

Katarzyna Posacka

CAŁKA STOCHASTYCZNA ITO – DEFINICJA I JEJ WŁASNOŚCI

1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie definicji stochastycznej całki Ito i jej własności, przybliżenie pojęcia stochastycznej całki Stratonowicza oraz pokazanie sposobu rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego postaci

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t,$$

gdzie: X – szukany proces stochastyczny,

μ, σ – zadane funkcje,

W – proces Wienera,

poprzez zastosowanie wielowymiarowej wersji wzoru Ito.

Teoria stochastycznych równań różniczkowych znajduje zastosowania w wielu dziedzinach nauki. Stanowi ona podstawowe narzędzie opisu w tych dyscyplinach, w których mamy do czynienia ze zjawiskami zależnymi od czasu. Na przykład w biologii model rozwoju populacji rozpatruje się w postaci gaussowskiego stochastycznego równania Verhulsta czy stochastycznego martyngałowego równania Verhulsta, modele ewolucji populacji gatunków konkurujących ze sobą przedstawia się za pomocą gaussowskiego stochastycznego równania Volterry–Lotki, semi-martyngałowego równania Volterry–Lotki czy α -stabilnego równania Volterry–Lotki, a w astronomii problem stabilizacji satelity na orbicie opisuje się równaniami Sagirowa [Janicki, Izydorczyk 2001]. W technice i fizyce za pomocą stochastycznych równań różniczkowych opisywane są reakcje konstrukcji na wymuszenia turbulentne, sejsmiczne czy wywołane falami morskimi, a także reakcje pojazdów na losowe nierówności drogi [Sobczyk 1996]. Szerokie zastosowanie w matematyce ubezpieczeniowej, w zagadnieniach związanych z modelowaniem ryzyka ma proces Bessela [Janicki, Izydorczyk 2001].

Obok problemów jakościowych teoria stochastycznych równań różniczkowych stanowi fundament szeregu badań dotyczących efektywnych metod otrzymywania rozwiązań. Przez rozwiązanie rozumiemy taki proces stochastyczny, który po spełnieniu określonych założeń stanowi rozwiązanie równania stochastycznego opisującego interesujące nas zjawisko [Kloeden, Platen, Scherz 1997]. Niestety tylko wybrane metody analityczne dają dokładne rozwiązanie, a ich zastosowanie możliwe jest tylko w nielicznych przypadkach. Najczęściej, za pomocą wzorów analitycznych lub schematów numerycznych, jesteśmy w stanie wyznaczyć jedynie przybliżone rozwiązania.

W zadaniach matematyki finansowej, związanych z budową optymalnego portfela papierów wartościowych [Fiłatowa, Posacka 2002], wykorzystuje się teorię zarówno całki Stratonowicza, jak i całki Ito. W niniejszej pracy bliżej przyjrzymy się definicjom tych pojęć. Szczególną uwagę zwrócimy na własności całki stochastycznej Ito w aspekcie jej stosowalności do rozwiązania pewnego typu stochastycznych równań różniczkowych, opisujących zjawiska ekonomiczne.

2. Pojęcia: całka Stratonowicza oraz całka Ito

Rozważmy przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω , z określoną na niej miarą probabilistyczną P oraz σ algebrą $\mathcal{F}$. Wtedy:

1. Procesem stochastycznym $X(t)$ nazwiemy rodzinę zmiennych losowych $\{X_t(\omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ zależnych od parametru t i określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie T jest zbiorem lub podzbiorem liczb rzeczywistych. Innymi słowy proces stochastyczny $X(t)$ to funkcja, która odwzorowuje zbiór parametrów T w przestrzeń zmiennych losowych określonych na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ [Sobczyk 1996].

2) Procesem Wienera $W(t)$ nazwiemy proces stochastyczny $W: \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow R$ spełniający następujące warunki:

- 1) $W(0) = 0$,
- 2) przyrosty $W(t) - W(s)$, $W(u) - W(t)$ są niezależne, gdzie $s < t < u$,
- 3) rozkład zmiennej $W(t+h) - W(t)$ zależy tylko od h ,
- 4) przyrosty $W(t+h) - W(t)$ mają rozkład normalny o średniej 0 i wariancji h ,
- 5) trajektorie $t \rightarrow W(t, \omega)$, przy ustalonym $\omega \in \Omega$, są ciągłe.

