

Krzysztof Piontek

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

WYKORZYSTANIE WARUNKOWEGO ROZKŁADU PEARSONA TYPU IV W MODELOWANIU SKOŚNOŚCI I LEPTOKURTOZY ROZKŁADÓW STÓP ZWROTU

1. Wstęp

W ostatnich dwudziestu latach wprowadzono wiele nowych rozwiązań w zakresie modelowania szeregów czasowych. Kolejne modele mają na celu najpełniejsze uchwycenie obserwowanych w praktyce typowych własności finansowych szeregów czasowych (najczęściej szeregów stóp zwrotu), do których należą (por. np. [Piontek 2002; 2003b; Tsay 2002]): leptokurtoza i grube ogony rozkładów, autokorelacja, gromadzenie zmienności, efekt dźwigni, długa pamięć w szeregach zmienności. W niektórych szeregach stóp zwrotu obserwuje się ponadto skośność rozkładów stóp zwrotu (por. np. [Jajuga 2000; Jondeau, Rockinger 2000; Lambert, Laurent 2001; Piontek 2003a; Premaratne, Bera 2001]). Własność ta jest chyba najrzadziej (oprócz długiej pamięci) uwzględniana w modelach szeregów stóp zwrotu.

Niniejsza praca jest rozszerzeniem dotychczasowych prac autora (por. [Piontek 2002; 2003a; 2003b]). Jej celem jest wykazanie, że wprowadzenie do modelu możliwości opisu skośności rozkładów może w sposób istotny wpływać na jakość opisu szeregów stóp zwrotu z rynku polskiego.

2. Standardowy model AR-GJR-GARCH

Wymienione typowe własności szeregów stóp zwrotu¹ (r_t) ujmuje się poprzez wprowadzenie do modelu warunkowej wartości oczekiwanej (μ_t), warunkowej wa-

¹ Zagadnienie oczywiście można rozpatrywać również w kontekście modelowania poziomu cen (X_t).

riancji procesu (h_t) oraz wybranej postaci rozkładu standaryzowanych reszt modelu (z_t) (por. np. [Piontek 2002; 2003b]). Model prostych stóp zwrotu zadany jest więc następującym wzorem:

$$r_t = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sqrt{h_t} z_t. \quad (1)$$

Zazwyczaj już najprostsze modele z wybranej klasy wystarczająco dobrze opisują własności szeregu stóp zwrotu (por. np. [Piontek 2002; 2003b]). W niniejszej pracy autor za model standardowy wybrał model AR(1)-GJR-GARCH(1,1)-Stud², dla którego odpowiednie składowe modelu dane są w sposób następujący:

- warunkowa wartość oczekiwana zadana jest przez model autoregresji rzędu 1 – AR(1); umożliwiającą opis efektu autokorelacji w szeregu stóp zwrotu³:

$$\mu_t = \mu + \phi r_{t-1}, \quad (2)$$

- warunkowa wariancja zadana jest przez modyfikację modelu GARCH(1,1) zaproponowaną przez Glostena, Jaganathana i Runklego (por. [Piontek 2002]), która umożliwia opis skupiania zmienności, grubych ogonów oraz efektu dźwigni:

$$h_t = \omega + \left(\alpha + \alpha^- I_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} \right) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}, \text{ gdzie: } I_{(p)} = \begin{cases} 1; & \text{gdy } p = \text{prawda} \\ 0; & \text{gdy } p = \text{fałsz} \end{cases}, \quad (3)$$

- standaryzowane reszty modelu pochodzą z niezależnych rozkładów t-Studenta o zerowej średniej oraz jednostkowej wariancji i funkcji gęstości danej wzorem:

$$f(z_t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{(\nu-2)\pi}} \left(1 + \frac{z_t^2}{(\nu-2)}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, z_t \sim iid(0,1). \quad (4)$$

Na parametry modelu AR-GJR-GARCH-Stud nakładają się następujące warunki:

- $|\phi| < 1$, zapewniający stacjonarność szeregu ze względu na średnią,
- $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\alpha^- \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\left(\alpha + \frac{1}{2}\alpha^- + \beta\right) < 1$, zapewniający skończoność bezwarunkowej wariancji oraz nieujemność wariancji warunkowej,
- $\nu > 2$, zapewniający istnienie drugiego momentu rozkładu warunkowego.

