

Politechnika Wrocławska
Wydział Elektroniki
Instytut Telekomunikacji i Akustyki

Rozprawa doktorska

Nieliniowa ortogonalna filtracja
odszumiająca niegaussowskich
sygnałów losowych
wyższych rzędów

mgr inż. Paweł Biernacki

Promotor:
dr hab. inż. Jan Zarzycki
prof. nadzw.

Wrocław 2003

Rodzicom moim poświęcam

Podziękowania

Serdecznie dziękuję Panu Profesorowi Janowi Zarzyckiemu
za trud prowadzenia tej pracy oraz za zdobyte pod Jego kierunkiem
wiedzę i umiejętności.

Spis treści

Symbole i skróty	ii
1 Wstęp	1
1.1 Przegląd literatury	2
1.1.1 Cyfrowe metody eliminacji szumu	2
1.1.2 Estymacja średniokwadratowa	4
1.1.3 Systemy nieliniowe klasy Volterra-Wienera	5
1.2 Teza i cel pracy	6
1.3 Układ pracy	7
2 Liniowa średniokwadratowa filtracja odsumiająca sygnałów losowych drugiego rzędu	9
2.1 Postawienie problemu	9
2.2 Liniowa średniokwadratowa filtracja odsumiająca sygnałów losowych	12
2.2.1 Wyznaczenie bazy ortonormalnej przestrzeni S_0^N	14
2.2.2 Estymator sygnału użytecznego	20
2.3 Podsumowanie	22
3 Nieliniowa średniokwadratowa filtracja odsumiająca sygnałów losowych wyższych rzędów	24
3.1 Geometryczne rozwiązanie problemu filtracji odsumiającej	24
3.2 Przypadek niestacjonarny	30
3.2.1 Wyznaczenie bazy ortonormalnej przestrzeni $S^{\{M\}}$	30

3.2.2	Estymator sygnału użytecznego w bazie ON przestrzeni $S^{\{M\}}$	39
3.3	Przypadek stacjonarny	45
3.4	Nieliniowa ortogonalna filtracja odszumiająca szeregów czasowych	50
3.4.1	Notacja	50
3.4.2	Uogólniony izomorfizm Kołmogorowa	52
3.4.3	Problem filtracji odszumiającej szeregów czasowych	52
3.4.4	Dekorelacja szeregów czasowych wyższych rzędów	54
	Operator różnicowy	57
3.4.5	Zmienny w czasie estymator sygnału użytecznego	61
3.5	Podsumowanie	67
4	Strategie adaptacyjnego doboru struktury filtra odszumiającego	69
4.1	Kryterium strategii wyboru parametrów filtra odszumiającego	71
4.2	Strategie poprawy jakości estymacji poprzez zmiany wartości parametrów filtra odszumiającego	72
4.3	Podsumowanie	77
5	Badania eksperymentalne ortogonalnej filtracji odszumiającej	81
5.1	Metodologia badań	81
5.2	Dekorelacja sygnałów wyższych rzędów	82
5.3	Filtracja odszumiająca	87
5.4	Strategie wyznaczania parametrów filtra odszumiającego	93
5.5	Podsumowanie	98
6	Podsumowanie	100
6.1	Kierunki dalszych badań	103
A	Wielowymiarowe nieliniowe filtry Volterra-Wienera	105

Symbole i skróty

Najczęściej używane symbole i skróty

Macierze i wektory wyróżnione są w tekście wytłuszczoną czcionką. Symbole macierzy pisane są wielkimi literami, wektory małymi.

$\text{span}\{x\}$	przestrzeń generowana przez element x
$\oplus$	suma prosta podprzestrzeni
$\otimes$	iloczyn zewnętrzny lub Kroneckera
$\triangleq$	równość z definicji
$\{.\}$	zbiór
P_S	operator projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń S
$P_S^\perp$	operator projekcji na ortogonalne uzupełnienie podprzestrzeni S
$E\{.\}$	operator uśredniania probabilistycznego
$(.,.)$	iloczyn skalarny
$\{y_t\}$	sygnał losowy o czasie dyskretnym
y_i	zmienna losowa reprezentująca sygnał y_t w chwili $t = i$
$\langle y $	wektor typu 'bra'
$ y \rangle$	wektor typu 'ket'
r	unormowany błąd prognozy 'w tył'
e	unormowany błąd prognozy 'w przód'
ρ	współczynnik Schura w bloku dekorelującym
$^x\rho$	współczynnik Schura w bloku estymującym
x_0	zmienna losowa reprezentująca sygnał użyteczny

$\hat{x}$	estymata zmiennej losowej x_0
n	sygnał zakłócający

Skróty

ON	baza ortonormalna (ang. <i>Orthonormal basis</i>)
NLPC	nieliniowe kodowanie prognozujące (ang. <i>NonLinear Prediction Coding</i>)
MSK	kluczowanie z minimalnym przesuwem częstotliwości (ang. <i>Minimum Shift Keying</i>)
HOS	statystyki wyższych rzędów (ang. <i>Higher Order Statistics</i>)

Rozdział 1

Wstęp

Przy zbieraniu danych związanych z określonym zjawiskiem fizycznym nie daje się uniknąć pewnego dodatkowego (niepożądanego) sygnału. Przyjmuje on zwykle postać zakłócenia. Jego obecność stanowi ograniczenie dla osiągalnej dokładności pomiaru informacji użytecznej zawartej w badanym sygnale. Jednym z kluczowych problemów cyfrowego przetwarzania sygnałów jest redukcja szumu (zakłócenia) w sygnałach niosących informację. Wykorzystywane do tego metody mają za zadanie poprawę stosunku sygnał/szum i są często fazą wstępną dla dalszego przetwarzania sygnałów. W niniejszej pracy rozważano zagadnienie wykorzystania nieliniowych ortogonalnych filtrów cyfrowych w procesie filtracji odszumiającej sygnałów losowych wyższych rzędów (niż 2).

Sygnał losowy nazywa się sygnałem rzędu M , jeśli jest on w pełni charakteryzowany za pomocą łącznych wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa rzędów od 1 do M . Dla przypadku gdy $M = 2$ (sygnały drugiego rzędu) mówimy o liniowej estymacji średniokwadratowej. Obejmuje ona między innymi liniową filtrację innowacyjną i odszumiającą. Filtr liniowy jest optymalny w sensie średniokwadratowym dla sygnałów gaussowskich, które są w pełni opisane za pomocą statystyk drugiego rzędu [56]. Jeśli rozpatrywany sygnał nie jest typu gaussowskiego liniowa estymacja nie zapewnia wystarczającej dokładności działania filtru. Może być ona tylko pierwszym

etapem tego procesu. Konieczne staje się zastosowanie optymalnego filtra nieliniowego. Rozpatrywane w pracy filtry należą do systemów nieliniowych klasy Volterra-Wienera [61]. Rozważane zagadnienia dekorelacji sygnału oraz eliminacji szumu dotyczą sygnałów rzędu wyższego niż 2.

1.1 Przegląd literatury

Przegląd literatury dotyczący przedmiotu pracy podzielony został na trzy części. Pierwsza omawia różne sposoby rozwiązywania problemu eliminacji zakłóceń. Druga dotyczy metod estymacji średniokwadratowej. Trzecia charakteryzuje systemy nieliniowe klasy Volterra-Wienera.

1.1.1 Cyfrowe metody eliminacji szumu

Szybki w ostatnich latach rozwój cyfrowego przetwarzania sygnałów przyniósł wiele różnych technik służących eliminacji zakłóceń w zakłóconych sygnałach obserwowanych. Ich wybór zależy głównie od miejsca wykorzystania, charakteru zakłócenia.

Metody adaptacyjnej eliminacji szumu (adaptive noise cancelling) [1, 20, 35, 48, 72, 73] wykorzystują koncepcję dwu sensorów. Pierwszy rejestruje sygnał zakłócony, drugi samo zakłócenie. Jeżeli istnieje niezerowa korelacja pomiędzy sygnałami obserwowanymi w obu kanałach, możliwe jest wyeliminowanie zakłócenia. Jednakże w większości aplikacji trudno spełnić wymaganie dotyczące tak rejestrowanych sygnałów. Zazwyczaj do obydwu sensorów docierają wymieszane oba sygnały (zakłócający i zakłócony), co uniemożliwia efektywną eliminację zakłócenia bez pogorszenia jakości sygnału użytecznego. Zastosowanie filtracji odwrotnej zwanej ślepą separacją sygnałów [59] pozwala rozdzielić sygnał użyteczny od zakłócenia. Inną metodą opartą o zastosowanie wielu sensorów jest metoda formowania wiązki. Układ sensorów rejestruje sygnał użyteczny przychodzący z jednego kierunku, jednocześnie ignorując zakłócenie, które nadchodzi z innej strony [33, 37, 15, 36, 16, 68, 64]. Tutaj także skuteczność działania zależy od stopnia korelacji pomiędzy sygnałami

rejestrowanymi w różnych kanałach.

Powyższe wielosensorowe metody charakteryzują się tym, iż są niezależne od statystyk sygnału użytecznego, oraz iż bazują na korelacji wzajemnej sygnałów zakłócających odbieranych przez sensory. Metody jednosensorowe zakładają wolnozmiennność widma sygnału zakłócającego. Zakłada się znajomość statystyk zakłócenia lub estymuje się je w odstępach czasu, w których nie pojawia się sygnał użyteczny. Następuje to dodatkowy problem detekcji sygnału użytecznego. Ponadto ważne jest, aby sygnał użyteczny był szybciej zmienny niż zakłócający (wolnozmiennność szumu) [52].

Wiele metod jednosensorowych jest osadzonych w dziedzinie częstotliwości. Są to tak zwane metody odejmowania widmowego [2, 11, 12, 19, 28, 49, 51, 53, 65, 67], w których odejmuje się estymowane zakłócenie w dziedzinie częstotliwości, po czym sygnał odfiltrowany poprzez odwrotną transformatę Fouriera sprowadzany jest do dziedziny czasu. Transformacja ta może jednak wprowadzić dodatkowe zniekształcenia sygnału użytecznego (np. *musical noise* [52]).

Kolejna klasa technik redukcji zakłóceń opiera się na modelowaniu sygnału użytecznego przez pewien zestaw parametrów [29, 38, 50]. Przyjmując model takiego sygnału (np. AR [73]), poprzez estymację jego współczynników z sygnału zaszumionego, można modelować sygnał nas interesujący. Problemem jest tutaj identyfikacja modelu, który jest kluczowym w jakości otrzymanego wyniku.

Inna klasa technik eliminacji zakłóceń bazuje na metodach podprzestrzeni [21, 30, 39]. W pracy [21] wykorzystywana jest SVD toeplitzowskiej macierzy sygnału zakłóconego. Na jej podstawie estymuje się macierz sygnału użytecznego (metodą LS) poprzez eliminację najmniejszych wartości własnych, a następnie odtwarzana jest toeplitzowska struktura tej macierzy w celu odzyskania sygnału użytecznego. Metoda ta zakłada, że szum jest biały. Jej słabym punktem jest wrażliwość na liczbę istotnych wartości własnych. Ominięcie tych problemów zaproponowano w [30]. Metoda Quotient SVD (QSVD) wykorzystuje wybielanie jako etap wstępny filtracji. Przyjęte kry-

terium minimalnej wariancji (MV) [54] dla macierzy sygnału użytecznego, zmniejsza wrażliwość algorytmu na wybór istotnych wartości własnych.

Przedstawione metody cyfrowej eliminacji zakłóceń opierają się na wykorzystaniu statystyk drugiego rzędu sygnałów wejściowych. Ogranicza to ich stosowalność do sygnałów o symetrycznej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa. Filtracja sygnałów o niesymetrycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa wymaga zastosowania wyższych statystyk niż 2, które niosą dodatkową informację o sygnale. Takie podejście powinno polepszyć efektywność działania filtrów eliminujących zakłócenia.

1.1.2 Estymacja średniokwadratowa

Zagadnienia estymacji średniokwadratowej były już rozpatrywane na początku XX wieku. Frechet [32] zaproponował, by zmienne losowe traktować jako elementy przestrzeni metrycznej. Dało to możliwość geometrycznej interpretacji zagadnienia estymacji średniokwadratowej jako projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń. Wold pokazał, że w sygnale losowym przyszłość jego części deterministycznej [27] może być dokładnie przewidziana na podstawie obserwacji jej przeszłości. Rezultat ten znany jest jako dekompozycja Wolda.

W 1942 Wiener sformułował zagadnienie prognozy średniokwadratowej dla sygnałów o czasie ciągłym [75]. Przedstawił on efektywny sposób rozwiązania równania Wienera-Hopfa [45, 75] dający w rezultacie liniowy filtr optymalny.

W 1947 Levinson przedstawił rekurencyjne rozwiązanie zagadnienia liniowej estymacji sygnałów o czasie dyskretnym [47]. Wyniki tej pracy zostały uogólnione na przypadek wielowymiarowy [58]. Algorytm Levinsona umożliwia wyznaczenie współczynników optymalnego estymatora średniokwadratowego na podstawie macierzy kowariancyjnej sygnału. Algorytm ten został uogólniony na przypadek sygnału niestacjonarnego [23]. Parametry filtru Levinsona [26] można wyliczyć efektywnie stosując algorytm parametryzacji Schura [40, 46, 63]. Filtr innowacyjny Levinsona jest filtrem o ruchomej średniej (typu MA).

Geometryczne rozwiązanie problemu liniowej estymacji średniokwadratowej prowadzi do realizacji cyfrowego filtra o strukturze ortogonalnej [4, 17, 40, 41] równoważnego filtrowi Levinsona. W [22, 23, 40, 41] zaproponowano algorytm parametryzacji, umożliwiający przetwarzanie sygnałów w czasie rzeczywistym.

Wiadomym jest, iż realizacja filtra Levinsona, zwłaszcza dla przypadku wielowymiarowego, prowadzi do bardzo złożonych struktur. Wymagają one użycia odpowiednio dużych zasobów pamięciowych i obliczeniowych. Efekt uzyskany nie zawsze musi być zadowalający w stosunku do poniesionych nakładów. Zastosowanie procedury, która pozwoliłaby na sterowanie złożonością struktury filtra Levinsona, tak by minimalizować koszt obliczeniowy przy zachowaniu odpowiedniej efektywności filtracji, umożliwiłby realizację filtra w rzeczywistych systemach eliminujących zakłócenia.

1.1.3 Systemy nieliniowe klasy Volterra-Wienera

Pierwsze prace dotyczące podejścia funkcjonalnego do problematyki systemów nieliniowych pojawiły się w latach osiemdziesiątych dziewiętnastego wieku. W 1887 Volterra opublikował pracę dotyczącą szeregów funkcjonalnych, znanych teraz jako szereg Volterra [70]. Ta uogólniona forma szeregu Taylora może być użyta do reprezentacji nieliniowego systemu z pamięcią. Część tej pracy może być znaleziona w angielskiej wersji pracy Volterra opublikowanej znacznie później w 1959 [71].

W roku 1910 Frechet opublikował pracę, w której wykazał, że regularne wielomiany funkcjonalne Volterra rozpinają wszędzie gęstą podprzestrzeń w przestrzeni funkcjonałów ciągłych [31]. Jest to uogólnienie teorii aproksymacji Weierstrassa, które mówi, że nieliniowy system z pamięcią może być aproksymowany, z założoną dokładnością, przez nieliniowy model oparty na regularnych wielomianach funkcjonalnych Volterra [31].

Wiener był pierwszą osobą, która wykorzystała w 1942, teorie Volterra do analizy nieliniowych systemów [74]. W 1957 Barrett opublikował studia nad zastosowaniami szeregów Volterra w systemach nieliniowych (analiza nielinio-

wych równań różniczkowych, nieliniowe systemy ze sprzężeniem zwrotnym) [3]. W 1958 Brilliant zajmował się właściwościami zbieżności szeregu Volterry [14]. Metody pomiaru jąder Volterry były opublikowane przez Schetzena w 1965 [60]. Metody te były jednak bardzo trudne ze względu na sprzężenia (cross-coupling) pomiędzy jądrami Volterry. Stało się to główną motywacją dla Wienera do przedstawienia ortogonalnej reprezentacji nieliniowych systemów z pamięcią (jądra Wienera). Teoria rozwinięć funkcjonałów w szeregi ortogonalnych wielomianów funkcjonalnych stała się załączkiem metod analizy i syntezy systemów nieliniowych [43, 76].

Teoria Volterry i Wienera, rozwijana w latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych dwudziestego wieku, stała się podstawą wielu zastosowań systemów nieliniowych [3, 13, 14, 18, 24, 34, 62], nazwanych systemami klasy Volterry-Wienera.

Ortogonalizacja funkcjonałów Wienera dla pobudzenia szumem białym gaussowskim pozwoliła na łatwe wyznaczenie jąder Wienera za pomocą technik korelacyjnych [44]. Schetzen rozwinął teorię Wienera dla pobudzeń niegaussowskich i rozwinął metodę korelacyjną dla tej klasy pobudzeń [61].

1.2 Teza i cel pracy

Teza pracy została sformułowana następująco:

Możliwe jest zaproponowanie efektywnych algorytmów nieliniowych ortogonalnych filtrów odsumiających o zmiennych w czasie parametrach i stopniu złożoności dostosowanym do właściwości statystycznych filtrowanych sygnałów.

W pracy założono osiągnięcie sygnalizowanych niżej celów:

1. Geometryczne rekurencyjne rozwiązanie problemu nieliniowej optymalnej filtracji odsumiającej dla sygnałów rzędu $2M$, prowadzące do ortogonalnej realizacji nieliniowego filtra odsumiającego klasy Volterry-Wienera.
2. Opracowanie adaptacyjnego algorytmu umożliwiającego eliminację zakłóceń dla sygnałów losowych posiadających niezerowe statystyki rzędów wyższych niż

- 2.
3. Opracowanie algorytmu doboru parametrów nieliniowego ortogonalnego filtru odsumiającego, w celu maksymalizacji stosunku jakości odsumiania do złożoności obliczeniowej filtracji.
4. Weryfikacja skuteczności zaproponowanych rozwiązań poprzez przeprowadzenie badań symulacyjnych.

Realizacja tak wyznaczonych celów wymusza rozwiązanie następujących zadań:

- zaprezentowanie problemu filtracji odsumiającej
- proponowanie algorytmu dekorrelacji sygnałów losowych wyższych rzędów dla sygnałów niestacjonarnych, stacjonarnych oraz dla szere-
gów czasowych wyższych rzędów
- wybór kryterium zmiany parametrów filtru odsumiającego w celu
optymalizacji efektywności jego pracy
- proponowanie strategii, które pozwalałyby na zmianę parametrów
filtru odsumiającego w zależności od rodzaju sygnału podawanego na
jego wejścia
- implementacja zaproponowanych algorytmów w środowisku Matlab
- przeprowadzenie symulacji komputerowych pozwalających na weryfi-
kację poprawności, skuteczności i efektywności działania zaproponowa-
nych algorytmów

1.3 Układ pracy

Praca składa się z sześciu rozdziałów i jednego dodatku.

Rozdział pierwszy zawiera wprowadzenie do problemu cyfrowej eliminacji zakłóceń (filtracji odsumiającej). Dokonano przeglądu literatury dotyczącej rozwiązania tego problemu, a także tej dotyczącej filtracji średniokwadrato-
wej. W rozdziale tym sformułowano tezę oraz cel pracy.

Rozdział drugi zawiera przedstawienie problemu średniokwadratowej filtracji odsumiającej. Przytoczono w nim także rozwiązanie tegoż problemu dla sygnałów 2-go rzędu na drodze liniowej ortogonalnej filtracji odsumiającej.

W rozdziale trzecim zaproponowano metodę rozwiązania problemu nieliniowej ortogonalnej filtracji odsumiającej. Opracowane algorytmy zostały rozpatrzone dla losowych sygnałów niestacjonarnych, stacjonarnych oraz dla szeregów czasowych.

Rozdział czwarty zajmuje się problemem optymalizacji struktury filtru odsumiającego pod względem minimalizacji złożoności obliczeniowej. Zaproponowano tutaj metody adaptacyjnej zmiany parametrów filtru odsumiającego.

Rozdział piąty przedstawia wyniki badań symulacyjnych dla algorytmów zaproponowanych w rozdziałach od drugiego do czwartego.

Rozdział szósty stanowi podsumowanie całej pracy. Zawiera on także propozycje możliwych dalszych kierunków badań.

Dodatek opisuje zagadnienia związane z wielowymiarowymi, nieliniowymi filtrami klasy Volterra-Wienera.

Rozdział 2

Liniowa średniokwadratowa filtracja odszumiająca sygnałów losowych drugiego rzędu

W rozdziale tym postawimy problem liniowej filtracji odszumiającej. Zaproponujemy jego rozwiązanie za pomocą liniowego filtra ortogonalnego.

2.1 Postawienie problemu

Niech y oznacza niestacjonarny sygnał losowy o czasie dyskretnym i zerowej wartości średniej, który jest sumą nieobserwowalnego losowego sygnału użytecznego x oraz losowego sygnału zakłócającego n , czyli $y=x+n$. Założmy, że sygnał y jest obserwowany na skończonym odcinku czasu $T = t, t-1, \dots, t-N$, gdzie t jest punktem odniesienia, a N długością obserwacji. Wtedy obserwowany sygnał y jest reprezentowany przez zmienne losowe

$$\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-N}\} \quad (2.1)$$

Aby uzyskać dokładne rozwiązanie problemu filtracji odsumiającej należałoby wyznaczyć operator F , który odwzorowywałby sygnał y w x . Inaczej mówiąc $F[y]=x$ może być interpretowany jako idealny filtr, który przy pobudzeniu y daje na wyjściu x . W systemach rzeczywistych możliwe jest jedynie wyznaczenie estymatora $\hat{x}$ poprzez dobór filtru (operatora) $F_a[y] = \hat{x}$, który pobudzony przez y da rozwiązanie 'bliskie' x ze względu na jakieś kryterium [7]. Przyjmując kryterium błędu średniokwadratowego, wymagamy, aby

$${}^x R_{N,t} = E|x_t - \hat{x}_t|^2 = \min \quad (2.2)$$

dla ustalonej długości obserwacji N , gdzie E oznacza operator uśredniania probabilistycznego. Spełnienie kryterium (2.2) oznacza, że filtr F_a jest optymalny w sensie średniokwadratowym. Inaczej mówiąc, aby rozwiązać problem eliminacji szumu należy wyznaczyć estymator $\hat{x}_t = x_{t|y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-N}}$, który jest warunkową zmienną losową, uzależnioną od przeszłości $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-N}\}$ sygnału obserwowanego.

Rozważany problem można przedstawić geometrycznie w przestrzeni Hilberta $L_2\{\Omega, \mathfrak{R}, \mu\}$, gdzie Ω jest przestrzenią probabilistyczną (zbiorem elementów $v \in \Omega$), $\mathfrak{R}$ jest σ -ciałem (zbiorem borelowskim) określonym na Ω oraz μ jest miarą prawdopodobieństwa na $\mathfrak{R}$. Wprowadzamy iloczyn skalarny w $L_2\{\Omega, \mathfrak{R}, \mu\}$ jako

$$(w, v)_\Omega \triangleq \int_\Omega w(v) \bar{v}(v) d\mu = E w v^* \quad (2.3)$$

oraz normę $\|w\|_\Omega^2 = E|w|^2$ i metrykę $d_\Omega(w, v) = \|w - v\|_\Omega$. Niech

$$S \triangleq \text{span}\{y_t, \dots, y_{t-N}\} \quad (2.4)$$

będzie przestrzenią rozpiętą na przeszłości sygnału y , wtedy, zgodnie z twierdzeniem o najlepszej aproksymacji [66] estymator $\hat{x}_t$ będzie optymalny jeśli

$$\hat{x}_t \triangleq P(S)x_t \quad (2.5)$$

gdzie P jest operatorem projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń S (2.4).

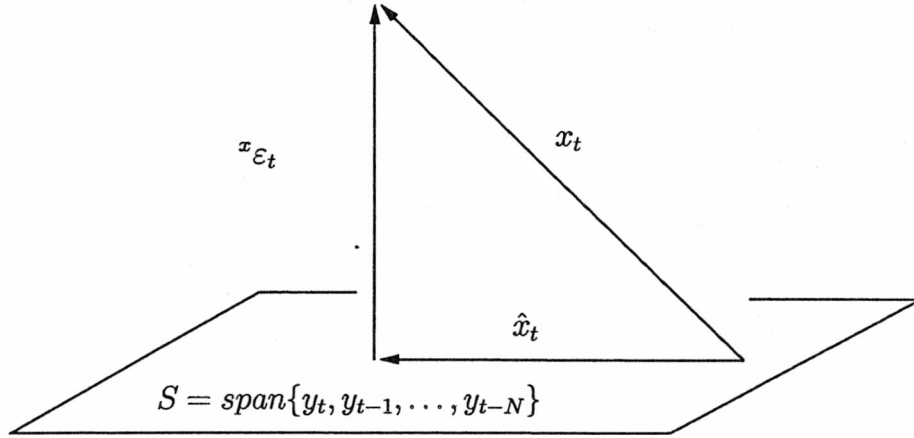
Norma $\|{}^x \varepsilon_t\|_\Omega = \sqrt{{}^x R_{N,t}}$ błędu estymacji

$${}^x \varepsilon_t \triangleq x_t - \hat{x}_t \quad (2.6)$$

będzie minimalna jeśli

$$x_{\varepsilon_t} \triangleq P(\text{span}\{x_t, S\} \ominus S)x_t \perp S \quad (2.7)$$

Sytuację tę obrazuje rysunek 2.1.



Rysunek 2.1: Estymator $\hat{x}_t$ sygnału użytecznego.

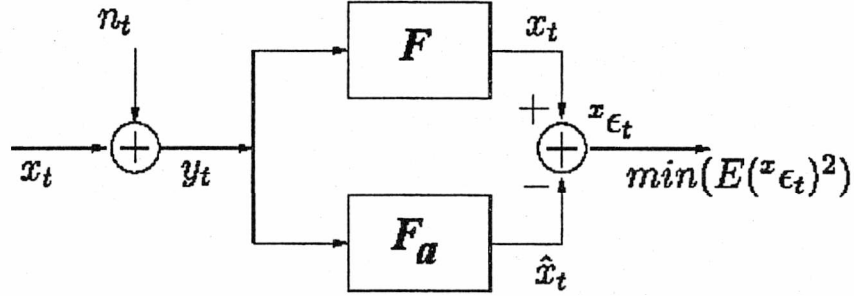
Projekcja $P(S)x_t$ na podprzestrzeń S determinuje filtr $\mathbf{F}_a$, który operując na przeszłości $\mathbf{y}$, daje najlepszy w sensie średniokwadratowym estymator $\hat{x}_t$. Pojęcie najlepszego estymatora odnosi się naturalnie do odległości pomiędzy filtrem idealnym $\mathbf{F}$ (którego wyjściem jest x_t) i rzeczywistym $\mathbf{F}_a$ (wyznaczającym $\hat{x}_t$). Filtry, rozpatrywane jako urządzenia odwzorujące przestrzeń pobudzeń w przestrzeń odpowiedzi, tworzą przestrzeń wektorową F_f [69]. Wybór sygnału wejściowego $\mathbf{y}$ prowadzi do zdefiniowania iloczynu skalarnego w F_f

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)_F \triangleq \mathbf{E}\{\mathbf{F}_1[\mathbf{y}]\bar{\mathbf{F}}_2[\mathbf{y}]\} \quad (2.8)$$

indukującej normę $\|\mathbf{F}\|_F = \mathbf{E}|\mathbf{F}[\mathbf{y}]|^2$ oraz metrykę $d_F(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_F$. Biorąc to pod uwagę możemy zapisać, że

$$d_F(\mathbf{F}, \mathbf{F}_a) = \mathbf{E}|x_t - \hat{x}_t|^2 \quad (2.9)$$

Im odległość ta jest mniejsza tym lepszym jest wyznaczone rozwiązanie [6]. Sytuację tę zilustrowano na rysunku 2.2.



Rysunek 2.2: Optymalny w sensie średniokwadratowym filtr odszumiający.

2.2 Liniowa średniokwadratowa filtracja odszumiająca sygnałów losowych

Przyjmijmy, że losowy sygnał x_t oraz sygnał zakłócający n_t są niestacjonarnymi sygnałami drugiego rzędu. Ponieważ zakłócenie jest addytywne, stąd wniosek, że obserwowany sygnał y_t , który jest sumą x_t i n_t też jest sygnałem losowym drugiego rzędu.

Przyjmijmy również, że operator $\mathbf{F}_a$ jest operatorem liniowym $\mathbf{L}$

$$\hat{x}_{N,t} \triangleq \mathbf{L}[y_t] = \sum_{i=0}^N {}^x\alpha_i y_{t-i} \quad (2.10)$$

Naszym zadaniem jest więc wyznaczenie parametrów ${}^x\alpha$ (tj. odpowiedzi impulsowej), minimalizujących błąd średniokwadratowy

$${}^xR_{N,t} \triangleq \mathbf{E}({}^x\varepsilon_{N,t})^2 = \mathbf{E}(x_t - \hat{x}_{N,t})^2 = \min \quad (2.11)$$

Rozważmy przestrzeń rozpiętą na N -krokowej przeszłości sygnału obserwowanego

$$S_0^N = \text{span}\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-N}\} \quad (2.12)$$

Przyjmując, że sygnał użyteczny x_t nie należy do S_0^N , w myśl twierdzenia o najlepszej aproksymacji w przestrzeni (2.12) istnieje jeden element

$$\hat{x}_{N,t} \triangleq \mathbf{P}(S_0^N)x_t \in S_0^N \quad (2.13)$$

który leży w najmniejszej odległości od elementu x_t . Oczywiście błąd aproksymacji spełnia warunek

$${}^x\varepsilon_{N,t} = \mathbf{P}(\{span\{x_t\}, S_0^N\} \ominus S_0^N)x_t = x_t - \hat{x}_{N,t} \perp S_0^N \quad (2.14)$$

Rozwiązanie problemu filtracji sprowadza się do obliczenia projekcji $\mathbf{P}(S_0^N)x_t$. Warunkiem optymalności estymaty $\hat{x}_{N,t}$ jest ortogonalność błędu (2.14) względem przestrzeni (2.12), czyli względem dowolnego elementu tej przestrzeni. Implikuje to warunki optymalności:

$$({}^x\varepsilon_{N,t}, y_{t-i})_\Omega = \mathbf{E}{}^x\varepsilon_{N,t}y_{t-i} = 0, \quad i = 0, \dots, N \quad (2.15)$$

Zależności (2.11) oraz (2.15) prowadzą do układu równań normalnych (Youle'a-Walkera). Zdefiniujmy korelację wzajemną sygnału użytecznego x i obserwowanego y

$$c_{xy}(i) = (x_t, y_{t-i})_\Omega = \mathbf{E}x_t y_{t-i}; \quad i = 0, \dots, N \quad (2.16)$$

oraz autokowariancję sygnału obserwowanego

$$c_{yy}(i) = (y_t, y_{t-i})_\Omega = \mathbf{E}y_t y_{t-i}; \quad i = 0, \dots, N \quad (2.17)$$

Wtedy wyrażenia (2.11) oraz (2.15) możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} c_{xx}(0) & c_{xy}(0) & \dots & c_{xy}(N) \\ c_{yx}(0) & c_{yy}(0) & \dots & c_{yy}(-N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{yx}(N) & c_{yy}(N) & \dots & c_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ {}^x\alpha_0 \\ \vdots \\ {}^x\alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^xR_{N,t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

gdzie c_{xx} jest mocą sygnału użytecznego. Do rozwiązania potrzebna jest znajomość macierzy autokowariancji sygnału obserwowanego $\mathbf{C}_{yy}$, funkcji kowariancji wzajemnej sygnału użytecznego i obserwowanego $\mathbf{C}_{xy}$ oraz mocy sygnału użytecznego c_{xx} .

Wyznaczenie projekcji (2.50) może być wykonane efektywnie poprzez wprowadzenie bazy ortonormalnej (ON) przestrzeni (2.12), wykorzystując procedurę ortogonalizacji Grama-Schmidta. Oznaczmy elementy tej bazy jako r_t^i , gdzie $i = 0, \dots, N$. Jej istnienie implikuje ortogonalną dekompozycję podprzestrzeni S_0^N

$$S_0^N = \oplus_{i=0}^N \text{span}\{r_t^i\} \quad (2.19)$$

oraz dekompozycję operatora projekcji

$$P(S_0^N) = \sum_{i=0}^N P(r_t^i) \quad (2.20)$$

gdzie $P(r_t^i)$ oznacza operację projekcji ortogonalnej na $\text{span}\{r_t^i\}$. W konsekwencji otrzymujemy rozwinięcie Fouriera estymaty (2.10)

$$\hat{x}_{N,t} = P(S_0^N)x_t = \sum_{i=0}^N P(r_t^i)x_t = \sum_{i=0}^N (x_t, r_t^i)_{\Omega} r_t^i = \sum_{i=0}^N {}^x\rho^i r_t^i \quad (2.21)$$

gdzie

$${}^x\rho^i \triangleq (x_t, r_t^i)_{\Omega} = E x_t r_t^i \quad (2.22)$$

jest współczynnikiem Fouriera sygnału x_t w bazie ON $\{r_t^i\}$

2.2.1 Wyznaczenie bazy ortonormalnej przestrzeni S_0^N

Wprowadźmy $t = 0$, co oznacza, że chwila obecna staje się punktem odniesienia. W celu wyznaczenia bazy ON podprzestrzeni S_0^N użyjemy tzw. metody częściowej ortogonalizacji. Wprowadzamy dla $i = 0, \dots, N$ oraz $k = i, \dots, N$ podprzestrzenie

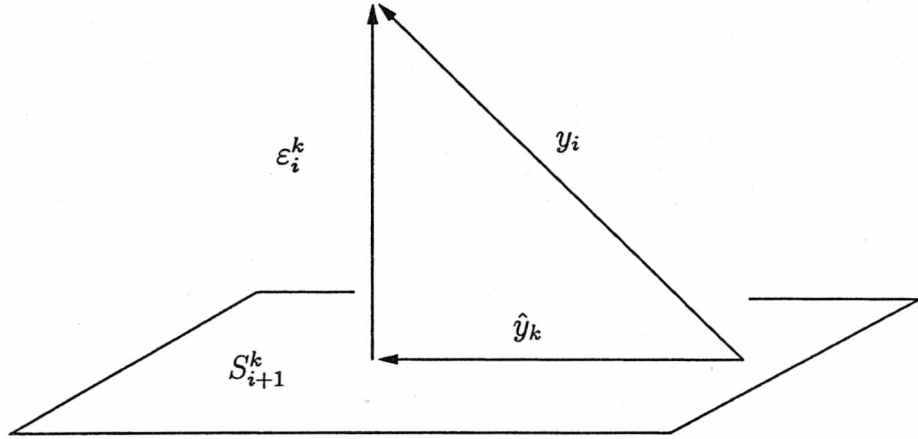
$$S_i^k = \text{span}\{y_{-i}, y_{-i-1}, \dots, y_{-k}\} = \text{span}\{y_{-i}, S_{i+1}^k\} \quad (2.23)$$

i definiujemy błąd prognozy 'w przód' jako

$$\varepsilon_i^k = P(S_i^k \ominus S_{i+1}^k)y_{-i} \perp S_{i+1}^k \quad (2.24)$$

wraz z jego wersją unormowaną

$$e_i^k = \frac{\varepsilon_i^k}{\|\varepsilon_i^k\|_{\Omega}} \perp S_{i+1}^k \quad (2.25)$$



Rysunek 2.3: Częściowa liniowa ortogonalizacja według uporządkowania 'w przód'.

