

Daria Olszewska

Kombinatoryczne własności wypukłych wielokątów kratowych

Rozprawa doktorska przygotowana pod kierunkiem
dr. hab. Krzysztofa Kołodziejczyka

Politechnika Wrocławska
Instytut Matematyki i Informatyki

Wrocław 2005

Daria Olszewska

Kombinatoryczne własności wypukłych wielokątów kratowych

Rozprawa doktorska przygotowana pod kierunkiem
dr. hab. Krzysztofa Kołodziejczyka

Politechnika Wrocławska
Instytut Matematyki i Informatyki

Wrocław 2005

Podziękowania

Składam wyrazy wdzięczności promotorowi dr. hab. Krzysztofowi Kołodziejczykowi za wprowadzenie mnie w tematykę poruszaną w rozprawie oraz za cierpliwość i pełną poświęcenia opiekę naukową.

Spis treści

1	Wstęp	2
1.1	Wprowadzenie	2
1.2	Podstawowe pojęcia, definicje, najważniejsze wyniki	6
2	Wypukłe wielokąty kratowe zawierające jeden wewnętrzny punkt kratowy	11
3	Otoczka wewnętrzna i zewnętrzna	20
3.1	Otoczka wewnętrzna	20
3.2	Otoczka zewnętrzna	21
4	Dowody hipotez Rabinowitza	30
4.1	Hipotezy dotyczące wypukłych dziewięciokątów kratowych	32
4.2	Hipotezy dotyczące wypukłych dziesięciokątów kratowych	42
4.3	Krótkie dowody znanych rezultatów	56
4.4	Anomalie wypukłych wielokątów kratowych	58
5	Dowód hipotezy Colemana	61
	Bibliografia	73

Rozdział 1

Wstęp

1.1. Wprowadzenie

Punkt płaszczyzny, którego współrzędne są liczbami całkowitymi nazywamy *punktem kratowym*. Zbiór wszystkich punktów kratowych nazywamy *kratą kwadratową*. Niezwykły jest fakt, że ten prosty zbiór punktów płaszczyzny od wieków jest w centrum zainteresowań wielu znakomitych matematyków. Już Gauss w 1831 r. interpretował niektóre wyniki w języku kraty. Punkty kratowe na stałe zagościły w matematyce wraz z pracami Minkowskiego, kiedy to wiele interesujących i ważnych własności liczb całkowitych było odkrytych właśnie przy okazji badania kraty kwadratowej. Badania Minkowskiego zwieńczone wydaniem książki [24] doprowadziły do powstania w 1896 r. działu matematyki zwanego geometrią liczb. Sztandarowym rezultatem Minkowskiego jest twierdzenie, które w wersji planarnej można wysłowić w następujący sposób: *Niech K będzie ograniczonym ciałem wypukłym w R^2 centralnie symetrycznym względem punktu kratowego leżącego we wnętrzu K i niech pole K będzie większe niż 4, wówczas K zawiera co najmniej 3 punkty kratowe w swoim wnętrzu.*

Twierdzenie Minkowskiego gwarantuje istnienie pewnych punktów kratowych. Można także powiedzieć, że podaje ono relację między polem zbioru i minimalną ilością wewnętrznych punktów kratowych w zbiorze. Innym, bardzo znanym, twierdzeniem o relacji pola i wewnętrznych punktów kratowych jest twierdzenie Blichfeldta [4] z 1914 r. Z obu twierdzeń wywodzi się nurt badań dotyczący zależności pomiędzy polem, obwodem i

istnieniem punktów kratowych w wielokątach, a także innych zbiorach wypukłych. Nurt ten był kontynuowany, między innymi, w pracach [3], [5], [13], [27], [36], [47].

Najbardziej popularnym twierdzeniem dotyczącym kraty kwadratowej jest twierdzenie Picka [29] z 1899 r. wskazujące na kombinatoryczny charakter obliczania pola wielokąta kratowego. Twierdzenie to sprowadza bowiem obliczanie pola dowolnego prostego wielokąta kratowego do zliczenia punktów kratowych wewnątrz i na brzegu tego wielokąta. Początkowo wynik ten pozostawał niezauważony, ale polski matematyk Hugo Steinhaus, zamieszczając go już w pierwszym wydaniu swojego słynnego *Kalejdoskopu matematycznego* [44], znacznie przyczynił się do jego spopularyzowania. Dużą rolę w popularyzacji twierdzenia Picka i innych problemów związanych z kratą kwadratową odegrała książka Coxetera [7] z 1961 r. pt. *Introduction to geometry*. Prostota i piękno formuły Picka sprawiły, że stała się ona inspiracją wielu badań naukowych, w wyniku których uzyskano liczne uogólnienia tego twierdzenia. Wspomnijmy tutaj, dla przykładu, prace [8], [9], [15], [17], [21], [25], [34], [45]. Nie można w tym miejscu nie wspomnieć o zamieszczeniu twierdzenia Picka w słynnej książce pt. *Proofs from THE BOOK* [1].

Zagadnienia związane z pojęciem punktu kratowego są bardzo liczne i bardzo różnorodne. Obejmują one problemy, które można rozwiązać przy użyciu nieskomplikowanych, lecz pomysłowych metod matematyki elementarnej [25], [41]. Wiele takich problemów zostało zebranych przez bardzo znanych autorów takich jak Hadwiger, Debrunner i Klee w książce pt. *Combinatorial Geometry in the Plane* [16]. Są także takie problemy dotyczące punktów kratowych, które wymagają zastosowania bardzo wyrafinowanych metod różnych działów matematyki [12], [14], [23], [26]. Monografia [11] autorstwa Erdösa, Grubera i Hammera przedstawia przekrój znanych wyników oraz nierozwiązanych problemów.

Ważnym rozdziałem w poznawaniu kraty kwadratowej są badania kombinatorycznych własności wypukłych wielokątów kratowych, przez co głównie rozumie się znajdowanie relacji zachodzących pomiędzy różnymi parametrami opisującymi wielokąty kratowe. Szczególne miejsce w tych badaniach zajmują relacje pomiędzy takimi parametrami opisującymi wielokąty kratowe jak: liczby wewnętrznych i brzegowych punktów kratowych oraz liczba wierzchołków wielokąta. Jeśli ustalimy jeden z dwóch pierwszych parametrów, to w przypadku wypukłych wielokątów kratowych wartość drugiego będzie ograniczona.

Pojawiają się zatem interesujące pytania, jakie są te ograniczenia. Dodajmy, że bez narzuconego warunku wypukłości parametry te mogą osiągać dowolne wartości.

Można uznać, że nurt ten został zapoczątkowany przez Ehrharta [10], który w 1955 r. pokazał między innymi, że każdy wypukły wielokąt kratowy, który ma co najmniej pięć wierzchołków musi zawierać wewnętrzny punkt kratowy. Następnie, wyniki tego typu były uzyskane w wielu pracach innych autorów: [2], [6], [30], [31], [32], [33], [37], [42], [46], [47].

Bardziej systematyczne badania w tym zakresie przeprowadzili Scott i Rabinowitz. W pracach [37], [38] Scott uzyskał zależności pomiędzy dwoma parametrami dla różnych klas wielokątów. Między innymi w pracy [37] podał oszacowanie liczby brzegowych punktów kratowych wypukłego wielokąta kratowego z co najmniej jednym wewnętrznym punktem kratowym. Mniej więcej w tym samym czasie, podobnym zagadnieniem, lecz sformułowanym w terminologii pewnej gry na płaszczyźnie, interesował się Coleman [6]. W przypadku trójkątów uzyskał on takie samo ograniczenie jak Scott. Po przeanalizowaniu szeregu przykładów Coleman sformułował hipotetyczne oszacowanie liczby brzegowych punktów kratowych w wypukłym wielokącie w zależności od liczby wierzchołków i wewnętrznych punktów kratowych tego wielokąta.

Podobne zagadnienia były następnie badane przez Rabinowitza [30], [31], [32], [33]. Uzyskał on szereg interesujących rezultatów oraz – w rezultacie dość intensywnego komputerowego przeszukiwania wypukłych wielokątów kratowych o żądanych parametrach – poczynił szereg obserwacji. Na bazie zdobytych w ten sposób doświadczeń sformułował wiele ciekawych hipotez, którymi tutaj się zajmujemy.

Niniejsza rozprawa ma na celu zbadanie niektórych kombinatorycznych własności wypukłych wielokątów kratowych. Badamy wzajemne relacje zachodzące pomiędzy liczbami: wierzchołków, punktów kratowych na brzegu i we wnętrzu wypukłego wielokąta kratowego.

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów, z których pierwszy ma charakter wstępny. Podajemy tu stosowane w pracy oznaczenia, podstawowe pojęcia oraz gromadzimy te znane wyniki, które mają zastosowanie w kolejnych rozdziałach pracy.

Drugi rozdział przedstawia pełną klasyfikację wypukłych wielokątów kratowych z jednym wewnętrznym punktem kratowym. Uzupełniamy opublikowane przez Rabinowitza [31] zestawienie wypukłych wielokątów kratowych z jednym wewnętrznym punktem

kratowym. Okazuje się, że pełny zbiór takich wielokątów nie składa się z 15, jak podał Rabinowitz, lecz z 16 klas równoważnych wielokątów. Wynik tego rozdziału został opublikowany w pracy [28].

W rozdziale trzecim przytaczamy definicję i najważniejsze własności otoczki wewnętrznej wypukłego wielokąta kratowego. W drugiej części tego rozdziału wprowadzamy nowe pojęcie otoczki zewnętrznej wypukłego wielokąta kratowego oraz badamy jej własności. Otoczka wewnętrzna i zewnętrzna są podstawowymi narzędziami wykorzystywanymi w obu następnych rozdziałach rozprawy.

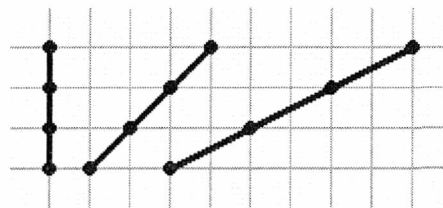
W wyniku komputerowego przeszukiwania wypukłych wielokątów kratowych o zadanych liczbach wierzchołków i wewnętrznych punktów kratowych Rabinowitz [32] zaobserwował wiele związków, które sformułował jako hipotezy. W rozdziale czwartym podajemy dowody kilku z nich. W przypadku jednej z tych hipotez udało się udowodnić wynik lepszy od przewidywanego. Metoda użyta do dowodzenia hipotez została zastosowana do podania krótkich dowodów kilku znanych wyników. Podczas przeszukiwania komputerowego ujawniło się również kilka zaskakujących własności, które Rabinowitz nazwał anomaliami. W ostatniej części tego rozdziału wzmacniamy tezy twierdzeń przez pokazanie, że zaobserwowane anomalie są jedyne. Rozdział ten jest rozszerzeniem przyjętej do druku w *Ars Combinatoria* pracy [22].

Ostatni rozdział przedstawia dowód (nieomal trzydziestoletniej) hipotezy Colemana [6], [41] dotyczącej relacji pomiędzy liczbami wierzchołków, punktów kratowych na brzegu i wewnątrz wypukłego wielokąta kratowego zawierającego wewnętrzne punkty kratowe. Podajemy tam również wszystkie wypukłe wielokąty kratowe, dla których hipotetycznego oszacowania liczby brzegowych punktów kratowych nie można poprawić.

Pracę kończy bibliografia cytowanych pozycji. Skróty nazw czasopism pochodzą ze strony <http://www.ams.org/msnhtml/serials.pdf>.

1.2. Podstawowe pojęcia, definicje, najważniejsze wyniki.

Punkt kratowy na płaszczyźnie R^2 to punkt o obu współrzędnych całkowitych. Zbiór wszystkich punktów kratowych nazywamy *kratą kwadratową* i oznaczamy ją przez Z^2 . Jeśli odcinek ma końce w punktach kratowych, to nazywamy go *odcinkiem kratowym*. Mówimy, że odcinek kratowy u ma *długość kratową* k , jeśli $u \cap Z^2$ składa się z $k+1$ punktów kratowych. Rysunek 1.1 przedstawia odcinki o długości kratowej 3.

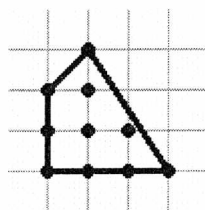


Rysunek 1.1

Każda prosta przechodząca przez dwa punkty kratowe nazywana będzie *prostą kratową*. Przez *wielokąt kratowy* rozumiemy prosty wielokąt, którego wierzchołki leżą w punktach kratowych. Wielokąt jest *prosty*, jeśli jego krawędzie nie przecinają się. Wypukły wielokąt o n wierzchołkach będziemy nazywać *n -kątem*. Zbiór wszystkich n -kątników oznaczamy przez $\mathcal{P}_n$.

Niech P będzie wielokątem kratowym, wtedy przez $v = v(P)$ oznaczać będziemy liczbę wierzchołków wielokąta P , przez $b = b(P)$ liczbę brzegowych punktów kratowych, a przez $g = g(P)$ liczbę wewnętrznych punktów kratowych tego wielokąta. Sumę wewnętrznych i brzegowych punktów kratowych, $g(P) + b(P)$, oznaczamy przez $G = G(P)$, a przez $A = A(P)$ pole powierzchni wielokąta kratowego. Mówimy, że wielokąt kratowy P jest *chudy*, jeśli jedynymi brzegowymi punktami kratowymi tego wielokąta są jego wierzchołki, czyli jeśli $v(P) = b(P)$. Jeśli chudy trójkąt kratowy nie zawiera wewnętrznych punktów kratowych, to nazywamy go *trójkątem prymitywnym*.

Rysunek 1.2 przedstawia czworokąt kratowy na płaszczyźnie, który ma $b = 7$ brzegowych punktów kratowych, $g = 3$ wewnętrznych punktów kratowych oraz $G = 10$ wszystkich punktów kratowych. Długości kratowe boków tego wielokąta to 3-2-1-1. Z rysunku widać, że liczba brzegowych punktów kratowych jest równa sumie długości kratowych wszystkich boków wielokąta.



Rysunek 1.2

W kilku miejscach rozprawy korzystać będziemy z następującego słynnego twierdzenia Picka [29] z 1899 roku :

Twierdzenie 1.1. *Niech P będzie prostym wielokątem kratowym, który zawiera b brzegowych i g wewnętrznych punktów kratowych. Wtedy jego pole A wyraża się następującym wzorem:*

$$A = \frac{1}{2}b + g - 1.$$

W przypadku wielokąta z rysunku 1.2, zgodnie z twierdzeniem Picka, jego pole wynosi $A = 5,5$.

Ważną rolę w tej rozprawie odgrywają przekształcenia liniowe. Przypomnijmy zatem kilka podstawowych definicji różnego rodzaju przekształceń liniowych wykorzystywanych w tej pracy. *Przekształcenie afiniczne*, to przekształcenie liniowe wraz z przesunięciem. *Przekształcenie unimodularne*, to przekształcenie, które zachowuje pole. Jeśli elementy macierzy reprezentującej przekształcenie unimodularne są liczbami całkowitymi, to takie przekształcenie nazywamy *całkowitoliczbowym*. Całkowitoliczbowe unimodularne przekształcenie ma taką własność, że zachowuje wypukłość wielokątów kratowych oraz liczbę punktów kratowych w zbiorze, z czego wynika, w szczególności, że długość kratowa jest jego niezmiennikiem.

Całkowitoliczbowe unimodularne przekształcenie afiniczne wyraża się następującym wzorem:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

gdzie a, b, c, d, e i f są liczbami całkowitymi oraz $|ad - bc| = 1$.

Dwa wielokąty kratowe nazywamy *równoważnymi*, jeśli jeden da się przekształcić w drugi za pomocą całkowitoliczbowego unimodularnego przekształcenia afinicznego. W szczególności dwa wielokąty są równoważne, jeśli jeden da się przekształcić w drugi za pomocą ściągnięcia względem prostej l . Ściągnięciem względem prostej l nazywamy całkowitoliczbowe unimodularne przekształcenie, które pozostawia punkty na prostej l niezmienione. Przykładowo, ściągnięcie względem osi OX wyraża się w następujący sposób:

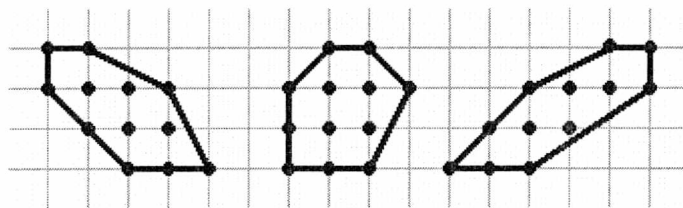
$$x' = x + ky$$

$$y' = y,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą nazywaną *skalą ściągnięcia*. Jeśli $k = 1$, to ściągnięcie nazywamy *jednostkowym*. Ściągnięcie względem osi OX można także zapisać w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rysunek 1.3 przedstawia trzy równoważne wielokąty kratowe. W celu sprawdzenia ich równoważności wystarczy zastosować ściągnięcie względem osi OX o odpowiedniej skali.



Rysunek 1.3

W dalszej części rozprawy korzystać będziemy z następujących lematów udowodnionych w [31].

Lemat 1.2. Niech K i K' będą wielokątami kratowymi z odpowiednio b i b' brzegowymi punktami kratowymi, g i g' wewnętrznymi punktami kratowymi i polami A i A' . Jeśli τ jest całkowitoliczbowym unimodularnym przekształceniem takim, że $\tau(K) = K'$, to wtedy $b = b'$, $g = g'$ i $A = A'$.

Dowolny wielokąt można przekształcić tak, aby jeden jego bok znajdował się na osi OX z wierzchołkiem w początku układu współrzędnych bez zmiany wartości jego parametrów b , g i A .

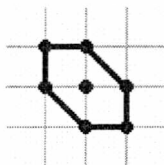
Lemat 1.3. *Niech A będzie punktem kratowym o współrzędnych (a,b) i niech d będzie długością kratową odcinka OA . Wtedy istnieje całkowitoliczbowe unimodularne przekształcenie, które odwzorowuje punkt $A(a,b)$ w punkt o współrzędnych $(d,0)$.*

Podamy teraz kilka faktów, do których często będziemy się odnosić w dalszej części rozprawy. Pierwszy z nich udowodniony był przez francuskiego matematyka Ehrharta [10].

Twierdzenie 1.4. *Niech K będzie wypukłym wielokątem kratowym. Jeśli $v(K) \geq 5$, to wielokąt K musi zawierać co najmniej jeden wewnętrzny punkt kratowy.*

Kolejne twierdzenia udowodnił Arkininstall [1].

Twierdzenie 1.5. *Niech K będzie wypukłym sześciokątem kratowym zawierającym dokładnie jeden wewnętrzny punkt kratowy. Wtedy K jest wielokątem równoważnym z następującym centralnie symetrycznym sześciokątem:*



Rysunek 1.4

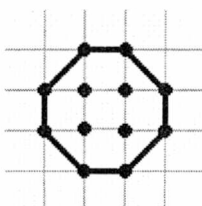
Twierdzenie 1.6. *Niech K będzie wypukłym sześciokątem kratowym. Jeśli co najmniej jeden z boków K zawiera punkt kratowy w swoim relatywnym wnętrzu, to K zawiera co najmniej dwa wewnętrzne punkty kratowe.*

Dwa twierdzenia z [32] sformułujemy łącznie w następujący sposób:

Twierdzenie 1.7. *Wypukły siedmiokąt kratowy zawiera co najmniej 4 niewspółliniowe wewnętrzne punkty kratowe.*

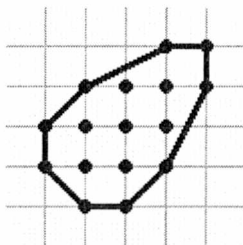
Poniższe fakty pochodzą z pracy [32].

Twierdzenie 1.8. *Niech K będzie wypukłym ośmiokątem kratowym zawierającym dokładnie cztery wewnętrzne punkty kratowe. Wtedy K jest wielokątem równoważnym z następującym centralnie symetrycznym ośmiokątem:*



Rysunek 1.5

Twierdzenie 1.9. *Niech K będzie wypukłym wielokątem kratowym. Jeśli $v(K) = 9$, to $g(K) \geq 7$. Jeśli $g(K) = 7$, to K jest równoważny z następującym dziewięciokątem:*



Rysunek 1.6

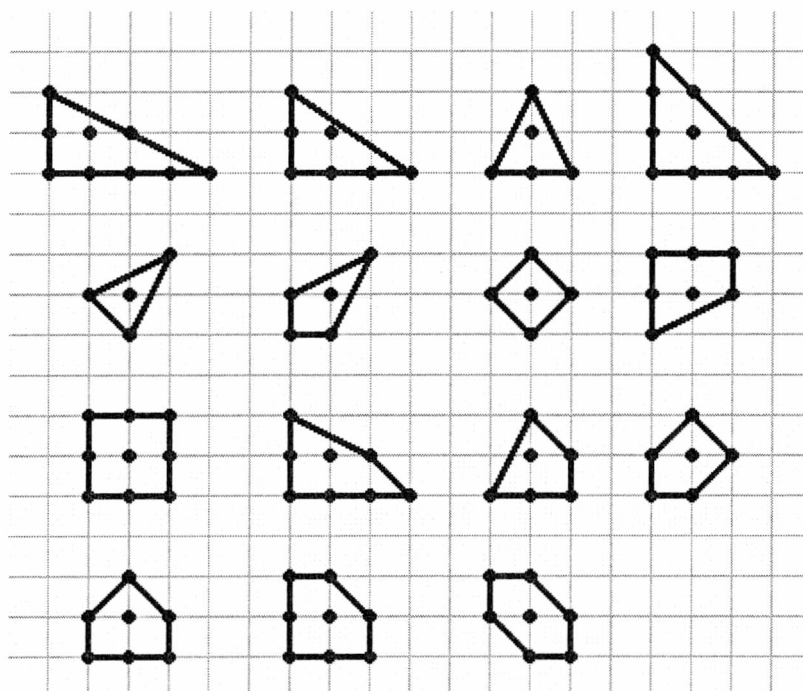
Twierdzenie 1.10. *Jeśli K jest wypukłym dziesięciokątem kratowym, to $g(K) \geq 10$.*

Rozdział 2

Wypukłe wielokąty kratowe zawierające jeden wewnętrzny punkt kratowy

Arkinstall [1] pokazał (twierdzenie 1.5), że istnieje tylko jeden (z dokładnością do równoważności) wypukły sześciokąt kratowy zawierający jeden wewnętrzny punkt kratowy. Okazuje się, że w wielu zagadnieniach, dotyczących płaskich wypukłych zbiorów z ograniczeniami kratowymi (patrz np. [19], [20], [39], [40]), przydatna jest znajomość wypukłych wielokątów kratowych o określonej liczbie wewnętrznych punktów kratowych; w szczególności zawierających jeden wewnętrzny punkt kratowy.

