

Jarosław Mielcarek

Wyższa Szkoła Bankowa w Poznaniu

ANALIZA WRAŻLIWOŚCI ZA POMOCĄ FUNKCJI *IRR*

1. Wstęp

Na jeden z istotnych elementów analizy wrażliwości przedsięwzięć inwestycyjnych wskazuje E. Nowak: „Różnica między wewnętrzną stopą zwrotu a kosztem kapitału może stanowić miarę skali ryzyka, jakim obarczone jest przedsięwzięcie. Jeśli różnica ta jest mała, to istnieje wysokie ryzyko związane z rozpatrywanym przedsięwzięciem... Informacji takich nie dostarczają inne metody oceny opłacalności inwestycji” [9, s. 180]. J. Arnold i T. Hope nazywają różnicę między *IRR* a wymaganą stopą zwrotu marżą bezpieczeństwa [1, s. 264].

M. Dobija prezentuje podejście do posługiwania się koncepcją *IRR* wynikające z koncepcji pomnażania kapitału: „Ekonomiczną lub wewnętrzną stopą zwrotu nazywa się wskaźnik r rocznego tempa pomnażania kapitału początkowego, określony równaniem stopy zwrotu” [2, s. 79]. Rozwiązanie analityczne równania stopy zwrotu już dla trzech okresów jest bardzo trudne i dlatego do jego znalezienia stosuje się metody szacunkowe.

Interpolacyjny sposób wyznaczania wielkości *IRR*, opierający się na wrażliwości *NPV* na zmiany stopy dyskontowej, jest szeroko prezentowany w literaturze [3, s. 501-504; 5, s. 358-361; 6, s. 239-244; 8, s. 320-322; 9, s. 178; 10, s. 363-365; 11, s. 360-363; 12, s. 482-484; 13, s. 9-21; 14, s. 790-793; 15, s. 341-343].

Dla danej stopy dyskontowej posłużenie się wskazanym przez E. Nowaka wskaźnikiem ryzyka przedsięwzięcia inwestycyjnego dla różnych stóp wzrostu popytu wymagałoby dysponowania funkcją *IRR*. W przypadku gdy nie można analitycznie wyznaczyć *IRR*, to tym bardziej nie można analitycznie wyznaczyć *IRR* jako funkcji zmian popytu. Powstaje w związku z tym pytanie, czy istnieje funkcja, którą można wyznaczyć analitycznie i której funkcją odwrotną jest funkcja *IRR*. Rozwiązanie tego problemu będzie wymagało udzielenia odpowiedzi na poniższe pytania:

- czy istnieje analityczna formuła na graniczną stopę wzrostu popytu, czyli stopę, dla której następuje spadek *IRR* do poziomu stopy dyskontowej, uznanej za minimalną, akceptowaną stopę zwrotu¹?
- czy funkcja *IRR* jest funkcją odwrotną do funkcji granicznej stopy wzrostu popytu i czy na tej podstawie można przedstawić jej przebieg?

2. Graniczna stopa wzrostu popytu

Do określenia granicznej stopy wzrostu popytu, przy założeniu, że zysk brutto dla warunków początkowych jest nieujemny, potrzebujemy następujących wielkości: wolnych środków pieniężnych (w skrócie *FCF*), dźwigni *FCF*, dźwigni operacyjnej popytu, stopy wzrostu *FCF* pod wpływem wzrostu popytu oraz stopy wzrostu zdyskontowanych strumieni pieniężnych pod wpływem wzrostu popytu. Wolne środki pieniężne zostaną zdefiniowane jako suma zysku operacyjnego *EBIT* z potrąceniem podatku dochodowego, amortyzacji i odsetek pomnożonych przez stopę podatku dochodowego (tarcza podatkowa) pomniejszoną o zmiany kapitału obrotowego i inwestycje, niezbędne do podtrzymania istniejącej działalności operacyjnej²:

$$FCF = (1 - t)EBIT + A + tO - \Delta M_0 - V, \quad (1)$$

gdzie: *EBIT* – zysk operacyjny (w skrócie zysk),

A – amortyzacja,

O – odsetki od kapitałów obcych,

t – stopa podatku dochodowego,

ΔM_0 – przyrost kapitału obrotowego,

V – inwestycje niezbędne do podtrzymania istniejącej działalności operacyjnej.