W analizowanym modelu za standardowe rozwiązanie przyjęto warunkowy rozkład reszt modelu w postaci standaryzowanego rozkładu t-Studenta. Model taki, w oczywisty sposób, dopasowuje się zazwyczaj lepiej do danych niż pierwotnie postulowany model z rozkładem normalnym (por. [Piontek 2002; Tsay 2002]). Jednak model dany równaniami (1)-(4) nie ujmuje potencjalnej skośności bezwarunkowych rozkładów stóp zwrotu. Zainteresowano się więc skośnymi rozkładami, które można przeskalować do zerowej

² Wybór tej postaci modelu jest podyktowany wnioskami z wcześniejszych prac autora (por. [Piontek 2002; 2003a; 2003b]).

³ W analizowanych zagadnieniach częściej są wykorzystywane modele autoregresji niż modele średniej ruchomej ze względu na występowanie w modelu zmiennych obserwowalnych (r_t).

średniej i jednostkowej wariancji (por. [Jondeau, Rockinger 2000; Lambert, Laurent 2001; Piontek 2003a]). W ostatnim czasie popularność zyskuje rozkład Pearsona typu IV (por. [Heinrich 2004; Premaratne, Bera 2001]).

3. Rozkład Pearsona typu IV

Sygnalizowana konieczność opisu grubych ogonów rozkładów oraz skośności zwróciła uwagę badaczy na rozkład Pearsona typu IV. Rozkład ma wiele pozytywnych cech, które przesądzą o jego rosnącej popularności; umożliwia bowiem opis grubych ogonów oraz skośności, jest rozkładem skalowalnym do zerowej średniej i jednostkowej wariancji, co zapewnia, że μ_i oraz h_i to warunkowa wartość oczekiwana oraz warunkowa wariancja, a także zawiera w sobie rozkład zarówno t -Studenta, jak i normalny, co ułatwia testowanie hipotez o jakości modeli.

Rozkład Pearsona typu IV ma następującą postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x; a, q, \delta) = k \left[1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{-q} \exp \left[\delta \arctg \left(\frac{x}{a} \right) \right]. \quad (5)$$

Stałą normującą k wyznacza się za pomocą jednej z poniższych równości:

$$k = \frac{2^{2q-2} \left| \Gamma \left(q - \frac{i\delta}{2} \right) \right|^2}{\pi a \Gamma(2q-1)} = \frac{\Gamma(q)}{\sqrt{\pi a} \Gamma(q-0,5)} \left| \frac{\Gamma \left(q - \frac{i\delta}{2} \right)}{\Gamma(q)} \right|^2 = \left[a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^r(\omega) \exp(\delta \omega) d\omega \right]^{-1}, \quad (6)$$

gdzie $r = 2(q-1)$, $\Gamma(\cdot)$ to oczywiście funkcja gamma, a i to jednostka urojona.

Podstawowe statystyki opisowe rozkładu Pearsona typu IV są następujące:

- średnia rozkładu: $m = \frac{\delta a}{r}, r > 0,$ (7)

- odchylenie standard.: $s = \frac{a}{r} \sqrt{\frac{r^2 + \delta^2}{r-1}}, r > 1,$ (8)

- skośność: $\sqrt{\beta_1} = \frac{4\delta}{r-2} \sqrt{\frac{r-1}{r^2 - \delta^2}}, r > 2,$ (9)

- kurtოza: $\beta_2 = \frac{3(r-1)[(r+6)(r^2 + \delta^2) - 8\delta^2]}{(r-2)(r-3)(r^2 + \delta^2)}, r > 3.$ (10)

Kluczowym parametrem (z punktu widzenia niniejszej pracy) jest δ której wartość determinuje skośność rozkładu. Dla $\delta = 0$ uzyskujemy rozkład symetryczny⁴, dla $\delta > 0$

⁴ Niestandaryzowany rozkład Pearsona typu IV (dany wzorami (6) i (7)) z parametrem $\delta = 0$ nazywa się rozkładem Pearsona typu VII.

– rozkład prawostronnie skośny, dla $\delta < 0$ – lewostronnie skośny. Warto zauważyć, że parametr δ wpływa także na wszystkie pozostałe statystyki (por. wzory (7), (8), (10)).

Rysunek 1 prezentuje przykładowe rozkłady Pearsona typu IV dla różnych parametrów δ .