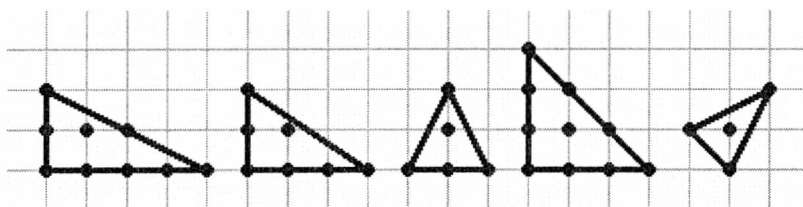
Motywowany takimi potrzebami oraz inspirowany wynikiem Arkinstalla, Rabinowitz [31] opublikował artykuł pt. „*A census of convex lattice polygons with at most one interior lattice point*”, którego celem było m.in. podanie wszystkich (z dokładnością do równoważności) wypukłych wielokątów kratowych z jednym wewnętrznym punktem kratowym. Autor podał piętnaście klas takich wielokątów reprezentowanych przez wielokąty przedstawione poniżej:



Rysunek 2.1

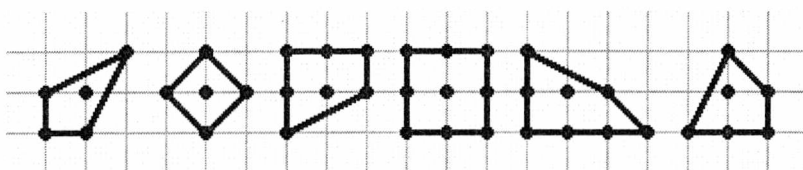
Swój wynik uzyskał dowodząc następujących twierdzeń:

Twierdzenie 2.1. *Jeśli K jest trójkątem kratowym z jednym wewnętrznym punktem kratowym, to K jest równoważny z jednym z następujących wielokątów:*



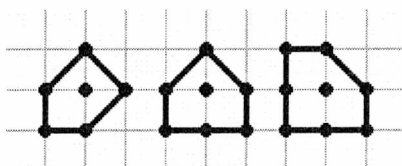
Rysunek 2.2

Twierdzenie 2.2. *Jeśli K jest wypukłym czworokątem kratowym z jednym wewnętrznym punktem kratowym, to K jest równoważny z jednym z następujących wielokątów:*



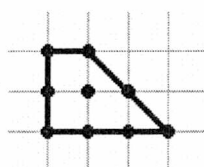
Rysunek 2.3

Twierdzenie 2.3. *Jeśli K jest wypukłym pięciokątem kratowym z jednym wewnętrznym punktem kratowym, to K jest równoważny z jednym z następujących wielokątów:*



Rysunek 2.4

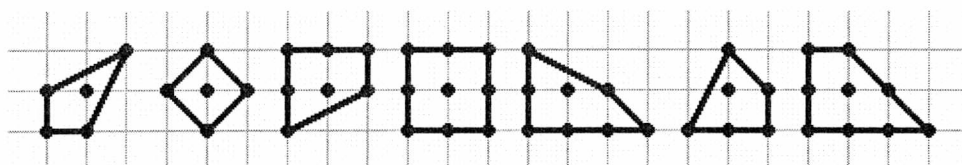
Jednak zestawienie czworokątów z twierdzenia 2.2 okazało się niekompletne. Udowodnimy, że jedynym brakującym wielokątem jest następujący wypukły czworokąt kratowy:



Rysunek 2.5

Oryginalny dowód twierdzenia 2.2 przebiega w dwóch częściach. W pierwszej części autor rozpatruje czworokąty, w których wewnętrzny punkt kratowy znajduje się na przekątnej, a w drugiej czworokąty, w których wewnętrzny punkt kratowy nie leży na przekątnej. Luka w rozumowaniu Rabinowitza powstała w drugiej części dowodu. Po uzupełnieniu tej luki otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.2.' *Jeśli K jest wypukłym czworokątem kratowym z jednym wewnętrznym punktem kratowym, to K jest równoważny z jednym z następujących wielokątów:*



Rysunek 2.6

Na potrzebę dowodu tego twierdzenia, a także z myślą o rozdziale 4, przytoczymy następujący rezultat z [31].

Twierdzenie 2.4. *Jeśli K jest wypukłym wielokątem kratowym bez wewnętrznych punktów kratowych, to K jest równoważny z jednym z następujących wielokątów:*

- *z trójkątem o wierzchołkach w punktach $(0,0)$, $(2,0)$ i $(0,2)$,*
- *z trójkątem o wierzchołkach w punktach $(0,0)$, $(p,0)$ i $(0,1)$,*
- *z trapezem o wierzchołkach w punktach $(0,0)$, $(p,0)$, $(0,1)$ i $(q,1)$, gdzie p i q są dowolnymi liczbami całkowitymi.*

Dowód twierdzenia 2.2.' W przypadku czworokątów, w których jedyny wewnętrzny punkt kratowy leży na przekątnej dowód jest taki sam jak w [31]. Z tej części dowodu wynika istnienie pierwszych czterech czworokątów z twierdzenia 2.2'. Natomiast w przypadku czworokątów, w których wewnętrzny punkt kratowy nie leży na przekątnej powtórzmy część dowodu z [31] i uzupełnimy go o fragment, który prowadzi do brakującej klasy czworokątów.

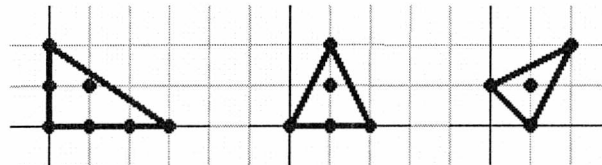
Niech $ABCD$ będzie wypukłym czworokątem kratowym i niech E oznacza wewnętrzny punkt kratowy tego czworokąta. Przyjmujemy, że E nie leży na przekątnej wielokąta $ABCD$. Bez straty ogólności można założyć, że E leży wewnątrz trójkąta ABC . Trójkąt ABC zawiera dokładnie jeden wewnętrzny punkt kratowy i dlatego musi być równoważny z jednym z pięciu trójkątów podanych w twierdzeniu 2.1.

Wobec przyjętego założenia, że przekątna AC nie zawiera żadnych wewnętrznych punktów kratowych, co najmniej jeden bok trójkąta ABC musi mieć długość kratową 1. Ten warunek wyklucza pierwszy i czwarty trójkąt z twierdzenia 2.1, gdyż każdy z boków tych dwóch trójkątów ma długość kratową większą niż 1. Rozpatrzmy teraz trzy przypadki, gdy trójkąt ABC jest równoważny z jednym z trzech pozostałych trójkątów o następujących długościach kratowych boków: 1-2-3, 1-1-2, 1-1-1.

Na mocy lematu 1.3 w każdym z tych przypadków trójkąt ABC można przekształcić, za pomocą całkowitoliczbowego unimodularnego przekształcenia afinicznego, w taki sposób, aby bok AC o długości kratowej 1 znalazł się na osi OX z punktami $A=(0,0)$ i $C=(1,0)$ i aby wewnętrzny punkt kratowy tego trójkąta miał współrzędne $E=(1,1)$. Wtedy punkt B znajdzie

się powyżej osi OX . Oczywiście takie przekształcenie przeniesie wierzchołek D czworokąta $ABCD$ poniżej osi OX .

W tym celu wszystkie trzy trójkąty umieszczamy w układzie współrzędnych jak na rysunku 2.7.



Rysunek 2.7

Dla każdego z tak umieszczonych trójkątów podamy teraz odpowiednie przekształcenie. W przypadku pierwszego trójkąta, o długościach kratowych boków 1-2-3, możemy zastosować ściągnięcie względem osi OX o skali 2, następnie ściągnięcie względem osi OY o skali -2 oraz ściągnięcie jednostkowe względem osi OX . Po złożeniu tych trzech przekształceń i zastosowaniu przesunięcia o wektor $[3,6]$ otrzymujemy całkowitoliczbowe unimodularne przekształcenie afiniczne o następującym równaniu:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

W przypadku drugiego trójkąta dwa boki mają długość kratową 1. Ze względu na symetrię tego trójkąta nie ma znaczenia, który z nich przyjmiemy za bok AC . Przyjmijmy zatem, że bok AC ma wierzchołki w punktach $A=(2,0)$ i $C=(1,2)$. Wtedy zastosować możemy ściągnięcie jednostkowe względem osi OX , następnie ściągnięcie względem osi OY o skali -2 i ponownie ściągnięcie jednostkowe względem osi OX oraz przesunięcie o wektor $[2,4]$. Zastosowanie tych przekształceń jest równoważne zastosowaniu przekształcenia o równaniu:

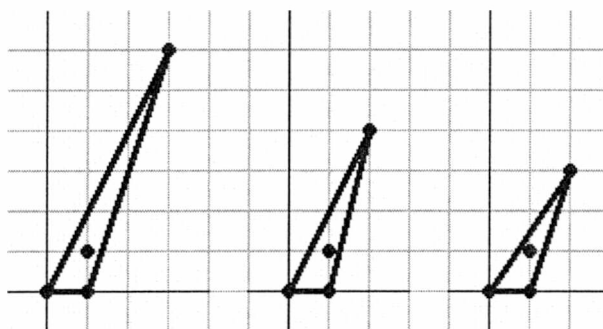
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wszystkie boki trzeciego trójkąta mają długość kratową 1. W przypadku, gdy bok AC ma wierzchołki w punktach $A=(0,1)$ i $C=(1,0)$ wystarczy zastosować ściągnięcie jednostkowe względem osi OY o skali 1 i przesunięcie o wektor $[0,-1]$. W rezultacie otrzymujemy przekształcenie opisane równaniem:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Łatwo pokazać, że ten sam rezultat możemy otrzymać bez względu na to, który z boków trójkąta przyjmiemy za bok AC .

Przy pomocy podanych przekształceń trójkąty z rysunku 2.7 zostały odwzorowane w następujące trzy trójkąty:

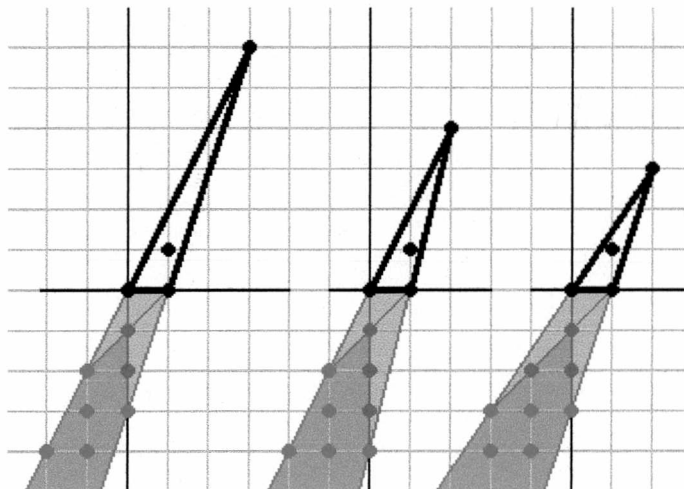


Rysunek 2.8

Położenie wierzchołka D , czworokąta kratowego $ABCD$, jest ograniczone trzema warunkami:

- $ABCD$ nie może się zdegenerować w trójkąt,
- $ABCD$ musi być wielokątem wypukłym,
- trójkąt CDA nie może zawierać żadnych wewnętrznych punktów kratowych.

Rysunek 2.9 ilustruje ograniczenia narzucone na położenie punktu D . Ze względu na pierwsze dwa warunki punkt D musi leżeć we wnętrzu stożka ograniczonego przez proste kratowe zawierające boki AB i BC . Czworokąt $ABCD$ nie może zawierać żadnych dodatkowych wewnętrznych punktów kratowych, a w szczególności nie może zawierać punktu $(0,-1)$. Kolorem niebieskim zaznaczone zostały te punkty kratowe, w których może leżeć wierzchołek D .



Rysunek 2.9

W ten sposób otrzymujemy osiem wypukłych czworokątów kratowych, których wierzchołki mają następujące współrzędne:

1. $(0,0), (3,6), (1,0), (0,-1),$
2. $(0,0), (3,6), (1,0), (0,-2),$
3. $(0,0), (2,4), (1,0), (0,-1),$
4. $(0,0), (2,4), (1,0), (0,-2),$
5. $(0,0), (2,4), (1,0), (0,-3),$
6. $(0,0), (2,3), (1,0), (0,-1),$
7. $(0,0), (2,4), (1,0), (0,-2),$
8. $(0,0), (2,4), (1,0), (-1,-2).$

Na początek pokażemy, że dwa spośród tych ośmiu czworokątów są równoważne z czworokątami zawierającymi wewnętrzny punkt kratowy na przekątnej. Wielokąt w przypadku 4 oraz wielokąt w przypadku 6 są równoważne odpowiednio z trzecim i pierwszym czworokątem z rysunku 2.3, co łatwo sprawdzić stosując przekształcenia o następujących równaniach:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zastosowanie przekształceń o równaniach:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

pokazuje, że wielokąt w przypadkach 1 i 5 są równoważne z piątym czworokątem z rysunku 2.3. Następnie wielokąty w przypadkach 3, 7 i 8 są równoważne z szóstym czworokątem z rysunku 2.3, co widać po zastosowaniu odpowiednio trzech następujących przekształceń:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Na koniec pokażemy, że wielokąt w przypadku 2 nie jest równoważny z żadnym z czworokątów z rysunku 2.3. Po zastosowaniu przekształcenia o równaniu:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy z niego siódmy brakujący czworokąt z rysunku 2.6.

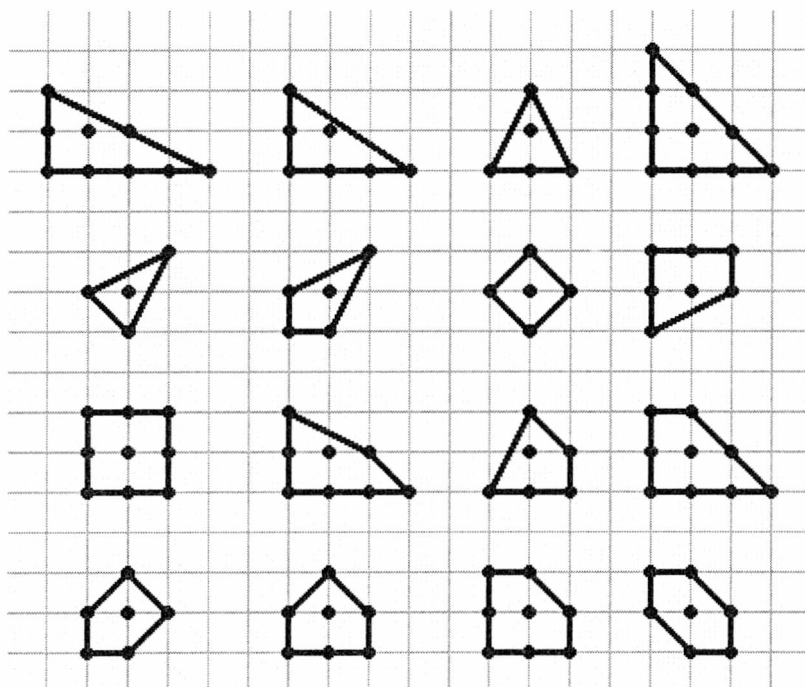
Najprostszym sposobem na pokazanie, że siódmy czworokąt z rysunku 2.6 nie jest równoważny z żadnym z czworokątów wskazanych przez Rabinowitza, jest porównanie długości kratowych ich boków, które są niezmiennikiem całkowitoliczbowego unimodularnego przekształcenia afinicznego. Sześć nierównoważnych czworokątów z twierdzenia 2.2 ma boki o następujących długościach kratowych: 1-1-1-1, 1-1-1-1, 1-1-2-2, 2-2-2-2, 1-1-2-3, 1-1-1-2, natomiast brakujący czworokąt o długościach boków 1-2-3-2 jako jedyny ma jeden bok o długości kratowej 3 i dwa boki o długości kratowej 2. $\square$

W dowodzie twierdzenia 2.3 Rabinowitz korzysta z charakteryzacji wypukłych czworokątów kratowych z jednym wewnętrznym punktem kratowym uzyskanej w twierdzeniu 2.2. Łatwo sprawdzić, że uwzględnienie brakującego czworokąta nie prowadzi do uzyskania nowych pięciokątów kratowych z jednym wewnętrznym punktem kratowym.

Twierdzenie 1.5 orzeka, że z dokładnością do równoważności istnieje tylko jeden wypukły sześciokąt kratowy z jednym wewnętrznym punktem kratowym. Z kolei wobec twierdzenia 1.7 nie istnieje wypukły siedmiokąt kratowy z jednym wewnętrznym punktem kratowym. Wynika stąd, że dla $v \geq 7$ nie istnieje v -kąt zawierający dokładnie jeden wewnętrzny punkt kratowy.

Po uzupełnieniu luki związanej z pominięciem jednej klasy wypukłych wielokątów kratowych z jednym wewnętrznym punktem kratowym sformułować można następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.5. *Jeśli K jest wypukłym wielokątem kratowym z jednym wewnętrznym punktem kratowym, to K jest równoważny z jednym z następujących szesnastu wielokątów:*



Rysunek 2.10

Rozdział 3

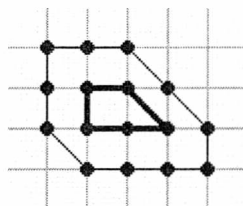
Otoczka wewnętrzna i zewnętrzna

3.1 Otoczka wewnętrzna

W badaniu kombinatorycznych własności wypukłych wielokątów kratowych często korzystać będziemy z pojęcia *otoczki wewnętrznej* wprowadzonej przez Rabinowitza w pracy [32]. Przytoczymy tutaj jej definicję i kilka wykorzystywanych własności.

Definicja 3.1. *Otoczką wewnętrzną wypukłego wielokąta kratowego K nazywamy wypukłą otoczkę jego wewnętrznych punktów kratowych i oznaczamy ją przez $H(K)$ lub H .*

Oczywiście otoczka wewnętrzna $H(K)$ jest największym wypukłym zbiorem kratowym zawartym w K . $H(K)$ może być wielokątem, punktem lub nawet zbiorem pustym. Rysunek 3.1 przedstawia przykład wielokąta kratowego i jego otoczki wewnętrznej.



Rysunek 3.1

Niech H będzie otoczką wewnętrzną wypukłego wielokąta kratowego K , a u jego bokiem. Przez $l(u)$ oznaczać będziemy prostą kratową zawierającą bok u , a przez $h(u)$ oznaczać będziemy otwartą półpłaszczyznę ograniczoną prostą $l(u)$, zewnętrzną do wielokąta H . Oczywiście w każdej półpłaszczyźnie $h(u)$, dla $u \subset \partial H$, znajdować się musi co najmniej jeden wierzchołek wielokąta K . Następujące dwa twierdzenia z [32] podają kolejne ograniczenia na położenie wierzchołków K .

Twierdzenie 3.2. *Niech K będzie wypukłym wielokątem kratowym, a H jego otoczką wewnętrzną. Jeśli u jest bokiem H , to $h(u)$ zawiera co najwyżej dwa wierzchołki wielokąta K .*

Twierdzenie 3.3. *Niech K będzie wypukłym wielokątem kratowym, a u bokiem jego otoczki wewnętrznej H . Jeśli $h(u)$ zawiera dwa wierzchołki wielokąta K , to odcinek jaki one tworzą jest równoległy do u .*

Na koniec przytoczymy następujące dwa bardzo często wykorzystywane fakty.