Dźwignia *FCF* jest określona przez stosunek stopy zmiany *FCF* do stopy zmiany zysku operacyjnego:

$$d_F = \frac{\frac{\Delta FCF}{FCF}}{\frac{\Delta Z}{Z}}, \quad (2)$$

gdzie *Z* jest zyskiem operacyjnym.

Gdy zysk brutto jest nieujemny dla warunków początkowych, to dla zmienionego zysku operacyjnego wielkość przyrostu *FCF* pod wpływem zmian popytu wynosi:

¹ Analizę wrażliwości *IRR* na zmiany wszystkich kluczowych czynników autor niniejszego artykułu przedstawił we wcześniejszej pracy [7, s. 553-632].

² Ten rodzaj strumieni pieniężnych odzwierciedla wszystkie pożytki finansowe dla właścicieli kapitału zarówno własnego, jak i obcego. Będzie nazywany wolnymi środkami pieniężnymi (*free cashflow*) i oznaczony symbolem *FCF*. Niekiedy ta kategoria strumieni pieniężnych nazywana jest wolnymi przepływami dla kapitału i oznaczana symbolem *FCC* – *free cashflow to capital* [4, s. 53, 57-58, 65-66].

$$\begin{aligned}\Delta FCF &= FCF_1 - FCF_0 = (1-t)Z_1 + A + tO - \Delta M_0 - V - (1-t)Z - A - tO + \\ &+ \Delta M_0 + V = (1-t)(1+d_Z)Z - (1-t)Z = (1-t)Z(1+d_Z-1) = \\ &= (1-t)d_Z Z = (1-t)d_{od}d_d Z,\end{aligned}\quad (3)$$

gdzie: d_Z – stopa wzrostu zysku,
 d_{od} – dźwignia operacyjna popytu,
 d_d – stopa wzrostu popytu.

Przyrost FCF równa się iloczynowi stopy wzrostu zysku i zysku, skorygowanemu o stopę podatku dochodowego. Stopa wzrostu zysku pod wpływem wzrostu popytu równa się iloczynowi dźwigni operacyjnej popytu i stopy wzrostu popytu.

Po wstawieniu (3) do (2):

$$d_{Fz} = \frac{\frac{(1-t)d_{od}d_d Z}{FCF}}{d_{od}d_d} = (1-t)\frac{Z}{FCF}, \quad (4)$$

otrzymano, że dźwignia FCF jest określona przez relację zysku do FCF , skorygowaną o stopę podatku dochodowego.

Dla dowolnej stopy wzrostu popytu FCF są równe wielkości początkowej powiększonej o przyrost, określony przez (3):

$$\begin{aligned}FCF &= FCF + \Delta FCF = FCF + (1-t)d_{od}d_d Z = \\ &= FCF \left[1 + (1-t)d_{od}d_d \frac{Z}{FCF} \right] = FCF (1 + d_{od}d_d d_F).\end{aligned}\quad (5)$$

Z (5) wynika, że stopa wzrostu FCF jest równa iloczynowi dźwigni FCF , dźwigni operacyjnej popytu i stopy wzrostu popytu:

$$\frac{\Delta FCF_i}{FCF} = d_{od}d_d d_F \quad (6)$$

a sam przyrost FCF :

$$\Delta FCF_i = d_{od}d_d d_F FCF. \quad (7)$$

Przyrost NPV dla zmiany wielkości popytu dla j okresów na podstawie (7) wynosi:

$$\Delta NPV = \sum_{i=1}^j \frac{\Delta FCF_i}{(1+r)^i} = \sum_{i=1}^j \frac{d_{od}d_d d_F FCF_i}{(1+r)^i}. \quad (8)$$

Przyrost NPV jest określony przez sumę zdyskontowanych przyrostów FCF (7) dla uwzględnianych okresów³.

³ Ponieważ niniejsze opracowanie dotyczy analizy wrażliwości przedsięwzięć inwestycyjnych dla okresu spłaty kredytu nie jest uwzględniana *terminal value*.