4. Model AR-GJR-GARCH z rozkładem Pearsona typu IV

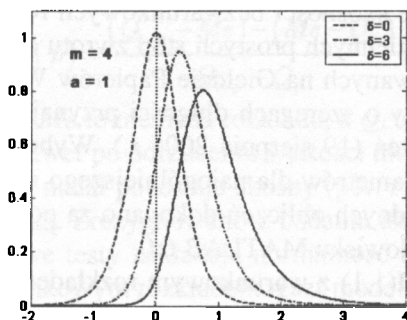
Rozkład dany wzorami (5) i (6) nie ma ogólnie zerowej średniej i jednostkowej wariancji i jako taki nie zapewnia, że μ_t oraz h_t są zawsze warunkową wartością oczekiwaną oraz warunkową wariancją, a jedynie modalną oraz pewną miarą dyspersji. Niezbędna staje się dodatkowo procedura standaryzacji rozkładu Pearsona typu IV według wzoru:

$$f(z) = k \cdot s \left(1 + \left(\frac{s \cdot z + m}{a} \right)^2 \right)^{-q} \exp \left(\delta \cdot \arctg \left(\frac{s \cdot z + m}{a} \right) \right), \quad (11)$$

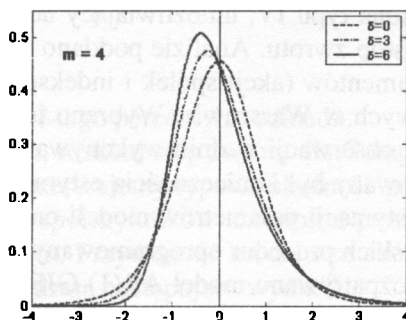
gdzie m i s zadane są wzorami (7) i (8).

Standaryzowany rozkład Pearsona typu IV, który można już wykorzystać w modelu AR-GJR-GARCH, zapewniający spójność koncepcji z modelem wyjściowym (wzory (1)-(4)) ma następującą postać:

$$f(z) = \frac{\Gamma(q)}{\sqrt{\pi} \Gamma(q-0,5)} \left| \frac{\Gamma\left(q - \frac{i\delta}{2}\right)}{\Gamma(q)} \right|^2 \cdot \frac{1}{r} \sqrt{\frac{r^2 + \delta^2}{r-1}} \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(\sqrt{\frac{r^2 + \delta^2}{r-1}} \cdot z + \delta \right)^2 \right)^{-q} \times \\ \times \exp \left(\delta \cdot \arctg \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{r^2 + \delta^2}{r-1}} \cdot z + \frac{\delta}{r} \right) \right). \quad (12)$$



Rys. 1. Przykładowe postaci niestandaryzowanego rozkładu Pearsona typu IV
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 2. Przykładowe postaci standaryzowanego rozkładu Pearsona typu IV
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 2 prezentuje standaryzowane rozkłady dla tych samych parametrów, które przedstawia rys. 1.

Jak łatwo zauważyć (na podstawie wzoru (12)), gęstość $f(z)$ nie zależy już od parametru a . Dodatkowo, gdy $\delta = 0$, wzór (12) upraszcza się do postaci:

$$f(z) = \frac{\Gamma(q)}{\sqrt{\pi}\Gamma(q-0,5)\sqrt{r-1}} \cdot \left(1 + \left(\frac{z}{\sqrt{r-1}}\right)^2\right)^{-q}. \quad (13)$$

Pamiętając o związku $r = 2(q-1)$, po podstawieniu $q = \frac{\nu+1}{2}$ uzyskujemy wzór (4), czyli standaryzowany rozkład t-Studenta. Wniosek ten potwierdza, że w ramach standaryzowanego rozkładu Pearsona typu IV zawiera się rozkład t-Studenta, a tym samym w przejściu granicznym także rozkład normalny. Własność ta będzie wykorzystywana w części empirycznej pracy do testowania jakości modeli.

Estymacji parametrów modelu AR-GJR-GARCH $(\mu, \phi, \omega, \alpha, \alpha^-, \beta, q, \delta)$ dokonuje się zazwyczaj metodą największej wiarygodności, wykorzystując wzór (12). Dodatkowo w procesie estymacji parametrów należy zapewnić warunek, by:

$$\alpha + F_z(0; q, \delta)\alpha^- + \beta < 1, \quad (14)$$

gdzie $F_z(x; q, \delta)$ to dystrybuenta standaryzowanego rozkładu Pearsona typu IV dla argumentu x oraz parametrów q i δ . Spełnienie warunku (14) gwarantuje istnienie skończonej wartości wariancji bezwarunkowej procesowi.