Rozważając

$$S_i^k = \text{span}\{S_i^{k-1}, y_{-k}\} \quad (2.26)$$

definiujemy błąd prognozy 'w tył' jako

$$\nu_i^k = \mathbf{P}(S_i^k \ominus S_i^{k-1})y_{-k} \perp S_i^{k-1} \quad (2.27)$$

wraz z jego wersją unormowaną

$$r_i^k = \frac{\nu_i^k}{\|\nu_i^k\|_\Omega} \perp S_i^{k-1} \quad (2.28)$$

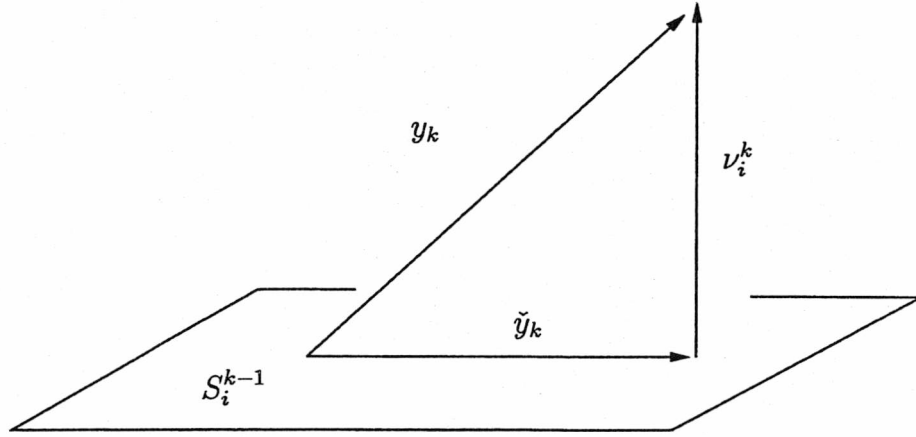
Wprowadzamy J-ortogonalną macierz

$$\Theta(\rho) = (1 - |\rho|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho^* & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Twierdzenie 2.2.1. *Pojedynczy krok algorytmu ortogonalizacji może być wyrażony jako:*

$$\begin{bmatrix} e_i^k \\ r_i^k \end{bmatrix} = \Theta(\rho_i^k) \begin{bmatrix} e_i^{k-1} \\ r_{i+1}^k \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

gdzie $\rho_i^k = -(e_i^{k-1}, r_{i+1}^k)$ jest współczynnikiem Schura.



Rysunek 2.4: Częściowa liniowa ortogonalizacja według uporządkowania 'w tył'.

Dowód.

Podprzestrzeń S_{i+1}^k może być zapisana jako:

$$S_{i+1}^k = \text{span}\{S_{i+1}^{k-1}, y_{-k}\} \quad (2.31)$$

Wtedy błąd prognozy 'w tył' jest zdefiniowany w postaci:

$$\nu_{i+1}^k = \mathbf{P}(S_{i+1}^k \ominus S_{i+1}^{k-1})y_{-k} \perp S_{i+1}^{k-1} \quad (2.32)$$

razem z jego wersją unormowaną

$$r_{i+1}^k = \frac{\nu_{i+1}^k}{\|\nu_{i+1}^k\|_\Omega} \in S_{i+1}^k \text{ ale } \perp S_{i+1}^{k-1} \quad (2.33)$$

Równorzędnie podprzestrzeń S_{i+1}^k może być przepisana jako:

$$S_{i+1}^k = S_{i+1}^{k-1} \oplus \text{span}\{r_{i+1}^k\} \quad (2.34)$$

Używając $\mathbf{P}(S_{i+1}^k) = \mathbf{P}(S_{i+1}^{k-1}) + \mathbf{P}(r_{i+1}^k)$ mamy :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_i^k \ominus S_{i+1}^k)y_{-i} &= \\ &= (I - \mathbf{P}(S_{i+1}^{k-1}) - \mathbf{P}(r_{i+1}^k))y_{-i} \end{aligned} \quad (2.35)$$

i błąd prognozy "w przód" możemy wyznaczyć rekurencyjnie jako:

$$\varepsilon_i^k = \varepsilon_i^{k-1} - \mathbf{P}(r_{i+1}^k)y_{-i} \quad (2.36)$$

zaś po normalizacji

$$e_i^k \parallel \varepsilon_i^k \parallel_{\Omega} = \parallel \varepsilon_i^{k-1} \parallel_{\Omega} (e_i^{k-1} + \rho_i^k r_{i+1}^k) \quad (2.37)$$

gdzie $\rho_i^k = -(e_i^{k-1}, r_{i+1}^k)$. Z faktu, iż $\parallel e_i^k \parallel = 1$ wynika

$$\parallel \varepsilon_i^{k-1} \parallel_{\Omega} \parallel \varepsilon_i^k \parallel_{\Omega}^{-1} = (1 - [\rho_i^k]^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.38)$$

W ten sam sposób można wykazać drugą zależność rekurencyjną (3.37).

Podprzestrzeń S_i^{k-1} może być zapisana jako:

$$S_i^{k-1} = \text{span}\{y_{-i}, S_{i+1}^{k-1}\} \quad (2.39)$$

Błąd prognozy 'w przód' zdefiniowany jest jako:

$$\varepsilon_i^{k-1} = \mathbf{P}(S_i^{k-1} \ominus S_{i+1}^{k-1})y_{-i} \perp S_{i+1}^{k-1} \quad (2.40)$$

razem z wersją unormowaną:

$$e_i^{k-1} = \frac{\varepsilon_i^{k-1}}{\parallel \varepsilon_i^{k-1} \parallel_{\Omega}} \in S_i^{k-1} \text{ ale } \perp S_{i+1}^{k-1} \quad (2.41)$$

Przepisując przestrzeń S_i^{k-1} jako:

$$S_i^{k-1} = S_{i+1}^{k-1} \oplus \text{span}\{e_i^{k-1}\} \quad (2.42)$$

możliwe staje się wyznaczenie błędu prognozy 'w tył' przy wykorzystaniu zależności:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_i^k \ominus S_{i+1}^{k-1})y_{-k} = \\ & = (I - \mathbf{P}(S_{i+1}^{k-1}) - \mathbf{P}(e_i^{k-1}))y_{-k} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Wyraża się on jako:

$$\nu_i^k = \nu_{i+1}^k - \mathbf{P}(e_i^{k-1})y_{-k} \quad (2.44)$$

i po normalizacji

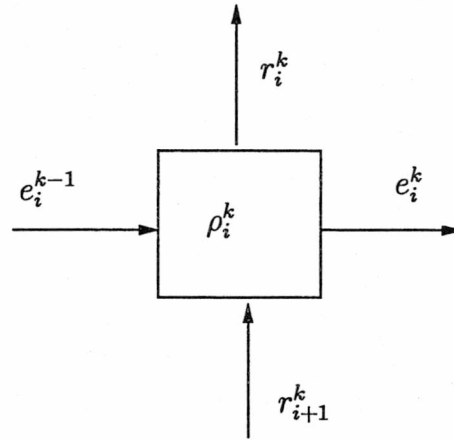
$$r_i^k \parallel \nu_i^k \parallel_{\Omega} = \parallel \nu_{i+1}^{k-1} \parallel_{\Omega} (r_{i+1}^k + \rho_i^k e_i^{k-1}) \quad (2.45)$$

gdzie $\rho_i^k = -(e_i^{k-1}, r_{i+1}^k)$ oraz

$$\parallel \nu_{i+1}^{k-1} \parallel_{\Omega} \parallel \nu_i^k \parallel_{\Omega}^{-1} = (1 - [\rho_i^k]^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.46)$$

□

Rysunek 2.5 przedstawia pojedynczą sekcję bloku dekorelującego.



Rysunek 2.5: Pojedyncza sekcja liniowego bloku dekorelującego.

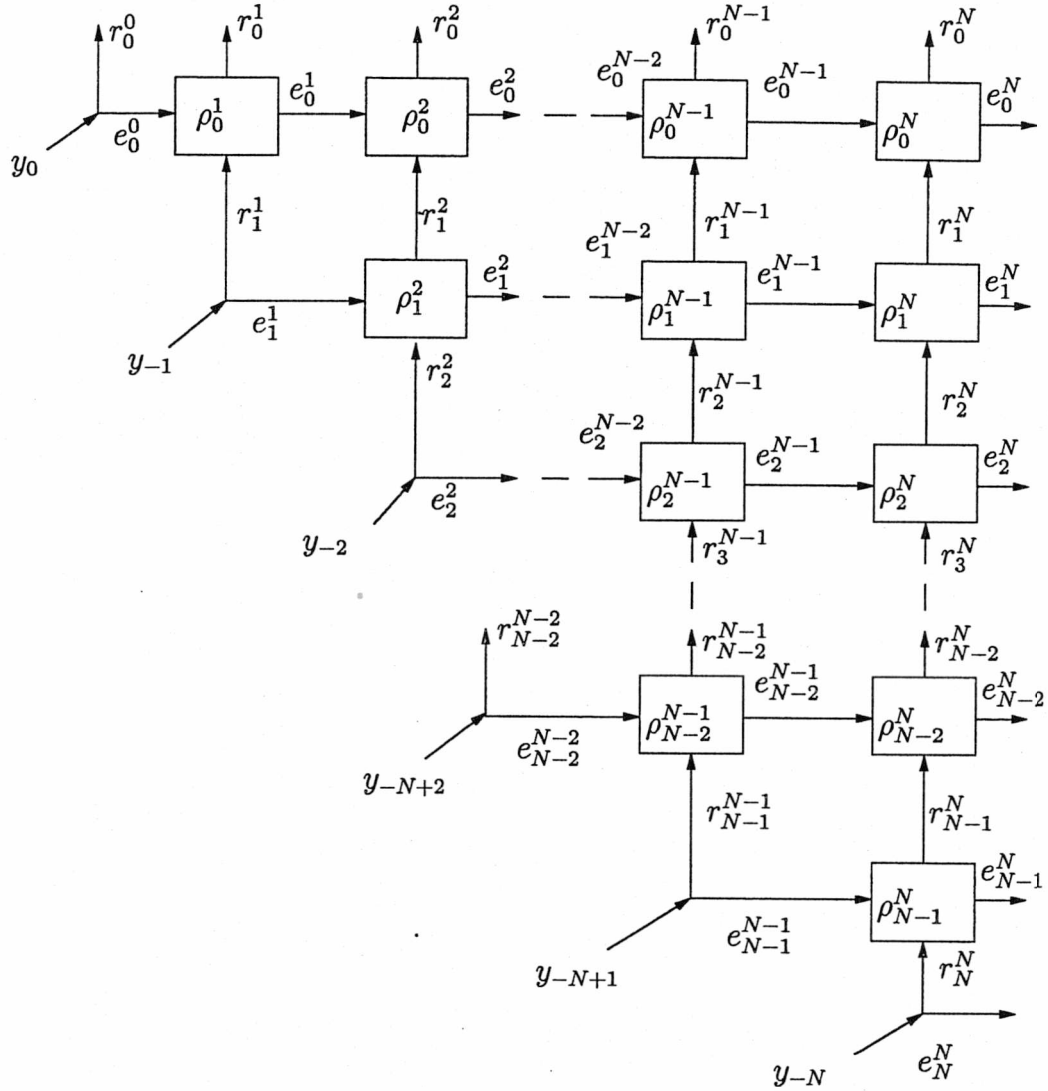
Jeśli przyjmiemy, że współczynnik Schura ρ_i^k jest tangensem hiperbolicznym pewnego kąta ψ_i^k , to pojedyncza sekcja filtru przyjmuje postać

$$\theta(\rho_i^k) = \begin{bmatrix} \cosh \psi_i^k & \sinh \psi_i^k \\ \sinh \psi_i^k & \cosh \psi_i^k \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Oznacza to, że realizuje ona rotację hiperboliczną o kąt ψ_i^k sygnałów e_i^{k-1} oraz r_{i+1}^k . Rysunek 2.6 przedstawia strukturę filtru dekorelującego rzędu N .

Rozpatrując błąd prognozy w tył

$$\nu_0^N = \mathbf{P}(S_0^N \ominus S_0^{N-1})y_{-N} \perp S_0^{N-1} \quad (2.48)$$



Rysunek 2.6: Liniowy ortogonalny filtr dekorelujący.

wraz z jego wersją unormowaną r_0^N , przestrzeń S_0^N możemy przedstawić jako

$$S_0^N = S_0^{N-1} \oplus \text{span}\{r_0^N\} \quad (2.49)$$

Wykorzystując (2.49) kolejno dla $N, N-1, \dots, 1$ otrzymujemy

$$S_0^N = \bigoplus_{i=0}^N \text{span}\{r_0^i\} \quad (2.50)$$

Tak więc elementy r_0^i dla $i = 0, \dots, N$ stanowią bazę ortonormalną przestrze-

ni S_0^N .

Jeśli rozważymy podprzestrzeń S_0^0 to S_1^0 jest podprzestrzenią pustą oraz $\varepsilon_0^0 = 0$. Dlatego też inicjalizacja dla algorytmu ortogonalizacji jest następująca

$$e_0^0 = y_0 = r_0^0, \quad y_0 \triangleq \frac{y_0}{\|y_0\|_\Omega} \quad (2.51)$$

2.2.2 Estymator sygnału użytecznego

Wyznaczona baza ON rozpinia przestrzeń S_0^N , w której znajduje się estymata sygnału użytecznego

$$\hat{x}_{N,0} = \mathbf{P}(S_0^N)x_0 = \sum_{i=0}^N {}^x\rho^i r_0^i \quad (2.52)$$

gdzie współczynniki Schura ${}^x\rho^i$ są wyrażone przez

$${}^x\rho^i = (x_0, r_0^i)_\Omega = \mathbf{E}x_0 r_0^i \quad (2.53)$$

W celu wyznaczenia błędu średniokwadratowego procesu estymacji sygnału użytecznego x_0 zauważmy, iż

$${}^x\varepsilon_{N,0} = x_0 - \sum_{i=0}^N {}^x\rho^i r_0^i \quad (2.54)$$

Zatem błąd średniokwadratowy wyraża się jako

$$\begin{aligned} {}^xR_{N,0} &= ({}^x\varepsilon_{N,0}, {}^x\varepsilon_{N,0})_\Omega = \\ &= (x_0 - \sum_{i=1}^N {}^x\rho^i r_0^i, x_0 - \sum_{i=1}^N {}^x\rho^i r_0^i)_\Omega = \\ &= (x_0, x_0)_\Omega - \sum_{i=1}^N {}^x\rho^i (x_0, r_0^i)_\Omega - \sum_{i=1}^N {}^x\rho^i (r_0^i, x_0)_\Omega + \\ &+ \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N {}^x\rho^i {}^x\rho^j (r_0^i, r_0^j)_\Omega = \\ &= \|x_0\|_\Omega^2 - 2 \sum_{i=0}^N |{}^x\rho^i| + \sum_{i=0}^N |{}^x\rho^i|^2 = \|x_0\|_\Omega^2 - \sum_{i=0}^N |{}^x\rho^i|^2 \quad (2.55) \end{aligned}$$

Jeśli dla $N \rightarrow \infty$ błąd średniokwadratowy dąży do zera; ${}^x R_{N,0} \rightarrow 0$, wtedy otrzymujemy równość Parsewala

$$||x_0||_{\Omega}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |{}^x \rho^i|^2 \quad (2.56)$$

Ponieważ z (2.49) otrzymujemy

$$\mathbf{P}(S_0^N)x_0 = (\mathbf{P}(S_0^{N-1}) + \mathbf{P}(r_0^N))x_0 \quad (2.57)$$

to

$$\hat{x}_{N,0} = \hat{x}_{N-1,0} + {}^x \rho^N r_0^N \quad (2.58)$$

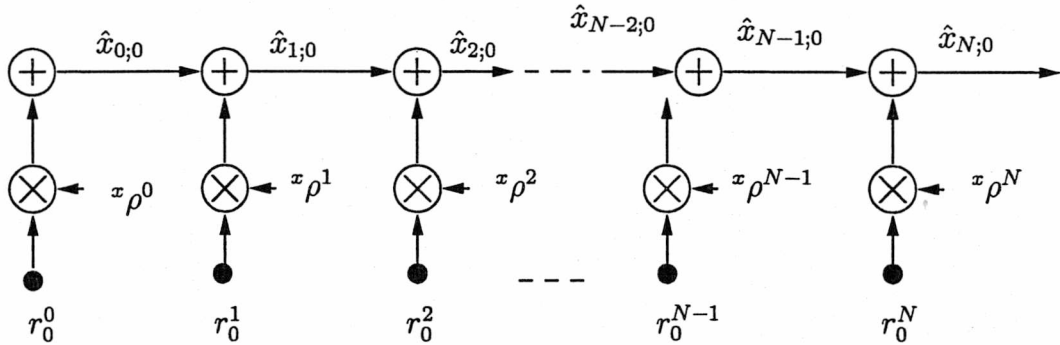
Zatem

$${}^x \varepsilon_{N,0} = x_0 - \hat{x}_{N-1,0} - {}^x \rho^N r_0^N = {}^x \varepsilon_{N-1,0} - {}^x \rho^N r_0^N \quad (2.59)$$

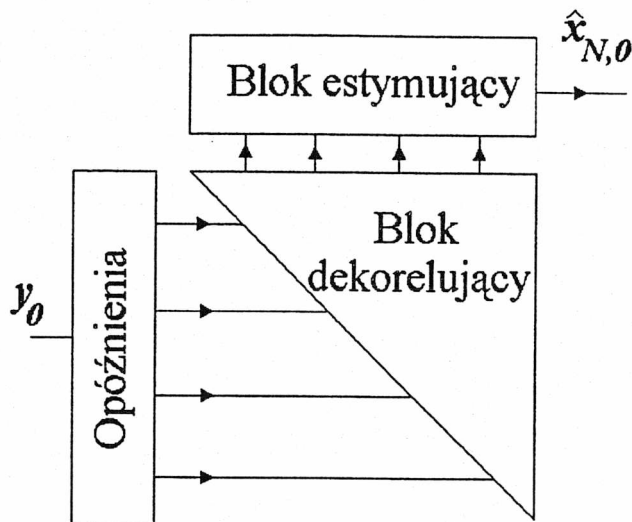
i w konsekwencji

$$\begin{aligned} {}^x R_{N,0} &= ({}^x \varepsilon_{N,0}, {}^x \varepsilon_{N,0})_{\Omega} = \\ &= ({}^x \varepsilon_{N-1,0} - {}^x \rho^N r_0^N, {}^x \varepsilon_{N-1,0} - {}^x \rho^N r_0^N)_{\Omega} = \\ &= ({}^x \varepsilon_{N-1,0}, {}^x \varepsilon_{N-1,0})_{\Omega} - {}^x \rho^N ({}^x \varepsilon_{N-1,0}, r_0^N)_{\Omega} - {}^x \rho^N (r_0^N, {}^x \varepsilon_{N-1,0})_{\Omega} + \\ &+ |{}^x \rho^N|^2 (r_0^N, r_0^N)_{\Omega} = {}^x R_{N-1,0} - |{}^x \rho^N|^2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Wraz ze wzrostem N błąd (2.60) powinien dążyć do zera. Rysunek 2.7 przedstawia blok estymujący dla liniowego filtru odsumiającego.



Rysunek 2.7: Blok estymujący liniowego ortogonalnego filtru odsumiającego.



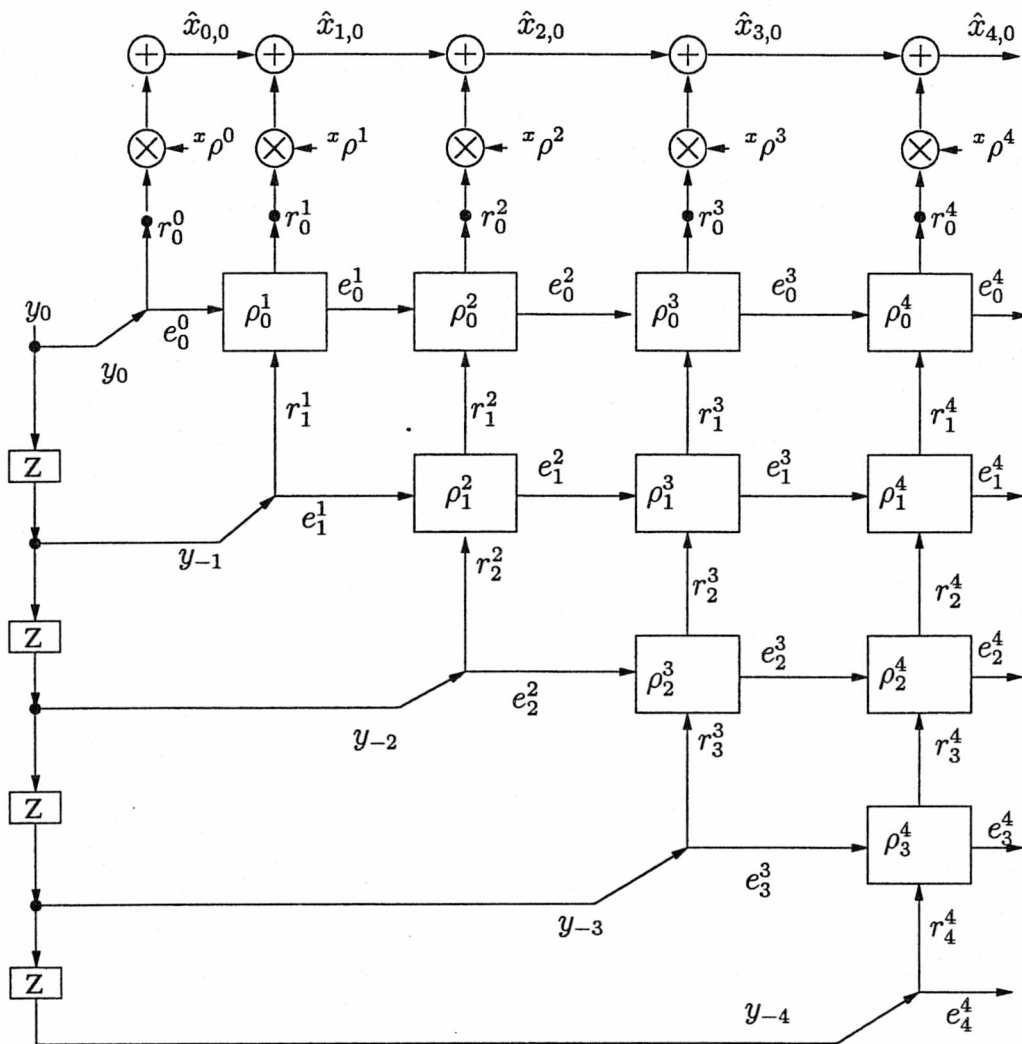
Rysunek 2.8: Ortogonalny liniowy filtr odszumiający.

Natomiast rysunek 2.8 przedstawia schematycznie pełny ortogonalny filtr odszumiający. Przykład liniowego filtru odszumiającego rzędu $N = 4$ widoczny jest na rysunku 2.9.

Wyznaczenie estymaty $\hat{x}_{N,0}$ wymaga znajomości kowariancji wzajemnych $\rho^i = \mathbf{E}x_0r_0^i$ dla $i = 0, \dots, N$. W praktyce, kiedy w miejsce zmiennych losowych będziemy operować na szeregach czasowych, bezpośrednie wyznaczenie estymaty ρ^i na podstawie próbek przetwarzanego szeregu czasowego nie jest możliwe, z uwagi na niedostępność obserwacji sygnału źródłowego $x_0, \dots, x_{-N}$. Wówczas konieczne staje się użycie tzw. sygnału odniesienia, statystycznie związanego z x_0 . Dyskusja na ten temat jest zamieszczona w rozdziale 3.4.5.

2.3 Podsumowanie

W rozdziale tym przedstawiono problem liniowej średniokwadratowej filtracji odszumiającej. Zaprezentowano ortogonalne rozwiązanie problemu filtracji odszumiającej sygnałów losowych drugiego rzędu. Przedstawiono strukturę filtru odszumiającego z podziałem na dwa bloki: dekorrelujący oraz estymu-



Rysunek 2.9: Ortogonalny liniowy filtr odszumiający rzędu $N = 4$.

jący sygnał użyteczny. Wyniki podane w tym rozdziale stają się punktem wyjścia do nieliniowego uogólnienia problemu filtracji odszumiającej sygnałów losowych wyższych rzędów.

Rozdział 3

Nieliniowa średniokwadratowa filtracja odsumiająca sygnałów losowych wyższych rzędów

W rozdziale tym zostanie zaproponowane ortogonalne rozwiązanie problemu nieliniowej filtracji odsumiającej sygnałów losowych wyższych rzędów, stanowiące uogólnienie zagadnienia rozważanego w rozdziale poprzednim. Zaproponowane rozwiązanie składa się z dwóch bloków (dekorelującego i estymującego sygnał użyteczny), opisanych w kolejnych podrozdziałach. Zostaną rozpatrzone trzy warianty nieliniowego ortogonalnego filtru odsumiającego: dla niestacjonarnych i stacjonarnych sygnałów wyższych rzędów oraz dla szeregów czasowych wyższych rzędów.

3.1 Geometryczne rozwiązanie problemu filtracji odsumiającej

Rozwiązanie problemu filtracji odsumiającej wymaga znalezienie takiego operatora F_a , dla którego błąd (2.2) będzie odpowiednio mały. Naturalnym i najprostszym rozwiązaniem wydaje się wybór operatora liniowego L (2.10), operującego na obserwowanym sygnale $\hat{x}_{N,t} = L[y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-N}]$ Jeśli jed-

nak dokładność estymacji jest niewystarczająca, tj. norma $\|x_{\varepsilon_{N,t}}\|_{\Omega}$ błędu $x_{\varepsilon_{N,t}} = x_t - \hat{x}_{N,t}$ (2.15) jest zbyt duża, oznacza to, że operator $\mathbf{L}$ nie jest wystarczająco dobrym modelem operatora $\mathbf{F}$. Estymata liniowa opiera się tylko na statystykach drugiego rzędu sygnału. Jest więc adekwatna dla sygnałów o gaussowskiej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa, dla których statystyki nieparzyste są równe zero, natomiast parzyste są iloczynami tych drugiego rzędu [56]. Takie sygnały są więc w pełni opisane za pomocą statystyk 2-go rzędu. Estymata oparta na statystykach rzędu wyższego niż dwa ma sens tylko wtedy jeśli niosą one dodatkową informację o sygnale. Dla sygnałów niegaussowskich, gdzie statystyki wyższych rzędów wnoszą dodatkową nową informację o sygnale, w celu poprawy dokładności estymacji, należy zastąpić operator liniowy operatorem nieliniowym (stopnia $M=2, 3, \dots$). Takie podejście, wykorzystujące dodatkową informację zawartą w statystykach wyższych rzędów, umożliwia poprawę dokładności estymacji [8].

W rozdziale tym zajmiemy się wyznaczeniem optymalnego w sensie średniokwadratowym filtru odsumiającego (operatora $\mathbf{F}_a$) dla przypadku gdy jest on systemem nieliniowym stopnia M (Dodatek A).

Mając obserwacje (2.1), przyjmijmy $t = 0$ i zdefiniujmy wektor zmiennych losowych

$${}^1Y = [y_0 \ y_{-1} \ \dots \ y_{-N}] \quad (3.1)$$

Rozpatrzmy następujące macierze obserwacji nieliniowych

$${}^mY = [y_{-i_1} \ \dots \ y_{-i_m}] \quad (3.2)$$

gdzie

$$i_1 = 0, \dots, N; \ i_2 = i_1, \dots, N; \ \dots; \ i_m = i_{m-1}, \dots, N \quad (3.3)$$

Wprowadźmy podprzestrzenie generowane przez liniowe i nieliniowe obserwacje sygnału

$$S^m \triangleq \text{span}\{{}^mY\}, \ m = 1, \dots, M \quad (3.4)$$

Cała przestrzeń estymacyjna jest wówczas równa

$$S^{\{M\}} \triangleq S^1 + S^2 + \dots + S^M \quad (3.5)$$

gdzie $+$ oznacza sumę prostą podprzestrzeni. Tak więc $S^{\{M\}}$ jest przestrzenią rozpiętą na $\{^M\}Y$ gdzie

$$\{^M\}Y \triangleq [^1Y \dots ^MY] \quad (3.6)$$

Zakładamy tutaj, że elementy macierzy (3.6) tworzą zbiór liniowo niezależny. Poszczególne elementarne podprzestrzenie przestrzeni $S^{\{M\}}$ (3.5) możemy zapisać w następujący sposób:

$$S^m = \text{span}\{y_{-i_1} \dots y_{-i_m}\} \quad (3.7)$$

gdzie $i_1, \dots, i_m$ zmieniają się jak w (3.3) oraz $m = 1, \dots, M$. Stosujemy indeksację według uporządkowania leksykograficznego. Takie podejście jest wynikiem symetrii jąder RWFV (A.7), które wykorzystane są do wyznaczenia estymaty sygnału użytecznego. Przyjmując, że $x_0 \notin S^{\{M\}}$, niech

$$^xS \triangleq \text{span}\{x_0, S^{\{M\}}\} \quad (3.8)$$

Wtedy nieliniowy estymator $\hat{x}_{N,0}^{\{M\}}$ stopnia M i rzędu N zmiennej losowej x_0 będzie się wyrażał jako regularny wielomian funkcjonalny Volterra (RWFV) (A.7)

$$\begin{aligned} \hat{x}_{N,0}^{\{M\}} &\triangleq \mathbf{P}(S^{\{M\}})x_0 = \mathbf{F}_a[y_0 \ y_{-1} \ \dots \ y_{-N}] \\ &= \sum_{i_1=0}^N \alpha_{i_1}^x y_{-i_1} + \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=i_1}^N \alpha_{i_1, i_2}^x y_{-i_1} y_{-i_2} + \dots \\ &\dots + \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=i_1}^N \dots \sum_{i_M=i_{M-1}}^N \alpha_{i_1, \dots, i_M}^x y_{-i_1} \dots y_{-i_M} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Definiujemy błąd estymacji jako

$$^x\varepsilon_{N,0}^{\{M\}} \triangleq \mathbf{P}(^xS \ominus S^{\{M\}})x_0 = (I - \mathbf{P}(S^{\{M\}}))x_0 = x_0 - \hat{x}_{N,0}^{\{M\}} \perp S^{\{M\}} \quad (3.10)$$

Estymata (3.9) będzie optymalna (w sensie średniokwadratowym), gdy wartość błędu średniokwadratowego

$$^xR_{N,0}^{\{M\}} = \mathbf{E}|^x\varepsilon_{N,0}^{\{M\}}|^2 = \mathbf{E}|x_0 - \hat{x}_{N,0}^{\{M\}}|^2 \quad (3.11)$$

będzie minimalna. W rzeczywistej sytuacji nie są znane wartości N i M zapewniające żadaną dokładność estymacji (tj. satysfakcjonująco małą wartość błędu średniokwadratowego ${}^x R_{N,0}^{\{M\}}$). Sensowne wydaje się więc zaproponowanie rekurencyjnego algorytmu wyznaczania estymaty sygnału użytecznego ze względu na wartości N jak i M . Takie podejście umożliwia efektywne wykorzystanie zasobów obliczeniowych filtru do wyznaczenia estymaty w praktycznych rozwiązaniach.

Z warunków optymalności (3.11) estymaty, tj. ortogonalności błędu estymacji względem przestrzeni (3.5) dla wielowymiarowego nieliniowego filtru odsumiającego F_a wynikają następujące zależności:

$$\begin{aligned} ({}^x \varepsilon_{N,0}^{\{M\}}, y_{-i_1})_{\Omega} &= E {}^x \varepsilon_{N,0}^{\{M\}} y_{-i_1} = 0 \\ ({}^x \varepsilon_{N,0}^{\{M\}}, y_{-i_1} y_{-i_2})_{\Omega} &= E {}^x \varepsilon_{N,0}^{\{M\}} y_{-i_1} y_{-i_2} = 0 \\ &\dots \\ ({}^x \varepsilon_{N,0}^{\{M\}}, y_{-i_1} y_{-i_2} \dots y_{-i_M})_{\Omega} &= E {}^x \varepsilon_{N,0}^{\{M\}} y_{-i_1} \dots y_{-i_M} = 0 \end{aligned}$$

gdzie $i_1 = 0, \dots, i_m$ zmienia się jak w (3.3) dla $m = 1, \dots, M$. Warunki (3.12) prowadzą do uogólnionego (wielowymiarowego) układu równań normalnych, który wykorzystuje statystyki wyższych rzędów (autokowariancje i kowariancje wzajemne wyższych rzędów) sygnału losowego y , od rzędu drugiego aż do rzędu $2M$ -tego.

Zdefiniujmy macierz autokowariancji rzędu $m \oplus u$ jako

$${}^{m \oplus u} H = [h_{yy}(i_1, \dots, i_m; k_1, \dots, k_u)], \quad m, u = 1, \dots, M \quad (3.12)$$

gdzie poszczególne elementy

$$h_{yy}(i_1, \dots, i_m; k_1, \dots, k_u) \triangleq E y_{-i_1} \dots y_{-i_m} \bar{y}_{-k_1} \dots \bar{y}_{-k_u} \quad (3.13)$$

znane są dla wszystkich $i_1, \dots, i_m$ oraz $k_1, \dots, k_u$ zmieniających się według (3.3).

