji (X_r, Y_r) przez wybór pewnej zmiennej zgodnej ze zbioru X_r lub ze zbioru Y_r oraz zmiennej przeciwnej, na którą wybraną zmienną należy zamienić. Czynność ta jest realizowana za pomocą reguł podziału, na które składają się operacja wyboru i operacja regulacji:

- operacja wyboru jest stosowana do wyboru zmiennych do zamiany, jeśli dla reprezentacji (X_r, Y_r) średnie opóźnienie pakietu w sieci nie przekracza maksymalnej dopuszczalnej wartości (4.3),
- operacja regulacji jest stosowana w przypadku, gdy ograniczenie (4.3) nie jest zachowane.

Za pomocą reguł podziału dokonujemy wyboru zmiennych do zamiany na podstawie kryterium lokalnej optymalizacji. Dla każdej reprezentacji (X_r, Y_r) sprawdzane jest, czy jest możliwe wygenerowanie z niej następnika, dla którego wartość funkcji kryterialnej (4.1) będzie mniejsza od najmniejszej dotychczas znalezionej wartości. W tym celu wyznaczane jest dolne oszacowanie funkcji kryterialnej. Jeżeli wartość dolnego oszacowania jest większa od najmniejszej dotąd znalezionej wartości funkcji kryterialnej, to bieżąca reprezentacja (X_r, Y_r) jest odrzucana i następuje cofanie się do jej poprzednika. Algorytm kończy działanie, gdy należy cofnąć się od korzenia drzewa rozwiązań, tj. od reprezentacji (X_1, Y_1) .

4.3. Dolne oszacowanie

W punkcie tym zostanie zaprezentowany sposób wyznaczenia dolnego oszacowania LB_r kosztu budowy sieci dla reprezentacji (X_r, Y_r) i każdego następnika (X_s, Y_s) możliwego do wygenerowania z reprezentacji (X_r, Y_r) .

Do wyznaczenia dolnego oszacowania wykorzystana zostanie sieć $\hat{S}_r$ skonstruowana w sposób podany w rozdziale 3.3. W sieci $\hat{S}_r$ rozluźnione zostały ograniczenia związane z wyborem przepustowości kanałów ze zbiorów ZC^i oraz z wyborem lokalizacji bram.

Dolne oszacowanie wartości $d(X_s, Y_s)$ dla dowolnego następnika (X_s, Y_s) możliwego do wygenerowania z reprezentacji (X_r, Y_r) można uzyskać przez rozwiązanie następującego problemu optymalizacji przepływu wieloskładnikowego i przepustowości łuków w $\hat{S}_r$:

$$LB_r = \min_{\underline{f}, \bar{x}^i} \left(\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} \bar{x}^i c_{\max}^{ir} d_{\min}^{ir} + \sum_{i: x_k^i \in F_r} d^i \right) \quad (4.4)$$

Uwzględniając ograniczenia (1.1÷1.4) oraz

$$\frac{1}{\gamma} \left(\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} \frac{f_i}{\bar{x}^i c_{\max}^{ir} - f_i} + \sum_{i: x_k^i \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^K L_l^i} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) \leq T^{\max} \quad (4.5)$$

$$f_i \leq c^i \text{ dla każdego } i \text{ takiego, że } x_k^i \in F_r \text{ oraz } i \in \bigcup_{l=1}^K L_l^i \quad (4.6)$$

$$f_i \leq c_{\max}^{ir} \bar{x}^i \text{ dla każdego } i \text{ takiego, że } \bar{x}^i \in XW \quad (4.7)$$

$$\bar{x}^i \leq 1 \text{ dla każdego } \bar{x}^i \in XW \quad (4.8)$$

W dalszej części rozdziału przedstawione zostaną dwa sposoby rozwiązania problemu (4.4 ÷ 4.8), (1.1 ÷ 1.4). W pierwszym przypadku zostanie wyznaczone rozwiązanie uwzględniające wszystkie ograniczenia. Natomiast w drugim wyznaczone zostanie dolne oszacowanie kosztu budowy sieci z pominięciem ograniczeń dotyczących przepływów w sieci oraz średniego opóźnienia pakietu w sieci.

4.3.1. Dolne oszacowanie LB_{r3}

Problem (4.4 ÷ 4.8) oraz (1.1 ÷ 1.4) można rozwiązać względem zmiennych $\bar{x}^i$ dla każdego $i: \bar{x}^i \in XW$, przyjmując że zmienne $\underline{f}$ są ustalone, następnie względem $\underline{f}$ korzystając z rozwiązania względem zmiennych $\bar{x}^i$. Do rozwiązania tego problemu względem zmiennych $\bar{x}^i$ skorzystamy z warunków Kuhna-Tuckera [28], [64] dla zadań

optymalizacyjnych z ograniczeniami nierównościami. Warunki konieczne optymalności Kuhna-Tuckera dla rozważanego problemu przedstawiają się następująco:

$$c_{\max}^{ir} d_{\min}^{ir} + \lambda \frac{-f_i c_{\max}^{ir}}{\gamma (c_{\max}^{ir} \bar{x}^i - f_i)^2} + \lambda_i c_{\max}^{ir} = 0 \text{ dla każdego } i : \bar{x}^i \in XW \quad (4.9)$$

$$\lambda \left(\frac{1}{\gamma} \left(\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} \frac{f_i}{\bar{x}^i c_{\max}^{ir} - f_i} + \sum_{i: x_k^i \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^k L_l'} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) - T^{\max} \right) = 0 \quad (4.10)$$

$$\lambda_i (f_i - \bar{x}^i c_{\max}^{ir}) = 0 \text{ dla każdego } i : \bar{x}^i \in XW \quad (4.11)$$

Wartości mnożników λ_i wynikają z zależności (4.11). Dla $\lambda_i > 0$ zachodziłoby $f_i - \bar{x}^i c_{\max}^{ir} = 0$, co po wstawieniu do równania (4.9) prowadzi do sprzeczności, tzn. $-\infty = 0$, stąd dla każdego $i : \bar{x}^i \in XW$ musi zachodzić $\lambda_i = 0$. W zależności (4.10) również należy rozpatrzeć dwa przypadki $\lambda = 0$ lub $\lambda > 0$. Po podstawieniu $\lambda = 0$ do równania (4.9) i uwzględnieniu, że $\lambda_i = 0$ możemy stwierdzić, że równanie (4.9) jest sprzeczne dla każdego $i : \bar{x}^i \in XW$. Pozostaje zbadać przypadek, gdy $\lambda > 0$. Z równania (4.9) wyznaczymy $\bar{x}^i$ w zależności od λ :

$$\bar{x}^i = \frac{\sqrt{\frac{\lambda f_i}{\gamma d_{\min}^{ir}}} + f_i}{c_{\max}^{ir}} \quad (4.12)$$

Po podstawieniu zależności (4.12) do równania (4.10) przy uwzględnieniu, że $\lambda > 0$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda \gamma}} \sum_{i: \bar{x}^i \in XW} \sqrt{d_{\min}^{ir} f_i} + \frac{1}{\gamma} \left(\sum_{i: x_k^i \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^k L_l'} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) - T^{\max} = 0 \quad (4.13)$$

stąd można wyprowadzić zależność na λ :

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\sum_{i:\bar{x}^j \in \mathcal{XW}} \sqrt{d_{\min}^{ir} f_i}}{T^{\max} - \frac{1}{\gamma} \left(\sum_{i:\bar{x}_k^j \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^K L_1^l} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right)} \right)^2 \quad (4.14)$$

Po podstawieniu (4.14) do zależności (4.12) otrzymujemy wyrażenie na $\bar{x}^i$:

$$\bar{x}^i = \sqrt{\frac{f_i}{d_{\min}^{ir}}} \frac{B_r - \sum_{j:\bar{x}^j \in \mathcal{XW}} d_{\min}^{jr} c_{\max}^{jr} f_j}{c_{\max}^{ir} \sum_{j:\bar{x}^j \in \mathcal{XW}} \sqrt{d_{\min}^{jr} f_j}} + f_i, \quad (4.15)$$

Uwzględniając powyższą zależność w funkcji (4.4) otrzymujemy następujący problem optymalizacyjny:

$$\min_{\underline{f}} \left(\frac{\left(\sum_{i:\bar{x}^j \in \mathcal{XW}} \sqrt{d_{\min}^{ir} f_i} \right)^2}{\gamma T^{\max} - \left(\sum_{i:\bar{x}_k^j \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^K L_1^l} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right)} + \sum_{i:\bar{x}^j \in \mathcal{XW}} d_{\min}^{ir} f_i + \sum_{i:\bar{x}_k^j \in F_r} d^i \right) \quad (4.16)$$

przy uwzględnieniu ograniczeń (1.1 ÷ 1.4) oraz (4.6).

Pierwszy składnik sumy (4.16) jest funkcją quasi-wklęsłą podobnie jak w wyrażeniu (3.16), drugi natomiast funkcją wypukłą ze względu na $\underline{f}$. Dolne oszacowanie pierwszego składnika sumy (4.16) uzyskamy postępując analogicznie jak w punkcie 3.3.2, tzn. mnożąc poszczególne składniki sumy w liczniku przez $\sqrt{f_i/c_{\max}^{ir}} < 1$. Wówczas otrzymujemy następującą funkcję

$$d_r^A = \frac{\left(\sum_{i:\bar{x}^j \in \mathcal{XW}} \sqrt{\frac{d_{\min}^{ir}}{c_{\max}^{ir}}} f_i \right)^2}{\gamma T^{\max} - \left(\sum_{i:\bar{x}_k^j \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^K L_1^l} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right)} + \sum_{i:\bar{x}^j \in \mathcal{XW}} d_{\min}^{ir} f_i + \sum_{i:\bar{x}_k^j \in F_r} d^i. \quad (4.18)$$

Jest to funkcja wypukła, która szacuje od dołu funkcję (4.16) dla każdego $\underline{f}$ spełniającego ograniczenia (1.1 ÷ 1.4), (4.6). Zatem rozwiązanie problemu

$$LB_{r3} = \min_{\underline{f}} d_r^A \quad (4.19)$$

przy uwzględnieniu ograniczeń (1.1 ÷ 1.4), (4.6) jest dolnym oszacowaniem kosztu budowy sieci S_r oraz wszystkich jej następników.

4.3.2. Dolne oszacowanie LB_{r4}

Funkcję (4.4) można oszacować od dołu pomijając ograniczenie (4.5) na średnie opóźnienie pakietu oraz ograniczenia (1.1 ÷ 1.4) (4.6) i (4.7) na przepływy w kanałach sieci $\hat{S}_r$. Dolne oszacowanie kosztu budowy sieci uzyskamy przyjmując jako koszt kanałów, których przepustowość nie została ustalona, koszt odpowiadający kanałowi o najmniejszej możliwej do wyboru przepustowości. Wówczas wyrażenie na dolne oszacowanie kosztu budowy sieci uzyskamy zastępując $\bar{x}^i c_{\max}^{ir}$ dla każdego $i: \bar{x}^i \in XW$ przez $c_{\min}^{ir} = \min_{x_k^i \in X^i - F_r^i} c_k^i$, oznaczające najmniejszą przepustowość z dostępnych w zbiorze ZC^i z pominięciem przepustowości odpowiadających zmiennym ustalonym tymczasowo. Uzyskana w ten sposób funkcja

$$LB_{r4} = \sum_{i: \bar{x}^i \in XW} c_{\min}^{ir} d_{\min}^{ir} + \sum_{i: x_k^i \in F_r^i} d^i \quad (4.20)$$

jest zatem dolnym oszacowaniem kosztu budowy sieci S_r oraz wszystkich jej następników.

4.3.3. Dolne oszacowanie LB_r

W poprzednich punktach przedstawiono dwie propozycje dolnego oszacowania wartości $d(X_s, Y_s)$ dla dowolnego następnika (X_s, Y_s) możliwego do wygenerowania z reprezentacji (X_r, Y_r) . Przeprowadzono szereg badań numerycznych w celu ustalenia, które z przedstawionych dolnych oszacowań jest lepsze. Badania przeprowadzono w analogiczny sposób jak w punkcie 3.3.3. Na podstawie przeprowadzonych badań nie można jednoznacznie określić, które z zaproponowanych oszacowań lepiej przybliża wartość funkcji kryterialnej. Występują przypadki, dla których lepiej funkcję kryterialną przybliża wyrażenie LB_{r3} jak i takie, dla których bliższe oszacowanie uzyskuje się za pomocą wyrażenia LB_{r4} . Dlatego też w dalszej części rozdziału do wyznaczania dolnego oszacowania wartości $d(X_s, Y_s)$ dla dowolnego następnika (X_s, Y_s) możliwego do wygenerowania z reprezentacji (X_r, Y_r) będą wyznaczane oba dolne oszacowania i używane wyrażenie:

$$LB_r = \max\{LB_{r3}, LB_{r4}\}. \quad (4.21)$$

4.4. Reguły podziału

Zadaniem reguł podziału jest wybór pary zmiennych, zgodnej i przeciwnej, do zamiany w celu wygenerowania następnika (X_s, Y_s) reprezentacji (X_r, Y_r) . Na reguły podziału składają się operacje *wyboru* i *regulacji*. Wybór operacji, za pomocą której jest wykonywana zależy od tego, czy dla reprezentacji (X_r, Y_r) spełniony jest warunek (4.3), tj. czy średnie opóźnienie pakietu w sieci nie przekracza dopuszczalnej wartości. W przypadku, gdy warunek (4.3) jest spełniony wykonywana jest *operacja wyboru*, w przeciwnym wypadku *operacja regulacji*. Zauważmy, że w zadaniu (4.1 ÷ 4.3) kryterium z zadania (3.2 ÷ 3.4) występuje w ograniczeniach, a ograniczenie z zadania (3.2 ÷ 3.4) jest kryterium optymalizacyjnym w zadaniu (4.1 ÷ 4.3).

4.4.1. Operacja wyboru

Operacja ta ma na celu wybór pary zmiennych do zamiany: zmiennej zgodnej należącej do zbioru X_r lub Y_r i zmiennej do niej przeciwnej, takich by wygenerowany w ten sposób został następnik o możliwie najmniejszym koszcie budowy sieci. Wybór ten jest dokonywany na podstawie lokalnego kryterium optymalizacji zaprezentowanego w rozdziale 3.4.2. Do oceny zmiennych x_k^i korzystamy z wyrażenia (3.32), natomiast do oceny zmiennych y_a^g z wyrażenia (3.30).

Przypomnijmy sposób konstrukcji zbiorów E_r oraz M_r : $E_r = (X_r \cup Y_r) - F_r$ jest zbiorem takich zmiennych x_k^i oraz y_a^g , które mogą zostać zamienione na zmienne przeciwne. Natomiast przez M_r oznaczamy zbiór zmiennych przeciwnych do zmiennych ze zbioru E_r takich, że zamiana na nie może zmniejszyć koszt budowy sieci. Zmienne $x_k^i \in M_r$ odpowiadają mniejszym przepustowościom kanałów od tych wyznaczonych przez zmienne ze zbioru E_r . Natomiast zmienne $y_a^g \in M_r$ to wszystkie zmienne przeciwne do zmiennych należących do zbioru E_r , na które można dokonać zamiany, dla których wartość wyrażenia (3.26) jest większa od zera. Do zamiany należy wybrać te zmienne ze zbioru M_r , dla których wartość wyrażenia (3.30) lub (3.32) jest największa.

4.4.2. Operacja regulacji

Operacja ta ma na celu wybór pary zmiennych do zamiany: zmiennej zgodnej należącej do zbioru X_r lub Y_r , i zmiennej do niej przeciwnej, takich by wygenerowany w ten sposób został następnik o mniejszej wartości średniego opóźnienia pakietu i możliwie małym koszcie budowy sieci. Wybór ten jest dokonywany na podstawie lokalnego kryterium optymalizacji zaprezentowanego w rozdziale 3.4.1. Do oceny zmiennych x_k^i korzystamy z wyrażenia (3.27), natomiast do oceny zmiennych y_a^g z wyrażenia (3.29).

Przypomnijmy, że przez P_r oznaczamy zbiór takich zmiennych przeciwnych do zmiennych ze zbioru E_r , że zamiana na nie może zmniejszyć średnie opóźnienie pakietu w sieci. Zmienne $x_k^i \in P_r$ odpowiadają większym przepustowościom kanałów od tych wyznaczonych przez zmienne ze zbioru E_r . Natomiast zmienne $y_a^g \in P_r$ to wszystkie zmienne przeciwe do zmiennych należących do zbioru E_r , na które można dokonać zamiany. Podobnie jak w przypadku operacji wyboru do zamiany należy wybrać te zmienne ze zbioru P_r , dla których wartość wyrażenia (3.27) lub (3.29) jest największa.

4.5. Algorytm

Niech $(X_1, Y_1) \in \mathfrak{R}_H$ będzie reprezentacją początkową taką, że istnieje przepływ wieloskładnikowy realizujący macierz R wprowadzanych z zewnątrz natężeń w sieci S_1 taki, że spełniony jest warunek (4.3). Niech F_r oznacza zbiór zmiennych ustalonych chwilowo lub trwale, F_r' zbiór zmiennych ustalonych tymczasowo w r -tej iteracji algorytmu, natomiast $d(F_r)$ oznacza sumę kosztów łuków, których rozmieszczenie i przepustowość określone są przez zmienne należące do zbioru F_r . Przyjmujemy, że dla reprezentacji początkowej $F_1 = \emptyset$, $F_1' = \emptyset$ i $d^* = \infty$.

Krok 1. *Wyznaczanie dolnego oszacowania*

Jeżeli $d(F_r) > d^*$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie wyznaczyć LB_r .

Jeżeli $LB_r \geq d^*$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie przejść do kroku 2

Krok 2. *Wyznaczanie wartości kryterium*

Obliczyć $T(X_r, Y_r)$. Jeżeli $T(X_r, Y_r) \leq T^{\max}$, to wyznaczyć zbiór M_r oraz podstawić $M_r = M_r - F_r'$. Jeżeli $d(X_r, Y_r) < d^*$, to podstawić $d^* = d(X_r, Y_r)$ i $(X_*, Y_*) = (X_r, Y_r)$. Przejść do kroku 3.

Jeżeli $T(X_r, Y_r) > T^{\max}$, to wyznaczyć zbiór P_r oraz podstawić $P_r = P_r - F_r'$.

Przejść do kroku 4.

Krok 3. *Operacja wyboru*

Jeżeli $M_r = \emptyset$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie wybrać takie zmienne przeciwne $x_j^i, y_b^g \in M_r$ oraz takie zmienne zgodne $x_k^i, y_a^g \in E_r$, dla których wartości wyrażeń (3.30), (3.32) są największe. Następnie wygenerować reprezentację (X_s, Y_s) w następujący sposób: jeśli wartość wyrażenia (3.32) jest większa od wartości (3.30) to: $X_s = (X_r - \{x_k^i\}) \cup \{x_j^i\}$, $Y_s = Y_r$, $F_s = F_r \cup \{x_j^i\}$, $F_s' = F_r'$, w przeciwnym razie: $Y_s = (Y_r - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$, $X_s = X_r$, $F_s = F_r \cup \{y_b^g\}$, $F_s' = F_r'$. Przejść do kroku 1.

Krok 4. *Operacja regulacji*

Jeżeli $P_r = \emptyset$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie wybrać takie zmienne przeciwne $x_j^i, y_b^g \in P_r$, oraz takie zmienne zgodne $x_k^i, y_a^g \in E_r$, dla których wartości wyrażeń (3.27), (3.29) są największe. Następnie wygenerować reprezentację (X_s, Y_s) w następujący sposób: jeśli wartość wyrażenia (3.27) jest większa od wartości (3.29) to $X_s = (X_r - \{x_k^i\}) \cup \{x_j^i\}$, $Y_s = Y_r$, $F_s = F_r \cup \{x_j^i\}$, $F_s' = F_r'$, w przeciwnym razie: $Y_s = (Y_r - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$, $X_s = X_r$, $F_s = F_r \cup \{y_b^g\}$, $F_s' = F_r'$. Przejść do kroku 1.

Krok 5. *Operacja cofania*

Cofnąć się do poprzednika (X_p, Y_p) , z którego została wygenerowana reprezentacja (X_r, Y_r) . Jeżeli reprezentacja (X_r, Y_r) nie ma poprzedników, to zakończyć obliczenia. Reprezentacja (X_*, Y_*) związana z aktualną wartością d^* jest rozwiązaniem optymalnym. W przeciwnym razie uaktualnić dane dla (X_p, Y_p) w następujący sposób: Jeżeli reprezentacja S_r została wygenerowana z (X_p, Y_p) poprzez zamianę zmiennej zgodnej na zmienną przeciwną $x_j^i \in X_r$, to wykonać $F_p^t = F_p^t \cup \{x_j^i\}$. Jeżeli wszystkie zmienne przeciwne do zmiennej zgodnej x_k^i należą do F_p^t , to wykonać $F_p = F_p \cup \{x_k^i\}$ i $F_p^t = F_p^t - X^i$. Jeżeli sieć S_r została wygenerowana z sieci S_p poprzez zamianę zmiennej zgodnej na zmienną przeciwną $y_b^g \in Y_r$, to wykonać $F_p^t = F_p^t \cup \{y_b^g\}$. Jeżeli wszystkie zmienne przeciwne do zmiennej zgodnej y_a^g należą do F_p^t , to wykonać $F_p = F_p \cup \{y_a^g\}$ oraz $F_p^t = F_p^t - Y^g$.
Przejsć do kroku 1.

4.6. Wyznaczanie reprezentacji początkowej

W rozdziale tym zostanie przedstawiony algorytm heurystyczny do wyznaczania reprezentacji początkowej (X_1, Y_1) . Rozwiązanie uzyskane za pomocą tego algorytmu musi należeć do zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Algorytm heurystyczny musi zatem znaleźć takie rozmieszczenie bram oraz ustalić takie przepustowości kanałów sieci 2. poziomu, że:

- reprezentacja $(X_1, Y_1) \in \mathcal{R}_H$,
- dla sieci S_1 istnieje przepływ wieloskładnikowy realizujący zadaną macierz z zewnątrz wprowadzanych natężeń,
- średnie opóźnienie pakietu w sieci S_1 odpowiadającej reprezentacji (X_1, Y_1) spełnia ograniczenie (4.3),
- koszt budowy sieci jest możliwie mały.

Do wyznaczenia reprezentacji początkowej zaproponowany został algorytm podobny do algorytmu WRP1 przedstawionego w rozdziale 3.6. Idea działania algorytmu jest następująca. Zbiór $Y_1^{(1)}$ reprezentujący początkowe położenie bram ustalany jest w taki sposób, aby koszt kanałów sieci 2. poziomu był jak najmniejszy. Tworzona jest sieć $S_1^{(1)}$ z rozmieszczeniem bram ustalonym przez zbiór $Y_1^{(1)}$ i przepustowościami kanałów w sieci 2. poziomu ustalonymi na największe dostępne wartości. Jeśli zbudowana w ten sposób sieć nie jest spełnia ograniczenia (4.3), wybierana jest brama, której lokalizację należy zmienić. Wyboru bramy oraz jej nowej lokalizacji dokonujemy na podstawie kryterium (3.29). Po każdej zmianie lokalizacji bramy nowa wartość średniego opóźnienia pakietu w sieci porównywana jest z tą sprzed zmiany lokalizacji bramy. Lokalizacja bramy o większej wartości średniego opóźnienia pakietu jest odrzucana i usuwana ze zbioru dostępnych lokalizacji bramy.

Po otrzymaniu reprezentacji, która jest rozwiązaniem dopuszczalnym, przepustowości kanałów są zmniejszane tak długo, jak długo reprezentacja $(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ spełnia warunek (4.3) a bieżąca wartość kosztu budowy sieci $d(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ jest porównywana z wartością najlepszego dotąd znalezionej rozwiązania d^* . Jeśli bieżąca wartość jest mniejsza, to bieżące rozwiązanie jest zapamiętywane jako najlepsze. Jeśli warunek (4.3) nie jest spełniony powtarzana jest procedura zmiany lokalizacji bramy. Algorytm kończy pracę, kiedy dla każdej bramy zbiór węzłów, do których można przenieść lokalizację bramy, jest pusty lub nie istnieje żaden kanał, którego przepustowość można zmniejszyć.

Algorytm WRP2

Niech $(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ oznacza początkową reprezentację w r -tej iteracji algorytmu heurystycznego. Niech $J_g^{(r)}$ będzie zbiorem węzłów, do których może zostać przeniesiona brama g w r -tej iteracji algorytmu. Dla każdej bramy g : $J_g^{(1)} = J_g$. Niech $Y_1^{(1)} = \emptyset$, $d^* = \infty$, $r = 1$.

Krok 0. *Wyznaczenie początkowego rozmieszczenia bram*

$$\text{Podstawić } X_1^{(1)} = \bigcup_{i=1}^m \{x_i\}$$

$$\text{Wyznaczyć } Y_1^{(1)} \text{ takie, że } d(X_1^{(1)}, Y_1^{(1)}) = \min_{y_a^g} d(X_1^{(1)}, Y_r)$$

Krok 1. *Sprawdzenie ograniczenia na średnie opóźnienie pakietu w sieci*

Wyznaczyć $\underline{f}^{(r)}$ oraz $T(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$. Jeżeli $T(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)}) > T^{\max}$, to przejść do kroku 2.

W przeciwnym razie przejść do kroku 3.

Krok 2. *Wybór bramy, której lokalizację należy zmienić*

Wybrać taką parę zmiennych $y_a^g \in Y_1^{(r)}$ i $y_b^g : b \in J_g^{(r)}$, dla której wartość (3.30) jest największa. Jeżeli taka para nie istnieje, tj. $J_g^{(r)} = \emptyset$ dla każdego g , to przejść do kroku 5.

Podstawić $Y_1^{(r+1)} = (Y_1^{(r)} - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$. Wyznaczyć $\underline{f}^{(r+1)}$ oraz $T(X_1^{(r)}, Y_1^{(r+1)})$.

Jeżeli $T(X_1^{(r)}, Y_1^{(r+1)}) > T(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ postawić $J_g^{(r)} = J_g^{(r)} - \{b\}$ i przejść do kroku 1, w przeciwnym razie podstawić $J_g^{(r+1)} = J_g^{(r)} - \{a\}$ oraz $r = r + 1$.

Przejsć do kroku 1.

Krok 3. *Sprawdzenie wartości kryterium*

Jeżeli $d(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)}) < d^*$, to:

Podstawić $d^* = d(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ oraz $(X_1^*, Y_1^*) = (X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$.

Przejsć do kroku 4.

Krok 4. *Zmniejszanie przepustowości wybranego kanału*

Wybrać taką zmienną $x_k^i \in X_1^{(r)}$, że $k \leq s(i) - 1$, dla której wartość $\bar{\Delta}_{k,k+1}^{ir}$ wyznaczona z wyrażenia (3.32) jest największa i postawić $X_1^{(r+1)} = (X_1^{(r)} - \{x_k^i\}) \cup \{x_{k+1}^i\}$ oraz $r = r + 1$. Jeżeli taka zmienna nie istnieje przejść do kroku 5.

Przejsć do kroku 1.

Krok 5. *Zakończenie działania algorytmu*

Zakończyć działanie algorytmu. Jeżeli $d^* = \infty$ to zadanie nie ma rozwiązania. W przeciwnym razie sieć S_* związana z aktualną wartością d^* jest rozwiązaniem przybliżonym, dla którego istnieje przepływ realizujący zadaną macierz z zewnątrz wprowadzanych natężeń oraz spełniającym ograniczenie (4.3) natomiast $(X_1, Y_1) = (X_1^*, Y_1^*)$ jest reprezentacją początkową dla algorytmu dokładnego.