5. Przykład empiryczny

Celem przykładu empirycznego jest zobrazowanie możliwości wykorzystania modeli z warunkową wartością oczekiwaną oraz z warunkową wariancją do opisu własności szeregów stóp zwrotu, gdy standaryzowane reszty modelu mają rozkład Pearsona typu IV, umożliwiające uchwycenie skośności bezwarunkowych rozkładów stóp zwrotu. Analizie poddano szeregi dziennych prostych stóp zwrotu dla 93 instrumentów (akcji spółek i indeksów) notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Wybrano instrumenty o szeregach długości przynajmniej 1500 obserwacji w dniu wykonywania obliczeń (19 sierpnia 2004 r.). Wybór podyktowany był koniecznością estymacji 8 parametrów dla najogólniejszego modelu. Estymacji parametrów modeli oraz niezbędnych obliczeń dokonano za pomocą autorskich procedur oprogramowanych w środowisku MATLAB 6.0.

Rozpatrywano model AR(1)-GJR-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem Pearsona typu IV. W modelu takim zawierają się oczywiście typowe modele z resztami zadanymi rozkładem normalnym ($q \rightarrow \infty, \delta = 0$) oraz symetrycznym rozkładem t-Studenta ($\delta = 0$).

Do wyboru optymalnej postaci modelu wykorzystano (ze względu na fakt, że rozpatrywane modele zawierają się w sobie) test oparty na wartościach funkcji wiarygodności (*likelihood ratio test* – *LRT*) dany następującą statystyką:

$$LRT = 2(LLF_1 - LLF_0), \quad (15)$$

gdzie: LLF_1 – wartość logarytmu funkcji największej wiarygodności dla modelu z mniejszą liczbą restrykcji, LLF_0 – wartość logarytmu funkcji największej wiarygodności dla modelu z większą liczbą restrykcji. Statystyka *LRT* ma rozkład χ^2 z ilością stopni swobody równą różnicy w liczbie restrykcji modeli. Dla różnicy restrykcji równej 1 (model z rozkładem Pearsona typu IV kontra z model rozkładem *t*-Studenta oraz model z rozkładem *t*-Studenta kontra z model rozkładem normalnym) wartość krytyczna dla poziomu istotności 0,05 wynosi 3,8415.

W szeregach stóp zwrotu pojawiają się obserwacje nietypowe (ekstremalne) o szczególnie dużych wartościach bezwzględnych, czasami znacznie wykraczających poza obszar 4 lub 5 odchyłeń standardowych od średniej. Takie pojedyncze obserwacje mogą znacznie zaburzyć wartości parametru skośności oraz kurtozy. Wszystkie obserwacje wykraczające poza obszar 5 odchyłeń standardowych⁵ zmodyfikowano, nadając im wartości z krańców przedziału 5 sigm, co powinno zmniejszyć wpływ pojedynczych obserwacji nietypowych na parametr skośności. To pojedyncze zdarzenie ekstremalne powinno się modelować za pomocą rozkładów o jeszcze grubszych ogonach niż rozkład *t*-Studenta lub, co częściej spotykane, za pomocą odpowiednio wprowadzanych do modelu skoków wartości procesu (modele wywodzące się z modeli *jump-diffusion* dla czasu ciągłego).

W sposób szczegółowy prześledzony zostanie przykład dla firmy Computerland.

Po zmodyfikowaniu obserwacji nietypowych wyznaczono miary skośności rozkładów stóp zwrotu oraz wartości logarytmów funkcji największej wiarygodności dla modeli z poszczególnymi rozkładami warunkowymi. Do pomiaru skośności rozkładów zastosowano dwie typowe miary:

$$\bullet \sqrt{b_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}; \mu_n = E[(X - E[X])^n], \quad (16)$$

$$\bullet HS(p) = \frac{(Q_{1-p} - Me) - (Me - Q_p)}{Q_{1-p} - Q_p}, \quad (17)$$

gdzie *Me* to mediana rozkładu, a Q_i to wartość *i*-tego percentyla rozkładu.