Wtedy uogólnioną macierz autokowariancji dla sygnału rzędu $2M$ może-

my zapisać jako

$$\{M \times M\} H = [{}^{m\oplus u}H]_{m,u=1,\dots,M} = \mathbf{E}(\{M\}Y \otimes \{M\}Y) = \begin{bmatrix} {}^{1\oplus 1}H & \dots & {}^{1\oplus M}H \\ \vdots & & \vdots \\ {}^{M\oplus 1}H & \dots & {}^{M\oplus M}H \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Analogicznie dla

$$h_{xy}(i_1, \dots, i_m) \triangleq \mathbf{E}x_0 y_{-i_1} \dots y_{-i_m} \quad (3.15)$$

znanego dla $i_1, \dots, i_m$ zmieniającego się jak w (3.3), definiujemy macierz kowariancji wzajemnych zmiennej losowej $\mathbf{x}_0$ z obserwacjami ${}^m Y$

$${}^{1\oplus m}H_{xy} = [h_{xy}(i_1, \dots, i_m)] = {}^{m\oplus 1}H'_{yx} = [h_{yx}(i_1, \dots, i_m)] \quad (3.16)$$

dla $m = 0, \dots, M$

Teraz postać macierzową układu równań (3.12) możemy zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} c_{xx} & {}^{1\oplus 1}H_{xy} & \dots & {}^{1\oplus M}H_{xy} \\ {}^{1\oplus 1}H_{yx} & {}^{1\oplus 1}H & \dots & {}^{1\oplus M}H \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}^{M\oplus 1}H_{yx} & {}^{M\oplus 1}H & \dots & {}^{M\oplus M}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ {}^x\alpha_N^1 \\ \vdots \\ {}^x\alpha_N^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^xR_{N,0}^{\{M\}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

gdzie

$${}^x\alpha_N^m = \text{col}[\alpha_{i_1, \dots, i_m}^x; i_1 = 0, \dots, N, \dots, i_m = i_{m-1}, \dots, N] \quad (3.18)$$

dla $m = 1, \dots, M$ są wektorami współczynników reprezentujących sygnał użyteczny w podprzestrzeni $S^{\{M\}}$.

Układ ten może być efektywnie rozwiązany poprzez wykorzystanie nieliniowego uogólnienia algorytmu Levinsona lub Schura [81] i wyznaczenie jąder RWFV (A.7), które mogą być interpretowane jako wielowymiarowe odpowiedzi impulsowe [62] optymalnego nieliniowego filtru odsumiającego.

W pracy proponujemy wykorzystanie podejścia geometrycznego do rozwiązania problemu filtracji odsumiającej. Aby tego dokonać, należy wyznaczyć

projekcję (3.9). Może być to wykonane efektywnie poprzez wprowadzenie ortonormalnej (ON) bazy przestrzeni $S^{\{M\}}$ (3.5) wykorzystując procedurę ortogonalizacji Grama-Schmidta. Oznaczmy tę ON bazę jako

$$\{r_0^{i_1}, \dots, r_0^{i_1, i_2}, \dots, r_0^{i_1, i_2, i_3}, \dots, r_0^{i_1, \dots, i_M}\} \quad (3.19)$$

(gdzie $i_1 = 0, \dots, N$, $i_2 = i_1, \dots, N$, $i_3 = i_2, \dots, N$, $i_M = i_{M-1}, \dots, N$) i zauważmy, że elementy zbioru (3.19) muszą spełniać następujące warunki

$$(r_0^{i_1, \dots, i_m}, r_0^{j_1, \dots, j_n}) = \delta_{i_1, \dots, i_m; j_1, \dots, j_n} \quad (3.20)$$

gdzie $\delta_{i_1, \dots, i_m; j_1, \dots, j_n}$ oznacza wielowymiarową deltę Kroneckera

$$\delta_{i_1, \dots, i_m; j_1, \dots, j_n} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{dla } i_k = j_k, \quad k = 1, \dots, M \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (3.21)$$

Istnienie bazy ON (3.19), implikuje następującą ortogonalną dekompozycję przestrzeni $S^{\{M\}}$ (3.5)

$$\begin{aligned} S^{\{M\}} &= \oplus_{i_1=0}^N \text{span}\{r_0^{i_1}\} \oplus_{i_1=0}^N \oplus_{i_2=i_1}^N \text{span}\{r_0^{i_1, i_2}\} \oplus \dots \\ &\dots \oplus_{i_1=0}^N \oplus_{i_2=i_1}^N \dots \oplus_{i_M=i_{M-1}}^N \text{span}\{r_0^{i_1, \dots, i_M}\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

prowadzącą do dekompozycji operatora projekcji $P(S^{\{M\}})$ użytego w (3.9)

$$\begin{aligned} P(S^{\{M\}}) &= \sum_{i_1=0}^N P(r_0^{i_1}) + \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=i_1}^N P(r_0^{i_1, i_2}) + \dots \\ &\dots + \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=i_1}^N \dots \sum_{i_M=i_{M-1}}^N P(r_0^{i_1, \dots, i_{M-1}, i_M}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

gdzie $P(r)$ jest ortogonalnym operatorem projekcji na (jednowymiarową) podprzestrzeń $\text{span}\{r\}$. W konsekwencji otrzymujemy następujące uogólnione wielowymiarowe rozwinięcie Fouriera estymatora (3.9)

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \sum_{i_1=0}^N x \rho^{i_1} r_0^{i_1} + \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=i_1}^N x \rho^{i_1, i_2} r_0^{i_1, i_2} + \dots \\ &\dots + \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=i_1}^N \dots \sum_{i_M=i_{M-1}}^N x \rho^{i_1, \dots, i_M} r_0^{i_1, \dots, i_M} \end{aligned} \quad (3.24)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
x\rho^{i_1} &= (x_0, r_0^{i_1}) \\
x\rho^{i_1, i_2} &= (x_0, r_0^{i_1, i_2}) \\
&\dots \\
x\rho^{i_1, \dots, i_M} &= (x_0, r_0^{i_1, \dots, i_M})
\end{aligned} \tag{3.25}$$

są uogólnionymi (wielowymiarowymi) współczynnikami Fouriera (Schura) sygnału x_0 w bazie ON (3.19). Współczynniki (3.25) mogą być interpretowane jako ortogonalna reprezentacja zmiennej losowej x_0 w podprzestrzeni S , z jednej strony, oraz jako współczynniki ortogonalnej realizacji wielowymiarowego nieliniowego filtra odsumiającego F_a z drugiej strony.

Podsumowując można powiedzieć, że problem ortogonalnej filtracji odsumiającej rozkłada się na dwa zadania [6]. Pierwsze to wyznaczenie ortonormalnej bazy ON (3.19) przestrzeni $S^{\{M\}}$ (3.5), drugie to obliczenie współczynników (3.25) i na ich podstawie estymaty sygnału oryginalnego $\hat{x}_0$.

3.2 Przypadek niestacjonarny

3.2.1 Wyznaczenie bazy ortonormalnej przestrzeni $S^{\{M\}}$

Problem wyznaczenia bazy ortonormalnej (3.19) może być rozwiązany rekurencyjnie poprzez użycie wielowymiarowego uogólnienia algorytmu częściowej ortogonalizacji (partial orthogonalization algorithm) [80]. Używając następującej notacji: L jako 'liniowe' (dla y_{-i_1}), B jako 'bi-liniowe' (dla $y_{-i_1}y_{-i_2}$), W jako 'w-liniowe' (dla $y_{-i_1} \dots y_{-i_w}$), Q jako 'q-liniowe' obserwacje, warunki ortogonalności dla bazy ON mogą być przedstawione jako:

$$\begin{aligned}
QW : r_0^{i_1, \dots, i_q} &\perp r_0^{j_1, \dots, j_w} \\
WQ : r_0^{i_1, \dots, i_w} &\perp r_0^{j_1, \dots, j_q}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

gdzie $q, w = 1, \dots, M$. Aby pokazać ideę algorytmu częściowej ortogonalizacji, rozpatrzmy ogólny przypadek q-w, (q-liniowy, w-liniowy) gdzie

$$1 \leq q \leq M \text{ i } 1 \leq w \leq M.$$

Zdefiniujmy podprzestrzeń S_p jako

$$S_p \triangleq \text{span}\{y_{-p}, y_{i_1} \dots y_{i_k}; i_1 = p, \dots, N, i_2 = i_1, \dots, N, \dots, i_k = i_{k-1}, \dots, N; k = 2, \dots, M\} \quad (3.27)$$

Wtedy podprzestrzeń q -w może być zdefiniowana jako:

$$S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \triangleq \text{span}\{y_{-i_1} \dots y_{-i_q}, y_{-i_1} \dots y_{-i_q-1}, \dots, \underbrace{y_N \dots y_{-N}}_q; S_{q+1}, \dots, S_{w-1}, y_{-i_1}, \dots, \underbrace{y_{-j_1} \dots y_{-j_1}}_w, \dots, y_{-j_1} \dots y_{-j_w}\} \quad (3.28)$$

Przykład 3.2.1

Jeśli $q = 2$, $w = 3$ oraz $N = 2$ to mamy

$$S_{1,1}^{2,2,2} = \text{span}\{y_{-1}y_{-1}, y_{-1}y_{-2}, y_{-1}y_{-1}y_{-1}, y_{-1}y_{-1}y_{-2}, y_{-1}y_{-2}y_{-2}, y_{-2}, y_{-2}y_{-2}, y_{-2}y_{-2}y_{-2}\} \quad (3.29)$$

□

Wprowadzając algorytm częściowej ortogonalizacji wg uporządkowania 'w przód' możemy przepisać (3.28) w postaci:

$$S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = \text{span}\{y_{-i_1}, \dots, y_{-i_q}, S_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w}\} \quad (3.30)$$

np.: $S_{1,1}^{0,0,1} = \text{span}\{y_{-1}y_{-1}, S_{1,2}^{0,0,1}\}$ i zdefiniować nieliniowy błąd prognozy 'w przód' jako:

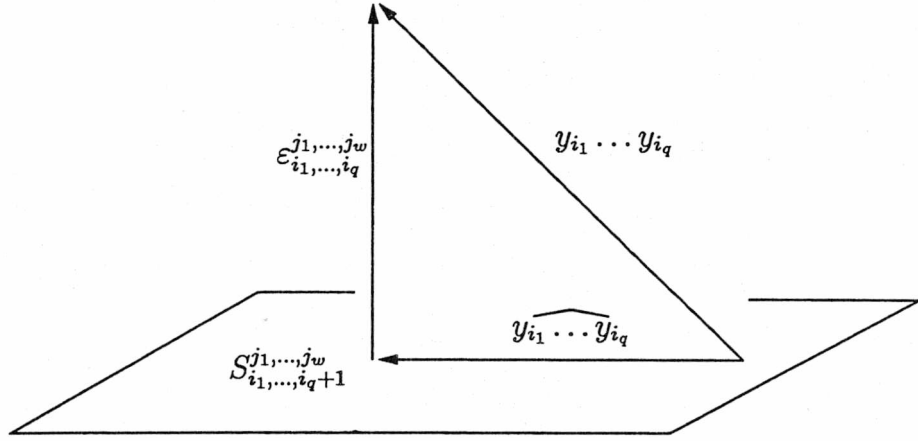
$$\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = \mathbf{P}(S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \ominus S_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w})y_{-i_1} \dots y_{-i_q} \quad (3.31)$$

np.: $\varepsilon_{1,1}^{0,0,1} = \mathbf{P}(S_{1,1}^{0,0,1} \ominus S_{1,2}^{0,0,1})y_{-1}y_{-1}$, wraz z jego wersją unormowaną:

$$e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = \frac{\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}}{\|\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}\|_{\Omega}} \quad (3.32)$$

Dokonując analogicznego rozumowania dla prognozy 'w tył', (3.28) możemy przepisać jako:

$$S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = \text{span}\{S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}, y_{-j_1} \dots y_{-j_w}\} \quad (3.33)$$



Rysunek 3.1: Częściowa nieliniowa ortogonalizacja według uporządkowania 'w przód'.

np.: $S_{1,1}^{0,0,0,1} = \text{span}\{S_{1,1}^{0,0,0,0}, y_0 y_0 y_0 y_{-1}\}$ Nieliniowy błąd prognozy 'w tył' jest zdefiniowany w sposób następujący:

$$\nu_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = P(S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \ominus S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}) y_{-j_1} \dots y_{-j_w} \quad (3.34)$$

np.: $\nu_{1,1}^{0,0,0,1} = P(S_{1,1}^{0,0,0,1} \ominus S_{1,1}^{0,0,0,0}) y_0 y_0 y_0 y_{-1}$, a jego wersja unormowana to

$$r_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = \frac{\nu_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}}{\|\nu_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}\|_{\Omega}} \quad (3.35)$$

Wykorzystując J-ortogonalną macierz $\Theta(\rho)$, która spełnia

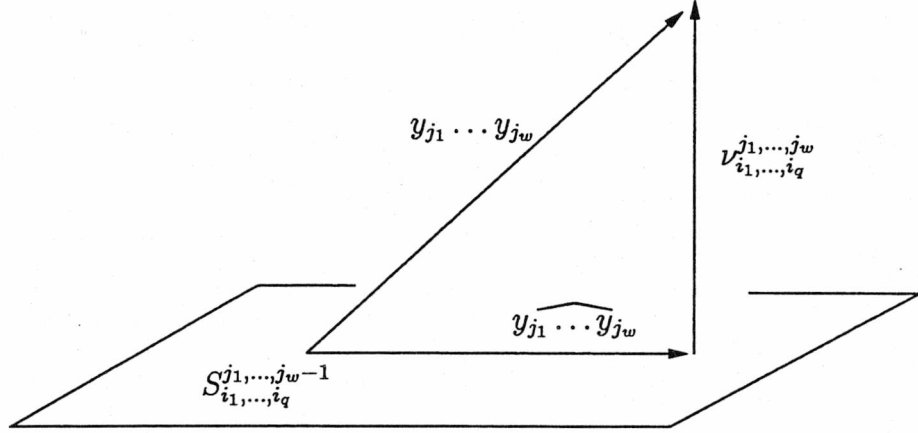
$$\Theta(\rho) J \Theta^*(\rho) = J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

mamy

Twierdzenie 3.2.1. *Pojedynczy krok algorytmu częściowej ortogonalizacji wielowymiarowej może być wyrażony jako:*

$$\begin{bmatrix} e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \\ r_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \end{bmatrix} = \Theta(\rho_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}) \begin{bmatrix} e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \\ r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

gdzie $\rho_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = -(e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}, r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w})_{\Omega}$ jest q -w liniowym współczynnikiem Schura.



Rysunek 3.2: Częściowa nieliniowa ortogonalizacja według uporządkowania 'w tył'.

Dowód.

Podprzestrzeń $S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w}$ może być zapisana jako:

$$S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w} = \text{span}\{S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w-1}, y_{-j_1} \dots y_{-j_w}\} \quad (3.38)$$

Błąd prognozy 'w tył' może być zdefiniowany jako:

$$\nu_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w} = P(S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w} \ominus S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w-1}) y_{j_1} \dots y_{j_w} \quad (3.39)$$

razem z jego wersją unormowaną

$$r_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w} = \frac{\nu_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w}}{\|\nu_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w}\|_{\Omega}} \in S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w} \perp S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w-1} \quad (3.40)$$

Ponieważ $r_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w} \in S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w}$ to mamy ortogonalną dekompozycję podprzestrzeni $S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w}$

$$S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w} = S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w-1} \oplus \text{span}\{r_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w}\} \quad (3.41)$$

Używając:

$$\begin{aligned} & P(S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \ominus S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w}) y_{-i_1} \dots y_{-i_q} = \\ & = (I - P(S_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w-1}) - P(r_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w}) y_{-i_1} \dots y_{-i_q} \end{aligned} \quad (3.42)$$

błąd prognozy "w przód" możemy wyznaczyć rekurencyjnie jako:

$$\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} - P(r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_q}) y_{-i_1} \dots y_{-i_q} \quad (3.43)$$

i po normalizacji

$$e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \parallel \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \parallel_{\Omega} = \parallel \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \parallel_{\Omega} (e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} + \rho_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_q}) \quad (3.44)$$

gdzie $\rho_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = -(e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}, r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_q})$ oraz

$$\parallel \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \parallel_{\Omega} \parallel \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \parallel_{\Omega}^{-1} = (1 - [\rho_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}]^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.45)$$

W analogiczny sposób można wykazać drugą zależność rekurencyjną w (3.37), ponieważ podprzestrzeń $S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}$ może być przepisana jako:

$$S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} = \text{span}\{y_{-i_1} \dots y_{-i_q}, S_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_q}\} \quad (3.46)$$

Wówczas

$$\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} = P(S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \ominus S_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_q}) y_{-i_1} \dots y_{-i_q} \quad (3.47)$$

razem z wersją unormowaną:

$$e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} = \frac{\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}}{\parallel \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \parallel_{\Omega}} \in S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \perp S_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_q} \quad (3.48)$$

Wykorzystując ortogonalną dekompozycję podprzestrzeni $S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}$

$$S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} = S_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_q} \oplus \text{span}\{e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}\} \quad (3.49)$$

możliwe staje się wyznaczenie błędu prognozy 'w tył' przy wykorzystaniu zależności:

$$\begin{aligned} & P(S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \ominus S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}) y_{-j_1} \dots y_{-j_w} = \\ & = (I - P(S_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_q}) - P(e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1})) y_{-j_1} \dots y_{-j_w} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Wyraża się on jako:

$$\nu_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = \nu_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_q} - P(e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}) y_{-j_1} \dots y_{-j_w} \quad (3.51)$$

i po normalizacji

$$r_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \parallel \nu_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \parallel_{\Omega} = \parallel \nu_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w} \parallel_{\Omega} (r_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w} + \rho_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}) \quad (3.52)$$

gdzie $\rho_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = -(e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}, r_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w})$ oraz

$$\parallel \nu_{i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w-1} \parallel_{\Omega} \parallel \nu_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \parallel_{\Omega}^{-1} = (1 - [\rho_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}]^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.53)$$

Uwaga 1:

W rozpatrywanym algorytmie istnieje przypadek przejścia pomiędzy blokami częściowej ortogonalizacji, co odpowiada zmianie wartości q i w .

- Jeśli indeksy $j_1 = j_2 = \dots j_w = N$ i $w < M$ to należy prowadzić kolejny indeks (wymiar) j_{w+1} i wtedy $j_1 = j_2 = \dots = j_{w+1} = 0$, np.:

$$\underbrace{y_{-N} \dots y_{-N}}_w \rightarrow \underbrace{y_0 \dots y_0}_{w+1}$$

- Jeśli indeksy $i_1 = i_2 = \dots i_q = 0$ to należy odjąć jeden indeks (wymiar) i wtedy $i_1 = i_2 = \dots i_{q-1} = N$, np.: $\underbrace{y_0 \dots y_0}_q \rightarrow \underbrace{y_{-N} \dots y_{-N}}_{q-1}$.

□

Przykład 3.2.2

Wykażemy zależność rekurencyjną (3.37) dla przypadku kiedy

$$\begin{bmatrix} e_{1,1}^{0,0,0,1} \\ r_{1,1}^{0,0,0,1} \end{bmatrix} = \Theta(\rho_{1,1}^{0,0,0,1}) \begin{bmatrix} e_{1,1}^{0,0,0,0} \\ r_{1,2}^{0,0,0,1} \end{bmatrix}$$

Podprzestrzeń $S_{1,2}^{0,0,0,1}$ może być zapisana jako

$$S_{1,2}^{0,0,0,1} = \text{span}\{S_{1,2}^{0,0,0,0}, y_0 y_0 y_0 y_{-1}\}$$

Błąd prognozy 'w tył' może być zdefiniowany jako:

$$\nu_{1,2}^{0,0,0,1} = P(S_{1,2}^{0,0,0,1} \ominus S_{1,2}^{0,0,0,0}) y_0 y_0 y_0 y_{-1}$$

razem z jego wersją unormowaną $r_{1,2}^{0,0,0,1}$. Ponieważ $r_{1,2}^{0,0,0,1} \in S_{1,2}^{0,0,0,1}$ to mamy

$$S_{1,2}^{0,0,0,1} = S_{1,2}^{0,0,0,0} \oplus \text{span}\{r_{1,2}^{0,0,0,1}\}$$

Używając:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_{1,1}^{0,0,0,1} \ominus S_{1,2}^{0,0,0,1})y_{-1}y_{-1} = \\ & = (I - \mathbf{P}(S_{1,2}^{0,0,0,0}) - \mathbf{P}(r_{1,2}^{0,0,0,1}))y_{-1}y_{-1} \end{aligned}$$

błąd prognozy 'w przód' możemy wyznaczyć jako:

$$\varepsilon_{1,1}^{0,0,0,1} = \varepsilon_{1,1}^{0,0,0,0} - \mathbf{P}(r_{1,2}^{0,0,0,1})y_{-1}y_{-1}$$

i po normalizacji

$$e_{1,1}^{0,0,0,1} \|\varepsilon_{1,1}^{0,0,0,1}\|_{\Omega} = \|\varepsilon_{1,1}^{0,0,0,0}\|_{\Omega} (e_{1,1}^{0,0,0,0} + \rho_{1,1}^{0,0,0,1} r_{1,2}^{0,0,0,1})$$

gdzie $\rho_{1,1}^{0,0,0,1} = -(e_{1,1}^{0,0,0,0}, r_{1,2}^{0,0,0,1})$.

W analogiczny sposób można wykazać drugą zależność rekurencyjną z (3.37).

Zapiszmy podprzestrzeń $S_{1,1}^{0,0,0,0}$ w postaci

$$S_{1,1}^{0,0,0,0} = \text{span}\{y_{-1}y_{-1}, S_{1,2}^{0,0,0,0}\}$$

Wówczas błąd prognozy 'w przód' możemy zapisać jako

$$\varepsilon_{1,1}^{0,0,0,0} = \mathbf{P}(S_{1,1}^{0,0,0,0} \ominus S_{1,2}^{0,0,0,0})y_{-1}y_{-1}$$

razem z wersją unormowaną $e_{1,1}^{0,0,0,0}$. Wykorzystując ortogonalną dekompozycję podprzestrzeni $S_{1,1}^{0,0,0,0}$

$$S_{1,1}^{0,0,0,0} = S_{1,2}^{0,0,0,0} \oplus \text{span}\{e_{1,1}^{0,0,0,0}\} \quad (3.54)$$

możemy wyznaczyć błąd prognozy 'w tył', korzystając z

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_{1,1}^{0,0,0,1} \ominus S_{1,1}^{0,0,0,0})y_0y_0y_0y_{-1} = \\ & = (I - \mathbf{P}(S_{1,2}^{0,0,0,0}) - \mathbf{P}(e_{1,1}^{0,0,0,0}))y_0y_0y_0y_{-1} \end{aligned}$$

Wyraża się on jako:

$$\nu_{1,1}^{0,0,0,1} = \nu_{1,2}^{0,0,0,1} - \mathbf{P}(e_{1,1}^{0,0,0,0})y_0y_0y_0y_{-1}$$

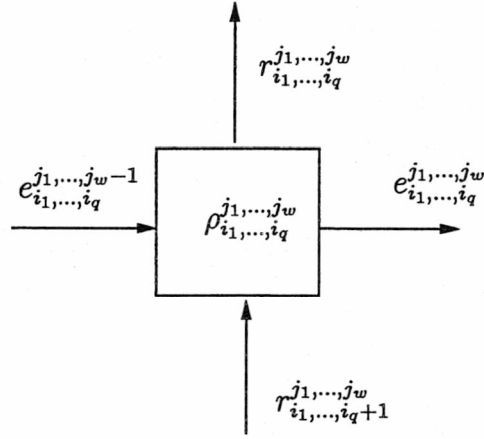
i po normalizacji

$$r_{1,1}^{0,0,0,1} \|\nu_{1,1}^{0,0,0,1}\|_{\Omega} = \|\nu_{1,2}^{0,0,0,0}\|_{\Omega} (r_{1,2}^{0,0,0,1} + \rho_{1,1}^{0,0,0,1} e_{1,1}^{0,0,0,0})$$

gdzie $\rho_{1,1}^{0,0,0,1} = -(e_{1,1}^{0,0,0,0}, r_{1,2}^{0,0,0,1})$.

□

Na rysunku 3.3 przedstawiono pojedynczą sekcję q-w nieliniowego filtru dekorelującego.



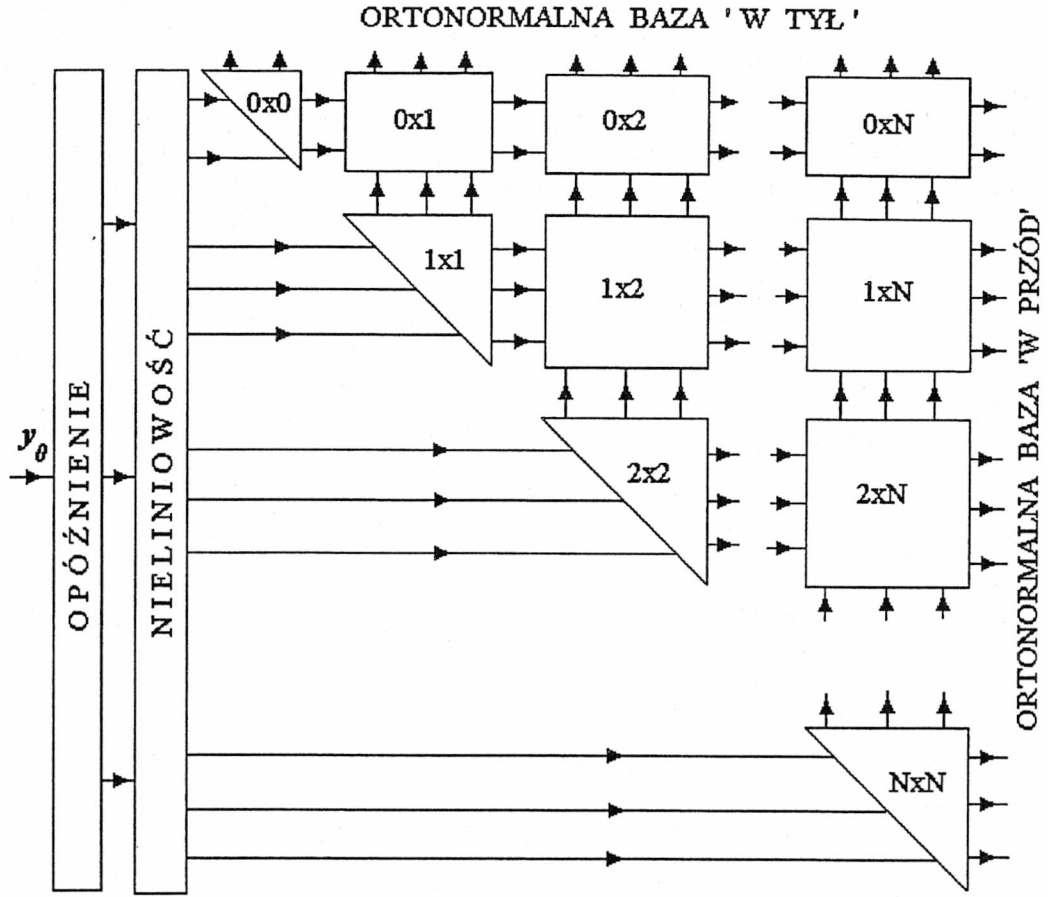
Rysunek 3.3: Elementarna sekcja q-w nieliniowego bloku dekorelującego.

Jeśli przyjmiemy, że współczynnik Schura $\rho_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}$ jest tangensem hiperbolicznym pewnego kąta $\psi_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}$, to pojedyncza sekcja filtru przyjmuje postać

$$\theta(\rho_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}) = \begin{bmatrix} \cosh \psi_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} & \sinh \psi_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \\ \sinh \psi_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} & \cosh \psi_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Oznacza to, że realizuje ona rotację hiperboliczną o kąt $\psi_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}$ sygnałów $e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}$ oraz $r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w}$. Rysunek 3.4 przedstawia strukturę nieliniowego filtru dekorelującego rzędu N .

Błędy prognozy 'w tył' tworzą bazę ortonormalną (ON) (3.22) przestrzeni



Rysunek 3.4: Nieliniowy ortogonalny filtr dekorelujący.

$S^{\{M\}}$. Zauważmy, że

$$S^{\{M\}} = S_0^{\overbrace{N, \dots, N}^M} \quad (3.56)$$

oraz

$$S_0^{N, \dots, N} = S_0^{N, \dots, N-1} \oplus \text{span}\{r_0^{N, \dots, N}\} \quad (3.57)$$

Wykorzystując zależność rekurencyjną (3.57) dla $N, N-1, \dots, 1, 0$ otrzymujemy ostatecznie

$$S^{\{M\}} = S_0^{N, \dots, N} = \bigoplus_{j_1=0}^N \text{span}\{r_0^{j_1}\} \oplus \bigoplus_{j_1=0}^N \bigoplus_{j_2=j_1}^N \text{span}\{r_0^{j_1, j_2}\} \dots \bigoplus_{j_1=0}^N \dots \bigoplus_{j_M=j_{M-1}}^N \text{span}\{r_0^{j_1, \dots, j_M}\} \quad (3.58)$$

Rozpatrując (3.28) dla $q = w$ oraz $i_1 = j_1, \dots, i_q = j_w$ można zauważyć, że

inicjalizacje dla bloku dekorelującego są następujące

$$e_{i_1, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_q} = y_{-i_1} \dots y_{-i_q} \quad (3.59)$$

gdzie

$$y_{-i_1} \dots y_{-i_q} = \frac{y_{-i_1} \dots y_{-i_q}}{\|y_{-i_1} \dots y_{-i_q}\|_{\Omega}^2} \quad (3.60)$$

3.2.2 Estymator sygnału użytecznego w bazie ON przestrzeni $S^{\{M\}}$

Wyznaczona baza ortonormalna (3.58) rozpiną przestrzeń estymacyjną $S^{\{M\}}$. Naszym zadaniem jest znalezienie reprezentacji sygnału x_0 w tej podprzestrzeni na drodze wyznaczenia projekcji:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{N,0}^{\{M\}} &= \mathbf{P}(S^{\{M\}})x_0 = \\ &= \sum_{j_1=0}^N (x_0, r_0^{j_1})_{\Omega} r_0^{j_1} + \sum_{j_1=0}^N \sum_{j_2=j_1}^N (x_0, r_0^{j_1, j_2})_{\Omega} r_0^{j_1, j_2} + \dots + \\ &+ \sum_{j_1=0}^N \sum_{j_2=j_1}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N (x_0, r_0^{j_1, j_2, \dots, j_M})_{\Omega} r_0^{j_1, j_2, \dots, j_M} = \\ &= \sum_{j_1=0}^N x \rho^{j_1} r_0^{j_1} + \sum_{j_1=0}^N \sum_{j_2=j_1}^N x \rho^{j_1, j_2} r_0^{j_1, j_2} + \dots \\ &+ \sum_{j_1=0}^N \sum_{j_2=j_1}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N x \rho^{j_1, j_2, \dots, j_M} r_0^{j_1, j_2, \dots, j_M} \end{aligned} \quad (3.61)$$

gdzie współczynniki $x \rho^{j_1, j_2, \dots, j_k}$ dla $k = 1, \dots, M$ są wyrażone przez (3.25). Można pokazać, iż są one równe iloczynowi skalarnemu elementu bazy ON i błędu estymacji sygnału użytecznego wyznaczonym na podstawie tejże bazy ON niezawierającej tego elementu. Zdefiniujmy

$$\hat{x}_0^{j_1, \dots, j_w-1} = \mathbf{P}(S_0^{j_1, \dots, j_w-1})x_0 \in S_0^{j_1, \dots, j_w-1} \quad (3.62)$$

oraz związany z tą estymatą błąd

$$\varepsilon_0^{j_1, \dots, j_w-1} = x_0 - \hat{x}_0^{j_1, \dots, j_w-1} \quad (3.63)$$

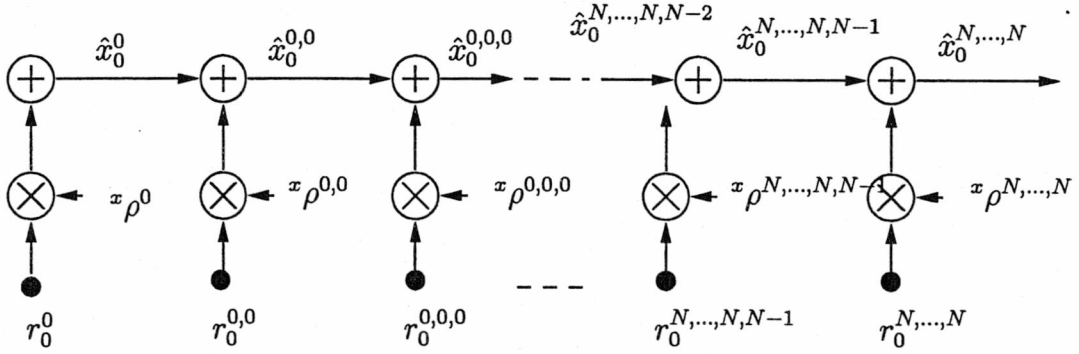
Ponieważ $r_0^{j_1, \dots, j_w} \perp S_0^{j_1, \dots, j_w-1}$ to

$$(\hat{x}^{j_1, \dots, j_w-1}, r_0^{j_1, \dots, j_w})_\Omega = 0 \quad (3.64)$$

Czyli

$$\begin{aligned} x_{\rho^{j_1, j_2, \dots, j_q}} &= (x_0, r_0^{j_1, \dots, j_w})_\Omega = (x_0 - \hat{x}^{j_1, \dots, j_w-1}, r_0^{j_1, \dots, j_w})_\Omega = \\ &= (\varepsilon_0^{j_1, \dots, j_w-1}, r_0^{j_1, \dots, j_w})_\Omega \end{aligned} \quad (3.65)$$

Rysunek (3.5) przedstawia blok estymujący dla nieliniowego filtra odszumiającego.



Rysunek 3.5: Blok estymujący nieliniowego ortogonalnego filtra odszumiającego.

