

Tadeusz Janaszak

EKONOMICZNE MIERNIKI WZROSTU I ZMIENNOŚCI

1. Klasyczne zasady budowy mierników ekonomicznych

W nauce i praktyce ekonomii stosuje się takie mierniki, jak: krańcowa produktywność, tempo wzrostu, stopa procentowa, stopa zwrotu, tempo inflacji, elastyczność podaży i popytu, przychód marginalny, koszt marginalny, marginalna stopa substytucji, pochodna logarytmiczna itp. Podstawą ich tworzenia jest wyznaczenie współczynnika proporcjonalności między przyrostami zmiennej objaśnianej i objaśniającej. Zarówno dla zmiennej zależnej, jak i dla zmiennej niezależnej można stosować przyrosty tak bezwzględne, jak i względne. W sumie otrzymujemy cztery różne warianty mierników wzrostu i zmienności (**pierwszy zestaw wzorów – sposób opisowy**):

- Współczynnik proporcjonalności między bezwzględnym przyrostem zmiennej objaśnianej i bezwzględnym przyrostem zmiennej objaśniającej.
- Współczynnik proporcjonalności między względnym przyrostem zmiennej objaśnianej i bezwzględnym przyrostem zmiennej objaśniającej.
- Współczynnik proporcjonalności między bezwzględnym przyrostem zmiennej objaśnianej i względnym przyrostem zmiennej objaśniającej.
- Współczynnik proporcjonalności między względnym przyrostem zmiennej objaśnianej i względnym przyrostem zmiennej objaśniającej.

Pierwszy z współczynników wymienionych w pierwszym zestawie w zależności od sytuacji interpretuje się jako krańcową produktywność, krańcową stopę substytucji, krańcowy koszt pracy, krańcowy przychód z pracy itp. Drugi oznacza: stopę wzrostu, stopę zwrotu, stopę inflacji itp. Współczynnik ten uzależnia procentowy wzrost zmiennej objaśnianej od bezwzględnego wzrostu zmiennej objaśniającej, np. procentowy wzrost kapitału w zależności od upływu czasu, przy czym upływ czasu liczy się bezwzględnie przy ustalonej jednostce pomiaru, np. rok, miesiąc, tydzień, dzień. Trzeci miernik jest rzadziej stosowany. Jest on odwrotny do miernika drugiego. Pozwala odczytać przyrost bezwzględny zmiennej objaśnianej

w zależności od względnego przyrostu zmiennej objaśniającej. Można za jego pomocą odczytać bezwzględny przyrost kapitału w zależności od procentowego przyrostu czasu. Czwarty współczynnik ustala proporcjonalną zależność procentowego przyrostu zmiennej objaśniającej od procentowego przyrostu zmiennej objaśnianej. W praktycznych zadaniach może on wyrażać elastyczność cenową popytu lub podaży w ujęciu łukowym.

Do definiowania wymienionych mierników używa się wzorów matematycznych. W ujęciu punktowym mierniki wzrostu i zmienności można zapisać w sposób następujący (**drugi zestaw wzorów – sposób punktowy**):

- $a = \frac{dy}{dx}$, czyli $dy = a \cdot dx$,
- $b = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y}$, czyli $\frac{dy}{y} = b \cdot dx$,
- $c = \frac{dy}{dx} \cdot x$, czyli $dy = c \cdot \frac{dx}{x}$,
- $w = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$, czyli $\frac{dy}{y} = w \cdot \frac{dx}{x}$.

Współczynniki występujące we wzorach zestawu drugiego po lewej stronie noszą odpowiednio nazwy: pierwszy – pochodnej, drugi – pochodnej logarytmicznej, czwarty – elastyczności¹. Współczynnik trzeci nie ma ugruntowanej w literaturze nazwy. Nazwijmy go zatem na użytek tego artykułu współczynnikiem lambda. Podane wzory pozwalają obliczyć odpowiednie współczynniki w dowolnych punktach zmiennej niezależnej, jeśli dana jest funkcja obrazująca przebieg procesu ekonomicznego.

Prawą stronę wzorów zestawu drugiego można traktować jako przepisy na posługiwanie się danymi współczynnikami. Przepisy te obowiązują dla niewielkich przyrostów zmiennej niezależnej. Jak niewielkich, o tym decyduje charakter zadania, do jakiego odnosimy obliczone współczynniki. Współczynniki mają charakter lokalny.

2. Procesy o stałych współczynnikach wzrostu i zmienności – funkcje podstawowe

Wzory występujące po prawej stronie zestawu trzeciego możemy również traktować jako równania różniczkowe. Rozwiązanie tych równań pozwala zapisać funkcyjnie przebieg procesu ekonomicznego, jeśli podane są warunki początkowe

¹ W pracy Z. Pawłowskiego [1980] na stronach 194-198 rozważa się pojęcie elastyczności wyższych rzędów i elastyczności różnicowej z zastosowaniem rozwinięcia funkcji w szereg Taylora. Koncepcje te dają się sprowadzić w pewnym sensie do rozważań klasycznych. Dokładniejszą analizę koncepcji śp. prof. Z. Pawłowskiego i jej związku z prezentowaną teorią przeprowadzimy w innej pracy. Uwagę na koncepcję Z. Pawłowskiego zwrócił autorowi recenzent prof. J. Zawadzki.