4.7. Eksperymenty obliczeniowe

W poprzednich punktach tego rozdziału przedstawione zostały algorytmy dokładny oraz heurystyczny do wyznaczania rozmieszczenia bram, przepływów i przepustowości kanałów w hierarchicznej sieci rozległej minimalizujący koszt budowy sieci przy ograniczeniu na średnie opóźnienie pakietu w sieci. Algorytmy dokładny i heurystyczny zostały zaimplementowane w języku C++. Przedstawimy wyniki przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych, których celem było zbadanie własności problemu optymalizacji (4.1 ÷ 4.3) sformułowanego w rozdziale 4.1. Przedstawione zostaną również wnioski wynikające z przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych.

4.7.1. Definicje

W punkcie tym wprowadzimy definicje wielkości, które pozwolą zaprezentować własności rozważanego problemu optymalizacji. Niech wartość kryterium, jakim jest koszt budowy sieci, uzyskana w wyniku rozwiązania problemu (4.1 ÷ 4.3) oznaczona będzie przez d^{opt} . Przypomnijmy definicje parametrów dotyczących natężeń ruchu pakietów w sieci. Średnie natężenie strumienia pakietów pomiędzy węzłami tej samej sieci 1. poziomu oznaczamy przez ri , zaś natężenie strumienia pakietów pomiędzy węzłami różnych sieci przez ro . W przypadkach kiedy oba natężenia są równe, tj. $ri = ro$, na oznaczenie średniego natężenia strumienia pakietów stosowany jest parametr rk .

W celu porównania wyników badań uzyskanych dla różnych sieci, wykorzystamy unormowany parametr $\overline{ro}$ wprowadzony w rozdziale 3.7.2, wprowadzimy dodatkowo pojęcie unormowanego maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu $\overline{T}^{max}$. W tym celu określimy zakres wartości parametru T^{max} , dla których wyniki uzyskane dla różnych badanych sieci mogą być porównywane. Dla każdej sieci wyznaczmy dolną i górną granicę przedziału wartości, jakie może przyjmować parametr T^{max} , oznaczmy je odpowiednio przez T_L^{max} i T_H^{max} . Niech T_L^{max} będzie najmniejszą wartością maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu, dla którego istnieje rozwiązanie zadania (4.1 ÷ 4.3) dla zadanej macierzy R wprowadzanych z zewnątrz natężeń. Przez T_H^{max} oznaczmy najmniejszą wartość maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu taką, że dla $T^{max} > T_H^{max}$ rozwiązanie zadania (4.1 ÷ 4.3) jest takie same jak rozwiązanie zadania (4.1 ÷ 4.2).

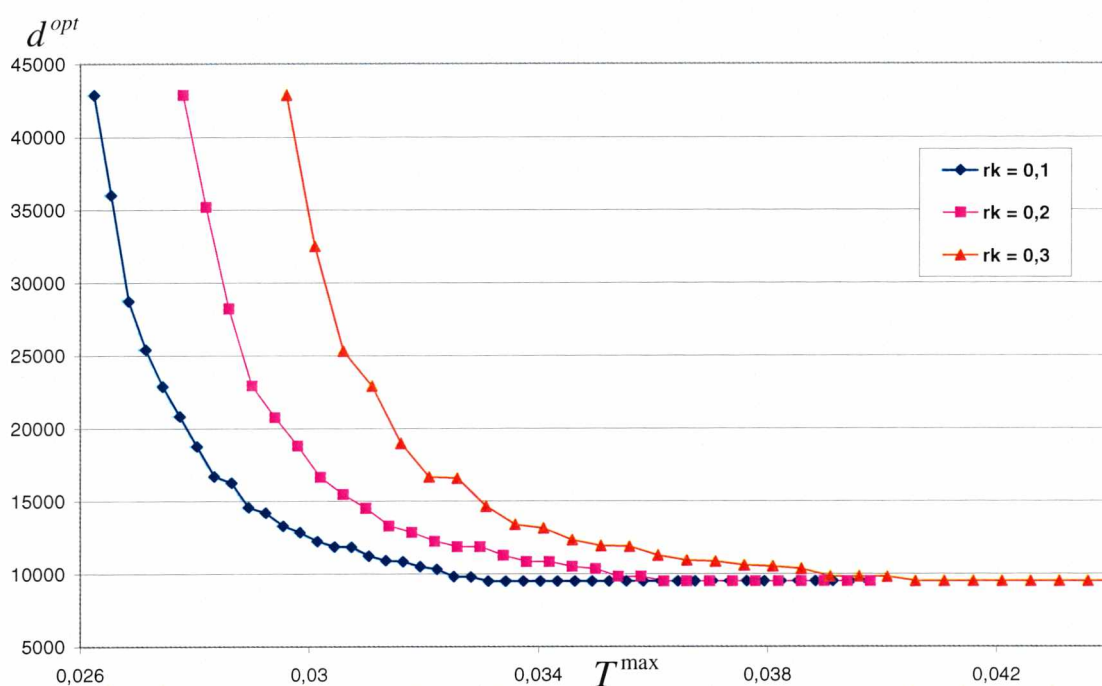
Unormowane maksymalne średnie opóźnienie pakietu $\overline{T}^{max}$ w rozległej sieci komputerowej będzie określone następująco:

$$\overline{T}^{max} = \frac{T^{max} - T_L^{max}}{T_H^{max} - T_L^{max}} \cdot 100\%$$

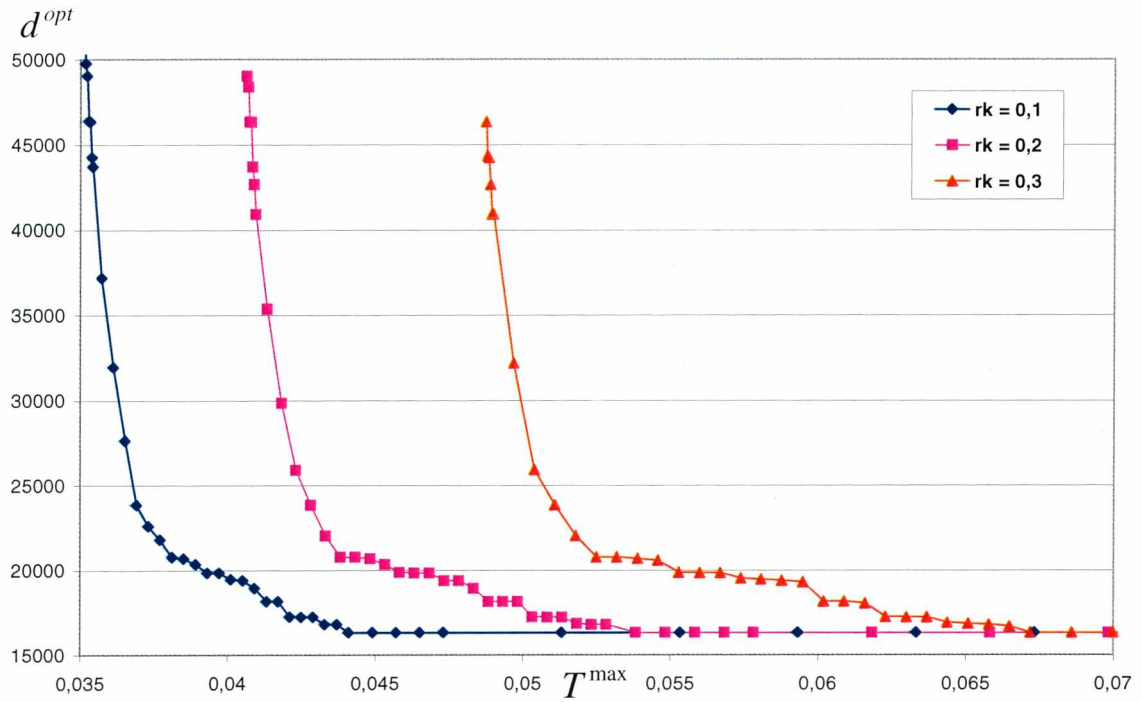
Parametr $\overline{T}^{max}$ przyjmuje wartość $\overline{T}^{max} = 0\%$ dla $T^{max} = T_L^{max}$, natomiast dla $T^{max} = T_H^{max}$ wartość unormowanego maksymalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci $\overline{T}^{max} = 100\%$.

4.7.2. Badanie zależności kosztu budowy sieci od wartości $T^{\max}$

Celem badania było wyznaczenie zależności pomiędzy kosztem budowy sieci a wartością maksymalnego średniego opóźnienia pakietu w hierarchicznej sieci komputerowej $T^{\max}$. Przeprowadziliśmy badania wielu sieci hierarchicznych o różnych strukturach, różnych macierzach R wprowadzanych z zewnątrz natężeń, różnych przepustowościach kanałów w sieciach 1. poziomu. We wszystkich badaniach uzyskaliśmy podobne wyniki. Na rysunku 4.1 przedstawiamy wyniki uzyskane dla sieci HSK-223 z dwiema sieciami 1. poziomu, z przepustowościami kanałów w sieciach 1. poziomu równymi 128 kbit/s, natomiast na rysunku 4.2 wyniki dla sieci HSK-313 z trzema sieciami 1. poziomu, z przepustowościami kanałów w sieciach 1. poziomu ze zbioru {256, 128, 64} [kbit/s].



Rys. 4.1. Zależność wartości d^{opt} od wartości $T^{\max}$ dla sieci HSK-223

Rys. 4.2. Zależność wartości d^{opt} od wartości $T^{\max}$ dla sieci HSK-313

Jak można zauważyć na rys. 4.1 oraz rys. 4.2, zwiększanie wartości $T^{\max}$ prowadzi do zmniejszenia kosztu budowy sieci d^{opt} . Można również zauważyć, że poniżej pewnej wartości $T^{\max}$ zadanie (4.1 ÷ 4.3) nie ma rozwiązania. Wartość ta, oznaczona w poprzednim punkcie jako $T_L^{\max}$, zależy od natężenia strumienia pakietów. Im większa jest wartość parametru rk , tym większa jest wartość $T_L^{\max}$. Zauważmy, że powyżej pewnej wartości $T^{\max}$ koszt budowy sieci przestaje maleć i pozostaje stały. Wartość, do jakiej maleje d^{opt} wraz ze zwiększaniem wartości $T^{\max}$, zależy od struktury sieci i zbioru dostępnych przepustowości kanałów. Oznaczmy tę minimalną wartość kosztu budowy sieci przez $d_{\min}^{opt}$. Można zauważyć, że wartość $d_{\min}^{opt}$ nie jest zależna od wartości parametru rk . Powyższe rozważania pozwalają na sformułowanie następującego wniosku:

Wniosek 4.1. Istnieje taka wartość $\tilde{T}^{\max}$, że dla $T^{\max} > \tilde{T}^{\max}$ wartość kosztu budowy sieci d^{opt} pozostaje stała i jest równa $d_{\min}^{opt}$.

Na podstawie analizy wyników badań dla różnych struktur sieci hierarchicznych z kilkoma sieciami 1. poziomu oraz jedną siecią 2. poziomu, można zależność kosztu budowy sieci hierarchicznej od maksymalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci $T^{\max}$ przybliżyć funkcją z klasy:

$$d^{opt} = \frac{u1}{T^{\max} - u2} + u3 \quad (4.22)$$

gdzie $u1$, $u2$ i $u3$ są współczynnikami rzeczywistymi.

Wyznaczenie współczynników sprowadza się do rozwiązania zadania identyfikacji polegającego na wyborze najlepszego modelu z klasy (4.22). Jako kryterium jakości identyfikacji przyjęliśmy kryterium kwadratowe:

$$\Psi = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left(d_i^{opt} - \left(\frac{u1}{T_i^{\max} - u2} + u3 \right) \right)^2$$

gdzie s jest liczbą pomiarów, a d_i^{opt} jest wartością kosztu budowy sieci uzyskaną w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji (4.1 ÷ 4.3) przy $T^{\max} = T_i^{\max}$.

Przedstawimy przykład wyznaczenia wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$ dla przedstawionej wcześniej przykładowej sieci HSK-223. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$, minimalizujące kryterium Ψ dla wybranych wartości rk , zostały wyznaczone numerycznie. Wyniki umieszczone zostały w tabeli 4.1.

Tabela 4.1 Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$ dla sieci HSK-223

rk	$u1$	$u2$	$u3$	Ψ
0.1	32,24	0,0254	6340	3,45E+05
0.2	43,82	0,0266	5151	2,60E+05
0.3	36,70	0,0286	6573	9,46E+04

Mając wyznaczone współczynniki funkcji (4.22) możemy wyznaczyć wartość $\tilde{T}^{\max}$. Niech $\tilde{T}^{\max}$ będzie taką wartością maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci $T^{\max}$, dla której względna różnica pomiędzy minimalnym kosztem budowy sieci $d_{\min}^{opt}$ a wartością d^{opt} wyznaczoną za pomocą wyrażenia (4.22) będzie równa pewnej ustalonej wartości ε , czyli:

$$\frac{d^{opt}(\tilde{T}^{\max}) - d_{\min}^{opt}}{d_{\min}^{opt}} = \varepsilon \quad (4.23)$$

Po wstawieniu (4.22) do (4.23) dla $T^{\max} = \tilde{T}^{\max}$ i po pewnych przekształceniach otrzymujemy następujące wyrażenie na $\tilde{T}^{\max}$:

$$\tilde{T}^{\max} = \frac{u1}{d_{\min}^{opt}(1 + \varepsilon) - u3} - u2 \quad (4.24)$$

W tabeli 4.2 zostały umieszczone wartości $\tilde{T}^{\max}$ uzyskane dla sieci HSK-223 dla $\varepsilon = 0,005$.

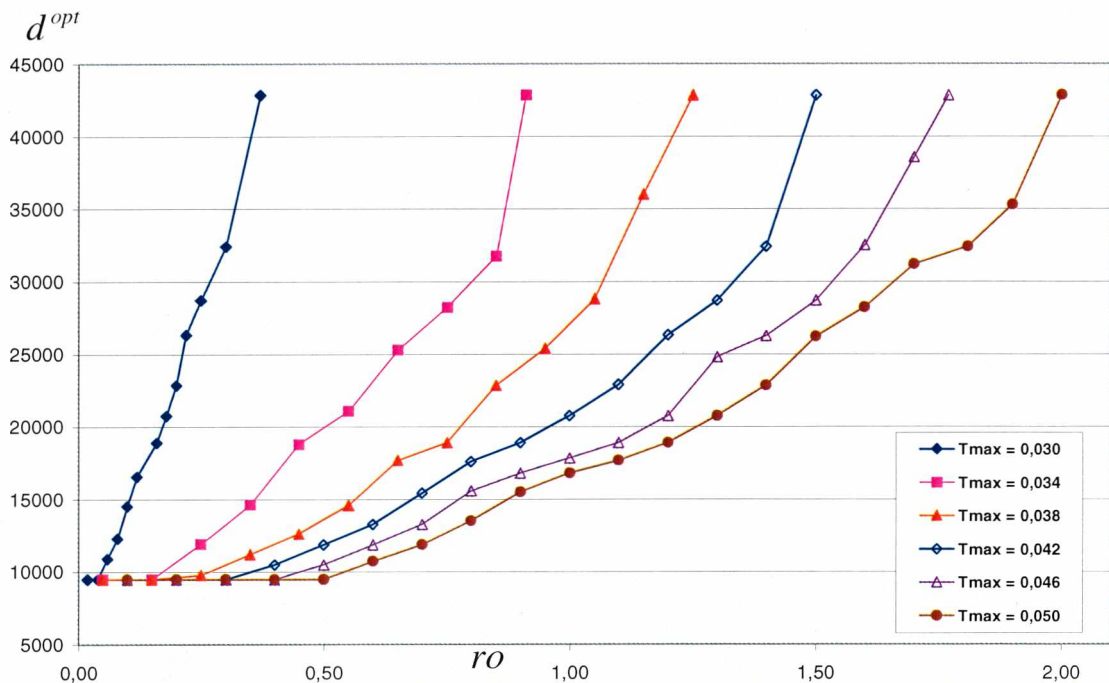
Tabela 4.2. Wartości $\tilde{T}^{\max}$ uzyskane dla sieci HSK-223

rk	$\tilde{T}^{\max}$
0.1	0,0356
0.2	0,0367
0.3	0,0411

4.7.3. Badanie zależności kosztu budowy sieci od parametru ro

Celem badania było wyznaczenie zależności pomiędzy wartością parametrów natężenia ruchu w sieci a kosztem budowy sieci. Przebadano wiele sieci hierarchicznych o różnych strukturach, różnych macierzach R wprowadzanych z zewnątrz natężeń, różnych wartościach maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci, różnych przepustowościach kanałów w sieciach 1. poziomu. Wyniki uzyskane dla wszystkich sieci nie odbiegały od siebie znacząco. Szukano zależności kosztu budowy sieci od różnych parametrów i zauważono, że istnieje taka zależność od parametru rk , a w szczególności od parametru ro .

Na rysunku 4.3 przedstawiamy wyniki badania wpływu wartości parametru ro na koszt budowy sieci d^{opt} uzyskane dla sieci HSK-223 przy ustalonej wartości parametru $ri = 0.3$. Można zauważyć, że dla rosnących wartości parametru ro koszt budowy sieci d^{opt} początkowo pozostaje stały, natomiast powyżej pewnej wartości parametru ro , którą oznaczmy przez ro_L , zaczyna rosnąć. Zarówno wartość ro_L jak i szybkość, z jaką rośnie koszt budowy sieci dla rosnących wartości parametru ro zależą od wartości maksymalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci $T^{\max}$. Można zauważyć, że ze wzrostem wartości $T^{\max}$ rośnie wartość ro_L i wolniej narasta koszt budowy sieci d^{opt} dla rosnących wartości ro .



Rys. 4.3. Zależność wartości d^{opt} od wartości parametru ro dla sieci HSK-223

Analiza uzyskanych wyników dla sieci HSK-223 oraz dla pozostałych sieci wykazała, że zależność wartości kosztu budowy sieci d^{opt} od parametru ro można przybliżyć funkcją wielomianem z następującej klasy:

$$d^{opt} = u1 \cdot ro^3 + u2 \cdot ro^2 + u3 \cdot ro + u4 \quad (4.25)$$

gdzie $u1$, $u2$, $u3$ i $u4$ są współczynnikami rzeczywistymi.

Wyznaczenie współczynników sprowadza się do rozwiązania zadania identyfikacji polegającego na wyborze najlepszego modelu z klasy (4.25). Na kryterium jakości identyfikacji zostało wybrane kryterium kwadratowe:

$$\Psi = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left(d_i^{opt} - (u1 \cdot (ro_i)^3 + u2 \cdot (ro_i)^2 + u3 \cdot ro_i + u4) \right)^2$$

gdzie s jest liczbą pomiarów, a d_i^{opt} jest wartością kosztu budowy sieci uzyskaną w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji (4.1 ÷ 4.3) przy wartości składników przesyłanych pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu $ro = ro_i$.

Przedstawimy przykład wyznaczenia wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$, $u4$ dla sieci HSK-223. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$, $u4$ minimalizujące kryterium Ψ dla wybranych wartości maksymalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci T^{max} , zostały wyznaczone numerycznie. Wyniki przedstawione zostały w tabeli 4.3.

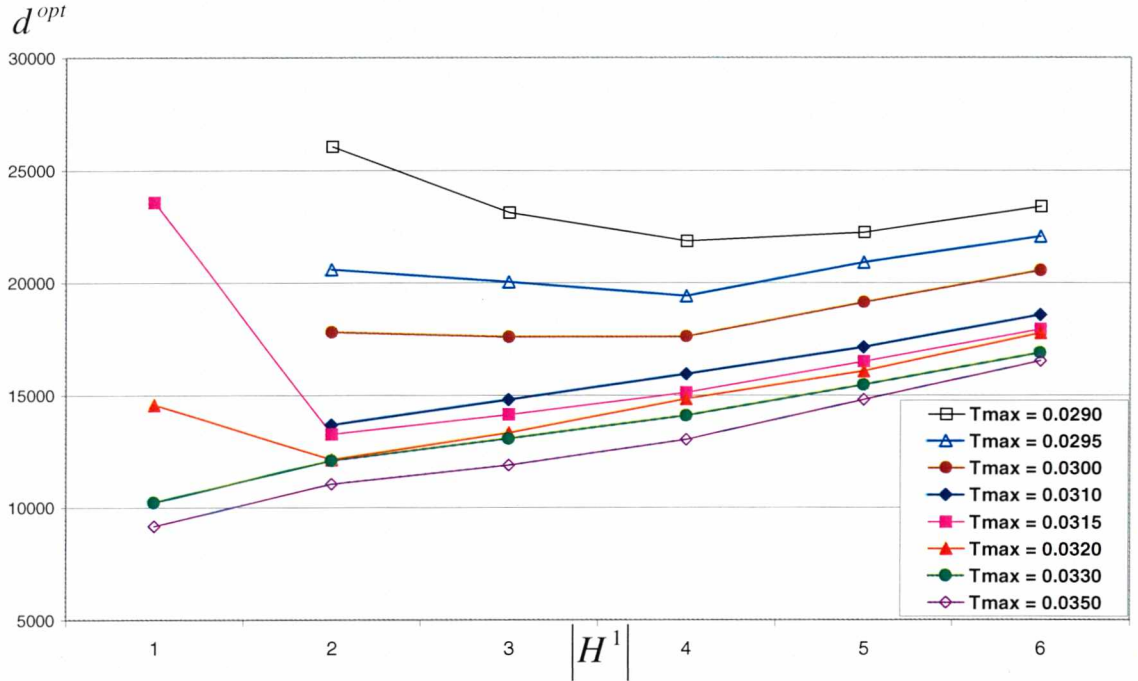
Tabela 4.3. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$, $u4$ dla sieci HSK-223

T^{max}	$u1$	$u2$	$u3$	$u4$	Ψ
0,030	100452	40916	65908	7385	6,54E+05
0,034	37160	-20366	23703	7388	3,57E+06
0,038	13024	-46,41	6495	8675	7,83E+05
0,042	11469	-9869	11034	7673	2,16E+06
0,046	6333	-3541	5308	8517	6,85E+05
0,050	3114	-100,44	3896	8499	1,52E+06

4.7.4. Badanie zależności kosztu budowy sieci od liczby bram w sieci

Celem badania było wyznaczenie zależności pomiędzy kosztem budowy hierarchicznej sieci komputerowej a liczbą bram umieszczonych w jednej z sieci 1. poziomu. Przeprowadziliśmy badania wielu sieci hierarchicznych o różnych strukturach, różnych macierzach R wprowadzanych z zewnątrz natężeń, różnych przepustowościach kanałów w sieciach 1. poziomu oraz różnych wartościach maksymalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej T^{max} . We wszystkich przebadanych przypadkach uzyskaliśmy podobne wyniki. Na rys. 4.4 przedstawiliśmy wyniki uzyskane dla sieci HSK-231 do HSK-236 z dwiema sieciami 1. poziomu i jedną siecią 2. poziomu, z przepustowościami kanałów w sieciach 1. poziomu równymi 128 kbit/s. Zadanie optymalizacji (4.1 ÷ 4.3) rozwiązywane

było dla wielu wartości maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci $T^{\max}$ w sieciach hierarchicznych, z różną liczbą bram w jednej z sieci 1. poziomu (w sieci SK-1). Rysunek 4.4 przedstawia jak zmienia się koszt budowy sieci hierarchicznej w zależności od liczby bram umieszczonych w sieci SK-1. Przypomnijmy, że liczbę bram w sieci SK-1 oznaczyliśmy przez $|H^1|$, czyli licznosc zbioru H^1 bram w sieci S_1^1 . Można zauważyć, że niezależnie od wartości $|H^1|$, koszt budowy sieci d^{opt} jest tym większy im mniejsza jest wartość $T^{\max}$.

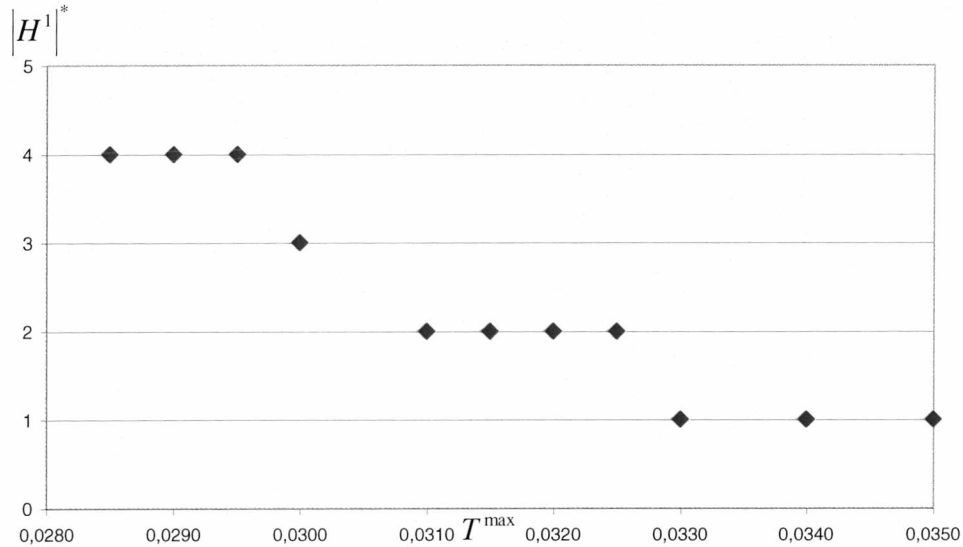


Rys. 4.4. Wykres wartości d^{opt} w zależności od $|H^1|$ w sieciach HSK-231 do HSK-236

Można także zaobserwować, że dla wartości maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci $T^{\max} \geq 0.033$ wartość d^{opt} rośnie liniowo wraz ze wzrostem wartości $|H^1|$. Wraz ze zmniejszaniem wartości $T^{\max}$ koszt budowy d^{opt} sieci o mniejszej wartości $|H^1|$ rośnie szybciej, niż w przypadku sieci z większą wartością $|H^1|$. Dla $T^{\max} \leq 0.031$ zadanie optymalizacji (4.1 ÷ 4.3) nie ma rozwiązania w sieci hierarchicznej z jedną bramą w sieci SK-1, tj. dla $|H^1| = 1$. Dla każdej badanej wartości $T^{\max}$ wyznaczyliśmy wartość $|H^1|$, dla której wartość d^{opt} jest najmniejsza i oznaczyliśmy ją przez $|H^1|^*$. Na rysunku 4.5 przedstawione zostały wartości $|H^1|^*$ dla różnych wartości maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia w sieci $T^{\max}$. Można zauważyć, że im większa jest wartość $T^{\max}$, tym mniejsza jest wartość $|H^1|^*$, czyli mniej bram należy umieścić w sieci

SK-1 aby uzyskać sieć o najmniejszym koszcie budowy spełniającą wymaganie na maksymalną dopuszczalną wartość średniego opóźnienia pakietu w sieci $T^{\max}$.

Wniosek 4.2. Wartość $|H^1|^*$ maleje ze wzrostem wartości maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej $T^{\max}$.



Rys. 4.5. Wartość $|H^1|^*$ w zależności od $T^{\max}$ w sieciach HSK-231 do HSK-236

4.7.5. Badanie własności obliczeniowych algorytmu dokładnego

Celem badania było ustalenie zależności pomiędzy liczbą iteracji algorytmu potrzebną do rozwiązania problemu optymalizacji (4.1 ÷ 4.3) a wartościami parametrów występujących w rozważanym problemie. Badania przeprowadzono dla różnych sieci hierarchicznych z jedną siecią 2. poziomu i kilkoma sieciami 1. poziomu. W celu porównania wyników uzyskanych dla różnych sieci, wykorzystamy pojęcie unormowanego maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu $\bar{T}^{\max}$, wprowadzone w punkcie 4.7.1, oraz pojęcie unormowanego parametru $\bar{ro}$ wprowadzone w punkcie 3.7.2.