Błąd średniokwadratowy estymacji wyraża się poprzez

$$\begin{aligned}
{}^x R_{N,0}^{\{M\}} &= ({}^x \varepsilon_{N,0}^{\{M\}}, {}^x \varepsilon_{N,0}^{\{M\}}) = \\
&= (x_0 - \sum_{j_1=0}^N {}^x \rho^{j_1} r_0^{j_1} - \dots - \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N {}^x \rho^{j_1, \dots, j_M} r_0^{j_1, \dots, j_M}, x_0 - \\
&- \sum_{j_1=1}^N {}^x \rho^{j_1} r_0^{j_1} - \dots - \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N {}^x \rho^{j_1, \dots, j_M} r_0^{j_1, \dots, j_M})_{\Omega} = \\
&= (x_0, x_0)_{\Omega} - \sum_{j_1=0}^N {}^x \rho^{j_1} (x_0, r_0^{j_1})_{\Omega} - \dots - \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N {}^x \rho^{j_1, \dots, j_M} (x_0, r_0^{j_1, \dots, j_M})_{\Omega} + \\
&- \sum_{j_1=0}^N {}^x \rho^{j_1} (r_0^{j_1}, x_0)_{\Omega} - \dots - \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N {}^x \rho^{j_1, \dots, j_M} (r_0^{j_1, \dots, j_M}, x_0)_{\Omega} + \\
&+ \sum_{j_1=0}^N \sum_{k_1=0}^N {}^x \rho^{j_1} {}^x \rho^{k_1} (r_0^{j_1}, r_0^{k_1})_{\Omega} + \\
&+ \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N \sum_{k_1=0}^N \dots \sum_{k_M=k_{M-1}}^N {}^x \rho^{j_1, \dots, j_M} {}^x \rho^{k_1, \dots, k_M} (r_0^{j_1, \dots, j_M}, r_0^{k_1, \dots, k_M})_{\Omega} = \\
&= \|x_0\|_{\Omega}^2 - 2(\sum_{j_1=0}^N |{}^x \rho^{j_1}|^2 + \dots + \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N |{}^x \rho^{j_1, \dots, j_M}|^2) + \\
&+ \sum_{j_1=0}^N |{}^x \rho^{j_1}|^2 + \dots + \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N |{}^x \rho^{j_1, \dots, j_M}|^2 = \\
&= \|x_0\|_{\Omega}^2 - \sum_{j_1=0}^N |{}^x \rho^{j_1}|^2 - \dots - \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N |{}^x \rho^{j_1, \dots, j_M}|^2 \tag{3.66}
\end{aligned}$$

Błąd średniokwadratowy zależy tylko od współczynników ${}^x \rho^{j_1, \dots, j_q}$ dla $q = 1, \dots, M$ i $j_1, \dots, j_q$ zmieniającego się według (3.3). Można zauważyć, iż

$$\begin{aligned}
{}^x R_{N,0}^{\{M\}} &= {}^x R_{N-1,0}^{\{M\}} - |{}^x \rho^N|^2 - \sum_{j_1=0}^N |{}^x \rho^{j_1, N}|^2 - \dots + \\
&- \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_{M-1}=j_{M-2}}^N |{}^x \rho^{j_1, \dots, j_{M-1}, N}|^2 \tag{3.67}
\end{aligned}$$

oraz

$${}^x R_{N,0}^{\{M\}} = {}^x R_{N,0}^{\{M-1\}} - \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N |{}^x \rho^{j_1, \dots, j_M}|^2 \tag{3.68}$$

Zauważmy, że dla podejścia liniowego prawdziwe jest

$${}^x R_{N,0}^{\{1\}} \triangleq \|x_0\|_{\Omega}^2 - \sum_{j_1=0}^N |{}^x \rho^{j_1}|^2 \quad (3.69)$$

Podejście nieliniowe pozwala zredukować wartość błędu średniokwadratowego estymacji w stosunku do podejścia liniowego ponieważ

$${}^x R_{N,0}^{\{M\}} = {}^x R_{N,0}^{\{1\}} - \|{}^2 R\|_{Frobenius}^2 - \dots - \|{}^M R\|_{Frobenius}^2 \quad (3.70)$$

gdzie

$${}^m R = [{}^x \rho^{j_1, \dots, j_m}] \quad (3.71)$$

i $j_1, \dots, j_m$ zmienia się według (3.3), natomiast norma Frobeniusa macierzy zdefiniowana jest jako

$$\|{}^m R\|_{Frobenius}^2 \triangleq \sum_{i_1=0}^N \dots \sum_{i_m=i_{m-1}}^N |{}^x \rho^{j_1, \dots, j_m}|^2 \quad (3.72)$$

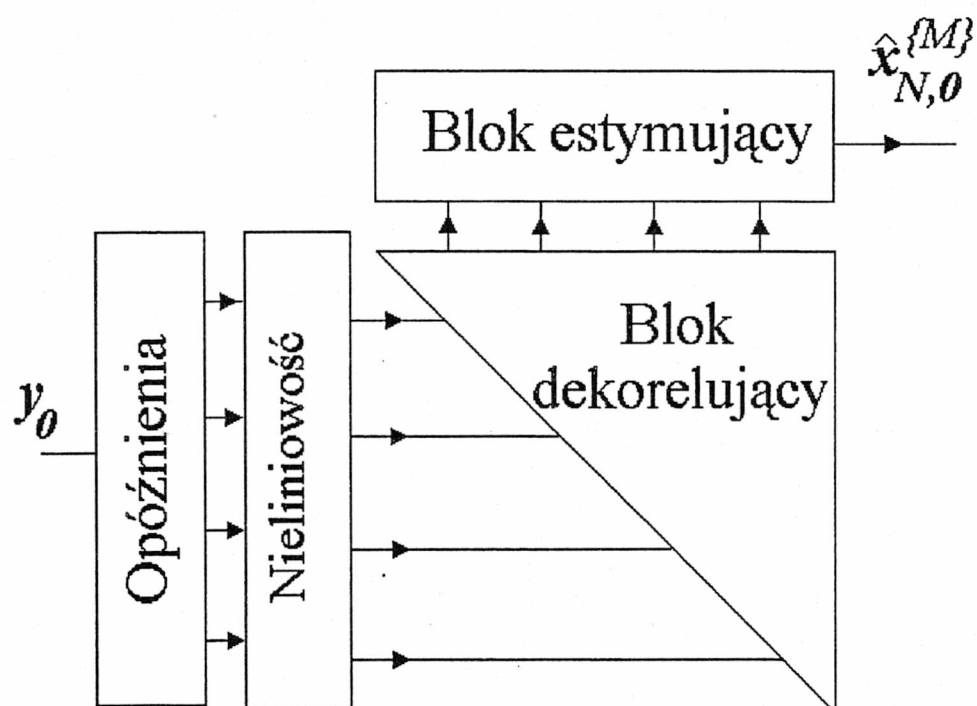
Zauważmy, że gdy wraz zę wzrostem N błąd średniokwadratowy (3.67) dąży do zera, tj. dla $N \rightarrow \infty$ ${}^x R_{N,0}^{\{M\}} \rightarrow 0$, to otrzymujemy uogólnioną postać równości Parsevala

$$\|x_0\|_{\Omega}^2 = \sum_{j_1=0}^{\infty} |{}^x \rho^{j_1}|^2 + \dots - \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^{\infty} |{}^x \rho^{j_1, \dots, j_M}|^2 \quad (3.73)$$

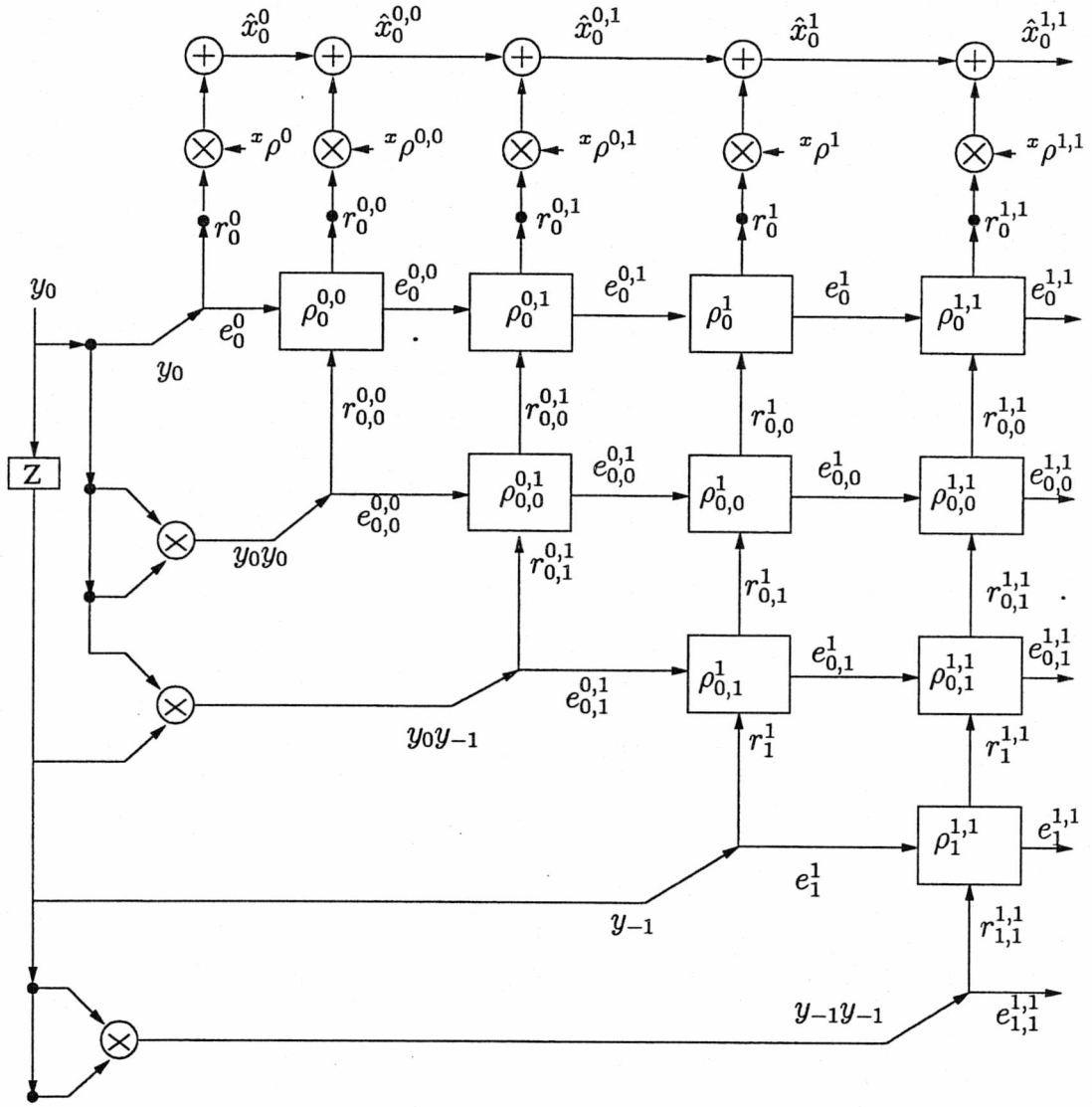
Sterując odpowiednio doбором liczby współczynników ${}^x \rho^{j_1, \dots, j_M}$ (dobór N i M) oraz wybierając odpowiednio duże co do wartości bezwzględnej ${}^x \rho$, możemy sterować strukturą filtru, tak aby minimalizując złożoność bloku dekorelującego uzyskać interesującą nas wartość błędu średniokwadratowego. Szerzej problem ten zostanie rozpatrzony w rozdziale 4.

Zauważmy, że procedura eliminacji zakłócenia wymaga wyznaczenia korelacji wzajemnych $\mathbf{E} x_0 r_0^{j_1, \dots, j_q}$ lub odpowiednio $\mathbf{E}^x {}_{\varepsilon}^{j_1, \dots, j_{q-1}} r_0^{j_1, \dots, j_q}$. Ponieważ nie jest możliwa obserwacja x_0 koniecznym jest wykorzystanie sygnału referencyjnego, który jest związany statystycznie z x_0 . Dyskusja na ten temat znajduje się w rozdziale (3.4.4).

Schemat ogólny filtru odsumiającego pokazany jest na rysunku 3.6. Rysunek 3.7 przedstawia nieliniowy filtr odsumiający rzędu $N = 1$ i stopnia $M = 2$.



Rysunek 3.6: Nieliniowy ortogonalny filtr odszumiający.



Rysunek 3.7: Ortogonalny nieliniowy filtr odszumiający ($N = 1, M = 2$).

3.3 Przypadek stacjonarny

Przedstawione w poprzednim rozdziale rozwiązanie problemu nieliniowej ortogonalnej filtracji odszumiającej dotyczyło przypadku, gdzie nie zakładaliśmy stacjonarności sygnałów wejściowych. Jest to przypadek najbardziej ogólny. W niniejszym paragrafie przedstawimy rozwiązanie problemu filtracji odszumiającej przy założeniu stacjonarności w szerszym sensie (dla kowariancji do rzędu $2M$) sygnałów wejściowych. Jak pokażemy, sytuacja taka obniża w znacznym stopniu złożoność obliczeniową procesu filtracji oraz upraszcza strukturę samego filtra odszumiającego.

Zdefiniujmy operator opóźnienia jako

$$z \cdot y_{-i_k} \triangleq y_{-i_k-1} \quad (3.74)$$

W przypadku kiedy sygnał y jest stacjonarny w szerszym sensie rzędu $2M$ zachodzi równość iloczynów skalarnych

$$(y_{-i_1} \dots y_{-i_m}, y_{-j_1} \dots y_{-j_n})_\Omega = (z \cdot y_{i_1} \dots y_{i_m}, z \cdot y_{j_1} \dots y_{j_n})_\Omega, \quad m, n = 1, \dots, M \quad (3.75)$$

Wynika to z faktu, że dla każdego σ zachodzi

$$\mathbb{E} y_{-i_1} \dots y_{-i_m} y_{-j_1} \dots y_{-j_n} = \mathbb{E} y_{-i_1-\sigma} \dots y_{-i_m-\sigma} y_{-j_1-\sigma} \dots y_{-j_n-\sigma} \quad (3.76)$$

$$m, n = 1, \dots, M$$

Mozna zatem powiedzieć, że konsekwencją stacjonarności jest niezmienniczość iloczynu skalarnego względem przesunięcia w czasie. Na podstawie (3.28) i (3.75), w przypadku stacjonarnym

$$z \cdot S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = S_{i_1+1, \dots, i_q+1}^{j_1+1, \dots, j_w+1} \quad (3.77)$$

i

$$\mathbb{P}(z \cdot S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}) = \mathbb{P}(S_{i_1+1, \dots, i_q+1}^{j_1+1, \dots, j_w+1}) \quad (3.78)$$

Z powyższego oraz z (3.34)

$$\begin{aligned} z \cdot r_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} &= z \cdot [\mathbb{P}(S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \ominus S_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}) y_{-j_1} \dots y_{-j_q}] \\ &= \mathbb{P}(S_{i_1+1, \dots, i_q+1}^{j_1+1, \dots, j_w+1} \ominus S_{i_1+1, \dots, i_q+1}^{j_1+1, \dots, j_w}) y_{-j_1-1} \dots y_{-j_q-1} = r_{i_1+1, \dots, i_q+1}^{j_1+1, \dots, j_w+1} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Rozpatrzmy rysunek 3.4. Bloki leżące w górnym rzędzie generują elementy bazy ON takie, że

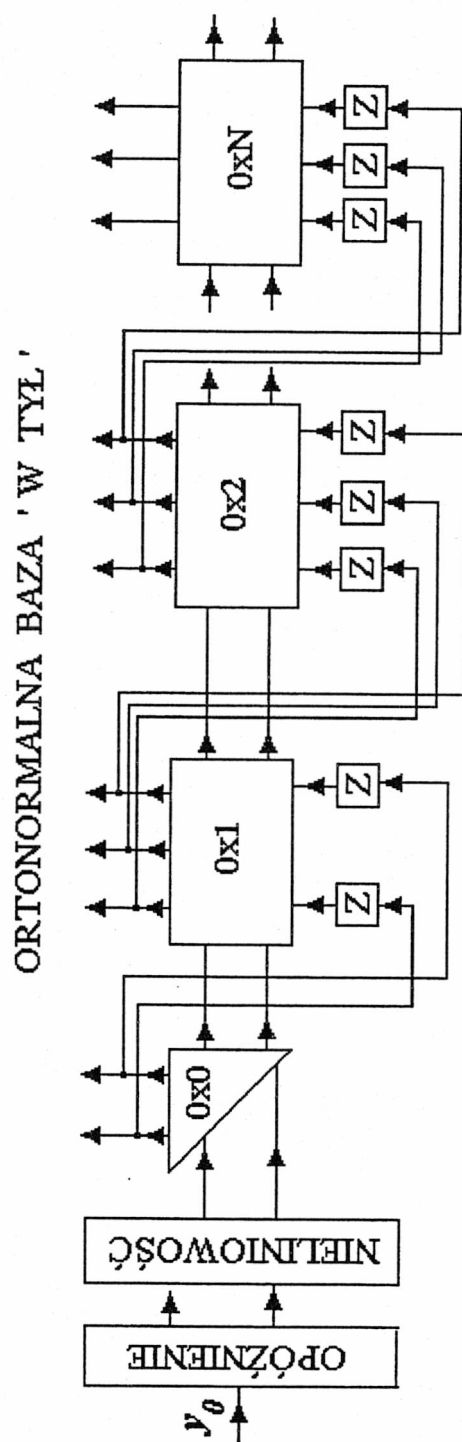
$$B_{c,d} = \{r_{i_1}^{j_1, \dots, j_k}; i_1 = c; j_1 = d, \dots, N, j_k = j_{k-1}, \dots, N; k = 1, \dots, M\} \quad (3.80)$$

gdzie $c = 0$ i $d = 0, \dots, N$. Pierwszy blok to $B_{0,0}$, drugi $B_{0,1}$, itd. Bloki leżące w drugim rzędzie to takie, dla których $c = 1$ i $d = 1, \dots, N$. Tak więc kolejno są to $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, itd. Można zaobserwować, że elementy bazy ON generowane przez bloki $B_{1,d}$ są na mocy (3.79) opóźnionymi elementami bazy ON generowanymi przez bloki $B_{0,d}$, a dokładnie są to te elementy dla których $j_k = j_{k-1}, \dots, N-1; k = 2, \dots, M$.

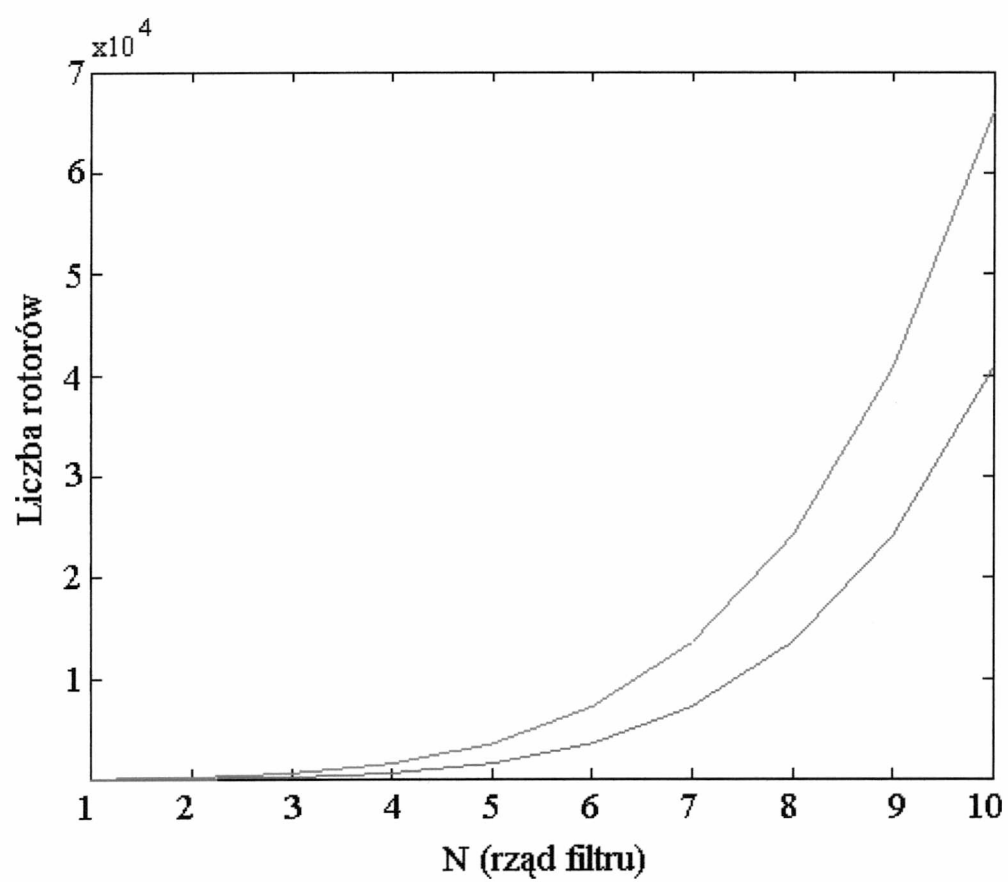
Na podstawie tej obserwacji można stwierdzić, że inicjalizacją dla bloku $B_{0,d+1}$ są opóźnione elementy generowane przez blok $B_{0,d}$ dla $d = 1, \dots, N-1$. Obserwacja ta owocuje w ewidentnym uproszczeniu (zmniejszeniu ilości obliczeń) bloku realizującego dekorrelację sygnału y .

Rysunek 3.8 przedstawia nieliniowy ortogonalny filtr dekorrelujący dla przypadku stacjonarnego sygnału wejściowego y .

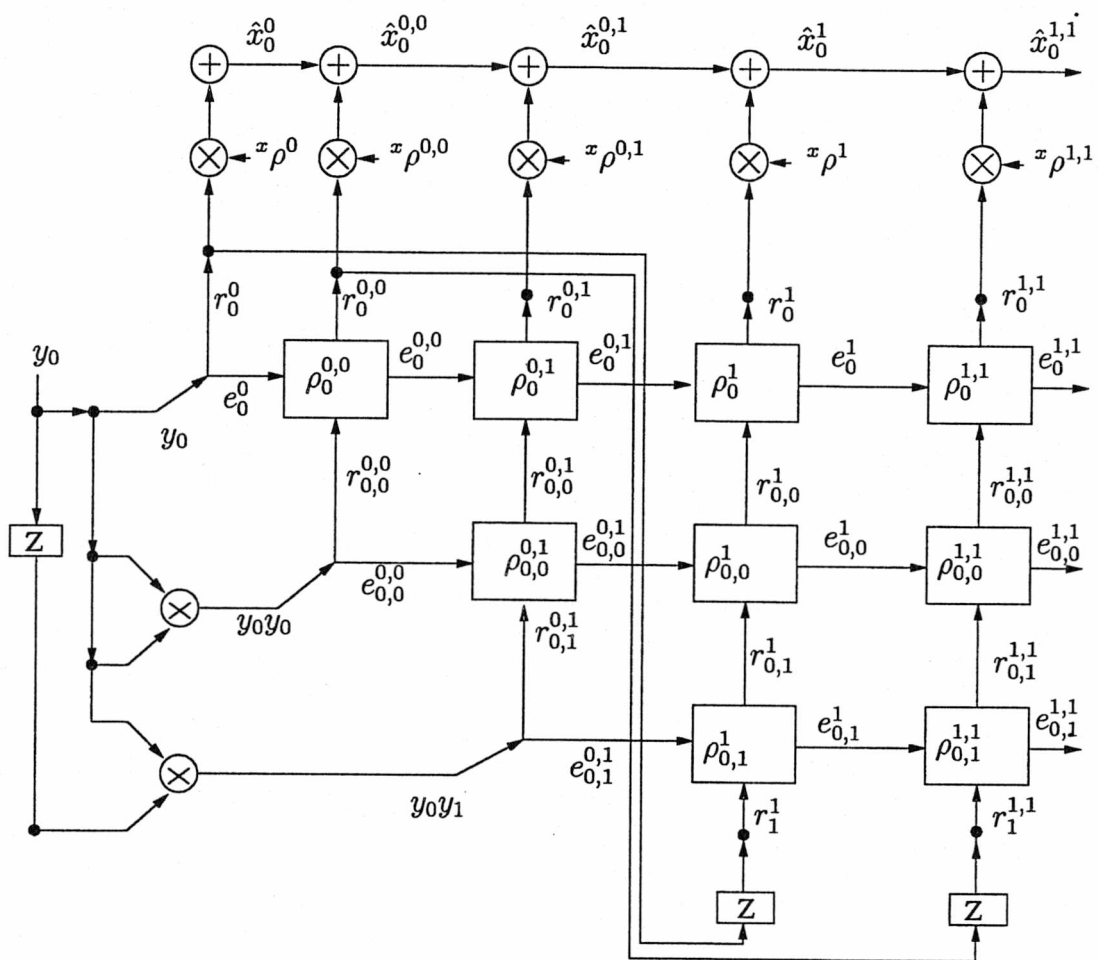
Jako przykład służący do zaobserwowania redukcji ilości obliczeń w przypadku stacjonarnego sygnału y rozpatrzmy nieliniowy filtr odsumiający o stopniu nieliniowości $M = 3$ i rzędzie N . Liczba rotorów dla przypadku niestacjonarnego i stacjonarnego równa jest odpowiednio (4.1) i (4.2). Rysunek 3.9 ilustruje liczbę rotorów bloku dekorrelującego w zależności od rzędu filtru N [5]. Dla rzędu filtru $N = 10$ mamy już dwukrotnie mniejszą liczbę rotorów dla przypadku stacjonarnego. Generowana przez blok dekorrelujący baza ON, stanowi wejście dla bloku estymującego, który jest taki sam jak w przypadku niestacjonarnego sygnału wejściowego y . Rysunek 3.10 przedstawia nieliniowy filtr odsumiający rzędu $N = 1$ i stopnia $M = 2$ dla przypadku stacjonarnego.



Rysunek 3.8: Blok dekorelujący - przypadek stacjonarny.



Rysunek 3.9: Liczba rotorów bloku dekorelującego: przypadek niestacjonarny (czerwony); przypadek stacjonarny (niebieski)



Rysunek 3.10: Ortogonalny nieliniowy filtr odszumiający rzędu ($N = 1, M = 2$) - przypadek stacjonarny.

3.4 Nieliniowa ortogonalna filtracja odszumiająca szeregi czasowych

W rozdziale tym przedstawiono zagadnienie praktycznej realizacji algorytmu nieliniowej ortogonalnej filtracji odszumiającej sygnałów losowych wyższych rzędów.

3.4.1 Notacja

Niech będzie dany zbiór próbek $\{y_0, \dots, y_T\}$, gdzie $y_t \in R$. Wprowadzamy następującą notację 'bracketową' [42]

$$|y \rangle_T \triangleq [y_0, \dots, y_T]' \quad (3.81)$$

gdzie $'$ oznacza transpozycję. Jest to wektor próbek obserwacji realizacji sygnału losowego. Mając dwa wektory $|x \rangle$ i $|y \rangle$ możemy zdefiniować iloczyn skalarny jako

$$\langle x | y \rangle \triangleq [x_0, \dots, x_T][y_0, \dots, y_T]' = \sum_{t=0}^T x_t y_t \quad (3.82)$$

gdzie

$$\langle x | \triangleq |x \rangle' \quad (3.83)$$

Operator opóźnienia jest zdefiniowany jako:

$$|zy \rangle_T = [0 \ y_0 \ \dots \ y_{T-1}]' \quad (3.84)$$

oraz

$$|z^k y \rangle_T = [\underbrace{0 \ \dots \ 0}_k y_0 \ \dots \ y_{T-k}]' \quad (3.85)$$

Dla obserwacji wyższego rzędu, wektor

$$\begin{aligned} |y_{i_1} \dots y_{i_m} \rangle_T &= |z^{i_1} y \cdot z^{i_2} y \cdot \dots \cdot z^{i_m} y \rangle_T \triangleq \\ &= |z^{i_1} y \rangle_T \cdot |z^{i_2} y \rangle_T \cdot \dots \cdot |z^{i_m} y \rangle_T \end{aligned} \quad (3.86)$$

jest iloczynem poszczególnych elementów wektorów $|z^{i_1}y\rangle_T \dots |z^{i_m}y\rangle_T$.

Przykład 3.4.1

Dla wektorów $|y\rangle = [y_0 \ y_1 \ \dots \ y_T]$ i $|zy\rangle = [0 \ y_0 \ \dots \ y_{T-1}]$, mamy $|y_0y_1\rangle = [0 \ y_1y_0 \ \dots \ y_Ty_{T-1}]$. $\square$

Interpretując wektory (3.85) oraz (3.86) jako elementy bazy rozpiętej na próbkach sygnału, możemy zdefiniować następujące podprzestrzenie dla $m = 1, \dots, M$:

$${}^mS_T \triangleq \text{span}\{|y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_m}\rangle_T; \\ i_1 = 1, \dots, N, i_2 = i_1, \dots, N, \dots, i_m = i_{m-1}, \dots, N\} \quad (3.87)$$

Mając (3.87) możemy zdefiniować przestrzeń S_T rozpiętą przez liniową i nieliniową przeszłość wektora $|y\rangle_T$:

$$S_T \triangleq {}^1S_T + {}^2S_T + \dots + {}^MS_T \quad (3.88)$$

Wtedy każdy element $|v\rangle_T \in S_T$ może być zapisany jako:

$$|v\rangle_T = \sum_{i_1=0}^N |y_{i_1}\rangle_T \alpha_{i_1} + \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=i_1}^N |y_{i_1} \cdot y_{i_2}\rangle_T \alpha_{i_1, i_2} + \dots \\ \dots + \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=i_1}^N \dots \sum_{i_M=i_{M-1}}^N |y_{i_1} \dots y_{i_M}\rangle_T \alpha_{i_1, \dots, i_M} \quad (3.89)$$

Niech

$$|\pi\rangle_T \triangleq [0 \ \dots \ 0 \ 1]' \quad (3.90)$$

Zatem

$$\langle \pi | y \rangle_T = y_T \quad (3.91)$$

Zdefiniujmy

$$|y_\pi\rangle_T \triangleq \mathbf{P}(|y\rangle_T) = [0, \dots, 0, y_T]' \quad (3.92)$$

oraz

$$|y_-\rangle_T \triangleq \mathbf{P}^\perp(|y\rangle_T) = [y_0, \dots, y_{T-1}, 0]' \quad (3.93)$$

gdzie $\mathbf{P}(|y\rangle_T)$ jest operatorem projekcji ortogonalnej na $\text{span}\{|y\rangle_T\}$ zdefiniowanym jako:

$$\mathbf{P}(|y\rangle_T) \triangleq |y\rangle_T \langle y|_T y \rangle_T^{-1} \langle y|_T \quad (3.94)$$

3.4.2 Uogólniony izomorfizm Kołmogorowa

Przestrzeń zmiennych losowych (2.1) oraz przestrzeń rozpięta na wektorach obserwacji (3.81) są, na mocy izomorfizmu Kołmogorowa [25], asymptotycznie izomorficznie izometryczne. Oznacza to, iż

$$y_{-i_1} \dots y_{-i_k} \leftrightarrow |y_{i_1} \dots y_{i_k} >_T \quad (3.95)$$

gdzie lewa strona (3.95) jest iloczynem zmiennych losowych, natomiast prawa obserwacją zdefiniowaną przez (3.86)

$$\begin{aligned} (y_{-i_1} \dots y_{-i_m}, y_{-j_1} \dots y_{-j_n}) &= \mathbf{E} y_{-i_1} \dots y_{-i_m} y_{-j_1} \dots y_{-j_n} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle y_{-i_1} \dots y_{-i_m} | y_{-j_1} \dots y_{-j_n} >_T \end{aligned} \quad (3.96)$$

Rozważając elementy należące do obu przestrzeni można zauważyć [80], że:

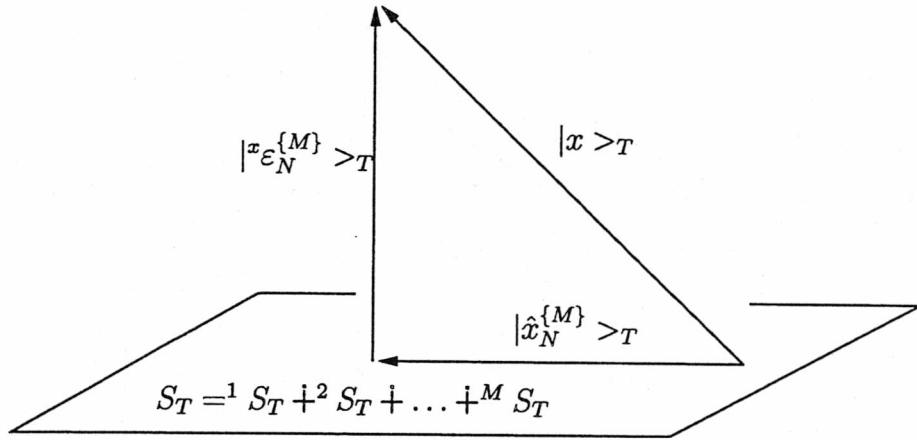
$$\|y\|_{\Omega}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \| |y >_T \| ^2 \quad (3.97)$$

$$\|y_{i_1} \dots y_{i_k}\|_{\Omega}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \| |y_{i_1} \dots y_{i_k} >_T \| ^2 \quad (3.98)$$

Powyższe obserwacje prowadzą do wniosku, iż możliwe jest w przestrzeni rozpiętej na próbkach sygnału obserwowanego rozwiązanie problemu filtracji odsumiającej szeregów czasowych, analogicznie jak dla przestrzeni zmiennych losowych, poprzez rozpatrzenie odpowiednich reprezentantów Kołmogorowa w izomorfizmie (3.95) i (3.96). W istocie można dokonać ortonormalizacji bazy przestrzeni S_T używając algorytmu częściowej ortogonalizacji wprowadzonego w rozdziale 3.1.

3.4.3 Problem filtracji odsumiającej szeregów czasowych

Dany jest wektor $|y >_T$ próbek $\{y_0, \dots, y_T\}$ rzeczywistego szeregu czasowego, obserwowanego na skończonym odcinku czasu $\{0, \dots, T\}$. Problem filtracji odsumiającej szeregu czasowego przedstawia rysunek 3.11.



Rysunek 3.11: Estymator $|\hat{x} >_T$ sygnału użytecznego.