Stopa wzrostu NPV dla danej stopy wzrostu popytu będzie wynosić:

$$d_N = \frac{\Delta NPV}{NPV_0} = \frac{\sum_{i=1}^j \frac{d_{odi} d_d d_{Fi} FCF_i}{(1+r)^i}}{NPV_0} = \frac{\sum_{i=1}^j \frac{d_{odi} d_{Fi} FCF_i}{(1+r)^i}}{NPV_0} d_d. \quad (9)$$

Stopa wzrostu NPV jest liniową funkcją stopy wzrostu popytu; jej współczynnik kierunkowy jest równy:

$$a_N = \frac{\sum_{i=1}^j \frac{d_{odi} d_{Fi} FCF_i}{(1+r)^i}}{NPV_0}. \quad (10)$$

Stopa wzrostu popytu dla zerowego NPV zostanie znaleziona w wyniku przyrównania (9) do -1 , wówczas bowiem NPV spadnie do zera:

$$d_N = \frac{\sum_{i=1}^j \frac{d_{odi} d_{Fi} FCF_i}{(1+r)^i}}{NPV_0} d_d = -1, \quad (11)$$

i stąd

$$d_{dg} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^j \frac{d_{odi} d_{Fi} FCF_i}{(1+r)^i}}{NPV_0}}. \quad (12)$$

Graniczna stopa wzrostu popytu jest równa odwrotności współczynnika kierunkowego funkcji stopy wzrostu NPV (10). Dla granicznej stopy wzrostu popytu stopa dyskontowa staje się równa IRR , ponieważ dla określonej za pomocą (12) stopy wzrostu popytu i danej stopy dyskontowej NPV staje się zerowe. Graniczna stopa wzrostu popytu jest miarą wielkości zagrożenia, że projekt inwestycyjny trzeba będzie odrzucić. Można ją traktować jako stopę marży bezpieczeństwa popytu dla danej stopy dyskontowej.

3. Funkcja granicznej stopy wzrostu popytu

Wykreślenie funkcji stopy granicznej będzie wymagać zaprezentowania przykładu i określenia następujących danych: FCF przedsięwzięcia inwestycyjnego, w którym okres spłaty kredytu trwa 10 lat, dźwigni FCF dla poszczególnych okresów, dźwigni operacyjnej popytu dla poszczególnych okresów oraz NPV dla poszczególnych stóp dyskontowych.

FCF przedsięwzięcia inwestycyjnego przedstawione są w tab. 1. Wartości sprzedaży w poszczególnych latach wynikają z prognozowanego popytu. Stopa dyskontowa wynosi 12%. *IRR* obliczone za pomocą funkcji Excela jest równe 17,21%.

Ponieważ *IRR* jest wyższe od stopy dyskontowej, projekt inwestycyjny może zostać zaakceptowany.

W tabeli 2 zostały obliczone za pomocą (4) dźwignie *FCF* oraz dźwignie operacyjne popytu w poszczególnych latach na podstawie danych z tab. 1.

Ze względu na zróżnicowane *FCF* i zyski operacyjne wielkości dźwigni *FCF* oraz dźwigni operacyjnych popytu, obliczone w tab. 2, są różne dla poszczególnych lat.

Tabela 2. Dźwignie *FCF* oraz dźwignie operacyjne popytu

Lata	<i>EBIT</i> po potrąceniu podatku	<i>FCF</i>	Dźwignia <i>FCF</i>	Marża wkładu	<i>EBIT</i>	Dźwignia operacyjna popytu
1	3 280 500	9 167 604	0,3578	27 000 000	4 050 000	6,6667
2	8 262 000	14 127 558	0,5848	33 150 000	10 200 000	3,2500
3	9 051 750	14 859 852	0,6091	34 125 000	11 175 000	3,0537
4	9 841 500	15 592 146	0,6312	35 100 000	12 150 000	2,8889
5	10 631 250	16 324 440	0,6512	36 075 000	13 125 000	2,7486
6	10 631 250	16 266 984	0,6535	36 075 000	13 125 000	2,7486
7	9 051 750	14 830 028	0,6104	34 125 000	11 175 000	3,0537
8	9 841 500	15 762 322	0,6244	35 100 000	12 150 000	2,8889
9	9 051 750	14 915 116	0,6069	34 125 000	11 175 000	3,0537
10	8 262 000	14 067 910	0,5873	33 150 000	10 200 000	3,2500

Źródło: opracowanie własne.

W tabelach 1 i 2 znajdują się już wszystkie dane niezbędne, aby dla zakresu stóp dyskontowych od 0 do 25% przedstawić tablicowanie funkcji granicznej stopy wzrostu popytu. Obliczenia przedstawione są w tab. 3.

