

INSTYTUT TELEKOMUNIKACJI I AKUSTYKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport

Stanowa synteza
ortogonalnych systemów
dyskretnych

Robert Wirski

Słowa kluczowe:
synteza, system dwuwymiarowy,
ortogonalny filtr cyfrowy

Praca doktorska
Promotor: prof. dr hab. inż. Marian Piekarski

Wrocław 2003

Bardzo serdecznie dziękuję Panu Profesorowi Marianowi
Piekarskiemu za trud prowadzenia niniejszej pracy, jak rów-
nież za wiedzę zdobytą pod Jego kierunkiem.

Robert Wirski

Operatory

Operator Znaczenie

$(\cdot)^t$	transpozycja macierzy
$(\cdot)^*$	transpozycja i sprzężenie macierzy
$(\cdot)^+$	pseudoodwrotność
$\text{rank}(\cdot)$	rzęd macierzy
$\forall x$	dla wszystkich x
$\det(\cdot)$	wyznacznik macierzy

Lista symboli

Symbol Znaczenie

$\mathbb{C}$	pierścień liczb całkowitych
$\mathcal{R}$	ciało liczb rzeczywistych
I_r	kwadratowa macierz jednostkowa o rozmiarze $r \times r$
0_r	kwadratowa macierz zerowa o rozmiarze $r \times r$
$0_{n \times m}$	prostokątna macierz zerowa o rozmiarze $n \times m$
U^1	$= \{z : z > 1\}$
$\overline{U^1}$	$= \{z : z \geq 1\}$
$\overline{U^2}$	$= \{(z_v, z_h) : z_v \geq 1, z_h \geq 1\}$
$\square$	c.b.d.o.

Lista skrótów

Skrót Znaczenie

OFC	ortogonalny filtr cyfrowy
-----	---------------------------

Spis treści

1	Wstęp	5
1.1	Wprowadzenie	5
1.2	Przegląd literatury	6
1.3	Teza pracy	6
2	Ortogonalne filtry cyfrowe	8
2.1	Przypadek jednowymiarowy	8
2.2	Przypadek dwuwymiarowy	9
3	Macierz transmitancji OFC	11
3.1	Systemy jednowymiarowe	11
3.2	Systemy dwuwymiarowe	12
3.2.1	Systemy separowalne	12
3.2.2	Embedding dwuwymiarowy	13
3.2.3	Przykład 1	15
3.2.4	Przykład 2	18
4	Stanowa synteza dwuwymiarowych OFC	21
4.1	Wstęp	21
4.2	Współczynniki szeregu Laurent’a dla $G(z_h, z_v)$	23
4.3	Współczynniki szeregu Laurent’a dla $D(z_h) + C(z_h) [I_v z_v - A(z_h)]^{-1} B(z_h)$	25
4.4	Macierz $T_p(z_h)$	26
4.5	Macierze $A(z_v)$, $B(z_v)$, $C(z_v)$, $D(z_v)$	30
4.6	Algorytm syntezy	34
4.7	Przykład	36
5	Faktoryzacja macierzy wielomianowej nieujemnej na kole jednostkowym	38
5.1	Wstęp	38
5.2	Konstrukcja układu równań	41
5.3	Rozwiązanie układu równań	43
5.4	Zbieżność algorytmu faktoryzacji	44
5.5	Rząd faktora $W(z)$	46
6	Realizacja dwuwymiarowych systemów dyskretnych	49
6.1	Wstęp	49
6.2	Wyliczalność stanowych systemów dwuwymiarowych	50
6.3	Stanowe, dwuwymiarowe przetwarzanie sekwencyjne	51

6.3.1	Przetwarzanie kolumnami	52
6.3.2	Przetwarzanie diagonalne	53
6.3.3	Struktura systemu z przełączanymi jednostkami opóźniającymi . . .	54
6.4	Realizacja bloku bezinercyjnego OFC	56
6.4.1	Systemy jednowymiarowe	56
6.4.2	Systemy dwuwymiarowe	58
6.5	Poszerzanie układu wektorów ortogonalnych do bazy ortonormalnej	59
6.6	Przykład	60
7	Podsumowanie	65
7.1	Oryginalne opracowania zamieszczone w pracy	66
A	Pewne własności sumy	70
A.1	$\sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{j=0}^r f(i, j, i+j)$	70
A.2	$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f(i, j)$	71
A.3	$\sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\infty} f(i, j, i-j)$	72
B	Pseudoodwrotność macierzy wielomianowych	74
C	Opis głównych funkcji do projektowania dwuwymiarowych OFC dla programu MATLAB	75
D	Listingi	77
D.1	orth2.m	77
D.2	przyklad1.m	78

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Początki teorii systemów wielowymiarowych datuje się na lata sześćdziesiąte XX wieku, kiedy to na podstawie osiągnięć ówczesnej algebry wielu zmiennych rozpoczęto badania nad wielowymiarowymi, rzeczywistymi funkcjami nieujemnymi. Osiągnięcia te stanowiły fundament dla rozwoju takich dziedzin jak teoria realizowalności systemów wielowymiarowych czy ich stabilności. Duże znaczenie zyskało również cyfrowe przetwarzanie sygnałów dwuwymiarowych, które dzięki rozwojowi technologii, znajduje zastosowanie w sejsmografii, tomografii czy telewizji. Rozwój tej dziedziny owocuje nowymi algorytmami syntezy dwuwymiarowych systemów dyskretnych i ich implementacji za pomocą dostępnej technologii. Stosowane we wstępnym okresie podejście polegające na zamianie sygnału dwuwymiarowego na jednowymiarowy oraz stosowanie technik jednowymiarowych jest jednak zbyt ograniczające i objawia się trudnością w procesie wyznaczania optymalnych struktur systemów przetwarzających. Właściwe wydaje się zatem operowanie zmiennymi dwuwymiarowymi przez cały proces syntezy, następnie zamiana otrzymanej struktury dwuwymiarowej na system jednowymiarowy, zoptymalizowany pod względem pożądanых własności, takich jak czas przetwarzania, wrażliwość na zmianę parametrów czy pasmo sygnału.

Pierwszy etap syntezy obejmuje najczęściej zagadnienia aproksymacji porządanых własności projektowanego systemu za pomocą wymiernej funkcji transmitancji dwóch zmiennych. Bazuje on zwykle na algorytmach optymalizacyjnych, najczęściej jest to algorytm Fletcher'a-Powell'a. Kolejny etap to wyznaczenie parametrów przyjętego modelu stanowego oraz opracowanie algorytmu prowadzenia obliczeń. Na tym etapie uwzględnia się zwykle skończoną dokładność reprezentacji liczb i wymogi technologiczne. Pierwsze ograniczenie powoduje zjawiska kwantowania i nadmiaru, które są źródłem szumów, oscylacji pasożytniczych, niedokładności w realizacji założonej transmitancji wraz z utratą stabilności filtru włącznie. Drugie – nakłada konieczność dopasowania sposobu prowadzenia obliczeń do planowanej technologii, może to być np. architektura przystosowana do przetwarzania sekwencyjnego (procesory sygnałowe, komputery osobiste) lub równoległego (architektury systoliczne, FPGA).

1.2 Przegląd literatury

Studiując literaturę z dziedziny syntezy systemów dwuwymiarowych można zauważyć, że początkowo opracowywano algorytmy, które nie uwzględniały ograniczonej precyzji reprezentacji liczb [1], w późniejszym okresie widoczny jest wzrost zainteresowania wpływem technologii na proces filtracji. Prezentowane wówczas prace zajmowały się poszukiwaniem realizacji minimalizujących szumy zaokrągleń [16][26] i/lub uwzględniały specyfikę sprzętu [47][29]. Interesujące wydają się również prace uogólniające znane struktury systemów jednowymiarowych na przypadek dwuwymiarowy, np. filtry pseudopasywne [11] i ortogonalne [37]. Na szczególną uwagę zasługują zwłaszcza te ostatnie, gdyż w dziedzinie jednowymiarowej są jasno i prosto zdefiniowane oraz charakteryzują się dobrymi parametrami, z których warto wymienić małą wrażliwość na zmianę współczynników transmitancji, małe szumy, a także brak oscylacji pasożytniczych [43]. Jakkolwiek znane są prace z dziedziny syntezy dwuwymiarowych ortogonalnych filtrów cyfrowych to bądź mają one zastosowanie do wąskiej klasy funkcji transmitancji [30] lub wykorzystują metody optymalizacyjne [10]. Algorytmy oparte na metodach optymalizacyjnych umożliwiają projektowanie dwuwymiarowych ortogonalnych filtrów cyfrowych, jednak nie pozwalają zgłębić zagadnień związanych z tym procesem. Innymi słowy nie jest wiadome, czy dla każdej założonej transmitancji istnieje dokładna realizacja stanowa, a może otrzymany wynik jest tylko przybliżeniem o skończonej dokładności? Do udzielenia odpowiedzi na to pytanie konieczne jest ścisłe podejście do tego zagadnienia. Klucz do takiego podejścia zawiera praca [37], która w sposób formalny prezentuje ścieżkę wyznaczania parametrów modelu stanowego dwuwymiarowego ortogonalnego filtru cyfrowego dla zadanej transmitancji. Wspomniany algorytm stawia jednak nowe problemy, których rozwiązanie nie jest znane w literaturze. Należy do nich problem syntezy macierzy transmitancji dwuwymiarowego ortogonalnego filtru cyfrowego oraz faktoryzacji macierzy rzeczywistej dodatniej, nieujemnej na kole jednostkowym. Znane techniki faktoryzacji macierzy rzeczywistej dodatniej na osi $j\omega$ czy na kole jednostkowym wymagają zwykle ścisłej dodatniości w tym obszarze, ich przegląd można znaleźć w [2], dla omawianych zastosowań konieczne jest opracowanie algorytmu faktoryzacji dla macierzy nieujemnych. Znacznie trudniejsze wydaje się być rozwiązanie problemu syntezy macierzy transmitancji dwuwymiarowego OFC, gdyż nie są znane w literaturze próby jego rozwiązania, istnieją jedynie bardzo ogólne prace podstawowe prezentujące własności macierzy bezstratnych systemów ciągłych [21][3][14].

1.3 Teza pracy

Tezę prezentowanej pracy można ująć następująco:

Możliwa jest synteza i realizacja dwuwymiarowych filtrów dyskretnych stanowiących uogólnienie jednowymiarowych filtrów ortogonalnych na przypadek dwuwymiarowy.

W świetle tego celem pracy jest:

- uogólnienie definicji jednowymiarowych ortogonalnych filtrów cyfrowych (OFC) na przypadek dwuwymiarowy, określenie własności dwuwymiarowych OFC;
- opracowanie i analiza techniki syntezy macierzy transmitancji dwuwymiarowych OFC pod kątem praktycznych zastosowań;

- opracowanie algorytmu faktoryzacji dyskretnej macierzy rzeczywistej, nieujemnej na kole jednostkowym;
- opracowanie techniki prowadzenia obliczeń algorytmu wyznaczającego macierze systemowe dwuwymiarowego OFC, na podstawie [37];
- opracowanie techniki realizacji dwuwymiarowych OFC (struktura i sposób prowadzenia obliczeń).

Rozdział 2

Ortogonalne filtry cyfrowe

2.1 Przypadek jednowymiarowy

Do opisu liniowych systemów dyskretnych jednowymiarowych stosuje się powszechnie dyskretne równania stanu [46, str. 480]

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (2.1)$$

gdzie $t \in \mathbb{C}$; $u(t)$, $y(t)$ i $x(t)$ to wektory odpowiednio pobudzenia, reakcji i stanu o wymiarach $l \times 1$, $k \times 1$ i $r \times 1$. Macierze A , B , C i D o wymiarach odpowiednio $r \times r$, $r \times l$, $k \times r$ i $k \times l$ są macierzami rzeczywistymi, stałymi dla systemów stacjonarnych. Dla systemów przyczynowych zakłada się, że znana jest wartość początkowa wektora stanu $x(0)$. Zakładając, że $x(0) = 0_{r \times 1}$ i stosując do równań (2.1) transformatę Z_1 postaci

$$Z_1\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (2.2)$$

można wyznaczyć wymierną macierz

$$G(z) = C(I_r z - A)^{-1}B + D \quad (2.3)$$

o wymiarach $k \times l$, którą nazywa się macierzą transmitancji systemu (2.1). Wprowadzając macierz

$$H_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

równania (2.1) można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t) \end{bmatrix} = H_1 \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Definicja 1 [39][40, str. 6] System (2.5) nazywa się jednowymiarowym ortogonalnym filtrem cyfrowym (OFC) jeżeli H_1 jest macierzą rzeczywistą, stałą, spełniającą warunek

$$H_1^t H_1 = I_{r+l}. \quad (2.6)$$

Wprowadza się również pojęcie energii sygnału jednowymiarowego postaci

$$\mathcal{E}_1 \{u(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u^*(n)u(n). \quad (2.7)$$

Wiadomo [39], że dla jednowymiarowych OFC spełniona jest zależność

$$\mathcal{E}_1\{y(n)\} = \mathcal{E}_1\{u(n)\}. \quad (2.8)$$

Oznacza to, że są to systemy bezstratne.

2.2 Przypadek dwuwymiarowy

Wygodnym sposobem opisu dyskretnych systemów dwuwymiarowych jest wykorzystanie dyskretnych równań stanu dwóch zmiennych [37][20, str. 1][22]

$$\begin{bmatrix} x^h(n+1, m) \\ x^v(n, m+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(n, m) \\ x^v(n, m) \end{bmatrix} + Bu(n, m) \quad (2.9a)$$

$$y(n, m) = C \begin{bmatrix} x^h(n, m) \\ x^v(n, m) \end{bmatrix} + Du(n, m), \quad (2.9b)$$

gdzie $n, m \in \mathbb{C}$; $u(n, m)$, $y(n, m)$ to wektory pobudzenia i reakcji o wymiarach $l \times 1$, $k \times 1$; $x^h(n, m)$, $x^v(n, m)$ to wektory stanu o wymiarach $h \times 1$, $v \times 1$. A , B , C , D to macierze o wymiarach odpowiednio $r \times r$, $r \times l$, $k \times r$, $k \times l$. Dla systemów przyczynowych zakłada się, że znane są warunki początkowe wektora stanu $x^h(0, m)$ i $x^v(n, 0)$ dla $n = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots$

Podobnie jak dla sygnałów jednowymiarowych wprowadza się pojęcie energii sygnału dwuwymiarowego

$$\mathcal{E}_2 \{u(n, m)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} u^*(i, j)u(i, j) \quad (2.10)$$

oraz dwuwymiarową transformatę $\mathcal{Z}_2$ [12, str. 175]

$$\mathcal{Z}_2\{x(n, m)\} = X(z_h, z_v) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x(n, m)z_h^{-n}z_v^{-m}. \quad (2.11)$$

Stosując (2.11) do (2.9) oraz zakładając, że $x^h(0, m) = 0$, $x^v(n, 0) = 0$ dla $n, m = 1, 2, \dots$ otrzymuje się [20, str. 45]

$$Y(z_h, z_v) = G(z_h, z_v)U(z_h, z_v), \quad (2.12)$$

gdzie $Y(z_h, z_v) = \mathcal{Z}_2\{y(n, m)\}$, $U(z_h, z_v) = \mathcal{Z}_2\{u(n, m)\}$. $G(z_h, z_v)$ nazywa się macierzą transmitancji systemu (2.9), która przyjmuje postać

$$G(z_h, z_v) = C(Z - A)^{-1}B + D, \quad (2.13)$$

gdzie

$$Z = \begin{bmatrix} I_h z_h & 0_{h \times v} \\ 0_{v \times h} & I_v z_v \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Dwuwymiarowe równania stanu (2.9) można przedstawić również w postaci

$$\begin{bmatrix} x^h(n+1, m) \\ x^v(n, m+1) \\ y(n, m) \end{bmatrix} = H_2 \begin{bmatrix} x^h(n, m) \\ x^v(n, m) \\ u(n, m) \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

gdzie

$$H_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Definicja 2 System (2.15) nazywa się dwuwymiarowym ortogonalnym filtrem cyfrowym jeżeli H_2 jest macierzą rzeczywistą, stałą, spełniającą warunek

$$H_2^t H_2 = I_{r+l}. \quad (2.17)$$

Podobnie jak dla jednowymiarowych OFC, dla pobudzeń sygnałami o skończonej energii, wyznacza się (2.10) dla lewej i prawej strony (2.15):

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x^{h*}(i+1, j) x^h(i+1, j) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x^{v*}(i, j+1) x^v(i, j+1) + \\ + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} y^*(i, j) y(i, j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \\ u(i, j) \end{bmatrix}^t H_2^t H_2 \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \\ u(i, j) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Jeżeli spełniony jest warunek (2.17) to (2.18) upraszcza się do postaci

$$\mathcal{E}_2\{y(i, j)\} = \mathcal{E}_2\{u(i, j)\}. \quad (2.19)$$

Oznacza to, że dwuwymiarowy OFC jest systemem bezstratnym.

Rozdział 3

Macierz transmitancji OFC

3.1 Systemy jednowymiarowe

Jak wiadomo, macierz transmitancji jednowymiarowego OFC określona jest przez następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1 [36]/[40, str. 11]. *Macierz transmitancji $G(z)$, o wymiarach $k \times l$, jednowymiarowego OFC jest:*

1. rzeczywistą, tzn. $\overline{G}(z) = G(\bar{z})$;
2. wymierną, analityczną dla $\overline{U^1}$;
3. dyskretną macierzą paraunitarną, tzn.

$$G^t(z^{-1})G(z) = I_l. \quad (3.1)$$

Z warunku (3.1) wynika, że dla $k = l = 1$ (tzn. dla systemu z jednym wejściem i jednym wyjściem) otrzymuje się

$$G(z^{-1})G(z)|_{z=e^{j\omega}} = |G(e^{j\omega})|^2 = 1, \quad (3.2)$$

zatem taki system nie może kształtować charakterystyki amplitudowej, może natomiast służyć do modyfikacji charakterystyki fazowej. Takich ograniczeń nie posiada system z dwoma wejściami i wyjściami, w którym związki między wybranym wejściem i wyjściem posiadają założone własności. Proces wyznaczania takiej macierzy nosi nazwę embedingu. Postać tej macierzy określa następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2 [40, str. 9]. *Macierz $G(z)$ systemu ortogonalnego ma następującą, jednoznacznie postać kanoniczną:*

$$G(z) = \frac{1}{m(z)} \begin{bmatrix} w^\#(z) & -f^\#(z) \\ f(z) & w(z) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

gdzie $m(z)$ jest wielomianem stopnia n , który nie ma zer w $\overline{U^1}$, a $w(z)$ i $f(z)$ są wielomianami stopnia $\leq n$ takimi, że

$$w^\#(z)w(z) + f^\#(z)f(z) = m^\#(z)m(z). \quad (3.4)$$

Operator $\#$ dla wielomianu $x(z)$ stopnia n określony jest następująco:

$$x^\#(z) = z^n x^*(z^{-1}). \quad (3.5)$$

Jeżeli zatem dane jest $f(z)$ i $m(z)$ to wyznaczenie macierzy embedingu sprowadza się do wyznaczenia $h(z)$ z równania (3.4) w procesie tzw. faktoryzacji spektralnej. Jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall \omega \quad \left| \frac{f(e^{j\omega})}{m(e^{j\omega})} \right|^2 \leq 1, \quad (3.6)$$

to wiadomo [39], że równanie (3.4) ma rozwiązanie, które można wyznaczyć na przykład metodą przedstawioną w [18].

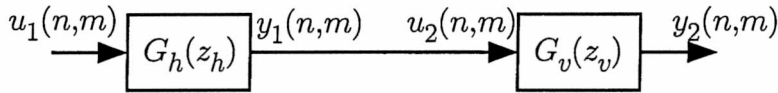
3.2 Systemy dwuwymiarowe

3.2.1 Systemy separowalne

Rozważmy system opisany separowalną macierzą transmitancji dwuwymiarowej postaci

$$G(z_h, z_v) = G_h(z_h)G_v(z_v), \quad (3.7)$$

którego graf przepływowy przedstawiono na rys. 3.1; $u_1(n, m)$, $u_2(n, m)$ to zmienne wejściowe o wymiarach $l \times 1$, $p \times 1$; $y_1(n, m)$, $y_2(n, m)$ to wektory reakcji o wymiarach $p \times 1$, $k \times 1$. Załóżmy, że wejścia i wyjścia systemów z rys. 3.1 związane są zależnością



Rysunek 3.1: Graf sygnałowy realizujący system separowalny.

$$\begin{cases} x^h(n+1, m) = A_h x^h(n, m) + B_h u_1(n, m) \\ y_1(n, m) = C_h x^h(n, m) + D_h u_1(n, m) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} x^v(n, m+1) = A_v x^v(n, m) + B_v u_2(n, m) \\ y_2(n, m) = C_v x^v(n, m) + D_v u_2(n, m) \end{cases}, \quad (3.9)$$

gdzie $x^h(n, m)$, $x^v(n, m)$ to wektory stanu o wymiarach odpowiednio $h \times 1$, $v \times 1$. Stosując dwuwymiarową transformację $\mathcal{Z}_2$ do (3.8) i (3.9) otrzymuje się

$$G_h(z_h) = C_h(I_h z_h - A_h)^{-1} B_h + D_h \quad (3.10)$$

$$G_v(z_v) = C_v(I_v z_v - A_v)^{-1} B_v + D_v. \quad (3.11)$$

Dla $y_1(n, m) = u_2(n, m)$ równania (3.8) (3.9) można uporządkować do postaci (2.9) otrzymując:

$$\begin{bmatrix} x^h(n+1, m) \\ x^v(n, m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_h & 0_v \\ B_v C_h & A_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(n, m) \\ x^v(n, m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_h \\ B_v D_h \end{bmatrix} u(n, m) \quad (3.12a)$$

$$y(n, m) = \begin{bmatrix} D_v C_h & C_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(n, m) \\ x^v(n, m) \end{bmatrix} + D_v D_h u(n, m). \quad (3.12b)$$

Synteza dwuwymiarowego OFC separowalnego sprowadza się zatem do wyznaczenia ortogonalnej realizacji dla $G_h(z_h)$ i $G_v(z_v)$ za pomocą znanych metod syntezy systemów jednowymiarowych, np. [9][36]. Wstawiając wyznaczone w ten sposób macierze do (3.12) otrzymuje się realizację dwuwymiarowego OFC o zadanej transmitancji (3.7).

3.2.2 Embedding dwuwymiarowy

Dla macierzy transmitancji dwuwymiarowych OFC można podać odpowiednik twierdzenia 1 str. 11, uogólniony na przypadek dwuwymiarowy. Jest to odpowiednik znanego twierdzenia dla systemów ciągłych [14].

Twierdzenie 3 [37]. *Macierz transmitancji $G(z_h, z_v)$, o wymiarach $k \times l$, dwuwymiarowego OFC jest*

1. rzeczywistą macierzą wymierną;
2. analityczną dla $(z_h, z_v) \in \overline{U^2}$;
3. dyskretną macierzą paraunitarną dwóch zmiennych, tzn. spełniającą warunek

$$G^t(z_h^{-1}, z_v^{-1})G(z_h, z_v) = I_l. \quad (3.13)$$

Pierwszym krokiem syntezy dwuwymiarowego OFC dla nieseparowalnej funkcji transmitancji jest wyznaczenie $G(z_h, z_v)$ spełniającego warunki twierdzenia 3. Niestety, uogólnienie przypadku jednowymiarowego (3.3) jest trudne ze względu na niemożność stosowania dwuwymiarowej faktoryzacji spektralnej [12, str. 203]. W przypadku dwuwymiarowym, kluczem do rozwiązania problemu embeddingu dwuwymiarowego może być tzw. XVII problem Hilberta [44], który dotyczy przedstawiania form określonych przez kwadraty. Pierwsze rozwiązanie tego problemu podał Artin, które można sformułować następująco:

Lemat 1 (Artin)[44, str. 192][42, str. 119][5]. *Niech $a(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{R}$ będzie funkcją wymierną n zmiennych. Jeżeli $a(p_1, \dots, p_n) \geq 0$ dla wszystkich rzeczywistych $p_1, \dots, p_n$, wówczas istnieją wymierne funkcje $w_i(p_1, \dots, p_n)$ dla $i = 1, 2, \dots$, takie że*

$$\forall p_1, \dots, p_n \quad a(p_1, \dots, p_n) = \sum_i w_i^2(p_1, \dots, p_n). \quad (3.14)$$

Jakkolwiek twierdzenie 1 daje pozytywną odpowiedź na XVII problem Hilberta to, ze względu na zastosowania, konieczna jest znajomość liczby składników prawej strony (3.14). Ilościowe ujęcie tego problemu podał Pfister, który udowodnił, że liczba składników w (3.14) jest nie większa od 2^n [44, str. 195][42, str. 146]. W praktycznych zastosowaniach duże znaczenie ma pytanie o przedstawienie (3.14) przy założeniu, że $a(p_1, \dots, p_n)$ i $w_i(p_1, \dots, p_n)$ są wielomianami n zmiennych. Niestety, jak wiadomo istnieją takie dodatnio określone wielomiany, które nie mają przedstawienia (3.14) [44, str. 196][42, str. 147]. Niemniej jednak, klasa wielomianów przedstawialnych w postaci skończonej sumy kwadratów wielomianów ma duże znaczenie dla syntezy dwuwymiarowych OFC i znane są pewne techniki rozwiązania tego zagadnienia [5]. Ich koncepcja opiera się na przedstawieniu wielomianu w postaci

$$a(p_1, \dots, p_n) = y(p_1, \dots, p_n)^t B y(p_1, \dots, p_n), \quad (3.15)$$

gdzie B to rzeczywista macierz kwadratowa, a $y(p_1, \dots, p_n)$ to kolumnowy wektor jednomianów zmiennych $p_1, \dots, p_n$. Jeżeli B w (3.15) jest macierzą dodatnio półokreśloną, to może być przedstawiona w postaci [5]

$$B = D^t D, \quad (3.16)$$

gdzie D jest macierzą pełnego rzędu. Wobec (3.15) i (3.16) otrzymuje się

$$a(p_1, \dots, p_n) = \{y(p_1, \dots, p_n)D\}^t D y(p_1, \dots, p_n), \quad (3.17)$$

które jest poszukiwanym przedstawieniem (3.14). Liczba składników tego przedstawienia równa się rzędowi macierzy B . Niestety, w przypadku gdy B w (3.15) nie jest macierzą dodatnio półokreśloną, to nie są znane metody doprowadzające macierz B do postaci dodatnio półokreślonej.