Poszukiwany estymator sygnału użytecznego

$$|\hat{x}_N^{\{M\}} >_T \triangleq \mathbf{P}(S_T)|x >_T \quad (3.99)$$

wyraża się jako projekcja ortogonalna elementu $|x >_T$ na przestrzeń S_T rozpiętą przez macierz

$$|Y >_T = [|^1Y >_T \ |^2Y >_T \ \dots \ |^MY >_T] \quad (3.100)$$

gdzie

$$|^mY >_T = [|y_{i_1} \dots y_{i_m} >_T; \ i_1 = 0, \dots, N, \ i_2 = i_1, \dots, N, \dots, \ i_m = i_{m-1}, \dots, N] \quad (3.101)$$

dla $m = 1, \dots, M$. Operacja projekcji ortogonalnej na $|Y >_T$ wyraża się poprzez

$$\mathbf{P}(S_T) \triangleq |Y >_T \langle Y|Y >_T^{-1} \langle Y|_T \quad (3.102)$$

Jeśli znana byłaby baza ortonormalna przestrzeni S_T to projekcja na przestrzeń S_T byłaby równa

$$\mathbf{P}(S_T) = \sum_{j_1=0}^N \mathbf{P}(|r_0^{j_1} >_T) + \dots + \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N \mathbf{P}(|r_0^{j_1, \dots, j_M} >_T) \quad (3.103)$$

gdzie $r_0^{j_1, \dots, j_m}$, $m = 1, \dots, M$ byłby elementem bazy ON przestrzeni S_T . Ponieważ

$$P(|r_0^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T) = |r_0^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T \langle r_0^{j_1, \dots, j_w}|_T \quad (3.104)$$

to estymatę sygnału użytecznego zapisalibyśmy jako

$$\begin{aligned} |\hat{x}_N^{\{M\}} \rangle_T &= P(S_T)|x \rangle_T = \sum_{j_1=0}^N |r_0^{j_1} \rangle_T \langle r_0^{j_1}|x \rangle_T + \dots + \\ &+ \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N |r_0^{j_1, \dots, j_M} \rangle_T \langle r_0^{j_1, \dots, j_M}|x \rangle_T \end{aligned} \quad (3.105)$$

Z elementem $|\hat{x}_N^{\{M\}} \rangle_T$ związany jest wektor błędu estymacji, który wyrażałby się jako

$$|x_{\varepsilon_N^{\{M\}}} \rangle_T \triangleq P(S_T^\perp)|x \rangle_T = |x \rangle_T - |\hat{x}_N^{\{M\}} \rangle_T \perp S_T \quad (3.106)$$

Estymata (3.99) byłaby optymalna w sensie średniokwadratowym, jeśli norma

$$\| |x_{\varepsilon_N^{\{M\}}} \rangle_T \| = \langle x_{\varepsilon_N^{\{M\}}} | x_{\varepsilon_N^{\{M\}}} \rangle_T^{\frac{1}{2}} \quad (3.107)$$

odpowiadającego mu wektora błędu estymacji byłaby minimalna dla każdego $T = 0, 1, 2, \dots$

Rozwiązanie problemu filtracji szeregu czasowego sprowadza się więc do wyznaczenia bazy ON przestrzeni estymacyjnej S_T oraz reprezentacji w niej dla wektora $|x \rangle_T$.

3.4.4 Dekorelacja szeregów czasowych wyższych rzędów

Wprowadzamy podprzestrzeń

$$S_{T; i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_w} \triangleq \text{span}\{|y_{i_1} \dots y_{i_q} \rangle_T, |y_{i_1} \dots y_{i_{q+1}} \rangle_T, \dots, |y_{j_1} \dots y_{j_{w-1}} \rangle_T, |y_{j_1} \dots y_{j_w} \rangle_T\} \quad (3.108)$$

Podprzestrzeń (3.108) możemy zapisać jako

$$S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = \text{span}\{|y_{i_1} \dots y_{i_q} \rangle_T, S_{T; i_1, \dots, i_{q+1}}^{j_1, \dots, j_w}\} \quad (3.109)$$

i zdefiniować nieliniowy błąd prognozy 'w przód' jako:

$$|\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} >_T = \mathbf{P}(S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \ominus S_{T; i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w}) | y_{i_1} \dots y_{i_q} >_T \perp S_{T; i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \quad (3.110)$$

wraz z jego wersją unormowaną:

$$|e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} >_T = \frac{|\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} >_T}{< \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} | \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} >_T^{\frac{1}{2}}} \quad (3.111)$$

Dokonując analogicznego rozumowania dla prognozy 'w tył', (3.108) możemy przepisać jako:

$$S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} = \text{span}\{S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}, |y_{j_1} \dots y_{j_w} >_T\} \quad (3.112)$$

Nieliniowy błąd prognozy 'w tył' jest zdefiniowany w sposób następujący:

$$|\nu_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} >_T = \mathbf{P}(S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \ominus S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}) | y_{j_1} \dots y_{j_q} >_T \perp S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \quad (3.113)$$

a jego wersja unormowana to

$$|r_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} >_T = \frac{\nu_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}}{< \nu_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} | \nu_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} >_T^{\frac{1}{2}}} \quad (3.114)$$

Twierdzenie 3.4.1. Dla pojedynczego kroku algorytmu częściowej ortogonalizacji spełnione są następujące zależności rekurencyjne:

$$|e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} >_T = [|e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} >_T + |r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} >_T \rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w}] (1 - (\rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w})^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.115)$$

$$|r_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} >_T = [|e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} >_T \rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w} + |r_{i_1+1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} >_T] (1 - (\rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w})^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.116)$$

gdzie

$$\rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w} = - < e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} | r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} >_T \quad (3.117)$$

Dowód.

Zauważmy, że $|y_{i_1} \dots y_{i_q} >_T \in S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}$, zatem (3.110) możemy przepisać jako

$$|\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} >_T = |y_{i_1} \dots y_{i_q} >_T - \mathbf{P}(S_{T; i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w}) | y_{i_1} \dots y_{i_q} >_T \quad (3.118)$$

Ponieważ $|r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T \perp S_{T; i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w-1}$ oraz $|r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T \in S_{T; i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w}$ to

$$P(S_{T; i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w}) = P(S_{T; i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w-1}) \oplus P(|r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T) \quad (3.119)$$

Zatem (3.118)) możemy przepisać

$$|\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T = |\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T - |r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T < r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} | y_{i_1} \dots y_{i_q} \rangle_T \quad (3.120)$$

Ponieważ $|\varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T = |y_{i_1} \dots y_{i_q} \rangle_T - |\widehat{y_{i_1} \dots y_{i_q}} \rangle_T$ i $|\widehat{y_{i_1} \dots y_{i_q}} \rangle_T \in S_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w-1}$ oraz $|r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T \perp S_{T; i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w-1}$ to

$$\begin{aligned} \langle r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} | y_{i_1} \dots y_{i_q} \rangle_T &= \langle y_{i_1} \dots y_{i_q} | r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T = \\ &= \langle y_{i_1} \dots y_{i_q} | r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T - \langle \widehat{y_{i_1} \dots y_{i_q}} | r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T = \\ &= \langle \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} | r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T = \\ &= - \langle \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} | \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T^{\frac{1}{2}} \rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w} \end{aligned} \quad (3.121)$$

Stąd wniosek, że

$$\begin{aligned} |e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T &= [|e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T + |r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T \rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w}] \langle \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} | \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \langle \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} | \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.122)$$

Wykorzystując tożsamość $\langle e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} | e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T = 1$ otrzymujemy

$$\langle \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} | \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T^{\frac{1}{2}} \langle \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} | \varepsilon_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T^{-\frac{1}{2}} = (1 - \rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w})^{-\frac{1}{2}} \quad (3.123)$$

Ostatecznie więc

$$|e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T = [|e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T + |r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T \rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w}] (1 - (\rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w})^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.124)$$

W analogiczny sposób można wyprowadzić drugą rekurencyjną zależność (3.116) [9].

□

Wyznaczając iloczyny skalarne $\langle \pi | e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T$ i $\langle \pi | r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T$ otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w} \\ r_{i_1, \dots, i_q+1; T}^{j_1, \dots, j_w} \end{bmatrix} = \Theta(\rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w}) \begin{bmatrix} e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w-1} \\ r_{i_1, \dots, i_q+1; T}^{j_1, \dots, j_w} \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

Przedstawione zależności umożliwiają zbudowanie filtra dekorelującego działającego bezpośrednio na próbkach sygnału obserwowanego. Mogłoby się wydawać, iż pozwala to na implementację w czasie rzeczywistym bloku dekorelującego. Niestety, metoda estymacji parametrów Schura (3.117) to uniemożliwia, gdyż:

$$\begin{aligned}\rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w} &= - \sum_{t=0}^T e_{i_1, \dots, i_q; t}^{j_1, \dots, j_w-1} r_{i_1, \dots, i_q+1; t}^{j_1, \dots, j_w} \\ &= \langle e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w-1} | r_{i_1, \dots, i_q+1; T}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T\end{aligned}\quad (3.126)$$

Z tego wynika, że niezbędne byłoby przechowywanie wszystkich poprzednich wartości próbek sygnałów $e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w}$ oraz $r_{i_1, \dots, i_q+1; T}^{j_1, \dots, j_w}$. To dyskwalifikuje taki sposób realizacji filtra ze względu na niemożliwość realizacji w czasie rzeczywistym. Celowe więc wydaje się zaproponowanie metody, która będzie wykorzystywać wyznaczone w chwili poprzedniej $T-1$ wartości współczynnika Schura oraz wartości $e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w}$, $r_{i_1, \dots, i_q+1; T}^{j_1, \dots, j_w}$ do wyznaczenia nowego współczynnika dla chwili T . W tym celu wykorzystamy, opisany poniżej operator różnicowy.

Operator różnicowy

Możemy zdefiniować operator różnicowy [42] jako

$$\nabla \langle x|y \rangle \triangleq \langle x|y \rangle_T - \langle x|y \rangle_{T-1} \quad (3.127)$$

Definiując operatory projekcji ortogonalnej

$$P_{y-} = P(\text{span}\{y_0, \dots, y_{T-1}\}) \quad (3.128)$$

oraz

$$P_{y-}^\perp = P(\text{span}\{y_T\}) \quad (3.129)$$

można dowieść [42], że:

$$P_y^\perp |x \rangle = P_y |x \rangle + P_y P_T P_{y-}^\perp |x \rangle \quad (3.130)$$

Mając ten rezultat możemy zdekomponować (3.130) na:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_y^\perp &= |x\rangle - P_y|x\rangle = |x\rangle - \mathbf{P}_{y-}|x\rangle - \mathbf{P}_y\mathbf{P}_T\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle \\ &= \mathbf{P}_{y-}^\perp\mathbf{P}_y\mathbf{P}_T\mathbf{P}_{y-}|x\rangle = \mathbf{P}_T^\perp\mathbf{P}_{y-}^\perp - \mathbf{P}_y\mathbf{P}_T\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle \end{aligned} \quad (3.131)$$

Obliczając iloczyn skalarny z wyrażenia (3.131) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle x|\mathbf{P}_y^\perp|x\rangle &= \langle x|\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle - \langle x|\mathbf{P}_y\mathbf{P}_T\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle \\ &= \langle x|\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle - \langle x|\mathbf{P}_T\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle + \langle x|\mathbf{P}_y^\perp\mathbf{P}_T\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle \\ &= \langle x|\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle + \langle x|\mathbf{P}_y^\perp\mathbf{P}_T\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle \\ &= \langle x|\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle + \langle x|\mathbf{P}_y^\perp|\pi\rangle\langle\pi|\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle \end{aligned} \quad (3.132)$$

Wprowadzając indeksy czasowe do (3.132) ostatecznie otrzymujemy:

$$\langle x|\mathbf{P}_y^\perp|x\rangle_T = \langle x|\mathbf{P}_y^\perp|x\rangle_{T-1} + \langle x|\mathbf{P}_y^\perp|\pi\rangle_T\langle\pi|\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle_T \quad (3.133)$$

lub równoważnie

$$\nabla \langle x|\mathbf{P}_y^\perp|x\rangle = \langle x|\mathbf{P}_y^\perp|\pi\rangle_T\langle\pi|\mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle_T \quad (3.134)$$

Rozważając kąt (oznaczony jako α) pomiędzy wektorami y oraz y_- [41] łatwo można zauważyć, iż

$$\cos^2 \alpha = \langle\pi|\mathbf{P}_y^\perp|\pi\rangle \quad (3.135)$$

oraz

$$\mathbf{P}_y^\perp|x\rangle = \mathbf{P}_{y-}^\perp|x\rangle \cos^2 \alpha \quad (3.136)$$

Ostatecznie używając (3.134), (3.135), (3.136), formuła adaptacji w czasie dla ortogonalnego uzupełnienia przestrzeni S_T oraz dowolnych elementów $|a\rangle$ i $|b\rangle$ dana jest wzorem

$$\begin{aligned} \nabla \langle a|\mathbf{P}(S_T)^\perp|b\rangle_T &= \langle a|\mathbf{P}(S_T)^\perp|\pi\rangle_T\langle\pi|\mathbf{P}(S_T)^\perp|b\rangle_T / \cos^2 \alpha_{S_T,T} \\ &= \langle a|\mathbf{P}(S_T)^\perp|\pi\rangle_T\langle\pi|\mathbf{P}(S_T)^\perp|b\rangle_T\langle\pi|\mathbf{P}(S_T)^\perp|\pi\rangle_T^{-1} \end{aligned} \quad (3.137)$$

Używając zależności (3.137) dla uaktualnienia (3.117) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w} &= \rho_{i_1, \dots, i_q; T-1}^{j_1, \dots, j_w} + \langle e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} | \mathbf{P}^\perp(S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}) | \pi \rangle_T \times \\ &\times \langle \pi | \mathbf{P}^\perp(S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}) | r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T \langle \pi | \mathbf{P}^\perp(S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}) | \pi \rangle_T^{-1} \end{aligned} \quad (3.138)$$

Wprowadzając tzw. "normalizację informacyjną" [42] wektorów błędów w przód

$$|e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T = |e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T \langle \pi | \mathbf{P}^\perp(S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}) | \pi \rangle_T^{-\frac{1}{2}} \quad (3.139)$$

oraz w tył

$$|r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T = |r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T \langle \pi | \mathbf{P}^\perp(S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}) | \pi \rangle_T^{-\frac{1}{2}} \quad (3.140)$$

otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} \rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w} &= \rho_{i_1, \dots, i_q; T-1}^{j_1, \dots, j_w} (1 - (e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w-1})^2)^{\frac{1}{2}} (1 - (r_{i_1, \dots, i_q+1; T}^{j_1, \dots, j_w})^2)^{\frac{1}{2}} - \\ &+ e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w-1} r_{i_1, \dots, i_q+1; T}^{j_1, \dots, j_w} \end{aligned} \quad (3.141)$$

Wzór ten pozwala na rekurencyjne uaktualnianie w czasie wielowymiarowych współczynników Schura. Dokonując "normalizacji informacyjnej" w równaniu (3.115) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &|e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T \frac{\langle \pi | \mathbf{P}^\perp(S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}) | \pi \rangle_T^{-\frac{1}{2}}}{\langle \pi | \mathbf{P}^\perp(S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}) | \pi \rangle_T^{-\frac{1}{2}}} = \\ &= [|e_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T + |r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T \rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w}] (1 - (\rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w})^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.142)$$

Ponieważ

$$\frac{\langle \pi | \mathbf{P}^\perp(S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w-1}) | \pi \rangle_T^{-1}}{\langle \pi | \mathbf{P}^\perp(S_{T; i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_w}) | \pi \rangle_T^{-1}} = 1 - \langle \pi | r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} \rangle_T \langle r_{i_1, \dots, i_q+1}^{j_1, \dots, j_w} | \pi \rangle_T \quad (3.143)$$

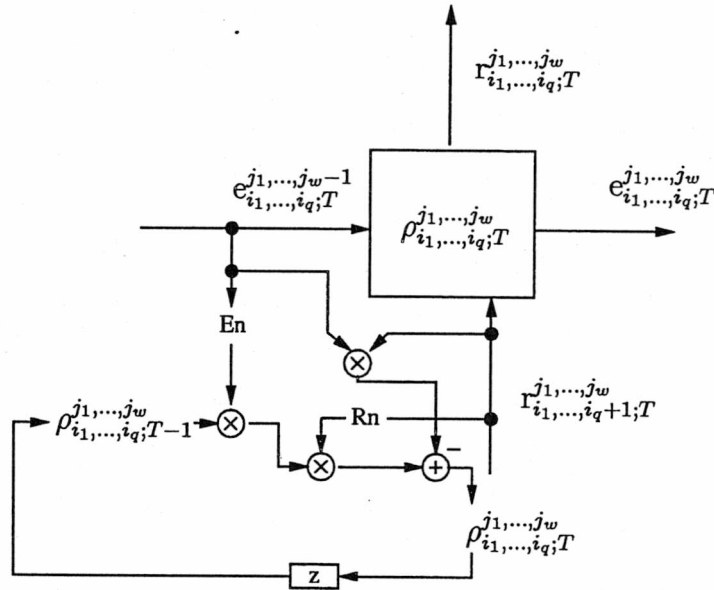
możemy ostatecznie zapisać (3.115), biorąc pod uwagę uaktualnianie w czasie, jako

$$\begin{aligned} e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w} &= (1 - (\rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w})^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - (r_{i_1, \dots, i_q+1; T}^{j_1, \dots, j_w})^2)^{-\frac{1}{2}} \\ & (e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w-1} + \rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w} r_{i_1, \dots, i_q+1; T}^{j_1, \dots, j_w}) \end{aligned} \quad (3.144)$$

W taki sam sposób otrzymujemy rekurencyjne rozwiązanie dla 'błędu w tył' (3.116)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w} = & (1 - (\rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w})^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - (e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w-1})^2)^{-\frac{1}{2}} \\ & (e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w-1} \rho_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w} + \mathbf{r}_{i_1, \dots, i_q+1; T}^{j_1, \dots, j_w}) \end{aligned} \quad (3.145)$$

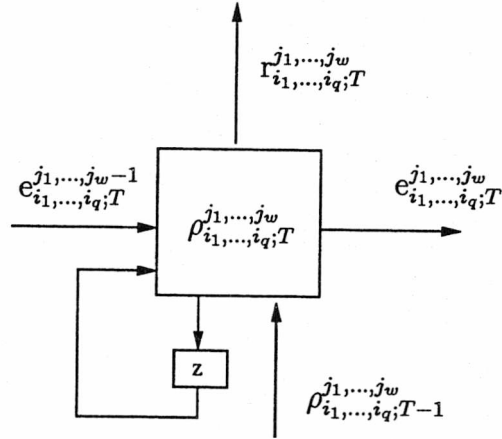
Powyższe zależności pozwalają na realizację pojedynczej sekcji (rotora) bloku dekorrelującego, który działa na próbkach sygnału w czasie rzeczywistym. Definiując $En = (1 - (e_{i_1, \dots, i_q; T}^{j_1, \dots, j_w-1})^2)^{\frac{1}{2}}$ oraz $Rn = (1 - (\mathbf{r}_{i_1, \dots, i_q+1; T}^{j_1, \dots, j_w})^2)^{\frac{1}{2}}$ pojedyncza sekcja q-w bloku dekorrelującego możemy przedstawić jak na rysunku 3.12. Schematycznie pojedynczą sekcję q-w będziemy przedstawiać jako



Rysunek 3.12: Elementarna sekcja q-w nieliniowego bloku dekorrelującego dla szeregów czasowych.

Ponieważ

$$S_T = \overbrace{S_{T,0}^{N, \dots, N}}^M \quad (3.146)$$



Rysunek 3.13: Schematyczne przedstawienie sekcji q-w nieliniowego bloku dekorelującego dla szeregów czasowych.

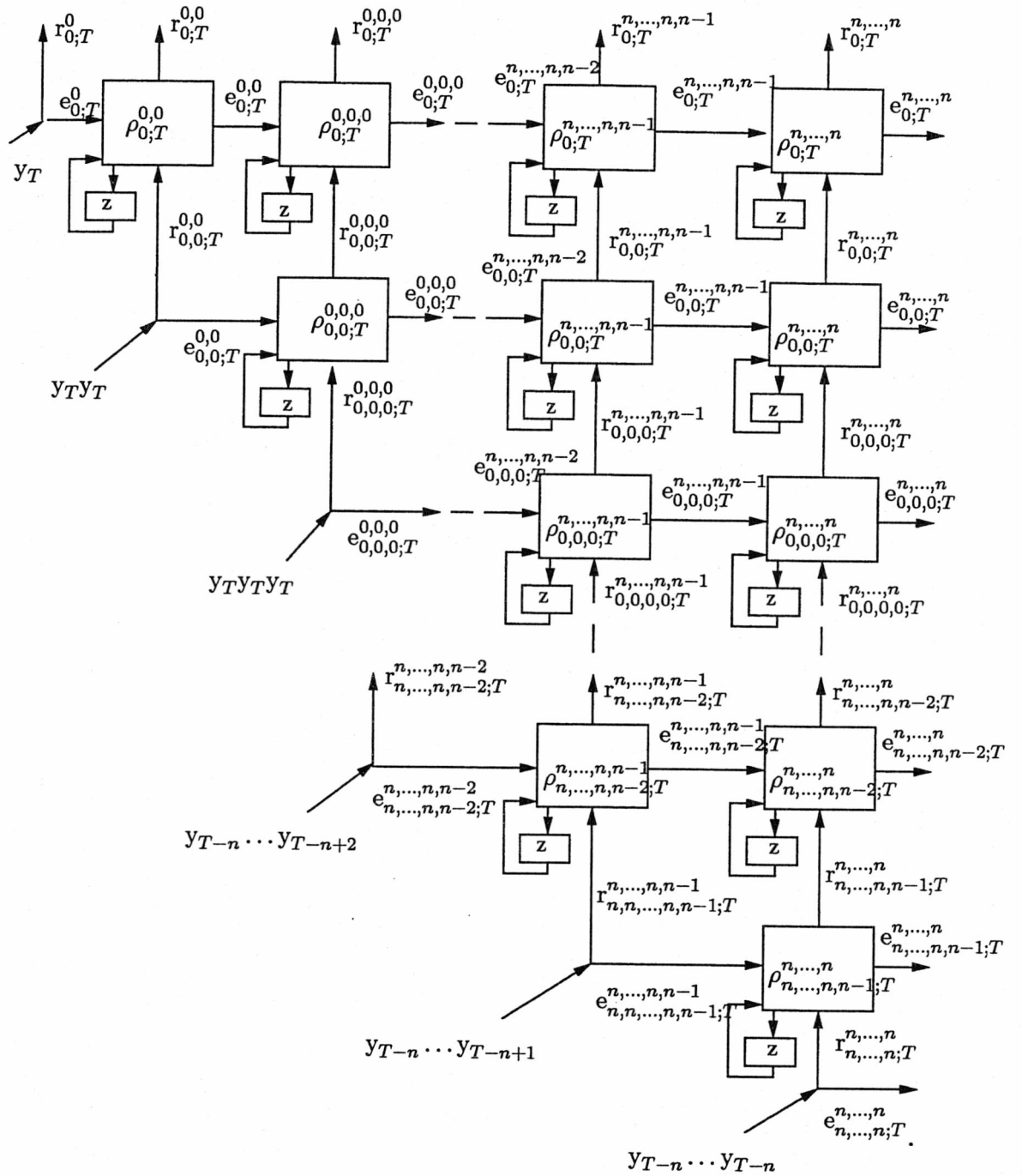
to elementy $|r_0^{j_1, \dots, j_w} >_T$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni S_T

$$S_T = S_{T;0}^{N, \dots, N} = \oplus_{j_1=0}^N \text{span}\{|r_0^{j_1} >_T\} \oplus_{j_1=0}^N \oplus_{j_2=j_1}^N \text{span}\{|r_0^{j_1, j_2} >_T\} \dots \oplus_{j_1=0}^N \dots \oplus_{j_M=j_{M-1}}^N \text{span}\{|r_0^{j_1, \dots, j_M} >_T\} \quad (3.147)$$

Rysunek 3.14 przedstawia strukturę nieliniowego bloku dekorelującego rzędu n i stopnia M . Inicjalizacjami są opóźniane i wymnażane, w odpowiedniej kolejności, przez siebie próbki sygnału obserwowanego.

3.4.5 Zmienny w czasie estymator sygnału użytecznego

Rozpatrzmy teraz drugą część ortogonalnego filtra odsumiającego, odpowiedzialną za wyznaczenie estymaty $|\hat{x}_N^{\{M\}} >_T$.



Rysunek 3.14: Nieliniowy ortogonalny blok dekorelujący rzędu n , działający na próbkach sygnału.

Wyznaczmy normę błędu estymacji wektora $|x\rangle_T$ (3.106)

$$\begin{aligned}
\| \varepsilon_N^{\{M\}} |x\rangle_T \|^2 &= \langle \varepsilon_N^{\{M\}} | \varepsilon_N^{\{M\}} \rangle_T = \langle \varepsilon_N^{\{M\}} | (|x\rangle_T - |\hat{x}_N^{\{M\}}\rangle_T) = \\
&= \langle \varepsilon_N^{\{M\}} | x \rangle_T = (|x\rangle_T - |\hat{x}_N^{\{M\}}\rangle_T | x \rangle_T = \\
&= \langle x | x \rangle_T - \langle \hat{x}_N^{\{M\}} | x \rangle_T = \| |x\rangle_T \|^2 - \\
&+ \sum_{j_1=0}^N \langle r_0^{j_1} | x \rangle_T^2 - \dots - \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^N \langle r_0^{j_1, \dots, j_M} | x \rangle_T^2
\end{aligned} \tag{3.148}$$

Jeśli $\| \varepsilon_N^{\{M\}} |x\rangle_T \| \rightarrow 0$ dla $N \rightarrow \infty$ i $T \rightarrow \infty$ to otrzymujemy uogólnioną postać równości Parsevala

$$\| |x\rangle_\infty \|^2 = \sum_{j_1=0}^{\infty} \langle r_0^{j_1} | x \rangle_\infty^2 + \dots + \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_M=j_{M-1}}^{\infty} \langle r_0^{j_1, \dots, j_M} | x \rangle_\infty^2 \tag{3.149}$$

gdzie $\langle r_0^{j_1, \dots, j_m} | x \rangle_T$ dla $m = 1, \dots, M$ i $j_1 = 0, \dots, N, j_m = j_{m-1}, \dots, N$ jest ortogonalną reprezentacją elementu $|x\rangle_T$ w przestrzeni S_T . Rozpatrując podprzestrzeń $S_{T;0}^{j_1, \dots, j_w}$ i estymatę sygnału użytecznego w tej podprzestrzeni $|\hat{x}^{j_1, \dots, j_w}\rangle_T$ oraz związany z estymacją błąd $|\varepsilon^{j_1, \dots, j_w}\rangle_T$ możemy zauważyć, że

$$\begin{aligned}
|\varepsilon^{j_1, \dots, j_w}\rangle_T &= P(S_{T;0}^{j_1, \dots, j_w})^\perp |x\rangle_T = |x\rangle_T - P(S_{T;0}^{j_1, \dots, j_w-1}) |x\rangle_T + \\
&- P(|r_0^{j_1, \dots, j_w}\rangle_T) |x\rangle_T = |x\rangle_T - |r_0^{j_1, \dots, j_w-1}\rangle_T - |r_0^{j_1, \dots, j_w}\rangle_T \langle r_0^{j_1, \dots, j_w} | x \rangle_T
\end{aligned} \tag{3.150}$$

Zauważając, że $|r_0^{j_1, \dots, j_w}\rangle_T \perp P(S_{T;0}^{j_1, \dots, j_w-1}) |x\rangle_T$ iloczyn skalarny $\langle r_0^{j_1, \dots, j_w} | x \rangle_T$ możemy przepisać jako

$$\begin{aligned}
\langle r_0^{j_1, \dots, j_w} | x \rangle_T &= \langle r_0^{j_1, \dots, j_w} | (|x\rangle_T - P(S_{T;0}^{j_1, \dots, j_w-1}) |x\rangle_T) = \langle r_0^{j_1, \dots, j_w} | \varepsilon^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T = \\
&= \langle r_0^{j_1, \dots, j_w} | \varepsilon^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T \langle \varepsilon^{j_1, \dots, j_w-1} | \varepsilon^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T^{\frac{1}{2}} = \\
&= \rho_T^{j_1, \dots, j_w} \langle \varepsilon^{j_1, \dots, j_w-1} | \varepsilon^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.151}$$

gdzie

$$\rho_T^{j_1, \dots, j_w} \triangleq \langle r_0^{j_1, \dots, j_w} | \varepsilon^{j_1, \dots, j_w-1} \rangle_T \tag{3.152}$$

jest estymatorem współczynnika Schura oraz

$$|{}^xe^{j_1, \dots, j_w-1} >_T = |{}^xe^{j_1, \dots, j_w-1} >_T <{}^xe^{j_1, \dots, j_w-1} |{}^xe^{j_1, \dots, j_w-1} >_T^{-\frac{1}{2}} \quad (3.153)$$

jest unormowanym błędem estymacji. Z połączenia (3.150), (3.151) i (3.153) wynika, że

$$\begin{aligned} |{}^xe^{j_1, \dots, j_w} >_T &= [|{}^xe^{j_1, \dots, j_w-1} >_T - |r_0^{j_1, \dots, j_w} >_T {}^x\rho_T^{j_1, \dots, j_w}] <{}^xe^{j_1, \dots, j_w-1} |{}^xe^{j_1, \dots, j_w-1} >_T^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times <{}^xe^{j_1, \dots, j_w} |{}^xe^{j_1, \dots, j_w} >_T^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.154)$$

Wykorzystując relację $<{}^xe^{j_1, \dots, j_w} |{}^xe^{j_1, \dots, j_w} >_T = 1$, ostatecznie otrzymujemy unormowaną postać rozwiązania rekurencyjnego

$$|{}^xe^{j_1, \dots, j_w} >_T = [|{}^xe^{j_1, \dots, j_w-1} >_T - |r_0^{j_1, \dots, j_w} >_T {}^x\rho_T^{j_1, \dots, j_w}] (1 - ({}^x\rho_T^{j_1, \dots, j_w})^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.155)$$

Wyznaczając iloczyn skalarny wektora $< \pi |_T$ po obydwu stronach (3.155) otrzymujemy relację dla pojedynczych próbek sygnału. Zależność powyższa umożliwia realizację unormowanego bloku estymującego filtru odsumiającego.

Celem zaproponowania realizacji ortogonalnej nieliniowego filtru odsumiającego, działającego w czasie rzeczywistym, niezbędne jest uzupełnienie przedstawionego rozwiązania o zależności umożliwiające adaptacyjne uaktualnianie w czasie współczynników ${}^x\rho_T^{j_1, \dots, j_w}$. Wprowadzając 'normalizację informacyjną' dla błędu estymacji sygnału użytecznego

$$|{}^xe^{j_1, \dots, j_w} >_T \triangleq |{}^xe^{j_1, \dots, j_w} >_T < \pi | \mathbf{P}(S_T)^\perp | \pi >_T^{-\frac{1}{2}} \quad (3.156)$$

otrzymujemy zależności, które pozwalają na adaptacyjne uaktualnianie parametrów bloku estymującego filtru odsumiającego

$$\begin{aligned} {}^x\rho_T^{j_1, \dots, j_w} &= (1 - (r_0^{j_1, \dots, j_w})^2)^{\frac{1}{2}} (1 - ({}^xe_T^{j_1, \dots, j_w-1})^2)^{\frac{1}{2}} {}^x\rho_{T-1}^{j_1, \dots, j_w} + \\ &+ {}^xe_T^{j_1, \dots, j_w-1} r_0^{j_1, \dots, j_w} \end{aligned} \quad (3.157)$$

oraz

$$\begin{aligned} {}^xe_T^{j_1, \dots, j_w} &= (1 - (r_0^{j_1, \dots, j_w})^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - {}^x\rho_T^{j_1, \dots, j_w})^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\cdot [{}^xe_T^{j_1, \dots, j_w-1} - {}^x\rho_T^{j_1, \dots, j_w} r_0^{j_1, \dots, j_w}] \end{aligned} \quad (3.158)$$

Przedstawione zależności (3.157) i (3.158) pozwalają na realizację adaptacyjnego bloku estymującego działającego w czasie rzeczywistym na próbkach sygnałów obserwowanych.

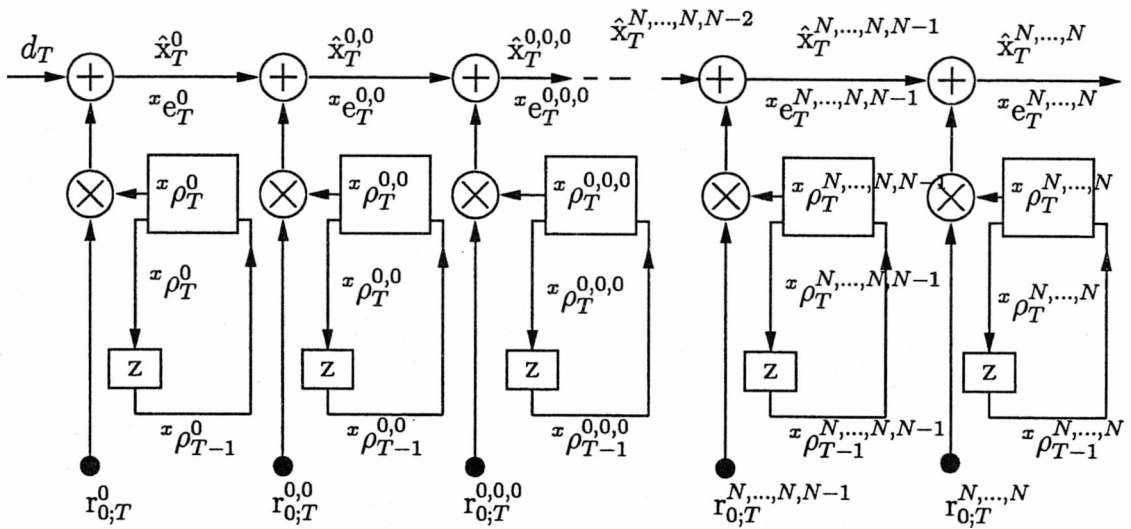
Uwaga 2:

W rozpatrywanym algorytmie istnieje przypadek przejścia pomiędzy elementarnymi blokami estymującymi, co odpowiada zmianie wartości q i w .

- Jeśli indeksy $j_1 = j_2 = \dots j_w = N$ i $w < M$ to należy prowadzić kolejny indeks (wymiar) j_{w+1} i wtedy $j_1 = j_2 = \dots = j_{w+1} = 0$, np.:

$$\hat{x}_T^{\overbrace{N, \dots, N}^w} \rightarrow \hat{x}_T^{\overbrace{0, \dots, 0}^{w+1}}.$$

Rysunek 3.15 przedstawia blok estymujący dla nieliniowego filtru odszumiającego.

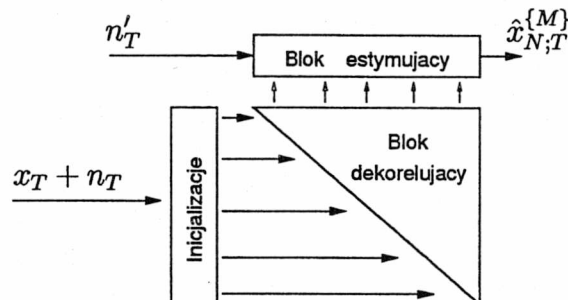


Rysunek 3.15: Blok estymujący nieliniowego ortogonalnego filtru odszumiającego działającego na próbkach sygnału.