Twierdzenie 3.4. *Niech K będzie wypukłym wielokątem kratowym, a H jego otoczką wewnętrzną. Jeśli $v(K) \geq 7$, to $v(H) \geq \left\lceil \frac{1}{2} v(K) \right\rceil$.*

Twierdzenie 3.5. *Niech K będzie wypukłym wielokątem kratowym, a H jego otoczką wewnętrzną. Jeśli $v(K) \geq 9$, to $b(H) \geq \left\lceil \frac{2}{3} v(K) \right\rceil$.*

3.2 Otoczka zewnętrzna

Jeśli dany jest wypukły wielokąt kratowy K , to z łatwością znajdziemy jego otoczkę wewnętrzną. Pojawia się naturalne pytanie: Co można powiedzieć o wypukłym wielokącie kratowym, jeśli dana jest jego otoczka wewnętrzna? W szczególności, co można powiedzieć o

położeniu jego wierzchołków? W tym rozdziale postaramy się odpowiedzieć na to pytanie. Z zaobserwowanych tutaj własności będziemy korzystać w kolejnych rozdziałach rozprawy.

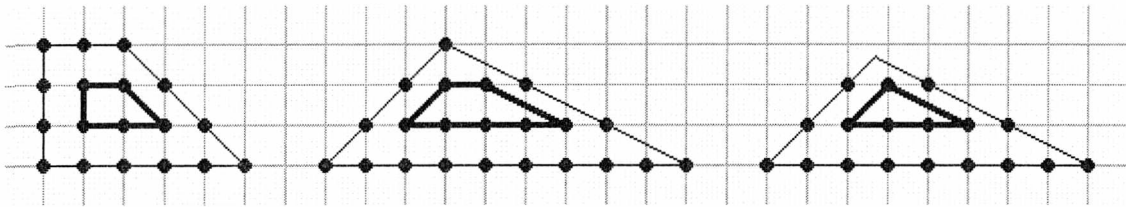
Niech H będzie wypukłym wielokątem kratowym, a u jego bokiem. Wprowadźmy następujące oznaczenia. Przez $g(u)$ oznaczać będziemy otwartą półpłaszczyznę zawartą w $h(u)$, ograniczoną prostą kratową najbliższą do boku u i równoległą do niego. Tę prostą ograniczającą oznaczać będziemy przez $l_g(u)$, a dopełnienie półpłaszczyzny $g(u)$ w R^2 oznaczać będziemy przez $g^c(u)$.

Definicja 3.6. Przez otoczkę zewnętrzną wypukłego wielokąta kratowego H rozumiemy zbiór

$$O(H) = \bigcap \{g^c(u) : u \subset \partial H\}.$$

Z definicji tej wynika natychmiast, że otoczka zewnętrzna jest domkniętym wypukłym obszarem ograniczonym wszystkimi prostymi kratowymi $l_g(u)$ dla $u \subset \partial H$.

Rysunek 3.2 przedstawia przykłady wypukłych wielokątów kratowych oraz ich otoczki zewnętrznych. Zauważmy, że otoczka zewnętrzna wypukłego wielokąta kratowego może nie być wielokątem kratowym. Z definicji 3.7 wynika, że zawsze mamy $v(O(H)) \leq v(H)$, a poniższy rysunek ilustruje, że możliwa jest nierówność $v(O(H)) < v(H)$.

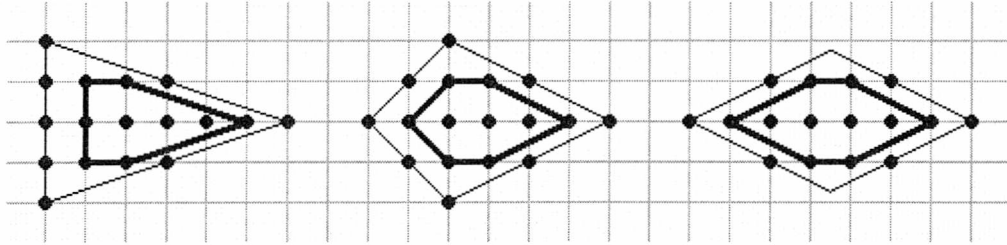


Rysunek 3.2

Definicja 3.7. Niech H będzie wypukłym wielokątem kratowym, a u_0 jego bokiem. Półpłaszczyznę $g(u_0)$ nazywamy pomijalną względem wielokąta H , jeśli

$$O(H) = \bigcap \{g^c(u) : u \subset \partial H\} = \bigcap \{g^c(u) : u \subset \partial H \setminus u_0\}.$$

Zauważmy, że $v(O(H)) = v(H)$ wtedy i tylko wtedy, gdy żadna półpłaszczyzna nie jest pomijalna względem H . Rysunek 3.3 pokazuje przykłady wielokątów kratowych wraz z ich otoczkami zewnętrznymi. Łatwo zauważyć, że dla każdego z tych wielokątów istnieją dwie półpłaszczyzny pomijalne.



Rysunek 3.3

W dowodzie kolejnego twierdzenia wykorzystamy następujący prosty lemat.

Lemat 3.8. *Niech H będzie wypukłym wielokątem kratowym. Punkt $X \in \text{int}\{O(H) \setminus H\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bok $u_0 \subset \partial H$ taki, że $X \in \text{int}\{h(u_0) \cap g^c(u_0)\}$.*

Dowód. Oczywiście mamy $R^2 \setminus H = \bigcup \{h(u) : u \subset \partial H\}$. Z tego wynika, że punkt leży poza wielokątem H wtedy i tylko wtedy, gdy należy do pewnej otwartej półpłaszczyzny $h(u_0)$ dla $u_0 \subset \partial H$. Z drugiej strony, wobec definicji 3.6, punkt leży we wnętrzu $O(H)$ wtedy i tylko wtedy, gdy leży we wnętrzach wszystkich półpłaszczyzn $g^c(u)$ dla $u \subset \partial H$.

□

Niech H będzie otoczką wewnętrzną wypukłego wielokąta kratowego K . Z twierdzenia 3.3 wynika, że w każdej półpłaszczyźnie $h(u)$, dla $u \subset \partial H$, znajdować się może jeden lub dwa wierzchołki wielokąta K . Na mocy twierdzenia 3.4 wiemy, że w przypadku gdy są to dwa wierzchołki, odcinek przez nie utworzony jest równoległy do odpowiedniego boku wielokąta H . Te dwa fakty nakładają istotne ograniczenia na położenie wierzchołków wielokąta K .

Twierdzenie 3.9. *Niech H będzie otoczką wewnętrzną wypukłego wielokąta kratowego K . Wtedy wierzchołki wielokąta K znajdują się na brzegu otoczki zewnętrznej $O(H)$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że wierzchołek wielokąta kratowego K nie może leżeć we wnętrzu $O(H)$. Gdyby bowiem istniał taki wierzchołek $X \in \text{int}\{O(H) \setminus H\}$, to z lematu 3.9 wynika, że $X \in \text{int}\{h(u_0) \cap g^c(u_0)\}$ dla pewnego $u_0 \subset \partial H$. Mielibyśmy wtedy punkt kratowy pomiędzy prostymi $l(u_0)$ i $l_g(u_0)$, a zatem $l_g(u_0)$ nie byłaby najbliższą prostą kratową równoległą do $l(u_0)$.

Pokażemy teraz, że żaden wierzchołek wielokąta K nie może leżeć poza $O(H)$. Istotnie, gdyby istniał wierzchołek $X \notin O(H)$, to $X \in g(u_0)$ dla pewnego $u_0 \subset \partial H$. Oznaczmy końce boku u_0 przez A i B , a przez m jego długość kratową.

Oczywiście trójkąt ABX nie może mieć żadnych wewnętrznych punktów kratowych. Gdyby bowiem istniał punkt kratowy Y leżący we wnętrzu tego trójkąta to wielokąt $\text{conv}(H \cup \{Y\})$ byłby większym niż H wypukłym wielokątem kratowym zawartym w wielokącie K , co nie może mieć miejsca. Podobne rozumowanie wyklucza możliwość istnienia punktu kratowego na odcinkach AX i BX . Wynika stąd, że $g(ABX) = 0$ oraz $b(ABX) = m + 2$.

Weźmy teraz dowolny punkt kratowy C leżący na prostej $l_g(u_0)$. Rozumując podobnie jak w przypadku trójkąta ABX zauważamy, że trójkąt ABC również ma $m + 2$ brzegowych punktów kratowych oraz nie ma wewnętrznych punktów kratowych. Zastosowanie twierdzenia Picka do obu trójkątów daje jednakowe pola, podczas gdy pola te nie mogą być równe, ponieważ te dwa trójkąty mają wspólną podstawę lecz różne wysokości. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

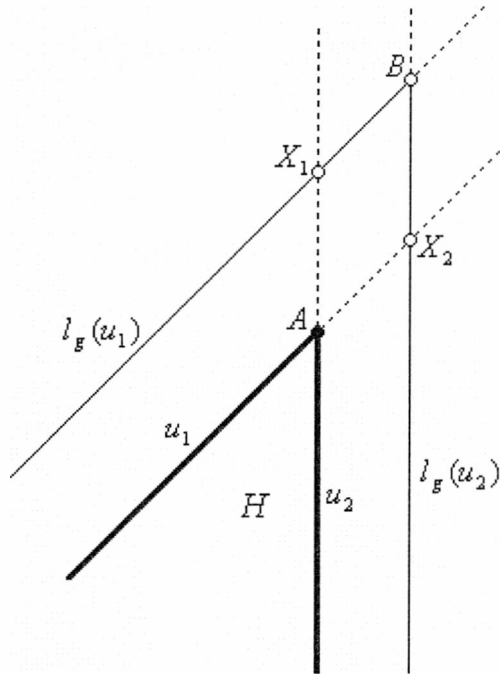
Twierdzenie 3.10. *Niech $O(H)$ będzie otoczką zewnętrzną wypukłego wielokąta kratowego H . Wielokąt H jest otoczką wewnętrzną pewnego wypukłego wielokąta kratowego K wtedy i tylko wtedy, gdy $O(H)$ jest wielokątem kratowym.*

Dowód. Jeśli $O(H)$ jest wielokątem kratowym, to dla $K = O(H)$, wielokąt H jest oczywiście otoczką wewnętrzną wielokąta K .

Dla dowodu implikacji w drugą stronę przyjmijmy, że H jest otoczką wewnętrzną wypukłego wielokąta kratowego K , a $O(H)$ nie jest wielokątem kratowym. Wtedy co

najmniej jeden jego wierzchołek nie jest punktem kratowym, oznaczmy go przez B . Na mocy twierdzenia 3.10 wielokąt K jest podzbiorem $O(H)$. Oznacza to, że aby z $O(H)$ uzyskać wielokąt kratowy K , musimy usunąć przynajmniej trójkąt o wierzchołkach w punkcie B i dwóch najbliższych punktach kratowych leżących na bokach $O(H)$ wychodzących z B . Oznaczmy te dwa punkty przez B_1 i B_2 . Oczywiście po takiej operacji zachowany musi być warunek $B_1B_2 \cap H = \emptyset$. Pokażemy, że usunięcie spełniające ten warunek nie jest możliwe.

W tym celu rozpatrzmy dwa przypadki. W pierwszym przypadku żadna z $g(u)$, dla $u \subset \partial H$, nie jest pomijalna względem H . Wtedy $B = l_g(u_1) \cap l_g(u_2)$ dla dwóch sąsiednich boków u_1 i u_2 . Niech $A = u_1 \cap u_2$. Przez X_1 i X_2 oznaczmy, odpowiednio, punkty przecięcia prostych $l_g(u_1)$ i $l(u_2)$ oraz $l_g(u_2)$ i $l(u_1)$.



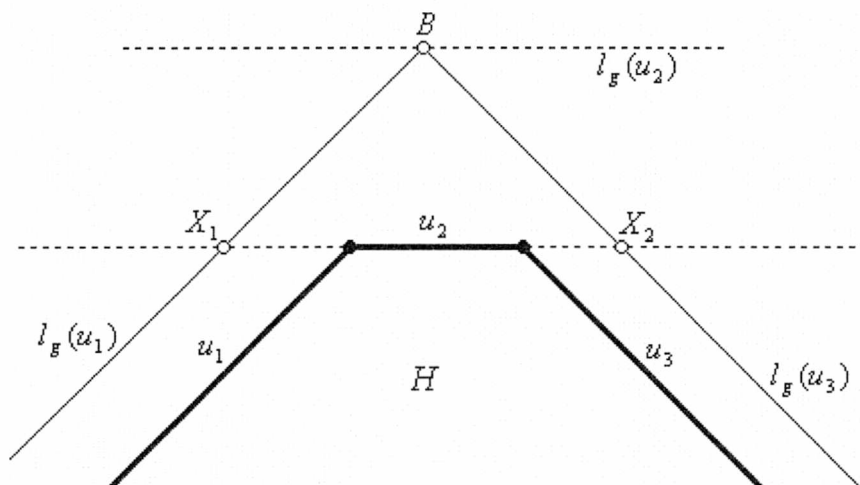
Rysunek 3.4

Zauważmy, że punkt B_1 nie może leżeć w relatywnym wnętrzu odcinka X_1B , gdyż $l_g(u_2)$ nie byłaby prostą kratową najbliższą do $l(u_2)$.

Gdyby B_1 pokrywał się z punktem X_1 , to odległości pomiędzy punktami kratowymi na prostej $l_g(u_2)$ byłyby takie same jak na prostej $l(u_2)$. A zatem na odcinku BX_2 musiałby istnieć punkt kratowy, a co za tym idzie $l_g(u_1)$ nie byłaby prostą kratową najbliższą do $l(u_1)$.

Wynika stąd, że punkt kratowy B_1 musiałby leżeć na brzegu otoczki zewnętrznej poza odcinkiem BX_1 . Podobnie rozumując punkt B_2 musiałby leżeć poza odcinkiem BX_2 . Jednak punkty te muszą być tak położone, aby spełniony był warunek $B_1B_2 \cap H = \emptyset$. To gwarantuje istnienie trójkąta kratowego AB_1B_2 . Widać teraz natychmiast, że $B_1 + \overrightarrow{(B_2 - A)}$ jest punktem kratowym leżącym we wnętrzu czworokąta AB_1BB_2 , co oczywiście nie może mieć miejsca. Otrzymana sprzeczność kończy dowód w tym przypadku.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy istnieje $g(u)$ pomijalna względem H . Niech u_2 będzie bokiem wielokąta H , takim, że $g(u_2)$ jest pomijalna i niech $B = l_g(u_1) \cap l_g(u_3)$. Przez X_1 i X_2 oznaczmy, odpowiednio, punkty przecięcia prostych $l_g(u_1)$ i $l(u_2)$ oraz $l_g(u_3)$ i $l(u_2)$.



Rysunek 3.5

Podobnie jak w poprzednim przypadku punkt B_1 nie może leżeć w relatywnym wnętrzu odcinka X_1B , a punkt B_2 nie może leżeć w relatywnym wnętrzu odcinka X_2B . A zatem nie istnieją takie punkty kratowe B_1 i B_2 , dla których spełniony byłby warunek $B_1B_2 \cap H = \emptyset$. W podobny sposób dowodzimy przypadek, gdy istnieją dwie lub więcej pomijalne półpłaszczyzny $g(u)$ odpowiadające kolejnym bokom wielokąta H .

Założenie, że $O(H)$ nie jest wielokątem kratowym w każdym z tych przypadków prowadzi do sprzeczności. $\square$

Niech H będzie wielokątem kratowym, którego otoczka zewnętrzna $O(H)$ również jest wielokątem kratowym. Oczywiście $O(H)$ jest największym wielokątem kratowym o otoczce wewnętrznej H . Każdy inny wielokąt kratowy, o tej samej otoczce wewnętrznej, można otrzymać, „prycinając” w odpowiedni sposób otoczkę zewnętrzną. Ta obserwacja prowadzi do następującej definicji.

Definicja 3.11. Przez *ścięcie wierzchołka A* , wypukłego wielokąta kratowego K , rozumiemy operację przyporządkowującą wielokątowi K wielokąt $cl(K \setminus \Delta_A)$, gdzie Δ_A jest trójkątem, którego wierzchołkami są A i dwa najbliższe punkty kratowe leżące na bokach wielokąta K wychodzących z A .

Definicja 3.12. Będziemy mówili, że wielokąt K *dopuszcza ścięcie wierzchołka A* , lub że *wierzchołek A może być ścięty*, jeśli $\Delta_A \cap H(K) = \emptyset$.

Zauważmy, że jeśli wielokąt dopuszcza ścięcie wierzchołka A , to trójkąt Δ_A nie może mieć żadnych wewnętrznych punktów kratowych.

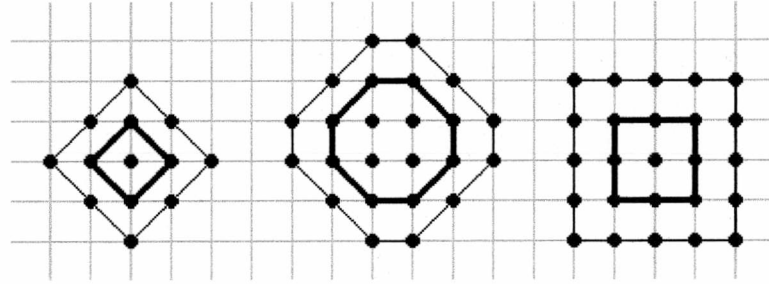
Definicja 3.13. Będziemy mówili, że wielokąt K *dopuszcza ścięcie właściwe wierzchołka A* , jeśli *dopuszcza ścięcie tego wierzchołka i dodatkowo spełniony jest warunek $v(cl(K \setminus \Delta_A)) = v(K) + 1$* . Zamiennie będziemy używali sformułowania, że *wierzchołek A może być ścięty właściwie*.

Łatwa do zaobserwowania jest następująca własność.

Własność 3.14. Niech wielokąt K dopuszcza ścięcie wierzchołka A . Wielokąt K dopuszcza ścięcie właściwe wierzchołka A wtedy i tylko wtedy, gdy pozostałe wierzchołki, A_1 i A_2 , trójkąta Δ_A leżą w relatywnych wnętrzach odpowiednich boków wielokąta K .

Rysunek 3.6 przedstawia trzy wypukłe wielokąty kratowe wraz z ich otoczkami wewnętrznymi. Pierwszy wielokąt nie dopuszcza ścięcia żadnego ze swoich wierzchołków, drugi dopuszcza ścięcie wszystkich wierzchołków, ale nie dopuszcza żadnego ścięcia

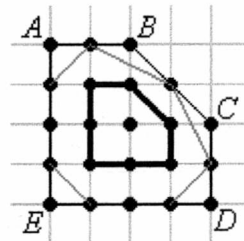
właściwego, natomiast w przypadku trzeciego wielokąta wszystkie cztery wierzchołki można ścinać właściwie.



Rysunek 3.6

Własność 3.15. Niech AB będzie bokiem o długości kratowej 2 w wielokącie kratowym K . Jeśli K dopuszcza ścinanie właściwe wierzchołka A , to $cl(K \setminus \Delta_A)$ nie dopuszcza ścinania właściwego wierzchołka B .

Rysunek 3.7 przedstawia pięciokąt kratowy K wraz z jego otoczką wewnętrzną. Na rysunku tym kolorem czerwonym zaznaczono ścinania właściwe wierzchołków wielokąta K . Oczywiście K dopuszcza ścinanie właściwe każdego ze swoich pięciu wierzchołków. Jednak łatwo zauważyć, że po zastosowaniu wszystkich pięciu ściegów nie uzyskamy dziesięciokąta.



Rysunek 3.7

Jeśli zdecydujemy się jako pierwszy ścinać wierzchołek A , to zgodnie z własnością 3.15 wierzchołek B nie będzie można ścinać właściwie. Wtedy będziemy mogli dokonać ścinania właściwego wierzchołka C lub D i oczywiście wierzchołka E . Jeśli natomiast jako pierwszy zetniemy wierzchołek B , to zgodnie z własnością 3.15 nie będzie można ścinać właściwie wierzchołka A ani wierzchołka C . Wtedy będziemy mogli dokonać ścinania właściwego tylko wierzchołka D i E .

Bez względu na to, który z wierzchołków K zetniemy jako pierwszy, na każdym etapie można ściąć wierzchołek E , ponieważ trójkąt Δ_E nie ma punktów wspólnych z trójkątami biorącymi udział w ścinaniu pozostałych wierzchołków. W przypadku tego pięciokąta maksymalnie można dokonać trzech kolejnych ścięć właściwych.

Rozdział 4

Dowody hipotez Rabinowitza

Rabinowitz [30], [31], [32] prowadził systematyczne badania kombinatorycznych własności wypukłych wielokątów kratowych, interesując się, w szczególności, związkami pomiędzy liczbami wewnętrznymi i brzegowymi punktów kratowych w wypukłych wielokątach kratowych. Udowodnił on wiele zależności zaobserwowanych między innymi w rezultacie intensywnego komputerowego przeszukiwania wielokątów. Niektóre z zaobserwowanych w ten sposób własności sformułował jako hipotezy. W tym rozdziale rozprawy podamy dowody kilku z tych hipotez, a w jednym przypadku otrzymujemy wynik lepszy niż przewidywany przez Rabinowitza. W nawiasach podajemy oryginalne nazwy hipotez z pracy [32].

Niektóre z tych hipotez są ze sobą tak ściśle związane, że udowodnienie jednej z nich w prosty sposób prowadzi do dowodu pozostałych. Grupujemy te ściśle ze sobą powiązane hipotezy w dwóch podrozdziałach. W trzecim podrozdziale, stosując wykorzystaną w tym rozdziale metodę dowodzenia, podajemy krótkie dowody kilku znanych rezultatów. Rozdział ten kończą rozważania rozszerzające kilka wcześniej udowodnionych wyników, tzw. anomalii.