W kontekście przedstawionych rozważań, rozwiązanie problemu embedingu dwuwymiarowego można przedstawić następująco:

Twierdzenie 4 *Niech będzie dana względnie pierwsza wymierna funkcja dwóch zmiennych, analityczna w obszarze $\overline{U^2}$, postaci*

$$g(z_h, z_v) = \frac{f(z_h, z_v)}{m(z_h, z_v)}, \quad (3.18)$$

spełniająca warunek

$$\forall \omega_h, \omega_v \quad |g(e^{j\omega_h}, e^{j\omega_v})|^2 \leq 1. \quad (3.19)$$

Wprowadźmy funkcję

$$w(z_h, z_v) = m^t(z_h^{-1}, z_v^{-1})m(z_h, z_v) - f^t(z_h^{-1}, z_v^{-1})f(z_h, z_v). \quad (3.20)$$

Jeżeli istnieje przedstawienie postaci

$$w(z_h, z_v) = \sum_{i=1}^j w_i(z_h^{-1}, z_v^{-1})w_i(z_h, z_v), \quad (3.21)$$

to macierz

$$G(z_h, z_v) = \frac{1}{m(z_h, z_v)} \begin{bmatrix} f(z_h, z_v) \\ w_1(z_h, z_v) \\ \vdots \\ w_j(z_h, z_v) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

spełnia warunki twierdzenia 3, str. 13.

Dowód. Warunek 1 i 2 twierdzenia 3 wynika natychmiast z postaci (3.22) oraz założenia analityczności $g(z_h, z_v)$. Warunek 3 tego twierdzenia uzasadnia się podstawiając (3.22) do lewej strony (3.13)

$$G^t(z_h^{-1}, z_v^{-1})G(z_h, z_v) = \frac{f(z_h^{-1}, z_v^{-1})f(z_h, z_v) + \sum_{i=1}^j w_i(z_h^{-1}, z_v^{-1})w_i(z_h, z_v)}{m(z_h^{-1}, z_v^{-1})m(z_h, z_v)}. \quad (3.23)$$

Jeżeli spełnione jest (3.21), to (3.23) można zapisać w postaci

$$G^t(z_h^{-1}, z_v^{-1})G(z_h, z_v) = \frac{f(z_h^{-1}, z_v^{-1})f(z_h, z_v) + w(z_h, z_v)}{m(z_h^{-1}, z_v^{-1})m(z_h, z_v)} = 1. \quad (3.24)$$

$G(z_h, z_v)$ spełnia zatem warunki twierdzenia 3. $\square$

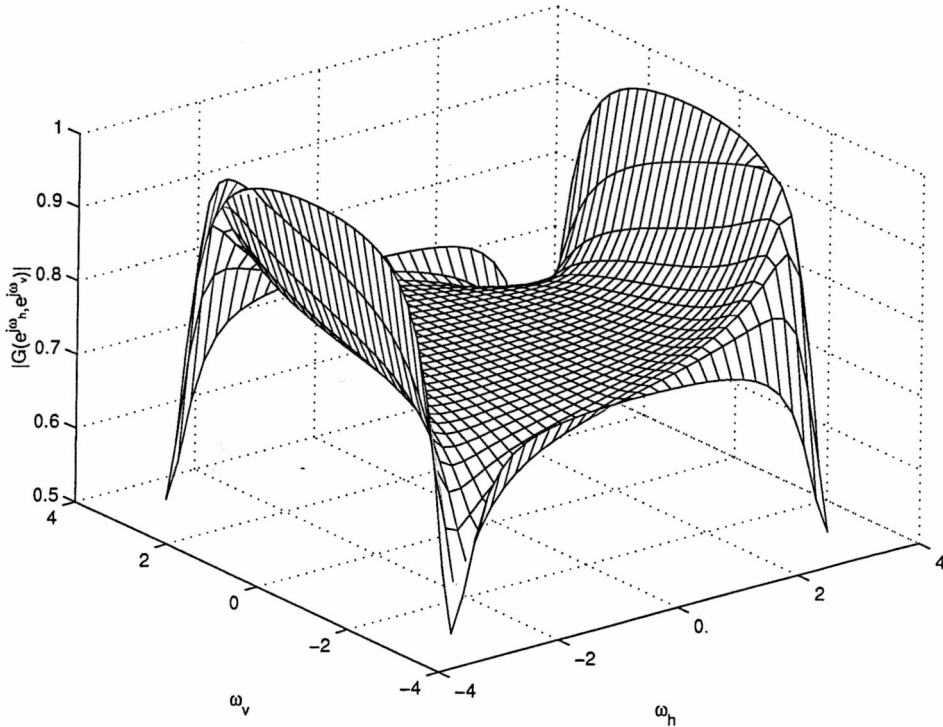
Należy zwrócić uwagę, że (3.19) jest tylko warunkiem koniecznym istnienia (3.22). Z twierdzenia 3 wynika, że jeżeli dla danej funkcji $g(z_h, z_v)$ istnieje postać (3.22), to może ona służyć do realizacji dwuwymiarowego OFC. Taki system będzie posiadał jedno wejście oraz $j + 1$ wyjść, przy czym pierwsze wejście i wyjście systemu zbudowanego w oparciu o $G(z_h, z_v)$ związane jest funkcją transmitancji $g(z_h, z_v)$. Najtrudniejszym problemem przy tak postawionym embeddingu dwuwymiarowym jest doprowadzenie do postaci (3.21). Pewne techniki zastosowania form kwadratowych (3.15) do tego zagadnienia przedstawiono na przykładach w następnym podrozdziale.

3.2.3 Przykład 1

W pracy [16] wyznaczono funkcję transmitancji systemu dwuwymiarowego postaci

$$G(z_h, z_v) = \frac{z_h z_v + 0.67876 z_v + 0.70382 z_h + 0.46209}{z_h z_v + 0.72434 z_v + 0.68149 z_h + 0.52571}. \quad (3.25)$$

Charakterystykę amplitudową (3.25) przedstawiono na rys. 3.2. Maksymalna wartość



Rysunek 3.2: Charakterystyka amplitudowa systemu dwuwymiarowego (3.25).

charakterystyki wynosi $\frac{1}{k} = 1.30486$, zatem dla spełnienia warunku (3.19) do analizy bierze się pod uwagę transmitancję

$$G'(z_h, z_v) = kG(z_h, z_v) = \frac{0.76636 z_h z_v + 0.52018 z_v + 0.53938 z_h + 0.35413}{z_h z_v + 0.72434 z_v + 0.68149 z_h + 0.52571}. \quad (3.26)$$

Wprowadzając

$$f(z_h, z_v) = \begin{bmatrix} 0.76636 & 0.52018 & 0.53938 & 0.35413 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_h z_v \\ z_v \\ z_h \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

$$m(z_h, z_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0.72434 & 0.68149 & 0.52571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_h z_v \\ z_v \\ z_h \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

można wyznaczyć (3.20) w postaci

$$w(z_h, z_v) = \begin{bmatrix} z_h^{-1} z_v^{-1} & z_v^{-1} & z_h^{-1} & 1 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} z_h z_v \\ z_v \\ z_h \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

gdzie

$$B = [b_{i,j}] = \begin{bmatrix} 0.41269 & 0.32569 & 0.26813 & 0.25432 \\ 0.32569 & 0.25408 & 0.21306 & 0.19658 \\ 0.26813 & 0.21306 & 0.1735 & 0.16726 \\ 0.25432 & 0.19658 & 0.16726 & 0.15096 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Macierz B w (3.30) jest rzędu 2, lecz nie jest dodatnio półokreślona, konieczne jest zatem wyznaczenie dodatnio półokreślonej macierzy

$$B' = \begin{bmatrix} b'_{1,1} & b'_{1,2} & b'_{1,3} & b'_{1,4} \\ b'_{2,1} & b'_{2,2} & b'_{2,3} & b'_{2,4} \\ b'_{3,1} & b'_{3,2} & b'_{3,3} & b'_{3,4} \\ b'_{4,1} & b'_{4,2} & b'_{4,3} & b'_{4,4} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

spełniającej równanie

$$w(z_h, z_v) = \begin{bmatrix} z_h^{-1} z_v^{-1} & z_v^{-1} & z_h^{-1} & 1 \end{bmatrix} B' \begin{bmatrix} z_h z_v \\ z_v \\ z_h \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

W tym celu wyznaczmy współczynniki $w(z_h, z_v)$ otrzymane na podstawie (3.32).

$$w(z_h, z_v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_{1,1} & b'_{1,2} z_h^{-1} & b'_{1,3} z_v^{-1} & b'_{1,4} z_h^{-1} z_v^{-1} \\ b'_{2,1} z_h & b'_{2,2} & b'_{2,3} z_h z_v^{-1} & b'_{2,4} z_v^{-1} \\ b'_{3,1} z_v & b'_{3,2} z_v z_h^{-1} & b'_{3,3} & b'_{3,4} z_h^{-1} \\ b'_{4,1} z_h z_v & b'_{4,2} z_v & b'_{4,3} z_h & b'_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

Współczynniki przy tych samych potęgach $z_h z_v$ zebrano w tabeli 3.1. Macierz B jest

Tabela 3.1: Współczynniki przy tych samych potęgach z_h, z_v dla $w(z_h, z_v)$.

wyrażenie	współczynnik
$z_h^0 z_v^0$	$b'_{1,1} + b'_{2,2} + b'_{3,3} + b'_{4,4}$
z_h	$b'_{2,1} + b'_{4,3}$
$z_v z_h^{-1}$	$b'_{3,2}$
z_v	$b'_{3,1} + b'_{4,2}$
$z_h z_v$	$b'_{4,1}$
z_h^{-1}	$b'_{1,2} + b'_{3,4}$
$z_h z_v^{-1}$	$b'_{2,3}$
z_v^{-1}	$b'_{1,3} + b'_{2,4}$
$z_h^{-1} z_v^{-1}$	$b'_{1,4}$

symetryczna, zatem to samo ograniczenie dotyczy B' . Na podstawie tabeli 3.1 można podać zależności wiążące elementy macierzy B' i B :

$$b'_{1,1} + b'_{2,2} + b'_{3,3} + b'_{4,4} = b_{1,1} + b_{2,2} + b_{3,3} + b_{4,4} \quad (3.34a)$$

$$b'_{2,1} + b'_{4,3} = b_{2,1} + b_{4,3} \quad (3.34b)$$

$$b'_{3,1} + b'_{4,2} = b_{3,1} + b_{4,2} \quad (3.34c)$$

$$b'_{4,1} = b_{4,1} \quad b'_{3,2} = b_{3,2} \quad (3.34d)$$

Z (3.34) wynika, że zmiana wartości elementów $b'_{1,1}, b'_{2,2}, b'_{3,3}, b'_{4,4}, b'_{2,1} = b'_{1,2}, b'_{4,3} = b'_{3,4}$ oraz $b'_{3,1} = b'_{1,3}, b'_{4,2} = b'_{2,4}$ z zachowaniem (3.34) nie zmienia postaci $w(z_h, z_v)$. Liczby $b'_{1,4} = b'_{4,1}$ i $b'_{3,2} = b'_{2,3}$ pozostają stałe, pozostałe elementy wyznacza się z warunku symetryczności B' . Dobór wartości współczynników prowadzić należy tak, aby B' była macierzą dodatnio półokreśloną. Jak wiadomo [4, str. 89] rzeczywista, symetryczna macierz B' ma przedstawienie

$$B' = U^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} U, \quad (3.35)$$

gdzie U jest macierzą ortogonalną a λ_i to wartości własne B' dla $i = 1, \dots, 4$, które są liczbami rzeczywistymi [4, str. 35]. Ponadto muszą być nieujemne, aby była to macierz dodatnio półokreślona [4, str. 54]. Wprowadza się funkcję

$$T(\lambda_1, \dots, \lambda_4) = \sum_{i=1}^4 \delta_i \lambda_i^2, \quad (3.36)$$

gdzie

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \lambda_i < 0 \\ 0 & \text{jeżeli } \lambda_i \geq 0 \end{cases}. \quad (3.37)$$

Wyznaczanie B' polega zatem na doborze jej elementów tak, aby spełnione były równania (3.34) oraz $T(\lambda_1, \dots, \lambda_4) = 0$. Do wyznaczenia B' można zatem stosować metody optymalizacyjne, które nie wymagają znajomości pochodnej minimalizowanej funkcji. Stosując

przedstawioną metodę można otrzymać macierz

$$B' = \begin{bmatrix} 0.28976 & 0.26457 & 0.22913 & 0.25432 \\ 0.26457 & 0.24204 & 0.21306 & 0.23558 \\ 0.22913 & 0.21306 & 0.21231 & 0.22838 \\ 0.25432 & 0.23558 & 0.22838 & 0.24712 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

która nie zmienia postaci wielomianu $w(z_h, z_v)$, ma rząd równy 2, jest dodatnio półokreślona i ma faktoryzację (3.16), gdzie

$$D = \begin{bmatrix} -0.092761 & -0.06323 & 0.10042 & 0.070887 \\ 0.53024 & 0.4879 & 0.44969 & 0.49203 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Przedstawienie (3.21) ma zatem postać

$$w(z_h, z_v) = w_1(z_h^{-1}, z_v^{-1})w_1(z_h, z_v) + w_2(z_h^{-1}, z_v^{-1})w_2(z_h, z_v), \quad (3.40)$$

gdzie

$$w_1(z_h, z_v) = -0.092761z_hz_v - 0.06323z_v + 0.10042z_h + 0.070887, \quad (3.41)$$

$$w_2(z_h, z_v) = 0.53024z_hz_v + 0.4879z_v + 0.44969z_h + 0.49203, \quad (3.42)$$

a macierz transmitancji dwuwymiarowego OFC dana jest zależnością (3.43).

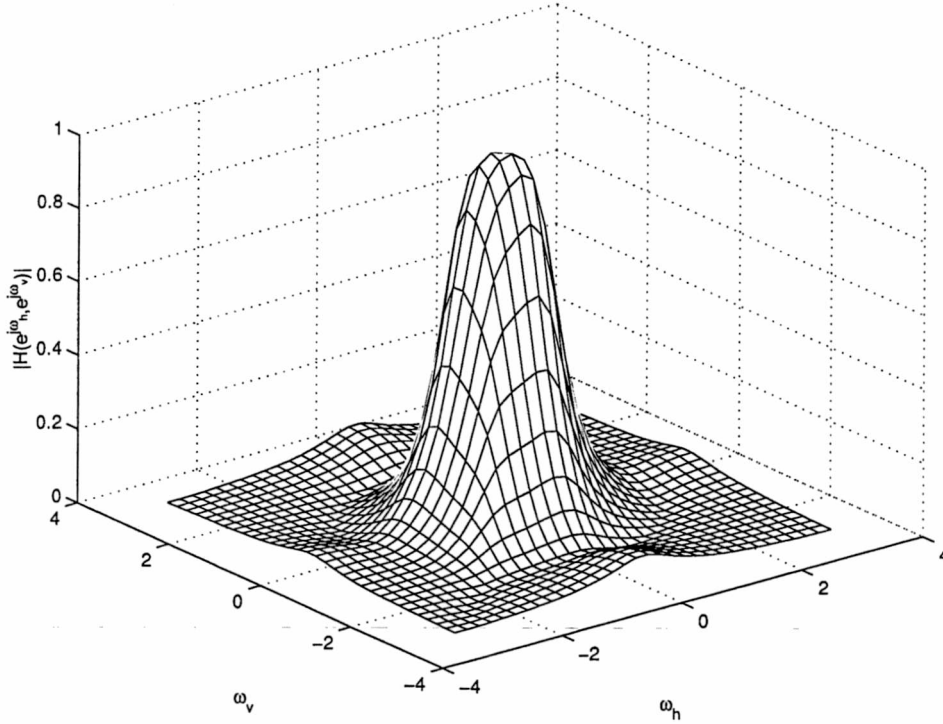
$$G(z_h, z_v) = \frac{1}{z_hz_v + 0.72434z_v + 0.68149z_h + 0.52571} \cdot \begin{bmatrix} 0.76636z_hz_v + 0.52018z_v + 0.53938z_h + 0.35413 \\ -0.092761z_hz_v - 0.06323z_v + 0.10042z_h + 0.070887 \\ 0.53024z_hz_v + 0.4879z_v + 0.44969z_h + 0.49203 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

3.2.4 Przykład 2

W pracy [1] przedstawiono metodę wyznaczania transmitancji dwuwymiarowych filtrów cyfrowych dla założonej charakterystyki amplitudowej i opóźnienia grupowego. Jednym z przykładów przedstawionych w tej pracy jest transmitancja oznaczona jako "FILTER #1" postaci

$$H(z_h, z_v) = 0.035935 \frac{\begin{bmatrix} z_h^2 & z_h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.428998 & 0.470506 \\ 0.441454 & 0.316411 & 0.659983 \\ 0.372886 & 0.412246 & 0.168825 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_v^2 \\ z_v \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} z_h^2 & z_h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.535537 & 0.008103 \\ -0.658556 & -0.119018 & 0.305373 \\ 0.081547 & 0.279834 & -0.202243 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_v^2 \\ z_v \\ 1 \end{bmatrix}}. \quad (3.44)$$

Charakterystykę amplitudową dla (3.44) przedstawiono na rys. 3.3. Podobnie jak dla poprzedniego przykładu wprowadzimy współczynnik skalujący $k = 1.0391779$ tak, aby maksymalna wartość charakterystyki amplitudowej wynosiła 1. Przedstawienie (3.21) ma



Rysunek 3.3: Charakterystyka amplitudowa systemu dwuwymiarowego (3.44).

postać

$$w(z_h, z_v) = \begin{bmatrix} z_h^2 z_v^2 & z_h z_v^2 & z_v^2 & z_h^2 z_v & z_h z_v & z_v & z_h^2 & z_h & 1 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} z_h^2 z_v^2 \\ z_h z_v^2 \\ z_v^2 \\ z_h^2 z_v \\ z_h z_v \\ z_v \\ z_h^2 \\ z_h \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

gdzie B jest macierzą o wymiarach 9×9 rzędu 2 i nie jest dodatnio półokreślona. Podobnie jak w przykładzie 1, można jednak wyznaczyć dodatnio półokreśloną macierz B' rzędu 8, która nie zmienia postaci $w(z_h, z_v)$ i posiada przedstawienie (3.17), gdzie

$$D' = \begin{bmatrix} 0.003319 & 0.003521 & -0.006287 & 0.016420 & -0.009432 & 0.010019 & 0.029466 & -0.604915 \\ 0.001985 & 0.001127 & 0.008829 & 0.006253 & 0.008361 & 0.205269 & -0.192351 & 0.592041 \\ 0.000583 & 0.002699 & 0.015097 & -0.009151 & 0.001463 & -0.107735 & 0.325893 & -0.124582 \\ 0.001918 & -0.000939 & -0.009928 & -0.018590 & -0.007088 & -0.184091 & -0.034945 & 0.508125 \\ -0.001189 & -0.001534 & -0.007956 & 0.007132 & 0.043453 & 0.016048 & 0.174964 & 0.074462 \\ -0.001643 & 0.004187 & 0.004227 & -0.002954 & 0.011580 & -0.159865 & -0.379925 & -0.389104 \\ -0.001006 & -0.015310 & 0.002897 & 0.012534 & -0.015460 & -0.067701 & -0.016779 & 0.010226 \\ -0.000992 & -0.002745 & -0.003272 & -0.022348 & -0.007691 & 0.262542 & 0.003354 & -0.406554 \\ -0.002976 & 0.008992 & -0.003606 & 0.010703 & -0.025186 & 0.025514 & 0.090324 & 0.340301 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Wobec tego macierz transmitancji dwuwymiarowego OFC ma postać

$$H(z_h, z_v) = \frac{1}{z_h^2 z_v^2 - 0.658556 z_h z_v^2 + 0.081547 z_v^2 - 0.535537 z_h^2 z_v - 0.119018 z_h z_v + 0.279834 z_v + 0.008103 z_h^2 + 0.305373 z_h - 0.202243} \cdot \begin{bmatrix} 0.003319 & 0.001985 & 0.000583 & 0.001918 & -0.001189 & -0.001643 & -0.001006 & -0.000992 & -0.002976 \\ 0.003521 & 0.001127 & 0.002699 & -0.000939 & -0.001534 & 0.004187 & -0.015310 & -0.002745 & 0.008992 \\ -0.006287 & 0.008829 & 0.015097 & -0.009928 & -0.007956 & 0.004227 & 0.002897 & -0.003272 & -0.003606 \\ 0.016420 & 0.006253 & -0.009151 & -0.018590 & 0.007132 & -0.002954 & 0.012534 & -0.022348 & 0.010703 \\ -0.009432 & 0.008361 & 0.001463 & -0.007088 & 0.043453 & 0.011580 & -0.015460 & -0.007691 & -0.025186 \\ 0.010019 & 0.205269 & -0.107735 & -0.184091 & 0.016048 & -0.159865 & -0.067701 & 0.262542 & 0.025514 \\ 0.029466 & -0.192351 & 0.325893 & -0.034945 & 0.174964 & -0.379925 & -0.016779 & 0.003354 & 0.090324 \\ -0.604915 & 0.592041 & -0.124582 & 0.508125 & 0.074462 & -0.389104 & 0.010226 & -0.406554 & 0.340301 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_h^2 z_v^2 \\ z_h z_v^2 \\ z_v^2 \\ z_h^2 z_v \\ z_h z_v \\ z_v \\ z_h^2 \\ z_h \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Rozdział 4

Stanowa synteza transmitancji dwuwymiarowych OFC

4.1 Wstęp

Niech będzie dana macierz transmitancji dwuwymiarowego OFC $G(z_h, z_v)$ o wymiarach $k \times l$ postaci

$$G(z_h, z_v) = \frac{\sum_{i=0}^r B_i(z_h) z_v^{r-i}}{g(z_h, z_v)}, \quad (4.1)$$

gdzie

$$g(z_h, z_v) = \sum_{j=0}^r b_j(z_h) z_v^{r-j}. \quad (4.2)$$

$B_i(z_h)$ są rzeczywistymi macierzami wielomianowymi o wymiarach $k \times l$, a $b_i(z_h)$ to wielomiany, przy czym $b_0(z_h)$ nie ma zer dla $z_h \in \overline{U^1}$. W rozdziale tym przedstawiono algorytm wyznaczania dwuwymiarowych równań stanu (2.9) dla $G(z_h, z_v)$. Koncepcja ta opiera się na podejściu dwuetapowym. Po pierwsze poszukuje się realizacji stanowej macierzy transmitancji $G(z_h, z_v)$, opisanej równaniami (4.3)

$$z_v X^v(z_h, z_v) = A(z_h) X^v(z_h, z_v) + B(z_h) U(z_h, z_v) \quad (4.3a)$$

$$Y(z_h, z_v) = C(z_h) X^v(z_h, z_v) + D(z_h) U(z_h, z_v), \quad (4.3b)$$

gdzie $A(z_h)$, $B(z_h)$, $C(z_h)$, $D(z_h)$ to macierze wymierne o wymiarach odpowiednio $v \times v$, $v \times l$, $k \times v$, $k \times l$, a $X^v(z_h, z_v)$ to wektor stanu o rozmiarze $v \times 1$. Wyznaczając $X^v(z_h, z_v)$ z (4.3a) i wstawiając do (4.3b) otrzymuje się

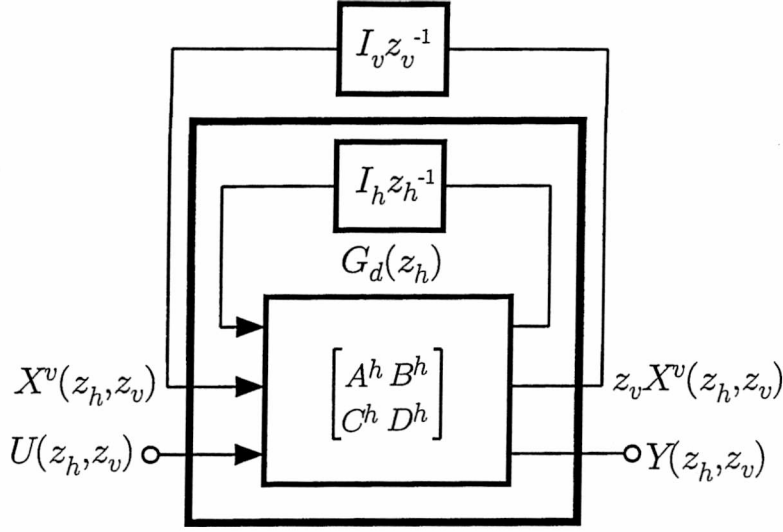
$$G(z_h, z_v) = D(z_h) + C(z_h) [I_v z_v - A(z_h)]^{-1} B(z_h). \quad (4.4)$$

Wprowadzając macierz

$$G_d(z_h) = \begin{bmatrix} A(z_h) & B(z_h) \\ C(z_h) & D(z_h) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

równania (4.3) można przekształcić do postaci

$$\begin{bmatrix} z_v X^v(z_h, z_v) \\ Y(z_h, z_v) \end{bmatrix} = G_d(z_h) \begin{bmatrix} X^v(z_h, z_v) \\ U(z_h, z_v) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$



Rysunek 4.1: Koncepcja dwuetapowej syntezy dwuwymiarowego OFC.