Zauważmy, że w chwili rozpoczęcia procedury odszumiania do wyznaczenia x_{ε} niezbędna jest znajomość sygnału x_T . Oczywiście jest, że nie posia-

damy tego sygnału (jego znajomość to brak potrzeby odsumowania). Dlatego też konieczne jest zastosowanie sygnału odniesienia (referencyjnego) d_T , który jest związany statystycznie z sygnałem estymowanym. Na wstępie tej pracy założyliśmy, iż obserwujemy sygnał, który jest sumą użytecznego x_T i zakłócenia n_T . Mając sygnał, statystycznie związany z n_T oraz złożenie x_T z n_T , możliwa jest realizacja filtracji. Należy tutaj zauważyć, że istnieją dwie konfiguracje wejść filtru odszumiającego:

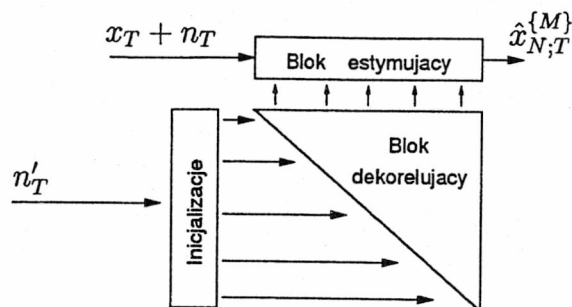
1. *Konfiguracja 1.* Sygnałem wejściowym dla bloku dekorrelującego (y_T) jest złożenie x_T z n_T , natomiast sygnałem odniesienia (wejście bloku estymującego) jest ten związany z zakłóceniem (rysunek 3.16). Zakładając, że czas skorelowania dla y_T jest dłuższy niż dla sygnału związanego z n_T , taka konfiguracja wymaga bardziej rozbudowanego bloku dekorrelującego do pełnej dekorrelacji sygnału wejściowego, który pochłania większość zasobów pamięciowych i obliczeniowych filtru.



Rysunek 3.16: Konfiguracja 1 sygnałów wejściowych filtru odszumiającego.

2. *Konfiguracja 2.* Sygnałem wejściowym dla bloku dekorrelującego (y_T) jest sygnał związany z zakłóceniem, natomiast sygnałem odniesienia jest złożenie x_T z n_T (rysunek 3.17). Zakładając, że czas skorelowania dla y_T jest tutaj krótszy niż dla sygnału złożonego z x_T i n_T , taka konfiguracja wymaga mniej rozbudowanego bloku dekorrelującego niż w przypadku poprzednim.

Ze względu na dążenie do minimalizacji kosztów operacji filtracji preferowana



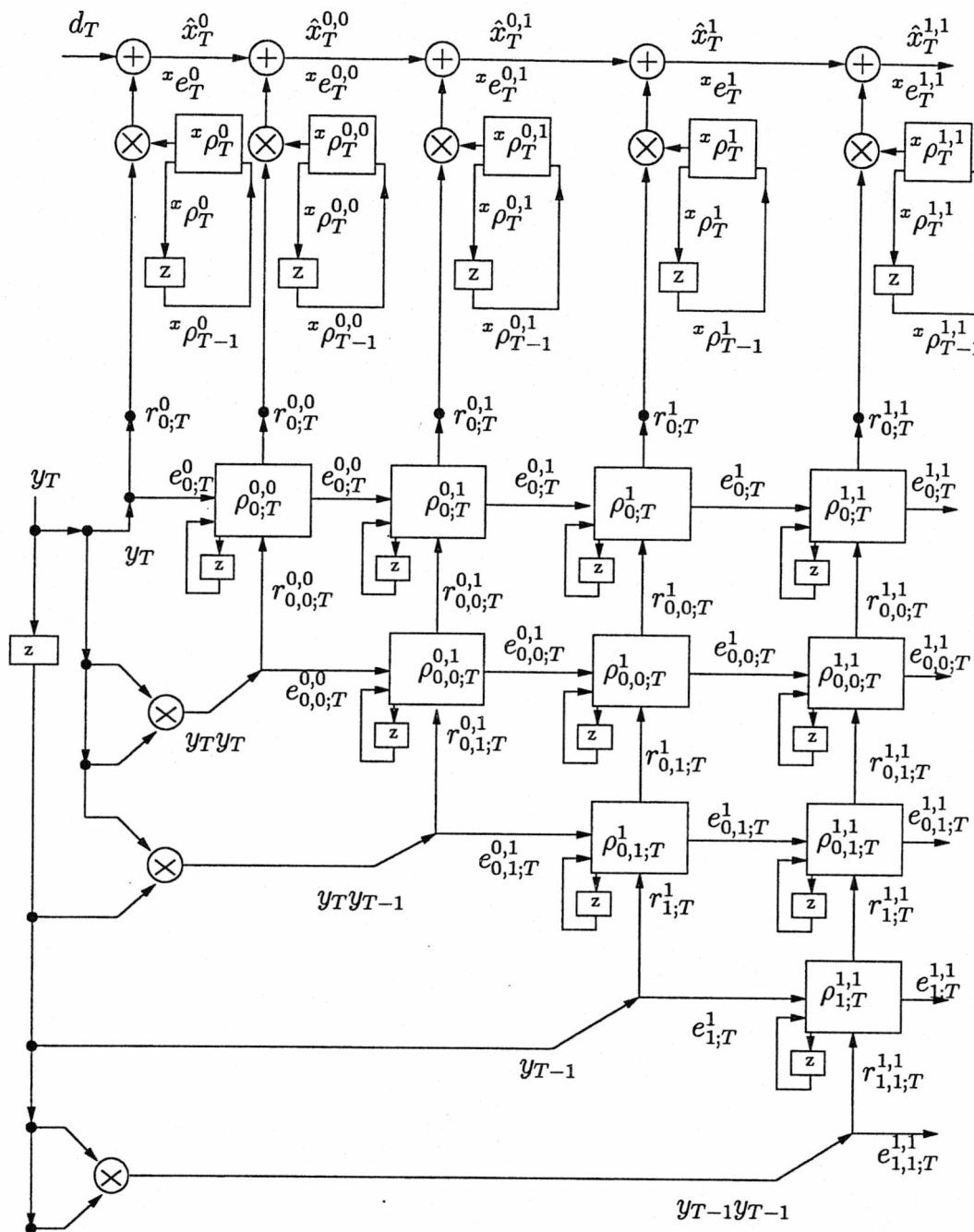
Rysunek 3.17: Konfiguracja 2 sygnałów wejściowych filtru odsumiającego.

jest druga konfiguracja sygnałów wejściowych filtru.

Rysunek 3.18 przedstawia nieliniowy ortogonalny filtr odsumiający rzędu $N = 1$ i stopnia $M = 2$.

3.5 Podsumowanie

W rozdziale tym przedstawiono rozwiązanie problemu adaptacyjnej filtracji odsumiającej sygnałów losowych wyższych rzędów. Zaprezentowane algorytmy są adekwatne dla filtrowanych sygnałów niestacjonarnych i stacjonarnych. Zaproponowano strukturę filtru odsumiającego z podziałem na dwa bloki: dekorelujący oraz estymujący sygnał użyteczny. Zaprezentowano także wersję aplikacyjną algorytmu ortogonalnej filtracji odsumiającej, działającą na szeregach czasowych. Pozwala ona w czasie rzeczywistym przetwarzać adaptacyjnie sygnały wejściowe, estymując sygnał użyteczny z założonym przez nas błędem średniokwadratowym estymacji.



Rysunek 3.18: Ortogonalny nieliniowy filtr odszumiający ($N = 1, M = 2$) działający na próbkach sygnału.

Rozdział 4

Strategie adaptacyjnego doboru struktury filtru odszumiającego

W rozdziale tym, wykorzystując wyniki uzyskane w poprzednich rozdziałach, proponujemy reguły, które będą kierować złożonością struktury filtru odszumiającego, tak aby maksymalizować stosunek poprawy jakości odszumiania do związanego z nim wzrostu złożoności obliczeniowej filtracji.

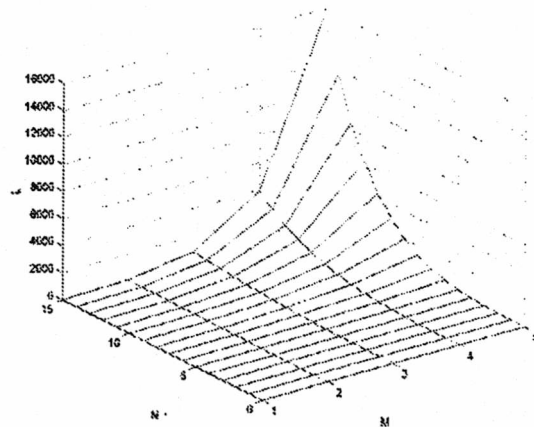
Rozpatrując wzór (3.24) łatwo zauważamy, iż parametrami jakie stanowią o złożoności filtru odszumiającego są: rząd filtru (pamięciowość filtru) oraz stopień nieliniowości filtru. Zwiększenie któregośkolwiek z nich pociąga za sobą szybki wzrost nakładu obliczeniowego potrzebnego do wyznaczenia estymaty ($\hat{x}_0$ sygnału oryginalnego x_0). Liczba rotorów w bloku dekorelującym, dla przypadku niestacjonarnego, wyrażona jest wzorem:

$$L_{N,M}^{ns} = \sum_{m=1}^M \frac{(N+m-1)!}{m!(N-1)!} \quad (4.1)$$

natomiast dla przypadku stacjonarnego

$$L_{N,M}^s = L_{N,M}^{ns} - L_{N-1,M}^{ns} \quad (4.2)$$

Rysunek 4.1 pokazuje jak szybko rośnie wartość wyrażenia (4.1) przy zmianie N lub M . Liczba elementarnych sekcji bloku estymującego (przypa-

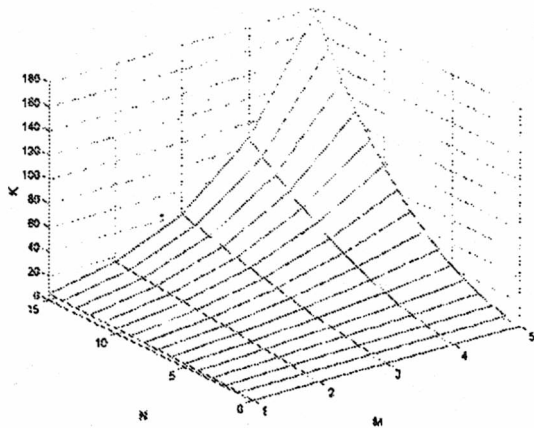


Rysunek 4.1: Liczba rotorów $L_{N,M}^{ns}$ bloku dekorelującego.

dek niestacjonarny i stacjonarny) to:

$$K_{N,M} = \frac{\sqrt{8L_{N,M}^{ns} + 1} - 1}{2} \quad (4.3)$$

Na rysunku 4.2 pokazana jest wartość wyrażenia (4.3) w zależności od parametrów filtra N i M



Rysunek 4.2: Liczba elementarnych sekcji $K_{N,M}$ bloku estymującego.

Realizacja bloku dekorelującego wymaga więc dużo większego nakładu obliczeniowego niż realizacja bloku estymującego. Kluczowe staje się dobranie

takich wartości parametrów N i M , aby wyliczona przez ten blok baza ortonormalna, przy minimalnej liczbie jej elementów, pozwalała na odpowiednio dobre estymowanie sygnału użytecznego. Pod pojęciem "dobre" rozumiemy osiągnięcie wartości błędu estymacji (3.66) na interesującym nas poziomie.

W doborze struktury filtru mamy dwa punkty swobody. Możemy zmieniać wartość N lub M , lub oba te parametry na raz. Jak do tej pory w literaturze nie ma gotowych strategii postępowania przy wyborze optymalnych, z punktu widzenia stopnia złożoności struktury filtru nieliniowego, wartości N i M . Zakłada się z góry pewne wartości parametrów filtru, nie badając czy są one adekwatne do danej sytuacji, czy też nie. Budując rzeczywisty filtr odszumiający chcemy, żeby działał on efektywnie. Cel ten można osiągnąć poprzez adaptacyjny dobór struktury i jej parametrów, do których wyznaczania konieczna jest pewna strategia postępowania. W dalszej części pracy zostaną zaproponowane i zweryfikowane eksperymentalnie trzy sposoby postępowania przy doborze optymalnej, z obliczeniowego punktu widzenia, struktury filtru odszumiającego.

4.1 Kryterium strategii wyboru parametrów filtru odszumiającego

Zarówno podwyższenie stopnia nieliniowości jak i wydłużenie pamięciowości filtru ma na celu poprawę jakości odszumiania (zmniejszenie błędu estymacji (3.66)). Do oceny wyboru właściwych wartości N i M potrzebna jest obiektywna miara, która pokazywałaby relatywną poprawę efektywności działania filtru. Powinna ona określać zmianę wartości błędu estymacji sygnału użytecznego spowodowaną rozbudową struktury filtru (zwiększeniem liczby rotorów). W tym celu wprowadźmy następującą funkcję kosztu:

$$FK(N_1, M_1; N_2, M_2) \triangleq - \frac{\frac{L_{N_2, M_2}^{ns} - L_{N_1, M_1}^{ns}}{L_{N_1, M_1}^{ns}}}{\frac{x_{R_{N_2}}^{(M_2)} - x_{R_{N_1}}^{(M_1)}}{x_{R_{N_1}}^{(M_1)}}} \quad (4.4)$$

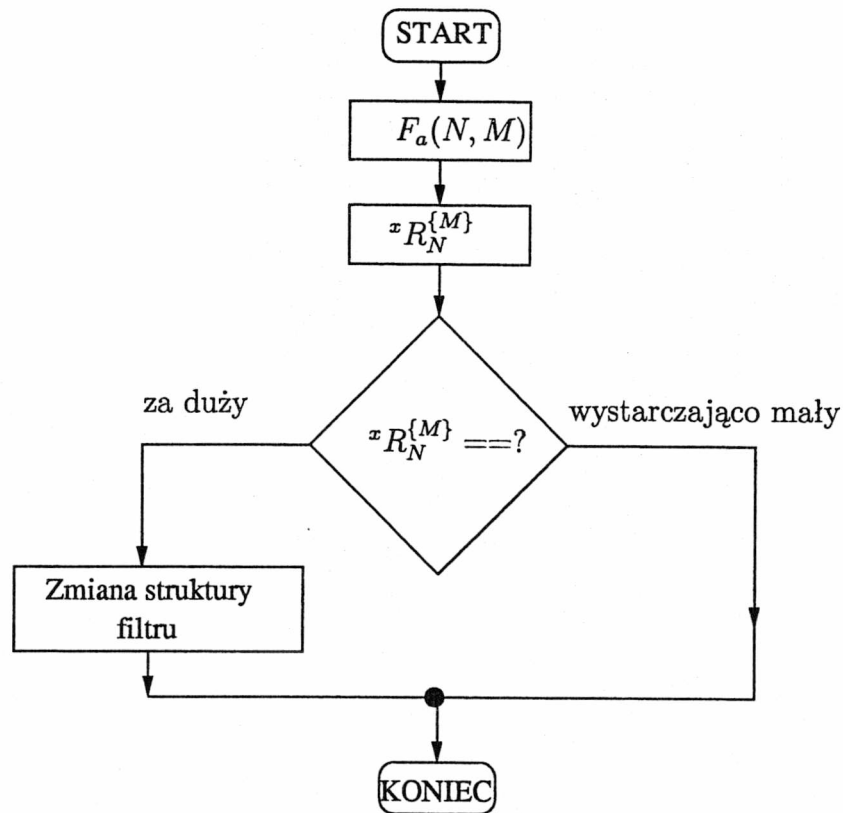
gdzie N_1, N_2 są rzędami filtru, a M_1, M_2 stopniami jego nieliniowości. Wartość $L_{N,M}^{ns}$ jest liczbą rotorów bloku dekorelującego dla filtru rzędu N i stopnia nieliniowości M . Wyraża się ona wzorem (4.1). Natomiast błąd estymacji ${}^x R$ jest dany wzorem (3.66). Wzór (4.4) interpretujemy jako względną zmianę liczby rotorów bloku dekorelującego do względnej poprawy jakości odszumiania (zmiany wartości błędu średniokwadratowego estymacji) przy zmianie parametrów N, M filtru. Minus we wzorze wynika z tego, iż mianownik jest zawsze mniejszy od zera. Tak zaproponowana funkcja kosztu pozwala ocenić efektywność zmiany struktury filtru, a tym samym wielkości zasobów obliczeniowych wymaganych do poprawy jakości estymaty $\hat{x}_0$.

4.2 Strategie poprawy jakości estymacji poprzez zmiany wartości parametrów filtru odszumiającego

Ogólny schemat pojedynczej pętli procesu filtracji odszumiającej przedstawia rysunek 4.3.

Po procesie odszumiania filtrem o złożoności $F_a(N, M)$, liczony jest błąd średniokwadratowy ${}^x R_N^{\{M\}}$. Jeżeli jego wartość jest na zadawalającym nas poziomie to nie dokonujemy żadnych zmian w strukturze filtru. Natomiast gdy ten błąd jest powyżej ustalonego przez nas progu, następuje procedura zmiany wartości parametrów filtru według określonej strategii. Blok "Zmiana struktury filtru" symbolizuje realizowaną jedną z trzech zaproponowanych w dalszej części pracy strategii wyboru struktury filtru odszumiającego.

Naszym zadaniem jest dobór takich wartości parametrów filtru N i M , aby funkcja kosztu (4.4) nie przekraczała ustalonego z góry poziomu. Jeśli zostanie on przekroczony, dyskwalifikuje to strukturę filtru dla tych wartości N i M . Elementem sterującym w (4.4) jest oczywiście mianownik, który zależy od współczynników Schura ${}^x \rho$. Dołożenie każdego niezerowego współczynnika powoduje zmniejszenie się błędu średniokwadratowego



Rysunek 4.3: Pojedyncza pętla procesu filtracji odszumiającej.

estymacji (3.67). Jest to równoznaczne ze zwiększeniem pamięciowości filtru i/lub zmianie stopnia jego nieliniowości. Powoduje to zwiększenie złożoności obliczeniowej filtru (zwłaszcza bloku dekorelującego).

Pierwsza proponowana strategia zakłada, iż zmiana struktury filtru następuje tylko wtedy gdy zmiana błędu średniokwadratowego estymacji, spowodowanego zmianą parametrów filtru, jest odpowiednio duża.

Strategia 4.2.1. Niech $F_a(N_1, M_1)$ będzie filtrem odszumiającym o parametrach N_1 i M_1 , którym odpowiada pewien zbiór współczynników ${}^x\rho$. Zmiana struktury i parametrów filtru do $F_a(N_2, M_2)$, który generuje inny zbiór

współczynników ${}^x\rho$, następuje gdy:

$$F_a(N_1, M_1) \rightarrow F_a(N_2, M_2) \Leftrightarrow FK(N_1, M_1; N_2, M_2) < \delta \quad (4.5)$$

gdzie δ jest stałą rzeczywistą [10].

Zmiana wartości parametru N na $N+1$ lub M na $M+1$ pociąga za sobą w ogólnym przypadku rozbudowę struktury filtru o sekcje wyznaczające nie jeden, a cały zbiór współczynników ${}^x\rho$. Należy tutaj zauważyć, że zmiana wartości N lub/i M może powodować:

- Dodanie grupy współczynników ${}^x\rho$, tzw. *pełną aktualizację* liczby współczynników. Jeśli zmieniamy wartości $N \rightarrow N+1$ lub $M \rightarrow M+1$ to, wykorzystując nowe zakresy dla indeksów zgodnie z (3.3), dokładamy taką liczbę współczynników jaka wynika z wzoru (4.3) przy zmianie N lub/i M .
- Dodanie jednego lub kilku współczynników ${}^x\rho$, tzw. *częściową aktualizację* liczby współczynników. Jeśli zmieniamy wartości $N \rightarrow N+1$ lub $M \rightarrow M+1$ to, wykorzystując nowe zakresy dla indeksów zgodnie z (3.3), wybieramy te z nich, które według danej strategii są optymalne.

Pełna aktualizacja, choć możliwa, wydaje się mało efektywna, ponieważ tylko część nowych współczynników może poprawić w znaczący sposób estymatę sygnału użytecznego. Proponujemy strategię 'pojedynczych kroków', która polega na zwiększeniu o jeden liczby współczynników ${}^x\rho$, wyznaczeniu funkcji kosztów i decyzji o włączeniu lub nie tegoż współczynnika do ogólnego rozwiązania filtracji odsumiającej. Dołożenie nowego współczynnika Schura nie wiąże się ze zmianą dotychczasowych współczynników ${}^x\rho$, ze względu na ortogonalną realizację filtru odsumiającego. Algorytm postępowania przedstawia rysunek 4.6.

Zauważmy, że nie jest konieczne wyznaczenie całej nowej bazy ON, tylko jej nowego elementu. Filtr $F_a(N_1, M_1)$ posiada $L_{N_1, M_1}^{ns} = K_{N_1, M_1}(K_{N_1, M_1} + 1)/2$ rotorów w bloku dekorrelującym, gdzie $K_{N, M}$ wyraża się wzorem (4.3). Wartość funkcji kosztu (4.4) po dodaniu nowego współczynnika ${}^x\rho_{new}$, co jest

równoważne dodaniu $K_{N_1, M_1} + 1$ rotorów do bloku dekorelującego, jest równa

$$FK(N_1, M_1; N_2, M_2) = \frac{2}{K_{N_1, M_1}} \cdot \frac{{}^x R_{N_1}^{\{M_1\}}}{|{}^x \rho_{new}|^2} \quad (4.6)$$

Wykorzystując (4.6) i biorąc pod uwagę dyskusję przedstawioną powyżej, proponuje się przyjęcie następującej strategii:

Strategia 4.2.2. Jeśli K_{N_1, M_1} oznacza ogólną liczbę współczynników ${}^x \rho$ dla filtru $F_a(N_1, M_1)$, to zwiększenie liczby K_{N_1, M_1} o jeden (dodanie nowego współczynnika ${}^x \rho_{new}$), co odpowiada nowemu filtrowi $F_a(N_2, M_2)$, następuje wtedy i tylko wtedy gdy:

$$F_a(N_1, M_1) \rightarrow F_a(N_2, M_2) \Leftrightarrow FK(N_1, M_1; N_2, M_2) = \frac{2}{K_{N_1, M_1}} \cdot \frac{{}^x R_{N_1}^{\{M_1\}}}{|{}^x \rho_{new}|^2} < \delta \quad (4.7)$$

'Częściowa aktualizacja' o współczynnik ${}^x \rho_{new}$ może być wynikiem zarówno zmiany N jak i M . Taki sposób postępowania umożliwia systematyczne przebadanie różnych wariantów doboru parametrów N i M . Wybór do testowania kolejnego współczynnika Schura uzależniony jest oczywiście od maksymalnej liczby $K_{N, M}$. W przypadku stosowania strategii 4.2.2 proponujemy, aby:

- dla ustalonego M zwiększać parametr N aż osiągniemy maksymalną dopuszczalną wartość liczby $K_{N, M}$; inaczej mówiąc sprawdzamy kolejno liniowe, bi-liniowe, tri-liniowe, itd. elementy bazy ON przestrzeni estymacyjnej i wybieramy te dla, których ${}^x \rho_{new}$ spełnia (4.2.2)

Dobór wartości parametrów filtru N i M kończymy, gdy osiągnięty zostanie założony poziom błędu (3.66).

Rysunek 4.5 przedstawia proces uaktualniania struktury filtru odsumiającego o nowy współczynnik ${}^x \rho_{new}$.

Druga możliwa strategia wyboru kolejnego współczynnika ${}^x \rho$, a co za tym idzie parametrów filtru N i M , opiera się na wyznaczeniu progu dla wartości

współczynnika Schura, który kwalifikuje go do ogólnego rozwiązania. Regułę doboru zapisujemy jako:

Strategia 4.2.3. Zakładając wartość końcową średniokwadratowego błędu estymacji sygnału użytecznego ${}^x R_{N_k}^{\{M_k\}}$ oraz ogólną liczbę K_{N_k, M_k} współczynników ${}^x \rho$, dla istniejącego filtra odsumiającego $F_a(N_1, M_1)$, wraz z odpowiadającym mu błędem estymacji ${}^x R_{N_1}^{\{M_1\}}$, dodanie nowego współczynnika ${}^x \rho_{new}$, co odpowiada zbudowaniu nowego filtra $F_a(N_2, M_2)$, następuje gdy:

$$F_a(N_1, M_1) \rightarrow F_a(N_2, M_2) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{{}^x R_{N_2}^{\{M_2\}} - {}^x R_{N_k}^{\{M_k\}}}}{K_{N_k, M_k} - K_{N_2, M_2}} < |{}^x \rho_{new}| \quad (4.8)$$

Wzór (4.8) określa, jak dużą wartość bezwzględną powinien mieć współczynnik ${}^x \rho_{new}$, aby wykorzystując 'wolną moc obliczeniową' (mianownik) zmniejszyć błąd estymacji do wartości pożądanej (licznik). Zakłada się tutaj równomierne rozłożenie 'ciężaru' obniżania tegoż błędu przez kolejne współczynniki ${}^x \rho$.

Stosując zaproponowane strategie możemy tak wyznaczyć ścieżkę poszukiwań kolejnych współczynników ${}^x \rho$, aby eliminować z ogólnego rozwiązania te, które będą miały znikomy wpływ na obniżenie wartości błędu estymacji (3.66). Nie można podać jednej ścieżki wyznaczania współczynników. Każda konfiguracja sygnał zaszumiony - sygnał odniesienia jest specyficzna i wymaga indywidualnego procesu decyzyjnego.

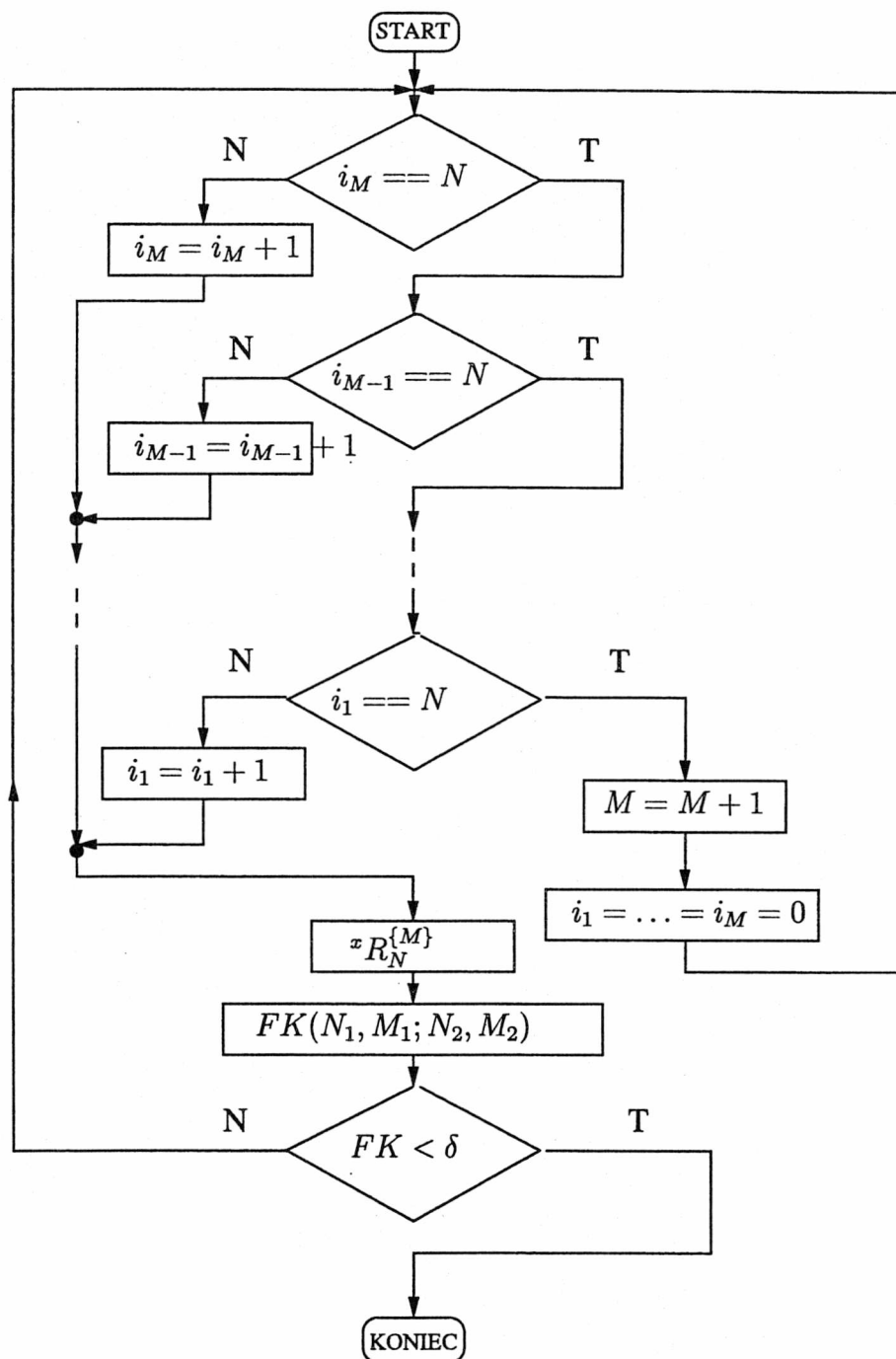
Łatwo zauważyć, że ze względu na nakład obliczeniowy, nie jest ważne, czy kolejnym obliczanym współczynnikiem Schura ${}^x \rho$ będzie ten o wyższym stopniu nieliniowości, czy rzędzie pamięciowości. W obu wypadkach dodawana jest kolejna kolumna rotorów w bloku dekorelującym. Wynika to wprost z ortogonalnej realizacji bloku dekorelującego.

Warto także zaznaczyć, że wybrany nowy współczynnik ${}^x \rho_{new}$ nie musi być tym pochodzącym z 'sąsiedztwa' już istniejących współczynników Schura. Jeżeli ostatni wyznaczony ${}^x \rho$ wynikał z filtra o np: $N = 2, M = 3$ to nowy ${}^x \rho_{new}$ może wynikać z filtra o np: $N = 5, M = 10$.

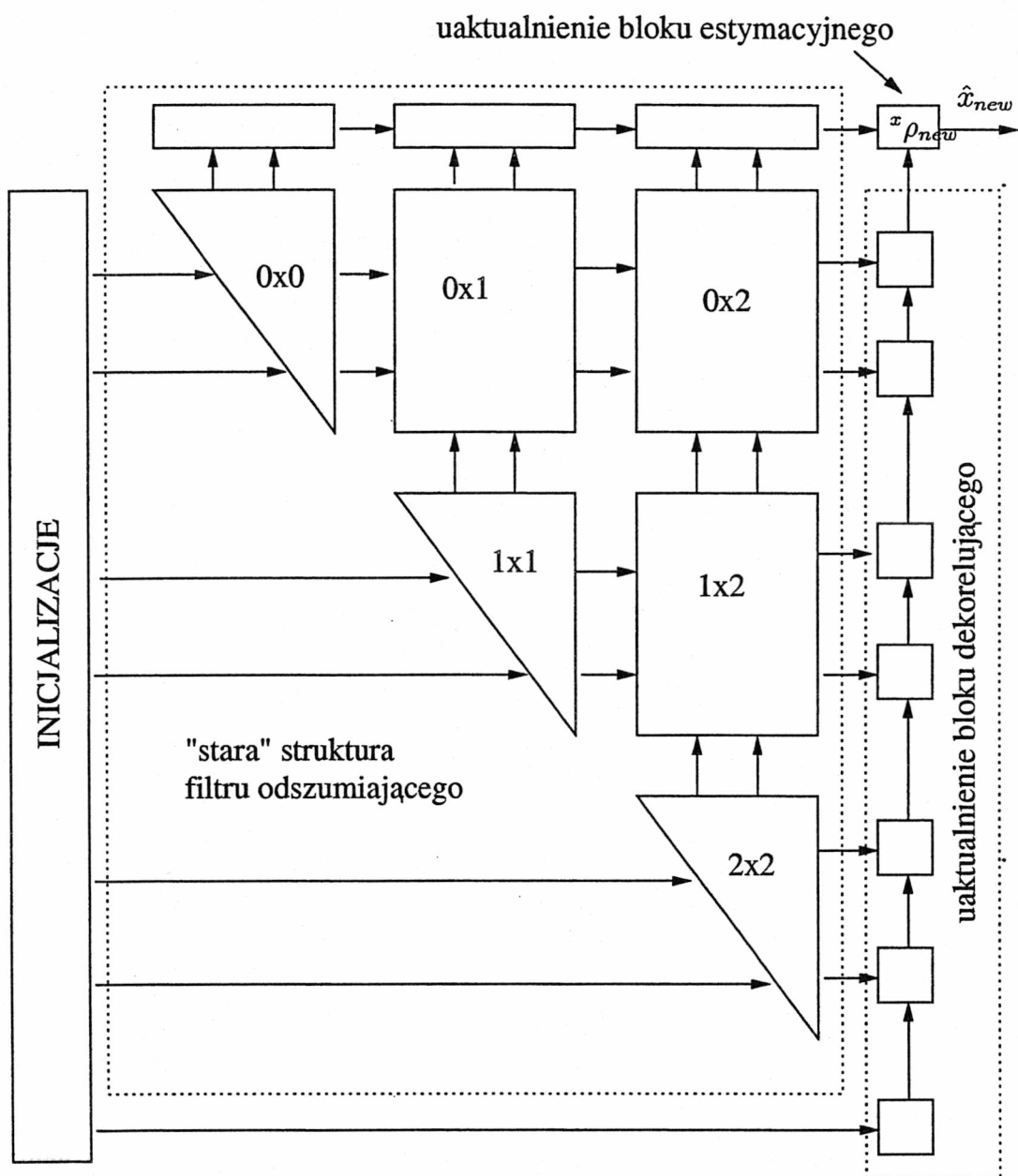
4.3 Podsumowanie

W rozdziale tym zaprezentowano kryteria i strategie pozwalające na dostosowanie struktury filtru do własności sygnałów wejściowych. Mogą one sterować rzędem filtru oraz stopniem jego nieliniowości, tak by działał on efektywnie (minimalizacja stosunku liczby operacji wykonywanych przez filtr do poprawy jakości odsumiania). Zastosowanie tych reguł w dużym stopniu przybliża możliwość implementacji zaproponowanych rozwiązań w systemach czasu rzeczywistego.