W tabeli 3 NPV_0 jest wielkością zaktualizowaną netto dla warunków początkowych. Wyliczono ją za pomocą danych, zawartych w tab. 1, używając do obliczenia wartości zdyskontowanych *FCF* kolejnych stóp dyskontowych, uwzględnionych w tab. 3. Licznik współczynnika kierunkowego funkcji stopy wzrostu $NPV(10)$ został określony w wyniku pomnożenia strumieni początkowych przez dźwignię *FCF* i dźwignię operacyjną dla poszczególnych lat, a następnie zdyskontowania zmienionej wartości strumieni pieniężnych dla kolejnych stóp dyskontowych, uwzględnionych w tab. 3. Współczynniki kierunkowe uzyskano, dzieląc liczniki współczynników kierunkowych

przez NPV_0 dla danych stóp dyskontowych. Graniczne stopy wzrostu popytu (12) otrzymano jako odwrotności współczynników kierunkowych ze znakiem przeciwnym.

Tabela 3. Funkcja granicznej stopy wzrostu popytu

Stopa dyskontowa	NPV_0	Licznik współczynnika kierunkowego	Współczynnik kierunkowy	Graniczna stopa wzrostu popytu
0%	80 913 960	273 800 250	3,3838	-29,55%
1%	72 950 431	259 074 504	3,5514	-28,16%
2%	65 588 792	245 461 640	3,7424	-26,72%
3%	58 774 536	232 860 666	3,9619	-25,24%
4%	52 458 760	221 181 004	4,2163	-23,72%
5%	*46 597 536	210 341 302	4,5140	-22,15%
6%	41 151 344	200 268 398	4,8666	-20,55%
7%	36 084 586	190 896 402	5,2902	-18,90%
8%	31 365 154	182 165 898	5,8079	-17,22%
9%	26 964 049	174 023 239	6,4539	-15,49%
10%	22 855 049	166 419 922	7,2815	-13,73%
11%	19 014 410	159 312 041	8,3785	-11,94%
12%	15 420 609	152 659 805	9,8997	-10,10%
13%	12 054 110	146 427 104	12,1475	-8,23%
14%	8 897 161	140 581 131	15,8007	-6,33%
15%	5 933 612	135 092 046	22,7673	-4,39%
16%	3 148 752	129 932 677	41,2648	-2,42%
17%	529 167	125 078 249	236,3683	-0,42%
17,21%	0	124 097 473		0,00%
18%	-1 937 387	120 506 152	-62,2003	1,61%
19%	-4 262 101	116 195 726	-27,2625	3,67%
20%	-6 455 211	112 128 074	-17,3702	5,76%
21%	-8 526 094	108 285 893	-12,7005	7,87%
22%	-10 483 346	104 653 321	-9,9828	10,02%
23%	-12 334 854	101 215 804	-8,2057	12,19%
24%	-14 087 865	97 959 975	-6,9535	14,38%
25%	-15 749 043	94 873 541	-6,0241	16,60%

Źródło: opracowanie własne.

Graniczna stopa wzrostu popytu jest ciągłą i ściśle monotoniczną funkcją stopy dyskontowej. W związku z tym dla każdej stopy dyskontowej istnieje odrębna stopa wzrostu popytu, dla której IRR zrównuje się z tą stopą dyskontową. Przykładowo dla stopy dyskontowej równej 12% graniczna stopa wzrostu popytu wynosi $-10,1\%$, czyli spadek popytu i tym samym wartości sprzedaży o tę wielkość spowoduje, że stopa dyskontowa, za pomocą której oceniono pozytywnie projekt inwestycyjny, zrówna się z IRR . Tym samym spadek popytu o $10,1\%$ można uznać za stopę marży bezpieczeństwa dla planowanego przedsięwzięcia inwestycyjnego.