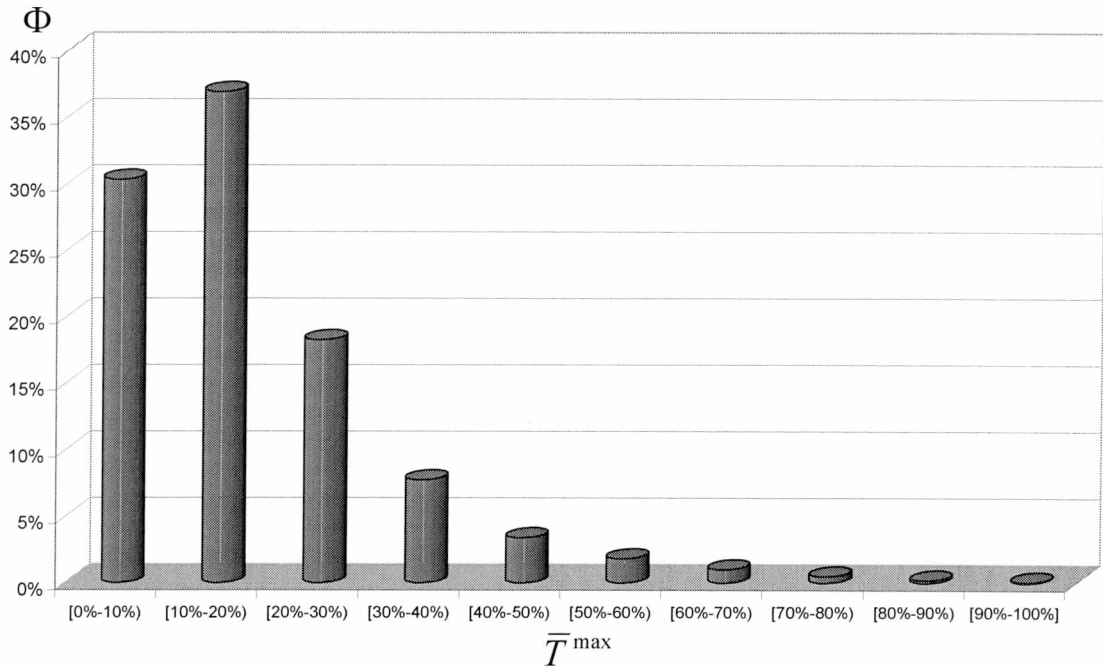
Niech $\Gamma^k(\bar{T}^{\max})$ będzie liczbą iteracji algorytmu potrzebną do rozwiązania problemu optymalizacji (4.1 ÷ 4.3) dla k -tej rozległej sieci komputerowej przy unormowanym maksymalnym dopuszczalnym średnim opóźnieniu pakietu w sieci o wartości $\bar{T}^{\max}$. Przez $\Phi^k(a, b)$ oznaczmy stosunek liczby iteracji algorytmu, dla wartości unormowanego parametru $\bar{T}^{\max}$ z przedziału (a, b) , do sumy iteracji dla wszystkich wartości unormowanego parametru $\bar{T}^{\max} \in [0\%, 100\%]$:

$$\Phi^k(a,b) = \frac{\sum_{\bar{T}^{\max} \in (a,b)} \Gamma^k(\bar{T}^{\max})}{\sum_{\bar{T}^{\max} \in [0\%, 100\%]} \Gamma^k(\bar{T}^{\max})} \cdot 100\%,$$

Niech $\Phi(a,b)$ będzie średnią wartością $\Phi^k(a,b)$ dla wszystkich przebadanych sieci hierarchicznych:

$$\Phi(a,b) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi^k(a,b),$$

gdzie K jest liczbą badanych hierarchicznych sieci komputerowych. Dla każdego badanego przedziału (a,b) zostało przeprowadzonych tyle samo eksperymentów. Stąd wartość $\Phi(a,b)$ ilustruje procentowy udział iteracji algorytmu dla $\bar{T}^{\max}$ z przedziału (a,b) w iteracjach algorytmu wykonanych dla wszystkich przebadanych sieci. Wyniki zostały przedstawione na rys. 4.6.

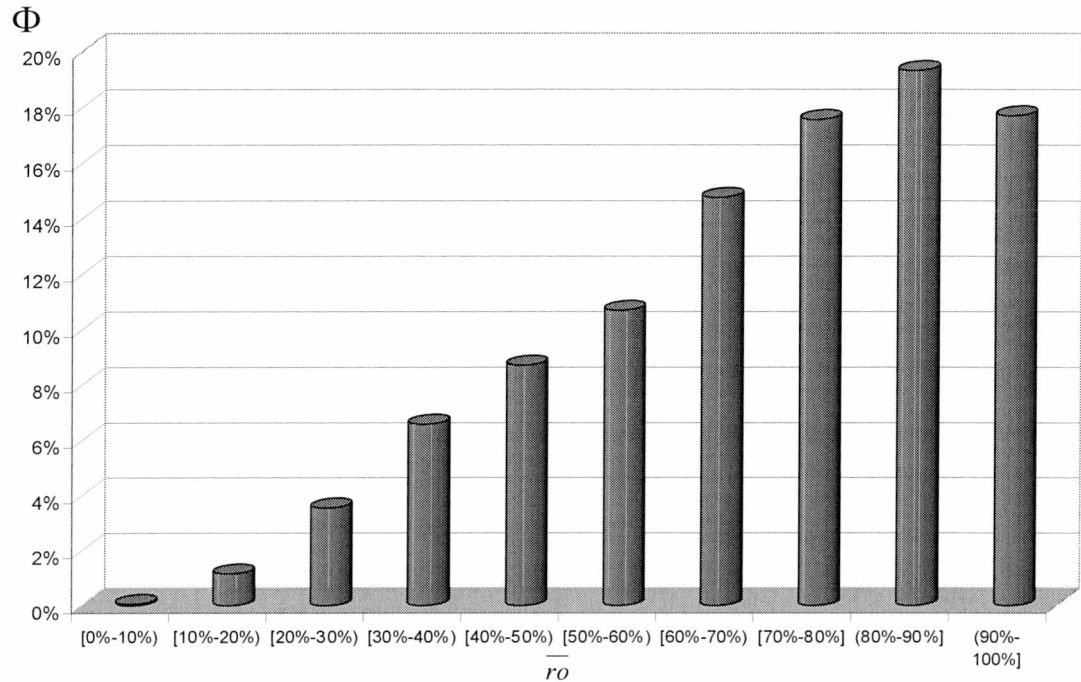


Rys. 4.6. Zależność względnej liczby iteracji algorytmu dokładnego Φ od unormowanego maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu $\bar{T}^{\max}$

Można zauważyć, że Φ przyjmuje największe wartości dla $\bar{T}^{\max} < 20\%$. Zwiększanie wartości unormowanego parametru $\bar{T}^{\max}$ dla $\bar{T}^{\max} \geq 20\%$ powoduje, że wartość Φ wyraźnie maleje. Algorytm potrzebował najmniejszej liczby iteracji do rozwiązywania problemu optymalizacji (4.1 ÷ 4.3) dla $\bar{T}^{\max} \geq 30\%$.

Wniosek 4.3. Przedstawiony algorytm jest szczególnie efektywny z obliczeniowego punktu widzenia dla $\bar{T}^{\max} \geq 30\%$.

W rozdziale 3.7.6 został przedstawiony sposób wyznaczenia wskaźnika $\Phi(a,b)$ ilustrującego procentowy udział iteracji algorytmu dla $\overline{ro}$ z przedziału (a,b) w iteracjach algorytmu wykonanych dla wszystkich przebadanych sieci. Na Rys. 4.7 zostały przedstawione wyniki badań.



Rysunek 4.7. Zależność względnej liczby iteracji algorytmu dokładnego Φ od unormowanego parametru $\overline{ro}$

Można łatwo zauważyć, że wartość Φ rośnie wraz ze zwiększaniem wartości unormowanego parametru $\overline{ro}$. Dla $\overline{ro} \geq 60\%$ wartości Φ nie różnią się znacząco w poszczególnych przedziałach wartości parametru $\overline{ro}$. Można zauważyć, że algorytm potrzebuje najmniej iteracji do rozwiązywania problemu optymalizacji (4.1 ÷ 4.3), kiedy wartości składników przesyłanych pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu nie przekraczają 30% maksymalnej wartości.

Wniosek 4.4. Przedstawiony algorytm jest szczególnie efektywny z obliczeniowego punktu widzenia dla $\overline{ro} < 30\%$.

4.7.6. Badanie odległości rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych

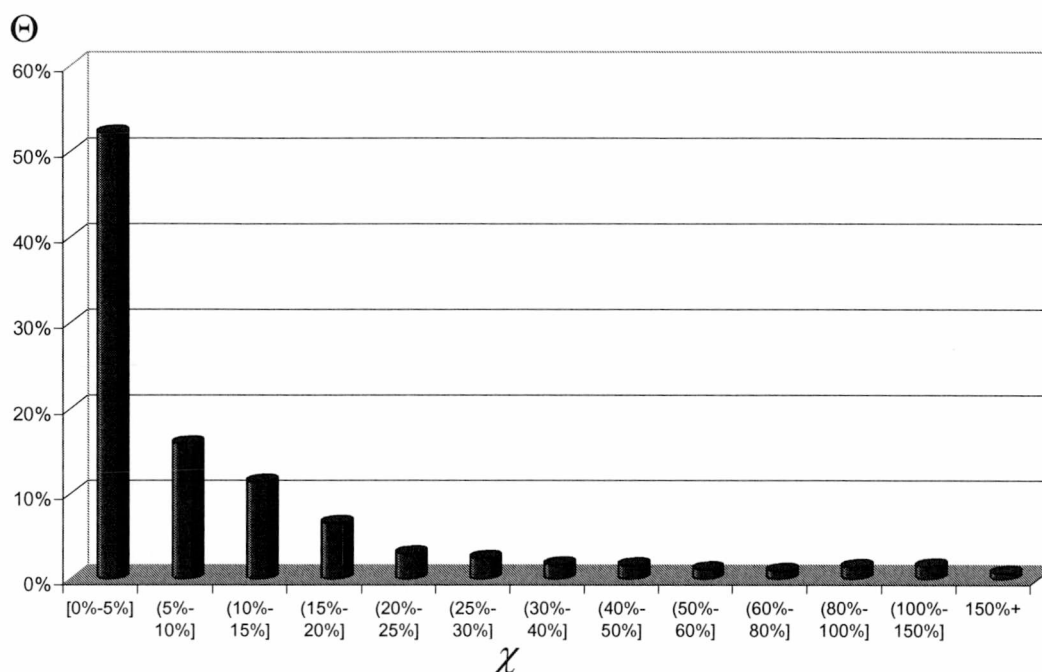
Celem badania było określenie odległości rozwiązań przybliżonych uzyskiwanych za pomocą algorytmu heurystycznego WRP2 a rozwiązaniami uzyskanymi przez algorytm dokładny. Wyznaczone zostały zależności pomiędzy różnymi parametrami a odległością uzyskiwanych rozwiązań. Algorytm WRP2 przedstawiony został w rozdziale 4.6. Badania przeprowadziliśmy dla różnych sieci hierarchicznych z jedną siecią 2. poziomu i kilkoma sieciami 1. poziomu. W celu porównania wyników uzyskanych dla różnych sieci wykorzystamy wprowadzone wcześniej unormowane parametry $\overline{T}^{\max}$ oraz $\overline{ro}$.

4.7.6.1. Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych

Odległość rozwiązania przybliżonego od rozwiązania optymalnego oznaczamy przez χ i wyznaczamy następująco:

$$\chi = \frac{d^{app} - d^{opt}}{d^{opt}} \cdot 100\%,$$

gdzie d^{app} jest wartością kosztu budowy sieci uzyskaną w wyniku działania algorytmu heurystycznego WRP2, natomiast d^{opt} jest wartością kosztu budowy sieci uzyskaną w wyniku rozwiązania problemu optymalizacji (4.1 ÷ 4.3) za pomocą algorytmu dokładnego. Do oceny wyników uzyskanych za pomocą algorytmu heurystycznego WRP2 użyjemy wskaźnika $\Theta(a,b)$ wprowadzonego w rozdziale 3.7.7. Przypomnijmy, że przez $\Theta(a,b)$ oznaczamy stosunek liczby rozwiązań przybliżonych, dla których spełniony jest warunek $\chi \in (a,b)$, do liczby wszystkich badanych rozwiązań. Na rys. 4.8 przedstawione zostały wyniki uzyskane za pomocą algorytmu WRP2 dla 1088 przebadanych hierarchicznych sieci komputerowych.



Rys. 4.8. Względna liczba rozwiązań Θ algorytmu WRP2 o wartości χ

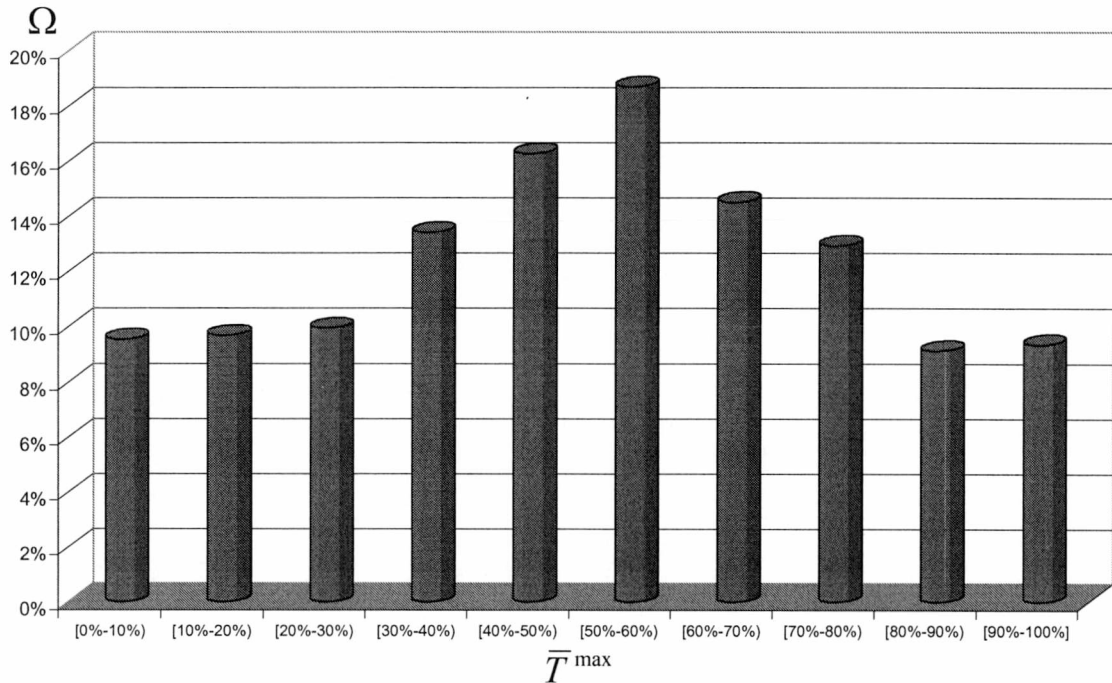
Można zauważyć, że w ponad połowie badanych przypadków rozwiązania uzyskane przez algorytm WRP2 różniły się od rozwiązań optymalnych mniej niż o 5%. Ponadto warunek, że $\chi \leq 20\%$ spełnia 86% rozwiązań uzyskanych za pomocą algorytmu WRP2. Nie można jednak nie zauważyć, że dla 5,5% rozwiązań zachodzi $\chi > 50\%$. Występowanie rozwiązań przybliżonych, dla których odległość do rozwiązania optymalnego była tak znaczna można wytłumaczyć tym, że koszt budowy sieci przyjmuje wartości dyskretne i rozpiętość wartości, jakie może przyjmować jest bardzo duża. Przypomnijmy, że koszt budowy sieci zależy od wybranych przepustowości kanałów sieci 2. poziomu oraz od liczby bram i ich rozmieszczenia w sieciach 1. poziomu.

Wniosek 4.5. Rozwiązania uzyskane przez algorytm heurystyczny WRP2 w większości zastosowań różnią się co najwyżej o 5% od rozwiązań optymalnych.

4.7.6.2. Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych w zależności od unormowanego parametru $\bar{T}^{\max}$

Wskaźnik Ω oznaczający średnią odległość pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą algorytmu heurystycznego a rozwiązaniami optymalnymi dla wszystkich przebadanych sieci, przy określonej wartości unormowanych parametrów $\bar{T}^{\max}$ oraz $\bar{r}_0$, zdefiniowaliśmy w rozdziale 3.7.7. Wykres wartości Ω w zależności od unormowanego

maksymalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej $\bar{T}^{\max}$ został zaprezentowany na rysunku 4.9.



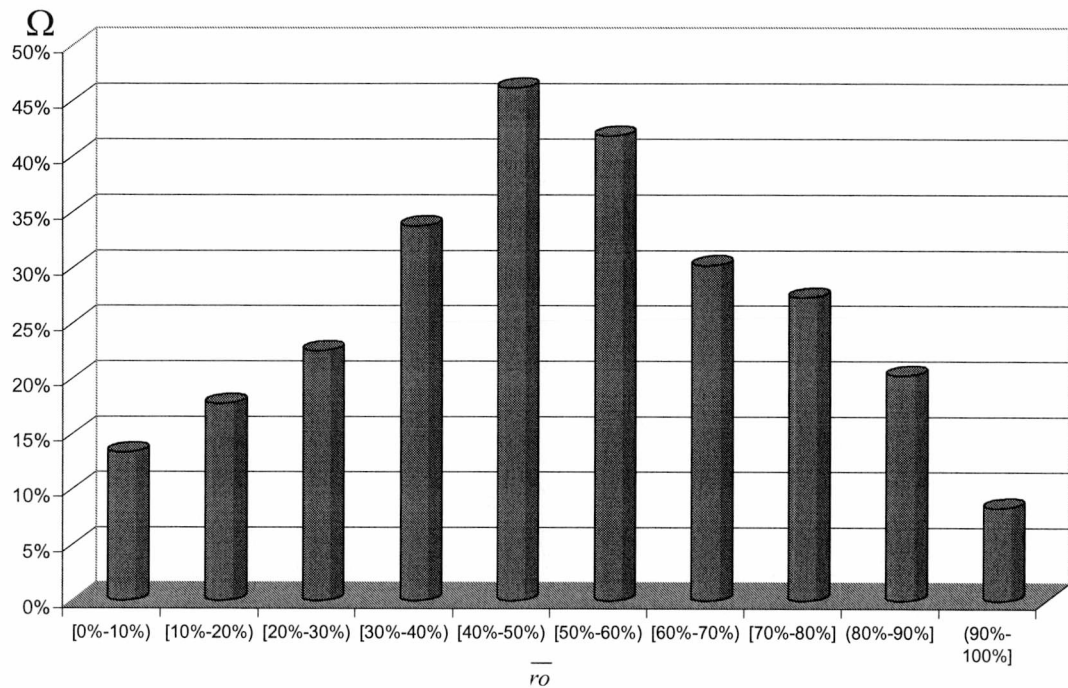
Rys. 4.9. Średnia odległość rozwiązań przybliżonych uzyskanych za pomocą algorytmu WRP2 od rozwiązań optymalnych Ω w zależności od unormowanego parametru $\bar{T}^{\max}$

Można zauważyć, że średnia odległość Ω przyjmuje najmniejsze wartości dla $\bar{T}^{\max} < 30\%$ oraz dla $\bar{T}^{\max} \geq 80\%$, czyli dla skrajnych wartości dopuszczalnego maksymalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej. Natomiast wartości Ω były tym większe, im wartość unormowanego parametru $\bar{T}^{\max}$ bliższa wartości 50%.

Wniosek 4.6. Algorytm WRP2 uzyskuje wyniki różniące się od rozwiązań optymalnych średnio o nie więcej niż 10% dla $\bar{T}^{\max} < 30\%$ oraz dla $\bar{T}^{\max} \geq 80\%$.

4.7.6.3. Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych w zależności od wartości unormowanego parametru $\bar{r}_o$

Na rysunku 4.10 przedstawione zostały wartości średniej odległości pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą algorytmu heurystycznego a rozwiązaniami optymalnymi Ω w zależności od unormowanego natężenia pakietów pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu $\bar{r}_o$. Można zauważyć, że wartość średniej odległości rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych Ω jest najmniejsza dla $\bar{r}_o < 20\%$ oraz dla $\bar{r}_o \geq 80\%$ i nie przekracza 20%, natomiast dla wartości parametru $\bar{r}_o$ z przedziału $[40\%, 60\%)$ wartości Ω są największe i przekraczają 40%.



Rys. 4.10. Średnia odległość rozwiązań przybliżonych uzyskanych za pomocą algorytmu WRP2 od rozwiązań optymalnych Ω w zależności od unormowanego parametru $\overline{ro}$

Wniosek 4.7. Algorytm WRP2 uzyskuje wyniki różniące się średnio o co najwyżej 20% od rozwiązań optymalnych dla $\overline{ro} < 20\%$ oraz dla $\overline{ro} \geq 80\%$.

5. Problem GLCFA z uogólnionym kryterium kosztowym jako kryterium

W rozdziale tym zostanie przedstawiony problem wyznaczania rozmieszczenia bram w sieciach 1. poziomu, przepływów oraz przepustowości kanałów sieci 2. poziomu, które minimalizują ważoną sumę średniego opóźnienia pakietu w sieci oraz kosztu budowy sieci przy ograniczeniu na koszt budowy sieci hierarchicznej. W kolejnych punktach przedstawione zostaną: sformułowanie problemu, algorytm dokładny oraz algorytm heurystyczny do rozwiązywania rozważanego problemu oraz rezultaty eksperymentów komputerowych ilustrujące własności rozważanego problemu.

5.1. Uogólnione kryterium kosztowe

W poprzednich rozdziałach jako kryterium optymalizacyjne stosowaliśmy średnie opóźnienie pakietu w sieci hierarchicznej albo koszt budowy sieci. Gdy jeden z tych wskaźników był kryterium optymalizacyjnym, drugi występował w ograniczeniach. W pracy [33] została zaproponowana funkcja kryterialna będąca liniową kombinacją kosztu budowy sieci oraz średniego opóźnienia pakietu w przybliżonym rozwiązaniu problemu CFA bez ograniczeń. Uogólnione kryterium kosztowe będące liniową kombinacją kosztu budowy sieci i średniego opóźnienia pakietu stosowane było m.in. w pracy [35] do rozwiązywania problemu CFA z ograniczeniami na koszt budowy sieci oraz na średnie opóźnienie pakietu. W niniejszym rozdziale do oceny działania sieci skorzystamy z uogólnionego kryterium kosztowego, które możemy przedstawić w następującej postaci:

$$Q(X_r, Y_r) = \alpha \cdot T(X_r, Y_r) + d(X_r, Y_r). \quad (5.1)$$

W kryterium tym średnie opóźnienie pakietu w sieci hierarchicznej jest przeliczane na koszt wyrażony w [zł/miesiąc] za pomocą współczynnika α . Współczynnik ten jest ustalany arbitralnie przez projektanta sieci. Wartość współczynnika α służy do ustalenia wagi kosztu opóźnienia pakietów w sieci w stosunku do kosztu budowy sieci.

5.2. Sformułowanie problemu

Niech dana będzie struktura sieci 1. poziomu, czyli rozmieszczenie węzłów i kanałów w tych sieciach oraz przepustowości kanałów sieci 1. poziomu. Dane są również zbiory potencjalnych lokalizacji bram w sieciach 1. poziomu, tj. ustalone są zbiory węzłów sieci 1. poziomu, w których mogą być umieszczone poszczególne bramy, rozmieszczenie kanałów w sieci 2. poziomu a także zbiory dostępnych przepustowości dla tych kanałów. Zakładamy również, że znana jest macierz wprowadzanych z zewnątrz natężeń, tj. wymagania dotyczące średnich przepływów pomiędzy węzłami tej samej sieci 1. poziomu oraz pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu.

Rozważane zadanie polega na znalezieniu takiej reprezentacji $(X_r, Y_r) \in \mathfrak{R}_H$ i związanego z nią przepływu wieloskładnikowego $\underline{f}$ realizującego macierz R wprowadzanych z zewnątrz natężeń, dla których liniowa kombinacja średniego opóźnienia pakietu w sieci i kosztu dzierżawy kanałów sieci określonej przez (X_r, Y_r) osiągnie minimum, a koszt budowy sieci nie przekroczy wartości założonego budżetu B .

$$\min_{(X_r, Y_r)} Q(X_r, Y_r) \quad (5.2)$$

uwzględniając, że

$$(X_r, Y_r) \in \mathfrak{R}_H \quad (5.3)$$

$$d(X_r, Y_r) \leq B \quad (5.4)$$

gdzie B oznacza dopuszczalny koszt budowy sieci 2. poziomu, tj. maksymalny dopuszczalny miesięczny koszt dzierżawy kanałów tej sieci, oraz

$$d(X_r, Y_r) = \sum_{i=1}^m d^i$$

jest kosztem dzierżawy kanałów sieci 2. poziomu o przepustowościach ustalonych przez X_r i rozmieszczeniu kanałów, determinowanym przez rozmieszczenie bram, ustalonym przez Y_r .

Jak wykazaliśmy w rozdziale 2., rozpatrywany problem, podobnie jak problemy rozważane w poprzednich rozdziałach (3.2 ÷ 3.4) oraz (4.1 ÷ 4.3) należy do klasy problemów NP-zupełnych, dlatego też do jego rozwiązania również zostanie skonstruowany algorytm oparty na metodzie podziału i oszacowań.

5.3. Opis algorytmu

Do rozwiązania rozważanego problemu optymalizacji został zastosowany algorytm, oparty na metodzie podziału i oszacowań, opisany w punkcie 3.2. Przypomnijmy, że zasada działania tego algorytmu jest następująca: generowane i sprawdzane są kolejne reprezentacje (X_r, Y_r) i odpowiadające im sieci S_r . Nowa reprezentacja (X_s, Y_s) generowana jest z reprezentacji (X_r, Y_r) przez wybór pewnej zmiennej zgodnej ze zbioru X_r lub ze zbioru Y_r oraz zmiennej przeciwnej, na którą wybraną zmienną należy zamienić. Czynność ta jest realizowana za pomocą reguł podziału, na które składają się operacja wyboru i operacja regulacji:

- operacja wyboru jest stosowana do wyboru zmiennych do zamiany, jeśli dla reprezentacji (X_r, Y_r) jest spełniony warunek ograniczenia na koszt budowy sieci (5.4),
- operacja regulacji jest stosowana w przypadku, gdy ograniczenie (5.4) nie jest zachowane.

Za pomocą reguł podziału dokonujemy wyboru zmiennych do zamiany na podstawie kryterium lokalnej optymalizacji. Dla każdej reprezentacji (X_r, Y_r) sprawdzane jest, czy jest możliwe wygenerowanie z niej następnika, dla którego wartość funkcji kryterialnej (5.2) będzie mniejsza od najmniejszej dotychczas znalezionej wartości. W tym celu wyznaczane jest dolne oszacowanie funkcji kryterialnej. Jeżeli wartość dolnego oszacowania jest większa od najmniejszej dotąd znalezionej wartości funkcji kryterialnej, to bieżąca reprezentacja (X_r, Y_r) jest odrzucana i następuje cofanie się do jej poprzednika. Algorytm kończy działanie, gdy należy cofnąć się od korzenia drzewa rozwiązań, tj. od reprezentacji (X_1, Y_1) .

5.4. Dolne oszacowanie

W punkcie tym zaprezentujemy sposób wyznaczenia dolnego oszacowania LB_r uogólnionego kryterium kosztowego dla reprezentacji (X_r, Y_r) i każdego następnika (X_s, Y_s) możliwego do wygenerowania z reprezentacji (X_r, Y_r) .