Nawet po odrzuceniu wartości nietypowych, rozkład stóp zwrotu dla Computerlandu nadal pozostaje skośny (por. rys. 3) i obserwujemy typową skośność prawostronną. Zrezygnowano z badania istotności współczynników skośności, ponieważ typowe testy zakładają normalność stóp zwrotu. Przydatność modelu ze skośnym warunkowym rozkładem reszt modelu potwierdzają następujące wyniki⁶:

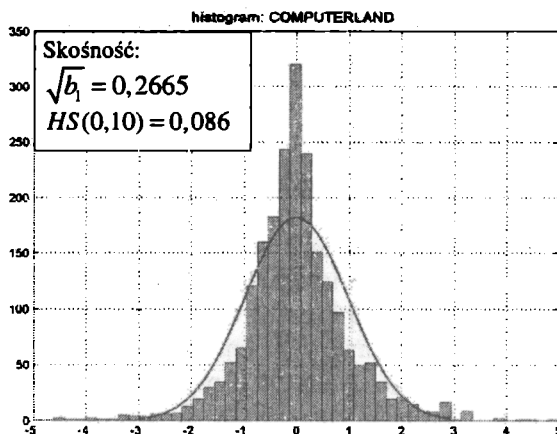
⁵ Przedział 5 sigm został wybrany przez autora.

⁶ *LRT(P4-S)* to wartość testu *LRT* dla przypadku „model z rozkładem Pearsona typu IV kontra model z rozkładem *t*-Studenta”, *LRT(S-N)* to wartość testu dla przypadku „model z rozkładem *t*-Studenta kontra model z rozkładem normalnym”.

$$LRT(P4-S) = 11,4721$$

$$LRT(S-N) = 62,6069$$

$$CV = 3,8415$$



Rys. 3. Histogram zmodyfikowanego szeregu stóp zwrotu dla spółki Computerland
Źródło: obliczenia własne

Każdorazowo dla spółki Computerland model ogólniejszy jest lepszy od modelu z restrykcjami. Spośród trzech analizowanych modeli najlepszym okazuje się więc model z warunkowym rozkładem Pearsona typu IV, co potwierdza większą przydatność wykorzystania rozkładu z grubszymi ogonami od rozkładu normalnego lub rozkładu z możliwą skośnością. Model z rozkładem *t*-Studenta przewyższa zaś model z rozkładem normalnym.

W analogiczny sposób przeanalizowano szeregi prostych stóp zwrotu z pozostałych 92 instrumentów (akcji lub indeksów). Tabela 1 prezentuje otrzymane wyniki testu *LRT* dla modeli z rozkładem Pearsona i *t*-Studenta dla wszystkich instrumentów. Pominęto wyniki porównawcze modeli z rozkładami symetrycznymi, gdyż model z rozkładem *t*-Studenta zawsze przewyższał model z rozkładem normalnym. W tabeli wyróżniono instrumenty, dla których rozkład Pearsona typu IV okazał się najlepszym spośród rozpatrywanych.

Dla analizowanych szeregów model z rozkładem Pearsona typu IV był w 29 przypadkach (na 93 obserwowane przypadki) lepszy od modelu z warunkowym rozkładem *t*-Studenta.

Fakt, że model z warunkowym rozkładem normalnym każdorazowo był gorszy od modelu z rozkładem *t*-Studenta, potwierdza przyjęcie rozkładu *t*-Studenta za przynajmniej chwilowy standard.