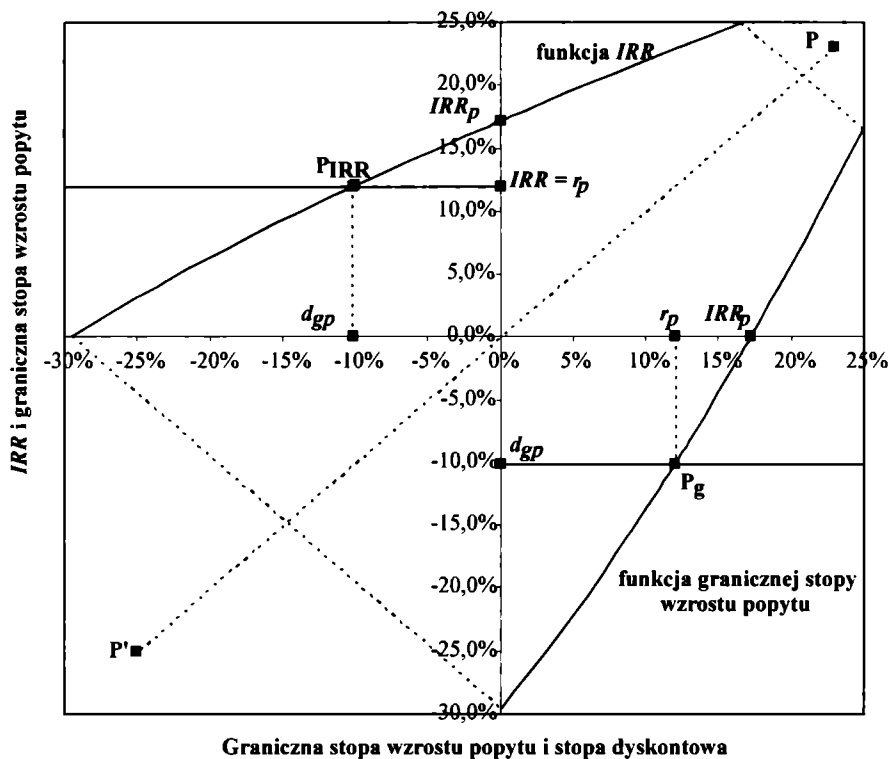
4. Funkcja IRR jako funkcja odwrotna do funkcji granicznej stopy wzrostu popytu

Ponieważ dla podanych granicznych stóp wzrostu stopy dyskontowe stają się równe IRR , a funkcja granicznej stopy wzrostu popytu jest ciągłą i ściśle monotoniczną, funkcję IRR można uznać za odwrotną do funkcji granicznej stopy wzrostu popytu. Mimo że nieznany jest analityczny sposób wyznaczenia funkcji IRR dla zmian stopy wzrostu popytu, można przedstawić wykres funkcji odwrotnej, podając w Excelu jako zmienną x stopę wzrostu popytu, a jako zmienną y – stopę dyskontową. Funkcja granicznej stopy wzrostu popytu i odwrotna do niej funkcja IRR przedstawione są na rys. 1.

Na rysunku 1 zastosowano następujące oznaczenia: P_g – punkt graniczny dla początkowej stopy dyskontowej, P_{IRR} – punkt dla zrównania początkowej stopy dyskontowej z IRR , d_{gp} – graniczna stopa wzrostu popytu dla początkowej stopy dyskontowej, r_p – początkowa stopa dyskontowa, przyjęta dla oceny projektu, IRR_p – wewnętrzna stopa zwrotu dla warunków początkowych.

Przebieg funkcji IRR otrzymano w wyniku obrotu o 180° funkcji granicznej stopy wzrostu popytu dookoła przedłużonej dwusiecznej PP' kąta XOY . Funkcja IRR jest rosnącą funkcją stopy wzrostu popytu. Posługując się funkcją IRR , można stwierdzić, że IRR dla warunków początkowych, czyli zerowej stopy wzrostu popytu, jest określona przez miejsce przecięcia się funkcji IRR z osią OY .

Funkcja IRR przedstawia wrażliwość IRR na zmiany popytu. Gdy możliwa jest zmiana popytu i tym samym sprzedaży, za pomocą tej funkcji przeprowadza się badanie, co się stanie z IRR np. pod wpływem spadku popytu o $2,5\%$, 5% i $7,5\%$. IRR można obliczyć za pomocą trzech metod. Po pierwsze, można tablicować z niezbędną dokładnością funkcję granicznej stopy popytu, dobierając takie wielkości stóp dyskontowych, aby graniczne stopy wzrostu popytu były zbliżone do $-2,5\%$, -5% i $-7,5\%$. Określone w ten sposób stopy dyskontowe będą nowymi wielkościami IRR dla podanych stóp wzrostu popytu. Po drugie, możliwe jest posłużenie się – dla stworzonego modelu granicznej stopy wzrostu popytu – dodatkiem Excela „Szukaj wyniku”. Wielkością szukaną byłyby graniczne stopy wzrostu popytu, wynoszące odpowiednio $-2,5\%$, -5% i $-7,5\%$ dla wielkości zmienianej, którą byłaby stopa dyskontowa. Po trzecie, istnieje możliwość posłużenia się metodą graficzną. Dysponując wykresem funkcji IRR , możemy znaleźć przybliżone wielkości IRR