Do wyznaczenia dolnego oszacowania zostanie skonstruowana sieć $\hat{S}_r$ w sposób zaprezentowany wcześniej w rozdziale 3.3. W tak skonstruowanej sieci rozluźnione zostają ograniczenia związane z wyborem przepustowości kanałów ze zbiorów ZC^i oraz z wyborem lokalizacji bram. Dla tak skonstruowanej sieci $\hat{S}_r$, dolne oszacowanie wartości $Q(X_s, Y_s)$ dla dowolnego następnika (X_s, Y_s) możliwego do wygenerowania z reprezentacji (X_r, Y_r) , można uzyskać przez rozwiązanie następującego problemu optymalizacji przepływu wieloskładnikowego i przepustowości łuków w sieci $\hat{S}_r$:

$$\min_{\underline{f}, \bar{x}^i} \frac{\alpha}{\gamma} \left(\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} \frac{f_i}{\bar{x}^i c_{\max}^{ir} - f_i} + \sum_{i: x_k^i \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^K L_1^l} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) + \sum_{i: \bar{x}^i \in XW} \bar{x}^i c_{\max}^{ir} d_{\min}^{ir} + \sum_{i: x_k^i \in F_r} d^i \quad (5.5)$$

uwzględniając ograniczenia (1.1 ÷ 1.4) oraz

$$f_i \leq c^i \text{ dla każdego } i: x_k^i \in F_r \text{ oraz } i \in \bigcup_{l=1}^K L_1^l \quad (5.6)$$

$$f_i \leq c_{\max}^{ir} \bar{x}^i \text{ dla każdego } i: \bar{x}^i \in XW \quad (5.7)$$

$$\sum_{i: \bar{x}^i \in XW} d_{\min}^{ir} c_{\max}^{ir} \bar{x}^i \leq B_r \quad (5.8)$$

$$\bar{x}^i \leq 1 \text{ dla każdego } \bar{x}^i \in XW \quad (5.9)$$

gdzie $B_r = B - d(F_r)$ oraz $d(F_r) = \sum_{i: x_k^i \in F_r} d^i$.

Ponieważ funkcja w zależności (5.5) nie jest wypukła ze względu na zmienne $\underline{f}$ oraz $\bar{x}^i$, znalezienie globalnego minimum dla problemu (5.5 ÷ 5.9), (1.1 ÷ 1.4) jest zadaniem trudnym. Zamiast znajdować globalne minimum, można funkcję z zależności (5.5) oszacować od dołu przez funkcję wypukłą. W kolejnych punktach zostaną przedstawione dwa różne sposoby wyznaczenia tego oszacowania, z których wynikają dwa różne dolne oszacowania problemu (5.5 ÷ 5.9), (1.1 ÷ 1.4).

5.4.1. Dolne oszacowanie LB_{r5}

W problemie (5.5 ÷ 5.9), (1.1 ÷ 1.4) pominiemy ograniczenie (5.8). Spowoduje to rozszerzenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych i tym samym rozwiązanie problemu (5.5 ÷ 5.7), (5.9) oraz (1.1 ÷ 1.4) będzie nie większe od rozwiązania problemu z ograniczeniem (5.8). Problem (5.5 ÷ 5.7), (5.9) można rozwiązać względem zmiennych $\bar{x}^i$ dla każdego $i: \bar{x}^i \in XW$, przyjmując że zmienne $\underline{f}$ są ustalone, następnie względem $\underline{f}$ korzystając z rozwiązania względem zmiennych $\bar{x}^i$ uwzględniając ograniczenia (1.1 ÷ 1.4). Do rozwiązania problemu (5.5 ÷ 5.7) oraz (5.9) względem zmiennych $\bar{x}^i$ skorzystamy z warunków Kuhna-Tuckera [28], [64] dla zadań optymalizacyjnych z ograniczeniami nierównościami. Warunki konieczne optymalności Kuhna-Tuckera dla tego problemu przedstawiają się następująco:

$$\frac{-\alpha f_i c_{\max}^{ir}}{\gamma (c_{\max}^{ir} \bar{x}^i - f_i)^2} + c_{\max}^{ir} d_{\min}^{ir} - \lambda_i c_{\max}^{ir} = 0 \text{ dla każdego } i: \bar{x}^i \in XW \quad (5.10)$$

$$\lambda_i (f_i - \bar{x}^i c_{\max}^{ir}) = 0 \text{ dla każdego } i: \bar{x}^i \in XW \quad (5.11)$$

Wartości mnożników λ_i wynikają z zależności (5.11). Dla $\lambda_i > 0$ zachodziłoby $f_i - \bar{x}^i c_{\max}^{ir} = 0$, co po podstawieniu do równania (5.10) daje lewą stronę równania (5.10) równą $-\infty$, stąd dla każdego $i: \bar{x}^i \in XW$ mamy $\lambda_i = 0$. Po uwzględnieniu, że $\lambda_i = 0$ dla każdego $i: \bar{x}^i \in XW$ z równania (5.10) wyznaczamy $\bar{x}^i$:

$$\bar{x}^i = \frac{\sqrt{\frac{\alpha f_i}{\gamma d_{\min}^{ir}}} + f_i}{c_{\max}^{ir}} \quad (5.12)$$

Po podstawieniu zależności (5.12) do równania (5.5) otrzymujemy następujący problem optymalizacyjny:

$$\min_{\underline{f}} 2\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \sum_{i: \bar{x}^i \in XW} \sqrt{d_{\min}^{ir} f_i} + \sum_{i: \bar{x}^i \in XW} d_{\min}^{ir} f_i + \sum_{i: x_k^i \in F_r} d^i + \frac{\alpha}{\gamma} \left(\sum_{i: x_k^i \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^K L_l^I} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) \quad (5.13)$$

z ograniczeniami (1.1÷1.4) oraz (5.6). Pierwszy składnik sumy (5.13) jest funkcją quasi-wklęsłą, pozostałe zaś funkcjami wypukłymi ze względu na $\underline{f}$. Dolne oszacowanie pierwszego składnika sumy (5.13) uzyskamy postępując analogicznie jak w punkcie 3.3.1, tzn. mnożąc poszczególne składniki sumy w liczniku przez $\sqrt{f_i/c_{\max}^{ir}} < 1$. Wówczas otrzymujemy następującą funkcję

$$Q'_r = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \sum_{i: \bar{x}^i \in XW} \sqrt{\frac{d_{\min}^{ir}}{c_{\max}^{ir}}} f_i + \sum_{i: \bar{x}^i \in XW} d_{\min}^{ir} f_i + \sum_{i: x_k^i \in F_r} d^i + \frac{\alpha}{\gamma} \left(\sum_{i: x_k^i \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^K L_l^I} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right). \quad (5.14)$$

Jest to funkcja wypukła i szacuje od dołu funkcję (5.13) dla każdego $\underline{f}$ spełniającego ograniczenia (1.1÷1.4), (5.6). Zatem rozwiązanie problemu

$$LB_{r5} = \min_{\underline{f}} Q'_r \quad (5.15)$$

przy uwzględnieniu ograniczeń (1.1÷1.4), (5.6) jest dolnym oszacowaniem kosztu budowy sieci S_r oraz wszystkich jej następników.

5.4.2. Dolne oszacowanie LB_{r6}

Funkcję (5.5) można oszacować od dołu korzystając z dolnych oszacowań LB_{r2} oraz LB_{r4} . Dolnym oszacowaniem średniego opóźnienia pakietu w sieci jest wyrażenie (3.21) natomiast koszt budowy sieci można oszacować od dołu za pomocą wyrażenia (4.19). Łącząc oba dolne oszacowania uzyskujemy następującą funkcję:

$$Q_r'' = \frac{\alpha}{\gamma} \left(\sum_{i: \bar{x}^i \in \mathcal{XW}} \frac{f_i}{c_{\max}^{ir} - f_i} + \sum_{i: x_k^i \in F_r} \frac{f_i}{c^i - f_i} + \sum_{i \in \bigcup_{l=1}^K L_l^I} \frac{f_i}{c^i - f_i} \right) + \sum_{i: \bar{x}^i \in \mathcal{XW}} c_{\min}^{ir} d_{\min}^{ir} + \sum_{i: x_k^i \in F_r} d^i, \quad (5.16)$$

Pierwszy składnik wyrażenia (5.16) szacuje od dołu składnik funkcji kryterialnej związany ze średnim opóźnieniem pakietu w sieci, natomiast drugi składnik wyrażenia (5.16) szacuje od dołu koszt kanałów, których przepustowość nie została jeszcze ustalona. Zatem rozwiązanie problemu

$$LB_{r6} = \min_{\underline{f}} Q_r'' \quad (5.17)$$

przy uwzględnieniu ograniczeń (1.1 ÷ 1.4), (5.6), (5.7) jest dolnym oszacowaniem uogólnionego kryterium kosztowego dla sieci S_r oraz wszystkich jej następników.

5.4.3. Dolne oszacowanie LB_r

W poprzednich punktach przedstawiono dwie propozycje dolnego oszacowania wartości $Q(X_s, Y_s)$ dla dowolnego następnika (X_s, Y_s) możliwego do wygenerowania z reprezentacji (X_r, Y_r) . Przeprowadzono szereg badań numerycznych w celu ustalenia, które z przedstawionych dolnych oszacowań jest lepsze. Badania przeprowadzono w analogiczny sposób jak w punkcie 3.3.3, przypomnijmy więc oznaczenia użyte wtedy do przedstawienia wyników porównania.

Wprowadźmy zmienną binarną $\mathcal{G}_i^5$, która przyjmuje wartość zależną od wyniku porównania dolnych oszacowań LB_{r5} i LB_{r6} przedstawionych w poprzednich punktach rozdziału. Zmienna $\mathcal{G}_i^5$ określona jest następująco:

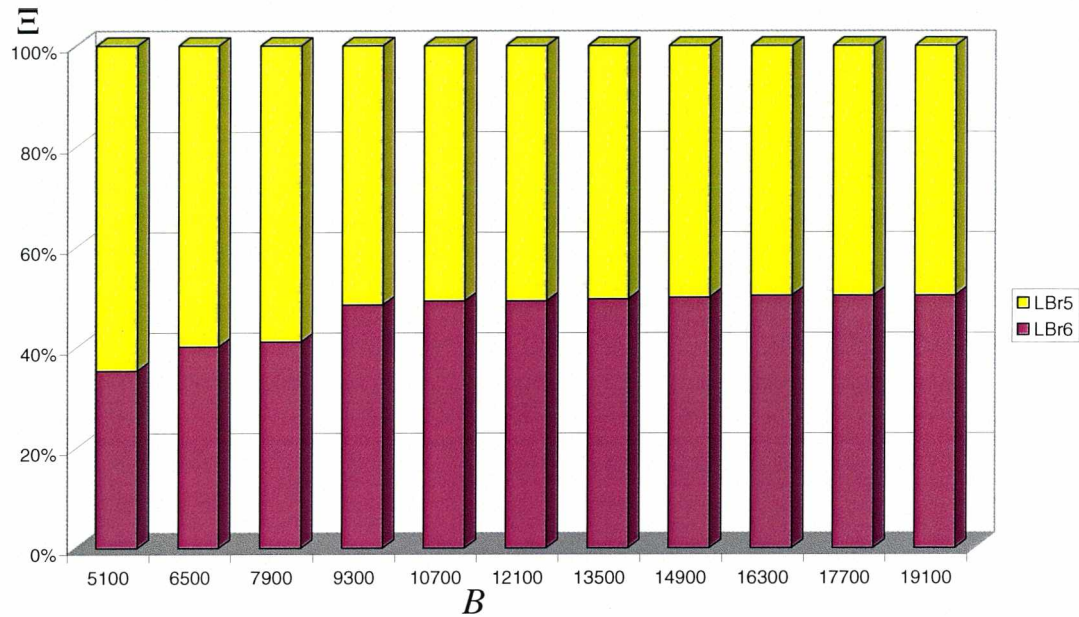
$$\mathcal{G}_i^5 = \begin{cases} 1 & LB_{r5} > LB_{r6} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Niech Ξ_5 oznacza procentowy stosunek liczby przypadków, w których $LB_{r5} > LB_{r6}$ do liczby wszystkich porównań:

$$\Xi_5 = \frac{\sum_{i=1}^M \mathcal{G}_i^5}{M} \cdot 100\%,$$

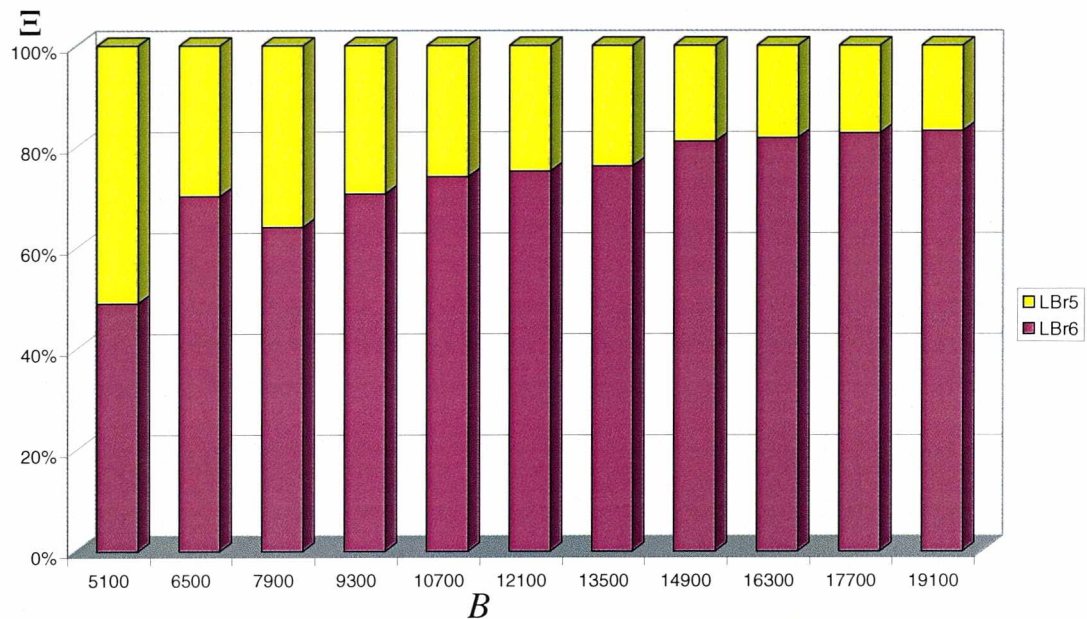
gdzie M jest liczbą porównań dolnych oszacowań. Analogicznie wyznaczamy Ξ_6 , który jest procentowym udziałem przypadków, w których $LB_{r6} \geq LB_{r5}$.

Na rysunku 5.1 przedstawione zostały wartości Ξ_5 oraz Ξ_6 dla sieci HSK-211 dla $\alpha = 1000000$, natomiast na rysunku 5.2 wyniki porównania uzyskane dla tej samej sieci dla $\alpha = 5000000$. Przedstawione zostały wartości Ξ_5 oraz Ξ_6 dla różnych wartości budżetu B .



Rys. 5.1. Porównanie dolnych oszacowań LB_{r5} i LB_{r6} dla sieci HSK-211 w zależności od budżetu B dla parametru $\alpha = 1000000$

Na rysunku 5.1 można zauważyć, że wartości wskaźników Ξ_5 oraz Ξ_6 dla wszystkich wartości budżetu B są zbliżone do 50%. Oznacza to, że większe wartości dolnego oszacowania osiągnąć były równie często za pomocą wyrażenia LB_{r5} jak i za pomocą wyrażenia LB_{r6} .



Rys. 5.2. Porównanie dolnych oszacowań LB_{r5} i LB_{r6} dla sieci HSK-211 w zależności od budżetu B dla parametru $\alpha = 5000000$

Na rysunku. 5.2 można zauważyć, że wartość Ξ_s maleje ze wzrostem wartości budżetu B od $\Xi_s = 51\%$ dla budżetu $B = 5100$ do $\Xi_s = 14,4\%$ dla budżetu $B = 19100$.

Na podstawie przeprowadzonych badań nie można jednoznacznie określić, które z zaproponowanych oszacowań lepiej przybliży wartość funkcji kryterialnej. Występują przypadki, dla których lepiej funkcję kryterialną przybliży wyrażenie LB_{r_5} jak i takie, dla których bliższe oszacowanie uzyskuje się za pomocą wyrażenia LB_{r_6} . Dlatego też w dalszej części rozdziału wyznaczane będą oba dolne oszacowania LB_{r_5} oraz LB_{r_6} i jako dolne oszacowanie wartości $Q(X_s, Y_s)$, dla dowolnego następnika (X_s, Y_s) możliwego do wygenerowania z reprezentacji (X_r, Y_r) , będzie wybierane większe z nich:

$$LB_r = \max\{LB_{r_5}, LB_{r_6}\} . \quad (5.18)$$

5.5. Reguły podziału

Zadaniem reguł podziału jest wybór pary zmiennych, zgodnej i przeciwnej, do zamiany w celu wygenerowania następnika (X_s, Y_s) reprezentacji (X_r, Y_r) . Na reguły podziału składają się operacje *wyboru* i *regulacji*. Wybór operacji za pomocą której jest wykonywana zależy od tego, czy dla reprezentacji (X_r, Y_r) spełniony jest warunek (4.3), tj. czy średnie opóźnienie pakietu w sieci nie przekracza dopuszczalnej wartości. W przypadku, gdy warunek (4.3) jest spełniony wykonywana jest *operacja wyboru*, w przeciwnym wypadku *operacja regulacji*.

5.5.1. Operacja wyboru

Operacja ta ma na celu wybór pary zmiennych do zamiany: zmiennej zgodnej należącej do zbioru X_r lub Y_r i zmiennej do niej przeciwnej, takich by wygenerowany w ten sposób został następnik o możliwie najmniejszej wartości funkcji kryterialnej $Q(X_s, Y_s)$. Wyboru zmiennych do zamiany dokonujemy na podstawie lokalnego kryterium optymalizacji zaprezentowanego w punkcie 3.4.1. Zatem do oceny zmiennych x_k^i korzystamy z wyrażenia:

$$\bar{\Delta}_{kj}^{ir} = \alpha \Delta_{kj}^{ir} + (d_k^i - d_j^i) \quad (5.19)$$

gdzie Δ_{kj}^{ir} oznacza zmianę średniego opóźnienia pakietu i jest wyznaczane za pomocą wyrażenia (3.31), zaś drugi składnik sumy reprezentuje zmianę kosztu budowy sieci wynikającą ze zmiany przepustowości i -tego kanału. Natomiast zmienne y_a^g oceniamy korzystając z wyrażenia:

$$\bar{\delta}_{ab}^{gr} = \alpha \delta_{ab}^{gr} + \sum_{i: (g, g_2) \in V^g} (d_{ea}^{ij} - d_{eb}^{ij}) \quad (5.20)$$

gdzie zmiana średniego opóźnienia pakietu reprezentowana jest przez δ_{ab}^{gr} , które wyznaczane jest korzystając z wyrażenia (3.25), a drugi składnik sumy reprezentuje zmianę kosztu budowy sieci spowodowaną zmianą lokalizacji bramy g .

Przypomnijmy sposób konstrukcji zbiorów E_r oraz M_r : $E_r = (X_r \cup Y_r) - F_r$ jest zbiorem takich zmiennych x_k^i oraz y_a^g , które mogą zostać zamienione na zmienne przeciwne. Natomiast przez M_r oznaczamy zbiór zmiennych przeciwnych do zmiennych ze zbioru E_r , takich, że zamiana na nie może zmniejszyć wartość funkcji kryterialnej. Zmienne $x_k^i \in M_r$ odpowiadają mniejszym przepustowościom kanałów od tych wyznaczonych przez zmienne ze zbioru E_r . Natomiast zmienne $y_a^g \in M_r$, to wszystkie zmienne przeciwne do zmiennych należących do zbioru E_r , na które można dokonać zamiany, dla których wartość wyrażenia (5.20) jest większa od zera.

Do zamiany należy wybrać te zmienne ze zbioru M_r , dla których wartość wyrażenia (5.19) lub (5.20) jest największa.

5.5.2. Operacja regulacji

Operacja ta ma na celu wybór pary zmiennych: zmiennej zgodnej należącej do zbioru X_r lub Y_r i zmiennej do niej przeciwnej do zamiany, takich by wygenerowany w ten sposób został następnik o mniejszej wartości kosztu budowy sieci. Wybór ten jest dokonywany na podstawie lokalnego kryterium optymalizacji zaprezentowanego w punkcie 3.4.2. Do zamiany wybierana jest taka para zmiennych, dla której koszt budowy sieci zmniejszy się najbardziej. Do oceny zmiennych x_k^i korzystamy z wyrażenia (3.26), natomiast do oceny zmiennych y_a^g z wyrażenia (3.28). Przypomnijmy, że przez P_r oznaczamy zbiór takich zmiennych przeciwnych do zmiennych ze zbioru E_r , że zamiana na nie może zmniejszyć koszt budowy sieci. Zmienne $x_k^i \in P_r$ odpowiadają mniejszym przepustowościom kanałów od tych wyznaczonych przez zmienne ze zbioru E_r . Natomiast zmienne $y_a^g \in P_r$ to wszystkie zmienne przeciwne do zmiennych należących do zbioru E_r , na które można dokonać zamiany, dla których wartość wyrażenia (3.26) jest większa od zera.

Podobnie jak w przypadku operacji wyboru, do zamiany należy wybrać te zmienne ze zbioru P_r , dla których wartość wyrażenia (3.26) lub (3.28) jest największa.

5.6. Algorytm

Niech $(X_1, Y_1) \in \mathcal{R}_H$ będzie reprezentacją początkową taką, że spełniony jest warunek (5.3). Niech F_r oznacza zbiór zmiennych ustalonych chwilowo lub trwale, F_r^t zbiór zmiennych ustalonych tymczasowo w r -tej iteracji algorytmu, natomiast $d(F_r)$ oznacza sumę kosztów łuków, których rozmieszczenie i przepustowość określone są przez zmienne należące do zbioru F_r . Przyjmujemy, że dla reprezentacji początkowej $F_1 = \emptyset$, $F_1^t = \emptyset$ i $Q^* = \infty$.

Krok 1. Wyznaczanie dolnego oszacowania

Jeżeli $d(F_r) > B$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie wyznaczyć LB_r .

Jeżeli $LB_r \geq Q^*$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie przejść do kroku 2.

Krok 2. Wyznaczanie wartości kryterium

Obliczyć $Q(X_r, Y_r)$ oraz $d(X_r, Y_r)$.

Jeżeli $d(X_r, Y_r) \leq B$, to wyznaczyć zbiór M_r oraz podstawić $M_r = M_r - F_r^t$.

Jeżeli $Q(X_r, Y_r) < Q^*$, to podstawić $Q^* = Q(X_r, Y_r)$ i $(X_*, Y_*) = (X_r, Y_r)$.

Przejsć do kroku 3.

Jeżeli $d(X_r, Y_r) > B$, to wyznaczyć zbiór P_r oraz podstawić $P_r = P_r - F_r^t$.

Przejsć do kroku 4.

Krok 3. Operacja wyboru

Jeżeli $M_r = \emptyset$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie wybrać takie zmienne przeciwne $x_j^i, y_b^g \in M_r$ oraz takie zmienne zgodne $x_k^i, y_a^g \in E_r$ dla których wartości

wyrażeń (5.19), (5.20) są największe. Następnie wygenerować reprezentację (X_s, Y_s) w następujący sposób: jeśli wartość wyrażenia (5.19) jest większa od

wartości (5.20) to: $X_s = (X_r - \{x_k^i\}) \cup \{x_j^i\}$, $Y_s = Y_r$, $F_s = F_r \cup \{x_j^i\}$, $F_s^t = F_r^t$,

w przeciwnym razie: $Y_s = (Y_r - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$, $X_s = X_r$, $F_s = F_r \cup \{y_b^g\}$, $F_s^t = F_r^t$.

Przejsć do kroku 1.

Krok 4. Operacja regulacji

Jeżeli $P_r = \emptyset$, to przejść do kroku 5. W przeciwnym razie wybrać takie zmienne przeciwne $x_j^i, y_b^g \in P_r$, oraz takie zmienne zgodne $x_k^i, y_a^g \in E_r$, dla których wartości

wyrażeń (3.26), (3.28) są największe. Następnie wygenerować reprezentację (X_s, Y_s) w następujący sposób: jeśli wartość wyrażenia (3.26) jest większa od

wartości (3.28) to $X_s = (X_r - \{x_k^i\}) \cup \{x_j^i\}$, $Y_s = Y_r$, $F_s = F_r \cup \{x_j^i\}$, $F_s^t = F_r^t$,

w przeciwnym razie: $Y_s = (Y_r - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$, $X_s = X_r$, $F_s = F_r \cup \{y_b^g\}$, $F_s^t = F_r^t$.

Przejsć do kroku 1.

Krok 5. *Operacja cofania*

Cofnąć się do poprzednika (X_p, Y_p) , z którego została wygenerowana reprezentacja (X_r, Y_r) . Jeżeli reprezentacja (X_r, Y_r) nie ma poprzedników, to zakończyć obliczenia. Reprezentacja (X_*, Y_*) związana z aktualną wartością Q^* jest rozwiązaniem optymalnym. W przeciwnym razie uaktualnić dane dla (X_p, Y_p) w następujący sposób: Jeżeli reprezentacja S_r została wygenerowana z (X_p, Y_p) poprzez zamianę zmiennej zgodnej na zmienną przeciwną $x_j^i \in X_r$, to wykonać $F_p' = F_p' \cup \{x_j^i\}$. Jeżeli wszystkie zmienne przeciwe do zmiennej zgodnej x_k^i należą do F_p' , to wykonać $F_p = F_p \cup \{x_k^i\}$ i $F_p' = F_p' - X^i$. Jeżeli sieć S_r została wygenerowana z sieci S_p poprzez zamianę zmiennej zgodnej na zmienną przeciwną $y_b^g \in Y_r$, to wykonać $F_p' = F_p' \cup \{y_b^g\}$. Jeżeli wszystkie zmienne przeciwe do zmiennej zgodnej y_a^g należą do F_p' , to wykonać $F_p = F_p \cup \{y_a^g\}$ oraz $F_p' = F_p' - Y^g$.
Przejsć do kroku 1.

5.7. Wyznaczanie reprezentacji początkowej

W rozdziale tym zostanie przedstawiony algorytm heurystyczny dla wyznaczania reprezentacji początkowej (X_1, Y_1) . Rozwiązanie uzyskane za pomocą tego algorytmu musi należeć do zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Algorytm heurystyczny musi więc znaleźć takie rozmieszczenie bram oraz ustalić takie przepustowości kanałów sieci 2. poziomu, że:

- reprezentacja $(X_1, Y_1) \in \mathcal{R}_H$,
- dla sieci S_1 istnieje przepływ wieloskładnikowy realizujący zadaną macierz z zewnątrz wprowadzanych natężeń,
- koszt budowy sieci S_1 odpowiadającej reprezentacji (X_1, Y_1) spełnia ograniczenie (5.3),
- wartość funkcji kryterialnej (5.1) jest możliwie mała.