(x_0, y_0) oraz znane są współczynniki wzrostu i zmienności a , b , c lub w . Jeśli założymy, że współczynniki a , b , c oraz w są stałe, równania te będą miały następujące rozwiązania (**trzeci zestaw wzorów – funkcje o stałych współczynnikach zmienności**):

- $y = a \cdot x + p$, co oznacza funkcję liniową,
- $y = p \cdot \exp(b \cdot x)$, co oznacza funkcję wykładniczą,
- $y = p + c \cdot \ln x$, co oznacza funkcję logarytmiczną,
- $y = p \cdot x^w$, co oznacza funkcję potęgową.

Współczynnik wolny p w powyższych rozwiązaniach oblicza się przez wstawienie do wzorów warunków początkowych.

Tak więc funkcje liniowe, wykładnicze, logarytmiczne i potęgowe zapisane w trzecim zestawie wzorów są funkcjami, które mają odpowiednio stałe współczynniki wzrostu i zmienności. Funkcje liniowe mają stałą pochodną², funkcje wykładnicze – stałą pochodną logarytmiczną, funkcje logarytmiczne – stały współczynnik λ , a funkcje potęgowe – stałą elastyczność. Funkcje liniowe, wykładnicze, logarytmiczne i potęgowe, jako funkcje o stałych współczynnikach wzrostu i zmienności, nazwijmy na użytek tego artykułu funkcjami podstawowymi.

Z tego rodzaju pojęciami studenci ekonomii zapoznają się w podstawowych kursach mikro- i makroekonomii. Celem tego artykułu jest pokazanie, że wielość stosowanych mierników wzrostu i zmienności daje się sprowadzić do jednej ogólnej metody. Polega ona na tym, że krzywe obrazujące przebieg procesów ekonomicznych porównuje się z liniami będącymi wykresami funkcji podstawowych, stycznych do tych krzywych. Krzywa styczna, będąca wykresem funkcji podstawowej, ma tę własność, że rozpatrywany miernik w każdym jej punkcie ma stałą wartość liczbową, którą uznajemy za wartość miernika dla badanej krzywej będącej wykresem badanego procesu ekonomicznego³.

Klasycznie jako styczne do linii obrazującej przebieg procesu ekonomicznego wykorzystuje się linie proste, będące wykresami funkcji liniowych. W pracy tej pokażemy, że zastosowanie podobne do liniowych mają krzywe wykładnicze, logarytmiczne i potęgowe. Wykażemy ponadto, że cztery rodzaje stosowanych stycznych: linii prostych, krzywych wykładniczych, krzywych logarytmicznych i krzywych potęgowych, mają wspólne źródło pochodzenia. Źródło owo polega na tym, że wymienione cztery klasy linii, używanych jako styczne do krzywych przedstawiających przebieg procesów ekonomicznych, są tworzone z wykresów funkcji zachowujących działania arytmetyczne⁴.

² Pochodną rozumiemy w sensie klasycznym.

³ Metoda ta jest użyteczna nie tylko w naukach ekonomicznych, lecz również wszędzie tam, gdzie dowolnym krzywym lokalnie przyporządkowuje się mierniki wzrostu i zmienności.

⁴ Funkcje o tych własnościach w algebrze noszą nazwę homomorfizmów. Podejście takie pokazuje, że obok klasycznej metody tworzenia rachunku różniczkowego (opartego na wyborze – w cha-

3. Procesy o identycznych współczynnikach wzrostu i zmienności – styczność

Założmy, że dane są dwa procesy ekonomiczne, przyjmujące dla zmiennej objaśniającej równej x_0 wartość zmiennej objaśnianej równą y_0 . Oznaczmy jeden z rozpatrywanych procesów ekonomicznych jako funkcję $y = f(x)$, a drugi jako funkcję $y = g(x)$. Przyjęte założenie można ująć równością $f(x_0) = g(x_0)$. Postawmy następujące pytanie.

Pytanie 1. Kiedy dwa procesy ekonomiczne przebiegające przez jeden punkt płaszczyzny mają identyczne współczynniki wzrostu i zmienności obliczone punktowo?

Odpowiedź jest prosta. Wystarczy dla obu procesów zastosować wzory z drugiego zestawu dane po lewej stronie i porównać wyniki. Okazuje się, że dla równości współczynników wzrostu i zmienności wystarczy równość pochodnych. Rodzi się pytanie następne.

Pytanie 2. Czy równość jednego z czterech współczynników dwu procesów ekonomicznych przebiegających przez jeden punkt płaszczyzny pociąga za sobą równość pozostałych współczynników?

Analizując wzory w lewej kolumnie zestawu trzeciego, dochodzimy do wniosku, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna.

Z przytoczonych pytań i odpowiedzi wyciągamy następujący wniosek.

Wniosek 1. Na to, by wszystkie współczynniki procesu $y = f(x)$ były dla wartości zmiennej objaśniającej x równej x_0 odpowiednio identyczne ze wszystkimi współczynnikami procesu $y = g(x)$ obliczonymi dla tego samego punktu x_0 , potrzeba i wystarcza, by zachodziły równości: $f(x_0) = g(x_0)$ i $f'(x_0) = g'(x_0)$. Wynika stąd, że dwa procesy ekonomiczne, których wykresy przebiegają przez jeden punkt płaszczyzny, mają identyczne wszystkie cztery współczynniki wzrostu i zmienności, jeśli wykresy te są styczne. Geometryczny warunek styczności na gruncie nauk ekonomicznych oznacza równość czterech współczynników wzrostu i zmienności.