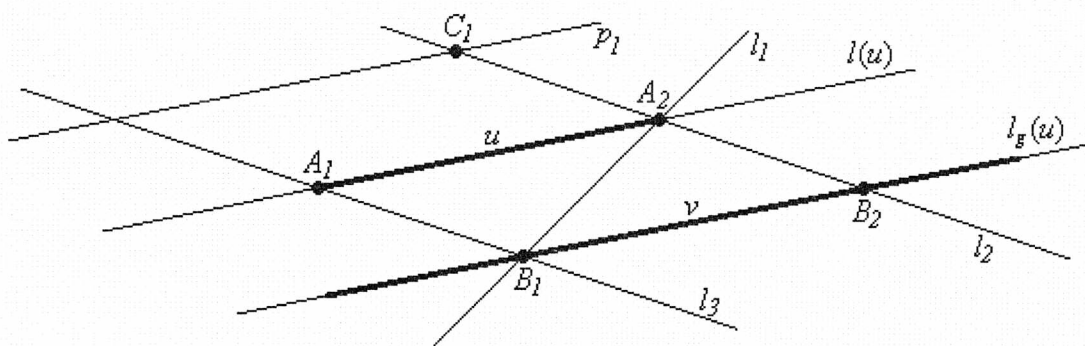
W dowodach hipotez wykorzystywać będziemy zależności pomiędzy otoczką wewnętrzną i zewnętrzną. Przydatne będą poniższe dwa lematy.

Lemat 4.1. *Jeżeli otoczka wewnętrzna wypukłego wielokąta kratowego K jest odcinkiem kratowym AB leżącym na osi OX , to wielokąt K leży w pasie S ograniczonym prostymi $y = 1$ i $y = -1$.*

Dowód. Oznaczmy przez m długość kratową odcinka AB . Załóżmy, że wierzchołek X wielokąta K leży poza pasem S . Wtedy wysokość trójkąta ABX jest większa niż 1, z czego wynika, że jego pole wynosi $A > \frac{1}{2}m$. Z drugiej strony zauważamy, rozumując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.9, że $g(ABX) = 0$ i $b(ABX) = m + 2$. Zastosowanie twierdzenia Picka do trójkąta ABX daje nam $A = \frac{1}{2}(m + 2) + 0 - 1 = \frac{1}{2}m$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu. $\square$

Lemat 4.2. *Niech H będzie wypukłym wielokątem kratowym zawierającym wewnętrzny punkt kratowy, a u jego boki o długości kratowej 1. Jeśli v jest boki wielokąta $O(H)$ równoległym do u i leżącym w $h(u)$, to nie może on zawierać dwóch punktów kratowych w swoim relatywnym wnętrzu.*

Dowód. Załóżmy, że bok v zawiera dwa punkty kratowe B_1 i B_2 w swoim relatywnym wnętrzu. Oznaczmy końce boku u przez A_1 i A_2 . Narysujmy proste: l_1 przechodzącą przez punkty A_2 i B_1 , l_2 przechodzącą przez punkty B_2 i A_2 oraz prostą l_3 zawierającą B_1 i A_1 (rysunek 4.1). Oznaczmy przez u_1 i u_2 boki wielokąta H wychodzące z wierzchołków A_1 i A_2 .



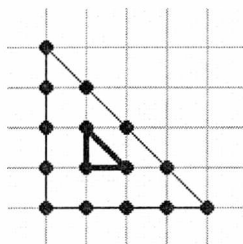
Rysunek 4.1

Gdyby bok u_2 leżał pomiędzy prostymi $l(u)$ i l_1 , to prosta kratowa $l_g(u_2)$ obcięłaby co najmniej odcinek B_1B_2 . Gdyby bok u_2 leżał pomiędzy prostymi l_1 i l_2 , to prosta kratowa $l_g(u_2)$ przechodziłaby przez punkt B_2 obcinając fragment boku v , przez co punkt B_2 nie byłby w relatywnym wnętrzu v . W podobny sposób pokazujemy, że bok u_1 nie może leżeć pomiędzy prostymi $l(u)$ i l_3 . Z powyższych obserwacji i ze względu na wypukłość wielokąta H wynika, że musiałby leżeć w pasie P ograniczonym prostymi l_2 i l_3 .

Pokażemy teraz, że we wnętrzu P nie leży żaden punkt kratowy. Oznaczmy przez p_i , gdzie $i \geq 1$, proste kratowe równoległe do prostej $l(u)$, przechodzące przez kolejne punkty kratowe, C_i , na prostej l_2 . Gdyby we wnętrzu P leżał punkt kratowy C , to byłby on pomiędzy prostymi p_k i p_{k+1} dla pewnego k . Wtedy punkt kratowy $B_2 + \overrightarrow{(C - C_k)}$ leżałby pomiędzy prostymi $l(u)$ i $l_g(u)$, co wobec definicji prostej $l_g(u)$ nie może mieć miejsca.

Pokazaliśmy, że pas P nie może zawierać wewnętrznych punktów kratowych, a tym samym wielokąt $H \subset P$ nie może zawierać wewnętrznych punktów kratowych, co jest sprzeczne z założeniem. $\square$

Założenie, że wielokąt H zawiera wewnętrzny punkt kratowy jest bardzo istotne. Z rysunku 4.2 widać, że dla otoczki zewnętrznej wielokąta H , gdy $g(H) = 0$, lemat 4.2 nie zachodzi.

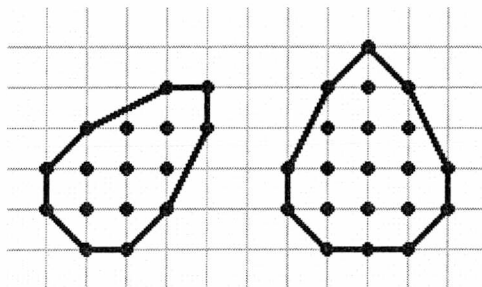


Rysunek 4.2

4.1. Hipotezy dotyczące wypukłych dziewięciokątów kratowych

Hipoteza 4.1. (The Nonagon Anomaly) *Wypukły dziewięciokąt kratowy może zawierać 7 lub 10 wewnętrznych punktów kratowych, ale nie może zawierać ani 8, ani 9 wewnętrznych punktów kratowych.*

Dowód. Rysunek 4.4 przedstawia dwa wypukłe dziewięciokąty kratowe, które zawierają odpowiednio 7 i 10 wewnętrznych punktów kratowych.



Rysunek 4.3

Aby udowodnić pozostałe dwie tezy określimy warunki konieczne na istnienie wypukłych dziewięciokątów kratowych zawierających 8 lub 9 wewnętrznych punktów kratowych. Następnie sprawdzimy, czy warunki te okażą się wystarczające. Dowód składa się z dwóch części.

Wypukły dziewięciokąt kratowy nie może zawierać 8 wewnętrznych punktów kratowych.

Niech K będzie wypukłym dziewięciokątem kratowym zawierającym 8 wewnętrznych punktów kratowych. Wewnętrzne punkty kratowe wielokąta K stanowią wszystkie punkty kratowe jego otoczki wewnętrznej H . Zatem $b(H) + g(H) = G(H) = g(K) = 8$. Oczywiście mamy $v(H) \leq b(H) \leq 8$. Z twierdzeń 3.4 i 3.5 wynika, że $v(H) \geq 5$ i $b(H) \geq 6$. Powyższe warunki ograniczają liczbę możliwych wartości parametrów $v(H)$, $b(H)$ i $g(H)$ do dziewięciu przedstawionych poniżej.

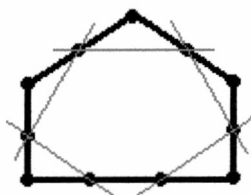
	$v(H)$	$b(H)$	$g(H)$	$G(H)=g(K)$
1.1	5	6	2	8
1.2	5	7	1	8
1.3	5	8	0	8
1.4	6	6	2	8
1.5	6	7	1	8
1.6	6	8	0	8
1.7	7	7	1	8
1.8	7	8	0	8
1.9	8	8	0	8

Tabela 4.1

Jak już wcześniej było wspomniane, każdy wielokąt kratowy, który ma co najmniej 5 wierzchołków musi zawierać wewnętrzny punkt kratowy. Zatem otoczka wewnętrzna dziewięciokąta K nie może być wielokątem o parametrach określonych w przypadkach 1.3, 1.6, 1.8 i 1.9. Przypadek 1.5 można odrzucić na mocy twierdzenia 1.6. Z kolei przypadek 1.7 odrzucamy na mocy twierdzenia 1.7. W pozostałych trzech przypadkach pokażemy, że niemożliwe jest skonstruowanie wypukłego dziewięciokąta kratowego, którego otoczką wewnętrzną byłby wielokąt o podanych parametrach.

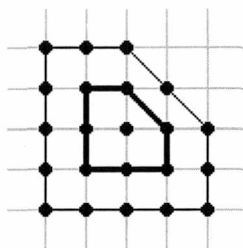
Przypadek 1.1. Otoczka wewnętrzna H jest wypukłym pięciokątem kratowym z sześcioma brzegowymi i dwoma wewnętrznymi punktami kratowymi. Zatem wielokąt H ma cztery boki o długości kratowej 1 i jeden bok o długości kratowej 2. Aby uzyskać dziewięciokąt K , którego otoczką wewnętrzną będzie H , zaczynamy od skonstruowania otoczki zewnętrznej $O(H)$. W tym przypadku $O(H)$ ma co najwyżej pięć wierzchołków. Aby uzyskać z niej dziewięciokąt musimy dokonać czterech kolejnych ścięć właściwych.

Wobec lematu 4.2 wielokąt $O(H)$ ma cztery boki, które mają długość kratową co najwyżej 2. Z kolei, wobec własności 3.15, ścięcie właściwe jednego z wierzchołków takiego boku wyklucza ścięcie właściwe drugiego wierzchołka. Zatem w tym przypadku maksymalnie można dokonać trzech kolejnych ścięć właściwych i przycięcie $O(H)$ do dziewięciokąta jest niemożliwe (rysunek 4.4).



Rysunek 4.4

Przypadek 1.2. Teraz otoczka wewnętrzna jest wypukłym pięciokątem kratowym z siedmioma brzegowymi i jednym wewnętrznym punktem kratowym. Na mocy twierdzenia 2.5 istnieje tylko jeden taki wielokąt, który wraz z otoczką zewnętrzną przedstawiony jest na rysunku 4.5.



Rysunek 4.5

Podobnie jak poprzednio, aby uzyskać dziewięciokąt, należy dokonać czterech ścięć właściwych. Zgodnie z rozumowaniem kończącym rozdział 3 w przypadku tego pięciokąta maksymalnie można dokonać trzech kolejnych ścięć właściwych i przyciąć go ośmiokąta.

Przypadek 1.4. W tym przypadku otoczka wewnętrzna H jest sześciokątem z sześcioma brzegowymi i dwoma wewnętrznymi punktami kratowymi. Oczywiście wszystkie boki tego sześciokąta mają długość kratową 1.

Na mocy lematu 1.3 wielokąt H można przekształcić za pomocą całkowitoliczbowego unimodularnego przekształcenia afinicznego w taki sposób, aby jego dwa wewnętrzne punkty kratowe odwzorować w punkty o współrzędnych $(1,0)$ i $(2,0)$. Mając nadzieję, że nie będzie to prowadziło do nieporozumień, obraz wielokąta H po przekształceniu również będziemy oznaczali przez H . Konwencję tę będziemy stosować w dalszej części rozprawy.

Wobec lematu 4.1 sześciokąt H będzie leżał w pasie S ograniczonym prostymi $y = 1$ i $y = -1$. Oczywiście dwa jego wierzchołki muszą leżeć w punktach $(0,0)$ i $(3,0)$ oraz po dwa na prostych $y = 1$ i $y = -1$. Dodatkowo można zastosować ściągnięcie względem osi OX tak, aby H leżał w półpłaszczyźnie $x \geq 0$ z wierzchołkiem A w punkcie $(0,1)$. O każdym sześciokącie położonym w ten sposób będziemy mówili, że jest w *pozycji wyjściowej*.

Oznaczmy przez R_k prostokąt o wierzchołkach w punktach $(0,1)$, $(0,-1)$, $(k+1,1)$, $(k+1,-1)$. Pokażemy teraz, że bez straty ogólności można przyjąć, iż każdy chudy sześciokąt kratowy z współliniowymi wewnętrznymi punktami kratowymi leży w R_k .

Lemat 4.3. *Jeśli H_1 jest chudym sześciokątem kratowym w pozycji wyjściowej zawierającym k współliniowych wewnętrznych punktów kratowych, to istnieje sześciokąt kratowy H_2 również w pozycji wyjściowej, który jest równoważny z H_1 i zawiera się w R_k .*

Dowód Lematu 4.3. Jeśli H_l zawiera się w R_k , to przyjmujemy $H_2 = H_l$. Rozważmy sytuację, gdy H_l nie zawiera się w R_k . Oznaczmy przez D prawy koniec boku leżącego na prostej $y = -1$. Oczywiście wierzchołek D leży poza R_k . Ponieważ H_l jest w pozycji wyjściowej i wszystkie jego boki mają długość kratową 1, to cztery wierzchołki muszą mieć współrzędne $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ i $(k+1,0)$. Z wypukłości wielokąta H_l wynika, że $D=(t,-1)$, a szósty wierzchołek ma współrzędne $(t-1,-1)$, gdzie $k+2 \leq t \leq 2k$. Zastosujemy ściągnięcie względem osi OX o skali k

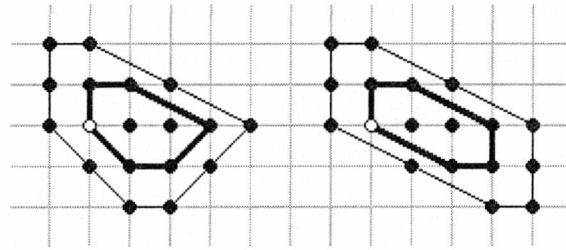
$$\begin{aligned}x' &= x + ky \\ y' &= y\end{aligned}$$

Takie ściągnięcie przekształci wierzchołek $A=(0,1)$ w punkt o współrzędnych $(k,1)$, a punkt $(1,1)$ w punkt $(k+1,1)$, natomiast $D=(t,-1)$ w punkt $(t-k,-1)$ i kolejny wierzchołek o współrzędnych $(t-1,-1)$ w punkt $(t-k-1,-1)$. Ponieważ $t-k-1 \geq 1$, to obraz H_l po ściągnięciu będzie się zawierał w R_k . Następnie zastosujemy symetrię względem prostej (niekoniecznie kratowej) $x = \frac{k+1}{2}$. W ten sposób otrzymamy wypukły sześciokąt kratowy H_2 w pozycji wyjściowej zawarty w prostokącie R_k . Nietrudno zauważyć, że zastosowane przekształcenia można wyrazić za pomocą całkowitoliczbowego unimodularnego przekształcenia afinicznego o następującym równaniu

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -k & k+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

co kończy dowód lematu. □

Na mocy lematu 4.3 możemy przyjąć, że H zawiera się w prostokącie R_k z czterema wierzchołkami w punktach $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(3,0)$. Pozostałe dwa wierzchołki mogą mieć współrzędne $(1,-1)$ i $(2,-1)$ lub $(2,-1)$ i $(3,-1)$. W ten sposób otrzymujemy dwa (z dokładnością do równoważności) wypukłe sześciokąty kratowe. Rysunek 4.6 przedstawia te sześciokąty wraz z ich otoczkami zewnętrznymi. Dla ułatwienia orientacji, teraz i w dalszej części tego rozdziału, punkt $(0,0)$ zaznaczymy na białym tle.



Rysunek 4.6

Zauważamy natychmiast, że pierwszy sześciokąt dopuszcza ścieżę właściwą tylko jednego wierzchołka, o współrzędnych $(-1,0)$, natomiast drugi sześciokąt nie dopuszcza ścieżki właściwej żadnego swojego wierzchołka i niemożliwe jest uzyskanie dziewięciokąta.

Podsumowując trzy omówione przypadki udowodniliśmy, że nie istnieje wypukły dziewięciokąt kratowy, zawierający 8 wewnętrznych punktów kratowych.

Wypukły dziewięciokąt kratowy nie może zawierać 9 wewnętrznych punktów kratowych.

Założmy, że K jest wypukłym dziewięciokątem kratowym z otoczką wewnętrzną zawierającą w sumie 9 punktów kratowych, więc $b(H) + g(H) = G(H) = g(K) = 9$. Podobnie jak w poprzednim przypadku z twierdzeń 3.4 i 3.5 mamy $v(H) \geq 5$ i $b(H) \geq 6$, a wobec twierdzenia 1.7 $v(H) \leq 6$ oraz oczywiście $b(H) \leq 8$. Uwzględniając te ograniczenia do zbadania pozostają następujące przypadki.

	$v(H)$	$b(H)$	$g(H)$	$G(H)=g(K)$
2.1	5	6	3	9
2.2	5	7	2	9
2.3	5	8	1	9
2.4	6	6	3	9
2.5	6	7	2	9
2.6	6	8	1	9

Tabela 4.2

Przypadki 2.3 i 2.6 odrzucamy na mocy twierdzenia 2.5. W pozostałych czterech przypadkach pokażemy, że niemożliwe jest skonstruowanie wypukłego dziewięciokąta kratowego, którego otoczką wewnętrzną byłby wielokąt o podanych parametrach.

Przypadek 2.1. Podobnie jak w przypadku 1.1 wielokąt H jest pięciokątem o czterech bokach długości kratowej 1, a jego otoczka zewnętrzna $O(H)$ dopuszcza maksymalnie trzy kolejne ścieżki właściwe. W ten sposób można uzyskać co najwyżej ośmiokąt.

Przypadek 2.2. Wielokąt H jest wypukłym pięciokątem kratowym z siedmioma brzegowymi i dwoma wewnętrznymi punktami kratowymi. W tym przypadku rozumowanie jest podobne jak w przypadku 2.1. Wielokąt H ma trzy lub cztery boki o długości kratowej 1 i z lematu 4.2 wynika, że $O(H)$ ma trzy lub cztery boki o długości kratowej co najwyżej 2. Jeśli $O(H)$ ma 4 takie boki, to mamy taką samą sytuację jak w przypadku 1.1. Natomiast jeśli $O(H)$ zawiera trzy takie boki, to możliwe ułożenia boków $O(H)$ przedstawia rysunek 4.7. Prosta analiza prowadzi do wniosku, że takich $O(H)$ nie można przyciąć do dziewięciokątów.

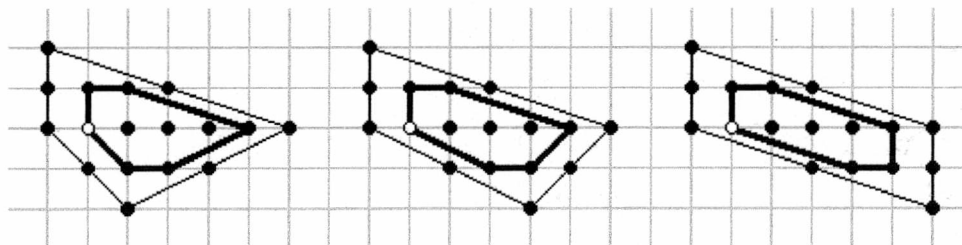


Rysunek 4.7

Przypadek 2.4. Wielokąt H jest sześciokątem z sześcioma brzegowymi i trzema wewnętrznymi punktami kratowymi, które mogą być współliniowe lub nie.

Wewnętrzne punkty kratowe są współliniowe.

Przekształcamy H do pozycji wyjściowej. Podobnie jak w przypadku 1.4 cztery wierzchołki H mają następujące współrzędne $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ i $(3,0)$. Na mocy lematu 4.3 możemy ograniczyć rozpatrywane przypadki do trzech sześciokątów przedstawionych wraz z ich otoczkami zewnętrznymi na rysunku 4.8.

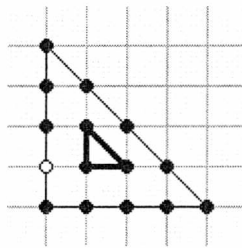


Rysunek 4.8

We wszystkich tych przypadkach otoczki zewnętrzne $O(H)$ są czworokątami i oczywiście nie można ich przyciąć do dziewięciokątów.

Wewnętrzne punkty kratowe nie są współliniowe.

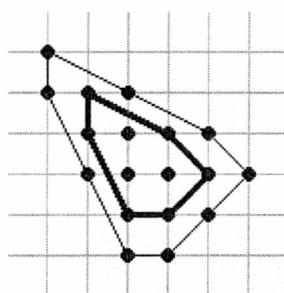
W tym przypadku trzy punkty kratowe tworzą trójkąt prymitywny T , którego wierzchołki, wobec twierdzenia 2.4, mają współrzędne $(1,0)$, $(2,0)$ i $(1,1)$. Trójkąt T jest otoczką wewnętrzną sześciokąta H . Wierzchołki H leżą na brzegu $O(T)$, który jest trójkątem o wierzchołkach $(0,-1)$, $(4,-1)$ i $(0,3)$ (rysunek 4.9).