Zauważmy, że warunki 1-5 nie są niezależne.

Niech teraz dane będą: chwila czasowa $S: 0 \leq S < T$ oraz funkcja dwóch zmiennych $f(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$. Naszym celem jest zdefiniowanie całki stochastycznej względem procesu $W(t)$ (w dalszych rozważaniach proces stochastyczny $W(t)$ oznaczać będziemy przez W_t):

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega). \quad (1)$$

Zacznijmy od konstrukcji definicji powyższej całki dla funkcji schodkowych (prosty) f_n , a następnie, stosując twierdzenie o aproksymacji jednostajnej funkcji f funkcjami f_n , rozszerzymy tę definicję na przestrzeń funkcji $f(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$. W tym celu przedstawmy funkcję f w postaci:

$$f(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \cdot \chi_{[j \cdot 2^{-n}, (j+1)2^{-n}]}(t), \quad (2)$$

gdzie χ – funkcja charakterystyczna, $n \in \mathbb{N}$.

Dla funkcji schodkowych postaci (2) całkę względem procesu W_t określamy następująco:

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \cdot [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](\omega), \quad (3)$$

gdzie

$$t_k = t_k^{(n)} = \begin{cases} k \cdot 2^{-n}, & \text{dla } S \leq k \cdot 2^{-n} \leq T, \\ S, & \text{dla } k \cdot 2^{-n} < S, \\ T, & \text{dla } k \cdot 2^{-n} > T. \end{cases}$$

Stosując twierdzenie o jednostajnej aproksymacji funkcji podcałkowej $f(t, \omega)$ za pomocą

$$\sum_j f(t'_j, \omega) \cdot \chi_{[t_j, t_{j+1}]}(t),$$

gdzie $t'_j \in [t_j, t_{j+1}]$, oraz przechodząc do granicy, otrzymujemy

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(t'_j, \omega) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](\omega). \quad (4)$$

Zauważmy, że taki sposób obliczania całki z funkcji $f(t, \omega)$ względem procesu stochastycznego W_t zależy ściśle od wyboru chwili t'_j [Oksendal 2000]. W zależności od sposobu doboru momentu czasowego t'_j wyróżniamy dwa typy całek stochastycznych. Jeśli $t'_j = t_j$ (pokrywa się z początkiem przedziału czasowego), to mamy wtedy do czynienia z całką Ito postaci:

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega), \quad (5)$$

natomiast gdy $t'_j = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}$, to mówimy wtedy o całce Stratonowicza i oznaczamy ją następująco:

$$\int_S^T f(t, \omega) \circ dW_t(\omega). \quad (6)$$

3. Całka stochastyczna Ito oraz wzór Ito

Rozważmy rosnącą rodzinę σ -algebr $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ podzbiorów przestrzeni Ω . Wtedy proces stochastyczny $g(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R^n$ nazwiemy $\mathcal{F}_t$ -adaptowanym, jeżeli dla każdej wartości $t \geq 0$ funkcja

$$\omega \rightarrow g(t, \omega)$$

jest $\mathcal{F}_t$ -mierzalna.

Niech $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$ będzie zadaną klasą funkcji postaci:

$$f(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R,$$

spełniających warunki [Oksendal 2000]:

- 1) odwzorowanie $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ jest $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -mierzalne, gdzie $\mathcal{B}$ jest σ -algebrą zbiorów Borela określoną na przedziale czasowym $[0, \infty)$,
- 2) $f(t, \omega)$ jest $\mathcal{F}_t$ -adaptowana,
- 3) $E \left[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$.

Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{V}(S, T)$ zdefiniujemy całkę stochastyczną Ito $\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega)$, gdzie W_t – jednowymiarowy proces Wienera. Zrobimy to w dwóch krokach: najpierw dla klasy funkcji prostych (schodkowych) $\{\phi_n\}$, a następnie, aproksymując funkcję $f \in \mathcal{V}(S, T)$ funkcjami prostymi $\{\phi_n\}$, przejdziemy do granicy z całką $\int \phi_n dW$ do całki $\int f dW$ przy $\phi_n \rightarrow f$.