Obliczone w sposób punktowy współczynniki są na gruncie analizy matematycznej własnością lokalną funkcji opisującej proces. Styczność wykresów funkcji w analizie matematycznej jest również własnością lokalną. Styczność krzywych będących wykresami procesów ekonomicznych jest tożsama z ich równością w wybranym punkcie zmiennej objaśniającej oraz równością ich współczynników wzrostu i zmienności.

rakterze stycznych – funkcji liniowych) możliwe są trzy równoległe sposoby konstrukcji tego rachunku, oparte odpowiednio na funkcjach wykładniczych, logarytmicznych i potęgowych. W sumie są cztery możliwe sposoby konstrukcji rachunku różniczkowego [Janaszak 2003].

Badanie współczynników wzrostu i zmienności procesów ekonomicznych redukuje się zatem – na gruncie analizy matematycznej – do porównywania za pomocą kryterium styczności wykresów funkcji przebiegających przez jeden punkt płaszczyzny. Zadanie obliczenia dla procesu ekonomicznego, opisanego wzorem $y = f(x)$ i przyjmującego wartość zmiennej objaśnianej y_0 dla zmiennej objaśniającej x_0 , współczynnika a , ustalającego lokalną proporcję między bezwzględnym przyrostem zmiennej niezależnej i bezwzględnym przyrostem zmiennej zależnej, redukuje się do znalezienia stycznej liniowej do funkcji $y = f(x)$ w punkcie płaszczyzny (x_0, y_0) . Styczna funkcja liniowa w każdym swoim punkcie ma pochodną równą a . Poszukiwanie współczynnika b , ustalającego lokalnie proporcję pomiędzy względnym przyrostem zmiennej objaśnianej i bezwzględnym przyrostem zmiennej objaśniającej, redukuje się do znalezienia stycznej wykładniczej do funkcji $y = f(x)$ w punkcie płaszczyzny (x_0, y_0) . Styczna funkcja wykładnicza ma stałą pochodną logarytmiczną równą b . Obliczanie współczynnika c , mierzącego lokalną proporcję między bezwzględnym przyrostem zmiennej objaśnianej i względnym przyrostem zmiennej objaśniającej, sprowadza się do wytyczenia stycznej logarytmicznej do funkcji $y = f(x)$ w punkcie płaszczyzny (x_0, y_0) . Styczna funkcja logarytmiczna ma w każdym swoim punkcie współczynnik λ równy c . Wyznaczenie współczynnika w , lokalnej proporcji między względnym przyrostem zmiennej objaśnianej i względnym przyrostem zmiennej objaśniającej, polega na wyznaczeniu stycznej potęgowej do funkcji $y = f(x)$ w punkcie płaszczyzny (x_0, y_0) . Funkcja potęgowa styczna ma w każdym swoim punkcie elastyczność równą w . Widać zatem, jaką rolę odgrywa pojęcie styczności w obliczaniu punktowych współczynników wzrostu zmienności. W dalszym ciągu artykułu wykazemy, że styczność jest pojęciem topologicznym, a zatem wyniki topologii, która jest teoretycznym działem matematyki, są podstawą w badaniach ekonomicznych.

Założmy teraz, że równania różniczkowe dane w prawej kolumnie zestawu trzeciego mają, jak przyjmowaliśmy wcześniej, stałe współczynniki a , b , c oraz w ; przyjmijmy ponadto warunki początkowe $x_0 > 0$ oraz $y_0 > 0$. Rozwiązania tych równań dane są wzorami (czwarty zestaw wzorów – **rozwiązania równań różniczkowych przy zadanych warunkach początkowych**):

- $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$, czyli $y = y_0 + a \cdot (x - x_0)$,
- $\frac{y}{y_0} = \exp(b(x - x_0))$, czyli $y = y_0 \cdot \exp(b(x - x_0))$,
- $y - y_0 = c \cdot \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$, czyli $y = y_0 + c \cdot \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$,
- $\frac{y}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^w$, czyli $y = y_0 \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^w$.

Wykresy wszystkich funkcji wymienionych w prawej kolumnie czwartego zestawu wzorów przebiegają przez punkt płaszczyzny o współrzędnych: odcięta x_0 , rzędna y_0 . Są to funkcje: liniowe, wykładnicze logarytmiczne i potęgowe, czyli funkcje podstawowe przebiegające przez zadany punkt płaszczyzny. Postawmy kolejne pytanie.

Pytanie 3. Jakie zależności muszą spełniać współczynniki a , b , c oraz w , aby funkcje podstawowe wyszczególnione w czwartym zestawie wzorów po stronie prawej były styczne w punkcie x_0 ?

Nietrudno wyznaczyć następujące zależności między współczynnikami stycznych funkcji podstawowych przebiegających przez jeden punkt płaszczyzny (**piąty zestaw wzorów – zależności między współczynnikami stycznych funkcji podstawowych**):

- $a = a$, $a = b \cdot y_0$, $a = c \cdot \frac{1}{x_0}$, $a = w \cdot \frac{y_0}{x_0}$,
- $b = \frac{a}{y_0}$, $b = b$, $b = c \cdot \frac{1}{x_0 \cdot y_0}$, $b = \frac{w}{x_0}$,
- $c = a \cdot x_0$, $c = b \cdot x_0 \cdot y_0$, $c = c$, $c = w \cdot y_0$,
- $w = a \cdot \frac{x_0}{y_0}$, $w = b \cdot x_0$, $w = c \cdot \frac{1}{y_0}$, $w = w$.