Wstawiając (4.5) do (3.1) otrzymuje się

$$A^t(z_h^{-1})A(z_h) + C^t(z_h^{-1})C(z_h) = I_v \quad (4.7a)$$

$$A^t(z_h^{-1})B(z_h) + C^t(z_h^{-1})D(z_h) = 0_{v \times l} \quad (4.7b)$$

$$B^t(z_h^{-1})B(z_h) + D^t(z_h^{-1})D(z_h) = I_l. \quad (4.7c)$$

Proces syntezy prowadzi się tak, aby $G_d(z_h)$ była dyskretną macierzą paraunitarną zmiennej z_h , tzn. spełniającą warunki twierdzenia 1, str. 11. W drugim etapie poszukuje się ortogonalnej realizacji macierzy $G_d(z_h)$ za pomocą systemu (4.8)

$$x^h(n+1, m) = A^h x^h(n, m) + B^h \begin{bmatrix} x^v(n, m) \\ u(n, m) \end{bmatrix} \quad (4.8a)$$

$$\begin{bmatrix} x^v(n, m+1) \\ y(n, m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^h x^h(n, m) + D^h \begin{bmatrix} x^v(n, m) \\ u(n, m) \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (4.8b)$$

gdzie A^h , B^h , C^h i D^h to macierze stałe, rzeczywiste o rozmiarach odpowiednio $h \times h$, $h \times (v+l)$, $(v+k) \times h$ i $(v+k) \times (v+l)$. Rozmiar wektora stanu $x^h(n, m)$ wynosi $h \times 1$. Równania (4.8) można doprowadzić do (2.9) przyłączając odpowiednią część równania (4.8b) do (4.8a). Zależności na macierze równań stanu (2.9) przyjmują postać (4.9)

$$\begin{bmatrix} AB \\ CD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^h B_1^h B_2^h \\ C_1^h D_1^h D_2^h \\ C_2^h D_3^h D_4^h \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

gdzie B_1^h , C_1^h , D_1^h to macierze powstałe odpowiednio z v pierwszych kolumn B^h , v pierwszych wierszy C^h oraz bloku v kolumn i wierszy D^h . Z pozostałych wierszy i kolumn tworzy się odpowiednio B_2^h , C_2^h , D_2^h , D_3^h , D_4^h . Wobec tego otrzymuje się

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A^h B_1^h \\ C_1^h D_1^h \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} B_2^h \\ D_2^h \end{bmatrix} \\ C &= [C_2^h D_3^h] & D &= D_4^h. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Reprezentację graficzną dwuwymiarowego OFC otrzymanego w procesie syntezy przedstawiono na rys. 4.1. Sposób przeprowadzenia syntezy dwuwymiarowego OFC przedstawiono w [37]. Polega on na rozwinięciu (4.1) i (4.4) w szereg Laurent'a w otoczeniu $z_v = \infty$ postaci [25, str. 131]

$$G(z_h, z_v) = \sum_{i=-1}^{\infty} S_i(z_h) z_v^{-(i+1)}, \quad (4.11)$$

gdzie $S_i(z_h)$ to macierze wymierne o rozmiarze $k \times l$. Zbieżność szeregów w otoczeniu $z_v = \infty$ jest zapewniona poprzez analityczność $G(z_h, z_v)$ w tym obszarze na podstawie twierdzenia 3 pkt 2, str. 13. Poprzez porównanie współczynników rozwinięcia, w oparciu o ich własności, wyznacza się realizację (4.6). Drugi etap syntezy to wyznaczenie jednowymiarowego modelu stanowego dla $G_g(z_h)$ za pomocą znanych metod [9][36][7]. Technika zaprezentowana w [37], oparta na zależnościach wymiernych, jest dogodna do przeprowadzania analiz teoretycznych, nie jest jednak przydatna do obliczeń. W tym celu należy przekształcić ten algorytm tak, aby ułatwić jego implementację programową poprzez doprowadzenie zmiennych do postaci wielomianowej. Ponadto konieczne jest opracowanie faktoryzacji macierzy wielomianowej, nieujemnej na kole jednostkowym.

4.2 Współczynniki szeregu Laurent'a dla $G(z_h, z_v)$

Porównując (4.1) i (4.11) otrzymuje się:

$$\sum_{i=0}^r B_i(z_h) z_v^{r-i} = \left(\sum_{i=-1}^{\infty} S_i(z_h) z_v^{-(i+1)} \right) \left(\sum_{j=0}^r b_j(z_h) z_v^{r-j} \right). \quad (4.12)$$

Stosując (A.1) do prawej strony (4.12) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{j=0}^r S_i(z_h) b_j(z_h) z_v^{r+1-(i+j)} = \\ \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i S_{i-j-1}(z_h) b_j(z_h) z_v^{r-i} + \sum_{i=r+1}^{\infty} \sum_{j=0}^r S_{i-j-1}(z_h) b_j(z_h) z_v^{r-i}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Przyrównując lewą stronę (4.12) z (4.13) otrzymuje się

$$\sum_{i=0}^r B_i(z_h) z_v^{r-i} = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i S_{i-j-1}(z_h) b_j(z_h) z_v^{r-i} + \sum_{i=r+1}^{\infty} \sum_{j=0}^r S_{i-j-1}(z_h) b_j(z_h) z_v^{r-i}. \quad (4.14)$$

Przyrównując współczynniki przy tych samych potęgach z_v otrzymuje się

$$B_i(z_h) = \sum_{j=0}^i S_{i-j-1}(z_h) b_j(z_h) \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, \dots, r \quad (4.15a)$$

$$0_{n \times m} = \sum_{j=0}^r S_{i-j-1}(z_h) b_j(z_h) \quad \text{dla } i \geq r+1. \quad (4.15b)$$

Kładąc $i = 0$ w (4.15a) otrzymuje się

$$S_{-1}(z_h) = \frac{1}{b_0(z_h)} B_0(z_h). \quad (4.16)$$

Dla $i = 1, \dots, r$ równanie (4.15a) można przedstawić w postaci

$$B_i(z_h) = S_{i-1}(z_h) b_0(z_h) + \sum_{j=1}^i S_{i-j-1}(z_h) b_j(z_h) \quad (4.17)$$

oraz wyznaczyć $S_{i-1}(z_h)$

$$S_{i-1}(z_h) = \frac{1}{b_0(z_h)} B_i(z_h) - \frac{1}{b_0(z_h)} \sum_{j=1}^i S_{i-j-1}(z_h) b_j(z_h). \quad (4.18)$$

Podstawiając $i = w + 1$ do (4.18) otrzymuje się

$$S_w(z_h) = \frac{1}{b_0(z_h)} B_{w+1}(z_h) - \frac{1}{b_0(z_h)} \sum_{j=1}^{w+1} S_{w-j}(z_h) b_j(z_h) \quad \text{dla } w = 0, \dots, r-1. \quad (4.19)$$

Postępując podobnie z równaniem (4.15b) otrzymuje się

$$S_w(z_h) = -\frac{1}{b_0(z_h)} \sum_{j=1}^r S_{w-j}(z_h) b_j(z_h) \quad \text{dla } w \geq r. \quad (4.20)$$

Zbierając (4.16), (4.19) i (4.20) otrzymuje się zależności na współczynniki rozwinięcia $S_w(z_h)$

$$S_w(z_h) = \begin{cases} \frac{1}{b_0(z_h)} B_0(z_h) & \text{dla } w = -1 \\ \frac{1}{b_0(z_h)} B_{w+1}(z_h) - \frac{1}{b_0(z_h)} \sum_{j=1}^{w+1} S_{w-j}(z_h) b_j(z_h) & \text{dla } w = 0, \dots, r-1 \\ -\frac{1}{b_0(z_h)} \sum_{j=1}^r S_{w-j}(z_h) b_j(z_h) & \text{dla } w \geq r \end{cases} \quad (4.21)$$

Analizując (4.21) można stwierdzić, że $S_{-1}(z_h)$ jest rzeczywistą macierzą wymierną z mianownikiem równym $b_0(z_h)$. Dla $w = 0, \dots, r-1$ współczynniki $S_w(z_h)$ wyznaczają się rekurencyjnie na podstawie sumy $\frac{1}{b_0(z_h)} B_{w+1}(z_h)$ i współczynników $S_{-1}(z_h), \dots, S_{w-1}(z_h)$, przemnożonych przez $\frac{b_i(z_h)}{b_0(z_h)}$. Z rekurencyjnej zależności wynika, że wspólny mianownik $S_w(z_h)$ będzie iloczynem mianownika $S_{w-1}(z_h)$ i $b_0(z_h)$. Zatem współczynnik $S_w(z_h)$ będzie rzeczywistą macierzą wymierną postaci

$$S_w(z_h) = \frac{L_w(z_h)}{b_0^{w+2}(z_h)}. \quad (4.22)$$

Wstawiając (4.22) do (4.19) otrzymuje się

$$S_w(z_h) = \frac{1}{b_0(z_h)} B_{w+1}(z_h) - \sum_{j=1}^{w+1} \frac{b_j(z_h)}{b_0^{w-j+3}(z_h)} L_{w-j}(z_h). \quad (4.23)$$

Sprowadzając (4.23) do wspólnego mianownika otrzymuje się

$$\begin{aligned} S_w(z_h) &= \frac{b_0^{w+1} B_{w+1}(z_h)}{b_0^{w+2}(z_h)} - \sum_{j=1}^{w+1} \frac{b_j(z_h) b_0^{j-1}(z_h) L_{w-j}(z_h)}{b_0^{w+2}(z_h)} \\ &= \frac{b_0^{w+1}(z_h) B_{w+1}(z_h) - \sum_{j=1}^{w+1} b_j(z_h) b_0^{j-1}(z_h) L_{w-j}(z_h)}{b_0^{w+2}(z_h)}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Podobnie, wstawiając (4.22) do (4.20) otrzymuje się

$$S_w(z_h) = \frac{- \sum_{j=1}^r b_j(z_h) b_0^{j-1}(z_h) L_{w-j}(z_h)}{b_0^{w+2}(z_h)}. \quad (4.25)$$

Podsumowując, współczynniki rozwinięcia Laurenta są macierzami wymiernymi postaci (4.22), gdzie $L_w(z_h)$ to macierze wielomianowe dane wzorami

$$L_w(z_h) = \begin{cases} B_0(z_h) & \text{dla } w = -1 \\ b_0^{w+1}(z_h) B_{w+1}(z_h) - \sum_{j=1}^{w+1} b_j(z_h) b_0^{j-1}(z_h) L_{w-j}(z_h) & \text{dla } w = 0, \dots, r-1 \\ - \sum_{j=1}^r b_j(z_h) b_0^{j-1}(z_h) L_{w-j}(z_h) & \text{dla } w \geq r \end{cases}. \quad (4.26)$$

4.3 Współczynniki szeregu Laurent'a dla $D(z_h) + C(z_h) [I_v z_v - A(z_h)]^{-1} B(z_h)$

Postać (4.4) można rozwinąć w szereg Laurent'a (4.11) w otoczeniu $z_v = \infty$. Współczynnik $S_{-1}(z_h)$ rozwinięcia otrzymuje się wyznaczając granicę [25, str. 131]

$$\begin{aligned} S_{-1}(z_h) &= \lim_{z_v \rightarrow \infty} \{D(z_h) + C(z_h) [I_v z_v - A(z_h)]^{-1} B(z_h)\} = \\ &= D(z_h) + \lim_{z_v \rightarrow \infty} \{z_v^{-1} C(z_h) [I_v - A(z_h) z_v^{-1}]^{-1} B(z_h)\} = D(z_h). \end{aligned} \quad (4.27)$$

W celu wyznaczenia pozostałych współczynników uzasadnia się

Lemat 2

$$[I_v z_v - A(z_h)]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i(z_h) z_v^{-(i+1)}. \quad (4.28)$$

Dowód. Mnożąc z lewej strony (4.28) przez $[I_v z_v - A(z_h)]$ otrzymuje się

$$I_v = \sum_{i=0}^{\infty} [I_v z_v - A(z_h)] A^i(z_h) z_v^{-(i+1)}. \quad (4.29)$$

Rozkładając prawą stronę (4.29) na dwie sumy otrzymuje się

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i(z_h) z_v^{-i} - \sum_{i=0}^{\infty} A^{i+1}(z_h) z_v^{-(i+1)}. \quad (4.30)$$

Stosując podstawienie $w = i - 1$ do pierwszej sumy (4.30) i wyłączając składnik dla $w = -1$ otrzymuje się

$$I_v + \sum_{w=0}^{\infty} A^{w+1}(z_h) z_v^{-(w+1)} - \sum_{i=0}^{\infty} A^{i+1}(z_h) z_v^{-(i+1)} = I_v. \quad (4.31)$$

□

Podstawiając ostatecznie (4.28) do (4.4) uzyskuje się rozwinięcie w szereg Laurent'a

$$S(z_h, z_v) = D(z_h) + \sum_{i=0}^{\infty} C(z_h) A^i(z_h) B(z_h) z_v^{-(i+1)}. \quad (4.32)$$

4.4 Macierz $T_p(z_h)$

Za pomocą (4.26) można wyznaczyć współczynniki rozwinięcia szeregu Laurent'a dla $G(z_h, z_v)$, które po uwzględnieniu (4.32) tworzą nieskończony układ równań postaci

$$S_{-1}(z_h) = D(z_h) \quad (4.33a)$$

$$S_i(z_h) = C(z_h) A^i(z_h) B(z_h), \text{ dla } i \geq 0. \quad (4.33b)$$

Wprowadźmy macierz blokową

$$T_p(z_h) = [t_{i,j}] = H_p^t(z_h^{-1}) H_p(z_h), \quad (4.34)$$

gdzie

$$H_p(z_h) = \begin{bmatrix} S_0(z_h) & S_1(z_h) & \cdots & S_{p-1}(z_h) \\ S_1(z_h) & S_2(z_h) & \cdots & S_p(z_h) \\ S_2(z_h) & S_3(z_h) & \cdots & S_{p+1}(z_h) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Każda kolumna (blok) (4.35) to macierz zawierająca nieskończenie wiele wierszy oraz l kolumn. Wstawiając (4.35) do (4.34) można wyrazić elementy $t_{i,j}$ macierzy T_p poprzez współczynniki rozwinięcia Laurent'a

$$t_{i,j} = \sum_{w=0}^{\infty} S_{w+i-1}^t(z_h^{-1}) S_{w+j-1}(z_h) \text{ dla } i, j = 1, 2, \dots, p. \quad (4.36)$$

Lemat 3 *Rząd macierzy $T_p(z_h)$ w (4.34) dla $p \geq r$ jest nie większy od r .*

Dowód. Przez rząd macierzy nad ciałem funkcji wymiernych będziemy rozumieć maksymalną liczbę liniowo niezależnych kolumn (wierszy) tej macierzy [24, str. 313][27, str. 10]. Wzorując się na [15, str. 496] rozpisuje się (4.15b) do postaci

$$\begin{bmatrix} S_0(z_h) \\ S_1(z_h) \\ S_2(z_h) \\ \vdots \end{bmatrix} b_r(z_h) + \begin{bmatrix} S_1(z_h) \\ S_2(z_h) \\ S_3(z_h) \\ \vdots \end{bmatrix} b_{r-1}(z_h) + \cdots + \begin{bmatrix} S_r(z_h) \\ S_{r+1}(z_h) \\ S_{r+2}(z_h) \\ \vdots \end{bmatrix} b_0(z_h) = \begin{bmatrix} 0_{k \times l} \\ 0_{k \times l} \\ 0_{k \times l} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Z (4.37) wynika, że w macierzy (4.35) bloki $r + 1, \dots, p$ można wyrazić przez liniową kombinację poprzednich r bloków. Oznaczmy przez $s_i(z_v)$ dowolną kolumnę macierzy $S_i(z_v)$. (4.37) będzie również spełnione, gdy za $S_i(z_v)$ podstawimy $s_i(z_v)$ dla dowolnych kolumn, pozostawiając po prawej stronie (4.37) jedną kolumnę zer. Wynika z tego, że kolumn liniowo niezależnych jest nie więcej niż r . Identyczny wniosek można wyciągnąć dla macierzy $H_p(z_h^{-1})$. Na mocy własności iloczynu macierzy skończonego rzędu [15, str. 22] rząd (4.34) jest nie większy od r . $\square$

Lemat 4 *Współczynniki szeregu Laurent'a (4.11) dwuwymiarowego OFC spełniają warunki*

$$\sum_{w=-1}^{\infty} S_w(z_h^{-1})S_w(z_h) = I_l \quad (4.38a)$$

$$\sum_{w=-1}^{\infty} S_w(z_h^{-1})S_{w+t}(z_h) = 0_l \text{ dla } t = 1, 2, \dots \quad (4.38b)$$

Dowód. Wstawiając (4.11) do (3.13) otrzymuje się

$$\begin{aligned} G^t(z_h^{-1}, z_v^{-1})G(z_h, z_v) &= \left\{ \sum_{i=-1}^{\infty} S_i^t(z_h^{-1})z_v^{i+1} \right\} \left\{ \sum_{j=-1}^{\infty} S_j^t(z_h^{-1})z_v^{-(j+1)} \right\} = \\ &= \sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\infty} S_i^t(z_h^{-1})S_j(z_h)z_v^{i-j} = I_l. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Stosując (A.7) do (4.39) otrzymuje się

$$\sum_{w=0}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\infty} S_{w+j}^t(z_h^{-1})S_j(z_h)z_v^w + \sum_{w=-1}^{-\infty} \sum_{i=-1}^{\infty} S_i^t(z_h^{-1})S_{i-w}(z_h)z_v^w = I_l. \quad (4.40)$$

Kładąc w pierwszej sumie $w = t$ oraz wyłączając składnik dla $t = 0$ oraz stosując podstawienie $w = -t$ do drugiej sumy otrzymuje się

$$\sum_{j=-1}^{\infty} S_j^t(z_h^{-1})S_j(z_h) + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\infty} S_{t+j}^t(z_h^{-1})S_j(z_h)z_v^t + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=-1}^{\infty} S_i^t(z_h^{-1})S_{i+t}(z_h)z_v^t = I_l. \quad (4.41)$$

Na podstawie (3.13) stwierdza się, że pierwsza suma (4.41) równa się I_l , pozostałe współczynniki przy z_v muszą być zerowe, tzn.

$$\sum_{j=-1}^{\infty} S_j^t(z_h^{-1})S_j(z_h) = I_l \quad (4.42)$$

$$\sum_{j=-1}^{\infty} S_{t+j}^t(z_h^{-1})S_j(z_h) = 0_l \text{ dla } t = 1, 2, \dots \quad (4.43)$$

$$\sum_{i=-1}^{\infty} S_i^t(z_h^{-1})S_{i+t}(z_h) = 0_l \text{ dla } t = 1, 2, \dots \quad (4.44)$$

Równanie (4.43) po dwustronnej transpozycji jest jednakowe jak (4.44). Wobec tego otrzymuje się (4.38). $\square$

Lemat 5

$$\sum_{w=0}^{\infty} S_{w+i-1}^t(z_h^{-1}) S_{w+j-1}(z_h) = t_{i-1,j-1} - S_{i-2}^t(z_h^{-1}) S_{j-2}(z_h) \text{ dla } i, j = 1, 2, \dots, p \quad (4.45)$$

gdzie $t_{0,0} = I_l$, $t_{i,0} = t_{0,j} = 0_l$ dla $i, j = 1, 2, \dots, p$.

Dowód. Przez indukcję dla dwóch zmiennych.

Dla $i = 1, j = 1$ (4.45) przyjmuje postać

$$\sum_{w=0}^{\infty} S_w^t(z_h^{-1}) S_w(z_h) = I_l - S_{-1}^t(z_h^{-1}) S_{-1}(z_h). \quad (4.46)$$

Biorąc pod uwagę lewą stronę (4.46) i dopisując wyrażenie $(-S_{-1}^t(z_h^{-1}) S_{-1}(z_h) + S_{-1}^t(z_h^{-1}) S_{-1}(z_h))$ otrzymuje się

$$\sum_{w=-1}^{\infty} S_w^t(z_h^{-1}) S_w(z_h) - S_{-1}^t(z_h^{-1}) S_{-1}(z_h). \quad (4.47)$$

Na mocy (4.38a) lewa suma (4.47) równa się I_l , co wykazuje słuszność (4.46).

Dla $i = 1, j = 2, 3, \dots$ (4.45) przyjmuje postać

$$\sum_{w=0}^{\infty} S_w^t(z_h^{-1}) S_{w+j-1}(z_h) = 0_l - S_{-1}^t(z_h^{-1}) S_{j-2}(z_h) \quad (4.48)$$

Biorąc lewą stronę (4.48) i odejmując (4.44) dla $t = j - 1$ otrzymuje się

$$\sum_{w=0}^{\infty} S_w^t(z_h^{-1}) S_{w+j-1}(z_h) - \sum_{i=-1}^{\infty} S_i^t(z_h^{-1}) S_{i+j-1}(z_h). \quad (4.49)$$

Wyłączając z drugiej sumy składnik dla $i = -1$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} \sum_{w=0}^{\infty} S_w^t(z_h^{-1}) S_{w+j-1}(z_h) - S_{-1}^t(z_h^{-1}) S_{j-2}(z_h) - \sum_{i=0}^{\infty} S_i^t(z_h^{-1}) S_{i+j-1}(z_h) = \\ = -S_{-1}^t(z_h^{-1}) S_{j-2}(z_h). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Podobnie wykazuje się słuszność dla $j = 1, i = 2, 3, \dots$

$$\sum_{w=0}^{\infty} S_{w+i-1}^t(z_h^{-1}) S_w(z_h) = 0_l - S_{i-2}^t(z_h^{-1}) S_{-1}(z_h). \quad (4.51)$$

Zakładając słuszność (4.45) uzasadnia się

$$\sum_{w=0}^{\infty} S_{w+i}^t(z_h^{-1}) S_{w+j}(z_h) = t_{i,j} - S_{i-1}^t(z_h^{-1}) S_{j-1}(z_h). \quad (4.52)$$

Biorąc prawą stronę (4.52) i wstawiając za $t_{i,j}$ (4.45) otrzymuje się

$$\sum_{w=0}^{\infty} S_{w+i-1}^t(z_h^{-1}) S_{w+j-1}(z_h) - S_{i-1}^t(z_h^{-1}) S_{j-1}(z_h) = \sum_{w=1}^{\infty} S_{w+i-1}^t(z_h^{-1}) S_{w+j-1}(z_h). \quad (4.53)$$

Stosując podstawienie $w = l + 1$ do prawej strony (4.53) otrzymuje się lewą stronę (4.52), równą

$$\sum_{l=0}^{\infty} S_{l+i}^t(z_h^{-1}) S_{l+j}(z_h). \quad (4.54)$$

□

Lemat 6

$$t_{i-1,j-1} - S_{i-2}^t(z_h^{-1}) S_{j-2}(z_h) = B^t(z_h^{-1}) [A^t(z_h^{-1})]^{i-1} [A(z_h)]^{j-1} B(z_h) \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, p \quad (4.55)$$

Dowód. Przez indukcję dla (i, j) . Dla $i = 1, j = 1$ otrzymuje się

$$t_{0,0} - S_{-1}^t(z_h^{-1}) S_{-1}(z_h) = B^t(z_h^{-1}) B(z_h). \quad (4.56)$$

Korzystając z (4.33a), lewą stronę (4.56) można przekształcić do postaci

$$t_{0,0} - S_{-1}^t(z_h^{-1}) S_{-1}(z_h) = I_l - D^t(z_h) D(z_h). \quad (4.57)$$

Stosując (4.7c) do (4.57) otrzymuje się prawą stronę (4.55), co oznacza prawdziwość dla $i = 1, j = 1$.