Tabela 1. Wyniki estymacji dla analizowanych instrumentów

Nazwa	Liczba obserwacji	LLFp4	LLFs	LRT	Nazwa	Liczba obserwacji	LLFp4	LLFs	LRT
Amica	1733	3996,28	3996,23	0,09	Lentex	1795	4017,91	4017,34	1,15
Apator	1819	4014,71	4014,70	0,03	Lubawa	1813	3493,56	3492,24	2,65
Atlantis	1776	3227,25	3227,23	0,02	Mennica	1546	3501,42	3501,26	0,32
Bick	2093	4191,72	4191,71	0,01	Mieszko	1776	4048,75	4048,74	0,02
Boryszew	2034	4405,69	4405,03	1,31	Millennium	2771	5688,66	5688,64	0,05
Bos	1617	3783,52	3783,52	0,01	Mostalexp	2807	5663,40	5662,20	2,42
Bphpbk	2380	5570,53	5569,86	1,35	Mostalsdl	1678	3833,86	3833,82	0,09
Bre	2768	6023,63	6023,52	0,21	Mostalwar	2592	5633,29	5633,26	0,07
Budimex	2307	5120,42	5118,48	3,89	Mostalzab	2464	5090,30	5089,65	1,29
Bytom	2278	3921,37	3905,17	32,41	Odlewnie	1604	3223,22	3215,87	14,70
Bzwbk	2668	5667,92	5667,91	0,02	Okocim	2815	6069,60	6067,96	3,30
Censtalgd	1831	3397,88	3397,15	1,46	Optimus	2497	4884,75	4882,58	4,34
Cersanit	1550	3798,66	3794,99	7,34	Orbis	1686	4089,41	4088,42	1,97
Compland	2201	4776,41	4770,67	11,47	Paged	1823	3622,33	3621,93	0,80
Dbpbk	2210	4836,37	4835,18	2,38	Pekao	1539	3759,45	3757,42	4,07
Debica	2427	5911,60	5906,62	9,96	Pepecs	1754	3919,86	3917,60	4,51
Echo	2099	4736,55	4736,52	0,06	Pgf	1624	4197,39	4196,71	1,37
Efekt	2635	5578,50	5575,10	6,79	Polfikutno	2256	5311,17	5310,78	0,78
Elbudowa	2120	5035,33	5034,81	1,05	Polifarb	2689	5807,91	5807,27	1,29
Elektrim	2821	5284,42	5284,40	0,04	Prochem	2425	5136,96	5136,35	1,22
Elektroex	2374	4684,85	4684,35	1,02	Prochnik	2873	4992,84	4987,32	11,06
Elmontwar	1779	3489,26	3487,93	2,65	Prokom	1633	3537,90	3535,20	5,39
Elzab	1543	3223,37	3223,36	0,02	Rafako	2548	5514,83	5514,58	0,51
Energopld	1614	3275,10	3274,68	0,84	Relpol	2130	4733,83	4728,95	9,76
Ferrum	1520	2610,12	2610,07	0,11	Remak	2413	4972,19	4972,09	0,20
Forte	2014	4255,44	4252,73	5,41	Rolimpe	2454	5132,22	5123,75	16,93
Fortispl	2351	4986,18	4983,77	4,81	Ropczyce	1615	3786,51	3785,12	2,78
Grajewo	1599	3612,51	3612,49	0,05	Sanok	1847	4388,23	4388,21	0,04
Handlowy	1784	4646,60	4646,03	1,14	Softbank	1556	3219,48	3218,65	1,66
Hutmen	1554	2992,08	2988,82	6,52	Sokolow	2654	5715,04	5704,24	21,59
Hydrotor	1556	3535,71	3535,47	0,49	Stalexp	2450	4764,89	4755,65	18,48
Igroup	1943	3587,55	3587,44	0,23	Stalprod	1691	3786,46	3784,38	4,16
Impexmet	1761	3659,50	3659,06	0,88	Strzelec	1677	3738,01	3737,79	0,44
Indykpol	2447	4888,83	4880,51	16,62	Swarzez	2873	5428,12	5426,11	4,02
Ingbsk	2584	6327,40	6324,69	5,41	Swiecie	1830	4428,42	4428,29	0,24
Irena	2785	5836,58	5835,34	2,49	Tim	1600	3033,25	3032,28	1,96
Jelfa	2518	6018,99	6018,94	0,10	Vistula	2629	5477,19	5477,17	0,04
Jupiter	1797	4269,55	4268,19	2,73	Warta	1940	4249,01	4248,96	0,10
Jutrzenka	2306	5486,29	5480,07	12,44	Wawel	1523	3531,51	3529,84	3,34
Kable	2874	5532,52	5526,14	12,77	Wig	2883	7633,99	7633,98	0,02
Kęty	2137	5204,23	5204,20	0,06	Wig20	2551	6541,59	6539,42	4,35
KGHM	1778	3892,40	3891,94	0,92	Wilbo	1654	3928,32	3928,11	0,42
Kompap	1851	3760,80	3760,67	0,26	Wólczanka	2864	5898,33	5896,87	2,93
Kopex	1503	2899,34	2899,23	0,23	Zrew	1712	3896,58	3895,93	1,30
Kredytyb	2501	5989,96	5989,66	0,61	Zywiec	2844	6797,01	6796,76	0,50

Źródło: obliczenia własne.

6. Podsumowanie

Przedstawione wyniki prowadzą do wniosku, że dla ok. 30% analizowanych szeregów stóp zwrotu uwzględnienie możliwości wystąpienia skośności prowadzi do istotnego (na poziomie 0,05) poprawienia jakości modelu.