Rozważmy funkcję prostą $\phi \in \mathcal{V}$ w postaci

$$\phi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) \cdot X_{[t_j, t_{j+1})}(t). \quad (7)$$

Zauważmy, że jeżeli $\phi \in \mathcal{V}$, to każda z funkcji e_j musi być $\mathcal{F}_{t_j}$ -mierzalna.

Wobec powyższego

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dW_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \cdot [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](\omega). \quad (8)$$

Definicja całki stochastycznej Ito

Niech dana będzie funkcja $f \in \mathcal{V}(S, T)$. Całką Ito od S do T z funkcji f względem procesu Wienera nazwiemy wielkość zadaną wzorem

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dW_t(\omega), \quad (9)$$

gdzie $\{\phi_n\}$ – ciąg funkcji prostych spełniających warunek:

$$E \left[\int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Tak zdefiniowana całka Ito posiada następujące własności:

Twierdzenie (własności całki Ito)

Niech dane będą dwie funkcje $f, g \in \mathcal{V}(0, T)$ oraz chwile czasowe $0 \leq S < U < T$. Wtedy:

- 1) $\int_S^T f dW_t = \int_S^U f dW_t + \int_U^T f dW_t$,
- 2) $\int_S^T (cf + dg) dW_t = c \int_S^T f dW_t + d \int_S^T g dW_t$, c, d – stałe, (addytywność i jednorodność całki),
- 3) Wartość oczekiwana $E \left[\int_S^T f dW_t \right] = 0$,
- 4) $E \left[\int_a^b f dW_t \right]^2 = E \left[\int_a^b f^2 dt \right]$,

5) całka $\int_0^T f dW_t$ jest $\mathcal{F}_T$ -mierzalna.

Dowód poszczególnych własności można znaleźć w pracach B. Oksendala [2000] i K. Sobczyka [1996].

Bardzo ważną rolę w poszukiwaniu rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych odgrywa wzór Ito. Podaje on przepis na „różniczkowanie” pewnych procesów stochastycznych będących funkcjami procesu Wienera.

Twierdzenie. Wzór Ito

Niech $W_t = (w_1, w_2, \dots, w_n)_t$ będzie wielowymiarowym procesem Wienera, $B = [b_{i,j}]_{\substack{j=1,2,\dots,n \\ i=1,2,\dots,m}}$ – zadaną macierzą współczynników, $f: [0, \infty) \cdot R^m \rightarrow R$ – zadaną funkcją. Wtedy, jeśli proces X posiada różniczkę stochastyczną postaci:

$$dX_i = a_i dt + \sum_{j=1}^n b_{i,j} dw_j, \quad (11)$$

oraz

$$Y_t = f(t, X_t), \quad (12)$$

to

$$\begin{aligned} dY_t = & f_t(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^m f_{x_i}(t, X_t)a_i(t)dt + \sum_{i=1}^m f_{x_i}(t, X_t) \sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)dw_j(t) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m b_{j,i}(t)f_{x_i x_l}(t, X_t)b_{l,j}(t)dt. \end{aligned} \quad (13)$$

4. Przykład zastosowania wzoru Ito do rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego

Niech dane będzie stochastyczne równanie różniczkowe postaci:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t, \quad (14)$$

gdzie X – szukany proces stochastyczny, μ, σ – zadane funkcje.

Aby wyznaczyć rozwiązanie tego równania, rozważmy funkcję f postaci:

$$f(t, X_t) = \varphi(t) \cdot X_t, \quad (15)$$

gdzie $\varphi \in C^1$ względem t .

W celu wyznaczenia $df(t, X_t)$ zastosujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli

$$dX_t = a_1(t)dt + b_1(t)dW_t$$

oraz

$$dY_t = a_2(t)dt + b_2(t)dW_t,$$

to

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + b_1(t)b_2(t)dt. \quad (16)$$