Dla $i = 1, j = 2, 3, \dots$ otrzymuje się

$$t_{0,j-1} - S_{-1}^t(z_h^{-1}) S_{j-2}(z_h) = B^t(z_h^{-1}) [A(z_h)]^{j-1} B(z_h). \quad (4.58)$$

Korzystając z (4.33) lewą stronę (4.58) przekształca się do postaci

$$t_{0,j-1} - S_{-1}^t(z_h^{-1}) S_{j-2}(z_h) = -D^t(z_h^{-1}) C(z_h) [A(z_h)]^{j-2} B(z_h). \quad (4.59)$$

Korzystając z (4.7b) prawą stronę (4.59) przekształca się do postaci

$$-D^t(z_h^{-1}) C(z_h) [A(z_h)]^{j-2} B(z_h) = B^t(z_h^{-1}) A(z_h) [A(z_h)]^{j-2} B(z_h). \quad (4.60)$$

Podobnie dla $j = 1, i = 2, 3, \dots$ uzasadnia się

$$t_{i-1,0} - S_{i-2}^t(z_h^{-1}) S_{-1}(z_h) = B^t(z_h^{-1}) [A^t(z_h^{-1})]^{i-1} B(z_h). \quad (4.61)$$

Zależność (4.55) jest słuszna dla $i = 1$ i $j = 1, 2, \dots$ oraz dla $i = 1, 2, \dots, j = 1$. Zakładając słuszność (4.55) wykazuje się prawdziwość

$$t_{i,j} - S_{i-1}^t(z_h^{-1}) S_{j-1}(z_h) = B^t(z_h^{-1}) [A^t(z_h^{-1})]^i [A(z_h)]^j B(z_h). \quad (4.62)$$

Wstawiając (4.33b) do lewej strony (4.62) otrzymuje się

$$B^t(z_h^{-1}) [A^t(z_h^{-1})]^{i-1} [A(z_h)]^{j-1} B(z_h) - B^t(z_h^{-1}) [A^t(z_h^{-1})]^{i-1} C^t(z_h^{-1}) C(z_h) [A(z_h)]^{j-1} B(z_h), \quad (4.63)$$

następnie korzystając z (4.7a) otrzymuje się

$$B^t(z_h^{-1}) [A^t(z_h^{-1})]^{i-1} [A(z_h)]^{j-1} B(z_h) - B^t(z_h^{-1}) [A^t(z_h^{-1})]^{i-1} [I_h - A^t(z_h^{-1}) A(z_h)] [A(z_h)]^{j-1} B(z_h). \quad (4.64)$$

Po wymnożeniu, (4.64) upraszcza się do prawej strony (4.62). □

Z (4.45), (4.36) i (4.55) wynika metoda wyznaczania elementów macierzy $T_p(z_h)$:

$$t_{i,j} = t_{i-1,j-1} - S_{i-2}^t(z_h^{-1}) S_{j-2}(z_h) \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, p \quad (4.65)$$

oraz związek $t_{i,j}$ z macierzami $A(z_h)$, $B(z_h)$:

$$t_{i,j} = B^t(z_h^{-1}) [A^t(z_h^{-1})]^{i-1} [A(z_h)]^{j-1} B(z_h) \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, p \quad (4.66)$$

4.5 Macierze $A(z_v)$, $B(z_v)$, $C(z_v)$, $D(z_v)$

Równanie (4.33a) jednoznacznie określa macierz $D(z_h)$. W celu wyznaczenia pozostałych macierzy wprowadźmy $\widehat{T}_p(z_h)$ postaci

$$\widehat{T}_p(z_h) = b_0^p(z_h^{-1})b_0^p(z_h)T_p(z_h). \quad (4.67)$$

Lemat 7 $\widehat{T}_p(z_h)$ jest macierzą

1. rzeczywistą pseudowielomianową
2. dodatnio półokreśloną dla $z_h = e^{j\omega}$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$
- 3.

$$\widehat{T}_p^t(z_h^{-1}) = \widehat{T}_p(z_h) \quad (4.68)$$

Dowód. Pkt. 1 wynika z postaci współczynników $S_k(z_h)$ (4.22), które są rzeczywiste i wymierne. Z uwagi na (4.65) i (4.22) macierz $T_p(z_h)$ będzie miała wspólny mianownik równy $b_0^p(z_h^{-1})b_0^p(z_h)$, który został wyłączony z macierzy $\widehat{T}_p(z_h)$.

Pkt. 2. Z zależności (4.34) i (4.67) dla $z_h = e^{j\omega}$ otrzymuje się

$$\widehat{T}_p(z_h)|_{z_h=e^{j\omega}} = b_0^p(e^{-j\omega})b_0^p(e^{j\omega})H_p^t(e^{-j\omega})H_p(e^{j\omega}) = |b_0^p(e^{j\omega})|^2 |H_p(e^{j\omega})|^2. \quad (4.69)$$

Z (4.69) wynika, że $\widehat{T}_p(e^{j\omega})$ jest macierzą dodatnio półokreśloną dla $z_h = e^{j\omega}$.

Pkt. 3. Wstawiając (4.67) do (4.68) otrzymuje się

$$\frac{1}{b_0^p(z_h^{-1})b_0^p(z_h)}T_p^t(z_h^{-1}) = \frac{1}{b_0^p(z_h^{-1})b_0^p(z_h)}T_p(z_h). \quad (4.70)$$

Wstawiając (4.34) do (4.70) otrzymuje się równość obydwu stron (4.70)

$$H_p^t(z_h^{-1})H_p(z_h) = H_p^t(z_h^{-1})H_p(z_h). \quad (4.71)$$

□

Na podstawie lematu 3 rząd macierzy $\widehat{T}_p(z_h)$ jest nie większy od r i niech wynosi v , wobec tego do analizy wystarczy brać pod uwagę $\widehat{T}_r(z_h)$. Na mocy lematu 7 macierz $\widehat{T}_r(z_h)$ można faktoryzować metodą zaprezentowaną w rozdziale 5, str. 38 do postaci

$$\widehat{T}_r(z_h) = M^t(z_h^{-1})M(z_h), \quad (4.72)$$

gdzie

$$M(z_h) = [M_0(z_h) \ M_1(z_h) \ \dots \ M_{r-1}(z_h)] \quad (4.73)$$

jest macierzą wielomianową maksymalnego rzędu o wymiarach $v \times lr$. Porównując (4.72), (4.73) i (4.36) otrzymuje się

$$t_{i,j} = \frac{1}{b_0^r(z_h^{-1})b_0^r(z_h)}M_{i-1}^t(z_h^{-1})M_{j-1}(z_h). \quad (4.74)$$

Do macierzy $M(z_h)$ można wyznaczyć pseudoodwrotność $M^+(z_h)$ (B.3, str. 74) spełniającą

$$M(z_h)M^+(z_h) = I_v. \quad (4.75)$$

Faktoryzacja $T_r(z_h)$ ma zatem postać

$$T_r(z_h) = \frac{1}{b_0^r(z_h^{-1})} M^t(z_h^{-1}) \frac{1}{b_0^r(z_h)} M(z_h). \quad (4.76)$$

Na podstawie (4.66), $T_r(z_h)$ można przedstawić w postaci

$$T_r(z_h) = P_r^t(z_h^{-1}) P_r(z_h), \quad (4.77)$$

gdzie

$$P_r(z_h) = [B(z_h) \ A(z_h)B(z_h) \ \cdots \ A^{r-1}B(z_h)]. \quad (4.78)$$

Porównując (4.73), (4.76), (4.77) i (4.78) otrzymuje się

$$M_i(z_h) = b_0^r(z_h) A^i(z_h) B(z_h) \quad (4.79)$$

oraz

$$P_r(z_h) = \frac{1}{b_0^r(z_h)} M(z_h). \quad (4.80)$$

Zależność (4.79) dla $i = 0$ pozwala wyznaczyć

$$B(z_h) = \frac{1}{b_0^r(z_h)} M_0(z_h). \quad (4.81)$$

W celu wyznaczenia $C(z_h)$ korzysta się z (4.33b) i (4.78) otrzymując

$$[S_0(z_h) \ S_1(z_h) \ \cdots \ S_{r-1}(z_h)] = C(z_h) P_r(z_h) = C(z_h) \frac{1}{b_0^r(z_h)} M(z_h). \quad (4.82)$$

Na podstawie (4.82) otrzymuje się

$$C(z_h) = b_0^r(z_h) [S_0(z_h) \ S_1(z_h) \ \cdots \ S_{r-1}(z_h)] M^+(z_h). \quad (4.83)$$

Do wyznaczenia $A(z_h)$ wprowadza się uogólnioną macierz stowarzyszoną do (4.2) postaci

$$\Omega(z_h) = \frac{1}{b_0(z_h)} \begin{bmatrix} 0_l & 0_l & \cdots & 0_l & -b_r(z_h)I_l \\ b_0(z_h)I_l & 0_l & \cdots & 0_l & -b_{r-1}(z_h)I_l \\ 0_l & b_0(z_h)I_l & \cdots & 0_l & -b_{r-2}(z_h)I_l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_l & 0_l & \cdots & b_0(z_h)I_l & -b_1(z_h)I_l \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

Podobnie jak w [23, str. 151] pokazuje się, że uogólniony wielomian charakterystyczny dla (4.84) ma postać

$$\det(I_r z_v - \Omega(z_h)) = \sum_{j=0}^r \frac{b_j(z_h)}{b_0(z_h)} z_v^{r-j} \quad (4.85)$$

i spełnia twierdzenie Cayley-Hamiltona [23, str. 131]

$$\sum_{j=0}^r \frac{b_j(z_h)}{b_0(z_h)} A^{r-j}(z_h) = 0_v. \quad (4.86)$$

Wprowadza się macierz postaci

$$M(z_h)\Omega(z_h) = \begin{bmatrix} M_1(z_h) & M_2(z_h) & \cdots & -\sum_{j=1}^r \frac{b_j(z_h^{-1})}{b_0(z_h^{-1})} M_{r-j}(z_h) \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Po uwzględnieniu (4.79) i (4.86), zależność (4.87) przyjmuje postać

$$M(z_h)\Omega(z_h) = [M_1(z_h) \ M_2(z_h) \ \cdots \ M_r(z_h)] = A(z_h)M(z_h). \quad (4.88)$$

Zależność (4.88), po uwzględnieniu (4.75) pozwala wyznaczyć

$$A(z_h) = M(z_h)\Omega(z_h)M^+(z_h). \quad (4.89)$$

Twierdzenie 5 *Macierze $A(z_h)$ (4.89), $B(z_h)$ (4.81), $C(z_h)$ (4.83), $D(z_h)$ (4.33a) spełniają warunki (4.7).*

Dowód. Równanie (4.7a). Korzystając z (4.89) i (4.83) otrzymuje się

$$A^t(z_h^{-1})A(z_h) + C^t(z_h^{-1})C(z_h) = \{M^+(z_h^{-1})\}^t \Omega^t(z_h^{-1}) M^t(z_h^{-1}) M(z_h) \Omega(z_h) M^+(z_h) + \\ b_0^r(z_h^{-1}) b_0^r(z_h) \{M^+(z_h^{-1})\}^t \begin{bmatrix} S_0^t(z_h^{-1}) \\ \vdots \\ S_{r-1}^t(z_h^{-1}) \end{bmatrix} [S_0(z_h) \ \cdots \ S_{r-1}(z_h)] M^+(z_h) = \quad (4.90)$$

uwzględniając (4.88) i (4.74) otrzymuje się

$$= \{M^+(z_h^{-1})\}^t b_0^r(z_h^{-1}) b_0^r(z_h) \cdot \\ \cdot \begin{bmatrix} t_{2,2} + S_0^t(z_h^{-1}) S_0(z_h) & \cdots & t_{2,r+1} + S_0^t(z_h^{-1}) S_{r-1}(z_h) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{r+1,2} + S_{r-1}^t(z_h^{-1}) S_0(z_h) & \cdots & t_{r+1,r+1} + S_{r-1}^t(z_h^{-1}) S_{r-1}(z_h) \end{bmatrix} M^+(z_h) = \quad (4.91)$$

za pomocą (4.36) zależność (4.91) doprowadza się do postaci

$$= \{M^+(z_h^{-1})\}^t b_0^r(z_h^{-1}) b_0^r(z_h) \begin{bmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{r,1} & \cdots & t_{r,r} \end{bmatrix} M^+(z_h) = \quad (4.92)$$

korzystając (4.74), (4.72) i (4.75) otrzymuje się

$$= \{M^+(z_h^{-1})\}^t \widehat{T}_r(z_h) M^+(z_h) = I_v. \quad (4.93)$$

Równanie (4.7b). Korzystając z (4.89), (4.81), (4.83), (4.33a) otrzymuje się

$$A^t(z_h^{-1})B(z_h) + C^t(z_h^{-1})D(z_h) = \{M^+(z_h^{-1})\}^t \Omega^t(z_h^{-1}) M^t(z_h^{-1}) \frac{1}{b_0^r(z_h)} M_0(z_h) + \\ + b_0^r(z_h^{-1}) \{M^+(z_h^{-1})\}^t \begin{bmatrix} S_0^t(z_h^{-1}) \\ \vdots \\ S_{r-1}^t(z_h^{-1}) \end{bmatrix} S_{-1}(z_h) = \quad (4.94)$$

za pomocą (4.88) zależność (4.94) przekształca się do postaci

$$= \{M^+(z_h^{-1})\}^t \left\{ \frac{1}{b_0^r(z_h)} \begin{bmatrix} M_1^t(z_h^{-1})M_0(z_h) \\ \vdots \\ M_r^t(z_h^{-1})M_0(z_h) \end{bmatrix} + b_0^r(z_h^{-1}) \begin{bmatrix} S_0^t(z_h^{-1})S_{-1}(z_h) \\ \vdots \\ S_{r-1}^t(z_h^{-1})S_{-1}(z_h) \end{bmatrix} \right\} = \quad (4.95)$$

stosując (4.74) do (4.95) otrzymuje się

$$= b_0^r(z_h^{-1})\{M^+(z_h^{-1})\}^t \begin{bmatrix} t_{2,1} + S_0^t(z_h^{-1})S_{-1}(z_h) \\ \vdots \\ t_{r+1,1} + S_{r-1}^t(z_h^{-1})S_{-1}(z_h) \end{bmatrix} = \quad (4.96)$$

korzystając z (4.36) i (4.43), zależność (4.96) przekształca się do postaci

$$= b_0^r(z_h^{-1})\{M^+(z_h^{-1})\}^t \begin{bmatrix} \sum_{w=-1}^{\infty} S_{w+1}^t(z_h^{-1})S_w(z_h) \\ \vdots \\ \sum_{w=-1}^{\infty} S_{w+r}^t(z_h^{-1})S_w(z_h) \end{bmatrix} = b_0^r(z_h^{-1})\{M^+(z_h^{-1})\}^t 0_{r \times l} = 0_{v \times l} \quad (4.97)$$

Równanie (4.7c). Korzystając z (4.81) i (4.33a) otrzymuje się

$$B^t(z_h^{-1})B(z_h) + D^t(z_h^{-1})D(z_h) = \frac{1}{b_0^r(z_h^{-1})b_0^r(z_h)} M_0^t(z_h^{-1})M_0(z_h) + S_{-1}^t(z_h^{-1})S_{-1}(z_h) = \quad (4.98)$$

za pomocą (4.74), (4.36) i (4.38a) zależność (4.98) przekształca się do postaci

$$= t_{1,1} + S_{-1}^t(z_h^{-1})S_{-1}(z_h) = \sum_{w=-1}^{\infty} S_w^t(z_h^{-1})S_w(z_h) = 0_l \quad (4.99)$$

□

4.6 Algorytm syntezy

Z przedstawionych analiz wynika następujący algorytm syntezy dwuwymiarowego OFC, opisanego macierzą transmitancji (4.1) o wymiarach $k \times l$:

$$G(z_h, z_v) = \frac{\sum_{i=0}^r B_i(z_h) z_v^{r-i}}{\sum_{j=0}^r b_j(z_h) z_v^{r-j}} \quad (4.100)$$

1. Wyznaczyć współczynniki rozwinięcia szeregu Laurent'a (4.22):

$$S_w(z_h) = \frac{L_w(z_h)}{b_0^{w+2}(z_h)} \quad \text{dla } w = 0, \dots, r-1, \quad (4.101)$$

gdzie

$$L_w(z_h) = \begin{cases} B_0(z_h) & \text{dla } w = -1 \\ b_0^{w+1}(z_h) B_{w+1}(z_h) - \sum_{j=1}^{w+1} b_j(z_h) b_0^{j-1}(z_h) L_{w-j}(z_h) & \text{dla } w = 0, \dots, r-1 \end{cases} \quad (4.102)$$

2. Wyznaczyć macierz $\widehat{T}_r(z_h) = [\widehat{t}_{i,j}]$ (4.65)(4.67):

$$\widehat{t}_{0,0} = b_0^r(z_h^{-1}) b_0^r(z_h) \quad \widehat{t}_{i,0} = \widehat{t}_{0,j} = 0_l \quad (4.103)$$

$$\widehat{t}_{i,j} = \widehat{t}_{i-1,j-1} - b_0^{r-i}(z_h^{-1}) b_0^{r-j}(z_h) L_{i-2}^t(z_h^{-1}) L_{j-2}(z_h) \quad (4.104)$$

dla $i, j = 1, 2, \dots, r$

3. Dokonać faktoryzacji (4.72) metodą przedstawioną w rozdziale 5, str. 38:

$$\widehat{T}_r(z_h) = M^t(z_h^{-1}) M(z_h) \quad (4.105)$$

4. Z pierwszych l kolumn macierzy $M(z_h)$ utworzyć macierz $M_0(z_h)$ (4.73)

5. Wyznaczyć wymierną macierz pseudoodwrotną $M^+(z_h)$, np. metodą Grevill'a [15, str 39]:

$$M^+(z_h) = \frac{M_n^+(z_h)}{m^+(z_h)} \quad (4.106)$$

6. Zbudować macierz $\Omega(z_h) = \frac{\Omega_n(z_h)}{b_0(z_h)}$ (4.84):

$$\Omega_n(z_h) = \begin{bmatrix} 0_l & 0_l & \cdots & 0_l & -b_r(z_h) I_l \\ b_0(z_h) I_l & 0_l & \cdots & 0_l & -b_{r-1}(z_h) I_l \\ 0_l & b_0(z_h) I_l & \cdots & 0_l & -b_{r-2}(z_h) I_l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_l & 0_l & \cdots & b_0(z_h) I_l & -b_1(z_h) I_l \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

7. Wyznaczyć macierze $A(z_h)$ (4.89), $B(z_h)$ (4.81), $C(z_h)$ (4.83), $D(z_h)$ (4.33a), $g_d(z_h)$ i utworzyć macierz $G_d(z_h)$ (4.5):

$$g_d(z_h) = b_0^r(z_h) m^+(z_h) \quad (4.108)$$

$$A_n(z_h) = b_0^{r-1}(z_h) M(z_h) \Omega_n(z_h) M_n^+(z_h) \quad (4.109)$$

$$B_n(z_h) = M_0(z_h) m^+(z_h) \quad (4.110)$$

$$C_n(z_h) = [L_0(z_h) b_0^{r-1}(z_h) \quad L_1(z_h) b_0^{r-2}(z_h) \quad \cdots \quad L_{r-1}(z_h)] M_n^+(z_h) \quad (4.111)$$

$$D_n(z_h) = b_0^{r-1}(z_h) L_{-1}(z_h) m^+(z_h) \quad (4.112)$$

$$(4.113)$$

$$G_d(z_h) = \frac{1}{g_d(z_h)} \begin{bmatrix} A_n(z_h) & B_n(z_h) \\ C_n(z_h) & D_n(z_h) \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

8. Na podstawie twierdzenia 5 stwierdza się, że $G_d(z_h)$ spełnia warunki (4.7). Na mocy twierdzenia 7 str. 44, $m^+(z_h)$ nie ma zer dla $z_h \in \overline{U^1}$, podobnie $b_0(z_h)$ na podstawie założenia. Wobec tego $G_d(z_h)$ jest analityczne dla $z_h \in \overline{U^1}$. Można zatem wyznaczyć ortogonalną realizację A^h , B^h , C^h i D^h dla macierzy $G_d(z_h)$, np. metodą [36]
9. Korzystając z (4.10) wyznaczyć macierze A , B , C i D ortogonalnej realizacji (2.9)

4.7 Przykład

Wyznaczmy realizację ortogonalną dla systemu opisanego macierzą transmitancji

$G(z_h, z_v)$, str. 18:

$$G(z_h, z_v) = \frac{B_0(z_h)z_v + B_1(z_h)}{b_0(z_h)z_v + b_1(z_h)} \quad (4.115)$$

gdzie

$$B_0(z_h) = \begin{bmatrix} 0.76636z_h + 0.52018 \\ -0.092761z_h - 0.06323 \\ 0.53024z_h + 0.48790 \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

$$B_1(z_h) = \begin{bmatrix} 0.53938z_h + 0.35413 \\ 0.10042z_h + 0.070887 \\ 0.44969z_h + 0.49203 \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

$$b_0(z_h) = z_h + 0.72434 \quad (4.118)$$

$$b_1(z_h) = 0.68149z_h + 0.52571. \quad (4.119)$$

Kolejne kroki algorytmu syntezy na str. 34, dla $r = 1$ i $m = 1$ mają postać:

1.

$$L_{-1}(z_h) = B_0(z_h) \quad (4.120)$$

$$L_0(z_h) = b_0(z_h)B_1(z_h) - b_1(z_h)L_{-1}(z_h) = \quad (4.121)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0171129z_h^2 - 0.0125555z_h - 0.0169525 \\ 0.1636335z_h^2 + 0.2354793z_h + 0.8458673 \\ 0.0883418z_h^2 + 0.2065123z_h + 0.0999042 \end{bmatrix}. \quad (4.122)$$

2.

$$\begin{aligned} \hat{T}_r(z_h) &= b_0(z_h^{-1})b_0(z_h) - L_{-1}(z_h)L_{-1}(z_h) = \\ &= 0.611265z_h + 0.1349690 + 0.611265z_h^{-1}. \end{aligned} \quad (4.123)$$

3.

$$\begin{aligned} \hat{T}_r(z_h) &= M^t(z_h^{-1})M(z_h) = \\ &= (0.3099678z_h + 0.1972029)(0.3099678z_h^{-1} + 0.1972029). \end{aligned} \quad (4.124)$$

4.

$$M_0(z_h) = M(z_h). \quad (4.125)$$

5.

$$M^+(z_h) = \frac{M(z_h)}{M^2(z_h)} = \frac{0.3099678z_h + 0.1972029}{0.0960800z_h^2 + 0.1222531z_h + 0.0388890}. \quad (4.126)$$

6.

$$\Omega(z_h) = \frac{-b_1(z_h)}{b_0(z_h)}. \quad (4.127)$$

7.

$$A_n(z_h) = -0.6814900z_h^3 - 1.3928441z_h^2 - 0.9447555z_h - 0.2127844 \quad (4.128)$$

$$B_n(z_h) = 0.3099678z_h^3 + 0.5916087z_h^2 + 0.3763842z_h + 0.0798191 \quad (4.129)$$

$$C_n(z_h) = \begin{bmatrix} 0.0552087z_h^3 - 0.0053817z_h^2 - 0.0804610z_h - 0.0347947 \\ 0.5279047z_h^3 + 1.0955451z_h^2 + 0.7562068z_h + 0.1736131 \\ 0.2850033z_h^3 + 0.8475583z_h^2 + 0.7461687z_h + 0.2050520 \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

$$D_n(z_h) = \begin{bmatrix} 0.7663641z_h^3 + 1.4953060z_h^2 + 0.9720690z_h + 0.2105450 \\ -0.0927613z_h^3 - 0.1812605z_h^2 - 0.1180004z_h - 0.0255928 \\ 0.5302377z_h^3 + 1.1625792z_h^2 + 0.8354253z_h + 0.1974805 \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

$$g_d(z_h) = z_h^3 + 1.9967491z_h^2 + 1.3264131z_h + 0.2931811. \quad (4.132)$$

Rozmiar wektora stanu $x^v(n, m)$ wynosi 1×1 .

8.

$$\begin{aligned} A^h &= \begin{bmatrix} -0.6760233 & -0.0079248 \\ -0.2427694 & -0.6845212 \end{bmatrix} & B^h &= \begin{bmatrix} -0.0137107 & 0.0265214 \\ 0.4152410 & 0.1616971 \end{bmatrix} \\ C^h &= \begin{bmatrix} -0.4653807 & -0.0926214 \\ 0.3167573 & -0.2679809 \\ -0.3823265 & 0.0872019 \\ -0.1448018 & 0.6658613 \end{bmatrix} & D^h &= \begin{bmatrix} -0.6814900 & 0.3099678 \\ 0.0552087 & 0.7663641 \\ 0.5279047 & -0.0927613 \\ 0.2850033 & 0.5302377 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Rozmiar wektora stanu $x^h(n, m)$ wynosi 2×1 .

9.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.6760233 & -0.0079248 & -0.0137107 \\ -0.2427694 & -0.6845212 & 0.4152410 \\ -0.4653807 & -0.0926214 & -0.6814900 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0.0265214 \\ 0.1616971 \\ 0.3099678 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0.3167573 & -0.2679809 & 0.0552087 \\ -0.3823265 & 0.0872019 & 0.5279047 \\ -0.1448018 & 0.6658613 & 0.2850033 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0.7663641 \\ -0.0927613 \\ 0.5302377 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.134)$$

Rozdział 5

Faktoryzacja macierzy wielomianowej nieujemnej na kole jednostkowym

5.1 Wstęp

Niech będzie dana rzeczywista macierz pseudowielomianowa $\widehat{M}(z)$ stopnia $2n$ o wymiarach $p \times p$, mająca następujące własności

1. $\forall \omega \widehat{M}(z)|_{z=e^{j\omega}} \geq 0$ (jest dodatnio półokreślona),
2. $\widehat{M}(z) = \widehat{M}^t\left(\frac{1}{z}\right)$,
3. $\text{rank } \widehat{M}(z) = r \leq p$ prawie wszędzie.