4. Sposób użycia współczynnika wzrostu i zmienności – homomorfizm

Stosowane w ekonomii mierniki wzrostu i zmienności są liczbami wraz z dołączonymi do nich przepisami – jak się daną liczbą posługiwać. Wzory podane w prawej kolumnie zestawu drugiego można uważać za przepisy, jak obliczać przyrosty bezwzględne i względne zmiennej objaśnianej w zależności od bezwzględnych i względnych przyrostów zmiennej objaśniającej. Obliczanie poszczególnych przyrostów ma, jak już zauważyliśmy, charakter lokalny. Przepis podaje procedurę użycia miernika. W języku matematyki, liczba wraz z przepisem jej zastosowania jest niczym innym jak funkcją. Funkcje przyrostów bezwzględnych i względnych zmiennej objaśnianej w zależności od przyrostów bezwzględnych i względnych zmiennej objaśniającej są lokalnie równoważne z przyrostami funkcji podstawowych, czyli liniowych, wykładniczych, logarytmicznych i potęgowych. Mierniki wzrostu i zmienności możemy uważać za funkcje należące do tych wyspecyfikowanych klas (**szósty zestaw wzorów – utożsamienie współczynników wzrostu i zmienności z funkcjami podstawowymi stycznymi do procesu**):

- Współczynniki proporcjonalności między bezwzględnym przyrostem zmiennej objaśnianej i bezwzględnym przyrostem zmiennej objaśniającej można utożsamiać z funkcjami liniowymi stycznymi – a ściślej z homomorfizmami liniowymi.

- Współczynniki proporcjonalności między względnym przyrostem zmiennej objaśnianej i bezwzględnym przyrostem zmiennej objaśniającej można utożsamiać z funkcjami wykładniczymi stycznymi, a ściślej – z homomorfizmami wykładniczymi.
- Współczynniki proporcjonalności między bezwzględnym przyrostem zmiennej objaśnianej i względnym przyrostem zmiennej objaśniającej można utożsamiać z funkcjami logarytmicznymi stycznymi, a ściślej – z homomorfizmami logarytmicznymi.
- Współczynniki proporcjonalności między względnym przyrostem zmiennej objaśnianej i względnym przyrostem zmiennej objaśniającej można utożsamiać z funkcjami potęgowymi stycznymi, a ściślej – z homomorfizmami potęgowymi.

W języku opisowym homomorfizm to operacja, która zachowuje działania. W zbiorze liczb rzeczywistych są dwa działania: dodawanie i mnożenie. W języku algebry mówi się, że w zbiorze liczb rzeczywistych dane są dwie grupy: addytywna i multiplikatywna. Grupa addytywna to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z działaniem dodawania, grupa multiplikatywna to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich z działaniem mnożenia. Ponieważ są wyodrębnione dwie grupy, to istnieją cztery rodzaje homomorfizmów, które odwzorowują te grupy w siebie (**siódmy zestaw wzorów – opis homomorfizmów grup: addytywnej i multiplikatywnej zbioru liczb rzeczywistych**):

- homomorfizmy liniowe odwzorowują grupę addytywną w siebie,
- homomorfizmy wykładnicze odwzorowują grupę addytywną w grupę multiplikatywną,
- homomorfizmy logarytmiczne odwzorowują grupę multiplikatywną w grupę addytywną,
- homomorfizmy potęgowe odwzorowują grupę multiplikatywną w siebie.

Przechodząc do wzorów na zachowywanie działań, wymienione w siódmym zestawie homomorfizmy możemy zdefiniować jako ciągłe odwzorowania odpowiednich grup o następujących własnościach (**ósmo zestaw wzorów – własności homomorfizmów**):

- homomorfizmy liniowe: $h(t_1 + t_2) = h(t_1) + h(t_2)$,
- homomorfizmy wykładnicze: $h(t_1 + t_2) = h(t_1) \cdot h(t_2)$,
- homomorfizmy logarytmiczne: $h(s_1 \cdot s_2) = h(s_1) + h(s_2)$,
- homomorfizmy potęgowe: $h(s_1 \cdot s_2) = h(s_1) \cdot h(s_2)$.

Homomorfizmy liniowe zachowują działanie dodawania, homomorfizmy wykładnicze zamieniają działanie dodawania na działanie mnożenia, homomorfizmy logarytmiczne, odwrotnie, zamieniają działanie mnożenia na działanie dodawania, wreszcie homomorfizmy potęgowe zachowują działanie mnożenia. Postać tych homomorfizmów jest następująca (**dziewiąty zestaw wzorów – postać homomorfizmów**):

- homomorfizmy liniowe: $h(t) = a \cdot t$,
- homomorfizmy wykładnicze: $h(t) = \exp(b \cdot t)$,
- homomorfizmy logarytmiczne: $h(s) = c \cdot \ln(s)$,
- homomorfizmy potęgowe: $h(s) = s^w$.