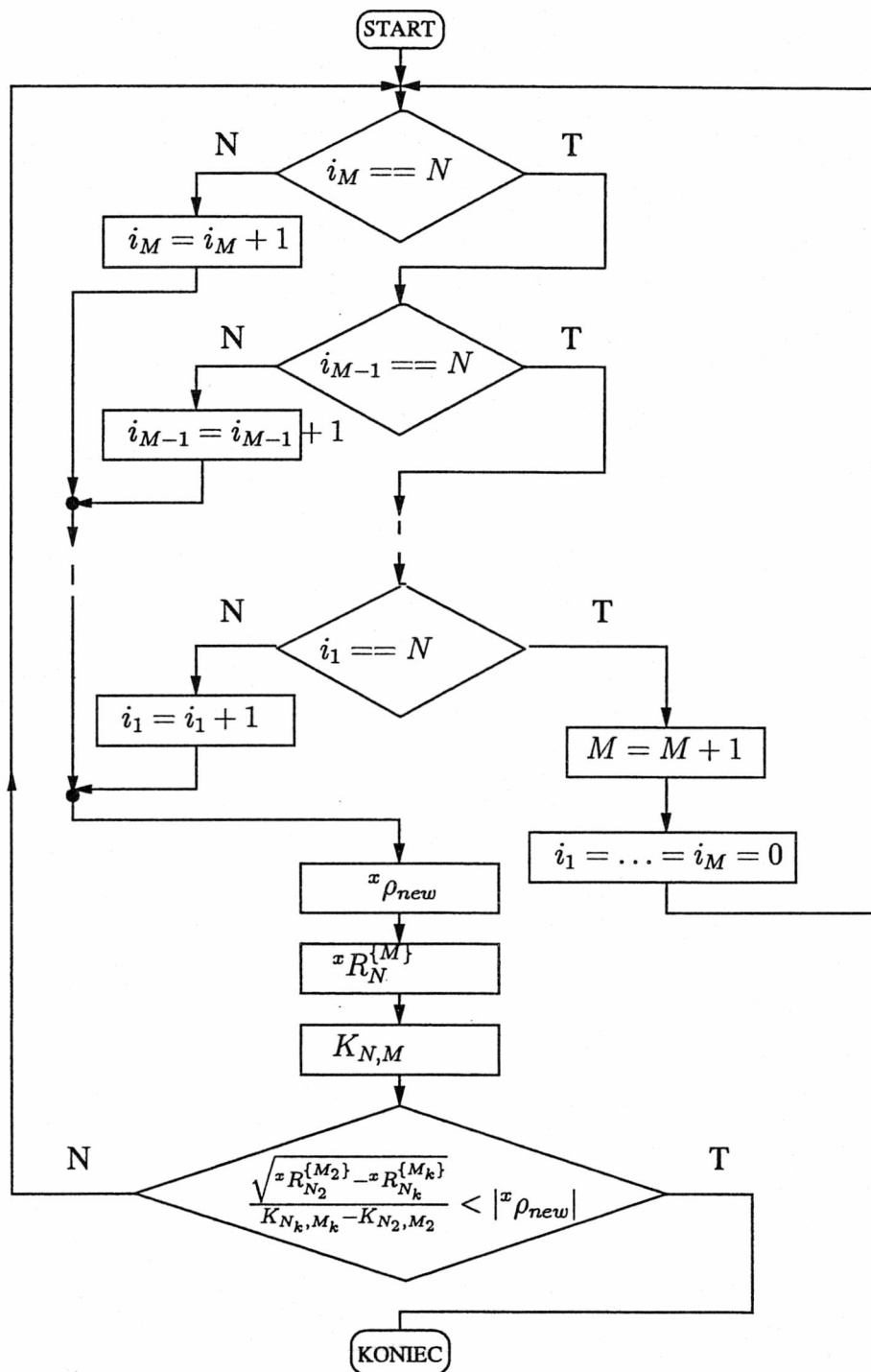
Zaproponowane w tym rozdziale strategie stanowią przedmiot badań eksperymentalnych prezentowanych w rozdziale 5.



Rysunek 4.4: Strategia 'pojedynczych kroków' w doborze wartości parametrów filtru odsumiającego.



Rysunek 4.5: Proces uaktualniania struktury filtru odsumiającego.



Rysunek 4.6: Strategia 'pojedynczych kroków' w doborze wartości parametrów filtru odsumiającego.

Rozdział 5

Badania eksperymentalne ortogonalnej filtracji odszumiającej

W rozdziale 3 zaproponowaliśmy algorytmy ortogonalnej filtracji odszumiającej sygnałów losowych wyższych rzędów. Niniejszy rozdział ma na celu pokazanie działania opisanych algorytmów, działających na rzeczywistych próbkach sygnałów oraz sposobu ich zachowania w różnych warunkach, jak również symulacyjną weryfikację strategii doboru struktury filtru, opisanych w rozdziale 4. Wszystkie badania były realizowane przy pomocy adaptacyjnych wersji zaproponowanych algorytmów (działających na próbkach sygnału). Przeprowadzone symulacje zrealizowano w systemie MATLAB 6.0 ¹.

5.1 Metodologia badań

Przeprowadzone badania można podzielić na następujące grupy tematyczne:

1. dekorelacja sygnałów losowych wyższych rzędów
2. odszumianie

¹wersja licencyjna udostępniana przez WCSS, Politechnika Wrocławska

3. adaptacyjna zmiana wartości parametrów filtru odsumiającego

Dla każdej grupy przeprowadzono szereg symulacji mających na celu weryfikację poprawności oraz ocenę jakości działania zaproponowanych algorytmów. Do oceny jakościowej procedury odsumiania przyjęto wskaźnik, który jest stosunkiem wariancji sygnału zakłócającego przed filtracją $|n'_{bf}| >_T$ do wariancji tegoż sygnału po filtracji $|n'_{af}| >_T$:

$$MJO(N, M) = 10 \log_{10} \frac{\| |n'_{bf}| >_T \|^2}{\| |n'_{af}| >_T \|^2} [dB] \quad (5.1)$$

(MJO - Miara Jakości Odszumiania).

Miara ta mówi o poprawie wartości stosunku sygnał-szum na skutek procesu filtracji odsumiającej. Miara jest zależna od wartości parametrów filtru odsumiającego N i M . Im wartość wyrażenia (5.1) jest większa tym lepsza jest jakość procesu odsumiania.

5.2 Dekorelacja sygnałów wyższych rzędów

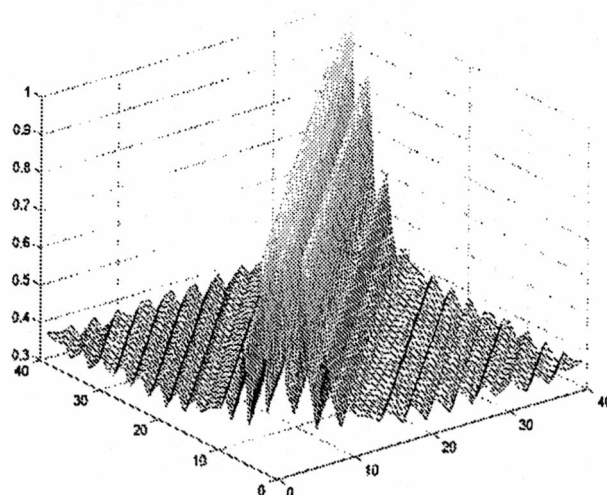
W części tej chcemy pokazać, dla zaproponowanych sygnałów testowych, poprawność działania bloku dekorrelującego filtru odsumiającego. Jak zostało powiedziane wcześniej, wynikiem działania tego bloku jest baza ortonormalna (3.19). Charakteryzuje się ona własnością

$$E\{r_0^{i_1, \dots, i_w} r_0^{j_1, \dots, j_q}\} = \begin{cases} 1 & \text{dla } w = q \wedge i_k = j_k, k = 1, \dots, w \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (5.2)$$

Uogólniona, wielowymiarowa macierz Grama elementów bazy ortonormalnej powinna więc być macierzą jednostkową. Dekorelacja sygnału wejściowego oznacza, iż autokowariancje m – tego stopnia ($2 \leq m \leq 2M$) powinny dążyć do delty Kroneckera wraz ze wzrostem rzędu filtru.

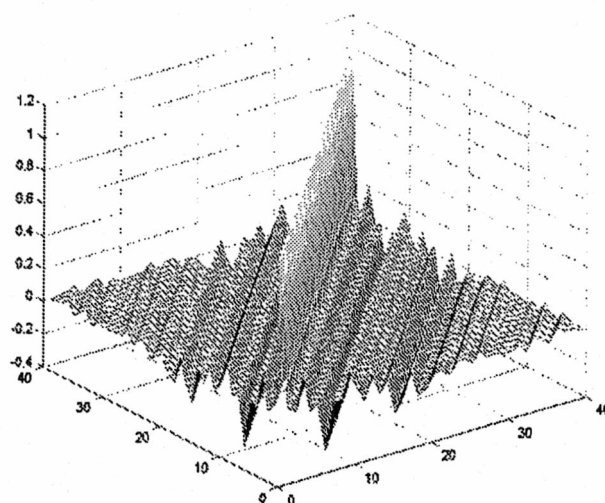
Jako sygnału testowego, służącego do pokazania działania bloku dekorrelującego użyto szumu pasmowego, którego rozkład prawdopodobieństwa jest funkcją niesymetryczną (zapewnia to istnienie nieparzystych statystyk sygnału). Macierz autokowariancji 2-go stopnia tego sygnału, dla maksymalnego

opóźnienia równego 40, przedstawiona jest na wykresie 5.1 Na wykresach



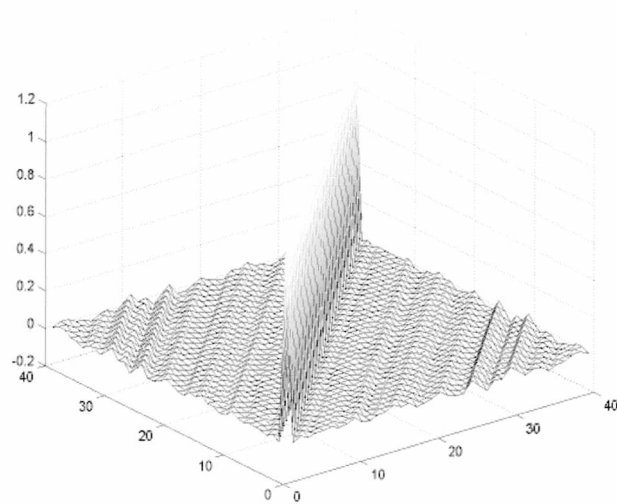
Rysunek 5.1: Macierz autokowariancji 2-go stopnia dla szumu pasmowego.

5.2 oraz 5.3 przedstawiono tą samą funkcję autokowariancji dla sygnału po przejściu przez blok dekorelujący. Zwiększenie długości bloku dekorelujące-



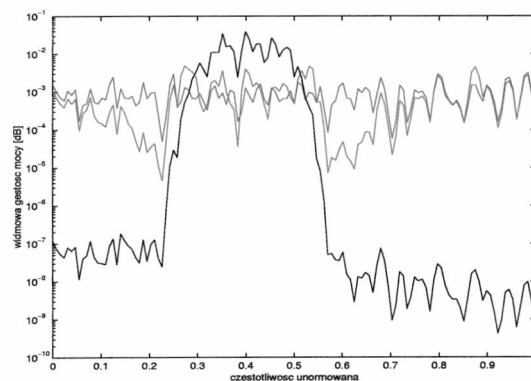
Rysunek 5.2: Macierz autokowariancji 2-go stopnia szumu pasmowego po dekorelacji - ($N=10$, $M=1$).

go ma wpływ na poziom dekorelacji sygnału. Im blok ten używa dłuższej historii sygnału wejściowego, tym bardziej zdekorelowany jest sygnał na jego



Rysunek 5.3: Macierz autokowariancji szumu pasmowego po dekorelacji - ($N=40$, $M=1$).

wyjściu. Inaczej mówiąc macierz autokorelacji staje się macierzą jednostkową wraz ze wzrostem rzędu bloku dekorelującego. Rozpatrując tę samą sytuację w dziedzinie częstotliwości dekorelacja sygnału oznacza poszerzenie jego pasma. Ilustruje to wykres 5.4 Zwiększenie pamięciowości bloku dekorelującego

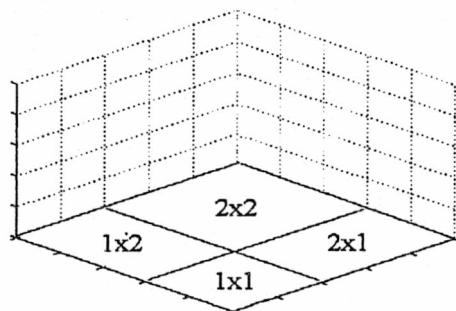


Rysunek 5.4: Widmowa gęstość mocy: 'czarny' - sygnał oryginalny, 'czerwony' - sygnał po dekorelacji ($N=10$, $M=1$), 'niebieski' - sygnał po dekorelacji ($N=40$, $M=1$).

powoduje wybielanie sygnału wyjściowego (poszerzenie jego widma). Całko-

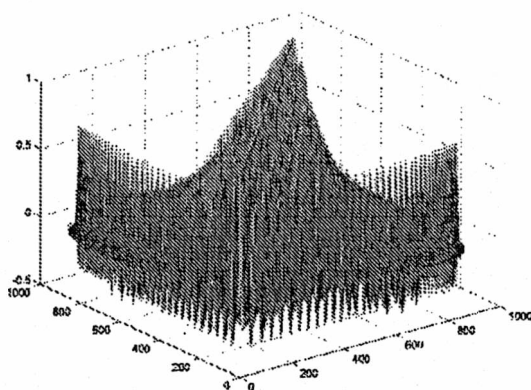
wite wybielenie sygnału oznacza jego pełną dekorelację.

Liniowy blok dekorelujący pozwala na dekorelację sygnału tylko ze względu na jego statystyki drugiego rzędu. Chcąc uzyskać dekorelację sygnału dla jego statystyk wyższych rzędów niż dwa konieczne jest zastosowanie nieliniowego bloku dekorelującego. W prezentowanych symulacjach ograniczamy się do przypadku kiedy $M = 2$. Na użytek pracy zaproponowano sposób prezentacji statystyk (momentów własnych) sygnału, widoczny na rysunku 5.5. Rozpatrzmy sygnał szumu pasmowego, który posiada niezerowe momen-



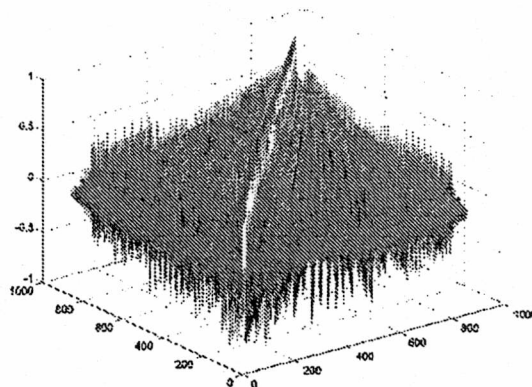
Rysunek 5.5: Sposób prezentacji statystyk wyższego rzędu na płaszczyźnie.

ty własne trzeciego i czwartego rzędu. Przedstawia to wykres 5.6. Sygnał ten

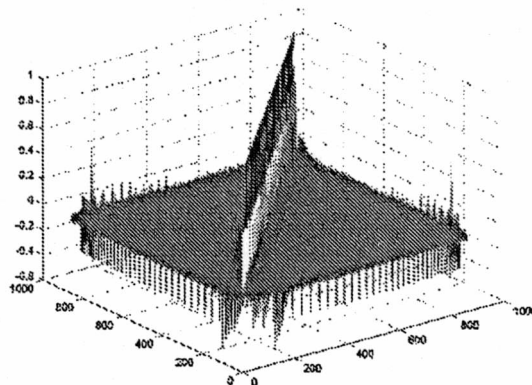


Rysunek 5.6: Macierz kowariancji pasmowego sygnału szumowego ($N=40$, $M=2$).

poddano dekorelacji używając bloku liniowego i nieliniowego ($M=2$). Wyniki prezentują zamieszczone rysunki. Blok liniowy (rysunek 5.7) nie dekoreluje



Rysunek 5.7: Macierz kowariancji pasmowego sygnału szumowego czwartego rzędu po dekorrelacji liniowej ($N=40$, $M=1$).



Rysunek 5.8: Macierz kowariancji pasmowego sygnału szumowego czwartego rzędu po dekorrelacji nieliniowej ($N=40$, $M=2$).

sygnału w sensie statystyk trzeciego i czwartego rzędu. Jest to możliwe przy użyciu nieliniowego bloku dekorrelującego, który wykorzystuje te momenty. Zastosowano blok o parametrach $N = 40$, $M = 2$ (rysunek 5.8). Pozwolił on na wyzerowanie w znacznym stopniu momentów trzeciego i czwartego rzędu.

Wyraźnie widać, iż po użyciu nieliniowego bloku dekorrelującego macierz kowariancji wyższych rzędów jest bardziej zbliżona do macierzy jednostkowej (pełniejsze wybielenie) niż w przypadku liniowym.

Podsumowując tę część badań można stwierdzić, iż:

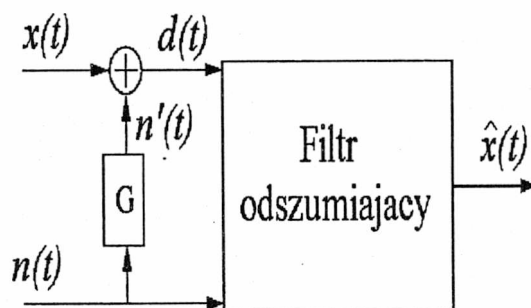
- zastosowanie filtra liniowego nie dekorreluje statystyk wyższych rzędów

sygnałów niegaussowskich, pożądany efekt uzyskuje się stosując nieliniowy blok dekorelujący

- pełna dekorelacja sygnału wymaga użycia bloku o dużych wartościach parametrów N i M , co wpływa na złożoność obliczeniową układu
- złożoność bloku dekorelującego powinna być dostosowana do właściwości statystycznych sygnału wejściowego (sygnały o rozkładzie gaussowskim - blok liniowy, rozkłady niesymetryczne - blok nieliniowy)

5.3 Filtracja odszumiająca

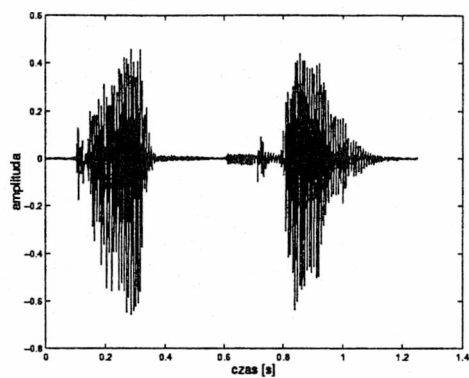
Drugi etap przeprowadzonych badań obejmował filtrację odszumiającą (sprawdzenie poprawności działania całego filtru odszumiającego). Zaproponowano model sytuacji rzeczywistej, w której może działać filtr. Przedstawiony on jest na rysunku (5.9). Sygnał zakłócający $n(t)$ podawany jest



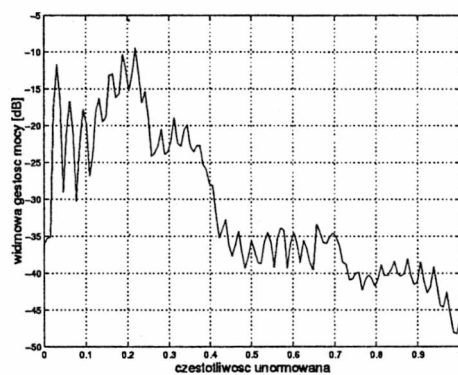
Rysunek 5.9: Model sytuacji filtracji odszumiającej.

na wejście bloku dekorelującego. Sygnał użyteczny $x(t)$ zakłócony przez $n'(t)$ stanowi wejście dla bloku estymującego sygnał wyjściowy $\hat{x}(t)$. Blok przejścia G realizuje możliwe w rzeczywistych warunkach opóźnienie oraz wzmocnienie sygnału $n(t)$.

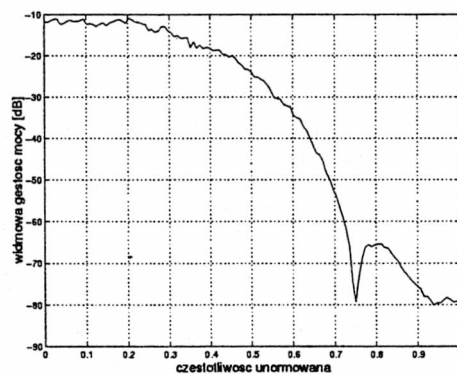
Wykres na rysunku 5.10 przedstawia oryginalny sygnał $x(t)$. Jest to sygnał mowy, głos męski. Sygnał oryginalny został zakłócony przez szum dolnopasmowy, którego widmowa gęstość mocy przedstawiona jest na wykresie



Rysunek 5.10: Sygnał oryginalny.



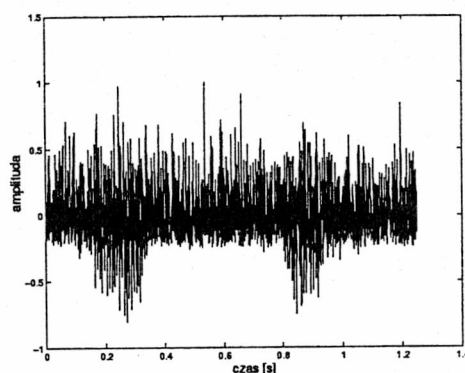
Rysunek 5.11: Widmowa gęstość mocy sygnału oryginalnego.



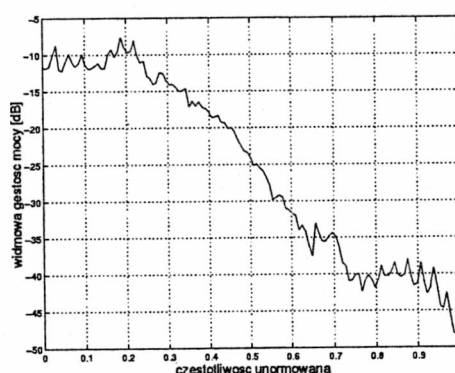
Rysunek 5.12: Widmowa gęstość mocy sygnału zakłócającego.

5.12. Pasma sygnału oryginalnego i zakłócającego pokrywają się. Wykresy 5.13 oraz 5.14 przedstawiają sygnał zakłócony w dziedzinie czasu i często-

tliwości. Zakłócenie jest addytywne. Dodatkowo zostało ono opóźnione i wzmacnione przez układ liniowy G 5.9. Sygnał zaszumiony wprowadzono

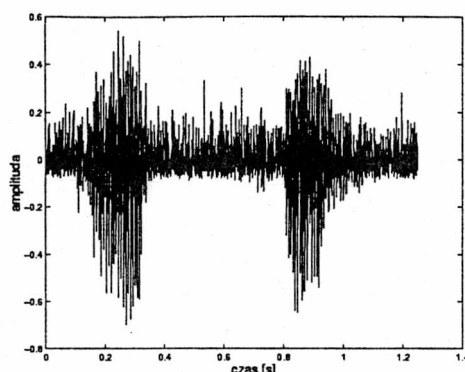


Rysunek 5.13: Sygnał zaszumiony.

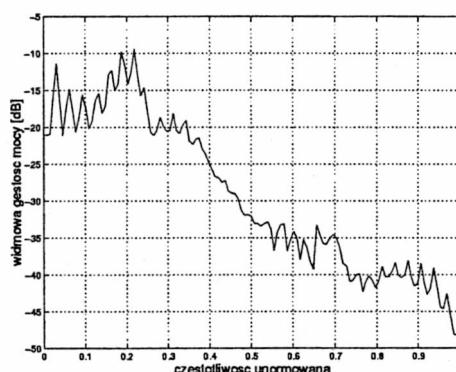


Rysunek 5.14: Widmowa gęstość mocy sygnału zaszumionego.

na ortogonalny liniowy filtr odsumiający. Wykresy 5.15 i 5.16 pokazują efekt działania filtru w dziedzinie czasu i częstotliwości. Miara jakości odsumiania = 8dB. Zwiększając długość filtru uzyskano $MJO = 10dB$, ale wymagało to użycia filtru o $N = 40$. Dalsze zwiększanie rzędu filtru nie poprawiało wartości MJO . Filtr liniowy eliminuje tylko liniową część zakłócenia. Nieliniowa pozostaje, co powoduje niewystarczającą jakość estymatora sygnału oryginalnego. Wnioskujemy z tego, że dodanie części nieliniowej do filtru odsumiającego powinno poprawić estymatę sygnału użytecznego (zwiększyć wartość MJO).



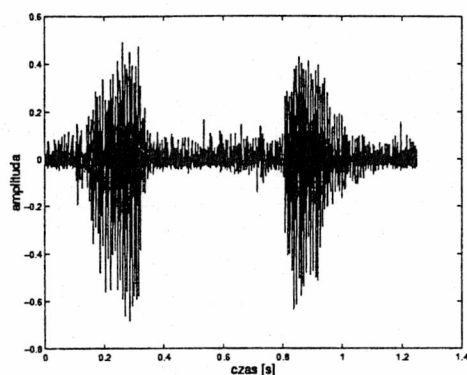
Rysunek 5.15: Sygnał po odsumieniu ($N=20$, $M=1$).



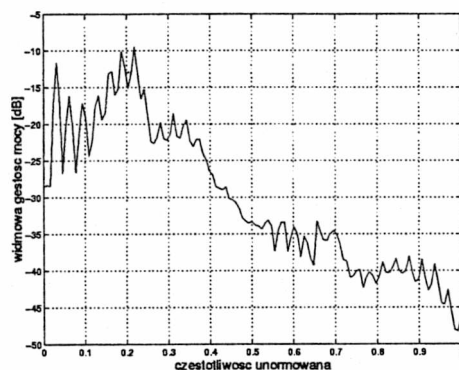
Rysunek 5.16: Widmowa gęstość mocy sygnału po odsumieniu ($N=20$, $M=1$).

W drugiej symulacji ten sam sygnał zaszumiony został podany na ortogonalny nieliniowy filtr odsumiający. Wykresy 5.17 i 5.18 pokazują efekt działania odsumiającego filtra nieliniowego ($M = 2$). Dla tego przypadku miara jakości odsumiania = 14dB. Widać tutaj poprawę tej wartości w stosunku do filtra liniowego. Możemy stwierdzić, że dopiero zastosowanie części nieliniowej w filtrze odsumiającym pozwoliło na wyeliminowanie części zakłócenia, której filtr liniowy nie był w stanie odfiltrować.

Oprócz sygnału mowy, jako sygnału użytecznego, do testów wykorzystano telekomunikacyjny sygnał cyfrowy z modulacją MSK 5.19. Sygnał zakłócający był sygnałem pasmowym, o niesymetrycznej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa. Pasma sygnału oryginalnego i zakłócającego pokrywały się.



Rysunek 5.17: Sygnał po filtracji odszumiającej filtrem nieliniowym ($N=10$, $M=2$).

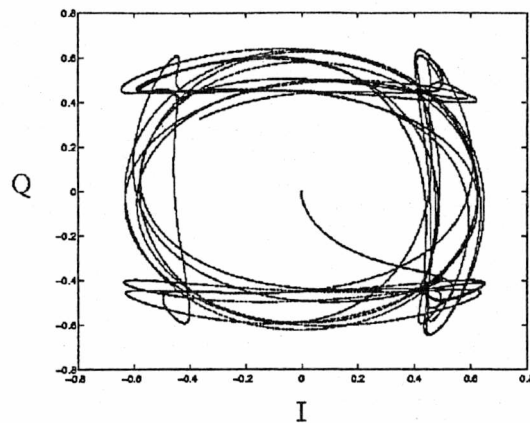


Rysunek 5.18: Widmowa gęstość mocy sygnału odszumionego filtrem nieliniowym ($N=10$, $M=2$).

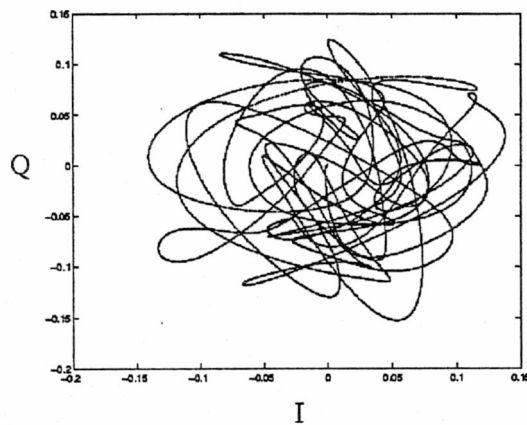
Wykres IQ dla sygnału zakłóconego przedstawia rysunek 5.20. Jak widać nie jest możliwa poprawna demodulacja sygnału użytecznego z powodu zaszumienia. Wykresy IQ 5.21 pokazuje sygnał po odszumieniu. Zastosowano tutaj filtr nieliniowy stopnia $M = 2$ i rzędzie $N = 7$. Uzyskana wartość $MJO = 10dB$ pozwoliła na poprawną demodulację sygnału zakłóconego. Świadczy to o możliwości zastosowania opracowanych algorytmów do usuwania zakłóceń addytywnych dla sygnałów telekomunikacyjnych.

Podsumowując tę część badań można stwierdzić, iż:

- Filtr liniowy eliminuje tylko liniową część zakłócenia.

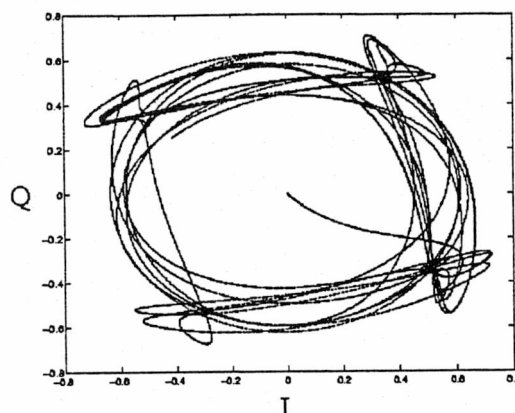


Rysunek 5.19: Wykres IQ dla sygnału telekomunikacyjnego - oryginał.



Rysunek 5.20: Wykres IQ dla sygnału telekomunikacyjnego - sygnał zaszumiony.

- Otrzymywane wartości tłumienia zakłócenia ściśle zależą od wartości parametrów filtru.
- Kluczowym staje się dobór wartości parametrów filtru odsumiającego, tak aby działał on efektywnie (N i M).
- Wykorzystując zaproponowane w rozdziałach poprzednich algorytmy filtracji odsumiającej, możliwa jest eliminacja zakłóceń dla różnych klas sygnałów (sygnał mowy, sygnały telekomunikacyjne)
- zaproponowane algorytmy filtracji odsumiającej są konkurencyjne wo-



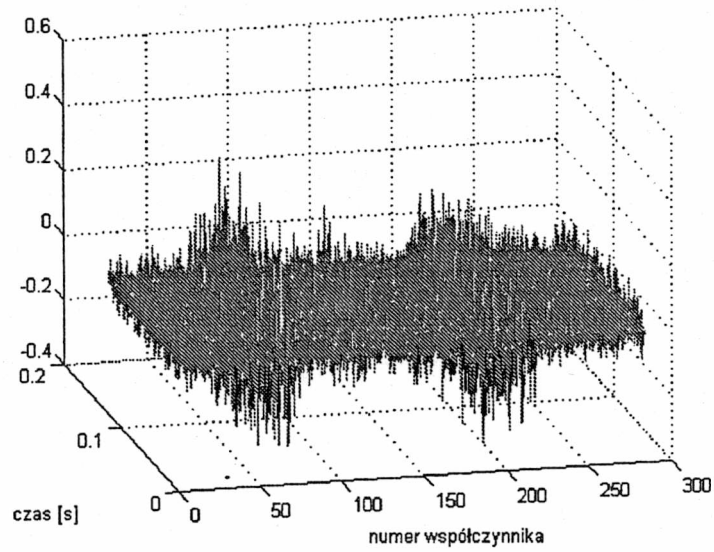
Rysunek 5.21: Wykres IQ dla sygnału telekomunikacyjnego po odszumieniu filtrem nieliniowym.

bec innych metod eliminacji zakłóceń, które pozwalają na osiągnięcie tłumienia szumów na poziomie: 12dB [52], 10dB (Texas Instrument - samochodowy system głośnomówiący), 10dB [55].

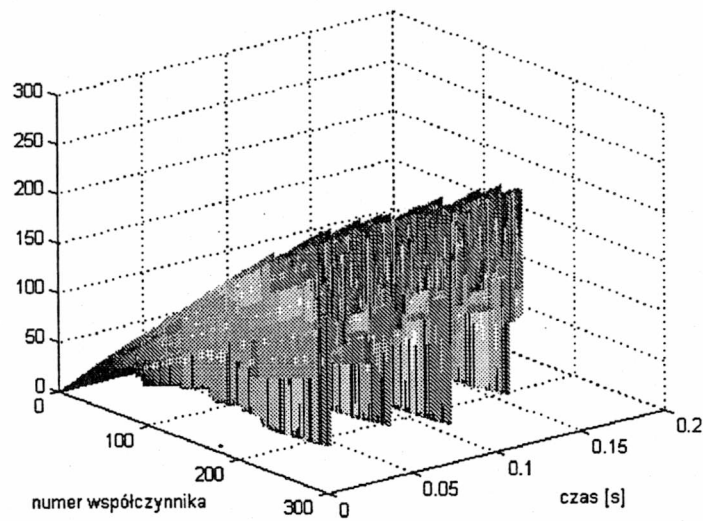
5.4 Strategie wyznaczania parametrów filtra odszumiającego

Trzecia część przeprowadzonych badań obejmowała sprawdzenie skuteczności działania zaproponowanych wcześniej strategii adaptacyjnej rozbudowy struktury filtra, tak aby uzyskać maksymalną poprawę jakości estymowanego sygnału przy jak najmniejszym zwiększeniu nakładu obliczeniowego z tym związanym. Inaczej mówiąc, na podstawie zaproponowanej funkcji kosztów (4.4), dokonywany był wybór parametrów filtra i sprawdzana jakość filtracji odszumiającej.

Rozpatrzono nieliniowy filtr odszumiający o parametrach $N = 10$, $M = 3$. Blok dekorelujący takiego filtra składa się z 40755 elementarnych sekcji, natomiast blok estymujący posiada 284 sekcji. Wyliczone w czasie filtracji współczynniki $^x\rho$ przedstawia rysunek 5.22. Wykres na rysunku 5.23 pokazuje funkcję kosztów (4.4) dla tegoż filtra, która zmienia się w czasie. Każdy nowy



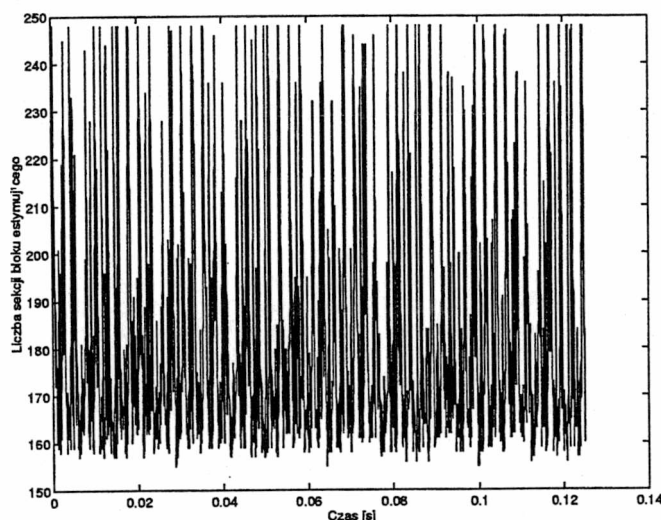
Rysunek 5.22: Współczynniki $\hat{x}_\rho$ dla filtru odsumiającego o parametrach (N=10, M=3).