Wiadomo [38][45], że istnieje faktoryzacja tej macierzy do postaci

$$\widehat{M}(z) = W^t(z^{-1})W(z). \quad (5.1)$$

Dla wygody implementacyjnej, do obliczeń stosuje się macierz

$$M(z) = z^n \widehat{M}(z) \quad (5.2)$$

oraz poszukuje się faktoryzacji postaci

$$M(z) = W^\#(z)W(z), \quad (5.3)$$

gdzie

$$W^\#(z) = z^n W^t\left(\frac{1}{z}\right). \quad (5.4)$$

$W(z)$ jest rzeczywistą macierzą wielomianową stopnia n o rozmiarach $r \times p$, spełniającą warunek $\text{rank } W(z) = r$. Algorytm wyznaczania $W(z)$ przedstawiono w [38], którego koncepcja bazuje na wykorzystaniu metody Newtona-Raphsona zastosowanej do wielomianów. Postać iteracyjnego wzoru rekurencyjnego tej metody, wyznaczającego rozwiązanie układu równań $f(x) = 0$ przedstawia równanie (5.5) [6, str. 211]

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} - [J(x^{(j)})]^{-1}f(x^{(j)}), \quad (5.5)$$

gdzie $J(x^{(j)})$ oznacza macierz Jakobiego funkcji $f(x^{(j)})$. Mnożąc lewostronnie (5.5) przez $J(x^{(j)})$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} J(x^{(j)})x^{(j+1)} &= J(x^{(j)})x^{(j)} - f(x^{(j)}) \\ J(x^{(j)})(x^{(j+1)} - x^{(j)}) + f(x^{(j)}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Stosując oznaczenie $\Delta f(x^{(j)}) = J(x^{(j)})(x^{(j+1)} - x^{(j)})$ do (5.6) otrzymuje się

$$f(x^{(j)}) + \Delta f(x^{(j)}) = 0. \quad (5.7)$$

W celu zastosowania (5.7), zakłada się, że $W(z)$ ma rozmiar $p \times p$. Wprowadza się funkcję

$$f(W(z)) = M(z) - W^\#(z)W(z) \quad (5.8)$$

oraz jej przyrost

$$\Delta f(W(z)) = -\Delta W^\#(z)W(z) - W^\#(z)\Delta W(z). \quad (5.9)$$

Podstawiając (5.8) i (5.9) do (5.7) otrzymuje się

$$M(z) - W^\#(z)W(z) - \Delta W^\#(z)W(z) - W^\#(z)\Delta W(z) = 0. \quad (5.10)$$

Dopisując do lewej strony równania (5.10) wyrażenie $W^\#(z)W(z) - W^\#(z)W(z)$ oraz odpowiednio grupując otrzymuje się

$$\begin{aligned} [W^\#(z) + \Delta W^\#(z)]W(z) + W^\#(z)[W(z) + \Delta W(z)] &= \\ &= M(z) + W^\#(z)W(z). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Wprowadzając oznaczenie $W_{k+1}(z) = W(z) + \Delta W(z)$ i podstawiając do (5.11) otrzymuje się iteracyjną zależność na kolejne przybliżenia $W(z)$ poprzez $W_{k+1}(z)$:

$$W_{k+1}^\#(z)W_k(z) + W_k^\#(z)W_{k+1}(z) = W_k^\#(z)W_k(z) + M(z). \quad (5.12)$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$M(z) = \sum_{i=0}^{2n} C_i z^i \quad (5.13)$$

$$W_k(z) = \sum_{i=0}^n A_i z^i \quad (5.14)$$

$$W_{k+1}(z) = \sum_{i=0}^n B_i z^i, \quad (5.15)$$

gdzie A_i , B_i i C_i to macierze o rozmiarze $p \times p$.

Lemat 8 *Macierz C_i w $M(z)$ spełnia warunek*

$$C_i = C_{2n-i}^t \quad \text{dla } i = 0, \dots, n. \quad (5.16)$$

Dowód. Wynika to z postaci (5.13) oraz założenia 2, str. 38. $\square$

W celu rozwiązania (5.12) wyznacza się

$$W_k^\#(z) = \sum_{i=0}^n A_{n-i} z^i \quad (5.17a)$$

$$W_{k+1}^\#(z) = \sum_{i=0}^n B_{n-i} z^i. \quad (5.17b)$$

Po podstawieniu (5.17) do (5.12) otrzymuje się

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (B_{n-i}^t A_j + A_{n-1}^t B_j) z^{i+j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n A_{n-i}^t A_j z^{i+j} + \sum_{i=0}^{2n} C_i z^i. \quad (5.18)$$

Korzystając z (A.4) zmienia się kolejność sumowania (5.18) otrzymując

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (B_{n-i+j}^t A_j + A_{n-i+j}^t B_j) z^i + \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=i-n}^n (B_{n-i+j}^t A_j + A_{n-i+j}^t B_j) z^i = \\ = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i A_{n-i+j}^t A_j z^i + \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=i-n}^n A_{n-i+j}^t A_j z^i + \sum_{i=0}^n C_i z^i + \sum_{i=n+1}^{2n} C_i z^i. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Porównując współczynniki lewej i prawej strony (5.19) otrzymuje się

$$\sum_{j=0}^i (B_{n-i+j}^t A_j + A_{n-i+j}^t B_j) = \sum_{j=0}^i A_{n-i+j}^t A_j + C_i \quad (5.20)$$

dla $i = 0, \dots, n$

$$\sum_{j=i-n}^n (B_{n-i+j}^t A_j + A_{n-i+j}^t B_j) = \sum_{j=i-n}^n A_{n-i+j}^t A_j + C_i \quad (5.21)$$

dla $i = n+1, \dots, 2n$.

Stosując podstawienie $k = n - i + j$ do równania (5.21) otrzymuje się

$$\sum_{k=0}^{2n-i} (B_k^t A_{k-n+i} + A_k^t B_{k-n+i}) = \sum_{k=0}^{2n-i} A_k^t A_{k-n+i} + C_i \quad (5.22)$$

dla $i = n+1, \dots, 2n$

następnie $l = 2n - i$ oraz transponując obustronnie otrzymuje się

$$\sum_{k=0}^l (B_k^t A_{k-l+n} + A_k^t B_{k-l+n}) = \sum_{k=0}^l A_k^t A_{k-l+n} + C_{2n-l}^t \quad (5.23)$$

dla $l = 0, \dots, n-1$.

Korzystając z (5.16) można stwierdzić, że (5.23) zawiera się w (5.20), dlatego do dalszej analizy stosuje się tylko (5.20).

Lemat 9 Równanie macierzowe (5.20) dla $i = n$ zawiera $\frac{1}{2}p(p-1)$ równań liniowo zależnych.

Dowód. Kładąc $i = n$ w (5.20) otrzymuje się

$$\sum_{j=0}^n (B_j^t A_j + A_j^t B_j) = \sum_{j=0}^i A_j^t A_j + C_n \quad (5.24)$$

dla $i = 0, \dots, n$.

Uwzględniając (5.16) dla $i = n$ można stwierdzić, że lewa i prawa strona (5.24) jest macierzą symetryczną. Oznacza to, że równania pod diagonalą i nad diagonalą są identyczne, tzn. są liniowo zależne. (5.20) tworzy macierz o rozmiarze $p \times p$, wobec czego pod (i nad) diagonalą znajduje się $\frac{1}{2}p(p-1)$ równań. $\square$

5.2 Konstrukcja układu równań

(5.20) tworzy układ równań liniowych. Przeanalizujemy transponowaną postać (5.20):

$$\sum_{j=0}^i B_j^t A_{n-i+j} + \sum_{j=0}^i A_j^t B_{n-i+j} = \sum_{j=0}^i A_j^t A_{n-i+j} + C_i^t \quad \text{dla } i = 0, \dots, n. \quad (5.25)$$

Niech $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ będzie j -tą kolumną odpowiednio macierzy A_i , B_i a $c_{i,j}$ będzie j -tym wierszem macierzy C_i , tzn. $A_i = [a_{i,1} \cdots a_{i,p}]$, $B_i = [b_{i,1} \cdots b_{i,p}]$, $C_i^t = [c_{i,1}^t \cdots c_{i,p}^t]$. Wówczas (5.25) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^i \begin{bmatrix} b_{j,1}^t \\ \vdots \\ b_{j,p}^t \end{bmatrix} [a_{n-i+j,1} \cdots a_{n-i+j,p}] + \sum_{j=0}^i A_j^t [b_{n-i+j,1} \cdots b_{n-i+j,p}] = \\ = \sum_{j=0}^i A_j^t [a_{n-i+j,p} \cdots a_{n-i+j,1}] + \begin{bmatrix} c_{i,1}^t \\ \vdots \\ c_{i,p}^t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Korzystając z własności iloczynu skalarnego $b_{i,j}^t a_{k,l} = a_{k,l}^t b_{i,j}$ oraz wprowadzając

$$t_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{i,j}^t & 0_{1 \times p} & \cdots & 0_{1 \times p} \\ 0_{1 \times p} & a_{i,j}^t & \cdots & 0_{1 \times p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{1 \times p} & 0_{1 \times p} & \cdots & a_{i,j}^t \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

o wymiarach $p \times p^2$, otrzymuje się

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^i \left[t_{n-i+j,1} \begin{bmatrix} b_{j,1} \\ \vdots \\ b_{i,j} \end{bmatrix} \cdots t_{n-i+j,p} \begin{bmatrix} b_{j,1} \\ \vdots \\ b_{i,j} \end{bmatrix} \right] + \sum_{j=0}^i A_j^t [b_{n-i+j,1} \cdots b_{n-i+j,p}] = \\ = \sum_{j=0}^i A_j^t [a_{n-i+j,p} \cdots a_{n-i+j,1}] + [c_{i,1}^t \cdots c_{i,p}^t]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Macierz równań (5.28) można przedstawić w postaci wektora równań. W tym celu wprowadza się również macierze

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} t_{i,p} \\ t_{i,p-1} \\ \vdots \\ t_{i,1} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\beta_i = \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & 0_{p \times p} & \cdots & A_i^t \\ 0_{p \times p} & 0_{p \times p} & \cdots & 0_{p \times p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_i^t & 0_{p \times p} & \cdots & 0_{p \times p} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

obie o wymiarach $p^2 \times p^2$. Układając równania pionowo, rozpoczynając od prawej kolumny, otrzymuje się

$$\sum_{j=0}^i \alpha_{n-i+j} \begin{bmatrix} b_{j,1} \\ \vdots \\ b_{i,j} \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^i \beta_j \begin{bmatrix} b_{n-i+j,1} \\ \vdots \\ b_{n-i+j,j} \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^i \beta_i \begin{bmatrix} a_{n-i+j,1} \\ \vdots \\ a_{n-i+j,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{i,p}^t \\ \vdots \\ c_{i,1}^t \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Rozwijając sumy w (5.31) otrzymuje się

$$[\alpha_{n-i} \cdots \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{0,1} \\ \vdots \\ b_{0,p} \\ \dots \\ b_{i,1} \\ \vdots \\ b_{i,p} \end{bmatrix} + [\beta_0 \cdots \beta_i] \begin{bmatrix} b_{n-i,1} \\ \vdots \\ b_{n-i,p} \\ \dots \\ b_{n,1} \\ \vdots \\ b_{n,p} \end{bmatrix} = [\beta_0 \cdots \beta_i] \begin{bmatrix} a_{n-i,1} \\ \vdots \\ a_{n-i,p} \\ \dots \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{i,p}^t \\ \vdots \\ c_{i,1}^t \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Równania (5.32) analizuje się dla $i = 0, \dots, n$. Wprowadzając macierze

$$D_k = \begin{bmatrix} \alpha_n & 0_{p^2 \times p^2} & \cdots & 0_{p^2 \times p^2} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \cdots & 0_{p^2 \times p^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$E_k = \begin{bmatrix} 0_{p^2 \times p^2} & \cdots & 0_{p^2 \times p^2} & \beta_0 \\ 0_{p^2 \times p^2} & \cdots & \beta_0 & \beta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_0 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

obie o wymiarach $p^2(n+1) \times p^2(n+1)$ oraz wektory

$$X_k = \begin{bmatrix} a_{0,1} \\ \vdots \\ a_{0,p} \\ a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,p} \\ \dots \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{bmatrix} \quad X_{k+1} = \begin{bmatrix} b_{0,1} \\ \vdots \\ b_{0,p} \\ b_{1,1} \\ \vdots \\ b_{1,p} \\ \dots \\ b_{n,1} \\ \vdots \\ b_{n,p} \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} c_{0,p}^t \\ \vdots \\ c_{0,1}^t \\ c_{1,p}^t \\ \vdots \\ c_{1,1}^t \\ \dots \\ c_{n,p}^t \\ \vdots \\ c_{n,1}^t \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

można ułożyć (5.32) w pionowy wektor dla $i = 0, \dots, n$ rozpoczynając od $i = 0$, wówczas otrzymuje się

$$(D_k + E_k)X_{k+1} = E_k X_k + Y. \quad (5.36)$$

Na mocy lematu 9 str. 41, z układu (5.36) należy usunąć równania liniowo zależne, np. znajdujące się nad diagonalą (5.20) dla $i = n$. W celu odszukania tych wierszy w (5.36) zauważmy, że zawierają one elementy macierzy C_n nad diagonalą. Są to elementy $2, \dots, p$ w $c_{n,1}$; $3, \dots, p$ w $c_{n,2}$ itd. aż do elementu p w $c_{n,p-1}$. W wyniku przekształceń do postaci (5.36) wiersze $c_{n,j}$ znalazły się w ostatnich p^2 wierszach wektora Y (5.35), począwszy od wiersza $np^2 + 1$. W tabeli 5.1 przedstawiono elementy wektora Y oraz odpowiadające im numery równań liniowo zależnych. Po wprowadzeniu zmiennej j równania liniowo zależne w (5.36) mają numery

$$np^2 + jp - (j - 2), \dots, np^2 + jp \quad \text{dla } j = 2, \dots, p \quad (5.37)$$

Tabela 5.1: Numery liniowo zależnych równań w (5.36).

Y	wiersze liniowo zależne
$\vdots$	—
$c_{n,p}^t$	—
$c_{n,p-1}^t$	$np^2 + 2p$
$c_{n,p-2}^t$	$np^2 + 3p - 1, \dots, np^2 + 3p$
$c_{n,p-3}^t$	$np^2 + 4p - 2, \dots, np^2 + 4p$
$\vdots$	$\vdots$
$c_{n,1}^t$	$np^2 + pp - (p - 2), \dots, np^2 + pp$

5.3 Rozwiązanie układu równań

Jak wynika z dotychczasowych analiz, wyznaczanie kolejnych przybliżeń $W(z)$ sprowadza się do iteracyjnego obliczania (5.36) z usuniętymi wierszami (5.37), które zawiera

$np^2 - \frac{1}{2}p(p-1)$ równań oraz np^2 niewiadomych. Jeżeli nie jest to układ sprzeczny, to istnieje nieskończenie wiele jego rozwiązań [32, str. 153], które można obliczyć podstawiając dowolne wartości za $\frac{1}{2}p(p-1)$ niewiadomych wybranych tak, aby powstały układ równań miał rozwiązanie. Należało się spodziewać takiej niejednoznaczności, gdyż wiadomo [45], że jeżeli $W(z)$ spełnia (5.1), to $QW(z)$ też spełnia (5.1), gdzie Q jest dowolną, stałą macierzą ortogonalną odpowiednich rozmiarów. W określeniu, które z niewiadomych należy wybrać, pomocne jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 6 [15, str. 239]. *Dowolna macierz rzeczywista A o rozmiarach $n \times n$ może być przedstawiona w postaci*

$$A = QR, \quad (5.38)$$

gdzie Q - ortogonalna macierz rzeczywista, R - rzeczywista macierz trójkątna górna.

Z powyższych rozważań oraz twierdzenia 6 wynika, że zawsze można dokonać faktoryzacji (5.1) tak, aby jedna z macierzy współczynników w $W(z)$ była macierzą trójkątną górną. Można zatem założyć, że w (5.14) i (5.15) macierze A_n , B_n są trójkątnymi górnymi. Wówczas zakłada się, że elementy pod diagonalą w macierzach A_n i B_n są zerowe i wyznacza się rozwiązanie (5.37) dla pozostałych $np^2 - \frac{1}{2}p(p-1)$ niewiadomych. Otrzymany układ równań posiada jednakową liczbę niewiadomych i równań. W tabeli 5.2 przedstawiono numery wierszy X_k , które zawierają elementy pod diagonalą A_n . Można je opisać za pomocą zmiennej j w postaci (5.39).

$$np^2 + (j-2)p + j, \dots, np^2 + (j-1)p \quad \text{dla } j = 2, \dots, p. \quad (5.39)$$

Ze względu na podobną postać X_k i X_{k+1} elementy pod diagonalą B_n również znajdują się w wierszach X_{k+1} o numerach (5.39). Wyzerowanie tych elementów polegać będzie na usunięciu tych wierszy z X_k , X_{k+1} oraz usunięciu kolumn o numerach (5.39) z macierzy $(D_k + E_k)$ w (5.36).

Tabela 5.2: Wiersze X_k zawierające elementy pod diagonalą A_n .

X_k	elementy pod diagonalą A_n
$\vdots$	—
$a_{n,1}$	$np^2 + 2, \dots, np^2 + p$
$a_{n,2}$	$np^2 + p + 3, \dots, np^2 + 2p$
$a_{n,3}$	$np^2 + 2p + 4, \dots, np^2 + 3p$
$\vdots$	$\vdots$
$a_{n,p-1}$	$np^2 + p^2 + p$

5.4 Zbieżność algorytmu faktoryzacji

Twierdzenie 7 *Jeżeli $\det W_0(z) \neq 0$ dla $|z| \geq 1$ i $\widehat{M}(z)$ spełnia własności 1, 2, 3 na str. 38, to $\det(D_k + E_k) \neq 0$ dla $k = 0, 1, \dots$. Wówczas układ równań (5.36) ma rozwiązanie oraz*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(z) = W(z) \quad \text{dla każdego } z. \quad (5.40)$$

$W(z)$ jest określone z dokładnością do stałej macierzy ortogonalnej, wymnożonej z lewej strony, $W^+(z)$ jest analityczne dla $\overline{U^1}$. Generalnie zbieżność jest liniowa, jeżeli jednak $\forall \omega \widehat{M}(z)|_{z=e^{j\omega}} > 0$ (jest dodatnio określona), to dla odpowiednio dużych k zbieżność jest kwadratowa.

Dowód. Stosując przekształcenie biliniowe postaci [19, str. 224]

$$z = \frac{s+1}{s-1} \quad (5.41)$$

do (5.13), (5.14) i (5.15) otrzymuje się

$$M\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{1}{(s-1)^n(1-s)^n} \sum_{i=0}^{2n} C_i(s+1)^i(s-1)^{n-i}(1-s)^n \quad (5.42a)$$

$$W_k\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{1}{(s-1)^n} \sum_{i=0}^n A_i(s+1)^i(s-1)^{n-i} \quad (5.42b)$$

$$W_{k+1}\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{1}{(s-1)^n} \sum_{i=0}^n B_i(s+1)^i(s-1)^{n-i} \quad (5.42c)$$

oraz

$$W_k^\# \left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{(-1)^n}{(1-s)^n} \sum_{i=0}^n A_i^t(s+1)^{n-i}(s-1)^i \quad (5.42d)$$

$$W_{k+1}^\# \left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{(-1)^n}{(1-s)^n} \sum_{i=0}^n B_i^t(s+1)^{n-i}(s-1)^i. \quad (5.42e)$$

Wstawiając (5.42) do (5.12) oraz mnożąc przez $(s-1)^n(1-s)^n$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} & \left\{ (-1)^n \sum_{i=0}^n B_i^t(s+1)^{n-i}(s-1)^i \right\} \left\{ \sum_{i=0}^n A_i(s+1)^i(s-1)^{n-i} \right\} + \\ & + \left\{ (-1)^n \sum_{i=0}^n A_i^t(s+1)^{n-i}(s-1)^i \right\} \left\{ \sum_{i=0}^n B_i(s+1)^i(s-1)^{n-i} \right\} = \\ & = \left\{ (-1)^n \sum_{i=0}^n A_i^t(s+1)^{n-i}(s-1)^i \right\} \left\{ \sum_{i=0}^n A_i(s+1)^i(s-1)^{n-i} \right\} + \\ & + \sum_{i=0}^{2n} C_i(s+1)^i(s-1)^{n-i}(1-s)^n. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\widetilde{M}(s) = \sum_{i=0}^{2n} C_i(s+1)^i(s-1)^{n-i}(1-s)^n \quad (5.44a)$$

$$\widetilde{W}_k(s) = \sum_{i=0}^n A_i(s+1)^i(s-1)^{n-i} \quad (5.44b)$$

$$\widetilde{W}_{k+1}(s) = \sum_{i=0}^n B_i(s+1)^i(s-1)^{n-i} \quad (5.44c)$$

równanie (5.43) można zapisać w postaci

$$\widetilde{W}_{k+1}^t(-s)\widetilde{W}_k(s) + \widetilde{W}_k^t(-s)\widetilde{W}_{k+1}(s) = \widetilde{W}_k^t(-s)\widetilde{W}_k(s) + \widetilde{M}(s) \quad (5.45)$$

otrzymując znane równanie opisujące rozwiązanie problemu faktoryzacji rzeczywistej macierzy wielomianowej $\widetilde{M}(s)$ o wymiarach $p \times p$ [17] mającej własności

1. $\widetilde{M}(s) = \widetilde{M}^t(-s)$,
2. $\forall \omega \quad \widetilde{M}(j\omega) \geq 0$,
3. $\text{rank } \widetilde{M}(s) = r \leq p$,

Własności te, po przekształceniu biliniowym

$$s = \frac{z+1}{z-1} \quad (5.46)$$

sprawdają się do postaci własności 1, 2, 3, str. 38. Algorytm rozwiązania (5.12) ma takie same własności jak algorytm rozwiązania (5.45) [17], które podano w tezie twierdzenia 7. Wobec tego, dzięki przekształceniu biliniowemu, twierdzenie 7 uzyskało postać twierdzenia zamieszczonego wraz z dowodem w [17]. Nie ma zatem potrzeby prowadzenia ponownego dowodu dla twierdzenia 7. $\square$

5.5 Rząd faktora $W(z)$

Prezentowany algorytm faktoryzacji pozwala wyliczać faktoryzację (5.1), gdzie $W(z)$ jest macierzą kwadratową o rozmiarze $p \times p$. Jeżeli $r < p$, to $W(z)$ nie będzie macierzą pełnego rzędu. W celu wyznaczenia faktora $W(z)$ pełnego rzędu przeanalizujemy

Twierdzenie 8 *Niech*

$$W(z) = \sum_{i=0}^n A_i z^i \quad (5.47)$$

będzie macierzą wielomianową, gdzie A_i są rzeczywistymi macierzami stałymi o rozmiarze $p \times p$. Niech $W'(z)$ będzie macierzą wielomianową o rozmiarze $r \times p$ rzędu r . Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby istniała ortogonalna macierz Q o rozmiarach $p \times p$ taka, że

$$QW(z) = \begin{bmatrix} W'(z) \\ 0_{(p-r) \times p} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

jest aby

$$\text{rank } A = r < p, \quad (5.49)$$

gdzie $A = [A_0 \ A_1 \ \cdots \ A_n]$.