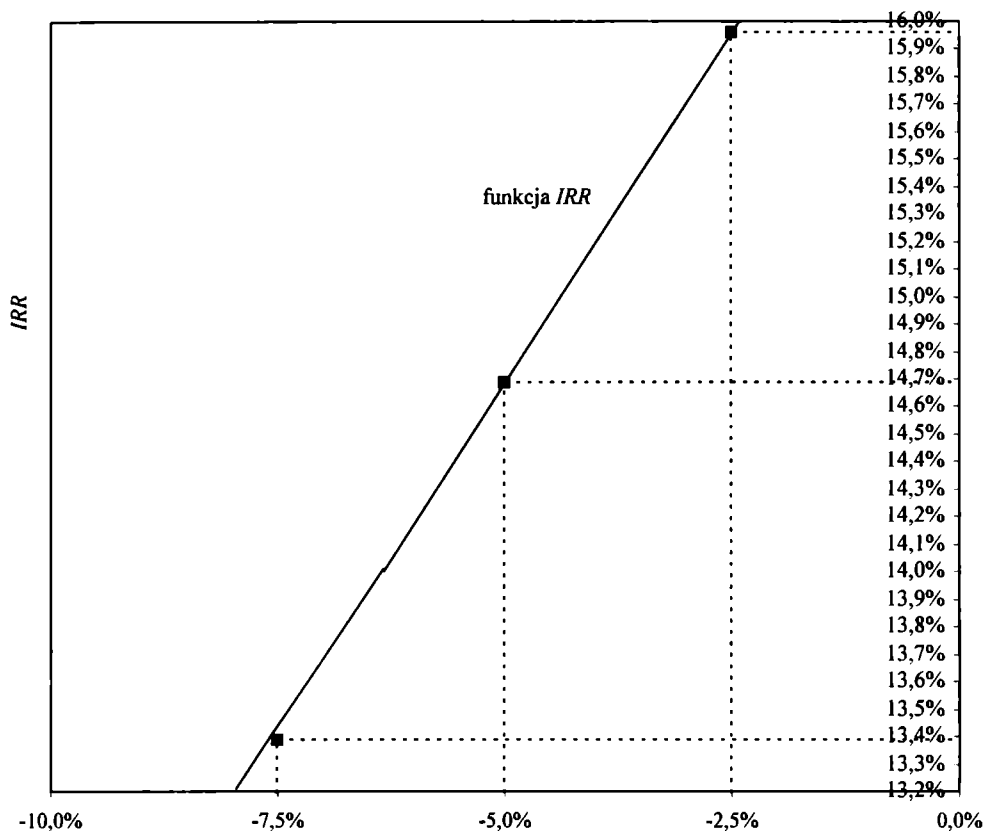
Rys. 1. Funkcja granicznej stopy wzrostu popytu i odwrotna do niej funkcja IRR

Źródło: opracowanie własne.

dla podanych stóp wzrostu popytu. Posłużenie się tą metodą przedstawiono na rys. 2. Rysunek 2 otrzymano z rys. 1 w wyniku odpowiedniego dobrania skali osi.

Odczytane z wykresu wielkości IRR dla przyjętych stóp wzrostu popytu podano w tab. 4. Podane zmiany popytu wywołują spadek IRR w porównaniu z warunkami początkowymi. Przykładowo podany w tab. 4 spadek IRR dla $-7,5$ -procentowej stopy wzrostu popytu wynosi $-22,19\%$.

Oznacza to, że zmalała różnica między IRR a stopą dyskontową, użytą do oceny projektu inwestycyjnego. Dla podanego spadku popytu różnica ta wynosi $-10,38\%$. Spadek popytu o $7,5\%$ wywołał niemalże trzykrotne zmniejszenie się stopy marży bezpieczeństwa dla stopy dyskontowej wynoszącej 12% . Z poprzednich rozważań wiadomo, że graniczna stopa wzrostu popytu dla tej stopy dyskontowej wynosi $-10,1\%$. Jeżeli analiza marketingowa potwierdzi, że popyt będzie mniejszy od zbyt optymistycznych szacunków początkowych o więcej, niż wynika z granicznej stopy wzrostu popytu dla stopy dyskontowej równej 12% , projekt inwestycyjny zostanie odrzucony, IRR bowiem stanie się mniejsze od stopy dyskontowej użytej do oceny projektu inwestycyjnego. Można stwierdzić, że projekt inwestycyjny cechuje się dużą wrażliwością IRR na zmiany popytu.