Do wyznaczenia reprezentacji początkowej zaproponowany został algorytm podobny do algorytmu przedstawionego w rozdziale 3.6. Idea działania algorytmu jest następująca. Zbiór $Y_1^{(1)}$ reprezentujący początkowe położenie bram ustalany jest w taki sposób, aby koszt kanałów sieci 2. poziomu był jak najmniejszy. Tworzona jest sieć $S_1^{(1)}$ z rozmieszczeniem bram ustalonym przez zbiór $Y_1^{(1)}$ i przepustowościami kanałów w sieci 2. poziomu przyjmującymi największe dostępne wartości. Jeśli zbudowana w ten sposób sieć nie jest spełnia ograniczenia (5.3), wykonywana jest operacja zmniejszania kosztu budowy sieci: wybierana jest brama, której lokalizację należy zmienić lub kanał, którego przepustowość należy zmniejszyć. Wybór kanału lub bramy dokonywany jest na podstawie odpowiednio wyrażeń (3.26) i (3.28). Koszt sieci jest zmniejszany tak długo, aż zostanie spełnione ograniczenie na koszt budowy sieci (5.3). Jeśli ograniczenie (5.3) jest spełnione, to bieżąca wartość kryterium $Q(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ jest porównywana z wartością najlepszego dotąd znalezionej rozwiązania Q^* . Następnie w każdej iteracji algorytmu podejmowana jest próba poprawienia wartości funkcji kryterialnej. Wybierany jest kanał, którego przepustowość należy zmienić lub brama, której lokalizację należy zmienić. Wybierany jest kanał, dla którego wartość wyrażenia (5.19) jest największa oraz brama o największej wartości wyrażenia (5.20). Jeżeli większa jest wartość wyrażenia (5.19) to zmieniana jest przepustowość wybranego kanału, w przeciwnym wypadku zmieniana jest lokalizacja wybranej bramy. Po każdej zmianie lokalizacji bramy lub przepustowości kanału, nowa wartość funkcji kryterialnej Q porównywana jest z tą sprzed zmiany lokalizacji bramy. Lokalizacja bramy lub przepustowość kanału o większej wartości funkcji kryterialnej Q jest odrzucana, tj. dodawana jest do zbioru sprawdzonych przepustowości kanałów i lokalizacji bram. Algorytm kończy pracę, kiedy dla każdej bramy, zbiór węzłów do których można przenieść lokalizację bramy jest pusty i nie istnieje żaden kanał, którego przepustowość można zmienić.

Algorytm WRP3

Niech $(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ oznacza początkową reprezentację w r -tej iteracji algorytmu heurystycznego. Wprowadźmy zbiór zmiennych, które zostały już sprawdzone w poprzednich iteracjach algorytmu i oznaczmy go przez $F^{(r)}$. Niech $Q^* = \infty$, $r = 1$.

Krok 0. *Wyznaczenie początkowych rozmieszczeń bram oraz przepustowości kanałów*

Podstawić $X_1^{(1)} = \bigcup_{i=1}^m \{x_i^i\}$. Wyznaczyć $Y_1^{(1)}$ takie, że $d(X_1^{(1)}, Y_1^{(1)}) = \min_{y_a^g} d(X_1^{(1)}, Y_r)$

Krok 1. *Sprawdzenie ograniczenia na koszt budowy sieci*

Wyznaczyć $\underline{f}^{(r)}$ oraz $d(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$. Jeżeli $d(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)}) > B$, to przejść do kroku 2.

W przeciwnym razie przejść do kroku 7.

Krok 2. *Sprawdzenie wartości kryterium*

Wyznaczyć $Q(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$. Jeżeli $Q(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)}) < Q^*$, to podstawić $Q^* = Q(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ oraz $(X_1^*, Y_1^*) = (X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$.

Przejsć do kroku 3.

Krok 3. *Poprawianie wartości funkcji kryterialnej*

Wybrać taką parę zmiennych $x_k^i \in X_1^{(r)}$ i $x_j^i \in X^i - (F^{(r)} \cup X_1^{(r)})$ dla których wartość wyrażenia (5.19) jest największa. Wybrać taką parę zmiennych $y_a^g \in Y_1^{(r)}$ i $y_b^g \in Y^g - (F^{(r)} \cup Y_1^{(r)})$, dla których wartość wyrażenia (5.20) jest największa.

Jeżeli nie można znaleźć takich par zmiennych, tj. dla każdej bramy g zachodzi $Y^g - (F^{(r)} \cup Y_1^{(r)}) = \emptyset$ i dla każdego kanału i zachodzi $X^i - (F^{(r)} \cup X_1^{(r)}) = \emptyset$, to przejść do kroku 8.

Jeżeli wartość wyrażenia (5.20) jest większa od wartości wyrażenia (5.19), podstawić $Y_1^{(r+1)} = (Y_1^{(r)} - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$

W przeciwnym razie podstawić $X_1^{(r+1)} = (X_1^{(r)} - \{x_k^i\}) \cup \{x_j^i\}$.

Krok 4. *Ocena nowego rozwiązania*

Wyznaczyć $\underline{f}^{(r+1)}$ oraz $Q(X_1^{(r+1)}, Y_1^{(r+1)})$.

Jeżeli $Q(X_1^{(r+1)}, Y_1^{(r+1)}) \leq Q(X_1^{(r)}, Y_1^{(r)})$ przejść do kroku 5.

W przeciwnym razie przejść do kroku 6.

Krok 5. *Zapamiętanie bieżącego rozwiązania*

Jeżeli $X_1^{(r+1)} = X_1^{(r)}$ podstawić $F^{(r+1)} = F^{(r)} \cup \{y_a^g\}$, $r = r + 1$.

Jeżeli $Y_1^{(r+1)} = Y_1^{(r)}$ podstawić $F^{(r+1)} = F^{(r)} \cup \{x_k^i\}$, $r = r + 1$.

Przejsć do kroku 1.

Krok 6. *Porzucenie bieżącego rozwiązania*

Jeżeli $X_1^{(r+1)} = X_1^{(r)}$ podstawić $F^{(r)} = F^{(r)} \cup \{y_b^g\}$

Jeżeli $Y_1^{(r+1)} = Y_1^{(r)}$ podstawić $F^{(r)} = F^{(r)} \cup \{x_j^i\}$

Przejsć do kroku 3.

Krok 7. *Zmniejszenie kosztu budowy sieci*

Wybrać taką parę zmiennych $x_k^i \in X_1^{(r)}$ i $x_j^i \in X^i - (F^{(r)} \cup X_1^{(r)})$ dla której wartość wyrażenia (3.26) jest największa. Wybrać taką parę zmiennych $y_a^g \in Y_1^{(r)}$ i $y_b^g \in Y^g - (F^{(r)} \cup Y_1^{(r)})$, dla której wartość wyrażenia (3.28) jest największa.

Jeżeli nie można znaleźć takich par zmiennych, tj. dla każdej bramy g zachodzi $Y^g - (F^{(r)} \cup Y_1^{(r)}) = \emptyset$ i dla każdego kanału i zachodzi $X^i - (F^{(r)} \cup X_1^{(r)}) = \emptyset$ lub obie wartości (3.26) i (3.28) są mniejsze od zera to przejść do kroku 8.

Jeżeli wartość wyrażenia (3.28) jest większa od wartości wyrażenia (3.26) podstawić $Y_1^{(r+1)} = (Y_1^{(r)} - \{y_a^g\}) \cup \{y_b^g\}$

W przeciwnym razie podstawić $X_1^{(r+1)} = (X_1^{(r)} - \{x_k^i\}) \cup \{x_j^i\}$

Przejsć do kroku 1.

Krok 8. *Zakończenie działania algorytmu*

Zakończyć działanie algorytmu. Jeżeli $Q^* = \infty$ to zadanie nie ma rozwiązania.

W przeciwnym razie sieć S_* związana z aktualną wartością Q^* jest rozwiązaniem przybliżonym, dla którego istnieje przepływ realizujący zadaną macierz z zewnątrz wprowadzanych natężeń oraz spełniającym ograniczenie (5.3), natomiast $(X_1, Y_1) = (X_1^*, Y_1^*)$ jest reprezentacją początkową dla algorytmu dokładnego.

5.8. Eksperymenty obliczeniowe

W poprzednich punktach tego rozdziału przedstawiony został algorytm dokładny do wyznaczania rozmieszczenia bram, przepływów i przepustowości kanałów w hierarchicznej sieci rozległej minimalizujący liniową kombinację średniego opóźnienia pakietu w sieci i kosztu budowy sieci przy ograniczeniu na średnie opóźnienie pakietu w sieci. Algorytmy dokładny i heurystyczny zostały zaimplementowane w języku C++. Przedstawimy wyniki przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych, których celem było zbadanie własności problemu optymalizacji (5.2÷5.4) sformułowanego w rozdziale 5.1. Przedstawione zostaną również wnioski wynikające z przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych.

5.8.1. Definicje

W punkcie tym zdefiniujemy wielkości, które pozwolą zaprezentować własności rozważanego problemu optymalizacji. Niech wartość funkcji kryterialnej uzyskana w wyniku rozwiązania problemu (5.2 ÷ 5.4) oznaczona będzie przez Q^{opt} , przez T^{opt} będziemy oznaczać wartość średniego opóźnienia pakietu w sieci uzyskaną w wyniku rozwiązania problemu optymalizacyjnego (5.2 ÷ 5.4), natomiast d^{opt} będzie kosztem budowy rozległej sieci uzyskanym w wyniku rozwiązania problemu (5.2 ÷ 5.4), tzn. w wyniku rozwiązania problemu (5.2 ÷ 5.4) dla zadanej wartości α uzyskujemy następujące wyrażenie: $Q^{opt} = \alpha \cdot T^{opt} + d^{opt}$. Współczynnik α ma istotny wpływ na wyniki rozwiązania problemu optymalizacji jak również na przebieg optymalizacji. W celu porównania wyników badań uzyskanych dla różnych sieci wprowadzimy unormowany współczynnik α , którego wartości nie będą zależały od analizowanych sieci rozległych. Unormowany współczynnik α określony będzie następująco:

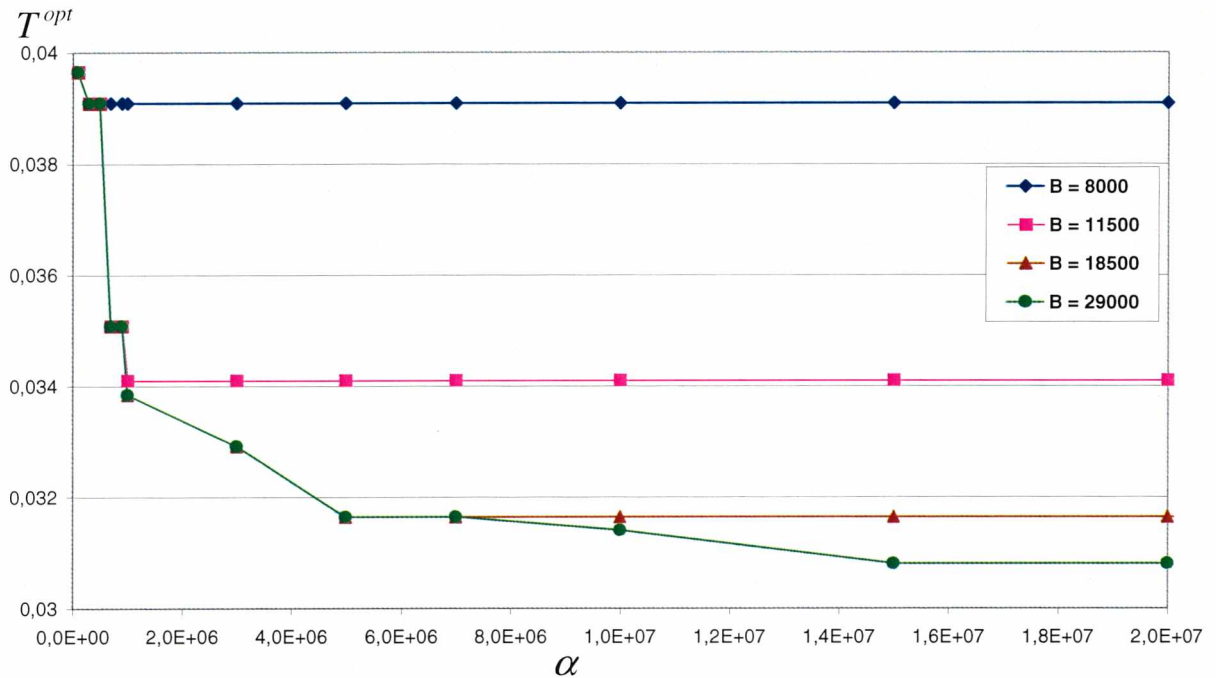
$$\bar{\alpha} = \alpha \cdot \frac{T^{\min}}{D^{\max}},$$

gdzie $T^{\min}$ jest minimalnym średnim opóźnieniem pakietu w rozległej sieci komputerowej, uzyskanym w wyniku rozwiązania problemu optymalizacji (3.2 ÷ 3.3) bez ograniczenia na koszt budowy sieci, natomiast $D^{\max}$ maksymalnym kosztem budowy hierarchicznej rozległej sieci komputerowej tj. sieci o maksymalnych dostępnych przepustowościach kanałów w sieci 2. poziomu oraz z bramami rozmieszczonymi w sieciach 1. poziomu w taki sposób, że długości kanałów sieci 2. poziomu są największe.

Przypomnijmy definicje parametrów dotyczących natężeń ruchu pakietów w sieci. Średnie natężenie strumienia pakietów pomiędzy węzłami tej samej sieci 1. poziomu oznaczamy przez ri , zaś natężenie strumienia pakietów pomiędzy węzłami różnych sieci przez ro . W przypadkach kiedy oba natężenia są równe, tj. $ri = ro$, na oznaczenie średniego natężenia strumienia pakietów stosowany jest parametr rk .

5.8.2. Badanie zależności T^{opt} od wartości współczynnika α

Celem badania było wyznaczenie zależności pomiędzy średnim opóźnieniem pakietu w sieci hierarchicznej a wartością współczynnika α . Przeprowadziliśmy badania dla wielu sieci hierarchicznych o różnych strukturach, różnych macierzach R wprowadzanych z zewnątrz natężeń, różnych przepustowościach kanałów w sieciach 1. poziomu. Rezultaty uzyskane we wszystkich przeprowadzonych badaniach nie różniły się znacząco. Na rysunkach 5.3 i 5.4 przedstawiamy wyniki uzyskane dla sieci HSK-222 z dwiema sieciami 1. poziomu, z przepustowościami kanałów w sieciach 1. poziomu równymi 128 kbit/s.



Rys. 5.3. Wykres wartości T^{opt} w zależności od wartości parametru α dla sieci HSK-222

Można zauważyć, że zależność T^{opt} od wartości parametru α jest funkcją nierosnącą. Dla budżetu o wartości $B=18500$ zależność wartości T^{opt} od α jest funkcją malejącą dla $\alpha \in (0, 5000000)$ a dla $\alpha \geq 5000000$ przyjmuje stałą wartość, natomiast dla budżetu $B=29000$ T^{opt} maleje wraz ze wzrostem α dla $\alpha \in (0, 15000000)$ i jest stała dla $\alpha \geq 15000000$. Dla każdej wartości budżetu B istnieje taka wartość parametru α powyżej której wartość T^{opt} przestaje maleć i pozostaje stała. Oznaczmy tę wartość przez α' . Można zauważyć, że wartość α' jest tym większa im większa jest wartość budżetu B . Powyższe obserwacje prowadzą do następującego wniosku:

Wniosek 5.1. Istnieje taka wartość α' , że dla każdego $\alpha \geq \alpha'$ wartość średniego opóźnienia pakietów w sieci T^{opt} pozostaje stała lub nieznacznie maleje. Wartość α' rośnie ze zwiększaniem wartości budżetu B .

W dalszej części rozdziału przedstawimy sposób wyznaczenia wartości α' . W tym celu wprowadzimy następujące oznaczenia. Niech $YA = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ będzie zbiorem wartości współczynnika α , natomiast $YT = \{T_1^{opt}, T_2^{opt}, \dots, T_s^{opt}\}$ zbiorem wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej, uzyskanych w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji (5.2 ÷ 5.4) dla odpowiednich wartości współczynnika α ze zbioru YA . Tak zatem T_1^{opt} jest wartością średniego opóźnienia pakietu uzyskaną w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji (5.2 ÷ 5.4) dla $\alpha = \alpha_1$. Niech zbiór YA będzie uporządkowany rosnąco. Dla rosnących wartości współczynnika α wartość średniego opóźnienia pakietu T^{opt} maleje, zatem najmniejszą wartością ze zbioru YT , która zostanie oznaczona przez $T_{\min}^{opt}$, jest wartość $T_{\min}^{opt} = T_s^{opt}$.

Na podstawie analizy wyników badań dla różnych struktur sieci hierarchicznych z kilkoma sieciami 1. poziomu oraz jedną siecią 2. poziomu, do przybliżenia zależności średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej od wartości współczynnika α wybraliśmy funkcję z klasy:

$$T^{opt} = \frac{u1}{\alpha - u2} + u3 \quad (5.21)$$

gdzie $u1$, $u2$ i $u3$ są współczynnikami rzeczywistymi.

Wyznaczenie wartości współczynników $u1$, $u2$ i $u3$ sprowadza się do rozwiązania zadania identyfikacji polegającego na wyborze najlepszego modelu z klasy (5.21). Jako kryterium jakości identyfikacji zostało przyjęte kryterium kwadratowe:

$$\Psi = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left(T_i^{opt} - \left(\frac{u1}{\alpha_i - u2} + u3 \right) \right)^2$$

gdzie s jest liczbą pomiarów, a T_i^{opt} jest wartością średniego opóźnienia pakietu w sieci uzyskaną w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji (5.2 ÷ 5.4) dla $\alpha = \alpha_i$.

Przedstawimy teraz przykład wyznaczenia wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$ dla przedstawionej wcześniej sieci HSK-222. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$, minimalizujące kryterium Ψ , dla wybranych wartości średniego opóźnienia pakietu T^{opt} , zostały wyznaczone numerycznie. Wyniki przedstawiliśmy zostały w tabeli 5.1.

Tabela 5.1. Wartości współczynników $u1$, $u2$, $u3$ dla sieci HSK-222

B	$u1$	$u2$	$u3$	Ψ
11500	2646.12	-315161	3.35E-02	1.11E-06
18500	6909.07	-648092	3.08E-02	9.62E-07
29000	8140.15	-741457	3.04E-02	9.20E-07

Mając wyznaczone współczynniki funkcji (5.21) można wyznaczyć wartość α' . Niech α' będzie taką wartością parametru α , dla której względna różnica pomiędzy minimalną

wartością średniego opóźnienia $T_{\min}^{opt}$ a wartością T^{opt} wyznaczoną z (5.21) będzie równa pewnej ustalonej wartości ε , czyli:

$$\frac{T^{opt}(\alpha') - T_{\min}^{opt}}{T_{\min}^{opt}} = \varepsilon \quad (5.22)$$

Po wstawieniu (5.21) do (5.22) dla $\alpha = \alpha'$, i po przekształceniach, otrzymujemy następujące wyrażenie na α' :

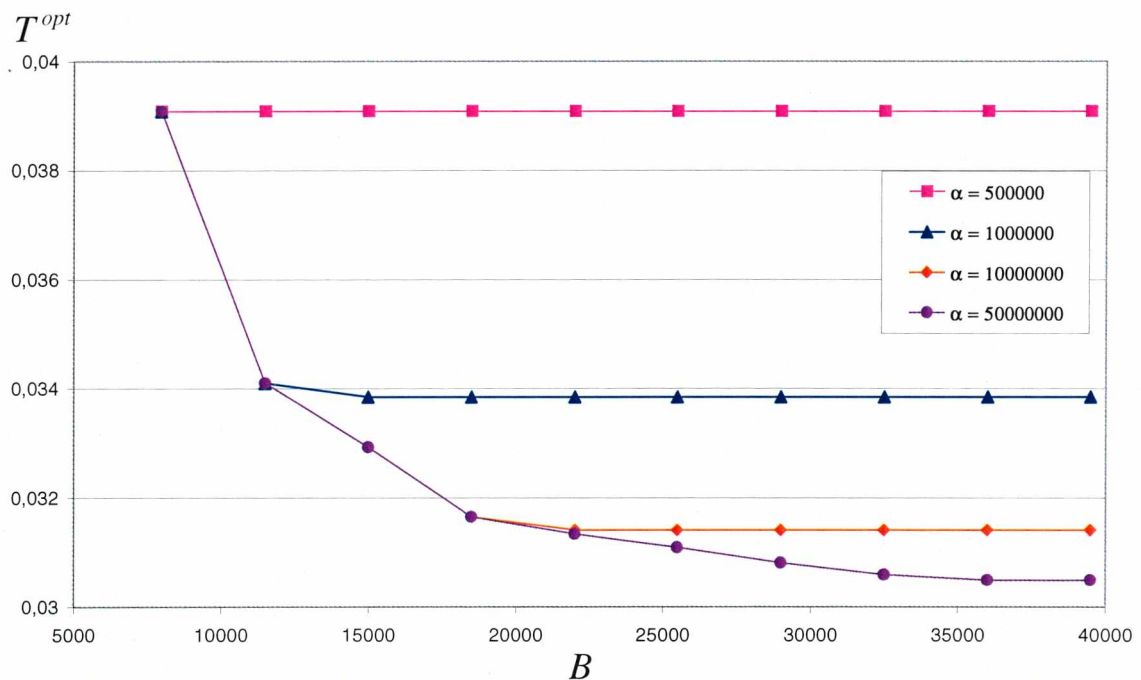
$$\alpha' = \frac{u1}{T_{\min}^{opt}(1 + \varepsilon) - u3} - u2 \quad (5.23)$$

W tabeli 5.2 zostały umieszczone wartości α' uzyskane dla sieci HSK-222 dla $\varepsilon = 0,005$.

Tabela 5.2. Wartości α' uzyskane dla sieci HSK-222

B	α'
11500	3957711
18500	7839608
29000	14665824

Uzyskane wyniki potwierdzają występowanie zależności wartości α' od wartości budżetu na budowę hierarchicznej sieci rozległej B . Potwierdzone zostało także spostrzeżenie, że wartość α' rośnie ze zwiększaniem budżetu na budowę sieci B .



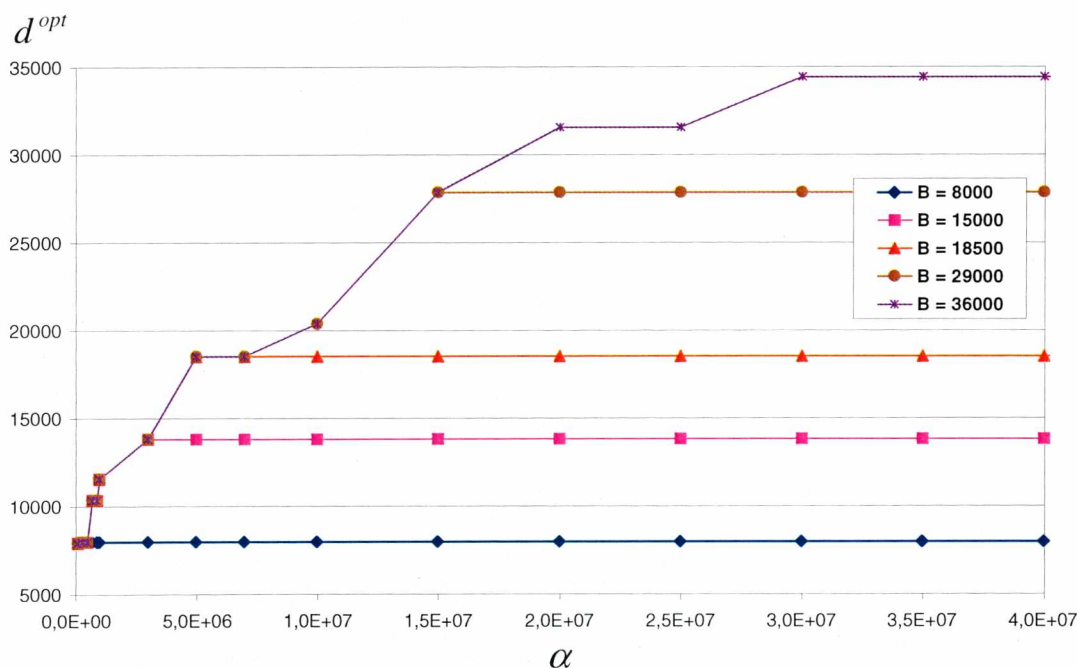
Rys. 5.4. Wykres wartości T^{opt} w zależności od wartości budżetu B dla sieci HSK-222

Na rysunku 5.4 przedstawiona została zależność wartości T^{opt} od wartości budżetu dla kilku wartości współczynnika α . Można zauważyć, że dla $\alpha = 500000$ wartość T^{opt} nie zależy od wartości budżetu. Udział kosztu średniego opóźnienia pakietu jest tak mały w funkcji kryterialnej (5.1), że zadanie optymalizacyjne (5.2 ÷ 5.4) sprowadza się do minimalizacji kosztu budowy sieci bez ograniczenia na maksymalną dopuszczalną wartość średniego opóźnienia pakietu w sieci. Wraz ze zwiększaniem wartości współczynnika α zależność średniego opóźnienia pakietu w sieci uzyskanego w wyniku rozwiązania zadania optymalizacyjnego (5.2 ÷ 5.4) zbliża się do zależności rozwiązania problemu (3.2 ÷ 3.4) od wartości budżetu przedstawionej w rozdziale 3.7.3.

Wniosek 5.2. Wartość współczynnika α wpływa znacząco na zależność wartości średniego opóźnienia pakietów w sieci T^{opt} od budżetu na budowę rozległej sieci hierarchicznej B . Dla małych wartości współczynnika α wartość T^{opt} nie zależy od wartości B .

5.8.3. Badanie zależności d^{opt} od wartości współczynnika α

Celem badania było wyznaczenie zależności pomiędzy kosztem budowy sieci a wartością współczynnika α w funkcji kryterialnej (5.1). Przebadano wiele sieci hierarchicznych o różnych strukturach, różnych macierzach R wprowadzanych z zewnątrz natężeń, różnych przepustowościach kanałów w sieciach 1. poziomu. We wszystkich badaniach uzyskaliśmy podobne wyniki. Na rysunku 5.5 przedstawiamy wyniki uzyskane dla sieci HSK-222 składającej się z dwóch sieci 1. poziomu i jednej sieci 2. poziomu, z przepustowościami kanałów w sieciach 1. poziomu równymi 128 kbit/s.