Rysunek 4.9

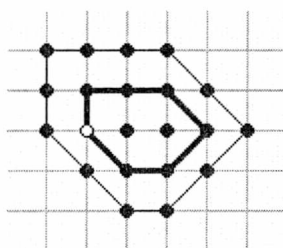
Oczywiście, aby uzyskać sześciokąt należy ściąć wszystkie trzy wierzchołki $O(T)$. Wtedy na każdym z boków $O(T)$ będzie leżał jeden z boków sześciokąta H , wszystkie o długości kratowej 1. Jeśli punkt A o współrzędnych $(0,0)$ będzie wierzchołkiem H , to sąsiednim wierzchołkiem na prostej $x = 0$ będzie punkt $B=(0,1)$. Wtedy punkt C musi mieć współrzędne $(1,2)$. W ten sposób otrzymujemy kolejne wierzchołki H o współrzędnych $(2,1)$, $(3,-1)$ i $(2,-1)$. W przypadku, gdy punkt $(0,0)$ nie będzie wierzchołkiem H , podobne rozumowanie prowadzi do sześciokąta o wierzchołkach w punktach $(0,2)$, $(0,1)$, $(1,-1)$, $(2,-1)$, $(3,0)$ i $(2,1)$. Tak uzyskane dwa sześciokąty są równoważne, gdyż jeden można przekształcić w drugi za pomocą symetrii względem prostej $y = x - 1$.

Rysunek 4.10 przedstawia jeden (z dokładnością do równoważności) sześciokąt zawierający trzy niewspółliniowe wewnętrzne punkty kratowe wraz z jego otoczką zewnętrzną. W tym przypadku wielokąt $O(H)$ nie dopuszcza ścicia właściwego żadnego ze swoich wierzchołków. A zatem nie istnieje wypukły dziewięciokąt kratowy, którego otoczką wewnętrzną jest sześciokąt zawierający sześć brzegowych i trzy wewnętrzne punkty kratowe.



Rysunek 4.10

Przypadek 2.5. Wielokąt H jest sześciokątem z siedmioma brzegowymi i dwoma wewnętrznymi punktami kratowymi. Jeden z boków H ma długość kratową 2, a pozostałe mają długość kratową 1. Przekształćmy H do pozycji wyjściowej z wierzchołkiem w punkcie $(0,1)$. Podobnie jak w przypadku 1.4 po dwa wierzchołki muszą leżeć na prostych $y=1$ i $y=-1$ oraz w punktach o współrzędnych $(0,0)$ i $(3,0)$. Możemy przyjąć, że bok o długości kratowej 2 leży na prostej $y=1$, w ten sposób uzyskujemy kolejny wierzchołek o współrzędnych $(2,1)$. Dwa pozostałe wierzchołki na prostej $y=-1$ mają współrzędne $(1,-1)$ i $(2,-1)$ lub $(2,-1)$ i $(3,-1)$, co daje dwa sześciokąty. Jednak są one równoważne, co łatwo sprawdzić stosując do pierwszego z nich ściągnięcie jednostkowe względem osi OX oraz symetrię względem prostej $x = \frac{3}{2}$. Tak otrzymany sześciokąt H wraz z jego otoczką zewnętrzną podajemy na rysunku 4.11. Oczywiście wielokąt $O(H)$ można przyciąć co najwyżej do ośmiokąta.



Rysunek 4.11

W ten sposób udowodniliśmy, że nie istnieje wypukły dziewięciokąt kratowy zawierający 9 wewnętrznych punktów kratowych, co kończy dowód hipotezy 4.1. $\square$

Kolejne trzy hipotezy są bezpośrednio związane z hipotezą 4.1.

Hipoteza 4.2. (The Fat Nonagon Theorem) *Jeśli K jest wypukłym dziewięciokątem kratowym, który nie jest chudy, to $g(K) \geq 10$.*

Dowód. Niech K będzie wypukłym dziewięciokątem kratowym, który nie jest chudy, czyli $b(K) > v(K)$. Z twierdzenia 1.9 wynika, że jedyny (z dokładnością do równoważności) wypukły dziewięciokąt kratowy zawierający 7 wewnętrznych punktów kratowych jest chudy, zatem $g(K) \geq 8$. W dowodzie hipotezy 3.1 pokazaliśmy, że nie istnieje wypukły dziewięciokąt kratowy zawierający 8 lub 9 wewnętrznych punktów kratowych, więc $g(K) \geq 10$. Zauważmy, że wyniku tego nie da się poprawić, ponieważ rysunek 4.4 przedstawia przykład wypukłego dziewięciokąta kratowego, który nie jest chudy i zawiera 10 wewnętrznych punktów kratowych. $\square$

Hipoteza 4.3. (Conjecture 7.10) *Jeśli wypukły wielokąt kratowy zawiera 8 wewnętrznych punktów kratowych, to $v(K) \leq 8$.*

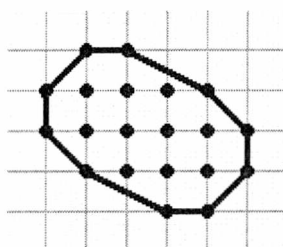
Dowód. Niech K będzie wypukłym wielokątem kratowym zawierającym 8 wewnętrznych punktów kratowych. Na mocy twierdzenia 1.10 wypukły dziesięciokąt kratowy zawiera co najmniej 10 wewnętrznych punktów kratowych. Z tego wynika, że $v(K) \leq 9$. Po udowodnieniu hipotezy 4.1 wiemy, że wypukły dziewięciokąt kratowy nie może zawierać 8 wewnętrznych punktów kratowych. Oznacza to, że wypukły wielokąt kratowy zawierający 8 wewnętrznych punktów kratowych może mieć co najwyżej 8 wierzchołków. $\square$

Nieomal identycznie przebiega dowód kolejnej hipotezy.

Hipoteza 4.4. (Conjecture 7.11) *Jeśli wypukły wielokąt kratowy zawiera 9 wewnętrznych punktów kratowych, to $v(K) \leq 8$.*

4.2. Hipotezy dotyczące wypukłych dziesięciokątów kratowych

Hipoteza 4.5. (Conjecture 6.4) *Jeśli K jest wypukłym dziesięciokątem zawierającym 10 wewnętrznych punktów kratowych, to K jest równoważny z następującym dziesięciokątem.*



Rysunek 4.12

Dowód. Metoda dowodzenia jest podobna jak w przypadku hipotezy 4.1. Najpierw badamy jakie parametry może mieć otoczka wewnętrzna wypukłego dziesięciokąta kratowego, a następnie sprawdzamy, czy otoczki zewnętrzne wielokątów o takich parametrach można przyciąć do dziesięciokąta.

Niech H będzie otoczką wewnętrzną wypukłego dziesięciokąta kratowego K . Z twierdzeń 3.4 i 3.5 mamy $v(H) \geq 5$ i $b(H) \geq 7$. Podobnie jak poprzednio, na mocy twierdzenia 1.7, odrzucamy przypadki, gdy $v(H) \geq 7$. Liczba brzegowych punktów kratowych nie może być większa od 9. Na mocy twierdzenia 2.5 odrzucamy przypadki 3.3 i 3.6. Przeanalizujemy pozostałe cztery przypadki.

	$v(H)$	$b(H)$	$g(H)$	$G(H)=g(K)$
3.1	5	7	3	10
3.2	5	8	2	10
3.3	5	9	1	10
3.4	6	7	3	10
3.5	6	8	2	10
3.6	6	9	1	10

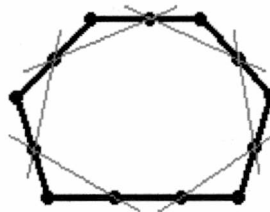
Tabela 4.3

Przypadek 3.1. Otoczka zewnętrzna $O(H)$ ma co najwyżej pięć wierzchołków i przycięcie jej do dziesięciokąta wymaga pięciu ścięć właściwych. Aby było to możliwe każdy bok $O(H)$

musiałby zawierać w relatywnym wnętrzu co najmniej dwa punkty kratowe. Jednak z lematu 4.2 wynika, że $O(H)$ ma co najwyżej dwa takie boki.

Przypadek 3.2. Tym razem, stosując lemat 4.2, zauważamy, że wielokąt $O(H)$ ma co najwyżej trzy boki o długości kratowej większej niż 2 i przycięcie go do dziesięciokąta nie jest możliwe.

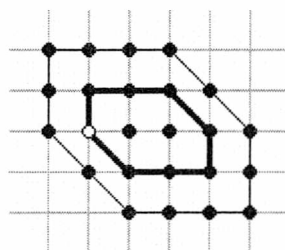
Przypadek 3.4. W tym przypadku tylko jeden z boków H ma długość kratową 2 i dlatego, wobec lematu 4.2, otoczka zewnętrzna $O(H)$ może mieć tylko jeden bok o długości kratowej większej niż 2. Aby przyciąć $O(H)$ do dziesięciokąta, trzeba dokonać czterech kolejnych ścięć właściwych. Jak widać z rysunku 4.13 nie jest to możliwe, gdyż maksymalnie można dokonać trzech kolejnych ścięć właściwych.



Rysunek 4.13

Przypadek 3.5. W tym przypadku możliwe są dwie sytuacje. Wielokąt H może zawierać jeden bok o długości kratowej 3 lub dwa boki o długości kratowej 2. Pierwsza sytuacja jest nieomal identyczna jak w przypadku 3.4.

Rozpatrzmy zatem drugą sytuację, gdy wielokąt H ma dwa boki o długości kratowej 2, a pozostałe boki o długości kratowej 1. Przekształćmy H do pozycji wyjściowej. Wtedy dwa wierzchołki H będą miały współrzędne $(0,0)$ i $(3,0)$. Boki o długości kratowej 2 muszą leżeć na prostych $y = 1$ i $y = -1$. Jeden z nich będzie miał końce w punktach $(0,1)$ i $(2,1)$. Ze względu na wypukłość sześciokąta H drugi bok o długości kratowej dwa musi mieć końce w punktach $(1,-1)$ i $(3,-1)$. Rysunek 4.14 przedstawia ten sześciokąt wraz z jego otoczką zewnętrzną.



Rysunek 4.14

Aby otrzymać dziesięciokąt, wielokąt $O(H)$ musi dopuszczać ścieżce właściwe czterech z sześciu swoich wierzchołków. Jeśli zdecydujemy się na ścieżce wierzchołka o współrzędnych $(-1,0)$, to nie będzie można ściąć właściwie sąsiednich dwóch wierzchołków i w rezultacie dalszego ścinania nie uzyskamy dziesięciokąta. Podobna sytuacja miałaby miejsce gdybyśmy zdecydowali się na ścieżce wierzchołka o współrzędnych $(4,0)$.

Natomiast w rezultacie ścinania pozostałych czterech wierzchołków otrzymujemy szukany dziesięciokąt kratowy zawierający 10 wewnętrznych punktów kratowych. To kończy dowód lematu. $\square$

Kolejna hipoteza w prosty sposób wynika z prawdziwości hipotezy 4.5.

Hipoteza 4.6. (The Fat Decagon Theorem) *Jeśli K jest wypukłym dziesięciokątem kratowym, który nie jest chudy, to $g(K) \geq 11$.*

Dowód. Niech K będzie wypukłym dziesięciokątem kratowym, który nie jest chudy. Wobec twierdzenia 1.10 mamy $g(K) \geq 10$. Wiemy teraz, że $g(K) = 10$ wtedy i tylko wtedy, gdy K jest równoważne z chudym dziesięciokątem z rysunku 4.12. Wynika stąd, że $g(K) \geq 11$. $\square$

Okazuje się, że zastosowanie używanej w tym rozdziale metody dowodzenia pozwala poprawić wynik hipotezy 4.6. Pokażemy mianowicie, że wypukły dziesięciokąt kratowy, który nie jest chudy, zawiera co najmniej 13 wewnętrznych punktów kratowych. Będzie to prosty wniosek z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.7. *Wypukły dziesięciokąt kratowy nie może zawierać ani 11, ani 12 wewnętrznych punktów kratowych.*

Dowód. Osobno będziemy rozpatrywać przypadki $G(H) = 11$ i $G(H) = 12$.

Wypukły dziesięciokąt kratowy nie może zawierać 11 wewnętrznych punktów kratowych.

Niech K będzie wypukłym dziesięciokątem kratowym z otoczką wewnętrzną H i niech $G(H) = 11$. Podobnie jak w dowodzie hipotezy 4.5 mamy $5 \leq v(H) < 9$, $7 \leq b(H) \leq 10$ i $g(H) \geq 2$. Na mocy twierdzenia 1.8 możemy wykluczyć $v(H) = 8$. Tabela 4.4 przedstawia wszystkie możliwe wartości parametrów opisujących wielokąt H .

	$v(H)$	$b(H)$	$g(H)$	$G(H)=g(K)$
4.1	5	7	4	11
4.2	5	8	3	11
4.3	5	9	2	11
4.4	6	7	4	11
4.5	6	8	3	11
4.6	6	9	2	11
4.7	7	7	4	11

Tabela 4.4

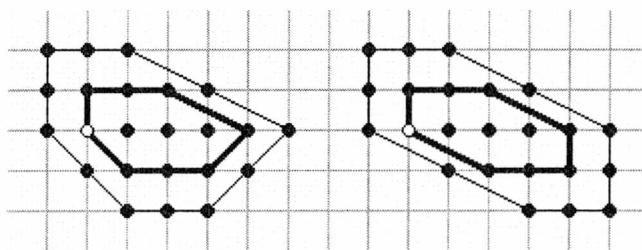
Przypadki 4.1 – 4.3. We wszystkich tych przypadkach wielokąt H jest pięciokątem i zawiera co najmniej jeden bok o długości kratowej 1, nazwijmy go u . Aby przyciąć $O(H)$ do dziesięciokąta musielibyśmy dokonać ścięć właściwych wszystkich jego pięciu wierzchołków. Jednak na mocy lematu 4.2 i własności 3.15, wielokąt $O(H)$ nie dopuszcza ścięcia właściwego obu wierzchołków boku v , równoległego do u .

Przypadek 4.4. Przypadek ten można odrzucić z powodów przedstawionych w analizie przypadku 3.4.

Przypadek 4.5. Wielokąt H jest sześciokątem z ośmioma brzegowymi i trzema wewnętrznymi punktami kratowymi, które mogą być współliniowe lub nie. Wielokąt H może mieć jeden bok o długości kratowej 3 lub dwa boki o długości kratowej 2. Pierwszą możliwość odrzucamy z tych samych powodów co w przypadku 3.4. Rozpatrzmy sytuację, gdy wielokąt H ma dwa boki o długości kratowej 2 i pozostałe o długości kratowej 1.

Wewnętrzne punkty kratowe są współliniowe.

Przekształcamy H do pozycji wyjściowej z trzema wierzchołkami w punktach $(0,0)$, $(0,1)$ i $(4,0)$. Boki o długości kratowej 2 muszą leżeć na prostych $y=1$ i $y=-1$. Stąd czwarty wierzchołek ma współrzędne $(2,1)$. Rozumując podobnie jak w dowodzie lematu 4.3 możemy przyjąć, że H jest zawarty w prostokącie R_3 . Wtedy pozostałe dwa wierzchołki tworzące drugi bok o długości kratowej 2 mają współrzędne $(1,-1)$ i $(3,-1)$ lub $(2,-1)$ i $(4,-1)$. Rysunek 4.15 przedstawia te dwa wielokąty wraz z ich otoczkami zewnętrznymi.

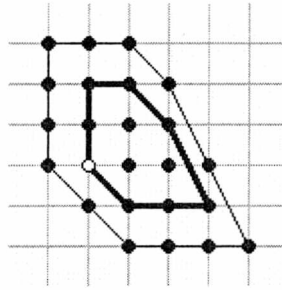


Rysunek 4.15

Łatwo zauważyć, wobec własności 3.15, że pierwsza otoczka zewnętrzna dopuszcza maksymalnie 3, a druga maksymalnie 2 kolejne ścieżki właściwe. Uzyskanie dziesięciokąta jest zatem niemożliwe.

Wewnętrzne punkty kratowe nie są współliniowe.

Podobnie jak w przypadku 2.4 trzy wewnętrzne punkty kratowe tworzą trójkąt T o wierzchołkach w punktach $(1,0)$, $(2,0)$ i $(1,1)$. Wierzchołki wielokąta H leżą na brzegu $O(T)$, który jest trójkątem o wierzchołkach $(0,-1)$, $(4,-1)$ i $(0,3)$ (rysunek 4.10). Aby uzyskać sześciokąt należy ścinać właściwie wszystkie trzy wierzchołki $O(T)$. Otrzymany tak sześciokąt ma 9 brzegowych punktów kratowych, co powoduje konieczność ścieżki jeszcze jednego wierzchołka. Pokażemy, że bez względu na wybór tego wierzchołka otrzymany sześciokąt jest równoważny z przedstawionym na rysunku 4.16 sześciokątem H . W tym celu wystarczy pokazać, że sześciokąt H_l , mający boki o długości kratowej 2 na prostych $y=-1$ i $y=-x+3$, jest równoważny z H . Istotnie, stosując do H_l ściągnięcie jednostkowe względem osi OX oraz jedną lub dwie symetrię otrzymujemy H .

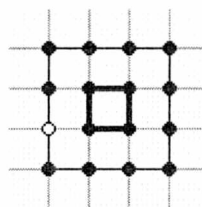


Rysunek 4.16

Otoczka zewnętrzna wielokąta H dopuszcza ścięcie właściwe tylko trzech swoich wierzchołków. Nie istnieje więc wypukły dziesięciokąt kratowy, którego otoczką wewnętrzną jest sześciokąt zawierający osiem brzegowych i trzy wewnętrzne punkty kratowe.

Przypadek 4.6. Przypadek ten można wyeliminować ponieważ wypukły sześciokąt kratowy zawierający dwa wewnętrzne punkty kratowe nie może mieć dziewięciu brzegowych punktów kratowych. Łatwo to sprawdzić umieszczając H w pozycji wyjściowej.

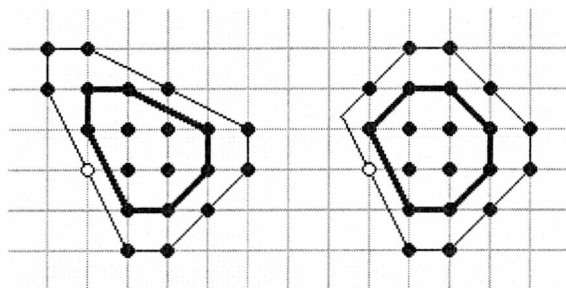
Przypadek 4.7. Wielokąt H jest wypukłym siedmiokątem kratowym zawierającym cztery wewnętrzne punkty kratowe. Na mocy twierdzenia 3.4 mamy $v(H) \geq 4$, czyli otoczka wewnętrzna H jest chudym czworokątem Q bez wewnętrznych punktów kratowych. Na mocy twierdzenia 2.4 ma on wierzchołki o współrzędnych $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ i $(1,1)$ (rysunek 4.17).



Rysunek 4.17

Wielokąt $O(Q)$ jest oczywiście kwadratem i aby przyciąć go do chudego siedmiokąta należy dokonać pięciu ścięć. Jeśli jeden z wierzchołków $O(Q)$, powiedzmy punkt $(0,2)$, jest wierzchołkiem siedmiokąta H , to natychmiast widać, że położenie kolejnych wierzchołków H jest zdeterminowane i jest on równoważny z pierwszym siedmiokątem z rysunku 4.18. Natomiast jeśli żaden z wierzchołków $O(Q)$ nie jest wierzchołkiem H , to znaczy, że miały

miejsce cztery kolejne ścieżki właściwe. Ścinając w kolejnym kroku dowolny wierzchołek tak otrzymanego ośmiokąta, otrzymujemy drugi siedmiokąt z rysunku 4.18.



Rysunek 4.18

Otoczka zewnętrzna pierwszego siedmiokąta nie dopuszcza ścieżki właściwej żadnego ze swoich wierzchołków, a otoczka zewnętrzna drugiego siedmiokąta i wobec twierdzenia 3.10 nie istnieje wypukły dziesięciokąt kratowy zawierający 11 wewnętrznych punktów kratowych.

Wypukły dziesięciokąt kratowy nie może zawierać 12 wewnętrznych punktów kratowych.

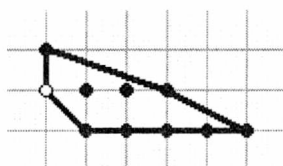
Niech K będzie wypukłym dziesięciokątem kratowym z otoczką wewnętrzną H i niech $G(H) = 12$. Rozumując tak jak w przypadku $G(H) = 11$ otrzymujemy następującą tabelę.

	$v(H)$	$b(H)$	$g(H)$	$G(H)=g(K)$
5.1	5	7	5	12
5.2	5	8	4	12
5.3	5	9	3	12
5.4	5	10	2	12
5.5	6	7	5	12
5.6	6	8	4	12
5.7	6	9	3	12
5.8	6	10	2	12
5.9	7	7	5	12
5.10	7	8	4	12
5.11	8	8	4	12

Tabela 4.5

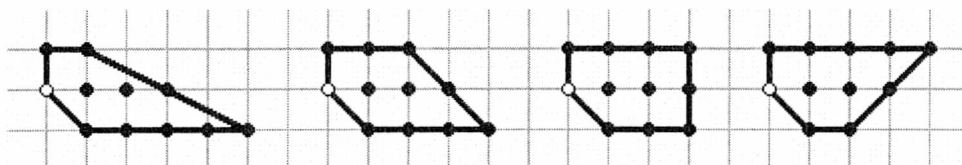
Przypadki 5.1 – 5.3. Wielokąty K o żądanych tutaj parametrach nie istnieją z tych samych powodów co w przypadkach 4.1 – 4.3.