Rys. 2. Graficzne wyznaczanie wrażliwości *IRR* na zmiany popytu

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Wrażliwość *IRR* na podane zmiany popytu

Stopy wzrostu popytu	<i>IRR</i>	Zmiany <i>IRR</i>	Stopa marży bezpieczeństwa dla stopy dyskontowej 12%
0,0%	17,2096%		-30,27%
-2,5%	15,96%	-7,26%	-24,81%
-5,0%	14,69%	-14,64%	-18,31%
-7,5%	13,39%	-22,19%	-10,38%
-10,10%	12,00%	-30,27%	0,00%

Źródło: opracowanie własne.

Literatura

- [1] Arnold J., Hope T., *Accounting for Management Decisions*, Prentice Hall, New York 1990.
- [2] Dobija M., *Rachunkowość zarządcza i controlling*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
- [3] Drury C., *Management and Cost Accounting*, Thomson Learning, United Kingdom 2004.
- [4] Dudycz T., *Finansowe narzędzia zarządzania wartością przedsiębiorstwa*, AE, Wrocław 2002.
- [5] Duhanik M., *Długookresowe rachunki decyzyjne*, [w:] *Zarządcze aspekty rachunkowości*, red. T. Kiziu-kiewicz, PWE, Warszawa 2003.
- [6] Leszczyński Z., Wnuk T., *Zarządzanie firmą produkcyjną za pomocą rachunkowości zarządczej i kontro-lingu finansowego*, Fundacja Rozwoju Rachunkowości w Polsce, Warszawa 1996.
- [7] Mielcarek J., *Analiza wrażliwości w rachunkowości zarządczej*, Target, Poznań 2006.
- [8] Mońka J., *Ocena opłacalności projektów inwestycyjnych*, [w:] *Rachunkowość zarządcza przedsiębiorstw. Rachunek kosztów*, red. D. Sołtys, AE, Wrocław 2003.
- [9] Nowak E., *Zaawansowana rachunkowość zarządcza*, PWE, Warszawa 2003.
- [10] Poetschke H., *Instrumenty oceny efektywności decyzji długookresowych*, [w:] W. Gabrusewicz, A. Ka-mela-Sowińska, H. Poetschke, *Rachunkowość zarządcza*, PWE, Warszawa 2002.
- [11] Sierpińska M., Jachna T., *Ocena przedsiębiorstwa według standardów światowych*, Wydawnictwo Na-ukowe PWN, Warszawa 2004.
- [12] Sojak S., *Rachunkowość zarządcza*, „Dom Organizatora”, Toruń 2003.
- [13] Świdzka G.K., Więclaw W., *Ocena efektywności projektów inwestycyjnych*, [w:] *Rachunkowość zarządcza i rachunek kosztów*, red. G.K. Świdzka, t. II, Difin, Warszawa 2002.
- [14] Szycha A., *Budżetowanie kapitałowe*, [w:] A.A. Jaruga, W.A. Nowak, A. Szycha, *Rachunkowość zarządcza, Koncepcje i zastosowania*, Przedsiębiorstwo Specjalistyczne Absolwent, Łódź 2001.
- [15] Wnuk-Pel T., *Zastosowanie metod oceny efektywności inwestycji w strategicznej rachunkowości zarządczej*, [w:] *Rachunek kosztów i rachunkowość zarządcza*, red. I. Sobańska, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2003.

SENSITIVITY ANALYSIS BY MEANS OF IRR FUNCTION

Summary

It is demonstrated that the *IRR* as a demand growth function which cannot be specified analytically is a reverse function of critical demand growth rate function. The second function is determined analytically and it enables to find the *IRR* function which presents how sensitive the *IRR* is to changes in demand. With the help of this function the sensitivity of the *IRR* margin safety rate as a percentage difference between cost of capital and an investment project *IRR* to changes in demand is assessed.