Dowód. Podstawiając (5.47) do (5.48) otrzymuje się

$$QW(z) = \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} A_i z^i = \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} A'_i \\ 0_{(p-r) \times p} \end{bmatrix} z^i \quad (5.50)$$

gdzie A'_i to macierze o rozmiarze $r \times p$, a q_l oznacza l -ty wiersz macierzy Q , dla $l = 1, \dots, p$. Przyrównując w (5.50) współczynniki przy tych samych potęgach z otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} A_i = \begin{bmatrix} A'_i \\ 0_{(p-r) \times p} \end{bmatrix} \quad \text{dla } i = 1, \dots, n. \quad (5.51)$$

Z (5.51) można wydzielić równanie

$$A_i^t [q_{r+1}^t \ \cdots \ q_p^t] = 0_{p \times (p-r)} \quad \text{dla } i = 1, \dots, n. \quad (5.52)$$

Równanie (5.52) można również zapisać macierzowo w postaci

$$A^t [q_{r+1}^t \ \cdots \ q_p^t] = 0_{np \times (p-r)}. \quad (5.53)$$

(5.53) można rozwiązać rekurencyjnie, rozpoczynając np. od wiersza q_p

$$A^t q_p = 0_{np \times 1}. \quad (5.54)$$

Wiadomo [32, str. 159][23, str. 45][15, str. 67], że (5.49) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, żeby układ równań (5.54) posiadał niezerowe rozwiązanie. Kolejne wiersze q_j można wyznaczyć dołączając do macierzy A poprzednio wyliczone wiersze $q_{j+1}, \dots, q_p$, korzystając z układu równań

$$[A \ q_{j+1}^t \ \cdots \ q_p^t]^t q_j = 0_{(np+p-j) \times 1}. \quad (5.55)$$

Dzięki temu, każdy nowo obliczony wektor q_j będzie ortogonalny do kolumn macierzy A , jak i do wyznaczonych już wierszy macierzy Q . Załóżmy, że za pomocą (5.55) policzyliśmy wiersze q_j dla $j = p, p-1, \dots, r+2$ i wyznaczamy q_{r+1} z układu równań (5.56)

$$[A \ q_{r+2}^t \ \cdots \ q_p^t]^t q_{r+1} = 0_{(np+p-r-1) \times 1}. \quad (5.56)$$

Aby układ równań (5.56) miał niezerowe rozwiązanie musi zachodzić warunek

$$\text{rank} [A \ q_{r+2}^t \ \cdots \ q_p^t] < p. \quad (5.57)$$

Wiadomo [31, str. 141][23, str. 69][28, str. 394], że ortogonalne wektory $q_{r+2}, \dots, q_p$ są liniowo niezależne i spełniają warunek

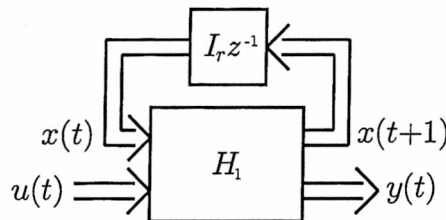
$$\text{rank} [q_{r+2}^t \ \cdots \ q_p^t] = p - r - 1 \quad (5.58)$$

Rozdział 6

Realizacja dwuwymiarowych systemów dyskretnych

6.1 Wstęp

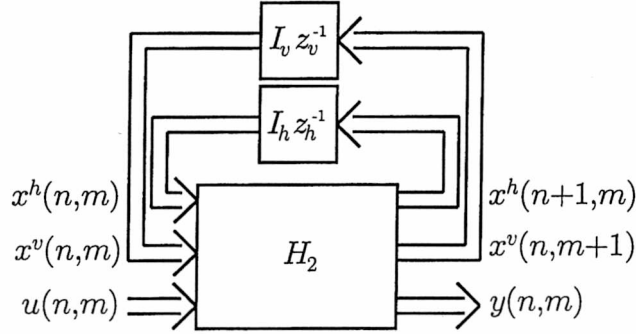
Dla systemów jednowymiarowych opisanych równaniami stanu (2.5) podaje się reprezentację graficzną, przedstawioną na rys. 6.1 [40, str. 5]. Jeżeli dane jest przyczynowe



Rysunek 6.1: Graf przepływowy dla równań stanu systemu jednowymiarowego.

pobudzenie $u(t)$ dla $t = 0, 1, \dots$ oraz $x(0)$, to możliwe jest jednoznaczne obliczenie $y(t)$ kolejno dla $t = 0, 1, \dots$, przy czym jest to jedyne możliwe uporządkowanie zapewniające wyliczalność (2.5). Podobnie jak dla systemów jednowymiarowych, równania (2.9) mają reprezentację w postaci grafu, przedstawioną na rys. 6.2. Zaprezentowane grafy sygnałowe obrazują koncepcję rozdzielenia bloku bezinercyjnego (H_1, H_2) od bloku inercyjnego (jednostek opóźniających). Taka struktura jest naturalną konsekwencją wynikającą z równań stanu: blok bezinercyjny realizuje obliczenia określone przez równania stanu (2.1) dla systemów jednowymiarowych, (2.5) dla systemów dwuwymiarowych, a blok inercyjny realizuje sprzężenie zwrotne, podając warunki początkowe oraz obliczone wartości na wejście bloku bezinercyjnego tak, aby zapewnić wyliczalność w systemie.

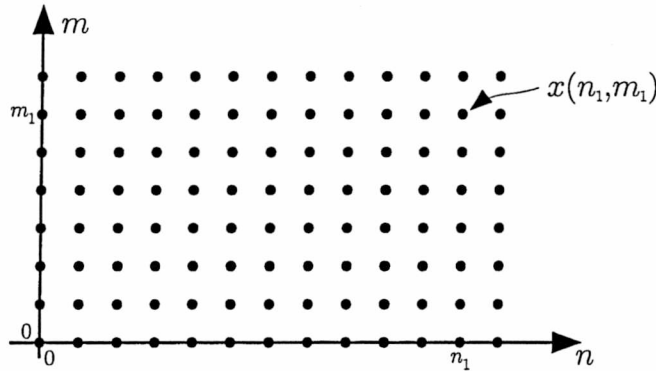
W przypadku systemów dwuwymiarowych sygnały dyskretne występujące w (2.9) są funkcjami określonymi dla pary liczb całkowitych. Odpowiedź tego systemu może być wyznaczona, jeżeli dane jest przyczynowe pobudzenie $u(n, m)$, określone dla $n = 0, 1, \dots$ i $m = 0, 1, \dots$ oraz warunki początkowe wektora stanu $x^h(0, m)$ i $x^v(n, 0)$ dla $n = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots$. Przyczynowy sygnał dwuwymiarowy $x(n, m)$ może być przedstawiony w postaci macierzy (6.1), której wiersze i kolumny odpowiadają wartościom zmiennych n, m



Rysunek 6.2: Graf przepływowy dla równań stanu systemu dwuwymiarowego.

lub w postaci graficznej na rys. 6.3.

$$x(n, m) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(0, 2) & x(1, 2) & x(2, 2) & \dots \\ x(0, 1) & x(1, 1) & x(2, 1) & \dots \\ x(0, 0) & x(1, 0) & x(2, 0) & \dots \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Rysunek 6.3: Reprezentacja graficzna sygnału dwuwymiarowego $x(n, m)$.

6.2 Wyliczalność stanowych systemów dwuwymiarowych

W pierwszym kroku możliwe jest wyliczenie prawej strony (2.9) jedynie dla $n = 0, m = 0$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(1, 0) \\ x^v(0, 1) \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x^h(0, 0) \\ x^v(0, 0) \end{bmatrix} + Bu(0, 0) \\ y(0, 0) &= C \begin{bmatrix} x^h(0, 0) \\ x^v(0, 0) \end{bmatrix} + Du(0, 0). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Na tym etapie wyliczyliśmy próbkę wyjściową $y(0, 0)$ oraz wartości wektora stanu $x^h(1, 0)$ i $x^v(0, 1)$. Dostępne są warunki początkowe $x^v(1, 0)$ oraz $x^h(0, 1)$, które umożliwiają

równoczesne wyznaczenie próbki $y(1, 0)$ i $y(0, 1)$, wg (6.3).

$$\begin{bmatrix} x^h(2, 0) \\ x^v(1, 1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(1, 0) \\ x^v(1, 0) \end{bmatrix} + Bu(1, 0) \quad (6.3a)$$

$$y(1, 0) = C \begin{bmatrix} x^h(1, 0) \\ x^v(1, 0) \end{bmatrix} + Du(1, 0) \quad (6.3b)$$

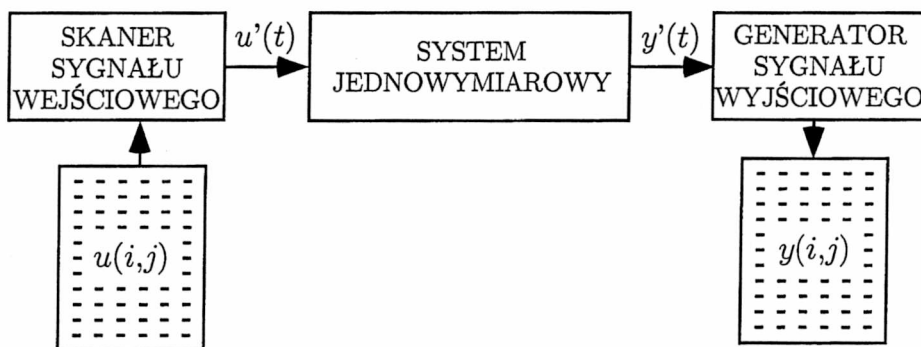
$$\begin{bmatrix} x^h(1, 1) \\ x^v(0, 2) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(0, 1) \\ x^v(0, 1) \end{bmatrix} + Bu(0, 1) \quad (6.3c)$$

$$y(0, 1) = C \begin{bmatrix} x^h(0, 1) \\ x^v(0, 1) \end{bmatrix} + Du(0, 1). \quad (6.3d)$$

W drugim kroku wyliczyliśmy $y(0, 1)$, $y(1, 0)$ oraz wartości wektora stanu $x^h(2, 0)$, $x^v(1, 1)$, $x^h(1, 1)$, $x^v(0, 2)$. Korzystając ze znanych wartości początkowych wektora stanu $x^v(2, 0)$ i $x^h(0, 2)$ w trzecim kroku, możliwe jest równoczesne wyznaczenie próbek $y(2, 0)$, $y(1, 1)$, $y(0, 2)$. Można zatem zauważyć, że w kolejnych krokach wyznacza się próbki leżące diagonalnie. Stosując analogię do systemów jednowymiarowych, można stwierdzić, że dla systemu dwuwymiarowego (2.9) oraz sekwencji $t = 0, 1, \dots$ wyznacza się próbki wyjściowe $y(n, m)$, dla których $n + m = t$.

6.3 Stanowe, dwuwymiarowe przetwarzanie sekwencyjne

W praktyce, przetwarzanie sygnałów dwuwymiarowych odbywa się poprzez proces zamiany sygnałów dwuwymiarowych na odpowiednio zakodowaną zmienną jednowymiarową (skanowanie). Na rys. 6.4 przedstawiono schemat blokowy systemu wykorzystującego proces skanowania, realizującego przetwarzanie sygnałów dwuwymiarowych [22]. Zadaniem



Rysunek 6.4: Sprzętowa realizacja dwuwymiarowego, sekwencyjnego systemu dyskretnego.

skanera jest odpowiednie uszeregowanie dyskretnych, dwuwymiarowych wartości sygnału wejściowego $u(n, m)$ w ciąg jednowymiarowy $u'(t)$. System jednowymiarowy, dla każdej sekwencji wejściowej, wyznacza sekwencje wyjściową $y'(t)$, która następnie jest przetwarzana do zmiennej dwuwymiarowej $y(n, m)$ poprzez generator sygnału wyjściowego. W realizacji takich systemów istotny jest sposób przekształcania zmiennej dwuwymiarowej do

jednowymiarowej, którą opisuje się poprzez relację uporządkowania $I(n, m)$ [12, str. 172]. Można podać trzy typowe relacje uporządkowania:

1. kolumnami

$$t = I(n, m) = nM + m \quad (6.4)$$

2. wierszami

$$t = I(n, m) = mN + n \quad (6.5)$$

3. diagonalne

$$t = I(n, m) = \frac{1}{2}(n + m)(n + m + 1) + n. \quad (6.6)$$

Uporządkowanie kolumnami i wierszami zakłada pobudzenie ograniczone do $n = 0, 1, \dots, N - 1$ i $m = 0, 1, \dots, M - 1$. Obydwa uporządkowania są podobne i jedno można uzyskać z drugiego poprzez wzajemną zamianę zmiennych n i m w (6.4) i (6.5). Uporządkowanie diagonalne (6.6) zakłada, że zmienna wejściowa jest nieograniczona, tzn. $n, m = 0, 1, \dots$. Historycznie, najczęściej spotyka się przetwarzanie wierszami (np. w telewizji), choć zwraca się w literaturze uwagę na zalety przetwarzania diagonalnego, np. [47][35]. Koncepcja przedstawiona na rys. 6.4 pozwala na dwojaki sposób do zagadnienia realizacji przetwarzania dwuwymiarowego. Po pierwsze można ustalić sposób skanowania zmiennej dwuwymiarowej, następnie znając własności powstałego sygnału jednowymiarowego, zaprojektować jednowymiarowy system przetwarzający. Dzięki temu unika się konieczności stosowania podejścia dwuwymiarowego, przedstawionego w poprzednich rozdziałach. Jest to jednak zbyt ograniczające, gdyż powoduje utratę dużej ilości informacji o przetwarzanym sygnale. Jeżeli można tu użyć porównania, to przypomina to np. oglądanie obrazu pociętego na wąskie paski ułożone poziomo obok siebie. Drugie podejście, to prowadzenie syntezy systemu dwuwymiarowego, aż do otrzymania struktury dwuwymiarowej (rys. 6.2), następnie poszukiwanie takiej realizacji (6.4), aby w pełni zrealizować założone przetwarzanie dwuwymiarowe. Takie postępowanie nie ogranicza możliwych do uzyskania struktur i będzie punktem wyjścia dla rezultatów przedstawionych w następnych rozdziałach.

6.3.1 Przetwarzanie kolumnami

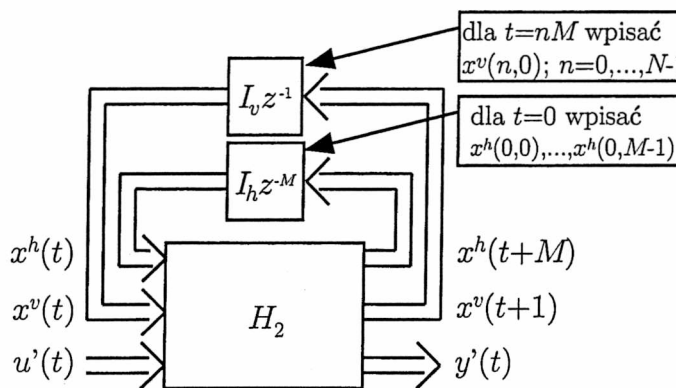
Rozważmy kolejność obliczeń równań stanu (2.15) dla zmiennej wejściowej uporządkowanej kolumnami. Dla prostoty założmy, że zmienna wejściowa $u(n, m)$ określona jest dla $n = 0, 1, 2$ i $m = 0, 1, 2, 3$ ($N = 3$ i $M = 4$). W tabeli 6.1 przedstawiono kolejność obliczeń systemu dwuwymiarowego przetwarzającego kolumnami. Poszczególne wiersze zawierają indeksy (n, m) wyznaczanych zmiennych dla kolejnych wartości t . Pogrubioną czcionką zaznaczono warunki początkowe odpowiednich zmiennych wektora stanu. Dla systemu przetwarzającego kolumnami można podać realizację grafu przepływowego przedstawionego na rysunku 6.2, w którym istotne jest określenie jak zrealizowane będą bloki jednostek opóźniających $I_h z_h^{-1}$ i $I_v z_v^{-1}$. Patrząc na tabelę 6.1 można zauważyć, że sygnał $x^h(n, m)$ podawany na wejście systemu dla pierwszych czterech wartości zawiera warunki początkowe, następnie pojawia się sygnał $x^h(n + 1, m)$, opóźniony o cztery takty. W pierwszej chwili wejście $x^v(n, m)$ zawiera wartość początkową $x^v(0, 0)$, następne trzy wartości to $x^v(n, m + 1)$ opóźnione o jeden takt, dalej wartość początkowa $x^v(1, 0)$ oraz trzy wartości $x^v(n, m + 1)$ opóźnione o jeden takt, itd. Można zatem zrealizować $I_h z_h^{-1}$

Tabela 6.1: Kolejność obliczeń równań stanu (2.15) dla przetwarzania kolumnami.

$x^h(n, m)$	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 0)	(1, 1)
$x^v(n, m)$	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 0)	(1, 1)
$u(n, m)$	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 0)	(1, 1)
$x^h(n+1, m)$	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 0)	(2, 1)
$x^v(n, m+1)$	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(1, 1)	(1, 2)
$y(n, m)$	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 0)	(1, 1)
t	0	1	2	3	4	5

$x^h(n, m)$	(1, 2)	(1, 3)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
$x^v(n, m)$	(1, 2)	(1, 3)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
$u(n, m)$	(1, 2)	(1, 3)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
$x^h(n+1, m)$	(2, 2)	(2, 3)	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
$x^v(n, m+1)$	(1, 3)	(1, 4)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
$y(n, m)$	(1, 2)	(1, 3)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
t	6	7	8	9	10	11

w postaci bloku jednostek opóźniających o cztery takty oraz $I_v z_v^{-1}$ w postaci bloku jednostek opóźniających sygnał o jeden takt. Dodatkowo konieczna jest implementacja zapisu wartości początkowych do jednostek opóźniających dla odpowiednich t , wynikających z tabeli 6.1. Na podstawie tego przykładu można stwierdzić, że gdyby prowadzić obliczenia dla $n = 0, 1, \dots, N-1$ i $m = 0, 1, \dots, M-1$, to blok $I_h z_h^{-1}$ można zrealizować w postaci bloku opóźniającego o M taktów, natomiast $I_v z_v^{-1}$ pozostałby blokiem opóźniającym o jeden takt. Na rys. 6.5 przedstawiono graf przepływowy realizujący blok systemu jednowymiarowego przetwarzającego kolumnami.



Rysunek 6.5: Realizacja systemu jednowymiarowego do przetwarzania kolumnami.

6.3.2 Przetwarzanie diagonalne

Podobnie jak w p. 6.3.1, rozważymy sposób prowadzenia obliczeń dla przetwarzania diagonalnego tej samej zmiennej wejściowej, przedstawiony w tabeli 6.2. Na jej podstawie można zauważyć, że przetwarzanie diagonalne nie może być zrealizowane podobnie jak przetwarzanie kolumnami (wierszami), gdyż w tym przypadku warunki początkowe muszą

Tabela 6.2: Kolejność obliczeń równań stanu (2.15) dla przetwarzania diagonalnego.

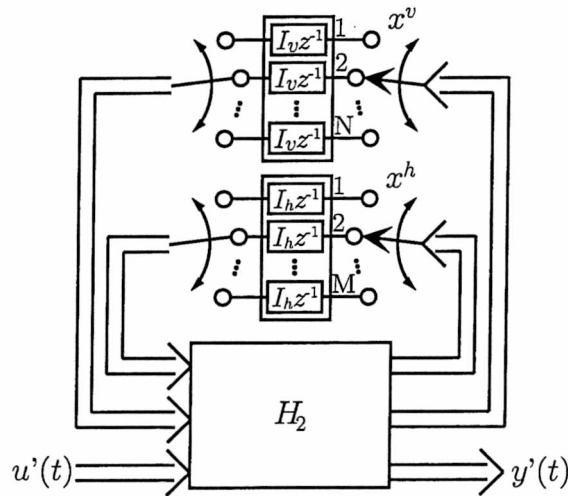
$x^h(n, m)$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 2)	(1, 1)	(2, 0)
$x^v(n, m)$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 2)	(1, 1)	(2, 0)
$u(n, m)$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 2)	(1, 1)	(2, 0)
$x^h(n + 1, m)$	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(1, 2)	(2, 1)	(3, 0)
$x^v(n, m + 1)$	(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)	(0, 3)	(1, 2)	(2, 1)
$y(n, m)$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 2)	(1, 1)	(2, 0)
t	0	1	2	3	4	5

$x^h(n, m)$	(0, 3)	(1, 2)	(2, 1)	(1, 3)	(2, 2)	(2, 3)
$x^v(n, m)$	(0, 3)	(1, 2)	(2, 1)	(1, 3)	(2, 2)	(2, 3)
$u(n, m)$	(0, 3)	(1, 2)	(2, 1)	(1, 3)	(2, 2)	(2, 3)
$x^h(n + 1, m)$	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(2, 3)	(3, 2)	(3, 3)
$x^v(n, m + 1)$	(0, 4)	(1, 3)	(2, 2)	(1, 4)	(2, 3)	(2, 4)
$y(n, m)$	(0, 3)	(1, 2)	(2, 1)	(1, 3)	(2, 2)	(2, 3)
t	6	7	8	9	10	11

być umieszczane pomiędzy obliczanymi wartościami. Na przykład na wyjściu $x^h(n+1, m)$ dla $t = 0, 1$ otrzymujemy wartości $x^h(1, 0), x^h(1, 1)$, natomiast wejście $x^h(n, m)$ dla chwil $t = 2, 3, 4$ oczekuje wartości $x^h(1, 0), x^h(0, 2), x^h(1, 1)$. Ponadto, w trakcie prowadzenia obliczeń, zmienia się liczba taktów o jaką trzeba opóźniać wyjścia wektorów stanu $x^h(n+1, m)$ i $x^v(n, m+1)$, np. wartość $x^v(0, 1)$ obliczona dla $t = 0$ trafia na wejście $x^v(n, m)$ dla $t = 1$, a $x^v(0, 3)$ obliczona dla $t = 3$, trafia na to samo wejście dla $t = 6$. Konieczne jest zatem opracowanie innego grafu przepływowego, realizującego system przetwarzający diagonalnie.

6.3.3 Struktura systemu z przełączanymi jednostkami opóźniającymi

Na podstawie analiz przeprowadzonych w punkcie 6.3.2 można stwierdzić, że sterowanie przepływem w grafie sygnałowym systemu przetwarzającego diagonalnie wymaga bardziej złożonych metod postępowania. Do realizacji takiego przetwarzania zastosujemy strukturę z przełączanymi jednostkami opóźniającymi, przedstawioną na rys. 6.6. Struktura zawiera dwa kontenery bloków jednostek opóźniających, przechowujących zmienne stanu $x^h(n, m)$ i $x^v(n, m)$ oraz multipleksery, które łączą wejście i wyjście odpowiedniej zmiennej stanu z żądanym blokiem jednostek opóźniających. W tabeli 6.3 przedstawiono kolejność przełączania multiplekserów dla przetwarzania diagonalnego. W kolumnie p^h i p^v podano numer bloku jednostek opóźniających, na który należy nastawić multiplekser w kroku t dla zmiennej odpowiednio x^h i x^v . Jak wynika z tabeli 6.3, przed rozpoczęciem obliczeń, wszystkie bloki jednostek opóźniających muszą posiadać odpowiednie warunki początkowe, które zebrano w tabeli 6.4. Zaprezentowana struktura może również realizować przetwarzanie kolumnami. Konieczna jest jednak zmiana pracy multiplekserów, którą przedstawiono w tabeli 6.5. Tak jak w przypadku przetwarzania diagonalnego, przed rozpoczęciem obliczeń, należy ustawić warunki początkowe zgodnie z tabelą 6.4. Na podstawie zaprezentowanych przykładów można stwierdzić, że za pomocą struktury z przełą-



Rysunek 6.6: Graf przepływowy systemu z przełącznymi jednostkami opóźniającymi.

Tabela 6.3: Kolejność przełączania multiplexerów systemu na rys. 6.6, przetwarzającego diagonalnie.

t	$u(n, m)$	$x^h(n, m)$	$x^h(n+1, m)$	p^h	$x^v(n, m)$	$x^v(n, m+1)$	p^v
0	(0, 0)	(0, 0)	(1, 0)	1	(0, 0)	(0, 1)	1
1	(0, 1)	(0, 1)	(1, 1)	2	(0, 1)	(0, 2)	1
2	(1, 0)	(1, 0)	(2, 0)	1	(1, 0)	(1, 1)	2
3	(0, 2)	(0, 2)	(1, 2)	3	(0, 2)	(0, 3)	1
4	(1, 1)	(1, 1)	(2, 1)	2	(1, 1)	(1, 2)	2
5	(2, 0)	(2, 0)	(3, 0)	1	(2, 0)	(2, 1)	3
6	(0, 3)	(0, 3)	(1, 3)	4	(0, 3)	(0, 4)	1
7	(1, 2)	(1, 2)	(2, 2)	3	(1, 2)	(1, 3)	2
8	(2, 1)	(2, 1)	(3, 1)	2	(2, 1)	(2, 2)	3
9	(1, 3)	(1, 3)	(2, 3)	4	(1, 3)	(1, 4)	2
10	(2, 2)	(2, 2)	(3, 2)	3	(2, 2)	(2, 3)	3
11	(2, 3)	(2, 3)	(3, 3)	4	(2, 3)	(2, 4)	3

czanymi jednostkami opóźniającymi możliwa jest realizacja systemów dwuwymiarowych, pracujących sekwencyjnie. Dodatkowo, poprzez zmianę kolejności przełączania można realizować przetwarzanie sekwencyjne dla różnego uporządkowania zmiennej wejściowej. Zaletą prezentowanej struktury jest fakt, że warunki początkowe zapisywane są wyłącznie w kroku zerowym, tzn. nie ma konieczności wpisywania czy kasowania zawartości jednostek opóźniających w czasie trwania obliczeń. Do wad można zaliczyć konieczność stosowania multiplexerów, czy raczej stosowania adresowania komórek pamięci, realizujących bloki jednostek opóźniających.