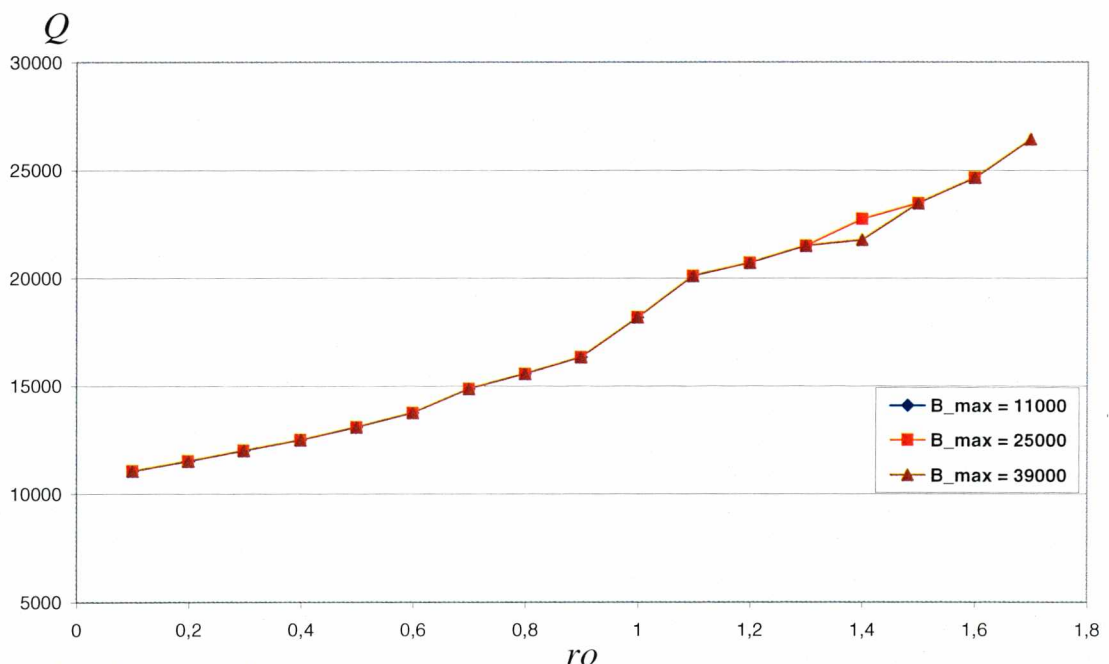
Rys. 5.5. Wykres wartości d^{opt} w zależności od wartości parametru α dla sieci HSK-222

Można zauważyć, że zależność d^{opt} od wartości parametru α jest funkcją niemalejącą. Dla budżetu o wartości $B = 18500$ zależność wartości d^{opt} od α jest funkcją rosnącą dla $\alpha \in (0, 5000000)$ a dla $\alpha > 5000000$ przyjmuje stałą wartość, natomiast dla budżetu $B = 29000$ d^{opt} rośnie wraz ze wzrostem α dla $\alpha \in (0, 15000000)$ i jest stała dla $\alpha > 15000000$. Dla każdej wartości budżetu B istnieje taka wartość parametru α powyżej której wartość d^{opt} przestaje rosnąć i pozostaje stała. Oznaczmy tę wartość przez α'' . Można zauważyć, że wartość α'' jest tym większa im większa jest wartość budżetu B . Nietrudno zauważyć, że wartość $\alpha'' = \alpha'$. Te obserwacje prowadzą do następującego wniosku:

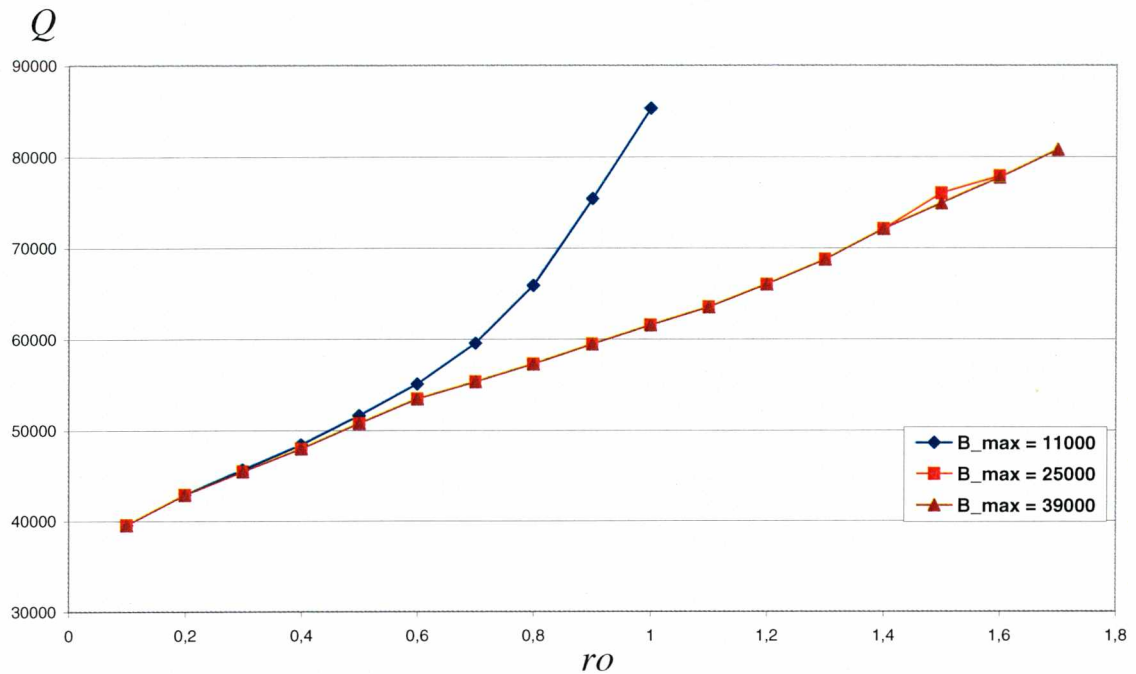
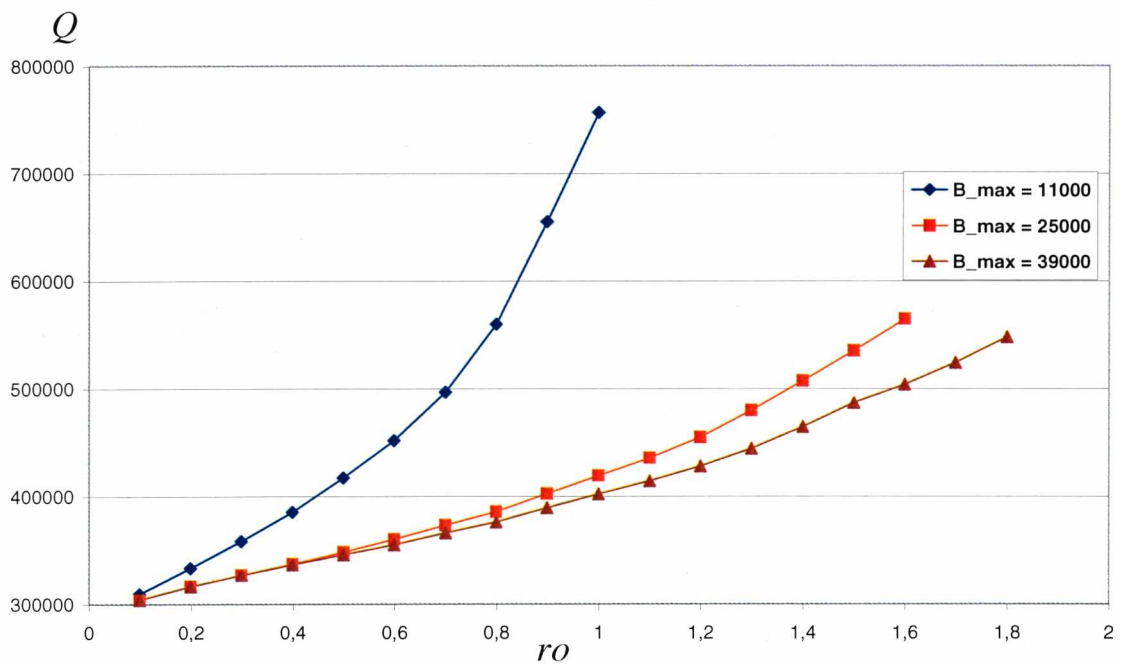
Wniosek 5.3. Istnieje taka wartość α'' , że dla każdego $\alpha \geq \alpha''$ koszt budowy sieci d^{opt} przyjmuje wartość bliską wartości zadanego budżetu B . Wartość α'' jest równa wartości α' .

5.8.4. Badanie zależności funkcji Q od parametru ro

Celem badania było wyznaczenie zależności pomiędzy wartością parametru ro a wartością funkcji kryterialnej Q . Przebadano wiele sieci hierarchicznych o różnych strukturach, różnych macierzach R wprowadzanych z zewnątrz natężeń, różnych wartościach maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci, różnych przepustowościach kanałów w sieciach 1. poziomu. Wyniki uzyskane dla wszystkich sieci nie odbiegały znacząco od siebie. Szukano zależności wartości funkcji kryterialnej Q od różnych parametrów i zauważono, że istnieje taka zależność od parametru ro . Rysunki 5.6, 5.7 oraz 5.8 przedstawiają zależność wartości Q od parametru ro dla sieci HSK-222, dla różnych wartości parametru α .



Rys. 5.6. Zależności wartości Q od wartości ro dla $\alpha = 100000$ w sieci HSK-222

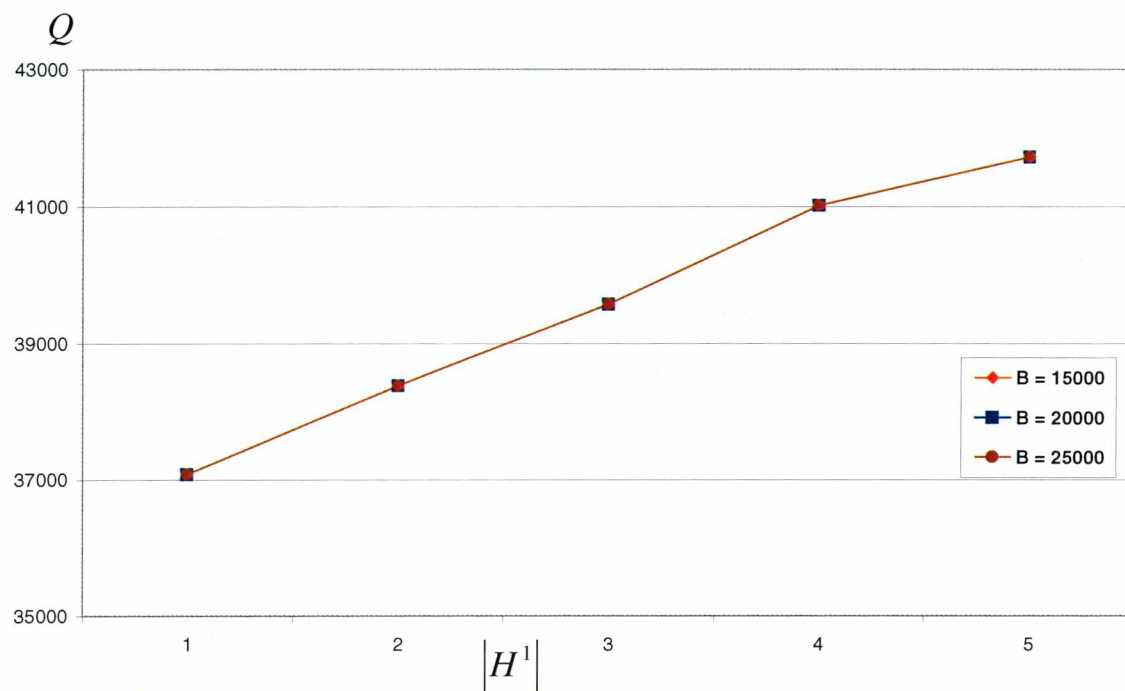
Rys. 5.7. Zależności wartości Q od wartości ro dla $\alpha = 1000000$ w sieci HSK-222Rys. 5.8. Zależności wartości Q od wartości ro dla $\alpha = 10000000$ w sieci HSK-222

Na rys. 5.6 wartość Q rośnie liniowo wraz ze zwiększaniem wartości parametru ro a wykresy odpowiadające różnym wartościom budżetu praktycznie pokrywają się. Na rys. 5.7 można zauważyć, że dla budżetu $B=11000$ wartości funkcji Q rośnie szybciej niż w przypadku większych wartości budżetu. Natomiast na rysunku 5.8 przedstawiającym zależność wartości Q od parametru ro dla $\alpha=10000000$, wartość funkcji Q rośnie zdecydowanie najwolniej dla największej wartości budżetu, tj. dla $B=39000$. Im mniejsza wartość budżetu, tym szybciej rośnie wartość funkcji kryterialnej Q ze wzrostem wartości parametru ro . Na podstawie powyższych rozważań oraz obserwacji rysunków 5.6 ÷ 5.8 można sformułować następujący wniosek:

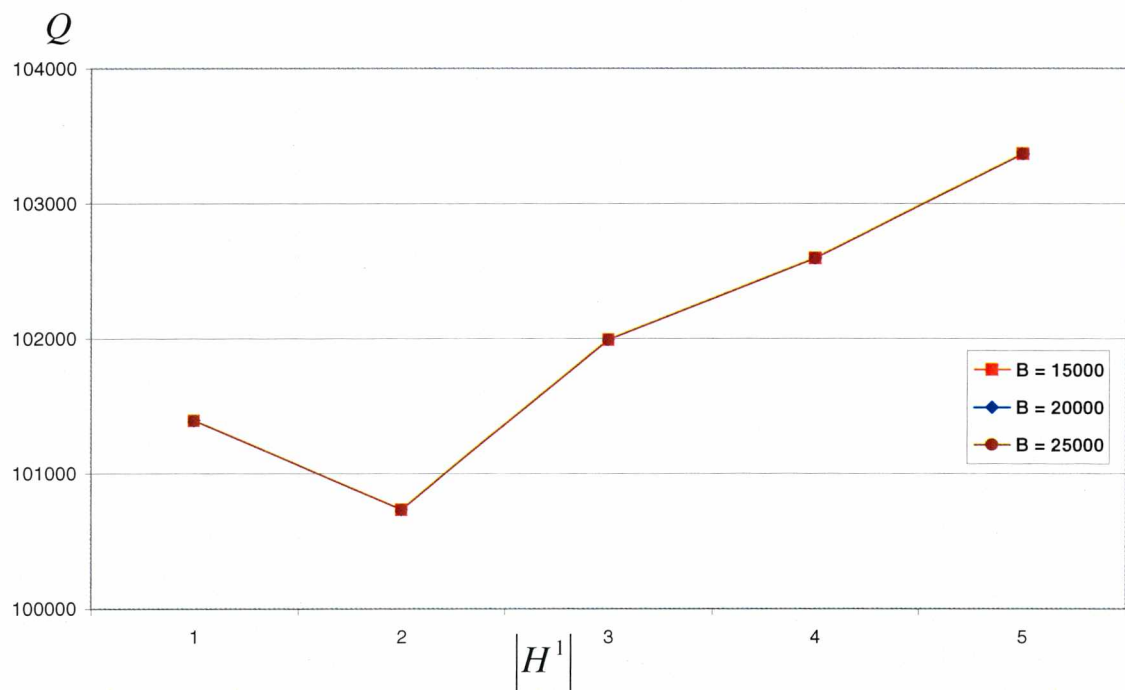
Wniosek 5.4. Dla małych wartości współczynnika α wartość budżetu B nie wpływa na zależność wartości Q od wartości parametru ro . Zwiększając wartość współczynnika α zwiększa się wpływ budżetu na wartość Q .

5.8.5. Badanie zależności funkcji Q od liczby bram w sieci

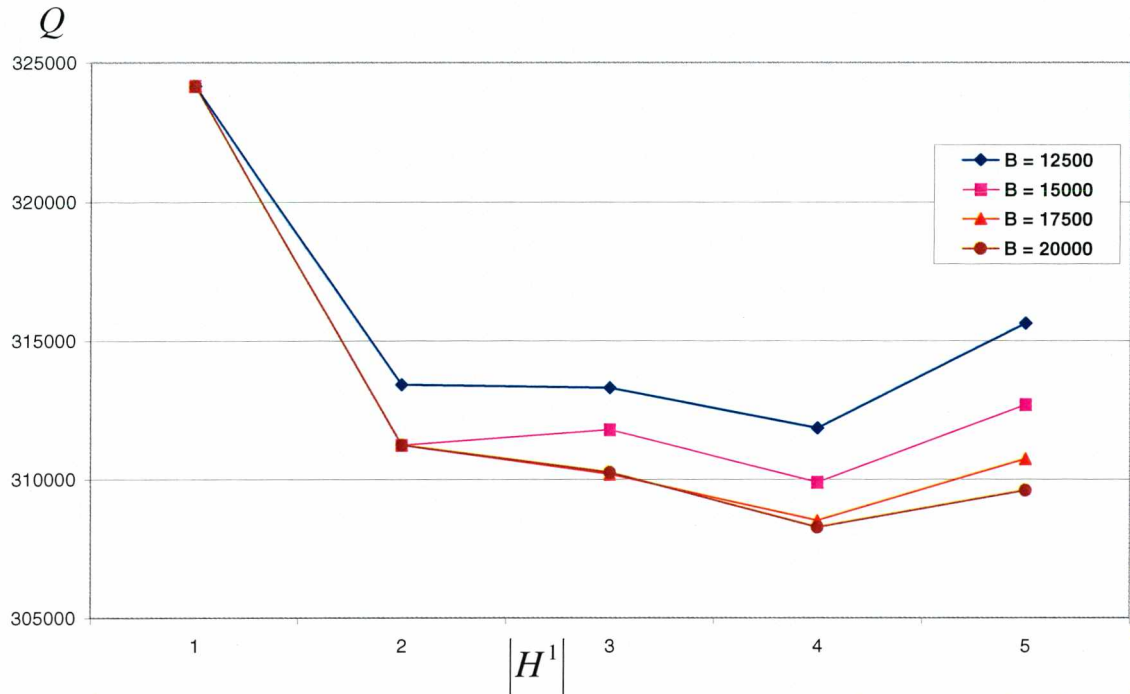
Celem badania było wyznaczenie zależności pomiędzy liczbą bram umieszczonych w jednej z sieci 1. poziomu a wartością funkcji kryterialnej (5.1). Przepadano wiele sieci hierarchicznych o różnych strukturach, różnych macierzach R wprowadzanych z zewnątrz natężeń, różnych przepustowościach kanałów w sieciach 1. poziomu, różnych wartościach budżetu B oraz różnych wartościach parametru α . We wszystkich przebadanych przypadkach uzyskane zostały podobne wyniki. Na rysunku 5.6 przedstawiliśmy wyniki uzyskane dla sieci HSK-211 do HSK-215 z dwiema sieciami 1. poziomu i jedną siecią 2. poziomu, z przepustowościami kanałów w sieciach 1. poziomu równymi 128 kbit/s. Zadanie optymalizacji (5.2 ÷ 5.4) rozwiązywane było dla wielu wartości budżetu B oraz różnych wartości parametru α , z różną liczbą bram w jednej z sieci 1. poziomu (w sieci SK-1, której struktura została przedstawiona na rys. 3.6. Na rysunku 5.9 przedstawiamy jak zmienia się wartość funkcji kryterialnej Q w zależności od liczby bram umieszczonych w sieci SK-1 dla $\alpha=1000000$. Na rysunku 5.10 przedstawiamy tą samą zależność dla $\alpha=3000000$, natomiast na rys. 5.11 oraz dla $\alpha=10000000$. Przypomnijmy, że liczbę bram w sieci SK-1 oznaczyliśmy przez $|H^1|$. Można zauważyć, że na rysunku 5.9 wartość funkcji kryterialnej Q rośnie liniowo ze wzrostem liczby bram w sieci $|H^1|$ i że wartości Q nie zależą od wartości budżetu. Najmniejszą wartość funkcja kryterialna Q przyjmuje zatem dla $|H^1|=1$ niezależnie od wartości budżetu B . Od wartości budżetu B nie zależą także wartości funkcji kryterialnej Q dla $\alpha=3000000$, które przedstawione zostały na rysunku 5.10. Można zauważyć, że charakter zależności Q od liczby bram w sieci $|H^1|$ dla $\alpha=1000000$ oraz dla $\alpha=3000000$ przypomina zależności rozwiązania problemu optymalizacji (4.1 ÷ 4.3) d^{opt} od wartości $|H^1|$ przedstawione w punkcie 4.7.4.



Rys. 5.9. Wykres wartości Q w zależności od $|H^1|$ w sieciach HSK-211 do HSK-215 dla $\alpha = 1000000$



Rys. 5.10. Wykres wartości Q w zależności od $|H^1|$ w sieciach HSK-211 do HSK-215 dla $\alpha = 3000000$

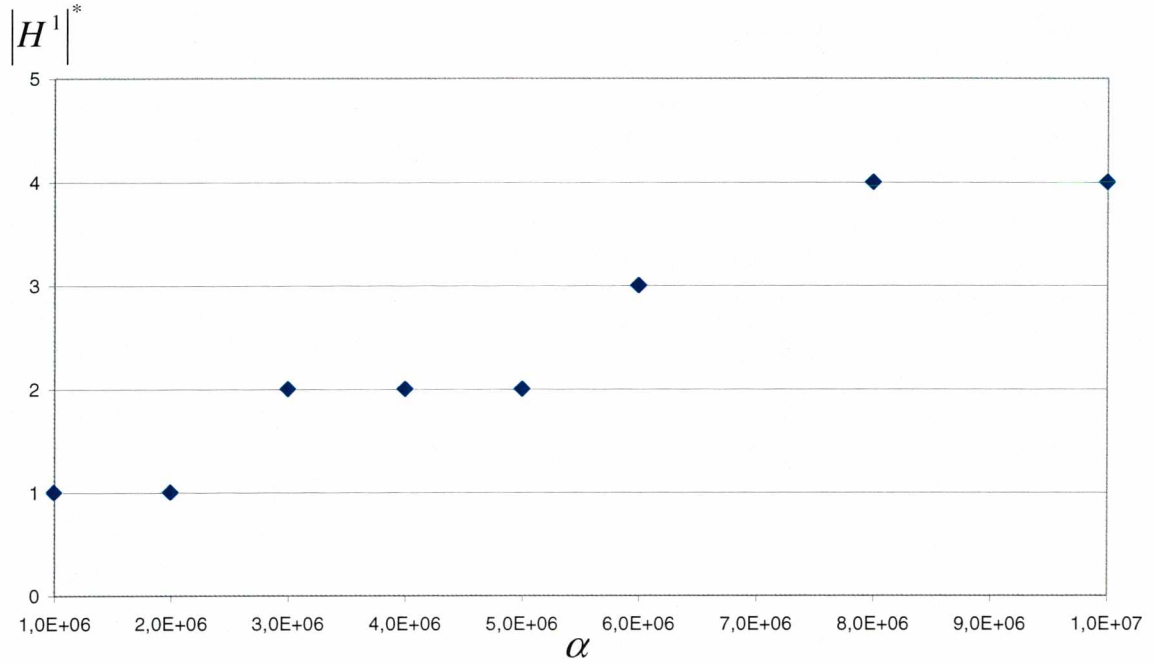


Rys. 5.11. Wykres wartości Q w zależności od $|H^1|$ w sieciach HSK-211 do HSK-215 dla $\alpha = 10000000$

Zależności wartości funkcji kryterialnej Q od liczby bram w sieci $|H^1|$ dla $\alpha = 10000000$ przedstawiona na rysunku 5.12 ma zupełnie inny charakter. Można zauważyć, że wartość budżetu B ma wpływ na wartość funkcji kryterialnej Q . Można także zauważyć podobieństwo zależności Q od liczby bram w sieci $|H^1|$ do zależności rozwiązania problemu optymalizacji (3.2 ÷ 3.4) T^{opt} od wartości $|H^1|$, która została przedstawiona w punkcie 3.7.5.

Wniosek 5.5. Wartości współczynnika α ma duży wpływ na zależność wartości Q od liczby bram w sieci $|H^1|$.

Dla każdej badanej wartości współczynnika α wyznaczyliśmy wartość $|H^1|$, dla której wartość funkcji kryterialnej Q jest najmniejsza i oznaczyliśmy ją przez $|H^1|^*$. Na rys. 5.12 przedstawiliśmy zależność wartości $|H^1|^*$ od wartości współczynnika α dla budżetu $B = 25000$. Można łatwo zauważyć, że wartość $|H^1|^*$ rośnie wraz ze zwiększaniem wartości współczynnika α . Podobna zależność występowała dla innych wartości budżetu



Rys. 5.12. Wartość $|H^1|^*$ w zależności od α dla $B = 25000$ w sieciach HSK-211 do HSK-215

Wniosek 5.6. Liczba bram w sieci 1. poziomu, dla której wartości funkcji kryterialnej Q jest najmniejsza $|H^1|^*$ rośnie wraz ze wzrostem wartości współczynnika α .

5.8.6. Badanie własności obliczeniowych algorytmu dokładnego

Celem badania było ustalenie zależności pomiędzy liczbą iteracji algorytmu potrzebną do rozwiązania problemu optymalizacji (5.2 ÷ 5.4) a wartościami parametrów występujących w rozważanym problemie. Badania przeprowadzono dla różnych sieci hierarchicznych z jedną siecią 2. poziomu i kilkoma sieciami 1. poziomu. W celu porównania wyników uzyskanych dla różnych sieci wykorzystamy pojęcie unormowanego budżetu $\bar{B}$ oraz pojęcie unormowanego parametru $\bar{r}_0$ wprowadzone w punkcie 3.7.2 oraz pojęcie unormowanego parametru $\bar{\alpha}$ wprowadzone w punkcie 5.8.1.

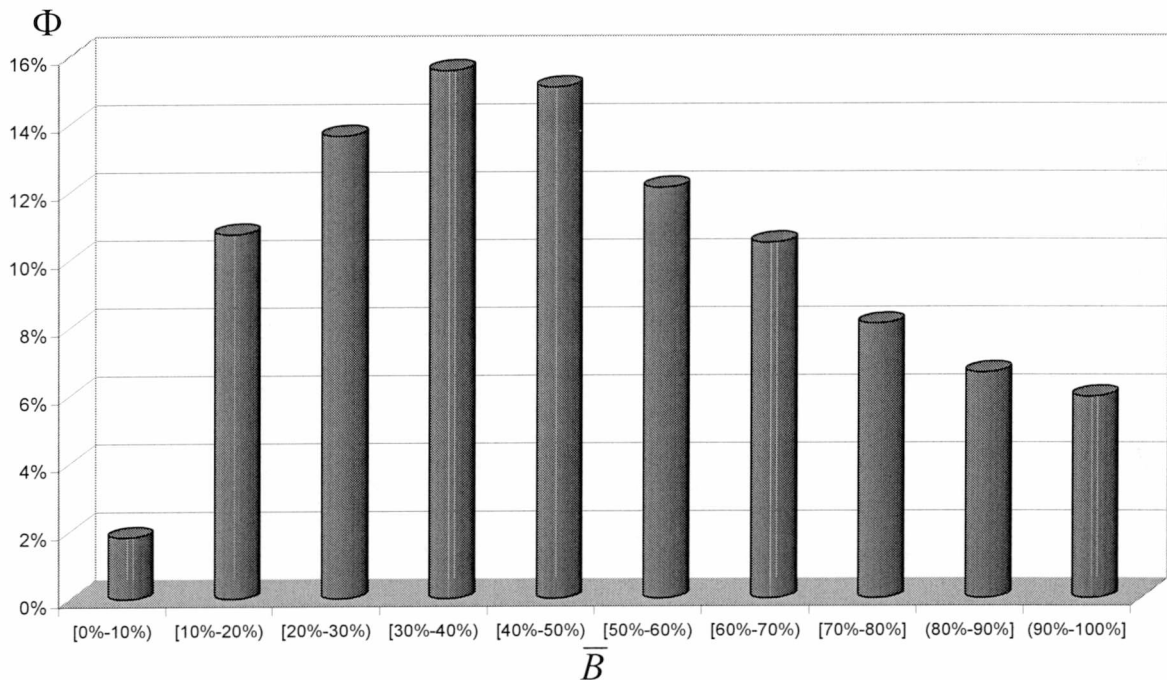
Niech $\Gamma^k(\bar{B})$ będzie liczbą iteracji algorytmu potrzebną do rozwiązania problemu optymalizacji (5.2 ÷ 5.4) dla k -tej rozległej sieci komputerowej przy unormowanym budżecie o wartości $\bar{B}$. Przez $\Phi^k(a, b)$ oznaczmy stosunek liczby iteracji algorytmu dla wartości unormowanego parametru $\bar{B}$ z przedziału (a, b) do sumy iteracji dla wszystkich wartości unormowanego parametru $\bar{B} \in [0\%, 100\%]$:

$$\Phi^k(a, b) = \frac{\sum_{\bar{B} \in (a, b)} \Gamma^k(\bar{B})}{\sum_{\bar{B} \in [0\%, 100\%]} \Gamma^k(\bar{B})} \cdot 100\%,$$

Niech $\Phi(a,b)$ będzie średnią wartością $\Phi^k(a,b)$ dla wszystkich przebadanych sieci hierarchicznych:

$$\Phi(a,b) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi^k(a,b),$$

gdzie K jest liczbą badanych hierarchicznych sieci komputerowych. Dla każdego badanego przedziału (a,b) zostało przeprowadzonych tyle samo eksperymentów. Stąd wartość $\Phi(a,b)$ ilustruje procentowy udział iteracji algorytmu dla $\bar{B}$ z przedziału (a,b) w iteracjach algorytmu wykonanych dla wszystkich przebadanych sieci. Wyniki badań przeprowadzonych dla algorytmu dokładnego do rozwiązania problemu optymalizacji (5.2 ÷ 5.4) zostały przedstawione na rys. 5.13.