Przypadek 5.4. Pokażemy, że nie istnieje wypukły pięciokąt kratowy zawierający dziesięć brzegowych i dwa wewnętrzne punkty kratowe. Załóżmy, że istnieje taki pięciokąt H . Na mocy lematu 4.1 wielokąt H musi leżeć w pasie ograniczonym prostymi $y = 1$ i $y = -1$. Wynika z tego, że jego wierzchołki leżą na prostych $y = 1$, $y = 0$ i $y = -1$. Jeśli na prostej $y = 1$ jest jeden wierzchołek wielokąta H , to za pomocą ściągnięcia względem osi OX można przekształcić go w punkt o współrzędnych $(0,1)$. Wtedy dwa wierzchołki muszą leżeć w punktach $(0,0)$ i $(3,0)$, a pozostałe dwa na prostej $y = -1$. Ze względu na wypukłość pięciokąta H te dwa wierzchołki mogą tworzyć co najwyżej bok o długości kratowej 4 (rysunek 4.19). W tym przypadku $b(H) = 8$.



Rysunek 4.19

Jeśli natomiast obie proste $y = 1$ i $y = -1$ zawierają po dwa wierzchołki H , to jeden z punktów $(0,0)$ lub $(3,0)$ nie jest jego wierzchołkiem. Załóżmy, że punkt $(0,0)$ jest wierzchołkiem. Zastosujmy ściągnięcie względem osi OX tak, aby pięciokąt H znajdował się w półpłaszczyźnie $x \geq 0$ z wierzchołkiem w punkcie $(0,1)$. Aby uzyskać jak największą liczbę brzegowych punktów kratowych, punkt $(1,-1)$ musi być wierzchołkiem H , a punkt $(3,0)$ (który nie jest wierzchołkiem) musi należeć do H . Uwzględniając powyższe ograniczenia otrzymujemy cztery pięciokąty o maksymalnej liczbie brzegowych punktów kratowych $b(H) = 9$. Nie istnieje więc wypukły pięciokąt kratowy zawierający dwa wewnętrzne i dziesięć brzegowych punktów kratowych.



Rysunek 4.20

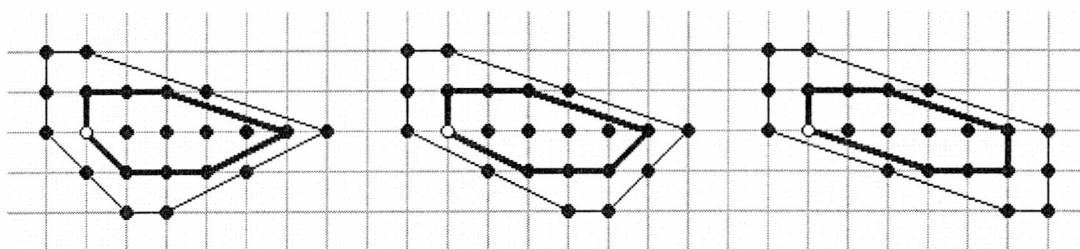
Przypadek 5.5. Przypadek ten można odrzucić z tych samych powodów co przypadek 3.4.

Przypadek 5.6. W tym przypadku wielokąt H jest wypukłym sześciokątem kratowym zawierającym osiem brzegowych i cztery wewnętrzne punkty kratowe. Wewnętrzne punkty mogą być współliniowe lub nie.

Wewnętrzne punkty kratowe są współliniowe.

Przekształcamy H do pozycji wyjściowej z trzema wierzchołkami w punktach $(0,0)$, $(0,1)$ i $(5,0)$. Sześciokąt ma jeden bok o długości kratowej 3 lub dwa boki o długości kratowej 2 (leżące na prostych $y = 1$ i $y = -1$). Jeśli H ma jeden bok o długości kratowej 3, a pozostałe o długości kratowej 1, to jego otoczka zewnętrzna, podobnie jak w przypadku 3.4, nie dopuszczałaby ścięcia właściwego czterech wierzchołków.

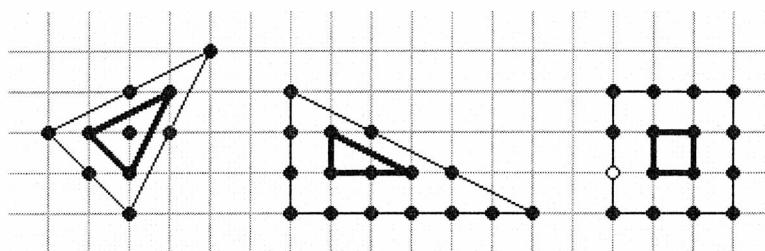
Przyjmijmy, że wielokąt H ma dwa boki o długości kratowej 2 i cztery boki o długości kratowej 1. Z tego wynika, że czwarty wierzchołek H ma współrzędne $(2,1)$. Pozostałe dwa wierzchołki, leżące na prostej $y = -1$, tworzą bok o długości kratowej dwa. Ten bok, ze względu na wypukłość sześciokąta H , może znajdować się w pięciu położeniach. W ten sposób uzyskujemy pięć sześciokątów, z których tylko trzy są nierównoważne. Rysunek 4.21 przedstawia te trzy sześciokąty wraz z ich otoczkami zewnętrznymi, z których tylko jedna dopuszcza ścięcie właściwe jednego wierzchołka.



Rysunek 4.21

Wewnętrzne punkty kratowe nie są współliniowe.

W tym przypadku otoczka wewnętrzna sześciokąta H , oznaczmy ją przez H' , jest wypukłym wielokątem kratowym, dla którego mamy $v(H') \geq 3$ i $b(H') + g(H') = G(H') = g(H) = 4$. Na mocy twierdzeń 2.4 i 2.5 warunki te spełniają tylko trzy wielokąty przedstawione wraz z otoczkami zewnętrznymi na rysunku 4.22.



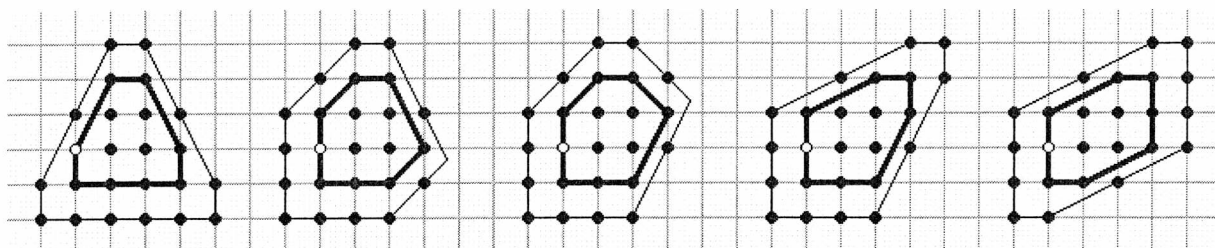
Rysunek 4.22

Pierwsza otoczka zewnętrzna nie dopuszcza ścięcia żadnego ze swoich wierzchołków. Druga dopuszcza ścięcie właściwe tylko dwóch wierzchołków. Trzecią otoczkę zewnętrzną, o wierzchołkach w punktach $(0,-1)$, $(3,-1)$, $(3,2)$ i $(0,2)$, oznaczmy przez $O(Q)$. Aby przyciąć ją do sześciokąta zawierającego osiem brzegowych punktów kratowych, należy dokonać czterech ścięć.

Sześciokąt $H \subset O(Q)$ może mieć jeden bok o długości kratowej 3 lub dwa boki o długości kratowej 2. W pierwszym przypadku możemy założyć, że jest to bok łączący wierzchołki o współrzędnych $(0,-1)$ i $(3,-1)$. Determinuje to położenie pozostałych wierzchołków H i otrzymujemy pierwszy sześciokąt z rysunku 4.23.

Jeśli sześciokąt H ma dwa boki o długości kratowej 2, to mogą one być incydentne lub nie. W pierwszym przypadku możemy przyjąć, że wspólnym wierzchołkiem tych dwóch boków jest punkt $(0,-1)$, a wtedy dwa kolejne wierzchołki H mają współrzędne $(2,-1)$ i $(0,1)$. W zależności od zastosowanych ścięć otrzymujemy kolejne trzy sześciokąty z rysunku 4.23.

W przypadku, gdy dwa boki o długości kratowej 2 nie są incydentne zauważmy najpierw, że muszą one leżeć na równoległych bokach $O(Q)$. Gdyby bowiem tak nie było, to uzyskalibyśmy sześciokąt zawierający jedynie 3 wewnętrzne punkty kratowe. Ta obserwacja natychmiast prowadzi do piątego sześciokąta.



Rysunek 4.23

Oczywiście żadnej z otoczek zewnętrznych przedstawionych na rysunku 4.23 nie można przyciąć do dziesięciokąta.

Przypadek 5.7. Wielokąt H jest wypukłym sześciokątem zawierającym dziewięć brzegowych i trzy wewnętrzne punkty kratowe.

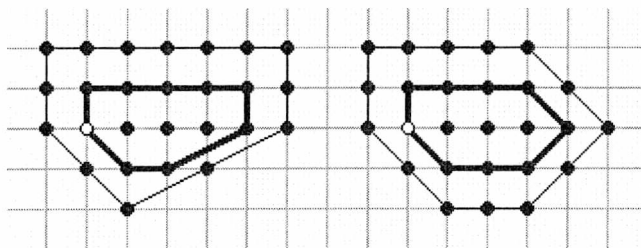
Wewnętrzne punkty kratowe są współliniowe.

Przekształcamy H do pozycji wyjściowej z trzema wierzchołkami w punktach $(0,0)$, $(0,1)$ i $(4,0)$. W tym przypadku sześciokąt może mieć jeden bok o długości kratowej 4 lub jeden o długości kratowej 3 i drugi o długości kratowej 2.

W pierwszym przypadku możemy założyć, że bok o długości kratowej 4 znajduje się na prostej $y=1$ z drugim wierzchołkiem w punkcie $(4,1)$. Dwa pozostałe wierzchołki mogą mieć współrzędne $(1,-1)$ i $(2,-1)$ lub $(2,-1)$ i $(3,-1)$, a otrzymane wielokąty są równoważne.

W drugim przypadku możemy założyć, że bok o długości kratowej 3 znajduje się na prostej $y=1$ z drugim wierzchołkiem w punkcie $(3,1)$. Wtedy dwa pozostałe wierzchołki mogą mieć współrzędne $(1,-1)$ i $(3,-1)$ lub $(2,-1)$ i $(4,-1)$. W tym przypadku otrzymane sześciokąty również są równoważne.

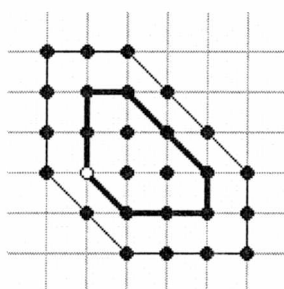
Rysunek 4.24 przedstawia dwa nierównoważne sześciokąty wraz z ich otoczkami zewnętrznymi. Z rysunku tego widać, że otoczka zewnętrzna pierwszego sześciokąta jest pięciokątem, który nie dopuszcza ścięcia wszystkich wierzchołków. Natomiast otoczka zewnętrzna drugiego sześciokąta dopuszcza maksymalnie trzy kolejne ścięcia właściwe i niemożliwe jest przycięcie jej do dziesięciokąta.



Rysunek 4.24

Wewnętrzne punkty kratowe nie są współliniowe.

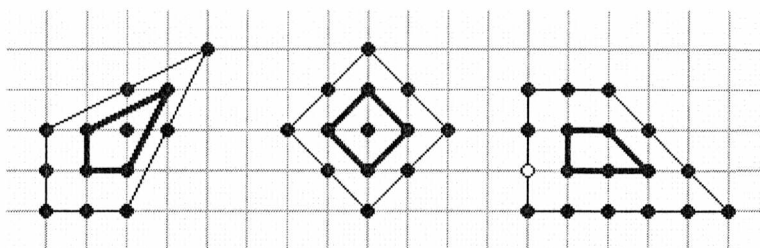
Podobnie jak w przypadku 2.4 wierzchołki wielokąta H leżą na brzegu $O(T)$, który jest trójkątem o wierzchołkach $(0,-1)$, $(4,-1)$ i $(0,3)$. Aby uzyskać sześciokąt należy ściąć wszystkie trzy wierzchołki $O(T)$. Wielokąt $O(T)$ ma 12 brzegowych punktów kratowych i po dokonaniu trzech kolejnych ścieg właściwych uzyskujemy sześciokąt zawierający 9 brzegowych punktów kratowych. Rysunek 4.25 przedstawia ten sześciokąt wraz z jego otoczką zewnętrzną. Wielokąt $O(H)$ dopuszcza maksymalnie trzy kolejne ściegi właściwe i nie można go przyciąć do dziesięciokąta.



Rysunek 4.25

Przypadek 5.8. Przypadek ten odrzucamy z tych samych powodów co przypadek 4.6.

Przypadek 5.9. W tym przypadku wielokąt H jest chudym siedmiokątem zawierającym pięć wewnętrznych punktów kratowych. Otoczkę wewnętrzną siedmiokąta H oznaczmy przez H' . Wobec twierdzeń 3.4 i 1.4 mamy $v(H') = 4$. Na mocy twierdzeń 2.4 i 2.5 czworokąt H' jest równoważny z jednym z czworokątów przedstawionych wraz z otoczkami zewnętrznymi na rysunku 4.26.

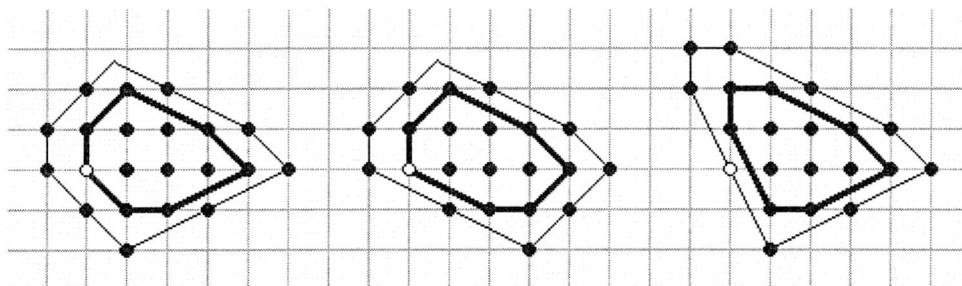


Rysunek 4.26

Z tych trzech otoczek zewnętrznych tylko trzecią, o wierzchołkach $(0,-1)$, $(5,-1)$, $(2,2)$ i $(0,2)$, można przyciąć do siedmiokąta. W tym celu należy dokonać sześciu ścieć. Łatwo zauważyć, że:

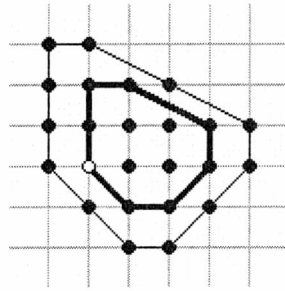
- konieczne jest ścięcie dwóch wierzchołków otoczki zewnętrznej o wierzchołkach $(0,-1)$ i $(5,-1)$,
- na każdej z prostych kratowych $y = -1$, $x = 0$ i $y = -x + 4$ muszą leżeć po dwa wierzchołki wielokąta H ,
- punkt $(1,2)$ musi być wierzchołkiem wielokąta H .

Uwzględniając powyższe ograniczenia otrzymujemy trzy nierównoważne siedmiokąty przedstawione wraz z otoczkami zewnętrznymi na rysunku 4.27. Żaden z tych siedmiokątów nie może być otoczką wewnętrzną wypukłego dziesięciokąta kratowego.



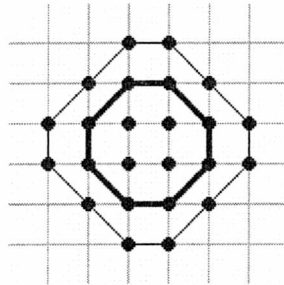
Rysunek 4.27

Przypadek 5.10. Wielokąt H jest wypukłym siedmiokątem kratowym zawierającym osiem brzegowych i cztery wewnętrzne punkty kratowe. Podobnie jak w przypadku 4.7 wielokąt H zawiera się w kwadracie $O(Q)$ o wierzchołkach w punktach $(0,-1)$, $(3,-1)$, $(3,2)$ i $(0,2)$. Z faktu, że jeden bok siedmiokąta ma długość kratową 2 wynika, że jeden z wierzchołków kwadratu $O(Q)$ musi być wierzchołkiem wielokąta H . Pozostałe wierzchołki $O(Q)$ ścinamy właściwie i tak otrzymany siedmiokąt przycinamy do szukanego siedmiokąta H , przedstawionego na rysunku 4.28. Oczywiście otoczki zewnętrznej $O(H)$ nie można przyciąć do dziesięciokąta.



Rysunek 4.28

Przypadek 5.11. W tym przypadku wielokąt H jest chudym ośmiokątem kratowym zawierającym cztery wewnętrzne punkty kratowe. Na mocy twierdzenia 1.8 istnieje tylko jeden taki ośmiokąt. Z Rysunku 4.29 widać, że otoczka zewnętrzna ośmiokąta H nie dopuszcza ścięcia właściwego żadnego ze swoich wierzchołków i nie istnieje wypukły dziesięciokąt kratowy, którego otoczką wewnętrzną byłby taki ośmiokąt.



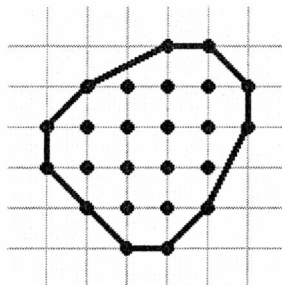
Rysunek 4.29

Podsumowując udowodniliśmy, że nie istnieje wypukły dziesięciokąt kratowy zawierający 11 lub 12 wewnętrznych punktów kratowych. $\square$

Twierdzenie 4.8. Niech K będzie wypukłym dziesięciokątem kratowym. Jeśli $b(K) > 10$, to $g(K) \geq 13$.

Dowód. Niech K będzie wypukłym dziesięciokątem kratowym, który nie jest chudy. Udowodniliśmy, że jedyny wypukły dziesięciokąt kratowy zawierający 10 wewnętrznych punktów kratowych jest chudy, zatem $g(K) \geq 11$. W dowodzie twierdzenia 4.7 pokazaliśmy, że nie istnieje wypukły dziesięciokąt kratowy zawierający 11 lub 12 wewnętrznych punktów kratowych. Zatem $g(K) \geq 13$. Wyniku tego nie da się już poprawić. Rysunek 4.30

przedstawia przykład wypukłego dziesięciokąta kratowego, który nie jest chudy i zawiera 13 wewnętrznych punktów kratowych.



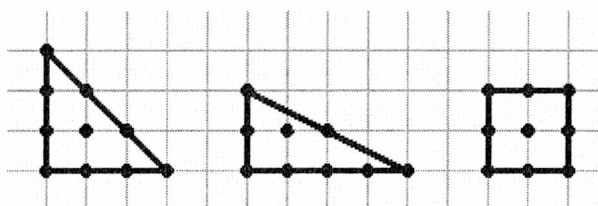
Rysunek 4.30

□

4.3. Krótkie dowody znanych rezultatów.

Metoda dowodzenia stosowana w tym rozdziale pozwala znacznie skrócić dowody kilku znanych rezultatów z [1], [32], [33], [43].

Nowy dowód twierdzenia 1.5. Oznaczmy wewnętrzny punkt kratowy szukanego sześciokąta przez A . Znajdźmy takie wielokąty kratowe K , dla których $H(K) = \{A\}$. Rysunek 4.31 przedstawia maksymalne w sensie zawierania zbiory K o tej własności.



Rysunek 4.31

Jak łatwo zauważyć, środkowego z nich nie można przyciąć do sześciokąta. Przycinając oba pozostałe wielokąty do sześciokąta zawsze otrzymamy szukany sześciokąt z rysunku 1.4 lub sześciokąt jemu równoważny.

□

Nowy dowód twierdzenia 1.7. Oznaczmy przez H otoczkę wewnętrzną wypukłego siedmiokąta kratowego K . Załóżmy, że $v(H) < 4$. Z poprzedniego dowodu wynika, że

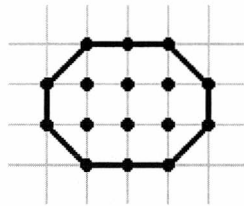
$G(H) \geq 2$. Gdyby otoczka wewnętrzna H była odcinkiem kratowym, to na mocy lematu 4.1 wszystkie siedem wierzchołków musiałoby leżeć na prostych $y=1$, $y=0$ i $y=-1$, co oczywiście nie może zachodzić. Otoczka wewnętrzna H nie może być również trójkątem, ponieważ wtedy istniałyby tylko trzy półpłaszczyzny $h(u)$, $u \in \partial H$, a z twierdzenia 3.2 wynikałoby, że $v(K) \leq 6$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Nowy dowód twierdzenia 1.8. Niech K będzie ośmiokątem zawierającym cztery wewnętrzne punkty kratowe. Wobec twierdzenia 3.4 mamy $v(H(K)) = 4$. Na mocy twierdzenia 2.4 $H(K)$ musi być równoważny z jednostkowym kwadratem Q . Wielokąt $O(Q)$ jest kwadratem kratowym o boku długości kratowej 3. Jediną możliwością uzyskania ośmiokąta jest ścięcie wszystkich czterech jego wierzchołków. W ten sposób otrzymujemy ośmiokąt z rysunku 1.5. $\square$

Kolejne twierdzenie sformułowane w [30] po raz pierwszy zostało udowodnione w [43], a następnie opublikowane z prostszym dowodem w [33].