5. Własności funkcji podstawowych

Warunkiem koniecznym do porównywania tempa wzrostu i zmienności procesów ekonomicznych jest ich obserwacja w jednakowych odstępach czasu, więc momenty czasu obserwacji tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli produkcja przebiega rytmicznie, wówczas ciąg skumulowanej produkcji obserwowanej w równych odstępach czasu utworzy ciąg arytmetyczny. Obserwując ciąg wartości kapitału na koncie przy stałej stopie procentowej, zauważamy, że obserwowane w jednakowych odstępach czasu wartości kapitału tworzą ciąg geometryczny.

Ciągi arytmetyczny i geometryczny wyrażają prawidłowości w nieustannym ruchu obserwowanych zmiennych procesów ekonomicznych. Aby wyrazić sąd o przebiegu tych procesów, musimy zakładać, że w małych odcinkach czasu, czyli lokalnie, zachowują one pewną prawidłowość. Można przyjąć założenie nieco słabsze, że lokalnie procesy te są podobne do procesów idealnych o stałych parametrach. Podobieństwo to w języku matematyki, a ściślej mówiąc – w języku analizy matematycznej i topologii, oznacza styczność rzeczywistego procesu ekonomicznego z procesem idealnym. Idealne procesy, które ciągom arytmetycznym, lub geometrycznym, zmiennej objaśniającej przyporządkowują ciągi arytmetyczne, lub geometryczne, zmiennej objaśnianej, to są funkcje podstawowe. Zauważmy następującą własność funkcji podstawowych danych czwartym zestawem wzorów (**dziesiąty zestaw wzorów – wzajemna odpowiedniość postępów arytmetycznych i geometrycznych za pomocą funkcji podstawowych, metoda opisowa**):

- Funkcja liniowa zamienia ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym zeru i różnicy równej Δx na ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym p i różnicy równej $a \cdot \Delta x$.
- Funkcja wykładnicza zamienia ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym zeru i różnicy równej Δx na ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym p i ilorazie równym $\exp(b \cdot \Delta x)$.
- Funkcja logarytmiczna zamienia ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym jeden i ilorazie równym Qx na ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym p i różnicy równej $c \cdot \ln(Qx)$.
- Funkcja potęgowa zamienia ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym jeden i ilorazie równym Qx na ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym p i ilorazie równym $(Qx)^w$.

Homomorfizmy są szczególną postacią funkcji podstawowych. Jeśli w pierwszym i trzecim wzorze zestawu dziesiątego przyjmiemy wartość p równą zero, a we wzorach drugim i czwartym przyjmiemy wartość p równą jeden, otrzymamy własności odpowiednich homomorfizmów. Jeśli ciągi arytmetyczne zaczynające się od zera i ciągi geometryczne zaczynające się od jedynki nazwiemy ciągami centralnymi, to zauważamy, że homomorfizmy przekształcają ciągi centralne na ciągi centralne (**jedenasty zestaw wzorów – wzajemna odpowiedniość centralnych postępów arytmetycznych i geometrycznych za pomocą homomorfizmów, metoda opisowa**):

- Homomorfizm liniowy zamienia centralny ciąg arytmetyczny o różnicy równej Δx na centralny ciąg arytmetyczny o różnicy równej $a \cdot \Delta x$.
- Homomorfizm wykładniczy zamienia centralny ciąg arytmetyczny o różnicy równej Δx na centralny ciąg geometryczny o ilorazie równym $\exp(b \cdot \Delta x)$.
- Homomorfizm logarytmiczny zamienia centralny ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym jeden i ilorazie równym Qx na centralny ciąg arytmetyczny o różnicy równej $c \cdot \ln(Qx)$.
- Homomorfizm potęgowy zamienia centralny ciąg geometryczny o ilorazie równym Qx na centralny ciąg geometryczny o ilorazie równym $(Qx)^w$.

W zależności od tego, jaki z czterech współczynników wzrostu i zmienności rozpatrujemy, możemy zakładać, że lokalne przyrosty rzeczywistego procesu zachowują się podobnie do idealnych procesów opisanych za pomocą homomorfizmów.

6. Aproksymacja procesów za pomocą funkcji podstawowych

Rozważamy proces ekonomiczny opisany równaniem $y = f(x)$, przy czym jego wykres przechodzi przez punkt płaszczyzny o dodatnich współrzędnych (x, y) . Przyjmijmy, że w wyróżnionym punkcie istnieją współczynniki wzrostu i zmienności. Z wcześniejszych rozważań wiadomo, że istnienie jednego z nich pociąga za sobą istnienie pozostałych. Wiadomo także, że przyjęte założenie jest równoważne istnieniu funkcji podstawowych stycznych do procesu w podanym punkcie. Można zatem zapisać przybliżone równości (**dwunasty zestaw wzorów – aproksymacja procesu za pomocą funkcji podstawowych**):

- $f(x + dx) \approx y + a \cdot dx$, czyli $f(x + dx) - y \approx a \cdot dx$,
- $f(x + dx) \approx y \cdot \exp(b \cdot dx)$, czyli $\frac{f(x + dx)}{y} \approx \exp(b \cdot dx)$,
- $f(x \cdot qx) \approx y + c \ln(qx)$, czyli $f(x \cdot qx) - y \approx c \ln(qx)$,
- $f(x \cdot qx) \approx y \cdot (qx)^w$, czyli $\frac{f(x \cdot qx)}{y} \approx (qx)^w$.