Rys. 5.13. Zależność względnej liczby iteracji algorytmu dokładnego Φ od wartości $\bar{B}$

Można zauważyć, że Φ przyjmuje największe wartości dla $\bar{B} \in [20\%, 60\%)$ natomiast najmniejsze dla $\bar{B} < 10\%$ oraz dla $\bar{B} \geq 70\%$. Zwiększanie wartości unormowanego budżetu $\bar{B}$ dla $\bar{B} \geq 40\%$ powoduje, że wartość Φ wyraźnie maleje. Algorytm potrzebował najmniejszej liczby iteracji do rozwiązywania problemu optymalizacji (5.2 ÷ 5.4) dla $\bar{B} < 10\%$ oraz dla $\bar{B} \geq 70\%$.

Wniosek 5.7. Przedstawiony algorytm dokładny jest szczególnie efektywny z obliczeniowego punktu widzenia dla $\bar{B} < 10\%$ oraz dla $\bar{B} \geq 70\%$.

Przez $\Phi^k(c, d)$ oznaczmy stosunek liczby iteracji algorytmu dla wartości unormowanego parametru $\bar{\alpha}$ z przedziału (c, d) do sumy iteracji dla wszystkich wartości unormowanego parametru $\bar{\alpha} \in [0, 100]$ dla k -tej rozległej sieci komputerowej. Wartość $\Phi^k(c, d)$ wyznaczamy następująco:

$$\Phi^k(c, d) = \frac{\sum_{\bar{\alpha} \in (c, d)} \Gamma^k(\bar{\alpha})}{\sum_{\bar{\alpha} \in [0, 100]} \Gamma^k(\bar{\alpha})} \cdot 100\%$$

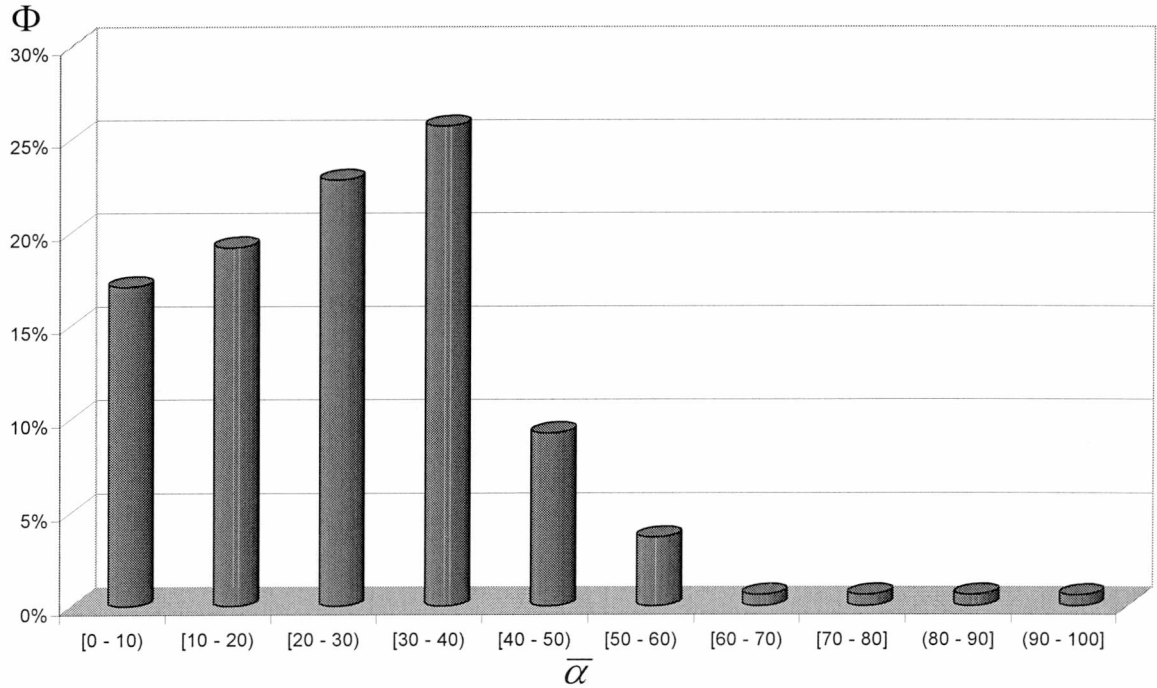
Niech $\Phi(c, d)$ będzie średnią wartością $\Phi^k(c, d)$ dla wszystkich przebadanych sieci hierarchicznych:

$$\Phi(c, d) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi^k(c, d),$$

gdzie K jest liczbą badanych hierarchicznych sieci komputerowych. Wartość $\Phi(c, d)$ ilustruje procentowy udział iteracji algorytmu $\bar{\alpha}$ z przedziału (c, d) w iteracjach algorytmu wykonanych dla wszystkich przebadanych sieci. Na rysunku 5.11 przedstawiona została zależność Φ od unormowanego parametru $\bar{\alpha}$.

Na rysunku 5.14 można zauważyć, że dla $\bar{\alpha} < 40$ wraz ze wzrostem wartości $\bar{\alpha}$ rośnie wartość Φ . Następnie wartość Φ gwałtownie spada i dla $\bar{\alpha} \geq 60$ wartości Φ są bliskie 1%.

Wniosek 5.8. Przedstawiony algorytm dokładny jest szczególnie efektywny z obliczeniowego punktu widzenia dla $\bar{\alpha} \geq 50\%$.



Rys. 5.14. Zależność względnej liczby iteracji algorytmu dokładnego Φ od parametru $\bar{\alpha}$

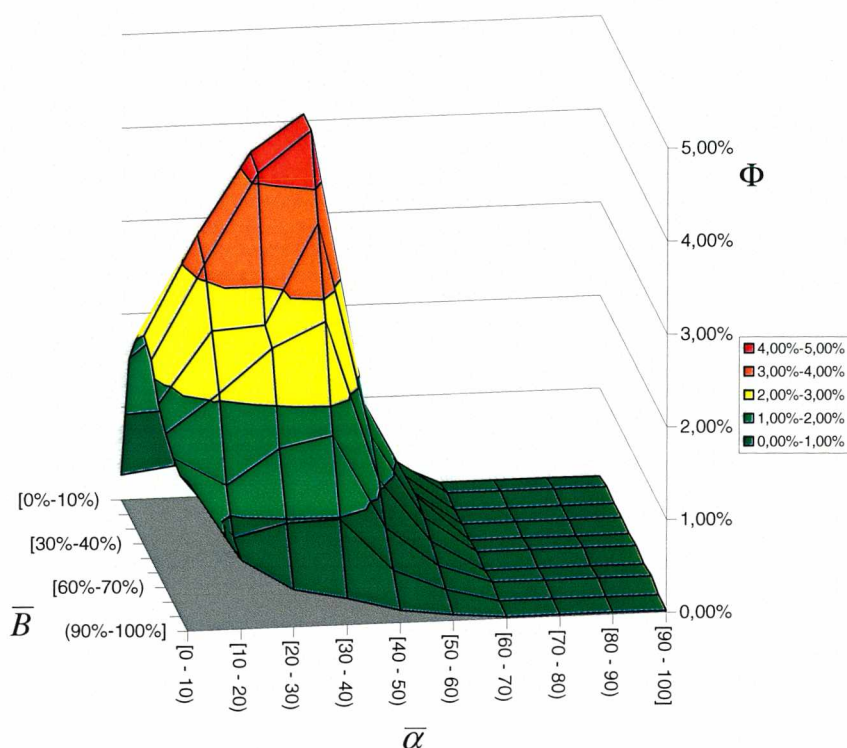
W dalszej części przedstawimy zależność Φ od obu parametrów $\bar{B}$ oraz $\bar{\alpha}$ łącznie. Niech $\Gamma^k(\bar{B}, \bar{\alpha})$ będzie liczbą iteracji potrzebną do rozwiązania problemu optymalizacji (5.2 ÷ 5.4) dla określonych wartości unormowanych parametrów $\bar{B}$ oraz $\bar{\alpha}$ dla k -tej rozległej sieci komputerowej. Przez $\Phi^k(a, b, c, d)$ oznaczmy stosunek liczby iteracji algorytmu dla wartości unormowanego parametru $\bar{B}$ z przedziału (a, b) i unormowanego parametru $\bar{\alpha}$ z przedziału (c, d) do sumy iteracji dla wszystkich wartości unormowanych parametrów, tj. $\bar{B} \in [0\%, 100\%]$ oraz $\bar{\alpha} \in [0, 100]$. Wartość $\Phi^k(a, b, c, d)$ wyznaczamy następująco:

$$\Phi^k(a, b, c, d) = \frac{\sum_{\bar{B} \in (a, b), \bar{\alpha} \in (c, d)} \Gamma^k(\bar{B}, \bar{\alpha})}{\sum_{\bar{B} \in [0, 100\%], \bar{\alpha} \in [0, 100]} \Gamma^k(\bar{B}, \bar{\alpha})} \cdot 100\%$$

Niech $\Phi(a, b, c, d)$ będzie średnią wartością $\Phi^k(a, b, c, d)$ dla wszystkich przebadanych sieci hierarchicznych:

$$\Phi(a, b, c, d) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi^k(a, b, c, d),$$

gdzie K jest liczbą badanych hierarchicznych sieci komputerowych. Wartość $\Phi(a, b, c, d)$ ilustruje procentowy udział iteracji algorytmu dla $\bar{B}$ z przedziału (a, b) oraz $\bar{\alpha}$ z przedziału (c, d) w iteracjach algorytmu wykonanych dla wszystkich przebadanych sieci. Na rys. 5.15 przedstawiona została zależność Φ od parametrów $\bar{B}$ oraz $\bar{\alpha}$. Kolorem zielonym zostały zaznaczone na wykresie obszary, w których badany algorytm dokładny potrzebował najmniejszej liczby iteracji do rozwiązania problemu optymalizacji (5.2 ÷ 5.4), czyli był najbardziej efektywny z obliczeniowego punktu widzenia. Natomiast kolorem czerwonym zostały oznaczone te obszary, dla których liczba iteracji potrzebna do rozwiązania problemu optymalizacji (5.2 ÷ 5.4) była największa.



Rys. 5.15. Zależność względnej liczby iteracji algorytmu dokładnego Φ od unormowanego budżetu $\bar{B}$ i unormowanego parametru $\bar{\alpha}$

Największe wartości względnej liczby iteracji algorytmu dokładnego Φ otrzymaliśmy dla $\bar{\alpha} \in (20, 40]$ i $\bar{B} \in (30\%, 50\%]$. Pokrywa się to z wynikami uzyskanymi podczas badania zależności Φ od parametrów $\bar{\alpha}$ i $\bar{B}$, każdego z osobna. Można także zauważyć, że dla $\bar{\alpha} \geq 50$ wartości Φ nie przekraczają 1% i nie zależą od wartości unormowanego budżetu $\bar{B}$. Natomiast dla mniejszych wartości parametru $\bar{\alpha}$ względna liczba iteracji algorytmu dokładnego $\Phi < 1\%$ dla unormowanego budżetu $\bar{B} \leq 10\%$ oraz $\bar{B} > 80\%$.

Wniosek 5.9. Przedstawiony algorytm dokładny jest szczególnie efektywny z obliczeniowego punktu widzenia dla $\bar{\alpha} \geq 60\%$ niezależnie od wartości $\bar{B}$ oraz dla $\bar{B} \leq 10\%$ oraz $\bar{B} > 80\%$ gdy $\bar{\alpha} < 60$.

5.8.7. Badanie odległości rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych

Celem badania było określenie odległości rozwiązań przybliżonych uzyskiwanych za pomocą algorytmu heurystycznego WRP3, przedstawionego w rozdziale 5.7, a rozwiązaniami uzyskanymi przez algorytm dokładny. Wyznaczone zostały zależności pomiędzy różnymi parametrami a odległością uzyskiwanych rozwiązań. Algorytm WRP3 przedstawiony został w rozdziale 5.6. Badania przeprowadzono dla różnych sieci hierarchicznych z jedną siecią

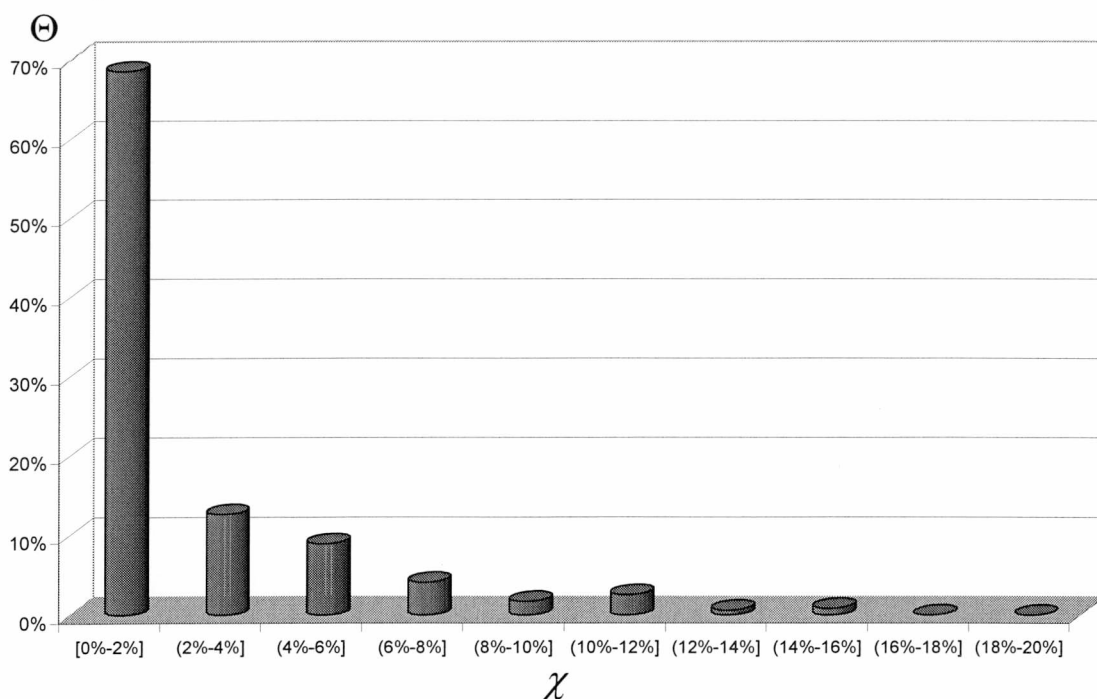
2. poziomu i kilkoma sieciami 1. poziomu. W celu porównania wyników uzyskanych dla różnych sieci wykorzystane zostaną wprowadzone w punkcie 2.8.2 pojęcie unormowanego budżetu $\bar{B}$ oraz pojęcie unormowanego parametru $\bar{\alpha}$ wprowadzone w punkcie 5.8.1.

5.8.7.1. Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych

Odległość rozwiązania przybliżonego od rozwiązania optymalnego oznaczamy przez χ i wyznaczamy następująco:

$$\chi = \frac{Q^{app} - Q^{opt}}{Q^{opt}} \cdot 100\%,$$

gdzie Q^{app} jest wartością funkcji kryterialnej (5.1) uzyskaną w wyniku działania algorytmu heurystycznego WRP3, natomiast Q^{opt} jest wartością funkcji kryterialnej (5.1) uzyskaną w wyniku rozwiązania problemu optymalizacji (5.2 ÷ 5.4) za pomocą algorytmu dokładnego. Do oceny wyników uzyskanych za pomocą algorytmu heurystycznego WRP3 użyjemy wskaźnika $\Theta(a,b)$ wprowadzonego w rozdziale 2.8.7. Przypomnijmy, że przez $\Theta(a,b)$ oznaczamy stosunek liczby rozwiązań przybliżonych, dla których spełniony jest warunek $\chi \in (a,b)$, do liczby wszystkich badanych rozwiązań. Na rys. 5.16 przedstawione zostały wyniki uzyskane za pomocą algorytmu WRP3 dla 1987 przebadanych hierarchicznych sieci komputerowych.



Rys. 5.16. Zależność względnej liczby rozwiązań Θ algorytmu WRP3 od wartości χ

Można zauważyć, że w niemal 70% badanych przypadków rozwiązania uzyskane przez algorytm WRP3 różniły się od rozwiązań optymalnych mniej niż o 2%. Ponadto dla 96%

rozwiązań uzyskanych za pomocą algorytmu WRP3 zachodzi $\chi \leq 10\%$. Świadczy to o tym, że wyniki uzyskiwane za pomocą proponowanego algorytmu WPR3 dają bardzo dobre przybliżenie rozwiązania optymalnego.

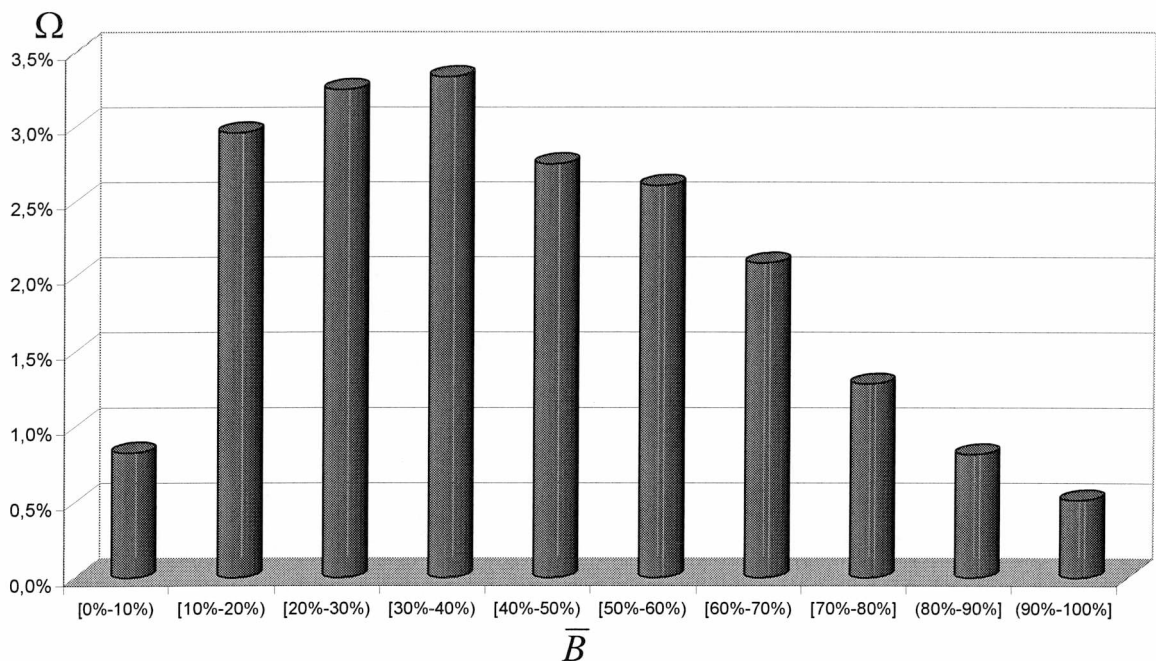
Wniosek 5.10. Wyniki uzyskane za pomocą zaproponowanego algorytmu heurystycznego w większości przypadków nie różnią się znacznie od rozwiązań optymalnych. W 96% przebadanych sieci różnica między rozwiązaniami przybliżonymi a rozwiązaniami optymalnymi nie przekraczała 10%.

5.8.7.2. Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych w zależności od unormowanego budżetu na budowę sieci $\bar{B}$.

Wskaźnik Ω oznacza średnią odległość pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą algorytmu heurystycznego a rozwiązaniami optymalnymi dla wszystkich przebadanych sieci, przy określonej wartości unormowanych parametrów $\bar{B}$ oraz $\bar{\alpha}$. Przypomnijmy jego definicję:

$$\Omega = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \chi^i.$$

Na rysunku 5.17 przedstawiony został wykres wartości Ω w zależności od unormowanego budżetu na budowę sieci hierarchicznej $\bar{B}$.



Rys. 5.17. Średnia odległość rozwiązań przybliżonych uzyskanych za pomocą algorytmu WRP2 od rozwiązań optymalnych Ω w zależności od unormowanego budżetu $\bar{B}$

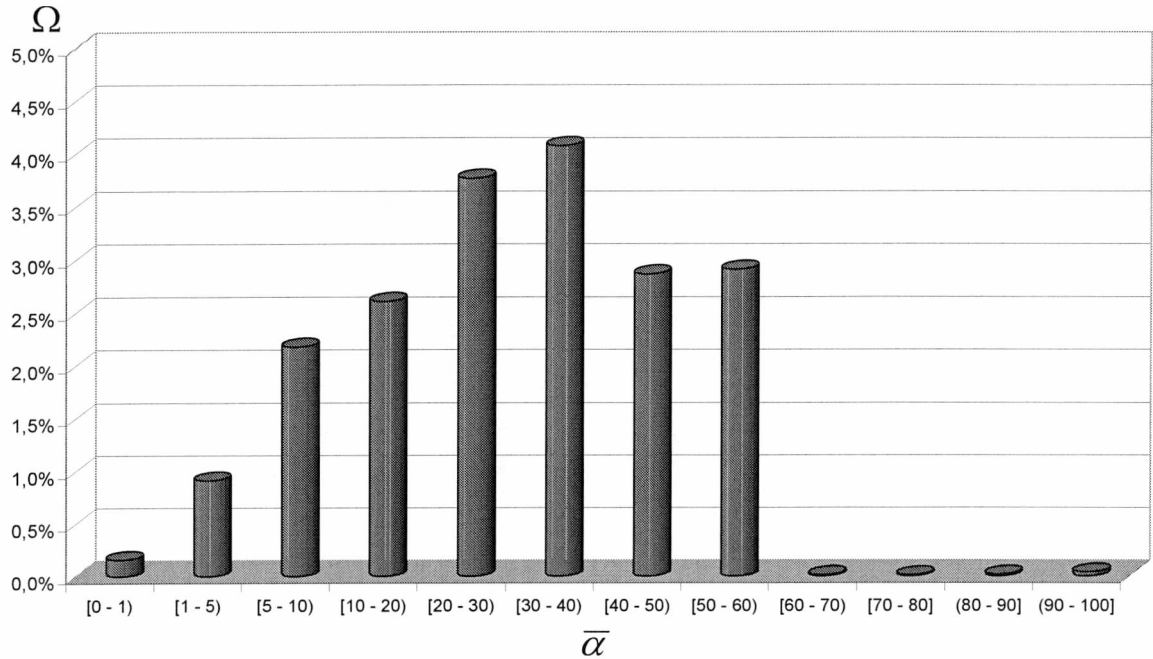
Można zauważyć, że średnia odległość Ω przyjmuje najmniejsze wartości dla $\bar{B} < 10\%$ oraz dla $\bar{B} \geq 80\%$, czyli dla budżetów o wartościach bliskich wartości minimalnej oraz bliskich wartości maksymalnej budżetu na budowę sieci. Największe wartości Ω uzyskaliśmy dla $\bar{B} \in [10\%, 40\%)$, ale trzeba zaznaczyć że nawet w tym przedziale wartości Ω nie przekraczały 3.5%.

Wniosek 5.11. Algorytm WRP3 uzyskuje wyniki różniące się od rozwiązań optymalnych średnio o nie więcej niż 1% dla wartości unormowanego budżetu $\bar{B} < 10\%$ oraz dla $\bar{B} \geq 80\%$.

5.8.7.3. Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych w zależności od wartości unormowanego parametru $\bar{\alpha}$

Na rysunku 5.18 przedstawione zostały wartości średniej odległości pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą algorytmu heurystycznego a rozwiązaniami optymalnymi Ω w zależności od unormowanego parametru $\bar{\alpha}$. Można zauważyć, że wartość średniej odległości rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych Ω jest najmniejsza dla $\bar{\alpha} < 5$ oraz dla $\bar{\alpha} \geq 60$. Dla $\bar{\alpha} \in [0, 40)$ ze wzrostem wartości parametru $\bar{\alpha}$ rośnie wartość Ω , by dla $\bar{\alpha} \in (30, 40]$ osiągnąć wartość bliską 4%. Dla $\bar{\alpha} \in (40, 60]$ średnia odległość między rozwiązaniami przybliżonymi a rozwiązaniami optymalnymi Ω przyjmuje wartości nie przekraczające 3%, natomiast dla $\bar{\alpha} \geq 60$ wartości Ω są bliskie zeru.

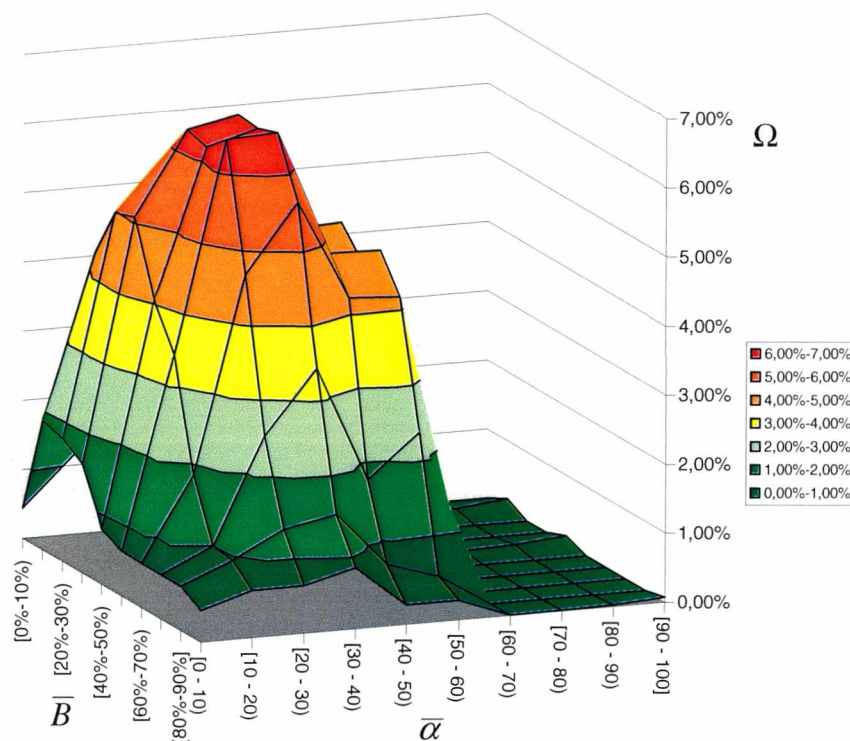
Wniosek 5.12. Algorytm WRP3 uzyskuje wyniki różniące się średnio o co najwyżej 1% od rozwiązań optymalnych dla $\bar{\alpha} < 5$ oraz dla $\bar{\alpha} \geq 60$.



Rys. 5.18. Średnia odległość rozwiązań przybliżonych uzyskanych za pomocą algorytmu WRP3 od rozwiązań optymalnych Ω w zależności od unormowanego parametru $\bar{\alpha}$

5.8.7.4. Odległość rozwiązań przybliżonych od rozwiązań optymalnych w zależności od parametru $\bar{B}$ oraz od parametru $\bar{\alpha}$

Rysunek 5.19 przedstawia wartości średniej odległości pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą algorytmu heurystycznego a rozwiązaniami dokładnymi Ω w zależności od dwóch unormowanych parametrów: unormowanego budżetu na budowę sieci $\bar{B}$ oraz unormowanego parametru $\bar{\alpha}$. Kolorem zielonym zostały zaznaczone na wykresie obszary, w których odległości pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą algorytmu heurystycznego a rozwiązaniami dokładnymi była najmniejsza, czyli obszary, w których algorytm WRP3 osiągał najlepsze wyniki. Natomiast kolorem czerwonym zostały oznaczone te obszary, dla których odległości pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą algorytmu heurystycznego a rozwiązaniami dokładnymi była największa, czyli obszary, w których wyniki uzyskiwane za pomocą algorytmu WRP3 były najgorsze.