Oczywistą zaletą prezentowanego podejścia jest możliwość uwzględnienia skośności rozkładów stóp zwrotu, czego nie oferują standardowe modele z symetrycznym rozkładem warunkowym, a co jest istotne szczególnie w procesie zarządzania ryzykiem. Obserwowana potencjalnie w rozkładach stóp zwrotu skośność powinna skutkować stosowaniem bardziej skomplikowanych modeli do wyceny opcji (por. np. [Harvey, Siddique 2000]), konstrukcji portfela (por. np. [Markowitz 1991]) oraz pomiaru ryzyka, np. metodą VaR (por. np. [Jorion 2001]). Standardowe miary ryzyka w przypadku rozkładów prawostronnie skośnych, które występują najczęściej, zawyżają bowiem ryzyko związane z potencjalnymi stratami.

Za wadę prezentowanego podejścia można uznać dość skomplikowaną postać funkcji gęstości i problemy numeryczne związane z wyznaczaniem stałej k danej wzorem (6) oraz z zapewnieniem warunku stacjonarności wariancji bezwarunkowej (por. wzór (14)) na etapie estymacji parametrów modelu.

Odpowiedź na pytanie, czy dalsze komplikowanie postaci modelu (zapewniające lepszy opis własności modeli szeregów stóp zwrotu z punktu widzenia testów ekonometrycznych) skutkuje (średnio) wymierną poprawą wyników ekonomicznych, stanowić będzie dalszy obszar zainteresowań autora.

W rozważanym podejściu parametry odpowiedzialne za skośność oraz za kurtozę warunkowego rozkładu reszt modelu pozostają stałe w czasie. Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, by analogicznie do warunkowej wartości oczekiwanej i wariancji wprowadzić do modelu warunkową skośność i ewentualnie kurtozę (por. [Harvey, Siddique 2000; Jondeau, Rockinger 2000]).

Literatura

- Harvey C., Siddique A., *Conditional Skewness in Asset Pricing Tests*, „Journal of Finance” 2000, 55, faculty.fuqua.duke.edu/~charvey.
- Heinrich J., *A Guide to the Pearson Type IV Distribution*, University of Pennsylvania, http://www-cdf.fnal.gov/publications/cdf6820_pearson4.pdf, 2004.
- Jajuga K., *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, AE, Wrocław 2000.
- Jondeau E., Rockinger M., *Conditional Volatility, Skewness and Kurtosis: Existence and Persistence*, www.banque-france.fr/gb/publi/telechar/1-77.htm, 2000.
- Jorion P., *Value at Risk: the New Benchmark for Controlling Market Risk*, McGraw-Hill, 2001.

- Lambert P., Laurent S., *Modelling Financial Time Series Using GARCH-Type Models with a Skewed Student Distribution for the Innovations*, www.stat.ucl.ac.be/pub/papers/, 2001.
- Markowitz H., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Basil Blackwell, Oxford 1991.
- Piontek K., *Modelowanie i prognozowanie zmienności instrumentów finansowych*, (rozprawa doktorska), AE, Wrocław 2002.
- Piontek K., *Modelowanie własności szeregów stóp zwrotu – skośność rozkładów*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu (w druku), AE, Wrocław 2003a.
- Piontek K., *Zastosowanie modeli klasy ARCH do opisu własności szeregu stóp zwrotu indeksu WIG*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu (w druku), AE, Wrocław 2003b, www.kpiontek.prv.pl.
- Premaratne G., Bera A., *Modelling Asymmetry and Excess Kurtosis in Stock Return Data*, University of Illinois, papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=259009, 2001.
- Tsay R. *Analysis of Financial Time Series*, Wiley and Sons, Chicago 2002.

MODELING SKEWNESS AND EXCESS KURTOSIS IN STOCK RETURNS USING CONDITIONAL PEARSON TYPE IV DISTRIBUTION

Summary

The AR-GARCH models with conditional normal or Student's distributions are usually using to modelling many effects that occur in financial time series of returns. This two distributions are not sufficient to account for the skewness in the data. Therefore, there is a real need to use an asymmetric density that can be easily estimated and whose tails are sufficiently heavy. Pearson type IV density is such a distributions and additionally nests normal and Student's distributions. The results received from our research showed that for 30% of analysed instruments from Polish market the best model AR(1)-GJR-GARCH(1,1) model with Pearson type IV conditional distribution of errors. The results can be applied to risk measuring with Value at Risk method or to option pricing.