Jeśli liczba dx^5 jest bliska zeru, wówczas punkt $x + dx$ leży w pobliżu punktu x^6 ; dla ciągłej funkcji $y = f(x)$ punkt $f(x + dx)$ leży obok punktu $f(x)$. Podobnie, jeśli liczba qx^7 leży blisko jedynki, wówczas punkt $x \cdot qx$ leży blisko punktu x^8 , dla ciągłej funkcji $y = f(x)$ punkt $f(x \cdot qx)$ leży obok punktu $f(x)$. Oznaczając przez dy różnicę między punktem sąsiednim w stosunku do punktu y i samym punktem y oraz przez qy iloraz liczby sąsiedniej w stosunku do liczby y i samą liczbą y , możemy zapisać proste wzory na homomorfizmy: liniowe, wykładnicze, logarytmiczne i potęgowe (**trzynasty zestaw wzorów – zapis homomorfizmów z użyciem symboli d i q ⁹ oraz wzory aproksymacyjne z użyciem symboli dy i qy**):

- $dy = a \cdot dx$, skąd $f(x + dx) \approx y + dy$,
- $qy = \exp(b \cdot dx)$, skąd $f(x + dx) \approx y \cdot qy$,
- $dy = c \cdot \ln(qx)$, skąd $f(x \cdot qx) \approx y + dy$,
- $qy = (qx)^w$, skąd $f(x \cdot qx) \approx y \cdot qy$.

W dwunastym i trzynastym zestawie wzorów użyty został symbol przybliżonej równości. Określenie „przybliżona równość” jest zrozumiałe w potocznym języku, natomiast w języku matematyki musi mieć ściśle określony sens. Za relację przybliżonej równości przyjmujemy styczność. Aby symbol przybliżonej równości zastąpić symbolem dokładnej równości, należy jedną ze stron równości przybliżonej uzupełnić resztą. Wzory podane w trzynastym zestawie przybiorą wówczas postać (**czternasty zestaw wzorów aproksymacja dowolnych procesów przez funkcje podstawowe z użyciem reszty**):

- $f(x + t) = f\langle x \rangle + a \cdot t + o(t)$, czyli $f(x + t) - f\langle x \rangle - a \cdot t = o(t)$,
- $f(x + t) = f\langle x \rangle \cdot \exp(b \cdot t) \cdot \omega(t)$, czyli $\frac{f(x + t)}{f\langle x \rangle} \cdot \frac{1}{\exp(b \cdot t)} = \omega(t)$,
- $f(x \cdot s) = f\langle x \rangle + c \cdot \ln(s) + \lambda(s)$, czyli $f(x \cdot s) - f\langle x \rangle - c \cdot \ln(s) = \lambda(s)$,
- $f(x \cdot s) = f\langle x \rangle \cdot s^w \cdot \pi(s)$, czyli $\frac{f(x \cdot s)}{f\langle x \rangle} \cdot \frac{1}{s^w} = \pi(s)$.

W czternastym zestawie wzorów użyte zostały symbole: $o(t)$, $\omega(t)$, $\lambda(s)$ oraz $\pi(s)$. Powszechnie znany jest symbol o . Symbole: $o(t)$, $\omega(t)$, $\lambda(s)$ oraz $\pi(s)$ służą do

⁵ Symbol d wywodzi się od łacińskiego terminu *differentia* – różnica.

⁶ Liczba dx ma identyczne miano z liczbą x .

⁷ Symbol q wywodzi się od łacińskiego terminu *quotus* – iloraz.

⁸ Liczba qx jest liczbą niemianowaną.

⁹ Liczby dx oraz dy można uważać za elementy grupy addytywnej zbioru liczb rzeczywistych, a liczby dodatnie qx oraz qy można uważać za elementy grupy multiplikatywnej zbioru liczb rzeczywistych.

określenia pojęcia styczności, które jest konieczne do definiowania lokalnych własności procesów ekonomicznych¹⁰. Klasycznie styczność określa się za pomocą klasy funkcji o . Zakłada się wówczas, że przyrosty zarówno w dziedzinie, jak i przeciwdziedzinie są addytywne. Jeśli w dziedzinie stosujemy przyrost addytywny, a w przeciwdziedzinie przyrost multiplikatywny, wówczas naturalną klasą, za pomocą której określić można styczność, jest klasa ω ¹¹. Przy zastosowaniu w dziedzinie przyrostu multiplikatywnego a w przeciwdziedzinie przyrostu addytywnego jako resztę w definicji procesów stycznych przyjmuje się klasę λ . Jeśli zarówno w dziedzinie, jak i w przeciwdziedzinie operujemy przyrostem multiplikatywnym, wówczas naturalną klasą definiującą styczność procesów jest klasa π ¹².