Rysunek 5.19. Średnia odległość rozwiązań przybliżonych uzyskanych za pomocą algorytmu WRP3 od rozwiązań optymalnych Ω w zależności od unormowanego budżetu $\bar{B}$ oraz parametru $\bar{\alpha}$

Można zauważyć, że dla $\bar{\alpha} \geq 60$ wartość Ω nie przekracza 1% dla każdej wartości unormowanego budżetu $\bar{B}$. Wartości Ω nie przekraczające 2% uzyskaliśmy również dla unormowanego budżetu $\bar{B} \leq 10\%$ oraz $\bar{B} > 80\%$. Rozwiązania algorytmu WRP3 o największej wartości Ω uzyskaliśmy, gdy jednocześnie $\bar{\alpha} \in (20, 40]$ a $\bar{B} \in (30\%, 60\%]$. Warto zauważyć, że nawet wtedy wartość Ω nie przekracza 7%.

Na podstawie powyższych rozważań i obserwacji rysunku 5.19 możemy sformułować następujący wniosek:

Wniosek 5.13. Algorytm WRP3 uzyskuje wyniki różniące się średnio o co najwyżej 1% od rozwiązań optymalnych dla $\bar{\alpha} \geq 60$ niezależnie od wartości $\bar{B}$ oraz rozwiązania różniące się średnio o co najwyżej 2% gdy $\bar{\alpha} < 60$ dla $\bar{B} \leq 10\%$ oraz $\bar{B} > 80\%$.

6. Podsumowanie

Niniejsza praca dotyczy zagadnień wyznaczania rozmieszczenia bram, przepustowości kanałów i przepływów w hierarchicznych sieciach komputerowych. W pracy zaproponowano algorytmy dokładne oraz algorytmy heurystyczne do rozwiązywania rozważanych problemów, które minimalizują podstawowe wskaźniki jakości funkcjonowania sieci: średnie opóźnienie pakietu, koszt budowy sieci oraz uogólnione kryterium kosztowe, które uwzględnia zarówno średnie opóźnienie jak i koszt budowy sieci. W pracy zostały sformułowane i rozwiązane następujące zadania optymalizacji:

- zadanie wyznaczania rozmieszczenia bram, przepływów i przepustowości kanałów w hierarchicznej sieci rozległej, które minimalizują średnie opóźnienie pakietu przy ograniczeniu na koszt budowy sieci; to zadanie w pracy nazwane jest problemem GLCFA ze średnim opóźnieniem pakietu jako kryterium,
- zadanie wyznaczania rozmieszczenia bram, przepływów i przepustowości kanałów w hierarchicznej sieci rozległej, które minimalizują koszt budowy sieci przy ograniczeniu na średnie opóźnienie pakietu w sieci; zadanie to w pracy nazywane jest problemem GLCFA z kosztem budowy sieci jako kryterium,
- zadanie wyznaczania rozmieszczenia bram, przepływów i przepustowości kanałów w hierarchicznej sieci rozległej, które minimalizują uogólnione kryterium kosztowe przy ograniczeniu na koszt budowy sieci; zadanie to w pracy nazywane jest problemem GLCFA z uogólnionym kryterium kosztowym jako kryterium,

W rozdziale 3. przedstawione zostało rozwiązanie zadania GLCFA ze średnim opóźnieniem pakietu jako kryterium. W celu rozwiązania tego problemu skonstruowany został algorytm dokładny oparty na metodzie podziału i oszacowań. Do skonstruowania algorytmu dokładnego opracowane zostały dolne oszacowania średniego opóźnienia pakietu w sieci. Pokazane zostało, że dolne oszacowania są problemami optymalizacyjnym z wypukłą funkcją kryterialną. Ponadto skonstruowane zostały reguły podziału wykorzystujące własności rozwiązywanego problemu. W regułach podziału wykorzystano oszacowanie zmiany średniego opóźnienia w sieci, wynikające ze zmiany położenia bramy. Ta własność przedstawiona została w formie twierdzenia. Opracowano także algorytm heurystyczny WRP1, do wyznaczania rozwiązania początkowego dla algorytmu dokładnego. Przeprowadzone zostały eksperymenty numeryczne, których celem było zbadanie własności problemu GLCFA ze średnim opóźnieniem pakietu jako kryterium. Zostały przebadane następujące zależności:

- wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci od wartości budżetu,
- wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci od natężenia ruchu w sieci hierarchicznej

- wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci od liczby bram umieszczonych w jednej z sieci 1. poziomu.
- optymalnej liczby bram w sieci 1. poziomu od wartości budżetu sieci

Określone zostały funkcyjne zależności wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej od:

- budżetu sieci,
- natężenia pakietów przesyłanych pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu,
- liczby bram w jednej z sieci 1. poziomu.

Określone zostały własności obliczeniowe algorytmu dokładnego oraz własności algorytmu heurystycznego WRP1. Wskazane zostały obszary zastosowań, w których zaproponowany algorytm dokładny jest szczególnie „efektywny obliczeniowo” oraz obszary, w których algorytm heurystyczny WRP1 uzyskuje wyniki niewiele różniące się od rozwiązań optymalnych (mniej niż 2,5%).

W rozdziale 4. przedstawione jest rozwiązanie zadania GLCFA z kosztem budowy sieci jako kryterium. Do rozwiązania tego problemu skonstruowany został algorytm dokładny oparty na metodzie podziału i oszacowań, na potrzeby którego opracowane zostały:

- dolne oszacowania kosztu budowy sieci,
- reguły podziału oparte na własnościach wykorzystanych w regułach podziału dla problemu GLCFA ze średnim opóźnieniem pakietu jako kryterium;
- algorytm heurystyczny WRP2, wyznaczający rozwiązanie początkowe dla algorytmu dokładnego.

Dla zbadania własności problemu GLCFA z kosztem budowy sieci jako kryterium, przeprowadzone zostały eksperymenty numeryczne. Zostały zbadane zależności:

- kosztu budowy sieci od maksymalnej dopuszczalnej wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej,
- kosztu budowy sieci od natężenia pakietów przesyłanych między węzłami różnych sieci 1 poziomu,
- kosztu budowy sieci od liczby bram umieszczonych w jednej z sieci 1. poziomu.
- średniego opóźnienia pakietów w sieci 1. poziomu od liczby bram umieszczonych w tej sieci,
- średniego opóźnienia pakietów w sieci 2. poziomu od liczby bram w jednej z sieci 1. poziomu,
- optymalnej liczby bram w sieci 1. poziomu od wartości maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej.

Określone zostały funkcyjne zależności kosztu budowy sieci hierarchicznej od:

- maksymalnego dopuszczalnego średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej,
- natężenia pakietów przesyłanych pomiędzy węzłami różnych sieci 1. poziomu.

Wykazano również, że wyznaczanie najpierw rozmieszczenia bram w sieciach 1. poziomu, a następnie przepustowości kanałów sieci 2. poziomu, nie musi prowadzić do optymalnych rozwiązań. Określone zostały własności obliczeniowe algorytmu dokładnego oraz odległość rozwiązań uzyskiwanych za pomocą algorytmu heurystycznego WRP2 od rozwiązań optymalnych. Zostały wskazane obszary zastosowań, w których zaproponowany algorytm dokładny jest szczególnie „efektywny obliczeniowo” oraz obszary, w których algorytm heurystyczny WRP2 uzyskuje wyniki niewiele różniące się od rozwiązań optymalnych (mniej niż 10%).

Rozwiązanie zadania GLCFA z uogólnionym kosztem jako kryterium przedstawione zostało w rozdziale 5. Dla tego zadania został skonstruowany algorytm dokładny oparty na metodzie podziału i oszacowań. W celu skonstruowania algorytmu dokładnego opracowane zostały:

- dwa dolne oszacowania uogólnionego kryterium kosztowego; jedno z dolnych oszacowań jest rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego z wypukłą funkcją kryterialną, drugie dolne oszacowanie skonstruowano korzystając z dolnych oszacowań średniego opóźnienia pakietu w sieci zaprezentowanego w rozdziale 3. oraz z dolnego oszacowania kosztu budowy sieci przedstawionego w rozdziale 4,
- reguły podziału oparte na operacjach wyboru i regulacji skonstruowanych dla problemu GLCFA ze średnim opóźnieniem pakietu jako kryterium,
- algorytm heurystyczny WRP3 do wyznaczania rozwiązania początkowego dla algorytmu dokładnego.

W celu zbadania własności problemu GLCFA z uogólnionym kosztem jako kryterium, przeprowadzone zostały eksperymenty numeryczne. Zostały zbadane zależności:

- wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci od wartości współczynnika α ,
- kosztu budowy sieci od wartości współczynnika α ,
- wartości uogólnionego kosztu od natężenia pakietów przesyłanych między węzłami różnych sieci 1 poziomu,
- wartości uogólnionego kosztu od liczby bram umieszczonych w jednej z sieci 1. poziomu,
- optymalnej liczby bram w sieci 1. poziomu od wartości parametru α .

Określona została zależność funkcyjna wartości średniego opóźnienia pakietu w sieci hierarchicznej od wartości parametru α . Przeprowadzono również eksperymenty mające pokazać „własności obliczeniowe” algorytmu dokładnego oraz własności algorytmu heurystycznego WRP3. W wyniku tych eksperymentów wskazane zostały obszary zastosowań, w których zaproponowany algorytm dokładny jest szczególnie „efektywny obliczeniowo” oraz takie obszary, w których algorytm heurystyczny WRP3 uzyskuje wyniki niewiele różniące się od rozwiązań optymalnych (mniej niż 2%).

Algorytmy przedstawione w pracy zostały zaimplementowane w języku C++. Skonstruowane w pracy algorytmy heurystyczne mogą być stosowane samodzielnie, gdy nie ma potrzeby wykorzystywania rozwiązań optymalnych.

Przedstawione rozwiązania rozważanych zadań GLCFA oraz wyniki przeprowadzonych eksperymentów numerycznych i wynikające z analizy rezultatów tych eksperymentów wnioski stanowią oryginalny dorobek autora. Do najważniejszych rezultatów uzyskanych w wyniku eksperymentów numerycznych należy zaliczyć:

- określenie zależności pomiędzy liczbą bram w sieci 1. poziomu a średnim opóźnieniem pakietu w tej sieci, średnim opóźnieniem w sieci 2. poziomu oraz średnim opóźnieniem w sieci hierarchicznej,
- zaproponowanie metody wyznaczania optymalnej liczby bram w sieci 1. poziomu,
- określenie funkcyjnych zależności kryteriów oceny jakości działania badanych sieci od różnych parametrów.

Niniejsza praca nie wyczerpuje w pełni problematyki równoczesnego wyznaczania rozmieszczenia bram, przepustowości kanałów i przepływów w hierarchicznych sieciach komputerowych. W przyszłości badania mogą być kontynuowane m.in. w następujących kierunkach:

- opracowanie nowych dolnych oszacowań oraz reguł podziału dla algorytmów opartych na metodzie podziału i oszacowań oraz porównanie ich z obecnie stosowanymi,
- rozszerzenie rozważanego problemu o jednoczesne wyznaczanie przepustowości kanałów w sieciach 1. poziomu,
- rozszerzenie rozważanego problemu o wyznaczanie struktury sieci 2. poziomu,
- uogólnienie rozważanego problemu z sieci 2. poziomowych na sieci n -poziomowe,
- skonstruowanie algorytmów genetycznych i sieci neuronowych dla rozważanych w pracy problemów, porównanie uzyskiwanych za ich pomocą rezultatów z tymi uzyskanymi w niniejszej pracy.

Niniejszym pragnę gorąco podziękować Panu Profesorowi Andrzejowi Kasprzakowi za życzliwe wsparcie, zachętę do pracy oraz wiele cennych uwag i wskazówek przekazanych w trakcie przygotowywania rozprawy.

Literatura

- [1] AHUJA R. K., MAGNATI T. L., ORLIN J. B., *Networks Flow: Theory Algorithms and Applications*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey, 1993
- [2] AMIRI A., PIRKUL H., *Routing and capacity assignment in backbone communication networks*, Computers & Operations Research, Vol. 24, s. 275-287, 1997
- [3] ASSAD A. A., *Multicommodity Network Flows - A Survey*, Network, Vol. 8, s. 37-91, 1978
- [4] BALAKRISHNAN A., MAGNANTI T., MIRCHANDANI P., *Designing hierarchical survivable networks*, Operations Research, Vol. 46, Issue 1, 1998
- [5] BANDYOPADHYAY S., COYLE E. J., *Minimizing communication costs in hierarchically-clustered networks of wireless sensors*, Computer Networks, 44, s. 1-16, 2004
- [6] BATYCKI T., KASPRZAK A., *Wybrane algorytmy optymalizacji przepływów w sieciach teleinformatycznych*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1983
- [7] BEALE E. M. L., *Branch and bound methods for mathematical programming systems*, Discrete Optimisation, s. 201-19, 1979
- [8] BEN-AMEUR W., BOURQUIA N., GOURDIN E., TOLLA P., *Optimal routing for efficient Internet networks*, 2nd European Conference on Universal Multiservice Networks, ECUMN'2001, s. 10-17, 2002
- [9] BERTESKAS D., GALLAGER R., *Data Networks*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey, 1992
- [10] BOORSTYN R. R., FRANK H., *Large-Scale Network Topological Optimization*, IEEE Trans. Commun., Vol. COM-25, s. 29-47, 1977
- [11] BORZEMSKI L., GRZECH A., KASPRZAK A., *Design Methodology for Private Wide Area Networks in Poland*, Proc. 16th ISAT Scientific School, Wydawnictwo PWr., Wrocław, s. 243-255, 1994
- [12] CAHN R., *Wide Area Network Design: Concepts & Tools for Optimization*, Morgan Kaufmann, San Francisco, 1998

-
- [13] CANTOR D. G., GERLA M., *Optimal Routing in a Packet-Switched Computer Network*, IEEE Trans. Commun., Vol. COM-23, 1974, s. 1062–1069, 1974
- [14] CARELLO G., DELLA CROCE F., GHIRARDI M., TADEI R., *Solving the Hub Location Problem in Telecommunication Network Design: A Local Search Approach*, Networks, 44(2): s. 94-105, 2004
- [15] CHAN H., PERRIG A., *ACE: An Emergent Algorithm for Highly Uniform Cluster Formation*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag GmbH, Vol. 2920, s. 154–171, 2004
- [16] CHOI H. S., LEE H., LEE K.-D., Sehun Kim S., Lee J. H., *Optimal locations of switches and interconnections for ATM LANs*, Computers & Operations Research, 28, s. 1347-1366 , 2001
- [17] CHU W. W., YIH CHUNG SHEN M., *A hierarchical routing and flow control policy (HRFC) for packet switched networks*, IEEE Transactions on Computers, C-29(11), s. 971-7, 1980
- [18] CLARKE L.W., ANANDALINGAM G., *Optimal design of survivable LAN-LAN networks*, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, s. 293-297, 1990
- [19] COMER D., *Sieci komputerowe i intersieci*, WNT, Warszawa, 2003
- [20] CURRENT J., REVELLE C., COHON J., *The hierarchical network design problem*, European Journal of Operational Research, 27(1), s. 57-66, 1986
- [21] CURRENT J., PIRKUL H., *The hierarchical network design problem with transshipment facilities*, European Journal of Operational Research, 51(3), s. 338-47, 1991
- [22] WEI D., GUANQUN G., *A top-down method for computer network design*, Chinese Journal of Advanced Software Research, Vol. 2, s. 68–73, 1995
- [23] DIONE R., FLORIAN M., *Exact and Approximate Algorithms for Optimal Network Design*, Networks, Vol. 9., s. 37-59, 1979
- [24] EBERY J., KRISHNAMOORTHY M., ERNST A., BOLAND N. *The capacitated multiple allocation hub location problem: Formulations and algorithms*, European Journal of Operational Research, 120, s. 614-631, 2000
- [25] ELHEDHLI S., HU F., *Hub-and-spoke network design with congestion*, Computers and Operations Research, s. 1615-1632, 2005

-
- [26] FETTEROLF P. C., ANANDALINGAM G., *A Lagrangean Relaxation Technique for Optimizing Interconnection of Local Area Networks*, Operations Research, 40(4), 678-688, 1992
- [27] FILHO V. J. M., GALVÃO R. D., *Design of Interconnection of Local Area Networks*, Int. Trans. Opl Res. Vol. 5, No. 3, s. 211-231, 1998
- [28] FINDEISEN W., SZYMANOWSKI J., WIERZBICKI A., *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, PWN, Warszawa, 1977
- [29] FORD L. R., FULKERSON D. R., *Przepływy w sieciach*, PWN, Warszawa, 1969
- [30] FRATTA L., GERLA M., KLEINROCK L., *The Flow Deviation Method: An Approach to Store-and-Forward Communication Network Design*, Networks, Vol. 3, s. 97-133, 1973
- [31] GARFINKEL R. S., *Branch and bound methods for integer programming*, Combinatorial optimization. s. 1-20, 1979
- [32] GAVISH B., *Topological Design of Centralized Computer Networks – Formulations and Algorithms*, Networks, Vol. 12, s. 355-377, 1982
- [33] GAVISH B., NEUMAN I., *A System for Routing and Capacity Assignment in Computer Communication Networks*, IEEE Trans. on Communication, Vol. 37, s. 360-366, 1989
- [34] GERLA M., KLEINROCK L., *On the Topological Design of Distributed Computer Networks*, IEEE Trans. Commun., Vol. COM-25, s. 48-60, 1977
- [35] GOLA M., *Algorytmy optymalizacji przepływów i przepustowości kanałów w rozległych sieciach komputerowych przy uogólnionym kryterium kosztowym*, rozprawa doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 2000
- [36] GOLA M., KASPRZAK A., *An Exact Algorithm for Capacity and Flow Assignment in Wide Area Computer Networks*, Proc. 13th European Meeting on Cybernetics and Systems Research Cybernetics and Systems '96, Vienna, Vol. 2, s. 855-860, 1996
- [37] GOLA M., KASPRZAK A., *The Capacity and Flow Assignment in Wide Area Computer Networks: An Algorithm and Computational Results*, Proc. 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics, Vol. 5, Systems Engineering, Wissenschaft & Technik Verlag, Berlin, s. 585-590, 1997
- [38] GRZECH A., *Sterowanie ruchem w sieciach teleinformatycznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2002

-
- [39] GRZECH A., KASPRZAK A., *Optimal Topological Design of a Computer Networks*, Proc. 36th Annual Meeting of the International Society for the Systems Sciences, General Systems Approach to Alternative Economics and Values, Vol. 2, Denver, USA, s. 886–896, 1992
- [40] GRZECH A., KASPRZAK A., *An approximate algorithm for routing in ISDN*, Proc. Tenth Intern. Conf. Systems Engineering, Vol. 1, Coventry, England, s. 420–426, 1994
- [41] GRZECH A., KASPRZAK A., *An exact algorithm for the topology, capacity and multicommodity maximal flow assignment problem in a computer network*, Systems Science, Vol. 20, No. 2, s. 83–94, 1994
- [42] HABIB S., PARKER A., LEE D., *Automated design of hierarchical intranets*, Computer Communications, 25(11-12), s. 1066-75, 2002
- [43] HELD G., *Internetworking LANs and WANs: Concepts, Techniques and Methods. Second Edition*, John Wiley & Sons Ltd., 1998
- [44] HOANG H. H., *Topological Optimization Networks: A Nonlinear Mixed Integer Model Employing Generalized Benders Decomposition*, IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-27, s. 164–169, 1982
- [45] HORST R., *A general class of branch-and-bound methods in global optimization with some new approaches for concave minimization*, Journal of Optimization Theory and Applications, 51(2), s. 271-91, 1986
- [46] KAMIMURA K., NISHINO H., *Capacity and flow assignment of packet-switched networks with a concave line cost function*, 13th International Teletraffic Congress, Copenhagen, vol. 14. s. 285-290, 1991
- [47] KANG C. G., TAN H. H., *Combined channel allocation and routing algorithms in packet switched networks*, Computer Communications, Vol. 20, s. 1175–1190, 1997
- [48] KASPRZAK A., *Projektowanie struktur rozległych sieci komputerowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2001
- [49] KASPRZAK A., *Algorytmy równoczesnej optymalizacji przepływów, przepustowości kanałów i struktur topologicznych sieci teleinformatycznych*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1989
- [50] KASPRZAK A., *An exact algorithm for routing and capacity assignment in computer communication networks*, Systems Science, Vol. 19, s. 69–81, 1993

-
- [51] KASPRZAK A., *Rozległe sieci komputerowe z komutacją pakietów*, wydanie II poprawione, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1999
- [52] KASPRZAK A., *An Approximate Algorithm for some CFA Problem in WAN*, Proc. XXIst Intern. Colloquium Advanced Simulation of Systems, Acta MOSIS No. 78, Krnov, s. 379–383, 1999
- [53] KENNINGTON J. L., *A Survey of Linear Cost Multicommodity Networks Flows*, Operations Research, Vol. 26, s. 209–236, 1978
- [54] KLEINROCK L., *Communication Nets: Stochastic Message Flow and Delay*, McGraw-Hill, New York, 1964
- [55] KLEINROCK L., *Queueing Systems, Volume II: Computer Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1976
- [56] KLEINROCK L., KAMOUN F., *Optimal Clustering Structures for Hierarchical Topological Network Design of Large Computer Networks*, Networks, Vol. 10, s. 221–248, 1980
- [57] KLINCEWICZ, J.G., *Hub location in backbone/tributary network design : a review*, Location Science, s. 307–335, 1998
- [58] KRISHNAN R., RAMANATHAN R., STREENSTRUP M., *Optimization Algorithms for Large Self-Structuring Networks*, INFOCOM '99. Eighteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. Proceedings. IEEE, Vol. 1, s. 71–78, 1999
- [59] KULIKOWSKI J. L., *Zarys teorii grafów*, PWN, Warszawa, 1986
- [60] LAWLER E. WOOD D., *Branch-and-Bound Methods: a Survey*, Operations Research, Vol. 14, s. 699–718, 1966
- [61] LIANG S., YEE J., *Locating Internet Gateways to Minimize Nonlinear Congestion Costs*, IEEE Transactions On Communications, Vol. 42, No. 9, 1994
- [62] LIU Z., GU Y., MEDHI D., *On Optimal Location of Switches/Routers and Interconnection*, Technical Report, Computer Science Telecommunications, University of Missouri-Kansas City, 1998
- [63] LLOYD-EVANS R., *Wide Area Network Performance and Optimization*, Addison-Wesley, Boston, 1996

-
- [64] LUENBERGER D. G., *Teoria optymalizacji*, PWN, Warszawa, 1974
- [65] LUNA H., MAHEY P., *Bounds for global optimization of capacity expansion and flow assignment problems*, Operations Research Letters 26, s.211-216, 2000
- [66] MAYER G., BERND W., *HubLocator: an exact solution method for the multiple allocation hub location problem*, Computers and Operations Research s. 715-739, 2002
- [67] McCABE J. D., *Practical Computer Network Design and Analysis*, Morgan Kaufmann, San Mateo CA, 1997
- [68] MINOUX M. *Network synthesis and optimum network design problems: models, solution methods and applications*, Network, vol. 19, s. 313-360, 1989
- [69] MUKHERJEE A., BHAUMIK B. B., BANDYOPADHYAY A., *A minimal cost design for a large hierarchically clustered computer communication network considering a desired index of service*, Computer Communications, 20, s. 507-511, 1997
- [70] OPPENHEIMER P., *Top-Down Network Design*, 2nd Edition, Cisco Press, Indianapolis, 2004
- [71] OUOROU A., MAHEY P., VIAL P.Ph., *A Survey of Algorithms for Convex Multicommodity Flow Problems*, Management Science, Vol. 46(1), s. 126-147, 2000
- [72] PAPADIMITROU C., *Złożoność obliczeniowa*, WNT, Warszawa, 2002
- [73] PAXSON V., FLOYD S., *Wide-Area Traffic: The Failure of Poisson Modeling*, IEEE/ACM Transactions on Networking, 3(3), s. 226-244, 1995
- [74] PETERSON L. L., DAVIE B. S., *Sieci komputerowe – podejście systemowe*, Wydawnictwo Nakom, Poznań, 2000
- [75] PETREK J., SIEDT V., *A large hierarchical network star-star topology design algorithm*, European Transactions on Telecommunications, 12(6), s. 511-22, 2001
- [76] PIÓRO M., MEDHI D., *Routing, Flow, and Capacity Design in Communication and Computer Networks*, Morgan Kaufmann Publishers, 2004
- [77] PIRKUL H., AMIRI A., *Routing and capacity assignment in backbone communication networks under time varying traffic conditions*, European Journal of Operational Research, Vol. 117, No.1, s.15–29, 1999
- [78] RAZA K., TURNER M., *Large-Scale IP Network Solutions (CCIE Professional Development)*, Cisco Press, Indianapolis, 1999

-
- [79] RYBA P., *An approximate algorithm for gateway location and topology assignment in hierarchical WAN*, Materiały ogólnopolskiej konferencji “Komputerowe Systemy Rozpoznawania”, KOSYR, Miłków, s. 143-147, 2003
- [80] SAHA D., MUKHERJEE A., *Design of hierarchical communication networks under node/link failure constraints*, Computer Communications, 18(5): s. 378-383, 1995
- [81] SAHA D., MUKHERJEE A., *On the multidensity gateway location problem for multilevel high speed network*, Computer Communications, 20, s. 576-585, 1997
- [82] SANCHO, N., *A suboptimal solution to a hierarchical network design problem using dynamic programming*, European Journal of Operational Research, 83, s. 237-44, 1993
- [83] SANCHO, N., *The hierarchical network design problem with multiple primary paths*, European Journal of Operational Research, 96(2), s. 323-8, 1997
- [84] SOI I. M., AGGARWAL K. K., *On hierarchical design of large CCNs: an empirical approach [computer communication networks]*, Computers & Electrical Engineering, 13(2), s. 97-104, 1987
- [85] SPORTACK M. A., *Sieci komputerowe – księga eksperta*, Helion, Warszawa 1999
- [86] SUNSHINE C. A., *Network Interconnection and Gateways*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 8, No. 1, s. 4-11, 1990
- [87] SYSŁO M., DEO N., KOWALIK J., *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku Pascal*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999
- [88] TANENBAUM A., *Sieci komputerowe*, Wydanie IV, Gliwice, Helion, 2004
- [89] THOMADSEN T., CLAUSEN J., *Hierarchical Network Design Using Simulated Annealing*, Technical Report, Technical University of Denmark, 2002
- [90] WANG X., WANG Q., WEN Y., ZENG L., *On the algorithm for finding an optimal routing*, SCI-200, 7th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics Proceedings, Vol. 11, s. 272-5, 2003
- [91] *Wikipedia - The Free Encyclopedia*, <http://www.wikipedia.org/>
- [92] WILSON R. J., *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, Warszawa, 1998
- [93] WOLSEY L., *Integer Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1998

-
- [94] WOŹNIAK J., NOWICKI K., *Przewodowe i bezprzewodowe sieci LAN*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2002
- [95] WOŹNIAK J., NOWICKI K., *Sieci LAN, MAN i WAN - protokoły komunikacyjne*, Wydawnictwo FPT, Kraków 2003
- [96] ZOU L., *Minimum Cost Design of Hierarchical Network with Survival Links*, Journal of China Institute of Communications, 21(2), s. 91-96, 2000