Rysunek 5.23: Funkcja kosztów dla filtru odsumiającego o parametrach (N=10, M=3).

element $\hat{x}_\rho$ wprowadza zmniejszenie się błędu średniokwadratowego estymacji. Duże wartości na wykresie oznaczają małą zmianę $\hat{x}_{N,M}$ w stosunku

do przyrostu potrzebnych nakładów obliczeniowych na jej uzyskanie. Wykorzystując kryterium (4.2.2) służące wyborowi wartości parametrów filtru (wyborowi współczynników $^x\rho$) i przyjmując przykładowo wartość parametru $\delta = 100$, wybrano dla każdej chwili czasu ogólną liczbę sekcji dla bloku estymującego pokazaną na wykresie 5.24. Widać tutaj jak wraz z czasem zmienia



Rysunek 5.24: Liczba sekcji bloku estymującego dla strategii 4.2.2.

się złożoność struktury filtru. Małe wartości oznaczają strukturę o mniejszej liczbie elementarnych sekcji estymujących. Przekłada się to w prosty sposób na wielkość bloku dekorelującego, którego wielkość jest proporcjonalna do wielkości bloku estymującego. Im w danej chwili czasu mniejsza wartość na wykresie 5.24, tym mniej zasobów jest potrzebnych do estymowania sygnału użytecznego.

Do oceny jakości odsumiania wykorzystano miarę (5.1). Otrzymano poprawę stosunku sygnał-szum na poziomie $MJO = 13dB$. Jest to wynik gorszy o około $1dB$ od odsumiania dokonanego filtrem niezoptymalizowanym. Dla przedstawionego fragmentu sygnału należało wykonać łącznie $40755 \cdot 10^3$ operacji rotacji hiperbolicznych (liczba sekcji bloku dekorelującego razy ilość próbek sygnału wejściowego) dla filtru niezoptymalizowanego oraz $16932 \cdot 10^3$ dla filtru zoptymalizowanego. Oznacza to wykonanie ponad 2.4 raza mniej ope-

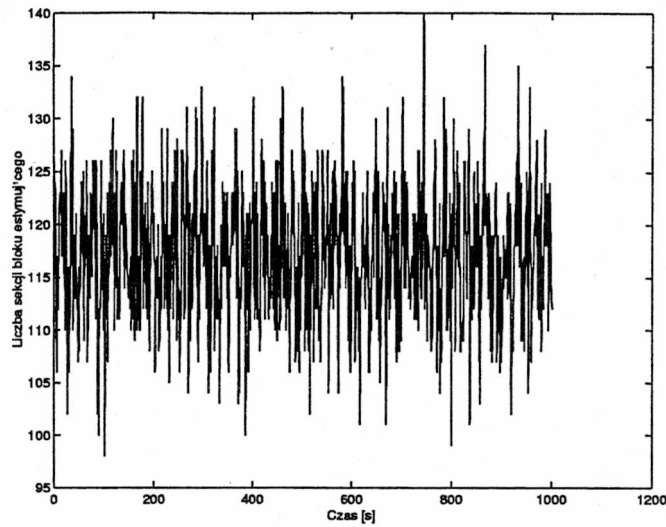
racji w przypadku doboru wartości parametrów filtra odsumiającego przy utracie poprawy jakości sygnału użytecznego na poziomie 1dB.

Przeprowadzone symulacje dla strategii 4.2.2 pozwalają na wysunięcie następujących wniosków:

- Im większa jest wartość parametru δ to współczynniki ${}^x\rho$ o mniejszych wartościach wchodzi do rozwiązania filtracji. Przy skończonych zasobach obliczeniowych oznacza to, iż osiągnięta wartość błędu estymacji (przy wykorzystaniu całej mocy obliczeniowej) będzie większa w przypadku większego δ .
- Gdy parametr δ będzie zbyt mały, w skrajnym przypadku żaden współczynnik ${}^x\rho$ może nie zostać wybrany i wtedy nie nastąpi poprawa stosunku sygnał/szum dla sygnału filtrowanego.
- Wraz ze wzrostem liczby współczynników ${}^x\rho$ wchodzących do rozwiązania kryterium wyboru dla następnego jest łagodniejsze. Wynika to z rosnącego $K_{N,M}$ oraz z malejącej wartości ${}^xR_{N,M}$.

Analogiczna symulacja została przeprowadzona dla drugiej zaproponowanej wcześniej strategii doboru parametrów filtra (4.2.3). Założono osiągnięcie wartości błędu średniokwadratowego ${}^xR_{N,M}$ na poziomie takim samym jak w przypadku poprzedniej, prezentowanej symulacji. Wykres na rysunku 5.25 pokazuje wybrane według tego kryterium liczby sekcji bloku estymującego w czasie. Można zaobserwować jak wraz z czasem zmienia się złożoność struktury filtra. Małe wartości oznaczają strukturę o mniejszej liczbie elementarnych sekcji estymujących. Przekłada się to w prosty sposób na wielkość bloku dekorrelującego, którego wielkość jest proporcjonalna do wielkości bloku estymującego. Im w danej chwili czasu mniejsza wartość na wykresie 5.24, tym mniej zasobów jest potrzebnych do estymowania sygnału użytecznego. Jest to analogiczna obserwacja jak w przypadku strategii 4.2.2.

Miara jakości odsumiania $MJO = 12.5$ pokazuje, iż strategia 4.2.3 dla przedstawionej symulacji, daje porównywalne rezultaty do strategii 4.2.2. Łączna liczba rotacji hiperbolicznych w tym przypadku równa jest $6937 \cdot 10^3$.



Rysunek 5.25: Liczba sekcji bloku estymującego dla strategii 4.2.3.

Wykonanych zostało więc 5.8 raza mniej operacji niż w przypadku filtru nieoptymalizowanego i 2.4 razy mniej niż dla filtru wybranego według kryterium 4.2.2. Oznacza to, że strategia 4.2.3 okazała się najlepszą (minimalna liczba obliczeń przy porównywalnej jakości odsumiania) dla badanego sygnału.

Przeprowadzone symulacje dla strategii 4.2.3 pozwalają na wysunięcie następujących wniosków:

- Gdy wybierzemy zbyt małą wartość docelową błędu średniokwadratowego ${}^x R_{N_k, M_k}$ to w skrajnym przypadku żaden współczynnik ${}^x \rho$ nie wejdzie do rozwiązania. Skutkuje to brakiem poprawy stosunku sygnał/szum dla sygnału filtrowanego.
- Wybór współczynnika ${}^x \rho$ do rozwiązania filtracji powoduje, że wartość co do modułu każdego następnego musi być co najwyżej równa poprzedniemu, aby został on dołożony do rozwiązania. Inaczej mówiąc im większa co do modułu wartość wybranego współczynnika tym łagodniejsze kryterium wyboru dla następnych współczynników.

5.5 Podsumowanie

W rozdziale tym zostały zaprezentowane najważniejsze wyniki badań symulacyjnych dotyczących ortogonalnej filtracji odsumiającej sygnałów losowych wyższych rzędów. W pierwszej części pokazano działanie bloku dekorelującego filtru odsumiającego. Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że:

- filtr liniowy dekoreluje tylko statystyki 2-go stopnia
- przy użyciu filtru nieliniowego stopnia M dekorelacji poddawany jest sygnał ze względu na statystyki do $2M$ -tego stopnia włącznie
- efektywność procesu dekorelacji (stopień wybielenia sygnału) rośnie wraz z rzędem filtru
- widmowa gęstość mocy sygnału zdekorelowanego (sygnału innowacyjnego) dąży, wraz ze wzrostem rzędu filtru, do widma szumu białego

W drugiej części tego rozdziału przedstawiono niektóre symulacje komputerowe, obrazujące działanie całego filtru odsumiającego. Po przeprowadzonych badaniach można stwierdzić, że:

- zarówno dla sygnałów mowy jak i telekomunikacyjnych zaproponowane algorytmy filtracji odsumiającej pozwalały na poprawę stosunku sygnał-szum na poziomie około $12dB$, co jest rozwiązaniem konkurencyjnym do innych opisanych w literaturze [52], [55] i stosowanych komercyjnie (Texas Instruments)
- poprawa stosunku sygnał-szum zależy bezpośrednio od wyboru bazy ON (współczynników $\pi\rho$), wyznaczonej w procesie dekorelacji; łączy się to w oczywisty sposób z rzędem i stopniem nieliniowości filtru
- możliwa jest optymalizacja parametrów filtru (wybór elementów bazy ON), która pozwala na osiągnięcie pożądanego stopnia błędu estymacji przy mniejszej liczbie obliczeń niż w przypadku pełnej bazy ON;

oznacza to oszczędność zasobów obliczeniowych i pamięciowych filtru, co jest równoznaczne z obniżeniem kosztów filtracji

- zaproponowane strategie doboru parametrów filtru odsumiającego pozwalają w znacznym stopniu redukować nakład obliczeniowy związany z filtracją, przy braku pogorszenia jakości samego procesu estymacji
- zaprezentowane strategie działają na próbkach sygnału i mogą być częścią systemów odsumiających działających w czasie rzeczywistym

Rozdział 6

Podsumowanie

Celem niniejszej pracy było rozwiązanie problemu oraz opracowanie algorytmów nieliniowej filtracji odsumiającej dla sygnałów wyższych rzędów.

W poszczególnych rozdziałach tej pracy uzyskano następujące wyniki:

- Przedstawiono rozwiązanie, dla dowolnego rzędu pamięciowości i stopnia nieliniowości, problemu adaptacyjnej filtracji odsumiającej sygnałów losowych wyższych rzędów, jako uogólnienie problemu filtracji odsumiającej sygnałów losowych drugiego rzędu
- Zaproponowano strukturę nieliniowego ortogonalnego filtru odsumiającego z podziałem na dwa bloki: dekorelujący oraz estymujący sygnał użyteczny. Ze względu na ortogonalną realizację filtru, jego struktura może być rozbudowywana bez konieczności wyznaczania współczynników filtru dla części istniejącej przed rozbudową.
- Zaprezentowano wersję aplikacyjną algorytmu ortogonalnej filtracji odsumiającej, działającą na szeregach czasowych. Umożliwia to jego użycie w systemach działających w czasie rzeczywistym.
- Zaprezentowano kryteria i strategie pozwalające na dostosowanie struktury filtru odsumiającego do własności sygnałów wejściowych. Strate-

gie te pozwalają na obniżenie stopnia złożoności obliczeniowej filtracji odszumiającej.

- Zaproponowane algorytmy filtracji odszumiającej poddano wnikliwym badaniom symulacyjnym. Wykorzystano sygnały mowy oraz telekomunikacyjne z modulacją MSK jako sygnały użyteczne. W obu przypadkach poprawa stosunku sygnał/szum była na poziomie około $12dB$. Świadczy to o możliwości zastosowania zaproponowanych algorytmów w różnych gałęziach cyfrowego przetwarzania sygnałów.
- Przeprowadzono badania symulacyjne filtracji odszumiającej uwzględniające wybór struktury filtru odszumiającego na podstawie zaproponowanych w tej pracy strategii. Ich użycie nie powoduje pogorszenia jakości filtracji odszumiającej, natomiast pozwala na zmniejszenie potrzebnych do filtracji zasobów obliczeniowych.

Wyżej wymienione wyniki tej pracy są, w przekonaniu autora, podstawą do stwierdzenia, że postawione w rozdziale 1 cele i zadania pracy zostały osiągnięte, ponieważ:

- przedstawiono problem filtracji odszumiającej ze względu na minimalizację błędu średniokwadratowego estymacji dla sygnałów gaussowskich i niegaussowskich
- zaproponowano algorytmy dekorrelacji sygnałów losowych wyższych rzędów dla sygnałów niestacjonarnych, stacjonarnych oraz dla szeregów czasowych wyższych rzędów, co umożliwiło realizację bloku dekorującego filtru odszumiającego
- zaproponowano adaptacyjny algorytm umożliwiający eliminację zakłóceń dla sygnałów losowych posiadających niezerowe statystyki rzędów wyższych niż 2
- zaproponowano strategię doboru parametrów nieliniowego ortogonalnego filtru odszumiającego, w celu maksymalizacji stosunku jakości odszumiania do złożoności obliczeniowej filtracji

- przeprowadzono badania symulacyjne wszystkich zaproponowanych w tej pracy algorytmów i zweryfikowano ich działanie

Rezultaty uzyskane w tej pracy pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków:

- Optymalną w sensie średniokwadratowym filtrację odszumiającą sygnału losowego wyższego rzędu można realizować poprzez ortogonalne rozwinięcie w wielowymiarowy szereg Fouriera sygnałów wyższych rzędów.
- Efektywne metody budowy omawianych nieliniowych filtrów odszumiających otrzymuje się jako nieliniowe uogólnienie rekurencyjnych metod geometrycznych, stosowanych przy podejściu liniowym.
- Zaprezentowane algorytmy filtracji odszumiającej są adekwatne dla filtrowanych sygnałów niestacjonarnych i stacjonarnych wyższych rzędów.
- Zaproponowane algorytmy filtracji odszumiającej mają własności adaptacyjne w czasie. Umożliwia to ich zastosowanie w zmieniających się warunkach rzeczywistych.
- Struktura zaproponowanych filtrów odszumiających umożliwia ich łatwą rozbudowę. Wykorzystując strategię doboru wartości parametrów filtru odszumiającego można efektywnie wykorzystywać zasoby obliczeniowe filtru podczas procesu odszumiania.

Zaproponowane w pracy algorytmy nieliniowej ortogonalnej filtracji odszumiającej umożliwiają:

- eliminację zakłóceń dla sygnałów niestacjonarnych i stacjonarnych wyższych rzędów
- efektywne budowanie struktur filtrów na podstawie rekurencyjnych algorytmów geometrycznych

- dostosowanie struktury filtru do warunków rzeczywistych (rodzaju sygnału losowego) poprzez dobór stopnia nieliniowości filtru oraz rzędu jego pamięciowości
- sterowanie wielkością błędu estymacji sygnału użytecznego poprzez zmianę złożoności struktury filtru w trakcie jego działania

Przedstawione wyżej wnioski i konkluzje pozwalają na stwierdzenie, iż w przekonaniu autora, teza pracy została wykazana, a postawione przed nią cele osiągnięte, jak również to, że do osiągnięć oryginalnych pracy można zaliczyć:

- uogólnienie algorytmów ortogonalnej liniowej średniokwadratowej filtracji odsumiającej na przypadek nieliniowy, co umożliwia filtrację sygnałów o niegaussowskiej funkcji gęstości prawdopodobieństwa
- zaproponowanie strategii optymalizacji parametrów filtru odsumiającego pod względem poprawy jakości odsumiania do ilości potrzebnych do tego zasobów obliczeniowych i pamięciowych filtru
- przeprowadzenie badań dotyczących dekorelacji i filtracji odsumiającej sygnałów wyższych rzędów, co daje podstawy dla realizacji sprzętowej zaproponowanych algorytmów
- przeprowadzenie symulacji zaproponowanych strategii wyboru wartości parametrów filtru odsumiającego, które potwierdzają ich przydatność w procesie filtracji odsumiającej (minimalizacja nakładów obliczeniowych podczas filtracji)

6.1 Kierunki dalszych badań

Osiągnięte w pracy wyniki i przeprowadzone badania pozwalają określić przykładowe kierunki dalszych badań, którymi mogą być:

- Sprzętowa realizacja zaproponowanych algorytmów - pojawiają się tutaj zagadnienia związane z rozdzielczością przetworników analogowo-cyfrowych, dokładnością obliczeniową.
- Opracowanie metod eliminacji zakłóceń dla pól losowych (obrazów). W dobie multimediiów obraz stał się bardzo ważną formą przekazu informacji. Skuteczne metody eliminacji zakłóceń jakie mogą się w nim pojawić, są koniecznością i wyzwaniem dla badaczy.
- Wykorzystanie przedstawionej idei filtracji ortogonalnej do ślepej separacji sygnałów losowych, która to metoda jest szeroko wykorzystywana w wielu różnorodnych systemach telekomunikacji cyfrowej.
- Zastosowanie przedstawionych rozwiązań do eliminacji echa (odbić).

Dodatek A

Wielowymiarowe nieliniowe filtry Volterra-Wienera

Niech [57] $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_m$ będą liniowymi przestrzeniami metrycznymi z elementami $\mathbf{y}^{(k)} \in \mathcal{Y}_k$, $k = 1, \dots, m$.

Definicja A.1. *Odwzorowanie $N[\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(m)}]$ będziemy nazywać m -liniowym jeśli N jest liniowe w stosunku do każdego $\mathbf{y}^{(k)}$ (kiedy pozostałe $\mathbf{y}^{(i)}$, $i \neq k$ są stałe).*

Na przykład,

$$N[\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(m)}] = \sum_{i_1, \dots, i_m=0}^n a_{i_1, \dots, i_m} y_{i_1}^{(1)} \dots y_{i_m}^{(m)} \quad (\text{A.1})$$

będzie funkcjonalem m -liniowym.

Definicja A.2. *Odwzorowanie N będzie nazywane jednorodnym stopnia m jeśli dla dowolnego skalaru α*

$$N[\alpha \mathbf{y}] = \alpha^m N[\mathbf{y}] \quad (\text{A.2})$$

Można zaobserwować, że funkcjonal

$$N[y^{(1)}, \dots, y^{(m)}]_{|y^{(1)}=\dots=y^{(m)}=y} = N_m[y] \quad (A.3)$$

jest jednorodny stopnia m .

Definicja A.3. Odwzorowanie jednorodne stopnia m , będzie nazywane regularnym jeśli jądro $a_{i_1, \dots, i_m}$ jest symetryczne względem każdego argumentu. Oznacza to, że jeśli $\pi_{i_1, \dots, i_m}$ oznacza każdą permutację argumentów $i_1, \dots, i_m$ to

$$a_{i_1, \dots, i_m} = a_{\pi_{i_1, \dots, i_m}} \quad (A.4)$$

Definicja A.4. Odwzorowanie regularne, jednorodne, stopnia m , będzie nazywane Regularnym Funkcjonałem Volterry (RFV) stopnia m

$$V_m[y; t] = \sum_{i_1, \dots, i_m=0}^n a_{i_1, \dots, i_m} y_{i_1} \dots y_{i_m} \quad (A.5)$$

jeśli jądro:

1. jest symetryczne względem $i_1, \dots, i_m$ dla każdego $t \in T$;
2. jest przyczynowe; tj., $a_{t; i_1, \dots, i_m} \equiv 0$ dla każdego $i_p > t$, $p = 1, \dots, m$.

Definicja A.5. Skończona suma odwzorowań regularnych, jednorodnych, RFV

$$G_M[y] = \sum_{m=0}^M N_m[y] \quad (A.6)$$

będzie nazywana Regularnym Wielomianem Funkcjonalnym (RWF) stopnia M .

Definicja A.6. Rozważmy $t \in T$ jako zmienną. Wtedy

$$G_M[y; t] = \sum_{m=0}^M V_m[y; t] \quad (A.7)$$

będzie nazywane *Regularnym Wielomianem Funkcjonalnym Volterry* (RWFV), lub *regularnym operatorem Volterry*, stopnia M .

Twierdzenie A.1. [32] Niech $\mathbf{F}$ będzie ciągłym funkcjonałem na $C[a, b]$. Wówczas może on być reprezentowany na każdym ograniczonym podzbiorze jako granica

$$\mathbf{F}[\mathbf{y}] = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{G}_M[\mathbf{y}] \quad (\text{A.8})$$

Stąd wynika, że RWF tworzą przeliczalny, wszędzie gęsty zbiór w przestrzeni funkcjonałów ciągłych tak, że przestrzeń ta jest ośrodkowa.

Założmy, że odwzorowanie $\mathbf{F}$ jest analityczne w sensie Frecheta lub Gateaux [57]. Wtedy $\mathbf{F}$ może być rozwinięte w jednostajnie zbieżny szereg Volterry

$$\mathbf{F}[\mathbf{y}; t] = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{G}_M[\mathbf{y}; t] \quad (\text{A.9})$$

Dla $\mathbf{F} \in L_2$ ten rodzaj rozwinięcia może być wprowadzony poprzez ortogonalizację Gramma-Schmidta przeliczalnej bazy Volterry (A.7) oraz względem iloczynu skalarnego indukowanego przez przestrzeń probabilistyczną $L_2(\Omega, \mathfrak{R}, \mu)$. Ortogonalizacja tej bazy będzie owocować utworzeniem przeliczalnego, zupełnego, ortonormalnego (ON) zbioru $\{\mathbf{W}_M; M = 1, 2, \dots\}$ (t.j., bazy ON przestrzeni $\mathcal{F}$ operatorów L_2) [69], co prowadzi do następującej dekompozycji ortogonalnej

$$\mathcal{F} = \oplus_{M=1}^{\infty} \text{span}\{\mathbf{W}_M\} \quad (\text{A.10})$$

gdzie $(\mathbf{W}_M, \mathbf{W}_N) = \delta_{M,N}$, ($\delta_{M,N}$ oznacza deltę Kroneckera). Każdy element $\mathbf{W}_M$ będzie rozpinał ortogonalną podprzestrzeń z elementami będącymi wielowymiarowymi ortogonalnymi filtrami stopnia M klasy Volterry-Wienera [62]. Stąd, każdy filtr $\mathbf{F} \in L_2$ może być reprezentowany w postaci rozwinięcia ON w szereg typu Wienera

$$\mathbf{F} = \sum_{M=1}^{\infty} (\mathbf{F}, \mathbf{W}_M) \mathbf{W}_M \quad (\text{A.11})$$

które jest w istocie wielowymiarowym funkcjonalnym szeregiem Fouriera $(\mathbf{F}, \mathbf{W}_M)$ stanowiącym uogólnione wielowymiarowe jądra Fouriera [77, 78].

Bibliografia

- [1] W. Armbruster, R. Czarnach, and P. Vary. Adaptive noise cancellation with reference input - possible applications and theoretical limits. *Signal Processing III: Theories and Applications*, pages 391–394, 1986.
- [2] A. Azirani, R. L. B. Jeannes, and G. Faucon. Speech enhancement using a wiener filtering under signal presence uncertainty. *In Signal Processing VIII Theories and Applications - EUSIPCO-96*, 2:971–974, 1996.
- [3] J. Barrett. The use of functionals in the analysis of nonlinear physical systems. *Journal of Electronics and Control*, 15:567–615, 1963.
- [4] A. Benveniste. Lattice orthogonalization methods for the stochastic realization problem. *Ed. CNRS*, 2:267–308, 1982.
- [5] P. Biernacki. Implementacja nieliniowego ortogonalnego filtru odsumiającego na procesorze sygnałowym tms320c54x. *Komputerowe wspomaganie badań naukowych. VIII Krajowa konferencja. VIII KK KOWBAN '2001*, 1:153–156, 2001.
- [6] P. Biernacki and J. Zarzycki. Multidimensional nonlinear noise-cancelling filters of the volterra-wienes class. *The Second International Workshop on Multidimensional (nD) Systems. NDS-2000*, 1:255–261, 2000.
- [7] P. Biernacki and J. Zarzycki. Nieliniowa ortogonalna filtracja odsumiająca niestacjonarnych sygnałów losowych wyższych rzędów. *Kompute-*

rowe wspomaganie badań naukowych. VII Krajowa konferencja. VII KK KOWBAN '2000, 1:241–246, 2000.

- [8] P. Biernacki and J. Zarzycki. Orthogonal schur-type solution of the non-linear noise-cancelling problem. *Proceedings of the International Conference on Signals and Electronic Systems. ICSES 2000*, 1:337–342, 2000.
- [9] P. Biernacki and J. Zarzycki. Nonlinear orthogonal time update noise-cancelling filtering algorithm. *Proceedings of the International Conference on Signals and Electronic Systems. ICSES 2001*, 1:129–134, 2001.
- [10] P. Biernacki and J. Zarzycki. Nonlinear orthogonal noise cancelling filter with adaptively adjusting parameters. *Proceedings of the International Conference on Signals and Electronic Systems. ICSES 2002*, 1:49–54, 2002.
- [11] S. Boll. Suppression of acoustic noise in speech using spectral subtraction. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 27:113–120, 1979.
- [12] S. Boll and R. Wohlford. Event driven speech enhancement. In *ICASSP - 83*, pages 1152–1155, 1983.
- [13] A. Bose. A theory of nonlinear systems. Technical Report 309, M.I.T., 1958.
- [14] M. Brilliant. Theory of the analysis of nonlinear systems. Technical Report 345, Research Laboratory of Electronics M.I.T., 1958.
- [15] K. Buckley. Spatial/spectral filtering with linearly constrained minimum variance beamformers. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35:249–266, 1987.
- [16] K. Buckley and L. Griffiths. Broad-band signal-subspace spatial-spectrum estimation. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36:953–964, 1988.

- [17] J. Burg. *Maximum entropy spectral analysis*. PhD thesis, Stanford Univ., 1975.
- [18] A. Bush. Some techniques for the synthesis of nonlinear systems. Technical Report 441, M.I.T., 1966.
- [19] R. Curtis and R. Niederjohn. An investigation of several frequency domain processing methods for enhancing the intelligibility of speech in wideband random noise. *ICASSP-78*, pages 602–605, 1978.
- [20] N. D. Degan and C. Prati. Noise analysis and speech enhancement techniques for mobile radio applications. *Signal Processing*, 15:43–56, 1988.
- [21] M. Dendrinos, S. Bakamidis, and G. Carayannis. Speech enhancement from noise: A regenerative approach. *Speech Communication*, 10:45–57, 1991.
- [22] E. Deprettere. Mixed form time-variant lattice recursions. *Ed. CNRS*, 2:545–562, 1982.
- [23] E. Deprettere and S. C. Lie. *Generalized Schur-Darlington algorithms for lattice-structured matrix inversion and stochastic modeling*. Techn. Rept., Delft Univ. Techn., 1980.
- [24] R. Deutsch. *Nonlinear transformation of random processes*. Pentice Hall, 1962.
- [25] P. Dewilde. Stochastic modelling with orthogonal filters. *Outils et modes mathematiques pour l'automatique, l'analyse de systemes et le traitement du signal*, pages 331–398, 1982.
- [26] P. Dewilde, A. C. Vieira, and T. Kailath. On a generalized Szegő-Levinson realization algorithm for optimal linear predictors based on a network synthesis approach. *IEEE Trans. on CAS-25*, 9:663–675, 1978.

- [27] J. Doob. The elementary gaussian processes. *Ann. Math. Statist.*, 15:229–282, 1944.
- [28] Y. Ephraim and D. Malah. Speech enhancement using a minimum mean-square error short-time spectral amplitude estimation. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 32:1109–1121, 1984.
- [29] Y. Ephraim, D. Malah, and B.-H. Juang. On the application of hidden markov models for enhancing noisy speech. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37:1846–1856, 1989.
- [30] Y. Ephraim and H. V. Trees. A signal subspace approach for speech enhancement. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 3:251–266, 1995.
- [31] M. Frechet. Sur les fonctionelles continues. *Annales Scientifiques de L'Ecole Normale Supérieure*, 27:193–216, 1910.
- [32] M. Frechet. *Recherches theoretiques modernes sur la theorie des probabilities*. Gauthier-Villars, Paris, 1937.
- [33] O. Frost. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing. *Proc. of the IEEE*, 60:926–935, 1972.
- [34] D. George. Continuous nonlinear systems. Technical Report 355, Research Laboratory of Electronics M.I.T., 1959.
- [35] M. Goulding and J. Bird. Speech enhancement for mobile telephony. *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, 39:316–326, 1997.
- [36] L. Griffiths and K. Buckley. Quiescent pattern control in linearly constrained adaptive arrays. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35:917–926, 1987.
- [37] L. Griffiths and C. Jim. An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 30:27–34, 1982.

- [38] J. Hansen and M. Clements. Constrained iterative speech enhancement with application to speech recognition. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 39:795–805, 1991.
- [39] S. Jensen, P. Hansen, and S. H. J. Sorensen. Reduction of broad-band noise in speech by truncated qsvd. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 3:439–448, 1995.
- [40] T. Kailath. Time-variant and time-invariant lattice filters for nonstationary processes. *Ed. CNRS*, 2:417–464, 1982.
- [41] D. Lee, M. Morf, and B. Friedlander. Recursive least-squares ladder estimation algorithms. *IEEE Trans. on CAS-28*, pages 467–481, 1981.
- [42] D. Lee, M. Morf, and B. Friedlander. Recursive least-squares ladder estimation algorithms. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, CAS-28:467–481, 1981.
- [43] Y. Lee, N. Levinson, and W. Martin. *Selected papers of Norbert Wiener, including generalized harmonic analysis and Tauberian theorems*. The Technology Press of MIT, 1964.
- [44] Y. Lee and M. Schetzen. Measurement of the wiener kernels of a nonlinear system by crosscorrelation. *International Journal of Control*, 2:237–254, 1965.
- [45] Y. W. Lee. *Statistical theory of communication*. Wiley, N. Y., 1960.
- [46] H. Lev-Ari and T. Kailath. *Lattice filter parametrization and modeling of nonstationary processes*. Techn. Rept., Stanford Univ., 1982.
- [47] N. Levinson. The wiener rms error criterium in filter design and prediction. *J. Math. Phys.*, 25:261–278, 1947.
- [48] J. Liberti, T. Rappaport, and J. Proakis. Evaluation of several adaptive algorithms for cancelling acoustic noise in mobile radio environments. *41th IEEE Vehicular Technology Conference*, pages 126–132, 1991.

- [49] J. Lim. Evaluation of a correlation subtraction method for enhancing speech degraded by additive white noise. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 26:471–472, 1978.
- [50] J. Lim and A. Oppenheim. All-pole modeling of degraded speech. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 26:197–210, 1978.
- [51] J. Lim and A. Oppenheim. Enhancement and bandwidth compression of noisy speech. *Proceedings of the IEEE*, 67:1586–1604, 1979.
- [52] R. Martin. Spectral subtraction based on minimum statistics. *Proceedings of the EUSIPCO 94*, pages 1182–1185, 1994.
- [53] R. McAulay and M. Malpass. Speech enhancement using a soft-decision noise suppression filter. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 28:137–145, 1980.
- [54] B. D. Moor. The singular value decomposition and long and short spaces of noisy matrices. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 41:2826–2838, 1993.
- [55] D. Palumbo and R. Cabell. Flight test of asac aircraft interior noise control system. *Proceedings of the 5th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 1999.
- [56] A. Papoulis. *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1972.
- [57] K. Pupkov, V. Kapalin, and A. Yuscenko. *Funkcjonalnyje riady v teorii nieliniejnych sistem*. Nauka, Moskwa, 1976.
- [58] E. Robinson. *Multichannel time-series analysis with digital computer programs*. Holden Day, San Francisco, 1967.
- [59] H. Sahlin and H. Broman. Signal separation applied to real world signals. *International Workshop on Acoustic Echo and Noise Control, IWAENC'97*, pages 73–76, 1997.

- [60] M. Schetzen. Measurement of the kernels of a nonlinear system of finite order. *International Journal of Control*, 1(3):251–263, 1965.
- [61] M. Schetzen. Theory of nonlinear system identification. *International Journal of Control*, 20:577–592, 1974.
- [62] M. Schetzen. *Volterra-Wiener theories of nonlinear systems*. Wiley, N. Y., 1980.
- [63] J. Schur. Über potenzreihen, die in innern des einheitskreises beschränkt sind. *J. Reine Ang. Math.*, 147:205–232, 1917.
- [64] R. Sharma and B. V. Veen. Large modular structures for adaptive beamforming and the gram-schmidt preprocessor. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42:448–451, 1994.
- [65] P. Sovka, P. Pollak, and J. Kybic. Extended spectral subtraction. In *Signal Processing VIII Theories and Applications - EUSIPCO-96*, 2:963–966, 1996.
- [66] J. Szabatin. *Podstawy Teorii Sygnałów*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 1982.
- [67] P. Vary. Noise suppression by spectral magnitude estimation - mechanism and theoretical limits. *Signal Processing*, 8:387–400, 1985.
- [68] B. V. Veen. An analysis of several partially adaptive beamformer designs. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37:192–203, 1989.
- [69] J. Victor and B. Knight. Nonlinear analysis with an arbitrary stimulus ensemble. *Quarterly of Applied Mathematics*, XXXVII:115–136, 1979.
- [70] V. Volterra. Sopra le funzioni che dipendono de altre funzioni. *Rend. R. Accademia dei Lincei 2 Sem*, pages 97–158, 1887.

- [71] V. Volterra. *Theory of Functionals and of Integrals and Integro Differential Equations*. Dover Publications Inc., New York, 1959.
- [72] R. Wallace and R. Goubran. Noise cancellation using parallel adaptive filters. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 39(4):239–243, 1992.
- [73] B. Widrow, J. Grover, J. McCool, J. Kaunitz, C. Williams, R. Hearn, J. Zeidler, E. Dong, and R. Goodlin. Adaptive noise cancelling: Principles and applications. *Proceedings of the IEEE*, 63:1692–1716, 1975.
- [74] N. Wiener. Response of a nonlinear device to noise. Technical Report 129, Radiation Laboratory M.I.T., Cambridge Mass, April 1942.
- [75] N. Wiener. *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time-series with engineering applications*. Techn. Press and Wiley, N. Y., 1949.
- [76] N. Wiener. *Nonlinear problems in random theory*. The Technology Press of MIT and John Wiley and Sons, 1958.
- [77] S. Yasui. Stochastic functional Fourier series, Volterra series and nonlinear system analysis. *IEEE Trans. on AC-24*, 2:230–242, 1979.
- [78] J. Zarzycki. Orthogonal ladder-form approximation of the nonlinear least-squares prediction filters: A geometric approach. I28/p-041/84, Politechnika Wrocławska, 1984.
- [79] J. Zarzycki. *Nieliniowa prognoza i modelowanie stochastyczne sygnałów losowych wyższego rzędu*, volume 53 of *Monografie*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, 1986.
- [80] J. Zarzycki. *Cyfrowa filtracja ortogonalna sygnałów losowych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1998.
- [81] J. Zarzycki and P. Dewilde. Nonlinear least-squares prediction of higher-order random sequences. I-28/p-030/83, Politechnika Wrocławska, 1983.

- [82] J. Zarzycki and P. Dewilde. Nonlinear nonstationary Schur algorithm.
Proceedings of the Workshop on Advanced Algorithms and Their Realizations, Chateau de Bonas:XIII, 1999.