W naukach ekonomicznych stosuje się wyniki matematyki. Z zasady symetrii wynika, że nie jest dopuszczalna sytuacja, w której jedna dyscyplina będzie czerpać z drugiej, nic w zamian nie dając. Stosowanie wyników jednej dyscypliny w innej dyscyplinie owocuje na ogół rozwojem obu. W historii nauki najbardziej znany jest związek matematyki i fizyki. Rachunek różniczkowy powstał na styku tych dyscyplin. Wyniki rachunku różniczkowego z powodzeniem są obecnie stosowane w wielu dyscyplinach, m.in. w ekonomii. W podręcznikach tzw. czystej matematyki próżno by szukać pojęcia elastyczności czy pochodnej logarytmicznej. Pojęcia te zostały utworzone przez ekonomistów na użytek nauk ekonomicznych. Dokładna analiza tych pojęć prowadzi do wniosku, że klasyczne pojęcie pochodnej, wywodzące się z aproksymacji procesów funkcjami liniowymi, pojęcie pochodnej logarytmicznej, mającej zastosowanie do badania wartości pieniądza w czasie, pochodzące od Marshalla pojęcie elastyczności, ustalające proporcje między procentowymi przyrostami zmiennych, wraz ze współczynnikiem λ tworzą jedną strukturę, która polega na tym, że dowolne procesy przybliża się funkcjami podstawowymi, które są utworzone za pomocą homomorfizmów. Co więcej, okazuje się, że rachunek różniczkowy, który był tworzony na styku matematyki i fizyki, może być skonstruowany nie tylko przy użyciu funkcji liniowych, lecz również za pomocą trzech pozostałych kategorii funkcji opartych na homomorfizmach zbioru liczb rzeczywistych. Konstrukcja taka mieści się w naturalnym procesie wzajemnego oddziaływania dwu dyscyplin, w tym wypadku ekonomii

¹⁰ Związki między symbolami o , ω , λ i π podano w pracy T. Janaszaka [2003].

¹¹ Pomysł zastąpienia klasy o przez klasę ω w zestawie piętnastym, wzór drugi podał prof. A. Smoluk w dyskusji z autorem.

¹² Klasy o , ω , λ oraz π mogą zostać zdefiniowane w kategoriach topologii ogólnej za pomocą tzw. lejków Smoluka, która to topologia jest nazywana w dyskusjach seminaryjnych topologią muszek (zbiory tworzące na płaszczyźnie topologie styczności przypominają muszki noszone do strojów wieczorowych). Klasa o małe utworzona jest za pomocą pęku homomorfizmów liniowych, klasa ω mała za pomocą pęku homomorfizmów wykładniczych, klasa λ mała za pomocą pęku homomorfizmów logarytmicznych a klasa π małe utworzona jest za pomocą pęku homomorfizmów potęgowych.

i matematyki¹³. Uporządkowanie mierników wzrostu i zmienności za pomocą metody aproksymacji funkcjami podstawowymi może się przyczynić do lepszego ich zrozumienia w obszarze nauk ekonomicznych, a z drugiej strony pokazuje, że w matematyce możliwe są inne niż klasyczne metody budowy rachunku różniczkowego¹⁴.

Literatura

- Janaszak T. (2003). *Równoległy rachunek różniczkowy w badaniach ekonomicznych*, AE, Wrocław.
 Jaśkiewicz G. (1965). *Metoda odwzorowań liniowych w analizie układów nieliniowych*, praca doktorska, Politechnika Wrocławska.
 Pawłowski Z. (1980). *Ekometria*, PWN, Warszawa.
 Smoluk A. (1992). *O definicji pochodnej*, [w:] *Dydaktyka matematyki*, red. S. Krowicki, J. Łyko, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 615, AE, Wrocław.

ECONOMIC MEASURES OF GROWTH AND CHANGE

Summary

In this paper is considered the local property of economic processes. The economic process is said a real function. In the science of economics the shape of the function is global property of economic process. The local property of the processes is an algebraic expression. Each expression contains: the derivative of the function, and alternatively the value of the function, or the value of the argument of the function; it is represented by an tangent line to the process. Local property of the process is represented by the tangent lines: linear, exponential, power or logarithmic, depending of the aim of the research. Each of this method is a starting point to the construction of the calculus. The four methods are equivalent. Each of the method constructs specific language to the diverse problems.

Dr Tadeusz Janaszak jest pracownikiem Katedry Matematyki i Cybernetyki Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.

¹³ Na styku nauk technicznych i matematyki konstrukcje podobne do pochodnej logarytmicznej były wykonywane przez dr Genadiusza Jaśkiewicza (1965). Autor dowiedział się w czasie rozmowy z śp. rektorem Andrzejem Baborskim, iż w czasie obrony pracy doktorskiej G. Jaśkiewicza jeden z dyskutantów zwrócił uwagę, że rozważania na temat wykorzystania funkcji wykładniczych do budowy rachunku różniczkowego były zawarte w pracach C.F. Gaussa. Autorowi nie udało się dotrzeć do tych prac.

¹⁴ Dokładna konstrukcja budowy rachunku różniczkowego za pomocą funkcji liniowych, wykładniczych, logarytmicznych i potęgowych jest przedstawiona w pracy T. Janaszaka [2003].

określenia pojęcia styczności, które jest konieczne do definiowania lokalnych własności procesów ekonomicznych¹⁰. Klasycznie styczność określa się za pomocą klasy funkcji o . Zakłada się wówczas, że przyrosty zarówno w dziedzinie, jak i przeciwdziedzinie są addytywne. Jeśli w dziedzinie stosujemy przyrost addytywny, a w przeciwdziedzinie przyrost multiplikatywny, wówczas naturalną klasą, za pomocą której określić można styczność, jest klasa ω ¹¹. Przy zastosowaniu w dziedzinie przyrostu multiplikatywnego a w przeciwdziedzinie przyrostu addytywnego jako resztę w definicji procesów stycznych przyjmuje się klasę λ . Jeśli zarówno w dziedzinie, jak i w przeciwdziedzinie operujemy przyrostem multiplikatywnym, wówczas naturalną klasą definiującą styczność procesów jest klasa π ¹².