Twierdzenie 4.9. *Wypukły ośmiokąt kratowy może zawierać 4 lub 6 wewnętrznych punktów kratowych, ale nie może zawierać 5 wewnętrznych punktów kratowych.*

Dowód. Rysunki 1.5 i 4.32 przedstawiają dwa wypukłe ośmiokąty kratowe zawierające odpowiednio 4 i 6 wewnętrznych punktów kratowych.



Rysunek 4.32

Załóżmy, że istnieje ośmiokąt kratowy K zawierający 5 wewnętrznych punktów kratowych. Z twierdzenia 3.4 i 1.4 wynika, że $v(H(K)) = 4$. Zatem $H(K)$ jest czworokątem z $G(H(K)) = 5$. Na mocy twierdzeń 2.4 i 2.5 wielokąt $H(K)$ jest równoważny z jednym z

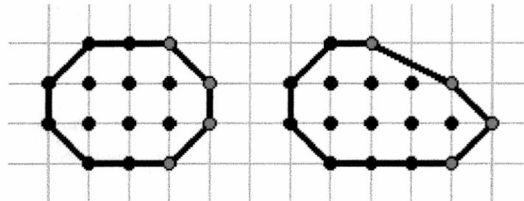
trzech czworokątów, które wraz z otoczkami zewnętrznymi przedstawione są na rysunku 4.26. Przycięcie tych otoczek zewnętrznych do ośmiokąta oczywiście nie jest możliwe. □

4.4. Anomalie wypukłych wielokątów kratowych

W poprzedniej części tego rozdziału podaliśmy krótki dowód tzw. anomalii ośmiokąta. Teraz wzmocnimy tezę twierdzenia 4.9. Pokażemy mianowicie, że występująca w tej tezie anomalia związana z liczbą 5 jest jedyna.

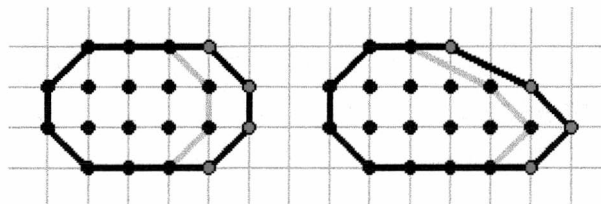
Twierdzenie 4.10. *Wypukły ośmiokąt kratowy może zawierać dowolną liczbę $g \geq 6$ wewnętrznych punktów kratowych.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że dla każdego $g \geq 6$ istnieje wypukły ośmiokąt kratowy K_g , zawierający g wewnętrznych punktów kratowych. Rysunek 4.33 przedstawia ośmiokąty K_6 i K_7 w oparciu o które skonstruujemy pozostałe wielokąty.



Rysunek 4.33

Aby skonstruować wypukły ośmiokąt kratowy K_{2n} , dla $n \geq 4$, należy przesunąć zaznaczone na czerwono wierzchołki wielokąta K_6 o wektor $[n-3, 0]$. Analogicznie, aby skonstruować wypukły ośmiokąt kratowy K_{2n+1} , dla $n \geq 4$, należy przesunąć zaznaczone na czerwono wierzchołki wielokąta K_7 o wektor $[n-3, 0]$. Proces ten, dla $n=4$, ilustruje rysunek 4.34.



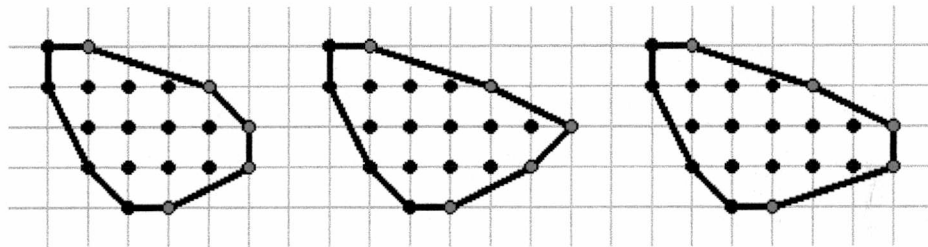
Rysunek 4.34

□

Pokażemy teraz, że w przypadku dziewięciokątów i dziesięciokątów kratowych nie istnieją inne anomalie poza wymienionymi w hipotezie 4.1 i twierdzeniu 4.7.

Twierdzenie 4.11. *Wypukły dziewięciokąt kratowy może zawierać dowolną liczbę $g \geq 10$ wewnętrznych punktów kratowych.*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia wystarczy pokazać, że dla każdego $g \geq 10$ istnieje wypukły dziewięciokąt kratowy K_g , zawierający g wewnętrznych punktów kratowych. Rysunek 4.35 przedstawia dziewięciokąty K_{10} , K_{11} i K_{12} .

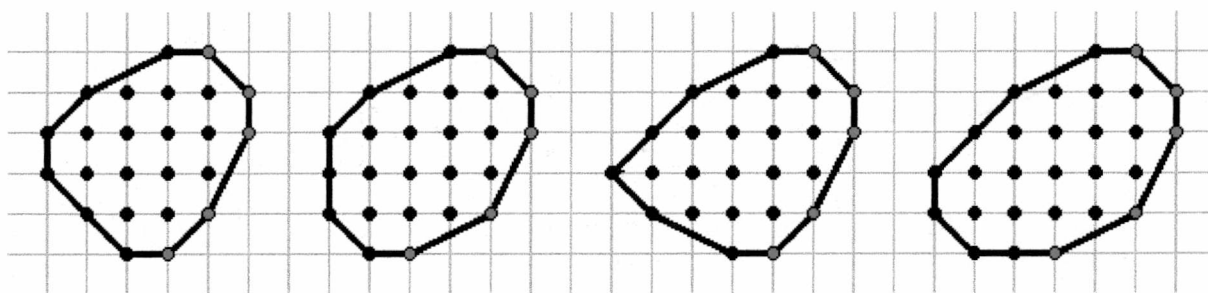


Rysunek 4.35

Aby skonstruować wypukły dziewięciokąt kratowy K_{3n+1} , dla $n \geq 4$, należy przesunąć zaznaczone na czerwono wierzchołki wielokąta K_{10} o wektor $[n-3, 0]$. Analogicznie, aby skonstruować wypukły dziewięciokąt kratowy K_{3n+2} , dla $n \geq 4$, należy przesunąć zaznaczone na czerwono wierzchołki wielokąta K_{11} o wektor $[n-3, 0]$ i aby skonstruować wypukły dziewięciokąt kratowy K_{3n} , dla $n \geq 5$, należy przesunąć zaznaczone na czerwono wierzchołki wielokąta K_{12} o wektor $[n-4, 0]$. □

Twierdzenie 4.12. *Wypukły dziesięciokąt kratowy może zawierać dowolną liczbę $g \geq 13$ wewnętrznych punktów kratowych.*

Dowód. Podobnie jak w dowodach dwóch poprzednich twierdzeń pokażemy, że dla każdego $g \geq 13$ istnieje wypukły dziesięciokąt kratowy K_g , zawierający g wewnętrznych punktów kratowych. Rysunek 4.36 przedstawia dziesięciokąty wyjściowe K_{13} , K_{14} , K_{15} i K_{16} .



Rysunek 4.36

Poniżej podajemy w jaki sposób skonstruować wypukły dziesięciokąt kratowy o żądanej liczbie wewnętrznych punktów kratowych. Aby uzyskać dziesięciokąt:

- K_{4n+1} , dla $n \geq 4$, należy przesunąć wierzchołki wielokąta K_{13} o wektor $[n-3, 0]$,
- K_{4n+2} , dla $n \geq 4$, należy przesunąć wierzchołki wielokąta K_{14} o wektor $[n-3, 0]$,
- K_{4n+3} , dla $n \geq 4$, należy przesunąć wierzchołki wielokąta K_{15} o wektor $[n-3, 0]$,
- K_{4n} , dla $n \geq 5$, należy przesunąć wierzchołki wielokąta K_{16} o wektor $[n-4, 0]$.

□

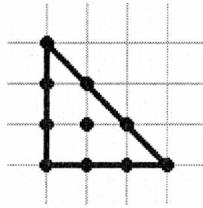
Rozdział 5

Dowód hipotezy Colemana

Liczba brzegowych punktów kratowych w wielokącie kratowym może być dowolnie duża, nawet jeśli wielokąt ten jest wypukły. Przykładem są tu trójkąty, bez wewnętrznych punktów kratowych, o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$ i $(k,0)$, $k \in \mathbb{N}$, mające $k+2$ brzegowych punktów kratowych. Dopiero wymóg istnienia wewnętrznych punktów kratowych w wielokącie zmienia tę sytuację. Przykładowo, z rozważań rozdziału 2 wynika, że w klasie wielokątów wypukłych z jednym wewnętrznym punktem kratowym mamy $b \leq 9$.

Zagadnieniem oszacowania liczby brzegowych punktów kratowych dla wypukłych wielokątów kratowych zawierających wewnętrzne punkty kratowe, niezależnie i w różnym kontekście, jako pierwsi zajmowali się Scott [37], [38] i Coleman [6]. Scott za główny cel postawił sobie znalezienie prostego kombinatorycznego warunku koniecznego wypukłości wielokątów kratowych z wewnętrznymi punktami kratowymi. W rezultacie uzyskał następujące twierdzenie [37].

Twierdzenie 5.1. *Niech K będzie wypukłym wielokątem kratowym, zawierającym g , $g \geq 1$, wewnętrznych i b brzegowych punktów kratowych, wtedy $b \leq 2g + 7$. Równość w tym ograniczeniu występuje tylko w przypadku trójkątów równoważnych z następującym trójkątem:*



Rysunek 5.1

Nieomal w tym samym czasie podobne zależności uzyskał Coleman, rozpatrując pewną grę na płaszczyźnie. Obserwacje poczynione podczas prowadzonych badań doprowadziły go do sformułowania następującej interesującej hipotezy [6], [41] .

Hipoteza Colemana. *Dla każdego wypukłego wielokąta kratowego K zawierającego wewnętrzne punkty kratowe prawdziwa jest następująca nierówność*

$$b(K) \leq 2g(K) - v(K) + 10. \quad (5.1)$$

Z twierdzenia 5.1 wynika, że hipoteza Colemana jest prawdziwa w przypadku, gdy $v = 3$ i $v = 4$. Rabinowitz [30] udowodnił jej prawdziwość dla $v = 5$. W tym rozdziale pokażemy, że hipoteza Colemana jest prawdziwa dla dowolnego v . Celem naszym jest także wskazanie wszystkich wypukłych wielokątów kratowych, dla których w (5.1) zachodzi równość. Zaczniemy od sformułowania następującego lematu.

Lemat 5.2. *Niech K będzie wypukłym wielokątem kratowym i niech $H(K)$ będzie jego otoczką wewnętrzną. Jeśli hipoteza Colemana jest prawdziwa dla $O(H(K))$, to jest również prawdziwa dla K .*

Dowód. Niech $P = O(H(K))$ i niech $P' = cl(P \setminus \Delta_A)$, gdzie A jest wierzchołkiem wielokąta $O(H(K))$, który może być ścięty. Dla dowodu wystarczy pokazać, że prawdziwość nierówności dla P implikuje jej prawdziwość dla P' . Załóżmy, że

$$b(P) \leq 2g(P) - v(P) + 10. \quad (5.2)$$

Dla P' oczywiście mamy

$$b(P') = b(P) - 1$$

$$g(P') = g(P).$$

W wyniku ścięcia liczba wierzchołków może ulec zmianie co najwyżej o 1. Dlatego mamy

$$v(P') \leq v(P) + 1.$$

Po podstawieniu powyższych trzech związków do (5.2) otrzymujemy następującą nierówność

$$b(P') + 1 \leq 2g(P') - v(P') + 1 + 10,$$

a więc także

$$b(P') \leq 2g(P') - v(P') + 10$$

co kończy dowód lematu. □

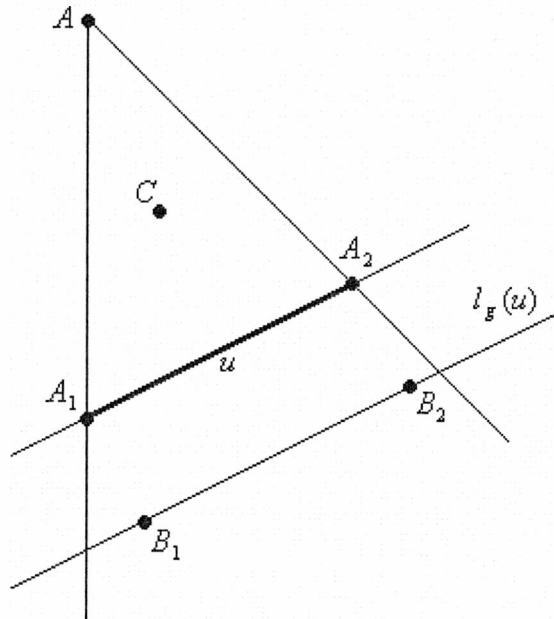
Kolejne dwa lematy będą bardzo przydatne.

Lemat 5.3. *Niech H będzie wypukłym wielokątem kratowym zawierającym wewnętrzny punkt kratowy A . Jeśli u jest odcinkiem kratowym o długości 1 leżącym na brzegu wielokąta H , to wewnątrz stożka*

$$\text{cone}(A, u) = \{(1 - \alpha)A + \alpha D : D \in u, \alpha \geq 0\}$$

zawiera co najwyżej jeden punkt kratowy z brzegu wielokąta $O(H)$.

Dowód. Przez A_1 i A_2 oznaczmy końce odcinka u . Załóżmy, że dwa punkty kratowe B_1 i B_2 należące do $\partial(O(H))$ leżą we wnętrzu $\text{cone}(A, u)$. Wtedy pięciokąt kratowy $AA_1B_1B_2A_2$ zawierałby co najmniej jeden wewnętrzny punkt kratowy, co wynika z twierdzenia 1.4.



Rysunek 5.2

Punkt ten nie mógłby leżeć pomiędzy prostymi $l(u)$ i $l_g(u)$, ani na odcinku A_1A_2 , a zatem musiałby leżeć we wnętrzu trójkąta AA_1A_2 . Możemy przyjąć, że C jest punktem, który leży najbliżej odcinka u . Pięciokąt kratowy $CA_1B_1B_2A_2$ ponownie zawierałby wewnętrzny punkt kratowy, który musiałby leżeć we wnętrzu trójkąta CA_1A_2 . To jest jednak sprzeczne z przyjętym założeniem, że C jest punktem, który leży najbliżej odcinka u i kończy dowód lematu. $\square$

Lemat 5.4. *Niech K będzie wypukłym wielokątem kratowym takim, że jego otoczka wewnętrzna $H(K)$ zawiera wewnętrzny punkt kratowy. Wtedy*

$$b(K) \leq 2b(H(K)).$$

Dowód. Niech A będzie wewnętrznym punktem kratowym wielokąta $H(K)$. Weźmy wszystkie $b(H(K))$ odcinki kratowe o długości 1 leżące na brzegu $H(K)$. Wtedy

$$O(H(K)) \subset \bigcup \{cone(A, u) : u \subset \partial H(K)\}.$$

Wnętrza stożków występujących po prawej stronie powyższego zawierania są zbiorami parami rozłącznymi. Zatem z lematu 5.3 wynika, że wszystkie wnętrza stożków zawierają razem co najwyżej $b(H(K))$ punktów kratowych. Kolejnych $b(H(K))$ punktów kratowych może wystąpić na brzegach tych stożków. W ten sposób otrzymujemy nierówność

$$b(O(H(K))) \leq 2b(H(K)).$$

W połączeniu z oczywistą nierównością $b(K) \leq b(O(H(K)))$ mamy

$$b(K) \leq 2b(H(K))$$

co kończy dowód. $\square$

Zauważmy, że bez założenia o istnieniu wewnętrznego punktu kratowego nierówność $b(K) \leq 2b(H(K))$ może nie być prawdziwa, co łatwo sprawdzić na przykładzie trójkąta o wierzchołkach $(0,1)$, $(0,0)$ i $(1,0)$ oraz jego otoczki zewnętrznej.

W dowodzie kolejnego lematu będziemy korzystać z własności funkcji zdefiniowanej następująco:

$$g(v) = \min\{g(K) : K \in P_v\}.$$

Z definicji tej wynika natychmiast, że dla $K \in P_v$, $g(K) \geq g(v)$. Łatwo sprawdzić, że funkcja ta jest niemalejąca. Będziemy także korzystać z jednego ze znanych ograniczeń na tę funkcję, $g(v) \geq v - 4$, które jest prawdziwe gdy $v \geq 7$.

Lemat 5.5. *Jeśli K jest wypukłym wielokątem kratowym takim, że $H(K)$ zawiera wewnętrzny punkt kratowy, to hipoteza Colemana jest prawdziwa dla K .*

Dowód. Niech K będzie v -kątem, dla którego $g(H(K)) \geq 1$. Oczywiście w tym przypadku $b(K) \leq 2b(H(K))$. Po podstawieniu do tej nierówności następującej zależności

$$b(H(K)) = G(H(K)) - g(H(K)) = g(K) - g(H(K))$$

otrzymamy

$$b(K) \leq 2b(H(K)) = 2g(K) - 2g(H(K)). \quad (5.3)$$

Rozpatrzmy przypadek, gdy $v(K) \leq 12$. Wtedy, korzystając z założenia $g(H(K)) \geq 1$, nierówność (5.3) można przekształcić w następujący sposób

$$b(K) \leq 2g(K) - 2g(H(K)) \leq 2g(K) - 2 \leq 2g(K) - v(K) + 10.$$

Zatem hipoteza Colemana jest prawdziwa dla wszystkich wypukłych wielokątów kratowych, zawierających co najwyżej 12 wierzchołków, których otoczka wewnętrzna $H(K)$ zawiera co najmniej jeden wewnętrzny punkt kratowy.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy $v(K) \geq 13$. Na mocy twierdzenia 3.4 mamy

$$v(H(K)) \geq \left\lceil \frac{v(K)}{2} \right\rceil \geq 7.$$

Korzystając z tego faktu, monotoniczności funkcji $g(v)$ oraz wspomnianej wyżej nierówności $g(t) \geq t - 4$, otrzymujemy

$$g(H(K)) \geq g(v(H(K))) \geq g\left(\left\lceil \frac{v(K)}{2} \right\rceil\right) \geq \left\lceil \frac{v(K)}{2} \right\rceil - 4$$

Podstawiając otrzymaną nierówność do (5.3) uzyskujemy

$$b(K) \leq 2g(K) - 2g(H(K)) \leq 2g(K) - 2\left(\left\lceil \frac{v(K)}{2} \right\rceil - 4\right) \leq 2g(K) - v(K) + 8.$$

Wynika stąd, że hipoteza Colemana jest prawdziwa dla K . □

Na mocy twierdzenia 3.4 otoczka wewnętrzna dowolnego v -kąta, gdzie $v \geq 9$, jest n -kątem, gdzie $n \geq 5$. Z kolei każdy taki n -kąąt zawiera co najmniej jeden wewnętrzny punkt kratowy. A zatem z lematu 5.5 wynika, że hipoteza Colemana jest prawdziwa dla wszystkich wypukłych wielokątów kratowych, dla których $v \geq 9$.

W kolejnych lematach przeanalizujemy pozostałe przypadki. Pokażemy, że hipoteza Colemana jest także prawdziwa dla v -kątów, dla których $v \in \{3, \dots, 8\}$, a otoczka wewnętrzna tych v -kątów nie zawiera wewnętrznych punktów kratowych.

Lemat 5.6. *Jeśli K jest wypukłym v -kątem kratowym zawierającym g , $g \geq 2$, współliniowych wewnętrznych punktów kratowych, to hipoteza Colemana jest prawdziwa dla K .*

Dowód. Niech K będzie v -kątem zawierającym g współliniowych wewnętrznych punktów kratowych. Gdy $v \geq 7$, to na mocy twierdzenia 1.7, wewnętrzne punkty kratowe nie mogą być współliniowe. Dlatego w tym przypadku rozpatrujemy jedynie v -kąty, dla których $v \in \{3, \dots, 6\}$. Stosując lemat 1.3 przekształcamy v -kąąt K taki sposób, aby zbiór jego wewnętrznych punktów kratowych leżał na dodatniej części osi OX z pierwszym punktem mającym współrzędne $(1,0)$.

W tym przypadku otoczka zewnętrzna zbioru $H(K)$ nie jest zdefiniowana, dlatego rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{M}_v \subset \mathcal{P}_v$, składającą się ze wszystkich v -kątów M , dla których $H(M) = H(K)$. Oczywiście $K \in \mathcal{M}_v$.

Wobec oczywistej nierówności

$$b(K) \leq \max \{b(M) : M \in \mathcal{M}_v\},$$

wystarczy pokazać, że

$$\max \{b(M) : M \in \mathcal{M}_v\} \leq 2g(K) - v(K) + 10.$$

W tym celu rozważmy wszystkie przypadki w zależności od wartości parametru v .