Dowód

Na mocy wzoru Ito obliczamy:

$$\begin{aligned} dX_t^2 &= 2X_t a_1(t)dt + 2X_t b_1(t)dW_t + \frac{1}{2} \cdot 2(b_1(t))^2 dt = \\ &= 2X_t a_1(t)dt + 2X_t (dX_t - a_1(t)dt) + (b_1(t))^2 dt = 2X_t dX_t + (b_1(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (17)$$

$$dY_t^2 = 2Y_t dY_t + (b_2(t))^2 dt. \quad (18)$$

$$\begin{aligned} d\{(X_t + Y_t)^2\} &= 2(X_t + Y_t)(a_1(t) + a_2(t))dt + 2(X_t + Y_t)(b_1(t) + b_2(t))dW_t + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot 2(b_1(t) + b_2(t))^2 dt = 2(X_t + Y_t)(a_1(t) + a_2(t))dt + \\ &\quad + 2(X_t + Y_t)(dX_t + dY_t - (a_1(t) + a_2(t))dt) + (b_1(t) + b_2(t))^2 dt = \\ &= 2(X_t + Y_t)d(X_t + Y_t) + (b_1(t) + b_2(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Skoro

$$d\{(X_t + Y_t)^2\} = d(X_t^2 + 2X_t Y_t + Y_t^2) = d(X_t^2) + 2d(X_t Y_t) + d(Y_t^2), \quad (20)$$

to na mocy wzorów (17)-(19) obliczamy

$$\begin{aligned} d(X_t Y_t) &= \frac{d\{(X_t + Y_t)^2\} - d(X_t^2) - d(Y_t^2)}{2} = \frac{2(X_t + Y_t)d(X_t + Y_t) + (b_1(t) + b_2(t))^2 dt}{2} - \\ &\quad - \frac{2X_t dX_t - (b_1(t))^2 dt - 2Y_t dY_t - (b_2(t))^2 dt}{2}. \end{aligned}$$

Po zredukowaniu wyrazów podobnych otrzymujemy zależność (16)

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + b_1(t)b_2(t)dt,$$

stanowiącą tezę dowodzonego twierdzenia, a zatem twierdzenie zostało udowodnione.

Przyjmijmy, że funkcja φ w równaniu (15) jest postaci $\varphi(t) = e^{-\mu t}$. Wtedy na mocy powyższego twierdzenia otrzymujemy

$$d(f(t, X_t)) = d(e^{-\mu t} X_t) = -\mu e^{-\mu t} X_t dt + e^{-\mu t} \sigma dW_t + 0 = e^{-\mu t} \sigma dW_t.$$

Przechodząc do postaci całkowej, otrzymujemy

$$e^{-\mu t} X(t) = X_0 + \int_0^t e^{-\mu s} \sigma dW_s.$$

Pomnożywszy obustronnie przez $e^{\mu t}$, otrzymamy proces stochastyczny (szukane rozwiązanie stochastycznego równania różniczkowego (14)) postaci

$$X(t) = X_0 e^{\mu t} + \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \sigma dW_s \quad (21)$$

Proces (15) nosi nazwę procesu Ornsteina–Uhlenbecka.

5. Zakończenie

W pracy przedstawiono definicję oraz podstawowe własności stochastycznej całki Ito. Ponadto przybliżono pojęcie stochastycznej całki Stratonowicza. Przytoczono wersję wielowymiarową wzoru Ito, służącego do „różniczkowania” pewnych procesów stochastycznych. Pokazano przykład zastosowania wspomnianego twierdzenia do poszukiwania rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych typu (14).

Literatura

- Filatowa D., Posacka K. (2002), *Matematyczne problemy budowy optymalnego portfela papierów wartościowych*, materiały I konferencji nt.: „Modelowanie procesów ekonomicznych”, WSH Kielce – SGGW Warszawa, Kielce.
- Janicki A., Izdorczyk A. (2001), *Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym*, WNT, Warszawa.
- Kloeden P., Platen E., Scherz H. (1997), *Numerical Solution of SDE through Komputer Experiments*, Springer Verlag.
- Oksendal B. (2000), *Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag.
- Sobczyk K. (1996), *Stochastyczne równania różniczkowe*, WNT, Warszawa.

ITO STOCHASTIC INTEGRALS – DEFINITION AND SOME PROPERTIES

Summary

The main purpose of this paper is to present definition Ito integrals and their properties. There is shown formula Ito, which can be used for stochastic differential equations like:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t,$$

where X – unknown stochastic process, μ , σ – known functions, W – Wiener process.

Mgr Katarzyna Posacka jest pracownicą Katedry Matematyki Politechniki Radomskiej.