Tabela 6.4: Wartości warunków początkowych bloków jednostek opóźniających systemu na rys. 6.6, przetwarzającego diagonalnie.

nr bloku	x^h	x^v
1	$x^h(0, 0)$	$x^v(0, 0)$
2	$x^h(0, 1)$	$x^v(1, 0)$
3	$x^h(0, 2)$	$x^v(2, 0)$
4	$x^h(0, 3)$	

Tabela 6.5: Kolejność przełączania multiplekserów systemu z rys. 6.6, przetwarzającego kolumnami.

t	$u(n, m)$	$x^h(n, m)$	$x^h(n + 1, m)$	p^h	$x^v(n, m)$	$x^v(n, m + 1)$	p^v
0	(0, 0)	(0, 0)	(1, 0)	1	(0, 0)	(0, 1)	1
1	(0, 1)	(0, 1)	(1, 1)	2	(0, 1)	(0, 2)	1
2	(0, 2)	(0, 2)	(1, 2)	3	(0, 2)	(0, 3)	1
3	(0, 3)	(0, 3)	(1, 3)	4	(0, 3)	(0, 4)	1
4	(1, 0)	(1, 0)	(2, 0)	1	(1, 0)	(1, 1)	2
5	(1, 1)	(1, 1)	(2, 1)	2	(1, 1)	(1, 2)	2
6	(1, 2)	(1, 2)	(2, 2)	3	(1, 2)	(1, 3)	2
7	(1, 3)	(1, 3)	(2, 3)	4	(1, 3)	(1, 4)	2
8	(2, 0)	(2, 0)	(3, 0)	1	(2, 0)	(2, 1)	3
9	(2, 1)	(2, 1)	(3, 1)	2	(2, 1)	(2, 2)	3
10	(2, 2)	(2, 2)	(3, 2)	3	(2, 2)	(2, 3)	3
11	(2, 3)	(2, 3)	(3, 3)	4	(2, 3)	(2, 4)	3

6.4 Realizacja bloku bezineracyjnego OFC

6.4.1 Systemy jednowymiarowe

Zadaniem bloku bezineracyjnego systemu jednowymiarowego jest wykonywanie obliczeń określonych przez równania stanu (2.1),(2.5). Obliczenia sprowadzają się do przemnożenia wektora wejściowego przez macierz liczbowa, stałą i mogą być realizowane przy użyciu mnożników i sumatorów. Jednowymiarowe OFC realizuje się jednak w oparciu o rotatory Givens'a, które zapewniają lepsze parametry otrzymanej struktury, takie jak mała wrażliwość funkcji transmitancji systemu na zmianę jego parametrów, małe szумы i zniekształcenia nadmiarowe czy duża odporność na oscylacje pasożytnicze [43]. Znane w literaturze metody wyznaczania tych struktur polegają na dekompozycji macierzy transmitancji [33][40][41][8][7] lub na dekompozycji kwadratowej macierzy H_1 (2.4) [34][9][13]. Metoda dekompozycji H_1 opiera się na twierdzeniach 9 i 10 dla $k = l = 2$. Pierwszym etapem tego procesu jest minimalizacja niezerowych elementów H_1 za pomocą ciągu przekształceń (6.8), gdzie T_1 jest macierzą postaci (6.12) dla $s, t \leq r$. Kąty ϕ oraz s, t w (6.12) dobiera się tak, aby kolejne przekształcenia tworzyły nowe, zerowe elementy macierzy $\hat{H}_1$ i nie likwidowały zer już istniejących. Następnie $\hat{H}_1$ można doprowadzić do typowych postaci, w których

1. $\hat{A}$ jest (transponowaną) macierzą Schura;

2. $\hat{A}$ jest macierzą Hessenberga;
3. $\hat{H}_1$ jest macierzą Hessenberga z niezerową pierwszą kolumną;
4. $\hat{H}_1$ jest macierzą trójkątną dolną z dwiema nadprzekątnymi.

Twierdzenie 9 [39] *Niech będzie dany jednowymiarowy OFC, opisany równaniami stanu (2.5), gdzie $l = k$ oraz system*

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t) \end{bmatrix} = \hat{H}_1 \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

gdzie

$$\hat{H}_1 = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = T_1^t H_1 T_1, \quad (6.8)$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} Q & 0_{r \times k} \\ 0_{k \times r} & I_k \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Q jest dowolną macierzą ortogonalną o rozmiarach $r \times r$. System (6.7) jest jednowymiarowym OFC oraz ma taką samą macierz transmitancji (2.3) jak system (2.5).

Twierdzenie 10 *Dowolną macierz ortogonalną H można przedstawić w postaci*

$$H = \prod_{i=1}^I L_{s_i, t_i}(\phi_i) E \prod_{j=1}^J R_{u_j, w_j}(\psi_j), \quad (6.10)$$

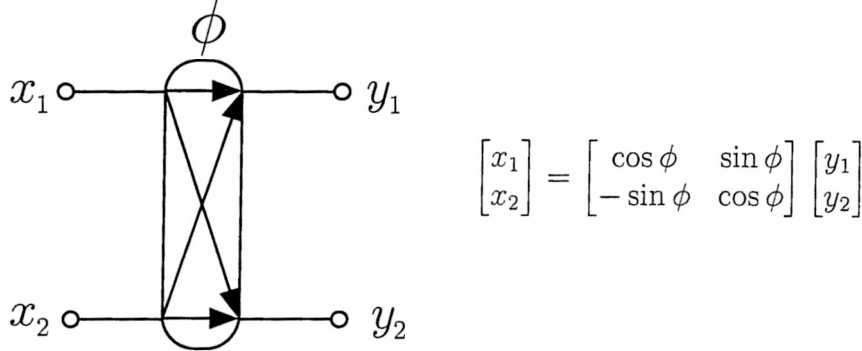
gdzie

$$E = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

$$L_{s,t}(\phi) = R_{s,t}(\phi) = \begin{matrix} & \begin{matrix} s & & & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \cos \phi & & \sin \phi & 0 \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & -\sin \phi & & \cos \phi & \\ 0 & & & & & 1 & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (6.12)$$

Systemy realizujące operację przemnożenia przez $L_{s,t}(\phi)$ lub $R_{s,t}(\phi)$ nazywa się rotatorami Givens'a. Schemat graficzny rotatora wraz z równaniami pracy zamieszczono na rys. 6.7.

Rysunek 6.7: Schemat graficzny i równania pracy rotatora Givens'a.



6.4.2 Systemy dwuwymiarowe

Dla systemów dwuwymiarowych można podać odpowiednik twierdzenia 9 w następującej postaci:

Twierdzenie 11 Niech będzie dany dwuwymiarowy OFC, opisany równaniami stanu (2.15), gdzie $l = k$ oraz system

$$\begin{bmatrix} x^h(n+1, m) \\ x^v(n, m+1) \\ y(n, m) \end{bmatrix} = \hat{H}_2 \begin{bmatrix} x^h(n, m) \\ x^v(n, m) \\ u(n, m) \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

gdzie

$$\hat{H}_2 = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = T_2^t H_2 T_2, \quad (6.14)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} p & 0_{h \times v} & 0_{h \times k} \\ 0_{v \times h} & q & 0_{v \times k} \\ 0_{k \times h} & 0_{k \times v} & I_k \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

p, q to dowolne macierze ortogonalne o wymiarach odpowiednio $h \times h$, $v \times v$. System (6.13) jest dwuwymiarowym OFC oraz ma taką samą macierz transmitancji (2.13) jak system (2.15).

Dowód. Korzystając z (6.15) pokazuje się, że $T_2^t T_2 = I_{h+v+k}$, tzn. T_2 jest macierzą ortogonalną a (6.13) jest dwuwymiarowym OFC. Wstawiając (6.15) do (6.14) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} p & 0_{h \times v} \\ 0_{v \times h} & q \end{bmatrix}^t A \begin{bmatrix} p & 0_{h \times v} \\ 0_{v \times h} & q \end{bmatrix} & \hat{B} &= \begin{bmatrix} p & 0_{h \times v} \\ 0_{v \times h} & q \end{bmatrix}^t B \\ \hat{C} &= C \begin{bmatrix} p & 0_{h \times v} \\ 0_{v \times h} & q \end{bmatrix} & \hat{D} &= D \end{aligned} \quad (6.16)$$

Wyznaczając

$$\hat{G}(z_h, z_v) = \hat{C} (Z - \hat{A})^{-1} \hat{B} + \hat{D} \quad (6.17)$$

otrzymuje się postać (2.13), tzn. $G(z_h, z_v) = \hat{G}(z_h, z_v)$. $\square$

Z twierdzenia 11 wynika, że przekształcenie (6.14) można stosować do minimalizacji niezerowych elementów H_2 oraz korzystać z techniki rozkładu (6.10), podobnie jak dla systemów jednowymiarowych. Jeżeli macierz H_2 jest prostokątna (tzn. system ma więcej wyjść niż wejść) trzeba doprowadzić ją do macierzy kwadratowej. Matematyka określa to zagadnienie mianem rozszerzania układu wektorów ortogonalnych do bazy ortonormalnej i dowodzi, że jest to zawsze możliwe [28, str. 395][31, str. 146] poprzez zastosowanie ortogonalizacji Grama-Schmidta oraz normalizacji do kolumn H_2 , poszerzonych do bazy wektorów liniowo niezależnych. Jak znaleźć taką liniowo niezależną bazę nie podaje się jednak. Konstruktywny algorytm rozszerzania bazy ortonormalnej przedstawiono w p. 6.5. Dla określenia technik minimalizacji elementów niezerowych dla kwadratowej H_2 wprowadza się

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = [C_1 \quad C_2], \quad (6.18)$$

gdzie A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} to macierze powstałe przez podział A na bloki o rozmiarach odpowiednio $h \times h$, $h \times v$, $v \times h$, $v \times v$. Podobnie B_1 , B_2 , C_1 i C_2 powstałe z macierzy B i C o rozmiarach odpowiednio $h \times k$, $v \times k$, $k \times h$ i $k \times v$. Korzystając z (6.18) równanie (6.14) można przekształcić do postaci

$$\hat{H}_2 = \begin{bmatrix} p^t A_{11} p & p^t A_{12} q & p^t B_1 \\ q^t A_{21} p & \hat{h}_2 & \\ C_1 p & & \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

gdzie

$$\hat{h}_2 = \begin{bmatrix} q^t A_{22} q & q^t B_2 \\ C_2 q & D \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Wprowadzając

$$t_2 = \begin{bmatrix} q & 0_{v \times k} \\ 0_{k \times v} & I_k \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

macierz $\hat{h}_2$ można przedstawić w postaci

$$\hat{h}_2 = t_2^t \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \\ C_2 & D \end{bmatrix} t_2. \quad (6.22)$$

Na podstawie (6.19) i (6.22) można stwierdzić, że minimalizację niezerowych elementów H_2 można prowadzić dwuetapowo. Po pierwsze poprzez zastosowanie technik przedstawionych w p. 6.4.1, traktując A_{22} , B_2 , C_2 i D jako macierze równań stanu jednej zmiennej. Po drugie, doprowadzając A_{11} do jednej ze znanych postaci, za pomocą macierzy ortogonalnej p .

6.5 Poszerzanie układu wektorów ortogonalnych do bazy ortonormalnej

Niech będzie dany układ wektorów $v_1, v_2, \dots, v_k$ przestrzeni n -wymiarowej nad ciałem $\mathcal{R}$, rozumiany w/g [31] i niech $n > k$. Wprowadźmy macierz

$$V_k = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_k] \quad (6.23)$$

oraz wektor $\widehat{v}_{k+1}$ ortogonalny do wszystkich pozostałych, tzn. spełniający warunek

$$V_k^t \widehat{v}_{k+1} = 0_{k \times 1}. \quad (6.24)$$

(6.24) tworzy układ k równań o n niewiadomych. Z warunku ortogonalności wynika, że $\text{rank } V_k = k$. Wiadomo [32, str. 153], że wszystkie rozwiązania (6.24) można znaleźć przyjmując dowolne wartości za $n - k$ składowych $\widehat{v}_{k+1}$. Rozłożmy $\widehat{v}_{k+1}$ i V_k na bloki

$$\widehat{v}_{k+1} = \begin{bmatrix} \widehat{v}_{k+1}(1, \dots, k) \\ \widehat{v}_{k+1}(k+1, \dots, n) \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

$$V_k = \begin{bmatrix} V_k(1, \dots, k) \\ V_k(k+1, \dots, n) \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$

gdzie $V_k(1, \dots, k)$ i $V_k(k+1, \dots, n)$ oznaczają macierze powstałe odpowiednio z wierszy $1, \dots, k$ i $k+1, \dots, n$ macierzy V_k . Podobnie $\widehat{v}_{k+1}(1, \dots, k)$ i $\widehat{v}_{k+1}(k+1, \dots, n)$. Wobec (6.25), (6.26), równanie (6.24) można zapisać w postaci

$$V_k^t(1, \dots, k) \widehat{v}_{k+1}(1, \dots, k) = -V_k^t(k+1, \dots, n) \widehat{v}_{k+1}(k+1, \dots, n). \quad (6.27)$$

W celu rozwiązania (6.27) przyjmijmy, że

$$\widehat{v}_{k+1}(k+1, \dots, n) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{(n-k-1) \times 1} \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

wówczas (6.27) przyjmuje postać

$$V_k^t(1, \dots, k) \widehat{v}_{k+1}(1, \dots, k) = -V_k^t(k+1). \quad (6.29)$$

Układ równań (6.29) posiada jedno rozwiązanie, które wraz z (6.28) poddaje się normalizacji (6.30), otrzymując $k+1$ wektor bazy ortonormalnej:

$$v_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{\widehat{v}_{k+1}^t \widehat{v}_{k+1} + 1}} \begin{bmatrix} \widehat{v}_{k+1} \\ 1 \\ 0_{(n-k-1) \times 1} \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Dołączając obliczony wektor v_{k+1} do V_k i stosując rekurencyjnie powyższy algorytm można wyznaczyć wszystkie wektory poszukiwanej bazy ortonormalnej. Implementację prezentowanego algorytmu dla programu MATLAB przedstawiono w dodatku D.1, na str. 77.

6.6 Przykład

Zastosujmy algorytm z p. 6.5 do równań stanu wyznaczonych na str. 37. W tym celu zapiszmy macierze A , B , C i D w postaci (2.16), str. 10

$$H'_2 = \begin{bmatrix} -0.6760233 & -0.0079248 & -0.0137107 & 0.0265214 \\ -0.2427694 & -0.6845212 & 0.4152410 & 0.1616971 \\ -0.4653807 & -0.0926214 & -0.6814900 & 0.3099678 \\ 0.3167573 & -0.2679809 & 0.0552087 & 0.7663641 \\ -0.3823265 & 0.0872019 & 0.5279047 & -0.0927613 \\ -0.1448018 & 0.6658613 & 0.2850033 & 0.5302377 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

System posiada 1 wejście i 3 wyjścia. Po zastosowaniu algorytmu opisanego w podrozdziale 6.5, otrzymuje się macierz (6.32).

$$H_2 = \begin{bmatrix} -0.6760233 & -0.0079248 & -0.0137107 & 0.0265214 & -0.6936069 & -0.2468761 \\ -0.2427694 & -0.6845212 & 0.4152410 & 0.1616971 & 0.0572424 & 0.5202365 \\ -0.4653807 & -0.0926214 & -0.6814900 & 0.3099678 & 0.4593106 & 0.0580278 \\ 0.3167573 & -0.2679809 & 0.0552087 & 0.7663641 & -0.1083387 & -0.4751335 \\ -0.3823265 & 0.0872019 & 0.5279047 & -0.0927613 & 0.5412295 & -0.5157566 \\ -0.1448018 & 0.6658613 & 0.2850033 & 0.5302377 & 0.0000000 & 0.4162719 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

W wyniku powstaje system z 3 wejściami i wyjściami, gdzie macierz A nie uległa zmianie natomiast pozostałe macierze przyjmują postać (6.33).

$$B = \begin{bmatrix} 0.0265214 & -0.6936069 & -0.2468761 \\ 0.1616971 & 0.0572424 & 0.5202365 \\ 0.3099678 & 0.4593106 & 0.0580278 \end{bmatrix} \quad (6.33a)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.3167573 & -0.2679809 & 0.0552087 \\ -0.3823265 & 0.0872019 & 0.5279047 \\ -0.1448018 & 0.6658613 & 0.2850033 \end{bmatrix} \quad (6.33b)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.7663641 & -0.1083387 & -0.4751335 \\ -0.0927613 & 0.5412295 & -0.5157566 \\ 0.5302377 & 0.0000000 & 0.4162719 \end{bmatrix}. \quad (6.33c)$$

W celu zastosowania minimalizacji niezerowych elementów H'_2 podzielmy A na bloki według (6.18):

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} -0.6760233 & -0.0079248 \\ -0.2427694 & -0.6845212 \end{bmatrix} & A_{12} &= \begin{bmatrix} -0.0137107 \\ 0.4152410 \end{bmatrix} \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} -0.4653807 & -0.0926214 \end{bmatrix} & A_{22} &= -0.6814900 \end{aligned} \quad (6.34)$$

Macierz A_{22} jest rozmiaru 1×1 , wobec czego rozmiar q w (6.21) wynosi również 1×1 , ponadto musi spełniać warunek ortogonalności, zatem $q = 1$. Korzystając z (6.19) macierz A_{11} można doprowadzić do postaci trójkątnej górnej, gdzie p ma postać (6.35).

$$p = \begin{bmatrix} 0.1951947 & 0.9807645 \\ -0.9807645 & 0.1951947 \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

Macierz T_2 przekształcenia (6.15) przyjmuje zatem postać (6.36), a macierz $\hat{H}_2$ z (6.14) – postać (6.37).

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0.1951947 & 0.9807645 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ -0.9807645 & 0.1951947 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 1.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 1.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 1.0000000 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 1.0000000 \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

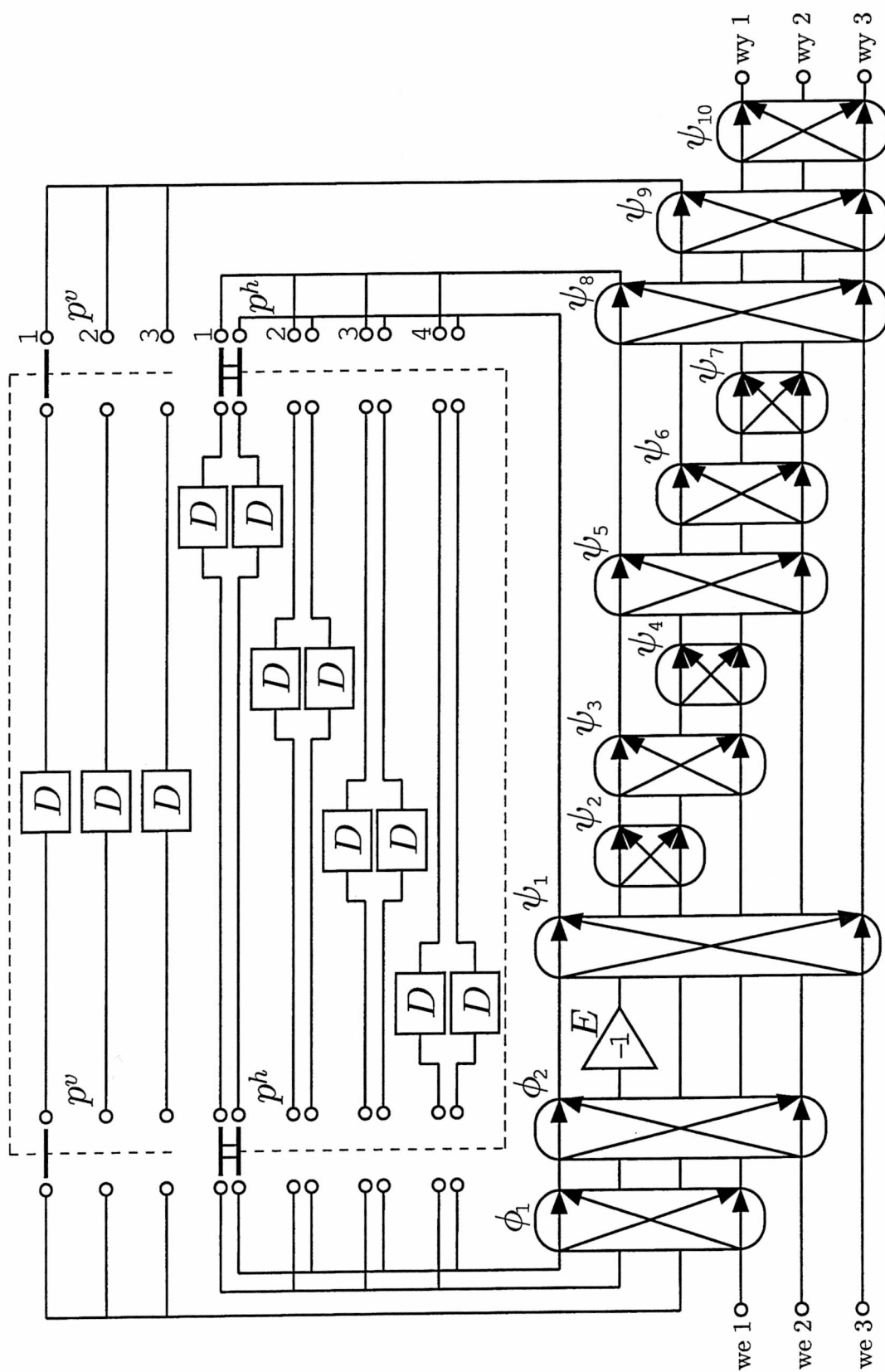
$$\hat{H}_2 = \begin{bmatrix} -0.6362046 & 0.2348445 & -0.4099299 & -0.1534099 & -0.1915297 & -0.5584184 \\ 0.0000000 & -0.7243400 & 0.0676059 & 0.0575736 & -0.6690916 & -0.1405799 \\ 0.0000000 & -0.4745081 & -0.6814900 & 0.3099678 & 0.4593106 & 0.0580278 \\ 0.3246555 & 0.2583559 & 0.0552087 & 0.7663641 & -0.1083387 & -0.4751335 \\ -0.1601526 & -0.3579509 & 0.5279047 & -0.0927613 & 0.5412295 & -0.5157566 \\ -0.6813176 & -0.0120439 & 0.2850033 & 0.5302377 & 0.0000000 & 0.4162719 \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Tabela 6.6: Parametry rozkładu $\hat{H}_2$ do postaci (6.10).

macierze lewostronne $L_{s_i, t_i}(\phi_i)$			
i	s_i	t_i	ϕ_i
1	1	4	-2.66973870153922
2	1	5	0.22057561100618
diagonalna macierz E			
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$			
macierze prawostronne $R_{u_j, w_j}(\psi_j)$			
j	u_j	w_j	ψ_j
1	1	6	0.74956122396691
2	2	3	0.57994527431609
3	2	4	0.37101348832628
4	3	4	-2.76127138041518
5	2	5	0.37836588933167
6	3	5	-0.78149791676784
7	4	5	-0.57194202589333
8	2	6	0.01645442274714
9	3	6	-0.39998866327838
10	4	6	-0.90522773761145

Macierz $\hat{H}_2$ poddano rozkładowi (6.10), otrzymane macierze rotacji oraz macierz diagonalną zamieszczono w tabeli 6.6. Na rysunku 6.8 przedstawiono strukturę dwuwymiarowego OFC realizującego otrzymany rozkład. Jest to system z przełączanymi jednostkami opóźniającymi, opisany w podrozdziale 6.3.3, str. 54. Przyjęto, że pobudzenie $u(n, m)$ ma rozmiar $N = 3$, $M = 4$ (zob. podrozdział 6.3.1, str. 52). Struktura zawiera dwa podwójne multipleksery, oznaczone jako p^h i p^v . Sekcje, które przełączają się na jednakowe pozycje połączono linią przerywaną, przy czym dopuszczalne położenie oznaczono cyframi $1, \dots, 3$ dla multipleksa p^v oraz $1, \dots, 4$ dla p^h . Bloki oznaczone literą D to jednostki opóźniające o jeden takt. Przetwarzanie diagonalne uzyskuje się stosując kolejność wprowadzania próbek zmiennej wejściowej $u(n, m)$ oraz nastawy multipleksorów p^h , p^v zgodnie z tabelą 6.3, str. 55. Przetwarzanie kolumnami uzyskuje się stosując nastawy zgodnie z tabelą 6.5. Na przykład dla przetwarzania diagonalnego, przed rozpoczęciem obliczeń,

należy umieścić warunki początkowe w jednostkach opóźniających zgodnie z tabelą 6.4, str. 56. Numer bloku w tabeli oznacza jednostki opóźniające podłączone do przełącznika o tym numerze dla odpowiedniego wektora stanu. W pierwszym kroku oba multipleksery ustawia się na pozycję 1. Na wejście 1 podaje się $u(0,0)$ i wyznacza się $y(0,0)$ (wyjście 1) oraz nowe wartości wektora stanu, które zapisuje się do jednostek opóźniających. Pozostałe dwa wejścia ustawione są na wartość zero przez cały czas obliczeń. W drugim kroku multiplekser p^h nastawia się na pozycję 2, multiplekser p^v pozostaje niezmieniony a na wejście 1 podaje się $u(0,1)$. W wyniku obliczeń bloku bezinercyjnego otrzymuje się $y(0,1)$ oraz nowe wartości dla jednostek opóźniających. W kolejnym kroku multiplekser p^h nastawia się ponownie na pozycję 1 a p^v na pozycję 2, na wejście 1 podaje się $u(1,0)$ wyznaczając $y(1,0)$. W ten sposób, kontynuując nastawy zgodnie z tabelą 6.3 wyznacza się kolejne wartości $y(n,m)$ dla przetwarzania diagonalnego.



Rysunek 6.8: Struktura z przełącznymi jednostkami opóźniającymi dla $N = 3$ i $M = 4$, wyznaczona w podrozdziale 6.6.