Każdy $M \in \mathcal{M}_v$, niezależnie od v , jest zawarty w pasie ograniczonym prostymi $y = -1$ i $y = 1$. Oczywiście istnieją takie wielokąty należące do $\mathcal{M}_v$, które nie zawierają punktów o współrzędnych $(0,0)$ i $(g+1,0)$. Jednak każdy z nich jest zawarty w innym wielokącie również należącym do $\mathcal{M}_v$, który te punkty zawiera i tym samym zawiera więcej brzegowych punktów kratowych. Ponieważ interesują nas te wielokąty spośród $\mathcal{M}_v$, które zawierają największą liczbę brzegowych punktów kratowych, to możemy ograniczyć nasze rozważania tylko do tych, które zawierają punkty brzegowe $(0,0)$ i $(g+1,0)$.

Dodatkowo można zastosować ściągnięcie względem osi OX , aby każdy taki wielokąt leżał w domkniętej półpłaszczyźnie $x \geq 0$, a jeden z wierzchołków leżących na prostej $y = 1$ przekształcić w punkt o współrzędnych $(0,1)$. Takie ściągnięcie pozostawia niezmienny punkt $(0,0)$, co pozwala nam przyjąć, że każdy wielokąt $M \in \mathcal{M}_v$ ma bok leżący na prostej $x = 0$.

Uwzględniając wszystkie ograniczenia narzucone na wielokąty $M \in \mathcal{M}_v$ możemy stwierdzić, że w przypadku rodziny $\mathcal{M}_3$ najwięcej brzegowych punktów kratowych zawiera trójkąt T_g , $g \geq 2$, o wierzchołkach w punktach $(0,1)$, $(0,-1)$ i $(2g+2,-1)$. Wtedy $b(T_g) = 2g(K) + 6$. Wobec tego mamy

$$b(K) \leq \max \{b(M) : M \in \mathcal{M}_3\} = b(T_g) = 2g(K) + 6 = 2g(K) - v(K) + 9,$$

z czego oczywiście widać, że dla $M \in \mathcal{M}_3$ hipoteza Colemana jest prawdziwa. Zauważmy ponadto, że dla trójkątów z tej klasy nie zachodzi równość $b = 2g + 7$.

W przypadku wielokątów $M \in \mathcal{M}_4$ również uwzględniamy wszystkie narzucone ograniczenia i możemy stwierdzić, że najwięcej brzegowych punktów kratowych zawiera dowolny czworokąt Q_g^n o wierzchołkach w punktach $(0,1)$, $(0,-1)$, $(2g-n+1,-1)$ i $(n+1,1)$, gdzie $g \geq 2$ i $0 \leq n \leq g$. Łatwo sprawdzić, że dla każdego takiego Q_g^n , w szczególności dla prostokąta Q_g^g , liczba brzegowych punktów kratowych jest równa $b(Q_g^n) = 2g(K) + 6$. Mamy więc

$$b(K) \leq \max \{b(M) : M \in \mathcal{M}_4\} = b(Q_g^g) = 2g(K) + 6 = 2g(K) - v(K) + 10.$$

Każdy pięciokąt $M \in \mathcal{M}_5$ również leży w pasie pomiędzy prostymi $y = -1$ i $y = 1$. Oczywiście największą liczbę brzegowych punktów kratowych zawierają te pięciokąty, które mogą być uzyskane z Q_g^n przez ścięcie właściwe jednego z wierzchołków. Pięciokąty te oznaczamy będziemy przez P_g^n , gdzie $g \geq 2$ i $0 \leq n \leq g$. Każdy taki pięciokąt zawiera $b(Q_g^n) - 1$ brzegowych punktów kratowych. Stąd natychmiast mamy

$$b(K) \leq \max \{b(M) : M \in \mathcal{M}_5\} = b(P_g^g) = 2g(K) + 5 = 2g(K) - v(K) + 10.$$

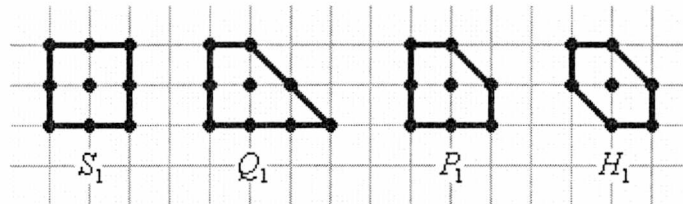
Oznaczmy przez H_g^n , $g \geq 2$ i $0 \leq n \leq g$, te sześciokąty, które można uzyskać z P_g^n przez ścięcie właściwe jednego z wierzchołków. Każdy taki sześciokąt zawiera najwięcej brzegowych punktów kratowych spośród wielokątów należących do $\mathcal{M}_6$. Mamy więc

$$b(K) \leq \max \{b(M) : M \in \mathcal{M}_6\} = b(H_g^g) = 2g(K) + 4 = 2g(K) - v(K) + 10.$$

To kończy dowód lematu. □

Lemat 5.7. *Jeśli K jest wypukłym v -kątem kratowym zawierającym jeden wewnętrzny punkt kratowy, to hipoteza Colemana jest prawdziwa dla K .*

Dowód. Korzystając z twierdzenia 2.5, łatwo sprawdzić, że dla każdego wielokąta zawierającego jeden wewnętrzny punkt kratowy hipoteza Colemana jest prawdziwa. Zauważmy, że równość w (5.1) zachodzi w przypadku trójkąta z rysunku 5.1 oraz następujących wielokątów



Rysunek 5.3

□

Zdefiniujemy teraz nowe pojęcie *szerokości kratowej* wypukłego wielokąta kratowego K . Niech e będzie bokiem wypukłego wielokąta kratowego K i niech $l_0 = l(e)$. Przez l_1 oznaczmy prostą kratową równoległą i najbliższą do l_0 leżącą w dopełnieniu półpłaszczyzny

$h(e)$, a przez l_2 oznaczmy kolejną prostą kratową równoległą i najbliższą do l_1 . W ten sam sposób definiujemy odpowiednio proste kratowe l_j dla $j \geq 3$. Oczywiście wszystkie proste kratowe uzyskane w ten sposób są do siebie równoległe i odległość pomiędzy l_j i l_{j+1} jest taka sama dla każdego j .

Definicja 5.8. Niech K będzie wypukłym wielokątem kratowym. Szerokością kratową wielokąta K względem boku e nazywamy liczbę $t = t(K, e)$ taką, że $K \cap l_t \neq \emptyset$, a $K \cap l_{t+1} = \emptyset$.

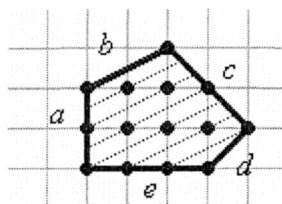
Zauważmy, że jeśli bok e jest równoległy do osi OX , to $t(K, e)$ jest szerokością pionową wielokąta K , czyli odległością pomiędzy dwiema poziomymi prostymi podpierającymi K .

Definicja 5.9. Wypukły wielokąt kratowy ma szerokość kratową $w = w(K)$, jeśli

$$w = w(K) = \min\{t(K, e) : e \subset \partial K\}.$$

Jeśli P jest punktem kratowym lub odcinkiem kratowym, to przyjmujemy $w(P) = 0$.

Niech K będzie pięciokątem z rysunku 5.4. Szerokości kratowe wielokąta K względem jego boków są następujące: $t(K, a) = 4$, $t(K, b) = 7$, $t(K, c) = 5$, $t(K, d) = 3$, $t(K, e) = 3$. Oczywiście $w(K) = 3$.



Rysunek 5.4

Zauważmy, że wypukły wielokąt kratowy K zawierający wewnętrzny punkt kratowy ma szerokość $w(K) \geq 2$. Lemat 5.5 obejmuje prawie wszystkie przypadki wypukłych wielokątów kratowych K , dla których $w(H(K)) \geq 2$, poza przypadkami wielokątów, dla których $g(H(K)) = 0$. Wobec twierdzenia 2.4 jedynym wielokątem o szerokości kratowej 2, który nie zawiera wewnętrznych punktów kratowych jest trójkąt Δ_2 o wierzchołkach w punktach $(1,0)$, $(3,0)$ i $(1,2)$. Aby udowodnić, że hipoteza Colemana jest prawdziwa dla wszystkich

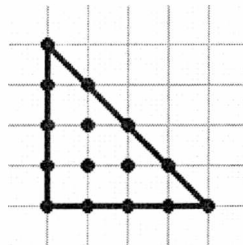
wielokątów K , dla których $w(H(K)) \geq 2$, wystarczy, wobec lematu 5.2, pokazać, że jest prawdziwa dla $O(\Delta_2)$, co oczywiście ma miejsce.

Lematy 5.6 i 5.7 obejmują wszystkie przypadki, gdy $w(H(K)) = 0$. A zatem pozostaje nam rozpatrzeć przypadek, gdy $w(H(K)) = 1$.

Lemat 5.10. *Hipoteza Colemana jest prawdziwa dla każdego wypukłego wielokąta kratowego K , dla którego mamy $w(H(K)) = 1$.*

Dowód. Jak było zasygnalizowane przed lematem 5.6, $v(K) \in \{3, \dots, 8\}$. Niech K będzie wielokątem spełniającym założenia lematu. Podobnie jak w lemacie 5.5 możemy tak przekształcić wielokąt K , aby krawędź e , dla której $w(K) = t(K, e)$, leżała na prostej $y = -1$, a wewnętrzne punkty kratowe wielokąta leżały na prostych $y = 0$ i $y = 1$, z dwoma wierzchołkami $H(K)$ w punktach $(1, 0)$ i $(1, 1)$. Kolejne wierzchołki wielokąta $H(K)$ będą miały współrzędne $(k, 1)$ (k może być równe 1) oraz $(g - k, 0)$, gdzie $g - k \geq k$.

Z założenia wynika, że $H(K)$ jest wypukłym wielokątem kratowym, dlatego jego otoczka zewnętrzna $O(H(K))$ jest dobrze określona. Oczywiście wielokąt $O(H(K))$ ma boki na prostych $x = 0$ i $y = -1$ oraz jest ograniczony prostą l przechodzącą przez punkty $D_1 = (k + 1, 1)$ i $D_2 = (g - k + 1, 0)$. Z założenia $w(H(K)) = 1$ wynika, że wewnętrzne punkty kratowe wielokąta K nie mogą być współliniowe, a zatem $g \geq 3$. Jeśli $g = 3$, to $k = 1$ i wielokąt $O(H(K))$ jest trójkątem przedstawionym na rysunku 5.5, dla którego hipoteza Colemana jest oczywiście prawdziwa. W pozostałych przypadkach wielokąt $O(H(K))$ zawiera się w pasie pomiędzy prostymi $y = -1$ i $y = 2$.



Rysunek 5.5

Prosta l nie może przecinać prostej $x = 0$ poniżej punktu o współrzędnych $(0,2)$, ponieważ wtedy wielokąt $O(H(K))$ nie byłby kratowym, a co za tym idzie nie istniałby wielokąt kratowy o otoczce wewnętrznej $H(K)$. Prosta l przechodzi przez punkt $(0,2)$, dla $g = 3k + 1$, a wtedy wielokąt $O(H(K))$ jest trójkątem z trzecim wierzchołkiem w punkcie $(g + 2, -1)$. W takim przypadku wielokąt $O(H(K))$ zawiera $g + 8$ brzegowych punktów kratowych i hipoteza Colemana jest dla niego prawdziwa.

W pozostałych przypadkach prosta l przecina prostą $y = 2$ w punkcie kratowym $D_0 = D_1 + \overrightarrow{(D_1 - D_2)}$, skąd $D_0 = (3k - g + 1, 2)$. Czwarty wierzchołek wielokąta $O(H(K))$ znajduje się w punkcie $D_3 = D_2 - \overrightarrow{(D_1 - D_2)}$ o współrzędnych $D_3 = (2g - 3k + 1, -1)$ i wtedy

$$b(O(H(K))) = (2g - 3k + 2) + 2 + 2 + (3k - g + 2) = g + 8.$$

Powyższa równość, łącznie z faktem, że $v(O(H(K))) = 4$, implikuje prawdziwość hipotezy Colemana dla $O(H(K))$. Na mocy lematu 5.2 hipoteza Colemana jest również prawdziwa dla K , co kończy dowód. $\square$

Przedstawione w tym rozdziale lematy obejmują wszystkie przypadki wypukłych wielokątów kratowych zawierających co najmniej jeden wewnętrzny punkt kratowy. To pozwala nam sformułować twierdzenie, które bezpośrednio wynika z udowodnionych lematów.

Twierdzenie 5.11. *Dla dowolnego wypukłego wielokąta kratowego K zawierającego co najmniej jeden wewnętrzny punkt kratowy prawdziwa jest nierówność*

$$b(K) \leq 2g(K) - v(K) + 10.$$

Zauważmy, że z przedstawionej metody dowodzenia opartej na własnościach otoczki wewnętrznej i zewnętrznej wynika niezależny dowód twierdzenia 5.1. Wykorzystanie tego twierdzenia pozwoliłoby nam skrócić dowód lematu 5.10, ponieważ rozpatrywane tam otoczki zewnętrzne są trójkątami i czworokątami.

Analiza przeprowadzonych dowodów pozwala nam wskazać wszystkie wielokąty K , dla których w (5.1) zachodzi równość. Poza wielokątami z rysunków 5.1 i 5.3 równość ta jest

prawdziwa dla czworokątów Q_g^n , pięciokątów P_g^n i sześciokątów H_g^n zdefiniowanych w dowodzie lematu 5.6. Naturalnie, jest ona prawdziwa dla wszystkich wielokątów równoważnych z wymienionymi powyżej wypukłymi wielokątami kratowymi.

Warto zauważyć, że równość ta jest prawdziwa tylko wtedy, gdy $w(H(K)) = 0$. Wydaje się, że pojęcie szerokości kratowej może być wykorzystane do znalezienia lepszych oszacowań liczby brzegowych punktów kratowych.

Z dowodu lematu 5.5 wynika, że ograniczenie na liczbę brzegowych punktów kratowych w wypukłym wielokącie kratowym można polepszyć poprawiając ograniczenie na funkcję $g(v)$. Zilustrujemy tę ideę na przykładzie najlepszego do tej pory ograniczenia uzyskanego przez Rabinowitza [32]

$$g(t) \geq \left\lceil \frac{3}{2}t \right\rceil - 6, \text{ gdy } t \geq 10.$$

Weźmy wypukły wielokąt kratowy K o co najmniej 19 wierzchołkach. Wtedy, wobec twierdzenia 3.4, $v(H(K)) \geq 10$ i mamy

$$g(H(K)) \geq \left\lceil \frac{3}{2} \left\lceil \frac{v(K)}{2} \right\rceil \right\rceil - 6$$

Następnie, podobnie jak w dowodzie lematu 5.5, po podstawieniu otrzymujemy

$$b(K) \leq 2g(K) - 2g(H(K)) \leq 2g(K) - 2 \left(\left\lceil \frac{3}{2} \left\lceil \frac{v(K)}{2} \right\rceil \right\rceil - 6 \right) \leq 2g(K) - \left\lceil \frac{3}{2} \lceil v(K) \rceil \right\rceil + 12,$$

co daje nam lepsze ograniczenie na liczbę brzegowych punktów kratowych, gdy v jest odpowiednio duże.

Bibliografia

- [1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Profs from THE BOOK*, Springer, Berlin, (2004).
- [2] J.R. Arkininstall, *Minimal requirements for Minkowski's theorem in the plane I*, Bull. Austral. Math. Soc. **22** (1980), 259-274.
- [3] E.A. Bender, *Area-perimeter relations for two-dimensional lattices*. Amer. Math. Monthly **69** (1962), 742-744.
- [4] H.F. Blichfeldt, *A new principle in the geometry of numbers, with some applications*. Trans. Amer. Math. Soc., **15** (1914), 227-235.
- [5] J. Bokowski, H. Hadwiger, J.M. Wills, *Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche and Gitterpunktzahl konvexer Körper in n-dimensionalen euklidischen Raum*, Math. Z. **127** (1972), 363-364.
- [6] D.B. Coleman, *Stretch: A geoboard game*, Math. Mag., **51** (1978), 49-54.
- [7] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley, New York, (1961).
- [8] R. Diaz, S. Robins, *Pick's formula via the Weierstrass ρ -Function*, Amer. Math. Monthly, **102** (1995), 431-437.
- [9] R. Ding, K. Kołodziejczyk, J.R. Reay, *A new Pick-type theorem on the hexagonal lattice*, Discrete Math., **68** (1988), 171-177.
- [10] E. Ehrhart, *Propriétés arithmo-geometriques des polygones*, C. R. Acad. Sci. Paris **241** (1955), 686-689.
- [11] P. Erdős. P.M. Gruber, J. Hammer, *Lattice points*, Longman, Essex (1989).
- [12] P. Gritzman, J.M. Wills, *Lattice Points* in: Handbook of Convex Geometry. (eds P.M. Gruber, J.M. Wills), Elsevier Science Publisher, (1993), 765-797.

- [13] P.M. Gruber, *Seven small pearls from convexity*, Math. Intelligencer, **5** (1983), 16-19.
- [14] P.M. Gruber, C.G. Lekkerkerker, *Geometry of numbers*, 2nd Ed., North-Holland, Amsterdam, (1987)
- [15] B. Grünbaum, G. Shephard, *Pick's Theorem*, Amer. Math. Monthly, **100** (1993), 150-161.
- [16] H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, *Combinatorial geometry in the plane*, Holt, Rinehart and Winston (1964).
- [17] H. Hadwiger, J.M. Wills, *Neuere Studien über Gitterpolygone*, J. Reine Angew. Math., **280** (1973), 61-69.
- [18] J. Hammer, *Unsolved problems concerning lattice points*. Pitman, London (1977).
- [19] M.A. Hernández Cifre, S. Secura Gomis, *Some inequalities for planar convex sets containing one lattice point*, Bull. Austral. Math. Soc., **58** (1998), 159-166.
- [20] P.W. Hillock, P.R. Scott, *Inequalities for lattice constrained planar convex sets*, J. Inequal. Pure Appl. Math., **3** (2) Art 23 (2002).
- [21] K. Kołodziejczyk, *Hadwiger-Wills-type higher-dimensional generalization of Pick's theorem*, Discrete Comput. Geom. **24** (2000), 355-364.
- [22] K. Kołodziejczyk, D. Olszewska, *On some conjectures by Rabinowitz*, Ars Combin., w druku.
- [23] J.C. Lagarias, *Point lattices* in: Handbook of Combinatorics (eds. R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, Elsevier Science Publisher (1995), 919-966.
- [24] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*. Leipzig, Berlin (1896).
- [25] I.G. Macdonald, *The volume of a lattice polyhedron*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **59** (1963), 719-726.
- [26] R. Morelli, *Pick's theorem and the Todd class of a toric variety*, Adv. Math., **100** (1993), 183-231.
- [27] M. Nosarzewska, *Evaluation de la différence entre l'aire d'une region plane convexe et le nombre des points aux coordonnees entières couverts par elle* Colloq. Math. **1** (1948), 305-311.
- [28] D. Olszewska, *A complete census of convex lattice polygons with one interior lattice point*, Proc. 2nd Conf. for Young Mathematicians, Łądek Zdrój 2001, Scientific Papers of the Institute of Mathematics of the Wrocław University of Technology **25** (2003), 55-61.

- [29] G. Pick, *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Sitzungsberichte des deut. naturwiss. medic. Vereines für Böhmen "Lotos" in Prag **19** (1899), 311-319.
- [30] S. Rabinowitz, *Convex Lattice Polytopes*, Ph. D. Dissertation. Polytechnic University. Brooklyn, New York: (1986).
- [31] S. Rabinowitz, *A census of convex lattice polygons with at most one interior lattice point*, Ars Combin., **28** (1989), 83-96.
- [32] S. Rabinowitz, *On the number of lattice points inside a convex lattice n -gon*, Congr. Numer., **73** (1990), 99-124.
- [33] S. Rabinowitz, *The octagon anomaly*, Geombinatorics, **3** (1993), 13-17.
- [34] J.E. Reeve, *On the volume of lattice polyhedra*, Proc. London Math. Soc., **7** (1957), 378-395.
- [35] W. Scherrer, *Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter*, Elem. Math. **1** (1946), 96-98.
- [36] P.R. Scott, *Area-diameter relations for two-dimensional lattices*, Math. Mag., **47** (1974), 218-221.
- [37] P.R. Scott, *On convex lattice polygons*, Bull. Austral. Math. Soc., **15** (1976), 395-399.
- [38] P.R. Scott, *An inequality for convex lattice polygons*, Math. Mag., **52** (1979), 239-240.
- [39] P.R. Scott, *Two inequalities for convex sets with lattice point constraints in the plane*, Bull. London Math. Soc., **11** (1979), 273-278.
- [40] P.R. Scott, *On planar convex sets containing one lattice point*, Q. J. Math., **36** (1985), 105-111.
- [41] P.R. Scott, *The fascination of the elementary*, Amer. Math. Monthly, **94** (1987), 759-768.
- [42] R.J. Simpson, *Convex lattice polygons*, Bull. Austral. Math. Soc., **42** (1990), 353-367.
- [43] N. Steinberg, *The Octagon Anomaly*. Westinghouse Report. Brooklyn, New York (1988).
- [44] H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*, WSP, Warszawa, (1989).
- [45] D.E. Varberg, *Pick's theorem revisited*, Amer. Math. Monthly, **92** (1985), 584-587.
- [46] C.S. Weaver, *Geoboard triangles with one interior point*, Math. Mag. **50** (1977), 92-94.
- [47] J.M. Wills, *Über konvexe Gitterpolygone*, Comment. Math. Helv., **48** (1973), 188-194.