W naukach ekonomicznych stosuje się wyniki matematyki. Z zasady symetrii wynika, że nie jest dopuszczalna sytuacja, w której jedna dyscyplina będzie czerpać z drugiej, nic w zamian nie dając. Stosowanie wyników jednej dyscypliny w innej dyscyplinie owocuje na ogół rozwojem obu. W historii nauki najbardziej znany jest związek matematyki i fizyki. Rachunek różniczkowy powstał na styku tych dyscyplin. Wyniki rachunku różniczkowego z powodzeniem są obecnie stosowane w wielu dyscyplinach, m.in. w ekonomii. W podręcznikach tzw. czystej matematyki próżno by szukać pojęcia elastyczności czy pochodnej logarytmicznej. Pojęcia te zostały utworzone przez ekonomistów na użytek nauk ekonomicznych. Dokładna analiza tych pojęć prowadzi do wniosku, że klasyczne pojęcie pochodnej, wywodzące się z aproksymacji procesów funkcjami liniowymi, pojęcie pochodnej logarytmicznej, mającej zastosowanie do badania wartości pieniądza w czasie, pochodzące od Marshalla pojęcie elastyczności, ustalające proporcje między procentowymi przyrostami zmiennych, wraz ze współczynnikiem λ tworzą jedną strukturę, która polega na tym, że dowolne procesy przybliża się funkcjami podstawowymi, które są utworzone za pomocą homomorfizmów. Co więcej, okazuje się, że rachunek różniczkowy, który był tworzony na styku matematyki i fizyki, może być skonstruowany nie tylko przy użyciu funkcji liniowych, lecz również za pomocą trzech pozostałych kategorii funkcji opartych na homomorfizmach zbioru liczb rzeczywistych. Konstrukcja taka mieści się w naturalnym procesie wzajemnego oddziaływania dwu dyscyplin, w tym wypadku ekonomii

¹⁰ Związki między symbolami o , ω , λ i π podano w pracy T. Janaszaka [2003].

¹¹ Pomysł zastąpienia klasy o przez klasę ω w zestawie piętnastym, wzór drugi podał prof. A. Smoluk w dyskusji z autorem.

¹² Klasy o , ω , λ oraz π mogą zostać zdefiniowane w kategoriach topologii ogólnej za pomocą tzw. lejków Smoluka, która to topologia jest nazywana w dyskusjach seminaryjnych topologią muszek (zbiory tworzące na płaszczyźnie topologie styczności przypominają muszki noszone do strojów wieczorowych). Klasa o małe utworzona jest za pomocą pęku homomorfizmów liniowych, klasa ω mała za pomocą pęku homomorfizmów wykładniczych, klasa λ mała za pomocą pęku homomorfizmów logarytmicznych a klasa π małe utworzona jest za pomocą pęku homomorfizmów potęgowych.

i matematyki¹³. Uporządkowanie mierników wzrostu i zmienności za pomocą metody aproksymacji funkcjami podstawowymi może się przyczynić do lepszego ich zrozumienia w obszarze nauk ekonomicznych, a z drugiej strony pokazuje, że w matematyce możliwe są inne niż klasyczne metody budowy rachunku różniczkowego¹⁴.

Literatura

- Janaszak T. (2003). *Równoległy rachunek różniczkowy w badaniach ekonomicznych*, AE, Wrocław.
 Jaśkiewicz G. (1965), *Metoda odwzorowań liniowych w analizie układów nieliniowych*, praca doktorska, Politechnika Wrocławska.
 Pawłowski Z. (1980), *Ekonometria*, PWN, Warszawa.
 Smoluk A. (1992), *O definicji pochodnej*, [w:] *Dydaktyka matematyki*, red. S. Krowicki, J. Łyko, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 615, AE, Wrocław.

ECONOMIC MEASURES OF GROWTH AND CHANGE

Summary

In this paper is considered the local property of economic processes. The economic process is said a real function. In the science of economics the shape of the function is global property of economic process. The local property of the processes is an algebraic expression. Each expression contains: the derivative of the function, and alternatively the value of the function, or the value of the argument of the function: it is represented by an tangent line to the process. Local property of the process is represented by the tangent lines: linear, exponential, power or logarithmic, depending of the aim of the research. Each of this method is a starting point to the construction of the calculus. The four methods are equivalent. Each of the method constructs specific language to the diverse problems.

Dr Tadeusz Janaszak jest pracownikiem Katedry Matematyki i Cybernetyki Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.

¹³ Na styku nauk technicznych i matematyki konstrukcje podobne do pochodnej logarytmicznej były wykonywane przez dr Genadiusza Jaśkiewicza (1965). Autor dowiedział się w czasie rozmowy z śp. rektorem Andrzejem Baborskim, iż w czasie obrony pracy doktorskiej G. Jaśkiewicza jeden z dyskutantów zwrócił uwagę, że rozważania na temat wykorzystania funkcji wykładniczych do budowy rachunku różniczkowego były zawarte w pracach C.F. Gaussa. Autorowi nie udało się dotrzeć do tych prac.

¹⁴ Dokładna konstrukcja budowy rachunku różniczkowego za pomocą funkcji liniowych, wykładniczych, logarytmicznych i potęgowych jest przedstawiona w pracy T. Janaszaka [2003].