Rozdział 7

Podsumowanie

Szybki przyrost potencjału obliczeniowego komputerów oraz wzmożone zainteresowanie wielowymiarowym przetwarzaniem sygnałów zaowocował rozwojem tej dziedziny. Otrzymane dotychczas rezultaty w literaturze przedmiotu zachęcają do dalszych badań w tym kierunku. Interesujące jest zwłaszcza uogólnianie systemów jednowymiarowych, które były z powodzeniem stosowane w dziedzinie przetwarzania jednowymiarowego, na przypadek wielowymiarowy. Przykładem takiego systemu jest jednowymiarowy ortogonalny filtr cyfrowy, który charakteryzuje się dobrymi parametrami, podobnymi do własności filtrów bezstratnych. W wersji dwuwymiarowej ortogonalne filtry cyfrowe są stosunkowo mało znane i nieczęsto znajdowały miejsce w literaturze, co zachęca do prowadzenia badań w tym kierunku. W prezentowanej pracy podjęto próbę kompleksowego opracowania techniki projektowania dwuwymiarowego filtra cyfrowego poczynając od funkcji transmitancji, poprzez wyznaczenie modelu stanowego do algorytmu prowadzenia obliczeń (struktury). Pierwszym etapem syntezy jest wyznaczenie macierzy transmitancji w taki sposób, aby mogła być realizowana poprzez dwuwymiarowy ortogonalny filtr cyfrowy. Otrzymane wyniki przedstawiono w rozdziale 3. Etap ten oparto o pozytywną odpowiedź na XVII problem Hilberta, która stwierdza, że możliwe jest wyznaczenie takiej macierzy transmitancji. Niestety, wymaga on dalszych wzmożonych badań, gdyż nie udało się jeszcze opracować efektywnych algorytmów jej wyznaczania. Nie wiadomo np. jakie warunki musi spełniać transmitancja aby można ją było poddać procesowi embedingu dwuwymiarowego. Pomimo to, możliwa jest adaptacja do tego celu znanego w literaturze algorytmu przedstawionego w podrozdziale 3.2.2, str. 13. Teoretycznie takie podejście nie gwarantuje możliwości wyznaczenia macierzy embedingu dwuwymiarowego, jednak wykonane przykłady wskazują na jego przydatność i w praktyce pozwalają otrzymywać aproksymację poszukiwanej macierzy transmitancji. Kolejny etap to wyznaczenie parametrów dwuwymiarowego modelu stanowego, którego algorytm przedstawiono w rozdziale 4, str. 21. Do jego realizacji opracowano dogodny numerycznie algorytm faktoryzacji macierzy wielomianowej, który jest jego kluczowym elementem (rozdział 5, str. 38). W rozdziale 6, str. 49 przeanalizowano techniki prowadzenia obliczeń w strukturach dwuwymiarowych, opisanych równaniami stanu. Omówiono znane w literaturze techniki realizacji systemów dwuwymiarowych przetwarzających kolumnami, wierszami i diagonalnie. W podrozdziale 6.3.3 str. 54, zaproponowano uogólnioną strukturę realizacji stanowego systemu dwuwymiarowego z przełączanymi jednostkami opóźniającymi.

Podsumowując można stwierdzić, że możliwe jest projektowanie i realizacja dwuwymiarowych ortogonalnych filtrów cyfrowych. Wskazane jest jednak kontynuowanie fun-

damentalnych badań w zakresie przedstawiania dodatniego wielomianu w postaci sumy kwadratów tak, aby poznać własności systemów realizowalnych w postaci dwuwymiarowych ortogonalnych filtrów cyfrowych.

7.1 Oryginalne opracowania zamieszczone w pracy

Zdaniem autora, do oryginalnych opracowań zamieszczonych w pracy zaliczyć należy:

- Opracowania powstałe przy współudziale autora:
 - Twierdzenie 4 (str. 14);
 - Dowody twierdzeń uzasadniających algorytm syntezy dwuwymiarowego OFC (rozdział 4);
 - Rozwiązanie problemu faktoryzacji macierzy wielomianowej nieujemnej na kole jednostkowym (rozdział 5);
- Oryginalne opracowania autora:
 - Realizacja systemów separowalnych (str. 12);
 - Opracowanie techniki zastosowania form kwadratowych do faktoryzacji funkcji dwóch zmiennych (str. 16);
 - Przystosowanie algorytmu syntezy dwuwymiarowego OFC [37] na potrzeby obliczeń (rozdział 4);
 - Zbadanie rzędu faktora $W(z)$ (str. 46);
 - Struktura z przełączanymi jednostkami opóźniającymi do realizacji systemów dwuwymiarowych (str. 54);
 - Opracowanie realizacji bloku bezinercyjnego struktury dwuwymiarowego OFC (str. 58);
 - Technika poszerzania układu wektorów ortogonalnych do bazy ortonormalnej (str. 59);
 - Opracowanie funkcji dla programu MATLAB ilustrujących wyniki zamieszczone w pracy (str. 75, załączony CDROM)

Bibliografia

- [1] S. A. H. Aly, M. M. Fahmy. Design of two-dimensional recursive digital filters with specified magnitude and group delay characteristics. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, CAS-25(11):908–916, November 1978.
- [2] B. D. O. Anderson, K. L. Hitz, N. D. Diem. Recursive algorithm for spectral factorization. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, CAS-21(6):742–750, November 1974.
- [3] S. Basu, A. Fettweis. On the factorization of scattering transfer matrices of multi-dimensional lossless two-ports. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, CAS-32(9):925–934, September 1985.
- [4] R. Bellman. *Introduction To Matrix Analysis*. McGraw-Hill, 1960.
- [5] N. K. Bose, M. G. Strintzis. A solution to the multivariable matrix factorization problem. *Journal of Engineering Mathematics*, 7(3):263–271, July 1973.
- [6] L. O. Chua, P.-M. Lin. *Komputerowa analiza układów elektronicznych*. WNT, 1981.
- [7] E. Deprettere, P. Dewilde. Orthogonal cascade realization of real multiport digital filters. *Int. J. Circuits Theory and Applications*, 8:245–272, 1980.
- [8] E. Deprettere. *Orthogonal Filters*. Delft University of Technology, Department of Electrical Engineering., 1981.
- [9] U. B. Desai. A state-space approach to orthogonal digital filters. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, CAS-38(2):160–169, February 1991.
- [10] M. Domański. Design of two-dimensional pseudolossless digital filters with prescribed spatial responses. *Int. J. Circuits Theory and Applications*, 17(2):192–195, 1989.
- [11] M. Domański, A. Fettweis. Pseudopassive two-dimensional digital filters for image processing. *Int. J. Circuits Theory and Applications*, 17(1):103–114, 1989.
- [12] D. E. Dudgeon, R. M. Mersereau. *Multidimensional Signal Processing*. New Jersey: Prentice-Hall, 1984.
- [13] M. El-Halawany. Struktura ortogonalnych filtrów cyfrowych o dużej przepustowości. *Materiały XI KK TOiUE*, strony 15–20, 1988.
- [14] A. Fettweis. On the scattering matrix and the scattering transfer matrix of multidimensional lossless two-ports. *AEÜ*, 36:374–381, 1982.

- [15] Ф. Р. Гантмахер. *Теория матриц*. Издание второе, Москва: Издательство Наука, 1966.
- [16] T. Hinamoto, T. Hamanaka, S. Maekawa. A generalized study on the synthesis of 2-d state-space digital filters with minimum roundoff noise. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, CAS-35(8):1037–1042, August 1988.
- [17] A. Jarzabek, M. Piekarski. Faktoryzacja części parahermitowskiej macierzy immittancji. *Materiały VI KK TOiUE*, strony 71–76, Kaszubnik k. Porębki, 1983.
- [18] A. Jarzabek, M. Piekarski. Faktoryzacja wielomianów nieujemnych na kole jednostkowym. *Materiały XI KK TOiUE*, strony 96–101, Łódź-Rytro, 1988.
- [19] E. I. Jury. *Inners and Stability of Dynamic Systems*. John Wiley & Sons, 1974.
- [20] T. Kaczorek. *Two-Dimensional Linear Systems*. Springer-Verlag, 1985.
- [21] A. Kummert. On the synthesis of multidimensional reactance multiports. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, CAS-38(6):637–642, June 1991.
- [22] S.-Y. Kung, B. C. Lévy, M. Morf, T. Kailath. New results in 2-d systems theory, part ii: 2-d state-space models - realization and the notions of controllability, observability, and minimality. *Proceedings of The IEEE*, 65(6):945–961, June 1977.
- [23] P. Lancaster. *Theory of Matrices*. Academic Press, 1969.
- [24] S. Lang. *Algebra*. Warszawa: PWN, wydanie drugie 1984.
- [25] F. Leja. *Funkcje zespolone*. Warszawa: PWN, wydanie drugie, 1971.
- [26] T. Lin, M. Kawamata, T. Higuchi. A unified study on the roundoff noise in 2-d state space digital filters. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, CAS-33(7):724–730, July 1986.
- [27] C. C. MacDuffe. *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea, 1946.
- [28] S. MacLane, G. Birkhoff. *Algebra*. Macmillan, second printing, 1968.
- [29] B. G. Mertizios, A. N. Venetsanopoulos. Vlsi implementation of two-dimensional digital filters via two-dimensional filter chips. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, CAS-33(2):239–249, February 1986.
- [30] C. Michalik, W. Wolski. Uniwersalne ogniwo ortogonalnych dwuwymiarowych filtrów cyfrowych. *Krajowa Konferencja Elektroniki*, wolumen 1, strony 283–288, Kołobrzeg-Dźwirzyno, czerwiec 2002.
- [31] A. Mostowski, M. Stark. *Algebra Liniowa*. Warszawa: PWN, wydanie czwarte-druk, 1975.
- [32] A. Mostowski, M. Stark. *Elementy algebry wyższej*. Warszawa: PWN, wydanie szóste, 1972.

- [33] A. M. Okniński, M. S. Piekarski. Explicit formulas for quasi-cascade orthogonal digital filters. *XV Nat. Conf. on Circuit Theory and Electronic Networks*, strony 329–334, 1992.
- [34] A. M. Okniński, M. S. Piekarski. Synthesis of quasi-cascade orthogonal digital filters via state-space technique. *XIV Nat. Conf. on Circuit Theory and Electronic Networks*, strony 321–326, Waplewo 1991.
- [35] K. K. Parhi, D. G. Messerschmitt. Concurrent architectures for two-dimensional recursive digital filtering. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, CAS-36(6):813–829, June 1989.
- [36] M. Piekarski. Stanowa metoda syntezy macierzy transmitancji cyfrowych filtrów ortogonalnych. *Materiały X KK TOiUE*, strony 145–150, 1987.
- [37] M. Piekarski. Stanowa synteza macierzy transmitancji ortogonalnych dwuwymiarowych filtrów cyfrowych. *Materiały XI KK TOiUE*, strony 84–89, 1988.
- [38] M. Piekarski, R. Wirski. The factorization of the real polynomial matrix which is non-negative on the unit circle. *ICECS'2000 Proceedings of the International Conference on Signals and Electronic Systems*, strony 489–494, Ustroń Poland, October 2000.
- [39] M. S. Piekarski, J. Zarzycki. Cyfrowa filtracja ortogonalna. *Materiały IX KK TOiUE*, strony 5–15, 1986.
- [40] C. P. Rao. *A System Approach to the Multiport Lossless Inverse Scattering Problem*. Ph.D. Thesis. Delft Univ., 1985.
- [41] S. K. Rao, T. Kailath. Orthogonal digital filters for vlsi implementation. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-31(11):933–945, November 1984.
- [42] W. Scharlau. *Quadratic and Hermitian Forms*. Springer-Verlag, 1985.
- [43] R. Wirski. Symulacyjne badania ortogonalnych filtrów cyfrowych w środowisku matlab. *VI KK KOWBAN'99*, strony 261–266, 1999.
- [44] W. Więśław (red.). *Problemy Hilberta*. IHN PAN, Warszawa 1997.
- [45] D. C. Youla. On the factorization of rational matrices. *IRE Transactions on Information Theory*, IT-7(3):172–189, July 1961.
- [46] L. A. Zadeh, C. A. Desoer. *Linear System Theory - The State Space Approach*. McGraw-Hill, 1963.
- [47] J. Y. Zhang, W. Steenaart. High speed architectures for two-dimensional state-space recursive filtering. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, CAS-37(6):831–836, June 1990.

Dodatek A

Pewne własności sumy

$$\text{A.1} \quad \sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{j=0}^r f(i, j, i+j)$$

$$\sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{j=0}^r f(i, j, i+j) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i f(i-j-1, j, i-1) + \sum_{i=r+1}^{\infty} \sum_{j=0}^r f(i-j-1, j, i-1) \quad (\text{A.1})$$

Dowód. Rozpiszmy lewą stronę równania (A.1):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{j=0}^r f(i, j, i+j) = \\ & = f(-1, 0, -1) \quad + f(-1, 1, 0) \quad + \dots \quad + f(-1, r, r-1) + \\ & + f(0, 0, 0) \quad + f(0, 1, 1) \quad + \dots \quad + f(0, r, r) + \\ & + f(1, 0, 1) \quad + f(1, 1, 2) \quad + \dots \quad + f(0, r, r) + \\ & \dots \\ & + f(r-1, 0, r-1) \quad + f(r-1, 1, r) \quad + \dots \quad + f(r-1, r, 2r-1) + \\ & + f(r, 0, r) \quad + f(r, 1, r+1) \quad + \dots \quad + f(r, r, 2r) + \\ & + f(r+1, 0, r+1) \quad + f(r+1, 1, r+2) \quad + \dots \quad + f(r+1, r, 2r+1) + \\ & \dots \end{aligned}$$

Uporządkujmy wyrazy w/g ostatniej zmiennej f , tzn. w/g $(i+j)$. Składniki dla $(i+j) = -1, \dots, r-1$:

$$\begin{aligned} & f(-1, 0, -1) \quad + \\ & + f(0, 0, 0) \quad + f(-1, 1, 0) \quad + \quad \quad \quad (\text{A.2}) \\ & + f(1, 0, 1) \quad + f(0, 1, 1) \quad + f(-1, 2, 1) \quad + \\ & \dots \\ & + f(r-1, 0, r-1) \quad + f(r-2, 1, r-1) \quad + \dots \quad + f(-1, r, r-1) \end{aligned}$$

Pozostałe składniki dla $i + j = r, \dots, \infty$:

$$\begin{array}{llll}
 +f(r, 0, r) & +f(r-1, 1, r) & + & \dots & +f(0, r, r)+ \\
 +f(r+1, 0, r+1) & +f(r, 1, r+1) & + & \dots & +f(1, r, r+1)+ \\
 +f(r+2, 0, r+2) & +f(r+1, 1, r+2) & + & \dots & +f(2, r, r+2)+ \\
 \dots & & & &
 \end{array} \quad (\text{A.3})$$

Składniki (A.2), (A.3) są rozwinięciami prawej strony (A.1).

$$\text{A.2} \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f(i, j)$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f(i, j) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i f(i-j, j) + \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=i-n}^n f(i-j, j) \quad (\text{A.4})$$

dla $n = 1, 2, \dots$

Dowód przez indukcję. Dla $n = 1$ lewa strona (A.4):

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 f(i, j) = f(0, 0) + f(0, 1) + f(1, 0) + f(1, 1),$$

prawa strona (A.4):

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^i f(i-j, j) + \sum_{i=2}^2 \sum_{j=i-1}^1 f(i-j, j) = f(0, 0) + f(1, 0) + f(0, 1) + f(1, 1).$$

Wzór (A.4) jest słuszny dla $n = 1$, zakładając jego słuszność dla n pokazuje się słuszność wzoru:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} f(i, j) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^i f(i-j, j) + \sum_{i=n+2}^{2(n+1)} \sum_{j=i-n-1}^{n+1} f(i-j, j) \quad (\text{A.5})$$

Pierwszy składnik sumy prawej strony (A.5):

$$\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^i f(i-j, j) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i f(i-j, j) + \sum_{j=0}^{n+1} f(n+1-j, j)$$

Drugi składnik sumy prawej strony (A.5):

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=n+2}^{2n+2} \sum_{j=i-n-1}^{n+1} f(i-j, j) &= \sum_{i=n+1}^{2n+2} f(i-j, j) - \sum_{j=0}^{n+1} f(n+1-j, j) = \\
 &= \sum_{i=n+1}^{2n} f(n+1, i-n-1) + \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=i-n}^n f(i-j, j) + \sum_{i=n+1}^{2n} f(i-n-1, n+1) + \\
 &+ \sum_{j=n}^{n+1} f(2n+1-j, j) + \sum_{j=n+1}^{n+1} f(2n+2-j, j) - \sum_{j=0}^{n+1} f(n+1-j, j)
 \end{aligned}$$

Stosując podstawienie $k = i - n - 1$ do pierwszej i trzeciej sumy otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{n-1} f(n+1, k) + \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=i-n}^n f(i-j, j) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k, n+1) + \\
 & + f(n+1, n) + f(n, n+1) + f(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n+1} f(n+1-j, j) = \\
 & = \sum_{k=0}^n f(n+1, k) + \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=i-n}^n f(i-j, j) + \sum_{k=0}^n f(k, n+1) + \\
 & + f(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n+1} f(n+1-j, j)
 \end{aligned}$$

Podstawiając otrzymane przekształcenia obydwu sum do (A.5) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} f(i, j) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i f(i-j, j) + \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=i-n}^n f(i-j, j) + \\
 &+ \sum_{k=0}^n f(n+1, k) + \sum_{k=0}^n f(k, n+1) + f(n+1, n+1)
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Podstawiając (A.4) do prawej strony (A.6) otrzymuje się

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f(i, j) + \sum_{k=0}^n f(n+1, k) + \sum_{k=0}^n f(k, n+1) + f(n+1, n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} f(i, j).$$

$$\text{A.3} \quad \sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\infty} f(i, j, i-j)$$

$$\sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\infty} f(i, j, i-j) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\infty} f(k+j, j, k) + \sum_{k=-1}^{-\infty} \sum_{i=-1}^{\infty} f(i, i-k, k) \tag{A.7}$$

Dowód. Rozpiszmy lewą stronę (A.7)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\infty} f(i, j, i-j) = \\
 & = f(-1, -1, 0) \quad + f(-1, 0, -1) \quad + f(-1, 1, -2) \quad + \dots + \\
 & + f(0, -1, 1) \quad + f(0, 0, 0) \quad + f(0, 1, -1) \quad + \dots + \\
 & + f(1, -1, 2) \quad + f(1, 0, 1) \quad + f(1, 1, 0) \quad + \dots + \\
 & + f(2, -1, 3) \quad + f(2, 0, 2) \quad + f(2, 1, 1) \quad + \dots + \\
 & \dots =
 \end{aligned}$$

Zmieniając kolejność sumowania w/g ostatniej zmiennej, tj. w/g $(i - j)$ otrzymuje się dla $(i - j) = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned}
 &= f(-1, -1, 0) & + f(0, 0, 0) & + f(1, 1, 0) & + \dots + \\
 &+ f(0, -1, 1) & + f(1, 0, 1) & + f(2, 1, 1) & + \dots + \\
 &+ f(1, -1, 2) & + f(2, 0, 2) & + f(3, 1, 2) & + \dots + \\
 &\dots + & & &
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

dla $i - j = -1, -2, \dots$ otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 &+ f(-1, 0, -1) & + f(0, 1, -1) & + f(1, 2, -1) & + \dots + \\
 &+ f(-1, 1, -2) & + f(0, 2, -2) & + f(1, 3, -2) & + \dots + \\
 &+ f(-1, 2, -3) & + f(0, 3, -3) & + f(1, 4, -3) & + \dots + \\
 &\dots & & &
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Składniki (A.7) i (A.9) to rozwinięcia prawej strony (A.7). $\square$

Dodatek B

Pseudoodwrotność macierzy wielomianowych

Podobnie jak dla macierzy rzeczywistych można mówić, że A^+ jest pseudoodwrotnością wielomianowej macierzy A o wymiarach $r \times l$, jeżeli spełnia warunki

$$AA^+A = A. \quad (\text{B.1})$$

Wiadomo [15, str 34], że jeżeli $l \geq r$ i $\text{rank } A = r$ to AA^t jest kwadratową macierzą nieosobliwą i A^+ spełnia równania

$$A^+ = A^t(AA^t)^{-1} \quad (\text{B.2})$$

$$AA^+ = AA^t(AA^t)^{-1} = I_r. \quad (\text{B.3})$$

Do wyznaczania pseudoodwrotności macierzy wielomianowych można zastosować metodę Grevill'a [15, str 39].

Dodatek C

Opis głównych funkcji do projektowania dwuwymiarowych OFC dla programu MATLAB

Dla kontroli poprawności opracowanych algorytmów stworzono oprogramowanie do projektowania dwuwymiarowych OFC w środowisku MATLAB 5.0 lub nowszym, załączone na płycie CDRM. Dostępne funkcje to:

- **[L,M,e]=emb2d(l,m,ind,r,maxiter)**. Umożliwia wyznaczenie embedingu dwuwymiarowego dla funkcji dwóch zmiennych.

Parametry wejściowe:

- **l, m**: współczynniki licznika i mianownika dwuwymiarowej funkcji transmitancji (3.18), str. 14
- **ind**: macierz dwuwierszowa, w którym wiersze zawierają potęgi odpowiednio pierwszej i drugiej zmiennej dla współczynników zawartych w **l, m**
- **r**: pożądaný rząd macierzy B w 3.15, str. 13
- **maxiter**: maksymalna liczba iteracji (można pominąć)

Parametry wyjściowe:

- **L, M**: współczynniki licznika i mianownika macierzy transmitancji dwuwymiarowego OFC (3.22), str. 14.
- **e**: maksymalny, bezwzględny błąd obliczonego embedingu dwuwymiarowego

Możliwe jest również wywołanie postaci **[mm,e]=emb2d(l,m,ind,r,maxiter)**. Parametrem wyjściowym mm jest wtedy wyznaczona postać faktoryzowanej macierzy B (3.16), str. 14. Wówczas można kontynuować obliczenia poprzez wywołanie **[L,M,e]=emb2d(l,m,ind,r,maxiter,mm)**.

- **freqz2tf(L,M,we,wy)**. Wykreśla charakterystykę amplitudową między wejściem we i wyjściem wy , dla macierzy transmitancji opisanej przez **L, M**. Format **L, M** jest zgodny z danymi wyjściowymi funkcji **emb2d**.
- **[A,B,C,D,h,v,e]=synteza2d(L,M,e)**. Wyznacza stanową realizację transmitancji dwuwymiarowej. Parametry wejściowe:

- **L, M**: licznik i mianownik macierzy transmitancji
- **e**: maksymalny, bezwzględny błąd ortogonalności macierzy transmitancji.

Format **L, M, e** jest zgodny z danymi wyjściowymi funkcji **emb2d**.

Parametry wyjściowe:

- **A, B, C, D**: macierze stanowej realizacji dwuwymiarowego OFC (2.9), str. 9
- **h, v**: rozmiar wektora stanu pierwszej i drugiej zmiennej stanowej realizacji dwuwymiarowego OFC
- **e**: maksymalny, bezwzględny błąd ortogonalności macierzy **A, B, C, D**.
- **freqz2ss(S,h,v,we,wy)**. Wykreśla charakterystykę amplitudową między wejściem **we** i wyjściem **wy**, dla dwuwymiarowego systemu stanowego, gdzie **S** ma postać (2.16), str. 10. **h, v** to rozmiar wektorów stanu dla pierwszej i drugiej zmiennej.

Przykład wykorzystania opisanych funkcji przedstawia **przyklad1.m**, zamieszczony na str. 78

Dodatek D

Listingi

D.1 orth2.m

Implementacja poszerzania układu wektorów ortogonalnych do bazy ortonormalnej w języku MATLAB:

```
% Q=ORTH2(A,e) jest bazą ortonormalną dla układu wektorów
% ortogonalnych znajdujących w kolumnach A, która musi
% posiadać więcej wierszy jak kolumn i spełniać warunek
% ortogonalności.
% e - bezwzględny błąd ortogonalności e=max(max(eye(size(A)) - A'*A))

if nargin==1
    e=1e-10;
end;
[n,kp]=size(v);
if ~(kp<n)
    error('niewłaściwy rozmiar macierzy wejściowej');
elseif max(max(abs(v'*v-eye(kp))))>10*e
    error('macierz wejściowa nie jest ortogonalna');
end;

for k=kp:n-1
    h=-v(1:k,:)'*v(k+1,:);
    vk_1=[h;1;zeros(n-k-1,1)]/sqrt(h'*h+1);
    v=[v vk_1];
end;
```

D.2 przykład1.m

Skrypt **przyklad1.m** dla MATLAB, wyznaczający stanową realizację dwuwymiarowego OFS dla przykładu przedstawionego na str. 15:

```
l=[1 0.67876 0.70382 0.46209]/1.304862785091785
m=[1 0.72434 0.68149 0.52571]
ind =[1 0 1 0;1 1 0 0]
[mm,e]=emb2d(l,m,ind,3,1000)
[L,M,e]=emb2d(l,m,ind,2,1000,mm)
[a,b,c,d,h,v,e]=synteza2d(L,M,e)
s1=[a b;c d]
s=orth2(s1)
freqz2ss(s,h,v,1,1)
```

Spis odbiorców	egz.
1. Ośrodek informacji NT ITA	1
2. Promotor	1
3. Recenzenci	2
4. Autor	1
Razem	5

